



HAL
open science

Lemmes de zéros et distribution des valeurs des fonctions méromorphes

Pierre Villemot

► **To cite this version:**

Pierre Villemot. Lemmes de zéros et distribution des valeurs des fonctions méromorphes. Analyse fonctionnelle [math.FA]. Université Grenoble Alpes, 2018. Français. NNT : 2018GREAM059 . tel-02057552

HAL Id: tel-02057552

<https://theses.hal.science/tel-02057552>

Submitted on 5 Mar 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE LA COMMUNAUTÉ UNIVERSITÉ GRENOBLE ALPES

Spécialité : Mathématiques

Arrêté ministériel : 25 mai 2016

Présentée par

Pierre VILLEMOT

Thèse dirigée par **Georges COMTE**, PR1

préparée au sein du **Laboratoire LAMA**
dans **l'École Doctorale Mathématiques, Sciences et
technologies de l'information, Informatique**

Lemmes de zéros et distribution des valeurs des fonctions méromorphes

Zero estimates and value distribution of meromorphic functions

Thèse soutenue publiquement le **6 novembre 2018**,
devant le jury composé de :

Monsieur Georges COMTE

PR, Université Savoie Mont Blanc, Directeur de thèse

Monsieur Yosef YOMDIN

Professeur, Weizmann Institute of Science, Rapporteur

Monsieur Gal BINYAMINI

Professeur, Weizmann Institute of Science, Rapporteur

Monsieur Carlo GASBARRI

Professeur des Universités, Université de Strasbourg, Rapporteur

Monsieur Antoine CHAMBERT-LOIR

Professeur des Universités, Université Paris-Diderot, Examineur
Président du jury

Monsieur Tanguy RIVOAL

Directeur de Recherche, Université Grenoble Alpes, Examineur



Sommaire

Sommaire	1
Conventions et notations	2
1 Introduction	5
2 Pré-requis	41
3 Majorations des mesures de transcendance	77
4 Distribution des petites valeurs	121
5 Applications aux comptages des points algébriques	173
Bibliographie	193
Index des notations	199
Index	202
Table des matières	205

Conventions et notations

Nous utilisons dans ce manuscrit les notations et conventions suivantes.

Ensembles

- le maximum de deux réels a et b est noté $a \vee b$ et leur minimum est noté $a \wedge b$,
- le corps des réels est noté \mathbb{R} et celui des complexes est noté \mathbb{C} . De plus on identifie \mathbb{C} à \mathbb{R}^2 . On note $\overline{\mathbb{R}}$ la droite réelle achevée, \mathbb{R}_+ l'ensemble des réels positifs, \mathbb{R}_+^* l'ensemble des réels strictement positifs et \mathbb{R}_- l'ensemble des réels négatifs,
- le corps des nombres algébriques est noté $\overline{\mathbb{Q}}$ et l'ensemble des nombres complexes algébriques de degré au plus k est noté $\overline{\mathbb{Q}}_k$,
- un *domaine* est une partie ouverte et connexe de \mathbb{R}^n . Un *domaine pointé* est un couple (Ω, z_0) où Ω est un domaine et z_0 un point de Ω . Une application $h : (\Omega, z_0) \rightarrow (\Upsilon, w_0)$ est une fonction de Ω dans Υ telle que $h(z_0) = w_0$,
- un *domaine multiconnexe* est un domaine de \mathbb{C} dont le bord est constitué d'un nombre fini de composantes connexes,
- on note $\mathbb{D}(a, r)$ le disque ouvert de rayon $r > 0$ et de centre $a \in \mathbb{C}$. De plus lorsque a est l'origine du plan, on note plutôt \mathbb{D}_r . Les disques fermés sont notés $\overline{\mathbb{D}}(a, r)$ et $\overline{\mathbb{D}}_r$ lorsque a est l'origine de \mathbb{C} ,
- le *disque unité* est noté \mathbb{D} , le *cercle unité* \mathbb{S}^1 et le *demi-plan de Poincaré*, noté \mathbb{H} , est défini par

$$\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}.$$

La *sphère de Riemann*, qui n'est autre que la droite projective complexe, est notée $\hat{\mathbb{C}}$ plutôt que $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$,

- Pour toute fonction g définie sur un domaine Ω , on note Γ^g le graphe de g et Γ_K^g le graphe de g restreint à un compact K de Ω .

Topologie

- l'adhérence d'un ensemble F est notée \overline{F} . L'intérieur de F est noté $\overset{\circ}{F}$,
- le bord topologique de F est noté ∂F ,
- lorsque $F \subset \mathbb{C}$, on note $\partial_e F$ le bord de la composante connexe de $\hat{\mathbb{C}} \setminus F$ contenant le point ∞ et $\partial^\infty F$ le bord de F dans $\hat{\mathbb{C}}$,
- pour tout compact $K \subset \mathbb{C}^n$, l'*enveloppe polynomialement convexe* de K est définie par

$$\hat{K} := \{z \in \mathbb{C}^n : \forall P \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n], |P(z)| \leq \|P\|_K\}.$$

Groupes et algèbres de fonctions

- pour tout domaine Ω de $\hat{\mathbb{C}}$, on note $\text{Aut}(\Omega)$ le groupe des applications biholomorphes de Ω dans lui-même. Lorsque les automorphismes de ce groupe sont des restrictions de transformations de Möbius de $\hat{\mathbb{C}}$, on note ce groupe par $\text{Mob}(\Omega)$,
- l'algèbre des polynômes en les variables z_1, \dots, z_n et à coefficients dans un corps K est notée $K[z_1, \dots, z_n]$. L'espace vectoriel des polynômes de degré total au plus d est noté $K_{\leq d}[z_1, \dots, z_n]$ et celui des polynômes homogènes de degré homogène d est noté $K_d[z_1, \dots, z_n]$,
- l'algèbre des fractions rationnelles en les variables z_1, \dots, z_n et à coefficients dans un corps K est notée $K(z_1, \dots, z_n)$. L'ensemble des fractions rationnelles de la forme $\frac{P}{Q}$ avec P un polynôme de degré total au plus n et Q un polynôme de degré total au plus m est noté $K_{n,m}(z_1, \dots, z_n)$,
- la \mathbb{C} -algèbre des fonctions holomorphes sur $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, respectivement méromorphes sur Ω est notée $\mathcal{O}(\Omega)$, respectivement $\mathcal{M}(\Omega)$. De plus pour tout ensemble $E \subset \mathbb{C}^n$, on note $\mathcal{O}(E)$, respectivement $\mathcal{M}(E)$, la \mathbb{C} -algèbre des fonctions holomorphes, respectivement méromorphes, sur un voisinage de E ,
- plus généralement la \mathbb{C} -algèbre des fonctions d'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ dans \mathbb{C}^m est noté $\mathcal{O}(\Omega, \mathbb{C}^m)$,
- la \mathbb{C} -algèbre des fonctions harmoniques sur $\Omega \subset \mathbb{C}$, respectivement sous-harmoniques sur Ω , est notée $\mathcal{H}(\Omega)$, respectivement $\mathcal{SH}(\Omega)$,
- une fonction δ -sous-harmonique sur un domaine Ω est la différence de deux fonctions sous-harmoniques sur Ω . La \mathbb{C} -algèbre des fonctions δ -sous-harmoniques sur $\Omega \subset \mathbb{C}$ est notée $\mathcal{SH}_\delta(\Omega)$,
- la \mathbb{C} -algèbre des fonctions pluri-sous-harmoniques sur $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ est notée $\mathcal{PSH}(\Omega)$.

Comparaisons asymptotiques Dans ce qui suit (u_n) et (v_n) désignent deux suites de réels et f et g deux fonctions réelles sur un intervalle $[a, \infty[$.

- on note $u_n \ll v_n$ lorsqu'il existe une constante positive $C > 0$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq Cv_n$. De même on note $f \ll g$ lorsqu'il existe une constante positive $C > 0$ et $b \geq a$ tels que $\forall t \geq b$, $f(t) \leq Cg(t)$,
- on note $u_n \asymp v_n$ lorsque $u_n \ll v_n$ et $v_n \ll u_n$,
- on note $(u_n) \nearrow \infty$ une suite croissante tendant vers l'infini et $(u_n) \nearrow 1^-$ une suite croissante tendant vers 1^- .

Normes et distances

- la *distance sphérique* sur $\hat{\mathbb{C}}$ est définie par

$$\forall z, w \in \hat{\mathbb{C}}, \chi(z, w) := \begin{cases} \frac{|z - w|}{\sqrt{1 + |z|^2} \sqrt{1 + |w|^2}} & \text{si } z, w \neq \infty \\ \frac{1}{\sqrt{1 + |z|^2}} & \text{si } z \neq \infty \text{ et } w = \infty \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La sphère de Riemann est toujours munie de la métrique sphérique.

- la *distance pseudo-hyperbolique* sur \mathbb{D}_r est définie par

$$\forall z, w \in \mathbb{D}, p(z, w) := \left| \frac{r(z-w)}{r^2 - z\bar{w}} \right|.$$

Lorsque r vaut 1, on note cette distance $p(z, w)$. Pour tout $E \subset \mathbb{D}_r$, on note $p(z, E)$ la distance pseudo-hyperbolique minimale des points de E à z ,

- la *distance hyperbolique* sur \mathbb{D} est définie par

$$\forall z, w \in \mathbb{D}, d^h(z, w) := \log \left(\frac{1 + p(z, w)}{1 - p(z, w)} \right).$$

- la *pseudo-distance sphérique* est définie par

$$\forall z, w \in \hat{\mathbb{C}}, |z, w| := \begin{cases} |z - w| & \text{si } z, w \neq \infty \\ \frac{1}{|z|} & \text{si } z \neq \infty \text{ et } w = \infty \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- pour tout $P \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_d]$ et $K \subset \mathbb{C}^n$ un compact, on note $\|P\|_K$ la norme infini de P sur K .

Mesures

- pour tout borélien $E \subset \mathbb{R}^n$, on note $\lambda_n(E)$ la *mesure de Lebesgue n -dimensionnel* de E ,
- la *capacité logarithmique* dans \mathbb{C} est notée cap et la *capacité* du condenseur (F, Ω) est notée $\text{cap}(F, \Omega)$ ¹,
- soient $d \in \mathbb{N}$ et $\Omega \subset \mathbb{C}$ un domaine. Le *d -ième diamètre euclidien* d'un ensemble $E \subset \Omega$ est noté $\text{diam}_d(E)$ et le *d -ième diamètre greenien* de E est noté $\text{diam}_d(E, \Omega)$ ².
- soient (X, d) un espace métrique et $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$. La longueur de γ dans cet espace métrique est définie par

$$\Lambda_d(\gamma) = \sup \left\{ \sum_{j=0}^n d(\gamma(t_j), \gamma(t_{j+1})) \mid t_0, \dots, t_{n+1} \in [0, 1] \right\}.$$

De plus on dit que γ est rectifiable si $\Lambda_d(\gamma) < \infty$.

¹Voir la section 2.1 du chapitre 2.

²Voir la section 2.1 du chapitre 2.

CHAPITRE 1

Introduction

Cette thèse porte sur des problèmes de théorie des nombres transcendants. Une question centrale en théorie des nombres est de déterminer la nature arithmétique d'une constante ξ . Le plus souvent on cherche à savoir si la constante ξ est nombre irrationnel, voire transcendant. Ce problème est réputé difficile tant et si bien que la nature arithmétique de certaines constantes en apparence simples telles que $\pi + e$ ou la constante d'Euler-Mascheroni γ est toujours inconnue à ce jour. Plutôt que d'étudier un nombre ξ seul, il est souvent plus simple d'étudier des nombres appartenant à un graphe Γ ou plus généralement à une variété V . On escompte dans cette situation montrer que les nombres de Γ ou V partagent des propriétés arithmétiques communes à l'exception d'un petit ensemble d'entre eux. Dans ce manuscrit on s'intéresse plus particulièrement aux points algébriques contenus dans le graphe d'une fonction holomorphe ou méromorphe. Étant donné $\Omega \subset \mathbb{C}$ un domaine et $g \in \mathcal{M}(\Omega)$, on souhaite déterminer si l'image par g d'un nombre algébrique est souvent un nombre algébrique. Lorsque $z \in \Omega$ et $g(z)$ sont simultanément algébriques, on dit que le point $(z, g(z))$ est un point algébrique du graphe de g . Une première question naïve est la suivante.

Question 1.0.1. *Soit $g \in \mathcal{M}(\Omega)$ non constante. Que peut-on dire du cardinal de l'ensemble des points algébriques du graphe de g restreint à un compact $K \Subset \Omega$?*

Il n'est pas nécessaire de chercher bien loin des fonctions holomorphes dont le graphe contient une infinité des points algébriques dans un compact. La fonction identité et plus généralement toutes les fonctions algébriques sur $\mathbb{C}(z)$ dont l'équation polynomiale est à coefficients algébriques sont de cette sorte. Une première hypothèse raisonnable excluant ces fonctions est d'exiger que la fonction g soit transcendante sur le corps $\mathbb{C}(z)$. C'est-à-dire de demander que pour tout $P \in \mathbb{C}[z, w]$, $P(z, g(z)) \equiv 0$ implique $P \equiv 0$. Dans la section 1.1 ci-dessous, nous allons voir que cette hypothèse est cependant très loin d'être suffisante pour que les ensembles figurant dans la question 1.0.1 soient toujours finis.

1.1 Ensembles exceptionnels

Désormais on exige que la fonction étudiée g soit *transcendante* au-dessus de $\mathbb{C}(z)$. La fonction $z \mapsto 2^z$ montre qu'il existe des fonctions entières transcendentes dont le graphe contient une infinité de points rationnels mais ces points ne sont pas contenus dans un compact de \mathbb{C}^2 .

Question 1.1.1. *On suppose que g est transcendante au-dessus de $\mathbb{C}(z)$. Que peut-on dire du cardinal de l'ensemble des points algébriques du graphe de g restreint à un compact $K \Subset \Omega$?*

Comme en atteste l'exemple 1.1.1¹ ci-dessous, il existe des fonctions holomorphes et transcendantes dont le graphe restreint à un compact contient une infinité de points algébriques.

Exemple 1.1.1. Soient $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{Q}}$ tels que

$$\frac{\log \beta}{\log \alpha} \notin \mathbb{Q} \text{ et } \alpha \in \mathbb{S}^1 \text{ mais } \alpha \text{ n'est pas une racine de l'unité.}$$

Alors la fonction g définie par

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-, g(z) = z^\gamma \text{ avec } \gamma = \frac{\log \beta}{\log \alpha}, \quad (1.1.1)$$

est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ et transcendante. De plus pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $g(\alpha^k) = \beta^k$. Donc le graphe de g contient l'ensemble des points algébriques $\{(\alpha^k, \beta^k) : k \in \mathbb{Z}\}$. De plus puisque α n'est pas une racine de l'unité, la suite (α^n) est dense dans \mathbb{S}^1 . Donc le graphe de g restreint à n'importe quel arc de cercle fermé de \mathbb{S}^1 qui ne contient pas -1 contient une infinité de points algébriques.

Nous verrons par la suite qu'il existe des fonctions entières transcendantes dont les graphes contiennent encore plus de points algébriques que les fonctions décrites en 1.1.1 mais dont la construction est nettement plus ardue. Afin d'énoncer plus facilement ce type de résultats, on introduit la notion d'ensemble exceptionnel.

Définition 1.1.2 (Ensemble exceptionnel). Soient $g \in \mathcal{M}(\Omega)$, $\Sigma \subset \mathbb{C}$ et $D \subset \hat{\mathbb{C}}$. On considère l'ensemble

$$E(\Sigma, D, g) := \{z \in \Sigma \mid g(z) \in D\}.$$

L'ensemble $S_g := E(\overline{\mathbb{Q}} \cap \Omega, \overline{\mathbb{Q}}, g)$ est appelé l'*ensemble exceptionnel* de g .

Déterminer l'ensemble exceptionnel S_g d'une fonction méromorphe g est un problème ardu. En effet, bon nombre de constantes importantes apparaissent spontanément comme l'image d'un nombre algébrique par une fonction spéciale. Or la nature arithmétique de certaines de ces constantes nous échappe largement. Un exemple classique est celui de la constante d'Euler-Mascheroni γ qui peut être définie comme le second terme du développement asymptotique de la série harmonique. C'est-à-dire

$$\gamma := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n.$$

On ignore à ce jour si le nombre γ est irrationnel. Or $\Gamma'(1) = -\gamma$ où Γ est la fonction *Gamma* d'Euler. Une autre question étudiée et tout aussi difficile est celle de la nature arithmétique des valeurs de la fonction ζ de Riemann aux entiers positifs impairs, voir [96, 126] pour des résultats récents. Toutefois l'ensemble exceptionnel S_g est entièrement décrit pour certaines classes bien particulières de fonctions entières g . C'est notamment le cas des *E-fonctions* introduites par Siegel dans [105] et qui font l'objet du paragraphe ci-dessous.

Les E-fonctions de Siegel Les *E-fonctions* de Siegel sont une classe de fonctions entières dont les coefficients de Taylor en l'origine satisfont des hypothèses arithmétiques.

Définition 1.1.3 (*E-fonction* - [6, 106]). Une fonction $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ est appelée une *E-fonction* de Siegel lorsque son développement en série en l'origine est de la forme

$$\forall z \in \mathbb{C}, g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n!} z^n,$$

¹Je tiens à remercier Gareth Jones de m'avoir suggéré cet exemple lors d'une conversation.

et la suite (α_n) vérifie les propriétés suivantes

- il existe un corps de nombres K contenant tous les coefficients α_n ,
- pour tout $\varepsilon > 0$, $\overline{\|\alpha_n\|} = O(n^{\varepsilon n})$ où $\overline{\|\alpha_n\|}$ désigne le maximum des modules des conjugués de Galois de α_n ,
- pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une suite (d_n) d'entiers naturels telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d_n \alpha_n$ est un entier algébrique de K et $d_n = O(n^{\varepsilon n})$.

La classe des E -fonctions forme une algèbre de fonctions entières stable par différentiation². Dans [105], Siegel démontre que les E -fonctions transcendantales satisfaisant une équation différentielle linéaire d'ordre 1 ou 2 et à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}(z)$ ne prennent pas de valeurs algébriques aux points algébriques, sauf éventuellement en l'origine et aux singularités de l'équation différentielle. Par exemple, la fonction exponentielle est une E -fonction vérifiant l'équation différentielle $y' = y$. Donc l'ensemble exceptionnel de l'exponentielle est réduit à l'origine. Ainsi le théorème de Siegel implique le théorème de Hermite-Lindemann [68]. En 1954, Shidlovsky étend le théorème de Siegel aux familles algébriquement indépendantes de E -fonctions vérifiant un système d'équation différentielle linéaire.

Théorème 1.1.4 (Siegel - Shidlovsky - [6, 106]). *Soient g_1, \dots, g_n des E -fonctions algébriquement indépendantes au-dessus de $K(z)$ avec K un corps de nombres contenant les coefficients de Taylor à l'origine des fonctions g_1, \dots, g_n . On suppose qu'il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\overline{\mathbb{Q}}(z))$ telle que*

$$\frac{dg}{dz} = A(z)g(z) \text{ avec } g = (g_1, \dots, g_n) \quad (1.1.2)$$

Alors pour tout nombre algébrique non nul ξ qui n'est pas un pôle d'un coefficient de A , les nombres $g_1(\xi), \dots, g_n(\xi)$ sont algébriquement indépendant au-dessus de \mathbb{Q} .

Dans la mesure où la classe des E -fonctions est stable par différentiation, le théorème de Shidlovsky 1.1.4 étend le théorème de Siegel pour les équations différentielles linéaires d'ordre quelconque.

Équations différentielles algébriques Une équation différentielle de la forme

$$P(z, g', \dots, g^{(k)}) = 0 \text{ avec } P \in \mathbb{C}[z_0, \dots, z_k], P \neq 0,$$

est appelé une *équation différentielle algébrique*.

Théorème 1.1.5 (Schneider-Lang - [103] et [64]). *Soient K un corps de nombres et $g := (g_1, \dots, g_m) \in \mathcal{M}(\mathbb{C})^m$ des fonctions d'ordre supérieur $\leq \rho$. C'est-à-dire*

$$\forall j \in \{1, \dots, m\}, \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log T(r, g_j)}{\log r} \leq \rho,$$

où $T(r, g_j)$ désigne la caractéristique de Nevanlinna³ de g_j . On suppose que le corps $K(g_1, \dots, g_m)$ est de degré de transcendance au moins 2 et l'anneau $K[g_1, \dots, g_m]$ est clos par dérivation. Alors l'image de g contient au plus $20\rho[K : \mathbb{Q}]$ points dans K^m .

²Voir le chapitre 11 de [6] pour plus de détails.

³Voir la définition 2.6.4.

Le théorème de Schneider-Lang 1.1.5 a de nombreuses conséquences intéressantes. On déduit par exemple de ce dernier que l'invariant j envoie toujours un nombre algébrique non nul sur un nombre transcendant. Il en est de même de la fonction de Weierstraß \wp_Λ à condition que les invariants⁴ g_2 et g_3 soient algébriques. Le lecteur pourra regarder le chapitre III de [64] pour d'autres applications de ce théorème.

Fonctions pathologiques Le théorème de Siegel-Shidlovsky 1.1.4 implique que les E -fonctions transcendentes vérifiant un système différentiel du type de 1.1.2 ont un ensemble exceptionnel fini tandis que le théorème de Schneider-Lang 1.1.5 donne d'autres exemples de fonctions spéciales g telles que $E(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}, g)$ soit fini. Comme nous l'avons déjà remarqué, une fonction holomorphe transcendente peut avoir un ensemble exceptionnel infini. Cependant parmi les sous-ensembles infinis de $\overline{\mathbb{Q}}$, lesquels sont l'ensemble exceptionnel d'une fonction entière transcendente? En 1886, Weierstraß construit des fonctions entières⁵ transcendentes envoyant chaque rationnel sur un rationnel. Suite à ce premier exemple, Weierstraß pose la question de l'existence de fonctions entières transcendentes d'ensemble exceptionnel égal à $\overline{\mathbb{Q}}$. En 1895, Stäckel répond par l'affirmative en généralisant la construction de Weierstraß pour aboutir à l'énoncé 1.1.6 suivant.

Théorème 1.1.6 (Stäckel - [109]). *Pour tout ensemble dénombrable $\Sigma \subset \mathbb{C}$ et pour tout ensemble dense $D \subset \mathbb{C}$, il existe une fonction entière transcendente envoyant Σ dans D . Autrement dit $E(\Sigma, D, g) = \Sigma$.*

En prenant $\Sigma = D = \overline{\mathbb{Q}}$, le théorème 1.1.6 de Stäckel implique l'existence d'une fonction g entière et transcendente dont l'ensemble exceptionnel S_g est exactement $\overline{\mathbb{Q}}$. Le plus étonnant dans le théorème de Stäckel est qu'aucune hypothèse arithmétique n'est nécessaire sur les ensembles Σ ou D . En revanche l'hypothèse topologique sur l'ensemble D est indispensable puisqu'il découle du grand théorème de Picard⁶ que l'image d'un ensemble dense dans \mathbb{C} par une fonction entière transcendente est dense dans \mathbb{C} . Prenons un instant pour expliquer la méthode employée dans [109] pour démontrer le théorème 1.1.6. Étant donné une énumération (a_n) des éléments de Σ , on considère la suite (P_n) de polynômes de la forme

$$P_n(z) = \prod_{j=0}^n (z - a_j),$$

et la série formelle $S = \sum \lambda_n P_n(z)$ où (λ_n) est une suite de nombres complexes qu'il reste à déterminer. Il suffit alors de choisir la suite (λ_n) de sorte que le rayon de convergence de la série S soit infinie et que pour tout $j \in \mathbb{N}$, le nombre complexe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n P_n(a_j) = \sum_{n=0}^{j-1} \lambda_n P_n(a_j),$$

appartiennent à D . La fonction cherchée est alors donnée par cette série entière S . Dans [110], Stäckel construit de même des fonctions entières transcendentes dont toutes les dérivées envoient \mathbb{Q} sur lui-même. Par la suite de nombreux auteurs ont étendu les résultats de Stäckel dans différentes directions. Le lecteur intéressé par ce type d'énoncé pourra regarder les articles [73–75, 123]. Parmi les extensions du théorème de Stäckel, on peut citer notamment le résultat suivant de Marques.

Théorème 1.1.7 (Marques - [73]). *Soient $\rho > 0$, $\Sigma \subset \mathbb{C}$ un ensemble dénombrable et pour tout $s \in \Sigma$ et $n \in \mathbb{N}$, $D_{s,n}$ un sous-ensemble dense de \mathbb{C} . Il existe une infinité indénombrable de fonctions entières g telles que*

⁴Voir la définition de ces derniers dans la section 1.9 de [3].

⁵C'est-à-dire holomorphe sur le plan tout entier.

⁶Voir le théorème 2.6.2 page 62.

- pour tout $s \in \Sigma$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g^{(n)}(s)$ appartient à l'ensemble $D_{s,n}$. Autrement dit $E(\Sigma, D_{s,n}, g^{(n)}) = \Sigma$,
- la fonction g est d'ordre fini ρ . C'est-à-dire

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log^+ M(r, g)}{\log r} = \rho,$$

- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{C}[z, w_1, \dots, w_n]$ non nul, la fonction

$$z \mapsto P(z, g(z), \dots, g^{(n)}(z)),$$

n'est pas identiquement nulle.

La dernière condition du théorème 1.1.7 stipule que la fonction g n'est annulée par aucun polynôme différentiel non nul. On dit dans ce cas que g est une fonction *hypertranscendante*. Les fonctions ζ de Riemann et Γ d'Euler sont de ce type, voir [7, 99]. Le théorème de Marques affirme en particulier l'existence de fonctions g entières et hypertranscendantes telles que les ensembles exceptionnels $S_{g^{(i)}}$ soient tous égaux à $\overline{\mathbb{Q}}$. Puisque les corps $\mathbb{Q}(s)$ avec $s \in \overline{\mathbb{Q}}$ sont denses dans \mathbb{C} , on peut même exiger que la fonction g vérifie que pour tout $s \in \overline{\mathbb{Q}}$ et $i \in \mathbb{N}$, $g^{(i)}(s) \in \mathbb{Q}(s)$. Ce type de fonctions avait déjà été exhibé par Faber et par van der Poorten dans [120].

1.2 Comptage des points de hauteur bornée

L'avalanche de fonctions pathologiques de la section précédente montre que l'ensemble des points algébriques contenus dans le compact d'un graphe transcendant est infini. Afin de palier à ce problème, on introduit une fonction hauteur sur les points algébriques de sorte que l'ensemble des points algébriques de hauteur bornée est toujours fini.

Définition 1.2.1 (Hauteur de Weil - [15]). La *hauteur de Weil* d'un rationnel $\alpha = p/q$ avec p et q des entiers premiers entre eux est le maximum de $|p|$ et $|q|$. On note $H(\alpha)$ cette hauteur.

La hauteur de Weil peut être étendue à l'ensemble des nombres algébriques. Cette construction est détaillée dans la section 5.2 du chapitre 5. Cependant la seule propriété à connaître sur la hauteur de Weil d'un nombre algébrique pour comprendre les énoncés suivants est la *propriété de Northcott* ci-dessous.

Proposition 1.2.2 (Propriété de Northcott - [15, Thm. 1.6.8]). *L'ensemble des nombres algébriques de hauteur de Weil au plus B et de degré au plus k est fini.*

La hauteur de Weil d'un vecteur de \mathbb{R}^m est définie comme le maximum des hauteurs de Weil de chacune de ses coordonnées.

Notation 1.2.3. Soient $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^m$ et $K \subset \overline{\mathbb{Q}}$ un ensemble. On note

$$\mathcal{X}(K, B) := \{x \in \mathcal{X} \cap K^m \mid H(x) \leq B\}.$$

Le cardinal⁷ de $\mathcal{X}(K, B)$ est noté $N_K(\mathcal{X}, B)$. Lorsque K est $\overline{\mathbb{Q}_k}$, on note le cardinal de $\mathcal{X}(\overline{\mathbb{Q}_k}, B)$ par $N_k(\mathcal{X}, B)$.

Le problème de comptage le plus général que nous étudions dans ce manuscrit est la suivant

⁷L'ensemble $\mathcal{X}(K, B)$ est fini d'après la propriété de Northcott ci-dessus.

Question 1.2.1. Soient $g \in \mathcal{M}(\Omega)$ une fonction transcendante sur $\mathbb{C}(z)$, $S \Subset \Omega$ un compact et K un corps de nombres. On note Γ_S^g le graphe de g restreint à S . Quel est le comportement asymptotique de $N_K(\Gamma_S^g, B)$ ou $N_k(\Gamma_S^g, B)$ lorsque B tend vers l'infini ?

Obtenir des équivalents des cardinaux de la question 1.2.1 semble difficile. Nous cherchons pour notre part des majorations de ces derniers. Les trois paragraphes suivants portent sur les différents types de bornes les plus communément rencontrées dans la littérature : les bornes *polynomiales*, *sous-polynomiales* et *logarithmiques*.

Les bornes polynomiales Un des premiers résultats généraux sur le nombre de points algébriques de hauteur bornée contenus dans un graphe est dû à Jarnik en 1926 dans [56]. Ce dernier montre que le nombre de points entiers sur une courbe convexe \mathcal{X} est borné par un polynôme en la longueur de la courbe \mathcal{X} .

Théorème 1.2.4 (Jarnik - [56]). Soit $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et l la longueur de la courbe paramétrée par g . Alors le nombre de points entiers contenus dans l'image de g n'excède pas

$$3(4\pi)^{-\frac{1}{3}} l^{\frac{2}{3}} + \mathcal{O}(l^{\frac{1}{3}}).$$

Les constantes et exposants de cette borne sont optimaux.

Par la suite Swinnerton-Dyer [117] puis Schmidt [102] exhibèrent des bornes plus précises pour le nombre de points entiers ou de points rationnels de hauteur bornée sur des courbes strictement convexes et de classe au moins \mathcal{C}^3 .

Les bornes sous-polynomiales Lorsque le cardinal $N_K(\mathcal{X}, B)$ est majoré pour tout $\varepsilon > 0$ par une borne de la forme $C_\varepsilon B^\varepsilon$ pour une certaine constante $C_\varepsilon > 0$, nous disons que $N_K(\mathcal{X}, B)$ satisfait une *borne sous-polynomiale*. Voyons quelques situations où de telles bornes ont été exhibées. En 1989, Pila et Bombieri montrent dans [16] que pour un graphe \mathcal{X} d'une fonction g analytique réelle et transcendante, il n'est pas nécessaire d'exiger que la fonction soit convexe pour exhiber une borne sous-polynomiale du nombre $N_K(\mathcal{X}, B)$. Ce théorème est redémontré par Elkies dans [35].

Théorème 1.2.5 (Pila - Bombieri - [16] et [35]). Soient K un corps de nombres et $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction analytique réelle et transcendante. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $C_\varepsilon > 0$ telle que

$$\forall B > 0, N_K(\Gamma_{[0,1]}^g, B) \leq C_\varepsilon B^\varepsilon$$

Plus encore que le résultat 1.2.5 de Pila et Bombieri, la méthode du déterminant mise au point dans [16] par ces derniers donna lieu à une multitude de travaux. L'un des résultats les plus marquants est le théorème de Pila-Wilkie qui étend le théorème 1.2.5 de Pila-Bombieri dans le contexte très général des structures o-minimales grâce à une paramétrisation de type Yomdin-Gromovo. Afin de pouvoir énoncer ce théorème, rappelons quelques définitions.

Définition 1.2.6 (Structure o-minimale – [119]). Une *structure o-minimale* est la donnée pour chaque entier $n \in \mathbb{N}^*$ d'une famille \mathcal{Y}_n de parties de \mathbb{R}^n telles que

- les ensembles algébriques réel⁸ de \mathbb{R}^n appartiennent à \mathcal{Y}_n ,
- l'ensemble \mathcal{Y}_n est stable par union finie, intersection finie et complémentaire,
- la projection d'un élément de \mathcal{Y}_n sur \mathbb{R}^m est un élément de \mathcal{Y}_m ,

⁸Un tel ensemble est défini par un système d'équations algébriques à coefficients dans \mathbb{R} .

- les ensembles de \mathcal{Y}_1 sont exactement les réunions d'un nombre fini d'intervalles⁹.

Une partie appartenant à une des familles \mathcal{Y}_n est appelée un ensemble définissable de la structure o -minimale.

La plus petite structure o -minimale \mathbb{R}_{alg} est obtenue en prenant pour chaque \mathcal{Y}_n l'ensemble des parties semi-algébriques¹⁰ de \mathbb{R}^n . Le fait que \mathbb{R}_{alg} forme bien une structure o -minimale est une conséquence du théorème d'élimination des quantificateurs de Tarski-Seidenberg [14]. Le plus souvent les structures o -minimales étudiées sont définies comme étant la plus petite structure contenant les graphes d'une famille \mathcal{F} de fonctions. Une telle structure est alors notée $\langle \mathbb{R}, <, +, \times, \mathcal{F} \rangle$. Pour une étude systématique des structures o -minimales, le lecteur pourra se référer à [119]. Avant d'énoncer le théorème de Pila-Wilkie, il nous faut introduire la notion de partie transcendante d'un ensemble quelconque $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$. La *partie algébrique* \mathcal{X}^{alg} de \mathcal{X} est définie comme la réunion de tous les ensembles semi-algébriques connexes de dimension strictement positive contenus dans \mathcal{X} . La *partie transcendante* \mathcal{X}^{tr} de \mathcal{X} est le complémentaire de sa partie algébrique. Ces définitions posées, le théorème de Pila-Wilkie s'énonce ainsi

Théorème 1.2.7 (Pila - Wilkie - [85, 88]). *Soient $k \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble définissable dans une structure o -minimale. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $C_{k,\varepsilon} > 0$ telle que*

$$\forall B > 0, N_k(\mathcal{X}^{\text{tr}}, B) \leq C_{k,\varepsilon} B^\varepsilon.$$

La partie transcendante d'un ensemble définissable n'est généralement pas définissable dans la même structure. Cependant les auteurs de [85, 88] ont montré qu'il était possible pour chaque $\varepsilon > 0$ d'exhiber un ensemble définissable $\mathcal{X}_\varepsilon \subset \mathcal{X}$ tel que le nombre de points algébriques de l'ensemble définissable $\mathcal{X} \setminus \mathcal{X}_\varepsilon$ vérifie encore une borne de la forme $C_\varepsilon B^\varepsilon$. Toutefois, il est *a priori* nécessaire d'ôter une partie de \mathcal{X} afin d'obtenir une borne sous-polynomiale puisque qu'un ensemble semi-algébrique de dimension strictement positive peut contenir un grand nombre de points algébriques de hauteur bornée.

Le théorème de Pila-Wilkie 1.2.7 est bel et bien une extension du théorème de Pila-Bombieri 1.2.5 car toute fonction analytique est localement¹¹ définissable dans une structure o -minimale et la partie algébrique de son graphe est vide lorsque la fonction est transcendante. On peut même choisir la même structure o -minimal pour toutes les fonctions analytiques. En effet, la structure \mathbb{R}_{an} engendrée par les restrictions de toutes les fonctions analytiques réelles aux compacts sur lesquels elles sont sur-convergentes¹² forme une structure o -minimale d'après un théorème de Gabrielov [41]. Le lecteur pourra également regarder [32] pour une démonstration de ce résultat à l'aide de la théorie des modèles et un énoncé analogue pour les sous-analytiques p -adiques. Notons qu'un théorème de Pila-Wilkie dans le cadre p -adique a été démontré dans [24] en exhibant une paramétrisation de Yomdin-Gromov dans ce cadre.

Le théorème de Pila-Wilkie a suscité un regain d'intérêt pour le comptage de points algébriques dans le cadre analytique depuis que des liens profonds ont été découverts entre ce type d'énoncé et des problèmes d'arithmétique sur les variétés abéliennes. À l'aide du théorème 1.2.7, Pila et Zannier dans [89] ont donné une nouvelle démonstration

⁹Un intervalle pouvant être réduit à un point.

¹⁰Une partie semi-algébrique de \mathbb{R}^n est un ensemble défini par un système d'équations et d'inéquations polynomiales.

¹¹On dit qu'une fonction est localement définissable si toute restriction de la fonction à un compact de son domaine de définition est définissable dans la structure.

¹²C'est-à-dire que la fonction admet un prolongement analytique sur un voisinage ouvert du compact considéré.

du théorème de Manin-Mumford tandis que la conjecture de André-Oort est redémontrée par Pila dans [87] en utilisant une fois encore le théorème de Pila-Wilkie.

La dépendance de la constante $C_{k,\varepsilon}$ en ε dans le théorème de Pila-Wilkie a été étudiée dans plusieurs articles [11, 59]. Par exemple dans [11], Binyamini obtient grâce à la théorie des fonctions pfaffiennes la version effective suivante du théorème de Pila-Wilkie.

Théorème 1.2.8 (Binyamini - [11, Th. 1]). *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine borné et $\mathcal{X} \subset \Omega$ un ensemble semi-noethérien de complexité β . Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante effective $C = C_n(\phi, \beta\varepsilon^{1-n})$ telle que*

$$\forall B > 0, N_{\mathbb{Q}}(\mathcal{X}^{\text{tr}}, B) \leq CB^\varepsilon.$$

Borne logarithmique – la conjecture Wilkie Un point commun des résultats de comptages précédents est que toutes les bornes exhibées sont sous-polynomiales. Or dans certains cas favorables, il est possible d'améliorer considérablement cette borne. On s'intéresse particulièrement au cas où la borne recherchée est de la forme $C(\log B)^\alpha$ pour une constante $C > 0$ et un exposant $\alpha > 0$. Une borne de cette forme est dite *logarithmique*. L'une des structures dans lesquelles on espère exhiber une telle borne logarithmique pour les parties transcendentes des ensembles qui y sont définissables est la structure $\mathbb{R}_{\text{exp}} := \langle \mathbb{R}, <, +, \times, \exp \rangle$. En 1996, Wilkie a démontré dans [124] que la structure \mathbb{R}_{exp} est o -minimale. À la suite du théorème 1.2.7, Wilkie pose la conjecture suivante

Conjecture (Wilkie - [88]). *Soit $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble définissable dans la structure \mathbb{R}_{exp} . Alors il existe une constante $C > 0$ et un exposant $\alpha > 0$ tels que*

$$\forall B > e, N_{\mathbb{Q}}(\mathcal{X}^{\text{tr}}, B) \leq C(\log B)^\alpha.$$

À ce jour la conjecture Wilkie n'est pas tranchée sauf pour les courbes [84] et pour certaines surfaces [22, 58, 86].

Une différence essentielle entre les structures o -minimales \mathbb{R}_{exp} et \mathbb{R}_{an} est que l'exponentielle réelle toute entière est définissable dans \mathbb{R}_{exp} et non seulement toutes ses restrictions aux compacts de \mathbb{R} . Ajoutons qu'un théorème de Miller [79] implique que l'exponentielle n'est pas définissable dans la structure \mathbb{R}_{an} alors qu'elle y est localement définissable.

Nous verrons dans le paragraphe suivant que l'énoncé analogue à la conjecture Wilkie dans \mathbb{R}_{an} est faux car il existe des fonctions analytiques d'une variable dont les graphes contiennent beaucoup de points algébriques de hauteur bornée. Toutefois cela n'exclut pas l'existence de structures o -minimales comprises entre \mathbb{R}_{alg} et \mathbb{R}_{an} et qui vérifient un énoncé semblable à la conjecture Wilkie. Le plus naturel est de considérer dans premier temps la structure $\langle \mathbb{R}, +, \times, \exp|_{[0,1]} \rangle$ engendrée par toutes les restrictions à un compact de l'exponentielle réelle. Cependant pour des raisons techniques la structure engendrée par les fonctions élémentaires $\mathbb{R}^{\text{RE}} := \langle \mathbb{R}, <, +, \times, \exp|_{[0,1]}, \sin|_{[0,\pi]} \rangle$ est plus pratique. En combinant à la fois à des méthodes d'analyse réelle et d'analyse complexe, Binyamini et Novikov ont démontré dans [11] la *conjecture Wilkie restreinte* ci-dessous.

Théorème 1.2.9 (Binyamini - Novikov - [11]). *Soit $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble définissable dans la structure \mathbb{R}^{RE} . Alors il existe une constante $C > 0$ et un exposant $\alpha > 0$ tels que*

$$\forall B > e, N_{\mathbb{Q}}(\mathcal{X}^{\text{tr}}, B) \leq C(\log B)^\alpha.$$

Autrement dit, la conclusion de la conjecture Wilkie est vraie pour les ensembles définissables de la structure \mathbb{R}^{RE} .

Notons que tous les ensembles qui peuvent être décrits par des équations élémentaires obtenues à l'aide des fonctions exponentielle, sinus, cosinus, tangente et logarithme restreintes à des compacts sont définissables dans la structure \mathbb{R}^{RE} .

Fonctions oscillantes Nous avons vu qu'une fonction entière telle que l'exponentielle réelle peut être définie dans une structure o-minimale. À l'inverse, la fonction sinus réelle n'est définissable dans aucune structure o-minimale puisque son lieu des zéros contredit le quatrième axiome de la définition 1.2.6 des structures o-minimales. Cependant la fonction sinus est une E -fonction qui vérifie l'équation différentielle linéaire $y'' + y = 0$. Donc d'après le théorème de Siegel-Shidlovsky 1.1.4, l'ensemble exceptionnel de la fonction sinus est réduit à l'origine. Ainsi une partie de \mathbb{R}^2 non définissable dans une structure o-minimale peut avoir très peu de points algébriques. Ce constat a mené Miller et Comte à étudier dans [28] les points algébriques contenus dans des courbes oscillantes qui ne sont pas définissables dans une structure o-minimale. Ils obtiennent notamment un comptage des points rationnels des graphes des fonctions oscillantes $\sin \circ \log_j$ pour tout $j \in \mathbb{N}^*$.

Théorème 1.2.10 (Miller - Comte - [28, Cor. 3.10]). *Soit $j \in \mathbb{N}^*$. On note $g_j = \sin \circ \log_j$ et \mathcal{X}_j le graphe de g_j . Alors il existe une constante $C_j > 0$ telle que*

$$\forall B > e, N_{\mathbb{Q}}(\mathcal{X}_j, B) \leq C_j (\log B)^{5+4j}.$$

Contrairement à la fonction sinus, les fonctions $\sin \circ \log_j$ pour $j \in \mathbb{N}^*$ ne sont pas des E -fonctions et donc le théorème de Siegel-Shidlovsky ne peut s'y appliquer. Cependant à ce jour nous ne savons pas si les graphes des fonctions $\sin \circ \log_j$ contiennent une infinité de points algébriques.

Un résultat négatif Nous avons mentionné dans le paragraphe précédent que la conjecture Wilkie 1.2 n'admet pas d'analogie dans la structure \mathbb{R}_{an} . Il est en fait possible de construire des fonctions entières transcendentes dont le graphe contient beaucoup de points algébriques de hauteur bornée. En employant des méthodes similaires à celles utilisées pour exhiber des fonctions g entières et transcendentes d'ensemble exceptionnel S_g prescrit¹³, Surroca a démontré dans sa thèse le résultat suivant.

Théorème 1.2.11 (Surroca - [116]). *Soit $\phi : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ une fonction telle que*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\phi(x)}{x} = 0.$$

Alors il existe une fonction $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ transcendente telle que g envoie tout algébrique $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ sur un algébrique de $\mathbb{Q}[\alpha]$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^$, il existe une suite $(B_j) \nearrow \infty$ telle que*

$$N_k(\mathcal{X}, B_j) \geq \frac{1}{2} \exp \{k(k+1)\phi(\log B_j)\},$$

où \mathcal{X} désigne le graphe de la restriction de g au disque unité \mathbb{D} .

En particulier en appliquant le théorème 1.2.11 avec la fonction $\phi(x) = \sqrt{x}$ et $k = 1$, on obtient l'existence de fonctions entières transcendentes dont le nombre de points rationnels de hauteur bornée par B dans leur graphe restreint au disque \mathbb{D} dépasse n'importe quelle puissance de $\log B$. Ces fonctions sont localement définissables dans la structure \mathbb{R}_{an} et donc la conclusion de la conjecture Wilkie 1.2 est fautive dans cette structure o-minimale. Néanmoins, Surroca a également montré dans [116] que les fonctions holomorphes transcendentes ne sont pas loin de vérifier un comptage logarithmique de leur points algébriques.

Théorème 1.2.12 (Surroca - [116]). *Soit $g \in \mathcal{O}(\overline{\mathbb{D}})$ une fonction transcendente. Alors il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe une suite $(B_j) \nearrow \infty$ telle que*

$$\forall j \in \mathbb{N}, N_k(\Gamma_{\mathbb{D}}^g, B_j) \leq Ck^3 (\log B_j)^2.$$

¹³Voir le paragraphe sur les fonctions pathologiques.

Remarque 1.2.13. Le théorème 1.3.16 de Coman et Poletsky implique pour les fonctions entières transcendantes et d'ordre fini un énoncé similaire au théorème de Surroca 1.2.12. Voir la remarque 1.3.17 pour plus de détails.

1.3 Lemmes de zéros

Dans cette thèse nous démontrons des énoncés communément appelés des *lemmes de zéros*. Nous verrons dans le prochain paragraphe le lien entre les lemmes de zéros et le comptage de points algébriques qui justifie que nous cherchions à démontrer de tels résultats. Pour toute fonction $g \in \mathcal{M}(\Omega)$ et tout polynôme $P \in \mathbb{C}[z, w]$, on note $P_g(z) := P(z, g(z))$. Un lemme de zéros de g dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$ est une majoration pour tout polynôme non nul $P \in \mathbb{C}[z, w]$ du nombre de zéros de la fonction P_g dans ce même domaine en fonction du degré du polynôme P et de la fonction g . Le plus souvent la fonction g que nous étudions est définie sur un disque \mathbb{D}_r , voire le plan tout entier. Afin d'abrégé les énoncés on introduit la notion de *borne de Bézout*.

Définition 1.3.1 (Borne de Bézout). Soient $g \in \mathcal{M}(\Omega)$ et $d \in \mathbb{N}$. La d -ième borne de Bézout de g dans le domaine $D \Subset \Omega$ est définie par

$$\mathcal{Z}_d(D, g) := \sup \{n(D, P_g) \mid P \in \mathbb{C}_{\leq d}[z, w], P_g \neq 0\},$$

où $n(D, P_g)$ est le nombre de zéros avec multiplicité de la fonction méromorphe P_g dans le domaine D . Lorsque D est le disque \mathbb{D}_r , on note la borne de Bézout $\mathcal{Z}_d(r, g)$.

Démontrer un lemme de zéros pour $g \in \mathcal{O}(\mathbb{D}_R)$ consiste à exhiber une majoration de la borne de Bézout $\mathcal{Z}_d(r, g)$ en fonction du degré d , du rayon r et de la fonction g . Dans la plupart des applications qui nous intéressent et notamment pour le comptage de points algébriques, nous cherchons une majoration de la borne de Bézout par un polynôme en le degré d . On dit dans ce cas que la fonction g vérifie un *lemme de zéros polynomial*.

Définition 1.3.2 (Lemme de zéros polynomial). Soient $R \in]0, \infty]$ et $g \in \mathcal{M}(\mathbb{D}_R)$ une fonction transcendante. On dit que la fonction g vérifie un *lemme des zéros polynomial* s'il existe un exposant $\alpha > 0$ et une fonction $\varphi : [0, R[\rightarrow \mathbb{R}_+$ tels que

$$\forall d \in \mathbb{N}, \forall r \in [0, R[, \mathcal{Z}_d(r, g) \leq (d \vee \varphi(r))^\alpha. \quad (1.3.1)$$

Remarque 1.3.3. Avoir une expression explicite de la fonction φ dans l'inégalité 1.3.1 peut s'avérer très utile pour le comptage de points algébriques sur des domaines non compacts. On s'attend le plus souvent à ce que la fonction φ s'exprime à l'aide de la fonction maximum $M(r, g)$ lorsque g est holomorphe sur \mathbb{D}_R et la caractéristique de Nevanlinna¹⁴ $T(r, g)$ lorsque g admet des pôles. Cette attente se justifie par le fait qu'une majoration de $\mathcal{Z}_d(r, g)$ est une sorte d'inégalité de Bézout transcendante et que la caractéristique de Nevanlinna est aux fonctions méromorphes ce que le degré est à un polynôme.

Des lemmes de zéros aux comptages de points algébriques Nous explicitons maintenant le lien entre les lemmes de zéros et le comptage de points algébriques. La proposition 1.3.4 ci-dessous se déduit du théorème d'interpolation général 1.6.36 démontré au chapitre 5.

Proposition 1.3.4. Soient $k \in \mathbb{N}^*$, $g \in \mathcal{M}(\overline{\mathbb{D}}_R)$. On suppose qu'il existe $\varphi : [0, R[\rightarrow \mathbb{R}_+$ et $\alpha > 0$ tels que

$$\forall d \in \mathbb{N}, \forall r \in [0, R[, \mathcal{Z}_d(r, g) \leq (d \vee \varphi(r))^\alpha.$$

¹⁴Voir la définition 2.6.4 page 63.

Alors

$$\forall \varepsilon > 0, \forall r \in [0, R[, N_k(\Gamma_r^g, B) \ll \left(\frac{R}{R-r}\right)^2 \exp\left\{\varepsilon \frac{R+r}{R-r} T(R, g)\right\} (\log B \vee \varphi(r))^\alpha.$$

On suppose de plus que g est holomorphe. Alors

$$\forall \varepsilon > 0, \forall r \in [0, R[, N_k(\Gamma_r^g, B) \ll \left(\frac{R}{R-r}\right)^2 \max\{1, M(R, g)\}^\varepsilon (\log B \vee \varphi(r))^\alpha.$$

Démonstration. Voir page 191. ■

Remarque 1.3.5. Pour majorer $N_k(\Gamma_r^g, B)$, il n'est en fait pas nécessaire *a priori* de majorer la borne de Bézout $Z_d(r, g)$. La méthode d'interpolation utilisée par Masser dans [77] aussi bien que notre généralisation 1.6.36 de celle-ci montrent qu'il suffit de majorer le nombre de zéros de P_g pour tout polynôme $P \in \overline{\mathbb{Q}}_{\leq d}[z, w]$ non nul dont la hauteur est bornée par une puissance de B .

L'utilisation de lemmes de zéros afin de compter les points algébriques de graphes analytiques a fait l'objet d'une recherche importante ces dernières années. Nous donnons dans les paragraphes ci-dessous un aperçu de ces résultats.

Fonctions transcendentes vérifiant des équations différentielles Une situation propice à l'établissement de lemmes de zéros est celle des fonctions analytiques transcendentes vérifiant une équation différentielle ou une relation fonctionnelle. Par exemple dans [10], l'auteur montre que les trajectoires d'un champ de vecteurs polynomial défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$ dont les orbites sont constructibles vérifie un lemme de zéros polynomial.

Définition 1.3.6 (Binyamini - [10]). Soit ξ un champ de vecteurs polynomial dans \mathbb{C}^n défini au-dessus d'un sous-corps K de \mathbb{C} algébriquement clos. C'est-à-dire

$$\xi = \sum_{j=1}^n \xi_j(z) \frac{\partial}{\partial z_j}, \quad \xi_j \in K[z_1, \dots, z_n].$$

Le champ de vecteurs ξ a des orbites constructibles dans la K -variété algébrique $V \subset \mathbb{C}^n$ lorsque V est ξ -invariante et la relation d'équivalence définie par l'action de ξ sur V est K -constructible.

Théorème 1.3.7 (Binyamini - [10]). Soient $V \subset \mathbb{C}^n$ une $\overline{\mathbb{Q}}$ -variété algébrique, ξ un champ de vecteurs polynomial dans \mathbb{C}^n défini au-dessus de $\overline{\mathbb{Q}}$ et ayant des orbites constructibles dans V . Alors pour toute paramétrisation $\phi : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow V$ d'une trajectoire de ξ , il existe une constante $C > 0$ vérifiant que pour tout $P \in \mathbb{C}_{\leq d}[z_1, \dots, z_n]$ tel que $P \circ \phi \neq 0$,

$$n(1, P \circ \phi) \leq C_\phi d^{2k(m+1)} \log d,$$

où $m = \dim(V)$ et k ne dépend que de la paramétrisation ϕ .

Dans [29], Comte et Yomdin démontrent un autre résultat dans cette direction en faisant des hypothèses arithmétiques sur l'équation différentielle et les coefficients de Taylor en l'origine de la solution considérée. Par la suite Binyamini a souligné que leur méthode s'étend aux équations différentielles algébriques. Ils obtiennent ainsi le théorème suivant

Théorème 1.3.8 (Binyamini-Comte-Yomdin - [29, Th. 3.5.3]). Soit $g \in \mathcal{O}(\overline{\mathbb{D}})$ une fonction transcendante. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ et $Q \in \mathbb{Q}[z_1, \dots, z_k]$ non nul tels que

$$Q(z, f(z), \dots, f^{(k-1)}(z)) \equiv 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) \in \mathbb{Q}.$$

Alors g vérifie un lemme de zéros polynomial.

Remarque 1.3.9. Le théorème 1.3.8 s'étend sans peine aux équations différentielles algébriques à coefficients algébriques.

Séries lacunaires Dans [29], Comte et Yomdin établissent également un lemme de zéros pour certaines séries entières lacunaires.

Théorème 1.3.10 (Comte - Yomdin - [29, Th. 3.4.5]). *Soient $p > 0$, $q > 2$ et $g \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ telle que sa série de Taylor en l'origine est de la forme*

$$\forall z \in \mathbb{D}, g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{\lambda_n} \quad \text{avec} \quad \lambda_n^2 < \lambda_{n+1} < \lambda_n^q \quad \text{et} \quad |a_n| > e^{-\lambda_n^p}.$$

Alors g vérifie un lemme de zéros polynomial dans $\mathbb{D}_{\frac{1}{4}}$. Plus précisément

$$\forall d \in \mathbb{N}, \mathcal{Z}_d(\tfrac{1}{4}, g) \leq 10(2d)^{q^2} (1 + qd^2 + 5d^{pq+3}).$$

Grâce au théorème 1.6.16 démontré dans le chapitre 4 nous exhibons dans la remarque 1.6.18 ci-dessous des séries lacunaires vérifiant des lemmes de zéros polynomiaux mais ne vérifiant pas les hypothèses de 1.3.10.

Fonctions hyper-transcendantes On rappelle qu'une fonction méromorphe est dite *hyper-transcendante* si elle ne vérifie aucune équation différentielle algébrique non triviale. Nous avons vu dans la section 1.1 que l'hyper-transcendance n'est pas une hypothèse suffisante pour interdire certains ensembles exceptionnels¹⁵. Cependant des lemmes de zéros polynomiaux ont été établis pour certaines fonctions hyper-transcendantes remarquables et donc *a fortiori* des comptages logarithmiques de leurs points algébriques. Dans [77], Masser établit un comptage logarithmique des points rationnels du graphe de la fonction ζ en démontrant le lemme de zéros suivant.

Théorème 1.3.11 (Masser - [77, Prop. 1]). *La fonction ζ de Riemann satisfait un lemme de zéros. Plus précisément, il existe une constante $C > 0$ explicite telle que*

$$\forall d \in \mathbb{N}, \forall r > 0, \mathcal{Z}_d(r, \zeta) \leq C(d^2 + dr \log r).$$

En s'inspirant des méthodes utilisées par Masser dans [77], Besson a démontré dans [8, 9] que la fonction Γ d'Euler et la fonction σ_Λ de Weierstraß pour la majorité des réseaux $\Lambda \subset \mathbb{C}$ vérifient un lemme de zéros polynomial.

Théorème 1.3.12 (Besson - [8]). *La fonction Γ d'Euler vérifie un lemme de zéros polynomial. Plus précisément, il existe une constante $C > 0$ explicite telle que*

$$\forall d \in \mathbb{N}, \forall r > 0, \mathcal{Z}_d(r, \Gamma) \leq Cd(r + d) \log(r + d).$$

Théorème 1.3.13 (Besson - [9]). *Pour presque tout réseau Λ de \mathbb{C} , la fonction sigma de Weierstraß associée à Λ satisfait un lemme de zéros polynomial. Plus précisément, il existe une constante explicite $C > 0$ telle que*

$$\forall d \in \mathbb{N}, \forall r > 0, \mathcal{Z}_d(r, \sigma_\Lambda) \leq Cd(r + \sqrt{d})^2 \log(r + d).$$

Remarque 1.3.14. Nous précisons ce que Besson entend par « presque tous les réseaux » dans la remarque 4.7.2. En application les résultats du chapitre 3 et 4, nous montrons que la condition sur le réseau du théorème 1.3.13 est inutile comme l'avait pressenti l'auteur dans [9]. Voir l'énoncé 1.6.28.

¹⁵Voir le théorème 1.1.7.

Fonctions transcendentes à croissance exponentielle Dans [27], Coman et Poletsky ont démontré un lemme des zéros général pour les fonctions entières d'ordre fini et d'ordre inférieur strictement positif.

Théorème 1.3.15 (Coman-Poletsky - [27]). *Soit $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ une fonction transcendante. On suppose qu'il existe $C_1, C_2 > 1$ et $k > 1$ tels que*

$$\forall r \gg 0, C_1 m(r, g) \leq m(kr, g) \leq C_2 m(r, g) \quad \text{où } m(r, g) = \log^+ M(r, g).$$

Alors g vérifie un lemme de zéros polynomial. Plus précisément, il existe une fonction φ strictement croissante telle que

$$\forall d \in \mathbb{N}, \forall r > 0, \mathcal{Z}_d(r, g) \leq (d \vee \varphi(r))^2,$$

Les hypothèses du théorème 1.3.15 sont satisfaites notamment par les fonctions poly-exponentielles, l'inverse de la fonction Γ d'Euler et la fonction $(z-1)\zeta(z)$ où ζ est la fonction zêta de Riemann. Le fait que le théorème 1.3.15 s'applique aux fonctions poly-exponentielles, à la fonction ζ et à la fonction Γ est particulièrement intéressant. En effet, les démonstrations des lemmes de zéros 1.3.11, 1.3.12 et 1.3.13 utilisent des propriétés spécifiques des fonctions étudiées et en particulier des résultats sur la distribution des *petites valeurs* de celles-ci, c'est-à-dire les antécédents de \mathbb{S}^1 par ces fonctions. Par exemple dans [77], Masser utilise pour établir le théorème 1.3.11 un résultat sur la distribution des petites valeurs de la fonction ζ dans des bandes de la forme $\{x+iy \mid -3 \leq x \leq 3 \text{ et } 1 \leq y \leq s\}$. Le lecteur pourra regarder le chapitre 7 de [111] pour des résultats de ce type pour les L-fonctions. Dans [9], Besson utilise la quasi-périodicité de la fonction σ_Λ de Weierstraß pour étudier la distribution des petites valeurs de celle-ci. Dans [27], Coman et Poletsky parviennent grâce à la théorie d'Ahlfors à étudier la distribution des petites valeurs d'une fonction g vérifiant la condition 1.3.15. En plus de sa généralité, le résultat de Coman et Poletsky présente l'avantage d'avoir des hypothèses facilement vérifiables sur les coefficients de Taylor de g en l'origine¹⁶. Notons que dans [27], les auteurs démontrent également que toute fonction entière d'ordre fini vérifie un lemme de zéros polynomial pour une suite $(d_j) \nearrow \infty$ de degrés.

Théorème 1.3.16 (Coman-Poletsky - [27]). *Soit $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ une fonction transcendante. On suppose que*

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log^+ M(r, g)}{\log r} < \infty. \quad (1.3.2)$$

Alors il existe une suite $(d_j) \nearrow \infty$ de degrés et une fonction $j : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telles que

$$\forall r > 0, \forall j \geq j(r), \mathcal{Z}_{d_j}(r, g) \leq C d_j^2,$$

où C est une constante qui ne dépend que de la fonction g .

Remarque 1.3.17. Le théorème 1.3.16 implique un résultat similaire au théorème de Surroca 1.2.12 pour les fonctions entières d'ordre fini. En effet, une majoration de la borne de Bézout $\mathcal{Z}_{d_j}(r, g)$ par un polynôme en d_j et la méthode d'interpolation de Masser 1.6.31 permettent de majorer $N_K(\mathcal{X}_r, e^{d_j})$ par un polynôme en d_j où \mathcal{X}_r est l'image de \mathbb{D}_r par la fonction g .

Remarque 1.3.18. Dans [27], Coman et Poletsky posent la question de savoir si l'hypothèse 1.3.2 est superflue. Nous montrons dans le chapitre 4 que cette condition peut en effet être omise à condition que la fonction soit d'ordre inférieur strictement positif. Voir l'énoncé 1.6.19.

¹⁶Voir la sous-section 2.3 p.52.

Dans [20], Brudnyi étend les théorèmes 1.3.15 et 1.3.16 aux fonctions entières de plusieurs variables. Ses théorèmes sont valables pour certaines fonctions entières d'ordre infini.

Dans [18], Jones et Boxall ont démontré par une méthode différente de celle utilisée par Coman et Poletsky dans [27] que sous les mêmes conditions que le théorème 1.3.15, le graphe de la fonction g a peu de points rationnels. C'est-à-dire que ce graphe vérifie un comptage logarithmique de ses points rationnels. De plus leur méthode s'étend sans peine aux points algébriques de degré borné. Cependant pour atteindre ce but, ils n'établissent pas un lemme de zéros pour tous les polynômes non nuls de $\mathbb{C}[z, w]$ mais seulement pour les polynômes non nuls de $\mathbb{Z}[z, w]$ dont la taille des coefficients est contrôlée par la hauteur des points à interpoler. Un tel lemme de zéros s'avère suffisant pour le comptage de points rationnels comme nous l'avons mentionné précédemment¹⁷.

Théorème 1.3.19 (Boxall-Jones - [18]). *Soit $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ une fonction transcendante. On suppose que*

$$\lambda = \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log M(r, g)}{\log r} > 0 \quad \text{et} \quad \rho = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log M(r, g)}{\log r} < \infty.$$

Alors il existe un exposant $\alpha > 0$ et une fonction φ strictement croissante tels que

$$\forall r > 0, \forall P \in \mathbb{Z}_{\leq d}[z, w], 0 < H(P) \leq B \implies n(r, P_g) \leq C\varphi(r)(\log B)^\alpha,$$

où $H(P)$ est le maximum du module des coefficients de P et α peut être exprimé à l'aide de λ et ρ .

1.4 Mesures de transcendance

Afin d'exclure les fonctions pathologiques présentées dans la section 1.1, il est nécessaire de faire des hypothèses plus fortes que la transcendance ou l'hyper-transcendance des fonctions méromorphes considérées. Dans le but de justifier la démarche qui va suivre, examinons brièvement la situation des nombres transcendants en approximation diophantienne qui présente certaines analogies avec celles des fonctions transcendentes.

Mesure de transcendance et approximation diophantienne De même qu'il est possible de construire des fonctions pathologiques comme limite de sommes partielles bien particulières, il est possible de construire des nombres transcendants pathologiques pour l'approximation diophantienne comme limite de suite de rationnels bien particulière. Un exemple historique est celui des *nombres de Liouville* introduit par ce dernier dans [69] et qui sont les premiers réels dont la transcendance fut avérée. Un nombre $\xi \in \mathbb{R}$ est appelé un nombre de Liouville s'il vérifie la propriété suivante

$$\forall n > 0, \exists q_n \in \mathbb{N}^*, \exists p_n \in \mathbb{Z}, \left| \xi - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^n}. \quad (1.4.1)$$

Autrement dit, le réel ξ peut être approché par des suites (r_n) de nombres rationnels dont la vitesse de convergence est au moins de l'ordre de $H(r_n)^{-n}$. Pour construire un nombre de Liouville, il suffit de prendre la somme infinie d'une suite de rationnels tendant très rapidement vers zéro. Par exemple Liouville a montré dans [69] que les nombres réels de la forme

$$\xi = \sum_{k=0}^{\infty} a^{-k!} \quad \text{avec } a \text{ un entier plus grand que } 2,$$

¹⁷Voir la remarque 1.3.5.

satisfont la propriété 1.4.1. Bien que l'ensemble des nombres de Liouville soit indénombrable et dense dans \mathbb{R} , on ne connaît pas à ce jour de constante qui soit un nombre de Liouville et qui n'ait pas été construite dans ce but. Afin d'exclure les nombres de Liouville, on introduit la mesure d'irrationalité suivante.

Définition 1.4.1 (Mesure d'irrationalité - [21]). Soit $\xi \in \mathbb{R}$ un nombre irrationnel. La *mesure d'irrationalité* de ξ est la borne inférieure des réels $\alpha > 0$ tels qu'il existe une constante $C_\alpha > 0$ vérifiant

$$\forall p \in \mathbb{Z}, \forall q \in \mathbb{N}^*, \left| \xi - \frac{p}{q} \right| > \frac{C_\alpha}{q^\alpha}.$$

Ainsi un nombre de Liouville est par définition de mesure d'irrationalité infinie. Déterminer la mesure d'irrationalité, ou ne serait-ce qu'une valeur approchée, d'un réel particulier est un problème très difficile. Toutefois on connaît précisément cette mesure pour certains nombres transcendants importants comme e ou π et surtout pour les nombres algébriques irrationnels d'après le théorème de Thue-Siegel-Roth 1.4.2.

Théorème 1.4.2 (Thue-Siegel-Roth - [97]). *La mesure d'irrationalité d'un nombre algébrique irrationnel est exactement 2.*

De même on peut définir une mesure de transcendance des réels en quantifiant la tendance d'un nombre $\xi \in \mathbb{R}$ à donner de très petites valeurs lorsque l'on évalue en ξ un polynôme P à coefficient entier de degré et coefficient borné.

Définition 1.4.3 (Mesure de transcendance - [21, Ch. 8]). Soit $\xi \in \mathbb{R}$ transcendant. Une fonction $\Phi : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}_+^*$ est appelée une *mesure de transcendance* de ξ s'il existe $d_0 \in \mathbb{N}^*$ et $B_0 > 0$ tels que

$$\forall d \geq d_0, \forall B \geq B_0, \forall P \in \mathbb{Z}_{\leq d}[z], H(P) \leq B \implies |P(\xi)| \geq \exp\{-\Phi(d, \log B)\}, \quad (1.4.2)$$

où $H(P)$ est le maximum du module des coefficients de P .

Remarque 1.4.4. La condition 1.4.2 est équivalente à dire que $\forall d \geq d_0$

$$\forall B \geq B_0, \Phi(d, \log B) \geq -\inf \{ \log |P(\xi)| \mid P \in \mathbb{Z}_{\leq d}[z], H(P) \leq B \text{ et } P \neq 0 \}.$$

De même que des majorations de la mesure d'irrationalité sont connues pour certaines constantes, des mesures de transcendance au sens de la définition 1.4.3 sont connues pour quelques constantes remarquables. Par exemple, Waldschmidt a exhibé dans [122] une mesure de transcendance de π .

Théorème 1.4.5 (Waldschmidt - [122]). *Une mesure de transcendance au sens de 1.4.3 du nombre π est*

$$\forall d \geq 0, \forall b \geq 0, \Phi(d, b) := 2^{40} d(b + d \log d)(1 + \log d).$$

Remarque 1.4.6. Dans [19, Th. 2.7], Jones et Boxall ont montré qu'une fonction holomorphe $g \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ qui prend en l'origine une valeur ξ ayant une mesure de transcendance bornée par un polynôme vérifie un comptage logarithmique de ses points algébriques dans un voisinage de l'origine. En utilisant la mesure de transcendance de π de 1.4.5, ils en déduisent un comptage logarithmique des points algébriques de la fonction ζ puisque $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$. Dans [43, Th. 10.1], Gasbarri obtient un résultat similaire à [19, Th. 2.7] pour les fonctions holomorphes de \mathbb{D} dans une variété projective lisse définie au-dessus d'un corps de nombres K et de dimension au moins 2.

Mesure de transcendance de Coman et Poletsky Dans [26], Coman et Poletsky définissent une mesure de transcendance pour les fonctions entières en s'inspirant des mesures de transcendance pour les réels.

Définition 1.4.7 (Mesure de transcendance - [26]). Soient $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ non constante et $d \in \mathbb{N}$. La d -ième mesure de transcendance de g est définie par

$$E_d(g) := \sup \{ \|P\|_{\mathbb{D}^2} \mid P \in \mathbb{C}_{\leq d}[z, w] \text{ et } M(1, P_g) \leq 1 \},$$

et $e_d(g) := \log E_d(g)$.

Afin de démontrer des comptages logarithmiques de points algébriques dans le graphe de g , on souhaite majorer la mesure de transcendance $e_d(g)$ par un polynôme en d . Le degré de ce polynôme est alors l'exposant apparaissant sur le terme $\log B$ où B est la hauteur des points algébriques comptés. Coman et Poletsky introduisent donc dans [27] la notion d'ordre de transcendance.

Définition 1.4.8 (Ordre de transcendance - [27]). Soit $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ une fonction transcendante. On appelle *ordre de transcendance inférieur* de g , respectivement *ordre de transcendance supérieur* de g les deux quantités suivantes

$$\underline{\tau}(g) := \sup \left\{ \tau \in \mathbb{R}_+ \mid \liminf_{d \rightarrow \infty} \frac{m_d(e, g)}{d^\tau} > 0 \right\} \text{ et } \bar{\tau}(g) := \inf \left\{ \tau \in \mathbb{R}_+ \mid \overline{\lim}_{d \rightarrow \infty} \frac{m_d(e, g)}{d^\tau} < \infty \right\},$$

où

$$\forall r > 0, m_d(r, g) := \sup \{ \log M(r, P_g) \mid P \in \mathbb{C}_{\leq d}[z, w], M(1, P_g) \leq 1 \}.$$

Remarque 1.4.9. Afin d'insister davantage sur l'analogie entre les nombres transcendants et les fonctions transcendentes, on remarque que la mesure de transcendance $e_d(g)$ de Coman et Poletsky peut également être définie par

$$e_d(g) = - \inf \{ \log M(1, P_g) \mid P \in \mathbb{C}_{\leq d}[z, w], \|P\|_{\mathbb{D}^2} \leq 1 \text{ et } P \neq 0 \}. \quad (1.4.3)$$

Sous cette forme la norme infini de P sur \mathbb{D}^2 joue le rôle pour la mesure de transcendance $e_d(g)$ de la hauteur de Weil pour une mesure de transcendance Φ de $\xi \in \mathbb{C}$.

Mesures de transcendance holomorphe et méromorphe Dans le chapitre 3 nous définissons et étudions deux nouvelles mesures de transcendance pour les fonctions holomorphes sur un disque ou le plan d'une part et les fonctions méromorphes sur le disque ou le plan d'autre part. La première mesure est une extension naturelle de la mesure de transcendance $e_d(g)$ de Coman et Poletsky 1.4.7.

Définition 1.4.10 (Mesure de transcendance holomorphe). Soient $R \in]0, \infty]$, $g \in \mathcal{O}(\mathbb{D}_R)$ non constante et $d \in \mathbb{N}$. La d -ième mesure de transcendance holomorphe de g est définie par

$$\forall \lambda \in [0, R], e_d(\lambda, g) := \sup \{ \log \|P\|_{\mathbb{D}_\lambda \times \mathbb{D}} \mid P \in \mathbb{C}_{\leq d}[z, w] \text{ et } M(\lambda, P_g) \leq 1 \}.$$

Dans le chapitre 3, on établit une majoration¹⁸ de la mesure de transcendance holomorphe $e_d(\lambda, g)$ en fonction de la distribution des petites valeurs de g similaire au théorème 4.2 de [26] pour la mesure de transcendance $e_d(g)$. Grâce à cette majoration, on obtient un critère pour établir des lemmes de zéros pour les fonctions holomorphes dans le disque. Voir le théorème 1.6.4. Lorsque la fonction $g \in \mathcal{M}(\mathbb{D}_R)$ admet des pôles sur le cercle de rayon λ , la fonction maximum $M(\lambda, P_g)$ peut être infinie. Dans ce cas

¹⁸Voir le théorème 3.1.19.

nous remplaçons celle-ci par la moyenne $\mathring{m}(\lambda, P_g)$ de la fonction $\log |P_g|$ le long du cercle $\partial\mathbb{D}_\lambda$ définie par

$$\mathring{m}(\lambda, P_g) := \int_0^{2\pi} \log |P_g(\lambda e^{i\theta})| \frac{d\theta}{2\pi}.$$

On définit ainsi une mesure de transcendance pour les fonctions méromorphes de la manière suivante.

Définition 1.4.11 (Mesure de transcendance méromorphe). Soient $R \in]0, \infty]$, $g \in \mathcal{M}(\mathbb{D}_R)$ non constante et $d \in \mathbb{N}$. La d -ième mesure de transcendance méromorphe de g est définie par

$$\forall \lambda \in [0, R[, \mathring{e}_d(\lambda, g) := \sup \{ \log \|P\|_{\mathbb{D}_\lambda \times \mathbb{D}} \mid P \in \mathbb{C}_{\leq d}[z, w] \text{ et } \mathring{m}(\lambda, P_g) \leq 0 \}.$$

Remarque 1.4.12. Lorsque g est une fonction holomorphe sur \mathbb{D}_R , nous montrons que les mesures $e_d(\lambda, g)$ et $\mathring{e}_d(\lambda, g)$ sont comparables et les ordres de transcendance également. Néanmoins la mesure de transcendance holomorphe peut conduire *a priori* à des lemmes de zéros plus fin lorsque g est holomorphe.

Dans le chapitre 3, on établit une majoration¹⁹ de la mesure de transcendance méromorphe $\mathring{e}_d(\lambda, g)$ en fonction de la distribution des petites valeurs de g et des pôles de g . Grâce à cette majoration, on obtient un critère pour établir des lemmes de zéros pour les fonctions méromorphes dans le disque. Voir le théorème 1.6.9.

1.5 Inégalités de Bézout transcendantentes

Estimer la taille de l'intersection de deux variétés plongées dans un même espace est un problème récurrent en géométrie. Le théorème de Bézout ci-dessous bien connu des géomètres algébristes fournit une description précise de cette intersection lorsque les deux variétés sont des courbes projectives complexes plongées dans un même plan projectif.

Théorème 1.5.1 (Bézout - [104, p. 21]). Soient V et W deux courbes projectives de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ de degré respectivement d_1 et d_2 et n'ayant aucune composante irréductible commune. Alors le nombre de points d'intersections, comptés avec multiplicité, est égal à $d_1 d_2$.

Ce type d'énoncé a été étendu aux variétés algébriques de dimensions supérieures, voir [40, 104]. L'une des difficultés majeures de cette généralisation est de donner un sens à la multiplicité des composantes irréductibles de l'intersection de V et W . Lorsque nous majorons seulement la taille de l'intersection de V et W , nous parlons d'*inégalité de Bézout*. Il est intéressant pour compter des points algébriques que de chercher des analogues de l'inégalité de Bézout pour certaines classes \mathcal{C} de variétés analytiques. Lorsqu'une telle inégalité existe, nous la désignerons par *inégalité de Bézout transcendante*. Afin de pouvoir énoncer une telle inégalité, il faut attacher à chaque variété de \mathcal{C} une notion de complexité dans un contexte qui n'est plus algébrique. Afin d'illustrer notre propos, nous décrivons maintenant trois exemples de classes de variétés analytiques importantes étudiées par Khovanskiĭ et admettant une inégalité de Bézout transcendante.

¹⁹Voir le théorème 3.1.23.

Fonctions poly-exponentielles Une fonction *poly-exponentielle* P est un polynôme à coefficients réels en des variables X_1, \dots, X_n et des variables $Y_1 = \exp(a_1 \cdot x), \dots, Y_m = \exp(a_m \cdot x)$ avec $a_i \in \mathbb{R}^n$. Le degré de la fonction poly-exponentielle P est défini comme son degré total en tant que polynôme en les variables X_1, \dots, X_n et Y_1, \dots, Y_m . En 1980, Khovanskiï démontre dans [61] l'analogie du théorème de Bézout pour les systèmes d'équations poly-exponentielles où le degré des poly-exponentielles remplace le degré des courbes dans l'inégalité de Bézout 1.5.1.

Théorème 1.5.2 (Khovanskiï - [61, 62]). *On considère P_1, \dots, P_n des fonctions poly-exponentielles de degré respectivement m_1, \dots, m_n . Alors le nombre de solutions non-dégénérées²⁰ du système d'équations analytiques*

$$P_1 = 0 \text{ et } \dots \text{ et } P_n = 0,$$

est majoré par

$$2^{k(k-1)/2} \left(\sum_{i=1}^n (m_i + 1) \right)^k \prod_{i=1}^n m_i.$$

Variétés pfaffiennes Une fonction *pfaffienne* est une expression polynomiale faisant intervenir une suite finie de fonctions analytiques réelles g_1, \dots, g_m vérifiant un système triangulaire d'équations différentielles polynomiales.

Définition 1.5.3 (Fonction pfaffienne - [62]). Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un domaine. Une *chaîne pfaffienne* d'ordre $m \in \mathbb{N}^*$ et de degré $p \in \mathbb{N}$ est une suite de fonctions analytiques réelles $g_1, \dots, g_m : U \rightarrow \mathbb{R}$ qui satisfait un système triangulaire d'équations différentielles de la forme

$$dg_j = \sum_{i=1}^n P_{i,j}(x, g_1(x), \dots, g_j(x)) dx_i \quad j = 1, \dots, m,$$

avec $P_{i,j} \in \mathbb{R}_{\leq p}[X, Y_1, \dots, Y_m]$. Une fonction $g : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de la forme

$$\forall x \in U, \quad g(x) = P(x, g_1(x), \dots, g_m(x)),$$

avec $P \in \mathbb{R}_{\leq q}[X, Y_1, \dots, Y_m]$ est dite *pfaffienne* d'ordre m et de degré (p, q) .

Théorème 1.5.4 (Khovanskiï - [62]). *Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ un domaine et $g_1, \dots, g_n : U \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions pfaffiennes ayant une chaîne pfaffienne en commun d'ordre m et de degrés respectivement $(p, q_1), \dots, (p, q_n)$. Alors le nombre de solutions isolées dans U du système d'équations*

$$g_1 = 0 \text{ et } \dots \text{ et } g_n = 0,$$

est majoré par

$$2^{m(m-1)/2} \left(\min(n, m)p + \sum_{i=1}^n q_i - n + 1 \right)^m \prod_{i=1}^n q_i.$$

Remarque 1.5.5. Le théorème 1.5.4 joue un rôle décisif dans la démonstration de l'omimalité de la structure \mathbb{R}_{exp} figurant dans [124]. Il est également utilisé par Binyamini et Novikov dans [11] pour leur démonstration de la conjecture Wilkie restreinte²¹.

²⁰Les solutions du système qui n'annule pas le jacobien associé à P_1, \dots, P_n .

²¹voir le théorème 1.2.9 ci-dessus.

Les fonctions holomorphes sur \mathbb{C}^n Dans les deux inégalités de Bézout 1.5.2 et 1.5.4 de Khovanskii, la notion de complexité des variétés analytiques est introduite à l'aide de relations particulières vérifiées par les fonctions définissant ces variétés. Cependant, il n'est pas rare d'avoir à manipuler des ensembles analytiques définis par des fonctions pour lesquelles nous ne disposons pas de telle relation. Dans ce cas, il existe une approche géométrique pour définir une notion de degré pour ces variétés. Lorsque P est un polynôme de $\mathbb{C}_{\leq d}[z]$, le degré de P est égal aux nombres d'éléments d'une fibre de P à condition de tenir compte de la multiplicité. Lorsque $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ est transcendante, ses fibres sont le plus souvent infinies. On définit le degré de g comme étant la fonction donnant pour tout $r > 0$ la taille d'une fibre générique de g restreinte à boule \mathbb{B}_r^n .

Définition 1.5.6 (Fonction de comptage et moyenne de Jensen - [115]). Soient W une sous-variété analytique fermée²² de \mathbb{C}^n de dimension pure²³ p et $\nu : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{N}$. La fonction de comptage associée à W et ν est définie par

$$n_\nu(r, W) := \frac{1}{r^{2p}} \int_{W[r]} \nu \omega^p,$$

où $W[r]$ est l'intersection de W avec la boule \mathbb{B}_r^n , ω est la métrique kählerienne standard de \mathbb{C}^n et ω^p désigne la p -ième puissance extérieure de ω . Lorsque $p = 0$, ω^p désigne la mesure de comptage. La moyenne de Jensen associée à W et ν est définie par

$$N_\nu(r, W) := \int_0^r n_\nu(t, W) \frac{dt}{t}.$$

Lorsque ν est la fonction constante égale à 1, la fonction de comptage est notée $n(r, W)$ et la moyenne de Jensen est notée $N(r, W)$.

Remarque 1.5.7. Lorsque $n = 1$, W est \mathbb{C} et ν est le diviseur des zéros d'une fonction $g \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$, la fonction de comptage $n_\nu(r, W)$ coïncide avec la fonction de comptage $n(r, g)$ et la moyenne de Jensen $N_\nu(r, W)$ coïncide avec la moyenne de Jensen $N(r, g)$. Voir les définitions 2.5.3 et 2.6.3.

Lorsque W est une sous-variété algébrique de \mathbb{C}^n , on peut montrer que la fonction de comptage $n(r, W)$ est bornée. Cette propriété caractérise en fait complètement les sous-variétés algébriques parmi les sous-variétés analytiques fermées.

Théorème 1.5.8 (Stoll - [112]). Soit W une sous-variété analytique fermée de \mathbb{C}^n de dimension pure p . Alors W est une variété algébrique si et seulement si la fonction de comptage $n(r, W)$ est bornée.

Dans [49], Griffiths désigne par *problème de Bézout transcendant* la question suivante. Étant donné $g = (g_1, \dots, g_m) \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)$ et $a = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{C}^m$, on note

$$V_a = \{z \in \mathbb{C}^n \mid g_1(z) = a_1, \dots, g_m(z) = a_m\}.$$

On suppose de plus que la variété analytique V_a est de dimension pure $n - k$. Est-il possible de majorer la fonction de comptage $n(r, V_a)$ à l'aide des fonctions maximums $M(r, g_j)$ et cela indépendamment de a ? Il est raisonnable de chercher une majoration de la fonction de comptage $n(r, V_a)$ de la forme

$$\forall a \in \mathbb{C}^k, \forall r > 0, n(r, V_a) \leq C \prod_{j=1}^m \log^+ M(r, g_j),$$

²²Une sous-variété analytique fermée est un ensemble analytique de \mathbb{C}^n qui est lisse.

²³Toutes les composantes connexes de la variété sont de même dimension p .

où $C > 0$ est une constante indépendante de a . Lorsque $m = 1$, cette majoration découle de la formule de Jensen. Malheureusement lorsque $m > 1$, cette majoration n'est pas toujours possible comme en atteste le résultat suivant de Cornalba et Shiffman.

Théorème 1.5.9 (Cornalba - Shiffman - [30]). *Il existe deux fonctions f et g de $\mathcal{O}(\mathbb{C}^2, \mathbb{C})$ telles que*

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log^+ M(r, f)}{\log r} = 0 \quad \text{et} \quad \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log^+ M(r, g)}{\log r} = 0,$$

et l'ensemble V_0 des zéros communs aux fonctions f et g dans \mathbb{C}^2 est une sous-variété analytique de \mathbb{C}^2 de dimension pure zéro telle que

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log n(r, V_0)}{\log r} = \infty.$$

Cependant Stoll démontre la même année dans [114] que l'inégalité de Bézout transcendant est vraie en moyenne. Avant de pouvoir énoncer son théorème, nous devons introduire quelques définitions.

Définition 1.5.10 (p -fibration - [113, p. 363]). Soient V et W deux espaces analytiques²⁴ de dimension pure et $g \in \mathcal{O}(V, W)$. On dit que la fonction g est une p -fibration si pour tout $v \in V$, il existe un voisinage ouvert U de v tel que pour tout $z \in U$, la fibre $g^{-1}(g(z)) \cap U$ est de dimension pure p .

Dans [113], Stoll introduit une notion de multiplicité géométrique pour les fibres d'une p -fibration.

Définition 1.5.11 (Multiplicité d'une intersection pure - [113, p. 48]). Soient V et W deux espaces analytiques et $g \in \mathcal{O}(V, W)$ une q -fibration. On suppose que V est de dimension pure m . On dit qu'une partie $L \subset V$ est *transverse* à g en $a \in W$ lorsque

- la partie L est un sous-ensemble analytique de dimension pure $m - q$ dans un voisinage U de a ,
- l'adhérence \overline{L} est compacte,
- le point a est isolé dans l'intersection $\overline{L} \cap g^{-1}(g(z))$.

L'ensemble des parties transverses à g en a est noté $M_a(g)$. On note

$$\forall a \in g^{-1}(0) \cap W, \nu(a) := \min \left\{ \overline{\lim}_{z \rightarrow a} \#(L \cap g^{-1}(g(z))) \mid L \in M_a(g) \right\}.$$

On pose $\nu(a) = 0$ lorsque $a \notin g^{-1}(0) \cap W$. L'application ν ainsi définie est appelée l'*intersection complète* associée à g .

Dans l'énoncé 1.5.12 suivant I désigne l'intervalle $[0, 1]$ de \mathbb{R} .

Théorème 1.5.12 (Stoll - [114, p. 362]). *Soient $g = (g_1, \dots, g_m) \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)$ telle que $g(0) = 1$ et W une sous-variété analytique fermée de \mathbb{C}^n de dimension pure $p \geq m$. On suppose que pour tout $j \in \{1, \dots, m\}$ et $t = (t_1, \dots, t_j) \in I^j$, la fonction holomorphe g_j^t définie par*

$$g_j^t(z) = (g_1(t_1 z), \dots, g_j(t_j z)),$$

est une $(p - j)$ -fibration au-dessus de W et notons ν_j^t l'intersection complète associée à g_j^t . On considère la famille d'ensembles analytiques

$$V_t = \{z \in \mathbb{C}^n \mid g_1(t_1 z) = 0, \dots, g_m(t_m z) = 0\} \quad \text{avec } t \in I^m.$$

²⁴Il s'agit d'espaces analytiques au sens de Serre.

Alors

$$\forall r > 0, \int_{I^m} N_{V_t^m}(r, V_t) dt \leq 7^m n(e^{m-1}r, W) \prod_{j=1}^m \log M(2e^m r, g_j).$$

Lien entre les lemmes de zéros et les inégalités de Bézout transcendant Un lemme de zéros est une forme d'inégalité de Bézout transcendant en famille. En effet majorer la borne de Bézout $\mathcal{Z}_d(r, g)$ avec $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ transcendant se réduit à majorer les fonctions de comptages des sous-variétés analytiques de \mathbb{C}^2 de la forme

$$V_P = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid g(z) - w = 0 \text{ et } P(z, w) = 0\}$$

où P parcourt l'ensemble des polynômes non nuls de $\mathbb{C}_{\leq d}[z, w]$. Exiger que la fonction g soit transcendant au-dessus de $\mathbb{C}(z)$ signifie exactement que les variétés analytiques V_P sont toutes de dimension pure zéro et donc dans ce cas la fonction de comptage $n(r, V_P)$ majore la fonction $n(r, P_g)$ ²⁵. Nous utilisons cette idée pour déduire du théorème de Stoll 1.5.12 un lemme de zéros en moyenne. Voir la proposition 1.6.30 de la section suivante.

1.6 Résultats de la thèse

Un point commun des lemmes de zéros sur les fonctions hyper-transcendentes de la section 1.3 est que ces fonctions sont soit entière, soit leur majoration de leur borne de Bézout se réduit²⁶ à la majoration de la borne de Bézout d'une fonction entière. Il est naturel de chercher à étendre ces résultats à des fonctions holomorphes ou méromorphes sur des domaines autres que le plan.

Majoration des mesures de transcendance

Dans le chapitre 3 nous étudions les deux mesures de transcendance $e_d(\lambda, g)$ et $\hat{e}_d(\lambda, g)$ définies à la section 1.4. Grâce à ces nouvelles mesures de transcendance, il nous est possible de majorer les bornes de Bézout $\mathcal{Z}_d(r, g)$ en fonction de la distribution des *petites valeurs* et des pôles de g dans son domaine de définition. Nous obtenons ainsi quatre critères pour établir des lemmes de zéros suivant que la fonction étudiée g est holomorphe ou méromorphe, définie sur le disque ou le plan tout entier. Afin de quantifier la distribution des valeurs de la fonction g nous utilisons la distance pseudo-hyperbolique²⁷ et le n -ième diamètre pour cette métrique défini ci-dessous.

Définition 1.6.1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le n -ième diamètre pseudo-hyperbolique dans \mathbb{D}_r d'un ensemble $E \subset \mathbb{D}_r$ est défini par

$$\text{diam}_n(E, \mathbb{D}_r) := \inf \left\{ \sum_{j=1}^n r_j \mid E \subset \bigcup_{j=1}^n \mathbb{D}_r^h(a_j, r_j) \right\},$$

où $\mathbb{D}_r^h(a_i, r_i)$ désigne le disque ouvert de centre a_i et de rayon r_i pour la distance pseudo-hyperbolique du disque \mathbb{D}_r .

Notation 1.6.2. Soient $g \in \mathcal{M}(\mathbb{D})$, $a \in \hat{\mathbb{C}}$ et $\lambda, r \in \mathbb{R}$ tels que $0 \leq \lambda \leq r \leq 1$. On définit la fibre des a -points de g restreinte à la couronne $\mathbb{A}(\lambda, r)$ par

$$D(\lambda, r, a, g) = \{z \in \mathbb{A}(\lambda, r) \mid g(z) = a\}.$$

²⁵Voir le lemme 5.4.2.

²⁶Par exemple l'inverse de la fonction Γ est entière puisque Γ ne s'annule pas sur \mathbb{C} . Or on peut majorer la borne de Bézout de Γ par celle de son inverse Γ .

²⁷Voir la définition p.4.

Lorsque λ est nul, on note cet ensemble $D(r, a, g)$ et lorsque r vaut 1, on note cet ensemble $D(a, g)$.

On commence par énoncer les deux critères 1.6.3 et 1.6.4 pour les fonctions holomorphes sur le plan \mathbb{C} et le disque unité \mathbb{D} .

Théorème 1.6.3. Soit $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ une fonction transcendante. On suppose qu'il existe quatre suites de réels (λ_d) , (ν_d) , (γ_d) , (l_d) et des exposants $\alpha_1, \alpha_2, \beta, \gamma, l \geq 0$ tels que

$$\forall d \in \mathbb{N}, d^{-\alpha_1} \ll \log \frac{\nu_d}{\lambda_d} \ll d^{\alpha_2}, \log^+ M(\nu_d, g) \ll d^\beta, \gamma_d \gg e^{-d^\gamma} \text{ et } l_d \gg e^{-d^l},$$

et une suite (A_d) de boréliens de \mathbb{S}^1 de longueur l_d telle que

$$\forall d \in \mathbb{N}, \forall a \in A_d, \text{diam}_d(D(\lambda_d, a, g), \mathbb{D}_{\lambda_d}) > \gamma_d.$$

Alors

$$\forall r > 0, \forall d \in \mathbb{N}, \mathcal{Z}_d(r, g) \ll (d \vee \varphi(r))^{1+2\alpha_1+\varepsilon} \text{ avec } \varepsilon = \max\{\alpha_2, \beta, \gamma, l\},$$

où $\varphi(r) := \min\{k \in \mathbb{N} \mid \lambda_k \geq r\}$. Autrement dit g vérifie un lemme de zéros polynomial.

Démonstration. Voir page 84. ■

Théorème 1.6.4. Soit $g \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ une fonction transcendante. On suppose qu'il existe quatre suites de réels (λ_d) , (ν_d) , (γ_d) , (l_d) et des exposants $\alpha, \beta, \gamma, l \geq 0$ tels que

$$\forall d \in \mathbb{N}, d^{-\alpha} \ll \log \frac{\nu_d}{\lambda_d}, \log^+ M(\nu_d, g) \ll d^\beta, \log \gamma_d \gg -d^\gamma \text{ et } \log l_d \gg -d^l,$$

et une suite (A_d) de boréliens de \mathbb{S}^1 de longueur l_d telle que

$$\forall d \in \mathbb{N}, \forall a \in A_d, \text{diam}_d(D(\lambda_d, a, g), \mathbb{D}_{\lambda_d}) > \gamma_d.$$

Alors

$$\forall r \in [0, 1[, \forall d \in \mathbb{N}, \mathcal{Z}_d(r, g) \ll (d \vee \varphi(r))^{1+2\alpha+\varepsilon} \text{ avec } \varepsilon = \max\{\beta, \gamma, l\},$$

où $\varphi(r) := \min\{k \in \mathbb{N} \mid \lambda_k \geq r\}$. Autrement dit g vérifie un lemme de zéros polynomial.

Démonstration. Voir page 85. ■

Remarque 1.6.5. Le critère 1.6.4 est utilisé au chapitre 4 pour démontrer des lemmes de zéros pour des fonctions holomorphes dans le disque dont la croissance est exponentielle. Voir le théorème 1.6.16 de la sous-section 1.6 suivante.

Lorsque la fonction g étudiée est méromorphe, notre critère exige de connaître en plus de la distribution des petites valeurs de g celle des pôles. Quant à la fonction maximum $\log^+ M(r, g)$, celle-ci est remplacée dans les critères 1.6.6 et 1.6.9 par la caractéristique de Nevanlinna $T(r, g)$ définie par

$$T(r, g) = \int_0^{2\pi} \log^+ |g(re^{i\theta})| \frac{d\theta}{2\pi} + N(r, \infty, g).$$

avec

$$N(r, \infty, g) = \int_0^r \{n(t, \infty, g) - n(0, \infty, g)\} \frac{dt}{t} - n(0, \infty, g) \log r.$$

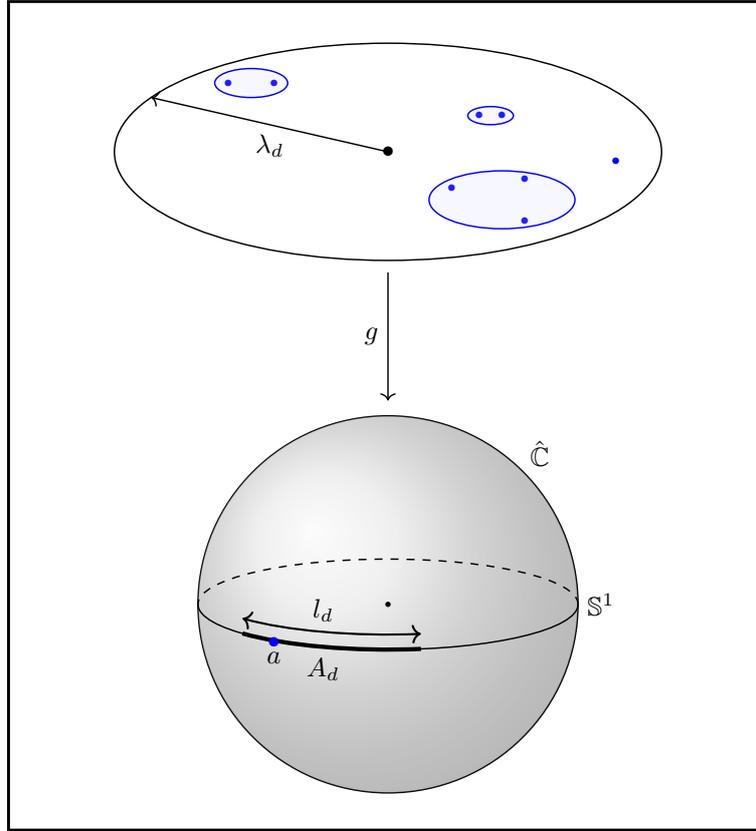


FIGURE 1.1 – Illustration des conditions sur la distribution des valeurs figurant dans les théorèmes 1.6.4 et 1.6.3. Les points bleus sont les éléments de $D(\lambda_d, a, g)$. On fait également apparaître un recouvrement de $D(\lambda_d, a, g)$ par quatre disques dont l'un est réduit à un point. De plus la somme des rayons de ce recouvrement est proche du 4-ième diamètre de la fibre $D(\lambda_d, a, g)$.

Théorème 1.6.6. Soit $g \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ une fonction transcendante. On suppose qu'il existe cinq suites de réels (λ_d) , (ν_d) , (γ_d) , (δ_d) , (l_d) et des exposants $\alpha_1, \alpha_2, \beta, \gamma, \delta, l \geq 0$ tels que, $\forall d \in \mathbb{N}$

$$d^{-\alpha_1} \ll \log \frac{\nu_d}{\lambda_d} \ll d^{\alpha_2}, \quad T(\nu_d, g) \ll d^\beta, \quad \log \gamma_d \gg -d^\gamma, \quad \log \delta_d \gg -d^\delta \quad \text{et} \quad \log l_d \gg -d^l,$$

et une suite (A_d) de boréliens de \mathbb{S}^1 de longueur l_d telle que

$$\forall d \in \mathbb{N}, \forall a \in A_d, \exists C_a \subset D(\nu_d, \infty, g) \text{ tel que}$$

$$\text{diam}_{d+n}(D(\lambda_d, a, g), \mathbb{D}_{\lambda_d}) > \gamma_d \text{ et } p_{\nu_d}(D(\lambda_d, a, g), C_a) > \delta_d,$$

avec $n = \bar{n}(\nu_d, \infty, g) - \#C_a$. Alors

$$\forall r > 0, \forall d \in \mathbb{N}, \mathcal{Z}_d(r, g) \ll (d \vee \varphi(r))^{1+3\alpha_1+\varepsilon},$$

où $\varepsilon = \max\{\alpha_1 + \beta + \gamma, \alpha_1 + \beta + \delta, \alpha_2, l\}$ et $\varphi(r) := \min\{k \in \mathbb{N} \mid \lambda_k \geq r\}$. Autrement dit g vérifie un lemme de zéros polynomial.

Démonstration. Voir page 85. ■

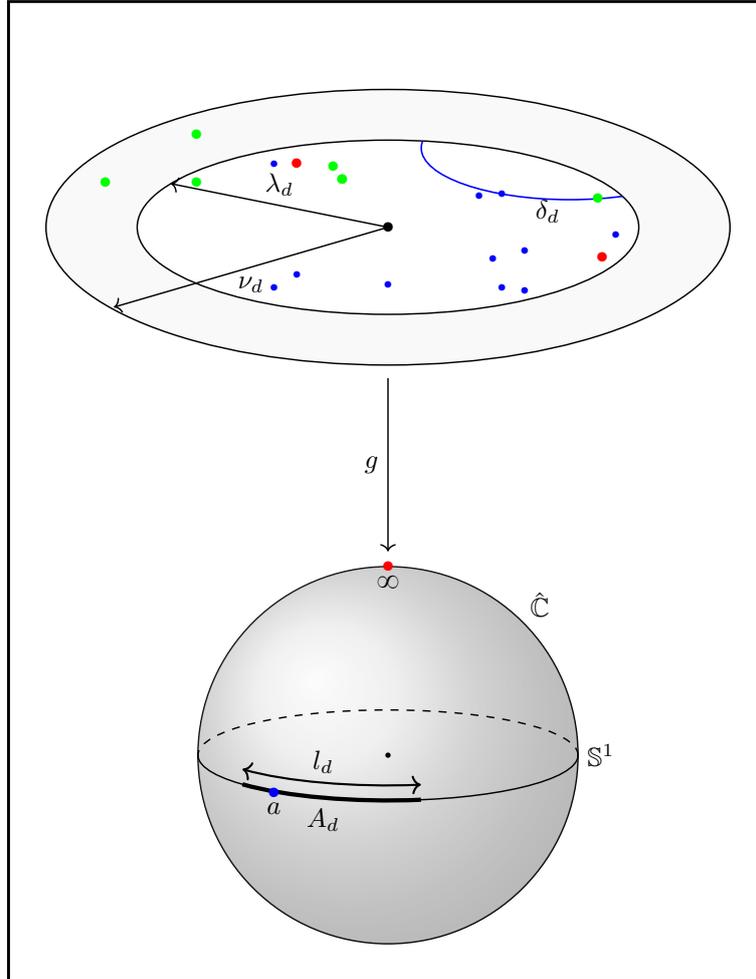


FIGURE 1.2 – Illustration des conditions sur la distribution des valeurs figurant dans les théorèmes 1.6.9 et 1.6.6. Les points bleus sont les éléments de $D(\lambda_d, a, g)$ tandis que les points verts et rouges correspondent aux éléments de $D(\nu_d, \infty, g)$. Les pôles verts sont les éléments de C_a . On représente également la géodésique hyperbolique passant par deux points de $D(\lambda_d, a, g)$ et C_a et dont la distance hyperbolique est minimale.

Remarque 1.6.7. Le théorème 1.6.6 n'implique pas le théorème 1.6.3 lorsque g est une fonction entière. En effet l'exposant figurant dans l'inégalité de 1.6.6 est *a priori* plus grand que celui figurant dans l'inégalité de 1.6.3.

Remarque 1.6.8. Dans ce manuscrit nous utilisons la majoration de la borne de Bézout $Z_d(r, g)$ du théorème 1.6.6 précédent pour deux classes de fonctions méromorphes et transcendentes sur \mathbb{C} .

- le premier cas est celui des fonctions méromorphes $g \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ dont on connaît précisément la distribution des pôles dans le plan par rapport aux petites valeurs de g . Plus précisément on dispose d'une minoration de la distance pseudo-hyperbolique entre les fibres $D(\lambda_d, a, g)$ et $D(\nu_d, \infty, g)$ dans \mathbb{D}_{ν_d} et cette minoration est uniforme lorsque a parcourt un arc de cercle $A \subset \mathbb{S}^1$. Les fonctions elliptiques que nous étudions dans la

dernière section du chapitre 3 sont de ce type. Dans cette situation on prend pour C_a tous les pôles de $D(\nu_d, \infty, g)$ et n est nul,

- le second cas est celui des fonctions méromorphes $g \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ pour lesquelles la valeur ∞ est déficiente au sens où

$$n(r, \infty, g) = O(T(r, g)^\beta) \quad \text{avec } \beta \in [0, 1[. \quad (1.6.1)$$

Il est alors possible de prendre un petit ensemble C_a , voire l'ensemble vide et n est négligeable devant d . Cette situation sera étudiée dans le chapitre 4. Notez que quitte à remplacer la fonction g par la fonction $\frac{1}{g-a}$, on peut supposer que ce sont les a -points de g qui vérifie la condition 1.6.1.

La dernière situation qui n'est pas couverte par les deux cas décrits ci-dessus serait celui d'une fonction méromorphe g sur \mathbb{C} dont aucune valeur $a \in \hat{\mathbb{C}}$ ne présente la déficience décrite par 1.6.1 et qui a tendance à atteindre toutes ces petites valeurs de plus en plus proches de ses a -points. Cette dernière situation, si tant est qu'elle survienne, semble difficile à étudier avec les méthodes que nous employons et ne sera pas explorée dans cette thèse.

Notre majoration de la borne de Bézout $\mathcal{Z}_d(r, g)$ dans le cas d'une fonction méromorphe g sur le disque unité \mathbb{D} s'énonce de la manière suivante.

