



# Étude numérique de la propagation des ondes guidées ultrasonores par la méthode de Galerkin discontinue : application au contrôle non-destructif dans le domaine des transports

Salah-Eddine Hebaz

## ► To cite this version:

Salah-Eddine Hebaz. Étude numérique de la propagation des ondes guidées ultrasonores par la méthode de Galerkin discontinue : application au contrôle non-destructif dans le domaine des transports. Acoustique [physics.class-ph]. Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambresis, 2018. Français. NNT : 2018VALE0020 . tel-02062548

**HAL Id: tel-02062548**

**<https://theses.hal.science/tel-02062548>**

Submitted on 9 Mar 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



# THÈSE DE DOCTORAT

pour obtenir le grade de Docteur de

L'UNIVERSITÉ POLYTECHNIQUE HAUTS-DE-FRANCE

en Sciences et Technologie, Mention : ÉLECTRONIQUE

Spécialité : ACOUSTIQUE ET TÉLÉCOMMUNICATIONS

Présentée et soutenue par :

**SALAH-EDDINE HEBAZ**

Le 08 Juin 2018, à Valenciennes.

**École doctorale :**

Sciences pour l'Ingénieur (SPI) Université de Lille-Nord-de-France

**Laboratoire, Équipe de recherche :**

Institut d'Électronique, de Micro-Électronique et de Nanotechnologie,

Département Opto-Acousto-Électronique (IEMN/DOAE), Groupe TPIA

---

## **Étude numérique de la propagation des ondes guidées ultrasonores par la méthode de Galerkin discontinue : Application au contrôle non-destructif dans le domaine des transports.**

---

### **JURY :**

**Présidente du jury**

— DUBAR, MIRENTXU, Professeur, Université de Valenciennes

**Rapporteurs**

— PAREIGE, PASCAL, Professeur, Université du Havre

— ICHCHOU, MOHAMED, Professeur, École Centrale de Lyon

**Examineur**

— BENTAHAR, MABROUK, Professeur, Université de Compiègne

**Co-directeurs de thèse**

— ASSAAD, JAMAL, Professeur à l'Université de Valenciennes

— BENMEDDOUR, FAROUK, Maître de Conférences à l'Université de Valenciennes

**Membres invités**

— MOULIN, EMMANUEL, Professeur, Université de Valenciennes

— TRÉTOUT, HERVÉ, Ingénieur, Dassault Aviation

---



*"Le plus grand bonheur de l'étude consiste pour moi,  
non pas à entendre les raisons des autres,  
mais à les trouver moi-même."*

Règles pour la direction de l'esprit (1629),  
René Descartes (1596-1650)

*À mes chers parents,  
À mes sœurs et frères.*



# REMERCIEMENTS

---

Voilà, mes années de thèse se sont écoulées! Comme je le dis toujours : la thèse est une expérience de vie unique. Elle permet de découvrir soi-même, de changer sa vision des choses, du monde qui nous entoure et d'apprécier le passé, le présent tout en rêvant du futur. Au fil de ces années de thèse effectuée au Laboratoire IEMN-DOAE de l'université de Valenciennes et du Hainaut Cambrésis, j'ai eu l'opportunité de faire des merveilleuses rencontres, des personnes qui ont ajouté leur touche à ce processus et aux quelles je souhaite adresser tous mes remerciements.

Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur de thèse, Jamal ASSAAD, de m'avoir accueilli sein du laboratoire, de m'avoir donné la chance d'entreprendre ce projet dans des bonnes conditions et accordé tant de confiance. Je suis également reconnaissant pour sa contribution à ce travail et ses enseignements; sans oublier son caractère bienveillant et très sympathique.

Un grand merci également à mon co-directeur de thèse, Emmanuel MOULIN, pour sa disponibilité et ses conseils pertinents. J'ai eu la chance et le plaisir de travailler avec lui, de bénéficier de son expertise et sa rigueur scientifique, particulièrement : à se poser les bonnes questions, à chercher des réponses et à les reformuler d'une façon plus claire et pédagogique.

Je souhaite témoigner ma profonde gratitude et reconnaissance envers mon encadrant, Farouk BENMEDDOUR, pour sa patience, ses qualités humaines et sa rigueur, son soutien et son investissement tout au long du chemin. J'ai appris énormément à ses côtés et je lui suis redevable de la liberté dont j'ai pu bénéficier dans la conduite de mon projet de thèse. Un grand merci pour toutes "les discussions animées" - selon Emmanuel :) -, pour les minutieux conseils et orientations, pour tout le temps consacré au suivi des travaux, pour me pousser à surmonter toutes les difficultés, m'aider à avancer et me surpasser au jour le jour. Mille fois merci.

J'adresse mes sincères remerciements à tous les membres de jury qui m'ont fait l'honneur de juger ces travaux de recherche, pour l'intérêt qu'ils ont montré pour cette thèse et pour les remarques pertinentes pour l'améliorer. Un grand merci à Madame Mirentxu

DUBAR pour avoir accepté d'examiner ce travail et de présider le jury. Je tiens à remercier chaleureusement mes rapporteurs, Monsieur Pascal PAREIGE et Monsieur Mohammed ICHCHOU, pour leur grand engagement et pour leur implication très positive dans l'évaluation de ce travail. Mes remerciements vont à Monsieur Mabrouk BENTAHAR pour avoir accepté d'examiner cette thèse. Je remercie également Monsieur Hervé TRÉTOT de faire partie du jury. Merci beaucoup pour vos contributions très précieuses.

Je profite de cette occasion pour remercier les membres du groupe Ondes Acoustiques du Laboratoire Ondes et Milieux Complexes du Havre, en particulier : Mounsi ECHCHERIF EL-KETTANI, Rebecca SAINIDOU, Pascal REMBERT et Bruno MORVAN, qui m'ont donné l'occasion de découvrir le monde de l'acoustique et de la recherche durant mon stage de fin d'étude du diplôme d'ingénieur ; et qui m'ont encouragé de poursuivre un doctorat dans ce domaine si fascinant. Un merci particulier également à mes anciens professeurs à l'université de Fès, en pensant spécialement à : Mimoun BOUNAANAA, Karima El HAMMOUMI et Ghizlane KHAISSIDI. Merci énormément pour votre soutien et vos encouragements tout au long de ce voyage.

Je remercie également Olivier BOU MATAR de l'ITEMN de Lille pour les nombreuses discussions fructueuses que nous avons mené lors des réunions et des journées des doctorants du département acoustique. De même, un merci particulier à Kathia MARCAL OLIVEIRA de LAMIH de Valenciennes pour ses conseils, son enthousiasme et son appui.

Mes remerciements vont aussi à tous les membres du groupe TPIA et de l'ITEMN-DOAE de Valenciennes pour leur disponibilité et assistance, en particulier : Nikolay SMAGIN, Lynda CHEHAMI, Hossep ACHDJIAN, Françoise DESRUELLES, Virginie SCHAFER et Lucie DUPONT. Une pensée spéciale à tous les collègues, docteurs et futurs docteurs de l'ITEMN-DOAE, de LAMIH et de LAMAV, avec lesquels j'ai partagé mes états d'âme et avec qui j'ai eu le plaisir de travailler : Thibault, Hala, Tonia, Martin, Bowe, Anthony, Justine, Sélima, Aymen, Hassan, ... Merci pour les échanges constructifs, les encouragements, l'ambiance géniale au labo, les sorties conviviales et tout les moments agréables que nous avons pu avoir ensemble.

Je remercie vivement tous les membres de ma grande famille Valenciennoise, qui ont supporté mes sauts d'humeurs au quotidien, qui m'ont soutenu durant toutes ces années sans faille : meu Pai Sandro, minha Mae Jocelene et Pipoca Pires, Charline, Véronique, Luca et Dorian, Patrick, Yasmine et Élise, Ahlem, Saif, Ali, Shadab, Ahmed, Fadoua, Nadya, Amira, Aymen, Catalina, José, Boutheina, Mathieu, Bruno, ... A tous mes amis qui ont toujours été à mon écoute : Youness, Wassila, Zakaria, Saad, Khalil et Zoubida, Meriem, Hajar, Youness-D, Abdelilah, ... Merci beaucoup pour votre soutien, compréhension et fidélité, pour les bons moments et pour l'amitié.

Au dessus de tout, j'adresse mes vifs remerciements à toute ma famille. A mes chers parents, mes meilleurs amis d'une vie, Malika et Lahcen, pour m'avoir donné le goût au études et à la recherche, pour leur amour, sacrifice et soutien inconditionnel ; sans qui ce travail n'aurait jamais vu le jour. A mes sœurs et mes frères : Wafa, Ali, Simohammed, Fatiha, qui étaient toujours à mes côtés à la vie à la mort. A mes bien-aimés : Sara, Hasbia et Marco, Souad, Francois et papa Gianni, nonna Albina, mama Latifa, et à la mémoire de ma grande mère. A ma grande amie, ma compagne de la vie, Taisa, qui a rendu ma vie plus joyeuse, qui m'a enseigné le sens de l'amour avec un dévouement inestimable. Effectivement, ensemble, nous sommes plus ! Un grand merci également à toute sa famille : Maria Rita et Paulinho, tia Fatima, Tiago, vovó Brasilina ... pour le soutien, l'amour et l'affection. Merci infiniment.

Je tiens à remercier l'Université de Valenciennes et du Hainaut Cambrésis, actuellement Université polytechnique Hauts-de-France, ainsi que le Ministère de l'Enseignement Supérieur, de la Recherche et de l'Innovation de France pour le soutien financier apporté à la réalisation de cette thèse.

Enfin, je remercie toute personne qui a contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce travail, tous ceux dont je n'ai pas cité les noms. Qu'ils trouvent tous ici l'expression de ma reconnaissance et de mon estime.

Merci,

Salah-Eddine Hebaz.



# TABLE DES MATIÈRES

|                                                                                            |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| REMERCIEMENTS                                                                              | 5  |
| TABLE DES MATIÈRES                                                                         | 8  |
| TABLE DES FIGURES                                                                          | 12 |
| LISTE DES TABLEAUX                                                                         | 15 |
| INTRODUCTION GÉNÉRALE                                                                      | 17 |
| CONTEXTE ET ENJEUX DU CONTRÔLE-SANTÉ-INTÉGRÉ . . . . .                                     | 17 |
| PROBLÉMATIQUES DES MÉTHODES ULTRASONS . . . . .                                            | 18 |
| OBJECTIFS ET CONTRIBUTION DE LA THÈSE . . . . .                                            | 18 |
| MÉTHODOLOGIE ET ORGANISATION . . . . .                                                     | 19 |
| PRODUCTION SCIENTIFIQUE . . . . .                                                          | 21 |
| 1 ONDES GUIDÉES ULTRASONORES POUR LE CONTRÔLE NON-DESTRUCTIF DES STRUCTURES                | 23 |
| 1.1 INTRODUCTION . . . . .                                                                 | 23 |
| 1.2 GÉNÉRALITÉS SUR LES ONDES GUIDÉES ULTRASONORES . . . . .                               | 24 |
| 1.2.1 Introduction . . . . .                                                               | 24 |
| 1.2.2 Équations de l'élastodynamique linéaire . . . . .                                    | 25 |
| 1.2.3 Description des guides d'ondes élastiques . . . . .                                  | 27 |
| 1.2.4 Les ondes guidées dans les plaques . . . . .                                         | 27 |
| 1.2.5 Les ondes guidées dans les cylindres . . . . .                                       | 30 |
| 1.3 ÉTAT DE L'ART SUR LES MÉTHODES D'ANALYSE DE LA PROPAGATION DES ONDES GUIDÉES . . . . . | 32 |
| 1.3.1 Introduction . . . . .                                                               | 32 |
| 1.3.2 Méthodes analytiques . . . . .                                                       | 32 |
| 1.3.3 Méthodes numériques . . . . .                                                        | 33 |
| 1.3.4 Méthodes hybrides . . . . .                                                          | 36 |
| 1.3.5 Conclusion . . . . .                                                                 | 40 |
| 1.4 MÉTHODES NUMÉRIQUES D'ORDRE ÉLEVÉ . . . . .                                            | 41 |
| 1.4.1 Introduction . . . . .                                                               | 41 |
| 1.4.2 Concepts de discrétisations . . . . .                                                | 42 |

|       |                                                                                                                                    |    |
|-------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1.4.3 | Méthodes des éléments spectraux . . . . .                                                                                          | 43 |
| 1.4.4 | Méthode de Galerkin discontinue . . . . .                                                                                          | 44 |
| 1.4.5 | Conclusion . . . . .                                                                                                               | 46 |
| 1.5   | CONCLUSION . . . . .                                                                                                               | 47 |
| 2     | APPLICABILITÉ DE LA MÉTHODE DE GALERKIN DISCONTINUE DANS LE DO-<br>MAINE FRÉQUENTIEL : PROBLÈMES AUX VALEURS PROPRES               | 49 |
| 2.1   | INTRODUCTION . . . . .                                                                                                             | 49 |
| 2.2   | MÉTHODES À PÉNALITÉ INTÉRIEURE . . . . .                                                                                           | 50 |
| 2.2.1 | Description général du problème . . . . .                                                                                          | 50 |
| 2.2.2 | Discrétisation en une dimension . . . . .                                                                                          | 50 |
| 2.2.3 | Discrétisation en dimensions supérieures . . . . .                                                                                 | 54 |
| 2.2.4 | Implémentation de la formulation discontinue . . . . .                                                                             | 55 |
| 2.3   | RÉSULTATS NUMÉRIQUES ET VALIDATIONS . . . . .                                                                                      | 59 |
| 2.3.1 | Ondes longitudinales dans une barre mince . . . . .                                                                                | 60 |
| 2.3.2 | Résultats numériques 1D . . . . .                                                                                                  | 61 |
| 2.3.3 | Vibration d'une membrane libre . . . . .                                                                                           | 66 |
| 2.3.4 | Résultats numériques 2D . . . . .                                                                                                  | 66 |
| 2.3.5 | Conclusion . . . . .                                                                                                               | 70 |
| 2.4   | CONCLUSION . . . . .                                                                                                               | 70 |
| 3     | DÉVELOPPEMENT DE LA MÉTHODE SEMI-ANALYTIQUE ÉLÉMENTS FINIS DE<br>GALERKIN DISCONTINUE POUR LES PLAQUES                             | 71 |
| 3.1   | INTRODUCTION . . . . .                                                                                                             | 71 |
| 3.2   | FORMULATION SADG-FE POUR LES ONDES GUIDÉES . . . . .                                                                               | 72 |
| 3.2.1 | Description générale du problème . . . . .                                                                                         | 72 |
| 3.2.2 | Formulation variationnelle discontinue . . . . .                                                                                   | 73 |
| 3.3   | IMPLÉMENTATION NUMÉRIQUE DE LA MÉTHODE SADG-FE . . . . .                                                                           | 76 |
| 3.3.1 | Détermination du problème aux valeurs propres quadratique . . . . .                                                                | 76 |
| 3.3.2 | Plaques homogènes isotropes . . . . .                                                                                              | 77 |
| 3.3.3 | Plaques hétérogènes . . . . .                                                                                                      | 78 |
| 3.3.4 | Plaques anisotropes . . . . .                                                                                                      | 80 |
| 3.3.5 | Propriétés du problème aux valeurs propres quadratique . . . . .                                                                   | 82 |
| 3.4   | RÉSULTATS NUMÉRIQUES . . . . .                                                                                                     | 83 |
| 3.4.1 | Plaques homogènes isotropes . . . . .                                                                                              | 83 |
| 3.4.2 | Plaques à gradient fonctionnel . . . . .                                                                                           | 86 |
| 3.4.3 | Plaques anisotropes . . . . .                                                                                                      | 88 |
| 3.4.4 | Conclusion . . . . .                                                                                                               | 89 |
| 3.5   | CONCLUSION . . . . .                                                                                                               | 90 |
| 4     | DÉVELOPPEMENT DE LA MÉTHODE SEMI-ANALYTIQUE ÉLÉMENTS FINIS DE<br>GALERKIN DISCONTINUE POUR LES GUIDES D'ONDES À SECTION ARBITRAIRE | 91 |

|       |                                                                                      |     |
|-------|--------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 4.1   | INTRODUCTION . . . . .                                                               | 91  |
| 4.2   | FORMULATION SADG-FE EN DEUX DIMENSIONS . . . . .                                     | 92  |
| 4.2.1 | Description du problème . . . . .                                                    | 92  |
| 4.2.2 | Formulation variationnelle discontinue . . . . .                                     | 93  |
| 4.3   | IMPLÉMENTATION . . . . .                                                             | 94  |
| 4.3.1 | Présentation matricielle . . . . .                                                   | 94  |
| 4.3.2 | Cylindre plein homogène isotrope . . . . .                                           | 95  |
| 4.3.3 | Tube homogène isotrope . . . . .                                                     | 96  |
| 4.3.4 | Guide d'onde à gradient fonctionnel . . . . .                                        | 97  |
| 4.3.5 | Guide d'onde anisotrope . . . . .                                                    | 98  |
| 4.4   | RÉSULTATS NUMÉRIQUES . . . . .                                                       | 99  |
| 4.4.1 | Cylindre plein homogène isotrope . . . . .                                           | 99  |
| 4.4.2 | Cylindre plein à gradient fonctionnel . . . . .                                      | 101 |
| 4.4.3 | Tubes anisotropes . . . . .                                                          | 103 |
| 4.4.4 | Guide d'onde à section arbitraire : le rail . . . . .                                | 105 |
| 4.5   | CONCLUSION . . . . .                                                                 | 108 |
| 5     | CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES . . . . .                                        | 109 |
| 5.1   | CONCLUSION . . . . .                                                                 | 109 |
| 5.2   | PERSPECTIVES . . . . .                                                               | 111 |
| 5.2.1 | Amélioration de la méthode et son implémentation . . . . .                           | 111 |
| 5.2.2 | Développement de la méthode SADG-FE pour le contrôle santé intégré . . . . .         | 111 |
|       | ANNEXES . . . . .                                                                    | 113 |
| A     | ONDES ÉLASTIQUES DANS LES PLAQUES ET LES CYLINDRES HOMOGÈNES ISOTROPES . . . . .     | 115 |
| A.1   | INTRODUCTION . . . . .                                                               | 115 |
| A.2   | ONDES GUIDÉES DANS LES PLAQUES . . . . .                                             | 115 |
| A.2.1 | Modes de Lamb . . . . .                                                              | 116 |
| A.2.2 | Modes SH . . . . .                                                                   | 118 |
| A.3   | ONDES GUIDÉES DANS LES CYLINDRES . . . . .                                           | 118 |
| A.3.1 | Équations de dispersion . . . . .                                                    | 119 |
| A.3.2 | Modes longitudinaux . . . . .                                                        | 120 |
| A.3.3 | Modes de torsion . . . . .                                                           | 120 |
| A.3.4 | Modes de flexion . . . . .                                                           | 120 |
| B     | IMPLÉMENTATION DE LA MÉTHODE DE GALERKIN DISCONTINUE À PÉNALITÉ INTÉRIEURE . . . . . | 121 |
| B.1   | INTRODUCTION . . . . .                                                               | 121 |
| B.2   | FORMULATION VARIATIONNELLE . . . . .                                                 | 122 |
| B.2.1 | Description du problème . . . . .                                                    | 122 |

---

|       |                                                                |     |
|-------|----------------------------------------------------------------|-----|
| B.2.2 | Formulation variationnelle générale . . . . .                  | 122 |
| B.3   | IMPLÉMENTATION NODALE . . . . .                                | 123 |
| B.3.1 | Approximation nodale . . . . .                                 | 123 |
| B.3.2 | Transformation des intégrales . . . . .                        | 124 |
| C     | ÉVALUATION DES PERFORMANCES DES MÉTHODES À PÉNALITÉ INTÉRIEURE | 127 |
| C.1   | INTRODUCTION . . . . .                                         | 127 |
| C.2   | PROPRIÉTÉS SPECTRALES DISPERSIVES ET DISSIPATIVES . . . . .    | 127 |
| C.2.1 | Influence des paramètres de pénalité . . . . .                 | 128 |
| C.2.2 | Formules d'ajustement . . . . .                                | 129 |
| C.2.3 | Analyse de la solution modale . . . . .                        | 130 |
| C.2.4 | Conclusion . . . . .                                           | 134 |
| C.3   | TEMPS DE CALCUL . . . . .                                      | 134 |
| C.4   | CONCLUSION . . . . .                                           | 135 |
|       | BIBLIOGRAPHIE                                                  | 137 |

# TABLE DES FIGURES

|      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |    |
|------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1    | Méthodologie générale du projet de thèse. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 20 |
| 1.1  | Géométries des guides d'ondes élastiques : (a) plane et (b) cylindrique . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 27 |
| 1.2  | Représentation de la déformée des modes de Lamb : (a) Symétrique et (b) Antisymétrique. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | 28 |
| 1.3  | Représentation de la déformée des modes SH. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 28 |
| 1.4  | Courbes de dispersion des premiers huit modes de Lamb propagatifs pour une plaque libre homogène et isotrope : les modes S tracées en traits pointillés et les modes A en traits pleins. . . . .                                                                                                                                                                                                                                              | 29 |
| 1.5  | Évolution de (a) la vitesse de phase $C_p/c_T$ et (b) de la vitesse de groupe $C_g/c_T$ des modes de Lamb propagatifs pour une plaque libre homogène et isotrope en fonction de la fréquence $\Omega$ . . . . .                                                                                                                                                                                                                               | 29 |
| 1.6  | Courbes de dispersion des modes de Lamb non-propagatifs (triangles rouges) et inhomogènes (carrés bleus et losanges verts) d'une plaque libre homogène isotrope dans le plan complexe. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                | 30 |
| 1.7  | Représentation de la déformée des modes de Pochhammer-Chree (a) de compression, (b) de flexion et (c) de torsion. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 31 |
| 1.8  | Courbes de dispersion $kd(\Omega)$ des modes de Pochhammer-Chree propagatifs et non-propagatifs pour un cylindre droit homogène et isotrope libre [1]. .                                                                                                                                                                                                                                                                                      | 31 |
| 1.9  | Système infini (a) composé d'éléments identiques (b) dont les forces extérieures et les déplacements de gauche ( $\mathbf{u}_L, \mathbf{f}_L$ ) et de droite ( $\mathbf{u}_R, \mathbf{f}_R$ ) sont liées par une condition périodique. . . . .                                                                                                                                                                                                | 37 |
| 1.10 | Discretisation des guide d'onde plane 2D d'épaisseur $2d$ en éléments linéaires.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | 38 |
| 1.11 | Trois types d'algorithmes numériques. Les lignes fines (bleues) en $x_0$ et $x_n$ indiquent les limites du domaine. Les points noirs $x_j$ illustrent les points de discrétisation. Les lignes verticales (oranges et vertes) épaisses sont les bords d'un sous-domaine. Les points rouges représentent les solutions approchées qui sont calculées à partir des approximations (lignes grises) sur les points de discrétisation [2]. . . . . | 43 |
| 1.12 | Représentation de la solution par la méthode (a) continue et (b) discontinue.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 45 |
| 2.1  | Maillage d'un domaine unidimensionnel $\mathcal{I}$ . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 51 |
| 2.2  | Maillage arbitraire d'un domaine de géométrie arbitraire bidimensionnel (2D). . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 54 |

|     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |    |
|-----|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 2.3 | Structure d'implémentation de la méthode DG. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                  | 56 |
| 2.4 | Barre à section transversale uniforme dans l'axe de propagation $x$ . . . . .                                                                                                                                                                                                                                         | 60 |
| 2.5 | Les premiers 6 modes propres et nombres d'ondes obtenus de : (a) la formulation continue et (b) discontinue (IIPG avec $\alpha = 3$ et $\gamma = 0$ ), respectivement. . . . .                                                                                                                                        | 62 |
| 2.6 | Évolution de l'erreur de dispersion relative absolue (%) sur les nombres d'onde ( $\mathcal{E}_k = 100 \frac{ k_{ex} - k_{num} }{k_{ex}}$ ) en échelle linéaire et logarithmique avec les taux de convergence pour un raffinement de maillage uniforme linéaire ( $p = 1$ ) de $n = 150$ et $300$ . . . . .           | 64 |
| 2.7 | Membrane occupant un domaine $\mathcal{I} \in \mathbb{R}^2$ de frontière $\partial\mathcal{I}$ libre. . . . .                                                                                                                                                                                                         | 66 |
| 2.8 | Maillages d'une membrane rectangulaire : rectangulaire uniforme, triangulaire régulier et irrégulier. . . . .                                                                                                                                                                                                         | 67 |
| 2.9 | Les premiers 2 modes propres et nombres d'onde obtenus de la formulation continue et discontinue (SIPG) respectivement, en utilisant $n_{quad} = 16$ éléments quadrilatéraux linéaires à 4 nœuds. . . . .                                                                                                             | 68 |
| 3.1 | Géométrie du guide d'onde 2D dans le sens de propagation $x_3$ : plaque d'épaisseur $2d$ et de dimensions latérales infinies. . . . .                                                                                                                                                                                 | 72 |
| 3.2 | Maillage d'une ligne de l'épaisseur de la plaque. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                             | 73 |
| 3.3 | Discrétisation de l'épaisseur d'une plaque multicouche. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                       | 79 |
| 3.4 | Direction de propagation dans une couche anisotrope suivant une direction arbitraire. . . . .                                                                                                                                                                                                                         | 81 |
| 3.5 | Courbes de dispersion $(kd, \Omega)$ des modes de Lamb propagatifs pour une plaque isotrope : résultats numériques obtenus par SAFE-DG (points noirs) contre les modes symétriques (S) et anti-symétriques (A) des solutions analytiques tracés en lignes bleues et rouges, respectivement. . . . .                   | 85 |
| 3.6 | Comparaison des résultats numériques (points noirs) avec les solutions analytiques des composantes du champ de déplacement des modes de Lamb à la fréquence de 1 MHz : $\mathbf{U}_1(x_1)$ et $\mathbf{U}_3(x_1)$ sont en traits pleins bleus et rouges, respectivement. . . . .                                      | 85 |
| 3.7 | Projection dans le plan complexe des courbes de dispersion $(kd, \Omega)$ des modes de Lamb pour une plaque isotrope : modes inhomogènes ( $\square$ magenta et $\diamond$ verts) et non-propagatifs ( $\triangle$ rouges), obtenues de la SADG-FE comparées aux résultats de la méthode SAFE (points noirs). . . . . | 86 |
| 3.8 | Courbes de dispersion de la vitesse de phase $C_p$ des modes Lamb dans une plaque en matériau à gradient fonctionnel libre : les résultats numériques du SADG-FE représentés par des points rouges sont superposés aux résultats de Benmeddour et al. [3] en traits pleins noirs. . . . .                             | 87 |
| 3.9 | Courbes de dispersion de la vitesse de phase $C_p$ des modes de Lamb et des modes SH dans une couche composite libre : les résultats numériques du SADG-FE représentés par des cercles noirs sont superposés aux résultats de la méthode SAFE [4] en points rouges. . . . .                                           | 89 |

|      |                                                                                                                                                                                                                                                                                 |     |
|------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 4.1  | Géométrie d'un guide d'ondes à section arbitraire $S$ , de bord latéral $\partial S$ , extrudée dans le sens de propagation $x_3$ . . . . .                                                                                                                                     | 92  |
| 4.2  | Configuration d'un cylindre creux. . . . .                                                                                                                                                                                                                                      | 96  |
| 4.3  | Maillage régulier d'un disque de rayon $a = 1mm$ en utilisant des éléments quadratiques (Q8). . . . .                                                                                                                                                                           | 100 |
| 4.4  | Courbes de dispersion de la vitesse de phase $C_p$ des modes de Pochhammer-Chree dans un cylindre plein en acier. Les résultats numériques du SADG-FE (points noirs) sont superposés aux résultats analytiques (traits pleins). . . . .                                         | 100 |
| 4.5  | Courbes de dispersion analytiques des modes non-propagatifs (points rouges) et inhomogènes (points violets et verts) d'un cylindre homogène et isotrope dans le plan complexe. Ces dernières sont comparées aux solutions numériques de la SADG-FE (cercles noirs). . . . .     | 101 |
| 4.6  | Configuration géométrique et matérielle du guide d'ondes FGM cylindrique. . . . .                                                                                                                                                                                               | 101 |
| 4.7  | Courbes de dispersion de la vitesse de phase $C_p$ des modes propagatifs dans un cylindre FGM isotrope. Les résultats numériques du SADG-FE (cercles noirs) sont superposés aux résultats analytiques (traits pleins bleus) et ceux de la méthode SAFE (points rouges). . . . . | 103 |
| 4.8  | Maillage régulier en deux dimensions de la section d'un tube de rayon interne $a_1 = 2.5mm$ et de rayon externe $a_2 = 5mm$ , en utilisant des éléments quadratiques complets à 9 nœuds. . . . .                                                                                | 104 |
| 4.9  | Courbes de dispersion de la vitesse de phase $C_p$ des modes propagatifs dans un tube anisotrope libre : les résultats numériques de la SADG-FE (cercles noirs) sont comparés aux résultats de la méthode SAFE classique [4] (points rouges). . . . .                           | 105 |
| 4.10 | Discrétisation d'un rail 60 E1 en $n = 44$ éléments quadrilatéraux pour une approximation d'ordre élevée. . . . .                                                                                                                                                               | 106 |
| 4.11 | Courbes de dispersion de la vitesse de phase $C_p$ des modes propagatifs dans un rail homogène isotrope libre : les résultats numériques de la SADG-FE (cercles noirs) sont comparés aux résultats de la méthode SAFE classique [1] (lignes rouges). . . . .                    | 107 |
| 4.12 | Modes de vibration d'un rail à la fréquence de 25 kHz. Les déformées modales et les nombres d'ondes sont obtenus de : (a) la méthode SAFE et (b) la méthode SADG-FE. . . . .                                                                                                    | 107 |
| A.1  | Plaque homogène isotrope d'épaisseur $2d$ et de dimensions latérales infinies. . . . .                                                                                                                                                                                          | 116 |
| B.1  | Quadrangle (2D) à quatre nœuds. . . . .                                                                                                                                                                                                                                         | 123 |
| B.2  | Transformations des éléments de référence triangulaires et quadrilatéraux (2D). . . . .                                                                                                                                                                                         | 125 |
| C.1  | Erreur relative de dispersion des méthodes IPDG pour $\gamma = 0$ et $\alpha = (1; 5; 10)$ . . . . .                                                                                                                                                                            | 128 |

|     |                                                                                                                                                                                              |     |
|-----|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| C.2 | Erreur relative de dispersion de la méthode SIPG pour $p = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , $\gamma = 0$ et $\alpha = (p + 1)(p + 2)/2$ : (a) en échelle logarithmique, (b) en échelle linéaire. . . . . | 131 |
| C.3 | Temps de calcul en secondes consommé par le solveur pour résoudre le problème sous forme généralisée de différentes tailles, de $N_{DDL} = 100$ jusqu'à 1000. . . . .                        | 135 |

## Liste des tableaux

|     |                                                                                                                                                                                                                                                                    |     |
|-----|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 2.1 | Dérivations de la méthode IPDG et conditions de stabilité. . . . .                                                                                                                                                                                                 | 53  |
| 2.2 | L'erreur $\mathcal{E}_k$ et la norme $L^2$ de l'erreur $\ \mathcal{E}_h(\mathbf{U}_i)\ _{L^2}$ pour les 6 premières solutions $(\mathbf{U}_i, k_i)$ obtenues de la résolution du problème (2.15) avec $\alpha = 3/h$ , $\gamma = 0$ et $N = 150$ éléments. . . . . | 63  |
| 2.3 | Taux de convergence des méthodes IPDG pour les 6 premières solutions $(\mathbf{U}_i, k_i)$ dans un maillage uniforme de taille $h$ et $h/2$ . . . . .                                                                                                              | 64  |
| 2.4 | Taux de convergence des méthodes IPDG ( $p = 1$ ) pour les dix premières solutions propres $k_i$ dans un maillage rectangulaire uniforme, triangulaire régulier et irrégulier pour deux différents maillages avec $h/2$ et $h/4$ . . . .                           | 67  |
| 2.5 | Erreurs de dispersion sur les nombres d'ondes des différentes méthodes IPDG et CG pour les dix premiers modes $\{k_i, i = 1, \dots, 10\}$ en utilisant $8 \times 8$ éléments quadrilatéraux. . . . .                                                               | 68  |
| 2.6 | Erreurs de dispersion sur les nombres d'onde des différentes méthodes IPDG et CG pour les dix premiers modes $\{k_i, i = 1, \dots, 10\}$ en utilisant un maillage triangulaire régulier de $n_{tri} = 288$ éléments. . . . .                                       | 69  |
| 3.1 | Propriétés d'une plaque d'aluminium. . . . .                                                                                                                                                                                                                       | 84  |
| 3.2 | Propriétés des matériaux : Céramique et Chrome, utilisés pour la plaque FGM. . . . .                                                                                                                                                                               | 86  |
| 3.3 | Propriétés élastiques homogénéisées du matériau composite Carbone-Epoxy T300/914 à $\varphi = 0$ . Les constantes élastiques $C_{ij}$ sont en GPa. . . . .                                                                                                         | 88  |
| 4.1 | Caractéristiques du cylindre en acier. La vitesse de la barre est $c_0 = \sqrt{E/\rho}$ . . . . .                                                                                                                                                                  | 99  |
| 4.2 | Propriétés des matériaux : acier et silicone nitrure, utilisés pour le cylindre FGM. . . . .                                                                                                                                                                       | 101 |
| 4.3 | Constantes élastiques $C_{ij}$ (GPa) de l'alliage de zirconium M5 [5]. . . . .                                                                                                                                                                                     | 104 |
| C.1 | Zone de convergence et ordre de précision en fonction des paramètres $\alpha$ et $p$ . . . . .                                                                                                                                                                     | 132 |



|     |                                                                                                                                                        |     |
|-----|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| C.2 | Seuils de pénalité $\alpha$ pour lesquels la solution devient purement réelle pour les ordres $p = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ respectivement. . . . . | 133 |
| C.3 | Les taux de convergence obtenus numériquement pour la méthode Incomplète et Non-symétrique pour $p = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . . . . .                      | 133 |

# INTRODUCTION GÉNÉRALE

---

## CONTEXTE ET ENJEUX DU CONTRÔLE-SANTÉ-INTÉGRÉ

Au cours du dernier siècle, l'ingénierie structurelle en général et celle appliquée au transport en particulier a connu une évolution notable à tous les niveaux. Particulièrement, les exigences en termes de matériaux utilisés dans les industries ferroviaires, aéronautiques, automobiles, marines ou pétrochimiques n'ont cessé d'accroître. Afin de répondre aux enjeux de résistance accrue, allègement de la structure et amélioration des performances, une nouvelle classe de matériaux est conçue afin de répondre à ces exigences. Cependant, sous l'influence des charges et des conditions environnementales de fonctionnement difficiles, de sérieux endommagements peuvent avoir lieu causant des défaillances. Ainsi, un contrôle adéquat de leur état de santé est nécessaire afin de s'assurer de leur intégrité.

Effectivement, plusieurs méthodes de contrôle non-destructif (CND) - évaluation de l'intégrité des matériaux sans pour autant les dégrader - ont vu le jour : ressuyage, radiographie, courants de Foucault, magnéto-scopie, ultrasons, etc. Elles sont appliquées selon leurs spécificités, soit dans la phase de fabrication, soit dans les tests in-situ ou encore en cours d'utilisation.

Depuis les années quarante, les techniques CND par des ondes ultrasons occupent une place très importante. La technique classique reposant sur le principe de l'échographie, dite en réflexion ou pulse-écho, s'est avérée très efficace pour la détection des défauts à l'intérieur de la structure. Néanmoins, la nécessité : de l'immobilisation de la structure à tester, d'un balayage bidimensionnel et dans certain cas le démontage des pièces l'ont rendu très coûteuse en temps et en argent pour les structures industrielles. En outre, dans le cas des structures longues (pipelines, rails, etc.) et celles présentant certaines difficultés d'auscultation (câbles précontraints, tubes des réacteurs nucléaires et satellites), ces méthodes restent inadéquates. Par conséquent, les recherches se sont orientées vers le développement de nouvelles techniques de contrôle plus rapides, moins coûteuses et fiables.

Depuis une quinzaine d'années, un nouveau concept appelé Contrôle-Santé-Intégré (CSI) (ou SHM pour *Structural Health Monitoring*), se développe [6]. Il consiste en l'im-

plémentation d'un système de suivi automatique et permanent de l'état de santé de la structure. Cette implémentation se fait en intégrant les transducteurs à l'intérieur de la structure ou les coller à sa surface.

## PROBLÉMATIQUES DES MÉTHODES ULTRASONS

De plus amples recherches ont montré un potentiel important des Ondes Guidées Ultrasonores (OGU). Ces ondes se propagent dans les structures de formes oblongues telles que les barres, les tubes ou encore les plaques et les coques [7]. Elles présentent l'avantage de propagation sur des longues distances et avec très peu de dissipation. Ceci permet d'inspecter des grandes structures et des zones difficiles d'accès en peu de temps. De plus, leur grande sensibilité aux défauts rend possible leur détection de manière précoce. En outre, en utilisant des techniques de traitement de signal avancées, plusieurs informations sur la localisation, la forme et la nature des défauts peuvent être obtenues. Par ailleurs, la mise en œuvre de ces techniques est sans danger et automatisable.

Plusieurs systèmes d'inspection ont été développés pour différents types de structures (barres, plaques, pipelines et rails) en laboratoire [8, 9, 10, 11] et en industrie [12]. Toutefois, le développement de tels systèmes reste compliqué. En contrepartie de tous les avantages, les OGU présentent une grande complexité d'interprétation des signaux, ce qui limite encore leur utilisation à l'heure actuelle. Ceci est en premier lieu à cause de certaines caractéristiques complexes telles que la multitude des modes de propagation et la dispersion. Contrairement aux ondes ultrasonores conventionnelles, il existe un nombre infini de modes de propagation et qui diffèrent en fonction de la géométrie de la structure, du matériau et de la fréquence du travail. En outre, l'utilisation des nouveaux matériaux, souvent anisotropes (comme dans le cas des structures composites stratifiées) et inhomogènes (comme dans le cas de matériaux à gradient fonctionnel) ou encore de géométrie complexe, rend la tâche très difficile de point de vue interprétation et nécessite des outils d'analyse plus sophistiqués.

## OBJECTIFS ET CONTRIBUTION DE LA THÈSE

Le groupe de recherche Transduction, Propagation et Imagerie Acoustique (TPIA) au sein de l'Institut d'électronique, de Micro-Électronique et de Nanotechnologie (IEMN), département d'Opto-Acousto-Électronique (DOAE), travaille depuis une vingtaine d'années dans le domaine du CSI, en particulier pour des applications pour le transport aéronautique et ferroviaire [13].

Les activités de recherche visent globalement à proposer et à développer différentes méthodes d'analyse et des outils permettant une conception optimale des systèmes

d'inspection. On mentionne notamment les travaux de Blanquet [14], Moulin [15], Benmeddour [16], Achdjian [17], Chehami [18] et Sadoudi [19]. Les résultats obtenus sur des plaques, des tubes et des rails sont très encourageants. L'utilisation des nouveaux matériaux jouissant des propriétés innovantes bien spécifiques nécessite d'étendre ces développements.

Le point commun de départ de tout les travaux est l'étude de la propagation des ondes guidées et la détermination des caractéristiques de dispersion. Dans ce contexte, l'objectif de ce projet de thèse est le développement d'un outil de modélisation performant et fiable, permettant d'étudier la propagation des OGU avec une grande précision et faibles coûts en temps de calculs et d'utilisation de ressources informatiques. De ce fait, nous nous intéressons aux méthodes numériques d'ordres élevés dont les propriétés de convergence se sont beaucoup améliorées. En particulier, les avantages de la méthode des éléments finis de Galerkin discontinue (DG-FEM) pour une utilisation dans le domaine fréquentiel sont étudiés. La principale contribution de cette thèse est le développement d'une méthode semi-analytique éléments finis de Galerkin discontinue (SADG-FE) pour la détermination des courbes de dispersion des ondes guidées. La méthode est applicable aux structures planes et cylindriques de section arbitraire, fabriquées avec des matériaux isotropes, anisotropes et hétérogènes. L'analyse des performances de ces méthodes et leurs comparaisons sont effectuées par rapport aux modèles basés sur la méthode des éléments finis classiques.

## MÉTHODOLOGIE ET ORGANISATION

Comme le montre la figure (1), ce projet de thèse est divisé en cinq étapes. Tout d'abord, l'étude se focalisera dans un premier temps sur les guides d'ondes classiques afin d'en constituer une base pour la validation théorique et numérique. Dans un deuxième temps, le modèle hybride semi-analytique sera développé et validé. Dans un troisième temps, les guides d'ondes à section arbitraire et hétérogènes seront analysés. Enfin, les stratégies de parallélisation des calculs seront examinées.

A l'instar de la méthodologie, ce rapport de thèse est organisé comme suit. Le premier chapitre présentera des généralités sur les ondes guidées ultrasonores et un état de l'art sur les méthodes d'analyse de la propagation guidée. Tout d'abord, des notions de base sur les équations fondamentales de propagation et les caractéristiques dispersives seront détaillées. Les ondes guidées dans une plaque et un cylindre droit homogènes et isotropes sont étudiées. Ensuite, une revue des méthodes d'analyse de la propagation d'ondes guidées sera présentée. On se focalisera dans un premier temps sur les méthodes classiques : analytiques, numériques et hybrides permettant d'étudier la propagation dans des structures saines à section transversale arbitraire, fabriquées avec des matériaux hétérogènes. Dans un deuxième temps, une étude bibliographique sur les méthodes

numériques d'ordres élevés, notamment la DG-FEM, sera présentée et un exemple de formulation variationnelle sera explicité. Après, une conclusion sur les avantages et les inconvénients d'une telle formulation sera donnée.

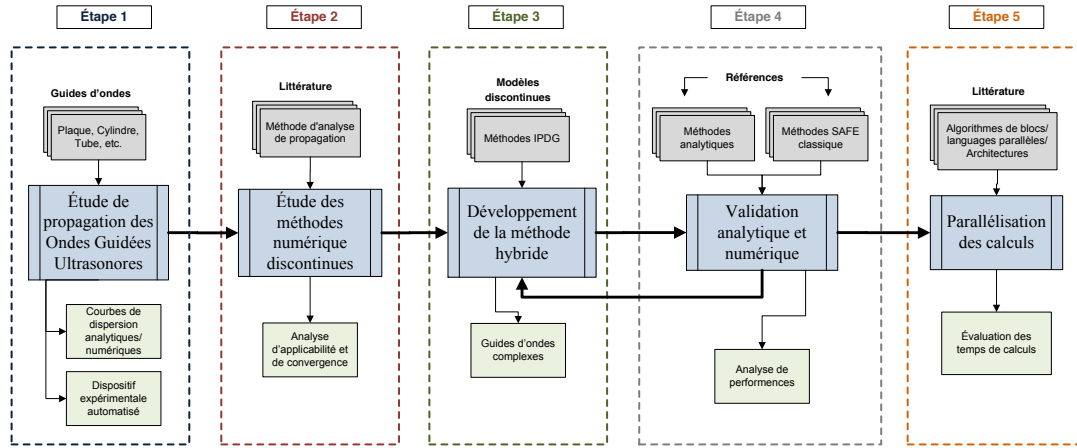


FIGURE 1 – Méthodologie générale du projet de thèse.

Le deuxième chapitre sera consacré à l'étude d'applicabilité des méthodes DG-FEM dans le domaine fréquentiel, précisément aux problèmes aux valeurs propres. Une analyse modale d'une barre mince libre en une dimension (1D), sera réalisée. Cette étude a pour objectif, d'un côté, de tester l'utilité des méthodes discontinues pour l'approximation spectrale ainsi que d'identifier leurs avantages. D'un autre côté, les propriétés dispersives et de convergence de la méthode seront examinées et comparées. L'opérateur du second ordre sera discrétisé à l'aide d'une classe de méthodes DG-FEM, notamment la méthode de Galerkin discontinue à pénalité intérieure (IPDG, "Interior Penalty Discontinuous Galerkin Method"). Ensuite, une analyse modale d'une membrane libre de forme rectangulaire (2D) sera présentée. Également, une comparaison des performances sera montrée.

Le troisième chapitre sera dédié au développement de la méthode semi-analytique pour le calcul des propriétés de dispersion des ondes guidées dans les plaques. La formulation variationnelle discontinue et son implémentation seront détaillées. La validation analytique sera réalisée à travers le cas homogène et isotrope avec des conditions aux limites de surfaces libres. Ensuite, les plaques en matériau à gradient fonctionnel (FGM, "Functionally Graded Material") et multi-couches seront analysées.

Le quatrième chapitre montrera l'extension de la méthode semi-analytique aux guides d'ondes cylindriques complexes. Idem, la formulation variationnelle et les détails de la mise en œuvre seront exposés. La validation sera effectuée via les solutions analytiques disponibles dans la littérature pour un cylindre plein homogène. Par la suite, des exemples de matériaux et de géométries complexes seront analysés. Les courbes de dispersion pour un rail seront également calculées. Une validation numérique sera présentée.

## PRODUCTION SCIENTIFIQUE

Les résultats de cette thèse ont été partiellement publiés. Ils ont donné lieu à la production scientifique suivante :

### Publications dans une revue internationale

- S. E. Hebaz, F. Benmeddour, E. Moulin, and J. Assaad, "Semi-analytical discontinuous Galerkin finite element method for the calculation of dispersion properties of guided waves in plates", The Journal of the Acoustical Society of America, vol. 143(1), pp. 460-469, Jan 2018. [20]
- S. E. Hebaz, F. Benmeddour, E. Moulin, and J. Assaad, "Semi-analytical discontinuous Galerkin finite element method for the calculation of dispersion properties of guided waves in arbitrary cross-section waveguides". (En cours de rédaction).

### Communications internationales avec actes

- S. E. Hebaz, F. Benmeddour, E. Moulin, and J. Assaad, "Computation of dispersion curves of guided waves using discontinuous Galerkin finite element method : application to functionally graded materials", Acoustical Society of America Meeting, (Minneapolis Minnesota, USA), Mai 2018.
- S. E. Hebaz, F. Benmeddour, E. Moulin, and J. Assaad, "Détermination des courbes de dispersion des ondes guidées dans des plaques constituées d'un matériau à gradient fonctionnel", Congrès Français d'Acoustique (CFA), (Le Havre, France), Avril 2018.
- S. E. Hebaz, F. Benmeddour, E. Moulin, and J. Assaad, "Investigating Applicability of Discontinuous Galerkin Methods Towards Structural Health Monitoring in Transportation", Proceedings of the 7th African Conference on Non Destructive Testing (ACNDT 2016), (Oran, Algeria), Nov. 2016. [21]

### Communications internationales sans actes

- S. E. Hebaz, F. Benmeddour, E. Moulin, and J. Assaad, "Comparison between the classical Galerkin method and the discontinuous Galerkin method in solving the advection equation", Les Troisièmes Journées Franco-Libanaises (JFL3), (Beyrouth, Liban), Oct. 2015.

### Séminaires

- S. E. Hebaz, F. Benmeddour, E. Moulin, and J. Assaad, "Méthode semi-analytique éléments finis de Galerkin discontinue pour le calcul des propriétés de dispersion des ondes guidées dans les plaques", Matinée des Chercheurs (MdC), (Valenciennes, France), Mars 2018.

- S. E. Hebaz, F. Benmeddour, E. Moulin, and J. Assaad, "Étude d'applicabilité des méthodes de Galerkin discontinues aux applications du contrôle santé intégré des structures dans le domaine du transport", Matinée des Chercheurs (MdC), (Mons, Belgique), Mars 2017.
- S. E. Hebaz, F. Benmeddour, E. Moulin, and J. Assaad, "Analyse modale numérique d'une barre finie à section uniforme arbitraire par la méthode de Galerkin discontinue", Matinée des Chercheurs (MdC), (Valenciennes, France), Mai 2016.

# ONDES GUIDÉES ULTRASONORES POUR LE CONTRÔLE NON-DESTRUCTIF DES STRUCTURES

1

---

## 1.1 INTRODUCTION

Au cours des dernières années, le besoin des systèmes de Contrôle Non-Destructif (CND) pour diagnostiquer l'intégrité des structures est devenu un enjeu très important que ça soit dans le domaine de l'aérospatiale, l'énergie nucléaire, l'industrie pétrochimique ou encore l'ingénierie civile.

L'idée qu'un système intégré dans une structure peut informer sur l'état de santé en temps réel, fournir une estimation d'éventuels endommagements et de la durée de vie est un besoin capitale en matière de sécurité et des ressources impliquées. De divers stratégies de Contrôle Santé Intégré (CSI) ont fait l'objet de plusieurs recherches scientifiques. Elles ont pour objectif la détection et la caractérisation des endommagements via la surveillance des modifications du matériau et/ou des propriétés géométriques. Les ondes guidées ultrasonores (OGU) présentent un intérêt potentiel pour ce type d'applications [7]. Elles possèdent l'avantage de parcourir de longues distances avec très peu de dissipation et une sensibilité accrue aux petits défauts. Néanmoins, elles présentent certaines caractéristiques complexes (propagation multimodales et dispersive) qui rendent difficile l'analyse, la modélisation et l'interprétation des signaux.

Ce chapitre a pour objectif de définir le contexte et les objectifs de ce travail de thèse. Il est divisée en trois parties. La première section présente des notions de base sur les ondes ultrasonores en générale et la propagation d'ondes élastiques en particulier. Une description des ondes ultrasonores dans un milieu solide infini non-borné est introduite. Les équations décrivant le mouvement associé à la propagation sont données. Ensuite, l'attention est centrée sur la propagation d'ondes guidée dans les milieux délimités.



Une description générale des guides d'ondes typiques est donnée. Les caractéristiques multimodales et dispersives des ondes guidées (courbes de dispersion, modes de vibrations, vitesse de phase et de l'énergie) sont illustrées pour les deux types de guides de références : la plaque et le cylindre droit homogènes isotropes.

La deuxième section est consacré à l'état de l'art des méthodes d'analyse de la propagation des ondes guidées. Une grande variété de méthodes a été développée dont les spécificités varient en fonction du problème à traiter. Un aperçu générale des méthodes existantes, leurs développements récents et un bilan détaillé de leurs avantages et inconvénients pour la modélisation des guides d'ondes complexes sont donnés. Enfin, nous synthétiserons les capacités et les limitations des méthodes actuelles pour le cas des guides d'ondes à section transversale arbitraire, fabriqués avec des matériaux hétérogènes.

La troisième section est dédiée aux différentes méthodes d'ordre élevé et aux avantages qu'elles offrent pour la modélisation des ondes guidées. Ainsi, les principales orientations de cette thèse peuvent être définies.

## 1.2 GÉNÉRALITÉS SUR LES ONDES GUIDÉES ULTRASONORES

### 1.2.1 Introduction

Bien que les techniques de CSI utilisant des OGU sont relativement récentes, l'étude de leur propagation en revanche remonte au fin du 19<sup>ème</sup> siècle. Les premiers travaux ont été réalisés principalement pour les structures cylindriques. Des approches analytiques pour l'analyse de la propagation des ondes dans un cylindre droit, homogène et isotrope, plein et de longueur infinie, ont été proposées par Pochhammer [22] en 1876 et indépendamment par Chree [23] en 1889. De même, les ondes dans les plaques ont été analysées par Rayleigh [24] en 1877 et un peu plus tard par Lamb [25] en 1917. Des équations analytiques décrivant les propriétés de dispersion dans le domaine fréquentiel ont été développées. Cependant, due à la complexité de ces équations, une solution complète est restée un défi jusqu'au 20<sup>ème</sup> siècle. Grâce à l'invention des ordinateurs et l'implémentation des méthodes numériques. Le spectre complet des modes de propagation, a été calculé par Mindlin [26] et Merkulov et al. [27] pour les plaques ; par Bancroft [28], Mirsky [29], Zemenak [30] et Thurston [31] pour les cylindres. Une étude de ces deux guides d'ondes est donnée dans les travaux de Meeker et Meitzler [32]. Une revue de l'histoire et de l'état de l'art des ondes guidées est donnée par Meleshko et al. [33, 34].

Dans cette section, nous nous intéressons principalement aux plaques et aux cylindres libres, de forme canonique, infinis, homogènes et isotropes. En particulier, les ondes guidées qui leur sont associées, appelées ondes de Lamb et ondes de Pochhammer-Chree. Des cas pour lesquels les aspects théoriques sont disponibles et bien documentés dans

la littérature. Les détails des calculs peuvent être trouvés dans les ouvrages classiques de Victorov [35], Auld [36], Achenbach [37] et Graff [38]. Les résultats présentés ici vont servir d'outils de vérification et de validation analytiques ainsi que de références pour l'évaluation des performances de la méthode proposée dans ce travail.

### 1.2.2 Équations de l'élastodynamique linéaire

Tout phénomène physique peut être décrit mathématiquement par un système d'équations différentielles (ODE, *Ordinary Differential Equation*) ou aux dérivées partielles (PDE, *Partial Differential Equations*). Le phénomène physique de la propagation des ondes élastiques est gouverné par l'équation générale du mouvement résultante du principe fondamental de la dynamique. Dans un système de coordonnées cartésiennes  $(x_1, x_2, x_3)$ , elle s'écrit :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (1.1)$$

où  $\sigma_{ij}$  désigne les composantes du tenseur des contraintes  $\sigma$ ,  $f_i$  sont les composantes des forces volumiques,  $\rho$  est la masse volumique du matériau,  $u_i$  sont les composantes du champ de déplacement  $\mathbf{u}$  et  $t$  est le temps. La convention de sommation sur les indices répétés d'Einstein est adoptée.

La relation constitutive de contrainte-déformation, la loi de Hooke généralisée, s'écrit :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad i, j, k, l = 1, 2, 3, \quad (1.2)$$

où  $C_{ijkl}$  sont les composantes du tenseur des rigidités élastiques  $\mathbf{C}$ . Ce dernier est un tenseur d'ordre 4 et contient 81 coefficients élastiques qui caractérisent les propriétés mécaniques du matériau.

