HAL open science

Recherche d'une description optimum des sources et systèmes vibroacoustiques pour la simulation du bruit de passage des véhicules automobiles

Hichem Hamdad

▶ **To cite this version:**

Hichem Hamdad. Recherche d'une description optimum des sources et systèmes vibroacoustiques pour la simulation du bruit de passage des véhicules automobiles. Acoustique [physics.class-ph]. Le Mans Université, 2018. Français. NNT : 2018LEMA1032 . tel-02049761

HAL Id: tel-02049761

https://theses.hal.science/tel-02049761v1

Submitted on 26 Feb 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE DE DOCTORAT DE

LE MANS UNIVERSITE
COMUE UNIVERSITE BRETAGNE LOIRE

ECOLE DOCTORALE N° 602
Sciences pour l'Ingénieur
Spécialité : Acoustique

Hichem HAMDAD

Recherche d'une description optimum des sources et systèmes vibro-acoustiques pour la simulation du bruit de passage des véhicules automobiles

Thèse présentée et soutenue au Mans, le 20 décembre 2018

Unité de recherche : Laboratoire d'acoustique de l'université du Maine (LAUM, UMR CNRS 6613)

Thèse N° : 2018LEMA1032

Rapporteurs :	**Jérôme ANTONI**	Professeur des universités (INSA) – Lyon
	Scott COGAN	Chargé de recherche HDR (CNRS, FEMTO-ST) – Besançon
Examinateurs :	**Dominique HABAULT**	Directeur de recherche (CNRS, LMA) – Marseille
Invités :	**Christophe LOCQUETEAU**	Docteur (Renault s.a.s) – Aubevoye
	Yannick DENOUAL	Ingénieur (Renault s.a.s) – Aubevoye
Encadrement :	**Charles PÉZERAT**	Professeur des universités (LAUM) – Le Mans université
	Benoit GAUVREAU	Chargé de recherche HDR (IFSTTAR) – Nantes

UNIVERSITE BRETAGNE LOIRE / SCIENCES POUR L'INGENIEUR

Le Mans Université

Titre : Recherche d'une description optimum des sources et systèmes vibro-acoustiques pour la simulation du bruit de passage des véhicules automobiles

Mots clés : Bruit de passage des véhicules, quantification d'incertitudes, propagation d'incertitudes, analyse de sensibilité globale, sélection de modèle, méthode des radiosités (EBEM), lancer de faisceaux.

Résumé : Pour commercialiser un véhicule, les constructeurs automobiles doivent se soumettre à la réglementation sur le bruit extérieur. Le règlement de la commission économique pour l'Europe, ECE R51.03, spécifie les niveaux admissibles que peut rayonner un véhicule automobile en roulage. Ce règlement est entré en vigueur depuis le 1er juillet 2016 pour remplacer l'ancien règlement ECE R51.02 (changement de méthode d'essai et sévérisation des niveaux de bruit admissibles). La diminution drastique des niveaux sonores tolérés se fait en trois étapes : passage de 74 dB (A) sous l'ancien règlement, à 68 dB (A) en 2024. Par conséquent, les constructeurs ainsi que les fournisseurs automobiles seront confrontés à un grand défi pour atteindre cet objectif.

Ainsi, l'objectif de ces travaux de thèse consiste à développer une aide à la modélisation totale du bruit de passage d'un véhicule, comme le préconisent les essais réglementaires. Le but est de construire des modèles optimaux pour prévoir et évaluer avec précision le bruit que peut rayonner un véhicule en roulage plus tôt dans son cycle de développement, i.e. avant l'étape d'industrialisation. Il faut alors se placer dans la recherche d'un compromis entre précision des estimations, sensibilité aux paramètres, robustesse de la méthode et efficacité numérique.

Title : Research for an optimal description of vibro-acoustic sources and systems for the simulation of vehicle pass-by noise

Keywords : Vehicle pass-by noise, quantification of uncertainty, propagation of uncertainty, global sensitivity analysis, model selection, Energy Boundary Element Method (EBEM), beam-tracing.

Abstract : Currently, to put a vehicle on market, car manufacturers must comply to a certification test of exterior noise. The regulation of the United Nations Economic Commission for Europe, ECE R51-03, specifies permissible levels a rolling motor vehicle can emit. This regulation is applied since July 1st, 2016, to replace the old regulation ECE R51-02 (test method change and tightening of permissible levels). The drastic reduction in noise levels will be done in 3 steps: from 74 dB (A) under the old regulation to 68 dB (A) in 2024. Therefore, manufacturers as well as their suppliers will face a great challenge to achieve this goal.

The objective of this thesis is to develop an aid to the modeling of the pass-by noise of a vehicle, as called for in regulatory testing. The goal is to predict and evaluate accurately the noise emissions earlier in the vehicle development cycle, i.e. before the industrialization stage. We must then seek a trade-off between accuracy of estimates, sensitivity to parameters, robustness of the method and numerical efficiency.

Résumé

Pour commercialiser un véhicule, les constructeurs automobiles doivent se soumettre à la réglementation sur le bruit extérieur. Le règlement de la commission économique pour l'Europe, ECE R51.03, spécifie les niveaux admissibles que peut rayonner un véhicule automobile en roulage. Ce règlement est entré en vigueur depuis le 1er juillet 2016 pour remplacer l'ancien règlement ECE R51.02 (changement de méthode d'essai et sévérisation des niveaux de bruit admissibles). La diminution drastique des niveaux sonores tolérés se fait en trois étapes : passage de 74 dB (A) sous l'ancien règlement, à 68 dB (A) en 2024. Par conséquent, les constructeurs ainsi que les fournisseurs automobiles seront confrontés à un grand défi pour atteindre cet objectif.

Ainsi, l'objectif de ces travaux de thèse consiste à développer une aide à la modélisation totale du bruit de passage d'un véhicule, comme le préconisent les essais réglementaires. Le but est de construire des modèles optimaux pour prévoir et évaluer avec précision le bruit que peut rayonner un véhicule en roulage plus tôt dans son cycle de développement, *i.e.* avant l'étape d'industrialisation. Il faut alors se placer dans la recherche d'un compromis entre précision des estimations, sensibilité aux paramètres, robustesse de la méthode et efficacité numérique.

Pour cela, trois modèles de synthèse sont développés. Ces modèles permettent tous de combiner le débit acoustique des sources les plus influentes (groupe motopropulseur, admission, échappement, rayonnement des volumes d'échappement, contact pneumatique/chaussée), avec le transfert acoustique entre ces sources et le point récepteur qui se trouve à 7.5 m de l'axe de la piste d'essai, tout en prenant en compte le déplacement du véhicule. La différence principale entre ces modèles réside dans la représentation fréquentielle des sources de bruit et la finesse géométrique du groupe motopropulseur. La variabilité et l'incertitude liées aux paramètres critiques de la modélisation sont identifiées, et la façon dont elles se propagent est appréhendée. Une étude d'analyse de sensibilité globale est ensuite réalisée afin d'étudier l'impact de l'incertitude et de la variabilité des paramètres d'entrée sur les sorties du modèle. Le meilleur modèle est ensuite choisi en se basant sur une théorie de sélection de modèle. Il s'agit d'une estimation numérique de l'*évidence* de chaque modèle, qui représente la constante de normalisation dans la formule de Bayes, en combinant les simulations de Monte Carlo par chaînes de Markov (MCMC) avec l'échantillonnage préférentiel.

D'autre part, une méthode permettant de calculer numériquement le transfert acous-

tique entre le groupe motopropulseur et le point récepteur est également proposée. Elle permettrait, à terme, de remplacer complètement les essais par la simulation. L'approche présentée dans cette thèse consiste à chaîner deux méthodes, notamment la méthode EBEM (Energy Boundary Element Method) pour modéliser le compartiment moteur et la méthode de lancer de faisceaux pour modéliser le milieu semi-ouvert entre les parois du véhicule et le récepteur.

Finalement, une méthode d'analyse de sensibilité globale (la méthode EFAST) a permis d'étudier l'influence de la variabilité d'un grand nombre de paramètres influents sur la propagation acoustique : effet de sol, absorption atmosphérique, diffusion par la turbulence atmosphérique et réfraction par les effets thermiques et aérodynamiques. Cette étude est importante car elle sert à quantifier numériquement la variabilité de la fonction de transfert liée à tous ces phénomènes, qui pourrait, à terme, être prise en compte dans les modèles de prévision du bruit extérieur.

Mots Clés : Bruit de passage des véhicules, simulation numérique, quantification d'incertitudes, propagation d'incertitudes, analyse de sensibilité globale, méthode EFAST, sélection de modèle, méthode des radiosités (EBEM), lancer de faisceaux.

Abstract

Currently, to put a vehicle on market, car manufacturers must comply to a certification test of exterior noise. The regulation of the United Nations Economic Commission for Europe, ECE R51-03, specifies permissible levels a rolling motor vehicle can emit. This regulation is applied since July 1st, 2016, to replace the old regulation ECE R51-02 (test method change and tightening of permissible levels). The drastic reduction in noise levels will be done in 3 steps : from 74 dB (A) under the old regulation to 68 dB (A) in 2024. Therefore, manufacturers as well as their suppliers will face a great challenge to achieve this goal.

The objective of this thesis is to develop an aid to the modeling of the pass-by noise of a vehicle, as called for in regulatory testing. The goal is to predict and evaluate accurately the noise emissions earlier in the vehicle development cycle, *i.e.* before the industrialization stage. We must then seek a trade-off between accuracy of estimates, sensitivity to parameters, robustness of the method and numerical efficiency.

For these reasons, three synthesis models are developed. All these models combine the acoustic flow of the most influential sources (powertrain, intake, exhaust tail, exhaust line radiation, tyre/road noise), with the acoustic transfer between these sources and the microphone located at 7.5 m from the axis of the test track, taking into consideration the motion of the vehicle. The main difference between these models lies in the frequency representation of the sources and the geometric division of the powertrain. Therefore, the variability and uncertainty associated with the critical parameters of the modeling are identified, and the way they propagate is apprehended. A global sensitivity analysis study is then carried out to study the impact of the uncertainty and variability of the input parameters on the outputs of the model. The best model is then selected based on a model selection theory. The latter envolves a numerical estimate of the *evidence* for each model, which represents the normalization constant in the Bayes formula, by combining Markov Chain Monte Carlo (MCMC) methods with Importance Sampling.

On the other hand, a method for numerically calculating the acoustic transfer between the powertrain and the microphone is also proposed. It allows, in the future, to completely replace the tests by the simulation. The approach presented in this thesis consists in coupling two methods, in particular the Energy Boundary Element Method (EBEM) to model the powertrain compartment and beam-tracing method to model the semi-free field between the vehicle and the receiver.

Finally, a global sensitivity analysis method (the EFAST method) allowed to study the influence of the variability of, the ground, the atmospheric absorption, the diffusion by atmospheric turbulence and the refraction by thermal and aerodynamic effects, on these acoustic transfers. This study is important because it is used to numerically quantify the variability of the transfer function related to all these phenomena, which could be taken into account in the models of pass-by noise prediction.

Keywords : Vehicle pass-by noise, numerical simulation, quantification of uncertainty, propagation of uncertainty, global sensitivity analysis, EFAST method, model selection, Energy Boundary Element Method (EBEM), beam-tracing.

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier mes directeurs de thèse M. Charles Pézerat, professeur à le Mans Université, et M. Benoit Gauvreau, chargé de recherche à l'Unité Mixte de Recherche en Acoustique Environnementale (UMRAE) – IFSTTAR, pour m'avoir accompagné dans ce travail de recherche. Je suis ravi d'avoir travaillé avec eux. Outre leur appui scientifique, ils m'ont toujours conseillé et encouragé. Leur implication motivée dans mes travaux de recherche, m'a permis de défricher la voie. Elle a débouché sur une collaboration, humainement et scientifiquement, très enrichissante pour moi.

Je tiens aussi à remercier M. Christophe Locqueteau, chef d'unité élémentaire de travail dans le service "acoustique" chez Renault. Il m'a soutenu durant ces trois années de thèse. Sans lui ces travaux de recherche n'auraient probablement pas pu être menés à termes. Je le remercie pour la confiance qu'il a placée en moi et pour tous les généreux efforts qu'il a fournis dans l'encadrement de ma thèse.

J'ai également été extrêmement honoré que M. Jérôme Antoni, professeur des universités à l'INSA de Lyon, et M. Scott Cogan, chargé de recherche au FEMTO-ST, acceptent la lourde tâche de rapporteur en s'intéressant à ces travaux de thèse. J'en sais également infiniment gré à Mme Dominique Habault d'avoir remarquablement assumer la présidence du jury. Les discussions et les questions soulevées n'ont pu que mieux éclairer les sujets traités. Elles m'ont été bénéfiques et m'ont permis une vision plus concise sur mon travail.

Mes reconnaissances vont ensuite vers les personnes qui, quotidiennement, m'ont chaleureusement entouré et soutenu durant les trois années passés au sein du service acoustique Renault. Je me sens plus particulièrement redevable envers Yannick Denoual pour sa contribution au développement des modèles de synthèse ainsi que Mickael Rety pour sa contribution au développement du modèle de calcul du transfert acoustique. Avec eux, j'ai partagé bien plus que des équations. Cela a toujours été un réel plaisir de travailler et d'échanger au quotidien avec eux. Leurs précieux conseils, leur disponibilité sans faille, leurs encouragements, m'ont été d'un apport inestimable. Je leur dis : merci de tout cœur. Je n'oublie pas Shanshan, Olivier, Simon, Joseph, Mathieu, Benoit, Maxime et tous mes collègues de la DEA-TPA2. Leur jovialité, leur gouaille, ont permis d'égayer dans une ambiance bon enfants mes fastidieuses recherches. Elles les ont rendues plus aisées.

Je ne perds pas de vue certaines personnes avec qui j'ai échangé et entretenu des discussions techniques. Leur avis constructifs ont, sans nul doute, aidé à l'aboutissement de

ce travail, parmi celles-ci : Jean Leung, Thierry Mara, Jasper Vrugt et Michel Bérengier. A eux aussi je leur dis grand merci.

J'ai également une grande pensée pour l'ensemble des thésards avec qui j'ai eu le plaisir de communiquer au sein de L'ENSIM et de l'UMRAE. A ceux qui n'ont pas encore franchi la ligne d'arrivée, je leur souhaite de tout cœur la réussite, notamment mon très cher ami Boulma. A lui je dis : courage et bonne continuation.

Enfin, comment ne pas avoir une pensée affectueuse pour mes amis Abderrezak, Amir, Pika, Latif, Hind, ainsi que mes frères ainés Rafik et Amine, et tous mes neveux.

Ceux pour qui ma reconnaissance est sans limite, c'est bien entendu mes chers parents. Malgré la distance, ils prenaient souvent le téléphone pour me revigorer et me remonter le cran. Ils savaient, comme nul autre, m'encourager dans ma tâche.

S'agissant des miens, j'adresse une mention spéciale à mes deux sœurs ainées, Chanez et Amel, pour leur infinie patience à se consacrer aux relectures de mon manuscrit.

Pour n'oublier personne, un merci général aux personnes qui de près ou de loin ont contribué à la réussite de mes travaux : **à tous merci infiniment !**

Table des matières

Résumé **3**

Abstract **5**

Remerciements **7**

Table de figures **13**

Liste des tableaux **17**

1 Introduction générale **19**
1.1 Avant propos 20
1.2 Contexte 20
1.3 Objectifs des travaux de recherche 22
1.4 Structure du document 23

2 Bruit de passage des véhicules automobiles **27**
2.1 Introduction 29
2.2 Règlement et calendrier d'exécution 29
2.2.1 L'ancien règlement ECE R51.02 30
2.2.2 Le nouveau règlement ECE R51 03 31
2.2.2.1 Dans le cas d'un seul rapport de vitesse 33
2.2.2.2 Dans le cas de deux rapports de vitesse 34
2.2.3 Calendrier d'exécution du règlement 35
2.3 Caractéristiques des sources et leurs influences sur le bruit extérieur 36
2.3.1 Bruit du groupe motopropulseur 38
2.3.2 Bruit de bouche d'admission 39
2.3.3 Bruit de bouche d'échappement et du rayonnement des volumes d'échappement 40
2.3.4 Bruit de contact pneumatique/chaussée 41
2.4 Méthodes existantes pour la prévision du niveau de bruit de passage 44
2.4.1 Essais en intérieur 45
2.4.2 Prévision par combinaison de sources et de transfert acoustiques . . . 46
2.4.2.1 Quantification expérimentale du débit acoustique 48
2.4.2.2 Quantification expérimentale des transferts acoustiques . . . 49
2.4.2.3 Estimation numérique des transferts acoustiques 50

2.5 Modèle de calcul du transfert acoustique du GMP utilisé dans le cadre de la thèse . . . 52
2.5.1 La méthode des radiosités (EBEM) . . . 52
2.5.2 Les méthodes d'acoustique géométrique . . . 54
2.5.3 Chaînage de la méthode EBEM et du lancer de faisceaux . . . 56
2.6 Les modèles de prévision développés dans le cadre de la thèse . . . 58
2.6.1 Principe de fonctionnement des modèles de prévision . . . 59
2.6.2 Les différents modèles de prévision développés . . . 65
2.7 Conclusion . . . 69

3 Analyse de sensibilité et propagation d'incertitudes dans les modèles 71
3.1 Introduction . . . 72
3.2 Etat de l'art . . . 72
3.2.1 Intoduction . . . 72
3.2.2 Spécification du problème . . . 74
3.2.3 Quantification des sources d'incertitude . . . 75
3.2.3.1 Classification des incertitudes . . . 75
3.2.3.2 Modélisation par des variables aléatoires . . . 77
3.2.3.2.1 Jugement d'expert et principe de maximum d'entropie 79
3.2.3.2.2 Modélisation par ajustement de lois . . . 80
3.2.4 Propagation d'incertitudes . . . 82
3.2.4.1 La méthode de Monte Carlo . . . 84
3.2.4.2 La méthode de quasi-Monte Carlo . . . 84
3.2.5 Analyse de sensibilité . . . 85
3.2.5.1 Criblage : Méthode de Morris . . . 86
3.2.5.2 Analyse de sensibilité quantitative . . . 88
3.2.5.2.1 Régression : indice SRC et $SRRC$ . . . 89
3.2.5.2.2 Décomposition de la variance et indices de Sobol . 91
3.2.5.2.3 Estimation des indices de Sobol par Monte Carlo . 94
3.2.5.2.4 Estimation des indices de Sobol par la méthode EFAST 97
3.2.5.3 Analyse de sensibilité des paramètres dépendants . . . 100
3.3 Application : Influence du sol et des conditions météorologiques sur le transfert acoustique . . . 101
3.3.1 Résultats et discussion . . . 102
3.3.1.1 Dans le cas d'une source ponctuelle . . . 103
3.3.1.2 Dans le cas d'un véhicule . . . 106
3.4 Conclusion . . . 110

4 Application sur les modèles de prévision du niveau de bruit de passage 111
4.1 Introduction . . . 112
4.2 Application sur le modèle de calcul des fonctions de transfert . . . 112
4.2.1 Dans le cas d'un caisson . . . 112
4.2.1.1 Présentation du caisson . . . 112
4.2.1.2 Mesures des fonctions de transfert . . . 114
4.2.1.3 Résultats et discussion . . . 114

4.2.2 Dans le cas d'un véhicule . . . 116
4.2.2.1 Présentation du véhicule . . . 116
4.2.2.2 Calcul déterministe : résultats et discussion . . . 117
4.2.2.3 Calcul sous incertitudes : résultats et discussion . . . 118
4.3 Application sur les modèles de synthèse . . . 121
4.3.1 Quantification d'incertitudes . . . 121
4.3.1.1 Incertitude de mesure . . . 122
4.3.1.2 Variabilité de production . . . 125
4.3.2 Calcul déterministe : résultats et discussion . . . 126
4.3.3 Calcul sous incertitudes : résultats et discussion . . . 127
4.3.3.1 Linéarité du modèle et méthode utilisée . . . 127
4.3.3.2 Résultats : incertitude de mesure . . . 131
4.3.3.3 Résultats : variabilité de production . . . 134
4.3.3.4 Résultats issus des autres modèles . . . 134
4.4 Conclusion . . . 138

5 Sélection de modèle 141
5.1 Introduction . . . 142
5.2 Etat de l'art . . . 143
5.2.1 Formalisme bayésien . . . 143
5.2.1.1 Notations des probabilités . . . 143
5.2.1.2 Probabilité conditionnelle et formules de Bayes . . . 144
5.2.1.3 Formules de Bayes dans le cas de variables aléatoires . . . 146
5.2.1.4 Estimateurs ponctuels . . . 149
5.2.1.5 Lien avec la sélection de modèle . . . 150
5.2.2 Sélection de modèle par la méthode bayésienne . . . 152
5.2.2.1 Premier niveau d'inférence . . . 152
5.2.2.2 Deuxième niveau d'inférence . . . 154
5.2.2.3 Moyenne bayésienne des modèles (BMA) . . . 155
5.2.3 Estimation de l'*évidence du modèle* . . . 155
5.2.3.1 Approximation mathématique de l'*évidence du modèle* par la méthode de Laplace . . . 156
5.2.3.2 Les critères d'information . . . 156
5.2.3.2.1 Le critère d'information KIC . . . 157
5.2.3.2.2 Le critère d'information BIC . . . 157
5.2.3.2.3 Le critère d'information AIC . . . 158
5.2.3.3 Estimation numérique de l'*évidence du modèle* . . . 159
5.2.3.3.1 Régularisation du premier niveau d'inférence par approche MCMC . . . 161
5.2.3.3.2 Estimation de l'*évidence du modèle* par échantillonnage préférentiel . . . 166
5.3 Application à un modèle simple . . . 168
5.3.1 Résultats dans le cas où $N_{obs} = 25$ . . . 169
5.3.2 Résultats dans le cas où $N_{obs} = 4$ . . . 176
5.4 Application aux modèles de synthèse . . . 177

5.5 Conclusion 186

6 Conclusion générale et perspectives 187
6.1 Conclusion générale 188
6.2 Perspectives 190

A Validation sur un cas test : Plaque isotrope 195
A.1 Introduction 196
A.2 Présentation du modèle analytique 196
A.3 Résultats et discussion 198
A.4 Conclusion 201

B Présentation du modèle analytique basé sur la théorie des rayons 203
B.1 Champ de pression au-dessus d'un sol homogène dans un milieu homogène . 204
B.2 Modèles d'impédance acoustique de sol 206
B.3 Prise en compte de l'effet d'épaisseur 207
B.4 Effet de l'absorption atmosphérique 208
B.5 Effet de réfraction par la stratification de l'atmosphère 210
B.6 Effet de diffusion par la turbulence atmosphérique 216

Références 219

Table des figures

1.1 Structure du document 25

2.1 Dimensions du site d'essai 30
2.2 Estimation du niveau de bruit de passage d'un véhicule selon l'ancien règlement ECE R51.02 31
2.3 Estimation du niveau de bruit L_{urban} selon le nouveau règlement ECE R51.03 33
2.4 Estimation du niveau sonore L_{urban} dans le cas de deux rapports de vitesse selon ECE R51.03 35
2.5 Le calendrier d'application du nouveau règlement ECE R51.03 36
2.6 Les sources sonores les plus influentes sur le bruit extérieur des véhicules automobiles 37
2.7 Contribution des différentes sources au niveau de bruit extérieur total du véhicule. 38
2.8 Bruit du groupe motopropulseur mesuré à 1 m de sa face avant 39
2.9 Bruit de bouche d'admission mesuré à une distance de 8 cm de la canule . . 40
2.10 Bruit de bouche d'échappement mesuré à une distance de 15 cm de la canule 41
2.11 Les principaux mécanismes générateurs de bruit de roulement 42
2.12 Contribution du pneumatique à vitesse constante et en accélération 43
2.13 Bruit de contact pneumatique/chaussée mesuré à 7.5 m 44
2.14 Simulation en intérieur sur le banc à rouleaux de l'UTAC CERAM 45
2.15 Mesure des fonctions de transfert extérieures par réciprocité sur un véhicule . 50
2.16 Les facteurs de forme 54
2.17 Les différentes méthodes d'acoustique géométrique 56
2.18 Chaînage de la méthode des radiosités et du lancer de faisceaux 57
2.19 Décomposition régulière d'une demi-sphère en "igloo" 58
2.20 Schéma complet du fonctionnement des modèles de synthèse 60
2.21 Exemple de valeurs d'accélération d'un véhicule en fonction de sa vitesse pour 5 rapports de vitesse 61
2.22 Couple moteur en pleine charge en fonction de la vitesse de rotation du moteur 62
2.23 Résultats du modèle de synthèse 64
2.24 Contribution des sources et diagramme d'interpolation 65
2.25 Découpage du GMP en six faces 66
2.26 Les différents modèles de synthèse développés 68

3.1 Les étapes de base pour effectuer une étude d'analyse de sensibilité 73

3.2 Les phases primaires de modélisation et de simulation selon SCS 75
3.3 Exemples de fonctions de répartition 78
3.4 Exemples de fonctions de densité de probabilité 78
3.5 Différence entre un tirage aléatoire et la suite de Sobol 85
3.6 Exemple de la méthode de Morris pour un espace à deux dimensions 87
3.7 Méthodologie de l'analyse de sensibilité quantitative 89
3.8 Chaînage de la méthode des radiosités et d'un modèle analytique basé sur la théorie des rayons 102
3.9 Courbes d'atténuation excédentaire par rapport au champ libre et leur écart-type dans le cas d'une source et d'un récepteur ponctuels 104
3.10 Indices de sensibilité de premier ordre et interaction entre les paramètres dans le cas d'une source et d'un récépteur ponctuels 105
3.11 Les courbes d'atténuation excédentaire par rapport au champ libre (EA) et leur indices de sensibilité de premier ordre dans le cas d'une source et d'un récepteur ponctuels, présentés en tiers d'octave 105
3.12 Le groupe motopropulseur entouré de 21 sources monopôlaires 106
3.13 Récupération de l'intensité acoustique au niveau du plan fictif 107
3.14 Les courbes de fonctions de transfert GMP et leur écart-type 108
3.15 Indices de sensibilité de premier ordre dans le cas d'un véhicule, présentés en tiers d'octave 109
3.16 Histogramme normalisé des fonctions de transferts en valeur globale et les indices de sensibilité liés aux paramètres d'entrée 109

4.1 Vue extérieure du caisson 113
4.2 Structure représentant le bloc moteur 114
4.3 Schéma des matériaux absorbants dans le caisson 114
4.4 Mesure des fonctions de transfert extérieures par réciprocité sur le caisson . . 115
4.5 Spectres des fonctions de transfert du caisson en tiers d'octave. 116
4.6 Fonctions de transfert du caisson en valeur globale en fonction de la position du récepteur. 117
4.7 Modélisation du véhicule 118
4.8 Fonctions de transfert du véhicule 119
4.9 Hiérarchisation des variables par la méthode de Morris 120
4.10 Hiérarchisation des variables par la méthode de Morris 120
4.11 Résultats des fonctions de transfert du véhicule en utilisant le plan d'expérience de Morris 121
4.12 Fonction de transfert en fonction de la fréquence, entre la face arrière du moteur, et un microphone se trouvant à $y = -7.5$ m (côté gauche du véhicule) et à $x = 0$ m 125
4.13 Exemple de la contribution du bruit de contact pneumatique/chaussée en fonction de la vitesse du véhicule sur piste d'essai 126
4.14 Résultats du calcul déterministe réalisés avec le modèle monopôle en valeur globale pour trois véhicules différents 127
4.15 Indices de premier ordre S_i, et indices totaux S_{Ti} de Sobol pour la sortie du modèle L_{urban} (incertitude de mesure, segment B diesel) 128

4.16 Nuage de points de la sortie L_{urban} en fonction des 18 paramètres d'entrée du modèle (incertitude de mesure, segment B diesel) 129
4.17 Indice de sensibilité $SRCm^2$ pour la sortie du modèle L_{urban} (incertitude de mesure, segment B diesel) 130
4.18 Les niveaux de bruit obtenus en sortie du modèle monopôle en valeur globale suite à la propagation de l'incertitude de mesure et de la variabilité de production (segment B diesel) 131
4.19 Indices de sensibilité $SRCm$ correspondants à l'incertitude de mesure pour le segment B diesel 132
4.20 Indices de sensibilité $SRCm$ correspondants à l'incertitude de mesure sur la sortie L_{urban} pour les trois véhicules 133
4.21 Diagramme d'interpolation pour calculer le niveau de bruit L_{urban} pour les trois véhicules 133
4.22 Indices de sensibilité $SRCp$ correspondants à la variabilité de production pour le segment B diesel 135
4.23 Indices de sensibilité $SRCp$ correspondants à la variabilité de production sur la sortie L_{urban} pour les trois véhicules 136
4.24 Indices de sensibilité $SRCm$ correspondants à l'incertitude de mesure sur la sortie L_{urban} (segment B diesel, modèle "monopôle en tiers d'octave") 136
4.25 Indices de sensibilité $SRCm$ correspondants à l'incertitude de mesure sur la sortie L_{urban} (segment B diesel, modèle "six faces en tiers d'octave") 137

5.1 Schéma de la densité de probabilité jointe $f(x, y)$, des probabilités marginales $f(x)$ et $f(y)$ et des probabilités conditionnelles $f(x|y)$ et $f(y|x)$. 148
5.2 Schéma des estimateurs ponctuels $\hat{x}_{ML}$ et $\hat{x}_{MAP}$ en fonction des densités de probabilité *a priori* $f(x)$, *a posteriori* $f(x|y)$ et de la vraisemblance $f(y|x)$. 149
5.3 Sélection de modèle par l'approche bayésienne. 150
5.4 Courbe de l'incertitude de modélisation totale en fonction du nombre de paramètre du modèle 151
5.5 Estimation de l'*évidence du modèle* par la méthode de Monte Carlo. 160
5.6 Les deux étapes pour estimer numériquement l'*évidence du modèle*. 167
5.7 Organigramme représentant les étapes principales pour estimer l'*évidence* et les critères KIC, BIC et AIC. 170
5.8 Erreur d'estimation des critères KIC, BIC et AIC par rapport à une estimation numérique de l'*évidence du modèle*, dans le cas où $N_{obs} = 25$. 171
5.9 Distributions marginales des densités de probabilité *a priori* $f(x|\mathcal{M}_9)$ et *a posteriori* $f(x|, \mathcal{M}_9)$, dans le cas où $N_{obs} = 25$. 173
5.10 Distributions marginales et nuages de points de corrélations entre les paramètres de la densité de probabilité *a posteriori* $f(x|, \mathcal{M}_9)$, dans le cas où $N_{obs} = 25$. 175
5.11 Distributions marginales des densités de probabilité *a priori* $f(x|\mathcal{M}_6)$ et *a posteriori* $f(x|, \mathcal{M}_6)$, dans le cas où $N_{obs} = 4$. 177
5.12 Comparaison calculs/mesures des niveaux de bruit $L_{cr(n)}$, $L_{wot(n)}$, $L_{cr(n+1)}$ et $L_{wot(n+1)}$, pour le segment B diesel. 179

5.13 Comparaison calculs/mesures du niveau de bruit L_{urban}, pour le segment B diesel. 180
5.14 Distributions marginales des densités de probabilité *a priori* $f(x|\mathcal{M}_1)$ et *a posteriori* $f(x|,\mathcal{M}_1)$, pour le segment B diesel. 182
5.15 Distributions marginales des densités de probabilité *a priori* $f(x|\mathcal{M}_2)$ et *a posteriori* $f(x|,\mathcal{M}_2)$, pour le segment B diesel. 183
5.16 Distributions marginales des densités de probabilité *a priori* $f(x|\mathcal{M}_3)$ et *a posteriori* $f(x|,\mathcal{M}_3)$, pour le segment B diesel. 184
5.17 Résultats de l'estimation numérique de l'*évidence du modèle* $\widehat{I}$, pour le segment B diesel. 185
5.18 Résultats de l'estimation du critère KIC, pour le segment B diesel. 185

A.1 Plaque isotrope excitée par une onde plane à 45° 196
A.2 Indices de sensibilité de premier ordre dans le cas d'une plaque infinie isotrope 199
A.3 Indices de sensibilité totaux dans le cas d'une plaque infinie isotrope 200
A.4 L'indice de perte par transmission acoustique d'une plaque isotrope en fonction de la fréquence pour différentes variabilités des paramètres d'entrée 201

B.1 Constitution du champ acoustique au-dessus d'un sol 204
B.2 Sol à réaction localisée 207
B.3 Sol à réaction étendue 208
B.4 Principe du phénomène de réfraction 211
B.5 Élément du rayon de propagation 212
B.6 Schéma d'un rayon acoustique émis par une source au sol en présence d'un gradient de célérité positif 213
B.7 Schéma d'un rayon acoustique émis par une source au sol en présence d'un gradient de célérité positif passant par sa hauteur maximale 214
B.8 Schéma d'un rayon acoustique émis par une source se trouvant à une hauteur H_s 215

Liste des tableaux

2.1 Les limites admissibles pour différentes catégories de véhicules selon le nouveau règlement ECE R51.03 36

3.1 Plages de variation des paramètres caractérisant le sol et le milieu de propagation 103

4.1 Lois de probabilité attribuées aux paramètres d'entrée des modèles de synthèse 123

5.1 Résultats de l'estimation de l'*évidence du modèle*, du critère KIC, BIC et AIC dans le cas où $N_{obs} = 25$. 171

5.2 Résultats de l'estimation de l'*évidence du modèle*, du critère KIC, BIC et AIC dans le cas où $N_{obs} = 4$. 176

A.1 Plages de variation des paramètres d'une plaque isotrope avec 10% de variabilité 199

A.2 Plages de variation des paramètres d'une plaque isotrope avec 1% de variabilité sur E et ρ 201

Chapitre 1

Introduction générale

Sommaire

1.1 Avant propos 20

1.2 Contexte 20

1.3 Objectifs des travaux de recherche 22

1.4 Structure du document 23

1.1 Avant propos

Ces travaux de thèse sont financés par le service "acoustique" de la direction "prestation client" de la société Renault S.A.S et de l'Association Nationale de la Recherche et de la Technologie (ANRT). Le service acoustique de la société Renault a assuré le co-encadrement de ces travaux de thèse au travers d'un contrat CIFRE (Conventions Industrielles de Formation par la REcherche) le liant au Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine (LAUM) [1] et à l'Institut Français des Sciences et Technologies des Transports, de l'Aménagement et des Réseaux (IFSTTAR). Cette thèse est réalisée sous la direction de M. Charles Pézerat (professeur à le Mans Université), M. Benoit Gauvreau (chargé de recherche à l'Unité Mixte de Recherche en Acoustique Environnementale (UMRAE) - IFSTTAR [2]) et de M. Christophe Locqueteau (chef d'unité élémentaire de travail dans le service "acoustique" chez Renault).

1.2 Contexte

Les problèmes environnementaux tels que la pollution de l'air, celle de l'eau ou encore celle du sol sont des sujets d'actualité auxquels les Français accordent une attention particulière. Notons cependant que le bruit urbain, ou ce qu'on appelle la pollution sonore, qui cause une nuisance considérable sur la vie quotidienne des Français ne semble pas autant les préoccuper. Pourtant, l'enquête réalisée par Kantar TNS en 2010 ("Les Français et les nuisances sonores") [3] a révélé que deux tiers des Français se disent gênés par le bruit à leurs domiciles et que près d'un Français sur six en a déjà été gêné au point de penser à déménager. D'autres études ont montré que les nuisances sonores peuvent avoir plusieurs effets négatifs sur la santé des individus, et causer des troubles qui perturbent les activités quotidiennes et le sommeil [1].

D'autre part, la même enquête réalisée par Kantar TNS indique que le bruit des transports représente la source principale des nuisances sonores. En effet, 54% des Français estiment que les nuisances sonores sont provoquées par cette source de bruit, notamment à cause de la circulation routière qui se place dans la première position dépassant de loin le transport aérien et le transport ferroviaire (ces derniers ne semblent gêner qu'une petite partie de la population). En 2016, le coût annuel social du bruit en France est estimé à 57 milliards d'euros [4].

1. Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine : `http://laum.univ-lemans.fr`
2. Unité Mixte de Recherche en Acoustique Environnementale : `http://www.umrae.fr`
3. Enquête Kantar TNS : "Les Français et les nuisances sonores" `https://www.tns-sofres.com/publications/les-francais-et-les-nuisances-sonores`
4. Enquête EY (anciennement Ernst & Young), financée par le CNB (Conseil National du Bruit) et l'ADEME (Agence de l'Environnement et de la Maîtrise de l'Energie) : "Le coût social des pollutions sonores" `http://www.bruit.fr/cout-social-du-bruit-en-france-57-milliards-deuros.html`

Afin de faire face à ces enjeux et d'apporter des solutions aux problèmes de nuisances sonores, des législations ont été mises en place. En effet, il est souvent plus judicieux et moins coûteux d'anticiper les problèmes. En matière de bruit rayonné à l'extérieur des véhicules par exemple, la législation européenne impose aux constructeurs automobiles de veiller à ce que les niveaux sonores de leurs véhicules ne dépassent pas une certaine limite. Le règlement de la commission économique pour l'Europe, ECE R51.03 [2], spécifie les niveaux admissibles que peut rayonner un véhicule automobile en roulage. Ce règlement est entré en vigueur depuis le 1er juillet 2016 pour remplacer l'ancien règlement ECE R51.02 [3]. Une nouvelle méthode d'essai et une sévérisation des niveaux admissibles sont mises en place. Cette sévérisation se fera en trois étapes pour passer de 74 dB (A) sous l'ancien règlement ECE R51.02 [3], à 68 dB (A) en 2024. Ce niveau de bruit est équivalent à celui émis par les voitures électriques d'aujourd'hui. Les mesures conjointes suivant les deux règlements, ECE R51.02 [3] et ECE R51.03 [2], réalisées dans un cadre officiel en 2012, ont montré que 97% des véhicules français ne respectaient pas les 68 dB (A) à terme du nouveau règlement [4; 5]. Cela se traduira par un grand défi pour les fabricants et les fournisseurs automobiles. En effet, en fin de projet, il n'est plus possible de revenir sur la conception si un véhicule dépasse la limite admissible. A cette étape du projet, uniquement des solutions palliatives peuvent être proposées. Ces solutions sont coûteuses et peuvent détériorer les autres prestations du véhicule. En plus, la pression concurrentielle impose aux constructeurs des temps de développement plus courts et des coûts plus faibles. Pour maintenir sa compétitivité, la société Renault a donc modifié ses processus de recherche et développement, notamment en accroissant le nombre et la qualité des simulations numériques et en diminuant le nombre et la durée des essais de validation.

Renault dispose, pour la prévision du bruit extérieur, de modèles dans lesquels une trame théorique globale permet d'associer les différents « maillons », *i.e.* les caractéristiques acoustiques des différents sous-systèmes du véhicule qui contribuent au niveau sonore extérieur. Les différents éléments de cette chaîne vibro-acoustique se répartissent, d'une part, en *sources* (groupe motopropulseur, admission, échappement, rayonnement des volumes d'échappement, contact pneumatique/chaussée) et d'autre part, en *transferts*, qui représentent l'isolation et/ou la propagation (parois du compartiment moteur, ouvertures, matériaux absorbants, écrans isolants). Néanmoins, l'inconvénient de ces modèles est leur précision encore insuffisante en regard des contraintes de développement des projets, qui nécessiteraient de pouvoir remplacer complètement les essais par la simulation.

1.3 Objectifs des travaux de recherche

L'objectif de ces travaux de thèse consiste à développer une aide à la modélisation totale du bruit de passage d'un véhicule, en accord avec les exigences des essais réglementaires de la nouvelle norme. Le but est de prévoir et d'évaluer avec précision le bruit que peut rayonner un véhicule en roulage plus tôt dans le cycle de développement du véhicule, *i.e.* avant l'étape d'industrialisation.

La démarche proposée vise à traiter les inconvénients des modèles de prévision du bruit extérieur, qu'on appellera *modèles de synthèse*, qui sont en partie liés à la relative simplicité de la trame théorique globale, ainsi qu'au choix de description fréquentielle et géométrique des sources de bruit. Une démarche simple pourrait être d'accroître le nombre de paramètres de ces modèles, mais on sait que généralement l'erreur de prévision, si elle diminue dans un premier temps, augmente au contraire au-delà d'un certain seuil quand on augmente le nombre de paramètres [6]. Le travail proposé consiste donc à aborder cette problématique sous l'angle du compromis entre la robustesse et la précision de ces modèles, à identifier la variabilité et l'incertitude liées aux paramètres d'entrée et à appréhender la façon dont elles se propagent et impactent le résultat final. L'objectif est donc de dégager des règles de conception de modèles optimaux pour la simulation du bruit extérieur des véhicules.

Par ailleurs, le transfert acoustique représente un des paramètres d'entrée des modèles de prévision du bruit extérieur. En effet, la mesure de la puissance des sources de bruit (groupe motopropulseur, admission, échappement, rayonnement des volumes d'échappement, contact pneumatique/chaussée) peut être réalisée au début du projet, avec les sources démontées du véhicule et installées sur des bancs d'essai. Or, aujourd'hui, le transfert acoustique est mesuré sur les prototypes en fin de projet. Son estimation numérique est alors essentielle pour pouvoir, à terme, remplacer complètement les essais par la simulation. C'est pourquoi, une partie de ces travaux de thèse est consacrée au calcul du transfert acoustique entre le groupe motopropulseur et le point récepteur. Des méthodes, type éléments de frontière, permettent d'estimer cette fonction de transfert. Cependant, ces méthodes sont très coûteuses en temps de calcul, notamment en haute fréquence. La démarche utilisée dans cette thèse consiste alors à chaîner deux méthodes, notamment la méthode EBEM (Energy Boundary Element Method) [7] pour modéliser le compartiment moteur et la méthode de lancer de faisceaux [8] pour modéliser le milieu semi-ouvert entre les parois du véhicule et le récepteur. Néanmoins, cette méthode n'est valable qu'à partir d'une certaine fréquence. L'estimation des fonctions de transfert qui concerne les autres sources de bruit dépasse le cadre de cette thèse.

Finalement, une troisième partie de cette thèse se focalise sur l'influence du sol et des

conditions météorologiques, notamment l'absorption atmosphérique, la diffusion par la turbulence atmosphérique ainsi que la réfraction par les effets thermiques et aérodynamiques, sur le transfert acoustique. Cette influence est quantifiée numériquement grâce à un modèle analytique permettant de propager l'énergie entre les parois du véhicule et le récepteur, tout en prenant en compte la variabilité des caractéristiques du sol et des conditions météorologiques.

1.4 Structure du document

Le schéma présenté dans la Figure 1.1 permet de mieux comprendre la structure de ce document. Ce travail de recherche est divisé en six chapitres qui sont organisés comme suit :

Le Chapitre 1 correspond à la présente introduction.

Le Chapitre 2 donne un aperçu général sur le bruit de passage des véhicules automobiles et permet aux lecteurs de se familiariser avec ce dernier. L'ancien et le nouveau règlement de la commission économique pour l'Europe ainsi que leur procédure de mesure respective sont d'abord introduits. Nous présentons ensuite les sources de bruit les plus influentes sur le bruit de passage d'un véhicule ainsi que leurs caractéristiques. Un résumé sur les méthodes existantes pour estimer le bruit extérieur d'un véhicule est également exposé. Nous concluons ce chapitre par la présentation des modèles de prévision (modèles de synthèse) et le modèle de calcul du transfert acoustique développés dans le cadre de cette thèse, qui permettent d'évaluer le niveau de bruit que peut rayonner un véhicule en roulage plus tôt dans son cycle de développement, *i.e.* en amont de l'étape d'industrialisation.

Le Chapitre 3 présente l'état de l'art des méthodes de propagation d'incertitudes et d'analyse de sensibilité qui seront appliquées aux modèles de prévision du niveau de bruit de passage d'un véhicule ainsi qu'au modèle de calcul des fonctions de transfert. Pour mieux comprendre ces méthodes, une validation sur un cas test est exposée en Annexe A. Il s'agit d'étudier la sensibilité de l'indice de perte par transmission acoustique d'une plaque infinie isotroque par rapport aux paramètres physiques de la plaque. Enfin, nous présentons dans ce chapitre une application qui s'intéresse à l'influence de la variabilité des caractéristiques du sol et des conditions météorologiques sur le transfert acoustique d'un véhicule.

Le Chapitre 4 est consacré à l'application des méthodes d'analyse de sensibilité et de propagation d'incertitudes, d'abord au modèle de calcul de la fonction de transfert, et

ensuite aux modèles de prévision du niveau de bruit de passage des véhicules. Concernant le modèle de calcul du transfert acoustique, l'étude est réalisée d'abord sur un cas test sous la forme d'un modèle simplifié de compartiment moteur, puis sur un cas industriel. Pour ce qui est des modèles de synthèse, trois véhicules ayant des rapports puissance/poids différents sont étudiés. Les résultats obtenus sont ensuite exposés et analysés.

Le Chapitre 5 fait l'état de l'art des théories de la sélection de modèle. La méthode utilisée dans le cadre de cette thèse, qui permet de choisir le meilleur modèle parmi les trois modèles de synthèse développés, est également présentée. Cette méthode est basée sur une estimation numérique de l'*évidence du modèle*, appelée aussi la *vraisemblance marginalisée*, qui représente la constante de normalisation dans la formule de Bayes. Un exemple d'application à un modèle simple est également présenté pour permettre de mieux comprendre les théories de la sélection de modèle.

Enfin, le dernier chapitre est dédié aux conclusions et aux perspectives des travaux effectués.

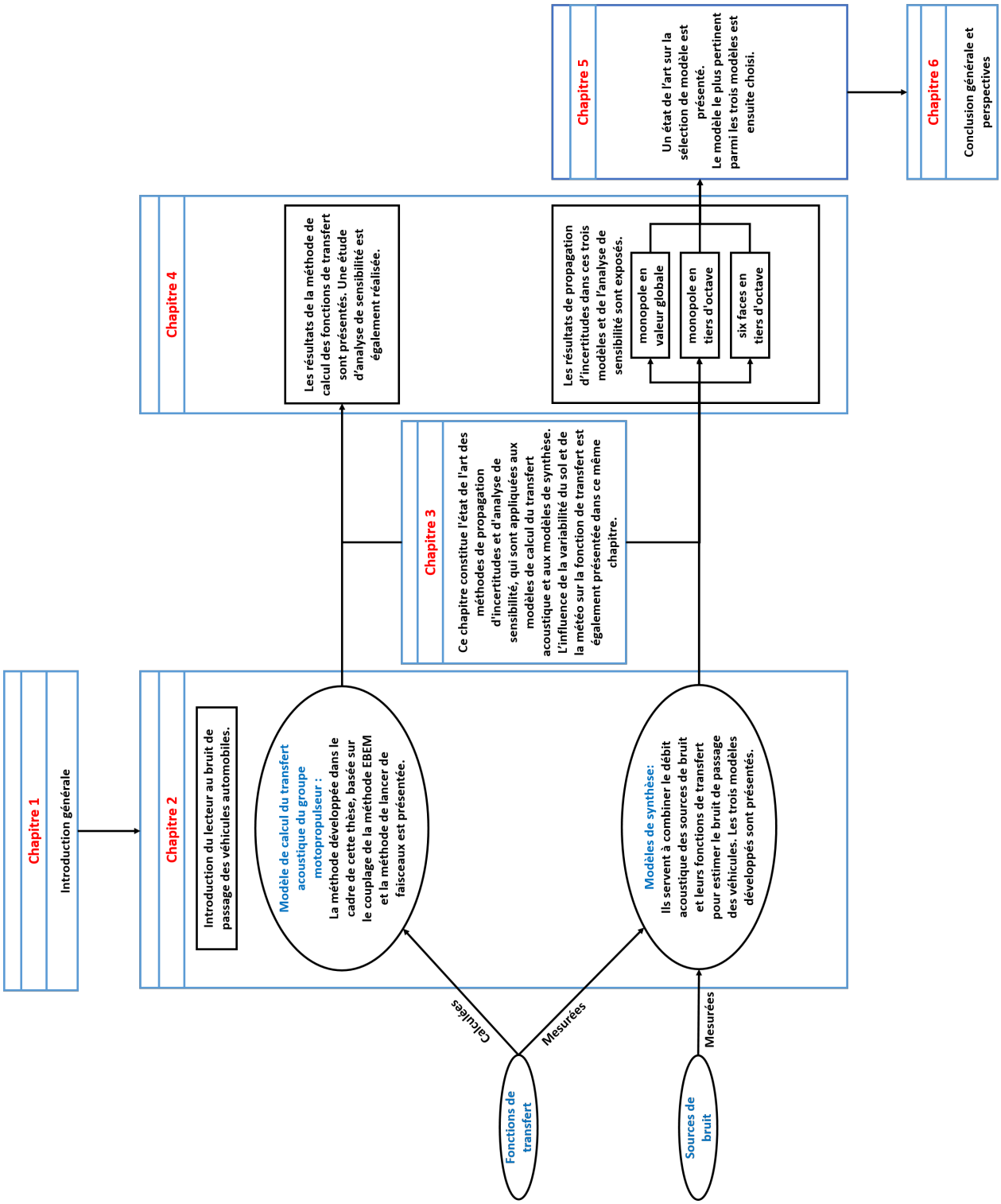


FIGURE 1.1 – Structure du document

Chapitre 2

Bruit de passage des véhicules automobiles

Sommaire

2.1 Introduction 29

2.2 Règlement et calendrier d'exécution 29

2.2.1 L'ancien règlement ECE R51.02 30

2.2.2 Le nouveau règlement ECE R51 03 31

2.2.3 Calendrier d'exécution du règlement 35

2.3 Caractéristiques des sources et leurs influences sur le bruit extérieur 36

2.3.1 Bruit du groupe motopropulseur 38

2.3.2 Bruit de bouche d'admission 39

2.3.3 Bruit de bouche d'échappement et du rayonnement des volumes d'échappement 40

2.3.4 Bruit de contact pneumatique/chaussée 41

2.4 Méthodes existantes pour la prévision du niveau de bruit de passage 44

2.4.1 Essais en intérieur 45

2.4.2 Prévision par combinaison de sources et de transfert acoustiques . 46

2.5 Modèle de calcul du transfert acoustique du GMP utilisé dans le cadre de la thèse 52

2.5.1 La méthode des radiosités (EBEM) 52

2.5.2 Les méthodes d'acoustique géométrique 54

2.5.3 Chaînage de la méthode EBEM et du lancer de faisceaux 56

2.6 Les modèles de prévision développés dans le cadre de la thèse . 58

2.6.1 Principe de fonctionnement des modèles de prévision 59

2.6.2 Les différents modèles de prévision développés 65

2.7 Conclusion 69

2.1 Introduction

Ce chapitre a pour but de faire comprendre aux lecteurs le bruit de passage des véhicules automobiles. Nous commençons par présenter d'abord le règlement qui décrit la procédure de mesure d'un véhicule automobile en roulage ainsi que les niveaux admissibles qu'il peut rayonner. Nous présentons ensuite les caractéristiques des sources de bruit les plus influentes sur le bruit de passage d'un véhicule, notamment le groupe motopropulseur, qui regroupe le moteur et la boîte de vitesse, le bruit d'admission, d'échappement, du rayonnement des volumes d'échappement, ainsi que le bruit de contact pneumatique/chaussée. Un tour d'horizon des méthodes existantes dans la littérature pour estimer le niveau de bruit de passage d'un véhicule automobile est également exposé. Nous concluons notre chapitre par la présentation des modèles de prévision et le modèle de calcul des fonctions de transfert développés dans le cadre de cette thèse. Ces modèles permettraient d'évaluer le niveau de bruit que peut rayonner un véhicule plus tôt dans son cycle de développement, *i.e.* en amont de l'étape d'industrialisation.

2.2 Règlement et calendrier d'exécution

Le test et les limites des valeurs réglementaires du bruit de passage des véhicules automobiles ont été introduits en Europe pour la première fois dans les années 1970 [9; 10]. Depuis, les valeurs limites ont progressivement été réduites pour toutes les catégories de véhicules. Par exemple, pour certains véhicules de catégorie M1 (cf. Table 2.1), la limite admissible est passée de 82 dB (A) en 1970, à 74 dB (A) en 2015 sous l'ancien règlement de la commission économique pour l'Europe ECE R51.02 [3]. En réalité, le niveau de bruit du trafic routier dans les zones urbaines n'était pas aussi significativement réduit que les limites des valeurs réglementaires du bruit au passage. Cela a été expliqué par l'augmentation du nombre de véhicules et des distances de déplacement, ainsi que par le fait que les conditions d'essai décrites dans l'ancienne norme internationale ISO 362 : 1998 [11], qui représente la procédure de mesure du niveau de bruit de passage des véhicules automobile, ne conviennent pas au comportement réel d'une conduite en milieu urbain [12]. En effet, l'ancienne procédure de mesure décrite dans la norme ISO 362 : 1998 [11], basée sur des mesures en accélération, met en avant le bruit émis par le groupe motopropulseur. Or, en milieu urbain, le bruit de contact pneumatique/chaussée reste une source de bruit importante. C'est pourquoi, la procédure d'essai décrite dans cette norme a été révisée. Une nouvelle procédure, censée représenter un comportement d'une conduite urbaine plus réaliste, a été élaborée en 2015.

2.2.1 L'ancien règlement ECE R51.02

L'ancien règlement de la commission économique pour l'Europe, ECE R51.02 [3], qui spécifie les niveaux sonores admissibles d'un véhicule automobile en roulage, se réfère à la norme internationale ISO 362 : 1998 [11], qui décrit la procédure de mesure du niveau de bruit de passage des véhicules automobiles. L'essai est réalisé sur une zone d'accélération rectangulaire de 20 m sur 20 m avec une ligne de référence CC' représentant l'axe de trajectoire du véhicule (cf. Figure 2.1). Elle est équipée de deux microphones se trouvant sur la ligne PP', à 7.5 m à gauche et à droite, de l'axe de trajectoire du véhicule, et à 1.2 m de hauteur. Aussi, la piste d'essai doit répondre aux exigences de la norme ISO 10844 [13], maximisant ainsi l'émission sonore du véhicule. En effet, les chaussées conçues pour être particulièrement silencieuses présentent une émission sonore inférieure aux pistes ISO 10844 [13].

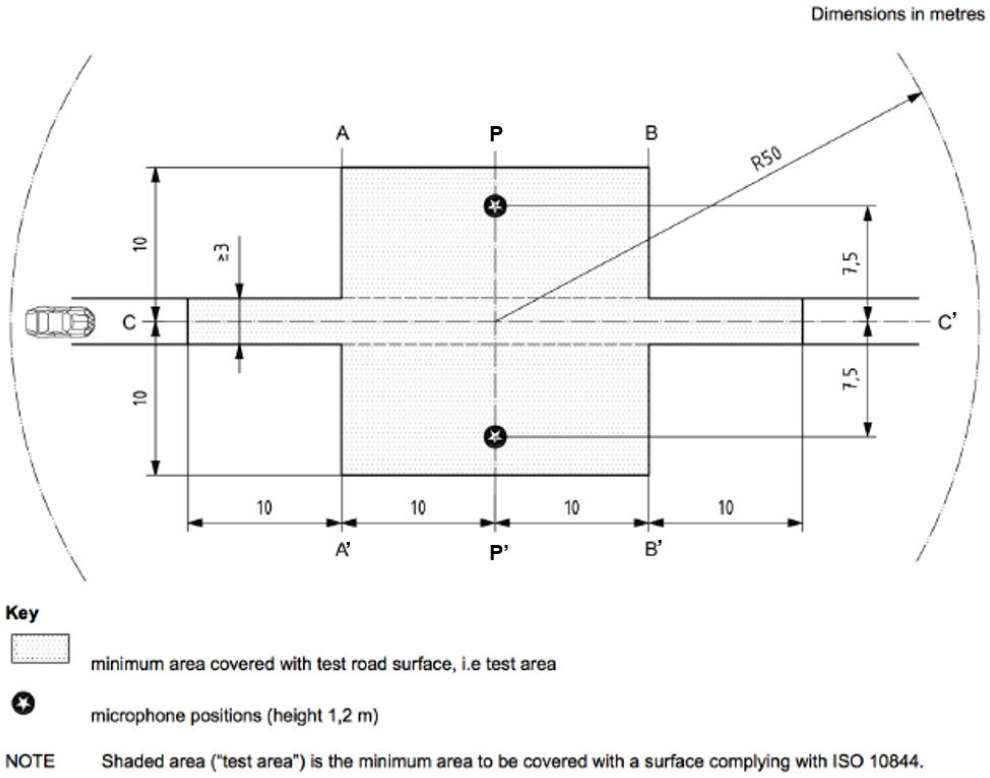


FIGURE 2.1 – Dimensions du site d'essai [14]

La méthode de mesure du niveau de bruit de passage des véhicules de catégorie M1, selon l'ISO 362 : 1998 [11], est détaillée ci-après. Comme illustré sur la Figure 2.2a, le véhicule doit approcher la zone d'accélération avec une vitesse constante de 50 km/h. Lorsque l'avant du véhicule atteint l'entrée de la piste AA', le conducteur doit accélérer en pleine charge, et suivre le plus étroitement possible la ligne de référence CC', jusqu'à ce que l'arrière du véhi-

cule franchisse complètement la ligne de sortie BB'. Lors du passage du véhicule, les niveaux de bruit sont enregistrés au niveau des deux microphones. Ces niveaux de bruit sont d'abord pondérés par un filtre A, avant d'être passé en valeur globale. Les valeurs retenues correspondent à la valeur maximale enregistrée au niveau des deux microphones (cf. Figure 2.2b). Pour la majorité des véhicules à transmission manuelle, les mesures sont effectuées pour le 2ème et le 3ème rapport de vitesse. Plusieurs passages sont réalisés consécutivement pour chaque rapport de vitesse, en s'assurant que les niveaux de bruit de chaque rapport de vitesse se situent dans une plage de 2 dB (A). Ensuite, la moyenne des niveaux enregistrés lors des quatre passages est effectuée pour chaque microphone et chaque rapport de vitesse. Les plus grandes valeurs enregistrées de chaque côté de la piste, correspondant au 2ème et au 3ème rapport de vitesse sont ensuite moyennées, conduisant au niveau de bruit de passage du véhicule selon la norme ISO 362 : 1998 [11], dont la limite est fixée par le règlement ECE R51.02 [3].

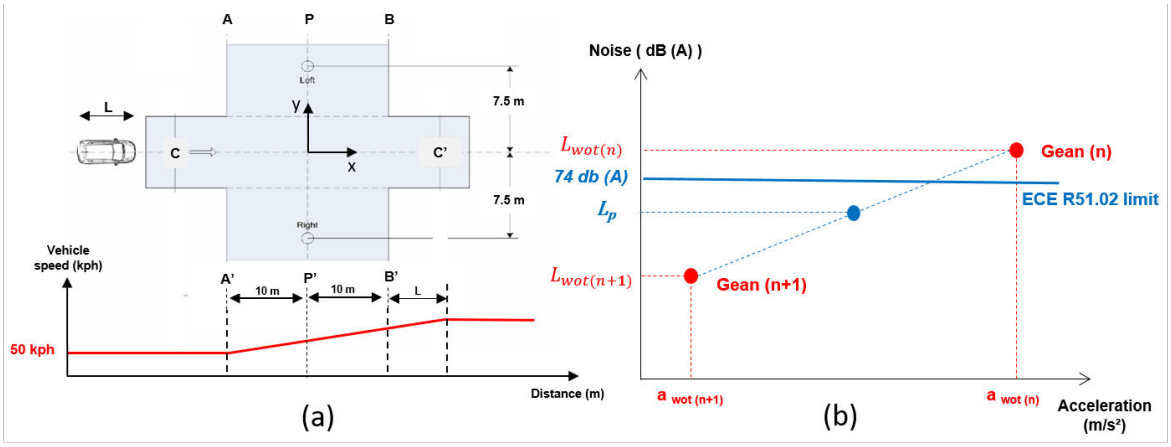


FIGURE 2.2 – Estimation du niveau de bruit de passage d'un véhicule selon l'ancien règlement ECE R51.02

2.2.2 Le nouveau règlement ECE R51 03

Actuellement, pour commercialiser un véhicule, les constructeurs automobiles doivent se soumettre à un test d'homologation en bruit extérieur. Le règlement de la commission économique pour l'Europe, ECE R51.03 [2], spécifie les niveaux admissibles que peut rayonner un véhicule automobile en roulage. Ce nouveau règlement est appliqué depuis le 1er juillet 2016, avec un changement de méthode d'essai et une sévérisation des niveaux admissibles. Cette directive se réfère à la nouvelle norme internationale ISO 362 : 2015 [14], qui décrit la nouvelle procédure de mesure du niveau de bruit de passage des véhicules automobiles.

Cette procédure d'essai est utilisée pour évaluer l'émission sonore représentative d'un véhicule sous des conditions typiques d'un trafic urbain. En effet, cette nouvelle méthode consiste à combiner le niveau maximal du bruit de passage d'un véhicule en accélération et à vitesse constante de 50 km/h.

La méthode de mesure du niveau de bruit de passage des véhicules de catégorie M1, selon l'ISO 362 : 2015 [14], est détaillée ci-après. Comme pour l'ISO 362 : 1998 [11], le test est réalisé sur une piste répondant aux exigences de la norme ISO 10844 [13]. L'estimation du niveau de bruit de passage L_{urban} (exprimé en dB (A)), représentative du niveau de bruit de passage d'un véhicule sous des conditions typiques d'un trafic urbain, se fait en charge partielle, *i.e.* basée sur des mesures en accélération pleine charge et à vitesse constante de 50 km/h. Concernant l'essai en accélération pleine charge, et contrairement à la méthode d'essai de l'ancienne norme ISO 362 : 1998 [11], où la vitesse à l'entrée de la piste doit être égale à 50 km/h (cf. Section 2.2.1), le conducteur doit accélérer afin que la vitesse du véhicule soit à 50 km/h au milieu de la piste d'essai PP' (cf. Figure 2.3a). Les niveaux de bruit enregistrés au niveau des deux microphones sont pondérés A puis passés en valeur globale. Les valeurs retenues correspondent à la valeur maximale lors du passage du véhicule sur la piste. Quatre essais sont réalisés consécutivement en s'assurant qu'ils se situent tous dans une plage de variation de 2 dB (A). Les niveaux de bruit correspondant aux quatre passages sont ensuite moyennés au niveau de chaque microphone, et cela pour les passages en accélération pleine charge et à vitesse constante de 50 km/h. Les plus grandes valeurs enregistrées de chaque côté sont retenues pour le calcul du niveau de bruit en charge partielle L_{urban}.

A partir de mesures et d'analyses statistiques du bruit du trafic urbain [2], une formule a été développée pour calculer le niveau de bruit L_{urban}. Cette formule dépend des deux niveaux de bruit correspondant au passage en accélération pleine charge et à vitesse constante de 50 km/h, ainsi que du rapport puissance et masse du véhicule : PMR (en kW/t) [1]. Le rapport PMR permet de calculer deux accélérations pour chaque véhicule :

— L'accélération cible en charge partielle a_{urban} (en m/s^2) est définie comme étant l'accélération type dans un milieu urbain. Cette dernière est obtenue à partir de recherches statistiques. Son équation en fonction du PMR du véhicule, est donnée par [2] :

$$a_{urban} = 0.63 \log PMR - 0.09 \tag{2.1}$$

— L'accélération de référence en pleine charge $a_{wot\ ref}$ (en m/s^2), est définie comme étant

1. PMR : Power to Mass Ratio index. Il est défini par : $PMR = \frac{P_n}{m_{ro}} \times 1000$
où P_n est la puissance du véhicule (en kW). m_{ro} (Mass of vehicle in Running Order) est la masse du véhicule (en kg). Elle représente la masse du véhicule avec son réservoir de carburant rempli au moins à 90% de sa capacité, ainsi que la masse du conducteur fixée à 75kg.

l'accélération exigée lors du test en pleine charge sur la piste d'essai. Elle est donnée en fonction du PMR du véhicule [2] :

$$a_{wot\ ref} = 1.59 \log PMR - 1.41 \quad si \quad PMR \geq 25 \tag{2.2}$$

ou

$$a_{wot\ ref} = 0.63 \log PMR - 0.09 \quad si \quad PMR < 25 \tag{2.3}$$

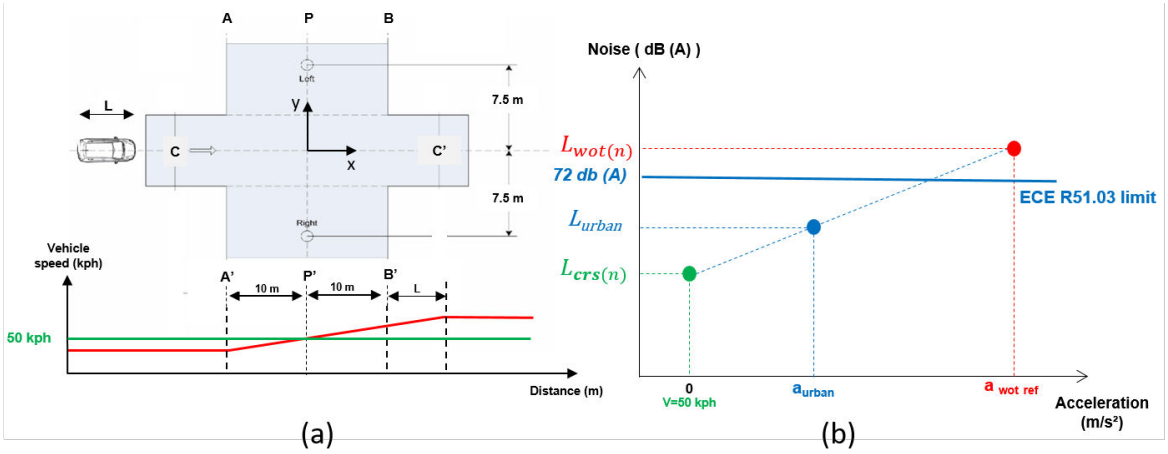


FIGURE 2.3 – Estimation du niveau de bruit L_{urban} selon le nouveau règlement ECE R51.03

2.2.2.1 Dans le cas d'un seul rapport de vitesse

Si un rapport spécifique de vitesse (n) donne une accélération comprise dans un intervalle de tolérance de ±5 % de l'accélération de référence en pleine charge $a_{wot\ ref}$, et ne dépassant pas 2 m/s^2, alors ce rapport sera choisi pour réaliser le test. Le niveau de bruit de passage L_{urban} est calculé en réalisant une interpolation linéaire entre les deux niveaux sonores enregistrés (cf. Figure 2.3b) :

$$L_{urban} = L_{wot(n)} - K_p(L_{wot(n)} - L_{crs(n)}) \tag{2.4}$$

où $L_{wot(n)}$ et $L_{crs(n)}$ (exprimés en dB (A)) représentent respectivement les niveaux de pression sonore correspondant à l'accélération du véhicule en pleine charge $a_{wot(n)}$ (en m/s^2) et à vitesse constante de 50 km/h pour le rapport de vitesse (n). Le facteur de puissance partielle K_p, aussi appelé "Partial Power Factor" en anglais, représente une quantité numérique sans dimension. Il est utilisé pour interpoler les résultats du test d'accélération en pleine charge

et à vitesse constante du véhicule. Ce facteur est donné par l'équation suivante [2] :

$$K_p = 1 - \frac{a_{urban}}{a_{wot(n)}} \tag{2.5}$$

2.2.2.2 Dans le cas de deux rapports de vitesse

Dans la plupart des cas, aucun rapport de boîte ne permet d'approcher l'accélération de référence en pleine charge $a_{wot\ ref}$. Dans ce cas-là, l'accélération $a_{wot\ ref}$ est encadrée par les accélérations des deux rapports de boîte les plus proches : $a_{wot(n)}$ et $a_{wot(n+1)}$ [2] (cf. Figure 2.4). Le niveau de bruit de passage L_{urban} est calculé de la manière suivante [2] :

$$L_{urban} = L_{wot\ rep} - K_p(L_{wot\ rep} - L_{crs\ rep}) \tag{2.6}$$

où $L_{wot\ rep}$ et $L_{crs\ rep}$ (en dB (A)) correspondent respectivement à l'interpolation linéaire entre les deux niveaux de pression sonore du rapport de vitesse (n) et (n+1), en accélération pleine charge $a_{wot\ ref}$ et à vitesse constante de 50 km/h. Ils sont donnés par les équations suivantes [2] :

$$L_{wot\ rep} = L_{wot(n+1)} + K(L_{wot(n)} - L_{wot(n+1)}) \tag{2.7}$$

$$L_{crs\ rep} = L_{crs(n+1)} + K(L_{crs(n)} - L_{crs(n+1)}) \tag{2.8}$$

où $L_{wot(n)}$ et $L_{wot(n+1)}$ (en dB (A)) représentent respectivement les niveaux de pression sonore correspondant aux accélérations $a_{wot(n)}$ et $a_{wot(n+1)}$, et où $L_{crs(n)}$ et $L_{crs(n+1)}$ (en dB (A)) représentent respectivement les niveaux de pression sonore correspondant aux passages à vitesse constante pour le rapport (n) et (n+1). K est le facteur de rapport de boîte de vitesse, ou "gear ratio weighting factor" en anglais. Il permet d'interpoler linéairement les résultats des deux rapports de vitesse, comme illustré sur la Figure 2.4. Le facteur K est donné par la relation suivante [2] :

$$K = \frac{a_{wot\ ref} - a_{wot(n+1)}}{a_{wot(n)} - a_{wot(n+1)}} \tag{2.9}$$

Dans le cas de deux rapports de vitesse, le facteur de puissance partielle K_p, est donné par l'équation suivante [2] :

$$K_p = 1 - \frac{a_{urban}}{a_{wot\ ref}} \tag{2.10}$$

2. Si la valeur de l'accélération du rapport de boîte (n) dépasse les 2 m/s^2, c'est le rapport (n+1) qui sera utilisé pour le test. Cependant, si l'accélération du rapport (n+1) est inférieure à l'accélération cible a_{urban}, dans ce cas-là, les deux rapports (n) et (n+1) sont utilisés.

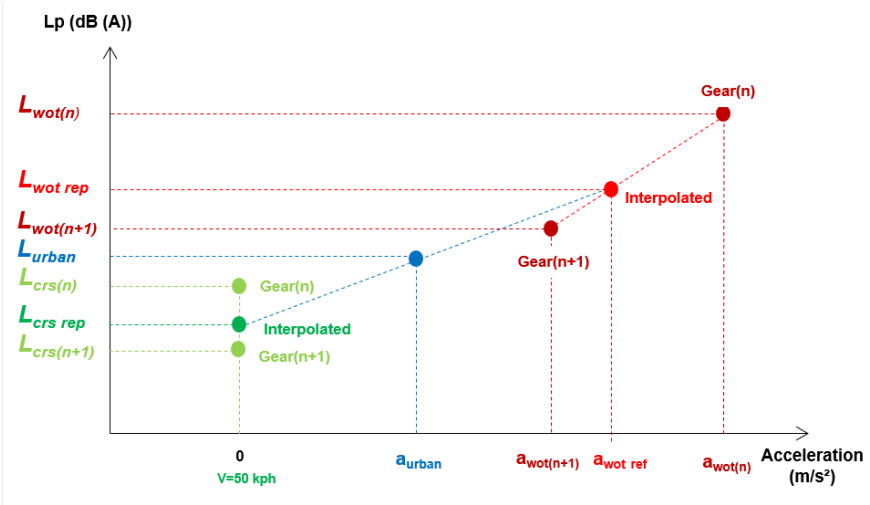


FIGURE 2.4 – Estimation du niveau sonore L_{urban} dans le cas de deux rapports de vitesse selon ECE R51.03

2.2.3 Calendrier d'exécution du règlement

Pour les véhicules de catégorie M1 par exemple, la diminution drastique des niveaux sonores se fera en trois étapes pour passer de 74 dB (A) sous l'ancien règlement ECE R51.02 [3], à 68 dB (A) en 2024. Les trois étapes se dérouleront comme suit : un passage de 74 à 72 dB (A) en 2016. Ensuite, un passage à 70 dB (A) pour les nouveaux modèles en 2020 et pour tous les véhicules en 2022. Et enfin, une sévérisation de 2 dB (A) pour les nouveaux modèles en 2024 et pour tous les véhicules en 2026. La Figure 2.5 illustre le calendrier d'application du nouveau règlement de la commission économique pour l'Europe ECE R51.03, et la Table 2.1 présente les limites admissibles pour différentes catégories de véhicules [3].

3. Les véhicules de catégorie M sont des véhicules routiers ayant au moins quatre roues et utilisés pour le transport de passagers.
Catégorie M1 : véhicules utilisés pour le transport de passagers n'ayant pas plus de huit sièges en plus du siège du conducteur.
Catégorie M2 : véhicules utilisés pour le transport de passagers ayant plus de huit sièges en plus du siège du conducteur, et ayant une masse maximale qui ne dépasse pas 5000 kg.
Les véhicules de catégorie N sont des véhicules routiers ayant au moins quatre roues et utilisés pour le transport de marchandises.
Catégorie N1 : véhicules utilisés pour le transport de marchandises ayant une masse maximale autorisée n'excédant pas 3500 kg.

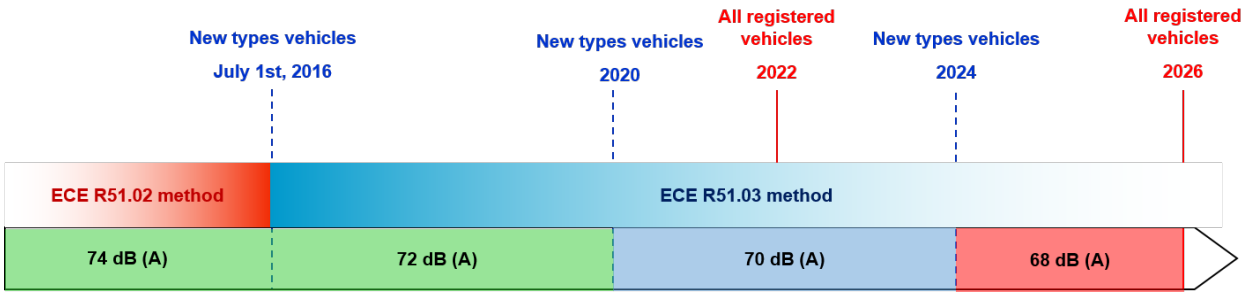


FIGURE 2.5 – Le calendrier d'application du nouveau règlement ECE R51.03

Catégorie véhicule	Véhicules utilisés pour le transport de passagers	Phase 1	Phase 2	Phase 3
M1	$PMR \leq 120$	72	70	68
	$120 < PMR \leq 160$	73	71	69
	$PMR > 160$	75	73	71
M2	$Masse \leq 2.5\ t$	72	70	69
	$2.5\ t < Masse \leq 3.5\ t$	74	72	71
	$Masse > 3.5\ t\ et\ P_n \leq 135\ kW$	75	73	72
	$Masse > 3.5\ t\ et\ P_n > 135\ kW$	75	74	72
Catégorie véhicule	Véhicules utilisés pour le transport de marchandises	Phase 1	Phase 2	Phase 3
N1	$Masse \leq 2.5\ t$	72	71	69
	$Masse > 2.5\ t$	74	73	71

TABLE 2.1 – Les limites admissibles pour différentes catégories de véhicules selon le nouveau règlement ECE R51.03

2.3 Caractéristiques des sources et leurs influences sur le bruit extérieur

Plusieurs sources sont à l'origine du bruit de passage des véhicules automobiles ; cependant, leur importance relative diffère. Certaines sources ne sont pas assez énergétiques pour se propager à l'extérieur, ou leur contribution est négligeable pour certaines vitesses et conditions de passage du véhicule, comme par exemple le bruit aérodynamique, qui devient sensible au-delà de 100 km/h [15]. Les sources de bruit les plus influentes sur le niveau de bruit de passage des véhicules automobiles (cf. Figure 2.6) correspondent aux bruits du groupe moto-propulseur (qui comprend le moteur et la boîte de vitesses), le bruit de bouche d'admission, le bruit de bouche d'échappement et le rayonnement des volumes d'échappement et le bruit de contact pneumatique/chaussée.

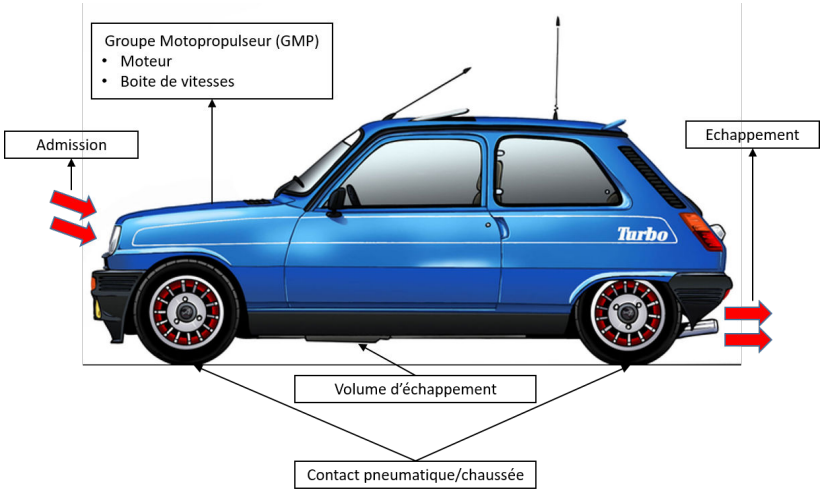


FIGURE 2.6 – Les sources sonores les plus influentes sur le bruit extérieur des véhicules automobiles

La Figure 2.7 illustre la contribution des différentes sources au niveau de bruit extérieur total du véhicule. La contribution de chaque source est obtenue en utilisant une méthode de masquage des sources sur un véhicule de segment B équipé d'un moteur essence. Les essais sont réalisés avec le 3ème rapport de vitesse engagé. La figure à gauche correspond au passage réalisé en accélération pleine charge, et celle à droite correspond à l'essai à vitesse constante de 50 km/h. Nous pouvons remarquer que les deux sources prédominantes sur le niveau de bruit de passage correspondent au groupe motopropulseur et le contact pneumatique/chaussée. Néanmoins, leur importance diffère selon la configuration de l'essai. En effet, le bruit moteur est plus important lors de l'essai en accélération pleine charge, alors que le bruit de roulement est le plus influent lorsqu'il s'agit du passage à vitesse constante. Nous remarquons également que, selon la configuration de passage, la valeur maximale qui sera utilisée pour le calcul du niveau L_{urban} se trouve à différentes positions du véhicule sur la piste. Nous pouvons constater que le niveau de bruit est maximal lorsque l'avant du véhicule se trouve à +8,4 m pour le passage en accélération pleine charge. Cela est dû au rayonnement moteur qui est prédominant dans cette configuration, et qui augmente avec le régime moteur, et donc avec le déplacement du véhicule sur la piste. Concernant le passage à vitesse constante, la valeur maximale du niveau de bruit se trouve à 1,6 m. Cela s'explique par le fait que le niveau de bruit du contact pneumatique/chaussée augmente, puis diminue au-delà d'un certain seuil en fonction de la position du véhicule sur la piste. Nous détaillerons ci-après les caractéristiques des sources de bruit les plus influentes sur le niveau de bruit extérieur total.