Théorème 1.6.9. *Soit $g \in \mathcal{M}(\mathbb{D})$ une fonction transcendante. On suppose qu'il existe cinq suites de réels (λ_d) , (ν_d) , (γ_d) , (δ_d) , (l_d) et des exposants $\alpha, \beta, \gamma, \delta, l \geq 0$ tels que $\forall d \in \mathbb{N}$, $d^{-\alpha} \ll \log \frac{\nu_d}{\lambda_d}$, $T(\nu_d, g) \ll d^\beta$, $\log \gamma_d \gg -d^\gamma$, $\log \delta_d \gg -d^\delta$ et $\log l_d \gg -d^l$, et une suite (A_d) de boréliens de \mathbb{S}^1 de longueur l_d telle que*

$$\forall d \in \mathbb{N}, \forall a \in A_d, \exists C_a \subset D(\nu_d, \infty, g) \text{ tel que}$$

$$\text{diam}_{d+n}(D(\lambda_d, a, g), \mathbb{D}_{\lambda_d}) > \gamma_d \text{ et } p_{\nu_d}(D(\lambda_d, a, g), C_a) > \delta_d,$$

avec $n = \bar{n}(\nu_d, \infty, g) - \#C_a$. Alors

$$\forall r \in [0, 1[, \forall d \in \mathbb{N}, \mathcal{Z}_d(r, g) \ll (d \vee \varphi(r))^{1+3\alpha+\varepsilon},$$

où $\varepsilon = \max\{\alpha + \beta + \gamma, \alpha + \beta + \gamma, l\}$ et $\varphi(r) := \min\{k \in \mathbb{N} \mid \lambda_k \geq r\}$. Autrement dit g vérifie un lemme de zéros polynomial.

Démonstration. Voir page 87. ■

Remarque 1.6.10. Dans les théorèmes 1.6.3, 1.6.4, 1.6.6 et 1.6.9 ci-dessus il est possible d'affaiblir considérablement l'hypothèse sur la taille des ensembles A_d . En effet, on montre au chapitre 3 que les conclusions de ces théorèmes sont encore valables si les ensembles A_d sont des boréliens de capacité logarithmique plus grande que γ_d ou des ensembles dont le d -ième diamètre euclidien est plus grand que γ_d . Cette dernière hypothèse est particulièrement faible puisqu'elle autorise que A_d soit un ensemble fini de cardinal plus grand que $d + 1$.

Remarque 1.6.11. Bien que nous ne supposons pas que les suites (λ_d) et (ν_d) tendent vers 1 dans 1.6.4 et 1.6.9 et vers l'infini dans 1.6.3 et 1.6.6, cela est conséquence des hypothèses faites sur la distribution des petites valeurs de la fonction étudiée. En effet ces conditions impliquent que le cardinal des ensembles $D(\lambda_d, a, g)$ tend vers l'infini lorsque d tend vers l'infini.

Lemmes de zéros généraux

Le théorème 1.3.15 de Coman et Poletsky affirme que sous des conditions de croissance de la fonction maximum $M(r, g)$, il est possible d'établir des lemmes de zéros polynomiaux pour de grandes classes de fonctions $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$. Il est naturel de chercher à étendre ce type de résultats pour les fonctions méromorphes sur \mathbb{C} ou le disque unité \mathbb{D} . Nous démontrons une extension du théorème 1.3.15 pour les fonctions $g \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ en remplaçant la fonction maximum $M(r, g)$ par la caractéristique de Nevanlinna $T(r, g)$. Nous obtenons un lemme de zéros polynomial en supposant qu'il existe une valeur $b \in \hat{\mathbb{C}}$ qui est atteinte bien moins souvent que les autres valeurs de la sphère de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$ par la fonction g et que la croissance de la caractéristique de Nevanlinna $T(r, g)$ est polynomiale.

Théorème 1.6.12. *Soit $g \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ une fonction transcendante, $b \in \hat{\mathbb{C}}$ et $\beta \in [0, \frac{1}{2}]$. On suppose que g vérifie l'une des hypothèses suivantes*

- la caractéristique de Nevanlinna satisfait les trois conditions

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{\log T(r, g)}{\log r} > 0, \quad \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log T(r, g)}{\log r} < \infty \quad \text{et} \quad n(r, b, g) = O(T(r, g)^\beta).$$

- il existe $C_1, C_2 > 1$ et $k > 1$ tels que

$$\forall r \gg 0, \quad C_1 T(r, g) \leq T(kr, g) \leq C_2 T(r, g) \quad \text{et} \quad n(r, b, g) = O(T(r, g)^\beta).$$

- il existe $\rho > 0$ tel que $T(r, g) \asymp r^\rho$ et $n(r, b, g) = O(T(r, g)^\beta)$.

Alors g vérifie un lemme de zéros polynomial. Plus précisément il existe deux exposants $\alpha, \gamma > 0$ tels que

$$\forall d \in \mathbb{N}, \quad \forall r > 0, \quad Z_d(r, g) \ll T(r, g)^\gamma \vee d^\alpha.$$

De plus lorsque la seconde hypothèse est vérifiée, on peut prendre $\alpha = 1 + \frac{1+\beta}{1-\beta}$ et $\gamma = \frac{\alpha\rho(1-\beta)}{\lambda}$ où $\lambda = \frac{\log C_1}{k}$ et $\rho = \frac{\log C_2}{k}$. Lorsque la troisième hypothèse est vérifiée, on peut prendre le même α et $\gamma = \alpha(1 - \beta)$.

Démonstration. Voir page 163. ■

Remarque 1.6.13. En utilisant l'inégalité de Harnack 2.6.10, on montre que pour une fonction $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ transcendante les conditions de croissance portant sur la caractéristique de Nevanlinna $T(r, g)$ dans 1.6.12 sont équivalentes à

$$\lambda = \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log^+ M(r, g)}{\log r} \quad \text{et} \quad \rho = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log^+ M(r, g)}{\log r},$$

De plus $n(r, \infty, g)$ étant identiquement nulle, la condition de déficience est satisfaite lorsque b est ∞ .

Remarque 1.6.14. Le théorème 1.6.12 implique le théorème 1.3.15 de Coman et Poletsky. En effet la condition

$$C_1 m(r, g) \leq m(kr, g) \leq C_2 m(r, g).$$

implique une condition du même type pour la caractéristique de Nevanlinna $T(r, g)$.

Remarque 1.6.15. De très nombreuses fonctions entières satisfont les hypothèses du théorème 1.6.12. En effet considérons une fonction $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ de la forme

$$\forall z \in \mathbb{C}, g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

On suppose que

$$\forall n \gg 0, 0 < \varliminf_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log n}{-\log |a_n|} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log n}{-\log |a_n|} < \infty.$$

Alors g satisfait les hypothèses du théorème 1.6.12.

Théorème 1.6.16. Soient $g \in \mathcal{M}(\mathbb{D})$ une fonction transcendante²⁸, $b \in \hat{\mathbb{C}}$ et $\beta \in [0, \frac{1}{2}[$. On suppose que g vérifie l'une des hypothèses suivantes

- la caractéristique de Nevanlinna satisfait les trois conditions

$$\varliminf_{r \rightarrow 1^-} \frac{\log T(r, g)}{-\log(1-r)} > 1, \quad \overline{\lim}_{r \rightarrow 1^-} \frac{\log T(r, g)}{-\log(1-r)} < \infty \quad \text{et} \quad n(r, b, g) = O(T(r, g)^\beta).$$

- il existe $C_1, C_2 > 1$ et $k > 1$ tels que $\log C_1 > k$ et

$$\forall r \gg 0, C_1 T(1 - \frac{1}{r}, g) \leq T(1 - \frac{1}{kr}, g) \leq C_2 T(1 - \frac{1}{r}, g) \quad \text{et} \quad n(r, b, g) = O(T(r, g)^\beta).$$

- il existe $\rho > 1$ tel que $T(1 - \frac{1}{r}, g) \asymp r^\rho$ et $n(r, b, g) = O(T(r, g)^\beta)$.

Alors g vérifie un lemme de zéros polynomial. Plus précisément il existe deux exposants $\alpha, \gamma > 0$

$$\forall d \in \mathbb{N}, \forall r \in [0, 1[, Z_d(r, g) \leq T(r, g)^\gamma \vee d^\alpha.$$

De plus lorsque la deuxième hypothèse est vérifiée, on peut prendre $\alpha = 1 + \frac{1+\beta}{1-\beta} + \frac{2}{\lambda(1-\beta)}$ et $\gamma = \frac{\alpha\rho(1-\beta)}{\lambda}$ où $\lambda = \frac{\log C_1}{k}$ et $\rho = \frac{\log C_2}{k}$. Lorsque la troisième hypothèse est vérifiée, on peut prendre le même α et $\gamma = \alpha(1-\beta)$.

Démonstration. Voir page 165. ■

Exemple 1.6.17. De très nombreuses fonctions de $\mathcal{O}(\mathbb{D})$ satisfont les conditions du théorème 1.6.16 ci-dessus. En effet considérons une fonction $g \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ dont le développement en série de Taylor en l'origine est de la forme

$$\forall z \in \mathbb{D}, g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{\lambda_n},$$

où (λ_n) est une suite strictement croissante d'entiers et $a_n \neq 0$ et telles que

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \lambda_n}{\log \lambda_n - \log^+ \log^+ |a_n|} < \infty \quad \text{et} \quad \varliminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \lambda_{n-1}}{\log \lambda_{s_n} - \log^+ \log^+ |a_{s_n}|} > 3, \quad (1.6.2)$$

où (s_n) est une suite d'entiers strictement croissante. Alors g satisfait les hypothèses du théorème 1.6.16. En effet d'après le théorème 2.3.17, la limite supérieure de 1.6.2 est exactement $\rho + 1$ où ρ est l'ordre supérieur de g dans \mathbb{D} tandis que la limite inférieure de 1.6.2 est majorée par $\lambda + 1$ où λ est l'ordre inférieur de g dans \mathbb{D} d'après le théorème 2.3.18.

Remarque 1.6.18. Les exemples de 1.6.17 montrent qu'il existe des séries entières de lacunes arbitrairement grandes et vérifiant un lemme de zéros polynomial. En effet soit $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une fonction telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \phi(n) > n$ et (λ_n) une suite d'entiers telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \lambda_{n+1} \geq \phi(\lambda_n).$$

On définit la suite (a_n) par

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n := e^{\lambda_n^{\frac{q-1}{q}}} \text{ avec } q > 2.$$

Alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{\lambda_n}$ vérifie la condition 1.6.2 avec $s_n = n - 1$. En choisissant $\phi(n) = e^n$, on obtient ainsi des séries lacunaires ne satisfaisant pas les conditions du théorème 1.3.10 de Comte et Yomdin mais vérifiant un lemme de zéros polynomial pour autant. À l'inverse une série lacunaire dont les coefficients de Taylor sont bornés peut vérifier le théorème 1.3.10 tandis qu'une telle série ne peut vérifier la seconde partie de la condition 1.6.2.

Lemme de zéros polynomiaux pour une suite de degrés

Le théorème 1.3.16 affirme en particulier qu'une fonction entière transcendante et d'ordre fini vérifie un lemme de zéros polynomial pour une suite de degrés. On obtient un théorème similaire au théorème 1.3.16 sous la condition que g est d'ordre inférieur strictement positif mais sans contrainte sur l'ordre supérieur. Qui plus est le théorème 1.6.19 ci-dessous s'étend aux fonctions méromorphes ayant peu de pôles.

Théorème 1.6.19. Soient $g \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ une fonction transcendante, $b \in \hat{\mathbb{C}}$ et $\beta \in [0, \frac{1}{2}[$. On suppose que

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{\log T(r, g)}{\log r} > 0 \text{ et } n(r, b, g) = O(T(r, g)^\beta).$$

Alors il existe un exposant $\alpha \geq 2$ et une suite (J_n) d'intervalles de $[0, \infty[$ et une fonction $j : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante tels que

$$\forall r > 0, \forall n \geq j(r), \forall d \in J_n, \mathcal{Z}_d(r, g) \ll d^\alpha \text{ et } \lambda_1(J_n) \rightarrow \infty.$$

Démonstration. Voir page 161. ■

En utilisant une méthode similaire, on obtient le résultat suivant pour les fonctions méromorphes sur le disque \mathbb{D} .

Théorème 1.6.20. Soient $g \in \mathcal{M}(\mathbb{D})$ une fonction transcendante, $b \in \hat{\mathbb{C}}$ et $\beta \in [0, \frac{1}{2}[$. On suppose que

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{\log T(r, g)}{-\log(1-r)} > 1 \text{ et } n(r, b, g) = O(T(r, g)^\beta).$$

Alors il existe un exposant $\alpha \geq 2$ et une suite (J_n) d'intervalles de $[0, \infty[$ et une fonction $j : [0, 1[\rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante tels que

$$\forall r \in [0, 1[, \forall n \geq j(r), \forall d \in J_n, \mathcal{Z}_d(r, g) \ll d^\alpha \text{ et } \lambda_1(J_n) \rightarrow \infty.$$

Démonstration. Voir page 163. ■

Exemples de lemmes de zéros

Les critères d'établissement de lemmes de zéros exposés dans la section précédente permettent également de démontrer des lemmes de zéros pour certaines classes de fonctions holomorphes ou méromorphes qui ne satisfont pas les hypothèses des théorèmes 1.6.12 et 1.6.16.

Fonctions elliptiques et fuchsienues Il est connu que les *fonctions elliptiques de Weierstraß* satisfont un lemme de zéros polynomial. Plus précisément pour tout réseau Λ de \mathbb{C} , il existe une constante $C_\Lambda > 0$ telle que

$$\forall d \in \mathbb{N}, \forall r > 0, \mathcal{Z}_d(r, \wp_\Lambda) \leq C_\Lambda(d^2 + r^2d), \quad (1.6.3)$$

où \wp_Λ est la fonction de Weierstraß associée au réseau Λ . Voir [78, Ex. 22.21]. En appliquant le théorème 1.6.6, on obtient un lemme de zéros polynomial pour toutes les fonctions elliptiques non constantes et non seulement les fonctions elliptiques de Weierstraß.

Définition 1.6.21 (Fonction elliptique). Une fonction $g \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ est dite *elliptique* s'il existe $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ linéairement indépendants sur \mathbb{R} tels que

$$\forall z \in \mathbb{C}, g(z) = g(z + \omega_1) = g(z + \omega_2).$$

De plus $\omega_1\mathbb{Z} \oplus \omega_2\mathbb{Z}$ est appelé le *réseau des périodes* de g .

Corollaire 1.6.22. *Soit $g \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ une fonction elliptique non constante. Alors g vérifie un lemme de zéros polynomial. Plus précisément, il existe une constante explicite $C > 0$ telle que*

$$\forall d \in \mathbb{N}, \forall r > 0, \mathcal{Z}_d(r, g) \leq C(dr)^2.$$

Démonstration. Voir page 117. ■

Dans [57], Jones et Schmidt démontrent que les fonctions elliptiques de Weierstraß sont semi-pfaffiennes par morceaux. Ils en déduisent le lemme de zéros 1.6.23 ci-dessous pour les fonctions elliptiques de Weierstraß avec une constante indépendante du réseau contrairement à la constante C_Λ de la borne 1.6.3.

Théorème 1.6.23 (Jones-Schmidt - [57]). *Soient $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2$ un réseau de \mathbb{C} et \wp_Λ la fonction elliptique de Weierstraß associée à ce réseau. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}_{\leq d}[z, w]$ non nul, le nombre de zéros avec multiplicité de $P(z, \wp_\Lambda(z))$ dans le parallélogramme fondamental de Λ suivant*

$$\left\{ r\omega_1 + t\omega_2 \mid r, t \in [0, 1[, r^2 + t^2 \neq 0 \right\},$$

est au plus $7,5373 \times 10^4 d^{11}$ pourvu que $d \geq 20$.

Néanmoins la constante C du corollaire 1.6.22 dépend *a priori* du réseau des périodes Λ de la fonction elliptique, y compris lorsque l'on se restreint aux fonctions elliptiques de Weierstraß. Plus précisément la constante C dépend *a priori* de la distance des pôles de g , c'est-à-dire des éléments de Λ , aux petites valeurs de g et de l'ordre de la fonction elliptique.

On montre également que toute fonction fuchsienne non constante vérifie un lemme de zéros polynomial. Rappelons les définitions de *groupe fuchsien* et de *fonction fuchsienne*.

Définition 1.6.24 (Groupe fuchsien - [60]). Un sous-groupe $\Gamma \subset \text{Mob}(\hat{\mathbb{C}})$ est dit *fuchsien* pour un disque $\Delta \subset \hat{\mathbb{C}}$ si ce dernier est laissé invariant par l'action de Γ sur la sphère $\hat{\mathbb{C}}$ et si l'action induite par Γ sur Δ est proprement discontinue. C'est-à-dire que pour tout compact $K \subset \Delta$, l'ensemble

$$\{g \in \Gamma \mid (g \cdot K) \cap K \neq \emptyset\},$$

est fini. On dit de plus que Γ est *cocompact* lorsque Δ/Γ est compact.

Définition 1.6.25 (Fonction fuchsienne). Une fonction $g \in \mathcal{M}(\mathbb{D})$ est dite *fuchsienne* s'il existe un groupe fuchsien Γ de \mathbb{D} dont l'action sur \mathbb{D} laisse invariante la fonction g . Autrement dit $\forall \gamma \in \Gamma, \forall z \in \mathbb{D}, g(\gamma \cdot z) = g(z)$.

Corollaire 1.6.26. Soient $\Gamma \subset \text{Mob}(\mathbb{D})$ un groupe cocompact et $g \in \mathcal{M}(\mathbb{D})$ une fonction non constante et invariante par Γ . Alors g vérifie un lemme de zéros polynomial. Plus précisément, il existe une constante explicite $C > 0$ telle que

$$\forall d \in \mathbb{N}, \forall r \in [0, 1[, \mathcal{Z}_d(r, g) \leq \frac{Cd^6}{1-r}.$$

Démonstration. Voir page 119. ■

Les fonctions *sigma* On montre que toute fonction *sigma* et *zeta* de Weierstrass satisfait un lemme de zéros polynomial. Rappelons les définitions de ces deux classes de fonctions.

Définition 1.6.27 (Fonctions de Weierstraß - [65, p. 239]). Soit Λ un réseau de \mathbb{C} . La fonction *sigma* de Weierstraß associée à Λ est définie par

$$\forall z \in \mathbb{C}, \sigma_\Lambda(z) := \prod_{w \in \Lambda \setminus \{0\}} \left(1 - \frac{z}{w}\right) e^{\frac{z}{w} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{w}\right)^2}.$$

et la fonction *zêta* de Weierstraß associée à Λ est définie comme la dérivée logarithmique de σ_Λ . Autrement dit

$$\forall z \in \mathbb{C}, \zeta_\Lambda(z) := \frac{\sigma'_\Lambda(z)}{\sigma_\Lambda(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{w \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{z-w} + \frac{1}{w} + \frac{z}{w^2}.$$

Corollaire 1.6.28. Soit Λ un réseau de \mathbb{C} . Alors la fonction *sigma* de Weierstraß associée à Λ satisfait un lemme de zéros polynomial. Plus précisément, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall d \in \mathbb{N}, \forall r > 0, \mathcal{Z}_d(r, \sigma_\Lambda) \leq C(d \vee r)^2.$$

Démonstration. Voir page 169. ■

Corollaire 1.6.29. Soit Λ un réseau de \mathbb{C} . Alors la fonction *zêta* de Weierstraß associée à Λ satisfait un lemme de zéros polynomial. Plus précisément, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall \varepsilon > 0, \forall d \in \mathbb{N}, \forall r > 0, \mathcal{Z}_d(r, \zeta_\Lambda) \leq C(d \vee r^2)^{2+\varepsilon}.$$

Démonstration. Voir page 171. ■

Lemme de zéros en moyenne En appliquant le théorème de Stoll 1.5.12, on obtient la proposition 1.6.30 ci-dessous.

Proposition 1.6.30 (Lemme de zéros en moyenne). *Soient $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ une fonction transcendante, $d \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{C}_{\leq d}[z, w]$ non nul tels que $f(0) = 1$ et $P(0) = 0$. Alors*

$$\forall R > 0, \forall r \in [0, R[, \int_1^\infty N(r, P_f^u) \frac{du}{u^2} \leq d \left(\frac{R}{R-r} \right)^2 \log^+ M(2e^2 R, f),$$

où $P^u(z, w) = P(uz, uw)$. En particulier pour tout $P \in \mathbb{C}_d[z, w]$ non nul

$$\forall R > 0, \forall r \in [0, R[, N(r, P_f) \leq d \left(\frac{R}{R-r} \right)^2 \log^+ M(2e^2 R, f).$$

Démonstration. Voir page 189. ■

Interpolations et comptages des points algébriques

Nous démontrons dans le chapitre 5 que l'existence de lemmes de zéros polynomiaux pour une fonction méromorphe implique que celle-ci a très peu de points algébriques de hauteur et de degré borné. Ce résultat était déjà connu pour les fonctions holomorphes depuis la publication [77] par Masser sur les points rationnels de la fonction zêta.

Lemme d'interpolation avec évitement

Dans le chapitre 5 nous nous intéressons aux liens entre les lemmes de zéros et le comptage des points algébriques dans des graphes analytiques. Une méthode classique de la théorie des nombres transcendants est la construction de fonctions auxiliaires. Dans notre situation les fonctions auxiliaires sont polynômes d'interpolations à coefficients dans un corps de nombres K ou dans le corps \mathbb{Q} . L'un des principes de base de la théorie des nombres transcendants est la construction de fonctions auxiliaires. Bien souvent ces fonctions sont des polynômes à coefficients dans un corps. Afin de réduire le problème du comptage des points algébriques de hauteur bornée dans le graphe d'une fonction univariée g à un lemme de zéros, il suffit d'être capable d'interpoler ces points algébriques par une petite famille de polynôme $P \in \mathbb{C}_{\leq d}[z, w]$ dont le degré d est majorée par une constante connue. Une première méthode due à Pila et Bombieri consiste à réduire d'existence des polynômes précédents à la non annulation de mineurs de certaines matrices. La méthode du déterminant de Pila-Bombieri fonctionne dès lors que l'ensemble \mathcal{X} est paramétrée par des fonctions de classes \mathcal{C}^∞ dont les dérivées sont bornées uniformément. Dans l'article [77], Masser propose une autre méthode pour les fonctions holomorphes

Lemme 1.6.31 (Interpolation de Masser - [77]). *Soient $g \in \mathcal{A}(\mathbb{D}_R)$ et $r \in \mathbb{R}$ tels que $0 < r < R$. Notons \mathcal{X}_r le graphe de g restreint à \mathbb{D}_r . Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et $\varepsilon > 0$ tels que $\sqrt{8k\varepsilon} < 1$, il existe une suite (\mathcal{S}_d) de familles finies de polynômes non-nuls de $\mathbb{Z}[z, w]$ telle que*

- l'ensemble $\mathcal{X}_r(\overline{\mathbb{Q}}_k, e^d)$ est contenu dans une hypersurface définie par un polynôme de \mathcal{S}_d ,

- les polynômes de \mathcal{S}_d ont un type contrôlé. Plus précisément

$$\forall P \in \mathcal{S}_d, \deg(P) \ll \frac{d}{\varepsilon \log d} \quad \text{et} \quad h(P) \ll \frac{d^2}{\varepsilon \log d},$$

- le cardinal de la famille \mathcal{S}_d est un grand O de

$$\left(\frac{R}{R-r} \right)^2 \max \{R, M(R, g)\}^\varepsilon d^\varepsilon.$$

Les constantes omises ne dépendent que du degré k et sont explicites.

Dans la suite le K -espace vectoriel $K_d[w_0, \dots, w_m]$ des polynômes homogènes de degré homogène d est muni d'une structure de K -variété affine de dimension $L := L_{m+1}(d)$ via l'isomorphisme entre ce dernier et K^L induit par l'ordre lexicographique sur les monômes. Ainsi un fermé Zariski de $K_d[w_0, \dots, w_m]$ est un ensemble de solutions d'un système d'équations algébriques portant sur les coefficients du polynôme. Avant de pouvoir énoncer notre théorème d'interpolation nous avons besoin de la définition suivante.

Définition 1.6.32. Soit K un sous-corps de \mathbb{C} . Une K -suite d'évitement est une suite croissante (E_d) de K -variétés algébriques telle que pour tout $d \in \mathbb{N}$

- la variété algébrique E_d est une sous-variété fermée de $K_d[w_0, \dots, w_m]$,
- la dimension de Krull des E_d ne croît pas trop vite en comparaison de la dimension de Krull de $K_{\leq d}[w_0, \dots, w_m]$. Plus précisément, il existe un exposant $\alpha > 0$ tel que

$$1 - \frac{\dim(E_d)}{L_{m+1}(d)} \gg \frac{1}{d^\alpha},$$

où \dim désigne la dimension de Krull,

- la croissance du degré des variétés E_d n'est pas trop rapide. Plus précisément, il existe un exposant $\beta \in [0, \infty]$ tel que

$$\log \deg(E_d) \ll d^\beta, \tag{1.6.4}$$

où \deg désigne le degré de la variété E_d . Lorsque $\beta = \infty$, la minoration 5.3.1 n'impose aucune contrainte sur le degré des variétés E_d .

On dit de plus que la K -suite d'évitement (E_d) est de *format* (α, β) .

Exemple 1.6.33. On considère pour tout $d \in \mathbb{N}^*$ une famille finie $V_{d,1}, \dots, V_{d,j_d}$ de sous- K -espaces vectoriels de $K_d[w_0, \dots, z_m]$ telles que

$$\forall d \in \mathbb{N}, 1 - \frac{\dim_K(V_{d,j})}{L_{m+1}(d)} \gg \frac{1}{d^\alpha} \quad \text{et} \quad \log j_d \ll d^\beta,$$

avec $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$. On construit une famille (E_d) de fermés de Zariski de $K_d[w_0, \dots, z_m]$ dont les K -points sont exactement les éléments de $\bigcup_j V_{d,j}$ en faisant le produit d'équations linéaires définissant les espaces vectoriels $V_{d,j}$. On obtient ainsi une K -suite d'évitement (E_d) telle que $\dim(E_d) \leq \max_j \dim_K(V_{d,j})$ et $\deg(E_d) \leq L_{m+1}(d)j_d$. Cette suite d'évitement est donc de format (α, β) .

Notation 1.6.34. Soit $g := (g_0, \dots, g_m) \in \mathcal{M}(\overline{\mathbb{D}}_R)^{m+1}$. On note

$$M(R, g) = \sup_{z \in \partial \mathbb{D}_R} \|g(z)\| \quad \text{et} \quad T(R, g) = \int_0^{2\pi} \log^+ \|g(Re^{i\theta})\| \frac{d\theta}{2\pi} + N(R, \infty, g),$$

où $\|x\| = \max\{|x_i| \mid i \in \{0, \dots, m\}\}$. Pour tout $r, R \in \mathbb{R}$ tels que $0 < r < R$, on note

$$\Phi_\varepsilon^2(r, R, g) = \left(\frac{R}{R-r}\right)^2 \exp\left\{\varepsilon \frac{R+r}{R-r} T(R, g)\right\}.$$

De plus lorsque $g \in \mathcal{O}(\overline{\mathbb{D}}_R)^{m+1}$, on note

$$\Phi_\varepsilon^1(r, R, g) = \left(\frac{R}{R-r}\right)^2 \max\{1, M(R, g)\}^\varepsilon$$

Notation 1.6.35. Soient K un sous-corps de \mathbb{C} et $g \in \mathcal{M}(\overline{\mathbb{D}}_R)^{m+1}$. Pour tout $d \in \mathbb{N}$, on note $V_d^K(g) := \{P \in K_d[w_0, \dots, w_m] \mid P \circ g \equiv 0\}$.

Théorème 1.6.36. Soient $K \subset \mathbb{C}$ un corps, $m \in \mathbb{N}_{\geq 2}$

$$g := (g_0, \dots, g_m) \in \mathcal{M}(\overline{\mathbb{D}}_R)^{m+1},$$

et $r \in \mathbb{R}$ tel que $0 < r < R$. Soient (E_d) une K -suite d'évitement de format (α, β) et $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ une fonction croissante. On note \mathcal{X}_r l'image de \mathbb{D}_r par g . On suppose que

$$\alpha < m - 1, \quad \overline{\lim}_{d \rightarrow \infty} \frac{\log \phi(d)}{\log d} \leq m - 1 - \alpha \quad \text{et} \quad \forall d \in \mathbb{N}, \quad V_d^K(g) \subset E_d.$$

Alors

- on suppose que K est un corps de nombres, $\alpha + \beta \leq m$ et $\forall j \in \{0, \dots, m\}$, $g_j \in \mathcal{A}(\overline{\mathbb{D}}_R)$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ et $d \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\mathcal{X}_r(K, e^{\phi(d)})$ est interpolé par une famille \mathcal{S}_d de polynômes de $K_d[w_0, \dots, w_m] \setminus E_d$ telle que

$$\#\mathcal{S}_d \ll \Phi_\varepsilon^1(r, R, g) \quad \text{et} \quad \forall P \in \mathcal{S}_d, \quad h(P) \ll d^{\alpha+1} \phi(d) + d^\beta,$$

- on suppose que K est un corps de nombres et $\alpha + \beta \leq m$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ et $d \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\mathcal{X}_r(K, e^{\phi(d)})$ est interpolé par une famille \mathcal{S}_d de polynômes de $K_d[w_0, \dots, w_m] \setminus E_d$ telle que

$$\#\mathcal{S}_d \ll \Phi_\varepsilon^2(r, R, g) \quad \text{et} \quad \forall P \in \mathcal{S}_d, \quad h(P) \ll d^{\alpha+1} \phi(d) + d^\beta,$$

- on suppose que $K = \overline{\mathbb{Q}}$ et $\forall j \in \{0, \dots, m\}$, $g_j \in \mathcal{A}(\overline{\mathbb{D}}_R)$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, $k \in \mathbb{N}^*$ et $d \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\mathcal{X}_r(\overline{\mathbb{Q}}_k, e^{\phi(d)})$ est interpolé par une famille \mathcal{S}_d de polynômes de $\overline{\mathbb{Q}}_d[w_0, \dots, w_m] \setminus E_d$ telle que

$$\#\mathcal{S}_d \ll \Phi_\varepsilon^1(r, R, g) \quad \text{et} \quad \forall P \in \mathcal{S}_d, \quad h(P) \ll d^{\alpha+1} \phi(d),$$

- on suppose que $K = \overline{\mathbb{Q}}$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, $k \in \mathbb{N}^*$ et $d \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\mathcal{X}_r(\overline{\mathbb{Q}}_k, e^{\phi(d)})$ est interpolé par une famille \mathcal{S}_d de polynômes de $\overline{\mathbb{Q}}_d[w_0, \dots, w_m] \setminus E_d$ telle que

$$\#\mathcal{S}_d \ll \Phi_\varepsilon^2(r, R, g) \quad \text{et} \quad \forall P \in \mathcal{S}_d, \quad h(P) \ll d^{\alpha+1} \phi(d).$$

Les constantes omises ne dépendent pas de g , d , r et R mais dépendent de ε .

Démonstration. Voir page 187. ■

Remarque 1.6.37. Lorsque K est un corps de nombres, on peut appliquer au choix l'une des deux premières interpolations du théorème 1.6.36 ou l'une des deux dernières interpolations de celui-ci. Dans le premier cas il est nécessaire pour appliquer 1.6.36 que les degrés des fermés de Zariski E_d soient majorés par une expression de la forme e^{Cd^β} et la borne de la hauteur des polynômes d'interpolation obtenus dépend de l'exposant β . Dans

le second cas les polynômes d'interpolations obtenus ne sont pas *a priori* à coefficients dans le corps de nombres K mais ces coefficients sont toutefois algébriques et de hauteur contrôlée.

Remarque 1.6.38. Soit $f \in \mathcal{A}(\mathbb{D}_R)$ une fonction transcendante. On pose $m = 3$, $g_0(z) = 1$, $g_1(z) = z$, $g_2(z) = f(z)$, $g = (g_0, g_1, g_2)$ et (E_d) la suite $(V_d^K(g))$. Or l'espace vectoriel $V_d^K(g)$ est nul pour tout $d \in \mathbb{N}$. En effet, soit $P \in K_d[w_0, w_1, w_2]$ un polynôme de la forme

$$\forall w \in \mathbb{C}^3, P(w) = \sum_{|I|=d} \lambda_I w^I = \sum_{i_1+i_2 \leq d} \lambda_{d-i_1-i_2, i_1, i_2} w_0^{d-i_1-i_2} w_1^{i_1} w_2^{i_2}.$$

Or $P \in V_d^K(g)$ si et seulement si $z \mapsto P(1, z, f(z))$ est identiquement nulle. D'où $P \equiv 0$. Donc on peut appliquer la troisième interpolation du théorème 1.6.36 à la fonction g et la \mathbb{Q} -suite d'évitement nulle pour obtenir le lemme d'interpolation de Masser 1.6.31. Pour cela on considère la fonction $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par

$$\forall d \in \mathbb{N}_{\geq 2}, \phi(d) := \Phi\left(\frac{d}{\varepsilon \log d}\right) \text{ et } \phi(0) = \phi(1) = 1.$$

où $\Phi : [\frac{\varepsilon}{e}, \infty[\rightarrow [e, \infty[$ est la fonction inverse de $x \mapsto \frac{x}{\varepsilon \log x}$. Contrairement au lemme de Masser 1.6.31, le nombre d'hypersurfaces algébriques de \mathcal{S}_d est majorée par une borne indépendante du degré d .

Exemple 1.6.39. Soient $g \in \mathcal{O}(\mathbb{D}_R)^m$ et (E_d) une suite d'évitement de format (α, β) avec $\alpha < m - 1$. Alors pour tout $B > e$, l'ensemble $\Gamma_r^g(\overline{\mathbb{Q}}_k, B)$ est contenu dans une famille \mathcal{S} de \mathbb{Q} -hypersurfaces algébriques telle que

$$\#\mathcal{S} \ll \Phi_\varepsilon^1(r, R, g) \text{ et } \forall P \in \mathcal{S}, h(P) \ll (\log B)^\gamma \text{ avec } \gamma = \frac{m-1}{m-1-\alpha}.$$

En effet il suffit d'appliquer la troisième interpolation du théorème 1.6.36 en posant $\phi(d) = d^{m-1-\alpha}$ et le degré $d(B) = \lceil \log B \rceil^{1/(m-1-\alpha)}$. On obtient des résultats similaires en appliquant les trois autres interpolations du théorème 1.6.36.

Remarque 1.6.40. Il n'est pas possible de remplacer dans l'énoncé du théorème 1.6.36 la condition $m \geq 2$ par $m \geq 1$. En effet, on montre dans la section 5.4 que si une telle interpolation était possible alors le nombre $N_K(\Gamma_r^g, B)$ serait majorée par une borne logarithmique dès lors que Γ_r^g est le graphe d'une fonction g entière et transcendante. Or le théorème de Surroca 1.2.12 affirme qu'une telle borne n'existe pas en général.

Bornes logarithmiques

Les corollaires ci-dessous sont conséquences des lemmes de zéros polynomiaux énoncés dans les sections précédentes et de la proposition 1.3.4. On rappelle que l'on note Γ^g le graphe de g et Γ_K^g le graphe de g restreint à un compact K de son domaine de définition.

Corollaire 1.6.41. Soient $g \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$, $\beta \in [0, \frac{1}{2}[$ et $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose que la caractéristique de Nevanlinna de g satisfait les trois conditions suivantes

$$\lambda := \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{\log T(r, g)}{\log r} > 0, \quad \rho := \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log T(r, g)}{\log r} < \infty \text{ et } N(r, \infty, g) = O(T(r, g)^\beta)$$

Alors il existe un exposant $\alpha > 0$ tel que pour tout $K \Subset \mathbb{C}$

$$\forall B > e, N_k(\Gamma_K^g, B) \ll (\log B)^\alpha.$$

De plus la dépendance de la constante en K peut être explicitée.

Corollaire 1.6.42. Soient $g \in \mathcal{M}(\mathbb{D})$, $\beta \in [0, \frac{1}{2}[$ et $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose que g vérifie l'une des hypothèses suivantes

- la fonction g est holomorphe et la fonction maximum $M(r, g)$ vérifie

$$\lambda := \varliminf_{r \rightarrow 1^-} \frac{\log \log^+ M(r, g)}{-\log(1-r)} > 1 \quad \text{et} \quad \rho := \varlimsup_{r \rightarrow 1^-} \frac{\log \log^+ M(r, g)}{-\log(1-r)} < \infty,$$

- la caractéristique de Nevanlinna de g satisfait les trois conditions suivantes

$$\lambda := \varliminf_{r \rightarrow 1^-} \frac{\log_j T(r, g)}{-\log(1-r)} > 0 \quad \text{et} \quad \rho := \varlimsup_{r \rightarrow 1^-} \frac{\log_j T(r, g)}{-\log(1-r)} < \infty,$$

$$\text{et } n(r, \infty, g) = O(T(r, g)^\beta).$$

Alors il existe un exposant $\alpha > 0$ tel que pour tout $K \Subset \mathbb{D}$

$$\forall B > e, N_k(\Gamma_K^g, B) \ll (\log B)^\alpha.$$

De plus la dépendance de la constante en K peut être explicitée.

Corollaire 1.6.43. Soient $g \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ une fonction elliptique non constante et $k \in \mathbb{N}^*$. Alors pour tout $K \Subset \mathbb{C}$

$$\forall B > e, N_k(\Gamma_K^g, B) \ll (\log B)^2.$$

De plus la dépendance de la constante en K peut être explicitée.

Remarque 1.6.44. Lorsque les invariants g_2 et g_3 de la fonction elliptique \wp_Λ sont algébriques, nous avons vu que le théorème de Schneider-Lang 1.1.5 implique que l'image d'un nombre algébrique non nul par \wp_Λ est non nul. Dans ce cas la borne du corollaire 1.6.43 ci-dessus est très grossière. Cependant il existe des fonctions elliptiques prenant une infinité de points algébriques. En effet le théorème d'Abel [36, Th. V.6.1] affirme que pour tout réseau Λ de \mathbb{C} et $k \in \mathbb{N}^*$, $a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_k \in \mathbb{C}$ tels que aucun a_i n'est congru à un b_j modulo Λ et

$$a_1 + \dots + a_k \equiv b_1 + \dots + b_k \pmod{\Lambda},$$

il existe une fonction elliptique g ayant un zéro en chaque a_i et un pôle en chaque b_i . En supposant de plus que Λ admet une base $\{\omega_1, \omega_2\} \subset \mathbb{Q}$, on constate que le graphe de g contient les points algébriques

$$\{(a_j + n\omega_1 + m\omega_2, 0) \mid n, m \in \mathbb{Z}, j \in \{1, \dots, k\}\}. \quad (1.6.5)$$

Or d'après la proposition 5.2.2 pour une certaine constante $C > 0$

$$\forall j \in \{1, \dots, k\}, \forall n, m \in \mathbb{N}, H(a_j + n\omega_1 + m\omega_2) \ll C^{n \vee m}.$$

Donc $N_k(\Gamma^g, B) \gg (\log B)^2$. Cependant l'ensemble 1.6.5 n'est pas contenu dans un compact. À ce jour, on ne sait pas s'il existe des fonctions elliptiques ayant beaucoup de points algébriques de hauteur bornée dans un compact de son graphe.

Corollaire 1.6.45. Soient $g \in \mathcal{M}(\mathbb{D})$ une fonction fuchsienne non constante et $k \in \mathbb{N}^*$. Alors pour tout $K \Subset \mathbb{D}$

$$\forall B > e, N_k(\Gamma_K^g, B) \ll (\log B)^6.$$

De plus la dépendance de la constante en K peut être explicitée.

Dans [59], Jones et Thomas étudient les points algébriques de la fonction $z\eta$ de Weierstraß grâce à la théorie des fonctions pfaffiennes. En particulier ils obtiennent l'énoncé suivant.

Théorème 1.6.46 (Jones - Thomas - [59, Th. 1.3]). *Soit Λ un réseau de \mathbb{C} . Alors il existe une base $\{\omega_1, \omega_2\}$ de Λ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe une constante effective $C > 0$ telle que*

$$\forall B > e, N_k(\Gamma_{\Delta}^{\zeta_{\Lambda}}, B) \leq C(\log B)^{15},$$

où Δ est un disque centré en $\frac{\omega_1 + \omega_2}{4}$ de rayon strictement positif ne dépendant que de ω_1 et ω_2 .

Nous obtenons dans le corollaire 1.6.47 suivant une borne logarithmique pour les graphes des fonctions σ_{Λ} et ζ_{Λ} restreintes à n'importe quel compact de \mathbb{C} . Notre exposant est également meilleur que celui figurant dans l'énoncé 1.6.46 pour la fonction ζ_{Λ} et est valable pour n'importe quel compact du plan.

Corollaire 1.6.47. *Soit Λ un réseau de \mathbb{C} . Alors pour tout $K \Subset \mathbb{C}$*

$$\forall B > e, N_k(\mathcal{X}_K^{\sigma_{\Lambda}}, B) \ll (\log B)^2,$$

et

$$\forall \epsilon > 0, \forall B > e, N_k(\mathcal{X}_K^{\zeta_{\Lambda}}, B) \ll (\log B)^{2+\epsilon}.$$

De plus la dépendance de la constante en K peut être explicitée.

CHAPITRE 2

Pré-requis

Ce chapitre contient des résultats classiques de théorie du potentiel dans le plan \mathbb{C} et de théorie de Nevanlinna en une variable complexe que nous utilisons à plusieurs reprises dans les prochains chapitres. On développe également plusieurs notions qui nous seront très utiles.

- les exhaustions greeniennes d'un domaine greenien, voir la proposition 2.2.5,
- les indices de Bernstein holomorphes et méromorphes sur un domaine greenien, voir la définition 2.4.1,
- la majoration des bornes de Bézout sur un domaine régulier¹ par les indices de Bernstein holomorphes et méromorphes, voir les propositions 2.5.19 et 2.5.20. Ces résultats montrent qu'une majoration des indices de Bernstein conduit à des lemmes des zéros dans ces domaines,
- une extension du théorème de Cartan pour la caractéristique de Nevanlinna aux domaines réguliers, voir la proposition 2.6.16 et le théorème 2.6.11 pour l'énoncé de Cartan.

2.1 Théorie du potentiel

L'un des outils de base de la théorie du potentiel est le principe du maximum qui étend le principe du même nom en analyse complexe aux fonctions sous-harmoniques. Nous aurons besoin du *principe du maximum étendu* qui autorise d'ignorer un sous-ensemble polaire du bord du domaine.

Définition 2.1.1 (Ensemble polaire – [93, Th. 3.5.1]). Un ensemble $E \subset \mathbb{C}$ est dit *polaire*² s'il existe un ouvert U et une fonction $u \in \mathcal{SH}(U)$ tels que

$$E \subset \{z \in U \mid u(z) = +\infty\}.$$

Autrement dit E est contenu dans l'ensemble des pôles d'une fonction sous-harmonique.

Théorème 2.1.2 (Principe du maximum étendu – [93, Th. 3.6.9]). *Soient Ω un domaine de \mathbb{C} dont le bord n'est pas polaire et $u \in \mathcal{SH}(\Omega)$ une fonction majorée sur Ω . On suppose qu'il existe un ensemble polaire $E \subset \partial\Omega$ tel que*

$$\forall \xi \in \partial\Omega \setminus E, \quad \overline{\lim}_{z \rightarrow \xi} u(z) \leq 0.$$

¹Voir la définition 2.2.1. Par exemple tous les domaines de Jordan multiconnexes sont de ce type.

²Il existe une définition plus générale d'ensemble polaire mais nous n'aurons pas besoin d'une telle généralité. Voir [93, Déf 3.2.2] pour une définition plus générale.

Alors $u \leq 0$ sur Ω .

Fonctions de Green

Définition 2.1.3 (Fonction de Green – [93]). Une *fonction de Green* du domaine $\Omega \subset \hat{\mathbb{C}}$ est une application $g_\Omega : \Omega \times \Omega \rightarrow]-\infty, +\infty]$ telle que pour tout $w \in \Omega$

- la fonction $g_\Omega(\cdot, w)$ est harmonique sur $\Omega \setminus \{w\}$ et bornée en dehors de tout voisinage de w ,
- la fonction $g_\Omega(\cdot, w)$ admet un pôle logarithmique en w . Plus précisément $g_\Omega(w, w) = +\infty$ et l'asymptotique de $g_\Omega(\cdot, w)$ en w est donnée par

$$g_\Omega(z, w) = \begin{cases} \log |z| + O(1) & w = \infty \\ -\log |z - w| + O(1) & w \neq \infty \end{cases},$$

- la fonction $g_\Omega(\cdot, w)$ tend vers zéro en s'approchant du bord du domaine en dehors d'un ensemble négligeable de points de $\partial\Omega$. Autrement dit $g_\Omega(z, w) \rightarrow 0$ lorsque $z \rightarrow \xi$ avec $\xi \in \partial\Omega \setminus E$ où E est un ensemble polaire.

On dit que Ω est un *ensemble greenien* lorsqu'il admet une fonction de Green. La fonction $g_\Omega(\cdot, \infty)$ sera appelée la fonction de Green de Ω avec un *pôle à l'infini*.

Lorsque le bord du domaine Ω n'est pas polaire alors ce dernier est un ensemble greenien. La réciproque est vraie³.

Théorème 2.1.4 ([93, Th. 4.4.2]). *Soit Ω un domaine de \mathbb{C} dont le bord n'est pas polaire. Alors Ω admet une unique fonction de Green.*

Le principe de subordination 2.1.5 ci-dessous est une reformulation du principe du maximum des fonctions harmoniques appliqué à la fonction de Green.

Théorème 2.1.5 (Principe de subordination – [93, Th. 4.4.4]). *Soient $\Omega, \Upsilon \subset \hat{\mathbb{C}}$ deux domaines greeniens et $h : \Omega \rightarrow \Upsilon$ une fonction méromorphe. Alors*

$$\forall z, w \in \Omega, g_\Upsilon(h(z), h(w)) \geq g_\Omega(z, w).$$

De plus cette inégalité est une égalité lorsque h est une application conforme de Ω sur Υ .

Théorème 2.1.6 ([93, Th. 4.4.3, Th. 4.4.8] et [4, Th. 4.1.9]). *Soit $\Omega \subset \hat{\mathbb{C}}$ un domaine greenien. Alors*

$$\forall z, w \in \Omega, g_\Omega(z, w) > 0 \text{ et } g_\Omega(z, w) = g_\Omega(w, z).$$

De plus g_Ω est continue sur $\Omega \times \Omega$.

Corollaire 2.1.7. *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un domaine greenien. Alors il existe une fonction $H \in \mathcal{H}(\Omega \times \Omega)$ positive telle que*

$$\forall z, w \in \Omega, g_\Omega(z, w) = -\log |z - w| - H(z, w).$$

En particulier H est analytique réelle sur $\Omega \times \Omega$.

Démonstration. Il existe une fonction $H : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\forall z, w \in \Omega, g_\Omega(z, w) = -\log |z - w| - H(z, w),$$

et H est harmonique en z et w . D'après le théorème 2.1.6 ci-dessus, la fonction g_Ω est continue sur $\Omega \times \Omega$ et donc H également. Donc d'après [4, Cor. 3.3.7], la fonction H est harmonique sur $\Omega \times \Omega$ et donc analytique réelle sur $\Omega \times \Omega$ d'après le théorème [4, Th. 1.8.5]. ■

³Voir l'exercice 1 de [93, p. 115].

Capacités

Nous serons amenés dans les chapitres ultérieurs à estimer la taille du lieu où des fonctions méromorphes et en particulier des polynômes restent proches de certaines valeurs de $\hat{\mathbb{C}}$. Plutôt qu'avoir recours à la mesure de Lebesgue pour estimer et comparer la taille de ces lieux, il s'avèrera plus pratique d'employer les notions de capacité logarithmique ou harmonique. Bien que ces capacités ne soient pas des mesures au sens usuel de la théorie de l'intégration de Lebesgue, ils n'en reste pas moins qu'elle sont croissantes pour l'inclusion ce qui est suffisant pour nos applications. Dans la suite on note $\mathcal{P}(K)$ l'ensemble des mesures de probabilité boréliennes sur \mathbb{C} dont le support est contenu dans le compact K .

Capacité logarithmique

Définition 2.1.8 (Capacité logarithmique – [93, Déf. 5.1.1]). Soit K un compact de \mathbb{C} . Pour tout $\mu \in \mathcal{P}(K)$, on définit le *potentiel logarithmique* P_μ associé à μ par

$$P_\mu(z) := \int_{\mathbb{C}} \log |z - w| d\mu(w),$$

et l'*énergie potentielle* $I(\mu)$ associée à μ définie par

$$I(\mu) := \int_{\mathbb{C}} P_\mu(z) d\mu(z) = \int_{\mathbb{C}} \int_{\mathbb{C}} \log |z - w| d\mu(z) d\mu(w).$$

La *capacité logarithmique* de K est définie par

$$\text{cap}(K) := \sup \left\{ e^{I(\mu)} \mid \mu \in \mathcal{P}(K) \right\}.$$

Une mesure $\nu \in \mathcal{P}(K)$ telle que $\text{cap}(K) = e^{I(\nu)}$ est appelée une *mesure d'équilibre* de K .

Le théorème 2.1.9 suivant affirme que la capacité logarithmique d'un compact est toujours atteinte par une unique mesure borélienne de $\mathcal{P}(K)$.

Théorème 2.1.9 ([93, Th. 3.3.2] et [93, Th. 3.7.6]). *Tout compact K de \mathbb{C} admet une mesure d'équilibre. De plus si K n'est pas polaire, cette mesure d'équilibre est unique et son support est contenu dans $\partial_e K$.*

Le théorème 2.1.10 ci-dessous est surnommé le théorème fondamental de la théorie du potentiel.

Théorème 2.1.10 (Frostman – [93, Th. 3.3.4]). *Soient K un compact de \mathbb{C} qui n'est pas polaire et ν_K la mesure d'équilibre de K . Alors il existe $E \subset K$ tel que $\text{cap}(E) = 0$ et*

$$\forall z \in \mathbb{C}, P_{\nu_K}(z) \geq I(\nu_K) \quad \text{et} \quad \forall z \in K \setminus E, P_{\nu_K}(z) = I(\nu_K).$$

Une propriété remarquable de la capacité logarithmique est que la capacité logarithmique de l'image réciproque d'un compact par un polynôme est facile à calculer.

Théorème 2.1.11 ([93, Th. 5.2.5]). *Soient $K \subset \mathbb{C}$ un compact et $P \in \mathbb{C}_{\leq d}[z]$ de coefficient dominant a . Alors*

$$\text{cap}(P^{-1}(K)) = \left(\frac{\text{cap}(K)}{|a|} \right)^d.$$

La capacité logarithmique peut être vu comme un intermédiaire entre la mesure de Lebesgue et le diamètre d'un ensemble. Lorsque l'ensemble est connexe, sa capacité logarithmique est comparable à son diamètre.

Proposition 2.1.12 (Inégalité de Faber – [93]). *Soit $K \subset \mathbb{C}$ un compact connexe. Alors*

$$\frac{\text{diam}(K)}{4} \leq \text{cap}(K) \leq \frac{\text{diam}(K)}{2}.$$

L'inégalité de Faber est précise puisque la borne inférieure est atteinte par les intervalles tandis que la borne supérieure est atteinte par les disques. Afin de minorer certaines capacités logarithmiques nous utilisons le théorème 2.1.13 ci-dessous qui réduit ce problème à une minoration de la mesure de Lebesgue d'une partie de \mathbb{R} ou \mathbb{S}^1 .

Théorème 2.1.13 ([42, th. 4.5] et [93, th. 5.3.1]). *Soient $E \subset \mathbb{C}$, $\alpha, C > 0$ et $\psi : E \rightarrow \mathbb{C}$ une application telle que pour tout $z, w \in E$, $|\psi(z) - \psi(w)| \leq C|z - w|^\alpha$ ⁴. Alors*

$$\text{cap}(\psi(E)) \leq C \text{cap}(E)^\alpha.$$

En particulier, la projection circulaire E^ de E sur \mathbb{R} définie par $E^* := \{|z| \mid z \in E\}$ vérifie*

$$\text{cap}(E) \geq \text{cap}(E^*) \geq \frac{\lambda_1(E^*)}{4}.$$

Lors de la démonstration du théorème 2.1.4 figurant dans [93], l'auteur démontre la formule ci-dessous.

Proposition 2.1.14 ([93]). *Soit $K \subset \mathbb{C}$ un compact non polaire. Alors*

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus K, \quad g_{\mathbb{C} \setminus K}(z, \infty) = \log \frac{1}{\text{cap}(K)} + P_{\nu_K}(z) = \log \frac{1}{\text{cap}(K)} + \int_K \log |z - \xi| d\nu_K(\xi),$$

où ν_K est la mesure d'équilibre du compact K .

Condenseur et capacité

Définition 2.1.15 (Énergie et capacité – [100, Chap. II]). *Soient $\Omega \subset \mathbb{C}$ un domaine greenien, $K \Subset \Omega$ un compact et $\mu \in \mathcal{P}(K)$. Le potentiel greenien, noté U_Ω^μ , associé à la mesure μ est défini par*

$$U_\Omega^\mu(z) := \int_{\mathbb{C}} g_\Omega(z, w) d\mu(w),$$

et l'énergie de Green de μ relativement à Ω est définie par

$$I_\Omega(\mu) := \int_{\mathbb{C}} U_\Omega^\mu(z) d\mu(z) = \int_{\mathbb{C}} \int_{\mathbb{C}} g_\Omega(z, w) d\mu(z) d\mu(w).$$

La capacité harmonique du compact K relativement à Ω est définie par

$$V_K^\Omega := \inf \{I_\Omega(\mu) \mid \mu \in \mathcal{P}(K)\}.$$

Théorème 2.1.16 (Mesure d'équilibre – [100, Chap. II Th. 5.10]). *Soient $\Omega \subset \mathbb{C}$ un domaine greenien et $K \Subset \Omega$ un compact. Alors il existe une unique mesure $\nu_K^\Omega \in \mathcal{P}(K)$ telle que $V_K^\Omega = I_\Omega(\nu_K^\Omega)$. Cette mesure ν_K^Ω est appelée la mesure d'équilibre greenienne de F dans Ω .*

Théorème 2.1.17 (Frostman – [100, Chap. II Th. 5.11]). *Soient $\Omega \subset \mathbb{C}$ un domaine greenien, $K \Subset \Omega$ un compact tel que $\text{cap}(K) > 0$ et ν_K^Ω la mesure d'équilibre greenienne de K . Alors il existe $E \subset K$ tel que $\text{cap}(E) = 0$ et*

$$\forall z \in \Omega, \quad U_\Omega^{\nu_K^\Omega}(z) \leq V_K^\Omega \quad \text{et} \quad \forall z \in K \setminus E, \quad U_\Omega^{\nu_K^\Omega}(z) = V_K^\Omega.$$

⁴Autrement dit ψ est une application α -höldérienne.

Définition 2.1.18 (Condenseur et capacité). Une paire (F, Ω) avec $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert et F un fermé de Ω est appelé un *condenseur* de \mathbb{C} . La *capacité* du condenseur (F, Ω) est définie par

$$\text{cap}(F, \Omega) = \frac{1}{4\pi} \inf \left\{ \int_{\Omega \setminus F} |\nabla f|^2 dz \mid f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{C}) \text{ tel que } f \equiv 0 \text{ sur } \mathbb{C} \setminus \Omega \text{ et } f \equiv 1 \text{ sur } F \right\}.$$

Proposition 2.1.19 ([100, Chap. VIII Th. 2.6]). Soient $\Omega \subset \mathbb{C}$ un domaine greenien et $K \Subset \Omega$ un compact. Alors

$$\text{cap}(K, \Omega) = \frac{1}{V_K^\Omega}$$

Théorème 2.1.20 (Principe de subordination). Soient (F, Ω) et (G, Υ) deux condenseurs de \mathbb{C} tels que $F \subset G$ et $\Upsilon \subset \Omega$. Alors

$$\text{cap}(F, \Omega) \leq \text{cap}(G, \Upsilon).$$

Mesure harmonique

La *mesure harmonique* sur un domaine Ω est une famille de mesures boréliennes sur $\partial\Omega$ qui résout par définition le problème de Dirichlet sur ce domaine Ω .

Définition 2.1.21 (Mesure harmonique – [93, Déf. 4.3.1]). Soit $\Omega \subsetneq \hat{\mathbb{C}}$ un domaine. Notons $\mathcal{B}(\partial\Omega)$ la tribu de Borel de $\partial\Omega$. Une *mesure harmonique* sur Ω est une fonction $\varpi(\bullet, \bullet, \Omega) : D \times \mathcal{B}(\partial\Omega) \rightarrow [0, 1]$ telle que

- pour tout $z \in \Omega$, $B \mapsto \varpi(z, B, \Omega)$ est une mesure de probabilité borélienne sur $\partial\Omega$,
- pour toute fonction $\phi : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ continue, l'application $\mathbf{P}_\Omega \phi$ définie par

$$\forall z \in \Omega, \mathbf{P}_\Omega \phi(z) := \int_{\partial\Omega} \phi(\xi) d\varpi_\Omega(z, \xi),$$

est harmonique sur Ω et continue sur $\bar{\Omega}$. De plus $\mathbf{P}_\Omega \phi$ coïncide avec ϕ sur $\partial\Omega$. L'application $\mathbf{P}_\Omega \phi$ est appelée l'*intégrale de Poisson généralisée* de ϕ sur Ω .

On note parfois $\varpi_\Omega(z, B)$ au lieu de $\varpi(z, B, \Omega)$.

Définition 2.1.22 (Noyau de Poisson). Soit $\Omega \subsetneq \hat{\mathbb{C}}$ un domaine. Une application $P_\Omega : \Omega \times \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est un *noyau de Poisson* de Ω lorsque

- pour tout $z \in \Omega$, $P_\Omega(z, \bullet)$ est une fonction intégrable sur $\partial\Omega$ pour la mesure linéaire $d\sigma$,
- pour toute fonction $\phi : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et harmonique sur Ω

$$\forall z \in \Omega, \phi(z) = \int_{\partial\Omega} \phi(\xi) P_\Omega(z, \xi) d\sigma(\xi).$$

Le théorème 2.1.23 suivant donne une condition suffisante sur le domaine Ω pour l'existence d'une mesure harmonique. Cette condition est en particulier remplie lorsque le bord de Ω est analytique par morceaux. On en déduit que les strates d'une exhaustion d'un domaine quelconque admettent toujours une unique mesure harmonique.

Théorème 2.1.23 ([93, Thm. 4.3.2]). Soit $\Omega \subsetneq \hat{\mathbb{C}}$ tel que $\partial\Omega$ ne soit pas polaire. Alors il existe une unique mesure harmonique ϖ_Ω sur Ω .

Théorème 2.1.24 ([93, Thm. 4.3.4]). Soient $\Omega \subsetneq \hat{\mathbb{C}}$ tel que $\partial\Omega$ ne soit pas polaire et $B \subset \partial\Omega$ un borélien. Alors

- la fonction $z \mapsto \varpi(z, B, \Omega)$ est harmonique et bornée sur Ω ,

- soit ξ un point régulier de $\partial\Omega$ qui n'appartient pas à la frontière relative de B dans $\partial\Omega$. Alors

$$\lim_{z \rightarrow \xi} \varpi(z, B, \Omega) = 1_B(\xi).$$

Le principe de subordination ci-dessous est très utile pour estimer la mesure harmonique lorsque l'on ne dispose pas d'une expression explicite de cette dernière.

Théorème 2.1.25 (Principe de subordination [93, Thm. 4.3.8]). Soient $\Omega, \Upsilon \subset \hat{\mathbb{C}}$ deux domaines dont les bords ne sont pas polaires et $B \subset \partial\Omega$, $S \subset \partial\Upsilon$ deux boréliens. Alors pour toute fonction $h : \Omega \cup B \rightarrow \Upsilon \cup S$ continue et méromorphe sur Ω telle que $h(\Omega) \subset \Upsilon$ et $h(B) \subset S$

$$\varpi(h(z), S, \Upsilon) \geq \varpi(z, B, \Omega).$$

De plus cette inégalité est une égalité si h est un homéomorphisme de $\Omega \cup B$ sur $\Upsilon \cup S$.

Théorème 2.1.26 ([93, Th. 4.4.7]). Soit $K \subset \mathbb{C}$ un compact. Alors

$$\forall z \in K, \forall w \in K, g_K(z, w) = \int_{\partial K} \log |\xi - w| d\varpi_K(z, \xi) - \log |z - w|.$$

Distance de Harnack

Nous aurons besoin à plusieurs reprises de comparer la valeur d'une fonction $u \in \mathcal{H}(\Omega)$ strictement positive entre deux points z et w de Ω . Nous utiliserons à cette fin la *distance de Harnack* ci-dessous.

Définition 2.1.27 (Distance de Harnack – [93, Déf. 1.3.4]). Soient $\Omega \subset \mathbb{C}$ un domaine relativement compact et $z, w \in \Omega$. La *distance de Harnack* entre z et w est le plus petit réel positif $\tau_\Omega(z, w)$ tel que toute fonction $h \in \mathcal{H}(\Omega)$ strictement positive sur Ω vérifie l'encadrement

$$\tau_\Omega(z, w)^{-1} h(w) \leq h(z) \leq \tau_\Omega(z, w) h(w).$$

Remarque 2.1.28. La distance de Harnack sur le disque $\mathbb{D}(w, r)$ est donnée par la formule

$$\forall z \in \mathbb{D}(w, r), \tau_{\mathbb{D}_r}(z, w) = \frac{r + |z - w|}{r - |z - w|}.$$

Voir le théorème 1.3.5 de [93].

Théorème 2.1.29 ([93, Th. 1.3.8] et [93, Ex. 4]). Soit Ω un domaine de \mathbb{C} . Alors $\log \tau_\Omega$ est une pseudo-métrique sur Ω . De plus lorsque Ω est conforme à un domaine borné, $\log \tau_\Omega$ est une métrique complète sur Ω .

Théorème 2.1.30 (Inégalité de Harnack – [93]). Soient $u \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ une fonction harmonique strictement positive et $\lambda, r \in \mathbb{R}$ tels que $0 < \lambda < r < 1$. Alors

$$\forall z \in \mathbb{A}(\lambda, r), \left(\frac{r - \lambda}{r + \lambda} \right) u(0) \leq u(z) \leq \left(\frac{r + \lambda}{r - \lambda} \right) u(0).$$

Théorème 2.1.31 (Principe de subordination – [93, Th 1.3.6]). Soient $\Omega, \Upsilon \subset \hat{\mathbb{C}}$ deux domaines et $h : \Omega \rightarrow \Upsilon$ une fonction méromorphe. Alors

$$\forall z, w \in \Omega, \tau_\Upsilon(h(z), h(w)) \leq \tau_\Omega(z, w)$$

De plus cette inégalité est une égalité lorsque h est une application conforme de Ω sur Υ .

2.2 Fonctions d'exhaustions

Afin d'étudier une fonction g de $\mathcal{M}(\mathbb{D})$, il est souvent pertinent de considérer les restrictions de g aux disques \mathbb{D}_r pour $r \in [0, 1[$. Pour un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$ quelconque, on ne dispose pas d'une exhaustion aussi naturelle de ce domaine. Dans cette section nous montrons qu'un domaine (Ω, z_0) tel que Ω est régulier au sens de la définition 2.2.1 ci-dessous dispose d'une exhaustion généralisant l'exhaustion de \mathbb{D} par les disques \mathbb{D}_r . Cette exhaustion sera appelée l'*exhaustion greenienne* de Ω de centre z_0 . Soient $\tau : \Omega \rightarrow [0, 1[$ une fonction et $r \in [0, 1[$. On définit la *strate* Ω_r^τ de τ par

$$\Omega_r^\tau := \{z \in \Omega \mid \tau(z) < r\}.$$

Toutes les fonctions $\tau : \Omega \rightarrow [0, 1[$ ne conviennent pas pour étudier les fonctions méromorphes sur le domaine Ω . Afin de disposer d'une formule de Poisson-Jensen⁵, on exige que les strates de l'exhaustion τ soient des domaines réguliers au sens suivant.

Définition 2.2.1 (Domaine régulier – [93, p. 96]). On dit qu'un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$ est *régulier* s'il est conforme à un domaine borné de \mathbb{C} et pour tout $\xi \in \partial\Omega$, il existe un voisinage ouvert U de ξ et $b \in \mathcal{SH}(U)$ tels que

$$\forall z \in \Omega \cap U, b(z) < 0 \text{ et } \lim_{z \rightarrow \xi} b(z) = 0.$$

Définition 2.2.2 (Fonction d'exhaustion). Une fonction $\tau : \Omega \rightarrow [0, 1[$ est appelée une *fonction d'exhaustion* du domaine Ω lorsque pour tout $r \in]0, 1[$

- la strate Ω_r^τ est un domaine régulier et relativement compact de Ω ,
- le bord de Ω_r^τ est analytique par morceaux et de classe \mathcal{C}^2 en dehors d'un ensemble dénombrable de rayons.

Afin de démontrer qu'un domaine est régulier, nous utiliserons la condition suffisante du théorème 2.2.3 ci-dessous.

Théorème 2.2.3 (Critère de régularité – [93, Th. 4.2.2]). Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un domaine tel que $\partial\Omega$ ne contient aucun point isolé. Alors Ω est un domaine régulier.

Théorème 2.2.4 ([93, Th. 4.1.5] et [93, Th. 4.3.3]). Soient $\Omega \subset \mathbb{C}$ un domaine régulier, $\xi \in \partial\Omega$ et $\phi : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée, mesurable et continue en ξ . Alors

$$\lim_{z \rightarrow \xi} \mathbf{P}_\Omega \phi(z) = \phi(\xi).$$

Lorsque Ω est un domaine régulier de \mathbb{C} , on peut construire une exhaustion naturelle de Ω à l'aide de la fonction de Green de ce dernier.

Proposition 2.2.5. Soit (Ω, z_0) un domaine greenien. On note

$$\forall z \in \Omega, \tau(z) = \exp \{ -g_\Omega(z, z_0) \},$$

Alors τ est une fonction d'exhaustion de Ω telle que $\tau(z_0) = 0$. Cette exhaustion est appelée l'*exhaustion greenienne* du domaine Ω de centre z_0 . Lorsque le choix du point z_0 est clair dans le contexte, la strate Ω_r^τ est notée Ω_r .

Démonstration. Montrons que τ est une fonction analytique sur $\Omega \setminus \{z_0\}$. D'après la définition 2.1.3, la fonction v définie par

$$\forall z \in \Omega, v(z) = g_\Omega(z, z_0) + \log |z - z_0|,$$

⁵Voir la section 2.5 pour les énoncés de ces formules.

est harmonique sur Ω . La fonction v est donc analytique réelle sur ce même domaine⁶. Or $\tau(z) = |z - z_0|e^{v(z)}$ et donc τ est analytique réelle sur $\Omega \setminus \{z_0\}$. Montrons que les strates Ω_r sont bornées et $\Omega_r \subseteq \Omega$. En appliquant le théorème 2.2.4 avec $\phi \equiv 0$, on obtient

$$\forall \xi \in \partial\Omega, \lim_{z \rightarrow \xi} g_\Omega(z, z_0) = 0.$$

Donc $\Omega_r \subseteq \Omega$. Or le domaine Ω est conforme à un domaine borné de \mathbb{C} . Donc Ω_r est relativement compact dans \mathbb{C} et donc en particulier borné. Montrons que pour tout $r \in]0, 1[$, la strate Ω_r est un ouvert connexe. Cet ensemble est ouvert par continuité de la fonction τ . Or la fonction $w(z) = g_\Omega(z, z_0)$ est harmonique sur $\Omega \setminus \{z_0\}$. Supposons par l'absurde que Ω_r n'est pas connexe et soit Υ une composante connexe de ce dernier qui ne contient pas z_0 . Puisque $\Upsilon \subseteq \Omega$ et d'après le principe du maximum 2.1.2, la fonction $w|_\Upsilon$ atteint son maximum et son minimum sur $\partial\Upsilon$ ce qui implique que w est constante sur Υ puisque $w|_{\partial\Upsilon}$ l'est. C'est absurde. Donc Ω_r est un ouvert connexe. Montrons que $\partial\Omega_r$ est analytique par morceaux. En effet, l'ensemble $\partial\Omega_r$ est une ligne de niveau de τ et la dérivée $\partial_z \tau$ a ses zéros isolés dans Ω puisque cette fonction est analytique réelle sur ce domaine. De plus $\partial\Omega_r$ est un compact de Ω et donc ne rencontre qu'un nombre fini de zéros de $\partial_z \tau$. Donc $\partial\Omega_r$ est analytique par morceaux d'après le théorème des fonctions implicites. On en déduit également qu'en dehors d'un ensemble dénombrable de rayons, le bord $\partial\Omega_r$ est analytique et donc *a fortiori* de classe \mathcal{C}^2 . Finalement montrons que Ω_r est un domaine régulier. En effet la fonction b définie par

$$\forall z \in \Omega, b(z) = -g_\Omega(z, z_0) + \log\left(\frac{1}{r}\right).$$

est sous-harmonique sur un voisinage de $\partial\Omega_r$. Par définition de Ω_r et continuité de la fonction w , la fonction b est nulle sur $\partial\Omega_r$ et est strictement négative dans Ω_r . Donc Ω_r est un domaine régulier. ■

2.3 Croissance des fonctions

À toute fonction $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$, on associe la fonction réelle définie sur $]0, \infty[$ par

$$r \mapsto M(r, g) := \max \{|g(z)| \mid |z| \leq r\}, \quad (2.3.1)$$

Cette fonction tient le rôle de degré pour la fonction entière g . En effet cette généralisation se justifie par le fait d'une part que pour tout polynôme P de degré $d \in \mathbb{N}$, la donnée de la fonction 2.3.1 permet de retrouver facilement le degré de P puisque

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log M(r, P)}{\log r} = d. \quad (2.3.2)$$

D'autre part l'entier d donne le comportement asymptotique de 2.3.1 à l'infini car la limite supérieure 2.3.2 est en fait une limite. Qui plus est le degré d'un polynôme univarié P donne le cardinal d'une fibre générique de ce dernier. De même la fonction 2.3.1 donne une estimation de la taille d'une fibre générique de g intersectée avec le disque \mathbb{D}_r ⁷. Toutefois lorsque g n'est pas un polynôme, la fonction $M(r, g)$ peut avoir une croissance très compliquée. Dans le cas algébrique, celle-ci est souvent comparée à la famille de fonctions $r \mapsto r^k$ pour $k \in \mathbb{N}$. Dans le cas transcendant, il est naturel de comparer $M(r, g)$ à la famille de fonctions $r \mapsto e^{r^\alpha}$ ($\alpha > 0$). À cette fin on introduit la notion d'ordre supérieur et d'ordre inférieur⁸. Il se peut qu'une telle échelle de comparaison soit trop grossière pour certaines applications auquel cas on substitue dans les inégalités la

⁶Voir le théorème [93, Th. 1.1.2].

⁷Voir le premier théorème fondamental de Nevanlinna de la section 2.6.

⁸Voir la définition 2.3.3.

fonction $\log M(r, g)$ par une expression de la forme $r^{\rho(r)}$ où ρ est une fonction plus simple à étudier⁹.

Le lecteur pourra se référer à [53] ou au chapitre 2 de [13] pour une étude plus exhaustive de la croissance des fonctions méromorphes sur \mathbb{C} . Le livre [5] offre une approche plus récente de cette théorie dans le cadre plus général des fonctions sous-harmoniques.

Ordre et type d'une fonction

Dans cette sous-section on fixe (Ω, z_0) un domaine régulier et φ désigne une fonction croissante et continue de l'intervalle $[a, \infty[$ dans \mathbb{R}_+ . On suppose de plus que cette fonction n'est pas bornée.

Définition 2.3.1 (Fonction maximum). Soit $g \in \mathcal{M}(\Omega)$. On définit la *fonction maximum* de g par

$$M_\Omega(r, g) := \max \{|g(z)| \mid z \in \partial\Omega_r\} \quad \text{avec} \quad \Omega_r = \{z \in \Omega \mid p_\Omega(z, z_0) < r\}.$$

Lemme 2.3.2. Soient $g \in \mathcal{M}(\Omega)$ et $h : \Upsilon \rightarrow \Omega$ une application conforme. Alors

$$\forall r \in [0, 1[, \forall a \in \hat{\mathbb{C}}, M_\Omega(r, a, g) = M_\Upsilon(r, a, g \circ h) \quad \text{et} \quad \hat{m}_\Omega(r, a, g) = \hat{m}_\Upsilon(r, a, g \circ h).$$

Démonstration. Les deux égalités sont conséquences de l'invariance conforme des fonctions de Green et de la mesure harmonique¹⁰. ■

Notation	Algèbre	Conditions	Formule
$M(\Upsilon, a, g)$	$g \in \mathcal{M}(\Omega)$	$\Upsilon \subseteq \Omega$	$\max_{\xi \in \partial\Upsilon} \frac{1}{ g(\xi), a }$
$\hat{m}_\Upsilon(a, g)$	$g \in \mathcal{M}(\Omega)$	$\Upsilon \subseteq \Omega$	$\int_{\partial\Upsilon} \log^+ \frac{1}{ g(\xi), a } d\varpi_\Upsilon(z_0, \xi)$
$M_\Omega(r, a, g)$	$g \in \mathcal{M}(\Omega)$	$a \in \hat{\mathbb{C}}$	$\max_{\xi \in \partial\Omega_r} \frac{1}{ g(\xi), a }$
$\hat{m}_\Omega(r, a, g)$	$g \in \mathcal{M}(\Omega)$	$a \in \hat{\mathbb{C}}$	$\int_{\partial\Omega_r} \log^+ \frac{1}{ g(\xi), a } d\varpi_{\Omega_r}(z_0, \xi)$
$\hat{m}_\Omega(r, a, g)$	$g \in \mathcal{M}(\Omega)$	$a \in \hat{\mathbb{C}}$	$\int_{\partial\Omega_r} \log \frac{1}{ g(\xi), a } d\varpi_{\Omega_r}(z_0, \xi)$

TABLE 2.1 – Les fonctions de proximité et fonctions maximum.

Les définitions qui suivent sont classiques et sont toutes issues de la section 2.8 de [5]. Afin de comparer la croissance d'une fonction φ à la famille e^{r^α} on introduit la notion d'ordre inférieur et d'ordre supérieur. Cette échelle ne permet pas de discriminer toutes les fonctions par leur croissance mais s'avère toutefois pertinente en théorie des fonctions méromorphes.

⁹Voir la définition 2.3.8.

¹⁰Voir les théorèmes 2.1.5 et 2.1.20.

Notation	Algèbre	Formule
$M(r, a, g)$	$g \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$	$\max_{ z =r} \frac{1}{ g(z), a }$
$\hat{m}(r, a, g)$	$g \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$	$\int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{ g(re^{i\theta}), a } \frac{d\theta}{2\pi}$
$\check{m}(r, a, g)$	$g \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$	$\int_0^{2\pi} \log \frac{1}{ g(re^{i\theta}), a } \frac{d\theta}{2\pi}$

TABLE 2.2 – Les fonctions de proximité et fonctions maximum sur \mathbb{C} .

Définition 2.3.3 (Ordre généralisé – [5]). Soit $j \in \mathbb{N}^*$. Le j -ième ordre supérieur $\rho_j[\varphi]$ de la fonction φ et son j -ième ordre inférieure $\lambda_j[\varphi]$ sont définis par

$$\rho_j[\varphi] := \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log_j \varphi(r)}{\log r} \quad \text{et} \quad \lambda_j[\varphi] := \underline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log_j \varphi(r)}{\log r}.$$

On dit que la fonction φ est d'indice j lorsque $0 < \rho_j[\varphi] < \infty$. On désigne par *ordre* le premier ordre supérieur de φ et on dit que φ est d'ordre fini lorsque cet ordre supérieur est fini. De plus on note plutôt $\rho[\varphi]$ et $\lambda[\varphi]$ que $\rho_1[\varphi]$ et $\lambda_1[\varphi]$.

Exemple 2.3.4. Les fonctions cosinus, sinus, exponentielle et $z \mapsto (z-1)\zeta(z)$ sont d'ordre supérieur et inférieur égal à un.

Remarque 2.3.5. Toutes les fonctions polynomiales sont d'ordre zéro. Toutefois il existe des fonctions entières transcendantes d'ordre zéro. Par exemple la série entière donnée par la série de Taylor

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{-n^2} z^n,$$

est d'ordre zéro. En effet d'après le théorème 2.3.14 l'ordre supérieur ρ de cette fonction vérifie

$$\rho = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log n}{\log 2^{n^2}} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log n}{n^2 \log 2} = 0.$$

Définition 2.3.6. Soient $j \in \mathbb{N}^*$ et $g \in \mathcal{O}(\Omega)$. Le j -ième ordre inférieur et supérieur de la fonction g est défini comme étant le j -ième ordre inférieur et supérieur de la fonction croissante $\log_j M_\Omega(r, g)$. Lorsque g est méromorphe sur Ω on considère également la croissance de la fonction $\log_j T_\Omega(r, g)$.

La proposition 2.3.7 suivante bien qu'élémentaire est utile lorsque l'on souhaite obtenir des majorations de $\varphi(r)$ pour r grand. On obtient une proposition analogue pour l'ordre inférieur en inversant les inégalités.

Proposition 2.3.7 ([53, p. 17]). La fonction $\varphi(r)$ est d'ordre supérieur, $\rho \in]0, \infty[$ si et seulement si

$$\forall \epsilon > 0, \exists r_\epsilon, \forall r \geq r_\epsilon, \varphi(r) < r^{\rho+\epsilon} \quad \text{et} \quad \exists t \geq r, \varphi(t) > t^{\rho-\epsilon}.$$

Ordre précisé

Les notions d'ordre inférieur et supérieur permettent de comparer la croissance d'une fonction φ d'ordre $\rho := \rho[\varphi]$ avec le polynôme r^ρ . Toutefois cette comparaison n'est pas toujours suffisante et il s'avère judicieux de remplacer l'ordre ρ par une fonction ψ dont la limite à l'infini est ρ . On compare alors la croissance de φ avec la fonction $r \mapsto r^{\psi(r)}$.

Définition 2.3.8 (Ordre précisé – [46, p. 49]). On dit qu'une fonction $\psi : [a, \infty[\rightarrow \mathbb{R}_+$ est un *ordre précisé*¹¹ de $\rho > 0$ lorsque les trois conditions suivantes sont vérifiées

- $\lim_{r \rightarrow \infty} \psi(r) = \rho$,
- la fonction ψ est dérivable sur $[a, \infty[$ et sa fonction dérivée est continue sur ce même intervalle,
- $\lim_{r \rightarrow \infty} r \log r \psi'(r) = 0$.

Le théorème 2.3.9 suivant regroupe des propriétés utiles des ordres précisés. Ces propriétés permettent dans bien des inégalités de remplacer une fonction $\varphi(r)$ d'ordre ρ par l'expression $r^{\rho(r)}$ où $\rho(r)$ est un ordre précisé de ρ .

Théorème 2.3.9 ([5, Thm. 2.8.1.3]). Soit $\psi : [a, \infty[\rightarrow \mathbb{R}_+$ un ordre précisé de ρ .

- la fonction $V(r) := r^{\psi(r)}$ est strictement croissante à partir d'un certain rang,
- pour tout p, q tels que $q < \rho + 1 < p$

$$\int_{r_0}^r t^{\psi(t)-q} dt \sim \frac{r^{\psi(r)+1-q}}{\rho + 1 - q} \quad \text{et} \quad \int_{r_0}^r t^{\psi(t)-p} dt \sim \frac{r^{\psi(r)+1-p}}{p - \rho - 1},$$

- la fonction $L(r) = r^{\psi(r)-\rho}$ croît lentement au sens suivant

$$\forall \delta > 0, \quad \frac{L(kr)}{L(r)} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 1 \quad \text{uniformément pour } k \in [\delta^{-1}, \delta],$$

- il existe un $r_0 > 0$ tel que pour tout $\epsilon > 0$ et tout $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $0 < a < b < \infty$

$$\forall r > r_0, \quad \forall k \in [a, b], \quad (1 - \epsilon)k^\rho r^{\psi(r)} < (kr)^{\psi(kr)} < (1 + \epsilon)k^\rho r^{\psi(r)}.$$

Définition 2.3.10 (Ordre précisé propre – [5]). Soit $\psi : [a, \infty[\rightarrow \mathbb{R}_+$ un ordre précisé de $\rho > 0$. Le type de φ relatif à l'ordre précisé ψ est défini par

$$\sigma[\varphi, \psi] := \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\varphi(r)}{r^{\psi(r)}}$$

On dit que ψ est un *ordre précisé propre* pour φ lorsque $0 < \sigma[\varphi, \psi] < \infty$. De même on définit le type inférieur de φ relatif à l'ordre précisé ψ par

$$\sigma_*[\varphi, \psi] := \underline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\varphi(r)}{r^{\psi(r)}}$$

On dit que ψ est un *ordre précisé inférieur propre* pour φ lorsque $0 < \sigma_*[\varphi, \psi] < \infty$.

Déterminer explicitement une telle approximation pour une fonction concrète peut être un vrai défi. Toutefois le théorème 2.3.11 de cette sous-section affirme l'existence d'ordre précisé d'une fonction φ dès lors que cette dernière est d'ordre fini au sens de 2.3.3.

¹¹On parle également d'ordre approximatif.

Théorème 2.3.11 ([67, Thm. 16 p. 35]). Soient $\varphi : [a, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ d'ordre fini et $\sigma > 0$. Alors il existe un ordre précisé ψ de $\rho[\varphi]$ tel que pour tout $r > 0$, $\varphi(r) \leq \sigma r^{\psi(r)}$ et il existe une suite $(r_n) \nearrow \infty$ telle que $\varphi(r_n) = \sigma r_n^{\psi(r_n)}$. En particulier ψ est un ordre précisé propre de φ et $\sigma[\varphi, \rho] = \sigma$.

Théorème 2.3.12 ([46, Thm. 2.1]). Soient $\varphi : [a, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ d'ordre inférieur fini et $\sigma > 0$. Alors il existe un ordre précisé ψ de $\lambda[\varphi]$ tel que $\sigma_*[\varphi, \psi] = \sigma$. Autrement dit ψ est un ordre précisé inférieur propre de φ .

Remarque 2.3.13. Les deux théorèmes 2.3.11 et 2.3.12 ci-dessus montrent qu'il existe toujours des ordres précisés propres pour toute fonction φ d'ordre fini. On peut même choisir le type de l'ordre précisé en question puisque si le type de φ relativement à l'ordre précisé propre ψ est σ alors le type de φ relativement à l'ordre précisé $\tilde{\psi}$ défini par $\tilde{\psi}(r) = \psi(r) + \frac{\log c}{\log r}$ est $\frac{\sigma}{c}$.

Croissance et coefficients de Taylor

La donnée d'une fonction holomorphe dans le disque unité \mathbb{D} ou le plan \mathbb{C} est équivalente à la donnée d'une série de Taylor en l'origine dont le rayon de convergence est respectivement 1 ou l'infini. Autrement dit, toutes les propriétés d'une telle fonction sont déterminées par ses coefficients de Taylor en l'origine. Il est donc possible en théorie de déterminer l'ordre inférieur et supérieur de la série en fonction de ses coefficients de Taylor. De tels résultats sont bien connus dans le cas des fonctions entières d'ordre fini¹².

Théorème 2.3.14 ([13, p. 9]). Soit $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$. La fonction g est d'ordre fini ρ si et seulement si

$$\rho := \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log n}{-\log |a_n|} < \infty,$$

où (a_n) est la suite des coefficients de Taylor de g en l'origine.

Le théorème 2.3.15 ci-dessous ne fournit qu'une minoration de l'ordre inférieur.

Théorème 2.3.15 ([13, p. 9]). Soit $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$. L'ordre inférieur λ de la fonction g vérifie la minoration

$$\lambda \geq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log n}{-\log |a_n|} \geq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{\log \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|},$$

où (a_n) est la suite des coefficients de Taylor de g en l'origine.

Dans une série d'articles [107], [108] [47], Sons, Kapoor et Gopal ont démontré des analogues des théorèmes 2.3.14 et 2.3.15 pour des fonctions holomorphes sur le disque unité. Afin de quantifier cette croissance ils ont introduit une notion d'ordre inférieur et supérieur d'indice k qui coïncident avec celles données en 2.3.3.

Définition 2.3.16 (Ordre généralisé – [107]). Soient $j \in \mathbb{N}^*$ et $g \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$. Le j -ième ordre supérieur de g dans \mathbb{D} est défini par

$$\rho_j^{\mathbb{D}}(g) := \overline{\lim}_{r \rightarrow 1^-} \frac{\log_j \log^+ M(r, g)}{-\log(1-r)},$$

Le j -ième ordre inférieur de g dans \mathbb{D} est défini par

$$\lambda_j^{\mathbb{D}}(g) := \underline{\lim}_{r \rightarrow 1^-} \frac{\log_j \log^+ M(r, g)}{-\log(1-r)}.$$

On dit que la fonction g est d'indice j dans \mathbb{D} lorsque $0 < \rho_j^{\mathbb{D}}(g) < \infty$.

¹²Voir [13, p.9] pour les démonstrations des théorèmes 2.3.14 et 2.3.15 ci-dessous.

Dans les deux théorèmes 2.3.17 et 2.3.18 ci-dessous on considère une fonction $g \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ dont le développement de Taylor en l'origine est de la forme

$$\forall z \in \mathbb{D}, g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{\lambda_n}, \quad (2.3.3)$$

où (λ_n) est une suite strictement croissante d'entiers naturels et $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Théorème 2.3.17 ([47, Thm. 1]). *Soit $g \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ d'indice $j \in \mathbb{N}^*$ dans \mathbb{D} . Alors en reprenant les notations de 2.3.3*

$$\rho_j^{\mathbb{D}}(g) + \Lambda(j) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_j \lambda_n}{\log \lambda_n - \log^+ \log^+ |a_n|},$$

où $\Lambda(j) = 1$ si $j = 1$ et $\Lambda(j) = 0$ si $j \geq 2$.

Théorème 2.3.18 ([47, Thm. 2]). *Soit $g \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ d'indice $j \in \mathbb{N}^*$ dans \mathbb{D} . Alors en reprenant les notations de 2.3.3, pour toute suite (s_n) strictement croissante d'entiers naturels*

$$\lambda_j^{\mathbb{D}}(g) + \Lambda(j) \geq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_j \lambda_{s_n-1}}{\log \lambda_{s_n} - \log^+ \log^+ |a_{s_n}|},$$

où $\Lambda(j) = 1$ si $j = 1$ et $\Lambda(j) = 0$ si $j \geq 2$.

2.4 Indices de Bernstein

Soient $\lambda, r, \nu \in \mathbb{R}$ tels que $0 < \lambda < r < \nu$. Afin de majorer le nombre de zéros d'une fonction holomorphe g de $\mathcal{O}(\mathbb{D}_\nu)$ dans le disque \mathbb{D}_λ , il est fréquent de majorer l'indice de Bernstein¹³ $b(\lambda, r, g)$ défini par

$$b(\lambda, r, g) := \log M(r, g) - \log M(\lambda, g). \quad (2.4.1)$$

Cet indice mesure la croissance de la fonction maximum de g entre les deux disques concentriques \mathbb{D}_λ et \mathbb{D}_r . Par conséquent pour borner la borne de Bézout $Z_d(\lambda, g)$, il suffit de majorer l'indice de Bernstein $b(\lambda, r, P_g)$ lorsque P est un polynôme non nul de $\mathbb{C}_{\leq d}[z, w]$. Dans la suite de ce manuscrit nous étudions des fonctions holomorphes et méromorphes sur des domaines plus généraux que des disques. Il est donc utile d'étendre la notion d'indice de Bernstein dans ce nouveau contexte. Puisque nous souhaitons établir des lemmes des zéros, nous exigeons que nos indices de Bernstein satisfassent les deux propriétés suivantes.

- P1. une estimation de l'indice de Bernstein de P_g donne une majoration explicite du nombre de zéros de P_g dans tout compact K du domaine de définition de g en fonction du degré de P et du compact K ,
- P2. l'indice de Bernstein doit être invariant lorsque l'on multiplie la fonction g par un scalaire non nul. Cette exigence est naturelle dans la mesure où l'indice de Bernstein doit majorer le cardinal maximal d'un diviseur de la forme $P_g = 0$ lorsque P parcourt $\mathbb{C}_{\leq d}[z, w]$. Or ce cardinal maximal est invariante lorsque l'on multiplie le polynôme P par un scalaire non nul. Cette propriété sera notamment utilisée au chapitre 3.

Définition 2.4.1 (Indices de Bernstein). Soient $\Omega \subset \mathbb{C}$ un domaine greenien, $g \in \mathcal{M}(\Omega, z_0)$ et λ, r tels que $0 < \lambda < r < 1$. L'indice de Bernstein holomorphe de g dans la couronne $\mathbb{A}_\Omega(\lambda, r)$ est défini par

$$\forall a \in \hat{\mathbb{C}}, b_\Omega(\lambda, r, a, g) := \max_{z \in \partial\Omega_r} \log |g(z), a| - \max_{z \in \partial\Omega_\lambda} \log |g(z), a|,$$

¹³Le lecteur pourra se référer à l'article [98] pour une étude approfondie de l'indice de Bernstein.

et l'indice de Bernstein méromorphe de g dans la couronne $\mathbb{A}_\Omega(\lambda, r)$ est défini par

$$\forall a \in \hat{\mathbb{C}}, \mathring{b}_\Omega(\lambda, r, a, g) := \int_{\partial\Omega_r} \log |g(\xi), a| d\varpi_{\Omega_r}(z_0, \xi) - \int_{\partial\Omega_\lambda} \log |g(\xi), a| d\varpi_{\Omega_\lambda}(z_0, \xi).$$

Lorsque a vaut ∞ , les deux indices de Bernstein sont notés respectivement $b_\Omega(\lambda, r, g)$ et $\mathring{b}_\Omega(\lambda, r, g)$.

Remarque 2.4.2. Les deux indices définis ci-dessus vérifient la propriété P2. La propriété P1 est démontrée pour chacun d'entre eux dans la section 2.5¹⁴.

Notation 2.4.3. Lorsque Ω est \mathbb{D}_R , $a = \infty$ et $z_0 = 0$, les deux indices de Bernstein sont notés $b(\lambda, r, g)$ et $\mathring{b}(\lambda, r, g)$. De plus les indices de Bernstein pour le disque vérifient

$$b(\lambda, r, g) = \log M(r, g) - \log M(\lambda, g) \quad \text{et} \quad \mathring{b}(\lambda, r, g) = \int_0^{2\pi} \log \left| \frac{g(re^{i\theta})}{g(\lambda e^{i\theta})} \right| \frac{d\theta}{2\pi}.$$

Dans ce cas l'indice de Bernstein holomorphe coïncide avec l'indice de Bernstein défini en 2.4.1.

2.5 Comptage des zéros

Dans cette section nous utilisons les formules de Poisson-Jensen pour relier la croissance des fonctions méromorphes au nombre de zéros qu'elles prennent dans un domaine. Plus précisément, on souhaite majorer le nombre de zéros d'une fonction méromorphe $g \in \mathcal{M}(\Omega)$ dans une strate Ω_λ par l'indice de Bernstein méromorphe¹⁵ $\mathring{b}_\Omega(\lambda, r, g)$ avec $r > \lambda$. Puisque nous comptons les zéros des fonctions avec leur multiplicité, il est pratique d'introduire maintenant la notion de diviseur.

Définition 2.5.1 (Diviseur). Soit X un ensemble. Une application $\nu : X \rightarrow \mathbb{N}$ est appelée un *diviseur* de X lorsque l'ensemble $\text{supp}(\nu) := \{w \in X : \nu(w) > 0\}$ est fini. On définit le degré de ν , noté $\deg(\nu)$, et la multiplicité de ν , notée $\text{mult}(\nu)$, par

$$\deg(\nu) := \sum_{w \in X} \nu(w) \quad \text{et} \quad \text{mult}(\nu) := \max_{w \in X} \nu(w).$$

L'ensemble des diviseurs de X est noté $\text{Div}(X)$.

Définition 2.5.2 (Diviseur des a -points). Soient $\Omega \subset \mathbb{C}$ un domaine, $g \in \mathcal{M}(\overline{\Omega})$ non constante et $a \in \hat{\mathbb{C}}$. Pour tout $w \in \Omega$, on note $\nu_a g(w)$ la multiplicité du zéro de la fonction méromorphe $g - a$ en w . La fonction $\nu_a g$ est un diviseur de Ω appelé le *diviseur des a -points* de g dans Ω .

Définition 2.5.3 (Fonction de comptage). Soient $g \in \mathcal{M}(\overline{\Omega})$ non constante et $a \in \hat{\mathbb{C}}$. La *fonction de comptage* des a -points de g dans Ω est définie par

$$n(\Omega, a, g) := \deg(\nu_a g) = \sum_{z \in \Omega} \nu_a g(z).$$

Comptage des zéros dans le disque La formule de Poisson-Jensen 2.5.4 originale découle d'une formule générale 2.5.9 valable pour les fonctions sous-harmoniques sur un domaine régulier de \mathbb{C} . Lorsque g est une fonction méromorphe sur un disque, la formule de Poisson-Jensen s'énonce ainsi.

¹⁴Voir les propositions 2.5.13 et 2.5.16 de la section 2.5.

¹⁵Voir la définition page 53.

Théorème 2.5.4 (Formule de Poisson-Jensen – [46, p. 6]). Soient $g \in \mathcal{M}(\overline{\mathbb{D}}_r)$ non constante et $r > 0$. Alors

$$\forall z \in \mathbb{D}_r, \log |g(z)| = \int_0^{2\pi} \log |g(re^{i\theta})| \operatorname{Ré} \left(\frac{re^{i\theta} + z}{re^{i\theta} - z} \right) \frac{d\theta}{2\pi} - \sum_{|a_n| < r} \log \left| \frac{r^2 - \bar{a}_n z}{r(z - a_n)} \right| \\ + \sum_{|b_n| < r} \log \left| \frac{r^2 - \bar{b}_n z}{r(z - b_n)} \right|,$$

où (a_n) est une énumération avec multiplicité des zéros de g dans \mathbb{D}_r et (b_n) est une énumération avec multiplicité des pôles de g dans \mathbb{D}_r .

Remarque 2.5.5. La formule de Poisson-Jensen 2.5.4 permet déjà de compter le nombre de zéros d'une fonction méromorphe g dans un disque \mathbb{D}_r connaissant son nombre de pôles et disposant d'une minoration de $\log |g(z)|$ pour un point z de \mathbb{D}_r . Cependant une telle minoration n'est pas aisée à obtenir lorsque la fonction considérée est de la forme P_g avec P un polynôme. L'intérêt des indices de Bernstein est de remplacer dans ce problème la minoration de $\log |P_g(z)|$ par la minoration de $\log M(t, P_g)$ lorsque g est holomorphe ou $\hat{m}(t, P_g)$ lorsque g est une fonction méromorphe.

La proposition 2.5.6 suivante est souvent utilisée pour majorer le nombre de zéros d'une fonction holomorphe dans un disque. Elle peut être démontrée à l'aide de la formule de Poisson-Jensen 2.5.4 et d'une majoration du noyau de Poisson du disque \mathbb{D}_r mais nous en donnons une démonstration plus élémentaire n'utilisant que le principe du maximum pour les fonctions holomorphes.

Proposition 2.5.6. Soient $g \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ non constante et $t, r \in \mathbb{R}$ tels que $0 < t < r < 1$. Alors

$$n(t, g) \leq \frac{b(t, r, g)}{\log \left(\frac{r^2 + t^2}{2rt} \right)}.$$

Démonstration. On considère le produit de Blaschke B de \mathbb{D}_r de degré d dont les zéros a_1, \dots, a_d forment une énumération avec multiplicité des zéros de la fonction g dans le disque ouvert \mathbb{D}_t . Donc

$$\forall z \in \mathbb{D}_r, B(z) := \prod_{j=1}^d \frac{r(z - a_j)}{r^2 - \bar{a}_j z}.$$

Or pour tout $z \in \partial\mathbb{D}_r$, $|B(z)|$ vaut 1. Donc

$$\log M(t, \frac{g}{B}) \leq \log M(r, \frac{g}{B}) \leq \log M(r, g) \quad \text{et} \quad \log M(t, g) \leq \log M(t, B) + \log M(t, \frac{g}{B}).$$

D'où $\log M(t, g) \leq \log M(t, B) + \log M(r, g)$. Or $\forall z \in \partial\mathbb{D}_t$, $\left| \frac{z - a_j}{r^2 - \bar{a}_j z} \right| \leq \frac{2t}{r^2 + t^2}$. D'où

$$d \log \left(\frac{r^2 + t^2}{2rt} \right) \leq -\log M(t, B) \leq \log M(r, g) - \log M(t, g) = b(t, r, g).$$

Ce qui donne l'inégalité souhaitée puisque d vaut $n(t, g)$. ■

La proposition 2.5.6 précédente peut être étendue au fonction méromorphe sur le disque unité à condition de remplacer l'indice de Bernstein holomorphe par son analogue méromorphe défini dans la section précédente. Commençons par démontrer le corollaire ci-dessous qui regroupe des cas particuliers de la formule de Poisson-Jensen.

Corollaire 2.5.7. Soient $r > 0$, $z \in \mathbb{D}_r$ et $w \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}_r$. Alors

$$\int_0^{2\pi} \frac{r^2 - |z|^2}{|re^{i\theta} - z|^2} \frac{d\theta}{2\pi} = 1 \quad \text{et} \quad \int_0^{2\pi} \frac{|w|^2 - r^2}{|w - re^{i\theta}|^2} \frac{d\theta}{2\pi} = 1,$$

et pour tout $t \in]0, r[$ et $a \in \mathbb{D}_r$

$$\int_0^{2\pi} \log \left| \frac{r^2 - \bar{a}te^{i\theta}}{r(te^{i\theta} - a)} \right| \frac{d\theta}{2\pi} = \log \left(\frac{r}{t} \right) - \log^+ \frac{|a|}{t}.$$

Démonstration. La première égalité est obtenue en appliquant la formule de Poisson-Jensen 2.5.4 à la fonction $g(z) = z$. La deuxième égalité se déduit de la première via le principe de subordination 2.1.25 appliquée à la fonction $h(z) = \frac{1}{z}$. En effet h est méromorphe de \mathbb{D} dans $\hat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ et un homéomorphisme de $\overline{\mathbb{D}}$ dans $\hat{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D}$. La dernière égalité est obtenue en intégrant le long du cercle $\partial\mathbb{D}_t$ la formule de Poisson-Jensen appliquée à $g(z) = z - a$ puis en utilisant la seconde formule du corollaire que nous démontrons. Plus précisément

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \log |te^{i\theta} - a| \frac{d\theta}{2\pi} &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |re^{i\theta} - a| \frac{r^2 - t^2}{|re^{i\theta} - te^{i\tau}|^2} \frac{d\tau}{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \\ &\quad - \int_0^{2\pi} \log \left| \frac{r^2 - \bar{a}te^{i\theta}}{r(te^{i\theta} - a)} \right| \frac{d\theta}{2\pi} \\ &= \int_0^{2\pi} \log |re^{i\theta} - a| \frac{d\theta}{2\pi} - \int_0^{2\pi} \log \left| \frac{r^2 - \bar{a}te^{i\theta}}{r(te^{i\theta} - a)} \right| \frac{d\theta}{2\pi}. \end{aligned}$$

D'après la formule [46, p. 21], $\int_0^{2\pi} \log |w - e^{i\theta}| \frac{d\theta}{2\pi} = \log^+ |w|$. Donc

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \log \left| \frac{r^2 - \bar{a}te^{i\theta}}{r(te^{i\theta} - a)} \right| \frac{d\theta}{2\pi} &= \int_0^{2\pi} \log \left| \frac{re^{i\theta} - a}{te^{i\theta} - a} \right| \frac{d\theta}{2\pi} = \log r + \log^+ \frac{|a|}{r} - \log t - \log^+ \frac{|a|}{t} \\ &= \log \left(\frac{r}{t} \right) - \log^+ \frac{|a|}{t}. \end{aligned}$$

Ce qui termine la démonstration. ■

On obtient ainsi la majoration 2.5.8 de la fonction de comptage des zéros d'une fonction méromorphe à l'aide de l'indice de Bernstein méromorphe de celle-ci.

Proposition 2.5.8. Soient $g \in \mathcal{M}(\mathbb{D})$ non constante et $t, r \in \mathbb{R}$ tels que $0 < t < r < 1$. Alors

$$n(t, g) \leq \frac{\hat{b}(t, r, g) + N(r, \infty, g)}{\log \left(\frac{r}{t} \right)}.$$

Démonstration. On intègre le long du cercle $\partial\mathbb{D}_t$ la formule de Poisson-Jensen 2.5.4 appliquée à la fonction $\log |g|$. Dans la suite on note (a_n) , respectivement (b_n) , une énumération avec multiplicité des zéros de g dans \mathbb{D}_r , respectivement des pôles de g dans ce même do-

maine. D'où la majoration

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \log |g(te^{i\theta})| \frac{d\theta}{2\pi} &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |g(re^{i\theta})| \operatorname{Re} \left(\frac{re^{i\theta} + te^{i\varphi}}{re^{i\theta} - te^{i\varphi}} \right) \frac{d\varphi}{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \\
&\quad - \sum_{|a_n| < r} \int_0^{2\pi} \log \left| \frac{r^2 - \bar{a}_n te^{i\theta}}{r(te^{i\theta} - a_n)} \right| \frac{d\theta}{2\pi} \\
&\quad + \sum_{|b_n| < r} \int_0^{2\pi} \log \left| \frac{r^2 - \bar{b}_n te^{i\theta}}{r(te^{i\theta} - b_n)} \right| \frac{d\theta}{2\pi} \\
&= \int_0^{2\pi} \log |g(re^{i\theta})| \frac{d\theta}{2\pi} - \sum_{|a_n| < r} \left\{ \log \left(\frac{r}{t} \right) - \log^+ \frac{|a_n|}{t} \right\} \\
&\quad + \sum_{|b_n| < r} \left\{ \log \left(\frac{r}{t} \right) - \log^+ \frac{|b_n|}{t} \right\} \\
&\leq \int_0^{2\pi} \log |g(re^{i\theta})| \frac{d\theta}{2\pi} - n(t, g) \log \left(\frac{r}{t} \right) + N(r, \infty, g).
\end{aligned}$$

On obtient l'inégalité souhaitée en divisant par $\log(\frac{r}{t})$. ■

Comptage des zéros dans un domaine régulier La formule de Poisson-Jensen 2.5.4 du paragraphe précédent s'étend à toutes les fonctions sous-harmoniques sur un domaine régulier au sens de la définition 2.2.1.

Théorème 2.5.9 (Formule de Poisson-Jensen – [93, Th. 4.5.1], [100, Chap. II Th. 4.10]). Soient $\Omega \subset \mathbb{C}$ un domaine régulier et borné et $u \in \mathcal{SH}(\bar{\Omega})$ telle que $u \not\equiv -\infty$ sur Ω . Alors

$$\forall z \in \Omega, \quad u(z) = \mathbf{P}_\Omega u(z) - U_\Omega^\mu(z) = \int_{\partial\Omega} u(\xi) d\varpi_\Omega(z, \xi) - \frac{1}{2\pi} \int_\Omega g_\Omega(z, w) \Delta u(w) dw,$$

où g_Ω est la fonction de Green du domaine Ω et $\mu = \frac{1}{2\pi} \Delta u(w) dw$ avec Δu le laplacien généralisé de u au sens des distributions¹⁶.

Lorsque la fonction sous-harmonique u est de la forme $\log |g|$ avec g une fonction méromorphe sur Ω , le laplacien généralisé Δu s'exprime comme une somme de distributions de Dirac indexée par les zéros et les pôles de g dans Ω et pondérée par leur multiplicités respectives.

Théorème 2.5.10 ([93, Th. 3.7.8]). Soit $g \in \mathcal{M}(\bar{\Omega})$ telle que $g \not\equiv 0$. Alors on a l'identité au sens des distributions

$$\frac{1}{2\pi} \Delta \log |g| = \sum_{w \in \Omega} \nu_0 g(w) \delta_w - \sum_{w \in \Omega} \nu_\infty g(w) \delta_w,$$

où δ_w est la distribution de Dirac en w .