Toutefois, dans le cas d'un matériaux isotrope, le nombre de composantes indépendantes est réduit à deux. Le tenseur des rigidités peut être décrit uniquement par deux constantes élastiques : les coefficients de Lamé  $(\lambda, \mu)$  ou encore le couple  $(E, \nu)$  où  $\nu$  est le coefficient de Poisson et  $E$  le module de Young. Ainsi, l'équation se réduit à :

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad (1.3)$$

où  $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i})$  sont les composants du tenseur des déformations  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon_{kk}$  est la trace de  $\varepsilon$  et  $\delta_{ij}$  est le symbole de Kronecker (vaut 1 pour  $i = j$ , 0 sinon).

En l'absence de force volumique  $f_i$ , la substitution de (1.3) dans (1.1) aboutit à l'équation du mouvement en déplacements dite de Navier :

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}. \quad (1.4)$$

Sous la forme vectorielle et en régime harmonique  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}$ , l'équation devient :

$$(\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \hat{\mathbf{u}}) + \mu \nabla^2 \hat{\mathbf{u}} = \omega^2 \rho \hat{\mathbf{u}}, \quad (1.5)$$

où  $\omega$  est la fréquence angulaire.  $\nabla = (\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \partial/\partial x_3)$  est le vecteur de l'opérateur différentiel "Nabla".

En effet, les trois composantes du déplacement  $\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3$  sont couplées. Il est possible d'obtenir des équations découplées en adoptant la décomposition de Helmholtz. Le champ de vecteur  $\hat{\mathbf{u}}$  est décomposable en une somme de deux champs vecteur

$$\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{u}}_l + \hat{\mathbf{u}}_t \quad (1.6)$$

sous forme d'un potentiel scalaire irrotationnel et d'un potentiel vectoriel incompressible respectivement. Ainsi, ils satisfont les conditions représentées par les équations :

$$\nabla \times \hat{\mathbf{u}}_l = 0, \quad \nabla \cdot \hat{\mathbf{u}}_l \neq 0, \quad (1.7a)$$

$$\nabla \cdot \hat{\mathbf{u}}_t = 0, \quad \nabla \times \hat{\mathbf{u}}_t \neq 0. \quad (1.7b)$$

En remplaçant chacune de ces équation (1.7a)-(1.7b) dans l'équation de Navier (1.5), cette dernière se réduit alors à un système de deux équations d'Helmholtz découplées (1.8a)-(1.8b). La première décrit le comportement de propagation des ondes longitudinales (L), de compression-traction, induisant un déplacement de la matière dans la direction de propagation de l'onde. En revanche, la deuxième correspond aux ondes transversales (T), de cisaillement, pour lesquelles le déplacement de la matière est perpendiculaire à la direction de propagation. Ainsi, deux type peuvent être distinguées : les ondes transversales horizontales (TH) et les ondes transversales verticales (TV).

$$\nabla^2 \hat{\mathbf{u}}_l + \left(\frac{\omega}{c_l}\right)^2 \hat{\mathbf{u}}_l = 0, \quad (1.8a)$$

$$\nabla^2 \hat{\mathbf{u}}_t + \left(\frac{\omega}{c_t}\right)^2 \hat{\mathbf{u}}_t = 0, \quad (1.8b)$$

où  $c_L = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$  et  $c_T = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$  sont respectivement les vitesses de propagation des ondes longitudinale et transversale.

Il est important de souligner que les ondes de volume dites planes se propagent dans un milieu infini, sans changer de vitesse ni de direction ni d'amplitude. Ce type d'onde théorique n'existe pas dans la nature. Néanmoins, il constitue une bonne approximation de nombreuses ondes physiques, en particulier lorsque la longueur d'onde est extrêmement petite par rapport aux dimensions de la structure. En général, elles sont caractérisées par plusieurs paramètres : la fréquence temporelle  $f = \frac{\omega}{2\pi}$  (Hz), la direction de propagation exprimée par le vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  et la fréquence spatiale représentée par son module, le nombre d'onde  $k = |\mathbf{k}|$  ( $\text{m}^{-1}$ ), la longueur d'onde  $\Lambda = 2\pi/k$  (m), la vitesse de phase  $C_p = \frac{\omega}{k}$  (m/s) et la vitesse de groupe  $C_g = \frac{\partial\omega}{\partial k}$  (m/s).

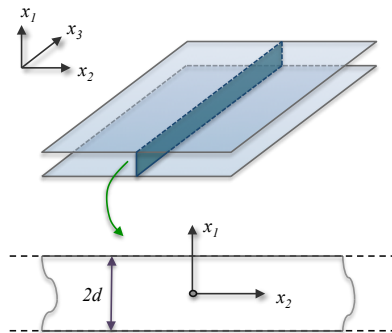
### 1.2.3 Description des guides d'ondes élastiques

Dès lors qu'un milieu de propagation est borné dans au moins une direction et présente une invariance géométrique suivant la direction perpendiculaire à celle-ci, il constitue un guide d'ondes élastiques. Sous l'hypothèse de petites déformations linéaires, la génération d'ondes - de longueur égale à la dimension caractéristique de la section ou à son multiple - dans telles structures engendre un effet de résonance. Des ondes particulières résultent des réflexions multiples des ondes de volumes sur les interfaces et se propageant suivant la direction de l'invariance, dite de propagation. Elles sont appelées des ondes guidées.

Contrairement aux ondes de volumes, elles sont multimodales et dispersives. Elles engendrent des multiples modes de résonances qui dépendent des caractéristiques du guide (géométriques et matérielles) et dont la vitesse change en fonction de la fréquence.

Deux types de géométries sont susceptibles de guider les ondes. Il s'agit des plaques et des cylindres au sens large - toute extrusion de surface quelconque fermée - comme le montre les figures (1.1a) et (1.1b).

(a) bidimensionnel (2D)



(b) tridimensionnel (3D)

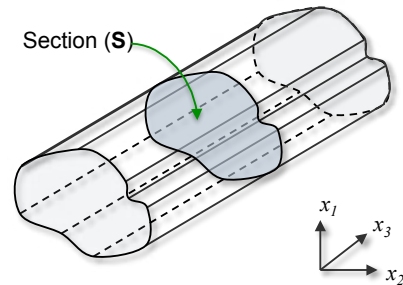


FIGURE 1.1 – Géométries des guides d'ondes élastiques : (a) plane et (b) cylindrique .

Dans le cadre de cette thèse, la condition d'invariance implique que les propriétés matérielles et géométrique du guide sont considérées constantes dans la direction de propagation. En revanche, le guide peut être transversalement hétérogène : les propriétés du matériaux sont autorisées à varier, de façon discontinue ou en continu à travers la section. Le guide d'onde est considéré dans le vide, le paroi ou la surface de celui-ci est supposée libre de toutes contraintes. Ces conditions sont maintenues tout au long de ce travail.

### 1.2.4 Les ondes guidées dans les plaques

Lorsqu'une plaque homogène isotrope libre, de dimensions latérales infinies et d'une épaisseur  $2d$  du même ordre de grandeur que les longueurs d'ondes, deux familles

d’ondes guidées sont générées. Les ondes longitudinales et transversales verticales vont subir des réflexions sur les surfaces, se coupler et donner naissance aux ondes guidées dites de Lamb. Deux formes de déformations peuvent être identifiées : les déformations symétriques (mouvement de compression sans flexion) et les déformations antisymétriques (flexion sans compression). Les figures (1.2a) et (1.2b) montre les déformées typiques de ces deux familles de modes de plaques.

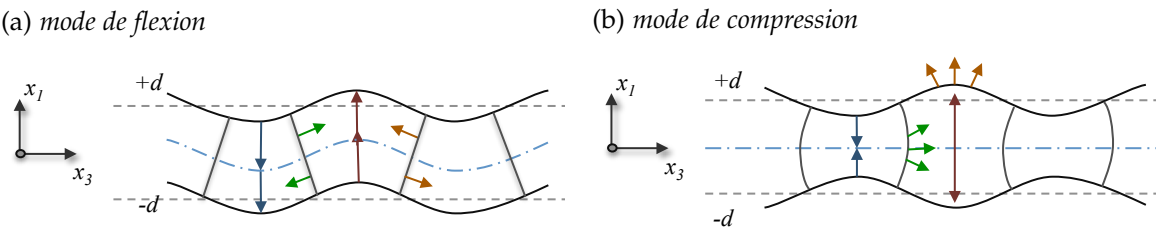


FIGURE 1.2 – Représentation de la déformée des modes de Lamb : (a) Symétrique et (b) Antisymétrique.

En raison de l’existence de deux direction d’invariance et de l’isotropie, les ondes transversales horizontales restent indépendantes et découplées. Ces derrières donnent lieu à des modes de cisaillement dans le plan parallèle à la surface nommés (SH, *Shear Horizontal*). Une représentation de leur déformée est montrée dans la figure (1.3).

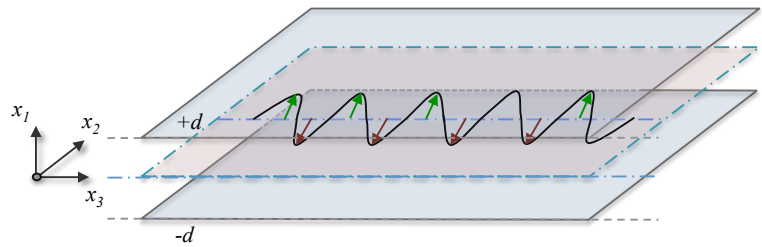


FIGURE 1.3 – Représentation de la déformée des modes SH.

Afin d’analyser le comportement d’un guide d’onde, l’évolution des caractéristiques de la propagation des ondes (nombre d’onde, déformées, vitesse de phase, vitesse de groupe) doivent être trouvés en fonction de la pulsation  $\omega$ . Dans les deux cas de figures des modes de Lamb et modes SH, des solutions analytiques peuvent être obtenues. Un résumé des équations essentielles est présenté dans l’annexe A.

Les couples  $(\omega, k)$  pour lesquels il existe des solutions non-triviales décrivent les courbes de dispersion. Pour chaque valeur de  $\omega$  réelle, les solutions  $k$  peuvent être réelles (modes propagatifs), imaginaires pures (modes évanescents) ou encore complexes (modes inhomogènes).

La figure (1.4) montre les courbes de dispersion des modes de Lamb propagatifs calculés pour une plaque d’aluminium. Pour des raisons d’aisance et de clarté, les grandeurs sont adimensionnées. La fréquence  $\Omega = 2\pi fh/c_T$  est en fonction de la valeur absolue du

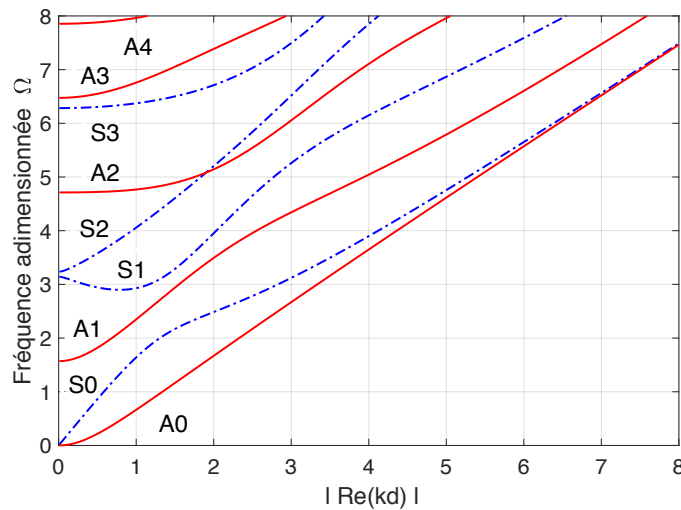
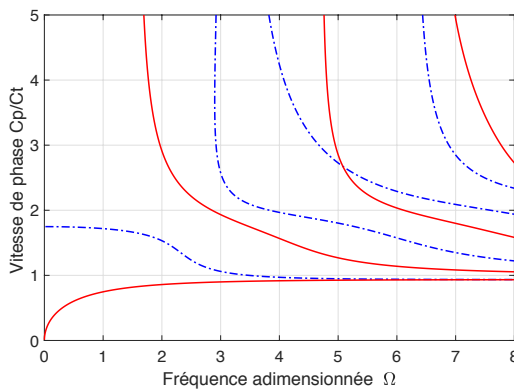


FIGURE 1.4 – Courbes de dispersion des premiers huit modes de Lamb propagatifs pour une plaque libre homogène et isotrope : les modes  $S$  tracés en traits pointillés et les modes  $A$  en traits pleins.

produit du nombre d'onde et de la demi-épaisseur :  $kd$ . Les modes symétriques  $S$  sont tracés avec une ligne discontinue, tandis que les modes antisymétriques  $A$  sont représentées par une ligne continue. Les tracés sont étiquetés  $S_{i=0,1,\dots}$  et  $A_{i=0,1,\dots}$  en fonction de leur ordre d'apparition. Il existe deux modes qui se propagent dans la plaque quelque soit la fréquence, le mode  $A_0$  et le mode  $S_0$ . Ils sont qualifiés de modes de Lamb fondamentaux. Les modes d'ordres supérieures possèdent une fréquence de coupure à partir de laquelle ils peuvent se propager.

En outre, il est possible d'accéder aux autres représentations notamment la vitesse de phase  $C_p$  et la vitesse de groupe  $C_g$ . Les figures (1.5a) et (1.5b) présentent respectivement l'évolution de ces vitesses pour les modes propagatifs de la figure (1.4) en fonction de la fréquence  $\Omega$ . Elles sont également adimensionnées par rapport à  $c_T$ .

(a) vitesse de phase



(b) vitesse de groupe

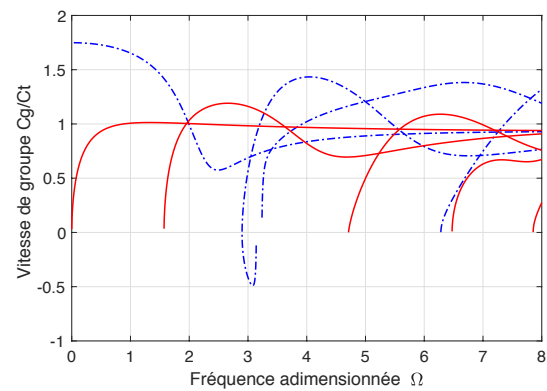


FIGURE 1.5 – Évolution de (a) la vitesse de phase  $C_p/c_T$  et (b) de la vitesse de groupe  $C_g/c_T$  des modes de Lamb propagatifs pour une plaque libre homogène et isotrope en fonction de la fréquence  $\Omega$ .

Quant aux solutions complexes, elles sont généralement d'intérêt moindre dans les analyses expérimentales puisqu'ils ne transportent pas d'énergie. Néanmoins, ils ont une importance primordiale pour l'analyse de la diffraction des ondes par les défauts puisqu'ils représentent des solutions de champs proche. Ils constituent un éléments indispensable pour la complétude des modes guidées, une condition nécessaire pour l'analyse de tout phénomène interne dans les guides élastiques [1]. La figure (1.6) présente une projection des courbes de dispersion des modes de Lamb non-propagatifs et inhomogènes en fonction de la fréquence.

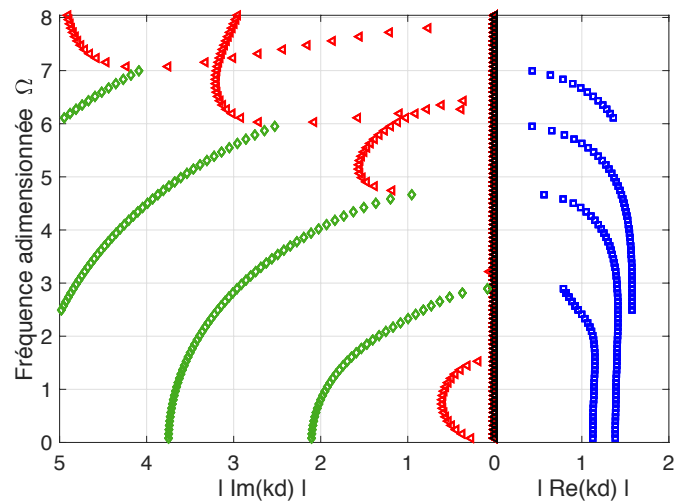


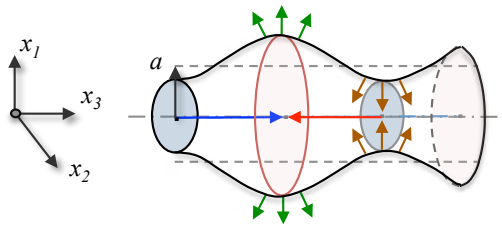
FIGURE 1.6 – Courbes de dispersion des modes de Lamb non-propagatifs (triangles rouges) et inhomogènes (carrés bleus et losanges verts) d’une plaque libre homogène isotrope dans le plan complexe.

### 1.2.5 Les ondes guidées dans les cylindres

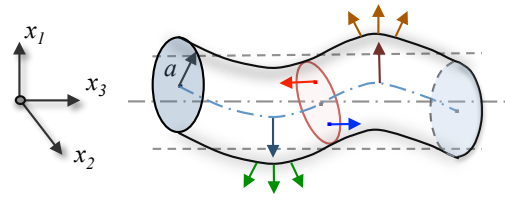
De manière analogue aux ondes de plaques, on considère un cylindre libre, homogène et isotrope de longueur infinie et de géométrie circulaire de rayon  $a$ . La superposition des ondes de volumes crée des modes de résonances qui sont guidées dans la direction axiale, elles sont généralement appelées modes de Pochhammer-Chree. Elles présentent certaines ressemblances avec les modes de Lamb, hormis que la fermeture de la section engendre un couplage des ondes transversales horizontales et créent un mouvement de torsion. Ainsi, les modes guidées dans les cylindres peuvent être classés en trois catégories : les modes longitudinaux de compression (L), les modes de flexion (F) et les modes de torsion (T). Les déformées de ces modes sont illustrées respectivement dans les figures (1.7a)-(1.7b) et (1.7c).

L’analyse de la propagation dans de telles structures est effectuée de la même manière que pour les plaques. La résolution de l’équation de mouvement en tenant en compte des conditions aux limites et la géométrie du guide permet l’établissement des équations de dispersion. Elles sont également récapitulées dans l’annexe A.

(a) mode de compression



(b) mode de flexion



(c) mode de torsion

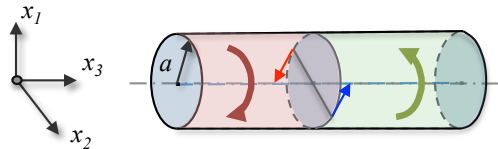
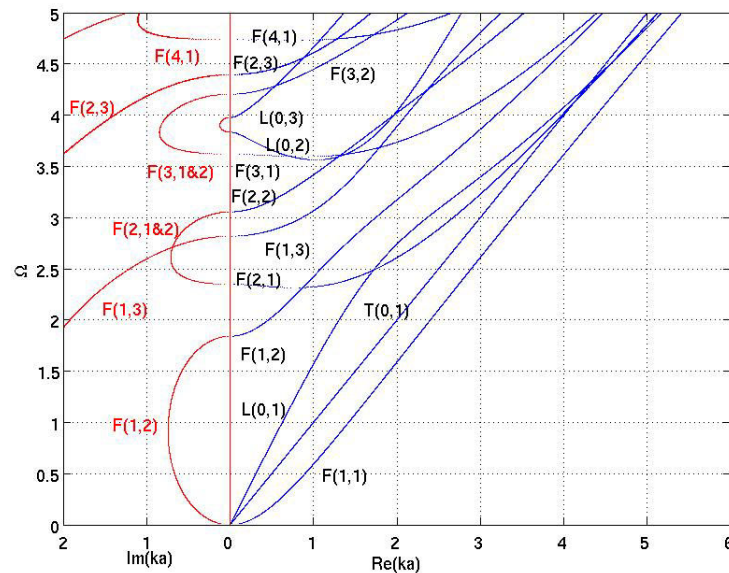


FIGURE 1.7 – Représentation de la déformée des modes de Pochhammer-Chree (a) de compression, (b) de flexion et (c) de torsion.

Les courbes de dispersions dans le cas d'un cylindre en acier sont représentée sur la figure (1.8). Les nombres d'ondes réels et imaginaires sont en fonction de la fréquence adimensionnée. Les modes  $L(0,n)$  sont tracés avec des lignes discontinues noirs, les modes  $T(0,n)$  sont représentés par des lignes pointillées rouges, tandis que les modes  $F(m,n)$  sont en lignes continues bleues. Les tracés sont étiquetés en fonction de  $n$ , leur ordre d'apparition.  $m \geq 1$  fait référence au type des modes de flexion.

FIGURE 1.8 – Courbes de dispersion  $kd(\Omega)$  des modes de Pochhammer-Chree propagatifs et non-propagatifs pour un cylindre droit homogène et isotrope libre [1].



### 1.3 ÉTAT DE L'ART SUR LES MÉTHODES D'ANALYSE DE LA PROPAGATION DES ONDES GUIDÉES

#### 1.3.1 Introduction

Dans la démarche du développement des systèmes de contrôle de santé structurelle, la modélisation de la propagation des ondes guidées ultrasonores est fondamentale. En effet, elle contribue à la compréhension des aspects de la propagation guidées dans une structure complexe. Elle permet de prédire les caractéristiques dispersives et multimodale et les ondes susceptibles de se propager dans le guide d'onde.

Dans la littérature on trouve une multitude de méthodes : analytiques, numériques et hybrides. Cette section présente une étude bibliographique des méthodes existantes. Pour chaque famille de méthode, une brève description de son principe est donnée, des exemples de références bibliographiques pour chaque cas d'étude disponible sont présentés et enfin une synthèse est effectuée.

On note qu'il existe d'autres techniques et la liste des références n'est pas exhaustive. En effet, on se limite ici aux développements les plus répandus dans le communauté scientifique, récents et pertinents.

#### 1.3.2 Méthodes analytiques

Dans la littérature, plusieurs approches analytiques ont été développées. Les solutions exactes des déplacements et l'équation de dispersion ont été obtenues pour différents guides d'onde tels que : les plaques anisotropes [39], les composites multi-couches [40], les tubes [41], les barres rectangulaires [42, 43], les cylindres circulaire composites [44, 29], et les cylindres elliptiques [45].

Outre les théories classiques des déformations mécaniques [46], il existe deux méthodes classiques auxquelles la majorité des chercheurs ont recours :

- la méthode des potentiels (PT, *Potential Theory*) [35],
- la méthode de superposition des ondes partielles [36] (SPW, *Superposition of Partial Waves*).

La première reste limitée aux cas isotrope. En revanche, la méthode SPW permet d'étudier en plus, les guides d'onde anisotropes. De plus, les développements ont étendus l'analyse aux structures composites multi-couches, planes et cylindriques canoniques.

##### 1.3.2.1 Méthode de superposition des ondes partielles

Dans la littérature, la méthode de superposition des ondes partielles a été largement utilisée pour la modélisation de la propagation des ondes guidées dans plusieurs cas

d'études et dans plusieurs domaines. Elle a été appliquée pour le calcul de l'équation de dispersion des ondes de Rayleigh, de Lamb, et de Love (pour plus de détails voir le livre [36]). Elle a été utilisée également dans le cas des plaques libres homogènes isotropes et anisotropes [39].

Cette méthode est utilisée afin d'étudier la propagation d'onde dans une ou plusieurs couches dans un espace semi-infini. Comme la méthode implique la propagation des conditions aux limites d'une frontière à l'autre via les coefficients de réflexion, plusieurs techniques de multiplications matricielles ont été élaborées. La première est la méthode de la matrice de transfert (TMM, *Transfer Matrix Method*) [40, 47]. Elle permet la modélisation des milieux composites stratifiés en sismologie. Cependant, elle devient instable pour les fréquences élevées lorsque les dimensions des couches sont importantes [48]. Pour palier à ce problème, la méthode global (GMM, *Global Matrix Method*) [49] est développée. Néanmoins, l'assemblage de la matrice globale est coûteux en temps de calculs lorsqu'un grand nombre de couches est considéré. Enfin, une reformulation de la TMM [50] est proposée pour obtenir un algorithme simple, stable et efficace en termes de calcul.

Plusieurs modèles basés sur ce principe ont été développés dans le domaine du CND pour calculer les courbes de dispersion des ondes guidées dans les milieux composites anisotropes et viscoélastiques. On cite en particulier les travaux de Nayfeh [51] sur les plaques multi-couches anisotropes et de Barshinger [52] sur les tubes enrobés de matériaux viscoélastiques. Une revue générale de ces méthodes matricielles et leur applications dans le CND peut être trouvée dans les travaux de Lowe [53], une bibliographie et un contexte historique étendu sont fournis dans le livre [54]. En outre, plusieurs logiciels ont été développés tels que : l'outil commerciale DISPERSE développé à Imperial College [55, 56] et PCDISP (libre) pour les guides d'ondes cylindriques [57].

#### 1.3.2.2 Conclusion

En général, les méthodes analytiques offrent un excellent moyen pour l'analyse de la propagation et le calcul des propriétés dispersives dans des guides d'ondes canoniques que ça soit homogènes isotropes, anisotropes ou multicouches. Les solutions sont obtenues avec une bonne précision et moins de temps de calculs. Cependant, pour élargir l'analyse à des guides d'onde à sections arbitraires (rails, profilés, etc.), le développement analytique se révèle très difficile voir impossible. Pour s'affranchir de ces limites, les recherches se sont orientées vers les méthodes numériques.

#### 1.3.3 Méthodes numériques

Plusieurs techniques numériques ont été mises au point afin de modéliser les phénomènes de propagation des ondes élastiques dans les guides d'onde à section complexes. On peut citer les méthodes numériques classiques, telles que : la méthode des différences

finies [58], la méthode des éléments de frontières [59], et la méthode des éléments finis [60, 61], qui sont largement utilisées dans la littérature. Ces méthodes consistent en générale à résoudre les équations de mouvement (1.1) et (1.4) en prenant en considération les conditions initiales et aux limites du système. Elles font appel à des techniques de discrétisation en espace et/ou en temps pour calculer les champs des déplacements et les contraintes résultant d'une excitation donnée. Leur intérêt réside en leurs propriétés de flexibilité géométrique, leur capacité de fournir une excellente approximation de la solution exacte lorsque les conditions de la discrétisation sont respectées. En plus, elles permettent le traitement de différents matériaux : homogènes, hétérogènes ou à gradient fonctionnel (FGM, *Functionally Graded Materials*).

En effet, il existe plusieurs types d'analyses possibles pour résoudre les équations de mouvement et elles dépendent de l'étude envisagée. Elle peut être statique, modale, harmonique ou transitoire. Dans le contexte de la propagation en générale, seules les deux dernières ont un intérêt. Les courbes de dispersion sont obtenue par application de la Transformation de Fourier rapide 2D (FFT, *Fast Fourier Transform*) [16] aux réponses temporelles à plusieurs point de l'espace.

### 1.3.3.1 Méthodes des différences finies

La méthode des différences finies (FDM, *Finite Difference Method*) a été la première des trois techniques à être utilisée pour résoudre les équations d'ondes et reste encore très populaires dans la communauté scientifique. Les premiers développements de la FDM ont été publiés pour la simulation de la propagation d'onde dans le domaine de la géophysique [62, 63, 64, 65, 66]. Ceux-ci souffrent des instabilités numériques lorsque le milieu présente des changements de propriétés matériels et/ou des géométries irrégulières. Récemment, des versions stables ont été développées pour traiter les matériaux hétérogènes [67] et les domaines non-rectangulaires [68].

Dans le domaine de l'acoustique, Delsanto [69] a étudié des matériaux composites. Par la suite, une technique appelée LISA (*Local Interaction Simulation Machine*) est développée pour étudier les hétérogénéités. Celle-ci est adaptée au calcul parallèle [70, 69, 71]. Elle a été appliquée à la modélisation des transducteurs piézoélectriques [72] et la simulation des ondes de Lamb [73]. Très récemment, une implémentation dans des processeurs graphiques parallèles [74] et une extension à l'analyse des structures composites multicouches [75] ont été étudiées.

En générale, le schéma FDM le plus utilisé est basé sur des approximations dites centrées du second ordre dans le temps et dans l'espace. Celle-ci fournit une bonne stabilité numérique. Néanmoins, elle n'offre pas assez de précision pour pouvoir modéliser de grands domaines et nécessite un grand nombre de points. Elle devient très couteuse

en temps et en ressources informatiques pour de grands domaines tridimensionnels. En outre, elle est difficile à appliquer aux géométries complexes. De plus, la modélisation des matériaux complexes hétérogènes dégrade la stabilité numérique de la méthode.

### 1.3.3.2 Méthodes des éléments de frontières

Une revue du développement de la méthode des éléments de frontières (BEM, *Boundary Elements Method*) a été publiée par Cheng et Cheng [76]. La BEM se base sur une formulation intégrale de l'équation (1.1) sur le volume du guide. Celui-ci est transformée ensuite en une formulation intégrale sur la surface à l'aide de l'identité de Green. Cette dernière est approximée par un ensemble discret de fonctions d'interpolation linéaires  $L_i$ . De ce fait, la BEM n'exige que la discrétisation de la frontière, ce qui la rend plus facile à utiliser et plus performante en terme de calculs. Cependant, la connaissance préalable d'une solution particulière limite son champ d'utilisation uniquement pour les équations linéaires avec des coefficients constants. En plus, la multitude des formulations intégrales rend l'analyse mathématiques de ses propriétés très difficile.

Dans la littérature, la BEM a été principalement utilisée pour les problèmes de l'élastodynamique linéaire, en particulier lorsque le domaine est infini ou semi-infini. Une revue de son utilisation est donnée dans les travaux de Beskos [77, 78]. Toutefois, on trouve très peu de travaux qui l'ont utilisé pour l'analyse de la propagation des ondes guidées. On cite particulièrement Gunawan [79] qui a développé un modèle pour l'étude de la dispersion dans les barres cylindriques isotropes. En revanche, elle est utilisée pour l'étude de la diffraction des ondes par une hétérogénéité [80].

Bien que la BEM présente des instabilités numériques et des singularités, elle a été l'objet de nombreux travaux de recherches au cours de la dernière décennie [81]. De plus, l'étude des matériaux hétérogènes est très complexe. Pour cette raison, elle est généralement combinée avec d'autres approches telle que la méthode des éléments finis pour améliorer les performances des calculs [82].

### 1.3.3.3 Méthodes des éléments finis

La méthode des éléments finis (FEM, *Finite Elements Method*) est la technique la plus répondue dans le domaine de l'élasticité en général [83] et de l'élastodynamique en particulier [84]. Elle consiste à transformer l'équation (1.1) en une formulation intégrale de volume, dite formulation variationnelle, sur tout le domaine. La méthode est très bien adaptée pour traiter les géométries complexes et les discontinuités des propriétés dans les guides d'onde. Il existe plusieurs dérivations parmi lesquelles, on peut citer : Galerkin Continue, Galerkin Discontinue, Collocation et Rayleigh-Ritz. Toutefois, la formulation la plus employée dans les codes industriels (ABAQUS, ANSYS, COMSOL Multiphysics,

FreeFem++, etc.) est la méthode classique dite de Galerkin continue (CGFEM) [85].

Dans la littérature, la FEM a été très utilisée grâce à la simplicité de sa formulation numérique. Une bibliographie de son utilisation dans le domaine de CND est donnée par Mackerle [86]. Plusieurs types de guides d'onde complexes ont été analysés, notamment les plaques et les guides cylindriques [87, 88, 89], les guides viscoélastiques [90] et les rails [91]. Néanmoins, son utilisation pour le calcul des propriétés de dispersion est restée très limitée. Elle reste majoritairement utilisée pour l'analyse temporelle des guides d'onde à section arbitraire [92] et les problèmes d'interaction ondes-endommagements [16]. Une revue complète peut être trouvée dans les travaux de Willberg et al. [93].

#### 1.3.3.4 Conclusions

Les méthodes numériques classiques ont été largement utilisées et validées dans la littérature pour plusieurs cas d'études. Toutefois, elles présentent des difficultés pour analyser la propagation dans les structures tridimensionnelles et extraire les caractéristiques de dispersion des ondes guidées. Ces méthodes restent donc privilégiées pour l'étude de la diffraction. Par ailleurs, l'apparition des techniques hybrides a permis une grande réduction des problèmes rencontrés dans ce contexte et a donné accès à des solutions numériques rapides et plus précises.

### 1.3.4 Méthodes hybrides

Pour palier aux problèmes des méthodes classiques, les recherches se sont orientées vers les méthodes hybrides formulées dans le domaine fréquentiel. Ces dernières permettent d'exploiter l'invariance géométrique des guides pour chercher des solutions sous une forme harmonique dans la direction de propagation. La formulation résultante est ensuite approchée en utilisant une technique de discrétisation spatiale. Dans la littérature, il existe en général trois types : la méthode des éléments finis ondulatoires, les méthodes semi-analytiques numériques et enfin les méthodes spectrales.

#### 1.3.4.1 Méthode des éléments finis ondulatoires

La méthode des éléments finis ondulatoires (WFE, *Wave Finite Element*) est une technique qui considère l'invariance du guide d'onde comme étant un système périodique composé de petites structures en chaîne. Celle-ci se base sur la théorie des structures périodiques [94, 95] introduite dans les années 1970. Le guide d'onde est donc subdivisé en petits morceaux identiques de la section transversale appelées cellules ou maillons  $I$  (figure 1.9-a). Chaque cellule est connectée avec ses voisines via des conditions aux limites périodiques, figure (1.9-b).

La discrétisation d'un maillon  $I(j)$  en utilisant la FEM donne un système algébrique dont les déplacements sont partagés en éléments de gauche, internes et de droite. En

supposant que les éléments internes sont libres, l'insertion des conditions aux limites périodiques aboutit à un problème aux valeurs propres quadratique. La résolution de celui-ci fournit les nombres d'ondes et la solution élémentaire qui sont utilisées pour déduire la réponse globale en exploitant la condition de périodicité.

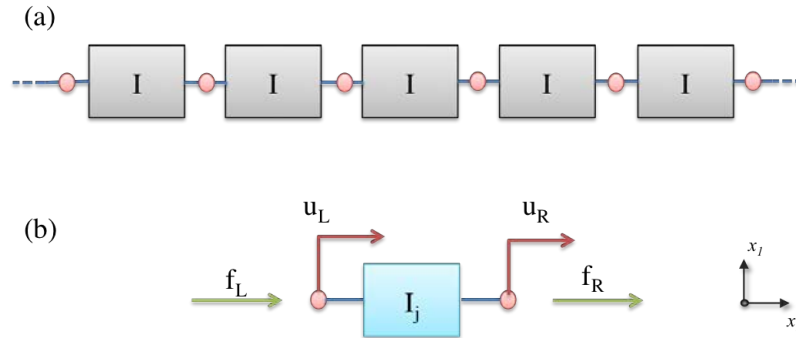


FIGURE 1.9 – Système infini (a) composé d'éléments identiques (b) dont les forces extérieures et les déplacements de gauche ( $u_L, f_L$ ) et de droite ( $u_R, f_R$ ) sont liées par une condition périodique.

La WFE est utilisée dans la littérature pour deux types de problèmes dans les guides d'ondes à motifs périodiques avec ou sans élément de couplage :

- (a) modélisation de la propagation libre et calcul des courbes de dispersion [96],
- (b) calcul de la réponse forcée [97, 98, 99, 100].

Premièrement, elle a été utilisée pour les structures périodiques 1D [101], puis généralisée pour le cas 2D [102]. La méthode a été également appliquée pour le calcul des propriétés de dispersion de différents guides d'ondes complexes, en particulier le rail [103, 104, 105], les plaques nervurées [106], les coques cylindriques [107], les barres et les tubes [108], les poutres et les plaques composites [101, 102], les guides d'onde hélicoïdaux [109] et enfin les pneus [110].

L'avantage de cette technique est qu'elle peut être directement implémentée dans les logiciels éléments finis existants [108]. Par contre, l'étude des structures tridimensionnelles limite l'analyse aux basse et moyennes fréquences. De plus, la périodicité spatiale peut entraîner la présence d'artefacts périodiques, c'est-à-dire des solutions parasites. Une revue des avantages et des inconvénients de la méthode ont été montrés dans le travail de Waki et al. [111]. Plus de détails sur les développements récents peuvent être trouvés dans les travaux de thèse de Manconi [112].

#### 1.3.4.2 Méthodes semi-analytiques

Les méthodes Semi-Analytiques (SA) sont en générale, une combinaison d'une méthode analytique et une méthode numérique. Elles consistent à modéliser la propagation dans un guide d'onde à section transversale arbitraire uniquement à partir de sa section. Sous l'hypothèse d'invariance des propriétés du matériau et de la géométrie du guide

d'onde dans la direction de propagation  $x_3$ , le champ des déplacements peut être exprimé en régime harmonique sous la forme :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{U}(x_1, x_2) e^{i(kx_3 - \omega t)}, \quad (1.9)$$

où  $k$  est le nombre d'onde. L'injection de cette expression dans l'équation (1.1) permet d'obtenir un système d'équations différentielles posées uniquement dans la section  $\mathbf{S}$  du guide d'onde. Tenant compte des conditions aux limites du problème, la discrétisation du système au moyen d'une méthode numérique conduit à un problème aux valeurs propres. Ce dernier exprime la relation de la dispersion de la fréquence en fonction du nombre d'onde et dont les vecteurs propres représentent les déformées modales.

Dans le cas des guides plans, la section  $\mathbf{S}$  se réduit à l'épaisseur  $2d$  (voir sous-section (1.2)). Le champ des déplacements devient :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{U}(x_1) e^{i(kx_3 - \omega t)}. \quad (1.10)$$

La figure (1.10) montre la discrétisation de l'épaisseur en utilisant des éléments unidimensionnels.

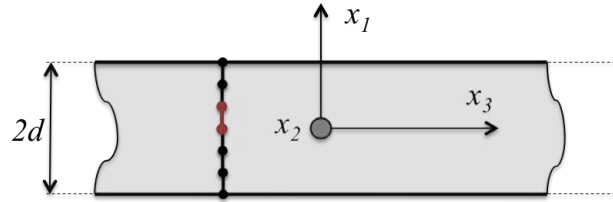


FIGURE 1.10 – Discrétisation des guide d'onde plane 2D d'épaisseur  $2d$  en éléments linéaires.

De nombreuses combinaisons semi-analytiques numériques ont été développées ces deux dernières décennies. Trois variantes principales peuvent être distinguées :

1. la méthode semi-analytique différences finis [113], développée comme étant une généralisation des techniques SA pour la modélisation des ondes de Lamb dans les plaques multi-couches anisotropes ;
2. la méthode semi-analytique éléments de frontières modifiées [114, 115, 116, 117, 118, 119], elle utilise une version améliorée de la méthode des éléments de frontières introduite dernièrement dans le travail de Wolf et Song [82] ;
3. la méthode semi-analytique éléments finis, connue sous le nom (SAFE, *Semi-Analytical Finite Elements*).

Cette dernière méthode est la plus utilisée dans la littérature.

Les premiers développements de la méthode remontent aux années 1970 [120, 121, 122, 123]. Les caractéristiques dispersifs des modes propagatifs ont été obtenues respectivement pour de guides d'onde de types : cylindres droits orthotropes,

rectangulaires, profilés en T. Plus tard, l'analyse a été étendue aux modes complexes non-propagatifs et inhomogènes dans le cas d'un cylindre composite anisotrope [124]. Les plaques composites anisotropes ont été traitées pour la première fois par Dong et Huang [125], puis par Datta et al. [126] et Liu et al. [127]. Ensuite, plusieurs guides de géométries complexes ont été analysés notamment : les rails [128, 129, 130], les barres torsadées [131], les profilés inhomogènes anisotropes [132], les cylindres FGM [133], les plaques composites multi-couches [134, 135] les stratifiés visco-élastiques [136, 137], et les structures périodiques [138].

Récemment, d'autres recherches ont analysé : la réponse transitoire forcée [139, 140], la propagation des ondes atténuées [141, 142, 143, 144] dans les guides revêtues ou immergés dans un milieu infini tels que les pipelines et les barres d'acier dans le béton. On peut également citer les guides d'onde complexes tels que les structures hélicoïdales [145, 146], constituées de matériaux viscoélastiques précontraints [147] et les tubes filetés [148]. En outre, la méthode SAFE a été combinée avec la FEM afin d'étudier l'interaction des ondes guidées avec les endommagements dans un guide d'onde à section arbitraire [1]. Enfin, la méthode SAFE a été intégrée dans plusieurs logiciels commerciaux et libres pour l'analyse de la propagation d'onde guidées dans le domaine du CSI et lu CND. On mentionne en particulier : le logiciel CIVA [149, 150, 151] mise au point au CEA (Commissariat à l'Énergie Atomique et aux Énergies Alternatives) et le logiciel libre GUIGUW [4] développé à l'université de Bologne en Italie.

Grâce à sa formulation analytique, la modélisation est réduite de 3 dimensions à 2 dimensions pour les structures à section arbitraire et de 2 dimensions à 1 dimension pour les plaques et les cylindres axi-symétriques. Ainsi, la méthode SAFE constitue une solution économique en temps de calcul quel que soit la longueur du guide considéré. De plus, elle bénéficie de tous les avantages de la FEM pour la gestion de complexités géométriques et paramétriques. Cependant, comme la FEM classique, elle nécessite un maillage adapté en fonction des longueurs d'ondes recherchées. Ainsi, l'analyse en hautes fréquences et dans certains cas de géométrie complexe tel que le rail, engendre une consommation significative des ressources informatiques.

#### 1.3.4.3 Méthodes spectrales

Les méthodes spectrales sont des techniques quasi-analytiques dédiées à la résolution des ODE et des PDE gouvernant les phénomènes physiques. Elles sont semblables aux méthodes numériques classiques. En effet, elles se base sur la transformation des équations en un système algébrique matriciel. La différence majeur réside dans la technique d'approximation. Pour plus de détails, il est recommandé de voir les livres [152, 153, 154, 2]. En opposition aux approches locales, les méthodes spectrales considèrent une approche globale. Elles consistent en l'approximation de la solution par une somme de fonctions



trigonométriques ou d'interpolation (séries de Fourier, séries de puissances, polynômes de Chebyshev, polynômes de Jacobi, etc.) sur tout le domaine. En choisissant des coefficients qui satisfont les équations gouvernantes et les conditions aux limites, un système algébrique est construit.

Les méthodes spectrales (SM, *Spectral Method*), ont été développés durant les années 70 pour la résolution des problèmes hyperboliques de la dynamique des fluides. Ceux-ci, en se basant sur une approximation par les séries de Fourier [155, 156]. Plus tard, une variante de la méthode a été développée pour la modélisation de la propagation des ondes élastiques dans les structures [154]. Elle consiste à résoudre le système différentielle par approximation des opérateurs de différenciation basés sur la FFT. Cependant, le développement en séries de Fourier limite leur application aux structures avec des conditions aux limites périodiques. Par conséquent, des opérateurs de différenciation utilisant les polynômes de Chebyshev et de Jacobi ont été étudiés pour surmonter cette limitation. La SM a été appliquée pour le calcul des propriétés de dispersion dans les anneaux hétérogènes complexes [157], les guides d'ondes cylindriques multi-couches [158] et ceux fabriqués avec des matériaux hétérogènes et anisotropes [159, 160].

Parallèlement, la méthode de collocation d'expansion de Fourier (SCM, *Spectral Collocation Method*), a été développée afin d'analyser les guides d'onde à section polygonale [161, 162, 163]. Puis, elle a été généralisée pour traiter les guides d'onde à sections arbitraires [164]. Par ailleurs, on peut également citer en particulier un exemple d'une technique de série de puissance utilisée pour traiter le cas d'une plaque FGM [165, 166].

En général, les méthodes spectrales offrent un moyen très performant pour l'analyse des guides d'onde canoniques constitués de matériaux complexes. Elles possèdent de nombreux avantages par rapport aux formulations éléments finis. Elles sont simples à implémenter, rapide, possèdent une convergence exponentielle et ne souffrent pas des problèmes en hautes fréquences. Néanmoins, elles sont moins adaptées pour les problèmes de géométries complexes et plus particulièrement les rails. En outre, l'analyse en hautes fréquences pour les SMs exige un nombre important de coefficients afin d'obtenir une bonne précision à cause du phénomène de Gibbs.

### 1.3.5 Conclusion

Dans cette section, une revue générale des méthodes d'analyse de la propagation des OGU a été présentée. Au vu de l'analyse effectuée, on peut conclure que :

- les méthodes analytiques sont très limitées et très difficiles à établir pour les guides d'onde complexes ;
- les méthodes numériques classiques permettent d'analyser la propagation dans les guides d'onde complexes.

Néanmoins, pour les modélisations tridimensionnelles, les calculs deviennent très coûteux en temps de calculs et en utilisation d'espace mémoire. Ceux-ci, limitent leur utilisation, en générale, aux modèles bidimensionnels à moins d'avoir accès à un grand ordinateur.

Les méthodes hybrides présentent une excellente alternative aux méthodes numériques classiques puisqu'elles n'exigent que la modélisation d'une partie ou uniquement la section transversale du guide d'onde. Les méthodes spectrales semblent offrir une combinaison favorable grâce à la simplicité de leur implémentation, leur rapidité et leur convergence exponentielle qui rend possible d'étudier des problèmes en hautes fréquences. Toutefois, elles sont moins adaptées pour des problèmes de géométries complexes telles que les rails et les profilés.

Par conséquent, le choix s'est porté sur la méthode semi-analytique éléments finis. Elle constitue une combinaison intéressante pour l'élaboration d'un outil de modélisation efficace, économique et surtout applicable à une large gamme de cas d'étude usuellement rencontrés dans l'industrie. De plus, elle est fréquemment employée dans la modélisation des configurations en CND pour l'étude de l'interaction des ondes avec différents types d'endommagements. Toutefois, la discrétisation numérique par la méthode FEM classique résulte des coûts de calculs (temps et mémoire) conséquents. Ces derniers ne sont souvent pas convenables pour des applications industrielles. En particulier, si un nombre important de simulations est nécessaire afin de résoudre des problèmes inverses.

Récemment, des méthodes numériques d'ordres supérieurs ont été étudiées afin d'améliorer l'efficacité de ces méthodes.

## 1.4 MÉTHODES NUMÉRIQUES D'ORDRE ÉLEVÉ

### 1.4.1 Introduction

À partir des études bibliographiques précédentes, il a été constaté que la méthode des éléments finis classique est souvent utilisée pour la modélisation des structures industrielles réelles et complexes (ex. rails et pipelines). Toutefois, l'analyse de ces dernières à des fréquences relativement élevées, avec une bonne précision, reste fastidieuse. Une discrétisation spatiale très fine est nécessaire pour satisfaire les exigences minimales recommandées : 10 à 20 nœuds par longueur d'onde. Autrement dit, la faible convergence de la discrétisation FEM conventionnelle impacte la précision des résultats et les coûts de calculs. L'affinement du maillage entraîne une augmentation de la consommation des ressources et/ou à un certain point une grande erreur provoquant une solution numérique inexacte. Par conséquent, les calculs en hautes fréquences, sur de simples ordinateurs, constituent un défi majeur à ce jour.

Au cours des deux dernières décennies, certains chercheurs ont accordé une attention particulière aux méthodes d'ordre élevé (HO, *High Order*). En effet, celles-ci offrent une meilleure précision que les méthodes d'ordre faible. Mathématiquement, une méthode numérique est dite du  $N$ -ème ordre (ou d'ordre  $N$  de précision) si l'erreur de solution  $E$  est proportionnelle à la taille du maillage  $h$  à la puissance  $N$ , équivalent à  $E \propto h^N$ . En conséquence et afin de diminuer l'erreur, il est nécessaire d'augmenter le degré  $N$  avec un  $h$  suffisamment petit. Le coefficient  $N$  dépend des éléments de la discrétisation, notamment le type du maillage, l'ordre et la nature des fonctions d'approximation utilisées, ainsi que les méthodes d'intégration numériques associées. Les méthodes sont dites d'ordres élevés lorsqu'elles possèdent un ordre de précision ( $N > 2$ ). Les méthodes numériques classiques sont généralement du second-ordre de précision.

Dans ce qui suit, le concept de base des différents types de discrétisations spatiales d'HO sont décrites. Un résumé des avantages et inconvénients de chaque type de ces techniques est donné.

#### 1.4.2 Concepts de discrétisations

Dans la littérature, une multitude de discrétisations d'ordre élevé a été proposée. La plupart d'entre elles sont principalement issues du domaine de la dynamique des fluides (CFD, *Computational Fluid Dynamics*), où les problèmes nécessitent de très grands maillages. Elles se basent le principe de la FEM classique mais utilisent une approche semblable aux méthodes spectrales. C'est-à-dire, la solution est approximée par des fonctions d'interpolation d'ordres supérieurs, non pas sur la totalité du domaine mais sur un maillage relativement grand. Ainsi, les temps de calculs et la qualité de la solution (convergence) peuvent être optimisés. La figure (1.11) illustre la différence entre les différents algorithmes de discrétisations.

La méthode classique, communément notée  $h - FEM$ , est basée sur l'évaluation de la fonction approchée seulement aux deux ou trois points sélectionnés, sur un sous-domaine ou élément de petite taille. Le degré polynômial  $p$  des fonctions de forme utilisées est d'ordre faible (1 ou 2). Ces dernières sont non-superposées, et s'annulent en dehors de l'élément. En revanche, la méthode spectrale utilise une fonction d'ordre  $p$  suffisamment élevé pour couvrir tout le domaine (non-nuls sur l'ensemble du domaine). Enfin, les méthodes HO représentent un compromis entre les deux discrétisations. Ainsi, elles bénéficient des avantages des deux techniques et sont généralement précédées par la mention " $hp$ " [167].

Plusieurs variantes inspirées de ce principe ont été développées. Celles-ci, peuvent être regroupées, en général, en deux grandes familles : les méthodes des éléments spectraux et les méthodes de Galerkin discontinues.

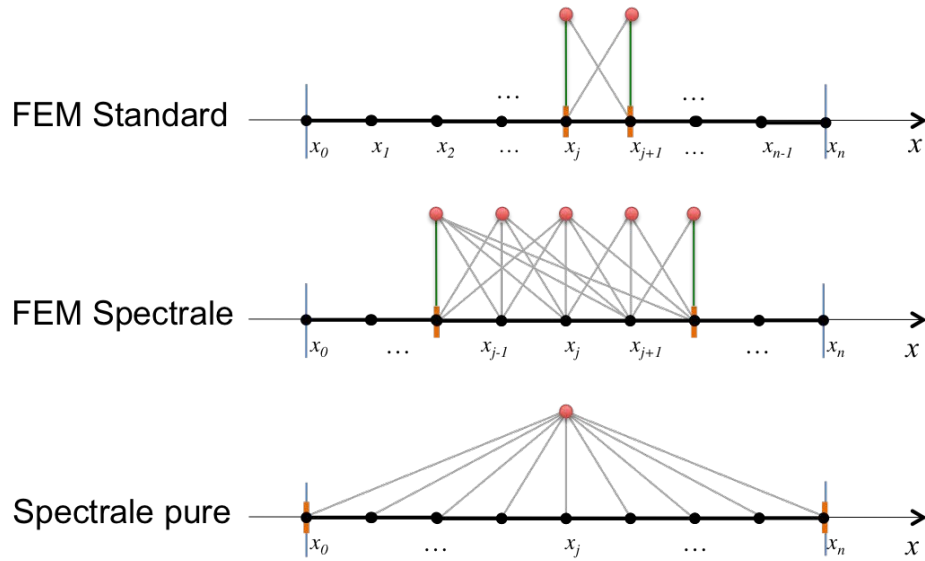


FIGURE 1.11 – Trois types d’algorithmes numériques. Les lignes fines (bleues) en  $x_0$  et  $x_n$  indiquent les limites du domaine. Les points noirs  $x_j$  illustrent les points de discrétisation. Les lignes verticales (oranges et vertes) épaisses sont les bords d’un sous-domaine. Les points rouges représentent les solutions approchées qui sont calculées à partir des approximations (lignes grises) sur les points de discrétisation [2].

### 1.4.3 Méthodes des éléments spectraux

Les méthodes des éléments spectraux sont un ensemble des extensions de la méthode FEM classique. La différence principale entre elles réside dans le mécanisme d’amélioration de convergence et le choix des fonctions d’interpolations [168]. La variante la plus utilisée, référencée (*hp*-SEM, *hp Spectral Element Method*) [169], emploie les polynômes de Lagrange combinés avec une formule de quadrature de Gauss-Lobatto pour atteindre une convergence optimale.

Cette méthode a été développée pour la résolution numérique des équations de Navier-Stokes incompressibles par Patera [170]. Ensuite, elle a été utilisée pour la modélisation des problèmes de propagation d’ondes élastiques en sismologie dans les travaux de Komatitsch et al. [171, 172], puis Mercerat et al. [173] et Seriani et al. [174]. En ce qui concerne la propagation des ondes guidées et les problématiques du domaine de CSI, elle a été employée pour la simulation des modes de Lamb dans une plaque composite et leur génération par des transducteurs piézoélectriques [175, 176]. Récemment, la propagation dans des plaques FGM est effectuée par un modèle 2D dans le domaine temporel [177]. Les courbes de dispersion sont calculées en utilisant un post-traitement en fréquentiel. Une revue générale récente est publiée par Willberg et al. [93].

Les méthodes des éléments spectraux fournissent un excellent outil de modélisation de la propagation des ondes guidées ultrasonores. Elles possèdent de nombreux avantages par rapport à la FEM classique. Une convergence rapide et une bonne précision peuvent être obtenues [168, 178, 179]. En particulier, la méthode *hp*-SEM s’est avérée très

attrayante. Toutefois, elle n'est pas aussi flexible que la méthode FEM classique. Elle est basée en grande partie sur des éléments quadrilatéraux en 2D et hexaédriques en 3D. Ceci rend parfois difficile la prise en compte de certains domaines à géométries complexes. Pour pallier à ce problème, des études ont été menées afin de prendre en compte les éléments triangulaires en 2D [180, 173]. Cependant, l'extension en 3D reste très difficile à mettre en œuvre [181].

En effet, la flexibilité est limitée par l'exigence de continuité entre les éléments. Si des ordres polynomiaux différents sont utilisés dans les éléments voisins, la continuité n'est plus aisément assurée. D'autre part, lorsque des nœuds suspendus (nœuds qui ne sont pas partagés par deux bords d'éléments voisins) sont utilisés, une incompatibilité géométrique est créée. Ainsi, une formulation alternative dite méthode de Galerkin discontinue a été développée pour gérer ces incompatibilités.