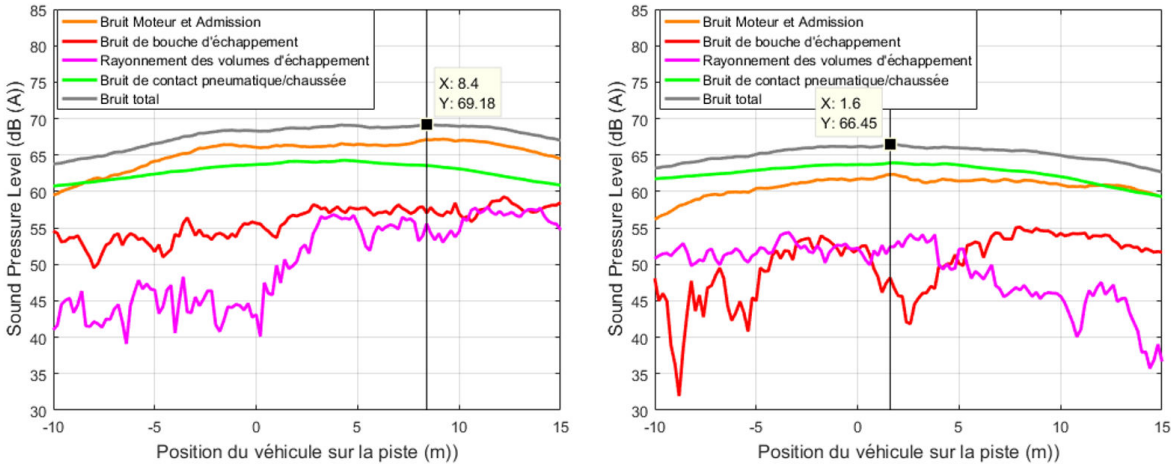


FIGURE 2.7 – Contribution des différentes sources au niveau de bruit extérieur total du véhicule. A gauche : essai en pleine charge. A droite : essai à vitesse constante de 50 km/h.

2.3.1 Bruit du groupe motopropulseur

L'association de plus en plus compacte du moteur et de la boîte de vitesse font qu'un certain nombre de phénomènes vibratoires ne peuvent être étudiés que sur l'ensemble moteur /boîte de vitesse, aussi appelé : groupe moteur propulseur (GMP). C'est un organe essentiel dans un véhicule automobile. En effet, c'est lui qui sert à fournir l'énergie nécessaire permettant aux roues de la voiture de tourner. Il est également l'une des principales sources de bruit de passage des véhicules. En effet, le bruit du groupe motopropulseur est dû aux forces internes d'explosions et aux forces internes d'inertie. Ces phénomènes excitent le carter-cylindres ainsi que les autres carters, notamment le bac à huile et la culasse qui ont une contribution élevée au rayonnement acoustique total du moteur [16; 17] (le bruit provenant du bas du moteur peut contribuer de manière significative au rayonnement du bruit total). Les combustions successives dans les cylindres génèrent une variation de la force et du couple transmis autour de leur valeur moyenne. Ces irrégularités ont des composantes principales aux fréquences correspondant au cycle moteur et à ses harmoniques. En effet, un moteur en fonctionnement tournant à un certain régime génère un signal harmonique. En regardant le cycle d'un moteur à 4 temps, on observe qu'une combustion a lieu tous les deux tours du moteur. Par exemple, les moteurs à quatre cylindres font fonctionner l'ensemble de leurs cylindres tous les deux tours, c'est pourquoi on parle d'excitation du deuxième harmonique (H2). L'importance relative des différentes harmoniques dépend alors du nombre de cylindres utilisés et de leurs dispositions (en ligne, en V, en W...). Le niveau de bruit du groupe motopropulseur dépend alors essentiellement de la vitesse de rotation du moteur

N_e, ainsi que de la charge du moteur, qui permet de déterminer le couple moteur développé. D'autres paramètres comme la taille du moteur et la forme interne peuvent également être importants [16]. Il faut également souligner que, pour une vitesse donnée du véhicule (par exemple 50 km/h), le régime et la charge moteur dépendent du rapport de boîte de vitesses du véhicule, ainsi que d'autres paramètres tels que la masse embarquée. Le niveau de bruit du groupe motopropulseur mesuré à 1 m de sa face avant est illustré sur la Figure 2.8 ci-dessous.

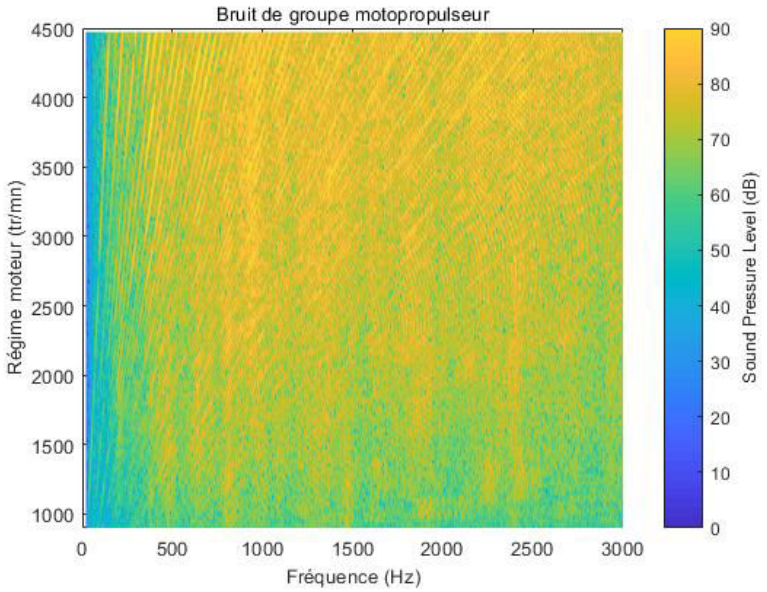


FIGURE 2.8 – Bruit du groupe motopropulseur mesuré à 1 m de sa face avant

2.3.2 Bruit de bouche d'admission

Le bruit de bouche d'admission est dû aux pulsations de pression d'air lors de l'ouverture et de la fermeture des soupapes d'admission, qui sont rayonnées directement par voie aérienne. Ces ouvertures et fermetures périodiques des soupapes génèrent une pulsation de pression à la bouche dont les composantes principales sont les harmoniques du cycle de combustion (donc basses fréquences). Ce niveau de bruit augmente avec la charge du moteur, et notamment lorsque le véhicule est en pleine charge, ce qui est le cas lors du passage de norme en bruit extérieur. En haute fréquence, il est enrichi d'un bruit provoqué par les turbulences dans l'écoulement à grande vitesse [18]. Ce bruit est appelé bruit de souffle d'admission. Ses caractéristiques sont illustrées sur la Figure 2.9 qui présente les spectres du bruit d'admission en fonction du régime moteur, mesurés à 8 cm de la canule. On remarque, en effet, une forte

amplitude en basse fréquence liée aux harmoniques moteur, puis un bruit large bande au-delà de 400 Hz correspondant aux turbulences dans l'écoulement à grande vitesse.

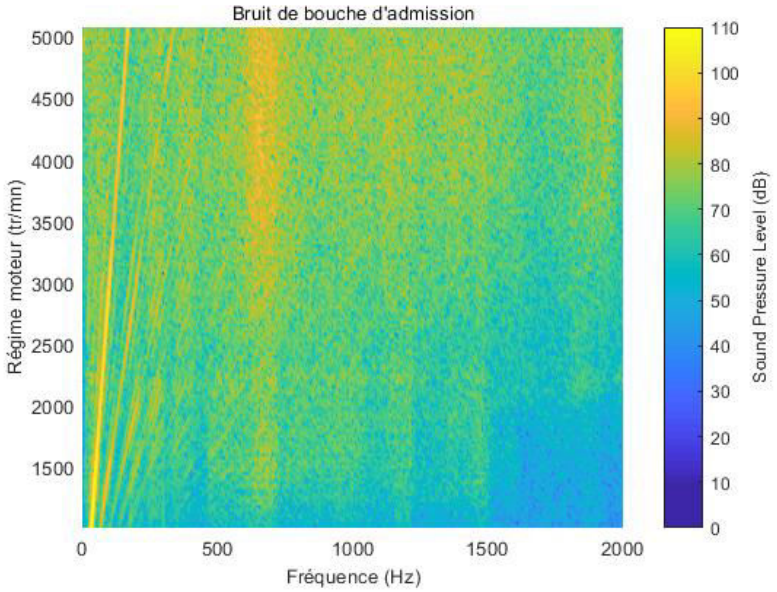


FIGURE 2.9 – Bruit de bouche d'admission mesuré à une distance de 8 cm de la canule

2.3.3 Bruit de bouche d'échappement et du rayonnement des volumes d'échappement

Les systèmes d'admission et d'échappement représentent des sources de bruit de caractéristiques similaires, qui contribuent de manière significative au niveau de bruit extérieur du véhicule. En effet, les bruits d'échappement des gaz ont pour origine la brusque détente de ces derniers lors de l'ouverture de la valve de sortie. Sans silencieux, ces sources seraient prédominantes sur l'ensemble des autres sources du véhicule [19]. Le débit d'air en sortie d'échappement n'est pas constant car il varie en fonction de l'ouverture et de la fermeture des soupapes d'échappement. Comme pour l'admission, le bruit de bouche d'échappement est chargé d'harmoniques correspondant au cycle de combustion en basse fréquence, et enrichi par le bruit de souffle d'échappement en haute fréquence. Ce dernier peut contribuer de manière significative au niveau total du bruit de passage du véhicule [9; 20]. La Figure 2.10 illustre les caractéristiques du bruit de bouche d'échappement mesuré à 15 cm de la canule. On remarque une similitude avec le bruit de bouche d'admission (cf. Figure 2.9), avec un bruit harmonique en basse fréquence enrichi par un bruit large bande correspondant au bruit de souffle d'échappement au-delà de 400 Hz.

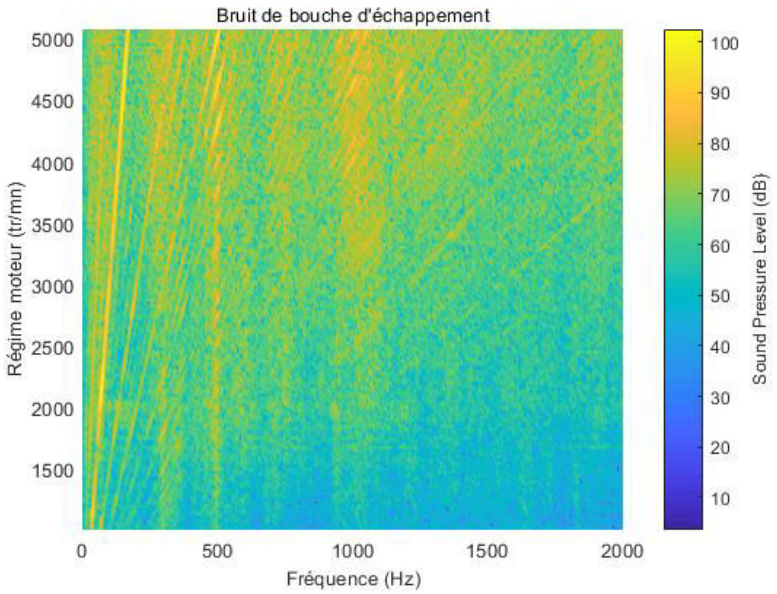


FIGURE 2.10 – Bruit de bouche d'échappement mesuré à une distance de 15 cm de la canule

Le rayonnement des volumes d'échappement peut aussi avoir un effet significatif sur le niveau de bruit de passage d'un véhicule. En effet, les volumes et la ligne d'échappement sont soumis aux pulsations de pression causées par l'écoulement des gaz et aux vibrations solides du groupe motopropulseur auquel ils sont reliés. Les parois des volumes sont donc soumises à des vibrations d'origine double, gazeuse et mécanique. Leurs modes propres amplifient ces vibrations et les transforment en bruit rayonné [18].

2.3.4 Bruit de contact pneumatique/chaussée

La nouvelle procédure d'essai décrite dans l'ISO 362 : 2015 [14] consiste à évaluer l'émission sonore représentative d'un véhicule sous des conditions typiques d'un trafic urbain. Cette nouvelle méthode consiste à combiner le niveau maximal du bruit de passage d'un véhicule en accélération et à vitesse constante de 50 km/h. Pour cette raison, le bruit de contact pneumatique/chaussée prend une place importante dans le respect du nouveau règlement. Cependant, si les constructeurs automobiles ont réussi progressivement à réduire les autres sources de bruit durant les dernières décennies [21], le bruit de contact pneumatique/chaussée n'a pas connu une aussi forte amélioration [9]. Cela est lié d'un côté à la complexité du pneumatique et de la chaussée, et d'un autre côté au risque de compromettre les autres propriétés (adhérence, durabilité, consommation,...). Le bruit de contact pneumatique/chaussée est la conséquence de trois mécanismes physiques complexes. Ils sont divisés en trois catégories (cf. Figure 2.11 [22]) : les mécanismes mécaniques qui sont prédominants jusqu'à 1000 Hz, les

mécanismes aérodynamiques au-delà de 1000 Hz, et enfin, les mécanismes d'amplification sur toute la gamme d'émission. Pour plus d'informations sur les mécanismes générateurs du bruit de contact pneumatique/chaussée, le lecteur peut se référer à l'ouvrage de U. Sandberg et J.A. Ejsmont [23].

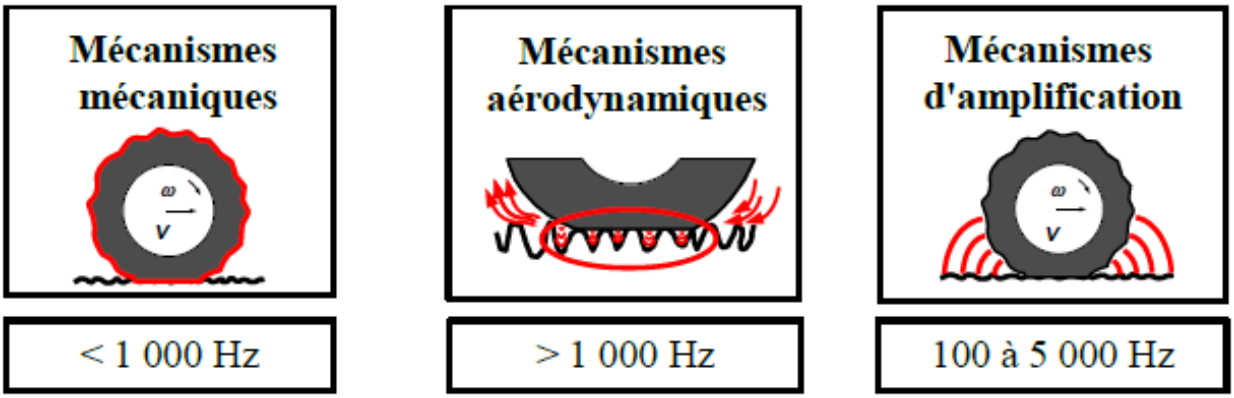


FIGURE 2.11 – Les principaux mécanismes générateurs de bruit de roulement [22]

Plusieurs paramètres peuvent agir sur le niveau de bruit de contact pneumatique/chaussée. Parmi ces paramètres, la vitesse du véhicule représente le paramètre opérationnel le plus influent [22]. On retrouve dans la littérature, une relation empirique qui lie le niveau de bruit de contact pneumatique/chaussée au logarithme décimal de la vitesse [23]. Cette formule est de la forme :

$$L_{pc} \;=\; A_p \log(\frac{V}{50}) + B_p \tag{2.11}$$

où L_{pc} (en dB (A)) représente le niveau de bruit global du pneumatique . A_p et B_p sont des constantes qui dépendent du pneumatique et de la position du véhicule sur la piste, et V représente la vitesse du véhicule en km/h.

Un autre facteur peut jouer un rôle considérable sur le niveau de bruit de contact pneumatique/chaussée. Il s'agit des forces tangentielles sur le pneu [23]. Celles-ci se produisent lors des virages, du freinage ou lorsque le conducteur change de vitesse. Concernant la mesure du niveau de bruit de passage des véhicule selon la nouvelle norme ECE R51.03 [2], il est nécessaire de réaliser des tests en accélération pleine charge. Les roues subissent alors une force motrice (un couple) élevée provoquant ainsi un glissement entre la bande de roulement du pneu et la surface de la route. Ainsi, le couple agissant sur un pneu a tendance à augmenter considérablement le niveau de bruit de contact pneumatique/chaussée. La Figure 2.12 présente la différence entre la contribution du pneumatique à vitesse constante de 50 km/h, et en accélération, en fonction de la position du véhicule sur la piste d'essai. Pour obtenir

uniquement le niveau de bruit lié au contact pneu/chaussée, la mesure a été réalisée sur un véhicule électrique dont le moteur a été complètement encapsulé. Nous remarquons une nette différence entre les deux configurations, avec un écart qui peut atteindre plus de 3 dB (A) en sortie de piste.

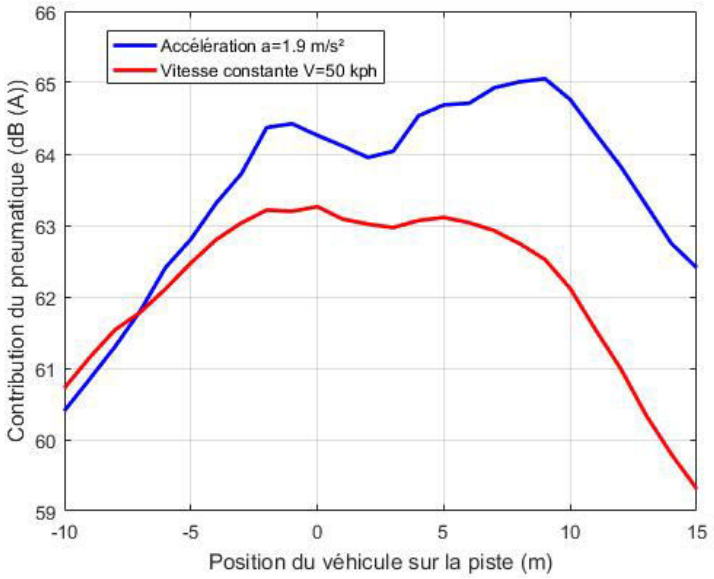


FIGURE 2.12 – Contribution du pneumatique à vitesse constante et en accélération

Les paramètres environnementaux sont aussi des paramètres influents sur le niveau de bruit de contact pneumatique/chaussée. Nous pouvons citer par exemple la température, le vent ou encore l'humidité. D'autres paramètres liés au pneumatique peuvent également avoir un effet significatif sur le niveau de bruit [23], comme par exemple les paramètres géométriques (diamètre, largeur, hauteur des flancs), l'équilibrage du pneu et les irrégularités de la forme, les sculptures de la bande de roulement , les propriétés de la gomme, de la bande de roulement et du flanc, la structure de la ceinture et de la carcasse et enfin, la pression de gonflement des pneus. Bien que le pneu émette du bruit, l'effet de la structure de la chaussée ne doit pas être négligé. En effet, le bruit de contact pneumatique/chaussée est le résultat de l'interaction entre le pneu et le revêtement routier. C'est pourquoi, le type de chaussée influe aussi sur le niveau de bruit émis. Les revêtements caractérisés par une forte porosité et une forte communication entre les vides offrent les meilleures qualités acoustiques [19].

La plupart des spectres de bruit de contact pneumatique/chaussée présentent un bruit large bande avec un pic prononcé dans la gamme de fréquence 700-1300 Hz [23]. Les spectres de bruit du pneumatique sont illustrés sur la Figure 2.13 et cela pour les différentes positions du véhicules sur la piste d'essai, et pour une vitesse du véhicule de 50 km/h. Nous remarquons

que le bruit de contact pneumatique/chaussée présenté sur cette figure représente un bruit large bande avec un maximum autour de 1000 Hz.

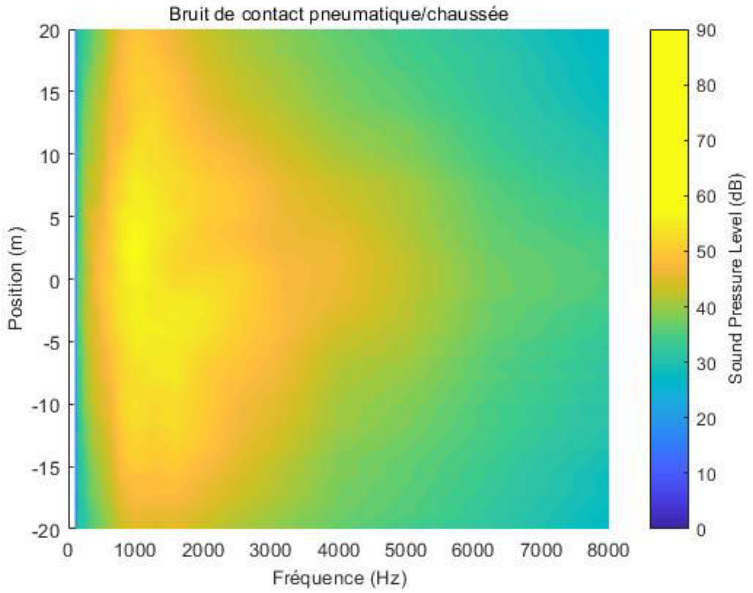


FIGURE 2.13 – Bruit de contact pneumatique/chaussée mesuré à 7.5 m sur un véhicule électrique avec le moteur encapsulé

2.4 Méthodes existantes pour la prévision du niveau de bruit de passage

Plusieurs méthodes pour la prévision du niveau de bruit de passage des véhicules automobiles sont disponibles dans la littérature. Le but est de prévoir le niveau acoustique que peut émettre un véhicule dans les conditions de passage définies dans l'ISO 362 :2015 [14]. Parmi ces méthodes, on retrouve la méthode basée sur la simulation en intérieur du bruit de passage. Cette méthode consiste à simuler sur un banc à rouleaux semi-anéchoïque le bruit de passage d'un véhicule, comme le préconisent les essais réglementaires, et cela en utilisant une rangée de microphones qui se trouvent à 7.5 m de la ligne centrale du banc, et à 1.2 m de hauteur, sans dépendance des conditions météorologiques. Les méthodes expérimentales consistent à combiner séparément la puissance de chaque source de bruit influente sur le niveau de bruit de passage, avec le transfert lié à la propagation acoustique extérieure, tout en reproduisant les mêmes conditions de passage réel du véhicule. Cette méthode donne des détails sur la contribution de chaque source au niveau de bruit de passage total. Et enfin, les méthodes numériques basées sur le calcul des transferts liés à la propagation acoustique

permettent de prévoir le niveau de bruit de passage d'un véhicule plus tôt dans le cycle de développement véhicule. Ces méthodes ne dépendent donc pas des prototypes physiques. Les méthodes de prévision du niveau de bruit de passage des véhicules automobiles sont détaillées ci-après.

2.4.1 Essais en intérieur

La mesure en intérieur du niveau de bruit de passage des véhicules automobiles est décrite dans la troisième partie de l'ISO 362 :2016 [24] pour garantir la comparabilité entre les pistes d'essai et les bancs à rouleaux. En effet, cela réduit les erreurs de mesure systématiques et rapproche plus précisément le résultat expérimental du test de bruit au passage réel. Le banc d'essai de bruit en intérieur représente un moyen efficace pour la prévision du niveau de bruit de passage des véhicules, car il est utilisable durant toute l'année, quelles que soient les conditions météorologiques et les autres facteurs externes. Le véhicule est mis sur un banc à rouleaux dans une chambre semi-anéchoïque pour simuler un champ semi-ouvert sur un plan réfléchissant, comme illustré sur la Figure 2.14. La chambre est généralement suffisamment grande pour couvrir la zone d'essai du bruit de passage. Le banc est équipé d'une rangée de microphones qui se trouvent à une distance de 7.5 m de la ligne centrale, et à 1.2 m de hauteur. Ces microphones servent à enregistrer le niveau de bruit rayonné par le véhicule, tandis que le banc à rouleaux permet de simuler les conditions de passage comme spécifiées dans le standard ISO 362 :2015 [14].

FIGURE 2.14 – Simulation en intérieur sur le banc à rouleau de l'UTAC CERAM [4]

4. UTAC CERAM est un groupe privé français spécialisé dans les domaines de la mobilité terrestre : `http://www.utacceram.com/fr/`.
UTAC : Union technique de l'Automobile, du motocycle et du Cycle.
CERAM : Centre d'Essais et de Recherche Appliqué à la Mobilité.

2.4.2 Prévision par combinaison de sources et de transfert acoustiques

La prévision du niveau de bruit de passage repose dans ce cas sur un modèle simple de source-transfert-récepteur [15; 25; 26] connu aussi sous le nom de la méthode TPA (Transfer Path Analysis). Cette technique permet de recomposer le niveau total du bruit de passage d'un véhicule à partir de la contribution de chaque source de bruit séparément. La contribution de chaque source est obtenue en combinant son débit acoustique avec le transfert extérieur. Cette méthode sert d'abord à reproduire le niveau total du bruit de passage d'un véhicule, mais aussi à établir un classement des sources et à analyser séparément leur contribution au bruit total. On peut ainsi définir une cible de niveau de bruit pour chaque source, en agissant sur la source par modification de la structure ou sur le transfert acoustique par ajout de traitements absorbants ou isolants. Une autre méthode classique permettant de donner ce type de résultats consiste à modifier ou à isoler les sources de bruit potentielles lors du passage du véhicule. Cette technique de masquage est une méthode très longue à mettre en oeuvre, car il faut beaucoup de temps pour préparer et mesurer le niveau de bruit du véhicule dans les différentes configurations. De plus, le masquage peut provoquer de légères modifications des températures de fonctionnement et avoir un impact sur le niveau de bruit au passage du véhicule. C'est pour cela que la méthode de masquage est souvent remplacée par d'autres techniques telles que celles qui sont présentées dans ce document de thèse [26].

Bien que la méthode TPA basée sur la combinaison de sources et de transferts acoustiques ait initialement été développée pour l'analyse de la transmission du bruit par la structure, son champ d'application a été étendu au bruit aérien [27]. Pour cela, il est nécessaire de quantifier le débit acoustique de toutes les sources citées dans la Section 2.3, et leurs fonctions de transfert en milieu extérieur. Ces transferts décrivent le chemin entre la source et le récepteur qui se trouve à 7.5 m de l'axe de la piste d'essai, et à 1.2 m de hauteur. Les sources de bruit sont discrétisées en sources ponctuelles cohérentes participant au rayonnement total. Par exemple, on peut imaginer la surface d'un moteur comme un ensemble de sous-surfaces vibrantes représentées par des monopôles omnidirectionnels corrélés [26]. L'information de phase est alors nécessaire. Pour cela, un critère d'un espacement inférieur à la moitié de la longueur d'onde acoustique doit être respecté. La somme de la combinaison des débits acoustiques des sources avec les transferts acoustiques donne une quantité qui est supposée être l'équivalent de la pression acoustique totale. On écrit donc le niveau de pression acoustique au point récepteur j comme suit :

$$P_j(\omega) \;=\; \sum_{i=1}^{k} \dot{Q}_i(\omega) \;.\; TF_{ij}(\omega) \tag{2.12}$$

où $\dot{Q}_i = \omega.Q_i$ étant le débit d'accélération volumique associé à la source i (exprimé en $\mathrm{m}^3/\mathrm{s}^2$) et ω (en rad/s) étant la pulsation. k correspond au nombre de sources. P_j (en Pa) est la pression acoustique au point de mesure j, et enfin TF_{ij} (exprimé en $Pa.m^{-3}.s^2$) représente la fonction de transfert entre la source i et le point de mesure j.

Cependant, le critère d'un espacement des sources inférieur à la moitié de la longueur d'onde acoustique impose une limitation fréquentielle très sévère, car la discrétisation en sources ponctuelles devient très dense en hautes fréquences. En plus, l'estimation des débits acoustiques des sources devient très sensible aux erreurs de phase [26]. Pour surmonter ces limites, une autre approche a été développée. Elle suppose que les sources ponctuelles sont non corrélées, en faisant abstraction des informations liées à leur phase. Avec une telle approche, il est possible de créer des zones de surface plus grandes qui sont représentées par un débit acoustique moyen [26]. Ces sources sont supposées rayonner du bruit, tandis que les surfaces sont supposées rigides, maintenant la géométrie de la structure [28]. Cela implique que le nombre de microphones utilisés pour quantifier le débit acoustique des sources peut être réduit de manière significative (à un microphone par face moteur par exemple) sans compromettre la qualité du signal prédit [9; 29]. La pression acoustique est recomposée comme suit [26] :

$$P_j^2(\omega) \;=\; \sum_{i=1}^{k} \dot{Q}_i^{\,2}(\omega)\;.\;TF_{ij}^2(\omega) \tag{2.13}$$

Bien que cette méthode soit plus facile à mettre en œuvre, l'hypothèse liée à la décorrélation des sources implique des limites. En effet, toutes les grandeurs mesurées sont des énergies (des niveaux d'intensités acoustiques). Cependant, il est clair que cette hypothèse n'est pas vérifiée en basse fréquence. Le niveau de bruit recomposé sera donc surestimé du fait de l'addition des sources sans leur phase. Sur la source moteur par exemple, cette méthode devient valide quand l'information de phase n'est plus nécessaire, c'est-à-dire, lorsque le caractère modal disparaît. Aussi, le remplacement des sources de bruit réelles par un nombre limité de sources ponctuelles non corrélées n'est peut-être pas idéal, car la structure dans son ensemble émet un son [9]. Malgré cela, les résultats de prévision examinés indiquent que la méthode présente une approximation acceptable pour le niveau de bruit de passage [9].

Par ailleurs, le rayonnement acoustique des sources ainsi que les fonctions de transfert changent constamment pendant l'essai. Cela doit être pris en compte dans les modèles de prévision du niveau de bruit de passage. Effectivement, la contribution de chaque source de bruit varie en fonction des conditions de passage du véhicule sur la piste d'essai. Le rayonnement des sources dépend essentiellement du régime moteur, tandis que les transferts acoustiques dépendent de la position du véhicule sur la piste. Le bruit émis par chaque source est calculé à des positions discrètes sur toute la longueur de la piste d'essai, en combinant la

fonction de transfert mesurée, à cette position-là, avec le débit acoustique de la source qui dépend essentiellement du régime moteur [9]. Le niveau de bruit total est ensuite recomposé pour chaque position du véhicule sur la piste en réalisant une somme quadratique de toutes les contributions comme illustré dans l'Eq. (2.13). Le niveau de pression acoustique global du spectre de bruit obtenu donne le niveau global de bruit de passage à cette position particulière [9].

Pour évaluer le niveau de bruit de passage d'un véhicule automobile, la quantification du débit acoustique des sources ainsi que les fonctions de transfert est alors nécessaire. Le débit acoustique des sources de bruit est généralement mesuré, comme détaillé dans la Section 2.4.2.1 ci-dessous. Cependant, les transferts acoustiques peuvent être directement mesurés, ou bien calculés en utilisant différentes méthodes. Cette partie sera décrite en détail dans la Section 2.4.2.2 et 2.4.2.3. Pour plus de détails concernant la quantification du débit acoustique des sources et des fonctions de transfert, le lecteur peut se référer à l'article de Braun et al. [9].

2.4.2.1 Quantification expérimentale du débit acoustique

Les sources de bruit sont d'abord discrétisées en sous-surfaces représentées par des sources ponctuelles non cohérentes participant au rayonnement total. Le débit acoustique de chaque source ponctuelle est obtenu indirectement par des mesures de la pression acoustique en champs proche de ces sources de bruit. Cela consiste à multiplier la pression acoustique mesurée en champ proche, par l'inverse des fonctions de transfert entre les positions des microphones et les sources ponctuelles, comme illustré sur l'Eq. (2.14) [26] :

$$\{\dot{Q}_i^2(\omega)\} \;=\; [H_{ti}^2(\omega)]^{-1} \,.\, \{P_t^2(\omega)\} \tag{2.14}$$

où P_t (en Pa) étant la pression acoustique au point de mesure en champs proche t, et H_{ti} (exprimé en Pa.m^{-3}.s^2) la fonction de transfert locale entre la source et le récepteur.

La mesure des fonctions de transfert peut être réalisée par une approche directe, ou par réciprocité [28]. D'abord, la méthode directe consiste à placer une source sonore calibrée à débit connu sur la sous-surface de la source de bruit réelle, et un microphone positionné à quelques centimètres de cette dernière, censé mesurer la pression acoustique émise. Ensuite, pour faciliter la mesure dans les zones difficiles d'accès, le principe de réciprocité est souvent utilisé. Cette méthode consiste à inverser la position du microphone et la source ponctuelle. Cependant, il est recommandé que le nombre de microphones de mesure doit être au moins deux fois supérieur au nombre de sources ponctuelles pour assurer la stabilité de l'inversion de la matrice [26; 29].

Le débit acoustique des sources de bruit peut également être calculé en insérant les pressions acoustiques mesurées dans l'équation d'un monopôle rayonnant dans un demi-espace, qui fournit la relation entre la pression, la distance et le débit acoustique [9]. L'équation du rayonnement d'une source ponctuelle dans un demi-espace est donnée par :

$$P_t(\omega) \;=\; \frac{\rho}{2\pi r}\dot{Q}_i(\omega) \tag{2.15}$$

où r (en m) étant la distance entre la source et le récépteur, et ρ (exprimé en kg.m^{-3}) représente la masse volumique de l'air.

La quantification du débit acoustique des sources de bruit peut être réalisée avec les sources de bruit démontées du véhicule et installées sur des bancs d'essai, ou bien avec les sources de bruit assemblées sur le véhicule [9]. Dans les deux cas, les mesures sont réalisées dans les mêmes conditions de vitesse et de charge correspondant à l'essai du bruit de passage. Les mesures sont également réalisées en transitoire lors d'une montée en régime. La position du véhicule sur la piste est ensuite estimée à partir du régime moteur, des dimensions du pneumatique et du rapport de la boîte de vitesse engagé [9].

Les sources admission, échappement, volumes d'échappement ainsi que l'avant et l'arrière du pneumatique sont considérées comme des sources ponctuelles [10]. Cependant, le groupe motopropulseur, qui représente une source plus complexe, est souvent divisé en plusieurs sous-surfaces, voire une source par face moteur.

2.4.2.2 Quantification expérimentale des transferts acoustiques

La mesure des fonctions de transfert caractérise l'environnement du véhicule. Les caractéristiques du trajet de transfert comprennent les effets de l'absorption et de la diffraction du son, les réflexions de la piste et des surfaces réfléchissantes du véhicule, ainsi que l'atténuation dûe à la distance [9]. Il est préférable que la mesure soit faite dans une chambre semi-anéchoïque de manière à éviter toute perturbation extérieure qui pourrait modifier l'information enregistrée. Il faut également conserver une nature de sol permettant de reproduire au mieux les conditions de mesure sur piste. Le véhicule est à l'arrêt et le moteur ne tourne pas pendant la mesure. Il faut toutefois qu'il soit présent dans le compartiment moteur pour matérialiser les surfaces réfléchissantes. La mesure peut être réalisée par une approche directe ou réciproque [30]. Cependant, l'approche de mesure par réciprocité, qui consiste à échanger la position de la source et du récepteur, est plus simple et plus rapide à réaliser. Effectivement, une seule source sonore est requise, alors que de nombreuses sources de bruit sont nécessaires dans l'approche directe [9]. La méthode de mesure par réciprocité est donc préférable [30]. Pour la mesure réciproque, les microphones sont à l'emplacement des sources examinées :

plusieurs zones pour le groupe motopropulseur, bouche d'admission, bouche d'échappement, volumes d'échappement, et l'avant et l'arrière des quatre pneus [31]. Si la mesure est faite dans une chambre semi-anéchoïque, une source sonore calibrée à débit connu est déplacée le long d'une ligne se trouvant à 7.5 m de la ligne centrale, et à 1.2 m de hauteur, comme l'illustre la Figure 2.15. Cependant, si la mesure est réalisée directement sur la piste d'essai, la source est positionnée à la place du microphone qui sert à mesurer le niveau de bruit de passage du véhicule. La mesure est ensuite répétée plusieurs fois à différentes positions du véhicule, tout au long de la piste d'essai (généralement, avec un pas constant de 1 m).

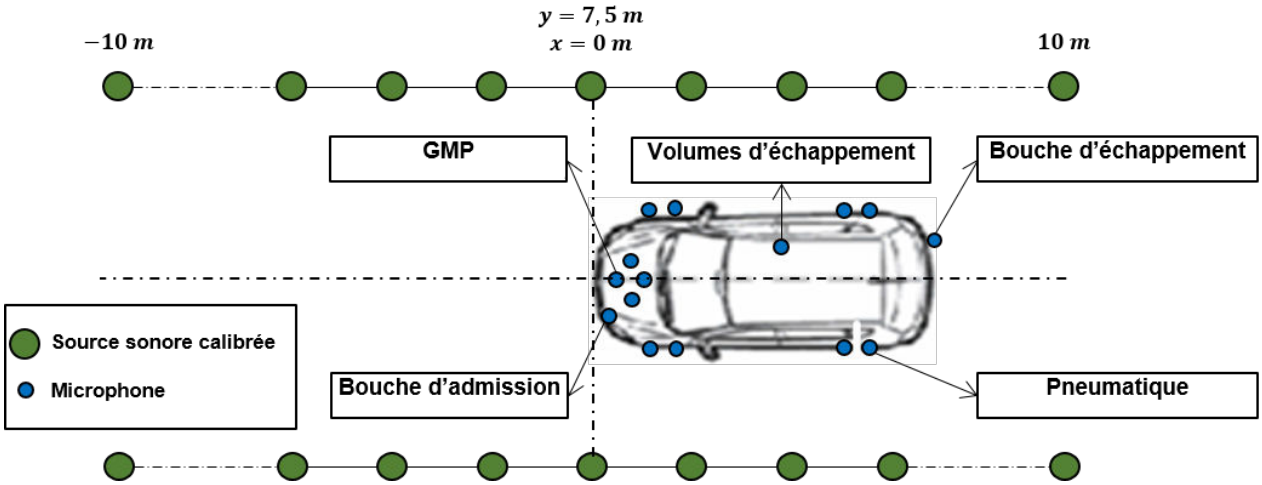


FIGURE 2.15 – Mesure des fonctions de transfert extérieures par réciprocité sur un véhicule

2.4.2.3 Estimation numérique des transferts acoustiques

Les méthodes basées sur le calcul des fonctions de transfert permettent de prévoir et d'analyser les caractéristiques du bruit de passage d'un véhicule automobile plus tôt dans son cycle de développement. Elles permettent ainsi de s'affranchir des prototypes physiques et de réduire l'effort expérimental. On peut retrouver plusieurs méthodes numériques dans la littérature. Le choix d'une méthode en réponse à une problématique donnée dépend essentiellement de la gamme de fréquence étudiée. Par exemple, la méthode des éléments de frontière (Boundary Element Method) [32] peut être utilisée pour calculer le transfert acoustique jusqu'aux microphones à 7.5 m. Elle permet de réaliser un calcul précis d'un niveau de pression acoustique à un emplacement spécifié dans l'espace à partir de l'excitation d'un milieu par une source de bruit. Toutefois, l'important coût de calcul en hautes fréquences limite son utilisation. En effet, il faut généralement au moins 6 éléments pour représenter avec précision la longueur d'onde [10; 33]. En plus, l'application au bruit de passage nécessite la modélisation

complète du véhicule, ce qui conduit à un modèle très complexe, pouvant contenir des milliers voire des millions d'éléments. Cela entraîne des limites en termes de ressources informatiques. Pour s'affranchir de ces limites, d'autres approches ont été développées. L'approche FMBEM (Fast Multipole Boundary Element Method) [34] peut être considérée comme une approche BEM optimisée permettant de réduire considérablement le temps de calcul. Elle permet de regrouper les interactions entre les degrés de libertés dans la matrice du système complet dans des groupes de champs proches et de champs lointains [34]. Les interactions entre les degrés de libertés ne sont donc pas obtenues point à point comme dans la méthode BEM, mais pour des groupes de points source-cible qui sont suffisamment éloignés les uns des autres [34]. Tous les points d'un groupe source sont rassemblés pour représenter un seul multipôle, à partir duquel le bruit est rayonné vers le groupe cible, où la pression sonore sera évaluée [9]. On retrouve une application de cette méthode pour calculer le transfert acoustique correspondant au bruit de passage des véhicules automobiles dans l'article de Huijssen et al. [34]. Une autre méthode connue sous le nom des éléments de frontière à haute fréquence (High Frequency Boundary Element Method) a également été développée. Cette approche simplifie le processus de résolution BEM en créant une relation asymptotique entre la vitesse normale à la surface et la pression, ce qui permet de réduire considérablement le temps de calcul [33; 35]. Un exemple d'application sur le bruit extérieur est illustré dans l'article de Wang et al. [33]. On retrouve également d'autres approches dans l'article de Appel de Gardane et al. [36]. Différentes méthodes sont utilisées selon la gamme de fréquence pour optimiser le temps de calcul et les ressources informatiques. La méthode d'éléments infinis (Infinit Element) est appliquée pour calculer le transfert extérieur en dessous de 630 Hz, en considérant les sources de bruit comme des monopôles acoustiques. Pour les hautes fréquences (entre 630 et 5000 Hz), la méthode APML (Adaptative Perfect Matched Layed) est utilisée. D'autres méthodes complémentaires aux méthodes type élément de frontière sont les méthodes d'acoustique géométrique qui sont basées sur des approches asymptotiques et sont valables aux moyennes et hautes fréquences. Nous citons à titre d'exemple les méthodes de tir de rayon ou de lancer de faisceaux [8; 37]. Enfin, La méthode EBEM (Energy Boundary Element Method) [7], connue aussi sous le nom de la méthode des radiosités [37], permet d'améliorer la capacité d'analyse en haute fréquence en diminuant considérablement le temps de calcul. L'hypothèse clé de cette méthode est que chaque élément EBEM rayonne le son de manière incohérente avec d'autres éléments [33]. Cela permet de réduire considérablement le nombre d'éléments par rapport à la méthode BEM classique, permettant ainsi d'optimiser le temps de simulation. Une application de la méthode EBEM sur le bruit de passage des véhicules automobiles est illustrée dans l'article de Thivant et Minck [38]. Les méthodes géométriques ainsi que la méthode EBEM ont été utilisées dans ces travaux et seront détaillées dans la Section 2.5.

2.5 Modèle de calcul du transfert acoustique du GMP utilisé dans le cadre de la thèse

Nous avons vu dans la Section 2.4.2.3 que les méthodes type éléments de frontière permettent de calculer avec précision le niveau de pression acoustique à un emplacement spécifique dans l'espace. Néanmoins, ces méthodes sont très coûteuses en temps de calcul, notamment en haute fréquence. La méthode EBEM [7; 37] permet de réduire énormément le temps de simulation en réduisant le nombre d'éléments. Cependant, cette méthode énergétique considère que les éléments rayonnent d'une façon incohérente, en faisant abstraction des informations liées à leur phase. En effet, la méthode est basée sur des échanges d'énergie (des intensités acoustiques) entre des surfaces ayant un comportement diffus [37]. C'est pour cela que cette méthode n'est valable qu'en haute fréquence, lorsque l'information de la phase n'est plus nécessaire, *i.e.* lorsque le comportement modal et les résonances dans le compartiment moteur disparaissent. Aussi, cette méthode ne prend pas en compte l'effet des interférences avec le sol, lors du calcul des transferts extérieurs. Or, à 7.5 m, les effets du sol peuvent avoir un effet considérable.

En outre, on distingue deux milieux complètement différents pour le transfert acoustique du groupe motopropulseur, comme l'illustre la Figure 2.18. D'abord, un milieu fermé dans le compartiment moteur où le champ acoustique est diffus. Ensuite, un deuxième milieu de propagation semi-ouvert, où l'onde acoustique peut avoir des interférences avec le sol. Effectivement, l'utilisation de deux méthodes pour modéliser chaque milieu de propagation est préférable. Ainsi, la méthode EBEM peut être utilisée pour modéliser le champ acoustique dans le compartiment moteur et une méthode d'acoustique géométrique pour modéliser la propagation dans un milieu semi-ouvert, et qui permet de prendre en compte l'effet des interférences avec le sol. C'est pourquoi, la méthode EBEM, les méthodes de l'acoustique géométrique, ainsi que leur chaînage sont détaillées ci-après.

2.5.1 La méthode des radiosités (EBEM)

La méthode EBEM est une technique de calcul basée sur les échanges de puissance entre surfaces ayant un comportement diffus. Elle est beaucoup utilisée en photo-simulation, d'où sont issus les termes utilisés (luminance, radiosité, . . .) [37]. La radiosité est la puissance totale quittant un point sur une surface, par unité de surface (en W/m^2), ce qui est équivalent à l'intensité acoustique. La méthode comporte plusieurs hypothèses [7; 39] : D'abord, les ondes acoustiques sont considérées non corrélées, et les interférences entre elles sont négligées. Cette hypothèse est valable pour les problèmes acoustiques à hautes fréquences, avec des

sources à large bande et des environnements complexes. Ensuite, les sources sont décrites par leurs puissances émises. La puissance est uniformément répartie sur la surface de la source et rayonne de manière diffuse dans toutes les directions. Aussi, tous les éléments ont un comportement diffus (le champs incident est diffus, ainsi que les coefficients d'absorption, de réflexion et de transmission).

Le bilan de puissance acoustique, exprimé en watt, est écrit sur chaque élément de frontière. La puissance $W(i)$ émise par la face i d'un élément, est la somme de la puissance de cette face $W_{source}(i)$ ainsi que la puissance réfléchie $W_{réfléchie}(i)$ et transmise $W_{transmise}(i)$ [7; 39] :

$$W(i) \;=\; W_{réfléchie}(i) + W_{transmise}(i) + W_{source}(i) \tag{2.16}$$

Il faut savoir que si la face i d'un élément reçoit une puissance acoustique $W_{incidente}(i)$ des autres éléments, elle absorbe une partie $W_{absorbée}(i)$ de cette puissance incidente, et réfléchit une autre partie $W_{réfléchie}(i)$. La face i transmet également la partie incidente sur la face k du même élément $W_{incidente}(k)$. Les puissances sont alors données par [39] :

$$W_{absorbée}(i) \;=\; \alpha_i \; W_{incidente}(i) \tag{2.17}$$

$$W_{réfléchie}(i) \;=\; r_i \; W_{incidente}(i) \tag{2.18}$$

$$W_{transmise}(i) \;=\; \tau_{ki} \; W_{incidente}(k) \tag{2.19}$$

où α_i, r_i et τ_{ki} représentent respectivement les coefficients d'absorption, de réflexion et de transmission dans un champ diffus, avec :

$$1 \;= \alpha_i + \tau_{ki} + r_i \tag{2.20}$$

La puissance échangée par un couple d'éléments dépend de leur facteur de forme. Ce facteur est lié uniquement à la géométrie (surfaces des éléments, leur orientation, la distance entre les deux éléments, ainsi que la présence d'obstacles) [39]. Il représente le rapport de la puissance sortant de la face j d'un élément et atteignant la face i d'un autre élément. Il est exprimé comme suit [37] :

$$FF_{ji} \;=\; \frac{1}{S_j} \int_{S_j} \int_{S_i} \frac{\cos\theta_j \cos\theta_i}{\pi ||P_j P_i||^2} \; V(P_j, P_i) \; dS_j dS_i \tag{2.21}$$

θ_j et θ_i sont les angles définis sur la Figure 2.16 [7]. V qui représente la fonction de visibilité, valant 1 si la surface j voit la surface i, sinon 0. Il faut savoir qu'il existe également des facteurs de forme d'une source ponctuelle à un élément, et d'un élément à un récepteur ponctuel [37].

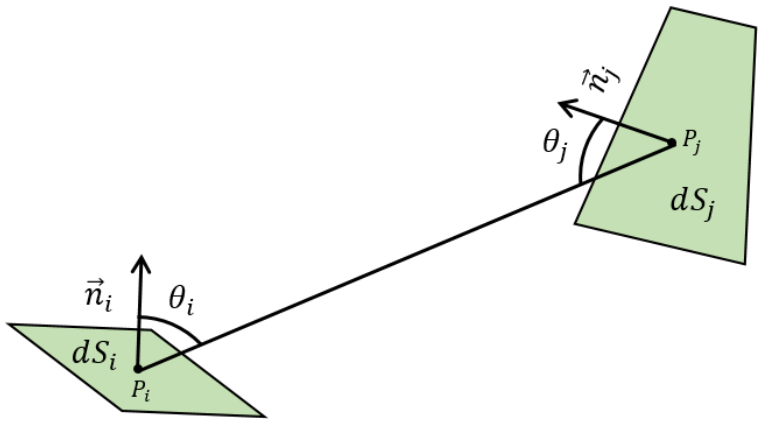


FIGURE 2.16 – Les facteurs de forme

La puissance incidente sur la face i d'un élément $W_{incidente}(i)$, est la somme des puissances acoustiques $W(j)$ émises par les autres éléments j multipliées par les facteurs de formes FF_{ji} :

$$W_{incidente}(i) \;=\; \sum_{j \neq i} FF_{ji}\; W(j) \tag{2.22}$$

En introduisant l'Eq. (2.18), (2.19), (2.20) et (2.22) dans l'Eq. (2.16), on obtient :

$$W_i \;=\; (1 - \alpha_i - \tau_{ki}) \sum_{j \neq i} FF_{ji} W(j) + \tau_{ki} \sum_{j \neq k} FF_{jk} W(j) + W_{source}(i) \tag{2.23}$$

On obtient ainsi un système de n équations avec n inconnues $W(i)$, qui représentent les puissances émises. Le problème peut être résolu par inversion de matrice [39], ou bien de manière itérative [37]. Concernant la méthode itérative, les premières sources émettent une puissance acoustique vers les autres éléments ; ensuite, l'élément disposant de la plus grande puissance émet vers les autres éléments, et ainsi de suite jusqu'à ce que les résultats convergent ou que le temps maximum soit atteint ; finalement, les dernières puissances sont collectées aux niveaux des récepteurs ponctuels.

2.5.2 Les méthodes d'acoustique géométrique

Contrairement aux méthodes d'éléments de frontière, qui se basent sur une discrétisation de la frontière de l'espace considéré pour réaliser un calcul de la pression acoustique en résolvant l'équation de Helmholtz (cf. Eq. (2.24)) de point en point à partir des conditions aux limites, les méthodes d'acoustique géométrique permettent quant à elles, de résoudre cette équation d'une manière asymptotique. En effet, cette approche repose sur l'hypothèse que la longueur d'onde est beaucoup plus petite que les dimensions des obstacles constituants

l'environnement. En conséquence, la propagation des ondes acoustiques en un point donné peut être considérée comme indépendante du voisinage de ce point. L'onde est alors assimilée à un ensemble de rayons se propageant dans l'espace et subissant un ensemble d'interactions ponctuelles telles que la réflexion par les surfaces et la diffraction par les arêtes [8; 40]. L'équation de Helmholtz est rappelée ci-dessous :

$$\nabla^2 P + k^2 P = 0 \tag{2.24}$$

avec P étant la pression en Pascal et k le nombre d'onde acoustique.

Les méthodes asymptotiques ont plusieurs avantages et inconvénients [40]. D'abord, elles permettent d'améliorer le temps de calcul, car il est indépendant de l'échelle de l'environnement et de la fréquence. De plus, elles donnent la possibilité d'étudier séparément les contributions. Cependant, ces approches ne sont valables qu'en moyenne et haute fréquence car, pour respecter l'hypothèse asymptotique, la longueur d'onde doit être faible devant la complexité géométrique. De plus, il est nécessaire de fixer au préalable le nombre d'interaction entre l'onde et l'environnement, alors qu'il est souvent difficile de prévoir cet ordre.

Plusieurs méthodes ont été développées afin de trouver les trajets entre un point source et un point récepteur [8; 40]. Nous pouvons citer par exemple la méthode des sources images (cf. Figure 2.17a), qui consiste à calculer la source image d'une source ponctuelle et à vérifier s'il existe un trajet entre cette source et le récepteur. Sa contribution est ensuite ajoutée à celle du trajet direct. En revanche, cette méthode n'est applicable qu'en présence de surfaces planes. Nous pouvons citer également la méthode du tir de rayons infiniment minces (cf. Figure 2.17b) qui consiste à lancer plusieurs rayons depuis la source, qui vont interagir avec les obstacles constituants la scène, et qui vont être interceptés par un récepteur représenté par un volume. Cependant, cette approche peut entrainer des phénomènes d'aliassage lorsque le nombre de rayons lancés depuis la source n'est pas suffisant. Ces phénomènes apparaissent lorsque des objets constituants l'environnement sont trop petits par rapport à l'ouverture de l'angle séparant deux rayons. Pour surmonter ce genre de problème, une méthode basée sur le lancer de faisceaux a été développée (cf. Figure 2.17c). Au lieu de lancer un seul rayon mince, cette approche consiste à propager un ensemble de rayons ou une surface représentant le front d'onde initial. L'Eq. (2.25) écrit la pression acoustique calculée en un point A (cf Figure 2.17c) en fonction de la puissance acoustique de la source W :

$$P(A) \;=\; \sqrt{\frac{\rho c W}{4\pi}}\,\sqrt{\frac{d\omega}{dS(A)}}\;e^{jkr}\;\Pi R D \tag{2.25}$$

avec ω étant l'angle solide du faisceau émis depuis la source, r est la distance entre la source

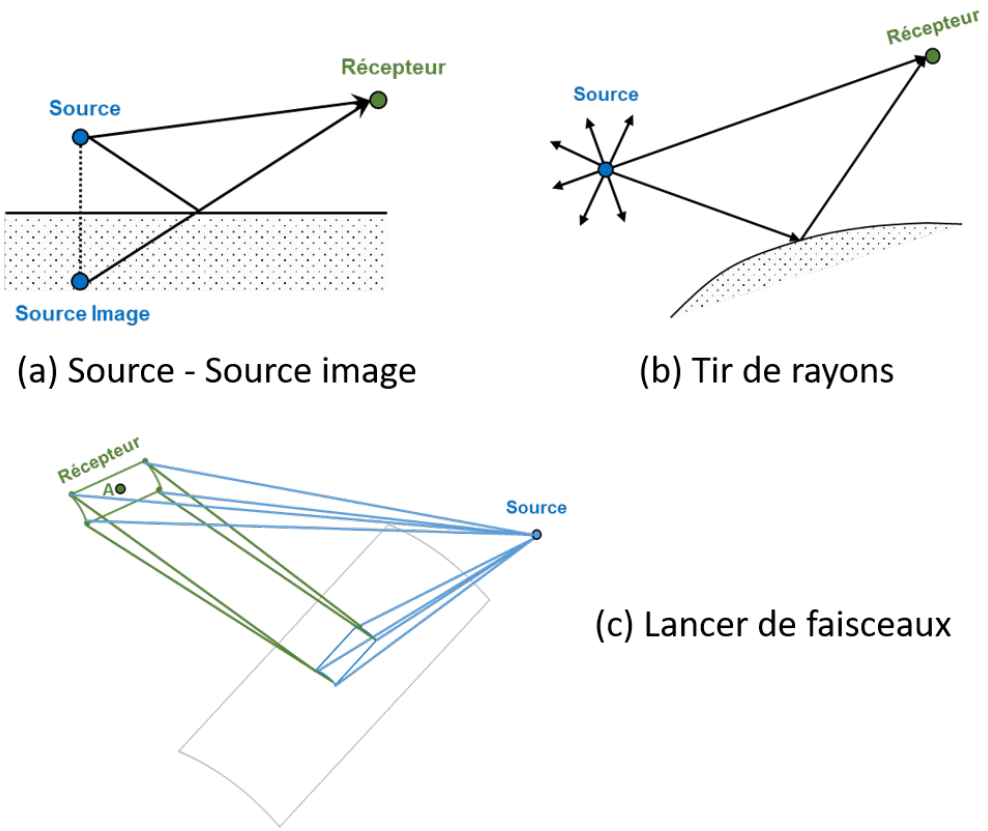


FIGURE 2.17 – Les différentes méthodes d'acoustique géométrique. (a) Source-Source image. (b) Tir de rayons. (c) Lancer de faisceaux

et le recépteur A, S représente la surface du front d'onde du faisceau au point A, c représente la célérité du son (en m/s), ρ représente la masse volumique de l'air (en kg.m^{-3}), et ΠRD désigne le produit de l'ensemble des coefficients de réflexions et de diffractions rencontrés par le faisceau. Le terme $\sqrt{\frac{d\omega}{dS(A)}}$ représente la divergence de l'onde, et dans le cas d'une source ponctuelle $\sqrt{\frac{d\omega}{dS(A)}} = \frac{1}{r}$.

2.5.3 Chaînage de la méthode EBEM et du lancer de faisceaux

Le modèle utilisé dans cette thèse pour calculer le transfert acoustique correspondant au bruit de passage d'un véhicule est basé sur un chaînage de la méthode des radiosités (EBEM) [37] avec une méthode de lancer de faisceaux [8]. Pour cela, des monopôles acoustiques ayant un débit unitaire sont utilisés pour modéliser les sources de bruit du compartiment moteur. La méthode des radiosités est ensuite appliquée pour calculer le champ diffus dans le compartiment moteur. Les ouvertures sont alors modélisées par des surfaces fictives sur lesquelles les intensités acoustiques sont obtenues. Ensuite, on crée, sur chacune des mailles élémentaires,

une source ponctuelle rayonnant vers le demi-espace extérieur, avec une puissance W_i égale à l'intensité quittant cette maille multipliée par sa surface. La méthode du lancer de faisceaux est celle qui est utilisée dans cette deuxième phase pour prendre en compte l'interférence entre les différentes contributions, comme l'illustre la Figure 2.18.

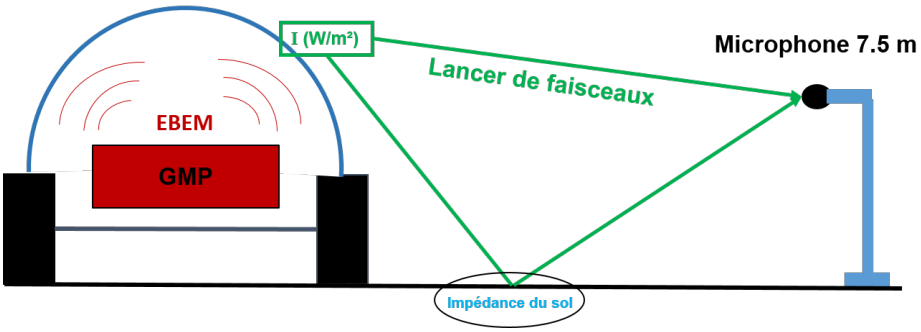


FIGURE 2.18 – Chaînage de la méthode des radiosités et du lancer de faisceaux

Au niveau des surfaces fictives, on peut affecter à la source ponctuelle une directivité analytique D (facteur multiplicatif en puissance) décrivant la répartition spatiale de la puissance. Pour une direction $\vec{\omega}$ dans le demi-espace extérieur, on écrit :

$$W_i(\vec{\omega}) \;=\; D_i(\vec{\omega})W_i \tag{2.26}$$

La condition à vérifier est que la valeur moyenne de cette directivité sur le demi-espace soit égale à 1, soit :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\omega\in\Omega^+} D_i(\vec{\omega})d\omega \;=\frac{1}{2\pi}\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{\phi=0}^{2\pi} D_i(\theta,\phi)d\omega \;=\; 1 \tag{2.27}$$

où $d\omega$ représente l'angle solide élémentaire déterminé par les angles θ et ϕ, et Ω^+ représente l'ensemble des directions de la demi-sphère. On peut alors utiliser :

— une directivité omnidirectionnelle, avec $D_i(\theta,\phi) = 1$
— une directivité Lambertienne, avec $D_i(\theta,\phi) = 2\cos\theta$
— une directivité analytique pour tenir compte de l'incidence de chacune des intensités traversant la maille pour construire une directivité échantillonnée.

Pour cette dernière directivité, on considère un échantillonnage régulier de la demi-sphère en un nombre de cellules donné (à l'aide d'une construction en "igloo" par exemple, cf. Figure 2.19). La puissance W_{ji} correspond à la puissance qui quitte la maille réelle j en direction de la maille virtuelle i. On détermine, pour chaque maille réelle j contribuant à la puissance passant à travers la maille i, quelles sont les cellules de la directivité impactées. Ces cellules sont celles couvertes par l'angle solide issu du centre de la maille j et s'appuyant

sur la surface S_i. Pour conserver l'énergie, on associe à chacune des cellules couvertes k la puissance reçue par la maille i divisée par le nombre de cellules impactées n_c. On écrit :

$$W_{jk} = \frac{W_{ji}}{n_c} \tag{2.28}$$

On garantit ainsi que la valeur moyenne de la directivité échantillonnée sur le demi-espace est bien égale à 1.

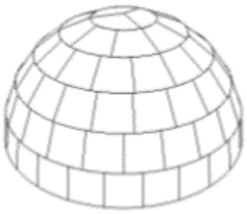


FIGURE 2.19 – Décomposition régulière d'une demi-sphère en "igloo"

2.6 Les modèles de prévision développés dans le cadre de la thèse

Les modèles de prévision, ou modèles de synthèse, consistent précisément à simuler le passage d'un véhicule sur la piste, et à reproduire le niveau de bruit total à 7.5 m, comme le préconisent les essais réglementaires (cf. Section 2.2). Le but est de prévoir et d'évaluer avec précision le niveau de bruit plus tôt dans le cycle de développement du véhicule. La méthode repose sur le principe que, pour une source divisée en k sources supposées décorrélées, on peut écrire que la contribution de chaque source est le produit du débit acoustique multiplié par le transfert acoustique entre cette source et le point récepteur qui se trouve à 7.5 m de l'axe de la piste. Le bruit émis par chaque source est ainsi calculé à des positions discrètes sur toute la longueur de la piste d'essai. Cependant, le niveau de bruit de contact pneumatique/chaussée est caractérisé d'une manière différente. En effet, la contribution du contact pneumatique/chaussée est directement mesurée à 7.5 m, et cela pour plusieurs vitesses du véhicule (de 30 à 80 km/h). Une régression logarithmique est ensuite réalisée pour obtenir les coefficients A_p et B_p qui dépendent du pneumatique, comme illustré dans l'équation empirique Eq. (2.11). Le niveau de bruit total est ainsi recomposé en réalisant une somme quadratique de toutes les contributions, comme illustré dans l'Eq. (2.13). Néanmoins, l'hypothèse de la décorrélation des sources engendre des limites de la méthode en basse fréquence. Trois modèles de synthèse sont développés dans le cadre de cette thèse (cf. Section 2.6.2). Leurs différences

résident essentiellement dans la représentation fréquentielle des sources de bruit, ainsi que la modélisation spatiale du groupe motopropulseur. Leur principe de fonctionnement commun est présenté ci-après.

2.6.1 Principe de fonctionnement des modèles de prévision

Le rayonnement acoustique des sources ainsi que les fonctions de transfert changent constamment pendant l'essai. En effet, la contribution de chaque source de bruit varie en fonction des conditions de passage du véhicule sur la piste d'essai. Le rayonnement des sources dépend essentiellement du régime moteur, tandis que les transferts acoustiques dépendent de la position du véhicule sur la piste. Cela doit être pris en compte dans le modèle de prévision du niveau de bruit de passage. Pour cela, il faut se mettre dans les mêmes conditions de passage que les essais réglementaires (cf. Section 2.2) et calculer les accélérations du véhicule pour chaque rapport de vitesse lors des passages en accélération pleine charge (l'accélération du véhicule est considérée constante).

La Figure 2.20 représente un schéma complet du fonctionnement des modèles de synthèse. La masse globale, le paramètre $V_{mille(n)}$ et le couple moteur en pleine charge servent à calculer les accélérations du véhicule pour chaque rapport de vitesse (cf. Eq.(2.29)), tandis que la masse du véhicule sert à obtenir les accélérations $a_{wot\ ref}$ et a_{urban} (cf. Eq.(2.1), Eq.(2.2) et Eq.(2.3)). Cela permet de choisir l'accélération du rapport de vitesse qui approche $a_{wot\ ref}$ à $\pm 5\%$. Dans le cas où aucun rapport de boîte ne permet d'approcher cette accélération de référence en pleine charge, on choisit les deux rapports de vitesse (n) et (n+1), qui permettent d'encadrer $a_{wot\ ref}$ (cf. Figure 2.4). Connaissant l'accélération du véhicule, on peut calculer sa vitesse sur la piste d'essai (cf. Eq.(2.33)). Cela permet d'obtenir la contribution du contact pneumatique/chaussée (cf. Eq.(2.11)), à laquelle on rajouter une contribution (en dB (A)) liée à l'effet du couple appliqué à la roue du véhicule. On peut également calculer la vitesse de rotation du moteur pour chaque position du véhicule sur la piste (cf. Eq.(2.32)). Cela permet d'obtenir le débit acoustique des sources de bruit (GMP, admission, échappement, rayonnement des volumes d'échappement) correspondant à cette vitesse de rotation, qui va être multiplié par une fonction de transfert pour obtenir une contribution. Les sources sont ensuite considérées "décorrélées" et la somme quadratique de leur contribution permet d'obtenir le niveau de bruit total (cf. Eq.(2.13)). On peut donc obtenir, selon la condition de passage du véhicule, les niveaux de bruit $L_{crs(n)}$, $L_{wot(n)}$, $L_{crs(n+1)}$, $L_{wot(n+1)}$. Le niveau de bruit L_{urban} est ensuite obtenu par interpolations de ces derniers (cf. Eq.(2.4) et Eq.(2.6)). Ce principe de fonctionnement est détaillé ci-dessous.

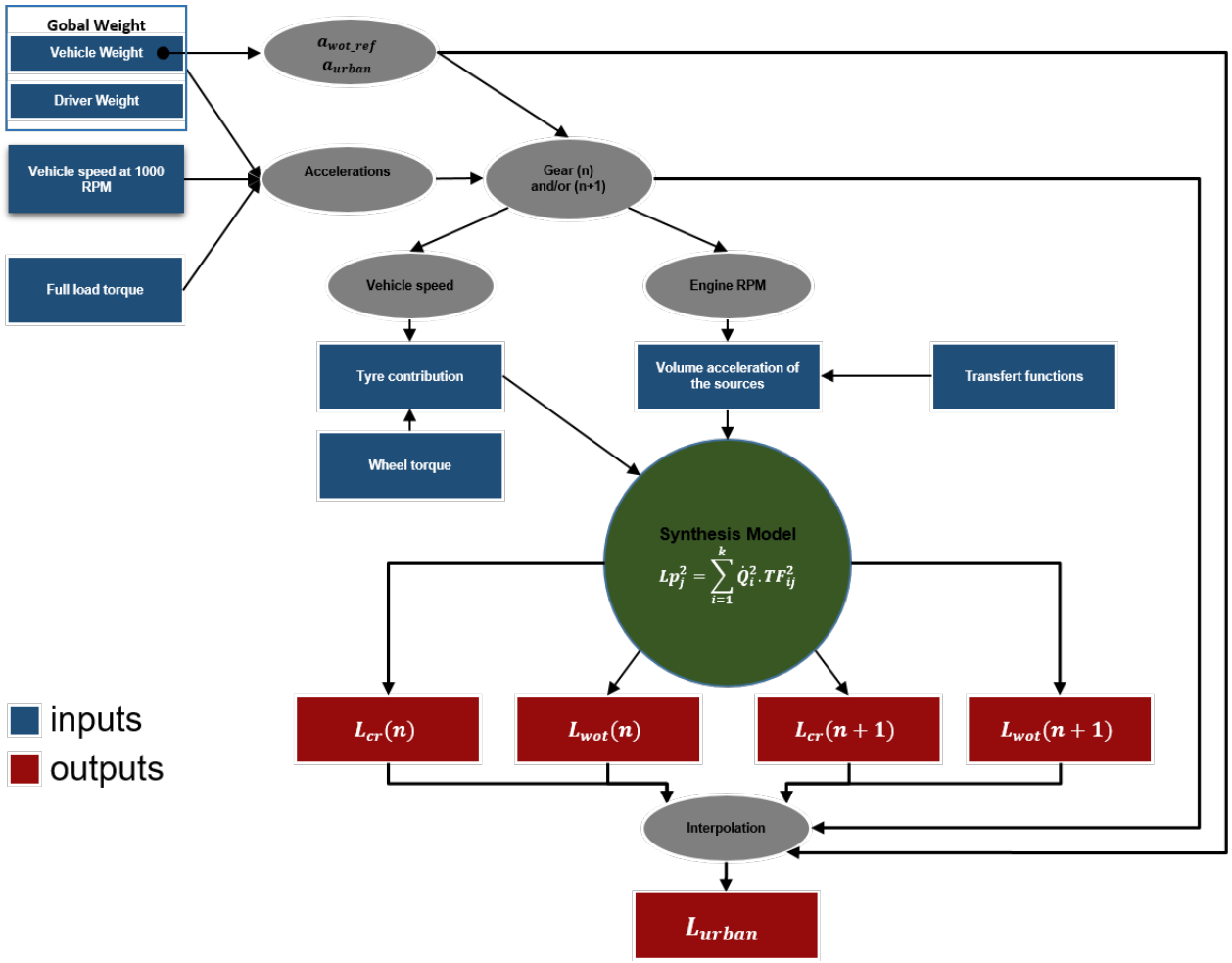


FIGURE 2.20 – Schéma complet du fonctionnement des modèles de synthèse

La Figure 2.21 illustre les courbes d'accélération en fonction de la vitesse du véhicule pour chaque rapport de vitesse. L'accélération $a_{wot(n)}$ qui nous intéresse est celle qui correspond à une vitesse $V = 50$ km/h. Pour calculer cette accélération, on utilise le principe fondamental de la dynamique, comme l'illustre l'Eq.(2.29). Avec R (en m) le rayon du pneumatique, In (exprimé en kg.m^2) représente le moment d'inertie de la chaîne cinématique du véhicule, Fr (en N) désigne la force résistive à 50 km/h, $Fd_{(n)}$ (en N) correspond à la force motrice que développe le véhicule à 50 km/h pour le rapport de vitesse (n), et enfin m_g (en kg) représente la masse globale [5].

5. La masse globale m_g, correspond à la masse du véhicule m avec son réservoir de carburant rempli au moins à 90% de sa capacité, ainsi que la masse du conducteur m_d. La masse m_g est différente de la masse m_{ro} (Mass of vehicle in Running Order). En effet, la masse m_g est utilisée pour calculer les performances du véhicule (i.e les accélérations). L'utilisateur du modèle est donc libre de choisir la masse réelle du conducteur, contrairement à la masse m_{ro} qui est utilisée dans le règlement pour calculer la valeur PMR, où la masse du conducteur est fixée à 75 kg (cf. Section 2.2).

$$a_{wot(n)} = \frac{Fd_{(n)} - Fr}{m_g + \frac{In}{R^2}} \tag{2.29}$$

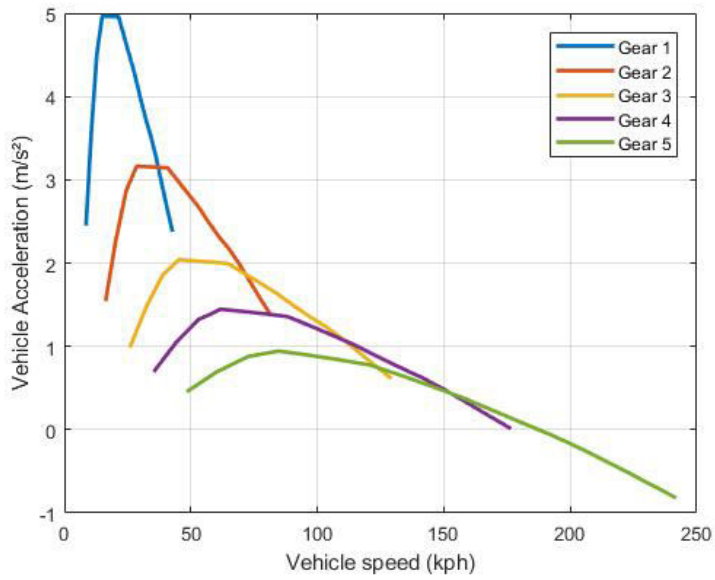


FIGURE 2.21 – Exemple de valeurs d'accélération d'un véhicule en fonction de sa vitesse pour 5 rapports de vitesse

La force résistive Fr dépend de la force aérodynamique F_{aero} (en N) qui est proportionnelle à la vitesse au carré du véhicule (la vitesse ici est fixée à 50 km/h), de la force liée à la résistance au roulement R_r (en N/t), de la force liée au frottement des paliers $F_{bearing}$ (en N) et au léchage des plaquettes sur les disques F_{brake} (en N). La force résistive est donnée par :

$$Fr = F_{aero} + F_{bearing} + F_{brake} + R_r \frac{m_g}{1000} \tag{2.30}$$

La force motrice $Fd_{(n)}$ que développe le véhicule est exprimée en fonction du couple moteur τ (en Nm). Elle est donnée par l'Eq. (2.31). T_y est le rendement de transmission en pourcentage (%), et ω_e désigne la vitesse de rotation du moteur en rad/s, avec $\omega_e = \frac{2\pi N_e}{60}$.

$$Fd_{(n)} = \frac{3600\ \omega_e}{1000\ V} \cdot \frac{T_y}{100} \cdot \tau = \frac{120\ \pi}{V_{mille(n)}} \cdot \frac{T_y}{100} \cdot \tau \tag{2.31}$$

avec $V_{mille(n)}$ (exprimé en km/h) représente la vitesse du véhicule quand la vitesse de rotation du moteur $N_e = 1000$ tr/mn. Ce paramètre dépend de la démultiplication de la boîte de vitesse ainsi que de la circonférence du pneumatique. Le paramètre $V_{mille(n)}$ nous permet de faire le lien entre la vitesse du véhicule V et la vitesse de rotation du moteur N_e (exprimé en

tr/mn), en utilisant la relation linéaire suivante :

$$V = \frac{V_{mille(n)}}{1000} \; N_e \tag{2.32}$$

τ correspond au couple moteur en pleine charge (Full load torque). C'est le couple que développe le moteur, lorsque la pédale d'accélération du véhicule est complètement enfoncée. Ce paramètre est directement mesuré en fonction de la vitesse de rotation du moteur. La Figure 2.22 représente le couple moteur τ en fonction de la vitesse de rotation du moteur N_e, pour un moteur diesel et essence.

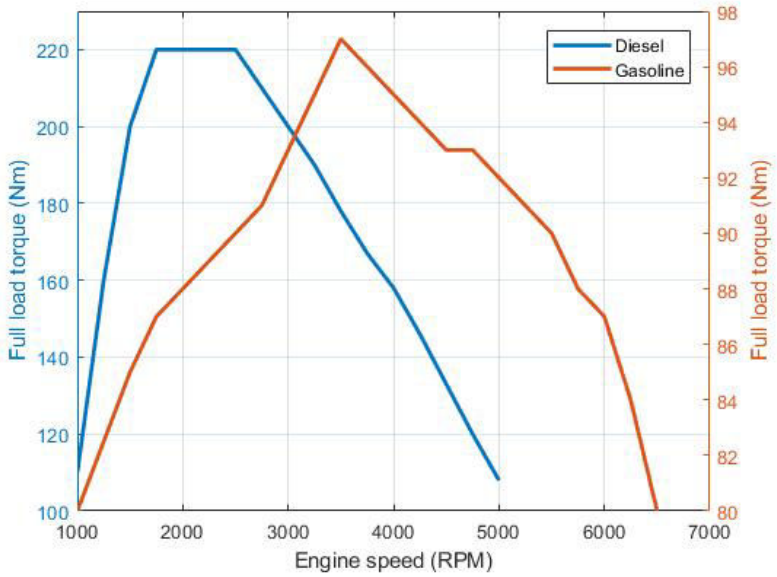


FIGURE 2.22 – Couple moteur en pleine charge en fonction de la vitesse de rotation du moteur

Les accélérations $a_{wot(n)}$ sont alors calculées avec l'Eq. (2.29). On choisit ensuite l'accélération qui approche $a_{wot\ ref}$ à $\pm 5\%$. Dans le cas où aucun rapport ne permet d'approcher cette accélération de référence, on l'encadre avec $a_{wot(n)}$ et $a_{wot(n+1)}$ (cf. Figure 2.4). A partir de l'accélération $a_{wot(n)}$ et/ou $a_{wot(n+1)}$, la vitesse du véhicule est calculée sur toute la longueur de la piste d'essai [6]. Pour cela, on fait l'hypothèse que le véhicule est un point matériel de masse m_g en translation dans un référentiel galiléen entre l'entrée de la piste AA', et la sortie complète du véhicule de la piste BB' (cf. Figure 2.3a). On applique le théorème de l'énergie

6. En ce qui concerne la configuration à vitesse stabilisée, la vitesse du véhicule est considérée constante $V = 50$ km/h quelle que soit la position du véhicule X_v.

cinétique pour calculer la vitesse V en fonction de la position du véhicule sur la piste X_v :

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1000}{3600} \left(V^2 - {V_0}^2\right) \; = \; a_{wot(n)} \left(X_v - X_{v0}\right) \tag{2.33}$$

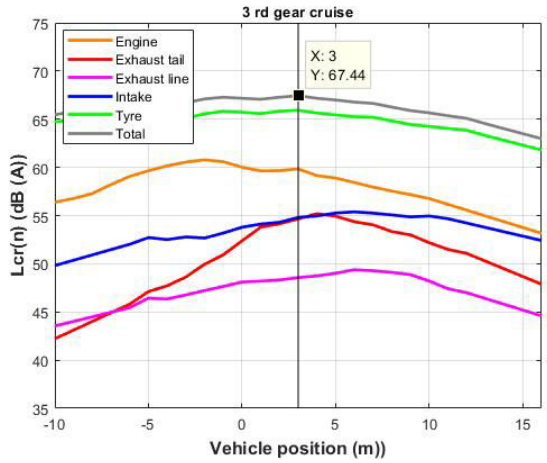
avec $V_0 = 50$ km/h correspondant à la vitesse du véhicule à la position $X_{v0} = 0$ m (sur la ligne PP', cf. Figure 2.3a).

La vitesse du véhicule V permet d'obtenir la contribution du contact pneumatique/chaussée en utilisant l'Eq.(2.11). Pour les configurations en accélération pleine charge, on ajoute à la contribution du contact pneumatique/chaussée à vitesse stabilisée, une valeur mesurée (en dB (A))liée à l'effet du couple τ_{tire} appliqué à la roue du véhicule (cf. Figure 2.12).