Lorsque le domaine Ω a un bord suffisamment régulier, la mesure harmonique $d\varpi_\Omega(z, \xi)$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue le long de $\partial\Omega$.

Proposition 2.5.11 ([100, Chap. II Th. 4.11]). Soit Ω un domaine de \mathbb{C} dont le bord est de classe \mathcal{C}^2 . Alors

$$d\varpi_\Omega(z, \xi) = - \frac{\partial g_\Omega(z, \xi)}{\partial n} d\sigma(\xi) = P_\Omega(z, \xi) d\sigma(\xi),$$

où $\frac{\partial}{\partial n}$ est la dérivée normale sortante de Ω et P_Ω le noyau de Poisson¹⁷ de Ω .

¹⁶Voir la définition du laplacien généralisé dans [93, p. 79].

¹⁷Voir la définition 2.1.22.

En combinant la formule de Poisson-Jensen 2.5.9 et le théorème 2.5.10, on obtient le corollaire 2.5.12 suivant.

Corollaire 2.5.12. *Soit $g \in \mathcal{M}(\bar{\Omega})$ telle que $g \neq 0$. Alors*

$$\forall z \in \Omega, \log |g(z)| = \int_{\partial\Omega} \log |g(\xi)| d\varpi_{\Omega}(z, \xi) - \sum_{w \in \Omega} \nu_0 g(w) g_{\Omega}(z, w) + \sum_{w \in \Omega} \nu_{\infty} g(w) g_{\Omega}(z, w).$$

Grâce aux théorèmes 2.5.9 et 2.5.10, on peut majorer le nombre de zéros d'une fonction holomorphe dans la strate Ω_t par l'indice de Bernstein holomorphe $b_{\Omega}(t, r, g)$.

Proposition 2.5.13. *Soit $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ telle que $g \neq 0$. Alors pour tout $t, r \in \mathbb{R}$ tels que $0 < t < r < 1$*

$$n_{\Omega}(t, g) \leq \frac{\tau_{\Omega}(t, r)}{\log(\frac{r}{t})} b_{\Omega}(t, r, g),$$

où $\tau_{\Omega}(t, r) = \sup\{\tau_{\Omega_r}(z, z_0) \mid z \in \partial\Omega_t\}$.

Démonstration. On applique la formule de Poisson-Jensen 2.5.12 à la fonction $\log |g|$ qui est sous-harmonique sur Ω_r . Donc

$$\forall z \in \Omega_r, \log |g(z)| = \int_{\partial\Omega_r} \log |g(\xi)| d\varpi_{\Omega_r}(\xi, z_0) - \sum_{w \in \Omega_r} \nu_0 g(w) g_{\Omega_r}(z, w).$$

Soit $z \in \partial\Omega_t$ tel que $|g(z)| = M_{\Omega}(t, g)$. Donc

$$\begin{aligned} \log M_{\Omega}(t, g) &= \int_{\partial\Omega_r} \log |g(\xi)| d\varpi_{\Omega_r}(\xi, z_0) - \sum_{w \in \Omega_r} \nu_0 g(w) g_{\Omega_r}(z, w) \\ &\leq \log M_{\Omega}(r, g) - \sum_{w \in \Omega_t} \nu_0 g(w) g_{\Omega_r}(z, w). \end{aligned}$$

Or la fonction $w \mapsto g_{\Omega_r}(z, w)$ est harmonique sur Ω_t et positive d'après le théorème 2.1.6. Donc d'après l'inégalité de Harnack 2.1.27

$$\sum_{w \in \Omega_t} \nu_0 g(w) g_{\Omega_r}(z, w) \geq g_{\Omega_r}(z, z_0) \sum_{w \in \Omega_t} \nu_0 g(w) \tau_{\Omega_r}(w, z_0)^{-1} \geq \frac{\log(\frac{r}{t}) n_{\Omega}(t, g)}{\tau_{\Omega}(t, r)}.$$

Ce qui termine la démonstration. ■

Corollaire 2.5.14. *Soient $\Upsilon, \Omega \subset \mathbb{C}$ deux domaines réguliers tels que $\Upsilon \Subset \Omega$. Alors*

$$\forall w \in \Omega, \forall z \in \Upsilon, \int_{\partial\Upsilon} g_{\Omega}(\xi, w) d\varpi_{\Upsilon}(z, \xi) = g_{\Omega}(w, z) - g_{\Upsilon}^+(w, z), \quad (2.5.1)$$

où g_{Υ}^+ désigne le prolongement de g_{Υ} par zéro en dehors de Υ . On suppose de plus que le bord de Ω est de classe \mathcal{C}^2 . Alors

$$\forall w \in \partial\Omega, \forall z \in \Upsilon, \int_{\partial\Upsilon} P_{\Omega}(\xi, w) d\varpi_{\Upsilon}(z, \xi) = P_{\Omega}(z, w).$$

Démonstration. La première égalité découle du fait que le noyau de Poisson $\xi \mapsto P_{\Omega}(z, \xi)$ est harmonique sur le domaine Υ car $\Upsilon \Subset \Omega$. Afin de démontrer la seconde égalité, on applique la formule de Poisson-Jensen 2.5.9 à la fonction sous-harmonique $u(z) = -g_{\Omega}(z, w)$ sur Υ . Alors

$$u(z_0) = -g_{\Omega}(z_0, w) = \mathbf{P}_{\Upsilon} u(z_0) - \frac{1}{2\pi} \int_{\Upsilon} g_{\Upsilon}(z_0, s) \Delta u(s) ds. \quad (2.5.2)$$

Or Δu est égal au sens des distributions à $2\pi\delta_w$. Deux cas se présentent. Lorsque w appartient à Υ , l'égalité 2.5.2 devient

$$-g_\Omega(z_0, w) = - \int_{\partial\Upsilon} g_\Omega(\xi, w) d\varpi_\Upsilon(z_0, \xi) - g_\Upsilon(z_0, w).$$

Tandis que pour $w \in \Omega \setminus \Upsilon$, l'égalité 2.5.2 donne

$$-g_\Omega(z_0, w) = - \int_{\partial\Upsilon} g_\Omega(\xi, w) d\varpi_\Upsilon(z_0, \xi).$$

Ce qui termine la démonstration puisque g_Ω est symétrique d'après le le théorème 2.1.6. \blacksquare

Corollaire 2.5.15. *Soient (Ω, z_0) un domaine régulier. Alors pour tout $r, t \in \mathbb{R}$ tels que $0 < t \leq r \leq 1$*

$$\forall z \in \Omega_t, \quad g_{\Omega_r}(z, z_0) = g_{\Omega_t}(z, z_0) + \log\left(\frac{r}{t}\right).$$

Démonstration. D'après la proposition 2.2.5, les strates Ω_t et Ω_r sont des domaines réguliers de \mathbb{C} . Donc en appliquant l'égalité 2.5.2 du corollaire 2.5.14, on obtient d'une part

$$\begin{aligned} \forall z \in \Omega_r, \quad \log\left(\frac{1}{r}\right) &= \int_{\partial\Omega_r} g_\Omega(\xi, z_0) d\varpi_{\Omega_r}(z, \xi) = g_\Omega(z, z_0) - g_{\Omega_r}^+(z, z_0) \\ &= g_\Omega(z, z_0) - g_{\Omega_r}(z, z_0). \end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} \forall z \in \Omega_t, \quad \log\left(\frac{1}{t}\right) &= \int_{\partial\Omega_t} g_\Omega(\xi, z_0) d\varpi_{\Omega_t}(z, \xi) = g_\Omega(z, z_0) - g_{\Omega_t}^+(z, z_0) \\ &= g_\Omega(z, z_0) - g_{\Omega_t}(z, z_0). \end{aligned}$$

Il suffit de soustraire les deux égalités précédentes pour conclure. \blacksquare

On peut maintenant démontrer l'analogie de la proposition 2.5.8 du paragraphe précédent pour tout domaine régulier.

Proposition 2.5.16. *Soit $g \in \mathcal{M}(\Omega)$ telle que $g \not\equiv 0$. Alors pour tout $t, r \in \mathbb{R}$ tels que $0 < t < r < 1$*

$$n_\Omega(t, g) \leq \frac{\mathring{b}(t, r, g) + N_\Omega(r, \infty, g)}{\log\left(\frac{r}{t}\right)}.$$

Démonstration. On applique la formule de Poisson-Jensen 2.5.12 à la fonction $\log|g|$ sous-harmonique sur Ω_r . Donc

$$\forall z \in \Omega_r, \quad \log|g(z)| = \int_{\partial\Omega_r} \log|g(\xi)| d\varpi_{\Omega_r}(z, \xi) - \sum_{w \in \Omega_r} \nu(w) g_{\Omega_r}(z, w),$$

où $\nu = \nu_0 g - \nu_\infty g$. On suppose dans un premier temps que le bord de Ω_r est de classe \mathcal{C}^2 . Donc en intégrant l'égalité 2.5 le long de $\partial\Omega_t$ puis en appliquant la proposition 2.5.11, on

obtient

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega_t} \log |g(z)| d\varpi_{\Omega_t}(z_0, z) &= \int_{\partial\Omega_t} \left(\int_{\partial\Omega_r} \log |g(\xi)| d\varpi_{\Omega_r}(z, \xi) \right) d\varpi_{\Omega_t}(z_0, z) \\ &\quad - \sum_{w \in \Omega_r} \nu(w) \int_{\partial\Omega_t} g_{\Omega_r}(z, w) d\varpi_{\Omega_t}(z_0, z) \\ &= \int_{\partial\Omega_r} \log |g(\xi)| \left(\int_{\partial\Omega_t} P_{\Omega_r}(z, \xi) d\varpi_{\Omega_t}(z_0, z) \right) d\sigma(\xi) \\ &\quad - \sum_{w \in \Omega_r} \nu(w) \int_{\partial\Omega_t} g_{\Omega_r}(z, w) d\varpi_{\Omega_t}(z_0, z). \end{aligned}$$

Donc en appliquant le corollaire 2.5.14, on obtient d'une part

$$\int_{\partial\Omega_t} P_{\Omega_r}(z, \xi) d\varpi_{\Omega_t}(z_0, z) = P_{\Omega_r}(z_0, \xi),$$

et d'autre part

$$\int_{\partial\Omega_t} g_{\Omega_r}(z, w) d\varpi_{\Omega_t}(z_0, z) = g_{\Omega_r}(w, z_0) - g_{\Omega_t}^+(w, z_0).$$

D'où l'égalité

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega_t} \log |g(z)| d\varpi_{\Omega_t}(z_0, z) &= \int_{\partial\Omega_r} \log |g(\xi)| P_{\Omega_r}(z_0, \xi) d\sigma(\xi) \\ &\quad - \sum_{w \in \Omega_r} \nu(w) \int_{\partial\Omega_t} g_{\Omega_r}(z, w) d\varpi_{\Omega_t}(z_0, z) \\ &= \int_{\partial\Omega_r} \log |g(\xi)| d\varpi_{\Omega_r}(z_0, z) \\ &\quad - \sum_{w \in \Omega_r} \nu(w) (g_{\Omega_r}(w, z_0) - g_{\Omega_t}^+(w, z_0)), \end{aligned}$$

Or d'après le corollaire 2.5.15

$$\begin{aligned} \sum_{w \in \Omega_r} \nu_0(w) (g_{\Omega_r}(w, z_0) - g_{\Omega_t}^+(w, z_0)) &\geq \sum_{w \in \Omega_t} \nu_0(w) (g_{\Omega_r}(w, z_0) - g_{\Omega_t}(w, z_0)) \\ &\geq \log\left(\frac{r}{t}\right) n_{\Omega}(t, g), \end{aligned}$$

et

$$\sum_{w \in \Omega_t} \nu_{\infty}(w) (g_{\Omega_r}(w, z_0) - g_{\Omega_t}^+(w, z_0)) \leq \sum_{w \in \Omega_r} \nu_{\infty}(w) g_{\Omega_r}(w, z_0) \leq N_{\Omega}(r, \infty, g).$$

Ce qui termine la démonstration lorsque $\partial\Omega_r$ est de classe \mathcal{C}^2 . Le cas général s'en déduit puisque les applications $r \mapsto \hat{b}(t, r, g)$ et $r \mapsto N_{\Omega}(r, \infty, g)$ sont continues en r et l'ensemble des rayons $r \in [0, 1]$ pour lesquels $\partial\Omega_r$ est de classe \mathcal{C}^2 est dense dans $[0, 1]$. ■

Bornes de Bézout Nous montrons dans ce paragraphe que la majoration des indices de Bernstein holomorphes ou méromorphes des fonctions P_g conduisent à une majoration de la borne de Bézout¹⁸ $\mathcal{Z}_d(r, g)$. Nous avons défini dans l'introduction de ce manuscrit la borne de Bézout $\mathcal{Z}_d(r, g)$ pour des fonctions méromorphes g sur un disque de rayon $R > r$. La définition 2.5.17 ci-dessous étend cette définition à tous les domaines greeniens Ω de \mathbb{C} .

¹⁸Voir la définition 1.3.1.

Définition 2.5.17 (Borne de Bézout généralisée). Soient (Ω, z_0) un domaine greenien, $g \in \mathcal{M}(\Omega)$ et $d \in \mathbb{N}$. La d -ième borne de Bézout de g dans le domaine Ω est définie par

$$\forall r \in [0, 1[, \mathcal{Z}_d^\Omega(r, g) := \sup \{n_\Omega(r, P_g) \mid P \in \mathbb{C}_{\leq d}[z, w], P_g \neq 0\}.$$

Lemme 2.5.18. Soient $g \in \mathcal{M}(\Omega)$ et $\phi \in \text{Mob}(\hat{\mathbb{C}})$. Alors

$$\forall r \in [0, 1[, \forall d \in \mathbb{N}, \mathcal{Z}_d^\Omega(r, \phi \circ g) \leq \mathcal{Z}_{2d}^\Omega(r, g).$$

De même pour $g \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$, on a $\mathcal{Z}_d(r, \phi \circ g) \leq \mathcal{Z}_{2d}(r, g)$.

Démonstration. La fonction ϕ s'écrit sous la forme

$$\forall z \in \hat{\mathbb{C}}, \phi(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \text{ avec } \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0.$$

On fixe $r \in [0, 1[$. On considère $P \in \mathbb{C}_{\leq d}[z, w]$ et $Q \in \mathbb{C}_{\leq 2d}[z, w]$ tels que

$$\mathcal{Z}_d^\Omega(r, \phi \circ g) = n(r, P \circ (\phi \circ g)) \text{ et } \forall z, w \in \mathbb{C}, Q(z, w) = (\gamma w + \delta)^d P(z, \phi(w)).$$

Donc

$$\mathcal{Z}_d^\Omega(r, \phi \circ g) \leq n(r, P \circ (\phi \circ g)) \leq n(r, Q \circ g) \leq \mathcal{Z}_{2d}(r, g).$$

L'inégalité pour les fonctions méromorphes sur \mathbb{C} se démontre de la même manière. ■

Proposition 2.5.19. Soient $g \in \mathcal{M}(\Omega)$ une fonction transcendante et $t, r \in \mathbb{R}$ tels que $0 < t < r < 1$. Alors

$$\forall d \in \mathbb{N}, \log\left(\frac{r}{t}\right) \mathcal{Z}_d^\Omega(r, g) \leq \sup \{b_\Omega^\circ(t, r, P_g) \mid P \in \mathbb{C}_{\leq d}[z, w], P \neq 0\} + dN_\Omega(r, \infty, g).$$

Lorsque de plus $g \in \mathcal{O}(\Omega)$

$$\forall d \in \mathbb{N}, \log\left(\frac{r}{t}\right) \mathcal{Z}_d^\Omega(r, g) \leq \tau_\Omega(t, r) \sup \{b_\Omega(t, r, P_g) \mid P \in \mathbb{C}_{\leq d}[z, w], P \neq 0\},$$

où $\tau_\Omega(t, r) = \sup \{\tau_{\Omega_r}(z, z_0) \mid z \in \partial\Omega_t\}$.

Démonstration. La première majoration est obtenue en appliquant la proposition 2.5.16 et puisque que $N_\Omega(r, \infty, P_g) \leq dN_\Omega(r, \infty, g)$. La seconde majoration découle de la proposition 2.5.13. ■

Lorsque g est holomorphe sur un domaine simplement connexe, on peut améliorer l'inégalité de la proposition 2.5.19 grâce à la proposition 2.5.6.

Proposition 2.5.20. Soient (Ω, z_0) un domaine régulier et simplement connexe, $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ une fonction transcendante et $t, r \in \mathbb{R}$ tels que $0 < t < r < 1$. Alors

$$\forall d \in \mathbb{N}, \log\left(\frac{r^2 + t^2}{2rt}\right) \mathcal{Z}_d^\Omega(r, g) \leq \sup \{b_\Omega(t, r, P_g) \mid P \in \mathbb{C}_{\leq d}[z, w], P \neq 0\}.$$

Démonstration. On remplace la proposition 2.5.13 par la proposition 2.5.6. ■

2.6 Théorie de Nevanlinna

La théorie que nous présentons dans cette section fut exposée pour la première fois par R. Nevanlinna [81] en 1925 mais se base sur la théorie géométrique des fonctions développées à la fin du XIX siècle. En effet la théorie de Nevanlinna permet d'étendre aux fonctions méromorphes sur \mathbb{D} ou sur \mathbb{C} des résultats connus pour les fractions rationnelles et les fonctions entières. Par exemple, on sait bien que la fibre générique d'un polynôme univarié a pour cardinal le degré du polynôme. Que peut-on dire de la fibre générique d'une fonction méromorphe ? Un des tous premiers résultats dans ce sens est le *petit théorème de Picard* démontré par ce dernier en 1879.

Théorème 2.6.1 (Petit théorème de Picard – [83, 95]). *Toute fonction entière dont l'image ne contient pas deux valeurs est constante.*

Autrement dit au plus une fibre d'une fonction entière non constante est vide. De plus, il existe des fonctions entières non constantes dont l'une des fibres est vide comme la fonction exponentielle e^z qui ne s'annule jamais. Notons que le théorème 2.6.1 permet de discriminer les fonctions algébriques parmi les fonctions entières. La même année Picard démontre une version plus forte de l'énoncé précédent connu sous le nom de *grand théorème de Picard*.

Théorème 2.6.2 (Grand théorème de Picard – [83, 95]). *Une fonction holomorphe sur un voisinage d'une singularité essentielle isolée atteint toutes les valeurs de \mathbb{C} une infinité de fois sauf éventuellement une valeur qu'elle n'atteint qu'un nombre fini de fois.*

Nous exposons maintenant la théorie de Nevanlinna dans le plan \mathbb{C} , le disque unité \mathbb{D} , un secteur angulaire et un domaine greenien de \mathbb{C} .

Fonctions méromorphes sur \mathbb{C} ou \mathbb{D} La théorie de Nevanlinna classique comporte deux théorèmes fondamentaux. Le premier théorème fondamental de Nevanlinna 2.6.5 stipule que plus une fonction méromorphe non constante sur \mathbb{C} reste proche en moyenne d'une valeur de $\hat{\mathbb{C}}$ sur le cercle $\partial\mathbb{D}_r$ moins elle prend cette même valeur dans le disque \mathbb{D}_r et inversement. Le second théorème fondamental de Nevanlinna 2.6.8 affirme quant à lui qu'une fonction méromorphe non constante sur le plan doit prendre presque toutes les valeurs une infinité de fois dans les mêmes proportions. Le lecteur intéressé par les démonstrations des théorèmes 2.6.5 et 2.6.8 pourra se référer au premier et au troisième chapitre de [46]. Avant de pouvoir formuler les deux théorèmes fondamentaux de Nevanlinna, on doit introduire des fonctions de comptage plus régulières que celles données à la définition 2.5.3.

Définition 2.6.3 (Moyenne de Jensen – [46, p. 13]). Soient $g \in \mathcal{M}(\mathbb{D}_R)$, $r \in [0, R[$ et $a \in \hat{\mathbb{C}}$. La *moyenne de Jensen* des a -points de g dans le disque \mathbb{D}_r est définie par

$$N(r, a, g) := \int_0^r \left\{ n(t, a) - n(0, a) \right\} \frac{dt}{t} + n(0, a) \log r,$$

où $n(r, a)$ est le nombre de solutions avec multiplicité des a -points de g dans le disque \mathbb{D}_r . La *moyenne de Jensen sans multiplicité* des a -points de g dans le disque \mathbb{D}_r est définie par

$$\bar{N}(r, a, g) := \int_0^r \left\{ \bar{n}(t, a) - \bar{n}(0, a) \right\} \frac{dt}{t} + \bar{n}(0, a) \log r,$$

où $\bar{n}(r, a)$ est le nombre de solutions sans multiplicité des a -points de g dans le disque \mathbb{D}_r .

Contrairement à la fonction de comptage $n(r, a, g)$, la moyenne de Jensen $N(r, a, g)$ est une fonction continue. De plus elle est croissante et convexe en $\log r$.

Définition 2.6.4 (Caractéristique de Nevanlinna – [46, p. 16]). Soit $g \in \mathcal{M}(\mathbb{D}_R)$ non constante. La *caractéristique de Nevanlinna* de g est définie par

$$\forall r \in [0, R[, \quad T(r, g) := \hat{m}(r, \infty, g) + N(r, \infty, g).$$

De plus on note $T(r, a, g) := T(r, \frac{1}{g-a})$.

Le terme $\hat{m}(r, a, g)$ mesure la tendance de la fonction g à rester proche de la valeur a sur le cercle $\partial\mathbb{D}_r$ tandis que $N(r, a, g)$ quantifie le nombre moyen de a -points de g dans ce même disque. Grâce à la caractéristique de Nevanlinna, il est maintenant possible d'énoncer le premier théorème fondamental sous une forme très condensée.

Théorème 2.6.5 (Premier théorème fondamental – [46, Th. 4.1]). Soit $g \in \mathcal{M}(\mathbb{D}_R)$ non constante. Alors

$$\forall a \in \mathbb{C}, \quad \forall r \in [0, R[, \quad T(r, a, g) = T(r, g) + \epsilon(r, a),$$

avec $|\epsilon(r, a)| \leq \log^+ |a| + \log 2 + |\log |c(a)||$ où $c(a)$ est le premier coefficient non nul du développement en série de Laurent de la fonction $z \mapsto g(z) - a$ en l'origine.

Remarque 2.6.6. Le premier théorème de Nevanlinna 2.6.5 est en fait une reformulation de la formule de Poisson-Jensen 2.5.4 à l'aide de la caractéristique de Nevanlinna $T(r, g)$.

Remarque 2.6.7. En particulier lorsque la fonction g est méromorphe sur le plan tout entier, l'asymptotique de $T(r, a, g)$ lorsque r tend vers l'infini est indépendante de la valeur a choisie. Autrement dit plus la fonction g reste proche d'une valeur a sur le cercle $\partial\mathbb{D}_r$ ¹⁹ moins g prend la valeur a dans le disque \mathbb{D}_r ²⁰ et inversement. Cet énoncé est particulièrement intéressant lorsque la fonction g est holomorphe puisque dans ce cas la quantité $T(r, g)$ est égale à $\hat{m}(r, g)$ et est comparable à la fonction maximum $M(r, g)$ d'après l'inégalité de Harnack 2.6.10 et donc la croissance de la caractéristique $T(r, g)$ est directement reliée à celle des coefficients de Taylor de g en l'origine²¹.

On peut maintenant énoncer le second théorème fondamental de Nevanlinna. Il s'agit d'une amélioration du grand théorème de Picard²² Ce théorème affirme qu'une fonction méromorphe sur \mathbb{C} ne peut pas rester proches sur $\partial\mathbb{D}_r$ de $q > 2$ valeurs distincts de $\hat{\mathbb{C}}$ comparativement à la caractéristique de Nevanlinna $T(r, g)$ lorsque r tend vers l'infini. Contrairement au premier théorème de Nevanlinna, le second théorème nécessite que la fonction soit méromorphe sur \mathbb{C} .

Théorème 2.6.8 (Second théorème fondamental – [46]). Soient $g \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ non constante et $a_1, \dots, a_q \in \hat{\mathbb{C}}$ distincts. Alors

$$\forall r > 0, \quad \sum_{i=1}^q \hat{m}(r, a_i, g) \leq 2T(r, g) - \bar{N}(r, g) + Q(r, g),$$

où Q est une fonction telle que

- lorsque g est d'ordre fini, $Q(r, g) = O(\log r)$,
- lorsque g est d'ordre infini, $Q(r, g) = O(\log T(r, g) + \log r)$ en dehors d'un ensemble de mesure logarithmique finie.

¹⁹Autrement dit $\hat{m}(r, \infty, g)$ est grand.

²⁰Autrement dit $N(r, a, g)$ est petit.

²¹Voir la sous-section 2.3.

²²Voir la remarque 2.6.9.

Remarque 2.6.9. Soit $g \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ une fonction transcendante qui n'atteint pas trois valeurs distinctes a, b et c de $\hat{\mathbb{C}}$. Puisque g est transcendante, sa caractéristique de Nevanlinna $T(r, g)$ est non bornée. D'après le premier théorème fondamental 2.6.5, les fonctions de proximité $\hat{m}(r, a, g)$, $\hat{m}(r, b, g)$ et $\hat{m}(r, c, g)$ sont comparables à $T(r, g)$. Cela est contradictoire avec l'inégalité du second théorème fondamental 2.6.8 appliqué avec les points a, b, c .

L'inégalité de Harnack 2.1.30 permet de comparer la croissance de la caractéristique de Nevanlinna $T(r, g)$ à la croissance de la fonction maximum $M(r, g)$.

Proposition 2.6.10 ([53, Th. 1.6]). Soient $g \in \mathcal{O}(\mathbb{D}_R)$ et $t, r \in \mathbb{R}$ tels que $0 < t < r < R$. Alors

$$T(t, g) \leq \log^+ M(t, g) \leq \left(\frac{r+t}{r-t} \right) T(r, g).$$

Théorème 2.6.11 (Cartan – [46, Th. 4.3]). Soit $g \in \mathcal{M}(\mathbb{D}_R)$ non constante telle que $g(0) \neq \infty$. Alors

$$\forall r \in [0, R[, \quad T(r, g) = \int_0^{2\pi} N(r, e^{i\theta}, g) \frac{d\theta}{2\pi} + \log^+ |g(0)|$$

De plus la fonction $r \mapsto T(r, g)$ est croissante et convexe en $\log r$.

Fonctions méromorphes sur un domaine régulier Il est possible d'étendre le premier théorème de Nevanlinna aux fonctions méromorphes sur n'importe quel domaine régulier de \mathbb{C} grâce à la théorie des fonctions de Green de la sous-section 2.1. Contrairement au cas du disque, il n'y a pas de centre privilégié dans un tel domaine. Par conséquent la caractéristique de Nevanlinna dépend a priori du choix d'un tel centre. Dans ce paragraphe nous démontrons que la caractéristique de Nevanlinna $T_\Omega(r, g)$ et la moyenne de Jensen $N_\Omega(r, g)$ définies ci-dessous sont des fonctions croissantes et convexe en $\log r$.

Définition 2.6.12 (Moyenne de Jensen – [125]). Soient (Ω, z_0) un domaine régulier, $g \in \mathcal{M}(\Omega)$ et $a \in \hat{\mathbb{C}}$. On définit la *moyenne de Jensen* des a -points de g dans Ω avec et sans multiplicité par

$$N_\Omega(a, g) = \sum_{w \in \Omega} \nu_a g(w) g_\Omega(w, z_0) \quad \text{et} \quad \bar{N}_\Omega(a, g) := \sum_{g(w)=a} g_\Omega(w, z_0).$$

De plus pour tout $r \in [0, 1[$, on note $N_\Omega(r, a, g)$ au lieu de $N_{\Omega_r}(a, g)$ et $\bar{N}_\Omega(r, a, g)$ au lieu de $\bar{N}_{\Omega_r}(a, g)$.

Définition 2.6.13 (Caractéristique de Nevanlinna – [125]). Soient (Ω, z_0) un domaine régulier et $g \in \mathcal{M}(\Omega)$. La *caractéristique de Nevanlinna* de g dans Ω est définie par

$$\forall r \in [0, 1[, \quad T_\Omega(r, g) := \hat{m}_\Omega(r, \infty, g) + N_\Omega(r, \infty, g).$$

De plus on note $T_\Omega(r, a, g) := T_\Omega(r, \frac{1}{g-a})$.

Théorème 2.6.14 (Premier théorème fondamental – [125, Th. 2.1.2]). Soient (Ω, z_0) un domaine greenien et $g \in \mathcal{M}(\Omega)$ non constante. Alors

$$\forall a \in \mathbb{C}, \quad \forall r \in [0, 1[, \quad T_\Omega(r, a, g) = T_\Omega(r, g) + \epsilon(\Omega, a),$$

avec $|\epsilon(\Omega, a)| \leq \log^+ |a| + \log 2 + |\log |c(a)||$ où $c(a)$ est le premier coefficient non nul du développement en série de Laurent de la fonction $z \mapsto g(z) - a$ en z_0 .

Proposition 2.6.15. Soient $\Omega \subset \mathbb{C}$ un domaine régulier et $g \in \mathcal{M}(\Omega, z_0)$. Pour tout $a \in \hat{\mathbb{C}}$, la fonction $r \mapsto N_\Omega(r, a, g)$ est croissante et convexe en $\log r$.

Démonstration. On peut supposer que a est nul puisque le cas général s'en déduit en considérant la fonction méromorphe $z \mapsto g(z) - a$. La croissance de la fonction $N_\Omega(r, a, g)$ découle du principe de subordination pour les fonctions de Green²³. Afin de démontrer la convexité en $\log r$ de cette même fonction, il suffit de montrer que pour tout $\lambda, r, \nu \in \mathbb{R}$ tels que $0 < \lambda \leq r \leq \nu < 1$

$$\forall z \in \Omega, \log \left(\frac{\nu}{\lambda} \right) g_{\Omega_r}^+(z, z_0) \leq \log \left(\frac{r}{\lambda} \right) g_{\Omega_\nu}^+(z, z_0) + \log \left(\frac{\nu}{r} \right) g_{\Omega_\lambda}^+(z, z_0). \quad (2.6.1)$$

L'inégalité 2.6.1 est immédiate lorsque $z \notin \Omega_r$ puisque les fonctions $g_{\Omega_\nu}^+$ et $g_{\Omega_\lambda}^+$ sont positives sur le domaine Ω et $g_{\Omega_r}^+$ est nulle en dehors de Ω_r . On suppose désormais que $z \in \Omega_r$. D'après le corollaire 2.5.14

$$\forall t \in [0, 1], \forall z \in \Omega_t, g_\Omega(z, z_0) = g_{\Omega_t}(z, z_0) + \log \left(\frac{1}{t} \right).$$

Donc pour $z \in \mathbb{A}_\Omega(\lambda, r)$, l'inégalité 2.6.1 devient

$$\log \left(\frac{\nu}{\lambda} \right) \log r \leq \log \left(\frac{r}{\lambda} \right) \log \nu. \quad (2.6.2)$$

Tandis que pour $z \in \Omega_\lambda$, l'inégalité 2.6.1 devient

$$\log \left(\frac{\nu}{\lambda} \right) \log r \leq \log \left(\frac{r}{\lambda} \right) \log \nu + \log \left(\frac{\nu}{r} \right) \log \lambda. \quad (2.6.3)$$

Les deux inégalités 2.6.2 et 2.6.3 sont vraies puisque $0 < \lambda \leq r \leq \nu < 1$ et la fonction $t \mapsto \log t$ est convexe en $\log r$. La proposition est démontrée. ■

La théorème de Cartan 2.6.11 pour les fonctions méromorphes sur un disque s'étend aux fonctions méromorphes sur un domaine régulier de \mathbb{C} .

Proposition 2.6.16. *Soient $\Omega \subset \mathbb{C}$ un domaine régulier et $g \in \mathcal{M}(\Omega, z_0)$ non constante telle que $g(0) \neq \infty$. Alors*

$$\forall r \in [0, 1[, T_\Omega(r, g) = \int_0^{2\pi} N_\Omega(r, e^{i\theta}, g) \frac{d\theta}{2\pi} + \log^+ |g(z_0)|. \quad (2.6.4)$$

De plus la fonction $r \mapsto T_\Omega(r, g)$ est croissante et convexe en $\log r$.

Démonstration. La démonstration est similaire à celle du théorème de Cartan figurant dans [46]. L'inégalité 2.6.4 implique que $T_\Omega(r, g)$ est croissante et convexe en $\log r$ puisque $N_\Omega(r, g)$ est croissante et convexe en $\log r$ d'après la proposition 2.6.15. Afin de démontrer l'égalité 2.6.4, il suffit de remplacer la formule de Poisson-Jensen 2.5.4 par sa généralisation sur les domaines réguliers 2.5.9. On obtient ainsi l'égalité

$$\forall \theta \in [0, 2\pi[, N_\Omega(r, e^{i\theta}, g) - N_\Omega(r, \infty, g) = \int_{\partial\Omega_r} \log |g(\xi) - e^{i\theta}| d\varpi_{\Omega_r}(\xi, z_0) - \log |g(z_0) - e^{i\theta}|.$$

Cette égalité implique que la fonction $\theta \rightarrow N_\Omega(r, e^{i\theta}, g)$ est une fonction mesurable. En intégrant celle-ci le long du cercle unité, on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} N_\Omega(r, e^{i\theta}, g) \frac{d\theta}{2\pi} - N_\Omega(r, \infty, g) &= \int_0^{2\pi} \int_{\partial\Omega_r} \log |g(\xi) - e^{i\theta}| d\varpi_{\Omega_r}(\xi, z_0) \frac{d\theta}{2\pi} \\ &\quad - \int_0^{2\pi} \log |g(z_0) - e^{i\theta}| \frac{d\theta}{2\pi}. \end{aligned}$$

²³Voir le théorème 2.1.5.

Puis en appliquant le théorème de Fubini, on montre que les intégrales de l'intégrale double ci-dessus commutent. Donc d'une part d'après la formule [46, p. 21]

$$\int_0^{2\pi} \int_{\partial\Omega_r} \log |g(\xi) - e^{i\theta}| d\varpi_{\Omega_r}(\xi, z_0) \frac{d\theta}{2\pi} = \int_{\partial\Omega_r} \log^+ |g(\xi)| d\varpi_{\Omega_r}(\xi, z_0),$$

et d'autre part d'après la formule [46, p. 21]

$$\int_0^{2\pi} \log |g(z_0) - e^{i\theta}| \frac{d\theta}{2\pi} = \log^+ |g(z_0)|.$$

Ce qui achève la démonstration. ■

Le plus souvent on souhaite majorer le nombre de a -points de g dans une strate Ω_r et non la moyenne de Jensen des a -points dans Ω_r . La proposition 2.6.17 suivante permet de comparer ces deux quantités.

Proposition 2.6.17. *Soit $g \in \mathcal{M}(\Omega)$. Alors pour tout $\lambda, r, \nu \in \mathbb{R}$ tels que $0 < \lambda < r < \nu < 1$*

$$\forall a \in \hat{\mathbb{C}}, \log \left(\frac{\nu}{r} \right) n_{\Omega}(r, a, g) \leq N_{\Omega}(\nu, a, g) \leq \log \left(\frac{\nu}{\lambda} \right) n_{\Omega}(\nu, a, g) + N_{\Omega}(\lambda, a, g).$$

Démonstration. On suppose sans perte de généralité que a est nul puisque le cas général s'en déduit en considérant la fonction méromorphe $z \mapsto g(z) - a$. Démontrons la première inégalité de l'encadrement. On sait d'après le corollaire 2.5.15

$$\forall z \in \Omega_r, g_{\Omega_r}(z, z_0) = g_{\Omega_r}(z, z_0) + \log \left(\frac{\nu}{r} \right) \geq \log \left(\frac{\nu}{r} \right).$$

D'où

$$\begin{aligned} N_{\Omega}(\nu, g) &= \sum_{z \in \Omega_{\nu}} \nu_0 g(z) g_{\Omega_{\nu}}(z, z_0) \geq \sum_{z \in \Omega_r} \nu_0 g(z) \left(g_{\Omega_r}(z, z_0) + \log \left(\frac{\nu}{r} \right) \right) \\ &\geq \log \left(\frac{\nu}{r} \right) n_{\Omega}(r, g). \end{aligned}$$

Afin de démontrer la seconde inégalité, on remarque que

$$\forall z \in \mathbb{A}_{\Omega}(\lambda, \nu), g_{\Omega_{\nu}}(z, z_0) \leq \log \left(\frac{\nu}{\lambda} \right) \quad \text{et} \quad \forall z \in \Omega_{\lambda}, g_{\Omega_{\nu}}(z, z_0) = g_{\Omega_{\lambda}}(z, z_0) + \log \left(\frac{\nu}{\lambda} \right).$$

Donc

$$\begin{aligned} N_{\Omega}(\nu, g) &= \sum_{z \in \Omega_{\nu}} \nu_0 g(z) g_{\Omega_{\nu}}(z, z_0) \leq \sum_{z \in \mathbb{A}_{\Omega}(\lambda, \nu)} \nu_0 g(z) g_{\Omega_{\nu}}(z, z_0) + \sum_{z \in \Omega_{\lambda}} \nu_0 g(z) g_{\Omega_{\nu}}(z, z_0) \\ &\leq \sum_{z \in \mathbb{A}_{\Omega}(\lambda, \nu)} \nu_0 g(z) \log \left(\frac{\nu}{\lambda} \right) + \sum_{z \in \Omega_{\lambda}} \nu_0 g(z) \left(g_{\Omega_{\lambda}}(z, z_0) + \log \left(\frac{\nu}{\lambda} \right) \right) \\ &\leq \log \left(\frac{\nu}{\lambda} \right) n_{\Omega}(\nu, g) + N_{\Omega}(\lambda, g). \end{aligned}$$

Ce qui termine la démonstration de la seconde inégalité. ■

2.7 Mesures des lemniscates

Notation 2.7.1. Soit (X, d) un espace métrique et $a \in X$. On note

$$\forall r > 0, \mathbb{D}_X(a, r) = \{z \in X \mid d(a, z) < r\} \quad \text{et} \quad \bar{\mathbb{D}}_X(a, r) = \{z \in X \mid d(a, z) \leq r\}.$$

Dans les chapitres 3, 4 et 5 nous avons besoin de majorer dans certains espaces métriques (X, d) la taille du lieu de l'ensemble des points $z \in X$ qui restent proche d'une famille fixée de points de X . Les points de ces ensembles étant munis d'une multiplicité, on utilise la notion de diviseur définie dans le paragraphe précédent²⁴. On souhaite estimer la taille des ensembles des lemniscates²⁵ de la forme suivante.

Définition 2.7.2 (Ensemble de lemniscates). Soient (X, d) un espace métrique, $\nu : X \rightarrow \mathbb{N}$ un diviseur de X et $\epsilon : X \rightarrow \mathbb{R}_+$. L'ensemble des lemniscates associé à ν et ϵ est défini par

$$E(\nu, \epsilon) := \left\{ z \in X \mid \prod_{w \in X} d(z, w)^{\nu(w)} \leq \prod_{w \in X} \epsilon(w)^{\nu(w)} \right\}.$$

Afin de mesurer la taille des ensembles des lemniscates, nous utilisons les notions de n -ième diamètre et de mesure de Hausdorff dans un espace métrique (X, d) .

Définition 2.7.3 (n -ième diamètre et mesure de Hausdorff). Soient (X, d) un espace métrique, $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha > 0$ et $E \subset X$ un ensemble. On définit le n -ième diamètre α -dimensionnel de E dans X par

$$\text{diam}_n^\alpha(E, X) := \inf \left\{ \sum_{j=1}^n r_j^\alpha \mid E \subset \bigcup_{j=1}^n \mathbb{D}_X(a_j, r_j) \right\},$$

Lorsque α est égal à 1, on note $\text{diam}_n^\alpha(E, X)$ par $\text{diam}_n(E, X)$. On définit également la mesure de Hausdorff α -dimensionnelle de E dans X par

$$H^\alpha(E, X) := \inf \left\{ \sum_{j=1}^\infty r_j^\alpha \mid E \subset \bigcup_{j=1}^\infty \mathbb{D}_X(a_j, r_j) \right\}.$$

Le n -ième diamètre de E dans X mesure la difficulté à recouvrir l'ensemble E par seulement n disques de l'espace métrique X . La proposition 2.7.4 suivante regroupe des propriétés élémentaires du n -ième diamètre et de la mesure de Hausdorff dans un espace métrique.

Proposition 2.7.4. Soient (X, d) un espace métrique, $\alpha > 0$ et E, F deux sous-ensembles de X tels que $E \subset F$. Alors

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\text{diam}_n^\alpha(E, X) \leq \text{diam}_n^\alpha(F, X)$,
- pour tout $n, m \in \mathbb{N}$ tels $n \leq m$, $\text{diam}_n^\alpha(E, X) \geq \text{diam}_m^\alpha(E, X)$. De plus

$$H^\alpha(E, X) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \text{diam}_n^\alpha(E, X) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}_n^\alpha(E, X),$$

- on suppose que la métrique d est bornée par un. Alors pour tout $\alpha, \beta > 0$ tels que $\alpha < \beta$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \text{diam}_n^\beta(E, X) \leq \text{diam}_n^\alpha(E, X) \leq n^{\frac{\beta-\alpha}{\beta}} (\text{diam}_n^\beta(E, X))^{\frac{\alpha}{\beta}},$$

- pour tout $n \geq \#E$, la quantité $\text{diam}_n^\alpha(E, X)$ est nulle.
- On suppose que E contient au moins $n + 1$ points. Alors

$$\text{diam}_n^\alpha(E, X) \geq \frac{1}{2^\alpha} \min \{ d(z, w)^\alpha \mid z, w \in E, z \neq w \}.$$

²⁴Voir la définition 2.5.1.

²⁵Ce nom vient du fait que la lemniscate de Bernoulli est de cette forme.

Démonstration. Les deux premières propriétés sont immédiates. La troisième propriété se déduit du fait que d'une part que la fonction $\alpha \mapsto r^\alpha$ est décroissante sur $]0, \infty[$ lorsque $r \in [0, 1]$ et d'autre part d'après l'inégalité de Hölder

$$\forall r_1, \dots, r_n \in [0, 1], \sum_{j=1}^n r_j^\alpha \leq \left(\sum_{j=1}^n r_j^\beta \right)^{\frac{\alpha}{\beta}} \left(\sum_{j=1}^n 1 \right)^{\frac{\beta-\alpha}{\beta}} \leq n^{\frac{\beta-\alpha}{\beta}} \left(\sum_{j=1}^n r_j^\beta \right)^{\frac{\alpha}{\beta}}.$$

On conclut en appliquant la borne inférieure sur l'inégalité ci-dessus. Démontrons la quatrième propriété. Lorsque E est un ensemble fini de cardinal au plus n dans l'espace métrique (X, d) alors le nombre $\text{diam}_n(E, X)$ est nul puisque nous pouvons recouvrir l'ensemble E en plaçant sur chaque point $z \in E$ un disque de centre z et de rayon arbitrairement petit. La dernière propriété découle du fait que lorsque E contient au moins $n + 1$, il faut qu'au moins un disque $\mathbb{D}_X(a, r)$ d'un recouvrement par n disques de E contienne deux points z et w de E . Donc par l'inégalité triangulaire

$$d(z, w) \leq d(z, a) + d(w, a) \leq 2r.$$

D'où la minoration de r et *a fortiori* du n -ième diamètre α -dimensionnel de E . ■

Exemple 2.7.5. Les ensembles suivants seront toujours munis des métriques que nous décrivons à présent.

- $X = \mathbb{C}$ et d est la métrique euclidienne. On note alors simplement $\text{diam}_n(E)$ au lieu de $\text{diam}_n(E, \mathbb{C})$. Il s'agit de la notion de n -ième diamètre utilisée notamment par Coman et Poletsky dans [25–27] et Jones et Boxall dans [18]. Ce d -ième diamètre est parfois qualifié d'*euclidien* afin de ne pas le confondre avec les autres,
- $X = \mathbb{D}$ et d est la métrique pseudo-hyperbolique. Dans ce cas $\text{diam}_n(E, \mathbb{D})$ est appelé le n -ième diamètre pseudo-hyperbolique de E dans \mathbb{D} . Voir le paragraphe suivant sur les lemniscates pseudo-hyperboliques pour plus de détails,
- tout domaine $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ simplement connexe peut être muni d'une métrique en uniformisant ce dernier sur le disque unité \mathbb{D} via une application de Riemann $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ puis en tirant en arrière la distance pseudo-hyperbolique de \mathbb{D} via φ . La nouvelle métrique ainsi obtenue est appelée métrique pseudo-hyperbolique de Ω et ne dépend pas du choix de l'application de Riemann utilisée pour la construire. Cette fois encore $\text{diam}_n(E, \Omega)$ est appelé le n -ième diamètre pseudo-hyperbolique de E dans Ω ,
- $X = \hat{\mathbb{C}}$ et d est la métrique sphérique²⁶.

Lemme 2.7.6. Soient $(X, d_X), (Y, d_Y)$ deux espaces métriques, $E \subset X$ et $T : X \rightarrow Y$ une fonction telle que

$$\forall z, w \in X, d_Y(T(z), T(w)) \leq C d_X(z, w)^\beta \text{ avec } C > 0 \text{ et } \beta > 0.$$

Alors pour tout $\alpha > 0$ et $n \in \mathbb{N}$

$$\text{diam}_n^\alpha(T(E), Y) \leq C^\alpha \text{diam}_n^{\alpha\beta}(E, X) \text{ et } H^\alpha(T(E), Y) \leq C^\alpha H^{\alpha\beta}(T(E), X). \quad (2.7.1)$$

Démonstration. La seconde inégalité de 2.7.1 est obtenue à partir de la première en faisant tendre d vers l'infini d'abord dans le membre de gauche puis dans le membre de droite. Démontrons la première inégalité de 2.7.1. Supposons que l'ensemble E soit recouvert par la famille de disques $\mathbb{D}_X(a_1, r_1), \dots, \mathbb{D}_X(a_n, r_n)$. Alors l'image de $\mathbb{D}_X(a_j, r_j)$ par l'application T est contenue dans le disque $\mathbb{D}_Y(T(a_j), s_j)$ avec $s_j = C r_j^\beta$ puisque par hypothèse sur l'application T

$$d_Y(T(z), T(a_j)) \leq C d_X(z, a_j)^\beta \leq C r_j^\beta.$$

²⁶Voir la définition p.3.

Donc l'ensemble $T(E)$ est contenu dans une famille de n disques de Y dont les rayons valent respectivement $Cr_1^\beta, \dots, Cr_n^\beta$. On en déduit la première inégalité de 2.7.1. ■

Estimation de type Boutroux-Cartan Nous souhaitons majorer le n -ième diamètre de l'ensemble des lemniscates $E(\nu, \epsilon)$ d'un espace métrique (X, d) et cela indépendamment de la distribution des points w dans X appartenant au support de ν . Lorsque X est un espace métrique, une telle majoration a été démontrée par Lubinsky dans [72].

Lemme 2.7.7 (Lubinsky – [71, 72]). *Soient (X, d) un espace métrique, $a_1, \dots, a_n \in X$ et $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n \in \mathbb{R}$ tels que $0 < \epsilon_1 < \dots < \epsilon_n$. Alors il existe un entier $k \leq n$, des entiers $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ et des disques fermés D_1, \dots, D_k de X tels que*

- la somme des λ_j vaut n ,
- le rayon du disque D_j est $2\epsilon_{\lambda_j}$,
- pour tout $z \in X \setminus \bigcup_{j=1}^k D_j$

$$\prod_{j=1}^n d(z, a_j) > \prod_{j=1}^n \epsilon_j.$$

Corollaire 2.7.8. *Soient (X, d) un espace métrique et $\nu : X \rightarrow \mathbb{N}$ un diviseur de X . Alors pour tout $\epsilon > 0$ l'ensemble des lemniscates $E(\nu, \epsilon)$ est de $|\nu|$ -ième diamètre α -dimensionnel dans X au plus $\epsilon(2\epsilon)^\alpha$.*

Démonstration. Dans [72], Lubinsky démontre seulement le cas $\alpha = 1$. Nous adaptons sa démonstration pour tout $\alpha > 0$. Posons $n := \deg(\nu)$ et considérons la suite de rayons $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ définie par

$$\epsilon_j = \frac{\epsilon j^{\frac{1}{\alpha}}}{(n!)^{\frac{1}{n\alpha}}}.$$

Par construction le produit des ϵ_j est égal à ϵ^n . Donc l'ensemble des lemniscates $E(\nu, \epsilon)$ coïncide avec l'ensemble des $z \in X$ tels que $\prod_{j=1}^n d(z, a_j) \leq \prod_{j=1}^n \epsilon_j$. En appliquant le lemme 2.7.7, nous obtenons k disques de X de rayons respectivement $2\epsilon_{\lambda_1}, \dots, 2\epsilon_{\lambda_k}$ avec $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = n$ et tels que ces disques recouvrent $E(\nu, \epsilon)$. Or

$$\sum_{j=1}^k (2\epsilon_{\lambda_j})^\alpha = (2\epsilon)^\alpha \sum_{j=1}^k \left(\frac{\lambda_j^{\frac{1}{\alpha}}}{(n!)^{\frac{1}{n\alpha}}} \right)^\alpha \leq (2\epsilon)^\alpha \sum_{j=1}^n \frac{\epsilon_j}{n} \leq \epsilon(2\epsilon)^\alpha.$$

L'avant dernière inégalité est obtenue en remarquant que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n! \geq \left(\frac{n}{e}\right)^n$. ■

Nous négligeons parfois les multiplicités du diviseur ν lorsque nous majorons la taille des lemniscates associées à ce dernier. Nous aurons alors recours au corollaire 2.7.9 ci-dessous.

Corollaire 2.7.9. *Soient (X, d) un espace métrique tel que d soit bornée par 1 et $\nu : X \rightarrow \mathbb{N}$ un diviseur de X . On pose $n = \deg(\nu)$, $\mu = \max\{\nu, 1\}$ et $m = \text{mult}(\nu)$. Alors l'ensemble de lemniscates $E(\mu, \epsilon)$ est de $|\nu|$ -ième diamètre dans X au plus $2e\delta\epsilon^m$ et l'ensemble de lemniscates $E(\nu, \epsilon)$ est de $|\mu|$ -ième diamètre dans X au plus $2e\delta\epsilon$.*

Démonstration. La distance d étant par hypothèse bornée par 1, nous avons les inclusions suivantes

$$\begin{aligned} E(\mu, \epsilon) &= \left\{ z \in X \mid \prod_{w \in X} d(z, w)^{\mu(w)} \leq \epsilon^{|\mu|} \right\} = \left\{ z \in X \mid \prod_{w \in X} d(z, w)^{m\mu(w)} \leq \epsilon^{m|\mu|} \right\} \\ &\subset \left\{ z \in X \mid \prod_{w \in X} d(z, w)^{\nu(w)} \leq \epsilon^{m|\mu|} \right\} \subset E(\nu, \epsilon^{\frac{m|\mu|}{|\nu|}}) \subset E(\nu, \epsilon^m). \end{aligned}$$

Donc d'après le corollaire 2.7.8 l'ensemble $E(\mu, \epsilon)$ est de n -ième diamètre dans X au plus $2e\delta\epsilon^m$. De même nous avons les inclusions suivantes

$$\begin{aligned} E(\nu, \epsilon) &= \left\{ z \in X \mid \prod_{w \in X} d(z, w)^{\nu(w)} \leq \epsilon^n \right\} \subset \left\{ z \in X \mid \prod_{w \in X} d(z, w)^{m\mu(w)} \leq \epsilon^n \right\} \\ &\subset E(\mu, \epsilon^{\frac{n}{m}}) \subset E(\mu, \epsilon). \end{aligned}$$

Donc d'après le corollaire 2.7.8, l'ensemble $E(\nu, \epsilon)$ est de n -ième diamètre dans X au plus $2e\delta\epsilon$. ■

Lemniscates polynomiales On cherche à mesurer aussi précisément que possible le lieu où un polynôme univarié P est petit. Pour se faire on introduit pour tout polynôme P univarié de degré au plus $d \in \mathbb{N}^*$. La *lemniscate polynomiale de P absolue* est l'ensemble suivant

$$E(P, \epsilon) := \{z \in \mathbb{C} : |P(z)| \leq \epsilon^d\},$$

tandis que la *lemniscate polynomiale de P relativement au compact $K \subset \mathbb{C}$* est l'ensemble

$$E(P, K, \epsilon) := \{z \in K : |P(z)| \leq \|P\|_K \epsilon^d\}.$$

En supposant que le polynôme P est unitaire, Boutroux et Cartan ont démontré le résultat suivant.

Lemme 2.7.10 (Boutroux-Cartan – [23, 92]). *Soit $P \in \mathbb{C}[z]$ un polynôme unitaire de degré d . Alors*

$$\forall \epsilon > 0, \text{diam}_d(E(P, \epsilon)) \leq 2e\epsilon.$$

Pour une démonstration détaillée du lemme 2.7.10 le lecteur pourra regarder le chapitre 12 de [92] ou la thèse de H. Cartan [23]. Bien entendu le lemme de Boutroux-Cartan est un cas particulier du lemme de Lubinsky 2.7.7 pour $X = \mathbb{C}$ et d la métrique euclidienne. En effet $|P(z)|$ n'est autre que le produit $\prod_{j=1}^d |z - a_j|$ où (a_j) est une énumération avec multiplicité des zéros de P .

Remarque 2.7.11. Une propriété remarquable du lemme de Boutroux-Cartan est l'absence du degré dans la majoration du d -ième diamètre. En revanche nous ne savons pas si la constante $2e$ est optimale. Dans [51], Hayman conjecture que la constante optimale doit être 2. Plus de détails sur ces questions figurent dans les notes à la fin du chapitre 12 de [92].

Remarque 2.7.12. Il faut exiger que le polynôme P soit unitaire afin que l'énoncé 2.7.10 soit vérifié. En effet le polynôme $P(z) = az^d$ ($a \neq 0$) vérifie que

$$\text{diam}_d(E(P, \epsilon)) = \epsilon|a|^{-1/d}.$$

Donc pour un coefficient dominant a suffisamment petit, le polynôme P ne satisfait pas la conclusion du lemme 2.7.10.

Lemniscates pseudo-hyperboliques Lorsque l'on étudie la distribution des valeurs d'une fonction méromorphe définie sur le disque unité \mathbb{D} , il est plus naturel d'utiliser la distance pseudo-hyperbolique ou la distance hyperbolique sur \mathbb{D} que la distance euclidienne. Ajoutons que dans ce cadre les produits de Blaschke finis jouent le rôle des polynômes des paragraphes précédents. Pour plus détails sur l'analogie entre les polynômes et les produits de Blaschke finis, le lecteur pourra se référer au chapitre *Polynomials Versus Finite Blaschke Products* de [76].

Définition 2.7.13 (Produit de Blaschke – [12] ou [95, p. 100]). Un *produit de Blaschke fini* de \mathbb{D}_r est une fonction holomorphe sur \mathbb{D}_r de la forme

$$B(z) := e^{i\theta} \prod_{j=1}^d \frac{r(z - w_j)}{r^2 - z\bar{w}_j} \quad \text{avec } \theta \in \mathbb{R},$$

où w_1, \dots, w_d appartiennent au disque \mathbb{D}_r . De plus l'entier d est appelé le degré du produit de Blaschke B .

Dans l'article [80], Milloux démontre l'analogue du lemme de Boutroux-Cartan 2.7.10 pour les produits de Blaschke finis.

Lemme 2.7.14 (Milloux – [80]). *Soit B un produit de Blaschke fini de \mathbb{D} de degré d . Alors pour tout $\epsilon > 0$, l'ensemble*

$$E(B, \epsilon) := \{z \in \mathbb{D} : |B(z)| < \epsilon^d\},$$

est de d -ième diamètre pseudo-hyperbolique dans \mathbb{D} au plus 2ϵ .

L'argument géométrique employé par Milloux pour démontrer le lemme 2.7.14 est essentiellement le même que celui utilisé par Cartan pour démontrer le lemme de Boutroux-Cartan 2.7.10. Le lemme de Milloux se déduit de celui de Lubinsky en prenant $X = \mathbb{D}$ et d la distance pseudo-hyperbolique.

Lemme 2.7.15. *Soient $E \subset \mathbb{D}$ et $\alpha \in]0, 1]$. On suppose que $H^\alpha(E, \mathbb{D}) \leq \epsilon$. Soient $t, r \in \mathbb{R}$ tels que*

$$0 < t < r < 1 \quad \text{et} \quad \frac{r-t}{1-rt} > \epsilon.$$

Alors il existe $s \in [t, r]$ tel que le cercle $\partial\mathbb{D}_s$ ne rencontre pas l'ensemble E .

Démonstration. On considère la fonction $T : (\mathbb{D}, p) \mapsto ([0, 1], d)$ définie par $T(z) = |z|$ et $d(x, y) := \frac{x-y}{1-xy}$. Or

$$\forall z, w \in \mathbb{D}, \quad \left| \frac{|z| - |w|}{1 - |z||\bar{w}|} \right| \leq \left| \frac{z - w}{1 - z\bar{w}} \right|.$$

Donc la fonction T vérifie les hypothèses du lemme 2.7.6. D'où

$$H^\alpha(T(E), [0, 1]) \leq H^\alpha(E, \mathbb{D}) \leq \epsilon.$$

Or puisque $\alpha \in]0, 1]$

$$H^\alpha([t, r], [0, 1]) \geq H^1([t, r], [0, 1]) \geq \frac{r-t}{1-rt}.$$

Donc l'intervalle $[t, r]$ ne peut pas être contenu dans $T(E)$. ■

Remarque 2.7.16. Dans [80], Milloux démontre que pour tout ensemble $E \subset \mathbb{D}$ tel que $H^1(E, \mathbb{D}) \leq \epsilon$ et pour tout $t, r \in \mathbb{R}$ tels que

$$0 < t < r < 1 \quad \text{et} \quad \frac{r-t}{1-rt} \geq \frac{2\epsilon}{1+\epsilon^2}.$$

Il existe $s \in [t, r]$ tel que le cercle $\partial\mathbb{D}_s$ ne rencontre pas l'ensemble E . Ce résultat est moins fin que le lemme 2.7.15 ci-dessus pour $\alpha = 1$ puisque l'on peut toujours supposer que ϵ appartient à l'intervalle $[0, 1]$ et que $r - t \leq 1 - rt$.

Comparaison des d -ième diamètres euclidiens et pseudo-hyperboliques Il est parfois plus simple de minorer ou de majorer le d -ième diamètre euclidien d'un ensemble $E \subset \mathbb{D}_R$ que son d -ième diamètre pseudo-hyperbolique de \mathbb{D}_R . Il est bien connu que les cercles généralisés²⁷ de \mathbb{C} sont préservés par les transformations de Möbius de la sphère de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$. Le lemme 2.7.17 ci-dessous donne le centre et le rayon euclidien d'un disque pseudo-hyperbolique.

Lemme 2.7.17 ([34, p. 64]). *Soit $D \subset \mathbb{D}_R$ un disque de centre c et de rayon r pour la métrique pseudo-hyperbolique de \mathbb{D}_R . Alors D est un disque euclidien de centre c' et de rayon r' avec*

$$c' = \frac{(R^2 - r^2)c}{R^2 - r^2|c|^2} \quad \text{et} \quad r' = \frac{r(R^2 - |c|^2)}{R^2 - r^2|c|^2}.$$

Grâce au lemme 2.7.17, on compare dans la proposition 2.7.18 ci-dessous le d -ième diamètre euclidien et pseudo-hyperbolique dans \mathbb{D}_R à condition que E soit contenu dans un compact de \mathbb{D}_R .

Proposition 2.7.18. *Soient $r, R \in \mathbb{R}$ tels que $0 < r < R$ et $E \subset \mathbb{D}_r$. Alors*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \alpha > 0, \text{diam}_n^\alpha(E) \leq \text{diam}_n^\alpha(E, \mathbb{D}_R) \leq \left(\frac{R}{R-r} \right)^\alpha \text{diam}_n^\alpha(E).$$

Démonstration. Démontrons la première inégalité. On suppose que E est recouvert par D_1, \dots, D_n disques pseudo-hyperboliques de \mathbb{D}_R de centre respectivement c_1, \dots, c_n et de rayon respectivement r_1, \dots, r_n . On peut supposer sans perte de généralité que les centres c_i appartiennent à \mathbb{D}_r . D'après le lemme 2.7.17 les disques D_1, \dots, D_n sont des disques euclidiens de centre c'_1, \dots, c'_n et de rayon r'_1, \dots, r'_n avec

$$\forall j \in \{1, \dots, n\}, c'_j = \frac{(R^2 - r_j^2)c_j}{R^2 - r_j^2|c_j|^2} \quad \text{et} \quad r'_j = \frac{r_j(R^2 - |c_j|^2)}{R^2 - r_j^2|c_j|^2}.$$

Or pour tout $r \in [0, R[$, la fonction

$$x \mapsto \frac{r(R^2 - x^2)}{R^2 - r^2x^2},$$

est décroissante sur $[0, R]$. Donc

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n (r'_j)^\alpha &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{r_j(R^2 - |c_j|^2)}{R^2 - r_j^2|c_j|^2} \right)^\alpha \leq \sum_{j=1}^n r_j^\alpha \leq \sum_{j=1}^n \left(\frac{R^2 - r_j^2|c_j|^2}{R^2 - |c_j|^2} r'_j \right)^\alpha \\ &\leq \left(\frac{R}{R-r} \right)^\alpha \sum_{j=1}^n (r'_j)^\alpha. \end{aligned}$$

D'où l'encadrement souhaité. ■

Lemniscates greeniennes Dans le paragraphe précédent nous avons associé à chaque domaine simplement connexe de \mathbb{C} une métrique pseudo-hyperbolique. Nous généralisons cette construction à n'importe quel domaine greenien (Ω, z_0) grâce aux fonctions de Green. Cependant nous n'obtenons pas une métrique sur le domaine Ω .

Notation 2.7.19. Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un domaine greenien. On définit les fonctions $p_\Omega : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ et $d_\Omega : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\forall z \in \Omega, \forall w \in \Omega, p_\Omega(z, w) := \exp \{ -g_\Omega(z, w) \} \quad \text{et} \quad d_\Omega(z, w) = \log \left(\frac{1 + p_\Omega(z, w)}{1 - p_\Omega(z, w)} \right),$$

²⁷Un cercle généralisé de \mathbb{C} est un cercle ou une droite du plan.

où g_Ω désigne la fonction de Green de Ω .

En général p_Ω et d_Ω ne sont pas des métriques sur Ω . Cependant lorsque Ω est simplement connexe alors ces deux fonctions sont des métriques. Néanmoins on définit la notion de n -ième diamètre greenien dans Ω en faisant comme si p_Ω était une métrique.

Définition 2.7.20 (n -ième diamètre greenien). Soient $\Omega \subset \mathbb{C}$ un domaine greenien, $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha > 0$ et $E \subset X$ un ensemble. On définit le n -ième diamètre greenien α -dimensionnel de E dans Ω par

$$\text{diam}_n^\alpha(E, \Omega) := \inf \left\{ \sum_{j=1}^n r_j^\alpha \mid E \subset \bigcup_{j=1}^n \mathbb{D}_\Omega(a_j, r_j) \right\},$$

On définit également la *mesure de Hausdorff greenienne* α -dimensionnelle de E dans Ω par

$$H^\alpha(E, \Omega) := \inf \left\{ \sum_{j=1}^\infty r_j^\alpha \mid E \subset \bigcup_{j=1}^\infty \mathbb{D}_\Omega(a_j, r_j) \right\},$$

où $\mathbb{D}_\Omega(a, r) = \{z \in \Omega \mid p_\Omega(a, z) < r\}$.

Lemme 2.7.21. Soit (Ω, z_0) un domaine régulier. Alors

$$\forall r \in [0, 1], \forall z, w \in \Omega_r, p_\Omega(z, w) = r p_{\Omega_r}(z, w).$$

Démonstration. En effet d'après le corollaire 2.5.15 on sait que pour tout $z, w \in \Omega_r$, $g_\Omega(z, w) = g_{\Omega_r}(z, w) - \log r$. On conclut en appliquant l'exponentielle sur cette égalité. ■

Propriétés du n -ième diamètre greenien Désormais tout domaine de Jordan de \mathbb{C} est muni du n -ième diamètre greenien. Cette convention est compatible avec celle introduite pour les ensembles simplement connexes Ω dans le paragraphe précédent puisque la fonction de Green de Ω peut être obtenue comme le logarithme de l'inverse d'une fonction d'uniformation de Ω dans le disque unité \mathbb{D} (voir [46, p. 2] pour plus de détails). La fonction de Green étant un invariant conforme, il en est de même de la distance greenienne et le n -ième diamètre greenien diminue lorsque le domaine Ω grandit.

Proposition 2.7.22. Soient Ω et Υ deux domaines greeniens de \mathbb{C} , $\varphi : \Omega \rightarrow \Upsilon$ une application holomorphe et $E \subset \Omega$. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \alpha > 0, \text{diam}_n^\alpha(\varphi(E), \Upsilon) \leq \text{diam}_n^\alpha(E, \Omega). \quad (2.7.2)$$

En particulier lorsque φ est une application conforme, l'inégalité 2.7.2 est une égalité.

Démonstration. Pour démontrer la première propriété, il suffit d'appliquer le principe de subordination des fonctions de Green (voir le théorème 2.1.5)

$$\forall z, w \in \Omega, g_\Upsilon(\varphi(z), \varphi(w)) \geq g_\Omega(z, w)$$

Donc pour tout $z, w \in \Omega$, $d_\Upsilon(\varphi(z), \varphi(w)) \leq p_\Omega(z, w)$. Soient D_1, \dots, D_n des disques greeniens de Ω recouvrant l'ensemble E . Alors l'image de chacun de ces disques par φ est contenue dans un disque greenien de Υ de même rayon. D'où

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \alpha > 0, \forall \epsilon > 0, \text{diam}_n^\alpha(E, \Omega) < \epsilon \implies \text{diam}_n^\alpha(\varphi(E), \Upsilon) < \epsilon.$$

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha > 0$, $\text{diam}_n^\alpha(\varphi(E), \Upsilon) \leq \text{diam}_n^\alpha(E, \Omega)$. ■

Lorsque $\Omega_r \subset \Omega$ est une strate d'un domaine (Ω, z_0) , l'inclusion $\Omega_r \hookrightarrow \Omega$ est holomorphe et donc la proposition 2.7.22 précédente implique que $\text{diam}_n^\alpha(E, \Omega) \leq \text{diam}_n^\alpha(E, \Omega_r)$ pour tout $E \subset \Omega_r$. Le lemme 2.7.23 ci-dessous relie explicitement $\text{diam}_n^\alpha(E, \Omega)$ et $\text{diam}_n^\alpha(E, \Omega_r)$.

Lemme 2.7.23. Soient (Ω, z_0) un domaine régulier de \mathbb{C} , $r \in]0, 1]$ et $E \subset \Omega_r$. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \alpha > 0, \text{diam}_n^\alpha(E, \Omega_r) = \frac{\text{diam}_n^\alpha(E, \Omega)}{r^\alpha}.$$

Démonstration. D'après le lemme 2.7.21

$$\forall z, w \in \Omega_r, p_{\Omega_r}(z, w) = rp_{\Omega_r}(z, w).$$

Soient $\mathbb{D}_{\Omega_r}(a_1, r_1), \dots, \mathbb{D}_{\Omega_r}(a_n, r_n)$ un recouvrement de E dans Ω_r . Chaque $\mathbb{D}_{\Omega_r}(a_j, rr_j)$ contient le disque $\mathbb{D}_{\Omega_r}(a_j, r_j)$. Donc

$$\forall \epsilon > 0, \text{diam}_n^\alpha(E, \Omega_r) < \epsilon \implies \text{diam}_n^\alpha(E, \Omega) < r^\alpha \epsilon.$$

Donc $\text{diam}_n^\alpha(E, \Omega) \leq r^\alpha \text{diam}_n^\alpha(E, \Omega_r)$. Réciproquement, on considère le recouvrement de E dans Ω par la famille de disques $\mathbb{D}_{\Omega}(a_1, r_1), \dots, \mathbb{D}_{\Omega}(a_n, r_n)$. Puisque E est contenu dans Ω_r , ce dernier est contenu dans le recouvrement $\mathbb{D}_{\Omega_r}(a_1, \frac{r_1}{r}), \dots, \mathbb{D}_{\Omega_r}(a_n, \frac{r_n}{r})$. Donc $\text{diam}_n^\alpha(E, \Omega) \geq r^\alpha \text{diam}_n^\alpha(E, \Omega_r)$. ■

Le d -ième diamètre greenien et la capacité harmonique dans Ω La proposition 2.7.24 ci-dessous est l'analogie du théorème de Fekete-Szegö²⁸ pour la capacité d'un condenseur.

Proposition 2.7.24. Soient Ω un domaine greenien et $K \Subset \Omega$ un compact de Ω . On note

$$\delta_n(K, \Omega) = \sup \left\{ \prod_{1 \leq i < j \leq n} p_{\Omega}(z_i, z_j)^{\frac{2}{n(n-1)}} \mid z_1, \dots, z_n \in K \right\}.$$

Alors la suite $(\delta_n(K, \Omega))$ est décroissante et de plus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n(K, \Omega) = \exp \left(-\frac{1}{\text{cap}(K, \Omega)} \right).$$

Démonstration. Afin d'alléger les notations, nous abrégeons dans la suite de la démonstration $\delta_n(K, \Omega)$ par δ_n . Par compacité de K et continuité de p_{Ω} , il existe des points $w_1, \dots, w_{n+1} \in K$ tels que

$$\delta_{n+1}^{n(n+1)/2} = \prod_{1 \leq i < j \leq n+1} p_{\Omega}(w_i, w_j).$$

Puisque w_2, \dots, w_{n+1} sont des éléments de K

$$\delta_n^{n(n-1)/2} \geq \prod_{2 \leq i < j \leq n+1} p_{\Omega}(w_i, w_j).$$

On obtient le même type d'inégalité pour toutes les sous-suites de w_1, \dots, w_{n+1} de longueur n . En multipliant ces estimations, on obtient

$$\left(\delta_n^{n(n-1)/2} \right)^{n+1} \geq \prod_{1 \leq i < j \leq n+1} p_{\Omega}(w_i, w_j)^{n-1} = \left(\delta_{n+1}^{n(n+1)/2} \right)^{n-1}.$$

Donc $\delta_n \geq \delta_{n+1}$. La suite (δ_n) est bien décroissante. Or pour tout $z_1, \dots, z_n \in K$

$$\frac{2}{n(n-1)} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \log p_{\Omega}(z_i, z_j) \leq \log \delta_n.$$

Donc en intégrant cette inégalité pour la mesure produit $d\nu_K \otimes d\nu_K$ où ν_K est la mesure de Riesz de K , on obtient

$$\frac{2}{n(n-1)} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \int_{\mathbb{C}} \int_{\mathbb{C}} \log p_{\Omega}(z_i, z_j) d\nu_K(z_i) d\nu_K(z_j) \leq \log \delta_n.$$

²⁸Voir le théorème 5.5.2 de [93].

Donc $-V_\Omega^K \leq \log \delta_n$. Montrons que $\overline{\lim} \log \delta_n \geq -V_\Omega^K$. Pour cela on considère un réel $\epsilon > 0$ assez petit de sorte que $K^\epsilon = \{z \in \mathbb{C} \mid d(z, K) \leq \epsilon\}$ soit encore un compact de Ω . Soient $n \geq 2$ et $w_1, \dots, w_n \in K$ tels que

$$\delta_n^{n(n-1)/2} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} p_\Omega(w_i, w_j).$$

Pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, notons μ_j la mesure de Lebesgue normalisée du cercle $\partial\mathbb{D}(w_j, \epsilon)$ et $\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu_i$. Alors $\mu \in \mathcal{P}(K^\epsilon)$ et

$$\begin{aligned} -I_\Omega(\mu) &= - \int_{\mathbb{C}} \int_{\mathbb{C}} g_\Omega(z, w) d\mu(z) d\mu(w) = -\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{C}} \int_{\mathbb{C}} g_\Omega(z, w) d\mu_i(z) d\mu_i(w) \\ &\quad - \frac{2}{n^2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \int_{\mathbb{C}} \int_{\mathbb{C}} g_\Omega(z, w) d\mu_i(z) d\mu_j(w). \end{aligned}$$

On choisit $r > 0$ assez grand de sorte que Ω soit contenu dans chaque disque $D_j = \mathbb{D}(w_j, r)$. On peut supposer sans perte de généralité que $w_j = 0$. D'après le principe de subordination 2.1.5 des fonctions de Green, $\forall j \in \{1, \dots, n\}$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{C}} \int_{\mathbb{C}} g_\Omega(z, w) d\mu_j(z) d\mu_j(w) &\leq \int_{\mathbb{C}} \int_{\mathbb{C}} g_{D_j}(z, w) d\mu_j(z) d\mu_j(w) \\ &\leq \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left| \frac{r^2 - \epsilon^2 e^{i\theta} e^{i\varphi}}{r\epsilon(e^{i\theta} - e^{i\varphi})} \right| \frac{d\theta}{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} \\ &\leq \log \left(\frac{r}{\epsilon} \right). \end{aligned}$$

Or la fonction de Green g_Ω étant super-harmonique sur Ω

$$\int_{\mathbb{C}} \int_{\mathbb{C}} g_\Omega(z, w) d\mu_i(z) d\mu_j(w) \leq U_\Omega^{\mu_i}(w_j) \leq g_\Omega(w_i, w_j) = -\log p_\Omega(w_i, w_j).$$

Donc

$$-I_\Omega(\mu) \geq -\frac{1}{n} \log \left(\frac{r}{\epsilon} \right) + \frac{2}{n^2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \log p_\Omega(w_i, w_j).$$

D'où pour tout $\epsilon > 0$ assez petit, $e^{-V_\Omega^{K^\epsilon}} \geq e^{-I_\Omega(\mu)} \geq \left(\frac{\epsilon}{r}\right)^{\frac{1}{n}} \delta_n^{\frac{n-1}{n}}$. Donc

$$\forall \epsilon > 0 \text{ assez petit, } e^{-V_\Omega^{K^\epsilon}} \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\epsilon}{r}\right)^{\frac{1}{n}} \delta_n^{\frac{n-1}{n}} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \delta_n.$$

On conclut en faisant tendre ϵ vers zéro. ■

Proposition 2.7.25. Soient Ω un domaine greenien et $K \Subset \Omega$ un compact. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall \alpha > 0, \text{diam}_d^\alpha(K, \Omega)^{\frac{1}{\alpha}} \leq n^{\frac{n}{\alpha}} \delta_n(K, \Omega).$$

Démonstration. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $z_1, \dots, z_n \in K$ tels que

$$\delta_n(K, \Omega) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} p_\Omega(z_i, z_j)^{\frac{2}{n(n-1)}}.$$

Soient $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{R}_+$. On suppose que K n'est pas contenu dans l'union de disques greeniens $\mathbb{D}_\Omega(z_1, r_1), \dots, \mathbb{D}_\Omega(z_n, r_n)$. Donc il existe $w \in K$ tel que $\forall j \in \{1, \dots, n\}$, $p_\Omega(z_j, w) >$

r_j . On pose $w_j = z_j$ et $w_0 = w$. Or

$$\begin{aligned} \prod_{0 \leq i < j \leq n} p_{\Omega}(w_i, w_j)^{\frac{2}{n(n+1)}} &= \prod_{i=0}^{n-1} \prod_{j>i}^n p_{\Omega}(w_i, w_j)^{\frac{2}{n(n+1)}} \\ &= \prod_{j=1}^n p_{\Omega}(w, z_j)^{\frac{2}{n(n+1)}} \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j>i}^n p_{\Omega}(z_i, z_j)^{\frac{2}{n(n+1)}} \\ &> \left(\prod_{j=1}^n r_j \right)^{\frac{2}{n(n+1)}} \delta_n(K, \Omega)^{\frac{n-1}{n+1}}. \end{aligned}$$

Donc

$$\delta_n(K, \Omega) > \left(\prod_{j=1}^n r_j \right)^{\frac{1}{n}}.$$

On introduit la quantité

$$c_n^{\alpha} = \sup \left\{ \left(\prod_{j=1}^n r_j \right)^{\frac{1}{n}} \mid \sum_{j=1}^n r_j^{\alpha} = 1 \right\}.$$

On a donc montré que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall \alpha > 0, \text{diam}_n^{\alpha}(K, \Omega) > \epsilon \implies \delta_n(K, \Omega) > c_n^{\alpha} \epsilon^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Or d'après le cas d'égalité de l'inégalité arithmético-géométrique, la borne supérieure c_n^{α} est atteinte précisément lorsque $r_j^{\alpha} = \frac{1}{n}$. Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall \alpha > 0, \text{diam}_n^{\alpha}(K, \Omega)^{\frac{1}{\alpha}} \leq n^{\frac{n}{\alpha}} \delta_n(K, \Omega).$$

■

CHAPITRE 3

Majorations des mesures de transcendance

3.1 Introduction

Un nombre algébrique est un nombre complexe satisfaisant une équation algébrique non triviale¹ à coefficients rationnels. De même une fonction algébrique est une fonction satisfaisant une équation algébrique non triviale à coefficients dans $\mathbb{C}(z)$. Le point commun entre ces deux définitions est qu'il est naturellement associé à un nombre ou une fonction algébrique des quantités telles que le polynôme minimal, le degré de ce polynôme et la taille de ses coefficients. Ces quantités jouent un rôle important dans bon nombre d'énoncés portant sur ces objets. En revanche un nombre transcendant ou une fonction transcendante ne disposent pas *a priori* de telles quantités associées et il peut être utile d'en introduire afin d'étudier ces objets. C'est cette démarche que nous suivons dans ce chapitre. Pour les nombres il existe plusieurs notions de mesures de transcendance qui donnent lieu à différentes classifications des nombres réels ou complexes². L'objectif de ce chapitre est de définir de nouvelles de mesures de transcendance pour certaines classes de fonctions méromorphes et de démontrer des majoration de ces mesures en fonction de la distribution des petites valeurs des fonctions méromorphes considérées.

Mesure de transcendance de Coman et Poletsky Rappelons la définition de la mesure de transcendance des fonctions entières posée par Coman et Poletsky dans [25, 26]. On rappelle que $M(r, g)$ désigne le maximum du module de g sur le cercle $\partial\mathbb{D}_r$.

Rappel définition 1.4.7. Soient $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ non constante et $d \in \mathbb{N}$. La d -ième mesure de transcendance de g est définie par

$$E_d(g) := \sup \{ \|P\|_{\mathbb{D}^2} \mid P \in \mathbb{C}_{\leq d}[z, w] \text{ et } M(1, P_g) \leq 1 \},$$

et $e_d(g) := \log E_d(g)$.

Dans [25] Coman et Poletsky montrent notamment que toute fonction g entière et transcendante vérifie $\tau(g) \geq 2$. Puis dans [26] ils montrent que $\tau(g) = 2$ lorsque g est de plus d'ordre fini. En revanche, il existe des fonctions g entières et transcendantes telles que $\bar{\tau}(g)$ soit infini³. On montre cependant à la fin du chapitre 4 que pour toute fonction entière et transcendante g , l'ordre de transcendance inférieur $\tau(g)$ est fini à condition que g soit d'ordre inférieur positif. Les définitions précédentes ne sont pertinentes qu'à

¹C'est-à-dire qui n'est pas le polynôme identiquement nul.

²Voir la section 1.4 de l'introduction.

³Voir l'introduction de [25] pour un exemple de telle fonction.

condition de pouvoir majorer la mesure de transcendance pour certaines fonctions transcendentes. Dans [25] les auteurs parviennent à majorer cette mesure de transcendance pour l'exponentielle complexe puis dans [26] ils donnent une majoration de la mesure $e_d(g)$ dès lors que l'on connaît la distribution des petites valeurs de g dans des couronnes du plan. Plus précisément ils démontrent l'énoncé 3.1.1 suivant.

Théorème 3.1.1 (Coman - Poletsky – [26]). *Soient $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ une fonction transcendente, $d \in \mathbb{N}$, $\gamma > 0$ et $r > 2$. On suppose qu'il existe un borélien $A \subset \mathbb{S}^1$ de longueur $l > 0$ tel que*

$$\forall a \in A, \text{diam}_d(\{z \in \mathbb{A}(2, r) \mid g(z) = a\}) \geq \gamma \quad (3.1.1)$$

Alors

$$e_d(g) \leq d \log^+ M(er, g) \log r + d \log(er) \left(\log \frac{36er}{\gamma} + \frac{4\pi}{l} \right).$$

Autrement dit le théorème 3.1.1 fournit une majoration de la mesure de transcendance $e_d(g)$ dès lors que la fonction entière g atteint suffisamment de fois des valeurs d'un arc A du cercle unité \mathbb{S}^1 dans la couronne $\mathbb{A}(2, r)$ et que les antécédents de chacune de ces valeurs prises à part sont suffisamment espacés les uns des autres dans cette même couronne. Cet étalement des antécédents des petites valeurs de g est mesuré à l'aide du d -ième diamètre euclidien. Dans la mesure où l'ensemble décrit en 3.1.1 est toujours fini puisqu'il est compact et discret, son d -ième diamètre est nul dès lors que d dépasse son cardinal⁴. En particulier, si l'on souhaite appliquer le théorème 3.1.1 de Coman et Poletsky afin de majorer $e_d(g)$ pour tout degré d , il faut nécessairement choisir des rayons r de plus en plus de grand de sorte que le cardinal de l'ensemble 3.1.1 puisse excéder le degré d . Cette exigence impose en particulier que la fonction g atteigne une infinité de fois dans le plan certaines valeurs du cercle unité \mathbb{S}^1 . Pour les fonctions entières transcendentes, cette dernière condition est toujours satisfaite d'après le grand théorème de Picard 2.6.2 et inversement aucune fonction entière algébrique n'y répond. En revanche, cette contrainte sur la distribution des valeurs pour des fonctions holomorphes transcendentes sur des domaines différents de \mathbb{C} est nettement plus restrictive. Par exemple, il n'est pas difficile d'exhiber des fonctions holomorphes transcendentes sur le disque unité \mathbb{D} dont l'image est bornée et qui n'admettent aucun prolongement analytique sur un voisinage de $\overline{\mathbb{D}}$. En effet, les applications conformes de \mathbb{D} dans un domaine Ω simplement connexe et borné sont le plus souvent transcendentes et existent toujours d'après le théorème d'uniformisation de Riemann.

Remarque 3.1.2. Nous étudierons dans ce chapitre des mesures de transcendance pour des fonctions méromorphes sur \mathbb{C} ou sur le disque unité \mathbb{D} mais également pour des fonctions méromorphes sur un domaine régulier Ω de \mathbb{C} . Cette étude des fonctions méromorphes $g \in \mathcal{M}(\Omega)$ sur un domaine régulier Ω pourrait sembler de prime abord inutile du fait d'une part que tout domaine simplement connexe est conforme au disque \mathbb{D} ou au plan \mathbb{C} d'après le théorème d'uniformisation de Riemann et d'autre part qu'il serait possible de réduire l'étude des mesures de transcendance sur un domaine Ω à une étude locale de la fonction g sur des disques contenus dans son domaine Ω . Cependant on peut objecter deux raisons de ne pas se limiter au cas du disque ou du plan. La première raison est que les mesures de transcendance que nous étudions ne sont pas des invariants conformes. Cela n'a rien d'étonnant puisque les applications conformes, y compris entre des domaines particulièrement simples du plan tels que des polygones, ne sont que très rarement algébriques. La deuxième raison est que les conditions sous lesquelles nous obtenons des majorations de ces mesures de transcendance ne sont pas locales mais au contraire portent sur la croissance des fibres de g restreintes à des compacts de plus en plus grands.

⁴Voir la remarque 2.7.12.

Définitions et notations

Avant de pouvoir énoncer les théorèmes démontrés dans ce chapitre, il est nécessaire d'introduire quelques notations.

Voisinages Afin de spécifier la distribution des valeurs petites de la fonction méromorphe g étudiée, on introduit des voisinages dans lesquels on escompte rencontrer des antécédents par g d'une valeur $a \in \hat{\mathbb{C}}$ fixée. Dans [26], Coman et Poletsky étudient la distribution des valeurs de g dans les couronnes $\mathbb{A}(2, r)$ pour majorer leur mesure de transcendance $e_d(g)$. Lorsque (Ω, z_0) est un domaine régulier et $g \in \mathcal{M}(\Omega)$, on remplace la couronne $\mathbb{A}(\lambda, r)$ par la *couronne généralisée* $\mathbb{A}_\Omega(\lambda, r)$ définie par

$$\mathbb{A}_\Omega(\lambda, r) := \{z \in \Omega_r \mid z \notin \overline{\Omega_\lambda}\} = \{z \in \Omega \mid \lambda < p_\Omega(z, z_0) < r\}.$$

Définition 3.1.3. Soient (Ω, z_0) un domaine régulier, $g \in \mathcal{M}(\Omega)$, $a \in \hat{\mathbb{C}}$ et $\lambda, r \in \mathbb{R}$ tels que $0 < \lambda < r < 1$. On définit la fibre des a -points de g restreinte à la couronne $\mathbb{A}_\Omega(\lambda, r)$ par

$$D_\Omega(\lambda, r, a, g) := \{z \in \mathbb{A}_\Omega(\lambda, r) \mid g(z) = a\}.$$

Lorsque λ est nul, on note cet ensemble par $D_\Omega(r, a, g)$ et $D_\Omega(a, g)$ lorsque r est nul également.

Mesures de transcendance Dans la mesure où nous voulons établir des lemmes de zéros polynomiaux pour des fonctions méromorphes sur un domaine Ω , nous adoptons l'approche de Coman et Poletsky dans [26] qui consiste à définir une mesure de transcendance puis démontrer des majoration de cette dernière à l'aide de la distribution des valeurs de g . Pour qu'une quantité $e_d(g)$ mérite d'être qualifiée de *mesure de transcendance* de g , nous exigerons donc qu'elle satisfasse les deux propriétés suivantes

- P1. une majoration de la quantité $e_d(g)$ conduit à un lemme de zéros. Autrement dit, nous devons pouvoir majorer le nombre de zéros de P_g dans les compacts du domaine Ω en fonction du degré d de P , de la mesure $e_d(g)$ et éventuellement de la géométrie du domaine Ω ,
- P2. la mesure de transcendance $e_d(g)$ peut être majorée uniformément en le degré d lorsque l'on connaît la distribution des petites valeurs de la fonction g dans les voisinages définis dans le paragraphe précédent.

Bien entendu pour les fonctions entières la mesure de transcendance de Coman et Poletsky satisfait la propriété P2 d'après le théorème 3.1.1 et la propriété P1 d'après 3.5.1 et 2.5.8. Nous introduisons maintenant des nouvelles mesures de transcendance pour les fonctions holomorphes et méromorphes sur un domaine régulier de Ω .

Mesure de transcendance holomorphe La première mesure de transcendance définie ci-dessous concerne les fonctions holomorphes sur un domaine Ω . Il s'agit d'une traduction naturelle de la mesure de transcendance originale de Coman et Poletsky où les disques concentriques sont remplacés par des strates Ω_r .

Définition 3.1.4 (Mesure de transcendance holomorphe). Soient (Ω, z_0) un domaine greenien et $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ une fonction transcendante. On définit pour tout $d \in \mathbb{N}$, la d -ième *mesure de transcendance holomorphe* de g par

$$\forall \lambda \in [0, 1[, \quad E_d^\Omega(\lambda, g) := \sup \left\{ \|P\|_{\Omega_\lambda \times \mathbb{D}} : P \in \mathbb{C}_{\leq d}[z, w] \text{ et } M_\Omega(\lambda, P_g) \leq 1 \right\},$$

et $e_d^\Omega(\lambda, g) := \log E_d^\Omega(\lambda, g)$. On définit la d -ième fonction maximum de transcendance de g est définie par, $\forall \lambda \in [0, 1[, \forall r \in [0, \lambda]$

$$M_d^\Omega(\lambda, r, g) := \sup \left\{ M_\Omega(r, P_g) : P \in \mathbb{C}_{\leq d}[z, w], M_\Omega(\lambda, P_g) \leq 1 \text{ et } P \neq 0 \right\},$$

et $m_d^\Omega(\lambda, r, g) := \log M_d^\Omega(\lambda, r, g)$.

Notation 3.1.5. Un polynôme $P \in \mathbb{C}_{\leq d}[z, w]$ est dit *extrémal* pour la mesure $e_d^\Omega(\lambda, g)$ lorsque

$$\log \|P\|_{\Omega_\lambda \times \mathbb{D}} = e_d^\Omega(\lambda, g) \text{ et } M_\Omega(\lambda, g) \leq 1.$$

Par un argument de compacité un polynôme extrémal de la mesure $e_d^\Omega(\lambda, g)$ existe toujours pour chaque degré d mais n'est pas nécessairement unique.

Remarque 3.1.6. La mesure de transcendance $e_d(g)$ de Coman et Poletsky coïncide avec la mesure de transcendance $e_d^\Omega(1, g)$ lorsque g est une fonction entière transcendante et Ω est le disque \mathbb{D} . La mesure de transcendance $e_d(\lambda, g)$ définie en 1.4.10 pour une fonction $g \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ coïncide avec la mesure de transcendance $e_d^\mathbb{D}(\lambda, g)$. De ce fait on omet dans la suite l'exposant lorsque Ω est le disque \mathbb{D} .

Remarque 3.1.7. La mesure $e_d^\Omega(\lambda, g)$ vérifie la propriété P1 d'après 3.5.1 et 2.5.13 et elle satisfait la propriété P2 d'après le théorème 3.1.14. Cette mesure est étudiée en détail dans la section 3.5.

Mesure de transcendance méromorphe On étudie également les fonctions méromorphes sur un domaine greenien Ω du plan. Cette fois la fonction maximum $\log M_\Omega(r, P_g)$ est remplacée par la moyenne de la fonction $\log |P_g|$ le long de $\partial\Omega_r$ définie par

$$\forall r \in [0, 1[, \hat{m}_\Omega(r, P_g) := \int_{\partial\Omega_r} \log |P_g(\xi)| d\varpi_{\Omega_r}(\xi, z_0),$$

où $d\varpi_{\Omega_r}$ désigne la mesure harmonique de Ω_r (voir la définition 2.1.21). On peut maintenant définir la mesure de transcendance méromorphe de g sur Ω .

Définition 3.1.8 (Mesure de transcendance méromorphe). Soient (Ω, z_0) un domaine greenien et $g \in \mathcal{M}(\Omega, z_0)$ une fonction transcendante. On définit pour tout $d \in \mathbb{N}$, la d -ième mesure de transcendance méromorphe de g par

$$\forall \lambda \in [0, 1[, \hat{E}_d^\Omega(\lambda, g) := \sup \left\{ \|P\|_{\Omega_\lambda \times \mathbb{D}} \mid P \in \mathbb{C}_{\leq d}[z, w] \text{ et } \hat{m}_\Omega(\lambda, P_g) \leq 0 \right\},$$

et $\hat{e}_d^\Omega(\lambda, g) := \log \hat{E}_d^\Omega(\lambda, g)$. On définit la d -ième fonction de proximité transcendante de g par, $\forall \lambda \in [0, 1[, \forall r \in [0, \lambda]$

$$\hat{m}_d^\Omega(\lambda, r, g) := \sup \left\{ \hat{m}_\Omega(r, P_g) \mid P \in \mathbb{C}_{\leq d}[z, w], \hat{m}_\Omega(\lambda, P_g) \leq 0 \text{ et } P \neq 0 \right\}.$$

Notation 3.1.9. Un polynôme $P \in \mathbb{C}_{\leq d}[z, w]$ tel que

$$\log \|P\|_{\Omega_\lambda \times \mathbb{D}} = \hat{e}_d^\Omega(\lambda, g) \text{ et } \hat{m}(\lambda, P_g) \leq 0,$$

est dit *extrémal* pour la mesure $\hat{e}_d^\Omega(\lambda, g)$. Un tel polynôme existe toujours par un argument de compacité mais n'est pas nécessairement unique.

Remarque 3.1.10. Soient $g \in \mathcal{M}(\Omega)$ et $a \in \hat{\mathbb{C}}$. On note $\hat{e}_d^\Omega(\lambda, a, g)$ le mesure de transcendance méromorphe $\hat{e}_d^\Omega(\lambda, (g - a)^{-1})$. Nous verrons dans la section 3.6 que la mesure $\hat{e}_d^\Omega(\lambda, a, g)$ ne dépend pas du choix de a . Voir la proposition 3.6.4.

Remarque 3.1.11. La mesure de transcendance $\hat{e}_d(\lambda, g)$ définie en 1.4.11 pour une fonction $g \in \mathcal{M}(\mathbb{D})$ coïncide avec la mesure de transcendance $\hat{e}_d^\mathbb{D}(\lambda, g)$. De ce fait on omet dans la suite l'exposant lorsque Ω est le disque \mathbb{D} .

Remarque 3.1.12. La mesure de transcendance méromorphe est étudiée dans la section 3.6. Elle vérifie la propriété P1 d'après les énoncés 3.6.1 et 2.5.16 et la propriété P2 d'après le théorème 3.1.16 du présent chapitre.

Résultats

Les résultats principaux de ce chapitre sont les théorèmes 3.1.14 et 3.1.16 ci-dessous qui généralisent le théorème 4.2 de [26]. Ils sont démontrés dans les sections respectivement 3.5 et 3.6. Ces deux énoncés donnent des majorations de la d -ième mesure de transcendance $e_d^\Omega(\lambda, g)$ et de la d -ième mesure de transcendance méromorphe $\hat{e}_d^\Omega(\lambda, g)$ en fonction de la croissance de la fonction g dans le domaine Ω , de la distribution dans les strates de Ω des a -points de g lorsque a parcourt un borélien fixé $A \subset \mathbb{S}^1$ et de la géométrie des strates de Ω via les termes $\tau_\Omega(\lambda, r)$ et $\text{diam}_\Omega(\lambda, r)$ définis ci-dessous.

Définition 3.1.13. Soient (Ω, z_0) un domaine régulier et $\lambda, t, r \in \mathbb{R}$ tels que $0 < \lambda < t < r < 1$. On introduit les deux quantités suivantes

$$\text{diam}_\Omega(\lambda, r) := \frac{\text{diam}(\Omega_r)}{\text{diam}(\Omega_\lambda)} \quad \text{et} \quad \tau_\Omega(\lambda, r) = \sup \{ \tau_{\Omega_r}(\xi, z_0) \mid \xi \in \partial\Omega_\lambda \},$$

où τ_{Ω_r} est la distance de Harnack⁵ du domaine Ω_r .

Les deux quantités définies ci-dessus semblent difficile à estimer en général. Cependant dans le cas du disque, on dispose d'expressions explicites⁶ pour chacun de ces termes.

Majorations de la mesure de transcendance holomorphe La section 3.5 de ce chapitre contient la démonstration d'une majoration de la mesure $e_d^\Omega(\lambda, g)$ analogue au théorème 3.1.1 de Coman et Poletsky figurant dans [26].

Théorème 3.1.14. Soient (Ω, z_0) un domaine régulier, $g \in \mathcal{O}(\Omega)$, $d \in \mathbb{N}$, $\lambda, \nu, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $0 < \lambda < \nu < 1$ et $\gamma \in]0, 1[$. On suppose qu'il existe un borélien $A \subset \mathbb{S}^1$ de longueur $l > 0$ tel que $\forall a \in A$, $\text{diam}_d(D_\Omega(\lambda, a, g), \Omega_\lambda) \geq \gamma$. Alors

$$\frac{\log(\frac{2\nu}{\nu+\lambda})}{\log(\frac{\nu}{\lambda})} e_d^\Omega(\lambda, g) \ll d \log^+ M_\Omega(\nu, g) + d \log \left(\frac{e d \nu}{\gamma l \lambda} \right) + d \tau_\Omega(\lambda, \nu)^2 \log(e \text{diam}_\Omega(\lambda, \nu)).$$

Démonstration. Voir page 101. ■

Remarque 3.1.15. On peut affaiblir les conditions portant sur l'ensemble A du théorème 3.1.14. La conclusion du théorème 3.1.14 est toujours valable lorsque A est de capacité logarithmique au moins $l > 0$ ou l'ensemble A est de d -ième diamètre euclidien au moins $l > 0$. En particulier A peut être un ensemble fini à condition qu'il contienne au moins $d + 1$ éléments.

Majoration de la mesure de transcendance méromorphe On rappelle que le nombre de a -points sans multiplicité de g dans le domaine Ω_r est noté $\bar{n}_\Omega(r, a, g)$. On peut maintenant énoncer le théorème 3.1.16 donnant une majoration de la mesure de transcendance méromorphe $\hat{e}_d^\Omega(\lambda, g)$ en fonction de la distribution des petites valeurs de g et de ses pôles dans les strates de Ω .

⁵Voir la définition 2.1.27.

⁶Voir la section 3.4.

Théorème 3.1.16. Soient (Ω, z_0) un domaine régulier, $g \in \mathcal{M}(\Omega)$, $d \in \mathbb{N}$, $\lambda, \nu, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ tels que $0 < \lambda < \nu < 1$, $\gamma, \delta \in]0, 1[$. On suppose qu'il existe un borélien $A \subset \mathbb{S}^1$ de longueur $l > 0$ tel que pour tout $a \in A$, il existe $C_a \subset D_\Omega(\nu, \infty, g)$ tel que

$$\text{diam}_{d+n}(D_\Omega(\lambda, a, g), \Omega_\lambda) \geq \gamma \text{ et } p_{\Omega_\nu}(D_\Omega(\lambda, a, g), C_a) \geq \delta,$$

où $n = \bar{n}_\Omega(\nu, a, g) - \#C_a$. Alors

$$\frac{\log\left(\frac{2\nu}{\nu+\lambda}\right) e_d^\Omega(\lambda, g)}{\log\left(\frac{\nu}{\lambda}\right) \tau_\Omega(\lambda, \nu)} \ll d\tau_\Omega(\lambda, \nu)T_\Omega(\nu, g) + dn_\Omega(\nu, \infty, g) \log\left(\frac{\nu e(d+n)}{\lambda \gamma \delta}\right) + d \log\left(\frac{\nu e(d+n)}{\lambda l \gamma}\right) + d\tau_\Omega(\lambda, \nu)^2 \log(\text{ediam}_\Omega(\lambda, \nu)).$$

De plus la constante omise est absolue.

Démonstration. Voir page 108. ■

Remarque 3.1.17. Pour les mêmes raisons que le théorème 3.1.14, il est possible d'affaiblir les hypothèses portant sur l'ensemble A du théorème 3.1.16. Voir la remarque 3.1.15 pour plus de détails.

Applications aux cas du disque unité \mathbb{D} et du plan \mathbb{C} Lorsque Ω est le disque unité, la géométrie des strates Ω_r est particulièrement simple. En particulier, l'exhaustion greenienne de \mathbb{D} centrée en l'origine est simplement l'exhaustion de \mathbb{D} par les disques \mathbb{D}_r . Dans ce cas le théorème 3.1.14 donne les corollaires 3.1.18 et 3.1.20 suivants. Le corollaire 3.1.18 donne une majoration uniforme des mesures de transcendance $e_d^\Omega(\lambda, g \circ h)$ lorsque Ω est un domaine simplement connexe et $h : (\Omega, z_0) \rightarrow (\mathbb{D}, 0)$ une application conforme.

Corollaire 3.1.18. Soient $g \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$, $d \in \mathbb{N}$, $\lambda, \nu, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $0 < \lambda < \nu < 1$ et $\gamma \in]0, 1[$. On suppose qu'il existe un borélien $A \subset \mathbb{S}^1$ de longueur $l > 0$ tel que pour tout $a \in A$, $\text{diam}_d(D(\lambda, a, g), \mathbb{D}_\lambda) \geq \gamma$. Alors pour tout domaine régulier $\Omega \subset \mathbb{C}$ et $h : (\Omega, z_0) \rightarrow (\mathbb{D}, 0)$ conforme

$$\frac{\log\left(\frac{2\nu}{\nu+\lambda}\right) e_d^\Omega(\lambda, g \circ h)}{\log\left(\frac{\nu}{\lambda}\right)} \ll d \log^+ M(\nu, g) + d \log\left(\frac{ed\nu}{\gamma l \lambda}\right) + d \left(\frac{\nu + \lambda}{\nu - \lambda}\right)^2 \log\left(\frac{e\nu}{\lambda(1-\nu)}\right).$$

De plus la constante omise est absolue.

Lorsque Ω est le disque \mathbb{D} et $h = \text{Id}$, la borne du corollaire 3.1.18 peut être améliorée de la manière suivante.

Théorème 3.1.19. Soient $g \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$, $d \in \mathbb{N}$, $\lambda, \nu, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $0 < \lambda < \nu < 1$ et $\gamma \in]0, 1[$. On suppose qu'il existe un borélien $A \subset \mathbb{S}^1$ de longueur $l > 0$ tel que pour tout $a \in A$, $\text{diam}_d(D(\lambda, a, g), \mathbb{D}_\lambda) \geq \gamma$. Alors

$$\frac{\log\left(\frac{2\nu}{\nu+\lambda}\right) e_d(\lambda, g)}{\log\left(\frac{\nu}{\lambda}\right)} \ll d \log^+ M(\nu, g) + d \log\left(\frac{e\nu}{\gamma l \lambda}\right) + d \log\left(\frac{\nu(\nu + \lambda)}{\lambda(\nu - \lambda)}\right).$$

De plus la constante omise est absolue.

Corollaire 3.1.20. Soient $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$, $d \in \mathbb{N}$, $\lambda, \nu, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $0 < \lambda < \nu < \infty$ et $\gamma \in]0, 1[$. On suppose qu'il existe un borélien $A \subset \mathbb{S}^1$ de longueur $l > 0$ tel que pour tout $a \in A$, $\text{diam}_d(D(\lambda, a, g), \mathbb{D}_\lambda) \geq \gamma$. Alors

$$\frac{\log\left(\frac{2\nu}{\nu+\lambda}\right) e_d(\lambda, g)}{\log\left(\frac{\nu}{\lambda}\right)} \ll d \log^+ M(\nu, g) + d \log\left(\frac{e\nu}{\gamma l \lambda}\right) + d \log\left(\frac{\nu(\nu + \lambda)}{\lambda(\nu - \lambda)}\right).$$

La constante omise est absolue.