#### 1.4.4 Méthode de Galerkin discontinue

La méthode de Galerkin discontinue (hp-DGM, *hp Discontinuous Galerkin Method*) est une extension de la hp-SEM. Une étude exhaustive et une bibliographie détaillées sont données dans les ouvrages suivants : [182, 183, 184]. Cette méthode est basée sur des fonctions de forme où le champ ou ses dérivées ou généralement les deux sont discontinues. La discontinuité est considérée à travers les limites de l'élément tandis que la continuité du domaine de calcul est maintenue. La méthode discontinue est une combinaison de la hp-SEM et la méthode des volumes finies (FVM, *Finite Volume Method*) [185]. De ce fait, la formulation DG bénéficie des mêmes avantages que la hp-SEM. De plus, grâce à la formulation locale de la FVM, elle acquiert une très grande flexibilité géométrique.

La figure (1.12) montre la différence entre une approximation par la formulation de Galerkin continue (CG) et discontinue (DG). Dans la première, le champ approché est continu à travers les frontières des éléments; conséquence directe de la nature de la fonction d'interpolation définie sur tout le domaine. En revanche, la deuxième méthode permet au champ approché d'être discontinu à travers les frontières. La fonction de pondération est considérée discontinue et définie uniquement à l'intérieur d'une cellule. Le couplage des solutions élémentaires est assuré par un traitement basé sur l'utilisation des flux numériques développés dans le cadre de la FVM. Ainsi, plusieurs dérivations ont été proposées pour résoudre une grande variété de problèmes. Elles diffèrent principalement dans la technique de liaison des nœuds aux interfaces. Une analyse unifiée de ces dérivations, dans le cadre des problèmes elliptiques, peut être trouvée dans le travail de Arnold [186].

Le premier développement de la hp-DGM a fait l'objet du travail novateur de Reed et Hill [187] pour l'équation de transport des neutrons. Cette méthode a été principalement

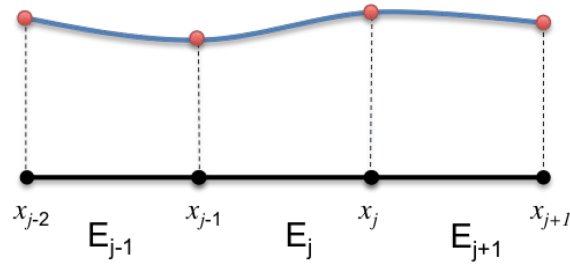
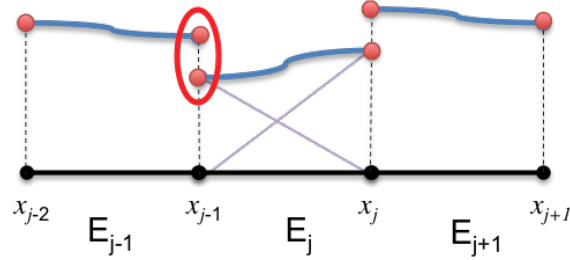
(a) *solution continue*(b) *solution discontinue*

FIGURE 1.12 – Représentation de la solution par la méthode (a) continue et (b) discontinue.

utilisée dans le domaine de CFD, puis généralisée pour d'autres types d'applications [188]. Une analyse mathématique plus générale ainsi qu'une bibliographie détaillée sont données dans l'ouvrage de Hesthaven et Warburton [183]. Récemment, la méthode a suscité l'intérêt des chercheurs dans le domaine de la propagation des ondes élastiques, spécifiquement dans le domaine de la géophysique. On cite en particulier les travaux suivants : [189, 190, 191, 192, 193, 194, 195, 196, 197]. En ce qui concerne la propagation d'OGU pour le CND, on trouve très peu de travaux. Bou Matar et al. [198] ont utilisé la méthode pour la simulation de la propagation d'onde non-linéaire. Une application à l'imagerie acoustique pour la détection de défauts a été réalisée par Li [199]. La propagation dans une plaque FGM et multi-couches est étudiée par Aksoy et Senocak [200].

Il est à noter que tous les travaux de simulation de la propagation d'onde avec la hp-DGM, cités dans ce rapport, ont été effectués dans le domaine temporel. En régime harmonique, le développement des méthodes hp-DGM pour l'élastodynamique reste limité à cause du dédoublement des degrés de liberté. Récemment, la méthode (HDG, *Hybridizable discontinuous Galerkin method*) a été développée par Soon et al. [201] pour surmonter cette limitation. Bonnasse-Gahot et al. [202] l'ont utilisé pour une application à l'imagerie sismique [203].

La méthode de Galerkin discontinue est une nouvelle méthode émergente dans le domaine de calcul scientifique pour l'analyse de propagation des ondes élastiques. Les éléments dans un même maillage peuvent être de degré polynomial et de nature totalement différents. Des maillages structurés et non-structurés, formés d'éléments triangulaires et/ou quadrilatéraux, peuvent être utilisés. Ce qui lui permet de modéliser

plus efficacement les géométries complexes et l'hétérogénéité dans le milieu ainsi que des éventuelles discontinuités (défauts).

Le principal inconvénient de la méthode est qu'elle nécessite plus de degrés de liberté. Le système d'équations résultant est plus grand et nécessite plus de calculs. Cependant, cet inconvénient n'est vrai que lorsque des polynômes de degrés faibles sont utilisés. Les coûts supplémentaires correspondants diminuent rapidement pour les ordres supérieurs ( $p \geq 3$ ). En outre, la nature locale de la méthode permet d'obtenir une matrice de masse diagonale par blocs inversible à faibles coûts. Cette matrice permet également l'exploitation des méthodes de parallélisation, dans certains cas, sans développements supplémentaires.

#### 1.4.5 Conclusion

Au court de cette dernière décennie, il y a eu de grands progrès dans le développement des formulations d'ordre élevé pour résoudre les problèmes de propagation d'ondes guidées. Bien que les études ont montré leur efficacité, les méthodes du second-ordre sont utilisées de façon prédominante dans les applications industrielles. Or, dans le domaine des fréquences relativement élevées, l'analyse est, soit impossible à effectuer, soit non fiable.

Les méthodes d'ordres élevé ont démontré leur potentiel pour la résolution des problèmes complexes et à grande échelle. En particulier, les méthodes des éléments spectraux et la méthode de Galerkin discontinue offrent un outil numérique efficace et de hautes performances : une convergence rapide, une grande précision, une flexibilité géométrique améliorée, une prédisposition au calcul parallèle et un meilleur traitement des milieux hétérogènes.

Il a été conclu que la hp-DGM est attrayante pour divers raisons [194, 196, 184, 204, 181, 205, 206]. Premièrement, elle permet d'utiliser un degré polynomial et un maillage relativement grand pour obtenir une précision élevée. Deuxièmement, il a été constaté que dans les applications dont le milieu de propagation est fortement hétérogènes ou lorsque les paramètres changent à l'intérieur des éléments, la méthode DG fournit une précision supérieure à celle de la SEM. En outre, elle permet l'utilisation des maillages d'éléments finis non-conformes. Ils peuvent s'adapter aux discontinuités, non seulement des paramètres, mais aussi du champ d'onde.

Par conséquent, dans l'objectif de développement d'un outil performant, capable de modéliser la propagation guidées dans les guides complexes de géométrie et de matériaux hétérogènes, la méthode hp-DG-FEM semble présenter un potentiel intéressant et fera l'objet d'étude de ce travail.

## 1.5 CONCLUSION

Dans ce chapitre, une étude bibliographique sur les méthodes d'analyse de la propagation des ondes guidées ultrasonores et leur intérêt pour le contrôle-santé-intégré a été effectuée. Dans un premier temps, la propagation des ondes guidées et ses caractéristiques sont introduites. Dans un deuxième temps, une étude de l'état de l'art a permis de faire le point sur les méthodes utilisées pour la modélisation de la propagation d'onde et le calcul des courbes de dispersion. Trois grandes catégories de méthodes sont identifiées : analytiques, numériques et hybrides.

La méthode semi-analytique élément finis (SAFE) semblent être le choix pratique pour le calcul des propriétés dispersives des OGU dans les guides d'onde complexes. Elle présente une approche efficace et économique : seule la section transversale est modélisée. Cependant, lorsqu'il s'agit d'étudier des guides d'onde complexes (géométrie arbitraire et/ou matériaux hétérogène), à des fréquences relativement élevées et/ou à une précision donnée, la méthode atteint ses limites. L'analyse devient soit infaisable, soit les résultats obtenus sont de qualité compromise. Afin de s'affranchir de ces limitations, une étude bibliographique sur les méthodes d'éléments finis d'ordre élevé a été réalisée. Entre autres, la méthode des éléments finis de Galerkin discontinue.

Dans la suite de ce travail, la méthode semi-analytique basée sur la hp-DGM est développée. Ceci permettra d'analyser la propagation d'ondes guidées dans les matériaux innovants appliqués dans le domaine de transport en deux et en trois dimensions, à des fréquences moyennes et élevées. Celle-ci sera étudiée dans le domaine fréquentiel. En particulier pour des problèmes aux valeurs propres associés à l'approche semi-analytique. Le chapitre suivant présentera une description plus détaillée des particularités des dérivations existantes ainsi que leur utilisation pour les problèmes elliptiques.





# APPLICABILITÉ DE LA MÉTHODE DE GALERKIN DISCONTINUE DANS LE DOMAINE FRÉQUENTIEL : PROBLÈMES AUX VALEURS PROPRES

---

## 2.1 INTRODUCTION

Dans le chapitre précédant, l'étude bibliographique a mis en évidence l'intérêt de l'utilisation d'outils d'analyse numériques dans le domaine de contrôle-santé-intégré. Nous avons proposé le développement des modèles : semi-analytique et hybride, en exploitant les avantages qu'offrent les méthodes d'ordre élevé, en particulier la méthode de Galerkin discontinue. Cependant, l'emploi de cette dernière n'est pas trivial et nécessite une étude dans le domaine fréquentiel.

Ce chapitre présente la vérification et la validation de la méthode de Galerkin discontinue d'ordre élevé pour la résolution des problèmes aux valeurs propres issues de la méthode semi-analytique. La vérification est effectuée avec des problèmes simplifiés dont la solution exacte est connue et donc l'erreur entre la solution exacte et la solution numérique peut être quantifiée. L'étude est réalisée en une dimension puis en deux dimensions, sur des maillages triangulaires et rectangulaires, uniformes et non-uniformes, avec des conditions aux limites libres. Pour le reste de ce travail, nous choisissons les méthodes à pénalité intérieure (IPDG), car elles permettent une discrétisation directe de l'opérateur Laplacien et fournissent des matrices creuses (contenant beaucoup de zéros) permettant une résolution optimale [183].

En conséquence, ce chapitre est divisé en trois parties. Dans un premier temps, une description détaillée des particularités des variantes de la méthode IPDG est présentée. Dans un deuxième temps, l'analyse de l'erreur de dispersion numérique de la méthode

utilisée est effectuée à travers des cas de test analytiques, notamment l'équation de Helmholtz (1.8a) sous sa forme scalaire. Enfin, les résultats obtenus sont comparés avec les solutions exactes d'une part, et la méthode de Galerkin continue (CG-FEM) d'autre part. Ainsi, les performances et les avantages potentiels de la méthode sont évalués.

## 2.2 MÉTHODES À PÉNALITÉ INTÉRIEURE

Dans cette section, nous présentons une description général du problème considéré ; toutes les notations et définitions nécessaire pour la formulation de la méthode à pénalité intérieure (IPDG). Ensuite, la formulation variationnelle de la méthode est décrite en une dimension, puis en dimensions supérieurs.

### 2.2.1 Description général du problème

Afin de simplifier les développements mathématiques et introduire l'analyse de propagation d'ondes guidées dans les plaques et les cylindres, il est important d'étudier les vibrations dans les barres et les membranes minces. Ces dernières présentent l'avantage d'une propagation d'onde non-dispersive, ce qui permettra de valider la méthode et d'analyser ses propriétés : dispersion numérique intrinsèque et performances. Ces exemples sont applicables aux ondes SH dans les milieux isotropes (section (1.2)) et les ondes longitudinales dans les cylindres minces. Ces cas d'étude sont régies par le problème elliptique général défini tel que :

$$\nabla \cdot (\mathbf{C} \nabla u) + k^2 u = f \quad \text{sur } \mathcal{I}, \quad (2.1a)$$

$$u = g_D \quad \text{sur } S_D, \quad (2.1b)$$

$$(\mathbf{C} \nabla u) \cdot \mathbf{n} = g_N \quad \text{sur } S_N, \quad (2.1c)$$

où  $k$  exprime le nombre d'onde de l'équation d'Helmholtz,  $u$  est le déplacement.  $\mathbf{C}$  est une matrice de coefficients variables ou constants du milieu.  $\mathbf{n}$  est le vecteur normal sortant,  $f$  est le terme de forces externes.  $g_D$  et  $g_N$  représentent les conditions aux limites de Dirichlet et de Neumann respectivement, sur les frontières  $(S_D, S_N) \in \partial \mathcal{I}$ . Cette équation permet de modéliser également le problème élastodynamique (1.5) (voir [85]). Cependant, nous nous limitons dans ce chapitre au cas scalaire. Dans ce qui suit, nous nous intéressons au problème (2.1) avec des conditions aux limites libres ( $g_N = 0, g_D = \emptyset$ ).

### 2.2.2 Discrétisation en une dimension

Contrairement à la formulation de Galerkin continue (section(1.3)) qui consiste en l'intégration sur tout le domaine puis la discrétisation, la formulation discontinue est une formulation locale. La solution est recherchée dans chaque élément séparément.

### 2.2.2.1 Définitions et notations

Considérons le problème défini en (2.1) en une dimension de l'espace  $x$ . Comme le montre la figure (2.1), le domaine unidimensionnel  $\mathcal{I} = [a, b]$  est maillé en un nombre fini de  $n$  éléments  $E_j = [x_j, x_{j+1}]$ , où  $j = 0, \dots, n-1$  est l'indice de l'élément. Le maillage est autorisé à être non-uniforme (éléments de tailles et d'ordres différents). On définit la taille de chaque élément par  $h_j = x_{j+1} - x_j$  et  $h_{\max}(j) = \max(h_{j-1}, h_j)$ .

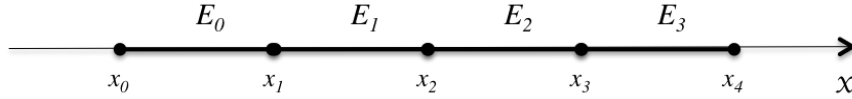


FIGURE 2.1 – Maillage d'un domaine unidimensionnel  $\mathcal{I}$ .

Les fonctions de forme discontinues sont définies uniquement à l'intérieur de l'élément (voir figure (1.12)). Soit  $\mathcal{D}_p$  l'espace des fonctions de test  $v(x)$  discontinues par morceaux sur le maillage  $\mathcal{I} \simeq \mathcal{I}_h = \cup_j E_j$  tel que :

$$\mathcal{D}_p(\mathcal{I}_h) = \{v : v|_{E_j} \in \mathbb{P}_p(E_j) \quad \forall j = 1, \dots, n-1\},$$

où  $\mathbb{P}_p(E_j)$  est l'espace des polynômes d'interpolation d'ordre  $p$  sur  $E_j$ . De ce fait, il est judicieux de noter que pour  $v|_{E_j}$ , on écrit :

$$\begin{aligned} v(x_j) &= v(x_j^+) = \lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ \delta > 0}} v(x_j + \delta), \\ v(x_{j+1}) &= v(x_{j+1}^-) = \lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ \delta > 0}} v(x_{j+1} - \delta). \end{aligned}$$

Pour cette raison, un traitement de la discontinuité inter-éléments est nécessaire afin de compléter la discrétisation. Les valeurs aux frontières sont calculées en fonction des deux valeurs disponibles à travers un flux numérique. Dans le but d'établir ce flux, il est nécessaire de définir le saut  $\llbracket \bullet \rrbracket$  et la moyenne  $\{\!\{ \bullet \}\!\}$  à l'interface entre deux éléments voisins :

$$\begin{aligned} \llbracket \bullet \rrbracket &= (\bullet|_L) - (\bullet|_R), \\ \{\!\{ \bullet \}\!\} &= c_L(\bullet|_L) + c_R(\bullet|_R), \end{aligned} \tag{2.2}$$

où  $c_L$  et  $c_R$  sont les coefficients de la moyenne, de l'élément à gauche (L, *Left*) et à droite (R, *Right*) de l'interface considérée, respectivement. La définition de la moyenne est générale. Néanmoins, dans ce travail, nous nous limitons au cas particulier où  $c_L = c_R = \frac{1}{2}$ .

Par convention, cette définition (2.2) est étendue pour les frontières du domaine de calcul  $(x_0, x_n)$  :

$$\begin{aligned} \llbracket (\bullet)(x_0) \rrbracket &= -(\bullet)(x_0^+), & \{\!\{ (\bullet)(x_0) \}\!\} &= +(\bullet)(x_0^+), \\ \llbracket (\bullet)(x_n) \rrbracket &= +(\bullet)(x_n^-), & \{\!\{ (\bullet)(x_n) \}\!\} &= +(\bullet)(x_n^-). \end{aligned} \tag{2.3}$$

### 2.2.2.2 Formulation variationnelle

Au moyen de la méthode des résidus pondérés, en multipliant l'équation (2.1-a) par une fonction de test discontinue  $v(x)$  et en intégrant le résultat sur chaque élément  $E_j$ , la forme intégrale forte élémentaire est obtenue :

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \mathbf{C}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x} \right) + k^2 u(x) \right) v(x) dx = \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x) v(x) dx. \quad (2.4)$$

La méthode IPDG consiste en l'intégration par parties du Laplacien, puis en la somme sur tous les éléments. Ensuite, des termes de stabilisations sont alors rajoutés à la formulation. Le premier et le deuxième terme correspondent au flux numérique résultant de l'intégration par parties. Le troisième et le quatrième terme sont des fonctions de pénalisation permettant d'imposer une continuité faible de la solution numérique et de ses dérivées. La formulation variationnelle correspondante au problème (2.1) est définie tel que [184] : chercher  $u \in \mathcal{D}_p(\mathcal{I}_h)$  :

$$\forall v \in \mathcal{D}_p(\mathcal{I}_h), \quad a_\epsilon(u, v) = \mathcal{L}(v), \quad (2.5)$$

où la forme bilinéaire  $a_\epsilon(u, v)$  et la forme linéaire  $\mathcal{L}(v)$  sont définies telles que :

$$\begin{aligned} a_\epsilon(u, v) &= \sum_{j=0}^{n-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left( \mathbf{C}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x} \frac{\partial v(x)}{\partial x} dx - k^2 u(x) v(x) dx \right) \\ &\quad - \sum_{j=0}^n \left\{ \left\{ \mathbf{C}(x) \frac{\partial u(x_j)}{\partial x} \right\} \right\} \llbracket v(x_j) \rrbracket + \epsilon \sum_{j=0}^n \left\{ \left\{ \mathbf{C}(x) \frac{\partial v(x_j)}{\partial x} \right\} \right\} \llbracket u(x_j) \rrbracket \\ &\quad + \sum_{j=0}^n \frac{\alpha}{h_{\max}(j)} \llbracket u(x_j) \rrbracket \llbracket v(x_j) \rrbracket + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\gamma}{h_{\max}(j)} \llbracket \frac{\partial u(x_j)}{\partial x} \rrbracket \llbracket \frac{\partial v(x_j)}{\partial x} \rrbracket, \\ \mathcal{L}(v) &= \sum_{j=0}^{n-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x) v(x) dx + BC, \end{aligned} \quad (2.6)$$

où  $BC$  représente la contribution des conditions aux limites. Celles-ci seront détaillées dans la suite de ce travail.  $\epsilon$ ,  $\alpha$  et  $\gamma$  sont des nombres réels à ajuster, appelés facteurs de pénalisation. En effet, il existe trois cas de  $\epsilon$  dans la littérature [184] à savoir  $\{-1; 0; +1\}$ . Dans chaque cas, une sous-méthode peut être identifiée : à pénalité intérieure symétrique (SIPG), à pénalité intérieure incomplète (IIPG) et à pénalité intérieure non-symétrique (NIPG), respectivement. Les détails de la mise au point sont omis ici. Néanmoins, une analyse mathématique plus générale ainsi qu'une dérivation détaillée sont données en annexe B.

Effectivement, le choix de  $\epsilon$  a des répercussions sur les autres paramètres  $\alpha$  et  $\gamma$ . Ensemble, ils définissent le comportement de la méthode. Le tableau ci-dessous résume les différentes variantes existantes dans la littérature et leur critère de stabilité.

| Méthode IPDG                 | $\epsilon$ | $\alpha$ | $\gamma$ | $p$      | stable |
|------------------------------|------------|----------|----------|----------|--------|
| Symétrique (SIPG)            | -1         | $\gg 0$  | 0        | $\geq 1$ | ✓      |
| Element global (GEM)         | -1         | 0        | 0        | $\geq 1$ | ×      |
| Incomplète (IIPG)            | 0          | $\gg 0$  | -        | $\geq 1$ | ✓      |
| Non-symétrique (NIPG)        | 1          | $\geq 1$ | 0        | $\geq 1$ | ✓      |
| Non-symétrique zéro (NIPG 0) | 1          | 0        | 0        | $\geq 2$ | ✓      |

TABLE 2.1 – Dérivations de la méthode IPDG et conditions de stabilité.

En fait, lorsque  $\epsilon = \alpha = \gamma = 0$ , la solution n'est ni convergente ni stable. De plus, l'existence et l'unicité de la solution ne peuvent être prouvées. Quant aux autres variantes, l'existence et l'unicité de la solution sont démontrées [184]. Par conséquent, l'ajustement des paramètres de pénalisation  $\alpha$  et  $\gamma$  nécessite une étude poussée. Plusieurs expressions ont été développées pour différentes formes de maillages en 1, 2 et 3 dimensions. Une étude comparative et une analyse approfondie de leur influence dans le contexte des problèmes aux valeurs propres est effectuée en annexe C.

**Remarque :** Il est à noter que la variante symétrique reste la plus avantageuse par rapport aux autres configurations grâce à sa matrice globale définie positive permettant d'utiliser des solveurs plus rapide (par exemples : méthode du gradient conjugué, pré-conditionnement factorisation de Cholesky, etc.). Quant aux autres variantes, elles nécessitent des solveurs pour des matrices non-symétriques et qui sont généralement plus lents (par exemple : méthode GMRES).

### 2.2.2.3 Conditions aux limites

Dans le cas de la DG-FEM, l'implémentation des Conditions Aux Limites (CAL) (2.1-b)-(2.1-c) est une tâche difficile. La seule information échangée entre les éléments voisins est la valeur du flux numérique à l'interface commune. Cette liaison est donc la clé de leur mise en œuvre. Deux méthodes de traitements des conditions aux limites peuvent être utilisées : l'imposition faible ou forte.

L'approche générale est de traiter les CAL de **type Dirichlet** faiblement. Autrement dit, leur intégration sur le bord d'un élément peut être effectuée par l'imposition d'un état externe, ce qui est pris en compte dans l'évaluation du flux numérique correspondant. De ce fait, la condition à la limite est dite appliquée sous une forme faible, de sorte que la solution numérique à l'interface approche l'état externe. L'erreur devrait tendre vers zéro soit par raffinement de maillage (raffinement- $h$ ) ou en augmentant le degré de l'espace polynômial de la solution numérique (raffinement- $p$ ). En revanche, une imposition forte est possible mais elle est rarement utilisée.

La forme bilinéaire  $a_\epsilon(u, v)$  peut être modifiée pour tenir en compte des CAL de type Dirichlet. Les deux expressions de pénalité impliquant le saut et la moyenne vont engen-

drer des contributions dans la partie gauche  $a_\epsilon(u, v)$  et droite  $L(v)$ . L'expression de  $BC$  devient :

$$BC = - \left( \epsilon \mathbf{C}(a) \frac{\partial v(x_0^+)}{\partial x} - \frac{\alpha}{h_{max}(0)} v(x_0^+) \right) u(a) + \left( \epsilon \mathbf{C}(b) \frac{\partial v(x_n^-)}{\partial x} + \frac{\alpha}{h_{max}(n)} v(x_n^+) \right) u(b). \quad (2.7)$$

La particularité des CAL de **type Neumann** réside dans le fait qu'elles satisfont directement l'intégrale sur les frontières. Le saut et la moyenne impliquant  $u$  et  $\partial u$  sont nuls. Par conséquent, ils n'ajoutent aucune contribution à la forme bilinéaire. Ainsi, le terme de cette intégrale peut être déplacé directement à la partie droite tel que :

$$BC = \int_{\partial I_h} \mathbf{C}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x} v(x) dx = \left[ \mathbf{C}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x} v(x) \right]_a^b. \quad (2.8)$$

### 2.2.3 Discrétisation en dimensions supérieures

L'extension de la formulation unidimensionnelle précédente en dimensions supérieures est directe et ne nécessite que des changements mineurs. Bien que l'étude se focalise dans la suite de ce travail sur les problèmes en deux dimensions, la formulation donnée reste identique pour les problèmes tridimensionnels.

#### 2.2.3.1 Définitions et notations

Soit un domaine  $\mathcal{I}$  dans  $\mathbb{R}^d$ ,  $d = 2, 3$ . Comme montré sur la figure (2.2), le domaine de calcul  $\mathcal{I}_h$  est un maillage de  $\mathcal{I}$  composé d'un ensemble d'éléments arbitraires  $E \in \mathcal{I}_h$ . Les frontières externes  $\partial \mathcal{I}$  sont composées de deux segments ( $S_D$ ) et ( $S_N$ ) indépendants. Ceux-ci correspondent aux conditions aux limites de Dirichlet et de Neumann, respectivement.  $\mathbf{n}$  est un vecteur normal sortant. Chaque élément  $E$  possède des limites uniques  $\partial E$ , composées d'éléments de frontières orientés positivement, dans un sens antihoraire. Ces bords ont chacun un vecteur normal unitaire sortant  $\mathbf{n}_E$ .

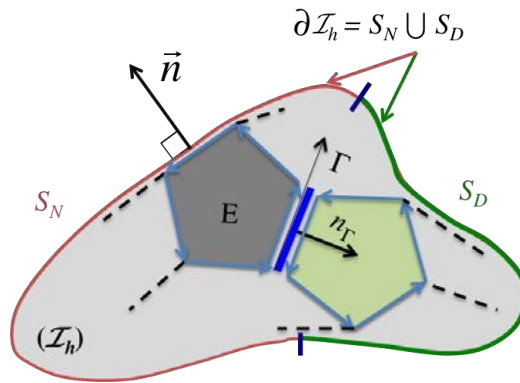


FIGURE 2.2 – Maillage arbitraire d'un domaine de géométrie arbitraire bidimensionnel (2D).

$\Gamma_h$  désigne l'ensemble des frontières internes  $\Gamma \in \partial E$  partagées entre deux éléments, avec  $\mathbf{n}_\Gamma$  leur vecteur normal correspondant. Subséquemment,  $\Gamma_D$  et  $\Gamma_N$  représentent les frontières externes qui coïncident avec  $S_D$  et  $S_N$ , respectivement. Par ailleurs, les mêmes définitions de l'espace  $\mathbb{P}_p(E)$ , du saut et de la moyenne (2.2) sont maintenues.

### 2.2.3.2 Formulation variationnelle

À l'aide de la méthode des résidus pondérés, en multipliant (2.1-a) par une fonction de test discontinue  $\{v(\mathbf{x}); \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in E_j\}$  et en intégrant le résultat sur un élément, la forme intégrale forte élémentaire est obtenue. Ensuite, en intégrant par parties l'opérateur Laplacien, on obtient la forme intégrale élémentaire faible :

$$\int_E (\mathbf{C} \nabla u \cdot \nabla v - k^2 uv) d\mathbf{x} - \oint_{\partial E} (\nabla u \cdot \mathbf{n}_E v) ds = \int_E f v d\mathbf{x} \quad (2.9)$$

En faisant la somme sur tous les éléments et en introduisant les termes de stabilisations, le schéma général IPDG est obtenu. Il s'écrit : chercher  $u \in \mathcal{D}_p(\mathcal{I}_h)$ ,

$$\forall v \in \mathcal{D}_p(\mathcal{I}_h), \quad a_\epsilon(u, v) = \mathcal{L}(v), \quad (2.10)$$

où la forme bilinéaire  $a_\epsilon(u, v)$  et la forme linéaire  $\mathcal{L}(v)$  sont respectivement définies telles que :

$$\begin{aligned} a_\epsilon(u, v) &= \sum_{E \in \mathcal{I}_h} \int_E (\mathbf{C} \nabla u \cdot \nabla v - k^2 uv) d\mathbf{x} - \sum_{\Gamma \in \Gamma_h \cup \Gamma_D} \int_\Gamma \{\{\mathbf{C} \nabla u \cdot \mathbf{n}_\Gamma\}\} \llbracket v \rrbracket ds \\ &\quad + \epsilon \sum_{\Gamma \in \Gamma_h \cup \Gamma_D} \int_\Gamma \{\{\mathbf{C} \nabla v \cdot \mathbf{n}_\Gamma\}\} \llbracket u \rrbracket ds + \sum_{\Gamma \in \Gamma_h \cup \Gamma_D} \int_\Gamma \frac{\alpha}{|e_\Gamma|^{\beta_0}} \llbracket u \rrbracket \llbracket v \rrbracket ds \\ &\quad + \sum_{\Gamma \in \Gamma_h} \int_\Gamma \frac{\gamma}{|e_\Gamma|^{\beta_1}} \llbracket \nabla u \cdot \mathbf{n}_\Gamma \rrbracket \llbracket \nabla v \cdot \mathbf{n}_\Gamma \rrbracket ds, \\ \mathcal{L}(v) &= \sum_{E \in \mathcal{I}_h} \int_E f v d\mathbf{x} - \sum_{\Gamma \in \Gamma_D} \int_\Gamma \left( \epsilon \mathbf{C} \nabla v \cdot \mathbf{n}_\Gamma - \frac{\alpha}{|e_\Gamma|^{\beta_0}} v \right) g_D ds + \sum_{\Gamma \in \Gamma_N} \int_\Gamma g_N v ds. \end{aligned} \quad (2.11)$$

$\alpha$ ,  $\gamma$  et  $\sigma$  sont les paramètres de pénalisation.  $\beta_0$  et  $\beta_1$  sont des nombres positifs dépendant de la dimension  $d$ . La variable  $|e_\Gamma|$  est la dimension caractéristique de la frontière  $\Gamma$  (longueur du bord en 2D et surface de l'élément en 3D). Tous ces paramètres sont détaillés en annexe B.

### 2.2.4 Implémentation de la formulation discontinue

Dans ce travail, l'implémentation de la formulation discontinue est effectuée à l'aide des approximations nodales, en particulier les éléments de types Lagrange. Le calcul du système linéaire est effectué pour le cas de conditions aux limites libres ( $g_N = 0$ ,  $g_D = \emptyset$ , un ensemble vide) et de  $\mathbf{C} = 1$ , i.e. problème aux valeurs propres. La mise en œuvre est réalisée sous le logiciel MATLAB. Toutefois les procédures présentées restent applicables dans les bibliothèques d'éléments finis (ex. Fenics-Project [207]) et aux langages de programmation classiques. Le logiciel GMSH [208, 209] est utilisé pour la CAO (Conception Assistée par Ordinateur) et la génération des différents maillages.



### 2.2.4.1 Organisation générale des calculs

Lors de la mise en œuvre de la méthode DG en général, il faut calculer des intégrales de volume (tels que les éléments 1D, les triangles ou les rectangles en 2D, tétraèdres ou hexaèdres en 3D) et de surface pour l'évaluation du flux aux frontières. Ces dernières ne peuvent pas être calculées directement et nécessitent des transformations pour simplifier le traitement. Afin de simplifier la discrétisation, l'algorithme d'implémentation est montré sur la figure (2.3) .

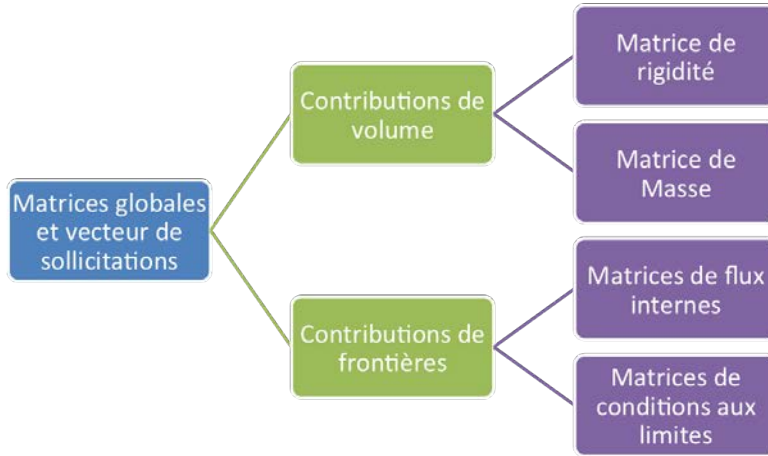


FIGURE 2.3 – Structure d'implémentation de la méthode DG.

Cette section résume la formulation sous forme matricielle de façon générale. Toutefois, nous nous concentrons sur la discrétisation 2D basée sur des quadrangles et des triangles. Il convient de souligner que tout autre type d'élément pourrait être utilisé. Les détails sont donnés en annexe B.

### 2.2.4.2 Présentation matricielle

Afin de construire le système algébrique, la discrétisation de la forme bilinéaire (2.11) est réalisée par le biais de l'approximation nodale. La solution globale est considérée comme la concaténation des solutions élémentaires due à la nature discontinue de la formulation [183] :

$$u(\mathbf{x}) = \bigoplus_{j=0}^{n-1} u^{(j)}(\mathbf{x}). \quad (2.12)$$

Dans chaque élément  $E_j$ , la solution est approchée par une solution numérique exprimée par une interpolation nodale :

$$u^{(j)}(\mathbf{x}) = \sum_{l=1}^{N_{ddl}} P_l(\mathbf{x}) U_l^{(j)} = \mathbf{P} \tilde{\mathbf{U}}^{(j)}, \quad (2.13)$$

appartenant au même espace  $\mathbb{P}_p(E_j)$  que  $v = \mathbf{P}^T$ .  $N_{ddl}$  est le nombre de degrés de liberté de l'élément considéré.  $\{P_l(\mathbf{x}), l = 1, 2, \dots, N_{ddl}\}$  sont les polynômes d'interpolation d'ordre

$p$  correspondants.  $\tilde{\mathbf{U}}^{(j)}$  est le vecteur des variables nodales de l'élément  $E_j$  correspondant au champ  $u$ .

En substituant  $u$  par son approximation (2.13) dans (2.6)-(2.11) et en calculant pour tous les éléments, le système algébrique globale est obtenu :

$$[\mathbf{A}]\{\tilde{\mathbf{U}}\} = \{\mathbf{F}\}. \quad (2.14)$$

où  $[\mathbf{A}]$  est la matrice bilinéaire globale.  $\{\tilde{\mathbf{U}}\}$  est le vecteur global des valeurs nodales généralisées.  $\{\mathbf{F}\}$  est le vecteur d'excitation.

En tenant compte des conditions aux limites libres ( $\{\mathbf{F}\} = \mathbf{0}$ ), le système devient un **problème aux valeurs propres** tel que :

$$\left([\mathbf{A}^K] + [\mathbf{A}^E] - k^2[\mathbf{A}^M]\right)\{\tilde{\mathbf{U}}\} = \mathbf{0}, \quad (2.15)$$

où  $\{\tilde{\mathbf{U}}\}$  est le vecteur global des valeurs nodales généralisées des déplacements.  $[\mathbf{A}^K]$ ,  $[\mathbf{A}^E]$  et  $[\mathbf{A}^M]$  sont les matrices globales de rigidité, de flux et de masse, respectivement. Elle sont exprimées comme suit :

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}^K] &= \sum_{j=0}^{n-1} \int_{E_j} \nabla \mathbf{P}^T \nabla \mathbf{P} \, d\mathbf{x}, \\ [\mathbf{A}^M] &= \sum_{j=0}^{n-1} \int_{E_j} \mathbf{P}^T \mathbf{P} \, d\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

Notons que  $[\mathbf{A}^{K,M,E}]$  sont des matrices carrées complexes partitionnées en blocs de taille  $\{(m \times m), m = n \times N_{ddl}\}$ .

En revanche, les matrices du flux internes correspondant aux intégrales sur un bord  $\Gamma \in \Gamma_h$ , impliquent deux éléments voisins ( $E_1$  et  $E_2$ ). Ainsi, en substituant par les définitions du saut et de la moyenne (2.2), on obtient :

$$[\mathbf{A}^E] = \sum_{\Gamma \in \Gamma_h} \int_{\Gamma} ([\mathbf{T}_{11}] + [\mathbf{T}_{12}] + [\mathbf{T}_{21}] + [\mathbf{T}_{22}]) \, ds, \quad (2.17)$$

avec :

$$\begin{aligned} [\mathbf{T}_{11}] &= -\frac{1}{2} \mathbf{P}_1^T (\nabla \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{n}_{\Gamma}) + \frac{\epsilon}{2} (\nabla \mathbf{P}_1^T \cdot \mathbf{n}_{\Gamma}) \mathbf{P}_1 + \frac{\alpha}{|e_{\Gamma}|^{\beta_0}} \mathbf{P}_1^T \mathbf{P}_1 + \frac{\gamma}{|e_{\Gamma}|^{\beta_1}} (\nabla \mathbf{P}_1^T \cdot \mathbf{n}_{\Gamma}) (\nabla \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{n}_{\Gamma}), \\ [\mathbf{T}_{22}] &= +\frac{1}{2} \mathbf{P}_2^T (\nabla \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{n}_{\Gamma}) - \frac{\epsilon}{2} (\nabla \mathbf{P}_2^T \cdot \mathbf{n}_{\Gamma}) \mathbf{P}_2 + \frac{\alpha}{|e_{\Gamma}|^{\beta_0}} \mathbf{P}_2^T \mathbf{P}_2 + \frac{\gamma}{|e_{\Gamma}|^{\beta_1}} (\nabla \mathbf{P}_2^T \cdot \mathbf{n}_{\Gamma}) (\nabla \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{n}_{\Gamma}), \\ [\mathbf{T}_{21}] &= +\frac{1}{2} \mathbf{P}_2^T (\nabla \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{n}_{\Gamma}) + \frac{\epsilon}{2} (\nabla \mathbf{P}_2^T \cdot \mathbf{n}_{\Gamma}) \mathbf{P}_1 - \frac{\alpha}{|e_{\Gamma}|^{\beta_0}} \mathbf{P}_2^T \mathbf{P}_1 - \frac{\gamma}{|e_{\Gamma}|^{\beta_1}} (\nabla \mathbf{P}_2^T \cdot \mathbf{n}_{\Gamma}) (\nabla \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{n}_{\Gamma}), \\ [\mathbf{T}_{12}] &= -\frac{1}{2} \mathbf{P}_1^T (\nabla \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{n}_{\Gamma}) - \frac{\epsilon}{2} (\nabla \mathbf{P}_1^T \cdot \mathbf{n}_{\Gamma}) \mathbf{P}_2 - \frac{\alpha}{|e_{\Gamma}|^{\beta_0}} \mathbf{P}_1^T \mathbf{P}_2 - \frac{\gamma}{|e_{\Gamma}|^{\beta_1}} (\nabla \mathbf{P}_1^T \cdot \mathbf{n}_{\Gamma}) (\nabla \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{n}_{\Gamma}). \end{aligned}$$

En analysant ces termes, on peut clairement voir que  $[\mathbf{T}_{11}]$  et  $[\mathbf{T}_{22}]$  correspondent à l'interaction des fonctions locales avec eux mêmes sur l'élément  $E_1$  et  $E_2$ , respectivement. Les matrices  $[\mathbf{T}_{12}]$  et  $[\mathbf{T}_{21}]$  assurent le couplage entre les deux éléments. Ainsi, ces dernières s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} [\mathbf{T}_{11}] & [\mathbf{T}_{12}] \\ [\mathbf{T}_{21}] & [\mathbf{T}_{22}] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{U}}^{(E_1)} \\ \tilde{\mathbf{U}}^{(E_2)} \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

Enfin, en employant les transformations affines vers des éléments de références (voir annexe B), les intégrales élémentaires de (2.16)-(2.17) sont exprimées telles que :

$$\begin{aligned} [\mathbf{K}_e] &= \int_{E_{ref}} ([j] \nabla \mathbf{P}^T(\xi, \eta)) ([j] \nabla \mathbf{P}(\xi, \eta)) |J(\xi, \eta)| d\xi d\eta, \\ [\mathbf{M}_e] &= \int_{E_{ref}} \mathbf{P}^T(\xi, \eta) \mathbf{P}(\xi, \eta) |J(\xi, \eta)| d\xi d\eta, \\ [\mathbf{T}_e] &= \int_t \mathbf{T}_{(i,j)=1,2} |J_c(t)| dt. \end{aligned} \quad (2.19)$$

L'évaluation de ces intégrales est effectuée par la quadrature de Gauss [210]. L'assemblage de ces contributions permet de construire le système algébrique globale (2.15).

### 2.2.4.3 Avantages et inconvénients du système algébrique

Comme discuté dans la section (1.4), la formulation locale de la méthode DG offre plusieurs avantages par rapport à la méthode classique : grande flexibilité géométrique, utilisation des éléments arbitraire, etc. Toutefois, elle conduit à un dédoublement de degrés de liberté.

L'utilisation de polynômes d'ordres supérieurs permet de palier à ce problème et d'améliorer la précision. En ce qui concerne l'implémentation, le système discontinu possède d'autres aspects très intéressants. Le système algébrique (2.15) est constitué de matrices carrées partitionnées en blocs de tailles  $(m \times m)$  avec  $m = n \times N_{ddl}$ . Cette forme permet d'une part, des opérations d'assemblage des matrices de rigidités et de flux plus rapides. D'autre part, elle permet d'avoir une matrice de masse diagonale par blocs (2.20). Ainsi, elle est inversible à faibles coûts - son inverse est la matrice diagonale par blocs constituée des inverses des matrices élémentaires :

$$[\mathbf{A}^M]^{-1} = \begin{pmatrix} [\mathbf{M}_0] & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & [\mathbf{M}_1] & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & [\mathbf{M}_{n-1}] \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} [\mathbf{M}_0^{-1}] & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & [\mathbf{M}_1^{-1}] & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & [\mathbf{M}_{n-1}^{-1}] \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

Ces matrices élémentaires inverses peuvent être calculées indépendamment et multipliées directement pour construire la matrice de rigidité dynamique  $[\mathbf{A}_g] = [\mathbf{A}^M]^{-1}[\mathbf{A}^K]$ . Par conséquent, l'assemblage de la matrice de masse est inutile. De plus, la matrice  $[\mathbf{A}_g]$  conserve toujours sa forme de bloc-tridiagonale. Ainsi, le problème aux valeurs propres est réduit de la forme généralisée à une forme standard. Cette transformation, dans le cas des problèmes de grandes tailles ( $N_{ddl} \gg$ ), peut conduire à un gain important en temps de calcul. Enfin, le problème sous forme standard s'écrit :

$$([\mathbf{A}_g] - k^2[\mathbf{I}]) \{\mathbf{U}\} = 0, \quad (2.21)$$

où  $[\mathbf{I}]$  est la matrice identité d'ordre  $m$ .

Par ailleurs, il est bien connu que l'extraction des valeurs propres est le problème le plus onéreux en temps et en ressources informatiques même pour un problème standard. Cependant, le système discontinu (2.21) est encore plus intéressant grâce à sa forme tri-diagonale par blocs pour laquelle il existe dans la littérature de nombreuses méthodes d'extraction modale performantes basées sur la technique algorithmique "*Diviser pour régner*" [211, 212]. Cette nouvelle génération d'algorithmes efficaces et adaptés pour une exécution parallèle, opèrent sur plusieurs portions/blocs à la fois au lieu de scalaires. Ils utilisent des techniques de décomposition et de multiplication par blocs (bloc LU, bloc QR, bloc Arnoldi, Cholskey, Multiplication Strassen, etc.). Par conséquent, ils nécessitent à la fois moins d'opérations et moins de stockage (voir Algorithme de blocs [213, 214, 215, 216, 217]). En outre, leur gain augmente en fonction de la taille des blocs, ce qui est en parfaite adéquation avec la solution recherchée. En augmentant la taille des matrices locales, donc l'ordre polynomiale  $p$ , on réduit le nombre de blocs dans la matrice globale et par conséquent on diminue le nombre d'opérations. Cette stratégie permet un gain double en temps de calculs/demande en mémoire et en précision.

## 2.3 RÉSULTATS NUMÉRIQUES ET VALIDATIONS

Afin de valider la méthode IPDG pour les problèmes aux valeurs propres, deux problèmes classiques sont considérés. Tout d'abord, les vibrations longitudinales d'une barre mince libre (en 1D) sont analysées. Ensuite, un exemple de vibration d'une membrane (en 2D) libre est montré. Les solutions numériques sont comparées aux valeurs exactes afin d'étudier les propriétés de convergence ainsi que la précision de la méthode.

L'analyse est effectuée en utilisant des approximations d'ordre faible ( $p = 1$ ) pour les deux méthodes : Galerkin continue et discontinue. Ceci, afin de comparer les résultats et identifier les avantages potentiels de la méthode de Galerkin discontinue.

### 2.3.1 Ondes longitudinales dans une barre mince

On considère une barre de section arbitraire uniforme le long de l'axe de propagation, de longueur  $L$  et libre de toutes forces externes comme le montre la figure (2.4).

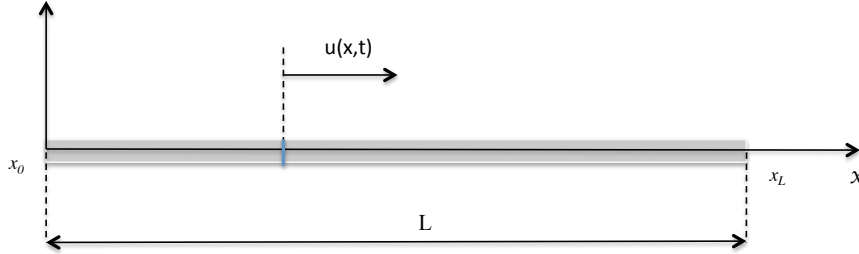


FIGURE 2.4 – Barre à section transversale uniforme dans l'axe de propagation  $x$ .

Dans le cas de déformations planes et d'une section transversale de dimension caractéristique très petite par rapport à la longueur de la structure, les ondes de traction-compression dans l'axe de propagation  $x$  sont gouvernées par l'équation d'onde (1.1) sous forme scalaire [38, 80] :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_L^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (2.22)$$

En régime harmonique  $u(x, t) = U(x)e^{-i\omega t}$  et en tenant compte des conditions aux limites libres, le problème devient sous la forme (2.1) avec  $\mathbf{C} = 1$ ,  $f = 0$  et  $\partial_x u(x)|_{\partial \mathcal{I}} = 0$ . Le système est défini sur le domaine unidimensionnel  $\mathcal{I} = [a, b]$  et ses limites  $\partial \mathcal{I} = (a, b)$ . Le nombre d'onde devient  $k = \omega / c_L$ , où  $c_L = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$  est la vitesse de propagation des ondes longitudinales,  $E$  est le module de Young et  $\rho$  est la masse volumique.

Dans le cas présent, il existe une solution analytique correspondant à une infinité de modes de vibration ( $U^{ex}, k^{ex}$  : déformées modales et fréquences naturelles correspondantes où l'exposant  $ex$  désigne solution exacte) tel que [38, 80] :

$$\begin{cases} U_m^{ex}(x) = A_m \cos(k_m x), & \text{mode propre } m \in \mathbb{N} \\ k_m^{ex} = \frac{m\pi}{L}, & \text{nombre d'onde correspondant.} \end{cases} \quad (2.23)$$

$A_m$  sont des coefficients d'amplitudes arbitraires. Toutes les solutions  $k_{ex}$  sont des nombres réels positifs. La première fréquence correspond à un mouvement de corps rigide de la barre ( $k = 0$ ,  $U_1^{ex}(x) = cte$ ). La deuxième fréquence représente le mode fondamental de traction-compression. Les modes d'ordres supérieurs sont des multiples de cette dernière fréquence [83].

### 2.3.1.1 Problème aux valeurs propres discrétisé

Le problème aux valeurs propres discrétisé (2.15) correspondant, en une dimension, s'écrit sous la forme généralisée suivante :

$$\left( [\mathbf{A}^{KE}] - \lambda [\mathbf{A}^M] \right) \{\mathbf{U}\} = \mathbf{0}, \quad (2.24)$$

où  $\lambda = k^2$  est un scalaire réel positif.  $[\mathbf{A}^{KE}] = [\mathbf{A}^K] + [\mathbf{A}^E]$  et  $[\mathbf{A}^M]$  sont de taille  $(m \times m)$  avec  $m = n * (p + 1)$ . En conséquence, ce système de  $m$  équations linéaires admet  $m$  solutions non triviales  $U_i (i = 1, 2, \dots, m)$  vérifiant :

$$\left( [\mathbf{A}^{KE}] - \lambda_i [\mathbf{A}^M] \right) \{\mathbf{U}\}_i = \mathbf{0}, \quad (2.25)$$

où les grandeurs  $\lambda_i = k_i^2 (i = 1, 2, \dots, m)$  sont les racines de l'équation algébrique :

$$\det \left( [\mathbf{A}^{KE}] - \lambda [\mathbf{A}^M] \right) = 0, \quad (2.26)$$

### 2.3.2 Résultats numériques 1D

On considère une barre de longueur  $L = 60$ . Le domaine est maillé en  $n$  éléments linéaires de Lagrange à 2 nœuds ( $p = 1$ ) de même taille  $h$ . La discrétisation est effectuée par les deux formulations de Galerkin continue et discontinue pour obtenir un problème de taille fixe  $m = 300$ ; ce qui implique :  $n_{CG} = 299$  et  $n_{CG} = 150$ . Les dérivations IPDG (Symétrique, Non-symétrique et Incomplète) sont utilisées avec des facteurs de pénalisation  $\alpha = 3 > 0$  et  $\gamma = 0$  de manière à garantir la stabilité. Tous les résultats présentés dans ce qui suit ont été obtenus en utilisant MATLAB.

#### 2.3.2.1 Comparaison des formulations continue et discontinue

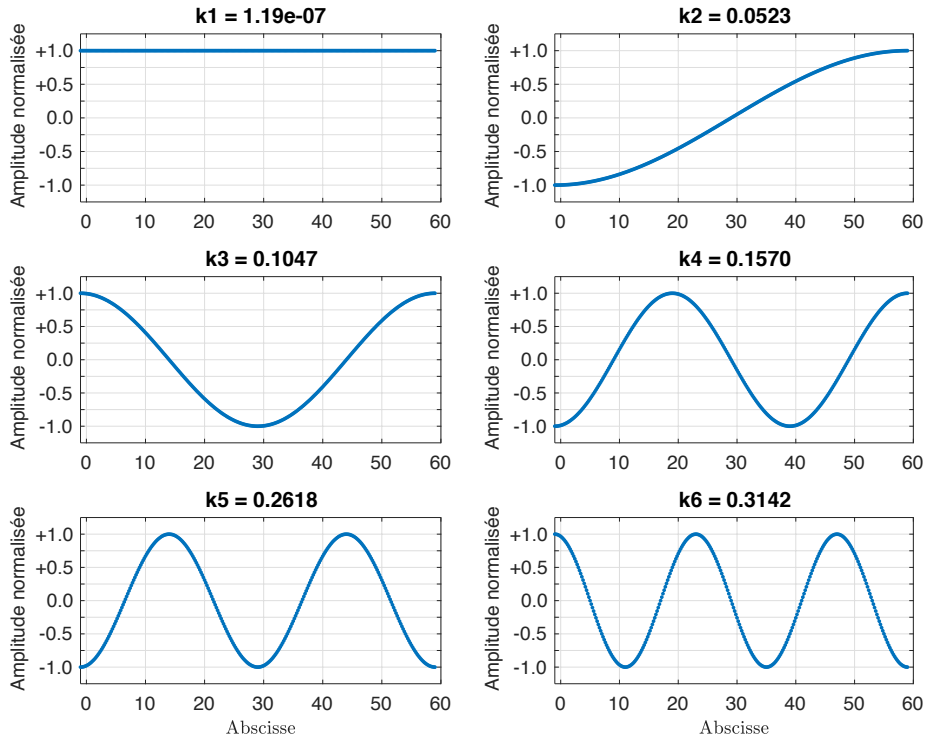
La figure (2.5) montre les déformées modales continues (CG-FEM) et discontinues (IIPG) ainsi que les nombres d'onde correspondants pour les six premiers modes  $\{(\mathbf{U}_i, k_i), i = 1, 2, \dots, 6\}$ . Les amplitudes de chaque mode sont normalisées par rapport au maximum. Pour la méthode de Galerkin discontinue, chaque élément est tracé indépendamment de l'autre, en couleurs différentes avec des points indiquant le degré de liberté de l'élément considéré.

Les résultats obtenus des deux formulations sont en très bon accord. Ceci constitue une première validation de la méthode.

