



**HAL**  
open science

# Analyse et commande modulaires de réseaux de lois de bilan en dimension infinie

David Bou Saba

► **To cite this version:**

David Bou Saba. Analyse et commande modulaires de réseaux de lois de bilan en dimension infinie. Automatique / Robotique. Université de Lyon, 2018. Français. NNT : 2018LYSEI084 . tel-02063262

**HAL Id: tel-02063262**

**<https://theses.hal.science/tel-02063262v1>**

Submitted on 11 Mar 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



# INSA

N° d'ordre NNT : 2018LYSEI084

**THESE de DOCTORAT DE L'UNIVERSITE DE LYON**  
Opérée au sein de l'  
**Institut National des Sciences Appliquées de Lyon**

**Ecole Doctorale N° 160**  
**Electronique, Electrotechnique, Automatique**

**Spécialité de doctorat** : Automatique

Soutenue publiquement le 26/11/2018, par :  
**David BOU SABA**

---

## **Analyse et commande modulaires de réseaux de lois de bilan en dimension infinie**

---

Devant le jury composé de :

**Christophe Prieur**  
**Sabine Mondié**

DR, CNRS  
DR, CINVESTAV

Gipsa-lab, Grenoble  
Mexico

Rapporteur  
Rapporteure

**Alexandre Seuret**  
**Delphine Bresch-Pietri**

DR, CNRS  
Maître-Assistante

LAAS, Toulouse  
CAS, MINES Paris Tech

Examineur  
Examinatrice

**Wilfrid Marquis-Favre**  
**Federico Bribiesca-Argomedeo**  
**Michael Di Loreto**  
**Damien Eberard**

PR, INSA de Lyon  
MCF, INSA de Lyon  
MCF, INSA de Lyon  
MCF, INSA de Lyon

Ampère Lab, INSA Lyon  
Ampère Lab, INSA Lyon  
Ampère Lab, INSA Lyon  
Ampère Lab, INSA Lyon

Directeur de thèse  
Co-directeur de thèse  
Encadrant de thèse  
Encadrant de thèse



**Département FEDORA – INSA Lyon - Ecoles Doctorales – Quinquennal 2016-2020**

SIGLE	ÉCOLE DOCTORALE	NOM ET COORDONNEES DU RESPONSABLE
<b>CHIMIE</b>	<b><u>CHIMIE DE LYON</u></b> <a href="http://www.edchimie-lyon.fr">http://www.edchimie-lyon.fr</a> Sec. : Renée EL MELHEM Bât. Blaise PASCAL, 3e étage <a href="mailto:secretariat@edchimie-lyon.fr">secretariat@edchimie-lyon.fr</a> INSA : R. GOURDON	<b>M. Stéphane DANIELE</b> Institut de recherches sur la catalyse et l'environnement de Lyon IRCELYON-UMR 5256 Équipe CDFA 2 Avenue Albert EINSTEIN 69 626 Villeurbanne CEDEX <a href="mailto:directeur@edchimie-lyon.fr">directeur@edchimie-lyon.fr</a>
<b>E.E.A.</b>	<b><u>ÉLECTRONIQUE,</u></b> <b><u>ÉLECTROTECHNIQUE,</u></b> <b><u>AUTOMATIQUE</u></b> <a href="http://edeea.ec-lyon.fr">http://edeea.ec-lyon.fr</a> Sec. : M.C. HAVGOUDOUKIAN <a href="mailto:ecole-doctorale.eea@ec-lyon.fr">ecole-doctorale.eea@ec-lyon.fr</a>	<b>M. Gérard SCORLETTI</b> École Centrale de Lyon 36 Avenue Guy DE COLLONGUE 69 134 Écully Tél : 04.72.18.60.97 Fax 04.78.43.37.17 <a href="mailto:gerard.scorletti@ec-lyon.fr">gerard.scorletti@ec-lyon.fr</a>
<b>E2M2</b>	<b><u>ÉVOLUTION, ÉCOSYSTÈME,</u></b> <b><u>MICROBIOLOGIE, MODÉLISATION</u></b> <a href="http://e2m2.universite-lyon.fr">http://e2m2.universite-lyon.fr</a> Sec. : Sylvie ROBERJOT Bât. Atrium, UCB Lyon 1 Tél : 04.72.44.83.62 INSA : H. CHARLES <a href="mailto:secretariat.e2m2@univ-lyon1.fr">secretariat.e2m2@univ-lyon1.fr</a>	<b>M. Fabrice CORDEY</b> CNRS UMR 5276 Lab. de géologie de Lyon Université Claude Bernard Lyon 1 Bât. Géode 2 Rue Raphaël DUBOIS 69 622 Villeurbanne CEDEX Tél : 06.07.53.89.13 <a href="mailto:cordey@univ-lyon1.fr">cordey@univ-lyon1.fr</a>
<b>EDISS</b>	<b><u>INTERDISCIPLINAIRE</u></b> <b><u>SCIENCES-SANTÉ</u></b> <a href="http://www.ediss-lyon.fr">http://www.ediss-lyon.fr</a> Sec. : Sylvie ROBERJOT Bât. Atrium, UCB Lyon 1 Tél : 04.72.44.83.62 INSA : M. LAGARDE <a href="mailto:secretariat.ediss@univ-lyon1.fr">secretariat.ediss@univ-lyon1.fr</a>	<b>Mme Emmanuelle CANET-SOULAS</b> INSERM U1060, CarMeN lab, Univ. Lyon 1 Bâtiment IMBL 11 Avenue Jean CAPELLE INSA de Lyon 69 621 Villeurbanne Tél : 04.72.68.49.09 Fax : 04.72.68.49.16 <a href="mailto:emmanuelle.canet@univ-lyon1.fr">emmanuelle.canet@univ-lyon1.fr</a>
<b>INFOMATHS</b>	<b><u>INFORMATIQUE ET</u></b> <b><u>MATHÉMATIQUES</u></b> <a href="http://edinfomaths.universite-lyon.fr">http://edinfomaths.universite-lyon.fr</a> Sec. : Renée EL MELHEM Bât. Blaise PASCAL, 3e étage Tél : 04.72.43.80.46 Fax : 04.72.43.16.87 <a href="mailto:infomaths@univ-lyon1.fr">infomaths@univ-lyon1.fr</a>	<b>M. Luca ZAMBONI</b> Bât. Braconnier 43 Boulevard du 11 novembre 1918 69 622 Villeurbanne CEDEX Tél : 04.26.23.45.52 <a href="mailto:zamboni@maths.univ-lyon1.fr">zamboni@maths.univ-lyon1.fr</a>
<b>Matériaux</b>	<b><u>MATÉRIAUX DE LYON</u></b> <a href="http://ed34.universite-lyon.fr">http://ed34.universite-lyon.fr</a> Sec. : Marion COMBE Tél : 04.72.43.71.70 Fax : 04.72.43.87.12 Bât. Direction <a href="mailto:ed.materiaux@insa-lyon.fr">ed.materiaux@insa-lyon.fr</a>	<b>M. Jean-Yves BUFFIÈRE</b> INSA de Lyon MATEIS - Bât. Saint-Exupéry 7 Avenue Jean CAPELLE 69 621 Villeurbanne CEDEX Tél : 04.72.43.71.70 Fax : 04.72.43.85.28 <a href="mailto:jean-yves.buffiere@insa-lyon.fr">jean-yves.buffiere@insa-lyon.fr</a>
<b>MEGA</b>	<b><u>MÉCANIQUE, ÉNERGÉTIQUE,</u></b> <b><u>GÉNIE CIVIL, ACOUSTIQUE</u></b> <a href="http://edmega.universite-lyon.fr">http://edmega.universite-lyon.fr</a> Sec. : Marion COMBE Tél : 04.72.43.71.70 Fax : 04.72.43.87.12 Bât. Direction <a href="mailto:mega@insa-lyon.fr">mega@insa-lyon.fr</a>	<b>M. Philippe BOISSE</b> INSA de Lyon Laboratoire LAMCOS Bâtiment Jacquard 25 bis Avenue Jean CAPELLE 69 621 Villeurbanne CEDEX Tél : 04.72.43.71.70 Fax : 04.72.43.72.37 <a href="mailto:philippe.boisse@insa-lyon.fr">philippe.boisse@insa-lyon.fr</a>
<b>ScSo</b>	<b><u>ScSo*</u></b> <a href="http://ed483.univ-lyon2.fr">http://ed483.univ-lyon2.fr</a> Sec. : Viviane POLSINELLI Brigitte DUBOIS INSA : J.Y. TOUSSAINT Tél : 04.78.69.72.76 <a href="mailto:viviane.polsinelli@univ-lyon2.fr">viviane.polsinelli@univ-lyon2.fr</a>	<b>M. Christian MONTES</b> Université Lyon 2 86 Rue Pasteur 69 365 Lyon CEDEX 07 <a href="mailto:christian.montes@univ-lyon2.fr">christian.montes@univ-lyon2.fr</a>



# Résumé

Les réseaux de lois de bilan sont définis par l'interconnexion, via des conditions aux bords, de modules élémentaires individuellement caractérisés par la conservation de certaines quantités. Des applications industrielles se trouvent dans les réseaux de lignes de transmission électriques (réseaux HVDC), hydrauliques et pneumatiques (réseaux de distribution du gaz, de l'eau et du fuel). La thèse se concentre sur l'analyse modulaire et la commande au bord d'une ligne élémentaire représentée par un système de lois de bilan en dimension infinie, où la dynamique de la ligne est prise en considération au moyen d'équations aux dérivées partielles (EDP) hyperboliques linéaires du premier ordre et couplées deux à deux. Cette dynamique permet de modéliser d'une manière rigoureuse les phénomènes de transport et les vitesses finies de propagation, aspects normalement négligés dans le régime transitoire. Les développements de ces travaux sont des outils d'analyse qui testent la stabilité du système, et de commande au bord pour la stabilisation autour d'un point d'équilibre.

Dans la partie analyse, nous considérons un système de lois de bilan avec des couplages statiques aux bords et anti-diagonaux à l'intérieur du domaine. Nous proposons des conditions suffisantes de stabilité, tant explicites en termes des coefficients du système, que numériques par la construction d'un algorithme. La méthode se base sur la reformulation du problème en une analyse, dans le domaine fréquentiel, d'un système à retard obtenu en appliquant une transformation backstepping au système de départ.

Dans le travail de stabilisation, un couplage avec des dynamiques décrites par des équations différentielles ordinaires (EDO) aux deux bords des EDP est considéré. Nous développons une transformation backstepping (bornée et inversible) et une loi de commande qui, à la fois stabilise les EDP à l'intérieur du domaine et la dynamique des EDO, et élimine les couplages qui peuvent potentiellement mener à l'instabilité. L'efficacité de la loi de commande est illustrée par une simulation numérique.

## Mots clés

Équations aux dérivées partielles hyperboliques, systèmes à paramètres répartis, stabilisation par backstepping, équations aux différences, systèmes à retard, analyse de stabilité.



# Remerciements

Je remercie en premier lieu mes encadrants de thèse Wilfrid Marquis-Favre, Federico Bribiesca-Argomedo, Michael Di Loreto et Damien Eberard. Federico pour le support technique, les idées innovantes, les pistes de collaboration que tu as créées, pour m'avoir guidé afin d'acquérir les compétences mathématiques nécessaires, pour tes présentations pédagogiques et pour m'avoir fait confiance pour les calculs. Michael, pour ton engagement indéniabte, pour ton intérêt envers le sujet, ta générosité que j'ai appréciée pendant chaque réunion et pour tes avis détaillés et ciblés. Damien, pour ton enthousiasme et ton recul envers tout problème et pour les conseils de présentation. Wilfrid, pour les détails administratifs, pour l'apprentissage que tu m'as offert au niveau de la pédagogie et pour toutes les discussions qui étaient essentielles pour construire ce manuscrit. Merci à vous tous pour vos qualités scientifiques et humaines irréprochables.

Je voudrais aussi exprimer toute ma gratitude aux chercheurs Florent Di Meglio et Jean Auriol du laboratoire *CAS* (centre automatique et systèmes) de Mines ParisTech. J'ai apprécié les projets de collaboration que nous avons effectués, ainsi que vos retours constructifs et qui ont permis de compléter les résultats. Je remercie également Richard Kern, doctorant du Department of Automatic Control Engineering du TUM (Technical University of Munich) en Allemagne pour les échanges au niveau analytique et numérique.

Mes remerciements s'adressent aussi aux rapporteurs du manuscrit M. Christophe Prieur et Mme Sabine Mondié. Je valorise votre retour qui a ouvert des perspectives, m'a permis d'améliorer certaines idées du manuscrit et a constitué une base pour la préparation de la soutenance.

Je tiens à remercier les enseignants au département Génie Industriel à l'INSA de Lyon, Romain Delpoux, Laurent Pietrac, Corinne Subai et Julien Fondrevelle. Vous m'avez appris des techniques d'enseignement, de préparation et d'organisation d'une séance. Je remercie également mes collègues, ainsi que les permanents du laboratoire Ampère à l'INSA de Lyon, une communauté scientifique que j'ai côtoyée au quotidien. J'ai admiré les discussions pendant les pauses café et la pause à midi. Merci à vous tous pour l'accueil chaleureux et la solidarité que m'avez montré suite à l'accident que j'ai eu pendant la thèse. Je remercie spécifiquement Edwige Buttet qui m'a contacté au Liban en me proposant son aide.

Merci à mes amis dont j'ai fait la connaissance à Lyon et qui m'ont offert un soutien moral le long de ma thèse. Je pense à Layal, Khalil, Charbel, Tony, Nicole, Maria, Rosy, Serge, Ghady, Natalia, et Adnan. Merci aussi à l'association **Mission de Vie** (France et Liban) représentée par Nadine Cisek, et à tous ceux qui étaient un grand support à distance, Carlos, Elie, Vicky, Elie, Samer, Marcelle.

Enfin, je remercie ma famille qui m'a tant poussé à aller au-delà de mes compétences et qui a effectué un long trajet pour pouvoir assister à la soutenance. Vous étiez ma muse et ma source de motivation.





*À mes grand-mères EUGÉNIE et JAMILEH*

*Vous avez quitté ce monde  
alors que j'effectuais ma thèse  
Je dédie ainsi ce manuscrit  
à vos esprits innocents  
en vous remerciant pour mon bonheur d'enfance  
et pour mon parcours d'adolescence*



# Table des matières

Table des matières	i
Liste des figures	iii
Liste des tableaux	v
Abbréviations	vi
Nomenclature et notations	vii
<b>1 Introduction</b>	<b>1</b>
1.1 Contexte du travail . . . . .	3
1.2 Plan du mémoire et contributions . . . . .	8
1.3 Liste des publications et collaborations . . . . .	9
<b>2 État de l’art</b>	<b>11</b>
2.1 Introduction . . . . .	13
2.2 Analyse des systèmes de lois de bilan . . . . .	13
2.3 Commande des systèmes de lois de bilan . . . . .	25
2.4 Conclusion . . . . .	36
<b>3 Analyse de stabilité d’une classe d’EDP hyperboliques linéaires couplées 2 à 2</b>	<b>41</b>
3.1 Introduction . . . . .	43
3.2 CNS de stabilité . . . . .	46
3.3 CS de stabilité . . . . .	54
3.4 Domaines de stabilité . . . . .	74
3.5 Conclusion et perspectives . . . . .	79
<b>4 Stabilisation par Backstepping d’un système linéaire d’EDO-EDP-EDO couplées</b>	<b>81</b>
4.1 Introduction . . . . .	83
4.2 Synthèse de la commande par backstepping . . . . .	86
4.3 Simulation numérique . . . . .	98
4.4 Conclusion et perspectives . . . . .	111
<b>5 Conclusion et perspectives</b>	<b>113</b>
5.1 Perspectives du travail de l’analyse . . . . .	117
5.2 Perspectives du travail sur la commande . . . . .	120
<b>A Dérivation des équations du télégraphiste à partir de la théorie de Maxwell sur l’électromagnétisme pour une ligne de transmission coaxiale</b>	<b>125</b>

<b>B</b>	<b>Une seconde méthode pour démontrer le caractère bien-posé d'un système (cible) d'EDP hyperboliques</b>	<b>133</b>
<b>C</b>	<b>Analyse d'une classe d'EDP hyperboliques couplées 2 à 2 avec des coefficients de réflexion aux bords nuls</b>	<b>137</b>
<b>D</b>	<b>Dérivation des EDP satisfaites par les noyaux d'une transformation de backstepping inverse</b>	<b>143</b>
<b>E</b>	<b>Expressions explicites des noyaux d'une transformation backstepping</b>	<b>155</b>
E.1	Équations intégrales . . . . .	157
E.2	Approximations successives . . . . .	158
E.3	Expressions explicites des noyaux . . . . .	161
E.4	Expression de $N(\theta)$ . . . . .	163
E.5	Majoration de $ N(\theta) $ et de $ N'(\theta) $ . . . . .	164
E.6	Courbes de variation de $N(\theta)$ . . . . .	167
<b>F</b>	<b>Résolution du terme intégral de la condition nécessaire et suffisante de stabilité</b>	<b>173</b>
<b>G</b>	<b>Pseudo-code de l'algorithme de l'approximation numérique de la CNS</b>	<b>179</b>
<b>H</b>	<b>Preuves des lemmes du chapitre 4</b>	<b>185</b>
H.1	Démonstration du lemme 7 . . . . .	187
H.2	Démonstration du lemme 9 . . . . .	192
H.3	Démonstration du lemme 10 . . . . .	198
H.4	Démonstration du lemme 11 . . . . .	200
<b>I</b>	<b>Caractère bien-posé de deux équations intégrales de Volterra couplées</b>	<b>207</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>211</b>

# Liste des figures

1.1	Structure d'une cellule élémentaire . . . . .	4
1.2	Modèle d'une pièce infinitésimale d'un câble de télégraphe . . . . .	6
1.3	Analogie entre les systèmes de transmission électrique, hydraulique et pneumatique . . . . .	7
2.1	Lignes caractéristiques en bleu (respectivement rouge) associées à l'EDP (2.7a) (respectivement (2.7b)). . . . .	18
2.2	Dépendance de la solution en un point d'une ligne caractéristique . . . . .	20
3.1	Représentation schématique de la procédure de passage du système EDP au système à retard . . . . .	47
3.2	Schéma récapitulatif de l'équivalence entre la stabilité du système à retard et celle du système de départ . . . . .	51
3.3	Schéma récapitulatif de l'obtention des conditions suffisantes de stabilité . . . . .	54
3.4	Représentation du compact $\mathcal{C}$ . . . . .	64
3.5	Construction de la grille $\mathcal{G}^0$ . . . . .	68
3.6	Boule fermée $\bar{\mathcal{B}}(\bar{s}, \rho)$ . . . . .	68
3.7	Grille raffinée $\mathcal{G}^1(\bar{s})$ . . . . .	69
3.8	Grille raffinée $\mathcal{G}^2(\bar{s})$ . . . . .	69
3.9	Grille raffinée après une troisième itération . . . . .	70
3.10	Grille raffinée après une quatrième itération . . . . .	71
3.11	Grilles principales et raffinées créées par l'algorithme . . . . .	72
3.12	Organigramme représentatif de l'algorithme . . . . .	73
3.13	Domaines de stabilité en fonction du couple $(\rho, \sigma^{-+})$ . . . . .	75
3.14	Domaines de stabilité en fonction du couple $(\rho, \sigma^{+-})$ . . . . .	76
3.15	Domaines de stabilité en fonction du couple $(q, \sigma^{+-})$ . . . . .	76
3.16	Domaines de stabilité en fonction du couple $(q, \sigma^{-+})$ . . . . .	77
3.17	Domaines de stabilité en fonction du couple $(\sigma^{+-}, \sigma^{-+})$ . . . . .	77
3.18	Domaines de stabilité en fonction du couple $(\rho, q)$ . . . . .	78
3.19	Schéma récapitulatif du déroulement de l'analyse . . . . .	79
4.1	Représentation schématique du système EDO-EDP-EDO couplées . . . . .	85
4.2	Représentation schématique du système cible . . . . .	87
4.3	Schéma récapitulatif des lemmes . . . . .	96
4.4	Représentation schématique des effets de stabilisation de chaque terme de la loi de commande . . . . .	97
4.5	Schéma de discrétisation des EDP des noyaux . . . . .	99
4.6	Simulation de l'évolution des états EDP et de la norme dans $\chi$ du système interconnecté EDO-EDP-EDO en boucle ouverte . . . . .	105
4.7	Simulation de l'évolution des états EDO du système interconnecté EDO-EDP-EDO en boucle ouverte . . . . .	106
4.8	Simulation des noyaux de la transformation backstepping . . . . .	107

4.9	Simulation des composantes de la commande . . . . .	108
4.10	Simulation de l'évolution des états EDP et de la norme dans $\chi$ du système interconnecté EDO-EDP-EDO en boucle fermée . . . . .	109
4.11	Simulation de l'évolution des états EDO du système interconnecté EDO-EDP-EDO en boucle fermée . . . . .	110
5.1	Représentation schématique du système EDP-EDO-EDP couplées . . . . .	122
A.1	Ligne de transmission coaxiale . . . . .	127
A.2	Distribution des champs électrique et magnétique dans une ligne de transmission coaxiale . . . . .	130
B.1	Lignes caractéristiques associées aux EDP du système cible . . . . .	134
E.1	Variation de $N(\theta)$ pour $\sigma^{+-}\sigma^{-+} \geq 0, \rho q \geq 0$ . . . . .	168
E.2	Variation de $N(\theta)$ pour $\sigma^{+-}\sigma^{-+} \geq 0, \rho q \geq 0$ . . . . .	168
E.3	Variation de $N(\theta)$ pour $\sigma^{+-}\sigma^{-+} \geq 0, \rho q < 0$ . . . . .	169
E.4	Variation de $N(\theta)$ pour $\sigma^{+-}\sigma^{-+} \geq 0, \rho q < 0$ . . . . .	169
E.5	Variation de $N(\theta)$ pour $\sigma^{+-}\sigma^{-+} < 0, \rho q \geq 0$ . . . . .	170
E.6	Variation de $N(\theta)$ pour $\sigma^{+-}\sigma^{-+} < 0, \rho q \geq 0$ . . . . .	170
E.7	Variation de $N(\theta)$ pour $\sigma^{+-}\sigma^{-+} < 0, \rho q < 0$ . . . . .	171
E.8	Variation de $N(\theta)$ pour $\sigma^{+-}\sigma^{-+} < 0, \rho q < 0$ . . . . .	171
H.1	Lignes caractéristiques associées à $\alpha$ dans $\Omega_1$ et $\Omega_2$ . . . . .	188
H.2	Lignes caractéristiques associées à $\beta$ dans $\Omega_3, \Omega_4$ et $\Omega_5$ . . . . .	188
H.3	Lignes caractéristiques associées à $P^{uu}, P^{uv}$ et $\tilde{g}$ . . . . .	201
H.4	Lignes caractéristiques associées à $S^{uu}, S^{uv}$ et $\tilde{h}$ . . . . .	202

# Liste des tableaux

2.1	Comparaison entre deux théorèmes de la littérature pour l'analyse de stabilité des systèmes quasi-linéaires de lois de conservation . . . . .	19
2.2	Comparaison entre deux théorèmes de la littérature pour l'analyse des systèmes quasi-linéaires de lois de bilan . . . . .	20
2.3	Comparaison des trois approches d'analyse de stabilité dans la littérature . . . . .	21
2.4	Comparaison des analyses de stabilité des équations aux différences avec retard(s) distribué(s) . . . . .	24
3.1	Comparaison entre la condition exigée par la proposition 3 du présent travail et une autre condition de la littérature . . . . .	61
3.2	Exemples numériques . . . . .	62
4.1	Sources potentielles d'instabilité du système de départ . . . . .	86
A.1	Définitions et unités . . . . .	126
E.1	Exemples académiques pour différents signes de $\sigma^{+-}\sigma^{-+}$ et $\rho q$ . . . . .	167



# Abbreviations

**AC** Alternating Current (courant alternatif)

**CNS** Condition Nécessaire et Suffisante

**CS** Condition Suffisante

**EDO** Équations Différentielles Ordinaires

**EDP** Équations aux Dérivées Partielles

**HVDC** High Voltage Direct Current (haute tension à courant continu)

**RHP** Right-Half Plane (demi-plan droit)

**SAR** Système À Retard

# Nomenclature et notations

$d$	Induction électrique
$e$	Champ électrique
$b$	Induction magnétique
$h$	Champ magnétique
$p$	Polarisation
$m$	Magnétisation
$q_v$	Densité de charge électrique
$\vec{j}$	Densité de courant
$\sigma$	Conductivité
$\mu_0$	Perméabilité magnétique du vide
$\varepsilon_0$	Permittivité diélectrique du vide
$R$	Résistance de la ligne par unité de longueur
$L$	Inductance de la ligne par unité de longueur
$C$	Capacité de la ligne par unité de longueur
$G$	Conductance de la ligne par unité de longueur
$\bar{v}$	Tension
$\bar{i}$	Courant
$\partial_t$	Dérivée partielle par rapport à la variable $t$
$\nabla \cdot$	Opérateur de divergence
$\nabla \times$	Opérateur de rotationnel
$\frac{1}{r_1}$	Vitesse de propagation
$\frac{1}{r_2}$	Vitesse de propagation
$\sigma^{ij}, i, j \in \{+, -\}$	Coefficients de couplage à l'intérieur du domaine
$q$	Coefficient de couplage au bord
$\rho$	Coefficient de couplage au bord
$u$	État EDP du système de départ en coordonnées de Riemann
$v$	État EDP du système de départ en coordonnées de Riemann
$\alpha$	État EDP du système cible en coordonnées de Riemann
$\beta$	État EDP du système cible en coordonnées de Riemann
$X$	État EDO du système de départ
$Y$	État EDO du système de départ
$\xi$	État EDO du système cible
$\eta$	État EDO du système cible
$U$	Entrée de commande
$A_0$	Matrice de la dynamique de l'état $X$
$A_1$	Matrice de la dynamique de l'état $Y$
$B_0$	Matrice d'entrée

- $E_0$  Vecteur de couplage entre les états  $v$  et  $X$   
 $E_1$  Vecteur de couplage entre les états  $u$  et  $Y$   
 $C_0$  Vecteur de couplage entre les états  $X$  et  $u$   
 $C_1$  Vecteur de couplage entre les états  $Y$  et  $v$   
 $P^{ij}, i, j \in \{1, 2\}$  Noyaux d'une transformation de backstepping directe  
 $P^{ij}, i, j \in \{u, v\}$  Noyaux d'une transformation de backstepping directe  
 $L^{ij}, i, j \in \{1, 2\}$  Noyaux d'une transformation de backstepping inverse  
 $K^{ij}, i, j \in \{1, 2\}$  Noyaux d'une transformation de backstepping inverse  
 $K^{ij}, i, j \in \{\alpha, \beta\}$  Noyaux d'une transformation de backstepping inverse  
 $N$  Noyau d'un retard distribué  
 $\hat{\phi}$  Quasi-polynôme caractéristique associé à une équation à retard dans le domaine fréquentiel  
 $\mathbb{1}$  Fonction caractéristique  
 $J_n, n \in \mathbb{Z}$  Fonctions de Bessel de première espèce  
 $I_n, n \in \mathbb{Z}$  Fonctions de Bessel modifiées de première espèce  
 $\mathbb{N}$  Ensemble des entiers naturels  
 $\mathbb{R}$  Ensemble des réels  
 $\mathbb{R}_+$  Ensemble des réels positifs  
 $L^1$  Ensemble des fonctions absolument intégrables à valeurs dans  $\mathbb{R}$   
 $L^2$  Ensemble des fonctions carré intégrables à valeurs dans  $\mathbb{R}$   
 $L^\infty$  Ensemble des fonctions bornées à valeurs dans  $\mathbb{R}$   
 $C^k, k \in \mathbb{N}$  Ensemble de fonctions  $k$  fois dérivables et dont la dérivée d'ordre  $k$  est continue  
 $\mathcal{A}$  Algèbre de Banach munie du produit de convolution standard et constituée des fonctions BIBO-stables généralisées  
 $\|\cdot\|_2$  norme spectrale d'une matrice

# Introduction

**Sommaire**

---

<b>1.1</b>	<b>Contexte du travail</b>	<b>3</b>
<b>1.2</b>	<b>Plan du mémoire et contributions</b>	<b>8</b>
<b>1.3</b>	<b>Liste des publications et collaborations</b>	<b>9</b>

---

## 1.1 Contexte du travail

Devant le besoin mondial en différentes formes d'énergie, les ingénieurs sont confrontés au défi de la répartition des ressources souvent assurée par des réseaux de distribution (d'électricité, d'eau, de gaz naturel, etc.). Ces réseaux évoluent vers des topologies complexes, des structures décentralisées et des grandes échelles de transmission. Avec cette problématique, la nécessité de transmettre l'énergie avec une performance désirée requiert des études de stabilité et de conception de lois de commande pour différents types d'interconnexion et qui répondent à certaines exigences ainsi qu'au niveau de complexité de la représentation mathématique associée.

Bien qu'il existe des méthodes classiques de commande localisées aux terminaux d'un réseau, les outils adoptés négligent généralement la dynamique et les effets de couplage dans la ligne et sur les nœuds aux bords des lignes. L'effet de ces couplage est crucial quant à la stabilité du système et à la synthèse de lois de commande. Par ailleurs, l'utilisation d'un modèle réduit entraîne des erreurs qui apparaissent suite à des dynamiques non modélisées, mène à un degré de conservatisme dans le développement de la commande, et force l'apparition des effets non désirables comme les vibrations en hautes fréquences.

L'approche que nous adoptons afin de résoudre ces problèmes est une approche modulaire d'un réseau de transmission. Un module consiste par exemple en une ligne de transmission représentée par un modèle générique tenant compte des phénomènes physiques des points de connexion. Le travail de la thèse s'inscrit dans l'objectif de développer des outils modulaires d'analyse et de commande au bord. Les outils d'analyse servent à tester la stabilité d'une ligne en mettant à disposition des conditions de stabilité, et les outils de commande, à stabiliser les états dynamiques d'une ligne de transmission en un point d'équilibre spécifié. La commande "*au bord*" signifie que celle-ci est appliquée à une extrémité de la ligne (à un nœud ou à un terminal). Le réseau sera ensuite traité comme une interconnexion de ces modules élémentaires. Les outils conçus seront étendus en interconnectant deux lignes par un nœud ayant des propriétés statiques ou dynamiques et ainsi de suite. L'originalité apportée est la représentation fine d'un module par un système à paramètres répartis en dimension infinie. Une particularité importante de cette approche est la prise en compte de toutes les dynamiques présentes avec des vitesses finies de propagation grâce aux équations aux dérivées partielles (EDP), ainsi que la considération des couplages à l'intérieur de la ligne (termes sources) et à ses deux extrémités (réflexions statiques ou couplages dynamiques), ce qui permet une étude du régime transitoire.

Un moyen efficace de représenter le comportement d'un système dynamique dans un domaine de l'espace se fait fondamentalement grâce aux lois de bilan qui correspondent aux principes de conservation de l'énergie, de la masse et de la quantité de mouvement. Ainsi, un module élémentaire est décrit par des lois de bilan qui exposent son comportement et mettent en relief les échanges en termes de gains et de pertes le long de la ligne, modélisant donc avec précision l'évolution dans le temps et dans l'espace des grandeurs importantes pour l'analyse et la stabilisation.

La loi de bilan expose que le taux de variation dans le temps d'une certaine quantité physique à l'intérieur d'un domaine de l'espace est égal au flux total de cette grandeur traversant la frontière du domaine plus la somme algébrique de sa production ou consommation à l'intérieur du domaine. Une description mathématique découle de cette définition. L'équation aux dérivées partielles suivante décrit un système mono-dimensionnel (dans l'espace normalisé

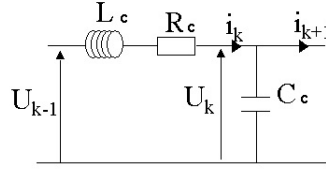


FIGURE 1.1 – Structure d’une cellule élémentaire [Bregeon et al., 2003].

$x \in [0, 1]$ , et pour un temps  $t \geq 0$ ) de  $n$  lois de bilan [Bastin et al., 2015].

$$\frac{\partial}{\partial t} w(t, x) + \mathcal{F}(w(t, x)) \frac{\partial}{\partial x} w(t, x) = \mathcal{G}(w(t, x)) \quad (1.1)$$

avec  $w: \mathbb{R}_+ \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^n$  est un vecteur de  $n$  variables d’état,  $\mathcal{F}$  est lié aux densités de flux et  $\mathcal{G}$  à la production et la consommation dans le domaine.

Le système (1.1) est hyperbolique quand  $\mathcal{F}(w)$  possède  $n$  valeurs propres réelles, appelées “vitesses caractéristiques”. Une loi de conservation est un cas particulier d’une loi de bilan avec des termes sources nuls (*i.e.*  $\mathcal{G} \equiv 0$ ).

Un exemple de système régi par des lois de bilan consiste en des réseaux de lignes à haute tension et courant continu (HVDC). Ces réseaux sont utilisés pour la distribution d’énergie électrique sur de longues distances [Bregeon et al., 2003], dus aux avantages qu’ils fournissent par rapport aux transmissions à courant alternatif (AC). Les systèmes HVDC peuvent délivrer une puissance plus grande par conducteur avec moins de perte. Ils exigent une construction plus simple d’une ligne, des pylônes de transmission plus petites, moins d’isolants, ne nécessitent pas de compensation de la perte en puissance réactive, ne présentent pas un effet de peau et permettent d’économiser environ 30% dans la construction de la ligne [Okba et al., 2012]. Néanmoins, le problème de commande des flux de puissance pour une transmission satisfaisante de l’énergie et sa répartition reste un grand défi à relever.

Un modèle simplifié d’une ligne électrique à travers un nombre fini d’éléments consiste en une succession de cellules élémentaires [Poullain et al., 2001]. La structure d’une cellule élémentaire  $k$  est donnée sur la figure (1.1) et consiste en une capacité  $C_c$  en parallèle avec une inductance  $L_c$  et une résistance  $R_c$  en série. La commande d’une ligne en dimension finie avec cette représentation contribue à des améliorations concernant les oscillations et les dépassements par rapport aux techniques classiques où la ligne n’est pas modélisée [Bregeon et al., 2003].

Dans cette thèse, nous privilégions une représentation en dimension infinie de la ligne sous la forme de système à paramètres répartis. D’une part, les cellules élémentaires ne représentent pas le meilleur choix d’un modèle pour une solution transitoire alors que les systèmes à paramètres répartis décrivent le phénomène de propagation des ondes et les réflexions aux extrémités de la ligne avec une meilleure précision et n’introduisent pas une résonance artificielle, aspect observé par le modèle d’un nombre fini de cellules élémentaires [Khatir et al., 2006]. D’autre part, la discrétisation d’une équation d’ondes par rapport aux coordonnées spatiales (ou semi-discrétisation), aboutissant à un système d’équations différentielles ordinaires (EDO), fait apparaître un problème en hautes fréquences et cause une perte de commandabilité quand le pas de discrétisation est trop faible [Zuazua, 2005]. La semi-discrétisation d’une EDP continue génère des vibrations en hautes fréquences et en essayant de les contrôler, nous nous éloignons de la commande exigée pour le système continu. La permutation de la discrétisation numérique avec la commande n’aboutit pas au même

résultat.

$$\begin{aligned} & [\text{Modèle Continu} + \text{Observation/Commande}] + \text{Discrétisation} \\ & \neq \\ & [\text{Modèle Continu} + \text{Discrétisation}] + \text{Observation/Commande} \end{aligned}$$

Il demeure ainsi plus judicieux de considérer le système en dimension infinie, décrit par des EDP avec toutes les valeurs propres, qui modélise d'une manière exacte les phénomènes de propagation des champs électromagnétiques et le régime transitoire. Nous nous appuyons alors sur les équations du télégraphiste décrivant l'évolution de la tension et du courant dans une ligne électrique.

Dans un aperçu historique, en 1880 Oliver Heaviside (1850-1925) fut le premier à obtenir les équations du télégraphiste [Heaviside, 1892]. Sir William Thomson (1824–1907), connu sous le nom de Lord Kelvin a établi en 1884 les équations classiques du télégraphiste pour les câbles électriques [Thomson, 1884] en se basant sur la théorie des circuits qui est une généralisation des observations d'Ohm, de Faraday, de Henry, de Kirchhoff et d'autres. Par ailleurs, James Maxwell (1831-1879) a formulé en 1873 sa théorie sur les champs électromagnétiques [Maxwell, 1881]. Ces deux théories coexistèrent séparément pendant plusieurs décades [Schelkunoff, 1955]. Un fait intéressant à évoquer est que les fondateurs de la théorie du circuit et James Maxwell étaient contemporains (Georg Ohm (1789-1854), Michael Faraday (1791-1867), André-Marie Ampère (1775-1836), Gustav Kirchhoff (1824-1887), Joseph Henry (1797-1878)), et les lois d'Ohm, de Faraday, d'Ampère, de Kirchhoff et de Henry sur l'électricité et le magnétisme furent trouvées avant que Maxwell eut sorti sa théorie. La théorie des circuits est plus simple et présente un côté pratique dans l'ingénierie. Néanmoins, John Carson déclare dans [Carson, 1927] que cette théorie inclut plusieurs hypothèses : elle ignore la vitesse finie de propagation des perturbations électromagnétiques et par suite le phénomène de radiation. Elle représente un réseau par un nombre fini de coordonnées et elle approche les relations entre le courant total, les charges et les forces électromotrices, tandis que la théorie sur l'électromagnétisme formule les relations entre le courant, les densités de charge et les champs.

En outre, la théorie des circuits a échoué dans plusieurs problèmes comme les hautes fréquences dans la transmission radio. En conséquence, John Carson a établi les équations classiques du télégraphiste basées sur les équations de Maxwell en termes de potentiels retardés [Carson, 1927]. D'un autre côté, S. A. Schelkunoff a développé les équations généralisées du télégraphiste en se basant également sur les équations de Maxwell [Schelkunoff, 1955]. Les deux articles adoptent une approche fréquentielle dans le domaine de Laplace. Cependant, puisque nous nous sommes intéressés à modéliser une ligne de transmission DC, un développement rigoureux des équations classiques du télégraphiste pour une ligne de transmission coaxiale, basée sur la théorie des champs électromagnétiques de Maxwell est présenté dans l'annexe A avec toutes les hypothèses à prendre en considération. Le lecteur intéressé est invité à se référer à [Orta, 2009], [Bossavit, 1998] et [Magnusson et al., 2000] pour plus de détails concernant la théorie des champs électromagnétiques et les lignes de transmission.

Les équations du télégraphiste décrivant l'évolution de la tension  $\bar{v}$  et du courant  $\bar{i}$  le long d'une ligne de transmission électrique se révèlent être deux EDP hyperboliques linéaires du premier ordre mono-dimensionnelles couplées deux à deux

$$\partial_t \bar{v}(t, x) + \frac{1}{C} \partial_x \bar{i}(t, x) = -\frac{G}{C} \bar{v}(t, x) \quad (1.2a)$$

$$\partial_t \bar{i}(t, x) + \frac{1}{L} \partial_x \bar{v}(t, x) = -\frac{R}{L} \bar{i}(t, x), \quad (1.2b)$$



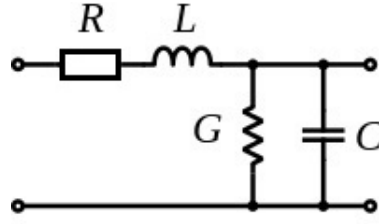


FIGURE 1.2 – Modèle d'une pièce infinitésimale d'un câble de télégraphe.

où  $x \in [0, l]$  et  $t \geq 0$ . Les notations  $\partial_t$  et  $\partial_x$  désignent les dérivées partielles par rapport aux variables  $t$  et  $x$  respectivement.  $L$ ,  $R$ ,  $C$  et  $G$  sont respectivement l'inductance de la ligne par unité de longueur (H/m), la résistance du conducteur par unité de longueur (Ohm/m), la capacité du diélectrique par unité de longueur (F/m) et la conductance du diélectrique par unité de longueur (S/m). Une représentation schématique de ces paramètres dans un modèle infinitésimal d'un câble de télégraphe est donnée sur la figure 1.2.

Les équations (1.2) représentent deux lois de bilan linéaires. Elles sont de la forme de (1.1), où les états sont représentés par le vecteur  $w(t, x) = \begin{bmatrix} \bar{v}(t, x) \\ \bar{i}(t, x) \end{bmatrix}$  avec  $\mathcal{F}(w(t, x)) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} w(t, x)$  et  $\mathcal{G}(w(t, x)) = \begin{bmatrix} -\frac{G}{C} & 0 \\ 0 & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} w(t, x)$ . Une ligne sans perte est caractérisée par des coefficients  $R$  et  $G$  nuls.

La structure de deux EDP hyperboliques couplées est également présente dans les modèles des lignes hydrauliques et pneumatiques en appliquant les lois de bilan. Les équations de Saint-Venant décrivent des écoulements dans des canaux ouverts. Avec les hypothèses d'un canal horizontal, d'une section rectangulaire de largeur constante égale à l'unité et d'un écoulement sans frottement, ces équations s'écrivent [Coron et al., 2007]

$$\partial_t H(t, x) + \partial_x \left( H(t, x) \bar{V}(t, x) \right) = 0 \quad (1.3a)$$

$$\partial_t \bar{V}(t, x) + \partial_x \left( \frac{1}{2} \bar{V}^2(t, x) + gH(t, x) \right) = 0, \quad (1.3b)$$

où  $H(t, x)$  représente le niveau du liquide,  $\bar{V}(t, x)$  sa vitesse d'écoulement et  $g$  dénote l'accélération de pesanteur. Le modèle simplifié d'un écoulement laminaire d'un gaz compressible dans un oléoduc est donné par les équations suivantes [Rager et al., 2015]

$$\partial_t \dot{m}(t, x) = -A \partial_x P(t, x) - AR \dot{m}(t, x) \quad (1.4a)$$

$$\partial_t P(t, x) = -\frac{c^2}{A} \partial_x \dot{m}(t, x) \quad (1.4b)$$

où  $P(t, x)$  et  $\dot{m}(t, x)$  sont respectivement la pression et le débit massique du gaz,  $A$  est la section interne du tube,  $c$  est la vitesse du son et  $R$  est la résistance de la ligne. Les lois de bilan (1.3) et (1.4) dans le cas des écoulements hydraulique et pneumatique respectivement sont initialement non-linéaires, et peuvent être linéarisées autour d'un point d'équilibre [Bastin and Coron, 2016] afin d'obtenir un système de deux EDP hyperboliques linéaires couplées similaires à (1.2) avec des coefficients adaptés. De ce fait, une analogie entre les systèmes de transmission électrique, hydraulique et pneumatique<sup>1</sup> peut se faire. L'équivalence (dans le sens de cette analogie) entre les états est résumée sur la figure 1.3.

1. Remarquons que le produit  $\rho g H$  est équivalent à une pression statique et permet d'avoir une analogie complète en termes de variables de puissance.

<i>Système</i>	Électrique		Hydraulique		Pneumatique
	Tension ( $\bar{v}$ )	$\Leftrightarrow$	Niveau ( $H$ )	$\Leftrightarrow$	Pression ( $P$ )
<i>États</i>	Courant ( $\bar{i}$ )	$\Leftrightarrow$	Vitesse d'écoulement ( $\bar{V}$ )	$\Leftrightarrow$	Débit massique ( $\dot{m}$ )

FIGURE 1.3 – Analogie entre les systèmes de transmission électrique, hydraulique et pneumatique.

Il apparaît ainsi pertinent de considérer dans notre étude une classe générale d'EDP hyperboliques linéaires du premier ordre couplées deux à deux et mono-dimensionnelles, qui représentent les équations du télégraphiste, les équations de Saint-Venant linéarisées ou celles des écoulements de gaz. Cependant, le fait que les opérateurs de dérivation temporelle et spatiale soient appliqués à la fois aux deux états dans chaque équation aboutit à une certaine complexité dans l'analyse. Nous adoptons alors une représentation de cette classe générale d'EDP hyperboliques en coordonnées de Riemann [Bastin and Coron, 2016], qui est potentiellement intéressante dans la mesure où elle met en évidence les vitesses de propagation (vitesses caractéristiques). Les opérateurs de dérivation temporelle et spatiale sont appliqués à une seule variable à la fois dans chaque équation. Le système dans ces coordonnées est plus simple à analyser au niveau du caractère bien-posé (*i.e.* existence d'une solution unique), de la stabilité et sa résolution à travers la méthode des caractéristiques est réalisable. Cette classe d'EDP hyperboliques dans les coordonnées de Riemann s'écrit

$$\partial_t u(t, x) + \lambda \partial_x u(t, x) = \sigma^{++} u(t, x) + \sigma^{+-} v(t, x) \quad (1.5a)$$

$$\partial_t v(t, x) - \mu \partial_x v(t, x) = \sigma^{-+} u(t, x) + \sigma^{--} v(t, x) \quad (1.5b)$$

avec les conditions aux bords

$$u(t, 0) = qv(t, 0) \quad (1.6a)$$

$$v(t, 1) = \rho u(t, 1) \quad (1.6b)$$

et les conditions initiales

$$u(0, x) \doteq u_0(x) \quad (1.7a)$$

$$v(0, x) \doteq v_0(x). \quad (1.7b)$$

En identifiant les équations du télégraphiste (1.2) représentées en coordonnées de Riemann avec (1.5), les coefficients de (1.5) sont explicités en termes des caractéristiques de la ligne par [Bastin and Coron, 2016, Chapitre 1]

$$\lambda = \mu = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\sigma^{++} = \sigma^{--} = -\frac{1}{2} \left( \frac{G}{C} + \frac{R}{L} \right)$$

$$\sigma^{+-} = \sigma^{-+} = \frac{1}{2} \left( \frac{G}{C} - \frac{R}{L} \right).$$

$\lambda$  et  $\mu$  sont respectivement les vitesses de transport des deux ondes  $u$  et  $v$  qui se propagent respectivement dans le sens positif et négatif de l'espace. Les couplages à l'intérieur du domaine sont décrits par les termes diagonaux représentés par les coefficients  $\sigma^{++}$  et  $\sigma^{--}$ , et anti-diagonaux représentés par les coefficients  $\sigma^{+-}$  et  $\sigma^{-+}$ . Les conditions aux bords (1.6) modélisent des réflexions statiques et locales, et sont représentées par les coefficients  $\rho$  et  $q$ . Cependant, la nature physique d'un nœud (ou d'une extrémité de la ligne) peut imposer d'autres conditions où un couplage avec une équation différentielle a lieu. Nous parlons dans ce cas de conditions aux bords dynamiques. Enfin, les conditions initiales (1.7)

appartiennent à une classe adéquate selon la régularité de la solution cherchée.

Les équations (1.5)-(1.7) représentent une classe d'EDP hyperboliques linéaires du premier ordre, mono-dimensionnelles, couplées deux à deux, à coefficients constants. Ce système bien-posé [Bastin and Coron, 2016, Théorème 4.1] modélise un module élémentaire d'une ligne de transmission et sa structure en dimension infinie sera conservée dans le développement des outils d'analyse et de commande de cette thèse. Le défi majeur dans les études théoriques de ces systèmes sont les **couplages**, qu'ils soient présents à l'intérieur du domaine entre les états EDP, ou aux bords avec des dynamiques EDO. Ces couplages ajoutent une complexité considérable à l'étude des systèmes hyperboliques et sont souvent regardés comme des perturbations ou des termes non désirables. Nous contribuons dans cette thèse aux besoins d'outils qui fournissent une compréhension du comportement du système avec ces couplages et qui fournissent une résolution du problème de stabilisation d'un module élémentaire.

## 1.2 Plan du mémoire et contributions

Un état de l'art sur lequel nous nous sommes appuyés dans notre travail est présenté dans le chapitre 2. Nous y exposons les différentes méthodes d'analyse et de commande qu'un chercheur est capable d'utiliser pour le système hyperbolique que nous considérons.

Dans le chapitre 3, nous nous concentrons sur l'analyse de stabilité du système (1.5)-(1.7) où les couplages dans le domaine sont anti-diagonaux. La synthèse de critères de stabilité de ce système reste un défi quand les couplages à l'intérieur du domaine et aux bords sont tous présents. La majorité des conditions de stabilité dans la littérature exige une dissipativité aux bords et une autre forme de stabilité à l'intérieur du domaine. Notre objectif est d'enrichir la littérature par des critères qui servent à tester la stabilité.

Les contributions apportées sont d'une part, l'introduction d'une **condition de stabilité explicite** en termes des coefficients et simple à appliquer, et d'autre part, un **critère numérique** moins restrictif. Ces outils sont des **conditions suffisantes** pour la stabilité du système sous considération. Le critère explicite fournit des inégalités que les coefficients du système doivent satisfaire afin de garantir la stabilité. Dans l'approche numérique, nous développons un **algorithme** qui teste l'absence de racine à partie réelle positive d'une équation caractéristique associée au système dans le domaine fréquentiel. Notre approche se base sur la reformulation du problème en une analyse de stabilité d'un **système à retard** (SAR) en appliquant une transformation backstepping appropriée.

La stabilisation du système hyperbolique (1.5) est abordée dans le chapitre 4, où nous faisons apparaître des conditions aux bords dynamiques aux deux extrémités de la ligne. La problématique regardée est le couplage des EDP avec des EDO au niveau de la commande et de la charge.

L'originalité de ce travail est que la commande s'applique via une **dynamique** décrite par une **EDO** et non directement au bord d'un état EDP. Le système considéré consiste ainsi en un système de deux EDP hyperboliques couplées d'une manière **bidirectionnelle** avec des EDO aux deux bords du domaine pour obtenir enfin un système **EDO-EDP-EDO**. Nous présentons une transformation **backstepping** et une fonction de **Lyapunov** augmentées par rapport à la littérature, et une commande par backstepping stabilisante. Cette loi de commande est un retour d'états EDP et EDO qui stabilise les états EDO, élimine les couplages qui conduisent potentiellement à l'instabilité (comme ceux présents à l'intérieur du domaine) et engendre une structure en cascade entre les EDP et l'EDO présente au niveau de la commande.

Les conclusions de la thèse et des perspectives sont données dans le chapitre 5. Nous résumons les développements effectués et proposons une continuité du travail vis-à-vis de systèmes plus complexes et des interconnexions de deux systèmes d'EDP hyperboliques qui constituent deux modules élémentaires d'un réseau.

### 1.3 Liste des publications et collaborations

Bou Saba D., Bribiesca Argomedo F., Auriol, J., Di Loreto M., Di Meglio F., A Sufficient Stability Condition for a Class of Linear  $2 \times 2$  Hyperbolic PDEs Using a Backstepping Transform. Under review (IEEE Transactions on Automatic Control).

Auriol, J., Bribiesca Argomedo F., Bou Saba D., Di Loreto M., Di Meglio F., Delay-robust stabilization of a hyperbolic PDE-ODE system. *Automatica*, vol. 95, pp. 494–502, 2018.

Bou Saba, D., Bribiesca-Argomedo, F., Di Loreto, M., Eberard, D. (2017, December). Backstepping stabilization of  $2 \times 2$  linear hyperbolic PDEs coupled with potentially unstable actuator and load dynamics. In Melbourne, Decision and Control (CDC), 2017 IEEE 56th Annual Conference on (pp. 2498-2503). IEEE.

En outre, nous mentionnons d'autres contributions faites au laboratoire Ampère. Ces contributions portent sur la modélisation et la commande d'une plateforme à deux degrés de liberté actionnée par trois muscles pneumatiques, pour laquelle une commande par platitude (commande non-linéaire pour l'asservissement en position) a été élaborée et implantée sur le banc d'essai. Ces travaux ont été effectués durant le Master et les deux papiers suivants ont été publiés pendant la thèse.

Bou Saba, D., Bideaux, E., Brun, X., Massioni, P. (2016, September). A Complete Model of a Two Degree of Freedom Platform Actuated by Three Pneumatic Muscles Elaborated for Control Synthesis. In BATH/ASME 2016 Symposium on Fluid Power and Motion Control. American Society of Mechanical Engineers.

Bou Saba, D., Massioni, P., Bideaux, E., Brun, X., Flatness-based control of a two-degree-of-freedom platform with pneumatic artificial muscles. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* (2018, to appear).

Par ailleurs, deux collaborations ont été menées durant cette thèse. La première a été effectuée avec le chercheur Richard Kern, doctorant du Department of Automatic Control Engineering du TUM (Technical University of Munich) en Allemagne. Richard Kern travaille sur la stabilisation et l'observation des EDP hyperboliques modélisant des écoulements de gaz à l'intérieur des pipelines. La similarité de la structure de ces EDP avec celle adoptée dans notre thèse a créé une piste d'échange qui s'est orientée vers le caractère bien-posé d'une classe d'EDP hyperboliques et leur simulation numérique.

Une deuxième collaboration a été menée avec le laboratoire CAS (Centre Automatique et Systèmes) à l'École des Mines ParisTech. Elle a eu pour objet l'étude des systèmes hyperboliques en passant d'une représentation par des EDP à une représentation sous la forme d'un système à retard (SAR) en employant une transformation backstepping adéquate. Les résultats de cette collaboration sont d'une part une analyse de stabilité d'un système de deux EDP hyperboliques couplées (le résultat est détaillé dans le chapitre 3), et d'autre part, la stabilisation robuste d'un système EDP-EDO couplées [Auriol et al., 2018].



# Chapitre 2.

## État de l'art

**Sommaire**

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>13</b>
<b>2.2</b>	<b>Analyse des systèmes de lois de bilan</b>	<b>13</b>
2.2.1	Seconde méthode de Lyapunov	13
2.2.2	Méthode des caractéristiques	17
2.2.3	Approche fréquentielle	21
2.2.4	Approche via un système à retard	21
<b>2.3</b>	<b>Commande des systèmes de lois de bilan</b>	<b>25</b>
2.3.1	Commande par retour de sortie statique	25
2.3.2	Régulateur Proportionnel Intégral	25
2.3.3	Commande par Platitude	27
2.3.4	Commande par backstepping	28
2.3.5	Robustesse vis-à-vis des erreurs du modèle	33
2.3.6	Robustesse vis-à-vis du retard dans la commande	35
<b>2.4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>36</b>

---

## 2.1 Introduction

Tout développement de recherche est une continuation des travaux qui le précèdent et une ouverture sur des méthodologies qui enrichissent l'étude abordée. Afin de bien positionner la recherche que nous avons effectuée sur un axe dédié à la mise en place d'outils d'analyse et de commande, nous présentons la littérature de différentes approches et méthodes utilisées pour cette finalité. Avec la diversité des méthodes existantes, il n'est pas raisonnable de vouloir les inclure toutes dans ce chapitre. Pour cette raison, nous présentons quelques unes qui sont en lien avec le travail que nous effectuons et qui ont bâti le chemin qui nous a menés à nos contributions. En outre, exposer leurs applications et les résultats nous permet de justifier le choix de la méthodologie adoptée dans notre travail. Il est vrai que choisir une méthode ou une autre amène du questionnement mais seules les tentatives nous offrent un moyen pour évaluer ce choix et pour acquérir une maturité qui permet de conjecturer l'efficacité d'une approche sur le problème considéré.

La section 2.2 est consacrée aux outils d'analyse des EDP hyperboliques et la section 2.3 aux techniques de commande de ces EDP.

## 2.2 Analyse des systèmes de lois de bilan

L'objectif de l'analyse de ces systèmes est principalement de montrer l'existence d'une solution (unique) dans un espace approprié, d'étudier son comportement et de donner des conditions nécessaires et/ou suffisantes de stabilité. Ces conditions servent également à concevoir une loi de commande, puisque tout système en boucle fermée est censé avoir des propriétés de stabilité. Nous nous concentrons sur les EDP hyperboliques du premier ordre, et présentons des approches d'analyse basées sur la seconde méthode de Lyapunov, sur la méthode des caractéristiques, sur une approche fréquentielle et sur une approche par systèmes à retard.

### 2.2.1 Seconde méthode de Lyapunov

La fonction de Lyapunov, dès son introduction par *Alexandre Lyapunov* dans sa thèse [Liapounoff, 1907] rédigée à la fin du dix-neuvième siècle, s'est avérée un moyen efficace pour étudier le comportement asymptotique et tester la stabilité des systèmes en dimension finie. La seconde méthode de Lyapunov se base sur cette fonction de Lyapunov, fonction définie<sup>1</sup> et dont la dérivée par rapport au temps a un signe fixe et opposé à celui de la fonction, ou est identiquement nulle, dans un voisinage de l'origine [Mawhin, 2005]. L'existence d'une telle fonction, souvent équivalente à la norme de l'état, garantit la stabilité du système. D'un point de vue physique, le signe de la dérivée et le taux de décroissement de la fonction exposent des propriétés de dissipativité du système.

Cette méthode a été étendue aux systèmes en dimension infinie, et est considérée comme outil puissant d'analyse de stabilité. Nous reprenons de [Priour and Mazenc, 2012] une définition de la fonction de Lyapunov, de classe  $C^1$ , établie pour un système linéaire d'EDP hyperboliques du premier ordre, avec une perturbation  $\delta$  à l'intérieur du domaine. Nous restreignons cette définition à la topologie de la norme  $L^2$ .

**Définition 1.** Soit  $V: L^2((0, l); \mathbb{R}) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable continue et périodique par rapport au second argument. La fonction  $V$  est dite fonction de Lyapunov faible, s'il existe deux fonctions  $\kappa_S$  et  $\kappa_L$  appartenant à la classe<sup>2</sup>  $\mathcal{K}_\infty$  et telles que, pour toutes les fonctions

1. En pratique, cette fonction est prise positive et minorée par une autre fonction.

2. Une fonction continue d'un intervalle de  $\mathbb{R}_+$  dans  $\mathbb{R}_+$  est dans la classe  $\mathcal{K}$  si elle est strictement croissante et nulle à l'origine. Une fonction continue de  $\mathbb{R}_+$  dans  $\mathbb{R}_+$  est dans la classe  $\mathcal{K}_\infty$  si elle est dans la classe  $\mathcal{K}$  et non bornée à l'infini.



$\phi \in L^2((0, L); \mathbb{R})$  et pour tout  $t \in [0, \infty)$ ,

$$\kappa_S \left( \|\phi\|_{L^2((0, L); \mathbb{R})} \right) \leq V(\phi, t) \leq \kappa_L \left( \|\phi\|_{L^2((0, L); \mathbb{R})} \right), \quad (2.1)$$

et pour tout  $t \geq 0$  et en absence de perturbation  $\delta$ ,

$$\frac{dV(w(\cdot, t), t)}{dt} \leq 0, \quad (2.2)$$

pour la solution  $w(\cdot, t)$  du système hyperbolique considéré.

La fonction  $V$  est dite fonction de Lyapunov stricte si la condition (2.1) est vérifiée et s'il existe un réel  $\lambda_1 > 0$  tel que, en absence de  $\delta$ ,

$$\frac{dV(w(\cdot, t), t)}{dt} \leq -\lambda_1 V(w(\cdot, t), t). \quad (2.3)$$

La fonction  $V$  est dite fonction de Lyapunov-ISS ('Input-to-state stability') si la condition (2.1) est vérifiée et s'il existe un réel  $\lambda_1 > 0$  et une fonction  $\lambda_2$  appartenant à la classe  $\mathcal{K}$ , tels que pour toute solution du système et pour tout  $t \geq 0$

$$\frac{dV(w(\cdot, t), t)}{dt} \leq -\lambda_1 V(w(\cdot, t), t) + \int_0^L \lambda_2(|\delta(z, t)|) dz. \quad (2.4)$$

Un système admettant une fonction de Lyapunov stricte, satisfaisant (2.3), est globalement asymptotiquement stable pour la topologie de la norme  $L^2$ . En d'autres termes, sa solution converge asymptotiquement vers zéro. En revanche, afin d'établir une stabilité asymptotique à l'aide d'une fonction de Lyapunov faible, le principe de l'invariance de LaSalle doit être appliqué (voir [Luo et al., 2012, Théorème 3.64]). La propriété ISS est détaillée dans [Sontag, 2008]. Elle permet de garantir que pour un temps suffisamment large, la trajectoire représentant la solution s'approche arbitrairement d'une boule dont le rayon est proportionnel à l'amplitude de la perturbation (ou de l'entrée dans le cas général). Des exemples d'utilisation d'une fonction de Lyapunov-ISS sont donnés dans [Argomedeo et al., 2012] et [Priour and Mazenc, 2012] pour une étude de robustesse par rapport à une perturbation aux bords du domaine et dans le domaine respectivement, ou pour la construction d'un régulateur proportionnel intégral qui stabilise un système EDP-EDO couplées [Terrand-Jeanne et al., 2018].

Souvent, la fonction  $V$  est cherchée sous la forme de la norme  $L^2$  (pondérée) des états EDP. Cette dernière fonction est considérée pour différents emplois dans la littérature. Nous citons à titre d'exemple :

- l'analyse de stabilité en boucle ouverte. Cette analyse conduit à des conditions suffisantes qui peuvent être explicitées en termes des paramètres du système de départ, ou sous la forme d'inégalités matricielles linéaires (linear matrix inequalities ou LMI en anglais) qui repose sur l'existence d'un ou de plusieurs paramètres de conception vérifiant certaines inégalités [Priour et al., 2012], [Diagne et al., 2012], [Tchouso et al., 2009],
- l'analyse de stabilité en boucle fermée. Après application d'une loi de commande, cette étude est primordiale afin de s'assurer que le système satisfait les performances désirées (stabilité exponentielle, robustesse,...) [Coron et al., 2013], [Krstic and Smyshlyaev, 2008b], [Di Meglio et al., 2018],
- la construction d'une commande aux bords stabilisante. La fonction de Lyapunov est conçue de manière à contenir les gains de la loi de commande ('Control Lyapunov function'), qui sont ensuite calculés en dérivant la fonction de Lyapunov et en faisant de sorte que sa dérivée soit définie négative [Bastin and Coron, 2011], [Coron et al., 2007], [Dos Santos et al., 2008],

- l'approximation de la solution d'un système à perturbation singulière par celle du système réduit [Tang et al., 2015b], [Tang et al., 2016],
- la démonstration de l'existence d'une solution unique de l'équation de Burgers en boucle fermée, avec analyse de régularité de la solution [Liu and Krstić, 2000],
- la commandabilité d'une équation d'ondes semi-linéaire [Coron and Trélat, 2006],
- la construction d'un observateur. La fonction de Lyapunov stricte garantit la convergence de l'état observé vers l'état réel [Hasan et al., 2016].

Nous présentons les résultats de l'utilisation de cette fonction dans l'analyse de la stabilité des EDP hyperboliques linéaires du premier ordre. Le lecteur est invité à consulter le livre de G. Bastin et J.M. Coron [Bastin and Coron, 2016] qui présente une richesse en analyses de ces systèmes dans différentes normes, adoptant des approches temporelles et fréquentielles. Le théorème 2.4 de ce livre s'appuie sur une fonction de Lyapunov pour donner une condition nécessaire et suffisante de stabilité dans la norme  $L^2$  d'un système linéaire de lois de conservation, représenté par deux équations de transport couplées aux bords. Nous soulignons que la fonction de Lyapunov consiste ici en la norme  $L^2$  pondérée des états EDP. La pondération utilisée dans [Bastin and Coron, 2016, Théorème 2.4] est une fonction exponentielle décroissante (respectivement croissante) associée à l'onde qui se propage dans le sens positif (respectivement négatif). À noter qu'une pondération décroissante n'est pas nécessairement associée à l'onde qui se propage dans le sens positif (voir par exemple [Priour et al., 2014, Proposition 2.1]). Par ailleurs, d'autres fonctions de pondération sont adoptées dans la fonction de Lyapunov, nous citons par exemple [Vazquez et al., 2011] où la pondération est une fonction affine en la variable d'espace.

La condition de stabilité exigée par [Bastin and Coron, 2016, Théorème 2.4] est que la valeur absolue du produit des coefficients de réflexion soit strictement inférieure à 1. Ce résultat, faisant intervenir uniquement les coefficients de réflexion du système sans les vitesses de propagation, est potentiellement intéressant pour la conception de commandes aux bords, comme montré dans [Coron et al., 2007], où la commande synthétisée vise à ce que le système en boucle fermée respecte cette condition. Ce résultat traduit une dissipativité aux bords, et une interprétation physique s'énonce alors comme suit. Les deux ondes, écrites en coordonnées de Riemann et se propageant avec une vitesse constante, restent invariables le long d'une ligne caractéristique (ce principe est décrit avec plus de détails dans la section 2.2.2). Cette propriété est justifiée par l'absence de termes non-homogènes (termes sources) dans l'équation, donc par l'absence d'une amplification (ou amortissement) de ces ondes à l'intérieur du domaine. La seule altération que ces ondes peuvent subir se trouve au niveau des bords du domaine, où un amortissement (dissipation d'une certaine quantité et réflexion de l'autre) peut avoir lieu. Le théorème 3.2 du même livre généralise ce résultat pour un système linéaire de lois de conservation, avec un nombre arbitraire d'ondes. La condition, toutefois suffisante, de dissipativité aux bords nécessite que la norme spectrale d'un produit matriciel, faisant intervenir la matrice de couplage aux bords, soit strictement inférieure à l'unité.

Ce principe de dissipativité aux bords est illustré également dans d'autres exemples. Les mêmes auteurs cités ci-dessus ont appliqué cette approche à un système de lois de conservation quasi-linéaire dans [Coron et al., 2008], les vitesses de propagation étant des fonctions des états EDP. L'objectif était de donner, à travers une fonction de Lyapunov, une condition suffisante de stabilité du régime permanent dans la norme  $C^1$ . Sous l'hypothèse d'une régularité  $C^1$  de la condition aux bords et de la dynamique de propagation, la stabilité est obtenue si le rayon spectral de la matrice jacobienne de la condition aux bords, évaluée à l'origine, est strictement inférieur à 1.

Parallèlement, des systèmes de lois de conservation sujets à des signaux de commutation dans la dynamique et aux bords sont analysés dans [Prieur et al., 2012] à travers la seconde méthode de Lyapunov. Ces commutations interviennent suite à des décisions logiques. La stabilité de chaque signal commuté, assurée par la dissipativité de sa condition aux bords, entraîne l'existence d'un temps maximal de commutation en dessous duquel la stabilité du système commuté (global) est exponentiellement stable.

Toutefois, en ajoutant des termes non-homogènes dans des systèmes de lois de bilan, les états écrits en coordonnées de Riemann ne sont plus constants le long des courbes caractéristiques. Ces termes ajoutés décrivent des couplages à l'intérieur du domaine entre les états EDP. Par suite, ces couplages et les vitesses de propagation doivent intervenir dans les conditions de stabilité. Ces termes sont présents dans des modèles physiques comme ceux des lignes de transport (équations du télégraphiste [Magnusson et al., 2000]) ou des écoulements de fluide (équations de Saint-Venant [Coron et al., 2007]) et décrivent souvent des amortissements ou pertes dans la ligne de transmission [Magnusson et al., 2000].

G. Bastin et J.M. Coron [Bastin and Coron, 2016] considèrent le système de lois de bilan suivant.

$$R_t(t, x) + \Lambda R_x(t, x) + \Sigma R(t, x) = 0, \quad t \in [0, +\infty), x \in (0, L) \quad (2.5)$$

avec  $R: [0, +\infty) \times (0, L) \rightarrow \mathbb{R}^n$  représente les états EDP,  $\Lambda$  est une matrice réelle constante diagonale et  $\Sigma$  une matrice réelle constante de dimension  $n \times n$ . Les auteurs énoncent un théorème (théorème 5.4) qui garantit la stabilité du système dans la norme  $L^2$  s'il existe une matrice diagonale réelle positive  $P$  telle que

$$\Sigma^\top P + P \Sigma \succeq 0, \quad (2.6a)$$

$$\|\Delta K \Delta^{-1}\|_2 < 1, \quad (2.6b)$$

où  $\|\cdot\|_2$  représente la norme spectrale<sup>3</sup> et  $\Delta$  est une matrice diagonale dont les éléments sont  $\Delta_i = \sqrt{P_i \Lambda_i}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Une interprétation concrète de ces inégalités est donnée dans [Diagne et al., 2012]. Alors que l'inégalité (2.6b) traduit la dissipation aux bords (avec prise en considération des vitesses de propagation), l'inégalité (2.6a) signifie que la matrice  $\Sigma$  de couplage à l'intérieur du domaine est diagonalement marginalement stable. En résumé, ces conditions mettent en relief une dissipation aux bords, accompagnée par une autre dissipation à l'intérieur du domaine. Ces résultats sont étendus dans [Bastin and Coron, 2016, Théorème 6.6] pour le cas des EDP quasi-linéaires dans la topologie<sup>4</sup>  $H^2$ .

Les travaux de [Prieur et al., 2012] sont étendus pour des systèmes de lois de bilan (avec des termes non-homogènes) sujets à des signaux de commutation dans [Prieur et al., 2014]. Des conditions de stabilité exponentielle, basées sur la technique de Lyapunov, sont présentées.

Motivés par les procédés chimiques dans l'ingénierie, comme la cristallisation et la polymérisation, A. Tchouso et al. ont établi dans [Tchouso et al., 2009] des conditions suffisantes de stabilité pour un système d'EDP hyperboliques avec des coefficients non uniformes (variables dans l'espace) ayant une régularité  $C^\infty$ . De même, des inégalités représentant des conditions de dissipativité à l'intérieur du domaine et aux bords sont trouvées. À noter que la différence entre la condition de dissipativité dans le domaine et (2.6a) de [Bastin and Coron, 2016, Théorème 5.4] réside dans le fait que dans [Tchouso et al., 2009], la condition ne fait pas intervenir un paramètre de décision dans la recherche

3. La norme spectrale  $\|A\|_2$  d'une matrice  $A$  est définie par la racine carrée de la plus grande valeur propre de  $A^*A$ , où  $A^*$  est la conjuguée de la transposée de  $A$ .

4.  $H^k$  est l'ensemble de fonctions dans  $L^2$  et dont les dérivées d'ordre 1 à  $k$  sont dans  $L^2$  (un espace de Sobolev).

d'une fonction de Lyapunov, mais s'écrit uniquement en fonction des coefficients du système.

Le problème de commande des fleuves et des réseaux de fleuves a déclenché un grand nombre d'études sur les équations de Saint-Venant linéarisées, décrites par des EDP linéaires du premier ordre avec des termes non-homogènes. Ces équations sont traitées dans [Bastin et al., 2009]. La condition de stabilité est sous la forme d'un ensemble d'inégalités satisfaites par les coefficients constants du système et par d'autres paramètres de décision.

En outre, une fonction de Lyapunov de contrôle (control Lyapunov function) associée à des systèmes de lois de bilan (2.5) avec des coefficients non uniformes est employée dans [Bastin and Coron, 2011] pour élaborer une commande aux bords stabilisante. L'existence d'une fonction de Lyapunov quadratique et stricte est équivalente à ce que la solution maximale d'un problème de Cauchy (écrit sous la forme d'une EDO avec une condition initiale) est définie sur le domaine.

Certains systèmes de lois de conservation ou de bilan possèdent une représentation particulière quand les dynamiques agissent avec des échelles de temps variées. Nous observons alors des dynamiques rapides par rapport à d'autres lentes. Ce type de systèmes décrit des phénomènes physiques, comme le transport d'un gaz à travers un tube de section constante [Tang et al., 2015b], des réacteurs chimiques ou l'interconnexion d'actionneurs aux bords avec des procédés, évoluant avec deux dynamiques d'échelles de temps différentes [Tang and Mazanti, 2017]. Une modélisation pertinente est de considérer la dynamique rapide comme une perturbation singulière décrite par un paramètre de perturbation, qui prend généralement de faibles valeurs, multiplié par la dérivée temporelle de l'état considéré. La résolution du système de départ en faisant tendre ce paramètre vers zéro aboutit à deux sous-systèmes : le système réduit (avec la dynamique lente) et la couche limite (ayant une dynamique rapide). L'analyse de stabilité de ces systèmes par la seconde méthode de Lyapunov est également abordée dans la littérature. Des systèmes de lois de conservation et de bilan avec une perturbation singulière sont traités dans [Tang et al., 2015b] et [Tang et al., 2016] respectivement. Y. Tang et al. montrent dans [Tang et al., 2015b] que la stabilité du système global implique la stabilité des deux sous-systèmes. En revanche, dû aux couplages entre les sous-systèmes, l'inverse n'est pas vrai. De plus, pour un paramètre de perturbation suffisamment faible, une approximation de la solution du système global par celle du système réduit est établie dans les deux dernières références citées. La fonction de Lyapunov adoptée dans la preuve consiste en une fonction quadratique de l'erreur entre l'état de la dynamique lente du système global et celui du système réduit d'une part, et entre l'état de la dynamique rapide et celui de la couche limite d'autre part. D'autres études [Tang et al., 2015a], [Tang and Mazanti, 2017], [Cerpa and Prieur, 2017], considèrent une interconnexion de ces systèmes avec une dynamique EDO pour des raisons d'analyse de stabilité. Ce modèle représente dans [Tang et al., 2015a] la dynamique d'un gaz dans une colonne chauffante (décrite par l'EDO) couplée à un transport de ce gaz dans un tube (décrit par des EDP). Dans ces trois références, deux cas sont considérés selon que la perturbation est au niveau des EDP ou de l'EDO. Pour une dynamique EDP rapide, les résultats montrent que la stabilité des sous-systèmes entraîne la stabilité du système interconnecté. Néanmoins, dans le cas contraire (dynamique EDP lente), des contre-exemples révèlent que l'interconnexion de deux sous-systèmes stables peut causer une instabilité du système global, indépendamment de la valeur de la perturbation.

### 2.2.2 Méthode des caractéristiques

Une autre approche d'analyse des EDP hyperboliques que nous présentons est la méthode des caractéristiques en coordonnées de Riemann. Cette méthode permet l'étude de l'existence d'une solution, son unicité et sa régularité. La solution est exprimée (souvent explicitement)

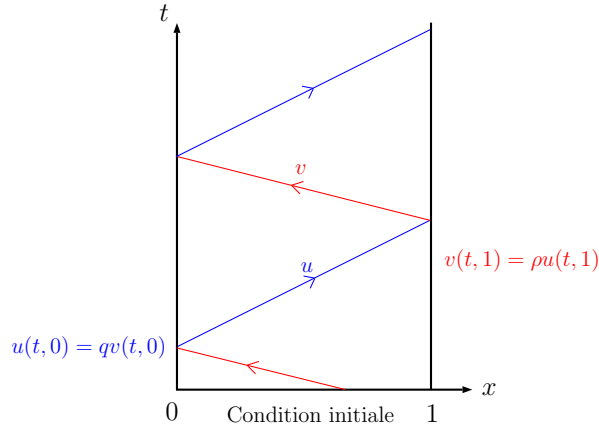


FIGURE 2.1 – Lignes caractéristiques en bleu (respectivement rouge) associées à l’EDP (2.7a) (respectivement (2.7b)).

en termes des conditions initiales, et la conclusion sur la stabilité du système est en conséquence déduit. Cette méthode consiste à transformer une EDP hyperbolique en une simple EDO où la dérivée qui apparaît est une dérivée directionnelle. La courbe caractéristique qui en résulte est orientée selon la direction de propagation de l’onde dans le cadre spatio-temporel et sa pente en chaque point est déterminée par les coefficients du système (termes multipliés par les dérivées spatiale et temporelle). Pour clarifier notre idée, considérons le système de deux lois de conservation mono-dimensionnel suivant.

$$u_t(t, x) + \lambda u_x(t, x) = 0 \quad (2.7a)$$

$$v_t(t, x) - \mu v_x(t, x) = 0. \quad (2.7b)$$

$u$  et  $v$  sont deux ondes qui se propagent avec les vitesses constantes  $\lambda > 0$  et  $\mu > 0$  respectivement, pour un temps  $t \geq 0$  et dans l’espace normalisé  $0 \leq x \leq 1$ . Les conditions initiales associées sont

$$u(0, \cdot) \doteq u_0(\cdot) \quad (2.8a)$$

$$v(0, \cdot) \doteq v_0(\cdot), \quad (2.8b)$$

et appartiennent à des espaces adéquats (selon la régularité de la solution cherchée). Nous prenons les conditions aux bords locales

$$u(t, 0) = qv(t, 0) \quad (2.9a)$$

$$v(t, 1) = \rho u(t, 1), \quad (2.9b)$$

avec  $\rho$  et  $q \in \mathbb{R}$  les coefficients de réflexion. Étant donné que les vitesses de propagation sont constantes, les courbes caractéristiques associées à ce système sont en effet des lignes droites, émanant soit de la condition initiale à  $t = 0$ , soit des conditions aux bords. Sur la figure 2.1, nous illustrons en bleu les lignes caractéristiques associées à (2.7a) (propagation dans le sens positif de l’espace avec une pente  $\frac{1}{\lambda}$ ) et en rouge celles associées à (2.7b) (propagation dans le sens négatif de l’espace avec une pente  $\frac{1}{\mu}$ ). Avec cette représentation, la valeur de la variable associée sur toute la ligne caractéristique est constante et égale à sa valeur sur le bord ou à la condition initiale lorsque la ligne “émerge”. La solution sur un point d’intersection entre un bord et une ligne qui le quitte est décrite par les conditions aux bords (2.9), dépendant donc de la solution sur une ligne qui arrive à ce bord en ce point.

Dans [Bastin and Coron, 2016, Théorème 2.1], le système (2.7)-(2.9) est résolu par cette méthode en vue de donner une condition nécessaire et suffisante de stabilité dans la norme  $L^\infty$ . L’expression de la solution est la condition initiale multipliée par le produit des coefficients

TABLEAU 2.1 – Comparaison entre [Coron and Bastin, 2015, Théorème 3.3] et [Greenberg and Tsien, 1984, Théorème 2]. Les deux théorèmes traitent l’analyse de stabilité dans la norme  $C^1$  des systèmes quasi-linéaires de lois de conservation.

Référence	[Coron and Bastin, 2015, Théorème 3.3]	[Greenberg and Tsien, 1984, Théorème 2]
Méthode d’analyse	Fonction de Lyapunov	Méthode des caractéristiques
Conditions aux bords	$C^1$ , non locales	$C^1$ , locales
Condition suffisante de stabilité	Rayon spectral de la matrice Jacobienne de la condition aux bords, évaluée à l’origine, est strictement inférieur à 1	Valeur absolue du produit des dérivées des conditions aux bords, évaluées à l’origine, est strictement inférieure à 1

de réflexion à une puissance croissante avec le temps. De cette expression, la condition de stabilité

$$|\rho q| < 1 \quad (2.10)$$

est trouvée, et révèle être exactement la même condition établie dans [Bastin and Coron, 2016, Théorème 2.4] pour la norme  $L^2$  en adoptant une fonction de Lyapunov (mentionnée dans la section 2.2.1).

La méthode des caractéristiques est appliquée dans [Greenberg and Tsien, 1984] pour un système quasi-linéaire de deux lois de conservation. Dans le théorème 2, l’existence unique d’une solution est démontrée et une condition suffisante de stabilité est établie. Une comparaison de ce résultat avec celui trouvé dans [Coron and Bastin, 2015, Théorème 3.3] par la fonction de Lyapunov est présentée dans le tableau 2.1. Remarquons que ces deux conditions, évaluées avec les coefficients du système (2.7)-(2.9) aboutissent à la même expression (2.10).

Les équations de Saint-Venant linéarisées sont considérées dans [de Halleux et al., 2003] et [Perrollaz and Rosier, 2014]. Le théorème 1 de [de Halleux et al., 2003] applique [Greenberg and Tsien, 1984, Théorème 2] pour donner une condition suffisante de stabilité en termes des conditions aux bords. Ensuite, une commande aux bords stabilisante est conçue en analysant la solution sur les lignes caractéristiques. Dans [Perrollaz and Rosier, 2014], un couplage avec deux dynamiques EDO est considéré. Une étude, inspirée par la méthode des caractéristiques sur l’analyse des EDP hyperboliques, porte sur l’existence unique de la solution, des conditions suffisantes de stabilité et une commande en retour d’état stabilisante en temps fini.

Passons aux systèmes de lois de bilan, écrits d’une manière plus générale (avec des termes non-homogènes). Pour ces systèmes, la valeur de la variable n’est pas constante sur une courbe caractéristique. En un point  $(t, x)$  sur cette courbe, la solution peut être calculée à partir de la solution au bord où la ligne ‘émerge’ avec une dépendance (sous la forme d’un terme intégral) à la solution en tous les points entre la condition au bord et le point où la solution est cherchée, comme montré en vert sur la figure 2.2.

Dans [Priour et al., 2008], les termes de couplage non-homogènes sont considérés comme des perturbations, et par suite, l’analyse de stabilité est reformulée en une analyse de robustesse, en termes des conditions aux bords, vis-à-vis de ces perturbations. Les résultats dévoilent que si l’amortissement aux bords est suffisamment fort pour vaincre les termes

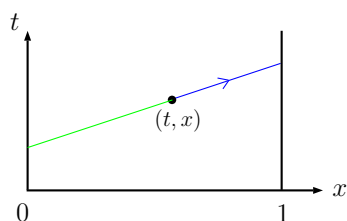


FIGURE 2.2 – Dépendance de la solution en un point  $(t, x)$  à la solution en tous les points du segment en vert.

TABLEAU 2.2 – Comparaison entre [Bastin and Coron, 2016, Théorème 5.4] et [Prieur et al., 2008, Théorème 1] pour l'analyse des systèmes quasi-linéaires de lois de bilan.

Référence	[Bastin and Coron, 2016, Théorème 5.4]	[Prieur et al., 2008, Théorème 1]
Méthode d'analyse	Fonction de Lyapunov	Méthode des caractéristiques
Objectifs	Conditions suffisantes de stabilité	Conditions suffisantes de robustesse vis-à-vis des perturbations à l'intérieur du domaine
Conditions suffisantes	Conditions aux bords dissipatives (2.6b) et matrice de couplage diagonalement marginalement stable (2.6a)	Conditions aux bords dissipatives et variation faible (bornée) des termes non-homogènes au voisinage de l'origine

non-homogènes, alors la stabilité est assurée. Une comparaison de ce résultat avec celui de [Bastin and Coron, 2016, Théorème 5.4] est donnée dans le tableau 2.2. Remarquons que les deux différentes approches conduisent à l'exigence d'une dissipativité aux bords. Alors que [Bastin and Coron, 2016, Théorème 5.4] requiert une LMI satisfaite par la matrice de couplage à l'intérieur du domaine, [Prieur et al., 2008, Théorème 1] requiert eux une faible variation des termes de ce couplage.

Les systèmes de lois de bilan sujets à des signaux de commutation sont également analysés par la méthode des caractéristiques dans [Amin et al., 2011]. Un résultat qui rappelle de celui trouvé dans [Prieur et al., 2008, Théorème 1] est énoncé. La condition de stabilité exige un rayon spectral de la condition aux bords strictement inférieur à l'unité (dissipativité aux bords), et que la norme infinie des matrices de couplage à l'intérieur du domaine soit suffisamment faible.

En outre, la méthode des caractéristiques est utilisée afin de démontrer le caractère bien-posé (*i.e.* existence d'une solution unique) des EDP hyperboliques satisfaites par des noyaux d'une transformation backstepping [Coron et al., 2013], [Di Meglio et al., 2018]. Ces EDP sont réécrites sous forme d'équations intégrales et une analyse de ces équations est ensuite abordée.

TABLEAU 2.3 – Comparaison des trois approches d’analyse de stabilité dans [Bastin and Coron, 2016].

Référence	[Bastin and Coron, 2016, Théorème 2.1]	[Bastin and Coron, 2016, Théorème 2.4]	[Bastin and Coron, 2016, Théorème 3.7]
Méthode d’analyse	Méthode des caractéristiques	Fonction de Lyapunov	Domaine fréquentiel
Norme de stabilité	$L^\infty$	$L^2$	$C^0$

### 2.2.3 Approche fréquentielle

Les systèmes linéaires en dimension finie sont souvent représentés dans le domaine fréquentiel. Cette approche simplifie considérablement l’analyse de stabilité et de robustesse. De plus, elle permet de calculer les gains d’une commande pour atteindre des performances désirées en boucle fermée. En dimension infinie, [Curtain and Morris, 2009] constitue une référence sur la représentation des EDP dans le domaine fréquentiel, et montre l’application de cette représentation à des EDP paraboliques (équations de la chaleur) et hyperboliques (équations d’ondes). Cette méthode montre l’influence des conditions aux bords sur la dynamique et les propriétés du système. Dans [Litrico and Fromion, 2009], une condition nécessaire et suffisante de stabilité dans le domaine de Laplace des équations de Saint-Venant linéarisées autour du régime d’équilibre, ainsi que des critères de stabilité de type Nyquist sont établis. Un aspect physique qui explique le lien entre les EDP hyperboliques et une représentation dans le domaine de Laplace est le suivant. Considérons l’équation (2.7a) avec les valeurs aux bords  $u(t, 0)$  et  $u(t, 1)$ . Étant donné que la valeur de l’onde est conservée sur une ligne caractéristique, la valeur de  $u(t, 0)$  va apparaître au bord  $x = 1$  après un délai correspondant au temps de propagation. De ce fait, une fonction de transfert associée n’est autre qu’un retard pur, décrit par  $e^{-\frac{s}{\lambda}}$ .

Une condition nécessaire et suffisante de stabilité d’un système de deux lois de conservation est donnée dans [Bastin and Coron, 2016, Théorème 2.6], et une condition suffisante pour un système de lois de conservation dans [Bastin and Coron, 2016, Théorème 3.7] en adoptant une approche fréquentielle et en analysant le polynôme caractéristique. Pour un système de deux lois de conservation, il s’avère que le lieu des racines est strictement lié à la valeur absolue du produit de termes de réflexion. Pour un système avec un nombre arbitraire d’ondes, la condition exige toujours une dissipativité des conditions aux bords (norme spectrale d’un produit faisant intervenir la matrice des conditions aux bords inférieure à l’unité). Dans le tableau 2.3, nous comparons les trois approches de [Bastin and Coron, 2016] ainsi que les normes utilisées.

Cependant, en présence de termes non-homogènes, une représentation dans le domaine de Laplace devient compliquée. Ceci explique la motivation de la majeure partie de la littérature à adopter d’autres approches, comme celle de Lyapunov, ou la méthode des caractéristiques dans les coordonnées de Riemann.

### 2.2.4 Approche via un système à retard

Une dernière approche de l’analyse des EDP hyperboliques que nous présentons dans ce chapitre est une approche par les systèmes à retard. Il n’est pas surprenant que dans la littérature, des systèmes de lois de conservation ou de bilan soient reformulés en systèmes à retard. Une équation aux différences, par exemple, peut s’interpréter comme la différence entre la valeur d’un signal émis à un bord et celle de ce même signal revenant à ce bord



après réflexion à l'autre bord en subissant une modification [Sharkovsky et al., 2012]. L'équation résultante dépend ainsi des conditions aux bords. La résolution des équations de télégraphiste (avec l'hypothèse d'une propagation sans perte) aboutit à une forme d'équations aux différences (page 4 de [Sharkovsky et al., 2012]). Ce même type d'équations est obtenu dans [Di Loreto et al., 2016] en résolvant un système de lois de conservation. Également, un système à retard est obtenu dans [Coron and Nguyen, 2015] en résolvant un système hyperbolique non-linéaire par la méthode des caractéristiques. Une condition suffisante de stabilité est en conséquence établie en utilisant les résultats trouvés dans [Hale and Verduyn Lunel, 1993] pour les systèmes à retard. Dans [Auriol et al., 2017], une équation aux différences avec un retard distribué est établie en partant de deux EDP hyperboliques dans le but de concevoir une commande robuste par rapport à un retard dans la commande. Dans le sens contraire, le retard du signal d'un capteur est modélisé par une EDP hyperbolique dans [Krstic and Smyshlyaev, 2008b]. Tous ces exemples mettent en relief le lien étroit entre les systèmes décrits par des EDP hyperboliques et les systèmes à retard, et la possibilité de passer de l'analyse d'un type de système à un autre, tout en gardant la validité des résultats obtenus pour le système de départ.

Ainsi, le phénomène de transport peut être modélisé par un retard discret (souvent appelé retard pur ou ponctuel). Dans les lois de bilan, les termes non-homogènes (causés par un couplage à l'intérieur du domaine ou des termes sources) mènent à un terme intégral qui dépend de la solution dans le temps passé. Ils sont alors modélisés par un retard distribué. Les conditions aux bords influent à leur tour sur la solution. Des conditions aux bords statiques conduisent à des équations aux différences, tandis que des conditions aux bords dynamiques (décrites par des EDO) engendrent des équations différentielles aux différences de type retardé ou parfois de type neutre [Sharkovsky et al., 2012].