Remarque 3.1.21. Le corollaire 3.1.20 implique, sous des hypothèse plus faibles et à une constante multiplicative près, la majoration de la mesure de transcendance $e_d(g)$ du théorème 3.1.1. En effet, supposons que la fonction $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ satisfasse les hypothèses du théorème 3.1.1 pour le degré $d \in \mathbb{N}$ et le rayon $\lambda > 2$. Or d'après la proposition 2.7.18

$$\text{diam}_d(D(\lambda, a, g), \mathbb{D}_\lambda) \geq \text{diam}_d(D(2, \lambda, a, g)) \geq \gamma.$$

Appliquons le corollaire 3.1.20 avec le rayon $\nu = e\lambda$. Donc

$$\left(\log \frac{2e}{e+1}\right) e_d(\lambda, g) \ll d \log^+ M(\nu, g) + d \log \left(\frac{e\nu}{\gamma l \lambda}\right) \ll d \log^+ M(e\lambda, g) + d \log \left(\frac{e}{\gamma l}\right).$$

Quant au théorème 3.1.16, il donne dans le cas du disque le corollaire 3.1.22 suivant. Ce corollaire fournit une majoration uniforme des mesures de transcendance $\dot{e}_d^\Omega(\lambda, g \circ h)$ lorsque $h : (\Omega, z_0) \rightarrow (\mathbb{D}, 0)$ une application conforme. On note pour tout $\lambda, \nu \in \mathbb{R}$ tels que $0 < \lambda < \nu < 1$

$$\Phi(\lambda, \nu) = \left(\frac{\nu - \lambda}{\nu + \lambda}\right) \frac{\log\left(\frac{2\nu}{\nu + \lambda}\right)}{\log\left(\frac{\nu}{\lambda}\right)}.$$

Corollaire 3.1.22. Soient $g \in \mathcal{M}(\mathbb{D})$, $d \in \mathbb{N}$, $\lambda, \nu, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ tels que $0 < \lambda < \nu < 1$, $\gamma, \delta \in]0, 1[$. On suppose qu'il existe un borélien $A \subset \mathbb{S}^1$ de longueur $l > 0$ tel que pour tout $a \in A$, il existe $C_a \subset D(\nu, \infty, g)$ tel que

$$\text{diam}_{d+n}(D(\lambda, a, g), \mathbb{D}_\lambda) \geq \gamma \text{ et } p_\nu(D(\lambda, a, g), C_a) \geq \delta,$$

où $n = \bar{n}(\nu, \infty, g) - \#C_a$. Alors pour tout domaine régulier $\Omega \subset \mathbb{C}$ et $h : (\Omega, z_0) \rightarrow (\mathbb{D}, 0)$ conforme

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda, \nu) \dot{e}_d^\Omega(\lambda, g \circ h) &\ll d \left(\frac{\nu + \lambda}{\nu - \lambda}\right) T(\nu, g) + dn(\nu, \infty, g) \log \left(\frac{\nu e(d+n)}{\lambda \gamma \delta}\right) \\ &+ d \log \left(\frac{\nu e(d+n)}{\lambda \gamma l}\right) + d \left(\frac{\nu + \lambda}{\nu - \lambda}\right)^2 \log \left(\frac{\nu e}{\lambda (1-\nu)}\right). \end{aligned}$$

La constante omise est absolue.

Lorsque Ω est le disque \mathbb{D} et $h = \text{Id}$, la borne du corollaire 3.1.22 peut être améliorée de la manière suivante.

Théorème 3.1.23. Soient $g \in \mathcal{M}(\mathbb{D})$, $d \in \mathbb{N}$, $\lambda, \nu, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ tels que $0 < \lambda < \nu < 1$, $\gamma, \delta \in]0, 1[$. On suppose qu'il existe un borélien $A \subset \mathbb{S}^1$ de longueur $l > 0$ tel que pour tout $a \in A$, il existe $C_a \subset D(\nu, \infty, g)$ tel que

$$\text{diam}_{d+n}(D(\lambda, a, g), \mathbb{D}_\lambda) \geq \gamma \text{ et } p_\nu(D(\lambda, \infty, g), C_a) \geq \delta,$$

où $n = \bar{n}(\nu, \infty, g) - \#C_a$. Alors

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda, \nu) \dot{e}_d(\lambda, g) &\ll d \left(\frac{\nu + \lambda}{\nu - \lambda}\right) T(\nu, g) + dn(\nu, \infty, g) \log \left(\frac{\nu e}{\lambda \gamma \delta}\right) + d \log \left(\frac{\nu e}{\lambda \gamma l}\right) \\ &+ d \log \left(\frac{e(\nu + \lambda)}{(1-\nu)(\nu - \lambda)}\right) + d \log \left(\frac{\nu}{\lambda}\right). \end{aligned}$$

La constante omise est absolue.

Corollaire 3.1.24. Soient $g \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$, $d \in \mathbb{N}$, $\lambda, \nu, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ tels que $0 < \lambda < \nu < \infty$, $\gamma, \delta \in]0, 1[$. On suppose qu'il existe un borélien $A \subset \mathbb{S}^1$ de longueur $l > 0$ tel que pour tout $a \in A$, il existe $C_a \subset D(\nu, \infty, g)$ tel que

$$\text{diam}_{d+n}(D(\lambda, a, g), \mathbb{D}_\lambda) \geq \gamma \text{ et } p_\nu(D(\lambda, a, g), C_a) \geq \delta,$$

où $n = \bar{n}(\nu, \infty, g) - \#C_a$. Alors

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda, \nu) \dot{e}_d(\lambda, g) &\ll d \left(\frac{\nu + \lambda}{\nu - \lambda} \right) T(\nu, g) + dn(\nu, \infty, g) \log \left(\frac{\nu e}{\lambda \gamma \delta} \right) + d \log \left(\frac{\nu e}{\lambda \gamma l} \right) \\ &\quad + d \log \left(\frac{e\nu \nu + \lambda}{\lambda \nu - \lambda} \right). \end{aligned}$$

La constante omise est absolue.

Lemmes de zéros Nous utilisons à la fin de ce chapitre mais également dans le chapitre 4 les différents critères d'existence de lemmes de zéros annoncés dans le chapitre d'introduction. Ces derniers sont des corollaires des majorations des mesures de transcendance holomorphes et méromorphes du paragraphe précédent.

Lemme 3.1.25. *On considère les trois fonctions réelles*

$$\forall x > 1, \phi_1(x) := \log \left(\frac{1}{x-1} \right), \phi_2(x) = \frac{\log(x)}{\log\left(\frac{2x}{1+x}\right)} \text{ et } \phi_3(x) = \log \left(\frac{1+x^2}{2x} \right)$$

Alors

$$\forall x > 1, \phi_1(x) \ll \frac{1}{\log x} \text{ et } \frac{\phi_2(x)}{\phi_3(x)} \ll \frac{1}{\log(x)^2 \vee 1}.$$

Rappel théorème 1.6.3. *Soit $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ une fonction transcendante. On suppose qu'il existe quatre suites de réels (λ_d) , (ν_d) , (γ_d) , (l_d) et des exposants $\alpha_1, \alpha_2, \beta, \gamma, l \geq 0$ tels que*

$$\forall d \in \mathbb{N}, d^{-\alpha_1} \ll \log \frac{\nu_d}{\lambda_d} \ll d^{\alpha_2}, \log^+ M(\nu_d, g) \ll d^\beta, \gamma_d \gg e^{-d^\gamma} \text{ et } l_d \gg e^{-d^l},$$

et une suite (A_d) de boréliens de \mathbb{S}^1 de longueur l_d telle que

$$\forall d \in \mathbb{N}, \forall a \in A_d, \text{diam}_d(D(\lambda_d, a, g), \mathbb{D}_{\lambda_d}) > \gamma_d.$$

Alors

$$\forall r > 0, \forall d \in \mathbb{N}, \mathcal{Z}_d(r, g) \ll (d \vee \varphi(r))^{1+2\alpha_1+\varepsilon} \text{ avec } \varepsilon = \max\{\alpha_2, \beta, \gamma, l\},$$

où $\varphi(r) := \min\{k \in \mathbb{N} \mid \lambda_k \geq r\}$. Autrement dit g vérifie un lemme de zéros polynomial.

Démonstration. D'après la proposition 2.5.20 et le lemme 3.5.1

$$\begin{aligned} \forall d \in \mathbb{N}, \log \left(\frac{\nu_d^2 + \lambda_d^2}{2\nu_d \lambda_d} \right) \mathcal{Z}_d(\lambda_d, g) &\leq \sup \{b(\lambda_d, \nu_d, P_g) \mid P \in \mathbb{C}_{\leq d}[z, w], P \neq 0\} \\ &\leq e_d(\lambda_d, g) + d \log^+ M(\nu_d, g) + d \log \left(\frac{8\nu_d}{\lambda_d} \right). \end{aligned}$$

D'après le corollaire 3.1.20 et le lemme 3.1.25, $\forall d \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \frac{\log\left(\frac{2\nu_d}{\nu_d + \lambda_d}\right)}{\log\left(\frac{\nu_d}{\lambda_d}\right)} e_d(\lambda_d, g) &\ll d \log^+ M(\nu_d, g) + d \log \left(\frac{e\nu_d}{\gamma_d l_d \lambda_d} \right) + d \log \left(\frac{\nu_d(\nu_d + \lambda_d)}{\lambda_d(\nu_d - \lambda_d)} \right) \\ &\ll d^{1+\beta} + d^{1+\gamma} + d^{1+l} + d^{1+\alpha_2} + d\phi_1\left(\frac{\nu_d}{\lambda_d}\right) \\ &\ll d^{1+\beta} + d^{1+\gamma} + d^{1+l} + d^{1+\alpha_2} + d \log d. \end{aligned}$$

Donc pour tout $d \in \mathbb{N}$ et $r > 0$ tels que $\varphi(r) \leq d$

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_d(r, g) &\leq \mathcal{Z}_d(\lambda_d, g) \ll (d^{1+\beta} + d^{1+\gamma} + d^{1+l} + d^{1+\alpha_2} + d \log d) \frac{\phi_1\left(\frac{\nu_d}{\lambda_d}\right)}{\phi_2\left(\frac{\nu_d}{\lambda_d}\right)} \\ &\ll (d^{1+\beta} + d^{1+\gamma} + d^{1+l} + d^{1+\alpha_2} + d \log d) d^{2\alpha_1} \\ &\ll d^{1+2\alpha_1+\beta} + d^{1+2\alpha_1+\gamma} + d^{1+2\alpha_1+l} + d^{1+2\alpha_1+\alpha_2} + d^{1+2\alpha_1} \log d \\ &\ll d^{1+2\alpha_1+\varepsilon}, \end{aligned}$$

puisque nécessairement $\beta > 0$ car g est non constante et donc $\log d$ est petit devant d^β . Tandis que pour tout $d \in \mathbb{N}$ et $r > 0$ tels que $d < \varphi(r)$

$$\mathcal{Z}_d(r, g) \leq \mathcal{Z}_{\varphi(r)}(\lambda_{\varphi(r)}, g) \ll \varphi(r)^{1+2\alpha_1+\varepsilon}.$$

Ce qui achève la démonstration du théorème. ■

Rappel théorème 1.6.4. Soit $g \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ une fonction transcendante. On suppose qu'il existe quatre suites de réels (λ_d) , (ν_d) , (γ_d) , (l_d) et des exposants $\alpha, \beta, \gamma, l \geq 0$ tels que

$$\forall d \in \mathbb{N}, d^{-\alpha} \ll \log \frac{\nu_d}{\lambda_d}, \log^+ M(\nu_d, g) \ll d^\beta, \log \gamma_d \gg -d^\gamma \quad \text{et} \quad \log l_d \gg -d^l,$$

et une suite (A_d) de boréliens de \mathbb{S}^1 de longueur l_d telle que

$$\forall d \in \mathbb{N}, \forall a \in A_d, \text{diam}_d(D(\lambda_d, a, g), \mathbb{D}_{\lambda_d}) > \gamma_d.$$

Alors

$$\forall r \in [0, 1[, \forall d \in \mathbb{N}, \mathcal{Z}_d(r, g) \ll (d \vee \varphi(r))^{1+2\alpha+\varepsilon} \quad \text{avec} \quad \varepsilon = \max\{\beta, \gamma, l\},$$

où $\varphi(r) := \min\{k \in \mathbb{N} \mid \lambda_k \geq r\}$. Autrement dit g vérifie un lemme de zéros polynomial.

Démonstration. La démonstration est semblable à celle du théorème 1.6.6 à la différence près que le terme $\log(\frac{\nu_d}{\lambda_d})$ peut être majoré par une constante puisque ν_d est plus petit que 1. ■

Rappel théorème 1.6.6. Soit $g \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ une fonction transcendante. On suppose qu'il existe cinq suites de réels (λ_d) , (ν_d) , (γ_d) , (δ_d) , (l_d) et des exposants $\alpha_1, \alpha_2, \beta, \gamma, \delta, l \geq 0$ tels que, $\forall d \in \mathbb{N}$

$$d^{-\alpha_1} \ll \log \frac{\nu_d}{\lambda_d} \ll d^{\alpha_2}, T(\nu_d, g) \ll d^\beta, \log \gamma_d \gg -d^\gamma, \log \delta_d \gg -d^\delta \quad \text{et} \quad \log l_d \gg -d^l,$$

et une suite (A_d) de boréliens de \mathbb{S}^1 de longueur l_d telle que

$$\forall d \in \mathbb{N}, \forall a \in A_d, \exists C_a \subset D(\nu_d, \infty, g) \text{ tel que}$$

$$\text{diam}_{d+n}(D(\lambda_d, a, g), \mathbb{D}_{\lambda_d}) > \gamma_d \quad \text{et} \quad p_{\nu_d}(D(\lambda_d, a, g), C_a) > \delta_d,$$

avec $n = \bar{n}(\nu_d, \infty, g) - \#C_a$. Alors

$$\forall r > 0, \forall d \in \mathbb{N}, \mathcal{Z}_d(r, g) \ll (d \vee \varphi(r))^{1+3\alpha_1+\varepsilon},$$

où $\varepsilon = \max\{\alpha_1 + \beta + \gamma, \alpha_1 + \beta + \delta, \alpha_2, l\}$ et $\varphi(r) := \min\{k \in \mathbb{N} \mid \lambda_k \geq r\}$. Autrement dit g vérifie un lemme de zéros polynomial.

Démonstration. D'après la proposition 2.5.8 et le lemme 3.6.1, $\forall d \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \log \left(\frac{\nu_d}{\lambda_d} \right) \mathcal{Z}_d(\lambda_d, g) &\leq \sup \left\{ \hat{b}(\lambda_d, \nu_d, P_g) \mid P \in \mathbb{C}_{\leq d}[z, w], P \neq 0 \right\} + dN(\nu_d, \infty, g) \\ &\leq \hat{e}_d(\lambda_d, g) + dN(\nu_d, \infty, g) + d\hat{m}(\nu_d, g) + d \log \left(\frac{\nu_d}{\lambda_d} \right) + d \log 8 \\ &\leq \hat{e}_d(\lambda_d, g) + dT(\nu_d, g) + d \log \left(\frac{\nu_d}{\lambda_d} \right) + d \log 8 \end{aligned}$$

En procédant comme dans la démonstration du théorème 1.6.3 on obtient

$$\forall a \in A_d, \text{diam}_d(D(\lambda_d, a, g), \mathbb{D}_{r_d}) \geq \gamma_d \text{ et } p_{r_d}(D(\lambda_d, a, g), C_a) \geq \delta_d.$$

Donc d'après le corollaire 3.1.24, $\forall d \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda_d, \nu_d) \hat{e}_d(\lambda_d, g) &\ll d \left(\frac{\nu_d + \lambda_d}{\nu_d - \lambda_d} \right) T(\nu_d, g) + \frac{d \log \left(\frac{e}{\gamma_d \delta_d} \right) T(\nu_d, g)}{\log \left(\frac{2\nu_d}{\nu_d + \lambda_d} \right)} + d \log \left(\frac{e\nu_d}{\gamma_d l_d \lambda_d} \right) \\ &\quad + d \log \left(\frac{e\nu_d \nu_d + \lambda_d}{\lambda_d \nu_d - \lambda_d} \right) \\ &\ll d^{1+\alpha_1+\beta} + d^{1+\alpha_1+\gamma+\beta} + d^{1+\alpha_1+\delta+\beta} + d^{1+\gamma} + d^{1+l} \\ &\quad + d^{1+\alpha_2} + d \log d \\ &\ll d^{1+\alpha_1+\beta+\gamma+\delta} + d^{1+\alpha_2} + d^{1+l} + d \log d. \end{aligned}$$

Or

$$\forall d \in \mathbb{N}, \Phi(\lambda_d, \nu_d) = \left(\frac{\nu_d - \lambda_d}{\nu_d + \lambda_d} \right) \frac{\log \left(\frac{2\nu_d}{\nu_d + \lambda_d} \right)}{\log \left(\frac{\nu_d}{\lambda_d} \right)} \gg d^{-2\alpha_1}.$$

Donc

$$\forall d \in \mathbb{N}, \hat{e}_d(\lambda_d, g) \ll d^{1+3\alpha_1+\beta+\gamma+\delta} + d^{1+2\alpha_1+\alpha_2} + d^{1+2\alpha_1+l} + d^{1+2\alpha_1} \log d.$$

Donc pour tout $d \in \mathbb{N}$ et $r > 0$ tels que $\varphi(r) \leq d$

$$\mathcal{Z}_d(r, g) \leq \mathcal{Z}_d(\lambda_d, g) \ll d^{\alpha_1} \hat{e}_d(\lambda_d, g) \ll d^{1+3\alpha_1+\epsilon}.$$

Tandis que pour tout $d \in \mathbb{N}$ et $r > 0$ tels que $d < \varphi(r)$

$$\mathcal{Z}_d(r, g) \leq \mathcal{Z}_{\varphi(r)}(\lambda_{\varphi(r)}, g) \ll \varphi(r)^{1+2\alpha_1+\beta+\epsilon}$$

Ce qui achève la démonstration du théorème. ■

Rappel théorème 1.6.9. Soit $g \in \mathcal{M}(\mathbb{D})$ une fonction transcendante. On suppose qu'il existe cinq suites de réels (λ_d) , (ν_d) , (γ_d) , (δ_d) , (l_d) et des exposants $\alpha, \beta, \gamma, \delta, l \geq 0$ tels que

$$\forall d \in \mathbb{N}, d^{-\alpha} \ll \log \frac{\nu_d}{\lambda_d}, T(\nu_d, g) \ll d^\beta, \log \gamma_d \gg -d^\gamma, \log \delta_d \gg -d^\delta \text{ et } \log l_d \gg -d^l,$$

et une suite (A_d) de boréliens de \mathbb{S}^1 de longueur l_d telle que

$$\forall d \in \mathbb{N}, \forall a \in A_d, \exists C_a \subset D(\nu_d, \infty, g) \text{ tel que}$$

$$\text{diam}_{d+n}(D(\lambda_d, a, g), \mathbb{D}_{\lambda_d}) > \gamma_d \text{ et } p_{\nu_d}(D(\lambda_d, a, g), C_a) > \delta_d,$$

avec $n = \bar{n}(\nu_d, \infty, g) - \#C_a$. Alors

$$\forall r \in [0, 1[, \forall d \in \mathbb{N}, \mathcal{Z}_d(r, g) \ll (d \vee \varphi(r))^{1+3\alpha+\epsilon},$$

où $\epsilon = \max\{\alpha + \beta + \gamma, \alpha + \beta + \gamma, l\}$ et $\varphi(r) := \min\{k \in \mathbb{N} \mid \lambda_k \geq r\}$. Autrement dit g vérifie un lemme de zéros polynomial.

Démonstration. On procède comme dans la démonstration du théorème 1.6.6 ci-dessus à la différence près que le terme $\log(\frac{\nu_d}{\lambda_d})$ peut être majoré par une constante puisque ν_d est plus petit que 1. ■

3.2 Croissance maximale d'un polynôme

Dans le présent chapitre, nous aurons besoin d'estimer la croissance maximale à l'infini d'un polynôme en fonction de certains paramètres. Il est bien évident que connaissant le degré d et le coefficient dominant a d'un polynôme $P \in \mathbb{C}_{\leq d}[z_1, \dots, z_n]$, la majoration $|P(z)| \leq |a|\|z\|^d$ est vraie lorsque $\|z\|$ est suffisamment grand. Toutefois nous aurons besoin d'une majoration effective qui soit valable en dehors d'un compact $K \subset \mathbb{C}$ explicite. Une telle majoration est possible en connaissant seulement le degré du polynôme P et sa norme infini $\|P\|_K$ sur un compact K . Ce résultat est connu sous le nom d'inégalité de Bernstein-Walsh. Avant de pouvoir énoncer cette inégalité, il est nécessaire d'introduire quelques notations et définitions de la théorie du pluri-potentiel dont le lecteur pourra trouver un exposé complet dans [63].

La fonction de Green pluri-complexe Nous allons introduire une généralisation de la fonction de Green vue dans la sous-section 2.1 pour des domaines de \mathbb{C}^n . De même que la fonction de Green classique peut être obtenue comme la fonction extrémale d'une famille de fonctions sous-harmoniques via la méthode de Perron, cette nouvelle fonction de Green est obtenue comme la fonction extrémale de la classe de Lelong définie ci-dessous.

Définition 3.2.1 (Classe de Lelong – [63]). La *classe de Lelong* \mathcal{L} est la famille de fonctions de $\mathcal{PSH}(\mathbb{C}^n)$ de croissance minimale à l'infini. Plus précisément

$$\mathcal{L} := \{u \in \mathcal{PSH}(\mathbb{C}^n) \mid \forall z \in \mathbb{C}^n, u(z) - \log \|z\| \leq O(1), \|z\| \rightarrow \infty\}.$$

Définition 3.2.2 (Fonction de Green pluri-complexe – [63]). Soit $E \subset \mathbb{C}^n$ un ensemble. La *fonction de Green pluri-complexe* relativement à E est définie par

$$\forall z \in \mathbb{C}^n, V_E(z) := \sup \{u(z) \mid u \in \mathcal{L}, u \leq 0 \text{ sur } E\}.$$

Exemple 3.2.3. La fonction de Green pluri-complexe de la boule $\overline{\mathbb{B}}_{a,r}^n \subset \mathbb{C}^n$ est donnée par

$$\forall z \in \mathbb{C}^n, V_{\overline{\mathbb{B}}_{a,r}^n}(z) = \log^+ \frac{\|z - a\|}{r}.$$

Théorème 3.2.4 ([63, th. 5.1.8]). Soient $E \subset \mathbb{C}^n$ et $F \subset \mathbb{C}^m$ deux compacts. Alors

$$\forall (z, w) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m, V_{E \times F}(z, w) = \max \{V_E(z), V_F(w)\}.$$

La proposition 3.2.5 suivante fait le lien entre la fonction de Green pluri-complexe d'un compact du plan et la fonction de Green avec un pôle en l'infini définie dans la sous-section 2.1. La fonction de Green pluri-complexe est donc d'une certaine façon une généralisation en dimension supérieure de la fonction de Green usuelle.

Proposition 3.2.5 ([63]). Soit $K \subset \mathbb{C}$ un compact non polaire. Alors

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \hat{K}, V_K(z) = g_{\mathbb{C} \setminus \hat{K}}(z, \infty),$$

où \hat{K} est l'enveloppe polynomialement convexe de K .

Inégalité de Bernstein-Walsh L'inégalité de Bernstein-Walsh 3.2.6 ci-dessous affirme que la croissance à l'infini d'un polynôme de $\mathbb{C}_{\leq d}[z_1, \dots, z_n]$ est bornée par la fonction de Green pluri-complexe⁷ de n'importe quel compact K et de la norme infini de P sur ce

⁷Voir la définition 3.2.2 page 87.

même compact.

Théorème 3.2.6 (Inégalité de Bernstein-Walsh – [63, Th. 5.1.7]). *Soient $d \in \mathbb{N}$ et $K \subset \mathbb{C}^n$ un compact non pluri-polaire⁸. Alors*

$$\forall P \in \mathbb{C}_{\leq d}[z_1, \dots, z_n], \forall z \in \mathbb{C}^n, |P(z)| \leq \|P\|_K e^{dV_K(z)}.$$

Par la suite nous avons besoin de majorer la croissance à l'infini d'un polynôme P en fonction de sa norme infini sur un produit cartésien $K = K_1 \times \dots \times K_n$ de \mathbb{C}^n contenant l'origine. Pour cela nous appliquons la proposition 3.2.7 ci-dessous.

Proposition 3.2.7. *Soient $K = K_1 \times \dots \times K_n \subset \mathbb{C}^n$ où les ensembles K_i sont des compacts connexes et non polaires⁹ de \mathbb{C} et $P \in \mathbb{C}_{\leq d}[z_1, \dots, z_n]$. Alors*

$$\forall z \in \mathbb{C}^n, \log |P(z)| \leq \log \|P\|_K + d \max_{1 \leq i \leq n} \log^+ \left(\frac{d(z_i, K_i)}{\text{diam}(K_i)} \right) + d \log 8. \quad (3.2.1)$$

Démonstration. Fixons $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \setminus K$. On sait d'après la proposition 3.2.5 du chapitre 2 que $V_{K_i}(z_i) = g_{\mathbb{C} \setminus \hat{K}_i}(z_i, \infty)$ sur $\mathbb{C} \setminus \hat{K}_i$. Soit $\xi_i \in \partial K_i$ tel que $d(z_i, K_i) = |z_i - \xi_i|$. Par le principe de subordination 2.1.5 et la proposition 2.1.14 du chapitre 2 nous avons

$$\begin{aligned} \forall z_i \in \mathbb{C} \setminus \hat{K}_i, g_{\mathbb{C} \setminus \hat{K}_i}(z_i, \infty) &\leq g_{\mathbb{C} \setminus K_i}(z_i, \infty) = \log \frac{1}{\text{cap}(K_i)} + \int_{K_i} \log |z_i - w| d\nu_{K_i}(w) \\ &\leq \log \frac{1}{\text{cap}(K_i)} + \log |z_i - \xi_i| + \int_{K_i} \log \left(1 + \frac{|\xi_i - w|}{|z_i - \xi_i|} \right) d\nu_{K_i}(w) \\ &\leq \log \frac{|z_i - \xi_i|}{\text{cap}(K_i)} + \log \left(1 + \frac{\text{diam}(K_i)}{|z_i - \xi_i|} \right) \\ &\leq \log \left(\frac{d(z_i, K_i)}{\text{cap}(K_i)} + \frac{\text{diam}(K_i)}{\text{cap}(K_i)} \right). \end{aligned}$$

D'autre part $V_{K_i} = V_{\hat{K}_i}$ d'après [63, th. 5.1.7] et par définition $V_{\hat{K}_i} \leq 0$ sur \hat{K}_i . De plus puisque les ensembles K_i sont des compacts connexes du plan, l'inégalité de Faber 2.1.12 du chapitre 2 assure que $\text{diam}(K_i) \leq 4\text{cap}(K_i)$. Enfin d'après le théorème 3.2.4, $V_K(z) = \max \{V_{K_1}(z_1), \dots, V_{K_n}(z_n)\}$. Donc

$$\forall z \in \mathbb{C}^n, V_K(z) \leq \log \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ 4 + \frac{4d(z_i, K_i)}{\text{diam}(K_i)} \right\} \leq \log 4 + \log 2 + \max_{1 \leq i \leq n} \log^+ \left(\frac{d(z_i, K_i)}{\text{diam}(K_i)} \right),$$

car pour tout $x > 0$, $\log(1+x) \leq \log^+ x + \log 2$. D'après l'inégalité de Bernstein-Walsh 3.2.6, $\forall z \in \mathbb{C}^n$

$$\log |P(z)| \leq \log \|P\|_K + dV_K(z) \leq \log \|P\|_K + d \log 8 + d \max_{1 \leq i \leq n} \log^+ \left(\frac{d(z_i, K_i)}{\text{diam}(K_i)} \right).$$

Ce qu'il fallait démontrer. ■

3.3 Majoration uniforme de la taille de lemniscates

Soit $P \in \mathbb{C}_{\leq d}[z, w]$ un polynôme non nul. Nous souhaitons majorer aussi précisément que possible la taille du lieu dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$ où les polynômes univariés $P_w(z) = P(z, w)$ sont petits uniformément lorsque w parcourt un ensemble $A \subset \mathbb{C}$ fixé. La plupart du temps l'ensemble A est un borélien du cercle unité \mathbb{S}^1 , voire un arc de cercle

⁸C'est-à-dire qui n'est pas contenu dans l'ensemble des pôles d'une fonction pluri-sous-harmonique sur un domaine de \mathbb{C}^n .

⁹Les singletons étant des ensembles polaires, le diamètre d'un ensemble non polaire est toujours non nul et par conséquent le second terme de l'inégalité 3.2.1 a toujours du sens.

de ce dernier. Pour ce faire nous aimerions utiliser le lemme de Boutroux-Cartan 2.7.10 de la section 2.1. Toutefois ce lemme nécessite de normaliser le polynôme P_w de sorte que son coefficient dominant soit plus grand que 1 en module. Or ce coefficient dominant est un polynôme en w qui peut être très petit sur l'ensemble A . D'autre part les polynômes extrémaux considérés par Coman et Poletsky dans [26] pour définir leur mesure de transcendance sont normalisés par leur norme infini $\|P\|_{\mathbb{D}^2}$. Ces raisons ont mené ces derniers à démontrer dans [26] une variante locale du lemme de Boutroux-Cartan où la normalisation des polynômes univariés par leur coefficient dominant est remplacée par une normalisation via leur norme infini sur le disque unité \mathbb{D} . Avant d'exposer la méthode de Coman et Poletsky, voyons comment relier la norme $\|P\|_{\Omega \times \mathbb{D}}$ aux normes $\|P_w\|_{\Omega}$ lorsque w parcourt un ensemble $A \subset \mathbb{S}^1$.

Norme infini d'une famille de polynômes L'avantage de la démarche de Coman et Poletsky est qu'il est possible d'estimer la norme infini $\|P\|_{\Omega \times \mathbb{D}}$ grâce aux normes $\|P_w\|_{\Omega}$ lorsque w parcourt un borélien A du cercle unité. La proposition 3.3.1 qui suit établit ce lien lorsque le domaine Ω est le disque unité \mathbb{D} .

Proposition 3.3.1 (Coman-Poletsky – [26]). *Soient $P \in \mathbb{C}[z, w]$ un polynôme de degré $d \in \mathbb{N}$ et $A \subset \mathbb{S}^1$ un borélien de longueur $l > 0$. Alors*

$$\sup \{ \|P_{\theta}\|_{\mathbb{D}} \mid e^{i\theta} \in A \} \geq \|P\|_{\mathbb{D}^2} \exp\left(-\frac{4\pi d}{l}\right),$$

où $P_{\theta}(z) := P(z, e^{i\theta})$.

Nous aurons besoin d'une généralisation de la proposition précédente pour des domaines de la forme $\Omega \times \mathbb{D}$. Une telle généralisation découle de la proposition 3.3.1 par un changement de variable. On obtient ainsi l'énoncé suivant

Corollaire 3.3.2. *Soient $\Omega \subset \mathbb{C}$ un domaine relativement compact, $d \in \mathbb{N}$, $P \in \mathbb{C}_{\leq d}[z, w]$ et $A \subset \mathbb{S}^1$ un borélien de longueur $l > 0$. Alors*

$$\sup \{ \|P_{\theta}\|_{\Omega} \mid e^{i\theta} \in A \} \geq \|P\|_{\Omega \times \mathbb{D}} \exp\left(-\frac{4\pi d}{l}\right),$$

où $P_{\theta}(z) := P(z, e^{i\theta})$.

Démonstration. On fixe $\varepsilon > 0$. Or il existe $a \in \Omega$ tel que

$$(1 + \varepsilon) \sup \{ |P(a, w)| \mid w \in \mathbb{D} \} \geq \|P\|_{\Omega \times \mathbb{D}}.$$

On note $\eta := d(a, \partial\Omega)$ et $s(z) := a + \eta z$. De plus on considère $Q \in \mathbb{C}_{\leq d}[z, w]$ le polynôme défini par $Q(z, w) = P(s(z), w)$. Par construction pour tout $e^{i\theta} \in \mathbb{S}^1$, on a $\|P_{\theta}\|_{\Omega} \geq \|Q_{\theta}\|_{\mathbb{D}}$. D'après la proposition 3.3.1

$$\begin{aligned} \sup \{ \|P_{\theta}\|_{\Omega} \mid e^{i\theta} \in A \} &\geq \sup \{ \|Q_{\theta}\|_{\mathbb{D}} \mid e^{i\theta} \in A \} \geq \|Q\|_{\mathbb{D}^2} \exp\left(-\frac{4\pi d}{l}\right) \\ &\geq \sup \{ |Q(0, w)| \mid w \in \mathbb{D} \} \exp\left(-\frac{4\pi d}{l}\right) \\ &\geq \sup \{ |P(a, w)| \mid w \in \mathbb{D} \} \exp\left(-\frac{4\pi d}{l}\right) \geq \frac{\|P\|_{\Omega \times \mathbb{D}}}{1 + \varepsilon} \exp\left(-\frac{4\pi d}{l}\right). \end{aligned}$$

On fait tendre ε vers zéro pour conclure. ■

Nous pourrions utiliser le corollaire 3.3.2 précédent pour démontrer les majorations des mesures de transcendance. Cependant, nous allons voir qu'il est possible d'améliorer considérablement la proposition 3.3.1 de Coman et Poletsky. À cette fin nous utilisons le

lemme 3.3.3 ci-dessous qui est démontré dans [31] lorsque K est un disque et que nous étendons à tout compact du plan.

Lemme 3.3.3. *Soient $P \in \mathbb{C}_{\leq d}[z]$ et $K \subset \mathbb{C}$ un compact. Alors pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$ l'ensemble*

$$E = \{z \in K \mid |P(z)| < \|P\|_K \varepsilon^d\},$$

est de capacité logarithmique au plus $\varepsilon \text{diam}(K)$.

Démonstration. Supposons d'abord que K est simplement connexe. On suppose sans perte de généralité que P n'est pas identiquement nul. L'ensemble E étant un domaine simplement connexe, on peut appliquer l'inégalité de Bernstein-Walsh 3.2.7 sur E . Donc

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus E, \quad |P(z)| \leq \|P\|_E \exp \{dg_{\mathbb{C} \setminus E}(z, \infty)\}.$$

D'après la proposition 2.1.14 du chapitre 2

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus E, \quad g_{\mathbb{C} \setminus E}(z, \infty) = \log \frac{1}{\text{cap}(E)} + \int_E \log |z - t| d\nu_E(t),$$

où ν_E est la mesure d'équilibre de E ¹⁰. Donc

$$\forall z \in K \setminus E, \quad g_{\mathbb{C} \setminus E}(z, \infty) \leq -\log \text{cap}(E) + \log \text{diam}(K),$$

et puisque $\varepsilon < 1$, le polynôme P atteint son maximum dans K en dehors de E . D'où

$$\|P\|_K \leq \|P\|_E \left(\frac{\text{diam}(K)}{\text{cap}(E)} \right)^d \leq \|P\|_K \varepsilon^d \left(\frac{\text{diam}(K)}{\text{cap}(E)} \right)^d.$$

Ce qui termine la démonstration lorsque K est simplement connexe. Lorsque K n'est pas simplement connexe, on remarque que

$$K \subset \hat{K}, \quad \|P\|_K = \|P\|_{\hat{K}} \quad \text{et} \quad \text{diam}(K) = \text{diam}(\hat{K}),$$

où \hat{K} est l'enveloppe simplement connexe de K . Donc le lemme 3.3.3 pour K se déduit du lemme 3.3.3 appliqué au domaine simplement connexe \hat{K} . ■

Grâce au lemme 3.3.3 précédent, on obtient l'amélioration suivante de la proposition 3.3.1 de Coman et Poletsky.

Proposition 3.3.4. *Soient $P \in \mathbb{C}_{\leq d}[z]$, $K \subset \mathbb{C}$ un compact et $A \subset K$ un borélien. Alors*

$$\|P\|_K \leq \left(\frac{\text{diam}(K)}{\text{cap}(A)} \right)^d \|P\|_A.$$

En particulier si K est \mathbb{D} et $A \subset \mathbb{S}^1$ un borélien de longueur $l > 0$

$$\|P\|_{\mathbb{D}} \leq 2^d \sin\left(\frac{l}{4}\right)^{-d} \|P\|_A. \tag{3.3.1}$$

Démonstration. On note $\varepsilon = \text{cap}(K)$ et $a > \text{diam}(K)$. Supposons par l'absurde que $a^{-d} \varepsilon^d \|P\|_K \geq \|P\|_A$. Alors le borélien A est contenu dans l'ensemble

$$E = \{z \in K \mid |P(z)| \leq \|P\|_K a^{-d} \varepsilon^d\}.$$

Or E est de capacité logarithmique au plus $\frac{\varepsilon}{a} \text{diam}(K)$ d'après le lemme 3.3.3. Donc $\varepsilon \leq \text{cap}(A) \leq \text{cap}(E) \leq \frac{\varepsilon}{a} \text{diam}(K) < \varepsilon$. C'est absurde. Donc $\|P\|_K < a^d \varepsilon^{-d} \|P\|_A$. On obtient la première inégalité en faisant tendre a vers $\text{diam}(K)$. La seconde inégalité est obtenue en remarquant que $\text{diam}(\mathbb{D}) = 2$ et que la capacité logarithmique de A est minorée par $\sin(\frac{l}{4})$ d'après le théorème 2.1.13 du chapitre 2. ■

¹⁰Voir le théorème 2.1.9 du chapitre 2 pour la définition de la mesure d'équilibre d'un compact.

Remarque 3.3.5. Le résultat suivant est connu sous le nom d'*inégalité de Turán* (voir [92, Th. 12.4.23]). Pour tout $P \in \mathbb{C}_{\leq d}[z]$ et tout $A \subset \mathbb{S}^1$ un arc de longueur $l > 0$

$$\|P\|_{\mathbb{D}} < e \sqrt{\frac{2d}{\pi}} \left(\frac{e\pi}{l}\right)^{d-1} \|P\|_A.$$

Une inégalité similaire est impliquée par l'inégalité 3.3.1 de la proposition 3.3.4. En effet

$$\forall d \in \mathbb{N}, \forall l \in [0, 2\pi[, 2^d \sin\left(\frac{l}{4}\right)^{-d} \leq 2^d \left(\frac{8\pi}{l}\right)^d \leq \left(\frac{16\pi}{l}\right)^d,$$

puisque $\forall x \in [0, 2\pi[, \sin\left(\frac{x}{4}\right) \geq \frac{x}{2\pi}$. Donc pour tout $P \in \mathbb{C}_{\leq d}[z]$ et tout $A \subset \mathbb{S}^1$ un borélien de longueur $l > 0$

$$\|P\|_{\mathbb{D}} \leq \left(\frac{16\pi}{l}\right)^d \|P\|_A.$$

La dépendance en le degré d de l'inégalité 3.3.5 est légèrement moins fine que celle de l'inégalité de Turán lorsque l tend vers zéro. Toutefois cela n'a pas de conséquences sur la finesse des majorations des mesures de transcendance de ce manuscrit.

Remarque 3.3.6. En utilisant le fait que la capacité logarithmique d'un intervalle borné de \mathbb{R} est plus grande ou égale à $\frac{l}{4}$ où l est la longueur de l'intervalle, l'inégalité 3.3.1 implique également que pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}_{\leq d}[x]$, tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et tout borélien $E \subset I$

$$\|P\|_I \leq \left(\frac{4\lambda_1(I)}{\lambda_1(E)}\right)^d \|P\|_E.$$

Cette dernière inégalité est un corollaire de l'inégalité de Remez¹¹.

Remarque 3.3.7. Dans [37] Friedland et Yomdin ont démontré l'inégalité de Remez généralisée suivante

$$\forall A \subset \mathbb{D}, \forall \alpha > 0, \forall P \in \mathbb{C}_{\leq d}[z], \|P\|_{\mathbb{D}} \leq \left(\frac{6e}{H^\alpha(A)}\right)^{d/\alpha} \|P\|_A. \quad (3.3.2)$$

La proposition 3.3.4 ci-dessus implique une inégalité semblable à 3.3.2. En effet d'une part

$$\|P\|_A = \inf \{ \|P\|_B \mid A \subset B, B \text{ un fermé tel que } \text{cap}(B) > 0 \},$$

et d'autre part $H^\alpha(B)^{1/\alpha} \leq e^{1/\alpha} \text{cap}(B)$ lorsque B est un fermé de capacité logarithmique positive. Donc

$$\|P\|_{\mathbb{D}} \leq \left(\frac{\text{diam}(\mathbb{D})}{\text{cap}(B)}\right)^d \|P\|_B \leq \left(\frac{2^\alpha e}{H^\alpha(B)}\right)^{d/\alpha} \|P\|_B \leq \left(\frac{2^\alpha e}{H^\alpha(A)}\right)^{d/\alpha} \|P\|_B.$$

Corollaire 3.3.8. Soient $\Omega \subset \mathbb{C}$ un domaine relativement compact, $P \in \mathbb{C}_{\leq d}[z, w]$ et $A \subset \mathbb{S}^1$ un ensemble. Nous supposons que A vérifie l'une des conditions suivantes

- l'ensemble A est un borélien de capacité au moins $l > 0$,
- l'ensemble A est un borélien de longueur au moins $l > 0$,
- l'ensemble A est de d -ième diamètre euclidien au moins $l > 0$.

Alors

$$\sup \{ \|P_\theta\|_\Omega \mid e^{i\theta} \in A \} \geq \|P\|_{\Omega \times \mathbb{D}} \left(\frac{l}{16\pi}\right)^d,$$

où $P_\theta(z) := P(z, e^{i\theta})$.

¹¹Voir [94].

Démonstration. Pour tout $z \in \mathbb{D}$, on note $Q_z(w) = P(z, w)$ et s_z le degré de Q_z . En appliquant la proposition 3.3.4 et la remarque 3.3.5, nous obtenons

$$\forall z \in \overline{\Omega}, \sup \{ \|P_\theta\|_\Omega \mid e^{i\theta} \in A \} \geq \|Q_z\|_A \geq \|Q_z\|_{\mathbb{D}} \left(\frac{l}{16\pi} \right)^{s_z} \geq \|Q_z\|_{\mathbb{D}} \left(\frac{l}{16\pi} \right)^d,$$

car $l \leq 2\pi < 16\pi$. Or $\sup \{ \|Q_z\|_{\mathbb{S}^1} \mid z \in \Omega \} = \|P\|_{\Omega \times \mathbb{D}}$. Finalement nous obtenons l'inégalité souhaitée en appliquant la majoration précédente en un $z \in \overline{\Omega}$ tel que $\|Q_z\|_{\mathbb{S}^1} = \|P\|_{\Omega \times \mathbb{D}}$. ■

Lemme de Boutroux-Cartan dans le disque Dans l'article [26], Coman et Poletsky démontrent une variante locale du lemme de Boutroux-Cartan 2.7.10.

Proposition 3.3.9 (Coman-Poletsky – [26]). *Soient $P \in \mathbb{C}_{\leq d}[z]$ non nul et $r > 2$. Alors pour tout $\varepsilon \in]0, \frac{1}{8\varepsilon}[$, l'ensemble*

$$\left\{ z \in \mathbb{A}(2, r) \mid |P(z)| \leq \|P\|_{\mathbb{D}} \left(\frac{\varepsilon|z|}{r^2} \right)^d \right\}, \quad (3.3.3)$$

est de d -ième diamètre euclidien au plus 36ε .

Contrairement au lemme de Boutroux-Cartan 2.7.10, la proposition 3.3.9 n'exige pas que le polynôme P soit unitaire puisque la normalisation porte cette fois sur la norme $\|P\|_{\mathbb{D}}$ au lieu du coefficient dominant de P . Nous utilisons le d -ième diamètre pseudo-hyperbolique plutôt que le d -ième diamètre euclidien dans nos majorations des mesures de transcendance holomorphes ou méromorphes. Il nous faut donc un analogue de la proposition 3.3.9 où le d -ième diamètre euclidien est remplacé par le d -ième diamètre pseudo-hyperbolique. À cette fin, on utilise le théorème de distorsion 3.3.10 ci-dessous.

Une *fonction p -valente* sur un domaine Ω est une fonction holomorphe de $\mathcal{O}(\Omega)$ qui prend au plus p fois avec multiplicité chaque valeur de \mathbb{C} .

Théorème 3.3.10 (Théorème de distorsion – [54, Th. 5.1]). *Soit $g \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ une fonction p -valente sur \mathbb{D} et ne s'annulant pas sur \mathbb{D} . Alors*

$$\forall z \in \mathbb{D}, |g(0)| \left(\frac{1 - |z|}{1 + |z|} \right)^{2p} \leq |g(z)| \leq |g(0)| \left(\frac{1 + |z|}{1 - |z|} \right)^{2p}.$$

Corollaire 3.3.11. *Soit $g \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ une fonction p -valente sur \mathbb{D} et ne s'annulant pas sur \mathbb{D} . Alors*

$$\forall z, w \in \mathbb{D}, \frac{1}{\tau_{\mathbb{D}}(z, w)^{2p}} \leq \left| \frac{g(w)}{g(z)} \right| \leq \tau_{\mathbb{D}}(z, w)^{2p}.$$

Démonstration. On considère un automorphisme $\phi \in \text{Mob}(\mathbb{D})$ envoyant 0 sur z et on pose $f = g \circ \phi$. La fonction f est p -valente sur \mathbb{D} et ne s'y annule pas. Donc d'après le théorème de distorsion 3.3.10

$$\forall w \in \mathbb{D}, \left(\frac{1 - |w|}{1 + |w|} \right)^{2p} \leq \left| \frac{f(w)}{f(0)} \right| \leq \left(\frac{1 + |w|}{1 - |w|} \right)^{2p}.$$

D'où

$$\forall w \in \mathbb{D}, \frac{1}{\tau_{\mathbb{D}}(\phi(z), \phi(w))^{2p}} \leq \left| \frac{g(\phi(w))}{g(\phi(z))} \right| \leq \tau_{\mathbb{D}}(\phi(z), \phi(w))^{2p}.$$

Or d'après le principe de subordination pour la distance de Harnack 2.1.31

$$\tau_{\mathbb{D}}(\phi(z), \phi(w)) = \tau_{\mathbb{D}}(z, w),$$

ce qui termine la démonstration. ■

Lemme 3.3.12. Soit $P \in \mathbb{C}_{\leq d}[z]$ dont les racines avec multiplicité sont w_1, \dots, w_d et le coefficient dominant est a . On considère le polynôme $\mathring{P} \in \mathbb{C}_{\leq d}[z]$ défini par

$$\forall z \in \mathbb{C}, \mathring{P}(z) := a \prod_{|w_j| \leq 1} (z - w_j) \prod_{|w_j| > 1} (1 - \bar{w}_j z).$$

Alors \mathring{P} ne s'annule pas en dehors de $\bar{\mathbb{D}}$. De plus

$$\forall z \in \mathbb{D}, |P(z)| \geq |\mathring{P}(z)| \quad \text{et} \quad \forall w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}, |P(w)| \leq |\mathring{P}(w)| \quad (3.3.4)$$

En particulier $\|P\|_{\mathbb{D}} = \|\mathring{P}\|_{\mathbb{D}}$.

Démonstration. Il est immédiat que \mathring{P} ne s'annule pas en dehors de $\bar{\mathbb{D}}$. L'inégalité 3.3.4 se réduit à montrer

$$\forall y \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}, \forall z \in \bar{\mathbb{D}}, |z - y| \geq |1 - \bar{y}z| \quad \text{et} \quad \forall y \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}, \forall w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}, |z - y| \leq |1 - \bar{y}z|.$$

Ces inégalités sont vraies puisque

$$\forall z, w \in \mathbb{C}, |z - w| \geq |1 - \bar{w}z| \iff |z|^2 + |w|^2 \geq 1 + |zw|^2 \iff |w|^2(1 - |z|^2) \geq 1 - |z|^2.$$

Ce qui termine la démonstration. \blacksquare

Proposition 3.3.13. Soient $P \in \mathbb{C}_{\leq d}[z]$ non nul et $r > 0$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble

$$E(P, \varepsilon) = \left\{ z \in \mathbb{D}_r : |P(z)| \leq \|P\|_{\mathbb{D}_r} \Phi_d\left(\frac{|z|}{r}\right) \varepsilon^d \right\} \quad \text{avec} \quad \Phi_d(x) := x^d \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^{4d},$$

est de d -ième diamètre pseudo-hyperbolique dans \mathbb{D}_r au plus $2e\varepsilon$.

Démonstration. On suppose que r vaut 1 puisque le cas général s'en déduit par un changement de variable. Supposons dans un premier temps que P n'a pas de racine en dehors de \mathbb{D} . Or la fonction B_P définie par

$$\forall z \in \mathbb{D}, B_P(z) := \frac{P(z)}{z^d \mathring{P}\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{a \prod_{j=1}^d (z - w_j)}{\bar{a} z^d \prod_{j=1}^d \left(\frac{1}{z} - \bar{w}_j\right)} = \frac{a}{\bar{a}} \prod_{j=1}^d \frac{z - w_j}{1 - \bar{w}_j z},$$

est un produit de Blaschke fini de \mathbb{D} de degré d . D'après le lemme de Milloux 2.7.14, l'ensemble

$$E(B_P, \varepsilon) := \left\{ z \in \mathbb{D} : |B_P(z)| \leq \varepsilon^d \right\},$$

est de d -ième diamètre hyperbolique dans \mathbb{D} au plus $2e\varepsilon$. Or la fonction $g \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ définie par $g(z) = B_P(z)/P(z)$ est une fonction d -valente sur \mathbb{D} puisque $g \in \mathbb{C}_{1,d}(z)$ et son dénominateur ne s'annule pas sur \mathbb{D} . Donc d'après le corollaire 3.3.11

$$\forall z, w \in \mathbb{D}, \frac{1}{\tau_{\mathbb{D}}(z, w)^{2p}} \leq \left| \frac{g(w)}{g(z)} \right| \leq \tau_{\mathbb{D}}(z, w)^{2p}.$$

Pour tout $z \in \mathbb{D}$, on choisit $m_z \in \mathbb{D}$ tel que $|m_z| = |z|$ et $\|P\|_{\mathbb{D}_{|z|}} = |P(m_z)|$. Donc

$$\begin{aligned} \forall z \in \mathbb{D}, \log |B_P(z)| &= \log |P(z)| + \log |g(z)| \\ &\leq \log |P(z)| + \log |B_P(m_z)| - \log |P(m_z)| + 2d \log \tau_{\mathbb{D}}(z, m_z) \\ &\leq \log \frac{|P(z)|}{\|P\|_{\mathbb{D}_{|z|}}} + 2d \log \tau_{\mathbb{D}}(z, m_z) \leq \log \frac{|P(z)|}{\|P\|_{\mathbb{D}_{|z|}}} + 2d \log \tau_{\mathbb{D}}(|z|, -|z|) \\ &\leq \log \frac{|P(z)|}{\|P\|_{\mathbb{D}}} - d \log (|z|) + 4d \log \left(\frac{1+|z|}{1-|z|} \right). \end{aligned}$$

La dernière inégalité est obtenue en appliquant l'inégalité de Bernstein-Walsh 3.2.7. Donc l'ensemble $E(P, \varepsilon)$ est contenu dans $E(B_P, \varepsilon)$ qui est de d -ième diamètre pseudo-hyperbolique au plus $2e\varepsilon$. On suppose maintenant que P n'a pas de racine sur le cercle

unité \mathbb{S}^1 mais P peut avoir des racines en dehors du disque unité. D'après le lemme 3.3.12, le polynôme \mathring{P} a d'une part toutes ses racines dans le disque unité \mathbb{D} et d'autre part

$$\forall z \in E(P, \varepsilon), |\mathring{P}(z)| \leq |P(z)| \leq \|P\|_{\mathbb{D}} \Phi_d(|z|) \leq \|\mathring{P}\|_{\mathbb{D}} \Phi_d(|z|).$$

Donc $E(P, \varepsilon) \subset E(\mathring{P}, \varepsilon)$, ce qui permet de conclure dans ce cas. Le cas général s'en déduit en considérant une suite de polynômes sans racine sur le cercle unité et convergeant uniformément vers P sur un voisinage compact de \mathbb{D} . ■

Méthode basée sur la formule de Poisson-Jensen Le choix de la métrique euclidienne dans le paragraphe précédent pour mesurer le lieu où des familles de polynômes P_w sont de petit module est assez discutable lorsque le domaine Ω est borné. La distance pseudo-hyperbolique de Ω semble être un choix plus naturel lorsque le domaine Ω est simplement connexe. Plus généralement, nous remplaçons la métrique pseudo-hyperbolique par la fonction p_Ω lorsque Ω est un domaine greenien de \mathbb{C} . En effet lorsque la fonction g étudiée est méromorphe sur Ω et qu'il faudra éviter ses pôles dans un compact $K \Subset \Omega$, le problème se réduit grâce à la formule de Poisson-Jensen 2.5.9 à estimer le lieu dans Ω où un produit de la forme $\prod_{j=1}^d p_\Omega(z, a_j)$ est petit. Nous démontrons un résultat analogue à la proposition 3.3.9 pour le domaine Ω .

Lemme 3.3.14. *Soient $\Omega \subset \mathbb{C}$ un domaine greenien, μ une mesure borélienne à support compact dans Ω telle que $\mu(\Omega) < \infty$ et $\varepsilon > 0$. On note $E = \{z \in \Omega \mid U_\Omega^\mu(z) \geq \frac{1}{\varepsilon}\}$. Alors $\text{cap}(E, \Omega) \leq \mu(\Omega)\varepsilon$. De plus*

$$\forall a \in \Omega, r \in [0, 1[, \text{cap}(\mathbb{D}_\Omega(a, r), \Omega) = \frac{1}{\log \frac{1}{r}}.$$

Démonstration. Afin de démontrer la majoration de $\text{cap}(E, \Omega)$, il suffit de montrer que $I_\Omega(\nu_E^\Omega) \geq \frac{1}{\varepsilon}$ où ν_E^Ω est la mesure d'équilibre de Green du condenseur (E, Ω) . D'après le théorème de Frostman 2.1.17, il existe un ensemble $F \subset \Omega$ tel que $\text{cap}(F) = 0$ et

$$\forall z \in \Omega \setminus F, U_\Omega^{\nu_E^\Omega}(z) = I_\Omega(\nu_E^\Omega).$$

Donc en appliquant le théorème de Fubini

$$\begin{aligned} \mu(\Omega) I_\Omega(\nu_E^\Omega) &= \int_{\mathbb{C}} U_\Omega^{\nu_E^\Omega}(z) d\mu(z) = \int_{\mathbb{C}} \int_{\mathbb{C}} g_\Omega(z, w) d\nu_E^\Omega(w) d\mu(z) \\ &= \int_{\mathbb{C}} \int_{\mathbb{C}} g_\Omega(z, w) d\mu(z) d\nu_E^\Omega(w) = \int_{\mathbb{C}} \int_{\mathbb{C}} g_\Omega(w, z) d\mu(z) d\nu_E^\Omega(w) \\ &= \int_{\mathbb{C}} U_\Omega^\mu(w) d\nu_E^\Omega(w) \geq \frac{1}{\varepsilon}, \end{aligned}$$

car le support de ν_E^Ω est contenu dans E . Cela termine la démonstration de la première affirmation. En appliquant cette inégalité à la mesure de Dirac δ_a et $\varepsilon = (\log \frac{1}{r})^{-1}$, on obtient la majoration

$$\forall r \in [0, 1[, \text{cap}(\mathbb{D}_\Omega(a, r), \Omega) \leq \frac{1}{\log \frac{1}{r}}.$$

Pour obtenir l'inégalité dans l'autre sens, on considère μ la mesure harmonique $d\varpi_D(\cdot, a)$ avec $D = \mathbb{D}_\Omega(r, a)$. Or

$$\begin{aligned} I_\Omega(\mu) &= \int_{\mathbb{C}} \int_{\mathbb{C}} g_\Omega(z, w) d\mu(z) d\mu(w) = \int_{\mathbb{C}} \{g_\Omega(a, w) - g_D(a, w)\} d\mu(w) = \int_{\mathbb{C}} g_\Omega(a, w) d\mu(w) \\ &= \int_{\partial D} g_\Omega(a, w) d\mu(w) = \log \left(\frac{1}{r} \right). \end{aligned}$$

Donc $\text{cap}(\mathbb{D}_\Omega(a, r), \Omega) \geq 1/I_\Omega(\mu) \geq 1/(\log \frac{1}{r})$. Ce qu'il fallait démontrer. ■

Proposition 3.3.15. Soient (Ω, z_0) un domaine régulier de \mathbb{C} , $P \in \mathbb{C}_{\leq d}[z]$ non nul et $\lambda, r \in]0, 1[$ tels que $0 < \lambda < r$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble

$$E = \{z \in \Omega_\lambda \mid \log |P(z)| \leq \log \|P\|_{\Omega_\lambda} + d \log \varepsilon - d\tau_\Omega(\lambda, r)^2 \log C\} \text{ avec } C = 8 \text{diam}_\Omega(\lambda, r),$$

Alors $\text{cap}(E, \Omega_r) \leq -\frac{1}{\log \varepsilon}$ et $\text{diam}_d(E, \Omega_r) \leq d\varepsilon$.

Démonstration. On commence par appliquer la formule de Poisson-Jensen 2.5.9 à la fonction sous-harmonique $\log |P|$ sur Ω_r . Alors

$$\forall z \in \Omega_r, \log |P(z)| = \int_{\partial\Omega_r} \log |P(\xi)| d\varpi_{\Omega_r}(z, \xi) - U_{\Omega_r}^\mu(z),$$

où $\mu = \sum_{w \in \Omega_r} \nu_0 g(w) \delta_w$ et $\nu_0 g$ est le diviseur des zéros de g . Donc

$$\forall z \in \Omega_r, \log |P(z)| \leq \|P\|_{\Omega_r} - U_{\Omega_r}^\mu(z).$$

Autrement dit la fonction u définie par

$$\forall z \in \Omega_r, u(z) = \log \left(\frac{\|P\|_{\Omega_r}}{|P(z)|} \right) - U_{\Omega_r}^\mu(z),$$

est harmonique sur Ω_r et positive sur ce même domaine. D'après l'inégalité de Harnack 2.1.27 et puisque $\log \tau_{\Omega_r}$ est une pseudo-métrie d'après le théorème 2.1.29

$$\begin{aligned} \forall z, w \in \Omega_\lambda, u(z) &\leq \tau_{\Omega_r}(z, w) u(w) \leq \tau_{\Omega_r}(z, w) \log \left(\frac{\|P\|_{\Omega_r}}{|P(w)|} \right) \\ &\leq \tau_{\Omega_r}(z, z_0) \tau_{\Omega_r}(w, z_0) \log \left(\frac{\|P\|_{\Omega_r}}{|P(w)|} \right) \leq \tau_\Omega(\lambda, r)^2 \log \left(\frac{\|P\|_{\Omega_r}}{|P(w)|} \right). \end{aligned}$$

On choisit $w \in \partial\Omega_\lambda$ tel que $|P(w)| = \|P\|_{\Omega_\lambda}$. Donc d'après l'inégalité 3.2.7

$$\forall z \in \Omega_r, \log |P(z)| \leq \log \|P\|_{\Omega_\lambda} + d \log \text{diam}_\Omega(\lambda, r) + d \log 8 \leq \log \|P\|_{\Omega_\lambda} + d \log C.$$

D'où

$$\forall z \in E, -d \log \varepsilon + d\tau_\Omega(\lambda, r)^2 \log C - U_{\Omega_r}^\mu(z) \leq u(z) \leq d\tau_\Omega(\lambda, r)^2 \log C.$$

Donc E est contenu dans l'ensemble

$$\left\{ z \in \Omega_r \mid U_{\Omega_r}^\mu(z) > \frac{1}{\eta} \right\} \text{ avec } \eta = -\frac{1}{d \log \varepsilon}.$$

Ce dernier ensemble est de capacité dans Ω_r au plus $d\eta$ d'après le lemme 3.3.14 et de d -ième diamètre greenien dans Ω_r au plus $d\varepsilon$. Ce qui termine la démonstration du lemme. ■

3.4 Géométrie du domaine Ω

Les majorations des théorèmes 3.1.14 et 3.1.16 font figurer les termes $\text{diam}_\Omega(\lambda, r)$, $\tau_\Omega(\lambda, r)$ et $\varpi_\Omega(\lambda, t, r)$ qui ne dépendent que de la géométrie des strates du domaine (Ω, z_0) et non de la fonction $g \in \mathcal{M}(\Omega)$ étudiée. Bien que ces termes ne dépendent pas de la fonction g ou du degré d , le fait est que dans les applications de ces théorèmes, il nous faudra considérer des couronnes $\mathbb{A}_\Omega(\lambda, r)$ avec λ et r dépendant de g et d . Nous devons donc estimer ces quantités aussi précisément que possible.

Majoration de $\text{diam}_\Omega(\lambda, r)$ Nous n'obtenons dans le lemme 3.4.3 ci-dessous qu'une majoration du terme $\text{diam}_\Omega(\lambda, r)$ dans le cas où Ω est un domaine simplement connexe.

Théorème 3.4.1 ([91, Th. 1.3]). *Soit $g \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ une application conforme. Alors*

$$\forall z \in \mathbb{D}, |g'(0)| \frac{|z|}{(1+|z|)^2} \leq |g(z) - g(0)| \leq |g'(0)| \frac{|z|}{(1-|z|)^2}.$$

Lemme 3.4.2. *Soient $g \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ une application conforme et $\lambda, r \in \mathbb{R}$ tels que $0 < \lambda \leq r < 1$. Alors*

$$\forall w \in \partial\mathbb{D}_\lambda, \frac{(r+\lambda)(1+r\lambda)}{(1+r\lambda+(r+\lambda))^2} \leq \sup_{z \in \mathbb{D}_r} \frac{|g(z) - g(w)|}{|g'(w)|} \leq \frac{(r+\lambda)(1+r\lambda)}{(1+r\lambda-(r+\lambda))^2}.$$

Démonstration. On fixe $w \in \partial\mathbb{D}_\lambda$ et on considère l'application f conforme sur \mathbb{D} définie par

$$\forall z \in \mathbb{D}, f(z) = (g \circ h)(z) \text{ avec } h(z) = \frac{z+w}{1+z\bar{w}}.$$

Or $f'(0) = g'(w)$, $h^{-1}(z) = p(z, w)$ et

$$\sup_{z \in \mathbb{D}_r} p(z, w) = p(r, -\lambda) = \frac{r+\lambda}{1+r\lambda}.$$

D'après le théorème 3.4.1 ci-dessus

$$\forall z \in \mathbb{D}, |f'(0)| \frac{|h^{-1}(z)|}{(1+|h^{-1}(z)|)^2} \leq |f(h^{-1}(z)) - f(0)| \leq |f'(0)| \frac{|h^{-1}(z)|}{(1-|h^{-1}(z)|)^2}.$$

Donc

$$|g'(w)| \frac{(r+\lambda)(1+r\lambda)}{(1+r\lambda+(r+\lambda))^2} \leq \sup_{z \in \mathbb{D}_r} |g(z) - g(w)| \leq |g'(w)| \frac{(r+\lambda)(1+r\lambda)}{(1+r\lambda-(r+\lambda))^2},$$

Ce qu'il fallait démontrer. ■

Lemme 3.4.3. *Soient (Ω, z_0) un domaine simplement connexe. Alors pour tout $\lambda, r \in \mathbb{R}$ tels que $0 < \lambda \leq r < 1$*

$$\log \text{diam}_\Omega(\lambda, r) \leq 4 \log \left(\frac{8r}{\lambda(1-r)} \right).$$

Démonstration. D'après le théorème d'uniformisation de Riemann, il existe une application conforme $g : \mathbb{D} \rightarrow \Omega$ telle que $g(0) = z_0$. On choisit $w_0 \in \partial\mathbb{D}_\lambda$ tel que $|g'(w_0)| = \|g'\|_{\mathbb{D}_\lambda}$. La fonction de Green étant un invariant conforme d'après le théorème 2.1.5, on obtient

$$\begin{aligned} \text{diam}(\Omega_r) &= \text{diam}(g(\mathbb{D}_r)) = \sup\{|g(z) - g(w)| \mid z, w \in \mathbb{D}_r\} \\ &\leq 2 \sup\{|g(z) - g(w_0)| \mid z \in \mathbb{D}_r\}. \end{aligned}$$

Donc d'après le lemme 3.4.2

$$\text{diam}(\Omega_r) \leq 2 \|g'\|_{\mathbb{D}_\lambda} \frac{(r+\lambda)(1+r\lambda)}{(1+r\lambda-(r+\lambda))^2} \leq \|g'\|_{\mathbb{D}_\lambda} \frac{8r}{(1-r)^4}.$$

En appliquant de nouveau le lemme 3.4.2 avec cette fois $r = \lambda$

$$\begin{aligned} \text{diam}(\Omega_\lambda) &\geq \sup_{z \in \mathbb{D}_\lambda} |g(z) - g(w_0)| \geq \|g'\|_{\mathbb{D}_\lambda} \frac{2\lambda(1+\lambda^2)}{(1+\lambda^2+2\lambda)^2} \geq \|g'\|_{\mathbb{D}_\lambda} \frac{2\lambda(1+\lambda^2)}{(1+\lambda)^4} \\ &\geq \|g'\|_{\mathbb{D}_\lambda} \frac{2\lambda}{(1+\lambda)^4}. \end{aligned}$$

D'où

$$\log \text{diam}_\Omega(\lambda, r) \leq \log \left(\frac{4r(1+\lambda)^4}{\lambda(1-r)^4} \right) \leq 4 \log \left(\frac{r(1+\lambda)}{\lambda(1-r)} \right).$$

Ce qu'il fallait démontrer. ■

Majoration de $\tau_\Omega(\lambda, r)$ On rappelle que pour tout domaine (Ω, z_0) et $\lambda, r \in \mathbb{R}$ tels que $0 < \lambda < r < 1$, on note $\tau_\Omega(\lambda, r) = \sup \{ \tau_{\Omega_r}(\xi, z_0) \mid \xi \in \Omega_\lambda \}$.

Lemme 3.4.4. Soient $(\Omega, z_0), (\Upsilon, w_0)$ deux domaines réguliers et $h : (\Omega, z_0) \rightarrow (\Upsilon, w_0)$ conforme. Alors pour tout $\lambda, r \in \mathbb{R}$ tels que $0 < r < \lambda < 1$, $\tau_\Omega(\lambda, r) = \tau_\Upsilon(\lambda, r)$. En particulier lorsque $(\Upsilon, w_0) = (\mathbb{D}, 0)$

$$\tau_\Omega(\lambda, r) \leq \frac{r + \lambda}{r - \lambda}.$$

Démonstration. D'après le principe de subordination des fonctions de Green 2.1.5

$$\forall z \in \Omega_r, -\log r < g_\Omega(z, z_0) \leq g_\Upsilon(h(z), h(z_0)) \leq g_\Upsilon(h(z), w_0).$$

Donc $h(\Omega_r) \subset \Upsilon_r$. En remplaçant h par h^{-1} , on obtient de la même manière l'inclusion $\Upsilon_r \subset h(\Omega_r)$. Or en appliquant le principe de subordination de la distance de Harnack 2.1.31

$$\forall \xi \in \Omega_\lambda, \tau_{\Upsilon_r}(h(\xi), w_0) \leq \tau_{\Upsilon_r}(h(\xi), h(z_0)) \leq \tau_{\Omega_r}(\xi, z_0) \leq \tau_\Omega(\lambda, r).$$

Donc $\tau_\Upsilon(\lambda, r) \leq \tau_\Omega(\lambda, r)$. En remplaçant h par h^{-1} , on obtient $\tau_\Omega(\lambda, r) \leq \tau_\Upsilon(\lambda, r)$. Lorsque $(\Upsilon, w_0) = (\mathbb{D}, 0)$, la quantité $\tau_\Upsilon(\lambda, r)$ vaut $\frac{r+\lambda}{r-\lambda}$ d'après la remarque 2.1.28. ■

Calcul de $\varpi_\Omega(\lambda, r, \nu)$ On note

$$\varpi_\Omega(\lambda, r, \nu) := \inf \{ \varpi(z, \partial\Omega_\lambda, \mathbb{A}_\Omega(\lambda, \nu)) \mid z \in \partial\Omega_r \},$$

où $\varpi(z, \partial\Omega_\lambda, \mathbb{A}_\Omega(\lambda, \nu))$ est la mesure harmonique de z par rapport à $\partial\Omega_\lambda$ dans la couronne généralisée $\mathbb{A}_\Omega(\lambda, \nu)$. Dans ce paragraphe on calcule $\varpi(z, \partial\Omega_\lambda, \mathbb{A}_\Omega(\lambda, \nu))$ puis $\varpi_\Omega(\lambda, r, \nu)$ lorsque Ω est un domaine régulier. Le théorème 3.4.5 ci-dessous affirme que la mesure harmonique de Ω relativement à E peut être définie comme une fonction extrémale grâce à la méthode de Perron.

Théorème 3.4.5 ([93, Th. 4.3.2]). Soient $\Omega \subset \mathbb{C}$ un domaine greenien et $E \subset \partial\Omega$ un borélien. Alors

$$\forall z \in \Omega, \varpi(z, E, \Omega) = \sup \{ u(z) \mid u \in \mathcal{SH}(\Omega), \forall \xi \in \partial\Omega, \overline{\lim}_{w \rightarrow \xi} u(w) \leq 1_E(\xi) \}.$$

Proposition 3.4.6. Soient (Ω, z_0) un domaine greenien et $\lambda, \nu \in \mathbb{R}$ tels que $0 < \lambda < \nu < 1$. Alors

$$\forall z \in \Omega, \varpi_\Omega(z, \partial\Omega_\lambda, \mathbb{A}_\Omega(\lambda, \nu)) = \frac{\log(\nu) - \log p_\Omega(z, z_0)}{\log(\frac{\nu}{\lambda})}.$$

En particulier

$$\forall r \in [\lambda, \nu], \varpi_\Omega(\lambda, r, \nu) = \frac{\log(\frac{\nu}{r})}{\log(\frac{\nu}{\lambda})}.$$

Démonstration. On définit la fonction u par

$$\forall z \in \mathbb{A}_\Omega(\lambda, \nu), u(z) = \frac{\log(\nu) - \log p_\Omega(z, z_0)}{\log(\frac{\nu}{\lambda})}.$$

La fonction u est harmonique sur $\mathbb{A}_\Omega(\lambda, \nu)$ puisque $z \mapsto g_\Omega(z, z_0)$ est harmonique sur $\Omega \setminus \{z_0\}$ et z_0 n'est pas dans la couronne $\mathbb{A}_\Omega(\lambda, \nu)$. De plus par continuité de la fonction de Green

$$\forall \xi \in \partial\mathbb{A}_\Omega(\lambda, \nu), \overline{\lim}_{w \rightarrow \xi} u(w) \leq 1_{\partial\Omega_\lambda}(\xi) \quad \text{et} \quad \forall \xi \in \partial\Omega_\lambda, \overline{\lim}_{w \rightarrow \xi} u(w) = 1.$$

Donc d'après le théorème 3.4.5 ci-dessus

$$\forall z \in \mathbb{A}_\Omega(\lambda, \nu), u(z) \leq \varpi(z, \partial\Omega_\lambda, \mathbb{A}_\Omega(\lambda, \nu)).$$

On note

$$h(z) = u(z) - \varpi(z, \partial\Omega_\lambda, \mathbb{A}_\Omega(\lambda, \nu)).$$

Or h est une fonction harmonique sur $\mathbb{A}_\Omega(\lambda, \nu)$ puisque u et la mesure harmonique sont harmoniques sur cette couronne. De plus h est nulle sur $\partial\Omega_\lambda$. Donc par le principe du maximum 2.1.2, la fonction h est identiquement nulle. La seconde propriété s'obtient en remarquant que $p_\Omega(z, z_0)$ est égal à r sur $\partial\Omega_r$. ■

3.5 Mesure de transcendance holomorphe

Cette section est dévolue à l'étude de la mesure de transcendance $e_d^\Omega(\lambda, g)$. On montre d'une part que la mesure $e_d^\Omega(\lambda, g)$ satisfait les propriétés P1 et P2 de l'introduction de ce chapitre et d'autre part on démontre le théorème 3.1.14 énoncé page 81.

Majoration de l'indice de Bernstein Le lemme 3.5.1 suivant montre que pour majorer l'indice de Bernstein¹² $b_\Omega(\lambda, r, P_g)$, il suffit de majorer la mesure de transcendance holomorphe $e_d^\Omega(\lambda, g)$ et la fonction maximum de g sur la strate Ω_r . D'après la proposition 2.5.19 du chapitre 2, la majoration de cet indice de Bernstein conduit à un lemme de zéros de g le long des strates de Ω . Par conséquent la mesure de transcendance $e_d^\Omega(\lambda, g)$ vérifie la propriété P1 de l'introduction de ce chapitre.

Lemme 3.5.1. *Soient $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ une fonction transcendante et $P \in \mathbb{C}_{\leq d}[z, w]$ non nul. Alors pour tout $\lambda, r \in \mathbb{R}$ tels que $0 < \lambda < r < 1$*

$$b_\Omega(\lambda, r, P_g) \leq m_d^\Omega(\lambda, r, g) \leq e_d^\Omega(\lambda, g) + d \log^+ M_\Omega(r, g) + d \log \text{diam}_\Omega(\lambda, r) + d \log 8.$$

Démonstration. La première inégalité découle des définitions de l'indice de Bernstein et de la mesure de transcendance holomorphe. En effet, en posant $Q(z, w) := P(z, w)/M_\Omega(\lambda, P_g)$ et puisque Q est un polynôme non nul de $\mathbb{C}_{\leq d}[z, w]$, on obtient

$$b_\Omega(\lambda, r, P_g) \leq \log M_\Omega(r, P_g) - \log M_\Omega(\lambda, P_g) \leq \log M_\Omega(r, Q_g) \leq m_d^\Omega(\lambda, r, g).$$

La seconde inégalité est une application de la proposition 3.2.7. En effet, soit $P \in \mathbb{C}_{\leq d}[z, w]$ un polynôme extrémal pour la mesure de transcendance $e_d^\Omega(\lambda, g)$. D'après la proposition 3.2.7

$$\forall z \in \Omega_r \times \mathbb{D}, \log |P_g(z)| \leq \log \|P\|_{\Omega_\lambda \times \mathbb{D}} + d \log^+ M_\Omega(r, g) + d \log^+ \left(\frac{\text{diam}(\Omega_r)}{\text{diam}(\Omega_\lambda)} \right) + d \log 8.$$

On conclut en appliquant cette dernière inégalité en un point z de $\overline{\Omega_r}$ où P_g atteint son maximum sur ce domaine. ■

Invariance de la mesure de transcendance $e_d^\Omega(\lambda, g)$ Le lemme 3.5.2 ci-dessous affirme que la mesure de transcendance holomorphe $e_d^\Omega(\lambda, g)$ est invariante par dilatation du graphe de g .

Lemme 3.5.2. *Soit $g \in \mathcal{O}(\Omega, z_0)$. Alors pour tout $\lambda, r \in \mathbb{R}$ tels que $0 < \lambda < r < \infty$ et $s > 0$*

$$\forall d \in \mathbb{N}, e_d^\Omega(\lambda, g) = e_d^\Upsilon(\lambda, g_s) \quad \text{et} \quad m_d^\Omega(\lambda, r, g) = m_d^\Upsilon(\lambda, r, g_s),$$

où $g_s(z) = g(sz)$ et $\Upsilon = \frac{1}{s} \cdot \Omega$.

¹²Voir la définition de la section 2.4.

Démonstration. Soit P un polynôme extrémal de la mesure de transcendance $e_d^\Omega(\lambda, g)$. Notons $u(z) = \frac{z}{s}$. Or $\Upsilon_\lambda = u(\Omega_\lambda)$. Donc pour tout $h \in \mathcal{O}(\Omega)$

$$m_\Omega(\lambda, h) = m(\Omega_\lambda, h) = m(u^{-1}(\Upsilon_\lambda), h) = m_\Upsilon(\lambda, h_s).$$

On considère le polynôme $Q \in \mathbb{C}_{\leq d}[z, w]$ défini par $Q(z, w) = P(u^{-1}(z), w)$. Par construction et d'après ce qui précède

$$\|P\|_{\Omega_\lambda \times \mathbb{D}} = \|Q\|_{\Upsilon_\lambda \times \mathbb{D}} \quad \text{et} \quad M_\Omega(\lambda, P_g) = M_\Upsilon(\lambda, Q_{g_s}).$$

car $(P_g)_s = Q_{g_s}$. Donc $e_d^\Omega(\lambda, g) \leq e_d^\Upsilon(\lambda, g_s)$. On obtient l'inégalité dans l'autre sens par symétrie. La seconde égalité se démontre de la même façon. ■

Remarque 3.5.3. La mesure de transcendance $e_d(g)$ de Coman et Poletsky n'est pas invariante par dilatation du graphe g . Nous avons vu qu'une majoration de cette mesure de transcendance $e_d(g)$ permet d'établir un lemme des zéros dans le disque unité \mathbb{D} pour la fonction entière g . Pour obtenir un lemme de zéros pour tous les disques \mathbb{D}_λ , Coman et Poletsky exhibent sous certaines hypothèses dans [27] une majoration uniforme des mesures de transcendance $e_d(g_s)$ pour la famille de fonctions entières $g_s(z) = g(sz)$. Cette approche s'avère difficile à imiter lorsque g n'est plus définie sur le plan tout entier. Notre majoration uniforme en λ de la mesure de transcendance $e_d^\Omega(\lambda, g)$ conduit d'après la section précédente à un lemme de zéros de g dans toutes les strates Ω_λ . Il n'est donc plus nécessaire de considérer des dilatations de la fonction g , ce qui sera salutaire dans le chapitre 4.

Inégalité de convexité Afin de majorer la mesure de transcendance $e_d^\Omega(\lambda, g)$, nous utilisons une inégalité de convexité pour les fonctions maximums $M_\Omega(r, g)$ semblable à l'inégalité du théorème *des trois cercles d'Hadamard* ci-dessous utilisé par Coman et Poletsky dans [26] pour majorer $e_d(g)$.

Théorème 3.5.4 (Trois cercles d'Hadamard – [70]). *Soit $g \in \mathcal{O}(\mathbb{A}(\lambda, \nu))$. Alors pour tout $s, t, r \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda < s \leq t \leq r < \nu$*

$$\log \left(\frac{r}{s} \right) \log M(t, g) \leq \log \left(\frac{t}{s} \right) \log M(r, g) + \log \left(\frac{r}{t} \right) \log M(s, g).$$

Autrement dit, la fonction $x \mapsto \log M(e^x, g)$ est convexe sur l'intervalle $]\lambda, \nu[$.

Dans [66], l'argument clef de la démonstration du théorème d'Hadamard consiste à comparer, grâce au principe du maximum 2.1.2, la croissance de la fonction sous-harmonique $\log |g|$ dans la couronne $\mathbb{A}(\lambda, \nu)$ avec la famille de fonctions $z \mapsto \alpha \log |z|$ harmoniques sur cette même couronne. Pour des domaines Ω plus généraux, il est illusoire d'espérer disposer d'une famille de fonctions harmoniques explicites sur $\mathbb{A}_\Omega(\lambda, \nu)$ permettant de suivre la même méthode. Heureusement, la théorie du potentiel permet la construction implicite de ce type de famille via la notion de mesure harmonique¹³. Le théorème 3.5.5 ci-dessous est une généralisation du théorème de Hadamard pour un domaine Ω quelconque. Il est souvent désigné dans la littérature sous le nom de *two-constants theorem*. Étant donné son importance dans la démonstration du théorème 3.1.14, nous en donnons une démonstration détaillée ci-dessous.

Théorème 3.5.5 (Two-constants - [93, th. 4.3.7] et [82, p. 41]). *Soient $\Omega \subsetneq \hat{\mathbb{C}}$ un domaine tel que $\partial\Omega$ n'est pas polaire et B un borélien de $\partial\Omega$. Soit $u \in \mathcal{SH}(\Omega)$ telle que*

$$\forall \xi \in B, \overline{\lim}_{z \rightarrow \xi} u(z) \leq M_1 \quad \text{et} \quad \forall \xi \in \partial\Omega \setminus B, \overline{\lim}_{z \rightarrow \xi} u(z) \leq M_2.$$

¹³Voir la section 2.1 pour la définition et les propriétés élémentaires de la mesure harmonique.

Alors

$$\forall z \in \Omega, \quad u(z) \leq M_1 \varpi(z, B, \Omega) + M_2(1 - \varpi(z, B, \Omega)).$$

Démonstration. On considère la fonction $\phi := M_1 1_B + M_2(1 - 1_B)$. Puisque par hypothèse $\partial\Omega$ n'est pas un ensemble polaire, on peut appliquer le théorème 2.1.23. D'après ce théorème, il existe une unique mesure harmonique sur Ω et l'intégrale de Poisson $v(z) := \mathbf{P}_\Omega \phi(z)$ est une fonction harmonique sur Ω . Donc $u - v$ est une fonction sous-harmonique sur Ω et d'après le théorème 2.1.24, il existe un ensemble polaire $F \subset \partial\Omega$ tel que

$$\forall \xi \in \partial\Omega \setminus F, \quad \lim_{z \rightarrow \xi} v(z) = \phi(\xi).$$

Donc d'une part $\forall \xi \in B \cap \partial\Omega \setminus F$

$$\overline{\lim}_{z \rightarrow \xi} u(z) - v(z) = \overline{\lim}_{z \rightarrow \xi} u(z) - \lim_{z \rightarrow \xi} v(z) \leq M_1 - \phi(\xi) \leq M_1 - M_1 \leq 0,$$

et d'autre part $\forall \xi \in \partial\Omega \setminus B \cap \partial\Omega \setminus F$

$$\overline{\lim}_{z \rightarrow \xi} u(z) - v(z) = \overline{\lim}_{z \rightarrow \xi} u(z) - \lim_{z \rightarrow \xi} v(z) \leq M_2 - \phi(\xi) \leq M_2 - M_2 \leq 0.$$

Donc d'après le principe du maximum étendu 2.1.2, la fonction $u - v$ est négative sur le domaine Ω . D'où

$$\forall z \in \Omega, \quad u(z) \leq v(z) \leq P_\Omega \phi(z) \leq M_1 \varpi(z, B, \Omega) + M_2(1 - \varpi(z, B, \Omega)).$$

Ce qu'il fallait démontrer. ■

Remarque 3.5.6. En utilisant l'expression explicite de la mesure harmonique dans un couronne et en appliquant le théorème 3.5.5 à la fonction $\log |g|$ où $g \in \mathcal{O}(\mathbb{A}(\lambda, \nu))$ et B le cercle $\partial\mathbb{D}_r$, on obtient le théorème des trois cercles d'Hadamard. Le lecteur peut se référer à [66, Cor. 6.5] pour une démonstration plus élémentaire de ce théorème.

On peut maintenant étendre le théorème des trois cercles d'Hadamard à n'importe quel domaine greenien. Pour tout domaine (Ω, z_0) greenien et $u \in \mathcal{SH}(\mathbb{A}_\Omega(\lambda, \nu))$, on écrit

$$\forall B \Subset \Omega, \quad m_\Omega(B, u) = \sup_{z \in B} u(z) \quad \text{et} \quad \forall r \in]\lambda, \nu[, \quad m_\Omega(r, u) = \sup \{u(\xi) \mid \xi \in \partial\Omega_r\}.$$

Proposition 3.5.7 (Inégalité d'Hadamard généralisée). *Soient (Ω, z_0) un domaine greenien et $g \in \mathcal{O}(\Omega)$. Alors pour tout $\lambda, r, \nu \in \mathbb{R}$ tels que $0 < \lambda \leq r \leq \nu < 1$*

$$\log \left(\frac{\nu}{\lambda} \right) \log m_\Omega(r, u) \leq \log \left(\frac{r}{\lambda} \right) \log m_\Omega(\nu, u) + \log \left(\frac{\nu}{r} \right) \log m_\Omega(\lambda, u).$$

Autrement dit $r \mapsto m_\Omega(r, u)$ est une fonction convexe en $\log r$ sur $[\lambda, \nu]$.

Démonstration. On applique le théorème 3.5.5 à la fonction sous-harmonique u sur la couronne généralisée $\Upsilon := \mathbb{A}_\Omega(\lambda, \nu)$ et l'ensemble $B = \partial\Upsilon \setminus \partial\Omega_\nu = \partial\Omega_\lambda$. Alors d'après la proposition 3.4.6

$$\begin{aligned} \forall z \in \Upsilon, \quad u(z) &\leq m_\Omega(B, g) \varpi_\Upsilon(z, B) + m_\Omega(\partial\Upsilon \setminus B, g)(1 - \varpi_\Upsilon(z, B)) \\ &\leq \frac{\log(\frac{\nu}{r})}{\log(\frac{\nu}{\lambda})} m_\Omega(\lambda, g) + \frac{\log(\frac{r}{\lambda})}{\log(\frac{\nu}{\lambda})} m_\Omega(\nu, g), \end{aligned}$$

puisque $\partial\Upsilon \setminus B = \partial\Omega_\nu$. ■

Démonstration des majorations de $e_d^\Omega(\lambda, g)$ On démontre dans ce paragraphe le théorème 3.1.14 ainsi que ses corollaires. La proposition 3.5.8 ci-dessous est l'analogie du lemme 4.1 de [26].

Proposition 3.5.8. *Soient (Ω, z_0) un domaine régulier, $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ et $\lambda, r, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $0 < \lambda < r < 1$ et $\gamma \in]0, 1[$. Alors pour tout $d \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{C}_{\leq d}[z, w]$ non nul tels que $M_\Omega(\lambda, P_g) \leq 1$ et pour tout $e^{i\theta} \in \mathbb{S}^1$ tel que $\text{diam}_d(D_\Omega(\lambda, e^{i\theta}, g), \Omega_\lambda) \geq \gamma$*

$$\log \|P_\theta\|_{\Omega_\lambda} \leq m_d^\Omega(\lambda, r, g) + d \log \left(\frac{dr}{\gamma\lambda} \right) + d\tau_\Omega(\lambda, r)^2 \log(8\text{diam}_\Omega(\lambda, r)),$$

où $P_\theta(z) = P(z, e^{i\theta})$.

Démonstration. On note τ la quantité $\tau_\Omega(\lambda, r)$. On suppose que P_θ n'est pas le polynôme identiquement nul puisque l'inégalité à démontrer est triviale dans ce cas. Par définition de la fonction de proximité $m_d^\Omega(\lambda, r, g)$

$$\forall z \in \Omega_r, |P_g(z)| \leq e^{m_d^\Omega(\lambda, r, g)},$$

puisque par hypothèse $M_\Omega(\lambda, P_g) \leq 1$. Dans la suite on fixe un réel $\varepsilon \in]0, 1[$ de sorte que $d\varepsilon < \gamma$. D'après la proposition 3.3.15 appliquée au polynôme P_θ , l'ensemble

$$\left\{ z \in \Omega_\lambda \mid \log |P_\theta(z)| \leq \log \|P_\theta\|_{\Omega_\lambda} + d \log \varepsilon - d\tau^2 \log C \right\} \text{ avec } C = 8\text{diam}_\Omega(\lambda, r),$$

est de d -ième diamètre greenien dans Ω_r n'excédant pas $d\varepsilon$. Or $d\varepsilon < \frac{\lambda\gamma}{r}$ et d'après le lemme 2.7.23

$$\text{diam}_d(D_\Omega(\lambda, e^{i\theta}, g), \Omega_r) \geq \left(\frac{\lambda}{r} \right) \text{diam}_d(D_\Omega(\lambda, e^{i\theta}, g), \Omega_\lambda) \geq \frac{\lambda\gamma}{r}.$$

Donc il existe un $z \in D_\Omega(\lambda, e^{i\theta}, g)$ tel que

$$\log \|P_\theta\|_{\Omega_\lambda} + d \log \varepsilon - d\tau^2 \log C < \log |P_\theta(z)| \leq \log |P_g(z)| \leq m_d^\Omega(\lambda, r, g).$$

On fait tendre ε vers $\frac{\lambda\gamma}{dr}$ pour conclure. ■

L'inégalité de la proposition 3.5.8 précédente peut être améliorée lorsque le domaine Ω est le disque unité \mathbb{D} grâce à la proposition 3.3.13.

Proposition 3.5.9. *Soient $g \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ et $\lambda, r, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $0 < \lambda < r < 1$ et $\gamma \in]0, 1[$. Alors pour tout $d \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{C}_{\leq d}[z, w]$ non nul tels que $M(\lambda, P_g) \leq 1$ et pour tout $e^{i\theta} \in \mathbb{S}^1$ tel que $\text{diam}_{d+1}(D(\lambda, e^{i\theta}, g), \mathbb{D}_\lambda) \geq \gamma$*

$$\log \|P_\theta\|_{\mathbb{D}_\lambda} \leq m_d(\lambda, r, g) + 2d \log \left(\frac{3er}{\gamma\lambda} \right) + 4d \log \left(\frac{r + \lambda}{r - \lambda} \right),$$

où $P_\theta(z) = P(z, e^{i\theta})$.

Démonstration. On fixe $\varepsilon \in]0, 1[$ de sorte que $3er\varepsilon < \gamma\lambda$. D'après la proposition 3.3.13, l'ensemble

$$\left\{ z \in \mathbb{D}_r \mid |P_\theta(z)| \leq \|P_\theta\|_{\mathbb{D}_r} \Phi_d \left(\frac{|z|}{r} \right) \varepsilon^d \right\} \text{ avec } \Phi_d(x) := x^d \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^{4d},$$

est de d -ième diamètre pseudo-hyperbolique dans \mathbb{D}_r au plus $2e\varepsilon$. Or d'après le lemme 2.7.23

$$\begin{aligned} \frac{3e\varepsilon r}{\lambda} < \gamma &\leq \text{diam}_{d+1}(D(\lambda, e^{i\theta}, g), \mathbb{D}_\lambda) \leq \left(\frac{r}{\lambda} \right) \text{diam}_{d+1}(D(\lambda, e^{i\theta}, g), \mathbb{D}_r) \\ &\leq \text{diam}_d(D(\varepsilon, \lambda, e^{i\theta}, g), \mathbb{D}_r) + \varepsilon \cdot \text{diam}_d(D(\varepsilon, \lambda, e^{i\theta}, g), \mathbb{D}_\lambda) \leq \left(\frac{r}{\lambda} \right) \text{diam}_{d+1}(D(\lambda, e^{i\theta}, g), \mathbb{D}_r) \\ &\leq \left(\frac{r}{\lambda} \right) \text{diam}_d(D(\varepsilon, \lambda, e^{i\theta}, g), \mathbb{D}_r) + \frac{\varepsilon r}{\lambda}. \end{aligned}$$

Donc il existe un $z \in D(\varepsilon, \lambda, e^{i\theta}, g)$ tel que

$$\log \|P_\theta\|_{\mathbb{D}_r} + d \log \varepsilon + \log \Phi_d\left(\frac{|z|}{r}\right) < \log |P_\theta(z)| \leq \log |P_g(z)| \leq m_d(\lambda, r, g).$$

D'où

$$\log \|P_\theta\|_{\mathbb{D}_\lambda} \leq \log \|P_\theta\|_{\mathbb{D}_r} \leq m_d(\lambda, r, g) + d \log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + d \log\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) + 4d \log\left(\frac{r+\lambda}{r-\lambda}\right).$$

On fait tendre ε vers $\frac{\gamma\lambda}{(2e+1)r}$ pour conclure. \blacksquare

On déduit de la proposition 3.5.8 une majoration de la mesure de transcendance holomorphe $e_d^\Omega(\lambda, g)$ par $m_d^\Omega(\lambda, r, g)$ dès lors que le d -ième diamètre greenien d'une famille de fibres de g au-dessus d'un borélien $A \subset \mathbb{S}^1$ est uniformément minoré par une constante $\gamma > 0$.

Proposition 3.5.10. *Soient (Ω, z_0) un domaine greenien, $g \in \mathcal{O}(\Omega)$, $d \in \mathbb{N}$, $\lambda, r, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $0 < \lambda < r < 1$ et $\gamma \in]0, 1[$. On suppose qu'il existe un borélien $A \subset \mathbb{S}^1$ de longueur $l > 0$ tel que $\forall a \in A$, $\text{diam}_d(D_\Omega(\lambda, a, g), \Omega_\lambda) \geq \gamma$. Alors*

$$e_d^\Omega(\lambda, g) \leq m_d^\Omega(\lambda, r, g) + d \log\left(\frac{16\pi dr}{\gamma l \lambda}\right) + d\tau_\Omega(\lambda, r)^2 \log(8\text{diam}_\Omega(\lambda, r)).$$

Démonstration. On considère un polynôme $P \in \mathbb{C}_{\leq d}[z, w]$ extrémal pour la mesure de transcendance $e_d^\Omega(\lambda, g)$ et on fixe $\varepsilon > 0$. D'après le corollaire 3.3.8, il existe $e^{i\theta} \in A$ tel que

$$e_d^\Omega(\lambda, g) - d \log\left(\frac{16\pi}{l}\right) - \varepsilon \leq \log \|P_\theta\|_{\Omega_\lambda} \quad \text{avec} \quad P_\theta(z) = P(z, e^{i\theta}).$$

D'où en appliquant la proposition 3.5.8 ci-dessus

$$e_d^\Omega(\lambda, g) - d \log\left(\frac{16\pi}{l}\right) - \varepsilon \leq \log \|P_\theta\|_{\Omega_\lambda} \leq m_d^\Omega(\lambda, r, g) + d \log\left(\frac{dr}{\gamma\lambda}\right) + d\tau_\Omega(\lambda, r)^2 \log(8\text{diam}_\Omega(\lambda, r)).$$

On fait tendre ε vers zéro pour conclure. \blacksquare

Lorsque Ω est le disque unité, on peut améliorer la proposition 3.5.10 de la façon suivante.

Proposition 3.5.11. *Soient $g \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$, $d \in \mathbb{N}$, $\lambda, r, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $0 < \lambda < r < 1$ et $\gamma \in]0, 1[$. On suppose qu'il existe un borélien $A \subset \mathbb{S}^1$ de longueur $l > 0$ tel que pour tout $a \in A$ tel que $\forall a \in A$, $\text{diam}_{d+1}(D(\lambda, a, g), \mathbb{D}_\lambda) \geq \gamma$. Alors*

$$e_d(\lambda, g) \leq m_d(\lambda, r, g) + 2d \log\left(\frac{48e\pi r}{\gamma l \lambda}\right) + 4d \log\left(\frac{r+\lambda}{r-\lambda}\right).$$

Démonstration. On procède comme dans la démonstration de la proposition 3.5.10 en remplaçant la proposition 3.5.8 par la proposition 3.5.9. \blacksquare

Proposition 3.5.12. *Soit $g \in \mathcal{O}(\Omega, z_0)$. Alors pour tout $\lambda, r, \nu \in \mathbb{R}$ tels que $0 < \lambda \leq r \leq \nu < 1$, $\forall d \in \mathbb{N}$*

$$m_d^\Omega(\lambda, r, g) \leq \frac{\log\left(\frac{r}{\lambda}\right)}{\log\left(\frac{\nu}{\lambda}\right)} e_d^\Omega(\lambda, g) + d \log^+ M_\Omega(\nu, g) + d \log \text{diam}_\Omega(\lambda, \nu) + d \log 8.$$

Démonstration. Soit $P \in \mathbb{C}_{\leq d}[z, w]$ tel que $M_{\Omega}(\lambda, P_g) \leq 1$ et $M_{\Omega}(r, P_g) = m_d^{\Omega}(\lambda, r, g)$. On applique l'inégalité de Hadamard généralisée 3.5.7 à la fonction holomorphe P_g puis on majore la quantité $m_d^{\Omega}(\lambda, \nu, g)$ à l'aide du lemme 3.5.1. Donc

$$\begin{aligned} M_{\Omega}(r, P_g) &\leq \frac{\log(\frac{r}{\lambda})}{\log(\frac{\nu}{\lambda})} \log M_{\Omega}(\nu, P_g) + \log M_{\Omega}(\lambda, P_g) \leq \frac{\log(\frac{r}{\lambda})}{\log(\frac{\nu}{\lambda})} m_d^{\Omega}(\lambda, \nu, g) \\ &\leq \frac{\log(\frac{r}{\lambda})}{\log(\frac{\nu}{\lambda})} e_d^{\Omega}(\lambda, g) + d \log^+ M_{\Omega}(\nu, g) + d \log \text{diam}_{\Omega}(\lambda, \nu) + d \log 8. \end{aligned}$$

Ce qui donne l'inégalité souhaitée. \blacksquare

On démontre finalement le théorème 3.1.14 donnant la majoration de la mesure de transcendance holomorphe $e_d^{\Omega}(\lambda, g)$ de g à l'aide de la distribution de ses valeurs.

Rappel théorème 3.1.14. Soient (Ω, z_0) un domaine régulier, $g \in \mathcal{O}(\Omega)$, $d \in \mathbb{N}$, $\lambda, \nu, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $0 < \lambda < \nu < 1$ et $\gamma \in]0, 1[$. On suppose qu'il existe un borélien $A \subset \mathbb{S}^1$ de longueur $l > 0$ tel que $\forall a \in A$, $\text{diam}_d(D_{\Omega}(\lambda, a, g), \Omega_{\lambda}) \geq \gamma$. Alors

$$\frac{\log(\frac{2\nu}{\nu+\lambda})}{\log(\frac{\nu}{\lambda})} e_d^{\Omega}(\lambda, g) \ll d \log^+ M_{\Omega}(\nu, g) + d \log \left(\frac{ed\nu}{\gamma l \lambda} \right) + d \tau_{\Omega}(\lambda, \nu)^2 \log(\text{ediam}_{\Omega}(\lambda, \nu)).$$

Démonstration. En combinant les inégalités des propositions 3.5.10 et 3.5.12, on obtient

$$\begin{aligned} e_d^{\Omega}(\lambda, g) &\leq m_d^{\Omega}(\lambda, r, g) + d \log \left(\frac{16\pi dr}{\gamma l \lambda} \right) + d \tau_{\Omega}(\lambda, r)^2 \log \text{diam}_{\Omega}(\lambda, r) \\ &\leq d \log^+ M_{\Omega}(\nu, g) + d \log \left(\frac{16\pi dr}{\gamma l \lambda} \right) + \frac{\log(\frac{r}{\lambda})}{\log(\frac{\nu}{\lambda})} e_d^{\Omega}(\lambda, g) \\ &\quad + d \tau_{\Omega}(\lambda, r)^2 \log(8 \text{diam}_{\Omega}(\lambda, r)) + d \log(8 \text{diam}_{\Omega}(\lambda, \nu)). \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{\log(\frac{\nu}{\lambda})}{\log(\frac{\nu}{\lambda})} e_d^{\Omega}(\lambda, g) \leq d \log^+ M_{\Omega}(\nu, g) + d \log \left(\frac{16\pi dr}{\gamma l \lambda} \right) + d \tau_{\Omega}^2(\lambda, r) \log(8 \text{diam}_{\Omega}(\lambda, \nu)).$$

Ce qu'il fallait démontrer. \blacksquare

On démontre maintenant du théorème 3.1.14 de majorations de la mesure de transcendance dans le disque et le plan.

Rappel corollaire 3.1.18. Soient $g \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$, $d \in \mathbb{N}$, $\lambda, \nu, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $0 < \lambda < \nu < 1$ et $\gamma \in]0, 1[$. On suppose qu'il existe un borélien $A \subset \mathbb{S}^1$ de longueur $l > 0$ tel que pour tout $a \in A$, $\text{diam}_d(D(\lambda, a, g), \mathbb{D}_{\lambda}) \geq \gamma$. Alors pour tout domaine régulier $\Omega \subset \mathbb{C}$ et $h : (\Omega, z_0) \rightarrow (\mathbb{D}, 0)$ conforme

$$\frac{\log(\frac{2\nu}{\nu+\lambda})}{\log(\frac{\nu}{\lambda})} e_d^{\Omega}(\lambda, g \circ h) \ll d \log^+ M(\nu, g) + d \log \left(\frac{ed\nu}{\gamma l \lambda} \right) + d \left(\frac{\nu + \lambda}{\nu - \lambda} \right)^2 \log \left(\frac{e\nu}{\lambda(1 - \nu)} \right).$$

De plus la constante omise est absolue.

Démonstration. D'après le lemme 3.4.4

$$\tau_{\Omega}(\lambda, \nu) = \tau_{\mathbb{D}}(\lambda, \nu) = \frac{\nu + \lambda}{\nu - \lambda}.$$

D'après la proposition 2.7.22

$$\begin{aligned} \text{diam}_d(D(\lambda, a, g \circ h), \Omega_{\lambda}) &= \text{diam}_d(h^{-1}(D(\lambda, a, g)), h^{-1}(\mathbb{D}_{\lambda})) \\ &\geq \text{diam}_d(h(h^{-1}(D(\lambda, a, g))), h(h^{-1}(\mathbb{D}_{\lambda}))) \\ &\geq \text{diam}_d(D(\lambda, a, g), \mathbb{D}_{\lambda}) \geq \gamma, \end{aligned}$$

et d'après le lemme 3.4.3

$$\log \operatorname{diam}_\Omega(\lambda, \nu) \leq 4 \log \left(\frac{8\nu}{\lambda(1-\nu)} \right).$$

De plus $M_\Omega(\nu, g \circ h) = M(\nu, g)$. En appliquant le théorème 3.1.14 à la fonction $g \circ h$ sur le domaine Ω , on obtient

$$\frac{\log\left(\frac{2\nu}{\nu+\lambda}\right)}{\log\left(\frac{\nu}{\lambda}\right)} e_d^\Omega(\lambda, g \circ h) \ll d \log^+ M(\nu, g) + d \log \left(\frac{e d \nu}{\gamma l \lambda} \right) + d \left(\frac{\nu + \lambda}{\nu - \lambda} \right)^2 \log \left(\frac{e \nu}{\lambda(1-\nu)} \right).$$

Ce qui termine la démonstration. ■

Rappel théorème 3.1.19. Soient $g \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$, $d \in \mathbb{N}$, $\lambda, \nu, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $0 < \lambda < \nu < 1$ et $\gamma \in]0, 1[$. On suppose qu'il existe un borélien $A \subset \mathbb{S}^1$ de longueur $l > 0$ tel que pour tout $a \in A$, $\operatorname{diam}_d(D(\lambda, a, g), \mathbb{D}_\lambda) \geq \gamma$. Alors

$$\frac{\log\left(\frac{2\nu}{\nu+\lambda}\right)}{\log\left(\frac{\nu}{\lambda}\right)} e_d(\lambda, g) \ll d \log^+ M(\nu, g) + d \log \left(\frac{e \nu}{\gamma l \lambda} \right) + d \log \left(\frac{\nu(\nu + \lambda)}{\lambda(\nu - \lambda)} \right).$$

De plus la constante omise est absolue.

Démonstration. On pose $r = \frac{\nu+\lambda}{2}$. En combinant les inégalités des propositions 3.5.11 et 3.5.12, on obtient

$$\begin{aligned} e_d(\lambda, g) &\leq m_d(\lambda, r, g) + 2d \log \left(\frac{48e\pi r}{\gamma l \lambda} \right) + 4d \log \left(\frac{r + \lambda}{r - \lambda} \right) \\ &\leq d \log^+ M(\nu, g) + d \log \left(\frac{48e\pi r}{\gamma l \lambda} \right) + \frac{\log\left(\frac{r}{\lambda}\right)}{\log\left(\frac{\nu}{\lambda}\right)} e_d(\lambda, g) \\ &\quad + 4d \log \left(\frac{r + \lambda}{r - \lambda} \right) + d \log \left(\frac{\nu}{\lambda} \right). \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{\log\left(\frac{2\nu}{\nu+\lambda}\right)}{\log\left(\frac{\nu}{\lambda}\right)} e_d(\lambda, g) \ll d \log^+ M(\nu, g) + d \log \left(\frac{e}{\gamma l} \right) + d \log \left(\frac{\nu(\nu + \lambda)}{\lambda(\nu - \lambda)} \right).$$

Ce qu'il fallait démontrer. ■

Rappel corollaire 3.1.20. Soient $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$, $d \in \mathbb{N}$, $\lambda, \nu, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $0 < \lambda < \nu < \infty$ et $\gamma \in]0, 1[$. On suppose qu'il existe un borélien $A \subset \mathbb{S}^1$ de longueur $l > 0$ tel que pour tout $a \in A$, $\operatorname{diam}_d(D(\lambda, a, g), \mathbb{D}_\lambda) \geq \gamma$. Alors

$$\frac{\log\left(\frac{2\nu}{\nu+\lambda}\right)}{\log\left(\frac{\nu}{\lambda}\right)} e_d(\lambda, g) \ll d \log^+ M(\nu, g) + d \log \left(\frac{e \nu}{\gamma l \lambda} \right) + d \log \left(\frac{\nu(\nu + \lambda)}{\lambda(\nu - \lambda)} \right).$$

La constante omise est absolue.