#### 2.3.2.2 Évaluation de l'erreur et des taux de convergence

Le tableau (2.2) présente l'erreur de dispersion sur les nombres d'onde, ainsi que la norme  $L^2$  de l'erreur pour les six premiers modes  $\{(\mathbf{U}_i, k_i), i = 1, \dots, 6\}$ . Elles sont définies par [218] :

(a) Solutions continues :



(b) Solutions discontinues :

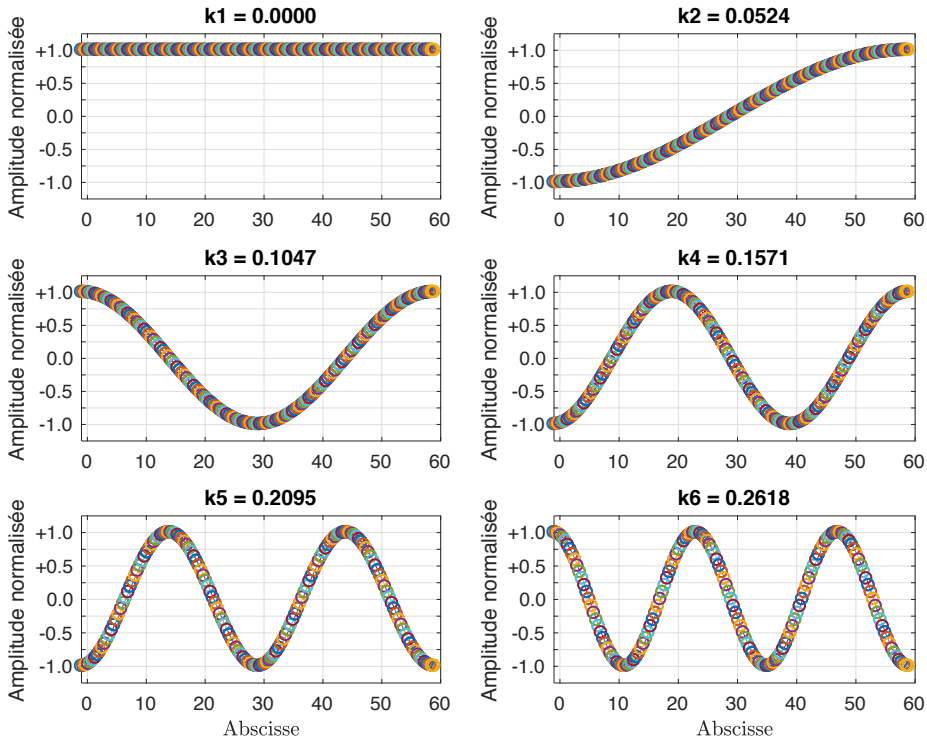


FIGURE 2.5 – Les premiers 6 modes propres et nombres d'ondes obtenus de : (a) la formulation continue et (b) discontinue (IIPG avec  $\alpha = 3$  et  $\gamma = 0$ ), respectivement.

1. Erreur de dispersion sur le nombre d'onde  $k_i$  :

$$\mathcal{E}_k = |k_{ex} - k_{num}|; \quad (2.27)$$

2. Norme  $L^2$  de l'erreur sur la déformée modale  $\mathbf{U}_i$  :

$$\|\mathcal{E}_h\|_{L^2} = \sqrt{\sum_{j=0}^n (U^{ex}(x_j) - U^{num}(x_j))^2}. \quad (2.28)$$

Le taux de convergence de chaque méthode (voir section (1.4), la vitesse à laquelle la solution converge (ou l'erreur diminue) en fonction de la taille du maillage  $h$ , est calculé pour les modes propres et leurs nombres d'ondes correspondants. Le tableau (2.3) montre ces taux de convergence dans la norme  $L^2$  des fonctions propres et le taux de convergence des valeurs propres pour  $n = 150$  et  $n * 2 = 300$  correspondant à  $h$  et  $h/2$ , respectivement. L'erreur est définie telle que [218, 167] :

$$\mathcal{E}(h) = Ch^\beta, \quad (2.29)$$

où :

$$\beta = \frac{1}{\ln(2)} \ln \left( \frac{\mathcal{E}|_h}{\mathcal{E}|_{h/2}} \right)$$

est l'ordre de précision de la méthode en espace.

| Méthode  | SIPG                                        | NIPG     | IIPG     | SIPG                                                            | NIPG     | IIPG     |
|----------|---------------------------------------------|----------|----------|-----------------------------------------------------------------|----------|----------|
| mode $i$ | Erreur sur le nombre d'onde $\mathcal{E}_k$ |          |          | Norme $L^2$ de l'erreur $\ \mathcal{E}_h(\mathbf{U}_i)\ _{L^2}$ |          |          |
| 1        | 8,38E-08                                    | 5,79E-08 | 8,38E-08 | 1,32E-11                                                        | 1,51E-11 | 1,62E-11 |
| 2        | 9,57E-07                                    | 1,40E-11 | 3,19E-07 | 4,69E-06                                                        | 2,34E-06 | 3,13E-06 |
| 3        | 7,65E-06                                    | 4,48E-10 | 2,55E-06 | 3,75E-05                                                        | 1,88E-05 | 2,50E-05 |
| 4        | 2,58E-05                                    | 3,40E-09 | 8,61E-06 | 1,27E-04                                                        | 6,33E-05 | 8,44E-05 |
| 5        | 6,12E-05                                    | 1,43E-08 | 2,04E-05 | 3,00E-04                                                        | 1,50E-04 | 2,00E-04 |
| 6        | 1,19E-04                                    | 4,37E-08 | 3,99E-05 | 5,85E-04                                                        | 2,93E-04 | 3,90E-04 |

TABLE 2.2 – L'erreur  $\mathcal{E}_k$  et la norme  $L^2$  de l'erreur  $\|\mathcal{E}_h(\mathbf{U}_i)\|_{L^2}$  pour les 6 premières solutions  $(\mathbf{U}_i, k_i)$  obtenues de la résolution du problème (2.15) avec  $\alpha = 3/h$ ,  $\gamma = 0$  et  $N = 150$  éléments.

Tout d'abord, à partir des tableaux (2.2) et (2.3), les résultats des trois méthodes IPDG montrent un excellent accord avec les solutions analytiques. En particulier, la méthode symétrique (SIPG) et incomplète (IIPG) fournissent une approximation du second-ordre de précision sur le nombre d'onde, tandis que la dérivation non-symétrique (NIPG) fournit une approximation du quatrième ordre. Par ailleurs, le taux de convergence dans la norme  $L^2$  des fonctions propres est le même pour toute la famille d'IPDG.

Afin de s'assurer de la complétude du spectre des valeurs propres (convergence de toutes les solutions) et vérifier le comportement dispersif des méthodes, l'erreur est vérifiée pour le spectre entier des différentes dérivations : CG et IPDG. La figure (2.6) montre



l'erreur relative absolue en (%) sur les nombres d'onde en fonction des nombres d'onde exactes en échelle linéaire et logarithmique. Cette dernière représente également les taux de convergence pour le raffinement du maillage de  $n = 150$  à 300 éléments linéaires.

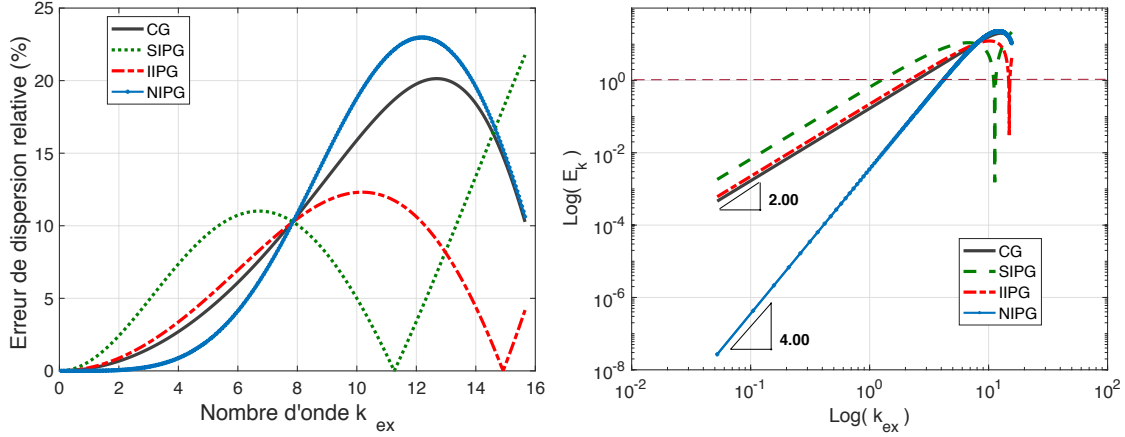


FIGURE 2.6 – Évolution de l'erreur de dispersion relative absolue (%) sur les nombres d'onde ( $E_k = 100 \frac{|k_{ex} - k_{num}|}{k_{ex}}$ ) en échelle linéaire et logarithmique avec les taux de convergence pour un raffinement de maillage uniforme linéaire ( $p = 1$ ) de  $n = 150$  et 300.

En conséquence, nous observons généralement un comportement de dispersion similaire pour toutes les méthodes. Les approximations DG fournissent un spectre complet et exempt de modes complexes parasites. Les méthodes CG, SIPG et IIPG présentent un même taux de convergence  $\beta = 2$ . La dérivation NIPG présente effectivement une meilleure précision pour ( $k_{ex} \leq 8$ ) avec  $\beta = 4$ . Ceci constitue une validation claire de la méthode IPDG en générale et démontre son applicabilité aux problèmes aux valeurs propres en particulier.

| Méthode  | SIPG                           | NIPG   | IIPG   | SIPG                           | NIPG   | IIPG   |
|----------|--------------------------------|--------|--------|--------------------------------|--------|--------|
| mode $i$ | Taux de convergence $\beta(k)$ |        |        | Taux de convergence $\beta(U)$ |        |        |
| 1        | 0,3779                         | 1,6543 | 0,0894 | 2,6635                         | 3,9869 | 6,4006 |
| 2        | 1,9999                         | 4,7580 | 2,0000 | 2,4999                         | 2,5000 | 2,4999 |
| 3        | 1,9997                         | 4,0055 | 2,0000 | 2,4997                         | 2,4998 | 2,4998 |
| 4        | 1,9993                         | 4,0010 | 1,9999 | 2,4993                         | 2,4996 | 2,4995 |
| 5        | 1,9988                         | 4,0000 | 1,9999 | 2,4987                         | 2,4994 | 2,4992 |
| 6        | 1,9982                         | 3,9999 | 1,9998 | 2,4980                         | 2,4990 | 2,4987 |

TABLE 2.3 – Taux de convergence des méthodes IPDG pour les 6 premières solutions ( $U_i, k_i$ ) dans un maillage uniforme de taille  $h$  et  $h/2$ .

### 2.3.2.3 Analyse des résultats

L'analyse effectuée dans cette section a pour objectif, d'un côté, de répondre à la question d'applicabilité des méthodes IPDG pour les calculs des valeurs et des vecteurs propres d'un problème elliptique. D'autre côté, cette étude permet de comparer les résultats des méthodes DG et de la méthode CG afin d'identifier les avantages potentiels dans de telles applications.

Suivant la même analyse que Antonietti et al. [219] et en se basant sur les résultats numériques, il a été démontré que les méthodes IPDG fournissent une solution spectrale correcte, exempte de modes parasites et vérifiant les propriétés suivantes :

- (1) *La non-pollution du spectre* : il n'y a pas des valeurs propres complexes parasites.
- (2) *La complétude du spectre* : toutes les valeurs propres continues inférieures à une grande valeur fixée sont calculées lorsque le maillage est suffisamment fin.
- (3) *La non-pollution et la complétude des espaces propres* : il n'y a pas de fonctions propres (vecteurs) parasites et toutes les approximations des espaces propres ont la bonne dimension.

Ces qualités sont garanties pour des facteurs de pénalité vérifiant les conditions de stabilité et de convergence de chaque méthode.

La nature locale de la méthode DG possède des avantages et des inconvénients. Entre autres, le dédoublement de degrés de liberté génère des coûts de calculs supplémentaires. Cependant, la méthode discontinue fournit des résultats plus précis. Rappelons que l'exemple montré traite un problème de taille fixe  $m = 300$  avec  $n_{CG} = 299$  pour la méthode continue et  $n_{CG} = 150$  pour la méthode discontinue. Le nombre d'éléments  $n_{DG}$  est égale à peu près la moitié du nombre d'éléments en formulation CG, et permet d'obtenir une précision du même ordre, voir supérieure. Ainsi, la méthode discontinue présente moins de temps de calculs des matrices élémentaires et d'assemblage que la CG.

En accord avec les résultats prédits et démontrés par Antonietti et al. [219], des taux de convergence de  $\beta = 2$  ont été obtenus pour les dérivations symétrique et non-symétrique. En revanche, une convergence optimale de  $\beta = 4$  est obtenue pour la dérivation incomplète. Ainsi, un degré polynomial et des taux d'échantillonnage faibles permettent d'obtenir une meilleure convergence et une précision élevée.

### 2.3.2.4 Conclusion

Les résultats obtenus sont en excellent accord avec ceux trouvés dans la littérature. Ceci constitue une première validation pour les problèmes unidimensionnels, qui est la première étape essentielle pour les développements suivants, en particulier le modèle semi-analytique éléments finis 1D. Par ailleurs, une analyse complémentaire est nécessaire en deux dimensions et fera l'objet de la suite de cette section.

### 2.3.3 Vibration d'une membrane libre

Une membrane peut être considérée comme une plaque très mince et parfaitement flexible; équivalente aux barres minces en deux dimensions. On considère donc une membrane de géométrie arbitraire et de bords libres, comme illustré sur la figure (2.7).

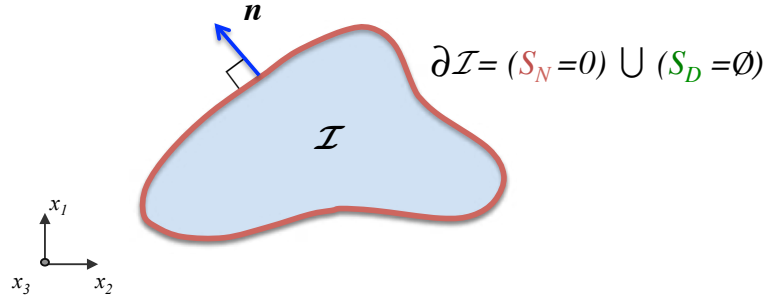


FIGURE 2.7 – Membrane occupant un domaine  $\mathcal{I} \in \mathbb{R}^2$  de frontière  $\partial\mathcal{I}$  libre.

Dans le cas de petites déformations, de masse uniformément répartie et de déplacements perpendiculaires au plan  $(x_1, x_2)$ , la vibration suivant l'axe  $x_3$  est gouvernée par l'équation d'onde du second-ordre scalaire (2.22) bidimensionnelle. En régime harmonique, le problème se réduit à l'équation (2.1-a) avec  $\mathbf{C} = 1$ , définie sur  $\mathcal{I} \in \mathbb{R}^2$  avec  $\frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial \mathbf{n}} = 0$  sur  $\partial\mathcal{I}$ .  $k$  représente également le nombre d'onde.  $\mathbf{n}$  est un vecteur normal sortant.

Afin de simplifier les calculs analytiques, on considère le cas d'un domaine de géométrie rectangulaire  $[0, \pi] \times [0, \pi]$ . Les solutions analytiques correspondantes sont [38] :

$$\begin{cases} U_{mn}^{ex}(x_1, x_2) = A_{mn} \cos(m x_1) \cos(n x_2), & (m, n) \in \mathbb{N} \\ k_{mn}^{ex} = \sqrt{m^2 + n^2}, \end{cases} \quad (2.30)$$

où  $U^{ex}$  sont les modes propres et  $k^{ex}$  sont les nombres d'ondes correspondants. Toutes les solutions  $k^{ex}$  sont des nombres réels positifs. La première fréquence du mouvement du corps rigide est nulle ( $k = 0$ ) et son mode propre  $U_{(0,0)}^{ex} = Cte$ . À partir de l'équation (2.30), les modes possèdent une multiplicité double et le système est également non-dispersif.

### 2.3.4 Résultats numériques 2D

Le domaine  $\mathcal{I}$  est maillé en  $n$  éléments de Lagrange rectangulaire uniforme, triangulaire régulier et irrégulier, comme le montre la figure (2.8). Toutes les simulations ont été réalisées avec des éléments du premier ordre ( $p = 1$ ).

L'erreur de dispersion de chaque méthode pour les valeurs propres est évaluée en utilisant la même procédure que celle montrée dans la section précédente (2.3.2.2). Les résultats obtenus des taux de convergence sont résumés dans le tableau (2.4) ci-dessous.

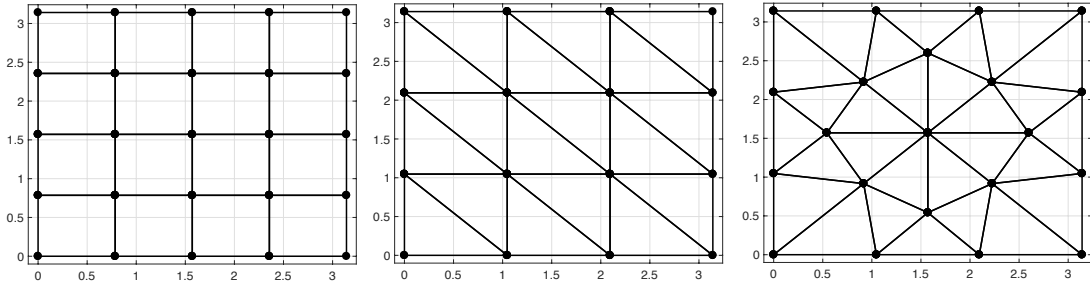


FIGURE 2.8 – Maillages d'une membrane rectangulaire : rectangulaire uniforme, triangulaire régulier et irrégulier.

| Méthode                                 | SIPG | NIPG | IIPG |
|-----------------------------------------|------|------|------|
| <b>Maillage rectangulaire uniforme</b>  |      |      |      |
| Rate $\beta(k)$                         | 2.00 | 4.00 | 2.00 |
| <b>Maillage triangulaire régulier</b>   |      |      |      |
| Rate $\beta(k)$                         | 2.00 | 2.00 | 2.00 |
| <b>Maillage triangulaire irrégulier</b> |      |      |      |
| Rate $\beta(k)$                         | 2.00 | 2.00 | 2.00 |

TABLE 2.4 – Taux de convergence des méthodes IPDG ( $p = 1$ ) pour les dix premières solutions propres  $k_i$  dans un maillage rectangulaire uniforme, triangulaire régulier et irrégulier pour deux différents maillages avec  $h/2$  et  $h/4$ .

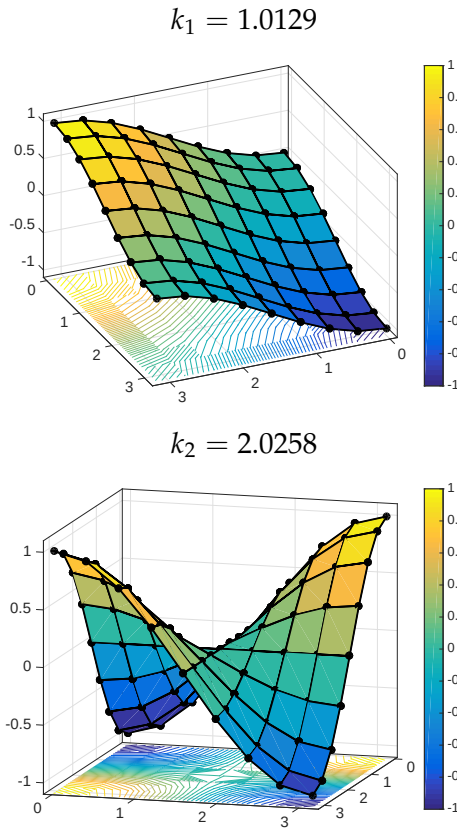
#### 2.3.4.1 Maillage rectangulaire uniforme

On considère un maillage rectangulaire uniforme, constitué de  $n_{quad} = n \times n$  éléments quadrilatéraux. Les facteurs de pénalité ( $\alpha = 3 > 0$ ,  $\gamma = 0$ ,  $\beta_0 = \beta_1 = 1$ ) sont utilisés. La variable  $|e_\Gamma|$  correspond à la taille du maillage  $h$ .

Dans un premier temps, les résultats des deux formulations de Galerkin continue et discontinue sont comparés. La figure (2.9) montre les déformées modales continues et discontinues (SIPG) ainsi que les nombres d'onde correspondants pour les deux premiers modes  $\{(\mathbf{U}_i, k_i), i = 1, 2\}$  en utilisant le même nombre d'éléments  $n = 8$ . Les amplitudes de chaque mode sont normalisées.

Dans un deuxième temps, les résultats sont comparés avec les solutions analytiques (2.30). Le tableau (2.5) montre l'erreur de dispersion sur les nombres d'onde des deux formulations pour les dix premiers modes  $\{(\mathbf{U}_i, k_i), i = 1, \dots, 10\}$ . Un bon accord entre les résultats des différentes formulations est constaté. Ceci constitue une deuxième validation de la méthode en deux dimension.

(a) Solutions continues :



(b) Solutions discontinues :

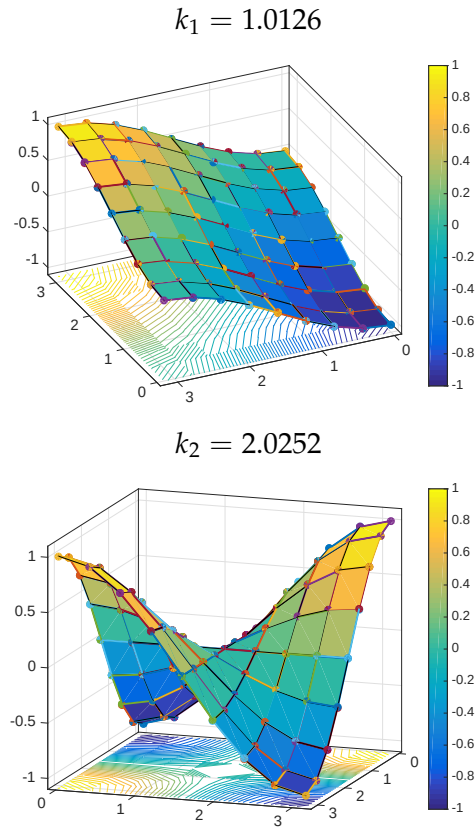


FIGURE 2.9 – Les premiers 2 modes propres et nombres d'onde obtenus de la formulation continue et discontinue (SIPG) respectivement, en utilisant  $n_{quad} = 16$  éléments quadrilatéraux linéaires à 4 nœuds.

| Méthode       | CG                                          | SIPG     | NIPG     | IIPG     |
|---------------|---------------------------------------------|----------|----------|----------|
| $k_{mn}^{ex}$ | Erreur sur le nombre d'onde $\mathcal{E}_k$ |          |          |          |
| 0.00          | —                                           | —        | —        | —        |
| 1.00          | 6.43E-03                                    | 6.27E-03 | 3.07E-05 | 2.13E-03 |
| 1.00          | 6.43E-03                                    | 6.27E-03 | 3.07E-05 | 2.13E-03 |
| 1.41          | 9.10E-03                                    | 8.87E-03 | 4.33E-05 | 3.02E-03 |
| 2.00          | 5.17E-02                                    | 4.68E-02 | 1.05E-03 | 1.69E-02 |
| 2.00          | 5.17E-02                                    | 4.68E-02 | 1.05E-03 | 1.69E-02 |
| 2.24          | 4.92E-02                                    | 4.47E-02 | 9.50E-04 | 1.61E-02 |
| 2.24          | 4.92E-02                                    | 4.47E-02 | 9.50E-04 | 1.61E-02 |
| 2.83          | 7.31E-02                                    | 6.62E-02 | 1.48E-03 | 2.39E-02 |
| 3.00          | 1.75E-01                                    | 1.41E-01 | 7.91E-03 | 5.63E-02 |

TABLE 2.5 – Erreurs de dispersion sur les nombres d'ondes des différentes méthodes IPDG et CG pour les dix premiers modes  $\{k_i, i = 1, \dots, 10\}$  en utilisant  $8 \times 8$  éléments quadrilatéraux.

En outre, l'erreur et la convergence sont évaluées pour des raffinements de maillage successifs de  $n = 8, 16$  et  $32$  correspondants à  $h/2, h/4$  et  $h/8$ . Nous constatons que pour les maillages rectangulaires uniformes, l'erreur de dispersion se comporte de la

même manière que dans le cas unidimensionnel pour toutes les dérivations. Les taux de convergence obtenus en tableau (2.4) :  $\beta(SIPG) = \beta(IIPG) = 2$  et  $\beta(NIPG) = 4$ , sont identiques à ceux du cas unidimensionnel du tableau (2.3). Ces résultats confirment ceux montrés par Ainsworth et al. [220].

Enfin, toutes les méthodes IPDG fournissent une solution spectrale correcte tant que les conditions de stabilité sont vérifiées. La multiplicité double est conservée dans les solutions numériques et l'erreur correspondantes (voir tableau (2.5)). Les nombres d'onde multiples sont approximés par une séquence de valeurs propres identiques.

#### 2.3.4.2 Maillage triangulaire régulier et non régulier

Ensuite, on considère un maillage triangulaire régulier, puis non régulier. Les facteurs de pénalisation ( $\alpha = 6$ ,  $\gamma = 0$ ,  $\beta_0 = \beta_1 = 1$ ) sont utilisés. La variable  $|e_T|$  est considérée comme étant la moyenne des rayons du cercle circonscrit des triangles adjacents  $|e_T| = (R(E_1) + R(E_2))/2$ . L'implémentation et les simulations sont réalisées en *Python* sur la plateforme Fenics-Project [207].

Le tableau (2.6) présente l'erreur de dispersion sur les nombres d'onde pour les dix premiers modes  $\{(\mathbf{U}_i, k_i), i = 1, \dots, 10\}$ . Les solutions obtenues sont correctes et ne contiennent pas des modes parasites. Les résultats des différentes méthodes, sur les deux types de maillages, sont en bon accord. En revanche, les éléments triangulaires sont moins précis que les éléments quadrilatéraux. De plus, la multiplicité double n'est pas conservée, en particulier pour le maillage irrégulier; une conséquence directe de la symétrie des maillages.

| Méthode       | CG                                          | SIPG     | NIPG     | IIPG     |
|---------------|---------------------------------------------|----------|----------|----------|
| $k_{mn}^{ex}$ | Erreur sur le nombre d'onde $\mathcal{E}_k$ |          |          |          |
| 0.00          | —                                           | —        | —        | —        |
| 1.00          | 2.83E-03                                    | 1.93E-03 | 3.06E-04 | 9.06E-04 |
| 1.00          | 2.83E-03                                    | 1.93E-03 | 5.96E-04 | 9.06E-04 |
| 1.41          | 1.19E-02                                    | 6.28E-03 | 1.95E-03 | 3.40E-03 |
| 2.00          | 2.26E-02                                    | 1.51E-02 | 3.67E-03 | 7.23E-03 |
| 2.00          | 2.27E-02                                    | 1.52E-02 | 3.71E-03 | 7.26E-03 |
| 2.24          | 3.21E-02                                    | 1.77E-02 | 4.95E-03 | 8.38E-03 |
| 2.24          | 5.08E-02                                    | 2.80E-02 | 8.68E-03 | 1.58E-02 |
| 2.83          | 9.22E-02                                    | 4.69E-02 | 1.57E-02 | 2.62E-02 |
| 3.00          | 7.64E-02                                    | 4.94E-02 | 1.24E-02 | 2.43E-02 |

TABLE 2.6 – Erreurs de dispersion sur les nombres d'onde des différentes méthodes IPDG et CG pour les dix premiers modes  $\{k_i, i = 1, \dots, 10\}$  en utilisant un maillage triangulaire régulier de  $n_{tri} = 288$  éléments.

La convergence montrée dans le tableau (2.4), est évaluée pour des raffinements de maillage de  $h/2$  et  $h/4$ , correspondants à :  $n_{tri} = 72$  et  $4 * n_{tri} = 288$  pour le maillage régulier ;  $n_{tri} = 112$  et  $4 * n_{tri} = 448$  pour le maillage irrégulier. Les taux de convergences sont identiques et aucune amélioration par rapport à la CG n'est observée. Ces conclusions sont en bonne concordance avec ceux de la littérature [219, 183].

### 2.3.5 Conclusion

Dans cette section, l'applicabilité des méthodes IPDG pour le calcul des valeurs et des vecteurs propres est vérifiée. Ces méthodes fournissent une solution correcte et exempte des modes parasites. En outre, il a été constaté qu'une convergence optimale peut être obtenue avec moins d'éléments par rapport à la formulation continue et pour un polynôme d'ordre faible ( $p = 1$ ), en particulier pour un maillages rectangulaire uniforme. Enfin, ces résultats dépendent des valeurs de pénalisation et de l'ordre polynomial choisis. Cette influence est étudiée dans le contexte d'analyse des performances des méthodes IPDG en ordre polynomial  $p \geq 1$ , reportée en annexe C.

## 2.4 CONCLUSION

Dans ce chapitre, une étude d'applicabilité des méthodes IPDG aux problèmes aux valeurs propres est réalisée via le problème de Laplace avec des conditions aux limites libres. Il a été démontré à travers des tests numériques (en 1D et 2D) que ces méthodes fournissent des solutions correctes et exemptes des modes parasites. En outre, une convergence optimale peut être obtenue avec moins d'éléments par rapport à la formulation continue, en particulier pour les maillages uniformes.

De plus, suite à la comparaison des performances en terme de précision et de temps de calculs (voir annexe C), la formulation symétrique est un choix judicieux. En effet, elle présente plusieurs avantages, notamment :

- un taux de convergence optimale, plus élevé par rapport à toutes les formulations étudiées (CG, NIPDG et IPDG), de  $2p + 2$  lorsque des polynômes de degré  $p$  pairs sont utilisés et de  $2p$  lorsque l'ordre  $p$  est impair.
- des caractéristiques du système algébrique (matrice de rigidité bloc-tridiagonal et matrice de masse bloc-diagonale symétriques définies positives) permettant un gain en temps de calcul approximé à 35%.

Pour des approximations  $p > 1$ , les résultats permettent un gain double : moins de temps de calculs/consommation de ressources informatiques et une meilleur précision. Ils sont encourageants pour continuer ces travaux pour le développement d'une méthode semi-analytique éléments finis de Galerkin discontinue.

# DÉVELOPPEMENT DE LA MÉTHODE SEMI-ANALYTIQUE ÉLÉMENTS FINIS DE GALERKIN DISCONTINUE POUR LES PLAQUES

# 3

---

## 3.1 INTRODUCTION

La méthode semi-analytique éléments finis (SAFE) s'est avérée très pratique pour modéliser la propagation d'ondes dans des guides d'ondes à section arbitraire et hétérogènes. Cependant, lorsqu'il s'agit de guides d'ondes complexes, elle présente quelques inconvénients. En effet, le raffinement du maillage et la faible convergence de la méthode des éléments finis classique entraîne une augmentation de la consommation en temps de calcul et en espace mémoire. Par conséquent, les calculs pour certaines structures et dans des plages de fréquences relativement hautes constituent un défi à ce jour. L'idée est d'exploiter des formulations éléments finis d'ordre élevé pour atteindre des taux de convergence supérieurs et optimiser les algorithmes de calculs.

Dans le chapitre précédent, l'applicabilité de la méthode discontinue aux problèmes aux valeurs propres a été validée. Dans ce chapitre, la méthode semi-analytique éléments finis de Galerkin discontinue (SADG-FE) est développée pour le calcul des courbes de dispersion. En particulier ceux des plaques, qui présente un cas particulier de la formulation en une dimension.

Cette étude est organisée comme suit : la formulation SADG-FE pour le problème des modes guidés dans les plaques en 1D est présentée. Ensuite, les détails d'implémentation pour plusieurs cas de figures sont montrés. Les résultats des simulations numériques sont présentés et discutés. Enfin, une conclusion résume les points principaux de l'étude et son intérêt pour les travaux futurs.



## 3.2 FORMULATION SADG-FE POUR LES ONDES GUIDÉES

Dans cette section, la formulation semi-analytique éléments finis de Galerkin discontinue (SADG-FE) est développée pour calculer les courbes de dispersion et les déformées modales des ondes guidées dans les structures planes. Tout d'abord, une description générale du problème et de l'approche semi-analytique est donnée. Ensuite, la formulation variationnelle discontinue pour la discrétisation du système différentiel résultant est explicitée.

### 3.2.1 Description générale du problème

On considère un guide d'ondes élastique dans un système de coordonnées cartésiennes  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ , de section arbitraire  $\mathcal{S}$  dans le plan  $(x_1, x_2)$  ayant une invariance le long de l'axe de propagation  $x_3$  (voir section (1.2)). En l'absence de forces externes, les ondes guidées sont gouvernées par l'équation générale du mouvement (1.1) :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

En appliquant l'approche semi-analytique (voir section (1.3)), on cherche des solutions en régime harmonique de la forme :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{U}(x_1, x_2) e^{i(kx_3 - \omega t)}.$$

En injectant cette expression dans l'équation (1.1), on obtient le système d'équations différentielles. L'association des conditions aux limites libres permet d'écrire :

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\sigma_k(\mathbf{U})) + \omega^2 \rho \mathbf{U} = 0 & \mathbf{x} \in \mathcal{S}, \\ \sigma_k(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{n}_s = 0 & \mathbf{x} \in \partial \mathcal{S}, \end{cases} \quad (3.1)$$

où  $\mathbf{n}_s$  correspond au vecteur unitaire normal sortant.  $\mathbf{U} = [U_1, U_2, U_3]^T$  est le vecteur des composantes du champ de déplacements, l'exposant  $T$  désigne la transposée.

Reprenons la figure (3.1), soit donc une plaque d'épaisseur constante  $2d$ , de dimensions latérales infinies et libre de toutes contraintes externes.

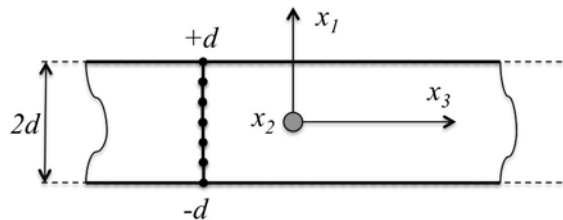


FIGURE 3.1 – Géométrie du guide d'onde 2D dans le sens de propagation  $x_3$  : plaque d'épaisseur  $2d$  et de dimensions latérales infinies.

Contrairement à un guide d'ondes cylindrique, la résonance dans les plaques se produit dans l'épaisseur. Cela permet de chercher des solutions indépendantes de la direction de  $x_2$  :

$$\mathbf{u}(x_1, x_3, t) = \mathbf{U}(x_1) e^{i(kx_3 - \omega t)}.$$

et associées à la condition de surfaces libres  $\sigma_k(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{e}_1 = 0$  dans  $x_1 = \pm d$ .

Par conséquent, en éliminant la variable  $x_2$  du système, on obtient des équations simplifiées posées uniquement sur une ligne de l'épaisseur. Le problème (3.1) devient :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( [\mathbf{M}_0] \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_1} \left( ik [\mathbf{M}_1] \mathbf{U} \right) - \left( k^2 [\mathbf{M}_2] - \omega^2 [\mathbf{M}_3] \right) \mathbf{U} = 0, \\ [\mathbf{M}_0] \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_1} (\pm d) + ik [\mathbf{M}_4] \mathbf{U} (\pm d) = 0, \end{cases} \quad (3.2)$$

$[\mathbf{M}_{i=0,1,2,3,4}]$  sont des matrices de  $3 \times 3$  contenant les coefficients élastiques du matériau (voir section 3.3).

### 3.2.2 Formulation variationnelle discontinue

Le système (3.2) est défini sur une ligne de l'épaisseur de la plaque représentée par le domaine  $\mathcal{I} = [-d, +d]$  sur la figure (3.1). Par souci de clarté, on note  $x$  la variable  $x_1$  pour le reste de cette section. Comme le montre la figure (3.2), l'épaisseur est maillée en un nombre fini de  $n$  éléments unidimensionnels  $E_j = [x_j, x_{j+1}]$  où  $\{j = 0, \dots, n-1\}$  est l'index des éléments. Le maillage peut être non uniforme.

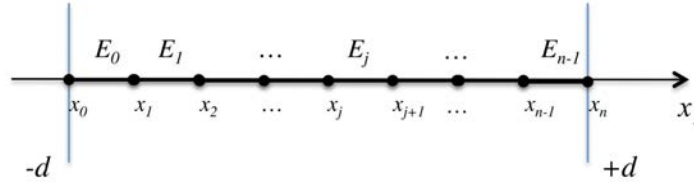


FIGURE 3.2 – Maillage d'une ligne de l'épaisseur de la plaque.

À l'aide de la méthode des résidus pondérés, en multipliant la première partie de l'équation (3.2) par une fonction test discontinue  $v(x)$  et en intégrant le résultat sur la cellule  $E_j$ , la forme intégrale élémentaire forte est obtenue :

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} \left( [\mathbf{M}_0] \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_1} \left( ik [\mathbf{M}_1] \mathbf{U} \right) - \left( k^2 [\mathbf{M}_2] - \omega^2 [\mathbf{M}_3] \right) \mathbf{U} \right] v \, dx = 0. \quad (3.3)$$

L'opérateur du second ordre est discrétisé en utilisant la méthode de Galerkin discontinue à pénalité intérieure (IPDG, voir chapitre 2), tandis que l'opérateur du premier ordre est approximé par la méthode de Galerkin Discontinue Standard (SDG, *Standard Discontinuous Galerkin*). Enfin, on obtient le schéma général : trouver  $\mathbf{U} \in \mathcal{D}_p(\mathcal{I}_h)$  tel que

$$\forall v \in \mathcal{D}_p(\mathcal{I}_h), \quad a(\mathbf{U}, v) = a_0(\mathbf{U}, v) + ik a_1(\mathbf{U}, v) + k^2 a_2(\mathbf{U}, v) - \omega^2 a_3(\mathbf{U}, v) = \mathcal{L}(v)$$

où  $a(\cdot, \cdot)$  est la forme bilinéaire globale,  $a_{i=0,1,2,3}(\cdot, \cdot)$  est la forme résultante de la discrétisation de chaque opérateur et  $\mathcal{L}(\cdot)$  est la forme linéaire.

### 3.2.2.1 Méthode à pénalité intérieure

On reprend donc l'opérateur du second ordre, la première partie de l'équation (3.3). L'utilisation du théorème de Green donne la forme intégrale faible :

$$-\int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{\partial}{\partial x} \left( [\mathbf{M}_0] \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} \right) v \, dx = \int_{x_j}^{x_{j+1}} [\mathbf{M}_0] \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \, dx - \left[ [\mathbf{M}_0] \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} v \right]_{x_j}^{x_{j+1}}. \quad (3.4)$$

En faisant la somme de l'équation (3.4) pour tous les éléments et en ajoutant les termes de stabilisation, l'expression générale de l'approximation de Galerkin discontinue de l'opérateur Laplacien devient :

$$\begin{aligned} a_0(\mathbf{U}, v) &= \sum_{j=0}^{n-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} [\mathbf{M}_0] \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \, dx - \sum_{j=1}^{n-1} \left\{ \left[ [\mathbf{M}_0] \frac{\partial \mathbf{U}(x_j)}{\partial x} \right] \right\} \llbracket v(x_j) \rrbracket \\ &+ \varepsilon \sum_{j=1}^{n-1} \left\{ \left[ [\mathbf{M}_0] \frac{\partial v(x_j)}{\partial x} \right] \right\} \llbracket \mathbf{U}(x_j) \rrbracket + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\alpha}{h_{\max}(j)} \llbracket \mathbf{U}(x_j) \rrbracket \llbracket v(x_j) \rrbracket \\ &+ \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\gamma}{h_{\max}(j)} \left\| \frac{\partial \mathbf{U}(x_j)}{\partial x} \right\| \left\| \frac{\partial v(x_j)}{\partial x} \right\| \end{aligned} \quad (3.5)$$

où  $\varepsilon$ ,  $\alpha$  et  $\gamma$  sont des nombres réels à ajuster.

### 3.2.2.2 Méthode discontinue standard

Maintenant, on considère l'intégrale de l'opérateur du premier ordre de l'équation (3.3). Pour des raisons de clarté, on pose d'abord :

$$\mathbf{f}(\mathbf{U}) = [\mathbf{M}_1] \mathbf{U}.$$

De même, en intégrant par partie la première dérivée, la forme intégrale faible élémentaire est obtenue :

$$-\int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{U})}{\partial x} v \, dx = \int_{x_j}^{x_{j+1}} \mathbf{f}(\mathbf{U}) \frac{\partial v}{\partial x} \, dx - \left[ \bar{\mathbf{f}} v \right]_{x_j}^{x_{j+1}}. \quad (3.6)$$

La méthode de Galerkin discontinue générale appliquée au système de premier ordre repose sur un traitement de discontinuité beaucoup plus simple. La fonction de teste discontinue permet au champ approché d'être discontinu à travers les limites et conduit à la duplication des valeurs aux interfaces. Pour connecter les éléments, la partie droite  $\bar{\mathbf{f}}$  du saut de l'équation (3.6) est calculée directement en fonction des deux valeurs disponibles à l'aide d'une combinaison linéaire ( $g$ ), appelée flux numérique, tel que :

$$\bar{\mathbf{f}} = g(\mathbf{f}_L, \mathbf{f}_R), \quad (3.7)$$

où  $\mathbf{f}_L$  et  $\mathbf{f}_R$  sont respectivement les valeurs de  $\mathbf{f}(\mathbf{U})$  à gauche et à droite de l'interface de l'élément. Dans ce travail, une formule plus générale est utilisée [183] :

$$\bar{\mathbf{f}}(\mathbf{U})|_{\partial E_j} = \{\{\mathbf{f}(\mathbf{U})\}\} + \theta \llbracket \mathbf{U} \rrbracket, \quad (3.8)$$

où  $\theta$  est un paramètre scalaire.

En faisant la somme de l'équation (3.6) pour tous les éléments et en substituant  $\bar{\mathbf{f}}$  par la formule du flux (équation (3.8)), la formulation SDG suivante est obtenue :

$$a_1(\mathbf{U}, v) = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \mathbf{f}(\mathbf{U}) \frac{\partial v}{\partial x} dx - \sum_{j=1}^{n-1} \{\{\mathbf{f}(x_j)\}\} \llbracket v(x_j) \rrbracket - \theta \sum_{j=1}^{n-1} \llbracket \mathbf{U}(x_j) \rrbracket \llbracket v(x_j) \rrbracket. \quad (3.9)$$

### 3.2.2.3 Conditions aux limites libres

Le problème est associé à la condition de surfaces libres de contraintes dans l'équation (3.2) :

$$[\mathbf{M}_0] \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_1}(\pm d) + ik [\mathbf{M}_4] \mathbf{U}(\pm d) = 0.$$

C'est une relation linéaire entre les valeurs de la fonction et sa dérivée sur les limites, une combinaison pondérée des Conditions Aux Limites (CAL) à la fois de Dirichlet et de Neumann. Celle-ci est appelée condition mixte de Robin.

En considérant les nœuds de frontières  $\partial \mathcal{I} = (x_0, x_n)$ , on peut distinguer la partie des CAL de Dirichlet et celles de Neumann qui sont naturellement obtenues dans l'intégration par parties dans les équations (3.6) et (3.4), respectivement. En additionnant les deux sauts pour  $(x_0, x_n)$ , on obtient :

$$\left[ \left( [\mathbf{M}_0] \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_1} + ik [\mathbf{M}_1] \mathbf{U} \right) v \right]_{x_0}^{x_n}. \quad (3.10)$$

Cependant, cela ne satisfait toujours pas totalement la condition de l'équation (3.2).

Soit donc une matrice  $[\mathbf{M}_5]$  tel que :  $[\mathbf{M}_1] = [\mathbf{M}_4] + [\mathbf{M}_5]$ . En substituant  $[\mathbf{M}_1]$  dans l'équation (3.10), on obtient deux expressions. L'intégrale correspondant à la condition recherchée de l'équation (3.2) est déplacée directement à la partie droite

$$\mathcal{L}(v) = \int_{\partial \mathcal{I}} \left( [\mathbf{M}_0] \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_1} + ik [\mathbf{M}_4] \mathbf{U} \right) v dx = 0, \quad (3.11)$$

tandis que la deuxième expression apporte une contribution à la forme bilinéaire de l'opérateur du premier ordre :

$$\begin{aligned} a_1(\mathbf{U}, v) = & \sum_{j=0}^{n-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \mathbf{f}(\mathbf{U}) \frac{\partial v}{\partial x} dx - \sum_{j=1}^{n-1} \{\{\mathbf{f}(x_j)\}\} \llbracket v(x_j) \rrbracket \\ & - \theta \sum_{j=1}^{n-1} \llbracket \mathbf{U}(x_j) \rrbracket \llbracket v(x_j) \rrbracket + \sum_{j=0, n} \{\{\mathbf{M}_5 \mathbf{U}(x_j)\}\} \llbracket v(x_j) \rrbracket. \end{aligned} \quad (3.12)$$

### 3.2.2.4 Problème aux valeurs propres

Finalement, en assemblant les équations (3.5), (3.11) et (3.12), on obtient le schéma discontinu complet. Le problème devient : chercher  $\mathbf{U} \in \mathcal{D}_p(\mathcal{I}_h)$  tel que :

$$\forall v \in \mathcal{D}_p(\mathcal{I}_h), \quad a(\mathbf{U}, v) = 0, \quad (3.13)$$

où la forme bilinéaire globale  $a(\mathbf{U}_{13}, v)$  est donnée par

$$a(\mathbf{U}, v) = a_0(\mathbf{U}, v) + ik a_1(\mathbf{U}, v) + k^2 a_2(\mathbf{U}, v) - \omega^2 a_3(\mathbf{U}, v) \quad (3.14)$$

avec :

$$a_{i=2,3}(\mathbf{U}_{13}, v) = [\mathbf{M}_{i=2,3}] \sum_{j=0}^{n-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \mathbf{U} v \, dx.$$

Il s'agit ici d'un problème aux valeurs propres où  $\mathbf{U}$  est le vecteur propre associé. Les solutions peuvent être déterminées : soit en fixant la fréquence à un nombre réel positif ( $\omega \in \mathbb{R}^+$ ) et le problème est résolu pour le nombre d'onde  $k$  dans le plan complexe; soit un nombre d'onde réel ou complexe  $k$  est donné et la résolution est faite pour  $\omega$ . En général, le premier cas est le plus utilisé car il permet d'étudier tous les types de modes : propagatifs ( $k \in \mathbb{R}$ ), non-propagatifs et inhomogènes ( $k \in \mathbb{C}$ ). Les couples  $(\omega, k)$  pour lesquels il existe des solutions non-triviales décrivent la relation (ou courbes) de dispersion  $D(\omega, k)$  des ondes guidées.

## 3.3 IMPLÉMENTATION NUMÉRIQUE DE LA MÉTHODE SADG-FE

Dans cette section, l'implémentation numérique de la méthode SADG-FE en une dimension est présentée pour différents cas d'études. Elle est effectuée en utilisant des approximations nodales de type Lagrange (Annexe B). Cependant, la méthode est applicable à tout autre type de fonction de base modale et nodale. Premièrement, la dérivation est étudiée pour le cas le plus simple des ondes de Lamb dans une plaque homogène isotrope. Deuxièmement, les cas de deux plaques fabriquées avec des matériaux hétérogènes : stratifiée et à gradient fonctionnel, sont analysés. Ensuite, le cas d'une plaque anisotrope est étudié. Enfin, une technique pratique pour linéariser le problème quadratique est décrite.

### 3.3.1 Détermination du problème aux valeurs propres quadratique

La discrétisation de la forme bilinéaire par approximation nodale permet de construire le système algébrique. Dans chaque cellule  $E_j$ , la solution est exprimée par :

$$U_{i=1,2,3}^{(j)}(x) = \sum_{l=0}^p P_l(x) U_{i=1,3}^{(j)} = \mathbf{P} \tilde{\mathbf{U}}_{i=1,2,3}^{(j)}, \quad (3.15)$$

appartenant au même espace  $\mathbb{P}_p(E_j)$  que la fonction test  $v = \mathbf{P}^T \cdot \{P_l(x), l = 0, 1, \dots, p\}$  sont les polynômes d'interpolation d'ordre  $p$ .  $\tilde{\mathbf{U}}_{i=1,2,3}^{(j)}$  est le vecteur des déplacements

nodaux de l'élément  $j$  correspondant à la composante du champ  $U_{i=1,2,3}$ .

En substituant  $\mathbf{U}$  par son approximation (3.15) dans (3.14) et en calculant pour tous les éléments, nous obtenons un problème aux valeurs propres quadratique (QEP, *Quadratic Eigenvalue Problem*) tel que :

$$[(\mathbf{A}_0) - \omega^2 \mathbf{A}_3] + ik [\mathbf{A}_1] + k^2 [\mathbf{A}_2] \{\tilde{\mathbf{U}}\} = 0. \quad (3.16)$$

où  $\{\tilde{\mathbf{U}}\} = [\tilde{\mathbf{U}}_1 \ \tilde{\mathbf{U}}_2 \ \tilde{\mathbf{U}}_3]^T$  est le vecteur global des déplacements nodaux généralisés.  $[\mathbf{A}_{i=0,1,2,3}]$  sont les matrices de rigidité et de masse globales obtenues comme suit :

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}_0] &= \sum_{j=0}^{n-1} \left( \int_{E_j} \frac{\partial \mathbf{P}^T}{\partial x} [\mathbf{M}_0] \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial x} dx + \mathbf{T}_j^0 \right), \\ [\mathbf{A}_1] &= \sum_{j=0}^{n-1} \left( \int_{E_j} \frac{\partial \mathbf{P}^T}{\partial x} [\mathbf{M}_1] \mathbf{P} dx + \mathbf{T}_j^1 \right) + [\mathbf{M}_5][\mathbf{B}], \\ [\mathbf{A}_2] &= \sum_{j=0}^{n-1} \int_{E_j} \mathbf{P}^T [\mathbf{M}_2] \mathbf{P} dx, \\ [\mathbf{A}_3] &= \sum_{j=0}^{n-1} \int_{E_j} \mathbf{P}^T [\mathbf{M}_3] \mathbf{P} dx. \end{aligned}$$

avec  $\mathbf{T}_j^{0,1}$  sont les matrices de flux élémentaires.  $[\mathbf{B}]$  est la matrice de contribution des éléments de frontières ayant des valeurs nulles à l'exception des déplacements nodaux aux limites.  $[\mathbf{A}_{i=0,1,2,3}]$  sont des matrices carrées constituées de nombres complexes partitionnées en blocs et de taille  $\{(3m \times 3m), m = n \times (p+1)\}$ . Le système de  $3m$  équations quadratiques admet  $2 \times 3m$  solutions non-triviales  $(k_i, \{\tilde{\mathbf{U}}\}_i); i = 1, 2, \dots, 6m$ .

### 3.3.2 Plaques homogènes isotropes

Dans le cas d'une plaque homogène isotrope, le système (3.2) fait apparaître un découplage en deux familles d'équations : un système d'équations associé aux composantes  $(U_1, U_3)$  et une équation scalaire de la composante  $U_2$ . Ce même découplage, conservé également dans les conditions aux limites, permet de définir deux problèmes indépendants. Ils correspondent respectivement aux ondes de Lamb et aux ondes SH. La relation de dispersion pour les modes SH est similaire à celle de la barre mince (guide d'onde 1D) déjà analysée dans le chapitre 2.

Sans perte de généralité, on se focalise sur les modes Lamb dans ce qui suit. Les matrices  $[\mathbf{M}_{i=0,1,2,3,4}]$  sont donc réduites à une taille de  $2 \times 2$  et elles sont exprimées en

utilisant uniquement les coefficients de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$ .

$$\begin{aligned} [\mathbf{M}_0] &= \begin{bmatrix} (\lambda + 2\mu) & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}, & [\mathbf{M}_1] &= \begin{bmatrix} 0 & (\lambda + \mu) \\ (\lambda + \mu) & 0 \end{bmatrix}, \\ [\mathbf{M}_2] &= \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & (\lambda + 2\mu) \end{bmatrix}, & [\mathbf{M}_3] &= \begin{bmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho \end{bmatrix}, \\ [\mathbf{M}_4] &= \begin{bmatrix} 0 & \lambda \\ \mu & 0 \end{bmatrix}, & \mathbf{U}_{13} &= [U_1 \ U_3]^T. \end{aligned}$$

Lorsque les paramètres sont constants dans tout le domaine, une implémentation simplifiée est possible. Une seule composante est calculée et les matrices du système global sont déduites. Cela permet de réduire les coûts de calcul et augmenter l'efficacité des algorithmes d'assemblage.

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}_0] &= [\mathbf{M}_0] \otimes [\mathbf{K}_{g2}], \\ [\mathbf{A}_1] &= [\mathbf{M}_1] \otimes [\mathbf{K}_{g1}] + [\mathbf{M}_5] \otimes [\mathbf{B}], \\ [\mathbf{A}_2] &= [\mathbf{M}_2] \otimes [\mathbf{M}_g], \\ [\mathbf{A}_3] &= [\mathbf{M}_3] \otimes [\mathbf{M}_g]. \end{aligned}$$

Le symbol  $\otimes$  désigne le produit Kronecker.  $[\mathbf{K}_{g1}]$  et  $[\mathbf{K}_{g2}]$  sont les matrices de rigidité-flux obtenues à partir de la discrétisation des opérateurs du premier et du second ordre respectivement.  $[\mathbf{M}_g]$  est la matrice de masse.

### 3.3.3 Plaques hétérogènes

L'une des principales caractéristiques intéressantes de la méthode discontinue est que les discontinuités des paramètres dans le milieu peuvent être facilement prises en compte. Cette propriété la rend intéressante lorsqu'elle est appliquée à des matériaux hétérogènes : composites multi-couches et matériaux à gradient fonctionnel où les paramètres varient graduellement à travers l'épaisseur.

Du fait de sa nature discontinue, on peut étudier les matériaux hétérogènes sans changement significatif. Ceci est effectué en assignant simplement les valeurs des coefficients dans les matrices  $[\mathbf{M}_{i=0,1,2,3,4}]$ .

#### 3.3.3.1 Plaques multicouches

Pour un système multi-couches, chaque couche est discrétisée en utilisant un ou plusieurs éléments comme montré dans la figure (3.3). Comme la formulation discontinue est locale, elle permet aux éléments de ne pas se chevaucher. Chaque élément unidimensionnel  $E_j$  constitue donc une couche d'un *Matériau(j)* différent avec ses propres coefficients  $(\lambda_j, \mu_j, \rho_j)$  et matrices  $[\mathbf{M}_{i=0,1,2,3,4}]$ . Les conditions aux limites de continuité entre les couches sont incluses directement dans la formulation du flux numérique.

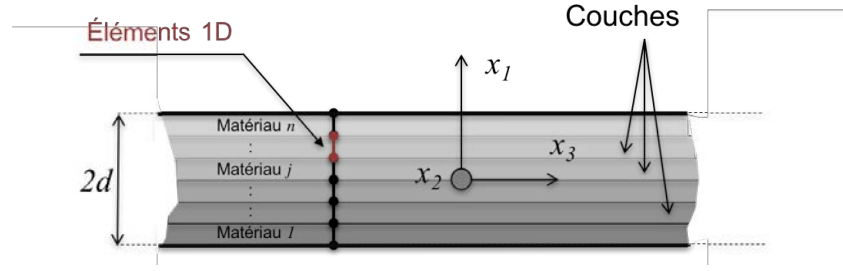


FIGURE 3.3 – Discrétisation de l'épaisseur d'une plaque multicouche.