Une vision générale du lien entre les EDP hyperboliques du premier ordre et les systèmes à retard est traitée dans [Karafyllis and Krstic, 2014]. Les conditions aux bords du système hyperbolique considéré dépendent de tout l'état, conséquence de l'application d'une loi de commande par retour d'état. Le théorème 2.1 de cette référence montre que sous certaines hypothèses liées à des propriétés du système, il existe une transformation unique qui mène du système de départ au système s'écrivant sous la forme d'équations intégrales à retard. En outre, il s'avère plus simple à analyser les EDP hyperboliques, une fois transformées en une forme à retard. Des conditions de robustesse et de stabilité associées aux équations intégrales à retard sont également présentées dans [Karafyllis and Krstic, 2014]. Dans [Russell, 1978], un système hyperbolique avec une commande distribuée à l'intérieur du domaine est transformé en une équation aux différences avec un retard distribué. Une équivalence entre ces systèmes d'équations est montrée. Dans [Russell, 1991], un système hyperbolique est transformé en équations fonctionnelles de type neutre.

Un grand nombre d'études des systèmes à retard est disponible dans la littérature. La motivation, autre que les EDP hyperboliques, est la présence de retards dans les systèmes physiques, comme pour la combustion interne dans les engins, les procédés chimiques, les réseaux de communication, les véhicules sous-marin, un résonateur à retard [Zhong, 2006], ou l'évolution de la population d'une espèce [Sharkovsky et al., 2012], [Diekmann et al., 2012].

Nous présentons quelques résultats sur la stabilité des systèmes à retard qui nous semblent importants pour nos développements dans notre travail. Présentons d'abord deux outils d'analyse des systèmes à retard : la fonction de Lyapunov-Krasovskii et la fonction de Razumikhin. Nous énonçons les théorèmes 1.3 et 1.4 de [Gu et al., 2003] en utilisant les notations suivantes.  $C$  est l'ensemble des fonctions continues de  $[-r, 0]$  dans  $\mathbb{R}^n$ , avec  $r$  un réel positif.  $\bar{\mathbb{R}}_+$  est la fermeture de l'ensemble des réels positifs.  $\phi_{[t]}(\theta) = \phi(t + \theta) \in C$ , avec  $-r \leq \theta \leq 0$ , est un

segment d'une fonction  $\phi$ . Pour une fonction  $\phi \in C$ , sa norme  $\|\cdot\|_c$  dans  $C$  est définie par

$$\|\phi\|_c = \max_{-r \leq \theta \leq 0} \|\phi(\theta)\|, \quad (2.11)$$

où la norme  $\|\cdot\|$  d'un vecteur est la norme euclidienne. Une forme générale d'une équation différentielle fonctionnelle de type retardé est la suivante [Gu et al., 2003].

$$\dot{X}(t) = f(t, X_{[t]}). \quad (2.12)$$

**Théorème.** [Gu et al., 2003], Théorème 1.3 : théorème de stabilité de Lyapunov-Krasovskii. Supposons que  $\nu_1, \nu_2$  et  $\gamma: \bar{\mathbb{R}}_+ \rightarrow \bar{\mathbb{R}}_+$  sont des fonctions continues et croissantes,  $\nu_1(s)$  et  $\nu_2(s) > 0$  pour  $s > 0$  et  $\nu_1(0) = \nu_2(0) = 0$ . S'il existe une fonctionnelle continue et dérivable  $V: \mathbb{R} \times C \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$\nu_1(\|\phi(0)\|) \leq V(t, \phi) \leq \nu_2(\|\phi\|_c) \quad (2.13)$$

et

$$\dot{V}(t, X_{[t]}) \leq -\gamma(\|X_{[t]}(0)\|) \quad (2.14)$$

alors la solution triviale de (2.12) est uniformément stable. Si  $\gamma(s) > 0$  pour  $s > 0$ , alors elle est uniformément asymptotiquement stable. Si, en plus,  $\lim_{s \rightarrow +\infty} \nu_1(s) = +\infty$ , alors elle est globalement uniformément asymptotiquement stable.

**Théorème.** [Gu et al., 2003], Théorème 1.4 : théorème de Razumikhin.

Supposons que  $\nu_1, \nu_2$  et  $\gamma: \bar{\mathbb{R}}_+ \rightarrow \bar{\mathbb{R}}_+$  sont des fonctions continues et croissantes,  $\nu_1(s)$  et  $\nu_2(s) > 0$  pour  $s > 0$ ,  $\nu_1(0) = \nu_2(0) = 0$  et  $\nu_2$  strictement croissante. S'il existe une fonctionnelle continue et dérivable  $V: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$\nu_1(\|X\|) \leq V(t, X) \leq \nu_2(\|X\|) \quad (2.15)$$

pour  $t \in \mathbb{R}$  et  $X \in \mathbb{R}^n$ , et la dérivée par rapport au temps de  $V$  le long de la solution  $X(t)$  de (2.12) satisfait

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, X(t)) &\leq -\gamma(\|X(t)\|) \\ \text{à chaque fois que } &V(t + \theta, X(t + \theta)) \leq V(t, X(t)), \end{aligned} \quad (2.16)$$

pour  $\theta \in [-r, 0]$ , alors le système (2.12) est uniformément stable. Si, en plus,  $\gamma(s) > 0$  pour  $s > 0$ , et s'il existe une fonction continue croissante  $p(s) > s$  pour  $s > 0$ , telle que la condition (2.16) s'écrit d'une manière plus forte

$$\dot{V}(t, X(t)) \leq -\gamma(\|X(t)\|) \quad \text{si } V(t + \theta, X(t + \theta)) \leq p(V(t, X(t))), \quad (2.17)$$

pour  $\theta \in [-r, 0]$ , alors le système (2.12) est uniformément asymptotiquement stable. Si, en plus,  $\lim_{s \rightarrow +\infty} \nu_1(s) = +\infty$ , alors le système (2.12) est globalement uniformément asymptotiquement stable.

Présentons maintenant les résultats de l'analyse des équations aux différences. Une analyse de stabilité de ces équations, homogènes et non-homogènes, est abordée dans [Elaydi, 1999]. Pour le cas scalaire, un polynôme caractéristique associé est étudié et une condition nécessaire et suffisante de stabilité est construite. Également sont exposées une condition nécessaire et suffisante et une condition suffisante de stabilité. En outre, ce livre fournit une étude de commandabilité, d'observabilité et de stabilisation par retour d'état.

Des retards distribués sont ajoutés à ces équations dans [Damak et al., 2015] et [Melchor-Aguilar, 2013]. Les auteurs présentent des conditions suffisantes de stabilité de ces

systèmes en se basant sur une fonction de Lyapunov-Krasovskii pour un système intégral à retard. Une comparaison entre ces deux références est résumée dans le Tableau 2.4. La procédure adoptée dans [Melchor-Aguilar, 2013, Théorème 4] est de considérer le noyau du retard distribué constant par intervalle de temps.

Une étude des systèmes d'équations aux différences et des systèmes d'équations différentielles aux différences est présentée dans [Sharkovsky et al., 2012]. Cette étude porte sur l'analyse de l'existence d'une solution, sa régularité et son comportement.

Une forme d'équations différentielles à retard peut être établie quand un système d'EDP hyperboliques est couplé à une dynamique EDO aux bords. Ces équations différentielles, avec des retards discrets et distribués sont analysées dans [Gu et al., 2003]. Une étude dans le domaine fréquentiel, à travers le polynôme caractéristique, montre l'existence d'une marge de retard pour la stabilité. En revanche, l'approche temporelle présente l'avantage d'être applicable à des systèmes non-linéaires et pour ceux présentant des incertitudes variables en fonction du temps. Des conditions suffisantes de stabilité, sous forme de LMI indépendantes du retard, sont établies en utilisant d'une part la fonction de Lyapunov-Krasovskii, et d'autre part, la fonction de Rasumikhin. Ces critères sont ensuite rétablis en fonction du retard en effectuant une transformation du modèle incluant alors un retard distribué sous forme d'une perturbation.

D'autres études sur les équations différentielles aux différences et les équations différentielles fonctionnelles sont menées dans [Diekmann et al., 2012], [Bellman and Cooke, 1963], [Hale, 1971], [Kharitonov et al., 2009], [Hale and Lunel, 2002]. L'analyse porte principalement sur l'existence de la solution, son unicité, son comportement et sur la présentation des conditions nécessaires et suffisantes (ou seulement suffisantes) de stabilité. Nous trouvons également des approches temporelles (comme dans [Hale, 1971] en utilisant une fonction de Lyapunov) ou fréquentielles en étudiant le lieu des racines des polynôme caractéristiques dans le plan complexe (comme dans [Bellman and Cooke, 1963, Théorème 13.1] et [Kharitonov et al., 2009]). Dans [Vidyasagar, 1972] et [Baker and Vakharia, 1970], des conditions nécessaires et suffisantes de stabilité de type Nyquist sont présentées en abordant une analyse entrée/sortie dans le domaine de Laplace.

À noter que les fonctions de Lyapunov et de Lyapunov-Krasovskii sont également utilisées dans la littérature pour construire une loi de commande stabilisante des systèmes à retard, comme dans [Park, 2004] et [da Silva Jr et al., 2011] respectivement.

TABLEAU 2.4 – Comparaison des analyses de stabilité des équations aux différences avec retard(s) distribué(s) dans [Damak et al., 2015] et [Melchor-Aguilar, 2013].

Référence	[Damak et al., 2015, Théorème 4]	[Melchor-Aguilar, 2013, Théorème 4]
Retard considéré	plusieurs retards purs et un retard distribué	plusieurs retards purs et plusieurs retards distribués
Noyaux des retards distribués	fonctions bornées et continues par morceaux	constants
Condition vis-à-vis du retard	dépendante du retard	indépendante du retard

## 2.3 Commande des systèmes de lois de bilan

Nous présentons différentes approches de commande aux bords des EDP hyperboliques de lois de conservation et de bilan. Nous nous référons aussi à certains travaux qui emploient une commande répartie à l'intérieur du domaine et à d'autres résultats sur les EDP paraboliques en vue de mieux décrire l'approche de commande utilisée dans nos travaux et de clarifier les démarches de synthèse qui s'appliquent également au système que nous traitons. Nous présentons dans la suite la commande par retour de sortie statique, le régulateur PI, la platitude et la commande par backstepping. La robustesse vis-à-vis des erreurs du modèle est ensuite considérée en présentant l'approche par mode glissant et la commande adaptative. Finalement, la robustesse vis-à-vis du retard dans la commande est traitée par la méthode backstepping.

### 2.3.1 Commande par retour de sortie statique

Une méthode efficace pour commander les EDP hyperboliques par un retour de sortie statique est d'exploiter les résultats de l'analyse de stabilité de ces systèmes, présentés dans la section 2.2. L'idée principale est de paramétrer la commande aux bords par des gains qui sont déterminés de manière à ce que le système en boucle fermée respecte la condition de stabilité, notamment la dissipativité aux bords, comme effectué dans [Prieur et al., 2008] et [de Halleux et al., 2003]. Dans d'autres exemples, une fonction de Lyapunov de commande (*Control Lyapunov function*) est conçue dans [Coron et al., 2007], [Bastin et al., 2018] et [Bastin and Coron, 2011]. Les gains de la loi de commande sont choisis tels que la fonction de Lyapunov soit stricte, assurant ainsi une stabilité exponentielle du système. Ce type de commande par retour de sortie présente l'avantage de la simplicité d'implantation puisqu'elle exige uniquement la mesure des valeurs des états des EDP aux bords, sans avoir besoin de connaître leurs valeurs à l'intérieur du domaine. Néanmoins, cette méthode de commande par retour de sortie statique n'est pas capable d'éliminer une perturbation et ne présente pas un effet régulant [Trinh et al., 2017]. Ce fait a motivé les chercheurs à introduire une action intégrale dans la commande en l'écrivant sous la forme d'un retour de sortie dynamique.

### 2.3.2 Régulateur Proportionnel Intégral

Étendue de la théorie de la commande des systèmes en dimension finie, le correcteur proportionnel intégral (PI) est surtout utilisé afin de réguler une sortie soumise à des perturbations. La sortie est généralement un état EDP à un bord. La loi de commande comprend un terme proportionnel à l'erreur entre la sortie à réguler et la sortie désirée, ainsi qu'un terme intégral de cette erreur. Afin de donner une idée plus claire, considérons l'équation de transport scalaire (2.7a)

$$u_t(t, x) + \lambda u_x(t, x) = 0, \quad (2.18)$$

évoluant pour  $0 \leq x \leq 1$  et  $t \geq 0$ . La sortie  $u(t, 1)$  est à stabiliser à la valeur nulle par une commande appliquée en  $u(t, 0)$ . Une expression d'un régulateur PI est donnée dans [Coron and Tamasoiu, 2015], de la manière suivante.

$$u(t, 0) = k_p u(t, 1) + k_i \int_0^t u(y, 1) dy, \quad (2.19)$$

avec  $k_p$  le gain de l'action proportionnelle et  $k_i$  le gain de l'action intégrale. L'objectif est de calculer les valeurs des gains  $k_p$  et  $k_i$  qui assurent cette régulation. Nous présentons deux approches de calcul adoptées dans la littérature :

- une approche fréquentielle, basée sur l'étude de l'équation caractéristique associée à la dynamique de la sortie,

— une approche temporelle, basée sur une fonction de Lyapunov.

Dans [Coron and Tamasoiu, 2015], l'équation scalaire de transport (2.18) est considérée avec la loi de commande (2.19). L'équation aux différences avec un terme intégral, satisfaite par la sortie, est établie et l'équation caractéristique associée en est déduite. L'analyse du lieu des racines de cette équation conduit à des conditions (nécessaires et suffisantes ou seulement suffisantes) de stabilité, sous la forme d'inégalités satisfaites par les gains  $k_p$  et  $k_i$ . Il est intéressant de mentionner qu'en ajoutant une action dérivée au régulateur PI, l'équation caractéristique ne possède plus un terme principal, et en conséquence, possède une infinité de zéros dont la partie réelle est arbitrairement grande (voir plus de détails dans [Bellman and Cooke, 1963, Théorème 13.1]). Le système en boucle fermée est donc instable.

La même approche est abordée dans [Bastin et al., 2015] pour un système de deux lois de conservation linéaires. La commande est appliquée au bord  $x = 0$  à travers un état EDP, tandis qu'un terme de réflexion distale apparaît sur l'autre. L'équation caractéristique associée à la sortie est analysée dans le domaine de Laplace, aboutissant à une condition nécessaire et suffisante de stabilité, explicitée en termes des gains  $k_p$  et  $k_i$ .

Par l'approche temporelle, dans [Dos Santos et al., 2008], un système linéaire de deux lois de conservation est commandé aux deux bords par des régulateurs PI. Une fonction de Lyapunov, comprenant les gains des actions proportionnelles et intégrales est synthétisée. Ces gains sont ensuite calculés de manière à rendre la fonction de Lyapunov stricte. Le résultat est appliqué en simulation aux équations de Saint-Venant linéarisées, et implanté sur un micro-canal fluvial.

Un régulateur PI basé sur une fonction de Lyapunov est également employé pour les systèmes hyperboliques quasi-linéaires. En présence de termes non-linéaires, la seconde méthode de Lyapunov est un choix qui s'impose étant donné que l'analyse dans le domaine fréquentiel n'est plus applicable. Dans [Trinh et al., 2017], un correcteur intégral est proposé. L'objectif est de garantir la stabilité asymptotique du point d'équilibre d'un système hyperbolique scalaire quasi-linéaire dans la topologie  $H^2$  et la régulation de la sortie à un point de fonctionnement donné. Nous résumons ici les démarches effectuées dans cette référence.

1. Un changement de variable transforme le problème de stabilisation de l'état au point d'équilibre en une stabilisation à l'origine de l'erreur entre l'état et le point d'équilibre.
2. La vitesse caractéristique du système non-linéaire est évaluée à l'origine, et ainsi un système linéaire avec une vitesse de propagation constante en résulte. À travers une fonction de Lyapunov stricte qui comprend le gain de l'action intégrale, un intervalle de ce gain est proposé de manière à garantir la stabilité exponentielle du système linéaire. La largeur de cet intervalle est proportionnelle à la vitesse de transport et inversement proportionnelle à la distance de propagation.
3. La stabilité exponentielle locale dans la norme  $H^2$  du système non-linéaire en boucle fermée, en prenant le même gain de l'action intégrale calculé à l'étape 1, est traitée. Une fonction de Lyapunov est conçue. Cette fonction est une version augmentée de celle utilisée dans [Coron et al., 2007] avec des termes quadratiques en les dérivées spatiales de premier et de second ordres de l'état. La régulation de la sortie est alors une conséquence directe de la stabilisation locale de tout l'état en boucle fermée.

Ce résultat est affiné dans [Coron and Hayat, 2018], où un système similaire est considéré. Une condition suffisante de stabilité et une autre nécessaire sont présentées en termes du gain de l'action intégrale via une fonction de Lyapunov.

Une extension de cette méthode vers un système de deux lois de bilan couplé à une dynamique EDO à un bord est établie dans [Terrand-Jeanne et al., 2018] afin de résoudre des problèmes de forage liés à des vibrations radiales du tube de forage. Ces oscillations causent des dégâts et peuvent mener à l'instabilité du système et donc à la rupture du dispositif. L'objectif de la commande est de réguler la vitesse de la tête de forage et d'assurer une stabilité exponentielle du point d'équilibre. La stratégie de conception des gains PI se résume de la manière suivante.

1. En négligeant la dynamique du terme intégral dans la commande, une fonction de Lyapunov-ISS est synthétisée. L'étude de la dérivée de cette fonction conduit à la détermination du gain proportionnel, sous la forme d'une inégalité à satisfaire.
2. La dynamique du terme intégral du correcteur est prise en considération. Une nouvelle fonction de Lyapunov, version augmentée de la précédente, est conçue. L'analyse de cette fonction permet la détermination du gain de l'action intégrale.

### 2.3.3 Commande par Platitude

Le problème de génération de trajectoires pour des systèmes à paramètres répartis a motivé à son tour les chercheurs. En dimension finie, la génération d'une trajectoire est souvent assurée par inversion du modèle dans le cas d'un système linéaire ou par *platitude* (*flatness* en anglais) pour les systèmes non-linéaires. Introduite par Fliess et al. [Fliess et al., 1995], la platitude est à la base une méthode de commande non-linéaire en boucle ouverte (*feed-forward*). Cette approche, basée sur le modèle, exige une forte connaissance du modèle, avec un degré de précision et d'exactitude relativement satisfaisant. L'idée de la platitude est de choisir une sortie (dite plate) de manière à pouvoir exprimer toutes les variables d'état et les entrées indépendamment en fonction de cette sortie et de ses dérivées successives. Ainsi, étant donné l'expression de la trajectoire désirée, une expression de la commande en boucle ouverte est déduite de cette trajectoire et de ses dérivées successives. Après application de la commande, le système est équivalent à une chaîne d'intégrateurs où chaque entrée est associée à une sortie différente à travers un nombre d'intégration adéquat. Cette méthode est appliquée dans la littérature dans [Martin et al., 2003] pour la planification d'un mouvement, dans [Fliess et al., 1995] pour la commande d'une grue en deux dimensions et dans [Rouchon et al., 1993] pour la commande d'une remorque.

Cette méthode est étendue pour les systèmes en dimension infinie et appliquée à différents exemples. Pour un système hyperbolique commandé au bord, l'expression de la commande est liée à la résolution du système en termes de la sortie, généralement prise à un bord du domaine. La solution en chaque point du domaine est équivalente à une fonction de transfert qui mène de la sortie plate à tout l'état du système [Petit and Rouchon, 2001]. Ensuite, cette solution est évaluée au bord où la commande agit pour déduire son expression. Il est intéressant de noter qu'une paramétrisation de la trajectoire de la sortie permet d'aboutir à une expression de la commande en termes de cette trajectoire et de ses dérivées. Les étapes de construction de la commande sont brièvement décrites comme suit.

1. Choisir une sortie plate et une trajectoire désirée,
2. résoudre les EDP à l'intérieur du domaine en termes de la trajectoire (considérée comme paramètre) et de ses dérivées,
3. évaluer la solution au point d'application de la commande.

Dans [Petit and Rouchon, 2001], une corde verticale est pilotée par un chariot placé à son extrémité supérieure, le bord inférieur étant la sortie à commander. Ce système est modélisé par une équation d'ondes, où un bord est paramétré par une trajectoire et l'autre représente la commande. La solution à l'intérieur du domaine est établie d'abord dans le

domaine fréquentiel en appliquant la transformée de Laplace, ce qui simplifie le problème en une résolution d'un système d'EDO. La solution est ensuite trouvée dans le domaine temporel en effectuant une transformée de Laplace inverse. Une correspondance unique entre la solution lisse des EDP et la trajectoire associée à la sortie est montrée.

La platitude est utilisée dans [Schmuck et al., 2014] pour commander un réseau HVDC. Les trajectoires de la tension et de l'intensité dans une ligne sont calculées à partir de la connaissance des trajectoires de ces variables aux bords du domaine. Des systèmes de lois de bilan, modélisant l'écoulement fluide dans des canaux et un réacteur tubulaire, sont commandés par platitude dans [Knüppel et al., 2010] et [Woittennek et al., 2009] respectivement. La solution des EDP à l'intérieur du domaine est obtenue par la méthode des caractéristiques. En outre, la platitude est utilisée dans [Woittennek, 2011] pour une étude de commandabilité d'une équation d'ondes (sans amortissement, ni de termes sources). La sortie est la position d'une charge placée au bout non commandé d'une corde. L'état EDP et la commande sont exprimés en termes de la sortie et de ses dérivées temporelles d'ordres un et deux.

### 2.3.4 Commande par backstepping

La commande par backstepping est une méthode dédiée originellement à la stabilisation d'une classe de systèmes non-linéaires appelés *systèmes à retour strict* (*strict feedback* en anglais), et date de la fin du vingtième siècle [Krstic et al., 1995], [Khalil, 1996]. Une explication de cette commande est donnée dans le chapitre 14 du livre [Khalil, 1996]. Considérons une version simplifiée de l'écriture générale d'un système d'EDO à retour strict où nous omettons la dépendance par rapport au temps.

$$\dot{z}_1 = f_1(z_1) + g_1(z_1)z_2 \quad (2.20a)$$

$$\dot{z}_2 = f_2(z_1, z_2) + g_2(z_1, z_2)z_3 \quad (2.20b)$$

$$\vdots$$

$$\dot{z}_{k-1} = f_{k-1}(z_1, z_2, \dots, z_{k-1}) + g_{k-1}(z_1, z_2, \dots, z_{k-1})z_k \quad (2.20c)$$

$$\dot{z}_k = f_k(z_1, z_2, \dots, z_{k-1}, z_k) + g_k(z_1, z_2, \dots, z_{k-1}, z_k)u, \quad (2.20d)$$

où  $z_i$ ,  $i = 1, \dots, k$  sont des états scalaires et  $u$  est l'entrée de commande.  $f_i$  et  $g_i$  sont des fonctions réelles régulières (dont les dérivées à un certain ordre existent, selon le problème considéré), telles que  $f_k$  disparaît à l'origine et  $g_i(z_1, z_2, \dots, z_k) \neq 0$ , pour  $i = 1, \dots, k$ . L'objectif de la commande par backstepping est la stabilisation à l'origine du système (2.20). L'attribution 'retour strict' est justifiée par la structure triangulaire inférieure du système. En d'autres termes, dans la dynamique  $\dot{z}_i$ , les fonctions non-linéaires  $f_i$  et  $g_i$  dépendent uniquement de  $z_1, \dots, z_i$ , donnant ainsi une connexion en cascade avec  $k$  composantes. La propriété d'une telle structure triangulaire est importante dans l'extension de cette méthode en dimension infinie.

Contrairement à la linéarisation par retour d'état ou par platitude, la commande par backstepping n'exige pas une dynamique entrée/sortie linéaire en boucle fermée. En revanche, c'est une commande par retour d'état qui s'effectue suivant une procédure récursive et qui se base sur la synthèse de 'commandes virtuelles' (intermédiaires) pour chaque état, avec une fonction de Lyapunov adéquate. Nous exposons le déroulement de la première étape de cette procédure.

1. En analysant la dynamique en  $z_1$  de (2.20a),  $z_2$  est considéré comme une entrée virtuelle, et (2.20a) peut être stabilisée par un retour d'état régulier  $z_2 = \phi_2(z_1)$ , avec  $\phi_2(0) = 0$ . Afin de trouver  $\phi_2(z_1)$ , une fonction de Lyapunov quadratique en  $z_1$  est construite, et  $\phi_2(z_1)$  est calculée de sorte que la dérivée de cette fonction de Lyapunov, le long de la dynamique  $\dot{z}_1 = f_1(z_1) + g_1(z_1)\phi_2(z_1)$  soit définie négative,

2. l'erreur  $e_2 \doteq z_2 - \phi_2(z_1)$  est prise comme un nouvel état et sa dynamique, affine en  $z_3$ , est déduite de (2.20b),
3. à son tour, l'état  $z_3$  est considéré comme une entrée virtuelle utilisée pour stabiliser  $e_2$  à zéro. Afin d'établir l'expression de cette entrée, la fonction de Lyapunov construite est augmentée par un terme quadratique en  $e_2$ . Le retour d'état  $z_3 \doteq \phi_3(z_1, z_2)$  est calculé de manière à obtenir une dérivée de cette fonction définie négative.

Par suite, la stabilisation de  $e_2$  à zéro entraîne

$$\begin{aligned}
 e_2(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0 &\Leftrightarrow z_2(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \phi_2(z_1(t)) \\
 &\Rightarrow z_1(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0 \\
 &\Rightarrow \phi_2(z_1(t)) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0 \\
 &\Rightarrow z_2(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0.
 \end{aligned}$$

Cette démarche s'enchaîne, et un retour d'état est attribué à chaque  $z_i$  afin de stabiliser  $z_{i-1}$ , pour obtenir au final une expression *explicite* de la commande  $u(t)$  en termes des états  $z_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Remarquons d'abord qu'en écrivant la dynamique de l'erreur  $e_2(t)$  (pour stabiliser la dynamique en  $z_1$  par exemple), le retour d'état (pseudo-commande)  $\phi_2(z_1)$  apparaît avec une dérivation du premier ordre. Schématiquement, ceci est équivalent à un déplacement de ce terme en amont d'un intégrateur. Il est intéressant de montrer l'origine du terme 'backstepping' (pas en arrière). En appliquant la loi de commande, son effet se propage de  $z_k$  à  $z_1$ . Par contre, sa conception s'effectue dans un sens inverse à travers une chaîne d'intégrateurs, en commençant par une stabilisation de  $z_1$  à travers  $z_2$ , suivie de la stabilisation de  $z_2$  à travers  $z_3$  et ainsi de suite pour arriver enfin à la stabilisation de  $z_k$  à travers  $u$ . La synthèse d'une telle loi de commande est rendue possible grâce à la structure triangulaire inférieure du système. Dans le cas où le système de départ ne satisfait pas cette structure, un difféomorphisme est cherché de sorte que le système avec les nouvelles variables s'écrive sous la forme (2.20).

La commande par backstepping des systèmes d'EDP discrétisées a été mise en lumière grâce à Balogh et Krstic dans [Balogh and Krstic, 2002]. Dans ces travaux, une équation de la chaleur (réaction-diffusion) est discrétisée en l'espace, le système EDO obtenu possède la structure d'un retour strict et donc, une commande par backstepping décrite ci-dessus est envisageable. L'instabilité de ce système résulte du coefficient de réaction positif. La méthode de stabilisation récursive est de concevoir à chaque itération une transformation de coordonnées (étape 1 du déroulement expliqué ci-dessus) qui élimine le terme de réaction ayant un coefficient positif et le remplace par un autre ayant un coefficient négatif. Le système résultant en boucle fermée est une équation de la chaleur stable avec un choix adéquat du coefficient de réaction. Balogh et Krstic [Balogh and Krstic, 2002] montrent qu'il existe une transformation basée sur une fonction bornée (appelée 'noyau'), pour laquelle la solution classique (forte) du système est exponentiellement stable. Néanmoins, les résultats de simulation montrent que ce noyau possède des oscillations dont la fréquence augmente avec la diminution du pas de discrétisation, et donc le noyau ne converge pas vers une fonction continue. Cette observation est expliquée dans [Krstic and Smyshlyaev, 2008c, Chapitre 4] par le fait que la structure même de l'EDP discrétisée est altérée. En diminuant le pas de discrétisation, le nombre d'itérations de la procédure backstepping augmente indéfiniment, alors qu'un système pris en dimension infinie (sans discrétisation) exige un nombre fini d'itérations.



Ce résultat a été une motivation pour appliquer ce changement de variable au même système d'EDP mais en gardant sa caractéristique de dimension infinie dans [Krstic et al., 2008] et [Krstic et al., 2006]. La transformation prend alors la forme d'un opérateur de Volterra borné et inversible :

$$\alpha(t, x) = u(t, x) - \int_0^x k(x, y)u(t, y)dy, \quad (2.21)$$

avec  $x \in [0, 1]$  représentant l'espace et  $t \geq 0$  le temps.  $u(t, x)$  est l'état EDP du système de départ,  $\alpha(t, x)$  est la nouvelle variable d'état et  $k(x, y)$  est le noyau de la transformation, avec  $0 \leq y \leq x$ . Le livre [Krstic and Smyshlyaev, 2008c] de M. Krstic et A. Smyshlyaev fournit une explication approfondie de la méthode backstepping en dimension infinie. Cette méthode est exploitée pour la stabilisation d'un système instable, l'amélioration de performance (augmentation de la vitesse de convergence) d'un système stable, la conception d'observateurs et la génération de trajectoires. En outre, elle est appliquée pour une grande variété d'EDP, y compris les équations d'ondes et les équations hyperboliques du premier ordre (auxquelles nous nous sommes intéressés dans ce travail de thèse).

Avant de donner les détails techniques, nous présentons l'idée principale de stabilisation par backstepping en deux points :

1. identifier les termes non désirés dans le modèle EDP qui conduisent potentiellement à l'instabilité,
2. construire une transformation qui mène (après application d'une commande adéquate) à un système cible (évidemment stable et bien-posé) où ces termes sont éliminés, avec possibilité d'ajout de termes stabilisants (amortissement par exemple).

En conséquence, le système en boucle fermée se comporte d'une manière équivalente au système cible.

Entrons maintenant dans les détails techniques. La transformation backstepping est réalisée à travers un opérateur Volterra représenté par une intégration sur un intervalle (de 0 à  $x$ ) de l'espace (équation (2.21)). Cette forme d'intégration assure une structure triangulaire du système cible, équivalente à la structure de (2.20). De plus, étant donné une régularité appropriée des noyaux, c'est un opérateur borné et inversible qui permet de décaler les termes non désirés de l'intérieur du domaine vers le bord où la commande agit. La difficulté de cette méthode est que le système cible et les noyaux de la transformation sont obtenus simultanément par un calcul unique, dont le déroulement est décrit comme suit.

1. Choisir une structure d'une transformation backstepping et un système cible ayant un comportement intéressant (au niveau de la stabilité, de la vitesse de convergence, ...),
2. dériver la transformation par rapport au temps et à l'espace et effectuer des intégrations par parties quand l'opérateur intégral est appliqué à une dérivée d'un état EDP,
3. substituer ces dérivées dans le système cible pour développer les équations satisfaites par les noyaux de la transformation, et établir l'expression de la commande par retour d'état sur tout le domaine en évaluant la transformation au bord où la commande agit, de manière à éliminer les termes non désirés et décalés vers le bord par la transformation,
4. vérifier si les équations des noyaux sont bien-posés, sinon recommencer cette procédure en modifiant soit la structure de la transformation backstepping soit le système cible de l'étape 1.

Les différentes applications de cette méthode [Krstic and Smyshlyaev, 2008c] ont montré que les équations des noyaux satisfont le même type d'EDP que le système de départ (avec le même niveau de complexité). À titre d'exemple, en stabilisant une équation de la chaleur,

les noyaux de la transformation vérifient des EDP paraboliques. Par contre, la stabilisation d'une équation d'ondes entraîne des EDP hyperboliques vérifiées par ces noyaux. À noter qu'une modification du système cible engendre une modification des équations des noyaux.

Cette méthode fait ressortir trois points essentiels à toujours prendre en considération :

- la stabilité et le caractère bien-posé du système cible,
- l'existence des noyaux dans un espace fonctionnel adéquat,
- la bornitude et l'inversibilité de la transformation, pour pouvoir conclure quant à la stabilité du système de départ à partir de la stabilité du système cible.

Afin d'illustrer la démarche présentée, prenons de [Vazquez et al., 2011] l'exemple d'un système de deux lois de bilan en coordonnées de Riemann

$$u_t(t, x) + \lambda(x)u_x(t, x) = \sigma^{+-}(x)v(t, x) \quad (2.22a)$$

$$v_t(t, x) - \mu(x)v_x(t, x) = \sigma^{-+}(x)u(t, x), \quad (2.22b)$$

qui évolue pour  $x \in [0, 1]$  et  $t > 0$ .  $\lambda(x)$  et  $\mu(x) > 0$  sont les vitesses de propagation, et  $\sigma^{+-}(x)$  et  $\sigma^{-+}(x)$  sont des couplages anti-diagonaux à l'intérieur du domaine.  $\lambda$  et  $\mu$  sont de classe  $C^1$ ,  $\sigma^{+-}$  et  $\sigma^{-+}$  sont continues, et les conditions initiales sont dans  $L^2$ . Les conditions aux bords sont

$$u(t, 0) = U(t) \quad (2.23a)$$

$$v(t, 1) = \rho u(t, 1), \quad (2.23b)$$

avec  $\rho \neq 0$  et  $U(t)$  est l'entrée de commande. Les termes non désirés et qui peuvent être éventuellement des sources d'instabilité sont les couplages  $\sigma^{+-}$  et  $\sigma^{-+}$ . En conséquence, ils doivent être éliminés par la commande. À travers une transformation, similaire à (2.21), et qui prend en considération les deux états EDP  $u$  et  $v$ , le système cible obtenu consiste en deux équations de transport découplées à l'intérieur du domaine :

$$\alpha_t(t, x) + \lambda(x)\alpha_x(t, x) = 0 \quad (2.24a)$$

$$\beta_t(t, x) - \mu(x)\beta_x(t, x) = 0, \quad (2.24b)$$

avec un couplage au bord

$$\alpha(t, 0) = 0 \quad (2.25a)$$

$$\beta(t, 1) = \rho\alpha(t, 1). \quad (2.25b)$$

Les deux aspects à discuter sont l'existence des noyaux de la transformation backstepping et les propriétés du système cible. Les noyaux vérifient quatre EDP hyperboliques, qui évoluent dans un domaine triangulaire, couplées deux à deux à l'intérieur de ce domaine et aux bords. L'existence unique de la solution de ces EDP est établie dans les théorèmes A.1 et A.2 de [Coron et al., 2013], avec une régularité qui dépend de celle des coefficients du système de départ. Nous résumons la preuve de cette existence par les points suivants.

1. La résolution des EDP hyperboliques le long des courbes caractéristiques permet d'obtenir des équations intégrales en termes des noyaux,
2. la solution de ces équations intégrales est établie sous forme de séries par la méthode des approximations successives,
3. la convergence de chaque série est démontrée en majorant la valeur absolue du terme général pour aboutir à une majoration de la valeur absolue de la série par une fonction exponentielle.

La philosophie de ce résultat est une injection de la valeur nulle au bord où la commande agit (*dead beat control* en anglais [Bastin and Coron, 2016]). Autrement dit, la commande va absorber tous les termes présents aux bords, y compris le terme de réflexion proximale.

L'effet de cette application se propage le long des lignes de transport pour stabiliser, en un temps fini qui dépend des vitesses de propagation, les deux états à l'origine. Nous notons également que la stabilité du système cible est souvent démontrée par le biais d'une fonction de Lyapunov.

Il est intéressant de mentionner que R. Vazquez et M. Krstic ont développé dans [Vazquez and Krstic, 2014] les expressions explicites des noyaux d'une transformation backstepping appliquée à un système de deux lois de bilan du premier ordre avec des coefficients constants. Ces noyaux sont exprimés en termes des fonctions de Bessel et des fonctions Q de Marcum. L'objectif était d'explicitier l'expression de la commande par backstepping. Ce résultat simplifie considérablement l'implantation de la loi de commande et montre la dépendance de la solution aux coefficients du système de départ, permettant ainsi l'analyse de la solution vis-à-vis de ces coefficients.

La méthode backstepping est aussi utilisée dans [Vazquez et al., 2011] pour concevoir un observateur en dimension infinie du système (2.22)-(2.23). Le système estimé est une copie de (2.22)-(2.23) avec un retour de sortie. La dynamique de l'erreur entre les états  $u$  et  $v$ , et les états observés est établie. Une transformation inverse de backstepping aboutit à un système cible en l'erreur qui converge vers l'origine.

L'effet spectaculaire de la commande par retour d'état estimé par l'observateur précédent est exploité pour des systèmes hyperboliques divers et pour différents objectifs. Nous présentons quelques travaux sur les systèmes hyperboliques du premier ordre, sur lesquels nous nous appuyons dans nos développements de cette thèse. Ces papiers sont groupés selon que le système traité comprend une EDP, deux EDP ou un nombre arbitraire d'EDP.

1. Modèle comprenant une EDP hyperbolique.

Dans [Krstic and Smyshlyaev, 2008b], cette EDP modélise des problèmes physiques, comme les réacteurs chimiques et les échangeurs thermiques. Une particularité de ce papier est la démonstration de l'existence d'une solution unique du noyau satisfaisant une EDP hyperbolique contenant un intégrateur de Volterra dans le domaine. La preuve se base sur la méthode des approximations successives. Le résultat est appliqué pour stabiliser une équation de Korteweg-de Vries et un système présentant un retard dans le capteur. Dans [Bribiesca-Argomedeo and Krstic, 2015], le problème de stabilisation d'une EDP avec une intégrale de Fredholm dans le domaine est résolu. Le système cible est une équation de transport stable en temps fini. Le caractère bien-posé des EDP satisfaites par les noyaux est donné. La preuve consiste à résoudre les EDP par la méthode des caractéristiques et en utilisant ensuite le théorème du point fixe dans un espace de Banach, basé sur la propriété de contraction d'un opérateur intégral [Khamisi and Kirk, 2011, Théorème 3.1]. Le résultat est appliqué à une EDP couplée au bord avec une EDO du second ordre.

2. Système de deux EDP hyperboliques couplées.

La stabilisation du système linéaire (2.22)-(2.23) est traitée dans [Vazquez et al., 2011] et étendue pour le cas quasi-linéaire dans [Coron et al., 2013]. Dans [Lamare and Bekiaris-Liberis, 2015], la méthode backstepping est utilisée afin de générer une trajectoire de sortie en boucle ouverte. La commande est augmentée par un correcteur PI sur l'erreur de suivi de la sortie. Constatons l'importance de la méthode backstepping qui a rendu possible la génération de trajectoire. La simplicité de résolution du système cible, complétée par la bornitude et l'inversibilité de la transformation a permis de déduire l'expression de la solution du système de départ en connaissant la solution du système cible. O. Aamo utilise la méthode de backstepping pour résoudre le problème de détection et de localisation de fuites dans les oléoducs dans [Aamo, 2016], et pour

stabiliser un système de forage exposé à des perturbations au fond du tube de forage dans [Aamo, 2013]. Ces perturbations sont modélisées par un couplage en cascade du système de deux EDP hyperboliques avec une dynamique ODE. Dans [Hasan et al., 2016], un couplage en cascade à un bord avec une dynamique ODE est considéré et un observateur est synthétisé.

### 3. Systèmes modélisés par un nombre arbitraire d'EDP hyperboliques.

La stabilisation en temps minimal des EDP hyperboliques avec application d'une commande à un bord et aux deux bords est traitée dans [Auriol and Di Meglio, 2016a] et [Auriol and Di Meglio, 2016b] respectivement. Le temps minimal de stabilisation se révèle être inversement proportionnel à la plus faible vitesse de propagation. Ce résultat met en relief une caractéristique particulière des EDP hyperboliques concernant l'effet de propagation de la commande. Celle-ci ne peut stabiliser le système qu'à partir d'un certain moment lié à la vitesse de transport. Des écoulements de fluides sont modélisés par des systèmes d'EDP hyperboliques couplées 3 à 3, et stabilisés par backstepping dans [Di Meglio et al., 2012b]. Dans [Di Meglio et al., 2012a] et [Di Meglio et al., 2013], le système hyperbolique stabilisé comprend un nombre arbitraire d'ondes qui se propagent dans un sens, couplées à une seule onde se propageant dans le sens contraire et commandée au bord par une commande scalaire. Un système général comprenant un nombre arbitraire d'ondes dans les deux sens de propagation est stabilisé dans [Hu et al., 2016] avec un couplage statique au bord, et dans [Di Meglio et al., 2018] où un bord présente un couplage bidirectionnel avec une dynamique EDO.

Remarquons que, quand le système présente un couplage avec une dynamique EDO, la stabilisation en temps fini est abandonnée au détriment d'une stabilisation exponentielle. Nous citons par exemple les travaux de [Roman et al., 2018], où une équation d'ondes est stabilisée par la méthode de backstepping. La commande est appliquée à un bord où une condition de type Robin est présente et l'autre bord est couplé à une dynamique EDO instable.

Nous soulignons ici les résultats de [Di Meglio et al., 2018] qui nous ont servis comme base pour contribuer à la littérature et pour prouver des lemmes dans notre travail. Ces résultats seront évoqués ultérieurement. Nous mentionnons, par exemple, le caractère bien-posé des noyaux satisfaisant un ensemble d'une classe générale d'EDP hyperboliques couplées à l'intérieur d'un domaine triangulaire, et aux bords avec des EDO.

#### 2.3.5 Robustesse vis-à-vis des erreurs du modèle

Certains problèmes de commande découlent des erreurs du modèle. Celui-ci peut contenir des imprécisions, comme des incertitudes sur certains paramètres, ou tout simplement des paramètres inconnus. En outre, pour des raisons de commande, les automaticiens choisissent intentionnellement d'adopter un modèle simplifié dans lequel des dynamiques sont négligées ou considérées comme des perturbations non mesurées. En conséquence, des commandes robustes vis-à-vis de ces erreurs et qui maintiennent en même temps la stabilité, sont recherchées. Nous présentons succinctement deux méthodes de commande robuste vis-à-vis de ces incertitudes pour les systèmes décrits par des EDP : la commande par *mode glissant* et la *commande adaptative*.

La commande par mode glissant est une approche simple de commande robuste appliquée essentiellement à un modèle non-linéaire. Présentée par J. Slotine et W. Li dans [Slotine et al., 1991], cette méthode est bien connue pour ses performances quant au rejet de perturbations externes et à l'insensibilité par rapport aux variations des paramètres. Cette méthode s'appuie sur la construction d'une fonction continue et dérivable  $S(t)$ , telle que pour toute condition initiale du système, l'état rejoint forcément la surface  $S(t) = 0$ , appelée surface de glissement

(dite aussi surface de Slotine). La synthèse de la commande se base sur une fonction de Lyapunov rendue stricte grâce à la condition d'attractivité de la surface :

$$S(t)\dot{S}(t) < 0. \quad (2.26)$$

Cette méthode est étendue pour les systèmes en dimension infinie dans [Orlov and Utkin, 1987] et appliquée à un système parabolique. Le modèle considéré décrit un champ thermique avec des termes sources représentant des échanges thermiques entre les états avec l'environnement, et la commande est répartie à l'intérieur du domaine. En suivant l'approche pour les systèmes en dimension finie, la surface de glissement est définie, suivie de la construction de la commande se basant sur une fonction de Lyapunov. Nous soulignons le fait que la condition d'attractivité (2.26), nécessaire pour la stabilité, est assurée par une commande discontinue, dépendant du signe de  $S(t)$ .

La commande par mode glissant est utilisée pour stabiliser, avec rejet de perturbations aux bords, des systèmes paraboliques avec un actionnement de type Dirichlet dans [Cheng et al., 2011] et avec un couplage à une EDO dans [Wang et al., 2015]. Dans ces deux travaux, la construction de la surface de glissement est précédée d'une transformation de Volterra, conçue dans [Krstic and Smyshlyaev, 2008c], afin de stabiliser l'état EDO et les états EDP à l'intérieur du domaine. Nous notons comme exemple que dans [Cheng et al., 2011], la surface de glissement assure un flux nul à un bord du domaine du système cible contribuant ainsi à une stabilité exponentielle. L'approche par mode glissant est appliquée à des systèmes hyperboliques quasi-linéaires ayant une structure variable dans [Hebertt, 1989] pour lesquels une condition nécessaire et suffisante d'existence d'une surface de glissement répartie est donnée.

Une alternative pour atteindre une robustesse vis-à-vis des incertitudes d'un modèle est la commande adaptative. La conception d'une telle commande, avec une analyse et une étude de robustesse pour des systèmes en dimension finie, est présentée dans [Ioannou and Sun, 1996].

En dimension infinie, cette méthode est implantée en parallèle avec la commande par backstepping dans [Krstic and Smyshlyaev, 2008a] (voir plus de détails dans [Krstic and Smyshlyaev, 2008c, Chapitre 13]). M. Krstic et A. Smyshlyaev conçoivent des estimateurs qui estiment en ligne un paramètre incertain du modèle. Cette estimation est ensuite introduite dans l'expression explicite de la commande par backstepping établie pour la stabilisation d'un système parabolique. Deux types d'estimateur du paramètre sont présentés : un estimateur basé sur le principe de la passivité, et un autre basé sur la méthode du gradient. Les étapes de synthèse d'un estimateur par la méthode de passivité se résument de la manière suivante.

1. Estimer le paramètre incertain par une fonction variable du temps,
2. introduire un système auxiliaire ayant la même structure que le modèle considéré avec un terme non-linéaire. Ce terme ralentit l'adaptation en ajoutant un amortissement,
3. écrire la dynamique, résultante du système auxiliaire et du modèle, en termes des erreurs sur l'état et sur le paramètre à identifier,
4. construire une fonction de Lyapunov quadratique en termes des erreurs,
5. établir la dynamique de la fonction estimée de manière à rendre la dérivée par rapport au temps de la fonction de Lyapunov négative.

L'expression de la commande par backstepping est modifiée par l'introduction de la fonction estimée du paramètre incertain. Finalement, le système cible est reformulé et sa stabilité,

avec le choix de la fonction estimée, est montrée. L'estimateur basé sur la méthode du gradient s'appuie sur la conception de deux filtres, un sur l'état et un autre sur l'entrée. Une démarche similaire à celle présentée ci-dessus s'en suit. La dynamique de l'erreur est écrite, une fonction de Lyapunov est construite et la dynamique de la fonction estimée est déduite en visant un signe négatif de la dérivée par rapport au temps de la fonction de Lyapunov.

La commande adaptative est appliquée à une équation d'ondes dans [Krstic, 2009] et [Bresch-Pietri and Krstic, 2014] avec un anti-amortissement au bord et un coefficient d'anti-amortissement incertain. Dans [Krstic, 2009], un changement de variables de départ aboutit à un système présentant une évolution d'ordre un en temps et deux en espace, tandis que dans [Bresch-Pietri and Krstic, 2014], l'équation d'ondes est reformulée en coordonnées de Riemann (évolution d'ordre un en temps et un en espace).

### 2.3.6 Robustesse vis-à-vis du retard dans la commande

Dans la section 2.3.4, nous avons présenté la commande par backstepping des EDP hyperboliques. Malgré l'effet stabilisant, l'approche adoptée dans les travaux mentionnés ne prend pas en considération l'effet d'un retard dans la commande sur la stabilité du système en boucle fermée. La robustesse de la commande vis-à-vis du retard s'avère un élément indispensable à étudier dans la mesure où sa présence dans les applications pratiques est inévitable (voir les exemples dans [Gu et al., 2003] qui montrent différents systèmes où un retard est présent).

Cette problématique, essentielle à aborder pour éliminer des barrières entre la théorie de la commande et sa mise en œuvre pratique, a été initialisée dans [Datko et al., 1986]. Les auteurs montrent qu'une équation d'ondes, stabilisée par un amortissement à un bord, peut subir une déstabilisation quand un retard arbitraire intervient dans la rétroaction. Par ailleurs, l'effet du retard sur un système d'EDP hyperboliques couplées a été détaillé dans [Auriol et al., 2017]. Les résultats dévoilent qu'en annulant complètement le terme de réflexion proximale par une loi de commande linéaire, le système risque d'avoir une marge de robustesse nulle et n'importe quel retard, aussi petit qu'il soit, peut effectivement déstabiliser le système en boucle fermée.

Afin de garantir une marge de robustesse, les auteurs de [Auriol et al., 2017] préservent une partie de la réflexion au bord. La procédure présentée consiste alors à modifier la loi de commande classique par backstepping (voir par exemple [Vazquez et al., 2011]) en introduisant un paramètre qui représente le taux d'annulation de la réflexion proximale. Ce paramètre de réglage ajoute un degré de liberté qui réalise un compromis entre la vitesse de convergence et la robustesse. En conséquence, cette démarche conduit à obtenir une marge de robustesse non nulle en diminuant par contre la vitesse de convergence du système.

Nous présentons de [Auriol et al., 2017] un résultat intéressant pour une stabilisation robuste d'un système de deux EDP hyperboliques couplées (système (2.22)-(2.23) avec des vitesses de propagation constantes)

$$u_t(t, x) + \lambda u_x(t, x) = \sigma^{+-}(x)v(t, x) \quad (2.27a)$$

$$v_t(t, x) - \mu v_x(t, x) = \sigma^{-+}(x)u(t, x), \quad (2.27b)$$

avec les conditions aux bords

$$u(t, 0) = qv(t, 0) \quad (2.28a)$$

$$v(t, 1) = \rho u(t, 1) + U(t). \quad (2.28b)$$

Nous savons que si  $|\rho q| > 1$ , alors la fonction de transfert en boucle ouverte a un nombre infini de pôles à parties réelles positives, et le système considéré ne peut pas être stabilisé par un retour d'état linéaire avec une robustesse vis-à-vis du retard. Ce résultat s'appuie sur [Logemann et al., 1996, Théorème 1.2] qui donne une condition nécessaire pour une stabilisation robuste vis-à-vis du retard par un retour d'état linéaire et sur [Hale and Lunel, 2002, Corollaire 2.4] qui présente une condition nécessaire et suffisante de stabilité d'une équation aux différences scalaire.

## 2.4 Conclusion

La variété des approches d'analyse et la multitude de techniques de commande présentées dans ce chapitre montrent la nécessité des études approfondies des systèmes de lois de bilan, retrouvés dans des applications concrètes en physique et en ingénierie.

Toutefois, ces techniques présentent des limitations et l'implantation des méthodes de commande sur des cas pratiques exige des études supplémentaires afin d'enrichir la base théorique de la littérature. Nous rappelons que toute étude, qu'elle soit dirigée vers une synthèse de commande ou vers une analyse de stabilité, sert comme élément essentiel sur les deux axes, puisqu'un système commandé en boucle fermée (ou, d'une manière équivalente, le système cible dans le cas d'une commande par backstepping) doit être stable.

Revenons au système de lois de bilan (2.27)-(2.28), avec les coefficients  $\sigma^{+-}$  et  $\sigma^{-+}$  constants, et sans entrée de commande. Les sources d'instabilité de ce système sont les couplages à l'intérieur du domaine (représentés par  $\sigma^{+-}$  et  $\sigma^{-+}$ ) et les couplages aux bords (termes de réflexion, représentés par  $\rho$  et  $q$ ). L'analyse de stabilité de ce système quand ces deux couplages sont présents reste un défi. Remarquons qu'une condition nécessaire de stabilité est dominante dans la plupart des études discutées dans la section 2.2. Elle impose la dissipativité de la condition aux bords, et est décrite par une inégalité (stricte par rapport à l'unité) à vérifier par une certaine forme de la condition aux bords : le rayon spectral, la norme spectrale, la valeur absolue du produit de ses dérivées ou des coefficients de réflexion...

Pour un système linéaire de lois de conservation (sans couplage à l'intérieur du domaine), cette condition s'est avérée à la fois nécessaire et suffisante. L'interrogation alors se pose sur l'effet de l'intervention de ces couplages quant à la stabilité du système. Certaines études [Prieur et al., 2008, Théorème 1] exigent une faible variation de ces couplages de sorte à ce qu'ils soient compensés par la dissipativité aux bords, tandis que d'autres références imposent à la matrice de couplage d'être marginalement stable [Diagne et al., 2012], [Bastin and Coron, 2016, Théorème 5.4], ou un mélange d'un amortissement à la frontière et à l'intérieur du domaine [Prieur et al., 2014]. Ce fait s'explique physiquement de la manière suivante. La stabilité est assurée si l'atténuation des ondes aux bords l'emporte sur leur amplification à l'intérieur du domaine. Si les ondes sont amorties à l'intérieur du domaine et en même temps les conditions aux bords présentent une dissipativité, alors le système est stable. En outre, pour des systèmes quasi-linéaires ou non-linéaires de lois de bilan et les systèmes à retard, la majorité des conditions suffisantes de stabilité s'expriment sous la forme de LMI, qui nécessite la recherche d'existence d'un ou de plusieurs paramètres de décision (scalaires ou matriciels).

Des questions de recherche découlent de ces résultats : est-ce-qu'il existe un moyen plus pratique pour évaluer les valeurs admissibles des coefficients de couplage pour garantir la stabilité? Est-il possible de développer des conditions explicites en termes des coefficients de couplage à l'intérieur du domaine et ceux des conditions aux bords, pour enrichir la

littérature en outils d'analyse qui fournissent des tests de stabilité ? Existe-il d'autres moyens moins conservatifs pour exécuter ces tests ?

Nous cherchons en conséquence une nouvelle représentation du système de lois de bilan (2.27)-(2.28) (avec des coefficients constants), qui mène à des outils pratiques pour tester leur stabilité. Étant donné que la complexité est une conséquence directe des couplages à l'intérieur du domaine, serait-il pertinent de les décaler vers le bord par une transformation backstepping adéquate ? Serait-il possible de restreindre ainsi notre étude à une analyse au bord, dont les résultats sont valables sur tout le domaine ?

Avant de répondre à ces questions et d'attaquer l'analyse dans le chapitre suivant, nous justifions le choix du système considéré. En stabilisant les systèmes hyperboliques par la commande par backstepping, les couplages à l'intérieur du domaine sont considérés comme des termes non désirés et sont par suite éliminés avec le terme de réflexion proximale. Cette procédure résulte en un système stable en temps fini, et dont l'analyse est relativement simple. Néanmoins, les résultats récents de [Auriol et al., 2017], présentés dans la section 2.3.6, montrent qu'avec cette approche, le système en boucle fermée possède une marge de robustesse nulle vis-à-vis du retard dans la commande. Il demeure donc nécessaire de garder une partie de la réflexion proximale, limitant ainsi le nombre de systèmes cibles dont la stabilité est simple à analyser. L'injection de la valeur nulle au bord (dead beat control) n'étant plus favorisée, le système cible sera exponentiellement stable (et pas stable en temps fini). En conséquence, le besoin d'ajouter un degré de liberté pour le choix d'un système cible en altérant sa vitesse de convergence et sa réponse en régime transitoire s'avère d'une grande importance. Prenons, par exemple, les travaux récents sur la commande aux bords des systèmes hamiltoniens à port [Ramirez et al., 2017] et [Macchelli et al., 2017]. Dans ces travaux, une alternative à la structure de couplage interne du système cible est proposée. Toutefois, la conception de la commande s'appuie sur l'annulation complète du terme de réflexion et l'utilisation d'une fonction de Lyapunov stricte qui impose une structure particulière du système en boucle fermée, exigeant un degré de dissipativité dans le domaine.

Le système que nous considérons représente donc un système cible, avec des couplages aux bords et des couplages anti-diagonaux à l'intérieur du domaine, les couplages diagonaux originellement présents dans le système de départ pouvant être éliminés par une transformation backstepping et une commande adéquates. La stabilité du système considéré sera testée par des outils développés dans le chapitre 3.

Passons maintenant à la commande des systèmes d'EDP hyperboliques linéaires du premier ordre couplés deux à deux. Le travail le plus récent est celui de [Di Meglio et al., 2018] où une classe générale d'EDP hyperboliques couplés à une dynamique EDO au niveau de la charge est stabilisée. Toutefois, dans ce travail et dans tous les travaux qui stabilisent des systèmes hyperboliques par backstepping, la commande est directement injectée au bord d'un état EDP. En réalité, nous pouvons être confrontés à une autre dynamique présente au niveau de la commande et celle-ci ne sera plus disponible directement au bord de l'EDP. Nous sommes ramenés donc à stabiliser un système hyperbolique linéaire couplé aux deux bords avec des dynamiques EDO (système écrit sous forme de couplages bidirectionnels EDO-EDP-EDO). Ce problème, une fois résolu, constitue alors un module élémentaire. L'étape qui va suivre sera d'interconnecter deux modules pour former un réseau et étendre les résultats de stabilisation à cette interconnexion.

La décision qui reste à prendre est le choix de la commande. Notre choix de la commande par backstepping est motivé par les raisons suivantes. Un correcteur PI est performant pour



le rejet de perturbation. Néanmoins, les résultats de la littérature montrent que le gain  $k_i$  est restreint à un intervalle qui dépend des coefficients du système, ajoutant ainsi des contraintes sur les performances du système en boucle fermée. En outre, contrairement à la correction PI qui consiste en un retour de sortie, la commande par backstepping est un retour sur tout l'état EDP à l'intérieur du domaine ainsi qu'aux bords, et nous fournit plus de degrés de liberté sur le choix des termes à garder et ceux à éliminer (avec autant de termes de retour d'états), spécifiant ainsi une dynamique désirée du système cible. Cela étant dit, la commande par backstepping requiert, en revanche, la construction d'un observateur d'état. La correction PI est appliquée à un système linéaire, ou pour un système non-linéaire au voisinage de l'origine (stabilité locale), tandis que la commande par backstepping est appliquée à la base pour des systèmes non-linéaires en dimension finie, et étendue pour des systèmes non-linéaires en dimension infinie avec une stabilisation globale [Liu and Krstić, 2000] et [Krstic and Smyshlyaev, 2008c].

Par ailleurs, la platitude est un bon choix pour générer une trajectoire en boucle ouverte. Cependant, elle nécessite une résolution du système en tout point, ce qui peut être complexe, voire non réalisable, quand des couplages bidirectionnels avec des dynamiques EDO sont prises en compte. En revanche, en appliquant une transformation backstepping, un système cible plus simple à analyser sera obtenu. Une résolution de ce système cible, avec la transformation backstepping inverse, nous donne une expression de la solution du système de départ (voir par exemple [Lamare and Bekiaris-Liberis, 2015]).

Une commande par mode glissant est robuste vis-à-vis des erreurs du modèle, mais n'oublions pas qu'elle aboutit souvent à une commande non-linéaire et fait apparaître le phénomène de réticence (*chattering* en anglais : vibrations à hautes fréquences), qui est très gênant et qui peut être nuisible en application. Afin de surmonter les erreurs de modèle, le mode glissant ou la commande adaptative peuvent être employés en parallèle avec la transformation backstepping (comme expliqué dans la section 2.3.5).

D'autres raisons qui supportent notre choix du backstepping sont listées ci-dessous.

- Cette commande est appliquée à une large classe de systèmes,
- elle permet le passage du système de départ à un système cible plus simple à analyser et à résoudre,
- elle permet d'éliminer exactement les termes non désirés et changer la structure à l'intérieur du domaine en ajoutant un amortissement mais en altérant aussi la vitesse de convergence. Elle permet donc de choisir une dynamique cible à l'intérieur du domaine et le comportement du système en boucle fermée en régime transitoire [Krstic and Smyshlyaev, 2008c],
- elle permet de décaler toutes les valeurs propres du système globalement vers le plan complexe gauche, sans pour autant affecter un placement de pôles pour chaque valeur propre individuellement [Krstic and Smyshlyaev, 2008c],
- elle évite le passage par une résolution d'équations compliquées et difficiles à résoudre, comme les équations de Riccati obtenues par une commande optimale [Krstic and Smyshlyaev, 2008c],
- les noyaux de la transformation sont simples à calculer numériquement ou même explicitement dans certains cas [Vazquez and Krstic, 2014]. Les équations satisfaites par ces noyaux sont de même niveau de complexité que le système de départ,
- la commande est écrite explicitement en termes de retour d'état,
- la loi de commande peut être modifiée pour garantir une marge de robustesse non-nulle vis-à-vis du retard dans la commande [Auriol et al., 2017].

La commande par backstepping sera donc appliquée à un système EDO-EDP-EDO pour

une stabilisation exponentielle dans le chapitre 4.



## Chapitre 3.

# Analyse de stabilité d'une classe d'EDP hyperboliques linéaires cou- plées 2 à 2

**Sommaire**

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>43</b>
3.1.1	Notations	44
3.1.2	Formulation du problème d'analyse	45
<b>3.2</b>	<b>CNS de stabilité</b>	<b>46</b>
3.2.1	Equivalence de stabilité entre EDP et SAR	46
3.2.2	Condition de stabilité	51
<b>3.3</b>	<b>CS de stabilité</b>	<b>54</b>
3.3.1	Relaxation analytique de la CNS : Condition explicite	54
3.3.2	Approximation numérique de la CNS : algorithme	62
<b>3.4</b>	<b>Domaines de stabilité</b>	<b>74</b>
<b>3.5</b>	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>79</b>

---

### 3.1 Introduction

Les équations aux dérivées partielles (EDP) hyperboliques du premier ordre, représentant des systèmes de loi de conservation et de bilan, sont largement étudiées dans le cadre de la commande et de l'analyse. Différentes approches de commande ont été élaborées pour la stabilisation et l'observation de systèmes régis par des EDP hyperboliques (voir par exemple [Aamo, 2016], [Coron et al., 2007], [Dos Santos et al., 2008], [Vazquez et al., 2011], [Coron et al., 2013] et [Lamare and Bekiaris-Liberis, 2015]). La synthèse de la commande de ces systèmes nécessite une analyse préalable de stabilité, afin d'assurer un comportement désiré du système contrôlé. Les EDP hyperboliques du premier ordre peuvent inclure à la fois des couplages aux bords et à l'intérieur du domaine qui peuvent être des sources d'instabilité. La motivation de cette étude est de développer des outils pratiques d'analyse, tant explicites que numériques, qui testent leur stabilité, pour le cas général de coefficients de couplage constants à l'intérieur du domaine.

Dans ce chapitre, nous analysons la stabilité d'une classe d'EDP hyperboliques linéaires couplées 2 à 2 pour en donner des conditions suffisantes de stabilité. Nous reformulons le problème comme une analyse d'un système décrit par une équation aux différences avec un retard distribué. Le passage de l'analyse d'un système d'EDP hyperboliques à celui d'un système à retard (SAR) est justifié par les arguments suivants :

- il nous permet de nous concentrer sur l'analyse de la stabilité d'un état à un seul bord de notre domaine, plutôt que de considérer deux états EDP dans tout le domaine. Ainsi, la dépendance à la variable spatiale ne sera plus incluse,
- le SAR obtenu ne contient pas des dérivations partielles. Par suite, il est plus simple à analyser,
- il existe dans la littérature des outils d'analyse de stabilité des systèmes à retard. Nous citons [Damak et al., 2015] [Melchor-Aguilar, 2013], [Hale and Lunel, 2002], [Glizer et al., 2017], [Bellman and Cooke, 1963], [Diekmann et al., 2012], [Niculescu, 2001], [Vidyasagar, 1972] et [Baker and Vakharia, 1970],
- la stabilité du système à retard obtenu est équivalente à celle du système de départ. Ainsi, toute conclusion sur la stabilité d'un de ces deux systèmes s'applique aussi sur l'autre.

Ce passage est réalisé en guise d'une transformation backstepping qui transforme le système de départ en un système cible où les couplages à l'intérieur du domaine sont décalés vers le bord. La structure particulière du système cible (équations de transport couplées aux deux bords) nous permet de réécrire celui-ci sous la forme d'une équation aux différences avec un retard distribué satisfaite par un état EDP à un bord. Ce fait met en relief l'efficacité de la technique backstepping, non seulement pour la synthèse d'une commande, mais aussi comme outil d'analyse.

Notre approche s'appuie sur l'analyse de l'équation aux différences avec retard distribué associée à notre système dans le domaine de Laplace, et pour laquelle une condition nécessaire et suffisante (CNS) de stabilité est déduite en se référant à l'analyse de stabilité entrée/sortie des systèmes BIBO dans [Vidyasagar, 1972].

La contribution de cette étude est l'introduction d'une condition suffisante de stabilité, simple à appliquer et explicite en termes des coefficients du système. Cette condition est trouvée par une relaxation analytique de la CNS en majorant certains termes. Elle est ensuite comparée avec d'autres conditions existant dans la littérature et qui présentent une similarité dans la simplicité d'évaluation. Les résultats montrent les avantages et les limitations de la condition introduite par rapport aux conditions existantes. Afin de

rendre notre critère explicite, nous établissons les expressions analytiques des noyaux de la transformation backstepping en adoptant une procédure similaire à celle utilisée dans [Vazquez and Krstic, 2014]. Ces expressions donnent la dépendance de la condition suffisante de stabilité vis-à-vis des coefficients du système.

Dans [Vazquez and Krstic, 2014], les expressions analytiques des noyaux de la transformation directe de backstepping sont établies par R. Vazquez et M. Krstic. Le système considéré consiste en deux EDP hyperboliques couplées 2 à 2 avec des termes constants de couplages diagonaux et anti-diagonaux à l'intérieur du domaine et un couplage statique au bord. La solution des équations des noyaux est obtenue en résolvant un système d'EDP hyperboliques couplées 2 à 2 et en utilisant les fonctions  $Q$  de Marcum et les fonctions de Bessel modifiées de première espèce. Dans ce travail, nous trouvons les expressions analytiques exactes des noyaux de la transformation inverse de backstepping. Pour cette finalité, nous transformons les EDP couplées 4 à 4 satisfaites par ces noyaux en équations intégrales. Nous appliquons ensuite la méthode des approximations successives pour aboutir à des expressions en série de puissance. Finalement, en utilisant les fonctions de Bessel et les fonctions de Bessel modifiées de première espèce, nous obtenons leur expression analytique. En conséquence, en combinant les résultats de [Vazquez and Krstic, 2014] avec ceux de ce travail, nous obtenons les expressions analytiques complètes des noyaux de backstepping (directe et inverse). Ces expressions servent à l'étude en régime transitoire du système en boucle fermée.

Le conservatisme de la condition de stabilité introduite est évalué à travers une approche numérique qui approxime numériquement la CNS développée dans le domaine de Laplace. Nous construisons un algorithme qui, grâce aux expressions explicites des noyaux, est capable de tester la validité de la CNS en restreignant l'étude à une région compacte du demi-plan complexe droit. Cet algorithme présente une condition suffisante de stabilité avec un degré de conservatisme très faible, dépendant uniquement de la vitesse de la machine et de sa précision. Il sert également comme référence pour conjecturer l'efficacité des conditions explicites comparées dans ce chapitre.

Ce chapitre est structuré comme suit. Nous présentons les notations et définitions dans la section 3.1.1. Dans la section 3.1.2, nous formulons le problème de l'analyse en présentant les équations. Dans la section 3.2, nous établissons l'équation aux différences avec retard distribué à partir du système de départ en utilisant une transformation backstepping. Une condition nécessaire et suffisante de stabilité dans le domaine de Laplace est exposée. Dans la section 3.3, une condition suffisante *explicite* en termes des coefficients du système de départ est proposée. Cette condition est ensuite comparée à d'autres critères trouvés dans la littérature et validée par des exemples académiques. Ensuite, un test numérique de la condition nécessaire et suffisante est construit. Il est utilisé dans des exemples numériques dans la section 3.4 pour évaluer le conservatisme de la condition suffisante explicite. Finalement, une conclusion est donnée dans la section 3.5. Les expressions analytiques des noyaux sont établies dans l'annexe E.

### 3.1.1 Notations

Dans ce chapitre, nous utilisons les notations suivantes. L'espace fonctionnel  $\chi \doteq L^2([0, 1]; \mathbb{R}) \times L^2([0, 1]; \mathbb{R})$  est l'espace dans lequel les états EDP sont définis, avec la norme associée

$$\|(\varphi, \psi)\|_{\chi} \doteq \left( \int_0^1 \varphi^2(\theta) d\theta + \int_0^1 \psi^2(\theta) d\theta \right)^{1/2}, \quad (3.1)$$

pour tout  $(\varphi, \psi) \in \chi$ . Le sens de la stabilité exponentielle dans la norme de  $\chi$  est défini

ci-dessous.

Un système  $(\varphi, \psi)$  est exponentiellement stable dans la norme de  $\chi$  s'il existe des constantes réelles  $M > 0$  et  $\omega > 0$  telles que, pour toute condition initiale  $(\varphi(0), \psi(0)) \in \chi$ , la solution  $(\varphi, \psi)$  de ce système satisfait

$$\|(\varphi, \psi)\|_{\chi} \leq M \|(\varphi(0), \psi(0))\|_{\chi} e^{-\omega t}, \quad \forall t \geq 0, \quad (3.2)$$

où  $t$  désigne la variable temporelle.

Nous définissons la trajectoire partielle d'une fonction  $\varphi$  comme  $\varphi_{[t]}(\theta) \doteq \varphi(t + \theta)$ ,  $\theta \in [-\tau, 0)$ ,  $\tau > 0$  et  $t \geq \tau$ , avec la norme dans  $L^2([-\tau, 0]; \mathbb{R})$

$$\|\varphi_{[t]}\|_{L^2([-\tau, 0]; \mathbb{R})} \doteq \left( \int_{-\tau}^0 \varphi^2(t + \theta) d\theta \right)^{1/2} \quad (3.3)$$

pour  $t \geq \tau$ , et sa norme dans  $C^1([-\tau, 0]; \mathbb{R})$  est définie comme

$$\|\varphi_{[t]}\|_{C^1([-\tau, 0]; \mathbb{R})} \doteq \max_{\theta \in [-\tau, 0]} |\varphi(t + \theta)| + \max_{\theta \in [-\tau, 0]} |\varphi_t(t + \theta)| \quad (3.4)$$

pour  $t \geq \tau$ . Nous notons par  $C^k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , l'ensemble de fonctions  $k$  fois dérivables et dont la dérivée d'ordre  $k$  est continue, et par  $\varphi_t$  la dérivée partielle de  $\varphi$  par rapport à la variable indépendante  $t$ . La stabilité exponentielle d'une trajectoire partielle dans la norme de  $L^2([-\tau, 0]; \mathbb{R})$  est définie comme suit.

Le point d'équilibre nul d'une trajectoire partielle  $\varphi_{[t]}$ ,  $t \geq \tau$ , est exponentiellement stable dans la norme de  $L^2([-\tau, 0]; \mathbb{R})$  s'il existe des constantes réelles  $M > 0$  et  $\omega > 0$  telles que, pour toute condition initiale  $\varphi_{[\tau]} \in L^2([-\tau, 0]; \mathbb{R})$ , la solution  $\varphi_{[t]}$  satisfait

$$\|\varphi_{[t]}\|_{L^2([-\tau, 0]; \mathbb{R})} \leq M \|\varphi_{[\tau]}\|_{L^2([-\tau, 0]; \mathbb{R})} e^{-\omega(t-\tau)}, \quad \forall t \geq \tau. \quad (3.5)$$

Par ailleurs, nous rappelons que  $J_n$  et  $I_n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  sont les fonctions de Bessel et les fonctions de Bessel modifiées de première espèce respectivement. Étant donné un ensemble  $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ , sa fonction caractéristique  $\mathbb{1}_{\Omega}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est définie comme suit

$$\mathbb{1}_{\Omega}(\theta) = \begin{cases} 1 & \text{si } \theta \in \Omega \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Une fonction  $f$  définie sur  $\omega \subseteq \mathbb{C}$  est Lipschitz-continue avec une constante de Lipschitz  $m$  sur  $\omega$ , s'il existe une constante  $m \geq 0$  telle que  $|f(z_1) - f(z_2)| \leq m|z_1 - z_2|$ ,  $\forall z_1, z_2 \in \omega$ , où  $|\cdot|$  est le module d'un élément dans  $\mathbb{C}$ . Pour une matrice symétrique  $A$ , les symboles  $\succeq$  ( $\preceq$ ) indiquent que  $A$  est semi-définie positive (négative) respectivement. Nous considérons le domaine triangulaire  $\mathcal{T} \doteq \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]; y \leq x\}$ .

### 3.1.2 Formulation du problème d'analyse

Nous nous intéressons à l'analyse de stabilité d'une classe d'EDP hyperboliques linéaires du premier ordre couplées 2 à 2. Les systèmes sous considération sont donc de la forme

$$u_t(t, x) + \frac{1}{r_1} u_x(t, x) = \sigma^{+-} v(t, x) \quad (3.6a)$$

$$v_t(t, x) - \frac{1}{r_2} v_x(t, x) = \sigma^{-+} u(t, x) \quad (3.6b)$$

pour tout  $t \geq 0$ ,  $x \in [0, 1]$ , où  $\frac{1}{r_1} > 0$  et  $\frac{1}{r_2} > 0$  sont les vitesses de transport associées aux deux équations de transport (3.6a) et (3.6b) respectivement. Les coefficients  $\sigma^{+-}$  et  $\sigma^{-+}$



représentent des couplages constants entre les EDP à l'intérieur du domaine. Les conditions initiales associées sont

$$u(0, \cdot) \doteq u_0(\cdot) \quad (3.7a)$$

$$v(0, \cdot) \doteq v_0(\cdot) \quad (3.7b)$$

définies dans  $L^2([0, 1], \mathbb{R})$ . En outre,  $u(t, x)$  et  $v(t, x)$  vérifient les conditions aux bords de Dirichlet suivantes

$$u(t, 0) = qv(t, 0) \quad (3.8a)$$

$$v(t, 1) = \rho u(t, 1) \quad (3.8b)$$

pour tout  $t > 0$ , où  $\rho$  et  $q$  sont des coefficients de couplage aux bords, tels que

$$|\rho q| < 1. \quad (3.9)$$

Nous attirons l'attention sur le fait que si  $|\rho q| \geq 1$ , le système est instable. La fonction de transfert possède une infinité de pôles à partie réelles positives [Bastin and Coron, 2016, Theorem 2.6]. Nous considérons dans ce chapitre que  $\rho$  et  $q$  ne sont pas tous les deux nuls et le cas  $\rho = q = 0$  est traité dans l'annexe C. Nous étudions ces deux cas séparément puisque les systèmes cibles obtenus après application d'une transformation backstepping ne sont pas identiques. De plus, nous considérons que  $q \neq 0$  afin de garantir l'existence des noyaux en évitant que certains coefficients prennent des valeurs infinies (voir plus de détails dans la section 3.2.1, équations (3.12)). Cette hypothèse est faite sans perte de généralité en vertu de la symétrie du problème. En d'autres termes, le cas  $q = 0$  et  $\rho \neq 0$  peut être traité avec la même procédure.

Nous visons à construire des conditions suffisantes qui testent la stabilité exponentielle du système (3.6)-(3.8) dans le sens de (3.2). Nous commençons par établir une condition nécessaire et suffisante pour la stabilité du système à retard associé à (3.6)-(3.8).

## 3.2 Condition nécessaire et suffisante de stabilité

Dans cette section, nous considérons la classe d'EDP (3.6)-(3.8) et établissons une réalisation équivalente sous la forme d'une équation aux différences avec un retard distribué. Notre objectif est de présenter une condition nécessaire et suffisante pour la stabilité de ce système en adoptant une approche fréquentielle.

Dans la section 3.2.1, nous présentons en détails les démarches d'obtention du système à retard et montrons ensuite l'équivalence au niveau de la stabilité entre les deux systèmes (EDP et SAR). Nous présentons également la transformation backstepping utilisée et le système cible. Une représentation schématique de cette procédure est illustrée sur la figure 3.1.

En se basant sur cette représentation, notre analyse est focalisée sur l'équation à retard obtenue. Il est intéressant de noter que des conditions nécessaires et suffisantes de stabilité de systèmes BIBO sont données dans [Vidyasagar, 1972] dans le domaine fréquentiel. Par suite, en appliquant la transformée de Laplace à notre système à retard pour obtenir l'équation caractéristique, [Vidyasagar, 1972, Théorème 1] est appliqué et une condition nécessaire et suffisante de stabilité est exposée dans la section 3.2.2.

### 3.2.1 Equivalence de stabilité entre EDP et SAR

La complexité de l'obtention d'une équation à retard en résolvant directement le système (3.6)-(3.8) découle de la présence des couplages à l'intérieur du domaine (représentés par  $\sigma^{+-}$  et  $\sigma^{-+}$ ). La résolution de ce système à l'intérieur du domaine fait apparaître des termes intégraux où les deux états  $u$  et  $v$  vont figurer. Afin d'y remédier, nous avons recours à

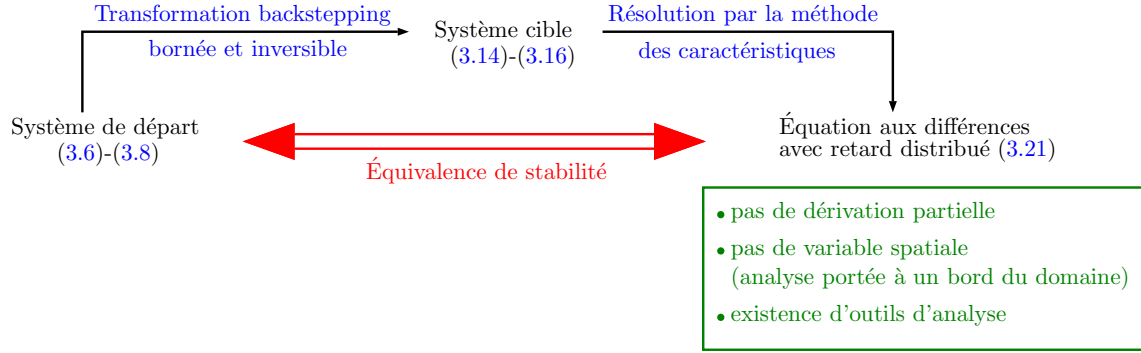


FIGURE 3.1 – Représentation schématique de la procédure de passage du système EDP au système à retard.

la transformation backstepping qui intervient dans notre démarche comme outil efficace d'analyse. Cette transformation nous permet d'obtenir un système cible ayant une structure simplifiée. Ensuite, la résolution du système cible à travers la méthode des caractéristiques nous conduit au système à retard souhaité.

Le système cible cherché s'écrit donc comme équations de transport sans couplage à l'intérieur du domaine. Les couplages entre les EDP sont uniquement présents aux bords. Ceci est essentiel afin de pouvoir établir l'équation aux différences.

Nous mettons en relief qu'un système cible décrit par des équations de transport couplées seulement aux bords est obtenu dans [Coron et al., 2013] et [Vazquez et al., 2011]. Dans ces références, la transformation backstepping employée est une transformation de Volterra, bornée et inversible, qui décale les couplages à l'intérieur du domaine vers un bord où la commande les élimine. Le résultat présenté est potentiellement intéressant dans notre analyse et en conséquence nous nous appuyons sur la transformation utilisée. Cependant, étant donné que dans notre étude, nous n'appliquons pas une loi de commande, ces couplages décalés vers un bord du système cible apparaissent sous forme de termes intégraux en ce bord.

Dans la suite, nous exposons cette transformation de backstepping. Nous utilisons la transformation inverse, au lieu de la transformation directe, puisque d'une part, elle nous permet d'écrire les conditions aux bords du système cible en fonction de ses états EDP et d'autre part, les noyaux de cette transformation sont utilisés dans les calculs qui vont suivre. Le système cible qui résulte de l'application de cette transformation est montré et résolu à l'intérieur du domaine en termes des conditions aux bords. Nous établissons ensuite l'équation aux différences avec un retard distribué satisfaite par un état EDP du système cible à un bord. Finalement, nous prouvons l'équivalence de stabilité entre le SAR obtenu et le système hyperbolique de départ. Considérons la transformation suivante [Coron et al., 2013], [Vazquez et al., 2011].

$$u(t, x) = \alpha(t, x) - \int_0^x L^{11}(x, y)\alpha(t, y)dy - \int_0^x L^{12}(x, y)\beta(t, y)dy \quad (3.10a)$$

$$v(t, x) = \beta(t, x) - \int_0^x L^{21}(x, y)\alpha(t, y)dy - \int_0^x L^{22}(x, y)\beta(t, y)dy, \quad (3.10b)$$

où les noyaux  $L^{ij}$ ,  $i, j \in \{1, 2\}$  vérifient les EDP suivantes dans  $\mathcal{T}$  [Coron et al., 2013]

$$\frac{1}{r_1}L_x^{11}(x, y) + \frac{1}{r_1}L_y^{11}(x, y) = \sigma^{+-}L^{21}(x, y) \quad (3.11a)$$

$$\frac{1}{r_1}L_x^{12}(x, y) - \frac{1}{r_2}L_y^{12}(x, y) = \sigma^{+-}L^{22}(x, y) \quad (3.11b)$$

$$\frac{1}{r_2}L_x^{21}(x, y) - \frac{1}{r_1}L_y^{21}(x, y) = -\sigma^{-+}L^{11}(x, y) \quad (3.11c)$$

$$\frac{1}{r_2}L_x^{22}(x, y) + \frac{1}{r_1}L_y^{22}(x, y) = -\sigma^{-+}L^{12}(x, y), \quad (3.11d)$$

avec les conditions aux bords

$$L^{11}(x, 0) = L^{12}(x, 0)\frac{r_1}{qr_2} \quad (3.12a)$$

$$L^{12}(x, x) = -\sigma^{+-}\frac{r_1r_2}{r} \quad (3.12b)$$

$$L^{21}(x, x) = \sigma^{-+}\frac{r_1r_2}{r} \quad (3.12c)$$

$$L^{22}(x, 0) = L^{21}(x, 0)\frac{r_2}{r_1}q, \quad (3.12d)$$

où nous notons

$$r \doteq r_1 + r_2. \quad (3.13)$$

Les expressions explicites des noyaux  $L^{ij}$  sont données en (E.23) dans l'annexe E. Étant donné que  $q \neq 0$ , les équations (3.11)-(3.12) admettent une solution unique  $L^{ij}$ ,  $i, j \in \{1, 2\}$  dans  $C^\infty(\mathcal{T}; \mathbb{R})$ . C'est un résultat direct de [Coron et al., 2013, Théorème A.2] où le caractère bien-posé (*i.e.* l'existence d'une solution unique) d'une classe générale d'un système hyperbolique couplé à l'intérieur du domaine et aux bords a été démontré. La régularité  $C^\infty$  est déduite du fait que les coefficients figurants dans (3.11)-(3.12) sont des constantes. De plus, la transformation (3.10) est un opérateur linéaire borné et inversible de  $\chi$  dans  $\chi$  [Coron et al., 2013], et nous mène au système de départ (3.6)-(3.8) en partant du système cible suivant <sup>1</sup> :

$$\alpha_t(t, x) + \frac{1}{r_1}\alpha_x(t, x) = 0 \quad (3.14a)$$

$$\beta_t(t, x) - \frac{1}{r_2}\beta_x(t, x) = 0, \quad (3.14b)$$

avec les conditions initiales

$$\alpha(0, \cdot) \doteq \alpha_0(\cdot) \quad (3.15a)$$

$$\beta(0, \cdot) \doteq \beta_0(\cdot), \quad (3.15b)$$

définies dans  $L^2([0, 1], \mathbb{R})$ , et les conditions aux bords

$$\alpha(t, 0) = q\beta(t, 0) \quad (3.16a)$$

$$\beta(t, 1) = \rho\alpha(t, 1) + \int_0^1 N^\alpha(y)\alpha(t, y)dy + \int_0^1 N^\beta(y)\beta(t, y)dy, \quad (3.16b)$$

où

$$N^\alpha(y) \doteq L^{21}(1, y) - \rho L^{11}(1, y) \quad (3.17a)$$

$$N^\beta(y) \doteq L^{22}(1, y) - \rho L^{12}(1, y). \quad (3.17b)$$

Remarquons que la transformation backstepping (3.10) *inverse* nous a permis d'écrire la condition au bord (3.16b) en fonction des états  $\alpha$  et  $\beta$ . Ce système cible est une version modifiée du système obtenu dans [Coron et al., 2013] et [Vazquez et al., 2011]. Des termes intégraux dans (3.16b) apparaissent et ne sont pas éliminés par une loi de commande. En outre, ce système est bien-posé comme le montre la proposition 1 ci-dessous.

---

1. La procédure d'obtention d'un système cible et de calcul des équations des noyaux d'une transformation backstepping est expliquée avec plus de détails dans l'annexe H (voir section H.3) avec application à un système EDO-EDP-EDO.

**Proposition 1.** *Pour toute condition initiale  $(\alpha_0, \beta_0) \in \chi$ , le système cible (3.14)-(3.16) admet une solution unique au sens faible (définie presque partout)*

$$(\alpha(t, \cdot), \beta(t, \cdot)) \in \chi, \forall t \geq 0 \text{ et } \beta_{[t]}(\cdot, 1) \in L^2([-r, 0]; \mathbb{R}), \forall t \geq r.$$

*Démonstration.* Une condition initiale  $(\alpha_0, \beta_0) \in \chi$  est transformée par (3.10) en une condition initiale  $(u_0, v_0) \in \chi$ . L'existence d'une solution unique  $(u(t, \cdot), v(t, \cdot)) \in \chi$  du problème de Cauchy (3.6)-(3.8) avec cette condition initiale est démontrée par G. Bastin et J. M. Coron dans [Bastin and Coron, 2016, Théorème A.4]. Le théorème cité considère le caractère bien-posé d'un système de lois de bilan écrit sous la forme d'EDP hyperboliques de premier ordre avec des vitesses de propagation et des couplages anti-diagonaux non-uniformes et un couplage statique aux bords. La bornitude de l'opérateur associé à la transformation (3.10) de  $\chi$  dans  $\chi$  nous permet de conclure la preuve.  $\square$

La preuve présentée ci-dessus s'appuie sur les propriétés du système de départ et de la transformation backstepping. Nous exposons dans l'annexe B une seconde méthode pour la démonstration sans avoir recours au système de départ. Cette alternative vise à résoudre les EDP (3.14)-(3.16), pour  $t \in [0, r]$ , en fonction de  $\beta(t, 1)$  et des conditions initiales par la méthode des caractéristiques et obtenir enfin l'expression de  $\beta(t, 1)$ .

**Remarque 1.** *Supposons que  $u_0$  et  $v_0 \in C^1([0, 1]; \mathbb{R})$ , et que les conditions initiales du système de départ vérifient les conditions de compatibilité suivantes*

$$u(0, 0) = qv(0, 0) \tag{3.18a}$$

$$v(0, 0) = \rho u(0, 0). \tag{3.18b}$$

$$u_x(0, 0) = -q \frac{r_1}{r_2} v_x(0, 0) - qr_1 \sigma^{-+}(0) u(0, 0) + r_1 \sigma^{+-}(0) v(0, 0) \tag{3.18c}$$

$$v_x(0, 1) = -\rho \frac{r_2}{r_1} u_x(0, 1) - r_2 \sigma^{-+}(1) u(0, 1) + \rho r_2 \sigma^{+-}(1) v(0, 1). \tag{3.18d}$$

En adaptant la preuve de [Coron et al., 2013, Théorème A.1] à la classe  $C^1([0, 1]; \mathbb{R})$ , nous obtenons que le système cible (3.14)-(3.16) admet une solution unique  $\alpha(t, x)$  et  $\beta(t, x)$  satisfaisant  $\alpha(t, \cdot)$  et  $\beta(t, \cdot) \in C^1([0, 1]; \mathbb{R})$ ,  $\forall t \geq 0$  et  $\beta_{[t]}(\cdot, 1) \in C^1([-r, 0]; \mathbb{R})$ ,  $\forall t \geq r$ .