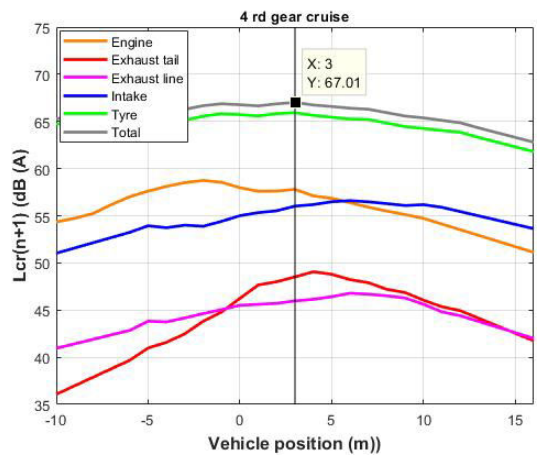
La vitesse de rotation du moteur N_e est obtenue à partir de la vitesse du véhicule, en utilisant l'Eq.(2.32). Elle permet d'avoir la puissance des sources Wac_i (en watt) correspondant à cette vitesse de rotation, et cela pour chaque position du véhicule sur la piste X_v. Ces puissances vont être transformées en débit d'accélération volumique $\dot{Q}_i$, avant d'être multipliées par les fonctions de transfert TF_{ij} adéquates pour obtenir la contribution de chaque source (cf. Eq.(2.13)).

La Figure 2.23 présente des résultats de calcul pour un segment B diesel pour les quatre passages du véhicule (en stabilisé et en pleine charge, rapport (n) et (n+1)). Les quatre figures supérieures présentent la contribution de chaque source de bruit en dB (A) lors du passage du véhicule sur la piste (de -10m à +16m), avec le 3ème et le 4ème rapport de vitesse. La courbe grise, représente la contribution totale du véhicule. Les valeurs retenues qui seront utilisées pour calculer le niveau L_{urban} correspondent à la valeur maximale de la contribution totale (dans cet exemple , la valeur maximale se trouve à $X_v = 3$ m). Les deux courbes inférieures représentent l'évolution de la vitesse du véhicule V ainsi que la vitesse de rotation du moteur N_e lors du passage du véhicule sur la piste, qui sont obtenues respectivement à partir de l'Eq. (2.33) et l'Eq. (2.32).

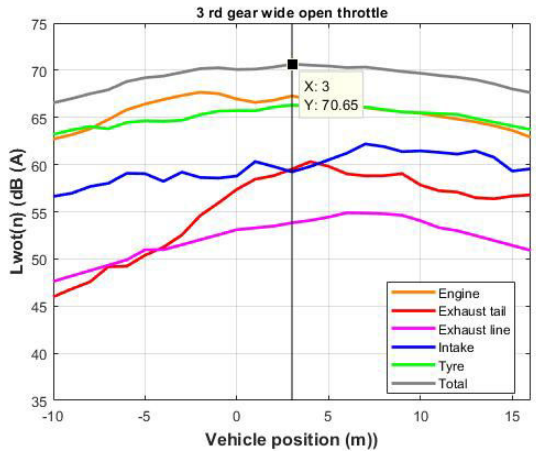
On obtient, en sortie du modèle, les niveaux de bruit pour chaque passage du véhicule : $L_{crs(n)}$, $L_{wot(n)}$, $L_{crs(n+1)}$, $L_{wot(n+1)}$. Le niveau de bruit L_{urban} est obtenu par interpolations de ces niveaux (cf. Eq.(2.4). La Figure 2.24 représente le diagramme d'interpolation pour obtenir le niveau de bruit L_{urban} du véhicule. Le pourcentage de contribution de chaque source est également présenté sur cette figure. Nous remarquons que le bruit de contact pneumatique/chaussée ainsi que le groupe motopropulseur représentent les deux sources prédominantes sur le niveau L_{urban}, suivi des autres sources de bruit, notamment le bruit de bouche d'admission, de bouche d'échappement, et du rayonnement des volumes d'échappement.



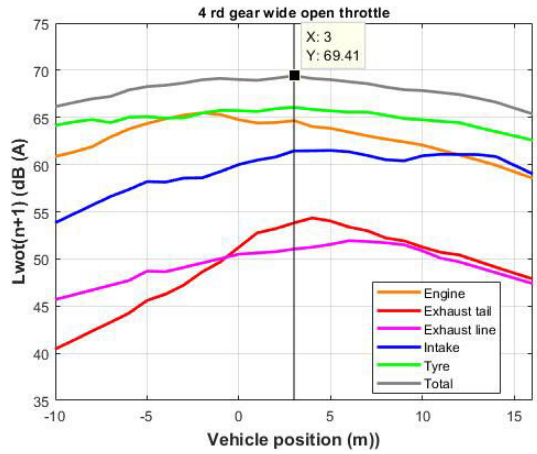
(a) vitesse stabilisée , 3ème rapport



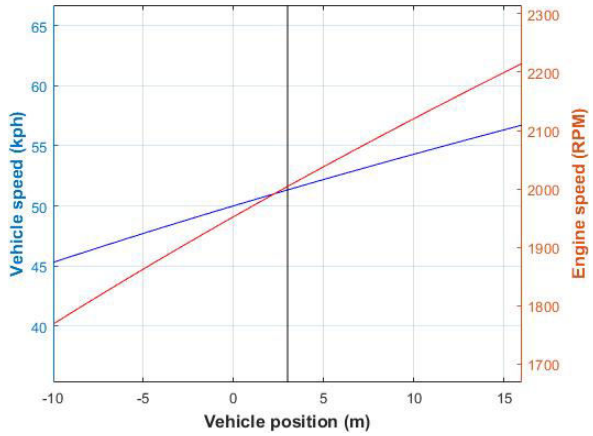
(b) vitesse stabilisée, 4ème rapport



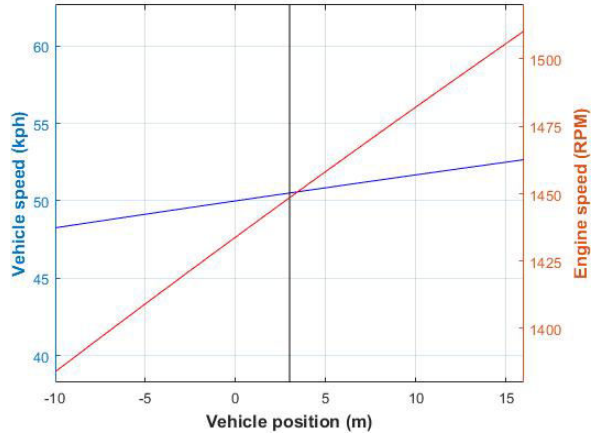
(c) Accélération pleine charge, 3ème rapport



(d) Accélération pleine charge, 4ème rapport



(e) 3ème rapport



(f) 4ème rapport

FIGURE 2.23 – Résultats du modèle de synthèse. Les 4 figures supérieures représentent la contribution de chaque source de bruit, ainsi que la contribution totale représentée en couleur grise, en fonction de la position du véhicule sur la piste. Les deux figures inférieures représentent la vitesse du véhicule V ainsi que la vitesse de rotation du moteur N_e, en fonction de la position du véhicule sur la piste

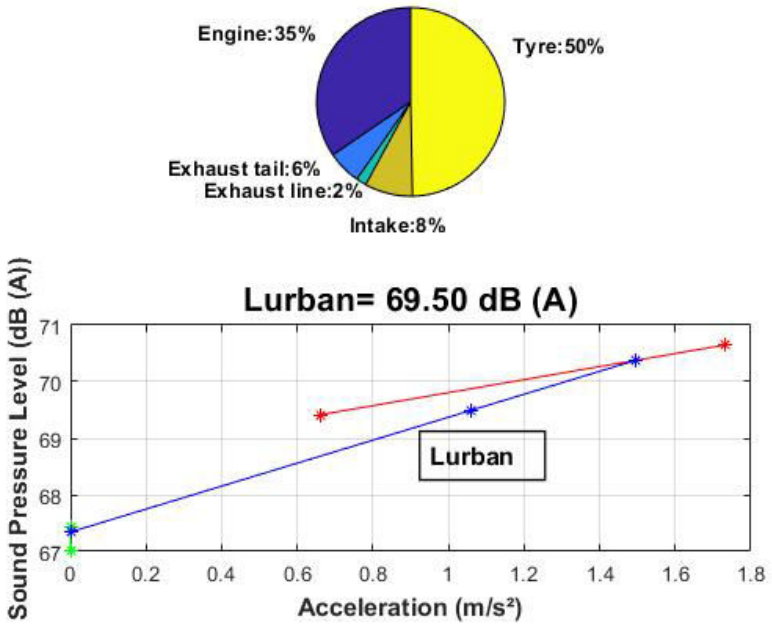


FIGURE 2.24 – Contribution des sources et diagramme d'interpolation. La figure du haut représente la contribution de chaque source en pourcentage. La figure du bas représente le diagramme d'interpolation pour calculer le L_{urban}

2.6.2 Les différents modèles de prévision développés

La différence entre les modèles de synthèse réside essentiellement dans la représentation fréquentielle des sources de bruit, et dans la modélisation spatiale du groupe motopropulseur. En effet, une question qui subsiste toujours est celle de la modélisation du groupe motopropulseur, car cette source de bruit est complexe et peut être affinée en plusieurs zones. C'est pourquoi trois modèles différents ont été développés et sont détaillés ci-après.

– Dans le premier modèle, le groupe motopropulseur est considéré comme un parallélépipède, où chaque face est représentée par une source ponctuelle (cf. Figure 2.26a). Pour quantifier le débit acoustique de ces sources, des mesures sont réalisées sur le groupe motopropulseur extrait du véhicule et installé sur un banc d'essai. Les tests sont effectués dans les mêmes conditions de charge correspondant à l'essai du bruit de passage. Les mesures de puissance acoustique Wac_i sont réalisées par intensimétrie, avec un moteur tournant à 3000 tr/mn. Ces mesures sont faites sur un contour parallélépipédique entourant le moteur (cf. Figure 2.25), ceci permet d'avoir une mesure de puissance totale par face moteur (six faces). Pour obtenir la puissance acoustique en fonction de la vitesse de rotation du moteur N_e, des microphones sont placés à une distance de 1 m en face de chaque côté du moteur. La

puissance de chaque face est ensuite extrapolée en utilisant la pression acoustique du microphone en vis-à-vis. Ainsi, chaque face i est assimilée à un monopôle de débit acoustique $\dot{Q}_i$, bafflé par la paroi moteur. Le débit acoustique est obtenu à partir de la puissance acoustique de chaque face Wac_i [7] :

$$\dot{Q}_i(\omega) \;=\; \sqrt{\frac{2\pi c}{\rho}\, Wac_i(\omega)} \tag{2.34}$$

où c représente la célérité du son (en m/s) et ρ représente la masse volumique de l'air (en kg.m^{-3}).

Le groupe motopropulseur est ensuite décomposé en 21 zones. Pour chaque zone, on mesure une fonction de transfert TF_{ij} par la méthode réciproque (cf. Section 2.4.2.2). Pour cela, une source sonore calibrée à débit connu est déplacée de 1 m entre chaque mesure, le long d'une ligne se trouvant à 7.5 m de la ligne centrale de la piste et à 1.2 m de hauteur (cf. Figure 2.15). Les transferts se trouvant sur une même face moteur sont ensuite sélectionnés et moyennés quadratiquement (2 à 5 transfert sont moyennés quadratiquement selon la face du moteur), comme l'illustre la Figure 2.25. Dans ce premier modèle, le débit acoustique des sources $\dot{Q}_i$, ainsi que les fonctions de transferts TF_{ij} sont représentés par des spectres en tiers d'octave, comme illustré sur la Figure 2.26a.

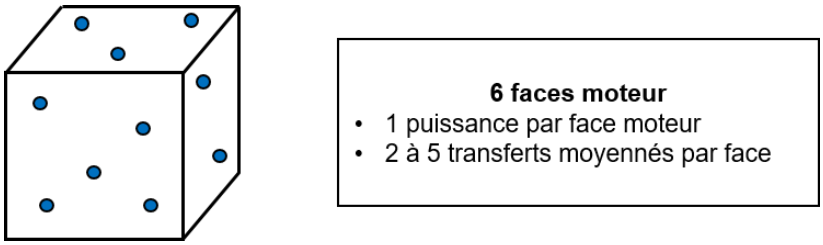


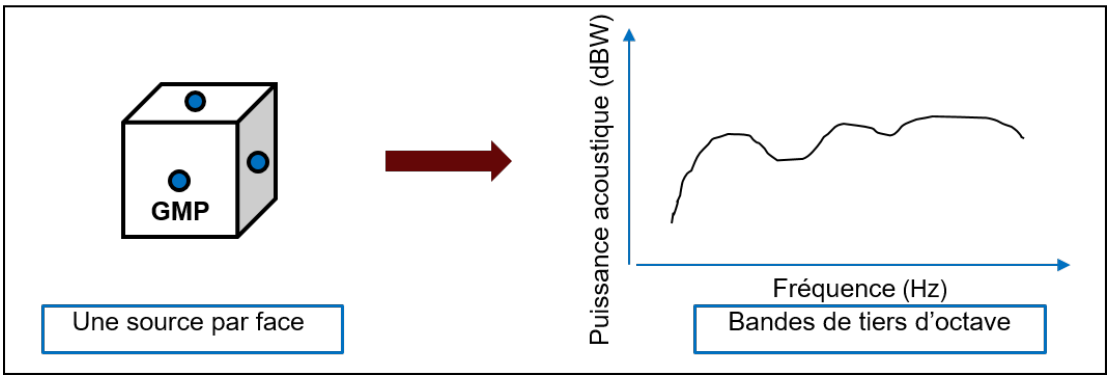
FIGURE 2.25 – Découpage du GMP en six faces. **Sources** : les puissances acoustiques sont mesurées par face moteur. **Transferts** : 2 à 5 transferts par face moteur sont sélectionnés puis moyennés quadratiquement

– La division du moteur en six faces (un monopôle par faces), demande beaucoup d'investissement et de dépouillement afin de préparer toutes les données pour le modèle de synthèse. C'est pourquoi, des modèles plus simples ont été développés. Dans le second modèle, le groupe motopropulseur est modélisé par une seule source ponctuelle (cf. Figure 2.26b). Les tests sont également réalisés sur le groupe motopropulseur extrait du véhicule et installé sur un banc d'essai, tournant à 3000 tr/mn dans les mêmes conditions de charge que lors des essais du bruit de passage. La puissance totale du groupe motopropulseur est ainsi obtenue par intensimétrie. Pour obtenir la puissance acoustique en fonction du régime moteur N_e,

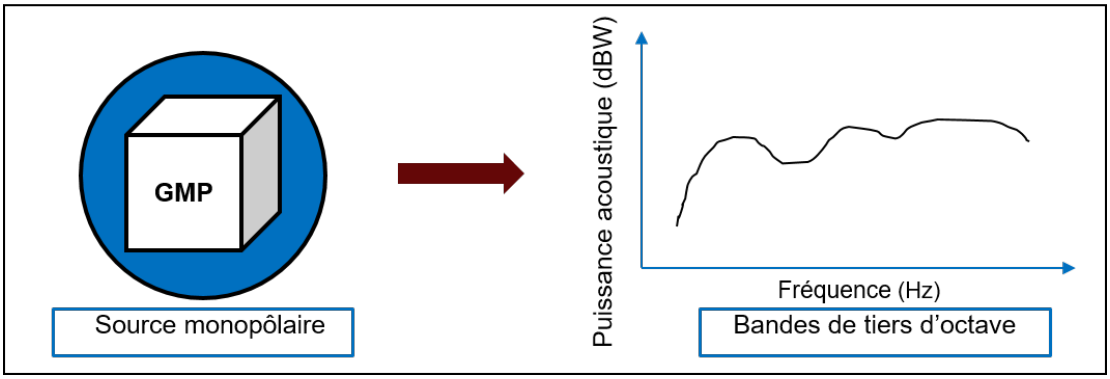
7. La quantification des autres sources de bruit est réalisée de la même façon qu'en Section 2.4.2.1

la puissance totale est extrapolée en utilisant la moyenne quadratique des niveaux de pression de l'ensemble des microphones à 1 m. Le débit acoustique est ensuite obtenu à partir de la puissance totale du groupe motopropulseur en utilisant l'Eq. (2.34). Les 21 transferts acoustiques mesurés sont également moyennés quadratiquement pour représenter le GMP par une source ponctuelle. Comme pour le premier modèle, le débit acoustique des sources et les fonctions de transferts sont représentés par des spectres en tiers d'octave, comme illustrés sur la Figure 2.26b.

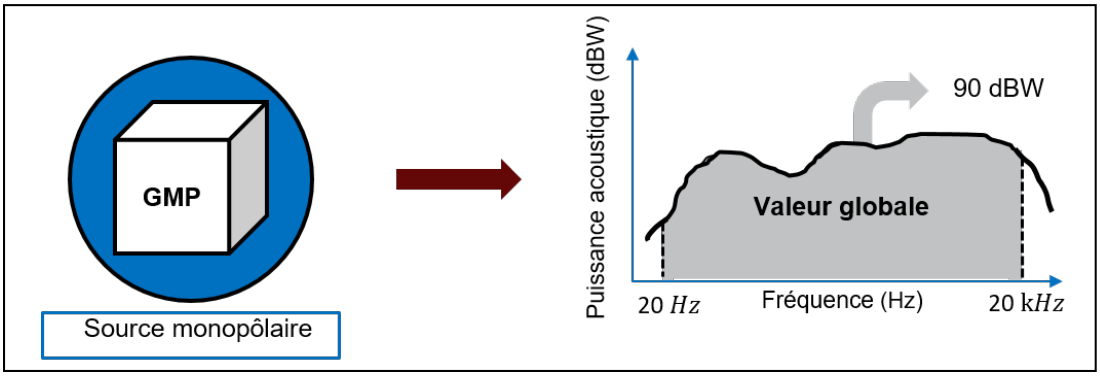
– Enfin, le dernier modèle développé est une simplification du second modèle. D'abord, le groupe motopropulseur est considéré comme une seule source ponctuelle. Ensuite, le débit acoustique des sources et les fonctions de transferts sont représentés par des valeurs globales. En effet, la valeur étudiée en sortie du modèle, *i.e.* le niveau L_{urban} mentionné dans le règlement ECE R51.03 [2] est donnée en valeur globale pondérée A. On peut donc imaginer un modèle où toutes les puissances des sources (GMP, admission, échappement, rayonnement des volumes d'échappement) ainsi que leurs fonctions de transfert adéquates seraient également réduites à des valeurs globales (cf. Figure 2.26c).



(a) Modèle six faces en tiers d'octave



(b) Modèle monopôle en tiers d'octave



(c) Modèle monopôle en valeur globale

FIGURE 2.26 – Les différents modèles de synthèse développés

2.7 Conclusion

Les modèles de prévision du niveau de bruit de passage développés dans le cadre de cette thèse ont été présentés. Ils permettent d'évaluer le bruit que peut rayonner un véhicule plus tôt dans son cycle de développement, *i.e.* en amont de l'étape d'industrialisation. Concernant le calcul des fonctions de transfert, le modèle utilisé se base sur un chaînage de deux méthodes, en l'occurrence (*i*) la méthode EBEM appliquée dans le compartiment moteur et (*ii*) une méthode de lancer de faisceaux appliquée au champ semi-ouvert. Pour ce qui est des modèles de synthèse, ils consistent à combiner le débit acoustique des sources avec le transfert adéquat, tout en prenant en compte le déplacement du véhicule sur la piste.

Le but maintenant est de juger de la fidélité et de la robustesse de ces modèles. D'abord, la variabilité et l'incertitude liées aux paramètres critiques de la modélisation seront identifiées, et la façon dont elles se propagent sera appréhendée. Ensuite, les paramètres les plus influents de ces modèles seront déterminés en se basant sur des techniques d'analyse de sensibilité. Ces techniques sont définies comme la détermination des modifications de la réponse d'un modèle en modifiant ses données d'entrée. Cela permet de diminuer la variance des données d'entrée du modèle pour améliorer sa précision, et de simplifier le modèle si c'est possible en considérant certains paramètres comme fixes. Ces méthodes sont présentées dans le Chapitre 3. Leur application aux modèles est présentée dans le Chapitre 4. Pour ce qui est des modèles de synthèse, trois modèles différents ont été développés. Leurs principales différences résident dans la représentation fréquentielle des sources de bruit ainsi que la représentation spatiale du groupe motopropulseur. Le modèle le plus pertinent sera alors choisi à partir de la comparaison entre le calcul et la mesure, en se basant sur la théorie de la sélection de modèle. Cette comparaison sera présentée dans le Chapitre 5.

Chapitre 3

Analyse de sensibilité et propagation d'incertitudes dans les modèles

Sommaire

3.1 Introduction 72

3.2 Etat de l'art 72

3.2.1 Intoduction 72

3.2.2 Spécification du problème 74

3.2.3 Quantification des sources d'incertitude 75

3.2.4 Propagation d'incertitudes 82

3.2.5 Analyse de sensibilité 85

3.3 Application : Influence du sol et des conditions météorologiques sur le transfert acoustique 101

3.3.1 Résultats et discussion 102

3.4 Conclusion 110

3.1 Introduction

Le troisième chapitre de cette thèse constitue l'état de l'art des méthodes de propagation d'incertitudes et d'analyse de sensibilité qui seront appliquées aux modèles de prévision du niveau de bruit extérieur ainsi qu'au modèle de calcul des fonctions de transfert dans la suite du document. Une validation sur un cas test est également présentée en Annexe A. Cet exemple concerne l'étude de la variabilité de l'indice de perte par transmission acoustique d'une plaque infinie isotroque par rapport aux paramètres physiques de la plaque. Enfin, une seconde application permet d'étudier l'influence des effets de propagation acoustique dans le milieu extérieur (*i.e.* l'influence du sol, l'absorption atmosphérique, la diffusion par la turbulence atmosphérique ainsi que la réfraction par les effets thermiques et aérodynamiques) sur la fonction de transfert entre le groupe motopropulseur et le récepteur qui se trouve à 7.5 m de l'axe de la piste d'essai (cf. Section 3.3).

3.2 Etat de l'art

3.2.1 Intoduction

Le but de la simulation numérique est de représenter un phénomène physique par un modèle mathématique, résolu par un schéma numérique, dans l'objectif de remplacer en même temps des expérimentations réelles trop chères ou impossibles à réaliser, mais aussi pour prévoir les phénomènes physiques. Cependant, cette représentation désigne uniquement une approximation de la réalité. En effet, la qualité d'un modèle numérique dépend essentiellement de notre compréhension d'un phénomène, mais aussi des moyens numériques et scientifiques dont on dispose pour le construire. Par exemple, dans le cas d'une forte méconnaissance de la physique et de la réalité, le modèle peut devenir complètement inutile.

Traduire un phénomène physique en modèle numérique peut engendrer plusieurs types d'incertitudes [41] :

— incertitude de modèle, qui est due à notre traduction simplifiée et approximative de la réalité en équations mathématiques ;

— incertitude numérique, qui est due à la résolution numérique des équations mathématiques ;

— imprécision sur les paramètres d'entrée du modèle, qu'on appelle également incertitude paramétrique.

Pour réaliser une analyse de sensibilité et une propagation d'incertitudes, on suppose

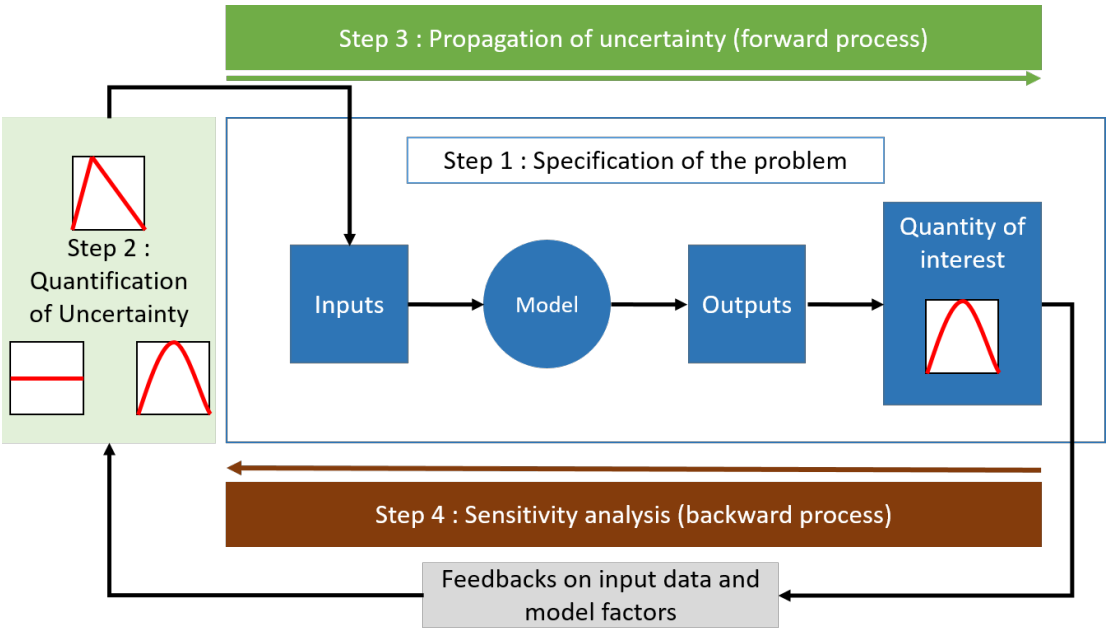


FIGURE 3.1 – Les étapes de base pour effectuer une étude d'analyse de sensibilité

que les modèles sont suffisamment précis pour prévoir le comportement du système (les équations sont pertinentes et les approximations introduites dans le modèle de calcul sont maîtrisées), et on se focalise uniquement sur les *incertitudes paramétriques*. En effet, les calculs sont généralement faits de manière déterministe ; or, en réalité, les valeurs des paramètres d'entrée ne sont pas connues exactement, et sont donc entachées d'incertitudes. Une démarche probabiliste est alors mieux adaptée en considérant les paramètres d'entrée et de sortie du modèle comme des variables *aléatoires*. L'incertitude de ces paramètres d'entrée est ensuite propagée dans le modèle, dans le but de caractériser la variabilité induite dans les variables d'intérêt en sortie du modèle. Finalement, l'analyse de sensibilité intervient à cette étape dans le but d'étudier l'impact de la variabilité de chaque paramètre d'entrée sur la (les) sortie(s) du modèle. La Figure 3.1 résume dans un cadre général l'ensemble des étapes pour les études d'incertitude [42] :

1. spécification du problème : définition du ou des modèles, des variables d'entrée et de sortie, des quantités d'intérêt ainsi que les objectifs de l'étude ;
2. quantification des incertitudes liées aux paramètres d'entrée du modèle, et attribution des lois de probabilité, et cela à partir de données disponibles ou mesurées, de la littérature ou d'un jugement d'expert. Il s'agit ici d'une étape importante et délicate, qui peut prendre beaucoup de temps ;
3. propagation d'incertitudes (*forward process*) dans le modèle et évaluation de la variabilité de la sortie induite par l'incertitude des données d'entrée ;

4. l'analyse de sensibilité est le processus en arrière (*backward process*), elle permet de mesurer la sensibilité des variables d'intérêt aux paramètres d'entrée ;
5. selon le résultat obtenu, il est parfois important de redéfinir le problème et de revenir sur les différentes étapes de l'étude.

Nous présentons par la suite, un état de l'art sur les étapes principales pour réaliser une étude d'incertitude.

3.2.2 Spécification du problème

En 1979, le comité technique sur la crédibilité des modèles de la SCS (Society of Computer Simulation) a élaboré un diagramme identifiant les phases primaires de modélisation et de simulation [43], et ce dans le but de développer un ensemble de termes normalisés pour faciliter la communication entre le constructeur d'un modèle de simulation et son utilisateur potentiel. Il est pratique de diviser l'environnement de simulation en trois éléments de base, comme illustré dans la Figure 3.2. La première étape est la quantification du modèle : le diagramme montre que l'analyse permet de construire un modèle conceptuel/mathématique à partir de la réalité. La seconde étape est la vérification du modèle : où le modèle mathématique est converti en modèle de calcul grâce à la programmation (schéma numérique). Et enfin, la dernière étape est la validation du modèle : où la simulation numérique est utilisée pour représenter la réalité.

Pour réaliser une étude d'incertitude, la spécification du problème est nécessaire. Elle consiste à définir le ou les modèles, d'identifier clairement les paramètres d'entrée et de sortie de chaque modèle, ainsi que les quantités d'intérêt qui sont utilisées pour évaluer le système physique considéré [41; 42]. Ainsi, le modèle défini doit comprendre à la fois les équations décrivant la physique du système (modèle mathématique) et les algorithmes utilisés pour les résoudre (modèle de calcul ou schéma numérique). Il peut donc s'agir d'une boîte noire qui prend des valeurs d'entrée pour donner des résultats en sortie. On suppose que le modèle est suffisamment précis pour prévoir le comportement du système. Cela signifie que les équations sont pertinentes pour décrire les phénomènes physiques et que les approximations introduites dans le modèle de calcul sont maîtrisées. Par conséquent, on suppose que les modèles utilisés prévoient fidèlement le comportement du système si les paramètres d'entrée sont parfaitement connus ; or, les valeurs des paramètres d'entrée ne sont pas connues d'une manière exacte, et sont donc entachées d'incertitude. C'est pourquoi, la quantification des sources d'incertitude sur les paramètres d'entrée et leur propagation dans le modèle, constituent deux étapes importantes pour l'étude d'analyse de sensibilité.

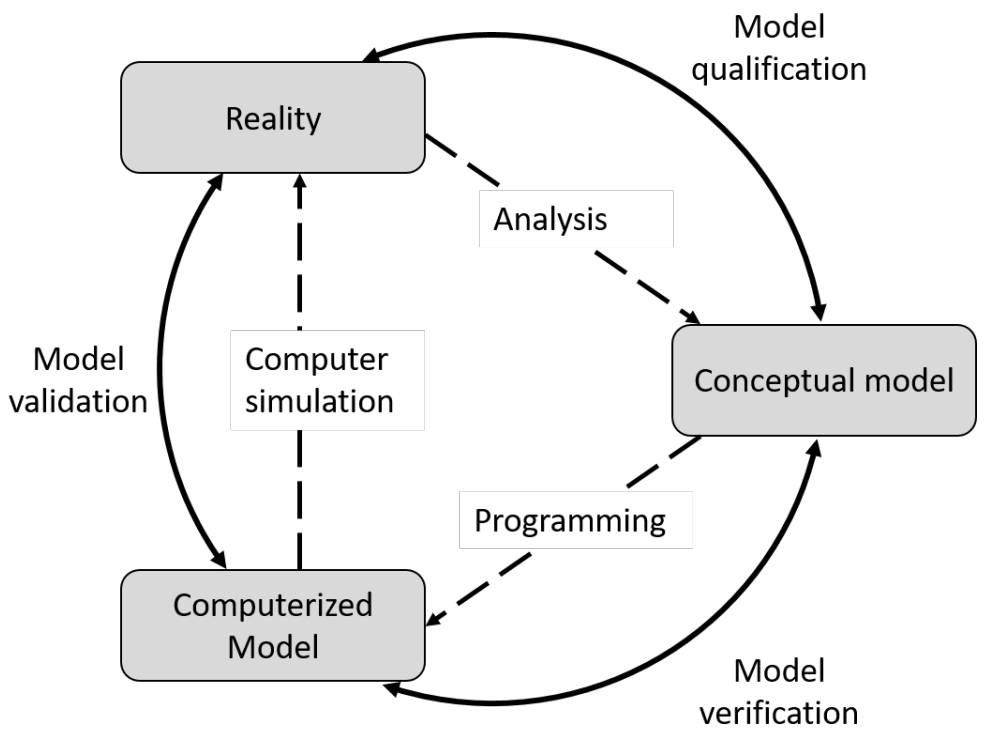


FIGURE 3.2 – Les phases primaires de modélisation et de simulation selon SCS

3.2.3 Quantification des sources d'incertitude

3.2.3.1 Classification des incertitudes

Avant de présenter les méthodes de quantification des sources d'incertitudes, il est d'usage de classifier les incertitudes, dont la terminologie utilisée dans les ouvrages et les articles est différente [42; 44; 45; 46; 47; 48; 49] :

— l'incertitude aléatoire, aussi appelée : incertitude irréductible, incertitude intrinsèque, incertitude de type A, ou encore incertitude stochastique, désigne les situations où il existe une variabilité naturelle du phénomène considéré. Elle est donc inhérente au système et ne peut être réduite qu'en modifiant ce dernier, et non pas par des études ou des mesures supplémentaires ;

— l'incertitude épistémique, aussi appelée : incertitude réductible, incertitude subjective, méconnaissance, ignorance, ou incertitude de type B, résulte essentiellement d'un manque de connaissance ou d'une information incomplète sur les caractéristiques d'un système. Contrairement à l'incertitude aléatoire, l'incertitude épistémique est parfois réductible en utilisant par exemple des modèles plus fins et/ou en collectant des données plus précises et en nombre plus important.

Dans l'ouvrage de Frey et Cullen [49], et dans la publication de Hoffman [46], les terminologies "variabilité" et "incertitudes" sont utilisées pour faire référence respectivement à l'incertitude aléatoire et incertitude épistémique. Selon Frey et Burmaster [48], La variabilité représente la diversité ou l'hétérogénéité dans une population bien caractérisée. Par exemple, différentes personnes ont des poids corporels différents, quel que soit l'outil avec lequel on prend les mesures. Cependant, l'incertitude est définie comme étant l'ignorance partielle ou le manque de connaissance du modélisateur vis-à-vis d'un système ou d'un modèle. Elle est parfois réductible par une mesure ou une étude plus poussée. Par exemple, même si on ne peut pas connaître le poids de chaque personne qui vit dans une ville particulière, on peut prendre plusieurs échantillons pour obtenir des informations supplémentaires sur la distribution.

D'autres articles, comme dans [44; 47], font une distinction entre l'incertitude épistémique et l'erreur. Une erreur est définie comme une imprécision identifiable malgré la disponibilité des connaissances. Elle peut être volontaire à cause de certaines contraintes comme le coût de calcul ; par exemple la simplification de maillage spatio-temporel lors des calculs en élément finis. Elle peut aussi être involontaire : c'est le cas des fautes commises par inattention lors de la programmation. Dans les deux cas, l'erreur est identifiable et elle n'est pas due au manque de connaissances.

Dans la publication de Rocquigny [44], on retrouve également une distinction entre l'incertitude paramétrique, qui est associée aux entrées de modèle, et l'incertitude non-paramétrique ou de modèle, qui affecte l'adéquation du modèle lui-même avec la réalité (structure, équations, discrétisation, résolution numérique, etc...). Soize [50] propose une méthode non-paramétrique pour prendre en compte à la fois cette incertitude de modèle et l'incertitude paramétrique dans la dynamique des structures.

Dans notre étude, nous nous intéressons uniquement aux méthodes paramétriques, qui proposent d'incorporer les incertitudes sur les paramètres du modèle, qui sont de nature aléatoire et épistémique. Cependant, dans de nombreux cas, il est difficile de distinguer clairement les incertitudes aléatoires de celles épistémiques. Dans l'HDR de Sudret [51] par exemple, aucune distinction n'est faite entre les deux catégories en ce qui concerne leur modélisation (une fois l'incertitude de certains paramètres d'entrée reconnue, un modèle probabiliste de ce dernier est construit). Le plus important, c'est que, quel que soit leur type, il est nécessaire de formaliser le plus fidèlement possible les incertitudes affectant un système.

Concernant les modèles de synthèse présentés dans le Chapitre 2, même s'il est difficile de distinguer clairement les incertitudes aléatoires de celles épistémiques, nous avons distingué l'*incertitude de mesure* liée à la répétabilité, à la reproductibilité et aux conditions d'essais,

de la *variabilité de production*, qui est associée aux écarts entre véhicules de même définition technique, produits avec le même outil industriel. Cela sera détaillé dans le Chapitre 4.

3.2.3.2 Modélisation par des variables aléatoires

Cette étape consiste à quantifier les incertitudes, c'est-à-dire à identifier les paramètres d'entrée qui ne sont pas bien connus et à les modéliser. Il existe plusieurs méthodes de quantification d'incertitudes. D'abord, les méthodes stochastiques qui prennent en compte les incertitudes sous la forme de variable aléatoire, et les propagent à l'aide de la théorie des probabilités. Ensuite, les méthodes dites non-stochastiques qui sont généralement utilisées en présence de fortes méconnaissances, c'est-à-dire lorsque très peu d'informations sont disponibles. Ces approches dépassent le cadre de cette thèse, mais nous pouvons toutefois citer : la théorie des intervalles [52; 53], la théorie des ensembles flous [54], la théorie de Dempster-Shafer [55; 56], ou encore la méthode info-gap [57].

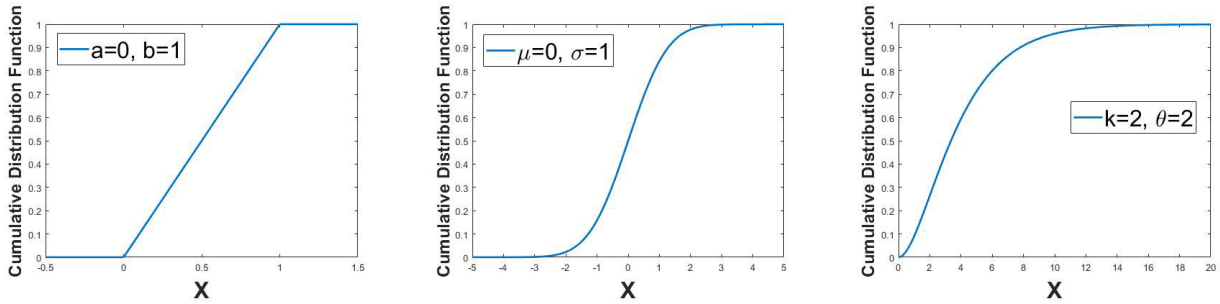
Les méthodes stochastiques permettent de prendre en compte les incertitudes sous la forme de variable aléatoire. Le concept de variable aléatoire formalise la notion de grandeur variant selon le résultat d'une expérience aléatoire. Sous sa forme moderne, la formulation de cette théorie contient trois ingrédients : l'univers, les événements et la mesure de probabilité [58; 59]. L'univers, ou l'espace des observables, noté Ω, représente tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire que l'on cherche à modéliser. Un évènement A est défini comme un sous-ensemble de Ω contenant les réalisations $\omega \in \Omega$. L'ensemble de tous les événements possibles de Ω forme une tribu de Ω, notée $\mathcal{F}$. Étant en possession d'une tribu d'événements, on cherche à attribuer à chacun de ces derniers une probabilité, notée $\mathbb{P}$, qui représente le degré de confiance que l'on a en sa réalisation. Les probabilités sont encodées sous forme de nombres réels compris dans l'intervalle $[0, 1]$, avec l'interprétation suivante : plus la probabilité est proche de 1, plus notre confiance dans la réalisation de l'événement est grande. Finalement, ces notions assurent la construction d'un espace de probabilités noté $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Pour plus d'informations sur les notions de probabilités, le lecteur peur se référer à la Section 5.2.1 de cette thèse.

Une variable aléatoire réelle X est une fonction de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ dans $\mathbb{R}$. Elle admet une fonction de répartition (CDF : Cumulative Distribution Function), qui caractérise la loi de probabilité de X, et qui est une application de $\mathbb{R}$ dans $[0, 1]$. La fonction de répartition, notée $F_X(x)$ (cf. Figure 3.3), associe à tout réel x :

$$F_X(x) \;=\; \mathbb{P}(X \leq x) \tag{3.1}$$

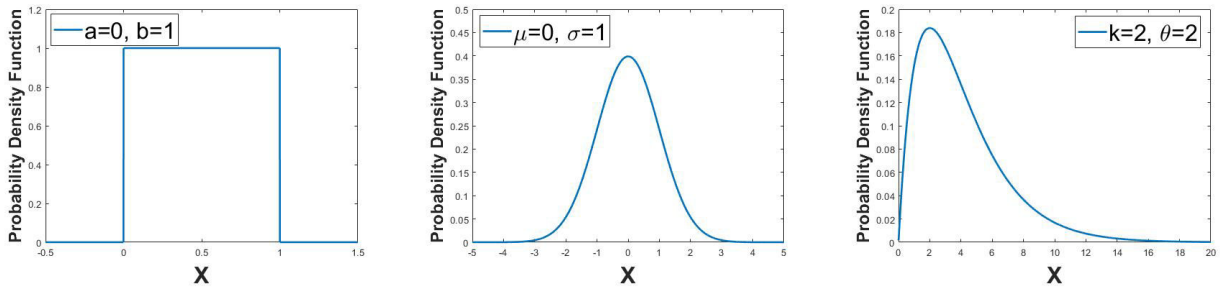
La fonction de densité de probabilité (PDF : Probability Density Function), notée $f_X(x)$ (cf. Figure 3.4), est la fonction dérivée de $F_X(x)$ (on suppose que la fonction de répartition $F_X(x)$ est continue en x). En calculant l'intégrale de $f_X(x)$ sur un intervalle (a, b), on obtient la probabilité de trouver X dans cet intervalle, soit :

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) \;=\; F_X(b) - F_X(a) \;=\; \int_a^b f_X(x)dx \qquad \forall a \leq b \tag{3.2}$$



(a) Uniforme (b) Normale (c) Gamma

FIGURE 3.3 – Exemples de fonctions de répartition



(a) Uniforme (b) Normale (c) Gamma

FIGURE 3.4 – Exemples de fonctions de densité de probabilité

Afin de quantifier les incertitudes et construire le modèle probabiliste des paramètres d'entrée du système considéré, les données doivent d'abord être collectées. Selon la quantité de données disponibles, pouvant aller de zéro à des milliers d'observations, diverses techniques peuvent être utilisées pour choisir la loi de probabilité adéquate. Nous pouvons citer :

— la méthode d'estimation non-paramétrique par noyau, appelée aussi méthode de Parzen–Rozenblatt, qui est une généralisation de la méthode par histogramme [60] ;

— les approches paramétriques d'ajustement de loi analytique telle que la méthode des moments [58; 59] et du maximum de vraisemblance [58; 59] ;

— le principe du maximum d'entropie [61; 62; 63] est aussi une autre approche pour construire une loi de probabilité lorsque l'on dispose d'informations minimalistes sur cette

dernière, basée sur la notion d'entropie ;

— le principe de l'actualisation bayésienne qui permet de fusionner différentes sources d'informations [64; 65; 66] (par exemple : un *a priori* sur la loi de probabilité avec des données mesurées).

Il faut noter que la démarche bayésienne permet également de caractériser l'incertitude des paramètres d'entrée d'un modèle en combinant l'information *a priori* sur ses paramètres avec les données de mesure liées aux grandeurs de sortie du modèle. Cette dernière méthode est détaillée dans le Chapitre 5. Le principe du maximum d'entropie et la modélisation par ajustement de lois sont détaillés ci-après.

3.2.3.2.1 Jugement d'expert et principe de maximum d'entropie

Le jugement d'expert est souvent utilisé pour caractériser les incertitudes des paramètres d'entrée du modèle lorsqu'aucune donnée n'est disponible. L'expert peut donc utiliser ses connaissances générales sur les paramètres étudiés, ou s'inspirer d'un cas similaire précédemment traité ou rapporté dans la littérature. L'avis de l'expert peut être traduit d'une manière formelle en loi de probabilité, ou à l'aide du principe de maximum d'entropie [61; 62; 63] à partir d'informations minimalistes, comme par exemple les limites physiques des paramètres.

Ce principe de maximum d'entropie s'applique comme suit : pour une variable aléatoire continue $X : \Omega \to \mathcal{D}_X \subset \mathbb{R}$, la densité de probabilité qui représente au mieux l'information connue est celle qui maximise l'entropie au sens de Shannon [63] :

$$H \;=\; -\int_{\mathcal{D}_X} f_X(x) \ln f_X(x) dx \tag{3.3}$$

L'entropie H traduit la quantité d'information délivrée par la densité de probabilité $f_X(x)$ sur X. L'objet du principe de maximum d'entropie est de maximiser H en tenant compte des informations disponibles sur X (e.g. positivité, bornes, moments statistiques, ... etc.). Il s'agit de résoudre le problème d'optimisation suivant :

$$\text{Maximiser } H \;=\; -\int_{\mathcal{D}_X} f_X(x) \ln f_X(x) dx \tag{3.4}$$

$$\text{sous les contraintes } E[c_j(X)] \;=\; -\int_{\mathcal{D}_X} c_j(x) f_X(x) dx \;= \gamma_j, \qquad j = 0, ..., k \tag{3.5}$$

où $c_0(x) = 1$ et $\gamma_0 = 1$. Cela revient à écrire que l'intégrale de $f_X(x)$ sur $\mathcal{D}_X$ est égale à 1 :

$$\int_{\mathcal{D}_X} f_X(x) \;=\; 1 \tag{3.6}$$

et $c_j(x)$, $j = 1, ..., k$ sont des fonctions connues [1]. La solution classique de ce problème est donnée par :

$$f_X^{ME}(x) \;=\; \exp - \sum_{j=0}^{k} \lambda_j c_j(x) \tag{3.7}$$

où les constantes λ_j, $j = 0, ..., k$ doivent être déterminées de telle sorte que l'intégrale de $f_X^{ME}(x)$ sur $\mathcal{D}_X$ soit égale à 1 et que les contraintes citées précédemment soient vérifiées.

Finalement, lorsqu'on souhaite représenter une connaissance imparfaite d'un phénomène par une loi de probabilité, le principe du maximum d'entropie consiste à identifier d'abord les contraintes auxquelles cette distribution doit répondre, et de choisir ensuite parmi toutes les distributions répondant à ces contraintes celle qui détient la plus grande entropie au sens de Shannon, *i.e.* celle qui apporte le maximum d'information. Pour cette raison, la loi de probabilité choisie est la moins arbitraire de toutes celles que l'on pourrait utiliser. Ainsi, le principe du maximum d'entropie préconise l'utilisation de la loi :

— uniforme si la plage de variation du paramètre étudié est bornée ;
— exponentielle si la moyenne du paramètre est connue et si sa plage de variation est bornée ou semi-bornée ;
— gaussienne si la moyenne et l'écart-type du paramètre sont connus et la plage de variation non bornée.

3.2.3.2.2 Modélisation par ajustement de lois

La modélisation par ajustement d'une loi de probabilité est conseillée lorsqu'on possède une connaissance et une information suffisantes sur son comportement statistique. Dans cette section, supposons qu'un ensemble d'échantillons $\{x^{(1)}, ..., x^{(N)}\}$ du paramètre d'entrée X est disponible.

Afin de définir la densité de probabilité la mieux adaptée, les étapes suivantes sont généralement nécessaires [51; 59] :

1. en premier lieu, il est important d'utiliser les outils de la statistique descriptive, comme la moyenne, l'écart-type ou le mode de l'échantillon, ainsi que les outils de visualisation tels que les histogrammes ou les boîtes à moustache. Le but est d'avoir une première impression sur les données afin de s'orienter vers le choix d'une loi de probabilité plutôt qu'une autre ;
2. les lois de probabilité qui pourraient correspondre aux données sont ensuite choisies. Par exemple, l'utilisation d'une loi normale dans le cas d'une forme symétrique de l'histo-

1. Par exemple, si la moyenne μ et la variance σ^2 d'une loi de probabilité sont connues, alors on peut écrire les fonctions $c_1(x) = x$, $c_2(x) = (x - \mu)^2$ et les contraintes $\gamma_1 = \mu$ et $\gamma_2 = \sigma^2$

gramme, et une loi log-normale ou gamma si sa forme est dissymétrique ;

3. les paramètres des lois de probabilité choisis sont ensuite estimés en utilisant par exemple, la méthode des moments ou la méthode du maximum de vraisemblance qui sont détaillés ci-après ;
4. des tests de qualité d'ajustement sont ensuite appliqués. Le but est d'accepter ou de rejeter les hypothèses faites pour chaque loi de probabilité. Comme par exemple le test de χ^2. A partir des résultats, la loi de probabilité la plus appropriée est sélectionnée et sera utilisée pour la propagation de l'incertitude.

La méthode des moments [58; 59] est probablement le moyen le plus simple pour estimer les paramètres d'une loi de probabilité (étape 3). Elle consiste à estimer les paramètres en égalisant certains moments théoriques avec des moments empiriques de l'ensemble des échantillons. Par exemple, dans le cas d'une loi de probabilité normale, la fonction densité de probabilité s'écrit comme suit [58; 59] :

$$f_X(x) \;=\; \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\; e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} \tag{3.8}$$

avec son espérance μ et son écart-type σ, qui sont les deux paramètres à estimer, qu'on note $\theta = (\mu, \sigma)$. Les moments théoriques d'ordre un et d'ordre deux d'une loi de probabilité normale continue sur un interval I de $\mathbb{R}$ sont donnés par [58; 59] :

$$m_1 \;=\; E[X] \;=\; \int_I x\; f_X(x)dx \;=\; \mu \tag{3.9}$$

$$m_2 \;=\; E[X^2] = \int_I x^2\; f_X(x)dx \;=\; \mu^2 + \sigma^2 \tag{3.10}$$

Les moments empiriques de l'ensemble de N échantillons sont donnés par [58; 59] :

$$\widehat{m}_1 \;=\; \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} x^{(j)} \tag{3.11}$$

$$\widehat{m}_2 \;=\; \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} x^{(j)^2} \tag{3.12}$$

Pour retrouver l'estimateur des paramètres de cette loi de probabilité $\widehat{\theta} = (\widehat{\mu}, \widehat{\sigma})$, il suffit

d'égaliser les moments théoriques et empiriques. On obtient :

$$\widehat{\mu} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} x^{(j)} \tag{3.13}$$

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} x^{(j)^2} - \mu^2 \tag{3.14}$$

La méthode du maximum de vraisemblance [58; 59] est connue pour être plus robuste que la méthode des moments. Supposons que la variable aléatoire X suit une loi de probabilité particulière $f_X(x|\theta)$, dont les paramètres θ sont inconnus. La méthode consiste à estimer les paramètres θ de cette loi de probabilité à partir d'un d'échantillon d'observations indépendantes $\{x^{(1)}, ..., x^{(N)}\}$, en maximisant une fonction appelée : *fonction de vraisemblance* $\mathcal{L}$ (likelihood function). Elle est définie par [58; 59] :

$$\mathcal{L}(\theta|x^{(1)}, ..., x^{(N)}) = f_X(x^{(1)}|\theta) \times ... \times f_X(x^{(N)}|\theta) = \prod_{j=1}^{N} f_X(x^{(j)}|\theta) \tag{3.15}$$

On cherche donc à estimer θ qui rend maximale cette fonction de vraisemblance. En d'autres termes, on chercher à trouver la valeur la plus vraisemblable de θ pour laquelle la probabilité d'observer $\{x^{(1)}, ..., x^{(N)}\}$ est la plus forte possible. Dans la pratique, pour trouver l'estimateur $\widehat{\theta}$, il est souvent plus simple de maximiser le logarithme népérien de la vraisemblance :

$$\widehat{\theta} = \arg\max_{\theta} \ln \mathcal{L}(\theta|x^{(1)}, ..., x^{(N)}) \tag{3.16}$$

Il est également possible de prendre en compte un *a priori* (un avis d'expert par exemple) sur θ. Cette technique de modélisation est basée sur le formalisme bayésien [67], dont les principaux intérêts résident dans sa capacité à fusionner différentes sources d'information et à prendre en compte l'évolution de l'état des connaissances en fonction de l'acquisition de nouvelles informations. Pour plus d'information sur cette technique, le lecteur peut se référer aux ouvrages de Robert [64; 65; 66].

3.2.4 Propagation d'incertitudes

Après la quantification des incertitudes et la modélisation des paramètres d'entrée du modèle par des variables aléatoires, il est nécessaire de propager cette incertitude dans le modèle pour caractériser la variabilité des sorties. Pour cela, on considère des variables d'entrée X, des variables de sortie Y et $\mathcal{M}$ représente la fonction du modèle (le modèle mathématique,

le schéma numérique et les hypothèses de calcul). On écrit :

$$\mathcal{M} \ : \ \mathbb{R}^k \ \rightarrow \ \mathbb{R} \tag{3.17}$$

$$X \ \mapsto \ Y \ = \ \mathcal{M}(X) \tag{3.18}$$

où $X = (X_1, X_2, \ldots, X_k)$ est un vecteur aléatoire de k variables d'entrée. Les sorties Y sont donc également des variables aléatoires. L'objectif principal de la propagation d'incertitude est donc d'étudier la probabilité des sorties du modèle Y, à savoir leur fonction de densité de probabilité jointe $f_Y(y)$. Cependant, cette fonction de probabilité est difficilement calculable sauf dans des cas académiques simples. Pour cela, l'implémentation des lois de probabilités dans le modèle se fait par des méthodes d'approximation en utilisant des générateurs de nombres aléatoires. La méthode la plus connue est sans doute la méthode de Monte Carlo (MC) [68; 69]. Cette méthode est souvent employée puisqu'elle fournit une méthodologie efficace et robuste pour générer des jeux de solutions du modèle en échantillonnant à partir des paramètres d'entrée. Cependant, cette approche est extrêmement coûteuse en nombre d'évaluations du modèle. Pour diminuer le nombre de simulations, d'autres techniques ont été développées. Leur objectif et de réduire le nombre de tirages nécessaires pour estimer la densité de probabilité d'une variable aléatoire. On peut citer les techniques quasi-MC [70], qui sont des suites quasi-aléatoires à faible discrépance (elles permettent un bon remplissage de l'espace des entrées). On peut citer également les méthodes avec échantillonage stratifié comme les plans Latin Hypercube Simpling (LHS) [71] qui consistent à découper l'espace des variables d'entrée en petits espaces équiprobables, puis à échantillonner au sein de ses sous-espaces afin d'améliorer la convergence. Il existe aussi la méthode de réduction de la variance qui permet de réduire le nombre de simulation en utilisant un échantillonnage préférentiel (Importance Sampling : IS) [68; 72]. Cela consiste à tirer des échantillons selon une densité de probabilité biaisée qui favorise les valeurs des variables d'entrée X dans la zone d'importance. Les méthodes fiabilistes [73] entrent aussi dans le cadre des approches stochastiques, même si elles visent à répondre à des questions bien particulières. Ce sont des méthodes approchées qui consistent à déterminer la probabilité de défaillance d'un système, comme la méthode FORM (First Order Reliability Method) et SORM (Second Order Reliability Method). Si le code de calcul est trop coûteux en termes de temps de calcul, la théorie des plans d'expériences [74] peut être appliquée pour propager les incertitudes et explorer le comportement des réponses du modèle à l'aide d'un nombre limité de calculs. Cependant, elle est basée sur la discrétisation des entrées en plusieurs niveaux, ce qui en fait des méthodes déterministes qui n'utilisent pas de lois de probabilité sur les entrées. Cette théorie permet également de construire un modèle de substitution du code de calcul ayant un coût pratiquement nul, qu'on

appelle "métamodèle" ou "surface de réponse" [75], dans lequel l'incertitude sera propagée. Les méthodes de Monte Carlo et de quasi-MC sont détaillées ci-après.

3.2.4.1 La méthode de Monte Carlo

La méthode de Monte Carlo [68; 69] permet de calculer une valeur numérique approchée en utilisant des procédés aléatoires, c'est-à-dire des techniques probabilistes. Cette méthode est utilisée dans beaucoup de problèmes scientifiques. Soit $\{x^{(1)}, ..., x^{(N)}\}$ N échantillon d'une variable aléatoire X, avec $f_X(x)$ sa fonction de densité de probabilité. L'expression de l'espérance mathématique de la fonction g d'une variable aléatoire X s'écrit :

$$E[g(X)] \;=\; \int g(x) f_X(x) dx \tag{3.19}$$

Cette espérance peut être estimée par la méthode Monte Carlo à partir des N échantillons :

$$\widehat{E}[g(X)] \;=\; \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} g(x^{(j)}) \tag{3.20}$$

La simulaion de Monte Carlo peut alors être utilisée pour estimer la valeur moyenne μ_Y et l'écart-type σ_Y de la sortie du modèle $Y = \mathcal{M}(X)$. Supposons qu'un échantillon de N vecteurs d'entrée a été généré, disons $\{x^{(1)}, ..., x^{(N)}\}$. Les estimateurs de la moyenne et de l'écart-type sont donnés par :

$$\widehat{\mu}_Y \;=\; \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \mathcal{M}(x^{(j)}) \tag{3.21}$$

$$\widehat{\sigma}_Y^2 \;=\; \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^{N} \mathcal{M}(x^{(j)})^2 - \widehat{\mu}_Y^2 \tag{3.22}$$

En revanche, la méthode de Monte Carlo est très couteûse en termes de nombre de simulations. En effet, le taux de convergence d'une méthode Monte Carlo est estimé à l'aide du théorème centrale limite en $\frac{1}{\sqrt{N}}$ (multiplier par 100 fois le nombre de tirages N permet de diviser par 10 l'écart-type de l'erreur de l'estimateur). C'est pourquoi, des méthodes telles que quasi-MC ont été développées afin d'accélérer la convergence.

3.2.4.2 La méthode de quasi-Monte Carlo

Les méthodes du type quasi-Monte Carlo [70] ont été développées afin d'accélérer la convergence de la méthode Monte Carlo. En effet, elles permettent de réduire d'un facteur 10 le coût des estimations [76]. Ces méthodes, qui sont des versions déterministes des méthodes

de Monte Carlo, définissent des séquences d'échantillons déterministes qui ont une discrépance plus faible que les séquences aléatoires, *i.e.* qu'elles ont une meilleure répartition des échantillons dans l'espace des variables d'entrée. Leur bon remplissage de l'espace rend ces plans d'expérience très satisfaisants [77]. Nous pouvons citer par exemple la suite de Sobol [78] et de Halton [79]. La différence entre un tirage aléatoire type Monte Carlo et un tirage quasi-Monte Carlo (suite de Sobol) est présenté dans la Figure 3.5 pour 256 échantillons de deux variables aléatoires uniformes.

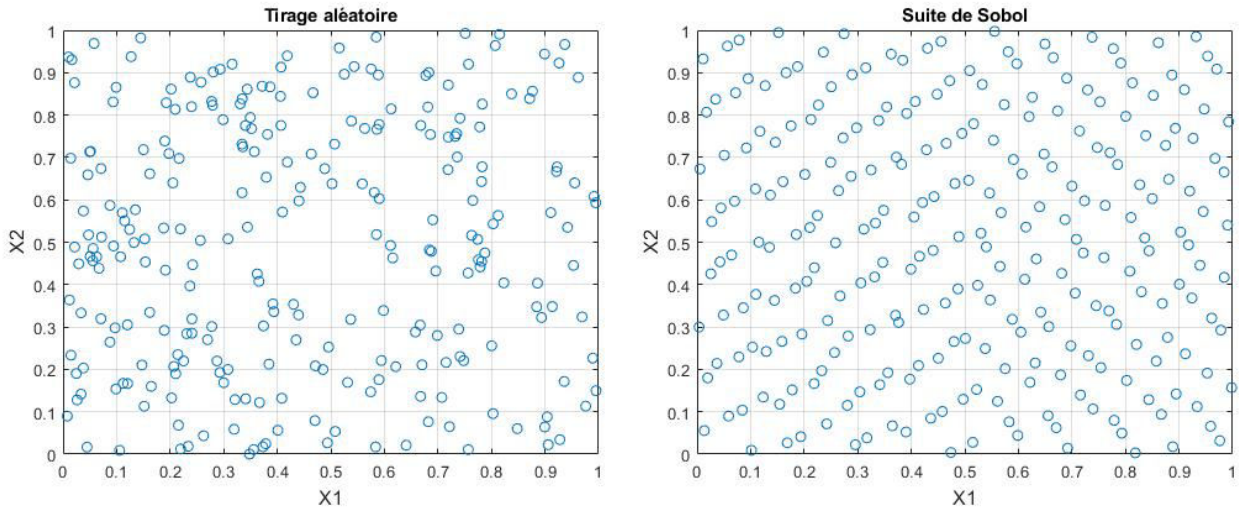


FIGURE 3.5 – Différence entre un tirage aléatoire et la suite de Sobol

3.2.5 Analyse de sensibilité

Après la quantification, la modélisation et la propagation d'incertitudes, vient la dernière étape qui est l'analyse de sensibilité. Son rôle principal est d'étudier l'impact de la variabilité de chaque paramètre d'entrée sur la ou les sorties du modèle. Elle peut déterminer les paramètres les plus influents, ceux qui n'ont pas d'influence sur la sortie, et ceux qui interagissent au sein du modèle. L'intérêt est alors indéniable, car les résultats d'une analyse de sensibilité peuvent permettre de simplifier le modèle et de mieux l'appréhender. Au final et en général, l'analyse de sensibilité est une aide à la validation d'un code de calcul, à l'orientation des efforts de recherche, ou encore à la justification en termes de sûreté du dimensionnement ou d'une modification d'un système [80]. Selon Saltelli et al. [76; 81], il est important, avant de réaliser une analyse de sensibilité, de spécifier les objectifs de cette étude :

— déterminer les paramètres les plus influents sur la sortie du modèle ;
— alléger le modèle en considérant les entrées non influentes comme constantes, ou les supprimer ;

— déterminer les variables qui interagissent entre elles au sein du modèle ;
— calibrer des entrées du modèle par rapport à des résultats disponibles, qui consiste à ajuster les valeurs des paramètres pour que les données simulées correspondent aux valeurs expérimentales ;
— et enfin, juger la fidélité et la robustesse du modèle par rapport aux observations réelles de la sortie.

La première approche historique de l'analyse de sensibilité est connue sous le nom d'approche locale [82]. Cette méthode permet d'évaluer l'influence des petites variations des paramètres d'entrée sur les sorties d'un modèle. Ces méthodes n'essaient pas d'explorer l'espace des entrées ; elles examinent seulement les petites perturbations qui se produisent autour de valeurs nominales (moyenne d'une entrée, par exemple). C'est une approche déterministe qui consiste à calculer ou estimer les dérivées partielles de la sortie du modèle à ce point spécifique de l'espace des entrées. D'autres méthodes plus récentes, dénommées "globales" [76; 81], ont été développées. Elles étudient l'impact de l'intégralité du domaine de variation possible des paramètres d'entrée sur la sortie du modèle [76].

Les méthodes d'analyse de sensibilité peuvent être rassemblées en deux groupes : d'abord, les méthodes de criblage (screening techniques) qui consistent en une analyse qualitative de la sensibilité de la variable de sortie par rapport aux variables d'entrée ; ensuite, les méthodes quantitatives qui permettent une hiérarchisation précise de l'influence de tous les paramètres d'entrée sur la sortie du modèle. La méthode de criblage de Morris [83] ainsi que les méthodes quantitatives sont détaillées ci-après.

3.2.5.1 Criblage : Méthode de Morris

Les méthodes de criblage (screening) permettent d'explorer rapidement le comportement des sorties d'un modèle coûteux en termes de temps de calcul, en faisant varier un grand nombre de ses entrées. Elles sont toutes basées sur la discrétisation des entrées en plusieurs valeurs (plusieurs niveaux), ce qui en fait des méthodes déterministes qui n'utilisent pas de lois de probabilités sur les entrées [80]. Parmi les méthodes de criblage, la méthode de Morris [83] est l'une des plus connues. Elle est adaptée aux modèles dont les entrées sont quantitatives (typiquement plusieurs dizaines voire plusieurs centaines). En effet, la méthode est un moyen simple de faire un premier tri parmi les entrées selon leur influence. Elle ne constitue donc qu'une première étape dans l'analyse de sensibilité du modèle.

Un des plans d'expériences le plus simple et encore le plus utilisé aujourd'hui est le plan OAT (One At a Time). Ce plan permet d'étudier la sensibilité des entrées d'un modèle en changeant le niveau d'une entrée à la fois et en laissant les autres à une valeur nominale. Il

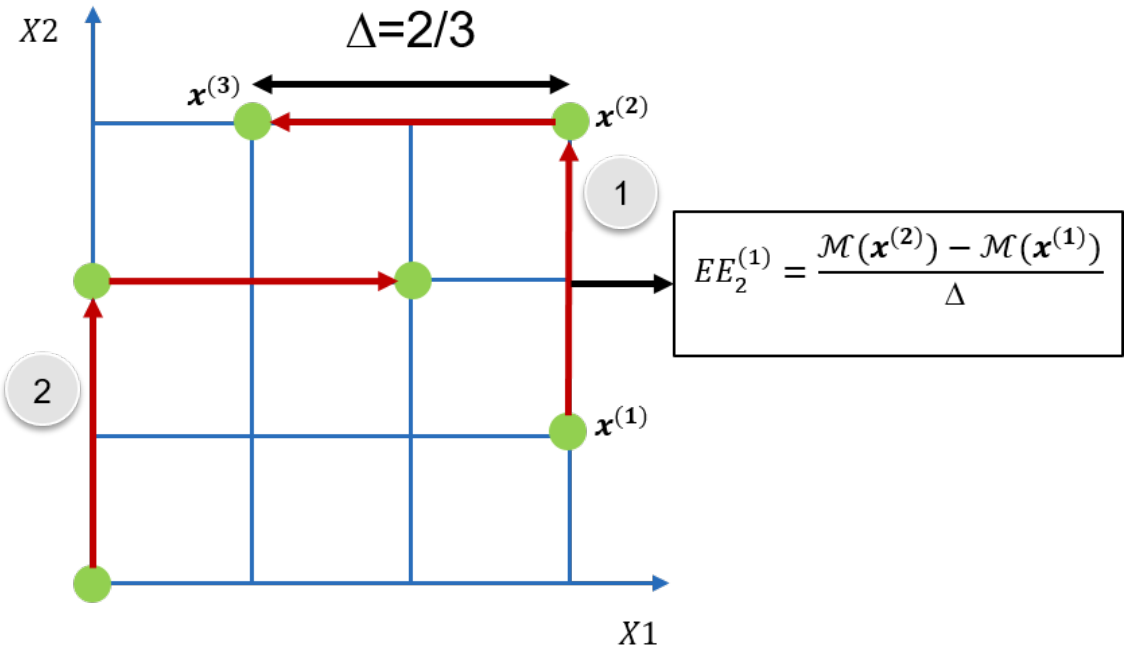


FIGURE 3.6 – Exemple de la méthode de Morris pour un espace à deux dimensions, avec $p = 4$, $r = 2$, et $\Delta = 2/3$

remet ensuite la variable d'entrée à sa valeur de référence et répète de la même manière pour les autres entrées. Avec deux niveaux par facteur, ce plan nécessite exactement $N = k + 1$ simulation, avec k étant le nombre de paramètres. Cependant, comme les méthodes locales, le plan OAT ne permet pas d'explorer l'espace des entrées (la sensibilité dépend de la valeur nominale $x^{(0)}$). La méthode de Morris est une extension du plan OAT permettant de rendre le plan "global" en répétant r expériences (trajectoires) à différents endroits dans l'espace des entrées, ce qui nécessite $N = r(k + 1)$ simulations. Chaque trajectoire m ($m = 1, \ldots, r$), permet d'évaluer un effet élémentaire $EE_i^{(m)}$ correspondant au paramètre i, avec $i = 1, \ldots, k$. L'effet élémentaire est défini comme suit [76] : supposons que l'espace des entrées est discrétisé en p niveaux, et $x^{(a)}$ et $x^{(a+1)}$ deux échantillons de la trajectoire m ayant une valeur différente suivant le paramètre i (cf. Figure 3.6) :

$$EE_i^{(m)} = \frac{\mathcal{M}(x^{(a)}) - \mathcal{M}(x^{(a+1)})}{\Delta} \tag{3.23}$$

avec Δ la distance relative entre $x^{(a)}$ et $x^{(a+1)}$. C'est une valeur choisie parmi $\{1/(p-1), \ldots, 1-1/(p-1)\}$. Il est conseillé de prendre un nombre pair pour le nombre de niveaux p et de choisir $\Delta = p/[2(p-1)]$ [76; 83; 84]. A noter que d'anciennes études [85; 86] ont montré que le choix de $p = 4$ et $r = 10$ produisait de bons résultats. Les r effets élémentaires

par paramètre estimé ($EE_i^{(m)},\ i = 1, \ldots, k,\ m = 1, \ldots, r$) donnent une distribution pour chaque EE_i que nous pouvons résumer avec trois mesures [76] :

$$\widehat{\mu}_i = \frac{1}{r} \sum_{m=1}^{r} EE_i^{(m)} \tag{3.24}$$

$$\widehat{\mu}_i^* = \frac{1}{r} \sum_{m=1}^{r} |EE_i^{(m)}| \tag{3.25}$$

$$\widehat{\sigma}_i^2 = \frac{1}{r-1} \sum_{m=1}^{r} (EE_i^{(m)} - \widehat{\mu}_i)^2 \tag{3.26}$$

La première mesure $\widehat{\mu}_i$ donne la moyenne des effets élémentaires, qui évalue l'influence globale du paramètre i sur la sortie du modèle. La seconde mesure $\widehat{\mu}_i^*$ est une extension de la première, qui évalue l'influence globale du paramètre i sur la sortie du modèle, même en présence de non-monotonie. La dernière $\widehat{\sigma}_i^2$ donne la variance des effets élémentaires, qui mesure la non-linéarité d'un modèle et/ou les interactions entre les paramètres. La méthode de Morris permet ainsi de classer les paramètres en trois groupes, selon leurs effets :

— effets négligeables ;
— effets linéaires et sans interaction avec d'autres paramètres ;
— effets non linéaires et/ou avec interactions.

La trajectoire peut être écrite sous forme de matrice B^* de dimension $(k+1) \times k$, dont les lignes sont les vecteurs $x^{(1)}, ..., x^{(k+1)}$. La matrice d'orientation B^* s'écrit comme suit [76] :

$$B^* = (Jx^* + \frac{\Delta}{2}[(2B - J)D^* + J])P^* \tag{3.27}$$

avec B une matrice $(k+1) \times k$ strictement triangulaire inférieure constituée de 1, J est une matrice $(k+1) \times k$ constituée de 1 uniquement, x^* est une valeur de X choisie aléatoirement (x^* ne fait pas partie des valeurs de la trajectoire, mais sert à construire tous ses points $x^{(1)}, ..., x^{(k+1)}$), D^* est une matrice diagonale dont les éléments ont une probabilité égale de prendre la valeur $+1$ ou -1 (elle indique si la valeur des paramètres va augmenter ou diminuer le long de la trajectoire), et enfin P^* est une matrice de permutation $k \times k$ qui est constituée exactement d'une seule valeur de 1 dans chaque ligne et chaque colonne, et de 0 pour les autres positions (elle indique l'ordre dans lequel les valeurs des paramètres sont modifiées).

3.2.5.2 Analyse de sensibilité quantitative

A partir d'un échantillon de simulations (par exemple Monte Carlo), il est facile d'estimer les indices de sensibilité de la sortie du modèle par rapport aux variables d'entrée. Nous

pouvons citer les techniques de régression linéaire, de régression sur les rangs ou encore les méthodes plus générales basées sur la décomposition de la variance du modèle. La construction d'un métamodèle pour remplacer un code de calcul nécessitant trop de temps d'exécution ou de ressources informatiques vient ensuite en dernier recours [75]. De plus, cette dernière méthode dépasse le cadre de cette thèse. La Figure 3.7 illustre une méthodologie de l'analyse de sensibilité quantitative [85].

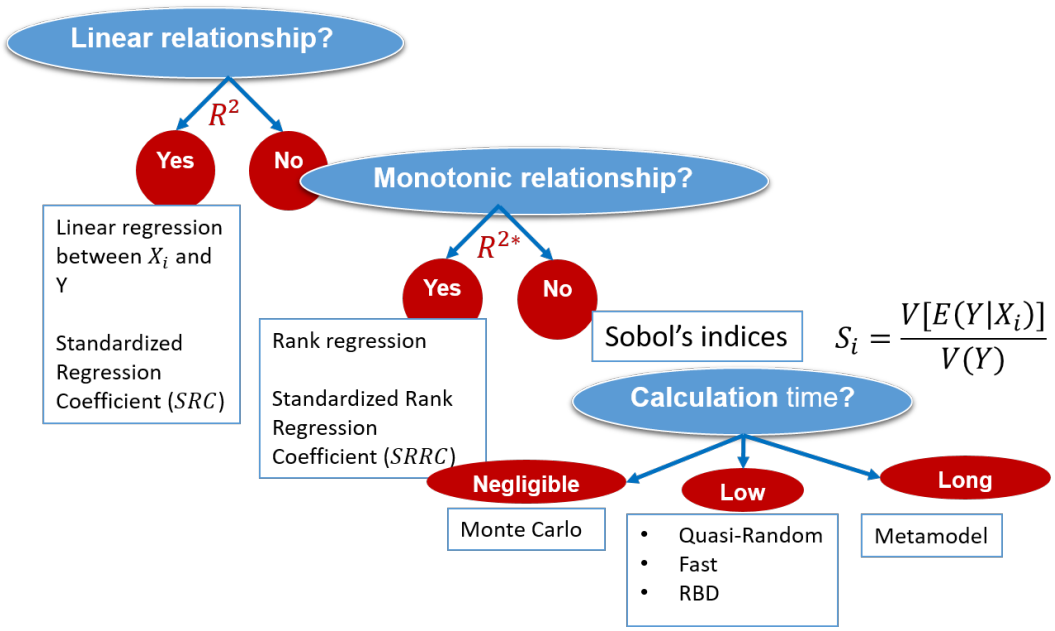


FIGURE 3.7 – Méthodologie de l'analyse de sensibilité quantitative [85]

3.2.5.2.1 Régression : indice SRC et $SRRC$

En présence de N échantillons des variables d'entrée $X = (X_1, X_2, \ldots, X_k)$ supposées indépendantes et de la sortie Y, une régression linéaire peut être réalisée :

$$\widehat{Y} = \beta_0 + \sum_{i=1}^{k} \beta_i X_i \tag{3.28}$$

Les coefficients β_0 et β_i sont déterminés par la méthode des moindres carrés. Les variables X_i étant supposées indépendantes, la variance de la sortie estimée par la régression linéaire $\widehat{Y}$ s'écrit comme suit :

$$V(\widehat{Y}) = \sum_{i=1}^{k} \beta_i^2 V(X_i) \tag{3.29}$$

où $\beta_i^2 V(X_i)$ est la part de variance de $\widehat{Y}$ due à la variable X_i. Nous pouvons ainsi définir le coefficient de régression standard SRC_i (Standardized Regression Coefficient), où SRC_i^2 représente l'indice de sensibilité qui exprime la part de la variance de la sortie expliquée par le paramètre X_i, avec [76] :

$$SRC_i = \beta_i \sqrt{\frac{V(X_i)}{V(\widehat{Y})}} \tag{3.30}$$

Lors d'une régression linéaire entre la sortie Y et les entrées X, il est important de calculer le coefficient de détermination du modèle R^2. Il représente un critère de qualité de prédiction du modèle, *i.e.* il fournit une mesure de la façon dont le modèle de régression linéaire $\widehat{Y}$ peut reproduire le vecteur de sortie réelle Y. La variance totale de la sortie réelle $V(Y)$ et la variance totale de la sortie estimée issue de la régression linéaire $V(\widehat{Y})$ sont calculées respectivement comme suit :

$$V(Y) = \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^{N} (y^{(j)} - \bar{y})^2 \tag{3.31}$$

$$V(\widehat{Y}) = \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^{N} (\widehat{y}^{(j)} - \bar{y})^2 \tag{3.32}$$

où $\bar{y}$ la moyenne de l'échantillon $\{y^{(1)}, ..., y^{(N)}\}$, $\widehat{y}^{(j)}$ représente la prévision du modèle linéaire, et $y^{(j)}$ représente la sortie réelle. R^2 représente alors la part de la variance de la sortie du modèle Y expliquée par la régression linéaire. Il est exprimé par :

$$R^2 = \frac{V(\widehat{Y})}{V(Y)} = \frac{\sum_{j=1}^{N} (\widehat{y}^{(j)} - \bar{y})^2}{\sum_{j=1}^{N} (y^{(j)} - \bar{y})^2} \tag{3.33}$$

A noter que plus le coefficient de détermination R^2 est proche de l'unité, meilleure est la performance du modèle de régression, et que la somme du carré des indices SRC vaut R^2, avec $\sum_{i=1}^{k} SRC_i^2 = R^2$.

Dans le cas où la relation entre les variables d'entrée X et la sortie Y du modèle n'est pas linéaire mais monotone, la transformation sur les rangs permet de réaliser une analyse de sensibilité en utilisant les indices $SRRC$ (Standardised Rank Regression Coefficients) [85]. Cela consiste à remplacer, pour chaque simulation j, la valeur de $x_i^{(j)}$ $(i = 1, \ldots, k)$ par son rang $r_{x_i}^{(j)}$ et la valeur de $y^{(j)}$ par son rang $r_y^{(j)}$ (rang 1 attribué à la plus petite valeur et rang N associé à la plus grande valeur). Le coefficient de détermination de la régression sur les rangs R^{2*} permet de juger l'hypothèse de monotonie du modèle.