Démonstration. On considère la fonction $h \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ définie par $h(z) = g(u(z))$ avec $u(z) = \nu z$. Posons $\lambda_1 = u^{-1}(\lambda)$ et $\nu_1 = u^{-1}(\nu)$. Puisque le d -ième diamètre greenien est un invariant conforme d'après 2.7.22

$$\begin{aligned} \operatorname{diam}_d(D(\lambda, a, g), \mathbb{D}_\lambda) &= \operatorname{diam}_d(u^{-1}(D(\lambda, a, g)), u^{-1}(\mathbb{D}_\lambda)) \\ &= \operatorname{diam}_d(D(\lambda_1, a, h), \mathbb{D}_{\lambda_1}). \end{aligned}$$

On conclut en appliquant le théorème 3.1.19 à la fonction h et les rayons λ_1 et ν_1 . ■

3.6 Mesure de transcendance méromorphe

Dans cette section nous étudions les mesures de transcendance $e_d^\Omega(\lambda, g)$ et $\check{e}_d^\Omega(\lambda, g)$ pour les fonctions $g \in \mathcal{M}(\Omega)$ avec Ω un domaine régulier. Le résultat principal de cette section est le théorème 3.1.16 dont nous rappelons l'énoncé lors de sa démonstration. Dans la suite de cette section (Ω, z_0) est un domaine régulier.

Majoration de l'indice de Bernstein Le lemme 3.6.1 ci-dessous affirme qu'une majoration de la mesure de transcendance méromorphe $\check{e}_d^\Omega(\lambda, g)$ conduit à une majoration de l'indice de Bernstein $\check{b}_\Omega(\lambda, r, P_g)$ et donc fournit une majoration de la borne de Bézout $\mathcal{Z}_d^\Omega(\lambda, g)$ d'après la proposition 2.5.8. La démonstration de ce lemme est similaire à celle du lemme 3.5.1.

Lemme 3.6.1. *Soient $g \in \mathcal{M}(\Omega)$ et $\lambda, r \in \mathbb{R}$ tels que $0 < \lambda < r < 1$ et $P \in \mathbb{C}_{\leq d}[z, w]$ tel que $P_g \neq 0$. Alors*

$$\check{b}_\Omega(\lambda, r, P_g) \leq \check{m}_d^\Omega(\lambda, r, g) \leq \check{e}_d^\Omega(\lambda, g) + d\hat{m}_\Omega(r, g) + d \log \text{diam}_\Omega(\lambda, r) + d \log 8.$$

Démonstration. La première inégalité provient de l'invariance de l'indice de Bernstein $\check{b}_\Omega(\lambda, r, P_g)$ lorsque l'on multiplie P par un scalaire non nul. En particulier pour le polynôme Q défini par $P \exp\{-\hat{m}_\Omega(\lambda, P_g)\}$, on a

$$\check{b}_\Omega(\lambda, r, P_g) = \check{b}_\Omega(\lambda, r, Q_g) = \hat{m}_\Omega(r, Q_g) \leq \check{m}_d^\Omega(\lambda, r, g),$$

car par construction du polynôme Q , la moyenne $\hat{m}_\Omega(\lambda, Q_g)$ est nulle. On considère maintenant un polynôme P extrémal pour $\check{m}_d^\Omega(\lambda, r, g)$. D'après le lemme 3.6.11

$$\begin{aligned} \check{m}_d^\Omega(\lambda, r, g) &= \hat{m}_\Omega(r, P_g) \leq \log \|Q\|_{\Omega_\lambda \times \mathbb{D}} + d\hat{m}_\Omega(r, g) + d \log \text{diam}_\Omega(\lambda, r) + d \log 8 \\ &\leq \check{e}_d^\Omega(\lambda, g) + d\hat{m}_\Omega(r, g) + d \log \text{diam}_\Omega(\lambda, r) + d \log 8. \end{aligned}$$

Ce qui termine la démonstration du lemme. ■

Invariances de la mesure $\check{e}_d^\Omega(\lambda, g)$ Le lemme 3.6.2 suivant montre que la mesure de transcendance $\check{e}_d^\Omega(\lambda, g)$ et la fonction de proximité transcendante $\check{m}_d^\Omega(\lambda, r, g)$ sont invariantes par dilatation du graphe de la fonction g .

Lemme 3.6.2. *Soient $g \in \mathcal{M}(\Omega)$ et $s > 0$. On pose $g_s(z) = g(sz)$ et $\Upsilon = \frac{1}{s}\Omega$. Alors pour tout $r, \lambda \in \mathbb{R}$ tels que $0 < \lambda < r < 1$*

$$\forall d \in \mathbb{N}, \quad \check{e}_d^\Omega(\lambda, g) = \check{e}_d^\Upsilon(\lambda, g_s) \quad \text{et} \quad \check{m}_d^\Omega(\lambda, r, g) = \check{m}_d^\Upsilon(\lambda, r, g_s).$$

Démonstration. On remarque que pour tout $h \in \mathcal{M}(\Omega)$, on a $\hat{m}_\Omega(\lambda, h) = \hat{m}_\Upsilon(\lambda, h_s)$. Soit $P \in \mathbb{C}_{\leq d}[z, w]$ un polynôme extrémal de la mesure de transcendance $\check{e}_d^\Omega(\lambda, g)$. On considère le polynôme $Q \in \mathbb{C}_{\leq d}[z, w]$ défini par $Q(z, w) := P(sz, w)$. Or par construction et d'après ce qui précède

$$\|P\|_{\Omega_\lambda \times \mathbb{D}} = \|Q\|_{\Upsilon_\lambda \times \mathbb{D}} \quad \text{et} \quad \hat{m}_\Omega(\lambda, P_g) = \hat{m}_\Upsilon(\lambda, Q_{g_s}).$$

Donc $\check{e}_d^\Omega(\lambda, g) \leq \check{e}_d^\Upsilon(\lambda, g_s)$. On procède de même pour démontrer l'inégalité inverse. La seconde égalité du lemme est démontrée de la même façon. ■

Lemme 3.6.3. *Soient $g \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ et $s > 0$. On pose $g_s(z) = g(sz)$. Alors pour tout $r, \lambda \in \mathbb{R}$ tels que $0 < \lambda < r < 1$*

$$\forall d \in \mathbb{N}, \quad \check{e}_d(s\lambda, g) = \check{e}_d(\lambda, g_s) \quad \text{et} \quad \check{m}_d(s\lambda, sr, g) = \check{m}_d(\lambda, r, g_s).$$

Démonstration. La démonstration est identique à celle du lemme 3.6.2. ■

Une propriété remarquable de la mesure de transcendance méromorphe $\hat{e}_d^\Omega(\lambda, g)$ est que les mesures de transcendance méromorphes de g et $\phi \circ g$ avec ϕ une homographie de la sphère de Riemann sont comparables à condition que ϕ n'ait pas de pôle sur le cercle \mathbb{S}^1 . En particulier les mesures de transcendance $\hat{e}_d^\Omega(\lambda, a, g)$ et $\hat{e}_d^\Omega(\lambda, \infty, g)$ sont comparables.

Proposition 3.6.4. *Soient $g \in \mathcal{M}(\Omega)$ et $\phi \in \text{Mob}(\hat{\mathbb{C}})$ sans pôle dans \mathbb{S}^1 . Alors*

$$\forall d \in \mathbb{N}, \forall \lambda \in [0, 1[, \hat{e}_d^\Omega(\lambda, \phi \circ g) \leq \hat{e}_d^\Omega(\lambda, g) + d\hat{m}_\Omega(\lambda, g) + d\log^+ \|\phi\|_{\mathbb{S}^1} + d\log 32.$$

En particulier pour tout $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{S}^1$

$$\forall d \in \mathbb{N}, \forall \lambda \in [0, 1[, \hat{e}_d^\Omega(\lambda, a, g) \leq \hat{e}_d^\Omega(\lambda, \infty, g) + d\hat{m}_\Omega(\lambda, g) + d\log^+ \frac{1}{d(a, \mathbb{S}^1)} + d\log 32.$$

Démonstration. Soit $P \in \mathbb{C}_{\leq d}[z, w]$ un polynôme extrémal de la mesure de transcendance $\hat{e}_d^\Omega(\lambda, \phi \circ g)$. On définit le polynôme $Q \in \mathbb{C}_{\leq d}[z, w]$ par la relation

$$P(z, \phi(w)) = \frac{Q(z, w)}{(\gamma w + \delta)^d} \text{ avec } \phi(w) = \frac{\alpha w + \beta}{\gamma w + \delta} \text{ et } \max\{|\gamma|, |\delta|\} \leq 1.$$

Puisque que $\hat{m}_\Omega(\lambda, P_{\phi \circ g})$ est négatif

$$\begin{aligned} \hat{m}_\Omega(\lambda, Q_g) &= \int_{\partial\Omega_\lambda} \log |Q_g(\xi)| d\varpi_{\Omega_\lambda}(z_0, \xi) \leq d \int_{\partial\Omega_\lambda} \log |\gamma g(\xi) + \delta| d\varpi_{\Omega_\lambda}(z_0, \xi) \\ &\leq d\log |\delta| + d\log 2 + d \int_{\partial\Omega_\lambda} \log^+ \left| \frac{\gamma}{\delta} g(\xi) \right| d\varpi_{\Omega_\lambda}(z_0, \xi) \\ &\leq d\hat{m}_\Omega(\lambda, g) + d\log^+ \max\{|\gamma|, |\delta|\} + d\log 2 \leq d\hat{m}_\Omega(\lambda, g) + d\log 2. \end{aligned}$$

puisque $\log(x+1) \leq \log^+ x + \log 2$ et $\log^+(xy) \leq \log^+ x + \log^+ y$. Soient $z \in \partial\Omega_\lambda$ et $e^{i\theta} \in \mathbb{S}^1$ tels que le polynôme Q atteint son maximum en $(z, e^{i\theta})$ sur le domaine $\overline{\Omega_\lambda} \times \mathbb{D}$. D'après l'inégalité de Bernstein-Walsh 3.2.7 appliquée au polynôme P

$$\begin{aligned} \log \|Q\|_{\Omega_\lambda \times \mathbb{D}} &= \log |Q(z, e^{i\theta})| = d\log |\gamma e^{i\theta} + \delta| + \log |P(z, \phi(e^{i\theta}))| \\ &\leq d\log |\gamma e^{i\theta} + \delta| + \log \|P\|_{\Omega_\lambda \times \mathbb{D}} + d\log^+ \|\phi\|_{\mathbb{S}^1} + d\log 8 \\ &\leq d\log^+ \max\{|\gamma|, |\delta|\} + \log \|P\|_{\Omega_\lambda \times \mathbb{D}} + d\log^+ \|\phi\|_{\mathbb{S}^1} + d\log 16 \\ &\leq \log \|P\|_{\Omega_\lambda \times \mathbb{D}} + d\log^+ \|\phi\|_{\mathbb{S}^1} + d\log 16. \end{aligned}$$

Donc

$$\hat{e}_d^\Omega(\lambda, \phi \circ g) \leq \hat{e}_d^\Omega(\lambda, g) + d\hat{m}_\Omega(\lambda, g) + d\log^+ \|\phi\|_{\mathbb{S}^1} + d\log 32.$$

La seconde inégalité s'obtient en appliquant la première inégalité à la transformation de Möbius $\phi(w) = \frac{1}{w-a}$ et en calculant la norme $\|\phi\|_{\mathbb{S}^1}$. ■

Proposition 3.6.5. *Soient $g \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ et $\phi \in \text{Mob}(\hat{\mathbb{C}})$ sans pôle dans \mathbb{S}^1 . Alors*

$$\forall d \in \mathbb{N}, \forall \lambda > 0, \hat{e}_d(\lambda, \phi \circ g) \leq \hat{e}_d(\lambda, g) + d\hat{m}(\lambda, g) + d\log^+ \|\phi\|_{\mathbb{S}^1} + d\log 32.$$

En particulier pour tout $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{S}^1$

$$\forall d \in \mathbb{N}, \forall \lambda > 0, \hat{e}_d(\lambda, a, g) \leq \hat{e}_d(\lambda, \infty, g) + d\hat{m}(\lambda, g) + d\log^+ \frac{1}{d(a, \mathbb{S}^1)} + d\log 32.$$

Démonstration. La démonstration est identique à celle de la proposition 3.6.4. ■

Inégalités de convexité Dans les démonstrations des théorèmes 3.1.1 et 3.1.14, le théorème des trois cercles d’Hadamard 3.5.4 et sa généralisation 3.5.5 ont joué un rôle primordial. Lorsque la fonction g est méromorphe sur un disque, la fonction maximum $M(r, g)$ n’est plus *a priori* convexe en $\log r$, ni croissante. Le plus naturel est de remplacer cette dernière par la moyenne de la fonction $\log |g|$ sur le cercle $\partial\mathbb{D}_r$ notée $\hat{m}(r, g)$. Le théorème 3.6.6 ci-dessous implique que la fonction $\hat{m}(r, g)$ est croissante et convexe en $\log r$ sur toute couronne où la fonction g n’admet pas de pôles. Pour tout $u \in \mathcal{SH}(\mathbb{A}(\lambda, \nu))$, on note

$$\forall r \in]\lambda, \nu[, I(r, u) := \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi}.$$

Théorème 3.6.6 ([52, Th. 2.12]). *Soient $\lambda, \nu \in \mathbb{R}$ tels que $0 < \lambda < \nu$ et $u \in \mathcal{SH}(\mathbb{A}(\lambda, \nu))$. Alors la fonction $I(r, u)$ est croissante et convexe en $\log r$ sur l’intervalle $]\lambda, \nu[$. Plus précisément pour tout $s, t, r \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda < s \leq t \leq r < \nu$*

$$\log \left(\frac{r}{s} \right) I(t, u) \leq \log \left(\frac{t}{s} \right) I(r, u) + \log \left(\frac{r}{t} \right) I(s, u).$$

Nous allons maintenant démontrer une extension du théorème 3.6.6 précédent aux fonctions sous-harmoniques sur Ω puis δ -sous-harmonique sur Ω .

Notation 3.6.7. Soit $u \in \mathcal{SH}(\Omega)$. On définit la *moyenne de u le long de $\partial\Omega_r$* et la *moyenne de Jensen de u dans Ω_r* par

$$\forall r \in [0, 1[, I_\Omega(r, u) := \int_{\partial\Omega_r} u(\xi) d\varpi_{\Omega_r}(z_0, \xi) \quad \text{et} \quad N_\Omega(r, u) = \int_{\Omega_r} \Delta u(z) g_{\Omega_r}(z, z_0) dz.$$

De plus lorsque u est de la forme $\log |g|$ avec $g \in \mathcal{O}(\Omega)$, l’intégrale $I_\Omega(r, g)$ coïncide avec la moyenne $\hat{m}_\Omega(r, g)$ définie dans le chapitre précédent.

Proposition 3.6.8. *Soit $u \in \mathcal{SH}(\Omega)$. Alors les fonctions $r \mapsto N_\Omega(r, u)$ et $r \mapsto I_\Omega(r, u)$ sont croissantes et convexes en $\log r$.*

Démonstration. La croissance de la fonction $N_\Omega(r, u)$ découle du principe de subordination des fonctions de Green¹⁴. Nous avons vu au chapitre 2 que pour tout $\lambda, r, \nu \in \mathbb{R}$ tels que $0 < \lambda < r < \nu < 1$

$$\forall z \in \Omega, \log \left(\frac{\nu}{\lambda} \right) g_{\Omega_r}^+(z, z_0) \leq \log \left(\frac{r}{\lambda} \right) g_{\Omega_\nu}^+(z, z_0) + \log \left(\frac{\nu}{r} \right) g_{\Omega_\lambda}^+(z, z_0). \quad (3.6.1)$$

Donc en intégrant cette inégalité sur Ω_ν et puisque $\Delta u \geq 0$ sur Ω

$$\begin{aligned} \log \left(\frac{\nu}{\lambda} \right) \int_{\Omega_r} \Delta u(z) g_{\Omega_r}(z, z_0) dz &\leq \log \left(\frac{r}{\lambda} \right) \int_{\Omega_\nu} \Delta u(z) g_{\Omega_\nu}(z, z_0) dz \\ &\quad + \log \left(\frac{\nu}{r} \right) \int_{\Omega_\lambda} \Delta u(z) g_{\Omega_\lambda}(z, z_0) dz. \end{aligned}$$

Cette dernière inégalité signifie précisément que la fonction $r \mapsto N_\Omega(r, g)$ est convexe en $\log r$. D’après le théorème de Poisson-Jensen 2.5.9

$$\forall r \in [0, 1[, N_\Omega(r, u) = \int_{\partial\Omega_r} u(\xi) d\varpi_{\Omega_r}(\xi, z_0) - \log |g(z_0)| = I_\Omega(r, u) - u(z_0).$$

Donc la fonction $I_\Omega(r, u)$ est croissante et convexe en $\log r$. ■

La proposition 3.6.8 précédente s’étend aux fonctions δ -sous-harmoniques sur Ω . En particulier, la proposition 3.6.9 ci-dessous s’applique aux fonctions de la forme $\log |g|$ avec $g \in \mathcal{M}(\Omega)$.

¹⁴Voir le théorème 2.1.5.

Corollaire 3.6.9. Soient $u \in \mathcal{SH}_\delta(\Omega)$ et $u_1, u_2 \in \mathcal{SH}(\Omega)$ tels que $u = u_1 - u_2$. Alors pour tout $\lambda, t, r \in \mathbb{R}$ tels que $0 < \lambda \leq r \leq \nu < 1$

$$\log\left(\frac{\nu}{\lambda}\right) I_\Omega(r, u) \leq \log\left(\frac{r}{\lambda}\right) I_\Omega(\nu, u) + \log\left(\frac{\nu}{r}\right) I_\Omega(\lambda, u) + \log\left(\frac{\nu}{\lambda}\right) N_\Omega(\nu, u_2).$$

Démonstration. D'après la formule de Poisson-Jensen 2.5.9, la fonction $v(z) := u(z) - U_{\Omega_\nu}^\mu(z)$ avec $2\pi\mu = \Delta u_2(z)dz$ est sous-harmonique sur Ω_ν . En appliquant le théorème de Fubini et le corollaire 2.5.15, on obtient que pour tout $t \in [\lambda, \nu]$

$$\begin{aligned} I(t, U_{\Omega_\nu}^\mu) &= \int_{\partial\Omega_t} U_{\Omega_\nu}^\mu(\xi) d\varpi_{\Omega_t}(\xi, z_0) = \int_{\partial\Omega_t} \int_{\Omega_\nu} \Delta u_2(w) g_{\Omega_\nu}(w, \xi) dw d\varpi_{\Omega_t}(\xi, z_0) \\ &= \int_{\Omega_\nu} \Delta u_2(w) \int_{\partial\Omega_t} g_{\Omega_\nu}(w, \xi) d\varpi_{\Omega_t}(\xi, z_0) dw \\ &= \int_{\Omega_\nu} \Delta u_2(w) \{g_{\Omega_\nu}(w, z_0) - g_{\Omega_t}(w, z_0)\} dw \leq N_\Omega(\nu, u_2). \end{aligned} \tag{3.6.2}$$

D'après la proposition 3.6.8 appliquée à la fonction sous-harmonique v sur Ω_ν

$$\log\left(\frac{\nu}{\lambda}\right) I_\Omega(r, v) \leq \log\left(\frac{r}{\lambda}\right) I_\Omega(\nu, v) + \log\left(\frac{\nu}{r}\right) I_\Omega(\lambda, v).$$

D'où l'inégalité

$$\begin{aligned} \log\left(\frac{\nu}{\lambda}\right) I_\Omega(r, u) &\leq \log\left(\frac{r}{\lambda}\right) I_\Omega(\nu, u) + \log\left(\frac{\nu}{r}\right) I_\Omega(\lambda, u) - \log\left(\frac{r}{\lambda}\right) I_\Omega(\nu, U_{\Omega_\nu}^\mu) \\ &\quad - \log\left(\frac{\nu}{r}\right) I_\Omega(\lambda, U_{\Omega_\nu}^\mu) + \log\left(\frac{\nu}{\lambda}\right) I(r, U_{\Omega_\nu}^\mu). \end{aligned}$$

De plus $\Delta u_2 \geq 0$ au sens des distribution puisque u_2 est sous-harmonique sur Ω . Donc

$$\begin{aligned} \log\left(\frac{\nu}{\lambda}\right) I(r, U_{\Omega_\nu}^\mu) - \log\left(\frac{\nu}{r}\right) I_\Omega(\lambda, U_{\Omega_\nu}^\mu) - \log\left(\frac{r}{\lambda}\right) I_\Omega(\nu, U_{\Omega_\nu}^\mu) &\leq \log\left(\frac{\nu}{\lambda}\right) I(r, U_{\Omega_\nu}^\mu) \\ &\leq \log\left(\frac{\nu}{\lambda}\right) N_\Omega(\nu, u_2). \end{aligned}$$

Ce qui termine la démonstration. ■

Démonstration du théorème 3.1.16 Lorsque $g \in \mathcal{O}(\Omega)$, la majoration de $\log |P_g(z)|$ avec $P \in \mathbb{C}_{\leq d}[z, w]$ non nul et $z \in \Omega_r$ en fonction de $m_d^\Omega(\lambda, r, g)$ découle de la définition de cette même quantité¹⁵. Lorsque $g \in \mathcal{M}(\Omega)$, la majoration de $\log |P_g(z)|$ à l'aide de $\hat{m}_d^\Omega(\lambda, r, g)$ présente deux difficultés. La première difficulté est que la fonction P_g peut avoir un pôle en z lorsque la fonction g admet justement un pôle en ce point. Cette pierre d'achoppement est évitée en introduisant un petit ensemble exceptionnel E de points autour des pôles de g pour lesquels nous n'aurons pas de majoration mais en dehors desquels nous sommes en mesure de majorer $\log |P_g(z)|$ à l'aide de $\hat{m}_d^\Omega(\lambda, r, g)$. La seconde difficulté est plus technique et ardue à esquiver. Afin que la majoration de $\log |P_g(z)|$ soit pertinente pour démontrer les majorations des mesures de transcendance, il est important que la constante devant le terme $\hat{m}_d^\Omega(\lambda, r, g)$ dans cette majoration soit au plus 1. Or l'égalité de Poisson-Jensen 2.5.9 donne une majoration du terme $\log |P_g(z)|$ faisant apparaître une intégrale de la forme

$$\int_{\partial\Omega_r} \log |P_g(\xi)| P_{\Omega_r}(z, \xi) d\sigma(\xi),$$

où P_{Ω_r} est le noyau de Poisson de la strate Ω_r de Ω . Un encadrement grossier du noyau de Poisson dans cette intégrale ne conduit pas à une majoration suffisamment fine de $\log |P_g(z)|$. Cependant le noyau de Poisson P_{Ω_r} étant harmonique et positif sur Ω_r , nous pouvons utiliser la distance de Harnack dans Ω_r pour comparer l'intégrale ci-dessus avec

¹⁵Voir la démonstration de la proposition 3.5.8.

le terme $\hat{m}_\Omega(r, P_g)$. C'est ce que nous faisons dans le lemme technique 3.6.10 ci-dessous. On note

$$\forall z \in \Omega, \xi \in \partial\Omega, \Phi_\Omega(z, \xi) := P_\Omega(z, \xi) - \frac{P_\Omega(z_0, \xi)}{\tau_\Omega(z, z_0)}.$$

Lemme 3.6.10. *Soient $g \in \mathcal{M}(\Omega)$ et $r \in]0, 1[$. On considère un ensemble $C \subset D_\Omega(r, \infty, g)$ et on pose $n = \bar{n}_\Omega(r, \infty, g) - \#C$. Alors pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$, il existe un ensemble $E \subset \Omega_r$ tel que*

• *l'ensemble E est petit dans Ω_r au sens que $\text{diam}_n(E, \Omega_r) \leq n\varepsilon$,*

• *pour tout $z \in \Omega_r \setminus E$*

$$\log |g(z)| \leq \frac{\hat{m}_\Omega(r, g)}{\tau_{\Omega_r}(z, z_0)} + \int_{\partial\Omega_r} \log^+ |g(\xi)| \Phi_{\Omega_r}(z, \xi) d\sigma(\xi) + n_{\Omega}(r, \infty, g) \log \left(\frac{1}{\varepsilon p_{\Omega_r}(z, C)} \right),$$

De plus l'ensemble exceptionnel E ne dépend que du diviseur des pôles de g dans Ω_r . Lorsque Ω est \mathbb{D} , on peut exiger de plus que $\text{diam}_n(E, \mathbb{D}_r) \leq 2e\varepsilon$.

Démonstration. En appliquant la formule de Poisson-Jensen généralisée 2.5.9, on obtient

$$\begin{aligned} \forall z \in \Omega_r, \log |g(z)| &\leq \int_{\partial\Omega_r} \log |g(\xi)| d\varpi_{\Omega_r}(z, \xi) + \sum_{w \in \Omega_r} \nu_\infty g(w) g_{\Omega_r}(z, w) \\ &\leq \int_{\partial\Omega_r} \log |g(\xi)| P_{\Omega_r}(z, \xi) d\sigma(\xi) - \log \prod_{w \in \Omega_r} p_{\Omega_r}(z, w)^{\nu_\infty g(w)}, \end{aligned} \quad (3.6.3)$$

où $\nu_\infty g$ est le diviseur des pôles de g dans Ω . Commençons par majorer l'intégrale figurant dans le dernier membre de l'inégalité 3.6.3 ci-dessus. Puisque $\forall x > 0, \log x = \log^+ x - \log^+ \frac{1}{x}$ et d'après l'inégalité de Harnack 2.1.27

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega_r} \log |g(\xi)| P_{\Omega_r}(z, \xi) d\sigma(\xi) &= \int_{\partial\Omega_r} \log^+ |g(\xi)| P_{\Omega_r}(z, \xi) d\sigma(\xi) - \int_{\partial\Omega_r} \log^+ \frac{1}{|g(\xi)|} P_{\Omega_r}(z, \xi) d\sigma(\xi) \\ &\leq \int_{\partial\Omega_r} \log^+ |g(\xi)| P_{\Omega_r}(z, \xi) d\sigma(\xi) - \frac{\hat{m}_\Omega(r, 1/g)}{\tau_{\Omega_r}(z, z_0)} \\ &\leq \int_{\partial\Omega_r} \log^+ |g(\xi)| P_{\Omega_r}(z, \xi) d\sigma(\xi) + \frac{\hat{m}_\Omega(r, g) - \hat{m}_\Omega(r, g)}{\tau_{\Omega_r}(z, z_0)} \\ &\leq \frac{\hat{m}_\Omega(r, g)}{\tau_{\Omega_r}(z, z_0)} + \int_{\partial\Omega_r} \log^+ |g(\xi)| \Phi_{\Omega_r}(z, \xi) d\sigma(\xi). \end{aligned}$$

Pour terminer la démonstration, il suffit de minorer le produit apparaissant dans l'inégalité 3.6.3. Lorsque g est holomorphe sur Ω , il n'y a rien à faire et on peut prendre pour E l'ensemble vide. Notons ω_1 le diviseur des pôles de g dans $\Omega_r \setminus C$ et ω_2 le diviseur des pôles de g dans C . Il est immédiat que $\nu_\infty g = \omega_1 + \omega_2$. Or

$$\begin{aligned} \forall z \in \Omega_r, \prod_{w \in \Omega_r} p_{\Omega_r}(z, w)^{\nu_\infty g(w)} &= \prod_{w \in \Omega_r} p_{\Omega_r}(z, w)^{\omega_1(w)} \prod_{w \in \Omega_r} p_{\Omega_r}(z, w)^{\omega_2(w)} \\ &\geq p_{\Omega_r}(z, C)^{|\omega_2|} \prod_{w \in \Omega_r} p_{\Omega_r}(z, w)^{\omega_1(w)}, \end{aligned}$$

D'après le corollaire 2.7.9 du chapitre 2, l'ensemble de lemniscates greeniennes $E(\omega_1, \varepsilon)$ est de $|\omega_1|$ -ième diamètre greenien dans Ω_r au plus $n\varepsilon$. En dehors de l'ensemble $E(\omega_1, \varepsilon)$, on a la minoration

$$\prod_{w \in \Omega_r} p_{\Omega_r}(z, w)^{\nu_\infty g(w)} \geq p_{\Omega_r}(z, C)^{|\omega_2|} \varepsilon^{|\omega_1|} \geq (\varepsilon p_{\Omega_r}(z, C))^{| \omega_1 | + |\omega_2|} \geq (\varepsilon p_{\Omega_r}(z, C))^{\nu_\infty g}.$$

Il suffit de prendre pour E l'ensemble $E(\omega_1, \varepsilon)$ pour obtenir le lemme puisque $|\omega_1| = n$. Lorsque $\Omega = \mathbb{D}$, le n -ième diamètre pseudo-hyperbolique de $E(\omega_1, \varepsilon)$ est majoré par $2e\varepsilon$ d'après le lemme de Milloux 2.7.14. ■

À l'aide de l'inégalité de Bernstein-Walsh 3.2.7, nous pouvons majorer l'intégrale de l'inégalité du lemme 3.6.10 pour une fonction P_g uniformément lorsque P parcourt $\mathbb{C}_{\leq d}[z, w]$.

Lemme 3.6.11. *Soient $g \in \mathcal{M}(\Omega)$ et $P \in \mathbb{C}_{\leq d}[z, w]$. Alors pour tout $\lambda, r \in \mathbb{R}$ tels que $0 < \lambda < r < 1$ et pour tout $z \in \Omega_r$*

$$\int_{\partial\Omega_r} \log^+ |P_g(\xi)| \Phi_{\Omega_r}(z, \xi) d\sigma(\xi) \leq (1 - 1/\tau_{\Omega_r}(z, z_0)) \log \|P\|_{\Omega_\lambda \times \mathbb{D}} + d\tau_{\Omega_r}(z, z_0) \hat{m}_\Omega(r, g) \\ + d \log \text{diam}_\Omega(\lambda, r) + d \log 8,$$

De plus $n_\Omega(r, \infty, P_g) \leq dn_\Omega(r, \infty, g)$.

Démonstration. Commençons par démontrer la première inégalité. On applique l'inégalité de la proposition 3.2.7 au polynôme P sur le produit cartésien $\Omega_\lambda \times \mathbb{D}$. Donc

$$\forall z \in \partial\Omega_r, \log^+ |P_g(z)| \leq \log \|P\|_{\Omega_\lambda \times \mathbb{D}} + d \log^+ |g(z)| + d \log \text{diam}_\Omega(\lambda, r) + d \log 8.$$

Or le terme $\Phi_{\Omega_r}(z, \xi)$ est positif pour tout $\xi \in \partial\Omega_r$ puisque le noyau de Poisson est une fonction harmonique et strictement positive sur Ω_r . Donc en intégrant cette inégalité le long de $\partial\Omega_r$, on obtient

$$\int_{\partial\Omega_r} \log^+ |P_g(\xi)| \Phi_{\Omega_r}(z, \xi) d\sigma(\xi) \leq (1 - 1/\tau_{\Omega_r}(z, z_0)) \log \|P\|_{\Omega_\lambda \times \mathbb{D}} + d\tau_{\Omega_r}(z, z_0) \hat{m}_\Omega(r, g) \\ + d \log \text{diam}_\Omega(\lambda, r) + d \log 8.$$

Quant à la deuxième inégalité du lemme, elle est obtenue en remarquant que les pôles de la fonction P_g sont tous des pôles de la fonction g dont la multiplicité est au plus multiplié par d . ■

Nous avons maintenant tous les outils pour démontrer la majoration de la mesure de transcendance méromorphe du théorème 3.1.16. La démonstration de la proposition 3.6.12 ci-dessous est similaire à celle de la proposition 3.5.8. Toutefois une différence notable entre ces deux propositions est la présence d'un coefficient devant le terme $\hat{m}_d^\Omega(\lambda, r, g)$ et d'un terme $\hat{e}_d^\Omega(\lambda, g)$ alors qu'il n'y a aucun coefficient devant $m_d^\Omega(\lambda, r, g)$ dans l'inégalité de la proposition 3.5.8.

Proposition 3.6.12. *Soient $g \in \mathcal{M}(\Omega)$, $d \in \mathbb{N}$, $\lambda, r, \delta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $0 < \lambda < r < 1$, $\gamma \in]0, 1[$, $\delta \in]0, 1[$ et $P \in \mathbb{C}_{\leq d}[z, w]$ tels que $\hat{m}_\Omega(\lambda, P_g) \leq 0$. On suppose qu'il existe $C \subset D_\Omega(r, \infty, g)$ tel que*

$$\text{diam}_{d+n}(D_\Omega(\lambda, a, g), \Omega_r) \geq \gamma \quad \text{et} \quad p_{\Omega_r}(D_\Omega(\lambda, a, g), C) \geq \delta.$$

où $n = \bar{n}_\Omega(r, \infty, g) - \#C$. Alors il existe $z \in D(\lambda, a, g)$ tel que

$$\log \|P_\theta\|_{\Omega_\lambda} \leq \frac{\hat{m}_d^\Omega(\lambda, r, g)}{\tau_{\Omega_r}(z, z_0)} + (1 - 1/\tau_{\Omega_r}(z, z_0)) \hat{e}_d^\Omega(\lambda, g) + d\tau_{\Omega_r}(z, z_0) \hat{m}_\Omega(r, g) \\ + dn_\Omega(r, \infty, g) \log \left(\frac{d+n}{\gamma\delta} \right) + d\tau_\Omega(\lambda, r)^2 \log(ed \text{diam}_\Omega(\lambda, r)) \\ + d \log \left(\frac{d+n}{\gamma} \right),$$

où $P_\theta(z) = P(z, e^{i\theta})$.

Démonstration. On applique le lemme technique 3.6.10 à la fonction g . On fixe $\varepsilon \in]0, 1[$ de sorte que $(d+n)\varepsilon < \gamma$. Alors il existe un ensemble $E \subset \Omega_r$ tel que $\text{diam}_n(E, \Omega_r) \leq n\varepsilon$ et $\forall z \in \Omega_r \setminus E$

$$\log |P_g(z)| \leq \frac{\hat{m}(r, P_g)}{\tau_{\Omega_r}(z, z_0)} + \int_{\partial\Omega_r} \log^+ |P_g(\xi)| \Phi_{\Omega_r}(z, \xi) d\sigma(\xi) - n_{\Omega}(r, \infty, P_g) \log(\varepsilon p_{\Omega_r}(z, C)).$$

Or en appliquant le lemme 3.6.11

$$\int_{\partial\Omega_r} \log^+ |P_g(\xi)| \Phi_{\Omega_r}(z, \xi) d\sigma(\xi) \leq (1 - 1/\tau_{\Omega_r}(z, z_0)) \log \|P\|_{\Omega_\lambda \times \mathbb{D}} + d\tau_{\Omega_r}(z, z_0) \hat{m}_{\Omega}(r, g) + d \log \text{diam}_{\Omega}(\lambda, r) + d \log 8,$$

et $n_{\Omega}(r, \infty, P_g) \leq dn_{\Omega}(r, \infty, g)$. D'après la proposition 3.3.15, l'ensemble

$$F = \{z \in \Omega_\lambda \mid \log |P_\theta(z)| \leq \log \|P_\theta\|_{\Omega_\lambda} + d \log \varepsilon - d\tau_{\Omega}(\lambda, r)^2 \log C\},$$

avec $C = 8\text{diam}_{\Omega}(\lambda, r)$ est de d -ième diamètre greenien dans Ω_r , n'excédant pas $d\varepsilon$. Alors

$$\begin{aligned} \text{diam}_{d+n}(E \cup F, \Omega_r) &\leq \text{diam}_n(E, \Omega_r) + \text{diam}_d(F, \Omega_r) \leq (d+n)\varepsilon \\ &< \gamma \leq \text{diam}_{d+n}(D_{\Omega}(\lambda, a, g), \Omega_r). \end{aligned}$$

Donc il existe $z \in D_{\Omega}(\lambda, a, g)$ qui n'appartient ni à E ni à F . D'où

$$\begin{aligned} \log |P_g(z)| &\leq \frac{\hat{m}_{\Omega}(r, P_g)}{\tau_{\Omega_r}(z, z_0)} + (1 - 1/\tau_{\Omega_r}(z, z_0)) \log \|P\|_{\Omega_\lambda \times \mathbb{D}} + d\tau_{\Omega_r}(z, z_0) \hat{m}_{\Omega}(r, g) \\ &\quad + dn_{\Omega}(r, \infty, g) \log \left(\frac{1}{\varepsilon \delta} \right) + d \log \text{diam}_{\Omega}(\lambda, r) + d \log 8 \\ &\leq \frac{\hat{m}_d^{\Omega}(\lambda, r, g)}{\tau_{\Omega_r}(z, z_0)} + (1 - 1/\tau_{\Omega_r}(z, z_0)) \hat{e}_d^{\Omega}(\lambda, g) + d\tau_{\Omega_r}(z, z_0) \hat{m}_{\Omega}(r, g) \\ &\quad + dn_{\Omega}(r, \infty, g) \log \left(\frac{1}{\varepsilon \delta} \right) + d \log \text{diam}_{\Omega}(\lambda, r) + d \log 8. \end{aligned}$$

De plus puisque z n'est pas dans F

$$\log \|P_\theta\|_{\Omega_\lambda} + d \log \varepsilon - d\tau_{\Omega}(\lambda, r)^2 \log(8\text{diam}_{\Omega}(\lambda, r)) < \log |P_\theta(z)| \leq \log |P_g(z)|.$$

Donc

$$\begin{aligned} \log \|P_\theta\|_{\Omega_\lambda} &\leq \frac{\hat{m}_d^{\Omega}(\lambda, r, g)}{\tau_{\Omega_r}(z, z_0)} + (1 - 1/\tau_{\Omega_r}(z, z_0)) \hat{e}_d^{\Omega}(\lambda, g) + d\tau_{\Omega_r}(z, z_0) \hat{m}_{\Omega}(r, g) \\ &\quad + dn_{\Omega}(r, \infty, g) \log \left(\frac{1}{\varepsilon \delta} \right) + d\tau_{\Omega}(\lambda, r)^2 \log(8\text{diam}_{\Omega}(\lambda, r)) + d \log \left(\frac{1}{\varepsilon} \right). \end{aligned}$$

On fait tendre ε vers $\frac{\gamma}{d+n}$ ce qui conclut la démonstration de la proposition. \blacksquare

Lorsque le domaine Ω est le disque \mathbb{D} , on peut améliorer la proposition 3.6.12 de la façon suivante.

Proposition 3.6.13. *Soient $g \in \mathcal{M}(\mathbb{D})$, $d \in \mathbb{N}$, $\lambda, r, \delta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $0 < \lambda < r < 1$, $\gamma \in]0, 1[$, $\delta \in]0, 1[$ et $P \in \mathbb{C}_{\leq d}[z, w]$ tels que $\hat{m}(\lambda, P_g) \leq 0$. On suppose qu'il existe $C \subset D(r, \infty, g)$ tel que*

$$\text{diam}_{d+n}(D(\lambda, a, g), \mathbb{D}_r) \geq \gamma \quad \text{et} \quad p_r(D(\lambda, a, g), C) \geq \delta,$$

où $n = \bar{n}(r, \infty, g) - \#C$. Alors il existe $z \in D(\lambda, a, g)$ tel que

$$\begin{aligned} \log \|P_\theta\|_{\mathbb{D}_\lambda} &\leq \left(\frac{r - |z|}{r + |z|} \right) \hat{m}_d(\lambda, r, g) + \frac{2|z|}{r + |z|} \hat{e}_d(\lambda, g) + d \left(\frac{r + |z|}{r - |z|} \right) \hat{m}(r, g) \\ &\quad + dn(r, \infty, g) \log \left(\frac{4e}{\gamma \delta} \right) + 4d \log \left(\frac{r r + \lambda}{\lambda r - \lambda} \right) + d \log \left(\frac{2e}{\gamma} \right), \end{aligned}$$

où $P_\theta(z) = P(z, e^{i\theta})$.

Démonstration. On procède comme dans la démonstration de la proposition 3.6.12 en remplaçant la proposition 3.3.15 par la proposition 3.3.13. ■

Proposition 3.6.14. *Soit $g \in \mathcal{M}(\Omega)$. Alors pour tout $\lambda, r, \nu \in \mathbb{R}$ tels que $0 < \lambda < r < \nu < 1$ et $d \in \mathbb{N}$*

$$\hat{m}_d^\Omega(\lambda, r, g) \leq \frac{\log(\frac{r}{\lambda})}{\log(\frac{\nu}{\lambda})} \hat{e}_d^\Omega(\lambda, g) + dT_\Omega(\nu, g) + d \log \text{diam}_\Omega(\lambda, \nu) + d \log 8.$$

Démonstration. Pour démontrer l'inégalité il suffit d'appliquer le corollaire 3.6.9 à la fonction P_g où $P \in \mathbb{C}_{\leq d}[z, w]$ est n'importe quel polynôme tel que $P_g \neq 0$, $\hat{m}_\Omega(\lambda, P_g) \leq 0$ et $\hat{m}_\Omega(r, P_g) = \hat{m}_d^\Omega(\lambda, r, g)$. D'après le corollaire 3.6.9

$$\hat{m}_\Omega(r, P_g) \leq \frac{\log(\frac{r}{\lambda})}{\log(\frac{\nu}{\lambda})} \hat{m}_\Omega(\nu, P_g) + \frac{\log(\frac{\nu}{r})}{\log(\frac{\nu}{\lambda})} \hat{m}_\Omega(\lambda, P_g) \leq \frac{\log(\frac{r}{\lambda})}{\log(\frac{\nu}{\lambda})} \hat{m}_d^\Omega(\lambda, \nu, g),$$

D'après le lemme 3.6.11

$$\hat{m}_d^\Omega(\lambda, \nu, g) \leq \hat{e}_d^\Omega(\lambda, g) + d\hat{m}_\Omega(\nu, g) + d \log \text{diam}_\Omega(\lambda, \nu) + d \log 8.$$

Or par définition $T_\Omega(\nu, g) = \hat{m}_\Omega(\nu, g) + N_\Omega(\nu, \infty, g)$. ■

Rappel théorème 3.1.16. *Soient (Ω, z_0) un domaine régulier, $g \in \mathcal{M}(\Omega)$, $d \in \mathbb{N}$, $\lambda, \nu, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ tels que $0 < \lambda < \nu < 1$, $\gamma, \delta \in]0, 1[$. On suppose qu'il existe un borélien $A \subset \mathbb{S}^1$ de longueur $l > 0$ tel que pour tout $a \in A$, il existe $C_a \subset D_\Omega(\nu, \infty, g)$ tel que*

$$\text{diam}_{d+n}(D_\Omega(\lambda, a, g), \Omega_\lambda) \geq \gamma \quad \text{et} \quad p_{\Omega_\nu}(D_\Omega(\lambda, a, g), C_a) \geq \delta,$$

où $n = \bar{n}_\Omega(\nu, a, g) - \#C_a$. Alors

$$\begin{aligned} \frac{\log(\frac{2\nu}{\nu+\lambda})}{\log(\frac{\nu}{\lambda})} \frac{\hat{e}_d^\Omega(\lambda, g)}{\tau_\Omega(\lambda, \nu)} &\ll d\tau_\Omega(\lambda, \nu)T_\Omega(\nu, g) + dn_\Omega(\nu, \infty, g) \log\left(\frac{\nu e(d+n)}{\lambda \gamma \delta}\right) \\ &+ d \log\left(\frac{\nu e(d+n)}{\lambda l \gamma}\right) + d\tau_\Omega(\lambda, \nu)^2 \log(\text{ediam}_\Omega(\lambda, \nu)). \end{aligned}$$

De plus la constante omise est absolue.

Démonstration. On pose $r = \frac{\nu+\lambda}{2}$. Soit $P \in \mathbb{C}_{\leq d}[z, w]$ un polynôme extrémal pour la mesure de transcendance méromorphe $\hat{e}_d^\Omega(\lambda, g)$. Or d'après le lemme 2.7.23

$$\text{diam}_{d+n}(D_\Omega(\lambda, a, g), \Omega_r) \geq \left(\frac{\lambda}{r}\right) \text{diam}_{d+n}(D_\Omega(\lambda, a, g), \Omega_\lambda) \geq \gamma,$$

et

$$p_r(D_\Omega(\lambda, a, g), C_a) \geq \left(\frac{\lambda}{r}\right) p_\lambda(D_\Omega(\lambda, a, g), C_a) \geq \delta.$$

D'après le corollaire 3.3.8 et la proposition 3.6.12, il existe $z \in D_\Omega(\lambda, a, g)$ tel que

$$\begin{aligned} \hat{e}_d^\Omega(\lambda, g) &= \log \|P\|_{\Omega_\lambda \times \mathbb{D}} \leq \sup \{ \log \|P_\theta\|_{\Omega_\lambda} \mid e^{i\theta} \in A \} + d \log \left(\frac{16\pi}{l} \right) \\ &\leq \frac{1}{\tau_z} \hat{m}_d^\Omega(\lambda, r, g) + \left(1 - \frac{1}{\tau_z}\right) \hat{e}_d^\Omega(\lambda, g) + d\tau_z \hat{m}_\Omega(r, g) \\ &\quad + dn_\Omega(r, \infty, g) \log \left(\frac{(d+n)r^2}{\gamma \delta \lambda^2} \right) + d\tau_\Omega(\lambda, r)^2 \log(\text{ediam}_\Omega(\lambda, r)) \\ &\quad + d \log \left(\frac{16\pi(d+n)r^2}{l\gamma\lambda^2} \right), \end{aligned} \tag{3.6.4}$$

où $\tau_z = \tau_{\Omega_r}(z, z_0)$. D'après la proposition 3.6.14

$$\hat{m}_d^\Omega(\lambda, r, g) \leq \frac{\log(\frac{r}{\lambda})}{\log(\frac{\nu}{\lambda})} \hat{e}_d^\Omega(\lambda, g) + dT_\Omega(\nu, g) + d \log \text{diam}_\Omega(\lambda, \nu) + d \log 8. \quad (3.6.5)$$

Donc en combinant les deux inégalités 3.6.4 et 3.6.5 ci-dessus, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\log(\frac{\nu}{\lambda})}{\log(\frac{r}{\lambda})} \frac{\hat{e}_d^\Omega(\lambda, g)}{\tau_z} &\ll d\tau_z \hat{m}_\Omega(r, g) + dn_\Omega(r, \infty, g) \log \left(\frac{(d+n)r}{\gamma\delta\lambda} \right) \\ &\quad + d\tau_\Omega(\lambda, r)^2 \log(e \text{diam}_\Omega(\lambda, r)) + d \log \left(\frac{e(d+n)r}{l\gamma\lambda} \right) \\ &\quad + dT_\Omega(\nu, g) + d \log \text{diam}_\Omega(\lambda, \nu) + d \log 8 \\ &\ll d\tau_z T_\Omega(\nu, g) + dn_\Omega(\nu, \infty, g) \log \left(\frac{\nu}{\lambda} e \frac{(d+n)}{\gamma\delta} \right) \\ &\quad + d\tau_\Omega(\lambda, \nu)^2 \log(e \text{diam}_\Omega(\lambda, \nu)) + d \log \left(\frac{\nu}{\lambda} \frac{e(d+n)}{l\gamma} \right), \end{aligned}$$

car $\hat{m}_\Omega(r, g) \leq T_\Omega(r, g)$. On majore τ_z par $\tau_\Omega(\lambda, \nu)$ et r par ν . Cela achève la démonstration du théorème. ■

Le corollaire 3.1.22 ci-dessous est obtenu en appliquant la majoration de la mesure de transcendance méromorphe démontrée en 3.1.16 et l'expression explicite de la distance de Harnack dans le disque 2.1.28.

Rappel corollaire 3.1.22. Soient $g \in \mathcal{M}(\mathbb{D})$, $d \in \mathbb{N}$, $\lambda, \nu, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ tels que $0 < \lambda < \nu < 1$, $\gamma, \delta \in]0, 1[$. On suppose qu'il existe un borélien $A \subset \mathbb{S}^1$ de longueur $l > 0$ tel que pour tout $a \in A$, il existe $C_a \subset D(\nu, \infty, g)$ tel que

$$\text{diam}_{d+n}(D(\lambda, a, g), \mathbb{D}_\lambda) \geq \gamma \text{ et } p_\nu(D(\lambda, a, g), C_a) \geq \delta,$$

où $n = \bar{n}(\nu, \infty, g) - \#C_a$. Alors pour tout domaine régulier $\Omega \subset \mathbb{C}$ et $h : (\Omega, z_0) \rightarrow (\mathbb{D}, 0)$ conforme

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda, \nu) \hat{e}_d^\Omega(\lambda, g \circ h) &\ll d \left(\frac{\nu + \lambda}{\nu - \lambda} \right) T(\nu, g) + dn(\nu, \infty, g) \log \left(\frac{\nu}{\lambda} \frac{e(d+n)}{\gamma\delta} \right) \\ &\quad + d \log \left(\frac{\nu}{\lambda} \frac{e(d+n)}{\gamma l} \right) + d \left(\frac{\nu + \lambda}{\nu - \lambda} \right)^2 \log \left(\frac{\nu}{\lambda} \frac{e}{(1-\nu)} \right). \end{aligned}$$

La constante omise est absolue.

Démonstration. On procède comme dans la démonstration du corollaire 3.1.18. ■

Rappel théorème 3.1.23. Soient $g \in \mathcal{M}(\mathbb{D})$, $d \in \mathbb{N}$, $\lambda, \nu, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ tels que $0 < \lambda < \nu < 1$, $\gamma, \delta \in]0, 1[$. On suppose qu'il existe un borélien $A \subset \mathbb{S}^1$ de longueur $l > 0$ tel que pour tout $a \in A$, il existe $C_a \subset D(\nu, \infty, g)$ tel que

$$\text{diam}_{d+n}(D(\lambda, a, g), \mathbb{D}_\lambda) \geq \gamma \text{ et } p_\nu(D(\lambda, \infty, g), C_a) \geq \delta,$$

où $n = \bar{n}(\nu, \infty, g) - \#C_a$. Alors

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda, \nu) \hat{e}_d(\lambda, g) &\ll d \left(\frac{\nu + \lambda}{\nu - \lambda} \right) T(\nu, g) + dn(\nu, \infty, g) \log \left(\frac{\nu}{\lambda} \frac{e}{\gamma\delta} \right) + d \log \left(\frac{\nu}{\lambda} \frac{e}{\gamma l} \right) \\ &\quad + d \log \left(\frac{e(\nu + \lambda)}{(1-\nu)(\nu - \lambda)} \right) + d \log \left(\frac{\nu}{\lambda} \right). \end{aligned}$$

La constante omise est absolue.

Démonstration. On procède comme dans la démonstration du théorème 3.1.19. ■

Rappel corollaire 3.1.24. Soient $g \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$, $d \in \mathbb{N}$, $\lambda, \nu, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ tels que $0 < \lambda < \nu < \infty$, $\gamma, \delta \in]0, 1[$. On suppose qu'il existe un borélien $A \subset \mathbb{S}^1$ de longueur $l > 0$ tel que pour tout $a \in A$, il existe $C_a \subset D(\nu, \infty, g)$ tel que

$$\text{diam}_{d+n}(D(\lambda, a, g), \mathbb{D}_\lambda) \geq \gamma \quad \text{et} \quad p_\nu(D(\lambda, a, g), C_a) \geq \delta,$$

où $n = \bar{n}(\nu, \infty, g) - \#C_a$. Alors

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda, \nu) \mathring{e}_d(\lambda, g) &\ll d \left(\frac{\nu + \lambda}{\nu - \lambda} \right) T(\nu, g) + dn(\nu, \infty, g) \log \left(\frac{\nu e}{\lambda \gamma \delta} \right) + d \log \left(\frac{\nu e}{\lambda \gamma l} \right) \\ &\quad + d \log \left(\frac{e\nu \nu + \lambda}{\lambda \nu - \lambda} \right). \end{aligned}$$

La constante omise est absolue.

Démonstration. On procède comme dans la démonstration du corollaire 3.1.20. ■

3.7 Applications

Cette dernière section du chapitre 3 regroupe les démonstrations de nouveaux lemmes de zéros pour des familles particulières de fonctions méromorphes. Les deux familles de fonctions que nous étudions sont d'une grande importance en arithmétiques. Il s'agit des *fonctions elliptiques* et des *fonctions fuchsien*. L'étude de la distribution des petites valeurs et des pôles de ces fonctions est facilitée par l'existence d'un groupe agissant sur leur domaine de définition et sous l'action duquel ces fonctions sont invariantes : un *réseau* Λ de \mathbb{R}^2 pour les fonctions elliptiques et un *groupe fuchsien* pour les fonctions fuchsien. Pour ces deux classes de fonctions la stratégie que nous suivons pour minorer le d -ième diamètre hyperbolique des ensembles $D(r, a, g)$ lorsque a parcourt un arc $A \subset \mathbb{S}^1$ consiste à choisir une partie B dans la pré-image de cet arc A par l'application g , puis de suivre l'orbite de B sous l'action du groupe laissant invariant la fonction g .

Les fonctions elliptiques Dans ce premier paragraphe nous démontrons que toute fonction elliptique non constante vérifie un lemme de zéros polynomial. Commençons par rappeler la définition des fonctions elliptiques et des fonctions elliptiques de Weierstraß. Une référence pour ces notions est le premier chapitre de [3,65] et le chapitre XIV de [66].

Rappel définition 1.6.21. Une fonction $g \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ est dite *elliptique* s'il existe $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ linéairement indépendants sur \mathbb{R} tels que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad g(z) = g(z + \omega_1) = g(z + \omega_2).$$

De plus $\omega_1\mathbb{Z} \oplus \omega_2\mathbb{Z}$ est appelé le *réseau des périodes* de g .

Autrement dit une fonction elliptique est une fonction méromorphe sur \mathbb{C} admettant une double période. L'ensemble des fonctions elliptiques ayant un même réseau des périodes Λ forme un sous-corps de $\mathcal{M}(\mathbb{C})$. L'existence de fonctions elliptiques non constantes n'est pas triviale¹⁶ mais Weierstraß a construit de telles fonctions pour n'importe quel réseau Λ prescrit¹⁶. Grâce à cette double périodicité, nous sommes en mesure de déterminer la répartition des petites valeurs de ces fonctions

Exemple 3.7.1. Parmi les fonctions elliptiques, il existe une classe particulièrement importante de fonctions exhibée par Weierstraß : *les fonctions elliptiques de Weierstraß*.

¹⁶Voir l'exemple 3.7.1.

Ces fonctions elliptiques sont construites de la manière suivante. Étant donné un réseau $\Lambda := \mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z}$ avec $\text{Im}\tau > 0$ ¹⁷, on considère la fonction \wp_Λ définie par

$$\forall z \in \mathbb{C}, \wp_\Lambda(z) := \frac{1}{z^2} + \sum_{w \in \Lambda \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right).$$

L'importance des fonctions elliptiques de Weierstraß vient du fait qu'elles suffisent à engendrer toutes les autres. Plus précisément, toute fonction elliptique est une fraction rationnelle complexe des fonctions de Weierstraß \wp_Λ et \wp'_Λ avec Λ son réseau des périodes.

Définition 3.7.2 (Parallélogramme fondamental). Soit $\Lambda = \omega_1\mathbb{Z} \oplus \omega_2\mathbb{Z}$ un réseau de \mathbb{C} . Un *parallélogramme fondamental* de Λ est un sous-ensemble de la forme

$$\{\alpha + \lambda\omega_1 + \mu\omega_2 \mid \lambda, \mu \in [0, 1[\} \text{ avec } \alpha \in \mathbb{C}.$$

On note $\text{vol}(\Lambda)$ l'aire de n'importe¹⁸ quel parallélogramme fondamental de Λ .

Théorème 3.7.3 ([3, 66]). Soient P un parallélogramme fondamental du réseau Λ et $g \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ une fonction elliptique de réseau de périodes Λ . Alors la somme des résidus de g dans P est nulle.

Ce théorème 3.7.3 implique, grâce au théorème des résidus, que la distribution des valeurs d'une fonction elliptique est particulièrement simple.

Corollaire 3.7.4. Soit P un parallélogramme fondamental d'un réseau Λ de \mathbb{C} . Une fonction elliptique g non constante de réseau des périodes Λ atteint autant de fois¹⁹ toutes les valeurs de $\hat{\mathbb{C}}$ dans le parallélogramme P . Autrement dit

$$\forall a \in \hat{\mathbb{C}}, n(P, a, g) = n(P, \infty, g). \tag{3.7.1}$$

Le nombre $n(P, \infty, g)$ est appelé l'ordre de la fonction elliptique g .

Démonstration. On suppose dans un premier temps que g n'atteint pas la valeur a ou de pôles sur ∂P . Il suffit d'appliquer le théorème des résidus²⁰ sur le bord du parallélogramme P . Grâce au théorème des résidus, on obtient

$$\forall a \in \hat{\mathbb{C}}, n(P, a, g) - n(P, \infty, g) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial P} \frac{g'(\xi)}{g(\xi) - a} d\xi = \sum_{z \in P} \text{Rés}_z(g).$$

Or la fonction $h = \frac{g'}{g-a}$ est une fonction elliptique et donc la somme des résidus de h dans P est nulle d'après le théorème 3.7.3. Donc l'égalité 3.7.1 est vérifiée pour tout a dans $\hat{\mathbb{C}} \setminus \partial P$. Soit Q un autre parallélogramme fondamental de Λ . Alors

$$\forall a \in \hat{\mathbb{C}}, n(P, a, g) = n(Q, a, g).$$

Or pour tout $a \in \hat{\mathbb{C}}$, il existe un parallélogramme fondamental Q_a tel que a et ∞ ne sont pas atteints par g sur ∂Q_a . Donc

$$\forall a \in \hat{\mathbb{C}}, n(P, a, g) = n(Q_a, a, g) = n(Q_a, \infty, g) = n(P, \infty, g).$$

Cela termine la démonstration du corollaire. ■

¹⁷Tous les réseaux de \mathbb{R}^2 peuvent être mis sous cette forme.

¹⁸Cette aire est indépendante du choix d'un tel parallélogramme.

¹⁹On tient compte de la multiplicité des valeurs.

²⁰Voir le chapitre VI de [66].

Les fonctions elliptiques de Weierstraß sont des fonctions elliptiques d'ordre exactement 2. On peut montrer que toute fonction elliptique g non constante est d'ordre au moins 2. Afin de démontrer le lemme de zéros polynomial pour les fonctions elliptiques, il suffit de minorer le d -ième diamètre euclidien d'une fibre $D(\lambda, a, g)$ uniformément lorsque $a \in \mathbb{S}^1$. Puisque g atteint au moins une fois chaque valeur de \mathbb{S}^1 dans chaque parallélogramme fondamental de son réseau des périodes Λ , il suffit de compter le nombre de parallélogrammes fondamentaux de Λ contenus dans le disque \mathbb{D}_λ pour en déduire une minoration du d -ième diamètre euclidien de $D(\lambda, a, g)$.

Notation 3.7.5. Soient $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2$ un réseau de \mathbb{C} et $g \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ une fonction elliptique non constante de réseau des périodes Λ . On note

$$\forall a \in \hat{\mathbb{C}}, \Phi_\Lambda(a, g) = \sup \{d(z, \Lambda_z) \mid z \in \mathbb{C}, g(z) = a\},$$

avec $\Lambda_z = \{z + n\omega_1 + m\omega_2 \mid n, m \in \mathbb{N}, n^2 + m^2 > 0\}$.

Déterminer le nombre de points du réseau $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ fut étudié par Gauß et est connu sous le nom de *problème du cercle de Gauß*.

Lemme 3.7.6. Soit Λ un réseau de \mathbb{C} . On considère P un parallélogramme fondamental de Λ et on note

$$N(r, P, \Lambda) = \#\{\gamma \in \Lambda \mid \gamma \cdot P \subset \mathbb{D}_r\}.$$

Alors

$$N(r, P, \Lambda) \sim \frac{\pi r^2}{\text{vol}(\Lambda)},$$

lorsque $r \rightarrow \infty$.

Lemme 3.7.7. Soient Λ un réseau de \mathbb{C} et $g \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ une fonction elliptique non constante de réseau des périodes Λ . Alors

$$\forall \lambda > 0, \forall d \in \mathbb{N}, d \ll \frac{\pi \lambda^2}{\text{vol}(\Lambda)} \implies \forall a \in \hat{\mathbb{C}}, \text{diam}_d(D(\lambda, a, g)) \geq \frac{1}{2} \Phi_\Lambda(a, g).$$

Démonstration. On fixe P un parallélogramme fondamental de Λ . Pour minorer le d -ième diamètre de $D(\lambda, a, g)$, il suffit de déterminer le nombre de translatés par Λ de P contenus dans le disque \mathbb{D}_λ . Or d'après le lemme 3.7.6, il y a de l'ordre de

$$N = \frac{\pi \lambda^2}{\text{vol}(\Lambda)},$$

parallélogrammes contenus dans le disque \mathbb{D}_λ . Donc lorsque d est petit devant N , le cardinal de $D(\lambda, a, g)$ est strictement inférieur à d et donc d'après la proposition 2.7.4

$$\text{diam}_d(D(\lambda, a, g)) \geq \frac{1}{2} \min \{|z - w| \mid z, w \in D(\lambda, a, g), z \neq w\} \geq \frac{1}{2} \Phi_\Lambda(a, g).$$

Ce qu'il fallait démontrer. ■

Lemme 3.7.8. Soient Λ un réseau de \mathbb{C} et $g \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ une fonction elliptique non constante. Alors $T(r, g) \asymp r^2$.

Démonstration. Soit P un parallélogramme fondamental de Λ . On applique le théorème de Cartan 2.6.11. Donc

$$T(r, g) = \int_0^{2\pi} N(r, e^{i\theta}, g) \frac{d\theta}{2\pi} + \log^+ |g(0)| \asymp kN(r, P, \Lambda)$$

où k est l'ordre de \wp_Λ . Or d'après le lemme 3.7.6

$$N(r, P, \Lambda) \asymp \frac{\pi r^2}{\text{vol}(\Lambda)}.$$

Donc $T(r, g) \asymp r^2$. ■

Rappel corollaire 1.6.22. Soit $g \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ une fonction elliptique non constante. Alors g vérifie un lemme de zéros polynomial. Plus précisément, il existe une constante explicite $C > 0$ telle que

$$\forall d \in \mathbb{N}, \forall r > 0, \mathcal{Z}_d(r, g) \leq C(dr)^2.$$

Démonstration. Nous allons appliquer le critère 1.6.6 pour les fonctions méromorphes sur \mathbb{C} . La fonction g étant périodique, il existe une constante $\Delta > 0$ telle que

$$\forall a \in \mathbb{S}^1, \forall z \in D(a, g), \forall w \in D(\infty, g), d(z, w) \geq \Delta.$$

Soit Λ le réseau des périodes de la fonction g et on introduit les cinq suites suivantes

$$\forall d \in \mathbb{N}, \lambda_d := \sqrt{\frac{\text{vol}(\Lambda)d}{\pi}}, \nu_d := 2\lambda_d, \gamma_d = \frac{1}{2} \inf_{a \in \mathbb{S}^1} \Phi_\Lambda(a, g), \delta_d = \Delta \text{ et } l_d := 2\pi.$$

Donc d'après la proposition 2.7.18

$$\forall a \in \mathbb{S}^1, \forall z \in D(\lambda_d, a, g), \forall w \in D(\nu_d, \infty, g), p_{\nu_d}(z, w) \geq d(z, w) \geq \delta_d.$$

De plus d'après le lemme 3.7.7

$$\forall \lambda > 0, \forall d \in \mathbb{N}, d \ll \frac{\pi \lambda^2}{\text{vol}(\Lambda)} \implies \forall a \in \hat{\mathbb{C}}, \text{diam}_d(D(\lambda, a, g)) \geq \frac{1}{2} \Phi_\Lambda(a, g).$$

Donc d'après la proposition 2.7.18

$$\forall d \in \mathbb{N}, \forall a \in \mathbb{S}^1, \text{diam}_d(D(\lambda_d, a, g), \mathbb{D}_{\nu_d}) \geq \text{diam}_d(D(\lambda_d, a, g)) \geq \gamma_d.$$

De plus d'après le lemme 3.7.8 ci-dessus, $T(r, g) \asymp r^2$. Donc en appliquant le théorème 1.6.6 avec les exposants $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \gamma = \delta = l = 0$, $\beta = 1$, $A_d = \mathbb{S}^1$ et $C_a = D(\nu_d, a, g)$, on obtient

$$\forall r > 0, \forall d \in \mathbb{N}, \mathcal{Z}_d(r, g) \ll (d \vee \varphi(r))^2,$$

avec $\varphi(r) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid \lambda_k \geq r\}$. Or $\varphi(r) \asymp r^2$. Donc

$$\forall r > 0, \forall d \in \mathbb{N}, \mathcal{Z}_d(r, g) \ll (d \vee r^2)^2,$$

Cependant on peut améliorer la dépendance en r de cette borne de la manière suivante. Soient $P \in \mathbb{C}_{\leq d}[z, w]$ non nul et on pose

$$\forall \gamma \in \Lambda, P^\gamma(z, w) = P(t_\gamma(z), w) \text{ avec } t_\gamma(z) = z + \gamma.$$

Alors il existe un rayon $r_0 > 0$ tel que

$$\forall \gamma \in \Gamma, n(t_\gamma(D), P_g) = n(D, P_g^\gamma) \leq \mathcal{Z}_d(r_0, g) \ll d^2 \vee 1.$$

Donc

$$\forall d \in \mathbb{N}, \forall r \in [0, 1[, \mathcal{Z}_d(r, g) \ll r^2 \sup_{\gamma \in \Lambda} \mathcal{Z}_d(t_\gamma(D), g) \ll (dr)^2.$$

Ce qu'il fallait démontrer. ■

Les fonctions fuchsiennes Dans ce deuxième paragraphe nous obtenons un lemme de zéros polynomial pour les fonctions méromorphes sur \mathbb{D} invariantes sous l'action d'un groupe fuchsien. Rappelons d'abord quelques définitions vues dans l'introduction.

Rappel définition 1.6.24. Un sous-groupe $\Gamma \subset \text{Mob}(\hat{\mathbb{C}})$ est dit *fuchsien* pour un disque $\Delta \subset \hat{\mathbb{C}}$ si ce dernier est laissé invariant par l'action de Γ sur la sphère $\hat{\mathbb{C}}$ et si l'action induite par Γ sur Δ est proprement discontinue. C'est-à-dire que pour tout compact $K \subset \Delta$, l'ensemble

$$\{g \in \Gamma \mid (g \cdot K) \cap K \neq \emptyset\},$$

est fini. On dit de plus que Γ est *cocompact* lorsque Δ/Γ est compact.

À l'origine les groupes fuchsiens ont été introduits par Poincaré dans [90] pour le demi-plan \mathbb{H} . Toutefois la mesure de transcendance $e_d(\lambda, g)$ étant définie pour les fonctions sur le disque \mathbb{D} plutôt que le demi-plan \mathbb{H} , il est plus pratique de ramener l'étude des fonctions du demi-plan à celle des fonctions du disque via l'application conforme $h(z) = \frac{z-i}{z+i}$ envoyant \mathbb{D} sur \mathbb{H} .

Rappel définition 1.6.25. Une fonction $g \in \mathcal{M}(\mathbb{D})$ est dite *fuchsienne* s'il existe un groupe fuchsien Γ de \mathbb{D} dont l'action sur \mathbb{D} laisse invariante la fonction g . Autrement dit $\forall \gamma \in \Gamma, \forall z \in \mathbb{D}, g(\gamma \cdot z) = g(z)$.

Définition 3.7.9 (Domaine fondamental - [60, Déf. 6.2]). Soit Γ un groupe fuchsien de \mathbb{D} . Un *domaine fondamental* de Γ est un sous-ensemble D de \mathbb{D} tel que

$$\forall \gamma \in \Gamma \setminus \{\text{Id}\}, (\gamma \cdot D) \cap D = \emptyset \text{ et } \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \overline{\gamma \cdot D} = \mathbb{D}.$$

On note $\text{vol}(\Gamma)$ le volume hyperbolique de n'importe²¹ quel domaine fondamental de Γ .

Théorème 3.7.10 ([3, 66]). Soient Γ un groupe fuchsien de \mathbb{D} , D un domaine fondamental de l'action Γ sur \mathbb{D} et $g \in \mathcal{M}(\mathbb{D})$ une fonction fuchsienne invariante sous l'action de Γ . Alors la somme des résidus de g dans D est nulle.

Ce théorème 3.7.10 implique, grâce au théorème des résidus, que la distribution des valeurs d'une fonction fuchsienne est particulièrement simple.

Corollaire 3.7.11. Soient Γ un groupe fuchsien de \mathbb{D} et D un domaine fondamental de Γ . Une fonction fuchsienne $g \in \mathcal{M}(\mathbb{D})$ non constante et invariante sous l'action de Γ atteint autant de fois²² toutes les valeurs de $\hat{\mathbb{C}}$ dans le domaine D . Autrement dit

$$\forall a \in \hat{\mathbb{C}}, n(D, a, g) = n(D, \infty, g).$$

Le nombre $n(D, \infty, g)$ est appelé l'ordre de la fonction fuchsienne g .

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème des résidus²³ sur le bord du domaine D . Grâce au théorème des résidus, on obtient

$$\forall a \in \hat{\mathbb{C}}, n(D, a, g) - n(D, \infty, g) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D} \frac{g'(\xi)}{g(\xi) - a} d\xi = \sum_{z \in D} \text{Rés}_z(g).$$

Or la fonction $h = \frac{g}{g-a}$ est une fonction fuchsienne et donc la somme des résidus de h dans P est nulle d'après le théorème 3.7.10. Soit \mathcal{Q} un autre domaine fondamental de Γ . Alors

$$\forall a \in \hat{\mathbb{C}}, n(\mathcal{D}, a, g) = n(\mathcal{Q}, a, g).$$

²¹Les automorphismes de \mathbb{D} étant des isométries de \mathbb{D} pour la métrique hyperbolique, ce volume ne dépend pas du choix du domaine fondamental.

²²On tient compte de la multiplicité des valeurs.

²³Voir le chapitre VI de [66].

Or pour tout $a \in \hat{\mathbb{C}}$, il existe un domaine fondamental Q_a tel que a et ∞ ne sont pas atteints par g sur ∂Q_a . Donc

$$\forall a \in \hat{\mathbb{C}}, n(\mathcal{D}, a, g) = n(Q_a, a, g) = n(Q_a, \infty, g) = n(\mathcal{D}, \infty, g).$$

Cela termine la démonstration du corollaire. \blacksquare

Notation 3.7.12. Soient Γ un groupe fuchsien de \mathbb{D} et $g \in \mathcal{M}(\mathbb{D})$ une fonction non constante invariante sous l'action du groupe Γ . On note

$$\forall a \in \hat{\mathbb{C}}, \Phi_\Gamma(a, g) = \sup \{p(z, \Gamma_z) \mid z \in \mathbb{C}, g(z) = a\},$$

avec $\Gamma_z = \{\gamma \cdot z \mid \gamma \in \Gamma, \gamma \neq 0\}$.

Lemme 3.7.13. Soit Γ un groupe fuchsien cocompact de \mathbb{D} . On choisit D un domaine fondamental de Γ et on note

$$N(r, D, \Gamma) = \#\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma \cdot D \subset \mathbb{D}_r^h\}.$$

Alors

$$N(r, D, \Gamma) \sim \frac{\pi e^r}{\text{vol}(\Gamma)},$$

lorsque $r \rightarrow \infty$.

Lemme 3.7.14. Soient Γ un groupe fuchsien cocompact de \mathbb{D} et $g \in \mathcal{M}(\mathbb{D})$ une fonction non constante invariante sous l'action du groupe Γ . Alors

$$\forall \lambda \in [0, 1[, \forall d \in \mathbb{N}, d \ll \frac{\pi}{\text{vol}(\Gamma)} \left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda} \right) \implies \forall a \in \hat{\mathbb{C}}, \text{diam}_d(D(\lambda, a, g), \mathbb{D}) \geq \frac{1}{2} \Phi_\Gamma(a, g).$$

où D est un domaine fondamental de Γ .

Démonstration. On procède comme dans le lemme 3.7.7. On fixe D un domaine fondamental de Γ . Pour minorer $D(\lambda, a, g)$, il suffit de déterminer le nombre de conjugués par Γ de D contenus dans le disque hyperbolique \mathbb{D}_r^h avec $r = \log\left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right)$. Or d'après le lemme 3.7.13, il y a de l'ordre de

$$N = \frac{\pi e^r}{\text{vol}(\Lambda)} = \frac{\pi}{\text{vol}(\Lambda)} \left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda} \right),$$

parallélogrammes contenus dans le disque hyperbolique \mathbb{D}_r^h , c'est-à-dire dans le disque euclidien \mathbb{D}_λ . Donc lorsque d est petit devant N , le cardinal de $D(\lambda, a, g)$ est strictement inférieur à d et donc d'après la proposition 2.7.4

$$\text{diam}_d(D(\lambda, a, g), \mathbb{D}) \geq \frac{1}{2} \min \{p(z, w) \mid z, w \in D(\lambda, a, g), z \neq w\} \geq \frac{1}{2} \Phi_\Gamma(a, g).$$

Ce qu'il fallait démontrer. \blacksquare

Rappel corollaire 1.6.26. Soient $\Gamma \subset \text{Mob}(\mathbb{D})$ un groupe cocompact et $g \in \mathcal{M}(\mathbb{D})$ une fonction non constante et invariante par Γ . Alors g vérifie un lemme de zéros polynomial. Plus précisément, il existe une constante explicite $C > 0$ telle que

$$\forall d \in \mathbb{N}, \forall r \in [0, 1[, \mathcal{Z}_d(r, g) \leq \frac{Cd^6}{1-r}.$$

Démonstration. La démonstration est similaire à celle du corollaire 1.6.22 ci-dessus. Cette fois nous appliquons le critère 1.6.9 pour les fonctions méromorphes sur le disque \mathbb{D} . La fonction g étant périodique, il existe une constante $\Delta > 0$ telle que

$$\forall a \in \mathbb{S}^1, \forall z \in D(a, g), \forall w \in D(\infty, g), p(z, w) \geq \Delta.$$

Soient Γ un groupe fuchsien laissant invariant la fonction g et D un domaine fondamentale de Γ . On introduit les cinq suites suivantes

$$\forall d \in \mathbb{N}, \lambda_d := 1 - \frac{\pi}{\text{vol}(\Gamma)d}, \nu_d := \frac{1 + \lambda_d}{2}, \gamma_d = \inf_{a \in \mathbb{S}^1} \frac{1}{2} \Phi_\Gamma(a, g), \delta_d = \Delta \text{ et } l_d := 2\pi.$$

Donc d'après le lemme 2.7.21

$$\forall a \in \mathbb{S}^1, \forall z \in D(\lambda_d, a, g), \forall w \in D(\nu_d, \infty, g), p_{\nu_d}(z, w) \geq p(z, w) \geq \delta_d.$$

De plus d'après le lemme 3.7.7

$$\forall \lambda > 0, \forall d \in \mathbb{N}, d \ll \frac{\pi}{\text{vol}(\Lambda)} \frac{1 + \lambda}{1 - \lambda} \implies \forall a \in \hat{\mathbb{C}}, \text{diam}_d(D(\lambda, a, g), \mathbb{D}_{\nu_d}) \geq \frac{1}{2} \Phi_\Lambda(a, g).$$

De plus d'après le théorème de Cartan 2.6.11

$$T(\nu_d, g) = \int_0^{2\pi} N(\nu_d, e^{i\theta}, g) \frac{d\theta}{2\pi} + \log^+ |g(0)| \ll k \left(\frac{1 + \nu_d}{1 - \nu_d} \right) \frac{\pi}{\text{vol}(\Gamma)} \ll d$$

où k est l'ordre de la fonction fuchsienne g . Donc d'après le théorème 1.6.9 avec $\gamma = \delta = l = 0, \alpha = 1, \beta = 1, A_d = \mathbb{S}^1$ et $C_a = D(\nu_d, a, g)$, on obtient

$$\forall d \in \mathbb{N}, \forall r \in [0, 1[, \mathcal{Z}_d(r, g) \ll (d \vee \varphi(r))^6,$$

avec $\varphi(r) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid \lambda_k \geq r\}$. On peut améliorer la dépendance en r de cette borne de la manière suivante. Soient $P \in \mathbb{C}_{\leq d}[z, w]$ non nul et on pose

$$\forall h \in \Gamma, P^h(z, w) = (\gamma z + \delta)^d P(h(z), w) \text{ avec } h(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}.$$

Alors il existe un rayon $r_0 > 0$ tel que

$$\forall h \in \Gamma, n(h \cdot D, P_g) = n(D, P_g^h) \leq \mathcal{Z}_{2d}(r_0, g) \ll d^6 \vee 1.$$

Donc

$$\forall d \in \mathbb{N}, \forall r \in [0, 1[, \mathcal{Z}_d(r, g) \ll \frac{1}{1-r} \sup_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{Z}_{2d}(\gamma \cdot D, g) \ll \frac{d^6}{1-r}.$$

Ce qu'il fallait démontrer. ■

CHAPITRE 4

Distribution des petites valeurs

4.1 Introduction

Dans [27], Coman et Poletsky ont démontré le lemme de zéros général 1.3.15 dont nous rappelons l'énoncé ci-dessous.

Rappel théorème 1.3.15. *Soit $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ une fonction transcendante. On suppose qu'il existe $C_1, C_2 > 1$ et $k > 1$ tels que*

$$\forall r \gg 0, C_1 m(r, g) \leq m(kr, g) \leq C_2 m(r, g) \quad \text{où} \quad m(r, g) = \log^+ M(r, g).$$

Alors g vérifie un lemme de zéros polynomial. Plus précisément, il existe une fonction φ strictement croissante telle que

$$\forall d \in \mathbb{N}, \forall r > 0, Z_d(r, g) \leq (d \vee \varphi(r))^2,$$

Pour démontrer le théorème 1.3.15, Coman et Poletsky utilisent d'une part leur majoration de la mesure de transcendance $e_d(g)$ qu'ils ont démontrée dans [26] et d'autre part la théorie d'Ahlfors des *surfaces de recouvrement* pour étudier la distribution des petites valeurs de la fonction g , c'est-à-dire des antécédents par g de points du cercle unité \mathbb{S}^1 . La théorie d'Ahlfors est exposée dans la section 4.2 de ce chapitre. Dans le chapitre 3, nous avons défini une mesure de transcendance holomorphe $e_d(\lambda, g)$ et une mesure de transcendance méromorphe $\hat{e}_d(\lambda, g)$ qui étendent aux domaines réguliers et aux fonctions méromorphes la mesure de transcendance $e_d(g)$ de [26]. Dans ce même chapitre, nous avons donné des majorations de ces mesures en fonction de la distribution des petites valeurs de la fonction g^1 et des pôles de celle-ci. L'objet de ce chapitre est d'étudier maintenant la distribution des petites valeurs d'une fonction $g \in \mathcal{M}(\mathbb{D})$ ou $g \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ à l'aide de la théorie d'Ahlfors dans le but de majorer les mesures de transcendance. Plus précisément, on cherche à minorer le d -ième diamètre pseudo-hyperbolique de $D(\lambda, a, g)$ dans \mathbb{D}_ν uniformément lorsque a parcourt un arc de \mathbb{S}^1 . Les hypothèses que nous faisons sur la fonction g afin de pouvoir mener à bien cette étude sont de même nature que celles figurant dans le théorème 1.3.15 à la différence près que la fonction maximum est remplacée systématiquement par la caractéristique de Nevanlinna.

Résultats

Les théorèmes principaux de ce chapitre sont les deux théorèmes suivants.

¹Voir les théorèmes 3.1.14 et 3.1.16.

Rappel théorème 1.6.16. Soient $g \in \mathcal{M}(\mathbb{D})$ une fonction transcendante², $b \in \hat{\mathbb{C}}$ et $\beta \in [0, \frac{1}{2}[$. On suppose que g vérifie l'une des hypothèses suivantes

- la caractéristique de Nevanlinna satisfait les trois conditions

$$\liminf_{r \rightarrow 1^-} \frac{\log T(r, g)}{-\log(1-r)} > 1, \quad \overline{\lim}_{r \rightarrow 1^-} \frac{\log T(r, g)}{-\log(1-r)} < \infty \quad \text{et} \quad n(r, b, g) = O(T(r, g)^\beta).$$

- il existe $C_1, C_2 > 1$ et $k > 1$ tels que $\log C_1 > k$ et

$$\forall r \gg 0, \quad C_1 T(1 - \frac{1}{r}, g) \leq T(1 - \frac{1}{kr}, g) \leq C_2 T(1 - \frac{1}{r}, g) \quad \text{et} \quad n(r, b, g) = O(T(r, g)^\beta).$$

- il existe $\rho > 1$ tel que $T(1 - \frac{1}{r}, g) \asymp r^\rho$ et $n(r, b, g) = O(T(r, g)^\beta)$.

Alors g vérifie un lemme de zéros polynomial. Plus précisément il existe deux exposants $\alpha, \gamma > 0$

$$\forall d \in \mathbb{N}, \quad \forall r \in [0, 1[, \quad Z_d(r, g) \leq T(r, g)^\gamma \vee d^\alpha.$$

De plus lorsque la deuxième hypothèse est vérifiée, on peut prendre $\alpha = 1 + \frac{1+\beta}{1-\beta} + \frac{2}{\lambda(1-\beta)}$ et $\gamma = \frac{\alpha\rho(1-\beta)}{\lambda}$ où $\lambda = \frac{\log C_1}{k}$ et $\rho = \frac{\log C_2}{k}$. Lorsque la troisième hypothèse est vérifiée, on peut prendre le même α et $\gamma = \alpha(1 - \beta)$.

Rappel théorème 1.6.12. Soit $g \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ une fonction transcendante, $b \in \hat{\mathbb{C}}$ et $\beta \in [0, \frac{1}{2}[$. On suppose que g vérifie l'une des hypothèses suivantes

- la caractéristique de Nevanlinna satisfait les trois conditions

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{\log T(r, g)}{\log r} > 0, \quad \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log T(r, g)}{\log r} < \infty \quad \text{et} \quad n(r, b, g) = O(T(r, g)^\beta).$$

- il existe $C_1, C_2 > 1$ et $k > 1$ tels que

$$\forall r \gg 0, \quad C_1 T(r, g) \leq T(kr, g) \leq C_2 T(r, g) \quad \text{et} \quad n(r, b, g) = O(T(r, g)^\beta).$$

- il existe $\rho > 0$ tel que $T(r, g) \asymp r^\rho$ et $n(r, b, g) = O(T(r, g)^\beta)$.

Alors g vérifie un lemme de zéros polynomial. Plus précisément il existe deux exposants $\alpha, \gamma > 0$ tels que

$$\forall d \in \mathbb{N}, \quad \forall r > 0, \quad Z_d(r, g) \ll T(r, g)^\gamma \vee d^\alpha.$$

De plus lorsque la seconde hypothèse est vérifiée, on peut prendre $\alpha = 1 + \frac{1+\beta}{1-\beta}$ et $\gamma = \frac{\alpha\rho(1-\beta)}{\lambda}$ où $\lambda = \frac{\log C_1}{k}$ et $\rho = \frac{\log C_2}{k}$. Lorsque la troisième hypothèse est vérifiée, on peut prendre le même α et $\gamma = \alpha(1 - \beta)$.

4.2 Théorie d'Ahlfors

Dans les années trente, Ahlfors a développé dans sa thèse [1] une nouvelle théorie de la distribution des valeurs des fonctions méromorphes basée sur des considérations géométriques et topologiques plutôt que purement analytiques. Cette théorie approfondit celle développée par Nevanlinna³ dix ans plutôt sans pour autant la remplacer. Le principe est d'associer à chaque fonction méromorphe g sur \mathbb{C} une surface de Riemann ouverte S au-

³Voir la section 2.6 du chapitre 2.

dessus de la sphère de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$ puis de réduire l'étude de la distribution des valeurs de g à la description topologique de cette surface S et de la métrique sphérique définie sur S en tirant la métrique sphérique de $\hat{\mathbb{C}}$ via la projection de S sur la sphère de Riemann. Dans le premier paragraphe de cette section, nous énonçons les deux théorèmes fondamentaux de la théorie d'Ahlfors qui jouent un rôle analogue au deux théorèmes fondamentaux de la théorie de Nevanlinna vue à la section 2.6. Nous présenterons également les améliorations du second théorème d'Ahlfors dus à Dufresnoy dans [33] qui s'avèrent pertinents pour les problèmes que nous cherchons à résoudre. Pour un exposé plus complet de la théorie d'Ahlfors et de ses conséquences, le lecteur pourra se référer au chapitre VI de [118], au chapitre 5 de [53] et au chapitre XIII de [82].

Les surfaces de recouvrement Dans cette section on désigne par le terme *surface* une variété topologique à bords de dimension deux, connexe, orientable et triangulable⁴ au sens de la définition 4.2.2 ci-dessous. Une *surface de Riemann à bords* est une région ouverte ou fermée d'une surface de Riemann compacte et connexe dont le bord est une union disjointe d'un nombre fini de courbes de Jordan. Nous reprenons ici la définition d'une surface de recouvrement issue du chapitre XIII de [82]. On désigne par Δ le simplexe standard de \mathbb{R}^2 . Rappelons brièvement les définitions de triangulation et de surface triangulable.

Définition 4.2.1 (Triangle d'une surface). Soit S une surface. Un *triangle de S* est la donnée d'une application $s : \Delta \rightarrow S$ continue et injective. Le bord ∂s de s est défini comme étant l'image de $\partial\Delta$ par s . L'intérieur \mathring{s} de s est défini comme l'image de $\mathring{\Delta}$ par s . Enfin les arêtes de s sont les images des arêtes du triangle Δ par s . Par abus de langage l'image de Δ par l'application s est confondue avec l'application elle-même lorsque cela ne porte pas à confusion.

Définition 4.2.2 (Triangulation d'une surface). Soit S une surface. Une *triangulation de S* est la donnée d'une famille⁵ T de triangles de S vérifiant les deux propriétés suivantes.

- deux triangles distincts de T sont d'intérieur disjoint,
- tout point $z \in S$ admet un voisinage qui ne rencontre qu'un nombre fini de triangles de la triangulation T .

On dit que S est une *surface triangulable* si cette surface admet une triangulation T telle que définie ci-dessus. De plus une triangulation T' de S est dite plus fine que la triangulation T si tous les triangles de T se décomposent en des triangles de T' .

Nous pouvons définir maintenant l'objet principal de la théorie d'Ahlfors à savoir les surfaces de recouvrement.

Définition 4.2.3 (Surface de recouvrement - [82]). Soit S_0 une surface. Une *surface de recouvrement de S_0* est la donnée d'un quadruplet (S, π, T, T_0) où S est une surface de Riemann à bords, π une application de S dans S_0 , T une triangulation de S et T_0 une triangulation de S_0 telles que

- l'image par π d'un triangle de T est un triangle de T_0 ,
- l'image par π de deux triangles voisins⁶ de T sont voisins dans T_0 .

⁴D'après le théorème de Radó, toute surface est triangulable et donc cette hypothèse s'avère superflue. Voir §8 du chapitre 1 de [2].

⁵On ne suppose pas que la famille soit finie.

⁶Deux triangles sont dits voisins s'ils ont une arête en commun.

Afin d'alléger les notations on désigne parfois la surface de recouvrement par la lettre S seulement.

Exemple 4.2.4. Soient S une surface et $\pi : S \rightarrow S_0$. On dit que π est une application *topologiquement holomorphe* si pour tout $z \in S$, il existe un voisinage ouvert V de z et une carte⁷ $h : V \rightarrow \mathbb{C}$ telle que pour tout $w \in V$, $\pi(w) = h^m(w)$ pour un $m \in \mathbb{N}^*$ dépendant de V . Alors pour toute triangulation T_1 de S , il existe une triangulation plus fine T de S telle que $T_0 := \pi(T)$ soit une triangulation de la surface S_0 et (S, π, T, T_0) forme une surface de recouvrement de S_0 .

Remarque 4.2.5. Toute surface de Riemann à bords est triangulable et orientable. Réciproquement toute surface réelle triangulable et orientable peut être muni d'une structure de surface de Riemann à bords. De plus si S est une telle surface et $\pi : S \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ est une application topologiquement holomorphe, alors il existe une unique structure de surface de Riemann sur S de sorte que π soit holomorphe.

Définition 4.2.6. Soit (S, π, T, T_0) une surface de recouvrement de S_0 .

- soient $D \subset S_0$ un domaine et C une composante connexe de $\pi^{-1}(D)$. Le *bord relatif* $\partial_\pi(C)$ de C au-dessus de D est la partie de ∂C dont l'image par π n'est pas contenu dans ∂D . On dit qu'une composante connexe C de $\pi^{-1}(D)$ est une *île au-dessus de D* si $\partial_\pi(C) = \emptyset$. Sinon C est appelée une *péninsule au-dessus de D* ,
- pour tout $k \in \mathbb{N}$, le k -ième feuillet S_k de S est la réunion des triangles $s(\Delta)$ lorsque s parcourt l'ensemble T_k suivant

$$T_k := \{s \in T_0 \mid \exists s_1, \dots, s_k \in T \text{ distincts et } \forall i \in \{1, \dots, k\}, \pi \circ s_i = s\},$$

- pour tout domaine $D \subset S_0$, on note $n(D, \pi)$ le nombre d'îles qui se projettent sur D via l'application π .

Métrique admissible Dans le paragraphe précédent nous avons exposé le pendant topologique de la théorie d'Ahlfors. Il nous reste à introduire les aspects métriques de celle-ci. Nous allons munir la surface S_0 d'une métrique d qui induit une métrique sur S via la projection π de la surface de recouvrement considérée. Cependant l'espace métrique (S_0, d) doit vérifier certaines propriétés supplémentaires que nous décrivons maintenant.

Définition 4.2.7 (Métrique admissible). Soient S une surface compacte et \mathcal{C} une classe de courbes de Jordan sur S . On définit \mathcal{D} comme étant l'ensemble des domaines de S délimités par une courbe fermée appartenant à la classe \mathcal{C} . Une *métrique admissible sur S* est la donnée d'une métrique d sur S et de deux applications $\mathcal{L} : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}_+$ et $\mathcal{I} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant les propriétés suivantes

- (*additivité*). Les applications \mathcal{L} et \mathcal{I} sont additives.
- (*connexité*). Pour tout $z, w \in S$, il existe un arc de \mathcal{C} reliant les points z et w ,
- (*quasi-géodésique*). Pour tout $z, w \in S$

$$d(z, w) := \inf \{ \mathcal{L}(\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{C}, \alpha(0) = z \text{ et } \alpha(1) = w \}.$$

Autrement dit la distance entre z et w peut être approchée par la longueur d'une suite de courbes de Jordan de \mathcal{C} reliant z à w ,

⁷Une carte est une application homéomorphe sur son image.

- (*topologie*). Pour tout $z \in S$ et $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage $U \subset S$ de z tel que pour tout $w \in U$, $d(z, w) < \varepsilon$. Autrement dit la topologie de S est plus fine que la topologie induite par d sur S .
- (*inégalité isopérimétrique locale*). Pour tout $z \in S$, il existe un voisinage $U \subset S$ de z et une constante $h(z) > 0$ telle que pour toute courbe fermée α de \mathcal{C} contenue dans U délimitant le domaine D de S , la longueur de α et l'aire de D vérifie l'inégalité

$$\mathcal{I}(D) < h(z)\mathcal{L}(\alpha),$$

Les courbes de \mathcal{C} sont appelées les *courbes admissibles* de S tandis que les domaines de \mathcal{D} sont appelés les *domaines admissibles* de S .

Définition 4.2.8 (Nombre moyen de feuilletts). Soit S une surface de recouvrement de S_0 munie d'une métrique admissible. Alors pour tout domaine admissible D de S_0 et toute courbe admissible β de S_0 , le *nombre moyen de feuilletts* de S au-dessus du domaine D , respectivement de la courbe β , est défini par

$$\mathcal{S}(D) := \frac{\mathcal{I}(D)}{\mathcal{I}_0(D)} \quad \text{et} \quad \mathcal{S}(\beta) := \frac{\mathcal{L}(\beta)}{\mathcal{L}_0(\beta)}.$$

Exemple 4.2.9. Soit S une surface de Riemann à bords. Toute fonction $\rho : S \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ définit une métrique admissible sur S de la manière suivante

- la classe \mathcal{C} des courbes admissibles est constituée de l'ensemble des courbes de Jordan analytiques par morceaux sur S ,
- pour tout $\beta \in \mathcal{C}$, on définit la longueur $\mathcal{L}(\beta)$ de l'arc β par l'intégrale $\int_0^1 \rho(\beta(t))dt$ où $t \mapsto \beta(t)$ est une paramétrisation par longueur d'arcs de β ,
- pour tout domaine admissible D , on définit son aire $\mathcal{I}(D)$ par $\int_D \rho^2(z)dz$.

On s'assure aisément que les applications \mathcal{L} et \mathcal{I} ainsi définies satisfont toutes les propriétés décrites en 4.2.7.

Les théorèmes fondamentaux d'Ahlfors Le premier théorème d'Ahlfors 4.2.10 ci-dessous est l'analogie pour les surfaces de recouvrement du premier théorème fondamental de Nevanlinna 2.6.5. Ce théorème compare le nombre moyen de feuilletts au-dessus d'un domaine $D \subset S_0$ d'une surface de recouvrement S avec le nombre moyen de feuilletts de cette surface S au-dessus de S_0 .

Théorème 4.2.10 (Premier théorème fondamental d'Ahlfors - [1, 82]). *Soit S_0 une surface compacte munie d'une métrique admissible. Alors il existe une constante $h > 0$ telle que pour toute surface de recouvrement S de S_0 , pour tout domaine admissible D de S_0 et pour toute courbe β admissible de S_0*

$$|\mathcal{S}(S) - \mathcal{S}(D)| \leq \frac{h\mathcal{L}(S)}{\mathcal{I}_0(D)} \quad \text{et} \quad |\mathcal{S}(S) - \mathcal{S}(\beta)| \leq h\mathcal{L}(S).$$

Avant d'énoncer le second théorème fondamental d'Ahlfors, examinons le cas des revêtements ramifiés de surfaces sans bords.

Théorème 4.2.11 (Formule de Riemann-Hurwitz - [50, section IV.2]). *Soient S et S_0 deux surfaces de Riemann compactes sans bord et $\pi : S \rightarrow S_0$ un revêtement ramifié de degré d . Alors*

$$\chi(S) = d\chi(S_0) - \sum_{x \in S} (e_x - 1),$$

où e_x est le degré de ramification de x au-dessus de S_0 .

Lorsque le revêtement π de l'énoncé précédent n'a aucune ramification, la formule de Riemann-Hurwitz se réduit à $\chi(S) = d\chi(S_0)$. Le terme $\sum_{x \in S} (e_x - 1)$ est donc une sorte de correction lorsque le revêtement π admet des ramifications. L'analogie de la formule de Riemann-Hurwitz pour les surfaces de recouvrement est le théorème suivant démontré par Ahlfors dans sa thèse.

Théorème 4.2.12 (Second théorème fondamental d'Ahlfors - [1, 82]). *Soit S_0 une surface compacte. On suppose que S_0 est munie d'une métrique admissible au sens de 4.2.7. Alors il existe $h > 0$ telle que pour toute surface de recouvrement S au-dessus de S_0*

$$\max\{\chi(S), 0\} \geq \chi(S_0)\mathcal{S}(S) - h\mathcal{L}(\partial S).$$

Contrairement à la formule de Riemann-Hurwitz, le théorème d'Ahlfors ne donne qu'une inégalité. Le degré d est remplacé dans ce contexte par le nombre moyen des feuillettes $\mathcal{S}(S)$. Quant au terme $h\mathcal{L}(\partial S)$, il joue le rôle d'un terme d'erreur qu'il faut majorer. Ce problème délicat est discuté dans la section suivante. Bien que le second théorème d'Ahlfors ne donne qu'une inégalité entre les caractéristiques d'Euler, celui-ci reste néanmoins puissant lorsqu'on l'applique à des surfaces de recouvrement de la sphère de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$ munie de la métrique sphérique. Grâce aux travaux de Dufresnoy, il est possible dans ce dernier cas d'expliciter davantage la constante h du théorème 4.2.12. Sauf mention contraire, la surface $\hat{\mathbb{C}}$ est toujours munie de cette métrique sphérique et toute surface de Riemann à bords recouvrant $\hat{\mathbb{C}}$ est munie de la métrique admissible associée à la métrique sphérique. On rappelle la notion de *dérivée sphérique* d'une fonction méromorphe.

Définition 4.2.13 (Dérivée sphérique - [46, p. 18]). Soient S une surface de Riemann compacte et $g \in \mathcal{O}(S, \hat{\mathbb{C}})$. La *dérivée sphérique* de g en $z \in S$ est définie par

$$\rho_g(z) := \frac{|g'(z)|}{1 + |g(z)|^2}.$$

Définition 4.2.14 (Caractéristique d'Ahlfors - [46]). Soit S une surface de Riemann compacte et g une fonction méromorphe de S vers la sphère de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$. On définit le *nombre moyen de feuillettes de S* au-dessus de $\hat{\mathbb{C}}$ et la *longueur relative de S* au-dessus de $\hat{\mathbb{C}}$ par

$$\mathcal{S}(S, g) := \frac{1}{\pi} \int_S \rho_g^2(z) dz \quad \text{et} \quad \mathcal{L}(\partial S, g) := 2 \int_{\partial S} \rho_g(\xi) d\sigma(\xi).$$

Le second théorème d'Ahlfors appliqué aux surfaces de recouvrement de $\hat{\mathbb{C}}$ associées aux fonctions méromorphes peut être compris comme une variante géométrique du second théorème fondamental de Nevanlinna. Toutefois les deux énoncés ne sont pas équivalents. Comme nous l'avons annoncé, la constante h du théorème 4.2.12 a été explicitée par Dufresnoy dans [33] dans le cas où $S_0 = \hat{\mathbb{C}}$ est muni de la métrique sphérique.

Théorème 4.2.15 (Dufresnoy - [33]). *Soit S une surface de Riemann à bords recouvrant $\hat{\mathbb{C}}$ et q domaines D_1, \dots, D_q de $\hat{\mathbb{C}}$ dont le bord est analytique par morceaux et qui sont disjoints deux à deux. Alors*

$$(q - 2)\mathcal{S}(S) \leq \chi(S) + 1 + \sum_{i=1}^q \bar{n}(D_i, \pi) + (q - 2) \frac{3}{2\delta} \mathcal{L}(\partial S),$$

où δ est la distance sphérique minimale séparant les domaines D_1, \dots, D_q . De plus cette inégalité reste valable lorsque les domaines D_i sont réduits à des points.

Remarque 4.2.16. Dans le théorème de Dufresnoy 4.2.15 ci-dessus le coefficient $q - 2$ devant le terme $\mathcal{S}(S)$ correspond à la caractéristique d'Euler de la sphère de Riemann privée de q domaines disjoints deux à deux. Quant à la somme $\chi(S) + 1 + \sum n(D_i, \pi)$ celle-ci correspond à la caractéristique d'Euler de la surface S privée de toutes les îles situées au-dessus des domaines D_i . Il est à noter qu'ôter les péninsules en plus des îles au-dessus des domaines D_i ne changerait pas la caractéristique d'Euler puisque ces derniers touchent le bord de la surface S .

Applications aux fonctions méromorphes sur un disque Nous appliquons dans la section suivante le théorème de Dufresnoy sur un disque. À cette fin, on introduit les deux caractéristiques suivantes.

Définition 4.2.17. Soient $g \in \mathcal{M}(\mathbb{D}_R)$ et $r \in [0, R[$. On définit le *nombre moyen de feuillettes* de g et la *longueur relative du bord* de g au-dessus de \mathbb{D}_r par

$$\mathcal{S}(r, g) := \mathcal{S}(\mathbb{D}_r, g) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}_r} \rho_g^2(z) dz \quad \text{et} \quad \mathcal{L}(r, g) := \mathcal{L}(\partial\mathbb{D}_r, g) = 2 \int_{\partial\mathbb{D}_r} \rho_g(\xi) d\sigma(\xi).$$

On obtient le corollaire 4.2.18 suivant en revenant aux définitions et en appliquant le théorème de Dufresnoy 4.2.15.

Corollaire 4.2.18. Soit $g \in \mathcal{M}(\mathbb{D}_R)$. Alors pour $a_1, \dots, a_q \in \hat{\mathbb{C}}$ deux à deux distincts

$$\forall r \in [0, R[, \quad (q - 2)\mathcal{S}(r, g) \leq \chi(\Omega_r) + 1 + \sum_{i=1}^q \bar{n}(r, a_i, g) + (q - 2) \frac{3}{2\delta} \mathcal{L}(r, g),$$

où δ est la distance sphérique minimale entre les points a_i .

Formules de Shimizu-Ahlfors De même que les fonctions de comptages $n(r, a, g)$ ne croissent pas suffisamment régulièrement et qu'il est nécessaire d'introduire des fonctions de comptage en moyenne $N(r, a, g)$ pour énoncer le premier théorème de Nevanlinna, le nombre moyen de feuillettes $\mathcal{S}(r, g)$ introduit par Ahlfors n'est pas une fonction dont la croissance est assez régulière et on doit considérer une moyenne de cette dernière. On introduit à cette fin la caractéristique de Shimizu-Ahlfors.

Définition 4.2.19 (Caractéristique de Shimizu-Ahlfors - [46, p. 18]). Soient $g \in \mathcal{M}(\mathbb{D}_R)$ et $r \in \mathbb{R}$ tel que $0 < r < R$. La *caractéristique de Shimizu-Ahlfors* de g est définie par

$$\mathcal{T}(r, g) := \int_{\mathbb{D}_r} \log \left(\frac{r}{|w|} \right) \rho_g^2(w) dw \quad \text{avec} \quad \mathcal{S}(t, g) = \int_{\mathbb{D}_t} \rho_g^2(w) dw.$$

Or

$$\forall r \in [0, R[, \quad \mathcal{T}(r, g) = \int_0^r \mathcal{S}(t, g) \frac{dt}{t}. \quad (4.2.1)$$

En effet grâce au théorème de Fubini

$$\begin{aligned} \forall r \in [0, R[, \quad \mathcal{T}(r, g) &= \int_{\mathbb{D}_r} \left(\log \frac{r}{|z|} \right) \rho_g^2(z) dz = \int_{\mathbb{D}_r} \int_{|z|}^r \frac{dt}{t} \rho_g^2(z) dz \\ &= \int_0^r \int_s^r \int_0^{2\pi} \frac{s}{r} \rho_g^2(se^{i\theta}) d\theta dt ds = \int_0^r \int_0^s \int_0^{2\pi} \frac{s}{r} \rho_g^2(se^{i\theta}) d\theta ds dt \\ &= \int_0^r \left(\int_{\mathbb{D}_s} \rho_g^2(z) dz \right) \frac{ds}{s} = \int_0^r \mathcal{S}(t, g) \frac{dt}{t}. \end{aligned}$$

La caractéristique d'Ahlfors-Shimizu $\mathcal{T}(r, g)$ joue le rôle de la caractéristique de Nevanlinna dans la théorie d'Ahlfors. La formule de Shimizu-Ahlfors ci-dessous est l'analogue

de la formule de Poisson-Jensen 2.5.4 où la métrique euclidienne au but a été remplacée par la métrique sphérique.