Passons maintenant à la résolution du système cible (3.14)-(3.16) pour  $t \geq r$ . En utilisant la méthode des caractéristiques<sup>2</sup>, les équations de transport (3.14) sont réécrites sous la forme d'équations aux différences comme suit

$$\alpha(t, x) = \alpha(t - r_1 x, 0), \quad \forall t \geq r_1 x \tag{3.19a}$$

$$\beta(t, x) = \beta(t - r_2(1 - x), 1), \quad \forall t \geq r_2(1 - x) \tag{3.19b}$$

$\forall x \in [0, 1]$ . En substituant les équations (3.19) dans la condition au bord (3.16b) satisfaite par  $\beta(t, 1)$  et en utilisant (3.16a), nous obtenons

$$\begin{aligned} \alpha(t, 1) &= \alpha(t - r_1, 0) \\ &= q\beta(t - r_1, 0) \\ &= q\beta(t - r, 1), \end{aligned} \tag{3.20a}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 N^\alpha(y) \alpha(t, y) dy &= q \int_0^1 N^\alpha(y) \beta(t - r_2 - r_1 y, 1) dy \\ &= \frac{q}{r_1} \int_{r_2}^r N^\alpha\left(\frac{\theta - r_2}{r_1}\right) \beta(t - \theta, 1) d\theta, \end{aligned} \tag{3.20b}$$

2. La méthode des caractéristiques est appliquée avec plus de détails dans l'annexe H (voir section H.1) à un système EDO-EDP-EDO.

$$\begin{aligned} \int_0^1 N^\beta(y)\beta(t,y)dy &= \int_0^1 N^\beta(y)\beta(t-r_2(1-y),1)dy \\ &= \frac{1}{r_2} \int_0^{r_2} N^\beta\left(1-\frac{\theta}{r_2}\right)\beta(t-\theta,1)d\theta. \end{aligned} \quad (3.20c)$$

Finalement, l'équation aux différences avec un retard distribué satisfaite par  $\beta(t,1)$  est

$$\beta(t,1) = \rho q \beta(t-r,1) + \int_0^r N(\theta)\beta(t-\theta,1)d\theta \quad (3.21)$$

pour tout  $t \geq r$ , avec

$$\begin{aligned} N(\theta) &= \frac{1}{r_2} N^\beta\left(1-\frac{\theta}{r_2}\right) \mathbb{1}_{[0,r_2]}(\theta) \\ &\quad + \frac{q}{r_1} N^\alpha\left(\frac{\theta-r_2}{r_1}\right) \mathbb{1}_{(r_2,r]}(\theta), \quad \theta \in [0,r]. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Le terme à retard distribué dans (3.21) est une conséquence directe des termes intégraux de la condition au bord (3.16b). Ces derniers proviennent des couplages à l'intérieur du domaine et décalés au bord  $x=1$  à travers la transformation (3.10).

À noter que  $N^\alpha$  et  $N^\beta \in C^\infty([0,1];\mathbb{R})$  en raison de leur définition dans (3.17) et ayant  $L^{ij} \in C^\infty(\mathcal{T};\mathbb{R})$ . Remarquons que l'expression de  $N(\theta)$  donnée dans (3.22) peut présenter une discontinuité en  $r_2$ . Néanmoins, en utilisant la solution analytique de  $L^{ij}$  dans (E.23), nous trouvons que les deux termes suivants

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_2} N^\beta\left(1-\frac{\theta}{r_2}\right) &= \frac{1}{r_2} \left( L^{22}\left(1,1-\frac{\theta}{r_2}\right) - \rho L^{12}\left(1,1-\frac{\theta}{r_2}\right) \right), \quad \theta \in [0,r_2], \\ \frac{q}{r_1} N^\alpha\left(\frac{\theta-r_2}{r_1}\right) &= \frac{q}{r_1} \left( L^{21}\left(1,\frac{\theta-r_2}{r_1}\right) - \rho L^{11}\left(1,\frac{\theta-r_2}{r_1}\right) \right), \quad \theta \in (r_2,r] \end{aligned}$$

possèdent exactement la même expression (cf. (E.25) et (E.27)). Ce résultat est intéressant et nous permet d'écrire :  $N \in C^\infty([0,r];\mathbb{R})$  en raison de sa définition dans (3.22).  $N(\theta)$  est exprimée en termes des fonctions de Bessel dans l'annexe E (équation (E.28)).

Nous soulignons le fait qu'une équation aux différences avec retard distribué peut être déduite pour  $v(\cdot,1)$ . Le résultat montre exactement la même forme obtenue pour  $\beta(\cdot,1)$  dans (3.21). Par ailleurs, les équations (3.19) représentent la solution des états EDP à l'intérieur du domaine en fonction de la solution aux bords. Il en résulte que la stabilité de  $\beta_{[t]}(\cdot,1)$  implique en particulier la stabilité de l'état  $\beta$  satisfaisant (3.19b). À son tour, la stabilité de l'état  $\alpha$  est assurée en  $x=0$  par (3.16a) et à l'intérieur du domaine par (3.19a). De plus, la stabilité du système de départ et celle du système cible sont équivalentes en vertu de la bornitude et de l'inversibilité de la transformation backstepping (3.10). Cette équivalence en termes de stabilité est illustrée sur la figure 3.2.

Toutefois, l'équation à retard (3.21) n'est valide que pour  $t \geq r$ . Nous signalons que pour  $t \in [0,r]$ , la régularité de la solution du système cible (3.14)-(3.16) dépend fortement de la régularité des conditions initiales  $\alpha_0$  et  $\beta_0$  (voir équation (B.7)). Puisque la transformation (3.10) est un opérateur borné de  $\chi$  dans  $\chi$  [Coron et al., 2013], alors en partant d'une condition initiale  $(u_0, v_0) \in \chi$ , celle-ci est transformée en une condition initiale  $(\alpha_0, \beta_0) \in \chi$ . Par suite,  $\beta_{[r]}(\cdot,1) \in L^2([-r,0];\mathbb{R})$  et  $(\alpha(t,\cdot), \beta(t,\cdot)) \in \chi$  pour  $t \in [0,r]$ .

Pour toutes ces raisons mentionnées, nous concentrons notre analyse sur le critère de stabilité à un bord de notre domaine et donnons des conditions de stabilité de  $\beta_{[t]}(\cdot,1)$  satisfaisant l'équation aux différences avec retard distribué (3.21). Ces conditions sont

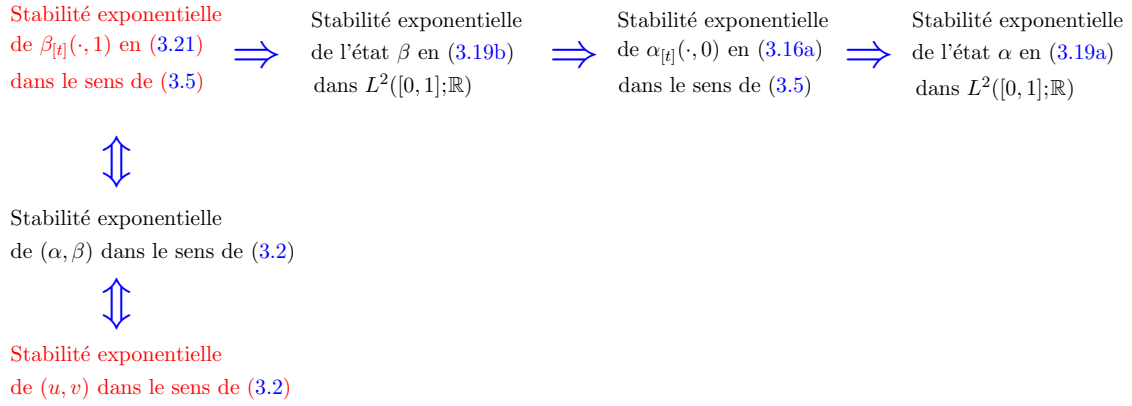


FIGURE 3.2 – Schéma récapitulatif de l'équivalence entre la stabilité du système à retard et celle du système de départ.

équivalentes à la stabilité du système de départ (3.6)-(3.8).

Avant d'attaquer le problème d'analyse de stabilité exponentielle dans le domaine fréquentiel, nous rappelons que dans l'étude effectuée dans ce chapitre, les coefficients de réflexion aux bords  $\rho$  et  $q$  ne sont pas tous les deux nuls. Nous traitons dans l'annexe C le cas  $\rho = q = 0$  en cherchant le système cible, les EDP satisfaites par les noyaux de la transformation et l'équation à retard associée. Celle-ci a une structure similaire à (3.21).

En outre, la transformation (3.10) utilisée dans ce chapitre est une transformation inverse qui nous mène du système cible (3.14)-(3.16) au système de départ (3.6)-(3.8). La transformation directe est présentée dans [Coron et al., 2013] et s'écrit comme suit

$$\alpha(t, x) = u(t, x) - \int_0^x P^{11}(x, y)u(t, y)dy - \int_0^x P^{12}(x, y)v(t, y)dy \quad (3.23a)$$

$$\beta(t, x) = v(t, x) - \int_0^x P^{21}(x, y)u(t, y)dy - \int_0^x P^{22}(x, y)v(t, y)dy. \quad (3.23b)$$

Afin de pouvoir conclure quant à l'équivalence de stabilité des systèmes de départ et du système cible, il s'avère essentiel que l'opérateur intégral  $\bar{T}$  associé à la transformation (3.10) soit identique à l'opérateur inverse de  $T$ , associé à la transformation directe (3.23). Dans l'annexe D, nous montrons que  $\bar{T} = T^{-1}$ , en cherchant l'opérateur  $T^{-1}$  inverse de  $T$ . Nous établissons les EDP satisfaites par les noyaux de  $T^{-1}$ , qui sont celles satisfaites par les noyaux  $L^{ij}$  de  $\bar{T}$ .

### 3.2.2 Condition de stabilité

Dans cette section, nous considérons l'équation aux différences avec retard distribué (3.21). En premier lieu, nous appliquons la transformée de Laplace et présentons ensuite une condition nécessaire et suffisante de stabilité des systèmes s'écrivant sous la forme obtenue. Nous nous appuyons sur cette condition dans les sections qui vont suivre afin d'exposer une condition suffisante (CS) explicite et de construire un algorithme numérique qui vérifie sa validité.

Nous présentons d'abord quelques définitions basées sur l'analyse entrée/sortie des systèmes dans le domaine fréquentiel et présentées dans [Vidyasagar, 1972]. Nous définissons l'algèbre de Banach  $\mathcal{A}$  munie du produit de convolution standard dans le sens de [Vidyasagar,

1972].  $\mathcal{A}$  est constituée des fonctions BIBO-stables généralisées de la forme

$$g(t) = g_0(t) + \sum_{i=1}^{\infty} g_i \delta(t - t_i) \quad (3.24)$$

avec  $g_0 \in L^1(\mathbb{R}^+; \mathbb{R})$  et  $\sum_{i=1}^{\infty} |g_i| < \infty$ .  $\delta$  est la distribution de Dirac et  $L^1$  est l'ensemble des fonctions absolument intégrables à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .  $\mathcal{A}$  est munie de la norme

$$\|g\|_{\mathcal{A}} \doteq \|g_0\|_{L^1} + \sum_{i=1}^{\infty} |g_i|. \quad (3.25)$$

$\hat{\mathcal{A}}$  représente l'ensemble des transformations de Laplace des éléments dans  $\mathcal{A}$ .  $\hat{\mathcal{A}}$  est une algèbre de Banach unitaire. La norme sur  $\hat{\mathcal{A}}$  satisfait  $\|\hat{g}\|_{\hat{\mathcal{A}}} = \|g\|_{\mathcal{A}}$  où  $\hat{g}$  est la transformation de Laplace de  $g \in \mathcal{A}$ .

Pour l'analyse de stabilité, nous allons restreindre notre étude au demi-plan  $\text{Re}(s) \geq 0$ . Nous définissons la **Condition N** comme suit : un couple de fonctions à valeurs scalaires  $(b(s), c(s))$  satisfait la Condition N si pour toute suite  $\{s_k\}$  dans le demi-plan fermé  $\text{Re}(s) \geq 0$  telle que  $\lim_{k \rightarrow \infty} b(s_k) = 0$ , alors  $\lim_{k \rightarrow \infty} \inf |c(s_k)| > 0$ .

Une restriction du [Vidyasagar, 1972, Théorème 1] sur l'algèbre  $\hat{\mathcal{A}}$  et pour le cas scalaire est énoncée de la manière suivante.

**Théorème.** [Vidyasagar, 1972], Théorème 1. Soit une fonction  $\hat{G}(s)$  de la forme

$$\hat{G}(s) = \hat{P}(s)\hat{Q}^{-1}(s), \quad (3.26)$$

où  $\hat{P}(s)$  et  $\hat{Q}(s) \in \hat{\mathcal{A}}$  et le couple  $(\hat{Q}(s), \hat{P}(s) + \hat{Q}(s))$  satisfait la Condition N. Alors, la fonction  $\hat{H}(s) = \hat{G}(s)(1 + \hat{G}(s))^{-1}$  est un élément de  $\hat{\mathcal{A}}$  si et seulement si

$$\inf_{\text{Re}(s) \geq 0} |1 + \hat{G}(s)| > 0. \quad (3.27)$$

Nous présentons, dans la proposition 2, une condition nécessaire et suffisante pour la stabilité des systèmes écrits sous la forme d'une équation aux différences avec un retard distribué, avant de donner des conditions suffisantes pour la stabilité du système (3.6)-(3.8) qui dépendent que de ses coefficients. En appliquant la transformée de Laplace, l'équation caractéristique associée à (3.21) est

$$\hat{\phi}(s) \doteq 1 - \rho q e^{-sr} - \int_0^r N(\theta) e^{-s\theta} d\theta = 0. \quad (3.28)$$

**Proposition 2.** Pour toute condition initiale  $(u_0, v_0) \in \chi$ , le système (3.6)-(3.8) est exponentiellement stable dans le sens de (3.2) si et seulement si

$$\inf_{\text{Re}(s) \geq 0} |\hat{\phi}(s)| > 0. \quad (3.29)$$

*Démonstration.* Soit la fonction de transfert

$$\begin{aligned} \hat{G}(s) &\doteq \frac{1}{\hat{Q}(s)} \\ &\doteq \frac{1}{-\rho q e^{-sr} - \int_0^r N(\theta) e^{-s\theta} d\theta}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Ayant  $N \in C^\infty([0, r], \mathbb{R}) \subset L^1([0, r], \mathbb{R})$ , nous pouvons vérifier que  $\hat{Q} \in \hat{\mathcal{A}}$  et que le couple  $(\hat{Q}(s), 1 + \hat{Q}(s))$  satisfait la condition N. En outre, nous avons que

$$\frac{\hat{G}(s)}{1 + \hat{G}(s)} = \frac{1}{\hat{\phi}(s)} \quad (3.31)$$

et

$$\left| 1 + \hat{G}(s) \right| = \frac{|\hat{\phi}(s)|}{|\rho q e^{-sr} + \int_0^r N(\theta) e^{-s\theta} d\theta|}. \quad (3.32)$$

Selon [Vidyasagar, 1972, Théorème 1],  $\frac{1}{\hat{\phi}(\cdot)} \in \hat{\mathcal{A}}$  si et seulement si

$$\inf_{\operatorname{Re}(s) \geq 0} |1 + \hat{G}(s)| > 0, \quad (3.33)$$

qui, par (3.32), est équivalent à (3.29).

La condition (3.29) est nécessaire et suffisante pour la stabilité exponentielle de  $\beta_{[t]}(\cdot, 1)$  satisfaisant (3.21) dans le sens de (3.5), pourvu que  $(\alpha_0, \beta_0) \in \mathcal{X}$ . Ce fait est basé sur [Baker and Vakharia, 1970, Remarque 1], où les auteurs montrent que la régularité de la sortie du système est imposée par celle de son entrée. La stabilité du système (3.6)-(3.8) dans le sens de (3.2) est par conséquent équivalente à (3.29).  $\square$

Cette condition nécessaire et suffisante ne peut pas être facilement appliquée du moment qu'elle réclame l'évaluation de  $|\hat{\phi}|$  en chaque point  $s$  dans le demi-plan droit (RHP). La difficulté réside dans la complexité de l'expression du retard distribué (terme intégral dans (3.28)). Par conséquent, elle ne présente pas un outil pratique pour tester la stabilité du système sous considération.

En revanche, nous pouvons procéder à une majoration des modules des termes dans  $\hat{\phi}$ . Cette procédure nous conduit à un critère suffisant (au lieu de la condition nécessaire et suffisante), plus simple à appliquer et ne dépendant que des coefficients du système. Cette démarche est l'objectif de la section 3.3.1.

Une autre approche est d'approximer numériquement la condition (3.29) et de développer un algorithme qui teste sa validité. Cette démarche est l'objectif de la section 3.3.2. Malgré le coût de calcul plus élevé qu'il impose, cet algorithme est moins conservatif que le critère explicite. La construction de l'algorithme est possible du fait que nous sommes capables de vérifier la condition (3.29) en nous restreignant à un domaine compact du demi-plan droit plutôt que de considérer tout ce demi-plan, comme montré dans la section 3.3.2.

Ces deux approches exigent une solution de  $N(\theta)$ . Il est possible d'obtenir les noyaux de la transformation backstepping sans avoir recours aux expressions explicites, en effectuant des approximations successives numériques. Néanmoins, cette démarche sera plus compliquée que l'utilisation des expressions analytiques et nous mène probablement à des critères plus conservatifs. Dans cette étude, nous résolvons d'une manière exacte les EDP hyperboliques (3.11)-(3.12) satisfaites par ces noyaux dans  $\mathcal{T}$  et obtenons ainsi une solution analytique exacte de  $N(\theta)$ . Celle-ci est essentielle pour pouvoir tirer un critère explicite de stabilité (en termes des coefficients du système) et construire le domaine compact où des tests sont exécutés par l'algorithme. De plus, la solution analytique sera utilisée afin d'obtenir les expressions de plusieurs paramètres demandés par l'algorithme (voir section 3.3.2 pour plus de détails). Pour toutes ces raisons, l'annexe E est consacré à établir la solution analytique exacte des EDP hyperboliques (3.11)-(3.12) satisfaites par les noyaux de la transformation backstepping (3.10), aboutissant aux expressions de  $N(\theta)$ ,  $N'(\theta)$  et des bornes supérieures de leurs valeurs absolues.



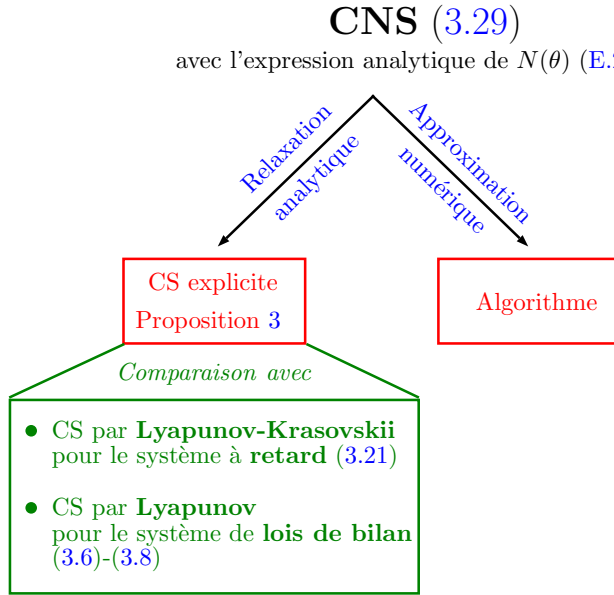


FIGURE 3.3 – Schéma récapitulatif de l’obtention des conditions suffisantes de stabilité à partir de la condition nécessaire et suffisante.

### 3.3 Conditions suffisantes de stabilité

Dans cette section, nous présentons des conditions suffisantes de stabilité pour  $\beta(\cdot, 1)$  satisfaisant (3.21). En premier lieu, un critère explicite, en termes des coefficients du système et dépendant de leur signe est exposé. Cette condition s’appuie sur une relaxation analytique de la condition nécessaire et suffisante (3.29). Le résultat est comparé avec d’autres conditions suffisantes de stabilité dans la littérature, obtenues en adoptant une approche temporelle. Ces conditions suffisantes sont basées sur

- une fonction de Lyapunov-Krasovskii utilisée dans [Damak et al., 2015] et appliquée au système à retard (3.21),
- une fonction de Lyapunov utilisée dans [Bastin and Coron, 2016] et appliquée au système de lois de bilan (3.6)-(3.8).

Ensuite, en effectuant une approximation numérique de (3.29), un algorithme est construit. Sa tâche est de vérifier la validité de (3.29) dans un domaine compact du demi-plan droit. Le déroulement de cette section est illustré sur la figure 3.3.

#### 3.3.1 Relaxation analytique de la CNS : Condition explicite

Reprenons les équations du système de départ

$$u_t(t, x) + \frac{1}{r_1} u_x(t, x) = \sigma^{+-} v(t, x) \quad (3.34a)$$

$$v_t(t, x) - \frac{1}{r_2} v_x(t, x) = \sigma^{-+} u(t, x) \quad (3.34b)$$

$$u(0, \cdot) \doteq u_0(\cdot) \quad (3.34c)$$

$$v(0, \cdot) \doteq v_0(\cdot) \quad (3.34d)$$

$$u(t, 0) = qv(t, 0) \quad (3.34e)$$

$$v(t, 1) = \rho u(t, 1). \quad (3.34f)$$

Nous avons démontré que sa stabilité exponentielle dans le sens de (3.2) est équivalente à (3.29) (voir proposition 2). Nous exposons dans cette section une condition suffisante de stabilité, *explicite* en termes des paramètres  $\sigma^{+-}$ ,  $\sigma^{-+}$ ,  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $\rho$  et  $q$  et selon les signes de

$\sigma^{+-}\sigma^{-+}$  et  $\rho q$ . Ce résultat est une contribution principale de ce travail. Il est obtenu par une relaxation analytique de la condition (3.29) en majorant les termes exponentiels. En vue de simplifier la notation, nous définissons les paramètres

$$a \doteq qr_2\sigma^{-+} + \rho r_1\sigma^{+-} \quad (3.35a)$$

$$R \doteq r_1r_2\sigma^{+-}\sigma^{-+}. \quad (3.35b)$$

**Proposition 3.** *Si les coefficients (constants) du système (3.34) vérifient un des ensembles des inégalités suivants*

(i)

$$\begin{aligned} \sigma^{+-}\sigma^{-+} &\geq 0, \quad \rho q \geq 0 \quad \text{et} \\ |a|+|R|\left(\frac{1}{1+|\rho q|} - \frac{1-|\rho q|}{2}\right) &< 1 - |\rho q|, \end{aligned} \quad (3.36)$$

(ii)

$$\begin{aligned} \sigma^{+-}\sigma^{-+} &\geq 0, \quad \rho q < 0 \quad \text{et} \\ |a|+|R|\frac{1+|\rho q|}{2} &< 1 - |\rho q|, \end{aligned} \quad (3.37)$$

(iii)

$$\begin{aligned} \sigma^{+-}\sigma^{-+} &< 0, \quad \rho q \geq 0 \quad \text{et} \\ |a|I_0\left(\sqrt{|R|}\right) + |R|\left(\frac{1}{1+|\rho q|} - \frac{1-|\rho q|}{2}\right) \\ \times \left[ I_0\left(\sqrt{|R|}\right) - I_2\left(\sqrt{|R|}\right) \right] &< 1 - |\rho q|, \end{aligned} \quad (3.38)$$

(iv)

$$\begin{aligned} \sigma^{+-}\sigma^{-+} &< 0, \quad \rho q < 0 \quad \text{et} \\ |a|I_0\left(\sqrt{|R|}\right) + |R|\frac{1+|\rho q|}{2} \\ \times \left[ I_0\left(\sqrt{|R|}\right) - I_2\left(\sqrt{|R|}\right) \right] &< 1 - |\rho q|, \end{aligned} \quad (3.39)$$

(v)

$$\begin{aligned} \sigma^{+-}\sigma^{-+} &< 0, \quad \rho q < 0, \quad a \geq |R| \quad \text{et} \\ \left(a - |R|\frac{1+|\rho q|}{2}\right) I_0\left(\sqrt{|R|}\right) \\ + |R|\frac{1+|\rho q|}{2} I_2\left(\sqrt{|R|}\right) &< 1 - |\rho q|, \end{aligned} \quad (3.40)$$

alors, ce système est exponentiellement stable dans le sens de (3.2).

*Démonstration.* Partons de la condition nécessaire et suffisante (3.29), qui est satisfaite si

$$\sup_{\operatorname{Re}(s) \geq 0} |1 - \hat{\phi}(s)| < 1. \quad (3.41)$$

$|1 - \hat{\phi}(s)|$  peut être majoré comme suit

$$|1 - \hat{\phi}(s)| = \left| \rho q e^{-sr} + \int_0^r N(\theta) e^{-s\theta} d\theta \right| \leq |\rho q| + \int_0^r |N(\theta)| d\theta. \quad (3.42)$$

En utilisant (3.42), une condition suffisante pour (3.41) est

$$\int_0^r |N(\theta)|d\theta < 1 - |\rho q|. \quad (3.43)$$

Une borne supérieure de  $\int_0^r |N(\theta)|d\theta$  est donnée dans (E.46) dans l'annexe E selon les signes de  $\sigma^{+-}\sigma^{-+}$  et  $\rho q$ . En substituant ces expressions dans (3.43), nous concluons la preuve.  $\square$

Remarquons que l'inégalité (3.43) peut être utilisée pour tester la stabilité du système tout en approximant numériquement le terme intégral et en utilisant l'expression de  $|N(\theta)|$  dans (E.28). Dans le cas des coefficients variables dans l'espace  $\sigma^{+-}(x)$  et  $\sigma^{-+}(x)$ , les noyaux  $L^{ij}$  possèdent la même structure d'EDP que (3.11)-(3.12) avec des coefficients  $\sigma^{+-}$  et  $\sigma^{-+}$  qui varient en fonction de l'espace (voir équations (3.40)-(3.47) dans [Coron et al., 2013]). Dans ce cas, (3.43) peut aussi être testée, avec  $N(\theta)$  générée numériquement par la méthode des approximations successives.

En suivant les hypothèses de la Remarque 1, et selon [Baker and Vakharia, 1970, Remarque 1] (discutée dans la section 3.2.2), la condition suffisante (3.36)-(3.40) de la proposition 3 implique une stabilité exponentielle en tout point du système (3.21). En d'autres termes, il existe  $M > 0$  et  $\omega > 0$  tels que

$$|\beta(t, 1)| \leq M \sup_{-r \leq \theta \leq 0} |\beta(\theta, 1)| e^{-\omega(t-r)}, \quad t \geq r. \quad (3.44)$$

## Comparaison avec une condition suffisante basée sur une fonction de Lyapunov-Krasovskii

Dans le but d'évaluer l'efficacité de la condition suffisante (3.36)-(3.40) de la proposition 3, nous la comparons avec un autre critère de stabilité des systèmes à retard. La littérature présente des outils d'analyse pour le type d'équations obtenu dans (3.21). Parmi ces références, nous citons [Damak et al., 2015] où une fonction de Lyapunov-Krasovskii est utilisée. Vu que (3.21) est dans la classe considérée dans cette référence (pour un cas scalaire), nous pouvons appliquer [Damak et al., 2015, Théorème 5] à notre système. Les paramètres suivants seront utilisés :  $\bar{\eta} \doteq \rho q$  et  $\bar{G} \doteq \int_0^r (N(\theta))^2 d\theta$ . L'adaptation de ce théorème au système scalaire (3.21) nous permet d'écrire l'énoncé suivant.

**Théorème.** [Damak et al., 2015], Théorème 5. Supposons qu'il existe  $p > 0$ ,  $\bar{S} \geq 0$ ,  $\omega > 0$  et  $\epsilon \geq 0$  tels que

$$p - \epsilon \bar{G} > 0, \quad (3.45a)$$

$$\bar{S} \leq \epsilon, \quad (3.45b)$$

$$\bar{M} \succeq 0, \quad (3.45c)$$

où  $\bar{M}$  est une matrice symétrique définie par

$$-\bar{M} \doteq r \begin{bmatrix} (\bar{\eta}^2 - e^{-2\omega r})p + \gamma \bar{G} e^{-2\omega r} & p\bar{\eta} \\ p\bar{\eta} & p - \frac{\bar{S}}{r} e^{-2\omega r} \end{bmatrix}. \quad (3.46)$$

Si les conditions (3.45) admettent une solution, alors le système (3.21) est exponentiellement stable dans le sens de (3.5).

Nous signalons que la fonction de Lyapunov-Krasovskii adoptée dans la preuve du [Damak et al., 2015, Théorème 5] pour le cas scalaire est

$$V_{LK}(t) = (p - \epsilon \bar{G}) \int_{-r}^0 e^{2\omega\theta} \beta^2(t + \theta, 1) d\theta + \bar{S} \int_0^r N^2(\theta) \int_{-\theta}^0 e^{2\omega\xi} \beta^2(t + y, 1) dy d\theta. \quad (3.47)$$

**Proposition 4.** *Si les coefficients du système (3.34) vérifient la condition suivante*

$$r \int_0^r (N(\theta))^2 d\theta < (1 - |\rho q|)^2, \quad (3.48)$$

alors le système (3.34) est exponentiellement stable dans le sens de (3.2) et  $\beta_{[t]}(\cdot, 1)$  est exponentiellement stable dans le sens de (3.5) avec une estimation de  $\omega$

$$0 < \omega < \frac{-\ln(\bar{\eta})}{r}.$$

*Démonstration.* Nous démontrons que les paramètres introduits dans ce théorème existent et vérifient les hypothèses (3.45) si la condition (3.48) est satisfaite.

En effet, si  $r\bar{G} < (1 - |\bar{\eta}|)^2$ , alors il existe un paramètre  $\omega$  qui vérifie

$$0 < \omega < \frac{-\ln(\bar{\eta})}{r} \quad (3.49)$$

tel que  $r\bar{G} \leq (e^{-\omega r} - |\bar{\eta}|)^2$ . Il existe de même deux paramètres de décision  $\bar{S}$  et  $\epsilon$  vérifiant

$$\bar{S} \geq 0, \quad (3.50a)$$

$$\epsilon \geq 0, \quad (3.50b)$$

$$\bar{S} \leq \epsilon, \quad (3.50c)$$

tels que

$$r\bar{G}\epsilon \leq \bar{S}(e^{-\omega r} - |\bar{\eta}|)^2. \quad (3.51)$$

Pour une notation plus compacte, nous introduisons le paramètre  $\bar{\xi} \doteq r\epsilon\bar{G}$ .

Soit  $p > 0$  tel que

$$0 < p_{min} \leq p \leq p_{max}, \quad (3.52)$$

où

$$p_{max} \doteq \frac{e^{2\omega r}}{2r} \left( \bar{S}(e^{-2\omega r} - \bar{\eta}^2) + \bar{\xi} + \sqrt{\left( \bar{S}(e^{-2\omega r} - \bar{\eta}^2) + \bar{\xi} \right)^2 - 4\bar{S}\bar{\xi}e^{-2\omega r}} \right) \quad (3.53a)$$

$$p_{min} \doteq \frac{e^{2\omega r}}{2r} \left( \bar{S}(e^{-2\omega r} - \bar{\eta}^2) + \bar{\xi} - \sqrt{\left( \bar{S}(e^{-2\omega r} - \bar{\eta}^2) + \bar{\xi} \right)^2 - 4\bar{S}\bar{\xi}e^{-2\omega r}} \right). \quad (3.53b)$$

Sous les considérations mentionnées ci-dessus pour  $p$ ,  $\bar{S}$ ,  $\epsilon$  et  $\omega$  nous avons que

$$(e^{-2\omega r} - \bar{\eta}^2)p \geq \frac{\bar{\xi}}{r} \quad (3.54a)$$

$$-e^{-2\omega r} p^2 + p \left[ \frac{\bar{S}}{r}(e^{-2\omega r} - \bar{\eta}^2) + \frac{\bar{\xi}}{r} \right] - \frac{\bar{S}\bar{\xi}}{r^2} \geq 0. \quad (3.54b)$$

En effet

$$\begin{aligned}
(e^{-2\omega r} - \bar{\eta}^2)p_{min} &\geq \frac{\bar{\xi}}{r} \\
\Leftrightarrow \frac{e^{-2\omega r} - \bar{\eta}^2}{2} \left( \bar{S}(e^{-2\omega r} - \bar{\eta}^2) + \bar{\xi} - \sqrt{(\bar{S}(e^{-2\omega r} - \bar{\eta}^2) + \bar{\xi})^2 - 4\bar{S}\bar{\xi}e^{-2\omega r}} \right) &\geq \bar{\xi}e^{-2\omega r} \\
\Leftrightarrow -(e^{-2\omega r} - \bar{\eta}^2)\sqrt{(\bar{S}(e^{-2\omega r} - \bar{\eta}^2) + \bar{\xi})^2 - 4\bar{S}\bar{\xi}e^{-2\omega r}} &\geq \bar{\xi}(e^{-2\omega r} + \bar{\eta}^2) - \bar{S}(e^{-2\omega r} - \bar{\eta}^2)^2.
\end{aligned} \tag{3.55}$$

En utilisant (3.51), nous pouvons constater que

$$\begin{aligned}
\bar{\xi}(e^{-2\omega r} + \bar{\eta}^2) - \bar{S}(e^{-2\omega r} - \bar{\eta}^2)^2 &\leq \bar{S}(e^{-\omega r} - |\bar{\eta}|)^2(e^{-2\omega r} + \bar{\eta}^2) - \bar{S}(e^{-2\omega r} - \bar{\eta}^2)^2 \\
&= \bar{S}(e^{-\omega r} - |\bar{\eta}|)^2 [e^{-2\omega r} + \bar{\eta}^2 - (e^{-\omega r} + |\bar{\eta}|)^2] \\
&= -2\bar{S}e^{-\omega r}|\bar{\eta}|(e^{-\omega r} - |\bar{\eta}|)^2 \leq 0.
\end{aligned} \tag{3.56}$$

Par suite

$$\begin{aligned}
(3.55) \Leftrightarrow \sqrt{(\bar{S}(e^{-2\omega r} - \bar{\eta}^2) + \bar{\xi})^2 - 4\bar{S}\bar{\xi}e^{-2\omega r}} &\leq -\bar{\xi} \left( \frac{e^{-2\omega r} + \bar{\eta}^2}{e^{-2\omega r} - \bar{\eta}^2} \right) + \bar{S}(e^{-2\omega r} - \bar{\eta}^2) \\
\Leftrightarrow \bar{\xi}^2 + \bar{S}^2(e^{-2\omega r} - \bar{\eta}^2)^2 - 2\bar{S}\bar{\xi}(e^{-2\omega r} + \bar{\eta}^2) &\leq \bar{\xi}^2 \left( \frac{e^{-2\omega r} + \bar{\eta}^2}{e^{-2\omega r} - \bar{\eta}^2} \right)^2 + \bar{S}^2(e^{-2\omega r} - \bar{\eta}^2)^2 - 2\bar{S}\bar{\xi}(e^{-2\omega r} + \bar{\eta}^2) \\
\Leftrightarrow \bar{\xi}^2 - \bar{\xi}^2 \left( \frac{e^{-2\omega r} + \bar{\eta}^2}{e^{-2\omega r} - \bar{\eta}^2} \right)^2 &\leq 0 \\
\Leftrightarrow \bar{\xi}^2 \frac{-4e^{-2\omega r}\bar{\eta}^2}{(e^{-2\omega r} - \bar{\eta}^2)^2} &\leq 0.
\end{aligned} \tag{3.57}$$

Les équivalences dans (3.55) et (3.57) garantissent la validité de (3.54a). D'un autre côté, le membre de gauche de l'inégalité (3.54b) peut être vu comme une forme quadratique en  $p$ , et donc peut prendre des valeurs positives, pour des valeurs de  $p$ ,  $\bar{S}$ ,  $\epsilon$  et  $\omega$  satisfaisant (3.49)-(3.52), seulement si son discriminant

$$\Delta_1 = \frac{1}{r^2} \left[ (\bar{S}(e^{-2\omega r} - \bar{\eta}^2) + \bar{\xi})^2 - 4\bar{S}\bar{\xi}e^{-2\omega r} \right] \tag{3.58}$$

est positif. En développant (3.58), nous obtenons

$$\Delta_1 = \frac{1}{r^2} \left[ \bar{\xi}^2 - 2\bar{S}\bar{\xi}(e^{-2\omega r} + \bar{\eta}^2) + \bar{S}^2(e^{-2\omega r} - \bar{\eta}^2)^2 \right]. \tag{3.59}$$

$\Delta_1$  peut être vu comme une forme quadratique en  $\bar{\xi}$ . Le discriminant de  $\bar{\xi}^2 - 2\bar{S}\bar{\xi}(e^{-2\omega r} + \bar{\eta}^2) + \bar{S}^2(e^{-2\omega r} - \bar{\eta}^2)^2$  est

$$\Delta'_2 = \bar{S}^2(e^{-2\omega r} + \bar{\eta}^2)^2 - \bar{S}^2(e^{-2\omega r} - \bar{\eta}^2)^2 \tag{3.60}$$

$$= 4\bar{S}^2\bar{\eta}^2e^{-2\omega r}. \tag{3.61}$$

Les racines de  $\Delta_1$  sont  $\bar{\xi}_1 = \bar{S}(e^{-\omega r} - |\bar{\eta}|)^2$  et  $\bar{\xi}_2 = \bar{S}(e^{-\omega r} + |\bar{\eta}|)^2$ . Il en résulte que si  $\bar{\xi} \leq \bar{S}(e^{-\omega r} - |\bar{\eta}|)^2$  (cette inégalité est d'ailleurs vérifiée en vertu de (3.51)), alors  $\Delta_1$  est positif.

Par un calcul simple, nous pouvons trouver que les racines de  $-e^{-2\omega r}p^2 + p\left[\frac{\bar{S}}{r}(e^{-2\omega r} - \bar{\eta}^2) + \frac{\bar{\xi}}{r}\right] - \frac{\bar{S}\bar{\xi}}{r^2}$  sont  $p_{max}$  et  $p_{min}$  présentés dans (3.53a) et (3.53b) respectivement, et par conséquent l'inégalité (3.54b) est satisfaite pour tout  $p \in [p_{min}, p_{max}]$ .

Le calcul précédent nous a permis de construire les paramètres  $p$ ,  $\bar{S}$ ,  $\epsilon$  et  $\omega$  satisfaisant (3.45) et la preuve est ainsi conclue.  $\square$

Cette démarche aboutit à la condition suffisante (3.48). En comparant cette condition avec (3.43) obtenue suite à l'analyse de stabilité dans le domaine fréquentiel, nous trouvons que la première peut être déduite de la deuxième par relaxation à travers une inégalité de Cauchy-Schwarz comme suit

$$\left(\int_0^r |N(\theta)|d\theta\right)^2 \leq r \int_0^r (N(\theta))^2 d\theta. \quad (3.62)$$

Ainsi, la réalisation de (3.48) entraîne la réalisation de (3.43) ((3.48)  $\Rightarrow$  (3.43)) et le résultat de la proposition 4 est contenu dans celui de la proposition 3 et par suite il est plus conservatif.

## Comparaison avec une condition suffisante basée sur la seconde méthode de Lyapunov

Comparons maintenant le résultat présenté dans la proposition 3 avec une autre condition de la littérature pour la stabilité des EDP hyperboliques linéaires du premier ordre. Des conditions de stabilité exponentielle, basées sur des fonctions de Lyapunov pour des systèmes de lois de bilan sont données dans [Bastin and Coron, 2016]. La fonction de Lyapunov adoptée dans [Bastin and Coron, 2016, Théorème 5.4] pour la classe d'EDP considérées dans ce travail est la suivante

$$V_L(t) = \int_0^1 \begin{pmatrix} u(t, x) \\ v(t, x) \end{pmatrix}^\top \begin{bmatrix} \pi_1 e^{-\bar{\mu}(x+1)^c} & 0 \\ 0 & \pi_2 e^{\bar{\mu}(x+1)^c} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u(t, x) \\ v(t, x) \end{pmatrix} dx \quad (3.63)$$

avec  $\bar{\mu}$ ,  $c$ ,  $\pi_1$  et  $\pi_2$  des constantes strictement positives. Cette fonction a été originellement utilisée pour des systèmes avec des couplages diagonaux et anti-diagonaux, et possiblement variables dans l'espace. En adaptant [Bastin and Coron, 2016, Théorème 5.4] au système (3.34) avec les coefficients constants  $\sigma^{+-}$  et  $\sigma^{-+}$ , nous aboutissons à l'énoncé suivant.

**Théorème.** [Bastin and Coron, 2016], Théorème 5.4. le système (3.34) est exponentiellement stable dans le sens de (3.2) s'il existe une matrice  $2 \times 2$  diagonale réelle définie positive

$$\Pi \doteq \begin{bmatrix} \pi_1 & 0 \\ 0 & \pi_2 \end{bmatrix} \text{ telle que}$$

$$\Sigma^\top \Pi + \Pi \Sigma \succeq 0 \quad (3.64a)$$

$$\|\Delta K \Delta^{-1}\|_2 < 1 \quad (3.64b)$$

$$\text{où } \Sigma \doteq \begin{bmatrix} 0 & -\sigma^{+-} \\ -\sigma^{-+} & 0 \end{bmatrix}, \Delta \doteq \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{\pi_1}{r_1}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{\pi_2}{r_2}} \end{bmatrix} \text{ et } K \doteq \begin{bmatrix} 0 & q \\ \rho & 0 \end{bmatrix}.$$

La norme  $\| \cdot \|_2$  figurant dans (3.64b) est la norme spectrale<sup>3</sup>. La condition (3.64a) est équivalente à

$$-(\pi_1\sigma^{+-} + \pi_2\sigma^{-+}) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \succeq 0. \quad (3.65)$$

Les valeurs propres de la matrice dans (3.65) étant  $\pm(\pi_1\sigma^{+-} + \pi_2\sigma^{-+})$ , cette condition n'est vérifiée que si

$$\pi_1\sigma^{+-} + \pi_2\sigma^{-+} = 0. \quad (3.66)$$

D'un autre côté

$$\Delta K \Delta^{-1} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{\pi_1}{r_1}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{\pi_2}{r_2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & q \\ \rho & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{r_1}{\pi_1}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{r_2}{\pi_2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & q\sqrt{\frac{\pi_1 r_2}{\pi_2 r_1}} \\ \rho\sqrt{\frac{\pi_2 r_1}{\pi_1 r_2}} & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.67)$$

La condition (3.64b) est équivalente à :

$$\begin{cases} q^2 \frac{\pi_1 r_2}{\pi_2 r_1} < 1, \text{ et} \\ \rho^2 \frac{\pi_2 r_1}{\pi_1 r_2} < 1. \end{cases} \quad (3.68)$$

Finalement, en tenant compte de (3.66), la condition (3.64) se réduit à :  $\sigma^{+-} = \sigma^{-+} = 0$ , ou

$$\sigma^{+-}\sigma^{-+} < 0, \text{ et} \quad (3.69a)$$

$$\rho^2 < -\frac{\sigma^{-+} r_2}{\sigma^{+-} r_1} < \frac{1}{q^2}. \quad (3.69b)$$

Autrement, si  $\sigma^{+-}\sigma^{-+} > 0$  ou un seul coefficient parmi eux est nul, aucune conclusion concernant la stabilité ne peut être faite.

Un autre critère de stabilité pour les EPD hyperboliques et symétriques est présenté dans [Tchouso et al., 2009]. En appliquant [Tchouso et al., 2009, Théorème 2.1] pour la classe de  $2 \times 2$  à coefficients constants, la condition exigée est

$$\Sigma + \Sigma^\top \preceq 0 \quad (3.70a)$$

$$-\frac{1}{r_1} + \rho^2 \frac{1}{r_2} \leq -c_1 \quad (3.70b)$$

$$\frac{1}{r_2} - q^2 \frac{1}{r_1} \geq c_2 \quad (3.70c)$$

avec  $c_1 \geq 0$ ,  $c_2 \geq 0$  et  $c_1$  et  $c_2$  ne sont pas tous les deux nuls. Cette condition traduit l'hypothèse d'une dissipation dans le domaine ainsi qu'au bord. Elle se réduit à

$$\sigma^{+-} + \sigma^{-+} = 0, \text{ et} \quad (3.71a)$$

$$c_1 r_2 + \rho^2 \leq \frac{r_2}{r_1} \leq \frac{1}{q^2} - c_2 \frac{r_2}{q^2}. \quad (3.71b)$$

A noter que cette condition est plus restrictive que celle imposée par [Bastin and Coron, 2016, Théorème 5.4] concernant la stabilité du système vis-à-vis des valeurs de  $\sigma^{+-}$  et  $\sigma^{-+}$ . Pour cette raison, nous comparons la condition obtenue dans ce manuscrit avec (3.69) (de [Bastin and Coron, 2016, Théorème 5.4]).

Nous présentons dans le tableau 3.1 les conditions suffisantes exigées par la proposition 3 et par [Bastin and Coron, 2016, Théorème 5.4] pour des différents signes de  $\sigma^{+-}\sigma^{-+}$  et  $\rho q$ .

---

3. La norme spectrale  $\| A \|_2$  d'une matrice  $A$  est définie par la racine carrée de la plus grande valeur propre de  $A^*A$ , où  $A^*$  est la conjuguée de la transposée de  $A$ .

TABLEAU 3.1 – Comparaison entre la condition (3.36)-(3.40) exigée par la proposition 3 et (3.69) exigée par [Bastin and Coron, 2016, Théorème 5.4] pour la stabilité du système (3.34).

cas	Condition (3.36)-(3.40) exigée par la proposition 3 satisfaite si	Condition (3.69) exigée par [Bastin and Coron, 2016, Théorème 5.4] satisfaite si
$\sigma^{+-}\sigma^{-+} > 0$ ou un seul parmi eux est nul	$\underline{\rho q \geq 0}$ $ a + R \left(\frac{1}{1+ \rho q } - \frac{1- \rho q }{2}\right) < 1 -  \rho q $ <hr style="border-top: 1px dashed black;"/> $\underline{\rho q < 0}$ $ a + R \frac{1+ \rho q }{2} < 1 -  \rho q $	(Non satisfaite)
$\sigma^{+-} = 0,$ $\sigma^{-+} = 0$	$ \rho q  < 1$	$ \rho q  < 1$
$\sigma^{+-}\sigma^{-+} < 0$	$\underline{\rho q \geq 0}$ $ a I_0(\sqrt{ R }) +  R \left(\frac{1}{1+ \rho q } - \frac{1- \rho q }{2}\right) \times [I_0(\sqrt{ R }) - I_2(\sqrt{ R })] < 1 -  \rho q $ <hr style="border-top: 1px dashed black;"/> $\underline{\rho q < 0}$ $ a I_0(\sqrt{ R }) +  R \frac{1+ \rho q }{2} \times [I_0(\sqrt{ R }) - I_2(\sqrt{ R })] < 1 -  \rho q $ <hr style="border-top: 1px dashed black;"/> $\underline{\rho q < 0 \text{ et } a \geq  R }$ $\left(a -  R \frac{1+ \rho q }{2}\right) I_0(\sqrt{ R }) +  R \frac{1+ \rho q }{2} I_2(\sqrt{ R }) < 1 -  \rho q $	$\rho^2 < -\frac{\sigma^{+-}}{\sigma^{-+}} \frac{r_2}{r_1} < \frac{1}{q^2}$



TABLEAU 3.2 – Exemples numériques. Tous ces systèmes sont stables.

Exemple du système (3.34) ( $\sigma^{+-}, \sigma^{-+}, r_1, r_2, \rho, q$ )	Condition (3.36)-(3.40) de la proposition 3	Condition (3.69) exigée par [Bastin and Coron, 2016, Théorème 5.4]
(1.1, 0.4, 1, 1.2, 0.4, -0.5)	Satisfaite	Non Satisfaite ( $\sigma^{+-}\sigma^{-+} > 0$ )
(-0.8, 0.7, 1, 1.2, 0.4, 0.25)	Satisfaite	Satisfaite
(1.3, -0.95, 1.8, 0.44, 0.45, 0.25)	Satisfaite	Non Satisfaite
(1.3, -1.2, 1.8, 1.5, 0.45, 0.25)	Non Satisfaite	Satisfaite
(2.3, -3.5, 0.8, 1.1, 0.5, -0.7)	Non Satisfaite	Non Satisfaite

Nous pouvons vérifier que dans le cas  $\sigma^{+-} = \sigma^{-+} = 0$ , le système (3.34) peut être vu comme un système linéaire de deux lois de conservation couplées aux bords à travers deux termes de réflexion. Dans le cas  $\sigma^{+-}\sigma^{-+} < 0$ , les conditions (3.36)-(3.40) et (3.69) sont toutes les deux des conditions suffisantes et peuvent être simultanément appliquées. Dans l'intention de clarifier notre idée, des exemples numériques sont donnés dans le tableau 3.2.

Conformément à ce que montrent les résultats, la stabilité de plusieurs systèmes peut être testée en s'appuyant sur la proposition 3. Néanmoins, il existe toujours de nombreux autres systèmes pour lesquels les deux critères suffisants ne sont pas capables de donner une conclusion concernant la stabilité.

Le conservatisme dans notre approche est un résultat de la majoration des modules des termes exponentiels dans  $\hat{\phi}$  dans (3.42). Cette majoration est justifiée par la complexité à manipuler le terme intégral de (3.28), représentant le retard distribué. Afin d'avoir une idée sur son comportement, une résolution de ce terme est développée dans l'annexe F. La solution obtenue est générée sous la forme de séries de fonctions Gamma et de fonctions de Gamma modifiées, ou sous la forme de séries de puissance. Cette solution est toutefois non adoptée dans ce travail, car elle ne contribue pas à la simplification de l'analyse.

Une alternative est de considérer la condition nécessaire et suffisante (3.29) et de l'approximer numériquement tout en gardant les termes exponentiels. Cette démarche est l'objectif de la section suivante 3.3.2, où un algorithme est construit et se révèle moins conservatif que les deux approches comparées ci-dessus, mais nécessite un temps de calcul élevé.

### 3.3.2 Approximation numérique de la CNS : algorithme

Reprenons la condition nécessaire et suffisante de stabilité du système à retard (3.21). L'équation caractéristique est

$$\hat{\phi}(s) = 1 - \rho q e^{-sr} - \int_0^r N(\theta) e^{-s\theta} d\theta = 0. \quad (3.72)$$

La condition nécessaire et suffisante est

$$\inf_{\text{Re}(s) \geq 0} |\hat{\phi}(s)| > 0. \quad (3.73)$$

Nous développons un test numérique de la condition (3.73), basé sur les expressions explicites de  $N(\theta)$ , sa dérivée  $N'(\theta)$  et des bornes supérieures de leurs valeurs absolues, données dans l'annexe E. Notre objectif est de tester l'absence des racines (à une certaine précision près) de l'équation caractéristique (3.72) dans le demi-plan droit.

Nous signalons que les algorithmes numériques pour l'analyse spectrale des systèmes à retard comme DELAY\_PSA développé dans [Gumussoy and Michiels, 2010], YALTA dans [Avanessoﬀ et al., 2013] ou DDE-BIFTOOL dans [Engelborghs et al., 2002] exigent des quasi-polynômes caractéristiques explicites. Cependant, ces représentations analytiques ne s'appliquent pas dans notre problème, et nous sommes restreints à utiliser une réalisation numérique pour le retard distribué. Pour cette raison, un algorithme numérique pour le (pseudo)spectre du système à retard (3.21) est développé dans cette section.

Nous considérons le nombre complexe  $s = z + iy$  avec  $z \geq 0$  et nous visons à tester l'absence de racine à partie réelle positive de (3.72). Cette étude nécessite *a priori* la considération de tout le demi-plan droit (avec une infinité de points). Cependant, ayant l'expression explicite de  $N(\theta)$ , et donc le comportement de  $\hat{\phi}$ , nous restreignons notre analyse à un domaine compact dans ce demi-plan. La propriété intéressante de ce compact est qu'il présente la seule région du RHP où l'équation caractéristique (3.72) peut avoir des racines (comme est montré dans le lemme 5). Ce fait nous permet de construire une grille initiale (qui peut être raffinée si nécessaire) comprenant un nombre fini de nœuds sur lesquels  $|\hat{\phi}|$  est évaluée. L'algorithme est capable de conclure sur l'absence de racine au voisinage d'un point d'évaluation en utilisant la constante de Lipschitz de  $|\hat{\phi}|$ . Quand l'évaluation de  $|\hat{\phi}|$  n'est pas suffisante pour garantir l'absence de racine entre deux points d'évaluation adjacents, la grille est raffinée autour de ces points, et l'algorithme exécute des tests en évaluant  $|\hat{\phi}|$  sur les nœuds créés sur la grille raffinée.

L'algorithme effectue des itérations récursives en suivant une technique similaire à un algorithme de parcours en profondeur DFS (Depth-First Search), jusqu'à ce qu'il retourne qu'il n'a trouvé aucune racine dans le compact et par suite le système est stable, ou qu'il a détecté une très petite valeur de  $|\hat{\phi}|$  (au-dessous d'une valeur de tolérance), et dans ce cas, nous ne pouvons pas conclure quant à la stabilité du système. Le niveau de tolérance doit être fixé *a priori* afin que l'algorithme arrête les itérations dans le cas d'un système instable. Soit le compact sous-ensemble de  $\mathbb{C}$  :

$\mathcal{C} \doteq \{s = z + iy \in \mathbb{C} ; 0 \leq z \leq z_l \text{ et } |s| \leq M(z)\}$ , où nous avons défini

$$z_l \doteq \frac{|\rho q|}{r} + \nu \quad (3.74a)$$

$$M(z) \doteq \frac{|N(r)|e^{-zr} + |N(0)| + \frac{\bar{\nu}}{z}(1 - e^{-zr})}{1 - |\rho q|e^{-zr}} \quad (3.74b)$$

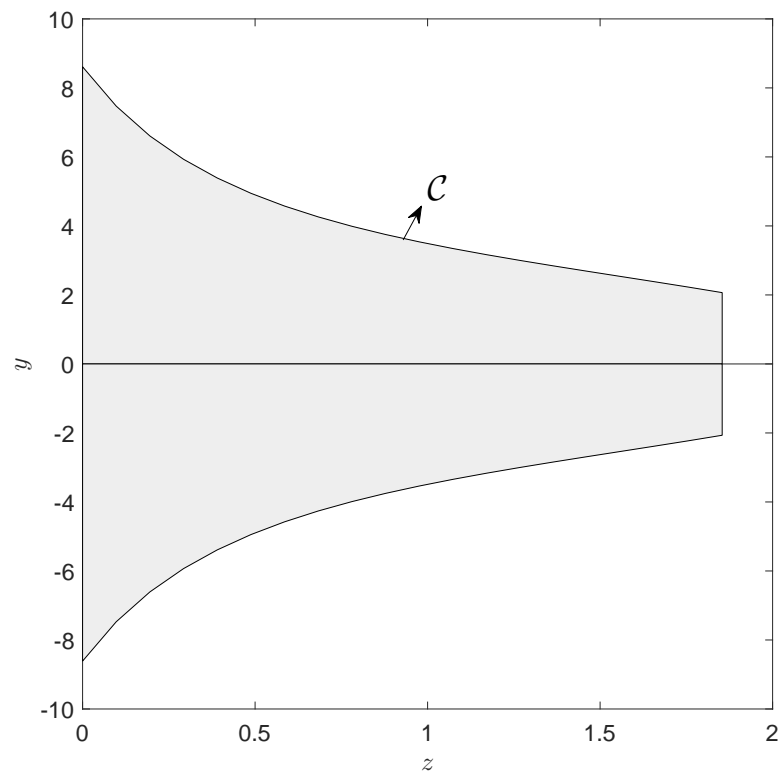
avec

$$N(0) = \frac{1}{r}(a + R) \quad (3.75a)$$

$$N(r) = \frac{1}{r}(a - \rho q R). \quad (3.75b)$$

Les valeurs de  $a$  et  $R$  sont données dans (3.35a) et (3.35b) respectivement.  $\nu$  et  $\bar{\nu}$ , bornes supérieures de  $|N(\theta)|$  et  $|N'(\theta)|$  respectivement, sont données dans (E.44).

Une illustration de ce compact est montrée par la surface en gris de la figure 3.4. Les paramètres choisis pour cet exemple sont  $\sigma^{+-} = 2$ ,  $\sigma^{-+} = 1.5$ ,  $r_1 = 0.85$ ,  $r_2 = 1.1$ ,  $\rho = 0.7$  et  $q = -0.4$ .

FIGURE 3.4 – Représentation du compact  $\mathcal{C}$ .

**Lemme 5.** Par définition de  $\mathcal{C}$ , nous avons que

$$\exists \epsilon > 0 ; \forall s \in RHP \setminus \mathcal{C}, |\hat{\phi}(s)| \geq \epsilon.$$

(avec  $RHP$  ou *Right-Half Plane* est le demi-plan droit).

*Démonstration.*  $z > z_l$  aboutit à

$$\begin{aligned}
 |\hat{\phi}(s)| &= \left| 1 - \rho q e^{-sr} - \int_0^r N(\theta) e^{-s\theta} d\theta \right| \\
 &\geq 1 - |\rho q e^{-sr}| - \left| \int_0^r N(\theta) e^{-s\theta} d\theta \right| \\
 &\geq 1 - |\rho q| e^{-zr} - \nu \int_0^r e^{-z\theta} d\theta \\
 &\geq 1 - |\rho q| e^{-zr} - \frac{\nu}{z} + \frac{\nu}{z} e^{-zr} \\
 &\geq 1 - |\rho q| e^{-zr} - \frac{\nu}{z} \\
 &\geq 1 - \frac{|\rho q|}{zr} - \frac{\nu}{z} \\
 &= 1 - \frac{z_l}{z} > 0.
 \end{aligned} \tag{3.76}$$

En outre, en intégrant par parties le terme  $\int_0^r N(\theta)e^{-s\theta}d\theta$  nous obtenons

$$\int_0^r N(\theta)e^{-s\theta}d\theta = -\frac{N(r)}{s}e^{-sr} + \frac{N(0)}{s} + \frac{1}{s}\int_0^r N'(\theta)e^{-s\theta}d\theta. \quad (3.77)$$

Ainsi, si  $|s| > M(z)$  nous avons que

$$\begin{aligned} |\hat{\phi}(s)| &\geq 1 - |\rho q|e^{-zr} - \frac{|N(r)|e^{-zr}}{|s|} - \frac{|N(0)|}{|s|} - \frac{\bar{\nu}}{z|s|}(1 - e^{-zr}) \\ &\geq 1 - \frac{M(z)}{|s|} > 0. \end{aligned} \quad (3.78)$$

□

À noter que  $M(z)$  est strictement décroissante quand  $z$  augmente et que  $\lim_{z \rightarrow 0} M(z) = \frac{|N(r)| + |N(0)| + \bar{\nu}r}{1 - |\rho q|}$  et  $\lim_{z \rightarrow \infty} M(z) = |N(0)|$ .

Construisons d'abord une grille définie par un ensemble  $\mathcal{G}^0$  de nœuds dans un compact  $\bar{\mathcal{C}}$  contenant strictement  $\mathcal{C}$  comme représenté sur la figure 3.5. Les nœuds dans la grille sont à égale distance le long des axes  $z$  et  $y$  avec des pas  $\delta z$  et  $\delta y$  respectivement. Nous devons nous assurer que  $\bar{\mathcal{C}} \supset \mathcal{C}$  en surpassant les erreurs numériques pouvant être présentes entre deux nœuds successifs dans la direction de  $z$ . Afin de couvrir tout le compact  $\bar{\mathcal{C}}$  par un nombre fini de nœuds, nous considérons  $\bar{\mathcal{B}}(s, \varrho)$ , une boule fermée centrée en chaque  $s \in \mathcal{G}^0$  et ayant un rayon

$$\varrho \doteq \frac{1}{2}\sqrt{\delta z^2 + \delta y^2} \quad (3.79)$$

comme montré sur la figure 3.6. Nous notons que  $\mathcal{C} \subset \bar{\mathcal{C}} \subset \cup_{s \in \mathcal{G}^0} \bar{\mathcal{B}}(s, \varrho)$ .

L'algorithme est basé sur le lemme suivant

**Lemme 6.** Soit le paramètre

$$\kappa \doteq r|\rho q| + \frac{1}{2}r^2\nu. \quad (3.80)$$

Si en un point  $\bar{s} \in \mathcal{G}^0$ ,

$$|\hat{\phi}(\bar{s})| > \kappa\varrho, \quad (3.81)$$

alors  $|\hat{\phi}(s)| > 0 \forall s \in \bar{\mathcal{B}}(\bar{s}, \varrho)$ .

*Démonstration.* Ayant  $N \in C^\infty([0, r]; \mathbb{R})$ ,  $\hat{\phi}$  est Lipschitz-continue. De plus,

$$\begin{aligned} \left| |\hat{\phi}(s_1)| - |\hat{\phi}(s_2)| \right| &\leq \left| \hat{\phi}(s_1) - \hat{\phi}(s_2) \right| \\ &\leq \max_{s \in \bar{\mathcal{C}}} \left\{ \left| \frac{\partial}{\partial z} \hat{\phi}(s) \right|, \left| \frac{\partial}{\partial y} \hat{\phi}(s) \right| \right\} |s_1 - s_2|, \end{aligned} \quad (3.82)$$

avec

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \hat{\phi}(s) &= i \frac{\partial}{\partial z} \hat{\phi}(s) \\ &= ir\rho q e^{-sr} + i \int_0^r \theta N(\theta) e^{-s\theta} d\theta. \end{aligned} \quad (3.83)$$

Ainsi,  $|\hat{\phi}|$  est Lipschitz-continue avec une constante de Lipschitz majorée par  $\kappa$ . □

Par conséquent, l'algorithme commence par calculer  $|\hat{\phi}(s)| \forall s \in \mathcal{G}^0$ . Si  $\forall s \in \mathcal{G}^0$ , (3.81) est satisfaite, alors  $|\hat{\phi}(s)| > 0 \forall s \in \bar{\mathcal{C}}$ . Par suite,  $|\hat{\phi}(s)| > 0 \forall \operatorname{Re}(s) \geq 0$  et le système est stable selon la condition nécessaire et suffisante de stabilité (3.73). Sinon, une grille plus fine est construite en considérant davantage des nœuds dans le voisinage de tout point  $s \in \mathcal{G}^0$  où (3.81) n'est pas satisfaite. Nous commençons par le point où  $|\hat{\phi}|$  a la plus petite valeur et nous divisons le rayon de la boule fermée dans (3.79) par 2. Nous notons une grille raffinée obtenue au voisinage d'un point  $\bar{s} \doteq \bar{z} + i\bar{y} \in \bar{\mathcal{C}}$  après  $k$  itérations récursives par

$$\mathcal{G}^k(\bar{s}) \doteq \left\{ s = z + iy \in \bar{\mathcal{C}} \quad ; \quad z \in \left\{ \bar{z} - \frac{\delta z}{2^k}, \bar{z}, \bar{z} + \frac{\delta z}{2^k} \right\} \right. \\ \left. \text{et } y \in \left\{ \bar{y} - \frac{\delta y}{2^k}, \bar{y}, \bar{y} + \frac{\delta y}{2^k} \right\} \right\}. \quad (3.84)$$

Dans une grille raffinée  $\mathcal{G}^k$ ,  $|\hat{\phi}|$  est calculée sur tous les nœuds récemment considérés et un test similaire à (3.81) sera exécuté. Avant de visiter un autre nœud dans la grille initiale  $\mathcal{G}^0$ , l'algorithme visite d'abord tous les nœuds d'une grille raffinée en utilisant une technique similaire à un algorithme de parcours en profondeur DFS. L'algorithme va visiter un nœud en passant à une grille de niveau supérieur  $\mathcal{G}^{k-1}$  si tous les nœuds de  $\mathcal{G}^k$  vérifient

$$|\hat{\phi}(s)| > \kappa \frac{\rho}{2^k}. \quad (3.85)$$

Une progression d'itérations récursives est montrée dans les figures 3.7, 3.8, 3.9 et 3.10. Sur la figure 3.7, nous considérons un point  $\bar{s}$  dans  $\mathcal{G}^0$ , tel que  $|\hat{\phi}(\bar{s})|$  ne satisfait pas (3.81). Par suite,  $\mathcal{G}^1(\bar{s})$  est construite (montrée sur la figure 3.7 à travers des cercles en rouge). Si le minimum de  $|\hat{\phi}|$  sur  $\mathcal{G}^1(\bar{s})$  ne satisfait pas (3.85) (pour  $k = 1$ ), alors  $\mathcal{G}^2(\bar{s})$  est construite en ajoutant davantage des nœuds au voisinage de  $\bar{s} \doteq \operatorname{argmin}_{s \in \mathcal{G}^1(\bar{s})} |\hat{\phi}(s)|$  comme montrés avec des signes '+' en rose sur la figure 3.8. L'algorithme va continuer à itérer avec la même démarche pour obtenir les nœuds pointés en astérisques noirs et en carrés en cyan représentés sur les figures 3.9 et 3.10 respectivement.

La construction d'une grille raffinée  $\mathcal{G}^k$  sera toujours priorité au nœud  $\bar{s} = \operatorname{argmin}_{s \in \mathcal{G}^{k-1}} |\hat{\phi}(s)|$  avant de visiter les autres nœuds de  $\mathcal{G}^{k-1}$ , dans le but de réduire le temps global demandé pour un test complet dans le cas d'un système instable.

La procédure s'arrête quand une de ces situations a lieu :

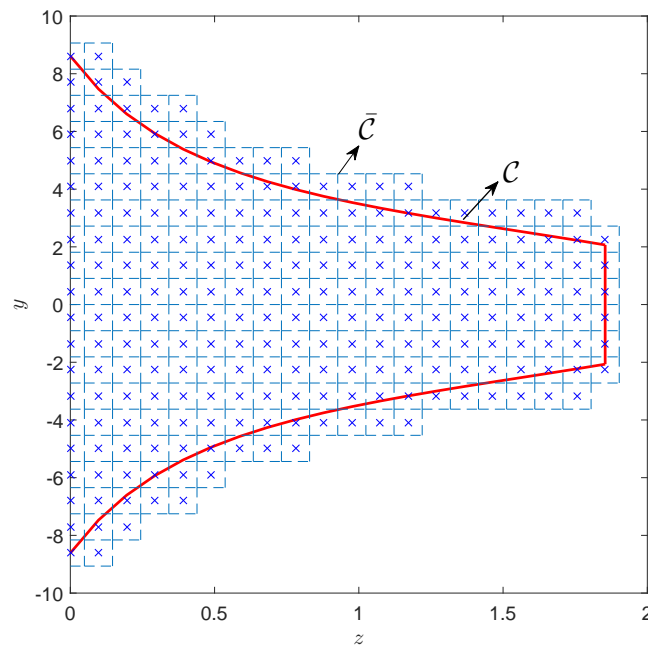
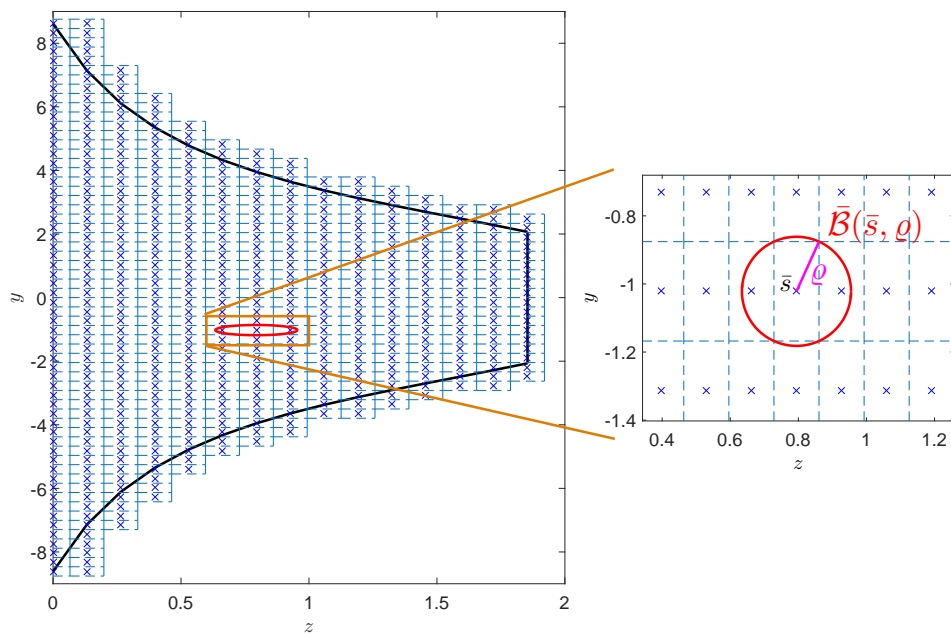
- l'algorithme a réussi à visiter tous les points construits dans  $\mathcal{G}^0$  (et dans toutes les grilles raffinées) et les inégalités (3.81) ou (3.85) sont satisfaites pour tous les points créés. Le système est alors stable.
- des grilles raffinées sont toujours entrain d'être développées par des itérations en un certain point, jusqu'à ce que  $|\hat{\phi}|$  atteigne un niveau de tolérance  $\varepsilon$  (un critère prédéfini, par exemple  $10^{-10}$ ), alors dans ce cas l'algorithme retourne que la stabilité du système n'est pas garantie.

Nous illustrons sur la figure 3.11 une procédure complète de l'algorithme, pour le système (3.34) avec les coefficients suivants :  $\sigma^{+-} = 2.3$ ,  $\sigma^{-+} = -3.5$ ,  $r_1 = 0.8$ ,  $r_2 = 1.1$ ,  $\rho = 0.5$  et

$q = -0.7$ . Le compact  $\mathcal{C}$  est montré par la courbe noire et la grille principale par les nœuds en bleu. Après avoir évalué la valeur de  $|\hat{\phi}|$  sur chaque point de cette grille, l'algorithme crée une grille raffinée au voisinage du nœud où (3.81) n'est pas satisfaite et l'évaluation s'enchaîne d'une manière itérative. Nous pouvons observer les nœuds créés dans des grilles raffinées en couleurs rouge, rose, noire et cyan comme expliqué ci-dessus. Dans cet exemple, l'algorithme a réussi à visiter tous les nœuds créés et vérifier la validité du critère (3.85).

Une description de l'algorithme est montrée en forme d'un organigramme sur la figure 3.12 et sous la forme d'un texte structuré dans l'annexe G. Nous soulignons l'importance du développement des expressions des noyaux dans l'annexe E puisqu'elles nous ont permis d'explicitier le critère de stabilité dans la proposition 3 et la construction de l'algorithme décrit dans cette section.

En vue d'avoir une évaluation globale et plus riche des conditions suffisantes présentées ((3.36)-(3.40) de la proposition 3, (3.69) du [Bastin and Coron, 2016, Théorème 5.4], et l'algorithme), nous illustrons dans la section suivante des domaines de stabilité obtenus par ces critères en fonction des coefficients du système.

FIGURE 3.5 – Construction de la grille  $\mathcal{G}^0$  dans  $\bar{\mathcal{C}} \supset \mathcal{C}$ .FIGURE 3.6 – Boule fermée  $\bar{\mathcal{B}}(\bar{s}, \varrho)$ .

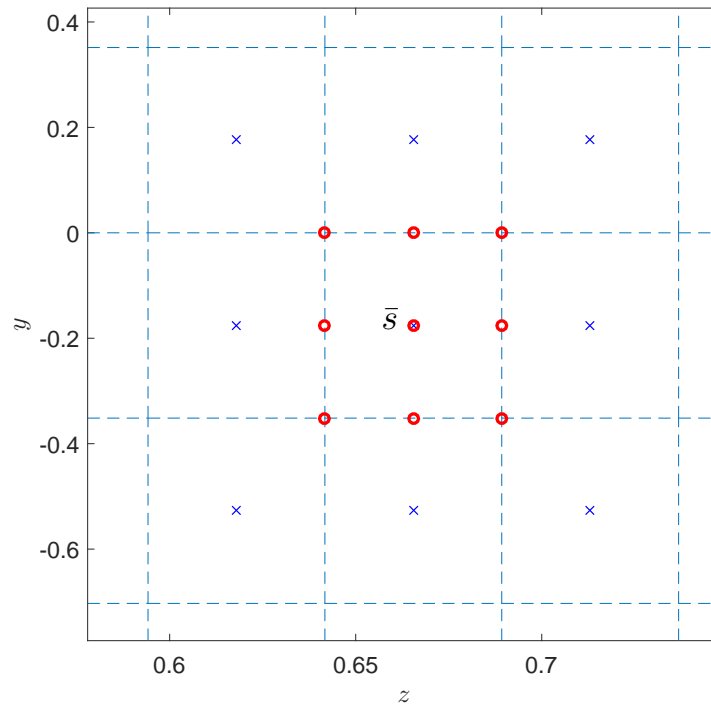


FIGURE 3.7 – Grille raffinée  $\mathcal{G}^1(\bar{s})$  après une première itération, les nœuds ajoutés sont représentés par des cercles rouges.

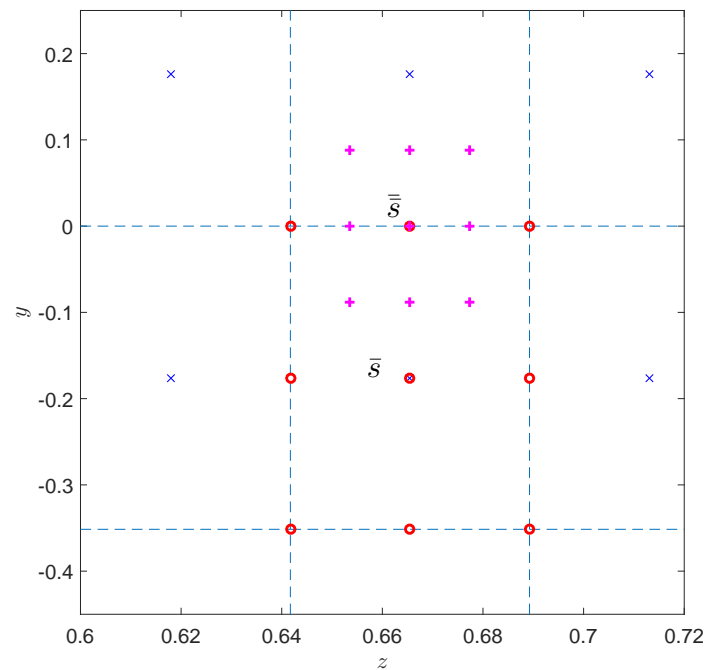


FIGURE 3.8 – Grille raffinée  $\mathcal{G}^2(\bar{s})$  après une seconde itération, les nœuds ajoutés sont représentés par des signes '+' en rose.



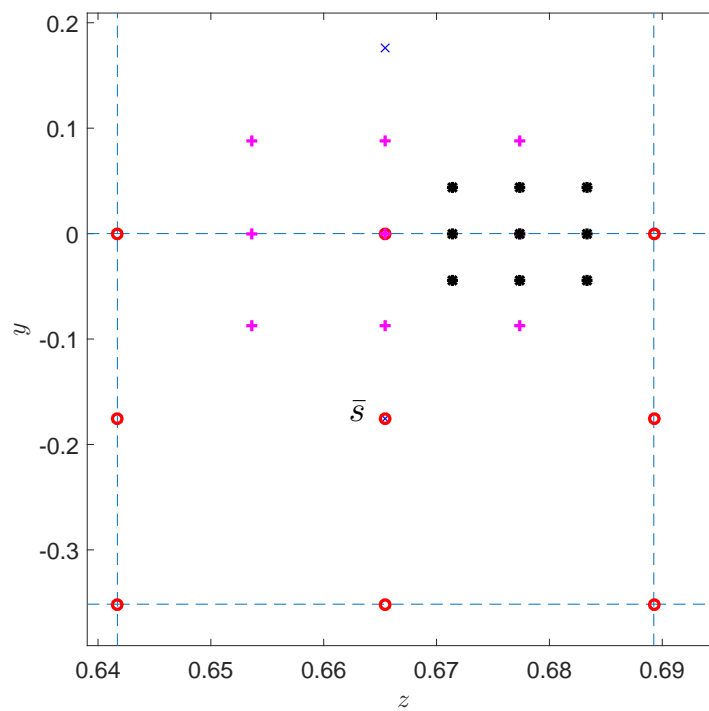


FIGURE 3.9 – Grille raffinée après une troisième itération, les nœuds ajoutés sont représentés en astérisques noirs.

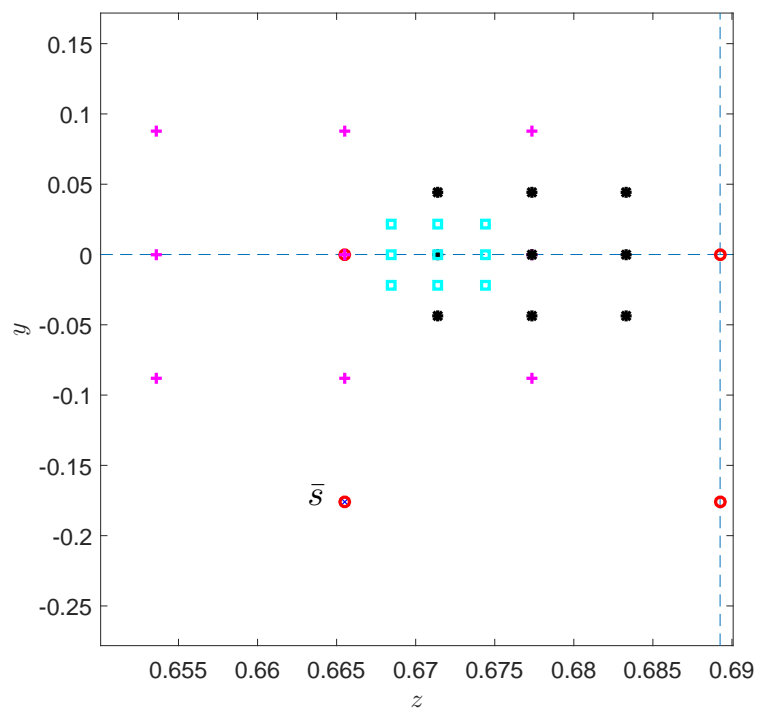


FIGURE 3.10 – Grille raffinée après une quatrième itération, les nœuds ajoutés sont représentés par des carrés en cyan.

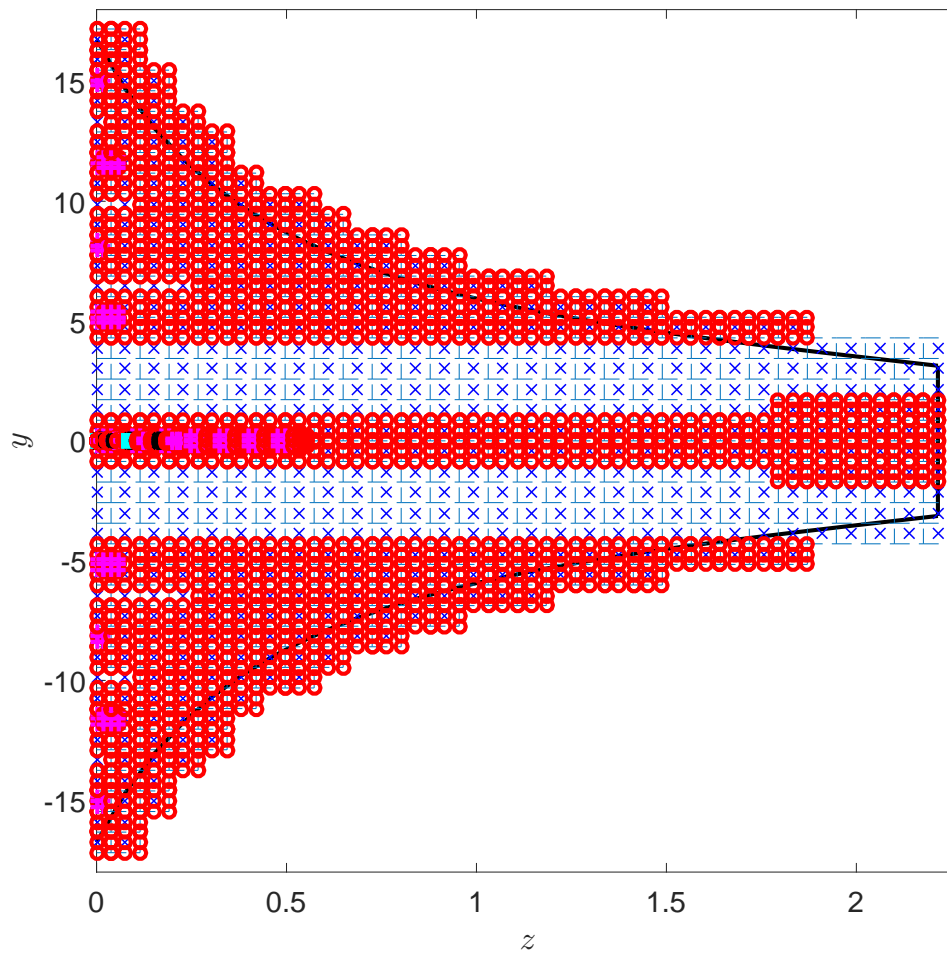


FIGURE 3.11 – Grilles principales et raffinées créées par l'algorithme après une procédure complète pour un système dont les paramètres sont :  $\sigma^{+-} = 2.3$ ,  $\sigma^{-+} = -3.5$ ,  $r_1 = 0.8$ ,  $r_2 = 1.1$ ,  $\rho = 0.5$  et  $q = -0.7$ .

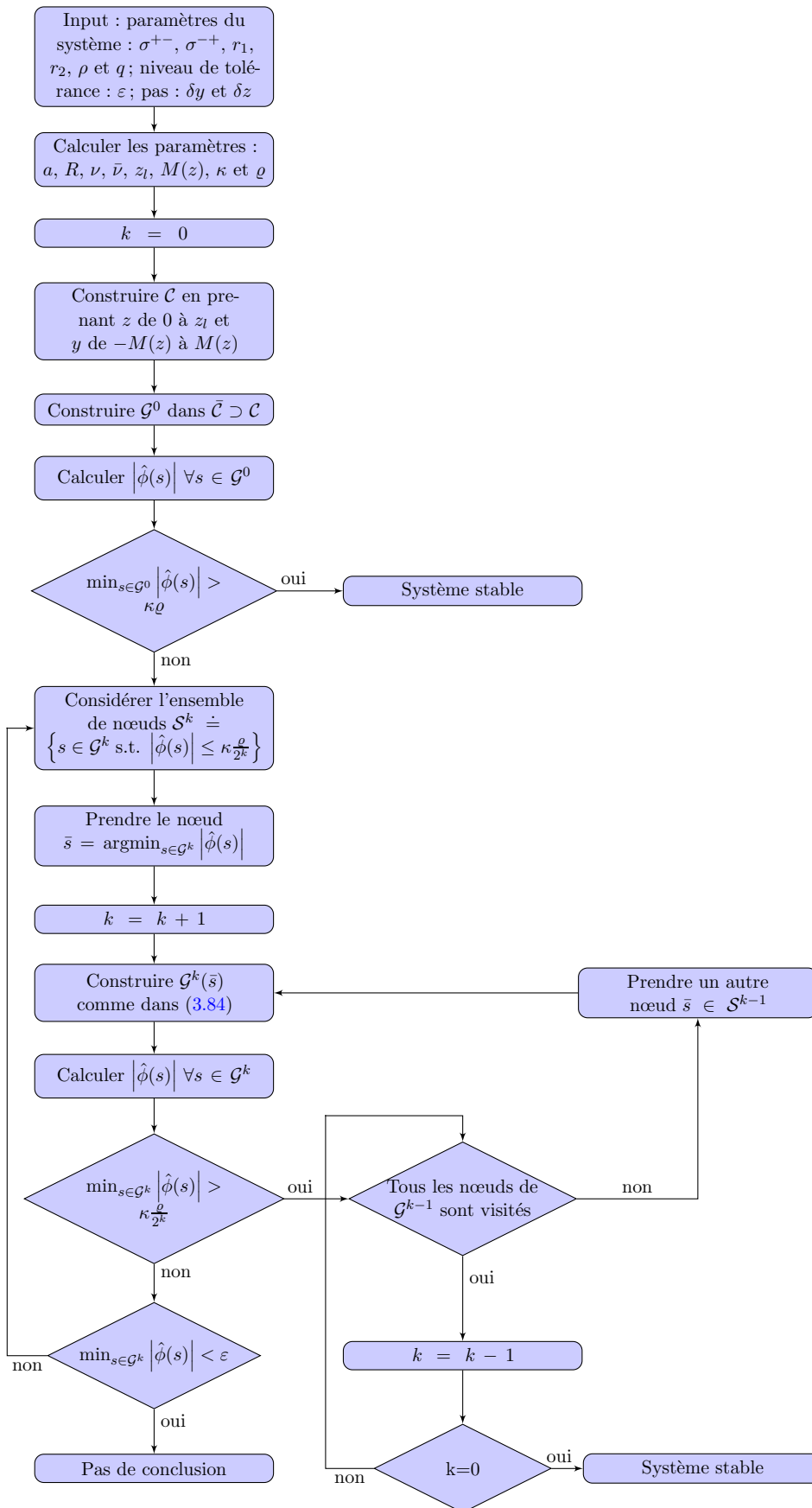


FIGURE 3.12 – Organigramme représentatif de l’algorithme.

### 3.4 Comparaison numérique : domaines de stabilité

Considérons les deux conditions suffisantes analytiques : (3.36)-(3.40) dans la proposition 3 et (3.69) exigée par [Bastin and Coron, 2016, Théorème 5.4]. Ces deux critères possèdent une similarité dans la complexité d'évaluation. Ils représentent des inégalités à vérifier qui ne dépendent que des paramètres du système de départ : les vitesses  $\frac{1}{r_1}$  et  $\frac{1}{r_2}$ , les coefficients de réflexion aux bords  $\rho$  et  $q$  et les coefficients de couplage à l'intérieur du domaine  $\sigma^{+-}$  et  $\sigma^{-+}$ . De plus, aucune inclusion de l'un dans l'autre n'est observée. Ce fait est bien remarqué dans la Tableau 3.2, où nous montrons qu'il existe des exemples où l'un est vérifié sans l'autre.

Cependant, ces exemples ne présentent pas un cadre assez général pour conjecturer le conservatisme de chaque critère. Afin de pouvoir évaluer ces deux critères d'une manière plus fine et de visualiser leurs marges de validité et leur dépendance sur les paramètres mentionnés ci-dessus, nous souhaitons comparer les domaines de stabilité, assurés par chacun, en fonction des paramètres  $\sigma^{+-}$ ,  $\sigma^{-+}$ ,  $\rho$  et  $q$ . Toutefois, l'illustration visuelle des domaines de stabilité en variant ces quatre paramètres simultanément n'est pas réalisable. Nous présentons par suite six graphes où nous fixons dans chacun deux paramètres et varions les deux autres. Ces graphes nous donnent une idée plus claire sur les avantages des conditions explicites et leurs limitations.

Sur deux figures (parmi les six figures présentés), les domaines de stabilité obtenus par les deux critères explicites sont superposés avec le domaine approché numériquement par l'algorithme. Celui-ci aboutit au résultat le moins conservatif parmi tous les critères présentés dans ce chapitre. Sa performance est limitée par la précision et la rapidité de la machine. Il va ainsi servir comme outil de référence pour évaluer le conservatisme des conditions explicites.

Analysons la figure 3.13 où nous prenons l'exemple suivant :  $r_1 = 0.5$ ,  $r_2 = 1.1$ ,  $\sigma^{+-} = 1$  et  $q = 1.2$ .  $\rho$  est varié de façon à avoir  $-1 < \rho q < 1$  avec un pas de 0.02 et  $\sigma^{-+}$  est choisie entre  $-0.8$  et  $0.8$ , avec un pas de 0.04. : si le couple  $(\rho, \sigma^{-+})$  est à l'intérieur de la courbe rouge en traits tirés (respectivement surface hachurée à l'intérieur de la courbe bleue), alors le système est stable selon la proposition 3 (respectivement [Bastin and Coron, 2016, Théorème 5.4]). À noter que ces deux conditions peuvent être appliquées. En revanche, le domaine de stabilité obtenu par l'algorithme (surface ombrée sur la même figure) couvre les deux autres domaines de stabilité. De la même manière, ces trois domaines sont superposés sur la figure 3.14 en faisant varier les coefficients  $(\rho, \sigma^{+-})$ .

Les figures 3.15, 3.16, 3.17 et 3.18 montrent les domaines garantis par les critères explicites de stabilité, en fonction des couples  $(q, \sigma^{+-})$ ,  $(q, \sigma^{-+})$ ,  $(\sigma^{+-}, \sigma^{-+})$  et  $(\rho, q)$  respectivement. Les domaines de stabilité obtenus en appliquant la proposition 3 sont représentés par la surface ombrée à l'intérieur de la courbe rouge en traits-tirés, tandis que ceux obtenus en appliquant [Bastin and Coron, 2016, Théorème 5.4] sont dans la zone hachurée à l'intérieur de la courbe bleue. Nous signalons que sur les figures 3.14 et 3.16, le domaine hachuré en bleu (qui résulte de l'application de [Bastin and Coron, 2016, Théorème 5.4]) n'est pas restreint aux valeurs de  $\sigma^{+-}$  et  $\sigma^{-+}$  (respectivement) choisies pour ces simulations. Les courbes en bleu limitant la zone hachurée continuent à progresser, pour des valeurs négatives de  $\sigma^{+-}$  et  $\sigma^{-+}$  respectivement, avec une forme hyperbolique.

