

UNIVERSITÉ PARIS 6 – PIERRE ET MARIE CURIE

Institut de Mathématiques de Jussieu-Paris Rive Gauche

THÈSE DE DOCTORAT

Spécialité Mathématiques

Présentée par **M. Mohamed BAHTITI**

Pour obtenir le grade de docteur de l'Université Paris 6

**Fibrés vectoriels algébriques de petit rang
sur la variété projective \mathbb{P}^n**

sous la direction de Jean-Marc DRÉZET (Université Paris VI)

Soutenue le mercredi 8 mars 2017 devant le jury composé de :

M. Jean-Marc DRÉZET	(Université Paris VI)
M. Laurent GRUSON	(Université de l'UVSQ)
M. Frédéric HAN	(Université Paris VII)
M. Christian PESKINE	(Université Paris VI)
M. Chris PETERSON	(Colorado State University)
M. Mohamed SKITI	(Université Henri Poincaré Nancy)
M. Jean VALLÈS	(Université de Pau et des Pays de l'Adour)

Après les rapports de :

M. Giorgio OTTAVIANI	(Università degli Studi di Firenze)
M. Jean VALLÈS	(Université de Pau et des Pays de l'Adour)

Remerciements

Je remercie profondément mon excellent directeur de thèse Jean-Marc Drézet qui a encadré ma thèse avec beaucoup de patience et d'encouragement. Je tiens à exprimer ma profonde gratitude au professeur Giorgio Ottaviani pour nos discussions.

Je remercie également Jean Vallès et encore une fois Giorgio Ottaviani pour avoir accepté de devenir les rapporteurs de ma thèse. Je suis très reconnaissant pour la lecture attentive qu'ils ont fait de ce travail et pour leurs importantes suggestions.

Je voudrais remercier également l'équipe de topologie et géométrie algébrique pour m'avoir accueilli dans leur équipe. En particulier, Alessandro Chiodo, Dimitri Zvonkine, Frédéric Han, Christian Peskine et Gentiana Danila. Je voudrais remercier également Laurent Gruson, A.Prabhakar Rao, Chris Peterson et Mohamed Skiti.

J'aimerais exprimer mon extrême gratitude et mes plus sincères remerciements au ministère de l'Enseignement supérieur et à l'Université de Damas de la République arabe syrienne pour avoir fourni le soutien financier, ainsi qu'à toute ma famille et à toutes les personnes qui ont contribué, par leurs encouragements constants, à m'aider à réaliser ce travail.

*

*

*

Table des matières

Remerciements	3
Introduction	7
I. Images inverses généralisées	7
II. Fibrés $(b + 1)$ -instantons pondérés	8
III. Fibrés de Tango pondérés	11
IV. Nouveaux fibrés vectoriels de rang 3 sur \mathbb{P}^4	13
1. Fibrés $(b + 1)$-instantons pondérés de rang $2n$ sur \mathbb{P}^{2n+1}	15
1.1. Images inverses généralisées de fibrés vectoriels sur les espaces projectifs	15
1.2. Fibré de corrélation nulle pondéré sur \mathbb{P}^{2n+1}	20
1.3. Stabilité du fibré de corrélation nulle pondéré sur \mathbb{P}^{2n+1}	31
1.4. Construction de fibré vectoriel de rang $2n$ sur \mathbb{P}^{2n+1}	39
1.5. Déformation du fibré de Steiner pondéré	42
2. Fibrés vectoriels de rang $n - 1$ sur \mathbb{P}^n	49
2.1. Fibrés de Tango pondérés généralisés et stabilité	49
2.2. Déformation du fibré de Tango pondéré	62
2.3. Relations entre les fibrés de Tango pondérés et les fibrés de corrélation nulle pondérés	67
3. Construction de nouveaux fibrés vectoriels de rang 3 sur \mathbb{P}^4	73
3.1. Technique de construction d'un fibré vectoriel sur une variété lisse	73
3.2. Fibré vectoriel de rang 3 sur \mathbb{P}^4	79
Références	89

Introduction

Les fibrés vectoriels algébriques non décomposables connus de rang $n - 1$ sur l'espace projectif complexe \mathbb{P}^n pour $n \geq 5$ sont rares.

Une conjecture de Hartshorne prétend que tout fibré vectoriel algébrique de rang 2 sur \mathbb{P}^n doit être décomposable pour $n > 5$. Cette perspective rend très intéressante la construction des fibrés vectoriels algébriques non décomposables de petit rang $1 < r < n$ sur \mathbb{P}^n .

Les deux seules familles connues de fibrés vectoriels non décomposables de rang $n - 1$ sont la famille des fibrés de Tango pondérés de Cascini [9] et celle des fibrés instantons de Okonek et Spindler pour n impair [43]. Les chapitres 1 et 2 sont consacrés à des généralisations de ces deux familles, et le chapitre 3 est consacré à construire des nouveaux fibrés de rang 3 sur \mathbb{P}^4 en utilisant une méthode due à Kumar, Peterson et Rao.

I. Images inverses généralisées.

Horrocks [20] a introduit une technique de construction d'un nouveau fibré à partir d'un ancien fibré muni d'une action de \mathbb{C}^* . Ancona et Ottaviani [2] ont étudié cette technique qui a été appelée l'image inverse généralisée. Plus précisément, on considère $V_1 = \mathbb{C}^{n+1}$ et V_2 un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension $n + 1$, et g_0, g_1, \dots, g_n des polynômes homogènes de degrés $d_0 \geq d_1 \geq \dots \geq d_n$ respectivement sans zéro commun sur $\mathbb{P}(V_1) = \mathbb{P}^n$. On a l'application

$$\begin{aligned} \omega &:= (g_0, g_1, \dots, g_n) : V_1 \setminus \{0\} \longrightarrow V_2 \setminus \{0\} \\ v &\longmapsto (g_0(v), g_1(v), \dots, g_n(v)). \end{aligned}$$

Soit $\eta_i : V_i \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}(V_i)$ la projection, pour $i = 1, 2$. On considère l'action de \mathbb{C}^* sur V_2

$$\begin{aligned} \sigma &: \mathbb{C}^* \longrightarrow GL(V_2) \\ t &\longmapsto \sigma(t) \end{aligned}$$

où

$$\sigma(t) = \begin{pmatrix} t^{d_0} & & & & & \\ & t^{d_1} & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & t^{d_{n-1}} & & \\ 0 & & & & & \\ & & & & & t^{d_n} \end{pmatrix},$$

et on considère une \mathbb{C}^* -action T qui est la multiplication usuelle sur $V_1 \setminus \{0\}$

$$T : \mathbb{C}^* \times V_1 \setminus \{0\} \longrightarrow V_1 \setminus \{0\}$$

$$(t, v) \longmapsto T(t, v) = t.v$$

de telle sorte que η_i soit un \mathbb{C}^* -morphisme. Alors ω est une \mathbb{C}^* -application par rapport à ces deux actions. L'action σ induit une action $\bar{\sigma} \in PGL(V_2)$ de \mathbb{C}^* sur $\mathbb{P}(V_2)$ et l'action T induit une action triviale de \mathbb{C}^* sur $\mathbb{P}(V_1)$. On obtient donc le \mathbb{C}^* -diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} V_1 \setminus \{0\} & \xrightarrow{\omega} & V_2 \setminus \{0\} \\ \eta_1 \downarrow & & \downarrow \eta_2 \\ \mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V_1) & & \mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V_2) \end{array}$$

Soit F un fibré vectoriel sur $\mathbb{P}(V_2)$, muni d'une \mathbb{C}^* -action (au-dessus de l'action $\bar{\sigma}$). Donc η_2^*F est muni d'une \mathbb{C}^* -action au-dessus de l'action σ . Alors $\omega^*\eta_2^*F$ est muni d'une \mathbb{C}^* -action au-dessus de l'action usuelle de \mathbb{C}^* sur $V_1 \setminus \{0\}$. En conséquence il existe un fibré vectoriel F_{g_0, g_1, \dots, g_n} sur $\mathbb{P}(V_1)$ tel que l'on ait un \mathbb{C}^* -isomorphisme

$$\omega^*\eta_2^*F \simeq \eta_1^*F_{g_0, g_1, \dots, g_n}.$$

On appelle F_{g_0, g_1, \dots, g_n} l'image inverse généralisée de F .

II. Fibrés $(b + 1)$ -instantons pondérés.

Nous présentons dans le chapitre 1 une généralisation de la famille des fibrés instantons spéciaux. Cette famille présente un lien important entre la géométrie algébrique et la physique mathématique, en particulier la théorie de Yang-Mills. Cette famille de fibrés a été construite sur \mathbb{P}^3 par Atiyah, Drinfeld, Hitchin et Manin [6] et correspond aux solutions auto-duales (instantons) des $SU(2)$ -équations de Yang-Mills sur la sphère euclidienne S^4 [6, 12, 4, 5], grâce à la correspondance de Penrose-Ward. Suite à la généralisation de cette correspondance sur l'espace projectif complexe de dimension impaire par Salamon [47], la famille des fibrés instantons a été également généralisée sur \mathbb{P}^{2n+1} par Okonek et Spindler [43]. Ensuite Spindler et Trautmann, puis Ancona et Ottaviani, ont étudié la famille des fibrés instantons spéciaux [50, 1].

Les fibrés instantons spéciaux de nombre quantique 1 (les fibrés de corrélation nulle classiques spéciaux) $N(f)$ sur $\mathbb{P}^{2n+1} = \mathbb{P}(V)$ [1] sont des cohomologies de la monade de type

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-1) \xrightarrow{g} V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}} \xrightarrow{Tg \circ f} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(1) \longrightarrow 0,$$

où g est l'inclusion canonique et f est un isomorphisme antisymétrique $f : V \longrightarrow V^*$ défini relativement à une base de V par la $(2n + 2) \times (2n + 2)$ -matrice antisymétrique suivante

$$\begin{pmatrix} & & & & -1 \\ & 0 & & & \\ & & & & \cdot \\ & & & & \cdot \\ & & & -1 & \\ & & 1 & & \\ & & & & \cdot \\ & & & & \cdot \\ & & & & 0 \\ 1 & & & & \end{pmatrix}.$$

On a

$${}^T B = {}^T g = (x_0 \quad \dots \quad x_n \mid y_0 \quad \dots \quad y_n)$$

et

$$A = {}^T g \circ f = (y_n \quad \dots \quad y_0 \mid -x_n \quad \dots \quad -x_0)$$

qui sont des $1 \times (2n+2)$ -matrices, avec $x_0, x_1, \dots, x_n, y_0, y_1, \dots, y_n$ des formes linéaires sans zéro commun sur \mathbb{P}^{2n+1} . Ce sont donc des fibrés vectoriels de rang $2n$ sur \mathbb{P}^{2n+1} . Nous construisons une généralisation de ces fibrés. Plus précisément, on considère le multi-indice

$$\mathbf{m} = (\gamma; (\lambda_i)_{0 \leq i \leq n}, (-\lambda_i)_{0 \leq i \leq n}),$$

où $n \in \mathbb{N}^*$, $\gamma > 0$, λ_i sont des entiers naturels pour $i = 0, 1, 2, \dots, n$ tels que

$$\gamma > \lambda_n \geq \lambda_{n-1} \geq \dots \geq \lambda_0 \geq 0.$$

Soient $g_i \in H^0(\mathbb{P}^{2n+1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(\gamma - \lambda_i))$ et $f_i \in H^0(\mathbb{P}^{2n+1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(\gamma + \lambda_{n-i}))$ des formes homogènes sur \mathbb{P}^{2n+1} sans zéro commun, pour $i = 0, 1, 2, \dots, n$. On considère l'action de \mathbb{C}^* sur $\mathbb{P}^{2n+1} = \mathbb{P}(V)$: pour tout $t \in \mathbb{C}^*$,

$$t^\gamma \cdot \begin{pmatrix} t^{\lambda_n} & & & & \\ & t^{\lambda_{n-1}} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & & 0 \\ 0 & & & t^{-\lambda_{n-1}} & \\ & & & & t^{-\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

On définit l'image inverse généralisée $\mathcal{N}_{\mathbf{m}}$ d'un tel fibré de corrélation nulle classique spécial $N(f)$. On appelle $\mathcal{N}_{\mathbf{m}}$ le fibré de corrélation nulle ((1)-instanton) pondéré par le poids \mathbf{m} sur \mathbb{P}^{2n+1} . Ce fibré est défini par la cohomologie de la monade

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-\gamma) \xrightarrow{B} \mathcal{H} \xrightarrow{A} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(\gamma) \longrightarrow 0,$$

où

$${}^T B = (f_0 \quad \dots \quad f_n \mid g_0 \quad \dots \quad g_n),$$

et

$$A = (g_n \quad \dots \quad g_0 \mid -f_n \quad \dots \quad -f_0),$$

sont des $1 \times (2n + 2)$ -matrices avec $A.B = 0$, et \mathcal{H} est le fibré suivant

$$\mathcal{H} := \bigoplus_{i=0}^n (\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(\lambda_{n-i})) \oplus \bigoplus_{i=0}^n (\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-\lambda_i)).$$

Soit $U = \mathbb{C}^2$ muni d'une action de \mathbb{C}^* définie par la matrice $t^\gamma \begin{pmatrix} t^\alpha & 0 \\ 0 & t^{-\alpha} \end{pmatrix}$. On en déduit une action de \mathbb{C}^* sur $\mathbb{P}(\mathcal{S}^{2n+1} U)$. On a les fibrés de corrélation nulle pondérés par le poids $\mathbf{m} = (\gamma; (\alpha(2n + 1 - 2i))_{0 \leq i \leq 2n+1})$ sur \mathbb{P}^{2n+1} .

Nous avons trouvé que ce fibré vectoriel est symplectique, et nous avons trouvé une condition suffisante pour qu'un fibré de corrélation nulle pondéré par le poids \mathbf{m} sur \mathbb{P}^{2n+1} soit stable.

Le fibré de corrélation nulle pondéré par le poids \mathbf{m} a été étudié sur \mathbb{P}^3 par Ein [13] et sur \mathbb{P}^5 par Ancona et Ottaviani [2], et a été défini sur \mathbb{P}^{2n+1} par Migliore, Nagel et Peterson [38].

On a également présenté dans ce chapitre une généralisation de fibrés instantons spéciaux de nombre quantique $\mathbf{b} + 1$ sur \mathbb{P}^{2n+1} [1]. Plus précisément, les fibrés instantons spéciaux de nombre quantique $\mathbf{b} + 1$ sur \mathbb{P}^{2n+1} sont des cohomologies de la monade de type

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-1)^{\mathbf{b}+1} \xrightarrow{B} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}^{2n+2\mathbf{b}+2} \xrightarrow{A} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(1)^{\mathbf{b}+1} \longrightarrow 0,$$

où

$${}^T B = \left(\begin{array}{cccc|cccc} x_0 & \dots & x_n & & 0 & y_0 & \dots & y_n & & 0 \\ & x_0 & \dots & x_n & & & y_0 & \dots & y_n & & 0 \\ & & \ddots & & \ddots & & & \ddots & & \ddots & \\ & & & 0 & x_0 & \dots & x_n & & 0 & y_0 & \dots & y_n \end{array} \right)$$

et

$$A = \left(\begin{array}{cccc|cccc} y_n & \dots & y_0 & & 0 & -x_n & \dots & -x_0 & & 0 \\ & y_n & \dots & y_0 & & & -x_n & \dots & -x_0 & & 0 \\ & & \ddots & & \ddots & & & \ddots & & \ddots & \\ & & & 0 & y_n & \dots & y_0 & & 0 & -x_n & \dots & -x_0 \end{array} \right)$$

sont des $(\mathbf{b} + 1) \times (2n + 2\mathbf{b} + 2)$ -matrices, avec $x_0, x_1, \dots, x_n, y_0, y_1, \dots, y_n$ des formes linéaires sans zéro commun sur \mathbb{P}^{2n+1} . Ce sont donc des fibrés vectoriels de rang $2n$ sur \mathbb{P}^{2n+1} .

Nous construisons une généralisation de ces fibrés. Plus précisément, on considère le multi-indice

$$\mathbf{m} = ((\gamma_j)_{0 \leq j \leq \mathbf{b}}; (\lambda_i)_{0 \leq i \leq n+\mathbf{b}}, (-\lambda_i)_{0 \leq i \leq n+\mathbf{b}}),$$

où $\mathbf{b} \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$, $\gamma_j > 0$, λ_i sont des entiers naturels pour $j = 0, 1, 2, \dots, \mathbf{b}$ et $i = 0, 1, 2, \dots, n + \mathbf{b}$ tels que

$$\gamma_0 \geq \gamma_1 \geq \dots \geq \gamma_{\mathbf{b}} > \lambda_{n+\mathbf{b}} \geq \lambda_{n+\mathbf{b}-1} \geq \dots \geq \lambda_0 \geq 0,$$

et

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} \gamma_j - \gamma_{j+1} = \lambda_{i+1} - \lambda_i \quad : \mathbf{b} \geq 1, 0 \leq j \leq \mathbf{b} - 1 \text{ et } 0 \leq i \leq n + \mathbf{b} - 1 \end{array} \right.$$

Soient $g_r \in H^0(\mathbb{P}^{2n+1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(\gamma_{\mathbf{b}} - \lambda_r))$ et $f_r \in H^0(\mathbb{P}^{2n+1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(\gamma_{\mathbf{b}} + \lambda_{n+\mathbf{b}-r}))$ des formes homogènes sur \mathbb{P}^{2n+1} sans zéro commun, pour $r = 0, 1, 2, \dots, n$. Soient

$${}^T B = \left(\begin{array}{cccc|cccc} f_0 & \cdots & f_n & & 0 & g_0 & \cdots & g_n & & 0 \\ & f_0 & \cdots & f_n & & & g_0 & \cdots & g_n & & 0 \\ & & \ddots & & \ddots & & & \ddots & & \ddots & \\ & & & & f_0 & \cdots & f_n & & & & & 0 \\ & & & & & & & g_0 & \cdots & g_n & & 0 \end{array} \right),$$

et

$$A = \left(\begin{array}{cccc|cccc} g_n & \cdots & g_0 & & 0 & -f_n & \cdots & -f_0 & & 0 \\ & g_n & \cdots & g_0 & & & -f_n & \cdots & -f_0 & & 0 \\ & & \ddots & & \ddots & & & \ddots & & \ddots & \\ & & & & g_n & \cdots & g_0 & & & & & 0 \\ & & & & & & & & -f_n & \cdots & -f_0 & 0 \end{array} \right),$$

des $(\mathbf{b} + 1) \times (2n + 2\mathbf{b} + 2)$ -matrices, avec $A.B = 0$. On considère aussi les fibrés

$$\mathcal{H} := \bigoplus_{i=0}^{n+\mathbf{b}} (\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(\lambda_{n+\mathbf{b}-i})) \oplus \bigoplus_{i=0}^{n+\mathbf{b}} (\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-\lambda_i)),$$

et

$$\mathcal{L}_- := \bigoplus_{j=0}^{\mathbf{b}} (\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-\gamma_{\mathbf{b}-j})), \quad \mathcal{L}_+ := \bigoplus_{j=0}^{\mathbf{b}} (\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(\gamma_j)).$$

On définit $\mathcal{D}_{\mathbf{m}}$, le fibré $(\mathbf{b} + 1)$ -instanton pondéré par le poids \mathbf{m} sur \mathbb{P}^{2n+1} (avec $c_1 = 0$ et une charge topologique $c_2 = \sum_{j=0}^{\mathbf{b}} \gamma_j^2 - \sum_{i=0}^{n+\mathbf{b}} \lambda_i^2$), par la cohomologie de la monade

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}_- \xrightarrow{B} \mathcal{H} \xrightarrow{A} \mathcal{L}_+ \longrightarrow 0.$$

Nous avons trouvé que ce fibré est symplectique. Nous avons aussi trouvé qu'une petite déformation de fibré de Steiner pondéré $\mathcal{S}_{\mathbf{m}}$

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}_- \xrightarrow{B} \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{S}_{\mathbf{m}} \longrightarrow 0$$

est encore un fibré de Steiner pondéré par le poids \mathbf{m} sur \mathbb{P}^{2n+1} , et que l'espace de Kuranishi de ce fibré est lisse au point correspondant à ce fibré.

III. Fibrés de Tango pondérés.

Les fibrés de Tango ont été construits sur \mathbb{P}^n par Tango [51]. Ensuite Cascini [9] en a déduit un seul exemple qui donne des *fibrés de Tango pondérés* en utilisant la technique de l'image inverse généralisée. Plus précisément, on considère Q le fibré quotient sur $\mathbb{P}(V)$ défini par la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(-1) \xrightarrow{g} V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)} \longrightarrow Q \longrightarrow 0.$$

Soit $W \subset \Lambda^2 V = (H^0(Q^*(1)))^*$ un sous-espace vectoriel tel que

$$(**) \left\{ \begin{array}{l} - \dim(W) = \binom{n+1}{2} - 2n + 1 \\ - W \text{ ne contient pas d'élément décomposable non nul de } \Lambda^2 V. \end{array} \right.$$

L'isomorphisme canonique $\bigwedge^2 V = (H^0(Q^*(1)))^*$ induit un morphisme injectif de fibrés

$$Q(-1) \longrightarrow \bigwedge^2 V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}.$$

On en déduit

$$Q(-1) \xrightarrow{\varpi_W} \left(\bigwedge^2 V / W \right) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}.$$

Le fait que W ne contient pas d'élément décomposable non nul de $\bigwedge^2 V$ est équivalent à l'injectivité de ϖ_W . On appelle $F(W)$ le *fibré de Tango* [51] qui est un fibré vectoriel de rang $n - 1$

$$0 \longrightarrow Q(-1) \xrightarrow{\varpi_W} \left(\bigwedge^2 V / W \right) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \longrightarrow F(W)(1) \longrightarrow 0.$$

Pour définir les *fibrés de Tango pondérés* de Cascini [9] : Soit $U = \mathbb{C}^2$ muni d'une action de \mathbb{C}^* définie par la matrice $\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}$. On en déduit une action de \mathbb{C}^* sur $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(\mathcal{S}^n U)$. Il existe une $SL_2(\mathbb{C})$ -décomposition irréductible de $\bigwedge^2(\mathcal{S}^n U)$ (la décomposition de Clebsch-Gordan)

$$\bigwedge^2(\mathcal{S}^n U) \simeq \mathcal{S}^{2(n-1)} U \oplus \mathcal{S}^{2(n-3)} U \oplus \mathcal{S}^{2(n-5)} U \oplus \mathcal{S}^{2(n-7)} U \oplus \dots$$

Le sous-espace vectoriel

$$W_0 = \mathcal{S}^{2(n-3)} U \oplus \mathcal{S}^{2(n-5)} U \oplus \mathcal{S}^{2(n-7)} U \oplus \dots \subset \bigwedge^2(\mathcal{S}^n U)$$

vérifie la condition (**) et il est \mathbb{C}^* -invariant. Le fibré de Tango $F(W_0)$ est muni d'une \mathbb{C}^* -action. Les images inverses généralisées de $F(W_0)$ sont les fibrés de Tango pondérés de Cascini.

Nous nous intéressons dans le chapitre 2 à la généralisation du fibré de Tango pondéré. Plus précisément, soient α, β des entiers tels que $\alpha \neq \beta$. On considère l'action de \mathbb{C}^* sur $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(\mathcal{S}^n U)$ induite par l'action suivante sur U : pour tout $t \in \mathbb{C}^*$,

$$\begin{pmatrix} t^\alpha & 0 \\ 0 & t^\beta \end{pmatrix}.$$

On classe les sous-espaces W de $\bigwedge^2 \mathcal{S}^n U$ vérifiant la condition (**) et qui sont \mathbb{C}^* -invariants. Le fibré de Tango correspondant $F(W)$ est donc muni d'une \mathbb{C}^* -action. On définit et on étudie les images inverses généralisées \mathcal{F} d'un tel fibré de Tango $F(W)$.

Une petite déformation d'un tel fibré générique \mathcal{F} est un fibré de même type et les espaces de Kuranishi de ce fibré sont lisses au point correspondant à ce fibré. On donne aussi la condition suffisante pour qu'un tel fibré \mathcal{F} soit stable.

On considère $N(f)$ (resp. $F(W)$) le fibré de corrélation nulle classique (resp. le fibré de Tango) sur $\mathbb{P}(\mathcal{S}^{2n+1} U)$ tel que $\langle f, W \rangle = 0$. Nous avons trouvé la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow N(f)(-1) \longrightarrow (H/W) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^{2n+1} U)} \longrightarrow F(W)(1) \longrightarrow 0,$$

où $H = \ker(f)$. On considère l'action de \mathbb{C}^* sur $\mathbb{P}(\mathcal{S}^{2n+1}U)$ induite par l'action suivante sur U : pour tout $t \in \mathbb{C}^*$,

$$t^\gamma \begin{pmatrix} t^\alpha & 0 \\ 0 & t^{-\alpha} \end{pmatrix},$$

où γ, α sont des entiers tels que $\gamma > (2n+1)\alpha \geq 0$. Alors les fibrés vectoriels dans la suite précédente sont munis des \mathbb{C}^* -actions. L'image inverse généralisée de cette suite est donc

$$0 \longrightarrow \mathcal{N}(-\gamma) \xrightarrow{\pi} \Upsilon_1 \xrightarrow{\iota} \mathcal{F}(\gamma) \longrightarrow 0,$$

où

$$\Upsilon_1 = \bigoplus_{i=1}^{4n} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(\zeta_i),$$

avec $\zeta_1 = 4n\alpha, \zeta_2 = (4n-1)\alpha, \dots, \zeta_{2n} = 2\alpha, \zeta_{2n+1} = -2\alpha, \dots, \zeta_{4n} = -4n\alpha$.

IV. Nouveaux fibrés vectoriels de rang 3 sur \mathbb{P}^4 .

On utilise dans le chapitre 3 une technique de construction de fibrés vectoriels due à Kumar, Peterson et Rao. Soient X une variété projective lisse, Y un diviseur de X et la suite exacte suivante de fibrés vectoriels sur Y

$$0 \longrightarrow \mathbb{A} \xrightarrow{a} \mathbb{F} \xrightarrow{b} \mathbb{B} \longrightarrow 0.$$

Soit \hat{F} un fibré vectoriel sur X tel que sa restriction sur Y est $\hat{F}|_Y = \mathbb{F}$. On définit G un fibré vectoriel sur X par le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & \hat{F}(-Y) & \xlongequal{\quad} & \hat{F}(-Y) & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & G & \longrightarrow & \hat{F} & \longrightarrow & \mathbb{B} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{A} & \longrightarrow & \mathbb{F} & \longrightarrow & \mathbb{B} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

On obtient que le rang du fibré G est $rg(G) = rg(\mathbb{A}) + rg(\mathbb{B})$. On appelle le fibré G l'extension de \mathbb{B} sur X . Soit la suite exacte sur \mathbb{P}^3

$$0 \longrightarrow \mathcal{N}(-\gamma) \xrightarrow{\pi} \Upsilon_1 \xrightarrow{\iota} \mathcal{F}(\gamma) \longrightarrow 0,$$

où

$$\Upsilon_1 = \bigoplus_{i=1}^4 \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(\zeta_i),$$

avec $\zeta_1 = 4\alpha, \zeta_2 = 2\alpha, \zeta_3 = -2\alpha, \zeta_4 = -4\alpha$. Le morphisme composé

$$\Upsilon_1^* \xrightarrow{T\pi} \mathcal{N}(\gamma) \simeq \mathcal{N}(-\gamma) \otimes \bigwedge^2 \mathcal{N}(\gamma) \xrightarrow{\pi \otimes I} \Upsilon_1 \otimes \bigwedge^2 \mathcal{N}(\gamma)$$

est alors de rang constant 2, et il est antisymétrique. Il est donc défini par une matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & -S_{12} & -S_{13} & -S_{14} \\ S_{12} & 0 & -S_{23} & -S_{24} \\ S_{13} & S_{23} & 0 & -S_{34} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & 0 \end{pmatrix}.$$

Soient $z \in H^0(\mathbb{P}^4, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(1)) \setminus \{0\}$ et $\mathbb{P}^3 \subset \mathbb{P}^4$ l'hyperplan de \mathbb{P}^4 défini par l'équation $z = 0$. Soient $\epsilon \geq 1$ un entier et $Y_{(\epsilon)} \subset \mathbb{P}^4$ le voisinage infinitésimal de l'ordre ϵ de \mathbb{P}^3 dans \mathbb{P}^4 , défini par l'équation $z^\epsilon = 0$. Soit $\mathcal{J}_{(\epsilon)} : Y_{(\epsilon)} \rightarrow \mathbb{P}^3$ la projection d'un point, en dehors de $Y_{(\epsilon)}$, sur un sous-espace projectif \mathbb{P}^3 . En appliquant l'image inverse de $\mathcal{J}_{(\epsilon)}$ sur la suite exacte précédente, on obtient la suite exacte suivante

$$0 \rightarrow \mathcal{N}_{(\epsilon)}(-\gamma) \xrightarrow{\pi} \Upsilon_{(\epsilon)} \xrightarrow{\iota} \mathcal{F}_{(\epsilon)}(\gamma) \rightarrow 0,$$

où $\mathcal{N}_{(\epsilon)} = \mathcal{J}_{(\epsilon)}^* \mathcal{N}$ et $\mathcal{F}_{(\epsilon)} = \mathcal{J}_{(\epsilon)}^* \mathcal{F}$, et

$$\Upsilon_{(\epsilon)} := \mathcal{J}_{(\epsilon)}^* \Upsilon_1 = \bigoplus_{i=1}^4 \mathcal{O}_{Y_{(\epsilon)}}(\zeta_i).$$

On considère $X = \mathbb{P}^4$ et $Y = Y_{(\epsilon)}$. En appliquant la méthode de Kumar-Peterson-Rao [34], nous trouvons des 3-fibrés vectoriels sur \mathbb{P}^4 pour certaines valeurs de ϵ . Parmi ces fibrés, certains ne sont pas isomorphes à une somme directe de trois fibrés en droites.

* * *

1. Fibrés $(b + 1)$ -instantons pondérés de rang $2n$ sur \mathbb{P}^{2n+1}

1.1. **Images inverses généralisées de fibrés vectoriels sur les espaces projectifs.** Nous donnons ci-après la description et quelques propriétés d'une méthode de construction de fibrés vectoriels sur les espaces projectifs, due à Horrocks [20].

1.1.1. **Définitions.** Soient G un groupe algébrique et X une variété algébrique. Une *action de G sur X* est un morphisme de variétés algébriques

$$\begin{aligned} G \times X &\longrightarrow X \\ (g, x) &\longmapsto g.x \end{aligned}$$

tel que $(g_1.g_2).x = g_1.(g_2.x)$ et $e.x = x$, pour tout $g_1, g_2 \in G$, $x \in X$, e étant l'élément neutre de G . L'action de G sur X définit un morphisme de groupes

$$\pi : G \longrightarrow \text{Aut}(X)$$

où $\text{Aut}(X)$ est le groupe des automorphismes de X . Si $g \in G$, on note aussi g l'automorphisme de X induit par g .

Soit E un fibré vectoriel algébrique sur X . On dit que E est *G -invariant* si on a $g^*E \simeq E$ pour tout $g \in G$, où g^*E est l'image inverse du fibré E qui est définie par $(g^*E)_x = E_{g.x}$ pour tout $x \in X$.

Un *G -fibré E sur X* est un fibré vectoriel E sur X muni d'une action de G

$$\Phi : G \times E \longrightarrow E,$$

qui est linéaire et compatible avec l'action de G sur X . Autrement dit, pour tout point $x \in X$ et tout $g \in G$, l'application de multiplication par g

$$\varphi_g^x : E_x \longrightarrow E_{g.x}$$

est linéaire et envoie E_x sur $E_{g.x}$. On appelle l'action sur E *G -linéarisation* du fibré E [40]. Réciproquement, pour tout point $x \in X$ et tout $g \in G$, si $\varphi_g^x : E_x \longrightarrow E_{g.x}$ est un isomorphisme tel que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} E_x & \xrightarrow{\varphi_{g_1.g_2}^x} & E_{(g_1.g_2).x} = E_{g_1.(g_2.x)} \\ & \searrow \varphi_{g_2}^x & \nearrow \varphi_{g_1}^{g_2.x} \\ & E_{g_2.x} & \end{array}$$

pour tout $g_1, g_2 \in G$, $\varphi_{g_1 \cdot g_2}^x = \varphi_{g_1}^{g_2 \cdot x} \circ \varphi_{g_2}^x$, alors on peut définir l'action de G sur E par

$$\begin{aligned}\Phi^x : G &\longrightarrow \text{Aut}(E_x), \\ g &\longmapsto \varphi_g^x.\end{aligned}$$

En général, si E est un G -fibré, tous les fibrés construits à partir de E (par exemple, E^* et $\mathcal{S}^p E$ et $\bigwedge^p E$) sont munis d'une linéarisation. Par exemple, l'action naturelle de G sur E^* définie par

$$\widehat{\Phi} : G \times E^* \longrightarrow E^*$$

tel que, pour tout point $x \in X$ et tout $g \in G$, l'application de multiplication par g est

$$\widehat{\varphi}_g^x : E_x^* \longrightarrow E_{g \cdot x}^*, \quad \widehat{\varphi}_g^x = {}^T \varphi_{g^{-1}}^{g \cdot x},$$

où ${}^T \varphi_{g^{-1}}^{g \cdot x}$ est l'application transposée de $\varphi_{g^{-1}}^{g \cdot x}$, ou bien si $d \in E_x^*$ et $e \in E_{g \cdot x}$: $(g \cdot d)(e) = d(g^{-1} \cdot e)$.

Soient V un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension $n+1$, et $\text{PGL}(V) \simeq \text{GL}(V)/\mathbb{C}^*$ le groupe linéaire projectif, où $\text{GL}(V)$ est le groupe des matrices carrées inversibles.

Soient $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V)$ l'espace projectif complexe associé dont les points sont les droites de V ,

$$\eta : V \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}(V)$$

la projection. On a une action canonique de $\text{GL}(V)$ sur V

$$\begin{aligned}\text{GL}(V) \times V &\longrightarrow V \\ (g, v) &\longmapsto g \cdot v = g(v),\end{aligned}$$

et une action canonique de $\text{GL}(V)$ sur $\mathbb{P}(V)$ au-dessus de la précédente

$$\begin{aligned}\text{GL}(V) \times \mathbb{P}(V) &\longrightarrow \mathbb{P}(V) \\ (g, x) &\longmapsto g \cdot x = \mathbb{C} \cdot g(v),\end{aligned}$$

où $x = \mathbb{C} \cdot v$ et $v \in V$.

On en déduit une action de $\text{PGL}(V)$ sur $\mathbb{P}(V)$. On a $\text{Aut}(\mathbb{P}(V)) = \text{PGL}(V)$.

Soit E un fibré vectoriel sur $\mathbb{P}(V)$. On dit que E est *homogène* s'il est $\text{PGL}(V)$ -invariant. Autrement dit, le fibré E est homogène si et seulement si le groupe de stabilisateurs du fibré E

$$\text{Sym}(E) = \{u \in \text{PGL}(V) \mid \bar{u}^*(E) \simeq E\}$$

vérifie $\text{PGL}(V) \simeq \text{Sym}(E)$. C'est le cas par exemple si E admet une $\text{PGL}(V)$ -linéarisation ou bien une $\text{GL}(V)$ -linéarisation. Une \mathbb{C}^* -action linéaire sur V est définie par un morphisme

$$\varrho : \mathbb{C}^* \longrightarrow \text{GL}(V).$$

On en déduit une action de \mathbb{C}^* sur $\mathbb{P}(V)$

$$\bar{\varrho} : \mathbb{C}^* \longrightarrow \text{PGL}(V)$$

au-dessus de la précédente. Si le fibré E est muni d'une action de \mathbb{C}^* au-dessus de l'action $\bar{\varrho}$ sur $\mathbb{P}(V)$ précédente, alors on a un isomorphisme, pour tout t dans \mathbb{C}^* ,

$$\tau(t) : \overline{\varrho(t)^*} E \longrightarrow E$$

tel que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{array}{ccc}
\overline{\varrho(t_1)^* \varrho(t_2)^*} E = \overline{\varrho(t_1 \cdot t_2)^*} E & \xrightarrow{\tau(t_1, t_2)} & E \\
& \searrow & \nearrow \tau(t_1) \\
& \overline{\varrho(t_1)^* (\tau(t_2))} & \overline{\varrho(t_1)^*} E
\end{array}$$

pour tout $t_2, t_1 \in \mathbb{C}^*$.