### 3.3.3.2 Plaques à gradient fonctionnel

Dans le cas des matériaux à gradient fonctionnel, les coefficients élastiques sont exprimés en fonction de l'épaisseur [221, 165]. La variation des propriétés du matériau est continue à l'intérieur de la plaque et des éléments. Dans ce cas, un terme de gradient impliquant la fonction dérivée des coefficients est ajouté au système différentiel (3.2). Après simplification et réarrangement, la formulation est modifiée telle que :

$$[\mathbf{A}_1^*] = [\mathbf{A}_1] + [\mathbf{A}_1']$$

avec :

$$[\mathbf{A}_1'] = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{E_j} \mathbf{P}^T [\mathbf{M}_1'] \mathbf{P} dx.$$

Dans le cas d'un matériau isotrope :

$$[\mathbf{M}_1'] = \begin{bmatrix} 0 & \mu' \\ \lambda' & 0 \end{bmatrix}.$$

Il est à noter que ce terme disparaît automatiquement lorsque les coefficients sont constants. En outre, les matrices des coefficients  $[\mathbf{M}_{i=0,1,2,3,4}]$  sont également interpolées comme en (3.15).

### 3.3.3.3 Adimensionnement des paramètres

Afin d'éviter les instabilités numériques et améliorer les performances, les paramètres du modèle doivent être adimensionnés. Ceux-ci sont calculés via un changement de variables. Les grandeurs caractéristiques  $(\rho, \mu)$  sont normalisées par rapport aux valeurs maximales de leurs fonctions respectives. Le paramètre  $\lambda$  est normalisé par rapport à  $\mu$ . Les paramètres du système deviennent [222] :

$$\begin{cases} \bar{x} = \frac{x}{d}, & \bar{I} = [-1, +1], \\ \bar{\rho} = \frac{\rho}{\max \rho}, & \bar{\mu} = \frac{\mu}{\max \mu}, & \bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\max \mu}, \\ \bar{\Omega} = \frac{\omega d}{\max c_T}. \end{cases}$$

Pour les FGM, les grandeurs sont généralement normalisées par rapport aux paramètres de l'un des deux matériaux.



### 3.3.4 Plaques anisotropes

La méthode proposée dans ce travail n'est pas limitée aux matériaux isotropes. En effet, elle peut être utilisée pour n'importe quel système gouverné par l'équation (3.2), en particulier les plaques anisotropes.

#### 3.3.4.1 Tenseur d'élasticité

En général, le comportement anisotrope d'une couche homogène peut être modélisé en modifiant la matrice d'élasticité dans la loi de Hooke généralisée (1.2). En utilisant la notation de Voigt, elle s'écrit :

$$[\sigma] = [C][\epsilon] \quad (3.17)$$

avec :

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & & & & C_{55} & C_{56} \\ \text{Sym.} & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Dans le cas des matériaux anisotropes, la matrice d'élasticité est exprimée par 21 coefficients indépendants ; le matériau dans ce cas est appelé **triclinique** et ne possède aucune symétrie. Lorsque le matériau possède un seul plan de symétrie, il est dit **monoclinique** et requière 13 coefficients indépendants. S'il possède deux plans de symétrie, il est désigné comme **orthotrope** avec 9 coefficients indépendants et ainsi de suite.

Par exemple, si le matériau possède des symétries supérieurs dans le plan transversal et les coefficients sont invariants pour un angle de rotation de  $\varphi = 0$  à  $90$ , le matériau est **transversalement isotrope**. Il possède seulement 5 coefficients indépendants. On peut citer le composite unidirectionnel (polymère renforcé en fibres est très courant dans l'industrie), dans lequel la majorité des fibres sont orientées dans une seule direction. Dans ce cas, l'analyse de la propagation dépend de l'orientation des fibres de la couche par rapport à l'axe de propagation considéré. Un moyen pratique pour accommoder cela est basé sur des transformations orthogonales linéaires [223, 54].

#### 3.3.4.2 Transformation du tenseur

Considérons une plaque infinie anisotrope d'épaisseur  $2d$  dont la normale à la surface est alignée avec l'axe  $x_3$  d'un système de coordonnées cartésiennes de référence  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ . Le plan médian de la plaque est choisi afin de coïncider avec le plan  $(x_1, x_2)$ , comme le montre la figure (3.4).

Pour les ondes se propageant suivant une direction  $x_\varphi$  orientée selon un angle quelconque  $\varphi$  par rapport à la direction des fibres  $x_1$ , la méthode étudiée ici nécessite simplement une rotation de la matrice d'élasticité  $[\mathbf{C}]$  de chaque couche, telle que :

$$[\mathbf{C}_\varphi] = [\mathbf{R}_\varphi][\mathbf{C}_0][\mathbf{R}_\varphi]^T. \quad (3.19)$$

$[\mathbf{C}_0]$  représente la matrice des coefficients d'élasticité dans les directions principales de la couche.  $R_\varphi$  est la matrice de rotation donnée par :

$$[\mathbf{R}_\varphi] = \begin{bmatrix} G^2 & S^2 & 0 & 0 & 0 & 2SG \\ S^2 & G^2 & 0 & 0 & 0 & -2SG \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & -S & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S & G & 0 \\ -SG & SG & 0 & 0 & 0 & (G^2 - S^2) \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

avec  $G = \cos(\varphi)$  et  $S = \sin(\varphi)$ . Cette transformation peut être appliquée aux autres axes en utilisant la matrice de rotation correspondante. Le plan  $(x_1, x_2)$  choisi comme plan médian est la configuration la plus utilisée dans la littérature.

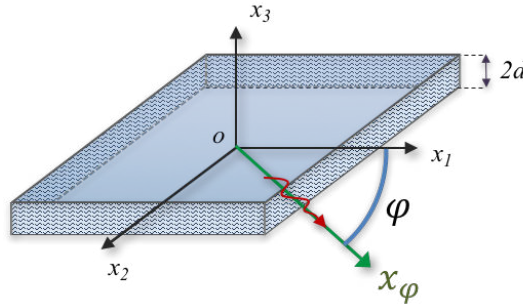


FIGURE 3.4 – Direction de propagation dans une couche anisotrope suivant une direction arbitraire.

**Matrices élémentaires :** Dans le cas général, les matrices  $[\mathbf{M}_{i=0,1,2,3,4}]$  sont données par :

$$\begin{aligned} [\mathbf{M}_0] &= \begin{bmatrix} C_{55}^\varphi & C_{45}^\varphi & C_{35}^\varphi \\ & C_{44}^\varphi & C_{34}^\varphi \\ \text{Sym.} & & C_{33}^\varphi \end{bmatrix}, & [\mathbf{M}_1] &= \begin{bmatrix} 2C_{15}^\varphi & (C_{14}^\varphi + C_{56}^\varphi) & (C_{13}^\varphi + C_{55}^\varphi) \\ & 2C_{46}^\varphi & (C_{36}^\varphi + C_{45}^\varphi) \\ & \text{Sym.} & 2C_{35}^\varphi \end{bmatrix}, \\ [\mathbf{M}_2] &= \begin{bmatrix} C_{11}^\varphi & C_{16}^\varphi & C_{15}^\varphi \\ & C_{66}^\varphi & C_{56}^\varphi \\ \text{Sym.} & & C_{55}^\varphi \end{bmatrix}, & [\mathbf{M}_3] &= \begin{bmatrix} \rho & 0 & 0 \\ 0 & \rho & 0 \\ 0 & 0 & \rho \end{bmatrix}, \\ [\mathbf{M}_4] &= \begin{bmatrix} C_{15}^\varphi & C_{56}^\varphi & C_{55}^\varphi \\ C_{14}^\varphi & C_{46}^\varphi & C_{45}^\varphi \\ C_{13}^\varphi & C_{36}^\varphi & C_{35}^\varphi \end{bmatrix}, & \mathbf{U} &= [u_1 \ u_2 \ u_3]^T. \end{aligned}$$

Il est à souligner que dans les cas : triclinique et monoclinique, les composantes de déplacements dans la direction perpendiculaire à l'axe de propagation dans le plan médian ne sont pas indépendantes. Par conséquent, les équations des modes de Lamb et des modes SH sont couplées [224].

Par ailleurs, dans le cas d'un système multicouches, la méthode reste applicable. Toutefois, il existe dans la littérature un certain nombre de théories (théories de module efficace) qui permettent de réduire le modèle d'un matériau hétérogène composite à une seule couche anisotrope homogène [80].

### 3.3.5 Propriétés du problème aux valeurs propres quadratique

Le système algébrique résultant de la discrétisation discontinue possède des propriétés singulières par rapport à la méthode des éléments finis classique. Ces dernières offrent des avantages pour les algorithmes de résolution.

#### 3.3.5.1 Réduction du problème aux valeurs propres quadratique

La résolution directe du QEP (3.16) est une tâche très fastidieuse et consommatrice en temps de calcul. En pratique, le QEP est transformé en un problème aux valeurs propres linéaire généralisé (GEP, *Generalised Eigenvalue Problem*), en utilisant des méthodes de linéarisation [225].

Afin de réduire le système quadratique (3.16) à un système linéaire, une variable supplémentaire  $\tilde{\mathbf{Q}} = k\tilde{\mathbf{U}}$  est introduite :

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{Q}} - k \tilde{\mathbf{U}} = 0 \\ [\mathbf{A}_{0\omega 3}] \tilde{\mathbf{U}} + i[\mathbf{A}_1] \tilde{\mathbf{Q}} + [\mathbf{A}_2] k \tilde{\mathbf{Q}} = 0 \end{cases} \quad (3.21)$$

avec :

$$[\mathbf{A}_{0\omega 3}] = [\mathbf{A}_0] - \omega^2[\mathbf{A}_3].$$

En factorisant par  $\tilde{\mathbf{V}} = [\tilde{\mathbf{U}} \ \tilde{\mathbf{Q}}]^T$  et en multipliant la deuxième ligne par  $-1$ , le système (3.21) peut être réécrit sous la forme linéaire généralisée :

$$([\mathbf{A}] - k[\mathbf{B}]) \{\tilde{\mathbf{V}}\} = 0 \quad (3.22)$$

avec :

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}] &= \begin{bmatrix} 0 & [I_{2m}] \\ -[\mathbf{A}_{0\omega 3}] & -i[\mathbf{A}_1] \end{bmatrix}, \\ [\mathbf{B}] &= \begin{bmatrix} [I_{2m}] & 0 \\ 0 & [\mathbf{A}_2] \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

$[I_{2m}]$  est la matrice d'identité d'ordre  $2m$ .

Dans la littérature, il existe plusieurs méthodes de linéarisation. Il est donc important de choisir celle qui respecte la symétrie et/ou d'autres propriétés structurelles du système quadratique. Le système (3.22) est très intéressant en raison de la nature diagonale en blocs de la matrice de masse  $[\mathbf{B}]$  (Voir chapitre 2, section (2.2)). D'une part, il permet d'obtenir une matrice hermitienne et définie positive, une propriété importante lors de l'utilisation des solveurs GEP et pour laquelle les algorithmes sont plus robustes et convergent plus rapidement. D'autre part, il conserve la forme bloc-diagonale de la matrice  $[\mathbf{A}_2]$ . Cette dernière est une fonction très utile puisque l'inverse de  $[\mathbf{B}]$ , donc de  $[\mathbf{A}_2]$ , est la matrice diagonale par blocs construite de l'inverse des blocs :

$$[\mathbf{B}^{-1}] = \begin{bmatrix} [I_{2m}] & 0 \\ 0 & [\mathbf{A}_2^{-1}] \end{bmatrix}. \quad (3.24)$$

Les matrices élémentaires inverses de  $[\mathbf{A}_2]$  peuvent être calculées indépendamment puis multipliées directement pour construire la matrice de rigidité dynamique globale  $[\mathbf{D}_g] = [\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}]$ . L'assemblage de la matrice de masse  $[\mathbf{M}_g]$  n'est donc pas nécessaire. De plus, le GEP est à nouveau réduit à la forme SEP et le problème (3.16) devient :

$$([\mathbf{D}_g] - k [\mathbf{I}_{4m}]) \{\tilde{\mathbf{V}}\} = 0. \quad (3.25)$$

Cette transformation permet aux problèmes avec un grand nombre de Degrés De Liberté (DDL) d'avoir un gain significatif en temps de calcul.

## 3.4 RÉSULTATS NUMÉRIQUES

Afin de valider la méthode SADG-FE, quelques exemples sont étudiés dans cette section. Premièrement, les courbes de dispersion des ondes de Lamb sont calculées pour une plaque homogène isotrope et sont comparées avec les solutions exactes. Ensuite, une plaque constituée d'un matériau à gradient fonctionnel et une plaque anisotrope sont analysées. Les résultats obtenus sont comparés à ceux trouvés dans la littérature.

### 3.4.1 Plaques homogènes isotropes

#### 3.4.1.1 Généralités

Soit une plaque d'aluminium homogène isotrope dont les propriétés sont données dans le tableau (3.1). L'épaisseur de la plaque  $2d$  est maillée en  $n = 60$  éléments linéaires de Lagrange ( $p = 1$ ) qui ont tous la même taille  $h_j = h$ . La forme bilinéaire globale est utilisée avec les facteurs de pénalité  $\varepsilon = -1$ ,  $\alpha = 30$ ,  $\gamma = 0$  et  $\theta = 0$  pour assurer la stabilité. La méthode SDG du flux moyen et la méthode SIPG sont utilisées. La même configuration est utilisée pour la suite sauf indication contraire. Le SEP (3.25) est résolu pour des fréquences  $f$  allant de 0 à 1 MHz avec un pas de 10 kHz. Le critère de maillage pour les solutions réelles  $\frac{\min(\Lambda)}{h} > 10$  où  $\Lambda = c_T/f$  est la longueur d'onde, est largement satisfait.

| Épaisseur $2d$ (m) | $c_L$ (m/s) | $c_T$ (m/s) | $\nu(-)$ |
|--------------------|-------------|-------------|----------|
| 8E-3               | 6440.8      | 3125.4      | 0.346    |

TABLE 3.1 – Propriétés d'une plaque d'aluminium.

Par souci de clarté, seuls les modes se propageant vers la droite ( $k$  positifs) sont présentés et les quantités sont adimensionnées. Tous les résultats présentés dans ce qui suit sont calculés sur MATLAB.

En effet, les exigences minimales de discrétisation satisfont uniquement les modes propagatifs puisqu'il existe un nombre fini de solutions pour une gamme de fréquences donnée. En revanche, pour  $k$  imaginaire des modes inhomogènes, il existe une infinité de solutions quelque soit la fréquence. Par conséquent, au-delà d'une certaine limite, des solutions qui n'ont aucune signification physique apparaissent.

Les solutions physiquement significatives doivent être sélectionnées et gardées. Toutefois, les critères de sélection ne sont pas évidents. À notre connaissance, aucune méthode ou critère strict n'a été proposé dans la littérature. Plusieurs approches basées sur la partie imaginaire des solutions propres et sur le calcul du flux énergétique moyen sont utilisés. Dans ce qui suit, l'intervalle de la recherche de la partie imaginaire est limité à  $\{\Im(kd) \in [-5, +5], \forall f\}$  [1].

### 3.4.1.2 Courbes de dispersion

La figure (3.5) montre les courbes de dispersion numériques de la SADG-FE (points noirs) obtenues à partir de la résolution de l'équation (3.25). La figure représente la fréquence adimensionnée  $\Omega = \frac{\omega d}{c_T}$  en fonction du produit du nombre d'onde réel et de la demi-épaisseur de la plaque  $\Re(kd)$ . Les résultats sont comparés aux solutions analytiques de la figure (1.4) pour les huit premiers modes de Lamb propagatifs. Les modes symétriques sont tracés avec des traits pleins bleus, tandis que les modes antisymétriques sont représentés par des traits pleins rouges. Un très bon accord est observé.

Les déformées modales des modes de Lamb sont comparées aux composantes du champ de déplacement analytiques (voir annexe A). La figure (3.6) illustre les déformations modales discontinues : les profils des composantes  $\mathbf{U}_1(x_1)$  et  $\mathbf{U}_3(x_1)$  pour les modes symétriques et antisymétriques à la fréquence  $f = 1$  MHz. Chaque élément est tracé indépendamment de façon discontinue (points noirs). Les solutions analytiques sont tracées avec un trait bleu pour la composante  $\mathbf{U}_1$  et un trait rouge pour la composante  $\mathbf{U}_3$ . Les amplitudes sont normalisées par rapport au maximum. Une très bonne correspondance est obtenue.

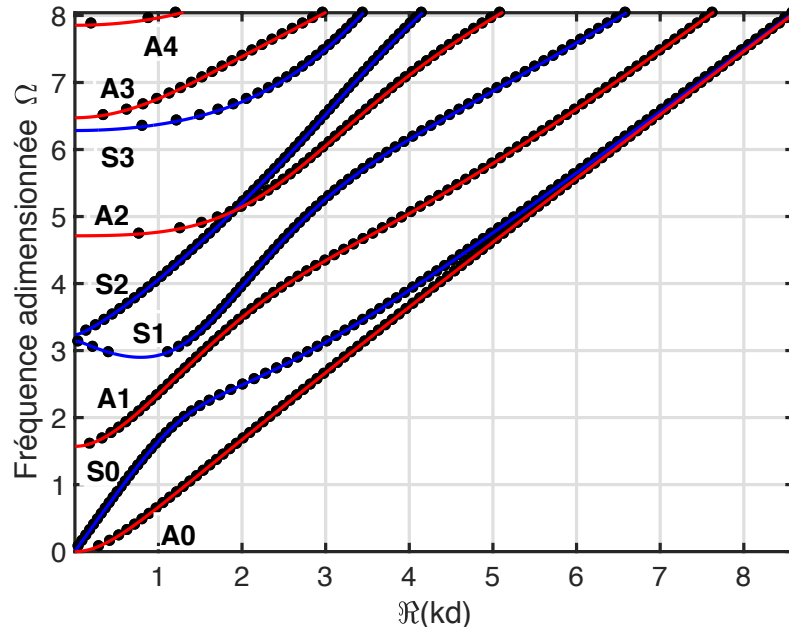


FIGURE 3.5 – Courbes de dispersion  $(kd, \Omega)$  des modes de Lamb propagatifs pour une plaque isotrope : résultats numériques obtenus par SAFE-DG (points noirs) contre les modes symétriques (S) et anti-symétriques (A) des solutions analytiques tracés en lignes bleues et rouges, respectivement.

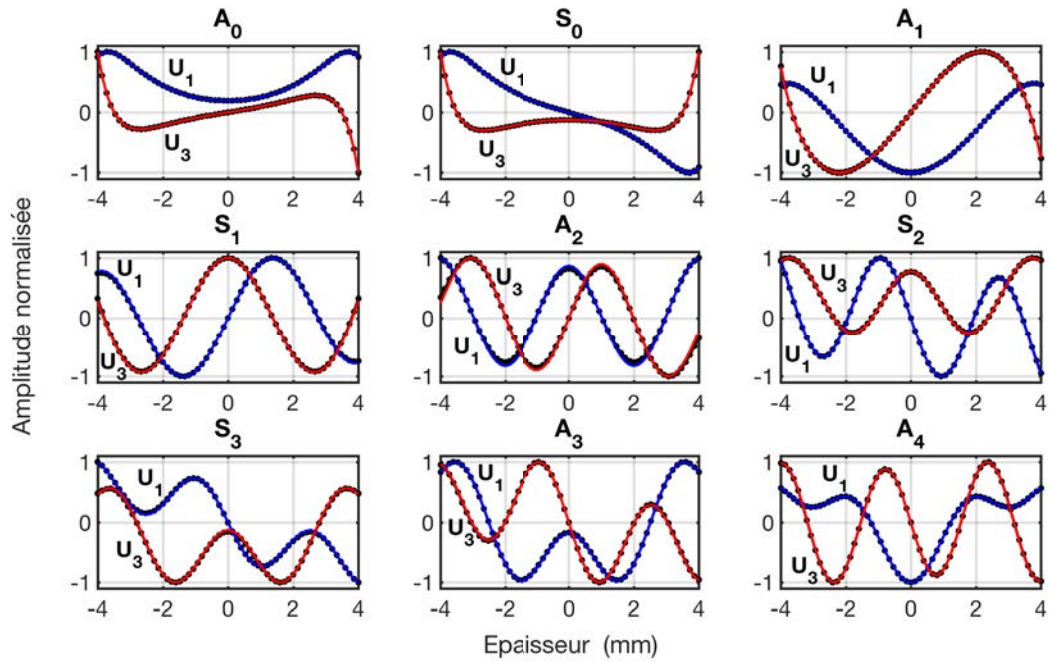


FIGURE 3.6 – Comparaison des résultats numériques (points noirs) avec les solutions analytiques des composantes du champ de déplacement des modes de Lamb à la fréquence de 1 MHz :  $U_1(x_1)$  et  $U_3(x_1)$  sont en traits pleins bleus et rouges, respectivement.

Les résultats des modes non-propagatifs et inhomogènes résultants de SADG-FE sont ensuite comparés à ceux de la méthode SAFE classique. La figure (3.6) montre les courbes de dispersion des modes inhomogènes (partie réelle en marqueurs carrés magentas et partie imaginaire en losanges verts) et non-propagatifs (marqueurs triangles rouges) [32].

Les résultats de la méthode SAFE sont tracés en points noirs et sont obtenus en utilisant la même discrétisation. Les résultats des modes propagatifs ne sont pas montrés ici afin d'éviter la redondance.

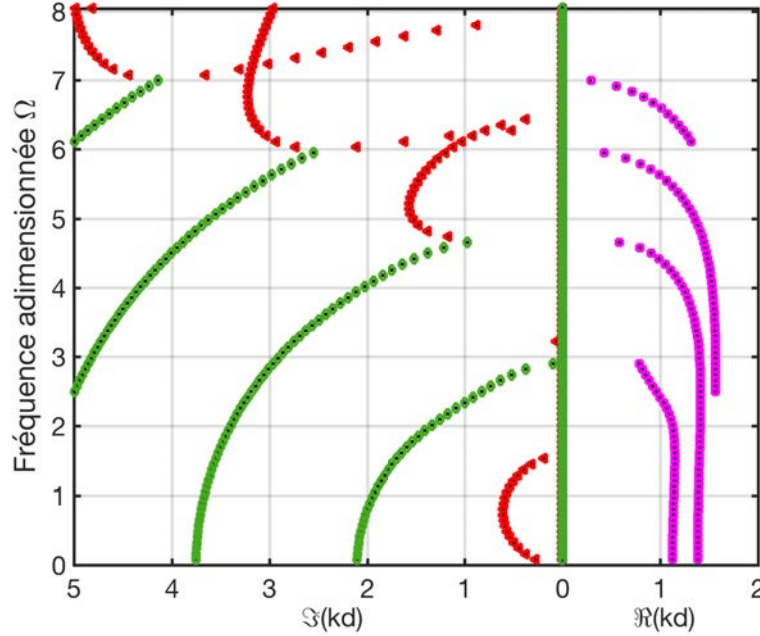


FIGURE 3.7 – Projection dans le plan complexe des courbes de dispersion  $(kd, \Omega)$  des modes de Lamb pour une plaque isotrope : modes inhomogènes ( $\square$  magenta et  $\diamond$  verts) et non-propagatifs ( $\triangle$  rouges), obtenues de la SADG-FE comparées aux résultats de la méthode SAFE (points noirs).

### 3.4.2 Plaques à gradient fonctionnel

Dans ce qui suit, on considère un matériau à gradient fonctionnel de type Métal-à-Céramique. Cet FGM dit binaire, est formé de deux matériaux isotropes différents qui changent graduellement de l'un à l'autre. Celui-ci est généralement utilisé pour accommoder les grands gradients de température souvent rencontrés dans les applications aérospatiales. Ce cas a été largement étudié dans la littérature et les résultats sont disponibles ([165, 114, 3]).

Les propriétés de ces deux matériaux isotropes sont indiquées dans le tableau (3.2). La surface inférieure ( $x = -d$ ) de la plaque est considérée à 100% Chrome (Cr), tandis que le côté supérieur ( $x = +d$ ) de la plaque est en céramique (Cer).

| Matériaux | $\lambda$ (GPa) | $\mu$ (GPa) | $\rho$ (kg/m <sup>3</sup> ) |
|-----------|-----------------|-------------|-----------------------------|
| Chrome    | 74.2            | 102.5       | 7190                        |
| Céramique | 138             | 118.11      | 3900                        |

TABLE 3.2 – Propriétés des matériaux : Céramique et Chrome, utilisés pour la plaque FGM.

Les propriétés du FGM Chrome-Céramique sont supposées varier en fonction de l'épaisseur selon une loi de la forme :

$$C^{FGM}(x) = (C^{Cer} - C^{Cr}) \left( \frac{x+d}{2d} \right)^{P_p} + C^{Cr}, \quad (3.26)$$

où  $C$  représente l'une des caractéristiques du matériau ( $\rho, \mu$  ou  $\lambda$ ).  $P_p$  est un nombre entier positif représentant le coefficient du gradient.

La figure (3.8) représente les courbes de dispersion obtenues de la vitesse de phase  $C_p$  en fonction du nombre d'onde adimensionné  $k2d$  (points rouges). L'épaisseur ( $2d = 12mm$ ) est partitionnée en utilisant  $n = 90$  éléments linéaires. Les calculs sont effectués jusqu'à une fréquence  $f = 3$  MHz. Les quantités sont normalisées en utilisant les paramètres du Chrome. La distribution est considérée comme une fonction linéaire avec  $P_p = 1$ . Les résultats sont comparés à ceux trouvés dans les travaux de Benmeddour et al. [3], tracés en traits épais pleins noirs. Encore une fois, les résultats obtenus sont en très bon accord.

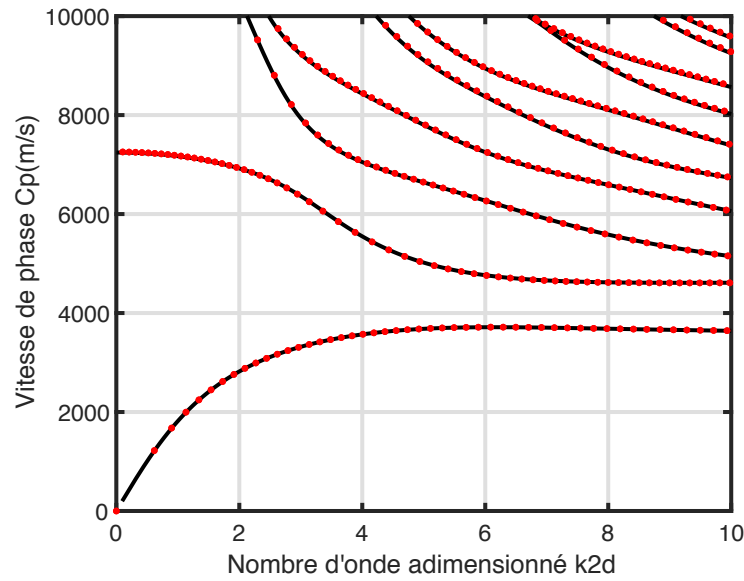


FIGURE 3.8 – Courbes de dispersion de la vitesse de phase  $C_p$  des modes Lamb dans une plaque en matériau à gradient fonctionnel libre : les résultats numériques du SADG-FE représentés par des points rouges sont superposés aux résultats de Benmeddour et al. [3] en traits pleins noirs.

En conclusion, la méthode SADG-FE s'est avérée très pratique pour la modélisation des matériaux hétérogènes à gradient fonctionnel. Le calcul des courbes de dispersion est effectué de manière très efficace et sans modification significative de la formulation. En outre, elle permet de prendre en compte une fonction continue qui représente le gradient effectif. Les paramètres varient à l'intérieur de chaque élément. Par ailleurs, l'exemple analysé consiste en une fonction linéaire avec  $P_p = 1$ . Pour des fonctions complexes, l'utilisation des éléments d'ordre élevé permettra de représenter plus efficacement les coefficients du gradient des propriétés du matériau.



### 3.4.3 Plaques anisotropes

Un exemple numérique pour le calcul des courbes de dispersion dans des plaques constituées de matériaux anisotropes composites est présenté.

On considère une plaque anisotrope d'épaisseur  $2d = 1\text{mm}$ , constituée d'un stratifié unidirectionnel de 32 couches de Carbon-Epoxy de type T300/914 [226]. Ce dernier fait parti des polymères à renfort en fibre de carbone les plus utilisés dans le domaine de transports automobile et aéronautique. Dans cet exemple, le matériau est supposé à la fois non-atténuant et homogène. Les propriétés matérielles homogénéisées, dans la direction principale des fibres, sont données dans le tableau (3.3). Il s'agit d'une plaque transversalement isotrope avec 5 coefficients indépendants. Ce cas de figure est étudié dans plusieurs travaux notamment de Pavlakovic et al. [55] en utilisant le logiciel DISPERSE basé sur la méthode SPW (voir chapitre 1, section (1.2)) et de Bartoli et al. [227] en utilisant la méthode SAFE.

| Matériau     | $\rho \text{ (kg/m}^3\text{)}$ | $C_{11}$ | $C_{12}$ | $C_{13}$ | $C_{22}$ | $C_{23}$ | $C_{33}$ | $C_{44}$ | $C_{55}$ | $C_{66}$ |
|--------------|--------------------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Carbon-Epoxy | 1560                           | 143.8    | 6.2      | 6.2      | 13.3     | 6.5      | 13.3     | 3.6      | 5.7      | 5.7      |

TABLE 3.3 – Propriétés élastiques homogénéisées du matériau composite Carbone-Epoxy T300/914 à  $\varphi = 0$ . Les constantes élastiques  $C_{ij}$  sont en GPa.

La propagation des ondes guidées est considérée le long de l'axe principale  $\varphi = 0$ . Afin d'analyser l'effet de l'anisotropie (direction de propagation  $\varphi \neq 0$ ), les courbes de dispersion sont calculées et comparées pour différentes valeurs de  $\varphi = 45^\circ$ ,  $-45^\circ$  et  $90^\circ$ . L'épaisseur est partitionnée en utilisant  $n = 22$  éléments quadratiques ( $p = 2$ ) et les calculs sont effectués jusqu'à une fréquence de  $f = 8 \text{ MHz}$ .

La figure (3.9) montre les résultats obtenus de la vitesse de phase  $C_p$  en fonction du nombre d'onde adimensionné  $kd$ . Les résultats obtenus de la méthode SADG-FE sont présentés en cercle noirs. Ces derniers sont comparés aux résultats de la méthode SAFE (en points rouges) calculés à l'aide du logiciel libre GUIGUW [4] en utilisant la même discrétisation. Une très bonne concordance entre les deux résultats est obtenue.

Dans le cas présent, les équations gouvernantes des modes de Lamb et les modes SH ne sont découplés que pour  $\varphi = 0$  et  $\varphi = 90^\circ$ . À partir de la figure (3.9), on peut observer qu'effectivement le mode  $SH_0$  reste non-dispersif pour ces deux cas de figure. En revanche, pour  $\varphi = 45^\circ$  et  $\varphi = -45^\circ$ , les effets du couplage sont visibles. Les modes SH présentent une distorsion autant pour le mode  $SH_0$  que pour les ordres supérieurs. En conséquence, pour les matériaux anisotropes en général, on parle des ondes de Lamb généralisées. En outre, une baisse d'amplitude des vitesses en fonction de l'angle  $\varphi$  est

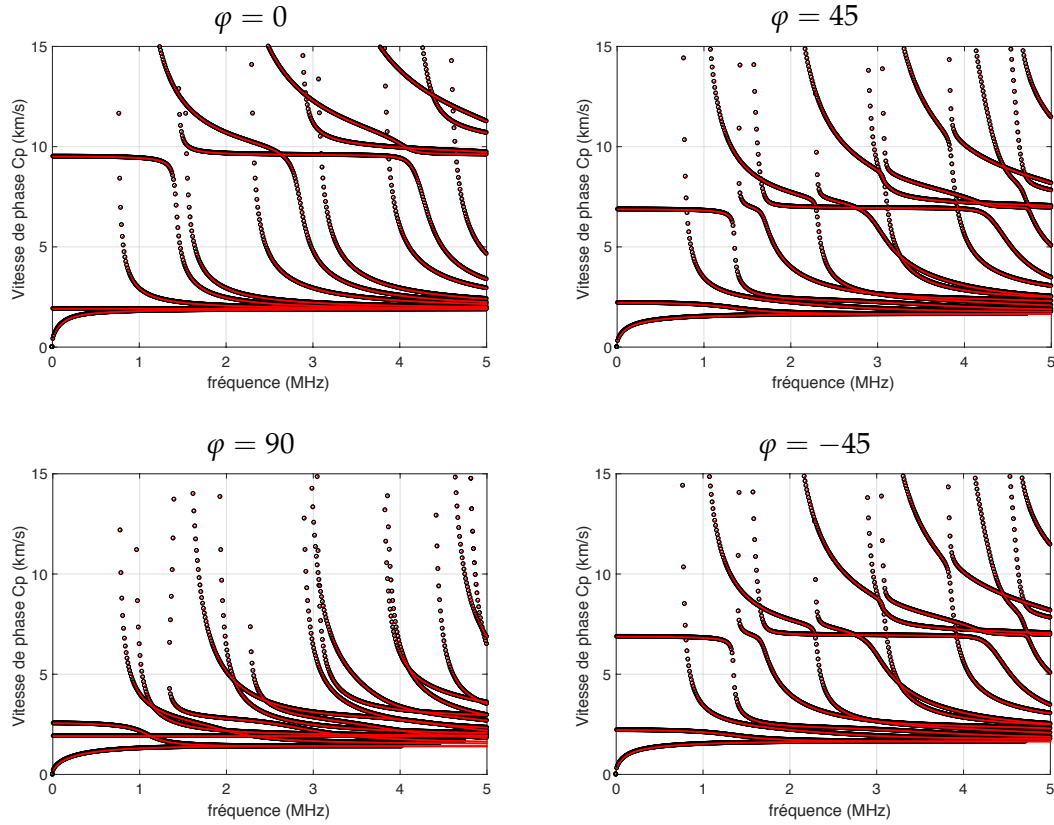


FIGURE 3.9 – Courbes de dispersion de la vitesse de phase  $C_p$  des modes de Lamb et des modes SH dans une couche composite libre : les résultats numériques du SADG-FE représentés par des cercles noirs sont superposés aux résultats de la méthode SAFE [4] en points rouges.

constatée, en particulier pour les modes symétriques et pour  $\varphi = 90$ . Ces observations ont été mentionnées dans les travaux de Bartoli et al. [227, 137].

### 3.4.4 Conclusion

Les résultats numériques présentés dans cette section montrent un bon accord avec ceux trouvés dans la littérature, en particulier ceux obtenus avec la méthode SAFE classique. Ceci constitue une validation claire de la méthode proposée dans le cas 1D. Toutefois, ces exemples sont réalisés en utilisant la dérivation symétrique ( $\varepsilon = -1$ ) et des éléments de Lagrange d'ordre faibles ( $p = 1$  et  $2$ ) avec au moins dix points pour une longueur d'onde. L'utilisation de polynômes d'ordre supérieur offrira plusieurs avantages par rapport à la méthode standard. La précision peut être améliorée en augmentant simplement l'ordre des polynômes au lieu du raffinement du maillage. De plus, cela permettra d'optimiser les opérations d'assemblage des matrices de rigidité et une résolution plus efficace du problème aux valeurs propres. Ainsi, la méthode développée ici a le potentiel d'économiser un temps de calcul important tout en préservant une excellente précision. Une évaluation précise de ces gains fera l'objet des travaux futurs.

### 3.5 CONCLUSION

Dans ce chapitre, la méthode semi-analytique éléments finis de Galerkin discontinue est développée. Celle-ci est utilisée pour le calcul des caractéristiques des modes de Lamb dans des plaques. Plusieurs cas de figure sont examinés et leurs détails d'implémentation sont présentés. Ces calculs numériques ont permis la validation de la méthode et l'évaluation de son potentiel. Dans un premiers temps, la validation analytique est effectuée via le cas homogène isotrope avec des conditions aux limites libres. Ensuite, un exemple de plaque en matériau à gradient fonctionnel et transversalement isotrope sont analysés. Les résultats numériques sont en excellent accord avec ceux obtenus dans la littérature.

La méthode SADG-FE s'est avérée très efficace pour modéliser des matériaux hétérogènes. En particulier, lorsque les paramètres du milieu changent graduellement en fonction de l'épaisseur. La nature locale de la formulation permet une gestion pratique de la discontinuité et des conditions aux limites. Ceux-ci engendrent une approximation très précise et à faibles coûts. Par conséquent, l'extension de méthode aux cas de guides d'ondes tridimensionnels à géométries complexes est développée dans le chapitre suivant.

# DÉVELOPPEMENT DE LA MÉTHODE SEMI-ANALYTIQUE ÉLÉMENTS FINIS DE GALERKIN DISCONTINUE POUR LES GUIDES D'ONDES À SECTION ARBITRAIRE

---

## 4.1 INTRODUCTION

Les guides d'ondes cylindriques, en général et ceux ayant une section à géométrie complexe en particulier, sont très courants dans l'industrie : rails, pipelines, tubes de réacteur nucléaire, câbles de précontraintes, etc. L'évaluation de leur état de santé par ondes guidées est un besoin indéniable. La simulation de la propagation des ondes guidées et l'analyse des propriétés de dispersion est au centre des recherches actuelles.

Contrairement aux structures planes, pour lesquelles il existe plusieurs méthodes d'analyse, la propagation d'ondes dans tels guides est complexe et difficile. Ceci est en partie dû à la complexité de leur géométrie et aux différents matériaux utilisés pour leur fabrication. D'un côté, des solutions analytiques n'ont été développées que pour le cas de cylindre et de tube droits. D'un autre côté, les méthodes numériques et semi-analytiques classiques deviennent très coûteuses en temps de calcul et en ressources informatiques. Ceci limite les calculs aux basses fréquences.

Dans le chapitre 3, la méthode semi-analytique éléments finis de Galerkin discontinue (SADG-FE) est développée pour le calcul des propriétés de dispersion pour les plaques. Dans ce chapitre, le développement de la méthode SADG-FE pour les guides d'ondes à section arbitraire est montré. La première section présente une description générale du problème et la formulation de la méthode SADG-FE en deux dimensions. Dans la deuxième section, la validation de la méthode est effectuée à l'aide de méthodes analytique et numérique. Enfin, une conclusion est présentée dans la dernière section.

## 4.2 FORMULATION SADG-FE EN DEUX DIMENSIONS

Dans cette partie, la formulation de la méthode SADG-FE en deux dimensions est présentée. La description générale du problème est rappelée. Ensuite, en suivant la même procédure définie dans la section (3.2), la formulation variationnelle discontinue est obtenue.

### 4.2.1 Description du problème

On reprend ici la définition des guides d'ondes de la section (1.2) et la description générale du problème de la section (3.2). Le guide est considéré de dimension infinie suivant l'axe de propagation  $x_3$  et de section arbitraire  $\mathcal{S}$  dans le plan  $(x_1, x_2)$  du système de coordonnées cartésiennes, comme montré sur la figure (4.1). Les hypothèses d'invariance géométrique et matérielle selon  $x_3$ , d'absence de toute force externe et des conditions aux limites libres sont conservées. En cherchant des solutions en régime harmonique sous la forme (1.9) :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{U}(x_1, x_2)e^{i(kx_3 - \omega t)},$$

l'équation générale du mouvement devient (3.1) :

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\sigma_k(\mathbf{U})) + \omega^2 \rho \mathbf{U} = 0 & \mathbf{x} \in \mathcal{S}, \\ \sigma_k(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{n}_s = 0 & \mathbf{x} \in \partial \mathcal{S}, \end{cases}$$

avec  $\mathbf{n}_s$  le vecteur unitaire normal sortant.  $\mathbf{U} = [U_1, U_2, U_3]^T$  est le vecteur du champ de déplacement et  $T$  indique la transposé.

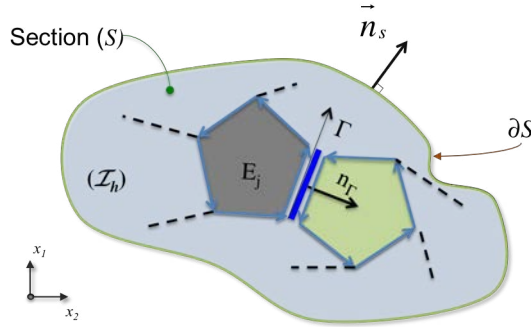


FIGURE 4.1 – Géométrie d'un guide d'ondes à section arbitraire  $\mathcal{S}$ , de bord latéral  $\partial \mathcal{S}$ , extrudée dans le sens de propagation  $x_3$ .

Pour simplifier l'analyse et par analogie aux développements dans les chapitres précédents (2 et 3), une re-formulation du  $\sigma_k$  permet d'écrire le problème (3.1) sous la forme :

$$\begin{cases} \nabla \cdot ([\mathbf{M}_0] \nabla \mathbf{U}) + \nabla \cdot (ik [\mathbf{M}_1] \mathbf{U}) - (k^2 [\mathbf{M}_2] - \omega^2 [\mathbf{M}_3]) \mathbf{U} = 0, \\ ([\mathbf{M}_0] \nabla \mathbf{U} + ik [\mathbf{M}_4] \mathbf{U}) \cdot \mathbf{n}_s = 0, \end{cases} \quad (4.1)$$

avec le vecteur de l'opérateur différentiel  $\nabla = (\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2)$  et les matrices des coefficients élastiques du matériau  $[\mathbf{M}_{i=0,1,2,3,4}]$ . (voir section 4.3).

Notons que le système d'équations (4.1) peut être réduit à l'équation (3.2) simplement par élimination de  $\partial/\partial x_2$  du vecteur  $\nabla$ . En outre, il peut être facilement implémenté dans les logiciels d'éléments finis supportant la méthode de Galerkin discontinue tels que Fenics-Project, GetFem++, etc. La formulation variationnelle discontinue correspondante est développée dans ce qui suit.

#### 4.2.2 Formulation variationnelle discontinue

Soit  $\mathcal{I}$  dans  $\mathbb{R}^{d=2}$  et son contour  $\partial\mathcal{I}$ , le domaine physique correspondant à la section transversale  $\mathcal{S}$  du guide d'onde en 3D et son bord latéral  $\partial\mathcal{S}$ . Celui-ci est approché par le domaine de calcul  $\mathcal{I}_h$  et ses frontières  $\partial\mathcal{I}_h$ , un maillage composé d'un ensemble de  $n$  éléments arbitraires  $E_{j=1,\dots,n} \in \mathcal{I}_h$  qui ne se chevauchent pas, comme montré sur la figure (4.1). Tout élément possède des limites uniques  $\partial E$  orientées positivement dans le sens anti-horaire.

On désigne  $\Gamma_h$  l'ensemble des frontières internes  $\Gamma \in \mathcal{I}_h$  partagées entre deux éléments adjacents ( $E_1$  et  $E_2$ ), auxquelles un vecteur normal unitaire  $\mathbf{n}_\Gamma$  est associé. En outre, on définit  $\Gamma_R$  l'ensemble des frontières externes  $\partial E_j \cup \partial\mathcal{I}_h$ . Le vecteur normal  $\mathbf{n}_s$  dans ce cas est considéré toujours sortant. Notons que dans le cas de la figure (4.1), on a un seul type de conditions aux limites mixtes qui s'appliquent sur toutes les frontières externes.

On reprend ici les notations et les définitions de la section (2.2). Soit  $\mathcal{D}_p$  l'espace des fonctions de test  $v(\mathbf{x})$  discontinues par morceaux sur  $\mathcal{I}_h = \cup_{j=1}^n E_j$  :

$$\mathcal{D}_p(\mathcal{I}_h) = \{v : v|_{E_j} \in \mathbb{P}_p(E_j) \quad \forall j = 1, \dots, n\},$$

$\mathbb{P}_p(E_j)$  est l'espace des polynômes d'interpolation d'ordre inférieur ou égale à  $p$  sur  $E_j$ . Le saut  $[[\bullet]]$  et la moyenne  $\{\{\bullet\}\}$  sur une frontière interne  $\Gamma \in \mathcal{I}_h$  entre deux éléments voisins ( $E_1$  et  $E_2$ ) sont définis tels que :

$$\begin{aligned} [[\bullet]] &= (\bullet|_{E_1}) - (\bullet|_{E_2}), \\ \{\{\bullet\}\} &= \frac{1}{2}(\bullet|_{E_1}) + \frac{1}{2}(\bullet|_{E_2}), \end{aligned}$$

Pour une frontière externe  $\Gamma \in \Gamma_R$  appartenant à  $E_1$ , nous utilisons la même notation avec :

$$\begin{aligned} [[\bullet]] &= (\bullet|_{E_1}), \\ \{\{\bullet\}\} &= (\bullet|_{E_1}). \end{aligned}$$

En suivant la même procédure de discrétisation définie dans la section (3.2), on obtient le schéma général de Galerkin discontinue correspondant à l'équation (4.1) : trouver  $\mathbf{U} \in \mathcal{D}_p(\mathcal{I}_h)$  tel que  $\forall \mathbf{v}(\mathbf{x}) \in \mathcal{D}_p(\mathcal{I}_h)$ ,

$$a(\mathbf{U}, \mathbf{v}) = a_0(\mathbf{U}, \mathbf{v}) + ik a_1(\mathbf{U}, \mathbf{v}) + k^2 a_2(\mathbf{U}, \mathbf{v}) - \omega^2 a_3(\mathbf{U}, \mathbf{v}) = \mathcal{L}(\mathbf{v}),$$

avec la forme bilinéaire globale de chaque opérateur  $a_{i=0,1,2,3}(\cdot, \cdot)$  et la forme linéaire  $\mathcal{L}(\cdot)$  données par :

$$\begin{aligned}
 a_0(\mathbf{U}, \mathbf{v}) &= \sum_{E \in \mathcal{I}_h} \int_E [\mathbf{M}_0] \nabla \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{v} \, dx - \sum_{\Gamma \in \Gamma_h} \int_{\Gamma} \{ [\mathbf{M}_0] \nabla \mathbf{U} \cdot \mathbf{n}_{\Gamma} \} [\mathbf{v}] \, ds \\
 &\quad + \epsilon \sum_{\Gamma \in \Gamma_h} \int_{\Gamma} \{ [\mathbf{M}_0] \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{\Gamma} \} [\mathbf{U}] \, ds + \sum_{\Gamma \in \Gamma_h} \int_{\Gamma} \frac{\alpha}{|e_{\Gamma}|^{\beta_0}} [\mathbf{U}] [\mathbf{v}] \, ds \\
 &\quad + \sum_{\Gamma \in \Gamma_h} \int_{\Gamma} \frac{\gamma}{|e_{\Gamma}|^{\beta_1}} [\nabla \mathbf{U} \cdot \mathbf{n}_{\Gamma}] [\nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{\Gamma}] \, ds, \\
 a_1(\mathbf{U}, \mathbf{v}) &= \sum_{E \in \mathcal{I}_h} \int_E [\mathbf{M}_1] \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{v} \, dx - \sum_{\Gamma \in \Gamma_h} \int_{\Gamma} \{ [\mathbf{M}_1] \mathbf{U} \cdot \mathbf{n}_{\Gamma} \} [\mathbf{v}] \, ds \\
 &\quad - \sum_{\Gamma \in \Gamma_h} \int_{\Gamma} \theta [\mathbf{U}] [\mathbf{v}] \, ds + \sum_{\Gamma \in \Gamma_R} \int_{\Gamma} \{ [\mathbf{M}_5] \mathbf{U} \cdot \mathbf{n}_{\Gamma} \} [\mathbf{v}] \, ds, \\
 a_{i=2,3}(\mathbf{U}, \mathbf{v}) &= \sum_{E \in \mathcal{I}_h} \int_E [\mathbf{M}_{i=2,3}] \mathbf{U} \mathbf{v} \, dx. \\
 \mathcal{L}(\mathbf{v}) &= \sum_{\Gamma \in \Gamma_R} \int_{\Gamma} ([\mathbf{M}_0] \nabla \mathbf{U} + ik [\mathbf{M}_4] \mathbf{U}) \cdot \mathbf{n}_{\Gamma} \mathbf{v} \, ds = 0,
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

avec :

$$[\mathbf{M}_5] = [\mathbf{M}_1] - [\mathbf{M}_4].$$

$\epsilon$ ,  $\alpha$ ,  $\gamma$  et  $\theta$  sont les paramètres de pénalisation et  $|e_{\Gamma}|$  est la longueur du bord  $\Gamma$ .  $\beta_0$  et  $\beta_1$  sont des nombres positifs dépendants de la dimension  $d$ , dits de super-pénalisation. Pour des raisons de simplicité, on considère dorénavant la dérivation symétrique obtenue par  $\epsilon = -1$ ,  $\gamma = \theta = 0$  et  $\beta_0 = 1$ .

## 4.3 IMPLÉMENTATION

Dans cette section, l'implémentation de la méthode SADG-FE est montrée. Différents guides d'ondes sont analysés : le cylindre plein et creux. Trois types de matériaux sont étudiés, à savoir : les matériaux homogènes isotropes, à gradient fonctionnel et anisotropes.

### 4.3.1 Présentation matricielle

La discrétisation de l'équation (4.2) est effectuée par approximation nodale basée sur des éléments de type Lagrange (3.15)-(B.4). Pour un élément  $E_j$ , la solution est approximée telle que :

$$U_{i=1,2,3}^{(j)}(x) = \sum_{l=0}^{N_{ddl}} P_l(x) U_{l_{i=1,2,3}}^{(j)} = \mathbf{P} \tilde{\mathbf{U}}_{i=1,2,3}^{(j)},$$

La substitution de  $\mathbf{U}$  par son approximation permet d'obtenir le problème aux valeurs propres quadratique (3.16) :

$$[(\mathbf{A}_0] - \omega^2 [\mathbf{A}_3]) + ik [\mathbf{A}_1] + k^2 [\mathbf{A}_2]] \{ \tilde{\mathbf{U}} \} = 0. \tag{4.3}$$

où  $\{\tilde{\mathbf{U}}\}$  est le vecteur global des déplacements nodaux généralisés.  $[\mathbf{A}_{i=0,1,2,3}]$  sont les matrices de rigidité et de masse globales obtenues telle que :

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}_0] &= \sum_{j=1}^n \int_{E_j} \nabla \mathbf{B}^T [\mathbf{M}_0] \nabla \mathbf{B} \, d\mathbf{x} + \sum_{j=1}^n \int_{E_j \cap E_{k \neq j}} \mathbf{T}_j^0 \, d\mathbf{s}, \\ [\mathbf{A}_1] &= \sum_{j=1}^n \int_{E_j} \nabla \mathbf{B}^T [\mathbf{M}_1] \mathbf{B} \, d\mathbf{x} + \sum_{j=1}^n \int_{E_j \cap E_{k \neq j}} \mathbf{T}_j^1 \, d\mathbf{s} - \sum_{j=1}^n \int_{E_j \cap \partial S} (\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{n}_s) [\mathbf{M}_5] \mathbf{B} \, d\mathbf{s}, \\ [\mathbf{A}_2] &= \sum_{j=1}^n \int_{E_j} \mathbf{B}^T [\mathbf{M}_2] \mathbf{B} \, d\mathbf{x}, \\ [\mathbf{A}_3] &= \sum_{j=1}^n \int_{E_j} \mathbf{B}^T [\mathbf{M}_3] \mathbf{B} \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

avec  $\mathbf{B} = \mathbf{P} \otimes \mathbf{I}_3$ , où  $\otimes$  représente le produit de Kronecker.  $\mathbf{P}$  est le vecteur des polynômes d'interpolation de l'élément considéré.  $\mathbf{I}_3$  est la matrice identité de  $3 \times 3$  représentant les trois composantes du champ  $\mathbf{U} = [U_1, U_2, U_3]^T$ .  $\mathbf{T}_j^{0,1}$  sont les matrices de flux numériques élémentaires obtenues telles que (2.18)-(2.19) (voir annexe B).

$[\mathbf{A}_{i=0,1,2,3}]$  sont des matrices carrées constituées de nombres complexes, partitionnées en blocs et de taille  $\{(3m \times 3m), m = n \times N_{ddl}\}$ . Le système de  $3m$  équations quadratiques admet  $2 \times 3m$  solutions non-triviales  $(k_i, \{\tilde{\mathbf{U}}\}_i; i = 1, 2, \dots, 6m)$ . La résolution de ce problème est effectuée après linéarisation via le problème de forme standard (3.25).

#### 4.3.2 Cylindre plein homogène isotrope

Contrairement au cas des plaques de dimensions latérales infinies, où les solutions recherchées sont indépendantes de la variable  $x_2$ , les guides cylindriques sont bornés dans cette direction. Par conséquent, les dérivées par rapport à cette coordonnée cartésienne ne s'annulent pas. Le système est posé sur la totalité de la section et ne fait apparaître aucun découplage. Dans le cas d'un guide d'ondes homogène et isotrope, les matrices  $[\mathbf{M}_{i=0,1,2,3,4}]$  sont exprimées en utilisant les coefficients de Lamé telles que :

$$\begin{aligned} [\mathbf{M}_0] &= \begin{pmatrix} [\mathbf{M}_{01}] & [\mathbf{M}_{02}] \\ [\mathbf{M}_{03}] & [\mathbf{M}_{04}] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & \lambda & 0 \\ \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & \mu & 0 \\ \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \end{pmatrix}, \\ [\mathbf{M}_1] &= \begin{pmatrix} [\mathbf{M}_{11}] & [\mathbf{M}_{12}] \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \lambda + \mu \\ 0 & 0 & 0 \\ \lambda + \mu & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + \mu \\ 0 & \lambda + \mu & 0 \end{bmatrix} \end{pmatrix}^T, \end{aligned}$$



$$[\mathbf{M}_4] = \left( [\mathbf{M}_{41}] \quad [\mathbf{M}_{42}] \right)^T = \left( \begin{bmatrix} 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 \\ \mu & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \\ 0 & \mu & 0 \end{bmatrix} \right)^T,$$

$$[\mathbf{M}_2] = \begin{bmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + 2\mu \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{M}_3] = \begin{bmatrix} \rho & 0 & 0 \\ 0 & \rho & 0 \\ 0 & 0 & \rho \end{bmatrix},$$

Ces matrices peuvent être également obtenues en fonction du module de Young et du coefficient de Poisson. Ces derniers sont calculés par :

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)},$$

$$E = 2\mu(1 + \nu).$$

De façon similaire à la SADG-FE pour les plaques isotropes (section (3.3)), une implémentation simple et rapide est possible. Le calcul peut être effectué pour une seule composante du champ de déplacement. Le système global est ensuite calculé via des multiplications matricielles.