Constatons de même que, dû à la symétrie du problème, les domaines obtenus en faisant varier le couple  $(\sigma^{-+}, \rho)$  (figure 3.13) présentent des allures très proches de celles obtenues en variant le couple  $(\sigma^{+-}, q)$  (figure 3.15). De même, les allures obtenues en variant  $(\sigma^{+-}, \rho)$  (figure 3.14) sont similaires à celles visualisées sur la figure 3.16 en fonction de  $(\sigma^{-+}, q)$ .

Nous apprécions également que la condition de la proposition 3 possède l'avantage

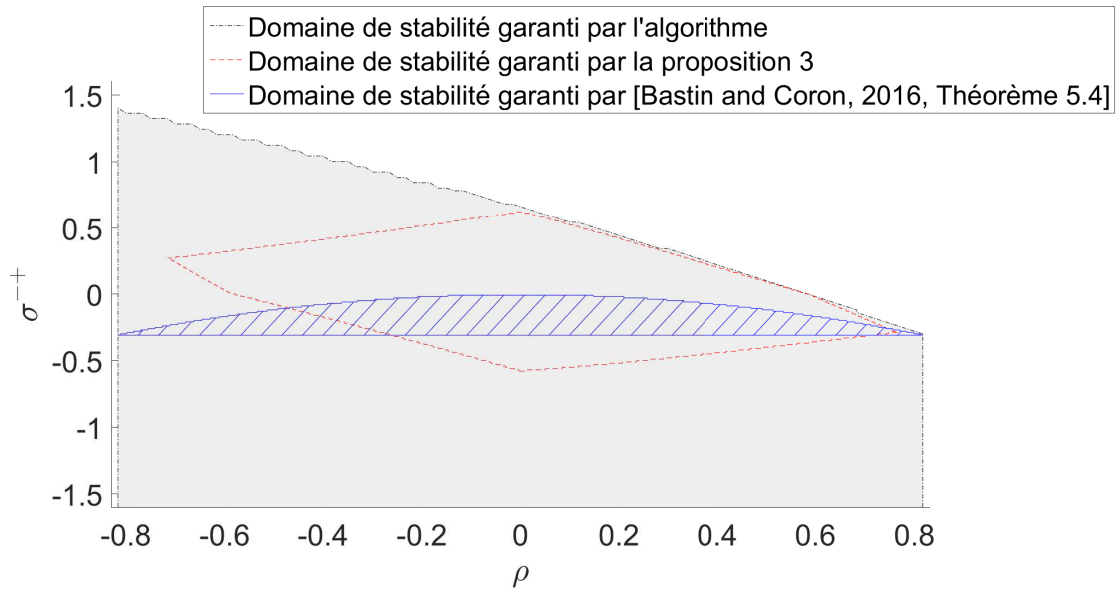


FIGURE 3.13 – Domaines de stabilité en fonction du couple  $(\rho, \sigma^{+-})$  pour  $r_1 = 0.5$ ,  $r_2 = 1.1$ ,  $\sigma^{+-} = 1$  et  $q = 1.2$ . La condition (3.36)-(3.40) de la proposition 3 garantit la stabilité du système si  $(\rho, \sigma^{+-})$  est à l'intérieur de la courbe rouge en traits tirés, tandis que la condition (3.69) exigée par [Bastin and Coron, 2016, Théorème 5.4] garantit la stabilité si  $(\rho, \sigma^{+-})$  est dans la surface hachurée à l'intérieur de la courbe bleue. L'algorithme garantit la stabilité de système de départ si  $(\rho, \sigma^{+-})$  est dans la surface ombrée à l'intérieur de la courbe noire traitillée/pointillée.

remarquable d'assurer des régions de stabilité quand  $\sigma^{+-}$  et  $\sigma^{-+}$  possèdent le même signe (figures 3.13-3.17). Observons en plus le premier cadran des figures 3.13 et 3.14. Ce cadran sur ces deux figures correspond à un signe positif des produits  $\sigma^{+-}\sigma^{-+}$  et  $\rho q$ . La limite du domaine garanti par la condition de la proposition 3 est très proche de celle du domaine approché numériquement. En conséquence, nous pouvons conclure que pour cette région, la proposition 3 est un outil efficace qui donne avec précision la limite de stabilité du système en fonction des coefficients. En revanche, la condition (3.69) du [Bastin and Coron, 2016, Théorème 5.4] est capable de garantir un domaine non limité par une valeur de  $\sigma^{+-} < 0$  (figure 3.14) ou  $\sigma^{-+} < 0$  (figure 3.16).

Nous observons dans tous les cas que les domaines de stabilité résultants des deux conditions suffisantes ne sont pas identiques et aucun d'eux n'est contenu dans l'autre. Ces graphes nous montrent également la dépendance de tous les critères sur les paramètres. Ils permettent donc de préciser la direction où faut-il encore avancer la recherche pour tirer des conditions explicites qui peuvent couvrir des régions de stabilité dévoilées par l'algorithme et non encore couvertes par des conditions analytiques. À titre d'exemple, sur la figure 3.13, une région considérable, où  $\sigma^{+-} < 0$  et  $\rho < 0$  n'est pas couverte par une condition suffisante explicite dans la littérature. Également, de la figure 3.14, nous déduisons que la région du deuxième cadran, qui correspond à  $\sigma^{+-} > 0$  et  $\rho < 0$  peut être considérée afin de développer des critères analytiques de stabilité.

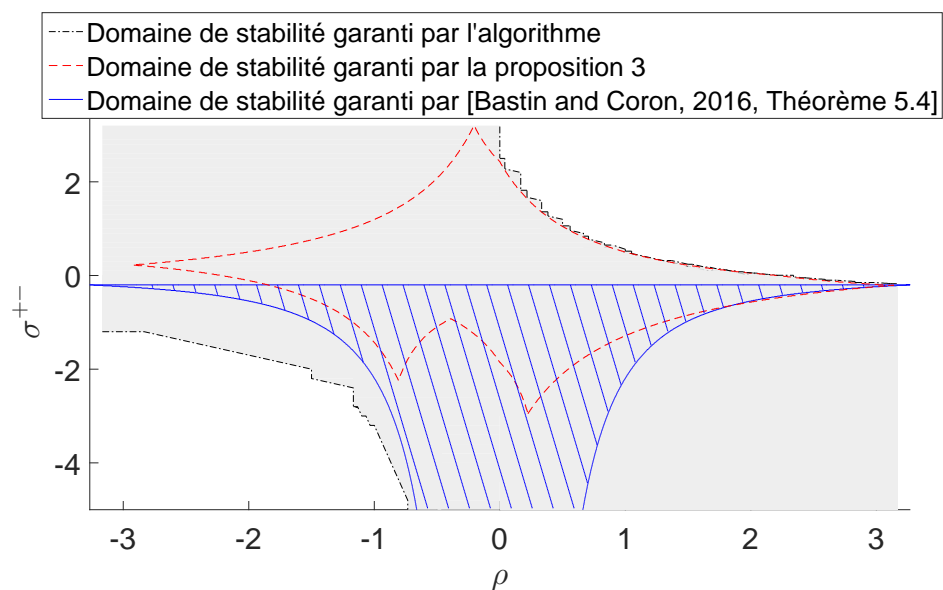


FIGURE 3.14 – Domaines de stabilité en fonction du couple  $(\rho, \sigma^{+-})$  pour  $r_1 = 0.5$ ,  $r_2 = 1.1$ ,  $\sigma^{-+} = 1$  et  $q = 0.3$ .

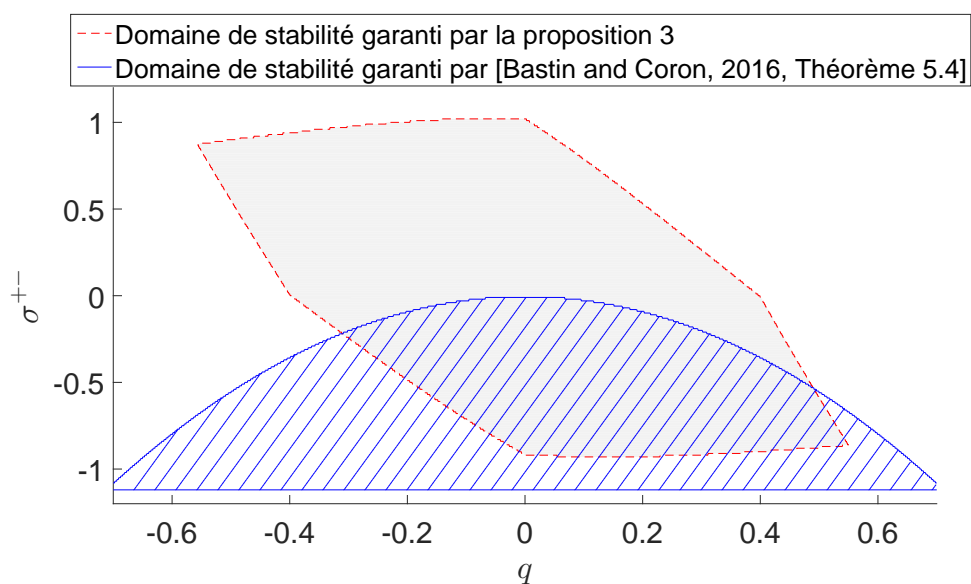


FIGURE 3.15 – Domaines de stabilité en fonction du couple  $(q, \sigma^{+-})$  pour  $r_1 = 0.5$ ,  $r_2 = 1.1$ ,  $\sigma^{-+} = 1$  et  $\rho = 1.4$ .

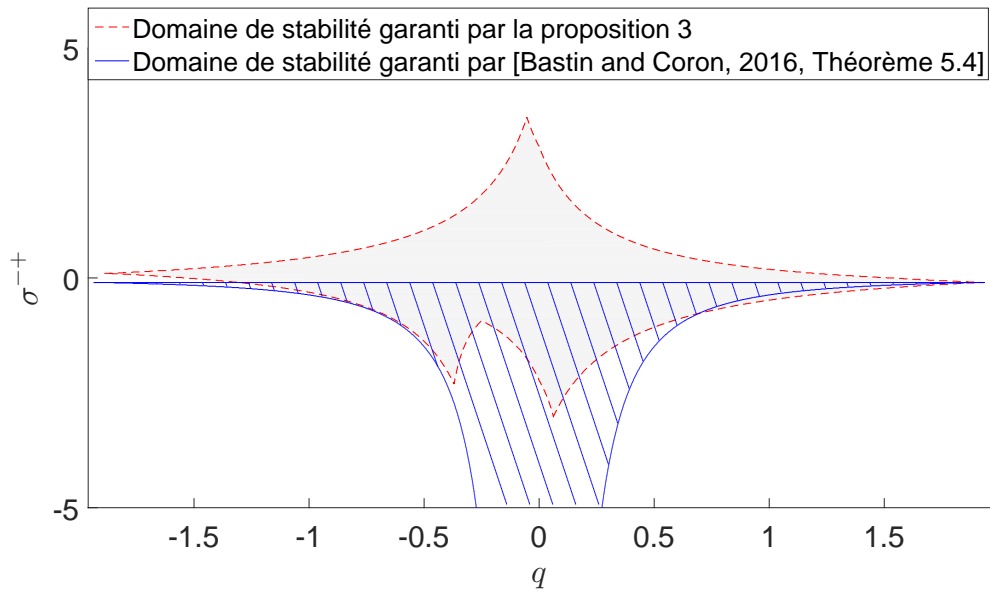


FIGURE 3.16 – Domaines de stabilité en fonction du couple  $(q, \sigma^{+-})$  pour  $r_1 = 0.9$ ,  $r_2 = 1.2$ ,  $\sigma^{+-} = 0.5$  et  $\rho = 0.5$ .

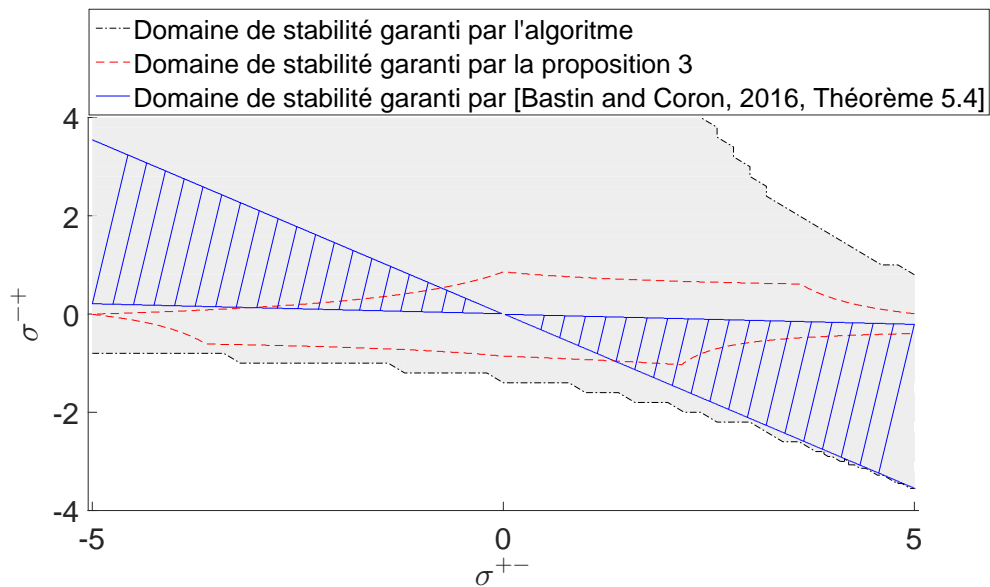


FIGURE 3.17 – Domaines de stabilité en fonction du couple  $(\sigma^{+-}, \sigma^{-+})$  pour  $r_1 = 0.5$ ,  $r_2 = 1.1$ ,  $\rho = 0.3$  et  $q = -0.8$ .



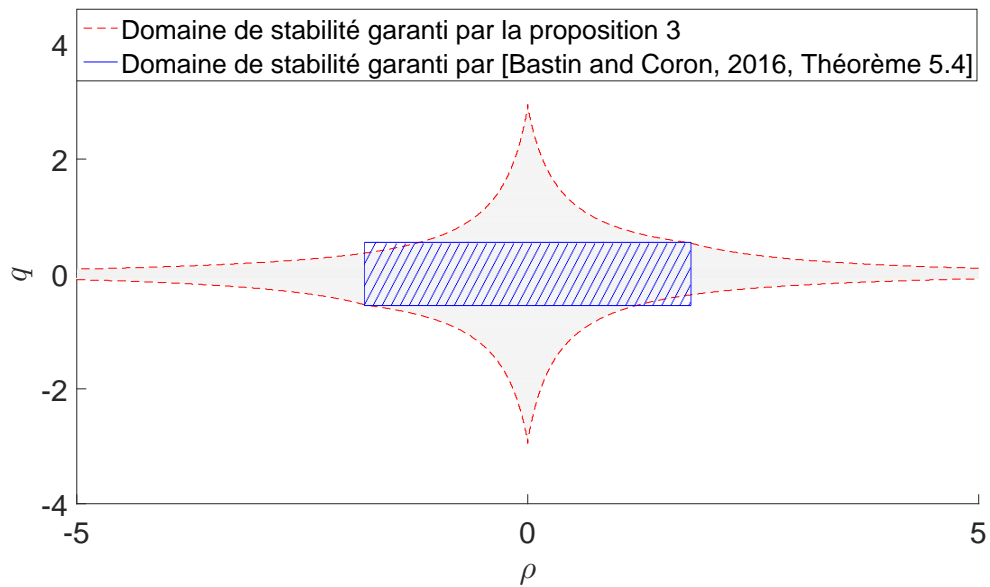


FIGURE 3.18 – Domaines de stabilité en fonction du couple  $(\rho, q)$  pour  $r_1 = 0.5$ ,  $r_2 = 1.1$ ,  $\sigma^{-+} = 0.3$  et  $\sigma^{+-} = -0.2$ .

### 3.5 Conclusion et perspectives

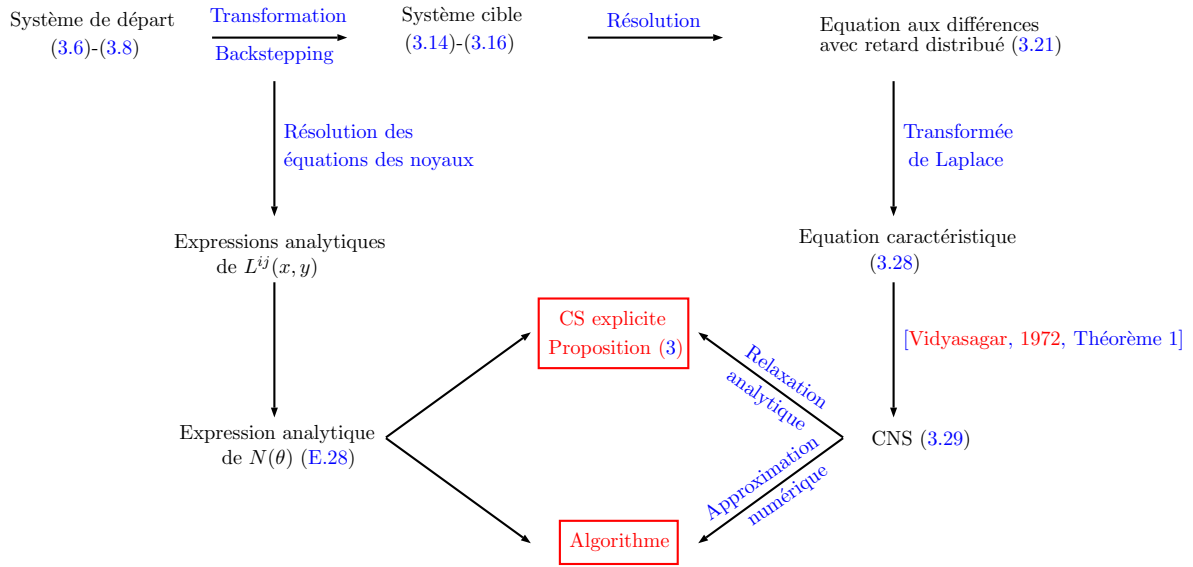


FIGURE 3.19 – Schéma récapitulatif du déroulement de l’analyse.

Dans ce chapitre, une analyse de stabilité d’une classe d’EDP hyperboliques linéaires du premier ordre couplées 2 à 2 est présentée. Une transformation backstepping nous mène à un système cible, qui consiste en deux équations de transport couplées aux bords. Ensuite, nous avons établi une réalisation équivalente de la stabilité sur un système s’écrivant sous la forme d’une équation aux différences avec un retard distribué. Les expressions explicites des noyaux de la transformation backstepping inverse sont trouvées en utilisant les fonctions de Bessel et les fonctions de Bessel modifiées de première espèce. En appliquant la transformée de Laplace sur l’équation à retard, une analyse de stabilité exponentielle dans le domaine fréquentiel nous conduit à une condition nécessaire et suffisante de stabilité. Cette condition n’étant pas simple à manipuler, deux critères suffisants de stabilités sont obtenus en se basant sur la condition nécessaire et suffisante et sur les expressions explicites des noyaux. Une première approche consiste à majorer les modules des termes de la condition nécessaire et suffisante pour aboutir à une condition suffisante de stabilité explicite en terme des coefficients du système de départ et qui dépend de leurs signes. Une alternative est d’approximer numériquement la condition nécessaire et suffisante et construire un algorithme qui exécute des tests sur un domaine compact du demi-plan droit afin de vérifier sa validité. Son objectif principal est de tester l’absence de racine à partie réelle positive (à des erreurs numériques près) de l’équation caractéristique associée à l’équation aux différences avec un retard distribué dans le domaine de Laplace, sans avoir recours à majorer les termes exponentiels. Un schéma récapitulatif du déroulement de l’analyse est illustré sur la figure 3.19.

La condition explicite présentée dans ce travail a été comparée à deux autres conditions de la littérature. Une première, basée sur une fonction de Lyapunov-Krasovkii, s’est avérée plus conservative. Dans une deuxième comparaison, nous faisons appel à une fonction de Lyapunov utilisée pour un système de lois de bilan et conduit à un autre critère de stabilité. Des exemples académiques montrent que les critères comparés sont différents (aucune équivalence ou inclusion observée). Cette différence réside dans l’inégalité mise en œuvre. Alors que la condition (3.69) impose des inégalités qui doivent être satisfaites par le quotient  $\frac{\sigma^- + r_2}{\sigma^+ - r_1}$ , la condition de la proposition 3 exige des inégalités qui font intervenir le paramètre  $R = \sigma^+ - \sigma^- + r_1 r_2$ , qui n’est autre qu’un produit des coefficients.

Finalement, dans le but d'évaluer le conservatisme des conditions suffisantes explicites, des domaines de stabilité garantis par ces conditions sont illustrés en fonction des paramètres du système. Les deux critères explicites ont été placés dans le contexte de l'approche numérique qui nous permet de conclure sur le conservatisme et les limitations de ces critères. L'algorithme demeure le moyen le plus efficace pour tester la stabilité, malgré le coût de calcul élevé qu'il exige.

Par ailleurs, nous mettons en relief le passage d'un système d'EDP hyperbolique à un système à retard. Ce passage simplifie considérablement l'analyse et ouvre des perspectives sur des travaux de stabilisation et de robustesse. Le travail dans ce chapitre, se reposant sur une équivalence entre système d'EDP hyperboliques et SAR constitue un des deux axes de recherche effectués en collaboration avec le laboratoire CAS (Centre Automatique et Systèmes), Mines ParisTech. Le deuxième axe porte sur la stabilisation robuste (vis-à-vis d'un retard dans la commande) d'un système EDP-EDO en faisant apparaître une équation à retard de type neutre.

De ce chapitre, nous ressortons les perspectives suivantes, qui restent des questions ouvertes à résoudre (voir plus de détails dans le chapitre 5, section 5.1) :

- expliciter le terme intégral dans (3.28), représentant le retard distribué
- expliciter des conditions suffisantes de stabilité en termes des paramètres pour les cas :
  - $\sigma^{+-} > 0$ ,  $\sigma^{-+} < 0$ ,  $\rho < 0$  et  $q > 0$
  - $\sigma^{+-} < 0$ ,  $\sigma^{-+} > 0$ ,  $\rho > 0$  et  $q < 0$ .

## Chapitre 4.

# Stabilisation par Backstepping d'un système linéaire d'EDO-EDP-EDO couplées

## Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>83</b>
4.1.1	Notations	84
4.1.2	Représentation du système EDO-EDP-EDO	85
<b>4.2</b>	<b>Synthèse de la commande par backstepping</b>	<b>86</b>
4.2.1	Système cible	87
4.2.2	Transformation Backstepping et loi de commande	92
4.2.3	Propriétés du système en boucle fermée	95
4.2.4	Analyse des termes de la loi de commande	96
<b>4.3</b>	<b>Simulation numérique</b>	<b>98</b>
4.3.1	Discrétisation des équations satisfaites par les noyaux	98
4.3.2	Discrétisation des EDP hyperboliques satisfaites par le système de départ	102
4.3.3	Exemple numérique	103
<b>4.4</b>	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>111</b>

---

## 4.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, une transformation backstepping a été appliquée à un système d'EDP hyperboliques couplées deux à deux afin d'obtenir des conditions suffisantes de stabilité de ce système. La technique backstepping nous a donc servi comme outil d'analyse, en permettant de déplacer les termes de couplage de l'intérieur du domaine vers les conditions aux bords.

Dans le présent chapitre, nous appliquons l'approche de commande par backstepping pour la stabilisation d'un système linéaire d'EDP couplées 2 à 2, de type hyperbolique du premier ordre, couplées à deux EDO linéaires aux extrémités. Cette structure peut apparaître, par exemple, lorsque l'on considère une ligne de transmission de puissance [Magnusson et al., 2000] avec une charge dynamique à un bord et une dynamique d'actionneur à l'autre, ces dynamiques étant de dimension finie. D'autres applications peuvent être trouvées dans le forage de puits de pétrole [Aamo, 2013] et les flux incompressibles [Castillo et al., 2013] quand la dynamique de l'actionneur doit être considérée.

Une complexité de ce travail est de pouvoir gérer les différents couplages présents dans le système et qui peuvent mener à l'instabilité. Nous attirons l'attention qu'en raison des couplages, le système interconnecté peut présenter une instabilité, même si les dynamiques EDO et EDP découplées sont stables. Cet effet est illustré dans [Tang and Mazanti, 2017], où un système d'EDO-EDP hyperboliques est instable mais constitué de sous-systèmes stables.

La méthode de commande par backstepping est choisie vu son efficacité à stabiliser un grand nombre de classes d'EDP. En outre, elle nous permet de construire une loi de commande par retour d'état et simple à implanter. La détermination des gains de la commande nécessite la résolution d'un système d'EDP ayant une complexité similaire au système de départ sans avoir recours à résoudre des équations présentant une complexité supérieure (par exemple des équations de Riccati, LMI...) [Krstic and Smyshlyaev, 2008c].

Nous visons, à travers une commande au bord par backstepping, à éliminer ou modifier les termes déstabilisants qui apparaissent dans tout le domaine, tout en agissant à un bord où règne une dynamique EDO. Cette technique se base sur la construction d'un système cible (stable) et d'une transformation (bornée et inversible) appropriée entre le système de départ et le système cible. Il est intéressant de noter que cette transformation, au moyen de l'opérateur de Volterra, nous permet de restructurer la dépendance entre les états d'une manière triangulaire. Ce fait va pouvoir décaler les termes déstabilisants de l'intérieur du domaine pour enfin les éliminer. L'objectif est que le système en boucle fermée, grâce à la transformation et à la loi de commande conçues, se comporte d'une manière similaire au système cible.

La stabilisation d'un cas général de systèmes d'EDP hyperboliques couplées à une dynamique EDO apparaissant uniquement au niveau de la charge, a été établie dans [Di Meglio et al., 2018]. Nous soulignons le fait que dans ce papier, l'actionnement est directement disponible au bord de l'EDP. La commande synthétisée ne s'applique donc pas à la classe de systèmes que nous traitons. En conséquence, les résultats présentés dans ce chapitre constituent une continuité de ceux obtenus dans [Di Meglio et al., 2018] pour le cas de deux EDP hyperboliques puisque nous considérons une dynamique EDO au niveau de l'actionnement, avec l'hypothèse d'une matrice d'entrée inversible.

Les contributions de ce chapitre sont donc les suivantes :

- une fonction de Lyapunov augmentée par rapport à celle utilisée dans [Di Meglio et al., 2018], servant à prouver la stabilité du système cible,

- une transformation backstepping ayant une structure augmentée par rapport à celle adoptée dans [Di Meglio et al., 2018], où des termes ajoutés permettent d’annuler des couplages non désirés
- une loi de commande en retour d’état qui stabilise exponentiellement le système considéré autour du point d’équilibre nul. L’expression de la loi de commande est une forme explicite en termes de retours d’états EDP et EDO.

Dans ce qui suit, nous présentons les différentes notations utilisées et définissons les espaces fonctionnels associés aux états du système. Nous présentons à nouveau les équations du système considéré et formulons le problème de stabilisation avec les hypothèses faites. Les étapes de la synthèse de la loi de commande stabilisante sont détaillées dans la section 4.2. Le système cible et la transformation backstepping sont conçus avant de conclure sur le comportement du système en boucle fermée. Dans la section 4.3, nous traitons un exemple numérique en simulation. Finalement, les conclusions et les perspectives sont données dans la section 4.4.

### 4.1.1 Notations

Dans ce chapitre, nous adoptons les notations suivantes pour deux domaines triangulaires dans  $\mathbb{R}^2$

$$\mathcal{T}_1 \doteq \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1], y \leq x\} \quad (4.1a)$$

$$\mathcal{T}_2 \doteq \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1], y \geq x\}. \quad (4.1b)$$

En outre, étant donné un ensemble  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ , sa fonction caractéristique sera notée

$$\mathbb{1}_{\{\Omega\}}(x, y) \doteq \begin{cases} 1 & \text{si } (x, y) \in \Omega \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La norme euclidienne d’un vecteur  $\varphi \in \mathbb{R}^k$ ,  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  sera notée  $\|\varphi\|_{\mathbb{R}^k} \doteq (\varphi^\top \varphi)^{1/2}$ . Pour une fonction dans  $L^2([0, 1]; \mathbb{R})$  (ensemble des fonctions carré-intégrables, *c.à d.* dont l’intégrale  $\int_0^1 \varphi^2(\theta) d\theta$  existe), sa norme sera prise dans le sens usuel

$$\|\varphi\|_{L^2([0, 1]; \mathbb{R})} = \left( \int_0^1 \varphi^2(\theta) d\theta \right)^{1/2}.$$

Nous notons par  $C^k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , l’ensemble de fonctions  $k$  fois dérivables et dont la dérivée d’ordre  $k$  est continue. La notation  $\mathbb{I}_k$  représente la matrice identité  $k \times k$ . Et finalement, pour une matrice symétrique  $A \in \mathbb{R}^{k \times k}$ ,  $A \succ 0$  ( $A \prec 0$ , respectivement) indique que  $A$  est définie positive (définie négative, respectivement).

Nous utilisons les deux espaces de Banach suivants munis chacun de leur norme. Nous introduisons l’espace  $\Xi \doteq C^1([0, 1]; \mathbb{R}) \times C^1([0, 1]; \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  qui sera utilisé afin de définir une solution classique du système (voir lemmes 7 et 12).  $\Xi$  est muni de la norme

$$\|\Psi\|_{\Xi} \doteq \max \left\{ \|\Psi_1\|_{C^1([0, 1]; \mathbb{R})}, \|\Psi_2\|_{C^1([0, 1]; \mathbb{R})}, \|\Psi_3\|_{\mathbb{R}^n}, \|\Psi_4\|_{\mathbb{R}^m} \right\} \quad (4.2)$$

pour  $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4) \in \Xi$ , où  $\|\cdot\|_{C^1([0, 1]; \mathbb{R})}$  est la norme usuelle dans  $C^1([0, 1]; \mathbb{R})$

$$\|\varphi\|_{C^1([0, 1]; \mathbb{R})} \doteq \sup_{x \in [0, 1]} |\varphi(x)| + \sup_{x \in [0, 1]} |\varphi'(x)|. \quad (4.3)$$

Nous introduisons également l’espace  $\chi \doteq L^2([0, 1]; \mathbb{R}) \times L^2([0, 1]; \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  muni de la norme

$$\|\Psi\|_{\chi} \doteq \left( \|\Psi_1\|_{L^2([0, 1]; \mathbb{R})}^2 + \|\Psi_2\|_{L^2([0, 1]; \mathbb{R})}^2 + \|\Psi_3\|_{\mathbb{R}^n}^2 + \|\Psi_4\|_{\mathbb{R}^m}^2 \right)^{1/2} \quad (4.4)$$

pour  $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4) \in \chi$ . Cet espace, contenant toutes les composantes du système, est introduit dans le but de définir un sens pour la stabilité du système considéré (voir lemme 8, où une fonction de Lyapunov basée sur la norme  $L^2$  pondérée des états EDP est définie). La stabilité dans la norme de  $\chi$  s'écrit de la manière suivante.

Il existe des constantes réelles  $M > 0$  et  $\omega > 0$  telles que, pour toute condition initiale  $\Psi_0 \in \chi$ , la solution  $\Psi(t)$  du système satisfait

$$\|\Psi(t)\|_{\chi} \leq M e^{-\omega t} \|\Psi_0\|_{\chi}, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (4.5)$$

où  $T$  est un réel positif arbitraire.

#### 4.1.2 Représentation du système EDO-EDP-EDO

Il est question ici de la stabilisation autour du point d'équilibre nul d'une classe de systèmes décrits par des EDO-EDP-EDO couplées. Une représentation schématique de tels systèmes est donnée sur la figure 4.1. Les flèches épaisses représentent le couplage des états des EDP à l'intérieur du domaine, et les flèches fines, le couplage aux bords des EDP. Remarquons que les couplages entre les EDP et les EDO aux deux extrémités sont bidirectionnels, ce qui fait que les commandes conçues dans [Aamo, 2013], [Vazquez et al., 2011] ou [Di Meglio et al., 2018] ne peuvent pas être appliquées.

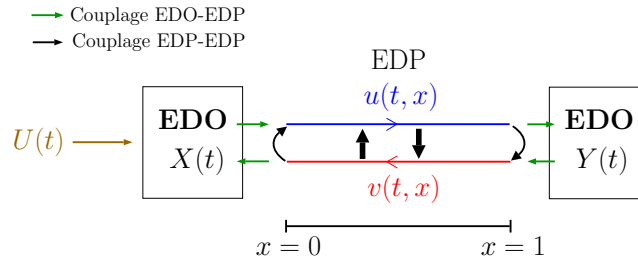


FIGURE 4.1 – Représentation schématique du système EDO-EDP-EDO couplées (4.6).

Plus précisément, nous considérons les systèmes de la forme :

$$u_t(t, x) = -\lambda u_x(t, x) + \sigma^{++} u(t, x) + \sigma^{+-} v(t, x) \quad (4.6a)$$

$$v_t(t, x) = \lambda v_x(t, x) + \sigma^{-+} u(t, x) + \sigma^{--} v(t, x) \quad (4.6b)$$

$$\dot{X}(t) = A_0 X(t) + E_0 v(t, 0) + B_0 U(t) \quad (4.6c)$$

$$\dot{Y}(t) = A_1 Y(t) + E_1 u(t, 1) \quad (4.6d)$$

$$u(t, 0) = qv(t, 0) + C_0 X(t) \quad (4.6e)$$

$$v(t, 1) = \rho u(t, 1) + C_1 Y(t) \quad (4.6f)$$

pour tout  $t \in [0, T]$ , où  $T$  est un réel positif arbitraire, et position  $x \in [0, 1]$ , où  $\lambda > 0$  est la vitesse de transport associée aux deux équations de transport et les constantes réelles  $\sigma^{ij}$ ,  $i, j \in \{+, -\}$ , représentent des couplages à l'intérieur du domaine entre les états des EDP. Les matrices figurant dans (4.6c)-(4.6f) sont réelles et de dimensions appropriées.  $U(t) \in \mathbb{R}^n$  est l'entrée de commande.  $qv(t, 0)$  et  $\rho u(t, 1)$  sont respectivement des termes de réflexion proximale (présent au bord où la commande agit) et distale (présent au bord éloigné de la commande). Les conditions initiales associées sont

$$X(0) \doteq X_0, \quad (4.7a)$$

$$Y(0) \doteq Y_0 \quad (4.7b)$$

appartenant à  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{R}^m$  respectivement et



$$u(0, \cdot) \doteq u_0(\cdot), \quad (4.8a)$$

$$v(0, \cdot) \doteq v_0(\cdot) \quad (4.8b)$$

appartenant à des espaces fonctionnels adaptés. Il est important de noter que le sens donné aux équations (4.6) dépend du type de la solution considérée (faible ou classique), du choix de l'espace fonctionnel pour les états du système et des conditions initiales. Une solution faible (définie presque partout) dans  $L^2([0, 1]; \mathbb{R})$  est cherchée afin de montrer la stabilité du système cible par une fonction de Lyapunov basée sur la norme  $L^2$  pondérée des états EDP. En revanche, dans les autres démarches de ce travail, nous imposons de fortes régularités sur les conditions initiales, et nous cherchons donc des solutions classiques (fortes, définies en tout point) dans  $C^1([0, 1]; \mathbb{R})$  et les conditions initiales (4.7)-(4.8) satisfont potentiellement des conditions de compatibilité adéquates. Les sources potentielles d'instabilité de ce système sont présentées dans le Tableau 4.1.

TABLEAU 4.1 – Sources potentielles d'instabilité du système (4.6)-(4.8).

Termes	Représentation par les coefficients/vecteurs/matrices
Couplage diagonal entre les EDP à l'intérieur du domaine	$\sigma^{++}, \sigma^{--}$
Couplage anti-diagonal entre les EDP à l'intérieur du domaine	$\sigma^{+-}, \sigma^{-+}$
Réflexions aux bords	$\rho, q$
Couplage bidirectionnel entre les EDP et les EDO	$E_0, C_0, E_1, C_1$
Dynamiques EDO	$A_0, A_1$

En outre, les hypothèses suivantes sont faites :

**Hypothèse 1.**  $B_0$  est inversible (ce qui implique en particulier que la paire  $(A_0, B_0)$  est commandable).

**Hypothèse 2.**  $\text{rang}(C_0) \geq 1$ .

**Hypothèse 3.**  $\rho \neq 0$ .

**Hypothèse 4.** La paire  $(A_1, E_1)$  est stabilisable (i.e. il existe  $F_1 \in \mathbb{R}^{1 \times m}$  tel que la matrice  $A_1 + E_1 F_1$  est Hurwitz).

Dans ce chapitre, nous faisons le choix d'une matrice d'entrée inversible (hypothèse 1). Nous signalons que si l'hypothèse 2 n'est pas satisfaite, la commande  $U(t)$  sera découplée des états EDP et de l'état EDO en  $Y$ , et n'aura donc pas d'effet de stabilisation. L'hypothèse 3 est essentielle afin de garantir l'existence des noyaux de la transformation backstepping introduite dans la section 4.2.2. Les équations de ces noyaux sont décrites dans le lemme 10. Finalement, l'hypothèse 4 est une condition nécessaire pour pouvoir stabiliser la dynamique en  $Y$ . La section suivante présente la synthèse de la commande par backstepping.

## 4.2 Synthèse de la commande par backstepping

Dans cette section, nous synthétisons une loi de commande qui stabilise le système (4.6)-(4.8) autour du point d'équilibre nul par la méthode de backstepping. Les structures du système cible et de la transformation sont décrites dans les sections 4.2.1 et 4.2.2 respectivement. Nous montrons leurs propriétés essentielles qui seront utilisées dans la section 4.2.3 pour exposer les résultats sur le système de départ en boucle fermée. Les termes de la loi de commande sont ensuite analysés dans la section 4.2.4.

### 4.2.1 Système cible

Nous construisons un système cible qui possède des propriétés intéressantes, notamment vis-à-vis du caractère bien-posé (*i.e.* existence d'une solution unique) et de la stabilité exponentielle. Pour cela, il faut tout d'abord identifier les termes du système de départ (4.6)-(4.8) qui conduisent possiblement à l'instabilité. Ces termes sont ensuite éliminés à travers une transformation backstepping et une loi de commande appropriées. L'analyse du système cible et les propriétés de la transformation backstepping conçue dans la section 4.2.2 permettent de conclure sur le comportement du système de départ en boucle fermée. L'enjeu est de pouvoir choisir simultanément une dynamique cible et la transformation convenables. Nous exposons dans cette section ce système cible ainsi que ces propriétés. La forme choisie est la suivante

$$\alpha_t(t, x) = -\lambda\alpha_x(t, x) + \sigma^{++}\alpha(t, x) \quad (4.9a)$$

$$\beta_t(t, x) = \lambda\beta_x(t, x) + \sigma^{--}\beta(t, x) \quad (4.9b)$$

$$\dot{\xi}(t) = (A_0 + B_0F_0)\xi(t) \quad (4.9c)$$

$$\dot{\eta}(t) = (A_1 + E_1F_1)\eta(t) + E_1\alpha(t, 1) \quad (4.9d)$$

$$\alpha(t, 0) = C_0\xi(t) \quad (4.9e)$$

$$\beta(t, 1) = \rho\alpha(t, 1) + C_1\eta(t), \quad (4.9f)$$

où  $F_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $F_1 \in \mathbb{R}^{1 \times m}$  sont choisis de sorte à obtenir des matrices  $(A_0 + B_0F_0)$  et  $(A_1 + E_1F_1)$  Hurwitz. Les conditions initiales des états  $\xi$  et  $\eta$  sont

$$\xi(0) \doteq \xi_0, \quad (4.10a)$$

$$\eta(0) \doteq \eta_0 \quad (4.10b)$$

appartenant à  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{R}^m$  respectivement. Les conditions initiales des états  $\alpha$  et  $\beta$  sont

$$\alpha(0, \cdot) \doteq \alpha_0(\cdot) \quad (4.11a)$$

$$\beta(0, \cdot) \doteq \beta_0(\cdot). \quad (4.11b)$$

Une représentation schématique du système cible (4.9)-(4.11) est donnée sur la figure 4.2.

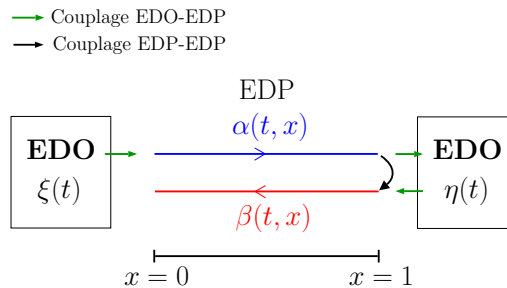


FIGURE 4.2 – Représentation schématique du système cible (4.9).

Remarquons que dans ce système, différents couplages n'apparaissent plus. Ces couplages sont essentiellement : la réflexion proximale (au bord  $x = 0$ ) entre les EDP, le couplage à l'intérieur du domaine entre les EDP et la dépendance de la dynamique ODE en  $X$  de l'état EDP en  $v$ . Cette structure particulière demeure ainsi une cascade à un bord et un couplage bidirectionnel à un autre. De plus, des termes agissant sur la dynamique des états  $X$  et  $Y$  sont ajoutés ( $B_0F_0$  et  $E_1F_1$  respectivement).

L'élimination des termes de couplage anti-diagonaux est assurée grâce à l'opérateur de Volterra de la transformation backstepping introduite dans la section 4.2.2 (voir équation (4.33)). Nous observons en conséquence une dépendance triangulaire entre les états EDP.

Pour clarifier notre idée, la valeur de  $\alpha(t, x)$  dépend uniquement de  $\alpha(t, \bar{x})$  pour  $0 \leq \bar{x} \leq x$  et de  $\xi(t)$ . Par contre, la valeur de  $\beta(t, x)$  dépend de la valeur de  $\beta$  à l'instant  $t$  et aux points  $\bar{x}$  tels que  $x \leq \bar{x} \leq 1$ , de  $\alpha(t, 1)$  et de  $\eta(t)$ .

Nous présentons maintenant les résultats sur les propriétés de ce système. Le lemme 7 porte sur son caractère bien-posé en partant d'une condition initiale dans l'espace  $\Xi$  et le lemme 8 sur sa stabilité exponentielle. La preuve du Lemme 7 est donnée dans l'annexe H.1. Nous notons par le symbole  $'$  la dérivation par rapport à  $x$ .

**Lemme 7.** *Étant donné une condition initiale  $(\alpha_0(\cdot), \beta_0(\cdot), \xi_0, \eta_0) \in \Xi$  vérifiant les conditions de compatibilité*

$$\alpha_0(0) = C_0 \xi_0 \quad (4.12a)$$

$$\beta_0(1) = \rho \alpha_0(1) + C_1 \eta_0 \quad (4.12b)$$

$$\alpha'_0(0) = \frac{\sigma^{++}}{\lambda} \alpha_0(0) - \frac{1}{\lambda} C_0 (A_0 + B_0 F_0) \xi_0 \quad (4.12c)$$

$$\begin{aligned} \beta'_0(1) = & -\frac{\sigma^{--}}{\lambda} \beta_0(1) + \frac{1}{\lambda} (\sigma^{++} \rho + C_1 E_1) \alpha_0(1) \\ & - \rho \alpha'_0(1) + \frac{1}{\lambda} C_1 (A_1 + E_1 F_1) \eta_0, \end{aligned} \quad (4.12d)$$

le système (4.9)-(4.11) admet une solution unique (classique)

$$(\alpha(t, \cdot), \beta(t, \cdot), \xi(t), \eta(t)) \in \Xi$$

pour tout  $t \in [0, T]$ , satisfaisant  $\xi(\cdot) \in C^\infty([0, T]; \mathbb{R}^n)$ ,  $\eta(\cdot) \in C^2([0, T]; \mathbb{R}^m)$ ,  $\alpha(\cdot, \cdot)$ ,  $\beta(\cdot, \cdot) \in C^1([0, T] \times [0, 1]; \mathbb{R})$ .

La preuve de ce lemme se base sur la résolution du système cible (4.9)-(4.11) par la méthode des caractéristiques (voir annexe H.1). La finalité des conditions de compatibilité (4.12) est de tisser un lien entre les conditions initiales (4.11) et les conditions aux bords (4.9e)-(4.9f) à  $t = 0$  du système cible. Ces conditions sont exigées, comme montré dans la preuve du lemme 7 (voir annexe H.1), afin de garantir la régularité de la solution. En d'autres termes, ces conditions assurent la continuité de  $\alpha(t, x)$ ,  $\alpha_t(t, x)$ ,  $\beta(t, x)$  et  $\beta_t(t, x)$ . Constatons de même que les EDP hyperboliques n'ont pas naturellement un effet régularisant. En conséquence, la dépendance de la solution sur les conditions initiales impose que celles-ci soient dans l'espace  $\Xi$  afin que la solution possède la régularité demandée. La régularité  $C^\infty$  obtenue pour  $\xi$  est justifiée par la structure en cascade au bord en  $x = 0$ , résultat de l'élimination d'un terme de couplage ( $E_0 v(t, 0)$ ). Ceci entraîne que la dynamique de l'état  $\xi$  ne dépend pas des états EDP ni de  $\eta$ . La régularité  $C^2$  pour  $\eta$  est déduite de l'expression de la solution  $\eta(t)$  dans (4.28b), étant donné que  $\alpha(\cdot, \cdot) \in C^1([0, T] \times [0, 1]; \mathbb{R})$ .

Nous présentons maintenant l'étude de stabilité du système cible. Sa stabilité dans la norme de  $\chi$  dans le sens de (4.5) sera d'abord montrée dans le lemme 8, en partant d'une condition initiale  $\Psi_0 = (\alpha_0(\cdot), \beta_0(\cdot), \xi_0, \eta_0) \in \chi$ . Cette démarche constitue une base technique et une méthode conventionnelle pour la preuve de stabilité. De plus, elle présente une propriété intéressante du système cible et permet de dévoiler son comportement quand une solution faible de ce système est cherchée.

Néanmoins, puisque nous exigeons dans ce travail une solution forte du système de départ

(4.6)-(4.8), nous repartons d'une condition initiale des EDP avec une régularité  $C^1$ . Nous poursuivons en conséquence notre démarche en exhibant la stabilité du système cible dans la norme de  $\Xi$  si ses conditions initiales sont dans  $\Xi$  et satisfont les conditions de compatibilité (4.12). Nous nous basons sur l'expression de la solution de ce système, établie dans le Lemme 7. Remarquons que si les conditions initiales du système cible sont dans  $\Xi$ , la stabilité dans norme de  $\chi$  (dans le sens de (4.5)) est toujours obtenue puisque  $\Xi \subset \chi$ .

**Lemme 8.** *Étant donné une condition initiale  $\Psi_0 = (\alpha_0(\cdot), \beta_0(\cdot), \xi_0, \eta_0) \in \chi$ , le point d'équilibre nul (origine) du système (4.9)-(4.11) est exponentiellement stable dans le sens de (4.5).*

*Démonstration.* La preuve de ce lemme s'appuie sur une fonction de Lyapunov appropriée. Cette dernière prend une expression augmentée par rapport à la fonction utilisée dans [Di Meglio et al., 2018], où un système EDP-EDO couplé a été stabilisé. Le terme additionnel dans la nouvelle fonction de Lyapunov correspond à la norme de l'état EDO ajouté au niveau de la commande. Nous utilisons la notation  $\Psi(t) = (\alpha(t, \cdot), \beta(t, \cdot), \xi(t), \eta(t))$  pour indiquer la solution de (4.9)-(4.11), et cherchons les constantes positives  $M$  et  $\omega$  telles que (4.5) est vraie. Nous utilisons également les notations  $\bar{A}_0 \doteq A_0 + B_0 F_0$  et  $\bar{A}_1 \doteq A_1 + E_1 F_1$  (Hurwitz). Nous considérons la fonction de Lyapunov suivante

$$V(t) = V_1(t) + V_2(t) + V_3(t) + V_4(t) \quad (4.13)$$

où

$$V_1(t) = \frac{\epsilon}{\lambda} \int_0^1 e^{-\delta x} \alpha^2(t, x) dx \quad (4.14a)$$

$$V_2(t) = \frac{1}{\lambda} \int_0^1 e^{\delta x} \beta^2(t, x) dx \quad (4.14b)$$

$$V_3(t) = \xi(t)^\top \Pi_0 \xi(t) \quad (4.14c)$$

$$V_4(t) = \eta(t)^\top \Pi_1 \eta(t). \quad (4.14d)$$

Les paramètres de décision  $\epsilon > 0$ ,  $\delta > 0$  et les matrices symétriques définies positives  $\Pi_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $\Pi_1 \in \mathbb{R}^{m \times m}$  sont à déterminer. Soient

$$\kappa_1 \doteq \min \left\{ \frac{\epsilon}{\lambda} e^{-\delta}, \frac{1}{\lambda}, \lambda_{\min}(\Pi_0), \lambda_{\min}(\Pi_1) \right\} \quad (4.15a)$$

$$\kappa_2 \doteq \max \left\{ \frac{\epsilon}{\lambda}, \frac{e^\delta}{\lambda}, \lambda_{\max}(\Pi_0), \lambda_{\max}(\Pi_1) \right\}. \quad (4.15b)$$

$V(t)$  peut être majorée en termes de la norme du système cible dans  $\chi$  comme suit

$$\kappa_1 \|\Psi(t)\|_\chi^2 \leq V(t) \leq \kappa_2 \|\Psi(t)\|_\chi^2, \quad \forall t \geq 0. \quad (4.16)$$

Nous dérivons chaque terme de  $V(t)$  le long de la solution (classique) de (4.9)

$$\dot{V}_1(t) = 2 \frac{\epsilon}{\lambda} \int_0^1 e^{-\delta x} \alpha(t, x) \left[ -\lambda \alpha_x(t, x) + \sigma^{++} \alpha(t, x) \right] dx \quad (4.17a)$$

$$\dot{V}_2(t) = \frac{2}{\lambda} \int_0^1 e^{\delta x} \beta(t, x) \left[ \lambda \beta_x(t, x) + \sigma^{--} \beta(t, x) \right] dx \quad (4.17b)$$

$$\dot{V}_3(t) = \xi(t)^\top \left[ \bar{A}_0^\top \Pi_0 + \Pi_0 \bar{A}_0 \right] \xi(t) \quad (4.17c)$$

$$\dot{V}_4(t) = \eta(t)^\top \left[ \bar{A}_1^\top \Pi_1 + \Pi_1 \bar{A}_1 \right] \eta(t) + 2\alpha(t, 1) E_1^\top \Pi_1 \eta(t) \quad (4.17d)$$

En intégrant (4.17a) par parties et en utilisant (4.9a) et (4.9e), nous avons que

$$\begin{aligned}\dot{V}_1(t) &= -\epsilon \left[ e^{-\delta x} \alpha^2(t, x) \right]_{x=0}^{x=1} - \delta \epsilon \int_0^1 e^{-\delta x} \alpha^2(t, x) dx + 2 \frac{\epsilon \sigma^{++}}{\lambda} \int_0^1 e^{-\delta x} \alpha^2(t, x) dx \\ &= -\epsilon e^{-\delta} \alpha^2(t, 1) + \epsilon \xi(t)^\top C_0^\top C_0 \xi(t) - \epsilon \left( \delta - 2 \frac{\sigma^{++}}{\lambda} \right) \int_0^1 e^{-\delta x} \alpha^2(t, x) dx.\end{aligned}\quad (4.18)$$

D'une manière similaire, en intégrant (4.17b) par parties et en utilisant (4.9b) et (4.9f), nous obtenons

$$\begin{aligned}\dot{V}_2(t) &= \left[ e^{\delta x} \beta^2(t, x) \right]_{x=0}^{x=1} - \delta \int_0^1 e^{\delta x} \beta^2(t, x) dx + 2 \frac{\sigma^{--}}{\lambda} \int_0^1 e^{\delta x} \beta^2(t, x) dx \\ &\leq 2e^\delta \rho^2 \alpha^2(t, 1) + 2e^\delta \eta(t)^\top C_1^\top C_1 \eta(t) - \left( \delta - 2 \frac{\sigma^{--}}{\lambda} \right) \int_0^1 e^{\delta x} \beta^2(t, x) dx.\end{aligned}\quad (4.19)$$

Appliquons l'inégalité de Young au terme  $2\alpha(t, 1)E_1^\top \Pi_1 \eta(t)$  dans (4.17d)

$$\dot{V}_4(t) \leq \eta(t)^\top \left[ \bar{A}_1^\top \Pi_1 + \Pi_1 \bar{A}_1 \right] \eta(t) + E_1^\top \Pi_1^2 E_1 \alpha^2(t, 1) + \eta(t)^\top \eta(t).\quad (4.20)$$

Dérivons (4.13) et utilisons (4.17c), (4.18)-(4.20)

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) &\leq -\epsilon \left( \delta - 2 \frac{\sigma^{++}}{\lambda} \right) \int_0^1 e^{-\delta x} \alpha^2(t, x) dx - \left( \delta - 2 \frac{\sigma^{--}}{\lambda} \right) \int_0^1 e^{\delta x} \beta^2(t, x) dx \\ &\quad - \left[ \epsilon e^{-\delta} - 2e^\delta \rho^2 - E_1^\top \Pi_1^2 E_1 \right] \alpha^2(t, 1) + \xi(t)^\top \left[ \bar{A}_0^\top \Pi_0 + \Pi_0 \bar{A}_0 + \epsilon C_0^\top C_0 \right] \xi(t) \\ &\quad + \eta(t)^\top \left[ \bar{A}_1^\top \Pi_1 + \Pi_1 \bar{A}_1 + 2e^\delta C_1^\top C_1 + \mathbb{I}_m \right] \eta(t).\end{aligned}\quad (4.21)$$

Les paramètres de décision  $\delta$ ,  $\Pi_1$ ,  $\epsilon$  et  $\Pi_0$  sont choisis de sorte que les inégalités suivantes soient vérifiées

$$\delta > \frac{2}{\lambda} \max\{\sigma^{++}, \sigma^{--}\} \quad (4.22a)$$

$$\bar{A}_1^\top \Pi_1 + \Pi_1 \bar{A}_1 + 2e^\delta C_1^\top C_1 + \mathbb{I}_m \prec 0 \quad (4.22b)$$

$$\epsilon > 2e^{2\delta} \rho^2 + e^\delta E_1^\top \Pi_1^2 E_1 \quad (4.22c)$$

$$\bar{A}_0^\top \Pi_0 + \Pi_0 \bar{A}_0 + \epsilon C_0^\top C_0 \prec 0. \quad (4.22d)$$

Remarquons qu'une solution pour (4.22b) et (4.22d) peut être trouvée selon [Kailath, 1980, Théorème 2.6-1]. En adoptant

$$\omega = \frac{1}{2} \min \left\{ \lambda \delta - 2\sigma^{++}, \lambda \delta - 2\sigma^{--}, -\frac{\lambda_{\max} \left( \bar{A}_0^\top \Pi_0 + \Pi_0 \bar{A}_0 + \epsilon C_0^\top C_0 \right)}{\lambda_{\max}(\Pi_0)}, -\frac{\lambda_{\max} \left( \bar{A}_1^\top \Pi_1 + \Pi_1 \bar{A}_1 + \Pi_1 + 2e^\delta C_1^\top C_1 \right)}{\lambda_{\max}(\Pi_1)} \right\} \quad (4.23)$$

nous obtenons

$$\dot{V}(t) \leq -2\omega V(t).\quad (4.24)$$

Finalement, en intégrant (4.24),  $V(t)$  s'écrit

$$V(t) \leq e^{-2\omega t} V(0), \quad (4.25)$$

et en utilisant (4.16), nous aboutissons à

$$\kappa_1 \|\Psi(t)\|_\chi^2 \leq V(t) \leq e^{-2\omega t} \kappa_2 \|\Psi(0)\|_\chi^2, \quad (4.26)$$

ou, d'une manière équivalente

$$\|\Psi(t)\|_\chi \leq \left( \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \right)^{1/2} e^{-\omega t} \|\Psi(0)\|_\chi, \quad \forall t \geq 0. \quad (4.27)$$

□

La stabilité exponentielle du point d'équilibre du système cible (4.9)-(4.11) pour la norme dans  $\chi$  est démontrée grâce à la fonction de Lyapunov (4.13). En outre, en partant d'une condition initiale dans  $\Xi$ , sa stabilité dans la norme  $C^1$  est déduite en examinant les expressions de la solution de ce système, établies dans la preuve du Lemme 7 de l'annexe H.1. Prenons les expressions de  $\xi(t)$  et de  $\eta(t)$  dans (H.1), avec les notations  $\Omega_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$  qui représentent des régions du cadre spatio-temporel et définis dans l'annexe H.1

$$\xi(t) = e^{\bar{A}_0 t} \xi_0, \quad (4.28a)$$

$$\eta(t) = e^{\bar{A}_1 t} \eta_0 + \int_0^t e^{\bar{A}_1(t-\tau)} E_1 \alpha(\tau, 1) d\tau, \quad (4.28b)$$

de  $\alpha(t, x)$  et de  $\alpha_t(t, x)$  dans (H.9) et (H.10)

$$\alpha(t, x) = e^{\sigma^{++} t} \alpha_0(x - \lambda t) \mathbf{1}_{\Omega_1}(t, x) + e^{\sigma^{++} \frac{x}{\lambda}} C_0 e^{\bar{A}_0(t-\frac{x}{\lambda})} \xi_0 \mathbf{1}_{\Omega_2}(t, x), \quad (4.29)$$

$$\alpha_t(t, x) = e^{\sigma^{++} t} \left( \sigma^{++} \alpha_0(x - \lambda t) - \lambda \alpha_0'(x - \lambda t) \right) \mathbf{1}_{\Omega_1}(t, x) + e^{\sigma^{++} \frac{x}{\lambda}} C_0 \bar{A}_0 e^{\bar{A}_0(t-\frac{x}{\lambda})} \xi_0 \mathbf{1}_{\Omega_2}(t, x), \quad (4.30)$$

et de  $\beta(t, x)$  et  $\beta_t(t, x)$  dans (H.16) et (H.17) respectivement.

$$\begin{aligned} \beta(t, x) &= e^{\sigma^{--} t} \beta_0(x + \lambda t) \mathbf{1}_{\Omega_3}(t, x) \\ &+ e^{\sigma^{--} \frac{1-x}{\lambda}} C_1 e^{\bar{A}_1(t-\frac{1-x}{\lambda})} \eta_0 \mathbf{1}_{\Omega_4 \cup \Omega_5}(t, x) + \left[ \rho e^{\sigma^{--} \frac{1-x}{\lambda}} e^{\sigma^{++}(t-\frac{1-x}{\lambda})} \alpha_0(2 - \lambda t - x) \right. \\ &\quad \left. + e^{\sigma^{--} \frac{1-x}{\lambda}} C_1 \int_0^{t-\frac{1-x}{\lambda}} e^{\bar{A}_1(t-\frac{1-x}{\lambda}-\tau)} E_1 e^{\sigma^{++} \tau} \alpha_0(1 - \lambda \tau) d\tau \right] \mathbf{1}_{\Omega_4}(t, x) \\ &+ \left[ \rho e^{\sigma^{--} \frac{1-x}{\lambda}} e^{\frac{\sigma^{++}}{\lambda}} C_0 e^{\bar{A}_0(t-\frac{2-x}{\lambda})} \xi_0 \right. \\ &\quad \left. + e^{\sigma^{--} \frac{1-x}{\lambda}} C_1 \int_0^{\frac{1}{\lambda}} e^{\bar{A}_1(t-\frac{1-x}{\lambda}-\tau)} E_1 e^{\sigma^{++} \tau} \alpha_0(1 - \lambda \tau) d\tau \right. \\ &\quad \left. + e^{\sigma^{--} \frac{1-x}{\lambda}} e^{\frac{\sigma^{++}}{\lambda}} C_1 \int_{\frac{1}{\lambda}}^{t-\frac{1-x}{\lambda}} e^{\bar{A}_1(t-\frac{1-x}{\lambda}-\tau)} E_1 C_0 e^{\bar{A}_0(\tau-\frac{1}{\lambda})} \xi_0 d\tau \right] \mathbf{1}_{\Omega_5}(t, x), \end{aligned} \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned}
\beta_t(t, x) &= e^{\sigma^{--}t} (\sigma^{--}\beta_0(x + \lambda t) + \lambda\beta'_0(x + \lambda t)) \mathbb{1}_{\Omega_3}(t, x) \\
&+ e^{\sigma^{--}\frac{1-x}{\lambda}} C_1 \bar{A}_1 e^{\bar{A}_1(t-\frac{1-x}{\lambda})} \eta_0 \mathbb{1}_{\Omega_4 \cup \Omega_5}(t, x) \\
&+ \left[ e^{\sigma^{--}\frac{1-x}{\lambda}} e^{\sigma^{++}(t-\frac{1-x}{\lambda})} \left[ (\rho\sigma^{++} + C_1 E_1) \alpha_0(2 - \lambda t - x) - \rho\lambda\alpha'_0(2 - \lambda t - x) \right] \right. \\
&\quad \left. + e^{\sigma^{--}\frac{1-x}{\lambda}} C_1 \bar{A}_1 \int_0^{t-\frac{1-x}{\lambda}} e^{\bar{A}_1(t-\frac{1-x}{\lambda}-\tau)} E_1 e^{\sigma^{++}\tau} \alpha_0(1 - \lambda\tau) d\tau \right. \\
&\quad \left. + e^{\sigma^{--}\frac{1-x}{\lambda}} C_1 \bar{A}_1 e^{\bar{A}_1(t-\frac{1-x}{\lambda})} \eta_0 \right] \mathbb{1}_{\Omega_4}(t, x) \\
&+ \left[ e^{\sigma^{--}\frac{1-x}{\lambda}} e^{\frac{\sigma^{++}}{\lambda}} \left( \rho C_0 \bar{A}_0 + C_1 E_1 C_0 \right) e^{\bar{A}_0(t-\frac{2-x}{\lambda})} \xi_0 \right. \\
&\quad \left. + e^{\sigma^{--}\frac{1-x}{\lambda}} C_1 \bar{A}_1 \int_0^{\frac{1}{\lambda}} e^{\bar{A}_1(t-\frac{1-x}{\lambda}-\tau)} E_1 e^{\sigma^{++}\tau} \alpha_0(1 - \lambda\tau) d\tau \right. \\
&\quad \left. + e^{\sigma^{--}\frac{1-x}{\lambda}} e^{\frac{\sigma^{++}}{\lambda}} C_1 \bar{A}_1 \int_{\frac{1}{\lambda}}^{t-\frac{1-x}{\lambda}} e^{\bar{A}_1(t-\frac{1-x}{\lambda}-\tau)} E_1 C_0 e^{\bar{A}_0(\tau-\frac{1}{\lambda})} \xi_0 d\tau \right] \mathbb{1}_{\Omega_5}(t, x).
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Ayant la matrice  $\bar{A}_0$  Hurwitz, nous déduisons la stabilité exponentielle du point d'équilibre de  $\xi$ , satisfaisant (4.28a), pour la norme dans  $C^1([0, T]; \mathbb{R})$ . De (4.29) et (4.30),  $\alpha(\cdot, \cdot)$  est exponentiellement stable pour la norme dans  $C^1([0, T] \times [0, 1]; \mathbb{R})$ . La stabilité exponentielle de  $\beta(\cdot, \cdot)$  dans cette même norme est obtenue de (4.31) et (4.32) puisque  $\bar{A}_1$  est Hurwitz. Finalement, l'état  $\eta$ , satisfaisant (4.28b) est exponentiellement stable pour la norme dans  $C^1([0, T]; \mathbb{R})$ . Ceci implique que le système cible (4.9)-(4.11) est exponentiellement stable dans la norme de  $\Xi$ . La vitesse de convergence dépend des valeurs propres maximales de  $\bar{A}_0$  et  $\bar{A}_1$ .

Les conditions d'un système cible bien-posé et de sa stabilité exponentielle étant posées, nous enchaînons maintenant avec la transformation backstepping employée, présentons ses propriétés et donnons l'expression de la loi de commande.

## 4.2.2 Transformation Backstepping et loi de commande

Le but de cette section est de présenter la transformation backstepping qui nous mène, avec la loi de commande synthétisée, du système de départ (4.6)-(4.8) au système cible (4.9)-(4.11), ainsi que de dévoiler ses propriétés. Nous cherchons une structure linéaire qui assure sa bornitude et son inversibilité, tout en veillant sur l'existence unique de ses noyaux. Cette structure va également servir à déplacer certains termes non désirés (comme le couplage anti-diagonal à l'intérieur du domaine) à un bord où la commande va pouvoir les éliminer ou contrôler leurs effets [Krstic and Smyshlyaev, 2008c]. Nous proposons la transformation backstepping suivante

$$\alpha(t, x) = u(t, x) - \int_x^1 P^{uu}(x, y) u(t, y) dy - \int_x^1 P^{uv}(x, y) v(t, y) dy - g(x) Y(t) \tag{4.33a}$$

$$\beta(t, x) = v(t, x) - \int_x^1 P^{vu}(x, y) u(t, y) dy - \int_x^1 P^{vv}(x, y) v(t, y) dy - w(x) Y(t) \tag{4.33b}$$

$$\xi(t) = X(t) - DY(t) - R_0 v(t, 0) - \int_0^1 p_1(y) u(t, y) dy - \int_0^1 p_2(y) v(t, y) dy \tag{4.33c}$$

$$\eta(t) = Y(t). \tag{4.33d}$$

La structure de (4.33) est essentiellement basée sur des transformations de Volterra et de Fredholm. Nous souhaitons attirer l'attention que la transformation (4.33b) possède une

structure similaire à celle employée dans [Di Meglio et al., 2018]. Cependant, en raison de l'ajout d'une dynamique EDO à un bord dans notre système, les transformations (4.33a) et (4.33c) possèdent des expressions augmentées. Les termes ajoutés notamment dans (4.33c) nécessitent une étude sur la bornitude et l'inversibilité de la transformation. Ces deux propriétés sont abordées dans le lemme 9 où nous travaillons dans les classes  $C^1(\mathcal{T}_2; \mathbb{R})$  et  $C^1([0, 1]; \mathbb{R}^m)$ . Dans le lemme 10, nous exposons les équations satisfaites par les noyaux et les coefficients de la transformation ainsi que l'expression de la commande. Les noyaux vérifient des EDP hyperboliques couplées à des EDO, et les coefficients satisfont des équations algébriques. Nous montrons le caractère bien-posé des EDP-EDO couplées ainsi obtenues dans le lemme 11. Les preuves de ces lemmes sont données dans l'annexe H (H.2, H.3 et H.4 respectivement).

**Lemme 9.** *Étant donné  $P^{ij} \in C^1(\mathcal{T}_2; \mathbb{R})$ ,  $i, j \in \{u, v\}$ ,  $g, w \in C^1([0, 1]; \mathbb{R}^m)$  et  $p_1, p_2 \in C^1([0, 1]; \mathbb{R}^n)$ , la transformation définie par (4.33) est un opérateur linéaire borné de  $\Xi$  dans  $\Xi$ . De plus, il admet un inverse borné dans  $\Xi$ .*

En vue de démontrer la bornitude de (4.33), nous majorons les normes des variables obtenues après application de cette transformation en fonction des normes des variables initiales (voir annexe H.2). L'inversibilité de cette transformation est prouvée en cherchant une transformation inverse et en démontrant l'existence et l'unicité de ses noyaux. Toutefois, dans le lemme 9, nous avons fait une hypothèse sur la régularité des noyaux  $P^{ij}$  et les coefficients  $g$  et  $w$ . Leur régularité, ainsi que leur existence unique, dépendent en fait des équations satisfaites par ces noyaux. Ces équations servent également à l'implantation de la commande, puisque son expression dépend de ces noyaux et de ces coefficients. Nous établissons ces équations dans le lemme 10, tandis que la régularité exigée est obtenue dans la preuve du lemme 11.

**Lemme 10.** *Une condition suffisante pour que la transformation backstepping (4.33) transforme (d'une manière inversible) une solution classique du système (4.6)-(4.8) en une solution correspondante du système (4.9)-(4.11) est que les noyaux  $P^{ij}$ ,  $i, j \in \{u, v\}$ ,  $p_1, p_2$ , les coefficients  $g, w, D$  et  $R_0$ , et l'entrée de commande  $U(t)$  satisfassent les conditions de régularité du lemme 9 ainsi que les équations suivantes dans le domaine triangulaire  $\mathcal{T}_2$*

$$P_x^{uu}(x, y) + P_y^{uu}(x, y) = -\frac{\sigma^{-+}}{\lambda} P^{uv}(x, y) \quad (4.34a)$$

$$P_x^{uv}(x, y) - P_y^{uv}(x, y) = \frac{\sigma^{++} - \sigma^{--}}{\lambda} P^{uv}(x, y) - \frac{\sigma^{+-}}{\lambda} P^{uu}(x, y) \quad (4.34b)$$

$$P_x^{vu}(x, y) - P_y^{vu}(x, y) = \frac{\sigma^{++} - \sigma^{--}}{\lambda} P^{vu}(x, y) + \frac{\sigma^{-+}}{\lambda} P^{vv}(x, y) \quad (4.34c)$$

$$P_x^{vv}(x, y) + P_y^{vv}(x, y) = \frac{\sigma^{+-}}{\lambda} P^{vu}(x, y) \quad (4.34d)$$

$$g'(x) = \frac{1}{\lambda} g(x) [\sigma^{++} \mathbb{I}_m - A_1] - P^{uv}(x, 1) C_1 \quad (4.34e)$$

$$w'(x) = \frac{1}{\lambda} w(x) [-\sigma^{--} \mathbb{I}_m + A_1] + P^{vv}(x, 1) C_1, \quad (4.34f)$$

avec les conditions aux bords



$$P^{uu}(x, 1) = P^{uv}(x, 1)\rho + \frac{1}{\lambda}g(x)E_1 \quad (4.35a)$$

$$P^{uv}(x, x) = -\frac{\sigma^{+-}}{2\lambda} \quad (4.35b)$$

$$P^{vu}(x, x) = \frac{\sigma^{-+}}{2\lambda} \quad (4.35c)$$

$$P^{vv}(x, 1) = \frac{1}{\rho}P^{vu}(x, 1) - \frac{1}{\lambda\rho}w(x)E_1 \quad (4.35d)$$

$$g(1) = F_1 \quad (4.35e)$$

$$w(1) = \rho F_1 \quad (4.35f)$$

et les conditions algébriques

$$C_0D = g(0) \quad (4.36a)$$

$$C_0R_0 = -q \quad (4.36b)$$

$$C_0p_1(y) = P^{uu}(0, y) \quad (4.36c)$$

$$C_0p_2(y) = P^{uv}(0, y). \quad (4.36d)$$

La loi de commande s'exprime

$$U(t) = k_1v(t, 0) + k_2v_t(t, 0) + k_3u(t, 1) + k_4X(t) + k_5Y(t) + \int_0^1 k_6(y)u(t, y)dy + \int_0^1 k_7(y)v(t, y)dy, \quad (4.37)$$

où

$$k_1 \doteq B_0^{-1}(\lambda qp_1(0) - \lambda p_2(0) - (A_0 + B_0F_0)R_0 - E_0) \quad (4.38a)$$

$$k_2 \doteq B_0^{-1}R_0 \quad (4.38b)$$

$$k_3 \doteq B_0^{-1}(DE_1 - \lambda p_1(1) + \lambda \rho p_2(1)) \quad (4.38c)$$

$$k_4 \doteq F_0 + \lambda B_0^{-1}p_1(0)C_0 \quad (4.38d)$$

$$k_5 \doteq B_0^{-1}(DA_1 - (A_0 + B_0F_0)D + \lambda p_2(1)C_1) \quad (4.38e)$$

$$k_6(y) \doteq B_0^{-1}(\lambda p_1'(y) + (\sigma^{++}\mathbb{I}_n - A_0 - B_0F_0)p_1(y) + \sigma^{-+}p_2(y)) \quad (4.38f)$$

$$k_7(y) \doteq B_0^{-1}(-\lambda p_2'(y) + (\sigma^{--}\mathbb{I}_n - A_0 - B_0F_0)p_2(y) + \sigma^{+-}p_1(y)). \quad (4.38g)$$

Nous adoptons une procédure standard de backstepping décrite dans [Krstic and Smyshlyaev, 2008c]. Nous dérivons ainsi (4.33) par rapport au temps et à l'espace, effectuons des intégrations par parties et substituons enfin dans le système cible (4.9)-(4.11) (voir annexe H.3). La structure linéaire des EDP des noyaux rend son implantation simple (section 4.3.1). En revanche, étant donné le couplage au bord de ces EDP avec des dynamiques EDO, il s'avère indispensable de démontrer l'existence, l'unicité et la régularité de leur solution. Ce point est l'objet du lemme 11.

**Lemme 11.** *Les équations (4.34)-(4.35) admettent une solution unique vérifiant les conditions du lemme 9.*

La preuve de ce lemme s'appuie sur [Di Meglio et al., 2018, Théorème 3.2] (avec une adaptation à la classe  $C^0(\mathcal{T}_2; \mathbb{R})$ ), où le caractère bien-posé d'un système d'EDP hyperboliques couplées à des dynamiques EDO a été démontré. L'énoncé de ce théorème est présenté dans l'annexe H.4. Les équations (4.34) sont réécrites sous la forme abordée

dans ce théorème après un changement de variables. Afin de démontrer que les noyaux  $P^{ij}$  appartiennent à la classe  $C^1(\mathcal{T}_2; \mathbb{R})$ , nous établissons les équations intégrales satisfaites par ces noyaux par la méthode des caractéristiques. Nous dérivons ensuite ces équations par rapport à  $x$  et à  $y$  et obtenons les équations intégrales satisfaites par ces dérivées. Ces équations, appartenant elles-mêmes à la classe considérée dans la preuve de [Di Meglio et al., 2018, Théorème 3.2], nous permettent de conclure sur la preuve du lemme 11.

Dans cette section, nous avons présenté la transformation backstepping et démontré sa bornitude et son inversibilité dans un espace adéquat. Nous avons également établi les équations satisfaites par les noyaux et les coefficients de cette transformation, et finalement prouvé l'existence unique et la régularité de leur solution. Nous exposons maintenant les propriétés du système de départ en boucle fermée.

### 4.2.3 Propriétés du système en boucle fermée

En se basant sur les lemmes 7, 9, 10 et 11, nous aboutissons au résultat suivant, qui établit le caractère bien-posé de notre système de départ.

**Lemme 12.** *Étant donné une condition initiale  $(u_0(\cdot), v_0(\cdot), X_0, Y_0) \in \Xi$  vérifiant les conditions de compatibilité*

$$u_0(0) = qv_0(0) + C_0X_0 \quad (4.39a)$$

$$v_0(1) = \rho u_0(1) + C_1Y_0 \quad (4.39b)$$

$$u'_0(0) = -qv'_0(0) + \frac{\sigma^{++} - q\sigma^{-+}}{\lambda}u_0(0) + \frac{1}{\lambda}(\sigma^{+-} - q\sigma^{--} - C_0E_0)v_0(0) - \frac{1}{\lambda}C_0A_0X_0 - \frac{1}{\lambda}C_0B_0U(0) \quad (4.39c)$$

$$v'_0(1) = -\rho u'_0(1) + \frac{1}{\lambda}(\rho\sigma^{++} - \sigma^{-+} + C_1E_1)u_0(1) + \frac{\rho\sigma^{+-} - \sigma^{--}}{\lambda}v_0(1) + \frac{1}{\lambda}C_1A_1Y_0 \quad (4.39d)$$

et  $U(t)$  satisfaisant la loi de commande du lemme 10, le système (4.6)-(4.8) admet une solution unique (classique)  $(u(t, \cdot), v(t, \cdot), X(t), Y(t)) \in \Xi$  pour tout  $t \in [0, T]$ , satisfaisant  $u(\cdot, \cdot), v(\cdot, \cdot) \in C^1([0, T] \times [0, 1]; \mathbb{R})$ ,  $X(\cdot) \in C^1([0, T]; \mathbb{R}^n)$ ,  $Y(\cdot) \in C^1([0, T]; \mathbb{R}^m)$ .

*Démonstration.* Toute condition initiale (4.7)-(4.8) dans  $\Xi$  est transformée, par le lemme 9 et le lemme 11 en une condition initiale (4.10)-(4.11) dans  $\Xi$ . D'après la définition de la transformation backstepping (4.33), avec les noyaux et la commande satisfaisant le lemme 10 (d'ailleurs le lemme 11 garantit leur existence), les conditions de compatibilité dans ce lemme impliquent que les conditions de compatibilité du lemme 7 sont vérifiées. Ceci implique à son tour que le système cible (4.9)-(4.11) admet une solution classique unique avec la régularité adéquate (donnée dans le lemme 7). En utilisant le lemme 10 et le fait que l'opérateur de la transformation (4.33) admet un inverse borné (dans  $\Xi$ ), du lemme 9 et du lemme 11, nous concluons que le système de départ (4.6)-(4.8) admet une solution classique unique avec la régularité désirée.

À noter que l'équivalence entre les conditions de compatibilité (4.39) et (4.12) des systèmes de départ et cible respectivement a lieu vu que la transformation backstepping (4.33) est bornée et admet une inverse bornée de  $\Xi$  dans  $\Xi$ .  $\square$

Nous sommes ainsi capables de présenter le résultat principal de ce travail.

**Théorème 13.** *Le point d'équilibre nul (origine) du système (4.6)-(4.8), vérifiant les conditions du lemme 12 est exponentiellement stable dans le sens de (4.5). De plus, la loi de commande (4.37) vérifie  $U(\cdot) \in C^0([0, T]; \mathbb{R}^n)$ .*

*Démonstration.* Le lemme 12 garantit l'existence d'une solution unique et classique du système en boucle fermée avec la loi de commande définie dans le lemme 10. Cette solution est liée, à travers un opérateur borné et inversible, à la solution classique correspondante du lemme 7, cette dernière satisfaisant les exigences de la stabilité exponentielle au sens du lemme 8 (car  $\Xi \subset \chi$ ). L'inverse de la transformation backstepping étant borné dans l'espace  $\Xi$ , la conclusion du théorème est déduite des lemmes 9 et 11. Une représentation schématique du lemme 12 et du théorème 13 est illustrée sur la figure 4.3.  $\square$

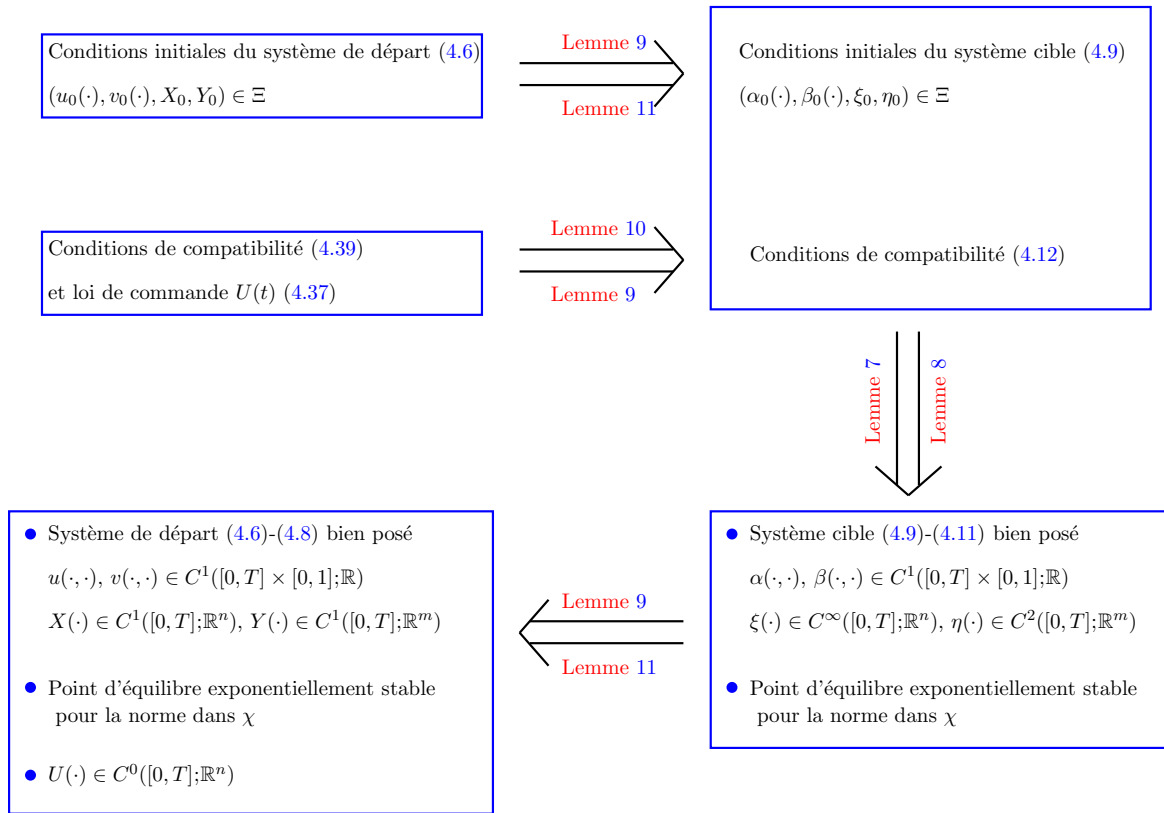


FIGURE 4.3 – Schéma récapitulatif des lemmes 7 à 12 et du théorème 13.

Conformément à ce qui est évoqué dans la section 4.2.1, les termes déstabilisants ont été éliminés grâce à la transformation (4.33) et la loi de commande (4.37). Nous présentons dans la section suivante l'effet de chaque terme de cette commande dans la stabilisation du système.

#### 4.2.4 Analyse des termes de la loi de commande

Reprenons l'expression de la loi de commande.

$$\begin{aligned}
 U(t) &= k_1 v(t, 0) + k_2 v_t(t, 0) + k_3 u(t, 1) + k_4 X(t) \\
 &\quad + k_5 Y(t) + \int_0^1 k_6(y) u(t, y) dy + \int_0^1 k_7(y) v(t, y) dy.
 \end{aligned} \tag{4.40}$$

Les termes de cette commande possèdent des rôles spécifiques dans la stabilisation du système. D'une manière plus précise, le terme  $k_1v(t, 0)$  élimine le couplage  $E_0v(t, 0)$  entre l'EDP en  $v$  et l'EDO en  $X$ . Le terme  $k_2v_t(t, 0)$  annule un terme de réflexion proximale  $qv(t, 0)$ . Le terme  $k_3u(t, 1)$  est essentiel afin de garder une structure en cascade au bord  $x = 0$  et d'éviter la dépendance de l'état  $\xi(t)$  en  $\alpha(t, 1)$  et en  $\eta(t)$ . Les termes  $k_4X(t)$  et  $k_5Y(t)$  sont des retours d'état sur  $X(t)$  et  $Y(t)$  et servent à stabiliser leur dynamique. Enfin, les termes  $\int_0^1 k_6(y)u(t, y)dy$  et  $\int_0^1 k_7(y)v(t, y)dy$  sont des retours d'état sur  $u$  et  $v$  et contribuent à la stabilisation en éliminant le couplage antidiagonal entre les EDP à l'intérieur du domaine.

Dans le but d'illustrer schématiquement les différents effets que nous venons d'explicitier, reprenons le schéma 4.1 du système de départ (4.6). Sur la figure 4.4, nous représentons en pointillé les couplages éliminés par la loi de commande (4.40) et les stabilisations effectuées.

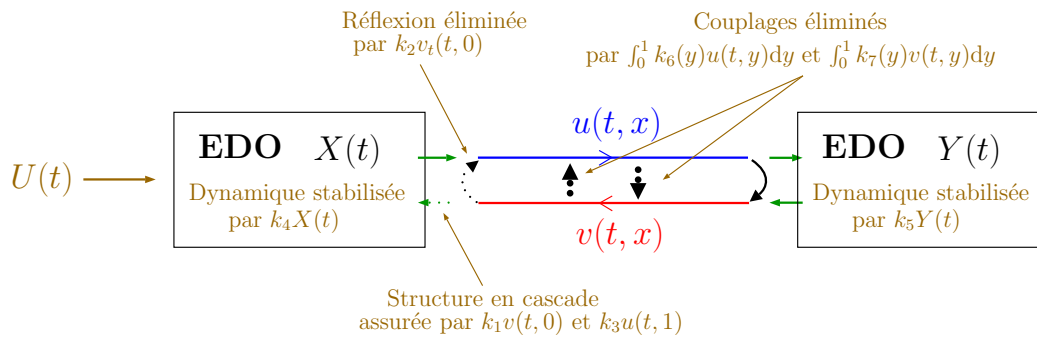


FIGURE 4.4 – Représentation schématique des effets de stabilisation de chaque terme de la loi de commande (4.37).

Nous soulignons le fait que l'annulation complète du terme de réflexion  $qv(t, 0)$  a été adoptée dans la littérature dans la commande par backstepping des EDP hyperboliques. Nous prenons comme exemple [Krstic and Smyshlyaev, 2008b], [Vazquez et al., 2011], [Coron et al., 2013], [Auriol and Di Meglio, 2016a], [Di Meglio et al., 2012a] et [Di Meglio et al., 2018] où le système cible est conçu de manière à avoir une valeur au bord d'un état EDP nulle pour tout instant. Cette procédure est connue aussi sous le nom de "dead beat control" [Bastin and Coron, 2016]. Dans le cas des systèmes hyperboliques non couplés à des dynamiques EDO, elle permet de stabiliser le système autour du point d'équilibre en temps fini. En revanche, elle présente l'inconvénient d'une marge de robustesse nulle vis-à-vis d'un retard dans la commande [Auriol et al., 2017]. Remarquons que dans les références citées ci-dessus, l'élimination du terme de réflexion ne requiert pas la présence d'une action dérivée dans la commande, puisque celle-ci est appliquée directement à un bord de l'EDP. Néanmoins, comme une dynamique EDO est présente au niveau de la commande dans le cas traité dans ce travail, il s'avère indispensable de faire apparaître l'action dérivée  $k_2v_t(t, 0)$  dans le but d'annuler le terme de réflexion.

Par ailleurs, cette action est un résultat direct de l'emploi du terme  $R_0v(t, 0)$  dans la transformation (4.33c). Ce terme est une évaluation sur un point de l'espace (de mesure de Lebesgue nulle) d'un état EDP. Il aurait donc présenté un problème en dégradant les propriétés de bornitude et d'inversibilité de la transformation backstepping (4.33) si nous avions travaillé dans certains espaces et notamment l'espace  $L^2$  où la solution des états EDP est définie presque partout. La transformation (4.33) risquerait d'être non bornée ou non inversible. Nous avons été alors amenés à imposer une régularité forte ( $C^1$ ) à la condition initiale afin de garder les propriétés intéressantes de cette transformation.

Afin d'évaluer l'efficacité de la loi de commande proposée dans ce chapitre, nous prenons un système initialement instable et simulons sa réponse en boucle ouverte et en boucle fermée après l'application de la commande dans le paragraphe suivant. Nous présentons également les méthodes de discrétisation qui sont utilisées dans l'implantation numérique de notre système et afin de vérifier la propriété stabilisante de la loi de commande aux approximations près des méthodes numériques employées.

### 4.3 Simulation numérique

Avant de prendre un exemple numérique, nous souhaitons exposer dans la section 4.3.1 les démarches de discrétisation des EDP (4.34a)-(4.34b) et de l'EDO (4.34e) satisfaites par les noyaux  $P^{uu}$ ,  $P^{uv}$  et  $g$  respectivement, avec les conditions aux bords (4.35a), (4.35b) et (4.35e). Ces équations sont discrétisées par la méthode des différences finies avec un schéma implicite. Les EDP (4.34a) et (4.34b) sont réécrites dans de nouvelles coordonnées, dont les directions coïncident avec celles des lignes caractéristiques associées à ces EDP. L'objectif est d'obtenir un système d'EDP dans le domaine triangulaire  $\mathcal{T}_2$ , où seules les dérivées directionnelles apparaissent. Ces EDP, présentant une dérivation par rapport à une seule variable, sont utilisées pour effectuer le calcul puisqu'elles sont plus simples à implanter numériquement. Une procédure similaire est adoptée pour la discrétisation des équations (4.34c), (4.34d) et (4.34f) avec les conditions aux bords (4.35c), (4.35d) et (4.35f) mais non présentée dans ce chapitre.