1.1.2. **Remarque.** 1- Si D est un espace vectoriel de dimension 1, et q un entier, on note

$$D^q = \begin{cases} D \otimes D \otimes \dots \otimes D \otimes D \text{ (q fois)} & : q > 0 \\ \mathbb{C} & : q = 0 \\ D^* \otimes D^* \otimes \dots \otimes D^* \otimes D^* \text{ (-q fois)} & : q < 0. \end{cases}$$

et

$$\mathcal{S}^q D = \begin{cases} \mathcal{S}^q D & : q > 0 \\ \mathbb{C} & : q = 0 \\ \mathcal{S}^{-q} D^* & : q < 0. \end{cases}$$

Même chose pour un fibré vectoriel sur une variété X . On a donc, pour tout entier q et $x = \mathbb{C}.v \in \mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V)$,

$$(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(q))_x = x^{-q} = (\mathbb{C}.v)^{-q}.$$

On peut dire que $v^* := v^{-1}$ est le vecteur dual de v . On peut donc définir $v^{-q} \in (\mathbb{C}.v)^{-q} \subset \mathcal{S}^{-q} V$ pour tout entier q .

2- Pour tout \mathbb{C}^* -fibré vectoriel F sur $V \setminus \{0\}$, il existe un fibré vectoriel E sur $\mathbb{P}(V)$ tel que l'on ait un \mathbb{C}^* -isomorphisme $F \simeq \eta^* E$.

On note T une \mathbb{C}^* -action triviale (la multiplication usuelle) sur $V \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned}
T : \mathbb{C}^* \times V \setminus \{0\} &\longrightarrow V \setminus \{0\} \\
(t, v) &\longmapsto T(t, v) = T(t).v = t.v.
\end{aligned}$$

L'action T induit une action triviale de \mathbb{C}^* sur $\mathbb{P}(V)$ tel que η est \mathbb{C}^* -équivariant et que

$$\mathbb{P}(V) \simeq (V \setminus \{0\}) / \mathbb{C}^*.$$

Pour tout fibré E sur $\mathbb{P}(V)$ et pour tout $t \in \mathbb{C}^*$ et $v \in V \setminus \{0\}$, le fibré $\eta^*(E)$ est muni d'une action canonique de \mathbb{C}^* au-dessus de l'action de T

$$\eta^*(E)_v = E_{\eta(v)} \simeq E_{t.\eta(v)} = E_{\eta(T(t).v)} = \eta^*(E)_{T(t).v}.$$

Donc on a $E = \eta^*(E) / \mathbb{C}^*$. Pour tout entier q et tout $v \in V \setminus \{0\}$, on a un isomorphisme canonique

$$\begin{aligned}
\mathbb{C} &\xrightarrow{\simeq} \eta^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(q))_v \\
t &\longmapsto t.v^{-q}.
\end{aligned}$$

Cela définit un isomorphisme

$$\mathcal{O}_{V \setminus \{0\}} \xrightarrow{\simeq} \eta^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(q)).$$

Le \mathbb{C}^* -fibré $\eta^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(q))$ a une action canonique de \mathbb{C}^* compatible avec l'action de ce groupe sur $V \setminus \{0\}$. Compte tenu de l'isomorphisme précédent, cette action est une action de \mathbb{C}^* sur $\mathcal{O}_{V \setminus \{0\}}$ et qui est la suivante

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^* \times \mathcal{O}_{V \setminus \{0\}} &= \mathbb{C}^* \times (V \setminus \{0\} \times \mathbb{C}) \longrightarrow V \setminus \{0\} \times \mathbb{C} \\ (t, (u, a)) &\longmapsto (tu, t^q a). \end{aligned}$$

Autrement dit, cette action est la multiplication de l'action triviale de \mathbb{C}^* sur $\mathcal{O}_{V \setminus \{0\}}$ par le caractère t^q . Donc $\eta^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(q))$ est le fibré trivial sur $V \setminus \{0\}$ muni de l'action définie par le caractère t^q .

Par conséquent, pour tout \mathbb{C}^* -fibré F sur $V \setminus \{0\}$, il existe un fibré E sur $\mathbb{P}(V)$ tel que l'on ait un \mathbb{C}^* -isomorphisme $F \simeq \eta^*E$.

1.1.3. Définition de l'image inverse généralisée d'un fibré (transformation de Horrocks [20]). Soient $V_1 = \mathbb{C}^{n+1}$ et V_2 un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension $n + 1$, et

$$\eta_i : V_i \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}(V_i)$$

la projection, pour $i = 1, 2$. Soient g_0, g_1, \dots, g_n des polynômes homogènes de degrés $d_0 \geq d_1 \geq \dots \geq d_n$ respectivement sans zéro commun sur $\mathbb{P}(V_1)$. On a l'application surjective

$$\begin{aligned} \omega := (g_0, g_1, \dots, g_n) : V_1 \setminus \{0\} &\longrightarrow V_2 \setminus \{0\} \\ v &\longmapsto (g_0(v), g_1(v), \dots, g_n(v)) \end{aligned}$$

On considère l'action de \mathbb{C}^* sur V_2

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbb{C}^* &\longrightarrow GL(V_2) \\ t &\longmapsto \sigma(t) \end{aligned}$$

où

$$\sigma(t) = \begin{pmatrix} t^{d_0} & & & & \\ & t^{d_1} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & t^{d_{n-1}} & \\ 0 & & & & t^{d_n} \end{pmatrix},$$

de telle sorte que η_i est un \mathbb{C}^* -morphisme si V_1 est muni de la \mathbb{C}^* -action usuelle T . Alors ω est une \mathbb{C}^* -application par rapport à ces deux actions. L'action σ induit une action $\bar{\sigma} \in PGL(V_2)$ de \mathbb{C}^* sur $\mathbb{P}(V_2)$ et l'action T induit une action triviale de \mathbb{C}^* sur $\mathbb{P}(V_1)$. On obtient donc le \mathbb{C}^* -diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} V_1 \setminus \{0\} & \xrightarrow{\omega} & V_2 \setminus \{0\} \\ \eta_1 \downarrow & & \downarrow \eta_2 \\ \mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V_1) & & \mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V_2) \end{array}$$

Soit F un fibré vectoriel sur $\mathbb{P}(V_2)$, muni de l'action de \mathbb{C}^* au-dessus de l'action $\bar{\sigma}$. Donc on a sur η_2^*F une action de \mathbb{C}^* au-dessus de l'action σ . Alors on a sur $\omega^*\eta_2^*F$ une action de \mathbb{C}^*

au-dessus de l'action usuelle de \mathbb{C}^* sur $V_1 \setminus \{0\}$. Autrement dit, pour tout $v \in V_1 \setminus \{0\}$ et $t \in \mathbb{C}^*$, on a

$$\begin{aligned} (\omega^* \eta_2^* F)_v &= F_{\eta_2(\omega(v))} \simeq F_{\sigma(t). \eta_2(\omega(v))} = F_{\eta_2(\sigma(t).\omega(v))} = \\ &= (\eta_2^* F)_{\sigma(t).\omega(v)} = (\eta_2^* F)_{\omega(t.v)} = (\omega^* \eta_2^* F)_{t.v}. \end{aligned}$$

Alors il existe un fibré vectoriel F_{g_0, g_1, \dots, g_n} sur $\mathbb{P}(V_1)$ tel que l'on ait un \mathbb{C}^* -isomorphisme

$$\omega^* \eta_2^* F \simeq \eta_1^* F_{g_0, g_1, \dots, g_n}.$$

On appelle F_{g_0, g_1, \dots, g_n} l'image inverse généralisée de F . On notera, si g_0, g_1, \dots, g_n sont fixes,

$$F_{g_0, g_1, \dots, g_n} = \mathbf{Iming}(F)$$

Cette *transformation de Horrocks* **Iming** est compatible avec les opérations habituelles sur les fibrés vectoriels. Par exemple, si on considère que le fibré F (resp. F^*) a une action de \mathbb{C}^* au-dessus de l'action $\bar{\sigma}$ (resp. une action de \mathbb{C}^* au-dessus de l'action $\widehat{\sigma}$ qui est l'action duale de $\bar{\sigma}$), alors on a $\mathbf{Iming}(F^*) = \mathbf{Iming}(F)^*$. Même chose pour les produits tensoriels (resp. extérieurs, symétriques), la somme directe et les suites exactes (resp. monades) des fibrés vectoriels. On définit donc ainsi un foncteur

$$\mathcal{FV}(\mathbb{P}(V_2), \bar{\sigma}) \xrightarrow{\mathbf{Iming}} \mathcal{FV}(\mathbb{P}(V_1))$$

où $\mathcal{FV}(\mathbb{P}(V_2), \bar{\sigma})$ est la catégorie des fibrés vectoriels sur $\mathbb{P}(V_2)$ qui ont une action de \mathbb{C}^* au-dessus de l'action $\bar{\sigma}$, et les morphismes de cette catégorie sont des morphismes \mathbb{C}^* -équivariants des fibrés vectoriels. Comme les fibrés vectoriels sur $\mathbb{P}(V_1)$ qui ont une action de \mathbb{C}^* au-dessus de l'action usuelle T , alors $\mathcal{FV}(\mathbb{P}(V_1))$ est la catégorie des fibrés vectoriels sur $\mathbb{P}(V_1)$. Notons que pour tout entier k on a $\mathbf{Iming}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V_2)}(k)) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V_1)}$.

1.1.4. Proposition. Soient E un \mathbb{C}^* -fibré quelconque sur $\mathbb{P}(V_2)$, et $s : \mathbb{C}^* \times E \rightarrow E$ sa \mathbb{C}^* -action au-dessus de l'action $\bar{\sigma}$ et q un entier. On en déduit une nouvelle action s_q de \mathbb{C}^* sur E , pour tout $x \in \mathbb{P}(V_2)$,

$$\begin{aligned} s_{q,x} : \mathbb{C}^* \times E_x &\longrightarrow E_x \\ (t, u) &\longmapsto t^q . s_x(t, u) \end{aligned}$$

(multiplication de l'action par le caractère t^q). On note le \mathbb{C}^* -fibré obtenu $E^{(q)}$ (donc $E^{(q)} = E \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V_2)}^{(q)}$). Alors on a

1- $\mathbf{Iming}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V_2)}^{(q)}(k)) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V_1)}(q)$, pour tout entier k .

2- $\mathbf{Iming}(E^{(q)}) = (\mathbf{Iming}(E))(q)$.

Démonstration. 1- On considère $\mathbf{Iming}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V_2)}^{(q)}(k)) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V_1)}(d)$, où d est un entier. C'est-à-dire

$$\omega^* \eta_2^* (\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V_2)}^{(q)}(k)) \simeq \eta_1^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V_1)}(d).$$

Pour tout $x = \mathbb{C}.v_2 \in \mathbb{P}(V_2)$, on a un isomorphisme canonique

$$\begin{aligned} \mu_{v_2} : \mathcal{O}_{V_2 \setminus \{0\}, v_2} &\simeq \mathbb{C} \xrightarrow{\cdot v_2^{-k}} \eta_2^* (\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V_2)}^{(q)}(k))_{v_2} \simeq (\mathbb{C}v_2)^{-k} \subset \mathcal{S}^{-k} V_2 \\ a &\longmapsto a.v_2^{-k}. \end{aligned}$$

On a aussi, pour tout $x = \mathbb{C}.v_1 \in \mathbb{P}(V_1)$, un isomorphisme canonique

$$\begin{aligned} \bar{\mu}_{v_1} : \mathcal{O}_{V_1 \setminus \{0\}, v_1} &\simeq \mathbb{C} \xrightarrow{.v_1^{-d}} \eta_1^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V_1)}(d))_{v_1} \simeq (\mathbb{C}.v_1)^{-d} \subset \mathcal{S}^{-d} V_1 \\ a &\longmapsto a.v_1^{-d}. \end{aligned}$$

Alors, pour tout $v \in V_1$, on a un isomorphisme

$$\begin{aligned} (\mathbb{C}\omega(v))^{-k} &\simeq (\omega^* \eta_2^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V_2)}^{(q)}(k))_v \simeq (\eta_1^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V_1)}(d))_v \simeq (\mathbb{C}.v)^{-d} \\ a.(\omega(v))^{-k} &\longmapsto a.(v)^{-d}. \end{aligned}$$

Alors on obtient le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \xrightarrow{t^q} & \mathbb{C}^* \\ \downarrow (\omega(v))^{-k} & & \downarrow (\omega(t.v))^{-k} \\ (\mathbb{C}\omega(v))^{-k} & \xrightarrow{s_{q,v}} & (\mathbb{C}\omega(t.v))^{-k} \\ \parallel & & \parallel \\ (\mathbb{C}.v)^{-d} & \xrightarrow{\quad} & (\mathbb{C}.v)^{-d} \simeq (\mathbb{C}.(t.v))^{-d} \end{array}$$

(Left side of the diagram is labeled v^{-d} , right side is labeled $(t.v)^{-d}$)

tel que $a.(v)^{-d} = b.t^q.(t.v)^{-d} := b.t^{q-d}.(v)^{-d}$, où $a, b \in \mathbb{C}^*$. Par conséquent $d = q$ et $b = a$ on obtient

$$\mathbf{Iming}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V_2)}^{(q)}(k)) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V_1)}(q).$$

2- Comme $E^{(q)} = E \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V_2)}^{(q)}$ et comme le foncteur **Iming** respecte le produit tensoriel, on obtient

$$\mathbf{Iming}(E^{(q)}) = \mathbf{Iming}(E) \otimes \mathbf{Iming}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V_2)}^{(q)}).$$

D'après (1), on a

$$\mathbf{Iming}(E^{(q)}) = \mathbf{Iming}(E)(q).$$

□

1.2. Fibré de corrélation nulle pondéré sur \mathbb{P}^{2n+1} . Nous allons étudier ci-après un fibré de corrélation nulle pondéré sur \mathbb{P}^{2n+1} provenant d'une image inverse généralisée du fibré de corrélation nulle classique spécial.

1.2.1. **Fibrés de corrélation nulle classiques sur \mathbb{P}^{2n+1} .** Soient V un espace vectoriel complexe de dimension $\dim(V) = 2n + 2$, $\mathbb{P}^{2n+1} = \mathbb{P}(V)$ l'espace projectif complexe associé dont les points sont les droites de V , et $v \in V$ un point correspondant à la droite $x = \mathbb{C}.v \in \mathbb{P}(V)$. On a l'inclusion canonique

$$\begin{aligned} g_x : (\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-1))_x &:= \mathbb{C}.v \hookrightarrow V \\ av &\longmapsto g_x(av) = av, \end{aligned}$$

où $a \in \mathbb{C}$. Alors on a la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-1) \xrightarrow{g} V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}} \longrightarrow Q \longrightarrow 0.$$

On a aussi le morphisme surjectif

$$\begin{aligned} {}^T g_x : V^* &\longrightarrow \mathbb{C}.v^* := \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1},x}(1) \\ h &\longmapsto {}^T g_x(h), \end{aligned}$$

où ${}^T g_x(h)$ est la restriction de h à $\mathbb{C}.v$. Ce morphisme nous donne le morphisme surjectif suivant

$$V^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}} \xrightarrow{{}^T g} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(1) \longrightarrow 0.$$

Soit $f : V \longrightarrow V^*$ un morphisme. On sait que f est antisymétrique si et seulement si, pour tout $u \in V$, $f(u)(u) = 0$. Alors $({}^T g_x \circ f \circ g_x)(v) = {}^T g_x(f(v))$ est nul si et seulement si $f(v)(v) = 0$, où ${}^T g_x(f(v))$ est la restriction de $f(v)$ à $\mathbb{C}.v$.

Soit $f : V \longrightarrow V^*$ un isomorphisme antisymétrique (symplectique). On peut définir la monade suivante

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-1) \xrightarrow{g} V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}} \xrightarrow{f} V^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}} \xrightarrow{{}^T g} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(1) \longrightarrow 0$$

qui peut s'écrire également

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-1) \xrightarrow{g} V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}} \xrightarrow{{}^T g \circ f} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(1) \longrightarrow 0.$$

On définit le *fibré de corrélation nulle classique* $N(f)$ sur \mathbb{P}^{2n+1} par la cohomologie de la monade précédente.

1.2.2. **Proposition.** 1- Soient $f_1, f_2 : V \longrightarrow V^*$ des isomorphismes antisymétriques. Alors on a $N(f_1) \simeq N(f_2)$ si et seulement s'il existe $a \in \mathbb{C}^*$ tel que $f_1 = a.f_2$.

2- Soient $\kappa \in GL(V)$, $\bar{\kappa} \in PGL(V)$ son élément correspondant et $f : V \longrightarrow V^*$ un isomorphisme antisymétrique. Alors on a

$$\bar{\kappa}^*(N(f)) \simeq N({}^T \kappa \circ f \circ \kappa).$$

Démonstration. 1- Soit la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-1) \xrightarrow{g} V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}} \longrightarrow Q \longrightarrow 0.$$

Pour $f_1, f_2 : V \longrightarrow V^*$ des isomorphismes antisymétriques, on a les suites exactes suivantes

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-1) \xrightarrow{Tb_1} Q^* \xrightarrow{d_1} N^*(f_1) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-1) \xrightarrow{Tb_2} Q^* \xrightarrow{d_2} N^*(f_2) \longrightarrow 0,$$

où $b_1 := (Tg \circ f_1)$ et $b_2 := (Tg \circ f_2)$.

S'il existe $a \in \mathbb{C}^*$ tel que $f_1 = a.f_2$, alors on a $\ker(Tg \circ f_2) = \ker(Tg \circ f_1)$. Donc on obtient $N(f_1) \simeq N(f_2)$. Soit $\psi : N^*(f_1) \xrightarrow{\sim} N^*(f_2)$. On a la suite suivante

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \operatorname{Hom}(Q^*, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-1)) &\longrightarrow \operatorname{Hom}(Q^*, Q^*) \longrightarrow \operatorname{Hom}(Q^*, N^*(f_2)) \\ &\longrightarrow \operatorname{Ext}^1(Q^*, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-1)) \longrightarrow, \end{aligned}$$

mais $\operatorname{Hom}(Q^*, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-1)) = 0$ et $\operatorname{Ext}^1(Q^*, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-1)) = 0$. On obtient que

$$\operatorname{Hom}(Q^*, Q^*) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}(Q^*, N^*(f_2))$$

Comme ψ est non trivial, donc $\psi \circ d_1 \neq 0$. Il existe alors un morphisme non trivial $\varphi : Q^* \longrightarrow Q^*$ tel que $\psi \circ d_1 = d_2 \circ \varphi$. D'après ([42], Lemme 1.2.8), on obtient que φ est un isomorphisme. Comme le fibré Q^* est simple, on obtient que φ est une homothétie. Alors il existe $a_1 \in \mathbb{C}^*$ tel que $\psi \circ d_1 = d_2 a_1$. Donc on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-1) & \xrightarrow{Tb_1} & Q^* & \xrightarrow{d_1} & N^*(f_1) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow a_2 & & \downarrow a_1 & & \downarrow \psi \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-1) & \xrightarrow{Tb_2} & Q^* & \xrightarrow{d_2} & N^*(f_2) \longrightarrow 0 \end{array}$$

où $a_2 \in \mathbb{C}^*$. On a $a_2(f_2 \circ g) = a_1(f_1 \circ g)$, pour tout $g : X \hookrightarrow V$ où X est une droite dans V , ce qui donne $f_1 = a.f_2$ avec $a = a_2 a_1^{-1}$.

2- Pour la monade suivante

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-1) \xrightarrow{g} V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}} \xrightarrow{Tg \circ f} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(1) \longrightarrow 0$$

et d'après la définition de l'image inverse de morphisme par κ , on a

$$\kappa^*(g) = \kappa \circ g \text{ et } \kappa^*(Tg) = {}^T(\kappa \circ g).$$

Cela nous donne la monade suivante

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-1) \xrightarrow{\kappa \circ g} V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}} \xrightarrow{{}^T(\kappa \circ g) \circ f} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(1) \longrightarrow 0.$$

Donc on a $\bar{\kappa}^*(N(f)) \simeq N({}^T\kappa \circ f \circ \kappa)$.

□

1.2.3. **Fibrés de corrélation nulle classiques spéciaux sur \mathbb{P}^{2n+1} [1].** On considère maintenant un isomorphisme antisymétrique $f : V \rightarrow V^*$ défini relativement à une base de V par la $(2n+2) \times (2n+2)$ -matrice antisymétrique suivante

$$\begin{pmatrix} & & & & -1 \\ & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -1 & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & \vdots & & & 0 \\ 1 & & & & \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas on dit que $N(f)$ est un *fibré de corrélation nulle classique spécial* sur \mathbb{P}^{2n+1} . Dans ce cas, $N(f)$ est la cohomologie de la monade

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-1) \xrightarrow{g} V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}} \xrightarrow{Tg \circ f} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(1) \rightarrow 0,$$

où g est la $(2n+2) \times 1$ -matrice

$${}^Tg = \left(\begin{array}{ccc|ccc} x_0 & \dots & x_n & y_0 & \dots & y_n \end{array} \right)$$

et ${}^Tg \circ f$ est la $1 \times (2n+2)$ -matrice

$${}^Tg \circ f = \left(\begin{array}{ccc|ccc} y_n & \dots & y_0 & -x_n & \dots & -x_0 \end{array} \right),$$

où $x_0, x_1, \dots, x_n, y_0, y_1, \dots, y_n$ sont des formes linéaires sans zéro commun sur \mathbb{P}^{2n+1} .

1.2.4. **Proposition.** Soient $a_0, a_1, \dots, a_{2n}, a_{2n+1}, d \in \mathbb{Z}$ tels que $a_i + a_{2n+1-i} = d \in \mathbb{Z}$, $i = 0, 1, \dots, 2n+1$. On définit $\sigma(t) \in GL(V)$ une \mathbb{C}^* -action sur V et $\overline{\sigma(t)} \in PGL(V)$, (relativement à une base de V) par

$$\sigma(t) := \begin{pmatrix} t^{a_0} & & & & \\ & t^{a_1} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & t^{a_{2n}} & \\ 0 & & & & t^{a_{2n+1}} \end{pmatrix}$$

où $t \in \mathbb{C}^*$. Alors on a un isomorphisme canonique

$$s_t : \overline{\sigma(t)}^* N(f) \simeq N(f),$$

tel que $s_{t_1.t_2} = s_{t_2} \circ \overline{\sigma(t_2)}^*(s_{t_1})$,

$$\begin{array}{ccc} \overline{\sigma(t_2)}^* \overline{\sigma(t_1)}^* N(f) = \overline{\sigma(t_1.t_2)}^* N(f) & \xrightarrow{s_{t_1.t_2}} & N(f) \\ & \searrow \sigma(t_2)^*(s_{t_1}) & \nearrow s_{t_2} \\ & \overline{\sigma(t_2)}^* N(f) & \end{array}$$

pour $t_1, t_2 \in \mathbb{C}^*$.

Démonstration. On a ${}^T\sigma(t) \circ f \circ \sigma(t) = t^d f$, pour tout $t \in \mathbb{C}^*$. D'après la proposition (1.2.2), on obtient automatiquement le résultat voulu. \square

Soient $(u_r)_{0 \leq r \leq 2n+1}$ une base de l'espace vectoriel complexe V , $f : V \rightarrow V^*$ l'isomorphisme défini relativement à la base $(u_r)_{0 \leq r \leq 2n+1}$ par la $(2n+2) \times (2n+2)$ -matrice antisymétrique de (1.2.3). On considère le multi-indice

$$\mathbf{m} = (\gamma; (\lambda_i)_{0 \leq i \leq n}, (-\lambda_i)_{0 \leq i \leq n}),$$

où γ, λ_i sont des entiers naturels pour $i = 0, 1, 2, \dots, n$ tels que

$$\gamma > \lambda_n \geq \lambda_{n-1} \geq \dots \geq \lambda_0 \geq 0.$$

On considère l'action de \mathbb{C}^* sur V défini relativement à la base $(u_r)_{0 \leq r \leq 2n+1}$ par

$$\sigma(t) = t^\gamma \cdot \begin{pmatrix} t^{\lambda_n} & & & & & \\ & t^{\lambda_{n-1}} & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & t^{-\lambda_{n-1}} & & \\ 0 & & & & & 0 \\ & & & & & t^{-\lambda_n} \end{pmatrix},$$

où $t \in \mathbb{C}^*$.

1.2.5. Proposition. Soient V un espace vectoriel complexe de dimension $2n+2$, $(u_r)_{0 \leq r \leq 2n+1}$ une base de V et $\mathbb{P}(V)$ l'espace projectif complexe associé dont les points sont les droites de V . On considère le multi-indice

$$\mathbf{m} = (\gamma; (\lambda_i)_{0 \leq i \leq n}, (-\lambda_i)_{0 \leq i \leq n}),$$

où γ, λ_i sont des entiers naturels pour $i = 0, 1, 2, \dots, n$ tels que

$$\gamma > \lambda_n \geq \lambda_{n-1} \geq \dots \geq \lambda_0 \geq 0.$$

Soient $g_i \in H^0(\mathbb{P}^{2n+1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(\gamma - \lambda_i))$ et $f_i \in H^0(\mathbb{P}^{2n+1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(\gamma + \lambda_{n-i}))$, pour $i = 0, 1, 2, \dots, n$, des formes homogènes sur $\mathbb{P}^{2n+1} = \mathbb{P}(C^{2n+2})$ sans zéro commun. Alors les fibrés vectoriels Q et $N(f)$, sur $\mathbb{P}(V)$, ont une action canonique de \mathbb{C}^* au-dessus de $\bar{\sigma}$, telle que Q (resp. $N(f)$) possède (relativement à g_0, \dots, g_{2n+1}) une image inverse généralisée $\mathcal{Q}_{\mathbf{m}}(\gamma)$ (resp. $\mathcal{N}_{\mathbf{m}}(\gamma)$) définie par les suites exactes

$$(1) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-\gamma) \xrightarrow{B} \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{Q}_{\mathbf{m}} \longrightarrow 0,$$

et

$$(2) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{N}_{\mathbf{m}} \longrightarrow \mathcal{Q}_{\mathbf{m}} \xrightarrow{A} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(\gamma) \longrightarrow 0.$$

Autrement dit, $\mathcal{N}_{\mathbf{m}}$ est la cohomologie de la monade suivante

$$(3) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-\gamma) \xrightarrow{B} \mathcal{H} \xrightarrow{A} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(\gamma) \longrightarrow 0,$$

où $\mathcal{H} := \bigoplus_{i=0}^n (\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(\lambda_{n-i})) \oplus \bigoplus_{i=0}^n (\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-\lambda_i))$, et

$${}^T B = \left(\begin{array}{ccc|ccc} f_0 & \dots & f_n & g_0 & \dots & g_n \end{array} \right)$$

et

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} g_n & \dots & g_0 & -f_n & \dots & -f_0 \end{array} \right)$$

sont des $1 \times (2n + 2)$ -matrices, avec $A.B = 0$.

Démonstration. On considère l'application

$$\begin{aligned} \omega := (f_0, \dots, f_n, g_0, \dots, g_n) : \mathbb{C}^{2n+2} \setminus \{0\} &\longrightarrow V \setminus \{0\} \\ v &\longmapsto (f_0(v), \dots, f_n(v), g_0(v), \dots, g_n(v)) \end{aligned}$$

On considère aussi l'action de \mathbb{C}^* (multiplication usuelle sur \mathbb{C}^{2n+2})

$$\begin{aligned} T : \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^{2n+2} &\longrightarrow \mathbb{C}^{2n+2} \\ (t, u) &\longmapsto t.u. \end{aligned}$$

Alors ω est une \mathbb{C}^* -application par rapport aux actions T et σ . Donc on a une transformée de Horrocks (1.1.3)

$$\mathbf{Iming} : \mathcal{FV}(\mathbb{P}(V), \bar{\sigma}) \longrightarrow \mathcal{FV}(\mathbb{P}^{2n+1}).$$

On considère le morphisme

$$g := {}^T\omega : \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(-1) \longrightarrow V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)},$$

où $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(-1)$ et $V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}$ sont munis de l'action canonique $\sigma(t)$. Comme on a, pour tout $t \in \mathbb{C}^*$,

$$\sigma(t).(u_i) = t^{\gamma+\lambda_{n-i}}.(u_i), \quad 0 \leq i \leq n$$

alors le sous-fibré $(u_i.\mathbb{C}) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}$ de $V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}$ est \mathbb{C}^* -invariant. On obtient l'isomorphisme

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}^{(\gamma+\lambda_{n-i})} \simeq (u_i.\mathbb{C}) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)},$$

défini localement, pour tout $v \in V$, par

$$\begin{aligned} (\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}^{(\gamma+\lambda_{n-i})})_v &\simeq \mathbb{C} \xrightarrow{\simeq} ((u_i.\mathbb{C}) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)})_v \simeq u_i.\mathbb{C} \\ a &\longmapsto au_i. \end{aligned}$$

Pour

$$\sigma(t).(u_{n+1+i}) = t^{\gamma-\lambda_i}.(u_{n+1+i}), \quad 0 \leq i \leq n,$$

on obtient la même chose

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}^{(\gamma-\lambda_i)} \simeq (u_{n+1+i}.\mathbb{C}) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}.$$

Donc on a un \mathbb{C}^* -isomorphisme

$$V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)} \simeq \bigoplus_{i=0}^n \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}^{(\gamma+\lambda_{n-i})} \oplus \bigoplus_{i=0}^n \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}^{(\gamma-\lambda_i)}.$$

Alors on a un \mathbb{C}^* -morphisme

$$g := {}^T\omega : \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(-1) \longrightarrow \bigoplus_{i=0}^n \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}^{(\gamma+\lambda_{n-i})} \oplus \bigoplus_{i=0}^n \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}^{(\gamma-\lambda_i)}.$$

On considère le morphisme

$$A := {}^Tg \circ f : V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1),$$

où $V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}$ (resp. $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)$) est muni de l'action canonique $\sigma(t)$ (resp. $\widehat{\sigma}(t)$). Pour que le morphisme A soit un \mathbb{C}^* -morphisme il faut avoir

$$A_v(\sigma(t).v_1) = t^q \widehat{\sigma}(t).A_v(v_1),$$

pour tout $v, v_1 \in V$, q un entier et

$$A_v : V \longrightarrow (\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1))_v = (\mathbb{C}.v)^{-1}.$$

Alors on obtient $q = 2\gamma$. Donc il faut que $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)$ soit muni de l'action duale $\widehat{\sigma}(t)$ multipliée par le caractère $t^{2\gamma}$. Donc A est le \mathbb{C}^* -morphisme suivant

$$A : \bigoplus_{i=0}^n \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}^{(\gamma+\lambda_{n-i})} \oplus \bigoplus_{i=0}^n \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}^{(\gamma-\lambda_i)} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)^{(2\gamma)}.$$

Donc on a la \mathbb{C}^* -monade suivante

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(-1) \xrightarrow{g} \bigoplus_{i=0}^n \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}^{(\gamma+\lambda_{n-i})} \oplus \bigoplus_{i=0}^n \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}^{(\gamma-\lambda_i)} \xrightarrow{A} \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)^{(2\gamma)} \longrightarrow 0.$$

D'après la proposition (1.1.4), on obtient que

$$\mathbf{Iming}\left(\bigoplus_{i=0}^n \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}^{(\gamma+\lambda_{n-i})} \oplus \bigoplus_{i=0}^n \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}^{(\gamma-\lambda_i)}\right) = \bigoplus_{i=0}^n (\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(\gamma + \lambda_{n-i})) \oplus \bigoplus_{i=0}^n (\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(\gamma - \lambda_i)) := \mathcal{H}(\gamma)$$

et

$$\mathbf{Iming}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)^{(2\gamma)}) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(2\gamma), \quad \mathbf{Iming}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(-1)) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}.$$

Comme le fibré Q a une $GL(V)$ -action alors il a une \mathbb{C}^* -action au-dessus de $\bar{\sigma}$. D'après la proposition (1.2.2), on obtient

$$\bar{\sigma}(t)^* N(f) \simeq N(f).$$

Soient $\mathbf{Iming}(Q) = \mathcal{Q}_m(\gamma)$ et $\mathbf{Iming}(N(f)) = \mathcal{N}_m(\gamma)$. Alors on a la monade suivante

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}} \xrightarrow{B} \mathcal{H}(\gamma) \xrightarrow{A} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(2\gamma) \longrightarrow 0,$$

où

$${}^T B = \left(\begin{array}{ccc|ccc} f_0 & \dots & f_n & g_0 & \dots & g_n \end{array} \right)$$

et

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} g_n & \dots & g_0 & -f_n & \dots & -f_0 \end{array} \right)$$

sont des $1 \times (2n+2)$ -matrices, avec $A.B = 0$. Donc on obtient les deux suites exactes (1) et (2) et la monade (3).

□

Soient U un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension 2 et $\{x, y\}$ une base. On considère $V = \mathcal{S}^{2n+1} U$, et $(x^{2n+1-j} y^j)_{0 \leq j \leq 2n+1}$ une base de $V = \mathcal{S}^{2n+1} U$. Soit $f : \mathcal{S}^{2n+1} U \longrightarrow \mathcal{S}^{2n+1} U^*$ l'isomorphisme défini relativement à la base $(x^{2n+1-j} y^j)_{0 \leq j \leq 2n+1}$ par la $(2n+2) \times (2n+2)$ -matrice antisymétrique

de (1.2.3). Soient $\alpha, \gamma \in \mathbb{N}$ des entiers. On considère l'action de \mathbb{C}^* sur $\mathcal{S}^{2n+1}U$ défini relativement à la base $(x^{2n+1-j}y^j)_{0 \leq j \leq 2n+1}$ par

$$\sigma(t) = t^\gamma \cdot \begin{pmatrix} t^{(2n+1)\alpha} & & & & \\ & t^{(2n-1)\alpha} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & t^{(-2n+1)\alpha} & \\ 0 & & & & t^{(-2n-1)\alpha} \end{pmatrix},$$

où $t \in \mathbb{C}^*$.

1.2.6. Proposition. *Soient $\alpha, \gamma \in \mathbb{N}$ des entiers tels que $\gamma > (2n+1)\alpha \geq 0$. On considère le multi-indice $\mathbf{m} = (\gamma; (\alpha(2n+1-2i))_{0 \leq i \leq 2n+1})$. Soient g_0, \dots, g_{2n+1} des formes homogènes sans zéro commun sur $\mathbb{P}(\mathbb{C}^{2n+2})$ telles que*

$$\deg(g_i) = \gamma + (2n+1-2i)\alpha, \quad i = 0, 1, \dots, 2n+1.$$

Alors les fibrés vectoriels Q et $N(f)$, sur $\mathbb{P}(\mathcal{S}^{2n+1}U)$, ont une action canonique de \mathbb{C}^ au-dessus de $\bar{\sigma}$, telle que Q (resp. $N(f)$) possède (relativement à g_0, \dots, g_{2n+1}) une image inverse généralisée $\mathcal{Q}_{\mathbf{m}}(\gamma)$ (resp. $\mathcal{N}_{\mathbf{m}}(\gamma)$) définie par les suites exactes*

$$(4) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-\gamma) \longrightarrow \mathcal{S}^{2n+1}\mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{Q}_{\mathbf{m}} \longrightarrow 0,$$

$$(5) \quad (\text{resp. } 0 \longrightarrow \mathcal{N}_{\mathbf{m}} \longrightarrow \mathcal{Q}_{\mathbf{m}} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(\gamma) \longrightarrow 0),$$

où $\mathcal{U} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(\alpha) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-\alpha)$.