### 4.3.3 Tube homogène isotrope

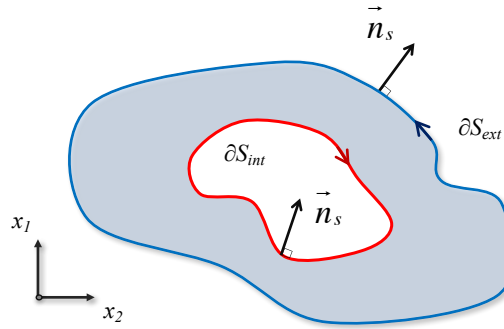


FIGURE 4.2 – Configuration d'un cylindre creux.

Sur la figure (4.1), la normale  $\mathbf{n}_s$  est considérée orientée vers l'extérieur du domaine. L'intégration sur le contour externe  $\partial S_{ext}$  est réalisée dans le sens anti-horaire. Toutefois, lorsque le domaine est multi-convexe - possédant une interface interne  $\partial S_{int}$  - tel qu'un tube, l'intégration sur celle-ci est effectuée dans le sens horaire [61], comme le montre la figure (4.2). Le système (4.3) est modifié tel que :

$$[\mathbf{A}_1^*] = [\mathbf{A}_1] + \sum_{j=1}^n \int_{E_j \cap \partial S_{int}} (\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{n}_s) [\mathbf{M}_5] \mathbf{B} \, ds. \quad (4.4)$$

#### 4.3.4 Guide d'onde à gradient fonctionnel

Lorsque les paramètres du matériaux varient à travers la section, les matrices des coefficients  $[\mathbf{M}_{i=0,1,2,3,4}]$  sont également interpolées [228]. Ceci est effectué en utilisant les mêmes fonctions d'interpolation des éléments.

$$[\mathbf{M}_i](\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} D_{11}(\mathbf{x}) & D_{12}(\mathbf{x}) & \cdots & D_{1k}(\mathbf{x}) \\ D_{21}(\mathbf{x}) & D_{22}(\mathbf{x}) & \cdots & D_{2k}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{j1}(\mathbf{x}) & D_{j2}(\mathbf{x}) & \cdots & D_{jk}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}, \quad (4.5)$$

avec :

$$D_{jk}(\mathbf{x}) = \sum_{l=0}^{N_{ddl}} P_l(\mathbf{x}) D_l. \quad (4.6)$$

où  $D_l$  sont les valeurs des coefficients élastiques du matériau évaluées aux nœuds d'un élément. Ainsi, les propriétés réelles du matériau peuvent être incorporées pour chaque point d'intégration numérique.

Dans ce cas de figure, le système (4.3) doit être également adapté pour tenir compte des termes du gradient impliquant les dérivées des fonctions exprimant la variation des coefficients élastiques. Suivant la même procédure de la section (3.3), après simplification et réarrangement, la formulation devient :

$$[\mathbf{A}_1^*] = [\mathbf{A}_1] + [\mathbf{A}_1']$$

avec :

$$[\mathbf{A}_1'] = \sum_{j=1}^n \int_{E_j} \mathbf{B}^T [\mathbf{M}_5'] \mathbf{B} \, d\mathbf{x}. \quad (4.7)$$

où :

$$[\mathbf{M}_5'] = \nabla \cdot ([\mathbf{M}_1] - [\mathbf{M}_4])^T.$$

Pour un FGM fabriqués de matériaux isotropes, la matrice  $[\mathbf{M}_5']$  s'écrit :

$$[\mathbf{M}_5'] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial \mu}{\partial x_1} \\ 0 & 0 & \frac{\partial \mu}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \lambda}{\partial x_1} & \frac{\partial \lambda}{\partial x_2} & 0 \end{bmatrix}$$

On rappelle que ces termes disparaissent automatiquement pour un matériau homogène.

#### 4.3.5 Guide d'onde anisotrope

Dans la section (3.3), le cas général d'un guide d'ondes fabriqué avec un matériau anisotrope est montré. La matrice d'élasticité contenant les 21 coefficients élastiques indépendants est :

$$[\mathbf{C}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & & & & C_{55} & C_{56} \\ \text{Sym.} & & & & & C_{66} \end{bmatrix}.$$

Dans ce cas, les matrices  $[\mathbf{M}_{i=0,1,2,3,4}]$  peuvent être obtenues directement de cette dernière par de simples multiplications matricielles. On définit :

$$[\mathbf{L}_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad [\mathbf{L}_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad [\mathbf{L}_3] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T,$$

Les matrices élémentaires sont calculées telles que :

$$[\mathbf{M}_{01}] = [\mathbf{L}_1]^T [\mathbf{C}] [\mathbf{L}_1] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{16} & C_{15} \\ & C_{66} & C_{56} \\ \text{Sym.} & & C_{55} \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{M}_{02}] = [\mathbf{L}_1]^T [\mathbf{C}] [\mathbf{L}_2] = \begin{bmatrix} C_{16} & C_{12} & C_{14} \\ C_{66} & C_{26} & C_{46} \\ C_{56} & C_{25} & C_{45} \end{bmatrix},$$

$$[\mathbf{M}_{03}] = [\mathbf{L}_2]^T [\mathbf{C}] [\mathbf{L}_1] = \begin{bmatrix} C_{16} & C_{66} & C_{56} \\ C_{12} & C_{26} & C_{25} \\ C_{14} & C_{46} & C_{45} \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{M}_{04}] = [\mathbf{L}_2]^T [\mathbf{C}] [\mathbf{L}_2] = \begin{bmatrix} C_{66} & C_{26} & C_{46} \\ & C_{22} & C_{24} \\ \text{Sym.} & & C_{44} \end{bmatrix},$$

$$[\mathbf{M}_{41}] = [\mathbf{L}_1]^T [\mathbf{C}] [\mathbf{L}_3] = \begin{bmatrix} C_{15} & C_{14} & C_{13} \\ C_{56} & C_{46} & C_{36} \\ C_{55} & C_{45} & C_{35} \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{M}_{42}] = [\mathbf{L}_2]^T [\mathbf{C}] [\mathbf{L}_3] = \begin{bmatrix} C_{56} & C_{46} & C_{36} \\ C_{25} & C_{24} & C_{23} \\ C_{45} & C_{44} & C_{34} \end{bmatrix}.$$

$$[\mathbf{M}_{11}] = [\mathbf{M}_{41}] + [\mathbf{L}_3]^T [\mathbf{C}] [\mathbf{L}_1] = \begin{bmatrix} 2C_{15} & (C_{14} + C_{56}) & (C_{13} + C_{55}) \\ & 2C_{46} & (C_{36} + C_{45}) \\ \text{Sym.} & & 2C_{35} \end{bmatrix},$$

$$[\mathbf{M}_{12}] = [\mathbf{M}_{42}] + [\mathbf{L}_3]^T [\mathbf{C}] [\mathbf{L}_2] = \begin{bmatrix} 2C_{56} & (C_{46} + C_{25}) & (C_{36} + C_{45}) \\ & 2C_{24} & (C_{23} + C_{44}) \\ \text{Sym.} & & 2C_{34} \end{bmatrix},$$

$$[\mathbf{M}_2] = [\mathbf{L}_3]^T [\mathbf{C}] [\mathbf{L}_3] = \begin{bmatrix} C_{55} & C_{45} & C_{35} \\ & C_{44} & C_{34} \\ \text{Sym.} & & C_{33} \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{M}_3] = \begin{bmatrix} \rho & 0 & 0 \\ 0 & \rho & 0 \\ 0 & 0 & \rho \end{bmatrix},$$

Enfin, on obtient :

$$\begin{aligned} [\mathbf{M}_0] &= \begin{pmatrix} [\mathbf{M}_{01}] & [\mathbf{M}_{02}] \\ [\mathbf{M}_{03}] & [\mathbf{M}_{04}] \end{pmatrix}, \\ [\mathbf{M}_1] &= \begin{pmatrix} [\mathbf{M}_{11}] & [\mathbf{M}_{12}] \end{pmatrix}^T, \\ [\mathbf{M}_4] &= \begin{pmatrix} [\mathbf{M}_{41}] & [\mathbf{M}_{42}] \end{pmatrix}^T. \end{aligned}$$

#### 4.4 RÉSULTATS NUMÉRIQUES

Cette section présente la validation de la méthode SADG-FE en 2D. Tout d'abord, Les courbes de dispersion sont calculées analytiquement pour un cylindre droit homogène et isotrope. Les résultats sont comparés avec les solutions numériques. Ensuite, un cylindre fabriqué avec un matériau à gradient fonctionnel est analysé. Les résultats sont présentés et comparés avec les solutions analytiques obtenues en utilisant une approximation par un système multi-couches. Après, les calculs pour un tube anisotrope sont montrés et les résultats sont comparés à ceux de la méthode SAFE classique. Enfin, un exemple de guide d'ondes à section arbitraire (dans ce cas, un rail) et sa discrétisation en éléments d'ordres élevés sont présentés.

##### 4.4.1 Cylindre plein homogène isotrope

On considère un cylindre plein homogène et isotrope, de rayon  $a = 1mm$ . Les propriétés du matériau sont données dans le tableau (4.1). La forme bilinéaire globale est utilisée avec le facteur de pénalité  $\alpha = 30$  pour assurer la stabilité. Les courbes de dispersion sont calculées jusqu'à la fréquence  $f = 3$  MHz avec un pas de 100 kHz.

| $c_0$ (m/s) | $\rho$ (kg/m <sup>3</sup> ) | $E$ (GPa) | $\nu$ (-) |
|-------------|-----------------------------|-----------|-----------|
| 5188.74     | 7800                        | 210       | 0.3       |

TABLE 4.1 – Caractéristiques du cylindre en acier. La vitesse de la barre est  $c_0 = \sqrt{E/\rho}$ .

La section  $\mathcal{S}$  est maillée en  $n = 64$  éléments rectangulaires quadratiques incomplets à 8 nœuds (Q8), comme le montre la figure (4.3). Un maillage régulier est utilisé. Ainsi, les conditions minimales de discrétisation sont largement satisfaites. Pour des raisons de visibilité, seuls les modes se propageant vers la droite ( $k$  réel positif) sont présentés. Les résultats sont calculés via une implémentation de la méthode sur le logiciel MATLAB.

La figure (4.4) montre les courbes de dispersion de la vitesse de phase  $C_p$  en fonction de la fréquence. Les résultats numériques de la SADG-FE (point noirs) sont comparés avec les solutions analytiques (traits pleins). Ces dernières sont calculées en utilisant le logiciel PCDISP [57], basé sur la résolution de l'équation de dispersion analytique (A.11)

obtenue par la méthode de superposition des ondes partielles (voir section (1.3)). Les deux résultats sont en excellent accord.

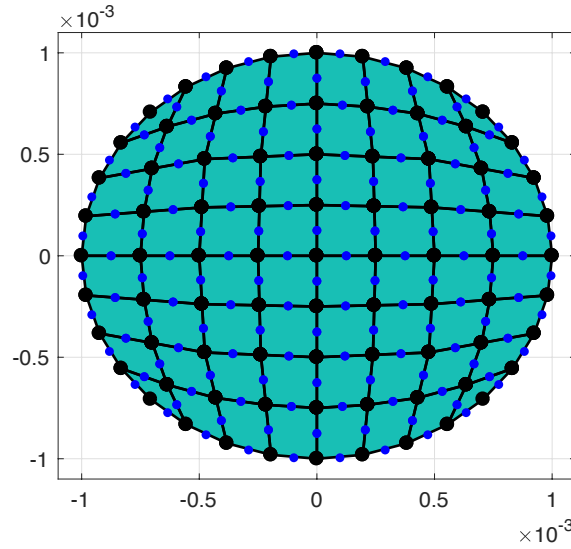


FIGURE 4.3 – Maillage régulier d'un disque de rayon  $a = 1\text{mm}$  en utilisant des éléments quadratiques (Q8).

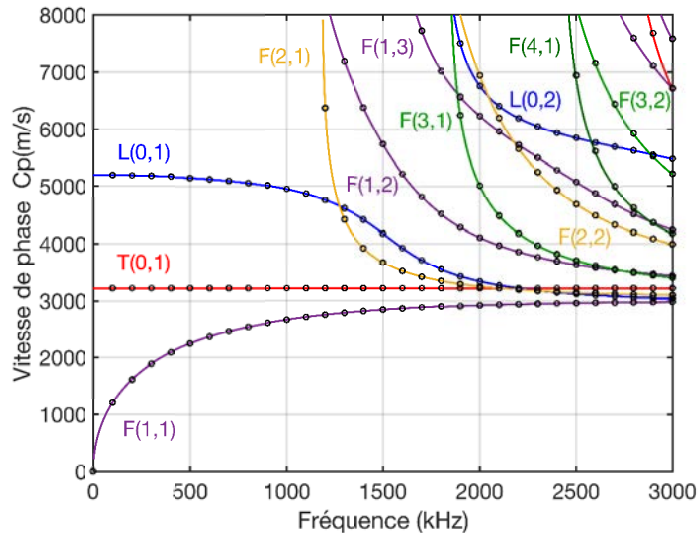


FIGURE 4.4 – Courbes de dispersion de la vitesse de phase  $C_p$  des modes de Pochhammer-Chree dans un cylindre plein en acier. Les résultats numériques du SADG-FE (points noirs) sont superposés aux résultats analytiques (traits pleins).

En ce qui concerne les modes non-propagatifs et inhomogènes, la figure (4.5) montre les courbes de dispersion analytiques obtenues par PCDISP [57]. Les modes non-propagatifs (points rouges) et inhomogènes (partie réelle en points violets et partie imaginaire en points verts) y sont montrés. Les résultats de la méthode SADG-FE sont tracés en cercles noirs. Une très bonne correspondance est également obtenue.

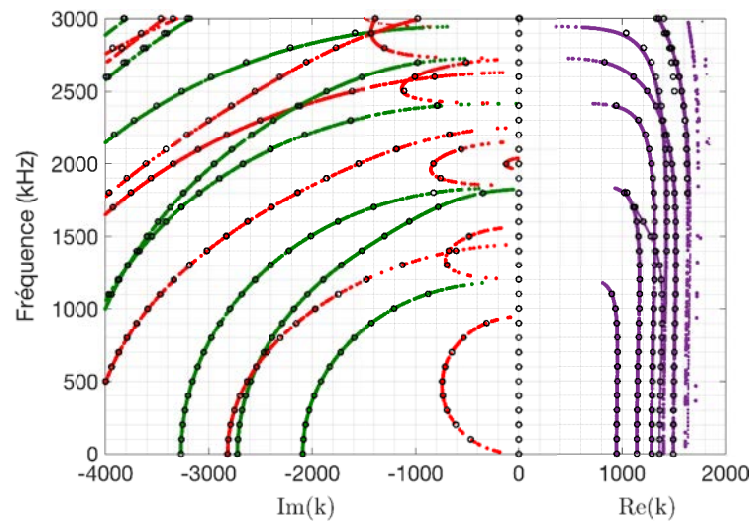


FIGURE 4.5 – Courbes de dispersion analytiques des modes non-propagatifs (points rouges) et inhomogènes (points violets et verts) d'un cylindre homogène et isotrope dans le plan complexe. Ces dernières sont comparées aux solutions numériques de la SADG-FE (cercles noirs).

#### 4.4.2 Cylindre plein à gradient fonctionnel

On considère un cylindre fabriqué d'un matériau à gradient fonctionnel, dont les propriétés varient radialement en fonction de l'épaisseur, comme illustré sur la figure (4.6).

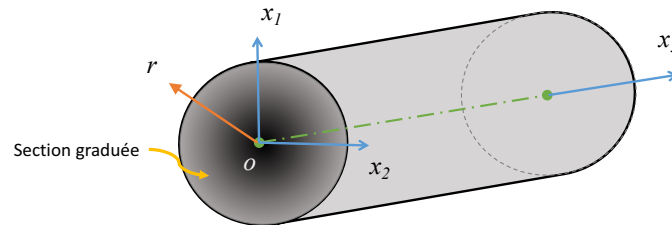


FIGURE 4.6 – Configuration géométrique et matérielle du guide d'ondes FGM cylindrique.

Le FGM est de type Métal-Céramique constitué de deux matériaux isotropes : l'acier et le silicone nitrure, respectivement. Les coefficients élastiques correspondants sont montrés dans le tableau (4.2). Cet FGM est généralement utilisé dans les environnements à forts gradients de température.

| Matériau         | $E$ (GPa) | $\nu$  | $\rho$ ( $\text{kg}/\text{m}^3$ ) |
|------------------|-----------|--------|-----------------------------------|
| Acier            | 207.82    | 0.3177 | 8166                              |
| Silicone nitrure | 322.4     | 0.240  | 2370                              |

TABLE 4.2 – Propriétés des matériaux : acier et silicone nitrure, utilisés pour le cylindre FGM.

Dans la littérature, les courbes de dispersion des tubes FGM ont été calculées en utilisant différentes méthodes : une approche polynômiale [229, 230] et le formalisme de Stroh [231]. Toutefois, dans le cadre de la méthode semi-analytique éléments finis, Han et

al. [133] ont utilisé une approximation par un système multi-couches annulaires. Dans ce travail, un cylindre plein est considéré. Le gradient de propriétés est représenté par une fonction continue sur toute la section et à l'intérieur de chaque élément (4.5)- (4.6). Les caractéristiques varient en fonction du rayon ( $r$ ) selon une loi de la forme :

$$C^{FGM}(r) = \left( C^{SiN} - C^{SS} \right) \left( \frac{r}{a} \right)^{P_p} + C^{SS}, \quad (4.8)$$

$C$  désigne une propriété du matériau ( $\rho$ ,  $E$  ou  $\nu$ ).  $P_p$  est le coefficient du gradient. Le matériau varie continuellement de l'acier inoxydable (SS) (au centre du cylindre) au Silicium Nitride (SiN) sur la surface extérieure.

Le disque de rayon  $a = 5 \text{ mm}$  est discrétisé en utilisant le même maillage dans la figure (4.3). Pour chaque élément de  $N_{ddl}$  nœuds de coordonnées  $\mathbf{x}^e = \{N_i(x_1^i, x_2^i), i = 1, 2, \dots, N_{ddl}\}$ , les valeurs des coefficients élastiques du matériau  $D_l$  de (4.5)- (4.6) sont calculées par rapport au rayon :

$$r(N_i) = \sqrt{(x_1^i)^2 + (x_2^i)^2}. \quad (4.9)$$

Le problème (4.3) est résolu pour une gamme de fréquence  $f = [0 \text{ } 1] \text{ MHz}$ , pour une distribution (4.8) linéaire de  $P_p = 1$ . Les solutions obtenues sont comparées avec les résultats analytiques calculés avec PCDISP [57] et numériques de la méthode SAFE classique calculés sur le logiciel GUIGUW [4]. Ces deux résultats de référence sont obtenus en utilisant une approximation par un système multi-couches, dont chacune d'elles est homogène. Le cylindre FGM est divisé en  $N$  éléments annulaires. Les propriétés de chaque anneau  $A_{i=1,\dots,N}$  sont calculées pour la moyenne de son rayon interne et externe. Les solutions numériques sont calculées pour  $N = 5$  anneaux, tandis que les solutions analytiques sont obtenues pour  $N = 50$  couches.

La figure (4.7) présente les courbes de dispersion de la vitesse de phase  $Cp$  en fonction de la fréquence. Les résultats de la méthode SADG-FE sont en cercles noirs. Les résultats analytiques sont tracés en lignes continues bleues et les résultats numériques de SAFE classique sont en points rouges. Une bonne concordance entre les différents résultats est observée.

#### 4.4.2.1 Discussion

Les résultats obtenus sont en bon accord avec ceux de la littérature. Le calcul des propriétés de dispersion est effectué de manière très efficace. De plus, grâce à une résolution via un problème aux valeurs propres, la méthode est stable et converge pour tous les modes en basses et en hautes fréquences.

À partir de la figure (4.5), on peut constater que la modélisation du FGM en utilisant un modèle stratifié permet d'obtenir une solution admissible. Toutefois, lorsqu'une

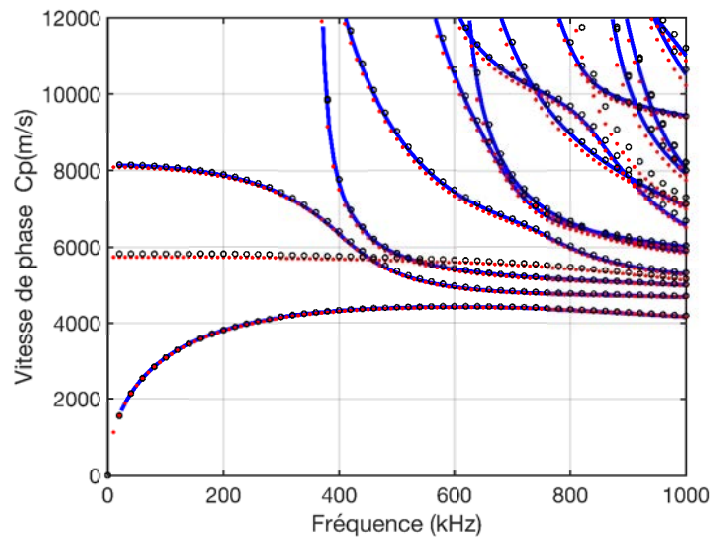


FIGURE 4.7 – Courbes de dispersion de la vitesse de phase  $C_p$  des modes propagatifs dans un cylindre FGM isotrope. Les résultats numériques du SADG-FE (cercles noirs) sont superposés aux résultats analytiques (traits pleins bleus) et ceux de la méthode SAFE (points rouges).

grande précision est demandée, un grand nombre de couches est nécessaire. Autrement, cela peut générer un champ de contraintes discontinu, qui peut ne pas simuler correctement les conditions réelles. En outre, ce modèle ne peut être utilisé que dans le cas d'un cylindre droit. En revanche, les solutions analytiques sont obtenues en utilisant des techniques de multiplications matricielles (voir section (1.3)). Ces dernières présentent des instabilités numériques et entraînent des solutions parasites (lignes manquantes sur la figure (4.5)).

La méthode proposée ici utilise une fonction continue qui représente le gradient effectif dans une section arbitraire. Par conséquent, les résultats sont précis, obtenus avec moins d'éléments et de temps de calculs par rapport aux autres méthodes étudiées. De plus, dans le contexte des éléments d'ordres élevés ( $p \geq 3$ ), elle permettra de représenter plus efficacement la variation des coefficients du milieu en utilisant moins d'éléments.

#### 4.4.3 Tubes anisotropes

Dans cette partie, un exemple de calcul des courbes de dispersion pour des guides d'ondes fabriqués en matériaux anisotropes est étudié. Ces derniers sont largement utilisés dans divers secteurs de l'ingénierie. On considère donc un tube anisotrope, de rayon interne  $a_1 = 2.5\text{mm}$  et de rayon externe  $a_2 = 5\text{mm}$ , constitué d'un alliage de zirconium M5 [5, 232, 233]. Ce dernier est une gaine métallique utilisée dans les réacteurs nucléaires. Elle est assujettie à des contraintes d'irradiation et de corrosion qui peuvent engendrer des endommagements de lourdes conséquences. Les techniques de contrôle non-destructif par ultrasons jouent un rôle primordiale dans le contrôle de leur état de santé.



Dans ce travail, l'alliage de zirconium M5 est considéré non-atténuant et homogène, d'une structure cristalline hexagonale [5]. La matrice d'élasticité (3.18) contient cinq constantes élastiques indépendantes. Les valeurs de ces constantes sont montrées dans le tableau (4.3).

$$[\mathbf{C}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & & C_{44} & 0 \\ \text{Sym.} & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

avec :  $C_{66} = (C_{11} - C_{12})/2$ .

| Matériau    | $\rho$ (kg/m <sup>3</sup> ) | $C_{11}$ | $C_{12}$ | $C_{13}$ | $C_{33}$ | $C_{44}$ |
|-------------|-----------------------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Zircaloy M5 | 6494                        | 145.6    | 70.2     | 70.8     | 170      | 21.9     |

TABLE 4.3 – Constantes élastiques  $C_{ij}$  (GPa) de l'alliage de zirconium M5 [5].

La propagation des ondes est considérée le long de l'axe principale  $\varphi = 0$ . Afin de réduire le nombre de modes à comparer, les calculs sont effectués jusqu'à une fréquence de  $f = 500$  kHz. La vitesse des ondes transversales est  $c_T = \sqrt{C_{66}/\rho}$ . Le maillage de la section  $S$  du tube est représenté sur la figure (4.8). Ce dernier est constitué de 128 éléments quadratiques complets, de type "Q9" (9 nœuds).

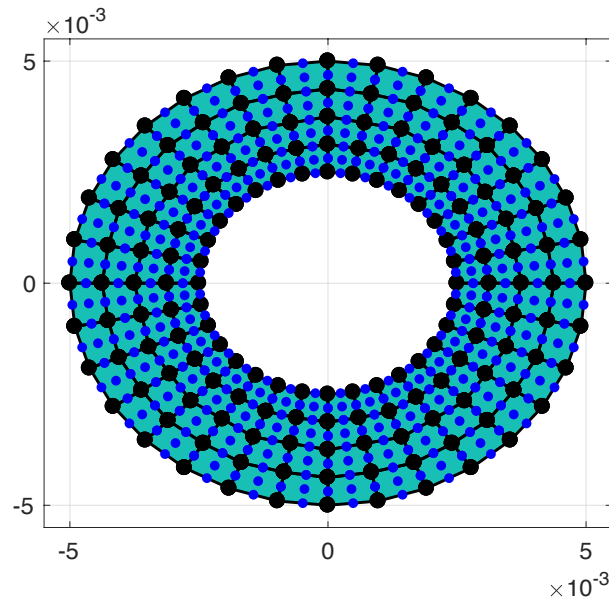


FIGURE 4.8 – Maillage régulier en deux dimensions de la section d'un tube de rayon interne  $a_1 = 2.5$  mm et de rayon externe  $a_2 = 5$  mm, en utilisant des éléments quadratiques complets à 9 nœuds.

La figure (4.9) montre les résultats obtenus de la vitesse de phase  $C_p$  en fonction de la fréquence en kHz. Les résultats de la méthode SADG-FE (cercles noirs) sont comparés avec les résultats de la méthode SAFE (points rouges) calculés sur GUIGUW [4]. Un bon accord est constaté.

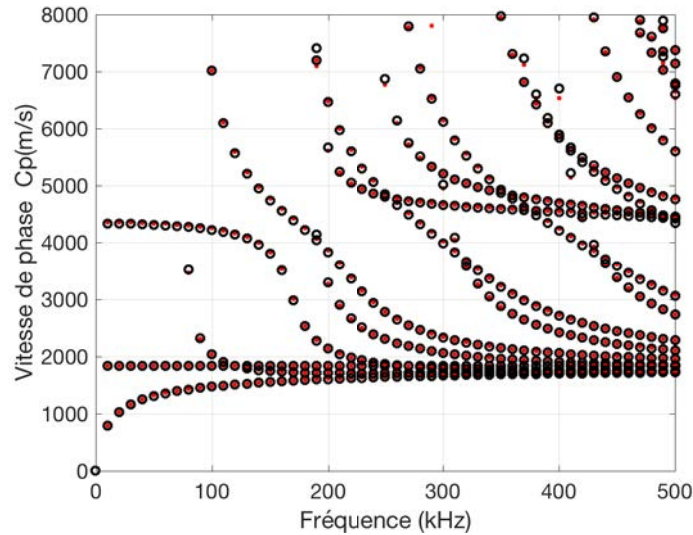


FIGURE 4.9 – Courbes de dispersion de la vitesse de phase  $C_p$  des modes propagatifs dans un tube anisotrope libre : les résultats numériques de la SADG-FE (cercles noirs) sont comparés aux résultats de la méthode SAFE classique [4] (points rouges).

#### 4.4.4 Guide d'onde à section arbitraire : le rail

Dans cette section, les courbes de dispersion pour un rail sont calculées. Actuellement, ces dernières ne peuvent pas être calculées analytiquement. En revanche, le rail a fait l'objet de plusieurs recherches [128, 129, 130, 234, 227]. La détermination des propriétés dispersives des ondes guidées dans le rail permet la conception des systèmes d'inspection et de surveillance de son état de santé [10, 11], ainsi que la réduction du bruit des trains dans le domaine de l'audible [103]. Les fréquences d'intérêt pour ces applications varient généralement entre 100 Hz et 50 kHz.

En effet, il existe un nombre important de profils de rails. Ici, on considère le cas d'un rail de type *Vignole* qui a la référence 60 E1 ou UIC 60. Celui-ci est largement utilisé dans les lignes du réseau ferroviaire trans-européen de grande vitesse [235]. Il est fabriqué en acier, homogène isotrope. Les mêmes propriétés du matériau du tableau (4.1) sont utilisées. La section transversale du rail est maillée en  $n = 44$  éléments rectangulaires, comme illustré dans la figure (4.10). L'ordre des éléments peut être choisi en fonction de la fréquence maximale de travail, tandis que la forme des éléments reste constante.

Il faut noter ici que les éléments d'ordres élevés sont utilisés. En effet, en considérant des éléments d'ordres  $p = 1$  ou  $2$ , un grand nombre d'éléments donc de degrés de liberté,

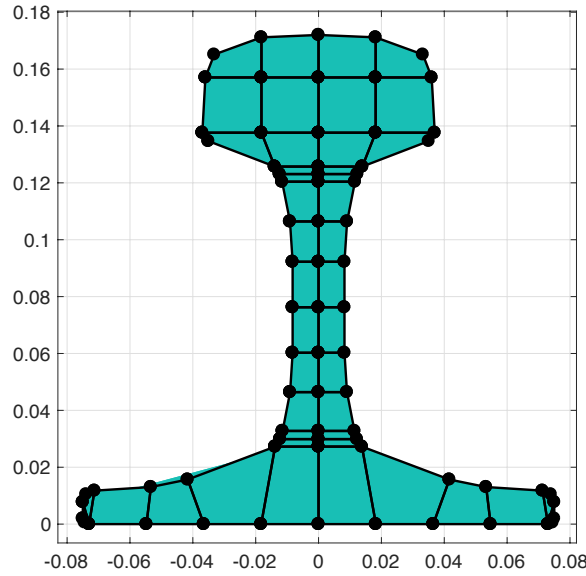


FIGURE 4.10 – Discretisation d'un rail 60 E1 en  $n = 44$  éléments quadrilatéraux pour une approximation d'ordre élevée.

est nécessaire pour représenter la géométrie du rail et satisfaire les conditions minimales de discrétisation. En revanche, les éléments d'ordre  $p \geq 3$  présentent l'avantage d'une très bonne précision de la représentation géométrique de la section et des résultats numériques. Toutefois, la génération de maillages d'ordres supérieurs de qualité satisfaisante reste compliqué ([236]).

Afin d'effectuer des calculs jusqu'à la fréquence de 25 kHz, on utilise des éléments d'ordre  $p = 3$ , "Q16". La figure (4.11) montre les courbes de dispersion de la vitesse de phase  $C_p$  en fonction de la fréquence en kHz. Les résultats de la méthode SADG-FE (cercles noirs) sont superposés aux résultats de la méthode SAFE classique [1] (lignes rouges). Ces derniers sont obtenus en utilisant le même contour de la section du rail (adimensionné) que sur la figure (4.10). Toutefois, la discrétisation est effectuée en utilisant  $n = 1672$  éléments triangulaires quadratiques "T6", à 6 nœuds.

La figure (4.12) montre deux modes de vibration de la section du rail et les nombres d'onde obtenus de la SADG-FE et de SAFE à la fréquence de 25 kHz. Ceux-ci correspondent aux déformées modales dans la direction de propagation  $x_3$ , c'est-à-dire la composante  $U_3(x_1, x_2)$ . Les amplitudes sont normalisées par rapport au maximum. Une très bonne correspondance entre les deux résultats est obtenue.

En effet, outre que l'identification des modes qui sont susceptibles de se propager dans le rail, la connaissance préalable des déformées modales est nécessaire pour concevoir l'approche appropriée d'excitation et de détection des ondes. Elles sont utilisées dans la

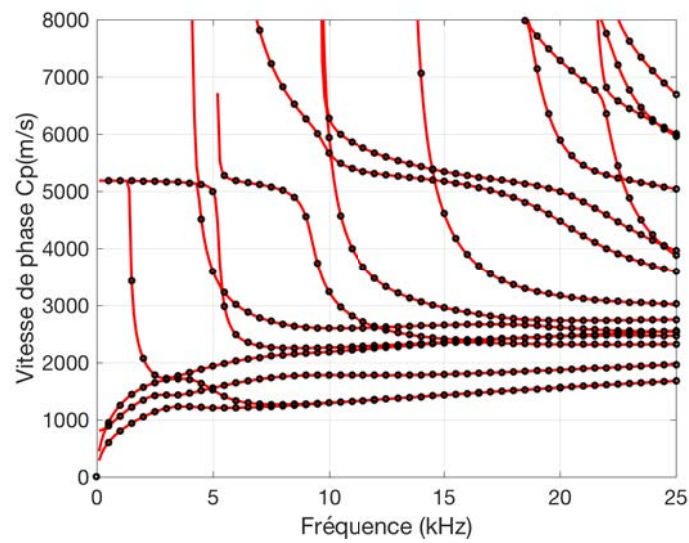
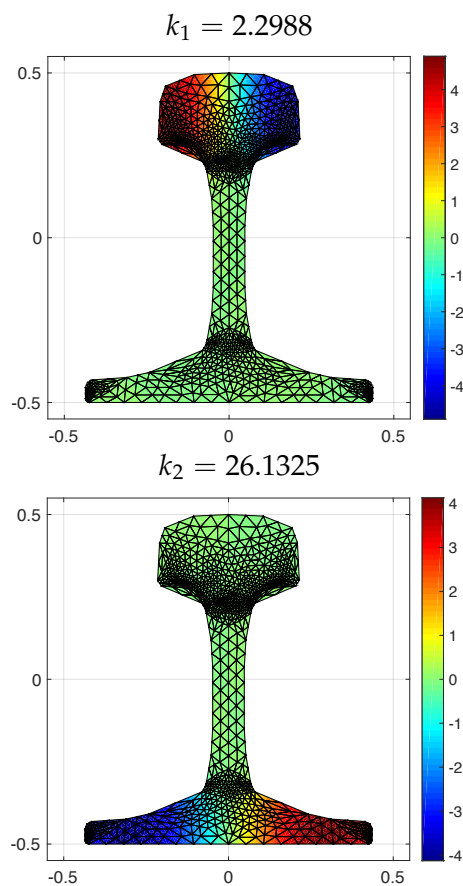


FIGURE 4.11 – Courbes de dispersion de la vitesse de phase  $C_p$  des modes propagatifs dans un rail homogène isotrope libre : les résultats numériques de la SADG-FE (cercles noirs) sont comparés aux résultats de la méthode SAFE classique [1] (lignes rouges).

(a) Solutions SAFE :



(b) Solutions SADG-FE :

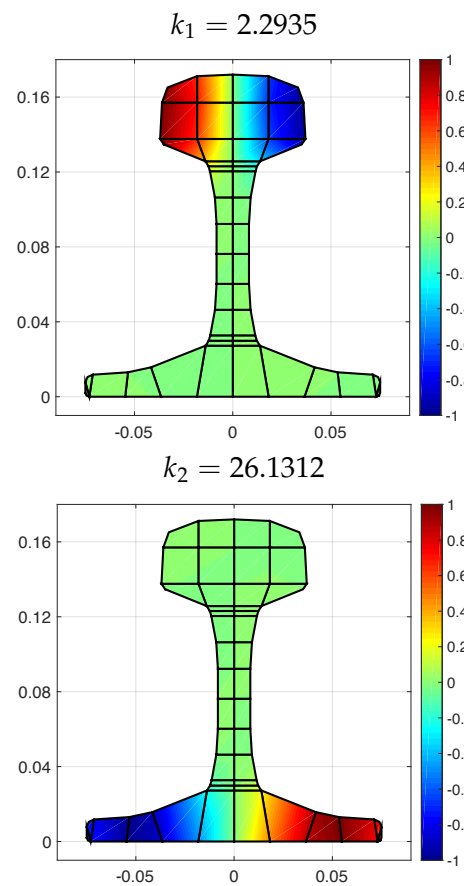


FIGURE 4.12 – Modes de vibration d'un rail à la fréquence de 25 kHz. Les déformées modales et les nombres d'ondes sont obtenus de : (a) la méthode SAFE et (b) la méthode SADG-FE.

pratique pour cibler les défauts à divers endroits dans la section. Par exemple, on peut voir sur la figure (4.12) que les modes excitent de préférence une certaine partie du rail. Le premier s'agit d'un mode de vibration du champignon tandis que le deuxième est un mode de vibration de la base. Ils sont symétriques par rapport à l'axe normal et peuvent être utilisés pour le contrôle des deux parties respectives. Par ailleurs, il existe d'autres modes plus complexes qui permettent de contrôler plusieurs parties au même temps.

## 4.5 CONCLUSION

Dans ce chapitre, le développement de la méthode SADG-FE en 2D pour le calcul des propriétés dispersives des ondes guidées dans des guides d'ondes à section arbitraire est montré. La formulation variationnelle et son implémentation sont étudiées. Plusieurs guides d'ondes fabriqués avec des matériaux complexes sont analysés. Ensuite, diverses simulations sont effectuées pour valider la méthode et montrer son potentiel effectif.

Tout d'abord, le cas d'un cylindre homogène isotrope et libre est analysé. Les résultats numériques obtenus sont en bonne concordance avec les solutions analytiques pour les différents modes : propagatifs, non-propagatifs et inhomogènes. Ainsi, la méthode est validée. Ensuite, un exemple d'un cylindre à gradient fonctionnel est analysé. Les résultats numériques de la SADG-FE sont présentés et comparés avec des solutions analytiques et numériques en utilisant la méthode SAFE classique. Ces derniers sont obtenus via une approximation par un système multi-couches. Les résultats montrent un excellent accord avec ceux issus des deux méthodes. La méthode proposée s'est montrée très convenable pour la modélisation des matériaux hétérogènes FGM. Grâce à l'interpolation des coefficients élastiques dans chaque élément, elle permet une représentation plus efficace du gradient effectif à travers la section. Ainsi, une très bonne précision peut être obtenue avec moins d'éléments et de temps de calculs. Après, les courbes de dispersion pour un tube anisotrope sont calculées. Les résultats sont comparés à ceux obtenus avec la méthode SAFE. Un bon accord est également constaté.

Enfin, dans le but d'évaluer le potentiel de la méthode, un guide d'ondes à section arbitraire à savoir le rail, est étudié. Les courbes de dispersion pour un rail homogène isotrope sont calculées et comparées avec ceux trouvées dans la littérature. En utilisant des éléments d'ordres élevés pour la discrétisation, la méthode s'est avérée très avantageuse par rapport à la méthode classique. Elle permet d'obtenir une grande précision en utilisant un maillage relativement grand. Ainsi, les opérations d'assemblage et les calculs sont plus rapides. Les ressources informatiques dédiées sont considérablement réduites.

# CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES

---

## 5.1 CONCLUSION

Ce travail de recherche est consacré au développement d'un outil de modélisation pour l'étude de la propagation des ondes guidées ultrasonores dans des guides d'ondes à section arbitraire constitués de matériaux complexes. Ces guides d'ondes se rapprochent de ceux qu'on utilise dans le domaine de transports.

Dans le premier chapitre, le contexte général et l'intérêt des ondes guidées pour le contrôle de l'état de santé des structures sont rappelés. Les caractéristiques et les problématiques de la propagation des ondes guidées sont exposées. Ensuite, un état de l'art sur les méthodes d'analyse : analytiques, numériques et hybrides, est présenté. L'étude bibliographique a permis d'identifier le besoin de développement de nouvelles approches permettant d'étudier des guides d'ondes à géométrie arbitraire constitués de matériaux complexes. Cela avec une grande précision et une consommation de ressources moindre. Les méthodes des éléments finis d'ordres élevés, en particulier la méthode de Galerkin discontinue, présente un bon candidat. Cette dernière possède d'excellentes propriétés de convergence, une grande précision, une flexibilité géométrique améliorée, une prédisposition au calcul parallèle et un meilleur traitement de discontinuités dans le milieu et du champ d'onde approché. Pour toutes ces raisons, le développement de la méthode semi-analytique éléments finis de Galerkin discontinue est proposé. Néanmoins, il a été constaté que la méthode de Galerkin discontinue est utilisée quasi-exclusivement dans le domaine temporel. De plus, son application dans le domaine fréquentiel - aux problèmes aux valeurs propres associés à l'approche semi-analytique - n'est pas trivial et nécessite une étude à part entière.

Le deuxième chapitre est dédié à l'étude de l'applicabilité d'une famille des méthodes DG, dites à pénalité intérieure (IPDG), aux problèmes aux valeurs propres avec des conditions aux limites libres. Afin de vérifier l'utilité et les performances de ces méthodes, des

problèmes simplifiés en une et en deux dimensions ont été étudiés, à savoir : les vibrations d'une barre mince libre et d'une membrane libre. Cette étude a montré, d'une part, que les méthodes IPDG fournissent une solution correcte et exempte des modes parasites. D'autre part, elle a démontré qu'une convergence optimale peut être obtenue avec moins d'éléments par rapport à la formulation continue. En outre, le système algébrique obtenu est plus adapté aux algorithmes de résolution en parallèle.

Dans le troisième chapitre, la méthode semi-analytique éléments finis de Galerkin discontinue est développée. La méthode est utilisée pour calculer les courbes de dispersion des ondes guidées dans les plaques. La formulation variationnelle et les détails de son implémentation en utilisant une approximation nodale via les éléments de Lagrange sont explicités. Plusieurs exemples de matériaux homogènes et hétérogènes (isotrope, anisotrope et à gradient fonctionnel) sont analysés. Les résultats numériques obtenus présentent un excellent accord avec ceux trouvés dans la littérature.

Le quatrième chapitre est dédié à la formulation générale de la méthode. Celle-ci est applicable à toute structure tridimensionnelle présentant une invariance géométrique et matérielle dans la direction de propagation de l'onde. Son implémentation, en particulier pour les FGM, est montrée. La validation est également effectuée en utilisant plusieurs types de guides d'ondes de géométries simples (cylindre homogène isotrope, cylindre hétérogène FGM, tube anisotrope) et à section arbitraire (rail).

La SADG-FE a montré des avantages par rapport aux méthodes classiques à savoir analytiques et numériques classiques. D'un côté, elle permet d'obtenir une précision élevée en utilisant un degré polynomial et un taux d'échantillonnage (longueur d'onde par rapport à la taille du maillage) plus faible. En outre, grâce à une résolution via un problème aux valeurs propres, la méthode a montré une stabilité numérique tant pour les petites que pour les grandes longueurs d'ondes. D'un autre côté, elle s'est révélée efficace pour modéliser des matériaux hétérogènes, en particulier lorsque les paramètres du milieu changent graduellement en fonction de l'épaisseur. La nature locale de la formulation permet une gestion plus pratique de la discontinuité et des conditions aux limites, ce qui engendre une approximation très précise à faible coût. De plus, elle permet d'optimiser les opérations d'assemblage des matrices de rigidité et une inversion plus efficace du problème aux valeurs propres.

Enfin, la méthode développée dans ce travail présente un outil performant, permettant de calculer les courbes de dispersion et les modes de vibration des ondes guidées dans diverses applications, avec une excellente précision et une réduction importante des temps de calculs.

## 5.2 PERSPECTIVES

### 5.2.1 Amélioration de la méthode et son implémentation

Le développement de la formulation semi-analytique peut être amélioré ainsi que son implémentation :

1. **Étudier la convergence de la méthode SADG-FE :** Dans le chapitre 2, il a été montré que le gain de la méthode dépend de la valeur des facteurs de pénalité, de l'ordre polynomial et de la nature du maillage. Il est donc intéressant d'effectuer une étude des propriétés spectrales dispersives et dissipatives de la méthode SADG-FE, pour les éléments rectangulaires, triangulaires et mixtes, afin d'optimiser le comportement de l'erreur.
2. **Utilisation de nouvelles techniques de maillage :** Contrairement à la méthode continue, la méthode de Galerkin discontinue possède une très grande flexibilité géométrique. Dans un même maillage, les éléments peuvent être de degré polynomial et de nature totalement différentes, afin d'approcher au mieux le domaine de calcul. Dès lors, des techniques de maillages adaptées aux éléments d'ordres élevés peuvent être mises en œuvre afin de modéliser les géométries complexes.
3. **Étudier l'influence de la distribution nodale des éléments :** La méthode SADG-FE permet une convergence spectrale de  $2p + 2$ . Cependant, lorsque l'erreur atteint les alentours de  $10^{-10}$ , aucune amélioration supplémentaire n'est observée. La raison est conjecturée d'être une conséquence des éléments de Lagrange avec des points équidistants et de la quadrature de Gauss utilisés [179]. Pour cette raison, une étude de l'influence de la distribution nodale des éléments et des points de la méthode d'intégration sur les propriétés de convergence est nécessaire.
4. **Analyser la méthode de Galerkin discontinue *Hybridisable* :** L'inconvénient majeur de la méthode discontinue est le dédoublement des degrés de liberté. Toutefois, il peut être surmonté en utilisant une nouvelle variante de la méthode discontinue appelée *Hybridisable* [202]. Il serait donc souhaitable d'étudier son implémentation dans le cadre de la méthode SADG-FE.
5. **Parallélisation des calculs :** On peut envisager une implémentation de la méthode en utilisant des bibliothèques d'éléments finis libres supportant la méthode de Galerkin discontinue telles que Fenics-Project et GetFem++. On peut également développer une application à part entière (*Standalone*) en utilisant des langages de programmation orientés objet tels que le C++ et Python. Ceux-ci contiennent des bibliothèques pour le calcul parallèle.

### 5.2.2 Développement de la méthode SADG-FE pour le contrôle santé intégré

Le développement de la méthode SADG-FE pour le contrôle santé intégré et l'interaction onde-endommagement nécessite des études supplémentaires, à savoir :



1. **Les guides d'ondes complexes** : étudier l'excitabilité, la vitesse de l'énergie et le vecteur de Poynting. Modéliser les guides d'ondes viscoélastiques. Étendre le modèle pour les guides d'ondes périodiques [138, 148]. Développer le modèle 1D simplifié pour les guides axi-symétriques [139]. Analyser les guides enrobés dans un milieu infini [143, 144]. Étudier les guides d'ondes hélicoïdaux et coudés [146], viscoélastiques précontraints [147]. Calculer la réponse forcée suite à une excitation transitoire [237, 140].
2. **Interaction onde-endommagement** : Afin d'étudier l'interaction des ondes guidées avec les endommagements, le développement d'une méthode hybride est nécessaire. Dans la littérature [1, 3], la méthode SAFE-FEM peut être exploitée afin de développer une méthode hybride SADG-FEM.

# **Annexes**



# ONDES ÉLASTIQUES DANS LES PLAQUES ET LES CYLINDRES HOMOGÈNES ISOTROPES

A

## A.1 INTRODUCTION

Les ondes ultrasonores sont des ondes mécaniques, acoustiques ou élastiques, causées par une perturbation d'un milieu matériel et qui se propagent dans le temps et l'espace. Elles sont généralement dans la gamme de fréquences inaudibles allant de 20 kHz à quelques dizaines de GHz. Elles sont utilisées dans des domaines variés et elles ont de nombreuses applications qui varient en fonction de la fréquence [238].

Dans le domaine du CND, les ondes utilisées sont généralement des ondes élastiques dans la gamme de fréquence comprise entre 10 kHz et 50 MHz. Il existe plusieurs classifications de ces ondes selon le milieu dans lequel elles se propagent. De façon générale, on peut distinguer deux types : les ondes longitudinales et les ondes transversales. Elles sont dites ondes de volumes. Sous certaines conditions liées aux dimensions de la structure ou de la configuration de leur génération, d'autres types d'ondes sont générées, notamment les ondes de plaques (symétriques, antisymétriques ou de cisaillement), les ondes cylindriques (de compression, de flexion ou de torsion) ou encore des ondes de surface, etc. Cette annexe a pour but de présenter une brève description des équations principales décrivant les ondes guidées dans les plaques et les cylindres homogènes et isotropes.

## A.2 ONDES GUIDÉES DANS LES PLAQUES

Considérons une plaque homogène isotrope d'épaisseur constante  $2d$ , de dimensions latérales infinies, comme le montre la figure (A.1). Lorsque l'épaisseur est inférieure ou égale à la longueur d'onde, la propagation des ondes devient dispersive. Les ondes de volume donnent lieu à des ondes guidées. Ces dernières se découpent en deux catégories : ondes de Lamb et les ondes SH.

### A.2.1 Modes de Lamb

On considère la propagation dans l'épaisseur suivant l'axe  $x_3$ . On utilise la méthode des potentiels [35], valable uniquement dans le cas des matériaux isotropes. L'hypothèse de déformation plane et de l'invariance du guide dans la direction perpendiculaire conduisent à chercher des solutions indépendantes de la variable  $x_2$ .

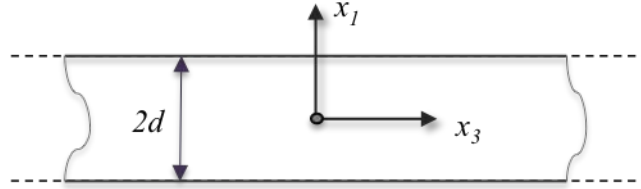


FIGURE A.1 – Plaque homogène isotrope d'épaisseur  $2d$  et de dimensions latérales infinies.

Dés lors, les solutions recherchées sont de la forme des fonctions harmoniques dans la direction de propagation  $e^{+ikx_3}$ . Ces solutions sont injectées dans le système (1.8a-1.8a). Quand elles sont associées aux conditions aux limites de surfaces libres (contraintes nulles en  $x_1 = \pm d$ ), les expressions analytiques des composantes du champ de déplacement  $(\hat{u}_1, \hat{u}_3)$  sont déduites

$$\begin{aligned}\hat{u}_1 &= [-Ap \sin(px_1 + \alpha) + ikB \sin(qx_1 + \alpha)] e^{+ikx_3}, \\ \hat{u}_3 &= ikA \cos(px_1 + \alpha) [-qB \cos(qx_1 + \alpha)] e^{+ikx_3},\end{aligned}\tag{A.1}$$

et le système linéaire homogène suivant est obtenu

$$\begin{cases} (k^2 - q^2)A \cos(pd + \alpha) + 2ikqB \cos(qd + \alpha) = 0, \\ (q^2 - k^2)B \sin(qd + \alpha) - 2ikpA \sin(pd + \alpha) = 0, \end{cases}\tag{A.2}$$

avec  $\alpha = 0, \alpha = \pi/2$  pour les modes de Lamb symétriques et antisymétriques, respectivement. Les coefficients  $A$  et  $B$  représentent les amplitudes.  $p$  et  $q$  sont définis tels que :

$$p^2 = \frac{\omega^2}{c_L^2} - k^2, \quad q^2 = \frac{\omega^2}{c_T^2} - k^2.\tag{A.3}$$

L'homogénéité de ce système d'équations implique l'annulation du déterminant des coefficients  $A$  et  $B$ . Le système se réduit donc à l'équation

$$-(k^2 - q^2)^2 \cos(ph + \alpha) \sin(qh + \alpha) - 4k^2qp \cos(qh + \alpha) \sin(ph + \alpha) = 0,\tag{A.4}$$

qui, après simplification, peut également s'écrire sous la forme suivante :

$$\frac{\omega^4}{c_T^4} = 4k^2q^2 \left[ 1 - \frac{p \tan(ph + \alpha)}{q \tan(qh + \alpha)} \right].\tag{A.5}$$

Cette équation constitue une relation entre la fréquence angulaire  $\omega$  et le nombre d'onde  $k$ . Elle permet de déterminer les nombres d'ondes, et donc les vitesses à lesquelles

les ondes sont susceptibles de se propager à une fréquence donnée. Autrement dit, elle exprime la relation de dispersion des modes de Lamb et elle est souvent indiquée comme l'équation fréquentielles de Rayleigh-Lamb. En injectant les solutions du nombre d'onde dans (A.1), les allures des déplacements peuvent être déterminées.

Bien qu'elle apparait simple, elle est insoluble analytiquement et nécessite impérativement l'utilisation des méthodes numériques. Ces dernières sont généralement basées sur les algorithmes de recherche des racines d'une fonction tels que : Newton-Raphson, la bisection, sécante, etc. Dans ce travail, les courbes de dispersion analytiques sont obtenues par un programme de suivi numérique des racines adapté des travaux [239, 240].

Les couples  $(\omega, k)$  pour lesquels il existe des solutions non-triviales décrivent des courbes que l'on appelle les courbes de dispersion. Pour chaque valeur de  $\omega$  réelle, les solutions  $k$  peuvent être réelles (modes propagatifs), imaginaires pures (modes évanescents) ou encore complexes (modes inhomogènes).

#### A.2.1.1 Modes propagatifs

Lorsque les solutions  $k = |k_r|$  sont réelles, les déplacements peuvent être réécrites tels que :

$$\mathbf{u} = A\mathbf{U}(x_1)e^{i(k_r x_3 - \omega t)},$$

où  $A$  est un coefficient d'amplitude. Les déplacements sont une fonction sinusoïdale à la fois dans l'espace et le temps. Ainsi, les ondes de Lamb sont propagatifs. Pour une plage de fréquences donnée, il existe un nombre fini de ce type de solutions et elles constituent des branches correspondants aux différents modes symétriques (S) et antisymétriques (A).

#### A.2.1.2 Modes non-propagatifs et inhomogènes :

Quant aux solutions complexes  $k = |k_r| + i|k_m|$ , les déplacements deviennent :

$$\mathbf{u} = A\mathbf{U}(x_1)e^{i(k_r x_3 - \omega t)}e^{-k_m x_3}.$$

Cette forme fait apparaître un facteur d'atténuation  $e^{-k_m x_3}$ . Les déplacements montrent alors une décroissance exponentielle dans la direction  $x_3$  et les valeurs des nombres d'onde expriment le taux de cette décroissance. Par conséquent, lorsque les solutions sont purement imaginaires, les modes correspondants peuvent être interprétés comme étant des modes évanescents qui restent confinés à proximité des bords et s'atténuent ailleurs en fonction de la distance, i.e. solutions en champ proche. Du coup, ils sont des modes de Lamb non-propagatifs. Ils forment des boucles imaginaires d'une structure en tresses entrelacées reliant les modes propagatifs les uns aux autres à travers les fréquences de coupures. Pour une plage de fréquences donnée, il existe un nombre fini de ce type de solutions.