Dans la section 4.3.2, nous présentons la méthode de MacCormack de [LeVeque and Yee, 1990] pour la discrétisation d'un système hyperbolique de lois de bilan. Cette méthode est appliquée au système de départ (4.6). Enfin, un exemple numérique est simulé dans la section 4.3.3.

Nous rappelons d'abord les schémas implicite et explicite de discrétisation en se basant sur [Riley et al., 2006]. Soit une variable  $\varphi \in C^1([0, 1], \mathbb{R})$  satisfaisant l'EDO suivante

$$\varphi'(x) = f(x), \quad (4.41)$$

avec  $f \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$ . Une approximation implicite (*backward scheme*) de l'opérateur de dérivation par rapport à  $x$  s'écrit

$$\frac{\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})}{\Delta x} = f(x_i), \quad (4.42)$$

où  $\Delta x \doteq x_i - x_{i-1}$  est le pas de discrétisation, alors qu'une approximation explicite (*forward scheme*) de cet opérateur s'écrit

$$\frac{\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})}{\Delta x} = f(x_{i-1}). \quad (4.43)$$

Le schéma implicite est adopté dans la discrétisation des équations des noyaux puisqu'il conduit à un schéma de discrétisation stable indépendamment du pas utilisé.

#### 4.3.1 Discrétisation des équations satisfaites par les noyaux

Nous considérons les EDP (4.34a)-(4.34b). En vue d'obtenir des dérivées directionnelles selon les lignes caractéristiques, nous effectuons le changement de variables suivant

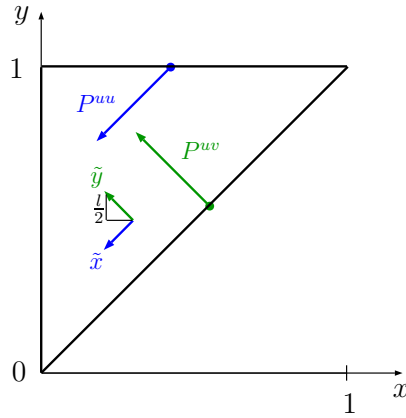
$$\tilde{x} = -x - y \quad (4.44a)$$

$$\tilde{y} = -x + y, \quad (4.44b)$$

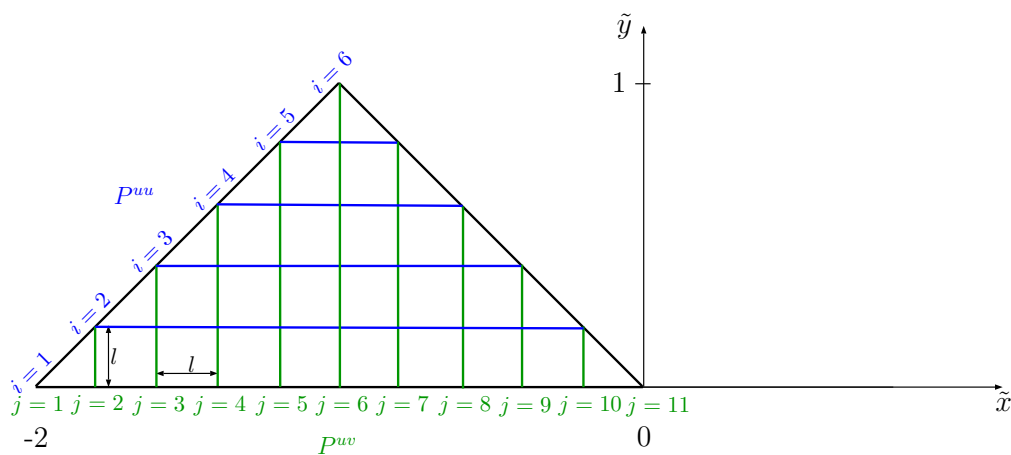
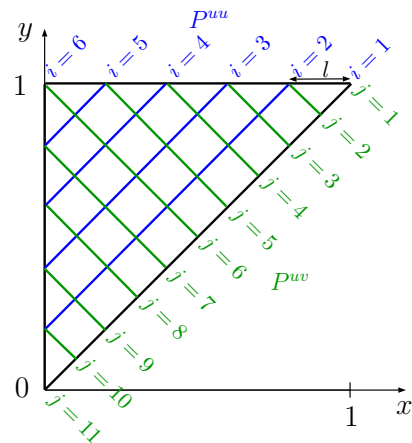
ou, d'une manière équivalente

$$x = -\frac{1}{2}(\tilde{x} + \tilde{y}) \tag{4.45a}$$

$$y = \frac{1}{2}(-\tilde{x} + \tilde{y}). \tag{4.45b}$$



(a)



(b)

FIGURE 4.5 – Schéma de discrétisation des équations (4.34a), (4.34b) et (4.34e). (a) lignes caractéristiques, (b) grille dans les coordonnées  $(x, y)$  et  $(\tilde{x}, \tilde{y})$ .

Nous signalons que  $\tilde{x}$  évolue suivant la même direction que la ligne caractéristique de  $P^{uu}$  et que  $\tilde{y}$  évolue dans la direction de la ligne caractéristique de  $P^{uv}$  (voir figure 4.5a). Afin de

calculer la variation de  $P^{uu}$  et  $P^{uv}$  par rapport à  $\tilde{x}$  et  $\tilde{y}$  respectivement, nous effectuons les dérivées directionnelles suivantes

$$P_{\tilde{x}}^{uu}(x, y) = -\frac{1}{2}P_x^{uu}(x, y) - \frac{1}{2}P_y^{uu}(x, y) \quad (4.46a)$$

$$P_{\tilde{y}}^{uv}(x, y) = -\frac{1}{2}P_x^{uv}(x, y) + \frac{1}{2}P_y^{uv}(x, y). \quad (4.46b)$$

En utilisant (4.34a) et (4.34b), nous obtenons les EDP suivantes

$$P_{\tilde{x}}^{uu}(x, y) = \sigma_1 P^{uv}(x, y). \quad (4.47a)$$

$$P_{\tilde{y}}^{uv}(x, y) = \sigma_2 P^{uv}(x, y) + \sigma_3 P^{uu}(x, y), \quad (4.47b)$$

où nous avons défini les paramètres suivants

$$\sigma_1 \doteq \frac{\sigma^{-+}}{2\lambda} \quad (4.48a)$$

$$\sigma_2 \doteq \frac{\sigma^{--} - \sigma^{++}}{2\lambda} \quad (4.48b)$$

$$\sigma_3 \doteq \frac{\sigma^{+-}}{2\lambda}. \quad (4.48c)$$

Les EDP (4.47) possèdent la propriété intéressante de présenter une dérivée par rapport à une seule variable. En conséquence, elles seront considérées pour la discrétisation par la méthode implicite en différences finies décrite en (4.42). Précisons d'abord les pas selon  $\tilde{x}$  et  $\tilde{y}$ . Sur une ligne caractéristique de  $P^{uu}$ , pour la direction de  $\tilde{x}$  montrée sur la figure 4.5a, nous prenons un pas en  $x$  et en  $y$  dans le sens négatif et de valeur  $\frac{l}{2}$ , ce qui engendre, en s'appuyant sur (4.44), un pas selon  $\tilde{x}$  de  $\Delta\tilde{x} = l$  et selon  $\tilde{y}$  de  $\Delta\tilde{y} = 0$ . Par contre, sur une ligne caractéristique de  $P^{uv}$ , pour la direction de  $\tilde{y}$ , nous prenons un pas en  $x$  dans le sens négatif et en  $y$  dans le sens positif de valeur  $\frac{l}{2}$ , ce qui donne  $\Delta\tilde{x} = 0$  et  $\Delta\tilde{y} = l$ . Nous présentons la démarche de calcul des noyaux  $P^{uu}$ ,  $P^{uv}$  et  $g$  dans une grille représentée schématiquement sur la figure 4.5b dans les coordonnées  $(x, y)$  et  $(\tilde{x}, \tilde{y})$ . Pour éliminer toute confusion, nous notons par  $\check{P}^{uu}$ ,  $\check{P}^{uv}$  et  $\check{g}$  les valeurs de ces noyaux dans cette grille en fonction des coordonnées  $i$  et  $j$  qui évoluent d'une manière entière selon les directions de  $\tilde{y}$  et  $\tilde{x}$  respectivement.

La discrétisation de l'EDP (4.47a) donne

$$\check{P}^{uu}(i, j) = \check{P}^{uu}(i, j - 1) + l\sigma_1 \check{P}^{uv}(i, j), \quad i \neq j. \quad (4.49)$$

La discrétisation de l'EDP (4.47b) donne

$$\check{P}^{uv}(i, j) = \check{P}^{uv}(i - 1, j) + l\sigma_2 \check{P}^{uv}(i, j) + l\sigma_3 \check{P}^{uu}(i, j). \quad (4.50)$$

Nous déduisons de (4.50)

$$\check{P}^{uv}(i, j) = \frac{1}{1 - l\sigma_2} \check{P}^{uv}(i - 1, j) + \frac{l\sigma_3}{1 - l\sigma_2} \check{P}^{uu}(i, j). \quad (4.51)$$

$\check{P}^{uv}(i, j)$  existe si  $1 - l\sigma_2$  est inversible. Cette propriété doit être assurée par le choix de  $l$ . La condition au bord (4.35a) s'écrit

$$\check{P}^{uu}(i, i) = \check{P}^{uv}(i, i)\rho + \frac{1}{\lambda}\check{g}(i)E_1, \quad (4.52)$$

alors que la condition au bord (4.35b) s'écrit

$$\check{P}^{uv}(1, j) = -\sigma_3. \quad (4.53)$$

La discrétisation de l'EDO (4.34e) satisfaite par  $g$  dans le sens négatif de  $x$  (de 1 vers 0) aboutit à

$$\check{g}(i) = \check{g}(i-1) + (-1)l \left[ \frac{1}{\lambda} \check{g}(i) (\sigma^{++} \mathbb{I}_m - A_1) - \check{P}^{uv}(i, i) C_1 \right]. \quad (4.54)$$

De (4.54), nous déduisons

$$\check{g}(i) = \left( \check{g}(i-1) + l \check{P}^{uv}(i, i) C_1 \right) \left[ \left( 1 + \frac{l}{\lambda} \sigma^{++} \right) \mathbb{I}_m - \frac{l}{\lambda} A_1 \right]^{-1}. \quad (4.55)$$

Pour garantir l'existence de  $\check{g}(i)$ ,  $l$  doit être choisi de sorte que

$\left[ \left( 1 + \frac{l}{\lambda} \sigma^{++} \right) \mathbb{I}_m - \frac{l}{\lambda} A_1 \right]$  soit inversible.  $\check{g}$  vérifie la condition au bord (4.35e) pour  $i = 1$

$$\check{g}(1) = F_1. \quad (4.56)$$

Pour trouver les expressions de  $\check{P}^{uu}$  et  $\check{P}^{uv}$  sur la ligne  $y = 1$  (qui correspond à  $j = i$ ), les équations (4.51), (4.52), (4.55) et (4.56) doivent être prises en considération. En évaluant (4.51) en  $j = i$  et en utilisant (4.52) et (4.55), nous obtenons

$$\begin{aligned} \check{P}^{uv}(i, i) &= \frac{1}{1-l\sigma_2} \check{P}^{uv}(i-1, i) + \frac{l\sigma_3}{1-l\sigma_2} \check{P}^{uv}(i, i) \rho \\ &+ \frac{l}{\lambda} \frac{\sigma_3}{1-l\sigma_2} \check{g}(i-1) \left[ \left( 1 + \frac{l}{\lambda} \sigma^{++} \right) \mathbb{I}_m - \frac{l}{\lambda} A_1 \right]^{-1} E_1 \\ &+ \frac{l^2}{\lambda} \frac{\sigma_3}{1-l\sigma_2} \check{P}^{uv}(i, i) C_1 \left[ \left( 1 + \frac{l}{\lambda} \sigma^{++} \right) \mathbb{I}_m - \frac{l}{\lambda} A_1 \right]^{-1} E_1. \end{aligned} \quad (4.57)$$

Nous déduisons de (4.57)

$$\check{P}^{uv}(i, i) = \frac{\sigma_4}{1-l\sigma_2} \check{P}^{uv}(i-1, i) + \frac{l}{\lambda} \frac{\sigma_3 \sigma_4}{1-l\sigma_2} \check{g}(i-1) \left[ \left( 1 + \frac{l}{\lambda} \sigma^{++} \right) \mathbb{I}_m - \frac{l}{\lambda} A_1 \right]^{-1} E_1, \quad (4.58)$$

où nous avons défini

$$\sigma_4 \doteq \left( 1 - \frac{l\sigma_3}{1-l\sigma_2} \rho - \frac{l^2}{\lambda} \frac{\sigma_3}{1-l\sigma_2} C_1 \left[ \left( 1 + \frac{l}{\lambda} \sigma^{++} \right) \mathbb{I}_m - \frac{l}{\lambda} A_1 \right]^{-1} E_1 \right)^{-1}. \quad (4.59)$$

L'existence de  $\sigma_4$  est lié au choix de  $l$ .  $\check{g}(i)$  et  $\check{P}^{uu}(i, i)$  sont ensuite déduites de (4.55) et (4.52) respectivement.

Pour  $j > i$ , les équations (4.49) et (4.51) sont résolues en  $\check{P}^{uu}(i, j)$  et  $\check{P}^{uv}(i, j)$  pour obtenir

$$\check{P}^{uv}(i, j) = \frac{1}{1-l\sigma_2 - l^2\sigma_1\sigma_3} \check{P}^{uv}(i-1, j) + \frac{l\sigma_3}{1-l\sigma_2 - l^2\sigma_1\sigma_3} \check{P}^{uu}(i, j-1), \quad (4.60a)$$

$$\check{P}^{uu}(i, j) = \frac{1-l\sigma_2}{1-l\sigma_2 - l^2\sigma_1\sigma_3} \check{P}^{uu}(i, j-1) + \frac{l\sigma_1}{1-l\sigma_2 - l^2\sigma_1\sigma_3} \check{P}^{uv}(i-1, j). \quad (4.60b)$$

Du calcul précédent, nous déduisons les conditions suivantes sur le choix du pas  $l$ .

**Condition 1.**  $1 - l\sigma_2$  est inversible,

**Condition 2.**  $1 - l\sigma_2 - l^2\sigma_1\sigma_3$  est inversible,

**Condition 3.**  $\left( 1 + \frac{l}{\lambda} \sigma^{++} \right) \mathbb{I}_m - \frac{l}{\lambda} A_1$  est inversible,

**Condition 4.**  $\sigma_4$  existe.

Une description de la procédure de calcul élaborée dans cette section est présentée dans l'algorithme 1.



**Algorithme 1:** Algorithme de discrétisation des noyaux  $P^{uu}$  et  $P^{uv}$ 


---

**Input:**  
paramètres du système :  $\sigma^{++}, \sigma^{--}, \sigma^{+-}, \sigma^{-+}, \lambda, \rho, E_1, C_1, A_1$  et  $F_1$

- 1 Fixer le nombre de nœuds  $N$  sur la ligne  $y = 1$
- 2 Calculer le pas :  $l = \frac{1}{N-1}$
- 3 Calculer les paramètres :  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  et  $\sigma_4$
- 4 **if** *Au moins une des Conditions 1-4 n'est pas satisfaite* **then**
- 5     Changer la valeur de  $N$
- 6     **go to** 2
- 7 **end**
- 8 **for**  $j \leftarrow 1$  **to**  $2N - 1$  **by** 1 **do**
- 9      $\check{P}^{uv}(1, j) = -\sigma_3$
- 10 **end**
- 11  $\check{g}(1) = F_1$
- 12  $\check{P}^{uu}(1, 1) = -\rho\sigma_3 + \frac{1}{\lambda}F_1E_1$
- 13 **for**  $j \leftarrow 1$  **to**  $2N - 1$  **by** 1 **do**
- 14      $\check{P}^{uu}(1, j) = \check{P}^{uu}(1, j - 1) - l\sigma_1\sigma_3$
- 15 **end**
- 16 **for**  $i \leftarrow 2$  **to**  $N$  **by** 1 **do**
- 17     Calculer  $\check{P}^{uv}(i, i)$  comme dans (4.58)
- 18     Calculer  $\check{g}(i)$  comme dans (4.55)
- 19     Calculer  $\check{P}^{uu}(i, i)$  comme dans (4.52)
- 20     **for**  $j \leftarrow i + 1$  **to**  $2N - i$  **by** 1 **do**
- 21         Calculer  $\check{P}^{uv}(i, j)$  comme dans (4.60a)
- 22         Calculer  $\check{P}^{uu}(i, j)$  comme dans (4.60b)
- 23     **end**
- 24 **end**

---

### 4.3.2 Discrétisation des EDP hyperboliques satisfaites par le système de départ

Les EDP (4.6a) et (4.6b) sont discrétisées par la méthode de MacCormack décrite dans [LeVeque and Yee, 1990]. C'est une méthode de prédiction-corrrection qui consiste à discrétiser les opérateurs de dérivation par différences finies en suivant deux étapes. Considérons le système hyperbolique de lois de bilan suivant

$$\partial_t \varphi(t, x) = \partial_x f(\varphi(t, x)) + \psi(\varphi(t, x)). \quad (4.61)$$

Dans la phase de prédiction pour l'instant  $t_{i+1}$ , la dérivée temporelle est approchée par un schéma explicite et la dérivée spatiale par un schéma implicite comme suit

$$\frac{\varphi(t_{i+1,0}, x_j) - \varphi(t_i, x_j)}{\Delta t} = \frac{f(\varphi(t_i, x_j)) - f(\varphi(t_i, x_{j-1}))}{\Delta x} + \psi(\varphi(t_i, x_j)). \quad (4.62)$$

$\varphi(t_{i+1,0}, x_j)$  est alors calculée par (4.62) et utilisée pour la phase de correction au même instant  $t_{i+1}$ . Celle-ci sera implicite par rapport à la dérivée temporelle et explicite par rapport à la dérivée spatiale, comme le montre l'équation suivante

$$\frac{\varphi(t_{i+1,1}, x_j) - \varphi(t_i, x_j)}{\Delta t} = \frac{f(\varphi(t_{i+1,0}, x_{j+1})) - f(\varphi(t_{i+1,0}, x_j))}{\Delta x} + \psi(\varphi(t_{i+1,0}, x_j)). \quad (4.63)$$

De (4.63),  $\varphi(t_{i+1,1}, x_j)$  du membre de gauche est recalculée avec  $\varphi(t_{i+1,0}, \cdot)$  du membre de droite trouvée de (4.62) et  $\varphi(t_i, x_j)$  obtenue de l'itération en  $i$  précédente. Cette méthode est

adoptée pour la discrétisation des EDP (4.6a) et (4.6b) satisfaites par les états  $u(t, x)$  et  $v(t, x)$  du système de départ. Les EDO (4.6c) et (4.6d) satisfaites par  $X(t)$  et  $Y(t)$  respectivement sont discrétisées par le schéma implicite décrit par (4.42). Un exemple numérique est ainsi traité dans la section suivante.

### 4.3.3 Exemple numérique

Prenons un exemple numérique du système (4.6)-(4.8). Pour se placer dans un cadre général, nous choisissons des paramètres qui rendent tous les sous-systèmes (en EDP et EDO découplées) instables. Prenons les paramètres suivants :

$$\lambda = 1, \quad q = 1.5, \quad \rho = 1.1,$$

$$\begin{bmatrix} \sigma^{++} & \sigma^{+-} \\ \sigma^{-+} & \sigma^{--} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 \\ 1 & -0.1 \end{bmatrix}, \quad B_0 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} C_0 \\ \bar{E}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -5 & 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} C_1 \\ \bar{E}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_0 = 1/7 \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 0 \\ -2 & -4 & 6 & 7 \\ 4 & 9 & -5 & 5 \\ -8 & 7 & 4 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_1 = 1/7 \begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 7 & 8 \end{bmatrix}.$$

Les matrices  $A_0$  et  $A_1$  ainsi choisies possèdent des valeurs propres à partie réelle positive. Les états EDO  $X$  et  $Y$  sont donc intrinsèquement instables. D'autre part, le produit des coefficients de réflexion en valeur absolue  $|\rho q|$  est supérieur à 1, donc les états EDP  $u$  et  $v$  sont eux-mêmes instables [Bastin and Coron, 2016, Théorème 2.6]. Nous prenons une condition initiale  $(u_0(\cdot), v_0(\cdot), X_0, Y_0) \in \Xi$  et qui vérifient les conditions de compatibilité (4.39).

La réponse en boucle ouverte des états EDP  $u(t, x)$  et  $v(t, x)$  et de la norme du système  $\Psi = (u, v, X, Y)$  dans  $\chi$  est montrée sur les figures 4.6a, 4.6b et 4.6c respectivement. Les figures 4.7a et 4.7b montrent l'évolution en boucle ouverte des états EDO  $X(t)$  et  $Y(t)$  respectivement. Ces figures sont illustrées afin d'insister sur l'instabilité de ce système en boucle ouverte. Les états progressent en prenant des valeurs de plus en plus grandes.

Sur les figures 4.8a et 4.8b, nous montrons les noyaux  $P^{uu}$  et  $P^{vv}$  respectivement dans le domaine  $\mathcal{T}_2$ . Ces noyaux satisfont la régularité imposée par le lemme 9, *i.e.*  $C^1(\mathcal{T}_2; \mathbb{R})$ . Les composantes de la commande  $U(t)$  sont illustrées sur la figure 4.9. Nous apprécions sur cette figure que la commande décroît asymptotiquement pour s'annuler pour  $t$  assez grand. De plus, nous remarquons la régularité  $C^0([0, T]; \mathbb{R}^n)$  de cette commande.

L'évolution des EDP  $u(t, x)$  et  $v(t, x)$  en boucle fermée est présentée sur les figures 4.10a et 4.10b respectivement, tandis que l'évolution de la norme dans  $\chi$  est donnée sur la figure 4.10c. Finalement, l'évolution des EDO  $X(t)$  et  $Y(t)$  est montrée sur les figures 4.11a et 4.11b respectivement. La stabilisation de tous les états du système en boucle fermée est bien observée sur ces figures. Les états convergent vers zéro pour  $t$  suffisamment large. La convergence de la norme  $\chi$  du système (figure 4.10c) est suffisante pour conclure sur la stabilisation de tous les états. À noter que les allures des courbes des états  $u$ ,  $v$ ,  $X$  et  $Y$  ne contredisent pas la régularité démontrée dans le lemme 12, *i.e.*  $u(\cdot, \cdot), v(\cdot, \cdot) \in C^1([0, T] \times [0, 1]; \mathbb{R})$ ,

$X(\cdot) \in C^1([0, T]; \mathbb{R}^n)$  et  $Y(\cdot) \in C^1([0, T]; \mathbb{R}^m)$ .

Conformément à notre attente, la loi de commande conçue et appliquée à un système en simulation rend le système en boucle fermée asymptotiquement stable.

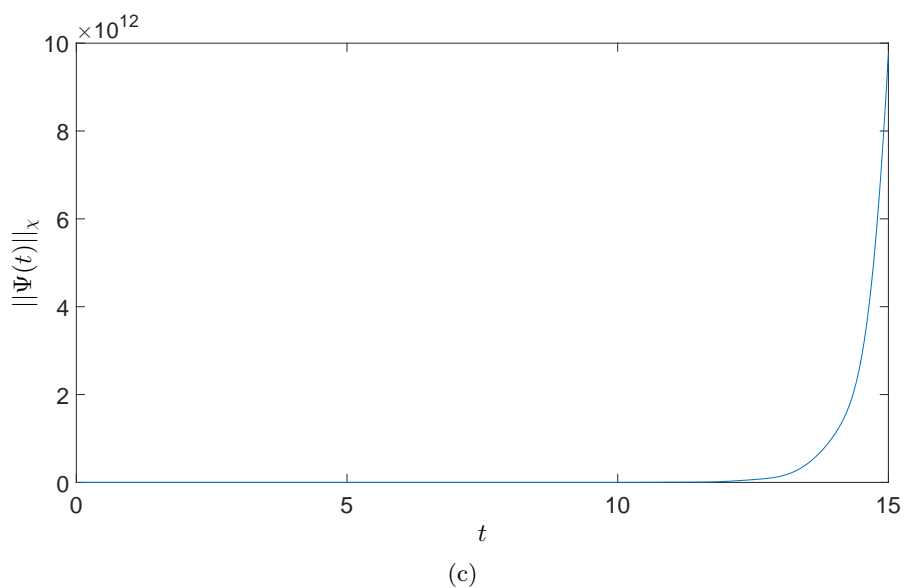
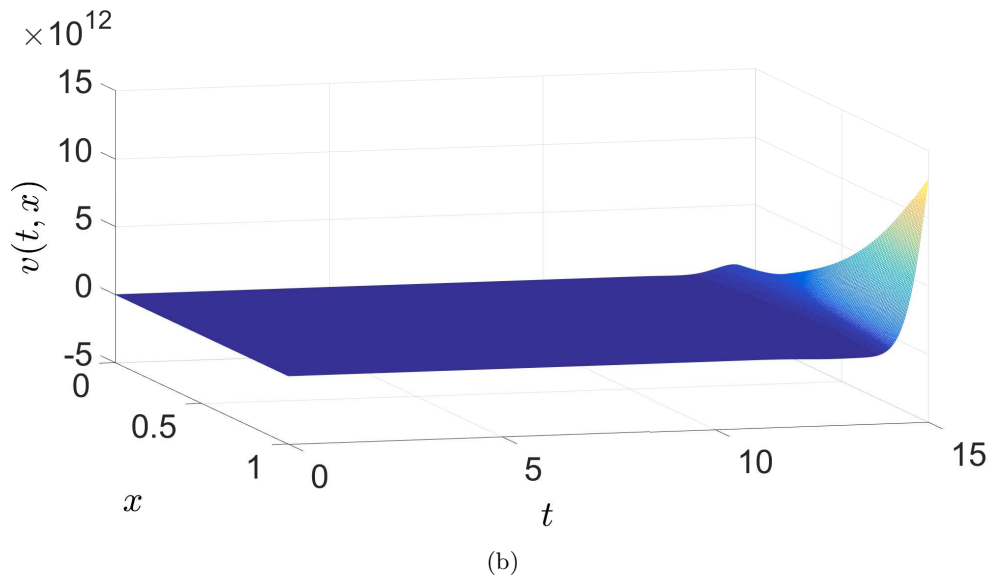
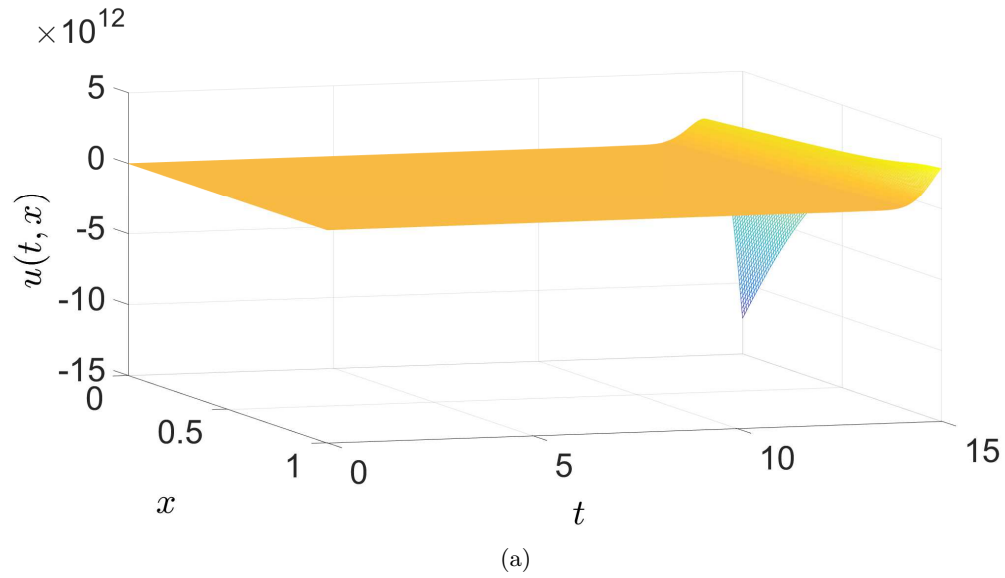
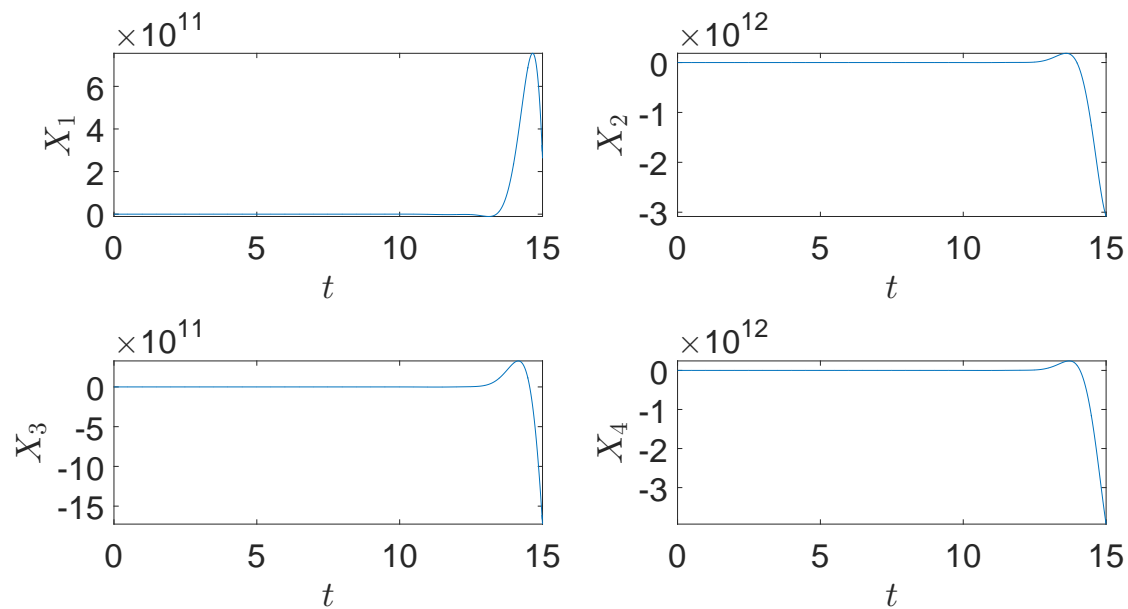
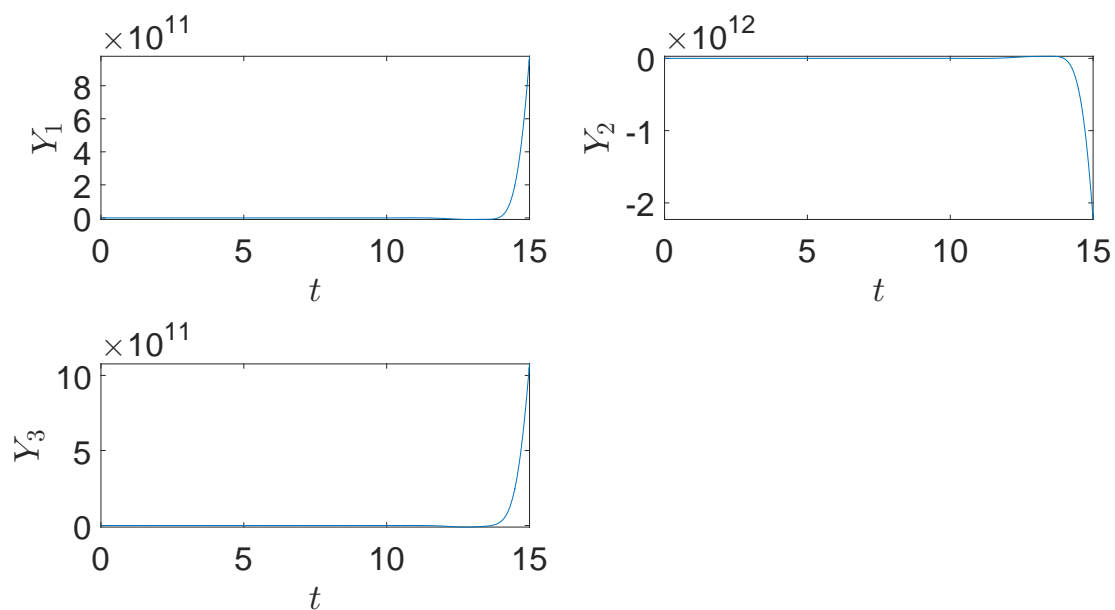


FIGURE 4.6 – Simulation de l'évolution des états EDP et de la norme dans  $\chi$  du système interconnecté EDO-EDP-EDO en boucle ouverte. (a)  $u(t, x)$ , (b)  $v(t, x)$ , (c)  $\|\Psi(t)\|_X$ .

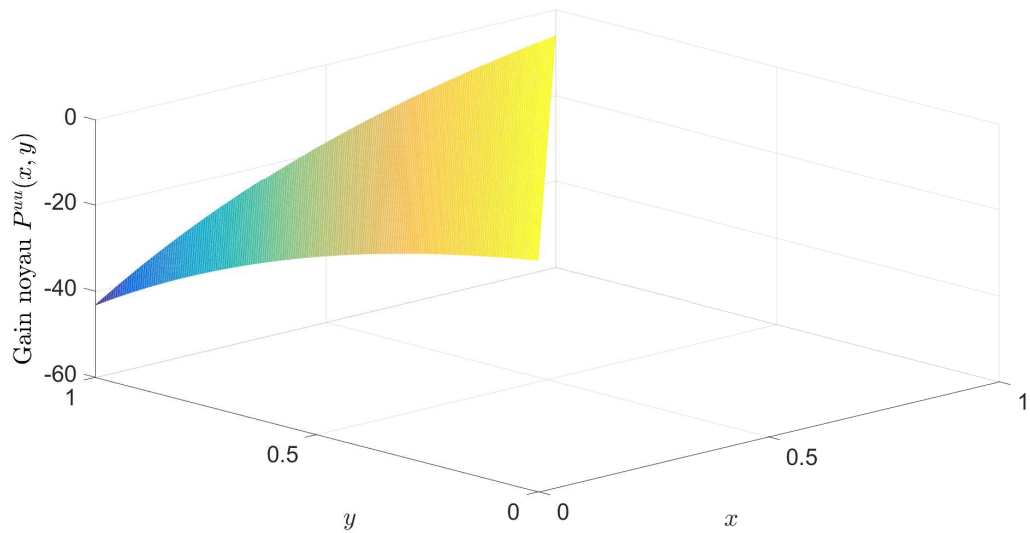


(a)

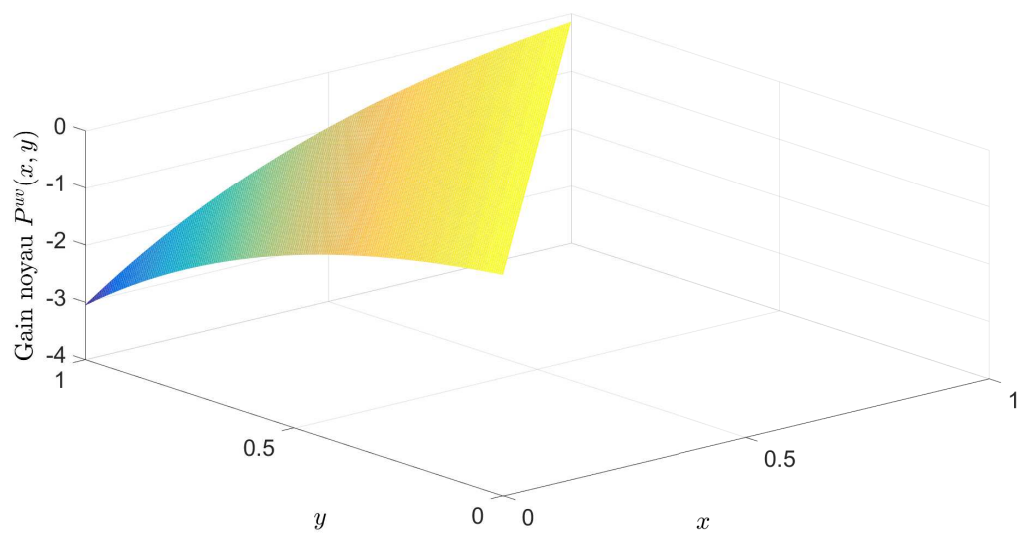


(b)

FIGURE 4.7 – Simulation de l'évolution des états EDO du système interconnecté EDO-EDP-EDO en boucle ouverte. (a)  $X(t)$ , (b)  $Y(t)$ .

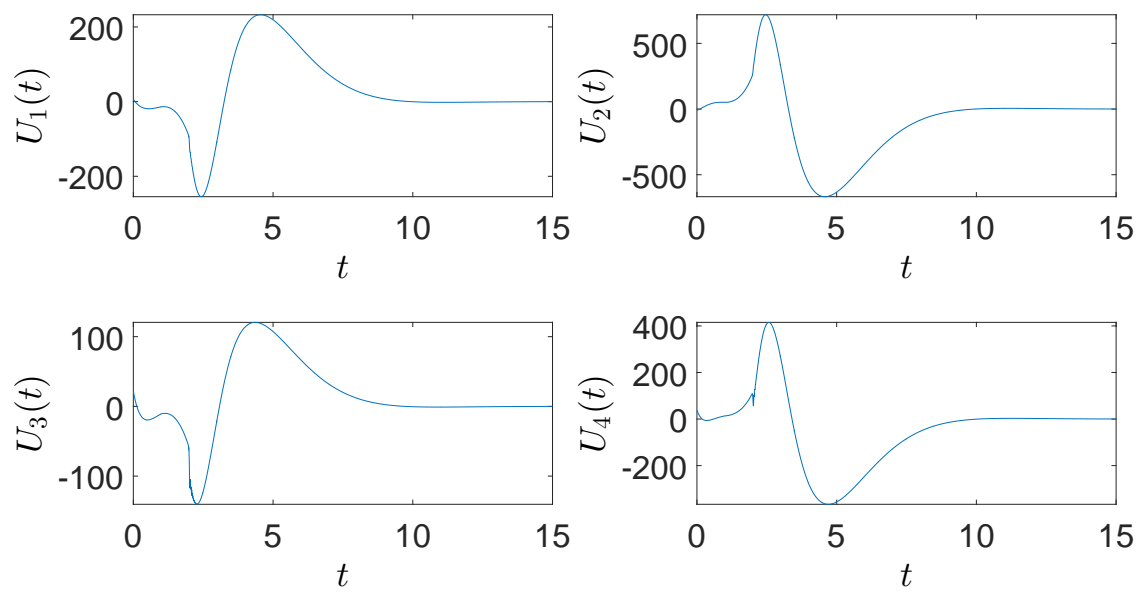


(a)



(b)

FIGURE 4.8 – Simulation des noyaux de la transformation backstepping. (a)  $P^{uu}(x, y)$ , (b)  $P^{uv}(x, y)$ .

FIGURE 4.9 – Simulation des composantes de la commande  $U(t)$ .

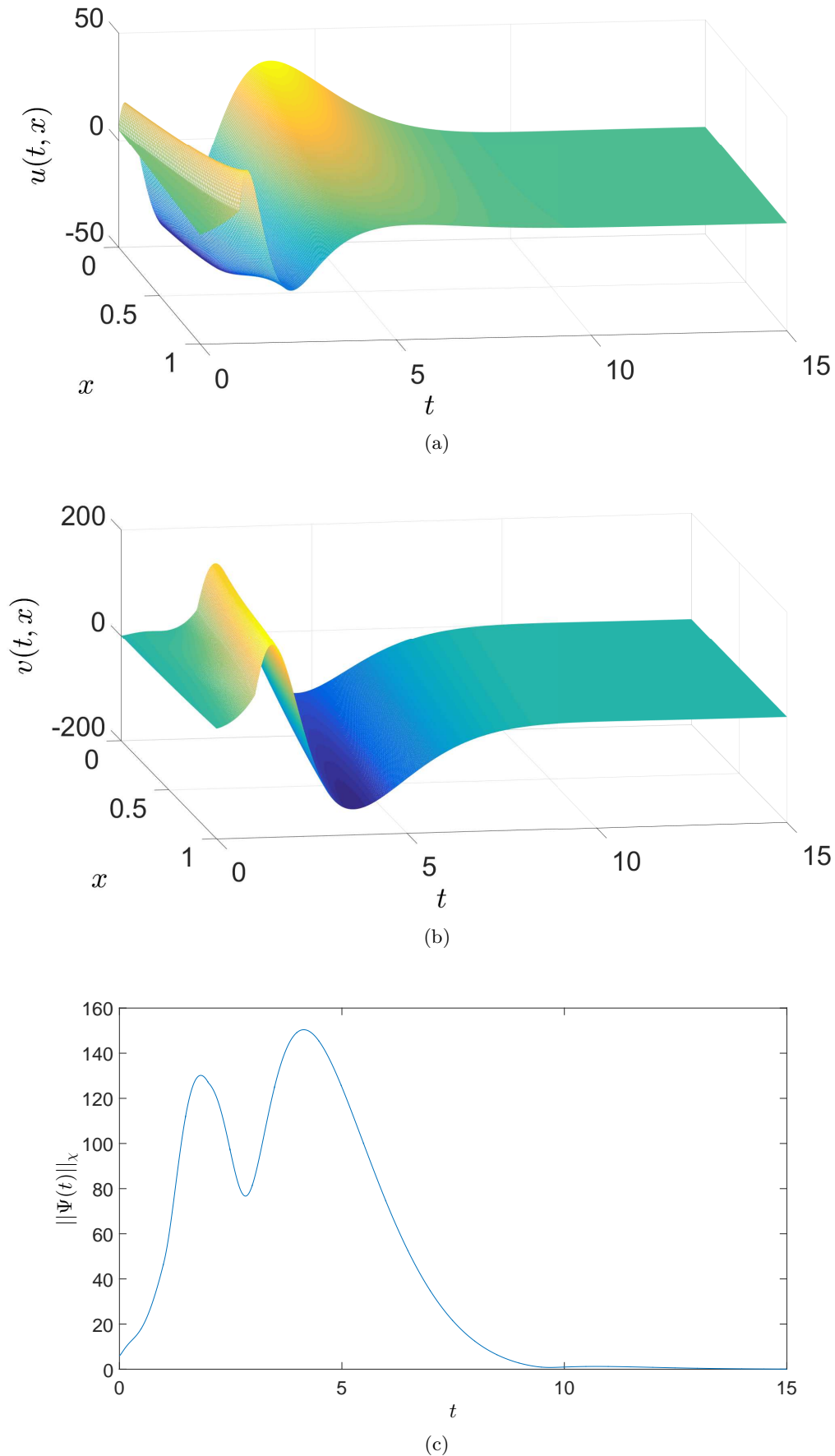
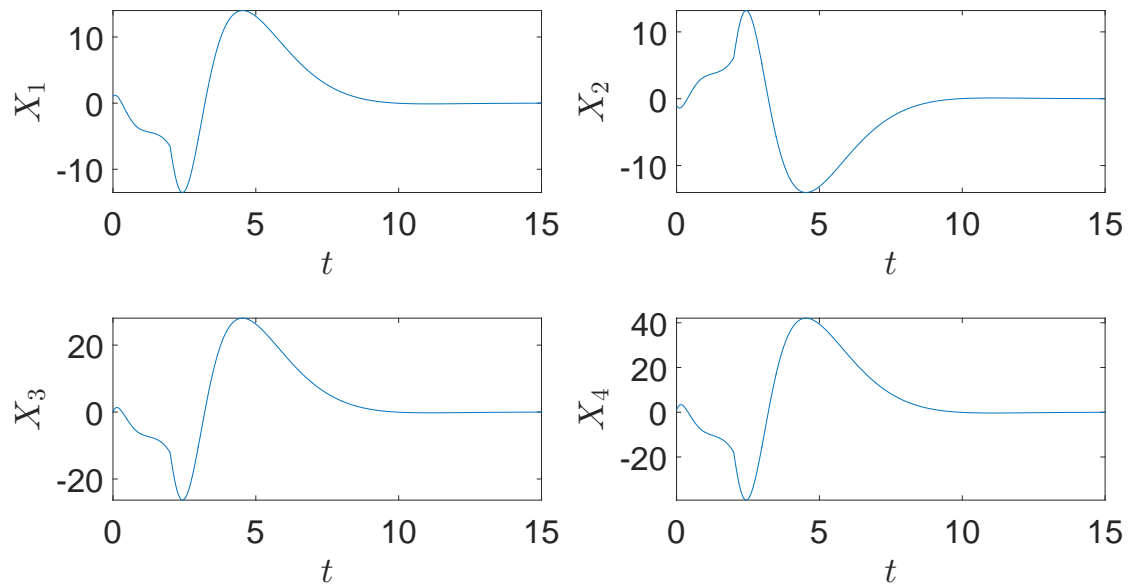
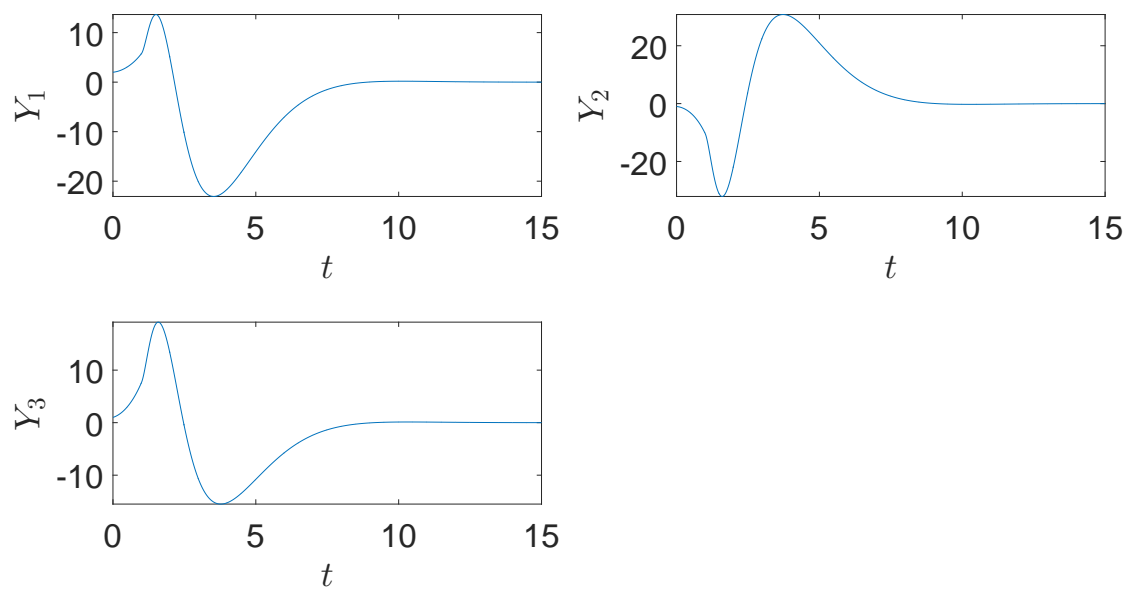


FIGURE 4.10 – Simulation de l'évolution des états EDP et de la norme dans  $\chi$  du système interconnecté EDO-EDP-EDO en boucle fermée. (a)  $u(t, x)$ , (b)  $v(t, x)$ , (c)  $\|\Psi(t)\|_\chi$ .





(a)



(b)

FIGURE 4.11 – Simulation de l'évolution des états EDO du système interconnecté EDO-EDP-EDO en boucle fermée. (a)  $X(t)$ , (b)  $Y(t)$ .

## 4.4 Conclusion et perspectives

Dans ce chapitre, le problème de stabilisation d'un système linéaire d'EDP couplées 2 à 2 de type hyperbolique du premier ordre couplées aux deux bords à des dynamiques EDO est résolu sous l'hypothèse d'une matrice d'entrée inversible. La synthèse de la commande est basée sur une transformation backstepping et un système cible appropriés.

Dans une première partie, nous avons démontré que le système cible est bien-posé et exponentiellement stable pour la norme dans  $\chi$ . Dans une seconde partie, la transformation backstepping a été exposée. Sa bornitude et son inversibilité ont été démontrées et les équations des noyaux ont été établies. Le caractère bien-posé de ces équations a été ensuite obtenu. Ces propriétés, liées au système cible et à la transformation, nous ont menés à conclure sur le caractère bien-posé et la stabilité exponentielle du système de départ en boucle fermée. La commande résultante est une commande par retour d'état qui dépend de tout l'état et exige par conséquent la connaissance de l'état dans tout le domaine, ainsi que la dérivée temporelle en un point au bord d'un état des EDP. Les termes de la loi de commande ont été analysés en expliquant les différents effets sur la stabilisation. Finalement, les méthodes de discrétisation ont été présentées et une simulation numérique a illustré le développement analytique sur un exemple.

Malgré l'effet stabilisant de la loi de commande proposée, elle présente une marge de robustesse nulle vis-à-vis du retard dans la commande. C'est un résultat direct de l'élimination totale du terme de réflexion proximale (voir [Auriol et al., 2017]). Une solution que nous proposons est de garder cette réflexion (avec une hypothèse de dissipativité de la condition aux bords). Cette démarche nous permet d'éviter l'action dérivée dans la commande et d'assurer une marge de robustesse non nulle (voir plus de détails dans le chapitre 5, section 5.2). Dans un cadre de collaboration avec le laboratoire *CAS* à l'École des Mines ParisTech, un résultat de stabilisation robuste pour des systèmes EDP-ODE a été développé. Des méthodes similaires à celles adoptées dans [Auriol et al., 2018] sont envisageables dans l'objectif d'attaquer le problème de robustesse pour le système EDO-EDP-EDO que nous stabilisons dans ce chapitre.

Nous ressortons de cette conclusion les perspectives suivantes.

- la synthèse d'un observateur pour les systèmes EDO-EDP-EDO,
- une extension des résultats de la stabilisation du système EDO-EDP-EDO pour le cas d'une matrice d'entrée  $B_0$  non inversible,
- et stabilisation robuste des systèmes EDO-EDP-EDO vis-à-vis du retard dans la commande en préservant le terme de réflexion proximale.



# Conclusion et perspectives

**Sommaire**

---

<b>5.1</b>	<b>Perspectives du travail de l'analyse . . . . .</b>	<b>117</b>
<b>5.2</b>	<b>Perspectives du travail sur la commande . . . . .</b>	<b>120</b>

---

L'objectif de la thèse a été le développement d'outils d'analyse et de commande de systèmes de lois de bilan, modélisés par deux EDP hyperboliques linéaires du premier ordre couplées entre elles à l'intérieur du domaine et aux bords par un couplage statique ou avec des dynamiques EDO. Notre motivation était de résoudre des problèmes liés à la commande des réseaux de lignes de transmission. Notre approche a été de considérer chaque ligne de ce réseau comme un module élémentaire pour lequel nous avons élaboré des outils d'analyse et de commande. Ainsi, nous avons considéré dans les travaux de cette thèse des systèmes qui représentent une seule ligne de transmission avec des couplages à l'intérieur du domaine et aux bords. Les termes de couplage à l'intérieur du domaine dépendent de la nature de la ligne et des échanges entre les différents états, tandis que les conditions aux bords sont influencées par la nature du nœud, point d'interconnexion de deux lignes et peuvent représenter des couplages statiques ou dynamiques. La perspective est d'analyser et de commander deux ou plusieurs modules élémentaires interconnectés.

Les résultats essentiels que nous avons développés dans cette thèse sont

- une analyse appliquée à un système d'EDP hyperboliques couplées deux à deux, avec des vitesses de propagation constantes, des coefficients constants de couplage anti-diagonal à l'intérieur du domaine et des réflexions aux bords,
- une commande stabilisante d'un système de deux EDP hyperboliques couplées entre elles à l'intérieur du domaine et aux deux bords avec des dynamiques EDO.

Nous mentionnons également le résultat obtenu en collaboration avec le laboratoire *Centre Automatique et Systèmes, CAS* à l'École des Mines, ParisTech, sur la commande robuste vis-à-vis d'un retard dans la rétroaction, d'un système EDP-EDO. Nous soulignons l'importance de la technique backstepping utilisée dans ces travaux, qui nous a simplifié les problèmes d'analyse, de résolution et de commande.

Dans le travail d'analyse, nous avons établi des conditions suffisantes de stabilité, tant explicites en termes des coefficients du système, que numériques à travers un algorithme qui teste la stabilité. L'originalité de ce travail est d'une part la reformulation de l'analyse des EDP hyperboliques en une analyse d'un système à retard, présentant uniquement une évolution temporelle avec un retard distribué, et d'autre part, la résolution analytique du noyau du retard distribué.

Ce passage du système hyperbolique au système à retard est réalisé à travers une transformation backstepping qui mène à un système cible où les couplages à l'intérieur du domaine (originellement présents dans le système de départ) sont décalés vers le bord. Ensuite, la résolution du système cible aboutit à une équation aux différences avec un retard distribué satisfaite par un état EDP à un bord. Ayant montré l'équivalence de stabilité entre le système de départ et l'équation à retard obtenue, une étude dans le domaine fréquentiel de l'équation à retard a été abordée. En conséquence, nous avons établi l'équation caractéristique associée en appliquant la transformée de Laplace. En analysant l'équation caractéristique, une condition nécessaire et suffisante (CNS) a été obtenue. Toutefois, son application présente une difficulté puisqu'elle nécessite l'évaluation d'un quasi-polynôme caractéristique sur le demi-plan droit. Pour cette raison, nous avons développé une condition suffisante explicite par une relaxation analytique en majorant les termes de la CNS d'une part, et une autre condition suffisante en approchant numériquement la CNS d'autre part.

En vue d'explicitement une condition suffisante uniquement en termes des coefficients du système, nous avons résolu analytiquement les EDP satisfaites par les noyaux de la transformation backstepping. Cette résolution conduit à une expression explicite du noyau du retard distribué en termes des fonctions de Bessel et des fonctions de Bessel modifiées de première espèce. La majoration des termes exponentiels et des fonctions de Bessel du

noyau dans la CNS aboutit à une condition suffisante de stabilité explicite uniquement en termes des coefficients du système. Cette condition est simple à appliquer et ne réclame pas la recherche d'un paramètre qui vérifie une LMI. Elle a été ensuite comparée à d'autres conditions de stabilité de la littérature.

L'approximation numérique de la condition nécessaire et suffisante est réalisée à travers un algorithme qui fournit un outil efficace d'analyse de stabilité, moins restrictif que les critères explicites. Néanmoins, celui-ci exige un coût de calcul élevé. Cet algorithme teste l'absence de racine à partie réelle positive de l'équation caractéristique. La contribution dans sa construction est la restriction des tests à un nombre fini de points du demi-plan droit, et qui appartiennent à un domaine compact dans ce demi-plan. Les tests qu'il exécute se basent sur la continuité Lipschitzienne du quasi-polynôme caractéristique.

Dans le but de comparer la condition suffisante explicite que nous proposons avec une condition suffisante de la littérature appliquée au même système de départ par la méthode de Lyapunov, et de visualiser la différence entre les résultats, nous avons illustré en simulation les domaines où ces conditions détectent la stabilité. Ces domaines sont tracés dans un repère à deux dimensions où nous modifions à chaque fois deux coefficients du système de départ. Les figures obtenues dévoilent qu'il n'existe ni une équivalence ni une inclusion entre les deux conditions explicites. Afin d'évaluer le conservatisme de ces deux critères explicites, certains domaines ont été superposés avec celui obtenu par l'approche numérique. L'algorithme numérique présente les résultats les moins conservatifs et sa performance est uniquement limitée par la précision de la machine. Il est intéressant de signaler que dans certains endroits des domaines de stabilité, la zone limitée par l'approche numérique converge vers celle limitée par la condition explicite que nous proposons. Cette observation indique que cette condition explicite constitue potentiellement un outil efficace qui donne avec précision la limite de stabilité du système en fonction des coefficients.

Passons maintenant à une description du travail effectué en stabilisation. Afin de contribuer à la littérature de la commande des EDP hyperboliques, nous avons considéré un couplage avec des dynamiques EDO aux deux bords de ces EDP. L'originalité apportée est que l'entrée de commande est régie par une dynamique EDO et en conséquence, n'est pas directement appliquée au bord des EDP. La contribution est la construction d'une transformation backstepping qui, avec une loi de commande adéquate, à la fois stabilise les EDP à l'intérieur du domaine et la dynamique des EDO, et élimine les couplages qui peuvent potentiellement aboutir à l'instabilité. Nous rappelons que dans ce travail, une solution classique avec une régularité  $C^1$  a été recherchée.

La transformation backstepping est une version augmentée de celle adoptée dans la littérature pour la stabilisation d'un système EDP-EDO. Les termes augmentés sont présents principalement dans la transformation de l'état EDO au niveau de la commande et comprennent des opérateurs de Fredholm, qui consistent en une intégration des états EDP sur tout le domaine avec des pondérations. Les équations satisfaites par les noyaux se sont révélées être des EDP hyperboliques couplées aux bords avec des dynamiques EDO. L'existence unique de la solution avec une régularité  $C^1$  de ces équations a été démontrée. Avec ce résultat, la transformation est bornée et admet une inverse bornée.

Le système cible obtenu est représenté par deux équations de transport couplées entre elles uniquement par une réflexion distale, avec une EDO de façon bidirectionnelle à un bord et en cascade avec une EDO à l'autre bord. Ce système admet une solution unique avec une régularité  $C^1$ . La stabilité exponentielle du système cible a été démontrée pour la

norme dans  $L^2$  des états EDP, et la norme euclidienne des états EDO à travers une fonction de Lyapunov. Cependant, en résolvant le système cible par la méthode des caractéristiques, nous avons déduit, des expressions de la solution en termes des conditions initiales, une stabilité exponentielle de tous les états pour la norme dans  $C^1$ .

La loi de commande est un retour des états EDP et EDO avec une action dérivée d'un état EDP à un bord. Les termes de cette commande sont analysés et leur effet sur la stabilisation a été montré. Afin d'illustrer l'efficacité de cette commande, elle a été appliquée en simulation à un système originellement instable. Pour cette finalité, nous avons exposé les méthodes de discrétisation des EDP du système de départ et des EDP des noyaux de la transformation.

Dans la suite, nous proposons les perspectives qui découlent du travail de l'analyse dans la section 5.1, et celles qui résultent du travail de la commande dans la section 5.2.

## 5.1 Perspectives du travail de l'analyse

Reprenons du chapitre 3 les domaines de stabilité assurés par les conditions explicites et par l'approche numérique. Ces domaines montrent l'existence de régions où aucune condition explicite n'est capable de tester la stabilité. La complication principale dans notre développement est la présence d'un retard distribué décrit par une intégration d'une fonction de Bessel, multipliée par un terme exponentiel. Remarquons également que la fonction de Bessel contient un terme non-linéaire en la variable d'intégration. La résolution explicite de ce terme reste un verrou mathématique qui, à notre connaissance, n'a pas encore de solution. Les perspectives de notre travail se projettent principalement sur la possibilité d'élaborer d'autres critères explicites (ou d'améliorer les critères obtenus) en utilisant les résultats de nos développements.

Reprenons d'abord les équations du système de départ (3.6)-(3.8).

$$u_t(t, x) + \frac{1}{r_1} u_x(t, x) = \sigma^{+-} v(t, x) \quad (5.1a)$$

$$v_t(t, x) - \frac{1}{r_2} v_x(t, x) = \sigma^{-+} u(t, x), \quad (5.1b)$$

avec les conditions aux bords suivantes

$$u(t, 0) = qv(t, 0) \quad (5.2a)$$

$$v(t, 1) = \rho u(t, 1). \quad (5.2b)$$

La condition nécessaire et suffisante dans le domaine fréquentiel, donnée dans la proposition 2 du chapitre 3, est

$$\inf_{\operatorname{Re}(s) \geq 0} |\hat{\phi}(s)| > 0, \quad (5.3)$$

avec

$$\hat{\phi}(s) = 1 - \rho q e^{-sr} - \int_0^r N(\theta) e^{-s\theta} d\theta \quad (5.4)$$

l'équation caractéristique associée à la dynamique au bord d'un état EDP du système cible. Nous présentons les perspectives suivant les trois points suivants.

### Développement d'une condition nécessaire et suffisante de stabilité explicite en termes des coefficients du système

Considérons la forme analytique du noyau  $N$ , en termes des fonctions de Bessel de première espèce, établie dans l'annexe E (équation (E.28))

$$N(\theta) = \left( \frac{a}{r} + \frac{d(\theta)}{r^2} \right) J_0 \left( 2\sqrt{h(\theta)} \right) + \frac{d(\theta)}{r^2} J_2 \left( 2\sqrt{h(\theta)} \right), \quad \forall \theta \in [0, r] \quad (5.5)$$



avec

$$a = qr_2\sigma^{-+} + \rho r_1\sigma^{+-} \quad (5.6a)$$

$$R = r_1r_2\sigma^{+-}\sigma^{-+} \quad (5.6b)$$

$$d(\theta) = R[r - \theta(1 + \rho q)] \quad (5.6c)$$

$$h(\theta) = \frac{R}{r^2}\theta(r - \theta). \quad (5.6d)$$

Une première perspective est de développer des outils mathématiques d'intégration afin de résoudre les intégrations suivantes qui apparaissent en développant  $d(\theta)$  de (5.6c) :

$$\int_0^r J_0\left(2\sqrt{h(\theta)}\right) e^{-s\theta} d\theta,$$

$$\int_0^r \theta J_0\left(2\sqrt{h(\theta)}\right) e^{-s\theta} d\theta,$$

$$\int_0^r J_2\left(2\sqrt{h(\theta)}\right) e^{-s\theta} d\theta,$$

$$\int_0^r \theta J_2\left(2\sqrt{h(\theta)}\right) e^{-s\theta} d\theta.$$

Il est clair que la difficulté du calcul intégral réside dans l'application de la fonction de Bessel à la racine carrée d'un terme non-linéaire en la variable d'intégration. Nous attirons l'attention sur le fait que la résolution de  $\int_0^r N(\theta)e^{-s\theta}d\theta$  en une série de fonctions Gamma (F.10) ou une série de puissance (F.13) est établie dans l'annexe F. Cette résolution peut également servir à analyser le lieu des racines de (5.4) et déduire des conditions de stabilité.

Une alternative, plus conservative, est de restreindre l'analyse aux signes des coefficients, et d'analyser le lieu des racines de (5.4) selon les signes de  $\rho q$  et de  $N(\theta)$ .

### Développement de conditions suffisantes de stabilité explicites qui dépendent des signes des coefficients

En examinant les résultats des domaines de stabilité donnés dans la section 3.4 du chapitre 3, des développements aboutissant à des conditions suffisantes de stabilité selon les signes des coefficients sont proposés. Les figures 3.13-3.18 illustrent des domaines de stabilité en fonction des coefficients du système, en faisant varier deux de ces coefficients à la fois. Nous déduisons de chaque figure une zone où la stabilité est garantie par l'algorithme sans la condition explicite. Il est vrai que l'algorithme fournit le test le moins restrictif, par contre les critères explicites donnent une idée plus concrète de la dépendance de la stabilité aux coefficients du système et sont évidemment plus simples à employer.

Commençons par la figure 3.13. La région du troisième cadran, limitée par  $\sigma^{-+} < 0$  et  $\rho < 0$  est riche en points stables que les critères explicites comparés ne sont pas capables de détecter. En gardant les signes des autres coefficients,  $\sigma^{+-} > 0$  et  $q > 0$ , nous remarquons que  $a < 0$ ,  $\rho q < 0$ ,  $d(\theta) < 0$  pour  $\theta \in [0, r]$ , et donc  $N(\theta) < 0$  pour  $\theta \in [0, r]$ . Ce cas nécessite une attention, et en analysant le lieu des racines de (5.4) avec ces signes des coefficients, des conditions de stabilité peuvent être déduites.

Par symétrie du problème, le même raisonnement s'applique à la figure 3.15, obtenue en variant le couple  $(q, \sigma^{+-})$ . Les coefficients à prendre en considération possèdent les signes suivants :  $\sigma^{+-} < 0$ ,  $q < 0$ ,  $\sigma^{-+} > 0$  et  $\rho > 0$ .

De la figure 3.14, obtenue en faisant varier le couple  $(\rho, \sigma^{+-})$ , la région intéressante à étudier est :  $\sigma^{+-} > 0$ ,  $\sigma^{-+} > 0$ ,  $\rho < 0$  et  $q > 0$ . De même, due à la symétrie du problème, une étude avec les signes opposés est envisageable.

En suivant la même démarche, d'autres régions peuvent être déduites. Ces régions dépendent des signes des coefficients ainsi que des valeurs numériques des coefficients du système associées dans la simulation.

### Étendre le résultat pour un système comprenant des couplages diagonaux et anti-diagonaux

Les résultats de notre travail, conditions explicite de la proposition 3 et numérique par l'algorithme, peuvent être étendus en ajoutant au système (5.1)-(5.2) des couplages diagonaux à l'intérieur du domaine pour aboutir à la forme

$$u_t(t, x) + \frac{1}{r_1}u_x(t, x) = \sigma^{++}u(t, x) + \sigma^{+-}v(t, x) \quad (5.7a)$$

$$v_t(t, x) - \frac{1}{r_2}v_x(t, x) = \sigma^{-+}u(t, x) + \sigma^{--}v(t, x), \quad (5.7b)$$

avec les conditions initiales

$$u(0, \cdot) \doteq u_0(\cdot), \quad (5.8a)$$

$$v(0, \cdot) \doteq v_0(\cdot) \quad (5.8b)$$

dans  $L^2([0, 1]; \mathbb{R})$  et les conditions aux bords

$$u(t, 0) = qv(t, 0) \quad (5.9a)$$

$$v(t, 1) = \rho u(t, 1). \quad (5.9b)$$

En vue de développer des conditions suffisantes de stabilité de (5.7)-(5.9) en adoptant la même approche présentée dans le chapitre 3, nous commençons par appliquer une transformation backstepping ayant une forme similaire à (3.10)

$$u(t, x) = \bar{\alpha}(t, x) - \int_0^x \bar{L}^{11}(x, y)\bar{\alpha}(t, y)dy - \int_0^x \bar{L}^{12}(x, y)\bar{\beta}(t, y)dy \quad (5.10a)$$

$$v(t, x) = \bar{\beta}(t, x) - \int_0^x \bar{L}^{21}(x, y)\bar{\alpha}(t, y)dy - \int_0^x \bar{L}^{22}(x, y)\bar{\beta}(t, y)dy. \quad (5.10b)$$

Nous visons par cette transformation à obtenir comme système cible une copie de (3.14)-(3.16) obtenu dans la section 3.2.1 avec des couplages diagonaux dans le domaine. La résolution du système cible mène à une équation aux différences avec un retard distribué, à laquelle l'équation caractéristique suivante est associée

$$\hat{\phi}(s) \doteq 1 - \rho q e^{\sigma^{++}r_1 + \sigma^{--}r_2} e^{-sr} - \int_0^r \bar{N}(\theta) e^{-s\theta} d\theta = 0 \quad (5.11)$$

avec

$$\begin{aligned} \bar{N}(\theta) &= \frac{1}{r_2} e^{\sigma^{--}\theta} \bar{N}^\beta \left(1 - \frac{\theta}{r_2}\right) \mathbb{1}_{[0, r_2]}(\theta) \\ &+ \frac{q}{r_1} e^{(\sigma^{--} - \sigma^{++})r_2} e^{\sigma^{++}\theta} \bar{N}^\alpha \left(\frac{\theta - r_2}{r_1}\right) \mathbb{1}_{(r_2, r]}(\theta), \quad \theta \in [0, r], \end{aligned} \quad (5.12)$$

et

$$\bar{N}^\alpha(y) \doteq \bar{L}^{21}(1, y) - \rho \bar{L}^{11}(1, y) \quad (5.13a)$$

$$\bar{N}^\beta(y) \doteq \bar{L}^{22}(1, y) - \rho \bar{L}^{12}(1, y). \quad (5.13b)$$

Il reste à déterminer l'expression explicite de  $\bar{N}(\theta)$  de la manière établie dans l'annexe E. Pour cette finalité, nous avons établi les EDP satisfaites par les noyaux  $\bar{L}^{ij}$ ,  $i, j \in \{1, 2\}$  par la procédure de backstepping. Ensuite, en suivant la méthode des caractéristiques, nous avons trouvé les équations intégrales satisfaites par  $\bar{L}^{ij}$ . Finalement, nous avons appliqué la méthode des itérations successives dans l'intention d'aboutir à une série de puissance similaire à (E.7). Les premiers termes de ces séries ont été exprimés comme dans (E.8)-(E.15).

Toutefois, une expression du terme général des séries de puissance reste un problème ouvert à résoudre. La difficulté est qu'à chaque itération, un terme supplémentaire s'ajoute, complexifiant ainsi le calcul.

Néanmoins, une alternative est de calculer numériquement les noyaux  $\bar{L}^{ij}$ , et ensuite  $\bar{N}(\theta)$ . Nous attirons l'attention qu'un critère suffisant de stabilité est déduit de (3.43). Ce critère s'écrit

$$\int_0^r |\bar{N}(\theta)| d\theta < 1 - |\rho q| e^{\sigma^{++}r_1 + \sigma^{--}r_2}. \quad (5.14)$$

En outre, une majoration de la valeur absolue de  $\bar{N}(\theta)$  et de  $\bar{N}'(\theta)$  obtenus explicitement par un développement ou numériquement, peut être utilisée afin de construire un algorithme, version modifiée de celui construit dans la section 3.3.2. Cet algorithme teste la stabilité du système (5.7)-(5.9) en vérifiant l'absence de racine à partie réelle positive de (5.11), d'une manière moins conservative que le critère explicite à développer.

## 5.2 Perspectives du travail sur la commande

Les perspectives du travail sur la commande portent sur l'extension des résultats vers un cadre assez général et doivent compléter le travail effectué par la conception d'un observateur. Nous proposons ensuite d'interconnecter deux modules (EDP-EDO-EDP) en vue de les stabiliser par une commande au bord. Étant donné que les résultats récents sur la commande par backstepping prennent en considération une robustesse vis-à-vis du retard, ils présentent donc une approche pragmatique pour une mise en œuvre de la commande sur des applications industrielles. Nous proposons ainsi une validation expérimentale de cette loi de commande sur un banc d'essai. Ces perspectives sont détaillées dans les quatre points présentés ci-dessous.

### Stabilisation par backstepping d'un système EDO-EDP-EDO avec une matrice d'entrée non inversible

Nous avons considéré dans notre développement le problème de stabilisation d'une ligne de transmission avec des conditions aux bords dynamiques (décrites par des EDO aux deux bords du domaine), avec l'hypothèse d'une matrice d'entrée inversible. Toutefois, la réalité exige parfois des contraintes qui sont plus difficiles à manipuler. Nous rappelons que la commande élaborée élimine complètement la réflexion proximale à travers une action dérivée par retour d'état. Bien que cette approche stabilise exponentiellement le système, elle aboutit aux effets non désirables suivants :

- marge de robustesse nulle vis-à-vis du retard (conséquence de l'annulation du terme de réflexion),
- stabilité interne dégradée (conséquence de l'action dérivée dans la commande),
- exigence d'une régularité forte des conditions initiales (classe  $C^1$ ). Cette régularité est imposée par la présence d'un terme évaluant un état EDP en un point du domaine dans la transformation backstepping. Une faible régularité ( $L^2$  par exemple) a pour effet de dégrader les propriétés de la transformation backstepping (comme la bornitude).

Nous en déduisons alors la nécessité de changer de paradigme afin de répondre aux besoins de la réalité. Nous proposons de stabiliser le problème considéré dans le chapitre 4, avec une relaxation de l'hypothèse faite, *i.e.* une matrice d'entrée non nécessairement inversible, mais qui assure la commandabilité du système. Afin de garantir une robustesse vis-à-vis du retard et à la fois une stabilité interne, nous proposons de garder les termes de réflexion intacts, ce qui évite la nécessité d'une action dérivée dans la commande, et nous permet en outre de travailler avec des solutions faibles (en  $L^2$  par exemple). Néanmoins, la stabilité du système en boucle fermée sera garantie seulement si les conditions aux bords, inchangées, présentent une dissipativité. En d'autres termes, nous ferons l'hypothèse que la valeur absolue du produit des coefficients de réflexion est strictement inférieure à l'unité. Cette hypothèse n'est pas restrictive, puisque si elle n'est pas vérifiée, le système ne peut pas être stabilisé d'une manière robuste par un retour d'état linéaire [Auriol et al., 2017].

Réécrivons le système de départ de (4.6) de la manière suivante

$$u_t(t, x) = -\lambda u_x(t, x) + \sigma^{+-}(x)v(t, x) \quad (5.15a)$$

$$v_t(t, x) = \mu v_x(t, x) + \sigma^{-+}(x)u(t, x) \quad (5.15b)$$

$$\dot{X}(t) = A_0X(t) + E_0v(t, 0) + B_0U(t) \quad (5.15c)$$

$$\dot{Y}(t) = A_1Y(t) + E_1u(t, 1) \quad (5.15d)$$

$$u(t, 0) = qv(t, 0) + C_0X(t) \quad (5.15e)$$

$$v(t, 1) = \rho u(t, 1) + C_1Y(t) \quad (5.15f)$$

pour tout  $t \geq 0$  et  $x \in [0, 1]$ .  $\lambda, \mu > 0$  sont les vitesses associées aux deux équations de transport (5.15a) et (5.15b) respectivement.  $\sigma^{ij} \in C^0([0, 1]; \mathbb{R})$  ( $i, j \in \{+, -\}$ ) représentent des couplages à l'intérieur du domaine entre les états des EDP.  $U(t) \in \mathbb{R}^n$  est l'entrée de commande. Les conditions initiales associées sont

$$X(0) \doteq X_0, \quad (5.16a)$$

$$Y(0) \doteq Y_0 \quad (5.16b)$$

appartenant à  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{R}^m$  respectivement, et

$$u(0, \cdot) \doteq u_0(\cdot), \quad (5.17a)$$

$$v(0, \cdot) \doteq v_0(\cdot) \quad (5.17b)$$

dans  $L^2([0, 1]; \mathbb{R})$ . Nous modifions les hypothèses du chapitre 4 de la manière suivante.

**Hypothèse 5.** La paire  $(A_0, B_0)$  est commandable.

**Hypothèse 6.**  $\text{rang}(C_0) \geq 1$ .

**Hypothèse 7.**  $\rho \neq 0$  et  $|\rho q| < 1$ .

**Hypothèse 8.** La paire  $(A_1, E_1)$  est stabilisable (i.e. il existe  $F_1 \in \mathbb{R}^{1 \times m}$  tel que la matrice  $A_1 + E_1F_1$  est Hurwitz).

Nous exposons dans ce chapitre les premiers développements effectués sans détailler les calculs. La commande est dissociée en commande par backstepping  $U_{BS}$  et une commande  $U_{EDO}$  du système cible obtenu suite à l'application de  $U_{BS}$  avec une transformation adéquate. L'objectif de  $U_{BS}$  est d'éliminer les termes de couplage à l'intérieur du domaine entre les EDP, et de stabiliser la dynamique de chaque EDO. Cependant, les interconnexions entre les états EDP et EDO dans le système cible persistent. Une résolution de ce système aboutit à un système à retard de type neutre avec retard dans la commande, et sa stabilisation s'effectue grâce à  $U_{EDO}$ .

Nous adoptons une transformation de backstepping inverse, ayant une forme similaire à (H.35), sans pour autant considérer le terme  $\bar{R}_0\beta(t, 0)$  dans (H.35c). Avec un choix approprié de  $U_{BS}(t)$  et en suivant les démarches de la commande par backstepping, les équations bien-posées (qui admettent une solution unique) des noyaux et des coefficients de la transformation sont établies et le système cible suivant est obtenu

$$\alpha_t(t, x) = -\lambda \alpha_x(t, x) \quad (5.18a)$$

$$\beta_t(t, x) = \lambda \beta_x(t, x) \quad (5.18b)$$

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) = & \bar{A}_0\xi(t) + E_0\beta(t, 0) + M\eta(t) + \int_0^1 M^\alpha(y)\alpha(t, y)dy \\ & + \int_0^1 M^\beta(y)\beta(t, y)dy + B_0U_{EDO}(t) \end{aligned} \quad (5.18c)$$

$$\dot{\eta}(t) = \bar{A}_1\eta(t) + E_1\alpha(t, 1) \quad (5.18d)$$

$$\alpha(t, 0) = q\beta(t, 0) + C_0\xi(t) \quad (5.18e)$$

$$\beta(t, 1) = \rho\alpha(t, 1) + C_1\eta(t), \quad (5.18f)$$

avec  $\bar{A}_0 \doteq A_0 + B_0 F_0$  et  $\bar{A}_1 \doteq A_1 + E_1 F_1$  Hurwitz. La matrice  $M$  et les coefficients  $M^\alpha$  et  $M^\beta$  dépendent des coefficients et des noyaux de la transformation backstepping. Les conditions initiales des états  $\xi$  et  $\eta$  sont  $\xi_0 \doteq \xi(0) \in \mathbb{R}^n$  et  $\eta_0 \doteq \eta(0) \in \mathbb{R}^m$  respectivement. Les conditions initiales des états  $\alpha$  et  $\beta$  sont  $\alpha_0(\cdot) \doteq \alpha(0, \cdot)$  et  $\beta_0(\cdot) \doteq \beta(0, \cdot) \in L^2([0, 1]; \mathbb{R})$ . La résolution de (5.18) aboutit au système à retard de type neutre suivant.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\xi}(t) \\ \dot{\eta}(t) \end{bmatrix} - \rho q \begin{bmatrix} \dot{\xi}(t - \tau) \\ \dot{\eta}(t - \tau) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \bar{A}_0 & M \\ 0_{n \times n} & \bar{A}_1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix} - \rho q \begin{bmatrix} \xi(t - \tau) \\ \eta(t - \tau) \end{bmatrix} \right) \\ &+ \begin{bmatrix} \rho E_0 C_0 & 0_{m \times m} \\ 0_{n \times n} & q E_1 C_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(t - \tau) \\ \eta(t - \tau) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & E_0 C_1 \\ E_1 C_0 & 0_{m \times m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \left( t - \frac{1}{\lambda} \right) \\ \eta \left( t - \frac{1}{\mu} \right) \end{bmatrix} \\ &+ \int_0^\tau \begin{bmatrix} M^\xi(\theta) C_0 & M^\eta(\theta) C_1 \\ 0_{n \times n} & 0_{m \times m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(t - \theta) \\ \eta(t - \theta) \end{bmatrix} d\theta \\ &+ \begin{bmatrix} B_0 \\ 0_{m \times m} \end{bmatrix} (U(t) - \rho q U(t - \tau)). \end{aligned} \quad (5.19)$$

où nous avons défini  $\tau \doteq \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu}$ .  $M^\xi$  et  $M^\eta$  sont des combinaisons des fonctions  $M^\alpha$  et  $M^\beta$ .

L'étape qui va suivre est de trouver la loi de commande  $U_{EDO}(t)$  qui stabilise ce système. Nous proposons d'employer une commande par retour de sortie via une fonction de Lyapunov [Park, 2004].

### Construction d'un observateur du système EDO-EDP-EDO

La commande backstepping conçue pour le système EDO-EDP-EDO est un retour d'état EDO et EDP sur tout le domaine. Elle exige donc la connaissance de la valeur de ces états. La construction d'un observateur s'avère ainsi nécessaire. L'observateur peut être construit par la technique backstepping (voir [Vazquez et al., 2011] pour un système de deux EDP hyperboliques et [Hasan et al., 2016] pour un système EDP-EDO en cascade) ou en définissant un problème de commande dual au problème de l'observation (voir [Auriol and Di Meglio, 2016b]).

### Stabilisation par backstepping d'un système EDP-EDO-EDP

Après la stabilisation d'un cas général d'une ligne de transmission modélisée par un système EDO-EDP-EDO, nous visons à interconnecter deux lignes couplées entre elles à travers une dynamique EDO. Cette interconnexion est illustrée sur la figure 5.1. Les états EDP  $u$ ,  $v$ ,  $y$  et  $z$  évoluent suivant  $x \in [0, 1]$ . En vue de se placer dans un cadre général, les couplages entre les états EDP et la dynamique EDO en  $X(t) \in \mathbb{R}^n$  sont bidirectionnels, et la commande est injectée au bord  $x = 0$  de l'état  $u$ . Les équations qui décrivent cette

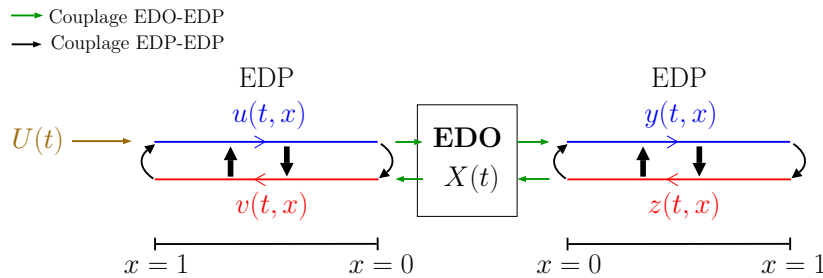


FIGURE 5.1 – Représentation schématique du système EDP-EDO-EDP couplées.

interconnexion sont les suivantes.

$$u_t(t, x) = -\lambda_1 u_x(t, x) + \sigma_1^{+-}(x)v(t, x) \quad (5.20a)$$

$$v_t(t, x) = \mu_1 v_x(t, x) + \sigma_1^{-+}(x)u(t, x) \quad (5.20b)$$

$$u(t, 1) = q_1 v(t, 1) + U(t) \quad (5.21a)$$

$$v(t, 0) = \rho_1 u(t, 0) + C_1 X(t) \quad (5.21b)$$

$$\dot{X}(t) = AX(t) + B_1 u(t, 0) + B_2 z(t, 0) \quad (5.22)$$

$$y_t(t, x) = -\lambda_2 y_x(t, x) + \sigma_2^{+-}(x)z(t, x) \quad (5.23a)$$

$$z_t(t, x) = \mu_2 z_x(t, x) + \sigma_2^{-+}(x)y(t, x) \quad (5.23b)$$

$$y(t, 0) = q_2 z(t, 0) + C_2 X(t) \quad (5.24a)$$

$$z(t, 1) = \rho_2 y(t, 1) \quad (5.24b)$$

pour tout  $t \geq 0$ , et position  $x \in [0, 1]$ .  $\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2 > 0$  sont les vitesses de transport associées aux quatre équations de transport (5.20a), (5.20b), (5.23a) et (5.23b) respectivement.

$\sigma_1^{ij}$  (respectivement  $\sigma_2^{ij}$ )  $\in C^0([0, 1]; \mathbb{R})$  ( $i, j \in \{+, -\}$ ) représentent des couplages à l'intérieur du domaine entre les états des EDP  $u$  et  $v$  (respectivement  $y$  et  $z$ ). Les matrices  $A, B_1, B_2, C_1$  et  $C_2$  sont réelles et de dimensions appropriées.  $U(t) \in \mathbb{R}$  est l'entrée de commande.

Les conditions initiales sont  $u(0, x) \doteq u_0(t), v(0, x) \doteq v_0(t), y(0, x) \doteq y_0(t), z(0, x) \doteq z_0(t) \in L^2([0, 1]; \mathbb{R})$ , et  $X(0) \doteq X_0 \in \mathbb{R}^n$ .

La stabilisation par backstepping de ce système se base sur les résultats de la stabilisation robuste d'un système EDP-EDO présentés dans [Auriol et al., 2018] avec ceux de la stabilisation d'un système EDO-EDP-EDO. La commande aura pour effet d'éliminer les couplages à l'intérieur du domaine, une partie de la réflexion proximale et de stabiliser l'état EDO.

### Exécution de la commande robuste d'un système EDP-EDO par expérimentation sur banc d'essai

Durant notre travail de thèse, nous avons apprécié la collaboration avec 'Department of Automatic Control Engineering' de la TUM (Technical University of Munich en Allemagne), et le chercheur Richard Kern qui travaille sur la stabilisation des EDP hyperboliques modélisant des écoulements de gaz à l'intérieur de tuyaux de transmission. Le modèle simplifié est donné dans [Rager et al., 2015] et représente deux EDP linéaires de premier ordre couplées. Les états sont la pression et le débit massique. Richard Kern travaille sur la stabilisation par backstepping et l'observation de ces écoulements en dimension infinie, avec mise en œuvre expérimentale sur un banc d'essai.

Nous visons à appliquer sur ce banc d'essai la commande par backstepping qui préserve une quantité de la réflexion proximale, présentée dans [Auriol et al., 2018]. Cette commande a pour effet de garantir une marge de robustesse non nulle vis-à-vis du retard dans la rétroaction pour un système EDP-EDO couplées. L'idée est de pouvoir atteindre les performances étudiées principalement pour un système linéaire et attendues par un système dont les termes non linéaires sont approchés ou simplifiés, et de pouvoir générer une condition au bord dynamique avec un modèle EDO précis. Les résultats attendus sont l'efficacité de la loi de commande à stabiliser le système quand un retard intervient dans la rétroaction et de calculer, si possible, la marge de retard admissible pour la stabilisation. En d'autres termes, nous proposons d'estimer la valeur du retard à partir de laquelle le système en boucle fermée

devient instable. Les résultats peuvent servir comme confirmation expérimentale de notre contribution théorique, et seront considérés comme une base pour de futures implantations d'une commande aux bords appliquée à des systèmes modélisés par des EDP hyperboliques du premier ordre couplées à une dynamique EDO.

Le travail de recherche n'étant jamais achevé, une conclusion clôturant ne nous semble pas adéquate. Cependant, nous espérons que les résultats présentés vont guider d'autres travaux à être enchaînés, ou améliorés pour une meilleure exécution ou implantation. Les outils d'analyse et de commande constituent les éléments essentiels qui approvisionnent un automaticien, une fois apprivoisés...

## Annexe A.

# Dérivation des équations du télégraphiste à partir de la théorie de Maxwell sur l'électromagnétisme pour une ligne de transmission coaxiale



TABLEAU A.1 – Définitions et unités.

$d$	Induction électrique	C/m <sup>2</sup>
$e$	Champ électrique	V/m
$b$	Induction magnétique	Wb/m <sup>2</sup>
$h$	Champ magnétique	A/m
$p$	Polarisation	C/m <sup>2</sup>
$m$	Magnétisation	A/m
$q_v$	Densité de charge électrique	C/m <sup>3</sup>
$\vec{j}$	Densité de courant	A/m <sup>2</sup>
$\sigma$	Conductivité	S/m
$\mu_0$	Perméabilité magnétique du vide	H/m
$\varepsilon_0$	Permittivité diélectrique du vide	F/m

Nous établissons les équations du télégraphiste qui régissent l'état électromagnétique dans une ligne de transmission coaxiale à partir des équations de Maxwell. Nous considérons également les pertes dans la ligne qui apparaissent sous forme de résistance dans le conducteur et de conductance dans le diélectrique. Cette analyse sert comme support théorique pour la modélisation des lignes de transmission électriques coaxiales en courant continu (DC). Les équations du télégraphiste sont établies dans la littérature pour le transport d'un courant alternatif (AC) en fonction de la fréquence d'excitation. Nous adoptons alors un développement similaire pour le cas DC. Les points importants que nous soulignons dans cette étude sont les hypothèses à prendre en considération dans une telle modélisation concernant les champs électrique et magnétique (à l'intérieur des conducteurs et dans le diélectrique), et les équations du télégraphiste pour la ligne traitée avec les expressions explicites des coefficients (inductance, résistance, capacité et conductance) en termes des paramètres de la ligne (dimensions, conductivité, permittivité et perméabilité). Nous nous référons à [Orta, 2009], [Bossavit, 1998] et [Magnusson et al., 2000] pour notre analyse dans cette annexe. Sauf dans les EDP satisfaites par la tension et le courant, nous n'explicitons pas par ailleurs la dépendance par rapport au temps pour simplifier l'écriture. Commençons par reprendre les équations de Maxwell.

$$\nabla \cdot d = q_v \quad (\text{A.1a})$$

$$\nabla \cdot b = 0 \quad (\text{A.1b})$$

$$\nabla \times e = -\frac{\partial b}{\partial t} \quad (\text{A.1c})$$

$$\nabla \times h = \frac{\partial d}{\partial t} + \vec{j}. \quad (\text{A.1d})$$

La définition de chaque terme de (A.1), ainsi que son unité sont listées dans le tableau A.1. L'opérateur de divergence est représenté par  $\nabla \cdot$  et l'opérateur de rotationnel par  $\nabla \times$ .