Démonstration. La même démonstration de la proposition (1.2.5) □

1.2.7. Définition. *On appelle le fibré vectoriel $\mathcal{Q}_{\mathbf{m}}$ le fibré quotient pondéré par le poids \mathbf{m} sur \mathbb{P}^{2n+1} . On appelle le fibré vectoriel $\mathcal{N}_{\mathbf{m}}$ le fibré de corrélation nulle ((1)-instanton) pondéré par le poids \mathbf{m} sur \mathbb{P}^{2n+1} .*

On en déduit que : $c_1(\mathcal{Q}_{\mathbf{m}}) = \gamma$, $c_1(\mathcal{N}_{\mathbf{m}}) = 0$ et $c_2(\mathcal{N}_{\mathbf{m}}) = \gamma^2 - \sum_{i=0}^n \lambda_i^2$. On appelle $c_2(\mathcal{N}_{\mathbf{m}})$ la charge topologique du fibré $\mathcal{N}_{\mathbf{m}}$. Ce fibré a déjà été traité par Ein, [13] sur \mathbb{P}^3 et par Ancona et Ottaviani [2] sur \mathbb{P}^5 et défini par Migliore, Nagel et Peterson [38] sur \mathbb{P}^{2n+1} .

Notons $\mathcal{Q} := \mathcal{Q}_{\mathbf{m}}$ et $\mathcal{N} := \mathcal{N}_{\mathbf{m}}$ sauf si on a besoin de préciser le poids \mathbf{m} . Soit J une $(2n+2) \times (2n+2)$ -matrice symplectique

$$J = \begin{pmatrix} & & & & -1 \\ & 0 & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ 1 & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors on a $J^2 = -1$ et ${}^T B = -A.J$ et ${}^T A = -J.B$.

1.2.8. Définition. Soit E un fibré vectoriel dont la première classe de Chern est $c_1(E) = 0$. On dit que le fibré vectoriel E est un fibré symplectique si et seulement s'il existe un isomorphisme de fibrés

$$\varphi : E \longrightarrow E^*$$

tel que ${}^T \varphi = -\varphi$. Autrement dit, le fibré vectoriel E est un fibré symplectique si et seulement s'il existe une forme symplectique non dégénérée $\varpi \in H^0(\wedge^2 E)$.

1.2.9. Théorème. Le fibré (1)-instanton pondéré \mathcal{N} sur \mathbb{P}^{2n+1} est un fibré symplectique.

Démonstration. Le fibré \mathcal{N}^* est la cohomologie de la monade suivante

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-\gamma) \xrightarrow{-J.B} \mathcal{H} \xrightarrow{-A.J} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(\gamma) \longrightarrow 0$$

où $J^2 = -1$, ${}^T B = -A.J$ et ${}^T A = -J.B$. Donc l'isomorphisme de monades suivant

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-\gamma) & \xrightarrow{B} & \mathcal{H} & \xrightarrow{A} & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(\gamma) \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow J & & \downarrow 1 \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-\gamma) & \xrightarrow{-J.B} & \mathcal{H} & \xrightarrow{-A.J} & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(\gamma) \longrightarrow 0 \end{array}$$

induit un isomorphisme $\varphi : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}^*$. En transposant le diagramme précédent, les flèches verticales sont multipliées par -1 . Donc on obtient ${}^T \varphi = -\varphi$.

□

1.2.10. Lemme. (Lemme 1.10 [1]). Soit E un fibré vectoriel symplectique sur une variété algébrique X . Pour tout $1 \leq j \leq -1 + \text{rg}(E)/2$, le fibré \mathcal{O}_X est un facteur direct du fibré $\wedge^{2j} E$, et le fibré E est un facteur direct du fibré $\wedge^{2j+1} E$.

Démonstration. voir [1].

□

1.2.11. **Remarque.** Pour tout fibré vectoriel, le fibré $\bigwedge^{j+1} E$ est un facteur direct du fibré $E \otimes \bigwedge^j E$, où $j \geq 0$. C'est-à-dire, on a un morphisme injectif localement donné par

$$\begin{aligned} \Phi : \bigwedge^{j+1} E &\longrightarrow E \otimes \bigwedge^j E \\ e_1 \wedge \dots \wedge e_{j+1} &\longmapsto \frac{1}{j+1} \sum_{i=1}^{j+1} (-1)^{j-i+1} (e_1 \wedge \dots \wedge \widehat{e}_i \wedge \dots \wedge e_{j+1}) \otimes e_i. \end{aligned}$$

1.2.12. **Proposition.** Soient \mathcal{Q} le fibré quotient pondéré sur \mathbb{P}^{2n+1} et \mathcal{N} le fibré de corrélation nulle pondéré sur \mathbb{P}^{2n+1} et définis par les suites exactes (1) et (2). Alors on a

I) \mathcal{Q} est stable si et seulement si $c_1(\mathcal{Q}) = \gamma > (2n+1)\lambda_n$.

II) Si \mathcal{Q} est stable, alors \mathcal{N} est simple.

Démonstration. Le théorème 2.7, [7] donne (I).

Pour démontrer II), supposons que \mathcal{Q} est stable. En tensorisant la suite (2) par \mathcal{N} , on obtient la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow \mathcal{N} \otimes \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{Q} \otimes \mathcal{N} \xrightarrow{A} \mathcal{N}(\gamma) \longrightarrow 0.$$

Alors on a

$$h^0(\mathcal{N} \otimes \mathcal{N}) \leq h^0(\mathcal{Q} \otimes \mathcal{N}).$$

D'après le lemme (1.2.10), la remarque (1.2.11) et le théorème (1.2.9), on a

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}} \hookrightarrow \bigwedge^2 \mathcal{N} \hookrightarrow \mathcal{N} \otimes \mathcal{N}.$$

Donc on a

$$h^0(\mathcal{N} \otimes \mathcal{N}) \geq 1.$$

On tensorise la suite duale de la suite (2) par \mathcal{Q} ce qui permet d'obtenir la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow \mathcal{Q}(-\gamma) \xrightarrow{A^T} \mathcal{Q} \otimes \mathcal{Q}^* \longrightarrow \mathcal{Q} \otimes \mathcal{N} \longrightarrow 0.$$

Cependant, de la suite (1) on a

$$h^0(\mathcal{Q}(-\gamma)) = h^1(\mathcal{Q}(-\gamma)) = 0.$$

Alors on a

$$h^0(\mathcal{N} \otimes \mathcal{Q}) = h^0(\mathcal{Q}^* \otimes \mathcal{Q}).$$

Mais, \mathcal{Q} est stable. On en déduit que $h^0(\mathcal{N} \otimes \mathcal{N}) = 1$.

□

1.2.13. **Définition de la résolution de Koszul généralisée.** On définit la *résolution de Koszul généralisée* de la suite exacte des fibrés vectoriels

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow F \longrightarrow 0$$

par

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \mathcal{S}^i A \longrightarrow \mathcal{S}^{i-1} A \otimes B \longrightarrow \mathcal{S}^{i-2} A \otimes \bigwedge^2 B \longrightarrow \mathcal{S}^{i-3} A \otimes \bigwedge^3 B \longrightarrow \mathcal{S}^{i-4} A \otimes \bigwedge^4 B \longrightarrow \dots \\ \dots \longrightarrow \mathcal{S}^2 A \otimes \bigwedge^{i-2} B \longrightarrow A \otimes \bigwedge^{i-1} B \longrightarrow \bigwedge^i B \longrightarrow \bigwedge^i F \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Soient $rg(F) = r$, et $c_1(F) = c$. On a $\bigwedge^{r-i} F^* = \bigwedge^r F^* \otimes \bigwedge^i F = \bigwedge^i F(-c)$. En tensorisant la résolution de Koszul généralisée par $\bigwedge^r F^*$, on obtient une résolution pour $\bigwedge^{r-i} F^*$

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \mathcal{S}^i A(-c) \longrightarrow \mathcal{S}^{i-1} A \otimes B(-c) \longrightarrow \mathcal{S}^{i-2} A \otimes \bigwedge^2 B(-c) \longrightarrow \\ \mathcal{S}^{i-3} A \otimes \bigwedge^3 B(-c) \longrightarrow \mathcal{S}^{i-4} A \otimes \bigwedge^4 B(-c) \longrightarrow \dots \\ \dots \longrightarrow \mathcal{S}^2 A \otimes \bigwedge^{i-2} B(-c) \longrightarrow A \otimes \bigwedge^{i-1} B(-c) \longrightarrow \bigwedge^i B(-c) \longrightarrow \bigwedge^{r-i} F^* \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

1.2.14. **Remarque.** Pour la suite exacte (1), on a la résolution suivante

$$\begin{aligned} (6) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-q\gamma) \longrightarrow \mathcal{H}(-\gamma(q-1)) \longrightarrow \bigwedge^2 \mathcal{H}(-\gamma(q-2)) \\ \xrightarrow{a_{q-2}} \bigwedge^3 \mathcal{H}(-\gamma(q-3)) \xrightarrow{a_{q-3}} \dots \\ \dots \xrightarrow{a_3} \bigwedge^{q-2} \mathcal{H}(-2\gamma) \xrightarrow{a_2} \bigwedge^{q-1} \mathcal{H}(-\gamma) \xrightarrow{a_1} \bigwedge^q \mathcal{H} \xrightarrow{a_0} \bigwedge^q \mathcal{Q} \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

où $1 \leq q \leq 2n+1$. Pour la suite exacte (1), on a aussi la résolution suivante

$$\begin{aligned} (7) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-\gamma(2n+2-q)) \longrightarrow \mathcal{H}(-\gamma(2n+1-q)) \longrightarrow \bigwedge^2 \mathcal{H}(-\gamma(2n-q)) \\ \xrightarrow{a_{2n-1-q}} \bigwedge^3 \mathcal{H}(-\gamma(2n-1-q)) \xrightarrow{a_{2n-2-q}} \dots \xrightarrow{a_{n+2-q}} \bigwedge^n \mathcal{H}(-(n+2-q)\gamma) \\ \xrightarrow{a_{n+1-q}} \bigwedge^{n+1} \mathcal{H}(-(n+1-q)\gamma) \xrightarrow{a_{n-q}} \bigwedge^n \mathcal{H}(-(n-q)\gamma) \xrightarrow{a_{n-1-q}} \dots \\ \dots \xrightarrow{a_3} \bigwedge^{q+3} \mathcal{H}(-3\gamma) \xrightarrow{a_2} \bigwedge^{q+2} \mathcal{H}(-2\gamma) \xrightarrow{a_1} \bigwedge^{q+1} \mathcal{H}(-\gamma) \xrightarrow{a_0} \bigwedge^q \mathcal{Q}^* \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

où $1 \leq q < 2n+1$.

On a le fibré de corrélation nulle pondéré \mathcal{N} sur \mathbb{P}^{2n+1} dans la suite exacte (2)

$$(8) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-\gamma) \longrightarrow \mathcal{Q}^* \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow 0.$$

On obtient la résolution de Koszul généralisée suivante

$$(9) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-q\gamma) \longrightarrow \mathcal{Q}^*(-\gamma(q-1)) \longrightarrow \bigwedge^2 \mathcal{Q}^*(-\gamma(q-2)) \\ \xrightarrow{a_{q-2}} \bigwedge^3 \mathcal{Q}^*(-\gamma(q-3)) \xrightarrow{a_{q-3}} \dots \\ \dots \xrightarrow{a_3} \bigwedge^{q-2} \mathcal{Q}^*(-2\gamma) \xrightarrow{a_2} \bigwedge^{q-1} \mathcal{Q}^*(-\gamma) \xrightarrow{a_1} \bigwedge^q \mathcal{Q}^* \xrightarrow{a_0} \bigwedge^q \mathcal{N} \longrightarrow 0$$

où $1 \leq q \leq 2n$.

1.3. Stabilité du fibré de corrélation nulle pondéré sur \mathbb{P}^{2n+1} . Nous allons démontrer ci-après que le fibré de corrélation nulle pondéré sur \mathbb{P}^{2n+1} est stable au sens du Mumford-Takemoto.

1.3.1. Lemme. Soient $p, q, k, \lambda_i; i = 0, 1, 2, \dots, n$ et $\gamma > 0$ des entiers tels que $\gamma > \lambda_n \geq \lambda_{n-1} \geq \dots \geq \lambda_0 \geq 0$. Soit $\mathcal{H} := \bigoplus_{i=0}^n (\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(\lambda_{n-i})) \oplus \bigoplus_{i=0}^n (\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-\lambda_i))$.

I- Pour $k \geq \gamma$ et $1 \leq q \leq 2n+1$, on a

$h^0(\bigwedge^q \mathcal{H}(-k)) = 0$ si et seulement si $\gamma > \sum_{i=0}^{\min(q-1, n)} \lambda_{n-i}$. En particulier, on a

$$h^0(\bigwedge^q \mathcal{H}(-k)) = 0 \text{ si } \gamma > \sum_{i=0}^n \lambda_i.$$

II- Pour $k \geq 2$ et $1 \leq p, q \leq 2n+1$. Alors on a $h^0((\bigwedge^p \mathcal{H}) \otimes \bigwedge^q \mathcal{H}(-k\gamma)) = 0$ si $\gamma > \sum_{i=0}^n \lambda_i$.

III- Pour $1 \leq q \leq 2n+1$ et $k \geq \min(q-1, n) + 2$. Alors on a $h^0(\mathcal{H} \otimes \bigwedge^q \mathcal{H}(-k\gamma)) = 0$.

Démonstration. Pour démontrer (I), on a

$$\max\{t \in \mathbb{Z} \mid \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(t) \subseteq \bigwedge^q \mathcal{H}\} = \sum_{i=0}^{\min(q-1, n)} \lambda_{n-i}.$$

Donc pour $k \geq \gamma$, on obtient

$$h^0(\bigwedge^q \mathcal{H}(-k)) = 0 \text{ si et seulement si } \gamma > \sum_{i=0}^{\min(q-1, n)} \lambda_{n-i}.$$

(II) et (III) sont analogues.

□

1.3.2. Proposition. Soit \mathcal{Q} le fibré quotient pondéré sur \mathbb{P}^{2n+1} et défini par la suite exacte (1). Soient $1 \leq q \leq n$, $0 < i < 2n + 1$ et $k \geq 0$ des entiers. Alors on a

I- $h^0(\bigwedge^q \mathcal{Q}^*(-m)) = 0$ si $\gamma > \sum_{v=0}^n \lambda_v$, $\forall m \in \mathbb{N}$.

II- Pour $0 \leq k \leq q$, on a

$$h^i(\bigwedge^q \mathcal{Q}^*(-k\gamma)) = \begin{cases} 0 & : i \neq q \\ \epsilon_{k,q} & : i = q \neq k \\ 1 & : i = q = k \end{cases}$$

où $\epsilon_{k,q} = h^1\{\ker[\mathcal{H}(\gamma(q-1-k)) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(\gamma(q-k))]\}$.

III- Pour $k > q$, on a

$$h^i(\bigwedge^q \mathcal{Q}^*(-k\gamma)) = 0.$$

Démonstration. Pour démontrer (I), on considère $1 \leq q \leq n$, $0 < i < 2n + 1$ et $\forall m \in \mathbb{N}$. De la résolution (7), on obtient la résolution suivante

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-\gamma(2n+2-q)-m) &\longrightarrow \mathcal{H}(-\gamma(2n+1-q)-m) \longrightarrow \bigwedge^2 \mathcal{H}(-\gamma(2n-q)-m) \\ &\xrightarrow{a_{2n-1-q}} \bigwedge^3 \mathcal{H}(-\gamma(2n-1-q)-m) \xrightarrow{a_{2n-2-q}} \dots \xrightarrow{a_{n+2-q}} \bigwedge^n \mathcal{H}(-(n+2-q)\gamma-m) \\ &\xrightarrow{a_{n+1-q}} \bigwedge^{n+1} \mathcal{H}(-(n+1-q)\gamma-m) \xrightarrow{a_{n-q}} \bigwedge^n \mathcal{H}(-(n-q)\gamma-m) \xrightarrow{a_{n-1-q}} \dots \\ \dots \xrightarrow{a_3} \bigwedge^{q+3} \mathcal{H}(-3\gamma-m) &\xrightarrow{a_2} \bigwedge^{q+2} \mathcal{H}(-2\gamma-m) \xrightarrow{a_1} \bigwedge^{q+1} \mathcal{H}(-\gamma-m) \xrightarrow{a_0} \bigwedge^q \mathcal{Q}^*(-m) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Soit $A_r = \ker(a_r)$ où $r = 0, 1, \dots, 2n-1-q$. D'après le lemme (1.3.1), $h^j(A_0) = 0$ pour $j \leq q$. On a aussi

$$h^0(\bigwedge^{q+1} \mathcal{H}(-\gamma-m)) = 0 \text{ si } \gamma > \sum_{v=0}^n \lambda_v.$$

Donc on obtient, pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$h^0(\bigwedge^q \mathcal{Q}^*(-m)) = 0 \text{ si } \gamma > \sum_{v=0}^n \lambda_v.$$

De plus on a $h^i(\bigwedge^q \mathcal{Q}^*(-m)) = 0$ pour $0 < i \leq q-1$. De la résolution duale de résolution (6) on obtient la résolution suivante, pour tout $q > 0$,

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \bigwedge^q \mathcal{Q}^*(-k\gamma) &\longrightarrow \bigwedge^q \mathcal{H}(-k\gamma) \longrightarrow \bigwedge^{q-1} \mathcal{H}(\gamma(1-k)) \xrightarrow{b_{q-2}} \bigwedge^{q-2} \mathcal{H}(\gamma(2-k)) \xrightarrow{b_{q-3}} \dots \\ \dots \xrightarrow{b_3} \bigwedge^3 \mathcal{H}(\gamma(q-3-k)) &\xrightarrow{b_2} \bigwedge^2 \mathcal{H}(\gamma(q-2-k)) \xrightarrow{b_1} \mathcal{H}(\gamma(q-1-k)) \xrightarrow{b_0} \mathcal{O}(\gamma(q-k)) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

On considère $B_r = \ker(b_r)$ pour $r = 0, 1, \dots, q-2$. Alors on obtient

$$h^i(B_{q-2}) = \begin{cases} 0 & : q \leq i \leq 2n \\ h^1(B_0) = \epsilon_{k,q} & : i = q - 1 \end{cases}$$

Comme on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow \bigwedge^q \mathcal{Q}^*(-k\gamma) \longrightarrow \bigwedge^q \mathcal{H}(-k\gamma) \longrightarrow B_{q-2} \longrightarrow 0,$$

alors on a, pour $0 \leq k \leq q$,

$$h^i(\bigwedge^q \mathcal{Q}^*(-k\gamma)) = \begin{cases} 0 & : q \neq i \\ 1 & : i = q = k \\ \epsilon_{k,q} & : \text{sinon} \end{cases}$$

Pour $k > q$ et pour tout i , on a

$$h^i(\bigwedge^q \mathcal{Q}^*(-k\gamma)) = 0.$$

□

1.3.3. Proposition. Soient \mathcal{Q} le fibré quotient pondéré sur \mathbb{P}^{2n+1} et \mathcal{N} le fibré de corrélation nulle pondéré sur \mathbb{P}^{2n+1} et définis par les suites exactes (1) et (8), et $1 \leq 2j+1 \leq n$ un entier.

I- Si $m \in \mathbb{N}$ et $\gamma > \sum_{i=0}^n \lambda_i$, alors $h^0(\bigwedge^{2j+1} \mathcal{N}(-m\gamma)) = 0$.

II- On a $h^1(\bigwedge^{2j+1} \mathcal{N}(-\gamma)) = 1$.

Démonstration. Pour démontrer (I), on fixe $1 \leq 2j+1 \leq n$, $\forall m \in \mathbb{N}$. D'après la résolution (9), on obtient la résolution suivante

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-\gamma(2j+1+m)) &\longrightarrow \mathcal{Q}^*(-\gamma(2j+m)) \longrightarrow \bigwedge^2 \mathcal{Q}^*(-\gamma(2j-1+m)) \\ &\xrightarrow{a_{2j-1}^3} \bigwedge^3 \mathcal{Q}^*(-\gamma(2j-2+m)) \xrightarrow{a_{2j-2}^{a_{2j-2}}} \dots \\ \dots &\xrightarrow{a_2^{2j}} \bigwedge^{2j} \mathcal{Q}^*(-\gamma(1+m)) \xrightarrow{a_1^{2j+1}} \bigwedge^{2j+1} \mathcal{Q}^*(-\gamma m) \xrightarrow{a_0^{2j+1}} \bigwedge^{2j+1} \mathcal{N}(-\gamma m) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

On considère $A_i = \ker(a_i)$ pour $i = 0, 1, \dots, 2j-1$. Les termes dans cette résolution sont de la forme $\bigwedge^q \mathcal{Q}^*(-\gamma(k+m))$, où $0 \leq k \leq 2j$, $1 \leq q \leq 2j+1$ tels que $k+q = 2j+1$ et $k \neq q$. D'après la proposition (1.3.2), on obtient $h^k(\bigwedge^{2j+1-k} \mathcal{Q}^*(-\gamma(k+m))) = 0$. Comme

$$h^{2j+1}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-\gamma(2j+1+m))) = 0$$

alors on a $h^{i+1}(A_i) = 0$, $i = 0, 1, \dots, 2j-1$. De la suite exacte

$$0 \longrightarrow A_0 \longrightarrow \bigwedge^{2j+1} \mathcal{Q}^*(-\gamma m) \xrightarrow{a_0^{2j+1}} \bigwedge^{2j+1} \mathcal{N}(-\gamma m) \longrightarrow 0$$

et comme $h^0(\bigwedge^{2j+1} \mathcal{Q}^*(-\gamma m)) = 0$ si $\gamma > \sum_{i=0}^n \lambda_i$, alors on obtient

$$h^0(\bigwedge^{2j+1} \mathcal{N}(-\gamma m)) = 0 \text{ si } \gamma > \sum_{i=0}^n \lambda_i.$$

Pour démontrer (II), on fixe $m = 1$ dans la résolution précédente. On obtient la résolution suivante

$$\begin{aligned}
0 &\longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-\gamma(2j+2)) \longrightarrow \mathcal{Q}^*(-\gamma(2j+1)) \longrightarrow \bigwedge^2 \mathcal{Q}^*(-\gamma(2j)) \\
&\xrightarrow{d_{2j-1}} \bigwedge^3 \mathcal{Q}^*(-\gamma(2j-1)) \xrightarrow{d_{2j-2}} \dots \\
\dots &\xrightarrow{d_{j+2}} \bigwedge^j \mathcal{Q}^*(-\gamma(j+2)) \xrightarrow{d_{j+1}} \bigwedge^{j+1} \mathcal{Q}^*(-\gamma(j+1)) \xrightarrow{d_j} \bigwedge^{j+2} \mathcal{Q}^*(-\gamma(j)) \xrightarrow{d_{j-1}} \dots \\
\dots &\xrightarrow{d_3} \bigwedge^{2j-1} \mathcal{Q}^*(-3\gamma) \xrightarrow{d_2} \bigwedge^{2j} \mathcal{Q}^*(-2\gamma) \xrightarrow{d_1} \bigwedge^{2j+1} \mathcal{Q}^*(-\gamma) \xrightarrow{d_0} \bigwedge^{2j+1} \mathcal{N}(-\gamma) \longrightarrow 0.
\end{aligned}$$

On considère $D_\alpha = \ker(d_\alpha)$ pour $\alpha = 0, 1, \dots, 2j-1$. Les termes dans cette résolution sont de la forme $\bigwedge^q \mathcal{Q}^*(-k\gamma)$ où $1 \leq k, q \leq 2j+1$ tels que $k+q = 2j+2$.

On a deux cas:

Premier cas, si $k \geq q$. Dans ce cas on obtient, d'après la proposition (1.3.2), que

$$h^i(\bigwedge^q \mathcal{Q}^*(-k\gamma)) = 0 \text{ pour } i \neq 0, 2n+1.$$

Donc ça nous donne que $h^i(D_\alpha) = 0$ pour $\alpha \geq j$, $i \leq 2n-j$, sauf pour $i = \alpha$. On obtient

$$h^{j+1}(\bigwedge^{j+1} \mathcal{Q}^*(-\gamma(j+1))) = 1, \quad h^i(D_j) = 0, \quad i = j+1, j+2.$$

De la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow D_j \longrightarrow \bigwedge^{j+1} \mathcal{Q}^*(-\gamma(j+1)) \longrightarrow D_{j-1} \longrightarrow 0,$$

on obtient $h^{j+1}(D_{j-1}) = 1$. Donc on obtient $h^{\alpha+2}(D_\alpha) = 1$ pour $\alpha = 0, 1, \dots, j-1$.

Deuxième cas, si $k < q$. D'après la proposition (1.3.2), on a $h^i(\bigwedge^q \mathcal{Q}^*(-k\gamma)) = 0$ pour $i = k, k-1$ et $1 \leq k \leq j+1$. Alors on obtient $h^{\alpha+2}(D_\alpha) = 1$ pour $\alpha = 0, 1, \dots, j-1$.

Dans les deux cas, on a $h^2(D_0) = 1$. D'après la proposition (1.3.2), on obtient

$$h^i(\bigwedge^{2j+1} \mathcal{Q}^*(-\gamma)) = 0 \text{ pour } i = 1, 2.$$

Donc d'après la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow D_0 \longrightarrow \bigwedge^{2j+1} \mathcal{Q}^*(-\gamma) \xrightarrow{a_0} \bigwedge^{2j+1} \mathcal{N}(-\gamma) \longrightarrow 0,$$

on a $h^1(\bigwedge^{2j+1} \mathcal{N}(-\gamma)) = 1$.

□

1.3.4. Proposition. Soit \mathcal{Q} le fibré quotient pondéré sur \mathbb{P}^{2n+1} et défini par la suite exacte (1). Soient $1 \leq k \leq n+1$ un entier et $\alpha \in \mathbb{Z}$. Si $\gamma > \sum_{i=0}^n \lambda_i$, alors on obtient

$$h^i(\mathcal{Q}^* \otimes \bigwedge^k \mathcal{H}(-\alpha\gamma)) = 0$$

dans les cas suivants :

- Si $\alpha = 1$, $2 \leq i \leq 2n$, ou bien $i = 0$.
- Si $\alpha < 1$, $2 \leq i \leq 2n$.
- Si $\alpha > 1$, $0 \leq i \leq 2n$.

Démonstration. Soient $1 \leq k \leq n+1$ un entier et $\alpha \in \mathbb{Z}$. On veut calculer les groupes cohomologiques du fibré

$$\mathcal{Q}^* \otimes \bigwedge^k \mathcal{H}(-\alpha\gamma).$$

De la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow \mathcal{Q}^* \otimes \bigwedge^k \mathcal{H}(-\alpha\gamma) \longrightarrow \mathcal{H} \otimes \bigwedge^k \mathcal{H}(-\alpha\gamma) \longrightarrow \bigwedge^k \mathcal{H}(\gamma(-\alpha+1)) \longrightarrow 0$$

et d'après le lemme (1.3.1) on obtient :

si $\alpha \leq 1$. on a

$$h^i(\mathcal{Q}^* \otimes \bigwedge^k \mathcal{H}(-\alpha\gamma)) = 0, \quad 2 \leq i \leq 2n,$$

si $\alpha > 1$, on a

$$h^i(\mathcal{Q}^* \otimes \bigwedge^k \mathcal{H}(-\alpha\gamma)) = 0, \quad 2 \leq i \leq 2n.$$

Si $\gamma > \sum_{i=0}^n \lambda_i$, alors on obtient

$$h^1(\mathcal{Q}^* \otimes \bigwedge^k \mathcal{H}(-\alpha\gamma)) = 0, \quad \text{pour } \alpha > 1.$$

Pour calculer $h^0(\mathcal{Q}^* \otimes \bigwedge^k \mathcal{H}(-\alpha\gamma))$ où $\alpha \geq 1$, on va utiliser la résolution (7) avec $q = 1$. Donc on obtient la résolution suivante

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \bigwedge^k \mathcal{H}(-\gamma(\alpha+2n+1)) &\longrightarrow \mathcal{H} \otimes \bigwedge^k \mathcal{H}(-\gamma(\alpha+2n)) \longrightarrow \left(\bigwedge^2 \mathcal{H}\right) \otimes \bigwedge^k \mathcal{H}(-\gamma(\alpha+2n-1)) \\ &\xrightarrow{d_{2n-2}} \left(\bigwedge^3 \mathcal{H}\right) \otimes \bigwedge^k \mathcal{H}(-\gamma(\alpha+2n-2)) \xrightarrow{d_{2n-3}} \dots \xrightarrow{a_{n+1}} \left(\bigwedge^n \mathcal{H}\right) \otimes \bigwedge^k \mathcal{H}(-\gamma(\alpha+n+1)) \\ &\xrightarrow{d_n} \left(\bigwedge^{n+1} \mathcal{H}\right) \otimes \bigwedge^k \mathcal{H}(-\gamma(\alpha+n)) \xrightarrow{d_{n-1}} \left(\bigwedge^n \mathcal{H}\right) \otimes \bigwedge^k \mathcal{H}(-\gamma(\alpha+n-1)) \xrightarrow{d_{n-2}} \dots \\ \dots &\xrightarrow{d_2} \left(\bigwedge^3 \mathcal{H}\right) \otimes \bigwedge^k \mathcal{H}(-\gamma(\alpha+2)) \xrightarrow{d_1} \left(\bigwedge^2 \mathcal{H}\right) \otimes \bigwedge^k \mathcal{H}(-\gamma(\alpha+1)) \xrightarrow{d_0} \mathcal{Q}^* \otimes \bigwedge^k \mathcal{H}(-\alpha\gamma) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

On considère $D_j = \ker(d_j)$ pour $j = 0, 1, \dots, 2n - 2$. D'après le lemme (1.3.1), on obtient que $h^1(D_0) = 0$ pour $\alpha \in \mathbb{Z}$. D'après le lemme (1.3.1) et de la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow D_0 \longrightarrow \left(\bigwedge^2 \mathcal{H} \right) \otimes \bigwedge^k \mathcal{H}(-\gamma(\alpha + 1)) \xrightarrow{d_0} \mathcal{Q}^* \otimes \bigwedge^k \mathcal{H}(-\alpha\gamma) \longrightarrow 0$$

on obtient que, si $\alpha \geq 1$ et $\gamma > \sum_{i=0}^n \lambda_i$,

$$h^0(\mathcal{Q}^* \otimes \bigwedge^k \mathcal{H}(-\alpha\gamma)) = 0.$$

□

1.3.5. Proposition. *Soit \mathcal{Q} le fibré quotient pondéré sur \mathbb{P}^{2n+1} et défini par la suite exacte (1). Soient $\alpha \geq 0$ et $1 \leq q \leq 2n + 1$ des entiers. Si $\gamma > \sum_{i=0}^n \lambda_i$, alors on obtient*

$$h^i(\mathcal{Q}^* \otimes \bigwedge^q \mathcal{Q}^*(-\alpha\gamma)) = 0,$$

dans les cas suivants :

- Si $\alpha = 0$, $0 \leq i \leq 2n, i \neq 1, q$.
- Si $\alpha > 0$, $0 \leq i \leq 2n, i \neq q$.

Démonstration. On fixe $\gamma > \sum_{i=0}^n \lambda_i$. Soient $\alpha \geq 0$ et $1 \leq q \leq 2n + 1$ des entiers. De la résolution (7), on obtient la résolution suivante

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \mathcal{Q}^*(-\gamma(\alpha + 2n + 2 - q)) \longrightarrow \mathcal{Q}^* \otimes \mathcal{H}(-\gamma(\alpha + 2n + 1 - q)) \longrightarrow \mathcal{Q}^* \otimes \bigwedge^2 \mathcal{H}(-\gamma(\alpha + 2n - q)) \\ \xrightarrow{b_{2n-1-q}} \mathcal{Q}^* \otimes \bigwedge^3 \mathcal{H}(-\gamma(\alpha + 2n - 1 - q)) \xrightarrow{b_{2n-2-q}} \dots \xrightarrow{b_{n+2-q}} \mathcal{Q}^* \otimes \bigwedge^n \mathcal{H}(-\gamma(\alpha + n + 2 - q)) \\ \xrightarrow{b_{n+1-q}} \mathcal{Q}^* \otimes \bigwedge^{n+1} \mathcal{H}(-\gamma(\alpha + n + 1 - q)) \xrightarrow{b_{n-q}} \mathcal{Q}^* \otimes \bigwedge^n \mathcal{H}(-\gamma(\alpha + n - q)) \xrightarrow{b_{n-1-q}} \dots \\ \dots \xrightarrow{b_2} \mathcal{Q}^* \otimes \bigwedge^{q+2} \mathcal{H}(-\gamma(\alpha + 2)) \xrightarrow{b_1} \mathcal{Q}^* \otimes \bigwedge^{q+1} \mathcal{H}(-\gamma(\alpha + 1)) \xrightarrow{b_0} \mathcal{Q}^* \otimes \bigwedge^q \mathcal{Q}^*(-\alpha\gamma) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

On considère $B_m = \ker(b_m)$ pour $m = 0, 1, \dots, 2n - 1 - q$. D'après la proposition (1.3.4), on a

$$h^i(B_0) = 0, \text{ où } 0 \leq i \leq q.$$

De la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow B_0 \longrightarrow \mathcal{Q}^* \otimes \bigwedge^{q+1} \mathcal{H}(-\gamma(\alpha + 1)) \xrightarrow{b_0} \mathcal{Q}^* \otimes \bigwedge^q \mathcal{Q}^*(-\alpha\gamma) \longrightarrow 0$$

et d'après la proposition (1.3.4) on obtient, si $\alpha = 0$,

$$h^i(\mathcal{Q}^* \otimes \bigwedge^q \mathcal{Q}^*(-\alpha\gamma)) = 0, \text{ où } 2 \leq i \leq q - 1, \text{ ou bien } i = 0.$$

On obtient aussi, si $\alpha > 0$,

$$h^i(\mathcal{Q}^* \otimes \bigwedge^q \mathcal{Q}^*(-\alpha\gamma)) = 0, \text{ où } 0 \leq i \leq q - 1.$$

On a la résolution suivante

$$\begin{aligned}
0 \longrightarrow \mathcal{Q}^* \otimes \bigwedge^q \mathcal{Q}^*(-\alpha\gamma) &\longrightarrow \mathcal{Q}^* \otimes \bigwedge^q \mathcal{H}(-\alpha\gamma) \longrightarrow \mathcal{Q}^* \otimes \bigwedge^{q-1} \mathcal{H}(\gamma(-\alpha+1)) \xrightarrow{a_{q-2}} \\
&\mathcal{Q}^* \otimes \bigwedge^{q-2} \mathcal{H}(\gamma(-\alpha+2)) \xrightarrow{a_{q-3}} \dots \\
\dots \xrightarrow{a_2} \mathcal{Q}^* \otimes \bigwedge^2 \mathcal{H}(\gamma(-\alpha+q-2)) &\xrightarrow{a_1} \mathcal{Q}^* \otimes \mathcal{H}(\gamma(-\alpha+q-1)) \xrightarrow{a_0} \mathcal{Q}^*(\gamma(-\alpha+q)) \longrightarrow 0.
\end{aligned}$$

On considère $A_r = \ker(a_r)$ pour $r = 0, 1, \dots, q-2$. D'après la proposition (1.3.4), on a

$$h^i(A_{q-2}) = 0, \text{ où } q \leq i \leq 2n.$$

De la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow \mathcal{Q}^* \otimes \bigwedge^q \mathcal{Q}^*(-\alpha\gamma) \longrightarrow \mathcal{Q}^* \otimes \bigwedge^q \mathcal{H}(-\alpha\gamma) \longrightarrow A_{q-2} \longrightarrow 0$$

et d'après la proposition (1.3.4) on obtient, si $\alpha \geq 0$,

$$h^i(\mathcal{Q}^* \otimes \bigwedge^q \mathcal{Q}^*(-\alpha\gamma)) = 0, \text{ où } q+1 \leq i \leq 2n.$$

□

1.3.6. Proposition. Soient \mathcal{Q} le fibré quotient pondéré sur \mathbb{P}^{2n+1} et \mathcal{N} le fibré de corrélation nulle pondéré sur \mathbb{P}^{2n+1} et définis par les suites exactes (1) et (8). Soit $1 \leq 2j+1 \leq n$. Si on a $\gamma > \sum_{i=0}^n \lambda_i$, alors on obtient

$$h^0(\mathcal{N} \otimes \bigwedge^{2j+1} \mathcal{N}) = 1.$$

Démonstration. On fixe $1 \leq 2j+1 \leq n$ et $\gamma > \sum_{i=0}^n \lambda_i$. D'après le lemme (1.2.10), la remarque (1.2.11) et le théorème (1.2.9), on a

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}} \hookrightarrow \bigwedge^{2j+2} \mathcal{N} \hookrightarrow \mathcal{N} \otimes \bigwedge^{2j+1} \mathcal{N}.$$

Donc on a

$$h^0(\mathcal{N} \otimes \bigwedge^{2j+1} \mathcal{N}) \geq 1.$$

De la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow \bigwedge^{2j+1} \mathcal{N}(-\gamma) \longrightarrow \mathcal{Q}^* \otimes \bigwedge^{2j+1} \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N} \otimes \bigwedge^{2j+1} \mathcal{N} \longrightarrow 0$$

et d'après la proposition (1.3.3), on a $h^1(\bigwedge^{2j+1} \mathcal{N}(-\gamma)) = 1$. Donc il suffit de démontrer que

$$h^0(\mathcal{Q}^* \otimes \bigwedge^{2j+1} \mathcal{N}) = 0.$$

De la résolution (9), on obtient la résolution suivante

$$\begin{aligned}
0 \longrightarrow \mathcal{Q}^*(-\gamma(2j+1)) &\longrightarrow \mathcal{Q}^* \otimes \mathcal{Q}^*(-\gamma(2j)) \longrightarrow \mathcal{Q}^* \otimes \bigwedge^2 \mathcal{Q}^*(-\gamma(2j-1)) \xrightarrow{\mu_{2j-1}} \\
&\mathcal{Q}^* \otimes \bigwedge^3 \mathcal{Q}^*(-\gamma(2j-2)) \xrightarrow{\mu_{2j-2}} \dots \\
\dots \xrightarrow{\mu_{j+2}} \mathcal{Q}^* \otimes \bigwedge^j \mathcal{Q}^*(-\gamma(j+1)) &\xrightarrow{\mu_{j+1}} \mathcal{Q}^* \otimes \bigwedge^{j+1} \mathcal{Q}^*(-\gamma(j)) \xrightarrow{\mu_j} \mathcal{Q}^* \otimes \bigwedge^{j+2} \mathcal{Q}^*(-\gamma(j-1)) \xrightarrow{\mu_{j-1}} \dots \\
\dots \xrightarrow{\mu_3} \mathcal{Q}^* \otimes \bigwedge^{2j-1} \mathcal{Q}^*(-2\gamma) &\xrightarrow{\mu_2} \mathcal{Q}^* \otimes \bigwedge^{2j} \mathcal{Q}^*(-\gamma) \xrightarrow{\mu_1} \mathcal{Q}^* \otimes \bigwedge^{2j+1} \mathcal{Q}^* \xrightarrow{\mu_0} \mathcal{Q}^* \otimes \bigwedge^{2j+1} \mathcal{N} \longrightarrow 0.
\end{aligned}$$

On considère $\Sigma_m = \ker(\mu_m)$ pour $m = 0, 1, \dots, 2j-1$. Les termes dans cette résolution sont de la forme

$$\mathcal{Q}^* \otimes \bigwedge^q \mathcal{Q}^*(-\alpha\gamma),$$

où $0 \leq \alpha \leq 2j$, $1 \leq q \leq 2j+1 \leq n$ tels que $q + \alpha = 2j+1$ et $q \neq \alpha$. D'après la proposition (1.3.5), on a

$$h^\alpha(\mathcal{Q}^* \otimes \bigwedge^{2j+1-\alpha} \mathcal{Q}^*(-\alpha\gamma)) = 0 \text{ pour tout } \alpha, \text{ si } \gamma > \sum_{i=0}^n \lambda_i.$$

Comme $h^i(\mathcal{Q}^*(-\gamma(2j+1))) = 0$ pour tout $0 \leq i \leq 2n$, alors on obtient que $h^1(\Sigma_0) = 0$. En utilisant la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow \Sigma_0 \longrightarrow \mathcal{Q}^* \otimes \bigwedge^{2j+1} \mathcal{Q}^* \xrightarrow{\mu_0} \mathcal{Q}^* \otimes \bigwedge^{2j+1} \mathcal{N} \longrightarrow 0,$$

on obtient

$$h^0(\mathcal{Q}^* \otimes \bigwedge^{2j+1} \mathcal{N}) = 0,$$

et

$$h^0(\mathcal{N} \otimes \bigwedge^{2j+1} \mathcal{N}) = 1 \text{ si } \gamma > \sum_{i=0}^n \lambda_i.$$

□

1.3.7. Théorème. (théorème 3.5, [1]). Soient E un fibré vectoriel symplectique sur une variété projective X avec $\text{Pic}(X) = \mathbb{Z}$, et $1 \leq 2j+1 \leq \text{rg}(E)/2$ un entier impair tels que

I) $h^0(\bigwedge^{2j+1} E) = 0$.