En revanche, lorsqu'elles présentent une partie réelle, elles peuvent être distinguées comme des ondes se propageant avec une variation sinusoïdale modulée par une fonction exponentielle décroissante. Ces ondes sont généralement caractérisées par une partie imaginaire très importante et divergente, tandis que la partie réelle reste faible et limitée.

### A.2.2 Modes SH

À l'encontre de l'analyse des ondes de Lamb, seule la composante  $\hat{u}_2$  du champ de déplacement est d'intérêt. En raison du découplage des composantes, l'élimination de  $(\hat{u}_1, \hat{u}_3)$  de l'équation (1.5) engendre l'équation d'onde scalaire gouvernant la propagation des ondes SH. En considérant une solution harmonique  $e^{+ikx_3}$ , elle s'écrit :

$$\frac{\partial^2 \hat{u}_2}{\partial x_1^2} + q^2 \hat{u}_2 = 0. \quad (\text{A.6})$$

En tenant en compte la condition de bords libres  $\frac{\partial \hat{u}_2}{\partial x_1}(\pm d) = 0$ , la résolution de cette équation permet de déduire les déformées modales et la relation de dispersion. Il existe une infinité de solutions telles que :

$$\hat{u}_2 = A \cos\left(\frac{m\pi}{2d}(x_1 + d)\right) \text{ où } m \in \mathbb{N}, \quad (\text{A.7})$$

avec :

$$\omega^2 = c_T^2 \left[ k^2 + \left( \frac{m\pi}{2d} \right)^2 \right]. \quad (\text{A.8})$$

Ces solutions peuvent être soit réelles (modes propagatifs), soit imaginaires pures (non-propagatifs). De même, elles sont classées en modes symétriques et anti-symétriques : les modes d'indices  $m$  pair correspondent au type S tandis que les nombres impairs représentent les modes A. Le mode propagatif fondamental  $SH_0$  est non dispersif. Le reste des modes sont dispersifs et ils possèdent une partie non-propagative connectée aux fréquences de coupure dans l'axe  $k = 0$ . Cette relation de dispersion est semblable à celle des guides d'ondes unidimensionnels (1D), l'exemple d'une barre mince traité dans le Chapitre 2.

## A.3 ONDES GUIDÉES DANS LES CYLINDRES

De manière analogue aux ondes guidées dans les plaques, on considère un cylindre libre, homogène et isotrope, de longueur infinie et de géométrie circulaire de rayon  $a$ . Dès lors que les longueurs d'ondes de volume sont du même échelle que le rayon, la propagation donne naissance aux ondes guidées dites de Pochhammer-Chree. Elles présentent certaines ressemblances avec les ondes de Lamb, hormis que la fermeture de la section engendre un couplage des ondes transversales horizontales et créent un mouvement de torsion. Les modes guidés dans les cylindres peuvent être classés en trois catégories : les modes longitudinaux de compression (L), de flexion (F) et de torsion (T).

L'analyse de la propagation dans telles structures est de même ordre que pour les plaques. La résolution de l'équation de mouvement tenant compte des conditions aux limites et la géométrie du guide permet de tracer les caractéristiques de la propagation guidées.

### A.3.1 Équations de dispersion

En raison de l'uniformité de la section du guide, le système des coordonnées cylindriques ( $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ ,  $\theta = \arctan\left(\frac{x_1}{x_2}\right)$ ,  $x_3$ ) est adopté. L'équation de mouvement (1.5) est traduite en coordonnées cylindriques. En utilisant la décomposition de Helmholtz, le système (1.8a-1.8b) devient un système d'équations différentielles de Bessel. Les solutions recherchées sont considérées de la forme harmonique dans la direction de propagation  $e^{+ikx_3}$ . La substitution de ces solutions dans la loi de Hook permet de déduire les composantes du champ de déplacements dans le cas général [37, 38] :

$$\begin{aligned}\hat{u}_r &= U_r \begin{bmatrix} \cos(n\theta) \\ \sin(n\theta) \end{bmatrix} e^{+ikx_3} \\ \hat{u}_\theta &= V_r \begin{bmatrix} -\sin(n\theta) \\ \cos(n\theta) \end{bmatrix} e^{+ikx_3} \\ \hat{u}_3 &= W_r \begin{bmatrix} \cos(n\theta) \\ \sin(n\theta) \end{bmatrix} e^{+ikx_3}\end{aligned}\tag{A.9}$$

avec :

$$\begin{aligned}U_r &= ApJ'_n(pr) + \frac{n}{r}BJ_n(qr) + ikCJ_{n+1}(qr), \\ V_r &= -\frac{n}{r}AJ_n(pr) + ikBJ_{n+1}(qr) - CqJ'_n(qr), \\ W_r &= ikAJ_n(pr) - BqJ'_{n+1}(qr) - \frac{n+1}{r}CJ_{n+1}(qr),\end{aligned}\tag{A.10}$$

où  $A, B$  et  $C$  sont des coefficients arbitraires d'amplitudes,  $J_n(\cdot)$  sont les fonctions de Bessel de première espèce et  $n$  est un nombre entier permettant la détermination des types des modes.

L'association de ces solutions avec les conditions aux limites libres à  $r = a$  conduit à la construction d'une matrice  $\mathbf{M}$  de dimension  $3 \times 3$ , dont les éléments sont définis dans les travaux de Graff [38]. L'annulation de son déterminant permet d'obtenir l'équation générale de dispersion [29] :

$$|M(p, q, n)| = 0, \quad i, j = 1, 2, 3.\tag{A.11}$$

Le choix de la variable  $n$  mène à une multitude d'équations de dispersion particulières. Lorsque  $n = 0$ , les modes longitudinaux et les modes de torsion sont identifiés. Autrement, pour  $n \geq 1$ , ils sont qualifiés de modes de flexion.



### A.3.2 Modes longitudinaux

La vibration décrite par (A.9), lorsque  $n = 0$  pour le premier ensemble, se réduit à la composante  $\hat{u}_r$  et  $\hat{u}_3$ , la composante  $\hat{u}_\theta = 0$ . Les modes résultants sont alors des ondes de compression axisymétriques ( $\sin(n\theta) = 0$ ) de type axial-radial. Ils sont indicés  $L(n = 0, m)$  avec  $m \geq 1$  faisant référence à leur ordre d'apparition. Le déterminant (A.11) se réduit en deux facteurs. Le premier facteur, après simplification et réarrangement, donne l'équation de dispersion dite de Pochhammer-Chree :

$$\frac{2p}{a}(q^2 + k^2)J_1(pa)J_1(qa) - (q^2 - k^2)J_0(pa)J_1(qa) - 4k^2pqJ_1(pa)J_0(qa) = 0. \quad (\text{A.12})$$

Pareil à l'équation de Rayleigh-Lamb, les solutions peuvent être réelles (propagatifs), purement imaginaires (non-propagatifs) ou complexes (inhomogènes). Ils ont un comportement similaire à celui des modes symétriques.

### A.3.3 Modes de torsion

En revanche, l'ensemble inférieur de (A.9) décrit les ondes de torsion. La composante circonférentielle  $\hat{u}_\theta \neq 0$  est la seule non nulle,  $\hat{u}_r = \hat{u}_3 = 0$ . Ces ondes constituent des modes axisymétriques correspondants à des mouvements de rotation de chaque section transversale autour de l'axe du cylindre. Ils sont indicés  $T(n = 0, m)$  avec  $m \geq 1$ . Le deuxième facteur résultant de la factorisation de (A.11) donne l'équation de dispersion des modes de torsion :

$$qaJ_0(qa) - 2J_1(qa) = 0. \quad (\text{A.13})$$

Le premier mode  $T(0, 1)$  n'est pas dispersif et leur spectre est semblable au modes SH dans les plaques.

### A.3.4 Modes de flexion

Enfin, à l'encontre des modes longitudinaux et de torsion, les modes de flexions ( $n \geq 1$ ) sont décrits par toutes les composantes du champ de déplacement (A.9) et ils ne présentent pas d'axisymétrie. Ils sont notés  $F(n, m)$  avec  $m \geq 1$ . Parmi la grande famille des ondes de flexion, les modes d'ordre  $n = 1$  sont les plus étudiés et qualifiés d'ordinaires. Leur comportement est équivalent à celui des modes antisymétriques dans les plaques. De l'autre côté, les modes d'ordres supérieurs  $n \geq 2$  sont reconnus comme modes circonférentiels et ils n'ont pas d'homologues dans les plaques. En outre, les calculs des équations de dispersion sont beaucoup plus compliqués.

# IMPLÉMENTATION DE LA MÉTHODE DE GALERKIN DISCONTINUE À PÉNALITÉ INTÉRIEURE

B

## B.1 INTRODUCTION

Les méthodes de Galerkin discontinues ont été développées pour la première fois pour résoudre les problèmes hyperboliques et paraboliques [188, 241, 242]. Dès lors, vu son potentiel démontré dans ce domaine, plusieurs travaux de recherche ont été menés indépendamment afin d'étendre son application aux autres types de problèmes notamment de type elliptique.

L'extension à ce type de problèmes, avec des opérateurs de second ordre, a été lancée par la méthode dite de Bassi-Rebay [243]. Elle consiste en la réécriture de l'opérateur du 2<sup>nd</sup> ordre en un système d'équations du premier ordre. Cela a conduit à l'introduction de la méthode discontinue dite mixte ou Locale (LDG) [244]. Ensuite, une formulation alternative directe, dite de forme primale de Oden-Babuska-Baumann (OBB), a été proposée [245, 246]. Cette dernière est basée sur des méthodes dites à pénalisation internes mises au point bien longtemps avant qu'elles soient associées à la DG-FEM. Ultérieurement, associées à la DG, elles ont été regroupées dans une classe de méthodes discontinues dites à pénalité intérieure (IPDG).

Enfin, ces méthodes diffèrent principalement dans leur traitement des flux numériques utilisés pour communiquer l'information aux interfaces. Plus tard, ces méthodes (pénalité intérieure, Galerkin discontinue local, etc.) ont été regroupées et étudiées d'une manière générale pour unifier leur analyse dans les travaux de Arnold [186].

Cet annexe présente les détails de l'implémentation de la méthode à pénalité intérieure pour le problème de Laplace. Ceci est effectué en suivant l'approche donnée dans [247, 184], en utilisant une approximation nodale en 1D et 2D, pour des éléments linéiques, quadrilatéraux et triangulaires.

## B.2 FORMULATION VARIATIONNELLE

### B.2.1 Description du problème

Considérons le problème elliptique général défini tel que :

$$\nabla \cdot (\mathbf{C} \nabla u) + k^2 u = f \quad \text{sur } \mathcal{I}, \quad (\text{B.1a})$$

$$u = g_D \quad \text{sur } S_D, \quad (\text{B.1b})$$

$$(\mathbf{C} \nabla u) \cdot \mathbf{n} = g_N \quad \text{sur } S_N, \quad (\text{B.1c})$$

où  $k$  exprime le nombre d'onde de l'équation d'Helmholtz,  $u$  est le déplacement.  $\mathbf{C}$  est une matrice de coefficients variables ou constants du milieu.  $\mathbf{n}$  est le vecteur normal sortant sur les frontières  $\partial \mathcal{I}$  du domaine  $\mathcal{I}$ ,  $f$  est le terme de forces ou de sollicitations externes.  $g_D$  et  $g_N$  représentent les conditions aux limites de Dirichlet et de Neumann respectivement, sur les frontières  $(S_D, S_N) \in \partial \mathcal{I}$ .

### B.2.2 Formulation variationnelle générale

Soit le domaine de calcul  $\mathcal{I}_h$  un maillage de  $\mathcal{I} \in \mathbb{R}^{d=1,2,3}$ , composé d'un ensemble d'éléments  $E$ , avec les frontières  $\partial \mathcal{I}$ . On définit  $\Gamma_h$  l'ensemble des frontières inter-éléments  $\Gamma$ . Soit  $\{v(\mathbf{x}); \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in E_j\}$  une fonction test ou de pondération. Le schéma IPDG général appliqué au problème (B.1) s'écrit : chercher  $u \in \mathcal{D}_p(\mathcal{I}_h)$  tel que :

$$\forall v \in \mathcal{D}_p(\mathcal{I}_h), \quad a_\epsilon(u, v) = \mathcal{L}(v), \quad (\text{B.2})$$

où la forme bilinéaire  $a_\epsilon(u, v)$  et la forme linéaire  $\mathcal{L}(v)$  sont respectivement définies telles que :

$$\begin{aligned} a_\epsilon(u, v) &= \sum_{E \in \mathcal{I}_h} \int_E (\mathbf{C} \nabla u \cdot \nabla v - k^2 uv) \, d\mathbf{x} - \sum_{\Gamma \in \Gamma_h \cup \Gamma_D} \int_\Gamma \{ \mathbf{C} \nabla u \cdot \mathbf{n}_\Gamma \} \llbracket v \rrbracket \, ds \\ &\quad + \epsilon \sum_{\Gamma \in \Gamma_h \cup \Gamma_D} \int_\Gamma \{ \mathbf{C} \nabla v \cdot \mathbf{n}_\Gamma \} \llbracket u \rrbracket \, ds + \sum_{\Gamma \in \Gamma_h \cup \Gamma_D} \int_\Gamma \frac{\alpha}{|e_\Gamma|^{\beta_0}} \llbracket u \rrbracket \llbracket v \rrbracket \, ds \\ &\quad + \sum_{\Gamma \in \Gamma_h} \int_\Gamma \frac{\gamma}{|e_\Gamma|^{\beta_1}} \llbracket \nabla u \cdot \mathbf{n}_\Gamma \rrbracket \llbracket \nabla v \cdot \mathbf{n}_\Gamma \rrbracket \, ds, \\ \mathcal{L}(v) &= \sum_{E \in \mathcal{I}_h} \int_E f v \, d\mathbf{x} - \sum_{\Gamma \in \Gamma_D} \int_\Gamma \left( \epsilon \mathbf{C} \nabla v \cdot \mathbf{n}_\Gamma - \frac{\alpha}{|e_\Gamma|^{\beta_0}} v \right) g_D \, ds + \sum_{\Gamma \in \Gamma_N} \int_\Gamma g_N v \, ds. \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

$\epsilon$ ,  $\alpha$  et  $\gamma$  sont les paramètres de pénalisation.  $\beta_0$  et  $\beta_1$  sont des nombres positifs dépendant de la dimension  $d$ . La variable  $|e_\Gamma|$  est la dimension caractéristique de la frontière  $\Gamma$  (longueur de l'élément en 1D et du bord en 2D).

Dans la suite, nous considérons le problème aux valeurs propres de Laplace correspondant à (B.3) avec  $\mathbf{C} = 1$  et  $(g_N = 0, g_D = \emptyset)$ .

### B.3 IMPLÉMENTATION NODALE

L'implémentation est effectuée à l'aide des approximations nodales, en particulier les éléments de type Lagrange qui ont démontré d'excellentes performances dans des applications d'élastodynamique [194].

#### B.3.1 Approximation nodale

Dans chaque élément  $E_j$ , la solution locale exacte est approchée, dans le sens de Galerkin, par une solution numérique exprimée par une interpolation nodale :

$$u^{(j)}(\mathbf{x}) = \sum_{l=0}^{N_{ddl}} P_l(\mathbf{x}) U_l^{(j)} = \mathbf{P} \tilde{\mathbf{U}}^{(j)}, \quad (\text{B.4})$$

appartenant au même espace  $\mathbb{P}_p(E_j)$  que  $v = \mathbf{P}^T$ .  $N_{ddl}$  est le nombre de degrés de liberté de l'élément considéré.  $\{P_l(\mathbf{x}), l = 0, 1, \dots, N_{ddl}\}$  sont les polynômes d'interpolation d'ordre  $p$  correspondants.  $\tilde{\mathbf{U}}^{(j)}$  est le vecteur des variables nodales de l'élément  $E_j$  correspondant au champ  $u$ .

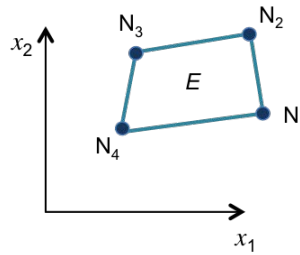


FIGURE B.1 – Quadrangle (2D) à quatre nœuds.

A titre d'exemple, pour un élément rectangulaire linéaire (2D) à 4 nœuds ( $N$ ) montré dans la figure (B.1), de coordonnées  $\mathbf{x}^e = \{N_i(x_1^i, x_2^i), i = 1, 2, 3, 4\}$ , l'approximation de la solution élémentaire sur ce dernier s'écrit :

$$u^j(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} P_1(\mathbf{x}^e) & P_2(\mathbf{x}^e) & P_3(\mathbf{x}^e) & P_4(\mathbf{x}^e) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U_1^{(j)} \\ U_2^{(j)} \\ U_3^{(j)} \\ U_4^{(j)} \end{pmatrix}$$

Trois éléments iso-paramétriques sont considérés dans cette thèse : linéiques, triangulaires et quadrilatéraux à bords droits de type Lagrange. La logique derrière l'utilisation de ces éléments est leur simplicité, rapidité et grande précision.

Dans le cas unidimensionnel, l'expression du polynôme au nœud  $i$  est :

$$P_i(\mathbf{x}) = \frac{\prod_{l=1, l \neq i}^{N_{ddl}} (x - x_l)}{\prod_{l=1, l \neq i}^{N_{ddl}} (x_i - x_l)} \quad (\text{B.5})$$

Dans le cas des éléments multi-dimensionnels, il suffit de faire le produit des polynômes 1D dans les différentes directions. Une liste détaillée de ces polynômes, dans les dimensions (1, 2 et 3), pour les trois éléments peut être trouvée dans le livre [61].

En conséquence, le nombre de degrés de liberté dépend de l'ordre  $p$  et de la dimension  $d$ . Pour les éléments quadrilatéraux, la relation est donnée par  $N_{ddl} = (p+1)^d$ , tandis que pour les éléments linéaires et triangulaires

$$N_{ddl} = \frac{(p+1) \dots (p+d)}{d!}.$$

**Remarque :** Les schémas DG-FEM sont usuellement présentés pour les éléments triangulaires. Dans ce travail, nous envisageons la possibilité d'utiliser des éléments quadrilatéraux en combinaison avec des éléments triangulaires. D'une part, l'utilisation des éléments triangulaires présente l'avantage d'avoir un déterminant constant du jacobien, ce qui réduit notablement le coût de calcul des intégrales de volume. D'autre part, les éléments rectangulaires présentent une meilleure précision (voir [248]).

En substituant  $u$  par son approximation (B.4) dans (B.3) et en calculant pour tous les éléments, le système algébrique globale est obtenu :

$$\left( [\mathbf{A}^K] + [\mathbf{A}^E] - k^2 [\mathbf{A}^M] \right) \{\tilde{\mathbf{U}}\} = \mathbf{0}, \quad (\text{B.6})$$

où  $[\mathbf{A}^K]$ ,  $[\mathbf{A}^E]$  et  $[\mathbf{A}^M]$  sont les matrices globales de rigidité, de flux et de masse respectivement.  $\{\tilde{\mathbf{U}}\}$  est le vecteur global des valeurs nodales généralisées. Notons que  $[\mathbf{A}^{K,M,E}]$  sont des matrices carrées complexes partitionnées en blocs de taille  $\{(m \times m), m = n \times N_{ddl}\}$ . Elles sont exprimées telles que :

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}^K] &= \sum_{j=0}^{n-1} \int_{E_j} \nabla \mathbf{P}^T \nabla \mathbf{P} \, d\mathbf{x}, \\ [\mathbf{A}^M] &= \sum_{j=0}^{n-1} \int_{E_j} \mathbf{P}^T \mathbf{P} \, d\mathbf{x}, \\ [\mathbf{A}^E] &= \sum_{\Gamma \in \Gamma_h} \int_{\Gamma} ([\mathbf{T}_{11}] + [\mathbf{T}_{12}] + [\mathbf{T}_{21}] + [\mathbf{T}_{22}]) \, d\mathbf{s}. \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

$[\mathbf{T}_{11}]$  et  $[\mathbf{T}_{22}]$  correspondent à l'interaction des fonctions locales (B.5) des deux éléments voisins ( $E_1$  et  $E_2$ ) avec eux mêmes respectivement. Les matrices  $[\mathbf{T}_{12}]$  et  $[\mathbf{T}_{21}]$  assurent le couplage entre les deux éléments.

### B.3.2 Transformation des intégrales

Les termes (B.7) nécessitent le calcul des intégrales de volume et de surface. Pour effectuer ces intégrations numériquement, il est plus avantageux de considérer des éléments fixes dits de référence  $E_{ref}$  dans un espace de calcul  $(\xi, \eta, \zeta)$ . Ceci nécessite des

transformations affines ( $T_E$ ) du système de coordonnées cartésiennes pour le système de coordonnées de référence, comme le montre la figure (B.2).

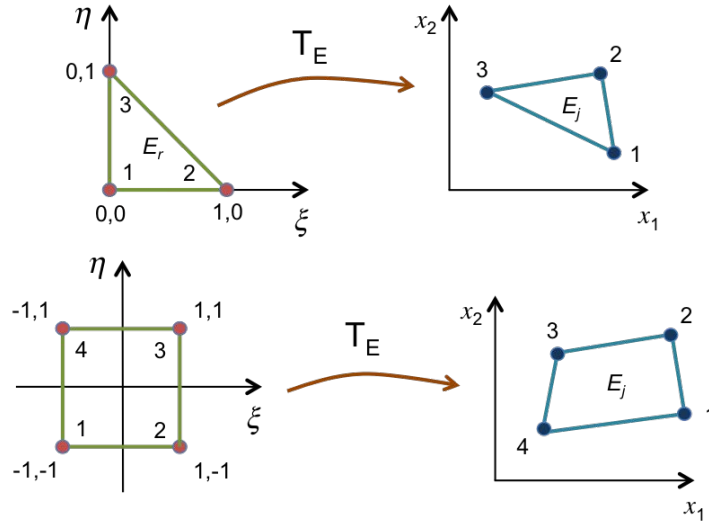


FIGURE B.2 – Transformations des éléments de référence triangulaires et quadrilatéraux (2D).

### B.3.2.1 Intégrale de volume :

La transformation de l'intégrale d'une fonction polynomiale générale  $g(\mathbf{x})$ , dans le système cartésien à un système de référence, est effectuée grâce à la matrice Jacobienne, telle que :

$$\int_{E_j} g(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{E_r} g(\mathbf{x}(\xi)) |J| d\xi d\eta d\zeta \quad (\text{B.8})$$

avec  $|J|$  le déterminant de la matrice Jacobienne :

$$J(E_r \rightarrow E_j) = \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(\xi, \eta, \zeta)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \eta} & \frac{\partial x_2}{\partial \eta} & \frac{\partial x_3}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \zeta} & \frac{\partial x_2}{\partial \zeta} & \frac{\partial x_3}{\partial \zeta} \end{pmatrix} \quad (\text{B.9})$$

La même transformation s'applique pour calculer les dérivées des fonctions dans  $(\xi, \eta, \zeta)$  à partir de ses dérivées en  $\mathbf{x}$  et inversement telle que :

$$\begin{aligned} \{\partial \xi\} &= [J] \{\partial \mathbf{x}\} \\ \{\partial \mathbf{x}\} &= [j] \{\partial \xi\} \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

avec  $[j]$  l'inverse de la matrice Jacobienne.

### B.3.2.2 Intégrale de surface :

La transformation de l'intégrale de contour  $\Gamma$  d'un élément  $E_j$  en 2D est effectuée via un changement de variable (technique d'intégrale curviligne) dans le domaine de calcul  $t = [-1, 1]$ . La fonction  $c(\mathbf{x})$ , la courbe que fait  $\Gamma$  dans  $\mathbf{x}$ , est exprimée en fonction de la variable  $t$  et la longueur de l'élément différentiel  $ds$ .

$$\int_{\Gamma} g(\mathbf{x}) ds = \int_t g(c(t)) |J_c(t)| dt \quad (\text{B.11})$$

avec :

$$|J_c(t)| = \sqrt{\left(\frac{dx_1}{dt} + \frac{dx_2}{dt}\right)^2} = \frac{e_{\Gamma}}{2}. \quad (\text{B.12})$$

En 3D, la même technique est utilisée pour projeter la surface de l'élément dans le système de référence (voir [61]). Pour des raisons de brièveté, nous nous limitons au cas bidimensionnel.

### B.3.2.3 Intégration numérique de Gauss

Pour évaluer numériquement les intégrales de volume et de surface sur les éléments de référence, on utilise une méthode de quadrature. Cette dernière consiste en l'approximation de la valeur numérique de l'intégrale d'une fonction par une combinaison linéaire de ses valeurs en différents points du domaine. Par exemple, dans le cas unidimensionnel, l'intégrale est exprimée par :

$$\int_{-1}^{+1} g(\xi) d\xi \simeq \sum_{i=1}^n w_i g(\xi_i), \quad (\text{B.13})$$

où  $w_i$  sont les coefficients de pondération.

Il existe plusieurs méthodes de quadrature qui diffèrent principalement sur la détermination des points et des poids d'intégration. Toutefois, dans ce travail, on utilise la méthode classique dans le domaine des éléments finis, dite quadrature de Gauss-Legendre. Elle permet une intégration exacte pour un polynôme de degré  $2n - 1$  avec  $n$  points. Le couple  $(w_i, \xi_i)$  sont déterminés en fonction des polynômes de Legendre d'où la notation.

En outre, la formule (B.13) peut être généralisée au cas des fonctions de plusieurs variables. En deux dimensions, l'intégrale double est définie telle que :

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} g(\xi, \eta) d\xi d\eta \simeq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j g(\xi_i, \eta_j). \quad (\text{B.14})$$

De manière analogue, en trois dimensions, elle devient :

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} g(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta \simeq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n w_i w_j w_k g(\xi_i, \eta_j, \zeta_k). \quad (\text{B.15})$$

Enfin, les abscisses et les poids d'intégration sont disponibles dans la littérature. Ils sont tabulés de manière détaillée dans l'ouvrage [61].

# ÉVALUATION DES PERFORMANCES DES MÉTHODES À PÉNALITÉ INTÉRIEURE

C

## C.1 INTRODUCTION

Le talon d'Achille de la méthode discontinue en général et celui de l'IPDG en particulier, réside en la nécessité de l'ajustement des paramètres de pénalisation puisque le gain de la solution (précision et temps de calcul) en est très dépendant. L'objectif du présent annexe est d'évaluer les performances de la famille IPDG, tout d'abord en explicitant le rôle de la pénalisation, son choix optimal ainsi que l'impact de l'ordre de la base polynomial sur les propriétés spectrales (erreur sur la solution propre). Ensuite, leur influence sur les fonctionnalités du système algébrique vis-à-vis d'algorithmes d'extraction modale et des temps de calculs sera détaillée. L'analyse suivante sera effectuée uniquement pour le problème (1D) sur un maillage uniforme et constitue une suite à l'étude d'applicabilité du chapitre 2.

## C.2 PROPRIÉTÉS SPECTRALES DISPERSIVES ET DISSIPATIVES

Dans le contexte de propagation d'onde, l'étude de la totalité du spectre du système discrétisé est nécessaire afin de comprendre le comportement de la méthode en fonction de ses paramètres influents. Dans cet objectif, le problème étudié (2.1)-(2.23) étant non-dispersif, tout comportement dispersif est par conséquent intrinsèque à la méthode. Ainsi, un meilleur aperçu sur la précision peut être obtenu et une comparaison des performances des dérivations IPDG peut être réalisée.

En outre, parmi les principaux outils d'analyse qui déterminent l'applicabilité d'une méthode numérique aux problèmes de propagation d'ondes sont les critères de stabilité et de dispersion numérique. Le critère de dispersion numérique (différente de la dispersion physique de l'onde) détermine le plus grand taux d'échantillonnage (nombre de points par longueur d'onde) pour la discrétisation spatiale, de sorte que la solution numérique soit d'une précision acceptable. Par conséquent, cette étude présente également une seconde validation des méthodes IPDG.



### C.2.1 Influence des paramètres de pénalité

Rappelons que la fonction de l'erreur est inhérente à chaque méthode numérique. Pour la méthode classique de Galerkin continue, cette fonction ne dépend que de l'ordre et le type de maillage (voir section (1.4)). Dans le contexte des méthodes IPDG, les propriétés de cette fonction sont liées également au choix des paramètres de pénalisation, en particulier la variable  $\alpha$ .

Pour illustrer son rôle, nous allons résoudre le problème (2.25) pour différentes valeurs de pénalité. Considérons donc une barre de longueur  $L = 1m$ . Le domaine est maillé en  $n = 50$  puis 100 éléments linéaires ( $p = 1$ ) de même taille  $h$ , correspondants à  $N_{ddl} = 100$  et 200. Toutes les dérivations IPDG sont utilisées avec  $\gamma = 0$ . La figure (C.1) montre l'erreur relative en (%) de chaque nombre d'onde  $k_i$  pour différentes valeurs de pénalisation :  $\alpha = 1, 5$  et 10.

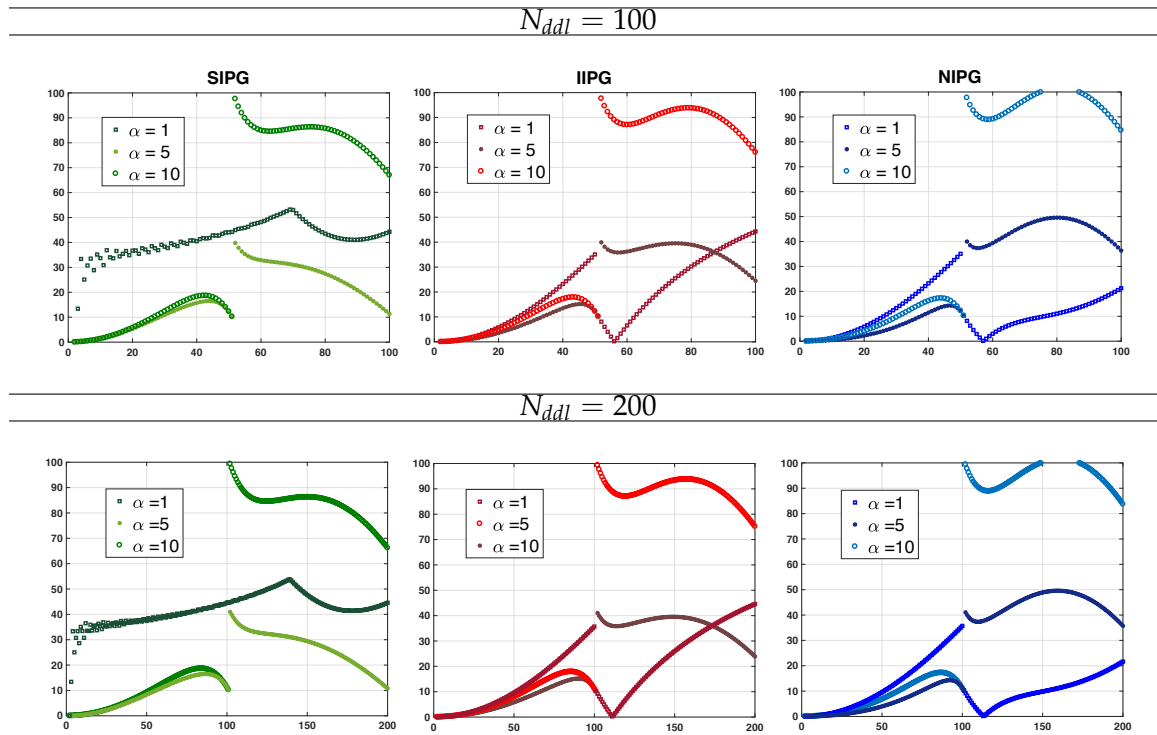


FIGURE C.1 – Erreur relative de dispersion des méthodes IPDG pour  $\gamma = 0$  et  $\alpha = (1; 5; 10)$ .

De la figure (C.1), on peut voir que la méthode SIPG fait apparaître un nuage de modes parasites réels pour  $\alpha = 1$ . Lorsque  $\alpha > 1$ , une séparation du spectre en deux groupes : valeurs convergentes  $k_{conv}$  et valeurs divergentes  $k_{div}$ , est observée. En outre, le spectre supérieur (divergent) accroît en amplitude en fonction de  $\alpha$ . Enfin, toutes les dérivations IPDG ont des comportements similaires pour les deux discrétisations utilisées. De cela, nous constatons qu'il existe un seuil de  $\alpha$ , indépendant de  $h$ , pour lequel les modes parasites disparaissent et une meilleure approximation peut être obtenue.

### C.2.2 Formules d'ajustement

L'ajustement des paramètres de pénalisation, pour les dérivations IPDG appliquées aux problèmes elliptiques, a été adressé dans de nombreux travaux notamment [249, 250, 251, 184]. Plusieurs expressions de seuils, à partir lesquels la formulation devient stable et convergente, ont été développées pour différentes formes de maillages en 1, 2 et 3 dimensions.

À titre d'exemple, considérons le problème (2.1) avec  $\mathbf{C} = 1$ . Pour deux éléments  $(E_1, E_2)$  triangulaires adjacents partageants un bord  $\Gamma$ , le seuil de la pénalisation est donné par [184] :

$$\frac{\alpha^*}{|e_\Gamma|} = \frac{3}{2} \left( p^{E_1}(p^{E_1} + 1) \cot(\theta_{E_1}) + p^{E_2}(p^{E_2} + 1) \cot(\theta_{E_2}) \right)$$

où  $\theta$  représente le plus petit angle d'un triangle. Dans le cas de maillages généraux, une formule plus explicite [250] peut être utilisée :

$$\frac{\alpha^*}{|e_\Gamma|} = \max \left( \frac{(p^{E_i} + 1)(p^{E_i} + d)}{d} \frac{\mathcal{A}(E_i)}{\mathcal{V}(E_i)} \right)$$

où  $d$  est la dimension du problème. Pour  $d = 1$ ,  $\mathcal{A} = 1$  et  $\mathcal{V}$  indiquent la taille de l'élément  $h$ . Pour  $d = 2$ , elles indiquent la longueur et la surface; pour  $d = 3$ , elles désignent la surface et le volume, respectivement.

**Remarque :** Outre que le paramètre  $\alpha$ , il existe une condition sur le paramètre  $\beta_0$  pour que la méthode NIPG et la méthode SIPG soient coercitives - fournir une solution unique. Ce dernier est appelé paramètre de super-pénalisation. Conjointement à la condition sur  $\alpha$ , il doit satisfaire :

$$\beta_0 \geq (d - 1)^{-1}, \quad (\text{C.1})$$

pour les dimensions supérieures  $d \geq 1$ . Cette pénalisation permet également d'améliorer la convergence [184]. Toutefois, elle détériore le conditionnement des matrices globales, associé à la difficulté de la résolution numérique du problème [252]. Ainsi, elle est généralement prise égale à 1.

#### C.2.2.1 Problèmes aux valeurs propres

Dans le cadre des problèmes aux valeurs propres (PVP) [253, 219], le paramètre  $\alpha$  a été fixé à une valeur suffisamment grande de telle manière à garantir la stabilité et une solution admissible du spectre convergent.

Une compréhension intuitive de son rôle dans la séparation du spectre a été adressée en [254, 183]. Il a été conclu que pour avoir un spectre inférieur exempt de valeurs parasites, on peut toujours choisir un paramètre de pénalité suffisamment grand. Néanmoins, les résultats ne peuvent démontrer comment il doit être choisi pour garantir un découplage souhaité.

En outre, une étude comparative des performances des méthodes IPDG a été effectuée en [255]. Elle a montré que le conditionnement du système augmente en fonction de la pénalité  $\alpha$  et qu'une très grande valeur de pénalité réduit les performances des solveurs, ce qui engendre des résultats moins précis. De plus, elle a montré que pour un paramètre suffisamment grand, toute la famille IPDG a le même ordre de précision.

Enfin, cette stratégie permet bien d'isoler le spectre convergent des valeurs parasites. En revanche, un système mal conditionné entraînera une dégradation des performances. Par conséquent, une étude du choix optimal en fonction de l'erreur et de la précision est nécessaire afin de définir un compromis.

### C.2.3 Analyse de la solution modale

L'analyse des propriétés spectrales de dispersion et de dissipation des méthodes de Galerkin discontinues a fait l'objet de maintes travaux de recherche dans différents domaines [256, 257, 258, 220, 194, 259]. Elle permet non seulement de donner un éclairage sur les performances de la méthode, mais aussi d'élucider le problème de la manifestation des modes fictifs. Ce dernier étant étroitement lié aux propriétés spectrales, son influence touche également aux problèmes d'évolution temporelle qu'aux PVPs.

Particulièrement, pour la famille IPDG appliquée à la discrétisation de l'équation d'ondes acoustiques et élastiques. Ce type d'analyse est resté un peu limité dans la littérature. Tout d'abord, pour l'équation d'ondes acoustiques, une étude rigoureuse de l'erreur numérique a été réalisée en [220]. Des formules pour un choix optimal du paramètre de pénalité ont été démontrées jusqu'à  $p = 3$  et conjecturées pour les degrés plus élevés. Néanmoins, seule la dérivation IPDG symétrique est analysée. Plus tard, une analyse pour l'équation d'ondes élastiques a été adressée en [194] avec un accent particulier sur l'effet du choix de la base polynomiale sur la dispersion. Cependant, le paramètre de pénalité a été choisi suffisamment grand pour garantir la stabilité. Aucune étude de son influence n'a été considérée. Par ailleurs, ces travaux [220, 194] ont été effectués en se basant sur l'analyse du PVP périodique élémentaire sur maillage uniforme, dit aussi **Analyse d'onde plane** (de l'anglais : "Plane wave analysis") introduite en [256]. Elle suppose un milieu homogène, infini et périodique.

Dans le présent travail, nous allons traiter les propriétés spectrales des méthodes IPDG dans le contexte du PVP (2.25) en accordant une attention particulière à l'influence du paramètre de pénalité. L'évaluation est effectuée par une analyse de la solution numérique du PVP global, sur un maillage uniforme et tenant compte des conditions aux limites libres. Les résultats numériques obtenus pour la dérivation symétrique sont comparés avec ceux de [220] et étendus jusqu'à  $p = 5$ . Ensuite, la même analyse est appliquée aux autres méthodes IPDG Non-symétrique et Incomplète.

### C.2.3.1 Méthode symétrique

Il a été démontré en [220] que pour éliminer les modes parasites, la valeur du paramètre de pénalité doit vérifier :

$$\alpha > \frac{p(p+1)}{2}. \quad (\text{C.2})$$

D'un autre côté, l'expression de la relation de dispersion, l'estimation de la précision sur le nombre d'onde numérique  $k$ , pour les ordres impairs est donnée par :

$$\mathcal{E}_k = -\frac{1}{2(2p+1)} \left[ \frac{p!}{(2p)!} \right]^2 k^{2p+1} h^{2p} + O(k^{2p+3} h^{2p+2}), \quad (\text{C.3})$$

tandis que pour les nombres pairs, l'expression est donnée par :

$$\mathcal{E}_k = -\frac{1}{2(2p+1)} \left[ \frac{p!}{(2p)!} \right]^2 k^{2p+1} h^{2p} \frac{2\alpha - (p+1)(p+2)}{2\alpha - p(p-1)} + O(k^{2p+3} h^{2p+2}). \quad (\text{C.4})$$

Pour les ordres  $p$  impairs, l'erreur de dispersion persiste quelque soit le choix du paramètre  $\alpha$  ; il n'y a pas de choix optimal. Pour les ordres  $p$  pairs, un optimum est atteint en choisissant  $\alpha$  tel que :

$$2\alpha - (p+1)(p+2) = 0. \quad (\text{C.5})$$

Afin de vérifier ces résultats, considérons le problème (2.25) issu de la SIPG avec des différents ordres polynomiaux  $p = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  et les valeurs  $\alpha(p)$  correspondants. Pour cela, la formule (C.5) est utilisée pour les deux cas de  $p$  pairs et impairs, ce qui correspond à  $\alpha = \{3, 6, 10, 15, 21\}$ . La figure (C.2) montre l'erreur de dispersion relative en (%) en fonction de l'indice  $i$  en échelle linéaire (b) et logarithmique (a). Cette dernière présente également une comparaison de l'erreur de dispersion relative calculée à partir des résultats numériques, avec l'estimation théorique (C.3) pour les ordres impairs  $p = 1, 3$  et 5.

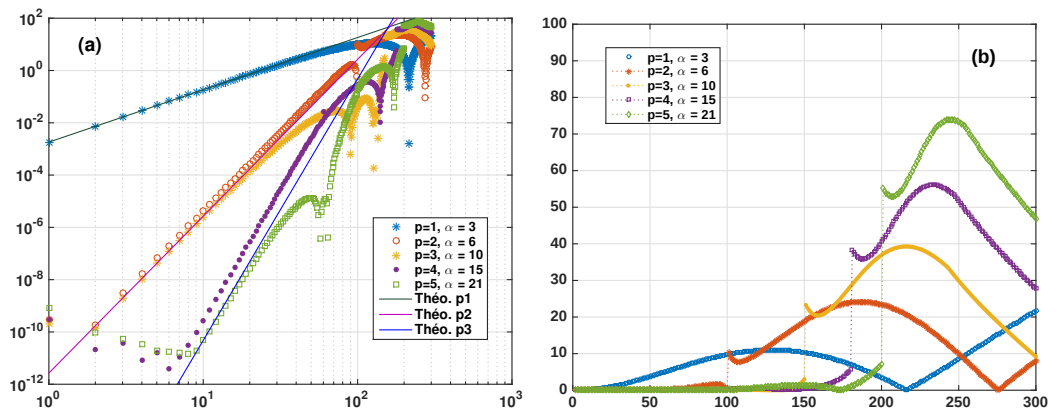


FIGURE C.2 – Erreur relative de dispersion de la méthode SIPG pour  $p = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $\gamma = 0$  et  $\alpha = (p+1)(p+2)/2$  : (a) en échelle logarithmique, (b) en échelle linéaire.

De la figure (C.2-b), on remarque que pour  $p = 1$ , la fonction d'erreur est continue, contrairement à celles obtenues sur la figure (C.1). Elle se comporte comme la méthode

classique. Ceci est noté également dans la section (2.3), figure (2.6). Pour les autres ordres  $p > 1$ , le découplage a lieu indépendamment du choix optimal du paramètre de pénalité. La zone de convergence s'élargit en fonction de l'ordre  $p > 1$ , alors que la zone du spectre divergent rétrécit et accroît en amplitude. En outre, sur la figure (C.2-a), la précision de la première zone augmente en ordre spectaculairement pour les  $p$  pairs. Enfin, une bonne concordance entre l'estimation théorique (C.3) et les résultats numériques est obtenue.

Le tableau (C.1) récapitule les résultats obtenus, notamment l'évolution d'élargissement de la zone de convergence en fonction des différents paramètres  $\alpha$  et  $p$ , ainsi que l'ordre de précision correspondant.

| Ordre polynomial $p$ | Facteur de pénalité $\alpha$ | Spectre convergent (%) | Ordre de précision $\beta$ |
|----------------------|------------------------------|------------------------|----------------------------|
| 1                    | 3                            | -                      | 2                          |
| 2                    | 6                            | 33.33                  | 6                          |
| 3                    | 10                           | 50                     | 6                          |
| 4                    | 15                           | 60                     | 10                         |
| 5                    | 21                           | 66.66                  | 10                         |

TABLE C.1 – Zone de convergence et ordre de précision en fonction des paramètres  $\alpha$  et  $p$ .

Pour  $p = 1$ , le taux de convergence est du second ordre, ce qui est typique de la méthode de Galerkin continue. Pour  $p = 2$ , la méthode est d'une précision du sixième ordre, plus élevée que ce qui peut être obtenue par la formulation continue. Ainsi de suite, deux ordres pairs et impairs successifs ont le même taux.

Finalement, les estimations théoriques et résultats numériques sont en très bon accord. Ils permettent de conjecturer que l'erreur de dispersion du spectre convergent va décroître exponentiellement en augmentant l'ordre  $p$ . L'ordre de convergence général de la méthode est de  $2p$ . En revanche, lorsque le nombre  $p$  est pair, le choix optimal du paramètre  $\alpha$  permet d'atteindre un ordre de  $2p + 2$ . Enfin, ces résultats sont applicables au cas multidimensionnel sur un maillage uniforme.

### C.2.3.2 Méthodes non-symétrique et incomplète

En effet, la même approche d'analyse de [220] peut être appliquée aux dérivations non-symétrique et incomplète. Néanmoins, dans le cadre de ce travail, seule une étude numérique est effectuée.

Contrairement à la méthode symétrique purement dispersive, les méthodes NIPG et IIPG sont également dissipatives. Par conséquent, les solutions  $k$  peuvent être complexes, qualifiés de modes non physique, si la condition sur  $\alpha$  permettant de les éliminer n'est pas satisfaite. Dans le but de déterminer cette condition, les solutions  $k$  sont étudiés en

fonction de plusieurs valeurs de  $\alpha = [0, 80]$  pour chaque ordre  $p = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$  séparément. Ensuite, les taux de convergence sont déterminés.

Le tableau (C.2) présente les différents seuils de pénalisation pour lesquels la solution devient purement réelle. Le tableau (C.3) présente le taux de convergence général et optimal s'il existe, ainsi que la pénalisation correspondante.

| <b>Méthode IIPG</b> |   |   |   |   |    |    |    |    |  |
|---------------------|---|---|---|---|----|----|----|----|--|
| Ordre $p$           | 1 | 2 | 3 | 4 | 5  | 6  | 7  | 8  |  |
| $\alpha >$          | 0 | 1 | 4 | 7 | 10 | 15 | 19 | 25 |  |

| <b>Méthode NIPDG</b> |   |   |   |   |   |   |   |    |  |
|----------------------|---|---|---|---|---|---|---|----|--|
| Ordre $p$            | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8  |  |
| $\alpha >$           | - | - | 0 | 2 | 4 | 5 | 8 | 10 |  |

TABLE C.2 – Seuils de pénalité  $\alpha$  pour lesquels la solution devient purement réelle pour les ordres  $p = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$  respectivement.

| <b>Méthode IIPG</b>  |               |               |                              |
|----------------------|---------------|---------------|------------------------------|
| Ordre polynomial $p$ | Ordre général | Ordre optimal | Facteur de pénalité $\alpha$ |
| 1                    | 2             | 4             | 2                            |
| 2                    | 2             | -             | -                            |
| 3                    | 4             | -             | -                            |
| 4                    | 4             | -             | -                            |
| 5                    | 6             | -             | -                            |

| <b>Méthode NIPG</b>  |               |               |                              |
|----------------------|---------------|---------------|------------------------------|
| Ordre polynomial $p$ | Ordre général | Ordre optimal | Facteur de pénalité $\alpha$ |
| 1                    | 2             | 4             | 3                            |
| 2                    | 2             | -             | -                            |
| 3                    | 4             | -             | -                            |
| 4                    | 4             | -             | -                            |
| 5                    | 6             | -             | -                            |

TABLE C.3 – Les taux de convergence obtenus numériquement pour la méthode Incomplète et Non-symétrique pour  $p = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ .

Nous constatons qu'à l'exception de  $p = 1$ , il n'existe pas de choix optimal du pénalisation  $\alpha$  ni pour les nombres pairs ni impairs. Pour ce cas, le taux de convergence est du quatrième ordre en  $\alpha = 2$  (resp.  $\alpha = 3$ ) pour la méthode IIPG (resp. la méthode NIPG). Par ailleurs, le taux de convergence pour un nombre  $p$  pair est égale à  $p$ . Pour un nombre

$p$  impair, il est égale à  $p + 1$ .

Enfin, le même comportement que la méthode symétrique est remarqué. Un découplage du spectre ait lieu en fonction de la pénalité. Pareillement, la zone de convergence s'élargit en fonction de l'ordre  $p$ , alors que la zone du spectre divergent rétrécit et augmente en amplitude.

#### C.2.4 Conclusion

En résumé, la méthode symétrique offre une meilleure convergence pour les ordres  $p > 1$ , pouvant atteindre  $2p + 2$  lorsque le choix de  $\alpha$  est optimal. Quant aux autres dérivations non-symétrique et incomplète, seul le cas de  $p = 1$  présente une amélioration conséquente. Autrement, il n'existe pas de choix optimal et l'ordre général de précision est de  $p + 1$  pour les  $p$  impair. Ces résultats sont en parfaite adéquation avec les résultats obtenus en section (2.3) et les travaux de la littérature. Ceci constitue une seconde validation de la méthode.

### C.3 TEMPS DE CALCUL

Pour évaluer la performance en terme de temps de calculs, le problème (2.25) est résolu dans sa forme généralisée pour chaque méthode et pour différentes tailles  $m$ . La comparaison est effectuée sur MATLAB avec la routine *eig()*. Nous soulignons que ce solveur ne prends pas en compte la forme partitionnée des matrices globales et par conséquent l'ordre polynomial.

Le temps d'exécution nécessaires pour calculer toutes les valeurs propres et les fonctions propres est mesuré pour plusieurs nombres de degrés de liberté de  $N_{DDL} = 100$  jusqu'à 1000. La figure (C.3-a) montre le temps de calcul en secondes consommé par chaque méthode en fonction du nombre de degrés de liberté. La figure (C.3-b) est un zoom sur la dérivation symétrique (SIPG) et la méthode de Galerkin continue (CG).

A partir des résultats de la figure (C.3-a), nous pouvons constater que le temps de calculs de la dérivation non-symétrique (NIPG) et la dérivation incomplète (IIPG) augmente considérablement en fonction du  $N_{DDL}$ , tandis que les formulations symétriques (SIPG, CG) garde une consommation de ressources relativement basse. Dans la figure (C.3-b), le graphique montre une rapidité pour la dérivation symétrique par rapport à la méthode continue qui augmente de manière significative au-delà du 600 pour atteindre un gain de 35% en  $N_{DDL} = 1000$ .

Ces résultats peuvent être justifiés par l'analyse de la forme bilinéaire discontinue. La matrice globale issue de la SIPG est une matrice symétrique définie positive [184]. Elle

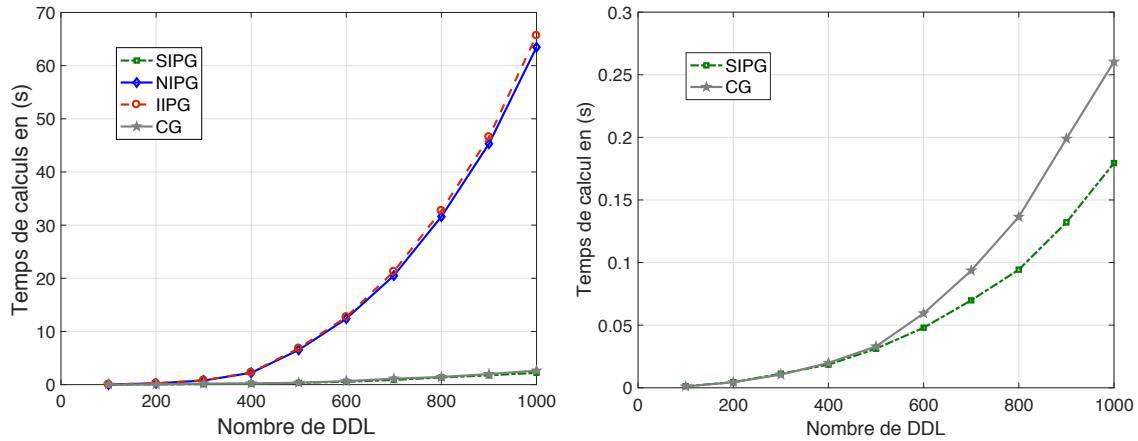


FIGURE C.3 – Temps de calcul en secondes consommé par le solveur pour résoudre le problème sous forme généralisée de différentes tailles, de  $N_{DDL} = 100$  jusqu'à 1000.

permet d'utiliser des algorithmes plus rapide. Quant aux autres, elles nécessitent des méthodes d'extraction modales pour des matrices non-symétriques, qui sont généralement plus lents. Enfin, ces résultats sont en bon accord avec l'étude comparative [255].

Notons que l'opérateur bilinéaire de la méthode continue est également symétrique. Sa discrétisation fournit une matrice globale de forme tridiagonale scalaire, ce qui explique la proximité des résultats. Néanmoins, le système algébrique discontinu reste plus intéressant du fait de sa matrice bloc-tridiagonal pour lequel des algorithmes de blocs très efficace et bien adapté pour la mise en œuvre en parallèle sont développés.

## C.4 CONCLUSION

Dans cette section, une étude numérique du problème (1D) sur un maillage uniforme est effectuée. Le rôle du paramètre de pénalité et son influence sur la solution numérique sont discutés. Les propriétés spectrales des méthodes IPDG sont analysées. Des formules de seuils de pénalité  $\alpha$  sont élaborées pour les dérivations Non-symétrique et Incomplète. Enfin, une comparaison des performances en terme de précision et de temps de calculs est faite. En conséquence, la formulation symétrique semble un choix judicieux. Elle présente plusieurs avantages, notamment :

- un taux de convergence optimale, plus élevé par rapport à toutes les formulations étudiées (CG, NIPDG et IPDG), de  $2p + 2$  lorsque des polynômes de degré  $p$  pairs sont utilisés et de  $2p$  lorsque l'ordre  $p$  est impair.
- des caractéristiques du système algébrique (matrice de rigidité blocs tridiagonal et matrice de masse bloc-diagonale symétriques définies positives) permettant un gain en temps de calcul approximé à 35%.

Ces résultats, dans le contexte des approximations  $p > 1$ , permettent une stratégie à double gain : moins de temps de calcul/consommation de mémoire et une précision d'ordre élevé.