Les équations (A.1a) et (A.1b) sont les lois de Gauss dans un champ électrostatique et magnétique respectivement, tandis que (A.1c) découle de la loi de Faraday et (A.1d) est la loi d'Ampère généralisée. La loi d'Ohm dévoile une relation dynamique entre la densité du courant et le champ électrique de la manière suivante.

$$\vec{j} = \sigma e. \quad (\text{A.2})$$

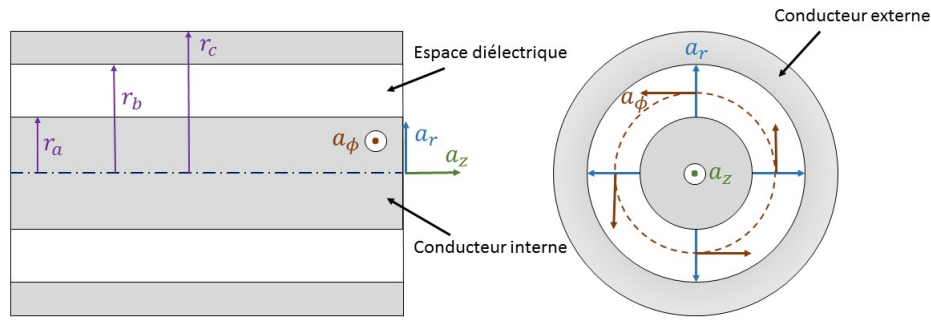


FIGURE A.1 – Ligne de transmission coaxiale.

Les inductions électrique et magnétique sont reliées aux champs électrique et magnétique respectivement par les équation suivantes.

$$d = \varepsilon_0 e + p \quad (\text{A.3a})$$

$$b = \mu_0(h + m), \quad (\text{A.3b})$$

avec  $\varepsilon_0$ ,  $\mu_0$ ,  $p$  et  $m$  définis dans le tableau A.1. Cependant, nous considérons dans notre travail un type de matériau dans la ligne de transmission qui ne présente ni une polarisation permanente ( $p$ ) ni une magnétisation permanente ( $m$ ). Nous supposons également que la polarisation et la magnétisation sont proportionnelles aux champs électrique et magnétique respectivement (comportement linéaire). En conséquence, nous avons

$$d = \varepsilon e \quad (\text{A.4a})$$

$$b = \mu h, \quad (\text{A.4b})$$

où  $\varepsilon$  et  $\mu$  sont respectivement la permittivité et la perméabilité du matériau considéré. Dans la suite, nous supposons que les scalaires  $\sigma$ ,  $\mu$  et  $\varepsilon$  sont linéaires<sup>1</sup>, isotropique<sup>2</sup>, homogènes, invariants dans le temps et indépendants de la fréquence.

Considérons la ligne de transmission coaxiale montrée sur la figure A.1, avec les coordonnées cylindriques  $(r, \phi, z)$  et les vecteurs unitaires  $(a_r, a_\phi, a_z)$ . Nous sommes concernés par l'étude de l'interaction entre les champs et leur comportement dans le conducteur interne, le conducteur externe et l'espace diélectrique en vue de déterminer les équations du télégraphiste. La démarche que nous adoptons se résume par les étapes suivantes.

1. Nous présentons les différentes hypothèses faites pour la ligne de transmission coaxiale, au niveau du conducteur et du diélectrique.
2. Nous écrivons les équations de Maxwell dans les coordonnées cylindriques. Nous aboutissons ainsi à une description de l'évolution des champs électrique et magnétique dans le temps et dans l'espace.
3. Nous trouvons la relation entre le champ électrique et la tension et celle entre le champ magnétique et le courant.
4. Nous déduisons les EDP satisfaites par la tension et le courant et les expressions explicites des coefficients de ces EDP en termes des paramètres de la ligne.

---

1. Indépendants de l'amplitude du champ.

2. Indépendants de la direction du champ.

Avant de réécrire les équations de Maxwell pour une ligne coaxiale et dans les coordonnées cylindriques, nous citons les différentes hypothèses faites dans les deux régions : conducteur et diélectrique.

1. Dans le conducteur,
  - (a) la circulation du courant est uniquement longitudinale (selon l'axe  $a_z$ ) et s'effectue en sens opposés dans les conducteurs,
  - (b) dû à la symétrie de la géométrie, le courant et les charges sont uniformément distribués sur une circonférence de chaque conducteur (indépendants de  $\phi$ ),
  - (c) les conducteurs interne et externe possèdent la même conductivité finie  $\sigma_c$ ,
  - (d) le champ électrique est uniquement longitudinal ( $e = e_z$ )<sup>3</sup> et le champ magnétique est négligé,
  - (e) l'effet de peau<sup>4</sup> n'est pas présent pendant les régimes transitoire et permanent. Ceci engendre une distribution uniforme du courant dans n'importe quelle section du conducteur,
  - (f) l'effet du flux du courant de déplacement<sup>5</sup> défini par  $\bar{j}_D = \frac{\partial d}{\partial t}$  est négligé dans n'importe quelle section de la ligne de transmission dans notre développement.
2. Dans le diélectrique,
  - (a) la circulation du courant est uniquement radiale,
  - (b) la configuration d'un champ  $e$  purement radial et d'un champ  $h$  purement circonferenciel est adoptée ( $e = e_r$ ,  $h = h_\phi$ ),
  - (c)  $e_r$  et  $h_\phi$  sont uniformément distribués sur une circonférence.

La figure A.2 illustre la répartition de ces champs dans une ligne de transmission coaxiale. La considération d'un champ  $e$  purement radial dans le diélectrique est justifiée par le fait que les lignes de  $e$  s'étendent des charges d'une certaine polarité vers les charges ayant une polarité opposée, et en conséquence, d'un conducteur vers un autre. En outre, l'interprétation d'un champ  $h$  purement circonferenciel est que les lignes de champ de  $h$  forment des boucles fermées autour des conducteurs porteurs du courant.

Nous désignons par les indices ( $c$ ) et ( $d$ ) les paramètres associés aux conducteurs et au diélectrique respectivement. Les composantes des champs électrique et magnétique sont respectivement  $(e_r, 0, e_z)$  et  $(0, h_\phi, 0)$ .

Nous considérons la loi de Faraday décrite dans (A.1c) et nous la réécrivons dans les coordonnées cylindriques en utilisant la relation (A.4b). En tenant compte des hypothèses faites sur les directions des lignes de champ ( $e_\phi = 0, h_r = h_z = 0$ ), nous obtenons les équations suivantes.

$$\frac{\partial e_z}{\partial \phi} = 0 \quad (\text{A.5a})$$

$$\frac{\partial e_r}{\partial \phi} = 0 \quad (\text{A.5b})$$

$$\frac{\partial e_r}{\partial z} - \frac{\partial e_z}{\partial r} = -\mu_d \frac{\partial h_\phi}{\partial t}. \quad (\text{A.5c})$$

Les équations (A.5a) et (A.5b) traduisent que les champs  $e_z$  et  $e_r$  dans les conducteurs et le diélectrique respectivement sont indépendants de  $\phi$ , donc uniformément répartis sur une

3. Le champ électrique est nul dans un conducteur sans perte, mais ce n'est pas le cas que nous traitons.

4. Ce phénomène apparaît plus probablement quand une excitation sinusoïdale prend place et produit une non-uniformité de la densité du courant.

5. Le champ électrique longitudinal est beaucoup plus faible que le champ électrique radial, dû à la conductivité élevée du conducteur.

circonférence. De la même manière, nous réécrivons la loi d'Ampère généralisée (A.1d) dans les coordonnées cylindriques, en substituant la densité de courant  $\bar{j}$  par son expression de (A.2) (loi d'Ohm généralisée) et l'induction  $d$  par son expression de (A.4a), pour obtenir une autre forme d'interaction entre les champs électrique et magnétique.

$$\frac{\partial h_\phi}{\partial z} = -\varepsilon_d \frac{\partial e_r}{\partial t} - \sigma_d e_r. \quad (\text{A.6})$$

Conformément à l'hypothèse 2b,  $e_z$  est nul dans le diélectrique et par suite, le terme  $\frac{\partial e_z}{\partial r}$  dans (A.5c) disparaît. Néanmoins, il n'est pas nécessairement nul sur les surfaces de frontière entre les conducteurs et le diélectrique. Les équations (A.5c) et (A.6) décrivent l'évolution des champs  $e$  et  $h$  dans la ligne à travers des dérivations partielles, temporelle et spatiale, du premier ordre de ces champs. Remarquons que la dérivation par rapport à  $r$  dans le terme  $\frac{\partial e_z}{\partial r}$  de (A.5c) peut être éliminée par une intégration par rapport à la coordonnée  $r$ , et par suite, l'évolution spatiale se fait d'une manière mono-dimensionnelle selon la direction  $z$  uniquement.

Puisque nous sommes intéressés par l'évolution de la tension  $\bar{v}(z, t)$  et du courant  $\bar{i}(z, t)$  sous la forme d'EDP en s'appuyant sur (A.5c) et (A.6), il s'avère nécessaire d'établir la relation entre le champ électrique  $e$  et la tension  $\bar{v}$ , et entre le champ magnétique  $h$  et le courant  $\bar{i}$ . Une fois ces relations trouvées, nous intégrons (A.5c) et (A.6) par rapport à  $r$  de  $r_a$  à  $r_b$  en vue d'établir les EDP satisfaites par  $\bar{v}(z, t)$  et  $\bar{i}(z, t)$ .

La tension  $\bar{v}$  en tout point longitudinal  $z$  est définie par l'intégrale curviligne du champ électrique  $e$  de  $r_a$  à  $r_b$ .

$$\bar{v}(z) = \int_{r_a}^{r_b} e_r(z) dr. \quad (\text{A.7})$$

En vue de déterminer la relation entre le champ magnétique  $h_\phi$  et le courant  $\bar{i}$ , nous procédons au calcul du flux des deux membres de (A.1d) à travers une section de la ligne. Nous définissons alors sur la figure A.2 la surface ( $S$ ) comme un disque de rayon  $r$  contenant le conducteur interne ( $r_a < r < r_b$ ). Prenons (A.1d) et appliquons une intégrale double sur ( $S$ ) à chaque terme.

$$\iint_S \nabla \times h_\phi dS = \iint_S \frac{\partial d}{\partial t} dS + \iint_S \bar{j} dS. \quad (\text{A.8})$$

Le théorème de Stokes nous permet d'évaluer le flux du rotationnel de  $h$  traversant ( $S$ ) par une intégration curviligne de  $h$  sur  $\partial S$ , la frontière de ( $S$ ). En constatant que  $h_\phi$  est constant sur  $\partial S$  (hypothèse 2c), nous obtenons

$$\iint_S \nabla \times h_\phi dS = \oint_{\partial S} h_\phi = 2\pi r h_\phi dl. \quad (\text{A.9})$$

Le flux du courant de déplacement  $\frac{\partial d}{\partial t}$  à travers ( $S$ ) est égal à celui de sa composante longitudinale. Cependant, nous négligeons sa contribution (voir hypothèse 1f). En outre, le courant  $\bar{i}$  est par définition égal au flux de la densité de courant à travers ( $S$ )

$$\iint_S \bar{j} dS = \bar{i}. \quad (\text{A.10})$$

Substituons (A.9) et (A.10) dans (A.8) pour obtenir la relation suivante

$$h_\phi(r, z) = \frac{\bar{i}(z)}{2\pi r}. \quad (\text{A.11})$$

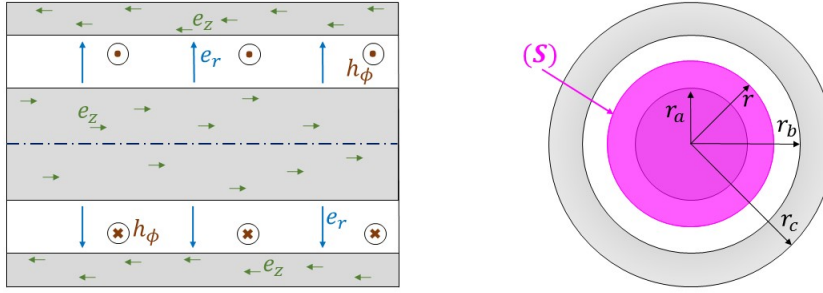


FIGURE A.2 – Distribution des champs électrique et magnétique dans une ligne de transmission coaxiale.

Nous utilisons (A.7) et (A.11) et intégrons (A.5c) par rapport à  $r$  de  $r_a$  à  $r_b$  pour obtenir l'EDP suivante.

$$\frac{\partial}{\partial z} \bar{v}(z, t) = -\frac{\mu_d}{2\pi} \ln\left(\frac{r_b}{r_a}\right) \frac{\partial}{\partial t} \bar{i}(z, t) + e_z(r_b, z, t) - e_z(r_a, z, t). \quad (\text{A.12})$$

Les termes  $e_z(r_b, z, t)$  et  $e_z(r_a, z, t)$  sont déduits des expressions du champ  $e_z$  dans les conducteurs externe et interne respectivement. Nous prenons alors chaque conducteur à part et établissons, à travers la loi d'Ohm généralisée (A.2), la relation entre  $e_z(r, z)$  et  $\bar{i}(r, z)$ , pour  $r \in (0, r_a]$  (conducteur interne) et pour  $r \in [r_b, r_c)$  (conducteur externe). Commençons par le conducteur interne. En nous appuyant sur l'hypothèse 1e, le courant qui traverse une section équivalente à un disque de rayon  $r$  ( $0 < r \leq r_a$ ) est proportionnel à la surface de cette section, *i.e.*

$$\bar{i}(r, z) = \bar{j}(z) \pi r^2. \quad (\text{A.13})$$

La loi d'Ohm (A.2) nous permet d'écrire

$$e_z(r, z) = \frac{\bar{i}(r, z)}{\pi r^2 \sigma_c} \quad \text{pour } 0 < r \leq r_a. \quad (\text{A.14})$$

Pour le conducteur externe, nous prenons la section qui consiste en un anneau de rayon interne  $r \in [r_b, r_c)$  et de rayon externe  $r_c$ . Nous avons par suite

$$e_z(r, z) = -\frac{\bar{i}(r, z)}{\pi(r_c^2 - r^2)\sigma_c} \quad \text{pour } r_b \leq r < r_c. \quad (\text{A.15})$$

Le signe négatif dans (A.15) découle du fait que le courant circule dans des sens opposés dans les conducteurs interne et externe (voir hypothèse 1a).

En substituant  $r = r_a$  dans (A.14) et  $r = r_b$  dans (A.15),  $\bar{i}(r, z)$  prend la valeur du courant total  $\bar{i}(z, t)$  qui traverse le conducteur à la position  $z$  et à l'instant  $t$ . En conséquence, (A.12) s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial z} \bar{v}(z, t) = -\frac{\mu_d}{2\pi} \ln\left(\frac{r_b}{r_a}\right) \frac{\partial}{\partial t} \bar{i}(z, t) - \frac{1}{\pi \sigma_c} \left( \frac{1}{r_c^2 - r_b^2} + \frac{1}{r_a^2} \right) \bar{i}(z, t). \quad (\text{A.16})$$

Intégrons maintenant (A.6) par rapport à  $r$  de  $r_a$  à  $r_b$ .

$$\frac{\partial}{\partial z} \bar{i}(z, t) = -\frac{2\pi \varepsilon_d}{\ln\left(\frac{r_b}{r_a}\right)} \frac{\partial}{\partial t} \bar{v}(z, t) - \frac{2\pi \sigma_d}{\ln\left(\frac{r_b}{r_a}\right)} \bar{v}(z, t). \quad (\text{A.17})$$

Les équations (A.16) et (A.17) se réécrivent de la manière suivante

$$\frac{\partial}{\partial z}\bar{v}(z,t) + L\frac{\partial}{\partial t}\bar{i}(z,t) = -R\bar{i}(z,t) \quad (\text{A.18a})$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\bar{i}(z,t) + C\frac{\partial}{\partial t}\bar{v}(z,t) = -G\bar{v}(z,t). \quad (\text{A.18b})$$

Les EDP (A.18a) et (A.18b) sont les équations du télégraphiste pour une ligne de transmission coaxiale avec

$$L = \frac{\mu_d}{2\pi} \ln\left(\frac{r_b}{r_a}\right) \quad (\text{A.19a})$$

$$R = \frac{1}{\pi\sigma_c} \left( \frac{1}{r_c^2 - r_b^2} + \frac{1}{r_a^2} \right) \quad (\text{A.19b})$$

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_d}{\ln\left(\frac{r_b}{r_a}\right)} \quad (\text{A.19c})$$

$$G = \frac{2\pi\sigma_d}{\ln\left(\frac{r_b}{r_a}\right)}. \quad (\text{A.19d})$$

$L$ ,  $R$ ,  $C$  et  $G$  sont respectivement l'inductance de la ligne par unité de longueur (H/m), la résistance du conducteur par unité de longueur (Ohm/m), la capacité du diélectrique par unité de longueur (F/m) et la conductance du diélectrique par unité de longueur (S/m).

Nous notons que quand une excitation alternative a lieu, l'équation (A.13) ne sera plus valide et la résistance sera croissante avec la fréquence. De plus, deux autres termes qui dépendent de la fréquence doivent être ajoutés à l'inductance, et  $G$  et  $C$  seront eux-mêmes dépendants de la fréquence.

La dynamique de la tension et du courant dans une ligne de transmission est décrite par deux EDP hyperboliques du premier ordre couplées. Des conditions initiales et des conditions aux bords doivent être associées à ces EDP afin d'obtenir un système bien-posé.



## Annexe B.

# Une seconde méthode pour démontrer le caractère bien-posé d'un système (cible) d'EDP hyperboliques



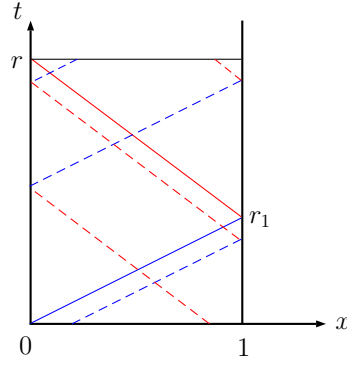


FIGURE B.1 – Lignes caractéristiques associées à l'EPD (B.1a) satisfaite par  $\alpha$  en bleu et à l'EPD (B.1b) satisfaite par  $\beta$  en rouge.

Nous présentons dans cette annexe une alternative à la démonstration de la proposition 1 du chapitre 3. Notre objectif est de montrer le caractère bien-posé dans l'espace  $\chi = L^2([0, 1]; \mathbb{R}) \times L^2([0, 1]; \mathbb{R})$  du système cible sans avoir recours au système de départ. Nous rappelons que le système cible vérifie les EDP suivantes

$$\alpha_t(t, x) + \frac{1}{r_1} \alpha_x(t, x) = 0 \quad (\text{B.1a})$$

$$\beta_t(t, x) - \frac{1}{r_2} \beta_x(t, x) = 0 \quad (\text{B.1b})$$

avec les conditions initiales

$$\alpha(0, \cdot) \doteq \alpha_0(\cdot) \quad (\text{B.2a})$$

$$\beta(0, \cdot) \doteq \beta_0(\cdot) \quad (\text{B.2b})$$

définies dans  $L^2([0, 1], \mathbb{R})$ , et les conditions aux bords

$$\alpha(t, 0) = q\beta(t, 0) \quad (\text{B.3a})$$

$$\beta(t, 1) = \rho\alpha(t, 1) + \int_0^1 N^\alpha(y)\alpha(t, y)dy + \int_0^1 N^\beta(y)\beta(t, y)dy. \quad (\text{B.3b})$$

*Démonstration.* Nous trouvons la solution de  $\alpha(t, x)$  et  $\beta(t, x)$  pour  $t \in [0, r]$  par la méthode des caractéristiques en fonction des conditions initiales et de  $\beta(\cdot, 1)$ . Nous exprimons ensuite  $\beta(t, 1)$  en utilisant la solution de  $\alpha(t, x)$  et  $\beta(t, x)$  et la condition au bord (B.3a) et montrons que  $\beta(\cdot, 1)$  vérifie une équation de Volterra de seconde espèce. Cette dernière admet une solution unique de carré intégrable.

Les courbes caractéristiques associées aux états  $\alpha$  et  $\beta$  sont des lignes droites du moment où les vitesses de propagation  $\frac{1}{r_1}$  et  $\frac{1}{r_2}$  sont des constantes (voir figure B.1). Une propriété intéressante apportée par l'utilisation de ces lignes est que les états  $\alpha$  et  $\beta$  prennent des valeurs constantes tout le long de ces lignes en raison de l'absence de terme source dans les EDP (B.1). Une étude détaillée sur la résolution par la méthode des caractéristiques est donnée dans la section H.1 de l'annexe H.

Nous considérons dans la preuve que  $r_2 \geq r_1$  (le cas  $r_2 < r_1$  peut être traité d'une manière similaire). En suivant les lignes caractéristiques de  $\alpha$  et  $\beta$ , nous avons la solution suivante pour  $x \in [0, 1]$  et  $t \in [0, r]$

$$\alpha(t, x) = \alpha_0 \left( x - \frac{t}{r_1} \right) \mathbf{1}_{[0, r_1 x]}(t) + q\beta_0 \left( \frac{t - r_1 x}{r_2} \right) \mathbf{1}_{(r_1 x, r_2 + r_1 x]}(t) + q\beta(t - r_1 x - r_2, 1) \mathbf{1}_{(r_2 + r_1 x, r]}(t) \quad (\text{B.4a})$$

$$\beta(t, x) = \beta_0 \left( x + \frac{t}{r_2} \right) \mathbf{1}_{[0, r_2(1-x)]}(t) + \beta(t - r_2(1-x), 1) \mathbf{1}_{(r_2(1-x), r]}(t). \quad (\text{B.4b})$$

En utilisant (B.4) et la condition au bord (B.3b),  $\beta(t, 1)$  vérifie

$$\begin{aligned}
\beta(t, 1) &= \rho\alpha_0 \left(1 - \frac{t}{r_1}\right) \mathbb{1}_{[0, r_1]}(t) + \rho q\beta_0 \left(\frac{t - r_1}{r_2}\right) \mathbb{1}_{(r_1, r_2]}(t) \\
&+ \int_0^{\frac{t}{r_1}} N^\alpha(y) q\beta_0 \left(\frac{t - r_1 y}{r_2}\right) dy \mathbb{1}_{[0, r_1]}(t) + \int_{\frac{t}{r_1}}^1 N^\alpha(y) \alpha_0 \left(y - \frac{t}{r_1}\right) dy \mathbb{1}_{[0, r_1]}(t) \\
&+ \int_0^1 N^\alpha(y) q\beta_0 \left(\frac{t - r_1 y}{r_2}\right) dy \mathbb{1}_{(r_1, r_2]}(t) + \int_0^{\frac{t - r_2}{r_1}} N^\alpha(y) q\beta(t - r_1 y - r_2, 1) dy \mathbb{1}_{(r_2, r]}(t) \\
&+ \int_{\frac{t - r_2}{r_1}}^1 N^\alpha(y) q\beta_0 \left(\frac{t - r_1 y}{r_2}\right) dy \mathbb{1}_{(r_2, r]}(t) + \int_0^{1 - \frac{t}{r_2}} N^\beta(y) \beta_0 \left(y + \frac{t}{r_2}\right) dy \mathbb{1}_{[0, r_2]}(t) \\
&+ \int_{1 - \frac{t}{r_2}}^1 N^\beta(y) \beta(t - r_2(1 - y), 1) dy \mathbb{1}_{[0, r_2]}(t) \\
&+ \int_0^1 N^\beta(y) \beta(t - r_2(1 - y), 1) dy \mathbb{1}_{(r_2, r]}(t).
\end{aligned} \tag{B.5}$$

En changeant la variable d'intégration des termes intégraux dans (B.5) qui dépendent de  $\beta(\cdot, 1)$ , nous aurons

$$\int_0^{\frac{t - r_2}{r_1}} N^\alpha(y) q\beta(t - r_1 y - r_2, 1) dy = \frac{q}{r_1} \int_0^{t - r_2} N^\alpha \left(\frac{t - \theta - r_2}{r_1}\right) \beta(\theta, 1) d\theta, \tag{B.6a}$$

$$\int_{1 - \frac{t}{r_2}}^1 N^\beta(y) \beta(t - r_2(1 - y), 1) dy = \frac{1}{r_2} \int_0^t N^\beta \left(1 - \frac{t - \theta}{r_2}\right) \beta(\theta, 1) d\theta, \tag{B.6b}$$

$$\int_0^1 N^\beta(y) \beta(t - r_2(1 - y), 1) dy = \frac{1}{r_2} \int_{t - r_2}^t N^\beta \left(1 - \frac{t - \theta}{r_2}\right) \beta(\theta, 1) d\theta. \tag{B.6c}$$

En substituant (B.6) dans (B.5) nous obtenons

$$\beta(t, 1) = f[\alpha_0(\cdot), \beta_0(\cdot)](t) + \int_0^t \bar{N}(t, \theta) \beta(\theta, 1) d\theta, \quad t \in [0, r], \tag{B.7}$$

où

$$\begin{aligned}
\bar{N}(t, \theta) &\doteq \frac{1}{r_2} N^\beta \left(1 - \frac{t - \theta}{r_2}\right) \mathbb{1}_{[0, r_2]}(t) \\
&+ \left[ \frac{q}{r_1} N^\alpha \left(\frac{t - \theta - r_2}{r_1}\right) \mathbb{1}_{[0, t - r_2]}(\theta) + \frac{1}{r_2} N^\beta \left(1 - \frac{t - \theta}{r_2}\right) \mathbb{1}_{(t - r_2, t]}(\theta) \right] \mathbb{1}_{(r_2, r]}(t)
\end{aligned} \tag{B.8}$$

et  $f$  est un opérateur linéaire tel que

$$\begin{aligned}
f[\alpha_0(\cdot), \beta_0(\cdot)](t) &\doteq \rho\alpha_0 \left(1 - \frac{t}{r_1}\right) \mathbb{1}_{[0, r_1]}(t) + \rho q\beta_0 \left(\frac{t - r_1}{r_2}\right) \mathbb{1}_{(r_1, r_2]}(t) \\
&+ \int_0^{\frac{t}{r_1}} N^\alpha(y) q\beta_0 \left(\frac{t - r_1 y}{r_2}\right) dy \mathbb{1}_{[0, r_1]}(t) \\
&+ \int_{\frac{t}{r_1}}^1 N^\alpha(y) \alpha_0 \left(y - \frac{t}{r_1}\right) dy \mathbb{1}_{[0, r_1]}(t) \\
&+ \int_0^1 N^\alpha(y) q\beta_0 \left(\frac{t - r_1 y}{r_2}\right) dy \mathbb{1}_{(r_1, r_2]}(t) \\
&+ \int_{\frac{t - r_2}{r_1}}^1 N^\alpha(y) q\beta_0 \left(\frac{t - r_1 y}{r_2}\right) dy \mathbb{1}_{(r_2, r]}(t) \\
&+ \int_0^{1 - \frac{t}{r_2}} N^\beta(y) \beta_0 \left(y + \frac{t}{r_2}\right) dy \mathbb{1}_{[0, r_2]}(t).
\end{aligned} \tag{B.9}$$

Le caractère bien-posé de l'équation de Volterra de seconde espèce (B.7) (voir, par exemple, [Bastin and Coron, 2016] et [Evans, 1911]) garantit l'existence d'une solution unique  $\beta(t, 1)$  satisfaisant  $\beta_{[r]}(\cdot, 1) \in L^2([-r, 0]; \mathbb{R})$  pour une condition initiale  $(\alpha_0, \beta_0) \in \chi$ . Il résulte des expressions de  $\alpha(t, x)$  et  $\beta(t, x)$  dans (B.4) qu'il existe une solution unique dans le sens faible satisfaisant  $(\alpha(t, \cdot), \beta(t, \cdot)) \in \chi, \forall t \in [0, r]$ . Le même développement peut être entrepris pour  $t \in [nr, (n+1)r], \forall n \in \mathbb{N}$ , en considérant la solution en  $t = nr$  comme condition initiale, pour conclure la preuve. □

## Annexe C.

Analyse d'une classe d'EDP hyperboliques couplées 2 à 2 avec des coefficients de réflexion aux bords nuls

Dans cette annexe, nous obtenons une équation à retard distribué établie à partir d'un système d'EDP hyperboliques linéaires couplées 2 à 2 avec des coefficients de réflexion aux bords nuls. Nous appliquons une transformation backstepping au système de départ et cherchons le système cible et les noyaux de la transformation. Le cas où au moins un coefficient de réflexion n'est pas nul est traité dans le chapitre 3 (section 3.2.1), où une équation aux différences avec un retard distribué a été établie. Nous exposons dans cette annexe les modifications trouvées sur le système cible, les EDP satisfaites par les noyaux et l'équation à retard distribué satisfaite par un état EDP du système cible à un bord du domaine.

Considérons le système suivant

$$u_t(t, x) + \frac{1}{r_1} u_x(t, x) = \sigma^{+-} v(t, x) \quad (\text{C.1a})$$

$$v_t(t, x) - \frac{1}{r_2} v_x(t, x) = \sigma^{-+} u(t, x) \quad (\text{C.1b})$$

pour tout  $t \geq 0$ ,  $x \in [0, 1]$ . Nous rappelons que  $\frac{1}{r_1} > 0$  et  $\frac{1}{r_2} > 0$  sont les vitesses de transport associées aux deux équations de transport (C.1a) et (C.1b) respectivement. Les coefficients  $\sigma^{+-}$  et  $\sigma^{-+}$  représentent des couplages constants entre les EDP à l'intérieur du domaine.  $u(t, x)$  et  $v(t, x)$  vérifient les conditions aux bords suivantes

$$u(t, 0) = 0 \quad (\text{C.2a})$$

$$v(t, 1) = 0. \quad (\text{C.2b})$$

Les conditions initiales associées sont

$$u(0, \cdot) \doteq u_0(\cdot) \quad (\text{C.3a})$$

$$v(0, \cdot) \doteq v_0(\cdot) \quad (\text{C.3b})$$

définies dans  $L^2([0, 1]; \mathbb{R})$ .

## Transformation backstepping et système cible

Soit la transformation backstepping

$$\tilde{\alpha}(t, x) = u(t, x) - \int_0^x \tilde{P}^{11}(x, y) u(t, y) dy - \int_0^x \tilde{P}^{12}(x, y) v(t, y) dy \quad (\text{C.4a})$$

$$\tilde{\beta}(t, x) = v(t, x) - \int_0^x \tilde{P}^{21}(x, y) u(t, y) dy - \int_0^x \tilde{P}^{22}(x, y) v(t, y) dy \quad (\text{C.4b})$$

où les noyaux  $\tilde{P}^{ij}$ ,  $i, j \in \{1, 2\}$  vérifient les EDP suivantes [Coron et al., 2013] dans

$$\mathcal{T} \doteq \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]; y \leq x\}$$

$$\frac{1}{r_1} \tilde{P}_x^{11}(x, y) + \frac{1}{r_1} \tilde{P}_y^{11}(x, y) = -\sigma^{-+} \tilde{P}^{12}(x, y) \quad (\text{C.5a})$$

$$\frac{1}{r_1} \tilde{P}_x^{12}(x, y) - \frac{1}{r_2} \tilde{P}_y^{12}(x, y) = -\sigma^{+-} \tilde{P}^{11}(x, y) \quad (\text{C.5b})$$

$$\frac{1}{r_2} \tilde{P}_x^{21}(x, y) - \frac{1}{r_1} \tilde{P}_y^{21}(x, y) = \sigma^{-+} \tilde{P}^{22}(x, y) \quad (\text{C.5c})$$

$$\frac{1}{r_2} \tilde{P}_x^{22}(x, y) + \frac{1}{r_2} \tilde{P}_y^{22}(x, y) = \sigma^{+-} \tilde{P}^{21}(x, y) \quad (\text{C.5d})$$

avec les conditions aux bords

$$\tilde{P}^{11}(x, 0) = 0 \quad (\text{C.6a})$$

$$\tilde{P}^{12}(x, x) = \sigma^{+-} \frac{r_1 r_2}{r} \quad (\text{C.6b})$$

$$\tilde{P}^{21}(x, x) = -\sigma^{-+} \frac{r_1 r_2}{r} \quad (\text{C.6c})$$

$$\tilde{P}^{22}(x, 0) = 0. \quad (\text{C.6d})$$

Les EDP (C.5) avec les conditions aux bords (C.6) sont dans la classe considérée dans [Coron et al., 2013, Théorème A.2]. Par suite, ces équations admettent une solution unique  $\tilde{P}^{ij}$ ,  $i, j \in \{1, 2\}$  dans  $C^\infty(\mathcal{T}; \mathbb{R})$ . De plus, la transformation (C.4) est un opérateur inversible et borné de  $\chi$  dans  $\chi$ . La transformation backstepping inverse est de la forme

$$u(t, x) = \tilde{\alpha}(t, x) - \int_0^x \tilde{L}^{11}(x, y) \tilde{\alpha}(t, y) dy - \int_0^x \tilde{L}^{12}(x, y) \tilde{\beta}(t, y) dy \quad (\text{C.7a})$$

$$v(t, x) = \tilde{\beta}(t, x) - \int_0^x \tilde{L}^{21}(x, y) \tilde{\alpha}(t, y) dy - \int_0^x \tilde{L}^{22}(x, y) \tilde{\beta}(t, y) dy. \quad (\text{C.7b})$$

Les noyaux  $\tilde{L}^{ij}$ ,  $i, j \in \{1, 2\}$  vérifient les EDP suivantes dans  $\mathcal{T}$

$$\frac{1}{r_1} \tilde{L}_x^{11}(x, y) + \frac{1}{r_1} \tilde{L}_y^{11}(x, y) = \sigma^{+-} \tilde{L}^{21}(x, y) \quad (\text{C.8a})$$

$$\frac{1}{r_1} \tilde{L}_x^{12}(x, y) - \frac{1}{r_2} \tilde{L}_y^{12}(x, y) = \sigma^{+-} \tilde{L}^{22}(x, y) \quad (\text{C.8b})$$

$$\frac{1}{r_2} \tilde{L}_x^{21}(x, y) - \frac{1}{r_1} \tilde{L}_y^{21}(x, y) = -\sigma^{-+} \tilde{L}^{11}(x, y) \quad (\text{C.8c})$$

$$\frac{1}{r_2} \tilde{L}_x^{22}(x, y) + \frac{1}{r_2} \tilde{L}_y^{22}(x, y) = -\sigma^{-+} \tilde{L}^{12}(x, y) \quad (\text{C.8d})$$

avec les conditions aux bords

$$\tilde{L}^{11}(x, 0) = 0 \quad (\text{C.9a})$$

$$\tilde{L}^{12}(x, x) = -\sigma^{+-} \frac{r_1 r_2}{r} \quad (\text{C.9b})$$

$$\tilde{L}^{21}(x, x) = \sigma^{-+} \frac{r_1 r_2}{r} \quad (\text{C.9c})$$

$$\tilde{L}^{22}(x, 0) = \int_0^x \tilde{L}^{21}(x, y) \tilde{P}^{12}(y, 0) dy. \quad (\text{C.9d})$$

La différence entre ces EDP et celles satisfaites par les noyaux  $L^{ij}$  (3.11)-(3.12) (dans le cas où au moins un des coefficients de réflexion est non nul) réside dans les conditions aux bords  $\tilde{L}^{11}(x, 0)$  et  $\tilde{L}^{22}(x, 0)$ . Les autres conditions aux bords, ainsi que les EDP à l'intérieur du domaine, sont les mêmes. Nous constatons que les EDP satisfaites par les noyaux  $\tilde{L}^{11}$  et  $\tilde{L}^{21}$  sont couplées entre elles et sont indépendantes des noyaux  $\tilde{L}^{12}$  et  $\tilde{L}^{22}$ , contrairement au couplage 4 à 4 qui apparaît si au moins un des coefficients de réflexion est non nul.

En appliquant la transformation backstepping (C.7), nous obtenons le système cible suivant

$$\tilde{\alpha}_t(t, x) + \frac{1}{r_1} \tilde{\alpha}_x(t, x) = \frac{1}{r_2} \tilde{P}^{12}(x, 0) \tilde{\beta}(t, 0) \quad (\text{C.10a})$$

$$\tilde{\beta}_t(t, x) - \frac{1}{r_2} \tilde{\beta}_x(t, x) = 0 \quad (\text{C.10b})$$

avec les conditions aux bords

$$\tilde{\alpha}(t, 0) = 0 \quad (\text{C.11a})$$

$$\tilde{\beta}(t, 1) = \int_0^1 \tilde{N}^\alpha(y) \tilde{\alpha}(t, y) dy + \int_0^1 \tilde{N}^\beta(y) \tilde{\beta}(t, y) dy \quad (\text{C.11b})$$

où

$$\tilde{N}^\alpha(y) = \tilde{L}^{21}(1, y) \quad (\text{C.12a})$$

$$\tilde{N}^\beta(y) = \tilde{L}^{22}(1, y). \quad (\text{C.12b})$$

Les conditions initiales associées sont

$$\tilde{\alpha}(0, \cdot) \doteq \tilde{\alpha}_0(\cdot) \quad (\text{C.13a})$$

$$\tilde{\beta}(0, \cdot) \doteq \tilde{\beta}_0(\cdot) \quad (\text{C.13b})$$

définies dans  $L^2([0, 1], \mathbb{R})$ .

Nous présentons les détails de calcul qui conduisent à l'obtention des EDP (C.8)-(C.9) satisfaites par les noyaux  $\tilde{L}^{ij}$ ,  $i, j \in \{1, 2\}$ . Nous adoptons la démarche classique de la méthode de backstepping en dérivant la transformation (C.7) par rapport au temps et à l'espace, en effectuant des intégrations par parties et en identifiant les différents termes avec les équations (C.1)-(C.2). Notre choix d'établir les EDP (C.8)-(C.9) est justifié par le fait que les noyaux  $\tilde{L}^{ij}$  interviennent dans l'équation avec retard distribué satisfaite par  $\tilde{\beta}(\cdot, 1)$  comme montré ci-dessous.

Commençons par dériver (C.7a) par rapport à  $t$  et intégrer par parties

$$\begin{aligned} u_t(t, x) &= -\frac{1}{r_1}\tilde{\alpha}_x(t, x) + \frac{1}{r_2}\tilde{P}^{12}(x, 0)\tilde{\beta}(t, 0) \\ &\quad - \int_0^x \tilde{L}^{11}(x, y) \left[ -\frac{1}{r_1}\tilde{\alpha}_y(t, y) + \frac{1}{r_2}\tilde{P}^{12}(y, 0)\tilde{\beta}(t, 0) \right] dy - \frac{1}{r_2} \int_0^x \tilde{L}^{12}(x, y)\tilde{\beta}_y(t, y)dy \\ &= -\frac{1}{r_1}\tilde{\alpha}_x(t, x) + \frac{1}{r_1}\tilde{L}^{11}(x, x)\tilde{\alpha}(t, x) - \frac{1}{r_2}\tilde{L}^{12}(x, x)\tilde{\beta}(t, x) \\ &\quad + \left[ \frac{1}{r_2}\tilde{P}^{12}(x, 0) - \int_0^x \frac{1}{r_2}\tilde{L}^{11}(x, y)\tilde{P}^{12}(y, 0)dy + \frac{1}{r_2}\tilde{L}^{12}(x, 0) \right] \tilde{\beta}(t, 0) \\ &\quad - \frac{1}{r_1} \int_0^x \tilde{L}_y^{11}(x, y)\tilde{\alpha}(t, y)dy + \frac{1}{r_2} \int_0^x \tilde{L}_y^{12}(x, y)\tilde{\beta}(t, y)dy. \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

Nous notons qu'en suivant la même procédure adoptée dans l'annexe D pour établir les équations intégrales satisfaites par  $\tilde{L}^{ij}$  en fonction des noyaux  $\tilde{P}^{ij}$ , nous retrouvons exactement les équations intégrales (D.13). En conséquence,  $\tilde{L}^{12}(x, 0)$  satisfait

$$\tilde{L}^{12}(x, 0) = -\tilde{P}^{12}(x, 0) + \int_0^x \tilde{L}^{11}(x, y)\tilde{P}^{12}(y, 0)dy, \quad (\text{C.15})$$

ce qui simplifie des termes dans (C.14) comme suit

$$\left[ \frac{1}{r_2}\tilde{P}^{12}(x, 0) - \int_0^x \frac{1}{r_2}\tilde{L}^{11}(x, y)\tilde{P}^{12}(y, 0)dy + \frac{1}{r_2}\tilde{L}^{12}(x, 0) \right] \tilde{\beta}(t, 0) = 0. \quad (\text{C.16})$$

Dérivons (C.7a) par rapport à  $x$  et multiplions par  $\frac{1}{r_1}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_1}u_x(t, x) &= \frac{1}{r_1}\tilde{\alpha}_x(t, x) - \frac{1}{r_1}\tilde{L}^{11}(x, x)\tilde{\alpha}(t, x) - \frac{1}{r_1} \int_0^x \tilde{L}_x^{11}(x, y)\tilde{\alpha}(t, y)dy \\ &\quad - \frac{1}{r_1}\tilde{L}^{12}(x, x)\tilde{\beta}(t, x) - \frac{1}{r_1} \int_0^x \tilde{L}_x^{12}(x, y)\tilde{\beta}(t, y)dy. \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

Afin que (C.1a) soit satisfaite, les noyaux  $\tilde{L}^{11}$  et  $\tilde{L}^{12}$  doivent vérifier les EDP (C.8a)-(C.8b) avec les conditions aux bords (C.9a)-(C.9b) respectivement. À noter que le choix de la condition au bord (C.9a) de  $\tilde{L}^{11}(x, 0)$  est libre et elle est donc considérée arbitrairement nulle. Cette valeur doit être fixée pour que le système (C.8)-(C.9) soit bien-posé.

En suivant la même procédure, nous dérivons (C.7b) par rapport à  $t$  et intégrons par parties

$$\begin{aligned}
v_t(t, x) &= \frac{1}{r_2} \tilde{\beta}_x(t, x) - \int_0^x \tilde{L}^{21}(x, y) \left[ -\frac{1}{r_1} \tilde{\alpha}_y(t, y) + \frac{1}{r_2} \tilde{P}^{12}(y, 0) \tilde{\beta}(t, 0) \right] dy \\
&\quad - \frac{1}{r_2} \int_0^x \tilde{L}^{22}(x, y) \tilde{\beta}_y(t, y) dy \\
&= \frac{1}{r_2} \tilde{\beta}_x(t, x) + \frac{1}{r_1} \tilde{L}^{21}(x, x) \tilde{\alpha}(t, x) - \frac{1}{r_2} \tilde{L}^{22}(x, x) \tilde{\beta}(t, x) \\
&\quad + \left[ -\int_0^x \frac{1}{r_2} \tilde{L}^{21}(x, y) \tilde{P}^{12}(y, 0) dy + \frac{1}{r_2} \tilde{L}^{22}(x, 0) \right] \tilde{\beta}(t, 0) \\
&\quad - \frac{1}{r_1} \int_0^x \tilde{L}_y^{21}(x, y) \tilde{\alpha}(t, y) dy + \frac{1}{r_2} \int_0^x \tilde{L}_y^{22}(x, y) \tilde{\beta}(t, y) dy.
\end{aligned} \tag{C.18}$$

Dérivons (C.7b) par rapport à  $x$  et multiplions par  $\frac{1}{r_2}$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r_2} v_x(t, x) &= \frac{1}{r_2} \tilde{\beta}_x(t, x) - \frac{1}{r_2} \tilde{L}^{21}(x, x) \tilde{\alpha}(t, x) - \frac{1}{r_2} \int_0^x \tilde{L}_x^{21}(x, y) \tilde{\alpha}(t, y) dy \\
&\quad - \frac{1}{r_2} \tilde{L}^{22}(x, x) \tilde{\beta}(t, x) - \frac{1}{r_2} \int_0^x \tilde{L}_x^{22}(x, y) \tilde{\beta}(t, y) dy.
\end{aligned} \tag{C.19}$$

Afin que (C.1b) soit satisfaite, les noyaux  $\tilde{L}^{21}$  et  $\tilde{L}^{22}$  doivent vérifier les EDP (C.8c)-(C.8d) avec les conditions aux bords (C.9c)-(C.9d) respectivement.

## Équation à retard distribué

Dans le but d'établir une équation à retard distribué à partir du système cible (C.10)-(C.11), nous résolvons ce système par la méthode des caractéristiques pour avoir

$$\tilde{\alpha}(t, x) = \int_0^{r_1 x} \frac{1}{r_2} \tilde{P}^{12} \left( \frac{\xi}{r_1}, 0 \right) \tilde{\beta}(t - r_1 x + \xi, 0) d\xi \tag{C.20a}$$

$$\tilde{\beta}(t, x) = \tilde{\beta}(t - r_2(1 - x), 1) \tag{C.20b}$$

pour  $t \geq r$ . Évaluons (C.20b) pour  $x = 0$  et substituons dans (C.20a)

$$\tilde{\alpha}(t, x) = \int_0^{r_1 x} \frac{1}{r_2} \tilde{P}^{12} \left( \frac{\xi}{r_1}, 0 \right) \tilde{\beta}(t - r_1 x - r_2 + \xi, 1) d\xi. \tag{C.21}$$

Substituons (C.20b) et (C.21) dans la condition au bord (C.11b)

$$\begin{aligned}
\tilde{\beta}(t, 1) &= \int_0^1 \tilde{N}^\alpha(y) \int_0^{r_1 y} \frac{1}{r_2} \tilde{P}^{12} \left( \frac{\xi}{r_1}, 0 \right) \tilde{\beta}(t - r_1 y - r_2 + \xi, 1) d\xi dy \\
&\quad + \int_0^1 \tilde{N}^\beta(y) \tilde{\beta}(t - r_2(1 - y), 1) dy.
\end{aligned} \tag{C.22}$$

Faisons un changement de variable d'intégration suivi d'un changement de l'ordre de l'intégration du premier terme intégral de (C.22)

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \tilde{N}^\alpha(y) \int_0^{r_1 y} \frac{1}{r_2} \tilde{P}^{12} \left( \frac{\xi}{r_1}, 0 \right) \tilde{\beta}(t - r_1 y - r_2 + \xi, 1) d\xi dy \\
&= \int_0^1 \tilde{N}^\alpha(y) \int_{r_2}^{r_2 + r_1 y} \frac{1}{r_2} \tilde{P}^{12} \left( y + \frac{r_2 - \theta}{r_1}, 0 \right) \tilde{\beta}(t - \theta, 1) d\theta dy \\
&= \int_{r_2}^r \int_{\frac{\theta - r_2}{r_1}}^1 \frac{1}{r_2} \tilde{N}^\alpha(y) \tilde{P}^{12} \left( y + \frac{r_2 - \theta}{r_1}, 0 \right) \tilde{\beta}(t - \theta, 1) dy d\theta.
\end{aligned} \tag{C.23}$$



D'où (C.22) s'écrit sous la forme

$$\tilde{\beta}(t, 1) = \int_0^r \tilde{N}(\theta) \tilde{\beta}(t - \theta) d\theta \quad (\text{C.24})$$

$t \geq r$ , avec

$$\tilde{N}(\theta) = \frac{1}{r_2} \tilde{N}^\beta \left(1 - \frac{\theta}{r_2}\right) \mathbb{1}_{[0, r_2]}(\theta) + \int_{\frac{\theta - r_2}{r_1}}^1 \frac{1}{r_2} \tilde{N}^\alpha(y) \tilde{P}^{12} \left(y + \frac{r_2 - \theta}{r_1}, 0\right) dy \mathbb{1}_{(r_2, r]}(\theta). \quad (\text{C.25})$$

Nous remarquons une forme similaire de (C.24) à l'équation aux différences avec retard distribué (3.21) (le terme de retard ponctuel n'existe pas dans (C.24)). Les expressions explicites des noyaux  $\tilde{P}^{ij}$  peuvent être calculées en utilisant les fonctions  $Q$  de Marcum et les fonctions de Bessel modifiées de première espèce [Vazquez and Krstic, 2014]. Cependant, étant donné la complexité d'obtenir des expressions explicites des noyaux  $\tilde{L}^{ij}$ , les résultats de la proposition 3 ne peuvent pas être appliqués dans ce cas. Par contre, une condition suffisante numérique de stabilité peut être testée. Elle se base sur la condition (3.43) et se réécrit comme suit

$$\int_0^r |\tilde{N}(\theta)| d\theta < 1. \quad (\text{C.26})$$

## Annexe D.

# Dérivation des EDP satisfaites par les noyaux d'une transformation de backstepping inverse

L'analyse de stabilité d'une classe d'EDP hyperboliques dans ce travail repose sur la réécriture de ces EDP en un système à retard en appliquant une transformation backstepping (3.10). Les calculs qui mènent aux conditions suffisantes de stabilité s'appuient fortement sur les expressions des noyaux  $L^{ij}$ ,  $i, j \in \{1, 2\}$ , de cette transformation.

Notre démarche présentée dans le chapitre 3 repose sur le fait que l'opérateur intégral  $\bar{T}$  associé à la transformation (3.10) est identique à l'opérateur inverse de  $T$ , associé à la transformation directe (3.23). Toutefois, ces deux opérateurs peuvent ne pas être identiques suivant les conditions aux bords imposées sur les systèmes cible et de départ. Il demeure ainsi inévitable de vérifier cette égalité d'opérateurs. En outre, dans certains cas, les noyaux  $P^{ij}$  de la transformation (3.23) sont résolus numériquement par des itérations successives, ou explicitement [Vazquez and Krstic, 2014]. Il paraît ainsi plus simple d'obtenir les noyaux  $L^{ij}$  par implantation des équations intégrales qui dépendent de  $P^{ij}$  plutôt que de résoudre les EDP correspondantes (3.11)-(3.12). Ces équations intégrales sont établies en cherchant l'opérateur inverse de  $T$  comme montré dans la démarche qui suit.

L'objectif de cette annexe est de prouver que les noyaux  $L^{ij}$  de l'opérateur de Volterra  $\bar{T}$  (associé à (3.10)) sont exactement les noyaux de l'opérateur inverse de  $T$  (associé à (3.23)).

La démarche de cette preuve consiste à chercher l'opérateur inverse de  $T$  et établir les équations intégrales satisfaites par ses noyaux. Nous effectuons ensuite des dérivées partielles de ces équations pour montrer enfin que ces noyaux vérifient les mêmes EDP que celles vérifiées par  $L^{ij}$  avec les mêmes conditions aux bords. Le caractère bien-posé de ces EDP nous permet alors de conclure.

Nous rappelons d'abord les équations du système de départ, des transformations, ainsi que des EDP des noyaux. Nous considérons le système de départ

$$u_t(t, x) + \frac{1}{r_1}u_x(t, x) = \sigma^{+-}(x)v(t, x) \quad (\text{D.1a})$$

$$v_t(t, x) - \frac{1}{r_2}v_x(t, x) = \sigma^{-+}(x)u(t, x) \quad (\text{D.1b})$$

avec les conditions initiales

$$u(0, \cdot) \doteq u_0(\cdot) \quad (\text{D.2a})$$

$$v(0, \cdot) \doteq v_0(\cdot) \quad (\text{D.2b})$$

définies dans  $L^2([0, 1], \mathbb{R})$  et les conditions aux bords

$$u(t, 0) = qv(t, 0) \quad (\text{D.3a})$$

$$v(t, 1) = \rho u(t, 1) \quad (\text{D.3b})$$

pour tout  $t > 0$ . Nous signalons que les coefficients  $\sigma^{+-}$  et  $\sigma^{-+}$  sont pris constants dans notre analyse du chapitre 3. Afin de nous placer dans un cadre plus général, nous supposons que  $\sigma^{+-}, \sigma^{-+} \in C^1([0, 1]; \mathbb{R})$ . Les paramètres  $r_1, r_2, \rho$  et  $q$  sont des constantes réelles.

La transformation backstepping qui transforme le système de départ en le système cible est la suivante [Coron et al., 2013]

$$\alpha(t, x) = u(t, x) - \int_0^x P^{11}(x, y)u(t, y)dy - \int_0^x P^{12}(x, y)v(t, y)dy \quad (\text{D.4a})$$

$$\beta(t, x) = v(t, x) - \int_0^x P^{21}(x, y)u(t, y)dy - \int_0^x P^{22}(x, y)v(t, y)dy \quad (\text{D.4b})$$

où les noyaux  $P^{ij}$ ,  $i, j \in \{1, 2\}$  vérifient les EDP suivantes dans le domaine triangulaire  $\mathcal{T} \doteq \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1], y \leq x\}$

$$\frac{1}{r_1}P_x^{11}(x, y) + \frac{1}{r_1}P_y^{11}(x, y) = -\sigma^{-+}(y)P^{12}(x, y) \quad (\text{D.5a})$$

$$\frac{1}{r_1}P_x^{12}(x, y) - \frac{1}{r_2}P_y^{12}(x, y) = -\sigma^{+-}(y)P^{11}(x, y) \quad (\text{D.5b})$$

$$\frac{1}{r_2}P_x^{21}(x, y) - \frac{1}{r_1}P_y^{21}(x, y) = \sigma^{-+}(y)P^{22}(x, y) \quad (\text{D.5c})$$

$$\frac{1}{r_2}P_x^{22}(x, y) + \frac{1}{r_2}P_y^{22}(x, y) = \sigma^{+-}(y)P^{21}(x, y) \quad (\text{D.5d})$$

avec les conditions aux bords

$$P^{12}(x, x) = \sigma^{+-}(x)\frac{r_1r_2}{r} \quad (\text{D.6a})$$

$$P^{11}(x, 0) = P^{12}(x, 0)\frac{r_1}{qr_2} \quad (\text{D.6b})$$

$$P^{21}(x, x) = -\sigma^{-+}(x)\frac{r_1r_2}{r} \quad (\text{D.6c})$$

$$P^{22}(x, 0) = P^{21}(x, 0)\frac{r_2}{r_1}q. \quad (\text{D.6d})$$

L'opérateur  $T$  associé à (D.4) s'écrit sous la forme matricielle suivante

$$T \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} (x, y) = \begin{bmatrix} \mathcal{I} - \mathcal{P}^{11} & -\mathcal{P}^{12} \\ -\mathcal{P}^{21} & \mathcal{I} - \mathcal{P}^{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} (x, y) \quad (\text{D.7})$$

avec  $\mathcal{P}^{ij}[\varphi(t, \cdot)](x) = \int_0^x P^{ij}(x, y)\varphi(t, y)dy$ ,  $\forall \varphi(t, \cdot) \in L^2([0, 1]; \mathbb{R})$  et  $\mathcal{I}$  est l'opérateur identité.

Les EDP (D.5) avec les conditions aux bords (D.6) admettent une solution unique  $P^{ij}$ ,  $i, j \in \{1, 2\}$  dans  $C^1(\mathcal{T}; \mathbb{R})$  [Coron et al., 2013, Théorème A.2]. De plus, la transformation (D.4) est un opérateur inversible et borné de  $\chi$  dans  $\chi$ . La transformation inverse qui transforme le système cible en le système de départ s'écrit [Coron et al., 2013]

$$u(t, x) = \alpha(t, x) - \int_0^x L^{11}(x, y)\alpha(t, y)dy - \int_0^x L^{12}(x, y)\beta(t, y)dy \quad (\text{D.8a})$$

$$v(t, x) = \beta(t, x) - \int_0^x L^{21}(x, y)\alpha(t, y)dy - \int_0^x L^{22}(x, y)\beta(t, y)dy. \quad (\text{D.8b})$$

Les noyaux  $L^{ij}$ ,  $i, j \in \{1, 2\}$  vérifient les EDP suivantes dans  $\mathcal{T}$

$$\frac{1}{r_1}L_x^{11}(x, y) + \frac{1}{r_1}L_y^{11}(x, y) = \sigma^{+-}(x)L^{21}(x, y) \quad (\text{D.9a})$$

$$\frac{1}{r_1}L_x^{12}(x, y) - \frac{1}{r_2}L_y^{12}(x, y) = \sigma^{+-}(x)L^{22}(x, y) \quad (\text{D.9b})$$

$$\frac{1}{r_2}L_x^{21}(x, y) - \frac{1}{r_1}L_y^{21}(x, y) = -\sigma^{-+}(x)L^{11}(x, y) \quad (\text{D.9c})$$

$$\frac{1}{r_2}L_x^{22}(x, y) + \frac{1}{r_2}L_y^{22}(x, y) = -\sigma^{-+}(x)L^{12}(x, y) \quad (\text{D.9d})$$

avec les conditions aux bords

$$L^{12}(x, x) = -\sigma^{+-}(x)\frac{r_1r_2}{r} \quad (\text{D.10a})$$

$$L^{11}(x, 0) = L^{12}(x, 0)\frac{r_1}{qr_2} \quad (\text{D.10b})$$

$$L^{21}(x, x) = \sigma^{-+}(x)\frac{r_1r_2}{r} \quad (\text{D.10c})$$

$$L^{22}(x, 0) = L^{21}(x, 0)\frac{r_2}{r_1}q. \quad (\text{D.10d})$$

En premier lieu, nous trouvons un opérateur inverse à gauche  $T^{-1}$  de l'opérateur  $T$  associé à (D.4), ayant une structure similaire à  $T$ . Nous cherchons donc des opérateurs de Volterra  $\mathcal{K}^{ij}$ ,  $i, j \in \{1, 2\}$ , satisfaisant

$$T^{-1}T = \begin{bmatrix} \mathcal{I} - \mathcal{K}^{11} & -\mathcal{K}^{12} \\ -\mathcal{K}^{21} & \mathcal{I} - \mathcal{K}^{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{I} - \mathcal{P}^{11} & -\mathcal{P}^{12} \\ -\mathcal{P}^{21} & \mathcal{I} - \mathcal{P}^{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (\text{D.11})$$

avec  $\mathcal{K}^{ij}[\varphi(t, \cdot)](x) = \int_0^x K^{ij}(x, y)\varphi(t, y)dy$ ,  $\forall \varphi(t, \cdot) \in L^2([0, 1]; \mathbb{R})$ .

En vue d'établir les équations satisfaites par  $K^{ij}$  en partant de (D.11), nous allons utiliser l'égalité suivante obtenue en inversant l'ordre d'intégration

$$\begin{aligned} \mathcal{K}^{ij} \left[ \mathcal{P}^{kl}[\varphi(t, \cdot)] \right] (x) &= \int_0^x K^{ij}(x, y) \int_0^y P^{kl}(y, \xi)\varphi(t, \xi)d\xi dy \\ &= \int_0^x \int_\xi^x K^{ij}(x, y)P^{kl}(y, \xi)\varphi(t, \xi)dy d\xi \\ &= \int_0^x \int_y^x K^{ij}(x, \xi)P^{kl}(\xi, y)d\xi \varphi(t, y)dy \end{aligned} \quad (\text{D.12})$$

pour  $i, j, k, l \in \{1, 2\}$ . Le développement du produit matriciel de (D.11) et son identification à la matrice unité du membre de droite conduisent aux équations intégrales suivantes

$$K^{11}(x, y) = -P^{11}(x, y) + \int_y^x K^{11}(x, \xi)P^{11}(\xi, y)d\xi + \int_y^x K^{12}(x, \xi)P^{21}(\xi, y)d\xi \quad (\text{D.13a})$$

$$K^{12}(x, y) = -P^{12}(x, y) + \int_y^x K^{11}(x, \xi)P^{12}(\xi, y)d\xi + \int_y^x K^{12}(x, \xi)P^{22}(\xi, y)d\xi \quad (\text{D.13b})$$

$$K^{21}(x, y) = -P^{21}(x, y) + \int_y^x K^{21}(x, \xi)P^{11}(\xi, y)d\xi + \int_y^x K^{22}(x, \xi)P^{21}(\xi, y)d\xi \quad (\text{D.13c})$$

$$K^{22}(x, y) = -P^{22}(x, y) + \int_y^x K^{21}(x, \xi)P^{12}(\xi, y)d\xi + \int_y^x K^{22}(x, \xi)P^{22}(\xi, y)d\xi. \quad (\text{D.13d})$$

Les équations intégrales (D.13) sont des équations de Volterra de seconde espèce. Le caractère bien-posé de ce type d'équations est traité dans l'annexe I. Il existe une solution unique  $K^{ij} \in C^1(\mathcal{T}; \mathbb{R})$ ,  $i, j \in \{1, 2\}$ .

Nous commençons d'abord par établir les conditions aux bords des noyaux  $K^{ij}$  à partir de celles de  $P^{ij}$  dans (D.6). En évaluant (D.13b) et (D.13c) en  $y = x$  et en utilisant les conditions aux bords (D.6a) et (D.6c), nous obtenons les conditions aux bords de  $K^{12}$  et  $K^{21}$  suivantes

$$K^{12}(x, x) = -P^{12}(x, x) = -\sigma^{+-}(x) \frac{r_1 r_2}{r} \quad (\text{D.14a})$$

$$K^{21}(x, x) = -P^{21}(x, x) = \sigma^{-+}(x) \frac{r_1 r_2}{r}. \quad (\text{D.14b})$$

Évaluons (D.13a) en  $y = 0$  et utilisons (D.6b)

$$\begin{aligned} K^{11}(x, 0) &= -P^{11}(x, 0) + \int_0^x K^{11}(x, \xi)P^{11}(\xi, 0)d\xi + \int_0^x K^{12}(x, \xi)P^{21}(\xi, 0)d\xi \\ &= -P^{12}(x, 0) \frac{r_1}{qr_2} + \frac{r_1}{qr_2} \int_0^x K^{11}(x, \xi)P^{12}(\xi, 0)d\xi + \int_0^x K^{12}(x, \xi)P^{21}(\xi, 0)d\xi. \end{aligned} \quad (\text{D.15})$$

De la même manière, évaluons (D.13b) en  $y = 0$  et utilisons (D.6d)

$$K^{12}(x, 0) = -P^{12}(x, 0) + \int_0^x K^{11}(x, \xi)P^{12}(\xi, 0)d\xi + \frac{r_2q}{r_1} \int_0^x K^{12}(x, \xi)P^{21}(\xi, 0)d\xi. \quad (\text{D.16})$$

De (D.15) et (D.16), nous pouvons déduire la condition au bord de  $K^{11}$

$$K^{11}(x, 0) = K^{12}(x, 0) \frac{r_1}{qr_2}. \quad (\text{D.17})$$

Afin de construire la condition au bord de  $K^{22}$ , évaluons (D.13c) et (D.13d) en  $x = 0$  et utilisons (D.6b) et (D.6d)

$$K^{21}(x, 0) = -P^{21}(x, 0) + \frac{r_1}{qr_2} \int_0^x K^{21}(x, \xi)P^{12}(\xi, 0)d\xi + \int_0^x K^{22}(x, \xi)P^{21}(\xi, 0)d\xi \quad (\text{D.18a})$$

$$K^{22}(x, 0) = -P^{21}(x, 0) \frac{r_2q}{r_1} + \int_0^x K^{21}(x, \xi)P^{12}(\xi, 0)d\xi + \frac{r_2q}{r_1} \int_0^x K^{22}(x, \xi)P^{21}(\xi, 0)d\xi. \quad (\text{D.18b})$$

De (D.18), nous déduisons

$$K^{22}(x, 0) = K^{21}(x, 0) \frac{r_2q}{r_1}. \quad (\text{D.19})$$

L'objectif du calcul qui suit est d'établir les EDP vérifiées par les noyaux  $K^{ij}$ ,  $i, j \in \{1, 2\}$  dans  $\mathcal{T}$ . En conséquence, nous commençons par dériver chaque équation intégrale de (D.13) par rapport à  $x$  et à  $y$  et additionnons ensuite les équations obtenues. Prenons d'abord (D.13a), et effectuons ses dérivées partielles :

$$\begin{aligned} K_x^{11}(x, y) &= -P_x^{11}(x, y) + K^{11}(x, x)P^{11}(x, y) + K^{12}(x, x)P^{21}(x, y) \\ &\quad + \int_y^x K_x^{11}(x, \xi)P^{11}(\xi, y)d\xi \quad + \int_y^x K_x^{12}(x, \xi)P^{21}(\xi, y)d\xi \end{aligned} \quad (\text{D.20a})$$

$$\begin{aligned} K_y^{11}(x, y) &= -P_y^{11}(x, y) - K^{11}(x, y)P^{11}(y, y) - K^{12}(x, y)P^{21}(y, y) \\ &\quad + \int_y^x K^{11}(x, \xi)P_y^{11}(\xi, y)d\xi \quad + \int_y^x K^{12}(x, \xi)P_y^{21}(\xi, y)d\xi. \end{aligned} \quad (\text{D.20b})$$

Nous constatons que les deux derniers termes intégraux de (D.20b) contiennent des dérivées partielles des noyaux  $P^{ij}$ . Cependant, notre but est d'obtenir des dérivées partielles uniquement pour les noyaux  $K^{ij}$ . Nous remplaçons donc les termes  $P_y^{ij}(\xi, y)$  figurant dans l'équation précédente par des termes en  $P_\xi^{ij}(\xi, y)$  et  $P^{ij}(\xi, y)$  en nous servant des EDP (D.5). Ensuite, les termes en  $P_\xi^{ij}(\xi, y)$  peuvent être transformés en des termes en  $K_\xi^{ij}(x, \xi)$  en effectuant des intégrations par parties par rapport à la variable d'intégration  $\xi$ . Prenons le terme  $\int_y^x K^{11}(x, \xi)P_y^{11}(\xi, y)d\xi$ , en utilisant (D.5a) nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_y^x K^{11}(x, \xi)P_y^{11}(\xi, y)d\xi &= - \int_y^x K^{11}(x, \xi)P_\xi^{11}(\xi, y)d\xi - r_1\sigma^{-+}(y) \int_y^x K^{11}(x, \xi)P^{12}(\xi, y)d\xi \\ &= -K^{11}(x, x)P^{11}(x, y) + K^{11}(x, y)P^{11}(y, y) \\ &\quad + \int_y^x K_\xi^{11}(x, \xi)P^{11}(\xi, y)d\xi - r_1\sigma^{-+}(y) \int_y^x K^{11}(x, \xi)P^{12}(\xi, y)d\xi. \end{aligned} \quad (\text{D.21})$$

De même, en utilisant (D.5c), le dernier terme de (D.20b) s'écrit

$$\begin{aligned}
\int_y^x K^{12}(x, \xi) P_y^{21}(\xi, y) d\xi &= \frac{r_1}{r_2} \int_y^x K^{12}(x, \xi) P_\xi^{21}(\xi, y) d\xi - r_1 \sigma^{-+}(y) \int_y^x K^{12}(x, \xi) P^{22}(\xi, y) d\xi \\
&= \frac{r_1}{r_2} K^{12}(x, x) P^{21}(x, y) - \frac{r_1}{r_2} K^{12}(x, y) P^{21}(y, y) \\
&\quad - \frac{r_1}{r_2} \int_y^x K_\xi^{12}(x, \xi) P^{21}(\xi, y) d\xi \\
&\quad - r_1 \sigma^{-+}(y) \int_y^x K^{12}(x, \xi) P^{22}(\xi, y) d\xi.
\end{aligned} \tag{D.22}$$

En substituant (D.21) et (D.22) dans (D.20b), puis en additionnant à (D.20a)

$$\begin{aligned}
K_x^{11}(x, y) + K_y^{11}(x, y) &= - \left( P_x^{11}(x, y) + P_y^{11}(x, y) \right) \\
&\quad + \frac{r}{r_2} K^{12}(x, x) P^{21}(x, y) - \frac{r}{r_2} K^{12}(x, y) P^{21}(y, y) \\
&\quad - r_1 \sigma^{-+}(y) \int_y^x \left[ K^{11}(x, \xi) P^{12}(\xi, y) + K^{12}(x, \xi) P^{22}(\xi, y) \right] d\xi \\
&\quad + \int_y^x \left[ K_x^{11}(x, \xi) + K_\xi^{11}(x, \xi) \right] P^{11}(\xi, y) d\xi \\
&\quad + \int_y^x \left[ K_x^{12}(x, \xi) - \frac{r_1}{r_2} K_\xi^{12}(x, \xi) \right] P^{21}(\xi, y) d\xi.
\end{aligned} \tag{D.23}$$

En utilisant l'EDP (D.5a) et en substituant les conditions aux bords de  $K^{12}$  et  $P^{21}$  par leur expression (D.14a) et (D.6c) respectivement dans (D.23), nous avons

$$\begin{aligned}
K_x^{11}(x, y) + K_y^{11}(x, y) &= -r_1 \sigma^{+-}(x) P^{21}(x, y) + r_1 \sigma^{-+}(y) \left( P^{12}(x, y) + K^{12}(x, y) \right) \\
&\quad - r_1 \sigma^{-+}(y) \int_y^x \left[ K^{11}(x, \xi) P^{12}(\xi, y) + K^{12}(x, \xi) P^{22}(\xi, y) \right] d\xi \\
&\quad + \int_y^x \left[ K_x^{11}(x, \xi) + K_\xi^{11}(x, \xi) \right] P^{11}(\xi, y) d\xi \\
&\quad + \int_y^x \left[ K_x^{12}(x, \xi) - \frac{r_1}{r_2} K_\xi^{12}(x, \xi) \right] P^{21}(\xi, y) d\xi.
\end{aligned} \tag{D.24}$$

Finalement, en utilisant (D.13b), nous aboutissons à l'EDP suivante satisfaite par  $K^{11}$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r_1} K_x^{11}(x, y) + \frac{1}{r_1} K_y^{11}(x, y) &= -\sigma^{+-}(x) P^{21}(x, y) \\
&\quad + \int_y^x \left[ \frac{1}{r_1} K_x^{11}(x, \xi) + \frac{1}{r_1} K_\xi^{11}(x, \xi) \right] P^{11}(\xi, y) d\xi \\
&\quad + \int_y^x \left[ \frac{1}{r_1} K_x^{12}(x, \xi) - \frac{1}{r_2} K_\xi^{12}(x, \xi) \right] P^{21}(\xi, y) d\xi.
\end{aligned} \tag{D.25}$$

Appliquons la même procédure à l'équation intégrale (D.13b) satisfaite par  $K^{12}$

$$\begin{aligned}
K_x^{12}(x, y) &= -P_x^{12}(x, y) + K^{11}(x, x) P^{12}(x, y) + K^{12}(x, x) P^{22}(x, y) \\
&\quad + \int_y^x K_x^{11}(x, \xi) P^{12}(\xi, y) d\xi \quad + \int_y^x K_x^{12}(x, \xi) P^{22}(\xi, y) d\xi
\end{aligned} \tag{D.26a}$$

$$\begin{aligned}
K_y^{12}(x, y) &= -P_y^{12}(x, y) - K^{11}(x, y) P^{12}(y, y) - K^{12}(x, y) P^{22}(y, y) \\
&\quad + \int_y^x K^{11}(x, \xi) P_y^{12}(\xi, y) d\xi \quad + \int_y^x K^{12}(x, \xi) P_y^{22}(\xi, y) d\xi.
\end{aligned} \tag{D.26b}$$

En utilisant (D.5b) et (D.5d), les deux termes intégraux de (D.26b) s'écrivent

$$\begin{aligned} \int_y^x K^{11}(x, \xi) P_y^{12}(\xi, y) d\xi &= \frac{r_2}{r_1} \int_y^x K^{11}(x, \xi) P_\xi^{12}(\xi, y) d\xi + r_2 \sigma^{+-}(y) \int_y^x K^{11}(x, \xi) P^{11}(\xi, y) d\xi \\ &= \frac{r_2}{r_1} K^{11}(x, x) P^{12}(x, y) - \frac{r_2}{r_1} K^{11}(x, y) P^{12}(y, y) \\ &\quad - \frac{r_2}{r_1} \int_y^x K_\xi^{11}(x, \xi) P^{12}(\xi, y) d\xi + r_2 \sigma^{+-}(y) \int_y^x K^{11}(x, \xi) P^{11}(\xi, y) d\xi \end{aligned} \quad (\text{D.27a})$$

$$\begin{aligned} \int_y^x K^{12}(x, \xi) P_y^{22}(\xi, y) d\xi &= - \int_y^x K^{12}(x, \xi) P_\xi^{22}(\xi, y) d\xi + r_2 \sigma^{+-}(y) \int_y^x K^{12}(x, \xi) P^{21}(\xi, y) d\xi \\ &= -K^{12}(x, x) P^{22}(x, y) \\ &\quad + K^{12}(x, y) P^{22}(y, y) + \int_y^x K_\xi^{12}(x, \xi) P^{22}(\xi, y) d\xi \\ &\quad + r_2 \sigma^{+-}(y) \int_y^x K^{12}(x, \xi) P^{21}(\xi, y) d\xi. \end{aligned} \quad (\text{D.27b})$$

En substituant (D.27) dans (D.26b) et en multipliant (D.26a) par  $\frac{1}{r_1}$  et (D.26b) par  $-\frac{1}{r_2}$ , des termes se simplifient comme suit

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_1} K_x^{12}(x, y) - \frac{1}{r_2} K_y^{12}(x, y) &= - \left( \frac{1}{r_1} P_x^{12}(x, y) - \frac{1}{r_2} P_y^{12}(x, y) \right) \\ &\quad + \frac{r}{r_1 r_2} K^{12}(x, x) P^{22}(x, y) + \frac{r}{r_1 r_2} K^{11}(x, y) P^{12}(y, y) \\ &\quad - \sigma^{+-}(y) \int_y^x \left[ K^{11}(x, \xi) P^{11}(\xi, y) + K^{12}(x, \xi) P^{21}(\xi, y) \right] d\xi \\ &\quad + \int_y^x \left[ \frac{1}{r_1} K_x^{11}(x, \xi) + \frac{1}{r_1} K_\xi^{11}(x, \xi) \right] P^{12}(\xi, y) d\xi \\ &\quad + \int_y^x \left[ \frac{1}{r_1} K_x^{12}(x, \xi) - \frac{1}{r_2} K_\xi^{12}(x, \xi) \right] P^{22}(\xi, y) d\xi. \end{aligned} \quad (\text{D.28})$$

En utilisant l'EDP (D.5b) et en substituant les conditions aux bords de  $K^{12}$  et  $P^{12}$  par leur expression (D.14a) et (D.6a) respectivement dans (D.28), nous aurons

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_1} K_x^{12}(x, y) - \frac{1}{r_2} K_y^{12}(x, y) &= -\sigma^{+-}(x) P^{22}(x, y) + \sigma^{+-}(y) \left( P^{11}(x, y) + K^{11}(x, y) \right) \\ &\quad - \sigma^{+-}(y) \int_y^x \left[ K^{11}(x, \xi) P^{11}(\xi, y) + K^{12}(x, \xi) P^{21}(\xi, y) \right] d\xi \\ &\quad + \int_y^x \left[ \frac{1}{r_1} K_x^{11}(x, \xi) + \frac{1}{r_1} K_\xi^{11}(x, \xi) \right] P^{12}(\xi, y) d\xi \\ &\quad + \int_y^x \left[ \frac{1}{r_1} K_x^{12}(x, \xi) - \frac{1}{r_2} K_\xi^{12}(x, \xi) \right] P^{22}(\xi, y) d\xi. \end{aligned} \quad (\text{D.29})$$

En utilisant (D.13a), nous aboutissons à l'EDP suivante satisfaite par  $K^{12}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_1} K_x^{12}(x, y) - \frac{1}{r_2} K_y^{12}(x, y) &= -\sigma^{+-}(x) P^{22}(x, y) \\ &\quad + \int_y^x \left[ \frac{1}{r_1} K_x^{11}(x, \xi) + \frac{1}{r_1} K_\xi^{11}(x, \xi) \right] P^{12}(\xi, y) d\xi \\ &\quad + \int_y^x \left[ \frac{1}{r_1} K_x^{12}(x, \xi) - \frac{1}{r_2} K_\xi^{12}(x, \xi) \right] P^{22}(\xi, y) d\xi. \end{aligned} \quad (\text{D.30})$$



Enchaînons avec l'équation intégrale (D.13c) satisfaite par  $K^{21}$

$$K_x^{21}(x, y) = -P_x^{21}(x, y) + K^{21}(x, x)P^{11}(x, y) + K^{22}(x, x)P^{21}(x, y) \\ + \int_y^x K_x^{21}(x, \xi)P^{11}(\xi, y)d\xi + \int_y^x K_x^{22}(x, \xi)P^{21}(\xi, y)d\xi \quad (\text{D.31a})$$

$$K_y^{21}(x, y) = -P_y^{21}(x, y) - K^{21}(x, y)P^{11}(y, y) - K^{22}(x, y)P^{21}(y, y) \\ + \int_y^x K^{21}(x, \xi)P_y^{11}(\xi, y)d\xi + \int_y^x K^{22}(x, \xi)P_y^{21}(\xi, y)d\xi. \quad (\text{D.31b})$$

En utilisant (D.5a) et (D.5c), les deux termes intégraux de (D.31b) s'écrivent

$$\int_y^x K^{21}(x, \xi)P_y^{11}(\xi, y)d\xi = - \int_y^x K^{21}(x, \xi)P_\xi^{11}(\xi, y)d\xi - r_1\sigma^{-+}(y) \int_y^x K^{21}(x, \xi)P^{12}(\xi, y)d\xi \\ = -K^{21}(x, x)P^{11}(x, y) + K^{21}(x, y)P^{11}(y, y) \\ + \int_y^x K_\xi^{21}(x, \xi)P^{11}(\xi, y)d\xi - r_1\sigma^{-+}(y) \int_y^x K^{21}(x, \xi)P^{12}(\xi, y)d\xi \quad (\text{D.32a})$$

$$\int_y^x K^{22}(x, \xi)P_y^{21}(\xi, y)d\xi = \frac{r_1}{r_2} \int_y^x K^{22}(x, \xi)P_\xi^{21}(\xi, y)d\xi - r_1\sigma^{-+}(y) \int_y^x K^{22}(x, \xi)P^{22}(\xi, y)d\xi \\ = \frac{r_1}{r_2} K^{22}(x, x)P^{21}(x, y) \\ - \frac{r_1}{r_2} K^{22}(x, y)P^{21}(y, y) - \frac{r_1}{r_2} \int_y^x K_\xi^{22}(x, \xi)P^{21}(\xi, y)d\xi \quad (\text{D.32b}) \\ - r_1\sigma^{-+}(y) \int_y^x K^{22}(x, \xi)P^{22}(\xi, y)d\xi.$$

En substituant (D.32) dans (D.31b) et en multipliant (D.31a) par  $\frac{1}{r_2}$  et (D.31b) par  $-\frac{1}{r_1}$ , des termes se simplifient comme suit

$$\frac{1}{r_2} K_x^{21}(x, y) - \frac{1}{r_1} K_y^{21}(x, y) = - \left( \frac{1}{r_2} P_x^{21}(x, y) - \frac{1}{r_1} P_y^{21}(x, y) \right) \\ + \frac{r}{r_1 r_2} K^{21}(x, x)P^{11}(x, y) + \frac{r}{r_1 r_2} K^{22}(x, y)P^{21}(y, y) \\ + \sigma^{-+}(y) \int_y^x \left[ K^{21}(x, \xi)P^{12}(\xi, y) + K^{22}(x, \xi)P^{22}(\xi, y) \right] d\xi \\ + \int_y^x \left[ \frac{1}{r_2} K_x^{21}(x, \xi) - \frac{1}{r_1} K_\xi^{21}(x, \xi) \right] P^{11}(\xi, y)d\xi \\ + \int_y^x \left[ \frac{1}{r_2} K_x^{22}(x, \xi) + \frac{1}{r_2} K_\xi^{22}(x, \xi) \right] P^{21}(\xi, y)d\xi. \quad (\text{D.33})$$

En utilisant l'EDP (D.5c) et en substituant les conditions aux bords de  $K^{21}$  et  $P^{21}$  par leur expression (D.14b) et (D.6c) respectivement dans (D.33), nous avons

$$\frac{1}{r_2} K_x^{21}(x, y) - \frac{1}{r_1} K_y^{21}(x, y) = \sigma^{-+}(x)P^{11}(x, y) - \sigma^{-+}(y) \left( P^{22}(x, y) + K^{22}(x, y) \right) \\ + \sigma^{-+}(y) \int_y^x \left[ K^{21}(x, \xi)P^{12}(\xi, y) + K^{22}(x, \xi)P^{22}(\xi, y) \right] d\xi \\ + \int_y^x \left[ \frac{1}{r_2} K_x^{21}(x, \xi) - \frac{1}{r_1} K_\xi^{21}(x, \xi) \right] P^{11}(\xi, y)d\xi \\ + \int_y^x \left[ \frac{1}{r_2} K_x^{22}(x, \xi) + \frac{1}{r_2} K_\xi^{22}(x, \xi) \right] P^{21}(\xi, y)d\xi. \quad (\text{D.34})$$

En utilisant (D.13d), nous aboutissons à l'EDP suivante satisfaite par  $K^{21}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_2}K_x^{21}(x, y) - \frac{1}{r_1}K_y^{21}(x, y) &= \sigma^{+-}(x)P^{11}(x, y) + \int_y^x \left[ \frac{1}{r_2}K_x^{21}(x, \xi) - \frac{1}{r_1}K_\xi^{21}(x, \xi) \right] P^{11}(\xi, y)d\xi \\ &+ \int_y^x \left[ \frac{1}{r_2}K_x^{22}(x, \xi) + \frac{1}{r_1}K_\xi^{22}(x, \xi) \right] P^{21}(\xi, y)d\xi. \end{aligned} \quad (D.35)$$

Appliquons cette procédure à la dernière équation intégrale (D.13d) satisfaite par  $K^{22}$

$$\begin{aligned} K_x^{22}(x, y) &= -P_x^{22}(x, y) + K^{21}(x, x)P^{12}(x, y) + K^{22}(x, x)P^{22}(x, y) \\ &+ \int_y^x K_x^{21}(x, \xi)P^{12}(\xi, y)d\xi + \int_y^x K_x^{22}(x, \xi)P^{22}(\xi, y)d\xi \end{aligned} \quad (D.36a)$$

$$\begin{aligned} K_y^{22}(x, y) &= -P_y^{22}(x, y) - K^{21}(x, y)P^{12}(y, y) - K^{22}(x, y)P^{22}(y, y) \\ &+ \int_y^x K^{21}(x, \xi)P_y^{12}(\xi, y)d\xi + \int_y^x K^{22}(x, \xi)P_y^{22}(\xi, y)d\xi. \end{aligned} \quad (D.36b)$$

En utilisant (D.5b) et (D.5d), les deux termes intégraux de (D.36b) s'écrivent

$$\begin{aligned} \int_y^x K^{21}(x, \xi)P_y^{12}(\xi, y)d\xi &= \frac{r_2}{r_1} \int_y^x K^{21}(x, \xi)P_\xi^{12}(\xi, y)d\xi + r_2\sigma^{+-}(y) \int_y^x K^{21}(x, \xi)P^{11}(\xi, y)d\xi \\ &= \frac{r_2}{r_1}K^{21}(x, x)P^{12}(x, y) - \frac{r_2}{r_1}K^{21}(x, y)P^{12}(y, y) \\ &- \frac{r_2}{r_1} \int_y^x K_\xi^{21}(x, \xi)P^{12}(\xi, y)d\xi + r_2\sigma^{+-}(y) \int_y^x K^{21}(x, \xi)P^{11}(\xi, y)d\xi \end{aligned} \quad (D.37a)$$

$$\begin{aligned} \int_y^x K^{22}(x, \xi)P_y^{22}(\xi, y)d\xi &= - \int_y^x K^{22}(x, \xi)P_\xi^{22}(\xi, y)d\xi + r_2\sigma^{+-}(y) \int_y^x K^{22}(x, \xi)P^{21}(\xi, y)d\xi \\ &= -K^{22}(x, x)P^{22}(x, y) \\ &+ K^{22}(x, y)P^{22}(y, y) + \int_y^x K_\xi^{12}(x, \xi)P^{22}(\xi, y)d\xi \\ &+ r_2\sigma^{+-}(y) \int_y^x K^{22}(x, \xi)P^{21}(\xi, y)d\xi. \end{aligned} \quad (D.37b)$$

En substituant (D.37) dans (D.36b) et en additionnant (D.36a) et (D.36b), nous obtenons

$$\begin{aligned} K_x^{22}(x, y) + K_y^{22}(x, y) &= - \left( P_x^{22}(x, y) + P_y^{22}(x, y) \right) \\ &+ \frac{r}{r_1}K^{21}(x, x)P^{12}(x, y) - \frac{r}{r_1}K^{21}(x, y)P^{12}(y, y) \\ &+ r_2\sigma^{+-}(y) \int_y^x \left[ K^{21}(x, \xi)P^{11}(\xi, y) + K^{22}(x, \xi)P^{21}(\xi, y) \right] d\xi \\ &+ \int_y^x \left[ K_x^{21}(x, \xi) - \frac{r_2}{r_1}K_\xi^{21}(x, \xi) \right] P^{12}(\xi, y)d\xi \\ &+ \int_y^x \left[ K_x^{22}(x, \xi) + K_\xi^{22}(x, \xi) \right] P^{22}(\xi, y)d\xi. \end{aligned} \quad (D.38)$$

En utilisant l'EDP (D.5d) et en substituant les conditions aux bords de  $K^{21}$  et  $P^{12}$  par leur expression (D.14b) et (D.6a) respectivement dans (D.38), nous aurons

$$\begin{aligned}
K_x^{22}(x, y) + K_y^{22}(x, y) &= r_2 \sigma^{-+}(x) P^{12}(x, y) - r_2 \sigma^{+-}(y) \left( P^{21}(x, y) + K^{21}(x, y) \right) \\
&\quad + r_2 \sigma^{+-}(y) \int_y^x \left[ K^{21}(x, \xi) P^{11}(\xi, y) + K^{22}(x, \xi) P^{21}(\xi, y) \right] d\xi \\
&\quad + \int_y^x \left[ K_x^{21}(x, \xi) - \frac{r_2}{r_1} K_\xi^{21}(x, \xi) \right] P^{12}(\xi, y) d\xi \\
&\quad + \int_y^x \left[ K_x^{22}(x, \xi) + K_\xi^{22}(x, \xi) \right] P^{22}(\xi, y) d\xi.
\end{aligned} \tag{D.39}$$

En utilisant (D.13c), nous aboutissons à l'EDP suivante satisfaite par  $K^{22}$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r_2} K_x^{22}(x, y) + \frac{1}{r_2} K_y^{22}(x, y) &= \sigma^{-+}(x) P^{12}(x, y) + \int_y^x \left[ \frac{1}{r_2} K_x^{21}(x, \xi) - \frac{1}{r_1} K_\xi^{21}(x, \xi) \right] P^{12}(\xi, y) d\xi \\
&\quad + \int_y^x \left[ \frac{1}{r_2} K_x^{22}(x, \xi) + \frac{1}{r_2} K_\xi^{22}(x, \xi) \right] P^{22}(\xi, y) d\xi.
\end{aligned} \tag{D.40}$$

Considérons les EDP (D.25), (D.30), (D.35) et (D.40). Dans le but de simplifier les écritures, faisons le changement de variable

$$-S^{11}(x, y) \doteq \frac{1}{r_2} K_x^{21}(x, y) - \frac{1}{r_1} K_y^{21}(x, y) \tag{D.41a}$$

$$-S^{12}(x, y) \doteq \frac{1}{r_2} K_x^{22}(x, y) + \frac{1}{r_2} K_y^{22}(x, y) \tag{D.41b}$$

$$S^{21}(x, y) \doteq \frac{1}{r_1} K_x^{11}(x, y) + \frac{1}{r_1} K_y^{11}(x, y) \tag{D.41c}$$

$$S^{22}(x, y) \doteq \frac{1}{r_1} K_x^{12}(x, y) - \frac{1}{r_2} K_y^{12}(x, y). \tag{D.41d}$$

Remarquons que du fait de l'existence d'une solution unique  $K^{ij}$ ,  $i, j \in \{1, 2\}$  dans  $C^1(\mathcal{T}; \mathbb{R})$  satisfaisant (D.13), les fonctions  $S^{ij}$  satisfaisant (D.41) sont bien définies dans  $C^0(\mathcal{T}; \mathbb{R})$ . En conséquence, les  $S^{ij}$ ,  $i, j \in \{1, 2\}$ , vérifient les équations intégrales (bien-posées) suivantes

$$\begin{aligned}
S^{11}(x, y) &= -\sigma^{-+}(x) P^{11}(x, y) + \int_y^x S^{11}(x, \xi) P^{11}(\xi, y) d\xi \\
&\quad + \int_y^x S^{12}(x, \xi) P^{21}(\xi, y) d\xi
\end{aligned} \tag{D.42a}$$

$$\begin{aligned}
S^{12}(x, y) &= -\sigma^{-+}(x) P^{12}(x, y) + \int_y^x S^{11}(x, \xi) P^{12}(\xi, y) d\xi \\
&\quad + \int_y^x S^{12}(x, \xi) P^{22}(\xi, y) d\xi
\end{aligned} \tag{D.42b}$$

$$\begin{aligned}
S^{21}(x, y) &= -\sigma^{+-}(x) P^{21}(x, y) + \int_y^x S^{21}(x, \xi) P^{11}(\xi, y) d\xi \\
&\quad + \int_y^x S^{22}(x, \xi) P^{21}(\xi, y) d\xi
\end{aligned} \tag{D.42c}$$

$$\begin{aligned}
S^{22}(x, y) &= -\sigma^{+-}(x) P^{22}(x, y) + \int_y^x S^{21}(x, \xi) P^{12}(\xi, y) d\xi \\
&\quad + \int_y^x S^{22}(x, \xi) P^{22}(\xi, y) d\xi.
\end{aligned} \tag{D.42d}$$

Les équations (D.42) peuvent être écrites d'une manière compacte comme suit

$$\begin{bmatrix} S^{11}(x, y) \\ S^{12}(x, y) \end{bmatrix} = \sigma^{-+}(x) \begin{bmatrix} -P^{11}(x, y) \\ -P^{12}(x, y) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\mathcal{P}}^{11} & \bar{\mathcal{P}}^{21} \\ \bar{\mathcal{P}}^{12} & \bar{\mathcal{P}}^{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S^{11} \\ S^{12} \end{bmatrix}(x, y) \quad (\text{D.43a})$$

$$\begin{bmatrix} S^{21}(x, y) \\ S^{22}(x, y) \end{bmatrix} = \sigma^{+-}(x) \begin{bmatrix} -P^{21}(x, y) \\ -P^{22}(x, y) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\mathcal{P}}^{11} & \bar{\mathcal{P}}^{21} \\ \bar{\mathcal{P}}^{12} & \bar{\mathcal{P}}^{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S^{21} \\ S^{22} \end{bmatrix}(x, y) \quad (\text{D.43b})$$

où  $\bar{\mathcal{P}}^{ij}$ ,  $i, j \in \{1, 2\}$ , sont des opérateurs intégraux linéaires définis par  $\bar{\mathcal{P}}^{ij}[\varphi](x, y) \doteq \int_y^x \varphi(x, \xi) P^{ij}(\xi, y) d\xi$ ,  $\forall \varphi \in C^0(\mathcal{T}; \mathbb{R})$ . La solution de (D.43) s'écrit

$$\begin{bmatrix} S^{11}(x, y) \\ S^{12}(x, y) \end{bmatrix} = \sigma^{-+}(x) (\mathcal{I}_2 - \bar{\mathcal{P}})^{-1} \begin{bmatrix} -P^{11} \\ -P^{12} \end{bmatrix}(x, y), \quad (\text{D.44a})$$

$$\begin{bmatrix} S^{21}(x, y) \\ S^{22}(x, y) \end{bmatrix} = \sigma^{+-}(x) (\mathcal{I}_2 - \bar{\mathcal{P}})^{-1} \begin{bmatrix} -P^{21} \\ -P^{22} \end{bmatrix}(x, y) \quad (\text{D.44b})$$

avec  $\bar{\mathcal{P}} \doteq \begin{bmatrix} \bar{\mathcal{P}}^{11} & \bar{\mathcal{P}}^{21} \\ \bar{\mathcal{P}}^{12} & \bar{\mathcal{P}}^{22} \end{bmatrix}$  et  $\mathcal{I}_2 \doteq \begin{bmatrix} \mathcal{I} & 0 \\ 0 & \mathcal{I} \end{bmatrix}$ . Nous rappelons que l'opérateur  $(\mathcal{I}_2 - \bar{\mathcal{P}})$  admet un inverse unique, en vertu du caractère bien-posé de (D.42), mentionné ci-dessus. Remarquons que la solution de (D.13) est de la forme

$$\begin{bmatrix} K^{11}(x, y) \\ K^{12}(x, y) \end{bmatrix} = (\mathcal{I}_2 - \bar{\mathcal{P}})^{-1} \begin{bmatrix} -P^{11} \\ -P^{12} \end{bmatrix}(x, y) \quad (\text{D.45a})$$

$$\begin{bmatrix} K^{21}(x, y) \\ K^{22}(x, y) \end{bmatrix} = (\mathcal{I}_2 - \bar{\mathcal{P}})^{-1} \begin{bmatrix} -P^{21} \\ -P^{22} \end{bmatrix}(x, y). \quad (\text{D.45b})$$

En substituant (D.45) dans (D.44), nous obtenons l'égalité suivante qui lie les variables  $S^{ij}$  aux noyaux  $K^{ij}$

$$\begin{bmatrix} S^{11}(x, y) \\ S^{12}(x, y) \\ S^{21}(x, y) \\ S^{22}(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sigma^{-+}(x)K^{11}(x, y) \\ -\sigma^{-+}(x)K^{12}(x, y) \\ -\sigma^{+-}(x)K^{21}(x, y) \\ -\sigma^{+-}(x)K^{22}(x, y) \end{bmatrix}. \quad (\text{D.46})$$

En tenant compte de (D.41) et (D.46), les EDP satisfaites par  $K^{ij}$ ,  $i, j \in \{1, 2\}$  sont

$$\frac{1}{r_1} K_x^{11}(x, y) + \frac{1}{r_1} K_y^{11}(x, y) = \sigma^{+-}(x) K^{21}(x, y) \quad (\text{D.47a})$$

$$\frac{1}{r_1} K_x^{12}(x, y) - \frac{1}{r_2} K_y^{12}(x, y) = \sigma^{+-}(x) K^{22}(x, y) \quad (\text{D.47b})$$

$$\frac{1}{r_2} K_x^{21}(x, y) - \frac{1}{r_1} K_y^{21}(x, y) = -\sigma^{-+}(x) K^{11}(x, y) \quad (\text{D.47c})$$

$$\frac{1}{r_2} K_x^{22}(x, y) + \frac{1}{r_2} K_y^{22}(x, y) = -\sigma^{-+}(x) K^{12}(x, y) \quad (\text{D.47d})$$

avec les conditions aux bords

$$K^{12}(x, x) = -\sigma^{+-}(x) \frac{r_1 r_2}{r} \quad (\text{D.48a})$$

$$K^{11}(x, 0) = K^{12}(x, 0) \frac{r_1}{qr_2} \quad (\text{D.48b})$$

$$K^{21}(x, x) = \sigma^{-+}(x) \frac{r_1 r_2}{r} \quad (\text{D.48c})$$

$$K^{22}(x, 0) = K^{21}(x, 0) \frac{r_2}{r_1} q. \quad (\text{D.48d})$$

Les noyaux  $K^{ij}$  vérifient les EDP (D.47)-(D.48) identiques à celles satisfaites par les noyaux  $L^{ij}$  (D.9)-(D.10) de la transformation inverse (D.8) avec les mêmes conditions aux bords. Ces EDP, étant bien-posées [Coron et al., 2013, Theorem A.2], admettent une solution unique  $K^{ij} = L^{ij} \in C^1(\mathcal{T}; \mathbb{R})$ ,  $i, j \in \{1, 2\}$ .