II) $h^0(E \otimes \bigwedge^{2j+1} E) = 1$.

Alors E est stable (au sens du Mumford-Takemoto).

Démonstration. voir [1].

□

1.3.8. Théorème. Soient $\mathbf{m} = (\gamma; (\lambda_i)_{0 \leq i \leq n}, (-\lambda_i)_{0 \leq i \leq n})$, et $\mathcal{Q}_{\mathbf{m}}$ le fibré quotient pondéré par le poids \mathbf{m} et $\mathcal{N}_{\mathbf{m}}$ le fibré de corrélation nulle pondéré par le poids \mathbf{m} sur \mathbb{P}^{2n+1} et définis par les suites exactes suivantes

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-\gamma) \xrightarrow{B} \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{Q}_{\mathbf{m}} \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{N}_{\mathbf{m}} \longrightarrow \mathcal{Q}_{\mathbf{m}} \xrightarrow{A} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(\gamma) \longrightarrow 0.$$

Si $\gamma > \sum_{i=0}^n \lambda_i$, alors $\mathcal{N}_{\mathbf{m}}$ est stable.

Démonstration. On fixe $\gamma > \sum_{i=0}^n \lambda_i$. D'après le théorème (1.2.9), le fibré vectoriel $\mathcal{N}_{\mathbf{m}}$ est un fibré symplectique. D'après les propositions (1.3.3), (1.3.6) et le théorème (1.3.7), on obtient que le fibré $\mathcal{N}_{\mathbf{m}}$ est stable. \square

1.3.9. Corollaire. Soit $\mathcal{N} := \mathcal{N}_{\mathbf{m}}$ le fibré de corrélation nulle pondéré sur \mathbb{P}^{2n+1} avec $\mathbf{m} = (\gamma; (\alpha(2n+1-2i))_{0 \leq i \leq 2n+1})$ et défini dans la proposition (1.2.6).

Si $\gamma > (n+1)^2\alpha$, alors le fibré vectoriel \mathcal{N} est stable.

Démonstration. Voir le théorème (1.3.8). \square

1.4. Construction de fibré vectoriel de rang $2n$ sur \mathbb{P}^{2n+1} . Soient V un espace vectoriel complexe de dimension $2n+2$, et $\mathbb{P}^{2n+1} = \mathbb{P}(V)$ l'espace projectif complexe associé dont les points sont les droites de V . On considère le multi-indice

$$\mathbf{m} = ((\gamma_j)_{0 \leq j \leq \mathbf{b}}; (\lambda_i)_{0 \leq i \leq n+\mathbf{b}}, (-\lambda_i)_{0 \leq i \leq n+\mathbf{b}}),$$

où $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{N}^*$, et $\gamma_j > 0$, λ_i sont des entiers naturels pour $j = 0, 1, 2, \dots, \mathbf{b}$ et $i = 0, 1, 2, \dots, n + \mathbf{b}$ tels que

$$\gamma_0 \geq \gamma_1 \geq \dots \geq \gamma_{\mathbf{b}} > \lambda_{n+\mathbf{b}} \geq \lambda_{n+\mathbf{b}-1} \geq \dots \geq \lambda_0 \geq 0.$$

et

$$(*) \left\{ \gamma_j - \gamma_{j+1} = \lambda_{i+1} - \lambda_i : \mathbf{b} \geq 1, 0 \leq j \leq \mathbf{b} - 1 \text{ et } 0 \leq i \leq n + \mathbf{b} - 1 \right.$$

Soient $g_r \in H^0(\mathbb{P}^{2n+1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(\gamma_{\mathbf{b}} - \lambda_r))$ et $f_r \in H^0(\mathbb{P}^{2n+1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(\gamma_{\mathbf{b}} + \lambda_{n+\mathbf{b}-r}))$, pour $r = 0, 1, 2, \dots, n$, des formes homogènes sur \mathbb{P}^{2n+1} sans zéro commun. Soient

$${}^t B = \left(\begin{array}{cccc|cccc} f_0 & \dots & f_n & & 0 & g_0 & \dots & g_n & & 0 \\ & f_0 & \dots & f_n & & g_0 & \dots & g_n & & 0 \\ & & \ddots & & \ddots & & \ddots & & \ddots & \\ & & & & 0 & & g_0 & \dots & g_n & \end{array} \right),$$

et

$$A = \left(\begin{array}{cccc|cccc} g_n & \dots & g_0 & & 0 & -f_n & \dots & -f_0 & & 0 \\ & g_n & \dots & g_0 & & -f_n & \dots & -f_0 & & 0 \\ & & \ddots & & \ddots & & \ddots & & \ddots & \\ & & & & 0 & & g_n & \dots & g_0 & \\ & & & & & & & -f_n & \dots & -f_0 \end{array} \right),$$

sont des $(\mathfrak{b} + 1) \times (2n + 2\mathfrak{b} + 2)$ -matrices, avec $A.B = 0$. On considère aussi les fibrés

$$\mathcal{H} := \bigoplus_{i=0}^{n+\mathfrak{b}} (\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(\lambda_{n+\mathfrak{b}-i})) \oplus \bigoplus_{i=0}^{n+\mathfrak{b}} (\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-\lambda_i)),$$

et

$$\mathcal{L}_- := \bigoplus_{j=0}^{\mathfrak{b}} (\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-\gamma_{\mathfrak{b}-j})), \quad \mathcal{L}_+ := \bigoplus_{j=0}^{\mathfrak{b}} (\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(\gamma_j)).$$

On obtient les isomorphismes canoniques $\mathcal{H} \simeq \mathcal{H}^*$ et $\mathcal{L}_+^* \simeq \mathcal{L}_-$. On considère

$$X_i = V(f_i, f_{i+1}, \dots, f_n; g_i, g_{i+1}, \dots, g_n).$$

On va montrer que le morphisme de fibrés vectoriels $B : \mathcal{L}_- \rightarrow \mathcal{H}$ est injectif. On suppose qu'il existe $x \in \mathbb{P}^{2n+1}$ tel que B_x n'est pas injectif, et on va montrer par récurrence descendante sur i que $x \in X_i$.

Pour $i = n$, les formes $f_n^{\mathfrak{b}+1}$ et $g_n^{\mathfrak{b}+1}$ sont des mineurs maximaux de la matrice B_x . Donc f_n et g_n s'annulent en x ($x \in X_n$). Supposons que $x \in X_i$. Les formes $f_{i-1}^{\mathfrak{b}+1}$ et $g_{i-1}^{\mathfrak{b}+1}$ sont des mineurs maximaux de la restriction de B_x au X_i . Donc f_{i-1} et g_{i-1} s'annulent en x ($x \in X_{i-1}$). Alors $x \in X_i$ pour tout i , ce qui est en contradiction avec $X_0 = \emptyset$. Donc le morphisme $B : \mathcal{L}_- \rightarrow \mathcal{H}$ est injectif. Par le même raisonnement, on obtient que le morphisme $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{L}_+$ est surjectif. Donc tout cela nous donne la monade suivante

$$(10) \quad 0 \rightarrow \mathcal{L}_- \xrightarrow{B} \mathcal{H} \xrightarrow{A} \mathcal{L}_+ \rightarrow 0.$$

On en déduit la suite exacte suivante

$$(11) \quad 0 \rightarrow \mathcal{L}_- \xrightarrow{B} \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{S}_m \rightarrow 0,$$

où \mathcal{S}_m est un fibré vectoriel de rang $2n + 1 + \mathfrak{b}$ sur \mathbb{P}^{2n+1} . D'après le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{L}_- & \xrightarrow{B} & \mathcal{H} & \longrightarrow & \mathcal{S}_m \longrightarrow 0 \\ & & & & \downarrow A & \swarrow s & \\ & & & & \mathcal{L}_+ & & \\ & & & & \downarrow & & \\ & & & & 0 & & \end{array}$$

la condition $A.B = 0$ donne que le morphisme $\mathcal{S}_m \xrightarrow{s} \mathcal{L}_+$ est surjectif. Autrement dit, il existe \mathcal{D}_m un fibré vectoriel de rang $2n$ sur \mathbb{P}^{2n+1} tel que

$$(12) \quad 0 \rightarrow \mathcal{D}_m \rightarrow \mathcal{S}_m \xrightarrow{s} \mathcal{L}_+ \rightarrow 0.$$

Donc, le fibré vectoriel \mathcal{D}_m est la cohomologie de la monade précédente.

1.5. Déformation du fibré de Steiner pondéré. Soit $\mathcal{S}_m = \mathcal{S}$ le fibré de Steiner pondéré par le poids \mathbf{m} sur \mathbb{P}^{2n+1} et défini par la suite exacte (11).

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}_- \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{S} \longrightarrow 0.$$

Nous allons démontrer ci-après qu'une petite déformation de fibré \mathcal{S} est encore un fibré de Steiner pondéré sur \mathbb{P}^{2n+1} , et que l'espace de Kuranishi du fibré \mathcal{S} est lisse au point correspondant à \mathcal{S} .

1.5.1. Définition. ([48] et [41]). Soient E un faisceau cohérent sur un schéma X avec $X \longrightarrow S$ un morphisme où S est un schéma noethérien.

Soit T un schéma noethérien avec $T \longrightarrow S$ un morphisme, on considère E_T l'image inverse de E sur $X_T = X \times_S T$ par rapport à la projection $X_T \longrightarrow X$, et $p(d)$ un polynôme. On dit que (Q, q) est une famille quotient de E paramétrisée par T si on a les deux conditions suivantes :

- Q est un faisceau cohérent sur X_T , qui est plat sur T . Chaque Q_t a un polynôme de Hilbert $p(d)$,

- $q : E_T \longrightarrow Q$ est un morphisme surjectif de faisceaux.

Deux quotients (Q, q) , (Q', q') sont équivalents (on note $(Q, q) \sim (Q', q')$) si et seulement s'il existe un isomorphisme $f : Q \longrightarrow Q'$ tel que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{array}{ccccc} E_T & \xrightarrow{q} & Q & \longrightarrow & 0 \\ \parallel & & \downarrow f & & \\ E_T & \xrightarrow{q'} & Q' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Ce qui est équivalent à la condition $\ker(q') = \ker(q)$. On définit le foncteur $\mathcal{Q}uot_{(E,p(d))/X/S}$ par

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}uot_{(E,p(d))/X/S} : Sch_S &\longrightarrow Sets \\ T &\longmapsto \{ \text{tout } (Q, q) \text{ paramétrisé par } T \} / \sim, \end{aligned}$$

où Sch_S est la catégorie des schémas noethériens sur S .

1.5.2. Théorème. ([48]). *Si le S -schéma X est projectif, alors le foncteur $\mathcal{Q}uot_{(E,p(d))/X/S}$ est représentable par un S -schéma projectif $Z := \mathcal{Q}uot_{(E,p(d))/X/S} \longrightarrow S$. Autrement dit,*

$$\mathcal{Q}uot_{(E,p(d))/X/S}(\bullet) = h_Z(\bullet) = Hom(\bullet, Z).$$

Chaque élément du S -schéma projectif $\mathcal{Q}uot_{(E,p(d))/X/S} \longrightarrow S$ est une famille quotient de E .

1.5.3. Proposition. ([48] Changement de base). *On garde les mêmes notations que dans (1.5.1) et dans (1.5.2). Soit $S' \longrightarrow S$ un morphisme, alors on a*

$$S' \times_S \mathcal{Q}uot_{(E,p(d))/X/S} = \mathcal{Q}uot_{(E_{S'},p(d))/X_{S'}/S'}.$$

Pour tout $s \in S$, on a $Z_s = \mathcal{Q}uot_{(E_s,p(d))/X_s} \subset Z$ qui est un $k(s)$ -schéma projectif.

1.5.4. **Théorème de la semi-continuité supérieure.** (13.1.3, page 189 [27]). Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme localement de type fini. Pour tout entier n , l'ensemble

$$\{x \in X : \dim_x(f^{-1}(f(x))) \geq n\}$$

est fermé. Autrement dit, la fonction $x \mapsto \dim_x(f^{-1}(f(x)))$ est semi-continue supérieurement dans X (pour tout x dans X , il existe U un voisinage de x tel que, pour tout $x_0 \in U$, on a $\dim_{x_0}(f^{-1}(f(x_0))) \leq \dim_x(f^{-1}(f(x)))$).

1.5.5. **Corollaire.** (13.1.6, page 190 [27]). Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme dominant localement de type fini entre deux schémas irréductibles. Soit y un point générique dans Y . Alors on a $\dim(f^{-1}(y)) \leq \dim_x(f^{-1}(f(x)))$ pour tout $x \in X$.

1.5.6. **Théorème.** ([37]). Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme dominant de variétés quasi-projectives. Alors la fonction

$$\begin{aligned} \mu : X &\rightarrow \mathbb{N} \\ x &\mapsto \dim_x(f^{-1}(f(x))), \end{aligned}$$

est semi-continue supérieurement dans X . En plus, si X_0 est une composante irréductible de X et $Y_0 = \overline{\text{Im}(f|_{X_0})}$, alors on a

$$\dim(X_0) = \dim(Y_0) + \mu_0,$$

où $\mu_0 = \inf_{x \in X_0} \{\mu(x)\}$.

1.5.7. **Définition.** Soient X un espace topologique et $x \in X$. On appelle (X, x) un espace topologique pointé (un germe). Les espaces topologiques pointés forment une catégorie $\mathcal{G}er$ dont les morphismes sont de la forme $f : (X, x) \rightarrow (Y, y)$ tel que $f : X \rightarrow Y$ avec $f(x) = y$.

1.5.8. **Définition.** ([49]). Soit E un faisceau cohérent sur une variété algébrique projective complexe X . Une déformation de E est un quadruplet $\delta = (Y, y_0, G, \varepsilon)$ tel que,

- Y est une variété algébrique complexe, et y_0 est un point fermé ($\mathbb{C}(y_0) = \mathbb{C}$) correspondant à E .

- G est un faisceau cohérent sur $X_Y = X \times_{\mathbb{C}} Y$, et G est plat sur Y .

- $\varepsilon : G_{y_0} = G \times_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(y_0) \simeq E$.

Soit $\delta = (Y, y_0, G, \varepsilon)$ une déformation de E avec (Y, y_0) un germe de variété analytique complexe. On appelle la déformation δ *petite déformation* et le germe (Y, y_0) la base de cette déformation δ . Si on a un morphisme de germes $\psi : (Y', y'_0) \rightarrow (Y, y_0)$, alors on peut définir une déformation de E comme suit : $\delta' = (Y', y'_0, (id_X \times \psi)^*G, \varepsilon')$ avec $\varepsilon' = \varepsilon : J_{y'_0}^*(id_X \times \psi)^*G = J_{y_0}^*G = G_{y_0} \simeq E$, où $J_{y'_0}$ est le morphisme injectif

$$J_{y'} : X \rightarrow X_{Y'}, \quad x \mapsto (x, y').$$

Un morphisme entre deux petites déformations $\delta = (Y, y_0, G, \varepsilon)$ et $\delta' = (Y', y'_0, G', \varepsilon')$ est la donnée d'un morphisme $(\psi, \varphi) : (Y', G') \rightarrow (Y, G)$ tel qu'il vérifie les deux conditions suivantes :

- $\psi : (Y', y'_0) \rightarrow (Y, y_0)$ est un morphisme de germes,

- $\varphi : (id_X \times \psi)^*G \longrightarrow G'$ est un isomorphisme tel que $\varepsilon = \varepsilon' \circ J_{y_0}^*(\varphi)$.

On dit qu'une petite déformation $\delta = (Y, y_0, G, \varepsilon)$ est *semi-universelle* ou *verselle* si elle vérifie les deux conditions suivantes :

- δ est *complète*, si pour toute autre déformation $\delta' = (Y', y'_0, G', \varepsilon')$ il existe un morphisme

$$(\psi, \varphi) : (Y', G') \longrightarrow (Y, G).$$

- On a l'isomorphisme canonique $T_{y_0}Y \longrightarrow Ext^1(E, E)$.

De plus, pour tous les morphismes des déformations

$$(\psi, \varphi) : (Y', G') \longrightarrow (Y, G),$$

l'application linéaire tangente $T\psi : T_{y'_0}Y' \longrightarrow T_{y_0}Y \simeq Ext^1(E, E)$ est uniquement déterminée. Cette application s'appelle *le morphisme de déformation infinitésimale de Kodaira-Spencer*.

1.5.9. Théorème. ([49]). *Pour tout faisceau cohérent E , il existe toujours une déformation semi-universelle $\delta = (Y, y_0, G, \varepsilon)$ de E telle que G est un faisceau analytique.*

1.5.10. Théorème-Définition. *Soit E un fibré vectoriel sur une variété algébrique complexe compacte X . Il existe une déformation semi-universelle $\delta = (Y, y_0, G, \varepsilon)$ de E telle que*

- $Y = kur_U^{-1}(0)$, où U est un ouvert de y_0 dans $Ext^1(E, E)$, et l'application kur est définie par

$$\begin{aligned} kur : Ext^1(E, E) &\longrightarrow Ext^2(E, E), \\ y &\longmapsto d(y) + \frac{1}{2}[y, y] \end{aligned}$$

où $d(y) = [y_0, y]$. Cette application s'appelle *l'application de Kuranishi*. Cet espace vérifie les deux conditions suivantes :

- l'espace Y a une famille universelle \mathcal{G} . Autrement dit, pour tout espace Y' avec une famille \mathcal{G}' sur Y' alors il existe un morphisme $g : Y' \longrightarrow Y$ tel que $g^*\mathcal{G} \simeq \mathcal{G}'$.

- les germes de Y sont uniques à un isomorphisme près.

Démonstration. Voir [2, 15, 30, 39, 44], pour en savoir plus. □

On note $kur(E)$ l'espace de Kuranishi de E , et $(kur(E), y_0)$ son germe où y_0 est le point correspondant à E . On appelle la déformation semi-universelle $\delta = (kur(E), y_0, G, \varepsilon)$ la déformation de type Kuranishi de E . On appelle les espaces de Kuranishi les espaces de modules locaux.

Soit \mathfrak{K} un ensemble de classes d'isomorphisme de faisceaux cohérents sur X , tel que $E \in \mathfrak{K}$. On dit que les déformations de E sont des faisceaux de \mathfrak{K} si pour toute déformation $\delta = (Y, y_0, G, \varepsilon)$ de E , il existe un ouvert $U \subset Y$ (au sens de la topologie usuelle) tel que $y_0 \in U$ et que pour tout point fermé $y \in U$ on ait $G_y \in \mathfrak{K}$.

1.5.11. **Lemme.** Soient \mathcal{S}' et \mathcal{S}'' deux fibrés de Steiner pondérés sur \mathbb{P}^{2n+1} et définis par les suites exactes suivantes

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \mathcal{L}_- \longrightarrow \mathcal{H} \xrightarrow{q_1} \mathcal{S}' \longrightarrow 0 \\ 0 &\longrightarrow \mathcal{L}_- \longrightarrow \mathcal{H} \xrightarrow{q_2} \mathcal{S}'' \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

tels qu'il existe un morphisme $\psi : \mathcal{S}' \longrightarrow \mathcal{S}''$. Alors il existe un morphisme $\varphi : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ tel que $q_2 \circ \varphi = \psi \circ q_1$. Si ψ est un isomorphisme, alors φ l'est.

Démonstration. De la deuxième suite, on obtient la suite exacte suivante

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \text{Hom}(\mathcal{H}, \mathcal{L}_-) \longrightarrow \text{Hom}(\mathcal{H}, \mathcal{H}) \xrightarrow{q_2 \circ \bullet} \text{Hom}(\mathcal{H}, \mathcal{S}'') \\ &\longrightarrow \text{Ext}^1(\mathcal{H}, \mathcal{L}_-) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Comme on a

$$\text{Ext}^i(\mathcal{H}, \mathcal{L}_-) = H^i(\mathcal{H} \otimes \mathcal{L}_-) = 0, \text{ pour } i = 0, 1,$$

alors on obtient que $\overline{q_2} = q_2 \circ \bullet : \text{Hom}(\mathcal{H}, \mathcal{H}) \longrightarrow \text{Hom}(\mathcal{H}, \mathcal{S}'')$ est bijective. Comme le morphisme $\psi \circ q_1 : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{S}''$ est dans $\text{Hom}(\mathcal{H}, \mathcal{S}'')$, alors il existe un morphisme $\varphi : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ tel que $q_2 \circ \varphi = \psi \circ q_1$. Supposons que ψ soit un isomorphisme, alors il existe un morphisme $\varphi' : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ tel que $q_1 \circ \varphi' = \psi^{-1} \circ q_2$. Donc on a $q_2 \circ \varphi \circ \varphi' = \psi \circ \psi^{-1} \circ q_2 = q_2$. Comme $\overline{q_2}$ est bijective, on obtient $\varphi \circ \varphi' = \text{Id}_{\mathcal{H}}$. Donc φ est un isomorphisme. \square

1.5.12. **Lemme.** Soient $f, f' \in \text{Hom}(\mathcal{L}_-, \mathcal{H})$ deux morphismes injectifs (non nuls). Alors f et f' donnent le même élément dans le schéma $\text{Quot}_{\mathcal{H}/\mathbb{P}^{2n+1}} := \text{Quot}_{(\mathcal{H}, p(d))/\mathbb{P}^{2n+1}}$, où $p(d)$ est un polynôme de Hilbert, si et seulement si il existe un isomorphisme $g \in \text{End}(\mathcal{L}_-)$ tel que $f = f' \circ g$.

Démonstration. La définition du schéma $\text{Quot}_{(\mathcal{H}, p(d))/\mathbb{P}^{2n+1}}$ suffit. \square

On a $\text{Aut}(\mathcal{L}_-) \subset \text{End}(\mathcal{L}_-) \subset \text{Hom}(\mathcal{L}_-, \mathcal{H})$. Le groupe topologique $\text{Aut}(\mathcal{L}_-)$ agit continûment sur un espace topologique $\text{Hom}(\mathcal{L}_-, \mathcal{H})$. Donc d'après le lemme (1.5.12), l'espace des orbites de cette action $\text{Hom}(\mathcal{L}_-, \mathcal{H})/\text{Aut}(\mathcal{L}_-)$ vérifie

$$\begin{aligned} \text{Hom}(\mathcal{L}_-, \mathcal{H})/\text{Aut}(\mathcal{L}_-) &\xrightarrow{\cong} \text{Quot}_{\mathcal{H}/\mathbb{P}^{2n+1}}, \\ [f] &\longmapsto [\text{coker}(f)]. \end{aligned}$$

Comme $\text{Aut}(\mathcal{L}_-)$ est ouvert dans $\text{End}(\mathcal{L}_-)$, alors $\dim(\text{Aut}(\mathcal{L}_-)) = \dim(\text{End}(\mathcal{L}_-))$. Donc on a

$$\dim(\text{Quot}_{\mathcal{H}/\mathbb{P}^{2n+1}}) = h^0(\mathcal{H} \otimes \mathcal{L}_+) - h^0(\text{End}(\mathcal{L}_-)).$$

On adapte ici la méthode de la proposition 3.1 de [2] sur \mathbb{P}^{2n+1} au contexte du fibré de Steiner pondéré sur \mathbb{P}^{2n+1} .

1.5.13. **Théorème.** Soit \mathcal{S}_0 un fibré de Steiner pondéré sur \mathbb{P}^{2n+1} et défini par la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}_- \xrightarrow{x_0} \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{S}_0 \longrightarrow 0$$

(le conoyau de l'élément non nul $x_0 := B \in \text{Hom}(\mathcal{L}_-, \mathcal{H})$, (1.4.1)). Alors une petite déformation du fibré \mathcal{S}_0 est encore un fibré de Steiner pondéré sur \mathbb{P}^{2n+1} . L'espace de Kuranishi $Kur(\mathcal{S}_0)$ de \mathcal{S}_0 est lisse au point y_0 correspondant au fibré \mathcal{S}_0 .

Démonstration. Soit $\mathcal{S}_0 = \text{coker}(x_0)$ le fibré vectoriel de Steiner pondéré correspondant au morphisme x_0 . Soient $X \subseteq \text{Quot}_{\mathcal{H}/\mathbb{P}^{2n+1}}$ une composante irréductible contenant x_0 et $(Y = Kur(\mathcal{S}_0), y_0, G, \varepsilon)$ une déformation de type Kuranishi de \mathcal{S}_0 . On a la projection

$$\mathbb{P}_Y^{2n+1} = Y \times_{\mathbb{C}} \mathbb{P}^{2n+1} \longrightarrow Y,$$

et le morphisme

$$X \subseteq \text{Quot}_{\mathcal{H}/\mathbb{P}^{2n+1}} = (\text{Quot}_{\mathcal{H}_Y/\mathbb{P}_Y^{2n+1}/Y})_{y_0} \subseteq \text{Quot}_{\mathcal{H}_Y/\mathbb{P}_Y^{2n+1}/Y} \longrightarrow Y.$$

Donc on obtient le morphisme naturel des germes suivant

$$\pi : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$$

D'après le théorème (3.12, page 137 [46]), on a

$$\dim_{y_0}(Y) \geq \dim_{x_0}(X) - \dim_{x_0}(\pi^{-1}(y_0)).$$

D'après le théorème (2.2, page 126 [46]), le théorème (1.5.10) et la définition de la dimension de l'espace Y , on a

$$h^1(\mathcal{E}nd(\mathcal{S}_0)) = \dim(T_{y_0}Y) \geq \dim(Y) \geq \dim_{y_0}(Y),$$

où $T_{y_0}Y$ est l'espace tangent de Y au point y_0 . Soit $Z = \{x_1 \in X \mid \mathcal{S}_1 \simeq \mathcal{S}_0 \text{ où } \mathcal{S}_1 = \text{coker}(x_1)\}$. Alors on a

$$(\pi^{-1}(y_0), x_0) \subseteq (Z, x_0) \text{ et } \dim_{x_0}((\pi^{-1}(y_0), x_0)) \leq \dim_{x_0}((Z, x_0)).$$

On obtient

$$\dim_{y_0}(Y) \geq \dim_{x_0}(X) - \dim_{x_0}((Z, x_0)).$$

D'après le lemme (1.5.12), on peut considérer que la composante irréductible X vérifie

$$\dim_{x_0}(X) = \dim(\text{Quot}_{\mathcal{H}/\mathbb{P}^{2n+1}}) = h^0(\mathcal{H} \otimes \mathcal{L}_+) - h^0(\mathcal{E}nd(\mathcal{L}_-)).$$

Soit $\Sigma = \{\psi \in \text{End}(\mathcal{H}) \mid \psi.x_0 = x_0\}$. De la suite exacte de fibrés vectoriels

$$0 \longrightarrow \mathcal{S}_0^* \otimes \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{E}nd(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathcal{H} \otimes \mathcal{L}_+ \longrightarrow 0,$$

on obtient la suite exacte suivante de groupes cohomologiques

$$0 \longrightarrow H^0(\mathcal{S}_0^* \otimes \mathcal{H}) \longrightarrow \text{End}(\mathcal{H}) \xrightarrow{f := \bullet \circ x_0} H^0(\mathcal{H} \otimes \mathcal{L}_+),$$

qui nous donne l'isomorphisme suivant

$$\begin{aligned} H^0(\mathcal{S}_0^* \otimes \mathcal{H}) &\longrightarrow \Sigma \\ \sigma &\longmapsto \sigma + 1 \\ 0 &\longmapsto 1. \end{aligned}$$

Autrement dit, $\dim(\Sigma) = h^0(\mathcal{S}_0^* \otimes \mathcal{H})$. On obtient l'application linéaire

$$g : \text{End}(\mathcal{H})/\Sigma \longrightarrow H^0(\mathcal{H} \otimes \mathcal{L}_+),$$

$$\bar{a} \longmapsto f(a),$$

qui est injective et $\text{Im}(g) = \text{Im}(f)$. On a $\text{End}(\mathcal{L}_-) \hookrightarrow H^0(\mathcal{H} \otimes \mathcal{L}_+)$ et $Z \cap \text{End}(\mathcal{L}_-) = \{0\}$. D'après le lemme (1.5.11), $f(\text{Aut}(\mathcal{H})) = Z$. Donc $Z \cup \text{End}(\mathcal{L}_-)$ est un ouvert d'une sous-variété fermée de X , et on a

$$\dim(Z) + h^0(\text{End}(\mathcal{L}_-)) = h^0(\text{End}(\mathcal{H})) - \dim(\Sigma).$$

Donc on a

$$\dim_{x_0}(Z) \leq \dim(Z) = h^0(\text{End}(\mathcal{H})) - \dim(\Sigma) - h^0(\text{End}(\mathcal{L}_-)).$$

De la suite exacte précédente de fibrés vectoriels, on obtient que

$$h^1(\mathcal{S}_0^* \otimes \mathcal{H}) = h^0(\mathcal{H} \otimes \mathcal{L}_+) - h^0(\text{End}(\mathcal{H})) + h^0(\mathcal{S}_0^* \otimes \mathcal{H}).$$

Donc on a

$$\dim_{y_0}(Y) \geq \dim_{x_0}(X) - \dim_{x_0}((Z, x_0)) \geq h^0(\mathcal{H} \otimes \mathcal{L}_+) -$$

$$h^0(\text{End}(\mathcal{H})) + h^0(\mathcal{S}_0^* \otimes \mathcal{H}) = h^1(\mathcal{S}_0^* \otimes \mathcal{H}).$$

La suite exacte suivante des fibrés vectoriels

$$0 \longrightarrow \mathcal{S}_0^* \otimes \mathcal{L}_- \longrightarrow \mathcal{S}_0^* \otimes \mathcal{H} \longrightarrow \text{End}(\mathcal{S}_0) \longrightarrow 0$$

nous donne $H^1(\mathcal{S}_0^* \otimes \mathcal{H}) \longrightarrow H^1(\text{End}(\mathcal{S}_0)) \longrightarrow 0$. Donc on a $h^1(\mathcal{S}_0^* \otimes \mathcal{H}) \geq h^1(\text{End}(\mathcal{S}_0))$. Ensuite on obtient que

$$\dim_{y_0}(Y) \geq h^1(\text{End}(\mathcal{S}_0)).$$

Autrement dit, $\dim_{y_0}(Y) = h^1(\text{End}(\mathcal{S}_0)) = \dim(T_{y_0}Y)$. Donc Y est régulier en y_0 . Alors Y est lisse en y_0 , car le corps de base est le corps parfait \mathbb{C} . De plus on a

$$\dim_{y_0}(Y) = \dim_{x_0}(X) - \dim_{x_0}(\pi^{-1}(y_0)) = h^0(\mathcal{H} \otimes \mathcal{L}_+) - h^0(\text{End}(\mathcal{H})) + h^0(\mathcal{S}_0^* \otimes \mathcal{H}).$$

D'après le théorème de la semi-continuité des fibres (1.5.4) et sachant que Y contient un seul point générique 0 , on obtient : Pour tout $U \subset Y$ un ouvert tel que $0, y_0 \in U$, on a

$$\dim(\pi^{-1}(0)) \leq \dim_{x_0}(\pi^{-1}(y_0)).$$

Donc on obtient que $\dim_{x_0}(\pi^{-1}(0)) \leq \dim_{x_0}(\pi^{-1}(y_0))$, et on a

$$\dim_{y_0}(Y) = \dim_{x_0}(X) - \dim_{x_0}(\pi^{-1}(y_0)) \leq \dim_{x_0}(X) - \dim_{x_0}(\pi^{-1}(0)) = \dim_{y_0}(\text{Im}(\pi)).$$

Donc on a $\dim(Y) = \dim_{y_0}(Y) = \dim_{y_0}(\text{Im}(\pi)) = \dim(\text{Im}(\pi))$, et $Y = \text{Im}(\pi)$ car $\text{Im}(\pi)$ est fermé dans Y . Donc π est surjectif. Pour tout point fermé $y \in Y$, il existe un point fermé $x \in X$ tel que $\pi(x) = y$, car on a une extension des corps

$$\mathbb{C} = \mathbb{C}(y) \longrightarrow \mathbb{C}(x),$$

et comme \mathbb{C} est un corps fermé algébriquement, on obtient $\mathbb{C} = \mathbb{C}(x)$.