Théorème 4.2.20 (Formule de Shimizu-Ahlfors - [46, Th. 2.6]). *Soient $g \in \mathcal{M}(\mathbb{D}_R)$ non constante, $0 < r < R$ et $z \in \mathbb{D}_r$ tels que $g(z) \neq \infty$. Alors*

$$\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}_r} \log \left| \frac{r^2 - w\bar{z}}{r(w-z)} \right| \rho_g^2(w) dw = \int_0^{2\pi} \frac{r^2 - |z|^2}{|re^{i\theta} - z|^2} \log \sqrt{1 + |g(re^{i\theta})|^2} \frac{d\theta}{2\pi} - \log \sqrt{1 + |g(z)|^2} + \sum_{|b_n| < r} \log \left| \frac{r^2 - b_n\bar{z}}{r(b_n - z)} \right|,$$

où (b_n) est une énumération avec multiplicité des pôles de la fonction g dans le disque \mathbb{D}_r .

Grâce à la formule de Shimizu-Ahlfors 4.2.20, il est possible de démontrer l'analogie suivant du premier théorème de Nevanlinna 2.6.5 pour la caractéristique de Shimizu-Ahlfors $\mathcal{T}(r, g)$.

Théorème 4.2.21 ([46, Th. 4.2]). *Soit $g \in \mathcal{M}(\mathbb{D}_R)$ non constante. On note*

$$\forall a \in \hat{\mathbb{C}}, \forall r \in [0, R[, \hat{m}(r, a, g) := \int_0^{2\pi} \log \frac{1}{\chi(g(re^{i\theta}), a)} \frac{d\theta}{2\pi} - \log \frac{\sqrt{1 + |a|^2}}{|c_\chi(a)|},$$

où $c_\chi(a)$ est le premier coefficient non nul dans le développement en série de Laurent de $g(z) - a$ en zéro. Alors

$$\forall a \in \hat{\mathbb{C}}, \forall r \in [0, R[, \mathcal{T}(r, g) = \hat{m}(r, a, g) + N(r, a, g).$$

La caractéristique de Nevanlinna $T(r, g)$ et celle d'Ahlfors-Shimizu $\mathcal{T}(r, g)$ sont en fait de différence bornée d'après la proposition 4.2.22 suivante. Ainsi il est souvent possible de remplacer l'un par l'autre dans la plupart des inégalités.

Proposition 4.2.22. *Soit $g \in \mathcal{M}(\mathbb{D}_R)$ non constante telle que $g(0) \neq \infty$. Alors il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\forall r \in [0, R[, |T(r, g) - \mathcal{T}(r, g)| \leq C.$$

De plus la constante C ne dépend que du module de $g(0)$.

Démonstration. La formule de Shimizu-Ahlfors 4.2.20 appliquée en $z = 0$ donne

$$\forall r \in]0, R[, \mathcal{T}(r, g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \sqrt{1 + |g(re^{i\theta})|^2} d\theta - \log \sqrt{1 + |g(0)|^2}.$$

Or pour tout $x > 0$, $\log \sqrt{1 + x^2} \leq \log^+ x + \log 2$. Donc en utilisant cette majoration et la définition de la caractéristique de Nevanlinna 2.6.4, on obtient l'existence de la constante C souhaitée. ■

4.3 Ahlfors-régularité

Afin de pouvoir appliquer le second théorème d'Ahlfors 4.2.12, il est nécessaire que le terme d'erreur $\mathcal{L}(r, g)$ soit négligeable devant le nombre moyen de feuillets $\mathcal{S}(r, g)$. Cependant il se peut que le terme $\mathcal{L}(r, g)$ ne soit pas négligeable devant $\mathcal{S}(r, g)$ pour un certains rayons exceptionnels. Pour les fonctions méromorphes sur \mathbb{C} , on définit l'*Ahlfors-régularité* de la manière suivante.

Définition 4.3.1 (Ahlfors-régularité). Soient $g \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$. On dit que la fonction g est *Ahlfors-régulière* si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une suite $(r_n) \nearrow \infty$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{L}(r_n, g) \leq \varepsilon \mathcal{S}(r_n, g).$$

On adopte une définition similaire de l'*Ahlfors-régularité* pour les fonctions méromorphes sur le disque unité \mathbb{D} .

Définition 4.3.2 (Ahlfors-régularité). Soit $g \in \mathcal{M}(\mathbb{D})$. On dit que la fonction g est *Ahlfors-régulière* si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une suite $(r_n) \nearrow 1^-$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{L}(r_n, g) \leq \varepsilon \mathcal{S}(r_n, g),$$

On note $\mathcal{A}(\mathbb{D})$ l'ensemble des fonctions méromorphes et Ahlfors-régulières sur \mathbb{D} .

Critères d'Ahlfors-régularité Dans sa thèse [1], Ahlfors démontre que toute fonction $g \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ non constante est Ahlfors-régulière. Sa démonstration repose sur l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Nous allons voir maintenant que sa méthode permet en fait de montrer que l'ensemble E des rayons pour lesquels $\mathcal{L}(r, g) > \varepsilon \mathcal{S}(r, g)$ est de très petite taille et cela d'autant plus que $\mathcal{S}(r, g)$ croît rapidement. Afin de quantifier la taille de cet ensemble exceptionnel, on introduit ci-dessous la notion de (ψ, α) -densité et de mesure logarithmique d'un ensemble.

Définition 4.3.3 (Mesure logarithmique et densité). Soient $E \subset [0, \infty[$ un ensemble mesurable, $\psi : [a, \infty[\rightarrow \mathbb{R}_+^*$ une fonction croissante et $\alpha \geq 0$. On appelle *mesure logarithmique* $\ell(E)$ de E et (ψ, α) -densité $\overline{\text{dens}}_{\psi, \alpha}(E)$ de E les quantités

$$\ell(E) := \int_{E(1)} \frac{dt}{t} \quad \text{et} \quad \overline{\text{dens}}_{\psi, \alpha}(E) := \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \psi(r) \int_{E(r)} \frac{dt}{t^{1+\alpha}},$$

avec $E(r) = E \cap [r, \infty[$. Lorsque $\ell(E) < \infty$, on dit que E est de *mesure logarithmique finie* et lorsque $\overline{\text{dens}}_{\psi, \alpha}(E) < \infty$, on dit que E est de (ψ, α) -densité finie.

Remarque 4.3.4. Un ensemble $E \subset [0, \infty[$ est de mesure logarithmique finie si et seulement si cet ensemble est de $(\psi, 0)$ -densité finie pour ψ une fonction croissante et tendant vers l'infini. En effet l'intégrale $\int_{E(1)} \frac{dt}{t}$ converge si et seulement si les restes $\int_{E(r)} \frac{dt}{t}$ tendent vers zéro lorsque r tend vers l'infini.

Remarque 4.3.5. Pour tout $\alpha > 0$ et $r > 0$, l'intégrale

$$I(r) = \int_{E(r)} \frac{dt}{t^{1+\alpha}},$$

est convergente et tend vers zéro lorsque r tend vers l'infini. La quantité $\overline{\text{dens}}_{\psi, \alpha}(E)$ mesure donc la vitesse de convergence de la fonction I en l'infini. De plus pour tout $\alpha > 0$ tel que

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\psi(r)}{r^\alpha} < \infty,$$

la quantité $\overline{\text{dens}}_{\psi, \alpha}(E)$ est finie.

Les deux propositions 4.3.6 et 4.3.7 suivantes impliquent que les ensembles de mesure logarithmiques finie ou de (ψ, α) -densité finie ne contiennent pas certaines suites $(r_n) \nearrow \infty$ telles que $r_n \asymp n$.

Proposition 4.3.6. Soient $E \subset [0, \infty[$ un ensemble mesurable et $k > 1$. On suppose que $\ell(E) < \infty$. Alors

$$\exists r_0 > 0, \forall r > r_0, \exists t \in [r, kr] \text{ tel que } t \notin E.$$

Démonstration. Supposons par l'absurde qu'il existe une suite $(r_n) \nearrow \infty$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $[r_n, kr_n] \subset E$. Puisque la suite (r_n) tend vers l'infini et quitte à extraire une sous-suite de celle-ci on peut supposer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $r_{n+1} > kr_n$. Donc

$$\infty = \sum_{n=0}^{\infty} \log \left(\frac{kr_n}{r_n} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{r_n}^{kr_n} \frac{dt}{t} \leq \int_E \frac{dt}{t} < \infty.$$

C'est une absurdité ce qui termine la démonstration. \blacksquare

Proposition 4.3.7. Soient $E \subset [0, \infty[$ un ensemble mesurable, $\psi, \varphi : [a, \infty[\rightarrow \mathbb{R}_+$ deux fonctions croissantes tendant vers l'infini et $\alpha > 0$. On suppose que

$$\overline{\text{dens}}_{\psi, \alpha}(E) < \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{\psi(r)}{r^\alpha \varphi(r)}.$$

Alors $\exists r_0 > 0$, $\forall r > r_0$, $\exists t \in [r, (1 + 1/\varphi(r))r]$ tel que $t \notin E$. En particulier si

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{\psi(r)}{r} = \infty.$$

Alors $\forall k > 1$, $\exists r_0 > 0$, $\forall r > r_0$, $\exists t \in [r, kr]$ tel que $t \notin E$.

Démonstration. Supposons qu'il existe une suite $(r_n) \nearrow \infty$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intervalle $[r_n, (1 + 1/\varphi(r_n))r_n]$ soit contenu dans E . On note

$$\forall n \in \mathbb{N}, \nu_n = r_n + \frac{r_n}{\varphi(r_n)}.$$

Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\begin{aligned} \forall n \geq n_0, \psi(r_n) \int_{E(r_n)} \frac{dt}{t^{1+\alpha}} &\geq \psi(r_n) \int_{r_n}^{\nu_n} \frac{dt}{t^{1+\alpha}} \geq \frac{\psi(r_n)}{\alpha} \left(\frac{1}{r_n^\alpha} - \frac{1}{\nu_n^\alpha} \right) \\ &\geq \frac{\psi(r_n)}{\alpha r_n^\alpha} \left(1 - \frac{1}{(1 + 1/\varphi(r_n))^\alpha} \right) \geq (1 - \varepsilon) \frac{\psi(r_n)}{r_n^\alpha \varphi(r_n)}. \end{aligned}$$

Donc quitte à prendre un rang $n_1 \geq n_0$ assez grand

$$\forall n \geq n_1, \overline{\text{dens}}_{\psi, \alpha}(E) \geq (1 - \varepsilon) \frac{\psi(r_n)}{r_n^\alpha \varphi(r_n)} - \varepsilon$$

Donc

$$\forall \varepsilon > 0, (1 - \varepsilon) \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{\psi(r)}{r^\alpha \varphi(r)} - \varepsilon \leq \overline{\text{dens}}_{\psi, \alpha}(E).$$

On conclut à une absurdité en faisant tendre ε vers zéro. \blacksquare

Proposition 4.3.8. Soit $g \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ non constante. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble $E \subset [0, \infty[$ tel que

$$\overline{\text{dens}}_{\psi, 0}(E) \leq \frac{8\pi^2}{\varepsilon^2} \quad \text{et} \quad \forall r \in [0, \infty[\setminus E, \mathcal{L}(r, g) \leq \varepsilon \mathcal{S}(r, g),$$

où $\psi(r) = \mathcal{S}(r, g)$. En particulier toute fonction méromorphe non constante est Ahlfors-régulière.

Démonstration. On commence par démontrer que

$$\forall r \in [0, \infty[, \mathcal{L}^2(r, g) \leq 8\pi^2 r \mathcal{S}'(r, g)$$

En effet d'une part d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} \forall r \in [0, \infty[, \mathcal{L}^2(r, g) &= 4 \left(\int_0^{2\pi} \rho_g(re^{i\theta}) r d\theta \right)^2 \leq 4 \int_0^{2\pi} r^2 d\theta \int_0^{2\pi} \rho_g^2(re^{i\theta}) d\theta \\ &\leq 8\pi r^2 \int_0^{2\pi} \rho_g^2(re^{i\theta}) d\theta, \end{aligned}$$

et d'autre part

$$\forall r \in [0, \infty[, \mathcal{S}'(r, g) = \frac{r}{\pi} \int_0^{2\pi} \rho_g^2(re^{i\theta}) d\theta \geq \frac{\mathcal{L}^2(r, g)}{8\pi^2 r}.$$

Notons

$$E = \{r \in [0, \infty[\mid \mathcal{L}(r, g) > \varepsilon \mathcal{S}(r, g)\}.$$

Alors

$$\begin{aligned} \forall r \in [0, \infty[, \frac{\varepsilon^2}{8\pi^2} \int_{E(r)} \frac{dt}{t} &< \frac{1}{8\pi^2} \int_{E(r)} \frac{\mathcal{L}^2(t, g)}{t \mathcal{S}^2(t, g)} dt \leq \int_{E(r)} \frac{\mathcal{S}'(t, g)}{\mathcal{S}^2(t, g)} dt \\ &\leq \int_r^\infty \frac{\mathcal{S}'(t, g)}{\mathcal{S}^2(t, g)} dt \leq \frac{1}{\mathcal{S}(r, g)}. \end{aligned}$$

On conclut en multipliant l'inégalité ci-dessus par $\mathcal{S}(r, g)$ et en prenant la limite supérieure. Or $\overline{\text{dens}}_{\psi, 0}(E) < \infty$ implique que E est de mesure logarithmique finie. De plus d'après la proposition 4.3.6 implique qu'il existe des suites $(r_n) \nearrow \infty$ qui ne sont pas contenues pas dans E . Donc g est Ahlfors-régulière. ■

La proposition 4.3.9 s'étend aux fonctions $g \in \mathcal{M}(\mathbb{D})$ caractéristique $\mathcal{S}(r, g)$ croît suffisamment vite.

Proposition 4.3.9. *Soit $g \in \mathcal{M}(\mathbb{D})$ non constante. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble $E \subset [0, \infty[$ tel que*

$$\overline{\text{dens}}_{\psi, 1}(E) \leq \frac{8\pi^2}{\varepsilon^2} \quad \text{et} \quad \forall r \in [0, \infty[\setminus E, \mathcal{L}(\varphi(r), g) \leq \varepsilon \mathcal{S}(\varphi(r), g),$$

avec $\varphi(r) = 1 - \frac{1}{r}$ et $\psi(r) = \mathcal{S}(\varphi(r), g)$. En particulier si

$$\underline{\lim}_{r \rightarrow \infty} (1 - r) \mathcal{S}(r, g) = \infty.$$

Alors g est Ahlfors-régulière.

Démonstration. On a vu dans la proposition précédente que

$$\forall r \in [0, 1[, \mathcal{L}^2(r, g) \leq 8\pi^2 r \mathcal{S}'(r, g).$$

On pose

$$F = \{r \in [0, 1[\mid \mathcal{L}(r, g) > \varepsilon \mathcal{S}(r, g)\}.$$

Alors

$$\forall r \in [0, 1[, \frac{\varepsilon^2}{8\pi^2} \int_{F(r)} \frac{dt}{t} < \frac{1}{8\pi^2} \int_{F(r)} \frac{\mathcal{L}^2(t, g)}{t \mathcal{S}^2(t, g)} dt \leq \int_{F(r)} \frac{\mathcal{S}'(t, g)}{\mathcal{S}^2(t, g)} dt \leq \frac{1}{\mathcal{S}(r, g)}. \quad (4.3.1)$$

On pose $E = \varphi^{-1}(F)$. Or

$$\forall r \in [0, 1[, \int_{F(r)} \frac{dt}{t} = \int_{\varphi^{-1}(F(r))} \frac{ds}{(1 - \frac{1}{s})s^2} \geq \int_{E(\varphi^{-1}(r))} \frac{ds}{s^2}. \quad (4.3.2)$$

Donc en combinant les inégalités 4.3.1 et 4.3.2

$$\forall r \in [1, \infty[, \psi(r) \int_{E(r)} \frac{ds}{s^2} \leq \psi(r) \int_{E(\varphi^{-1}(r))} \frac{dt}{t} \leq \frac{8\pi^2}{\varepsilon^2}.$$

Ce qu'il fallait démontrer. De plus

$$\underline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\psi(r)}{r} = \underline{\lim}_{r \rightarrow 1^-} (1 - r) \mathcal{S}(r, g) = \infty.$$

Donc d'après la proposition 4.3.7 il existe des suites $(r_n) \nearrow \infty$ qui ne sont pas contenues dans E et g est donc Ahlfors-régulière sous l'hypothèse 4.3.1. ■

Stabilité de l'Ahlfors-régularité Le lemme 4.3.10 ci-dessous affirme que l'Ahlfors-régularité est invariante par transformation de Möbius au but.

Lemme 4.3.10. *Soient $g \in \mathcal{A}(\mathbb{D})$ et $h \in \text{Mob}(\hat{\mathbb{C}})$. Alors la composition $h \circ g$ appartient à $\mathcal{A}(\mathbb{D})$.*

Démonstration. Il suffit de vérifier le lemme pour les trois applications $h_1(z) = az$ ($a \neq 0$), $h_2(z) = z + b$ et $h_3(z) = -\frac{1}{z}$ puisque ces dernières engendrent toutes les autres transformations de Möbius de $\hat{\mathbb{C}}$ par composition. Notons que la conclusion du lemme est évident pour h_3 car la dérivée sphérique est stable par inversion. De plus on a les inégalités suivantes

$$\forall z \in \mathbb{D}, \frac{1}{C_1} \rho_g(z) \leq \rho_{h_1 \circ g}(z) \leq C_2 \rho_g(z) \text{ et } \frac{1}{3C_2^2} \rho_g(z) \leq \rho_{h_2 \circ g}(z) \leq 3C_2^2 \rho_g(z),$$

où $C_1 := \max(|a|, \frac{1}{|a|})$ et $C_2 := \max(1, |b|)$. On conclut que $h_1 \circ g$ et $h_2 \circ g$ sont Ahlfors-régulières en intégrant les encadrements ci-dessus. ■

4.4 Croissance des caractéristiques

Nous aurons dans la suite de ce chapitre des inégalités entre différentes caractéristiques d'une fonction méromorphe sur un disque ou le plan. Nous établissons ces inégalités dans cette section.

Croissance et transcendance Une fonction $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ est transcendante si et seulement si ce n'est pas un polynôme. Plus généralement une fonction $g \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ est transcendante si et seulement si elle n'est pas rationnelle. C'est une application du grand théorème de Picard 2.6.2. En effet si g était une fonction méromorphe non-constante et algébrique alors il existerait un ensemble fini F et $d \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall z \in \hat{\mathbb{C}} \setminus F, \#D(z, g) \leq d,$$

où d est le degré d'un polynôme de $\mathbb{C}[z, w]$ annulant la fonction g sur \mathbb{C} . En particulier il existerait trois valeurs distinctes de $\hat{\mathbb{C}}$ que g ne prendrait qu'un nombre fini de fois sur \mathbb{C} et donc g contredirait le grand théorème de Picard 2.6.2. Lorsque Ω est un domaine différent de \mathbb{C} , il existe de nombreuses fonctions méromorphes et algébriques sur Ω qui ne sont pas des fractions rationnelles. Par exemple pour $\Omega = \mathbb{H}$, toutes les branches de $z \mapsto z^{\frac{1}{n}}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ holomorphes sur \mathbb{H} sont annulées par le polynôme $P(z) = z^n - z$. De même, on obtient quantité d'autres fonctions holomorphes sur Ω et algébriques mais non-polynomiales grâce au théorème des fonctions implicites⁸. Dans ce paragraphe on étudie le lien entre la croissance des caractéristiques de g et la transcendance de cette fonction. Commençons par examiner le cas plus simple des fonctions méromorphes sur \mathbb{C} . En utilisant la théorie de Nevanlinna, on peut démontrer la caractérisation suivante des fonctions transcendentes sur \mathbb{C} .

Théorème 4.4.1 ([46, Th. 6.4]). *Soit $g \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$. Alors g est une fonction transcendante si et seulement si*

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{T(r, g)}{\log r} = \infty.$$

Grâce à ce théorème on peut également caractériser la transcendance d'une fonction méromorphe g sur \mathbb{C} à l'aide du nombre moyen de feuillettes $\mathcal{S}(r, g)$.

⁸Voir [38, p. 34].

Corollaire 4.4.2. *Soit $g \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$. Alors g est une fonction transcendante si et seulement si $\mathcal{S}(r, g)$ n'est pas bornée.*

Démonstration. Supposons que g est une fonction transcendante. D'après la formule 4.2.1 et la proposition 4.2.22

$$\forall r \gg 0, T(r, g) \ll \mathcal{T}(r, g) \ll (\log r)\mathcal{S}(r, g). \quad (4.4.1)$$

On conclut en appliquant le théorème 4.4.1 que $\mathcal{S}(r, g)$ n'est pas bornée. Réciproquement supposons que $\mathcal{S}(r, g)$ n'est pas bornée. Alors puisque $\mathcal{S}(r, g)$ est croissante, on a que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un rayon $r_n > 0$ et une constante $C_n > 0$ tels que $\forall r \gg r_n, \mathcal{S}(r, g) \geq C_n$ et $(C_n) \nearrow \infty$. Donc

$$\forall r > r_n, \mathcal{T}(r, g) \geq \int_{r_n}^r \mathcal{S}(t, g) \frac{dt}{t} \geq C_n \log \left(\frac{r}{r_n} \right).$$

D'où

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{T(r_n^2, g)}{\log r_n^2} \gg \frac{\mathcal{T}(r_n^2, g)}{\log r_n^2} \gg C_n$$

Donc

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{T(r, g)}{(\log r)} = \infty,$$

ce qui implique que g est transcendante d'après le théorème 4.4.1. ■

Lorsque g est méromorphe sur le disque \mathbb{D} , le lien entre la croissance de la caractéristique de Nevanlinna $T(r, g)$ et la transcendance de g est plus compliqué. Néanmoins la théorie d'Ahlfors donne des conditions suffisantes. La proposition 4.4.3 suivante montre que les fonctions méromorphes et Ahlfors-régulières de \mathbb{D} vérifient la conclusion du théorème de Picard.

Proposition 4.4.3. *Soit $g \in \mathcal{A}(\mathbb{D})$. Alors les fibres de la fonction g au-dessus de $\hat{\mathbb{C}}$ sont toutes infinies sauf peut-être pour deux valeurs exceptionnelles.*

Démonstration. On suppose qu'il existe $a, b, c \in \hat{\mathbb{C}}$ distincts tels que les fibres de g au-dessus de ces trois points soient finies. On applique le théorème de Dufresnoy 4.2.15 à la fonction g sur \mathbb{D} . D'où

$$\forall r \in [0, 1[, \mathcal{S}(r, g) \leq 1 + \bar{n}(r, a, g) + \bar{n}(r, b, g) + \bar{n}(r, c, g) + \frac{3}{2\delta}\mathcal{L}(r, g),$$

où δ est la distance sphérique minimale entre a, b et c . Puisque $g \in \mathcal{A}(\mathbb{D})$, il existe un borélien $E \subset [0, 1[$ tels que

$$\overline{\text{dens}}_{\psi, 1}(\varphi(E)) \leq \frac{18\pi^2}{\varepsilon^2\delta^2} \quad \text{et} \quad \forall r \in [0, 1[\setminus E, \mathcal{L}(r, g) \leq \frac{2\delta\varepsilon}{3}\mathcal{S}(r, g),$$

avec $\varphi(r) = \frac{1}{1-r}$ et $\psi(r) = \mathcal{S}(1 - \frac{1}{r}, g)$. Donc

$$\forall r \in [0, 1[\setminus E, (1 - \varepsilon)\mathcal{S}(r, g) \leq \bar{n}(r, a, g) + \bar{n}(r, b, g) + \bar{n}(r, c, g) + 1. \quad (4.4.2)$$

Or l'ensemble $[0, 1[\setminus E$ est infini. Donc il existe une suite $(r_n) \nearrow 1^-$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, r_n \in [0, 1[\setminus E$. Donc chaque r_n vérifie l'inégalité 4.4.2. C'est une contradiction en choisissant ε assez petit. ■

Une fonction algébrique ayant toute ses fibres finies sauf peut-être un nombre fini d'entre elles, on en déduit le corollaire 4.4.4 suivant.

Corollaire 4.4.4. *Soit $g \in \mathcal{A}(\mathbb{D})$. Alors g est transcendante au-dessus de $\mathbb{C}(z)$.*

Remarque 4.4.5. Il existe beaucoup de fonctions méromorphes et transcendentes sur \mathbb{D} ne vérifiant pas l'hypothèse de 4.4.4. Un exemple trivial est celui de la restriction au disque unité d'une fonction transcendente et méromorphe sur \mathbb{C} . Une telle fonction est nécessairement transcendente sur \mathbb{D} par un argument de prolongement analytique mais ne peut vérifier la conclusion de 4.4.3 puisque son image est bornée sur le disque. Un autre exemple moins évident est celui de la série

$$\log(1 - z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n.$$

Cette série est de rayon de convergence égal à 1. Elle est transcendente sur \mathbb{D} et son image n'est pas bornée. Toutefois le complémentaire de son image dans $\hat{\mathbb{C}}$ est infini. En effet

$$\forall \varepsilon > 0, \operatorname{Arg}(\log(1 - z)) > \varepsilon \implies |\log(1 - z)| \leq \log|1 - \varepsilon|,$$

où Arg est la détermination principale de l'argument.

Remarque 4.4.6. Il existe des fonctions holomorphes sur le disque unité vérifiant la conclusion du grand théorème de Picard mais ne vérifiant pas les conditions de 4.4.3. Par exemple dans [118, Th. VII.17] Tsuji démontre que toute fonction $g \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ d'ordre fini $\rho > 0$ au sens de 2.3.16 vérifie que pour tout $w \in \mathbb{C}$ sauf peut-être une valeur et

$$\forall \varepsilon > 0, \sum_k (1 - |z_k|)^{\rho+1-\varepsilon} = \infty \quad \text{où} \quad g^{-1}(w) = \{z_1, z_2, \dots\}.$$

En particulier les fibres de g sont infinies sauf pour éventuellement une valeur. Or il existe sur le disque unité des fonctions d'ordre $0 < \rho < 1$ ne vérifiant pas les hypothèses de la proposition 4.4.3. C'est le cas des fonctions de caractéristique de Nevanlinna bornée.

Comparaison de $\log^+ M(r, g)$, $T(r, g)$ et $\mathcal{S}(r, g)$ Afin d'établir l'existence d'intervalles admissibles dans la section 4.6, il est important de pouvoir comparer la croissance de la caractéristique de Nevanlinna $T(r, g)$ et de la caractéristique d'Ahlfors $\mathcal{S}(r, g)$. Une première condition nécessaire pour l'existence d'intervalles admissibles est que la caractéristique $\mathcal{S}(r, g)$ ne soit pas bornée. On peut donc faire cette hypothèse sans perte de généralité.

Lemme 4.4.7. *Pour tout $j \in \mathbb{N}^*$ et tout $\varepsilon > 0$ il existe un réel $r(j, \varepsilon) > 0$ tel que*

$$\forall x, y > r(j, \varepsilon), \log_j(xy) \leq (1 + \varepsilon) \{ \log_j(x) + \log_j(y) \}.$$

Démonstration. On sait bien que $\log(xy) \leq \log x + \log y$ dès lors que $x, y \in \mathbb{R}_+^*$. Donc si $x > 1$ et y est assez grand

$$\begin{aligned} \log(x + y) &\leq \log(x) + \log\left(1 + \frac{y}{x}\right) \leq \log(x) + \log(1 + y) \leq \log(x) + (1 + \varepsilon) \log(y) \\ &\leq (1 + \varepsilon) \{ \log(x) + \log(y) \}. \end{aligned}$$

Supposons qu'on ait montré la propriété au rang $j \in \mathbb{N}^*$ et soient $x, y > r(j, \varepsilon)$. Alors

$$\begin{aligned} \log_{j+1}(xy) &\leq \log_j(\log x + \log y) \leq (1 + \varepsilon) \{ \log_j(\log x) + \log_j(\log y) \} \\ &\leq (1 + \varepsilon) \{ \log_{j+1}(x) + \log_{j+1}(y) \}. \end{aligned}$$

On conclut par récurrence sur j . ■

Lemme 4.4.8. *Soient $\varphi_1, \varphi_2 : [a, \infty[\rightarrow \mathbb{R}_+$ deux fonctions croissantes et non bornées.*

• *on suppose que*

$$\forall r \in [0, \infty[, \varphi_2(r) = \int_0^r \varphi_1(t) \frac{dt}{t}.$$

Alors $\forall j \in \mathbb{N}^$, $\rho_j[\varphi_1] = \rho_j[\varphi_2]$ et $\lambda_j[\varphi_1] = \lambda_j[\varphi_2]$,*

• on suppose que

$$\forall r \in [1, \infty[, \varphi_2(r) = \int_1^r \varphi_1(t) \frac{dt}{t^2 - t}.$$

Alors $\forall j \in \mathbb{N}^*$, $\rho_j[\varphi_1] = \rho_j[\varphi_2] + \Lambda(j)$ et $\lambda_j[\varphi_1] \in [\lambda_j[\varphi_2], \lambda_j[\varphi_2] + \Lambda(j)]$ où $\Lambda(1) = 1$ et $\Lambda(k) = 0$ si $k \geq 2$.

Démonstration. Démontrons la première affirmation. Or

$$\forall r \in [0, \infty[, \varphi_2(er) = \int_0^{er} \varphi_1(t) \frac{dt}{t} \geq \int_r^{er} \varphi_1(t) \frac{dt}{t} \geq \varphi_1(r) \log\left(\frac{er}{r}\right) \geq \varphi_1(r).$$

Donc

$$\forall r \gg 0, \frac{\log_j \varphi_1(r)}{\log r} \leq \frac{\log_j \varphi_2(er) \log(er)}{\log(er) \log r} \text{ et } \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log(er)}{\log r} = 1.$$

D'où $\rho_j[\varphi_1] \leq \rho_j[\varphi_2]$ et $\lambda_j[\varphi_1] \leq \lambda_j[\varphi_2]$. De plus

$$\forall r \in [0, \infty[, \varphi_2(r) = \int_0^r \varphi_1(t) \frac{dt}{t} \ll (\log r) \varphi_1(r).$$

On fixe $\varepsilon > 0$ assez petit. D'après le lemme 4.4.7, il existe un rayon $r(j, \varepsilon)$ tel que

$$\forall r > r(j, \varepsilon), \log_j \varphi_2(r) \leq (1 + \varepsilon) \log_j((\log r) \varphi_1(r)) \leq (1 + \varepsilon)^2 \{ \log_j \varphi_1(r) + \log_{j+1} r \}.$$

Donc

$$\forall r > r(j, \varepsilon), \frac{\log_j \varphi_2(r)}{\log r} \leq (1 + \varepsilon)^2 \frac{\log_j \varphi_1(r)}{\log r} + (1 + \varepsilon)^2 \frac{\log_{j+1} r}{\log r}.$$

D'où

$$\rho_j[\varphi_2] \leq (1 + \varepsilon)^2 \rho_j[\varphi_1] \text{ et } \lambda_j[\varphi_2] \leq (1 + \varepsilon)^2 \lambda_j[\varphi_1].$$

En faisant tendre ε vers zéro, on obtient que $\rho_j[\varphi_2] \leq \rho_j[\varphi_1]$ et $\lambda_j[\varphi_2] \leq \lambda_j[\varphi_1]$. Démontrons la seconde affirmation. Or

$$\forall r \in [1, \infty[, \varphi_2(er) = \int_1^{er} \varphi_1(t) \frac{dt}{t^2 - t} \geq \int_r^{er} \varphi_1(t) \frac{dt}{t^2} \geq \varphi_1(r) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{er} \right) \gg \frac{\varphi_1(r)}{r}.$$

On fixe $\varepsilon > 0$ assez petit. D'après le lemme 4.4.7, il existe un rayon $r(j, \varepsilon)$ tel que

$$\forall r > r(j, \varepsilon), \log_j \varphi_1(r) \leq (1 + \varepsilon) \log_j(r \varphi_2(er)) \leq (1 + \varepsilon)^2 \{ \log_j \varphi_2(er) + \log_j r \}.$$

Donc

$$\forall r > r(j, \varepsilon), \frac{\log_j \varphi_1(r)}{\log r} \leq (1 + \varepsilon)^2 \frac{\log_j \varphi_2(er) \log(er)}{\log(er) \log r} + (1 + \varepsilon)^2 \Lambda(j).$$

D'où

$$\rho_j[\varphi_1] \leq (1 + \varepsilon)^2 \{ \rho_j[\varphi_2] + \Lambda(j) \} \text{ et } \lambda_j[\varphi_1] \leq (1 + \varepsilon)^2 \{ \lambda_j[\varphi_2] + \Lambda(j) \}.$$

On obtient l'inégalité dans le premier sens en faisant tendre ε vers zéro. D'autre part $\varphi_2(r) \ll \varphi_1(r)$. Donc $\rho_j[\varphi_2] \leq \rho_j[\varphi_1]$ et $\lambda_j[\varphi_2] \leq \lambda_j[\varphi_1]$ ce qui permet de conclure pour $j > 1$. Traitons le cas $j = 1$. Or pour tout $\varepsilon > 0$

$$\forall r \in [0, \infty[, r^{\lambda_1[\varphi_1] - \varepsilon} \ll \varphi_1(r) \ll r^{\rho_1[\varphi_1] + \varepsilon}.$$

Donc $\forall r \in [0, \infty[$

$$\varphi_2(r) = \int_1^r \varphi_1(t) \frac{dt}{t^2 - t} \ll \int_1^r \frac{t^{\rho_1[\varphi_1] + \varepsilon}}{t^2} dt \ll r^{\rho_1[\varphi_1] - 1 + \varepsilon},$$

ce qui montre que $\rho_1[\varphi_2] \leq \rho_1[\varphi_1] - 1 + \varepsilon$. On fait tendre ε vers zéro pour conclure. ■

Rappel proposition 2.6.10. Soient $g \in \mathcal{O}(\mathbb{D}_R)$ et $t, r \in \mathbb{R}$ tels que $0 < t < r < R$. Alors

$$T(t, g) \leq \log^+ M(t, g) \leq \left(\frac{r+t}{r-t} \right) T(r, g).$$

Le lemme 4.4.9 ci-dessous affirme que les fonctions $T(r, g)$, $\mathcal{T}(r, g)$ et $\mathcal{S}(r, g)$ ont le même ordre supérieur lorsque g est méromorphe sur \mathbb{C} .

Lemme 4.4.9. *Soit $g \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ une fonction transcendante. Alors*

$$\forall j \in \mathbb{N}^*, \quad \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log_j T(r, g)}{\log r} = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log_j \mathcal{T}(r, g)}{\log r} = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log_j \mathcal{S}(r, g)}{\log r},$$

et

$$\forall j \in \mathbb{N}^*, \quad \underline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log_j T(r, g)}{\log r} = \underline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log_j \mathcal{T}(r, g)}{\log r} = \underline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log_j \mathcal{S}(r, g)}{\log r}.$$

De plus lorsque $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ et $\forall j \in \mathbb{N}^*$

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log_{j+1} M(r, g)}{\log r} = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log_j T(r, g)}{\log r} \quad \text{et} \quad \underline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log_{j+1} M(r, g)}{\log r} = \underline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log_j T(r, g)}{\log r}.$$

Démonstration. La première égalité découle de la proposition 4.2.22 et du fait que la caractéristique $\mathcal{T}(r, g)$ est non bornée puisque $\mathcal{S}(r, g)$ ne l'est pas d'après le corollaire 4.4.2. On peut donc appliquer le lemme 4.4.8 aux fonctions $\varphi_1(r) = \mathcal{S}(r, g)$ et $\varphi_2(r) = \mathcal{T}(r, g)$ pour conclure. Lorsque $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$, on applique la proposition 2.6.10 ci-dessus entre les rayons r et $2r$

$$\forall r > 0, \quad T(r, g) \leq \log^+ M(r, g) \leq \left(\frac{2r+r}{2r-r} \right) T(2r, g) \ll T(2r, g).$$

D'où la dernière égalité. ■

Le lemme 4.4.10 ci-dessous permet quant à lui de comparer les caractéristiques $T(r, g)$, $\mathcal{T}(r, g)$ et $\mathcal{S}(r, g)$ lorsque g est méromorphe sur le disque unité. Contrairement au cas des fonctions méromorphes sur \mathbb{C} , la caractéristique de Nevanlinna d'une fonction méromorphe sur \mathbb{D} n'a pas toujours le même ordre inférieur que la caractéristique $\mathcal{S}(r, g)$.

Lemme 4.4.10. *Soit $g \in \mathcal{M}(\mathbb{D})$ telle que la caractéristique $\mathcal{S}(r, g)$ ne soit pas bornée. Alors*

$$\forall j \in \mathbb{N}^*, \quad \overline{\lim}_{r \rightarrow 1^-} \frac{\log_j T(r, g)}{-\log(1-r)} = \overline{\lim}_{r \rightarrow 1^-} \frac{\log_j \mathcal{T}(r, g)}{-\log(1-r)} = \overline{\lim}_{r \rightarrow 1^-} \frac{\log_j \mathcal{S}(r, g)}{-\log(1-r)} - \Lambda(j),$$

et $\forall j \in \mathbb{N}^*$

$$\lambda_j = \underline{\lim}_{r \rightarrow 1^-} \frac{\log_j T(r, g)}{-\log(1-r)} = \underline{\lim}_{r \rightarrow 1^-} \frac{\log_j \mathcal{T}(r, g)}{-\log(1-r)} \quad \text{et} \quad \underline{\lim}_{r \rightarrow 1^-} \frac{\log_j \mathcal{S}(r, g)}{-\log(1-r)} \in [\lambda_j, \lambda_j + \Lambda(j)],$$

où $\Lambda(1) = 1$ et $\Lambda(k) = 0$ pour $k > 1$.

Démonstration. La première égalité découle de la proposition 4.2.22 et du fait que la caractéristique $\mathcal{T}(r, g)$ est non bornée puisque par hypothèse $\mathcal{S}(r, g)$ ne l'est pas. Or par un changement de variable, on obtient

$$\forall r \gg 0, \quad \mathcal{T}(\varphi(r), g) = \int_0^{1-\frac{1}{r}} \frac{\mathcal{S}(t, g)}{t} dt = \int_1^r \frac{\mathcal{S}(1-\frac{1}{t}, g)}{t^2-t} dt.$$

On peut donc appliquer le lemme 4.4.8 aux fonctions $\varphi_1(r) = \mathcal{S}(1-\frac{1}{r}, g)$ et $\varphi_2(r) = \mathcal{T}(1-\frac{1}{r}, g)$ qui sont croissantes et non bornées. ■

4.5 Minoration du d -ième diamètre d'une fibre

Dans cette section on minore le d -ième diamètre pseudo-hyperbolique des fibres de la forme

$$D(r, a, g) = \{z \in \mathbb{D}_r \mid g(z) = a\} \text{ avec } a \in \mathbb{S}^1,$$

à l'aide des caractéristiques $\mathcal{S}(r, g)$, $\log^+ M(r, g)$ et $T(\nu, g)$ (avec $\nu > r$). Le grand théorème de Picard (voir [95, ch.10, §4]) affirme que lorsque $g \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ est transcendante et $a, b \in \mathbb{S}^1$ ($a \neq b$), l'une des trois fibres $D(a, g)$, $D(b, g)$ et $D(\infty, g)$ est infinie. Cependant le théorème de Picard ne dit rien *a priori* sur la répartition des points dans le plan de cet ensemble infini. La théorie d'Ahlfors que nous avons exposée au début de ce chapitre permet de préciser la répartition des éléments d'une fibre de g . En ayant recours à la théorie d'Ahlfors, Coman et Poletsky ont ainsi minoré dans [27] le d -ième diamètre euclidien de l'ensemble $D(r, a, g)$ lorsque g est une fonction entière. Commençons par énoncer le résultat de Coman et Poletsky.

Notation 4.5.1. Soient $a, b \in \mathbb{S}^1$ distincts et $l \in]0, 2\pi[$. On introduit les deux quantités

$$\Lambda(a, b) := \frac{\chi(a, b)}{4\pi} \exp \left\{ - \left(\frac{6\pi}{\chi(a, b)} \right)^2 \right\} \text{ et } \Lambda_l := \inf \left\{ \Lambda(a, b) \mid a, b \in \mathbb{S}^1, \chi(a, b) \geq \frac{l}{\pi} \right\},$$

où $\chi(a, b)$ est la distance sphérique⁹ entre a et b .

Théorème 4.5.2 (Coman-Poletsky - [27, Th. 3.2]). *Soient $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ non constante, $a, b \in \mathbb{S}^1$ distincts, $r > 0$ et $d \in \mathbb{N}$. On suppose que $6\mathcal{L}(r, g) \leq \chi(a, b)\mathcal{S}(r, g)$ et qu'il existe une famille de d disques euclidiens de rayon au plus $t > 0$ telle que*

$$D(r+t, a, b, g) \subset \bigcup \mathcal{F} \text{ et } d \left(4 + \frac{16}{\Lambda(a, b)} \right) \leq \mathcal{S}(r, g).$$

Alors

$$\log \left(\frac{3r}{4t} \right) \leq \frac{4d \log^+ M(2r, g)}{\mathcal{S}(r, g)}.$$

Nous établissons dans cette section des résultats analogues au théorème 4.5.2 valables pour des fonctions holomorphes ou méromorphes sur le disque unité \mathbb{D} ou le plan \mathbb{C} . Les résultats principaux de cette section sont les théorèmes 4.5.3 et 4.5.4 ci-dessous. Ces énoncés affirment que le d -ième diamètre pseudo-hyperbolique d'une fibre $D(r, a, g)$ dans \mathbb{D}_r avec a parcourant un certain arc de cercle $A \subset \mathbb{S}^1$ de longueur positive $l > 0$ ne peut pas être trop petit lorsque d n'est pas trop grand devant $\mathcal{S}(r, g)$. Cette dernière condition est naturelle. En effet le terme $\mathcal{S}(r, g)$ n'est autre que le nombre moyen de feuillettes de la surface de recouvrement \mathcal{S} au-dessus de $\hat{\mathbb{C}}$ obtenue en restreignant la fonction g au disque \mathbb{D}_r . Par conséquent on s'attend à ce que le plus souvent le cardinal de $D(r, a, g)$ n'excède pas $\mathcal{S}(r, g)$. Donc le d -ième diamètre pseudo-hyperbolique d'une fibre restreinte à \mathbb{D}_r doit être en général nul lorsque d est trop grand devant $\mathcal{S}(r, g)$ ¹⁰. À l'inverse lorsque d est petit devant $\mathcal{S}(r, g)$, le d -ième diamètre pseudo-hyperbolique de presque toutes les fibres $D(r, a, g)$ lorsque a parcourt \mathbb{S}^1 est non nul. Les théorèmes 4.5.3 et 4.5.4 fournissent alors une minoration de ces d -ième diamètres pseudo-hyperboliques dans ce dernier cas.

Théorème 4.5.3. *Soient $g \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ non constante, $r, \varepsilon \in]0, 1[$, $l \in]0, 2\pi[$ et $d \in \mathbb{N}$. On suppose que*

$$3\mathcal{L}(r, g) \leq \varepsilon \mathcal{S}(r, g) \text{ et } d \leq \varepsilon \Lambda_l \mathcal{S}(r, g).$$

⁹Voir la définition page 3.

¹⁰Voir la proposition 2.7.4.

Alors il existe un arc $A \subset \mathbb{S}^1$ de longueur au moins l tel que

$$\forall a \in A, \log \left(\frac{1}{\gamma(a)} \right) \leq \frac{d \log^+ M(r, g)}{(1 - \varepsilon) \mathcal{S}(r, g)} + O(1),$$

où $\gamma(a) = \text{diam}_d(D(r, a, g), \mathbb{D}_r)$. La constante omise est absolue.

Démonstration. Voir page 145. ■

Dans les énoncés 4.5.4 et 4.5.7 suivants, on note $D(r, \mathbb{S}^1, g)$ la réunion des fibres $D(r, a, g)$ lorsque a parcourt \mathbb{S}^1 .

Théorème 4.5.4. Soient $g \in \mathcal{M}(\mathbb{D})$ non constante, $\varepsilon, \delta \in]0, 1[$, $r, \nu \in \mathbb{R}$ tels que $0 < r < \nu < 1$, $l \in]0, 2\pi[$ et $d \in \mathbb{N}$. On suppose qu'il existe $\mu \in \text{Div}(\mathbb{D}_\nu)$ tel que

$$3\mathcal{L}(r, g) \leq \varepsilon \mathcal{S}(r, g), \quad 2d(n(\nu, \infty, g) - \deg(\mu)) + \frac{d}{\Lambda_l} \leq \varepsilon \mathcal{S}(r, g)$$

$$\text{supp}(\mu) \subset D(\nu, \infty, g) \quad \text{et} \quad \forall w \in \text{supp}(\mu), \quad \forall z \in D(r, \mathbb{S}^1, g), \quad p_\nu(w, z) \geq \delta.$$

Alors il existe un arc $A \subset \mathbb{S}^1$ de longueur au moins l tel que

$$\forall a \in A, \log \left(\frac{1}{\gamma(a)} \right) \leq \left(\frac{\nu + r}{\nu - r} \right) \frac{dT(\nu, g)}{(1 - \varepsilon) \mathcal{S}(r, g)} + \frac{d \deg(\nu) \log(\frac{1}{\delta})}{(1 - \varepsilon) \mathcal{S}(r, g)} + \log \left(\frac{\nu}{r} \right) + O(1),$$

où $\gamma(a) = \text{diam}_d(D(r, \infty, a, g), \mathbb{D}_r)$. La constante omise est absolue.

Démonstration. Voir page 147. ■

Remarque 4.5.5. Afin de pouvoir appliquer les deux théorèmes 4.5.3 et 4.5.4 ci-dessus, il est nécessaire que la longueur du bord relatif $\mathcal{L}(r, g)$ soit petite devant le nombre moyen de feuillettes $\mathcal{S}(r, g)$. Cette condition est vérifiée par un grand nombre de rayons pour les fonctions Ahlfors-régulières¹¹. Il est donc possible d'appliquer ces deux théorèmes pour tout entier d dès lors que g est Ahlfors-régulière sur le disque \mathbb{D} .

Des deux théorèmes 4.5.3 et 4.5.4, on déduit immédiatement les deux corollaires suivants pour les fonctions holomorphes ou méromorphes sur \mathbb{C} .

Corollaire 4.5.6. Soient $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ non constante, $r > 0$, $\varepsilon \in]0, 1[$, $l \in]0, 2\pi[$ et $d \in \mathbb{N}$. On suppose que

$$3\mathcal{L}(r, g) \leq \varepsilon \mathcal{S}(r, g) \quad \text{et} \quad d \leq \frac{\varepsilon \Lambda_l \mathcal{S}(r, g)}{2}.$$

Alors il existe un arc $A \subset \mathbb{S}^1$ de longueur au moins l tel que

$$\forall a \in A, \log \left(\frac{1}{\gamma(a)} \right) \leq \frac{d \log^+ M(r, g)}{(1 - \varepsilon) \mathcal{S}(r, g)} + O(1),$$

où $\gamma(a) = \text{diam}_d(D(r, a, g), \mathbb{D}_r)$. La constante omise est absolue.

Corollaire 4.5.7. Soient $g \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ non constante, $\varepsilon, \delta \in]0, 1[$, $r, \nu \in \mathbb{R}$ tels que $0 < r < \nu < \infty$, $l \in]0, 2\pi[$ et $d \in \mathbb{N}$. On suppose qu'il existe $\mu \in \text{Div}(\mathbb{D}_\nu)$ tel que

$$3\mathcal{L}(r, g) \leq \varepsilon \mathcal{S}(r, g), \quad 2d(n(\nu, \infty, g) - \deg(\mu)) + \frac{d}{\Lambda_l} \leq \varepsilon \mathcal{S}(r, g)$$

$$\text{supp}(\mu) \subset D(\nu, \infty, g) \quad \text{et} \quad \forall w \in \text{supp}(\mu), \quad \forall z \in D(r, \mathbb{S}^1, g), \quad p_\nu(w, z) \geq \delta.$$

Alors il existe un arc $A \subset \mathbb{S}^1$ de longueur au moins l tel que

$$\forall a \in A, \log \left(\frac{1}{\gamma(a)} \right) \leq \left(\frac{\lambda + r}{\lambda - r} \right) \frac{dT(\lambda, g)}{(1 - \varepsilon) \mathcal{S}(r, g)} + \frac{d \deg(\nu) \log(\frac{1}{\delta})}{(1 - \varepsilon) \mathcal{S}(r, g)} + \log \left(\frac{\nu}{r} \right) + O(1),$$

où $\gamma(a) = \text{diam}_d(D(\lambda, \infty, a, g), \mathbb{D}_\lambda)$. La constante omise est absolue.

¹¹Voir la définition 4.3.2.

Recouvrement de disques Avant de démontrer le théorème 4.5.3 et 4.5.4 nous avons besoin d'introduire quelques définitions et lemmes élémentaires sur les recouvrements finis de disques dans un espace métrique géodésique (X, d) , c'est-à-dire un espace métrique tel que pour tout $a, b \in X$, il existe une courbe γ dans X de classe \mathcal{C}^1 , reliant a à b et dont la longueur $\Lambda_d(\gamma)$ est égale à $d(a, b)$. On appliquera ces résultats aux espaces métriques géodésiques $(\mathbb{D}_\lambda, p_\lambda)$ dans le paragraphe suivant.

Définition 4.5.8. Soient (X, d) un espace métrique et \mathcal{F} une famille de disques de X . Pour tout $\eta > 0$, on définit l'*homothétie de la famille \mathcal{F}* de facteur η comme la famille de disques

$$\eta \cdot \mathcal{F} := \{\mathbb{D}_X(a, \eta t) : \mathbb{D}_X(a, t) \in \mathcal{F}\}.$$

Le rayon d'un disque D de X est noté $r(D)$ et on définit le *rayon de la famille \mathcal{F}* par $r(\mathcal{F}) := \sum_{D \in \mathcal{F}} r(D)$ et le *rayon minimal de la famille \mathcal{F}* par $\delta(\mathcal{F}) := \min\{r(D) : D \in \mathcal{F}\}$.

Lemme 4.5.9. Soient (X, d) un espace métrique et $\gamma \in \mathcal{C}^1([0, 1], X)$ une courbe. Pour tout $t \in [0, 1]$ on note γ_t la restriction de γ sur $[0, t]$. Alors l'application $t \mapsto \Lambda_d(\gamma_t)$ est continue sur $[0, 1]$.

Démonstration. On peut se contenter de montrer que $\lim_{t \rightarrow 1^-} \Lambda_d(\gamma_t) = \Lambda_d(\gamma)$. Or

$$\Lambda_d(\gamma_t) = \int_0^t \gamma'_t(t) dt = \int_0^t \gamma'(t) dt \implies \int_0^1 \gamma'(t) dt = \Lambda_d(\gamma).$$

Ce qu'il fallait démontrer. ■

Le lemme 4.5.10 ci-dessous est démontré par Coman et Poletsky dans [27] dans le cas où $X = \mathbb{C}$ et d est la métrique euclidienne. On l'étend à n'importe quel espace métrique géodésique.

Lemme 4.5.10. Soient (X, d) un espace métrique géodésique et $E \subset X$ un ensemble recouvert par une famille finie \mathcal{F} de disques fermés de X . Alors il existe une famille \mathcal{G} de disques fermés de X telle que

- la famille \mathcal{G} recouvre l'ensemble E .
- chaque disque de \mathcal{F} est contenu dans un disque de \mathcal{G} ,
- les centres de disques de \mathcal{G} sont recouverts par \mathcal{F} ,
- de plus $\#\mathcal{G} \leq \#\mathcal{F}$ et $r(\mathcal{G}) \leq r(\mathcal{F})$.

Démonstration. La démonstration se fait par récurrence sur le cardinal n de la famille \mathcal{F} . On note D_1, \dots, D_n les éléments de cette famille. Lorsque $n = 1$, il n'y a rien à démontrer. Supposons que $n = 2$ et que les deux disques $D_1 = \overline{\mathbb{D}}_X(a_1, r_1)$ et $D_2 = \overline{\mathbb{D}}_X(a_2, r_2)$ ne sont pas disjoints et $r_1 \geq r_2$. Alors il existe $c \in X$ tel que les deux disques D_1 et D_2 soient contenus dans $\overline{\mathbb{D}}_X(c, r_1 + r_2)$. En effet puisque (X, d) est un espace métrique géodésique, il existe une courbe de Jordan $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ reliant a_1 à a_2 tel que $d(a_1, a_2) = \Lambda_d(\gamma)$. De plus d'après le lemme 4.5.9, l'application $t \mapsto \Lambda_d(\gamma_t)$ est continue sur $[0, 1]$. Donc par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $t \in [0, 1]$ tel que $\Lambda_d(\gamma_t) = \frac{r_2}{r_1 + r_2} \Lambda_d(\gamma)$ et prenons $c = \gamma(t)$. Alors

$$\begin{aligned} \forall z \in D_1, \quad d(c, z) &\leq d(c, a_1) + d(a_1, z) \leq \Lambda_d(\gamma_t) + r_1 \leq \frac{r_2}{r_1 + r_2} \Lambda_d(\gamma) + r_1 \\ &\leq \frac{r_2}{r_1 + r_2} d(a_1, a_2) + r_1 \leq r_1 + r_2. \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} \forall z \in D_2, \quad d(c, z) &\leq d(c, a_2) + d(a_2, z) \leq \Lambda_d(\gamma) - \Lambda_d(\gamma_t) + r_2 \leq \frac{r_1}{r_1 + r_2} \Lambda_d(\gamma) + r_2 \\ &\leq \frac{r_1}{r_1 + r_2} d(a_1, a_2) + r_2 \leq r_1 + r_2. \end{aligned}$$

De plus c appartient à D_1 . En effet

$$d(a_1, c) = \Lambda_d(\gamma_t) = \frac{r_2}{r_1 + r_2} \Lambda_d(\gamma) \leq r_2 \leq r_1.$$

Donc le lemme est vrai pour $n = 2$. On suppose désormais que $n \geq 2$ et on peut supposer sans perte de généralité que D_1 et D_2 ne sont pas disjoints. On remplace alors la famille \mathcal{F} par la famille de disques $\mathbb{D}_X(c, r_1 + r_2), D_3, \dots, D_n$ où c est obtenu comme précédemment. On applique alors l'hypothèse de récurrence sur cette nouvelle famille qui est de cardinal $n - 1$ et dont la somme des rayons est au plus $r(\mathcal{F})$. ■

Lemme 4.5.11. *Soient (X, d) un espace métrique géodésique et $E \subset X$ un ensemble quelconque. Pour tout $\eta > 0$ et pour tout recouvrement \mathcal{F} de E par une famille finie de disques, il existe une famille finie \mathcal{G} de disques vérifiant les trois propriétés suivantes*

- les disques de la famille \mathcal{G} sont disjoints deux à deux et leur centres sont recouverts par \mathcal{F} ,
- on a $\#\mathcal{G} \leq \#\mathcal{F}$ et $r(\mathcal{G}) \leq (1 + \eta)r(\mathcal{F})$,
- pour tout disque $D_1 \in \mathcal{F}$, il existe une disque $D_2 \in \mathcal{G}$ tel que

$$D_1 \subset \{z \in D_2 : d(z, \partial D_2) \geq \eta \delta(\mathcal{F})\}.$$

En particulier la famille \mathcal{G} recouvre l'ensemble E .

Démonstration. On considère la famille de disques $\mathcal{H} := (1 + \eta) \cdot \mathcal{F}$ puis on applique le lemme 4.5.10 sur la famille \mathcal{H} afin d'obtenir \mathcal{G} . Or

$$\#\mathcal{G} \leq \#\mathcal{H} = \#\mathcal{F},$$

et $r(\mathcal{G}) \leq r(\mathcal{H}) \leq (1 + \eta)r(\mathcal{F})$ et tous les disques de \mathcal{H} sont contenus dans au moins un disque de \mathcal{G} . Soit $D_1 = \mathbb{D}_X(a, t) \in \mathcal{F}$. Alors par construction le disque $D_3 = \mathbb{D}_X(a, (1 + \eta)t)$ est contenu dans un disque D_2 de \mathcal{G} . Donc

$$\forall z \in D_1, \quad d(z, \partial D_2) \geq d(z, \partial D_3) \geq \eta t \geq \eta \delta(\mathcal{F}).$$

Ce qu'il fallait démontrer. ■

Estimations locales des caractéristiques d'Ahlfors Nous avons besoin dans nos démonstrations des théorèmes 4.5.3 et 4.5.4 de majorer le nombre moyen de feuillettes et la longueur du bord relatif de la surface de recouvrement associée à une fonction $g \in \mathcal{M}(\mathbb{D})$ sur des petits domaines contenus dans \mathbb{D} . Les propositions 4.5.12 et 4.5.14 ci-dessous permettent de majorer la caractéristique $\mathcal{S}(D, g)$ avec D un disque pseudo-hyperbolique de \mathbb{D}_r en fonction du rayon t de ce disque et du maximum $M(r, g)$ ou de la moyenne de $\hat{m}(r, g)$. Ces deux propositions sont l'analogie du lemme 3.1 de [27].

Proposition 4.5.12. *Soient $g \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ et $r \in]0, 1[$. Alors*

$$\forall a \in \mathbb{D}_r, \quad \forall t \in]0, \frac{1}{4}[, \quad \mathcal{S}(\mathbb{D}_r^h(a, t), g) \leq \frac{\log^+ M(r, g)}{\log(\frac{1}{t})} + 1.$$

Démonstration. On note D le disque $\mathbb{D}_r^h(a, t)$. Appliquons la formule de Shimizu-Ahlfors 4.2.20 à la fonction g sur le disque \mathbb{D}_r . On obtient d'une part

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}_r} g_{\mathbb{D}_r}(a, w) \rho_g^2(w) dw &= \int_{\partial \mathbb{D}_r} \log \sqrt{1 + |g(\xi)|^2} d\varpi_{\mathbb{D}_r}(a, \xi) - \log \sqrt{1 + |g(a)|^2} \\ &\leq \int_{\partial \mathbb{D}_r} \log^+ |g(\xi)| d\varpi_{\mathbb{D}_r}(a, \xi) + \frac{\log 2}{2} \leq \log^+ M(\mathbb{D}_r, g) + \frac{\log 2}{2}, \end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}_r} g_{\mathbb{D}_r}(a, w) \rho_g^2(w) dw &\geq \frac{1}{\pi} \int_D g_{\mathbb{D}_r}(a, w) \rho_g^2(w) dw \geq \frac{1}{\pi} \min_{w \in D} g_{\mathbb{D}_r}(a, w) \int_D \rho_g^2(w) dw \\ &\geq \frac{1}{\pi} \min_{w \in D} \log \left(\frac{1}{p_{\mathbb{D}_r}(a, w)} \right) \int_D \rho_g^2(w) dw \geq -(\log t) \mathcal{S}(D, g). \end{aligned}$$

D'où l'inégalité souhaitée. ■

La proposition 4.5.12 admet l'extension 4.5.14 suivante aux fonctions méromorphes. À la différence du cas holomorphe, il est nécessaire pour appliquer cette proposition de pouvoir minorer la distance entre les pôles de g dans \mathbb{D}_r et un point du disque pseudo-hyperbolique $\mathbb{D}_r^h(a, t)$.

Lemme 4.5.13. *Soient $r > 0$, $t \in]0, 1[$ et $a \in \mathbb{D}_r$. Alors*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \text{diam}_n(\mathbb{D}_r^h(a, t), \mathbb{D}_r) \geq t.$$

Démonstration. Le n -ième diamètre pseudo-hyperbolique étant un invariant conforme d'après la proposition 2.7.22, on peut supposer sans perte de généralité que a est l'origine du plan et r vaut 1. Donc $\mathbb{D}_r^h(a, t)$ n'est autre que $\mathbb{D}(0, t)$. Or d'après le lemme 2.7.15 si on suppose que $H^1(\mathbb{D}(0, t), \mathbb{D}) \leq \text{diam}_n(\mathbb{D}(0, t), \mathbb{D}) < t$ alors il existe $s \in [0, t]$ tel que le cercle $\partial \mathbb{D}_s$ ne rencontre pas $\mathbb{D}(0, t)$. C'est absurde. ■

Proposition 4.5.14. *Soient $g \in \mathcal{M}(\mathbb{D})$ et $r, \nu \in \mathbb{R}$ tels que $0 < r < \nu < 1$. Alors pour tout $\delta \in]0, 1[$, $t \in]0, \frac{1}{4}[$, $a \in \mathbb{D}_r$ et pour tout $\mu \in \text{Div}(\mathbb{D}_\nu)$ tels que*

$$\text{supp}(\mu) \subset D(\nu, \infty, g) \quad \text{et} \quad \exists c \in \mathbb{D}_r^h(a, t), \quad \forall w \in \text{supp}(\mu), \quad p_\nu(c, w) \geq \delta.$$

Alors

$$\mathcal{S}(\mathbb{D}_r^h(a, t), g) \leq \left(\frac{\nu + r}{\nu - r} \right) \frac{\hat{m}(\nu, g)}{\log\left(\frac{\nu}{2rt}\right)} + 2(n(\nu, \infty, g) - \deg(\mu)) + \frac{\deg(\mu) \log\left(\frac{1}{\delta}\right)}{\log\left(\frac{\nu}{2rt}\right)} + 1.$$

Démonstration. On note D le disque $\mathbb{D}_r^h(a, t)$. Appliquons la formule de Shimizu-Ahlfors 4.2.20 à la fonction g sur le disque \mathbb{D}_ν . Donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}_\nu} g_{\mathbb{D}_\nu}(c, w) \rho_g^2(w) dw &= \int_{\partial \mathbb{D}_\nu} \log \sqrt{1 + |g(\xi)|^2} d\varpi_{\mathbb{D}_\nu}(c, \xi) - \log \sqrt{1 + |g(c)|^2} \\ &\quad + \sum_{w \in \mathbb{D}_\nu} \nu_\infty g(w) g_{\mathbb{D}_\nu}(c, w) \\ &\leq \int_{\partial \mathbb{D}_\nu} \log \sqrt{1 + |g(\xi)|^2} d\varpi_{\mathbb{D}_\nu}(c, \xi) + \sum_{w \in \mathbb{D}_\nu} \nu_\infty g(w) g_{\mathbb{D}_\nu}(c, w). \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}_\nu} g_{\mathbb{D}_\nu}(c, w) \rho_g^2(w) dw &\geq \frac{1}{\pi} \int_D g_{\mathbb{D}_\nu}(c, w) \rho_g^2(w) dw \geq \frac{1}{\pi} \min_{w \in D} g_{\mathbb{D}_\nu}(c, w) \int_D \rho_g^2(w) dw \\ &\geq \frac{1}{\pi} \min_{w \in D} \log \left(\frac{1}{p_{\mathbb{D}_\nu}(c, w)} \right) \int_D \rho_g^2(w) dw \\ &\geq \min_{w \in D} \log \left(\frac{\nu}{r p_{\mathbb{D}_r}(c, w)} \right) \mathcal{S}(D, g) \geq -\log \left(\frac{2rt}{\nu} \right) \mathcal{S}(D, g). \end{aligned}$$

car $p_{\mathbb{D}_\nu} = \left(\frac{r}{\nu}\right) p_{\mathbb{D}_r}$ sur \mathbb{D}_r . De plus d'après l'inégalité de Harnack 2.1.27

$$\begin{aligned} \int_{\partial \mathbb{D}_\nu} \log \sqrt{1 + |g(\xi)|^2} d\varpi_{\mathbb{D}_\nu}(c, \xi) &\leq \frac{\log 2}{2} + \int_{\partial \mathbb{D}_\nu} \log^+ |g(\xi)| d\varpi_{\mathbb{D}_\nu}(c, \xi) \\ &\leq \frac{\log 2}{2} + \tau_{\mathbb{D}_\nu}(c, 0) \int_{\partial \mathbb{D}_\nu} \log^+ |g(\xi)| d\varpi_{\mathbb{D}_\nu}(0, \xi) \\ &\leq \frac{\log 2}{2} + \left(\frac{\nu + |c|}{\nu - |c|} \right) \hat{m}(\nu, g). \end{aligned}$$

Or d'après le lemme 2.7.14 et pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble

$$E = \{z \in \mathbb{D}_\nu \mid |B(z)| \leq \varepsilon^n\} \text{ avec } n = n(\nu, \infty, g).$$

est de n -ième diamètre pseudo-hyperbolique dans \mathbb{D}_ν au plus $2e\varepsilon$. De plus d'après le lemme 4.5.13, $\text{diam}_n(D, \mathbb{D}_r) \geq t$. D'où

$$\text{diam}_n(D, \mathbb{D}_\nu) = \left(\frac{r}{\nu}\right) \text{diam}_n(D, \mathbb{D}_r) \geq \frac{rt}{\nu}$$

On note $\eta = \nu_\infty g - \mu$. Or

$$\begin{aligned} \sum_{w \in \mathbb{D}_\nu} \nu_\infty g(c) g_{\mathbb{D}_\nu}(c, w) &= \sum_{w \in \mathbb{D}_\nu} \mu(c) g_{\mathbb{D}_\nu}(c, w) + \sum_{w \in \mathbb{D}_\nu} \eta(c) g_{\mathbb{D}_\nu}(c, w) \\ &\geq -\deg(\mu) \log(\delta) - \deg(\nu) \log(\varepsilon) \end{aligned}$$

Donc en appliquant la première partie de la démonstration avec $\varepsilon < \frac{rt}{\nu}$, il s'en suit qu'il existe $c \in \mathbb{D}_r$ tel que

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\mathbb{D}_r^h(a, t), g) &\leq \left(\frac{\nu + |c|}{\nu - |c|} \right) \frac{\hat{m}(\nu, g)}{\log \left(\frac{\nu}{2rt} \right)} + n(\nu, \infty, g) \frac{\log \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)}{\log \left(\frac{\nu}{rt} \right)} + \frac{1}{2} \\ &\leq \left(\frac{\nu + r}{\nu - r} \right) \frac{\hat{m}(\nu, g)}{\log \left(\frac{\nu}{2rt} \right)} + n(\nu, \infty, g) \frac{\log \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)}{\log \left(\frac{\nu}{rt} \right)} + 1. \end{aligned}$$

Puisque le dernier membre de cette inégalité ne dépend pas de c , on peut faire tendre ε vers $\frac{2rt}{\nu}$ pour conclure. \blacksquare

Le théorème de Landau ci-dessous affirme que la dérivée sphérique d'une fonction méromorphe $g \in \mathcal{M}(\Omega)$ ne peut croître trop vite lorsque z tend vers le bord $\partial\Omega$ dès lors que g n'atteint pas pas trois valeurs distinctes $\{a, b, \infty\}$ sur Ω .

Théorème 4.5.15 (Landau - [53, p. 156] et [33]). *Soient $\Omega \subset \mathbb{C}$ un domaine, $g \in \mathcal{M}(\Omega)$ et $a, b \in \mathbb{C}$ distincts. On suppose que g n'atteint pas les valeurs a, b et ∞ sur Ω . Alors*

$$\forall z \in \Omega, \rho_g(z) \leq \frac{C}{d(z, \partial\Omega)} \text{ avec } \log(C) = \left(\frac{6\pi}{\chi(a, b)} \right)^2.$$

Le théorème de Landau 4.5.15 est une version locale du théorème de Picard. Il implique d'ailleurs ce dernier. Dans [27], Coman et Poletsky utilise le théorème de Landau pour majorer la longueur relative $\mathcal{L}(\mathbb{D}(a, r), g)$ lorsque g n'atteint pas trois valeurs $\{a, b, \infty\}$ sur un petit voisinage du cercle $\partial\mathbb{D}(a, r)$. Grâce au théorème de Landau 4.5.15 ci-dessus nous

obtenons la majoration locale suivante de la caractéristique $\mathcal{L}(\partial D, g)$ lorsque D est un domaine contenu dans le domaine de définition de g .

Proposition 4.5.16. *Soient $\Omega \subset \mathbb{C}$ un domaine simplement connexe, $D \Subset \Omega$ un domaine, $g \in \mathcal{M}(\Omega)$, $r \in [0, 1[$ et $a, b \in \mathbb{C}$ distincts. On suppose que*

$$\forall z \in \partial D, D_\Omega(a, b, \infty, g) \cap \mathbb{D}_\Omega(z, r) = \emptyset.$$

Alors

$$\mathcal{L}(\partial D, g) \leq \frac{C \lambda_\Omega(\partial D)}{r} \quad \text{avec} \quad \log(C) = \left(\frac{6\pi}{\chi(a, b)} \right)^2,$$

où λ_Ω est la longueur hyperbolique dans Ω . En particulier

$$\forall a \in \Omega, \forall r \in [0, 1[, \mathcal{L}(\partial \mathbb{D}_\Omega(a, r), g) \leq \frac{C}{1 - r^2}.$$

Démonstration. Supposons dans un premier temps que Ω est le disque \mathbb{D} et fixons $w \in \partial D$. Soit $\phi \in \text{Mob}(\mathbb{D})$ envoyant l'origine sur w et posons $f = g \circ \phi$. Or la fonction f n'atteint pas les valeurs a, b et ∞ sur le disque pseudo-hyperbolique $\mathbb{D}_\Omega(0, r)$. D'après le théorème de Landau 4.5.15

$$\forall z \in \mathbb{D}_\Omega(0, r), \rho_f(z) \leq \frac{C}{d(z, \partial \mathbb{D}_\Omega(0, r))},$$

où C est la même constante que dans le théorème de Landau. Or d'après le lemme 2.7.17, le disque $\mathbb{D}_\Omega(0, r)$ est le disque euclidien \mathbb{D}_r . Donc

$$|\phi'(0)| \rho_g(w) = \rho_f(0) \leq \frac{C}{r}.$$

Or par un calcul direct, on obtient $|\phi'(0)| = 1 - |w|^2$. D'où la majoration

$$\mathcal{L}(\partial D, g) \leq 2 \int_{\partial D} \rho_g(z) d\sigma(z) \leq \frac{2C}{r} \int_{\partial D} \frac{d\sigma(z)}{1 - |z|^2} \leq \frac{2C \lambda_\Omega(\partial D)}{r}.$$

En particulier lorsque D est le disque $\mathbb{D}_\Omega(0, r) = \mathbb{D}(0, r)$ alors

$$\lambda_{\mathbb{D}}(D) = \int_{\partial \mathbb{D}(0, r)} \frac{d\sigma(z)}{1 - |z|^2} = \frac{2\pi r}{1 - r^2}.$$

Lorsque a n'est pas nul, on obtient le résultat en appliquant une transformation de Möbius et puisque $\lambda_{\mathbb{D}}$ est un invariant conforme.

Lorsque Ω est un domaine simplement connexe, on obtient la proposition 4.5.16 en considérant la fonction $g \circ h$ avec $h : \mathbb{D} \rightarrow \Omega$ une application conforme obtenue par le théorème d'uniformisation de Riemann. En effet

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(h^{-1}(\partial D), g \circ h) &= \int_{h^{-1}(\partial D)} \rho_{g \circ h}(z) d\sigma(z) = \int_{h^{-1}(\partial D)} \rho_g(h(z)) |h'(z)| d\sigma(z) \\ &= \int_{\partial D} \rho_g(z) d\sigma(z) = \mathcal{L}(\partial D, g). \end{aligned}$$

et $\lambda_\Omega(\partial D) = \lambda_{\mathbb{D}}(h^{-1}(\partial D))$ puisque la métrique hyperbolique est un invariant conforme. ■

Démonstration des théorèmes 4.5.3 et 4.5.4 En appliquant le théorème de Dufresnoy 4.2.15 et les majorations locales des caractéristiques d'Ahlfors démontrées dans le paragraphe précédent, on obtient les deux propositions 4.5.17 et 4.5.18 ci-dessous.

Proposition 4.5.17. *Soient $g \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$, $a, b \in \mathbb{S}^1$ distincts, $d \in \mathbb{N}$, $\varepsilon, r \in]0, 1[$ tels que $3\mathcal{L}(r, g) \leq \varepsilon\chi(a, b)\mathcal{S}(r, g)$ et une famille \mathcal{F} de d disques pseudo-hyperboliques de \mathbb{D}_r de rayon au plus $t \in]0, 1[$ telle que*

$$2\varepsilon^2 dt \leq 1, \quad D(r, a, b, g) \subset \bigcup \mathcal{F} \quad \text{et} \quad d \leq \varepsilon\Lambda(a, b)\mathcal{S}(r, g).$$

Alors

$$\log\left(\frac{1}{t}\right) \leq \frac{d \log^+ M(r, g)}{(1 - \varepsilon)\mathcal{S}(r, g)} + O(1).$$

La constante omise est absolue.

Démonstration. On peut supposer que $t < \frac{1}{4}$ puisque l'inégalité est immédiate dans le cas contraire. Les disques de la famille \mathcal{F} n'étant pas *a priori* disjoints deux à deux, nous remplaçons celle-ci par une famille \mathcal{G} donnée par le lemme 4.5.11 ci-dessus avec $\eta = 1$. La famille \mathcal{G} vérifie par construction $1 \leq \#\mathcal{G} \leq \#\mathcal{F} \leq d$, $r(\mathcal{G}) \leq 2r(\mathcal{F})$ et les disques de \mathcal{G} sont disjoints deux à deux. Pour tout $r > 0$, notons $\Sigma_r := \mathbb{D}_r \setminus \bigcup \mathcal{G}$. Par additivité nous avons la décomposition

$$\mathcal{S}(r, g) = \mathcal{S}(\mathbb{D}_r, g) = \mathcal{S}(\Sigma_r, g) + \sum_{D \in \mathcal{G}} \mathcal{S}(D, g).$$

Commençons par majorer la quantité $\mathcal{S}(D, g)$ lorsque D parcourt la famille \mathcal{G} . Or d'après la proposition 4.5.12

$$\mathcal{S}(D, g) \leq \frac{\log^+ M(r, g)}{\log(\frac{1}{t})} + 1,$$

D'où l'inégalité

$$\frac{1}{\#\mathcal{G}} \sum_{D \in \mathcal{G}} \mathcal{S}(D, g) \leq \frac{1}{\#\mathcal{G}} \sum_{D \in \mathcal{G}} \frac{\log^+ M(r, g)}{\log(\frac{1}{t})} + 1 \leq \frac{\log^+ M(r, g)}{\log(\frac{\#\mathcal{G}}{r(\mathcal{G})})} + 1. \quad (4.5.1)$$

La troisième inégalité ci-dessus est obtenue par concavité de la fonction $x \mapsto -1/(\log x)$ sur l'intervalle $]0, e^{-2}[$ et puisque $r(\mathcal{G}) \leq 2r(\mathcal{F}) < e^{-2}$. Or

$$\frac{\#\mathcal{G} \log^+ M(r, g)}{\log(\frac{\#\mathcal{G}}{r(\mathcal{G})})} \leq \frac{d \log^+ M(r, g)}{\log(\frac{d}{r(\mathcal{G})})} \leq \frac{d \log^+ M(r, g)}{\log(\frac{1}{2t})},$$

puisque $\#\mathcal{G} \leq d$ et $r(\mathcal{G}) \leq 2dt$. En appliquant le corollaire 4.2.18 à la fonction g sur le domaine Σ_r , on obtient

$$\mathcal{S}(\Sigma_r, g) \leq \chi(\mathbb{D}_r) + 1 + n(\Sigma_r, a, g) + n(\Sigma_r, b, g) + n(\Sigma_r, \infty, g) + \frac{3}{2\chi(a, b)} \mathcal{L}(\partial\Sigma_r, g).$$

Or la fonction g n'atteint pas les valeurs a, b et ∞ dans le domaine Σ_r et ce dernier étant borné par au plus $\chi(\mathbb{D}_r) + d$ courbes de Jordan, sa caractéristique d'Euler est au plus $1 + d - 1$. Donc

$$\mathcal{S}(\Sigma_r, g) \leq d + \frac{3}{2\chi(a, b)} \mathcal{L}(\partial\Sigma_r, g). \quad (4.5.2)$$

Pour conclure il suffit d'obtenir une majoration suffisamment fine du terme d'erreur $\mathcal{L}(\partial\Sigma_r, g)$. Or

$$\mathcal{L}(\partial\Sigma_r, g) \leq \mathcal{L}(\partial\mathbb{D}_r, g) + \sum_{D \in \mathcal{G}} \mathcal{L}(\partial D, g) \leq \mathcal{L}(r, g) + \sum_{D \in \mathcal{G}} \mathcal{L}(\partial D, g). \quad (4.5.3)$$

Il reste à majorer dans l'inégalité 4.5.3 les termes de la forme $\mathcal{L}(\partial D, g)$ lorsque D parcourt la famille \mathcal{G} . Fixons un disque $D \in \mathcal{G}$. Pour tout $c \in \partial D$, la fonction g n'atteint pas les

valeurs a, b et ∞ dans le disque $\mathbb{D}_r^h(c, t)$. En effet, si $w \in \mathbb{D}_r^h(c, t)$ était un antécédent par g de a ou b alors $w \in D(r, a, b, g)$ et donc w appartiendrait à un disque D' de \mathcal{F} . Donc

$$p_r(\partial D, \partial D') < t.$$

Cela contredit la construction du recouvrement \mathcal{G} . Puisque pour tout $c \in \partial D$, la fonction g n'atteint pas les valeurs a, b et ∞ sur le disque $\mathbb{D}_r^h(c, t)$ alors d'après la proposition 4.5.15

$$\mathcal{L}(\partial D, g) \leq \frac{2C\lambda_{\mathbb{D}_r}(\partial D)}{t} \leq \frac{4\pi C}{1-t^2} \leq 8\pi C \text{ avec } \log(C) = \left(\frac{6\pi}{\chi(a, b)}\right)^2, \quad (4.5.4)$$

car $t < \frac{1}{4}$. Finalement en combinant les inégalités 4.5.1, 4.5.2, 4.5.3 et 4.5.4, on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(r, g) &\leq d + \frac{3}{2\chi(a, b)}\mathcal{L}(\partial\Sigma_r, g) + \frac{d\log^+ M(r, g)}{\log\left(\frac{1}{2t}\right)} + d \\ &\leq d + \frac{12\pi dC}{\chi(a, b)} + \frac{3}{2\chi(a, b)}\mathcal{L}(r, g) + \frac{d\log^+ M(r, g)}{\log\left(\frac{1}{2t}\right)} + d \\ &\leq 2d + \frac{12\pi dC}{\chi(a, b)} + \frac{\varepsilon}{2}\mathcal{S}(r, g) + \frac{d\log^+ M(r, g)}{\log\left(\frac{1}{2t}\right)} \leq \varepsilon\mathcal{S}(r, g) + \frac{d\log^+ M(r, g)}{\log\left(\frac{1}{2t}\right)}, \end{aligned}$$

car par hypothèse et par définition de $\Lambda(a, b)$

$$2d + \frac{12\pi dC}{\chi(a, b)} \leq \frac{(12\pi C + 2)d}{\chi(a, b)} \leq \frac{24\pi Cd}{\chi(a, b)} \leq \frac{d}{2\Lambda(a, b)} \leq \frac{\varepsilon}{2}\mathcal{S}(r, g).$$

Ce qu'il fallait démontrer. ■

Rappel théorème 4.5.3. Soient $g \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ non constante, $r, \varepsilon \in]0, 1[$, $l \in]0, 2\pi[$ et $d \in \mathbb{N}$. On suppose que

$$3\mathcal{L}(r, g) \leq \varepsilon\mathcal{S}(r, g) \text{ et } d \leq \varepsilon\Lambda_l\mathcal{S}(r, g).$$

Alors il existe un arc $A \subset \mathbb{S}^1$ de longueur au moins l tel que

$$\forall a \in A, \log\left(\frac{1}{\gamma(a)}\right) \leq \frac{d\log^+ M(r, g)}{(1-\varepsilon)\mathcal{S}(r, g)} + O(1),$$

où $\gamma(a) = \text{diam}_d(D(r, a, g), \mathbb{D}_r)$. La constante omise est absolue.

Démonstration. Soient $a, b \in \mathbb{S}^1$ tels que la distance sphérique $\chi(a, b)$ est au moins $\frac{l}{\pi}$. On note $E = D(r, a, b, g)$ et γ le d -ième diamètre de E . Supposons dans un premier temps que $\gamma < \frac{1}{2e^2}$. Alors pour tout $\eta > 0$ tel que $\gamma + \eta < \frac{1}{2e^2}$, il existe un recouvrement \mathcal{F} de E par d disques dont la somme des rayons est au plus $\gamma + \eta$. Donc en appliquant la proposition 4.5.17

$$\log\left(\frac{1}{\gamma + \eta}\right) \leq \frac{d\log^+ M(r, g)}{(1-\varepsilon)\mathcal{S}(r, g)} + O(1).$$

En faisant tendre η vers zéro, on obtient

$$\log\left(\frac{1}{\gamma}\right) \leq \frac{d\log^+ M(r, g)}{(1-\varepsilon)\mathcal{S}(r, g)} + O(1).$$

Lorsque $\gamma \geq \frac{1}{2e^2}$, $-\log \gamma \leq \log(2e^2)$. Donc

$$\log\left(\frac{1}{\gamma}\right) \leq \frac{d\log^+ M(r, g)}{(1-\varepsilon)\mathcal{S}(r, g)} + \log(2e^2) + O(1).$$

Notons $\tilde{\gamma}$ le maximum de $\gamma(a)$ et $\gamma(b)$. Donc

$$\log\left(\frac{1}{2\tilde{\gamma}}\right) \leq \frac{d\log^+ M(r, g)}{(1-\varepsilon)\mathcal{S}(r, g)} + O(1).$$

Ainsi a ou b vérifie l'inégalité souhaitée. ■

Proposition 4.5.18. Soient $g \in \mathcal{M}(\mathbb{D})$, $a, b \in \mathbb{S}^1$ distincts, $d \in \mathbb{N}$, $r, \nu \in \mathbb{R}$ tels que $0 < r < \nu < 1$, $\varepsilon \in]0, 1[$ tels que $3\mathcal{L}(r, g) \leq 2\varepsilon\chi(a, b)\mathcal{S}(r, g)$, $\mu \in \text{Div}(\mathbb{D}_\nu)$ et une famille \mathcal{F} de d disques pseudo-hyperboliques de \mathbb{D}_r de rayon au plus $t \in]0, 1[$ telle que

$$2e^2 dt \leq 1, \quad D(r, a, b, \infty, g) \subset \bigcup \mathcal{F} \quad \text{et} \quad 2d(n(\nu, \infty, g) - \deg(\mu)) + \frac{d}{\Lambda_t} \leq \varepsilon\mathcal{S}(r, g),$$

$$\text{supp}(\mu) \subset D(\nu, \infty, g) \quad \text{et} \quad \forall w \in \text{supp}(\mu), \quad \forall c \in D(r, a, b, g), \quad p_\nu(c, w) \geq \delta.$$

Alors

$$\log\left(\frac{1}{t}\right) \leq \left(\frac{\nu+r}{\nu-r}\right) \frac{dT(\nu, g) + d\deg(\mu) \log(\frac{1}{\delta})}{(1-\varepsilon)\mathcal{S}(r, g)} + \log\left(\frac{\nu}{r}\right) + O(1).$$

La constante omise est absolue.

Démonstration. On peut supposer que $t < \frac{1}{4}$ puisque l'inégalité est immédiate dans le cas contraire. Les disques de la famille \mathcal{F} n'étant pas a priori disjoints deux à deux, nous remplaçons celle-ci par une famille \mathcal{G} donnée par le lemme 4.5.11 ci-dessus avec $\eta = 1$. La famille \mathcal{G} vérifie par construction $1 \leq \#\mathcal{G} \leq \#\mathcal{F} \leq d$, $r(\mathcal{G}) \leq 2r(\mathcal{F})$ et les disques de \mathcal{G} sont disjoints deux à deux. Pour tout $r > 0$, notons $\Sigma_r := \mathbb{D}_r \setminus \bigcup \mathcal{G}$. Par additivité nous avons la décomposition

$$\mathcal{S}(r, g) = \mathcal{S}(\mathbb{D}_r, g) = \mathcal{S}(\Sigma_r, g) + \sum_{D \in \mathcal{G}} \mathcal{S}(D, g).$$

On pose $N = 2(n(\nu, \infty, g) - \deg(\mu))$. Commençons par majorer la quantité $\mathcal{S}(D, g)$ lorsque D parcourt la famille \mathcal{G} . Or d'après la proposition 4.5.14

$$\mathcal{S}(D, g) \leq \left(\frac{\nu+r}{\nu-r}\right) \frac{T(\nu, g)}{\log(\frac{\nu}{2rt})} + N + \frac{\deg(\mu) \log(\frac{1}{\delta})}{\log(\frac{\nu}{2rt})} + 1,$$

D'où l'inégalité

$$\begin{aligned} \frac{1}{\#\mathcal{G}} \sum_{D \in \mathcal{G}} \mathcal{S}(D, g) &\leq \frac{1}{\#\mathcal{G}} \sum_{D \in \mathcal{G}} \left(\frac{\nu+r}{\nu-r}\right) \frac{T(\nu, g)}{\log(\frac{\nu}{2rt})} + \frac{\deg(\mu) \log(\frac{1}{\delta})}{\log(\frac{\nu}{2rt})} + N + 1 \\ &\leq \left(\frac{\nu+r}{\nu-r}\right) \frac{T(\nu, g)}{\log(\frac{\nu\#\mathcal{G}}{(2r)r(\mathcal{G})})} + \frac{\deg(\mu) \log(\frac{1}{\delta})}{\log(\frac{\nu\#\mathcal{G}}{(2r)r(\mathcal{G})})} + N + 1. \end{aligned} \quad (4.5.5)$$

La troisième inégalité ci-dessus est obtenue par concavité de la fonction $x \mapsto -1/(\log x)$ sur l'intervalle $]0, e^{-2}[$ et puisque $r(\mathcal{G}) \leq 2r(\mathcal{F}) < e^{-2}$. Or

$$\frac{\#\mathcal{G}}{\log(\frac{\nu\#\mathcal{G}}{(2r)r(\mathcal{G})})} \leq \frac{d}{\log(\frac{\nu d}{(2r)r(\mathcal{G})})} \leq \frac{d}{\log(\frac{\nu}{4rt})},$$

puisque $\#\mathcal{G} \leq d$ et $r(\mathcal{G}) \leq 2dt$. En appliquant le corollaire 4.2.18 à la fonction g sur le domaine Σ_r , on obtient

$$\mathcal{S}(\Sigma_r, g) \leq \chi(\Sigma_r) + 1 + n(\Sigma_r, a, g) + n(\Sigma_r, b, g) + n(\Sigma_r, \infty, g) + \frac{3}{2\chi(a, b)} \mathcal{L}(\partial\Sigma_r, g).$$

Or la fonction g n'atteint pas les valeurs a, b et ∞ dans le domaine Σ_r et ce dernier étant borné par au plus $\chi(\mathbb{D}_r) + d$ courbes de Jordan, sa caractéristique d'Euler est au plus $d - 1$. Donc

$$\mathcal{S}(\Sigma_r, g) \leq d + \frac{3}{2\chi(a, b)} \mathcal{L}(\partial\Sigma_r, g). \quad (4.5.6)$$

Pour conclure il suffit d'obtenir une majoration suffisamment fine du terme d'erreur $\mathcal{L}(\partial\Sigma_r, g)$. Or

$$\mathcal{L}(\partial\Sigma_r, g) \leq \mathcal{L}(\partial\mathbb{D}_r, g) + \sum_{D \in \mathcal{G}} \mathcal{L}(\partial D, g) \leq \mathcal{L}(r, g) + \sum_{D \in \mathcal{G}} \mathcal{L}(\partial D, g). \quad (4.5.7)$$

Il reste à majorer dans l'inégalité 4.5.3 les termes de la forme $\mathcal{L}(\partial D, g)$ lorsque D parcourt la famille \mathcal{G} . Fixons un disque $D \in \mathcal{G}$. Pour tout $c \in \partial D$, la fonction g n'atteint pas les valeurs a, b et ∞ dans le disque $\mathbb{D}_r^h(c, t)$. En effet, si $w \in \mathbb{D}_r^h(c, t)$ était un antécédent par g de a ou b alors $w \in D(\nu, \infty, a, b, g)$ et donc w appartiendrait à un disque D' de \mathcal{F} . Donc

$$p_r(\partial D, \partial D') < t.$$

Cela contredit la construction du recouvrement \mathcal{G} . Puisque pour tout $c \in \partial D$, la fonction g n'atteint pas les valeurs a, b et ∞ sur le disque $\mathbb{D}_r^h(c, t)$ alors d'après la proposition 4.5.15

$$\mathcal{L}(\partial D, g) \leq \frac{2C\lambda_{\mathbb{D}_r}(\partial D)}{t} \leq \frac{4\pi C}{1-t^2} \leq 8\pi C \text{ avec } \log(C) = \left(\frac{6\pi}{\chi(a, b)} \right)^2, \quad (4.5.8)$$

car $t < \frac{1}{4}$. Finalement en combinant les inégalités 4.5.5, 4.5.6, 4.5.7 et 4.5.8, on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(r, g) &\leq d + \frac{3}{2\chi(a, b)} \mathcal{L}(\partial \Sigma_r, g) + \left(\frac{\nu+r}{\nu-r} \right) \frac{dT(\nu, g)}{\log\left(\frac{\nu}{4rt}\right)} + \frac{d \deg(\mu) \log\left(\frac{1}{\delta}\right)}{\log\left(\frac{\nu}{4rt}\right)} + dN + d \\ &\leq 2d + \frac{12\pi dC}{\chi(a, b)} + \frac{3}{2\chi(a, b)} \mathcal{L}(r, g) + \left(\frac{\nu+r}{\nu-r} \right) \frac{dT(\nu, g)}{\log\left(\frac{\nu}{4rt}\right)} + \frac{d \deg(\mu) \log\left(\frac{1}{\delta}\right)}{\log\left(\frac{\nu}{4rt}\right)} + dN \\ &\leq 2d + dN + \frac{12\pi dC}{\chi(a, b)} + \frac{\varepsilon}{2} \mathcal{S}(r, g) + \left(\frac{\nu+r}{\nu-r} \right) \frac{dT(\nu, g)}{\log\left(\frac{\nu}{4rt}\right)} + \frac{d \deg(\mu) \log\left(\frac{1}{\delta}\right)}{\log\left(\frac{\nu}{4rt}\right)} \\ &\leq \varepsilon \mathcal{S}(r, g) + \left(\frac{\nu+r}{\nu-r} \right) \frac{dT(\nu, g)}{\log\left(\frac{\nu}{4rt}\right)} + \frac{d \deg(\mu) \log\left(\frac{1}{\delta}\right)}{\log\left(\frac{\nu}{4rt}\right)}, \end{aligned}$$

car par hypothèse et par définition de $\Lambda(a, b)$

$$2d + \frac{12\pi dC}{\chi(a, b)} \leq \frac{(12\pi C + 2)d}{\chi(a, b)} \leq \frac{24\pi Cd}{\chi(a, b)} \leq \frac{d}{2\Lambda(a, b)} \leq \varepsilon \mathcal{S}(r, g) - dN.$$

Ce qu'il fallait démontrer. ■

Rappel théorème 4.5.4. Soient $g \in \mathcal{M}(\mathbb{D})$ non constante, $\varepsilon, \delta \in]0, 1[$, $r, \nu \in \mathbb{R}$ tels que $0 < r < \nu < 1$, $l \in]0, 2\pi[$ et $d \in \mathbb{N}$. On suppose qu'il existe $\mu \in \text{Div}(\mathbb{D}_\nu)$ tel que

$$\begin{aligned} 3\mathcal{L}(r, g) &\leq \varepsilon \mathcal{S}(r, g), \quad 2d(n(\nu, \infty, g) - \deg(\mu)) + \frac{d}{\Lambda_l} \leq \varepsilon \mathcal{S}(r, g) \\ \text{supp}(\mu) &\subset D(\nu, \infty, g) \quad \text{et} \quad \forall w \in \text{supp}(\mu), \quad \forall z \in D(r, \mathbb{S}^1, g), \quad p_\nu(w, z) \geq \delta. \end{aligned}$$

Alors il existe un arc $A \subset \mathbb{S}^1$ de longueur au moins l tel que

$$\forall a \in A, \quad \log\left(\frac{1}{\gamma(a)}\right) \leq \left(\frac{\nu+r}{\nu-r} \right) \frac{dT(\nu, g)}{(1-\varepsilon)\mathcal{S}(r, g)} + \frac{d \deg(\mu) \log\left(\frac{1}{\delta}\right)}{(1-\varepsilon)\mathcal{S}(r, g)} + \log\left(\frac{\nu}{r}\right) + O(1),$$

où $\gamma(a) = \text{diam}_d(D(r, \infty, a, g), \mathbb{D}_r)$. La constante omise est absolue.

Démonstration. Soient a et b deux points du cercle unité \mathbb{S}^1 dont la distance sphérique est au moins $\frac{2\pi-l}{\pi}$. On considère l'ensemble $E = D(r, a, b, \infty, g)$ et on note γ le d -ième diamètre de E dans \mathbb{D}_r . Supposons dans un premier temps que $\gamma < \frac{1}{2e^2}$. Alors pour tout $\eta > 0$ tel que $\gamma + \eta < \frac{1}{e^2}$, il existe un recouvrement \mathcal{F} de E par d disques dont la somme des rayons est au plus $\gamma + \eta$. Donc en appliquant la proposition 4.5.17

$$\log\left(\frac{1}{\gamma + \eta}\right) \leq \left(\frac{\nu+r}{\nu-r} \right) \frac{dT(\nu, g)}{(1-\varepsilon)\mathcal{S}(r, g)} + \frac{d \deg(\mu) \log\left(\frac{1}{\delta}\right)}{(1-\varepsilon)\mathcal{S}(r, g)} + \log\left(\frac{\nu}{r}\right) + O(1).$$

En faisant tendre η vers zéro, on obtient

$$\log\left(\frac{1}{\gamma}\right) \leq \left(\frac{\nu+r}{\nu-r} \right) \frac{dT(\nu, g)}{(1-\varepsilon)\mathcal{S}(r, g)} + \frac{d \deg(\mu) \log\left(\frac{1}{\delta}\right)}{(1-\varepsilon)\mathcal{S}(r, g)} + \log\left(\frac{\nu}{r}\right) + O(1).$$

Lorsque $\gamma \geq \frac{1}{2e^2}$, $-\log \gamma \leq \log(2e^2)$. Donc quelque soit la valeur de γ

$$\log\left(\frac{1}{\gamma}\right) \leq \left(\frac{\nu+r}{\nu-r}\right) \frac{dT(\nu, g)}{(1-\varepsilon)\mathcal{S}(r, g)} + \frac{d\deg(\mu) \log(\frac{1}{\delta})}{(1-\varepsilon)\mathcal{S}(r, g)} + \log(2e^2) + \log\left(\frac{\nu}{r}\right) + O(1).$$

Notons $\tilde{\gamma}$ le maximum de $\gamma(a)$ et $\gamma(b)$. Donc

$$\log\left(\frac{1}{2\tilde{\gamma}}\right) \leq \left(\frac{\nu+r}{\nu-r}\right) \frac{dT(\nu, g)}{(1-\varepsilon)\mathcal{S}(r, g)} + \frac{d\deg(\mu) \log(\frac{1}{\delta})}{(1-\varepsilon)\mathcal{S}(r, g)} + \log\left(\frac{\nu}{r}\right) + O(1).$$

Ainsi l'un des deux points a et b vérifie l'inégalité souhaitée. \blacksquare

4.6 Existence des intervalles admissibles

La notion d'intervalle admissible a été introduite par Coman et Poletsky dans [27] pour les fonctions entières. La raison d'être de cette notion est de pouvoir appliquer le théorème 4.5.2 de [27] pour une suite de degrés $(d_n) \nearrow \infty$. On introduit dans cette section une notion analogue pour appliquer les théorèmes 4.5.3 et 4.5.4. Dans le cas d'une fonction entière, on définit les intervalles admissibles de la façon suivante.

Définition 4.6.1 (Système holomorphe d'intervalles sur \mathbb{C}). Soient $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ une fonction non constante et $\alpha \in]0, 1]$. Un *système holomorphe d'intervalles admissibles* pour g d'exposant α est une suite d'intervalles (I_n) de la forme

$$I_n = [C(\log^+ M(\lambda_n, g))^\alpha, \varepsilon \Lambda_l \mathcal{S}(\lambda_n, g)] \quad \text{avec} \quad 3\mathcal{L}(\lambda_n, g) \leq 2\varepsilon \mathcal{S}(\lambda_n, g),$$

où $C > 0$, $(\lambda_n) \nearrow \infty$ et $\varepsilon \in]0, 1[$. On suppose de plus que

$$\forall n \gg 0, I_n \cap \mathbb{N} \neq \emptyset.$$

Les intervalles I_n sont dits *admissibles* pour g .

Remarque 4.6.2. La définition 4.6.1 ne coïncide pas avec les intervalles admissibles de Coman et Poletsky pour les fonctions entières figurant dans [27]. En effet, la borne de gauche de leur notion d'intervalles admissibles est de la forme $\mathcal{S}(\lambda_n, g)^\alpha$ plutôt que $(\log^+ M(\lambda_n, g))^\alpha$. Notre définition s'avère plus pratique à manipuler, notamment pour les fonctions qui ne sont pas d'ordre fini.

Dans le cas d'une fonction méromorphe sur \mathbb{C} , on définit les intervalles admissibles de la façon suivante.

Définition 4.6.3 (Système méromorphe d'intervalles sur \mathbb{C}). Soient $g \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ non constante et $\alpha \in]0, 1]$. Un *système méromorphe d'intervalles admissibles* pour g d'exposant α est une suite d'intervalles (I_n) de la forme

$$I_n = \left[CT(\nu_n, g)^\alpha, \frac{\varepsilon \Lambda_l \mathcal{S}(\lambda_n, g)}{n(\nu_n, \infty, g) + 1} \right] \quad \text{avec} \quad 3\mathcal{L}(\lambda_n, g) \leq 2\varepsilon \mathcal{S}(\lambda_n, g),$$

où $C > 0$, $(\lambda_n), (\nu_n) \nearrow \infty$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < \lambda_n < \nu_n$ et $\varepsilon \in]0, 1[$. On suppose de plus que

$$\forall n \gg 0, I_n \cap \mathbb{N} \neq \emptyset.$$

Les intervalles I_n sont dits *admissibles* pour g .

Pour les domaines réguliers du plan la définition 4.6.3 d'intervalles admissibles s'étend naturellement de la manière suivante.

Définition 4.6.4 (Système holomorphe d'intervalles sur \mathbb{D}). Soient $g \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ non constante et $\alpha \in]0, 1]$. Un *système holomorphe d'intervalles admissibles* pour g d'exposant α est une suite d'intervalles (I_n) de la forme

$$I_n = [C(\log^+ M(\lambda_n, g))^\alpha, \varepsilon \Lambda_l \mathcal{S}(\lambda_n, g)] \quad \text{avec } 3\mathcal{L}(\lambda_n, g) \leq 2\varepsilon \mathcal{S}(\lambda_n, g),$$

où $C > 0$, $(\lambda_n) \nearrow 1^-$ et $\varepsilon \in]0, 1[$. On suppose de plus que

$$\forall n \gg 0, I_n \cap \mathbb{N} \neq \emptyset.$$

Les intervalles I_n sont dits *admissibles* pour g .

Définition 4.6.5 (Système méromorphe d'intervalles sur \mathbb{D}). Soient $g \in \mathcal{M}(\mathbb{D})$ une fonction non constante et $\alpha \in]0, 1]$. Un *système fondamental d'intervalles méromorphe* pour g d'exposant α est une suite d'intervalles (I_n) de la forme

$$I_n = \left[CT(\nu_n, g)^\alpha, \frac{\varepsilon \Lambda_l \mathcal{S}(\lambda_n, g)}{n(\nu_n, \infty, g) + 1} \right] \quad \text{avec } 3\mathcal{L}(\lambda_n, g) \leq 2\varepsilon \mathcal{S}(\lambda_n, g).$$

où $C > 0$, $(\lambda_n), (\nu_n) \nearrow 1^-$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < \lambda_n < \nu_n < 1$ et $\varepsilon \in]0, 1[$. On suppose de plus que

$$\forall n \gg 0, I_n \cap \mathbb{N} \neq \emptyset.$$

Les intervalles I_n sont dits *admissibles* pour g .

Les lemmes 4.6.6 et 4.6.7 ci-dessous affirment que l'existence d'un système méromorphe d'intervalles admissibles (I_n) pour g est une condition suffisante pour en déduire une minoration uniforme du d_n -ième diamètre de familles de fibres de g au-dessus d'arcs A_n de \mathbb{S}^1 de longueur fixée $l > 0$ où (d_n) est n'importe quelle suite d'entiers strictement croissante telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $d_n \in I_n$.

Lemme 4.6.6. Soit $g \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ une fonction non constante. On suppose que (I_n) est un système fondamental d'intervalles holomorphe de g d'exposant α . Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un arc $A_n \subset \mathbb{S}^1$ de longueur $l > 0$ tel que

$$\forall d \in I_n \cap \mathbb{N}, \forall a \in A_n, \log \left(\frac{1}{\gamma(a)} \right) \ll d^{\frac{1}{\alpha}},$$

où $\gamma(a) = \text{diam}_d(D(\lambda_n, a, g), \mathbb{D}_{\lambda_n})$.

Démonstration. Par définition des intervalles admissibles

$$\forall d \in I_n \cap \mathbb{N}, C(\log^+ M(\lambda_n, g))^\alpha \leq d \leq \varepsilon \Lambda_l \mathcal{S}(\lambda_n, g) \quad \text{et} \quad 3\mathcal{L}_\Omega(\lambda_n, g) \leq 2\varepsilon \mathcal{S}_\Omega(\lambda_n, g).$$

On peut donc appliquer le théorème 4.5.3. D'après le théorème 4.5.3

$$\log \left(\frac{1}{\gamma(a)} \right) \ll \frac{d \log^+ M(\lambda_n, g)}{(1 - \frac{\varepsilon}{2}) \mathcal{S}(\lambda_n, g)} + O(1) \ll d^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Ce qu'il fallait démontrer. ■

Lemme 4.6.7. Soit $g \in \mathcal{M}(\mathbb{D})$ non constante. On suppose que (I_n) est un système méromorphe d'intervalles admissibles de g d'exposant α . Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un arc $A_n \subset \mathbb{S}^1$ de longueur $l > 0$ tel que

$$\forall d \in I_n \cap \mathbb{N}, \forall a \in A_n, \log \left(\frac{1}{\gamma(a)} \right) \ll \left(\frac{\nu_n + \lambda_n}{\nu_n - \lambda_n} \right) d^{\frac{1}{\alpha}} + \log \left(\frac{\nu_n}{\lambda_n} \right),$$

où $\gamma(a) = \text{diam}_{d-s}(D(\lambda_n, a, g), \mathbb{D}_{\lambda_n})$ et $s = \bar{n}(\lambda_n, \infty, g)$.