## Annexe E.

# Expressions explicites des noyaux d'une transformation backstepping

**Sommaire**

---

<b>E.1</b>	<b>Équations intégrales</b> . . . . .	<b>157</b>
<b>E.2</b>	<b>Approximations successives</b> . . . . .	<b>158</b>
<b>E.3</b>	<b>Expressions explicites des noyaux</b> . . . . .	<b>161</b>
<b>E.4</b>	<b>Expression de <math>N(\theta)</math></b> . . . . .	<b>163</b>
<b>E.5</b>	<b>Majoration de <math> N(\theta) </math> et de <math> N'(\theta) </math></b> . . . . .	<b>164</b>
<b>E.6</b>	<b>Courbes de variation de <math>N(\theta)</math></b> . . . . .	<b>167</b>

---

Nous établissons la solution analytique exacte des noyaux  $L^{ij}$ ,  $i, j \in \{1, 2\}$  satisfaisant les EDP hyperboliques (3.11) avec les conditions aux bords (3.12), en fonction des paramètres constants ( $\sigma^{+-}$ ,  $\sigma^{-+}$ ,  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $\rho$  et  $q$ ) du système de départ (3.6)-(3.8). À noter que la solution donnée dans [Vazquez and Krstic, 2014] en utilisant les fonctions de Bessel et les fonctions  $Q$  de Marcum ne peut pas être appliquée puisque la classe considérée est un système d'EDP hyperboliques couplées 2 à 2, contrairement au couplage 4 à 4 qui apparaît dans (3.11)-(3.12).

Nous trouvons d'abord les équations intégrales satisfaites par  $L^{ij}$  avant d'appliquer la méthode des approximations successives qui nous conduit aux expressions de ces noyaux en séries de puissance. Leur solution analytique exacte est ainsi déduite en utilisant les fonctions de Bessel  $J_n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  et les fonctions de Bessel modifiées  $I_n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  de première espèce. Nous cherchons ensuite l'expression analytique de  $N(\theta)$  et de  $N'(\theta)$ , et majorons leur valeur absolue. Ces solutions, ainsi que les majorants, sont utilisés pour exprimer la condition suffisante de stabilité du système considéré, présentée dans la section 3.3.1, et dans l'approximation numérique de la condition nécessaire et suffisante (3.29) développée dans la section 3.3.2.

Nous rappelons que les noyaux  $L^{ij}$ ,  $i, j \in \{1, 2\}$  vérifient les EDP suivantes dans  $\mathcal{T}$  [Coron et al., 2013]

$$\frac{1}{r_1}L_x^{11}(x, y) + \frac{1}{r_1}L_y^{11}(x, y) = \sigma^{+-}L^{21}(x, y) \quad (\text{E.1a})$$

$$\frac{1}{r_1}L_x^{12}(x, y) - \frac{1}{r_2}L_y^{12}(x, y) = \sigma^{+-}L^{22}(x, y) \quad (\text{E.1b})$$

$$\frac{1}{r_2}L_x^{21}(x, y) - \frac{1}{r_1}L_y^{21}(x, y) = -\sigma^{-+}L^{11}(x, y) \quad (\text{E.1c})$$

$$\frac{1}{r_2}L_x^{22}(x, y) + \frac{1}{r_2}L_y^{22}(x, y) = -\sigma^{-+}L^{12}(x, y) \quad (\text{E.1d})$$

avec les conditions aux bords

$$L^{12}(x, x) = -\sigma^{+-}\frac{r_1r_2}{r} \quad (\text{E.2a})$$

$$L^{11}(x, 0) = L^{12}(x, 0)\frac{r_1}{qr_2} \quad (\text{E.2b})$$

$$L^{21}(x, x) = \sigma^{-+}\frac{r_1r_2}{r} \quad (\text{E.2c})$$

$$L^{22}(x, 0) = L^{21}(x, 0)\frac{r_2}{r_1}q. \quad (\text{E.2d})$$

## E.1 Équations intégrales

En appliquant la méthode des caractéristiques, et en intégrant le long des lignes caractéristiques émergeant des bords (E.2) où les noyaux sont définis, nous trouvons que les  $L^{ij}$ ,  $i, j \in \{1, 2\}$  vérifient les équations intégrales suivantes

$$\begin{aligned} L^{11}(x, y) = & -\frac{\sigma^{+-}}{q}\frac{r_1^2}{r} + r_1\sigma^{+-}\int_0^y L^{21}(\xi + x - y, \xi)d\xi \\ & + \frac{\sigma^{+-}}{q}\frac{r_1}{r_2}\int_0^{(x-y)\frac{r_1r_2}{r}} L^{22}\left(\frac{\xi}{r_1} + (x-y)\frac{r_1}{r}, -\frac{\xi}{r_2} + (x-y)\frac{r_1}{r}\right)d\xi \end{aligned} \quad (\text{E.3a})$$

$$\begin{aligned} L^{12}(x, y) = & -\sigma^{+-}\frac{r_1r_2}{r} + \sigma^{+-}\int_0^{(x-y)\frac{r_1r_2}{r}} L^{22}\left(\frac{\xi}{r_1} + x\frac{r_1}{r} + y\frac{r_2}{r}, \right. \\ & \left. -\frac{\xi}{r_2} + x\frac{r_1}{r} + y\frac{r_2}{r}\right)d\xi \end{aligned} \quad (\text{E.3b})$$



$$L^{21}(x, y) = \sigma^{-+} \frac{r_1 r_2}{r} - \sigma^{-+} \int_0^{(x-y) \frac{r_1 r_2}{r}} L^{11} \left( \frac{\xi}{r_2} + x \frac{r_2}{r} + y \frac{r_1}{r}, -\frac{\xi}{r_1} + x \frac{r_2}{r} + y \frac{r_1}{r} \right) d\xi \quad (\text{E.3c})$$

$$L^{22}(x, y) = \sigma^{-+} q \frac{r_2^2}{r} - r_2 \sigma^{-+} \int_0^y L^{12}(\xi + x - y, \xi) d\xi - \sigma^{-+} q \frac{r_2}{r_1} \int_0^{(x-y) \frac{r_1 r_2}{r}} L^{11} \left( \frac{\xi}{r_2} + (x-y) \frac{r_2}{r}, -\frac{\xi}{r_1} + (x-y) \frac{r_2}{r} \right) d\xi. \quad (\text{E.3d})$$

Une forme générale de ces équations intégrales se trouve dans [Coron et al., 2013]. Écrivons les équations (E.3) sous une forme matricielle compacte

$$L(x, y) = L_0 + A[L](x, y) \quad (\text{E.4})$$

$$\text{avec } L(x, y) \doteq \begin{bmatrix} L^{11}(x, y) \\ L^{12}(x, y) \\ L^{21}(x, y) \\ L^{22}(x, y) \end{bmatrix} \text{ et } L_0 \doteq \begin{bmatrix} -\frac{\sigma^{-+} r_1^2}{q} \\ \frac{r_1 r_2}{r} \\ -\sigma^{-+} \frac{r_1 r_2}{r} \\ \sigma^{-+} \frac{r_1 r_2}{r} \\ \sigma^{-+} q \frac{r_2^2}{r} \end{bmatrix}.$$

$A$  est un opérateur intégral linéaire défini comme suit

$$A[L] \doteq \begin{bmatrix} 0 & 0 & r_1 \sigma^{-+} A_1 & \frac{\sigma^{-+} r_1}{q} A_2 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma^{-+} A_3 \\ -\sigma^{-+} A_4 & 0 & 0 & 0 \\ -\sigma^{-+} q \frac{r_2}{r_1} A_5 & -r_2 \sigma^{-+} A_1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L^{11} \\ L^{12} \\ L^{21} \\ L^{22} \end{bmatrix} \quad (\text{E.5})$$

avec

$$A_1[L^{ij}(\cdot, \cdot)](x, y) \doteq \int_0^y L^{ij}(\xi + x - y, \xi) d\xi \quad (\text{E.6a})$$

$$A_2[L^{22}(\cdot, \cdot)](x, y) \doteq \int_0^{(x-y) \frac{r_1 r_2}{r}} L^{22} \left( \frac{\xi}{r_1} + (x-y) \frac{r_1}{r}, -\frac{\xi}{r_2} + (x-y) \frac{r_1}{r} \right) d\xi \quad (\text{E.6b})$$

$$A_3[L^{22}(\cdot, \cdot)](x, y) \doteq \int_0^{(x-y) \frac{r_1 r_2}{r}} L^{22} \left( \frac{\xi}{r_1} + x \frac{r_1}{r} + y \frac{r_2}{r}, -\frac{\xi}{r_2} + x \frac{r_1}{r} + y \frac{r_2}{r} \right) d\xi \quad (\text{E.6c})$$

$$A_4[L^{11}(\cdot, \cdot)](x, y) \doteq \int_0^{(x-y) \frac{r_1 r_2}{r}} L^{11} \left( \frac{\xi}{r_2} + x \frac{r_2}{r} + y \frac{r_1}{r}, -\frac{\xi}{r_1} + x \frac{r_2}{r} + y \frac{r_1}{r} \right) d\xi \quad (\text{E.6d})$$

$$A_5[L^{11}(\cdot, \cdot)](x, y) \doteq \int_0^{(x-y) \frac{r_1 r_2}{r}} L^{11} \left( \frac{\xi}{r_2} + (x-y) \frac{r_2}{r}, -\frac{\xi}{r_1} + (x-y) \frac{r_2}{r} \right) d\xi. \quad (\text{E.6e})$$

## E.2 Approximations successives et expressions en séries de puissance

La solution de l'équation intégrale (E.4) est générée en utilisant la méthode des approximations successives (voir, par exemple, [Carothers et al., 2004] et [Krstic and Smyshlyayev, 2008b]) de la manière suivante

$$L(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} A^n[L_0](x, y) \quad (\text{E.7})$$

avec  $A^0[L_0] = L_0$ . Nous notons  $L_k^{ij}(x, y) = A^k[L_0](x, y)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Nous adoptons de même les notations

$$\gamma(x, y) \doteq \sigma^{+-} \sigma^{-+}(x - y)(r_2x + r_1y)$$

et

$$\bar{\gamma}(x, y) \doteq \sigma^{+-} \sigma^{-+}(x - y)(r_1x + r_2y).$$

Afin d'obtenir le terme général des séries de puissance satisfaites par chaque  $L^{ij}$  comme dans (E.7), les premiers termes ( $L_k^{ij}(x, y)$ ,  $k = 1 \dots 5$ ) sont exprimés. Commençons par  $L_k^{11}(x, y)$ , pour  $k$  pair.

$$L_0^{11}(x, y) = -\frac{r_1^2 \sigma^{+-}}{r q}, \quad (\text{E.8a})$$

$$L_2^{11}(x, y) = \frac{r_1^4 r_2 \sigma^{+-}}{r^3 q} \sigma^{+-} \sigma^{-+}(x - y)(r_2x + r_1y), \quad (\text{E.8b})$$

$$L_4^{11}(x, y) = -\frac{r_1^6 r_2^2 \sigma^{+-}}{r^5 2!^2 q} \left[ \sigma^{+-} \sigma^{-+}(x - y)(r_2x + r_1y) \right]^2. \quad (\text{E.8c})$$

Pour  $k$  impair,  $L_k^{11}(x, y)$  vérifie

$$L_1^{11}(x, y) = \frac{r_1^2 r_2}{r^2} \sigma^{+-} \sigma^{-+}(r_2x + r_1y), \quad (\text{E.9a})$$

$$L_3^{11}(x, y) = -\frac{r_1^4 r_2^2}{1!2!r^4} (\sigma^{+-} \sigma^{-+})^2 (x - y)(r_2x + r_1y)^2, \quad (\text{E.9b})$$

$$L_5^{11}(x, y) = \frac{r_1^6 r_2^3}{2!3!r^6} (\sigma^{+-} \sigma^{-+})^3 (x - y)^2 (r_2x + r_1y)^3. \quad (\text{E.9c})$$

Enchainons avec  $L_k^{12}(x, y)$ , pour  $k$  pair

$$L_0^{12}(x, y) = -\frac{r_1 r_2}{r} \sigma^{+-}, \quad (\text{E.10a})$$

$$L_2^{12}(x, y) = \frac{r_1^2 r_2^3 \sigma^{+-}}{r^3} \sigma^{+-} \sigma^{-+}(x - y)(r_1x + r_2y), \quad (\text{E.10b})$$

$$L_4^{12}(x, y) = -\frac{r_1^3 r_2^5 \sigma^{+-}}{2!^2 r^5} \left[ \sigma^{+-} \sigma^{-+}(x - y)(r_1x + r_2y) \right]^2. \quad (\text{E.10c})$$

Pour  $k$  impair,  $L_k^{12}(x, y)$  vérifie

$$L_1^{12}(x, y) = q \frac{r_1 r_2^3}{r^2} \sigma^{+-} \sigma^{-+}(x - y), \quad (\text{E.11a})$$

$$L_3^{12}(x, y) = -q \frac{r_1^2 r_2^5}{1!2!r^4} (\sigma^{+-} \sigma^{-+})^2 (x - y)^2 (r_1x + r_2y), \quad (\text{E.11b})$$

$$L_5^{12}(x, y) = q \frac{r_1^3 r_2^7}{2!3!r^6} (\sigma^{+-} \sigma^{-+})^3 (x - y)^3 (r_1x + r_2y)^2. \quad (\text{E.11c})$$

De la même manière,  $L_k^{21}(x, y)$  satisfait ces expressions pour  $k$  pair

$$L_0^{21}(x, y) = \frac{r_1 r_2}{r} \sigma^{-+}, \quad (\text{E.12a})$$

$$L_2^{21}(x, y) = -\frac{r_1^3 r_2^2 \sigma^{-+}}{r^3} \sigma^{+-} \sigma^{-+}(x - y)(r_2x + r_1y), \quad (\text{E.12b})$$

$$L_4^{21}(x, y) = \frac{r_1^5 r_2^3 \sigma^{-+}}{r^5 2!^2} \left[ \sigma^{+-} \sigma^{-+}(x - y)(r_2x + r_1y) \right]^2, \quad (\text{E.12c})$$

et les expressions suivantes pour  $k$  impair

$$L_1^{21}(x, y) = \frac{r_1^3 r_2}{r^2} \frac{\sigma^{+-} \sigma^{-+}}{q} (x - y), \quad (\text{E.13a})$$

$$L_3^{21}(x, y) = -\frac{r_1^5 r_2^2}{r^4} \frac{(\sigma^{+-} \sigma^{-+})^2}{1!2!q} (x - y)^2 (r_2 x + r_1 y), \quad (\text{E.13b})$$

$$L_5^{21}(x, y) = \frac{r_1^7 r_2^3}{r^6} \frac{(\sigma^{+-} \sigma^{-+})^3}{2!3!q} (x - y)^3 (r_2 x + r_1 y)^2. \quad (\text{E.13c})$$

À son tour,  $L_k^{22}(x, y)$  satisfait pour  $k$  pair

$$L_0^{22}(x, y) = q \frac{r_2^2}{r} \sigma^{-+}, \quad (\text{E.14a})$$

$$L_2^{22}(x, y) = -\frac{r_1 r_2^4}{r^3} q \sigma^{-+} \sigma^{+-} \sigma^{-+} (x - y) (r_1 x + r_2 y), \quad (\text{E.14b})$$

$$L_4^{22}(x, y) = \frac{r_1^2 r_2^6}{r^5} \frac{q \sigma^{-+}}{2!^2} \left[ \sigma^{+-} \sigma^{-+} (x - y) (r_1 x + r_2 y) \right]^2, \quad (\text{E.14c})$$

et finalement pour  $k$  impair

$$L_1^{22}(x, y) = \frac{r_1 r_2^2}{r^2} \sigma^{+-} \sigma^{-+} (r_1 x + r_2 y), \quad (\text{E.15a})$$

$$L_3^{22}(x, y) = -\frac{r_1^2 r_2^4}{1!2!r^4} (\sigma^{+-} \sigma^{-+})^2 (x - y) (r_1 x + r_2 y)^2, \quad (\text{E.15b})$$

$$L_5^{22}(x, y) = \frac{r_1^3 r_2^6}{2!3!r^6} (\sigma^{+-} \sigma^{-+})^3 (x - y)^2 (r_1 x + r_2 y)^3. \quad (\text{E.15c})$$

Les expressions suivantes sont déduites de (E.8)-(E.15) par récurrence sur  $k$

$$L_{2m}^{11}(x, y) = -\frac{r_1^2}{r} \frac{\sigma^{+-}}{q} \frac{(-1)^m}{m!^2} \frac{r_1^{2m} r_2^m}{r^{2m}} [\gamma(x, y)]^m \quad (\text{E.16a})$$

$$\begin{aligned} L_{2m+1}^{11}(x, y) &= \frac{r_1^2 r_2}{r^2} \sigma^{+-} \sigma^{-+} (r_2 x + r_1 y) \\ &\times \frac{(-1)^m}{m!(m+1)!} \frac{r_1^{2m} r_2^m}{r^{2m}} [\gamma(x, y)]^m \end{aligned} \quad (\text{E.16b})$$

$$L_{2m}^{12}(x, y) = -\frac{r_1 r_2}{r} \sigma^{+-} \frac{(-1)^m}{m!^2} \frac{r_1^m r_2^{2m}}{r^{2m}} [\bar{\gamma}(x, y)]^m \quad (\text{E.17a})$$

$$\begin{aligned} L_{2m+1}^{12}(x, y) &= q \frac{r_1 r_2^3}{r^2} \sigma^{+-} \sigma^{-+} (x - y) \\ &\times \frac{(-1)^m}{m!(m+1)!} \frac{r_1^m r_2^{2m}}{r^{2m}} [\bar{\gamma}(x, y)]^m \end{aligned} \quad (\text{E.17b})$$

$$L_{2m}^{21}(x, y) = \frac{r_1 r_2}{r} \sigma^{-+} \frac{(-1)^m}{m!^2} \frac{r_1^{2m} r_2^m}{r^{2m}} [\gamma(x, y)]^m \quad (\text{E.18a})$$

$$\begin{aligned} L_{2m+1}^{21}(x, y) &= \frac{r_1^3 r_2}{r^2} \frac{\sigma^{+-} \sigma^{-+}}{q} (x - y) \\ &\times \frac{(-1)^m}{m!(m+1)!} \frac{r_1^{2m} r_2^m}{r^{2m}} [\gamma(x, y)]^m \end{aligned} \quad (\text{E.18b})$$

$$L_{2m}^{22}(x, y) = q \frac{r_2^2}{r} \sigma^{-+} + \frac{(-1)^m}{m!^2} \frac{r_1^m r_2^{2m}}{r^{2m}} [\bar{\gamma}(x, y)]^m \quad (\text{E.19a})$$

$$L_{2m+1}^{22}(x, y) = \frac{r_1 r_2^2}{r^2} \sigma^{+-} \sigma^{-+} (r_1 x + r_2 y) \times \frac{(-1)^m}{m!(m+1)!} \frac{r_1^m r_2^{2m}}{r^{2m}} [\bar{\gamma}(x, y)]^m. \quad (\text{E.19b})$$

En additionnant les termes consécutifs de chaque  $L^{ij}$ ,  $i, j \in \{1, 2\}$ , nous aboutissons aux expressions en séries de puissance suivantes :

$$L^{11}(x, y) = -\frac{r_1^2}{r} \frac{\sigma^{+-}}{q} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!^2} \left[ \frac{r_1^2 r_2}{r^2} \gamma(x, y) \right]^m + \frac{r_1^2 r_2}{r^2} \sigma^{+-} \sigma^{-+} (r_2 x + r_1 y) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m+1)!} \left[ \frac{r_1^2 r_2}{r^2} \gamma(x, y) \right]^m \quad (\text{E.20a})$$

$$L^{12}(x, y) = -\frac{r_1 r_2}{r} \sigma^{+-} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!^2} \left[ \frac{r_1 r_2^2}{r^2} \bar{\gamma}(x, y) \right]^m + q \frac{r_1 r_2^3}{r^2} \sigma^{+-} \sigma^{-+} (x - y) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m+1)!} \left[ \frac{r_1 r_2^2}{r^2} \bar{\gamma}(x, y) \right]^m \quad (\text{E.20b})$$

$$L^{21}(x, y) = \frac{r_1 r_2}{r} \sigma^{-+} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!^2} \left[ \frac{r_1^2 r_2}{r^2} \gamma(x, y) \right]^m + \frac{r_1^3 r_2}{r^2} \frac{\sigma^{+-} \sigma^{-+}}{q} (x - y) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m+1)!} \left[ \frac{r_1^2 r_2}{r^2} \gamma(x, y) \right]^m \quad (\text{E.20c})$$

$$L^{22}(x, y) = q \frac{r_2^2}{r} \sigma^{-+} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!^2} \left[ \frac{r_1 r_2^2}{r^2} \bar{\gamma}(x, y) \right]^m + \frac{r_1 r_2^2}{r^2} \sigma^{+-} \sigma^{-+} (r_1 x + r_2 y) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m+1)!} \left[ \frac{r_1 r_2^2}{r^2} \bar{\gamma}(x, y) \right]^m. \quad (\text{E.20d})$$

### E.3 Expressions explicites des noyaux

En utilisant les fonctions de Bessel de première espèce  $J_0$  et  $J_1$  [Kreh, 2012], nous avons

$$L^{11}(x, y) = -\frac{r_1^2}{r} \frac{\sigma^{+-}}{q} J_0 \left( \frac{2r_1 \sqrt{r_2}}{r} \sqrt{\gamma(x, y)} \right) + \frac{r_1 \sqrt{r_2}}{r} \sqrt{\frac{\sigma^{+-} \sigma^{-+} (r_2 x + r_1 y)}{x - y}} J_1 \left( \frac{2r_1 \sqrt{r_2}}{r} \sqrt{\gamma(x, y)} \right) \quad (\text{E.21a})$$

$$L^{12}(x, y) = -\frac{r_1 r_2}{r} \sigma^{+-} J_0 \left( \frac{2\sqrt{r_1 r_2}}{r} \sqrt{\bar{\gamma}(x, y)} \right) + q \frac{\sqrt{r_1 r_2^2}}{r} \sqrt{\frac{\sigma^{+-} \sigma^{-+} (x - y)}{r_1 x + r_2 y}} J_1 \left( \frac{2\sqrt{r_1 r_2}}{r} \sqrt{\bar{\gamma}(x, y)} \right) \quad (\text{E.21b})$$

$$L^{21}(x, y) = \frac{r_1 r_2}{r} \sigma^{-+} J_0 \left( \frac{2r_1 \sqrt{r_2}}{r} \sqrt{\gamma(x, y)} \right) + \frac{r_1^2 \sqrt{r_2}}{qr} \sqrt{\frac{\sigma^{+-} \sigma^{-+} (x - y)}{r_2 x + r_1 y}} J_1 \left( \frac{2r_1 \sqrt{r_2}}{r} \sqrt{\gamma(x, y)} \right) \quad (\text{E.21c})$$

$$L^{22}(x, y) = q \frac{r_2^2}{r} \sigma^{-+} J_0 \left( \frac{2\sqrt{r_1 r_2}}{r} \sqrt{\bar{\gamma}(x, y)} \right) + \frac{\sqrt{r_1 r_2}}{r} \sqrt{\frac{\sigma^{+-} \sigma^{-+} (r_1 x + r_2 y)}{x - y}} J_1 \left( \frac{2\sqrt{r_1 r_2}}{r} \sqrt{\bar{\gamma}(x, y)} \right). \quad (\text{E.21d})$$

À noter que pour  $x = y$ , les expressions (E.21) sont bien définies et se simplifient en

$$L^{11}(x, x) = -\frac{r_1^2}{r} \frac{\sigma^{+-}}{q} + \frac{r_1^2 r_2}{r} \sigma^{+-} \sigma^{-+} x \quad (\text{E.22a})$$

$$L^{12}(x, x) = -\frac{r_1 r_2}{r} \sigma^{+-} \quad (\text{E.22b})$$

$$L^{21}(x, x) = \frac{r_1 r_2}{r} \sigma^{-+} \quad (\text{E.22c})$$

$$L^{22}(x, x) = q \frac{r_2^2}{r} \sigma^{-+} + \frac{r_1 r_2^2}{r} \sigma^{+-} \sigma^{-+} x. \quad (\text{E.22d})$$

Dans la mesure où la manipulation numérique de (E.21) autour de  $x = y$  peut être problématique, nous pouvons utiliser les propriétés des fonctions de Bessel, comme [Kreh, 2012]

$$J_n(\xi) = \frac{\xi}{2n} (J_{n-1}(\xi) + J_{n+1}(\xi)), \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \forall \xi \in \mathbb{R},$$

pour obtenir

$$L^{11}(x, y) = \left[ -\frac{r_1^2}{r} \frac{\sigma^{+-}}{q} + \frac{r_1^2 r_2}{r^2} \sigma^{+-} \sigma^{-+} (r_2 x + r_1 y) \right] J_0 \left( \frac{2r_1 \sqrt{r_2}}{r} \sqrt{\gamma(x, y)} \right) + \frac{r_1^2 r_2}{r^2} \sigma^{+-} \sigma^{-+} (r_2 x + r_1 y) J_2 \left( \frac{2r_1 \sqrt{r_2}}{r} \sqrt{\gamma(x, y)} \right) \quad (\text{E.23a})$$

$$L^{12}(x, y) = \left[ -\frac{r_1 r_2}{r} \sigma^{+-} + q \frac{r_1 r_2^3}{r^2} \sigma^{+-} \sigma^{-+} (x - y) \right] J_0 \left( \frac{2\sqrt{r_1 r_2}}{r} \sqrt{\bar{\gamma}(x, y)} \right) + q \frac{r_1 r_2^3}{r^2} \sigma^{+-} \sigma^{-+} (x - y) J_2 \left( \frac{2\sqrt{r_1 r_2}}{r} \sqrt{\bar{\gamma}(x, y)} \right) \quad (\text{E.23b})$$

$$L^{21}(x, y) = \left[ \frac{r_1 r_2}{r} \sigma^{-+} + \frac{r_1^3 r_2}{r^2} \frac{\sigma^{+-} \sigma^{-+}}{q} (x - y) \right] J_0 \left( \frac{2r_1 \sqrt{r_2}}{r} \sqrt{\gamma(x, y)} \right) + \frac{r_1^3 r_2}{r^2} \frac{\sigma^{+-} \sigma^{-+}}{q} (x - y) J_2 \left( \frac{2r_1 \sqrt{r_2}}{r} \sqrt{\gamma(x, y)} \right) \quad (\text{E.23c})$$

$$L^{22}(x, y) = \left[ q \frac{r_2^2}{r} \sigma^{-+} + \frac{r_1 r_2^2}{r^2} \sigma^{+-} \sigma^{-+} (r_1 x + r_2 y) \right] J_0 \left( \frac{2\sqrt{r_1 r_2}}{r} \sqrt{\bar{\gamma}(x, y)} \right) + \frac{r_1 r_2^2}{r^2} \sigma^{+-} \sigma^{-+} (r_1 x + r_2 y) J_2 \left( \frac{2\sqrt{r_1 r_2}}{r} \sqrt{\bar{\gamma}(x, y)} \right). \quad (\text{E.23d})$$

**Remarque 2.** Pour le cas  $\sigma^{+-} \sigma^{-+} < 0$ , il paraît plus simple d'utiliser les fonctions de Bessel modifiées de première espèce  $I_n$ , vérifiant la relation [Kreh, 2012]

$$J_n(i\xi) = i^n I_n(\xi), \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

## E.4 Expression de $N(\theta)$

Le critère explicite donné dans la proposition 3 se base sur les expressions de  $N(\theta)$  et de la borne supérieure de  $|N(\theta)|$ ,  $\theta \in [0, r]$ , en fonction des paramètres du système de départ ( $\sigma^{+-}$ ,  $\sigma^{-+}$ ,  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $\rho$  et  $q$ ). Dans ce qui suit, nous trouvons ces expressions avant de dériver  $N(\theta)$  et majorer sa valeur absolue.

Pour  $\theta \in [0, r_2]$ , l'évaluation de (E.23b) et (E.23d) en  $x = 1$  et  $y = 1 - \frac{\theta}{r_2}$  donne

$$x - y = \frac{\theta}{r_2} \quad (\text{E.24a})$$

$$r_1 x + r_2 y = r - \theta \quad (\text{E.24b})$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_2} L^{22} \left( 1, 1 - \frac{\theta}{r_2} \right) &= \left[ q \frac{r_2}{r} \sigma^{-+} + \frac{R}{r^2} (r - \theta) \right] J_0 \left( \frac{2\sqrt{R\theta(r - \theta)}}{r} \right) \\ &+ \frac{R}{r^2} (r - \theta) J_2 \left( \frac{2\sqrt{R\theta(r - \theta)}}{r} \right), \end{aligned} \quad (\text{E.25a})$$

$$\begin{aligned} -\frac{\rho}{r_2} L^{12} \left( 1, 1 - \frac{\theta}{r_2} \right) &= \left[ \rho \frac{r_1}{r} \sigma^{+-} - \rho q \frac{R}{r^2} \theta \right] J_0 \left( \frac{2\sqrt{R\theta(r - \theta)}}{r} \right) \\ &- \rho q \frac{R}{r^2} \theta J_2 \left( \frac{2\sqrt{R\theta(r - \theta)}}{r} \right), \end{aligned} \quad (\text{E.25b})$$

où  $R = r_1 r_2 \sigma^{+-} \sigma^{-+}$  (cf. équation (3.35b)). Pour  $\theta \in (r_2, r]$ , l'évaluation de (E.23a) et (E.23c) en  $x = 1$  et  $y = \frac{\theta - r_2}{r_1}$  donne

$$x - y = \frac{r - \theta}{r_1} \quad (\text{E.26a})$$

$$r_2 x + r_1 y = \theta \quad (\text{E.26b})$$

$$\begin{aligned} \frac{q}{r_1} L^{21} \left( 1, \frac{\theta - r_2}{r_1} \right) &= \left[ q \frac{r_2}{r} \sigma^{-+} + \frac{R}{r^2} (r - \theta) \right] J_0 \left( \frac{2\sqrt{R\theta(r - \theta)}}{r} \right) \\ &+ \frac{R}{r^2} (r - \theta) J_2 \left( \frac{2\sqrt{R\theta(r - \theta)}}{r} \right), \end{aligned} \quad (\text{E.27a})$$

$$\begin{aligned} -\frac{\rho q}{r_1} L^{11} \left( 1, \frac{\theta - r_2}{r_1} \right) &= \left[ \rho \frac{r_1}{r} \sigma^{+-} - \rho q \frac{R}{r^2} \theta \right] J_0 \left( \frac{2\sqrt{R\theta(r - \theta)}}{r} \right) \\ &- \rho q \frac{R}{r^2} \theta J_2 \left( \frac{2\sqrt{R\theta(r - \theta)}}{r} \right). \end{aligned} \quad (\text{E.27b})$$

En substituant ces expressions dans (3.17) (où  $N^\alpha$  et  $N^\beta$  sont exprimées en termes de  $L^{ij}$ ) et (3.22) (où  $N$  est exprimée en termes de  $N^\alpha$  et  $N^\beta$ ), nous obtenons

$$N(\theta) = \left( \frac{a}{r} + \frac{d(\theta)}{r^2} \right) J_0 \left( 2\sqrt{h(\theta)} \right) + \frac{d(\theta)}{r^2} J_2 \left( 2\sqrt{h(\theta)} \right), \quad \forall \theta \in [0, r] \quad (\text{E.28})$$

où nous définissons

$$d(\theta) \doteq R[r - \theta(1 + \rho q)] \quad (\text{E.29a})$$

$$h(\theta) \doteq \frac{R}{r^2} \theta(r - \theta) \quad (\text{E.29b})$$

et  $a = qr_2 \sigma^{-+} + \rho r_1 \sigma^{+-}$  (cf. équation (3.35a)). À noter qu'une expression en séries de puissance de  $N(\theta)$  peut être trouvée à partir de (E.28). Elle s'écrit

$$N(\theta) = \frac{a}{r} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!^2} h^m(\theta) + \frac{d(\theta)}{r^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m+1)!} h^m(\theta), \quad \forall \theta \in [0, r]. \quad (\text{E.30})$$

### E.5 Majoration de $|N(\theta)|$ et de $|N'(\theta)|$

Les calculs suivants sont valides pour  $\sigma^{+-}\sigma^{-+} \geq 0$ . Le cas où  $\sigma^{+-}\sigma^{-+} < 0$  sera traité juste après. Nous trouvons une borne supérieure de  $|N(\theta)|$  en utilisant les propriétés des fonctions de Bessel de première espèce [Kreh, 2012] comme

$$\left| J_0 \left( 2\sqrt{h(\theta)} \right) \right| \leq 1, \quad \forall \theta \in [0, r] \quad (\text{E.31a})$$

$$\left| J_0 \left( 2\sqrt{h(\theta)} \right) + J_2 \left( 2\sqrt{h(\theta)} \right) \right| \leq 1, \quad \forall \theta \in (0, r). \quad (\text{E.31b})$$

En remarquant que  $|d(\theta)| \leq |R|r$ , nous avons

$$|N(\theta)| \leq \frac{1}{r} (|a| + |R|). \quad (\text{E.32})$$

Dérivons  $N(\theta)$

$$\begin{aligned} N'(\theta) &= \frac{d'(\theta)}{r^2} \left[ J_0 \left( 2\sqrt{h(\theta)} \right) + J_2 \left( 2\sqrt{h(\theta)} \right) \right] \\ &\quad + \left( \frac{a}{r} + \frac{d(\theta)}{r^2} \right) J_0' \left( 2\sqrt{h(\theta)} \right) \frac{h'(\theta)}{\sqrt{h(\theta)}} + \frac{d(\theta)}{r^2} J_2' \left( 2\sqrt{h(\theta)} \right) \frac{h'(\theta)}{\sqrt{h(\theta)}} \end{aligned} \quad (\text{E.33})$$

où

$$d'(\theta) = -R(1 + \rho q) \quad (\text{E.34a})$$

$$h'(\theta) = \frac{R}{r} \left( 1 - 2\frac{\theta}{r} \right) \quad (\text{E.34b})$$

$$\begin{aligned} J_0' \left( 2\sqrt{h(\theta)} \right) &= \frac{1}{2} \left[ J_{-1} \left( 2\sqrt{h(\theta)} \right) - J_1 \left( 2\sqrt{h(\theta)} \right) \right] \\ &= -J_1 \left( 2\sqrt{h(\theta)} \right) \end{aligned} \quad (\text{E.34c})$$

$$J_2' \left( 2\sqrt{h(\theta)} \right) = \frac{1}{2} \left[ J_1 \left( 2\sqrt{h(\theta)} \right) - J_3 \left( 2\sqrt{h(\theta)} \right) \right]. \quad (\text{E.34d})$$

substituons (E.34) dans (E.33)

$$\begin{aligned} N'(\theta) &= -\frac{R}{r^2}(1 + \rho q) \left[ J_0 \left( 2\sqrt{h(\theta)} \right) + J_2 \left( 2\sqrt{h(\theta)} \right) \right] - \left( \frac{a}{r} + \frac{d(\theta)}{r^2} \right) J_1 \left( 2\sqrt{h(\theta)} \right) \frac{2\frac{R}{r} \left( 1 - 2\frac{\theta}{r} \right)}{2\sqrt{h(\theta)}} \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{d(\theta)}{r^2} \left[ J_1 \left( 2\sqrt{h(\theta)} \right) - J_3 \left( 2\sqrt{h(\theta)} \right) \right] \frac{2\frac{R}{r} \left( 1 - 2\frac{\theta}{r} \right)}{2\sqrt{h(\theta)}} \\ &= -\frac{R}{r^2}(1 + \rho q) \left[ J_0 \left( 2\sqrt{h(\theta)} \right) + J_2 \left( 2\sqrt{h(\theta)} \right) \right] \\ &\quad - \frac{R}{r^2} \left( 1 - 2\frac{\theta}{r} \right) \left( a + \frac{1}{2} \frac{d(\theta)}{r} \right) J_1 \left( 2\sqrt{h(\theta)} \right) \frac{1}{\sqrt{h(\theta)}} \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{R}{r^2} \frac{d(\theta)}{r} \left( 1 - 2\frac{\theta}{r} \right) J_3 \left( 2\sqrt{h(\theta)} \right) \frac{1}{\sqrt{h(\theta)}} \\ &= -\frac{R}{r^2}(1 + \rho q) \left[ J_0 \left( 2\sqrt{h(\theta)} \right) + J_2 \left( 2\sqrt{h(\theta)} \right) \right] - \frac{R}{r^2} \left( 1 - 2\frac{\theta}{r} \right) \left( a + \frac{1}{2} \frac{d(\theta)}{r} \right) \\ &\quad \times \left[ J_0 \left( 2\sqrt{h(\theta)} \right) + J_2 \left( 2\sqrt{h(\theta)} \right) \right] - \frac{1}{6} \frac{R}{r^2} \frac{d(\theta)}{r} \\ &\quad \times \left( 1 - 2\frac{\theta}{r} \right) \left[ J_2 \left( 2\sqrt{h(\theta)} \right) + J_4 \left( 2\sqrt{h(\theta)} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{E.35})$$

Finalement

$$\begin{aligned} N'(\theta) = & -\frac{R}{r^2} \left[ 1 + \rho q + \left( 1 - 2\frac{\theta}{r} \right) \left( a + \frac{1}{2} \frac{d(\theta)}{r} \right) \right] J_0 \left( 2\sqrt{h(\theta)} \right) \\ & - \frac{R}{r^2} \left[ 1 + \rho q + \left( 1 - 2\frac{\theta}{r} \right) \left( a + \frac{2}{3} \frac{d(\theta)}{r} \right) \right] J_2 \left( 2\sqrt{h(\theta)} \right) \\ & - \frac{1}{6} \frac{R}{r^2} \frac{d(\theta)}{r} \left( 1 - 2\frac{\theta}{r} \right) J_4 \left( 2\sqrt{h(\theta)} \right). \end{aligned} \quad (\text{E.36})$$

En utilisant les inégalités satisfaites par les fonctions de Bessel de première espèce :

$$\left| J_0 \left( 2\sqrt{h(\theta)} \right) + J_2 \left( 2\sqrt{h(\theta)} \right) \right| \leq 1$$

et

$$\left| J_0 \left( 2\sqrt{h(\theta)} \right) + \frac{4}{3} J_2 \left( 2\sqrt{h(\theta)} \right) + \frac{1}{3} J_4 \left( 2\sqrt{h(\theta)} \right) \right| \leq 1$$

et en remarquant que  $\left| 1 - 2\frac{\theta}{r} \right| \leq 1$ , nous pouvons majorer  $|N'(\theta)|$  de la manière suivante

$$|N'(\theta)| \leq \frac{|R|}{r^2} \left( 1 + \rho q + |a| + \frac{|R|}{2} \right). \quad (\text{E.37})$$

Nous devons noter que quand  $\sigma^{+-}\sigma^{-+} < 0$ ,  $|N(\theta)|$  et  $|N'(\theta)|$  sont majorées différemment. Nous rappelons l'équation (E.28). Selon la remarque 2,  $N(\theta)$  dans ce cas s'écrit

$$N(\theta) = \left( \frac{a}{r} + \frac{d(\theta)}{r^2} \right) I_0 \left( 2\sqrt{\bar{h}(\theta)} \right) - \frac{d(\theta)}{r^2} I_2 \left( 2\sqrt{\bar{h}(\theta)} \right), \quad (\text{E.38})$$

où nous avons défini

$$\bar{h}(\theta) \doteq |h(\theta)| = \frac{|R|}{r^2} \theta(r - \theta). \quad (\text{E.39})$$

L'expression en séries de puissance de  $N(\theta)$  dans ce cas s'écrit

$$N(\theta) = \frac{a}{r} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\bar{h}^m(\theta)}{m!^2} + \frac{d(\theta)}{r^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\bar{h}^m(\theta)}{m!(m+1)!}, \quad \forall \theta \in [0, r]. \quad (\text{E.40})$$

En s'appuyant sur les propriétés des fonctions de Bessel modifiées [Kreh, 2012] :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, I_n(\theta) - I_{n+2}(\theta) \geq 0, \quad \forall \theta \geq 0$$

et  $I_n(\cdot) - I_{n+2}(\cdot)$  est une fonction strictement croissante,  $|N(\theta)|$  peut être majorée de la manière suivante

$$|N(\theta)| \leq \frac{|a|}{r} I_0 \left( \sqrt{|R|} \right) + \frac{|R|}{r} \left[ I_0 \left( \sqrt{|R|} \right) - I_2 \left( \sqrt{|R|} \right) \right]. \quad (\text{E.41})$$

$N'(\theta)$  dans ce cas peut être déduite de (E.36) en suivant la remarque 2

$$\begin{aligned} N'(\theta) = & -\frac{R}{r^2} \left[ 1 + \rho q + \left( 1 - 2\frac{\theta}{r} \right) \left( a + \frac{1}{2} \frac{d(\theta)}{r} \right) \right] I_0 \left( 2\sqrt{\bar{h}(\theta)} \right) \\ & + \frac{R}{r^2} \left[ 1 + \rho q + \left( 1 - 2\frac{\theta}{r} \right) \left( a + \frac{2}{3} \frac{d(\theta)}{r} \right) \right] I_2 \left( 2\sqrt{\bar{h}(\theta)} \right) \\ & - \frac{1}{6} \frac{R}{r^2} \frac{d(\theta)}{r} \left( 1 - 2\frac{\theta}{r} \right) I_4 \left( 2\sqrt{\bar{h}(\theta)} \right). \end{aligned} \quad (\text{E.42})$$



$|N'(\theta)|$  est majorée, comme dans (E.41), en utilisant les fonctions de Bessel modifiées

$$\begin{aligned} |N'(\theta)| \leq & \frac{|R|}{r^2} \left(1 + \rho q + |a| + \frac{|R|}{2}\right) \left[ I_0 \left( \sqrt{|R|} \right) - I_2 \left( \sqrt{|R|} \right) \right] \\ & + \frac{R^2}{6r^2} \left[ I_2 \left( \sqrt{|R|} \right) - I_4 \left( \sqrt{|R|} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{E.43})$$

Nous définissons  $\nu$  et  $\bar{\nu}$  comme bornes supérieures de  $|N(\theta)|$  et de  $|N'(\theta)|$  respectivement, en fonction des coefficients du système de départ, déduits de (E.32), (E.37), (E.41) et (E.43) :

$$\nu = \begin{cases} \frac{1}{r}(|a|+R) & \text{si } \sigma^{+-}\sigma^{-+} \geq 0, \\ \frac{|a|}{r} I_0 \left( \sqrt{|R|} \right) + \frac{|R|}{r} \left[ I_0 \left( \sqrt{|R|} \right) - I_2 \left( \sqrt{|R|} \right) \right] & \text{si } \sigma^{+-}\sigma^{-+} < 0 \end{cases} \quad (\text{E.44a})$$

$$\bar{\nu} = \begin{cases} \frac{|R|}{r^2} \left(1 + \rho q + |a| + \frac{|R|}{2}\right) & \text{si } \sigma^{+-}\sigma^{-+} \geq 0, \\ \frac{|R|}{r^2} \left(1 + \rho q + |a| + \frac{|R|}{2}\right) \left[ I_0 \left( \sqrt{|R|} \right) - I_2 \left( \sqrt{|R|} \right) \right] \\ + \frac{R^2}{6r^2} \left[ I_2 \left( \sqrt{|R|} \right) - I_4 \left( \sqrt{|R|} \right) \right] & \text{si } \sigma^{+-}\sigma^{-+} < 0. \end{cases} \quad (\text{E.44b})$$

Les valeurs de  $\nu$  et  $\bar{\nu}$  dans (E.44) sont utilisées dans la construction de l'algorithme dans la section 3.3.2. Néanmoins, en vue d'être plus précis et de donner une approximation moins conservatrice du terme intégral dans la condition suffisante (3.43), nous exprimons  $|d(\theta)|$  selon le signe de  $\rho q$  :

$$|d(\theta)| = \begin{cases} |R|[r - \theta(1 + \rho q)] \mathbb{1}_{[0, \frac{r}{1+\rho q}]}(\theta) \\ + |R|[-r + \theta(1 + \rho q)] \mathbb{1}_{(\frac{r}{1+\rho q}, r]}(\theta) & \text{si } \rho q \geq 0, \\ |R|[r - \theta(1 + \rho q)] & \text{si } \rho q < 0 \end{cases} \quad (\text{E.45})$$

ce qui implique la borne supérieure suivante de  $\int_0^r |N(\theta)| d\theta$ , en utilisant (E.28), (E.38) et (E.45)

$$\int_0^r |N(\theta)| d\theta \leq \begin{cases} |a| + |R| \left( \frac{1}{1+|\rho q|} - \frac{1-|\rho q|}{2} \right) \\ \text{si } \sigma^{+-}\sigma^{-+} \geq 0 \text{ et } \rho q \geq 0 \\ \\ |a| + |R| \frac{1+|\rho q|}{2} \\ \text{si } \sigma^{+-}\sigma^{-+} \geq 0 \text{ et } \rho q < 0 \\ \\ |a| I_0 \left( \sqrt{|R|} \right) + |R| \left( \frac{1}{1+|\rho q|} - \frac{1-|\rho q|}{2} \right) \\ \times \left[ I_0 \left( \sqrt{|R|} \right) - I_2 \left( \sqrt{|R|} \right) \right] \\ \text{si } \sigma^{+-}\sigma^{-+} < 0 \text{ et } \rho q \geq 0 \\ \\ |a| I_0 \left( \sqrt{|R|} \right) + |R| \frac{1+|\rho q|}{2} \left[ I_0 \left( \sqrt{|R|} \right) - I_2 \left( \sqrt{|R|} \right) \right] \\ \text{si } \sigma^{+-}\sigma^{-+} < 0 \text{ et } \rho q < 0 \\ \\ \left( a - |R| \frac{1+|\rho q|}{2} \right) I_0 \left( \sqrt{|R|} \right) \\ + |R| \frac{1+|\rho q|}{2} I_2 \left( \sqrt{|R|} \right) \\ \text{si } \sigma^{+-}\sigma^{-+} < 0, \rho q < 0 \text{ et } a \geq |R|. \end{cases} \quad (\text{E.46})$$

TABLEAU E.1 – Exemples académiques pour différents signes de  $\sigma^{+-}\sigma^{-+}$  et  $\rho q$ .

Figure	$(\sigma^{+-}, \sigma^{-+}, r_1, r_2, \rho, q)$	Comportement
E.1	(0.8, 0.7, 0.85, 1.1, -0.5, -0.4)	Stable
E.2	(1.9, 0.95, 0.85, 1.1, 0.5, 0.4)	Instable
E.3	(1.3, 1.05, 0.85, 1.1, 0.5, -0.4)	Stable
E.4	(2, 1.5, 0.85, 1.1, 0.7, -0.4)	Instable
E.5	(0.6, -0.9, 4.5, 4.4, 0.4, 0.7)	Stable
E.6	(3, -4, 0.25, 0.11, 0.9, 1)	Instable
E.7	(2.3, -3.5, 0.8, 1.1, -0.5, 0.7)	Stable
E.8	(0.4, -3.5, 0.8, 1.1, 0.9, -1)	Instable

## E.6 Courbes de variation de $N(\theta)$

Conformément à l'analyse présentée dans le chapitre 3, la stabilité du système considéré dépend fortement de la fonction  $N$ , un élément essentiel qui contribue à la réalisation de (3.29). Dans le but d'avoir une idée sur les ordres de grandeur de  $N$  pour quelques exemples académiques, et de montrer sa dépendance aux coefficients du système de départ, nous illustrons les variations de  $N$  en fonction de  $\theta$ . Nous exposons ces courbes de variation selon différentes valeurs des paramètres  $(\sigma^{+-}, \sigma^{-+}, r_1, r_2, \rho$  et  $q)$  et différents signes de  $\sigma^{+-}\sigma^{-+}$  et  $\rho q$ , pour des systèmes stables et instables. Afin de simplifier la notation, nous réécrivons l'expression de  $N(\theta)$  comme suit

$$N(\theta) = N_0(\theta) + N_1(\theta) \quad (\text{E.47})$$

où l'on considère

$$N_0(\theta) \doteq \begin{cases} C_0 J_0 \left( 2\sqrt{h(\theta)} \right) & \text{si } \sigma^{+-}\sigma^{-+} \geq 0, \\ C_0 I_0 \left( 2\sqrt{h(\theta)} \right) & \text{si } \sigma^{+-}\sigma^{-+} < 0 \end{cases} \quad (\text{E.48a})$$

$$N_1(\theta) \doteq \begin{cases} C_1(\theta) \left[ J_0 \left( 2\sqrt{h(\theta)} \right) + J_2 \left( 2\sqrt{h(\theta)} \right) \right] & \text{si } \sigma^{+-}\sigma^{-+} \geq 0, \\ C_1(\theta) \left[ I_0 \left( 2\sqrt{h(\theta)} \right) - I_2 \left( 2\sqrt{h(\theta)} \right) \right] & \text{si } \sigma^{+-}\sigma^{-+} < 0 \end{cases} \quad (\text{E.48b})$$

avec les coefficients

$$C_0 \doteq \frac{a}{r} \quad (\text{E.49a})$$

$$C_1(\theta) \doteq \frac{d(\theta)}{r^2} \quad (\text{E.49b})$$

Les figures E.1 à E.8 montrent les courbes de variation de  $N_0$ ,  $N_1$  et  $N$  à gauche et de  $C_0$  et  $C_1$  à droite, en fonction de  $\theta \in [0, r]$ . Les valeurs numériques de ces exemples, ainsi que leur état de stabilité sont donnés dans le tableau E.1.

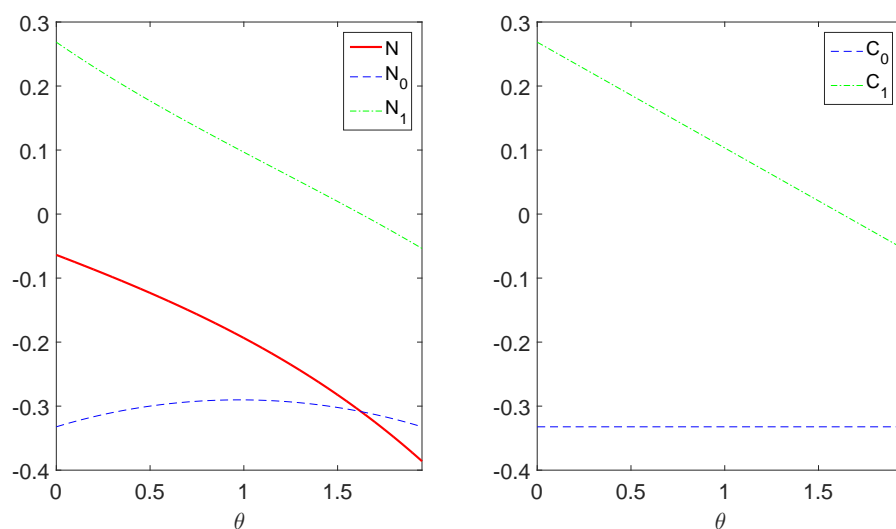


FIGURE E.1 – Variation de  $N(\theta)$  pour  $\sigma^{+-}\sigma^{-+} \geq 0$ ,  $\rho q \geq 0$  (système stable).

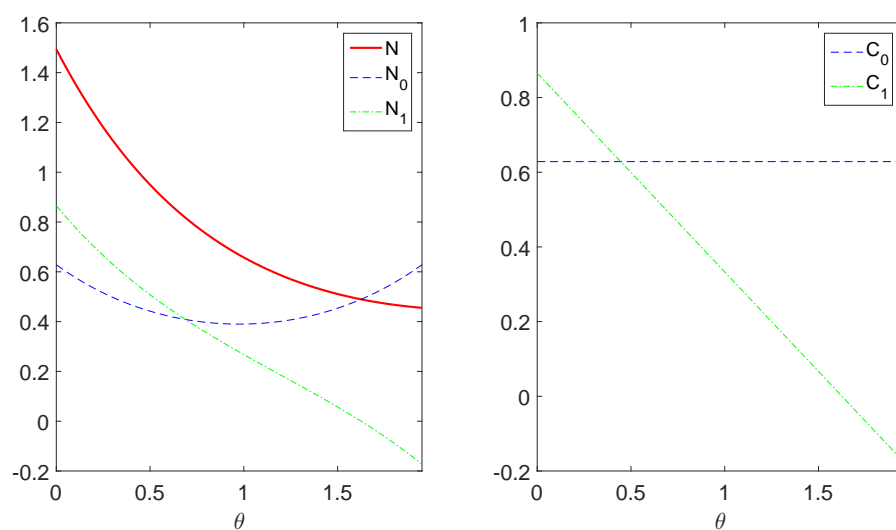


FIGURE E.2 – Variation de  $N(\theta)$  pour  $\sigma^{+-}\sigma^{-+} \geq 0$ ,  $\rho q \geq 0$  (système instable).

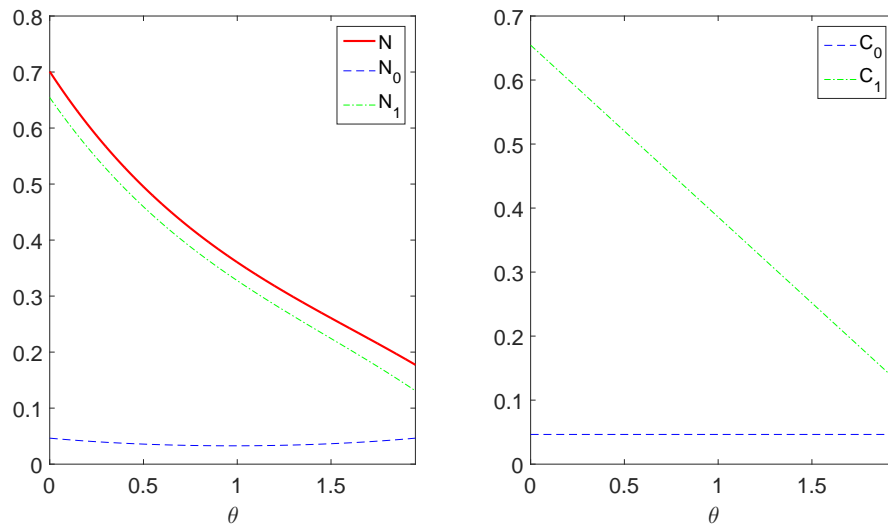


FIGURE E.3 – Variation de  $N(\theta)$  pour  $\sigma^{+-}\sigma^{-+} \geq 0, \rho q < 0$  (système stable).

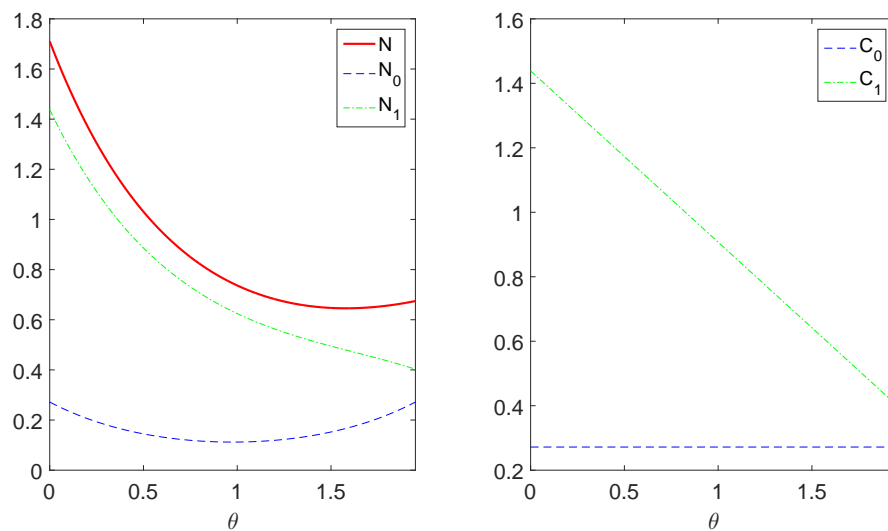


FIGURE E.4 – Variation de  $N(\theta)$  pour  $\sigma^{+-}\sigma^{-+} \geq 0, \rho q < 0$  (système instable).

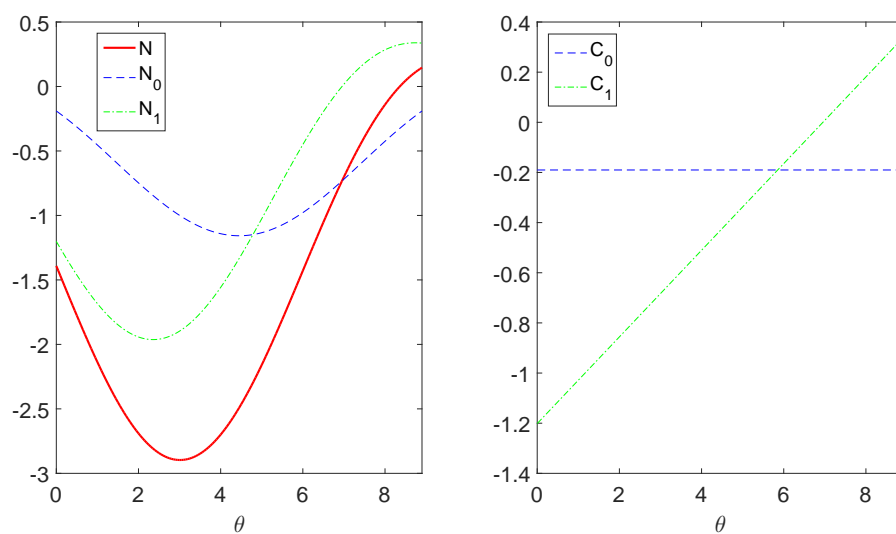


FIGURE E.5 – Variation de  $N(\theta)$  pour  $\sigma^{+-}\sigma^{-+} < 0$ ,  $\rho q \geq 0$  (système stable).

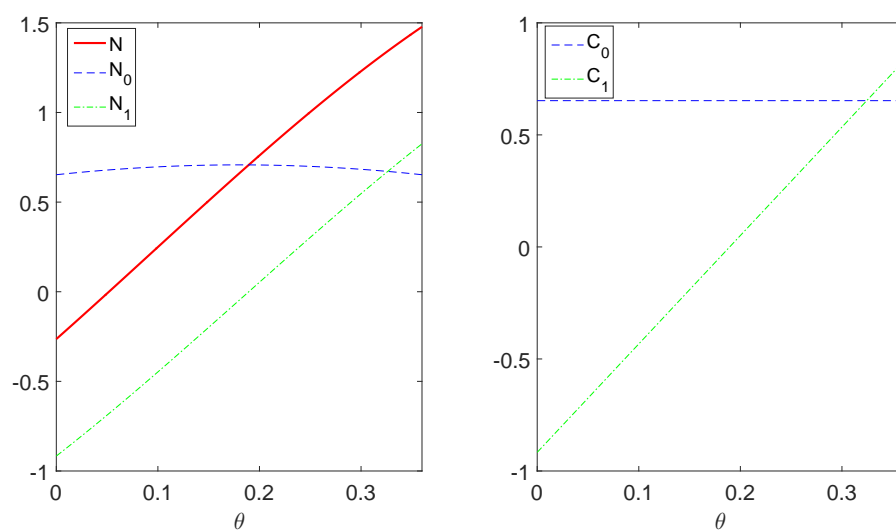


FIGURE E.6 – Variation de  $N(\theta)$  pour  $\sigma^{+-}\sigma^{-+} < 0$ ,  $\rho q \geq 0$  (système instable).

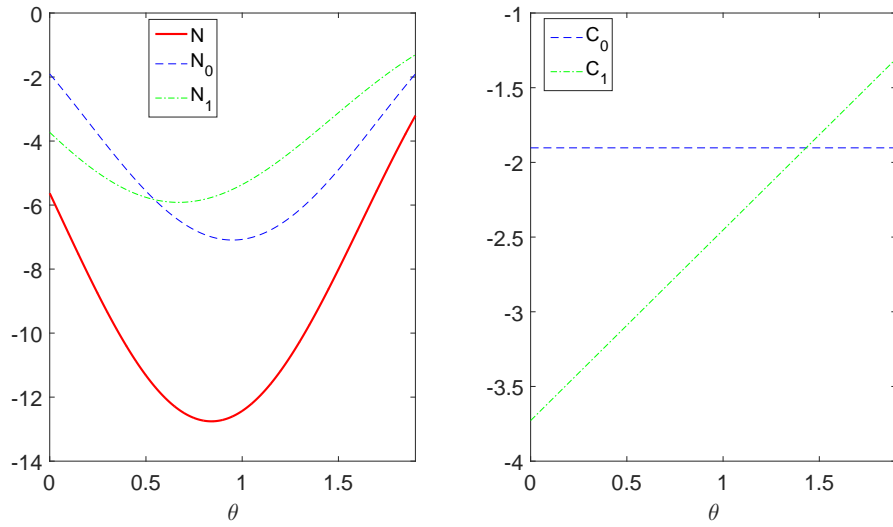


FIGURE E.7 – Variation de  $N(\theta)$  pour  $\sigma^{+-}\sigma^{-+} < 0, \rho q < 0$  (système stable).

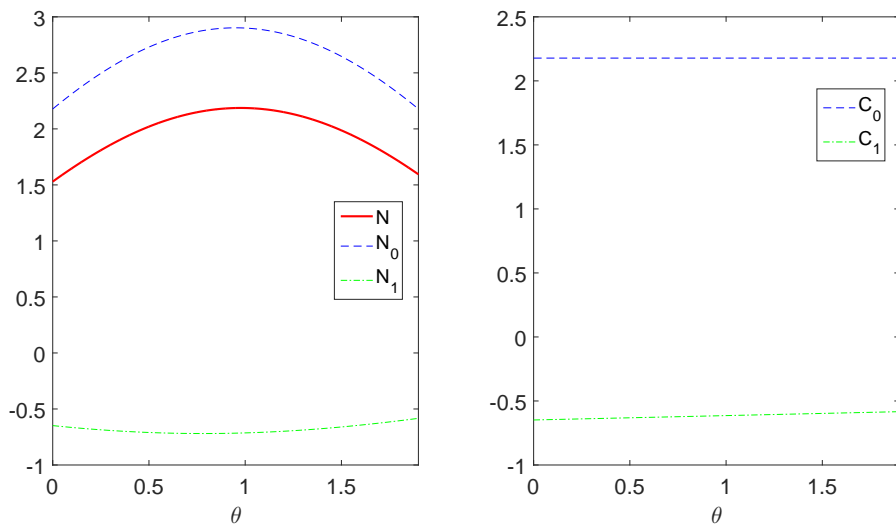


FIGURE E.8 – Variation de  $N(\theta)$  pour  $\sigma^{+-}\sigma^{-+} < 0, \rho q < 0$  (système instable).



## Annexe F.

# Résolution du terme intégral de la condition nécessaire et suffisante de stabilité



Dans ce manuscrit, nous proposons des conditions suffisantes de stabilité pour un système de deux EDP hyperboliques couplées. Ces conditions se basent sur l'expression explicite de  $N(\theta)$  établie dans l'annexe E. En vue de donner un critère explicite pour la stabilité, en termes des coefficients du système de départ, nous avons eu recours à la majoration des modules des termes du polynôme caractéristique  $\hat{\phi}$  dans (3.28). Cependant, cette majoration a engendré un conservatisme dans notre approche. Cette dernière serait évidemment plus simple et moins restrictive si le terme  $\int_0^r N(\theta)e^{-s\theta}d\theta$  figurant dans  $\hat{\phi}$  pouvait être explicité en fonction des coefficients.

La complication découle d'une intégration d'une fonction Bessel de la racine carrée d'un terme non linéaire en  $\theta$ , multipliée par  $e^{-s\theta}$ . En revanche, en adoptant l'expression en séries de puissance pour  $N(\theta)$  (E.40), nous faisons apparaître  $(r - \theta)^m$ . Ce terme peut être simplifié en effectuant un développement en binôme de Newton.

Nous présentons dans cette annexe une résolution de ce terme intégral pour le cas  $\sigma^{+-}\sigma^{-+} < 0$  afin de mieux comprendre son comportement et d'avoir une idée plus claire sur sa structure. Pour atteindre ce but, nous utilisons l'expression de  $N(\theta)$  en forme de séries de puissance et envisageons deux méthodes. La première s'appuie sur le développement en binôme de Newton appliqué au terme  $(r - \theta)^m$  dans  $\bar{h}^m(\theta)$ . La solution obtenue est une série de fonctions de gamma et de fonctions de gamma incomplètes. Dans la seconde méthode, nous utilisons en plus le développement en série entière de  $e^{-s\theta}$  pour aboutir au final à une expression de séries de puissance.

Le cas  $\sigma^{+-}\sigma^{-+} < 0$  est choisi car les fonctions de Bessel modifiées de première espèce peuvent prendre des valeurs considérables, contrairement à celles prises par les fonctions de Bessel de première espèce (qui interviennent pour le cas  $\sigma^{+-}\sigma^{-+} \geq 0$ ). En conséquence, leur majoration présente un conservatisme plus important.

Dans les deux méthodes présentées, une solution explicite de  $\int_0^r N(\theta)e^{-s\theta}d\theta$  et simple à manipuler est loin d'être obtenue. Les résultats de cette annexe ne sont pas utilisés dans ce travail. Néanmoins, nous les gardons comme perspective à développer et afin de donner au lecteur une idée sur le comportement de ce terme.

Nous rappelons les différentes équations utilisées. Le polynôme caractéristique est

$$\hat{\phi}(s) = 1 - \rho q e^{-sr} - \int_0^r N(\theta)e^{-s\theta}d\theta \quad (\text{F.1})$$

avec

$$N(\theta) = \frac{a}{r} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\bar{h}^m(\theta)}{m!^2} + \frac{d(\theta)}{r^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\bar{h}^m(\theta)}{m!(m+1)!}, \quad \forall \theta \in [0, r] \quad (\text{F.2})$$

où

$$a = qr_2\sigma^{-+} + \rho r_1\sigma^{+-} \quad (\text{F.3a})$$

$$R = r_1 r_2 \sigma^{+-} \sigma^{-+} \quad (\text{F.3b})$$

$$d(\theta) = R[r - \theta(1 + \rho q)] \quad (\text{F.3c})$$

$$\bar{h}(\theta) = \frac{|R|}{r^2} \theta(r - \theta). \quad (\text{F.3d})$$

Substituons (F.2) dans  $\int_0^r N(\theta)e^{-s\theta}d\theta$

$$\begin{aligned}\int_0^r N(\theta)e^{-s\theta}d\theta &= \frac{a}{r} \int_0^r \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\bar{h}^m(\theta)}{m!^2} e^{-s\theta} d\theta + \frac{1}{r^2} \int_0^r d(\theta) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\bar{h}^m(\theta)}{m!(m+1)!} e^{-s\theta} d\theta \\ &= \frac{a}{r} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|R|^m}{r^{2m}m!^2} \int_0^r \theta^m (r-\theta)^m e^{-s\theta} d\theta \\ &\quad + \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{|R|}{r^2}\right)^{m+1} \frac{1}{m!(m+1)!} \int_0^r [\theta(1+\rho q) - r] \theta^m (r-\theta)^m e^{-s\theta} d\theta.\end{aligned}\tag{F.4}$$

Méthode 1 : nous développons  $(r-\theta)^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (-\theta)^k r^{m-k}$ .

Le premier terme intégral du membre de droite de (F.4) s'écrit

$$\begin{aligned}\int_0^r \theta^m (r-\theta)^m e^{-s\theta} d\theta &= \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} r^{m-k} \int_0^r \theta^{m+k} e^{-s\theta} d\theta \\ &= \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} r^{m-k} \frac{\Gamma(m+k+1) - \Gamma(m+k+1, rs)}{s^{m+k+1}}\end{aligned}\tag{F.5}$$

où la fonction gamma  $\Gamma(z)$  et la fonction gamma incomplète  $\Gamma(z, b)$  sont définies comme suit [Polyanin and Manzhirov, 2006]

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} \xi^{z-1} e^{-\xi} d\xi\tag{F.6a}$$

$$\Gamma(z, b) = \int_b^{\infty} \xi^{z-1} e^{-\xi} d\xi\tag{F.6b}$$

pour  $z > 0$ . Le second terme intégral du membre de droite de (F.4) peut lui aussi être développé pour obtenir

$$\begin{aligned}&\int_0^r [\theta(1+\rho q) - r] \theta^m (r-\theta)^m e^{-s\theta} d\theta \\ &= (1+\rho q) \int_0^r \theta^{m+1} (r-\theta)^m e^{-s\theta} d\theta - r \int_0^r \theta^m (r-\theta)^m e^{-s\theta} d\theta \\ &= (1+\rho q) \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} r^{m-k} \int_0^r \theta^{m+k+1} e^{-s\theta} d\theta - r \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} r^{m-k} \int_0^r \theta^{m+k} e^{-s\theta} d\theta \\ &= (1+\rho q) \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} r^{m-k} \frac{\Gamma(m+k+2) - \Gamma(m+k+2, rs)}{s^{m+k+2}} \\ &\quad - r \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} r^{m-k} \frac{\Gamma(m+k+1) - \Gamma(m+k+1, rs)}{s^{m+k+1}}.\end{aligned}\tag{F.7}$$

En utilisant les propriétés suivantes des fonctions gamma [Polyanin and Manzhirov, 2006]

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)\tag{F.8a}$$

$$\Gamma(z+1, b) = z\Gamma(z, b) + b^z e^{-b}\tag{F.8b}$$

et en substituant (F.5) et (F.7) dans (F.4), nous obtenons

$$\begin{aligned}
\int_0^r N(\theta)e^{-s\theta}d\theta &= a \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|R|^m}{m!} \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{(m-k)!k!} \frac{\Gamma(m+k+1) - \Gamma(m+k+1, rs)}{(rs)^{m+k+1}} \\
&\quad - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|R|^{m+1}}{(m+1)!} \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{(m-k)!k!} \frac{\Gamma(m+k+1) - \Gamma(m+k+1, rs)}{(rs)^{m+k+1}} \\
&\quad + (1+\rho q) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|R|^{m+1}}{(m+1)!} \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{(m-k)!k!} \\
&\quad \times \left[ (m+k+1) \frac{\Gamma(m+k+1) - \Gamma(m+k+1, rs)}{(rs)^{m+k+2}} - \frac{e^{-rs}}{rs} \right].
\end{aligned} \tag{F.9}$$

Une factorisation des termes de (F.9) nous mène à l'expression sous la forme de séries de fonctions gamma suivante

$$\begin{aligned}
&\int_0^r N(\theta)e^{-s\theta}d\theta \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|R|^m}{m!} \sum_{k=0}^m \left[ a + \frac{|R|}{m+1} \left( \frac{1+\rho q}{rs} (m+k+1) - 1 \right) \right] \frac{(-1)^k}{(m-k)!k!} \\
&\quad \times \frac{\Gamma(m+k+1) - \Gamma(m+k+1, rs)}{(rs)^{m+k+1}} - (1+\rho q) \frac{e^{-rs}}{rs} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|R|^{m+1}}{(m+1)!} \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{(m-k)!k!}.
\end{aligned} \tag{F.10}$$

Méthode 2 : nous utilisons en plus le développement en série entière :  $e^{-s\theta} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-s)^j \theta^j}{j!}$ . Les termes intégraux du membre de droite de (F.4) dans ce cas s'écrivent

$$\begin{aligned}
\int_0^r \theta^m (r-\theta)^m e^{-s\theta} d\theta &= \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} r^{m-k} \int_0^r \theta^{m+k} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-s)^j \theta^j}{j!} d\theta \\
&= \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} r^{m-k} \sum_{j=0}^{\infty} (-s)^j \frac{r^{m+k+j+1}}{j!(m+k+j+1)} \\
&= \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} r^{2m+1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-rs)^j}{j!(m+k+j+1)},
\end{aligned} \tag{F.11a}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^r [\theta(1+\rho q) - r] \theta^m (r-\theta)^m e^{-s\theta} d\theta &= (1+\rho q) \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} r^{m-k} \int_0^r \theta^{m+k+1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-s)^j \theta^j}{j!} d\theta \\
&\quad - r \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} r^{m-k} \int_0^r \theta^{m+k} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-s)^j \theta^j}{j!} d\theta \\
&= (1+\rho q) \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} r^{2m+2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-rs)^j}{j!(m+k+j+2)} \\
&\quad - \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} r^{2m+2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-rs)^j}{j!(m+k+j+1)}.
\end{aligned} \tag{F.11b}$$

En substituant (F.11) dans (F.4), nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_0^r N(\theta)e^{-s\theta}d\theta &= a \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|R|^m}{m!} \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{(m-k)!k!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-rs)^j}{j!(m+k+j+1)} \\ &+ (1+\rho q) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|R|^{m+1}}{(m+1)!} \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{(m-k)!k!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-rs)^j}{j!(m+k+j+2)} \\ &- \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|R|^{m+1}}{(m+1)!} \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{(m-k)!k!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-rs)^j}{j!(m+k+j+1)}. \end{aligned} \quad (\text{F.12})$$

Finalement, factorisons les termes de (F.12) pour aboutir à une alternative pour l'expression de  $\int_0^r N(\theta)e^{-s\theta}d\theta$ . Celle-ci est en forme de séries de puissance :

$$\begin{aligned} \int_0^r N(\theta)e^{-s\theta}d\theta &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|R|^m}{m!} \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{(m-k)!k!} \\ &\times \sum_{j=0}^{\infty} \left[ \frac{a}{m+k+j+1} + \frac{|R|}{m+1} \left( \frac{1+\rho q}{m+k+j+2} - \frac{1}{m+k+j+1} \right) \right] \frac{(-rs)^j}{j!}. \end{aligned} \quad (\text{F.13})$$

Les expressions obtenues (F.10) et (F.13) sont sous la forme de séries de fonctions gamma et de puissance respectivement. Nous constatons que le terme  $\int_0^r N(\theta)e^{-s\theta}d\theta$  présente une certaine complexité si l'on considère  $N(\theta)$  avec sa forme explicite ou sa forme en séries de puissance. Nous ne sommes toutefois pas parvenus à donner une solution explicite de cette intégration. Nous avons par contre majoré la valeur absolue de  $N(\theta)$  afin d'expliciter la condition suffisante de stabilité dans la proposition 3.



## Annexe G.

# Pseudo-code de l'algorithme de l'approximation numérique de la CNS

Nous présentons dans cette annexe deux pseudo-codes décrivant d'une manière textuelle l'évolution de l'algorithme présenté dans le chapitre 3, section 3.3.2. Le pseudo-code 2 suit la logique de l'organigramme 3.12. En revanche, le pseudo-code 3 possède la structure du code qui a été implanté dans le logiciel Matlab en vue d'obtenir les résultats numériques et sert au lecteur comme référence d'exécution.

**Algorithme 2:** Pseudo-code 1

---

**Input:**  
paramètres du système :  $\sigma^{+-}$ ,  $\sigma^{-+}$ ,  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $\rho$  et  $q$   
un niveau de tolérance :  $\varepsilon$   
pas :  $\delta z$  et  $\delta y$

- 1 Calculer les paramètres :  $a$ ,  $R$ ,  $\nu$ ,  $\bar{\nu}$ ,  $z_l$ ,  $M(z)$ ,  $\kappa$  et  $\varrho$
- 2 Initialiser :  $k \leftarrow 0$
- 3 Construire  $\bar{\mathcal{C}}$  en prenant  $z \leftarrow 0$  **to**  $z_l$  **by**  $\delta z$  et  $y \leftarrow -M(z)$  **to**  $M(z)$  **by**  $\delta y$
- 4 Considérer  $\bar{\mathcal{C}} \supset \mathcal{C}$  et construire  
 $\mathcal{G}^0 \doteq \{s = z + iy \in \bar{\mathcal{C}} \text{ t.q. } z = n_1 \cdot \delta z, n_1 \in \mathbb{N} \text{ et } y = n_2 \cdot \delta y, n_2 \in \mathbb{Z}\}$
- 5 **forall**  $s \in \mathcal{G}^0$  **do**
- 6 | Calculer  $|\hat{\phi}(s)|$
- 7 **end**
- 8 **if**  $\min_{s \in \mathcal{G}^0} |\hat{\phi}(s)| > \kappa \varrho$  **then**  
| **Output:** Système stable
- 9 **else**
- 10 | Considérer l'ensemble des nœuds  $\mathcal{S}^k \doteq \{s \in \mathcal{G}^k \text{ s.t. } |\hat{\phi}(s)| \leq \kappa \frac{\varrho}{2^k}\}$
- 11 | Prendre le nœud  $\bar{s} = \operatorname{argmin}_{s \in \mathcal{G}^k} |\hat{\phi}(s)|$
- 12 |  $k \leftarrow k + 1$
- 13 | Construire  $\mathcal{G}^k(\bar{s})$  comme dans (3.84)
- 14 | **forall**  $s \in \mathcal{G}^k$  **do**
- 15 | | Calculer  $|\hat{\phi}(s)|$
- 16 | **end**
- 17 | **if**  $\min_{s \in \mathcal{G}^k} |\hat{\phi}(s)| > \kappa \frac{\varrho}{2^k}$  **then**
- 18 | | **if** Tous les nœuds  $\in \mathcal{S}^{k-1}$  sont visités **then**
- 19 | | |  $k \leftarrow k - 1$
- 20 | | | **if**  $k=0$  **then**
- 21 | | | | **Output:** Système stable
- 21 | | | | **return**
- 22 | | | **else**
- 23 | | | | **go to** 18
- 24 | | | **end**
- 25 | | **else**
- 26 | | | Prendre un autre nœud  $\bar{s} \in \mathcal{S}^{k-1}$
- 27 | | | **go to** 13
- 28 | | **end**
- 29 | **else**
- 30 | | **if**  $\min_{s \in \mathcal{G}^k} |\hat{\phi}(s)| < \varepsilon$  **then**
- 31 | | | **Output:** Pas de conclusion
- 31 | | | **return**
- 32 | | **else**
- 33 | | | **go to** 10
- 34 | | **end**
- 35 | **end**
- 36 **end**

---



**Algorithme 3:** Pseudo-code 2

---

```

1 Main
  | Input:
  | paramètres du système :  $\sigma^{+-}$ ,  $\sigma^{-+}$ ,  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $\rho$  et  $q$ 
  | un niveau de tolérance :  $\varepsilon$ 
  | pas :  $\delta z$  et  $\delta y$ 
2   Calculer les paramètres :  $a$ ,  $R$ ,  $\nu$ ,  $\bar{\nu}$ ,  $z_l$ ,  $M(z)$ ,  $\kappa$  et  $\varrho$ 
3   Initialiser :  $k \leftarrow 0$ 
4   Construire  $\mathcal{C}$  en prenant  $z \leftarrow 0$  to  $z_l$  by  $\delta z$  et  $y \leftarrow -M(z)$  to  $M(z)$  by  $\delta y$ 
5   Considérer  $\bar{\mathcal{C}} \supset \mathcal{C}$  et construire
  |  $\mathcal{G}^0 \doteq \{s = z + iy \in \bar{\mathcal{C}} \text{ s.t. } z = n.\delta z, n \in \mathbb{N} \text{ and } y = m.\delta y, m \in \mathbb{Z}\}$ 
6   forall  $s \in \mathcal{G}^0$  do
7     | Calculer  $|\hat{\phi}(s)|$ 
8   end
9   if  $\min_{s \in \mathcal{G}^0} |\hat{\phi}(s)| > \kappa \varrho$  then
  | Output: Système stable
10  else
11  | ensemble_raffiné
12  |  $|\hat{\phi}| = \text{grille\_raffinée}(\bar{s}, k)$ 
13  |  $l = \text{lipschitz\_test}(|\hat{\phi}|, k)$ 
14  | if  $l$  then
  | | Output: Pas de conclusion
15  | else
16  | | autres_nœuds
17  | | if  $-l$  then
  | | | Output: Système stable
18  | | end
19  end

```

---



---

```

20 procédure ensemble_raffiné
21 | Considérer l'ensemble des nœuds  $\mathcal{S}^k \doteq \{s \in \mathcal{G}^k \text{ s.t. } |\hat{\phi}(s)| \leq \kappa \frac{\varrho}{2^k}\}$ 
22 | Prendre le nœud  $\bar{s} = \text{argmin}_{s \in \mathcal{G}^k} |\hat{\phi}(s)|$ 
23 |  $k \leftarrow k + 1$ 
24 end

```

---



---

```

25 function  $|\hat{\phi}| = \text{grille\_raffinée}(\bar{s}, k)$ 
26 | Construire  $\mathcal{G}^k(\bar{s})$  comme dans (3.84)
27 | forall  $s \in \mathcal{G}^k$  do
28 | | Calculer  $|\hat{\phi}(s)|$ 
29 | end
30 end

```

---

---

```

31 function  $l = \text{lipschitz\_test}(|\hat{\phi}|, k)$ 
32   Initialiser  $l \leftarrow 0$ 
33   if  $\min_{s \in \mathcal{G}^k} |\hat{\phi}(s)| < \varepsilon$  then
34      $l = 1$ 
35     return  $l$ 
36   end
37   if  $\min_{s \in \mathcal{G}^k} |\hat{\phi}(s)| \leq \kappa \frac{\rho}{2^k}$  then
38     ensemble_raffiné
39      $|\hat{\phi}| = \text{grille\_raffinée}(\bar{s}, k)$ 
40      $l = \text{lipschitz\_test}(|\hat{\phi}|, k)$ 
41     if  $l$  then
42       return  $l$ 
43     end
44     autres_nœuds
45   end
46   return  $l$ 
47 end

```

---



---

```

48 procedure autres_nœuds
49   forall  $s \in \mathcal{S}^{k-1} \setminus \{\bar{s}\}$  do
50      $|\hat{\phi}| = \text{grille\_raffinée}(\bar{s}, k)$ 
51      $l = \text{lipschitz\_test}(|\hat{\phi}|, k)$ 
52     if  $l$  then
53       Output: Pas de conclusion
54       break
55     end
56 end

```

---



# Annexe H.

## Preuves des lemmes du chapitre 4

**Sommaire**

---

<b>H.1</b>	<b>Démonstration du lemme 7</b>	<b>187</b>
H.1.1	Résolution pour $\alpha(t, x)$	189
H.1.2	Résolution pour $\beta(t, x)$	190
<b>H.2</b>	<b>Démonstration du lemme 9</b>	<b>192</b>
H.2.1	Bornitude dans $\Xi$	192
H.2.2	Opérateur inverse	194
<b>H.3</b>	<b>Démonstration du lemme 10</b>	<b>198</b>
<b>H.4</b>	<b>Démonstration du lemme 11</b>	<b>200</b>

---

Dans cette annexe, nous présentons les preuves des lemmes 7 à 11 du chapitre 4. Ces lemmes se concentrent sur les propriétés du système cible (4.9)-(4.11) et de la transformation backstepping (4.33). Le lemme 7 porte sur le caractère bien-posé du système cible, pourvu que la condition initiale soit dans un espace fonctionnel adéquat et satisfaisant des conditions de compatibilité. Dans le lemme 9, nous exhibons la bornitude et l'inversibilité de la transformation (4.33) en supposant que les noyaux appartiennent à un espace approprié. Les EDP satisfaites par ces noyaux sont ensuite établies dans le lemme 10. Finalement, nous prouvons dans le lemme 11 que ces équations sont bien-posées et que la solution possède la régularité imposée par le lemme 9. Pour simplifier la notation, nous définissons  $\bar{A}_0 \doteq A_0 + B_0 F_0$  et  $\bar{A}_1 \doteq A_1 + E_1 F_1$  (matrices Hurwitz).