3.2.5.2.2 Décomposition de la variance et indices de Sobol

L'idée est d'estimer de combien la variance de la sortie Y décroit si on fixe la variable X_i à une valeur x_i^*. La variance conditionnelle résultante $V(Y|X_i = x_i^*)$ est obtenue en calculant la variance de Y sur tous les paramètres sauf X_i. Le problème avec cette approche est le choix de la valeur de x_i^*. C'est pourquoi, la valeur moyenne de cette variance conditionnelle sur toutes les valeurs possibles de x_i^* est utilisée ; elle est notée $E[V(Y|X_i)]$. On pourrait donc utiliser cette quantité comme une mesure d'importance de X_i, car plus la variable X_i sera importante vis-à-vis de la variance de Y, plus la quantité $E[V(Y|X_i)]$ sera petite. Cependant, à partir de la formule de la variance totale (cf. Eq. (3.34)), on peut également utiliser de façon équivalente la quantité $V(E[Y|X_i])$ qui sera d'autant plus grande que la variable X_i sera importante vis-à-vis de la variance Y. Connaissant la variance totale de la variable de sortie $V(Y)$, on peut écrire la formule de la variance totale :

$$V(Y) \;=\; E[V(Y|X_i)] + V(E[Y|X_i]) \tag{3.34}$$

A partir de la variance conditionnelle $V(E[Y|X_i])$, on définit l'indice de sensibilité de premier ordre, appelé également indice de Sobol [87], qui mesure uniquement l'effet principale de X_i sur la variance de Y :

$$S_i \;=\; \frac{V(E[Y|X_i])}{V(Y)} \tag{3.35}$$

A noter que les indices de premier ordre sont égaux aux carrés des indices SRC lorsque le modèle est purement linéaire (cf. Eq. (3.30)) :

$$V(E[Y|X_i]) \;=\; V(\beta_i X_i) \;=\; \beta_i^2 V(X_i) \tag{3.36}$$

Sobol [87] a introduit les indices de sensibilité de premier ordre en décomposant la fonction du modèle $\mathcal{M}$ en somme de fonctions de dimensions croissantes. La décomposition est présentée ci-dessous pour une fonction : $Y = \mathcal{M}(X_1, ..., X_k)$, où X_i sont des variables aléatoires supposées indépendantes et uniformes sur $[0, 1]$:

$$\mathcal{M}(X_1, ..., X_k) \;=\; \mathcal{M}_0 + \sum_i^k \mathcal{M}_i(X_i) + \sum_{j>i}^k \mathcal{M}_{ij}(X_i, X_j) + ... + \mathcal{M}_{1...k}(X_i, ..., X_k) \tag{3.37}$$

Cependant, il existe une infinité de décompositions possibles. Sobol [87] a montré que cette décomposition devient unique si l'intégrale de chaque terme par rapport à l'une de ses propres

variables est égale à zero ; on écrit :

$$\int_0^1 \mathcal{M}_{i_1,...,i_s}\ (x_{i_1},...,x_{i_s})\ dx_{i_p} \ = \ 0, \quad \forall p = 1,...,s, \quad \forall \{i_1,...,i_s\} \subseteq \{1,...,k\} \tag{3.38}$$

on en déduit ainsi les termes de la décomposition, avec [87] :

$$\mathcal{M}_0 \ = \ E[Y] \ = \ \int_0^1 \mathcal{M}(x)dx \tag{3.39}$$

$$\mathcal{M}_i(X_i) \ = \ E[Y|X_i] - E[Y] \tag{3.40}$$

$$\mathcal{M}_i j(X_{ij}) \ = \ E[Y|X_i, X_j] - \mathcal{M}_i(X_i) - \mathcal{M}_j(X_j) - E[Y] \tag{3.41}$$

$$\vdots$$

L'Eq. (3.37) permet également d'obtenir une décomposition de la variance de Y, avec :

$$V(Y) \ = \ \sum_{i=1}^{k} V_i(Y) + \sum_{j>i}^{k} V_{ij(Y)} + ... + V_{12...k}(Y) \tag{3.42}$$

où

$$V_i(Y) \ = \ V(E[Y|X_i]) \tag{3.43}$$

$$V_{ij}(Y) \ = \ V(E[Y|X_i, X_j]) - V_i(Y) - V_j(Y) \tag{3.44}$$

$$\vdots$$

on obtient ainsi que les indices de sensibilité, nommés indices de Sobol [87] :

$$\text{d'ordre 1 : } S_i \ = \ \frac{V(E[Y|X_i])}{V(Y)} \ = \ \frac{V_i(Y)}{V(Y)} \tag{3.45}$$

$$\text{d'ordre 2 : } S_{ij} \ = \ \frac{V_{ij}(Y)}{V(Y)} \tag{3.46}$$

$$\vdots$$

L'indice de sensibilité d'ordre 2 donné par l'Eq (3.46) exprime l'effet d'interaction entre deux paramètres (c'est à dire la sensibilité de Y aux variables X_i et X_j qui n'est pas prise dans l'effet des variables seules), et ainsi de suite pour les ordres supérieurs. Ces indices sont compris entre 0 et 1, et leur somme est égale à 1 (cf. Eq. (3.42)). Ils sont faciles à interpréter, car plus l'indice est grand, plus la variable est importante. Ainsi, le nombre total d'indice de sensibilité est de $2^k - 1$ (k étant le nombre de variables d'entrée). Lorsque le nombre de paramètres d'entrée du modèle est grand, le nombre total d'indice de sensibilité explose, et il

est donc difficile de les estimer et de les interpréter tous. C'est pourquoi, Homma et Saltelli [88] ont introduit les indices de sensibilité totaux, qui expriment la sensibilité totale de la variance de Y à une variable X_i, *i.e.* son effet de premier ordre plus tous les effets d'ordre supérieur dus aux interactions. Ils sont donnés par [88] :

$$S_{Ti} \;=\; \sum_{l \in \#i} S_l \;=\; 1 - S_{\sim i} \tag{3.47}$$

où $\#i$ représente tous les ensembles d'indices contenant l'indice i, $S_{\sim i}$ représente tous les indices de sensibilité ne contenant pas l'indice i. Pour un modèle à trois variables par exemple, l'indice de sensibilité total s'écrit comme suit :

$$S_{T1} \;=\; S_1 + S_{12} + S_{13} + S_{123} \;=\; 1 - S_2 - S_3 - S_{23} \tag{3.48}$$

Les indices totaux sont utiles dans l'analyse de sensibilité, car une différence significative entre l'indice de premier ordre S_i et l'indice total S_{Ti} indique une interaction importante impliquant ce paramètre. Les indices totaux pourraient être obtenus en calculant tous les indices de sensibilité, mais ils sont nombreux ($2^k - 1$). Une autre façon d'obtenir les indices de sensibilité totaux est de réécrire la formule de la variance totale (cf. Eq. (3.34)) en fixant tous les paramètres sauf le paramètre X_i, on écrit :

$$V(Y) \;=\; E[V(Y|X_{\sim i})] + V(E[Y|X_{\sim i}]) \tag{3.49}$$

où $X_{\sim i}$ signifie tous les paramètres sauf X_i. En divisant par la variance totale $V(Y)$, on obtient l'indice de sensibilité total S_{Ti} :

$$S_{Ti} \;=\; \frac{E[V(Y|X_{\sim i})]}{V(Y)} \;=\; 1 - \frac{V(E[Y|X_{\sim i}])}{V(Y)} \tag{3.50}$$

Rappelons quelques-unes des propriétés des indices de sensibilité qui pourraient être utiles dans l'interprétation des résultats [76] :

— par définition, S_{Ti} est supérieur à S_i, ou égal à S_i dans le cas où X_i n'est impliqué dans aucune interaction avec d'autres paramètres d'entrée. La différence $S_{Ti} - Si$ est une mesure de combien le paramètres X_i est impliqué dans les interactions avec tous les autres paramètres d'entrée ;

— $S_{Ti} = 0$ implique que X_i n'est pas influent et peut être fixé à n'importe quelle valeur appartenant à sa distribution sans affecter la variance de la sortie du modèle ;

— la somme de tous les indices de sensibilité de premier ordre S_i est égale à 1 pour les modèles additifs et inférieure à 1 pour les modèles non additifs. La différence $1 - \sum_{i=1}^{k} S_i$

est un indicateur de la présence d'interactions dans le modèle ;
— la somme de tous les indices de sensibilité totaux S_{Ti} est toujours supérieure à 1. Elle est égale à 1 si le modèle est parfaitement additif.

Il existe plusieurs méthodes pour estimer les indices de Sobol, par exemple les méthodes basées sur des échantillons Monte Carlo [87; 89] qui sont coûteuses en nombre de simulations. La méthode FAST (Fourier Amplitude Sensitivity Test) [90], permet d'estimer les indices de Sobol du premier ordre, en réduisant considérablement le nombre de simulations par rapport à l'approche qui s'appuie sur des échantillons Monte Carlo. C'est une méthode basée sur la transformée de Fourier multidimensionnelle de la fonction du modèle. Pour estimer les indices de sensibilité totaux, Saltelli et al. [91] proposent une extension de cette méthode appelée EFAST (Extended Fourier Amplitude Sensitivity Test). Cependant, Tissot a montré dans sa thèse [92] que la méthode EFAST pouvait donner des indices biaisés, d'autant plus que le nombre de paramètres est grand. Afin de réduire le coût d'estimation, Tarantola et al. [93] ont également développé une autre méthode nommée Random Balance Design (RBD) couplée avec la méthode FAST, et dont le coût est indépendant du nombre de paramètres d'entrée du modèle. L'estimation des indices de sensibilité par Monte Carlo, ainsi que la méthode EFAST sont présentées ci-après.

3.2.5.2.3 Estimation des indices de Sobol par Monte Carlo

La méthode présentée ici représente l'une des méthodes les plus courantes pour l'analyse de la décomposition de la variance pour la mesure de sensibilité. Elle consiste à estimer les indices de Sobol totaux et de premier ordre, d'un modèle à k variables d'entrée, en se basant sur des échantillons Monte Carlo. Cette approche est détaillée ci-dessous en suivant la procédure décrite par Saltelli et al. [76] (Cette méthode est attribuée à Saltelli [89] et représente une extension de l'approche proposée par Sobol [87] et Homma et Saltelli [88]) :

— Générer deux matrices A et B de taille $(N \times k)$ (cf. Eq. (3.51) et Eq. (3.52)). k représente le nombre de variables d'entrée, et N est le nombre de tirages aléatoires qui peut varier de quelques centaines à quelques milliers d'échantillons. Sobol [87] recommande d'utiliser

des tirages du type quasi-MC.

$$A = \begin{bmatrix} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & \cdots & x_i^{(1)} & \cdots & x_k^{(1)} \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & \cdots & x_i^{(2)} & \cdots & x_k^{(2)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{(N-1)} & x_2^{(N-1)} & \cdots & x_i^{(N-1)} & \cdots & x_k^{(N-1)} \\ x_1^{(N)} & x_2^{(N)} & \cdots & x_i^{(N)} & \cdots & x_k^{(N)} \end{bmatrix} \tag{3.51}$$

$$B = \begin{bmatrix} x_{k+1}^{(1)} & x_{k+2}^{(1)} & \cdots & x_{k+i}^{(1)} & \cdots & x_{2k}^{(1)} \\ x_{k+1}^{(2)} & x_{k+2}^{(2)} & \cdots & x_{k+i}^{(2)} & \cdots & x_{2k}^{(2)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{k+1}^{(N-1)} & x_{k+2}^{(N-1)} & \cdots & x_{k+i}^{(N-1)} & \cdots & x_{2k}^{(N-1)} \\ x_{k+1}^{(N)} & x_{k+2}^{(N)} & \cdots & x_{k+i}^{(N)} & \cdots & x_{2k}^{(N)} \end{bmatrix} \tag{3.52}$$

— Définir une matrice C_i constituée de toutes les colonnes de B à l'exception de la $i$ème colonne, qui sera prise de la matrice A, avec $i = 1, \ldots, k$ (cf. Eq. (3.53)).

$$C_i = \begin{bmatrix} x_{k+1}^{(1)} & x_{k+2}^{(1)} & \cdots & x_i^{(1)} & \cdots & x_{2k}^{(1)} \\ x_{k+1}^{(2)} & x_{k+2}^{(2)} & \cdots & x_i^{(2)} & \cdots & x_{2k}^{(2)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{k+1}^{(N-1)} & x_{k+2}^{(N-1)} & \cdots & x_i^{(N-1)} & \cdots & x_{2k}^{(N-1)} \\ x_{k+1}^{(N)} & x_{k+2}^{(N)} & \cdots & x_i^{(N)} & \cdots & x_{2k}^{(N)} \end{bmatrix} \tag{3.53}$$

— Calculer la sortie du modèle en utilisant comme entrées les matrices : A, B et C_i. On

obtient ainsi trois vecteurs de dimension $N \times 1$:

$$Y_A = \mathcal{M}(A) \qquad Y_B = \mathcal{M}(B) \qquad Y_{C_i} = \mathcal{M}(C_i) \tag{3.54}$$

Ces trois vecteurs sont suffisants pour estimer l'indice de premier ordre S_i et l'indice total S_{Ti} de la variable d'entrée X_i. Le coût de cette approche est donc de $N+N$ pour les matrices A et B, plus $k \times N$ fois pour la matrice C_i, pour pouvoir estimer l'indice de premier ordre et l'indice total de tous les paramètres d'entrée. Le coût total est donc de $N \times (k+2)$, largement inférieur au coût de la méthode originale. En effet, la méthode originale consiste à fixer le paramètre X_i à une valeur x_i^* et à utiliser N échantillons Monte Carlo pour estimer l'espérance conditionnée $E[Y|X_i = x_i^*]$; ensuite cette procédure est répétée r fois pour différentes valeurs de X_i afin d'estimer la variance de $E[Y|X_i]$, puis k fois pour estimer les indices de tous les paramètres. Le coût total de cette méthode est de kNr pour estimer les indices de premier ordre uniquement [81]. La méthode présentée ici permet également d'obtenir un intervalle de confiance sur les résultats par *bootstrap* [94], c'est-à-dire en faisant un tirage avec remise dans l'échantillon initial, et donc sans augmenter considérablement le temps de calcul.

Les indices de sensibilité de premier ordre sont alors estimés comme suit [89] :

$$S_i \;=\; \frac{\widehat{V}(E[Y|X_i])}{\widehat{V}(Y)} \;=\; \frac{Y_A.Y_{C_i} - \bar{y}^2}{Y_A.Y_A - \bar{y}^2} \;=\; \frac{\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} y_A^{(j)} y_{C_i}^{(j)} - \bar{y}^2}{\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} (y_A^{(j)})^2 - \bar{y}^2} \tag{3.55}$$

où

$$\bar{y}^2 = (\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} y_A^{(j)})^2 \tag{3.56}$$

représente la moyenne de la sortie, et le symbole (.) représente le produit scalaire entre deux vecteurs. Pour améliorer la précision de l'estimation des indices de sensibilité, cette moyenne ainsi que la variance totale $V(Y)$ peuvent être estimées à partir de l'ensemble des points de Y_A et Y_B réunis.

Les indices de sensibilité totaux sont estimés comme suit [89] :

$$S_{Ti} \;=\; 1 - \frac{\widehat{V}(E[Y|X_{\sim i}])}{\widehat{V}(Y)} \;=\; 1 - \frac{Y_B.Y_{C_i} - \bar{y}^2}{Y_A.Y_A - \bar{y}^2} \;=\; 1 - \frac{\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} y_B^{(j)} y_{C_i}^{(j)} - \bar{y}^2}{\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} (y_A^{(j)})^2 - \bar{y}^2} \tag{3.57}$$

Saltelli et al. [76] donnent une explication à ces équations. Dans l'Eq. (3.55) par exemple, le vecteur Y_A est multiplié par le vecteur Y_{C_i} dans lequel toutes les variables sont ré-échantillonnées alors que les valeurs du paramètres X_i restent fixes. Si X_i n'est pas un paramètre influent, alors les grandes et les petites valeurs de Y_A et Y_{C_i} sont associées de manière aléatoire. Cependant, Si X_i est influent, alors les grandes valeurs de Y_A seront multi-

pliées par des grandes valeurs de Y_{C_i} augmentant ainsi la valeur du produit scalaire résultant, et *vice versa*.

3.2.5.2.4 Estimation des indices de Sobol par la méthode EFAST

La méthode FAST est introduite dans les années 70 par Cukier et al. [90; 95; 96] et Schaibly et Shuler [97], et différents algorithmes ont été développés ensuite par Koda et al. [98] et McRae et al. [99]. L'idée principale de cette approche est de transformer l'intégrale multidimensionnelle de l'Eq. (3.39) en une intégrale mono-dimensionnelle. Pour cela, une fonction de transformation G_i (permettant de lier chaque variable d'entrée X_i à une fréquence ω_i et à un paramètre s) est introduite. Elle est définie par [96] :

$$X_i(s) = G_i(\sin(\omega_i s)), \qquad \forall i = 1, ..., k, \tag{3.58}$$

La fonction G_i est choisie selon la fonction de densité de probabilité de X_i ; s est une variable paramétrique comprise dans l'intervalle $]-\pi, \pi[$ qui peut être échantillonnée en utilisant N points, et qui représente le seul paramètre de courbe de remplissage de l'espace des entrées ; et l'ensemble des fréquences $\{\omega_i, ..., \omega_k\}$ sont des entiers linéairement indépendants. L'espérance de la sortie Y (cf. Eq. (3.39)) peut être estimée en intégrant la courbe de remplissage :

$$\widehat{\mathcal{M}}_0 \;=\; \widehat{E}[Y] \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{M}(s)ds \tag{3.59}$$

où $\mathcal{M}(s) = \mathcal{M}(G_1(\sin(\omega_1 s)), G_2(\sin(\omega_2 s)), ..., G_k(\sin(\omega_k s)))$. La variance de la sortie du modèle Y peut également être estimée comme suit :

$$\widehat{V}(Y) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{M}^2(s)ds - [\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{M}(s)ds]^2 \tag{3.60}$$

$$\;=\; \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{M}^2(s)ds - \widehat{E}^2[Y] \tag{3.61}$$

En faisant une décomposition en séries de Fourier de $\mathcal{M}(s)$, on obtient [96] :

$$\mathcal{M}(s) \;=\; \sum_{j=-\infty}^{+\infty} A_j \cos(js) + B_j \sin(js) \tag{3.62}$$

où A_j et B_j sont les coefficients de Fourier définis comme suit :

$$A_j \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{M}(s)\cos(js)\; ds \tag{3.63}$$

$$B_j \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{M}(s)\sin(js)\; ds \tag{3.64}$$

La variance $V(Y)$ (cf. Eq. (3.60) et (3.61)) est alors estimée à partir du théorème de Parseval [96] :

$$\widehat{V}(Y) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (A_j^2 - B_j^2) - (A_0^2 - B_0^2) \tag{3.65}$$

$$= 2\sum_{j=1}^{\infty}(A_j^2 - B_j^2) \tag{3.66}$$

$$\approx 2 \sum_{j=1}^{(N-1)/2} (A_j^2 - B_j^2) \tag{3.67}$$

En évaluant le spectre pour la fréquence fondamentale ω_i et ses harmoniques $p\omega_i$, on peut estimer $V_i(Y)$, c'est-à-dire la partie de la variance de sortie Y qui résulte de l'incertitude du paramètre i [96] :

$$\widehat{V}_i(Y) = 2\sum_{p=1}^{\infty}(A_{p\omega_i}^2 - B_{p\omega_i}^2) \tag{3.68}$$

$$\approx 2\sum_{p=1}^{M}(A_{p\omega_i}^2 - B_{p\omega_i}^2) \tag{3.69}$$

où M est le nombre maximal d'harmoniques que nous considérons dans notre estimation. Il représente le nombre maximal des coefficients de Fourier qui peut être utilisé pour calculer les variances partielles, sans interférence entre les paramètres (généralement, sa valeur est fixée à 4 ou 6 [95]).

Les fréquences ω_i sont des entiers choisis pour minimiser les interférences entre les paramètres. Ces fréquences sont sans interférence jusqu'à l'ordre M si [95] :

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \ \omega_i \neq 0 \tag{3.70}$$

avec $\alpha_i \in \mathbb{Z}$ et $\sum_{i=1}^{k} |\alpha_i| \leq M + 1$. Il faut savoir que le choix de ces fréquences ω_i devient de plus en plus difficile lorsque le nombre de variables d'entrée du modèle augmente.

La taille minimale de l'échantillon N à utiliser dans la méthode FAST est obtenue à partir du théorème d'échantillonnage de Nyquist-Shannon [90] :

$$N = 2M\omega_{max} + 1 \tag{3.71}$$

où ω_{max} est la plus grande fréquence parmi $\{\omega_i, ..., \omega_k\}$.

Saltelli et al. [91] recommandent d'utiliser la fonction de transformation suivante :

$$X_i(s) \;=\; G_i(\sin(\omega_i s)) \;=\; \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arcsin(\sin(\omega_i s)) \tag{3.72}$$

En comparaison avec les autres formules proposées dans la littérature, par exemple celle proposée par Cukier et al. [90], cette transformation fournit une meilleure distribution uniforme des échantillons dans l'espace des entrées pour chaque variable X_i.

La méthode FAST permet alors d'estimer l'indice de Sobol de premier ordre $S_i = \frac{\widehat{V}(X_i)}{\widehat{V}(Y)}$. Saltelli et al. [91] ont développé une version améliorée de la méthode originale nommée EFAST (Extended Fourier Amplitude Sensitivity Test). Cette nouvelle approche permet d'estimer, en plus des indices de sensibilité de premier ordre, les indices de sensibilité totaux. Pour cela, une fréquence ω_i (généralement grande) est attribuée au paramètres X_i dont on veut estimer l'indice total, et une fréquence $\omega_{\sim i}$ (généralement petite, fixée à 1) attribuée aux autres paramètres. La valeur ω_i doit être grande par rapport à $\omega_{\sim i}$ pour éviter les interférences entre les deux. Cette nouvelle approche a deux avantages [91] : d'abord, pour chaque paramètre X_i, il suffit de choisir deux valeurs pour les fréquences, quel que soit le nombre de paramètres (ω_i pour le paramètre X_i et $\omega_{\sim i}$ pour l'ensemble complémentaire $X_{\sim i}$) ; ensuite, on peut toujours trouver un couple de fréquences qui n'interfère pas jusqu'à un ordre élevé M, ce qui élimine le problème d'interférences et du choix des fréquences des paramètres. La variance partielle de l'ensemble complémentaire est donnée par [91] :

$$\widehat{V}_{ci}(Y) \;=\; \widehat{V}(E[Y|X_{\sim i}]) \;=\; 2\sum_{p=1}^{\infty}(A^2_{p\omega_{\sim i}} - B^2_{p\omega_{\sim i}}) \tag{3.73}$$

$$\approx 2\sum_{p=1}^{M}(A^2_{p\omega_{\sim i}} - B^2_{p\omega_{\sim i}}) \tag{3.74}$$

Saltelli et al. [91] proposent également une modification de la fonction de transformation G_i. En effet, le problème de l'Eq. (3.72) est qu'elle retourne toujours les mêmes valeurs quand le paramètre s varie. Pour obtenir un schéma d'échantillonnage plus flexible, un déphasage aléatoire φ_i a été ajouté [91] :

$$X_i(s) \;=\; G_i(\sin(\omega_i s)) \;=\; \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arcsin(\sin(\omega_i s + \varphi_i)) \tag{3.75}$$

où φ_i représente un déphasage aléatoire choisi uniformément sur l'intervalle $]-\pi, \pi[$. Pour améliorer la robustesse de la méthode, il est possible d'effectuer N_r tirages de φ_i avec $i = 1, ..., k$, pour générer plusieurs courbes de remplissage de l'espace.

La taille minimale de l'échantillon à utiliser pour estimer l'indice de sensibilité de premier ordre S_i et d'ordre total S_{Ti} d'un paramètre X_i est égale à $N_r(2M\omega_{max}+1)$, où N_r représente le nombre de courbes de remplissage utilisées. Cela doit ensuite être répété pour chaque paramètre afin d'estimer tous les indices de sensibilité S_i et S_{Ti}. Le coût total de la méthode EFAST est donc donné par :

$$N = kN_r(2M\omega_{max} + 1) \tag{3.76}$$

Un programme MATLAB® de la méthode FAST et EFAST est présenté dans l'article de Ekström [100].

3.2.5.3 Analyse de sensibilité des paramètres dépendants

Les méthodes présentées dans les sections précédentes considèrent toutes que les variables d'entrée X du modèle sont indépendantes. La raison pour cela est simple, les échantillons des paramètres dépendants sont laborieux à générer, et la taille de l'échantillon pour estimer les indices de sensibilité est beaucoup plus élevée que dans le cas des paramètres indépendants [76]. Ces méthodes ne sont donc plus valables en présence de dépendance entre les paramètres d'influence. En effet, si deux variables X_i et X_j sont dépendantes, alors l'indice de sensibilité S_i n'exprime plus uniquement la mesure de sensibilité de Y à X_i mais également une partie de l'influence du paramètre X_j sur Y, avec [101] :

$$S_i = S_i^c + S_i^u \tag{3.77}$$

où S_i^u et S_i^c sont respectivement la partie décorrelée et corrélée de l'indice de sensibilité S_i. Néanmoins, des méthodes pour calculer les indices de sensibilité des paramètres dépendants sont disponibles dans la littérature. Par exemple, les paramètres dépendants peuvent être regroupés et leur indices de sensibilité calculés par groupe, qu'on appelle indices de sensibilité multidimensionnels [102]. Nous pouvons également citer l'indice PCC (Partial Correlation Coefficient) [85] lorsque le modèle est linéaire, l'indice $PRCC$ (Partial Rank Correlation Coefficient) [85] lorsque le modèle est monotone, la méthode de McKay [103], la méthode de Saltelli et Tarantola [104], ou encore la méthode de Mara et Tarantola [101].

Dans leur ouvrage, Saltelli et al. [76] conseillent de travailler autant que possible avec des échantillons non corrélés , en traitant par exemple les dépendances comme des relations explicites avec un terme de bruit rajouté. Rappelons la relation suivante pour deux entrées dépendantes X_i et X_j [101] :

$$f_{X_i,X_j}(x_i, x_j) = f_{X_i}(x_i) f_{X_j|X_i}(x_j|x_i) \tag{3.78}$$

avec $f_{X_i,X_j}(x_i, x_j)$ la fonction de densité de probabilité jointe de X_i et X_j. $f_{X_i}(x_i)$ est la fonction de densité de probabilité marginale de X_i, et $f_{X_j|X_i}(x_j|x_i)$ représente la fonction densité de probabilité marginale de X_j sachant X_i. Pour rendre ces deux variables indépendantes, on définit X_{j-i} donné par l'équation suivante [101] :

$$X_{j-i} \;=\; X_j - E(X_j|X_i) \tag{3.79}$$

on obtient Alors :

$$f_{X_i,X_{j-i}}(x_i, x_{j-i}) \;=\; f_{X_i}(x_i) f_{X_{j-i}}(x_{j-i}) \tag{3.80}$$

où X_i et X_{j-i} représentent maintenant deux variables indépendantes, et leurs indices de sensibilité peuvent donc être calculés avec les méthodes dédiées aux paramètres indépendants. Cependant, en faisant cette transformation, l'indice de sensibilité lié à X_i prend également compte d'une partie de l'influence de X_j avec $S_i = S_i^u + S_i^c$, alors que l'indice de sensibilité de X_{j-i} mesure uniquement l'influence de X_j sans prendre en compte l'influence jointe avec $S_j = S_j^u$. D'une certaine manière, on favorise ici un paramètre par rapport à un autre. En effet, on aurait également pu écrire l'Eq (3.78) de la façon suivante :

$$f_{X_i,X_j}(x_i, x_j) = f_{X_j}(x_j) f_{X_i|X_j}(x_i|x_j) \tag{3.81}$$

ce qui induit :

$$f_{X_{i-j},X_j}(x_{i-j}, x_j) \;=\; f_{X_{i-j}}(x_{i-j}) f_{X_j}(x_j) \tag{3.82}$$

et les résultats des indices de sensibilité seraient différents. Dans ce cas là, on obtiendrait pour le paramètre X_i : $S_i = S_i^u$, et pour le paramètre X_j : $S_j = S_j^u + S_j^c$.

3.3 Application : Influence du sol et des conditions météorologiques sur le transfert acoustique

Le but de cette application est de quantifier l'influence de la variabilité des effets du sol et des effets météorologiques sur le transfert acoustique entre le GMP et les microphones à 7.5 m. Pour cela, la méthode EBEM [7] (cf. Section 2.5.1) est appliquée dans le compartiment moteur pour prendre en compte les échanges d'énergie diffus. Un plan fictif (cf. Figure 3.8) est créé afin de récupérer ces énergies. La puissance de chaque maille est ensuite attribuée à un monopôle acoustique. Un modèle analytique [105] basé sur la théorie des rayons est développé (cf. Annexe B) pour propager cette énergie jusqu'au microphone à 7.5 m tout en prenant en compte les effets de propagation acoustique dans le milieu extérieur, *i.e.* l'influence

du sol, l'absorption atmosphérique, la diffusion par la turbulence atmosphérique ainsi que la réfraction par les effets thermiques et aérodynamiques. Ces paramètres sont variables ; c'est pourquoi, la méthode d'estimation des indices de Sobol par la méthode EFAST est appliquée afin d'étudier l'impact de la variabilité de chaque paramètre sur la pression acoustique en sortie du modèle. Le modèle analytique basé sur la théorie des rayons utilisé ainsi que toutes les bases théoriques sur les phénomènes physiques caractérisant le milieu de propagation sont présenté dans l'Annexe B. Les résultats dans le cas d'une source ponctuelle et dans le cas d'un véhicule sont présentés respectivement dans la Section 3.3.1.1 et 3.3.1.2.

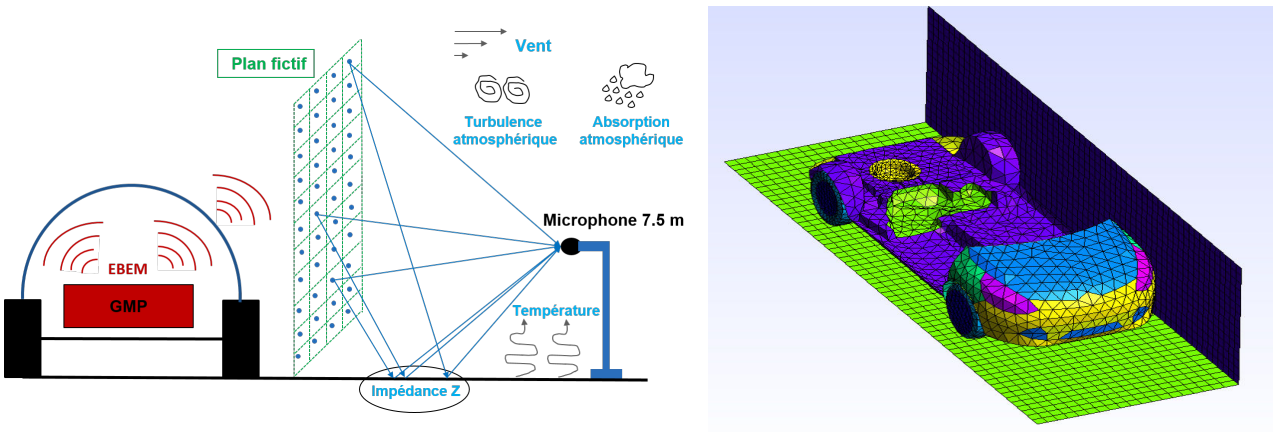


FIGURE 3.8 – Chaînage de la méthode des radiosités et d'un modèle analytique basé sur la théorie des rayons

3.3.1 Résultats et discussion

Les paramètres caractérisant le milieu de propagation sont maintenant considérés *incertains*, variant uniformément suivant les plages de variation présentées dans la Table 3.1. D'abord, le sol est modélisé par deux paramètres qui sont la résistance au passage de l'air σ et l'épaisseur effective e (cf. Section B.1). Leurs plages de variation correspondent à un sol non poreux équivalent à la chaussée de la piste d'essai considérée complètement réfléchissante (la piste d'essai répond aux exigences de la norme ISO 10844 [13]). Ensuite, l'absorption atmosphérique est prise en compte en fonction de la température et de l'humidité relative du milieu (cf. Section B.4). Concernant la température, nous nous sommes basés sur la plage de variation autorisée par le règlement ECE R51.03 [2] : 5°C à 40°C. Pour ce qui est de l'humidité, nous avons considéré une plage de variation de 25 à 100%, respectivement représentative d'un taux d'humidité faible et élevé. La température et l'humidité relative sont certainement des paramètres fortement corrélés ; cependant, cette corrélation n'est pas prise en compte dans notre modèle. La distance de corrélation L et la variance de l'indice de réfrac-

tion $\langle \mu^2 \rangle$ sont les deux paramètres utilisés pour représenter la turbulence dans le milieu de propagation. Leurs domaines de variation correspondent à une faible et une forte turbulence atmosphérique. Finalement, un profil de célérité linéaire est pris en compte dans notre modèle, où la plage de variation du gradient $\frac{d\langle c(z) \rangle}{dz}$ correspond à celle d'un fort gradient positif.

Variable	Définition de la variable	Valeur Min	Valeur Max
σ (kN.s.m^{-4})	La résistance au passage de l'air	100000	500000
e (m)	L'épaisseur effective du sol	0.01	1
T (°C)	La température de l'air	5	40
H (%)	L'humidité relative de l'air	25	100
L (m)	La distance de corrélation	0.9	1.3
$\langle \mu^2 \rangle$	La variance de l'indice de réfraction	1.10^{-6}	10.10^{-6}
$\frac{d\langle c(z) \rangle}{dz}$ (s^{-1})	Le gradient de célérité	0	0.25

TABLE 3.1 – Plages de variation des paramètres caractérisant le sol et le milieu de propagation

3.3.1.1 Dans le cas d'une source ponctuelle

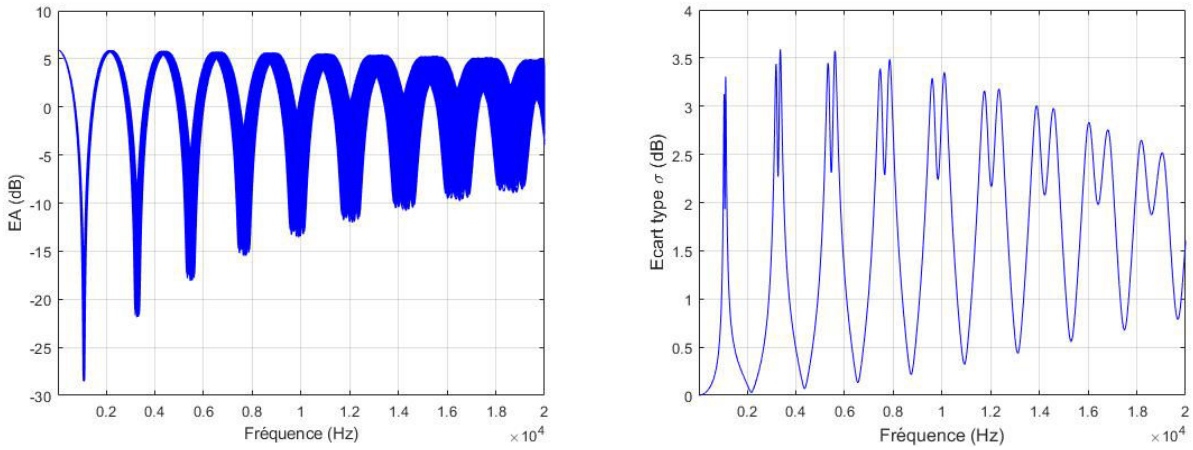
Supposons une source et un récepteur ponctuels se trouvant respectivement à une hauteur $H_s = 0.5$ m et $H_r = 1.2$ m, séparés par une distance $D = 7.5$ m. Le but est d'étudier l'influence de la variabilité des paramètres présentés dans la Table 3.1 sur la variabilité du spectre d'atténuation excédentaire (EA) par rapport au champ libre (changement de niveau de pression relative au champ libre), qui s'exprime en dB de la manière suivante :

$$EA = 10.log\left(\frac{\langle p^2 \rangle}{p_d^2}\right) \tag{3.83}$$

où p_d représente la contribution de l'onde directe dans un champ libre, *i.e.* sans sol ni obstacle ni effets atmosphérique.

Une propagation d'incertitudes et une analyse de sensibilité sont réalisées par la méthode EFAST. Les spectres d'atténuation excédentaire par rapport au champ libre sont présentés dans la Figure 3.9a. On remarque sur les spectres des maxima majorés par +6 dB et des interférences destructives dues aux effets du sol (cf. Section B.1). Leur écart-type est illustré dans la Figure 3.9b. On remarque une grande variabilité au niveau des interférences destructives, qui a tendance à diminuer avec la fréquence. Cela est certainement dû au fait que la chute de pression devient de moins en moins importante en haute fréquence et donc moins sensible aux paramètres. Cependant, la plus petite variabilité est observée au niveau des

maxima et elle a tendance à augmenter avec la fréquence. Cela est certainement lié aux effets de la diffusion par la turbulence et à l'absorption atmosphérique qui, eux aussi, augmentent avec la fréquence [106].

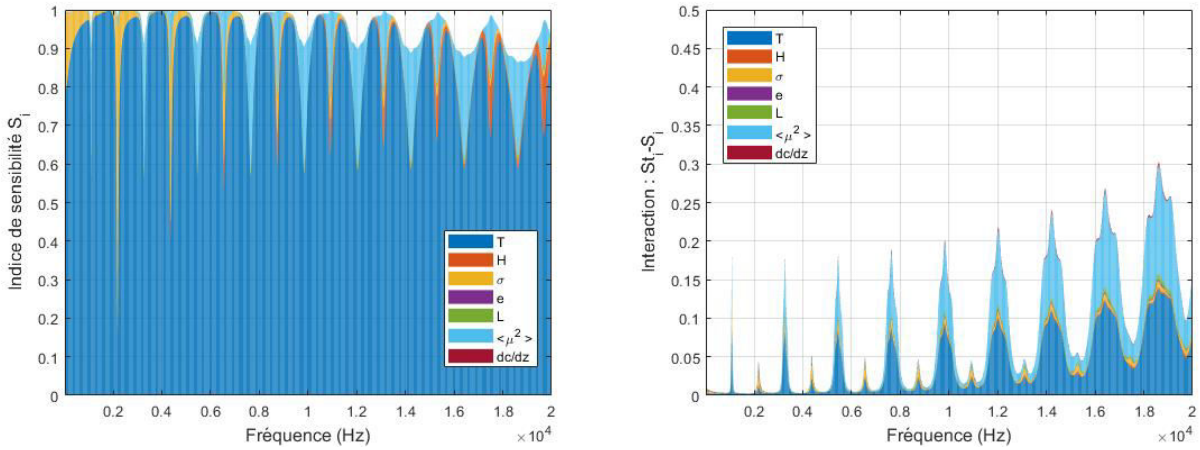


(a) Les courbes d'atténuation excédentaire (EA) (b) Écart-type

FIGURE 3.9 – Courbes d'atténuation excédentaire par rapport au champ libre et leur écart-type dans le cas d'une source et d'un récepteur ponctuels

Les indices de sensibilité de premier ordre sont présentés dans la Figure 3.10a. On remarque que la température T, qui est considérée comme l'un des principaux paramètres représentant l'absorption atmosphérique, correspond au facteur le plus influent sur tout le spectre. Néanmoins, on observe un effet significatif d'autres paramètres au niveau des interférences. On note par exemple, un effet très important de la résistance au passage de l'air σ au niveau du premier maxima, qui est de l'ordre de 80%. Cependant, son influence a tendance à diminuer avec la fréquence où les effets de la diffusion par la turbulence et de l'absorption atmosphérique sont importants. En effet, on peut noter une légère influence de la variance de l'indice de réfraction $\langle\mu^2\rangle$ et de l'humidité H au niveau des derniers maxima, qui reste négligeable devant l'effet de la température T. Au niveau de toutes les interférences destructives, on note une influence du $\langle\mu^2\rangle$ qui est de l'ordre de 30%. On remarque également que la somme des indices de sensibilité à ce niveau-là est différente de 1, cela signifie la présence d'interactions entre les paramètres. En effet, on observe sur la Figure 3.10b, qui trace la différence $S_{Ti} - S_i$ (mesure de combien le paramètre X_i est impliqué dans les interactions avec tous les autres paramètres d'entrée, cf. Section 3.2.5.2.2), une interaction entre la température T et la variance de l'indice de réfraction $\langle\mu^2\rangle$, qui devient de plus en plus forte en haute fréquence.

Nous allons voir dans le cas du véhicule, que les résultats sont présentés en tiers d'octave (de 400 Hz à 8000 Hz). C'est pourquoi, les résultats des courbes d'atténuation ainsi

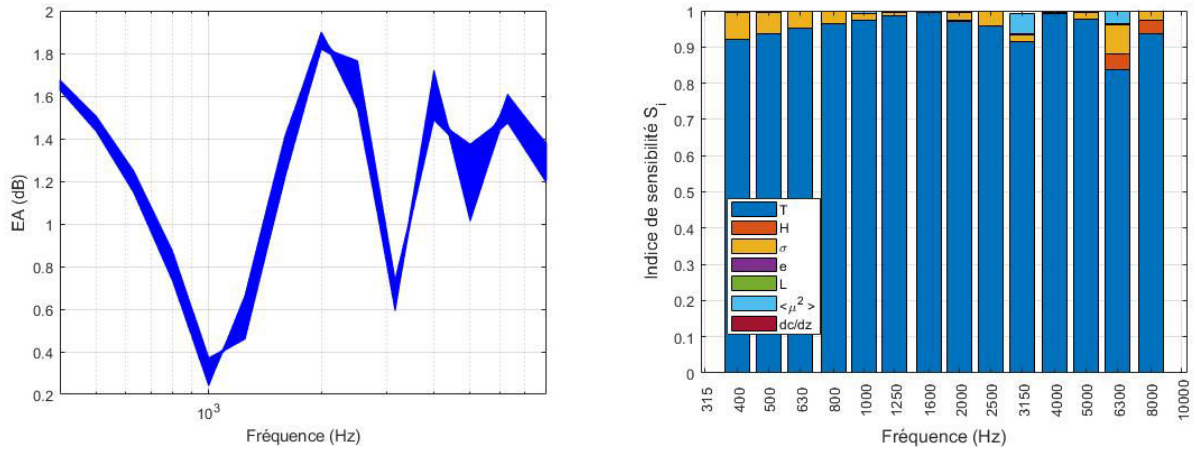


(a) Indices de premier ordre

(b) Interactions entre les paramètres

FIGURE 3.10 – Indices de sensibilité de premier ordre et interaction entre les paramètres dans le cas d'une source et d'un récépteur ponctuels

que les indices de sensibilité de premier ordre sont également présentés ici en tiers d'octave sur la Figure 3.11. On remarque, comme pour les résultats présentés précédemment, que la température T représente le paramètre le plus influent. On observe également que la somme des indices de sensibilité est égale à 1, cela signifie l'absence d'interaction entre les paramètres. Concernant les courbes d'atténuation excédentaire, on remarque que leur variabilité augmente légèrement avec la fréquence. En effet, on peut noter un écart-type de 0.01 dB à 400 Hz et de 0.04 dB à 8000 Hz.



(a) Les courbes d'atténuation excédentaire

(b) Indices de premier ordre

FIGURE 3.11 – Les courbes d'atténuation excédentaire par rapport au champ libre (EA) et leur indices de sensibilité de premier ordre dans le cas d'une source et d'un récepteur ponctuels, présentés en tiers d'octave

3.3.1.2 Dans le cas d'un véhicule

Nous considérons ici $N_s = 21$ sources ponctuelles monopôlaires entourant le GMP (cf. Figure 3.12) et ayant un débit d'accélération volumique unitaire $\dot{Q}_j = 1$ m$^3/s^2$, avec $j = 1, ..., N_s$. La méthode EBEM est utilisée en premier lieu pour simuler les échanges d'énergie diffus dans le compartiment moteur. L'intensité acoustique I_i est ensuite récupérée au niveau de chaque maille i du plan fictif vertical (cf. Figure 3.13) dont la surface S est connue (0.1m×0.1m), puis transformée en puissance acoustique $W_i = S.I_i$. Ainsi, chaque maille i est assimilée à un monopôle rayonnant dans un demi-espace, dont le débit d'accélération volumique $\dot{Q}_i$ est donné en fonction de la puissance W_i par :

$$\dot{Q}_i = \sqrt{\frac{2\pi c}{\rho} W_i} \tag{3.84}$$

ou c représente la célérité du son et ρ représente la masse volumique de l'air.

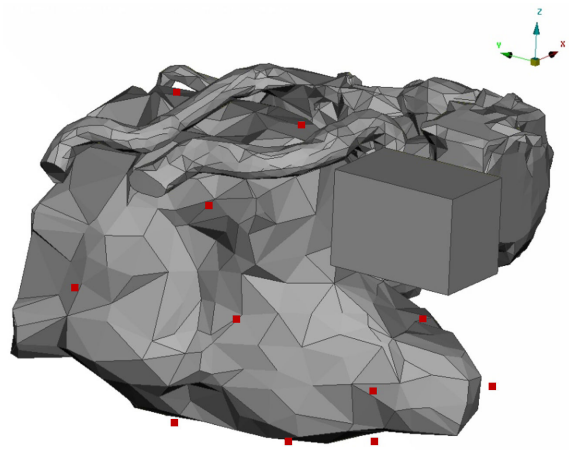


FIGURE 3.12 – Le groupe motopropulseur entouré de 21 sources monopôlaires

Nous pouvons donc considérer le plan virtuel comme plusieurs sources ponctuelles monopôlaires rayonnant dans un demi-espace et ayant des débits d'accélération volumique $\dot{Q}_i$ différents. En effet, on remarque sur la Figure 3.13 que le niveau d'intensité acoustique est plus marquant au niveau des passages de roues à l'avant du véhicule, tandis qu'à l'arrière du véhicule, le niveau d'intensité acoustique est faible. Le modèle analytique présenté dans la Annexe B sert à propager l'énergie de chaque monopôle jusqu'au microphone qui se trouve à $x = -10$ m, $y = 7.5$ m et $z = 1.2$ m (cf. Figure 2.15) [2]. La contribution de chaque monopole i s'écrit alors comme suit (cf. Eq. (B.42)) :

2. Le choix de cette position du récepteur revient à maximiser les effets étudiés.

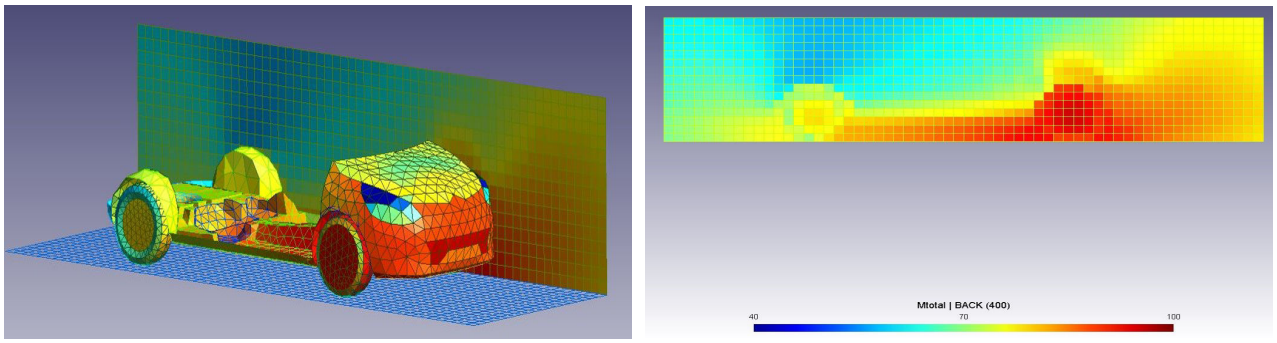


FIGURE 3.13 – Récupération de l'intensité acoustique au niveau du plan fictif

$$\langle p_i^2 \rangle = \frac{\rho^2 \dot{Q}_i^2(\omega)}{(2\pi)^2} . \left[\left(\frac{A_b(R_1)^2}{R_1^2} + \frac{A_b(R_2)^2.|Q|^2}{R_2^2} \right) (1 + \langle a^2 \rangle) + \left(\frac{2.A_b(R_1).A_b(R_2).|Q|}{R_1 R_2} \right) . \right.$$
$$\left. \cos[2\pi f(\tau_2 - \tau_1) + Arg(Q)] \; (1 + \langle a^2 \rangle \rho_a) \; \exp\left[-\sigma_1^2 (1 - \rho_\delta) \right] \right] \tag{3.85}$$

La pression totale au niveau du récepteur correspond donc à la somme quadratique suivante :

$$\langle p_t^2 \rangle = \sum_{i=1}^{N_{mo}} \langle p_i^2 \rangle \tag{3.86}$$

où N_{mo} correspond au nombre de sources monopolaires sur le plan fictif.

Pour obtenir une fonction de transfert moyenne du GMP, on écrit la pression acoustique totale au niveau du récepteur comme suit (méthode TPA [26]) :

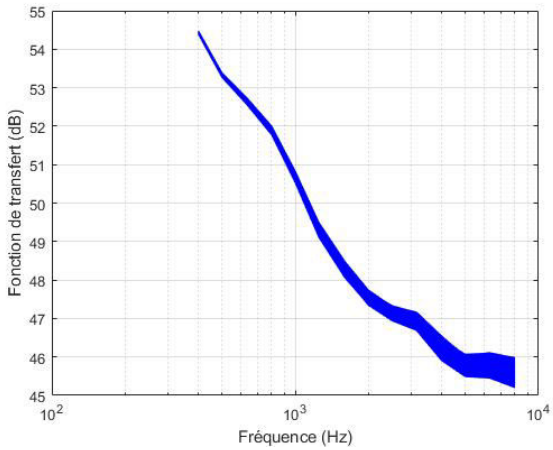
$$\langle p_t^2 \rangle = \sum_{j=1}^{N_s} \dot{Q}_j^{\,2} \; . \; TF_j^2 \tag{3.87}$$

En supposant une fonction de transfert moyenne pour tout le GMP, on peut calculer la fonction de transfert TF comme suit :

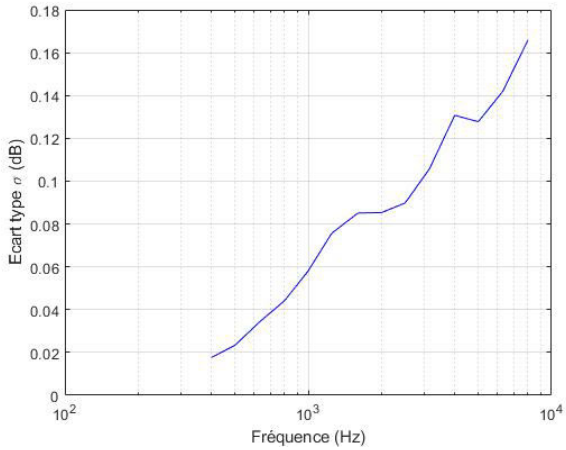
$$TF^2 = \frac{\langle p_t^2 \rangle}{\sum_{j=1}^{N_s} \dot{Q}_j^{\,2}} \tag{3.88}$$

Le but est d'étudier l'influence de la variabilité des paramètres présentés dans la Table 3.1 sur la variabilité de la fonction de transfert TF avec la méthode EFAST. Les fonctions de transfert ainsi que leurs écarts-types sont présentés en tiers d'octave dans la Figure 3.14. On remarque que l'écart-type σ augmente avec la fréquence. En effet on peut noter une valeur de 0.02 dB à 400 Hz et une valeur supérieure à 0.16 dB à 8000 Hz.

Les indices de sensibilité de premier ordre sont présentés dans la Figure 3.15. On re-



(a) Les courbes de fonctions de transfert



(b) Écart-type

FIGURE 3.14 – Les courbes de fonctions de transfert GMP et leur écart-type dans le cas d'un véhicule

marque que les résultats sont différents de ceux obtenus précédemment pour une seule source ponctuelle. En effet, la température n'est plus le paramètre le plus influent sur la variabilité des fonctions de transfert. On note son indice de sensibilité qui est proche de 0.4 à 400 Hz, et qui a tendance à diminuer pour les tiers d'octave supérieurs. Cependant, on observe que la résistance au passage de l'air σ représente un paramètre important pour tous les tiers d'octave. En effet, les sources monopôlaires se trouvent à des hauteurs différentes sur le plan fictif, or on sait que les interférences dues aux effets du sol sont très sensible à la hauteur de la source, en particulier pour les hautes fréquences. On observe également une légère influence de l'humidité relative H à partir du tiers d'octave 5000 Hz, mais qui reste négligeable devant la résistance au passage de l'air σ (son indice de sensibilité est inférieur à 0.3 à 8000 Hz). La somme des indices de sensibilité de premier ordre est proche de 1, cela confirme l'absence de fortes interactions entre les paramètres.

Le niveau de bruit de passage d'un véhicule L_{urban} est exprimé en valeur globale pondérée A. Il est donc intéressant d'étudier l'impact de la variabilité des paramètres présentés dans la Table 3.1 sur cette valeur globale. Pour cela, les fonctions de transfert sont d'abord pondérées par un spectre de puissance en tiers d'octave correspondant à un moteur diesel, ensuite leur valeur globale pondérée A est calculée. Les résultats obtenus sont présentés sous forme d'histogramme normalisé dans la Figure 3.16a. L'écart-type correspondant à cette variabilité est de $\sigma \approx 0.06$ dB (A). Les indices de sensibilités sont présentés dans la Figure 3.16b. Comme pour les résultats obtenus en tiers d'octave, les deux paramètres les plus influents sont la résistance au passage de l'air σ (environ 75%) et la température T (22%). On observe que l'interaction entre les paramètres est négligeable.

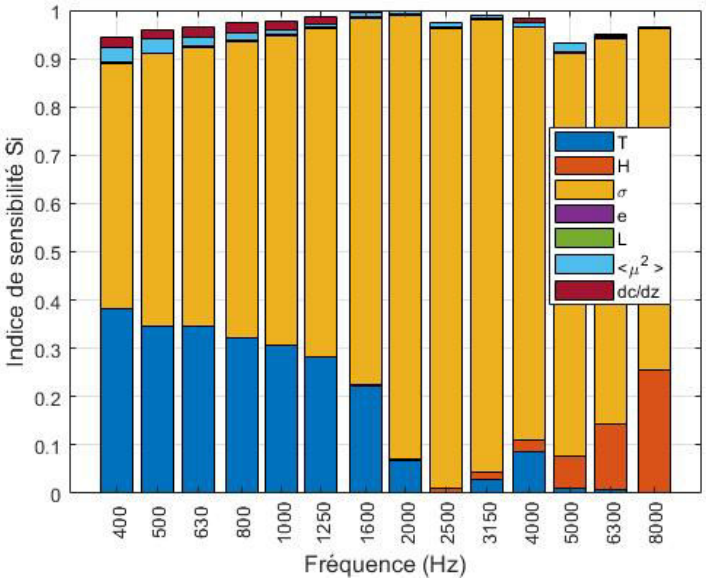
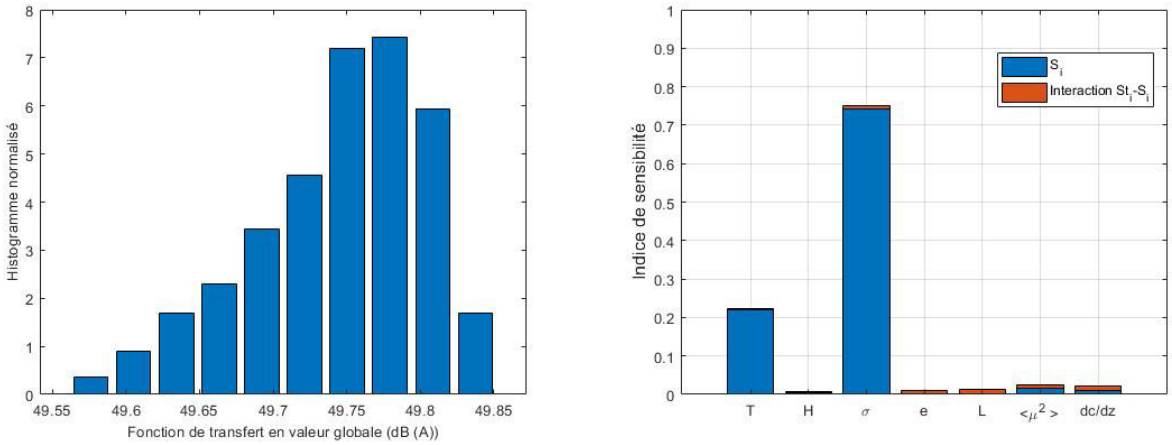


FIGURE 3.15 – Indices de sensibilité de premier ordre dans le cas d'un véhicule, présentés en tiers d'octave



(a) Histogramme normalisé

(b) Indices de sensibilité

FIGURE 3.16 – Histogramme normalisé des fonctions de transferts en valeur globale et les indices de sensibilité liés aux paramètres d'entrée

3.4 Conclusion

Un état de l'art sur les étapes principales pour réaliser une étude d'incertitude est illustré dans ce chapitre. Ces étapes concernent : la spécification du problème, la quantification des incertitudes liées aux paramètres, la propagation d'incertitudes, et enfin, l'analyse de sensibilité. Cette revue bibliographique résume donc la méthodologie envisagée pour répondre à la problématique liée aux modèles de prévision du bruit de passage des véhicules automobiles, qui sera traitée dans le chapitre suivant.

La validation de ces méthodes sur un cas test est présentée en Annexe A. Il s'agit d'étudier la variabilité de l'indice de perte par transmission acoustique d'une plaque infinie isotrope vis-à-vis de certains paramètres physiques de la plaque. Une propagation d'incertitudes dans le modèle est réalisée, et les paramètres influents sont déterminés par la méthode EFAST.

L'application permettant de quantifier l'influence des effets de propagation acoustique dans le milieu extérieur (*i.e.* l'influence du sol, l'absorption atmosphérique, la diffusion par la turbulence atmosphérique ainsi que la réfraction par les effets thermiques et aérodynamiques) sur la fonction de transfert entre le GMP et le récepteur qui se trouve à 7.5 m de l'axe de la piste d'essai est également présentée. Pour cela, un chaînage entre la méthode EBEM et un modèle analytique basé sur la théorie des rayons est d'abord réalisé. Les paramètres caractérisant le milieu de propagation sont ensuite définis, et une loi de probabilité uniforme leur est attribuée. L'impact de la variabilité de ces paramètres sur la variabilité de la fonction de transfert est ensuite estimé par la méthode EFAST. L'écart-type correspondant à cette variabilité en valeur globale est de $\sigma \approx 0.06$ dB (A) dans le cas d'un véhicule.

Après présentation de l'état de l'art sur la propagation d'incertitude et l'analyse de sensibilité, leur validation sur un cas test et leur application sur les effets de propagation acoustique dans le milieu extérieur, nous appliquons ces méthodes sur les modèles de prévision du niveau de bruit de passage des véhicules ainsi qu'au modèle de calcul de la fonction de transfert dans le Chapitre 4.

Chapitre 4

Application sur les modèles de prévision du niveau de bruit de passage

Sommaire

4.1 Introduction 112

4.2 Application sur le modèle de calcul des fonctions de transfert . 112

4.2.1 Dans le cas d'un caisson 112

4.2.2 Dans le cas d'un véhicule 116

4.3 Application sur les modèles de synthèse 121

4.3.1 Quantification d'incertitudes 121

4.3.2 Calcul déterministe : résultats et discussion 126

4.3.3 Calcul sous incertitudes : résultats et discussion 127

4.4 Conclusion 138

4.1 Introduction

L'application des méthodes d'analyse de sensibilité et de propagation d'incertitudes sur les modèles de prévision du niveau de bruit de passage des véhicules ainsi qu'au modèle de calcul de la fonction de transfert est présentée dans ce Chapitre 4.

Dans un premier temps, nous nous focaliserons sur la validation de la méthode de calcul des fonctions de transfert utilisée dans le cadre de cette thèse (cf. Section 2.5), que nous appellerons dans la suite de ce document, *la méthode couplée*. Pour cela, un premier cas test, sous la forme d'un modèle simplifié de compartiment moteur, permet de présenter sa mise en oeuvre. Ensuite, sur la base d'un second cas industriel, les résultats seront présentés, en explicitant les choix et les hypothèses de modélisation retenus. Après cette étape de validation, nous réaliserons une étude d'analyse de sensibilité sur la variabilité des matériaux absorbants et les positions des sources de bruit artificielles qui entourent le GMP, en utilisant la méthode de Morris.

Dans un second temps, nous mettrons l'accent sur les modèles de synthèse développés dans cette étude, qui consistent à simuler le passage d'un véhicule sur la piste, et à combiner le débit acoustique des sources de bruit réelles avec leurs fonctions de transfert pour reconstruire le niveau de bruit total à 7.5 m. L'étude est réalisée sur les trois modèles présentés dans le Chapitre 2 ("monopôle en valeur globale", "monopôle en tiers d'octave" et "six faces en tiers d'octave"), et sur trois véhicules ayant des rapports puissance/poids différents. Les paramètres d'entrée de ces modèles sont considérés incertains ; c'est pourquoi une étude de quantification d'incertitudes est d'abord réalisée. Ces incertitudes sont ensuite propagées dans ces modèles avec des méthodes type quasi-Monte Carlo. Enfin, une étude d'analyse de sensibilité est réalisée pour étudier l'impact de la variabilité des paramètres d'entrée sur la variabilité des niveaux de bruit en sortie des modèles de synthèse.

4.2 Application sur le modèle de calcul des fonctions de transfert

4.2.1 Dans le cas d'un caisson

4.2.1.1 Présentation du caisson

Ce premier cas test, sous forme d'un modèle simplifié de compartiment moteur, est utilisé pour valider la méthode de calcul des fonctions de transfert (*la méthode couplée*). L'ensemble de la méthode de calcul, couplant les deux techniques, est intégré dans une solution unique

du logiciel ICARE du Centre Scientifique et Technique du Bâtiment. La maquette est fabriquée par la société Autoneum [107] à partir de contre-plaqué rigide, en essayant de garder ses dimensions et sa forme aussi proche que possible de celles d'un véritable compartiment moteur. Le modèle est présenté dans la Figure 4.1. Cette maquette contient également plusieurs ouvertures destinées à représenter les ouvertures principales présentes dans un véritable compartiment moteur d'un véhicule, comme par exemple : l'ouverture à l'avant de la maquette pour représenter la grille de calandre, l'ouverture à l'arrière pour représenter le passage de la ligne d'échappement, deux ouvertures latérales pour remplacer les passages de roues, et enfin deux petites ouvertures sur la paroi inférieure de la maquette pour représentées les ouvertures au niveau du ski d'un véhicule (l'écran se trouvant sous le GMP). Ces ouvertures sont représentées par des surfaces fictives pour lesquelles l'intensité acoustique est récupérée, puis propagée par lancer de faisceaux jusqu'au microphone à 7.5 m.

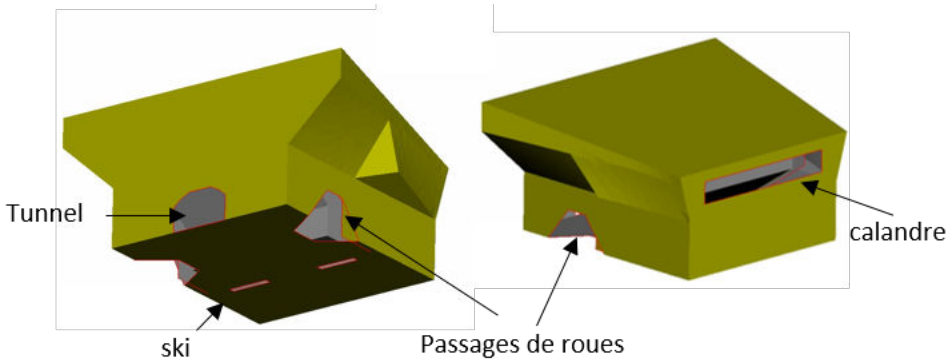


FIGURE 4.1 – Vue extérieure du caisson

À l'intérieur de la maquette se trouve une structure en contre-plaqué rigide destinée à remplacer un bloc moteur réel d'un véhicule. Un espace de l'ordre de 5 à 10 cm est laissé entre les parois du bloc moteur et les parois latérales du compartiment moteur [107]. Le bloc moteur est présenté dans la Figure 4.2.

La Figure 4.3 présente les matériaux absorbants utilisés dans cette étude : un absorbant capot et un absorbant tablier, qui sont des matériaux Theta-Cell de 20 mm d'épaisseur (Theta-Cell est une mousse de polyuréthane semi-rigide, souvent utilisée de nos jours par de nombreux constructeurs automobiles car elle présente un très bon compromis entre une bonne absorption acoustique et un très faible poids [107]) et un absorbant ski, qui est un matériaux fibreux polyester. Le coefficient d'absorption de ces matériaux est mesuré en cabine alpha. Les résultats sont disponibles pour différents tiers d'octave (de 400 à 8000 Hz).

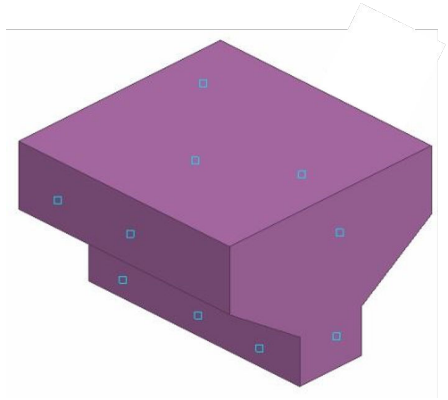


FIGURE 4.2 – Structure représentant le bloc moteur. Les points bleus représentent des sources monopôlaires ayant un débit d'accélération volumique unitaire

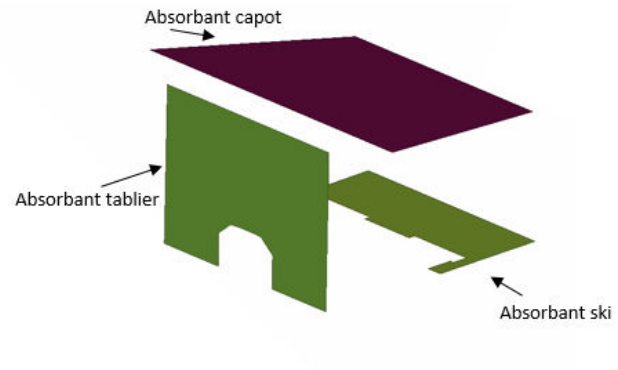


FIGURE 4.3 – Schéma des matériaux absorbants dans le caisson

4.2.1.2 Mesures des fonctions de transfert

Pour valider la méthode de calcul utilisée, plusieurs mesures de fonctions de transfert sont réalisées. Les mesures sont faites par réciprocité dans une chambre semi-anéchoïque de manière à éviter les perturbations extérieures. Les microphones sont alors placés sur 21 zones autour du bloc moteur (2 à 5 microphones par face). Une source calibrée à débit acoustique connu est déplacée le long d'une ligne se trouvant à droite du caisson à 7.5 m de la ligne centrale et à 1.2 m de hauteur (cf. Figure 4.4). Les mesures sont réalisées avec et sans matériaux absorbants.

4.2.1.3 Résultats et discussion

Afin de comparer les mesures avec les résultats de calcul, 21 sources monopôlaires artificielles ayant un débit d'accélération volumique unitaire sont positionnées autour du bloc

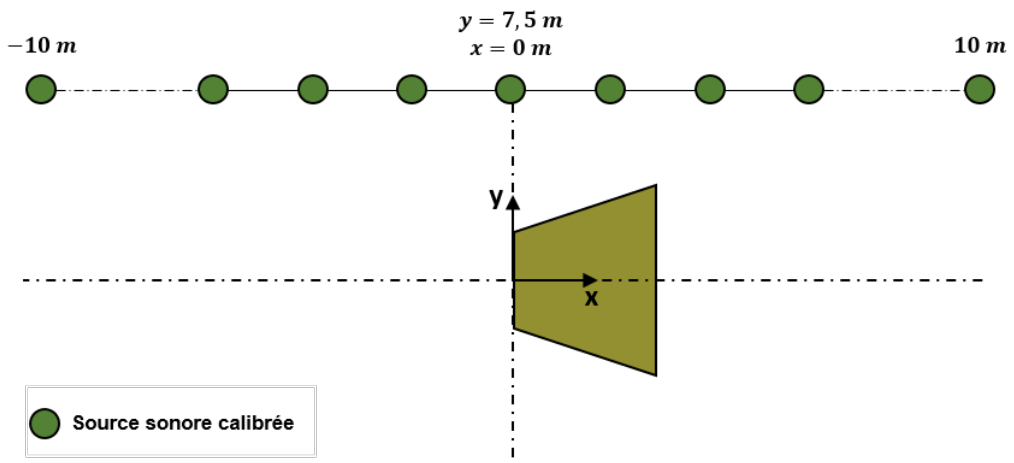
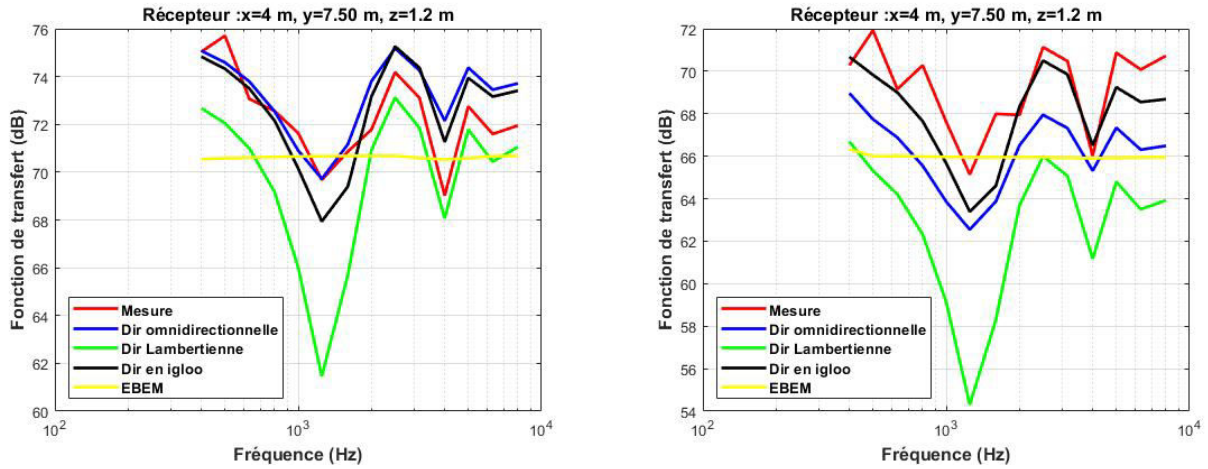


FIGURE 4.4 – Mesure des fonctions de transfert extérieures par réciprocité sur le caisson

moteur (cf. Figure 4.2). Les fonctions de transfert entre ces points sources et les récepteurs positionnés à 7.5 m à droite du caisson sont ensuite calculées par l'association de la méthode EBEM avec la méthode du lancer de faisceaux (cf. Section 2.5). Pour chaque récepteur, on moyenne quadratiquement les 21 fonctions de transfert pour obtenir une fonction de transfert moyenne pour tout le bloc moteur. Nous présentons dans les Figures 4.5 et 4.6 les résultats pour une position du récepteur à $x = +4\ m$, $y = 7.5\ m$ et $z = 1.2\ m$ (cf. Figure 4.4), où le bruit de passage maximal est souvent observé.

La Figure 4.5 présente les spectres des fonctions de transfert pour les différentes formes de directivité des sources (cf. Section 2.5.3), pour la configuration sans et avec absorbants. Les résultats présentés dans l'article de Thivant et Minck [38] ont montré que la méthode EBEM seule donnait des résultats satisfaisants en valeur globale. Cependant, l'observation du spectre révèle une forte imprécision à certaines fréquences, où les effets du sol sont importants. Concernant *la méthode couplée*, nous remarquons une bonne corrélation entre les fonctions de transfert calculées et la fonction de transfert mesurée, même si nous observons un décalage de niveau entre les résultats issus de différentes directivités. En effet, au-delà de 1000 Hz, l'allure des courbes calculées présente des pics dus aux interférences destructives entre l'onde directe et l'onde réfléchie sur le sol, qui sont également présents sur la courbe mesurée. Cependant, pour les tiers d'octave inférieurs à 1000 Hz, nous remarquons des pics sur la courbe mesurée qui ne sont pas apparents pour les calculs. Cela est certainement dû au comportement modal et aux résonances dans le caisson qui ne sont pas pris en compte par la méthode EBEM. Il faut savoir qu'aujourd'hui, la limite fréquentielle de cette méthode de calcul n'est pas connue de manière exacte. Ce point sera abordé dans les perspectives (cf. Section 6.2). Finalement, le chaînage des deux méthodes est fructueux, car il permet de donner de meilleurs résultats

que la méthode EBEM seule, en prenant en compte les phénomènes d'interférences.



(a) Sans absorbants (b) Avec absorbants

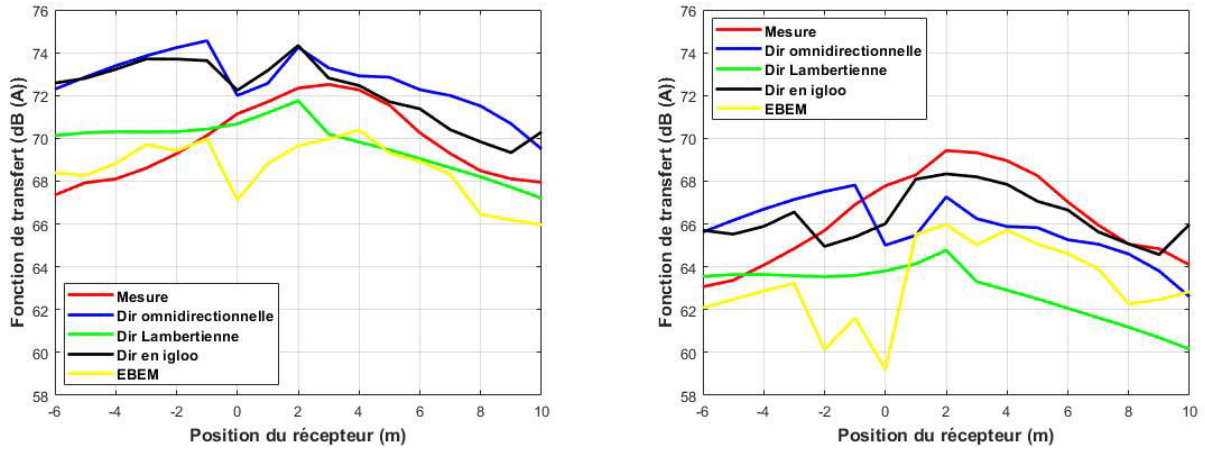
FIGURE 4.5 – Spectres des fonctions de transfert du caisson en tiers d'octave. Courbe rouge : mesure. Courbe jaune : calcul avec la méthode EBEM seule. Courbes bleu, verte et noir : calcul avec la méthode EBEM et lancer de faisceaux en utilisant respectivement une directivité omnidirectionnelle, Lambertienne et en igloo

Les fonctions de transfert sont pondérées par un spectre de puissance en tiers d'octave correspondant à un moteur diesel ; ensuite, leur valeur globale pondérée A est calculée pour chaque récepteur. Les résultats obtenus sont présentés en fonction de la position du récepteur dans la Figure 4.6, et ce, pour la configuration sans et avec absorbants. Nous remarquons que *la méthode couplée* présente de meilleurs résultats que la méthode EBEM seule, notamment les résultats pour les position du récepteur $x > 0$ issus de la prise en compte d'une directivité des sources omnidirectionnelles et en igloo (cf. Section 2.5.3). Cependant, nous pouvons observer un décalage entre ces résultats et la mesure, notamment pour la configuration sans absorbant et la position du récepteur $x < 0$. Cela est certainement dû à la petite taille de l'ouverture se trouvant à l'avant du caisson et représentant la calandre. Il serait alors intéressant d'introduire dans la directivité des sources (lors du chaînage) un coefficient de diffraction qui dépend à la fois de la taille de l'ouverture et de la longueur d'onde (et donc de la fréquence).

4.2.2 Dans le cas d'un véhicule

4.2.2.1 Présentation du véhicule

Ce deuxième cas test permet de valider la méthode de calcul sur un véhicule réel. Les choix et les hypothèses de modélisation retenus sont présentés ici. D'abord, dans un souci



(a) Sans absorbants (b) Avec absorbants

FIGURE 4.6 – Fonctions de transfert du caisson en valeur globale en fonction de la position du récepteur. Courbe rouge : mesure. Courbe jaune : calcul avec la méthode EBEM seule. Courbes bleu, verte et noir : calcul avec la méthode EBEM et lancer de faisceaux en utilisant respectivement une directivité omnidirectionnelle, Lambertienne et en igloo

d'optimisation du temps de calcul, seul l'avant du véhicule a été maillé (enveloppe extérieure et compartiment moteur). Ensuite, un travail sur la sensibilité des résultats des fonctions de transfert par rapport à la finesse du maillage a été réalisé [108]. Cela a permis de rendre compte d'un maximum de détails géométriques et de retranscrire le confinement intérieur du compartiment moteur. Enfin, il est important de définir la zone de chaînage entre les deux méthodes (EBEM et lancer de faisceaux). En effet, on peut tout à fait imaginer cette zone au niveau des véritables ouvertures d'un véhicule (*i.e.* au niveau des passages de roues et du ski). Cependant, ce choix de modélisation complexifie le calcul lors de la phase du lancer de faisceaux. En effet, compte tenu de la petite distance entre le sol et le ski, des ondes stationnaires peuvent apparaître sous le véhicule. La méthode des lancers de faisceaux permet de prendre en compte ce phénomène, et donc de mieux représenter la réalité. Néanmoins, le grand nombre d'interactions entre l'onde et l'environnement rend difficile aux faisceaux d'atteindre le récepteur. Pour remédier à ce problème, une surface virtuelle simule la communication vers l'extérieur sous forme d'une jupe (cf. Figure 4.7).