Démonstration. Par définition des intervalles admissibles

$$\forall d \in I_n \cap \mathbb{N}, CT(\nu_n, g)^\alpha \leq d \leq \frac{\varepsilon \Lambda_l \mathcal{S}(\lambda_n, g)}{n(\nu_n, \infty, g) + 1}.$$

En particulier puisque $\Lambda_l \leq 1$

$$\forall d \in I_n, dn(\nu_d, \infty, g) + \frac{d}{\Lambda_l} \leq \frac{d}{\Lambda_l} (n(\nu_d, \infty, g) + 1) \leq \varepsilon \mathcal{S}(\lambda_n, g),$$

et $3\mathcal{L}(\lambda_n, g) \leq 2\varepsilon \mathcal{S}(\lambda_n, g)$. On peut donc appliquer le théorème 4.5.4. D'après le théorème 4.5.4

$$\begin{aligned} \log \left(\frac{1}{\tilde{\gamma}(a)} \right) &\ll \left(\frac{\nu_n + \lambda_n}{\nu_n - \lambda_n} \right) \frac{dT(\nu_n, g)}{(1 - \frac{\varepsilon}{2}) \mathcal{S}(\lambda_n, g)} + \log \left(\frac{\nu_n}{\lambda_n} \right) + O(1) \\ &\ll \left(\frac{\nu_n + \lambda_n}{\nu_n - \lambda_n} \right) d^{\frac{1}{\alpha}} + \log \left(\frac{\nu_n}{\lambda_n} \right), \end{aligned}$$

où $\tilde{\gamma}(a) = \text{diam}_d(D(\lambda_n, a, \infty, g), \mathbb{D}_{\lambda_n})$. Or

$$\tilde{\gamma}(a) \leq \text{diam}_d(D(\lambda_n, a, \infty, g), \mathbb{D}_{\lambda_n}) \leq \text{diam}_{d-s}(D(\lambda_n, a, g), \mathbb{D}_{\lambda_n}) \leq \gamma(a),$$

puisque $\#D(\lambda_n, \infty, g) \leq s$. Ce qu'il fallait démontrer. \blacksquare

Lemme 4.6.8. Soient $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ non constante. On suppose que (I_n) est un système holomorphe d'intervalles admissibles pour g d'exposant α . Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un arc $A_n \subset \mathbb{S}^1$ de longueur $l > 0$ tel que

$$\forall d \in I_n \cap \mathbb{N}, \forall a \in A_n, \log \left(\frac{1}{\gamma(a)} \right) \ll d^{\frac{1}{\alpha}},$$

où $\gamma(a) = \text{diam}_d(D(\lambda_n, a, g), \mathbb{D}_{\lambda_n})$.

Démonstration. La démonstration est identique à celle du lemme 4.6.9 ci-dessous. \blacksquare

Lemme 4.6.9. Soient $g \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ non constante. On suppose que (I_n) est un système méromorphe d'intervalles admissibles pour g d'exposant α . Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un arc $A_n \subset \mathbb{S}^1$ de longueur $l > 0$ tel que

$$\forall d \in I_n \cap \mathbb{N}, \forall a \in A_n, \log \left(\frac{1}{\gamma(a)} \right) \ll \left(\frac{\nu_n + \lambda_n}{\nu_n - \lambda_n} \right) d^{\frac{1}{\alpha}} + \log \left(\frac{\nu_n}{\lambda_n} \right),$$

où $\gamma(a) = \text{diam}_{d-s}(D(\lambda_n, a, g), \mathbb{D}_{\lambda_n})$ et $s = \bar{n}(\lambda_n, \infty, g)$.

Démonstration. Par définition des intervalles admissibles

$$\forall d \in I_n \cap \mathbb{N}, CT(\nu_n, g)^\alpha \leq d \leq \frac{\varepsilon \Lambda_l \mathcal{S}(\lambda_n, g)}{n(\nu_n, \infty, g) + 1}.$$

En particulier puisque $\Lambda_l \leq 1$

$$\forall d \in I_n, dn(\nu_d, \infty, g) + \frac{d}{\Lambda_l} \leq \frac{d}{\Lambda_l} (n(\nu_d, \infty, g) + 1) \leq \varepsilon \mathcal{S}(\lambda_n, g)$$

et $3\mathcal{L}(\lambda_n, g) \leq 2\varepsilon \mathcal{S}(\lambda_n, g)$. On applique théorème 4.5.4 à la fonction $h_n(z) = g(2\nu_n z)$ sur le disque \mathbb{D} et pour les rayons $\tilde{\lambda}_n = \lambda_n/(2\nu_n)$ et $\tilde{\nu}_n = \frac{1}{2}$. D'après le théorème 4.5.4

$$\begin{aligned} \log \left(\frac{1}{\tilde{\gamma}(a)} \right) &\ll \frac{d\tau_{\mathbb{D}}(\tilde{\lambda}_n, \tilde{\nu}_n) T(\tilde{\nu}_n, h_n)}{(1 - \frac{\varepsilon}{2}) \mathcal{S}(\tilde{\lambda}_n, h_n)} + \log \left(\frac{\tilde{\nu}_n}{\tilde{\lambda}_n} \right) + O(1) \\ &\ll \left(\frac{\tilde{\nu}_n + \tilde{\lambda}_n}{\tilde{\nu}_n - \tilde{\lambda}_n} \right) \frac{T(\nu_n, g)}{(1 - \frac{\varepsilon}{2}) \mathcal{S}(\lambda_n, g)} + \log \left(\frac{\tilde{\nu}_n}{\tilde{\lambda}_n} \right) + O(1) \\ &\ll \left(\frac{\nu_n + \lambda_n}{\nu_n - \lambda_n} \right) d^{\frac{1}{\alpha}} + \log \left(\frac{\nu_n}{\lambda_n} \right), \end{aligned}$$

où $\tilde{\gamma}(a) = \text{diam}_d(D(\lambda_n, a, \infty, g), \mathbb{D}_{\lambda_n})$. Or

$$\tilde{\gamma}(a) \leq \text{diam}_d(D(\lambda_n, a, \infty, g), \mathbb{D}_{\lambda_n}) \leq \text{diam}_{d-s}(D(\lambda_n, a, g), \mathbb{D}_{\lambda_n}) \leq \gamma(a).$$

puisque $\#D(\lambda_n, \infty, g) \leq s$. Ce qu'il fallait démontrer. \blacksquare

Existence d'intervalles admissibles

Dans cette sous-section on démontre l'existence d'intervalles admissibles pour des fonctions méromorphes g sous des hypothèses de croissance de la caractéristique de Nevanlinna $T(r, g)$. On examine séparément le cas des fonctions méromorphes sur le plan \mathbb{C} et sur le disque \mathbb{D} . Afin de comparer la caractéristique de Nevanlinna $T(r, g)$ entre deux rayons r et ν proches nous utilisons le lemme suivant.

Lemme 4.6.10 (Borel - [125, Lemme 1.1.5]). *Soit $\varphi(r)$ une fonction croissante et continue sur l'intervalle $[a, \infty[$ telle que $\varphi(a) \geq 1$. Alors il existe un borélien $E \subset [a, \infty[$ tel que*

$$\lambda_1(E) \leq 2 \quad \text{et} \quad \forall r \in [a, \infty[\setminus E, \quad \varphi\left(r + \frac{1}{\varphi(r)}\right) < 2\varphi(r).$$

Cas du plan \mathbb{C} On démontre dans ce paragraphe que toute fonction g méromorphe et transcendante sur \mathbb{C} admet un système méromorphe d'intervalles admissibles au sens de 4.6.5 à condition qu'il existe $\beta \in [0, 1[$ tel que

$$n(r, \infty, g) = O(T(r, \infty, g)^\beta), \quad (4.6.1)$$

lorsque $r \rightarrow \infty$ et $T(r, g)$ croît plus vite qu'un polynôme.

Proposition 4.6.11. *Soit $g \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ une fonction transcendante. Pour tout $\varepsilon > 0$ et $\gamma > 0$, il existe un borélien $E \subset [0, \infty[$ tel que $\ell(E) < \infty$ et*

$$\forall r \in [0, \infty[\setminus E, \quad \frac{T(\phi(r), g)}{\mathcal{S}(r, g)} \ll \log r \quad \text{avec} \quad \phi(r) = r + \frac{1}{T(r, g)^\gamma} \quad \text{et} \quad 3\mathcal{L}(r, g) \leq 2\varepsilon\mathcal{S}(r, g).$$

Démonstration. D'après l'égalité 4.2.1 et la proposition 4.2.22

$$\forall r \gg 0, \quad T(r, g) \ll (\log r)\mathcal{S}(r, g).$$

D'après le lemme de Borel 4.6.10, l'ensemble

$$E_1 = \{r > 0 \mid T(\phi(r), g)^\gamma > 2T(r, g)^\gamma\},$$

vérifie $\lambda_1(E_1) \leq 2$. De plus d'après la proposition 4.3.8, il existe un borélien $E_2 \subset [0, \infty[$ tel que

$$\ell(E_2) < \infty \quad \text{et} \quad \forall r \in [0, \infty[\setminus E_2, \quad 3\mathcal{L}(r, g) \leq 2\varepsilon\mathcal{S}(r, g).$$

On pose $E = E_1 \cup E_2$. Alors d'une part

$$\ell(E) \leq \ell(E_1) + \ell(E_2) \leq \lambda_1(E_1) + \ell(E_2) < \infty,$$

et d'autre part

$$\forall r \in [0, \infty[\setminus E, \quad \frac{T(\phi(r), g)}{\mathcal{S}(r, g)} \leq \frac{T(r, g)}{\mathcal{S}(r, g)} \frac{T(\phi(r), g)}{T(r, g)} \leq 2^{\frac{1}{\gamma}} (\log r) \ll \log r.$$

Ce qu'il fallait démontrer. \blacksquare

Proposition 4.6.12. Soient $g \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ une fonction transcendante et $\beta \in [0, 1[$ tels que

$$\forall \varepsilon > 0, \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{T(r, g)^\varepsilon}{\log r} = \infty \quad \text{et} \quad n(r, \infty, g) = O(T(r, g)^\beta).$$

Alors pour tout $\alpha \in]0, 1 - \beta[$ et $\gamma > 0$, il existe une suite (I_n) d'intervalles qui constitue un système méromorphe d'intervalles admissibles pour g d'exposant α telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \nu_n - \lambda_n = \frac{1}{T(\lambda_n, g)^\gamma}.$$

De plus la longueur des intervalles I_n tend vers l'infini.

Démonstration. On applique la proposition 4.6.11 et on fixe (λ_n) une suite telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \lambda_n \notin E$. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, \nu_n = \phi(\lambda_n) = \lambda_n + \frac{1}{T(\lambda_n, g)^\gamma}.$$

On fixe $\varepsilon = 1$ et $l = \pi$. Or

$$\frac{\mathcal{S}(\lambda_n, g)}{n(\nu_n, \infty, g) + 1} \geq \frac{\mathcal{S}(\lambda_n, g)^\beta \mathcal{S}(\lambda_n, g)^{1-\beta}}{n(\nu_n, \infty, g) + 1} \gg \frac{T(\nu_n, g)^\beta \mathcal{S}(\lambda_n, g)^{1-\beta}}{(\log \lambda_n)^\beta (n(\nu_n, \infty, g) + 1)} \gg \frac{\mathcal{S}(\lambda_n, g)^{1-\beta}}{(\log \lambda_n)^\beta}.$$

Alors il existe des constantes $C_1, C_2 > 0$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, J_n := \left[C_1 (\log \lambda_n)^\alpha \mathcal{S}(\lambda_n, g)^\alpha, C_2 \frac{\mathcal{S}(\lambda_n, g)^{1-\beta}}{(\log \lambda_n)^\beta} \right] \subset \left[T(\nu_n, g)^\alpha, \frac{\varepsilon \Lambda_l \mathcal{S}(\lambda_n, g)}{n(\nu_n, \infty, g) + 1} \right].$$

Or

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{\mathcal{S}(\lambda_n, g)^{1-(\alpha+\beta)}}{(\log \lambda_n)^{\alpha+\beta}} \gg \frac{T(\lambda_n, g)^{1-(\alpha+\beta)}}{\log \lambda_n}$$

Donc $\lambda_1(J_n)$ tend vers l'infini. En particulier pour tout n assez grand, J_n contient un entier. Donc la suite (I_n) est un système méromorphe d'intervalles admissibles de g d'exposant α . ■

Remarque 4.6.13. La proposition 4.6.12 est a priori insuffisante pour démontrer un lemme de zéros polynomial pour g puisque l'on ne connaît pas la croissance des suites d'entiers contenues dans la suite (I_n) d'intervalles admissibles. Cependant cette proposition est suffisante pour démontrer un lemme de zéros pour une suite de degrés $(d_j) \nearrow \infty$ lorsque g est une fonction méromorphe ayant peu de pôles¹².

La proposition 4.6.14 ci-dessous affirme que pour les fonctions méromorphes sur \mathbb{C} d'ordre supérieur fini et d'ordre inférieur strictement positif, il existe un système méromorphe d'intervalles fondamental contenant des suites d'entiers à croissance polynomial. Grâce à cette proposition nous sommes en mesure de démontrer le théorème 1.6.12.

Proposition 4.6.14. Soient $g \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ une fonction transcendante et $\beta \in [0, 1[$ tels que

$$\lambda := \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{\log T(r, g)}{\log r} > 0, \quad \rho := \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log T(r, g)}{\log r} < \infty \quad \text{et} \quad n(r, \infty, g) = O(T(r, g)^\beta).$$

Alors pour tout $\alpha \in]0, 1 - \beta[$ et $\gamma > 0$, il existe une suite (I_n) d'intervalles qui constitue un système méromorphe d'intervalles admissibles pour g d'exposant α telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \nu_n - \lambda_n = \frac{1}{T(\lambda_n, g)^\gamma}.$$

De plus la suite (d_n) définie par $d_n = \min\{k \in \mathbb{N} \mid k \in I_n\}$ vérifie

$$\forall \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}, n^{\alpha(\lambda-\varepsilon)} \ll d_n \ll n^{\alpha(\rho+\varepsilon)} \quad \text{et} \quad d_n \leq (\log \lambda_n)^\alpha T(\lambda_n, g)^\alpha.$$

¹²Voir la démonstration page 161.

Démonstration. Le début de la démonstration est identique à celle de la proposition 4.6.12 ci-dessus. On reprend les notations de cette dernière. Puisque E est de mesure logarithmique finie, l'ensemble $[0, \infty[\setminus E$ contient une suite (λ_n) telle que $\lambda_n \asymp n$ d'après la proposition 4.3.6. On note (I_n) la suite d'intervalles admissibles obtenue avec la suite (λ_n) comme dans la démonstration de 4.6.12. Or

$$d_n = [T(\nu_n, g)^\alpha] \quad \text{avec} \quad \nu_n = \lambda_n + \frac{1}{T(\lambda_n, g)^\gamma}.$$

Il reste à vérifier que d_n est à croissance polynomiale. Or

$$\forall \varepsilon > 0, \forall r \geq 0, r^{\lambda - \varepsilon} \ll T(r, g) \ll r^{\rho + \varepsilon}.$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, n^{\alpha(\lambda - \varepsilon)} \ll d_n \ll n^{\alpha(\rho + \varepsilon)}.$$

De plus par construction, $T(\nu_n, g) \ll (\log \nu_n)T(\lambda_n, g)$. Donc $d_n \ll (\log \lambda_n)^\alpha T(\lambda_n, g)^\alpha$. Ce qu'il fallait démontrer. ■

Lorsque l'on dispose d'un ordre précisé de la caractéristique $T(r, g)$, on peut améliorer la proposition 4.6.14 précédente. Commençons par démontrer deux lemmes techniques.

Lemme 4.6.15. Soient $g \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$, $r, \nu \in \mathbb{R}$ et $C > 1$ tels que $0 < r < \nu < \infty$ et $\mathcal{T}(\nu, g) \geq C\mathcal{T}(r, g)$. Alors

$$\exists t \in]r, \nu[, \mathcal{T}(\nu, g) \leq \frac{C \log(\frac{\nu}{r})}{\log(C)} \mathcal{S}(t, g).$$

Démonstration. En dérivant l'égalité 4.2.1, on obtient

$$\forall t \in [0, \infty[, t\mathcal{T}'(t, g) = \mathcal{S}(t, g).$$

La fonction $\mathcal{T}(r, g)$ étant strictement croissante et continue sur $[0, \infty[$, il existe $s \in [r, \nu]$ tel que $\mathcal{T}(\nu, g) = C\mathcal{T}(s, g)$. Supposons par l'absurde que

$$\forall t \in]s, \nu[, K\mathcal{T}(t, g) > \mathcal{S}(t, g) \quad \text{où} \quad K = \frac{\log(C)}{\log(\frac{\nu}{r})}$$

Alors

$$\begin{aligned} \log(C) &= \log\left(\frac{\mathcal{T}(\nu, g)}{\mathcal{T}(s, g)}\right) \leq \int_s^\nu \frac{\mathcal{T}'(t, g)}{\mathcal{T}(t, g)} dt \leq \int_s^\nu \frac{\mathcal{S}(t, g)}{t\mathcal{T}(t, g)} dt \\ &< K \int_r^\nu \frac{dt}{t} \leq K \log\left(\frac{\nu}{r}\right) \leq \log(C). \end{aligned}$$

Cette dernière inégalité est absurde. Donc il existe $t \in]s, \nu[$ tel que

$$\mathcal{T}(\nu, g) \leq C\mathcal{T}(s, g) \leq C\mathcal{T}(t, g) \leq \frac{C \log(\frac{\nu}{r})}{\log(C)} \mathcal{S}(t, g).$$

Ce qu'il fallait démontrer. ■

Lemme 4.6.16. Soient $E \subset [0, \infty[$, φ, ϕ deux fonctions strictement croissantes, $\alpha > 0$ et ψ un ordre précisé propre de φ . On suppose que

$$\ell(E) < \infty \quad \text{ou} \quad \overline{\text{dens}}_{\phi, \alpha}(E) < \infty \quad \text{avec} \quad \varliminf_{r \rightarrow \infty} \frac{\phi(r)}{r^\alpha} = \infty.$$

Alors pour toute suite $(r_n) \uparrow \infty$ telle que

$$\varliminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi(r_n)}{r_n^{\psi(r_n)}} > 0,$$

et pour tout $k \gg 1$, il existe une suite $(s_n) \nearrow \infty$ telle que

$$\forall n \gg 0, s_n \in [r_n, kr_n], s_n \notin E \text{ et } \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi(s_n)}{s_n^{\psi(s_n)}} > 0.$$

Démonstration. Supposons dans un premier temps que E est de mesure logarithmique finie. Alors d'après la proposition 4.3.6, il existe une suite $(s_n) \nearrow \infty$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, s_n \in [r_n, kr_n] \text{ et } s_n \notin E.$$

De plus d'après le théorème 2.3.9, la fonction $V(r) = r^{\psi(r)}$ vérifie à partir d'un certain rang que $V(kr) \leq 2k^\rho V(r)$. Donc

$$\forall n \gg 0, V(s_n) \leq s_n^{\psi(s_n)} \leq (kr_n)^{\psi(kr_n)} \leq 2k^\rho r_n^{\psi(r_n)} \leq 2k^\rho V(r_n).$$

D'où

$$\forall n \gg 0, \frac{\varphi(s_n)}{s_n^{\psi(s_n)}} \geq \frac{1}{2k^\rho} \frac{\varphi(r_n)}{r_n^{\psi(r_n)}}.$$

On conclut en prenant la limite inférieure sur cette inégalité. Lorsque $\overline{\text{dens}}_{\phi, \alpha}(E) < \infty$, on applique la proposition 4.3.7 au lieu de 4.3.6 puis on conclut de même. ■

Proposition 4.6.17. Soient $g \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ une fonction transcendante, ψ un ordre précisé propre de $T(r, g)$, $(r_n) \nearrow \infty$ et $\beta \in [0, 1[$ tels que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T(r_n, g)}{r_n^{\psi(r_n)}} > 0 \text{ et } n(r, \infty, g) = O(T(r, g)^\beta).$$

Alors pour tout $k \gg 1$, il existe une suite (I_n) d'intervalles qui constitue un système méromorphe d'intervalles admissibles pour g d'exposant $1 - \beta$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \nu_n = k\lambda_n \text{ et } \lambda_n \asymp r_n.$$

De plus il existe une suite $(d_n) \nearrow \infty$ telle que

$$\forall n \gg 0, d_n \in I_n \cap \mathbb{N} \text{ et } d_n \asymp r_n^{(1-\beta)\psi(r_n)}.$$

Démonstration. On pose $V(r) = r^{\psi(r)}$ et on fixe $k \gg 1$. D'après la proposition 4.3.8, il existe un borélien $E \subset [0, \infty[$ tel que

$$\ell(E) < \infty \text{ et } \forall r \in [0, \infty[\setminus E, 3\mathcal{L}(r, g) \leq 2\varepsilon \mathcal{S}(r, g).$$

D'après le lemme 4.6.16 ci-dessus avec $\varphi(r) = T(r, g)$, il existe une suite $(s_n) \nearrow \infty$ telle que

$$\forall n \gg 0, s_n \in [r_n, kr_n], s_n \notin E \text{ et } \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{T(s_n, g)}{V(s_n)} > 0.$$

Donc d'après la proposition 4.2.22 et le théorème 2.3.9

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{T(s_n, g)}{\mathcal{T}(\frac{s_n}{k}, g)} \gg \frac{T(s_n, g)}{T(\frac{s_n}{k}, g)} \gg \frac{V(s_n)}{V(\frac{s_n}{k}, g)} \gg k^\rho,$$

où ρ est la limite de ψ en l'infini.

$$\forall n \in \mathbb{N}, T(ks_n, g) \ll V(ks_n) \ll k^\rho V(s_n) \ll T(s_n, g).$$

Donc quitte à prendre un k assez grand, il existe une constante $C_0 > 1$ telle que $\forall n \gg 0$, $\mathcal{T}(s_n, g) \geq C_0 \mathcal{T}(\frac{s_n}{k}, g)$. D'après le lemme 4.6.15

$$\forall n \gg 0, \exists t_n \in]\frac{s_n}{k}, s_n[, T(s_n, g) \ll \mathcal{T}(s_n, g) \leq \frac{C_0 \log(\frac{ks_n}{s_n})}{\log(C_0)} \mathcal{S}(t_n, g) \ll \mathcal{S}(s_n, g).$$

D'où en prenant $\lambda_n = s_n$ et $\nu_n = k\lambda_n$, on obtient que

$$\forall n \gg 0, T(\nu_n, g)^{1-\beta} \ll \frac{T(\nu_n, g)}{T(\nu_n, g)^\beta} \ll \frac{T(\lambda_n, g)}{T(\lambda_n, g)^\beta} \ll \frac{\varepsilon \Lambda_I \mathcal{S}(\nu_n, g)}{T(\nu_n, g)^\beta} \ll \frac{\varepsilon \Lambda_I \mathcal{S}(\lambda_n, g)}{n(\nu_n, \infty, g) + 1}.$$

Donc en choisissant $C > 0$ assez petit, l'intervalle

$$I_n = \left[CT(\nu_n, g)^{1-\beta}, \frac{\epsilon \Lambda_I \mathcal{S}(\lambda_n, g)}{n(\nu_n, \infty, g) + 1} \right],$$

contient un entier pour tout n assez grand. La suite (I_n) forme donc un système méromorphe d'intervalles admissibles d'exposant $1 - \beta$. Qui plus est en posant

$$\forall n \in \mathbb{N}, d_n = [CT(\nu_n, g)^{1-\beta}],$$

on obtient que pour tout n assez grand, $d_n \in I_n$ et

$$d_n \asymp T(\nu_n, g)^{1-\beta} \asymp T(\lambda_n, g)^{1-\beta} \asymp r_n^{(1-\beta)\psi(r_n)},$$

ce qui achève la démonstration de la proposition. \blacksquare

Proposition 4.6.18. Soient $g \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ une fonction transcendante, $C_1, C_2 > 1$, $k > 1$ et $\beta \in [0, 1[$ tels que

$$\forall r \gg 0, C_1 T(r, g) \leq T(kr, g) \leq C_2 T(r, g) \text{ et } n(r, \infty, g) = O(T(r, g)^\beta).$$

Alors il existe une suite (I_n) d'intervalles qui constitue un système méromorphe d'intervalles admissibles pour g d'exposant $1 - \beta$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \nu_n = k\lambda_n \text{ et } \lambda_n \asymp n.$$

De plus il existe $a > 0$ tel que

$$[a, \infty[\subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n \text{ et } \lambda_1(I_n) \rightarrow \infty.$$

Démonstration. D'après la proposition 4.3.8, il existe un borélien $E \subset [0, \infty[$ tel que

$$\ell(E) < \infty \text{ et } \forall r \in [0, \infty[\setminus E, 3\mathcal{L}(r, g) \leq 2\epsilon \mathcal{S}(r, g).$$

D'après la proposition 4.3.6, il existe une suite $(s_n) \nearrow \infty$ telle que

$$\forall n \gg 0, s_n \in [n, kn], s_n \notin E.$$

Donc d'après la proposition 4.2.22 et le théorème 2.3.9

$$\begin{aligned} \forall \eta \in]0, 1[, \forall n \gg 0, \frac{\mathcal{T}(s_{n+1}, g)}{\mathcal{T}(\frac{s_n}{k}, g)} &\geq (1 - \eta) \frac{\mathcal{T}(s_{n+1}, g)}{\mathcal{T}(\frac{s_n}{k}, g)} \geq (1 - \eta) \frac{\mathcal{T}(s_n, g)}{\mathcal{T}(\frac{s_n}{k}, g)} \\ &\geq (1 - \eta) C_1 \frac{\mathcal{T}(\frac{s_n}{k}, g)}{\mathcal{T}(\frac{s_n}{k}, g)} \geq (1 - \eta) C_1. \end{aligned}$$

Donc quitte à prendre un η assez petit, il existe une constante $C_0 > 1$ telle que $\forall n \gg 0$, $\mathcal{T}(s_{n+1}, g) \geq C_0 \mathcal{T}(\frac{s_n}{k}, g)$. D'après le lemme 4.6.15

$$\forall n \gg 0, \exists t_n \in]\frac{s_n}{k}, s_{n+1}[, T(s_{n+1}, g) \ll \mathcal{T}(s_n, g) \leq \frac{C_0 \log(\frac{ks_{n+1}}{s_n})}{\log(C_0)} \mathcal{S}(t_n, g) \ll \mathcal{S}(s_{n+1}, g),$$

car

$$s_n \asymp n \implies \frac{ks_{n+1}}{s_n} \ll 1.$$

D'où en prenant $\lambda_n = s_n$ et $\nu_n = k\lambda_n$, on obtient que

$$\forall n \gg 0, T(\nu_{n+1}, g)^{1-\beta} \ll \frac{T(\lambda_n, g)}{T(\nu_{n+1}, g)^\beta} \ll \frac{\epsilon \Lambda_I \mathcal{S}(\lambda_n, g)}{T(\nu_n, g)^\beta} \ll \frac{\epsilon \Lambda_I \mathcal{S}(\lambda_n, g)}{n(\nu_n, \infty, g) + 1}.$$

Donc en choisissant $C > 0$ assez petit, l'intervalle suivant

$$I_n = \left[CT(\nu_n, g)^{1-\beta}, \frac{\epsilon \Lambda_I \mathcal{S}(\lambda_n, g)}{n(\nu_n, \infty, g) + 1} \right],$$

contient un entier pour tout n assez grand et $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n \cap I_{n+1} \neq \emptyset$. La suite (I_n) forme donc un système méromorphe d'intervalles admissibles d'exposant $1 - \beta$ et il existe un rayon $a > 0$ tel que

$$[a, \infty[\subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n.$$

Ce qui achève la démonstration de la proposition. ■

Cas du disque \mathbb{D} Dans ce paragraphe on note $\varphi(r) = 1 - \frac{1}{r}$. On démontre dans ce paragraphe que toute fonction g méromorphe et transcendante sur \mathbb{D} admet un système méromorphe d'intervalles admissibles à condition que

$$n(r, \infty, g) = O(T(r, \infty, g)^\beta),$$

lorsque $r \rightarrow 1^-$ et $T(\varphi(r), g)$ est minoré par un polynôme. Commençons par démontrer l'analogie de la proposition 4.6.11 pour les fonctions méromorphes sur \mathbb{D} .

Proposition 4.6.19. *Soit $g \in \mathcal{M}(\mathbb{D})$ une fonction transcendante. On suppose que*

$$\liminf_{r \rightarrow 1^-} \frac{\log T(r, g)}{-\log(1-r)} > 1. \quad (4.6.2)$$

Alors pour tout $\varepsilon > 0$ et $\gamma > 0$, il existe un borélien $E \subset [0, \infty[$ tel que $\overline{\text{dens}}_{\psi,1}(E) < \infty$ avec $\psi(r) = \mathcal{S}(\varphi(r), g)$ et

$$\begin{aligned} \forall r \in [0, \infty[\setminus E, \quad \frac{T(\varphi(\phi(r)), g)}{\mathcal{S}(\varphi(r), g)} &\ll 1 \quad \text{avec} \quad \phi(r) = r + \frac{1}{T(\varphi(r), g)^\gamma} \\ \text{et} \quad 3\mathcal{L}(\varphi(r), g) &\leq 2\varepsilon \mathcal{S}(\varphi(r), g). \end{aligned}$$

Démonstration. D'après l'égalité 4.2.1 et la proposition 4.2.22

$$\forall r \gg 0, \quad T(\varphi(r), g) \ll \mathcal{S}(\varphi(r), g).$$

D'après le lemme de Borel 4.6.10, l'ensemble

$$E_1 = \{r > 0 \mid T(\varphi(\phi(r)), g)^\gamma > 2T(\varphi(r), g)^\gamma\},$$

vérifie $\lambda_1(E_1) \leq 2$. Or l'hypothèse 4.6.2 implique d'après le lemme 4.4.10

$$\liminf_{r \rightarrow 1^-} \frac{\mathcal{S}(r, g)}{r} = \infty.$$

Donc d'après la proposition 4.3.9, il existe un borélien $E_2 \subset [0, \infty[$ tel que

$$\overline{\text{dens}}_{\psi,1}(E_2) < \infty \quad \text{et} \quad \forall r \in [0, \infty[\setminus E_2, \quad 3\mathcal{L}(\varphi(r), g) \leq 2\varepsilon \mathcal{S}(\varphi(r), g).$$

On pose $E = E_1 \cup E_2$. Alors d'une part

$$\overline{\text{dens}}_{\psi,1}(E) \leq \overline{\text{dens}}_{\psi,1}(E_1) + \overline{\text{dens}}_{\psi,1}(E_2) \leq \overline{\text{dens}}_{\psi,0}(E_1) + \overline{\text{dens}}_{\psi,1}(E_2) < \infty,$$

et d'autre part

$$\forall r \in [0, \infty[\setminus E, \quad \frac{T(\varphi(\phi(r)), g)}{\mathcal{S}(\varphi(r), g)} \leq \frac{T(\varphi(r), g)}{\mathcal{S}(\varphi(r), g)} \frac{T(\varphi(\phi(r)), g)}{T(\varphi(r), g)} \leq 2^{\frac{1}{\gamma}} \ll 1.$$

Ce qu'il fallait démontrer. ■

Proposition 4.6.20. *Soient $g \in \mathcal{M}(\mathbb{D})$ une fonction transcendante et $\beta \in [0, 1[$ tels que*

$$\liminf_{r \rightarrow 1^-} \frac{\log T(r, g)}{-\log(1-r)} > 1 \quad \text{et} \quad n(r, \infty, g) = O(T(r, g)^\beta).$$

Alors pour tout $\alpha \in]0, 1 - \beta[$ et $\gamma > 0$, il existe une suite (I_n) d'intervalles qui constitue un système méromorphe d'intervalles admissibles pour g d'exposant α telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \nu_n = 1 - \frac{1 - \lambda_n}{1 + (1 - \lambda_n)T(\lambda_n, g)^\gamma}.$$

De plus la longueur des intervalles I_n tend vers l'infini.

Démonstration. On applique la proposition 4.6.11 et on fixe (λ_n) une suite telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{1 - \lambda_n} \notin E$. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, \nu_n = \varphi(\phi(\varphi^{-1}(\lambda_n))) = 1 - \frac{1}{\phi(\varphi^{-1}(\lambda_n))} = 1 - \frac{1 - \lambda_n}{1 + (1 - \lambda_n)T(\lambda_n, g)^\gamma}.$$

On fixe $\varepsilon = 1$ et $l = \pi$. Or

$$\frac{\mathcal{S}(\lambda_n, g)}{n(\nu_n, \infty, g) + 1} \geq \frac{\mathcal{S}(\lambda_n, g)^\beta \mathcal{S}(\lambda_n, g)^{1-\beta}}{n(\nu_n, \infty, g) + 1} \gg \frac{T(\nu_n, g)^\beta \mathcal{S}(\lambda_n, g)^{1-\beta}}{n(\nu_n, \infty, g) + 1} \gg \mathcal{S}(\lambda_n, g)^{1-\beta}.$$

Alors il existe des constantes $C_1, C_2 > 0$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, J_n := [C_1 \mathcal{S}(\lambda_n, g)^\alpha, C_2 \mathcal{S}(\lambda_n, g)^{1-\beta}] \subset \left[T(\nu_n, g)^\alpha, \frac{\varepsilon \Lambda_l \mathcal{S}(\lambda_n, g)}{n(\nu_n, \infty, g) + 1} \right].$$

Or

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{S}(\lambda_n, g)^{1-(\alpha+\beta)} \gg T(\lambda_n, g)^{1-(\alpha+\beta)}.$$

Donc $\lambda_1(J_n)$ tend vers l'infini. En particulier pour tout n assez grand, J_n contient un entier. Donc la suite (I_n) est un système méromorphe d'intervalles admissibles de g d'exposant α . ■

Proposition 4.6.21. Soient $g \in \mathcal{M}(\mathbb{D})$ une fonction transcendante et $\beta \in [0, 1[$ tels que

$$\lambda := \liminf_{r \rightarrow 1^-} \frac{\log T(r, g)}{-\log(1-r)} > 1, \quad \rho := \overline{\lim}_{r \rightarrow 1^-} \frac{\log T(r, g)}{-\log(1-r)} < \infty \quad \text{et} \quad n(r, \infty, g) = O(T(r, g)^\beta).$$

Alors pour tout $\alpha \in]0, 1 - \beta[$ et $\gamma > 0$, il existe une suite (I_n) d'intervalles qui constitue un système méromorphe d'intervalles admissibles pour g d'exposant α telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \nu_n = 1 - \frac{1 - \lambda_n}{1 + (1 - \lambda_n)T(\lambda_n, g)^\gamma}.$$

De plus la suite (d_n) définie par $d_n = \min\{d \in \mathbb{N} \mid d \in I_n\}$ vérifie

$$\forall \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}, n^{\alpha(\lambda-\varepsilon)} \ll d_n \ll n^{\alpha(\rho+\varepsilon)} \quad \text{et} \quad d_n \leq T(\lambda_n, g)^\alpha.$$

Démonstration. Le début de la démonstration est identique à celle de la proposition 4.6.20 ci-dessus. On reprend les notations de cette dernière. Puisque E est de $(\psi, 1)$ -densité finie avec $\psi(r) = \mathcal{S}(\varphi(r), g)$ et d'après le lemme 4.4.10

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\psi(r)}{r} > 1 \quad \text{puisque} \quad \overline{\lim}_{r \rightarrow 1^-} \frac{\log T(r, g)}{-\log(1-r)} > 1,$$

l'ensemble $[0, \infty[\setminus E$ contient une suite (λ_n) telle que $\lambda_n \asymp n$ d'après la proposition 4.3.7. On note (I_n) la suite d'intervalles admissibles obtenue avec la suite (λ_n) comme dans la démonstration de 4.6.20. Or

$$d_n = \lceil T(\nu_n, g)^\alpha \rceil \quad \text{avec} \quad \nu_n = 1 - \frac{1 - \lambda_n}{1 + (1 - \lambda_n)T(\lambda_n, g)^\gamma}.$$

Il reste à vérifier que d_n est à croissance polynomiale. Or

$$\forall \varepsilon > 0, \forall r \in [0, 1[, r^{\lambda-\varepsilon} \ll T(r, g) \ll r^{\rho+\varepsilon}.$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, n^{\alpha(\lambda-\varepsilon)} \ll d_n \ll n^{\alpha(\rho+\varepsilon)}.$$

De plus par construction, $T(\nu_n, g) \ll T(\lambda_n, g)$. Donc $d_n \ll T(\lambda_n, g)^\alpha$. Ce qu'il fallait démontrer. ■

Lemme 4.6.22. Soient $g \in \mathcal{M}(\mathbb{D})$, r, ν et $C > 1$ tels que $0 < r < \nu < 1$ et $\mathcal{T}(\nu, g) \geq C\mathcal{T}(r, g)$. Alors

$$\exists t \in]r, \nu[, \mathcal{T}(\nu, g) \leq \frac{C \log \left(\frac{\nu(1-r)}{r(1-\nu)} \right)}{\log(C)} (1-t)\mathcal{S}(t, g).$$

Démonstration. En dérivant l'égalité 4.2.1, on obtient

$$\forall t \in [0, 1[, t\mathcal{T}'(t, g) = \mathcal{S}(t, g).$$

La fonction $\mathcal{T}(r, g)$ étant croissante et continue sur $[0, 1[$, il existe $s \in [r, \nu]$ tel que $\mathcal{T}(\nu, g) = C\mathcal{T}(s, g)$. Supposons par l'absurde que

$$\forall t \in]s, \nu[, K\mathcal{T}(t, g) > (1-t)\mathcal{S}(t, g) \text{ où } K \log \left(\frac{\nu(1-r)}{r(1-\nu)} \right) = \log(C).$$

Alors

$$\begin{aligned} \log(C) &= \log \left(\frac{\mathcal{T}(\nu, g)}{\mathcal{T}(s, g)} \right) \leq \int_s^\nu \frac{\mathcal{T}'(t, g)}{\mathcal{T}(t, g)} dt \leq \int_s^\nu \frac{\mathcal{S}(t, g)}{t\mathcal{T}(t, g)} dt < K \int_r^\nu \frac{dt}{t(1-t)} \\ &\leq K \log \left(\frac{\nu(1-r)}{r(1-\nu)} \right) \leq \log(C). \end{aligned}$$

Cette dernière inégalité est absurde. Donc il existe $t \in]s, \nu[$ tel que

$$\mathcal{T}(\nu, g) \leq C\mathcal{T}(s, g) \leq C\mathcal{T}(t, g) \leq \frac{C \log \left(\frac{\nu(1-r)}{r(1-\nu)} \right)}{\log(C)} (1-t)\mathcal{S}(t, g).$$

Ce qu'il fallait démontrer. ■

Proposition 4.6.23. Soient $g \in \mathcal{M}(\mathbb{D})$ une fonction transcendante, ψ un ordre précisé propre de $T(\varphi(r), g)$, $(r_n) \nearrow \infty$ et $\beta \in [0, 1[$ tels que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \psi(r) > 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T(\varphi(r_n), g)}{r_n^{\psi(r_n)}} > 0 \text{ et } n(r, \infty, g) = O(T(r, g)^\beta).$$

Alors pour tout $k \gg 1$, il existe une suite (I_n) d'intervalles qui constitue un système méromorphe d'intervalles admissibles pour g d'exposant $1 - \beta$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \nu_n = 1 - \frac{1 - \lambda_n}{k} \text{ et } \lambda_n = 1 - \frac{1}{r_n}.$$

De plus il existe une suite $(d_n) \nearrow \infty$ telle que

$$\forall n \gg 0, d_n \in I_n \cap \mathbb{N} \text{ et } d_n \asymp r_n^{(1-\beta)\psi(r_n)}.$$

Démonstration. On pose $V(r) = r^{\psi(r)}$ et on fixe $k \gg 1$. D'après la proposition 4.3.9, il existe un borélien $E \subset [0, \infty[$ tel que

$$\overline{\text{dens}}_{\psi_0, 1}(E) < \infty \text{ avec } \psi_0(r) = \mathcal{S}(\varphi(r), g) \text{ et } \forall r \in [0, \infty[\setminus E, 3\mathcal{L}(\varphi(r), g) \leq 2\varepsilon\mathcal{S}(\varphi(r), g).$$

Or l'hypothèse sur la caractéristique de Nevanlinna implique que son ordre inférieur est strictement plus grand que 1. Donc d'après le lemme 4.4.10

$$\varliminf_{r \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{S}(\varphi(r), g)}{r} = \varliminf_{r \rightarrow \infty} \frac{\psi_0(r)}{r} = \infty.$$

D'après le lemme 4.6.16 ci-dessus avec la fonction $T(\varphi(r), g)$, il existe une suite $(s_n) \nearrow \infty$ telle que

$$\forall n \gg 0, s_n \in [r_n, kr_n], s_n \notin E \text{ et } \varliminf_{n \rightarrow \infty} \frac{T(\varphi(s_n), g)}{V(s_n)} > 0.$$

Donc d'après la proposition 4.2.22 et le théorème 2.3.9

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{\mathcal{T}(\varphi(s_n), g)}{\mathcal{T}(\varphi(\frac{s_n}{k}), g)} \gg \frac{T(\varphi(s_n), g)}{T(\varphi(\frac{s_n}{k}), g)} \gg \frac{V(s_n)}{V(\frac{s_n}{k}, g)} \gg k^\rho,$$

où ρ est la limite de ψ en l'infini et

$$\forall n \in \mathbb{N}, T(\varphi(ks_n), g) \ll V(ks_n) \ll k^\rho V(s_n) \ll T(\varphi(s_n), g).$$

Donc quitte à prendre un k assez grand, il existe une constante $C_0 > 1$ telle que

$$\forall n \gg 0, \mathcal{T}(\varphi(s_n), g) \geq C_0 \mathcal{T}(\varphi(\frac{s_n}{k}), g).$$

D'après le lemme 4.6.22, $\forall n \gg 0$

$$\begin{aligned} \exists t_n \in]\frac{s_n}{k}, s_n[, T(\varphi(s_n), g) &\ll \mathcal{T}(\varphi(s_n), g) \\ &\leq \frac{C_0 \log \left(\frac{\varphi(s_n)(1-\varphi(\frac{s_n}{k}))}{\varphi(\frac{s_n}{k})(1-\varphi(s_n))} \right)}{\log(C_0)} (1 - \varphi(t_n)) \mathcal{S}(\varphi(t_n), g) \\ &\ll \frac{\mathcal{S}(\varphi(s_n), g)}{s_n} \ll \mathcal{S}(\varphi(s_n), g). \end{aligned}$$

D'où en prenant $\lambda_n = \varphi(s_n)$ et $\nu_n = \varphi(ks_n)$, on obtient que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \nu_n = 1 - \frac{1}{ks_n} = 1 - \frac{1 - \lambda_n}{k},$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}, T(\nu_n, g)^{1-\beta} \ll \frac{T(\nu_n, g)}{T(\nu_n, g)^\beta} \ll \frac{T(\lambda_n, g)}{T(\nu_n, g)^\beta} \ll \frac{\varepsilon \Lambda_l \mathcal{S}(\lambda_n, g)}{T(\nu_n, g)^\beta} \ll \frac{\varepsilon \Lambda_l \mathcal{S}(\lambda_n, g)}{n(\nu_n, \infty, g) + 1}.$$

Donc en choisissant $C > 0$ assez petit, l'intervalle suivant

$$I_n = \left[CT(\nu_n, g)^{1-\beta}, \frac{\varepsilon \Lambda_l \mathcal{S}(\lambda_n, g)}{n(\nu_n, \infty, g) + 1} \right],$$

contient un entier pour tout n assez grand. Donc (I_n) forme un système méromorphe d'intervalles admissibles d'exposant $1 - \beta$. Qui plus est en posant

$$\forall n \in \mathbb{N}, d_n = \lceil CT(\nu_n, g)^{1-\beta} \rceil,$$

on obtient que pour tout n assez grand, $d_n \in I_n$ et

$$d_n \asymp T(\nu_n, g)^{1-\beta} \asymp T(\lambda_n, g)^{1-\beta} \asymp r_n^{(1-\beta)\psi(r_n)},$$

ce qui achève la démonstration de la proposition. ■

Proposition 4.6.24. Soient $g \in \mathcal{M}(\mathbb{D})$ une fonction transcendante, $C_1, C_2 > 1$, $k > 1$ et $\beta \in [0, 1[$ tels que $\log C_1 > k$ et

$$\forall r \gg 0, C_1 T(\varphi(r), g) \leq T(\varphi(kr), g) \leq C_2 T(\varphi(r), g) \quad \text{et} \quad n(r, \infty, g) = O(T(r, g)^\beta).$$

Alors il existe une suite (I_n) d'intervalles qui constitue un système méromorphe d'intervalles admissibles pour g d'exposant $1 - \beta$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \nu_n = 1 - \frac{1 - \lambda_n}{k} \quad \text{et} \quad \lambda_n \asymp 1 - \frac{1}{n}.$$

De plus il existe $a > 0$ tel que

$$[a, \infty[\subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n \quad \text{et} \quad \lambda_1(I_n) \rightarrow \infty.$$

Démonstration. D'après la proposition 4.3.9, il existe un borélien $E \subset [0, \infty[$ tel que

$$\overline{\text{dens}}_{\psi,1}(E) < \infty \text{ avec } \psi(r) = \mathcal{S}(\varphi(r), g) \text{ et } \forall r \in [0, \infty[\setminus E, \quad 3\mathcal{L}(\varphi(r), g) \leq 2\varepsilon\mathcal{S}(\varphi(r), g).$$

Or l'hypothèse sur la caractéristique de Nevanlinna implique que son ordre inférieur est strictement plus grand que 1. En effet par une récurrence immédiate

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad C_1^n T(\varphi(r_0), g) \leq T(\varphi(k^n r_0), g) \leq C_2^n T(\varphi(r_0), g)$$

D'où

$$r^\lambda \ll T(\varphi(r), g) \text{ avec } \lambda = \frac{\log C_1}{k}.$$

Donc d'après le lemme 4.4.10

$$\underline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{S}(\varphi(r), g)}{r} = \infty.$$

D'après la proposition 4.3.7, il existe donc une suite $(s_n) \nearrow \infty$ telle que

$$\forall n \gg 0, \quad s_n \in [n, kn], \quad s_n \notin E.$$

Donc d'après la proposition 4.2.22 et le théorème 2.3.9

$$\begin{aligned} \forall \eta \in]0, 1[, \quad \forall n \gg 0, \quad \frac{\mathcal{T}(\varphi(s_{n+1}), g)}{\mathcal{T}(\varphi(\frac{s_n}{k}), g)} &\geq (1 - \eta) \frac{\mathcal{T}(\varphi(s_{n+1}), g)}{\mathcal{T}(\varphi(\frac{s_n}{k}), g)} \geq (1 - \eta) \frac{\mathcal{T}(\varphi(s_n), g)}{\mathcal{T}(\varphi(\frac{s_n}{k}), g)} \\ &\geq (1 - \eta) C_1 \frac{\mathcal{T}(\varphi(\frac{s_n}{k}), g)}{\mathcal{T}(\varphi(\frac{s_n}{k}), g)} \geq (1 - \eta) C_1, \end{aligned}$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad T(\varphi(k s_n), g) \leq C_2 T(\varphi(s_n), g).$$

Donc quitte à prendre un η assez petit, il existe une constante $C_0 > 1$ telle que

$$\forall n \gg 0, \quad \mathcal{T}(\varphi(s_{n+1}), g) \geq C_0 \mathcal{T}(\varphi(\frac{s_n}{k}), g).$$

D'après le lemme 4.6.22, $\forall n \gg 0, \quad \exists t_n \in]\frac{s_n}{k}, s_{n+1}[$

$$\begin{aligned} T(\varphi(s_{n+1}), g) &\ll \mathcal{T}(\varphi(s_n), g) \leq \frac{C_0 \log \left(\frac{\varphi(s_{n+1})(1 - \varphi(\frac{s_n}{k}))}{\varphi(\frac{s_n}{k})(1 - \varphi(s_{n+1}))} \right)}{\log(C_0)} (1 - \varphi(t_n)) \mathcal{S}(t_n, g) \\ &\ll \mathcal{S}(\varphi(s_{n+1}), g), \end{aligned}$$

car

$$s_n \asymp n \implies \frac{1 - \varphi(\frac{s_n}{k})}{1 - \varphi(s_{n+1})} \ll 1 \text{ et } \frac{\varphi(s_{n+1})}{\varphi(\frac{s_n}{k})} \ll s_n.$$

D'où en prenant $\lambda_n = \varphi(s_n)$ et $\nu_n = \varphi(k \lambda_n)$, on obtient que

$$\forall n \gg 0, \quad T(\nu_{n+1}, g)^{1-\beta} \ll \frac{T(\nu_{n+1}, g)}{T(\nu_{n+1}, g)^\beta} \ll \frac{T(\lambda_n, g)}{T(\nu_n, g)^\beta} \ll \frac{\varepsilon \Lambda_l \mathcal{S}(\lambda_n, g)}{T(\nu_n, g)^\beta} \ll \frac{\varepsilon \Lambda_l \mathcal{S}(\lambda_n, g)}{n(\nu_n, \infty, g) + 1}.$$

Donc en choisissant $C > 0$ assez petit, l'intervalle suivant

$$I_n = \left[CT(\nu_n, g)^{1-\beta}, \frac{\varepsilon \Lambda_l \mathcal{S}(\lambda_n, g)}{n(\nu_n, \infty, g) + 1} \right],$$

contient un entier pour tout n assez grand et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n \cap I_{n+1} \neq \emptyset$. La suite (I_n) forme donc un système méromorphe d'intervalles admissibles d'exposant $1 - \beta$ et il existe un rayon $a > 0$ tel que

$$[a, \infty[\subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n.$$

Ce qui achève la démonstration de la proposition. ■

4.7 Applications

Dans cette dernière section du chapitre on démontre des lemmes de zéros pour des fonctions méromorphes sur le disque \mathbb{D} ou le plan \mathbb{C} . Dans le premier paragraphe on montre que les fonctions méromorphes sur \mathbb{D} ou \mathbb{C} d'ordre inférieur positif et ayant peu de pôles vérifie un lemme de zéros polynomial pour une suite de degrés. Dans le paragraphe suivant on montre que, sous la condition supplémentaire que l'ordre supérieur est fini, ces fonctions vérifient un lemme de zéros polynomial pour tous les degrés. Finalement dans les deux derniers paragraphes, on démontre un lemme de zéros polynomial pour les fonctions *sigma* et *zêta* de Weierstraß.

Lemme de zéros polynomiaux pour une suite de degrés Une première application des résultats de ce chapitre est que toute fonction entière d'ordre inférieur strictement positif vérifie un lemme des zéros polynomial pour une suite de degrés $(d_j) \nearrow \infty$. Plus généralement toute fonction méromorphe sur \mathbb{C} ayant peu de pôles et d'ordre inférieur strictement positif vérifie un lemme de zéros polynomial pour une suite degré. On montre de plus que ces degrés peuvent être choisis dans des intervalles dont la longueur tend vers l'infini.

Rappel théorème 1.6.19. Soient $g \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ une fonction transcendante, $b \in \hat{\mathbb{C}}$ et $\beta \in [0, \frac{1}{2}[$. On suppose que

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{\log T(r, g)}{\log r} > 0 \quad \text{et} \quad n(r, b, g) = O(T(r, g)^\beta).$$

Alors il existe un exposant $\alpha \geq 2$ et une suite (J_n) d'intervalles de $[0, \infty[$ et une fonction $j : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante tels que

$$\forall r > 0, \forall n \geq j(r), \forall d \in J_n, \mathcal{Z}_d(r, g) \ll d^\alpha \quad \text{et} \quad \lambda_1(J_n) \rightarrow \infty.$$

Démonstration. On note λ l'ordre inférieur de $T(r, g)$. Quitte à remplacer la fonction g par la fonction $\frac{1}{g-b}$, on peut supposer que b est égal à ∞ . D'après la proposition 4.6.12, il existe une suite (I_n) d'intervalles qui forme un système méromorphe d'intervalles admissibles pour g d'exposant $\alpha_0 \in]0, 1 - \beta[$ au sens de la définition 4.6.3. Or d'après le lemme 4.6.9, il existe une suite d'arcs (A_n) de \mathbb{S}^1 de longueur π telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall d \in I_n, \forall a \in A_n, \log \left(\frac{1}{\gamma(a, n, d)} \right) \ll \left(\frac{\nu_n + \lambda_n}{\nu_n - \lambda_n} \right) d^{\frac{1}{\alpha_0}} + \log \left(\frac{\nu_n}{\lambda_n} \right) + d,$$

avec $\gamma(a, n, d) = \text{diam}_{d-s_n}(D(\lambda_n, a, g), \mathbb{D}_{\lambda_n})$, $s_n = \bar{n}(\lambda_n, \infty, g)$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \nu_n - \lambda_n = \frac{1}{T(\lambda_n, g)^{\gamma_0}}.$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, \forall d \in I_n$

$$\forall a \in A_n, \log \left(\frac{1}{\gamma(a, n, d)} \right) \ll T(\lambda_n, g)^{\gamma_0} \nu_n d^{\frac{1}{\alpha_0}} + d \ll d^{\frac{1}{\alpha_0} + \frac{\gamma_0}{\alpha_0}} + \frac{1}{\lambda^{\alpha_0}} + d \ll d^\gamma, \quad (4.7.1)$$

avec

$$\gamma = \frac{\lambda + \lambda\gamma_0 + 1}{\lambda\alpha_0}.$$

On applique maintenant la majoration de la mesure de transcendance méromorphe du corollaire 3.1.24. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, J_n = \left[CT(\nu_n, g)^{\alpha_0}, \frac{\epsilon \Lambda_\pi \mathcal{S}(\lambda_n, g)}{n(\nu_n, \infty, g) + 1} - 2\bar{n}(\nu_n, \infty, g) \right]$$

où $C > 0$ et $\varepsilon > 0$ sont les mêmes constantes que dans la définition de I_n . Par construction, $J_n \subset I_n$. De plus quitte à choisir α_0 assez proche de $1 - \beta$, la longueur des intervalles J_n tendent vers l'infini. En effet

$$\forall n \in \mathbb{N}, \bar{n}(\nu_n, \infty, g) \ll T(\nu_n, g)^\beta \ll (T(\nu_n, g)^{\alpha_0})^{\frac{\beta}{\alpha_0}}$$

Donc puisque $\beta < \frac{1}{2}$ et quitte à prendre α_0 assez proche de $1 - \beta$, on peut supposer que $\frac{\beta}{\alpha_0} \leq 1$. D'où

$$\bar{n}(\nu_n, \infty, g) \ll O(T(\nu_n, g)^{\alpha_0})$$

Donc la longueur des intervalles J_n tendent vers l'infini puisqu'il en est de même pour les intervalles I_n . On note $D(n, d) = d + 2\bar{n}(\nu_n, \infty, g)$, $p_n = \bar{n}(\nu_n, \infty, g)$ et $s_n = \bar{n}(\lambda_n, \infty, g)$. Or

$$\forall n \gg 0, \forall d \in J_n, D(n, d) \in I_n.$$

Donc d'après l'inégalité 4.7.1, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall d \in J_n$ et $\forall a \in A_n$

$$\log \text{diam}_{d+p_n}(D(\lambda_n, a, g), \mathbb{D}_{\lambda_n}) \geq \log \text{diam}_{D(n,d)-s_n}(D(\lambda_n, a, g), \mathbb{D}_{\lambda_n}).$$

On note $\gamma(n, d) = \inf\{\gamma(a, n, d) \mid a \in A_n\}$, $\delta = e$ et $l = \pi$. Donc d'après le corollaire 3.1.24, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall d \in J_n$

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda_n, \nu_n) \hat{e}_{D(n,d)}(\lambda_n, g) &\ll D(n, d) \left(\frac{\nu_n + \lambda_n}{\nu_n - \lambda_n} \right) T(\nu_n, g) \\ &+ D(n, d) n(\nu_n, \infty, g) \log \left(\frac{\nu_n}{\lambda_n} \frac{e}{\gamma(n, d) \delta} \right) \\ &+ D(n, d) \log \left(\frac{e}{\gamma(n, d) l} \right) + D(n, d) \log \left(\frac{e(\nu_n + \lambda_n)}{\nu_n - \lambda_n} \right) \\ &+ D(n, d) \log \left(\frac{e\nu_n}{\lambda_n} \right). \end{aligned}$$

Or par définition des intervalles admissibles d'exposant α_0 et puisque g est d'ordre inférieur λ , $\forall n \in \mathbb{N}, \forall d \in J_n$

$$\begin{aligned} T(\nu_n, g) &\ll d^{\frac{1}{\alpha_0}}, \quad \frac{\nu_n + \lambda_n}{\nu_n - \lambda_n} \ll T(\nu_n, g)^{\gamma_0} \nu_n \ll d^{\frac{\gamma_0 + \lambda}{\lambda \alpha_0}} \\ \log \left(\frac{\nu_n}{\lambda_n} \right) &\leq \log \left(1 + \frac{1}{\lambda_n T(\lambda_n, g)^{\gamma_0}} \right) \ll 1 \quad \text{et} \quad D(n, d) \asymp d. \end{aligned}$$

Ces inégalités impliquent que la mesure de transcendance $\hat{e}_{D(n,d)}(\lambda_n, g)$ est majorée par une puissance de d . Donc en appliquant le lemme 3.6.1 et la proposition 2.5.20, il existe un exposant $\alpha > 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall d \in J_n, \mathcal{Z}_d(\lambda_n, g) \leq \mathcal{Z}_{D(n,d)}(\lambda_n, g) \ll d^\alpha.$$

On note pour tout $r \in [0, \infty[$, $j(r) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid \lambda_k \geq r\}$. Donc

$$\forall r > 0, \forall n \geq j(r), \forall d \in I_n, \mathcal{Z}_d(r, g) \leq \mathcal{Z}_d(\lambda_n, g) \ll d^\alpha.$$

Ce qu'il fallait démontrer. ■

Rappel théorème 1.6.20. Soient $g \in \mathcal{M}(\mathbb{D})$ une fonction transcendante, $b \in \hat{\mathbb{C}}$ et $\beta \in [0, \frac{1}{2}[$. On suppose que

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{\log T(r, g)}{-\log(1-r)} > 1 \quad \text{et} \quad n(r, b, g) = O(T(r, g)^\beta).$$

Alors il existe un exposant $\alpha \geq 2$ et une suite (J_n) d'intervalles de $[0, \infty[$ et une fonction $j : [0, 1[\rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante tels que

$$\forall r \in [0, 1[, \forall n \geq j(r), \forall d \in J_n, \mathcal{Z}_d(r, g) \ll d^\alpha \quad \text{et} \quad \lambda_1(J_n) \rightarrow \infty.$$

Démonstration. La démonstration est similaire à celle du théorème 1.6.20 ci-dessus où la proposition 4.6.12 est remplacée par la proposition 4.6.20, le lemme 4.6.9 par le lemme 4.6.7 et le corollaire 3.1.24 par le théorème 3.1.23. ■

Fonctions méromorphes d'ordre fini Nous déduisons de l'existence de système méromorphe d'intervalles admissibles 4.6.14 et des critères 1.6.6 et 1.6.9 les deux lemmes de zéros généraux 1.6.12 et 1.6.16.

Rappel théorème 1.6.12. Soit $g \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ une fonction transcendante, $b \in \hat{\mathbb{C}}$ et $\beta \in [0, \frac{1}{2}[$. On suppose que g vérifie l'une des hypothèses suivantes

- la caractéristique de Nevanlinna satisfait les trois conditions

$$\varliminf_{r \rightarrow \infty} \frac{\log T(r, g)}{\log r} > 0, \quad \varlimsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log T(r, g)}{\log r} < \infty \quad \text{et} \quad n(r, b, g) = O(T(r, g)^\beta).$$

- il existe $C_1, C_2 > 1$ et $k > 1$ tels que

$$\forall r \gg 0, C_1 T(r, g) \leq T(kr, g) \leq C_2 T(r, g) \quad \text{et} \quad n(r, b, g) = O(T(r, g)^\beta).$$

- il existe $\rho > 0$ tel que $T(r, g) \asymp r^\rho$ et $n(r, b, g) = O(T(r, g)^\beta)$.

Alors g vérifie un lemme de zéros polynomial. Plus précisément il existe deux exposants $\alpha, \gamma > 0$ tels que

$$\forall d \in \mathbb{N}, \forall r > 0, \mathcal{Z}_d(r, g) \ll T(r, g)^\gamma \vee d^\alpha.$$

De plus lorsque la seconde hypothèse est vérifiée, on peut prendre $\alpha = 1 + \frac{1+\beta}{1-\beta}$ et $\gamma = \frac{\alpha\rho(1-\beta)}{\lambda}$ où $\lambda = \frac{\log C_1}{k}$ et $\rho = \frac{\log C_2}{k}$. Lorsque la troisième hypothèse est vérifiée, on peut prendre le même α et $\gamma = \alpha(1-\beta)$.

Démonstration. On reprend la démonstration du théorème 1.6.19 ci-dessus sauf que l'on remplace la proposition 4.6.11 par la proposition 4.6.14. La proposition 4.6.14 affirme que la suite $d_n = \min\{k \in \mathbb{N} \mid k \in I_n\}$ est à croissance polynomiale. Donc par construction la suite (J_n) obtenue dans la démonstration du théorème 1.6.19 contient la suite (d_n) et il existe des exposants $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 > 0$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, d_n \in J_n \quad \text{et} \quad n^{\alpha_1} \leq d_n \leq n^{\alpha_2} \quad \text{et} \quad d_n \ll T(\lambda_n, g)^{\alpha_3}.$$

Donc en posant $s_n = \lfloor n^{\frac{1}{\alpha_1}} \rfloor$

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \leq s_n^{\alpha_1} \leq d_{s_n} \leq s_n^{\alpha_2} \ll n^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}.$$

Or d'après la démonstration de 1.6.19, il existe un exposant α_4 tel que

$$\forall r \in [0, \infty[, \forall n \geq j(r), \mathcal{Z}_{d_n}(r, g) \ll d_n^{\alpha_4}.$$

Donc

$$\forall r \in [0, \infty[, \forall n \in \mathbb{N}, s_n \geq j(r), \mathcal{Z}_n(r, g) \leq \mathcal{Z}_{s_n}(r, g) \leq \mathcal{Z}_{d_n}(r, g) \ll d_n^{\alpha_4} \ll n^{\frac{\alpha_2 \alpha_4}{\alpha_1}},$$

où $j(r) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid \lambda_k \geq r\}$. On pose

$$\forall r \in [0, \infty[, J(r) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid \lambda_{s_k} \geq r\}.$$

Alors

$$\forall r \in [0, \infty[, \forall d \in \mathbb{N}, \mathcal{Z}_d(r, g) \ll (J(r) \vee d)^{\frac{\alpha_2 \alpha_4}{\alpha_1}}.$$

Il reste à majorer la fonction J en fonction de la caractéristique de Nevanlinna. Or $n < J(r)$ implique $\lambda_{s_n} < r$ et donc $T(\lambda_{s_n}, g) < T(r, g)$. Or

$$\forall n \in \mathbb{N}, T(\lambda_{s_n}, g) \gg d_{s_n}^{\frac{1}{\alpha_3}} \gg n^{\frac{\alpha_1}{\alpha_3}}$$

Donc

$$\forall r \in [0, \infty[, J(r) \ll T(r, g)^{\frac{\alpha_3}{\alpha_1}}.$$

Ce qui termine la démonstration du premier point. Pour démontrer que l'on peut prendre le réel $1 + \frac{1+\beta}{1-\beta}$ pour l'exposant α sous la seconde hypothèse, on applique la proposition 4.6.18. Il existe donc une suite (I_n) qui forme un système méromorphe d'intervalles admissibles pour g d'exposant $1 - \beta$ et $a > 0$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \nu_n = k\lambda_n, \lambda_n \asymp n \text{ et } [a, \infty[\subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n.$$

On note pour tout $d \in \mathbb{N}$, $n_d = \inf\{n \in \mathbb{N} \mid d \in I_n \text{ et } d \notin I_{n+1}\}$. Or d'après le lemme 4.6.9, il existe une suite d'arcs (A_n) de \mathbb{S}^1 de longueur π telle que

$$\forall d \gg 0, \forall a \in A_{n_d}, \log\left(\frac{1}{\gamma_d(a)}\right) \ll \left(\frac{\nu_{n_d} + \lambda_{n_d}}{\nu_{n_d} - \lambda_{n_d}}\right) d^{\frac{1}{1-\beta}} + \log\left(\frac{\nu_{n_d}}{\lambda_{n_d}}\right) + d \ll d^{\frac{1}{1-\beta}}, \quad (4.7.2)$$

avec $\gamma_d(a) = \text{diam}_{d-s_d}(D(\lambda_{n_d}, a, g), \mathbb{D}_{\lambda_{n_d}})$, $p_d = \bar{n}(\nu_{n_d}, \infty, g)$ et $s_d = \bar{n}(\lambda_{n_d}, \infty, g)$. On considère (D_d) la suite d'entiers définie par

$$\forall d \in \mathbb{N}, D_d = d + 2\bar{n}(\nu_{n_d}, \infty, g).$$

Alors pour tout $d \gg 0$, $D_d \in I_{n_d}$. En effet

$$\forall d \gg 0, \bar{n}(\nu_{n_d}, \infty, g) \ll T(\nu_{n_d}, g)^\beta \ll T(\nu_{n_d}, g)^{(1-\beta)\frac{\beta}{1-\beta}} \ll d^{\frac{\beta}{1-\beta}}.$$

Or $\beta \leq \frac{1}{2}$ donc $d^{\frac{\beta}{1-\beta}} = O(d)$. Donc $D_d \asymp d$ et puisque la longueur des intervalles I_n tend vers l'infini et $d \in I_{n_d}$, il existe un rang à partir duquel $D_d \in I_{n_d}$. Or d'après l'inégalité 4.7.2, $\forall d \gg 0$

$$\forall a \in A_{n_d}, \log \text{diam}_{d+p_d}(D(\lambda_{n_d}, a, g), \mathbb{D}_{\lambda_{n_d}}) \geq \log \text{diam}_{D_d-s_d}(D(\lambda_{n_d}, a, g), \mathbb{D}_{\lambda_{n_d}}).$$

Donc d'après le corollaire 3.1.24, $\forall d \gg 0$

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda_{n_d}, \nu_{n_d}) \hat{e}_{D_d}(\lambda_{n_d}, g) &\ll D_d \left(\frac{\nu_{n_d} + \lambda_{n_d}}{\nu_{n_d} - \lambda_{n_d}} \right) T(\nu_{n_d}, g) + D_d n(\nu_{n_d}, \infty, g) \log\left(\frac{e}{\gamma_d \delta_d}\right) \\ &\quad + D_d \log\left(\frac{\nu_{n_d}}{\lambda_{n_d}} \frac{e}{\gamma_d l_d}\right) + D_d \log\left(\frac{e \nu_{n_d}}{\lambda_{n_d}} \frac{\nu_{n_d} + \lambda_{n_d}}{\nu_{n_d} - \lambda_{n_d}}\right), \end{aligned}$$

où $\gamma_d = \min\{\gamma_d(a) \mid a \in A_{n_d}\}$, $\delta_d = e$ et $l_d = \pi$. Donc

$$\forall d \in \mathbb{N}, \hat{e}_{D_d}(\lambda_{n_d}, g) \ll D_d d^{\frac{1}{1-\beta}} + D_d d^{\frac{\beta}{1-\beta} + \frac{1}{1-\beta}} + D_d d^{\frac{1}{1-\beta}} + D_d \ll d^{1 + \frac{1+\beta}{1-\beta}}.$$

Or d'après le lemme 3.6.1 et la proposition 2.5.19

$$\forall d \in \mathbb{N}, \mathcal{Z}_d(\lambda_{n_d}, g) \leq \mathcal{Z}_{D_d}(\lambda_{n_d}, g) \ll d^{1 + \frac{1+\beta}{1-\beta}},$$

Donc

$$\forall d \in \mathbb{N}, \forall r \in [0, \infty[, \mathcal{Z}_d(r, g) \ll (J(r) \vee d)^{1 + \frac{1+\beta}{1-\beta}},$$

où $J(r) = \min\{d \in \mathbb{N} \mid \lambda_{n_d} \geq r\}$. Il reste à majorer la fonction J en fonction de la caractéristique de Nevanlinna. Or $d < J(r)$ implique $\lambda_{n_d} < r$ et donc $T(\lambda_{n_d}, g) < T(r, g)$. Or

$$\forall d \in \mathbb{N}, T(\lambda_{n_d}, g) \gg \lambda_{n_d}^\lambda \gg n_d^\lambda,$$

et puisque $\forall d \gg 0, d \notin I_{n_d+1}$

$$\forall d \in \mathbb{N}, d \ll T(\nu_{n_d}, g)^{1-\beta} \ll \nu_{n_d}^{\rho(1-\beta)} \ll n_d^{\rho(1-\beta)}.$$

Donc en appliquant les inégalités précédentes avec $d = J(r) - 1$

$$\forall r \in [0, \infty[, J(r) \ll J(r) - 1 \ll T(r, g)^{\frac{\rho(1-\beta)}{\lambda}}.$$

Lorsque g vérifie la troisième hypothèse, il existe un $k > 1$ assez grand et $C_1, C_2 > 1$ tels que g vérifie la deuxième hypothèse du théorème. De plus

$$\forall d \in \mathbb{N}, T(\lambda_{n_d}, g) \gg \lambda_{n_d}^\rho \gg n_d^\rho,$$

et puisque $\forall d \gg 0, d \notin I_{n_d+1}$

$$\forall d \in \mathbb{N}, d \ll T(\nu_{n_d}, g)^{1-\beta} \ll \nu_{n_d}^{\rho(1-\beta)} \ll n_d^{\rho(1-\beta)}.$$

Donc en appliquant les inégalités précédentes avec $d = J(r) - 1$

$$\forall r \in [0, \infty[, J(r) \ll J(r) - 1 \ll T(r, g)^{1-\beta}.$$

Ce qui termine la démonstration du théorème. ■

Rappel théorème 1.6.16. Soient $g \in \mathcal{M}(\mathbb{D})$ une fonction transcendante¹³, $b \in \hat{\mathbb{C}}$ et $\beta \in [0, \frac{1}{2}]$. On suppose que g vérifie l'une des hypothèses suivantes

- la caractéristique de Nevanlinna satisfait les trois conditions

$$\liminf_{r \rightarrow 1^-} \frac{\log T(r, g)}{-\log(1-r)} > 1, \quad \overline{\lim}_{r \rightarrow 1^-} \frac{\log T(r, g)}{-\log(1-r)} < \infty \quad \text{et} \quad n(r, b, g) = O(T(r, g)^\beta).$$

- il existe $C_1, C_2 > 1$ et $k > 1$ tels que $\log C_1 > k$ et

$$\forall r \gg 0, C_1 T(1 - \frac{1}{r}, g) \leq T(1 - \frac{1}{kr}, g) \leq C_2 T(1 - \frac{1}{r}, g) \quad \text{et} \quad n(r, b, g) = O(T(r, g)^\beta).$$

- il existe $\rho > 1$ tel que $T(1 - \frac{1}{r}, g) \asymp r^\rho$ et $n(r, b, g) = O(T(r, g)^\beta)$.

Alors g vérifie un lemme de zéros polynomial. Plus précisément il existe deux exposants $\alpha, \gamma > 0$

$$\forall d \in \mathbb{N}, \forall r \in [0, 1[, Z_d(r, g) \leq T(r, g)^\gamma \vee d^\alpha.$$

De plus lorsque la deuxième hypothèse est vérifiée, on peut prendre $\alpha = 1 + \frac{1+\beta}{1-\beta} + \frac{2}{\lambda(1-\beta)}$ et $\gamma = \frac{\alpha\rho(1-\beta)}{\lambda}$ où $\lambda = \frac{\log C_1}{k}$ et $\rho = \frac{\log C_2}{k}$. Lorsque la troisième hypothèse est vérifiée, on peut prendre le même α et $\gamma = \alpha(1-\beta)$.

Démonstration. La première hypothèse implique la deuxième avec $\beta = 0$ d'après le lemme 4.4.9. Le reste du théorème se démontre de la même façon que le théorème 1.6.12 où les propositions 4.6.14 et 4.6.18 sont remplacées respectivement par les propositions 4.6.21 et 4.6.24. Pour démontrer que l'on peut prendre le réel $1 + \frac{1+\beta}{1-\beta} + \frac{2}{\lambda(1-\beta)}$ pour l'exposant α sous la troisième hypothèse, on applique la proposition 4.6.24. Il existe donc une suite (I_n) qui forme un système méromorphe d'intervalles admissibles pour g d'exposant $1-\beta$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \nu_n = 1 - \frac{1-\lambda_n}{k}, \quad \lambda_n \asymp 1 - \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad [a, \infty[\subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$$

On note pour tout $d \in \mathbb{N}$, $n_d = \inf\{n \in \mathbb{N} \mid d \in I_n \text{ et } d \notin I_{n+1}\}$. Or d'après le lemme 4.6.7, il existe une suite d'arcs (A_n) de \mathbb{S}^1 de longueur π telle que

$$\forall d \gg 0, \forall a \in A_{n_d}, \log \left(\frac{1}{\gamma_d(a)} \right) \ll \left(\frac{\nu_{n_d} + \lambda_{n_d}}{\nu_{n_d} - \lambda_{n_d}} \right) d^{\frac{1}{1-\beta}} + \log \left(\frac{\nu_{n_d}}{\lambda_{n_d}} \right) + d \ll n_d d^{\frac{1}{1-\beta}}, \quad (4.7.3)$$

avec $\gamma_d(a) = \text{diam}_{d-s_d}(D(\lambda_{n_d}, a, g), \mathbb{D}_{\lambda_{n_d}})$, $p_d = \bar{n}(\nu_{n_d}, \infty, g)$, $s_d = \bar{n}(\lambda_{n_d}, \infty, g)$. On considère (D_d) la suite d'entiers définie par

$$\forall d \in \mathbb{N}, D_d = d + 2\bar{n}(\nu_{n_d}, \infty, g).$$

Alors pour tout $d \gg 0$, $D_d \in I_{n_d}$. En effet

$$\forall d \gg 0, \bar{n}(\nu_{n_d}, \infty, g) \ll T(\nu_{n_d}, g)^\beta \ll T(\nu_{n_d}, g)^{(1-\beta)\frac{\beta}{1-\beta}} \ll d^{\frac{\beta}{1-\beta}}.$$

Or $\beta \leq \frac{1}{2}$ donc $d^{\frac{\beta}{1-\beta}} = O(d)$. Donc $D_d \asymp d$ et puisque la longueur des intervalles I_n tend vers l'infini et $d \in I_{n_d}$, il existe un rang à partir duquel $D_d \in I_{n_d}$. Or d'après l'inégalité 4.7.3, $\forall d \gg 0$, et $\forall a \in A_{n_d}$

$$\log \text{diam}_{d+p_d}(D(\lambda_{n_d}, a, g), \mathbb{D}_{\lambda_{n_d}}) \geq \log \text{diam}_{D_d-s_d}(D(\lambda_{n_d}, a, g), \mathbb{D}_{\lambda_{n_d}}).$$

Donc d'après le corollaire 3.1.24, $\forall d \gg 0$

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda_{n_d}, \nu_{n_d}) \hat{e}_{D_d}(\lambda_{n_d}, g) &\ll D_d \left(\frac{\nu_{n_d} + \lambda_{n_d}}{\nu_{n_d} - \lambda_{n_d}} \right) T(\nu_{n_d}, g) + D_d \bar{n}(\nu_{n_d}, \infty, g) \log \left(\frac{e}{\gamma_d \delta_d} \right) \\ &\quad + D_d \log \left(\frac{\nu_{n_d}}{\lambda_{n_d}} \frac{e}{\gamma_d l_d} \right) + D_d \log \left(\frac{e \nu_{n_d}}{\lambda_{n_d}} \frac{\nu_{n_d} + \lambda_{n_d}}{\nu_{n_d} - \lambda_{n_d}} \right), \end{aligned}$$

où $\gamma_d = \inf\{\gamma_d(a) \mid a \in A_{n_d}\}$, $\delta_d = e$ et $l_d = \pi$. De plus

$$\frac{\nu_{n_d} + \lambda_{n_d}}{\nu_{n_d} - \lambda_{n_d}} \ll \frac{\nu_{n_d}}{1 - \lambda_{n_d}} \ll n_d \text{ et } \log \left(\frac{\nu_{n_d}}{\lambda_{n_d}} \right) \ll 1.$$

Donc

$$\begin{aligned} \forall d \in \mathbb{N}, \hat{e}_{D_d}(\lambda_{n_d}, g) &\ll n_d^2 D_d d^{\frac{1}{1-\beta}} + n_d D_d d^{\frac{\beta}{1-\beta} + \frac{1}{1-\beta}} + n_d D_d d^{\frac{1}{1-\beta}} + n_d D_d \log n_d \\ &\ll n_d^2 d^{1 + \frac{1+\beta}{1-\beta}}. \end{aligned}$$

De plus puisque $\forall d \gg 0$, $d \in I_{n_d}$

$$\forall d \in \mathbb{N}, n_d^{\lambda(1-\beta)} \ll (1 - \nu_{n_d}^{-\lambda})^{1-\beta} \ll T(\nu_{n_d}, g)^{1-\beta} \ll d.$$

Or d'après le lemme 3.6.1 et la proposition 2.5.19

$$\forall d \in \mathbb{N}, \mathcal{Z}_d(\lambda_{n_d}, g) \leq \mathcal{Z}_{D_d}(\lambda_{n_d}, g) \ll n_d^2 d^{1 + \frac{1+\beta}{1-\beta}} \ll d^{1 + \frac{1+\beta}{1-\beta} + \frac{2}{\lambda(1-\beta)}}.$$

Donc

$$\forall d \in \mathbb{N}, \forall r \in [0, 1[, \mathcal{Z}_d(r, g) \ll (J(r) \vee d)^{1 + \frac{1+\beta}{1-\beta} + \frac{2}{\lambda(1-\beta)}},$$

où $J(r) = \min\{d \in \mathbb{N} \mid \lambda_{n_d} \geq r\}$. Il reste à majorer la fonction J en fonction de la caractéristique de Nevanlinna. Or $d < J(r)$ implique $\lambda_{n_d} < r$ et donc $T(\lambda_{n_d}, g) < T(r, g)$. Or

$$\forall d \in \mathbb{N}, T(\lambda_{n_d}, g) \gg 1 - \lambda_{n_d}^{-\lambda} \gg n_d^\lambda,$$

et puisque $\forall d \gg 0$, $d \notin I_{n_d+1}$

$$\forall d \in \mathbb{N}, d \ll T(\nu_{n_d}, g)^{1-\beta} \ll (1 - \nu_{n_d}^{-\rho})^{1-\beta} \ll n_d^{\rho(1-\beta)}.$$

Donc en appliquant les inégalités précédentes avec $d = J(r) - 1$

$$\forall r \in [0, 1[, J(r) \ll J(r) - 1 \ll T(r, g)^{\frac{\rho(1-\beta)}{\lambda}}.$$

Lorsque g vérifie la troisième hypothèse, il existe un $k > 1$ assez grand et $C_1, C_2 > 1$ tels que g vérifie la deuxième hypothèse du théorème. De plus

$$\forall d \in \mathbb{N}, T(\lambda_{n_d}, g) \gg 1 - \lambda_{n_d}^{-\rho} \gg n_d^\rho,$$

et puisque $\forall d \gg 0, d \notin I_{n_d+1}$

$$\forall d \in \mathbb{N}, d \ll T(\nu_{n_d}, g)^{1-\beta} \ll (1 - \nu_{n_d}^{-\rho})^{1-\beta} \ll n_d^{\rho(1-\beta)}.$$

Donc en appliquant les inégalités précédentes avec $d = J(r) - 1$

$$\forall r \in [0, 1[, J(r) \ll J(r) - 1 \ll T(r, g)^{1-\beta}.$$

Ce qui termine la démonstration du théorème. ■

Les fonctions *sigma* de Weierstraß Dans un article non publié [9] issu de sa thèse, Besson démontre que pour pratiquement tous les réseaux Λ du plan \mathbb{C} , la fonction σ_Λ de Weierstraß associée à ce réseau vérifie un lemme de zéros polynomial.

Rappel théorème 1.3.13 – [9]. *Pour presque tout réseau Λ de \mathbb{C} , la fonction *sigma* de Weierstraß associée à Λ satisfait un lemme de zéros polynomial. Plus précisément, il existe une constante explicite $C > 0$ telle que*

$$\forall d \in \mathbb{N}, \forall r > 0, \mathcal{Z}_d(r, \sigma_\Lambda) \leq Cd(r + \sqrt{d})^2 \log(r + d).$$

Nous montrons dans ce paragraphe que toutes les fonctions de Weierstraß vérifient en fait un lemme de zéros polynomial comme Besson l'avait conjecturé dans [9]. On rappelle ci-dessous les définitions des fonctions *sigma* et *zêta* de Weierstraß et leurs propriétés élémentaires.

Rappel définition 1.6.27. Soit Λ un réseau de \mathbb{C} . La *fonction sigma* de Weierstraß associée à Λ est définie par

$$\forall z \in \mathbb{C}, \sigma_\Lambda(z) := \prod_{w \in \Lambda \setminus \{0\}} \left(1 - \frac{z}{w}\right) e^{\frac{z}{w} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{w}\right)^2}.$$

et la *fonction zêta* de Weierstraß associée à Λ est définie comme la dérivée logarithmique de σ_Λ . Autrement dit

$$\forall z \in \mathbb{C}, \zeta_\Lambda(z) := \frac{\sigma'_\Lambda(z)}{\sigma_\Lambda(z)} = \frac{1}{z} + \sum_{w \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{z-w} + \frac{1}{w} + \frac{z}{w^2}.$$

Proposition 4.7.1. *Soit $\Lambda = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau$ un réseau de \mathbb{C} avec $\tau \in \mathbb{H}$. Alors*

- la fonction ζ_Λ est méromorphe sur \mathbb{C} et admet un pôle simple en chaque point Λ ,
- la dérivée de ζ_Λ est $-\wp_\Lambda$,
- les fonctions ζ_Λ et σ_Λ vérifient les relations de quasi-périodiques suivantes
 $\forall z \in \mathbb{C}, \forall m, n \in \mathbb{Z}, \zeta_\Lambda(z + m + n\tau) = \zeta_\Lambda(z) + H(m, n)$ avec $H(m, n) = 2m\eta_1 + 2n\eta_2$,
 et

$$\forall z \in \mathbb{C}, \forall m, n \in \mathbb{Z}, \sigma_\Lambda(z + m + n\tau) = (-1)^{m+n+mn} e^{(m\eta_1 + n\eta_2)(m+n\tau+2z)} \sigma_\Lambda(z),$$

où $\eta_1 = \zeta_\Lambda(\frac{1}{2})$ et $\eta_2 = \zeta_\Lambda(\frac{\tau}{2})$. Les nombres η_1 et η_2 sont appelés les pseudo-périodes du réseau Λ ,

- les nombres η_1 et η_2 vérifient l'équation de Legendre

$$\eta_1\tau - \eta_2 = i\pi.$$

Remarque 4.7.2. Dans [9], l'auteur introduit la forme quadratique E définie par

$$\forall z \in \mathbb{C}, m, n \in \mathbb{Z}, E(m, n, z) := \operatorname{Ré}((m\eta_1 + n\eta_2)(m + n\tau + 2z)).$$

Cette forme quadratique n'est autre que le module du rapport de $\sigma_\Lambda(z + m + n\tau)$ sur $\sigma_\Lambda(z)$. Ainsi la forme quadratique E mesure le défaut de périodicité de la fonction σ_Λ . Dans [9], Besson démontre le lemme de zéros polynomial 1.3.13 pour σ_Λ sauf lorsque la forme quadratique E est telle que

$$\Delta := \operatorname{Ré}(\eta_1\tau + \eta_2)^2 - 4\operatorname{Ré}(\eta_1)\operatorname{Ré}(\eta_2\tau) = 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{Ré}(\eta_1)\operatorname{Ré}(\eta_2\tau) < 0.$$

La fonction *sigma* de Weierstraß étant entière, il suffit pour démontrer qu'elle satisfait un lemme des zéros polynomial de vérifier qu'elle satisfait les conditions du théorème 1.6.12, c'est-à-dire que sa caractéristique de Nevanlinna a une croissance polynomiale. À cette fin nous comparons la caractéristique de Nevanlinna de σ_Λ , ζ_Λ et \wp_Λ . En appliquant le lemme de la dérivée logarithmique de Nevanlinna [46, Th. 1.3], on obtient le théorème suivant.

Théorème 4.7.3 ([46, Th. 2.3]). *Soit $g \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$. Alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$*

$$\forall r > 0, T(r, g^{(k)}) \leq (k+1)T(r, g) + Q(r, g),$$

où Q est une fonction telle que

- lorsque g est d'ordre fini, $Q(r, g) = O(\log r)$,
- lorsque g est d'ordre infini, $Q(r, g) = O(\log T(r, g) + \log r)$ en dehors d'un ensemble de mesure logarithmique finie.

Proposition 4.7.4. *Soit $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2$ un réseau de \mathbb{C} . Alors*

$$T(r, \sigma_\Lambda) \asymp r^2 \quad \text{et} \quad T(r, \zeta_\Lambda) \asymp r^2.$$

Démonstration. D'après le lemme 3.7.8, $T(r, \wp_\Lambda) \asymp r^2$. Or $\zeta'_\Lambda = -\wp_\Lambda$ d'après la proposition 4.7.1 et $\zeta_\Lambda = \sigma'_\Lambda/\sigma_\Lambda$ par définition de la fonction ζ_Λ . Donc en appliquant deux fois le théorème 4.7.3 ci-dessus

$$\begin{aligned} T(r, \wp_\Lambda) &= T(r, -\zeta'_\Lambda) \leq 2T(r, \zeta_\Lambda) + Q(r, \zeta_\Lambda) \leq 2T(r, \sigma'_\Lambda/\sigma_\Lambda) + Q(r, \zeta_\Lambda) \\ &\leq 2T(r, \sigma'_\Lambda) + 2T(r, \sigma_\Lambda) + Q(r, \zeta_\Lambda) \leq 6T(r, \sigma_\Lambda) + Q(r, \zeta_\Lambda) + Q(r, \sigma_\Lambda) \end{aligned}$$

et puisque σ_Λ et ζ_Λ sont d'ordre fini, les fonctions $Q(r, \zeta_\Lambda)$ et $Q(r, \sigma_\Lambda)$ sont des grand O de $\log r$. Donc

$$T(r, \sigma_\Lambda) \gg r^2 \quad \text{et} \quad T(r, \zeta_\Lambda) \gg r^2.$$

Démontrons les inégalités dans l'autre sens. La quasi-périodicité de la fonction σ_Λ figurant dans la proposition 4.7.1 garantit qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall r \in [0, \infty[, \log^+ M(r, \sigma_\Lambda) \leq e^{Cr^2}.$$

Donc d'après l'inégalité d'Harnack 2.6.10, $T(r, \sigma_\Lambda) \ll r^2$. Quant à la fonction ζ_Λ , d'après le théorème de Cartan 2.6.11 et les lemmes 3.7.6 et 4.7.6

$$\forall r \in [0, \infty[, T(r, \zeta_\Lambda) = \int_0^{2\pi} N(r, e^{i\theta}, \zeta_\Lambda) \frac{d\theta}{2\pi} \ll N(r, P, \Lambda) \ll r^2,$$

où P est un parallélogramme fondamental du réseau Λ . ■

Rappel corollaire 1.6.28. Soit Λ un réseau de \mathbb{C} . Alors la fonction sigma de Weierstraß associée à Λ satisfait un lemme de zéros polynomial. Plus précisément, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall d \in \mathbb{N}, \forall r > 0, \mathcal{Z}_d(r, \sigma_\Lambda) \leq C(d \vee r)^2.$$

Démonstration. C'est une conséquence de la proposition 4.7.4 ci-dessus et du théorème 1.6.12 avec $b = \infty$ et $\beta = 0$ puisque σ_Λ est holomorphe sur \mathbb{C} . Or la σ_Λ vérifie la troisième hypothèse de 1.6.12 avec $\rho = 2$. Donc

$$\forall d \in \mathbb{N}, \forall r > 0, \mathcal{Z}_d(r, \sigma_\Lambda) \ll T(r, g)^\gamma \vee d^\alpha$$

avec $\alpha = 1 + \frac{1+\beta}{1-\beta} = 2$ et $\gamma = \alpha(1-\beta) = 2$. ■

Les fonctions zêta de Weierstraß On démontre dans ce paragraphe que les fonctions zêta de Weierstraß vérifient un lemme de zéros polynomial. Contrairement aux fonctions sigma de Weierstraß, les fonctions ζ_Λ n'ont aucune valeur déficiente. Néanmoins on peut étudier la distribution des petites valeurs de ces fonctions grâce à la théorie d'Ahlfors. Commençons par démontrer quelques propositions et lemmes techniques. La proposition 4.7.5 ci-dessous est une inégalité des accroissements finis où la métrique euclidienne est remplacée par la métrique sphérique.

Proposition 4.7.5. Soient $\Omega \subset \mathbb{C}$ un domaine, $g \in \mathcal{M}(\Omega)$ et $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$ un chemin de classe \mathcal{C}^1 reliant z à w . Alors

$$\chi(g(z), g(w)) \leq \Lambda(\gamma) \sup_{\xi \in \gamma} \rho_g(\xi),$$

où $\Lambda(\gamma)$ est la longueur de la courbe paramétrée par γ .

Démonstration. Par définition de la dérivée sphérique ρ_g et l'inégalité triangulaire

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow w} \frac{\chi(g(\xi), g(z)) - \chi(g(w), g(z))}{|\xi - w|} &\leq \lim_{\xi \rightarrow w} \frac{\chi(g(\xi), g(w)) + \chi(g(w), g(z)) - \chi(g(w), g(z))}{|\xi - w|} \\ &\leq \rho_g(w). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \chi(g(z), g(w)) &\leq \chi(g(\gamma(0)), g(\gamma(1))) \leq \int_\gamma \rho_g(\xi) d\sigma(\xi) \leq \int_0^1 \rho_g(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt \\ &\leq \sup_{\xi \in \gamma} \rho_g(\xi) \int_0^1 |\gamma'(t)| dt \leq \Lambda(\gamma) \sup_{\xi \in \gamma} \rho_g(\xi). \end{aligned}$$

Ce qu'il fallait démontrer. ■

Bien que la fonction ζ_Λ ne soit pas périodique le lemme 4.7.6 ci-dessous affirme que le nombre de feuillettes du recouvrement de $\hat{\mathbb{C}}$ induit par ζ_Λ restreint à parallélogramme fondamental P de Λ est invariant lorsque l'on translate P par Λ .

Lemme 4.7.6. Soient $\Lambda = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau$ un réseau de \mathbb{C} avec $\tau \in \mathbb{H}$ et P un parallélogramme fondamental de Λ . Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall \gamma \in \Lambda, \sup_{a \in \mathbb{C}} n(\gamma \cdot P, a, \zeta_\Lambda) = N,$$

où $\gamma \cdot P = \{z + \gamma \mid z \in P\}$.

Démonstration. En effet pour tout $a \in \hat{\mathbb{C}}$, $\gamma \in \Lambda$ et $z \in \gamma \cdot P$ tel que $\zeta_\Lambda(z) = a$

$$\zeta_\Lambda(z) = \zeta_\Lambda(z - \gamma) - H(\gamma) = a - H(\gamma).$$

Donc $n(\gamma \cdot P, a, \zeta_\Lambda) \leq n(P, a - H(\gamma), \zeta_\Lambda)$. Or $N = \sup_{a \in \hat{\mathbb{C}}} n(P, a, \zeta_\Lambda)$ est fini puisque ζ_Λ est méromorphe sur un voisinage de P . Donc

$$\forall \gamma \in \Lambda, \sup_{a \in \hat{\mathbb{C}}} n(\gamma \cdot P, a, \zeta_\Lambda) \leq N.$$

En permutant le rôle de P et $\gamma \cdot P$, on obtient l'inégalité dans l'autre sens. \blacksquare

La proposition 4.7.7 ci-dessous donne une estimation suffisante de la distribution des petites valeurs d'une fonction zêta de Weierstraß et de ses pôles pour en déduire qu'elle vérifie un lemme de zéros polynomial.

Proposition 4.7.7. Soit $\Lambda = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau$ un réseau de \mathbb{C} avec $\tau \in \mathbb{H}$. Alors il existe une constante $C_1 > 0$ et une suite d'arcs (A_d) de \mathbb{S}^1 et $(\lambda_d) \nearrow \infty$ tels que $\lambda_d \asymp \sqrt{d}$

$$\forall d \in \mathbb{N}, \lambda_1(A_d) = \frac{\pi}{3} \text{ et } \forall a \in A_d, \text{diam}_d(D(r_d, a, g)) \geq C_1,$$

$$\forall k > 1, \exists C_2 > 0, \forall z \in D(r, \mathbb{S}^1, g), \forall w \in D(kr, \infty, g), |z - w| \geq \frac{C_2}{r}.$$

Démonstration. Soient $a, b, c \in \mathbb{S}^1$ trois points distincts et équi-répartis sur le cercle. D'après le théorème de Dufresnoy 4.2.15

$$\forall r \in [0, \infty[, \mathcal{S}(r, g) \leq 1 + \bar{n}(r, a, g) + \bar{n}(r, b, g) + \bar{n}(r, c, g) + \frac{3}{2\delta} \mathcal{L}(r, g),$$

où δ est la distance sphérique minimale entre a, b et c . Puisque $T(r, g) \asymp r^2$ alors $\mathcal{S}(r, g) \asymp r^2$. En effet d'après le lemme 4.6.15

$$\forall r \gg 0, r^2 \ll T(r, g) \ll \mathcal{T}(r, g) \ll \mathcal{S}(r, g),$$

puisque'il existe un $k < 1$ et $C > 1$ tels que $\mathcal{T}(\frac{r}{k}, g) \leq C\mathcal{T}(r, g)$ et

$$\forall r \gg 0, \mathcal{S}(r, g) \ll \int_r^{2r} \mathcal{S}(t, g) \frac{dt}{t} \ll \int_0^{2r} \mathcal{S}(t, g) \frac{dt}{t} \ll \mathcal{T}(2r, g) \ll T(2r, g) \ll r^2.$$

D'après la proposition 4.3.8, il existe un ensemble $E \subset [0, \infty[$ tel que $\ell(E) < \infty$ et

$$\forall r \in [0, \infty[\setminus E, \mathcal{L}(r, g) \leq \mathcal{S}(r, g).$$

Donc il existe d'après le lemme 4.3.6 une suite $(r_n) \nearrow \infty$ telle que

$$r_n \asymp n \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, r_n \notin E.$$

D'où

$$\forall n \in \mathbb{N}, 3d_n \leq \bar{n}(r_n, a, \zeta_\Lambda) + \bar{n}(r_n, b, \zeta_\Lambda) + \bar{n}(r_n, c, \zeta_\Lambda) \text{ où } d_n = \left\lfloor \frac{\mathcal{S}(r_n, \zeta_\Lambda)}{3} \right\rfloor,$$

Donc il existe une suite d'arcs $U_n \subset \mathbb{S}^1$ de longueur $\frac{\pi}{3}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall a \in U_n, d_n \leq \bar{n}(r_n, a, \zeta_\Lambda).$$

Soit P un parallélogramme fondamental de Λ . Or d'après le lemme 4.7.6, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall \gamma \in \Lambda, \sup_{a \in \mathbb{S}^1} n(\gamma \cdot P, a, \zeta_\Lambda) \leq N.$$

Notons $N(r, P, \Lambda)$ le nombre de parallélogramme $\gamma \cdot P$ contenu dans \mathbb{D}_r . D'après le lemme 3.7.6

$$N(r, P, \Lambda) \sim \frac{\pi r^2}{\text{vol}(\Lambda)},$$

lorsque $r \rightarrow \infty$. Or dans chaque parallélogramme $\gamma \cdot P$, la fonction ζ_Λ prend au plus N fois la valeur $a \in \mathbb{S}^1$. Donc pour tout $a \in U_n$, la fonction ζ_Λ prend de l'ordre de d_n a -points dans le disque \mathbb{D}_{r_n} de sorte qu'aucun de ces a -points ne soient dans le même parallélogramme, ni dans des parallélogrammes adjacents. Il existe donc une constante $\gamma > 0$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall a \in U_n, \text{diam}_{d_n}(D(r_n, a, \zeta_\Lambda)) \geq \gamma > 0.$$

On pose $n(d) = \min\{n \in \mathbb{N} \mid d_n \geq d\}$, $\lambda_d = r_{n(d)}$ et $A_d = U_{n(d)}$. Alors

$$\forall d \in \mathbb{N}, \forall a \in A_d, \text{diam}_d(D(\lambda_d, a, \zeta_\Lambda)) \geq \gamma,$$

et $\lambda_d \asymp \sqrt{d}$ puisque $\mathcal{S}(r, g) \asymp r^2$. Il reste à étudier la position des pôles par rapport aux petites valeurs de la fonction ζ_Λ . Soient $z \in D(r, a, \zeta_\Lambda)$ avec $a \in \mathbb{S}^1$ et $w \in D(kr, \infty, \zeta_\Lambda)$. On peut supposer sans perte de généralité que z et w sont dans le même parallélogramme $\bar{\gamma} \cdot \bar{P}$ car dans le cas contraire la distance entre z et w est minorée par une constante qui ne dépend que du réseau Λ . Soient $\gamma \in \Lambda$ tel que $\gamma \cdot z \in P$ et $\gamma \cdot w \in \bar{P}$ et C le maximum de ρ_{ζ_Λ} sur \bar{P} . D'après la proposition 4.7.5 ci-dessus

$$\chi(g(z) + H(\gamma), g(w) + H(\gamma)) \leq C|z + \gamma - (w + \gamma)| \leq C|z - w|.$$

Or

$$\chi(g(z) + H(\gamma), g(w) + H(\gamma)) = \frac{1}{\sqrt{1 + |g(z) + H(\gamma)|^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + |a + H(\gamma)|^2}} \gg \frac{1}{r},$$

et la constante omise ne dépend pas de a . ■

Rappel corollaire 1.6.29. Soit Λ un réseau de \mathbb{C} . Alors la fonction zêta de Weierstrass associée à Λ satisfait un lemme de zéros polynomial. Plus précisément, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall \varepsilon > 0, \forall d \in \mathbb{N}, \forall r > 0, \mathcal{Z}_d(r, \zeta_\Lambda) \leq C(d \vee r^2)^{2+\varepsilon}.$$

Démonstration. On souhaite appliquer le critère 1.6.6 avec les suites (λ_d) et (A_d) de la proposition 4.7.7 et les suites (ν_d) , (γ_d) , (δ_d) et (l_d) définie par

$$\nu_d = 2\lambda_d, \gamma_d = C_1, \delta_d = \frac{C_2}{2\lambda_d} \text{ et } l_d = \frac{\pi}{3},$$

où C_1 et C_2 sont les deux constantes données par la proposition 4.7.7 ci-dessus. De plus d'après la proposition 2.7.18

$$\forall d \in \mathbb{N}, \forall a \in A_d, \text{diam}_d(D(\lambda_d, a, \zeta_\Lambda), \mathbb{D}_{\lambda_d}) \geq \text{diam}_d(D(\lambda_d, a, \zeta_\Lambda)) \geq \gamma_d,$$

et d'après cette même proposition

$$\forall d \in \mathbb{N}, p_{\nu_d}(D(\nu_d, \infty, \zeta_\Lambda), D(\lambda_d, a, \zeta_\Lambda)) \geq d(D(\nu_d, \infty, \zeta_\Lambda), D(\lambda_d, a, \zeta_\Lambda)) \geq \frac{C_2}{2\lambda_d}.$$

Donc les hypothèses du théorèmes 1.6.6 sont satisfaites avec les exposants $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, $\beta = 1$, $\gamma = l = 0$ et $\delta = \varepsilon$. Donc

$$\forall r > 0, \forall d \in \mathbb{N}, \mathcal{Z}_d(r, \zeta_\Lambda) \ll (d \vee \varphi(r))^{2+\varepsilon}.$$

où $\varphi(r) := \min\{k \in \mathbb{N} \mid \lambda_k \geq r\}$. Or $\varphi(r) \ll r^2$ car $\lambda_d \asymp \sqrt{d}$, ce qui achève la démonstration du corollaire. ■

CHAPITRE 5

Applications aux comptages des points algébriques

5.1 Introduction

Dans ce chapitre on s'intéresse aux problèmes de comptages de points algébriques contenus dans une courbe holomorphe $g : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}^m$ ou dans une courbe méromorphe $g : \mathbb{D} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}^m$ avec $m \geq 3$. Dans la section 5.2, on donne la définition de la hauteur de Weil et ces propriétés élémentaires. Dans la section 5.3, on établit le théorème d'interpolation avec évitement 1.6.36 puis dans la section 5.4 on démontre le lemme de zéros en moyenne 1.6.30 dont on déduit que le théorème d'interpolation avec évitement 1.6.36 ne peut être étendu aux courbes dans \mathbb{C}^2 ou $\hat{\mathbb{C}}^2$. Finalement dans la dernière section 5.5 on démontre à partir du théorème 1.6.36 la proposition 1.3.4 faisant le lien entre les lemmes de zéros polynomiaux et les bornes logarithmiques du nombre de points algébriques de hauteur et degré bornés.

5.2 Hauteur de Weil

Dans cette section on donne la définition de la hauteur de Weil d'un nombre algébrique et d'un espace vectoriel. Dans la suite K désigne un corps de nombres. On note \mathcal{M}_K l'ensemble des places du corps K et \mathcal{M}_K^0 l'ensemble des places non-archimédiennes de K . La hauteur d'un nombre algébrique est une mesure de la *complexité arithmétique* de ce nombre. Dans le cas d'un rationnel $q \in \mathbb{Q}$ nous avons défini dans le chapitre d'introduction la hauteur du nombre q comme le maximum du module du numérateur et dénominateur d'une écriture de q sous forme de fraction irréductible. Ainsi la taille d'un rationnel mesure la difficulté à écrire celui-ci sous la forme d'une fraction de petits entiers rationnels. De façon plus générale on définit la hauteur de Weil d'un nombre algébrique et plus généralement d'un point de l'espace projectif $\mathbb{P}^n(\overline{\mathbb{Q}})$ de la manière suivante.

Définition 5.2.1 (Hauteur de Weil – [15, Sec. 1.5]). Pour tout point $\alpha = [\alpha_0 : \cdots : \alpha_n]$ de l'espace projectif $\mathbb{P}^n(\overline{\mathbb{Q}})$, on appelle *hauteur de Weil multiplicative* du point α le réel

$$H(\alpha) := \prod_{v \in \mathcal{M}_K} \|\alpha\|_v,$$

où la norme $\|\alpha\|_v$ est définie par $\|\alpha\|_v := \max_{0 \leq j \leq n} |\alpha_j|_v$ avec

$$|\alpha_j|_v := |N_{K_v/\mathbb{Q}_p}(x_j)|_p^{\frac{1}{[K_v:\mathbb{Q}_p]}},$$

où K est un corps de nombres contenant toutes les coordonnées projectives α_j de α ¹. La hauteur de Weil logarithmique de α , noté $h(\alpha)$, est définie comme le logarithme de $H(\alpha)$. Soit $\gamma \in \overline{\mathbb{Q}}$. La hauteur de Weil multiplicative $H(\gamma)$, respectivement logarithme $h(\gamma)$ du nombre γ est définie comme la hauteur de Weil multiplicative, respectivement logarithmique du point $[1 : \gamma]$ de $\mathbb{P}^1(\overline{\mathbb{Q}})$.

La proposition 5.2.2 suivante découle de la définition 5.2.1 ci-dessus de la hauteur de Weil.

Proposition 5.2.2 ([15, Prop. 1.5.15]). *Pour tous $\gamma_1, \dots, \gamma_k \in \overline{\mathbb{Q}}^n$,*

$$h(\gamma_1 + \dots + \gamma_k) \leq \sum_{j=1}^k h(\gamma_j) + \log k,$$

et pour tout $x = [x_0 : \dots : x_n] \in \mathbb{P}^n(\overline{\mathbb{Q}})$, $h(x) \leq \max \{h(x_j) : 0 \leq j \leq n\}$.