Comme $(Y = \text{Kur}(\mathcal{S}_0), y_0, G, \varepsilon)$ est une déformation de \mathcal{S}_0 , alors $(X, x_0, G' = (id_{\mathbb{P}^{2n+1}} \times \pi)^* G, \varepsilon')$ est une déformation de \mathcal{S}_0 avec $\varepsilon' = \varepsilon : G'_{x_0} = G_{y_0} \simeq \mathcal{S}_0$. Donc G' est un fibré sur $X \times_{\mathbb{C}} \mathbb{P}^{2n+1}$ et G'_{x_0} est un élément dans $\text{Quot}_{\mathcal{H}/\mathbb{P}^{2n+1}} \subset \text{Quot}_{\mathcal{H}_X/\mathbb{P}_X^{2n+1}/X}$. Alors G' est un élément dans

$Quot_{\mathcal{H}_X/\mathbb{P}_X^{2n+1}/X}$. On obtient : pour un voisinage $U_1 \subseteq Y$ de y_0 et pour tout point fermé $y \in U_1$, il existe un point fermé $x \in X$ tel que $\pi(x) = y$ et

$$G_y = ((id_{\mathbb{P}^{2n+1}} \times \pi)^* G)_x = G'_x.$$

Autrement dit, une petite déformation du fibré \mathcal{S}_0 est encore un fibré de Steiner pondéré sur \mathbb{P}^{2n+1} .

□

2. Fibrés vectoriels de rang $n - 1$ sur \mathbb{P}^n

2.1. Fibrés de Tango pondérés généralisés et stabilité. Soient V un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension $\dim(V) = n + 1$, et $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V)$ l'espace projectif complexe associé. En utilisant la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1) \xrightarrow{g} V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \xrightarrow{\mu} Q \longrightarrow 0,$$

on obtient la résolution suivante

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-2) \xrightarrow{g \otimes I_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)}} V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1) \xrightarrow{I_V \wedge g} \bigwedge^2 V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \xrightarrow{\wedge^2 \mu} \bigwedge^2 Q \longrightarrow 0,$$

et

$$0 \longrightarrow Q^*(1) \xrightarrow{T\mu} V^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) \xrightarrow{Tg} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(2) \longrightarrow 0.$$

Donc on en déduit $\bigwedge^2 V = (H^0(Q^*(1)))^*$ et la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow Q(-1) \xrightarrow{b} \bigwedge^2 V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \xrightarrow{\wedge^2 \mu} \bigwedge^2 Q \longrightarrow 0,$$

où $I_V \wedge g = b \circ (\mu \otimes I_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)})$. Soit

$$ev_{Q^*(1)} : \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \otimes \bigwedge^2 V^* \longrightarrow Q^*(1),$$

le morphisme d'évaluation du fibré $Q^*(1)$. Il en découle $b = {}^T ev_{Q^*(1)}$ qui est injectif.

2.1.1. Lemme. Soient $W \subset \bigwedge^2 V$, $q_W : \bigwedge^2 V \longrightarrow (\bigwedge^2 V) \setminus W$ la projection et

$$\varpi_W = q_W \otimes I_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}} \circ b : Q(-1) \longrightarrow \left((\bigwedge^2 V) \setminus W \right) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}.$$

Alors ϖ_W est un morphisme injectif de fibrés si et seulement si W ne contient pas d'élément décomposable non nul de $\bigwedge^2 V$.

Démonstration. On considère $x = \mathbb{C}.v_0 \in \mathbb{P}^n$ et $v_0 \in V$. Soit $(\varpi_W)_x(a) = 0$, pour tout $a \in Q_x(-1)$. On obtient que $b_x(a) \in W$. Il existe également $v \in V$ tel que

$$a = (\mu \otimes I_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)})_x(v \otimes x) = \mu_x(v) \otimes v_0.$$

Donc on a

$$\begin{aligned} (b \circ (\mu \otimes I_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)}))_x(v \otimes x) &= (I_V \wedge g)_x(v \otimes x), \\ b_x(a) &= v \wedge g_x(x) = v \wedge v_0. \end{aligned}$$

Comme W ne contient pas d'élément décomposable non nul de $\bigwedge^2 V$, alors on obtient $b_x(a) = 0$ qui donne $a = 0$. Réciproquement, soit $v \wedge v_0 \in W$ un élément non nul. Alors on a

$$\begin{aligned} (b \circ (\mu \otimes I_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)}))_x(v \otimes x) &= (I_V \wedge g)_x(v \otimes x), \\ b_x(\mu_x(v) \otimes v_0) &= v \wedge v_0, \end{aligned}$$

où $\mu_x(v) \otimes v_0 \neq 0$. Donc on a

$$(\varpi_W)_x(\mu_x(v) \otimes v_0) = q_W(b_x(\mu_x(v) \otimes v_0)) = q_W(v \wedge v_0) = 0.$$

Ce qui est contradictoire. □

Donc la plus grande dimension possible pour un tel sous-espace vectoriel W est $\binom{n+1}{2} - 2n + 1$.

2.1.2. Définition. (Jaczewski, Szurek, Wisniewski [29] et Tango [51]). Soit $W \subset \bigwedge^2 V = (H^0(Q^*(1)))^*$ un sous-espace vectoriel tel que

$$(**) \begin{cases} - \dim(W) = \binom{n+1}{2} - 2n + 1 \\ - W \text{ ne contient pas d'élément décomposable non nul de } \bigwedge^2 V. \end{cases}$$

D'après le lemme (2.1.1), le morphisme ϖ_W est injectif. Donc on définit *le fibré de Tango* $F(W)$ de rang $n - 1$ sur \mathbb{P}^n par $F(W) = \text{coker}(\varpi_W)(-1)$. On a la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow Q(-1) \xrightarrow{\varpi_W} \left(\bigwedge^2 V \right) / W \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \longrightarrow F(W)(1) \longrightarrow 0.$$

Sa première classe de Chern est $c_1 = 2n$ et sa $n^{\text{ème}}$ classe de Chern est $c_n = 0$ et

$$H^0(F(W)(1)) = \left(\bigwedge^2 V \right) / W.$$

On a un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \left(\left(\bigwedge^2 V \right) / W \right)^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} & \xrightarrow{T\varpi_W} & Q^*(1) \\ \downarrow & & \parallel \\ \left(\bigwedge^2 V \right)^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} & \xrightarrow{ev_{Q^*(1)}} & Q^*(1). \end{array}$$

On en déduit immédiatement que l'inclusion $T_{q_W} : \left(\left(\bigwedge^2 V \right) / W \right)^* \subset \left(\bigwedge^2 V \right)^*$ s'identifie à $H^0(T\varpi_W)$. De la suite exacte précédente, il découle la suite de cohomologies suivante

$$\begin{aligned} H^0((F(W)(1))^*) &= \text{Hom}(F(W)(1), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) \longrightarrow \text{Hom}\left(\left(\bigwedge^2 V\right)/W\right) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \xrightarrow{H^0(T\varpi_W)} \\ &\text{Hom}(Q(-1), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) \longrightarrow \text{Ext}^1(F(W)(1), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Donc on a $H^0((F(W)(1))^*) = 0$ et $H^1((F(W)(1))^*) = \text{Ext}^1(F(W)(1), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) = W^*$.

2.1.3. Proposition. 1- Soient W_1, W_2 des sous-espaces vectoriels de $\Lambda^2 V$ vérifiant la condition (**). Alors on obtient $F(W_1) \simeq F(W_2)$ si et seulement si on a $W_1 = W_2$. Autrement dit, il existe une correspondance entre les sous-espaces vectoriels W de $\Lambda^2 V$ vérifiant la condition (**) et les fibrés de Tango $F(W)$ associés à W .

2- Soient $\sigma \in GL(V)$ et $\bar{\sigma} \in PGL(V)$ l'élément correspondant. Soit W un sous-espace vectoriel de $\Lambda^2 V$ vérifiant la condition (**). Alors $\sigma^{-1}(W)$ est un sous-espace vectoriel de $\Lambda^2 V$ vérifiant la condition (**) et il existe un isomorphisme canonique

$$\Psi_\sigma^W : \bar{\sigma}^*(F(W)) \xrightarrow{\simeq} F(\sigma^{-1}(W)).$$

Soient $\rho \in GL(V)$ et $\bar{\rho} \in PGL(V)$ l'élément correspondant, alors on a

$$\Psi_{\sigma\rho}^W = \Psi_\rho^{\sigma^{-1}(W)} \circ \bar{\rho}^* \Psi_\sigma^W.$$

En particulier, pour tout $t \in \mathbb{C}^*$, soit

$$\sigma(t) := \begin{pmatrix} t^{a_0} & & & & & \\ & t^{a_1} & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & t^{a_{n-1}} & & \\ \mathbf{0} & & & & & t^{a_n} \end{pmatrix} \in GL(V)$$

tel que $\sigma(t)(W) \subseteq W$. Alors on peut écrire l'isomorphisme Ψ_σ^W par

$$s_t : \overline{\sigma(t)}^* F(W) \simeq F(W),$$

et on a $s_{t_2.t_1} = s_{t_2} \circ \overline{\sigma(t_2)}^*(s_{t_1})$, pour $t_1, t_2 \in \mathbb{C}^*$. Autrement dit, on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} \overline{\sigma(t_2)}^* \overline{\sigma(t_1)}^* F(W) = \overline{\sigma(t_1.t_2)}^* F(W) & \xrightarrow{s_{t_1.t_2}} & F(W) \\ & \searrow \overline{\sigma(t_2)}^*(s_{t_1}) & \nearrow s_{t_2} \\ & & \overline{\sigma(t_2)}^* F(W). \end{array}$$

Démonstration. 1- Pour W_1, W_2 des sous-espaces vectoriels de $\Lambda^2 V$ vérifiant la condition (**), on a les suites exactes suivantes

$$0 \longrightarrow Q(-1) \xrightarrow{\varpi_{W_1}} \left((\Lambda^2 V) / W_1 \right) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \xrightarrow{b_{W_1}} F(W_1)(1) \longrightarrow 0$$

et

$$0 \longrightarrow Q(-1) \xrightarrow{\varpi_{W_2}} \left((\Lambda^2 V) / W_2 \right) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \xrightarrow{b_{W_2}} F(W_2)(1) \longrightarrow 0.$$

Soit $\varphi : F(W_1)(1) \simeq F(W_2)(1)$. On déduit de la deuxième suite

$$0 \longrightarrow \text{Hom}\left(\left((\Lambda^2 V) / W_1 \right) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}, Q(-1) \right) \longrightarrow$$

$$Hom\left(\left(\binom{2}{\wedge} V\right)/W_1\right) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}, \left(\binom{2}{\wedge} V\right)/W_2\right) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \xrightarrow{b_{W_2} \circ \bullet}$$

$$Hom\left(\left(\binom{2}{\wedge} V\right)/W_1\right) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}, F(W_2)(1)\right) \longrightarrow Ext^1\left(\left(\binom{2}{\wedge} V\right)/W_1\right) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}, Q(-1)\right) \longrightarrow 0.$$

Comme $H^1(Q(-1)) = 0$, alors le morphisme $b_{W_2} \circ \bullet$ est surjectif. Donc pour le morphisme $\varphi \circ b_{W_1}$ il existe un morphisme

$$H^0(\varphi) \otimes I_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}} : \left(\binom{2}{\wedge} V\right)/W_1\right) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \longrightarrow \left(\binom{2}{\wedge} V\right)/W_2\right) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$$

tel que $b_{W_2} \circ (H^0(\varphi) \otimes I_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}}) = \varphi \circ b_{W_1}$. Comme φ est un isomorphisme, alors $H^0(\varphi) \otimes I_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}}$ est aussi un isomorphisme lequel définit un isomorphisme $\varphi_2 : Q(-1) \longrightarrow Q(-1)$ qui est une homothétie car le fibré Q est simple. Donc on obtient le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & Q(-1) & \xrightarrow{\varpi_{W_1}} & \left(\binom{2}{\wedge} V\right)/W_1\right) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} & \longrightarrow & F(W_1)(1) \longrightarrow 0 \\ & & \varphi_2 \downarrow & & \wr \downarrow H^0(\varphi) \otimes I_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}} & & \wr \downarrow \varphi \\ 0 & \longrightarrow & Q(-1) & \xrightarrow{\varpi_{W_2}} & \left(\binom{2}{\wedge} V\right)/W_2\right) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} & \longrightarrow & F(W_2)(1) \longrightarrow 0. \end{array}$$

En considérant la cohomologie de ce diagramme, on obtient

$$\begin{array}{ccccc} Hom\left(\left(\binom{2}{\wedge} V\right)/W_2\right) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}\right) \xrightarrow{H^0(T\varpi_{W_2})} & Hom(Q(-1), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) & \twoheadrightarrow & Ext^1(F(W_2)(1), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) \\ \wr \downarrow T H^0(\varphi) & \parallel & & \wr \downarrow T H^1(\varphi) \\ Hom\left(\left(\binom{2}{\wedge} V\right)/W_1\right) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}\right) \xrightarrow{H^0(T\varpi_{W_1})} & Hom(Q(-1), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) & \twoheadrightarrow & Ext^1(F(W_1)(1), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) \end{array}$$

Donc on obtient un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \left(\binom{2}{\wedge} V\right)/W_2\right)^* \xrightarrow{H^0(T\varpi_{W_2})} & \left(\binom{2}{\wedge} V\right)^* & \longrightarrow & (W_2)^* & \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow T H^0(\varphi) & \parallel & & \downarrow T H^1(\varphi) & \\ 0 & \longrightarrow & \left(\binom{2}{\wedge} V\right)/W_1\right)^* \xrightarrow{H^0(T\varpi_{W_1})} & \left(\binom{2}{\wedge} V\right)^* & \longrightarrow & (W_1)^* & \longrightarrow 0. \end{array}$$

Comme $H^0(T\varpi_{W_1}), H^0(T\varpi_{W_2})$ sont les inclusions naturelles, alors les sous-espaces vectoriels $\left(\binom{2}{\wedge} V\right)/W_1\right)^*$ et $\left(\binom{2}{\wedge} V\right)/W_2\right)^*$ de $\left(\binom{2}{\wedge} V\right)^*$ sont égaux et donc $W_1 = W_2$.

2- Soient $\sigma \in GL(V)$ et $\bar{\sigma} \in PGL(V)$ son élément correspondant. Alors on obtient que $dim(W) = dim(\sigma^{-1}(W))$ et que $\sigma^{-1}(W)$ ne contient pas d'élément décomposable non nul de $\binom{2}{\wedge} V$. Car si $\sigma^{-1}(W)$ contient $\sigma^{-1}(y) \wedge \sigma^{-1}(z) = \sigma^{-1}(y \wedge z)$ qui est un élément non nul, alors W contient $y \wedge z$ qui est un élément non nul; ce qui est contradictoire. Soit $x = \mathbb{C}.v \in \mathbb{P}^n$ où $v \in V$. On a un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc}
Q(-1)_x = (V/\mathbb{C}.v) \otimes \mathbb{C}.v & \xrightarrow{(\varpi_{\sigma^{-1}(W)})_x} & (\Lambda^2 V)/\sigma^{-1}(W) \\
\downarrow d & & \downarrow \sigma \wedge \sigma \\
\bar{\sigma}^* Q(-1)_x = (V/\mathbb{C}.\sigma(v)) \otimes \mathbb{C}.\sigma(v) & \xrightarrow{(\bar{\sigma}^*(\varpi_W))_x} & (\Lambda^2 V)/W.
\end{array}$$

où d est défini de manière canonique. On a la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow \bar{\sigma}^* Q(-1) \xrightarrow{\bar{\sigma}^*(\varpi_W)} \bar{\sigma}^* \left(\left((\Lambda^2 V)/W \right) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \right) \xrightarrow{\bar{\sigma}^*(b_W)} \bar{\sigma}^* F(W) \longrightarrow 0.$$

Comme le fibré Q est homogène, alors on obtient

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & Q(-1) & \xrightarrow{\varpi_{\sigma^{-1}(W)}} & ((\Lambda^2 V)/\sigma^{-1}(W)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} & \longrightarrow & F(\sigma^{-1}(W)) \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow \wr & & \downarrow \wr & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & \bar{Q}(-1) & \xrightarrow{\bar{\sigma}^*(\varpi_W)} & \bar{\sigma}^* \left(((\Lambda^2 V)/W) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \right) & \longrightarrow & \bar{\sigma}^* F(W) \longrightarrow 0.
\end{array}$$

Ce qui implique qu'il existe un isomorphisme canonique

$$\Psi_\sigma^W : \bar{\sigma}^*(F(W)) \xrightarrow{\sim} F(\sigma^{-1}(W)).$$

Soient $\rho \in GL(V)$ et $\bar{\rho} \in PGL(V)$ son élément correspondant. Alors on a un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc}
\bar{\rho}^* \bar{\sigma}^* F(W) = (\bar{\sigma} \circ \bar{\rho})^* F(W) & \xrightarrow{\Psi_{\bar{\sigma} \circ \bar{\rho}}^W} & F((\sigma \circ \rho)^{-1}(W)) \\
\bar{\rho}^*(\Psi_\sigma^W) \downarrow & & \parallel \\
\bar{\rho}^* F(\sigma^{-1}(W)) & \xrightarrow{\Psi_\rho^{\sigma^{-1}(W)}} & F(\rho^{-1}(\sigma^{-1}(W))) = F((\sigma \circ \rho)^{-1}(W)).
\end{array}$$

Pour le cas particulier, $\sigma(t)(W) \subseteq W$ entraîne $\sigma(t)^{-1}(W) = W$, pour tout $t \in \mathbb{C}^*$. Donc on peut écrire l'isomorphisme Ψ_σ^W sous la forme suivante :

$$s_t = \Psi_{\sigma(t)}^W : \overline{\sigma(t)}^* F(W) \simeq F(W).$$

On a $\sigma(t_1).\sigma(t_2) = \sigma(t_1.t_2)$, pour tout $t_2, t_1 \in \mathbb{C}^*$. D'après le carré commutatif précédent, on en déduit immédiatement

$$s_{t_2.t_1} = s_{t_2} \circ \overline{\sigma(t_2)}^*(s_{t_1}).$$

□

2.1.4. Fibrés de Tango \mathbb{C}^* -invariants. Soient U un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension 2, $\{x, y\}$ une base et $n > 2$ un entier. Soit

$$\mathcal{B}_0 := \{v_p := x^{n-p}y^p, \ 0 \leq p \leq n\}$$

une base de l'espace vectoriel $\mathcal{S}^n U$. Soient $t \in \mathbb{C}^*$ et α, β des entiers tels que $\alpha \geq \beta$. On considère l'action de \mathbb{C}^* sur U défini relativement à la base $\{x, y\}$ par

$$\begin{pmatrix} t^\alpha & 0 \\ 0 & t^\beta \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C}),$$

telle que $\begin{pmatrix} t^\alpha & 0 \\ 0 & t^\beta \end{pmatrix} (ax + by) = t^\alpha ax + t^\beta by$. On en déduit une action κ_n de \mathbb{C}^* sur $\mathcal{S}^n U$ telle que

$$\kappa_n(t)(v_p) = t^{n\alpha+p(\beta-\alpha)}.v_p.$$

Soit

$$\mathcal{B} := \{z_{p,q} := x^{n-p}y^p \wedge x^{n-q}y^q, \ 0 \leq p < q \leq n\}$$

une base de l'espace vectoriel $\bigwedge^2 \mathcal{S}^n U$. On en déduit une action κ'_n de \mathbb{C}^* sur $\bigwedge^2 \mathcal{S}^n U$ telle que

$$\kappa'_n(t)(z_{p,q}) = t^{2n\alpha+(p+q)(\beta-\alpha)}.z_{p,q}.$$

Soient k un entier avec $1 \leq k \leq 2n - 1$ et E_k le sous-espace vectoriel de $\bigwedge^2 \mathcal{S}^n U$ constitué des u tels que

$$\kappa'_n(t)(u) = t^{2n\alpha+k(\beta-\alpha)}.u.$$

Alors E_k est engendré par les éléments $z_{p,q}$ tels que $k = p + q$, et on a

$$\bigwedge^2 \mathcal{S}^n U \simeq \bigoplus_{1 \leq k \leq 2n-1} E_k.$$

Soient p, k des entiers tels que $1 \leq k \leq 2n - 1$ et $\max(k - n, 0) \leq p \leq \lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor$. L'ensemble des hyperplans $H \subset E_k$ tels que $z_{p,k-p} \in H$ est un hyperplan de $\mathbb{P}(E_k^*)$. Cet ensemble est le fermé de Zariski de $\mathbb{P}(E_k^*)$ suivant

$$V(z_{p,k-p}) = \{H \subset E_k \mid z_{p,k-p} \in H\} \subseteq \mathbb{P}(E_k^*).$$

Soit $\mathcal{D}(z_{p,k-p}) = \mathbb{P}(E_k^*) \setminus V(z_{p,k-p})$. On définit

$$\mathcal{Z}_k = \bigcap_{p=\max(k-n,0)}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} \mathcal{D}(z_{p,k-p})$$

qui est l'ouvert constitué de tous les sous-espaces vectoriels de E_k de dimension $\dim(E_k) - 1$ ne contenant aucun élément de la base \mathcal{B} . On a donc

$$\mathcal{Z}_1 = \mathcal{Z}_2 = \mathcal{Z}_{2n-1} = \mathcal{Z}_{2n-2} = \emptyset.$$

On notera \mathcal{W} l'ensemble des sous-espaces vectoriels \mathbb{C}^* -invariants de $\bigwedge^2(\mathcal{S}^n U)$ et vérifiant les conditions (**).

2.1.5. **Théorème.** $W \in \mathcal{W}$ si et seulement s'il existe $W_k \in \mathcal{Z}_k$ pour $3 \leq k \leq 2n - 3$ tel que $W = \bigoplus_{3 \leq k \leq 2n-3} W_k$.

Démonstration. On montre d'abord que, pour tout $0 \neq u \in E_k$, u est décomposable si et seulement s'il existe un entier p tel que $\max(k - n, 0) \leq p \leq \lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor$ et $\varepsilon \in \mathbb{C}$ tel que $u = \varepsilon \cdot z_{p,k-p}$. On a un morphisme canonique suivant

$$\begin{aligned} \bigwedge^2 \mathcal{S}^n U \times \bigwedge^2 \mathcal{S}^n U &\longrightarrow \bigwedge^4 \mathcal{S}^n U, \\ (v, w) &\longmapsto v \wedge w. \end{aligned}$$

Alors $\{z_{p,k-p} \wedge z_{q,k-q}\}_{\max(k-n,0) \leq p < q \leq \lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor}$ est une base de l'image de $E_k \times E_k$ dans $\bigwedge^4 \mathcal{S}^n U$ par ce morphisme.

Si $u = \sum_{\max(k-n,0) \leq p \leq \lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} a_p \cdot z_{p,k-p} \neq 0$, alors on obtient

$$u \wedge u = 2 \sum_{\max(k-n,0) \leq p < q \leq \lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} a_p \cdot a_q \cdot z_{p,k-p} \wedge z_{q,k-q}.$$

Rappelons que u est décomposable si et seulement si $u \wedge u = 0$. Si $u \wedge u = 0$, on obtient que $a_p \cdot a_q = 0$ pour tout $\max(k - n, 0) \leq p < q \leq \lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor$. Donc il existe p un entier et $\varepsilon \in \mathbb{C}$ tels que $\max(k - n, 0) \leq p \leq \lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor$ et $u = \varepsilon \cdot z_{p,k-p}$. Les sous-espaces de E_k ne contenant aucun élément décomposable non nul sont donc ceux qui ne contiennent aucun $z_{p,k-p}$. Il en découle que la dimension maximale d'un tel sous-espace vectoriel de E_k est $\dim(E_k) - 1$ et que ces hyperplans sont les éléments de \mathcal{Z}_k .

Tout sous-espace \mathbb{C}^* -invariant W de $\bigwedge^2 \mathcal{S}^n U$ est une somme directe de sous-espaces vectoriels W_k de E_k . Si W ne possède pas d'élément décomposable non nul, alors on peut supposer que $3 \leq k \leq 2n - 3$. Si on a en plus $\dim(W) = \binom{n+1}{2} - (2n - 1)$, alors W_k est un hyperplan de E_k pour $3 \leq k \leq 2n - 3$. Donc on a $W_k \in \mathcal{Z}_k$. Réciproquement, soit $W_k \in \mathcal{Z}_k$ pour tout $3 \leq k \leq 2n - 3$. On considère le sous-espace vectoriel \mathbb{C}^* -invariant de $\bigwedge^2 \mathcal{S}^n U$

$$W = \bigoplus_{3 \leq k \leq 2n-3} W_k.$$

On a $\dim(W) = \binom{n+1}{2} - (2n - 1)$. Il reste à démontrer que W ne contient aucun élément décomposable non nul de $\bigwedge^2 \mathcal{S}^n U$. Soit $w \in W$ tel que $w \wedge w = 0$. On veut démontrer que $w = 0$. On peut écrire

$$w = \sum_{k=3}^{2n-3} w_k, \quad \text{où } w_k \in W_k.$$

Donc on obtient

$$w \wedge w = 2 \sum_{i=3}^{2n-4} \left(\sum_{j=1}^{2n-3-i} w_i \wedge w_{i+j} \right) + \sum_{i=3}^{2n-3} w_i \wedge w_i.$$

L'action de \mathbb{C}^* sur un élément $w_i \wedge w_j \in \bigwedge^4 \mathcal{S}^n U$ étant la multiplication par $t^{4n\alpha+2(i+j)(\beta-\alpha)}$, alors on regroupe les éléments dans $w \wedge w$ suivant l'action de \mathbb{C}^* , en mettant ensemble les éléments $w_i \wedge w_j$ ayant le même $i + j$. On obtient

$$w \wedge w = \sum_{d=6}^{4n-6} g_d,$$

où

$$\begin{aligned} g_{2m} &= w_m \wedge w_m + 2 \sum_{j=1}^{m-3} w_{m-j} \wedge w_{m+j}, \\ g_{4n-2m} &= w_{2n-m} \wedge w_{2n-m} + 2 \sum_{j=1}^{m-3} w_{2n-m-j} \wedge w_{2n-m+j}, \\ g_{2m'+1} &= 2 \sum_{j=0}^{m'-3} w_{m'-j} \wedge w_{m'+1+j}, \quad g_{4n-2m'-1} = 2 \sum_{j=0}^{m'-3} w_{2n-m'-j} \wedge w_{2n-m'-1+j}, \end{aligned}$$

où $3 \leq m \leq n$ et $3 \leq m' \leq n-1$. On a aussi, pour tout $t \in \mathbb{C}^*$,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} t^\alpha & 0 \\ 0 & t^\beta \end{pmatrix} \cdot (w \wedge w) &= \sum_{d=6}^{4n-6} \left(\begin{pmatrix} t^\alpha & 0 \\ 0 & t^\beta \end{pmatrix} \cdot g_d \right), \\ \begin{pmatrix} t^\alpha & 0 \\ 0 & t^\beta \end{pmatrix} \cdot (w \wedge w) &= \sum_{d=6}^{4n-6} (t^{4n\alpha+2d(\beta-\alpha)} \cdot g_d). \end{aligned}$$

Comme $w \wedge w = 0$, alors on a $g_d = 0$ pour tout $6 \leq d \leq 4n-6$. Nous allons montrer, par la récurrence sur m , que $w_r = 0, w_{2n-r} = 0$ pour tout $3 \leq r \leq m$ et pour tout $3 \leq m \leq n$:

- Pour $m = 3$, on a $g_6 = w_3 \wedge w_3 = 0$ et $g_{4n-6} = w_{2n-3} \wedge w_{2n-3} = 0$, ce qui entraîne que $w_3 = w_{2n-3} = 0$.

- Pour $m = 4$, on a $g_6 = w_3 \wedge w_3 = 0$ et $g_{4n-6} = w_{2n-3} \wedge w_{2n-3} = 0$, ce qui entraîne que $w_3 = w_{2n-3} = 0$, et on obtient que $g_8 = w_4 \wedge w_4 = 0$ et $g_{4n-8} = w_{2n-4} \wedge w_{2n-4} = 0$, ce qui entraîne que $w_4 = w_{2n-4} = 0$.

- On suppose que $w_r = 0, w_{2n-r} = 0$ pour tout $3 \leq r \leq m$, et on montre que $w_r = 0, w_{2n-r} = 0$ pour tout $3 \leq r \leq m+1$.

- Pour $m+1$, on a

$$\begin{aligned} g_{2(m+1)} &= w_{m+1} \wedge w_{m+1} + 2(w_m \wedge w_{m+2} + \\ &w_{m-1} \wedge w_{m+3} + \dots + w_4 \wedge w_{2m-2} + w_3 \wedge w_{2m-1}) = 0, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} g_{4n-2(m+1)} &= w_{2n-(m+1)} \wedge w_{2n-(m+1)} + 2(w_{2n-m-2} \wedge w_{2n-m} + \\ &w_{2n-m-3} \wedge w_{2n-m+1} + \dots + w_{2n-2m+2} \wedge w_{2n-4} + w_{2n-2m+1} \wedge w_{2n-3}) = 0, \end{aligned}$$

ce qui entraîne que $w_{m+1} = w_{2n-(m+1)} = 0$. Donc on obtient que $w = 0$, et que W ne contient aucun élément décomposable non nul de $\bigwedge^2 \mathcal{S}^n U$. \square

2.1.6. Corollaire. Soit $W \in \mathcal{W}$. Alors il existe un sous-espace vectoriel \mathbb{C}^* -invariant $D_W \subset \bigwedge^2 \mathcal{S}^n U$ tel que l'on a un \mathbb{C}^* -isomorphisme

$$\bigwedge^2 \mathcal{S}^n U \simeq D_W \oplus W.$$

De plus on a la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow Q(-1) \xrightarrow{\varpi_W} D_W \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \longrightarrow F(W)(1) \longrightarrow 0,$$

où $F(W)$ est le fibré de Tango associé au sous-espace W .

Démonstration. Il suffit de choisir $d_k \in E_k \setminus W_k$, pour tout $1 \leq k \leq 2n-1$, et de considérer le sous-espace vectoriel de $\bigwedge^2 \mathcal{S}^n U$

$$D_W = \bigoplus_{1 \leq k \leq 2n-1} \mathbb{C}.d_k,$$

qui est \mathbb{C}^* -invariant. D'après la définition (2.1.2), on obtient la suite exacte recherchée. \square

2.1.7. Proposition. Soient n, α, γ, β des entiers tels que $\gamma > 0$, $n > 2$, $\alpha \geq \beta$ et $\gamma + n\beta > 0$. On considère le multi-indice $\mathbf{m} = (\gamma; (n\alpha + i(\beta - \alpha))_{0 \leq i \leq n})$. Soient g_0, \dots, g_n des formes homogènes sans zéro commun sur $\mathbb{P}(\mathbb{C}^{n+1})$ telles que

$$\deg(g_i) = \gamma + n\alpha + i(\beta - \alpha) \quad \text{pour } i = 0, 1, \dots, n.$$

Soit $W \in \mathcal{W}$. Alors les fibrés vectoriels Q et $F(W)$, sur $\mathbb{P}(\mathcal{S}^n U)$, ont une action canonique de \mathbb{C}^* , telle que Q (resp. $F(W)$) possède (relativement à g_0, \dots, g_n) une image inverse généralisée $\mathcal{Q}_{\mathbf{m}}(\gamma)$ (resp. $\mathcal{F}_{\mathbf{m}}(3\gamma)$) et définie par les suites exactes

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-\gamma) \longrightarrow \mathcal{S}^n \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{Q}_{\mathbf{m}} \longrightarrow 0$$

$$(\text{resp. } 0 \longrightarrow \mathcal{Q}_{\mathbf{m}}(-\gamma) \longrightarrow \mathcal{S}^{2(n-1)} \mathcal{U}(\beta + \alpha) \longrightarrow \mathcal{F}_{\mathbf{m}}(\gamma) \longrightarrow 0),$$

où $\mathcal{U} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\alpha) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\beta)$. La première classe de Chern du fibré $\mathcal{F}_{\mathbf{m}}$ est $3(\beta + \alpha) \frac{n(n-1)}{2}$. On appelle le fibré vectoriel $\mathcal{Q}_{\mathbf{m}}$ le fibré quotient pondéré par le poids \mathbf{m} , sur \mathbb{P}^n , et le fibré vectoriel $\mathcal{F}_{\mathbf{m}}$ le fibré de Tango pondéré par le poids \mathbf{m} , sur \mathbb{P}^n .

Démonstration. On considère l'application

$$\begin{aligned} \omega := (g_0, \dots, g_n) : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathcal{S}^n U \setminus \{0\} \\ v &\longmapsto (g_0(v), \dots, g_n(v)). \end{aligned}$$

En considérant (2.1.4), on en déduit une action σ de \mathbb{C}^* sur $\mathcal{S}^n U$ telle que

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbb{C}^* \times \mathcal{S}^n U &\longrightarrow \mathcal{S}^n U \\ (t, u) &\longmapsto t^\gamma \cdot \kappa_n(t)(u). \end{aligned}$$

Cette action est représentée relativement à la base \mathcal{B}_0 de $\mathcal{S}^n U$ par la matrice

$$\sigma(t) = t^\gamma \cdot \begin{pmatrix} t^{n\alpha} & & & & \\ & t^{n\alpha+(\beta-\alpha)} & & & \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & t^{n\alpha+(n-1)(\beta-\alpha)} & \\ & & & & t^{n\beta} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \\ \\ \\ 0 \\ \\ \end{pmatrix}.$$

On considère aussi l'action de \mathbb{C}^* sur \mathbb{C}^{n+1} qui est la multiplication usuelle sur \mathbb{C}^{n+1}

$$\begin{aligned} T : \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^{n+1} &\longrightarrow \mathbb{C}^{n+1} \\ (t, u) &\longmapsto t.u. \end{aligned}$$

Alors ω est une \mathbb{C}^* -application par rapport à ces deux actions. L'action σ induit une action $\bar{\sigma} \in PGL(\mathcal{S}^n U)$ de \mathbb{C}^* sur $\mathbb{P}(\mathcal{S}^n U)$ et l'action T induit une action triviale de \mathbb{C}^* sur \mathbb{P}^n . Donc on a la transformée de Horrocks (1.1.3)

$$\mathbf{Iming} : \mathcal{FV}(\mathbb{P}(\mathcal{S}^n U), \bar{\sigma}) \longrightarrow \mathcal{FV}(\mathbb{P}^n),$$

où $\mathcal{FV}(\mathbb{P}(\mathcal{S}^n U), \bar{\sigma})$ est la catégorie de fibrés vectoriels sur $\mathbb{P}(\mathcal{S}^n U)$ qui sont \mathbb{C}^* -invariants au-dessus de l'action $\bar{\sigma}$, et $\mathcal{FV}(\mathbb{P}^n)$ est la catégorie de fibrés vectoriels sur \mathbb{P}^n .