4.2.2.2 Calcul déterministe : résultats et discussion

Nous retiendrons pour ce cas test uniquement les résultats issus d'une directivité *omnidirectionnelle*. Comme pour le caisson, 21 sources monopôlaires artificielles ayant un débit d'accélération volumique unitaire sont positionnées autour du groupe motopropulseur (cf. Figure 3.12). Les fonctions de transfert entre ces points "source" et les récepteurs qui se

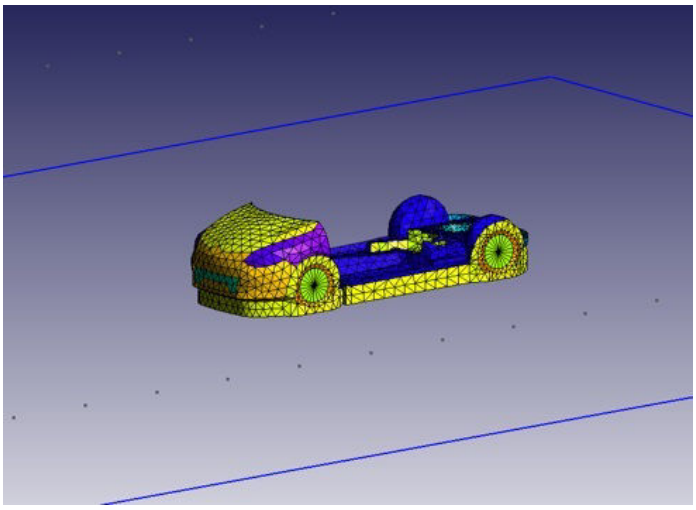
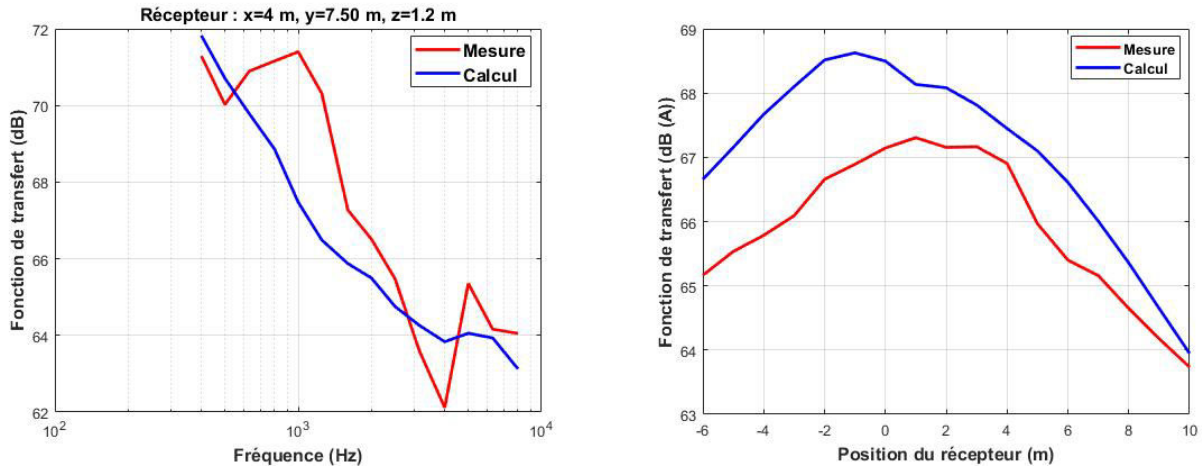


FIGURE 4.7 – Modélisation du véhicule

trouvent à 7.5 m à droite et à gauche du véhicule (cf. Figure 2.15) sont ensuite estimées par la méthode de calcul qui permet de chaîner la méthodes EBEM et la méthodes de lancer de faisceaux. Pour chaque récepteur, on moyenne quadratiquement les 21 fonctions de transferts pour obtenir une fonction de transfert moyenne pour tout le GMP. Les mesures des fonctions de transfert sont réalisées sur le véhicule par réciprocité dans une chambre semi-anéchoïque en suivant la procédure décrite dans la Section 2.4.2.2. Les résultats des modules des fonctions de transfert calculés et mesurés sont présentés dans la Figure 4.8a. Les fonctions de transfert sont également pondérées par un spectre de puissance en tiers d'octave correspondant à un moteur diesel, et leur valeur globale pondérée A est calculée pour chaque récepteur. Les résultats obtenus sont présentés en fonction de la position du véhicule dans la Figure 4.8b. Pour les positions du récepteur $x > 0$, nous remarquons une bonne corrélation entre le calcul et la mesure en valeur globale avec une différence d'environ 1 dB (A). Néanmoins, pour les autres positions du récepteur, nous pouvons noter, comme pour le caisson, un décalage entre le calcul et la mesure. Cela est certainement dû aux petites ouvertures se trouvant au niveau de la calandre du véhicule, d'où l'intérêt d'introduire dans la directivité des sources (lors du chaînage) un coefficient de diffraction qui dépend à la fois de la taille de l'ouverture et de la longueur d'onde.

4.2.2.3 Calcul sous incertitudes : résultats et discussion

Après la validation de *la méthode couplée* sur un modèle simplifié de compartiment moteur et sur un véhicule réel, le but maintenant est d'étudier la sensibilité par rapport à l'incertitude paramétrique correspondant aux données des matériaux absorbants se trouvant dans



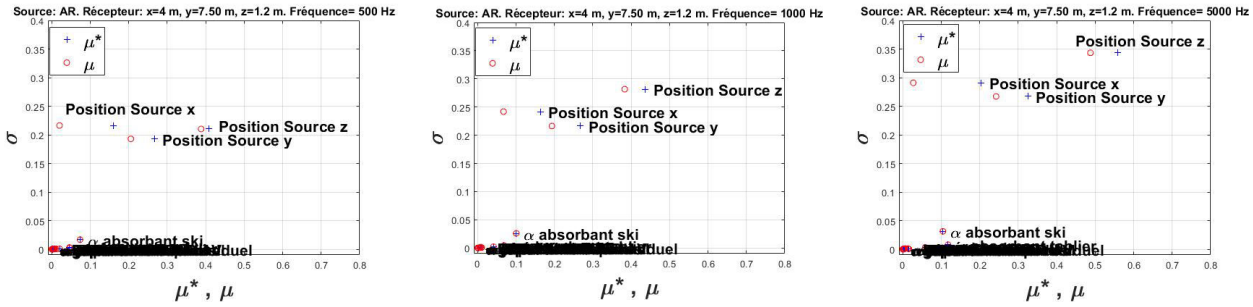
(a) Spectres des fonctions de transfert (b) Fonction de transfert en valeur globale

FIGURE 4.8 – Fonctions de transfert du véhicule. Chaînage avec une directivité des sources *omnidirectionnelle*.

le compartiment moteur, ainsi que la position des sources de bruit artificielles qui sont positionnées autour du GMP. Pour cela, nous nous sommes inspirés d'une étude rapportée dans la littérature pour caractériser l'incertitude liée aux paramètres caractérisant les matériaux absorbants. En effet, dans l'article de Pompoli et al. [109], qui représente une extension du travail publié par Horoshenkov et al. [110], trois matériaux différents sont mesurés plusieurs fois dans sept laboratoires différents pour étudier la dispersion liée à la répétabilité et à la reproductibilité de la mesure. Ces trois matériaux sont : de la mousse réticulée, de la fibre de verre compressée et du caoutchouc cellulaire reconstitué. Dans notre étude, nous nous sommes intéressés uniquement à la mousse réticulée qui est celle utilisée dans la plupart des matériaux présents dans le compartiment moteur du véhicule. Une dispersion proche de 5% a été observée sur le coefficient d'absorption α entre 400 et 3500 Hz. Cette dispersion est celle qui a été utilisée dans notre étude sur tout le spectre du coefficient d'absorption α et du coefficient de transmission τ (entre 400 et 8000 Hz). Pour ce qui est des sources de bruit, nous avons considéré leur position incertaine variant dans un cube de dimension $(0.1 \times 0.1 \times 0.1)$ m^3.

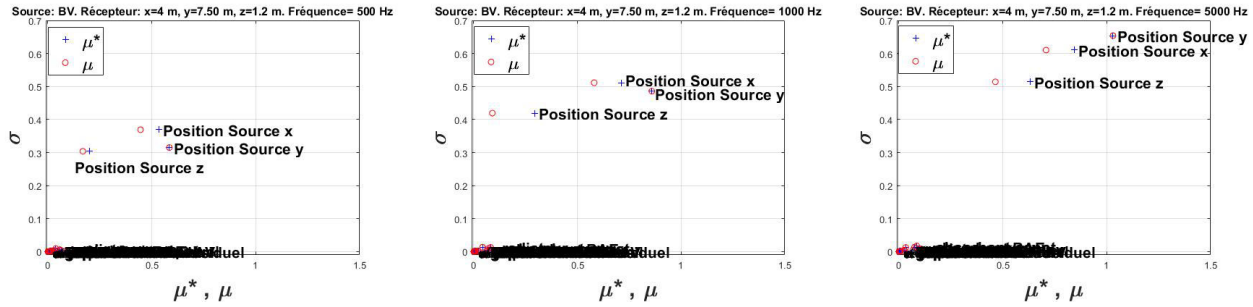
En raison du temps de calcul relativement coûteux de *la méthode couplée* (environ 10 mn pour calculer une fonction de transfert entre une source et tous les récepteurs) et du grand nombre de paramètres d'entrée du modèle (35 paramètres), la méthode de Morris est celle qui a été utilisée pour explorer le comportement des sorties du modèle et faire un tri parmi les entrées selon leur influence. Les résultats de l'analyse de sensibilité sont présentés pour trois tiers d'octave différents centrés sur : 500, 1000 et 5000 Hz, et pour deux sources de bruit qui se trouvent respectivement sur la face arrière du GMP (cf. Figure 4.9) et sur la face boîte

de vitesse (cf. Figure 4.10).



(a) 500 Hz (b) 1000 Hz (c) 5000 Hz

FIGURE 4.9 – Hiérarchisation des variables par la méthode de Morris. Source : face arrière. Récepteur : $x = +4\ m$, $y = 7.5\ m$ et $z = 1.2\ m$



(a) 500 Hz (b) 1000 Hz (c) 5000 Hz

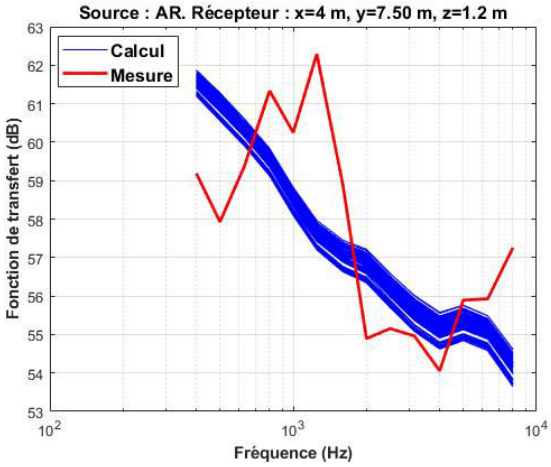
FIGURE 4.10 – Hiérarchisation des variables par la méthode de Morris. Source : face boîte de vitesse. Récepteur : $x = +4\ m$, $y = 7.5\ m$ et $z = 1.2\ m$

Nous remarquons une grande sensibilité de la fonction de transfert à la position de la source de bruit, car les deux termes $\widehat{\mu}_i$ et $\widehat{\mu}_i^*$ qui mesurent l'influence globale du paramètre i sur la sortie du modèle sont importants. Aussi, le terme $\widehat{\sigma}_i$ qui représente l'écart-type des effets élémentaires est également élevé ($\widehat{\sigma}_i$ et $\widehat{\mu}_i^*$ sont du même ordre de grandeur) ; cela signifie que l'effet de la position de la source est non linéaire et/ou avec interactions avec d'autres paramètres. Il faut également noter que $\widehat{\mu}_i$ est différent de $\widehat{\mu}_i^*$; cela signifie la présence de non-monotonie (cf. Section 3.2.5.1).

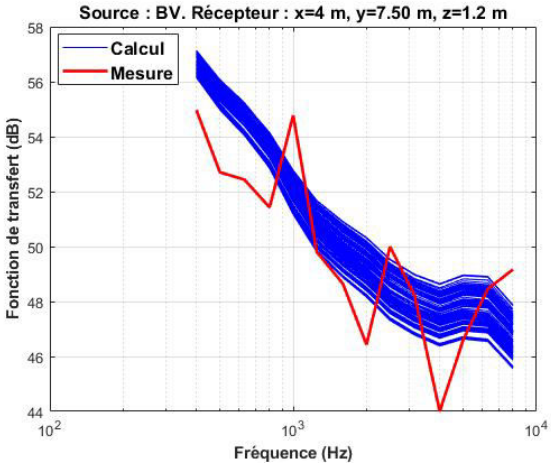
Les fonctions de transfert calculées en utilisant le plan d'expérience de Morris sont présentées sur la Figure 4.11 [1]. Nous remarquons une bonne corrélation entre les niveaux calculés et mesurés. Cependant, l'allure des courbes est différente. En effet, on retrouve des pics sur la

1. Il faut noter que la méthode de Morris, qui est bien adaptée pour le criblage, n'est pas une méthode dédiée à la propagation d'incertitude, car elle utilise un plan d'expérience qui ne garantit pas une bonne répartition des points en projection sur les marges (cf. Section 3.2.5.1).

courbe mesurée qui ne sont pas apparents dans les résultats de calcul. Il serait donc intéressant de revenir aux hypothèses faites sur le modèle et les modifier, comme par exemple la zone de couplage de la méthode EBEM avec la méthode des lancers de faisceaux qui peut avoir un effet significatif sur la fonction de transfert. Ce point sera abordé dans les perspectives (cf. Section 6.2).



(a) Face arrière



(b) Face boîte de vitesse

FIGURE 4.11 – Résultats des fonctions de transfert du véhicule calculés à partir des méthodes EBEM et lancer de faisceaux en utilisant le plan d'expérience de Morris.

4.3 Application sur les modèles de synthèse

4.3.1 Quantification d'incertitudes

Dans notre étude, les paramètres d'entrée des modèles de synthèse sont représentés par des variables aléatoires. Leurs incertitudes sont quantifiées en utilisant principalement un jugement d'expert ou à l'aide du principe de maximum d'entropie [61]. Cependant, quelques mesures ont pu être réalisées sur certains paramètres. Dans notre étude, nous faisons la distinction entre *incertitude de mesure* (cf. Section 4.3.1.1), qui est liée à la répétabilité, à la reproductibilité et aux conditions d'essais, et *variabilité de production* (cf. Section 4.3.1.2), qui est associée aux écarts entre véhicules de même définition technique produits avec le même outil industriel.

Habituellement, tous les paramètres d'entrée présentés dans le Chapitre 2 sont mesurés une fois, et cela pour chaque type de véhicule. Le but maintenant est de déterminer l'incertitude liée à chacun de ces paramètres, qui correspond respectivement à une fluctuation autour de la valeur nominale mesurée. Nous faisons également l'hypothèse que cette incertitude est la

même pour tous types de véhicule. Cette façon d'aborder les incertitudes permet de traiter les dépendances comme une relation entre les paramètres avec un terme "bruit" rajouté autour de la valeur nominale [76]. En effet, certains paramètres d'entrée des modèles de synthèse peuvent être fortement corrélés (cf. Figure 2.20) : par exemple, la puissance acoustique des sources Wac qui dépend de la vitesse de rotation du moteur N_e, et donc de la masse globale m_g, de la vitesse du véhicule à 1000 tr/mn (V_{mille}) et du couple moteur en pleine charge τ ; ou encore, la contribution du bruit de contact pneumatique/chaussée L_{pc} qui dépend de la vitesse du véhicule V, et donc des trois paramètres cités précédemment. Il faut alors savoir interpréter les indices de sensibilité de ces paramètres d'entrée (cf. Section 3.2.5.3). En effet, l'indice de sensibilité des puissances des sources Wac et de la contribution du contact pneumatique/chaussée L_{pc} mesure uniquement l'influence de ces paramètres sur les sorties du modèle : $S_{(Wac,L_{pc})} = S^u_{(Wac,L_{pc})}$. Cependant, les indices de sensibilité correspondants à m_g, V_{mille} et τ prennent en compte, en plus de leur influence sur les sorties du modèle, l'influence de leur corrélation avec les autres paramètres : $S_{(m_g,V_{mille},\tau)} = S^u_{(m_g,V_{mille},\tau)} + S^c_{(m_g,V_{mille},\tau)}$.

Il faut toutefois noter que les paramètres m_g, V_{mille} et τ n'ont aucune influence directe sur les niveaux de bruit $L_{cr(n)}$, $L_{wot(n)}$, $L_{cr(n+1)}$ et $L_{wot(n+1)}$, *i.e.* $S^u_{(m_g,V_{mille},\tau)} = 0$. Leurs indices de sensibilité correspondent donc uniquement à leur corrélation avec les puissances acoustiques Wac et la contribution du contact pneumatique/chaussée L_{pc} : $S_{(m_g,V_{mille},\tau)} = S^c_{(m_g,V_{mille},\tau)}$. Cependant, lorsqu'il s'agit de leur influence sur la sortie L_{urban}, le terme $S^u_{(m_g,V_{mille},\tau)} \neq 0$, car les paramètres m_g, V_{mille}, et τ servent ici à calculer les accélérations du véhicule $a_{wot(n)}$ et $a_{wot(n+1)}$. Or, ces accélérations sont utilisées pour interpoler les niveaux de bruit $L_{cr(n)}$, $L_{wot(n)}$, $L_{cr(n+1)}$ et $L_{wot(n+1)}$ pour obtenir le niveau de bruit L_{urban}.

Les lois de probabilité attribuées aux paramètres d'entrée des modèles de synthèse sont présentées dans la Table 4.1. Nous présentons ci-dessous les méthodes utilisées pour caractériser l'incertitude de certains paramètres.

4.3.1.1 Incertitude de mesure

La masse globale $\mathbf{m_g}$: pour déterminer l'incertitude de mesure liée à la masse du véhicule m, nous avons mesuré celle d'un même véhicule plusieurs fois. Une incertitude de ±0,5 kg a été observée. Concernant la masse du conducteur m_d, sa valeur nominale est fixée à 75 kg. Nous avons considéré une incertitude correspondant à ±25 kg. Ces deux paramètres sont complètement indépendants, et leur somme correspond à la masse globale m_g avec $m_g = m + m_d$. Le but principal de la séparation de ces deux paramètres est que la masse du véhicule intervient lors du calcul du rapport puissance et masse du véhicule PMR, et donc des accélérations cibles a_{urban} et $a_{wot\ ref}$ (cf. Eq. (2.1), (2.2) et (2.3)), mais aussi pour calculer les performances du véhicule, *i.e.* les accélérations du véhicule pour chaque rapport

Variable		Incertitude de mesure	Variabilité de production
Masse globale m_g (kg)	Masse véhicule m (kg)	U(-0.5,0.5)	U(-2,2)
	Masse conducteur m_d (kg)	U(-25,25)	/
V_{mille} (%)		$\mathcal{N}$ (0,0.5^2)	U(-2.8,2.8)
Couple moteur τ (%)		U(-5,5)	U(-5,5)
Wac_{cr} (dBW)	GMP	U(-2,2)	U(-0.5,0.5)
	Bouche d'échappement	U(-2,2)	U(-0.5,0.5)
	Ligne d'échappement	U(-2,2)	U(-0.5,0.5)
	Bouche d'admission	U(-2,2)	U(-0.5,0.5)
Wac_{wot} (dBW)	GMP	U(-1,1)	U(-0.5,0.5)
	Bouche d'échappement	U(-1,1)	U(-0.5,0.5)
	Ligne d'échappement	U(-1,1)	U(-0.5,0.5)
	Bouche d'admission	U(-1,1)	U(-0.5,0.5)
TF (dB (A))	GMP	U(-1,1)	U(-0.5,0.5)
	Bouche d'échappement	U(-1,1)	U(-0.5,0.5)
	Ligne d'échappement	U(-1,1)	U(-0.5,0.5)
	Bouche d'admission	U(-1,1)	U(-0.5,0.5)
L_{pc} (dB (A))	A vitesse constant	$\mathcal{N}$ (0,0.6^2)	U(-0.5,0.5)
	Couple à la roue τ_{tire}	U(1,2.5)	U(-0.5,0.5)

TABLE 4.1 – Lois de probabilité attribuées aux paramètres d'entrée des modèles de synthèse [2]

de vitesse à partir de l'Eq. (2.29). Or, la masse du conducteur intervient uniquement dans le calcul des performances du véhicule.

La vitesse $\mathbf{V_{mille}}$: la vitesse du véhicule V ainsi que la vitesse de rotation du moteur N_e ont été mesurées sur plusieurs véhicules lors de leur passage sur la piste. Les valeurs du paramètre V_{mille} sont ensuite calculées pour chaque véhicule à partir de l'Eq. (2.32), et comparées avec la valeur nominale donnée par la définition technique du véhicule. Nous avons remarqué que les valeurs obtenues sont distribuées normalement autour de cette valeur nominale. Ainsi, une loi normale a été attribuée à l'incertitude de ce paramètre, avec un écart-type $\sigma = 0.5$ % de la valeur nominale.

Couple moteur τ : ne disposant pas de mesures suffisantes pour caractériser l'incertitude liée au couple moteur τ, nous nous sommes basés sur un jugement d'expert pour lui

2. La notation $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ est souvent utilisée pour décrire une variable aléatoire X qui suit une loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ. La loi uniforme est souvent notée U(a,b), où a et b représentent respectivement la plus petite et la plus grande valeur que la variable aléatoire peut prendre.

attribuer une loi uniforme correspondant à ±5 % de sa valeur nominale.

Puissances acoustiques des sources Wac : nous nous sommes basés également sur un jugement d'expert pour caractériser l'incertitude liée à la puissance acoustique des sources. Une loi uniforme correspondant à ±1 dB (A) est alors attribuée à la puissance des sources en pleine charge Wac_{wot}. Cependant, pour la vitesse stabilisée, la méthode de mesure des puissances acoustiques des sources Wac_{cr} est très incertaine. En effet, les conditions de charge correspondant à l'essai du bruit de passage à vitesse stabilisée sont difficiles à reproduire sur banc. C'est pourquoi, nous avons attribué à l'incertitude de ces puissances une loi uniforme correspondant à ±2 dB (A). Il faut également savoir que les puissances des sources ainsi que les fonctions de transfert sont données en fonction de la fréquence pour certains modèles présentés dans le Chapitre 2. L'intérêt est d'étudier la sensibilité des sorties des modèles par rapport à tout le spectre, et non pas seulement à une fréquence particulière. Pour cette raison, tout le spectre est supposé corrélé, et sera étudié comme un seul paramètre (cf. Figure 4.12).

Fonctions de transfert TF : plusieurs fonctions de transfert ont été mesurées en répétabilité sur un véhicule pour 21 zones GMP et 42 points récepteurs se trouvant à la position $y = 7,50$ m (une fonction de transfert est mesurée deux fois pour chaque couple source-récepteur). La valeur maximale d'incertitude observée a été retenue. Nous avons supposé que l'incertitude de mesure liée à la fonction de transfert suit une loi uniforme entre -1 et 1 dB (A) (cf. Figure 4.12).

Bruit de contact pneumatique/chaussée $\mathbf{L_{pc}}$: le contact pneumatique/chaussée est la seule source de bruit qui est mesurée directement en contribution. La méthode utilisée consiste à mesurer deux fois la contribution du contact pneu/chaussée pour plusieurs vitesses du véhicule (de 30 à 80 km/h, avec un pas de 10 km/h). Ensuite, une régression logarithmique (cf. Eq. (2.11)) nous permet d'obtenir la relation empirique qui lie le niveau de bruit de contact pneumatique/chaussée L_{pc} à la vitesse du véhicule V (cf. Figure 4.13). Cette formule nous permet d'obtenir la valeur nominale du niveau de bruit de contact pneu/chaussée L_{pc}. Afin de caractériser l'incertitude liée à ce paramètre, 12 mesures ont été réalisées sur un véhicule roulant à 50 km/h, puis nous avons calculé leur moyenne et leur écart-type. Nous avons remarqué que la moyenne est proche de la valeur nominale. C'est pourquoi, nous avons supposé que l'incertitude suit une loi normale avec un écart-type $\sigma = 0.6$ dB (A).

Couple à la roue $\tau_{\mathbf{tire}}$: pour les configurations en accélération pleine charge, nous

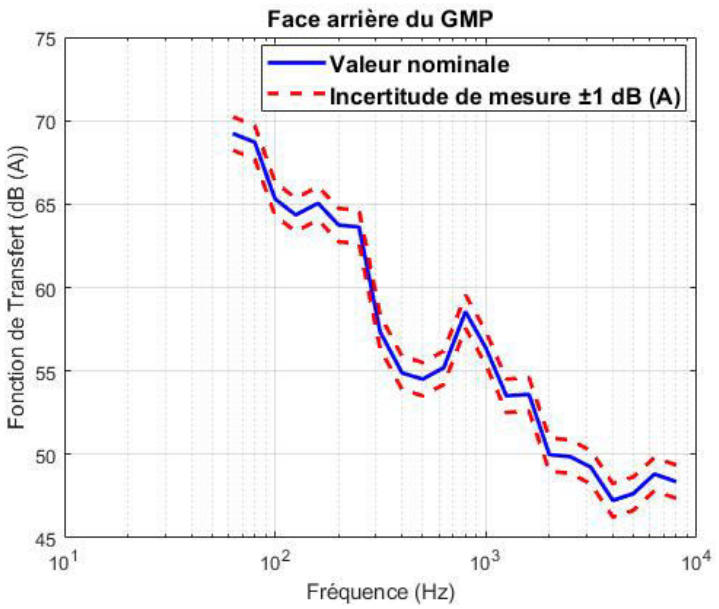


FIGURE 4.12 – Fonction de transfert en fonction de la fréquence, entre la face arrière du moteur, et un microphone se trouvant à $y = -7.5$ m (côté gauche du véhicule) et à $x = 0$ m. La courbe bleue représente la valeur nominale, et les courbes rouges représentent les plages de variation

rajoutons à la contribution du contact pneumatique/chaussée à vitesse stabilisée une valeur liée à l'effet du couple appliqué à la roue du véhicule τ_{tire} (cf. Figure 2.12). Pour quantifier cette incertitude, la contribution de plusieurs pneus a été mesurée en accélération pleine charge du véhicule. Il a été observé que, dans la zone de la piste où la valeur de la contribution totale est maximale (généralement entre +3m et +5m), l'effet du couple à la roue rajoute 1 à 2,5 dB (A) à la contribution du contact pneumatique/chaussée à vitesse stabilisée. Il faut souligner que cet effet dépend fortement de l'accélération du véhicule, et peut être différent d'un pneu à un autre.

4.3.1.2 Variabilité de production

La vitesse $\mathbf{V_{mille}}$: nous avons supposé que la variabilité de production sur le paramètre V_{mille} est liée uniquement à la dispersion de production sur la circonférence du pneumatique. Les données de tolérance sur la circonférence de 70 pneus différents fournis par les constructeurs sont utilisées pour calculer l'incertitude de production liée à ce paramètre. La valeur maximale observée a été retenue. Elle correspond à ±2.8 % de la valeur nominale de la V_{mille}.

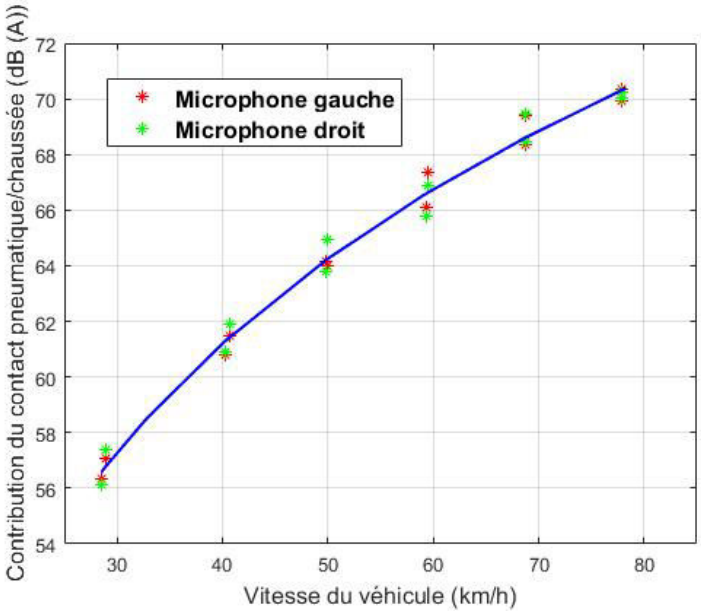


FIGURE 4.13 – Exemple de la contribution du bruit de contact pneumatique/chaussée en fonction de la vitesse du véhicule sur piste d'essai

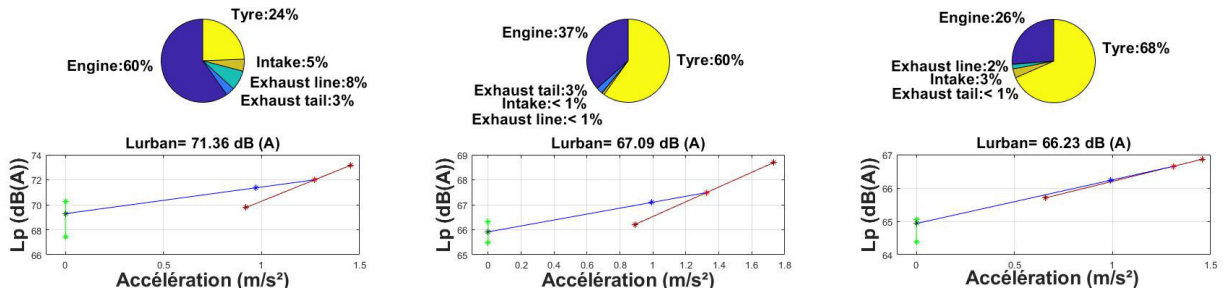
Couple moteur τ : partant du principe que tous les véhicules doivent être mesurés en usine et doivent vérifier une valeur qui ne dépasse pas les 5 % de la valeur nominale maximale du couple moteur τ, nous avons fait le choix d'attribuer à ce paramètre une loi uniforme entre -5 et 5 % de sa valeur nominale.

En absence de données pour les autres paramètres, nous nous sommes basés uniquement sur l'expertise pour la construction des lois de probabilité (cf. Table 4.1).

4.3.2 Calcul déterministe : résultats et discussion

Avant de réaliser un calcul sous incertitudes, il est important de faire un calcul déterministe pour classifier les sources de bruit selon leur influence sur le niveau de bruit L_{urban}. Pour cette étude, trois véhicules ayant des rapports puissance/poids différents sont choisis : un segment B essence (entrée de gamme), un segment B diesel (moyenne gamme) et un segment D diesel (haut de gamme). Les résultats issus du modèle "monopôle en valeur globale" sont présentés dans la Figure 4.14.

Nous remarquons que deux rapports de vitesse sont utilisés pour obtenir le niveau de bruit L_{urban}, et cela pour les trois véhicules. Nous pouvons noter que le niveau L_{urban} le plus élevé correspond au véhicule d'entrée de gamme. Cela est dû à la contribution du GMP qui



(a) B essence (b) B diesel (c) D diesel

FIGURE 4.14 – Résultats du calcul déterministe réalisés avec le modèle monopôle en valeur globale pour trois véhicules différents

représente la source la plus importante pour ce segment (environ 60%). Le bruit de contact pneumatique/chaussée représente la deuxième source prédominante pour ce segment, suivie par les autres sources de bruit, notamment le rayonnement des volumes d'échappement, la bouche d'admission et enfin la bouche d'échappement. Cependant, la contribution du GMP devient de moins en moins importante pour les segments supérieurs, qui sont dominés par le bruit de contact pneumatique/chaussée. En effet, nous pouvons noter que la contribution du bruit de contact pneumatique/chaussée représente environ 68% de la contribution totale pour le segment D diesel, tandis que la contribution du GMP représente seulement 26%. Cette classification des sources reste similaire pour les autres modèles (le modèle "monopôle en tiers d'octave" et le modèle "six faces en tiers d'octave") avec des pourcentages légèrement différents.

4.3.3 Calcul sous incertitudes : résultats et discussion

4.3.3.1 Linéarité du modèle et méthode utilisée

Nous avons d'abord commencé notre étude avec le modèle le plus simple : le "modèle monopôle en valeur globale" défini au Chapitre 2. Le choix de trois véhicules ayant des rapports puissance/poids différents nous permet de connaître les paramètres les plus influents sur les sorties du modèle, et de les classer par familles de véhicule. Notre modèle nécessite un temps de calcul relativement faible, c'est pourquoi la méthode d'estimation des indices de Sobol par Monte Carlo est utilisée en premier lieu. Cette méthode nous permet d'obtenir un intervalle de confiance sur les résultats par bootstrap, sans augmenter considérablement le temps de calcul. 5000 tirages aléatoires sont réalisés pour la matrice A et B (cf. Eq. (3.51) et Eq. (3.52)). En ayant 18 paramètres en entrée, le nombre total d'évaluation est alors de $5000 \times (18 + 2)$ (cf. Section 3.2.5.2.3). Les résultats de la sensibilité de la sortie L_{urban} vis-

à-vis de l'incertitude de mesure sur le segment B diesel sont d'abord étudiés et analysés. La Figure 4.15 présente les indices de sensibilité de premier ordre ainsi que les indices de sensibilité totaux. Nous remarquons d'abord que $S_i \approx S_{Ti}$, et que la somme $\sum_{i=1}^{k} S_i = 0,99 \approx 1$ (k étant le nombre de paramètres). Cela veut dire qu'il n'y a pas d'interactions entre les paramètres, et que la sensibilité est totalement expliquée par l'indice d'ordre 1. Le paramètre le plus influent ici correspond à la contribution du contact pneumatique/chaussée à vitesse stabilisée, qui représente environ 50% de la variabilité totale, puis l'effet du couple à la roue ainsi que la fonction de transfert du GMP en second (environ 15% chacun).

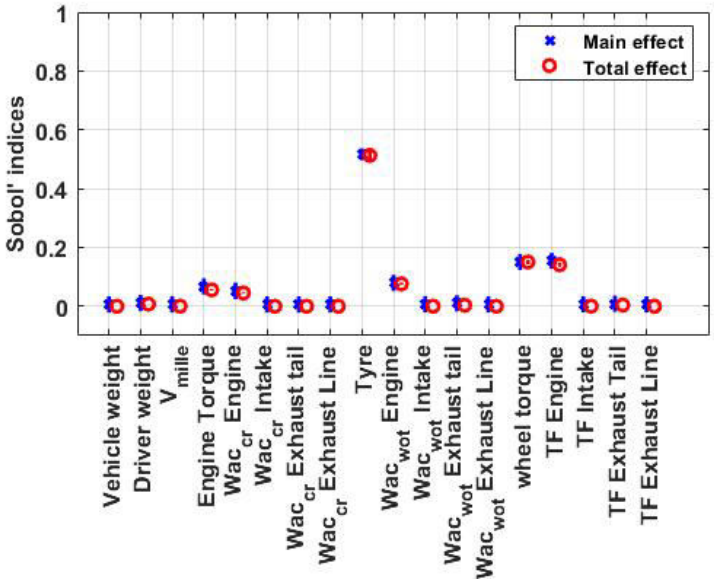


FIGURE 4.15 – Indices de premier ordre S_i, et indices totaux S_{Ti} de Sobol pour la sortie du modèle L_{urban} (incertitude de mesure, segment B diesel). Wot : Wide open throttle (accélération en pleine charge). Cr : Cruise (vitesse stabilisée)

La Figure 4.16 représente le nuage de points de la sortie L_{urban} (en dB (A)) en fonction des 18 paramètres d'entrée. Nous remarquons d'abord que les points sont uniformément répartis dans l'espace : cela confirme qu'il n'y a pas d'effet d'interaction entre les paramètres. Nous remarquons également une relation plutôt linéaire entre les entrées et la sortie du modèle. On peut aussi avoir une idée sur les paramètres influents à partir de cette figure, comme par exemple le niveau L_{urban} qui augmente linéairement et considérablement avec la contribution du contact pneumatique/chaussée à vitesse stabilisée.

Notre modèle étant simple (pas d'interaction, et effet linéaire vérifié également pour les autres véhicules), nous nous contenterons dans la suite de ce manuscrit de propager l'incertitude par des méthodes type quasi-Monte Carlo (suite de Sobol, cf. Section 3.2.4.2) et d'estimer les indices de sensibilité en faisant une régression linéaire. La sensibilité peut alors

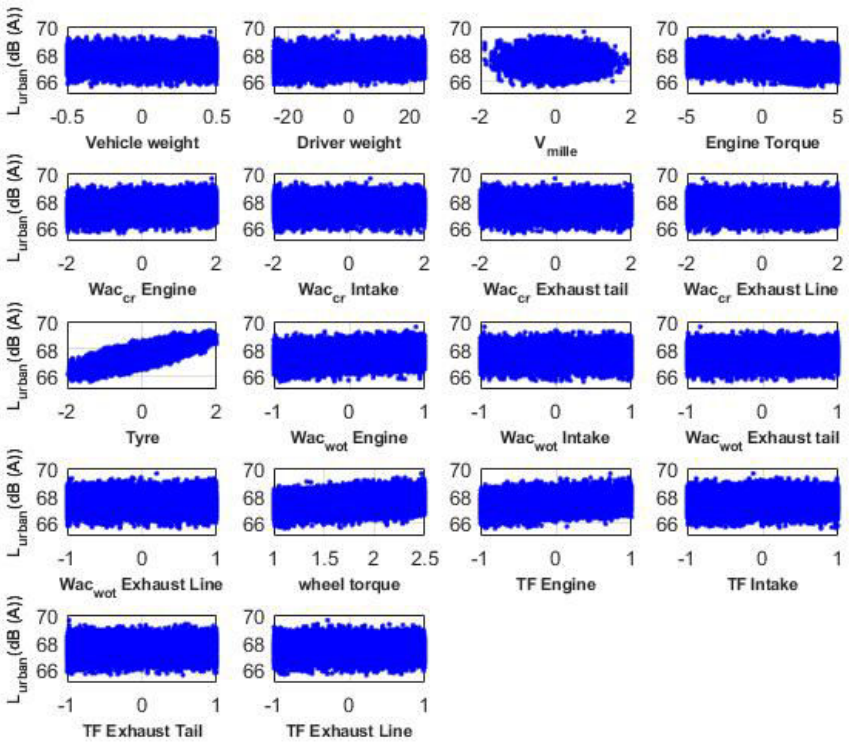


FIGURE 4.16 – Nuage de points de la sortie L_{urban} en fonction des 18 paramètres d'entrée du modèle (incertitude de mesure, segment B diesel)

simplement être quantifiée par l'indice SRC (cf. Eq. (3.30)). Cela nous permet de diminuer considérablement le nombre de simulations, et gagner donc en termes de temps de calcul lors de l'introduction de la variabilité de production. Il faut cependant souligner que, dans notre étude, tous les véhicules étaient, comme dans la plupart des cas, dans une situation où aucun des rapports de boîte de vitesse ne permet d'approcher l'accélération de référence en pleine charge $a_{wot\ ref}$. Deux rapports de vitesse sont alors utilisés pour encadrer cette accélération de référence et donc estimer la valeur L_{urban} (cf. Section 4.3.2). En revanche, dans certaines situations, les variations liées au couple moteur τ, à la V_{mille}, ainsi qu'à la masse du véhicule m et la masse du conducteur m_d peuvent modifier les accélérations du véhicule et donc le comportement du modèle. Le modèle peut donc parfois, selon la valeur du tirage aléatoire sur les paramètres d'entrée, utiliser un seul ou deux rapports de vitesse pour estimer la valeur L_{urban}. Dans ce cas-là, le modèle devient discontinu et l'estimation des indices de Sobol [87] est nécessaire pour avoir des indices de sensibilité non-biaisés. Une autre solution est de séparer et d'étudier séparément les deux configurations. Cependant, cette séparation des

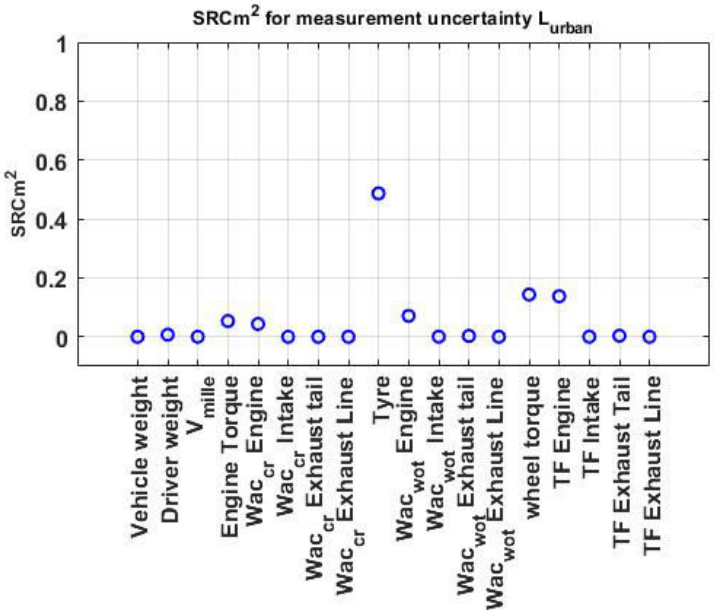


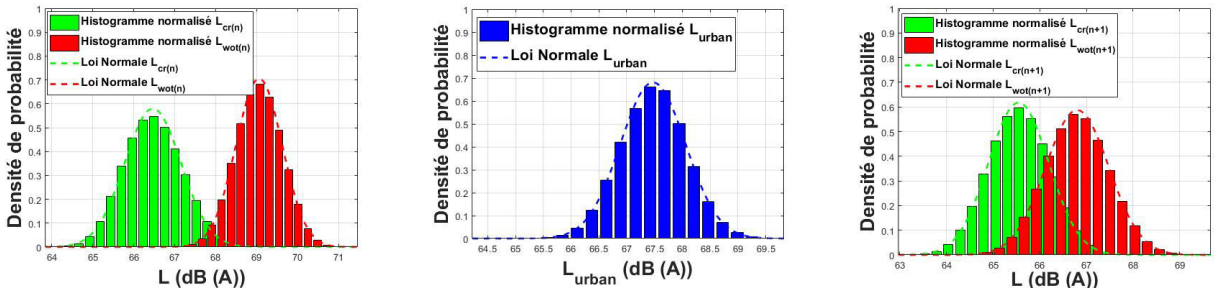
FIGURE 4.17 – Indice de sensibilité $SRCm^2$ pour la sortie du modèle L_{urban} (incertitude de mesure, segment B diesel)

échantillons crée de la dépendance entre les paramètres d'entrée, ce qui complexifie l'analyse.

Pour introduire la variabilité de production, nous avons fait un tirage quasi-Monte Carlo de $N_{PU} = 1024$ échantillons sur les paramètres d'entrée caractérisant des véhicules de même définition technique produits avec le même outil industriel. Pour chaque véhicule, $N_{MU} = 1024$ tirages sont réalisés sur l'incertitude de mesure liée à ses paramètres. Une régression linéaire entre chaque sortie du modèle et les 18 paramètres d'entrée est ensuite réalisée, et les coefficients de détermination sont calculés. Nous avons remarqué que $R_P^2 = 0.99 \approx 1$, $R_M^2 = 0.99 \approx 1$ et cela concernant les 5 sorties du modèle, où R_P^2 représente le coefficient de détermination pour la variabilité de production et R_M^2 le coefficient de détermination pour l'incertitude de mesure. Cela signifie que l'hypothèse de linéarité du modèle est en effet acceptable, et que les indices de sensibilité SRC peuvent être utilisés. La sensibilité de chaque sortie est alors étudiée en calculant des indices de sensibilité $SRCm$ pour l'incertitude de mesure, et des indices de sensibilité $SRCp$ pour la variabilité de production. Dans la Figure 4.17, nous présentons les résultats des indices $SRCm^2$ afin de les comparer avec les résultats obtenus par la méthode de Sobol (cf. Figure 4.15). On peut s'apercevoir que les résultats sont les mêmes avec $SRCm_i^2 \approx S_i \approx S_{Ti}$, et $\sum_{i=1}^{k} SRCm_i^2 = 0,96 \approx R_M^2$ (k est le nombre de paramètres). Cela confirme les observations précédentes, *i.e.* le modèle est linéaire et sans interactions entre les paramètres.

La Figure 4.18 présente la formulation de l'histogramme (normalisé) pour estimer la

densité de probabilité des 5 sorties du modèle $L_{cr(n)}$, $L_{wot(n)}$, $L_{cr(n+1)}$, $L_{wot(n+1)}$ ainsi que le L_{urban}, en prenant en compte la propagation de l'incertitude de mesure et de la variabilité de production. Ensuite, la mise en oeuvre de la méthode de maximum de vraisemblance nous a permis d'ajuster la distribution à une loi normale. Ces résultats seront comparés aux observations réelles dans le Chapitre 5.



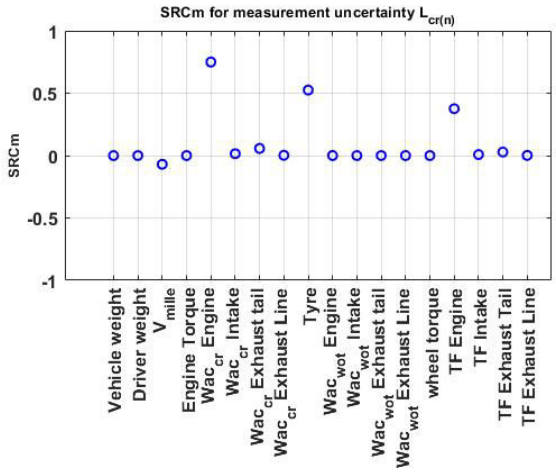
(a) $L_{cr(n)}$ et $L_{wot(n)}$ (b) L_{urban} (c) $L_{cr(n+1)}$ et $L_{wot(n+1)}$

FIGURE 4.18 – Les niveaux de bruit obtenus en sortie du modèle monopôle en valeur globale suite à la propagation de l'incertitude de mesure et de la variabilité de production (segment B diesel)

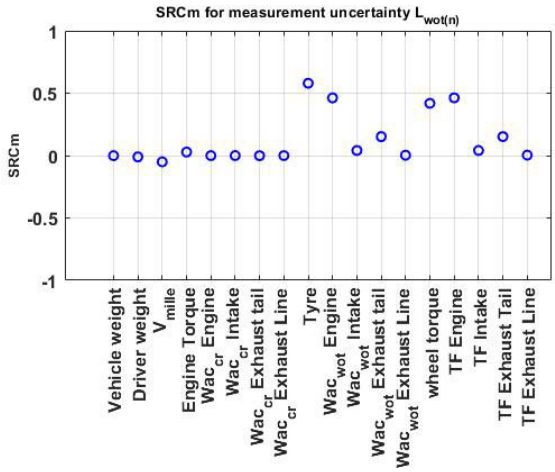
4.3.3.2 Résultats : incertitude de mesure

Les indices de sensibilité correspondants à l'incertitude de mesure $SRCm_i$ pour le segment B diesel sont présentés dans la Figure 4.19, pour les 4 sorties du modèle $L_{cr(n)}$, $L_{wot(n)}$, $L_{cr(n+1)}$ et $L_{wot(n+1)}$. Nous remarquons d'abord que les indices sont différents d'une configuration à une autre. Pour le passage à vitesse stabilisée avec rapport (n) (*i.e.* $L_{cr(n)}$), la puissance et la fonction de transfert du GMP ainsi que la contribution du contact pneumatique/chaussée sont les paramètres les plus influents. Concernant le passage à vitesse stabilisée avec rapport (n+1) (*i.e* $L_{cr(n+1)}$), ce sont toujours les mêmes paramètres qui sont influents, avec des amplitudes légèrement différentes. En effet, le passage au rapport supérieur fait baisser la contribution du GMP, et donc son indice de sensibilité. Pour les passages en pleine charge ($L_{wot(n)}$ et $L_{wot(n+1)}$), le paramètre lié à l'effet du couple à la roue apparaît systématiquement, en plus des paramètres cités précédemment, comme paramètre important.

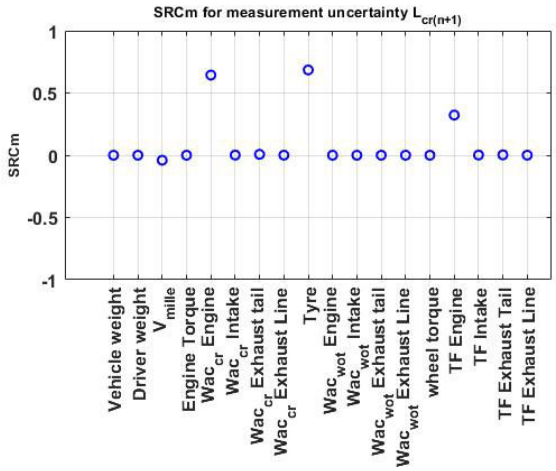
Pour faire une comparaison entre les trois véhicules, les indices de sensibilité $SRCm_i$ correspondant à la sortie L_{urban} sont présentés dans la Figure 4.20. Nous remarquons que les résultats sont différents d'un véhicule à un autre. En effet, la puissance et la fonction de transfert du GMP représentent des paramètres influents pour le segment B essence, qui correspond à un petit véhicule de faible puissance (véhicule d'entrée de gamme). Cette influence devient de plus en plus négligeable lorsqu'on monte en gamme. Par exemple, concernant le segment D diesel, nous remarquons que l'influence du bruit du GMP est négligeable, et que la



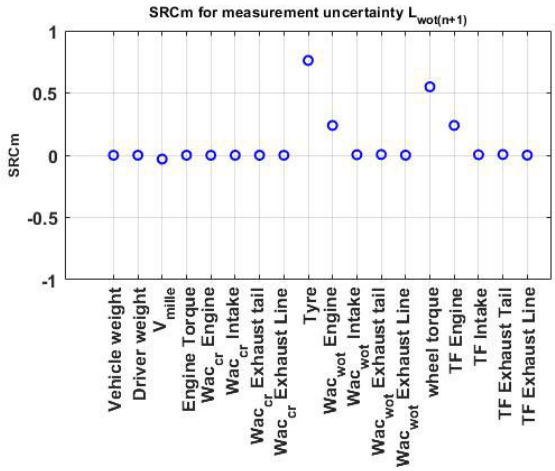
(a) Vitesse stabilisée rapport n : $L_{cr(n)}$



(b) Pleine charge rapport n : $L_{wot(n)}$



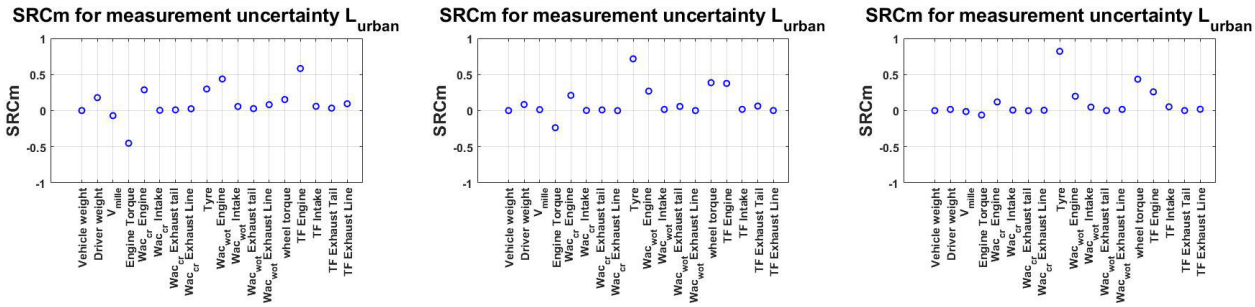
(c) Vitesse stabilisée rapport n+1 : $L_{cr(n+1)}$



(d) Pleine charge rapport n+1 : $L_{wot(n+1)}$

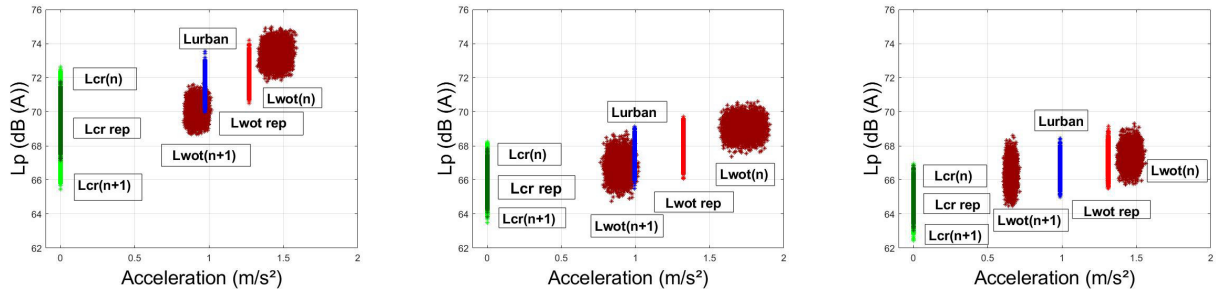
FIGURE 4.19 – Indices de sensibilité $SRCm$ correspondants à l'incertitude de mesure pour le segment B diesel pour les 4 sorties du modèle $L_{cr(n)}$, $L_{wot(n)}$, $L_{cr(n+1)}$ et $L_{wot(n+1)}$.

sortie L_{urban} est dominée par les variations liées à la contribution du contact pneu/chaussée L_{pc}, ainsi que l'effet du couple à la roue τ_{tire}. Nous remarquons aussi une grande influence du couple moteur τ pour le segment B essence. Cet effet a également été observé sur un autre véhicule du même segment, qui n'est pas présenté dans ce manuscrit. En effet, ce paramètre n'influe pas directement sur le bruit estimé lors de chaque passage, mais il peut avoir une influence sur l'accélération du véhicule, et donc une influence sur la valeur L_{urban} lors de l'interpolation. C'est pourquoi les termes S^u_m, $S^u_{m_d}$, $S^u_{V_{mille}}$ et S^u_τ peuvent être différents de zéro lorsqu'il s'agit de l'influence sur la sortie L_{urban} (cf. Section 4.3.1). En plus, l'indice de sensibilité lié au couple moteur τ est négatif, cela signifie que le niveau de bruit L_{urban} est inversement proportionnel à ce paramètre, et donc à l'accélération du véhicule. Ce paramètre peut donc être très important, notamment pour les petits véhicules de faible puissance (véhi-



(a) B essence (b) B diesel (c) D diesel

FIGURE 4.20 – Indices de sensibilité $SRCm$ correspondants à l'incertitude de mesure sur la sortie L_{urban} pour les trois véhicules



(a) B essence (b) B diesel (c) D diesel

FIGURE 4.21 – Diagramme d'interpolation pour calculer le niveau de bruit L_{urban} pour les trois véhicules

cules d'entrée de gamme, cf. Figure 4.20a). Il est cependant moins important pour le segment B diesel, et encore moins pour le segment D diesel (véhicule haut de gamme). Nous savons par exemple aujourd'hui, que le fait de faire une pré-accélération sur la piste permet à certains véhicules, notamment ceux équipés d'un turbocompresseur, de mieux accélérer et donc de baisser le niveau L_{urban}. Cette différence, observée entre les trois véhicules, de l'influence du couple moteur τ sur le niveau L_{urban}, peut être expliquée par les diagrammes d'interpolation (cf. Figure 4.21). En effet, nous remarquons un décalage des niveaux de bruit $L_{wot(n)}$ et $L_{wot(n+1)}$ entre les deux rapports de vitesse (n) et (n+1) pour le segment B essence (cf. Figure 4.21a). C'est pourquoi les petites variations de l'accélération (qui dépend du couple moteur τ) peuvent engendrer une dispersion importante sur le L_{urban} lors de l'interpolation. Cependant, concernant le segment D diesel, $L_{wot(n)}$ et $L_{wot(n+1)}$ sont du même niveau (cf. Figure 4.21c). En conséquence, l'influence des variations du couple moteur τ est quasiment nulle. Nous observons exactement le même effet vis-à-vis de la masse du conducteur m_d. Néanmoins, l'indice lié à ce paramètre est positif (cf. Figure 4.20a). En effet, et contrairement au couple moteur, une augmentation de la masse fait diminuer l'accélération du véhicule. Il faut

toutefois noter que cet indice reste négligeable devant les indices des autres paramètres.

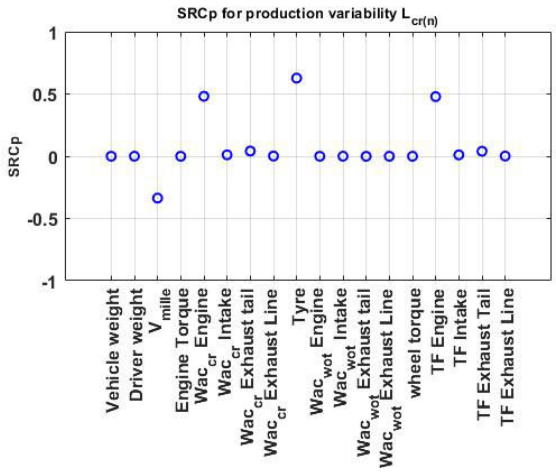
4.3.3.3 Résultats : variabilité de production

Les indices de sensibilité correspondants à l'incertitude de production $SRCp_i$ pour le segment B diesel sont présentés dans la Figure 4.22, pour les 4 sorties du modèle $L_{cr(n)}$, $L_{wot(n)}$, $L_{cr(n+1)}$ et $L_{wot(n+1)}$. Nous remarquons que les paramètres influents sont les mêmes que ceux correspondants à l'incertitude de mesure. Cependant, leur amplitude diffère car les plages des variabilités utilisées sont différentes. La grande différence est constatée au niveau de l'indice de sensibilité lié au paramètre V_{mille}. En effet, la plage de variabilité correspondant à 2.8% sur ce paramètre peut avoir une influence considérable sur les 4 sorties du modèle $L_{cr(n)}$, $L_{wot(n)}$, $L_{cr(n+1)}$ et $L_{wot(n+1)}$. Il faut rappeler que cette influence est due uniquement à la corrélation entre le paramètre V_{mille} avec les puissances acoustiques Wac et la contribution du contact pneumatique/chaussée L_{pc}, *i.e.* $S_{V_{mille}} = S^c_{V_{mille}}$ (cf. Section 4.3.1). Il faut également souligner que cet indice de sensibilité est négatif ; cela implique que les 4 sorties du modèle sont inversement proportionnelles au paramètre V_{mille}. La tolérance sur la circonférence du pneumatique est alors un paramètre à prendre en considération avant de réaliser une étude sur un véhicule, notamment pour les 4 niveaux de bruit $L_{cr(n)}$, $L_{wot(n)}$, $L_{cr(n+1)}$ et $L_{wot(n+1)}$. Néanmoins, lorsqu'il s'agit de la sortie L_{urban}, l'indice de sensibilité lié à l'incertitude de production sur le paramètre V_{mille} devient négligeable devant les autres (cf. Figure 4.23).

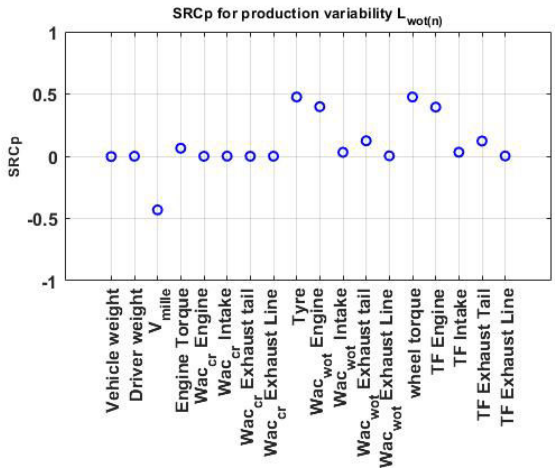
4.3.3.4 Résultats issus des autres modèles

La conclusion faite sur le modèle "monopôle en valeur globale" reste valable sur le modèle "monopôle en tiers d'octave" et le modèle "six faces en tiers d'octave" (les trois modèles sont définis au Chapitre 2). En effet, il a été observé que le rajout de l'aspect fréquentiel dans le modèle fait baisser la contribution de certaines sources de bruit : GMP, bouche d'admission, bouche d'échappement et rayonnement des volumes d'échappement. Les paramètres les plus influents restent les mêmes avec une amplitude des indices de sensibilité légèrement différente. Les indices de sensibilité $SRCm_i$ correspondants à la sortie L_{urban} issus du modèle "monopôle en tiers d'octave" sont présentés dans la Figure 4.24. Nous remarquons effectivement que les indices de sensibilité correspondants à l'incertitude de mesure sur la puissance des sources Wac et les fonctions de transfert TF sont légèrement inférieurs aux résultats obtenus avec le modèle "monopôle en valeur globale", ce qui rend plus importante l'influence de la contribution du bruit de contact pneumatique/chaussée L_{pc} ainsi que l'effet du couple à la roue τ_{tire}. Les résultats obtenus avec le modèle "six faces en tiers d'octave" sont présentés dans la Figure 4.25. Nous remarquons que le passage en six faces permet d'obtenir des ré-

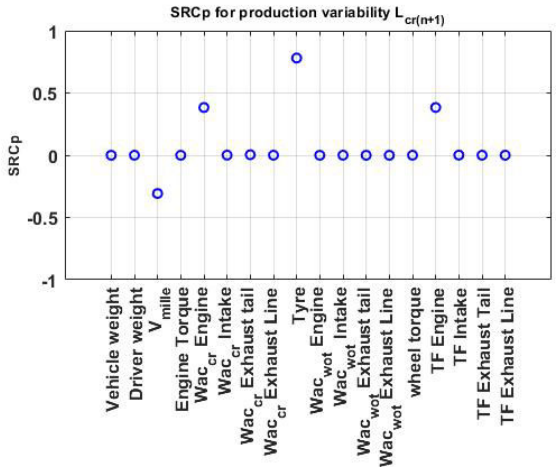
sultats similaires. Cependant, un indice de sensibilité est présenté pour chaque face du GMP (pour les puissances et les fonctions de transfert). Cela permet de connaître la face la plus influente sur les sorties du modèle. Il faut rappeler que la somme quadratique des indices $SRCm_i$ correspondant aux 6 faces du GMP nous permet d'obtenir un indice de sensibilité représentatif de tout le GMP, qui est approximativement proche de la valeur de l'indice de sensibilité obtenue avec le modèle "monopôle en tiers d'octave".



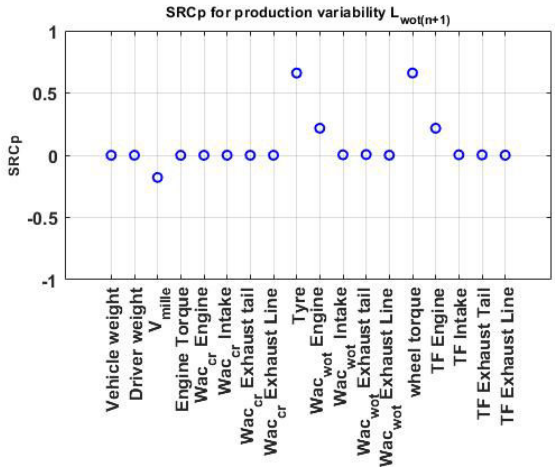
(a) Vitesse stabilisée rapport n : $L_{cr(n)}$



(b) Pleine charge rapport n : $L_{wot(n)}$

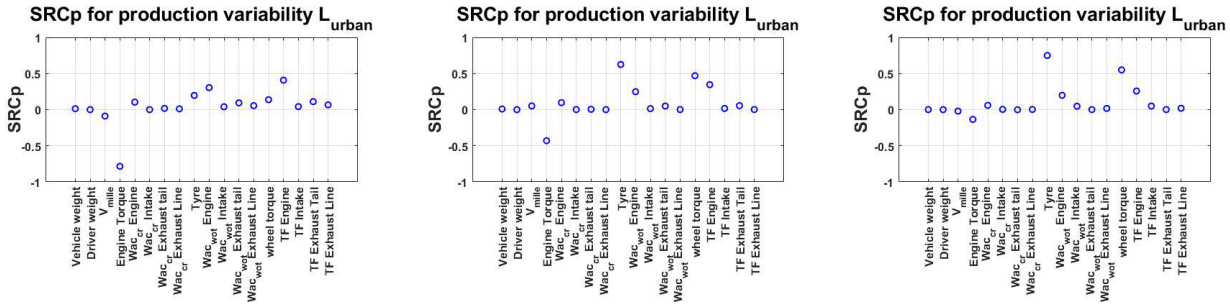


(c) Vitesse stabilisée rapport n+1 : $L_{cr(n+1)}$



(d) Pleine charge rapport n+1 : $L_{wot(n+1)}$

FIGURE 4.22 – Indices de sensibilité $SRCp$ correspondants à la variabilité de production pour le segment B diesel pour les 4 sorties du modèle $L_{cr(n)}$, $L_{wot(n)}$, $L_{cr(n+1)}$ et $L_{wot(n+1)}$.



(a) B essence (b) B diesel (c) D diesel

FIGURE 4.23 – Indices de sensibilité $SRCp$ correspondants à la variabilité de production sur la sortie L_{urban} pour les trois véhicules

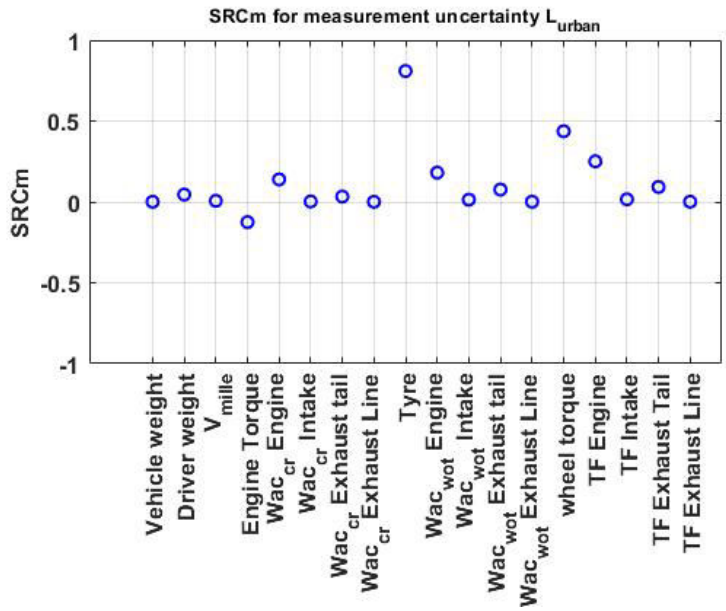


FIGURE 4.24 – Indices de sensibilité $SRCm$ correspondants à l'incertitude de mesure sur la sortie L_{urban} (segment B diesel, modèle "monopôle en tiers d'octave")

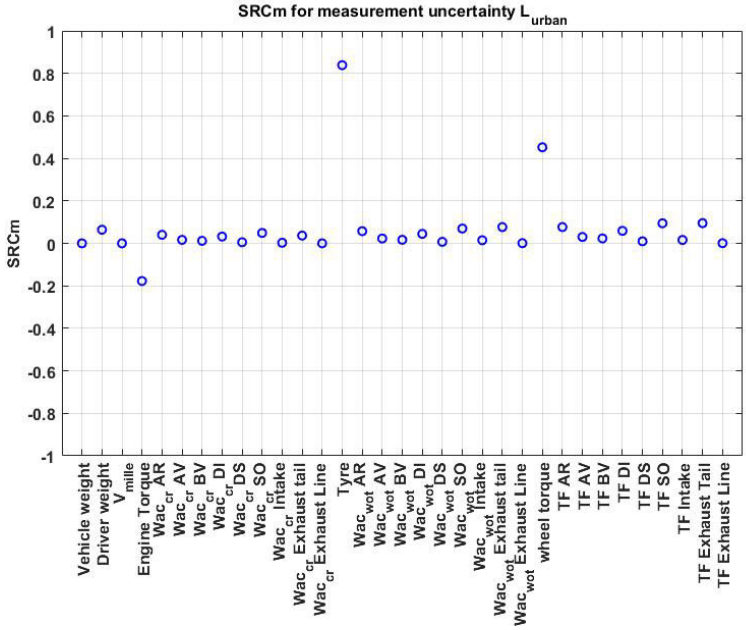


FIGURE 4.25 – Indices de sensibilité $SRCm$ correspondants à l'incertitude de mesure sur la sortie L_{urban} (segment B diesel, modèle "six faces en tiers d'octave"). AR : face arrière du GMP. AV : face avant. BV : face boîte de vitesse. DI : face distribution. DS : face dessus. SO : face dessous.

4.4 Conclusion

La méthode couplée qui consiste à combiner la méthode EBEM avec la méthode des lancers de faisceaux a d'abord été appliquée sur un cas test sous la forme d'un modèle simplifié de compartiment moteur, puis sur un véhicule réel. Les premiers résultats obtenus sont encourageants et peuvent certainement être améliorés en modifiant la zone de couplage entre les deux méthodes de calcul. La méthode de Morris a ensuite été utilisée pour étudier l'impact, sur la fonction de transfert, de la variabilité de la position des sources de bruit et des paramètres caractérisants les matériaux absorbants qui se trouvent dans le compartiment moteur du véhicule. Les résultats montrent une grande sensibilité des fonctions de transfert à la position des sources.

Les incertitudes de mesure et les variabilités de production ont été identifiées pour chaque paramètre d'entrée des modèles de synthèse. Une propagation d'incertitude dans ces modèles a ensuite été réalisée en utilisant des méthodes type quasi-Monte Carlo. Trois types de véhicule ayant des rapports puissance/poids différents sont étudiés : un segment B essence (entrée de gamme), un segment B diesel (moyenne gamme) et un segment D diesel (haut de gamme). Les paramètres influents ont été identifiés en utilisant des méthodes d'analyse de sensibilité globale. En effet, les modèles étant simples (linéaires et sans interactions), les indices SRC ont été calculés pour exprimer la sensibilité de chaque paramètre. Ainsi, la pertinence des modèles de synthèse pourrait être améliorée en modifiant la variance des paramètres d'entrée les plus influents. Pour ce qui est de l'incertitude de mesure, il a été observé que la puissance et la fonction de transfert représentent des paramètres influents pour le segment B essence, qui correspond à un petit véhicule de faible puissance (véhicule d'entrée de gamme). Cela engendre un décalage entre le niveau $L_{wot(n)}$ et $L_{wot(n+1)}$. Par conséquent, les petites variations du couple moteur τ modifient les accélérations du véhicule $a_{wot(n)}$ et $a_{wot(n+1)}$. Cela provoque une grande dispersion sur le niveau L_{urban} lors de l'interpolation. Cependant, les niveaux de bruit $L_{wot(n)}$ et $L_{wot(n+1)}$ sont quasiment du même ordre de grandeur pour les véhicules haut de gamme (tel que le segment D diesel) car le bruit de contact pneumatique/chaussée correspond à la source de bruit la plus importante pour ce segment du marché. C'est pourquoi l'influence des variations du couple moteur τ est négligeable. L'effet du couple à la roue τ_{tire} est également un paramètre important. Or, aujourd'hui, ce paramètre est mal caractérisé. Il faut donc approfondir ce sujet, et développer des modèles précis pour caractériser la contribution du bruit de contact pneumatique/chaussée, qui peut dépendre de la vitesse du véhicule mais aussi de son accélération. Concernant la variabilité de production, la grande différence est constatée au niveau de l'indice de sensibilité lié au paramètre $Vmille$. La tolérance sur la circonférence du pneumatique est donc un paramètre à prendre en considération avant de

réaliser une étude sur un véhicule. Ces conclusions restent valables pour les trois modèles de synthèse. Cependant, les résultats diffèrent légèrement d'un modèle à un autre. La question que nous pouvons se poser maintenant est quel est le meilleur modèle parmi ces trois candidats ? Il faut donc juger de la robustesse et de la fidélité de chaque modèle vis-à-vis des données mesurées, et d'en choisir le meilleur. Cette question sera étudiée dans le chapitre suivant qui traite de la sélection de modèle.

Chapitre 5

Sélection de modèle

Sommaire

5.1 Introduction 142

5.2 Etat de l'art 143

5.2.1 Formalisme bayésien 143

5.2.2 Sélection de modèle par la méthode bayésienne 152

5.2.3 Estimation de l'*évidence du modèle* 155

5.3 Application à un modèle simple 168

5.3.1 Résultats dans le cas où $N_{obs} = 25$ 169

5.3.2 Résultats dans le cas où $N_{obs} = 4$ 176

5.4 Application aux modèles de synthèse 177

5.5 Conclusion 186

5.1 Introduction

Tous les modèles sont faux, mais certains sont utiles ("*all models are wrong, but some are useful*"). Cette citation est attribuée au statisticien George Box [111]. Burnham et Anderson ont également écrit dans leur ouvrage [6] : un modèle est une simplification ou une approximation de la réalité et ne reflète donc pas toute la réalité ("*a model is a simplification or approximation of reality and hence will not reflect all of reality*"). Ils ont aussi écrit : un modèle ne peut jamais être "vrai", un modèle peut être classé de très utile, utile, plutôt utile à, finalement, essentiellement inutile ("*a model can never be "truth", a model might be ranked from very useful, to useful, to somewhat useful to, finally, essentially useless*"). En effet, la science est un processus itératif d'apprentissage et de découverte dans lequel des idées concurrentes sur la façon dont la nature fonctionne sont évaluées par rapport à des observations [112]. Effectivement, en s'appuyant sur notre compréhension d'un système réel, les phénomènes sont expliqués en faisant des hypothèses qui consistent à mettre en relation une variable et un comportement. Cette relation est souvent traduite en équations mathématiques puis en schéma numérique avant d'être confrontée aux données, *i.e.* aux observations (cf. Section 3.2.2). Cependant, cette traduction est subjective et représente uniquement une approximation de la réalité. Dans ce chapitre, nous allons comparer les résultats de calcul issus des trois modèles de synthèse avec les observations, et choisir le meilleur modèle. Néanmoins, le choix du meilleur modèle n'est pas toujours évident. En effet, le meilleur modèle peut être choisi parmi une classe de modèles en minimisant la distance entre la mesure et la prévision correspondant à ces modèles. Cependant, on sait qu'un modèle complexe, avec beaucoup de paramètres incertains, s'adapte mieux aux observations qu'un modèle simple avec juste quelques paramètres à ajuster. En partant de ce principe, les modèles complexes sont alors préférables aux modèles simples ayant peu de paramètres. Or, on sait qu'un modèle complexe peu parfois mener au phénomène de "sur-ajustement". En effet, à cause des incertitudes de mesure des paramètres d'entrée, le modèle complexe aura de la peine à généraliser les caractéristiques des données, et perd donc de son pouvoir de prévision sur de nouveaux échantillons. Les modèles complexes peuvent alors mieux expliquer les données, mais les paramètres supplémentaires pourraient avoir une faible correspondance avec les processus et les comportements spécifiques du système que le modèle est destiné à représenter [113]. C'est pourquoi il est nécessaire de pénaliser les modèles complexes. C'est ici alors qu'intervient le principe de "parcimonie", attribué à William of Ockham. Ce principe est une ancienne philosophie datant du 14ème siècle, connue aussi sous le nom du rasoir d'Ockham : pourquoi faire compliqué quand on peut faire simple ? ("*it is vain to do with more what can be done with fewer*") [114; 115; 116]. William of Ockham a également suggéré de supprimer tout ce qui

est inutile ("*shave away all that is unnecessary*"). Cette philosophie souligne que les modèles simples sont préférables aux modèles inutilement compliqués. C'est pourquoi les meilleurs modèles sont choisis à partir d'un *compromis* entre parcimonie du modèle (simplicité) et son pouvoir de représenter les données mesurées.

Dans ce chapitre, nous commencerons d'abord par présenter un état de l'art sur la sélection de modèle en général. Nous parlerons ensuite de la méthode utilisée dans le cadre de cette thèse : une méthode qui permettra, à la fin de chapitre, de choisir le modèle le plus pertinent parmi les trois modèles de synthèse développés et qui est basée sur une estimation numérique de l'*évidence du modèle*, appelée aussi la *vraisemblance marginalisée*. Nous présenterons également un exemple d'application : il s'agit d'un modèle linéaire simple, qui permettrait aux lecteurs de mieux comprendre les théories de la sélection de modèle.

5.2 Etat de l'art

5.2.1 Formalisme bayésien

Dans cette section, nous introduisons quelques notions de probabilités et des règles de calcul qui sont complémentaires aux notions présentées dans le Chapitre 3 et qui vont permettre de comprendre le formalisme bayésien. Le but est de fournir le formalisme mathématique qui comprend notamment la notation qui sera utilisée tout au long de ce chapitre. Cette introduction aux concepts de base de la théorie des probabilités est inspirée des ouvrages de Saporta [58; 59], Robert [64; 65; 66] et Wasserman [117].

5.2.1.1 Notations des probabilités

Rappelons que lorsqu'un phénomène aléatoire est observé, l'ensemble de tous les résultats possibles définis représente l'univers (espace des observables), noté Ω. Étant donné les événements A et B, qui sont définis comme des sous-ensembles de Ω contenant les réalisations $\omega \in \Omega$, on est conduit à s'intéresser à leur union A ou B notée $A \cup B$ et à leur intersection A et B notée $A \cap B$. Les deux événements sont dits *incompatibles* si la réalisation de l'un exclut celle de l'autre, autrement dit si les parties A et B de Ω sont disjointes $A \cap B = \emptyset$.

À tout événement A, on associe son contraire noté $\bar{A}$ tel que si A est réalisé alors $\bar{A}$ ne l'est pas, et réciproquement. A est donc représenté dans Ω par la partie complémentaire de $\bar{A}$, qui satisfait :

$$A \cap \bar{A} = \emptyset \ et \ A \cup \bar{A} = \Omega \tag{5.1}$$

$\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ forment un système complet d'événements si les parties $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$

de Ω constituent une partition de Ω telle que :

$$A_i \neq \emptyset, \quad i = 1, ..., n \tag{5.2}$$

$$A_i \cap A_j = \emptyset \tag{5.3}$$

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega, \quad 1 \leq i < j \leq n \tag{5.4}$$

L'ensemble de tous les événements possibles de Ω forme une tribu de Ω, notée $\mathcal{F}$. Étant en possession d'une tribu d'événements, on cherche à attribuer à chacun de ces derniers une probabilité, notée $\mathbb{P}$, qui représente le degré de confiance que l'on a en sa réalisation. Elle est définie comme une application $\mathbb{P} : \mathcal{F} \longmapsto [0, 1]$ telle que :

$$\mathbb{P}(A) \ \geq \ 0, \quad \forall A \in \mathcal{F} \tag{5.5}$$

$$\mathbb{P}(\Omega) \ = \ 1 \tag{5.6}$$

$$\mathbb{P}(\emptyset) \ = \ 0 \tag{5.7}$$

$$\mathbb{P}(A \cup B) \ = \ \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B), \quad \forall A, B \in \mathcal{F} \tag{5.8}$$

$$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\bar{A}) \ = \ 1 \tag{5.9}$$

La dernière règle (cf. Eq. (5.9)) stipule que la somme des probabilités des états que peut prendre une variable aléatoire est nécessairement égale à 1. Un exemple simple est la probabilité qu'une pièce tombe sur son côté face ou son côté pile. En effet, avec une pièce normale, les deux possibilités, pile et face, ont une probabilité égale à 0.5. Cependant, si la pièce n'est pas équilibrée, la probabilité ne vaut pas 0.5 et un côté de la pièce a plus de chance d'apparaître que l'autre. Mais dans tous les cas la probabilité que la pièce tombe du côté face ou du côté pile vaut 1. Cette règle peut se généraliser avec plus que deux états pour une variable aléatoire (comme pour les six faces d'un dé), elle s'écrit alors :

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) = 1 \tag{5.10}$$

ou $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ forment un système complet d'événements. Finalement, le triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ constitue l'espace de probabilité.

5.2.1.2 Probabilité conditionnelle et formules de Bayes

On appelle probabilité conditionnelle de A sachant B (ou encore de A si B) le rapport noté $\mathbb{P}(A|B)$:

$$\mathbb{P}(A|B) \ = \ \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \tag{5.11}$$

Deux événements A et B sont des événements indépendants si la connaissance de B ne change pas les "chances" de réalisation de A (le fait de conditionner l'une par rapport à l'autre n'apporte ou ne retire aucune information), *i.e.* quand :

$$\mathbb{P}(A|B) \;=\; \mathbb{P}(A) \tag{5.12}$$

Par conséquent, deux événements A et B sont indépendants si et seulement si :

$$\mathbb{P}(A \cap B) \;=\; \mathbb{P}(A)\;\mathbb{P}(B) \tag{5.13}$$

Les formules de Bayes ont pour but d'exprimer $\mathbb{P}(A|B)$ en fonction de $\mathbb{P}(B|A)$. La première formule du théorème de Bayes [67] est une application directe de la relation présentée dans l'Eq. (5.11), et s'écrit :

$$\mathbb{P}(A|B) \;=\; \frac{\mathbb{P}(B|A)\;\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} \tag{5.14}$$

En considérant un système complet d'événements $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$, et un autre événement B, le théorème des probabilités totales s'écrit :

$$\mathbb{P}(B) \;=\; \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B|A_i)\;\mathbb{P}(A_i) \tag{5.15}$$

on en déduit la deuxième formule du théorème de Bayes :

$$\mathbb{P}(A_i|B) \;=\; \frac{\mathbb{P}(B|A_i)\;\mathbb{P}(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B|A_i)\;\mathbb{P}(A_i)} \tag{5.16}$$

Pour mieux comprendre la deuxième formule de Bayes, un exemple est présenté dans l'ouvrage de Saporta [59] : dans une usine, trois machines M_1, M_2 et M_3 fabriquent des boulons de même type. M_1 sort en moyenne 0.3 % de boulons défectueux, M_2 0.8 % et M_3 1 %. On mélange 1 000 boulons dans une caisse, 500 provenant de M_1, 350 de M_2 et 150 de M_3. On tire un boulon au hasard dans la caisse ; il est défectueux. Quelle est la probabilité qu'il ait été fabriqué par M_1 (ou M_2 ou M_3) ?