Rappel proposition 1.2.2. *L'ensemble des nombres algébriques de hauteur de Weil au plus B et de degré au plus k est fini.*

La formule 5.2.3 suivante est essentielle.

Lemme 5.2.3 (Formule du produit – [15, prop. 1.4.4]). *Soit K un corps de nombres K . Alors*

$$\gamma \in K^*, \quad \prod_{v \in \mathcal{M}_K} |\gamma|_v = 1,$$

où $|\cdot|_v$ est défini en 5.2.1.

Lemme 5.2.4. *Soient $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{Q}}$ distincts, de hauteur de Weil au plus B et de degré au plus k . Alors*

$$\log |\alpha - \beta| \geq -k(2 \log B + \log 2).$$

Démonstration. Soit K le corps de nombres engendré par α et β . On applique la formule 5.2.3 ci-dessus à $\gamma = \alpha - \beta$. Donc

$$0 = \sum_{\nu \in \mathcal{M}_K} \log |\alpha - \beta|_\nu = \frac{1}{k} \log |\alpha - \beta| + \sum_{\nu \in \mathcal{M}_K^0} \log |\alpha - \beta|_\nu \leq \frac{1}{k} \log |\alpha - \beta| + h(\alpha - \beta).$$

Donc d'après la proposition 5.2.2, $h(\alpha - \beta) \leq h(\alpha) + h(\beta) + \log 2 \leq 2 \log B + \log 2$. ■

Définition 5.2.5 (Hauteur de Weil d'un polynôme). Soit $P \in \overline{\mathbb{Q}}_{\leq d}[z_1, \dots, z_m]$ non nul. On suppose que

$$\forall z \in \mathbb{C}^m, \quad P(z) = \sum_{I \in \Delta_m(d)} \lambda_I z^I.$$

La hauteur de Weil multiplicative de P , notée $H(P)$, est définie comme la hauteur de Weil du point de l'espace projectif $\mathbb{P}^D(\overline{\mathbb{Q}})$ avec $D = D_m(d)$ dont les coordonnées sont les λ_I . On note $h(P)$ la hauteur de Weil logarithmique de P .

Définition 5.2.6 (Hauteur naïve d'un polynôme). Soit $P \in \mathbb{C}_{\leq d}[z_1, \dots, z_m]$ non nul. On suppose que

$$\forall z \in \mathbb{C}^m, \quad P(z) = \sum_{I \in \Delta_m(d)} \lambda_I z^I.$$

La hauteur naïve de P , notée $H(P)$, et la longueur de P , notée $L(P)$, sont définies par

$$\tilde{H}(P) := \max \{|\lambda_I| : I \in \Delta_m(d)\} \quad \text{et} \quad L(P) := \sum_{I \in \Delta_m(d)} |\lambda_I|.$$

¹La valeur $H(\alpha)$ ne dépend ni du choix d'un tel corps de nombres K ni du choix des coordonnées projectives de α .

Dans [101], Schmidt étend la notion de hauteur de Weil aux sous-espaces vectoriels de K^n avec K un corps de nombres. Son idée est de plonger les grassmanniennes dans les espaces projectifs via les coordonnées de Plücker et de définir la hauteur de Weil d'un espace vectoriel comme la hauteur de son image via ce plongement. Plus précisément,

Définition 5.2.7 (Hauteur de Weil d'un espace vectoriel – [101]). Soit K un corps de nombres et V un sous-espace vectoriel de dimension p de K^n . Étant donné une K -base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_p\}$ de V , on considère pour tout $I \subset [n]$ de cardinal p la matrice carrée $A_I \in \mathcal{M}_p(K)$ obtenue comme le mineur $(I, [p])$ de la matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(K)$ dont les colonnes sont les vecteurs de \mathcal{B} . On définit la *hauteur de Weil* $H(V)$ de V comme la hauteur du vecteur dont les coordonnées sont les $\det(A_I)$ lorsque I parcourt les parties de $[n]$ de cardinal p . De plus $H(V)$ ne dépend pas du choix de la base \mathcal{B} ².

Majoration de la hauteur de Weil d'un espace vectoriel. Dans la section 5.3 portant sur l'interpolation des points spéciaux, il est utile de majorer avec précision la hauteur de Weil d'un espace vectoriel V à l'aide de la hauteur de Weil des coefficients d'un système d'équations linéaires homogènes définissant V . Le lemme 5.2.11 remplit cette attente. Il nous permet de majorer la hauteur d'un sous- K -espace vectoriel $W \subset K^n$ par un polynôme en la hauteur maximale des coefficients d'un système d'équations linéaires définissant W dans K^n .

Lemme 5.2.8 (Gramain - Mignotte - Waldschmidt – [48]). Soit $P \in \mathbb{Z}[z, w]$ avec $z = (z_1, \dots, z_k)$ et $w = (w_1, \dots, w_n)$ un polynôme homogène en les variables z et de degré homogène d relativement à ces variables et de degré d_j suivant chacune des variables w_j . Soient $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ et $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ des nombres algébriques. Alors

$$h(P(\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_n)) \leq \log L(P) + dh(1, \alpha_1, \dots, \alpha_k) + \sum_{j=1}^n d_j h(\beta_j),$$

où $L(P)$ est la longueur de P , c'est-à-dire la somme des valeurs absolues des coefficients de P .

Corollaire 5.2.9. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\overline{\mathbb{Q}})$ une matrice dont on note les coefficients $a_{i,j}$. Alors $h(\det(A)) \leq \log n! + nh(1, a_{1,1}, \dots, a_{n,n}) \leq n \log n + n \max \{h(a_{i,j}) : i, j \in [n]\}$.

Démonstration. Le déterminant de A s'écrit d'après la formule de Leibniz,

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (-1)^{\epsilon(\sigma)} \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i), i}, \quad (5.2.1)$$

où \mathfrak{S}_n désigne le groupe des permutations à n éléments et $\epsilon(\sigma)$ la signature de la permutation σ . Autrement dit, le déterminant de A est obtenu en évaluant le polynôme homogène

$$P = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (-1)^{\epsilon(\sigma)} \prod_{i=1}^n X_{\sigma(i), i}.$$

Or ce polynôme P est de degré homogène n en ses n^2 variables et ses coefficients sont des entiers valant -1 ou 1 . La première inégalité s'en déduit à l'aide du lemme 5.2.8 appliqué au polynôme P et en remarquant que $L(P)$ est majoré par le cardinal de \mathfrak{S}_n , à savoir $n!$. La seconde inégalité est obtenue en majorant $n!$ par n^n et en appliquant la proposition 5.2.2. ■

²C'est une conséquence de la formule produit, voir le lemme 5.2.3.

Remarque 5.2.10. La majoration de la hauteur de $\det(A)$ issue du lemme 5.2.9 est meilleure que celle obtenue en appliquant la majoration de la proposition 5.2.2 sur la formule de Leibniz 5.2.1 lorsque les hauteurs $h(a_{i,j})$ sont comparables à l'ordre de la matrice. En effet, en procédant ainsi on obtient la majoration

$$h(\det(A)) \leq n! \log 2 + n \max \{h(a_{i,j}) : i, j \in [n]\}$$

qui est donc nettement moins fine en l'ordre n de la matrice.

Nous pouvons maintenant démontrer la majoration de la hauteur de Weil d'un espace vectoriel V en fonction de la hauteur de Weil d'une de ses bases ou d'un système linéaire d'équations homogènes le définissant.

Lemme 5.2.11. *Soient $V \subset \overline{\mathbb{Q}}^n$ un sous- $\overline{\mathbb{Q}}$ -espace vectoriel de dimension p et $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_p\}$ une base de V . Alors*

$$0 < H(V) \leq p^p B^p \text{ avec } B = \max \{H(v) : v \in \mathcal{B}\}, \quad (5.2.2)$$

Si L_1, \dots, L_{n-p} est une famille de formes linéaires de $\overline{\mathbb{Q}}^n$ telles que $V = \bigcap_i \{L_i = 0\}$ alors

$$0 < H(V) \leq (n-p)^{n-p} B^{n-p}, \quad (5.2.3)$$

où B est le maximum des hauteurs des coordonnées des L_i dans la base duale \mathcal{B}^ de \mathcal{B} .*

Démonstration. Soit K un corps de nombres contenant toutes les coordonnées des vecteurs de la base \mathcal{B} . En revenant à la définition 5.2.7, il suffit de majorer la hauteur des déterminants $\det(A_I)$ où A_I est un mineur d'ordre p d'une matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(K)$ dont les éléments sont des coordonnées des vecteurs de \mathcal{B} . Une telle majoration découle du corollaire 5.2.9 et permet d'obtenir en fin de compte la majoration 5.2.2.

La seconde majoration de $H(V)$ provient du principe de dualité de Brill-Gordan³. En effet si l'on considère la matrice $C \in \mathcal{M}_{n-p,n}(K)$ dont les lignes sont les coordonnées des formes linéaires L_i dans la base duale \mathcal{B}^* alors pour tout $J \subset [n]$ de cardinal $n-p$ on a par la dualité de Brill-Gordan l'égalité

$$\det(A_I) = (-1)^{\epsilon(J)} \gamma \det({}_J C),$$

où γ est une constante appartenant à K^* , I est le complémentaire de J dans $[n]$, $\epsilon(J) = \sum_{j \in J} j$ et ${}_J C$ est le mineur $([n], J)$ de la matrice C . Donc via la formule produit du lemme 5.2.3, la hauteur du vecteur dont les coordonnées sont les nombres $\det(A_I)$ est égale à la hauteur du vecteur dont les coordonnées sont les nombres $\det({}_J C)$. Par conséquent, il suffit de majorer les hauteurs des nombres $\det({}_J C)$, ce qui se fait à l'aide des coordonnées des formes linéaires L_i dans la base duale \mathcal{B}^* de \mathcal{B} et le corollaire 5.2.9. ■

Lemmes de Schwarz

Nous utilisons dans la section 5.3 le lemme de Schwarz suivant.

Lemme 5.2.12 (Lemme de Schwarz holomorphe). *Soient $g \in \mathcal{A}(\mathbb{D}_R)$ non nulle et $r \in \mathbb{R}$ tel que $0 < r < R$. Soient w_1, \dots, w_s des zéros de g dans le disque \mathbb{D}_r . Alors*

$$\forall z \in \mathbb{D}_r, \log |g(z)| \leq \log M(R, g) + \sum_{j=1}^s \log p_R(z, w_j),$$

où p_R est la distance pseudo-hyperbolique dans le disque \mathbb{D}_R .

³Voir [55, p. 294].

Remarque 5.2.13. Un aspect important du lemme de Schwarz 5.2.12 est qu'il n'est pas nécessaire de connaître tous les zéros de g pour appliquer ce dernier. Lorsque l'on connaît la position de certains zéros w_1, \dots, w_s de g , le lemme de Schwarz permet d'en déduire une minoration de la croissance de la fonction maximum $M(r, g)$ ce qui s'avère suffisant dans bon nombres de situations.

Dans la mesure où nous étudions les points spéciaux de fonctions méromorphes dans \mathbb{D} ou \mathbb{C} , nous utiliserons un analogue du lemme de Schwarz 5.2.12 pour ces dernières. La formule de Poisson-Jensen⁴ nous permet d'étendre le lemme 5.2.12 aux fonctions méromorphes sur un disque à condition d'exclure un ensemble de points de petite taille. La démonstration du lemme 5.2.14 est proche de celle du lemme 3.6.10 du chapitre 3.

Lemme 5.2.14 (Lemme de Schwarz méromorphe). *Soient $g \in \mathcal{M}(\overline{\mathbb{D}}_R)$ non nulle et $r \in \mathbb{R}$ tel que $0 < r < R$. Soient w_1, \dots, w_s des zéros de g dans le disque \mathbb{D}_r . Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble $E \subset \mathbb{D}_R$ tel que $\text{diam}_n(E, \mathbb{D}_R) \leq 2e\varepsilon$ avec $n := \bar{n}(R, \infty, g)$ et*

$$\forall z \in \mathbb{D}_r \setminus E, \log |g(z)| \leq \frac{R+r}{R-r} \hat{m}(r, g) + \sum_{j=1}^s \log p_R(z, w_j) + n(R, \infty, g) \log \left(\frac{1}{\varepsilon} \right),$$

où p_R est la distance pseudo-hyperbolique dans le disque \mathbb{D}_R . De plus l'ensemble E ne dépend que de ε et des pôles avec multiplicité de g dans le disque \mathbb{D}_R .

Démonstration. On applique la formule de Poisson-Jensen du théorème 2.5.4 à la fonction g sur le disque \mathbb{D}_R . Donc

$$\begin{aligned} \forall z \in \mathbb{D}_r, \log |g(z)| &= \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - |z|^2}{|Re^{i\theta} - z|^2} \log |g(Re^{i\theta})| \frac{d\theta}{2\pi} + \sum_{|w| < R} \nu_\infty g(w) \log \left| \frac{R^2 - \bar{w}z}{R(z-w)} \right| \\ &\quad - \sum_{|w| < R} \nu_0 g(w) \log \left| \frac{R^2 - \bar{w}z}{R(z-w)} \right|, \end{aligned}$$

Or

$$\forall z \in \mathbb{D}_r, \log |g(z)| \leq \frac{R+r}{R-r} \hat{m}(R, g) - \log \prod_{|w| < R} p_R(z, w)^{\nu_\infty g(w)} - \sum_{j=1}^s \log p_R(z, w_j).$$

D'après le corollaire 2.7.9 du chapitre 2, l'ensemble

$$E(\nu_\infty g, \varepsilon) = \left\{ z \in \mathbb{D}_R : \prod_{|w| < R} p_R(z, w)^{\nu_\infty g(w)} \leq \varepsilon^{|\nu_\infty g|} \right\}.$$

est de n -ième diamètre pseudo-hyperbolique dans \mathbb{D}_R au plus $2e\varepsilon$. Donc le lemme est démontré en prenant pour E l'ensemble $E(\nu, \varepsilon)$. ■

5.3 Interpolation avec évitement

Dans cette section, nous allons montrer que lorsque $\mathcal{X} \subset \mathbb{C}^m$ est un ensemble paramétré par des fonctions holomorphes ou méromorphes sur un disque de \mathbb{C} , on peut interpoler ses points algébriques de degré et hauteur bornés par une famille finie de $\overline{\mathbb{Q}}$ -hypersurfaces algébriques de \mathbb{C}^m dont on majore le nombre, le degré et la hauteur grâce à la hauteur des points interpolés. Qui plus est on peut exclure certaines $\overline{\mathbb{Q}}$ -hypersurfaces de \mathbb{C}^m de l'interpolation à condition que celles-ci forment un petite sous-variétés algébriques de $\overline{\mathbb{Q}}[z_1, \dots, z_m]$. Masser a démontré dans [77] le lemme d'interpolation 1.6.31 ci-dessous

⁴Voir théorème 2.5.4 du chapitre 2.

pour les points algébriques de degré et hauteur bornés contenus dans un graphe holomorphe. Ce lemme affirme que les points algébriques de hauteur bornée et de degré borné d'un graphe holomorphe sont interpolables par une petite famille de \mathbb{Z} -hypersurfaces algébriques de type contrôlé par la hauteur et le degré des points interpolés.

Rappel lemme 1.6.31 (Masser – [77]). *Soient $g \in \mathcal{A}(\mathbb{D}_R)$ et $r \in \mathbb{R}$ tels que $0 < r < R$. Notons \mathcal{X}_r le graphe de g restreint à \mathbb{D}_r . Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et $\varepsilon > 0$ tels que $\sqrt{8k\varepsilon} < 1$, il existe une suite (\mathcal{S}_d) de familles finies de polynômes non-nuls de $\mathbb{Z}[z, w]$ telle que*

- l'ensemble $\mathcal{X}_r(\overline{\mathbb{Q}}_k, e^d)$ est contenu dans une hypersurface définie par un polynôme de \mathcal{S}_d ,
- les polynômes de \mathcal{S}_d ont un type contrôlé. Plus précisément

$$\forall P \in \mathcal{S}_d, \deg(P) \ll \frac{d}{\varepsilon \log d} \quad \text{et} \quad h(P) \ll \frac{d^2}{\varepsilon \log d},$$

- le cardinal de la famille \mathcal{S}_d est un grand O de

$$\left(\frac{R}{R-r}\right)^2 \max\{R, M(R, g)\}^\varepsilon d^\varepsilon.$$

Les constantes omises ne dépendent que du degré k et sont explicites.

Remarque 5.3.1. Il revient au même d'interpoler les points de $\mathcal{X}_r(\overline{\mathbb{Q}}_k, e^d)$ par une \mathbb{Q} -hypersurface définie par un polynôme dont la hauteur de Weil des coefficients vérifie une majoration de la forme $d^2(\log d)^{-1}$. En effet en chassant les dénominateurs des coefficients de ce polynôme on obtient une \mathbb{Z} -hypersurface dont la hauteur vérifie encore une borne similaire.

Nous souhaitons démontrer un nouveau lemme d'interpolation en nous inspirant de la démonstration de Masser dans [77]. Nous montrons qu'il est possible d'exiger que les hypersurfaces d'interpolation n'appartiennent pas à une petite famille d'hypersurfaces choisies à l'avance. Avant d'énoncer les résultats principaux de cette section introduisons quelques définitions et notations. Dans la suite on munit toujours l'espace vectoriel $K_d[z_1, \dots, z_m]$ d'une structure de K -variété algébrique via l'isomorphisme entre $K_d[z_1, \dots, z_m]$ et K^D induit par l'ordre lexicographique sur les monômes où $D = D_m(d)$ est le nombre de monômes de k variables et de degré total au plus d . Le choix de l'ordre lexicographique sur les monômes de $K_d[z_1, \dots, z_m]$ est arbitraire.

Rappel définition 1.6.32. Soit K un sous-corps de \mathbb{C} . Une K -suite d'évitement est une suite croissante (E_d) de K -variétés algébriques telle que pour tout $d \in \mathbb{N}$

- la variété algébrique E_d est une sous-variété fermée de $K_d[w_0, \dots, w_m]$,
- la dimension de Krull des E_d ne croît pas trop vite en comparaison de la dimension de Krull de $K_{\leq d}[w_0, \dots, w_m]$. Plus précisément, il existe un exposant $\alpha > 0$ tel que

$$1 - \frac{\dim(E_d)}{L_{m+1}(d)} \gg \frac{1}{d^\alpha},$$

où \dim désigne la dimension de Krull,

- la croissance du degré des variétés E_d n'est pas trop rapide. Plus précisément, il existe un exposant $\beta \in [0, \infty]$ tel que

$$\log \deg(E_d) \ll d^\beta, \tag{5.3.1}$$

où \deg désigne le degré de la variété E_d . Lorsque $\beta = \infty$, la minoration 5.3.1 n'impose aucune contrainte sur le degré des variétés E_d .

On dit de plus que la K -suite d'évitement (E_d) est de *format* (α, β) .

Le lemme de Siegel Un polynôme P non nul de $\overline{\mathbb{Q}}_d[w_0, \dots, w_m]$ s'identifie à un vecteur non nul de $\overline{\mathbb{Q}}^L$ où L est la dimension de l'espace vectoriel $\overline{\mathbb{Q}}_d[w_0, \dots, w_m]$. Chercher un polynôme P non nul dans un sous-espace vectoriel W de $\overline{\mathbb{Q}}_d[w_0, \dots, w_m]$ de petite hauteur revient donc à chercher un vecteur non nul de petite hauteur dans un sous-espace vectoriel de $\overline{\mathbb{Q}}^L$. Or pour démontrer le théorème d'interpolation 1.6.36, nous allons définir un sous-espace vectoriel W de $\overline{\mathbb{Q}}^L$ à l'aide d'équations linéaires dont les coefficients sont donnés par les points de \mathbb{C}^m que le polynôme P doit interpoler. On cherche donc une majoration de la hauteur d'un petit vecteur non nul dans un sous-espace vectoriel W en fonction de la hauteur des coefficients d'un système linéaire définissant W . Ce type d'énoncés a été formalisé pour la première fois par Siegel en 1929 dans [105] en se basant sur un travail préliminaire de Thue et est communément appelé un *lemme de Siegel*.

Lemme 5.3.2 (Siegel – [105]). *Soit $W \subset \mathbb{Q}^n$ un sous- \mathbb{Q} -espace vectoriel de dimension $p \geq 1$. Alors il existe un vecteur non nul $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{Z}^n \cap W$ tel que*

$$\max_i |v_i| \leq \left\lfloor (nB)^{\frac{n-p}{p}} \right\rfloor,$$

où B est un entier majorant le module des coefficients d'un système d'équations linéaires à coefficients dans \mathbb{Z} définissant W .

Depuis le lemme de Siegel a connu de nombreuses généralisations dans plusieurs directions. Dans [17], Bombieri et Vaaler ont étendu ce lemme à n'importe quel corps de nombres.

Théorème 5.3.3 (Bombieri-Vaaler – [17]). *Soient K un corps de nombres de degré $k \in \mathbb{N}^*$ au-dessus \mathbb{Q} et de discriminant \mathcal{D}_K et $n \in \mathbb{N}^*$. Soit W un sous- K -espace vectoriel de K^n de dimension $p \geq 1$. Alors il existe un vecteur $v \in W$ non nul tel que*

$$H(v) \leq \left\{ n \binom{n}{p}^{\frac{1}{p}} |\mathcal{D}_K|^{\frac{1}{k}} \right\}^{\frac{1}{2}} H(W)^{\frac{1}{p}},$$

où $H(W)$ est la hauteur de l'espace vectoriel W au sens de Schmidt⁵.

Récemment, Fukshansky a généralisé le lemme de Siegel 5.3.2 dans une nouvelle direction. Dans [39] il propose de borner la hauteur d'un vecteur $v \in W \setminus \bigcup_i E_i$ où W et les E_i sont des sous- K -espaces vectoriels de K^n tels que les dimensions des E_i soient strictement inférieures à la dimension de W . Sa borne dépend à la fois de la hauteur de W et de celles des E_i . Il obtient ainsi le théorème 5.3.4 ci-dessous.

Théorème 5.3.4 (Fukshansky – [39]). *Soit K un corps de nombres de degré k et de discriminant \mathcal{D}_K . Soient $L \in \mathbb{N}^*$ et W, E_1, \dots, E_L des sous- K -espaces vectoriels de K^n avec $n \geq 2$ et de dimensions respectives p, q_1, \dots, q_L . Notons*

$$C_{K,n}(p, q) := 2^{p(k+3)} |\mathcal{D}_K|^{\frac{p}{2}} (pk)^{\frac{p}{p-q}} \binom{nk}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor k}^{\frac{1}{2k(p-q)}}.$$

Supposons que $\max\{q_1, \dots, q_L\} < p$. Alors il existe un vecteur non nul $v \in W \setminus \bigcup_i E_i$ tel que

$$H(v) \leq C_{K,n}(p, q) H(W)^k \left\{ \left(\sum_{i=1}^L \frac{1}{H(E_i)^k} \right)^{\frac{1}{(p-q)k}} + L^{\frac{1}{(p-q)k+1}} \right\}. \quad (5.3.2)$$

⁵Voir la section 5.2 pour la définition.

Malheureusement la borne 5.3.2 n'est pas assez fine pour remplacer celle fournie par le lemme de Siegel de [48] dans la démonstration de l'interpolation de Masser 1.6.31. En effet pour établir son lemme d'interpolation, Masser utilise dans [77] le fait que la puissance sur la hauteur $H(W)$ dans la majoration de $H(v)$ tend vers zéro lorsque la dimension de l'espace vectoriel W tend vers l'infini comme c'est le cas pour la majoration du théorème 5.3.3. La borne 5.3.2 de Fukshansky ne vérifie pas cette propriété. Toutefois en raffinant la dépendance de la borne de Fukshansky par rapport aux dimensions des E_i il est possible d'améliorer la dépendance de celle-ci par rapport à $H(W)$ lorsque les dimensions des E_i sont suffisamment petites devant la dimension de W . Un tel résultat a été obtenu par Gaudron dans [44] grâce à des arguments de géométrie des nombres adéliques. Par la suite Gaudron et Rémond ont obtenu dans [45] un lemme de Siegel où le lieu d'évitement n'est plus seulement une famille d'espaces vectoriels mais un fermé de Zariski de l'espace des polynômes $K_{\leq d}[z_1, \dots, z_n]$ vu comme l'espace affine K^D .

Théorème 5.3.5 (Gaudron-Rémond – [45]). *Soit K un corps de nombres de degré $k \in \mathbb{N}^*$ et de discriminant \mathcal{D}_K . Soient W un sous- K -espace vectoriel de K^n de dimension p et I un idéal de $K[X_1, \dots, X_n]$ engendré par une famille de polynômes de degré au plus $L \geq 1$. On note q la dimension de Krull de $Z(I)$ et on suppose que $q < p$. Alors d'une part il existe un vecteur $v \in (E \cap \mathcal{O}_K^n) \setminus Z(I)$ tel que*

$$H(v) \leq p \left(\max \left\{ 1, \left(\frac{2}{\pi} \right)^{r_2} \sqrt{\mathcal{D}_K} \right\} \right)^{\frac{2p-q}{(p-q)k}} L^{\frac{1}{k}} H(W)^{\frac{1}{p-q}}, \quad (5.3.3)$$

avec r_2 le nombre de places complexes de K . D'autre part pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un vecteur $v \in (\mathcal{O}_{\mathbb{Q}}^n \cap E \otimes_K \mathbb{Q}) \setminus Z(I)$ tel que

$$H(v) \leq \max \left\{ 1, \exp \left(\frac{p(H_p - 1)}{2(p-q)} \right) + \varepsilon \right\} H(W)^{\frac{1}{p-q}}, \quad (5.3.4)$$

où $H_p := 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{p}$.

Remarque 5.3.6. Contrairement au théorème de Fukshansky 5.3.4, l'exposant sur le terme $H(W)$ dans les deux majorations 5.3.3 et 5.3.4 du théorème 5.3.5 tend vers zéro lorsque la dimension de l'espace vectoriel W est grand devant la dimension de Krull de l'idéal I . C'est ce lemme de Siegel que nous utilisons dans le paragraphe suivant pour démontrer des lemmes d'interpolations.

Démonstrations du théorème 1.6.36. Le lemme d'interpolation de Masser 1.6.31 repose sur le résultat technique suivant démontré dans [77].

Lemme 5.3.7 (Masser – [77]). *Soient $g \in \mathcal{O}(\mathbb{D}_R)$ et $r \in \mathbb{R}$ tels que $0 < 2r < R$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $d \in \mathbb{N}$ tels que $d \geq \sqrt{8k}$ et pour tout $F \subset \mathcal{X}_r(\overline{\mathbb{Q}}_k, e^d)$ tel que*

$$\frac{r}{\text{diam}(\pi_1(F))} > (4d)^{\frac{96k^4}{d^2}} e^{48k^4} \max \{2r, M(2r, g)\}^{\frac{16k^2}{d}}, \quad (5.3.5)$$

il existe une \mathbb{Z} -hypersurface de \mathbb{C}^2 contenant $\Gamma_r^g(\overline{\mathbb{Q}}_k, e^d)$ et définie par un polynôme $P \in \mathbb{Z}_{\leq d}[z, w]$ tel que

$$h(P) \leq 2^{\frac{1}{k^2}} (d+1)^2 e^{d^2}.$$

Remarque 5.3.8. On déduit du lemme 5.3.7 ci-dessus, le lemme 1.6.31 en remarquant d'une part qu'il suffit de l'ordre de $\left(\frac{r}{\delta}\right)^2$ disques de rayon δ pour recouvrir entièrement le disque \mathbb{D}_r et d'autre part le membre de droite de l'inégalité 5.3.5 ne dépend pas de F tandis que le membre de gauche tend vers l'infini lorsque le diamètre de $\pi_1(F)$ tend vers zéro. On recouvre alors le disque \mathbb{D}_r par suffisamment de disques de petit rayon δ de sorte

que tous les points à interpoler ont leur première coordonnée dans l'un de ces disques et le diamètre 2δ de ceux-ci est suffisamment petit pour appliquer le lemme 5.3.7 à chacun d'entre eux.

La démonstration du lemme 5.3.7 repose sur le lemme de Schwarz 5.2.12 et une variante du lemme de Siegel démontrée par Gramain, Mignotte et Waldschmidt dans [121]. Les quatre lemmes 5.3.14, 5.3.16, 5.3.17 et 5.3.18 ci-dessous sont des analogues du lemme technique de Masser 5.3.7 que nous allons utiliser pour démontrer le théorème d'interpolation 1.6.36. Les deux premiers lemmes reposent sur la première partie du théorème de Gaudron-Rémond 5.3.5 tandis que les deux derniers utilisent la seconde partie de ce même théorème. Avant de démontrer les quatre lemmes, introduisons quelques notations utiles.

Notation 5.3.9. Soient $d \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}^*$. On note

$$\Lambda_m(d) := \{n \in \mathbb{N}^m : |n| = d\} \quad \text{et} \quad \Delta_m(d) := \{n \in \mathbb{N}^m : |n| \leq d\},$$

où $|n| = \sum n_i$. L'ensemble $\Lambda_m(d)$ est en bijection avec l'ensemble des monômes de degré exactement d en m variables et l'ensemble $\Delta_m(d)$ est en bijection avec l'ensemble des monômes de degré au plus d en m variables. Le cardinal de $\Lambda_m(d)$, respectivement $\Delta_m(d)$, est noté $L_m(d)$, respectivement $D_m(d)$.

Définition 5.3.10 (Matrice et déterminant d'interpolation). Soient $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^{m+1}$ une fonction et $\xi := (\xi_0, \dots, \xi_k) \in \Omega^k$. Pour tout $d \in \mathbb{N}$, on définit la *matrice d'interpolation* $I_d(g, \xi) \in \mathcal{M}_{k,L}(\mathbb{C})$ avec $L := L_{m+1}(d)$ par

$$\forall i \in \{0, \dots, k\}, \quad \forall j \in \Lambda_{m+1}(d), \quad I_d(g, \xi)_{i,j} = g_0(\xi_i)^{j_0} \dots g_m(\xi_i)^{j_m}. \quad (5.3.6)$$

On note $\Delta_d(g, \xi)$ le maximum des valeurs absolues des mineurs d'ordre maximaux de la matrice $I_d(g, \xi)$. Lorsque $k = L$, le nombre $\Delta_d(g, \xi)$ est appelé le *déterminant d'interpolation* de l'ensemble de points $\{g(\xi_0), \dots, g(\xi_m)\}$.

Dans bien des cas l'ordre des éléments la suite ξ_0, \dots, ξ_m de la définition 5.3.10 importe peu mais la multiplicité de ces derniers dans la suite ξ est importante. C'est la raison pour laquelle on introduit la notation ci-dessous.

Notation 5.3.11. Soient $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^m$ et $\nu : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$ une fonction à support fini. On note $K_d(g, \nu)$ le noyau de la matrice $I_d(g, \xi)$ où $\xi = (\xi_0, \dots, \xi_k)$ est une énumération avec multiplicité des éléments du support de ν . Le noyau $K_d(g, \nu)$ est indépendant du choix de l'ordre des éléments de l'énumération ξ .

Remarque 5.3.12. Soient $\xi_0, \dots, \xi_m \in \Omega$ et $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^m$. Il existe un polynôme *homogène* $P \in \mathbb{C}_d[z_0, \dots, z_m]$ non nul s'annulant en chaque point $(g_0(\xi_j), \dots, g_m(\xi_j))$ pour $j \in \{0, \dots, m\}$ si et seulement si le déterminant $\Delta_d(g, \xi)$ est nul. C'est la raison pour laquelle $I_d(g, \xi)$ est appelé un déterminant d'interpolation.

Notation 5.3.13. Pour tout corps de nombres K , on introduit la constante

$$C_K := \max \left\{ 1, \left(\frac{2}{\pi} \right)^k \sqrt{\mathcal{D}_K} \right\} \quad \text{avec} \quad k = [K : \mathbb{Q}],$$

où \mathcal{D}_K le discriminant de K .

Rappel notation 1.6.35. Soient K un sous-corps de \mathbb{C} et $g \in \mathcal{M}(\mathbb{D}_R)^{m+1}$. Pour tout $d \in \mathbb{N}$, on note $V_d^K(g) := \{P \in K_d[w_0, \dots, w_m] \mid P \circ g \equiv 0\}$.

Lemme 5.3.14. Soient K un corps de nombres de degré $k \in \mathbb{N}^*$, $m \in \mathbb{N}^*$, $g := (g_0, \dots, g_m) \in \mathcal{O}(\mathbb{D}_R)^{m+1}$, $r, \eta \in \mathbb{R}$ tels que $0 < r < R$, $0 < \eta < 1$, $D \in \mathbb{N}^*$, $d \in \mathbb{N}$ et $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante telle que $\phi(x) \leq x$ et $\phi(0) = 1$. Notons \mathcal{X}_r l'image de \mathbb{D}_r par g . Soient $F \subset \mathbb{D}_r$ un ensemble tel que $g(F) \subset \mathcal{X}_r(K, e^{\phi(d)})$ et $E \subset K_d[w_0, \dots, w_m]$ un fermé de Zariski tel que

$$V_d^K(g) \subset E, \dim(E) \leq \eta L_{m+1}(d) \text{ et } \deg(E) \leq D.$$

On suppose que

$$-(1 - \eta) \log(\text{diam}(F, \mathbb{D}_R)) \gg \frac{1}{L_{m+1}(d)} \left[\log D + d \log^+ M(R, g) + d\phi(d) \right]. \quad (5.3.7)$$

Alors il existe un polynôme P de $K_d[w_0, \dots, w_m] \setminus E$ tel que la K -hypersurface définie par P contienne l'ensemble $g(F)$ et

$$h(P) \ll \log L + \frac{d\phi(d)}{1 - \eta}.$$

Les constantes omises ne dépendent que de K .

Démonstration. On suppose dans un premier temps que le cardinal de F est plus grand ou égal à l'entier s défini par

$$s := \left\lfloor \frac{(1 - \eta)L}{2} \right\rfloor \text{ avec } L := L_{m+1}(d).$$

On choisit un sous-ensemble $M \subset F$ de cardinal s . Notons W le noyau du morphisme de K^L dans K^s dont la matrice dans les bases canoniques de K^L et K^s est $I_d(g, \xi)$ avec $M = \{\xi_1, \dots, \xi_s\}$. On note p la dimension de W en tant que K -espace vectoriel et q la dimension de Zariski de E . D'après les hypothèses de l'énoncé nous avons la minoration

$$p - q \geq L - s - q \geq (1 - \eta)L - s \geq \frac{1 - \eta}{2}L.$$

Donc les conditions du théorème 5.3.5 sont vérifiées par le sous-espace vectoriel W de K^L et le fermé de Zariski E . D'après ce théorème il existe un vecteur $v \in W \setminus E$ non nul dont la hauteur $H(v)$ est majorée par le second membre de l'inégalité 5.3.3 et notons P le polynôme homogène dont les coefficients sont donnés par le vecteur v . Montrons que la K -hypersurface définie par P contient en fait F . À cette fin on applique le lemme de Schwarz 5.2.12 à la fonction holomorphe $P \circ g$ qui est non nulle puisque $P \notin V_d^K(g)$. Alors

$$\forall z \in \mathbb{D}_r, \log |(P \circ g)(z)| \leq \log M(R, P \circ g) + \sum_{j=1}^s \log p_R(z, w_j).$$

Supposons par l'absurde qu'il existe $w \in F \setminus M$ tel que $(P \circ g)(w) \neq 0$. D'après le lemme 5.2.4 et la majoration précédente

$$\begin{aligned} -k \log H((P \circ g)(w)) &\leq \log |(P \circ g)(w)| \leq \log M(R, P \circ g) + \sum_{j=1}^s \log p_R(w, w_j) \\ &\leq s \log(\text{diam}(F, \mathbb{D}_R)) + h(P) + \log L + d \log^+ M(R, g). \end{aligned} \quad (5.3.8)$$

De plus d'après le lemme 5.2.8

$$\begin{aligned} \log H((P \circ g)(w)) &\leq \log L(P) + \sum_{j=1}^m d_j h(g_j(w)) \\ &\leq h(P) + \log L + d\phi(d) \ll h(P) + d\phi(d), \end{aligned} \quad (5.3.9)$$

où $L(P)$ est la longueur de P et d_j le degré de P par rapport à la variable z_j . Or on peut majorer la hauteur du polynôme P grâce à l'inégalité 5.3.3. De plus la hauteur $H(W)$ est majorée par $s^s e^{sd\phi(d)}$ d'après le corollaire 5.2.9 car l'espace vectoriel W est par

construction le lieu des zéros de s formes linéaires⁶ dont les coefficients sont de hauteur de Weil au plus $e^{d\phi(d)}$. Donc

$$\begin{aligned} h(P) \leq h(v) &\leq \log p + \frac{2p-q}{(p-q)k} \log C_K + \frac{1}{k} \log D + \frac{1}{p-q} \log H(W) \\ &\leq \log p + \frac{2p-q}{(p-q)k} \log C_K + \frac{1}{k} \log D + \frac{1}{p-q} (s \log s + sd\phi(d)) \quad (5.3.10) \\ &\ll \log p + \frac{\log C_K}{1-\eta} + \frac{\log D}{k} + \frac{s \log s + sd\phi(d)}{(1-\eta)L} \ll \log D + \frac{sd\phi(d)}{(1-\eta)L}. \end{aligned}$$

D'où en combinant les inégalités 5.3.8, 5.3.9 et 5.3.10, on obtient

$$\begin{aligned} -\log(\text{diam}(F, \mathbb{D}_R)) &< \frac{1}{s} h(P) + \frac{k}{s} \log H((P \circ g)(w)) + \frac{\log L}{s} + \frac{d}{s} \log^+ M(R, g) \\ &\ll \frac{1}{s} h(P) + \frac{\log L}{s} + \frac{d}{s} \log^+ M(R, g) + \frac{d\phi(d)}{s} \\ &\ll \frac{\log D}{(1-\eta)L} + \frac{d}{(1-\eta)L} \log^+ M(R, g) + \frac{d\phi(d)}{(1-\eta)L} \\ &\ll \frac{1}{(1-\eta)L} \left[\log D + d \log^+ M(R, g) + d\phi(d) \right]. \end{aligned}$$

Cette dernière inégalité est contradictoire. Donc le polynôme P doit s'annuler en tous les points de $g(F)$. De plus la majoration de la hauteur logarithmique de P est obtenue de la manière suivante

$$h(P) \ll \log L + \frac{sd^{1-m}\phi(d)}{1-\eta} \ll \log L + \frac{d\phi(d)}{1-\eta}.$$

On suppose maintenant que le cardinal de M est strictement plus petit que s . On pose $W = K_d(g, \nu)$ où $\nu : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{N}$ est n'importe quelle fonction dont le support coïncide avec M et telle que $\sum_{w \in \mathbb{C}} \nu(w) = s$. On applique le théorème 5.3.5 à W et E pour obtenir le polynôme souhaité. ■

Lemme 5.3.15. Soient $r, R \in \mathbb{R}$ tels que $0 < r < R$ et $E \subset \mathbb{D}_r \cap \overline{\mathbb{Q}}$ tel que tous les points de E sont de hauteur de Weil au plus B et de degré au plus $k \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\forall d \in \mathbb{N}, d < \#E \implies \text{diam}_d(E, \mathbb{D}_r) \geq \left(\frac{1}{R-r} \right) \frac{1}{(2B)^k}.$$

Démonstration. D'après la proposition 2.7.4 du chapitre 2,

$$\text{diam}_d(E, \mathbb{D}_r) \geq \frac{1}{2} \min \{p_R(z, w) : z, w \in E, z \neq w\}.$$

D'après le lemme 5.2.4 la distance euclidienne entre deux nombres algébriques distincts de hauteur au plus B et de degré au plus k est au moins $2^{-k} B^{-2k}$. Donc

$$\text{diam}_d(E, \mathbb{D}_r) \geq \frac{2^{-(k+1)} B^{-2k}}{R-r} \geq \frac{(2B)^{-2k}}{R-r}.$$

Ce qu'il fallait démontrer. ■

En remplaçant le lemme de Schwarz 5.2.12 par sa variante 5.2.14 pour les fonctions méromorphes dans la démonstration du lemme précédent, on obtient l'énoncé 5.3.16 ci-dessous.

⁶Ces formes linéaires peuvent être linéairement liées.

Lemme 5.3.16. Soient K un corps de nombres de degré $k \in \mathbb{N}^*$, $m \in \mathbb{N}^*$, $g := (g_0, \dots, g_m) \in \mathcal{M}(\overline{\mathbb{D}}_R)^{m+1}$, $r, \eta \in \mathbb{R}$ tels que $0 < r < R$, $0 < \eta < 1$, $D \in \mathbb{N}^*$, $d \in \mathbb{N}$ et $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction croissante telle que $\phi(x) \leq x$ et $\phi(0) = 1$. Notons \mathcal{X}_r l'image de \mathbb{D}_r par g . Soient $F \subset \mathbb{D}_r$ un ensemble tel que $g(F) \subset \mathcal{X}_r(K, e^{\phi(d)})$ et $E \subset K_d[w_0, \dots, w_m]$ un fermé de Zariski tel que

$$V_d^K(g) \subset E, \dim(E) \leq \eta L_{m+1}(d) \text{ et } \deg(E) \leq D.$$

On suppose que

$$-(1 - \eta) \frac{R - r}{R + r} \log(\text{diam}(F, \mathbb{D}_R)) \gg \frac{1}{L_{m+1}(d)} \left[\log D + d\hat{m}(R, g) + d\phi(d)n(R, \infty, g) \right]. \quad (5.3.11)$$

Alors il existe un polynôme P de $K_d[w_0, \dots, w_m] \setminus E$ tel que la K -hypersurface définie par P contienne l'ensemble $g(F)$ et

$$h(P) \ll \log L + \frac{d\phi(d)}{1 - \eta}.$$

Les constantes omises ne dépendent que de K et de $\bar{n}(R, \infty, g)$.

Démonstration. On reprend le début de la démonstration du lemme 5.3.14 et ses notations jusqu'à l'application du lemme de Schwarz 5.2.12. On peut supposer que $s > n$ avec $n := \bar{n}(R, \infty, g)$. On note $\varepsilon := (4e)^{-1} \text{diam}_n(F, \mathbb{D}_R)$ où F est un sous-ensemble fixé de \mathbb{D}_r tel que $g(F) \subset \mathcal{X}_r(K, e^{\phi(d)})$ de cardinal s . Or $P \circ g$ n'est pas nulle puisque $P \notin V_d^K(g)$. Donc le lemme de Schwarz méromorphe 5.2.14 affirme qu'il existe un ensemble exceptionnel $E \subset \mathbb{D}_R$ tel que $\text{diam}_n(E, \mathbb{D}_R) \leq 2e\varepsilon$ et

$$\begin{aligned} \forall z \in \mathbb{D}_r \setminus E, \log |(P \circ g)(z)| &\leq \left(\frac{R + r}{R - r} \right) \hat{m}(R, P \circ g) + \sum_{j=1}^s \log p_R(z, w_j) \\ &+ n(R, \infty, P \circ g) \log \left(\frac{1}{\varepsilon} \right). \end{aligned}$$

D'après le lemme 2.7.22 et le lemme 5.3.15

$$\log \varepsilon \gg \log \text{diam}_n(F, \mathbb{D}_R) \geq \log \text{diam}_n(g(F), \mathbb{D}_R) \gg -\log(R - r) - \phi(d),$$

puisque les éléments de $g(F)$ sont tous des points algébriques de hauteur logarithmique plus petite que $\phi(d)$. Supposons par l'absurde qu'il existe un $w \in F \setminus (M \cup E)$ tel que $(P \circ g)(w) \neq 0$. Alors $\log |(P \circ g)(w)| \geq -k \log H(P_g(w))$. En procédant comme dans la démonstration du lemme 5.3.14, on obtient la majoration

$$\log h(P) \ll \log D + \frac{sd\phi(d)}{(1 - \eta)L}.$$

De plus d'après l'inégalité de Bernstein-Walsh 3.2.6

$$\begin{aligned} \hat{m}(R, P \circ g) &= \int_0^{2\pi} \log^+ |(P \circ g)(Re^{i\theta})| \frac{d\theta}{2\pi} \leq \log \|P\|_{\mathbb{D}^m} + d\hat{m}(R, g) \\ &\leq \log H(P) + \log L + d\hat{m}(R, g), \end{aligned}$$

et $n(R, \infty, P \circ g) \leq dn(R, \infty, g)$. D'où en combinant les inégalités précédentes

$$\begin{aligned} -\frac{R - r}{R + r} \log(\text{diam}(F, \mathbb{D}_R)) &< \frac{1}{s} h(P) + \frac{k}{s} \log H((P \circ g)(w)) + \frac{\log D}{s} \\ &+ \frac{d}{s} n(R, \infty, g) \log \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) + \frac{d}{s} \hat{m}(R, g) \\ &\ll \frac{1}{(1 - \eta)L} \left[\log D + d\hat{m}(R, g) + d\phi(d)n(R, \infty, g) + d\phi(d) \right]. \end{aligned}$$

Cette dernière inégalité est en contradiction avec 5.3.11. Donc le polynôme P doit s'annuler en tous les points de $g(F)$. De plus la majoration finale de la hauteur de P est obtenue de la manière suivante

$$h(P) \ll \log D + \frac{sd\phi(d)}{(1-\eta)L} \ll \log D + \frac{d\phi(d)}{1-\eta}.$$

Ce qu'il fallait démontrer. \blacksquare

Les deux lemmes 5.3.17 et 5.3.18 ci-dessous affirment qu'il est possible d'interpoler les points algébriques de degré et hauteur bornés contenus dans une courbe holomorphe ou méromorphe par des polynômes à coefficients algébriques de hauteur contrôlée. La différence avec les deux lemmes d'interpolation précédents est que les coefficients des polynômes obtenus peuvent ne pas appartenir au corps de nombres engendré par les coordonnées des points interpolés.

Lemme 5.3.17. Soient $k \in \mathbb{N}^*$, $m \in \mathbb{N}^*$, $g := (g_0, \dots, g_m) \in \mathcal{A}(\overline{\mathbb{D}}_R)^{m+1}$, $r, \eta \in \mathbb{R}$ tels que $0 < r < R$, $0 < \eta < 1$, $d \in \mathbb{N}$ et $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante telle que $\phi(x) \leq x$ et $\phi(0) = 1$. Notons \mathcal{X}_r l'image de \mathbb{D}_r par g . Soient $F \subset \mathbb{D}_r$ un ensemble tel que $g(F) \subset \mathcal{X}_r(\overline{\mathbb{Q}}_k, e^{\phi(d)})$ et $E \subset \overline{\mathbb{Q}}_d[w_0, \dots, w_m]$ un fermé de Zariski tel que

$$V_d^{\overline{\mathbb{Q}}}(g) \subset E \quad \text{et} \quad \dim(E) \leq \eta L_{m+1}(d).$$

On suppose que

$$-(1-\eta) \log(\text{diam}(F, \mathbb{D}_R)) \gg \frac{1}{L_{m+1}(d)} \left[d \log^+ M(R, g) + d\phi(d) \right]. \quad (5.3.12)$$

Alors il existe un polynôme P de $\overline{\mathbb{Q}}_d[w_0, \dots, w_m] \setminus E$ tel que la $\overline{\mathbb{Q}}$ -hypersurface définie par P contienne l'ensemble $g(F)$ et

$$h(P) \ll \frac{d\phi(d)}{1-\eta}.$$

Les constantes omises ne dépendent que de k .

Démonstration. La démonstration étant similaire à celle du lemme 5.3.14, on reprend les notations introduites dans la démonstration de ce dernier. On choisit un corps de nombres K de sorte qu'il existe une famille génératrice de l'idéal $I(E)$ dont les coefficients soient dans K et les éléments $g(w_0), \dots, g(w_s)$ soient dans K . D'après la seconde partie du théorème 5.3.5, il existe un vecteur $v \in \overline{\mathbb{Q}}^L \cap W \setminus E$ tel que

$$\begin{aligned} h(v) &\leq \log \max \left\{ 1, \exp \left(\frac{p(H_p - 1)}{2(p - q)} \right) + 1 \right\} + \frac{1}{p - q} \log H(W) \\ &\leq \log^+ \left(\exp \left(\frac{p(H_p - 1)}{2(p - q)} \right) + 1 \right) + \frac{1}{p - q} \log H(W) \ll \frac{p(H_p - 1)}{2(p - q)} + \frac{1}{p - q} \log H(W) \\ &\ll \frac{\log L}{1 - \eta} + \frac{\log H(W)}{(1 - \eta)L} \ll \frac{sd\phi(d)}{(1 - \eta)L}. \end{aligned}$$

Notons P le polynôme homogène dont les coefficients sont donnés par le vecteur v et supposons par l'absurde que P n'interpole pas le point $g(w)$ un $w \in F \setminus M$. D'après le lemme de Schwarz 5.2.12

$$\begin{aligned} -\log(\text{diam}(F, \mathbb{D}_R)) &< \frac{k+1}{s} h(P) + \frac{\log L}{s} + \frac{d}{s} \log^+ M(R, g) + \frac{mkd\phi(d)}{s} \\ &\ll \frac{1}{(1-\eta)L} \left[d \log^+ M(R, g) + d\phi(d) \right]. \end{aligned}$$

Cette inégalité est contradictoire avec les hypothèses de l'énoncé. On obtient la majoration de la hauteur de P comme dans le lemme précédent. \blacksquare

Lemme 5.3.18. Soient $k \in \mathbb{N}^*$, $m \in \mathbb{N}^*$, $g := (g_0, \dots, g_m) \in \mathcal{M}(\overline{\mathbb{D}}_R)^{m+1}$, $r, \eta \in \mathbb{R}$ tels que $0 < r < R$, $0 < \eta < 1$, $d \in \mathbb{N}$ et $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante telle que $\phi(x) \leq x$ et $\phi(0) = 1$. Notons \mathcal{X}_r l'image de \mathbb{D}_r par g . Soient $F \subset \mathbb{D}_r$ un ensemble tel que $g(F) \subset \mathcal{X}_r(\overline{\mathbb{Q}}_k, e^{\phi(d)})$ et $E \subset \overline{\mathbb{Q}}_d[w_0, \dots, w_m]$ un fermé de Zariski tel que

$$V_d^{\overline{\mathbb{Q}}}(g) \subset E \quad \text{et} \quad \dim(E) \leq \eta L_{m+1}(d).$$

On suppose que

$$-(1-\eta) \frac{R-r}{R+r} \log(\text{diam}(F, \mathbb{D}_R)) \gg \frac{1}{L_{m+1}(d)} \left[d \log^+ M(R, g) + d \phi(d) n(R, \infty, g) \right]. \quad (5.3.13)$$

Alors il existe un polynôme P de $\overline{\mathbb{Q}}_d[w_0, \dots, w_m] \setminus E$ tel que la $\overline{\mathbb{Q}}$ -hypersurface définie par P contienne l'ensemble $g(F)$ et

$$h(P) \ll \frac{d \phi(d)}{1-\eta}.$$

Les constantes omises ne dépendent que de k et $\bar{n}(R, \infty, g)$.

Démonstration. Il suffit d'adapter la démonstration du lemme 5.3.16 en remplaçant la première partie du théorème 5.3.5 par la seconde partie de ce dernier comme nous l'avons fait dans la démonstration du lemme 5.3.17 ci-dessus. ■

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème 1.6.36 dont nous rappelons l'énoncé ci-dessous.

Rappel théorème 1.6.36. Soient $K \subset \mathbb{C}$ un corps, $m \in \mathbb{N}_{\geq 2}$

$$g := (g_0, \dots, g_m) \in \mathcal{M}(\overline{\mathbb{D}}_R)^{m+1},$$

et $r \in \mathbb{R}$ tel que $0 < r < R$. Soient (E_d) une K -suite d'évitement de format (α, β) et $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ une fonction croissante. On note \mathcal{X}_r l'image de \mathbb{D}_r par g . On suppose que

$$\alpha < m - 1, \quad \overline{\lim}_{d \rightarrow \infty} \frac{\log \phi(d)}{\log d} \leq m - 1 - \alpha \quad \text{et} \quad \forall d \in \mathbb{N}, \quad V_d^K(g) \subset E_d.$$

Alors

- on suppose que K est un corps de nombres, $\alpha + \beta \leq m$ et $\forall j \in \{0, \dots, m\}$, $g_j \in \mathcal{A}(\overline{\mathbb{D}}_R)$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ et $d \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\mathcal{X}_r(K, e^{\phi(d)})$ est interpolé par une famille \mathcal{S}_d de polynômes de $K_d[w_0, \dots, w_m] \setminus E_d$ telle que

$$\#\mathcal{S}_d \ll \Phi_\varepsilon^1(r, R, g) \quad \text{et} \quad \forall P \in \mathcal{S}_d, \quad h(P) \ll d^{\alpha+1} \phi(d) + d^\beta,$$

- on suppose que K est un corps de nombres et $\alpha + \beta \leq m$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ et $d \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\mathcal{X}_r(K, e^{\phi(d)})$ est interpolé par une famille \mathcal{S}_d de polynômes de $K_d[w_0, \dots, w_m] \setminus E_d$ telle que

$$\#\mathcal{S}_d \ll \Phi_\varepsilon^2(r, R, g) \quad \text{et} \quad \forall P \in \mathcal{S}_d, \quad h(P) \ll d^{\alpha+1} \phi(d) + d^\beta,$$

- on suppose que $K = \overline{\mathbb{Q}}$ et $\forall j \in \{0, \dots, m\}$, $g_j \in \mathcal{A}(\overline{\mathbb{D}}_R)$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, $k \in \mathbb{N}^*$ et $d \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\mathcal{X}_r(\overline{\mathbb{Q}}_k, e^{\phi(d)})$ est interpolé par une famille \mathcal{S}_d de polynômes de $\overline{\mathbb{Q}}_d[w_0, \dots, w_m] \setminus E_d$ telle que

$$\#\mathcal{S}_d \ll \Phi_\varepsilon^1(r, R, g) \quad \text{et} \quad \forall P \in \mathcal{S}_d, \quad h(P) \ll d^{\alpha+1} \phi(d),$$

- on suppose que $K = \overline{\mathbb{Q}}$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, $k \in \mathbb{N}^*$ et $d \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\mathcal{X}_r(\overline{\mathbb{Q}}_k, e^{\phi(d)})$ est interpolé par une famille \mathcal{S}_d de polynômes de $\overline{\mathbb{Q}}_d[w_0, \dots, w_m] \setminus E_d$ telle que

$$\#\mathcal{S}_d \ll \Phi_\varepsilon^2(r, R, g) \text{ et } \forall P \in \mathcal{S}_d, h(P) \ll d^{\alpha+1}\phi(d).$$

Les constantes omises ne dépendent pas de g , d , r et R mais dépendent de ε .

Démonstration. Démontrons la première affirmation. On fixe $\delta > 0$ et on recouvre \mathbb{D}_r par N_δ disques D_1, \dots, D_{N_δ} de diamètre δ . On suppose de plus que δ est assez petit de sorte que

$$\log\left(\frac{1}{\delta}\right) \ll \frac{1}{(1-\eta_d)L_{m+1}(d)} [\log D_d + d\log^+ M(R, g) + d\phi(d)] \text{ avec } \eta_d := \frac{\dim(E_d)}{L_{m+1}(d)},$$

où D_d est le degré du fermé de Zariski E_d . Donc pour tout $\varepsilon > 0$

$$\forall d \gg 0, \log\left(\frac{1}{\delta}\right) \ll d^{\alpha-m} [d^\beta + d\log^+ M(R, g) + d\phi(d)] \ll \frac{\varepsilon}{2} \log^+ M(R, g),$$

car $\alpha + \beta \leq m$ et $\alpha < m - 1$. Or pour tout d assez grand

$$N_\delta \ll \left(\frac{R}{\delta(R-r)}\right)^2 \ll \left(\frac{R}{R-r}\right)^2 \max\{1, M(R, g)\}^\varepsilon.$$

D'après le lemme d'interpolation 5.3.14 et quitte à choisir δ assez petit, l'ensemble des points algébriques de $\mathcal{X}_r(K, e^{\phi(d)})$ contenus dans un disque D_j sont interpolés par un polynôme homogène P_j de $K_d[w_0, \dots, w_m] \setminus E_d$ tel que

$$h(P_j) \ll \log D_d + \frac{d\phi(d)}{1-\eta_d} \ll d^\beta + d^{\alpha+1}\phi(d).$$

Ce qui achève la démonstration de la première affirmations. Les trois autres affirmations sont démontrées de la même manière en utilisant respectivement les lemmes d'interpolation 5.3.16, 5.3.17 et 5.3.18. ■

5.4 Lemme de zéros en moyenne

Dans cette section nous démontrons le lemme de zéros en moyenne 1.6.30 énoncé dans le chapitre d'introduction. Grâce à ce résultat, on montre également qu'il n'est pas possible en toute généralité d'interpoler les points algébriques d'une courbe holomorphe de \mathbb{C}^2 par une famille de polynômes *homogènes* vérifiant les propriétés décrites dans l'énoncé de 1.6.36. Le lemme des zéros en moyenne est une conséquence de l'inégalité de Bézout en moyenne 1.5.12 que nous avons exposé dans l'introduction. Avant de pouvoir démontrer le lemme des zéros en moyenne, nous avons besoin de quelques lemmes élémentaires sur les p -fibrations dont nous rappelons la définition ci-dessous.

Rappel définition 1.5.10. Soient V et W deux espaces analytiques⁷ de dimension pure et $g \in \mathcal{O}(V, W)$. On dit que la fonction g est une p -fibration si pour tout $v \in V$, il existe un voisinage ouvert U de v tel que pour tout $z \in U$, la fibre $g^{-1}(g(z)) \cap U$ est de dimension pure p .

Lemme 5.4.1. Soit $f := (f_1, \dots, f_m) \in \mathcal{O}(\mathbb{C}, \mathbb{C}^m)$. Pour tout $k \in \{1, \dots, m\}$, on définit la fonction entière $g_k \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^{m+1}, \mathbb{C}^k)$ par

$$\forall (z, w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^m, g_k(z, w) = (f_1(z) - w_1, \dots, f_k(z) - w_k).$$

⁷Il s'agit d'espaces analytiques au sens de Serre.

Alors g_k est une $(m + 1 - k)$ -fibration.

Démonstration. La matrice jacobienne $J_z(g_k)$ de g_k en $z \in \mathbb{C}$ est de la forme

$$J_z(g_k) = \begin{bmatrix} -I_k & 0_{k, m-k} & h'_k \end{bmatrix} \quad \text{où } h_k = {}^t(f_1, \dots, f_k).$$

Donc la matrice $J_z(g_k)$ est de rang maximal k pour tout $z \in \mathbb{C}$. D'après le théorème des fonctions implicites, les fibres de g_k sont par conséquent des variétés analytiques de dimension pure $m + 1 - k$. Donc g_k est une $(m + 1 - k)$ -fibration au sens de la définition 1.5.10 ci-dessus. ■

Lemme 5.4.2. Soient $f := (f_1, \dots, f_m) \in \mathcal{O}(\mathbb{C}, \mathbb{C}^m)$ une fonction transcendante et $P \in \mathbb{C}[z, w_1, \dots, w_m]$ non nul. On considère la fonction entière $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^{m+1}, \mathbb{C}^{m+1})$ définie par

$$g(z, w) = (f_1(z) - w_1, \dots, f_m(z) - w_m, P(z, w)),$$

et $V \subset \mathbb{C}^{m+1}$ le lieu des zéros de g . Alors g est à fibres discrètes et

$$\forall r > 0, \quad n_\nu(r, V) \geq n(r, P_f) \quad \text{et} \quad N_\nu(r, V) \geq N(r, P_f), \quad (5.4.1)$$

où ν est l'intersection complète⁸ associée à g .

Démonstration. On note $h(z) = P(z, f(z))$. Pour démontrer les deux inégalités de 5.4.1, il suffit de montrer que

$$\forall (a_0, b_0) \in V, \quad \nu(a_0, b_0) \geq \nu_0 h(a_0),$$

où $\nu_0 h$ est le diviseur associé au zéros de h . On fixe $(a, b) \in \mathbb{C}^{m+1}$ tel que $f(a) = b$, $U \subset \mathbb{C}$ un voisinage de a et W un voisinage de $f(U)$. Alors

$$\#U \cap h^{-1}(h(a)) = \#(U \times W) \cap g^{-1}(g(a, b)).$$

En effet d'une part

$$U \cap h^{-1}(h(a)) = \{z \in U \mid h(z) = h(a)\} = \{z \in U \mid P(z, f(z)) = P(a, f(a))\},$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} (U \times W) \cap g^{-1}(g(a, b)) &= \{(z, w) \in U \times W \mid g(z, w) = g(a, b)\} \\ &= \{(z, w) \in U \times W \mid f(z) - w = f(a) - b \text{ et } P(z, w) = P(a, b)\} \\ &= \{(z, w) \in U \times W \mid f(z) = w \text{ et } P(z, w) = P(a, f(a))\}. \end{aligned}$$

Pour tout $c \in \mathbb{C}^m$, \mathcal{V}_c désigne l'ensemble des voisinages ouverts de c dans \mathbb{C}^m . Or d'après [113, p. 17]

$$\forall a_0 \in \mathbb{C}, \quad \nu_0 h(a_0) = \min \left\{ \overline{\lim}_{a \rightarrow a_0} \#U \cap h^{-1}(h(a)) \mid U \in \mathcal{V}_{a_0} \right\},$$

et d'après la définition 1.5.11 et puisque g est une fibration à fibres discrètes

$$\forall c_0 \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^m, \quad \nu(c_0) = \min \left\{ \overline{\lim}_{c \rightarrow c_0} \#V \cap g^{-1}(g(c)) \mid V \in \mathcal{V}_{c_0} \right\}.$$

Donc si $c_0 = (a_0, b_0) \in V$ alors

$$\begin{aligned} \nu(c_0) &\geq \min \left\{ \overline{\lim}_{c \rightarrow c_0} \#(U \times W) \cap g^{-1}(g(c)) \mid (U, W) \in \mathcal{V}_{a_0} \times \mathcal{V}_{b_0} \right\} \\ &\geq \min \left\{ \overline{\lim}_{\substack{(a,b) \rightarrow c_0 \\ f(a)=b}} \#(U \times W) \cap g^{-1}(g(a, b)) \mid (U, W) \in \mathcal{V}_{a_0} \times \mathcal{V}_{b_0} \right\} \\ &\geq \min \left\{ \overline{\lim}_{\substack{(a,b) \rightarrow c_0 \\ f(a)=b}} \#(U \times W) \cap g^{-1}(g(a, b)) \mid (U, W) \in \mathcal{V}_{a_0} \times \mathcal{V}_{b_0} \text{ tel que } f(U) \subset W \right\} \\ &\geq \min \left\{ \overline{\lim}_{a \rightarrow a_0} \#U \cap h^{-1}(h(a)) \mid U \in \mathcal{V}_{a_0} \right\}. \end{aligned}$$

⁸Voir la définition 1.5.11 page 24.

Cette inégalité étant vraie pour tout pour tout voisinage U de a , on obtient que $\nu(c_0)$ majore $\nu_0 h(a_0)$. ■

Le théorème 5.4.3 ci-dessous est l'analogie du théorème de Cartan 2.6.11 où la métrique euclidienne sur \mathbb{C} est remplacée par la métrique sphérique sur $\hat{\mathbb{C}}$ et la caractéristique de Nevanlinna $T(r, g)$ par la caractéristique de Shimizu-Ahlfors $\mathcal{T}(r, g)$.

Théorème 5.4.3 ([46, Th. 4.4]). *Soit $g \in \mathcal{M}(\mathbb{D}_R)$ non constante. Alors*

$$\forall r \in [0, R[, \mathcal{T}(r, g) = \frac{1}{\pi} \int_{\hat{\mathbb{C}}} N(r, a, g) d\chi(a) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} N(r, w, g) \frac{dw}{(1 + |w|^2)^2}.$$

Rappel proposition 1.6.30. *Soient $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ une fonction transcendante, $d \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{C}_{\leq d}[z, w]$ non nul tels que $f(0) = 1$ et $P(0) = 0$. Alors*

$$\forall R > 0, \forall r \in [0, R[, \int_1^\infty N(r, P_f^u) \frac{du}{u^2} \leq d \left(\frac{R}{R-r} \right)^2 \log^+ M(2e^2 R, f),$$

où $P^u(z, w) = P(uz, uw)$. En particulier pour tout $P \in \mathbb{C}_d[z, w]$ non nul

$$\forall R > 0, \forall r \in [0, R[, N(r, P_f) \leq d \left(\frac{R}{R-r} \right)^2 \log^+ M(2e^2 R, f).$$

Démonstration. On reprend les notations du théorème de Stoll 1.5.12. Quitte à diviser P par sa norme infini sur \mathbb{B}_1^2 , on peut supposer que $\|P\|_{\mathbb{B}_1^2} = 1$. On fixe $a \in \mathbb{C}^*$ et on considère les fonctions entières définies par

$$\forall (z, w) \in \mathbb{C}^2, g_1(z, w) := f(z) - w \text{ et } g_2(z, w) := 1 - \frac{P(z, w)}{a}.$$

Notons que par hypothèse $g_1(0, 0) = 1$ et $g_2(0, 0) = 1$. Pour tout $t \in]0, 1]^2$, on considère le sous-ensemble analytique Z_t de \mathbb{C}^2 défini par

$$Z_t := \left\{ z \in \mathbb{C} \mid P\left(\frac{t_2}{t_1}(t_1 z), \frac{t_2}{t_1} f(t_1 z)\right) = a \right\} \text{ avec } t = (t_1, t_2).$$

De plus pour tout $t \in]0, 1]^2$, les fonctions entières g_t^1 et g_t^2 définies par

$$\forall (z, w) \in \mathbb{C}^2, g_t^1(z, w) = g_1(t_1 z, t_1 w) \text{ et } g_t^2(z, w) = (g_1(t_1 z, t_1 w), g_2(t_2 z, t_2 w)),$$

sont respectivement une 1-fibration et une 0-fibration sur \mathbb{C}^2 d'après respectivement les lemmes 5.4.1 et 5.4.2 ci-dessus. Donc d'après le théorème de Stoll 1.5.12 en posant $W = \mathbb{C}^2$

$$\forall R > 0, \int_{I^2} N_{\nu_t}(R, V_t) dt \leq 7^2 n(eR, \mathbb{C}^2) \prod_{j=1}^2 \log^+ M(2e^2 R, g_j) \ll \prod_{j=1}^2 \log^+ M(2e^2 R, g_j).$$

Or par l'inégalité de Bernstein-Walsh 3.2.7

$$\begin{aligned} \log^+ M(2e^2 R, g_2) &\leq \log^+ |a| M(2e^2 R, P) + \log 2 \\ &\leq \log^+ \|P\|_{\mathbb{B}_1^2} + d \log^+ (2e^2 R) + \log^+ |a| + 2 \log 2 \\ &\leq \log^+ |a| + d \log^+ R, \end{aligned}$$

et $\log^+ M(2e^2 R, g_1) \leq 2 \log^+ \max\{M(2e^2 R, f), 2e^2 R\}$. De plus d'après le lemme 5.4.2

$$\forall t \in I^2, n_{\nu_t}(R, V_t) \geq n(Rt_1, a, P_f^{t_1/t_2}) \text{ avec } t = (t_1, t_2),$$

Or en faisant le changement de variable $u = \frac{t_1}{t_2}$ puis $t = Rt_1$

$$\begin{aligned} \int_{I^2} N_{\nu_i}(R, V_t) dt &\geq \int_0^1 \int_0^1 N(Rt_1, a, P_f^{t_1/t_2}) dt_1 dt_2 = \int_1^\infty \int_0^1 N(Rt_1, a, P_f^u) t_1 dt_1 \frac{du}{u^2} \\ &= \frac{1}{R^2} \int_1^\infty \int_0^R N(t, a, P_f^u) t dt \frac{du}{u^2} = \frac{1}{R^2} \int_0^R \int_1^\infty N(t, a, P_f^u) \frac{du}{u^2} t dt \\ &\geq \left(\frac{R-r}{R}\right)^2 \int_1^\infty N(r, a, P_f^u) \frac{du}{u^2}. \end{aligned}$$

Donc

$$\int_1^\infty N(r, a, P_f^u) \frac{du}{u^2} \ll \left(\frac{R}{R-r}\right)^2 \prod_{j=1}^2 \log^+ M(2e^2 R, g_j). \quad (5.4.2)$$

Or par le théorème de Cartan 5.4.3 ci-dessus et le théorème 4.2.21

$$\begin{aligned} \int_{\hat{\mathbb{C}}} \int_1^\infty N(r, a, P_f^u) \frac{du}{u^2} d\chi(a) &\geq \int_1^\infty \int_{\hat{\mathbb{C}}} N(r, a, P_f^u) d\chi(a) \frac{du}{u^2} \geq \int_1^\infty \mathcal{T}(r, P_f^u) \frac{du}{u^2} \\ &\geq \int_1^\infty N(r, P_f^u) \frac{du}{u^2}. \end{aligned}$$

De plus

$$\int_{\hat{\mathbb{C}}} \log^+ |w| d\chi(w) = \int_{\mathbb{C}} \log^+ |w| \frac{dw}{(1+|w|^2)^2} < \infty.$$

On conclut en intégrant l'inégalité 5.4.2 pour a parcourant la sphère $\hat{\mathbb{C}}$. Lorsque P est homogène de degré d , on a $\forall u \in [1, \infty[$, $P^u = u^d P$ et donc $N(r, P^u) = N(r, P_g)$. De plus

$$\int_1^\infty \frac{du}{u^2} = 1.$$

Ce qui termine la démonstration. ■

Remarque 5.4.4. La proposition 1.6.30 implique qu'il n'est pas possible d'interpoler en général les points algébriques d'un graphe analytique par des polynômes homogènes vérifiant les hypothèses de 1.6.36. En effet dans le cas contraire, on établirait pour toute fonction entière transcendante un comptage des points rationnels logarithmique. Or on sait d'après le théorème 1.2.11 qu'il existe des fonctions entières transcendentes ayant beaucoup de points rationnels de petites hauteurs. C'est une contradiction.

Remarque 5.4.5. Je tiens à remercier Byniamini qui m'a fait remarquer que la seconde affirmation de la proposition 1.6.30 peut être démontrée directement de la manière suivante. Soit $P \in \mathbb{C}_d[z, w]$ un polynôme non nul de la forme

$$P(z, w) = \sum_{j=0}^d a_j z^j w^{d-j}.$$

Alors

$$\forall z \in \mathbb{C}, P(z, g(z)) = \sum_{j=0}^d a_j z^d \left(\frac{g(z)}{z}\right)^{d-j} = z^d Q\left(\frac{g(z)}{z}\right) \text{ avec } Q(w) = \sum_{j=0}^d a_j w^j.$$

On peut supposer sans perte de généralité que Q est unitaire, quitte à diviser ce dernier par son coefficient dominant. Or g étant une fonction entière transcendante, son image est d'aire infinie. Il existe donc un $r_0 > 1$ tel que l'aire de l'image de la couronne $\mathbb{A}(1, r_0)$ par $h(z) = \frac{g(z)}{z}$ excède $2e$. De plus d'après le lemme de Boutroux-Cartan 2.7.10 l'ensemble E suivant

$$E = \{z \in \mathbb{C} \mid |Q(z)| \leq 1\}$$

est d'aire au plus $2e$. Il existe donc un $z \in \mathbb{A}(1, r_0)$ tel que $|Q(g(z))| > 1$. On obtient finalement une majoration du nombre de zéros de $Q \circ g$ grâce aux inégalités de Bernstein-Walsh 3.2.7 et de Jensen.

5.5 Comptages des points algébriques

Dans cette dernière section nous démontrons la proposition 1.3.4 reliant les lemmes de zéros aux comptages de points algébriques. Nous appliquons à cette fin le théorème d'interpolation 1.6.36 de la même manière que dans la remarque 1.6.38 de l'introduction. On fixe $g \in \mathcal{A}(\mathbb{D}_R)$ une fonction transcendante. et on pose $m = 3$, $f_0(z) = 1$, $f_1(z) = z$, $f_2(z) = g(z)$, $f = (f_0, f_1, f_2)$ et (E_d) la suite $(V_d^K(f))$. Or l'espace vectoriel $V_d^K(g)$ est nul pour tout $d \in \mathbb{N}$. En effet, soit $P \in K_d[w_0, w_1, w_2]$ un polynôme de la forme

$$\forall w \in \mathbb{C}^3, P(w) = \sum_{|I|=d} \lambda_I w^I = \sum_{i_1+i_2 \leq d} \lambda_{d-i_1-i_2, i_1, i_2} w_0^{d-i_1-i_2} w_1^{i_1} w_2^{i_2}.$$

Or $P \in V_d^K(f)$ si et seulement si $z \mapsto P(1, z, g(z))$ est identiquement nulle. D'où $P \equiv 0$.

Rappel proposition 1.3.4. Soient $k \in \mathbb{N}^*$, $g \in \mathcal{M}(\overline{\mathbb{D}}_R)$. On suppose qu'il existe $\varphi : [0, R[\rightarrow \mathbb{R}_+$ et $\alpha > 0$ tels que

$$\forall d \in \mathbb{N}, \forall r \in [0, R[, \mathcal{Z}_d(r, g) \leq (d \vee \varphi(r))^\alpha.$$

Alors

$$\forall \varepsilon > 0, \forall r \in [0, R[, N_k(\Gamma_r^g, B) \ll \left(\frac{R}{R-r} \right)^2 \exp \left\{ \varepsilon \frac{R+r}{R-r} T(R, g) \right\} (\log B \vee \varphi(r))^\alpha.$$

On suppose de plus que g est holomorphe. Alors

$$\forall \varepsilon > 0, \forall r \in [0, R[, N_k(\Gamma_r^g, B) \ll \left(\frac{R}{R-r} \right)^2 \max\{1, M(R, g)\}^\varepsilon (\log B \vee \varphi(r))^\alpha.$$

Démonstration. On applique la première et la troisième interpolations du théorème 1.6.36 à la fonction f , la $\overline{\mathbb{Q}}$ -suite d'évitement nulle et $\phi = \text{id}$. Or

$$\forall r \in [0, R[, \forall d \in \mathbb{N}, \forall P \in \mathcal{S}_d, \mathcal{Z}_d(r, g) \leq (d \vee \varphi(r))^\alpha.$$

Donc en appliquant cette proposition avec d de l'ordre de $\log B$, on obtient que le cardinal de $\Gamma_r^g(K, B)$ est majoré par

$$\Phi_{2, \varepsilon}(r, R) \mathcal{Z}_d(r, g) \ll \left(\frac{R}{R-r} \right)^2 \exp \left\{ \varepsilon \frac{R+r}{R-r} T(R, g) \right\} (\log B \vee \varphi(r))^\alpha. \quad (5.5.1)$$

De plus lorsque g est holomorphe, la borne 5.5.1 peut être remplacée par

$$\Phi_{1, \varepsilon}(r, R) \mathcal{Z}_d(r, g) \ll \left(\frac{R}{R-r} \right)^2 \max\{1, M(R, g)\}^\varepsilon (\log B \vee \varphi(r))^\alpha.$$

Ce qu'il fallait démontrer. ■

Bibliographie

- [1] L. Ahlfors. Zur Theorie der überlagerungsflächen. *Acta Mathematica*, 65(1) :157–194, 1935.
- [2] L. V. Ahlfors and L. Sario. *Riemann surfaces*. Princeton university press, 1965.
- [3] T. Apostol. *Modular Functions and Dirichlet Series in Number Theory*. Springer, New York.
- [4] D. H. Armitage and S. J. Gardiner. *Classical Potential Theory*. Springer, 2001.
- [5] V. Azarin. *Growth Theory of Subharmonic Functions*. Springer Science & Business Media, 2008.
- [6] A. Baker. *Transcendental number theory*. Cambridge university press, 1990.
- [7] S. B. Bank and R. P. Kaufman. A note on Hölder’s theorem concerning the gamma function. *Mathematische Annalen*, 232(2) :115–120, 1978.
- [8] É. Besson. Points rationnels de la fonction Gamma d’Euler. *Archiv der Mathematik*, 103(1) :61–73, 2014.
- [9] É. Besson. Points algébriques de la fonction sigma de Weierstrass. 2015.
- [10] G. Binyamini. Zero counting and invariant sets of differential equations. *ArXiv e-prints*, Oct. 2015.
- [11] G. Binyamini and D. Novikov. Wilkie’s conjecture for restricted elementary functions. *Ann. of Math. (2)*, 186(1) :237–275, 2017.
- [12] W. Blaschke. Eine Erweiterung des Satzes von Vitali über Folgen analytischer Funktionen. *Leipzig Ber*, 67 :194–200, 1915.
- [13] R. P. Boas. *Entire Functions*. Academic Press, 1954.
- [14] J. Bochnak, M. Coste, and M.-F. Roy. *Real algebraic geometry*, volume 36. Springer Science & Business Media, 2013.
- [15] E. Bombieri and W. Gubler. *Heights in Diophantine Geometry*. Cambridge University Press, 2006.
- [16] E. Bombieri and J. Pila. The number of integral points on arcs and ovals. *Duke Math. J.*, 59(2) :337–357, 1989.
- [17] E. Bombieri and J. Vaaler. On Siegel’s lemma. *Invent. Math.*, 73(1) :11–32, 1983.
- [18] G. Boxall and G. Jones. Rational values of entire functions of finite order. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (22) :12251–12264, 2015.

-
- [19] G. J. Boxall and G. O. Jones. Algebraic values of certain analytic functions. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (4) :1141–1158, 2015.
- [20] A. Brudnyi. On local behavior of holomorphic functions along complex submanifolds of \mathbb{C}^n . *Inventiones mathematicae*, 173(2) :315–363, 2008.
- [21] Y. Bugeaud. *Approximation by algebraic numbers*, volume 160. Cambridge University Press, 2004.
- [22] L. A. Butler. Some cases of wilkie’s conjecture. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 44(4) :642–660, 2012.
- [23] H. Cartan. Sur les systèmes de fonctions holomorphes à variétés linéaires lacunaires et leurs applications. *Thèses françaises de l’entre-deux-guerres*, 93 :1–92, 1928.
- [24] R. Cluckers, G. Comte, and F. Loeser. Non-archimedean Yomdin-Gromov parametrizations and points of bounded height. In *Forum of Mathematics, Pi*, volume 3. Cambridge University Press, 2015.
- [25] D. Coman and E. A. Poletsky. Bernstein-Walsh inequalities and the exponential curve in \mathbb{C}^2 . *Proc. Amer. Math. Soc.*, 131(3) :879–887, 2003.
- [26] D. Coman and E. A. Poletsky. Measures of transcendency for entire functions. *Michigan Math. J.*, 51(3) :575–591, 2003.
- [27] D. Coman and E. A. Poletsky. Transcendence measures and algebraic growth of entire functions. *Invent. Math.*, 170(1) :103–145, 2007.
- [28] G. Comte and C. Miller. Points of bounded height on oscillatory sets. *The Quarterly Journal of Mathematics*, pages 1–27, 2016.
- [29] G. Comte and Y. Yomdin. Zeroes and rational points of analytic functions. 2017.
- [30] M. Cornalba and B. Shiffman. A counterexample to the “transcendental Bézout problem”. *Ann. of Math. (2)*, 96 :402–406, 1972.
- [31] A. Cuyt, K. Driver, and D. Lubinsky. On the size of lemniscates of polynomials in one and several variables. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 124(7) :2123–2136, 1996.
- [32] J. Denef and L. Van den Dries. P-adic and real subanalytic sets. *Annals of Mathematics*, 128(1) :79–138, 1988.
- [33] J. Dufresnoy. Sur les domaines couverts par les valeurs d’une fonction méromorphe ou algébroïde. 58 :179–259, 1941.
- [34] P. Duren and R. Weir. The pseudohyperbolic metric and bergman spaces in the ball. *Transactions of the American Mathematical Society*, 359(1) :63–76, 2007.
- [35] N. D. Elkies. Rational points near curves and small nonzero $|x^3 - y^2|$ via lattice reduction. In *International Algorithmic Number Theory Symposium*, pages 33–63. Springer, 2000.
- [36] E. Freitag and R. Busam. *Complex analysis*. Springer Science & Business Media, 2006.
- [37] O. Friedland and Y. Yomdin. (s, p) -Valent Functions. *ArXiv e-prints*, 2015.

- [38] K. Fritzsche and H. Grauert. *From holomorphic functions to complex manifolds*, volume 213. Springer Science & Business Media, 2002.
- [39] L. Fukshansky. Siegel's lemma with additional conditions. *J. Number Theory*, 120(1) :13–25, 2006.
- [40] W. Fulton. *Intersection theory*, volume 2. Springer Science & Business Media, 2013.
- [41] A. M. Gabrièlov. Projections of semi-analytic sets. *Functional Analysis and its applications*, 2(4) :282–291, 1968.
- [42] J. B. Garnett and D. E. Marshall. *Harmonic measure*, volume 2. Cambridge University Press, 2005.
- [43] C. Gasbarri. Transcendental Liouville inequalities on projective varieties. *ArXiv e-prints*, 2016.
- [44] É. Gaudron. Géométrie des nombres adéliques et lemmes de Siegel généralisés. *manuscripta mathematica*, 130(2) :159–182, 2009.
- [45] E. Gaudron and G. Rémond. Lemmes de Siegel d'évitement. *Acta Arith.*, 154(2) :125–136, 2012.
- [46] A. Goldberg and I. Ostrovskii. *Value Distribution of Meromorphic Functions*, volume 236. American Mathematical Society, 2008.
- [47] K. Gopal and G. P. Kapoor. Coefficient characterizations for functions analytic in the unit disc having fast rates of growth. *Bull. Math. Soc. Sci. Math. R. S. Roumanie (N.S.)*, 25(73)(4) :367–380, 1981.
- [48] F. Gramain, M. Mignotte, and M. Waldschmidt. Valeurs algébriques de fonctions analytiques. *Acta Arith.*, 47(2) :97–121, 1986.
- [49] P. A. Griffiths. On the Bezout problem for Entire Analytic Sets. *Annals of Mathematics*, 100 :533–552, 1974.
- [50] R. Hartshorne. *Algebraic geometry*, volume 52. Springer Science & Business Media, 2013.
- [51] W. Hayman. Research problems in function theory. In *Symposium on complex analysis, Canterbury*, 1973.
- [52] W. Hayman and P. Kennedy. Subharmonic functions. *Academic Press*, 1, 1976.
- [53] W. K. Hayman. *Meromorphic functions*, volume 78. Oxford Clarendon Press, 1964.
- [54] W. K. Hayman. *Multivalent functions*, volume 110. Cambridge University Press, 1994.
- [55] W. V. D. Hodge and D. Pedoe. *Methods of algebraic geometry. Vol. I*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, 1994. Book I : Algebraic preliminaries, Book II : Projective space, Reprint of the 1947 original.
- [56] V. Jarník. Über die Gitterpunkte auf konvexen kurven. *Mathematische Zeitschrift*, 24(1) :500–518, 1926.
- [57] G. Jones and H. Schmidt. Pfaffian definitions of Weierstrass elliptic functions. *ArXiv e-prints*, Sept. 2017.

- [58] G. O. Jones and M. E. Thomas. The density of algebraic points on certain Pfaffian surfaces. *The Quarterly Journal of Mathematics*, 63(3) :637–651, 2011.
- [59] G. O. Jones and M. E. M. Thomas. Effective Pila–Wilkie bounds for unrestricted Pfaffian surfaces. *ArXiv e-prints*, Apr. 2018.
- [60] L. Keen and N. Lakic. *Hyperbolic geometry from a local viewpoint*, volume 68. Cambridge University Press, 2007.
- [61] A. G. Khovanskiĭ. On a class of systems of transcendental equations. In *Soviet Math. Dokl.*, volume 22, pages 762–765, 1980.
- [62] A. G. Khovanskiĭ. *Fewnomials*, volume 88. American Mathematical Soc., 1991.
- [63] M. Klimek. *Pluripotential theory*, volume 6 of *London Mathematical Society Monographs. New Series*. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1991. Oxford Science Publications.
- [64] S. Lang. *Introduction to transcendental numbers*. Addison-Wesley Pub. Co., 1966.
- [65] S. Lang. *Elliptic functions*. Springer, 1987.
- [66] S. Lang. *Complex Analysis*, volume 103. Springer, 1999.
- [67] B. Y. Levin. *Distribution of zeros of entire functions*, volume 5. American Mathematical Soc., 1964.
- [68] F. Lindemann. Ueber die Zahl π .*. *Mathematische Annalen*, 20(2) :213–225, 1882.
- [69] J. Liouville. Nouvelle démonstration d’un théoreme sur les irrationnelles algébriques inséré dans le compte rendu de la dernière séance. *CR Acad. Sci. Paris*, 18 :910–911, 1844.
- [70] J. Littlewood. Quelques conséquences de l’hypothese que la fonction $\zeta(s)$ de riemann n’a pas de zéros dans le demi-plan $\Re s > 1/2$. *CRAS Paris*, 154 :263–266, 1912.
- [71] D. Lubinsky. Small values of polynomials : Cartan, pólya and others. *Journal of Inequalities and Applications*, 1997(3) :104605, 1997.
- [72] D. Lubinsky. On the maximum and minimum modulus of rational functions. *Canadian Journal of Mathematics*, 52(4) :815–832, 2000.
- [73] D. Marques. On the arithmetic nature of hypertranscendental functions at complex points. *Expositiones Mathematicae*, 29(3) :361–370, 2011.
- [74] D. Marques and C. G. Moreira. A question proposed by K. Mahler on exceptional sets of transcendental functions with integer coefficients : solution of a Mahler’s problem. *arXiv preprint arXiv :1708.09483v1*, 2017.
- [75] D. Marques and C. G. Moreira. A stronger version of a question proposed by K. Mahler. *arXiv preprint arXiv :1708.09271v1*, 2017.
- [76] J. Mashreghi and E. Fricain. *Blaschke products and their applications*. Springer, 2013.
- [77] D. Masser. Rational values of the Riemann zeta function. *J. Number Theory*, 131(11) :2037–2046, 2011.

-
- [78] D. Masser. *Auxiliary polynomials in number theory*, volume 207. Cambridge University Press, 2016.
- [79] C. Miller. Exponentiation is hard to avoid. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 122(1) :257–259, 1994.
- [80] H. Milloux. Sur une extension d’un théorème de P. boutroux-H. cartan. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 65 :65–75, 1937.
- [81] R. Nevanlinna. Zur theorie der meromorphen funktionen. *Acta mathematica*, 46(1) :0–99, 1925.
- [82] R. Nevanlinna and P. Emig. *Analytic functions*, volume 3. Springer, 1970.
- [83] É. Picard. *Œuvres 1*. 1916.
- [84] J. Pila. Mild parameterization and the rational points of a Pfaff curve. *Rikkyo Daigaku sugaku zasshi*, 55(1) :1–8, 2006.
- [85] J. Pila. On the algebraic points of a definable set. *Selecta Mathematica*, 15(1) :151–170, 2009.
- [86] J. Pila. Counting rational points on a certain exponential-algebraic surface. *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, 60(2) :489–514, 2010.
- [87] J. Pila. O-minimality and the André-Oort conjecture for \mathbb{C}^n . *Ann. of Math. (2)*, 173(3) :1779–1840, 2011.
- [88] J. Pila, A. J. Wilkie, et al. The rational points of a definable set. *Duke Mathematical Journal*, 133(3) :591–616, 2006.
- [89] J. Pila and U. Zannier. Rational points in periodic analytic sets and the Manin-Mumford conjecture. *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Lincei Mat. Appl.*, 19(2) :149–162, 2008.
- [90] H. Poincaré. Théorie des groupes fuchsien. *Acta Math.*, 1(1) :1–76, 1882.
- [91] C. Pommerenke. *Boundary Behaviour of Conformal Maps*, volume 299. 1992.
- [92] Q. I. Rahman and G. Schmeisser. *Analytic theory of polynomials*. Number 26. Oxford University Press, 2002.
- [93] T. Ransford. *Potential theory in the complex plane*, volume 28. Cambridge University Press, 1995.
- [94] E. Remez. Sur une propriété des polynômes de Tchebycheff, comm. l’inst. *Sci., Kharkow*, 13 :93–95, 1936.
- [95] R. Remmert. *Classical Topics in Complex Function Theory*, volume 172. Springer, 1998.
- [96] T. Rivoal. La fonction zêta de riemann prend une infinité de valeurs irrationnelles aux entiers impairs. *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences-Series I-Mathematics*, 331(4) :267–270, 2000.
- [97] K. F. Roth. Rational approximations to algebraic numbers. *Mathematika*, 2(1) :1–20, 1955.

- [98] N. Roytwarf and Y. Yomdin. Bernstein classes. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 47(3) :825–858, 1997.
- [99] L. A. Rubel. A survey of transcendently transcendental functions. *American Mathematical Monthly*, 96(9) :777–788, 1989.
- [100] E. B. Saff and V. Totik. *Logarithmic potentials with external fields*, volume 316. Springer Science & Business Media, 2013.
- [101] W. M. Schmidt. On heights of algebraic subspaces and diophantine approximations. *Annals of Mathematics*, pages 430–472, 1967.
- [102] W. M. Schmidt. Integer points on curves and surfaces. *Monatshefte für Mathematik*, 99(1) :45–72, 1985.
- [103] T. Schneider. Ein Satz über ganzwertige Funktionen als Prinzip für Transzendenzbeweise. *Mathematische Annalen*, 121(1) :131–140, 1949.
- [104] I. R. Shafarevich and K. A. Hirsch. *Basic algebraic geometry*, volume 2. Springer, 1994.
- [105] C. L. Siegel. *Über einige Anwendungen diophantischer Approximationen*. Akad. de Gruyter in Komm., 1929.
- [106] C. L. Siegel. *Transcendental numbers*. Number 16. Princeton University Press, 1949.
- [107] L. R. Sons. Regularity of growth and gaps. *J. Math. Anal. Appl.*, 24 :296–306, 1968.
- [108] L. R. Sons. Corrigendum : “Regularity of growth and gaps” (J. Math. Anal. Appl. 24 (1968), 296–306). *J. Math. Anal. Appl.*, 58(1) :232, 1977.
- [109] P. Stäckel. Ueber arithmetische Eigenschaften analytischer Functionen. *Mathematische Annalen*, 46(4) :513–520, 1895.
- [110] P. Stäckel. Arithmetische Eigenschaften analytischer Funktionen. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 11 :183–184, 1902.
- [111] J. Steuding. *Value-distribution of L-functions*. Springer, 2007.
- [112] W. Stoll. The growth of the area of a transcendental analytic set. I, II. *Math. Ann.*, 156 :144–170, 1964.
- [113] W. Stoll. The multiplicity of a holomorphic map. *Invent. Math.*, 2 :15–58, 1966.
- [114] W. Stoll. A Bezout estimate for complete intersections. *Ann. of Math. (2)*, 96 :361–401, 1972.
- [115] W. Stoll. An average Bezout estimate. pages 242–255. “Agora Mathematica”, No. 1, 1974.
- [116] A. Surroca. Sur le nombre de points algébriques ou une fonction analytique transcendante prend des valeurs algébriques. *Comptes Rendus Mathématique*, 334(9) :721–725, 2002.
- [117] H. Swinnerton-Dyer. The number of lattice points on a convex curve. *Journal of Number Theory*, 6(2) :128–135, 1974.
- [118] M. Tsuji. *Potential theory in modern function theory*. Maruzen, 1959.

-
- [119] L. Van den Dries. *Tame topology and o-minimal structures*, volume 248. Cambridge university press, 1998.
- [120] A. Van der Poorten. Transcendental entire functions mapping every algebraic number field into itself. *Journal of the Australian Mathematical Society*, 8(2) :192–193, 1968.
- [121] M. Waldschmidt. Propriétés arithmétiques des valeurs de fonctions méromorphes algébriquement indépendantes. *Acta Arithmetica*, 23(1) :19–88, 1973.
- [122] M. Waldschmidt. Transcendence measures for exponentials and logarithms. *Journal of the Australian Mathematical Society*, 25(4) :445–465, 1978.
- [123] M. Waldschmidt. Algebraic values of analytic functions. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 160(1) :323–333, 2003.
- [124] A. Wilkie. Model completeness results for expansions of the ordered field of real numbers by restricted pfaffian functions and the exponential function. *Journal of the American Mathematical Society*, 9(4) :1051–1094, 1996.
- [125] J. Zheng. *Value distribution of meromorphic functions*. Springer Science & Business Media, 2011.
- [126] W. Zudilin. One of the numbers $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$, $\zeta(11)$ is irrational. *Russian Mathematical Surveys*, 56(4) :774–776, 2001.

Index des notations

A

$\mathcal{A}(\mathbb{D})$, 129
 $\text{Aut}(\Omega)$, 3

B

$\hat{b}(\lambda, r, g)$, 54
 $\hat{b}_\Omega(\lambda, r, a, g)$, 53
 $\hat{b}_\Omega(\lambda, r, g)$, 53
 $b(\lambda, r, g)$, 54
 $b_\Omega(\lambda, r, a, g)$, 53
 $b_\Omega(\lambda, r, g)$, 53

C

$\text{cap}(K)$, 43
 \mathbb{C} , 2
 $\text{cap}(F, \Omega)$, 45
 $\hat{\mathbb{C}}$, 2

D

$D(\lambda, r, a, g), D(r, a, g), D(a, g)$, 25
 $D_\Omega(\lambda, r, a, g), D_\Omega(r, a, g), D_\Omega(a, g)$, 79
 $\bar{\mathbb{D}}(a, r)$, 2
 $\bar{\mathbb{D}}_r$, 2
 $\mathbb{D}_r^h(a, t)$, 25
 $\text{Div}(X)$, 54
 $\text{diam}_n(E, X)$, 25, 67
 $\text{diam}_n(E)$, 68
 $\mathbb{D}(a, r)$, 2
 \mathbb{D}_r , 2
 $\text{deg}(\nu)$, 54
 $\text{mult}(\nu)$, 54
 $d^h(z, w)$, 4
 $d_\Omega(z, w)$, 72

E

$\hat{e}_d(\lambda, g)$, 21
 $\hat{e}_d^\Omega(\lambda, g)$, 80
 $e_d(\lambda, g)$, 20
 $e_d(g)$, 20

G

g_Ω , 42

H

$H(P)$, 174
 $H(V)$, 175
 $H(\alpha)$, 9, 173
 $\mathcal{H}(\Omega)$, 3
 \mathbb{H} , 2
 $H(P)$, 174

I

$I(\mu)$, 43

K

$K_{\leq d}[z_1, \dots, z_n]$, 3
 $K[z_1, \dots, z_n]$, 3
 \hat{K} , 2
 $K_{n,m}(z_1, \dots, z_n)$, 3
 $K(z_1, \dots, z_n)$, 3

L

$\Lambda_d(E)$, 4
 $\mathcal{L}(\partial S, g)$, 126
 $\mathcal{L}(r, g)$, 127
 $\lambda_n(E)$, 4
 \mathcal{L} , 87

M

$M(r, g)$, 49
 $\hat{m}_\Upsilon(a, g)$, 49
 $\hat{m}_d^\Omega(\lambda, r, g)$, 80
 $\text{Mob}(\Omega)$, 3
 $M(\Upsilon, a, g)$, 49
 $\mathcal{M}(\Omega)$, 3

N

$N_K(\mathcal{X}, B)$, 9
 $N_k(\mathcal{X}, B)$, 9
 $N_\Omega(r, a, g), N_\Omega(r, g)$, 64
 $\bar{N}_\Omega(r, a, g), \bar{N}_\Omega(r, g)$, 64
 $n(\Omega, a, g)$, 54

$N(r, a, g), N(r, g)$, 62
 $\bar{N}(r, a, g), \bar{N}(r, g)$, 62

O

Ω_r , 47
 $\mathcal{O}(\Omega)$, 3

P

P_μ , 43
 P_Ω , 45
 $\varpi(z, B, \Omega)$, 45
 \mathbf{P}_Ω , 45
 $\varpi_\Omega(z, B)$, 45
 $p_r(z, w)$, 4
 $p(z, w)$, 4
 $|a, b|$, 4
 $p_\Omega(z, w)$, 72

R

\mathbb{R} , 2
 ρ_g , 126

S

S_g , 6
 $\mathcal{S}(S, g)$, 126
 $\mathcal{S}(r, g)$, 127
 $\mathcal{SH}_\delta(\Omega)$, 3
 $\mathcal{S}(D)$, 125

$\mathcal{S}(\beta)$, 125
 $\mathcal{SH}(\Omega)$, 3

T

$T(r, a, g)$, 63
 $T(r, g)$, 26, 63
 $T_\Omega(r, a, g)$, 64
 $T_\Omega(r, g)$, 64
 $\mathcal{T}(r, g)$, 127
 $\bar{\tau}(g)$, 20
 $\underline{\tau}(g)$, 20
 \mathbb{S}^1 , 2

U

\mathbb{D} , 2

V

V_E , 87

X

$\mathcal{X}(K, B)$, 9
 $\mathcal{X}(k, B)$, 9
 $\chi(z, w)$, 3

Z

$\mathcal{Z}_d(r, g)$, 14
 $\mathcal{Z}_d^\Omega(r, g)$, 61

Index

A

Ahlfors-régularité, 129

B

Borne

- de Bézout, 14, 61
- logarithmique, 12
- sous-polynomiale, 10

C

Capacité logarithmique, 43

Caractéristique

- de Nevanlinna, 26, 63
- de Shimizu-Ahlfors, 127

Classe de Lelong, 87

Condenseur, 45

D

n -ième diamètre

- euclidien, 68
- greenien, 73
- pseudo-hyperbolique, 68
- sphérique, 68

n -ième diamètre

- dans un espace métrique, 67

Dérivée sphérique, 126

Déterminant d'interpolation, 181

Distance

- hyperbolique, 4
- pseudo-hyperbolique, 4
- sphérique, 3

Diviseur, 54

- des a -points, 54

Domaine, 2

- régulier, 47

E

E -fonction, 6

Énergie

- de Green, 44
- potentielle, 43

Ensemble

- exceptionnel, 6
- polaire, 41

F

Fonction

- d'exhaustion, 47
- de comptage, 54
- de Green, 42
- de Green pluri-complexe, 87
- de Weierstraß, 34
- elliptique, 33
- elliptique de Weierstraß, 114
- fuchsienne, 34
- maximum, 49

Formule

- de Poisson-Jensen, 55, 57
- de Riemann-Hurwitz, 125
- de Shimizu-Ahlfors, 128

G

Groupe

- des automorphismes, 3
- fuchsien, 34

H

Hauteur de Weil

- d'un polynôme, 174

Hauteur de Weil, 9

- d'un espace vectoriel, 175
- d'un point projectif, 173

Hauteur naïve d'un polynôme, 174

I

Indice de Bernstein, 53

- holomorphe, 53
- méromorphe, 53

Intégrale de Poisson, 45

L

Lemme de zéros polynomial, 14

M

- Matrice d'interpolation, 181
- Mesure d'irrationalité d'un réel, 19
- Mesure de transcendance
 - d'un réel, 19
 - de Coman et Poletsky, 20
 - holomorphe, 20, 79
 - méromorphe, 21, 80
- Mesure harmonique, 45
- Moyenne de Jensen, 62

N

- Nombre moyen de feuillets, 125
- Noyau de Poisson, 45

O

- Ordre , 50
 - fini, 50
 - inférieur, 50
 - supérieur, 50
- Ordre de transcendance
 - de Coman et Poletsky, 20

P

- p -fibration, 24
- Petites valeurs, 17

- Polynôme extrémal, 80

Potentiel

- greenien, 44
- logarithmique, 43
- Produit de Blaschke, 71
- Pseudo-distance sphérique, 4

S

- Sphère de Riemann, 2
- Structure o-minimale, 10
- Suite d'évitement, 36
- Surface
 - de recouvrement, 123
 - triangulable, 123
- Système
 - holomorphe d'intervalles
 - admissibles, 148, 149
 - méromorphe d'intervalles
 - admissibles, 148, 149

T

- Théorie
 - d'Ahlfors, 122
 - de Nevanlinna, 62
- Triangulation, 123

Table des matières

Sommaire	1
Conventions et notations	2
1 Introduction	5
1.1 Ensembles exceptionnels	5
1.2 Comptage des points de hauteur bornée	9
1.3 Lemmes de zéros	14
1.4 Mesures de transcendance	18
1.5 Inégalités de Bézout transcendantes	21
1.6 Résultats de la thèse	25
2 Pré-requis	41
2.1 Théorie du potentiel	41
2.2 Fonctions d'exhaustions	47
2.3 Croissance des fonctions	48
2.4 Indices de Bernstein	53
2.5 Comptage des zéros	54
2.6 Théorie de Nevanlinna	62
2.7 Mesures des lemniscates	66
3 Majorations des mesures de transcendance	77
3.1 Introduction	77
3.2 Croissance maximale d'un polynôme	87
3.3 Taille des lemniscates	88
3.4 Géométrie du domaine Ω	95
3.5 Mesure de transcendance holomorphe	98
3.6 Mesure de transcendance méromorphe	105
3.7 Applications	114
4 Distribution des petites valeurs	121
4.1 Introduction	121
4.2 Théorie d'Ahlfors	122
4.3 Ahlfors-régularité	128
4.4 Croissance des caractéristiques	132
4.5 Minoration du d -ième diamètre d'une fibre	137
4.6 Existence des intervalles admissibles	148
4.7 Applications	161
5 Applications aux comptages des points algébriques	173

5.1	Introduction	173
5.2	Hauteur de Weil	173
5.3	Interpolation avec évitement	177
5.4	Lemme de zéros en moyenne	187
5.5	Comptages des points algébriques	191
	Bibliographie	193
	Index des notations	199
	Index	202
	Table des matières	205

Résumé

Cette thèse porte sur des propriétés arithmétiques des fonctions méromorphes et transcendentes d'une variable.

Dans le chapitre 3, nous définissons des mesures de transcendance pour les fonctions holomorphes et méromorphes sur un domaine régulier de \mathbb{C} puis nous majorons ces mesures en fonction de la distribution des petites valeurs de la fonction étudiée.

Grâce aux théories de Nevanlinna et d'Ahlfors, nous étudions dans le chapitre 4 la distribution des petites valeurs de certaines classes de fonctions méromorphes sur \mathbb{D} ou \mathbb{C} afin d'obtenir pour celles-ci des majorations explicites de leurs mesures de transcendance.

L'application principale de ce travail est l'obtention de nouveaux lemmes de zéros polynomiaux pour de grandes familles de fonctions méromorphes et en particulier pour les fonctions de Weierstraß et les fonctions fuchsienues.

Dans le chapitre 5, nous montrons que ces lemmes de zéros polynomiaux conduisent à des bornes logarithmiques du nombre de points algébriques de degré et hauteur bornés contenus dans les graphes des fonctions étudiées.

Mots clés : *lemme de zéros, fonction méromorphe, mesure de transcendance, comptage de points algébriques*

Abstract

This PhD thesis is about some arithmetic properties of meromorphic functions of one variable.

In chapter 3, we define the transcendental measures for holomorphic and meromorphic functions on a regular domain of \mathbb{C} , then we obtain upper bounds of these measures in terms of the distribution of small values of the function.

Thanks to the Nevanlinna and Ahlfors theories, we study in chapter 4 the distribution of small values of some classes of meromorphic functions on \mathbb{D} or \mathbb{C} in order to obtain explicit upper bounds of transcendental measures.

The main application of this work is the demonstration of new polynomial zero estimates for large classes of meromorphic functions, in particular for Weierstraß functions and fuchsian functions.

In chapter 5, we prove that polynomial zero estimates lead to logarithmic bounds of the number of algebraic points of bounded degree and height contained in the graph of the function.

Keywords : *zero estimates, meromorphic functions, transcendental measures, counting algebraic points*