# BIBLIOGRAPHIE

- [1] Farouk Benmeddour, Fabien Treyssède, and Laurent Laguerre. Numerical modeling of guided wave interaction with non-axisymmetric cracks in elastic cylinders. *International Journal of Solids and Structures*, 48(5) :764–774, March 2011.
- [2] John P. Boyd. *Chebyshev and Fourier spectral methods*. Dover Publications, Mineola, N.Y, 2nd ed., rev edition, 2001.
- [3] Farouk Benmeddour, Emmanuel Moulin, and Jamal Assaad. Numerical investigation of the functionally graded materials by the interaction of the plate guided waves with discontinuities and cracks. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 133(5) :3446–3446, May 2013.
- [4] Paolo Bocchini, Alessandro Marzani, and Erasmo Viola. Graphical User Interface for Guided Acoustic Waves. *Journal of Computing in Civil Engineering*, 25(3) :202–210, May 2011.
- [5] Philippe F. Weck, Eunja Kim, Veena Tikare, and John A. Mitchell. Mechanical properties of zirconium alloys and zirconium hydrides predicted from density functional perturbation theory. *Dalton Transactions*, 44(43) :18769–18779, 2015.
- [6] Christian Boller, Fu-Kuo Chang, and Yozo Fujino, editors. *Encyclopedia of Structural Health Monitoring : Boller/Structural*. John Wiley & Sons, Ltd, Chichester, UK, January 2009.
- [7] Joseph L. Rose. A Baseline and Vision of Ultrasonic Guided Wave Inspection Potential. *Journal of Pressure Vessel Technology*, 124(3) :273, 2002.
- [8] M.J.S. Lowe, D.N. Alleyne, and P. Cawley. Defect detection in pipes using guided waves. *Ultrasonics*, 36(1-5) :147–154, February 1998.
- [9] P Wilcox, M Evans, B Pavlakovic, D Alleyne, K Vine, P Cawley, and M Lowe. Guided wave testing of rail. *Insight - Non-Destructive Testing and Condition Monitoring*, 45 :413–420, June 2003.
- [10] P. Cawley. Practical Long Range Guided Wave Inspection — Managing Complexity. volume 657, pages 22–40. AIP, 2003.
- [11] Philip W. Loveday. Guided Wave Inspection and Monitoring of Railway Track. *Journal of Nondestructive Evaluation*, 31(4) :303–309, 2012.
- [12] Teletest Focus+ : long-range guided wave ultrasonic testing for pipelines.
- [13] Groupe TPIA du laboratoire IEMN-DOAE.

- [14] Pierrick Blanquet. *Etude de l'endommagement des matériaux composites aéronautiques à partir de techniques ultrasonores*. 1997.
- [15] Emmanuel Moulin. *Contribution à l'étude de la génération d'ondes de Lamb par transducteurs piézoélectriques intégrés : Application à la modélisation de matériaux sensibles*. Thèse de doctorat, Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis, France, 1999.
- [16] Farouk Benmeddour. *Etude expérimentale et numérique de l'interaction des ondes de Lamb en présence d'endommagements dans des structures d'aluminium*. Thèse doctorat, Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis, France, 2006.
- [17] Hossep Achdjian. *Propriétés de moyennage d'ensemble des signaux acoustiques en milieu réverbérant et applications potentielles au contrôle et à la caractérisation des structures*. Thèse de doctorat, Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis, France, 2014.
- [18] Lynda Chehami. *Surveillance passive des milieux réverbérants par corrélation de bruit ambiant : application à la localisation de défauts*. Thèse de doctorat, Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis, France, 2015.
- [19] Laïd Sadoudi. *Étude et développement d'une plateforme de communication pour les réseaux de capteurs acoustiques sans fil : application au contrôle-santé des rails par corrélation du bruit ambiant*. Thèse de doctorat, Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis, France, 2016.
- [20] Salah-Eddine Hebaz, Farouk Benmeddour, Emmanuel Moulin, and Jamal Assaad. Semi-analytical discontinuous Galerkin finite element method for the calculation of dispersion properties of guided waves in plates. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 143(1) :460–469, January 2018.
- [21] Salah Eddine Hebaz, Farouk Benmeddour, Emmanuel Moulin, and Jamal Assad. Investigating Applicability of Discontinuous Galerkin Methods Towards Structural Health Monitoring in Transportation. In *7th African Conference on Non Destructive Testing (ACNDT 2016)*, Oran, Algeria, 2016.
- [22] L Pochhammer. Ueber die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten kleiner Schwingungen in einem unbegrenzten isotropen Kreiscylinder. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle's Journal)*, 1876(81), 1876.
- [23] C Chree. Longitudinal vibrations of a circular bar. *Quarterly Journal of Mathematics*, 21 :287–298, 1886.
- [24] John William Strutt Rayleigh. *The theory of sound*. London : Macmillan, 1894.
- [25] Horace Lamb. On Waves in an Elastic Plate. *Proceedings of the Royal Society of London Series A*, 93 :114–128, March 1917.
- [26] R. D. Mindlin. Mathematical Theory of Vibrations of Elastic Plates. In *10th Annual Symposium on Frequency Control*, pages 10–44, May 1956.
- [27] L. G. Merkulov, S. I. Rokhlin, and O. P. Zobnin. Calculation of the spectrum of wave numbers for Lamb waves in a plate,. pages 369–373, 1970.

- [28] Dennison Bancroft. The Velocity of Longitudinal Waves in Cylindrical Bars. *Physical Review*, 59(7) :588–593, April 1941.
- [29] I. Mirsky. Wave Propagation in Transversely Isotropic Circular Cylinders Part I : Theory. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 37(6) :1016–1021, June 1965.
- [30] Joseph Zemanek. An Experimental and Theoretical Investigation of Elastic Wave Propagation in a Cylinder. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 51(1B) :265–283, January 1972.
- [31] R. N. Thurston. Elastic waves in rods and clad rods. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 64(1) :1–37, July 1978.
- [32] T. R. MEEKER and A. H. MEITZLER. Guided Wave Propagation in Elongated Cylinders and Plates. In *PHYSICAL ACOUSTICS PRINCIPLES AND METHOD*, volume 1A, pages 111–167. Academic Press, New York, NY, warren p. mason edition, 1964.
- [33] V. V. Meleshko, A. A. Bondarenko, S. A. Dovgiy, A. N. Trofimchuk, and G. J. F. van Heijst. Elastic waveguides : History and the state of the art. I. *Journal of Mathematical Sciences*, 162(1) :99–120, 2009.
- [34] V. V. Meleshko, A. A. Bondarenko, A. N. Trofimchuk, and R. Z. Abasov. Elastic waveguides : history and the state of the art. II. *Journal of Mathematical Sciences*, 167(2) :197–216, 2010.
- [35] I. A Viktorov. *Rayleigh and Lamb waves : physical theory and applications*. Plenum Press, New York, 1967. OCLC : 321657.
- [36] Bertram Alexander Auld. *Acoustic fields and waves in solids*, volume 1. R.E. Krieger publishing company, Malabar, Florida, 2nd edition, 1973.
- [37] Jan D. Achenbach. *Wave propagation in elastic solids*. Number 16 in North Holland series in applied mathematics and mechanics. Elsevier, Amsterdam, digital pr edition, 2005. OCLC : 844052457.
- [38] Karl F. Graff. *Wave Motion in Elastic Solids*. Courier Corporation, 1975. Google-Books-ID : pNDdCgAAQBAJ.
- [39] L. P. Solie and B. A. Auld. Elastic waves in free anisotropic plates. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 54(1) :50–65, July 1973.
- [40] William T. Thomson. Transmission of Elastic Waves through a Stratified Solid Medium. *Journal of Applied Physics*, 21(2) :89–93, February 1950.
- [41] Denos C. Gazis. Three-Dimensional Investigation of the Propagation of Waves in Hollow Circular Cylinders. I. Analytical Foundation. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 31(5) :568–573, May 1959.
- [42] R. W. Morse. Dispersion of Compressional Waves in Isotropic Rods of Rectangular Cross Section. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 20(6) :833–838, November 1948.

- [43] R. D. Mindlin and E. A. Fox. Vibrations and Waves in Elastic Bars of Rectangular Cross Section. *Journal of Applied Mechanics*, 27(1) :152, 1960.
- [44] H. D. McNiven, J. L. Sackman, and A. H. Shah. Dispersion of Axially Symmetric Waves in Composite, Elastic Rods. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 35(10) :1602–1609, October 1963.
- [45] Kenzo Sato. Elastic Wave Propagation in an Infinite Bar of Elliptical Cross Section. *Bulletin of JSME*, 21(152) :203–209, 1978.
- [46] A. W. Leissa. Vibration of plates. Technical Report 70N18461, NASA, Washington, DC, United States, January 1969.
- [47] N. A. Haskell. The dispersion of surface waves on multilayered media\*. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 43(1) :17–34, January 1953.
- [48] John W. Dunkin. Computation of modal solutions in layered, elastic media at high frequencies. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 55(2) :335–358, April 1965.
- [49] L. Knopoff. A matrix method for elastic wave problems. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 54(1) :431–438, February 1964.
- [50] L. Wang and S.I. Rokhlin. Stable reformulation of transfer matrix method for wave propagation in layered anisotropic media. *Ultrasonics*, 39(6) :413–424, October 2001.
- [51] Adnan H. Nayfeh. The general problem of elastic wave propagation in multilayered anisotropic media. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 89(4) :1521–1531, April 1991.
- [52] James N. Barshinger and Joseph L. Rose. Guided wave propagation in an elastic hollow cylinder coated with a viscoelastic material. *IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control*, 51(11) :1547–1556, November 2004.
- [53] M.J.S. Lowe. Matrix techniques for modeling ultrasonic waves in multilayered media. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, 42(4) :525–542, July 1995.
- [54] Adnan H. Nayfeh. *Wave propagation in layered anisotropic media : with applications to composites*. Number 39 in North Holland series in applied mathematics and mechanics. Elsevier, Amsterdam, 1995. OCLC : 246779862.
- [55] Brian Pavlakovic, Mike Lowe, David Alleyne, and Peter Cawley. Disperse : A General Purpose Program for Creating Dispersion Curves. In Donald O. Thompson and Dale E. Chimenti, editors, *Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation*, pages 185–192. Springer US, Boston, MA, 1997.
- [56] M. J. S. Lowe, P. Cawley, and B. N. Pavlakovic. A General Purpose Computer Model for Calculating Elastic Waveguide Properties, with Application to Non-Destructive Testing. In Robert V. Goldstein and Gerard A. Maugin, editors, *Surface Waves in Anisotropic and Laminated Bodies and Defects Detection*, pages 241–256. Springer Netherlands, 2005.

- [57] Fernando Seco and Antonio R. Modelling the Generation and Propagation of Ultrasonic Signals in Cylindrical Waveguides. In Auteliano Antunes dos Santos Junior, editor, *Ultrasonic Waves*. InTech, March 2012.
- [58] J. Strikwerda. *Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations, Second Edition*. Other Titles in Applied Mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics, January 2004.
- [59] C. A. Brebbia, J. C. F. Telles, and Luiz Wrobel. *Boundary Element Techniques : Theory and Applications in Engineering*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1984.
- [60] Klaus-Jürgen Bathe. *Finite element procedures*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1996. OCLC : 299818955.
- [61] G. Dhatt, G. Touzot, and E. Lefrançois. *Méthode des éléments finis*. Lavoisier, 2005.
- [62] Z. Alterman and F. C. Karal. Propagation of elastic waves in layered media by finite difference methods. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 58(1) :367–398, February 1968.
- [63] J. Virieux. P-SV wave propagation in heterogeneous media : Velocity-stress finite-difference method. *GEOPHYSICS*, 51(4) :889–901, April 1986.
- [64] K. Marfurt. Accuracy of finite-difference and finite-element modeling of the scalar and elastic wave equations. *GEOPHYSICS*, 49(5) :533–549, May 1984.
- [65] A. Bayliss, K. E. Jordan, B. J. LeMesurier, and E. Turkel. A fourth-order accurate finite-difference scheme for the computation of elastic waves. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 76(4) :1115–1132, August 1986.
- [66] O. Holberg. Computational Aspects of the Choice of Operator and Sampling Interval for Numerical Differentiation in Large-Scale Simulation of Wave Phenomena\*. *Geophysical Prospecting*, 35(6) :629–655, July 1987.
- [67] S. Nilsson, N. Petersson, B. Sjögreen, and H. Kreiss. Stable Difference Approximations for the Elastic Wave Equation in Second Order Formulation. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 45(5) :1902–1936, January 2007.
- [68] Daniel Appelö and N. Anders Petersson. A Stable Finite Difference Method for the Elastic Wave Equation on Complex Geometries with Free Surfaces. *Communications in Computational Physics*, 5(1) :84–107, January 2009.
- [69] P. P Delsanto, R. S Schechter, H. H Chaskelis, R. B Mignogna, and R Kline. Connection machine simulation of ultrasonic wave propagation in materials. II : The two-dimensional case. *Wave Motion*, 20(4) :295–314, December 1994.
- [70] P. P. Delsanto, T. Whitcombe, H. H. Chaskelis, and R. B. Mignogna. Connection machine simulation of ultrasonic wave propagation in materials. I : the one-dimensional case. *Wave Motion*, 16(1) :65–80, July 1992.
- [71] P. P. Delsanto, D. Iordache, C. Iordache, and E. Ruffino. Analysis of stability and convergence in FD simulations of the 1-D ultrasonic wave propagation. *Mathematical and Computer Modelling*, 25(6) :19–29, March 1997.

- [72] B. C. Lee and W. J. Staszewski. Modelling of Lamb waves for damage detection in metallic structures : Part I. Wave propagation. *Smart Materials and Structures*, 12(5) :804, 2003.
- [73] Shankar Sundararaman and Douglas E. Adams. Accuracy and Convergence Using a Local Interaction Simulation Approach in One, Two, and Three Dimensions. *Journal of Applied Mechanics*, 76(3) :031008–031008–10, March 2009.
- [74] P. Paćko, T. Bielak, A. B. Spencer, W. J. Staszewski, T. Uhl, and K. Worden. Lamb wave propagation modelling and simulation using parallel processing architecture and graphical cards. *Smart Materials and Structures*, 21(7) :075001, 2012.
- [75] Kalyan S. Nadella and Carlos E. S. Cesnik. Local interaction simulation approach for modeling wave propagation in composite structures. *CEAS Aeronautical Journal*, 4(1) :35–48, April 2013.
- [76] Alexander H. D. Cheng and Daisy T. Cheng. Heritage and early history of the boundary element method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 29(3) :268–302, March 2005.
- [77] Dimitri E. Beskos. Boundary Element Methods in Dynamic Analysis. *Applied Mechanics Reviews*, 40(1) :1–23, January 1987.
- [78] Dimitri E. Beskos. Boundary Element Methods in Dynamic Analysis : Part II (1986–1996). *Applied Mechanics Reviews*, 50(3) :149–197, March 1997.
- [79] A. Gunawan and S. Hirose. Boundary element analysis of guided waves in a bar with an arbitrary cross-section. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 29(10) :913–924, October 2005.
- [80] Joseph L Rose. *Ultrasonic guided waves in solid media*. Cambridge University Press, 2014. OCLC : 861120166.
- [81] C. G. Panagiotopoulos and G. D. Manolis. Three-dimensional BEM for transient elastodynamics based on the velocity reciprocal theorem. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 35(3) :507–516, March 2011.
- [82] John P. Wolf and Chongmin Song. The scaled boundary finite-element method – a primer : derivations. *Computers & Structures*, 78(1-3) :191–210, November 2000.
- [83] Thomas Gmür. *Dynamique des structures*. Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne, 2008. OCLC : 495290862.
- [84] O. C. Zienkiewicz, Robert L. Taylor, and David Fox. *The finite element method for solid and structural mechanics*. Elsevier/Butterworth-Heinemann, Amsterdam ; Boston, 7th ed edition, 2014. OCLC : ocn858011693.
- [85] Mickael Brice Drozd. *Efficient finite element modelling of ultrasound waves in elastic media*. PhD thesis, January 2008.
- [86] Jaroslav Mackerle. Finite-element modelling of non-destructive material evaluation, an addendum : a bibliography (1997–2003). *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, 12(5) :799–834, September 2004.

- [87] D. Alleyne and P. Cawley. A two-dimensional Fourier transform method for the measurement of propagating multimode signals. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 89(3) :1159–1168, March 1991.
- [88] Friedrich Moser, Laurence J. Jacobs, and Jianmin Qu. Modeling elastic wave propagation in waveguides with the finite element method. *NDT & E International*, 32(4) :225–234, June 1999.
- [89] Georgios Valsamos, Folco Casadei, and George Solomos. A numerical study of wave dispersion curves in cylindrical rods with circular cross-section. *Journal of Applied and Computational Mechanics*, 7(1) :99–114, 2013.
- [90] M. Castaings, C. Bacon, B. Hosten, and M. V. Predoi. Finite element predictions for the dynamic response of thermo-viscoelastic material structures. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 115(3) :1125–1133, February 2004.
- [91] R. M. Sanderson. The Application of Finite Element Modelling to Guided Wave Testing Systems. volume 657, pages 256–263. AIP, 2003.
- [92] M.Ech-Cherif El-Kettani, F Luppé, and A Guillet. Guided waves in a plate with linearly varying thickness : experimental and numerical results. *Ultrasonics*, 42(1-9) :807–812, April 2004.
- [93] C. Willberg, S. Duczek, J. M. Vivar-Perez, and Z. A. B. Ahmad. Simulation Methods for Guided Wave-Based Structural Health Monitoring : A Review. *Applied Mechanics Reviews*, 67(1) :010803, January 2015.
- [94] D.J. Mead. A general theory of harmonic wave propagation in linear periodic systems with multiple coupling. *Journal of Sound and Vibration*, 27(2) :235–260, March 1973.
- [95] D. M. Mead. Wave propagation in continuous periodic structures : research contributions from Southampton, 1964–1995. *Journal of sound and vibration*, 190(3) :495–524, 1996.
- [96] M.N. Ichchou, J.-M. Mencik, and W. Zhou. Wave finite elements for low and mid-frequency description of coupled structures with damage. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198(15-16) :1311–1326, March 2009.
- [97] D. Duhamel, B.R. Mace, and M.J. Brennan. Finite element analysis of the vibrations of waveguides and periodic structures. *Journal of Sound and Vibration*, 294(1-2) :205–220, June 2006.
- [98] J.-M. Mencik. On the low- and mid-frequency forced response of elastic structures using wave finite elements with one-dimensional propagation. *Computers & Structures*, 88(11-12) :674–689, June 2010.
- [99] Jamil M. Renno and Brian R. Mace. On the forced response of waveguides using the wave and finite element method. *Journal of Sound and Vibration*, 329(26) :5474–5488, December 2010.



- [100] J.-M. Mencik. New advances in the forced response computation of periodic structures using the wave finite element (WFE) method. *Computational Mechanics*, 54(3) :789–801, September 2014.
- [101] Brian R. Mace, Denis Duhamel, Michael J. Brennan, and Lars Hinke. Finite element prediction of wave motion in structural waveguides. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 117(5) :2835, 2005.
- [102] Brian R. Mace and Elisabetta Manconi. Modelling wave propagation in two-dimensional structures using finite element analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 318(4-5) :884–902, December 2008.
- [103] D.J. Thompson. Wheel-rail Noise Generation, Part III : Rail Vibration. *Journal of Sound and Vibration*, 161(3) :421–446, March 1993.
- [104] L. Gry and C. Gontier. DYNAMIC MODELLING OF RAILWAY TRACK : A PERIODIC MODEL BASED ON A GENERALIZED BEAM FORMULATION. *Journal of Sound and Vibration*, 199(4) :531–558, January 1997.
- [105] J. Ryue, D.J. Thompson, P.R. White, and D.R. Thompson. Investigations of propagating wave types in railway tracks at high frequencies. *Journal of Sound and Vibration*, 315(1-2) :157–175, August 2008.
- [106] Ruth M. Orris and M. Petyt. A finite element study of harmonic wave propagation in periodic structures. *Journal of Sound and Vibration*, 33(2) :223–236, March 1974.
- [107] Elisabetta Manconi and Brian R. Mace. Wave characterization of cylindrical and curved panels using a finite element method. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 125(1) :154–163, January 2009.
- [108] Ștefan Sorohan, Nicolae Constantin, Mircea Găvan, and Viorel Anghel. Extraction of dispersion curves for waves propagating in free complex waveguides by standard finite element codes. *Ultrasonics*, 51(4) :503–515, May 2011.
- [109] Fabien Treyssède. Numerical investigation of elastic modes of propagation in helical waveguides. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 121(6) :3398, 2007.
- [110] Y. Waki, B.R. Mace, and M.J. Brennan. Free and forced vibrations of a tyre using a wave/finite element approach. *Journal of Sound and Vibration*, 323(3-5) :737–756, June 2009.
- [111] Y. Waki, B.R. Mace, and M.J. Brennan. Numerical issues concerning the wave and finite element method for free and forced vibrations of waveguides. *Journal of Sound and Vibration*, 327(1-2) :92–108, October 2009.
- [112] Elisabetta Manconi. *Modelling wave propagation in two-dimensional structures using a wave/finite element technique*. Doctoral thesis, Università di Parma. Dipartimento di Ingegneria Industriale, March 2008.
- [113] Pawel Packo, Tadeusz Uhl, and Wiesław J. Staszewski. Generalized semi-analytical finite difference method for dispersion curves calculation and numerical dispersion

- analysis for Lamb waves. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 136(3) :993–1002, 2014.
- [114] Hauke Gravenkamp, Chongmin Song, and Jens Prager. A numerical approach for the computation of dispersion relations for plate structures using the Scaled Boundary Finite Element Method. *Journal of Sound and Vibration*, 331(11) :2543–2557, May 2012.
- [115] Hauke Gravenkamp, Hou Man, Chongmin Song, and Jens Prager. The computation of dispersion relations for three-dimensional elastic waveguides using the Scaled Boundary Finite Element Method. *Journal of Sound and Vibration*, 332(15) :3756–3771, July 2013.
- [116] Hauke Gravenkamp, Fabian Bause, and Chongmin Song. On the computation of dispersion curves for axisymmetric elastic waveguides using the Scaled Boundary Finite Element Method. *Computers & Structures*, 131 :46–55, January 2014.
- [117] Hauke Gravenkamp, Carolin Birk, and Jason Van. Modeling ultrasonic waves in elastic waveguides of arbitrary cross-section embedded in infinite solid medium. *Computers & Structures*, 149 :61–71, March 2015.
- [118] M. Mazzotti, I. Bartoli, A. Marzani, and E. Viola. A 2.5d boundary element formulation for modeling damped waves in arbitrary cross-section waveguides and cavities. *Journal of Computational Physics*, 248 :363–382, September 2013.
- [119] Fabian Krome and Hauke Gravenkamp. A semi-analytical curved element for linear elasticity based on the scaled boundary finite element method : A semi-analytical curved element for linear elasticity based on the scaled boundary finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 109(6) :790–808, February 2017.
- [120] R.B. Nelson, S.B. Dong, and R.D. Kalra. Vibrations and waves in laminated orthotropic circular cylinders. *Journal of Sound and Vibration*, 18(3) :429–444, October 1971.
- [121] B. Aalami. Waves in Prismatic Guides of Arbitrary Cross Section. *Journal of Applied Mechanics*, 40(4) :1067, 1973.
- [122] P. E. Lagasse. Higher-order finite-element analysis of topographic guides supporting elastic surface waves. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 53(4) :1116, 1973.
- [123] Richard J. Talbot and J.S Przemieniecki. Finite element analysis of frequency spectra for elastic waveguides. *International Journal of Solids and Structures*, 11(1) :115–138, January 1975.
- [124] K.H. Huang and S.B. Dong. Propagating waves and edge vibrations in anisotropic composite cylinders. *Journal of Sound and Vibration*, 96(3) :363–379, October 1984.
- [125] S. B. Dong and K. H. Huang. Edge Vibrations in Laminated Composite Plates. *Journal of Applied Mechanics*, 52(2) :433, 1985.

- [126] S. K. Datta, A. H. Shah, R. L. Bratton, and T. Chakraborty. Wave propagation in laminated composite plates. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 83(6) :2020–2026, June 1988.
- [127] G. R. Liu, J. Tani, K. Watanabe, and T. Ohyoshi. Lamb Wave Propagation in Anisotropic Laminates. *Journal of Applied Mechanics*, 57(4) :923, 1990.
- [128] L. Gavrić. Computation of propagative waves in free rail using a finite element technique. *Journal of Sound and Vibration*, 185(3) :531–543, August 1995.
- [129] Takahiro Hayashi, Chiga Tamayama, and Morimasa Murase. Wave structure analysis of guided waves in a bar with an arbitrary cross-section. *Ultrasonics*, 44(1) :17–24, January 2006.
- [130] Vesna Damljanović and Richard L. Weaver. Propagating and evanescent elastic waves in cylindrical waveguides of arbitrary cross section. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 115(4) :1572–1581, April 2004.
- [131] O. Onipede, Jr. and S.B. Dong. PROPAGATING WAVES AND END MODES IN PRETWISTED BEAMS. *Journal of Sound and Vibration*, 195(2) :313–330, August 1996.
- [132] V.V. Volovoi, D.H. Hodges, V.L. Berdichevsky, and V.G. Sutyrin. DYNAMIC DISPERSION CURVES FOR NON-HOMOGENEOUS, ANISOTROPIC BEAMS WITH CROSS-SECTIONS OF ARBITRARY GEOMETRY. *Journal of Sound and Vibration*, 215(5) :1101–1120, September 1998.
- [133] X. Han, G. R. Liu, Z. C. Xi, and K. Y. Lam. Characteristics of waves in a functionally graded cylinder. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 53(3) :653–676, January 2002.
- [134] O. M. Mukdadi, Y. M. Desai, S. K. Datta, A. H. Shah, and A. J. Niklasson. Elastic guided waves in a layered plate with rectangular cross section. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 112(5) :1766–1779, November 2002.
- [135] Osama M. Mukdadi and Subhendu K. Datta. Transient ultrasonic guided waves in layered plates with rectangular cross section. *Journal of Applied Physics*, 93(11) :9360–9370, June 2003.
- [136] P. J. Shorter. Wave propagation and damping in linear viscoelastic laminates. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 115(5) :1917–1925, May 2004.
- [137] Ivan Bartoli. *Structural Health Monitoring by Ultrasonic Guided Waves*. ProQuest, 2007.
- [138] Mihai V. Predoi, Michel Castaings, Bernard Hosten, and Christophe Bacon. Wave propagation along transversely periodic structures. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 121(4) :1935–1944, April 2007.
- [139] Alessandro Marzani, Erasmo Viola, Ivan Bartoli, Francesco Lanza di Scalea, and Piervincenzo Rizzo. A semi-analytical finite element formulation for modeling stress wave propagation in axisymmetric damped waveguides. *Journal of Sound and Vibration*, 318(3) :488–505, December 2008.

- [140] Stefano Coccia, Ivan Bartoli, Alessandro Marzani, Francesco Lanza di Scalea, Salvatore Salamone, and Mahmood Fateh. Numerical and experimental study of guided waves for detection of defects in the rail head. *NDT & E International*, 44(1) :93–100, January 2011.
- [141] Michel Castaings and Michael Lowe. Finite element model for waves guided along solid systems of arbitrary section coupled to infinite solid media. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 123(2) :696–708, February 2008.
- [142] Jing Mu and Joseph L. Rose. Guided wave propagation and mode differentiation in hollow cylinders with viscoelastic coatings. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 124(2) :866–874, August 2008.
- [143] Hua Jia, Mu Jing, and L. Rose Joseph. Guided wave propagation in single and double layer hollow cylinders embedded in infinite media. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 129(2) :691–700, February 2011.
- [144] Takahiro Hayashi and Daisuke Inoue. Calculation of leaky Lamb waves with a semi-analytical finite element method. *Ultrasonics*, 54(6) :1460–1469, August 2014.
- [145] Fabien Treyssède. Elastic waves in helical waveguides. *Wave Motion*, 45(4) :457–470, March 2008.
- [146] Fabien Treyssède and Laurent Laguerre. Investigation of elastic modes propagating in multi-wire helical waveguides. *Journal of Sound and Vibration*, 329(10) :1702–1716, May 2010.
- [147] M. Mazzotti, A. Marzani, I. Bartoli, and E. Viola. Guided waves dispersion analysis for prestressed viscoelastic waveguides by means of the SAFE method. *International Journal of Solids and Structures*, 49(18) :2359–2372, September 2012.
- [148] Ming Cong, Xinjun Wu, and Ran Liu. Dispersion analysis of guided waves in the finned tube using the semi-analytical finite element method. *Journal of Sound and Vibration*, 401 :114–126, August 2017.
- [149] Karim Jezzine. *Approche modale pour la simulation globale de contrôles non-destructifs par ondes élastiques guidées*. Thèse de doctorat, Université de Bordeaux I, 1970-2013, France, 2006.
- [150] Vahan Baronian. *Couplage des méthodes modale et éléments finis pour la diffraction des ondes élastiques guidées : Application au Contrôle Non Destructif*. phdthesis, Ecole Polytechnique X, November 2009.
- [151] Mohammed Marouane El Bakkali. *Modélisation des contrôles non-destructifs par ondes ultrasonores guidées. Application aux contrôles de canalisations*. phdthesis, Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambresis, January 2015.
- [152] David Gottlieb and Steven A. Orszag. *Numerical analysis of spectral methods : theory and applications*. Number 26 in CBMS-NSF regional conference series in applied mathematics. Soc. for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, Pa, nachdr. edition, 1977. OCLC : 553577536.

- [153] C. Canuto, editor. *Spectral methods in fluid dynamics*. Springer series in computational physics. Springer-Verlag, Berlin ; New York, corr. 3rd print edition, 1988.
- [154] James F Doyle. *Wave propagation in structures : an fftbased spectral analysis methodology*. Springer, Place of publication not identified, 1989. OCLC : 968639409.
- [155] Steven A Orszag. Spectral methods for problems in complex geometries. *Journal of Computational Physics*, 37(1) :70–92, August 1980.
- [156] Heinz-Otto Kreiss and Joseph Oliger. Comparison of accurate methods for the integration of hyperbolic equations. *Tellus*, 24(3) :199–215, June 1972.
- [157] A. T. I. Adamou and R. V. Craster. Spectral methods for modelling guided waves in elastic media. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 116(3) :1524–1535, September 2004.
- [158] Florian Karpfinger, Boris Gurevich, and Andrey Bakulin. Modeling of wave dispersion along cylindrical structures using the spectral method. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 124(2) :859–865, August 2008.
- [159] F. Hernando Quintanilla, M. J. S. Lowe, and R. V. Craster. Modeling guided elastic waves in generally anisotropic media using a spectral collocation method. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 137(3) :1180–1194, March 2015.
- [160] F. Hernando Quintanilla, M.J.S. Lowe, and R.V. Craster. Full 3d dispersion curve solutions for guided waves in generally anisotropic media. *Journal of Sound and Vibration*, 363 :545–559, February 2016.
- [161] Kosuke Nagaya. Dispersion of elastic waves in bars with polygonal cross section. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 70(3) :763–770, September 1981.
- [162] Kosuke Nagaya and Tatsuya Watanabe. Wave propagation in an infinite long bar of arbitrary cross section and with a circular cylindrical cavity. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 75(3) :834–841, March 1984.
- [163] Kosuke Nagaya and Tatsuya Watanabe. Wave propagation in a rod with an arbitrarily shaped outer boundary and a cylindrical cavity of arbitrary shape. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 77(5) :1824–1833, May 1985.
- [164] Jonathan C. Lesage, Jill V. Bond, and Anthony N. Sinclair. Elastic wave propagation in bars of arbitrary cross section : A generalized Fourier expansion collocation method. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 136(3) :985–992, September 2014.
- [165] Xiaoshan Cao, Feng Jin, and Insu Jeon. Calculation of propagation properties of Lamb waves in a functionally graded material (FGM) plate by power series technique. *NDT & E International*, 44(1) :84–92, January 2011.
- [166] Xiaoshan Cao, Zhen Qu, Junping Shi, and Yan Ru. Lamb Waves in a Functionally Graded Composite Plate with Nonintegral Power Function Volume Fractions. *Advances in Materials Science and Engineering*, 2015 :1–7, 2015.

- [167] B. A. Szabo and Ivo Babuška. *Finite element analysis*. Wiley, New York, 1991.
- [168] C. Willberg, S. Duczek, J.M. Vivar Perez, D. Schmicker, and U. Gabbert. Comparison of different higher order finite element schemes for the simulation of Lamb waves. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 241-244 :246–261, October 2012.
- [169] Gary C. Cohen. *Higher-Order Numerical Methods for Transient Wave Equations*. Scientific Computation. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2002.
- [170] Anthony T Patera. A spectral element method for fluid dynamics : Laminar flow in a channel expansion. *Journal of Computational Physics*, 54(3) :468–488, June 1984.
- [171] Dimitri Komatitsch and Jean-Pierre Vilotte. The spectral element method : An efficient tool to simulate the seismic response of 2d and 3d geological structures. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 88(2) :368–392, April 1998.
- [172] Dimitri Komatitsch, Seiji Tsuboi, and Jeroen Tromp. The Spectral-Element Method in Seismology. In Alan Levander and Guust Nolet, editors, *Seismic Earth : Array Analysis of Broadband Seismograms*, pages 205–227. American Geophysical Union, 2005.
- [173] E. D. Mercerat, J. P. Vilotte, and F. J. Sánchez-Sesma. Triangular Spectral Element simulation of two-dimensional elastic wave propagation using unstructured triangular grids. *Geophysical Journal International*, 166(2) :679–698, August 2006.
- [174] G. Seriani and S.P. Oliveira. Dispersion analysis of spectral element methods for elastic wave propagation. *Wave Motion*, 45(6) :729–744, June 2008.
- [175] Pawel Kudela and Wiesław Ostachowicz. Wave Propagation Modelling in Composite Plates. *Applied Mechanics and Materials*, 9 :89–104, 2008.
- [176] P Kudela and W Ostachowicz. 3d time-domain spectral elements for stress waves modelling. *Journal of Physics : Conference Series*, 181 :012091, August 2009.
- [177] Saeid Hedayatrasa, Tinh Quoc Bui, Chuanzeng Zhang, and Chee Wah Lim. Numerical modeling of wave propagation in functionally graded materials using time-domain spectral Chebyshev elements. *Journal of Computational Physics*, 258 :381–404, February 2014.
- [178] Sascha Duczek, Christian Willberg, David Schmicker, and Ulrich Gabbert. Development, Validation and Comparison of Higher Order Finite Element Approaches to Compute the Propagation of Lamb Waves Efficiently. *Key Engineering Materials*, 518 :95–105, 2012.
- [179] D. Schmicker, J.M. Vivar-Perez, and U. Gabbert. TESTING OF HIGHER ORDER FINITE ELEMENTS BASED ON LAGRANGE POLYNOMIALS IN DEPENDENCE OF THE UNDERLYING NODAL GRID. pages 541–558, May 2014.
- [180] G. Cohen, P. Joly, J. E. Roberts, and N. Tordjman. Higher Order Triangular Finite Elements with Mass Lumping for the Wave Equation. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 38(6) :2047–2078, January 2001.

- [181] Cyril Agut. *Schémas numériques d'ordre élevé en temps et en espace pour l'équation des ondes*. phdthesis, Université de Pau et des Pays de l'Adour, December 2011.
- [182] Ben Q. Li. *Discontinuous finite elements in fluid dynamics and heat transfer*. Computational fluid and solid mechanics. Springer, London, 2006.
- [183] Jan S. Hesthaven and Tim Warburton. *Nodal discontinuous Galerkin methods : algorithms, analysis, and applications*. Number 54 in Texts in applied mathematics. Springer, New York, NY, 2008.
- [184] Béatrice M. Rivière. *Discontinuous Galerkin methods for solving elliptic and parabolic equations : theory and implementation*. Number 35 in Frontiers in applied mathematics. SIAM, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, Pa, 2008.
- [185] Robert Eymard, Thierry Gallouët, and Raphaële Herbin. Finite volume methods. In *Handbook of Numerical Analysis*, volume 7, pages 713–1018. Elsevier, 2000.
- [186] Douglas N. Arnold, Franco Brezzi, Bernardo Cockburn, and L. Donatella Marini. Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems. *SIAM journal on numerical analysis*, 39(5) :1749–1779, 2002.
- [187] W. H. Reed and T. R. Hill. Triangular Mesh Methods for the Neutron Transport Equation. Technical Report LA-UR-73-479; CONF-730414-2, Los Alamos Scientific Lab., N.Mex. (USA), October 1973.
- [188] Bernardo Cockburn, George E. Karniadakis, Chi-Wang Shu, M. Griebel, D. E. Keyes, R. M. Nieminen, D. Roose, and T. Schlick, editors. *Discontinuous Galerkin Methods*, volume 11 of *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2000.
- [189] Martin Käser and Michael Dumbser. An arbitrary high-order discontinuous Galerkin method for elastic waves on unstructured meshes - I. The two-dimensional isotropic case with external source terms. *Geophysical Journal International*, 166(2) :855–877, August 2006.
- [190] Michael Dumbser and Martin Käser. An arbitrary high-order discontinuous Galerkin method for elastic waves on unstructured meshes – II. The three-dimensional isotropic case. *Geophysical Journal International*, 167(1) :319–336, October 2006.
- [191] Martin Käser, Michael Dumbser, Josep de la Puente, and Heiner Igel. An arbitrary high-order Discontinuous Galerkin method for elastic waves on unstructured meshes - III. Viscoelastic attenuation. *Geophysical Journal International*, 168(1) :224–242, January 2007.
- [192] Josep de la Puente, Martin Käser, Michael Dumbser, and Heiner Igel. An arbitrary high-order discontinuous Galerkin method for elastic waves on unstructured meshes - IV. Anisotropy. *Geophysical Journal International*, 169(3) :1210–1228, June 2007.
- [193] Michael Dumbser, Martin Käser, and Eleuterio F. Toro. An arbitrary high-order Discontinuous Galerkin method for elastic waves on unstructured meshes – V. Local

- time stepping and p-adaptivity. *Geophysical Journal International*, 171(2) :695–717, November 2007.
- [194] Jonás D. De Basabe, Mrinal K. Sen, and Mary F. Wheeler. The interior penalty discontinuous Galerkin method for elastic wave propagation : grid dispersion. *Geophysical Journal International*, 175(1) :83–93, October 2008.
- [195] V. Etienne, E. Chaljub, J. Virieux, and N. Glinsky. An hp-adaptive discontinuous Galerkin finite-element method for 3-D elastic wave modelling : An hp-adaptive DG-FEM for 3-D seismic modelling. *Geophysical Journal International*, 183(2) :941–962, November 2010.
- [196] P.F. Antonietti, I. Mazzieri, A. Quarteroni, and F. Rapetti. Non-conforming high order approximations of the elastodynamics equation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 209-212 :212–238, February 2012.
- [197] Paola F. Antonietti, Marco Sarti, and Marco Verani. Multigrid Algorithms for  $hp$ -Discontinuous Galerkin Discretizations of Elliptic Problems. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 53(1) :598–618, January 2015.
- [198] Olivier Bou Matar, Pierre-Yves Guerder, YiFeng Li, Bart Vandewoestyne, and Koen Van Den Abeele. A nodal discontinuous Galerkin finite element method for non-linear elastic wave propagation. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 131(5) :3650–3663, May 2012.
- [199] Yifeng Li. *Development of numerical simulation method for nonlinear elastodynamic : application to acoustic imaging of defect with the help of cavity chaotic transducer*. phdthesis, Ecole Centrale de Lille, July 2009.
- [200] H.G. Aksoy and E. Şenocak. Wave propagation in functionally graded and layered materials. *Finite Elements in Analysis and Design*, 45(12) :876–891, October 2009.
- [201] S.-C. Soon, B. Cockburn, and Henryk K. Stolarski. A hybridizable discontinuous Galerkin method for linear elasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 80(8) :1058–1092, November 2009.
- [202] Marie Bonnasse-Gahot, Henri Calandra, Julien Diaz, and Stéphane Lanteri. Hybridizable discontinuous Galerkin method for the 2-D frequency-domain elastic wave equations. *Geophysical Journal International*, 213(1) :637–659, April 2018.
- [203] Marie Bonnasse-Gahot. *Simulation de la propagation d’ondes élastiques en domaine fréquentiel par des méthodes Galerkin discontinues*. PhD thesis, Nice, 2015.
- [204] Caroline Baldassari. *Modélisation et simulation numérique pour la migration terrestre par équation d’ondes*. phdthesis, Université de Pau et des Pays de l’Adour, December 2009.
- [205] ILARIO MAZZIERI. *Non-conforming high order methods for the elastodynamics equation*. Tesi di dottorato, POLITECNICO DI MILANO, March 2012.



- [206] A Ferroni, P F Antonietti, I Mazziere, and A Quarteroni. Dispersion-dissipation analysis of 3-D continuous and discontinuous spectral element methods for the elastodynamics equation. *Geophysical Journal International*, 211(3) :1554–1574, December 2017.
- [207] Martin Alnæs, Jan Blechta, Johan Hake, August Johansson, Benjamin Kehlet, Anders Logg, Chris Richardson, Johannes Ring, Marie E. Rognes, and Garth N. Wells. The FEniCS Project Version 1.5. *Archive of Numerical Software*, 3(100), December 2015.
- [208] Christophe Geuzaine and Jean-François Remacle. Gmsh : A 3-D finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 79(11) :1309–1331, September 2009.
- [209] GMSH : A three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities.
- [210] Gouri Dhatt, Gilbert Touzot, and Emmanuel Lefrançois. *Finite element method*. Numerical methods series. ISTE ; Wiley, London : Hoboken, N.J, 2012. OCLC : ocn818323824.
- [211] Volker Mehrmann. Divide and conquer methods for block tridiagonal systems. *Parallel Computing*, 19(3) :257–279, March 1993.
- [212] Andrew V. Terekhov. A fast parallel algorithm for solving block-tridiagonal systems of linear equations including the domain decomposition method. *Parallel Computing*, 39(6-7) :245–258, June 2013.
- [213] Robert Schreiber. Block Algorithms for Parallel Machines. In Martin Schultz, editor, *Numerical Algorithms for Modern Parallel Computer Architectures*, number 13 in The IMA Volumes in Mathematics and Its Applications, pages 197–207. Springer US, 1988.
- [214] James W. Demmel. *Applied numerical linear algebra*. Soc. for Industrial and Applied Math, Philadelphia, 1997.
- [215] E. Anderson, Z. Bai, C. Bischof, S. Blackford, J. Demmel, J. Dongarra, J. Du Croz, A. Greenbaum, S. Hammerling, A. McKenney, and D. Sorensen. *LAPACK Users' Guide : Third Edition*. SIAM, January 1999.
- [216] Nicholas J. Higham. Block LU Factorization. In *Accuracy and Stability of Numerical Algorithms*, Other Titles in Applied Mathematics, pages 245–258. Society for Industrial and Applied Mathematics, January 2002.
- [217] Frédéric Magoulès and François-Xavier Roux. *Calcul scientifique parallèle cours, exemples avec OpenMP et MPI, exercices corrigés*. Dunod, Paris, 2013. OCLC : 835586534.
- [218] Randall J. LeVeque. *Finite difference methods for differential equations*. 2006.
- [219] Paola F. Antonietti, Annalisa Buffa, and Ilaria Perugia. Discontinuous Galerkin approximation of the Laplace eigenproblem. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(25-28) :3483–3503, May 2006.

- [220] M. Ainsworth, P. Monk, and W. Muniz. Dispersive and Dissipative Properties of Discontinuous Galerkin Finite Element Methods for the Second-Order Wave Equation. *Journal of Scientific Computing*, 27(1-3) :5–40, June 2006.
- [221] Yoshinari Miyamoto. *Functionally graded materials : design, processing, and applications*. 1999. OCLC : 883391970.
- [222] Hans Petter Langtangen and Geir K Pedersen. *Scaling of Differential Equations*. 2016. OCLC : 953100736.
- [223] G. R Liu and Z. C Xi. *Elastic waves in anisotropic laminates*. CRC Press, Boca Raton, Fla., 2002. OCLC : 614289981.
- [224] Adnan H. Nayfeh and D. E. Chimenti. Free Wave Propagation in Plates of General Anisotropic Media. In Donald O. Thompson and Dale E. Chimenti, editors, *Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation : Volume 8, Part A and B*, pages 181–188. Springer US, Boston, MA, 1989.
- [225] Françoise Tisseur and Karl Meerbergen. The Quadratic Eigenvalue Problem. *SIAM Review*, 43(2) :235–286, January 2001.
- [226] Michael Lowe and Brian Pavlakovic. DISPERSE User’s Manual. Technical Report Version 2.0.20a, Non-Destructive Testing Laboratory Department of Mechanical Engineering Imperial College London, London, SW7 2AZ UK, July 2013.
- [227] Ivan Bartoli, Alessandro Marzani, Francesco Lanza di Scalea, and Erasmo Viola. Modeling wave propagation in damped waveguides of arbitrary cross-section. *Journal of Sound and Vibration*, 295(3-5) :685–707, August 2006.
- [228] Jeong-Ho Kim and G. H. Paulino. Isoparametric Graded Finite Elements for Non-homogeneous Isotropic and Orthotropic Materials. *Journal of Applied Mechanics*, 69(4) :502, 2002.
- [229] L. Elmaimouni, J.E. Lefebvre, V. Zhang, and T. Gryba. Guided waves in radially graded cylinders : a polynomial approach. *NDT & E International*, 38(5) :344–353, July 2005.
- [230] L. Elmaimouni, J. E. Lefebvre, A. Raherison, and F. E. Ratolojanahary. Acoustical Guided Waves in Inhomogeneous Cylindrical Materials. *Ferroelectrics*, 372(1) :115–123, November 2008.
- [231] Cécile Baron. Propagation of elastic waves in an anisotropic functionally graded hollow cylinder in vacuum. *Ultrasonics*, 51(2) :123–130, February 2011.
- [232] Yannick Guérin. Les combustibles nucléaires : À quoi ressemble le combustible des réacteurs à eau ?
- [233] RAPPORT DSR N 316 : LE POINT DE VUE DE L’IRSN SUR LA SURETE ET LA RADIOPROTECTION DU PARC ELECTRONUCLEAIRE FRANÇAIS EN 2008.
- [234] Ivan Bartoli, Francesco Lanza di Scalea, Mahmood Fateh, and Erasmo Viola. Modeling guided wave propagation with application to the long-range defect detection in railroad tracks. *NDT & E International*, 38(5) :325–334, July 2005.

- [235] European Commission. Décision de la Commission du 30 mai 2002 concernant la spécification technique d'interopérabilité relative au sous-système «maintenance» du système ferroviaire transeuropéen à grande vitesse visée à l'article 6, paragraphe 1, de la directive 96/48/CE (notifiée sous le numéro C(2002) 1946) (Texte présentant de l'intérêt pour l'EEE) (2002/730/CE). Technical Report CELEX : 02002Do730-20020912 / CONSOLIDATION : 2002Do730/20020912, September 2002.
- [236] Michael Turner, Joaquim Peiró, and David Moxey. A Variational Framework for High-order Mesh Generation. *Procedia Engineering*, 163 :340–352, 2016.
- [237] Alessandro Marzani. Time-transient response for ultrasonic guided waves propagating in damped cylinders. *International Journal of Solids and Structures*, 45(25-26) :6347–6368, December 2008.
- [238] Société Française d'Acoustique. Livre blanc de la Société Française d'Acoustique, 2010.
- [239] Feruza Abdulkadirovna Amirkulova. *Dispersion relations for elastic waves in plates and rods*. PhD thesis, Rutgers University-Graduate School-New Brunswick, 2011.
- [240] Olivier Xeridat. *Etude expérimentale de la propagation, de la diffusion et de la localisation des ondes de Lamb*. PhD thesis, Université Nice Sophia Antipolis, 2011.
- [241] B. Cockburn. Discontinuous Galerkin methods. *ZAMM*, 83(11) :731–754, November 2003.
- [242] Bernardo Cockburn, Guido Kanschat, and Dominik Schötzau. The local discontinuous Galerkin method for linearized incompressible fluid flow : a review. *Computers & Fluids*, 34(4-5) :491–506, May 2005.
- [243] F. Bassi and S. Rebay. High-Order Accurate Discontinuous Finite Element Solution of the 2d Euler Equations. *Journal of Computational Physics*, 138(2) :251–285, December 1997.
- [244] Bernardo Cockburn and Chi-Wang Shu. The Local Discontinuous Galerkin Method for Time-Dependent Convection-Diffusion Systems. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 35(6) :2440–2463, December 1998.
- [245] J. Tinsley Oden, Ivo Babuška, and Carlos Erik Baumann. A Discontinuous hp Finite Element Method for Diffusion Problems. *Journal of Computational Physics*, 146(2) :491–519, November 1998.
- [246] Carlos Erik Baumann and J. Tinsley Oden. A discontinuous hp finite element method for convection—diffusion problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 175(3-4) :311–341, July 1999.
- [247] Ralf Hartmann. Numerical Analysis of Higher Order Discontinuous Galerkin Finite Element Methods, October 2008.
- [248] D. Wirasaet, S. Tanaka, E. J. Kubatko, J. J. Westerink, and C. Dawson. A performance comparison of nodal discontinuous Galerkin methods on triangles and qua-

- drilaterals. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 64(10-12) :1336–1362, December 2010.
- [249] E. H. Georgoulis. Optimal error estimates for the hp-version interior penalty discontinuous Galerkin finite element method. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 25(1) :205–220, January 2005.
- [250] Khosro Shahbazi. An explicit expression for the penalty parameter of the interior penalty method. *Journal of Computational Physics*, 205(2) :401–407, May 2005.
- [251] Yekaterina Epshteyn and Béatrice Rivière. Estimation of penalty parameters for symmetric interior penalty Galerkin methods. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 206(2) :843–872, September 2007.
- [252] Nicholas J. Higham. *Accuracy and stability of numerical algorithms*. Soc. for Industrial and Applied Math, Philadelphia, 2. ed edition, 2002. OCLC : 265000938.
- [253] J. S. Hesthaven and T. Warburton. High-order nodal discontinuous Galerkin methods for the Maxwell eigenvalue problem. *Philosophical Transactions of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 362(1816) :493–524, March 2004.
- [254] T. Warburton and Mark Embree. The role of the penalty in the local discontinuous Galerkin method for Maxwell’s eigenvalue problem. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(25-28) :3205–3223, May 2006.
- [255] P. Castillo. Performance of Discontinuous Galerkin Methods for Elliptic PDEs. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 24(2) :524–547, January 2002.
- [256] Fang Q. Hu, M.Y. Hussaini, and Patrick Rasetarinera. An Analysis of the Discontinuous Galerkin Method for Wave Propagation Problems. *Journal of Computational Physics*, 151(2) :921–946, May 1999.
- [257] Fang Q. Hu and Harold L. Atkins. Eigensolution Analysis of the Discontinuous Galerkin Method with Nonuniform Grids. *Journal of Computational Physics*, 182(2) :516–545, November 2002.
- [258] Mark Ainsworth. Discrete Dispersion Relation for *hp* -Version Finite Element Approximation at High Wave Number. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 42(2) :553–575, January 2004.
- [259] Vadim Lisitsa. Dispersion analysis of discontinuous Galerkin method on triangular mesh for elastic wave equation. *Applied Mathematical Modelling*, 40(7-8) :5077–5095, April 2016.





---

**Titre** Étude numérique de la propagation des ondes guidées ultrasonores par la méthode de Galerkin discontinue : Application au contrôle non-destructif dans le domaine des transports.

**Résumé** Les structures mécaniques utilisées de nos jours ne cessent d'évoluer en utilisant des matériaux composites ou à gradient fonctionnel afin de répondre aux enjeux de résistance accrue, allègement de la structure et amélioration des performances. Ceux-ci nécessitent un contrôle adéquat de leur état de santé afin de s'assurer de l'intégrité de la structure. L'utilisation des ondes guidées ultrasonores fournit un moyen efficace et rapide d'inspection sur de longues distances. Néanmoins, ces ondes présentent certaines caractéristiques complexes qui rendent la tâche très difficile. L'utilisation d'outils d'analyse tels que les modèles numériques constitue un grand atout pour ce type d'application. Dans ce contexte, l'objectif de cette thèse est le développement d'un outil de modélisation performant, permettant d'étudier la propagation des ondes guidées ultrasonores avec une grande précision et une faible consommation de ressources et de temps de calculs. De ce fait, l'intérêt est porté sur des méthodes numériques d'ordres élevés dont les propriétés de convergence sont beaucoup améliorées que les méthodes classiques. En particulier, la méthode semi-analytique éléments finis de Galerkin discontinue pour la détermination des courbes de dispersion des ondes guidées est développée. La méthode est applicable aux structures planes et cylindriques fabriquées de matériaux isotropes, anisotropes et hétérogènes (à gradient fonctionnel de propriétés). Une étude comparative sur l'analyse des performances de ces méthodes est effectuée. Celle-ci a démontré la capacité de la méthode à modéliser la propagation des ondes guidées ultrasonores dans des guides d'ondes à section arbitraire avec des performances prometteuses par rapport à la méthode des éléments finis classique.

**Mots-clés** Modélisation des ondes guidées par ultrasons, Contrôle non-destructif, Méthodes des éléments finis, Galerkin discontinu, Technique semi-analytique.

---

**Title** Numerical study of ultrasonic guided waves propagation using the discontinuous Galerkin method : Application to non-destructive testing in the transports field.

**Abstract** The mechanical structures used today are constantly evolving using composite or functionally gradient materials to meet the challenges of increased strength, lightening the structure and improving performance. These require adequate control of their state of health to ensure the integrity of the structure. The use of Ultrasound Guided Waves (UGW) provides an efficient and fast way of inspection over long distances. Nevertheless, these waves have some complex features that make the task very difficult. The use of analysis tools such as numerical models is a great asset for this type of application. In this context, the objective of this thesis is the development of a powerful modeling tool, allowing to study the propagation of UGWs with a great precision, less computational time and consumption of resources. Accordingly, we are interested in higher order numerical methods whose convergence properties are much improved than the classical methods. In particular, a semi-analytical discontinuous Galerkin finite element method (SADG-FE) is developed for the determination of the dispersion properties of guided waves in arbitrary cross-section waveguides. The method is applicable to plates and cylindrical structures made of isotropic, anisotropic heterogeneous (functionally graded) materials. The performance analysis of these methods and their comparisons are performed with respect to the models based on the classical finite element method. The results demonstrated the ability of the proposed method to model the propagation of ultrasonic guided waves in arbitrary section waveguides with promising performance over the conventional finite element method.

**Keywords** Ultrasound Guided Waves modelling, Non-destructive testing, Finite Elements methods, Discontinuous Galerkin, Semi-analytical technique.

---