Lorsque l'on tire un boulon au hasard, les probabilités (dites *a priori*) qu'il provienne de M_1, M_2 ou M_3 sont évidemment $\mathbb{P}(M_1) = 0.50$, $\mathbb{P}(M_2) = 0.35$ et $\mathbb{P}(M_3) = 0.15$. Lorsque l'on sait qu'il est défectueux, événement noté D, il faut alors calculer les probabilités conditionnelles : $\mathbb{P}(M_1|D)$, $\mathbb{P}(M_2|D)$, $\mathbb{P}(M_3|D)$. Comme on connaît $\mathbb{P}(D|M_1) = 0.003$, $\mathbb{P}(D|M_2) =$

0.008, $\mathbb{P}(D|M_3) = 0.01$, la deuxième formule de Bayes permet d'écrire :

$$\mathbb{P}(M_1|D) = \frac{\mathbb{P}(D|M_1)\ \mathbb{P}(M_1)}{\mathbb{P}(D|M_1)\ \mathbb{P}(M_1) + \mathbb{P}(D|M_2)\ \mathbb{P}(M_2) + \mathbb{P}(D|M_3)\ \mathbb{P}(M_3)} \tag{5.17}$$

$$\approx 0.26 \tag{5.18}$$

On trouverait de même $\mathbb{P}(M_2|D) \approx 0.48$ et $\mathbb{P}(M_3|D) \approx 0.26$. Ce sont les probabilités *a posteriori*, sachant que le boulon est défectueux. On voit donc que la prise en compte d'une information (le boulon est défectueux) modifie les valeurs des probabilités de M_1, M_2 et M_3.

5.2.1.3 Formules de Bayes dans le cas de variables aléatoires

On rappelle que le concept de variable aléatoire formalise la notion de grandeur variant selon le résultat d'une expérience aléatoire. En effet, il est souvent plus pratique d'associer une valeur numérique au résultat d'une expérience aléatoire, plutôt que de travailler directement avec une réalisation. Une variable aléatoire réelle X est donc une fonction de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ dans $\mathbb{R}$ dont les valeurs scalaires dépendent de l'issue d'une expérience. X est dite discrète si elle ne peut prendre, avec une probabilité non nulle, qu'un nombre fini de valeurs particulières $\{x^{(1)}, ..., x^{(N)}\}$. Sinon X est continue, *i.e.* elle peut prendre n'importe quelle valeur dans $\mathbb{R}$.

Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes, alors on peut simplement remplacer les probabilités dans la deuxième formule du théorème de Bayes par les fonctions de masse (PMF : Probability Mass Function)[1], où A est l'événement $\{X = x\}$ et B l'événement $\{Y = y\}$. L'Eq. (5.16) devient :

$$p(x|y) = \frac{p(x,y)}{p(y)} = \frac{p(y|x)\ p(x)}{\sum_x p(y|x)\ p(x)} \tag{5.19}$$

où $p(x,y)$ représente la fonction de masse jointe de X et Y et $p(x)$ et $p(y)$ leurs fonctions de masse marginales[2].

Si X et Y sont deux variables aléatoires continues, alors on peut remplacer les probabilités par les fonctions de densité de probabilité. On écrit :

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f(y)} = \frac{f(y|x)\ f(x)}{\int_x f(y|x)\ f(x)\ dx} \tag{5.20}$$

où deux variables séparées par une virgule correspondent à une proposition composée. $f(x,y)$

1. La fonction de masse est l'équivalent d'une fonction de densité de probabilité dans le cas d'une variable aléatoire discrète. Elle donne la probabilité d'un résultat élémentaire d'une expérience.

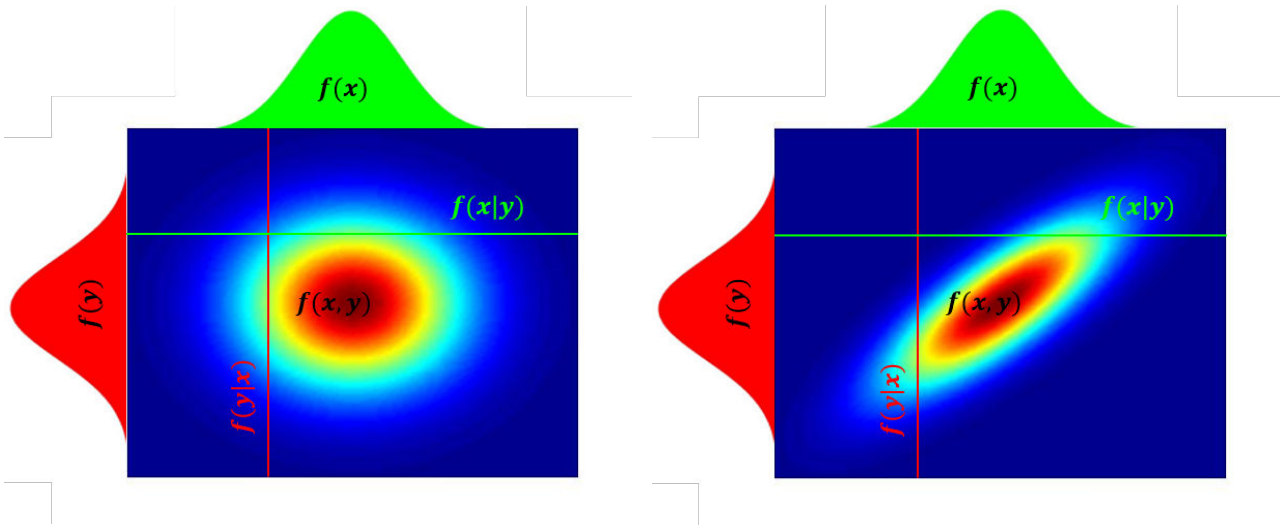
2. Pour simplifier les notations, nous noterons dans ce chapitre, la fonction de masse $p(x)$ au lieu de $p_X(x)$. Nous ferons de même pour la densité de probabilité $f_X(x)$ qui sera notée $f(x)$

représente donc la fonction de densité de probabilité jointe de X et Y et $f(x)$ et $f(y)$ représentent leurs fonctions de densité de probabilité marginales. Dans notre travail, la variable aléatoire X correspond aux paramètres d'entrée incertains des modèles de synthèse, et Y aux observations réelles des niveaux de bruit $L_{cr(n)}$, $L_{wot(n)}$, $L_{cr(n+1)}$ et $L_{wot(n+1)}$. La densité de probabilité $f(x|y)$ est appelée la probabilité *a posteriori*, ou simplement *la postérieure*. Elle informe sur la densité de probabilité jointe des paramètres d'entrée lorsque des observations sur les niveaux de bruit (*i.e.* sur les grandeurs de sortie des modèles) sont disponibles. La densité de probabilité $f(x)$ est la probabilité *a priori*, ou simplement *la prieure*, et contient toute l'information *a priori* disponible sur les paramètres incertains. Dans notre cas, la densité de probabilité *a priori* correspond à la probabilité jointe attribuée à l'incertitude de mesure des paramètres d'entrée des modèles de synthèse (cf. Section 4.3.1). La probabilité $f(y|x)$ est appelée la *vraisemblance* (*likelihood* en anglais), et informe sur la probabilité de la solution du problème puisqu'elle indique la probabilité des observations sachant les paramètres incertains. Enfin, la probabilité $f(y)$ est appelée l'*évidence du modèle* ou la *vraisemblance marginalisée* ou tout simplement l'*évidence*. Elle ne dépend pas de x comme c'est le cas pour les probabilités précédentes et ne sert finalement que de constante de normalisation pour s'assurer que le produit de la *vraisemblance* et de la probabilité *a priori* soit bien analogue à une fonction de densité de probabilité, autrement dit que l'intégrale du produit soit égale à 1. La démarche bayésienne permet ainsi de déterminer la probabilité *a posteriori* des paramètres d'entrée d'un modèle en combinant l'information *a priori* sur ses paramètres avec les données de mesure liées aux grandeurs de sortie du modèle.

La Figure 5.1 illustre la densité de probabilité jointe de deux variables aléatoires X et Y indépendantes (cf. Figure 5.1a) et dépendantes (cf. Figure 5.1b). La densité de probabilité $f(x|y)$ correspond ici aux coupes horizontales de la probabilité jointe $f(x, y)$, qui sont normalisées pour que son intégrale vaille 1. Il en va de même pour la probabilité $f(y|x)$ avec les coupes verticales. Lorsque les variables sont indépendantes (cf. Figure 5.1a), toutes les coupes horizontales ont les mêmes paramètres de localisation (moyenne) et de forme (variance). Cependant, lorsque les variables sont dépendantes (cf. Figure 5.1b), autrement dit lorsqu'une variable augmente l'autre augmente ou diminue également, les probabilités conditionnelles ne présentent pas les mêmes paramètres de localisation et de forme en fonction de l'état de la variable conditionnée. Les fonctions de densité de probabilité marginales $f(x)$ et $f(y)$ peuvent être vue comme une projection de la densité de probabilité jointe $f(x, y)$ respectivement sur l'axe x et y. La densité de probabilité marginale de X s'exprime par :

$$f(x) \;=\; \int_y f(x, y)\; dy \tag{5.21}$$

où la variable Y est marginalisée par une intégration de la densité de probabilité jointe sur le domaine de variation de y, pour n'obtenir au final que la densité de probabilité marginale $f(x)$. On note également que la marginalisation fait perdre l'information de dépendance entre variables. Par exemple, dans les Figures 5.1a et 5.1b, les distributions marginales $f(x)$ et $f(y)$ sont les mêmes, mais pas la probabilité jointe $f(x, y)$.



(a) Variables indépendantes

(b) Variables dépendantes

FIGURE 5.1 – Schéma de la densité de probabilité jointe $f(x, y)$, des probabilités marginales $f(x)$ et $f(y)$ et des probabilités conditionnelles $f(x|y)$ et $f(y|x)$.

À noter qu'il est également possible de conditionner toutes les probabilités par une même variable aléatoire, par exemple Z, de la manière suivante :

$$f(x, y|z) = f(x|z)f(y|x, z) \tag{5.22}$$

$$= f(y|z)f(x|y, z) \tag{5.23}$$

La formule de Bayes dans l'Eq.(5.20) s'écrit alors :

$$f(x|y, z) = \frac{f(x, y|z)}{f(y|z)} = \frac{f(y|x, z)\ f(x|z)}{\int_x f(y|x, z)\ f(x|z)\ dx}) \tag{5.24}$$

Dans notre étude, la variable Z correspond aux différents modèles de synthèse développés dans le cadre de cette thèse. En effet, la probabilité *a posteriori* des paramètres est obtenue pour chaque modèle séparément à partir de l'Eq.(5.24). Il est donc important de conditionner toutes les probabilités par Z.

5.2.1.4 Estimateurs ponctuels

Quand la loi *a priori* $f(x)$ est disponible, la loi a posteriori $f(x|y)$ peut être construite formellement à partir de l'observation Y, de distribution $f(y|x)$. Cette loi de mise à jour est alors un résumé complet de l'information disponible sur le paramètre X, résumé qui intègre simultanément l'information *a priori* et l'information apportée par l'observation Y. Les indicateurs résumant $f(x|y)$ tels que moyenne, mode, variance et médiane *a posteriori* sont par exemple des estimateurs potentiels. On présentera ici deux principaux indicateurs ponctuels qui sont utilisés dans la suite de ce document pour résumer l'information de loi *a posteriori* [118] :

$$\hat{x}_{ML} = \arg\max_{x} f(y|x) \tag{5.25}$$

$$\hat{x}_{MAP} = \arg\max_{x} f(x|y) \tag{5.26}$$

où l'indicateur $\hat{x}_{ML}$ correspond au maximum de vraisemblance (Maximum Likelihood, ML) et $\hat{x}_{MAP}$ représente le maximum de la loi *a posteriori* (Maximum A Posteriori, MAP). D'après la deuxième formule du théorème de Bayes, l'estimateur ponctuel ML est équivalent au MAP seulement si la loi *a priori* est uniforme. Ces deux estimateurs ponctuels sont présentés graphiquement sur la Figure 5.2.

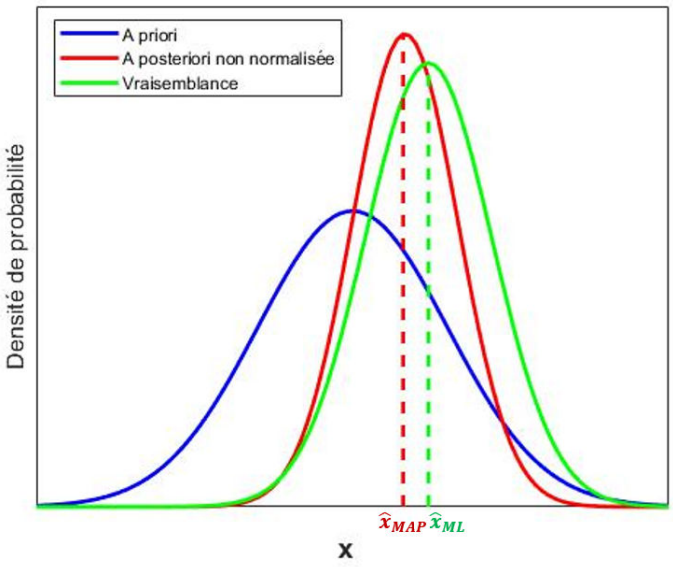


FIGURE 5.2 – Schéma des estimateurs ponctuels $\hat{x}_{ML}$ et $\hat{x}_{MAP}$ en fonction des densités de probabilité *a priori* $f(x)$, *a posteriori* $f(x|y)$ et de la vraisemblance $f(y|x)$.

5.2.1.5 Lien avec la sélection de modèle

Pour évaluer la *plausibilité* de deux modèles $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ en fonction d'un jeu d'observations $\widetilde{y}$, on utilise le théorème de Bayes pour relier, par exemple pour le modèle $\mathcal{M}_1$, sa *plausibilité* (*i.e.* la probabilité *a posteriori* du modèle sachant les observations), $p(\mathcal{M}_1|\widetilde{y})$, à l'*évidence du modèle* (*i.e.* la probabilité d'obtenir les données sachant $\mathcal{M}_1$), $f(\widetilde{y}|\mathcal{M}_1)$, et à la plausibilité a priori du modèle, $p(\mathcal{M}_1)$. Cela donne le rapport de probabilité suivant entre le modèle $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ [119] :

$$\frac{p(\mathcal{M}_1|\widetilde{y})}{p(\mathcal{M}_2|\widetilde{y})} = \frac{p(\mathcal{M}_1)}{p(\mathcal{M}_2)} \frac{f(\widetilde{y}|\mathcal{M}_1)}{f(\widetilde{y}|\mathcal{M}_2)} \tag{5.27}$$

Si ce rapport est supérieur à 1, alors le modèle $\mathcal{M}_1$ est considéré comme le plus plausible, sinon le modèle $\mathcal{M}_2$ est préféré. Le premier terme représente le ratio des prieures ; il représente nos connaissances *a priori* qu'un modèle est plus plausible que l'autre. Le second terme de l'Eq. (5.27) est appelé *le facteur de Bayes* [119].

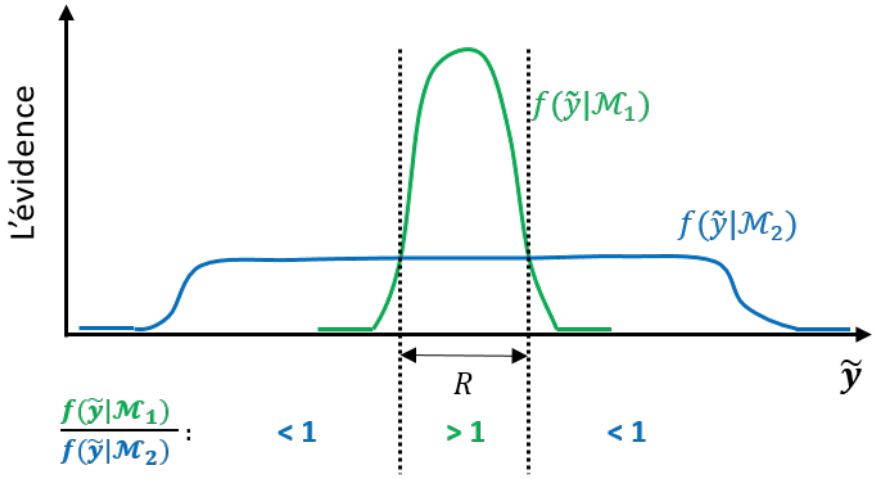


FIGURE 5.3 – Sélection de modèle par l'approche bayésienne. L'*évidence* de chaque modèle est représentée en fonction de tous les jeux d'observations possibles.

On constate donc que la sélection de modèle est une application où l'*évidence du modèle* $f(\widetilde{y}|\mathcal{M}_l)$ doit être calculée. Ces *vraisemblances marginalisées* sont représentées sur la Figure 5.3 en fonction de tous les jeux d'observation possibles. Cette figure permet de comprendre comment l'*évidence du modèle* pénalise les modèles trop complexes et incarne donc le principe de parcimonie du rasoir d'Ockham. Un modèle simple $\mathcal{M}_1$ a tendance à faire des prévisions resserrées et aura donc très peu de chances de générer un jeu d'observations particulier, alors qu'un modèle complexe $\mathcal{M}_2$, qui a plus de paramètres incertains que $\mathcal{M}_1$, a tendance à faire des prévisions plus larges qui couvrent une plus grande variété d'ensembles

de données. Comme l'intégrale de la probabilité vaut 1, le modèle simple $\mathcal{M}_1$ présente un maximum plus important que le modèle complexe $\mathcal{M}_2$, mais seulement pour un ensemble limité de données (région R, cf. Figure 5.3). En supposant que les probabilités *a priori* des deux modèles sont égales ($p(\mathcal{M}_1) = p(\mathcal{M}_2)$) et que le jeu d'observations dont on dispose tombe dans la région R, alors le modèle le plus simple $\mathcal{M}_1$ sera le modèle le plus plausible. La choix du meilleur modèle se base alors sur un compromis entre parcimonie du modèle et son pouvoir à ajuster les observations.

La Figure 5.4 explique cette notion de compromis entre parcimonie du modèle et son pouvoir à ajuster les données mesurées. Elle montre l'incertitude de modélisation totale en fonction de la complexité du modèle. Cette incertitude représente la somme de l'incertitude de modèle et de l'incertitude paramétrique. En général, à mesure que le nombre de paramètres incertains augmente, la contribution de l'incertitude liée au modèle diminue car les modèles complexes intègrent plus de paramètres et ont donc moins d'hypothèses simplificatrices. Cependant, chaque processus supplémentaire dans un modèle nécessite des paramètres incertains dont les valeurs ne sont pas connues exactement, et sont donc entachées d'incertitudes. Lorsque la complexité augmente, les incertitudes des paramètres d'entrée s'accumulent et se propagent dans le modèle faisant ainsi augmenter la contribution de l'incertitude paramétrique. Toutes les méthodes de sélection de modèle emploient implicitement une certaine notion de ce compromis.

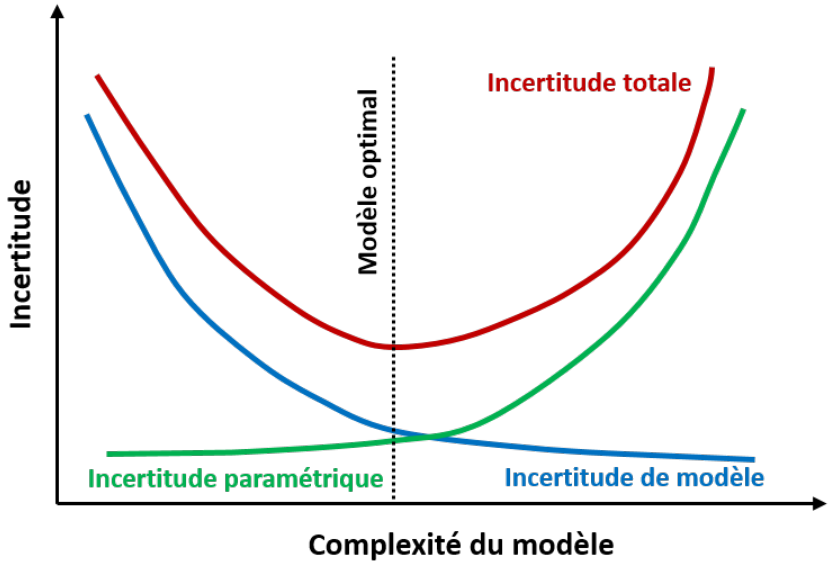


FIGURE 5.4 – Courbe de l'incertitude de modélisation totale en fonction du nombre de paramètre du modèle

5.2.2 Sélection de modèle par la méthode bayésienne

Le choix du meilleur modèle est une tâche difficile car il est toujours possible de choisir le modèle qui coïncide le mieux aux données. Néanmoins, les modèles les plus complexes peuvent toujours mieux ajuster les données, de sorte que le choix du modèle à partir du maximum de la fonction de *vraisemblance* conduirait inévitablement à des modèles sur-paramétrés et peu plausibles qui ont de la peine à généraliser les caractéristiques des données. Le rasoir d'Ockham [114; 115; 116] est le principe qui stipule que les modèles inutilement complexes ne devraient pas être préférés aux modèles simples. Ce principe, qui consiste à pénaliser les modèles complexes, a été reconnu pour la première fois par le géophysicien Harold Jeffreys [119] qui a souligné la nécessité d'une expression quantitative du rasoir d'Ockham.

Les méthodes bayésiennes ont été étudiées en profondeur par Jeffreys [119]. Ensuite, son travail a été réévalué au cours des dernières années en raison des publications de Jaynes [120; 121], en particulier sur la sélection de modèle par la méthode bayésienne. Cette méthode montre que l'*évidence du modèle* permet d'incarner automatiquement et quantitativement le principe de parcimonie du rasoir d'Ockham, *i.e.* que les modèles complexes s'auto-pénalisent automatiquement sous la règle de Bayes [114; 115; 116]. Cette *évidence du modèle* est définie comme l'intégration, plutôt que la maximisation, de la fonction de *vraisemblance* sur tout l'espace des paramètres du modèle. La loi de probabilité *a priori* des paramètres joue alors un rôle important dans le choix du modèle. En effet, avec une distribution inappropriée de la loi de probabilité *a priori* des paramètres, le modèle peut ajuster les données en changeant ainsi notre opinion sur le choix du meilleur modèle. Au final, cette approche bayésienne utilise alors la théorie des probabilités, notamment le théorème de Bayes, pour choisir le meilleur modèle parmi plusieurs modèles en compétition, et cela à partir de deux niveaux d'inférence qui sont détaillés ci-dessous [114; 115; 122; 123].

5.2.2.1 Premier niveau d'inférence

Considérons un modèle $\mathcal{M}_l$ parmi plusieurs modèles concurrents $\{\mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_{Nm}\}$. $x = \{x_1, \ldots, x_k\}$ représente le vecteur de paramètres incertains du modèle, et $\widetilde{y} = \{\widetilde{y}_1, \ldots, \widetilde{y}_{N_{obs}}\}$ un vecteur d'observations réelles qui sera comparé aux sorties du modèle. Dans le premier niveau d'inférence, on suppose que le modèle $\mathcal{M}_l$ est "*vrai*", et on essaye d'adapter le modèle aux observations, *i.e.* d'ajuster les résultats du modèle $y = \mathcal{M}_l(x)$ aux valeurs expérimentales $\widetilde{y}$. Il faut savoir que le modèle contient un vecteur de paramètres incertains avec une loi de densité de probabilité jointe *a priori* $f(x|\mathcal{M}_l)$, et donc essayer d'ajuster les résultats du modèle $\mathcal{M}_l$ aux observations $\widetilde{y}$ revient à trouver quelles valeurs devraient probablement prendre ces paramètres incertains pour que les résultats du modèle y ajustent les données $\widetilde{y}$.

Cette étape, également appelée *calibration de modèle*, est répétée ensuite pour chaque modèle $\mathcal{M}_l$.

La loi de probabilité jointe *a posteriori* $f(x|\widetilde{y}, \mathcal{M}_l)$ est alors obtenue en utilisant le théorème de Bayes :

$$f(x|\widetilde{y}, \mathcal{M}_l) \;=\; \frac{\mathcal{L}(x|\widetilde{y}, \mathcal{M}_l)\; f(x|\mathcal{M}_l)}{f(\widetilde{y}|\mathcal{M}_l)} \;\propto\; \mathcal{L}(x|\widetilde{y}, \mathcal{M}_l)\; f(x|\mathcal{M}_l) \tag{5.28}$$

où $f(x|\mathcal{M}_l)$ représente la densité de probabilité *a priori* des paramètres incertains du modèle, $\mathcal{L}(x|\widetilde{y}, \mathcal{M}_l) \equiv f(\widetilde{y}|x, \mathcal{M}_l)$ représente la fonction de *vraisemblance* (likelihood function) et $f(\widetilde{y}|\mathcal{M}_l)$ représente l'*évidence du modèle* (la vraisemblance marginalisée), qui est une constante de normalisation afin que l'intégrale de la loi de probabilité *a posteriori* $f(x|\widetilde{y}, \mathcal{M}_l)$ sur l'espace des paramètres $x \in \mathcal{X} \in R^k$ soit égale à 1. L'*évidence du modèle* est définie comme l'intégration de la fonction de *vraisemblance* sur tout l'espace des paramètres du modèle, elle est donnée par :

$$I_{\mathcal{M}_l} \;=\; f(\widetilde{y}|\mathcal{M}_l) \;=\; \int_{\mathcal{X}} \mathcal{L}(x|\widetilde{y}, \mathcal{M}_l)\; f(x|\mathcal{M}_l)\; dx \tag{5.29}$$

Le calcul de cette intégrale est difficile, car c'est une intégrale de grande dimension, qui dépend du nombre de paramètres incertains du modèle. En pratique, et à ce niveau d'inférence, l'*évidence du modèle* n'est pas nécessaire pour l'estimation de la densité de probabilité *a posteriori* car toutes les inférences statistiques sur $f(x|\widetilde{y}, \mathcal{M}_l)$ peuvent être faites à partir de la densité non normalisée $f(x|\widetilde{y}, \mathcal{M}_l) \propto \mathcal{L}(x|\widetilde{y}, \mathcal{M}_l)\; f(x|\mathcal{M}_l)$ (cf. Section 5.2.3.3.1). Cependant, on verra que l'*évidence du modèle* est importante dans le deuxième niveau d'inférence pour choisir le modèle le plus plausible.

En partant du fait que la densité de probabilité *a priori* $f(x|\mathcal{M}_l)$ d'un modèle $\mathcal{M}_l$ est bien définie, il est donc important de spécifier sa fonction de *vraisemblance* $\mathcal{L}(x|\widetilde{y}, \mathcal{M}_l)$. Elle permet de mesurer la distance entre les simulations du modèle $y = \mathcal{M}_l(x)$ et les observations correspondantes $\widetilde{y} = \{\widetilde{y}_1, \ldots, \widetilde{y}_{N_{obs}}\}$. On peut alors écrire les incertitudes résiduelles $E_l(x) = \{e_1(x), ..., e_{N_{obs}}(x)\}$ comme suit [124] :

$$E_l(x) = \widetilde{y} - \mathcal{M}_l(x) = \{e_1(x), ..., e_{N_{obs}}(x)\} \tag{5.30}$$

où les incertitudes résiduelles peuvent inclure l'incertitude de mesure des observations ainsi que l'incertitude de modèle due au fait que le simulateur peut être systématiquement différent de la réalité. Cependant, dans notre étude et en général, l'incertitude de modèle est négligée, car elle n'a pas nécessairement des propriétés probabilistes inhérentes qui peuvent être exploitées pour la construction d'une fonction objective explicite [124]. Si les incertitudes résiduelles sont considérées, normalement distribuée $e_t(x) \sim \mathcal{N}(0, \widehat{\sigma}_t^2)$ et non corrélées, alors

on peut définir la fonction de vraisemblance pour le modèle $\mathcal{M}_l$ comme suit [125] :

$$\mathcal{L}(x|\widetilde{y}, \mathcal{M}_l) \;=\; \prod_{t=1}^{N_{obs}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\;\widehat{\sigma}_t} \exp\left[-\frac{(\widetilde{y}_t - y_t)^2}{2\widehat{\sigma}_t^2}\right] \tag{5.31}$$

5.2.2.2 Deuxième niveau d'inférence

Le second niveau d'inférence permet de comparer les modèles entres eux, et déduire quel modèle est le plus plausible connaissant les données $\widetilde{y}$. La probabilité *a posteriori* de chaque modèle $p(M_l|\widetilde{y})$ s'écrit à partir du théorème de Bayes comme suit :

$$p(\mathcal{M}_l|\widetilde{y}) \;=\; \frac{f(\widetilde{y}|\mathcal{M}_l)\;p(\mathcal{M}_l)}{f(\widetilde{y})} \tag{5.32}$$

où le dénominateur $f(\widetilde{y})$ est donné par la loi de probabilité totale :

$$f(\widetilde{y}) \;=\; \sum_{l=1}^{Nm} f(\widetilde{y}|\mathcal{M}_l)\;p(\mathcal{M}_l) \tag{5.33}$$

où le terme $f(\widetilde{y}|\mathcal{M}_l)$ correspond à l'*évidence du modèle*, qui apparaît dans le premier niveau d'inférence, et qui est important ici pour calculer la probabilité *a posteriori* du modèle. Le terme $p(\mathcal{M}_l)$ représente un jugement subjectif de l'utilisateur sur la probabilité *a priori* du modèle $\mathcal{M}_l$. Par exemple, à partir de l'information que peut détenir l'utilisateur, on peut suspecter que certains modèles sont plus plausibles que d'autres, et on peut alors leur donner un poids plus important. Cette probabilité *a priori* du modèle est parfois également utilisée pour attribuer différentes pondération pour pénaliser les modèles coûteux en termes de temps de calcul [123]. Les probabilités *a priori* des modèles sont également normalisées, avec :

$$\sum_{l=1}^{Nm} p(\mathcal{M}_l) \;=\; 1 \tag{5.34}$$

En général, ne disposant d'aucune information *a priori* sur les modèles, la probabilité $p(\mathcal{M}_l)$ est supposée non-informative (uniforme), ne privilégiant aucun modèle. Par exemple, si on dispose de trois modèles, leur probabilité *a priori* $p(\mathcal{M}_1) = p(\mathcal{M}_2) = p(\mathcal{M}_3) = 1/3$. Dans ce cas-là, l'Eq. (5.32) devient :

$$p(\mathcal{M}_l|\widetilde{y}) \;=\; \frac{f(\widetilde{y}|\mathcal{M}_l)}{\sum_{l=1}^{Nm} f(\widetilde{y}|\mathcal{M}_l)} \tag{5.35}$$

On remarque donc que la probabilité *a posteriori* d'un modèle dépend directement de l'*évidence du modèle* lorsque la probabilité *a priori* du modèle est non-informative. Le modèle détenant la plus grande probabilité *a posteriori* est considéré comme le modèle le plus plausible.

5.2.2.3 Moyenne bayésienne des modèles (BMA)

La probabilité *a posteriori* d'un modèle $p(\mathcal{M}_l|\widetilde{y})$ peut être utilisée non seulement pour la sélection du modèle le plus plausible, mais aussi pour prévoir ou estimer la quantité en sortie à partir de tous les modèles, notamment lorsque les valeurs des probabilités *a posteriori* de ces modèles sont proches. Cette méthode est appelée "moyenne bayésienne des modèles" ou "Bayesian Model Averaging" (BMA) en anglais [126]. Par exemple, supposons que y est la quantité à prévoir, alors la densité de probabilité de y peut être calculée à partir de la loi de la probabilité totale comme suit :

$$f(y|\widetilde{y}) \;\approx\; \sum_{l=1}^{Nm} f(y|\widetilde{y}, \mathcal{M}_l)\; p(\mathcal{M}_l|\widetilde{y}) \tag{5.36}$$

Cependant, l'approche BMA peut être très coûteuse en termes de temps de calcul, notamment lorsque le nombre de modèle N_m est grand, même si cette méthode permet toujours d'obtenir de meilleurs résultats comparée à l'utilisation du modèle le plus plausible "seul" pour prévoir la quantité y [123]. Néanmoins, lorsque la probabilité *a posteriori* d'un modèle $p(\mathcal{M}_l|\widetilde{y})$ est beaucoup plus grande que celle des autres, il suffit d'utiliser ce dernier pour prévoir la quantité y.

5.2.3 Estimation de l'*évidence du modèle*

Dans cette partie, nous allons traiter des différentes méthodes pour estimer l'*évidence du modèle* : (i) approximation mathématique par la méthode de Laplace, (ii) les critères d'information et (iii) une estimation numérique. Il faut noter qu'une solution exacte existe, mais elle est basée sur plusieurs hypothèses, notamment une linéarité du modèle et des distributions d'une famille exponentielle avec prieure conjuguée (une prieure conjuguée signifie que la densité de probabilité *a posteriori* est de la même famille que la densité de probabilité *a priori*). Ce n'est généralement pas le cas dans des applications réelles. Néanmoins, le lecteur intéressé peut se rapporter à l'article de Schöniger et al. [127] pour plus de détails.

5.2.3.1 Approximation mathématique de l'*évidence du modèle* par la méthode de Laplace

L'estimation de l'*évidence du modèle* par la méthode de Laplace [128] consiste à supposer que la densité de probabilité *a posteriori* $f(x|\widetilde{y}, \mathcal{M}_l)$ est gaussienne, dans le but de réduire l'intégrale dans l'Eq. (5.29) à une fonction mathématique simple. Cette hypothèse est justifiée lorsque la distribution *a posteriori* présente un pic autour de son mode $\hat{x}_{MAP}$ (cf. Section 5.2.1.4). Cette hypothèse est généralement robuste lorsqu'une grande variété d'ensembles de données N_{obs} est disponible pour la calibration du modèle [123; 127]. L'*évidence du modèle* $I_{\mathcal{M}_l} = f(\widetilde{y}|\mathcal{M}_l)$ peut alors être estimée à l'aide de l'approximation de Laplace comme suit [123; 129; 130] :

$$\widehat{I}_{\mathcal{M}_l} \;=\; \mathcal{L}(\hat{x}_{MAP}|\widetilde{y}, \mathcal{M}_l)\; f(\hat{x}_{MAP}|\mathcal{M}_l)\; (2\pi)^{k/2}\; |A|^{-1/2} \tag{5.37}$$

où l'approximation de l'*évidence du modèle* est notée $\widehat{I}_{\mathcal{M}_l}$, k représente le nombre de paramètres du modèle, $|\;.\;|$ représente le déterminant et A correspond à une matrice $k \times k$, connue sous le nom de Hessienne, dont l'inverse représente un estimateur asymptotique de la covariance de la distribution *a posteriori* Σ. Dans le cas d'une distribution *a posteriori* réellement gaussienne, l'inverse de la matrice Hessienne et la matrice de covariance sont égales. Les éléments de A sont donnés par [123; 129; 130] :

$$A_{ij} \;=\; -\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \ln \Big[\mathcal{L}(x|\widetilde{y}, \mathcal{M}_l)\; f(x|\mathcal{M}_l)\Big]\Big|_{x=\hat{x}_{MAP}} \tag{5.38}$$

Le premier terme de l'Eq. (5.37) $\mathcal{L}(\hat{x}_{MAP}|\widetilde{y}, \mathcal{M}_l)$ correspond à la valeur de la fonction de *vraisemblance* la mieux adaptée aux observations lorsqu'on prend en compte l'information *a priori*. Il est d'autant plus grand lorsque un modèle $\mathcal{M}_l$ ajuste davantage les données D. Il est multiplié par un second terme $f(\hat{x}_{MAP}|\mathcal{M}_l)\; (2\pi)^{k/2}\; |A|^{-1/2}$ qui est appelé *le facteur d'Ockham* (*Ockham factor*) [129] et qui sert à pénaliser les modèles complexes (*i.e.* qu'il diminue avec la complexité du modèle). Cela veut dire que, si des modèles concurrents présentent la même qualité d'ajustement, le modèle le moins complexe devrait être utilisé pour représenter les observations. Pour plus d'informations sur cette méthode, le lecteur peut se rapporter à l'ouvrage de MacKay [129] et à l'article de Knuth et al. [130].

5.2.3.2 Les critères d'information

La plupart des anciennes approches concernant la théorie de sélection de modèle s'intéresse au maximum de la fonction de *vraisemblance*, qui représente la performance d'un modèle à ajuster les données, tout en rajoutant un terme pour pénaliser les modèles com-

plexes contenant beaucoup de paramètres. Ces approches sont connues sous le nom de "critères d'information" [131; 132; 133]. L'avantage de ces critères est leur parcimonie et la facilité de leur calcul. Cependant, des études ont révélé que ces critères d'information diffèrent dans la probabilité *a posteriori* de chaque modèle, ou même dans le classement des modèles [127; 134; 135; 136; 137]. Burnham et Anderson [138] ont conclu dans leur article que de nombreuses études rapportées ne sont pas appropriées pour déterminer quel critère devrait être utilisé pour la sélection de modèle avec des données réelles. De plus, la plupart des critères d'information ne prennent pas en compte l'information *a priori* sur les paramètres et peuvent donc fournir des résultats contradictoires et biaisés, en particulier pour les modèles riches en paramètres [127; 134; 136]. Cela implique qu'ils ne reflètent pas le véritable compromis entre la performance ou capacité du modèle à ajuster les données et sa parcimonie, et pourraient donc produire un compromis arbitraire qui ne peut fournir une base fiable pour la sélection du modèle [127].

Dans la littérature, il existe plusieurs critères d'information pour juger de la qualité d'un modèle. Néanmoins, dans cette partie, nous présentons uniquement, le critère KIC (Kashyap Information Criterion) [133] qui provient directement de l'approximation de Laplace, ainsi que deux critères très utilisés pour la sélection de modèle qui sont le critère BIC (Bayesian Information Criterion) [132] et le critère AIC (Akaike Information Criterion) [131]. Le meilleur modèle $\mathcal{M}_l$ parmi les modèles concurrents $\{\mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_{Nm}\}$ est choisi en minimisant ces critères sur l. Le lecteur intéressé par les critères d'information peut se référer à l'ouvrage de Burnham et Anderson [6] et à celui de Konishi et Kitagawa [139].

5.2.3.2.1 Le critère d'information KIC

Le critère KIC (Kashyap Information Criterion) [133] découle directement de l'approximation de Laplace en appliquant $-2\ln \widehat{I}_{\mathcal{M}_l}$ dans l'Eq.(5.37) :

$$KIC_{\mathcal{M}_l} = -2\ln \mathcal{L}(\hat{x}_{MAP}|\widetilde{y}, \mathcal{M}_l) - 2\ln f(\hat{x}_{MAP}|\mathcal{M}_l) - k\ln(2\pi) + \ln|A| \tag{5.39}$$

Si une estimation de la matrice de covariance de la distribution *a posteriori* Σ peut être obtenue, alors l'Eq.(5.39) devient :

$$KIC_{\mathcal{M}_l} = -2\ln \mathcal{L}(\hat{x}_{MAP}|\widetilde{y}, \mathcal{M}_l) - 2\ln f(\hat{x}_{MAP}|\mathcal{M}_l) - k\ln(2\pi) - \ln|\Sigma| \tag{5.40}$$

5.2.3.2.2 Le critère d'information BIC

Le critère BIC (Bayesian Information Criterion) [132] est une simplification du critère KIC après l'introduction de certaines hypothèses. D'abord, si la densité de probabilité *a*

priori $f(\hat{x}_{MAP}|\mathcal{M}_l)$ est peu informative (une loi uniforme par exemple), alors l'approximation de Laplace peut être effectuée autour de l'estimateur ponctuel $\hat{x}_{ML}$ au lieu de $\hat{x}_{MAP}$ (cf. Figure 5.2). On peut également écrire les éléments de la matrice Hessienne A comme suit :

$$A_{ij} = -\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \ln \left[\mathcal{L}(\hat{x}_{ML}|\widetilde{y}, \mathcal{M}_l) \right|_{x=\hat{x}_{ML}} \tag{5.41}$$

La matrice A écrite ainsi est appelée matrice d'information de Fisher. En utilisant l'Eq. (5.31), on peut réécrire la matrice A sous la forme de $N_{obs}A_0$, où A_0 représente la matrice d'information de Fisher normalisée par le nombre d'observation. On peut alors écrire :

$$|A| = N_{obs}^k |A_0| \tag{5.42}$$

et après introduction de $-2\ln \widehat{I}_{\mathcal{M}_l}$ dans l'Eq. (5.37), on obtient :

$$\widehat{I}_{\mathcal{M}_l} = -2\ln \mathcal{L}(\hat{x}_{ML}|\widetilde{y}, \mathcal{M}_l) - 2\ln f(\hat{x}_{ML}|\mathcal{M}_l) + k \ln \frac{N_{obs}}{2\pi} + \ln |A_0| \tag{5.43}$$

Le critère BIC simplifie encore l'approximation de Laplace en supposant que la taille de l'ensemble des observations N_{obs} est grande. En effet, la densité de probabilité *a priori* $f(\hat{x}_{ML}|\mathcal{M}_l)$ et le déterminant de la matrice d'information de Fisher normalisée $|A_0|$ ne changent pas avec la taille de l'ensemble des observations N_{obs}, tandis que le terme $\mathcal{L}(\hat{x}_{ML}|\widetilde{y}, \mathcal{M}_l)$ change, rendant ainsi négligeables les autres termes qui dépendent uniquement du nombre de paramètres k. C'est pourquoi le critère BIC omet les termes ne dépendant pas de N_{obs} et s'écrit comme suit :

$$BIC_{\mathcal{M}_l} = -2\ln \mathcal{L}(\hat{x}_{ML}|\widetilde{y}, \mathcal{M}_l) + k \ln N_{obs} \tag{5.44}$$

On remarque que, contrairement au critère KIC, le critère BIC ne prend pas en compte l'information *a priori* sur les paramètres ni leur sensibilité aux observations à travers la covariance *a posteriori* Σ. On remarque également que le critère BIC prend en considération la taille de l'ensemble des observations N_{obs}, alors que ce terme n'est pas présent dans le critère KIC. Néanmoins, N_{obs} affecte la courbure de densité de probabilité *a posteriori*, et donc affecte indirectement Σ.

5.2.3.2.3 Le critère d'information AIC

Le principe de base du critère AIC (Akaike Information Criterion) [131] est très différent des deux méthodes présentées précédemment. En effet, le AIC tient ses origines de la théorie d'information de Shannon [63] (cf. Section 3.2.3.2.1). Cependant, le résultat final ressemble

beaucoup à ces deux critères. Le but d'Akaike était de minimiser la distance de Kullback-Leibler $I(f,g)$ [140], qui permet de mesurer l'information perdue lorsqu'on utilise un modèle $\mathcal{M}_l$ pour prévoir une densité $g(y|x,\mathcal{M}_l)$ au lieu de la réalité complète ou la vérité $f(y)$. Cette distance est définie pour les fonctions continues comme l'intégrale suivante :

$$I(f,g) = \int f(y) \ln\left(\frac{f(y)}{g(y|x,\mathcal{M}_l)}\right) dy \tag{5.45}$$

$$= E_f[\ln f(y)] - E_f[\ln g(y|x,\mathcal{M}_l)] \tag{5.46}$$

Si $g = f$, alors la distance $I(f,g)$ sera égale à zéro. Même si la fonction représentant la réalité complète f n'est pas connue, Akaike a trouvé un moyen d'estimer la valeur la plus faible de la distance de Kullback-Leibler des différents modèles. D'abord, la première espérance $E_f[\ln f(y)]$ est une constante C qui dépend uniquement de la distribution représentant la réalité complète. Par conséquent, la mesure d'une distance relative $I(f,g) - C$ est possible. Ensuite, Akaike a démontré que, pour un grand nombre d'observations N_{obs}, le logarithme népérien de la fonction de vraisemblance est un estimateur biaisé du second terme $E_f[\ln g(y|x,\mathcal{M}_l)]$. Le biais de cette estimation est égal au nombre de paramètres k. L'Eq. (5.46) devient :

$$I(f,g) - C = -\ln \mathcal{L}(\hat{x}_{ML}|\widetilde{y},\mathcal{M}_l) + k \tag{5.47}$$

Akaike a ensuite défini le critère d'information AIC en multipliant l'équation par 2 :

$$AIC_{\mathcal{M}_l} = -2\ln \mathcal{L}(\hat{x}_{ML}|\widetilde{y},\mathcal{M}_l) + 2k \tag{5.48}$$

On remarque que le critère AIC pénalise les modèles uniquement par rapport à leur nombre de paramètres k. Il est donc moins sévère que le critère BIC qui prend également en compte le nombre d'observations N_{obs}. Le critère AIC défini par l'Eq.(5.48) n'est valide que de façon asymptotique (*i.e.* pour un grand nombre d'observations N_{obs}), c'est pourquoi des corrections du critère AIC pour prendre en compte un nombre fini d'observations N_{obs} ont été proposées. Pour cela, le lecteur peut se rapporter à l'ouvrage de Burnham et Anderson [6].

5.2.3.3 Estimation numérique de l'*évidence du modèle*

Il est clair qu'une estimation numérique de l'*évidence du modèle* est préférable aux solutions qui sont limitées à de fortes hypothèses. En revanche, ce type d'estimation devient vite infaisable pour des modèles coûteux en termes de temps de calcul. La méthode la plus simple consiste à estimer l'*évidence du modèle* avec une méthode type Monte Carlo. Cela consiste à faire un tirage aléatoire d'un grand nombre échantillons N à partir de la densité

de probabilité *a priori* $f(x|\mathcal{M}_l)$, avec $x^{(j)} \sim f(x|\mathcal{M}_l)$. L'intégrale dans l'Eq.(5.29) est ensuite estimée en faisant la moyenne arithmétique des N valeurs de la fonction de vraisemblance, avec [127] :

$$\widehat{I}_{\mathcal{M}_l} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\mathcal{L}(x^{(j)}|\widetilde{y},\mathcal{M}_l) \tag{5.49}$$

Cette méthode donne des résultats précis quand le nombre d'échantillons N est grand, et lorsqu'il y a un chevauchement entre la densité de probabilité *a priori* et la fonction de *vraisemblance* [127]. En revanche, le coût de calcul de cette méthode devient vite très élevé, notamment pour des modèles coûteux, *a fortiori* avec un grand nombre de paramètres incertains. Cette méthode devient également inefficace lorsque le support de la fonction de *vraisemblance* est trop petit par rapport à la densité de probabilité *a priori*. En effet, une grande partie des échantillons apporte une valeur de *vraisemblance* négligeable et contribue ainsi peu au calcul de l'*évidence du modèle*, ce qui rend l'estimation biaisée, comme l'illustre la Figure 5.5. Des alternatives plus efficaces existent, tels que les simulations de Monte Carlo par chaînes de Markov MCMC [64] (cf. Section 5.2.3.3.1) et l'échantillonnage préférentiel [68; 72] (cf. Section 5.2.3.3.2).

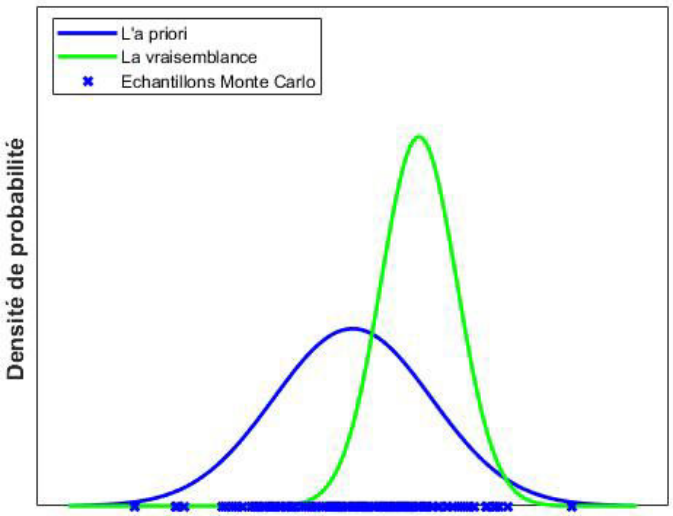


FIGURE 5.5 – Estimation de l'*évidence du modèle* par la méthode de Monte Carlo. On remarque qu'une grande partie des échantillons apporte une valeur de *vraisemblance* négligeable.

5.2.3.3.1 Régularisation du premier niveau d'inférence par approche MCMC

Cette section a pour but de présenter les méthodes de simulation de Monte Carlo par chaînes de Markov (MCMC). Ce sont des méthodes Monte Carlo plus générales qui permettent d'échantillonner à partir d'une loi cible (dans notre cas la loi *a posteriori* $f(x|\widetilde{y}, \mathcal{M}_l)$) lorsque cette loi ne peut pas être simulée directement, en se basant sur la construction d'une chaîne de Markov. L'idée est donc de générer de manière itérative des échantillons d'une chaîne de Markov, qui se comportent asymptotiquement comme la densité de probabilité à échantillonner. Une introduction des chaînes de Markov ainsi que l'une des deux techniques les plus importantes conçues pour créer ces chaînes, à savoir les algorithmes de Metropolis-Hastings [141], sont présentés ci-dessous. Pour plus d'informations sur la seconde technique, appelée l'échantillonnage de Gibbs, ainsi qu'une présentation détaillée des méthode MCMC, le lecteur peut se référer aux ouvrages de Robert [64; 65; 66], de Robert et Casella [69], de Brooks et al. [142] et de Sorensen et Gianola [143].

Les Chaînes de Markov : pour des raisons de simplicité, nous présentons dans cette partie les chaînes de Markov avec un espace d'états fini (*i.e.* une chaîne de Markov discrète). Pour mieux comprendre ces chaînes, reprenons l'exemple présenté dans l'ouvrage de Grossman et Turner [144]. Supposons qu'une souris soit placée dans une boîte divisée en trois compartiments d'intercommunication étiquetés 1, 2 et 3. Les trois compartiments sont les états possibles du système, et l'ensemble $S = \{1, 2, 3\}$ est appelé l'espace d'état. On peut ainsi définir une variable aléatoire X pour indiquer la présence de la souris dans un compartiment donné. Cette variable aléatoire peut donc prendre une des trois valeurs possibles. Un mouvement de la souris du compartiment i à j se produit avec une certaine probabilité conditionnelle $p(i \to j)$, appelée probabilité de transition du compartiment i vers j. Considérons maintenant une séquence de variables aléatoires $X_t, (t = 0, 1, 2, ...,)$ définissant la présence de la souris dans les compartiments sur une période de temps (les indices t peuvent être interprétés comme des étapes ou des périodes de temps). Si la probabilité que la souris se déplace dans un compartiment donné dépend du compartiment qui se trouve immédiatement avant le déplacement, et non des compartiments que la souris a déjà visités, la séquence de variables aléatoires définit une chaîne de Markov.

Une chaîne de Markov discrète est alors une suite de variables aléatoires $X_t, (t = 0, 1, 2, ...,)$, où X_t prennent des valeurs dans l'ensemble fini $S = \{1, ..., s\}$, et telles que les propriétés probabilistes à l'instant t ne dépendent que de l'instant $t - 1$, On écrit :

$$\mathbb{P}(X_t = j|X_{t-1} = i, X_{t-2} = k, ..., X_0 = m) \tag{5.50}$$

$$= \mathbb{P}(X_t = j|X_{t-1} = i) \ = \ p(i \to j), \quad i, j, k, ..., m \in S \tag{5.51}$$

Les probabilités de transition peuvent être arrangées dans une matrice $P = \{p(i \to j)\}$, où i représente la ligne de la matrice et j sa colonne. P est appelée matrice de probabilité de transition $s \times s$ de la chaîne de Markov. Ses coefficients $p(i \to j)$ sont positifs et leur somme sur une ligne i est égale à 1. La chaîne est dite homogène si P ne dépend pas de t (la probabilité d'une transition d'un état donné à un autre dépend des deux états et non du temps).

Une question d'importance fondamentale est de savoir si, après un certain nombre de transitions, la chaîne de Markov converge vers une distribution d'équilibre, appelée également distribution stationnaire et notée π, indépendamment de la distribution de probabilité initiale $\pi^{(0)}$. Cela nécessite que P^t converge vers une matrice invariante ayant des lignes identiques. La chaîne de Markov converge vers une distribution stationnaire si :

$$\pi = \lim_{t \to \infty} \pi^0 P^t \tag{5.52}$$

$$= \pi P \tag{5.53}$$

À noter que, dans le cas d'une chaîne de Markov continue, l'espace d'états est infini. Alors on ne peut pas considérer la distribution de probabilité initiale comme un vecteur et la distribution de probabilité de transition comme une matrice. On doit les considérer respectivement comme une distribution de probabilité inconditionnelle et conditionnelle.

Deux propriétés importantes pour les chaînes de Markov établissent l'existence d'une distribution d'équilibre unique : l'apériodicité et l'irréductibilité (une telle chaîne de Markov est appelée ergodique).

— Si le comportement de la trajectoire de la chaîne de Markov n'est pas périodique, *i.e.* que le retour de la chaîne à un état i n'est pas cyclique, alors la chaîne est dite apériodique. Par exemple, si on considère une chaîne de Markov à trois états $S = \{1, 2, 3\}$, et que les seules transitions possibles sont $1 \to 2$, $2 \to 3$ et $3 \to 1$, autrement dit, les états se répètent tous les 3 mouvements de la chaîne, alors cette chaîne ne respecte pas l'apériodicité.

— Si tous les états d'une chaîne de Markov communiquent, de sorte que chaque état est accessible à partir de tous les autres états dans un nombre fini de transitions, la chaîne de Markov est appelée irréductible.

Une autre propriété importante, notamment du point de vue des méthodes MCMC, est celle de la réversibilité. Considérons une chaîne de Markov ergodique avec un espace d'état S qui convergent vers une distribution d'équilibre π. Soit $i \in S$ l'état actuel du système, et soit $j \in S$ l'état à l'étape suivante. Soit $p(i \to j)$ la probabilité d'une transition de i vers j et soit $p(j \to i)$ la probabilité d'une transition dans la direction opposée. Une chaîne de Markov est

dite réversible si :

$$\pi(i)\ p(i \to j)\ =\ \pi(j)\ p(j \to i) \tag{5.54}$$

On verra par la suite que la condition de réversibilité joue un rôle important dans la construction des algorithmes MCMC, notamment les algorithmes de Metropolis-Hastings [141], car il est souvent facile de générer une chaîne de Markov ayant la distribution d'équilibre souhaitée (dans notre cas, la distribution *a posteriori* $f(x|\widetilde{y}, \mathcal{M}_l)$) en utilisant l'Eq. (5.54) comme point de départ.

Échantillonneurs MCMC "algorithmes de Metropolis-Hastings" : la simulation de Monte Carlo par chaînes de Markov (MCMC), notamment l'algorithme de Metropolis-Hastings (MH) [141], est devenue un outil de calcul très important dans la statistique bayésienne car elle permet d'échantillonner à partir d'une loi cible complexe, qui correspond le plus souvent à la loi *a posteriori* de l'inférence bayésienne. L'idée est de générer une chaîne de Markov *via* une simulation de Monte Carlo itérative qui se comporte asymptotiquement comme la densité de probabilité *a posteriori*, *i.e.* que la densité *a posteriori* $f(x|\widetilde{y}, \mathcal{M}_l)$ correspond à la distribution stationnaire π. Or, la densité de probabilité *a posteriori* est connue à un facteur de normalisation $I_{\mathcal{M}_l}$ près, où $I_{\mathcal{M}_l}$ correspond à l'*évidence du modèle* (cf. Eq.(5.28)). On peut alors écrire :

$$\pi\ =\ I_{\mathcal{M}_l}\ f(x|\widetilde{y}, \mathcal{M}_l) \tag{5.55}$$

À partir de la condition de réversibilité de l'Eq.(5.54), l'approche de Metropolis-Hastings consiste à remplacer la densité de probabilité de transition par une loi candidate q dite loi de proposition. Si q satisfait la condition de réversibilité telle que :

$$I_{\mathcal{M}_l}\ f(x^{(i)}|\widetilde{y}, \mathcal{M}_l)\ q(x^{(i)} \to x^{(j)})\ =\ I_{\mathcal{M}_l}\ f(x^{(j)}|\widetilde{y}, \mathcal{M}_l)\ q(x^{(j)} \to x^{(i)}) \tag{5.56}$$

alors la loi de proposition correspond à la densité de probabilité de transition. Cependant, modifier la loi de transition entraîne la perte de la relation d'équilibre. En effet, il est fort probable que, pour certains états $(x^{(i)}, x^{(j)})$ par exemple, on ait :

$$I_{\mathcal{M}_l}\ f(x^{(i)}|\widetilde{y}, \mathcal{M}_l)\ q(x^{(i)} \to x^{(j)})\ > I_{\mathcal{M}_l}\ f(x^{(j)}|\widetilde{y}, \mathcal{M}_l)\ q(x^{(j)} \to x^{(i)}) \tag{5.57}$$

C'est pourquoi une probabilité d'acceptation $a(x^{(i)} \to x^{(j)})$ est introduite pour compenser ce déséquilibre et retrouver une relation d'égalité, avec :

$$a(x^{(i)} \to x^{(j)})\ I_{\mathcal{M}_l}\ f(x^{(i)}|\widetilde{y}, \mathcal{M}_l)\ q(x^{(i)} \to x^{(j)})\ =\ I_{\mathcal{M}_l}\ f(x^{(j)}|\widetilde{y}, \mathcal{M}_l)\ q(x^{(j)} \to x^{(i)}) \tag{5.58}$$

Cela signifie que la probabilité d'acceptation aura la forme suivante :

$$a(x^{(i)} \to x^{(j)}) \;=\; \frac{f(x^{(j)}|\widetilde{y}, \mathcal{M}_l)\; q(x^{(j)} \to x^{(i)})}{f(x^{(i)}|\widetilde{y}, \mathcal{M}_l)\; q(x^{(i)} \to x^{(j)})} \tag{5.59}$$

On remarque que la probabilité d'acceptation ne dépend pas de la constante de normalisation $I_{\mathcal{M}_l}$ qui s'annule par le ratio. Il n'est donc pas nécessaire de connaître l'*évidence du modèle* $I_{\mathcal{M}_l}$ pour résoudre le premier niveau d'inférence du théorème de Bayes, *i.e.* la relation de proportionnalité dans l'Eq.(5.28) est suffisante. La probabilité d'acceptation doit être comprise entre 0 et 1 mais, en pratique, elle peut dépasser cette limite. On écrit alors :

$$a(x^{(i)} \to x^{(j)}) \;=\; \min\left(1,\; \frac{f(x^{(j)}|\widetilde{y}, \mathcal{M}_l)\; q(x^{(j)} \to x^{(i)})}{f(x^{(i)}|\widetilde{y}, \mathcal{M}_l)\; q(x^{(i)} \to x^{(j)})}\right) \tag{5.60}$$

Si la distribution de proposition est symétrique, par exemple une loi uniforme ou une loi normale, alors $q(x^{(i)} \to x^{(j)}) = q(x^{(j)} \to x^{(i)})$, et la probabilité d'acceptation s'écrit comme suit :

$$a(x^{(i)} \to x^{(j)}) \;=\; \min\left(1,\; \frac{f(x^{(j)}|\widetilde{y}, \mathcal{M}_l)}{f(x^{(i)}|\widetilde{y}, \mathcal{M}_l)}\right) \tag{5.61}$$

Cette forme de l'algorithme MH est appelée algorithme de Metropolis-Hastings à marche aléatoire (Random Walk Metropolis-Hastings) [145] et fait référence à la version originale de l'algorithme. Finalement, l'échantillonneur de Metropolis-Hastings est présenté en Algorithme 1.

Algorithme 1 Algorithme de Metropolis-Hastings

1: Initialiser la chaîne avec une valeur arbitraire $x^{(0)}$ (tirage aléatoire à partir de la loi *a priori*)
2: **pour** $j = 1$ to N **faire** ▷ Boucle sur les N itérations
3: $\quad \widetilde{x} \leftarrow q(x^{(j-1)} \to \widetilde{x})$ ▷ Échantillonner à partir de la loi de proposition q
4: $\quad u_p \leftarrow U(0,1)$ ▷ Échantillonner à partir d'une loi uniforme entre 0 et 1
5: $\quad a(x^{(j-1)} \to \widetilde{x}) \leftarrow \min\left(1,\; \frac{f(\widetilde{x}|\widetilde{y},\mathcal{M}_l)\; q(\widetilde{x} \to x^{(j-1)})}{f(x^{(j-1)}|\widetilde{y},\mathcal{M}_l)\; q(x^{(j-1)} \to \widetilde{x})}\right)$ ▷ Calculer la probabilité d'acceptation
6: $\quad$ **si** $a(x^{(j-1)} \to \widetilde{x}) > u_p$ **alors**
7: $\quad\quad x^{(j)} \leftarrow \widetilde{x}$ ▷ Acceptation de l'échantillon
8: $\quad$ **sinon**
9: $\quad\quad x^{(j)} \leftarrow x^{(j-1)}$ ▷ Rejet de l'échantillon
10: $\quad$ **fin si**
11: **fin pour**

À noter que le choix et le paramétrage de la distribution de proposition q joue un rôle

important dans l'efficacité de l'algorithme de Metropolis-Hastings. En effet, les paramètres de cette distribution, en particulier le paramètre d'échelle [3], dépend du taux d'acceptation de la chaîne (le pourcentage de fois qu'un déplacement vers un nouvel état est effectué). Un paramètre d'échelle trop petit (*i.e.* support de q trop petit) entraîne un taux d'acceptation élevé. Cela implique des valeurs très similaires entre les états précédents et proposés, et la chaîne de Markov converge donc trop lentement. Cependant, si le paramètre d'échelle est trop grand (*i.e.* support de q trop large), le taux d'acceptation sera trop faible et la chaîne restera alors dans le même état pour de nombreuses itérations. Aucune règle générale d'optimisation n'est disponible. Cependant, Roberts et al. [146] ont obtenu, pour une loi cible et une loi de proposition normales, un taux d'acceptation optimal de l'ordre de 44% pour un problème à une seule dimension ($k = 1$), de 28% pour $k = 5$ et de 23% pour un problème de grande dimension.

Dans notre travail, l'algorithme DREAM (DiffeRential Evolution Adaptive Metropolis) développé sur MATLAB par Jasper A. Vrugt [125] est utilisé pour simuler les chaînes de Markov. Cette simulation est réalisée pour chaque modèle $\mathcal{M}_l$ séparément. Le cœur de cet algorithme est basé sur l'algorithme de Metropolis-Hastings à marche aléatoire, avec la spécificité d'utiliser une méthode multi-chaînes, *i.e.* plusieurs trajectoires différentes qui fonctionnent en parallèle pour explorer la distribution cible. L'utilisation de chaînes multiples présente plusieurs avantages, en particulier lorsqu'il s'agit de distributions cibles complexes impliquant des grand pics, des paramètres corrélés, de la multimodalité et de nombreux *optima* locaux. Elle offre donc une protection robuste contre la convergence prématurée [125]. Par exemple, en présence d'une loi cible avec deux modes séparés, une seule trajectoire est dans certains cas insuffisante pour permettre à la chaîne d'explorer correctement les deux modes, et va donc converger vers une distribution limitée à un seul mode. Et comme le choix de distribution de proposition q est crucial, l'algorithme DREAM utilise une distribution de proposition adaptative dont le paramètre d'échelle dépend du nombre de paramètres du modèle k. Il faut savoir également qu'en réalité, une simulation MCMC avec une méthode multi-chaînes nécessite de fixer la longueur des chaînes, *i.e.* le nombre d'itérations suffisantes pour que ces chaînes convergent vers la distribution cible. Pour cela, l'algorithme DREAM utilise un critère pour surveiller la convergence des chaînes de Markov [147]. D'abord, il faut noter que pour les premières itérations, les échantillons générés peuvent ne pas avoir la densité de probabilité cible, *i.e.* la densité de probabilité *a posteriori* $f(x|\widetilde{y}, \mathcal{M}_l)$, comme distribution. C'est pourquoi il est important d'écarter les premières itérations. Dans l'algorithme DREAM, uniquement la seconde moitié de chaque chaîne est sélectionnée. Cette période est

3. Le paramètre d'échelle est un paramètre qui régit l'aplatissement d'une famille paramétrique de lois de probabilités. Par exemple, pour une loi normale, le paramètre d'échelle correspond à son écart-type σ.

appelée *période de chauffe*, ou *burn-in period* en anglais. Le critère de convergence est ensuite construit à partir des variances internes à chaque chaîne ainsi que les variances entre les différentes chaînes. Pour plus de détails sur l'algorithme DREAM, nous recommandons aux lecteurs intéressés de lire les articles de Vrugt [125] et Vrugt et al. [148; 149].

5.2.3.3.2 Estimation de l'*évidence du modèle* par échantillonnage préférentiel

Après la résolution du premier niveau d'inférence par les méthodes MCMC, le but maintenant est de résoudre le second niveau d'inférence, *i.e.* estimer l'*évidence* pour chaque modèle et choisir le meilleur. On verra que les échantillons obtenus par la méthodes MCMC vont avoir un rôle important dans l'estimation de cette *vraisemblance marginalisée*. L'utilisation de l'échantillonnage préférentiel, ou échantillonnage d'importance ou encore Importance Sampling (IS) [68; 72] en anglais, permet de réduire le temps de calcul et d'améliorer la convergence. Le but est d'échantillonner à partir d'une quelconque distribution $q_0(x|\mathcal{M}_l)$ similaire à la distribution *a posteriori* $f(x|\widetilde{y}, \mathcal{M}_l)$ (avec $x^{(j)} \sim q_0(x|\mathcal{M}_l)$), plutôt que d'échantillonner directement à partir de la distribution *a priori* $f(x|\mathcal{M}_l)$, comme il est le cas dans une méthode type Monte Carlo (cf. Eq.(5.49)). Cela permet de concentrer la distribution des points échantillonnés dans les parties de l'intervalle les plus importantes au lieu de les répartir équitablement, comme dans le cas de Monte-Carlo, ce qui revient à une estimation plus efficace de l'*évidence du modèle*. Pour cela, il suffit de multiplier et de diviser l'intégrale dans l'Eq. (5.29) par q_0, ce qui modifie l'estimation de l'intégrale dans l'Eq. (5.49), avec :

$$\widehat{I}_{\mathcal{M}_l} \;=\; \frac{\sum_{j=1}^{N} w_j \; \mathcal{L}(x^{(j)}|\widetilde{y}, \mathcal{M}_l)}{\sum_{j=1}^{N} w_j} \tag{5.62}$$

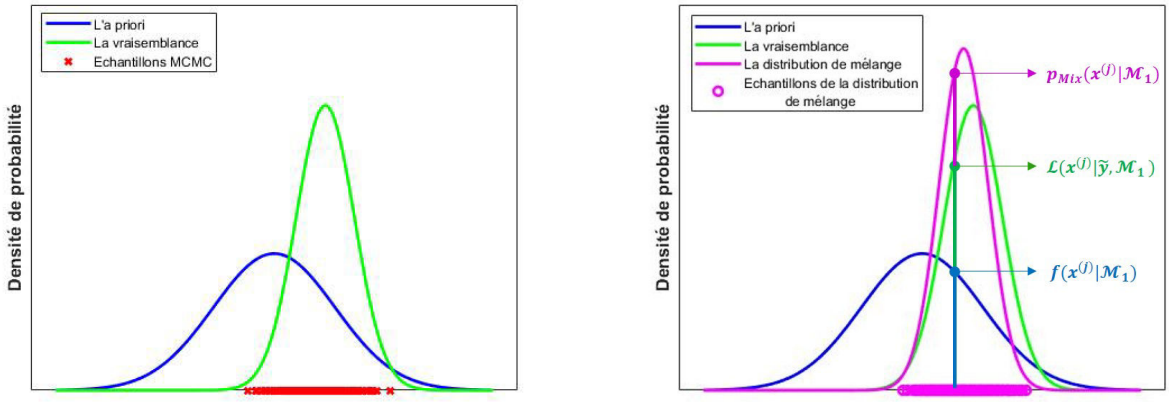
où $w_j = \frac{f(x^{(j)}|\mathcal{M}_l)}{q_0(x^{(j)}|\mathcal{M}_l)}$. On remarque que les échantillons obtenus par la méthode MCMC ne sont pas utilisés dans l'Eq. (5.62). Néanmoins, ces échantillons jouent un rôle important dans la construction de la fonction q_0. En effet, on sait que l'amélioration obtenue par l'échantillonnage préférentiel par rapport à la simple intégration Monte Carlo dépendra fortement du choix de la fonction d'importance q_0. Cette méthode sera plus efficace quand q_0 est similaire à l'*a posteriori*. C'est pourquoi, dans notre travail, l'algorithme GAME (Gaussian Mixture ImportancE sampling) développé par Volpi et al. [137] est utilisé pour estimer l'*évidence du modèle*. Cette méthode utilise une distribution de mélange p_{mix} ajustée aux échantillons de la distribution *a posteriori* des paramètres du modèle obtenus à partir de la simulation MCMC, notamment de l'algorithme DREAM [125], pour représenter la fonction d'importance q_0, avec $p_{mix}(x|\mathcal{M}_l) = q_0(x|\mathcal{M}_l)$. La distribution de mélange p_{mix} est utilisée pour approximer

les échantillons obtenus par la méthode MCMC comme suit :

$$p_{mix}(x|\mathcal{M}_l) \;=\; \sum_{m=1}^{J} W_m f_k(x|\mu_m, \Sigma_m, \mathcal{M}_l) \tag{5.63}$$

où J représente le nombre de lois normales de k dimensions $f_k(x|\mu_m, \Sigma_m, \mathcal{M}_l)$ utilisées pour construire la distribution de mélange p_{mix}, W_m est un facteur de pondération de telle sorte que $\sum_{m=1}^{J} W_m = 1$, μ_m correspond à un vecteur de k dimensions représentant les moyennes, et enfin Σ_m une matrice de covariance $k \times k$. Un algorithme d'optimisation est utilisé pour permettre de déterminer les paramètres de cette distribution de mélange, *i.e.* les facteurs de pondération W_m, les vecteurs des moyennes μ_m et les matrices de covariance Σ_m, qui permettent d'ajuster le mieux les échantillons *a posteriori* obtenus par la méthode MCMC (cf. Volpi et al. [137]).

Finalement, l'estimation de l'*évidence du modèle* se fait en deux étapes comme l'illustre la Figure 5.6. D'abord, une simulation MCMC permet de générer des échantillons proportionnels à la distribution *a posteriori*, et cela à partir de la relation de proportionnalité $f(x|\widetilde{y}, \mathcal{M}_l) \propto \mathcal{L}(x|\widetilde{y}, \mathcal{M}_l) f(x|\mathcal{M}_l)$. Ces échantillons sont utilisés pour construire une distribution de mélange p_{mix}. L'*évidence du modèle* est ensuite estimée à partir de l'Eq. (5.62) en échantillonnant directement à partir de cette fonction d'importance p_{mix}.



(a) Première étape

(b) Seconde étape

FIGURE 5.6 – Les deux étapes pour estimer numériquement l'*évidence du modèle*. La première étape consiste à générer des échantillons MCMC proportionnel à $f(x|\widetilde{y}, \mathcal{M}_l)$. La seconde étape consiste à ajuster ces échantillons pour construire une distribution de mélange p_{mix} et estimer l'*évidence du modèle* par échantillonage préférentiel.

5.3 Application à un modèle simple

Considérons dans cet exemple, un modèle linéaire simple à 10 paramètres, avec $x = \{x_1, x_2, ..., x_k\}$. Ce modèle est noté $\mathcal{M}_{10}$. Le modèle permet de relier ces paramètres d'entrées aux sorties $y = \{y_1, y_2, ..., y_{N_{obs}}\}$ qui servent à prévoir des observations réelles $\widetilde{y} = \{\widetilde{y}_1, \widetilde{y}_2, ..., \widetilde{y}_{N_{obs}}\}$, avec :

$$y_t \;=\; \sum_{i=1}^{k} \beta_{ti}\; x_i \tag{5.64}$$

où $t = 1, ..., N_{obs}$, avec N_{obs} correspondant au nombre d'observations, et β une matrice de dimension $N_{obs} \times k$ et de coefficient β_{ti} connus, tel que :

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \cdots & \cdots & \beta_{1k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_{N_{obs}1} & \cdots & \cdots & \beta_{N_{obs}k} \end{bmatrix} \tag{5.65}$$

Dans cet exemple, les coefficients β_{ti} sont tirés aléatoirement dans une loi uniforme entre 0 et 1, tel que $\beta_{ti} \sim U(0, 1)$. Les paramètres d'entrées x sont considérés incertains, indépendants et suivent une loi normale multidimensionnelle de moyenne $\bar{x}$ et de covariance C, tel que $\bar{x} = \{1, 0.9, 0.8, ..., 0.1\}$ et C étant la matrice identité de dimension 10×10. Cette loi correspond à la densité de probabilité *a priori* $f(x|\mathcal{M}_{10})$. L'ensemble des observations est généré à partir du même modèle en utilisant la valeur moyenne des paramètres incertains $\bar{x}$. En supposant que les erreurs résiduelles sont normalement distribuées $e_t(x) \sim \mathcal{N}(0, \widehat{\sigma}_t^2)$, et non corrélées, alors on peut définir la fonction de *vraisemblance* pour le modèle $\mathcal{M}_{10}$ comme suit :

$$\mathcal{L}(x|\widetilde{y}, \mathcal{M}_{10}) \;=\; \prod_{t=1}^{N_{obs}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\;\widehat{\sigma}_t} \exp\left[-\frac{(\widetilde{y}_t - y_t)^2}{2\widehat{\sigma}_t^2} \right] \tag{5.66}$$

où un "petit" écart-type est attribué à ces erreurs résiduelles, *e.g.* $\widehat{\sigma}_t = 0.1$. On rappelle qu'en réalité, ces incertitudes résiduelles correspondent à l'incertitude de mesure des observations $\widetilde{y}$.

Une fois que la densité de probabilité *a priori* $f(x|\mathcal{M}_{10})$ ainsi que la fonction de *vraisemblance* $\mathcal{L}(x|\widetilde{y}, \mathcal{M}_{10})$ bien définies, nous pouvons estimer l'*évidence du modèle* par la méthode numérique, et trouver également les estimateurs ponctuels $\hat{x}_{MAP}$ et $\hat{x}_{ML}$ qui servent à déterminer les critères d'information KIC, BIC et AIC. Cela consiste d'abord à faire un tirage proportionnel à la densité de probabilité *a posteriori* $f(x|\widetilde{y}, \mathcal{M}_{10})$ en utilisant des simulations

MCMC. Ces échantillons permettent de construire la distribution de mélange p_{mix}, mais aussi de déterminer l'estimateur ponctuel maximisant la loi *a posteriori* $\hat{x}_{MAP}$ ainsi que sa matrice de covariance Σ qui sont essentiels pour évaluer le critère KIC. L'estimateur maximisant la fonction de *vraisemblance* $\hat{x}_{ML}$, servant à évaluer les critères BIC et AIC, est obtenu avec l'algorithme DREAM [125] en utilisant une densité de probabilité *a priori* non informative. L'*évidence du modèle* est ensuite estimée numériquement à partir de l'Eq. (5.62) en échantillonnant directement à partir de la fonction d'importance p_{mix}.

Nous considérons le modèle à 10 paramètres $\mathcal{M}_{10}$, comme le modèle le plus complexe. Des modèles plus simples sont ensuite construits en supprimant un paramètre à la fois. Par exemple, le modèle $\mathcal{M}_9$ correspond à $y_t = \sum_{i=1}^{k-1} \beta_{ti}\ x_i$. Bien évidemment, le modèle le plus simple $\mathcal{M}_1$ correspond à un modèle à un seul paramètre avec $y_t = \beta_{t1}\ x_1$. L'*évidence* ainsi que les critères KIC, BIC et AIC sont ensuite estimés de la même façon pour chaque modèle. Toutes ces étapes sont présentées dans un organigramme de programmation sur la Figure 5.7. Cette procédure reste la même pour les modèles de synthèse (cf. Section 5.4).

5.3.1 Résultats dans le cas où $N_{obs} = 25$

Nous considérons d'abord le cas où un grand nombre d'observations est disponible, *e.g.* $N_{obs} = 25$. Ces observations sont générées à partir du modèle le plus complexe contenant 10 paramètres $\mathcal{M}_{10}$, en utilisant la valeur moyenne des paramètres d'entrée $\bar{x}$. Pour obtenir les échantillons *a posteriori*, $N_{mc} = 10$ chaînes de Markov sont lancées simultanément en utilisant $T = 10000$ itérations par chaîne. Un facteur $K_s = 5$ est utilisé pour stocker en mémoire uniquement les états visités toutes les 5 itérations. Cette option réduit le stockage en mémoire avec un facteur de T/K_s (important pour la réduction des besoins en mémoire pour des distributions cibles de grande dimension qui nécessitent beaucoup d'itération et diminue également l'autocorrélation entre les échantillons des chaînes stockés successivement). A cause de la *période de chauffe*, uniquement 50% des échantillons de la chaîne sont sélectionnés. Le nombre final d'échantillons *a posteriori* est alors $N_{MCMC} = (\frac{T}{K_s})\frac{N_{cm}}{2} = 10000$. Le même nombre de tirages est utilisé pour générer des échantillons à partir de la fonction d'importance p_{mix}, qui servent à estimer l'*évidence* de chaque modèle. À noter que le coût en termes de temps de calcul de ces modèles est très faible, c'est pourquoi l'estimation numérique de l'*évidence* est répétée 100 fois et la moyenne est ensuite calculée.