On considère le morphisme

$$g := {}^T\omega =: \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^n U)}(-1) \longrightarrow \mathcal{S}^n U \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^n U)},$$

avec $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^n U)}(-1)$ et $\mathcal{S}^n U \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^n U)}$ munis de l'action canonique $\bar{\sigma}$. Alors g est un \mathbb{C}^* -morphisme. Comme on a, pour tout $t \in \mathbb{C}^*$,

$$\sigma(t).(x^{n-i}.y^i) = t^{n\alpha+i(\beta-\alpha)+\gamma}.(x^{n-i}.y^i)$$

alors le sous-fibré $(x^{n-i}.y^i.\mathbb{C}) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^n U)}$ de $\mathcal{S}^n U \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^n U)}$ est \mathbb{C}^* -invariant. On obtient l'isomorphisme

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^n U)}^{(n\alpha+i(\beta-\alpha)+\gamma)} \simeq (x^{n-i}.y^i.\mathbb{C}) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^n U)}$$

défini localement, pour tout $v \in \mathcal{S}^n U$, par

$$\begin{aligned} (\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^n U)}^{(n\alpha+i(\beta-\alpha)+\gamma)})_v &\simeq \mathbb{C} \xrightarrow{\simeq} ((x^{n-i}.y^i.\mathbb{C}) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^n U)})_v \simeq x^{n-i}.y^i.\mathbb{C} \\ a &\longmapsto ax^{n-i}.y^i. \end{aligned}$$

Donc on a un \mathbb{C}^* -isomorphisme

$$\mathcal{S}^n U \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^n U)} \simeq \bigoplus_{i=0}^n \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^n U)}^{(n\alpha+i(\beta-\alpha)+\gamma)}.$$

Alors on a un \mathbb{C}^* -morphisme

$$g := {}^T\omega =: \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^n U)}(-1) \longrightarrow \bigoplus_{i=0}^n \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^n U)}^{(n\alpha+i(\beta-\alpha)+\gamma)}.$$

On considère le morphisme

$$\varpi_W : Q(-1) \longrightarrow D_W \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^n U)},$$

avec $D_W \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^n U)}$ et $Q(-1)$ munis de l'action canonique $\bar{\sigma}$. Pour que le morphisme ϖ_W soit un \mathbb{C}^* -morphisme il faut avoir

$$(\varpi_W)_v(\sigma(t).v_1) = t^q \sigma(t).(\varpi_W)_v(v_1)$$

pour tout $v, v_1 \in \mathcal{S}^n U$, q un entier et

$$(\varpi_W)_v : Q(-1)_v \longrightarrow (D_W \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^n U)})_v = D_W = \bigoplus_{1 \leq k \leq 2n-1} \mathbb{C}.d_k,$$

où $d_k \in E_k \setminus W_k$, pour tout $1 \leq k \leq 2n - 1$, comme dans (2.1.6). Alors on obtient $q = 0$. Comme on a, pour tout $t \in \mathbb{C}^*$,

$$\sigma(t).(d_k) = t^{2n\alpha+k(\beta-\alpha)+2\gamma}.(d_k),$$

alors le sous-fibré $(d_k.\mathbb{C}) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^n U)}$ de $D_W \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^n U)}$ est \mathbb{C}^* -invariant. On a l'isomorphisme

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^n U)}^{(2n\alpha+k(\beta-\alpha)+2\gamma)} \simeq (d_k.\mathbb{C}) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^n U)}$$

défini localement, pour tout $v \in \mathcal{S}^n U$, par

$$\begin{aligned} (\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^n U)}^{(2n\alpha+k(\beta-\alpha)+2\gamma)})_v &\simeq \mathbb{C} \xrightarrow{\simeq} ((d_k.\mathbb{C}) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^n U)})_v \simeq d_k.\mathbb{C}. \\ a &\longmapsto ad_k. \end{aligned}$$

Donc on en déduit le \mathbb{C}^* -isomorphisme

$$D_W \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^n U)} \simeq \bigoplus_{k=1}^{2n-1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^n U)}^{(2n\alpha+k(\beta-\alpha)+2\gamma)},$$

et le \mathbb{C}^* -morphisme

$$\varpi_W : Q(-1) \longrightarrow \bigoplus_{k=1}^{2n-1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^n U)}^{(2n\alpha+k(\beta-\alpha)+2\gamma)}.$$

D'après la proposition (2.1.3), on obtient que $\sigma(t)^*F(W) \simeq F(W)$. Soient

$$\mathbf{Iming}(Q(-1)) = Q_m \text{ et } \mathbf{Iming}(F(W)(1)) = F_m.$$

D'après la proposition (1.1.4) on a

$$\mathbf{Iming}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^n U)}(-1)) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n},$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Iming}(D_W \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^n U)}) &\simeq \mathbf{Iming}\left(\bigoplus_{k=1}^{2n-1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^n U)}^{(2n\alpha+k(\beta-\alpha)+2\gamma)}\right) \\ &= \bigoplus_{k=1}^{2n-1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(2n\alpha + k(\beta - \alpha) + 2\gamma) := \mathcal{S}^{2(n-1)} \mathcal{U}(2\gamma + (\beta + \alpha)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Iming}(\mathcal{S}^n U \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^n U)}) &\simeq \mathbf{Iming}\left(\bigoplus_{i=0}^n \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^n U)}^{(n\alpha+i(\beta-\alpha)+\gamma)}\right) \\ &= \bigoplus_{i=0}^n \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(n\alpha + i(\beta - \alpha) + \gamma) := \mathcal{S}^n \mathcal{U}(\gamma), \end{aligned}$$

où $\mathcal{U} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\alpha) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\beta)$. On en déduit les suites exactes

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \xrightarrow{g} \bigoplus_{i=0}^n \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(n\alpha + i(\beta - \alpha) + \gamma) \longrightarrow \mathcal{Q}_{\mathfrak{m}} \longrightarrow 0$$

et

$$0 \longrightarrow \mathcal{Q}_{\mathfrak{m}} \xrightarrow{\varpi_{W_0}} \bigoplus_{k=1}^{2n-1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(2n\alpha + k(\beta - \alpha) + 2\gamma) \longrightarrow \mathcal{F}_{\mathfrak{m}} \longrightarrow 0.$$

Ces suites exactes s'écrivent également comme suit

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-\gamma) \longrightarrow \bigoplus_{i=0}^n \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(n\alpha + i(\beta - \alpha)) \longrightarrow \mathcal{Q}_{\mathfrak{m}} \longrightarrow 0$$

et

$$0 \longrightarrow \mathcal{Q}_{\mathfrak{m}}(-\gamma) \longrightarrow \bigoplus_{k=1}^{2n-1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(2n\alpha + k(\beta - \alpha)) \longrightarrow \mathcal{F}_{\mathfrak{m}}(\gamma) \longrightarrow 0,$$

où $\mathcal{Q}_{\mathfrak{m}} := \mathcal{Q}_{\mathfrak{m}}(-\gamma)$, et $\mathcal{F}_{\mathfrak{m}}(\gamma) := \mathcal{F}_{\mathfrak{m}}(-2\gamma)$.

□

2.1.8. L'exemple de Cascini [9]. (Décomposition de Clebsch-Gordan [32].) On suppose que $\beta = -\alpha$. Alors il existe une $SL_2(\mathbb{C})$ -décomposition irréductible de $\mathcal{S}^n U \otimes \mathcal{S}^n U$

$$\mathcal{S}^n U \otimes \mathcal{S}^n U \simeq \bigoplus_{i=0}^n \mathcal{S}^{2n-2i} U.$$

En particulier, on a

$$\bigwedge^2 (\mathcal{S}^n U) \simeq \mathcal{S}^{2(n-1)} U \oplus \mathcal{S}^{2(n-3)} U \oplus \mathcal{S}^{2(n-5)} U \oplus \mathcal{S}^{2(n-7)} U \oplus \dots$$

qui est un $SL_2(\mathbb{C})$ -isomorphisme. Soit

$$W_0 = \mathcal{S}^{2(n-3)} U \oplus \mathcal{S}^{2(n-5)} U \oplus \mathcal{S}^{2(n-7)} U \oplus \dots \subset \bigwedge^2 (\mathcal{S}^n U).$$

Alors $W_0 \in \mathcal{W}$. On associe au sous-espace W_0 le fibré de Tango $F(W_0)$ défini par la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow \mathcal{Q}(-1) \xrightarrow{\varpi_{W_0}} \mathcal{S}^{2(n-1)} U \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \longrightarrow F(W_0)(1) \longrightarrow 0,$$

où \mathcal{Q} est le fibré quotient. Alors le fibré vectoriel $\mathcal{F}_{\mathfrak{m}}$ est le fibré construit par Cascini [9] où $\mathfrak{m} = (\gamma; (\alpha(n-2i))_{0 \leq i \leq n})$.

En général, nous allons noter $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_{\mathfrak{m}}$ et $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\mathfrak{m}}$.

2.1.9. Proposition. *Si $\gamma > 2n\alpha + (\beta - \alpha) - \frac{3}{2}n(\alpha + \beta)$ alors le fibré vectoriel \mathcal{F} est stable.*

Démonstration. Soient q un entier avec $1 \leq q \leq n-2$ et $t_q \in \mathbb{Z}$ tels que $(\bigwedge^q \mathcal{F})_{norm} = \bigwedge^q \mathcal{F}(t_q)$. On obtient alors

$$-1 < \frac{c_1(\bigwedge^q \mathcal{F}(t_q))}{rg(\bigwedge^q \mathcal{F}(t_q))} \leq 0,$$

qui s'écrit également

$$t_q + c_1(\mathcal{F}) \frac{q}{n-1} \leq 0.$$

Donc on a

$$t_q < -\frac{n}{n-1}q(\alpha + \beta) \frac{3(n-1)}{2} = -\frac{3}{2}nq(\alpha + \beta).$$

De la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-\gamma) \longrightarrow \mathcal{S}^n \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{Q} \longrightarrow 0,$$

il en découle la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow \mathcal{S}^{q-1} \mathcal{S}^n \mathcal{U}(-\gamma + m) \longrightarrow \mathcal{S}^q \mathcal{S}^n \mathcal{U}(m) \longrightarrow \mathcal{S}^q \mathcal{Q}(m) \longrightarrow 0$$

qui nous donne $h^i(\mathcal{S}^q \mathcal{Q}(m)) = 0$, pour tout $m \in \mathbb{Z}$ et $1 \leq i \leq n-2$. De la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow \mathcal{Q}(-\gamma) \longrightarrow \mathcal{S}^{2(n-1)} \mathcal{U}(\beta + \alpha) \longrightarrow \mathcal{F}(\gamma) \longrightarrow 0,$$

on obtient la résolution suivante

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \mathcal{S}^q \mathcal{Q}(-2q\gamma + t_q) \longrightarrow \mathcal{S}^{q-1} \mathcal{Q} \otimes \mathcal{S}^{2(n-1)} \mathcal{U}((\beta + \alpha) - \gamma(2q-1) + t_q) \\ &\longrightarrow \mathcal{S}^{q-2} \mathcal{Q} \otimes \bigwedge^2 \mathcal{S}^{2(n-1)} \mathcal{U}(2(\beta + \alpha) - \gamma(2q-2) + t_q) \xrightarrow{a_{q-2}} \dots \\ &\dots \xrightarrow{a_2} \mathcal{Q} \otimes \bigwedge^{q-1} \mathcal{S}^{2(n-1)} \mathcal{U}((\beta + \alpha)(q-1) - \gamma(q+1) + t_q) \\ &\xrightarrow{a_1} \bigwedge^q \mathcal{S}^{2(n-1)} \mathcal{U}(q(-\gamma + \beta + \alpha) + t_q) \xrightarrow{a_0} \bigwedge^q \mathcal{F}(t_q) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

En considérant $A_j = \ker(a_j)$ pour $j = 0, 1, \dots, q-2$, on obtient alors $h^i(A_0) = 0$ pour tout $1 \leq i \leq n+1-q$. On a

$$\begin{aligned} &\max\{e \in \mathbb{Z} \mid \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(e) \subseteq \bigwedge^q \mathcal{S}^{2(n-1)} \mathcal{U}(q(-\gamma + \beta + \alpha) + t_q)\} = \\ &= 2nq\alpha + (\beta - \alpha) \frac{q(q+1)}{2} - q\gamma + t_q < (\beta - \alpha) \frac{q(q-1)}{2} \leq 0. \end{aligned}$$

De la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow A_0 \longrightarrow \bigwedge^q \mathcal{S}^{2(n-1)} \mathcal{U}(q(-\gamma + \beta + \alpha) + t_q) \xrightarrow{a_0} \bigwedge^q \mathcal{F}(t_q) \longrightarrow 0,$$

on en déduit $h^0(\bigwedge^q \mathcal{F}(t_q)) = 0$. D'après le critère de Hoppe [23], \mathcal{F} est stable.

□

2.2. Déformation du fibré de Tango pondéré. Nous allons démontrer ci-après qu'une petite déformation de fibré \mathcal{F} est encore un fibré de Tango pondéré sur \mathbb{P}^n . Nous allons aussi montrer que l'espace de Kuranishi du fibré \mathcal{F} est lisse au point correspondant au fibré \mathcal{F} .

2.2.1. Lemme. Soient \mathcal{Q}' et \mathcal{Q}'' deux fibrés quotients pondérés par le poids $\mathbf{m} = (\gamma; (n\alpha + i(\beta - \alpha))_{0 \leq i \leq n})$ sur \mathbb{P}^n et définis par les suites exactes suivantes

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-\gamma) \longrightarrow \mathcal{S}^n \mathcal{U} \xrightarrow{q_1} \mathcal{Q}' \longrightarrow 0$$

et

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-\gamma) \longrightarrow \mathcal{S}^n \mathcal{U} \xrightarrow{q_2} \mathcal{Q}'' \longrightarrow 0$$

tels qu'il existe un morphisme $\psi : \mathcal{Q}' \longrightarrow \mathcal{Q}''$. Alors il existe un morphisme $\varphi : \mathcal{S}^n \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{S}^n \mathcal{U}$ tel que $q_2 \circ \varphi = \psi \circ q_1$. Si ψ est un isomorphisme, alors φ l'est.

Démonstration. La démonstration de ce lemme est très similaire à celle du lemme (1.5.11). \square

2.2.2. Lemme. Soient $f, f' \in \text{Hom}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-\gamma), \mathcal{S}^n \mathcal{U})$ deux morphismes injectifs (non nuls). Alors f et f' donnent le même élément dans le schéma $\text{Quot}_{\mathcal{S}^n \mathcal{U}/\mathbb{P}^n} := \text{Quot}_{(\mathcal{S}^n \mathcal{U}, p(d))/\mathbb{P}^n}$, où $p(d)$ est un polynôme de Hilbert, si et seulement s'il existe un isomorphisme $g \in \text{End}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-\gamma))$ tel que $f = f' \circ g$.

Démonstration. La définition du schéma $\text{Quot}_{(\mathcal{S}^n \mathcal{U}, p(d))/\mathbb{P}^n}$ suffit. \square

2.2.3. Théorème. Soit \mathcal{Q}_0 un fibré quotient pondéré par le poids \mathbf{m} sur \mathbb{P}^n et défini par la suite exacte suivante :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-\gamma) \xrightarrow{x_0} \mathcal{S}^n \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{Q}_0 \longrightarrow 0$$

où $x_0 := {}^T \omega \in \text{Hom}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-\gamma), \mathcal{S}^n \mathcal{U})$. Alors une petite déformation du fibré \mathcal{Q}_0 est encore un fibré quotient pondéré sur \mathbb{P}^n . L'espace de Kuranishi de \mathcal{Q}_0 est lisse au point correspondant au fibré \mathcal{Q}_0 .

Démonstration. La démonstration de ce théorème est très similaire à celle du théorème (1.5.13). \square

2.2.4. Lemme. Soit \mathcal{Q} un fibré quotient pondéré par le poids \mathbf{m} sur \mathbb{P}^n . Soient \mathcal{F}' et \mathcal{F}'' des fibrés de Tango pondérés par le poids \mathbf{m} sur \mathbb{P}^n et définis par les suites exactes

$$0 \longrightarrow \mathcal{Q}(-\gamma) \longrightarrow \mathcal{S}^{2(n-1)} \mathcal{U}(\beta + \alpha) \xrightarrow{p_1} \mathcal{F}'(\gamma) \longrightarrow 0$$

et

$$0 \longrightarrow \mathcal{Q}(-\gamma) \longrightarrow \mathcal{S}^{2(n-1)} \mathcal{U}(\beta + \alpha) \xrightarrow{p_2} \mathcal{F}''(\gamma) \longrightarrow 0,$$

tels qu'il existe un morphisme $\psi : \mathcal{F}'(\gamma) \longrightarrow \mathcal{F}''(\gamma)$. Alors il existe un morphisme

$$\varphi : \mathcal{S}^{2(n-1)} \mathcal{U}(\beta + \alpha) \longrightarrow \mathcal{S}^{2(n-1)} \mathcal{U}(\beta + \alpha),$$

tel que $p_2 \circ \varphi = \psi \circ p_1$. Si ψ est un isomorphisme, alors φ l'est.

Démonstration. De la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow \mathcal{Q}(-\gamma) \longrightarrow \mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U}(\beta + \alpha) \xrightarrow{p_2} \mathcal{F}''(\gamma) \longrightarrow 0,$$

il en découle la suite exacte suivante de groupes cohomologiques

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \text{Hom}(\mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U}(\beta + \alpha), \mathcal{Q}(-\gamma)) &\longrightarrow \text{Hom}(\mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U}(\beta + \alpha), \mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U}(\beta + \alpha)) \\ &\xrightarrow{p_2 \circ \bullet} \text{Hom}(\mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U}(\beta + \alpha), \mathcal{F}''(\gamma)) \longrightarrow \text{Ext}^1(\mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U}(\beta + \alpha), \mathcal{Q}(-\gamma)) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

De la suite exacte suivante

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-2\gamma) \otimes (\mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U}(\beta + \alpha))^* &\longrightarrow \mathcal{S}^n\mathcal{U}(-\gamma) \otimes (\mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U}(\beta + \alpha))^* \\ &\longrightarrow \mathcal{Q}(-\gamma) \otimes (\mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U}(\beta + \alpha))^* \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

on en déduit

$$\text{Ext}^1(\mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U}(\beta + \alpha), \mathcal{Q}(-\gamma)) = H^1(\mathcal{Q}(-\gamma) \otimes (\mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U}(\beta + \alpha))^*) = 0.$$

Alors on obtient que

$$\overline{p_2} := p_2 \circ \bullet : \text{Hom}(\mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U}(\beta + \alpha), \mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U}(\beta + \alpha)) \longrightarrow \text{Hom}(\mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U}(\beta + \alpha), \mathcal{F}''(\gamma))$$

est bijective. Comme le morphisme

$$\psi \circ p_1 : \mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U}(\beta + \alpha) \longrightarrow \mathcal{F}''(\gamma)$$

est dans $\text{Hom}(\mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U}(\beta + \alpha), \mathcal{F}''(\gamma))$ alors il existe un morphisme

$$\varphi : \mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U}(\beta + \alpha) \longrightarrow \mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U}(\beta + \alpha)$$

tel que $p_2 \circ \varphi = \psi \circ p_1$. Supposons que ψ soit un isomorphisme, alors il existe un morphisme $\varphi' : \mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U}(\beta + \alpha) \longrightarrow \mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U}(\beta + \alpha)$ tel que $p_1 \circ \varphi' = \psi^{-1} \circ p_2$. Donc on a $p_2 \circ \varphi \circ \varphi' = \psi \circ \psi^{-1} \circ p_2 = p_2$. Comme $\overline{p_2}$ est bijective, on obtient $\varphi \circ \varphi' = \text{Id}_{\mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U}(\beta + \alpha)}$. Donc φ est un isomorphisme. \square

2.2.5. Lemme. Soit \mathcal{Q} un fibré quotient pondéré sur \mathbb{P}^n . Soient f et f' deux morphismes injectifs (non nuls) dans $\text{Hom}(\mathcal{Q}(-\gamma), \mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U}(\beta + \alpha))$. Alors les morphismes f et f' donnent le même élément dans $\text{Quot}_{\mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U}(\beta + \alpha)/\mathbb{P}^n} := \text{Quot}_{(\mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U}(\beta + \alpha), p(d))/\mathbb{P}^n}$, où $p(d)$ est un polynôme de Hilbert, si et seulement s'il existe un isomorphisme $g \in \text{End}(\mathcal{Q}(-\gamma))$ tel que $f = f' \circ g$.

Démonstration. La définition du schéma $\text{Quot}_{\mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U}(\beta + \alpha)/\mathbb{P}^n}$ suffit. \square

On a

$$\text{Aut}(\mathcal{Q}(-\gamma)) \subset \text{End}(\mathcal{Q}(-\gamma)) \subset \text{Hom}(\mathcal{Q}(-\gamma), \mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U}(\beta + \alpha)).$$

Le groupe topologique $\text{Aut}(\mathcal{Q}(-\gamma))$ agit continûment sur un espace topologique

$$\text{Hom}(\mathcal{Q}(-\gamma), \mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U}(\beta + \alpha)).$$

Donc d'après le lemme (2.2.5), on a

$$\begin{aligned} \text{Hom}(\mathcal{Q}(-\gamma), \mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U}(\beta + \alpha)) / \text{Aut}(\mathcal{Q}(-\gamma)) &\xrightarrow{\cong} \text{Quot}_{\mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U}(\beta + \alpha)/\mathbb{P}^{2n+1}}, \\ [f] &\longmapsto [\text{coker}(f)]. \end{aligned}$$

Comme $Aut(\mathcal{Q}(-\gamma))$ est ouvert dans $End(\mathcal{Q}(-\gamma))$, alors

$$\dim(Aut(\mathcal{Q}(-\gamma))) = \dim(End(\mathcal{Q}(-\gamma))).$$

Donc on a

$$\dim(Quot_{\mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U}(\beta+\alpha)/\mathbb{P}^n}) = h^0(\mathcal{Q}(-\gamma)^* \otimes \mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U}(\beta+\alpha)) - h^0(End(\mathcal{Q}(-\gamma))).$$

On considère l'ensemble \mathfrak{F} des classes d'isomorphismes de fibrés vectoriels \mathcal{F} sur \mathbb{P}^n tels qu'il existe des suites exactes de fibrés vectoriels

$$0 \longrightarrow \mathcal{Q}(-\gamma) \longrightarrow \mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U}(\beta+\alpha) \longrightarrow \mathcal{F}(\gamma) \longrightarrow 0$$

et

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-\gamma) \longrightarrow \mathcal{S}^n\mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{Q} \longrightarrow 0,$$

et que \mathcal{F} est un fibré générique (qui est un point générique dans $Quot_{\mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U}(\beta+\alpha)/\mathbb{P}^{2n+1}}$).

On adapte ici la méthode du théorème 4.1 de [9] sur \mathbb{P}^n au contexte du fibré de Tango pondéré par le poids $\mathbf{m} = (\gamma; (n\alpha + i(\beta - \alpha))_{0 \leq i \leq n})$ sur \mathbb{P}^n , (2.1.7).

2.2.6. Théorème. *Soit $\mathcal{F}_0 \in \mathfrak{F}$ un fibré de Tango pondéré par le poids \mathbf{m} sur \mathbb{P}^n et défini par les suites exactes*

$$0 \longrightarrow \mathcal{Q}_0(-\gamma) \xrightarrow{x_0} \mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U}(\beta+\alpha) \longrightarrow \mathcal{F}_0(\gamma) \longrightarrow 0$$

et

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-\gamma) \longrightarrow \mathcal{S}^n\mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{Q}_0 \longrightarrow 0,$$

où $x_0 := \varpi_W \in Hom(\mathcal{Q}_0(-\gamma), \mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U}(\beta+\alpha))$, (2.1.7). Alors une petite déformation du fibré \mathcal{F}_0 est encore un fibré de Tango pondéré sur \mathbb{P}^n . L'espace de Kuranishi de \mathcal{F}_0 est lisse au point correspondant au fibré \mathcal{F}_0 .

Démonstration. Soit $\mathcal{F}_0(\gamma) = coker(x_0)$ un fibré vectoriel quotient de $\mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U}(\beta+\alpha)$ correspondant au morphisme x_0 . Soient $(Y = Kur(\mathcal{Q}_0), y_0, G_1, \varepsilon_1)$ une déformation de type Kuranishi du fibré \mathcal{Q}_0 , et $(B = Kur(\mathcal{F}_0), b_0, G, \varepsilon)$ une déformation de type Kuranishi du fibré \mathcal{F}_0 . Soit X une sous-variété d'une composante irréductible de $Quot_{\mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U}(\beta+\alpha)/\mathbb{P}^n}$ contenant x_0 et composée de tous les quotients de morphismes $0 \longrightarrow \mathcal{Q}_0(-\gamma) \longrightarrow \mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U}(\beta+\alpha)$ pour un fibré quotient pondéré \mathcal{Q}_0 . On a le morphisme $\mathbb{P}_{Y \times B}^n = Y \times B \times \mathbb{P}^n \longrightarrow Y \times B$ et les morphismes suivants

$$X \subseteq Quot_{\mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U}(\beta+\alpha)/\mathbb{P}^n} \subseteq Quot_{(\mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U}(\beta+\alpha))_{Y \times B}/\mathbb{P}_{Y \times B}^n/Y \times B} \longrightarrow B,$$

et

$$X \subseteq Quot_{\mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U}(\beta+\alpha)/\mathbb{P}^n} \subseteq Quot_{(\mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U}(\beta+\alpha))_{Y \times B}/\mathbb{P}_{Y \times B}^n/Y \times B} \longrightarrow Y.$$

Donc on obtient les morphismes naturels des germes

$$\begin{array}{ccc} (X, x_0) & \xrightarrow{\Psi} & (Y, y_0) \\ \downarrow \Phi & & \\ (B, b_0) & & \end{array}$$

Alors on a

$$(\Phi^{-1}(b_0), x_0) \subseteq (\Psi^{-1}(y_0), x_0) \subseteq (\text{Quot}_{\mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U}(\beta+\alpha)/\mathbb{P}^n}, x_0).$$

Pour le morphisme Ψ , on considère qu'une composante irréductible $X' \subseteq X$ de x_0 vérifie $Y = \overline{\text{Im}(\Psi|_{X'})}$ et

$$\dim_{x_0}(\Psi|_{X'}^{-1}(y_0)) = \dim(\text{Quot}_{\mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U}(\beta+\alpha)/\mathbb{P}^n}) = h^0(\mathcal{Q}_0(\gamma)^* \otimes \mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U}(\beta+\alpha)) - h^0(\mathcal{E}nd(\mathcal{Q}_0)).$$

Comme x_0 est un point générique dans X' et $\Psi|_{X'}$ est dominant, alors y_0 est un point générique dans Y . D'après le théorème (1.5.6), on a

$$\dim(X') = \dim(Y) + \dim_{x_0}(\Psi|_{X'}^{-1}(y_0)).$$

Mais on a $\dim_{x_0}(X') = \dim(X')$ et $\dim_{y_0}(Y) = \dim(Y)$ d'après la proposition (5.2.1 page 90 [26]). Donc on obtient

$$\dim_{x_0}(X') = \dim_{y_0}(Y) + \dim_{x_0}(\Psi|_{X'}^{-1}(y_0)).$$

D'après le théorème (2.2.3), on obtient $\dim_{y_0}(Y) = h^1(\mathcal{E}nd(\mathcal{Q}_0))$. Donc on obtient

$$\dim_{x_0}(X') = h^1(\mathcal{E}nd(\mathcal{Q}_0)) + h^0(\mathcal{Q}_0^*(\gamma) \otimes \mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U}(\beta+\alpha)) - h^0(\mathcal{E}nd(\mathcal{Q}_0)).$$

Pour le morphisme Φ , d'après le théorème (3.12, page 137 [46]), on a

$$\dim_{b_0}(B) \geq \dim_{x_0}(X) - \dim_{x_0}(\Phi^{-1}(b_0)) \geq \dim_{x_0}(X') - \dim_{x_0}(\Phi^{-1}(b_0)).$$

D'après le théorème (2.2, page 126 [46]), le théorème (1.5.10) et la définition de la dimension de l'espace B , on a

$$h^1(\mathcal{E}nd(\mathcal{F}_0)) = \dim(T_{b_0}B) \geq \dim(B) \geq \dim_{b_0}(B),$$

où $T_{b_0}B$ est l'espace tangent de B au point b_0 . Soit

$$Z = \{x_1 \in X \mid \mathcal{F}_1 \simeq \mathcal{F}_0 \text{ où } \mathcal{F}_1 \text{ est le fibré correspondant à } x_1 \}.$$

On obtient que $(\Phi^{-1}(b_0), x_0) \subseteq (Z, x_0)$ et $\dim_{x_0}((\Phi^{-1}(b_0), x_0)) \leq \dim_{x_0}((Z, x_0))$. On en déduit

$$\dim_{b_0}(B) \geq \dim_{x_0}(X') - \dim_{x_0}((Z, x_0)).$$

Soit $\Sigma = \{\sigma \in \text{End}(\mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U}(\beta+\alpha)) \mid \sigma.x_0 = x_0\}$. En considérant la suite exacte suivante de fibrés vectoriels

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_0^*(-\gamma) \otimes \mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U}(\beta+\alpha) \longrightarrow \mathcal{E}nd(\mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U}(\beta+\alpha)) \longrightarrow \mathcal{Q}_0^*(\gamma) \otimes \mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U}(\beta+\alpha) \longrightarrow 0,$$

on obtient la suite exacte suivante de groupes cohomologiques

$$0 \longrightarrow H^0(\mathcal{F}_0^*(-\gamma) \otimes \mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U}(\beta+\alpha)) \longrightarrow \text{End}(\mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U}(\beta+\alpha)) \\ \xrightarrow{f:=\bullet \circ x_0} H^0(\mathcal{Q}_0^*(\gamma) \otimes \mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U}(\beta+\alpha))$$

qui nous donne $\Sigma \simeq H^0(\mathcal{F}_0^*(-\gamma) \otimes \mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U}(\beta+\alpha))$. On obtient l'application linéaire

$$g : \text{End}(\mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U}(\beta+\alpha)) / \Sigma \xrightarrow{\bullet \circ x_0} H^0(\mathcal{Q}_0^*(\gamma) \otimes \mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U}(\beta+\alpha)) \\ \bar{a} \longmapsto f(a),$$

qui est injective et $Im(g) = Im(f)$. On a $End(\mathcal{Q}_0) \hookrightarrow H^0(\mathcal{Q}_0^*(\gamma) \otimes \mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U}(\beta + \alpha))$ et $Z \cap End(\mathcal{Q}_0) = \{0\}$. D'après le lemme (2.2.4), on a $f(Aut(\mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U}(\beta + \alpha))) = Z$. Donc $Z \cup End(\mathcal{Q}_0)$ est un ouvert d'une sous-variété fermée de X' . Il en découle que

$$dim_{x_0}(Z) \leq dim(Z) = h^0(\mathcal{E}nd(\mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U}(\beta + \alpha))) - dim(\Sigma) - h^0(\mathcal{E}nd(\mathcal{Q}_0)).$$

Donc on obtient que

$$dim_{b_0}(B) \geq dim_{x_0}(X') - dim_{x_0}((Z, x_0)) \geq h^1(\mathcal{E}nd(\mathcal{Q}_0)) + h^0(\mathcal{Q}_0^*(\gamma) \otimes \mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U}(\beta + \alpha)) - h^0(\mathcal{E}nd(\mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U}(\beta + \alpha))) + h^0(\mathcal{F}_0^*(-\gamma) \otimes \mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U}(\beta + \alpha)).$$

De la suite exacte précédente de fibrés vectoriels, il s'ensuit que

$$dim_{b_0}(B) \geq h^1(\mathcal{E}nd(\mathcal{Q}_0)) + h^1(\mathcal{F}_0^*(-\gamma) \otimes \mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U}(\beta + \alpha)).$$

En considérant la suite exacte suivante de fibrés vectoriels

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_0^*(-2\gamma) \otimes \mathcal{Q}_0 \longrightarrow \mathcal{Q}_0(-\gamma) \otimes (\mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U}(\beta + \alpha))^* \longrightarrow \mathcal{E}nd(\mathcal{Q}_0) \longrightarrow 0$$

et comme on a

$$H^1(\mathcal{Q}_0(-\gamma) \otimes (\mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U}(\beta + \alpha))^*) = H^2(\mathcal{Q}_0(-\gamma) \otimes (\mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U}(\beta + \alpha))^*) = 0,$$

alors on obtient

$$H^1(\mathcal{E}nd(\mathcal{Q}_0)) \simeq H^2(\mathcal{F}_0^*(-2\gamma) \otimes \mathcal{Q}_0).$$

En considérant la suite exacte suivante de fibrés vectoriels

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_0^*(-2\gamma) \otimes \mathcal{Q}_0 \longrightarrow \mathcal{F}_0^*(-\gamma) \otimes \mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U}(\beta + \alpha) \longrightarrow \mathcal{E}nd(\mathcal{F}_0) \longrightarrow 0,$$

on obtient la suite exacte suivante de groupes cohomologiques

$$\dots \longrightarrow H^1(\mathcal{F}_0^*(-\gamma) \otimes \mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U}(\beta + \alpha)) \longrightarrow H^1(\mathcal{E}nd(\mathcal{F}_0)) \longrightarrow H^2(\mathcal{F}_0^*(-2\gamma) \otimes \mathcal{Q}_0) \longrightarrow \dots$$

qui nous donne $h^1(\mathcal{E}nd(\mathcal{F}_0)) \leq h^2(\mathcal{F}_0^*(-2\gamma) \otimes \mathcal{Q}_0) + h^1(\mathcal{F}_0^*(-\gamma) \otimes \mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U}(\beta + \alpha))$. Alors il en résulte que

$$h^1(\mathcal{E}nd(\mathcal{F}_0)) \leq h^1(\mathcal{E}nd(\mathcal{Q}_0)) + h^1(\mathcal{F}_0^*(-\gamma) \otimes \mathcal{S}^{2(n-1)}\mathcal{U}(\beta + \alpha)),$$

et que $dim_{b_0}(B) = h^1(\mathcal{E}nd(\mathcal{F}_0))$. Donc B est lisse en b_0 . De plus on obtient

$$dim_{b_0}(B) = dim_{x_0}(X') - dim_{x_0}(\Phi^{-1}(b_0)).$$

Comme on a fait dans le théorème (1.5.13), on obtient qu'une petite déformation du fibré \mathcal{F}_0 est encore un fibré de Tango pondéré sur \mathbb{P}^n .

□

2.3. Relations entre les fibrés de Tango pondérés et les fibrés de corrélation nulle pondérés. Nous allons utiliser ci-après les notations et les résultats de (1.2.1) et (2.1.7). Nous allons trouver des relations entre les fibrés de Tango pondérés et les fibrés de corrélation nulle pondérés sur \mathbb{P}^{2n+1} .