Les résultats de l'estimation numérique de l'*évidence du modèle*, des critères KIC, BIC et AIC sont présentés dans la Table 5.1. Pour comparer les résultats entre eux, le logarithme népérien de l'*évidence du modèle* estimée par échantillonage préférentiel est calculé puis multiplié par -2. On notera ce terme $-2\ln\widehat{I}$. De plus, avec un grand nombre d'observations $N_{obs} = 25$, l'*évidence du modèle* sera dominée par la fonction de *vraisemblance* qui prend

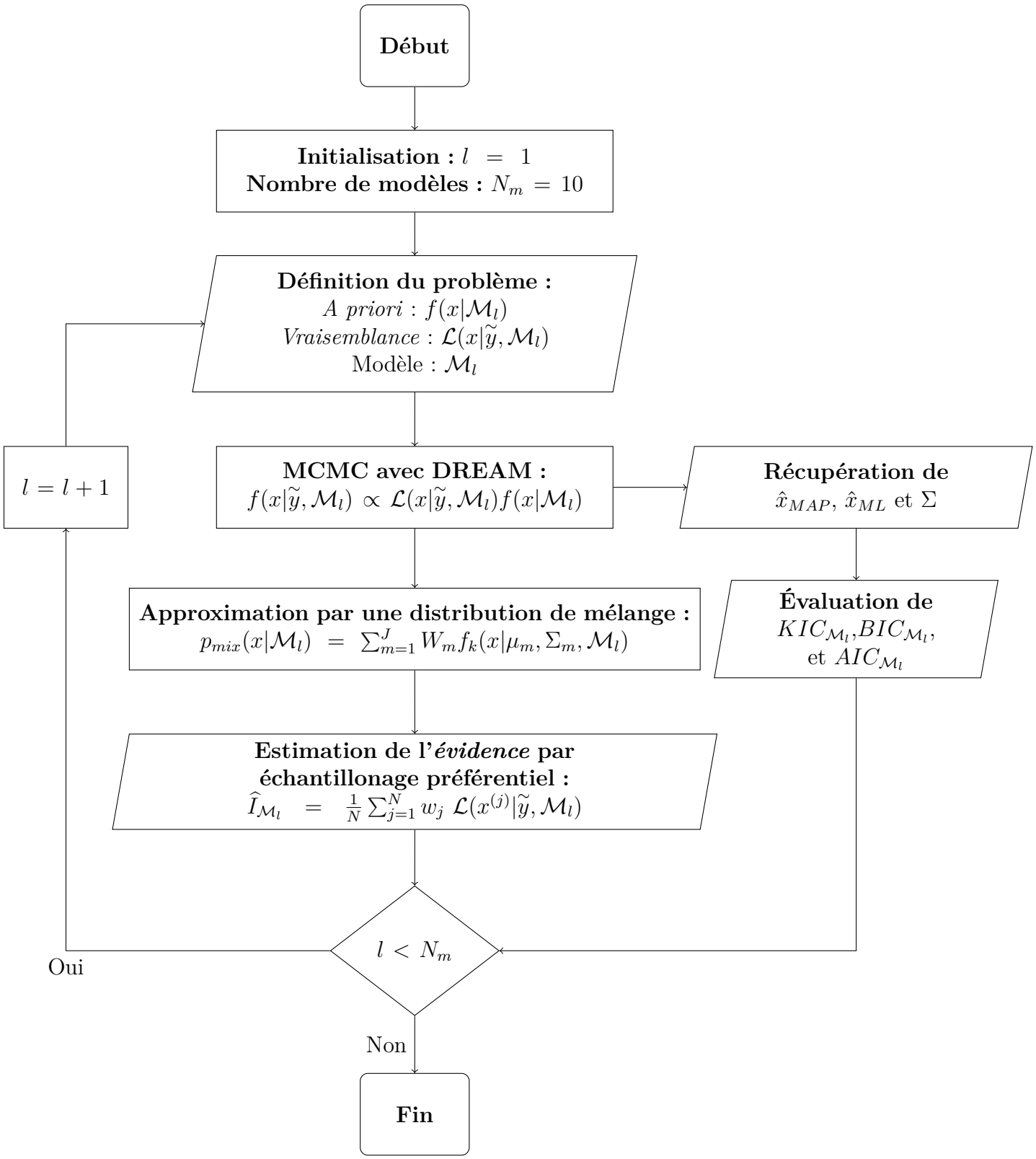


FIGURE 5.7 – Organigramme représentant les étapes principales pour estimer l'*évidence* et les critères KIC, BIC et AIC.

Modèle	$\mathcal{M}_1$	$\mathcal{M}_2$	$\mathcal{M}_3$	$\mathcal{M}_4$	$\mathcal{M}_5$	$\mathcal{M}_6$	$\mathcal{M}_7$	$\mathcal{M}_8$	$\mathcal{M}_9$	$\mathcal{M}_{10}$
$-2\ln\widehat{I}$	∞	928.0	609.0	218.4	107.3	57.6	14.2	-13.4	-18.3	-14.9
KIC	∞	928.0	609.0	218.4	107.3	57.8	14.6	-12.8	-17.8	-13.7
BIC	∞	917.5	598.6	206.8	94.1	43.0	-2.3	-31.3	-37.8	-35.8
AIC	∞	915.1	594.9	202.0	88.1	35.6	-10.8	-41.0	-48.8	-48.0
$p(\mathcal{M}_l\|\widetilde{y})$	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	6.9%	78.9%	14.1%

TABLE 5.1 – Résultats de l'estimation de l'*évidence du modèle*, du critère KIC, BIC et AIC, dans le cas où $N_{obs} = 25$.

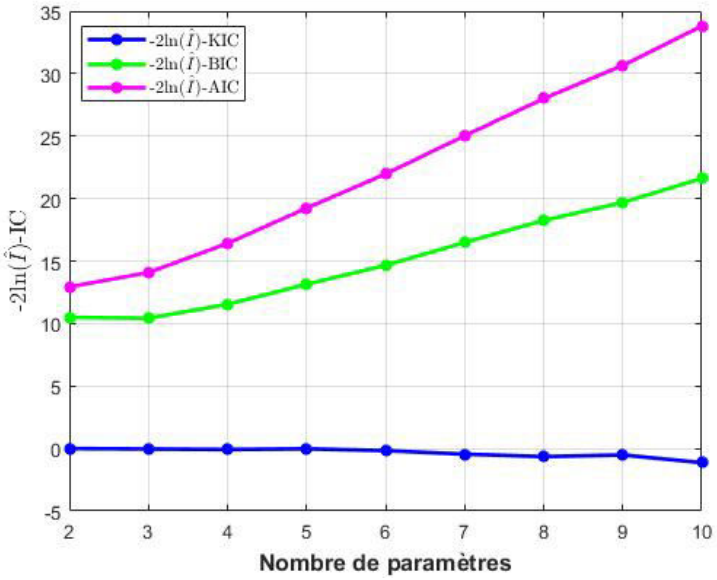


FIGURE 5.8 – Erreur d'estimation des critères KIC, BIC et AIC par rapport à une estimation numérique de l'*évidence du modèle*, dans le cas où $N_{obs} = 25$.

de très grandes valeurs à cause des multiplications dans l'Eq.(5.66). C'est pourquoi il est préférable de travailler avec le logarithme de l'*évidence*. Le meilleur modèle serait donc celui qui minimise $-2\ln\widehat{I}$ (en supposant que la probabilité *a priori* des modèles $p(\mathcal{M}_l)$ est non informative). On remarque d'abord que, pour le modèle $\mathcal{M}_1$, les termes $-2\ln\widehat{I}$, KIC, BIC et AIC tendent vers l'infini. En effet, ce modèle contenant un seul paramètre est trop simple, et n'arrive pas à ajuster les observations $\widetilde{y}$. Son *évidence* est alors égale à zéro, avec $\widehat{I}_{\mathcal{M}_1} = 0$. En considérant $-2\ln\widehat{I}$ comme les valeurs de références, on peut calculer l'erreur d'estimation des critères KIC, BIC et AIC pour chaque modèle. Les résultats sont présentés dans la Figure 5.8. On remarque que les valeurs du critère KIC sont très proches des valeurs de $-2\ln\widehat{I}$, tandis que les critères BIC et AIC les sous-estiment. On observe également que leur erreur a tendance à augmenter avec le nombre de paramètres du modèle. Cependant,

ces valeurs restent acceptables, à savoir que $-2\ln\widehat{I}$ ainsi que les trois critères KIC, BIC et AIC arrivent à avoir le même classement des modèles, en favorisant le modèle $\mathcal{M}_9$ contenant 9 paramètres (le modèle $\mathcal{M}_9$ est celui qui minimise $-2\ln\widehat{I}$, KIC, BIC et AIC). Comme mentionné précédemment, avec un grand nombre d'observations N_{obs}, l'*évidence du modèle* sera dominée par la fonction de *vraisemblance*. Cette fonction de *vraisemblance* favorise les modèles complexes contenant beaucoup de paramètres incertains. C'est pourquoi, dans ce cas de figure, $-2\ln\widehat{I}$, KIC, BIC et AIC favorisent un modèle complexe plutôt qu'un modèle simple, qui a tendance à mieux ajuster les données réelles $\widetilde{y}$. En supposant que l'information *a priori* sur la probabilité des modèles est non informative, *i.e.* que chaque modèle prend une probabilité de $p(\mathcal{M}_l) = \frac{1}{10}$, on peut calculer la probabilité *a posteriori* de chaque modèle $p(\mathcal{M}_l|\widetilde{y})$ à partir de l'Eq. (5.35), en utilisant comme valeurs les estimations numériques de l'*évidence du modèle*. Les résultats sont également présentés dans la Table 5.1. Le modèle $\mathcal{M}_9$ est préféré avec une probabilité *a posteriori* $p(\mathcal{M}_9|\widetilde{y}) = 78.9\%$, suivi du modèle $\mathcal{M}_{10}$ avec $p(\mathcal{M}_{10}|\widetilde{y}) = 14.1\%$ puis le modèle $\mathcal{M}_8$ avec $p(\mathcal{M}_8|\widetilde{y}) = 6.9\%$. Tous les autres modèles ont une probabilité égale à 0. Ils peuvent donc être supprimés en cas d'utilisation de la moyenne bayésienne des modèles (BMA) pour estimer les valeurs de y.

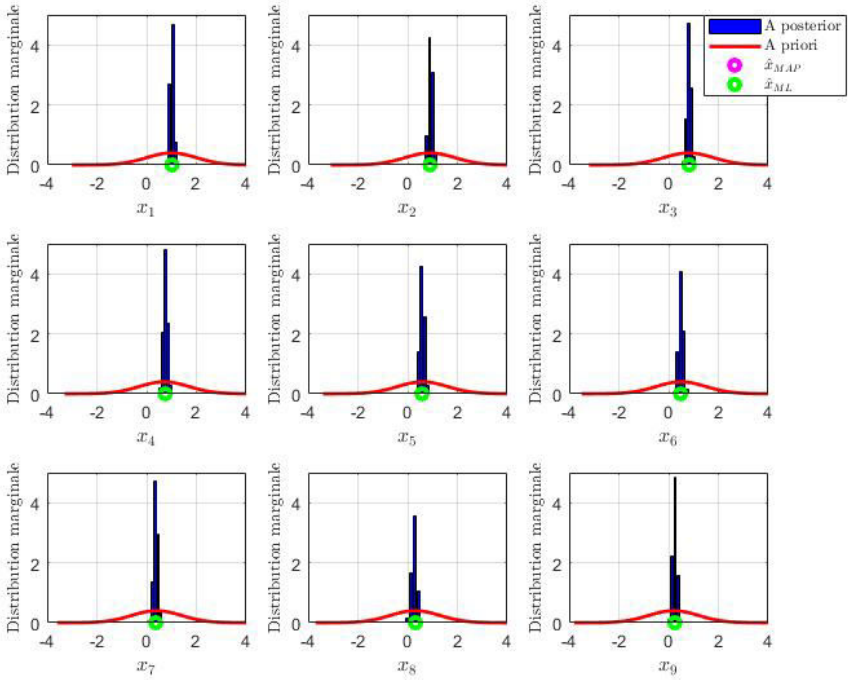


FIGURE 5.9 – Distributions marginales des densités de probabilité *a priori* $f(x|\mathcal{M}_9)$ et *a posteriori* $f(x|\widetilde{y}, \mathcal{M}_9)$, dans le cas où $N_{obs} = 25$. $\hat{x}_{ML}$ correspond au maximum de vraisemblance et $\hat{x}_{MAP}$ représente le maximum de la loi *a posteriori* ($\hat{x}_{ML}$ et $\hat{x}_{MAP}$ coïncident).

Il faut savoir que les modèles présentés précédemment sont simples, linéaires, avec une densité de probabilité *a priori* normale. Avec l'hypothèse que les erreurs résiduelles correspondant à l'incertitude de mesure des observations soient normalement distribuées et que le modèle soit linéaire, la fonction de *vraisemblance* peut être exprimée sous la forme d'une loi normale multidimensionnelle en fonction des paramètres incertains x, avec comme moyenne l'estimateur ponctuel $\hat{x}_{ML}$. À noter aussi que la loi gaussienne s'auto-conjuge, *i.e.* que lorsque l'*a priori* et la fonction de *vraisemblance* sont des lois gaussiennes, alors leur combinaison (*i.e.* l'*a posteriori*) est également une loi gaussienne. C'est pourquoi, une approximation de l'*évidence du modèle* par la méthode de Laplace (et donc du critère KIC) est acceptable pour cet exemple d'application. Les critères BIC et AIC, qui font l'hypothèse d'un grand nombre d'observations N_{obs}, sont également corrects pour réaliser un classement des modèles.

Les distributions marginales de la densité de probabilité *a priori* $f(x|\mathcal{M}_9)$ et *a posteriori* $f(x|\widetilde{y}, \mathcal{M}_9)$ du meilleur modèle $\mathcal{M}_9$ sont présentées dans la Figure 5.9. La corrélation *a posteriori* entre les paramètres est également présentée sous forme de nuages de points

dans la Figure 5.10. On remarque d'abord que l'*a posteriori* est plutôt gaussien et atteint son maximum autour de l'indicateur $\hat{x}_{MAP}$. On observe également que les estimateurs $\hat{x}_{ML}$ et $\hat{x}_{MAP}$ coïncident. En effet, comme précisé précédemment, la fonction de *vraisemblance* est dominante dans cet exemple d'application. La densité de probabilité *a priori* apporte donc peu d'informations dans l'estimation de la densité de probabilité *a posteriori* ainsi que l'estimation de l'*évidence du modèle*. D'ailleurs, c'est pourquoi l'approximation de Laplace est effectuée autour du maximum de *vraisemblance* $\hat{x}_{ML}$ au lieu de $\hat{x}_{MAP}$ pour évaluer le critère BIC.

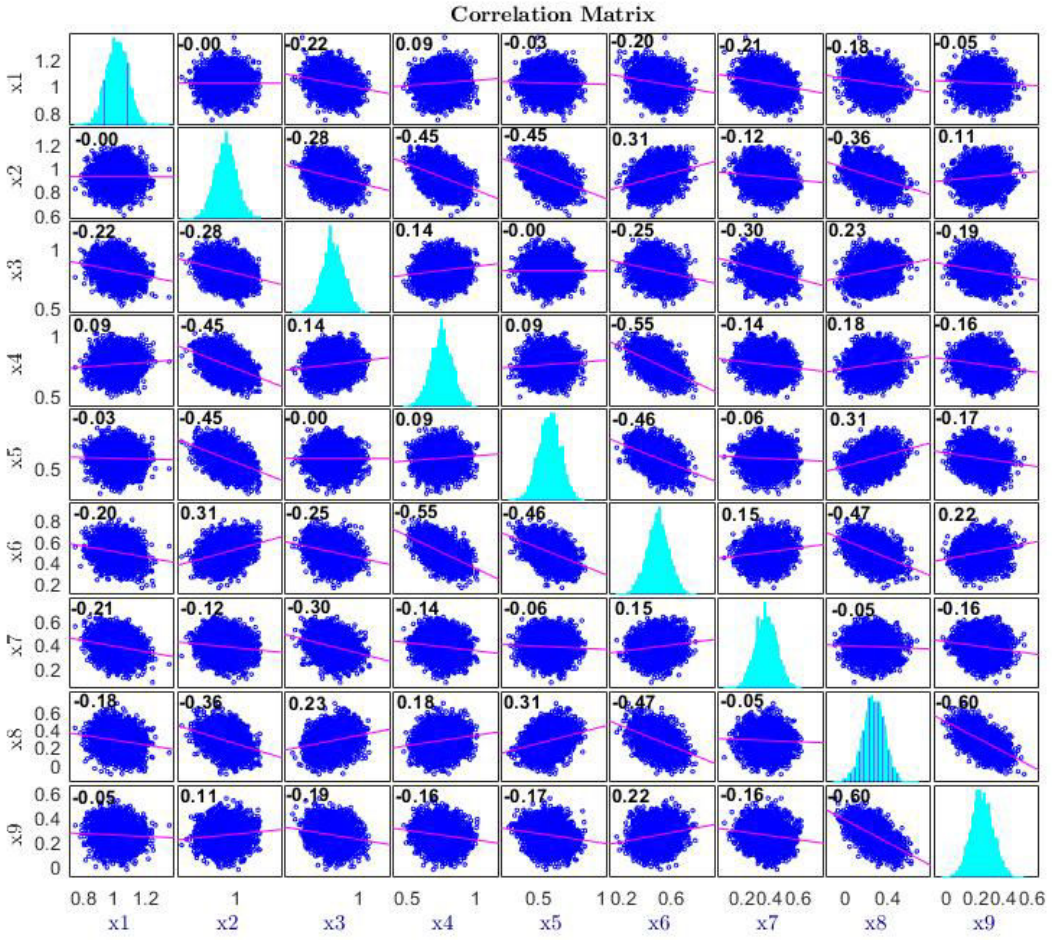


FIGURE 5.10 – Distributions marginales et nuages de points de corrélations entre les paramètres de la densité de probabilité *a posteriori* $f(x|\widetilde{y}, \mathcal{M}_9)$, dans le cas où $N_{obs} = 25$.

5.3.2 Résultats dans le cas où $N_{obs} = 4$

Considérons maintenant un exemple où peu d'observations sont disponibles, *e.g.* $N_{obs} = 4$. Ce choix est fait car le nombre d'observations disponibles pour les modèles de synthèse est $N_{obs} = 4$. Les sorties des modèles de synthèse utilisées pour construire la fonction de *vraisemblance* correspondent aux niveaux de bruit $L_{cr(n)}$, $L_{wot(n)}$, $L_{cr(n+1)}$ et $L_{wot(n+1)}$ (le niveau L_{urban} n'est rien d'autre qu'une interpolation de ces 4 grandeurs). La même procédure que dans l'exemple précédent est utilisée ici pour estimer numériquement l'*évidence du modèle*, ainsi que les critères KIC, BIC et AIC. Pour cela, le même nombre de tirages est employé. Les résultats sont présentés dans la Table 5.2. On remarque que le choix du meilleur modèle diffère d'une méthode à l'autre. En effet, l'estimation numérique de l'*évidence* et le critère KIC arrivent à avoir le même classement des modèles en favorisant le modèle à 6 paramètres $\mathcal{M}_6$ (on note que le modèle choisi est plus simple que l'exemple précèdent, car la fonction de *vraisemblance* est moins dominante). Néanmoins, les critères BIC et AIC favorisent le modèle à 4 paramètres $\mathcal{M}_4$. Cela est certainement dû au nombre d'observations qui est petit dans ce cas de figure. En effet, avec $N_{obs} = 4$, la fonction de *vraisemblance* n'est plus dominante, et la densité de probabilité *a priori* apporte plus d'informations que dans le cas précédent où $N_{obs} = 25$. C'est pourquoi les estimateurs $\hat{x}_{ML}$ et $\hat{x}_{MAP}$ sont différents (cf. Figure 5.11). Par conséquent, avec peu d'observations, l'évaluation des critères BIC et AIC en utilisant l'estimateur du maximum de *vraisemblance* $\hat{x}_{ML}$, et la non prise en compte de l'information *a priori* dans leur formule, rend ces critères biaisés.

Modèle	$\mathcal{M}_1$	$\mathcal{M}_2$	$\mathcal{M}_3$	$\mathcal{M}_4$	$\mathcal{M}_5$	$\mathcal{M}_6$	$\mathcal{M}_7$	$\mathcal{M}_8$	$\mathcal{M}_9$	$\mathcal{M}_{10}$
$-2\ln\widehat{I}$	274.7	199.4	71.5	23.8	11.5	7.19	7.8	8.0	8.2	8.6
KIC	274.7	199.4	71.5	23.8	11.6	7.4	8.1	9.4	9.8	11.0
BIC	260.5	186.9	55.2	-5.5	-4.1	-2.7	-1.3	0.5	1.4	2.8
AIC	261.1	188.0	57.0	-3.0	-1.0	0.9	3.0	5.0	7.0	8.9
$p(\mathcal{M}_l\|\widetilde{y})$	0.0	0.0	0.0	0.0	3.1%	28.6%	20.5%	18.4%	16.0%	13.3%

TABLE 5.2 – Résultats de l'estimation de l'*évidence du modèle*, du critère KIC, BIC et AIC, dans le cas où $N_{obs} = 4$.

En supposant que l'information *a priori* sur la probabilité des modèles est non informative, *i.e.* $p(\mathcal{M}_l) = \frac{1}{10}$, on peut calculer la probabilité *a posteriori* de chaque modèle $p(\mathcal{M}_l|\widetilde{y})$ en utilisant comme valeurs les estimations numériques de l'*évidence du modèle*, dont les résultats sont également présentés dans la Table 5.2. On peut noter que la probabilité *a posteriori* du meilleur modèle $p(\mathcal{M}_6|\widetilde{y}) = 28.6\%$. Cependant, cette valeur n'est pas beaucoup plus grande que la probabilité *a posteriori* des autres modèles. Il serait donc judicieux d'utiliser ici la

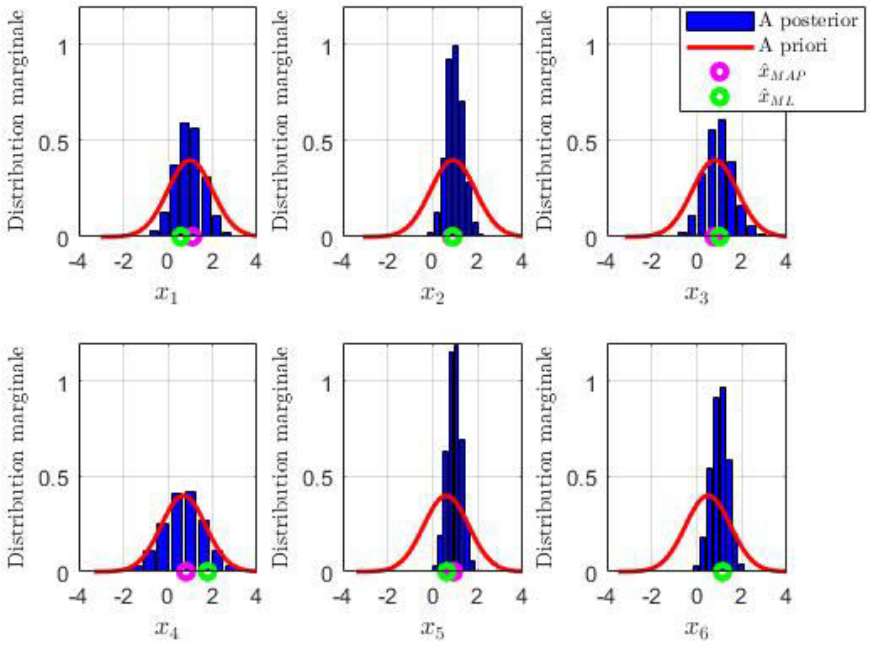


FIGURE 5.11 – Distributions marginales des densités de probabilité *a priori* $f(x|\mathcal{M}_6)$ et *a posteriori* $f(x|\widetilde{y}, \mathcal{M}_6)$, dans le cas où $N_{obs} = 4$. $\hat{x}_{ML}$ correspond au maximum de vraisemblance et $\hat{x}_{MAP}$ représente le maximum de la loi *a posteriori*.

moyenne bayésienne des modèles (BMA) plutôt que le meilleur modèle seul pour estimer les valeurs de y.

5.4 Application aux modèles de synthèse

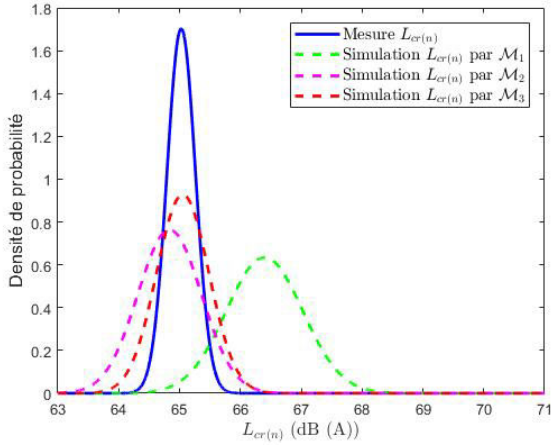
La même démarche est utilisée ici pour choisir le meilleur modèle parmi les trois modèles de synthèse développés dans le cadre de cette thèse, notamment le modèle "monopôle en valeur globale", "monopôle en tiers d'octave" et "six faces en tiers d'octave", qu'on notera respectivement par la suite $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$ et $\mathcal{M}_3$. Nous avons accordé la priorité à la réalisation de l'étude du segment B diesel uniquement (l'étude concernant les autres véhicules sera mentionnée dans les perspectives, cf. Section 6.2). La densité de probabilité *a priori* $f(x|\mathcal{M}_l)$ correspond à la probabilité jointe attribuée à l'incertitude de mesure des paramètres d'entrée des modèles de synthèse (cf. Section 4.3.1). La variabilité de production n'est pas prise en compte, car les observations sont obtenues en utilisant uniquement un seul véhicule. Pour cela, nous avons mesuré 12 fois le bruit de passage du même véhicule de moyenne gamme (segment B diesel) présenté dans le Chapitre 4, et cela pour chaque configuration, *i.e.* $L_{cr(n)}$, $L_{wot(n)}$,

$L_{cr(n+1)}$ et $L_{wot(n+1)}$. Les valeurs maximales enregistrées au niveau des deux microphones sont retenues. Leur densité de probabilité exacte est difficile à déterminer. Toutefois, on peut se servir de ces échantillons observés $\widetilde{y}_t^{(j)}$ pour estimer les caractéristiques probabilistes en utilisant par exemple la méthode des moments (cf. Section 3.2.3.2.2). En supposant que les mesures suivent une loi normale, on peut estimer leurs moyennes $\widetilde{y}_t$ et leurs variances $\widehat{\sigma}_t^2$ comme suit :

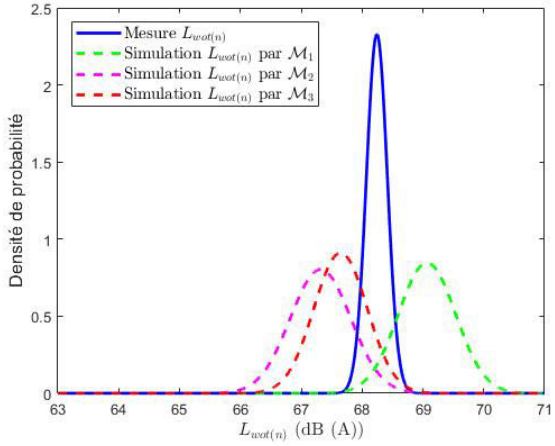
$$\widetilde{y}_t = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\widetilde{y}_t^{(j)} \tag{5.67}$$

$$\widehat{\sigma}_t^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{j=1}^{N}\widetilde{y}_t^{(j)^2} - \widetilde{y}_t^2 \tag{5.68}$$

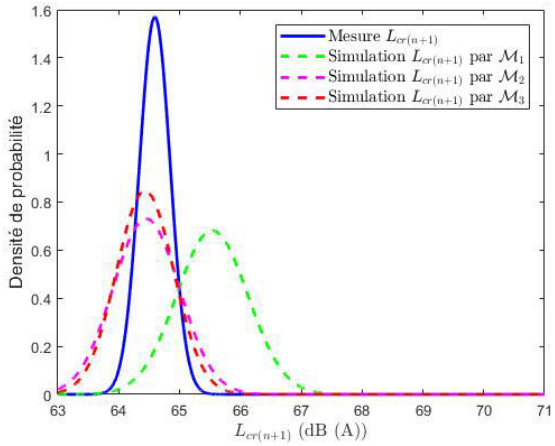
où N correspond aux nombres d'échantillons (ici $N = 12$) et $t = 1, ..., N_{obs}$ (ici $N_{obs} = 4$). $\widetilde{y} = \{\widetilde{y}_1, \widetilde{y}_2, \widetilde{y}_3, \widetilde{y}_4\}$ correspondent alors respectivement aux observations réelles des niveaux de bruit $L_{cr(n)}$, $L_{wot(n)}$, $L_{cr(n+1)}$ et $L_{wot(n+1)}$, et $\widehat{\sigma} = \{\widehat{\sigma}_1, \widehat{\sigma}_2, \widehat{\sigma}_3, \widehat{\sigma}_4\}$ à leurs écarts-types respectifs. A noter que la moyenne et l'écart type des accélérations réelles du véhicule $a_{wot(n)}$ et $a_{wot(n+1)}$ sont également estimés à partir des mesures. Cela nous permet de faire un tirage aléatoire dans les lois de probabilité estimées afin d'étudier la densité de probabilité du niveau de bruit L_{urban}.



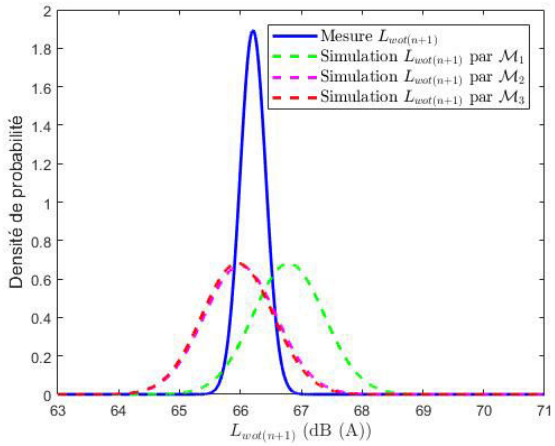
(a) Vitesse stabilisée rapport n : $L_{cr(n)}$



(b) Pleine charge rapport n : $L_{wot(n)}$



(c) Vitesse stabilisée rapport n+1 : $L_{cr(n+1)}$



(d) Pleine charge rapport n+1 : $L_{wot(n+1)}$

FIGURE 5.12 – Comparaison calculs/mesures des niveaux de bruit $L_{cr(n)}$, $L_{wot(n)}$, $L_{cr(n+1)}$ et $L_{wot(n+1)}$, pour le segment B diesel. $\mathcal{M}_1$ correspond au modèle "monopôle en valeur globale", $\mathcal{M}_2$ correspond au modèle "monopôle en tiers d'octave" et $\mathcal{M}_3$ correspond au modèle "six faces en tiers d'octave". Les densités de probabilité présentées sont obtenues par ajustement à une loi de probabilité normale en utilisant la méthode de maximum de vraisemblance.

Nous comparons d'abord les résultats issus de la propagation d'incertitude dans les trois modèles de synthèse ($\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$ et $\mathcal{M}_3$) avec les mesures correspondantes ; ils sont présentés dans la Figures 5.12, et cela pour les niveaux de bruits $L_{cr(n)}$, $L_{wot(n)}$, $L_{cr(n+1)}$ et $L_{wot(n+1)}$. Le niveau de bruit L_{urban} est ensuite présenté pour les trois modèles dans la Figure 5.13. On remarque d'abord une plus grande dispersion au calcul, qui est liée certainement à un manque de connaissance sur l'incertitude des paramètres d'entrée des modèles. On constate également une surestimation systématique de la simulation issue du modèle "monopôle en valeur globale" ($\mathcal{M}_1$) par rapport à la mesure, et une bonne corrélation pour les deux autres modèles. La représentation des sources de bruit (GMP, admission, échappement et rayonne-

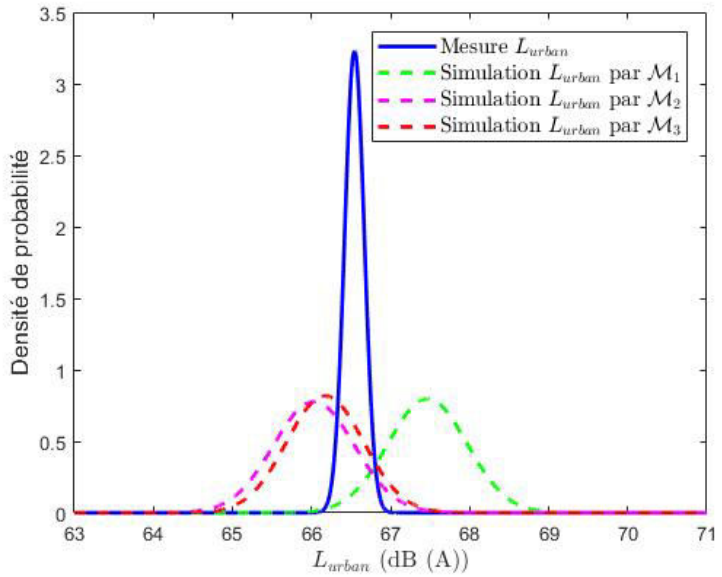


FIGURE 5.13 – Comparaison calculs/mesures du niveau de bruit L_{urban}, pour le segment B diesel. Les densités de probabilité présentées sont obtenues par ajustement à une loi de probabilité normale en utilisant la méthode de maximum de vraisemblance.

ment des volumes d'échappement) par une valeur globale (au lieu d'un spectre) semble être insuffisante pour pouvoir estimer les niveaux de bruit de passage de ce véhicule. On peut observer également, et contrairement à ce que l'on attendait, que la variabilité des simulations issues du modèle "six faces en tiers d'octave" ($\mathcal{M}_3$) est parfois plus petite que les deux autres modèles. En effet, il faut savoir qu'il ne s'agit pas ici de rajouter un paramètre à chaque fois (comme dans l'exemple précédent, cf. Section 5.3), mais plutôt de remplacer le monopôle acoustique représentant le groupe motopropulseur par plusieurs monopôles dont les valeurs sont plus petites. De plus, l'incertitude attribuée à chaque monopôle est en décibel, cela signifie que cette incertitude dépend de la valeur nominale des paramètres (la somme en décibel correspond à une multiplication en linéaire). La propagation d'incertitude dans les modèles et la densité de probabilité *a priori* sont alors complètement différentes. Dans tous les cas, le meilleur modèle sera celui qui détient la plus grande *évidence*, que nous allons estimer et présenter ci-dessous.

Pour estimer l'*évidence du modèle*, la fonction de *vraisemblance* doit être définie. En supposant que les erreurs résiduelles sont normalement distribuée $e_t(x) \sim \mathcal{N}(0, \widehat{\sigma}_t^2)$, et non corrélées, on peut définir la fonction de *vraisemblance* pour les modèles de synthèse $\mathcal{M}_l$ comme suit :

$$\mathcal{L}(x|\widetilde{y}, \mathcal{M}_l) \;=\; \prod_{t=1}^{N_{obs}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\;\widehat{\sigma}_t} \exp\left[-\frac{(\widetilde{y}_t - y_t)^2}{2\widehat{\sigma}_t^2}\right] \tag{5.69}$$

où $y = \mathcal{M}_l(x) = \{y_1, y_2, y_1, y_4\}$ correspondent respectivement aux sorties des modèles de synthèse $L_{cr(n)}$, $L_{wot(n)}$, $L_{cr(n+1)}$ et $L_{wot(n+1)}$.

A partir de la densité de probabilité *a priori* et de la fonction de *vraisemblance*, on peut estimer l'*évidence du modèle* en utilisant les simulation MCMC (cf. Section 5.2.3.3.1) et l'échantillonnage préférentiel (cf. Section 5.2.3.3.2). Le nombre de chaînes de Markov utilisé pour obtenir les échantillons *a posteriori* correspond au nombre de paramètres du modèle de synthèse étudié, à savoir $N_{mc} = 18$ pour les modèles $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ et $N_{mc} = 33$ pour le modèle $\mathcal{M}_3$, avec un nombre d'itérations $T = 5000$ par chaîne et un facteur $K_s = 5$. Uniquement la seconde moitié de chaque chaîne est retenue. Cela correspond à $N_{MCMC} = 9000$ échantillons pour les modèles $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ et $N_{MCMC} = 16500$ échantillons pour le modèle $\mathcal{M}_3$. Le même nombre de tirages est utilisé pour générer des échantillons à partir de la fonction d'importance p_{mix}, qui servent à estimer l'*évidence* de chaque modèle.

Les distributions marginales de la densité de probabilité *a priori* $f(x|\mathcal{M}_l)$ et *a posteriori* $f(x|\widetilde{y}, \mathcal{M}_l)$ des trois modèles de synthèse sont présentées dans les Figures 5.14, 5.15 et 5.17. On remarque d'abord que les estimateurs $\hat{x}_{ML}$ et $\hat{x}_{MAP}$ sont différents. En effet, avec peu d'observation ($N_{obs} = 4$), la fonction de *vraisemblance* n'est pas dominante. La densité de probabilité *a priori* qui est constituée de fonctions normales et uniformes (cf. Section 4.3.1) est donc informative. Il a été vérifié dans le Chapitre 4 que les modèles de synthèse ont une tendance linéaire. Avec une telle densité de probabilité *a priori* et avec l'hypothèse que les erreurs résiduelles correspondant à l'incertitude de mesure des observations soient normalement distribuées, la densité de probabilité *a posteriori* devrait prendre une forme gaussienne. Cependant, on remarque que l'estimateur maximisant cette fonction gaussienne $\hat{x}_{MAP}$ se trouve sur la limite inférieure ou supérieure de certaines distributions marginales des paramètres. Cela signifie qu'il n'y a pas un chevauchement complet entre l'*a priori* et la fonction de *vraisemblance*. La densité de probabilité *a posteriori* est donc représentée par une loi normale multidimensionnelle tronquée. L'estimation de l'*évidence du modèle* par le critère KIC peut conduire à un résultat biaisé.

À noter que le coût en termes de temps de calcul des modèles de synthèse est relativement faible, c'est pourquoi l'estimation numérique de l'*évidence du modèle* est répétée 100 fois et la moyenne est ensuite calculée. Les résultats du termes $-2\ln\widehat{I}$ sont présentés pour les trois modèles sous forme de boîtes à moustaches dans la Figure 5.17. En supposant que l'information *a priori* sur la probabilité des modèles de synthèse est non informative, *i.e.* que chaque modèle prend une probabilité $p(\mathcal{M}_l) = \frac{1}{3}$, on peut calculer la probabilité *a posteriori* de chaque modèle $p(\mathcal{M}_l|\widetilde{y})$ à partir de l'Eq. (5.35), en utilisant la valeur moyenne de l'*évidence du modèle*. Les résultats sont également présentés dans la Figure 5.17. On remarque que le meilleur modèle correspond au modèle le plus complexe $\mathcal{M}_3$ ("six faces en tiers d'octave")

avec une probabilité *a posteriori* $p(\mathcal{M}_3|\widetilde{y}) = 84.18\%$, suivi du modèle $\mathcal{M}_2$ ("monopôle en tiers d'octave") avec $p(\mathcal{M}_2|\widetilde{y}) = 9.48\%$ et enfin le dernier modèle correspond au modèle le plus simple $\mathcal{M}_1$ ("monopôle en valeur globale") avec une probabilité $p(\mathcal{M}_1|\widetilde{y}) = 6.34\%$. Le critère KIC de chaque modèle est également estimé et présenté dans la Figure 5.18. On observe effectivement une différence entre les deux méthodes (le critère KIC et l'estimation numérique), notamment dans les valeurs estimées, mais aussi dans le classement des modèles. Le critère KIC n'est donc pas utilisable dans ce cas d'application.

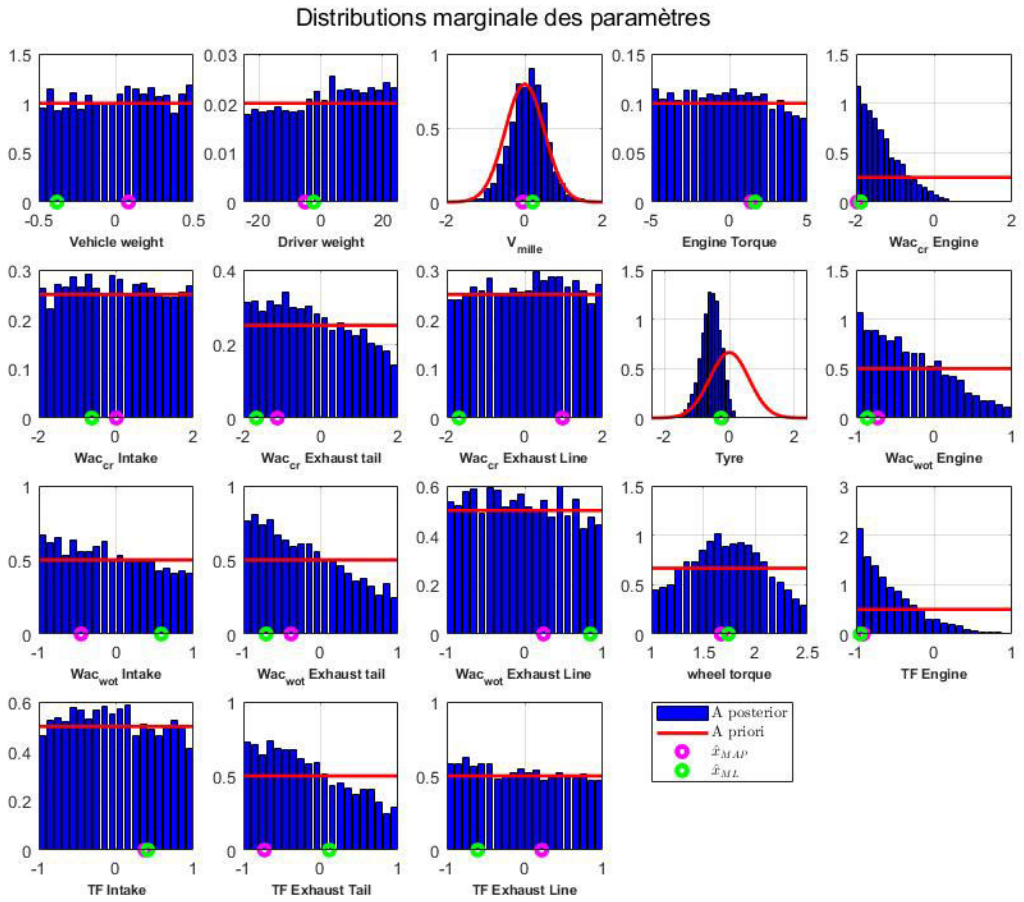


FIGURE 5.14 – Distributions marginales des densités de probabilité *a priori* $f(x|\mathcal{M}_1)$ et *a posteriori* $f(x|\widetilde{y}, \mathcal{M}_1)$, pour le segment B diesel.

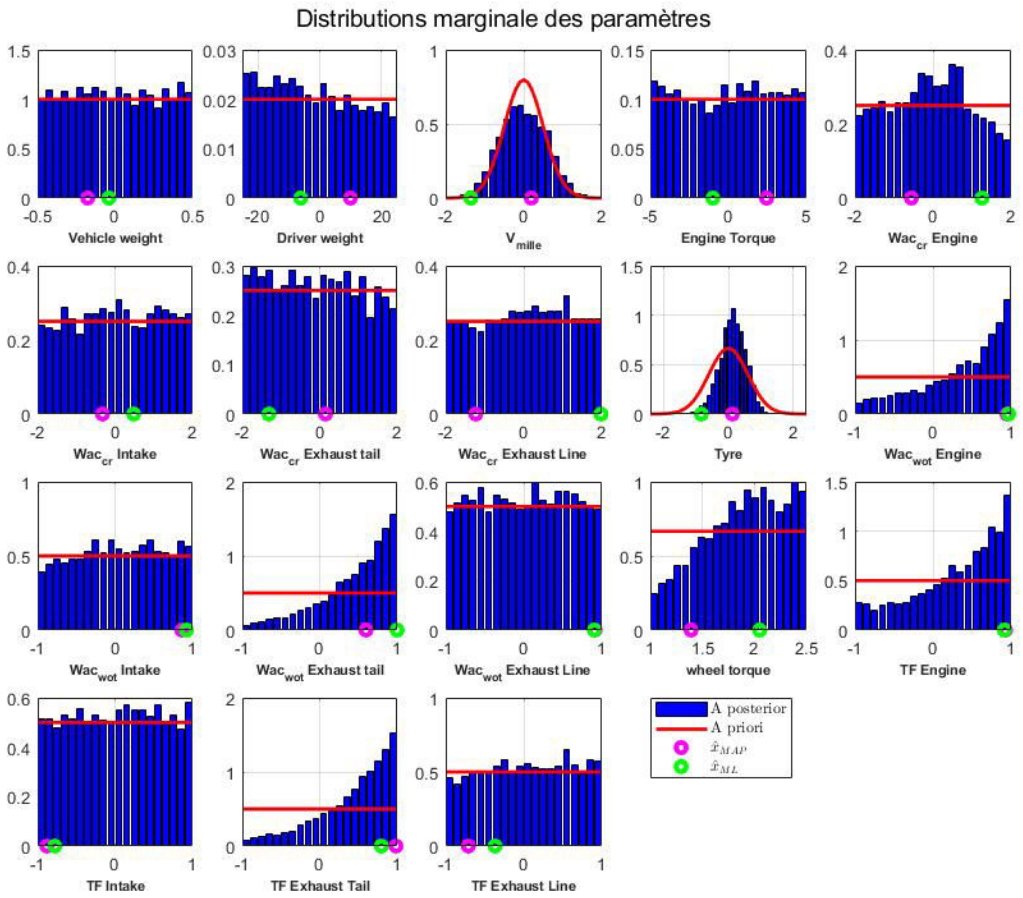


FIGURE 5.15 – Distributions marginales des densités de probabilité *a priori* $f(x|\mathcal{M}_2)$ et *a posteriori* $f(x|\widetilde{y}, \mathcal{M}_2)$, pour le segment B diesel.

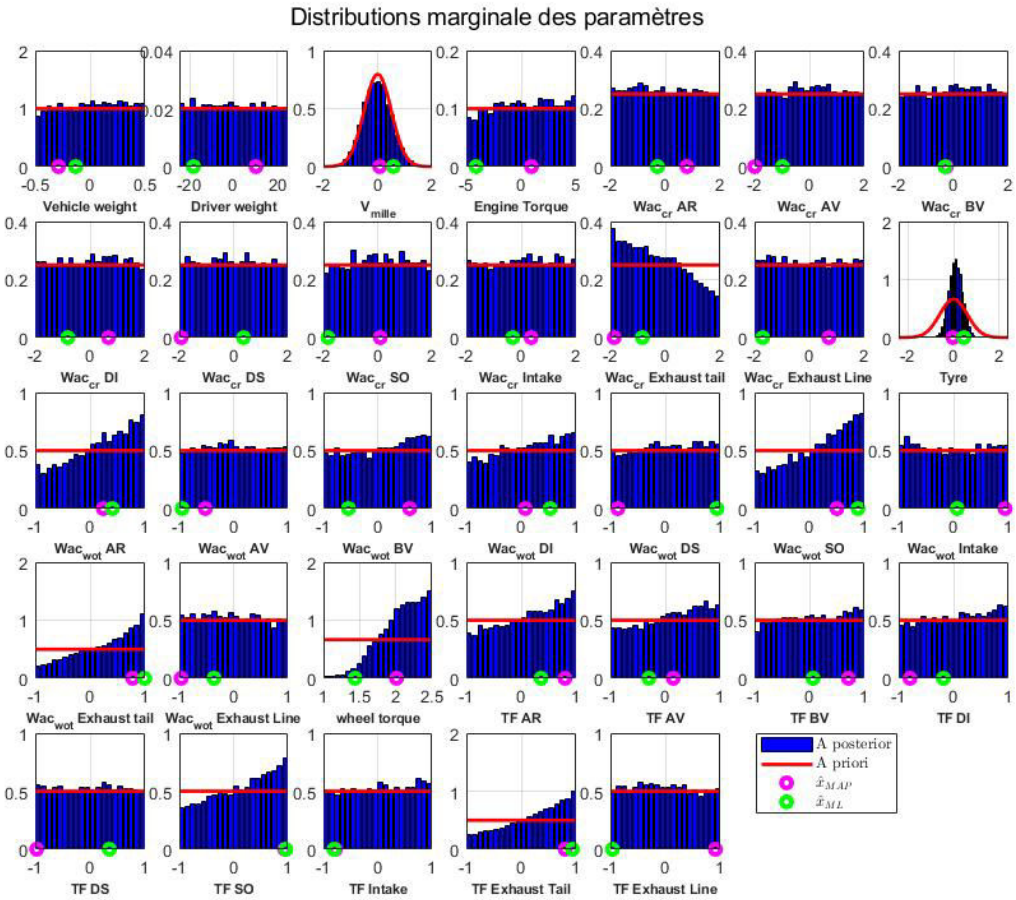


FIGURE 5.16 – Distributions marginales des densités de probabilité *a priori* $f(x|\mathcal{M}_3)$ et *a posteriori* $f(x|\widetilde{y}, \mathcal{M}_3)$, pour le segment B diesel. AR : face arrière du GMP. AV : face avant. BV : face boîte de vitesse. DI : face distribution. DS : face dessus. SO : face dessous.

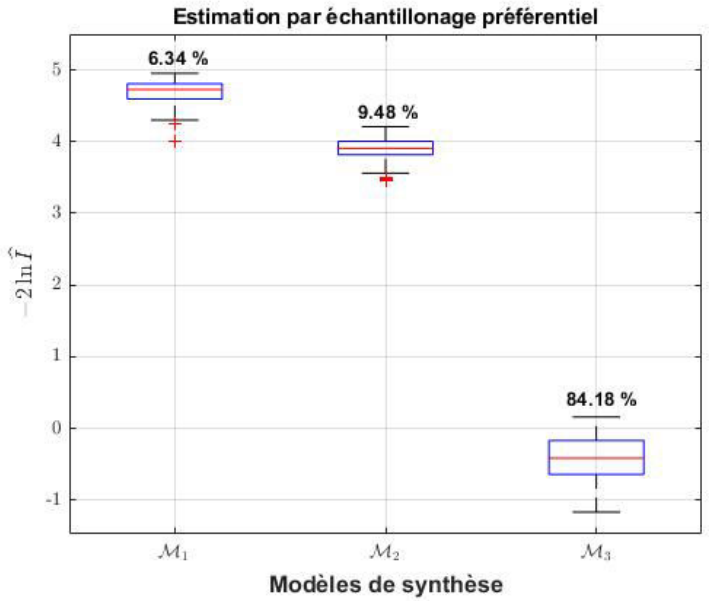


FIGURE 5.17 – Résultats de l'estimation numérique de l'*évidence du modèle* $\widehat{I}$, pour le segment B diesel. Les résultats présentés correspondent à $-2\ln\widehat{I}$.

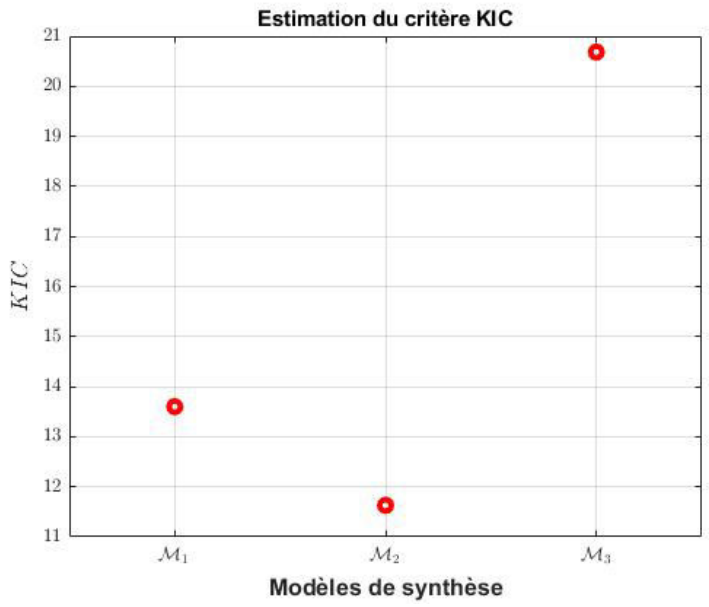


FIGURE 5.18 – Résultats de l'estimation du critère KIC, pour le segment B diesel.

5.5 Conclusion

La théorie de la sélection de modèle permet de choisir le modèle le plus pertinent à partir d'un compromis entre sa parcimonie et sa capacité à ajuster les observations réelles. L'*évidence* d'un modèle (ou la *vraisemblance marginalisée*) exprime automatiquement et quantitativement ce compromis en pénalisant les modèles complexes. Cette *évidence* est, dans la plupart du temps, une intégrale de grande dimension qui est difficile à calculer. C'est pourquoi les critères d'information tels que les critères KIC, BIC et AIC sont proposés dans la littérature pour estimer cette *évidence*. Ces critères sont faciles à calculer, mais ils reposent sur plusieurs hypothèses et ils devraient donc être utilisés avec précaution. Une estimation numérique de la *vraisemblance marginalisée* est possible, en combinant par exemple les simulations de Monte Carlo par chaînes de Markov (MCMC) avec l'échantillonnage préférentiel. Cependant, cette méthode est très coûteuse en termes de temps de calcul. Un exemple d'application à un modèle linéaire simple est ensuite présenté dans ce chapitre et permet de mieux comprendre les théories de la sélection de modèle. L'*évidence du modèle* est ensuite estimée numériquement pour les trois modèles de synthèse. Les résultats montrent que le modèle le plus pertinent correspond au modèle le plus complexe "six faces en tiers d'octave".

Chapitre 6

Conclusion générale et perspectives

Sommaire

6.1 Conclusion générale **188**
6.2 Perspectives **190**

6.1 Conclusion générale

Les travaux présentés dans cette thèse abordent la problématique de construction de modèles optimaux pour la simulation du bruit extérieur des véhicules. Ce travail de recherche a été impulsé par le service "acoustique" de la direction "prestation client" de la société Renault S.A.S, qui en a assuré le financement et le co-encadrement au travers d'un contrat CIFRE (Conventions Industrielles de Formation par la REcherche) le liant au Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine (LAUM) et à l'Institut Français des Sciences et Technologies des Transports, de l'Aménagement et des Réseaux (IFSTTAR).

Pour commercialiser un véhicule, les constructeurs doivent se soumettre à un règlement du bruit extérieur. Le règlement de la commission économique pour l'Europe, ECE R51.03, spécifie les niveaux admissibles que peut rayonner un véhicule automobile en roulage. Ce règlement est entré en vigueur depuis le 1er juillet 2016 pour remplacer l'ancien règlement ECE R51.02. Cela s'est traduit tant par un changement de procédure afin de déterminer les niveaux de bruit, que par une diminution drastique des niveaux sonores tolérés : passage en trois étapes de 74 dB (A) sous l'ancien règlement, à 68 dB (A) en 2024. Par conséquent, les constructeurs ainsi que les fournisseurs automobiles seront confrontés à un grand défi pour atteindre ces objectifs. Dans ce contexte industriel très contraint, la simulation numérique permet d'anticiper les problèmes, en estimant les niveaux rayonnés plus tôt dans le cycle de développement du véhicule, *i.e.* avant l'étape d'industrialisation.

Ainsi, l'objectif de ces travaux de thèse consiste précisément à développer une aide à la modélisation totale du bruit de passage d'un véhicule, en accord avec les exigences des essais réglementaires de la nouvelle norme. Le but est de construire des modèles optimaux pour prévoir et évaluer avec précision le bruit que peut rayonner un véhicule en roulage plus tôt dans le cycle de développement du véhicule. Il s'agit donc d'estimer la sensibilité et la robustesse des modèles en fonction de la nature et du nombre de données mises en jeu dans les modèles alimentant la simulation du bruit rayonné. Il faut alors se placer dans la recherche d'un compromis entre précision des estimations, sensibilité aux paramètres, robustesse de la méthode et efficacité numérique.

D'abord, pour familiariser le lecteur avec le bruit extérieur des véhicules, un état de l'art sur ce dernier est présenté dans le Chapitre 2. Ensuite, le modèle utilisé pour évaluer la fonction de transfert entre le groupe motopropulseur et le point récepteur qui se trouve à 7.5 m de l'axe de la piste d'essai est exposé. Il s'agit d'un chaînage de deux méthodes différentes, en l'occurrence (*i*) la méthode EBEM (Energy Boundary Element Method) appliquée dans le compartiment moteur et (*ii*) une méthode de lancer de faisceaux appliquée au champ semi-ouvert entre les parois du véhicule et le récepteur. Enfin, les modèles de prévision du

niveau de bruit de passage (modèles de synthèse) développés dans le cadre de cette thèse sont présentés dans ce même chapitre. Il s'agit de trois modèles dont la différence principale réside dans la finesse de description fréquentielle et géométrique des sources de bruit. Ils consistent tous à combiner le débit acoustique des sources de bruit avec le transfert acoustique adéquat, tout en prenant en compte le déplacement du véhicule sur la piste.

Le Chapitre 3 représente une revue bibliographique des méthodes de propagation d'incertitudes et d'analyse de sensibilité qui sont appliquées aux modèles de prévision du niveau de bruit de passage des véhicules ainsi qu'au modèle de calcul des fonctions de transfert. Une validation sur un cas test est également présentée en Annexe A pour permettre aux lecteurs d'assimiler ces méthodes. Cet exemple permet d'étudier, grâce à la méthode EFAST, la variabilité de l'indice de perte par transmission acoustique d'une plaque infinie isotrope vis-à-vis de certains paramètres physiques de la plaque, notamment son module de Young E, son coefficient de Poisson ν, sa densité ρ et son amortissement η. La méthode EFAST permet ensuite d'étudier l'influence de la variabilité des effets de sol, de l'absorption atmosphérique, de la diffusion par la turbulence atmosphérique et de la réfraction par les effets thermiques et aérodynamiques sur le transfert acoustique d'un véhicule. Cette étude est importante car elle sert à quantifier numériquement la variabilité de la fonction de transfert liée à tous ces phénomènes, qui pourrait, à terme, être prise en compte dans les modèles de prévision du bruit extérieur.

L'application des méthodes d'analyse de sensibilité et de propagation d'incertitudes sur les modèles de prévision du niveau de bruit de passage des véhicules ainsi que sur le modèle de calcul de la fonction de transfert est présentée dans le Chapitre 4. D'abord, pour valider la nouvelle approche, la méthode de calcul du transfert acoustique développée dans le cadre de cette thèse a été appliquée sur un cas test. Il a été observé que le couplage des deux méthodes est fructueux, car il permet de donner de meilleurs résultats que la méthode EBEM seule, en prenant en compte les phénomènes d'interférences avec le sol. La méthode est ensuite appliquée à un cas industriel, puis, la méthode de Morris est utilisée pour étudier l'impact de la variabilité de la position des sources de bruit et des paramètres caractérisant les matériaux absorbants qui se trouvent dans le compartiment moteur du véhicule, sur la fonction de transfert. Les résultats montrent une grande sensibilité des fonctions de transfert à la position des sources. Pour ce qui est des modèles de synthèse, l'étude est réalisée sur les trois modèles de prévision du bruit extérieur et sur trois véhicules ayant des rapports puissance/poids différents. Les paramètres d'entrée de ces modèles sont considérés incertains. C'est pourquoi une étude de quantification d'incertitudes est d'abord réalisée. Dans notre étude, nous faisons la distinction entre *incertitude de mesure*, qui est liée à la répétabilité, à la reproductibilité et aux conditions d'essais, et *variabilité de production*, qui est associée aux écarts entre véhicules

de même définition technique, produits avec le même outil industriel. Cette incertitude est ensuite propagée dans les modèles avec des méthodes type quasi-Monte Carlo. Enfin, une étude d'analyse de sensibilité est réalisée pour étudier l'impact de la variabilité des paramètres d'entrée sur la variabilité des niveaux de bruit en sortie des modèles. Les paramètres influents ont été identifiés et classés par famille de véhicule.

Le Chapitre 5 est consacré entièrement à la sélection de modèle. Un état de l'art est d'abord présenté. Il s'agit des théories de sélection de modèle disponibles dans la littérature pour choisir le meilleur modèle à partir d'un compromis entre parcimonie de ce dernier, et son pouvoir à ajuster les observations. L'*évidence* d'un modèle, qui représente la constante de normalisation dans la formule de Bayes, incarne automatiquement ce compromis en pénalisant les modèles complexes. Elle correspond à l'intégrale de la fonction de *vraisemblance* sur tout l'espace des paramètres du modèle. Cependant, cette intégrale, qui dépend du nombre de paramètres du modèle, est difficile à calculer. Les critères d'information, tels que les critères KIC, BIC et AIC, qui sont facile à calculer, permettent d'estimer cette *évidence*. Néanmoins, ces critères devraient être utilisés avec précaution car ils reposent sur plusieurs hypothèses. Dans ces travaux de thèse, la méthode utilisée pour choisir le modèle le plus pertinent parmi les trois modèles de synthèse combine les simulations de Monte Carlo par chaînes de Markov (MCMC) avec l'échantillonnage préférentiel. Néanmoins, cette méthode est très coûteuse en termes de temps de calcul. Un exemple d'application est exposé dans ce chapitre. Il s'agit de choisir le meilleur modèle parmi dix modèles linéaires. Cela permet de mieux comprendre les théories de la sélection de modèle. L'*évidence* est ensuite estimée numériquement pour les trois modèles de synthèse. Les résultats montrent que le modèle le plus pertinent correspond au modèle le plus complexe "six faces en tiers d'octave".

6.2 Perspectives

Les perspectives qu'ouvre le travail entrepris dans le cadre de cette thèse sont nombreuses. D'abord, concernant la méthode de calcul des fonctions de transfert du véhicules, qui combine la méthode EBEM et la méthode de lancer de faisceaux, nous avons remarqué que les premiers résultats obtenus sont encourageants et permettraient d'approfondir le sujet. Pour cela, il serait intéressant, dans le but de s'assurer de l'efficacité de cette méthode, d'étudier d'autres véhicules en confrontant les calculs aux mesures.

Il serait également intéressant d'étudier certaines hypothèses de modélisation, notamment la zone de chaînage entre les deux méthodes. En effet, dans ce travail de recherche, une surface virtuelle sous forme d'une jupe simule la communication vers l'extérieur. Ce choix de modélisation n'est pas représentatif de la réalité car il ne prend pas en compte les effets des

ondes stationnaires qui peuvent avoir lieu sous le véhicule. On pourrait alors imaginer cette zone au niveau des véritables ouvertures d'un véhicule (*i.e.* au niveau des passage de roues et du ski), en rajoutant des arêtes de diffraction pour faciliter la propagation des faisceaux. Néanmoins, cela engendrerait des coûts non négligeables en termes de temps de calcul, avec en plus un risque de non convergence en raison de la difficulté à propager les faisceaux jusqu'aux récepteurs.

Nous avons également remarqué que les résultats de cette méthode sont très sensibles à la directivité analytique (omnidirectionnelle, Lambertienne et échantillonnée) attribuée aux sources ponctuelles au niveau de la zone de chaînage. Il serait donc intéressant d'approfondir ce sujet en comparant d'autres résultats issus de ces directivités avec les mesures correspondantes. En plus, nous avons remarqué, à la fois sur le véhicule et sur le caisson, un décalage entre le calcul et la mesure en présence de petite ouverture. Il serait alors intéressant d'introduire dans la directivité des sources (lors du chaînage) un coefficient de diffraction qui dépend à la fois de la taille de l'ouverture et de la longueur d'onde (et donc de la fréquence).

Il est à noter également que la limite fréquentielle de cette méthode de calcul n'est pas connue de manière exacte. Il serait alors plus pertinent de définir cette limite afin de coupler, à terme, cette méthode avec une méthode type éléments de frontière. En effet, la méthode des éléments de frontière peut être utilisée pour calculer le transfert acoustique jusqu'à cette limite fréquentielle, *i.e.* lorsque le comportement modal et les résonances dans le compartiment moteur disparaissent. L'approche combinant la méthode EBEM et la méthode de lancer de faisceaux peut être appliquée au-delà de cette limite. Le facteur de recouvrement modal (Modal Overlap Factor : MOF) [150] peut, par exemple, être utilisé pour identifier cette fréquence de transition.

Par ailleurs, les modèles de synthèse devraient être alimentés à terme par des fonctions de transfert calculées. Il serait donc intéressant d'étudier l'impact de l'utilisation de ces fonctions de transfert (au lieu de fonctions de transfert mesurées) sur le bruit de passage d'un véhicule. La différence entre la fonction de transfert calculée et mesurée peut être tolérée différemment selon la gamme de véhicules étudiée. Par exemple, pour le segment B essence (qui correspond à un petit véhicule de faible puissance), la contribution du GMP correspond à la source dominante. Il serait donc important d'avoir des écarts faibles entre les fonctions de transfert calculées et mesurées. Cependant, le segment D diesel (qui représente un véhicule haut de gamme) est dominé par le bruit de contact pneumatique/chaussée. On peut alors tolérer des erreurs plus importantes sur ce segment. Cela nous permettrait de fixer des objectifs sur la précision de la fonction de transfert calculée par l'approche combinant la méthode EBEM et la méthode de lancer de faisceaux.

Même si l'impact de la variabilité des effets de sol, de l'absorption atmosphérique, de

la diffusion par la turbulence atmosphérique et de la réfraction par les effets thermiques et aérodynamiques, sur le transfert acoustique d'un véhicule est très petit (un écart-type de 0.06 dB (A) en valeur globale), il serait plus judicieux de prendre en compte cette variabilité dans les modèles de prévision du bruit extérieur, en plus de l'incertitude de mesure sur les fonctions de transfert.

D'autre part, une étude d'analyse de sensibilité a été réalisée et les paramètres influents ont été identifiés et classés par famille de véhicule. Il serait alors plus pertinent de faire un travail sur l'incertitude des paramètres d'entrée les plus influents afin d'améliorer la prévision des modèles de synthèse.

L'effet du couple à la roue τ_{tire} est également un paramètre important. Or, aujourd'hui, ce paramètre est mal caractérisé. Il faut donc approfondir ce sujet et développer des modèles précis pour caractériser la contribution du bruit de contact pneumatique/chaussée, qui peut dépendre de la vitesse du véhicule mais aussi de son accélération.

En outre, les résultats obtenus dans le Chapitre 5 ont montré que le meilleur modèle correspondait au plus complexe que nous avons développé, *i.e.* au modèle "six faces en tiers d'octave". Cela veut dire qu'on peut encore essayer d'améliorer le modèle en complexifiant ce dernier. D'abord, la température des sources pourrait être un paramètre important. En effet, la puissance des sources de bruit dépend fortement de la température, qui n'est malheureusement pas prise en compte dans notre modèle. On peut également imaginer un modèle où le GMP serait devisé spatialement en plusieurs zones plutôt qu'en six faces, ou encore, un modèle où la fréquence des sources serait représentée en bandes fines plutôt qu'en tiers d'octave. Pour aller encore plus loin, on peut considérer, après passage en bande fines, une corrélation entre le bruit de bouche d'échappement et le bruit d'admission. En effet, les systèmes d'admission d'air et d'échappement sont deux sources non négligeables dans le calcul du bruit extérieur. Ils sont dus aux pulsations de pression d'air lors de l'ouverture et des fermetures des soupapes. En basse fréquence, les deux sources de bruit sont chargées d'harmoniques dont les composantes principales sont liées directement à la vitesse de rotation du moteur ; c'est pourquoi ces deux sources peuvent être supposées corrélées mais seulement jusqu'à une certaine fréquence.

Par ailleurs, le choix du meilleur modèle est réalisé uniquement sur le segment B diesel. Il faudrait donc réaliser la même étude sur les autres types de véhicules, notamment le véhicule d'entrée de gamme (segment B essence) et le véhicule haut de gamme (segment D diesel). On rappelle que ce dernier est dominé par le bruit de contact pneumatique/chaussée. Il se pourrait alors qu'un modèle plus simple que le modèle "six faces en tiers d'octave" soit suffisant pour cette famille de véhicule.

Finalement, il serait intéressant de mesurer plusieurs fois le bruit de passage de véhicules

de même définition technique, produits avec le même outil industriel, dans le but de comparer les résultats de calcul avec ceux de la mesure tout en prenant en compte à la fois l'incertitude de mesure et la variabilité de production.

Annexe A

Validation sur un cas test : Plaque isotrope

Sommaire

A.1 Introduction **196**

A.2 Présentation du modèle analytique **196**

A.3 Résultats et discussion **198**

A.4 Conclusion **201**

A.1 Introduction

L'exemple présenté ici est inspiré de l'article de Christen et al. [151]. En effet, un problème typique en vibroacoustique est l'optimisation et le contrôle du TL (*Transmission loss* : l'indice de perte par transmission acoustique). Ce facteur dépend essentiellement des paramètres mécaniques de la structure vibrante, qui sont entachés d'incertitudes aux premiers stades de la conception. L'exemple présenté ci-dessous permet, en utilisant la méthode EFAST, d'étudier l'impact de la variabilité des paramètres mécaniques d'une plaque isotrope, excitée par onde plane, sur la variable d'intérêt (le TL de la plaque). Pour plus de détails sur ce sujet, le lecteur peut se référer à l'article de Christen et al. [151] qui présente, en plus des résultats illustrés ci-dessous, des résultats pour une plaque isotrope, orthotrope, et une plaque sandwich excitées par un champs diffus.

A.2 Présentation du modèle analytique

Considérons une plaque isotrope infinie se trouvant dans le plan $z = 0$, entre deux milieux comprenant un fluide léger de densité ρ_0 et de célérité c_0. Cette plaque est définie par son épaisseur h, son module de Young E, son coefficient de Poisson ν, sa densité ρ, et enfin son amortissement η. La plaque est excitée par une onde plane de pulsation ω avec un angle $\theta = 45°$ (cf. Figure A.1). L'épaisseur h de la plaque est fixée à 6 mm afin que la fréquence de coïncidence soit faible (autour de 4 kHz pour $\theta = 45°$).

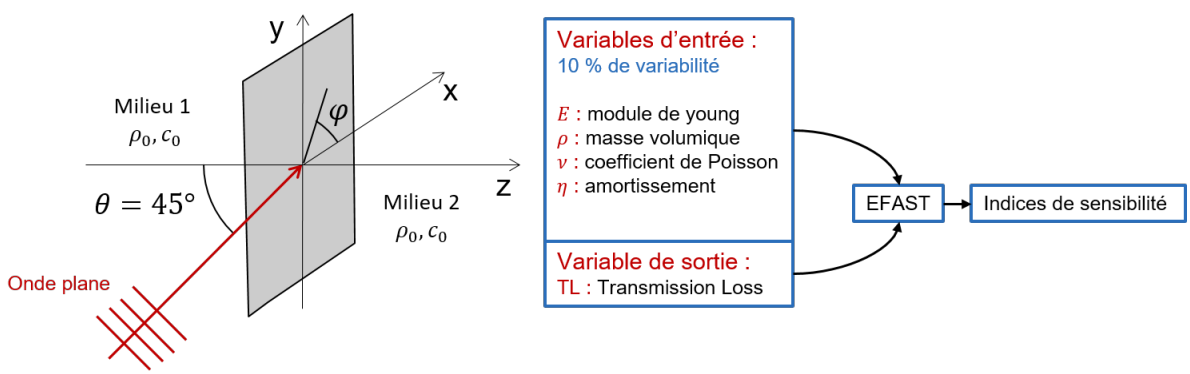


FIGURE A.1 – Plaque isotrope excitée par une onde plane à 45°

Considérons le mouvement forcé de la plaque imposé par une distribution de pression due à une onde acoustique incidente qui s'écrit comme suit [152] :

$$p_I(x, y, z) \;=\; p(x, y).\exp\left(-\frac{\omega}{c_0} j \cos(\theta) z\right) \tag{A.1}$$

L'onde réfléchie et l'onde transmise s'écrivent alors respectivement comme suit :

$$p_R(x,y,z) = p(x,y).R\exp\left(+\frac{\omega}{c_0}j\cos(\theta)z\right) \tag{A.2}$$

$$p_T(x,y,z) = p(x,y).T\exp\left(-\frac{\omega}{c_0}j\cos(\theta)z\right) \tag{A.3}$$

On écrit ainsi la pression acoustique totale dans les deux milieux [152] :

$$p_1(x,y,z) = p(x,y).\left[\exp\left(-\frac{\omega}{c_0}j\cos(\theta)z\right)+R\exp\left(+\frac{\omega}{c_0}j\cos(\theta)z\right)\right], \qquad si\ z<0 \tag{A.4}$$

$$p_2(x,y,z) = p_T(x,y,z) = p(x,y).T.\exp\left(-\frac{\omega}{c_0}j\cos(\theta)z\right), \qquad si\ z>0 \tag{A.5}$$

où p_1 représente la pression totale dans le milieu 1 ($z<0$) qui est décrite par l'onde incidente à laquelle vient s'ajouter l'onde réfléchie, p_2 représente la pression transmise dans le milieu 2 ($z>0$), $p(x,y)$ est la pression incidente sur la plaque à $z=0$, R est le coefficient de réflexion, et T le coefficient de transmission.

Le couplage entre la plaque et le fluide est caractérisé par une égalité entre les composantes normales à la surface de la plaque de la vitesse vibratoire et de la vitesse particulaire de l'onde acoustique dans le fluide. L'utilisation des équations de continuité permet alors d'écrire [152] :

$$\left.\frac{\partial p_1}{\partial z_1}\right|_{z=0} = \rho_0\omega^2 w(x,y) \Rightarrow \frac{-j\cos(\theta)}{Z_0}p(x,y)(1-R) = \omega w(x,y) \tag{A.6}$$

$$\left.\frac{\partial p_2}{\partial z_1}\right|_{z=0} = \rho_0\omega^2 w(x,y) \Rightarrow \frac{-j\cos(\theta)}{Z_0}p(x,y)T = \omega w(x,y) \tag{A.7}$$

où

$$p(x,y) = p_I(x,y,0) \tag{A.8}$$

$$R.p(x,y) = p_R(x,y,0) \tag{A.9}$$

$$T.p(x,y) = p_T(x,y,0) \tag{A.10}$$

$Z_0=\rho_0 c_0$ représente l'impédance du fluide (ici l'air dans les deux milieux), et w représente le champs de déplacement de la plaque.

L'équation du couplage dynamique entre une plaque mince isotrope et le fluide est donnée par [152] :

$$D\nabla^4 w - \omega^2\rho h w = p_1(x,y,0)-p_2(x,y,0) \tag{A.11}$$

où $D=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}(1+i\eta)$ correspond à la rigidité de flexion. L'Eq. (A.11) peut être réduite à

[152] :

$$\left(D\gamma^4 - \omega^2\rho h\right) w \;=\; p_1(x,y,0) - p_2(x,y,0) \tag{A.12}$$

où

$$p_1(x,y,0) - p_2(x,y,0) \;=\; p_I(x,y,0) + p_R(x,y,0) - p_T(x,y,0) \tag{A.13}$$

et $\gamma = \frac{\omega}{c_0}\sin(\theta)$ correspond au nombre d'onde de flexion de la plaque.
On déduit ainsi l'impédance de la plaque qui est définie comme le rapport pression/vitesse [152] :

$$Z_p \;=\; j\omega(\rho h - \frac{D\omega^2}{c_0^4} sin^4(\theta)) \tag{A.14}$$

En combinant les équations (A.6) à (A.14), on obtient [151] :

$$\frac{p_T(x,y,0)}{p_I(x,y,0)} \;=\; \left(\frac{Z_p\cos(\theta)}{2Z_0} + 1\right)^{-1} \tag{A.15}$$

La transparence acoustique de la plaque est définie comme le ratio des intensités dans les deux milieux. En considérant l'intensité acoustique de chaque côté de la plaque $I = \rho_0 c_0 |p|^2$, le facteur de transmission de la plaque s'écrit comme suit [152] :

$$\tau \;=\; \left|\frac{p_T(x,y,0)}{p_I(x,y,0)}\right|^2 \tag{A.16}$$

L'indice de perte par transmission acoustique de la plaque est donné en fonction du logarithme décimal du facteur de transmission [152] :

$$TL \;=\; 10\log\frac{1}{\tau} \tag{A.17}$$

L'indice de perte par transmission acoustique atteint sa valeur minimale pour une fréquence appelée "fréquence de coïncidence". A cette fréquence, l'impédance de la plaque atteint également sa valeur minimale, qui est égale à zéro s'il n'y a pas d'amortissement. Elle est donnée par [152]

$$f_{coin} \;=\; \frac{c^2}{2\pi\sin^2\theta}\sqrt{\frac{m}{Re(D)}} \tag{A.18}$$

A.3 Résultats et discussion

Les valeurs nominales des paramètres mécaniques correspondent aux valeurs typiques d'une plaque en aluminium, et sont reprises de l'article de Christen et al. [151]. Ces paramètres sont supposés incertains, avec l'amortissement η qui varie uniformément entre 0.25% et 0.75%,

et les autres paramètres qui varient uniformément de ±10% autour de leur valeur nominale (cf. Table A.1). La méthode EFAST est ensuite utilisée pour étudier l'impact de la variabilité de ces paramètres sur la sortie du modèle.

Variable	Valeur Min	Valeur Max
E_x $G(Pa)$	63	77
ν	0.27	0.33
ρ $(kg.m^{-3})$	2430	2970
η $(.10^{-3})$	2.5	7.5

TABLE A.1 – Plages de variation des paramètres d'une plaque isotrope avec 10% de variabilité

Les valeurs des indices de Sobol de premier ordre sont présentés en fonction de la fréquence dans la Figure A.2. On remarque que la somme des indices de sensibilité est égale à 1 pour toutes les fréquences, à l'exception de la fréquence correspondant à la fréquence de coïncidence. On remarque également que la densité ρ est le paramètre le plus important en basse fréquence. À l'inverse, en haute fréquence, le module de Young E détient le plus grand indice de sensibilité. En effet, les basses fréquences sont pilotées par la masse, tandis que les hautes fréquences par la rigidité.

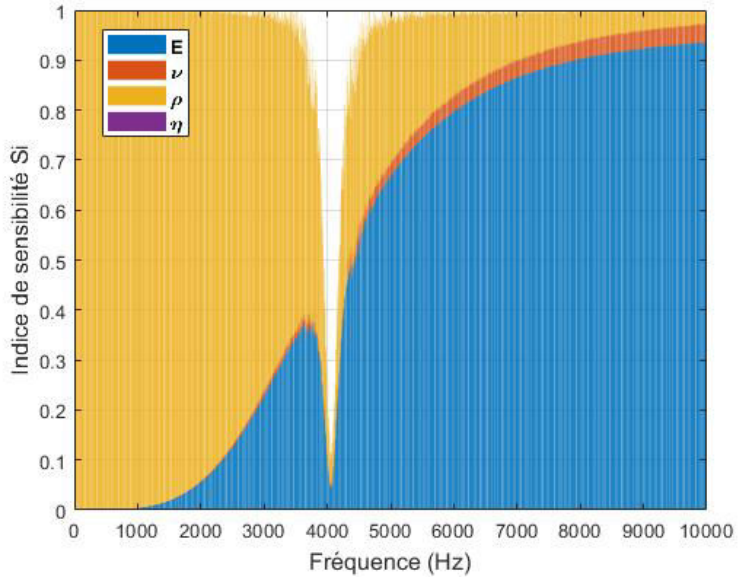


FIGURE A.2 – Indices de sensibilité de premier ordre dans le cas d'une plaque infinie isotrope

Autour de la fréquence de coïncidence, la somme des indices est inférieure à 1. Cela

implique des interactions entre les paramètres. C'est pourquoi, les indices de sensibilités totaux sont présentés sur la Figure A.3. On remarque que les indices de sensibilité totaux de la densité ρ et du module de Young E sont grands autour de la fréquence de coïncidence f_{coin}, tandis que l'impact de la variabilité du coefficient de Poisson ν et de l'amortissement η sur le TL de la plaque est négligeable. Cela peut être expliqué par le fait que la fréquence de coïncidence est caractérisée par une chute importante du TL, et que la valeur de cette fréquence est en fonction de la densité ρ et du module de Young E (la densité ρ est divisée par le module de Young E dans l'Eq. (A.18), ce qui explique l'interaction entre les deux paramètres). Tout cela signifie que la position de la fréquence de coïncidence f_{coin} est plus importante que la chute réelle du TL, qui est contrôlée par l'amortissement η.

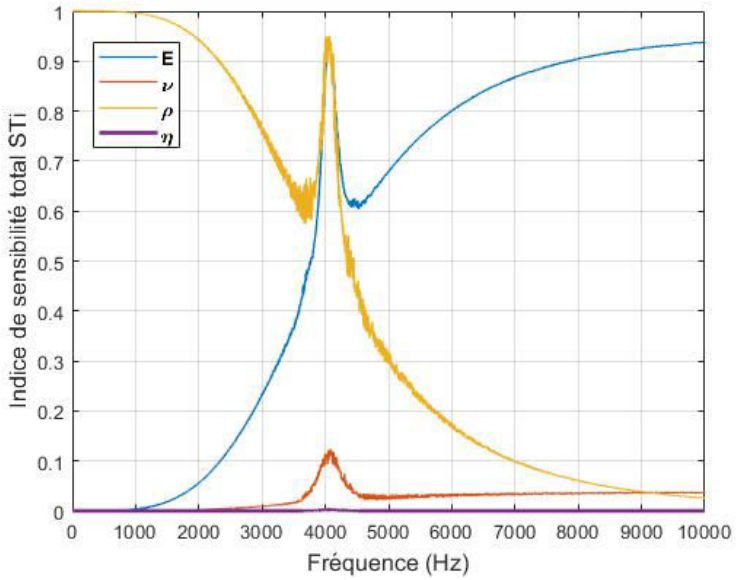
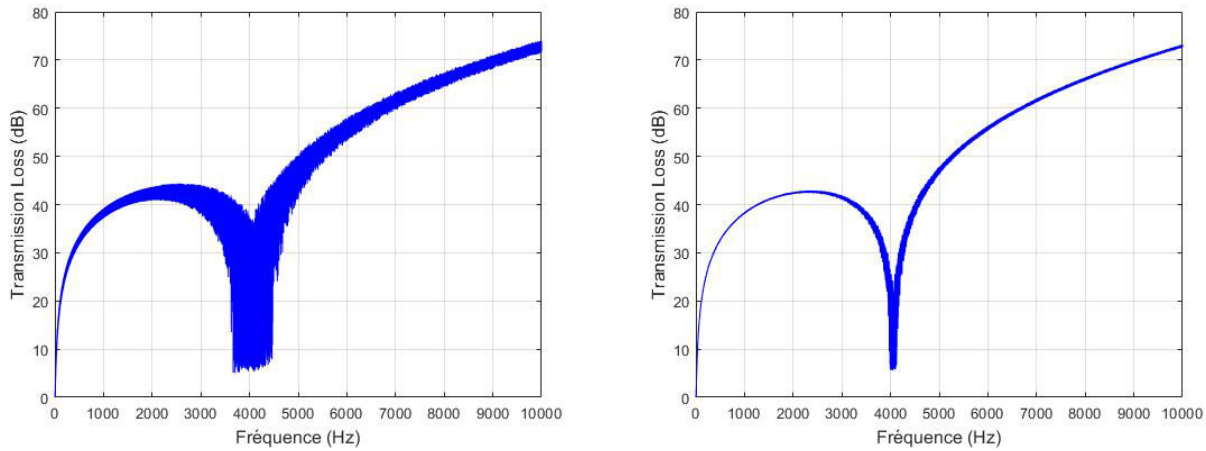


FIGURE A.3 – Indices de sensibilité totaux dans le cas d'une plaque infinie isotrope

La variabilité des deux paramètres les plus influents, qui sont le module de Young E et la densité ρ est maintenant fixée à 1%, tandis que la plage de variation de l'amortissement η et du coefficient de Poisson ν reste inchangée (cf. Table A.2). Les simulations réalisées avec la méthode EFAST sont tracées sur la Figure A.4a (10% de variabilité) et la Figure A.4b (1% de variabilité sur E et ρ). On remarque une diminution considérable de la variabilité du TL après la délimitation de la variabilité des paramètres influents. L'analyse de sensibilité a permis ainsi de déterminer les paramètres les plus influents (*i.e.* le module de Young E et la densité ρ) et de diminuer fortement la variabilité de la sortie du modèle en diminuant leur variabilité.

Variable	Valeur Min	Valeur Max
E_x $G(Pa)$	69.3	70.7
ν	0.27	0.33
ρ $(kg.m^{-3})$	2673	2727
η $(.10^{-3})$	2.5	7.5

TABLE A.2 – Plages de variation des paramètres d'une plaque isotrope avec 1% de variabilité sur E et ρ



(a) 10% de variabilité

(b) 1% de variabilité

FIGURE A.4 – L'indice de perte par transmission acoustique d'une plaque isotrope en fonction de la fréquence pour différentes variabilités des paramètres d'entrée

A.4 Conclusion

Ce cas test permet d'étudier la variabilité de l'indice de perte par transmission acoustique d'une plaque infinie isotrope vis-à-vis de certains paramètres physiques de la plaque. Une propagation d'incertitudes dans le modèle est réalisée, et les paramètres influents sont déterminés par la méthode EFAST. Nous avons constaté que la densité de la plaque ρ est le paramètre le plus important en basse fréquence tandis que le module de Young E est le plus influent en haute fréquence. Nous avons remarqué également la présence d'interactions entre ces deux paramètres autour de la fréquence de coïncidence. Ces paramètres détiennent les plus grands indices de sensibilité. Cela signifie que la position de la fréquence de coïncidence f_{coin} est plus importante que la chute réelle du TL, qui est contrôlée par l'amortissement η.

Annexe B

Présentation du modèle analytique basé sur la théorie des rayons

Sommaire

B.1 Champ de pression au-dessus d'un sol homogène dans un milieu homogène 204

B.2 Modèles d'impédance acoustique de sol 206

B.3 Prise en compte de l'effet d'épaisseur 207

B.4 Effet de l'absorption atmosphérique 208

B.5 Effet de réfraction par la stratification de l'atmosphère 210

B.6 Effet de diffusion par la turbulence atmosphérique 216

B.1 Champ de pression au-dessus d'un sol homogène dans un milieu homogène

La propagation au-dessus d'un sol donne naissance à des interférences, dues à la combinaison entre l'onde directe provenant de la source réelle et l'onde réfléchie provenant de la source image. Pour une source supposée ponctuelle monopolaire et omnidirectionnelle (*i.e.* dans le cas d'une onde sphérique), ainsi que pour une réflexion spéculaire et une distance de propagation supérieure à la longueur d'onde, placée dans un milieu homogène et non dissipatif (même nombre d'onde pour le rayon direct et réfléchi), le champ de pression total au point récepteur R (cf. Figure B.1) est donné par l'équation de Weyl-Van Der Pol [153] :

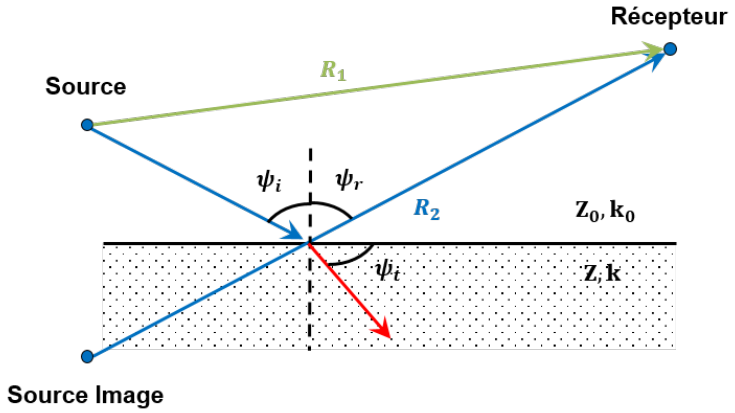


FIGURE B.1 – Constitution du champ acoustique au-dessus d'un sol

$$p(R) \;=\; \frac{\exp ik_0R_1}{R_1} + Q\frac{\exp ik_0R_2}{R_2} \tag{B.1}$$

où R_1 et R_2 représentent respectivement le rayon direct et réfléchi entre la source S et le récepteur R (en m). k_0 est le nombre d'onde dans le milieu de propagation. Q représente le coefficient de réflexion en ondes sphériques. Ce dernier est égal au coefficient de réflexion en ondes planes R_p, auquel on rajoute un terme correctif pour passer d'une onde plane à une onde sphérique. Sa formule est donnée par [153] :

$$Q \;=\; R_p + (1 - R_p)F(w) \tag{B.2}$$

L'équation de Weyl-Van Der Pol s'écrit alors comme suit :

$$p(R) \;=\; \frac{\exp ik_0R_1}{R_1} + R_p\frac{\exp ik_0R_2}{R_2} + (1 - R_p)F(w)\frac{\exp ik_0R_2}{R_2} \tag{B.3}$$

On remarque que l'équation est composée de trois termes. Le premier et le deuxième représentent respectivement la contribution de l'onde directe et l'onde réfléchie, tandis que le troisième terme caractérise l'onde de sol. En effet l'onde de sol représente la partie de l'onde réfléchie qui n'est pas prise en compte par le coefficient de réflexion en onde plane. En fonction de leur déphasage, l'onde directe et l'onde réfléchie se combinent de manière constructive ou destructive du mouvement ondulatoire au point de réception, ce qui donne naissance à des interférences. $F(w)$ est une fonction, appelée "fonction de perte" ou "boundary loss factor" en anglais, qui décrit l'interaction d'un front d'onde courbé avec le sol [154]. Elle est définie en fonction de son argument complexe w par [153] :

$$F(w) \;=\; 1 + i\sqrt{\pi} w \;\exp\left(-w^2\right) \operatorname{erfc}(-iw) \tag{B.4}$$

où erfc représente la fonction d'erreur complémentaire [155], et w la distance numérique donnée par l'équation suivante [156] :

$$w \;=\; \frac{2ik_0R_2}{(1-R_p)^2\cos^2\left(\psi_i\right)}\left(\frac{Z_0}{Z}\right)^2\left(1-\frac{k_0^2}{k^2}\cos^2(\psi_i)\right) \tag{B.5}$$

où Z_0 et Z représentent respectivement l'impédance de l'air et du sol, k_0 et k leur nombre d'onde associé.
Le coefficient de réflexion en onde plane R_p, s'exprime, pour une réaction étendue (dans le cas général, cf. Figure B.3), de la façon suivante [157] :

$$R_p \;=\; \frac{\xi(\psi_i)\sin\left(\psi_i\right)-1}{\xi(\psi_i)\sin\left(\psi_i\right)+1} \tag{B.6}$$

où $\xi(\psi_i)$ est fonction de l'angle d'incidence ψ_i. En utilisant la loi de réfraction de Snell-Descartes à l'interface de deux milieux, cette fonction peut être donnée par :

$$\xi(\psi_i) \;=\; \frac{Z}{Z_0\sin\left(\psi_t\right)} \;=\; \frac{Z}{Z_0\left(1-\left(\frac{k_0}{k}\right)^2\cos^2(\psi_i)\right)^{1/2}} \tag{B.7}$$

Dans le cas d'une réaction localisée (cf. Figure B.2)), il suffit de prendre l'angle de transmission $\psi_t = \frac{\pi}{2}$, le coefficient d'onde plane s'écrit alors :

$$R_p \;=\; \frac{\frac{Z}{Z_0}\sin(\psi_i)-1}{\frac{Z}{Z_0}\sin(\psi_i)+1} \tag{B.8}$$

D'après l'article de L'Espérence et al. [105], il est utile de réécrire l'Eq. (B.1) comme suit :

$$p^2 = \frac{1}{R_1^2} + \frac{|Q|^2}{R_2^2} + \frac{2|Q|}{R_1 R_2} \cos\left[k_0(R_2 - R_1) + Arg(Q)\right] \tag{B.9}$$

où le terme $k(R_2 - R_1)$ représente le déphasage dû à la différence de la longueur du trajet R_1 et R_2, tandis que $Arg(Q)$ représente le déphasage dû à la réflexion sur un sol d'impédance Z. Ainsi, la pression quadratique au point récepteur R peut être considérée comme la somme du champ incohérent (les deux premiers termes de l'Eq. (B.9)) et d'un terme décrivant l'interaction partielle entre le rayon direct et réfléchi (troisième terme de l'Eq. (B.9)).

B.2 Modèles d'impédance acoustique de sol

Plusieurs modèles pour caractériser les propriétés acoustiques des sols sont publiés dans la littérature. Ils expriment tous l'impédance acoustique de la surface en fonction de certains paramètres influents. Nous pouvons citer le modèle d'impédance de Delany et Bazley [158], ainsi que le modèle de Miki [159], qui sont utilisés pour caractériser les milieux non poreux (fermés). Nous pouvons citer également le modèle d'impédance de Zwicker et Kosten [160], et le modèle d'Attenborough à quatre paramètres [161], utilisés dans les milieux poreux (granulaires). Nous retiendrons dans cet exemple les modèles utilisés pour les milieux non poreux (la piste d'essai est considérée comme complètement réfléchissante), en l'occurrence le modèle de Delany Bazley et de Miki, qui sont présentés ci-après.

Le modèle d'impédance de Delany et Bazley est un modèle semi-empirique classique qui est simple à utiliser. Il n'utilise qu'un seul paramètre pour caractériser l'impédance du sol : la résistance au passage de l'air σ, et ne demande pas de connaître les propriétés micro-structurelles du sol. Cependant, son domaine de validité est limité. Le nombre d'onde dans le sol k et l'impédance acoustique Z sont alors donnés par les formules suivantes [158] :

$$Z = Z_0 \left(1 + 9.08 \left(\frac{f}{\sigma}\right)^{-0.75} + i.11.9 \left(\frac{f}{\sigma}\right)^{-0.73}\right) \tag{B.10}$$

$$k = k_0 \left(1 + 10.08 \left(\frac{f}{\sigma}\right)^{-0.70} + i.10.3 \left(\frac{f}{\sigma}\right)^{-0.59}\right) \tag{B.11}$$

où f représente la fréquence (en Hz), et σ la résistance au passage de l'air (exprimée en kN.s.m^{-4} ou en kPa.s.m^{-2}).

Miki a remarqué que la partie réelle de l'impédance acoustique calculée à partir du modèle de Delany et Bazley était négative en basses fréquences, et donc que le modèle n'était pas

transposable dans le domaine temporel. Miki a donc légèrement modifié les formules du modèle de Delany et Bazley, et a proposé de nouveaux coefficients empiriques qui sont donnés par [159] :

$$Z = Z_0 \left(1 + 5.50 \left(\frac{f}{\sigma}\right)^{-0.632} + i.8.43 \left(\frac{f}{\sigma}\right)^{-0.632}\right) \tag{B.12}$$

$$k = k_0 \left(1 + 7.81 \left(\frac{f}{\sigma}\right)^{-0.618} + i.11.41 \left(\frac{f}{\sigma}\right)^{-0.618}\right) \tag{B.13}$$

Le modèle de Miki est le modèle d'impédance utilisé dans l'étude de l'influence du sol sur le transfert acoustique réalisée dans le cadre de cette thèse.

B.3 Prise en compte de l'effet d'épaisseur

Afin de pouvoir modéliser la propagation d'une onde sonore au-dessus d'un sol, et prendre en compte l'effet d'épaisseur dans le cas d'un sol du type bi-couche, il est important de comprendre les modèles de réaction à l'interface air/surface. On peut distinguer deux modèles de réaction : la réaction localisée et la réaction étendue [106].

Dans une réaction localisée, la réaction du sol est indépendante de l'angle d'incidence sonore. L'onde transmise se propage suivant la normale à la surface du matériau, et les deux angles, d'incidence et de réflexion, sont égaux (cf. Figure B.2). On retrouve ce type de réaction lorsque l'onde rencontre un sol réfléchissant de type revêtement routier fermé, ou un sol naturel.

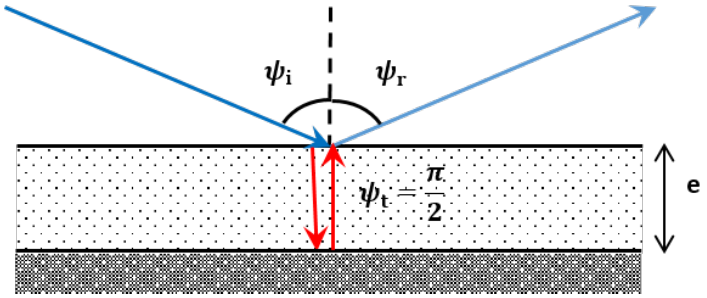


FIGURE B.2 – Sol à réaction localisée ($\psi_i = \psi_r$ et $\psi_t = \frac{\pi}{2}$)

Lorsque l'onde incidente rencontre un matériau très absorbant (poreux), l'onde transmise ne se propage pas suivant la normale à la surface, mais suivant un angle de transmission qui dépend essentiellement du type du matériau et de l'angle d'incidence. On dit alors, qu'on est dans le cadre d'une réaction étendue (cf. Figure B.3).

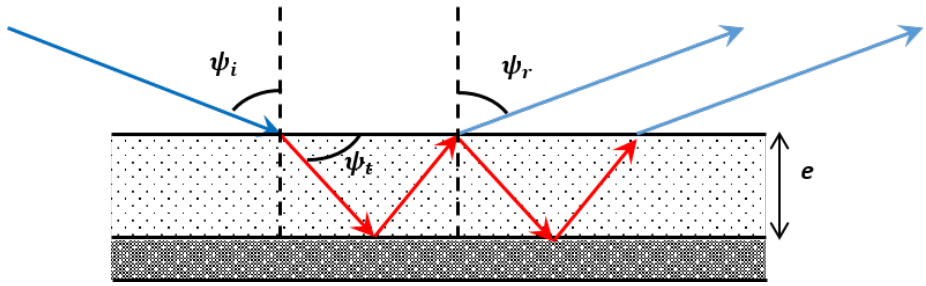


FIGURE B.3 – Sol à réaction étendue

En présence d'un sol bicouche, composé d'une couche absorbante d'épaisseur finie, recouvrant une couche rigide d'épaisseur semi-infinie (*i.e.* que la seconde couche présente une impédance supérieure à la première), des phénomènes complexes peuvent apparaître. Dans le cas d'une réaction localisée, l'onde se propage dans le matériau absorbant suivant la normale à la surface avant d'être réfléchie par la couche rigide vers l'interface sol/air, toujours perpendiculairement à la surface. Cependant, dans le cas d'une réaction étendue, l'onde sonore va se réfléchir plusieurs fois dans la couche absorbante. On appelle cet effet-là : *effet d'épaisseur*.

Pour un sol bi-couche, l'épaisseur effective e peut être prise en compte par un terme correctif sur l'impédance du sol Z. Dans le cas le plus général (*i.e.* dans le cas d'une réaction étendue), l'impédance qui rend compte de l'effet d'épaisseur est donnée par [157] :

$$Z_c = \frac{Z}{\sin\psi_t} \coth\left(-ike\sin(\psi_t)\right) \tag{B.14}$$

où Z_c représente l'impédance acoustique corrigée, et le terme $\cos(\psi_t)$ peut être calculé en utilisant la loi de réfraction de Snell-Descartes à l'interface de deux milieux. Dans le cas d'une réaction localisée (*i.e.* $\psi_t = \frac{\pi}{2}$), l'impédance corrigée devient :

$$Z_c = Z\coth\left(-ike\right) \tag{B.15}$$

La piste d'essai étant considérée comme complètement réfléchissante, l'épaisseur effective est prise en compte dans cet exemple en considérant un sol à réaction localisée.

B.4 Effet de l'absorption atmosphérique

Les propriétés physiques et la composition chimique des fluides ont une influence sur la propagation de l'onde acoustique. En effet, elles font apparaître plusieurs phénomènes thermodynamiques et échanges énergétiques. La dissipation de l'énergie acoustique résulte

alors essentiellement de trois processus principaux, que l'on considère des fluides simples (gaz par exemple) ou des fluides complexes (non homogènes ou polyphasiques), respectivement liée à la viscosité, la conduction thermique et la relaxation moléculaire [105]. Dans un milieu ouvert et pour des gaz polyatomiques tel que l'air, il a été démontré que les phénomènes de viscosité et de conduction thermique étaient négligeables. Seule la relaxation moléculaire est à prendre en considération dans le phénomène d'absorption atmosphérique [105]. Ce dernier dépend essentiellement de l'humidité relative du milieu, de la température ainsi que la fréquence considérée. Pour calculer cette atténuation atmosphérique, la norme ISO 9613-1 :1993 [162] est utilisée dans notre exemple. Le coefficient d'atténuation atmosphérique $\alpha(f)$ est défini par la relation suivante :

$$\begin{aligned}\alpha(f) &= 8.686f^2\Bigg\{\Bigg[1.84\times10^{-11}\Big(\frac{p_a}{p_r}\Big)^{-1}\Big(\frac{T}{T_0}\Big)^{1/2}\Bigg]+\Big(\frac{T}{T_0}\Big)^{-5/2}\Bigg(0.01275\Big[\exp\Big(\frac{-2239.1}{T}\Big)\Big]\\ &\times\Bigg[f_{rO}+\Big(\frac{f^2}{f_{rO}}\Big)\Bigg]^{-1}+0.1068\Big[\exp\Big(\frac{-3352.0}{T}\Big)\Big]\Bigg[f_{rN}+\Big(\frac{f^2}{f_{rN}}\Big)\Bigg]^{-1}\Bigg)\Bigg\} \qquad \text{(B.16)}\end{aligned}$$

où T et T_0 représentent respectivement la température atmosphérique et la température atmosphérique de référence (par exemple à 20°C, soit 293.15 K). p_a et p_r représentent respectivement la pression atmosphérique et la pression atmosphérique de référence (101.325 Pa). f_{rO} et f_{rN} représentent respectivement les fréquences de relaxation de l'oxygène et de l'azote, elles s'expriment par :

$$f_{rO} = \frac{p_a}{p_r}\Big(24+4.04\times10^4 H\frac{0.02+H}{0.391+H}\Big) \qquad \text{(B.17)}$$

$$f_{rN} = \frac{p_a}{p_r}\Big(\frac{T}{T_0}\Big)^{-1/2}\Bigg\{9+280H\exp\Bigg(-4.170\Big[\Big(\frac{T}{T_0}\Big)^{-1/3}-1\Big]\Bigg)\Bigg\} \qquad \text{(B.18)}$$

où H représente l'humidité relative de l'air (en %). A noter que l'atténuation atmosphérique est exprimée en dB/m. Un coefficient d'absorption atmosphérique est ainsi défini dans le modèle comme suit :

$$A_b(R) = 10^{\frac{-\alpha(f)R}{20}} \qquad \text{(B.19)}$$

Finalement, l'Eq. (B.9) devient [105] :

$$p^2 = \frac{A_b(R_1)^2}{R_1^2}+\frac{A_b(R_2)^2.|Q|^2}{R_2^2}+\frac{2.A_b(R_1).A_b(R_2).|Q|}{R_1R_2}\cos\left[k_0(R_2-R_1)+Arg(Q)\right] \qquad \text{(B.20)}$$

B.5 Effet de réfraction par la stratification de l'atmosphère

Dans les sections précédentes, le milieu de propagation (ici l'atmosphère) est considéré comme étant homogène, notamment que la célérité du son est indépendante de l'altitude ; or en réalité, l'atmosphère est rarement homogène, et une seule valeur de célérité ne peut la définir. Suivent z en particulier, le milieu présente souvent plusieurs couches avec des valeurs de célérité différentes, qui sont fonction de la température et de la vitesse du vent. En effet, les échanges thermiques entre le sol et la couche basse de l'atmosphère conduisent à une variation de la température de l'air en fonction de l'altitude. La vitesse du vent est également plus élevée en hauteur qu'au niveau du sol à cause de la rugosité de surface du sol. Ces deux phénomènes conduisent à un gradient vertical de la vitesse du son. On dit alors que l'atmosphère est *stratifiée*. Par analogie avec l'optique, la présence de plusieurs couches auxquelles correspondent des valeurs de célérité différentes, impose aux rayons sonores une déviation, selon la loi de Snell-Descartes. Ce phénomène est appelé "réfraction" ; il est illustré sur la Figure B.4 [106]. Les effets de la température et du vent sur la propagation en milieu extérieur peuvent alors être représentés par un seul indice qui varie avec l'altitude [1], que l'on appelle indice de réfraction acoustique n. Son expression est donnée par [106; 163] :

$$n(z) \;=\; \frac{c_0}{c(z)} \;=\; \langle n(z)\rangle + \mu(z) \tag{B.21}$$

où $c(z)$ représente la célérité de l'onde sonore dans le milieu traversé, c_0 représente la célérité de référence au niveau du sol. On distingue également deux termes : $\langle n(z)\rangle = \frac{c_0}{\langle c(z)\rangle}$ qui représente la partie moyenne ou déterministe de l'indice de réfraction, et $\mu(z)$ qui représente la partie fluctuante ou aléatoire. Ces grandeurs sont respectivement liées aux phénomènes de réfraction et de diffusion par la turbulence. Dans cette section, nous nous intéressons uniquement à la partie moyenne de l'indice de réfraction $\langle n(z)\rangle$. La partie concernant la diffusion par la turbulence atmosphérique est présentée dans la section suivante (cf. Section B.6).

Les profils verticaux moyens de la célérité *effective* sont calculés à partir des profils verticaux moyens de vent et de température. Ces profils sont moyennés sur des durées de l'ordre de la minute à l'heure, pendant lesquelles les profils de vent et de température sont considérés stationnaires. Or, en réalité, les profils verticaux fluctuent de manière significative durant cette période. Ce phénomène est appelé intermittence, et ne doit pas être confondu avec la turbulence atmosphérique, qui elle, est inférieure à l'ordre de la seconde et conduit au phéno-

1. Dans le cas d'un sol plan et dégagé, l'évolution des profils verticaux avec la distance (x,y) est négligé, on considère seulement leur dépendance en altitude z [106].

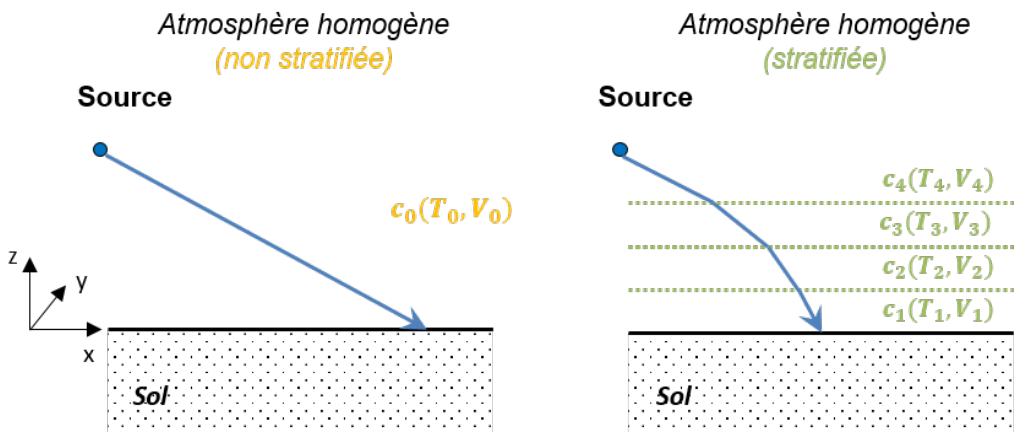


FIGURE B.4 – Principe du phénomène de réfraction

mène de diffusion (cf. Section B.6). La célérité moyenne *effective* est donnée en fonction de la partie moyenne des profils verticaux du vent et de la température par l'expression suivante [106] :

$$\langle c(z)\rangle \;=\; \sqrt{\gamma.R.\langle T(z)\rangle} + \langle V(z)\rangle.\cos\alpha \;=\; c_0\sqrt{\frac{\langle T(z)\rangle}{T_0}} + \langle V(z)\rangle.\cos\alpha \tag{B.22}$$

où $\gamma \approx 1.4$ est le rapport des chaleurs spécifiques de l'air, $R = 286,69$ J.kg^{-1}.K^{-1} représente la constante des gaz parfaits, α est l'angle entre le vecteur du vent moyen et la direction de propagation du son entre la source et le récepteur, T_0 est la température moyenne de l'air au niveau du sol (exprimée en Kelvin), $\langle T(z)\rangle$ et $\langle V(z)\rangle$ représentent respectivement la température moyenne et la vitesse moyenne du vent à l'altitude z.
Après dérivation et un développement limité au premier ordre, le gradient vertical de célérité *effective* s'exprime par [106] :

$$\frac{d\langle c(z)\rangle}{dz} \;\approx\; \frac{1}{2}.\frac{\gamma.R}{c_0}.\frac{d\langle T(z)\rangle}{dz} + \langle V(z)\rangle.\cos\alpha \tag{B.23}$$

Dans notre exemple d'application, le profil de célérité est considéré *linéaire* ; il est exprimé par [105; 163; 164] :

$$\langle c(z)\rangle \;=\; c_0(1 + az) \tag{B.24}$$

où c_0 représente la valeur de la célérité du son à $z = 0$, et a représente le gradient de célérité normalisé par c_0.

Hidaka et al. [163] ont montré que pour un profil de célérité linéaire, les rayons acoustiques sont représentés par les arcs d'un cercle. L'élément du rayon dR présenté sur la Figure B.5

est donné par :

$$dR = \sqrt{dx^2 + dz^2} \tag{B.25}$$

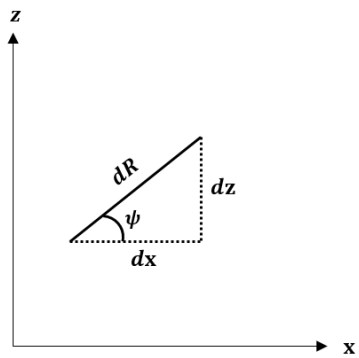


FIGURE B.5 – Élément du rayon de propagation

En utilisant l'angle d'inclinaison du rayon ψ, on peut écrire la longueur du trajet du rayon de $z = 0$ à z comme suit [163] :

$$R(Z) = \int_0^z \frac{dz}{\sin(\psi)} \tag{B.26}$$

A partir de la loi de Snell-Descartes ($\frac{\cos\psi}{c} = \frac{\cos\psi_0}{c_0}$), et en prenant en compte l'Eq. (B.24), on obtient après intégration la longueur du trajet du rayon [163] :

$$R(z) = \frac{1}{a\cos\psi_0}\left[\sin^{-1}\{(1+az)\cos\psi_0\} - \frac{\pi}{2} + \psi_0\right] \tag{B.27}$$

où ψ_0 représente l'angle d'inclinaison du rayon à $z = 0$. Le temps de propagation du rayon de $z = 0$ à z est calculé comme suit [163] :

$$\tau(z) = \int_0^z d\tau = \int_0^z \frac{dR}{c} = \frac{1}{2ac_0}\ln\frac{f(0)}{f(z)} \tag{B.28}$$

où

$$f(z) = \frac{1 + \sqrt{1-(1+az)^2\cos^2\psi_0}}{1 - \sqrt{1-(1+az)^2\cos^2\psi_0}} \tag{B.29}$$

De plus, en définissant la longueur horizontale $x(z)$ qui représente la projection de $R(z)$ sur l'axe x, on peut écrire [163] :

$$x(z) = \int_0^z \frac{dz}{\tan\psi} = \frac{1}{a\cos\psi_0}\left[\sin\psi_0 - \sqrt{1-(1+az)^2\cos^2\psi_0}\right] \tag{B.30}$$

Après cette transformation élémentaire, on obtient [163]

$$\left(x - \frac{\tan\psi_0}{a}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{a}\right)^2 = \frac{1}{a^2\cos^2\psi_0} \tag{B.31}$$

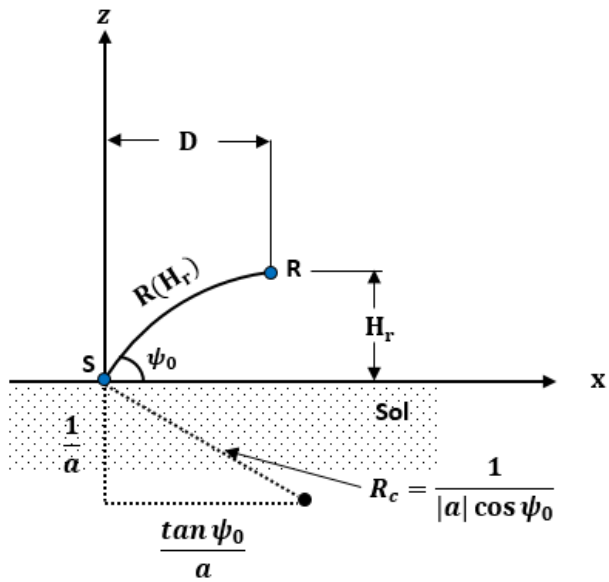


FIGURE B.6 – Schéma d'un rayon acoustique émis par une source au sol en présence d'un gradient de célérité positif

On remarque effectivement que le rayon acoustique est représenté par l'arc d'un cercle dont le centre se trouve à $x_c = \tan\psi_0/a$ et $z_c = -1/a$, et dont le rayon R_c est égal à $1/|a|\cos\psi_0$ (cf. Figure B.6).

A partir de l'Eq. (B.31), on peut facilement calculer l'angle ψ_0 en remplaçant x et z par les coordonnées de la source S et du récepteur R [105] :

$$\tan\psi_0 = \frac{aD}{2} + \frac{H_r(2 + aH_r)}{2D} \tag{B.32}$$

où D et H_r (exprimés en m) représentent respectivement la distance horizontale et verticale entre la source S et le récepteur R.

Deux points sur l'arc du cercle peuvent avoir la même hauteur lorsque le trajet du rayon passe par sa hauteur maximale (dans le cas d'un gradient positif) ou par sa hauteur minimale (dans le cas d'un gradient négatif) (cf. Figure B.7). Les équations données précédemment ne peuvent donc pas être utilisées directement. Hidaka et al. [163] et L'Espérance et al. [105]

proposent de comparer la distance horizontale entre la source et le récepteur D avec la distance horizontale entre la source et l'apogée du rayon D_m (où $D_m = \frac{\tan\psi_0}{a}$). Si $D > D_m$, alors la longueur du trajet du rayon et son temps de propagation sont donnés par [105] :

$$R(H_r') = 2R(H_m) - R(H_r) \tag{B.33}$$

$$\tau(H_r') = 2\tau(H_m) - \tau(H_r) \tag{B.34}$$

où H_r' représente la distance verticale entre la source et le récepteur lorsque $D > D_m$ (en m), H_m représente la distance verticale entre la source et l'apogée du rayon (en m), et $R(H_m)$, $R(H_r)$, $\tau(H_m)$ et $\tau(H_r)$ sont calculés à partir de l'Eq. (B.27) et l'Eq. (B.28). Il est facile d'obtenir la hauteur de l'apogée H_m en remplaçant x par D_m dans l'Eq. (B.31), elle est définie par [105] :

$$H_m = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{\cos\psi_0} - 1\right) \tag{B.35}$$

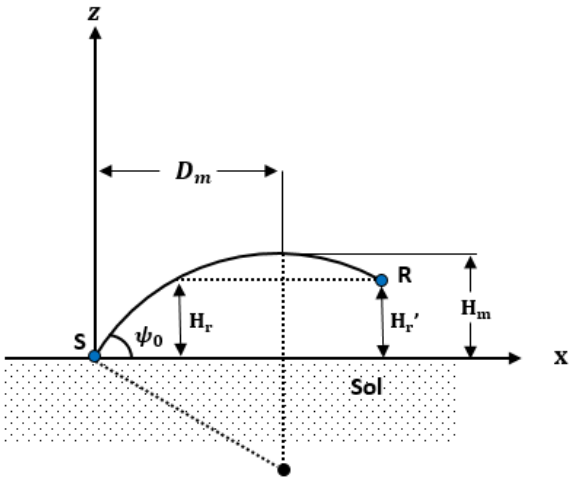
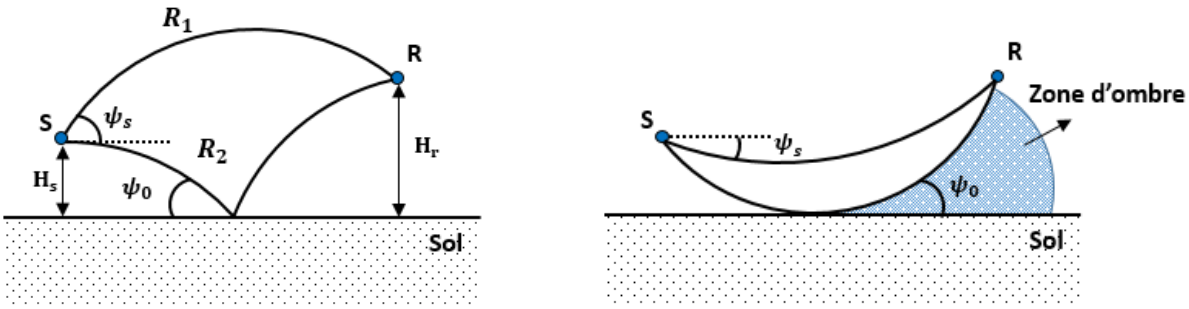


FIGURE B.7 – Schéma d'un rayon acoustique émis par une source au sol en présence d'un gradient de célérité positif passant par sa hauteur maximale

Jusqu'à présent, la source est supposée se trouver au point de référence (*i.e.* à $z = 0$), tandis que le récepteur à une hauteur H_r. Dans le cas contraire, il est possible de réaliser un calcul par réciprocité (*i.e.* en échangeant la position de la source et du récepteur). Par extension, il est possible de calculer la longueur du trajet et le temps de propagation du rayon réfléchi comme une somme des deux parties séparées (le point d'impact est considéré comme une source, tandis que la source et le récepteur réels comme des récepteurs) [105]. Cependant, si ni la source ni le récepteur ne se trouvent à $z = 0$, il est possible de calculer le

rayon direct de S à R (ou de R à S si le récepteur est plus haut que la source) en changeant le point de référence de $z = 0$ à $z = H_s$ (ou $z = H_r$, si $H_s > H_r$), avec H_s et H_r représentant cette fois-ci la hauteur de la source et du récepteur par rapport au sol (cf. Figure B.8). Cela revient à remplacer dans l'Eq. (B.24) c_0 par c_{H_s}, et a par un gradient de célérité normalisé relatif a', défini comme suit [2] :

$$a' = \frac{ac_0}{c_{H_s}} \tag{B.36}$$



(a) Gradient de célérité positif

(b) Gradient de célérité négatif

FIGURE B.8 – Schéma d'un rayon acoustique émis par une source se trouvant à une hauteur H_s

En présence d'un gradient de célérité fort et positif et/ou une grande distance de propagation, des rayons supplémentaires apparaissent et rebondissent plusieurs fois sur le sol avant d'atteindre le récepteur R. Cela revient à résoudre une équation du quatrième ordre afin de trouver les points d'impact de ces rayons sur le sol [165] :

$$n(n+1)x^4-(2n+1)Dx^3+\left[b_r^2+(2n^2-1)b_s^2+D^2\right]x^2-(2n-1)b_s^2Dx+n(n-1)b_s^4 = 0 \tag{B.37}$$

où

$$b_i^2 = \frac{H_i}{a}(2+aH_i), \text{ pour } i = s \text{ ou } r \tag{B.38}$$

où n représente le nombre de réflexions sur le sol, et l'inconnue x représente la distance horizontale entre la source et les points d'impact sur le sol. Il a été démontré dans l'article d'Embleton et al. [165] qu'en présence d'un gradient positif, il existe en moins un rayon direct (pour $n = 0$), et un rayon réfléchi (pour $n = 1$). Dans notre exemple d'application (*i.e.* pour une petite distance de propagation), il a été vérifié que même en présence d'un très fort gradient de célérité, la réfraction ne provoque qu'une déformation des rayons directs

2. Il ne faut pas oublier que H_r dans l'Eq. (B.32) représente la distance horizontale entre S et R. Il faut donc remplacer H_r dans cette équation par $H_r - H_s$

et réfléchis (cf. Figure B.8a). Cependant, en présence d'un gradient fort et négatif (et/ou une grande distance de propagation), il se peut qu'aucun rayon n'atteigne le récepteur R à cause de la présence d'une zone d'ombre acoustique (cf. Figure B.8b). Ce problème est généralement résolu en introduisant de la diffraction. Notre modèle n'ayant pas été validé dans de telles conditions, nous nous limiterons à l'utilisation d'un gradient de célérité positif.

Dans l'Eq. (B.20), l'interférence entre le rayon direct et réfléchi est représentée par la différence de la longueur des deux trajets $k_0(R_2 - R_1)$. Cependant, la célérité varie en fonction de z ; cela signifie que le nombre d'onde k_0 n'est pas constant pour tous les rayons. Pour prendre en compte ce phénomène, le modèle utilise la différence des temps de propagation des rayons au lieu de la différence des longueurs des trajets. Par conséquent, l'Eq. (B.20) est réécrite comme suit :

$$p^2 = \frac{A_b(R_1)^2}{R_1^2} + \frac{A_b(R_2)^2.|Q|^2}{R_2^2} + \frac{2.A_b(R_1).A_b(R_2).|Q|}{R_1 R_2} \cos\left[2\pi f(\tau_2 - \tau_1) + Arg(Q)\right] \quad \text{(B.39)}$$

Dans la section suivante, on s'intéresse à la partie fluctuante (aléatoire) de l'indice de réfraction $\mu(z)$ (cf. Eq.(B.21)), qui est liée au phénomène de diffusion par la turbulence atmosphérique.

B.6 Effet de diffusion par la turbulence atmosphérique

La partie aléatoire de l'indice de réfraction μ, rend compte des effets de la turbulence atmosphérique sur la propagation acoustique en milieu extérieur. Ceci est dû à la fluctuation aléatoire des grandeurs thermiques et aérodynamiques. En propagation extérieure, c'est la micro-turbulence qui intéresse les acousticiens, (*i.e.* les effets aléatoires qui se passent à une échelle de temps inférieure à la seconde) [106]. C'est pourquoi, pour mesurer ces fluctuations, il faut utiliser un matériel autorisant une acquisition à fréquence élevée d'échantillonnage (par exemple, un anémomètre sonique 3D avec un taux d'échantillonnage de 20 Hz).

Les effets de turbulence ont été pris en compte dans le modèle en ajoutant aux termes d'amplitude et au nombre d'onde k_0 un terme fluctuant dont la composante aléatoire est normalement distribuée [164; 166; 167]. Dans ce cas-là, on peut écrire $A_1 = 1 + a_1,\ A_2 = 1 + a_2$ et $k_1R_1 = k_0R_1 + \delta_1,\ k_2R_2 = k_0R_2 + \delta_2$. Les termes A_1, A_2 et k_1, k_2 représentent respectivement, en présence de turbulence atmosphérique, l'amplitude du rayon direct et du rayon réfléchi et leur nombre d'onde correspondant (sans turbulence $A_1 = A_2$ et $k_1 = k_2$). Un certain nombre d'hypothèses probabilistes sont introduites dans l'article de Daigle et al. [167]. D'abord, il est supposé que les variances de l'amplitude de l'onde directe et de l'onde réfléchie sont égales, soit $\langle a_1^2 \rangle = \langle a_2^2 \rangle = \langle a^2 \rangle$. Ceci est raisonnable tant que le rapport $\frac{R_1}{R_2} \approx 1$.

Ensuite, les termes a, δ_1 et δ_2 sont supposés normalement distribués avec un écart-type de $\langle a^2 \rangle^{1/2}$, σ_1 et σ_2 respectivement. Les parenthèses $\langle . \rangle$ indiquent la moyenne temporelle sur un nombre statistiquement important de fluctuations turbulentes (on a implicitement $\langle a \rangle = 0$ et $\langle \delta_1 \rangle = \langle \delta_2 \rangle = 0$). On définit également ρ_a et ρ_δ qui représentent les covariances d'amplitude et de phase entre l'onde directe et l'onde réfléchie. Finalement, Q est une grandeur déterministe, car le coefficient de réflexion en onde plane R_p, et la distance numérique w sont non fluctuants.

On considère $\phi = k_0(R_2 - R_1) + Arg(Q)$. En présence de turbulence, la moyenne temporelle du terme cosinus de l'Eq. (B.20) est calculée comme suit [166; 167] :

$$\langle \cos[\phi + \delta_1 + \delta_2] \rangle \;=\; \cos\phi \;\exp\left[-\sigma_1^2(1-\rho_\delta)\right] \tag{B.40}$$

où les écarts-types de la phase de l'onde directe et de l'onde réfléchie sont également supposés égaux ($\sigma_1 = \sigma_2$). Un calcul similaire pour introduire la covariance d'amplitude a montré que [166; 167] :

$$\langle a_1 a_2 \cos[\phi + \delta_1 + \delta_2] \rangle \;=\; \langle a^2 \rangle \rho_a \cos\phi \;\exp\left[-\sigma_1^2(1-\rho_\delta)\right] \tag{B.41}$$

à partir de l'Eq. (B.40) et l'Eq. (B.41), on obtient la moyenne temporelle de l'Eq. (B.39) [164; 166; 167] :

$$\begin{aligned} \langle p^2 \rangle \;=\; & \left(\frac{A_b(R_1)^2}{R_1^2} + \frac{A_b(R_2)^2.|Q|^2}{R_2^2}\right)(1 + \langle a^2 \rangle) + \left(\frac{2.A_b(R_1).A_b(R_2).|Q|}{R_1 R_2}\right)\cos[2\pi f(\tau_2 - \tau_1) \\ & + Arg(Q)]\;(1 + \langle a^2 \rangle \rho_a)\;\exp\left[-\sigma_1^2(1-\rho_\delta)\right] \end{aligned} \tag{B.42}$$

Les termes $\langle a^2 \rangle$, σ_1, ρ_a et ρ_δ sont calculés à partir des paramètres principaux représentant la turbulence atmosphérique. Ces paramètres sont [164; 106] :

— la distance de corrélation L, aussi appelée *échelle* de la turbulence. Elle représente la distance de la corrélation spatiale des fluctuations d'indice de réfraction, qui donne une idée de la taille moyenne des structures de la turbulence. Pour des situations représentatives de la basse atmosphère (couche limite de surface), la valeur de la distance de corrélation L est proche de 1.

— la variance de l'indice de réfraction $\langle \mu^2 \rangle$, aussi appelée *intensité* de turbulence. Cette variance s'exprime en fonction des fluctuations du vent et de la température comme suit [167] :

$$\langle \mu^2 \rangle \;=\; \left(\frac{\sigma_v \cos\alpha}{c_0}\right)^2 + \frac{\sigma_v \sigma_T R_{vT} \cos\alpha}{c_0 T_0} + \left(\frac{1}{2}\frac{\sigma_T}{T_0}\right)^2 \tag{B.43}$$

on suppose ici que les fluctuations de température et de vent sont normalement distribuées, avec un écart-type σ_T et σ_v respectivement. R_{vT} représente la corrélation entre les fluctuations

du vent et de la température, α est l'angle entre le vecteur du vent moyen et la direction de propagation du son entre la source et le récepteur, T_0 est la température moyenne de l'air au niveau du sol (exprimée en Kelvin), c_0 est la valeur de référence de la célérité du son à la température T_0

Bibliographie

[1] Agence française de sécurité sanitaire environnementale, *Impacts sanitaires du bruit. État des lieux, indicateurs bruit-santé*, 05 2004.

[2] United Nations Economic Commission for Europe, *Addendum 50 : Regulation No. 51 Revision 3. Uniform provisions concerning the approval of motor vehicles having at least four wheels with regard to their sound emissions*, 2016.

[3] United Nations Economic Commission for Europe, *Addendum 50 : Regulation No. 51 Revision 2. Uniform provisions concerning the approval of motor vehicles having at least four wheels with regard to their sound emissions*, 2011.

[4] C. Locqueteau and J. Salem, "Point of view of automotive OEM for new passby noise regulation R51-03 : challenges and new deployment," in *Automotive and Railway Comfort*, SIA, 2012.

[5] L. Pardo and S. Ficheux, "Exterior pass-by noise regulation - Monitoring database and impact assessment," in *Automotive and Railway Comfort*, SIA, 2012.

[6] K. Burnham and D. Anderson, *Model Selection and Multimodel Inference : A Practical Information-Theoretic Approach*. Springer-Verlag New York, 2002.

[7] M. Thivant, A. Cloix, C. Clerc, N. Blairon, and C. Braguy, "Boundary Element Energy Method : an efficient tool for acoustic computation," in *10ème Congrès Français d'Acoustique* (S. F. d'Acoustique SFA, ed.), (Lyon, France), Apr. 2010.

[8] N. Noé and M. Vermet, "Application de l'acoustique géoméetrique à la simulation de la réflexion et de la diffraction par des surfaces courbes," in *Congrès Français d'Acoustique*, 2010.

[9] M. Braun, S. Walsh, J. Horner, and R. Chuter, "Noise source characteristics in the ISO 362 vehicle pass-by noise test : Literature review," *Applied Acoustics*, vol. 74, pp. 1241–1265, 2013.

[10] M. Braun, *Sound source contributions for the prediction of vehicle pass-by noise.* PhD thesis, Loughborough University, 2014.

[11] International Organization for Standardization, *ISO 362 : Acoustics - Measurement of noise emitted by accelerating road vehicles - Engineering method*, 1998.

[12] D. Moore, "Development of ECE R51.03 Noise Emission Regulation," in *SAE Technical Paper*, SAE International, 2017.

[13] International Organization for Standardization, *ISO 10844 : Acoustique - Spécification des surfaces d'essai pour le mesurage du bruit émis par les véhicules routiers et leurs pneumatiques*, 2014.

[14] International Organization for Standardization, *ISO 362-1 : Measurement of noise emitted by accelerating road vehicles — Engineering method — Part 1 : M and N categories*, 2015.

[15] J. Huijssen, R. Hallez, B. Pluymers, and W. Desmet, "A synthesis procedure for pass-by noise of automotive vehicles employing numerically evaluated source–receiver transfer functions," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 332, p. 3790–3802, 2013.

[16] M. Viallet Laxalde, *Prédimensionnement Vibroacoustique du Groupe Moto Propulseur.* PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, 2007.

[17] A. Phillips and M. Orchard, "Drive-By Noise Prediction by Vehicle System Analysis," in *SAE Technical Paper*, SAE International, 2001.

[18] J. Kraemer, *Le métier de l'acoustique automobile.* Service Synthèse Acoustique et Vibrations Renault, 1995.

[19] L. Leclercq, *Modélisation dynamique du trafic et applications à l'estimation du bruit routier.* PhD thesis, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 2002.

[20] M. Hueser, K. Govindswamy, K. Wolff, and R. Stienen, "Sound Quality and Engine Performance Development Utilizing Air-to-Air Simulation and Interior Noise Synthesis," in *SAE Technical Paper*, SAE International, 2003.

[21] A. Sameur, *Modèle de contact pneumatique/chaussée pour la prévision du bruit de roulement.* PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2004.

[22] G. Dubois, *Modèle de contact dynamique pneumatique/chaussée par approche multi-aspérités - application au bruit de roulement.* PhD thesis, Ecole Centrale de Nantes, 2012.

[23] U. Sandberg and J. Ejsmont, *Tyre/road noise reference book*. Informex, 2002.

[24] International Organization for Standardization, *ISO 362-3 : Measurement of noise emitted by accelerating road vehicles — Engineering method — Part 1 : Indoor testing M and N categories*, 2016.

[25] P. Van de Ponseele, H. Van der Auweraer, and K. Janssens, "Source-Transfer-Receiver approaches : a review of methods," in *International Conference on Noise and Vibration Engineering, USD*, ISMA, 2012.

[26] K. Janssens, F. Bianciardi, L. Britte, P. Van de Ponseele, and H. Van der Auweraer, "Pass-by noise engineering : a review of different transfer path analysis techniques," in *International Conference on Noise and Vibration Engineering, USD*, ISMA, 2014.

[27] H. Van der Auweraer, F. Bianciardi, P. Van de Ponseele, and K. Janssens, "Transfer Path Analysis Innovations for Airborne Noise Problems with Focus on Pass-By-Noise," in *SAE Technical Paper*, SAE International, 2014.

[28] P. Van Der Linden, H. Defay, and J. Le Martret, "Truck pass-by noise, detailed sources contribution identification during ISO362 pass-by," in *International Conference on Noise and Vibration Engineering*, ISMA, 1998.

[29] A. Fleszar, P. Van Der Linden, J. Johnson, and M. Grimmer, "Combining Vehicle and Test-Bed Diagnosis Information to Guide Vehicle Development for Pass-By Noise," in *SAE Technical Paper*, SAE International, 2001.

[30] P. Van Der Linden and M. Mantovani, "The Validity of Reciprocal Acoustic Transfer Function Measurements on Trucks for Pass-By Noise," in *Internoise*, 1996.

[31] G. Eisele, N. Alt, and F. Pichot, "Vehicle Exterior Noise Simulation," in *13th International Congress on Sound and Vibration*, International Institute of Acoustics and Vibration, 2006.

[32] R. Ciskowski and C. Brebbia, *Boundary Element Methods in Acoustics*. Computational engineering, Computational Mechanics Publications, 1991.

[33] C. Wang, J. Zhu, Q. Zhang, C. Yang, A. Parrett, and M. Qian, "Simulation of Vehicle Exterior Sound Fields by High Frequency Boundary Element Method," in *SAE Technical Paper*, SAE International, 2005.

[34] J. Huijssen, P. Fiala, R. Hallez, S. Donders, and W. Desmet, "Numerical evaluation of source–receiver transfer functions with the fast multipole boundary element method for predicting pass-by noise levels of automotive vehicles," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 331, no. 9, pp. 2080 – 2096, 2012.

[35] D. Herrin, F. Martinus, T. Wu, and A. Seybert, "An assessment of the high frequency boundary element and rayleigh integral approximations," *Applied Acoustics*, vol. 67, no. 8, pp. 819 – 833, 2006.

[36] A. Appel de Gardane, D. Capiello, and P. Mordillat, "Numerical Assessment of Car Pass-by Noise," in *Automotive NVH Comport*, SIA, 2016.

[37] N. Noe, C. Rougier, J. Rouch, and I. Schmich, "An hybrid beam and particle tracing with time dependant radiosity for accurate impulse response of rooms prediction," in *Acoustics 2012* (S. F. d'Acoustique, ed.), (Nantes, France), Apr. 2012.

[38] M. Thivant and O. Minck, "Drastic exterior noise reduction through optimization of acoustic shielding package," in *Automotive NVH Comfort*, SIA, 2016.

[39] B. Betgen, M. Thivant, A. Cloix, P. Bouvet, and T. Lambert, "Boundary Element Energy Method for the Acoustic Prediction of Automotive External Noise. Industrial Application," in *AIA-DAGA*, 2013.

[40] M. Vermet, *Simulation par l'acoustique géométrique en présence de surfaces courbes avec prise en compte de la diffraction.* PhD thesis, Université de Poitiers, 2010.

[41] B. Iooss, *Contributions au traitement des incertitudes en modélisation numérique.* Habilitation à diriger des recherches, Université Toulouse III, 2009.

[42] E. DE Recquigny, N. Devictor, and S. Tarantola, *Uncertainty in industrial pratice.* Wiley, 2008.

[43] S. Schlesinger, R. Crosbie, R. Gagné, G. Innis, C. Lalwani, J. Loch, R. Sylvester, R. Wright, N. Kheir, and D. Bartos, "Terminology for model credibility," *Simulation*, vol. 32, pp. 103–104, 1979.

[44] E. De Rocquigny, "Quantifying uncertainty in an industrial approach : an emerging consensus in an old epistemological debate," *S.A.P.I.EN.S*, vol. 2, no. 1, 2009.

[45] American Society of Mechanical Engineers, *Guide for Verification and Validation in Computational Solid Mechanics : ASME Vamp ;.* ASME V&V, Amer Society of Mechanical, 2006.

[46] F. Hoffman and J. Hammondsl, "Propagation of Uncertainty in Risk Assessments : The Need to Distinguish Between Uncertainty Due to Lack of Knowledge and Uncertainty Due to Variability," *Risk Analysis*, vol. 14, no. 5, pp. 707 – 712, 1994.

[47] W. L. Oberkampf, S. M. DeLand, B. M. Rutherford, K. V. Diegert, and K. F. Alvin, "Error and uncertainty in modeling and simulation," *Reliability Engineering & System Safety*, vol. 75, no. 3, pp. 333 – 357, 2002.

[48] H. C. Frey and D. E. Burmaster, "Methods for characterizing variability and uncertainty : Comparison of bootstrap simulation and likelihood-based approaches," *Risk Analysis*, vol. 19, pp. 109–130, Feb 1999.

[49] A. Cullen and H. Frey, *Probabilistic Techniques in Exposure Assessment : A Handbook for Dealing with Variability and Uncertainty in Models and Inputs*. Springer US, 1999.

[50] C. Soize, "A comprehensive overview of a non-parametric probabilistic approach of model uncertainties for predictive models in structural dynamics," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 288, no. 3, pp. 623 – 652, 2005. Uncertainty in structural dynamics.

[51] B. Sudret, *Uncertainty propagation and sensitivity analysis in mechanical models Contributions to structural reliability and stochastic spectral methods*. Habilitation à diriger des recherches, Université Blaise Pascal - Clermont II, 2007.

[52] R. Moore, *Interval Analysis*. Prentice-Hall, 1966.

[53] L. Jaulin, M. Kieffer, O. Didrit, and E. Walter, *Applied Interval Analysis : With Examples in Parameter and State Estimation, Robust Control and Robotics*. Springer-Verlag London, 2001.

[54] L. Zadeh, "Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 1, no. 1, pp. 3 – 28, 1978.

[55] A. P. Dempster, "A generalization of bayesian inference," *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, vol. 30, no. 2, pp. 205–247, 1968.

[56] G. Shafer, *A mathematical theory of evidence*. Princeton University Press, 1976.

[57] Y. Ben-Haim, *Info-Gap Decision Theory : Decisions Under Severe Uncertainty*. Academic Press, 2001.

[58] G. Saporta, *Probabilités, Analyse des données et statistique*. Editions Technip, Jan. 1990.

[59] G. Saporta, *Probabilités, Analyse des données et statistique (2nd ed)*. Editions Technip, Jan. 2006.

[60] A. Bowman and A. Azzalini, *Applied Smoothing Techniques for Data Analysis : The Kernel Approach with S-Plus Illustrations*. Oxford Statistical Science Series, Oxford University Press, 1997.

[61] E. T. Jaynes, "Information theory and statistical mechanics," *Phys. Rev.*, vol. 106, pp. 620–630, May 1957.

[62] J. Kapur and H. Kesavan, *Entropy optimization principles with applications*. Academic Press, 1992.

[63] C. Shannon, "A mathematical theory of communication," vol. 27, pp. 379–423, 623–656, 07 1948.

[64] C. Robert, *L'analyse statistique bayésienne*. Economica, 1992.

[65] C. Robert, *Le choix bayésien : Principes et pratique*. Statistique et probabilités appliquées, Springer-Verlag France, Paris, 2006.

[66] C. Robert, *The Bayesian Choice : From Decision-Theoretic Foundations to Computational Implementation*. Springer Texts in Statistics, Springer New York, 2007.

[67] T. Bayes, "An essay towards solving a problem in the doctrine of chances," vol. 53, pp. 370–418, 01 1763.

[68] J. M. Hammersley and D. C. Handscomb, *Monte Carlo Methods*. Monographs on Statistics and Applied Probability, Springer Netherlands, 1964.

[69] C. Robert and G. Casella, *Monte Carlo Statistical Methods*. Springer, 1999.

[70] P. Hellekalek and G. Larcher, *Random and Quasi-Random Point Sets*. Springer-Verlag New York, 1998.

[71] M. D. McKay, R. J. Beckman, and W. J. Conover, "A comparison of three methods for selecting values of input variables in the analysis of output from a computer code," *Technometrics*, vol. 21, no. 2, pp. 239–245, 1979.

[72] A. Gelman and X.-L. Meng, "Simulating normalizing constants : from importance sampling to bridge sampling to path sampling," *Statist. Sci.*, vol. 13, no. 2, pp. 163–185, 1998.

[73] H. Madsen, S. Krenk, and N. Lind, *Methods of Structural Safety.* Dover Civil and Mechanical Engineering Series, Dover Publications, 2006.

[74] J. Droesbeke, J. Fine, and G. Saporta, *Plans d'expériences : applications à l'entreprise.* Ouvrage ASU - Association pour la statistique et ses utilisations. Société statistique de France, Technip, 1997.

[75] D. J. Downing, R. H. Gardner, and F. O. Hoffman, "An examination of response-surface methodologies for uncertainty analysis in assessment models," *Technometrics*, vol. 27, no. 2, pp. 151–163, 1985.

[76] A. Saltelli, M. Ratoo, T. Andres, F. Campolongo, J. Cariboni, D. Gatelli, M. Saisana, and S. Tarantola, *Global Sensitivity Analysis - The primer.* Wiley, 2008.

[77] B. Iooss and P. Lemaître, "A review on global sensitivity analysis methods," in *Uncertainty management in Simulation-Optimization of Complex Systems : Algorithms and Applications* (C. Meloni and G. Dellino, eds.), Springer, 2015.

[78] P. Bratley and B. L. Fox, "Algorithm 659 : Implementing sobol's quasirandom sequence generator," *ACM Trans. Math. Softw.*, vol. 14, pp. 88–100, Mar. 1988.

[79] J. H. Halton, "On the efficiency of certain quasi-random sequences of points in evaluating multi-dimensional integrals," *Numer. Math.*, vol. 2, pp. 84–90, Dec. 1960.

[80] B. Iooss, "Revue sur l'analyse de sensibilité globale de modèles numériques," *Journal de la Societe Française de Statistique*, vol. 152, no. 1, pp. 1–23, 2011.

[81] A. Saltelli, S. Tarantola, F. Campolongo, and M. Ratoo, *Sensitivity analysis in practice : A guide to assessing scientific models.* Wiley, 2004.

[82] T. Turányi, "Sensitivity analysis of complex kinetic systems. Tools and applications," *Journal of Mathematical Chemistry*, vol. 5, no. 3, p. 2032483, 1990.

[83] M. D. Morris, "Factorial sampling plans for preliminary computational experiments," *Technometrics*, vol. 33, no. 2, pp. 161–174, 1991.

[84] F. Campolongo, J. Cariboni, and A. Saltelli, "An effective screening design for sensitivity analysis of large models," *Environmental Modelling & Software*, vol. 22, no. 10, pp. 1509 – 1518, 2007.

[85] A. Saltelli, K. Chan, and E. Scott, *Sensitivity Analysis.* Wiley, 2000.

[86] F. Campolongo, S. Tarantola, and A. Saltelli, "Tackling quantitatively large dimensionality problems," *Computer Physics Communications*, vol. 117, no. 1, pp. 75 – 85, 1999.

[87] I. M. Sobol, "Sensitivity estimates for nonlinear mathematical models," vol. 1, pp. 407 – 414, 1993.

[88] T. Homma and A. Saltelli, "Importance measures in global sensitivity analysis of non linear models," vol. 52, pp. 1 – 17, 1996.

[89] A. Saltelli, "Making best use of model evaluations to compute sensitivity indices," *Computer Physics Communications*, vol. 145, no. 2, pp. 280 – 297, 2002.

[90] R. I. Cukier, C. M. Fortuin, K. E. Shuler, A. G. Petschek, and J. H. Schaibly, "Study of the sensitivity of coupled reaction systems to uncertainties in rate coefficients. i. theory," vol. 59, pp. 3873–3878, 10 1973.

[91] A. Saltelli, S. Tarantola, and K. P.-S. Chan, "A quantitative model-independent method for global sensitivity analysis of model output," *Technometrics*, vol. 41, pp. 39–56, Feb. 1999.

[92] J.-Y. Tissot, *On ANOVA decomposition and Sobol' indices estimation. Application to a marine ecosystem model.* Theses, Université de Grenoble, Nov. 2012.

[93] S. Tarantola, D. Gatelli, and T. Mara, "Random balance designs for the estimation of first order global sensitivity indices," *Reliability Engineering & System Safety*, vol. 91, no. 6, pp. 717 – 727, 2006.

[94] B. Efron, "Bootstrap methods : Another look at the jackknife," vol. 7, pp. 1–26, 01 1979.

[95] R. I. Cukier, J. H. Schaibly, and K. E. Shuler, "Study of the sensitivity of coupled reaction systems to uncertainties in rate coefficients. iii. analysis of the approximations," vol. 63, pp. 1140–1149, 1975.

[96] R. Cukier, H. Levine, and K. Shuler, "Nonlinear sensitivity analysis of multiparameter model systems," *Journal of Computational Physics*, vol. 26, no. 1, pp. 1 – 42, 1978.

[97] J. H. Schaibly and K. E. Shuler, "Study of the sensitivity of coupled reaction systems to uncertainties in rate coefficients. ii applications," vol. 59, pp. 3879–3888, 1975.

[98] M. Koda, G. J. Mcrae, and J. H. Seinfeld, "Automatic sensitivity analysis of kinetic mechanisms," vol. 11, pp. 427 – 444, 04 1979.

[99] G. J. McRae, J. W. Tilden, and J. H. Seinfeld, "Global sensitivity analysis—a computational implementation of the fourier amplitude sensitivity test (fast)," *Computers & Chemical Engineering*, vol. 6, no. 1, pp. 15 – 25, 1982.

[100] P. Ekström, "Eikos : a simulation toolbox for sensitivity analysis," pp. 361–364, 01 2005.

[101] T. A. Mara and S. Tarantola, "Variance-based sensitivity indices for models with dependent inputs," *Reliability Engineering and System Safety*, vol. 107, pp. 115 – 121, 2012.

[102] J. Jacques, *Contributions à l'analyse de sensibilité et à l'analyse discriminante généralisée*. Theses, Université Joseph-Fourier - Grenoble I, Dec. 2005.

[103] M. D. McKay, "Nonparametric variance-based methods of assessing uncertainty importance," *Reliability Engineering & System Safety*, vol. 57, no. 3, pp. 267 – 279, 1997.

[104] A. Saltelli and T. S, "On the relative importance of input factors in mathematical models : Safety assessment for nuclear waste disposal," vol. 97, pp. 702–709, 02 2002.

[105] A. L'Espérance, J. Nicolas, P. Herzog, and G. Daigle, "Heuristic model for outdoor sound propagation based on an extension of the geometrical ray theory in the case of a linear sound speed profile," *Applied Acoustics*, vol. 37, no. 2, pp. 111 – 139, 1992.

[106] B. Gauvreau, *Approche multi-échelle et trans-disciplinaire de l'acoustique environnementale*. Habilitation à diriger des recherches, Université du Maine, Le Mans., 2015.

[107] C. Bertolini, A. Bihhadi, and C. Locqueteau, "Simulation of exterior powertrain ATFs on an engine bay mock-up with complex trim configurations," in *Automotive Acoustics Conference*, 3rd International ATZ Conference, 2015.

[108] J. Kakeu-Momo, *Modélisation des transferts acoustiques d'un compartiment moteur*. Stage de fin d'étude, Ecole Nationale Supérieure d'Ingénieurs du Mans, Le Mans université, 2017.

[109] F. Pompoli, P. Bonfiglio, K. V. Horoshenkov, A. Khan, L. Jaouen, F.-X. Bécot, F. Sgard, F. Asdrubali, F. D'Alessandro, J. Hübelt, N. Atalla, C. K. Amédin, W. Lauriks, and L. Boeckx, "How reproducible is the acoustical characterization of porous media ?," vol. 141, pp. 945–955, 02 2017.

[110] K. Horoshenkov, A. Khan, F.-X. Bécot, L. Jaouen, F. Sgard, A. Renault, N. Amirouche, F. Pompoli, N. Prodi, P. Bonfiglio, G. Pispola, F. Asdrubali, J. Hübelt, N. Atalla, C. K Amédin, W. Lauriks, and L. Boeckx, "Reproducibility experiments on measuring acoustical properties of rigid-frame porous media (round-robin tests)," vol. 122, pp. 345–53, 08 2007.

[111] G. E. P. Box, "Science and statistics," *Journal of the American Statistical Association*, vol. 71, no. 356, pp. 791–799, 1976.

[112] J. B. Johnson and K. S. Omland, "Model selection in ecology and evolution.," *Trends in ecology & evolution*, vol. 19, no. 2, pp. 101–108, 2004.

[113] G. Schoups, N. van de Giesen, and H. Savenije, "Model complexity control for hydrologic prediction," vol. 44, 12 2008.

[114] C. Smith, G. Erickson, and P. Neudorfer, *Maximum Entropy and Bayesian Methods*. Fundamental Theories of Physics, Springer Netherlands, 1992.

[115] D. J. MacKay, "Bayesian interpolation," *Neural Computation*, vol. 4, pp. 415–447, 1991.

[116] D. Sivia, *Data Analysis : A Bayesian Tutorial*. Oxford science publications, Clarendon Press, 1996.

[117] L. Wasserman, *All of Statistics : A Concise Course in Statistical Inference*. Springer Texts in Statistics, Springer-Verlag New York, 2004.

[118] E. Lehmann and G. Casella, *Theory of Point Estimation*. Springer Texts in Statistics, Springer New York, 2006.

[119] H. Jeffreys, *Theory of probability*. Clarendon Press, Oxford, 1939.

[120] E. T. Jaynes and R. D. Rosenkrantz, *Papers on probability, statistics, and statistical physics*. Synthese library, D. Reidel, 1983.

[121] E. T. Jaynes and G. L. Bretthorst, *Probability Theory : The Logic of Science*. Cambridge University Press, 2003.

[122] J. L. Beck and K.-V. Yuen, "Model selection using response measurements : Bayesian probabilistic approach," *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 130, no. 2, pp. 192–203, 2004.

[123] K.-V. Yuen, *Bayesian Methods for Structural Dynamics and Civil Engineering*. Wiley, 04 2010.

[124] J. Vrugt and M. Sadegh, "Toward diagnostic model calibration and evaluation : Approximate bayesian computation," vol. 49, pp. 4335–4345, 07 2013.

[125] J. Vrugt, "Markov chain monte carlo simulation using the dream software package : Theory, concepts, and matlab implementation," vol. 75, pp. 273–316, 01 2016.

[126] J. A. Hoeting, D. Madigan, A. E. Raftery, and C. T. Volinsky, "Bayesian model averaging : a tutorial," *Statist. Sci.*, vol. 14, pp. 382–417, 11 1999.

[127] A. Schöniger and T. Wöhling, "Model selection on solid ground : Rigorous comparison of nine ways to evaluate bayesian model evidence," vol. 50, pp. 9484–9513, 12 2014.

[128] H. E. Daniels, "Saddlepoint approximations in statistics," *Ann. Math. Statist.*, vol. 25, pp. 631–650, 12 1954.

[129] D. J. C. MacKay, *Information Theory, Inference & Learning Algorithms*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[130] K. Knuth, M. Habeck, N. Malakar, M. A. Mubeen, and B. Placek, "Bayesian evidence and model selection," vol. 47, pp. 50–67, 11 2014.

[131] H. Akaike, "A new look at the statistical model identification," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 19, pp. 716–723, 12 1974.

[132] E. Schwarz, "Estimating the dimension of a model," vol. 6, pp. 461–464, 03 1978.

[133] R. Kashyap, "A bayesian comparison of different classes of dynamic models using empirical data," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 22, pp. 715–727, October 1977.

[134] D. Lu, M. Ye, and S. P. Neuman, "Dependence of bayesian model selection criteria and fisher information matrix on sample size," *Mathematical Geosciences*, vol. 43, pp. 971–993, Nov 2011.

[135] A. Singh, S. Mishra, and G. Ruskauff, "Model averaging techniques for quantifying conceptual model uncertainty," vol. 48, pp. 701–715, 10 2009.

[136] M. Ye, P. Meyer, and S. Neuman, "On model selection criteria in multimodel analysis," *Water Resources Research*, vol. 44, 3 2008.

[137] E. Volpi, G. Schoups, G. Firmani, and J. Vrugt, "Sworn testimony of the model evidence : Gaussian Mixture Importance (GAME) sampling," vol. 53, pp. 6133–6158, 07 2017.

[138] K. P. Burnham and D. R. Anderson, "Multimodel Inference : Understanding AIC and BIC in Model Selection," *Sociological Methods & Research*, vol. 33, no. 2, pp. 261–304, 2004.

[139] S. Konishi and G. Kitagawa, *Information Criteria and Statistical Modeling*. Springer, 1st ed., 2007.

[140] S. Kullback and R. A. Leibler, "On information and sufficiency," *The annals of mathematical statistics*, vol. 22, no. 1, pp. 79–86, 1951.

[141] W. K. Hastings, "Monte carlo sampling methods using markov chains and their applications," *Biometrika*, vol. 57, no. 1, pp. 97–109, 1970.

[142] S. Brooks, A. Gelman, G. Jones, and X. Meng, *Handbook of Markov Chain Monte Carlo*. CRC Press, 2011.

[143] D. Sorensen and D. Gianola, *Likelihood of Bayesian, and MCMC Methods in Quantitative Genetics*, vol. 43. 01 2007.

[144] S. Grossman and J. Turner, *Mathematics for the biological sciences*. Macmillan, 1974.

[145] N. Metropolis, A. Rosenbluth, M. Rosenbluth, A. Teller, and E. J. Teller, "Equation of state calculations by fast computing machines," vol. 21, pp. 1087–1092, 01 1953.

[146] G. O. Roberts, A. Gelman, and W. R. Gilks, "Weak convergence and optimal scaling of random walk metropolis algorithms," *Ann. Appl. Probab.*, vol. 7, pp. 110–120, 02 1997.

[147] A. Gelman and D. B. Rubin, "Inference from iterative simulation using multiple sequences," *Statist. Sci.*, vol. 7, pp. 457–472, 11 1992.

[148] J. A. Vrugt, C. J. ter Braak, M. P. Clark, J. M. Hyman, and B. A. Robinson, "Treatment of input uncertainty in hydrologic modeling : Doing hydrology backward with markov chain monte carlo simulation," *Water Resources Research*, vol. 44, no. 12.

[149] J. A. Vrugt, C. J. F. T. Braak, C. G. H. Diks, B. A. Robinson, J. M. Hyman, and D. Higdon, "Accelerating markov chain monte carlo simulation by differential evolution with self-adaptive randomized subspace sampling," *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, vol. 10, no. 3, pp. 273–290, 2009.

[150] R. H. Lyon and R. G. DeJong, *Theory and Application of Statistical Energy Analysis*. Butterworth-Heinemann, 1995.

[151] J.-L. Christen, M. Ichchou, B. Troclet, O. Bareille, and M. Ouisse, "Global sensitivity analysis of analytical vibroacoustic transmission models," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 368, pp. 121 – 134, 2016.

[152] J. Pascal, *Vibro-acoustique des structures planes.* Cours, Ecole Nationale Supérieure d'Ingénieurs du Mans, Le Mans université, 2007.

[153] K. Attenborough, K. Li, and K. Horoshenkov, *Predicting Outdoor Sound.* Spon Press, 2006.

[154] O. Faure, *Numerical and experimental analysis of outdoor sound propagation : ground effects in the presence of surface irregularities and time-domain methods.* Theses, Ecole Centrale de Lyon, Dec. 2014.

[155] C. Chien and W. Soroka, "Sound propagation along an impedance plane," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 43, no. 1, pp. 9 – 20, 1975.

[156] T. F. W. Embleton, J. E. Piercy, and G. A. Daigle, "Effective flow resistivity of ground surfaces determined by acoustical measurements," vol. 74, p. 1239, 10 1983.

[157] J. Allard and N. Atalla, *Propagation of Sound in Porous Media : Modelling Sound Absorbing Materials, Second Edition.* Wiley, 12 2009.

[158] M. Delany and E. Bazley, "Acoustical properties of fibrous absorbent materials," *Applied Acoustics*, vol. 3, no. 2, pp. 105 – 116, 1970.

[159] Y. Miki, "Acoustical properties of porous materials-modifications of delany-bazley models-," *Journal of the Acoustical Society of Japan (E)*, vol. 11, no. 1, pp. 19–24, 1990.

[160] C. Zwikker and C. W. Kosten, *Sound absorbing materials / by C. Zwikker and C.W. Kosten.* Elsevier New York, 1949.

[161] K. Attenborough, "Acoustical impedance models for outdoor ground surfaces," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 99, no. 4, pp. 521 – 544, 1985.

[162] International Organization for Standardization, *Atténuation du son lors de sa propagation à l'air libre — Partie 1 : Calcul de l'absorption atmosphérique* , 1993.

[163] T. Hidaka, K. Kageyama, and S. Masuda, "Sound propagation in the rest atmosphere with linear sound velocity profile," vol. 6, pp. 117–125, 03 1985.

[164] M. Bérengier, B. Gauvreau, P. Blanc-Benon, and D. Juvé, "Outdoor sound propagation : A short review on analytical and numerical approaches," vol. 89, pp. 980–991, 11 2003.

[165] T. F. W. Embleton, G. J. Thiessen, and J. E. Piercy, "Propagation in an inversion and reflections at the ground," vol. 59, pp. 278–282, 02 1976.

[166] G. A. Daigle, "Effects of atmospheric turbulence on the interference of sound waves above a finite impedance boundary," vol. 65, pp. 45–49, 01 1979.

[167] G. A. Daigle, J. E. Piercy, and T. F. W. Embleton, "Effects of atmospheric turbulence on the interference of sound waves above a finite impedance boundary," vol. 64, pp. 622–630, 08 1978.