2.3.1. Proposition. Soient V un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension $\dim(V) = 2n + 2$, $f \in \Lambda^2 V^* = H^0(Q^*(1))$ une forme antisymétrique non dégénérée, $H = \ker(f) \subset \Lambda^2 V$ l'hyperplan correspondant et $W \subset \Lambda^2 V$ un sous-espace vectoriel vérifiant la condition (**). Soit $N(f)$ le fibré de corrélation nulle classique (resp. $F(W)$ le fibré de Tango) associé à la forme f (resp. au sous-espace W). Si $W \subset H$, alors on a une suite exacte canonique suivante

$$0 \longrightarrow N(f)(-1) \longrightarrow (H/W) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}} \longrightarrow F(W)(1) \longrightarrow 0.$$

Démonstration. Le fibré $N(f)$ est défini par la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}} \xrightarrow{Tf \circ g} Q^*(1) \longrightarrow N(f)(1) \longrightarrow 0.$$

Alors on a la suite exacte de la cohomologie

$$0 \longrightarrow \mathbb{C} \xrightarrow{H^0(Tf \circ g)} H^0(Q^*(1)) \simeq \bigwedge^2 V^* \longrightarrow H^0(N(f)(1)) \longrightarrow 0$$

où $H^0(Tf \circ g)(a) := a.f$ pour tout $a \in \mathbb{C}$. Alors on a $H^0(Tf \circ g)(1) = f$, c'est-à-dire on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} 0 & & \\ \downarrow & & \\ Q(-1) & \xrightarrow{Tg \circ f} & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}} \longrightarrow 0 \\ \downarrow & \nearrow T_f & \\ \Lambda^2 V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}} & & \end{array}$$

Comme $Tf : \Lambda^2 V \rightarrow \mathbb{C}$ est une application linéaire surjective, on considère la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow H \longrightarrow \bigwedge^2 V \xrightarrow{Tf} \mathbb{C} \longrightarrow 0.$$

Si $W \subset H$, alors il existe une application linéaire surjective \bar{f} telle que l'on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} 0 & & \\ \uparrow & & \\ ((\Lambda^2 V)/W) & \xrightarrow{\bar{f}} & \mathbb{C} \longrightarrow 0 \\ \uparrow & \nearrow T_f & \\ \Lambda^2 V & & \end{array}$$

et $\ker(\bar{f}) = H/W$. On obtient donc le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccc}
0 & & & & \\
\downarrow & & & & \\
Q(-1) & \xrightarrow{T_{g \circ f}} & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}} & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \parallel & & \\
\Lambda^2 V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}} & \xrightarrow{T_f} & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}} & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & \nearrow \bar{f} & & & \\
((\Lambda^2 V)/W) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}} & & & &
\end{array}$$

où $Q(-1) \rightarrow ((\Lambda^2 V)/W) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}$ est le morphisme injectif ϖ_W dans la suite exacte

$$0 \rightarrow Q(-1) \xrightarrow{\varpi_W} \left((\Lambda^2 V)/W \right) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}} \rightarrow F(W)(1) \rightarrow 0.$$

On en déduit le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccccc}
& & 0 & & 0 & & \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & N(f)(-1) & \longrightarrow & Q(-1) & \xrightarrow{T_{g \circ f}} & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}} \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow h & & \downarrow \varpi_W & & \parallel \\
0 & \longrightarrow & H/W \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}} & \longrightarrow & ((\Lambda^2 V)/W) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}} & \xrightarrow{\bar{f}} & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}} \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \\
& & \text{coker}(h) & \longrightarrow & F(W)(1) & & \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \\
& & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

D'après le lemme du serpent, on obtient que $\text{coker}(h) \simeq F(W)(1)$, ce qui donne la suite exacte suivante

$$0 \rightarrow N(f)(-1) \rightarrow H/W \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}} \rightarrow F(W)(1) \rightarrow 0.$$

□

A partir de maintenant, nous allons nous intéresser au fibré de corrélation nulle classique spécial $N(f)$ sur \mathbb{P}^{2n+1} .

2.3.2. Dualité. Soient $U = \mathbb{C}^2$ un espace vectoriel et $\{x, y\}$ une base. Il existe un isomorphisme antisymétrique $\nu : U \rightarrow U^*$ unique à une constante multiplicative près. Il est défini relativement à la base précédente par la matrice antisymétrique

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La forme symplectique \langle, \rangle sur U correspondant à ν est donc définie par

$$\langle x, x \rangle = \langle y, y \rangle = 0, \quad \langle x, y \rangle = -\langle y, x \rangle = -1.$$

On appelle l'espace $(U; \langle, \rangle)$ *le plan symplectique*. On en déduit l'isomorphisme $\mathcal{S}^m U \simeq \mathcal{S}^m U^*$ et la forme quadratique (resp. la forme symplectique) associée, si m est pair (resp. si m est impair), définie par : Soient $v_1^* = v_2^* = \dots = v_i^* = x, v_{i+1}^* = v_{i+2}^* = \dots = v_m^* = y$, on a

$$\begin{aligned} \langle x^i y^{m-i}, x^j y^{m-j} \rangle &= \langle v_1 v_2 \dots v_m, x^j y^{m-j} \rangle = (v_1 v_2 \dots v_m)^*(x^j y^{m-j}) \\ &= \sum_{\iota \in \mathfrak{S}_m} v_{\iota(1)}^*(x) \cdot v_{\iota(2)}^*(x) \dots v_{\iota(j)}^*(x) \cdot v_{\iota(j+1)}^*(y) \dots v_{\iota(m)}^*(y) \end{aligned}$$

où \mathfrak{S}_m est le groupe des permutations. Donc on obtient

$$\langle x^i y^{m-i}, x^j y^{m-j} \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } i + j \neq m \\ (-1)^i i! \cdot j! & \text{si } i + j = m. \end{cases}$$

Ensuite on en déduit l'isomorphisme $\bigwedge^2 \mathcal{S}^{2n+1} U \simeq \bigwedge^2 \mathcal{S}^{2n+1} U^*$ et la forme quadratique associée définie par : Soient $0 \leq i < j \leq 2n+1, 0 \leq s < t \leq 2n+1$, et

$$z_{i,j} = x^i y^{2n+1-i} \wedge x^j y^{2n+1-j}, \quad z_{s,t} = x^s y^{2n+1-s} \wedge x^t y^{2n+1-t},$$

on a

$$\langle z_{i,j}, z_{s,t} \rangle = \begin{pmatrix} \langle x^i y^{2n+1-i}, x^s y^{2n+1-s} \rangle & \langle x^i y^{2n+1-i}, x^t y^{2n+1-t} \rangle \\ \langle x^j y^{2n+1-j}, x^s y^{2n+1-s} \rangle & \langle x^j y^{2n+1-j}, x^t y^{2n+1-t} \rangle \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, on a

$$\langle z_{i,j}, z_{s,t} \rangle = \begin{cases} (-1)^{i+j+1} i! \cdot t! \cdot j! \cdot s! & \text{si } j + s = i + t = 2n + 1 \\ (-1)^{i+j} i! \cdot t! \cdot j! \cdot s! & \text{si } i + s = j + t = 2n + 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2.3.3. Théorème. *Pour tout $W \in \mathcal{W}$, il existe une forme antisymétrique non dégénérée (symplectique) $f := f_W : \bigwedge^2 \mathcal{S}^{2n+1} U \rightarrow \mathbb{C}$, unique à une constante multiplicative près, telle que*

- *f est \mathbb{C}^* -invariant ($\sigma(t) = \begin{pmatrix} t^\alpha & 0 \\ 0 & t^{-\alpha} \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{C}^*$, est la \mathbb{C}^* -action)*

- *$f(w) := \langle f, w \rangle = 0$ pour tout $w \in W$.*

Il existe aussi un sous-espace vectoriel \mathbb{C}^ -invariant D_W de $\bigwedge^2 \mathcal{S}^{2n+1} U$ contenant f tel que $\bigwedge^2 \mathcal{S}^{2n+1} U \simeq D_W \oplus W$. Dans ce cas on a la suite exacte suivante*

$$0 \rightarrow N(f)(-1) \rightarrow (D_W / \mathbb{C} \cdot f) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}} \rightarrow F(W)(1) \rightarrow 0,$$

où $N(f)$ est le fibré de corrélation nulle classique spécial associé à la forme f , et $F(W)$ est le fibré de Tango associé au sous-espace W .

Démonstration. On utilise les mêmes notations que dans (2.1.4), (2.1.5) et (2.1.6) pour $\alpha = -\beta$. On a une base

$$\mathcal{B} := \{z_{p,q} := x^{2n+1-p}y^p \wedge x^{2n+1-q}y^q, \ 0 \leq p < q \leq 2n+1\},$$

de l'espace vectoriel $\bigwedge^2 \mathcal{S}^{2n+1} U$, et une décomposition en somme directe de sous-espaces vectoriels \mathbb{C}^* -invariants

$$\bigwedge^2 \mathcal{S}^{2n+1} U \simeq \bigoplus_{1 \leq k \leq 4n+1} E_k,$$

où E_k est engendré par les éléments $z_{p,q}$ tels que $k = p + q$. D'après la dualité (2.3.2), pour tout $p_i + q_i = k_i$ et $i = 1, 2$ tels que $p_1 + q_1 + p_2 + q_2 = k_1 + k_2 \neq 4n + 2$, on a

$$\langle z_{p_1, q_1}, z_{p_2, q_2} \rangle = 0.$$

Donc, pour $k_1 \neq 2n + 1$, chaque élément de E_{k_1} est orthogonal à lui-même et aux autres éléments de E_{k_1} et aux autres éléments de E_{k_2} où $k_1 + k_2 \neq 4n + 2$. Pour $k_1 = 2n + 1$, chaque élément de E_{2n+1} est orthogonal aux autres éléments de E_{2n+1} et aux autres éléments de E_{k_2} où $k_2 \neq 2n + 1$. On pose donc

$$\mathbb{E}_k := \begin{cases} E_k \oplus E_{4n+2-k} & \text{si } 1 \leq k \leq 2n \\ E_{2n+1} & \text{si } k = 2n + 1 \end{cases}$$

qui donne

$$\bigwedge^2 \mathcal{S}^{2n+1} U \simeq \bigoplus_{1 \leq k \leq 2n+1} \mathbb{E}_k.$$

On obtient que $\langle u_i, u_j \rangle = 0$ pour tout $u_i \in \mathbb{E}_i$ et $u_j \in \mathbb{E}_j$ avec $i \neq j$. Donc si $u, h \in \bigwedge^2 \mathcal{S}^{2n+1} U$ on peut les écrire sous la forme

$$u = u_1 + u_2 + \dots + u_{2n} + u_{2n+1}, \quad h = h_1 + h_2 + \dots + h_{2n} + h_{2n+1},$$

où $u_k, h_k \in \mathbb{E}_k$ pour $1 \leq k \leq 2n + 1$. On a

$$\langle u, h \rangle = \langle u_1, h_1 \rangle + \langle u_2, h_2 \rangle + \langle u_3, h_3 \rangle + \dots + \langle u_{2n}, h_{2n} \rangle + \langle u_{2n+1}, h_{2n+1} \rangle.$$

On cherche une forme linéaire $f \in (\bigwedge^2 \mathcal{S}^{2n+1} U)^*$ qui est \mathbb{C}^* -invariante telle que

$$f(w) := \langle f, w \rangle = 0$$

pour tout $w \in W$. Ce qui est donc équivalent à dire que l'on cherche une forme linéaire telle que $f \in E_{2n+1}$, et

$$f(w_{2n+1}) := \langle f, w_{2n+1} \rangle = 0$$

pour tout $w_{2n+1} \in W_{2n+1}$. Comme W_{2n+1} est un hyperplan de E_{2n+1} , on a dans ce cas

$$\mathbb{C}.f = W_{2n+1}^\vee,$$

où W_{2n+1}^\vee est l'orthogonal de W_{2n+1} dans E_{2n+1} . Donc f est uniquement déterminée à une constante multiplicative près. On obtient que la forme linéaire f est non dégénérée, car si le coefficient de $z_{p, 2n+1-p}$ dans f est nul, pour $0 \leq p \leq n$, alors on a

$$f(z_{p, 2n+1-p}) := \langle f, z_{p, 2n+1-p} \rangle = 0$$

qui donne $z_{p,2n+1-p} \in W_{2n+1}$; ce qui est en contradiction avec $W_{2n+1} \in \mathcal{Z}_{2n+1}$. Comme la forme quadratique \langle, \rangle est une forme symétrique non dégénérée définie sur $\bigwedge^2 \mathcal{S}^{2n+1} U$ et comme $f \neq 0$, alors on a $f \notin W_{2n+1}$.

Pour tout $W \in \mathcal{W}$, on choisit donc $d_k \in E_k \setminus W_k$ non nuls pour tout $1 \leq k \leq 4n+1$. On a $\mathbb{C}.d_{2n+1} = W_{2n+1}^\vee$ et on définit $f = a.d_{2n+1}$ où $a \in \mathbb{C}^*$. En considérant le sous-espace vectoriel \mathbb{C}^* -invariant de $\bigwedge^2 \mathcal{S}^{2n+1} U$

$$D_W = \bigoplus_{1 \leq k \leq 4n+1} \mathbb{C}.d_k,$$

on obtient que $\bigwedge^2 \mathcal{S}^{2n+1} U \simeq D_W \oplus W$ est un \mathbb{C}^* -isomorphisme.

Soit l'hyperplan $H := \ker(f) \subset \bigwedge^2 \mathcal{S}^{2n+1} U$, alors on obtient $W \subset H$. D'après la proposition (2.3.1), on obtient la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow N(f)(-1) \longrightarrow H/W \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}} \longrightarrow F(W)(1) \longrightarrow 0.$$

Autrement dit,

$$0 \longrightarrow N(f)(-1) \longrightarrow \left(\bigoplus_{\substack{k \neq 2n+1 \\ 1 \leq k \leq 4n+1}} \mathbb{C}.d_k \right) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}} \longrightarrow F(W)(1) \longrightarrow 0,$$

où $N(f)$ est le fibré de corrélation nulle classique spécial associé à la forme f , et $F(W)$ est le fibré de Tango associé au sous-espace W . □

2.3.4. Proposition. Soient $n, \alpha, \gamma \in \mathbb{N}$ des entiers tels que $n > 0$ et $\gamma > (2n+1)\alpha \geq 0$. On considère le multi-indice $\mathbf{m} = (\gamma; (\alpha(2n+1-2i))_{0 \leq i \leq 2n+1})$. Soient g_0, \dots, g_{2n+1} des formes homogènes sans un zéro commun sur $\mathbb{P}(\mathbb{C}^{2n+2})$ telles que

$$\deg(g_i) = \gamma + (2n+1-2i)\alpha, \quad i = 0, 1, \dots, 2n+1.$$

Soient $W \in \mathcal{W}$ et $f \in (\bigwedge^2 \mathcal{S}^{2n+1} U)^*$ comme dans le théorème (2.3.3). Alors on a une suite exacte suivante

$$(13) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{N}(-\gamma) \longrightarrow \Upsilon_1 \longrightarrow \mathcal{F}(\gamma) \longrightarrow 0.$$

où

$$\Upsilon_1 := \bigoplus_{1 \leq k \leq 4n+1}^{k \neq 2n+1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}((4n+2-2k)\alpha) = \bigoplus_{i=1}^{4n} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(\zeta_i)$$

avec $\zeta_1 = 4n\alpha, \zeta_2 = (4n-2)\alpha, \dots, \zeta_{2n} = 2\alpha, \zeta_{2n+1} = -2\alpha, \dots, \zeta_{4n} = -4n\alpha$, et le fibré vectoriel \mathcal{N} (resp. le fibré vectoriel \mathcal{F}) est le fibré défini sur \mathbb{P}^{2n+1} comme dans la proposition (1.2.6) (resp. la proposition (2.1.7)).

Démonstration. On considère la transformée de Horrocks **Iming** définie dans la proposition (1.2.5) pour $\mathcal{S}^{2n+1} U$. D'après la proposition (1.2.2) et le théorème (2.3.3), on obtient que le fibré vectoriel $N(f)$ a une \mathbb{C}^* -action

$$\bar{\sigma}(t)^* N(f) \simeq N(f).$$

D'après la proposition (2.1.3) et le théorème (2.1.5), on obtient que le fibré vectoriel $F(W)$ a une \mathbb{C}^* -action

$$\bar{\sigma}(t)^* F(W) \simeq F(W).$$

Soient $\mathbf{Iming}(F(W)) = \mathcal{F}_m$ et $\mathbf{Iming}(N(f)) = \mathcal{N}_m$. Le fibré $\left(\bigoplus_{1 \leq k \leq 4n+1}^{k \neq 2n+1} \mathbb{C}.d_k\right) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^{2n+1}U)}$ est muni de l'action canonique $\overline{\sigma(t)}$. Comme on a, pour tout $t \in \mathbb{C}^*$,

$$\sigma(t).(d_k) = t^{((2(2n+1)-2k)\alpha+2\gamma)}.(d_k),$$

alors le sous-fibré $(d_k.\mathbb{C}) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^{2n+1}U)}$ de $\left(\bigoplus_{1 \leq k \leq 4n+1}^{k \neq 2n+1} \mathbb{C}.d_k\right) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^{2n+1}U)}$ est \mathbb{C}^* -invariant. On obtient l'isomorphisme

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^{2n+1}U)}^{((2(2n+1)-2k)\alpha+2\gamma)} \simeq (d_k.\mathbb{C}) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^{2n+1}U)},$$

défini localement, pour tout $v \in \mathcal{S}^{2n+1}U$, par

$$\begin{aligned} (\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^{2n+1}U)}^{((2(2n+1)-2k)\alpha+2\gamma)})_v &\simeq \mathbb{C} \xrightarrow{\simeq} ((d_k.\mathbb{C}) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^{2n+1}U)})_v \simeq d_k.\mathbb{C} \\ a &\longmapsto ad_k. \end{aligned}$$

Donc on a un \mathbb{C}^* -isomorphisme

$$\left(\bigoplus_{1 \leq k \leq 4n+1}^{k \neq 2n+1} \mathbb{C}.d_k\right) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^{2n+1}U)} \simeq \bigoplus_{1 \leq k \leq 4n+1}^{k \neq 2n+1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^{2n+1}U)}^{((2(2n+1)-2k)\alpha+2\gamma)}.$$

Donc on obtient

$$\mathbf{Iming} \left(\left(\bigoplus_{1 \leq k \leq 4n+1}^{k \neq 2n+1} \mathbb{C}.d_k \right) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^{2n+1}U)} \right) = \bigoplus_{1 \leq k \leq 4n+1}^{k \neq 2n+1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}((4n+2-2k)\alpha+2\gamma) := \Upsilon_1(2\gamma),$$

où $\Upsilon_1 := \bigoplus_{1 \leq k \leq 4n+1}^{k \neq 2n+1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}((4n+2-2k)\alpha)$. Nous appliquons la transformée de Horrocks \mathbf{Iming} sur la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow N(f)(-1) \longrightarrow (D_W/\mathbb{C}.f) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^{2n+1}U)} \longrightarrow F(W)(1) \longrightarrow 0.$$

On obtient la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow \mathcal{N}(-\gamma) \longrightarrow \Upsilon_1 \longrightarrow \mathcal{F}(\gamma) \longrightarrow 0.$$

où $\mathcal{N} := \mathcal{N}_m(-\gamma)$, $\mathcal{F}(\gamma) := \mathcal{F}_m(-2\gamma)$.

□

3. Construction de nouveaux fibrés vectoriels de rang 3 sur \mathbb{P}^4

3.1. Technique de construction d'un fibré vectoriel sur une variété lisse. Kumar, Peterson et Rao ont présenté dans leur article [34] une méthode pour construire un fibré vectoriel sur une variété projective lisse X à partir de deux fibrés vectoriels sur une sous-variété de X .

Soient X une variété projective lisse, Y un diviseur de X correspondant à une section $s \in H^0(X, \mathcal{O}_X(Y))$ et $i : Y \hookrightarrow X$ le morphisme d'inclusion. On notera D le faisceau i_*D pour tout faisceau cohérent D sur la variété Y .

Supposons que l'on ait la suite exacte suivante de fibrés vectoriels sur Y

$$0 \longrightarrow \mathbb{A} \xrightarrow{a} \mathbb{F} \xrightarrow{b} \mathbb{B} \longrightarrow 0$$

et que l'on ait \hat{F} un fibré vectoriel sur X tel que la restriction sur Y est $\hat{F}|_Y = \mathbb{F}$. On définit G un fibré vectoriel sur X par le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \hat{F}(-Y) & \xlongequal{\quad} & \hat{F}(-Y) & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & G & \longrightarrow & \hat{F} & \longrightarrow & \mathbb{B} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & \mathbb{A} & \longrightarrow & \mathbb{F} & \longrightarrow & \mathbb{B} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

On obtient que le rang du fibré vectoriel G est $rg(G) = rg(\mathbb{A}) + rg(\mathbb{B})$. On appelle le fibré vectoriel G *l'extension de B sur X* .

Supposons maintenant qu'il y ait aussi deux fibrés vectoriels \hat{L}_1, \hat{L}_2 sur X avec $\mathbb{L}_1, \mathbb{L}_2$ leurs restrictions sur Y telles qu'il existe un morphisme surjectif de fibrés vectoriels $f : \mathbb{L}_1 \longrightarrow \mathbb{A}$ et un morphisme injectif de fibrés vectoriels $g : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{L}_2$. Soit le morphisme f (resp. g) tel que le composé $\phi : \mathbb{L}_1 \xrightarrow{f} \mathbb{A} \xrightarrow{a} \mathbb{F}$ (resp. $\psi : \mathbb{F} \xrightarrow{b} \mathbb{B} \xrightarrow{g} \mathbb{L}_2$) sur Y se relève en un morphisme $\Phi : \hat{L}_1 \longrightarrow \hat{F}$ (resp. $\Psi : \hat{F} \longrightarrow \hat{L}_2$) sur X . Donc on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccc}
\hat{L}_1 & \xrightarrow{\Phi} & \hat{F} & \xrightarrow{\Psi} & \hat{L}_2 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathbb{L}_1 & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{F} & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{L}_2 \\
& \searrow f & \nearrow a & \searrow b & \nearrow g \\
& & \mathbb{A} & & \mathbb{B} \\
& \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow \\
0 & & 0 & & 0.
\end{array}$$

3.1.1. **Lemme.** ([34], proposition 2.1). On a un morphisme de fibrés vectoriels Δ défini de la façon suivante :

$$\Delta : \hat{F}(-Y) \oplus \hat{L}_1 \longrightarrow \hat{F} \oplus \hat{L}_2(-Y)$$

$$\Delta = \left(\begin{array}{c|c} sI & \Phi \\ \hline \Psi & s^{-1}\Psi\Phi \end{array} \right).$$

Le morphisme Δ se factorise de la façon suivante

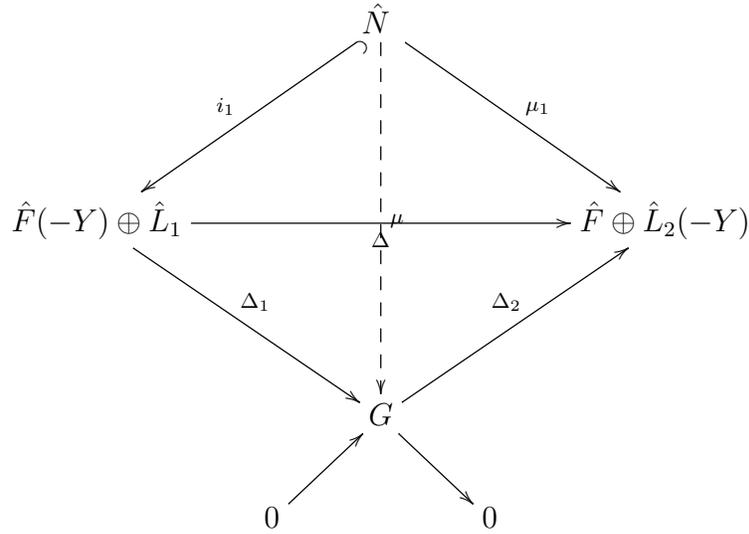
$$\begin{array}{ccc}
\hat{F}(-Y) \oplus \hat{L}_1 & \xrightarrow{\Delta} & \hat{F} \oplus \hat{L}_2(-Y) \\
& \searrow \Delta_1 & \nearrow \Delta_2 \\
& & G \\
& \nearrow & \searrow \\
0 & & 0
\end{array}$$

où $\Delta_2 : G \longrightarrow \hat{F} \oplus \hat{L}_2(-Y)$ est un morphisme injectif de fibrés vectoriels, et $\Delta_1 : \hat{F}(-Y) \oplus \hat{L}_1 \longrightarrow G$ est un morphisme surjectif de fibrés vectoriels.

Démonstration. voir [34]. □

3.1.2. **Remarque.** La méthode de Kumar-Peterson-Rao [34] consiste :

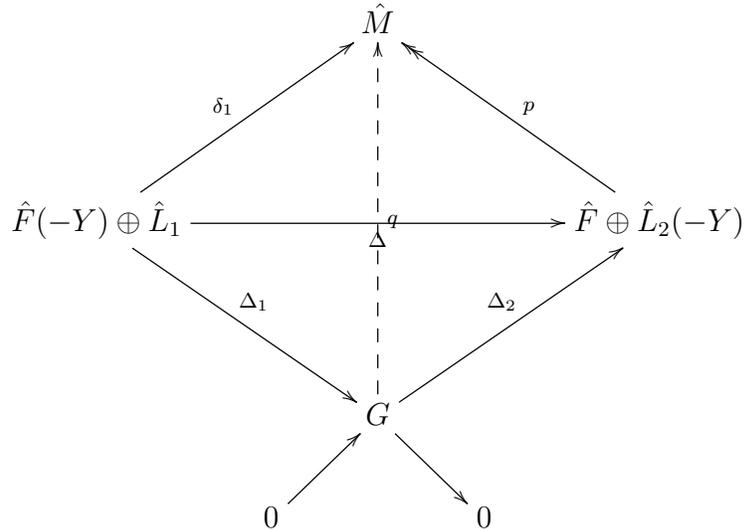
1 - Soit à trouver un sous-fibré vectoriel \hat{N} de $\hat{F}(-Y) \oplus \hat{L}_1$ tel que la restriction de Δ à \hat{N} est injective (en tout point de X). Ce qui implique que \hat{N} est un sous-fibré vectoriel de G , et on obtient ainsi un nouveau fibré vectoriel G/\hat{N} sur X . Autrement dit, On a le diagramme commutatif suivant



où i_1 est un morphisme d'inclusion tel que $\mu_1 = \Delta_1 i_1$ est un morphisme injectif sur X . On en déduit que $\mu_1 = \Delta_2 \mu$. Comme Δ_2, μ_1 sont injectifs sur X , alors le morphisme μ est injectif sur X . Donc on a une suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow \hat{N} \xrightarrow{\mu} G \longrightarrow \text{coker}(\mu) \longrightarrow 0.$$

2 - Soit à trouver un sous-fibré vectoriel \hat{M} de $\hat{F} \oplus \hat{L}_2(-Y)$ avec $p : \hat{F} \oplus \hat{L}_2(-Y) \longrightarrow \hat{M}$ un morphisme projection tel que $p\Delta$ est surjectif (en tout point de X). Ce qui implique que le morphisme $q : G \longrightarrow \hat{M}$ est surjectif, et on obtient ainsi un nouveau fibré vectoriel $\text{ker}(q)$ sur X . Autrement dit, On a le diagramme commutatif suivant



où p est un morphisme projection tel que $\delta_1 = p\Delta$ est un morphisme surjectif sur X . On en déduit que $\delta_1 = q\Delta_1$. Comme δ_1, Δ_1 sont surjectifs sur X , alors le morphisme q est surjectif sur X . Donc on a une suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow \text{ker}(q) \longrightarrow G \xrightarrow{q} \hat{M} \longrightarrow 0.$$

3.1.3. Théorème de Hirzebruch-Riemann-Roch. Soient X une variété projective lisse sur un corps \mathbb{K} et F un faisceau cohérent sur X . On a donc le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} K(X) & \xrightarrow{ch(\bullet).td(X)} & CH^*(X) \\ \chi(X, \bullet) \downarrow & & \downarrow deg(\bullet) \\ \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Q} \end{array}$$

$$\chi(X, F) = deg(ch(F).td(X))$$

où $deg(\bullet)$ est l'application de degré, $ch(F)$ le caractère de Chern de F , $K(X)$ l'anneau de Grothendieck de X , $CH^*(X)$ l'anneau de Chow de X et $td(X)$ les classes de Todd de X .

Démonstration. Voir Hartshorne [18]. □

3.1.4. Remarque. D'après l'exemple (15.1.2 de Fulton [16]) : Pour E un faisceau cohérent de rang r dont les classes de Chern sont c_1, c_2, \dots, c_n sur $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V)$, et pour $x = c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)) \in CH^*(\mathbb{P}^n)$. On a

$$ch(E) = r + h_1x^1 + h_2x^2 + h_3x^3 + \dots + h_nx^n + \dots$$

où

$$h_i = \frac{1}{i!} \cdot det \begin{pmatrix} c_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 2c_2 & c_1 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ ic_i & c_{i-1} & c_{i-2} & \dots & c_1 \end{pmatrix}.$$

et

$$td(\mathbb{P}^n) = 1 + T_1x^1 + T_2x^2 + T_3x^3 + \dots + T_nx^n + \dots$$

où

$$T_0 = 1, T_1 = \frac{1}{2}\alpha_1, T_2 = \frac{1}{12}(\alpha_1^2 + \alpha_2), T_3 = \frac{1}{24}(\alpha_1\alpha_2), \dots$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sont les classes de Chern du fibré $Q(1)$ qui est défini par la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1) \longrightarrow V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \longrightarrow Q \longrightarrow 0.$$

D'après le théorème de Hirzebruch-Riemann-Roch sur la variété \mathbb{P}^n , on a

$$\chi(\mathbb{P}^n, E(t)) = deg_n(ch(E(t)).td(\mathbb{P}^n)) = deg_n(e^{tx}.ch(E).td(\mathbb{P}^n))$$

où, pour tout $y \in CH^*(\mathbb{P}^n) \otimes \mathbb{Q}$, $deg_n(y)$ désigne le coefficient de x^n dans y et $t \in \mathbb{Z}$.

Autrement dit, on peut écrire le théorème de Hirzebruch-Riemann-Roch sur la variété \mathbb{P}^n par

$$\chi(\mathbb{P}^n, E(t)) = \frac{r}{n!} \cdot t^n + \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{(n-i)!} \cdot t^{n-i}$$

où $A_i = rT_i + \sum_{j=0}^{i-1} T_{i-j-1} \cdot h_{j+1}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de variétés algébriques. A l'aide du théorème de Hirzebruch-Riemann-Roch, on peut calculer les classes de Chern de l'image directe d'un fibré vectoriel F défini sur la variété X .

3.1.5. Lemme. *Soient $f : X \rightarrow Y$ un morphisme fini de variétés algébriques et F un faisceau cohérent sur X .*

1 - *Le faisceau f_*F est cohérent et $R^q f_*F = 0$ pour $q > 0$.*

2 - *On a $H^q(X, F) = H^q(Y, f_*F)$ pour tout intègre q . En particulier si X et Y sont des variétés projectives, alors on a*

$$\chi(X, F(t)) = \chi(Y, f_*F(t)) \text{ pour } t \in \mathbb{Z}.$$

Démonstration. Voir Le Potier [36]. □

3.1.6. Proposition. *Soit $\mathbb{P}^{n-1} \subset \mathbb{P}^n$ l'hyperplan de \mathbb{P}^n défini par l'équation $z = 0$ où $z \in H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)) \setminus \{0\}$. Soit $Y_{(k)} \subset \mathbb{P}^n$ le voisinage infinitésimal de l'ordre k de \mathbb{P}^{n-1} dans \mathbb{P}^n défini par l'équation $z^k = 0$ où $k \geq 1$ un entier positif. Soient les morphismes d'inclusion suivants*

$$\mathbb{P}^{n-1} := Y_{(1)} \xrightarrow{b_{(2)}} Y_{(2)} \xrightarrow{b_{(3)}} \dots \xrightarrow{b_{(k)}} Y_{(k)} \xrightarrow{d} \mathbb{P}^n.$$

Soient \widehat{F} un fibré vectoriel sur \mathbb{P}^{n-1} de rang r dont les classes de Chern sont $c_1, c_2, c_3, \dots, c_{n-1}$, $F_{(k)}$ un faisceau cohérent sur $Y_{(k)}$ tel que $\widehat{F} = F_{(k)|_{\mathbb{P}^{n-1}}} := F_{(1)}$ et $F = d_(F_{(k)})$ un faisceau cohérent sur \mathbb{P}^n dont les classes de Chern sont $c'_1, c'_2, c'_3, \dots, c'_n$. Alors*

$$\begin{aligned} c'_1 &= rk, \quad c'_2 = k^2 \left(\frac{r(r+1)}{2} \right) - kc_1 \\ c'_3 &= k^3 \left(\frac{r(r+1)(r+2)}{6} \right) - k^2(r+1)c_1 + k(c_1^2 - 2c_2) \\ c'_4 &= k^4 \left(\frac{r(r+1)(r+2)(r+3)}{24} \right) - k^3 \left(\frac{(r+2)(r+1)}{2} \right) c_1 + \\ & \quad k^2((r+2)c_1^2 - (2r+3)c_2) + k(-c_1^3 + 3c_1c_2 - 3c_3). \end{aligned}$$

Démonstration. De la suite exacte sur $Y_{(k)}$

$$0 \rightarrow F_{(k-1)}(-1) \rightarrow F_{(k)} \rightarrow F_{(1)} \rightarrow 0,$$

on obtient alors que

$$\chi(Y_{(k)}, F_{(k)}(t)) = \sum_{\varepsilon=0}^{k-1} \chi(\mathbb{P}^{n-1}, F_{(1)}(t - \varepsilon)).$$

Comme l'immersion fermée affine d est un morphisme fini, en utilisant le lemme (3.1.5), on obtient que

$$\sum_{\varepsilon=0}^{k-1} \chi(\mathbb{P}^{n-1}, F_{(1)}(t - \varepsilon)) = \chi(Y_{(k)}, F_{(k)}(t)) = \chi(\mathbb{P}^n, F(t)).$$

Soient

$$\chi(\mathbb{P}^{n-1}, F_{(1)}(t - \varepsilon)) = \frac{r}{(n-1)!} \cdot (t - \varepsilon)^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{A_i}{(n-1-i)!} \cdot (t - \varepsilon)^{n-i}$$

où $A_i = rT_i + \sum_{j=0}^{i-1} T_{i-j-1} \cdot h_{j+1}$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, et

$$\chi(\mathbb{P}^n, F(t)) = \frac{rg(F)}{n!} \cdot t^n + \sum_{i=1}^n \frac{A'_i}{(n-i)!} \cdot t^{n-i}$$

où $A'_i = rg(F)T_i + \sum_{j=0}^{i-1} T_{i-j-1} \cdot h'_{j+1}$, $i = 1, 2, \dots, n$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$.

Alors on en déduit

$$\begin{aligned} & \sum_{\varepsilon=0}^{k-1} \left\{ \frac{r}{(n-1)!} \cdot (t - \varepsilon)^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{A_i}{(n-1-i)!} \cdot (t - \varepsilon)^{n-1-i} \right\} = \\ & \sum_{\varepsilon=0}^{k-1} \left\{ \frac{r}{(n-1)!} \cdot t^{n-1} + \left(\frac{r \cdot \varepsilon}{(n-2)!} + \frac{A_1}{(n-2)!} \right) \cdot t^{n-2} + \right. \\ & \quad \left(\frac{r \cdot \varepsilon^2}{2! \cdot (n-3)!} - \frac{A_1 \cdot \varepsilon}{(n-3)!} + \frac{A_2}{(n-3)!} \right) \cdot t^{n-3} + \\ & \quad \left. \left(-\frac{r \cdot \varepsilon^3}{3! \cdot (n-4)!} + \frac{A_1 \cdot \varepsilon^2}{2! \cdot (n-4)!} - \frac{A_2 \cdot \varepsilon}{(n-4)!} + \frac{A_3}{(n-4)!} \right) \cdot t^{n-4} + \dots \right\} = \\ & = \frac{rg(F)}{n!} \cdot t^n + \frac{A'_1}{(n-1)!} \cdot t^{n-1} + \frac{A'_2}{(n-2)!} \cdot t^{n-2} + \frac{A'_3}{(n-3)!} \cdot t^{n-3} + \frac{A'_4}{(n-4)!} \cdot t^{n-4} + \dots \end{aligned}$$

Ces polynômes étant identiques, on peut identifier les coefficients et obtenir des équations permettant d'obtenir $rg(F) = 0$ et

$$c'_1 = rk, \quad c'_2 = k^2 \left(\frac{r(r+1)}{2} \right) - kc_1$$

$$c'_3 = k^3 \left(\frac{r(r+1)(r+2)}{6} \right) - k^2(r+1)c_1 + k(c_1^2 - 2c_2)$$

$$c'_4 = k^4 \left(\frac{r(r+1)(r+2)(r+3)}{24} \right) - k^3 \left(\frac{(r+2)(r+1)}{2} \right) c_1 +$$

$$k^2((r+2)c_1^2 - (2r+3)c_2) + k(-c_1^3 + 3c_1c_2 - 3c_3).$$

□

3.2. Fibré vectoriel de rang 3 sur \mathbb{P}^4 . Nous allons utiliser ci-après les relations entre les fibrés de Tango pondérés et les fibrés de corrélation nulle pondérés par le poids $\mathbf{m} = (\gamma; (\alpha(2n + 1 - 2i))_{0 \leq i \leq 3})$ sur \mathbb{P}^3 (2.3), pour construire un fibré vectoriel de rang 3 sur \mathbb{P}^4 . On considère

$$\Upsilon_1 = \bigoplus_{i=1}^4 \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(\zeta_i),$$

où $\zeta_1 = 4\alpha, \zeta_2 = 2\alpha, \zeta_3 = -2\alpha, \zeta_4 = -4\alpha$.

3.2.1. Proposition. *Nous gardons les mêmes notations de la proposition (2.3.4) sur \mathbb{P}^3 . Pour la suite exacte suivante*

$$0 \longrightarrow \mathcal{N}(-\gamma) \xrightarrow{\pi} \Upsilon_1 \xrightarrow{\iota} \mathcal{F}(\gamma) \longrightarrow 0,$$

il existe deux 4×4 -matrices antisymétriques ϕ et ψ de rang constant 2 telles que le diagramme suivant est commutatif et exact en Υ_1

$$\begin{array}{ccccc} \Upsilon_1^*(-2\gamma) & \xrightarrow{\phi} & \Upsilon_1 & \xrightarrow{\psi} & \Upsilon_1^*(2\gamma) \\ & \searrow & \nearrow \pi & \searrow \iota & \nearrow \\ & & \mathcal{N}(-\gamma) & & \mathcal{F}(\gamma) \\ & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow \\ 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

Démonstration. On considère

$$\mathcal{B}_1 = \{e_1 = d_1, e_2 = d_2, e_3 = d_4, e_4 = d_5\}$$

la base canonique de l'espace vectoriel D_1 , et $\mathcal{B}_1^* = \{e_i^*\}_{1 \leq i \leq 4}$ la base canonique de l'espace vectoriel dual D_1^* . Soit la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow \mathcal{N}(-\gamma) \xrightarrow{\pi} \Upsilon_1 \xrightarrow{\iota} \mathcal{F}(\gamma) \longrightarrow 0.$$

Comme le fibré vectoriel \mathcal{N} est symplectique (cf. proposition (1.3.9)), le morphisme injectif $\pi : \mathcal{N}(-\gamma) \longrightarrow \Upsilon_1$ donne

$$\Upsilon_1^* \xrightarrow{T\pi} \mathcal{N}(\gamma) \longrightarrow 0.$$

Donc on obtient le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} \Upsilon_1^*(-2\gamma) & \xrightarrow{\phi} & \Upsilon_1 \\ & \searrow & \nearrow \pi \\ & & \mathcal{N}(-\gamma) \\ & \nearrow & \searrow \\ 0 & & 0 \end{array}$$

$T\pi(-2\gamma)$ (sur l'arête de gauche)

Le morphisme surjectif $\iota : \Upsilon_1 \longrightarrow \mathcal{F}(\gamma)$ donne le morphisme injectif suivant

$$T\iota : (\mathcal{F}(\gamma))^* \longrightarrow \Upsilon_1^*.$$

Comme $c_1(\mathcal{F}(\gamma)) = 2\gamma$ et $(\mathcal{F}(\gamma))^* \otimes \wedge^2(\mathcal{F}(\gamma)) = \mathcal{F}(\gamma)$, alors on obtient le morphisme injectif

$${}^T\iota(2\gamma) : \mathcal{F}(\gamma) \longrightarrow \Upsilon_1^*(2\gamma).$$

Donc on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} \Upsilon_1 & \xrightarrow{\psi} & \Upsilon_1^*(2\gamma) \\ & \searrow \iota & \nearrow {}^T\iota(2\gamma) \\ & \mathcal{F}(\gamma) & \\ & \nearrow & \searrow \\ 0 & & 0. \end{array}$$

Comme on a

$$0 \longrightarrow \mathcal{N}(-\gamma) \xrightarrow{\pi} \Upsilon_1 \xrightarrow{\iota} \mathcal{F}(\gamma) \longrightarrow 0,$$

alors on obtient $\psi \cdot \phi = 0$. Donc le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \Upsilon_1^*(-2\gamma) & \xrightarrow{\phi} & \Upsilon_1 & \xrightarrow{\psi} & \Upsilon_1^*(2\gamma) \\ & \searrow {}^T\pi(-2\gamma) & \nearrow \pi & \searrow \iota & \nearrow {}^T\iota(2\gamma) \\ & \mathcal{N}(-\gamma) & & \mathcal{F}(\gamma) & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ 0 & & 0 & & 0. \end{array}$$

Soient $(S_{ij})_{1 \leq i \neq j \leq 4}$ des polynômes homogènes de 4 variables sans zéro commun sur \mathbb{P}^3 tels que $S_{ij} \in H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(\zeta_i + \zeta_j + 2\gamma))$ pour $1 \leq i < j \leq 4$ et $S_{ij} = -S_{ji}$. On a

$$\deg(S_{12}) + \deg(S_{34}) = \deg(S_{13}) + \deg(S_{24}) = \deg(S_{14}) + \deg(S_{23}).$$

Donc on peut définir le morphisme ϕ

$$\phi : \Upsilon_1^*(-2\gamma) \longrightarrow \Upsilon_1$$

par la matrice 4×4 antisymétrique

$$\phi = \begin{pmatrix} 0 & -S_{12} & -S_{13} & -S_{14} \\ S_{12} & 0 & -S_{23} & -S_{24} \\ S_{13} & S_{23} & 0 & -S_{34} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & 0 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est de rang 2, car le fibré vectoriel \mathcal{N} est de rang 2. Le fibré vectoriel \mathcal{N} est de rang 2 si et seulement si les formes $(S_{ij})_{1 \leq i \neq j \leq 4}$ vérifient l'équation de Plücker

$$pf(\phi) := \sqrt{\det(\phi)} = S_{12}S_{34} - S_{13}S_{24} + S_{14}S_{23} = 0.$$

Donc on peut définir le morphisme ψ

$$\psi : \Upsilon_1 \longrightarrow \Upsilon_1^*(2\gamma)$$

par la matrice 4×4 antisymétrique

$$\psi = \begin{pmatrix} 0 & -S_{34} & S_{24} & -S_{32} \\ S_{34} & 0 & -S_{14} & S_{13} \\ -S_{24} & S_{14} & 0 & -S_{12} \\ S_{32} & -S_{13} & S_{12} & 0 \end{pmatrix}$$

tel que $\psi \cdot \phi = 0$ et $pf(\psi) = pf(\phi) = S_{12}S_{34} - S_{13}S_{24} + S_{14}S_{23} = 0$. Cette matrice est de rang 2, car le fibré vectoriel \mathcal{F} est de rang 2. □

3.2.2. Remarque. Soit $\mathbb{P}^3 \subset \mathbb{P}^4$ l'hyperplan de \mathbb{P}^4 défini par l'équation $z = 0$ où $z \in H^0(\mathbb{P}^4, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(1)) \setminus \{0\}$. Soit $Y_{(\epsilon)} \subset \mathbb{P}^4$ le voisinage infinitésimal de l'ordre ϵ de \mathbb{P}^3 dans \mathbb{P}^4 défini par l'équation $z^\epsilon = 0$ où $\epsilon \geq 1$ un entier positif. On a les morphismes d'inclusion suivants

$$\mathbb{P}^3 := Y_{(1)} \xrightarrow{b_{(2)}} Y_{(2)} \xrightarrow{b_{(3)}} \dots \xrightarrow{b_{(\epsilon)}} Y_{(\epsilon)} \xrightarrow{d} \mathbb{P}^4.$$

Soit $e_0 \in \mathbb{P}^4 \setminus \mathbb{P}^3$ tel que $e_0 \notin Y_{(\epsilon)}$. On définit la projection d'un point (cf. [18] page 22) sur le sous-espace projectif \mathbb{P}^3 par

$$\begin{aligned} \mathcal{J} : \mathbb{P}^4 \setminus \{e_0\} &\longrightarrow \mathbb{P}^3 \\ e &\longmapsto \mathcal{J}(e) \end{aligned}$$

où $\mathcal{J}(e)$ est l'intersection de \mathbb{P}^3 avec la droite unique passant par les points e_0 et e . On considère la restriction de la projection \mathcal{J} au voisinage infinitésimal $Y_{(\epsilon)}$. On obtient la projection d'un point en dehors de $Y_{(\epsilon)}$ sur un sous-espace projectif \mathbb{P}^3

$$\mathcal{J}_{(\epsilon)} : Y_{(\epsilon)} \longrightarrow \mathbb{P}^3.$$

On considère $\mathcal{N}_{(\epsilon)} = \mathcal{J}_{(\epsilon)}^* \mathcal{N}$ et $\mathcal{F}_{(\epsilon)} = \mathcal{J}_{(\epsilon)}^* \mathcal{F}$ où \mathcal{N} est le fibré de corrélation nulle pondéré sur \mathbb{P}^3 , et \mathcal{F} est le fibré de Tango pondéré sur \mathbb{P}^3 comme dans la proposition (2.3.4). En prenant l'image inverse de la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow \mathcal{N}(-\gamma) \longrightarrow \Upsilon_1 \longrightarrow \mathcal{F}(\gamma) \longrightarrow 0,$$

on obtient donc la suite exacte suivante

$$(14) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{N}_{(\epsilon)}(-\gamma) \longrightarrow \Upsilon_{(\epsilon)} \longrightarrow \mathcal{F}_{(\epsilon)}(\gamma) \longrightarrow 0,$$

où

$$\Upsilon_{(\epsilon)} := \mathcal{J}_{(\epsilon)}^* \Upsilon_1 = \mathcal{O}_{Y_{(\epsilon)}}(4\alpha) \oplus \mathcal{O}_{Y_{(\epsilon)}}(2\alpha) \oplus \mathcal{O}_{Y_{(\epsilon)}}(-2\alpha) \oplus \mathcal{O}_{Y_{(\epsilon)}}(-4\alpha).$$

3.2.3. Théorème. *Nous gardons les mêmes notations que dans les propositions (2.3.4) et (3.2.1) sur \mathbb{P}^3 . Soient $\mathcal{N}_{(\epsilon)}$ et $\mathcal{F}_{(\epsilon)}$ comme dans la remarque (3.2.2) et \mathcal{G} un fibré vectoriel sur \mathbb{P}^4 défini par le diagramme commutatif suivant*

$$\begin{array}{ccccccc}
& & 0 & & 0 & & \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \\
& & \Upsilon(-\epsilon) & \xlongequal{\quad} & \Upsilon(-\epsilon) & & \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{G} & \longrightarrow & \Upsilon & \longrightarrow & \mathcal{F}_{(\epsilon)}(\gamma) \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{N}_{(\epsilon)}(-\gamma) & \longrightarrow & \Upsilon_{(\epsilon)} & \longrightarrow & \mathcal{F}_{(\epsilon)}(\gamma) \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \\
& & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

où

$$\Upsilon := \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(4\alpha) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(2\alpha) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(-2\alpha) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(-4\alpha).$$

Alors on a :

- Si $\epsilon = 2\gamma + 8\alpha$, il existe un fibré vectoriel \mathcal{E}_1 (resp. \mathcal{K}_4) de rang 3 sur \mathbb{P}^4 tel que

$$(15) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(-2\gamma - 4\alpha) \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{E}_1 \longrightarrow 0.$$

$$(resp. \quad 0 \longrightarrow \mathcal{K}_4 \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(-4\alpha) \longrightarrow 0).$$

- Si $\epsilon = 2\gamma + 4\alpha$, il existe un fibré vectoriel \mathcal{E}_2 (resp. \mathcal{K}_3) de rang 3 sur \mathbb{P}^4 tel que

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(-2\gamma - 2\alpha) \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{E}_2 \longrightarrow 0.$$

$$(resp. \quad 0 \longrightarrow \mathcal{K}_3 \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(-2\alpha) \longrightarrow 0).$$

- Si $\epsilon = 2\gamma - 4\alpha$, il existe un fibré vectoriel \mathcal{E}_3 (resp. \mathcal{K}_2) de rang 3 sur \mathbb{P}^4 tel que

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(-2\gamma + 2\alpha) \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{E}_3 \longrightarrow 0.$$

$$(resp. \quad 0 \longrightarrow \mathcal{K}_2 \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(2\alpha) \longrightarrow 0).$$

- Si $\epsilon = 2\gamma - 8\alpha$, il existe un fibré vectoriel \mathcal{E}_4 (resp. \mathcal{K}_1) de rang 3 sur \mathbb{P}^4 tel que

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(-2\gamma + 4\alpha) \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{E}_4 \longrightarrow 0.$$

$$(resp. \quad 0 \longrightarrow \mathcal{K}_1 \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(4\alpha) \longrightarrow 0).$$

Démonstration. D'après la proposition (3.2.1), on a le diagramme commutatif sur \mathbb{P}^3 suivant

$$\begin{array}{ccccc}
 \Upsilon_1^*(-2\gamma) & \xrightarrow{\phi} & \Upsilon_1 & \xrightarrow{\psi} & \Upsilon_1^*(2\gamma) \\
 & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow \\
 & & \mathcal{N}(-\gamma) & & \mathcal{F}(\gamma) \\
 & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow \\
 0 & & 0 & & 0,
 \end{array}$$

avec $\psi \cdot \phi = 0$, et

$$\phi = \begin{pmatrix} 0 & -S_{12} & -S_{13} & -S_{14} \\ S_{12} & 0 & -S_{23} & -S_{24} \\ S_{13} & S_{23} & 0 & -S_{34} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & 0 \end{pmatrix},$$

et

$$\psi = \begin{pmatrix} 0 & -S_{34} & S_{24} & -S_{32} \\ S_{34} & 0 & -S_{14} & S_{13} \\ -S_{24} & S_{14} & 0 & -S_{12} \\ S_{32} & -S_{13} & S_{12} & 0 \end{pmatrix}.$$

En prenant l'image inverse du diagramme précédent par la projection d'un point en dehors de $Y_{(\epsilon)}$ sur le sous-espace projectif \mathbb{P}^3 ($\mathcal{J}_{(\epsilon)} : Y_{(\epsilon)} \rightarrow \mathbb{P}^3$ comme dans la remarque (3.2.2)), on obtient le diagramme suivant sur $Y_{(\epsilon)}$

$$\begin{array}{ccccc}
 \Upsilon_{(\epsilon)}^*(-2\gamma) & \xrightarrow{\phi} & \Upsilon_{(\epsilon)} & \xrightarrow{\psi} & \Upsilon_{(\epsilon)}^*(2\gamma) \\
 & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow \\
 & & \mathcal{N}_{(\epsilon)}(-\gamma) & & \mathcal{F}_{(\epsilon)}(\gamma) \\
 & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow \\
 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

où $\Upsilon_{(\epsilon)} := \bigoplus_{i=1}^4 \mathcal{O}_{Y_{(\epsilon)}}(\zeta_i)$. En choisissant les mêmes notations que dans (3.1) avec $\Phi = \phi$ et $\Psi = \psi$ sur \mathbb{P}^4 , tous les fibrés $\Upsilon_{(\epsilon)}^*(-2\gamma)$, $\Upsilon_{(\epsilon)}$ et $\Upsilon_{(\epsilon)}^*(2\gamma)$ peuvent se relever en fibrés $\Upsilon^*(-2\gamma)$, Υ et Υ^* respectivement sur \mathbb{P}^4 . On obtient donc le complexe suivant sur \mathbb{P}^4

$$\Upsilon^*(-2\gamma) \xrightarrow{\Phi} \Upsilon \xrightarrow{\Psi} \Upsilon^*(2\gamma),$$

où $\Psi \cdot \Phi = \psi \cdot \phi = 0$. Alors on peut définir le morphisme suivant sur \mathbb{P}^4

$$\Delta : \Upsilon(-\epsilon) \oplus \Upsilon^*(-2\gamma) \rightarrow \Upsilon \oplus \Upsilon^*(2\gamma - \epsilon)$$

$$\Delta = \left(\begin{array}{c|c} z^\epsilon I & \Phi \\ \hline \Psi & 0 \end{array} \right),$$

qui est la (8×8) -matrice suivante

$$\Delta = \left(\begin{array}{cccc|cccc} z^\epsilon & & & 0 & 0 & -S_{12} & -S_{13} & -S_{14} \\ & z^\epsilon & & & S_{12} & 0 & -S_{23} & -S_{24} \\ 0 & & z^\epsilon & & S_{13} & S_{23} & 0 & -S_{34} \\ & & & z^\epsilon & S_{14} & S_{24} & S_{34} & 0 \\ \hline 0 & -S_{34} & S_{24} & -S_{32} & & & & \\ S_{34} & 0 & -S_{14} & S_{13} & & & & \\ -S_{24} & S_{14} & 0 & -S_{12} & & & & \\ S_{32} & -S_{13} & S_{12} & 0 & & & & \end{array} \right)$$

On considère la condition $\epsilon = 2\gamma + 8\alpha$.

- Pour le fibré \mathcal{E}_1 . D'après la remarque (3.1.2), soit le morphisme injectif

$$I : \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(4\alpha - \epsilon) \longrightarrow \Upsilon(-\epsilon) \oplus \Upsilon^*(-2\gamma),$$

défini par la matrice

$${}^T[a, 0, 0, 0, b, 0, 0, 0],$$

où $a, b \in \mathbb{C}^*$. La condition $\epsilon = 2\gamma + 8\alpha$ garantit l'homogénéité du morphisme I . Autrement dit, soit

$$\begin{aligned} (h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7, h_8) &\in H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(4\alpha - \epsilon)) \oplus H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(2\alpha - \epsilon)) \oplus H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(-2\alpha - \epsilon)) \\ &\oplus H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(-4\alpha - \epsilon)) \oplus H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(-4\alpha - 2\gamma)) \oplus H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(-2\alpha - 2\gamma)) \\ &\oplus H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(2\alpha - 2\gamma)) \oplus H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(4\alpha - 2\gamma)). \end{aligned}$$

On prend la combinaison linéaire de la 1^{ère} colonne et de la 5^{ème} colonne de la matrice Δ avec une condition d'homogénéité qui provient de la 1^{ème} coordonnée et de la 5^{ème} coordonnée de $(h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7, h_8)$,

$$\begin{aligned} \deg(h_1) &= \deg(h_5) \\ -\epsilon + 4\alpha &= -4\alpha - 2\gamma. \end{aligned}$$

Une telle combinaison existe grâce à la condition $\epsilon = 2\gamma + 8\alpha$. Donc on obtient un morphisme d'une colonne $\mu := \Delta I$

$$\begin{aligned} \mu &: (\mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(4\alpha))(-2\gamma - 8\alpha) \longrightarrow \Upsilon \oplus \Upsilon^*(-8\alpha) \\ {}^T\mu &= [az^{2\gamma+8\alpha}, aS_{12}, aS_{13}, aS_{14}; 0, bS_{34}, -bS_{24}, bS_{32}]. \end{aligned}$$

Le morphisme μ ne s'annule pas dans \mathbb{P}^4 , car $V(z^{2\gamma+8\alpha}, S_{12}, S_{13}, S_{14}, S_{34}, S_{24}, S_{32}) = \emptyset$. Donc le morphisme μ est injectif. On obtient le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccc}
& & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(-2\gamma - 4\alpha) & & \\
& \nearrow I & \downarrow \mu_1 & \searrow \mu & \\
\Upsilon(-\epsilon) \oplus \Upsilon^*(-2\gamma) & \xrightarrow{\Delta} & \Upsilon \oplus \Upsilon^*(2\gamma - \epsilon) & & \\
& \searrow \Delta_1 & \downarrow \Delta & \nearrow \Delta_2 & \\
& & \mathcal{G} & & \\
& \nearrow & \downarrow & \searrow & \\
0 & & 0 & &
\end{array}$$

On obtient $\mu = \Delta_2 \mu_1$. Comme μ, Δ_2 sont injectifs sur \mathbb{P}^4 , alors le morphisme μ_1 est injectif sur \mathbb{P}^4 . Alors on obtient la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(-2\gamma - 4\alpha) \xrightarrow{\mu_1} \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{E}_1 \longrightarrow 0,$$

où \mathcal{E}_1 est un fibré vectoriel de rang 3 sur \mathbb{P}^4 . On utilise la proposition (3.1.6) pour calculer les classes de Chern du faisceau $\mathcal{F}_{(2\gamma+8\alpha)}(\gamma)$. En utilisant la suite exacte précédente et la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \Upsilon \longrightarrow \mathcal{F}_{(2\gamma+8\alpha)}(\gamma) \longrightarrow 0$$

on obtient les classes de Chern du fibré \mathcal{E}_1

$$c_1(\mathcal{E}_1) = -2\gamma - 12\alpha, \quad c_2(\mathcal{E}_1) = -4\alpha^2 + 4\gamma^2 + 16\gamma\alpha, \quad c_3(\mathcal{E}_1) = -16\gamma^2\alpha - 32\gamma\alpha^2 + 144\alpha^3.$$

- Pour le fibré \mathcal{K}_4 , D'après la remarque (3.1.2), soit le morphisme surjectif

$$J : \Upsilon \oplus \Upsilon^*(-\epsilon + 2\gamma) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(-4\alpha),$$

défini par la matrice

$$[0, 0, 0, a, 0, 0, 0, b],$$

où $a, b \in \mathbb{C}^*$. La condition $\epsilon = 2\gamma + 8\alpha$ garantit l'homogénéité du morphisme J . Autrement dit, soit

$$\begin{aligned}
& (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8) \in H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(4\alpha)) \oplus H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(2\alpha)) \oplus H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(-2\alpha)) \\
& \oplus H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(-4\alpha)) \oplus H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(-4\alpha + 2\gamma - \epsilon)) \oplus H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(-2\alpha + 2\gamma - \epsilon)) \\
& \oplus H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(2\alpha + 2\gamma - \epsilon)) \oplus H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(4\alpha + 2\gamma - \epsilon)).
\end{aligned}$$

On prend la combinaison linéaire de la 4^{ème} ligne et de la 8^{ème} ligne de la matrice Δ avec une condition d'homogénéité qui provient de la 4^{ème} coordonnée et de la 8^{ème} coordonnée de $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8)$,

$$\begin{aligned}
& \deg(a_4) = \deg(a_8) \\
& -4\alpha = 2\gamma - \epsilon + 4\alpha.
\end{aligned}$$

Une telle combinaison existe grâce à la condition $\epsilon = 2\gamma + 8\alpha$. Donc on obtient un morphisme d'une ligne $\delta = J\Delta$

$$\begin{aligned} \delta : \Upsilon(-2\gamma - 8\alpha) \oplus \Upsilon^*(-2\gamma) &\longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(-4\alpha) \\ \delta &= [bS_{32}, -bS_{13}, bS_{12}, az^{2\gamma+8\alpha}, aS_{14}, aS_{24}, aS_{34}, 0]. \end{aligned}$$

Le morphisme δ ne s'annule pas dans \mathbb{P}^4 , car $V(z^{2\gamma+8\alpha}, S_{12}, S_{13}, S_{14}, S_{34}, S_{24}, S_{32}) = \emptyset$. Donc le morphisme δ est surjectif. On obtient le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(-4\alpha) & & \\ & \nearrow \delta & \uparrow & \nwarrow J & \\ \Upsilon(-\epsilon) \oplus \Upsilon^*(-2\gamma) & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(-4\alpha) & \xrightarrow{\quad} & \Upsilon \oplus \Upsilon^*(2\gamma - \epsilon) \\ & \searrow \Delta_1 & \downarrow q & \swarrow \Delta_2 & \\ & & \mathcal{G} & & \\ & \nearrow & \searrow & & \\ 0 & & 0 & & \end{array}$$

On obtient $\delta = q\Delta_1$. Comme δ, Δ_1 sont surjectifs sur \mathbb{P}^4 , alors le morphisme q est surjectif sur \mathbb{P}^4 . Alors on obtient la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}_4 \longrightarrow \mathcal{G} \xrightarrow{q} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(-4\alpha) \longrightarrow 0,$$

où \mathcal{K}_4 est un fibré vectoriel de rang 3 sur \mathbb{P}^4 . On utilise la proposition (3.1.6) pour calculer les classes de Chern du faisceau $\mathcal{F}_{(2\gamma+8\alpha)}(\gamma)$. En utilisant la suite exacte précédente et la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \Upsilon \longrightarrow \mathcal{F}_{(2\gamma+8\alpha)}(\gamma) \longrightarrow 0$$

on obtient les classes de Chern du fibré \mathcal{K}_4

$$c_1(\mathcal{K}_4) = -12\alpha - 4\gamma, \quad c_2(\mathcal{K}_4) = -4\alpha^2 + 8\gamma^2 + 32\gamma\alpha, \quad c_3(\mathcal{K}_4) = 144\alpha^3 - 8\gamma^3 - 32\gamma^2\alpha + 40\gamma\alpha^2.$$

On fait la même chose pour le fibré vectoriel \mathcal{E}_2 (resp. $\mathcal{E}_3, \mathcal{E}_4$) en considérant la condition $\epsilon = 2\gamma + 4\alpha$ (resp. $\epsilon = 2\gamma - 4\alpha, \epsilon = 2\gamma - 8\alpha$). On obtient une colonne qui est la combinaison linéaire de la 2^{ème} (resp. 3^{ème}, 4^{ème}) colonne et de la 6^{ème} (resp. 7^{ème}, 8^{ème}) colonne de la matrice Δ sur \mathbb{P}^4 .

On fait la même chose aussi pour le fibré vectoriel \mathcal{K}_3 (resp. $\mathcal{K}_2, \mathcal{K}_1$) en considérant la condition $\epsilon = 2\gamma + 4\alpha$ (resp. $\epsilon = 2\gamma - 4\alpha, \epsilon = 2\gamma - 8\alpha$). On obtient une ligne qui est la combinaison linéaire de la 3^{ème} (resp. 2^{ème}, 1^{ère}) ligne et de la 7^{ème} (resp. 6^{ème}, 5^{ème}) ligne de la matrice Δ sur \mathbb{P}^4 . Dans ces cas-là, on obtient ce que l'on recherche.

□

3.2.4. Proposition. *Si $3\gamma^2 > 52\alpha^2$, alors le fibré vectoriel \mathcal{E}_1 n'est pas isomorphe à la somme directe de trois fibrés en droites.*

Démonstration. On a

$$c_1(\mathcal{E}_1(4\alpha)) = -2\gamma, \quad c_2(\mathcal{E}_1(4\alpha)) = -52\alpha^2 + 4\gamma^2, \quad c_3(\mathcal{E}_1(4\alpha)) = 0.$$

Soit $h = c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(1))$. Supposons que $\mathcal{E}_1(4\alpha) \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(a) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(e) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(b)$ où $a, e, b \in \mathbb{Z}$. On obtient

$$1 + (-2\gamma)h + (-52\alpha^2 + 4\gamma^2)h^2 = (1 + ah)(1 + eh)(1 + bh).$$

D'où

$$\begin{aligned} a + e + b &= -2\gamma, \\ ae + ab + eb &= -52\alpha^2 + 4\gamma^2, \\ aeb &= 0. \end{aligned}$$

Donc a ou b ou c est nul. Pour $a = 0$, on obtient l'équation en b suivante :

$$b^2 + (2\gamma)b + (-52\alpha^2 + 4\gamma^2) = 0.$$

En calculant le discriminant de cette équation, on obtient que ce discriminant est négatif si $3\gamma^2 > 52\alpha^2$. Autrement dit, la solution b n'est pas dans \mathbb{Z} . Ce qui est une contradiction.

□

RÉFÉRENCES

- [1] Ancona, V. Ottaviani, G. *Stability of special instanton bundles on \mathbb{P}^{2n+1}* . Trans. of the Amer. Math. Soc. 341, 2 (1994), 677-693.
- [2] Ancona, V. Ottaviani, G. *The Horrocks bundles of rank 3 on \mathbb{P}^5* , Journal reine angew. Math. 460 (1995), 69-92.
- [3] Ancona, V. Ottaviani, G. *On moduli of instanton bundles on \mathbb{P}^{2n+1}* . Pacific J. of Math. 171, 2 (1995), 343-351.
- [4] Atiyah, M.F. *Geometry on Yang-Mills fields*, Scuola Normale Superiore Pisa, Pisa, 1979, 99 pp.
- [5] Atiyah, M.F. R.S. Ward. *Instantons and algebraic geometry*, Comm. Math. Phys. 55 (1977), 117-124.
- [6] Atiyah, M. Drinfeld, V. Hitchin, N. and Manin, Y. *Construction of instantons*, Phys. Lett., 65A(1978), pp. 185-187.
- [7] Bohnhorst, G. Spindler, H. *The stability of certain vector bundles on \mathbb{P}^n* . Complex algebraic varieties (Bayreuth, 1990), 39-50, Lect. Notes in Math. , 1507, Springer, Berlin, 1992.
- [8] Brînzănescu, V. *Holomorphic Vector Bundles over Compact Complex Surfaces*. Lect. Notes in Math. 1624. Springer-Verlag, Berlin (1996).
- [9] Cascini, P. *Weighted Tango bundles on \mathbb{P}^n and their moduli spaces*. Forum Math. 13 (2001), 251-260.
- [10] Dionisi, C. *Symplectic Small Deformations of Special Instanton Bundle on \mathbb{P}^{2n+1}* . Ann. di Mat. pura et appl. 175 (1998), 285-293.
- [11] I, Dolgachev. M, Kapranov. *Arrangements of hyperplanes and vector bundles on \mathbb{P}^n* . Duke Math.J. 71. 1993, 633-664.
- [12] Douady, A. Verdier, J.-L. editors. *Les équations de Yang-Mills. Séminaire E.N.S. 1977-1978*, Astérisque 71-72. Paris: Soc. Math. France, 1980.
- [13] Ein, L. *Generalized null correlation bundles*. Nagoya Math. J.Vol. HI (1988), 13-24.
- [14] G. Evans, P. Griffith. *Szygies*. London Mathematical Society Lecture Note Series Vol. 106, Cambridge University Press, 1985.
- [15] Fukaya, K. *Deformation theory, homological algebra, and mirror symmetry*, Kyoto, Japan. 2002.
- [16] Fulton, W. *Intersection theory*. Springer-Verlag, Berlin (1998).
- [17] Habibi, S. *Hilbert and Quot Schemes*. Thesis 2008/2009.
- [18] Hartshorne, R. *Algebraic geometry*. Grada.Text in Math. 52. Springer-Verlag, Berlin (1977).
- [19] Hartshorne, R. *Deformation theory*. Grada.Text in Math. 257. Springer New York (2010).
- [20] Horrocks, G. *Examples of rank three vector bundles on five-dimensional projective space*. J. London Math. Soc. 18 (1978),15-27.
- [21] Horrocks, G. *Construction of bundles on \mathbb{P}^n* . In A. Douady and J-L. Verdier, editors, Les équations de Yang-Mills, volume 71-72 of Astérisque, pages 197-203, 1980.
- [22] Horrocks, G. *Vector bundles on the punctured spectrum of a local ring*. Proc. London. Math. Soc. 14 (1964), 689-713.
- [23] Hoppe, H.J. *Stable generischer spaltungstyp und zweite Chernklasse stabiler Vektorraumbundel vom Rang 4 auf \mathbb{P}^4* , Math. Zeitschrift bf 187 (1984), 345-360.
- [24] Husemoller, D. *Fibre Bundles*. Third edition. Grad. Texts in Math. 20. Springer-Verlag, New York (1994).
- [25] Huybrecht, D. lehn, M. *The geometry of moduli space of sheaves*. Seco. edition. Cambr.Univ.Press. 2010.
- [26] Grothendieck, A. *Éléments de géométrie algébrique (rédigés avec la collaboration de Jean Dieudonné) : IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas, Seconde partie*. Publications Mathématiques de l'IHÉS, tome 24 (1965).

- [27] Grothendieck, A. *Éléments de géométrie algébrique (rédigés avec la collaboration de Jean Dieudonné) : IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. Troisième partie.* Publications Mathématiques de l'IHÉS, tome 28 (1964).
- [28] Jardim, M. Mirò-Roig, R. M. *On the semistability of instanton sheaves over certain projective varieties.* Comm. in Algebra 36 (2008), 288-298.
- [29] Jaczewski, K. Szurek, M. Wisniewski, J. *Geometry of the Tango bundle.* Teubner Texte zur Math. 92 (1986), 177-185.
- [30] Kosarew, S. *Local Moduli spaces and Kuranishi maps*, preprint 1999.
- [31] Kosarew, S. Okonek, C. *Global moduli spaces and simple holomorphic bundles.* Publ. RIMS, Kyoto Univ. 25 (1989), 1-19.
- [32] Kraft, H. Procesi, C. *Classical invariant theory a Primer.* July 1996.
- [33] Kumar, N. *Construction of rank two vector bundles on \mathbb{P}^4 in positive characteristic.* Invent. Math., 130:277-286, 1997.
- [34] Kumar, N. Peterson, C. Rao, P. *Construction of low rank vector bundles on \mathbb{P}^4 and \mathbb{P}^5 .* Jour. Alg. Geometry, 11:203-217, 2002.
- [35] Kuranishi, M. *New proof for the existence of locally complete families of complex structures.* Proceedings of the Conference on Complex Analysis 1965, pp 142-154.
- [36] Le Potier, J. *Lectures on vector bundles.* Cambridge Studies in Adv. Math. 54. Cambridge University Press (1997).
- [37] McKernan, J. *Lectures of algebraic geometry*, un cours était donné par James McKernan à l'Institut de Technologie du Massachusetts en 2010.
- [38] Migliore, C. Nagel, U. Peterson, C. *Buchsbaum-Rim Sheaves and their multiple sections.* Journal of Algebra 219, 378-420. (1999).
- [39] Miyajima, K. *Kuranishi Family of Vector Bundles and Algebraic Description of the Moduli Space of Einstein-Hermitian Connections*, Publ. R.I.M.S., Kyoto Univ., 25 (1989), 301-320.
- [40] Mumford, D. Fogarty, J. Kirwan, F. *Geometric invariant theory.* Ergebn. der. Mathema. und. ihrer. Grenz. 34. Springer-Heidelberg, 1994.
- [41] Nitsure, N. *Construction of Hilbert and Quot Schemes.* arXiv:math/0504590. 2005.
- [42] Okonek, C. Schneider, M. Spindler, H. *Vector bundles on complex projective spaces with an appendix by S. I. Gelfand.* Progress in Math. 3. Birkhäuser (1980).
- [43] Okonek, C. Spindler, H. *Mathematical instanton bundles on \mathbb{P}^{2n+1} ,* J. Reine Angew. Math., 364 (1986), pp. 35-50.
- [44] Ottaviani, G. *Real and complex 't Hooft instanton bundles over \mathbb{P}^{2n+1} ,* Rend. Sem. Mat. Fis. di Milano, 66 (1996), 169-199.
- [45] Ottaviani, G. Trautmann, G. *The tangent space at a special symplectic instanton bundle on \mathbb{P}^{2n+1} .* Manuscripta Math. 85, no. 1 (1994), 97-107.
- [46] Qing, L. *Algebraic geometry and arithmetic curves.* Oxford University Press, New York (2002).
- [47] Salamon, S.M. *Quaternionic structures and twistor spaces.* In T.J. Willmore and N.J. Hitchin, editors, Global Riemannian geometry (Durham 1982), pages 6574, 1984.
- [48] Sernesi, E. *Deformations of Algebraic Scheme.* Grund.mathe.Wissen. 334. Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2006).
- [49] Siu, Y. T. Trautmann, G. *Deformations of coherent analytic sheaves with compact supports*, Mem. Amer. Math. Soc. 238, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1981. MR 82c :32023 Zbl 0526.32021.
- [50] Spindler, H. Trautmann, G. *Special instanton bundles on \mathbb{P}^{2n+1} , their geometry and their moduli.* Math. Ann. 1990, Volume 286, Iss. 1-3, pp. 559-592.
- [51] Tango, H. *An example of indecomposable vector bundle of rank $n-1$ on \mathbb{P}^n .* J. Math. Kyoto Univ. 16, (1976), 137-141.
- [52] Tango, H. *On morphisms from projective space \mathbb{P}^n to the Grassman variety $Gr(n, d)$.* Jour. Math. Kyoto Univ., 16(1): 201-207, 1976.