## H.1 Démonstration du lemme 7

*Démonstration.* La démonstration s'appuie sur la résolution du système cible (4.9)-(4.11) à travers la méthode des caractéristiques. La régularité de la solution est ensuite déduite de son expression et des conditions de compatibilité (4.12). La solution est trouvée dans différents domaines du cadre spatio-temporel selon sa dépendance aux conditions initiales ou aux conditions aux bords en  $x = 0$  et  $x = 1$ .

Nous résolvons d'abord les EDO (4.9c) et (4.9d) satisfaites par  $\xi$  et  $\eta$  respectivement, avec les conditions initiales (4.10), en fonction de  $\alpha(\cdot, 1)$  :

$$\xi(t) = e^{\bar{A}_0 t} \xi_0 \quad (\text{H.1a})$$

$$\eta(t) = e^{\bar{A}_1 t} \eta_0 + \int_0^t e^{\bar{A}_1(t-\tau)} E_1 \alpha(\tau, 1) d\tau. \quad (\text{H.1b})$$

Nous pouvons déduire de la solution  $\xi(t)$  dans (H.1a) que  $\xi(\cdot) \in C^\infty([0, T]; \mathbb{R}^n)$ . Avant de résoudre les EDP satisfaites par  $\alpha$  et  $\beta$  avec les conditions aux bords et les conditions initiales associées, nous définissons le domaine  $\Omega \doteq [0, T] \times [0, 1]$  avec  $T \geq \frac{2}{\lambda}$ , un sous-ensemble fermé et borné de  $\mathbb{R}^2$ . Nous considérons de même les sous-domaines de  $\Omega$  suivants :

$$\begin{aligned} \Omega_1 &\doteq \{(t, x) \in \Omega ; 0 \leq t < \frac{x}{\lambda}\}, \\ \Omega_2 &\doteq \{(t, x) \in \Omega ; \frac{x}{\lambda} < t \leq T\}, \\ d^\alpha &\doteq \{(t, x) \in \Omega ; t = \frac{x}{\lambda}\}, \\ \Omega_3 &\doteq \{(t, x) \in \Omega ; 0 \leq t < \frac{1-x}{\lambda}\}, \\ \Omega_4 &\doteq \{(t, x) \in \Omega ; \frac{1-x}{\lambda} < t < \frac{2-x}{\lambda}\}, \\ \Omega_5 &\doteq \{(t, x) \in \Omega ; \frac{2-x}{\lambda} < t \leq T\}, \\ d_1^\beta &\doteq \{(t, x) \in \Omega ; t = \frac{1-x}{\lambda}\}, \\ d_2^\beta &\doteq \{(t, x) \in \Omega ; t = \frac{2-x}{\lambda}\}. \end{aligned}$$

Les lignes caractéristiques le long desquelles l'EDP (4.9a) (en  $\alpha$ ) évolue dans  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  sont illustrées sur la figure H.1. La figure H.2 montre les lignes caractéristiques le long desquelles l'EDP (4.9b) (en  $\beta$ ) évolue dans  $\Omega_3$ ,  $\Omega_4$  et  $\Omega_5$ .

Nous définissons les espaces fonctionnels  $\Xi_i \doteq C^1(\Omega_i; \mathbb{R})$ , pour  $i = 1 \dots 5$ , munis de la norme

$$\|\bar{\varphi}\|_{\Xi_i} \doteq \sup_{(t,x) \in \Omega_i} |\bar{\varphi}(t,x)| + \sup_{(t,x) \in \Omega_i} |\bar{\varphi}_t(t,x)| + \sup_{(t,x) \in \Omega_i} |\bar{\varphi}_x(t,x)| \quad (\text{H.2})$$

$\forall \bar{\varphi} \in \Xi_i$  et

$$\|\varphi\|_{C^1(\Omega; \mathbb{R})} \doteq \sup_{(t,x) \in \Omega} |\varphi(t,x)| + \sup_{(t,x) \in \Omega} |\varphi_t(t,x)| + \sup_{(t,x) \in \Omega} |\varphi_x(t,x)| \quad (\text{H.3})$$

$\forall \varphi \in C^1(\Omega; \mathbb{R})$ . Notre objectif est de montrer que les équations (4.9a) et (4.9b) avec les conditions initiales (4.11) et les conditions aux bords (4.9e) et (4.9f), où  $\xi(t)$  et  $\eta(t)$  vérifient

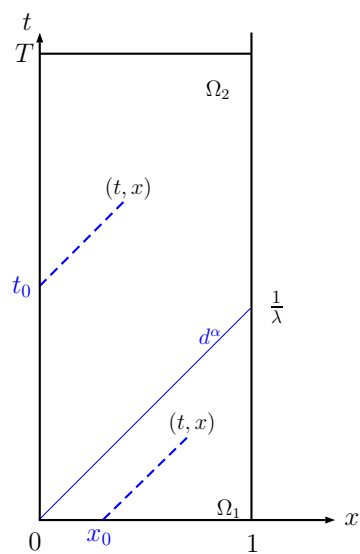


FIGURE H.1 – Lignes caractéristiques associées à l'EDP (4.9a) satisfaite par  $\alpha$  dans  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ .

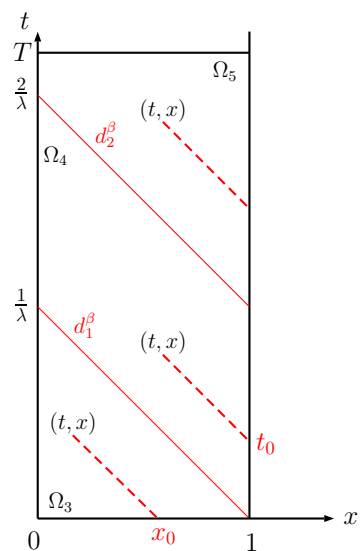


FIGURE H.2 – Lignes caractéristiques associées à l'EDP (4.9b) satisfaite par  $\beta$  dans  $\Omega_3$ ,  $\Omega_4$  et  $\Omega_5$ .

(H.1), admettent une solution unique dans  $C^1(\Omega; \mathbb{R})$ . Nous résolvons donc (4.9a), (4.9e), (4.11a) dans  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  et résolvons (4.9b), (4.9f), (4.11b) dans  $\Omega_3$ ,  $\Omega_4$  et  $\Omega_5$  à travers la méthode des caractéristiques.

La solution  $\alpha(t, x)$  est cherchée dans  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  séparément car cette solution dans  $\Omega_1$  dépend de la condition initiale, tandis que dans  $\Omega_2$ , elle dépend de la condition au bord  $x = 0$ . À son tour,  $\beta(t, x)$  prend des expressions différentes dans  $\Omega_3$ ,  $\Omega_4$  et  $\Omega_5$ . Ce fait est montré par les lignes caractéristiques qui partent d'un point  $(0, x_0)$  ou  $(t_0, 0)$  selon le domaine dans lequel la solution est cherchée (figures H.1 et H.2). La solution trouvée dans un domaine  $\Omega_i$ ,  $i = 1 \dots 5$  se révèle être continue dans  $\Omega_i$ . Nous dérivons l'expression de la solution et montrons que la dérivée est également continue, ce qui entraîne que la solution calculée dans  $\Omega_i$  appartient à  $\Xi_i$ . Nous vérifions ensuite cette régularité pour  $\alpha$  sur  $d^\alpha$  et pour  $\beta$  sur  $d_1^\beta$  et sur  $d_2^\beta$  pour prouver au final que la solution est dans  $C^1(\Omega; \mathbb{R})$ .

Les variables  $x$  and  $t$  sont paramétrées par  $s^\alpha$  sur les lignes caractéristiques correspondant à  $\alpha(t, x)$  et par  $s^\beta$  sur celles correspondant à  $\beta(t, x)$ . En utilisant les dérivées directionnelles, (4.9a) et (4.9b) s'écrivent

$$\frac{d}{ds^\alpha} \alpha(t(s^\alpha), x(s^\alpha)) = \sigma^{++} \alpha(t(s^\alpha), x(s^\alpha)), \quad (\text{H.4a})$$

$$\frac{d}{ds^\beta} \beta(t(s^\beta), x(s^\beta)) = \sigma^{--} \beta(t(s^\beta), x(s^\beta)). \quad (\text{H.4b})$$

La résolution des EDO (H.4) le long des lignes caractéristiques aboutit à

$$\alpha(t(s^\alpha), x(s^\alpha)) = e^{\sigma^{++} s^\alpha} \alpha(t(0), x(0)), \quad (\text{H.5a})$$

$$\beta(t(s^\beta), x(s^\beta)) = e^{\sigma^{--} s^\beta} \beta(t(0), x(0)). \quad (\text{H.5b})$$

### H.1.1 Résolution pour $\alpha(t, x)$

Les lignes caractéristiques satisfaites par  $\alpha(t, x)$  dans  $\Omega_1$  émergent d'une condition initiale  $x_0 = x - \lambda t$ . Par contre, dans  $\Omega_2$ , ces lignes émergent de la condition au bord  $x = 0$  où  $\alpha$  est défini à un temps  $t_0 = t - \frac{x}{\lambda}$ . Dans la suite, nous cherchons la solution de  $\alpha(t, x)$  dans  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ . Pour  $(t, x) \in \Omega_1$ , les lignes caractéristiques vérifient

$$x(s^\alpha) = \lambda s^\alpha + x_0 \quad (\text{H.6a})$$

$$t(s^\alpha) = s^\alpha, \quad (\text{H.6b})$$

alors que pour  $(t, x) \in \Omega_2$ , ces lignes vérifient

$$x(s^\alpha) = \lambda s^\alpha \quad (\text{H.7a})$$

$$t(s^\alpha) = s^\alpha + t_0. \quad (\text{H.7b})$$

En utilisant (H.5a), (H.6) et (H.7), la solution en  $\alpha(t, x)$  est

$$\alpha(t, x) = e^{\sigma^{++} t} \alpha_0(x - \lambda t) \mathbf{1}_{\Omega_1}(t, x) + e^{\sigma^{++} \frac{x}{\lambda}} \alpha \left( t - \frac{x}{\lambda}, 0 \right) \mathbf{1}_{\Omega_2}(t, x). \quad (\text{H.8})$$

Utilisons la condition au bord (4.9e) et la solution en  $\xi(t)$  dans (H.1a)

$$\alpha(t, x) = e^{\sigma^{++} t} \alpha_0(x - \lambda t) \mathbf{1}_{\Omega_1}(t, x) + e^{\sigma^{++} \frac{x}{\lambda}} C_0 e^{\bar{A}_0(t - \frac{x}{\lambda})} \xi_0 \mathbf{1}_{\Omega_2}(t, x). \quad (\text{H.9})$$

Dérivons (H.9) par rapport au temps

$$\begin{aligned} \alpha_t(t, x) &= e^{\sigma^{++} t} \left( \sigma^{++} \alpha_0(x - \lambda t) - \lambda \alpha_0'(x - \lambda t) \right) \mathbf{1}_{\Omega_1}(t, x) \\ &\quad + e^{\sigma^{++} \frac{x}{\lambda}} C_0 \bar{A}_0 e^{\bar{A}_0(t - \frac{x}{\lambda})} \xi_0 \mathbf{1}_{\Omega_2}(t, x). \end{aligned} \quad (\text{H.10})$$



Les expressions de  $\alpha(t, x)$  dans (H.9) et de  $\alpha_t(t, x)$  dans (H.10) garantissent l'existence d'une solution unique  $\alpha(\cdot, \cdot) \in \Xi_1 \cap \Xi_2$ . Afin de vérifier la continuité de  $\alpha$  et  $\alpha_t$  sur  $d^\alpha$ , nous évaluons (H.9) et (H.10) en  $(t, \lambda t)$

$$\alpha(t, \lambda t) = e^{\sigma^{++}t} \alpha_0(0) \mathbf{1}_{\Omega_1}(t, x) + e^{\sigma^{++}t} C_0 \xi_0 \mathbf{1}_{\Omega_2}(t, x), \quad (\text{H.11a})$$

$$\alpha_t(t, \lambda t) = e^{\sigma^{++}t} \left( \sigma^{++} \alpha_0(0) - \lambda \alpha'_0(0) \right) \mathbf{1}_{\Omega_1}(t, x) + e^{\sigma^{++}t} C_0 \bar{A}_0 \xi_0 \mathbf{1}_{\Omega_2}(t, x). \quad (\text{H.11b})$$

Nous déduisons la continuité de  $\alpha$  et  $\alpha_t$  sur  $d^\alpha$  des conditions de compatibilité (4.12a) et (4.12c) respectivement et nous avons alors  $\alpha(\cdot, \cdot) \in C^1(\Omega; \mathbb{R})$ .

### H.1.2 Résolution pour $\beta(t, x)$

Les lignes caractéristiques satisfaites par  $\beta(t, x)$  dans  $\Omega_3$  émergent d'une condition initiale  $x_0 = x + \lambda t$ . Par contre, dans  $\Omega_4$  ou  $\Omega_5$ , ces lignes émergent de la condition au bord  $x = 1$  où  $\beta$  est défini à un temps  $t_0 = t - \frac{1-x}{\lambda}$ . Dans la suite, nous cherchons la solution  $\beta(t, x)$  dans  $\Omega_3$ ,  $\Omega_4$  et  $\Omega_5$ . Pour  $(t, x) \in \Omega_3$ , les équations de ces lignes caractéristiques s'écrivent

$$x(s^\beta) = -\lambda s^\beta + x_0 \quad (\text{H.12a})$$

$$t(s^\beta) = s^\beta, \quad (\text{H.12b})$$

tandis que pour  $(t, x) \in \Omega_4 \cup \Omega_5$ , ces lignes vérifient

$$x(s^\beta) = 1 - \lambda s^\beta \quad (\text{H.13a})$$

$$t(s^\beta) = s^\beta + t_0. \quad (\text{H.13b})$$

En utilisant (H.5b), (H.12) et (H.13), nous aboutissons à la solution en  $\beta(t, x)$  suivante

$$\begin{aligned} \beta(t, x) &= e^{\sigma^{--}t} \beta_0(x + \lambda t) \mathbf{1}_{\Omega_3}(t, x) \\ &+ \left[ e^{\sigma^{--}\frac{1-x}{\lambda}} \beta \left( t - \frac{1-x}{\lambda}, 1 \right) \right] \mathbf{1}_{\Omega_4 \cup \Omega_5}(t, x). \end{aligned} \quad (\text{H.14})$$

Utilisons la condition au bord (4.9f) et la solution en  $\eta(t)$  dans (H.1b)

$$\begin{aligned} \beta(t, x) &= e^{\sigma^{--}t} \beta_0(x + \lambda t) \mathbf{1}_{\Omega_3}(t, x) \\ &+ \left[ e^{\sigma^{--}\frac{1-x}{\lambda}} \left( \rho \alpha \left( t - \frac{1-x}{\lambda}, 1 \right) + C_1 \eta \left( t - \frac{1-x}{\lambda} \right) \right) \right] \mathbf{1}_{\Omega_4 \cup \Omega_5}(t, x) \\ &= e^{\sigma^{--}t} \beta_0(x + \lambda t) \mathbf{1}_{\Omega_3}(t, x) + \left[ \rho e^{\sigma^{--}\frac{1-x}{\lambda}} \alpha \left( t - \frac{1-x}{\lambda}, 1 \right) + e^{\sigma^{--}\frac{1-x}{\lambda}} C_1 e^{\bar{A}_1(t - \frac{1-x}{\lambda})} \eta_0 \right. \\ &\quad \left. + e^{\sigma^{--}\frac{1-x}{\lambda}} C_1 \int_0^{t - \frac{1-x}{\lambda}} e^{\bar{A}_1(t - \frac{1-x}{\lambda} - \tau)} E_1 \alpha(\tau, 1) d\tau \right] \mathbf{1}_{\Omega_4 \cup \Omega_5}(t, x). \end{aligned} \quad (\text{H.15})$$

Remarquons que dans  $\Omega_4$ ,  $\alpha(\cdot, 1)$  dépend de la condition initiale  $\alpha_0$  tandis que dans  $\Omega_5$ ,  $\alpha(\cdot, 1)$  dépend de la condition au bord  $x = 0$ . En évaluant (H.9) en  $x = 1$  et en l'introduisant dans

(H.15), celle-ci s'écrit

$$\begin{aligned}
\beta(t, x) &= e^{\sigma^{--}t} \beta_0(x + \lambda t) \mathbf{1}_{\Omega_3}(t, x) \\
&+ e^{\sigma^{--}\frac{1-x}{\lambda}} C_1 e^{\bar{A}_1(t-\frac{1-x}{\lambda})} \eta_0 \mathbf{1}_{\Omega_4 \cup \Omega_5}(t, x) + \left[ \rho e^{\sigma^{--}\frac{1-x}{\lambda}} e^{\sigma^{++}(t-\frac{1-x}{\lambda})} \alpha_0(2 - \lambda t - x) \right. \\
&\quad \left. + e^{\sigma^{--}\frac{1-x}{\lambda}} C_1 \int_0^{t-\frac{1-x}{\lambda}} e^{\bar{A}_1(t-\frac{1-x}{\lambda}-\tau)} E_1 e^{\sigma^{++}\tau} \alpha_0(1 - \lambda\tau) d\tau \right] \mathbf{1}_{\Omega_4}(t, x) \\
&+ \left[ \rho e^{\sigma^{--}\frac{1-x}{\lambda}} e^{\frac{\sigma^{++}}{\lambda}} C_0 e^{\bar{A}_0(t-\frac{2-x}{\lambda})} \xi_0 \right. \\
&\quad \left. + e^{\sigma^{--}\frac{1-x}{\lambda}} C_1 \int_0^{\frac{1}{\lambda}} e^{\bar{A}_1(t-\frac{1-x}{\lambda}-\tau)} E_1 e^{\sigma^{++}\tau} \alpha_0(1 - \lambda\tau) d\tau \right. \\
&\quad \left. + e^{\sigma^{--}\frac{1-x}{\lambda}} e^{\frac{\sigma^{++}}{\lambda}} C_1 \int_{\frac{1}{\lambda}}^{t-\frac{1-x}{\lambda}} e^{\bar{A}_1(t-\frac{1-x}{\lambda}-\tau)} E_1 C_0 e^{\bar{A}_0(\tau-\frac{1}{\lambda})} \xi_0 d\tau \right] \mathbf{1}_{\Omega_5}(t, x).
\end{aligned} \tag{H.16}$$

Dérivons (H.16) par rapport au temps

$$\begin{aligned}
\beta_t(t, x) &= e^{\sigma^{--}t} (\sigma^{--} \beta_0(x + \lambda t) + \lambda \beta'_0(x + \lambda t)) \mathbf{1}_{\Omega_3}(t, x) \\
&+ e^{\sigma^{--}\frac{1-x}{\lambda}} C_1 \bar{A}_1 e^{\bar{A}_1(t-\frac{1-x}{\lambda})} \eta_0 \mathbf{1}_{\Omega_4 \cup \Omega_5}(t, x) \\
&+ \left[ e^{\sigma^{--}\frac{1-x}{\lambda}} e^{\sigma^{++}(t-\frac{1-x}{\lambda})} \left[ (\rho \sigma^{++} + C_1 E_1) \alpha_0(2 - \lambda t - x) - \rho \lambda \alpha'_0(2 - \lambda t - x) \right] \right. \\
&\quad \left. + e^{\sigma^{--}\frac{1-x}{\lambda}} C_1 \bar{A}_1 \int_0^{t-\frac{1-x}{\lambda}} e^{\bar{A}_1(t-\frac{1-x}{\lambda}-\tau)} E_1 e^{\sigma^{++}\tau} \alpha_0(1 - \lambda\tau) d\tau \right. \\
&\quad \left. + e^{\sigma^{--}\frac{1-x}{\lambda}} C_1 \bar{A}_1 e^{\bar{A}_1(t-\frac{1-x}{\lambda})} \eta_0 \right] \mathbf{1}_{\Omega_4}(t, x) \\
&+ \left[ e^{\sigma^{--}\frac{1-x}{\lambda}} e^{\frac{\sigma^{++}}{\lambda}} \left( \rho C_0 \bar{A}_0 + C_1 E_1 C_0 \right) e^{\bar{A}_0(t-\frac{2-x}{\lambda})} \xi_0 \right. \\
&\quad \left. + e^{\sigma^{--}\frac{1-x}{\lambda}} C_1 \bar{A}_1 \int_0^{\frac{1}{\lambda}} e^{\bar{A}_1(t-\frac{1-x}{\lambda}-\tau)} E_1 e^{\sigma^{++}\tau} \alpha_0(1 - \lambda\tau) d\tau \right. \\
&\quad \left. + e^{\sigma^{--}\frac{1-x}{\lambda}} e^{\frac{\sigma^{++}}{\lambda}} C_1 \bar{A}_1 \int_{\frac{1}{\lambda}}^{t-\frac{1-x}{\lambda}} e^{\bar{A}_1(t-\frac{1-x}{\lambda}-\tau)} E_1 C_0 e^{\bar{A}_0(\tau-\frac{1}{\lambda})} \xi_0 d\tau \right] \mathbf{1}_{\Omega_5}(t, x).
\end{aligned} \tag{H.17}$$

Les expressions de  $\beta(t, x)$  dans (H.16) et de  $\beta_t(t, x)$  dans (H.17) garantissent l'existence d'une solution unique  $\beta(\cdot, \cdot) \in \Xi_3 \cap \Xi_4 \cap \Xi_5$ . Dans le but de vérifier la continuité de  $\beta$  et  $\beta_t$  sur  $d_1^\beta$ , nous évaluons (H.16) et (H.17) en  $(t, 1 - \lambda t)$  comme suit

$$\beta(t, 1 - \lambda t) = e^{\sigma^{--}t} \beta_0(1) \mathbf{1}_{\Omega_3}(t, x) + e^{\sigma^{--}t} (\rho \alpha_0(1) + C_1 \eta_0) \mathbf{1}_{\Omega_4}(t, x), \tag{H.18a}$$

$$\begin{aligned}
\beta_t(t, 1 - \lambda t) &= e^{\sigma^{--}t} (\sigma^{--} \beta_0(1) + \lambda \beta'_0(1)) \mathbf{1}_{\Omega_3}(t, x) \\
&+ e^{\sigma^{--}t} \left[ (\sigma^{++} \rho + C_1 E_1) \alpha_0(1) - \lambda \rho \alpha'_0(1) + C_1 \bar{A}_1 \eta_0 \right] \mathbf{1}_{\Omega_4}(t, x).
\end{aligned} \tag{H.18b}$$

La continuité de  $\beta$  et  $\beta_t$  sur  $d_1^\beta$  découle des conditions de compatibilité (4.12b) et (4.12d) respectivement, alors que leur continuité sur  $d_2^\beta$  est assurée grâce à la continuité de  $\alpha$  et de  $\alpha_t$  sur  $d^\alpha$  (ou des conditions de compatibilité (4.12a) et (4.12c)). Par suite, nous avons  $\beta(\cdot, \cdot) \in C^1(\Omega; \mathbb{R})$ . Finalement, en se basant sur l'expression de  $\eta(t)$  donnée dans (H.1b), nous concluons la preuve.

Nous devons noter que les conditions de compatibilité exigées pour une solution dans  $C^1$  ne sont pas surprenantes (voir par exemple les conditions analogues dans [Coron et al., 2013] pour une solution dans  $H^2$ ). Dans ce travail, nous considérons seulement ces solutions et ne cherchons pas à enlever les conditions (fortes) de compatibilité.  $\square$

## H.2 Démonstration du lemme 9

*Démonstration.* Cette démonstration comprend deux parties. Nous prouvons dans la première partie que l'opérateur associé à la transformation (4.33) est borné dans  $\Xi$ . La démarche consiste à montrer que cet opérateur transforme des variables  $(u(t, \cdot), v(t, \cdot), X(t), Y(t)) \in \Xi$  en des variables  $(\alpha(t, \cdot), \beta(t, \cdot), \xi(t), \eta(t)) \in \Xi$ . Nous cherchons les normes dans  $C^1([0, 1]; \mathbb{R})$  de  $\alpha(t, \cdot)$  et de  $\beta(t, \cdot)$  et les normes euclidiennes de  $\xi(t)$  et de  $\eta(t)$  et les majorons en fonction des normes dans  $C^1([0, 1]; \mathbb{R})$  de  $u(t, \cdot)$ ,  $v(t, \cdot)$ ,  $P^{ij}$  et des composantes de  $g$ ,  $w$ ,  $p_1$  et  $p_2$ , et des normes euclidiennes de  $X(t)$  et de  $Y(t)$ .

Dans la deuxième partie, nous cherchons un opérateur inverse de celui associé à la transformation backstepping (4.33). Nous noterons par  $H$  l'opérateur de la transformation directe (4.33) et par  $\bar{H}$  son inverse. Nous établissons les équations intégrales satisfaites par les noyaux de  $\bar{H}$  en fonction de ceux de  $H$ . Nous prouvons ensuite que ces équations sont bien-posées dans l'annexe I. La majoration de la norme des noyaux de  $\bar{H}$  dans  $C^1(\mathcal{T}_2; \mathbb{R})$  en termes des normes des noyaux de  $H$  est une application directe de l'équation (I.16).

### H.2.1 Bornitude dans $\Xi$

Nous faisons l'hypothèse que  $(u(t, \cdot), v(t, \cdot), X(t), Y(t)) \in \Xi$  et prouvons que  $(\alpha(t, \cdot), \beta(t, \cdot), \xi(t), \eta(t)) \in \Xi$  en montrant la bornitude des normes de  $\alpha(t, \cdot)$  et  $\beta(t, \cdot)$  dans  $C^1([0, 1]; \mathbb{R})$  et en nous appuyant sur la transformation (4.33).

En utilisant (4.33a), nous trouvons une borne supérieure de  $|\alpha(t, x)|$  comme suit

$$\begin{aligned} \sup_{x \in [0, 1]} |\alpha(t, x)| \leq & \sup_{x \in [0, 1]} |u(t, x)| + \sup_{(x, y) \in \mathcal{T}_2} |P^{uu}(x, y)| \sup_{x \in [0, 1]} |u(t, x)| \\ & + \sup_{(x, y) \in \mathcal{T}_2} |P^{uv}(x, y)| \sup_{x \in [0, 1]} |v(t, x)| + \sum_{i=1}^m |Y_i(t)| \sup_{x \in [0, 1]} |g_i(x)|. \end{aligned} \quad (\text{H.19})$$

Dans le but d'avoir une borne supérieure de  $|\alpha_x(t, x)|$ , nous dérivons (4.33a) par rapport à  $x$

$$\begin{aligned} \alpha_x(t, x) = & u_x(t, x) + P^{uu}(x, x)u(t, x) + P^{uv}(x, x)v(t, x) \\ & - \int_x^1 P_x^{uu}(x, y)u(t, y)dy - \int_x^1 P_x^{uv}(x, y)v(t, y)dy - g'(x)Y(t), \end{aligned} \quad (\text{H.20})$$

ce qui entraîne

$$\begin{aligned} \sup_{x \in [0, 1]} |\alpha_x(t, x)| \leq & \sup_{x \in [0, 1]} |u_x(t, x)| + \sup_{(x, y) \in \mathcal{T}_2} |P^{uu}(x, y)| \sup_{x \in [0, 1]} |u(t, x)| \\ & + \sup_{(x, y) \in \mathcal{T}_2} |P^{uv}(x, y)| \sup_{x \in [0, 1]} |v(t, x)| + \sup_{(x, y) \in \mathcal{T}_2} |P_x^{uu}(x, y)| \sup_{x \in [0, 1]} |u(t, x)| \\ & + \sup_{(x, y) \in \mathcal{T}_2} |P_x^{uv}(x, y)| \sup_{x \in [0, 1]} |v(t, x)| + \sum_{i=1}^m |Y_i(t)| \sup_{x \in [0, 1]} |g'_i(x)|. \end{aligned} \quad (\text{H.21})$$

En additionnant (H.19) and (H.21), nous obtenons

$$\begin{aligned} \|\alpha(t, \cdot)\|_{C^1([0,1];\mathbb{R})} &\leq \|u(t, \cdot)\|_{C^1([0,1];\mathbb{R})} \\ &+ \sup_{x \in [0,1]} |u(t, x)| \left( 2 \sup_{(x,y) \in \mathcal{T}_2} |P^{uu}(x, y)| + \sup_{(x,y) \in \mathcal{T}_2} |P_x^{uu}(x, y)| \right) \\ &+ \sup_{x \in [0,1]} |v(t, x)| \left( 2 \sup_{(x,y) \in \mathcal{T}_2} |P^{vv}(x, y)| + \sup_{(x,y) \in \mathcal{T}_2} |P_x^{vv}(x, y)| \right) \\ &+ \sum_{i=1}^m \|g_i\|_{C^1([0,1];\mathbb{R})} \cdot |Y_i(t)|. \end{aligned} \quad (\text{H.22})$$

Un calcul similaire est appliqué à (4.33b) en vue de chercher une borne supérieure de  $\|\beta(t, \cdot)\|_{C^1([0,1];\mathbb{R})}$  comme suit

$$\begin{aligned} \sup_{x \in [0,1]} |\beta(t, x)| &\leq \sup_{x \in [0,1]} |v(t, x)| + \sup_{(x,y) \in \mathcal{T}_2} |P^{vu}(x, y)| \sup_{x \in [0,1]} |u(t, x)| \\ &+ \sup_{(x,y) \in \mathcal{T}_2} |P^{vv}(x, y)| \sup_{x \in [0,1]} |v(t, x)| + \sum_{i=1}^m |Y_i(t)| \sup_{x \in [0,1]} |w_i(x)|. \end{aligned} \quad (\text{H.23})$$

Dérivons (4.33b) par rapport à  $x$

$$\begin{aligned} \beta_x(t, x) &= v_x(t, x) + P^{vu}(x, x)u(t, x) + P^{vv}(x, x)v(t, x) \\ &- \int_x^1 P_x^{vu}(x, y)u(t, y)dy - \int_x^1 P_x^{vv}(x, y)v(t, y)dy - w'(x)Y(t), \end{aligned} \quad (\text{H.24})$$

ce qui aboutit à la majoration suivante

$$\begin{aligned} \sup_{x \in [0,1]} |\beta_x(t, x)| &\leq \sup_{x \in [0,1]} |v_x(t, x)| + \sup_{(x,y) \in \mathcal{T}_2} |P^{vu}(x, y)| \sup_{x \in [0,1]} |u(t, x)| \\ &+ \sup_{(x,y) \in \mathcal{T}_2} |P^{vv}(x, y)| \sup_{x \in [0,1]} |v(t, x)| + \sup_{(x,y) \in \mathcal{T}_2} |P_x^{vu}(x, y)| \sup_{x \in [0,1]} |u(t, x)| \\ &+ \sup_{(x,y) \in \mathcal{T}_2} |P_x^{vv}(x, y)| \sup_{x \in [0,1]} |v(t, x)| + \sum_{i=1}^m |Y_i(t)| \sup_{x \in [0,1]} |w'_i(x)|. \end{aligned} \quad (\text{H.25})$$

En additionnant (H.23) et (H.25), nous obtenons

$$\begin{aligned} \|\beta(t, \cdot)\|_{C^1([0,1];\mathbb{R})} &\leq \|v(t, \cdot)\|_{C^1([0,1];\mathbb{R})} \\ &+ \sup_{x \in [0,1]} |u(t, x)| \left( 2 \sup_{(x,y) \in \mathcal{T}_2} |P^{vu}(x, y)| + \sup_{(x,y) \in \mathcal{T}_2} |P_x^{vu}(x, y)| \right) \\ &+ \sup_{x \in [0,1]} |v(t, x)| \left( 2 \sup_{(x,y) \in \mathcal{T}_2} |P^{vv}(x, y)| + \sup_{(x,y) \in \mathcal{T}_2} |P_x^{vv}(x, y)| \right) \\ &+ \sum_{i=1}^m \|w_i\|_{C^1([0,1];\mathbb{R})} |Y_i(t)|. \end{aligned} \quad (\text{H.26})$$

Nous majorons ensuite la norme euclidienne de  $\xi(t)$  en utilisant (4.33c)

$$\begin{aligned} \|\xi(t)\|_{\mathbb{R}^n}^2 &\leq \|X(t)\|_{\mathbb{R}^n}^2 + \|DY(t)\|_{\mathbb{R}^n}^2 + \|R_0 v(t, 0)\|_{\mathbb{R}^n}^2 \\ &+ \sum_{i=0}^n \left( \int_0^1 p_{1i}(y)u(t, y)dy \right)^2 + \sum_{i=0}^n \left( \int_0^1 p_{2i}(y)v(t, y)dy \right)^2. \end{aligned} \quad (\text{H.27})$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée aux termes intégraux de (H.27) nous permet d'écrire

$$\begin{aligned} \left( \int_0^1 p_{1i}(y)u(t,y)dy \right)^2 &\leq \left( \int_0^1 |p_{1i}(y)u(t,y)|dy \right)^2 \\ &\leq \|p_{1i}\|_{L^2([0,1];\mathbb{R})}^2 \|u(t,\cdot)\|_{L^2([0,1];\mathbb{R})}^2, \end{aligned} \quad (\text{H.28a})$$

$$\begin{aligned} \left( \int_0^1 p_{2i}(y)v(t,y)dy \right)^2 &\leq \left( \int_0^1 |p_{2i}(y)v(t,y)|dy \right)^2 \\ &\leq \|p_{2i}\|_{L^2([0,1];\mathbb{R})}^2 \|v(t,\cdot)\|_{L^2([0,1];\mathbb{R})}^2. \end{aligned} \quad (\text{H.28b})$$

Substituons (H.28) dans (H.27)

$$\begin{aligned} \|\xi(t)\|_{\mathbb{R}^n}^2 &\leq \|X(t)\|_{\mathbb{R}^n}^2 + \|DY(t)\|_{\mathbb{R}^n}^2 + (v(t,0))^2 \|R_0\|_{\mathbb{R}^n}^2 \\ &\quad + \sum_{i=0}^n \|p_{1i}\|_{L^2([0,1];\mathbb{R})}^2 \|u(t,\cdot)\|_{L^2([0,1];\mathbb{R})}^2 + \sum_{i=0}^n \|p_{2i}\|_{L^2([0,1];\mathbb{R})}^2 \|v(t,\cdot)\|_{L^2([0,1];\mathbb{R})}^2. \end{aligned} \quad (\text{H.29})$$

Finalement, en utilisant (4.33d)

$$\|\eta(t)\|_{\mathbb{R}^n}^2 = \|Y(t)\|_{\mathbb{R}^n}^2. \quad (\text{H.30})$$

## H.2.2 Opérateur inverse

En vue d'écrire la transformation (4.33) sous une forme matricielle compacte, nous définissons les opérateurs suivants. Soient  $\mathcal{P}^{ij}: C^1([0,1];\mathbb{R}) \rightarrow C^1([0,1];\mathbb{R})$ ,  $i, j \in \{u, v\}$  des opérateurs de Volterra définis par

$$\mathcal{P}^{ij}[\varphi(t,\cdot)](x) \doteq - \int_x^1 P^{ij}(x,y)\varphi(t,y)dy. \quad (\text{H.31})$$

pour tout  $\varphi(t,\cdot) \in C^1([0,1];\mathbb{R})$ . Nous définissons de même les opérateurs de Fredholm  $\mathcal{P}_i: C^1([0,1];\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $i \in \{1, 2\}$  comme suit

$$\mathcal{P}_i[\varphi(t,\cdot)] \doteq - \int_0^1 p_i(y)\varphi(t,y)dy. \quad (\text{H.32})$$

Les opérateurs  $\mathcal{R}$ ,  $G$ ,  $W$  et  $\mathcal{D}$  sont définis par

$$\mathcal{R}[v(t,\cdot)] \doteq -R_0v(t,0) \quad (\text{H.33a})$$

$$G[Y(t)](x) \doteq -g(x)Y(t) \quad (\text{H.33b})$$

$$W[Y(t)](x) \doteq -w(x)Y(t) \quad (\text{H.33c})$$

$$\mathcal{D}[Y(t)] \doteq -DY(t). \quad (\text{H.33d})$$

En nous appuyant sur ces définitions, la transformation (4.33) s'écrit

$$H \begin{bmatrix} u(t,\cdot) \\ v(t,\cdot) \\ X(t) \\ Y(t) \end{bmatrix} (x) \doteq \begin{bmatrix} \mathcal{I} + \mathcal{P}^{uu} & \mathcal{P}^{uv} & 0 & G \\ \mathcal{P}^{vu} & \mathcal{I} + \mathcal{P}^{vv} & 0 & W \\ \mathcal{P}_1 & \mathcal{P}_2 + \mathcal{R} & \mathcal{I} & \mathcal{D} \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t,\cdot) \\ v(t,\cdot) \\ X(t) \\ Y(t) \end{bmatrix} (x) \quad (\text{H.34})$$

pour tout  $(u(t,\cdot), v(t,\cdot), X(t), Y(t)) \in \Xi$ ,  $H$  étant l'opérateur associé à cette transformation et  $\mathcal{I}$  l'opérateur identité. Nous cherchons maintenant une transformation backstepping inverse à (4.33) de la forme

$$u(t, x) = \alpha(t, x) - \int_x^1 K^{\alpha\alpha}(x, y)\alpha(t, y)dy - \int_x^1 K^{\alpha\beta}(x, y)\beta(t, y)dy - \bar{g}(x)\eta(t) \quad (\text{H.35a})$$

$$v(t, x) = \beta(t, x) - \int_x^1 K^{\beta\alpha}(x, y)\alpha(t, y)dy - \int_x^1 K^{\beta\beta}(x, y)\beta(t, y)dy - \bar{w}(x)\eta(t) \quad (\text{H.35b})$$

$$X(t) = \xi(t) - \bar{D}\eta(t) - \bar{R}_0\beta(t, 0) - \int_0^1 k_1(y)\alpha(t, y)dy - \int_0^1 k_2(y)\beta(t, y)dy \quad (\text{H.35c})$$

$$Y(t) = \eta(t). \quad (\text{H.35d})$$

Dans le but d'écrire (H.35) sous la même forme que (H.34), nous définissons les opérateurs suivants. Soient les opérateurs de Volterra  $\mathcal{K}^{ij}: C^1([0, 1]; \mathbb{R}) \rightarrow C^1([0, 1]; \mathbb{R})$ ,  $i, j \in \{\alpha, \beta\}$  et de Fredholm  $\mathcal{K}_i: C^1([0, 1]; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $i \in \{1, 2\}$  satisfaisant

$$\mathcal{K}^{ij}[\varphi(t, \cdot)](x) \doteq - \int_x^1 K^{ij}(x, y)\varphi(t, y)dy, \quad (\text{H.36a})$$

$$\mathcal{K}_i[\varphi(t, \cdot)] \doteq - \int_0^1 k_i(y)\varphi(t, y)dy. \quad (\text{H.36b})$$

Nous définissons également les opérateurs  $\bar{\mathcal{R}}$ ,  $\bar{G}$ ,  $\bar{W}$  and  $\bar{D}$  comme suit

$$\bar{\mathcal{R}}[\beta(t, \cdot)] \doteq -\bar{R}_0\beta(t, 0) \quad (\text{H.37a})$$

$$\bar{G}[\eta(t)](x) \doteq -\bar{g}(x)\eta(t) \quad (\text{H.37b})$$

$$\bar{W}[\eta(t)](x) \doteq -\bar{w}(x)\eta(t) \quad (\text{H.37c})$$

$$\bar{D}[\eta(t)] \doteq -\bar{D}\eta(t). \quad (\text{H.37d})$$

Ainsi, la transformation (H.35) s'écrit

$$\bar{H} \begin{bmatrix} \alpha(t, \cdot) \\ \beta(t, \cdot) \\ \xi(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix} (x) \doteq \begin{bmatrix} \mathcal{I} + \mathcal{K}^{\alpha\alpha} & \mathcal{K}^{\alpha\beta} & 0 & \bar{G} \\ \mathcal{K}^{\beta\alpha} & \mathcal{I} + \mathcal{K}^{\beta\beta} & 0 & \bar{W} \\ \mathcal{K}_1 & \mathcal{K}_2 + \bar{\mathcal{R}} & \mathcal{I} & \bar{D} \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha(t, \cdot) \\ \beta(t, \cdot) \\ \xi(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix} (x), \quad (\text{H.38})$$

$\bar{H}$  étant l'opérateur associé à cette transformation.

Dans le travail qui suit, nous établissons les équations satisfaites par les noyaux  $K^{ij}$  et  $k_i$ , et les coefficients  $\bar{g}$ ,  $\bar{w}$ ,  $\bar{D}$  et  $\bar{R}_0$ . Nous montrons maintenant que ces équations admettent une solution unique. L'opérateur  $\bar{H}$ , étant l'inverse de  $H$ , satisfait

$$\bar{H}H \begin{bmatrix} u(t, \cdot) \\ v(t, \cdot) \\ X(t) \\ Y(t) \end{bmatrix} (x) = \begin{bmatrix} \mathcal{I} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t, \cdot) \\ v(t, \cdot) \\ X(t) \\ Y(t) \end{bmatrix} (x). \quad (\text{H.39})$$

Le produit  $\bar{H}H$  s'écrit matriciellement comme suit

$$\begin{aligned}
& \bar{H}H \begin{bmatrix} u(t, \cdot) \\ v(t, \cdot) \\ X(t) \\ Y(t) \end{bmatrix} (x) \\
&= \begin{bmatrix} \mathcal{I} + \mathcal{K}^{\alpha\alpha} & \mathcal{K}^{\alpha\beta} & 0 & \bar{G} \\ \mathcal{K}^{\beta\alpha} & \mathcal{I} + \mathcal{K}^{\beta\beta} & 0 & \bar{W} \\ \mathcal{K}_1 & \mathcal{K}_2 + \bar{\mathcal{R}} & \mathcal{I} & \bar{\mathcal{D}} \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{I} + \mathcal{P}^{uu} & \mathcal{P}^{uv} & 0 & G \\ \mathcal{P}^{vu} & \mathcal{I} + \mathcal{P}^{vv} & 0 & W \\ \mathcal{P}_1 & \mathcal{P}_2 + \mathcal{R} & \mathcal{I} & \mathcal{D} \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t, \cdot) \\ v(t, \cdot) \\ X(t) \\ Y(t) \end{bmatrix} (x) \\
&= \begin{bmatrix} (\mathcal{I} + \mathcal{K}^{\alpha\alpha})(\mathcal{I} + \mathcal{P}^{uu}) & (\mathcal{I} + \mathcal{K}^{\alpha\alpha})\mathcal{P}^{uv} & 0 & (\mathcal{I} + \mathcal{K}^{\alpha\alpha})G \\ +\mathcal{K}^{\alpha\beta}\mathcal{P}^{vu} & +\mathcal{K}^{\alpha\beta}(\mathcal{I} + \mathcal{P}^{vv}) & 0 & +\mathcal{K}^{\alpha\beta}W + \bar{G} \\ \mathcal{K}^{\beta\alpha}(\mathcal{I} + \mathcal{P}^{uu}) & (\mathcal{I} + \mathcal{K}^{\beta\beta})(\mathcal{I} + \mathcal{P}^{vv}) & 0 & (\mathcal{I} + \mathcal{K}^{\beta\beta})W \\ +(\mathcal{I} + \mathcal{K}^{\beta\beta})\mathcal{P}^{vu} & +\mathcal{K}^{\beta\alpha}\mathcal{P}^{uv} & 0 & +\mathcal{K}^{\beta\alpha}G + \bar{W} \\ \mathcal{K}_1(\mathcal{I} + \mathcal{P}^{uu}) + \mathcal{P}_1 & (\mathcal{K}_2 + \bar{\mathcal{R}})(\mathcal{I} + \mathcal{P}^{vv}) & \mathcal{I} & (\mathcal{K}_2 + \bar{\mathcal{R}})W \\ +(\mathcal{K}_2 + \bar{\mathcal{R}})\mathcal{P}^{vu} & +\mathcal{K}_1\mathcal{P}^{uv} + \mathcal{P}_2 + \mathcal{R} & \mathcal{I} & +\mathcal{K}_1G + \mathcal{D} + \bar{\mathcal{D}} \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t, \cdot) \\ v(t, \cdot) \\ X(t) \\ Y(t) \end{bmatrix} (x). \tag{H.40}
\end{aligned}$$

En vue de trouver les équations intégrales satisfaites par  $K^{ij}$  et  $k_i$ , nous utilisons les égalités suivantes, obtenues par inversion de l'ordre des intégrations

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}^{ij}[\mathcal{P}^{ef}[\varphi(t, \cdot)]](x) &= \int_x^1 K^{ij}(x, y) \left( \int_y^1 P^{ef}(y, \theta) \varphi(t, \theta) d\theta \right) dy \\
&= \int_x^1 \int_y^1 K^{ij}(x, y) P^{ef}(y, \theta) \varphi(t, \theta) d\theta dy \\
&= \int_x^1 \int_x^\theta K^{ij}(x, y) P^{ef}(y, \theta) \varphi(t, \theta) dy d\theta \\
&= \int_x^1 \left( \int_x^y K^{ij}(x, \theta) P^{ef}(\theta, y) d\theta \right) \varphi(t, y) dy, \\
& i, j \in \{\alpha, \beta\}, e, f \in \{u, v\},
\end{aligned} \tag{H.41a}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_i[\mathcal{P}^{ef}[\varphi(t, \cdot)]] &= \int_0^1 k_i(y) \left( \int_y^1 P^{ef}(y, \theta) \varphi(t, \theta) d\theta \right) dy \\
&= \int_0^1 \int_y^1 k_i(y) P^{ef}(y, \theta) \varphi(t, \theta) d\theta dy \\
&= \int_0^1 \int_0^\theta k_i(y) P^{ef}(y, \theta) \varphi(t, \theta) dy d\theta \\
&= \int_0^1 \left( \int_0^y k_i(\theta) P^{ef}(\theta, y) d\theta \right) \varphi(t, y) dy, \\
& i \in \{\alpha, \beta\}, e, f \in \{u, v\}.
\end{aligned} \tag{H.41b}$$

En identifiant les termes de la matrice du membre de droite de (H.40) à ceux de la matrice de (H.39) et en utilisant (H.41), nous obtenons les équations intégrales suivantes satisfaites par les noyaux  $K^{ij}$ ,  $i, j \in \{\alpha, \beta\}$

$$K^{\alpha\alpha}(x, y) = -P^{uu}(x, y) + \int_x^y K^{\alpha\alpha}(x, \theta)P^{uu}(\theta, y)d\theta + \int_x^y K^{\alpha\beta}(x, \theta)P^{vu}(\theta, y)d\theta, \quad (\text{H.42a})$$

$$K^{\alpha\beta}(x, y) = -P^{uv}(x, y) + \int_x^y K^{\alpha\alpha}(x, \theta)P^{uv}(\theta, y)d\theta + \int_x^y K^{\alpha\beta}(x, \theta)P^{vv}(\theta, y)d\theta, \quad (\text{H.42b})$$

$$K^{\beta\alpha}(x, y) = -P^{vu}(x, y) + \int_x^y K^{\beta\alpha}(x, \theta)P^{uu}(\theta, y)d\theta + \int_x^y K^{\beta\beta}(x, \theta)P^{vu}(\theta, y)d\theta, \quad (\text{H.42c})$$

$$K^{\beta\beta}(x, y) = -P^{vv}(x, y) + \int_x^y K^{\beta\alpha}(x, \theta)P^{uv}(\theta, y)d\theta + \int_x^y K^{\beta\beta}(x, \theta)P^{vv}(\theta, y)d\theta. \quad (\text{H.42d})$$

Les noyaux  $k_1$  and  $k_2$  à leur tour vérifient

$$k_1(y) = -p_1(y) + \bar{R}_0 P^{vu}(0, y) + \int_0^y k_1(\theta)P^{uu}(\theta, y)d\theta + \int_0^y k_2(\theta)P^{vu}(\theta, y)d\theta, \quad (\text{H.43a})$$

$$k_2(y) = -p_2(y) + \bar{R}_0 P^{vv}(0, y) + \int_0^y k_1(\theta)P^{uv}(\theta, y)d\theta + \int_0^y k_2(\theta)P^{vv}(\theta, y)d\theta. \quad (\text{H.43b})$$

Finalement, les coefficients  $\bar{g}$ ,  $\bar{w}$ ,  $\bar{D}$  et  $\bar{R}_0$  vérifient

$$\bar{g}(x) = -g(x) + \int_x^1 K^{\alpha\alpha}(x, y)g(y)dy + \int_x^1 K^{\alpha\beta}(x, y)w(y)dy, \quad (\text{H.44a})$$

$$\bar{w}(x) = -w(x) + \int_x^1 K^{\beta\alpha}(x, y)g(y)dy + \int_x^1 K^{\beta\beta}(x, y)w(y)dy, \quad (\text{H.44b})$$

$$\bar{R}_0 = -R_0, \quad (\text{H.44c})$$

$$\bar{D} = -D + \bar{R}_0 w(0) + \int_0^1 k_1(y)g(y)dy + \int_0^1 k_2(y)w(y)dy. \quad (\text{H.44d})$$

Remarquons que les équations intégrales de Volterra de seconde espèce (H.42a) et (H.42b), satisfaites par  $K^{\alpha\alpha}$  et  $K^{\alpha\beta}$  sont couplées entre elles et sont indépendantes des noyaux  $K^{\beta\alpha}$  et  $K^{\beta\beta}$ . Ces équations appartiennent à la classe considérée dans l'annexe I. Également, les équations (H.42c) et (H.42d), satisfaites par  $K^{\beta\alpha}$  et  $K^{\beta\beta}$  sont indépendantes des noyaux  $K^{\alpha\alpha}$  et  $K^{\alpha\beta}$  et appartiennent à la classe traitée dans l'annexe I. Par suite, nous garantissons l'existence unique d'une solution  $K^{ij} \in C^1(\mathcal{T}_2; \mathbb{R})$ ,  $i, j \in \{\alpha, \beta\}$ . La norme de ces noyaux est majorée en appliquant directement l'équation (I.16).

Par ailleurs, la forme des équations (H.43) est traitée dans [Kress, 1999, Théorème 3.10]. Nous exposons l'énoncé de ce théorème comme suit.

**Théorème.** [Kress, 1999], Théorème 3.10. Soit l'équation satisfaite par  $\varphi$

$$\varphi(x) - \int_b^x K(x, y)\varphi(y)dy = f(x), \quad x \in [b, c]. \quad (\text{H.45})$$

Pour toute fonction  $f \in C^0([b, c]; \mathbb{R})$ , l'équation intégrale de Volterra de second espèce (H.45), avec un noyau  $K$  continu, a une solution unique  $\varphi \in C^0([b, c]; \mathbb{R})$ .

Avec une simple adaptation de ce théorème à la classe  $C^1([0, 1]; \mathbb{R})$  en dérivant (H.43) par rapport à  $y$  et en montrant que la dérivée satisfait la même forme d'équation considérée dans ce théorème, nous concluons qu'il existe une solution unique  $k_1, k_2 \in C^1([0, 1]; \mathbb{R})$ . Finalement les équations (H.44) garantissent l'existence des coefficients  $\bar{g}, \bar{w} \in C^1([0, 1]; \mathbb{R})$ ,  $\bar{R}_0 \in \mathbb{R}^n$  et  $\bar{D} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ .

La bornitude de l'opérateur de  $\Xi$  dans  $\Xi$  est garantie en suivant la même démarche utilisée pour démontrer la bornitude de  $H$ .

□



### H.3 Démonstration du lemme 10

*Démonstration.* Ce lemme est démontré par une procédure standard de backstepping (voir par exemple [Krstic and Smyshlyaev, 2008c]). Nous dérivons (4.33) par rapport au temps et à l'espace et substituons ensuite ces dérivées dans le système cible (en effectuant en plus des intégrations par parties quand nécessaire). Commençons par dériver (4.33a) par rapport à  $t$  et utilisons les équations du système de départ (4.6) pour obtenir

$$\begin{aligned} \alpha_t(t, x) &= -\lambda u_x(t, x) + \sigma^{++}u(t, x) + \sigma^{+-}v(t, x) \\ &\quad - \int_x^1 P^{uu}(x, y) \left[ -\lambda u_y(t, y) + \sigma^{++}u(t, y) + \sigma^{+-}v(t, y) \right] dy \\ &\quad - \int_x^1 P^{uv}(x, y) \left[ \lambda v_y(t, y) + \sigma^{-+}u(t, y) + \sigma^{--}v(t, y) \right] dy - g(x) [A_1 Y(t) + E_1 u(t, 1)]. \end{aligned} \quad (\text{H.46})$$

L'intégration par parties des termes  $\int_x^1 P^{uu}(x, y)u_y(t, y)dy$  et  $\int_x^1 P^{uv}(x, y)v_y(t, y)dy$  nous mène à

$$\begin{aligned} \alpha_t(t, x) &= -\lambda u_x(t, x) + \left[ \sigma^{++} - \lambda P^{uu}(x, x) \right] u(t, x) \\ &\quad + \left[ \sigma^{+-} + \lambda P^{uv}(x, x) \right] v(t, x) \\ &\quad + \left[ \lambda P^{uu}(x, 1) - g(x)E_1 - \lambda \rho P^{uv}(x, 1) \right] u(t, 1) - \left[ g(x)A_1 + \lambda P^{uv}(x, 1)C_1 \right] Y(t) \\ &\quad - \int_x^1 \left[ \lambda P_y^{uu}(x, y) + \sigma^{++}P^{uu}(x, y) + \sigma^{-+}P^{uv}(x, y) \right] u(t, y)dy \\ &\quad - \int_x^1 \left[ -\lambda P_y^{uv}(x, y) + \sigma^{+-}P^{uu}(x, y) + \sigma^{--}P^{uv}(x, y) \right] v(t, y)dy. \end{aligned} \quad (\text{H.47})$$

Dérivons (4.33a) par rapport à  $x$

$$\begin{aligned} \alpha_x(t, x) &= u_x(t, x) + P^{uu}(x, x)u(t, x) + P^{uv}(x, x)v(t, x) - g'(x)Y(t) \\ &\quad - \int_x^1 P_x^{uu}(x, y)u(t, y)dy - \int_x^1 P_x^{uv}(x, y)v(t, y)dy. \end{aligned} \quad (\text{H.48})$$

Substituons (H.47) et (H.48) dans l'EDP (4.9a). Celle-ci est vraie si les noyaux  $P^{uu}$  et  $P^{uv}$  satisfont les EDP (4.34a) et (4.34b) respectivement dans  $\mathcal{T}_2$  ainsi que les conditions aux bords (4.35a) et (4.35b) respectivement, et si  $g$  satisfait l'EDO (4.34e).

Passons à (4.33b) et dérivons-la par rapport à  $t$

$$\begin{aligned} \beta_t(t, x) &= \lambda v_x(t, x) + \sigma^{-+}u(t, x) + \sigma^{--}v(t, x) \\ &\quad - \int_x^1 P^{vu}(x, y) \left[ -\lambda u_y(t, y) + \sigma^{++}u(t, y) + \sigma^{+-}v(t, y) \right] dy \\ &\quad - \int_x^1 P^{vv}(x, y) \left[ \lambda v_y(t, y) + \sigma^{-+}u(t, y) + \sigma^{--}v(t, y) \right] dy - w(x) [A_1 Y(t) + E_1 u(t, 1)]. \end{aligned} \quad (\text{H.49})$$

L'intégration par parties des termes  $\int_x^1 P^{vu}(x, y)u_y(t, y)dy$  et  $\int_x^1 P^{vv}(x, y)v_y(t, y)dy$  donne

$$\begin{aligned} \beta_t(t, x) &= \lambda v_x(t, x) + \left[ \sigma^{-+} - \lambda P^{vu}(x, x) \right] u(t, x) + \left[ \sigma^{--} + \lambda P^{vv}(x, x) \right] v(t, x) \\ &\quad + \left[ \lambda P^{vu}(x, 1) - w(x)E_1 - \lambda \rho P^{vv}(x, 1) \right] u(t, 1) - \left[ w(x)A_1 + \lambda P^{vv}(x, 1)C_1 \right] Y(t) \\ &\quad - \int_x^1 \left[ \lambda P_y^{vu}(x, y) + \sigma^{++}P^{vu}(x, y) + \sigma^{-+}P^{vv}(x, y) \right] u(t, y)dy \\ &\quad - \int_x^1 \left[ -\lambda P_y^{vv}(x, y) + \sigma^{+-}P^{vu}(x, y) + \sigma^{--}P^{vv}(x, y) \right] v(t, y)dy. \end{aligned} \quad (\text{H.50})$$

Dérivons (4.33b) par rapport à  $x$

$$\begin{aligned} \beta_x(t, x) &= v_x(t, x) + P^{vu}(x, x)u(t, x) + P^{vv}(x, x)v(t, x) - w'(x)Y(t) \\ &\quad - \int_x^1 P_x^{vu}(x, y)u(t, y)dy - \int_x^1 P_x^{vv}(x, y)v(t, y)dy. \end{aligned} \quad (\text{H.51})$$

Substituons (H.50) et (H.51) dans l'EDP (4.9b). Celle-ci est vraie si les noyaux  $P^{vu}$  et  $P^{vv}$  satisfont les EDP (4.34c) et (4.34d) respectivement dans  $\mathcal{T}_2$  ainsi que les conditions aux bords (4.35c) et (4.35d) respectivement, et si  $w$  satisfait l'EDO (4.34f).

La dérivation de (4.33d) par rapport à  $t$  est exactement l'équation (4.6d). En substituant cette équation dans (4.9d) et en se servant de (4.33d) et (4.33a) après l'avoir évaluée en  $x = 1$ , nous obtenons

$$A_1Y(t) + E_1u(t, 1) = (A_1 + E_1F_1)Y(t) + E_1(u(t, 1) - g(1)Y(t)). \quad (\text{H.52})$$

L'EDO (4.9d) est vraie si  $g$  satisfait la condition initiale (4.35e).

Nous évaluons ensuite (4.33a) et (4.33b) au bord  $x = 1$  et les introduisons, avec (4.33d), dans (4.9f) pour avoir

$$v(t, 1) - w(1)Y(t) = \rho(u(t, 1) - g(1)Y(t)) + C_1Y(t). \quad (\text{H.53})$$

En tenant compte de la condition au bord (4.6f), la condition au bord (4.9f) est vraie si  $w$  satisfait la condition initiale (4.35f).

Évaluons (4.33a) en  $x = 0$  et injectons-la, avec (4.33c), dans (4.9e) pour obtenir

$$\begin{aligned} u(t, 0) &- \int_0^1 P^{uu}(0, y)u(t, y)dy - \int_0^1 P^{uv}(0, y)v(t, y)dy - g(0)Y(t) \\ &= C_0X(t) - C_0DY(t) - C_0R_0v(t, 0) - C_0 \int_0^1 p_1(y)u(t, y)dy - C_0 \int_0^1 p_2(y)v(t, y)dy. \end{aligned} \quad (\text{H.54})$$

En tenant compte de la condition au bord (4.6e), la condition au bord (4.9e) est vraie si les coefficients  $D$ ,  $R_0$ ,  $p_1$  et  $p_2$  satisfont les équations algébriques (4.36). Remarquons que nous pouvons toujours trouver une solution à ces équations en utilisant l'inverse à droite  $C_0^\dagger \doteq C_0^\top(C_0C_0^\top)^{-1}$ , qui est bien définie par l'hypothèse 2, comme suit

$$D = C_0^\dagger g(0) \quad (\text{H.55a})$$

$$R_0 = -C_0^\dagger q \quad (\text{H.55b})$$

$$p_1(y) = C_0^\dagger P^{11}(0, y) \quad (\text{H.55c})$$

$$p_2(y) = C_0^\dagger P^{12}(0, y). \quad (\text{H.55d})$$

Ce choix est adopté dans le reste de ce travail.

Finalement, dérivons (4.33c) par rapport au temps et utilisons (4.6)

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= A_0X(t) + E_0v(t, 0) + B_0U(t) - D(A_1Y(t) + E_1u(t, 1)) \\ &\quad - R_0v_t(t, 0) - \int_0^1 p_1(y) \left[ -\lambda u_y(t, y) + \sigma^{++}u(t, y) + \sigma^{+-}v(t, y) \right] dy \\ &\quad - \int_0^1 p_2(y) \left[ \lambda v_y(t, y) + \sigma^{-+}u(t, y) + \sigma^{--}v(t, y) \right] dy. \end{aligned} \quad (\text{H.56})$$

En intégrant par parties les termes  $\int_0^1 p_1(y)u_y(t, y)dy$  et  $\int_0^1 p_2(y)v_y(t, y)dy$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) = & [E_0 - \lambda q p_1(0) + \lambda p_2(0)] v(t, 0) - R_0 v_t(t, 0) \\ & + [-DE_1 + \lambda p_1(1) - \lambda \rho p_2(1)] u(t, 1) + [A_0 - \lambda p_1(0)C_0] X(t) \\ & - [DA_1 + \lambda p_2(1)C_1] Y(t) - \int_0^1 [\lambda p_1'(y) + \sigma^{++} p_1(y) + \sigma^{-+} p_2(y)] u(t, y) dy \\ & - \int_0^1 [-\lambda p_2'(y) + \sigma^{+-} p_1(y) + \sigma^{--} p_2(y)] v(t, y) dy + B_0 U(t). \end{aligned} \quad (\text{H.57})$$

En utilisant (4.33c), le membre de gauche de (4.9c) s'écrit

$$\begin{aligned} (A_0 + B_0 F_0) \xi(t) = & -(A_0 + B_0 F_0) R_0 v(t, 0) + (A_0 + B_0 F_0) X(t) - (A_0 + B_0 F_0) D Y(t) \\ & - \int_0^1 (A_0 + B_0 F_0) p_1(y) u(t, y) - \int_0^1 (A_0 + B_0 F_0) p_2(y) v(t, y). \end{aligned} \quad (\text{H.58})$$

Ainsi, la loi de commande synthétisée dans (4.37), avec les coefficients définis dans (4.38), garantit la validité de l'EDO (4.9c).  $\square$

## H.4 Démonstration du lemme 11

*Démonstration.* Nous démontrons le caractère bien-posé des équations des noyaux (4.34)-(4.35), et que la solution satisfait la régularité imposée par le lemme 9, i.e.  $P^{ij} \in C^1(\mathcal{T}_2; \mathbb{R})$  pour  $i, j \in \{\alpha, \beta\}$ ,  $g, w \in C^1([0, 1]; \mathbb{R}^m)$  et  $p_1, p_2 \in C^1([0, 1]; \mathbb{R}^n)$ . La difficulté découle du couplage à l'intérieur du domaine, ainsi que des conditions aux bords. Pour clarifier notre idée, nous remarquons que les noyaux  $P^{uu}$  et  $P^{uv}$  vérifient deux EDP hyperboliques couplées entre elles, avec des conditions aux bords couplées à une dynamique EDO vérifiée par  $g$ . Il est intéressant de noter que ces dynamiques (décrites par (4.34a), (4.34b) et (4.34e) avec les conditions aux bords (4.35a), (4.35b) et (4.35e)) sont indépendantes des noyaux  $P^{vu}$ ,  $P^{vv}$  et  $w$ . Ces derniers vérifient eux-même une dynamique similaire (deux EDP couplées entre elles dans le domaine et à une EDO au bord).

Nous considérons un changement de variable adéquat et nous réécrivons les équations (4.34a), (4.34b) et (4.34e) sous la forme abordée dans [Di Meglio et al., 2018, Théorème 3.2]. Ce théorème est appliqué car ces équations vérifient les hypothèses qu'il exige. Nous exposons maintenant l'énoncé de ce théorème.

**Théorème.** [Di Meglio et al., 2018], Théorème 3.2. *Considérons le système*

$$\varepsilon_i(x) \partial_x F_i(x, y) + \nu_i(y) \partial_y F_i(x, y) = \Sigma_i(x, y) F(x, y) \quad (\text{H.59})$$

où  $F = (F_1 \cdots F_n)^\top$ . Chaque  $F_i$  est inconnue et satisfait des conditions dans un sous-ensemble  $\Omega_i \in \partial \mathcal{T}_1$  de la forme suivante

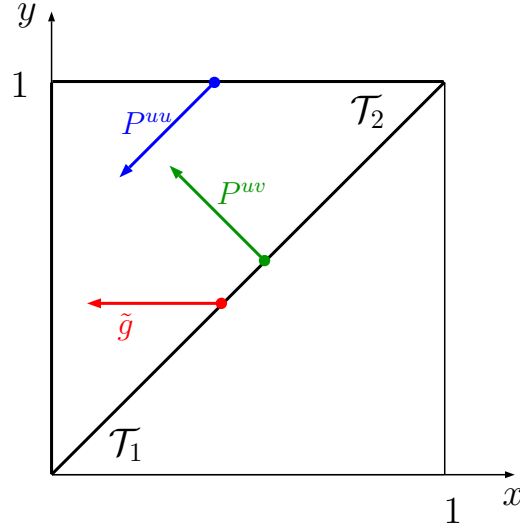
$$\forall i = 1, \dots, n \quad F_i|_{\Omega_i} = f_i + \sum_{j=1}^n \Gamma_{ij}(\cdot) F_j|_{\Omega_i} \quad (\text{H.60})$$

où  $f_i$  et  $\Gamma_{ij}$  sont définies sur  $\Omega_i$ . Supposons que

- le système découplé, obtenu en prenant  $\Sigma_i(x, y) = 0$  dans (H.59) et  $\Gamma_{ij} = 0, \forall i, j$  dans (H.60) est bien-posé,
- il existe  $\bar{a} > 1$  tel que, pour tout  $i = 1, \dots, n$ , les inégalités suivantes sont vraies

$$\forall (x, y) \in \mathcal{T}_1 \quad \bar{a} \varepsilon_i(x) - \nu_i(y) > \delta > 0 \quad (\text{H.61})$$

- le graphe représentant le couplage aux bords entre les noyaux est acyclique, i.e. il ne contient aucun cycle.

FIGURE H.3 – Lignes caractéristiques associées à  $P^{uu}$ ,  $P^{uv}$  et  $\tilde{g}$  dans  $\mathcal{T}_2$ .

Alors il existe une solution unique  $F \in L^\infty(\mathcal{T}_1; \mathbb{R})$ .

Nous commençons à réécrire l'EDO vérifiée par  $g$  dans (4.34e) sous une forme EDP, comme établi dans [Di Meglio et al., 2018], en définissant

$$\tilde{g}(x, y) \doteq \mathbb{1}_{\{y=1\}}(x, y)g(x), \quad (\text{H.62})$$

où  $\tilde{g}$  satisfait

$$\lambda \tilde{g}_x(x, y) = \mathbb{1}_{\{y=1\}}(x, y) \left[ \tilde{g}(x, y) \left[ \sigma^{++} \mathbb{I}_m - A_1 \right] - \lambda P^{12}(x, y) C_1 \right] \quad (\text{H.63})$$

pour  $(x, y) \in \mathcal{T}_2$ , avec la condition au bord

$$\tilde{g}(x, x) = \mathbb{1}_{\{y=1\}}(x, x)F_1. \quad (\text{H.64})$$

Les lignes caractéristiques correspondant aux noyaux  $P^{uu}$ ,  $P^{uv}$  et  $\tilde{g}$  et partant des bords où ces noyaux sont définis sont montrées sur la figure H.3.

Nous considérons le changement de variables

$$\bar{x} = 1 - x, \quad (\text{H.65a})$$

$$\bar{y} = 1 - y, \quad (\text{H.65b})$$

et

$$S^{uu}(\bar{x}, \bar{y}) = P^{uu}(x, y), \quad (\text{H.66a})$$

$$S^{uv}(\bar{x}, \bar{y}) = P^{uv}(x, y), \quad (\text{H.66b})$$

$$\tilde{h}(\bar{x}, \bar{y}) = \tilde{g}(x, y). \quad (\text{H.66c})$$

$S^{uu}$ ,  $S^{uv}$  et  $\tilde{h}$  sont définis dans le domaine  $\mathcal{T}_1 = \{0 \leq \bar{y} \leq \bar{x} \leq 1\}$ . Afin d'établir les EDP satisfaites par  $S^{uu}$ ,  $S^{uv}$  et  $\tilde{h}$ , nous effectuons des dérivées partielles de (H.66a) et (H.66b) par rapport à  $\bar{x}$  et  $\bar{y}$ . Nous dérivons ensuite (H.66c) par rapport à  $\bar{x}$ . En nous appuyant sur les EDP (4.34a), (4.34b) et (H.63) et sur les conditions aux bords (4.35a), (4.35b) et (H.64), nous trouvons que  $S^{uu}$ ,  $S^{uv}$  et  $\tilde{h}$  vérifient les EDP couplées suivantes

$$S_{\bar{x}}^{uu}(\bar{x}, \bar{y}) + S_{\bar{y}}^{uu}(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{\sigma^{-+}}{\lambda} S^{uv}(\bar{x}, \bar{y}) \quad (\text{H.67a})$$

$$S_{\bar{x}}^{uv}(\bar{x}, \bar{y}) - S_{\bar{y}}^{uv}(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{\sigma^{--} - \sigma^{++}}{\lambda} S^{uv}(\bar{x}, \bar{y}) + \frac{\sigma^{+-}}{\lambda} S^{uu}(\bar{x}, \bar{y}) \quad (\text{H.67b})$$

$$\lambda \tilde{h}_{\bar{x}}(\bar{x}, \bar{y}) = \mathbb{1}_{\{\bar{y}=0\}}(\bar{x}, \bar{y}) \left[ \tilde{h}(\bar{x}, \bar{y}) \left[ -\sigma^{++} I_m + A_1 \right] + \lambda S^{uv}(\bar{x}, \bar{y}) C_1 \right], \quad (\text{H.67c})$$

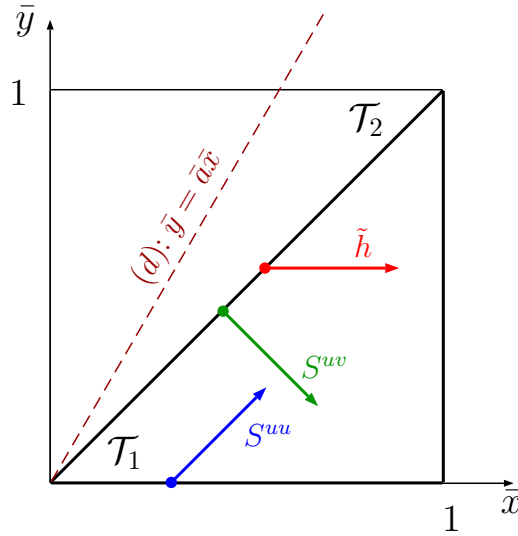


FIGURE H.4 – Lignes caractéristiques associées à  $S^{uu}$ ,  $S^{uv}$  et  $\tilde{h}$  dans  $\mathcal{T}_2$ .

avec les conditions aux bords

$$S^{uu}(\bar{x}, 0) = R_1 S^{uv}(\bar{x}, 0) + \frac{1}{\lambda} \tilde{h}(\bar{x}, \bar{y}) E_1 \quad (\text{H.68a})$$

$$S^{uv}(\bar{x}, \bar{x}) = -\frac{\sigma^{+-}}{2\lambda} \quad (\text{H.68b})$$

$$\tilde{h}(\bar{x}, \bar{x}) = \mathbb{1}_{\{\bar{y}=0\}}(\bar{x}, \bar{x}) F_1. \quad (\text{H.68c})$$

Les lignes caractéristiques de  $S^{uu}$ ,  $S^{uv}$  et  $\tilde{h}$  émanant des conditions aux bords où ces noyaux sont définis sont illustrées sur la figure H.4. Les variables  $S^{uu}$ ,  $S^{uv}$  et  $\tilde{h}$  telles qu'elles sont décrites dans (H.67)-(H.68) vérifient les hypothèses suivantes requises par [Di Meglio et al., 2018, Théorème 3.2] :

- (i) le système découplé (à l'intérieur du domaine et aux bords) est bien-posé,
- (ii) il existe une ligne  $(d)$ :  $\bar{y} = \bar{a}\bar{x}$  (montrée sur la figure H.4) telle que toutes les lignes caractéristiques, orientées en partant des conditions aux bords où les noyaux sont définis, s'éloignent de  $(d)$ ,
- (iii) le graphe représentant les couplages aux bords entre les noyaux  $S^{uu}$ ,  $S^{uv}$  et  $\tilde{h}$  et défini sur les bords du domaine triangulaire  $\mathcal{T}_1$  est acyclique. Ce graphe est bien acyclique puisqu'en examinant les conditions aux bords (H.68),  $S^{uu}(\bar{x}, 0)$  dépend de  $S^{uv}(\bar{x}, 0)$  et de  $\tilde{h}(\bar{x}, \bar{y})$ . Par contre, les conditions aux bords  $S^{uv}(\bar{x}, \bar{x})$  et  $\tilde{h}(\bar{x}, \bar{x})$  sont constantes et ne dépendent pas des valeurs des noyaux considérés.

En appliquant [Di Meglio et al., 2018, Théorème 3.2] avec une adaptation à la classe  $C^0(\mathcal{T}_1; \mathbb{R})$  en utilisant la norme *sup* et en ayant les coefficients dans les conditions aux bords (H.68) continus, nous trouvons que  $S^{uu}$  et  $S^{uv}$  sont dans  $C^0(\mathcal{T}_1; \mathbb{R})$  et  $\tilde{h}(\cdot, 0)$  est dans  $C^0([0, 1]; \mathbb{R})$ . Nous déduisons de l'expression de  $\tilde{h}_{\bar{x}}$  dans (H.67c) que  $\tilde{h}(\cdot, 0) \in C^1([0, 1]; \mathbb{R})$ . Dans le but de démontrer que  $S^{uu}$  et  $S^{uv}$  sont en fait dans  $C^1(\mathcal{T}_1; \mathbb{R})$ , nous cherchons les équations intégrales satisfaites par ces noyaux à travers la méthode des caractéristiques, nous dérivons ensuite ces équations par rapport à  $\bar{x}$  et à  $\bar{y}$ , et prouvons que ces dérivées satisfont des équations intégrales dans la classe considérée dans la preuve [Di Meglio et al., 2018, Théorème 3.2] et par suite, que ces dérivées sont elles-mêmes dans  $C^0(\mathcal{T}_1; \mathbb{R})$ .

En appliquant la méthode des caractéristiques et en intégrant le long des lignes caractéristiques représentées sur la figure H.4 en partant des bords où ces noyaux sont définis, nous

obtenons la solution des EDP (H.67) suivante

$$S^{uu}(\bar{x}, \bar{y}) = \rho S^{uv}(\bar{x} - \bar{y}, 0) + \frac{1}{\lambda} \tilde{h}(\bar{x} - \bar{y}, 0) E_1 + \frac{\sigma^{-+}}{\lambda} \int_0^{\bar{y}} S^{uv}(\theta + \bar{x} - \bar{y}, \theta) d\theta, \quad (\text{H.69a})$$

$$S^{uv}(\bar{x}, \bar{y}) = -\frac{\sigma^{+-}}{2\lambda} + \frac{\sigma^{--} - \sigma^{++}}{\lambda} \int_0^{\frac{\bar{x}-\bar{y}}{2}} S^{uv}\left(\theta + \frac{\bar{x} + \bar{y}}{2}, -\theta + \frac{\bar{x} + \bar{y}}{2}\right) d\theta \\ + \frac{\sigma^{+-}}{\lambda} \int_0^{\frac{\bar{x}-\bar{y}}{2}} S^{uu}\left(\theta + \frac{\bar{x} + \bar{y}}{2}, -\theta + \frac{\bar{x} + \bar{y}}{2}\right) d\theta, \quad (\text{H.69b})$$

$$\tilde{h}(\bar{x}, \bar{y}) = \mathbb{1}_{\{\bar{y}=0\}}(\bar{y}, \bar{y}) F_1 \\ + \int_0^{\bar{x}-\bar{y}} \mathbb{1}_{\{\bar{y}=0\}}(\bar{x}, \bar{x}) \left[ \frac{1}{\lambda} \tilde{h}(\theta + \bar{y}, \bar{y}) (-\sigma^{++} \mathbb{I}_m + A_1) \right] d\theta \\ + \int_0^{\bar{x}-\bar{y}} \mathbb{1}_{\{\bar{y}=0\}}(\bar{x}, \bar{x}) S^{uv}(\theta + \bar{y}, \bar{y}) C_1 d\theta. \quad (\text{H.69c})$$

En évaluant (H.69b) et (H.69c) en  $\bar{x} := \bar{x} - \bar{y}$  et  $\bar{y} := 0$  et en l'injectant dans (H.69a) nous avons

$$S^{uu}(\bar{x}, \bar{y}) = -\rho \frac{\sigma^{+-}}{2\lambda} + \frac{1}{\lambda} F_1 E_1 + \rho \frac{\sigma^{+-}}{\lambda} \int_0^{\frac{\bar{x}-\bar{y}}{2}} S^{uu}\left(\theta + \frac{\bar{x} - \bar{y}}{2}, -\theta + \frac{\bar{x} - \bar{y}}{2}\right) d\theta \\ + \rho \frac{\sigma^{--} - \sigma^{++}}{\lambda} \int_0^{\frac{\bar{x}-\bar{y}}{2}} S^{uv}\left(\theta + \frac{\bar{x} - \bar{y}}{2}, -\theta + \frac{\bar{x} - \bar{y}}{2}\right) d\theta + \frac{1}{\lambda} \int_0^{\bar{x}-\bar{y}} S^{uv}(\theta, 0) C_1 E_1 d\theta \\ + \frac{\sigma^{-+}}{\lambda} \int_0^{\bar{y}} S^{uv}(\theta + \bar{x} - \bar{y}, \theta) d\theta + \frac{1}{\lambda^2} \int_0^{\bar{x}-\bar{y}} \tilde{h}(\theta, 0) (-\sigma^{++} \mathbb{I}_m + A_1) E_1 d\theta. \quad (\text{H.70})$$

Dérivons (H.70) par rapport à  $\bar{x}$

$$S_{\bar{x}}^{uu}(\bar{x}, \bar{y}) = \rho \frac{\sigma^{+-}}{2\lambda} S^{uu}(\bar{x} - \bar{y}, 0) \\ + \rho \frac{\sigma^{+-}}{\lambda} \int_0^{\frac{\bar{x}-\bar{y}}{2}} \left[ S_{\bar{x}}^{uu}\left(\theta + \frac{\bar{x} - \bar{y}}{2}, -\theta + \frac{\bar{x} - \bar{y}}{2}\right) + S_{\bar{y}}^{uu}\left(\theta + \frac{\bar{x} - \bar{y}}{2}, -\theta + \frac{\bar{x} - \bar{y}}{2}\right) \right] d\theta \\ + \rho \frac{\sigma^{--} - \sigma^{++}}{2\lambda} S^{uv}(\bar{x} - \bar{y}, 0) + \rho \frac{\sigma^{--} - \sigma^{++}}{2\lambda} \int_0^{\frac{\bar{x}-\bar{y}}{2}} \left[ S_{\bar{x}}^{uv}\left(\theta + \frac{\bar{x} - \bar{y}}{2}, -\theta + \frac{\bar{x} - \bar{y}}{2}\right) \right. \\ \left. + S_{\bar{y}}^{uv}\left(\theta + \frac{\bar{x} - \bar{y}}{2}, -\theta + \frac{\bar{x} - \bar{y}}{2}\right) \right] d\theta + \frac{1}{\lambda} S^{uv}(\bar{x} - \bar{y}, 0) C_1 E_1 \\ + \frac{\sigma^{-+}}{\lambda} \int_0^{\bar{y}} S_{\bar{x}}^{uv}(\theta + \bar{x} - \bar{y}, \theta) d\theta + \frac{1}{\lambda^2} \tilde{h}(\bar{x} - \bar{y}, 0) (-\sigma^{++} \mathbb{I}_m + A_1) E_1. \quad (\text{H.71})$$

En utilisant (H.67a), nous pouvons exprimer  $S_{\bar{y}}^{uu}$  en fonction de  $S_{\bar{x}}^{uu}$  et  $S^{uv}$  comme suit

$$S_{\bar{y}}^{uu}\left(\theta + \frac{\bar{x} - \bar{y}}{2}, -\theta + \frac{\bar{x} - \bar{y}}{2}\right) = -S_{\bar{x}}^{uu}\left(\theta + \frac{\bar{x} - \bar{y}}{2}, -\theta + \frac{\bar{x} - \bar{y}}{2}\right) \\ + \frac{\sigma^{-+}}{\lambda} S^{uv}\left(\theta + \frac{\bar{x} - \bar{y}}{2}, -\theta + \frac{\bar{x} - \bar{y}}{2}\right). \quad (\text{H.72})$$

Nous pouvons également exprimer  $S_{\bar{y}}^{uv}$  en fonction de  $S_{\bar{x}}^{uv}$ ,  $S^{uv}$  et  $S^{uu}$  en utilisant (H.67b) comme suit

$$S_{\bar{y}}^{uv}\left(\theta + \frac{\bar{x} - \bar{y}}{2}, -\theta + \frac{\bar{x} - \bar{y}}{2}\right) = S_{\bar{x}}^{uv}\left(\theta + \frac{\bar{x} - \bar{y}}{2}, -\theta + \frac{\bar{x} - \bar{y}}{2}\right) \\ - \frac{\sigma^{--} - \sigma^{++}}{\lambda} S^{uv}\left(\theta + \frac{\bar{x} - \bar{y}}{2}, -\theta + \frac{\bar{x} - \bar{y}}{2}\right) \\ - \frac{\sigma^{+-}}{\lambda} S^{uu}\left(\theta + \frac{\bar{x} - \bar{y}}{2}, -\theta + \frac{\bar{x} - \bar{y}}{2}\right). \quad (\text{H.73})$$

En introduisant (H.72) et (H.73) dans (H.71), nous aboutissons à

$$S_{\bar{x}}^{uu}(\bar{x}, \bar{y}) = M^{11}(\bar{x}, \bar{y}) + \rho \frac{\sigma^{--} - \sigma^{++}}{\lambda} \int_0^{\frac{\bar{x}-\bar{y}}{2}} S_{\bar{x}}^{uv} \left( \theta + \frac{\bar{x}-\bar{y}}{2}, -\theta + \frac{\bar{x}-\bar{y}}{2} \right) d\theta \quad (\text{H.74})$$

$$+ \frac{\sigma^{-+}}{\lambda} \int_0^{\bar{y}} S_{\bar{x}}^{uv}(\theta + \bar{x} - \bar{y}, \theta) d\theta,$$

avec

$$M^{11}(\bar{x}, \bar{y}) \doteq \rho \frac{\sigma^{+-}}{2\lambda} S^{uu}(\bar{x} - \bar{y}, 0) + \rho \frac{\sigma^{--} - \sigma^{++}}{2\lambda} S^{uv}(\bar{x} - \bar{y}, 0)$$

$$+ \frac{1}{\lambda} S^{uv}(\bar{x} - \bar{y}, 0) C_1 E_1 + \frac{1}{\lambda^2} \tilde{h}(\bar{x} - \bar{y}, 0) (-\sigma^{++} \mathbb{I}_m + A_1) E_1$$

$$- \rho \sigma^{+-} \frac{\sigma^{--} - \sigma^{++}}{2\lambda^2} \int_0^{\frac{\bar{x}-\bar{y}}{2}} S^{uu} \left( \theta + \frac{\bar{x}-\bar{y}}{2}, -\theta + \frac{\bar{x}-\bar{y}}{2} \right) d\theta$$

$$+ \frac{\rho}{2\lambda^2} [\sigma^{+-} \sigma^{-+} - (\sigma^{--} - \sigma^{++})^2] \int_0^{\frac{\bar{x}-\bar{y}}{2}} S^{uv} \left( \theta + \frac{\bar{x}-\bar{y}}{2}, -\theta + \frac{\bar{x}-\bar{y}}{2} \right) d\theta. \quad (\text{H.75})$$

Dérivons (H.69b) par rapport à  $\bar{x}$

$$S_{\bar{x}}^{uv}(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{\sigma^{--} - \sigma^{++}}{2\lambda} S^{uv}(\bar{x}, \bar{y}) + \frac{\sigma^{--} - \sigma^{++}}{2\lambda} \int_0^{\frac{\bar{x}-\bar{y}}{2}} \left[ S_{\bar{x}}^{uv} \left( \theta + \frac{\bar{x}+\bar{y}}{2}, -\theta + \frac{\bar{x}+\bar{y}}{2} \right) \right.$$

$$\left. + S_{\bar{y}}^{uv} \left( \theta + \frac{\bar{x}+\bar{y}}{2}, -\theta + \frac{\bar{x}+\bar{y}}{2} \right) \right] d\theta + \frac{\sigma^{+-}}{\lambda} S^{uu}(\bar{x}, \bar{y})$$

$$+ \frac{\sigma^{+-}}{2\lambda} \int_0^{\frac{\bar{x}-\bar{y}}{2}} \left[ S_{\bar{x}}^{uu} \left( \theta + \frac{\bar{x}+\bar{y}}{2}, -\theta + \frac{\bar{x}+\bar{y}}{2} \right) + S_{\bar{y}}^{uu} \left( \theta + \frac{\bar{x}+\bar{y}}{2}, -\theta + \frac{\bar{x}+\bar{y}}{2} \right) \right] d\theta. \quad (\text{H.76})$$

En substituant (H.72) et (H.73) dans (H.76), nous obtenons

$$S_{\bar{x}}^{uv}(\bar{x}, \bar{y}) = M^{12}(\bar{x}, \bar{y}) + \frac{\sigma^{--} - \sigma^{++}}{\lambda} \int_0^{\frac{\bar{x}-\bar{y}}{2}} S_{\bar{x}}^{uv} \left( \theta + \frac{\bar{x}+\bar{y}}{2}, -\theta + \frac{\bar{x}+\bar{y}}{2} \right) d\theta, \quad (\text{H.77})$$

avec

$$M^{12}(\bar{x}, \bar{y}) \doteq \frac{\sigma^{--} - \sigma^{++}}{2\lambda} S^{uv}(\bar{x}, \bar{y}) + \frac{\sigma^{+-}}{\lambda} S^{uu}(\bar{x}, \bar{y})$$

$$- \sigma^{+-} \frac{\sigma^{--} - \sigma^{++}}{2\lambda^2} \int_0^{\frac{\bar{x}-\bar{y}}{2}} S^{uu} \left( \theta + \frac{\bar{x}+\bar{y}}{2}, -\theta + \frac{\bar{x}+\bar{y}}{2} \right) d\theta$$

$$+ \frac{1}{2\lambda^2} [\sigma^{+-} \sigma^{-+} - (\sigma^{--} - \sigma^{++})^2] \int_0^{\frac{\bar{x}-\bar{y}}{2}} S^{uv} \left( \theta + \frac{\bar{x}+\bar{y}}{2}, -\theta + \frac{\bar{x}+\bar{y}}{2} \right) d\theta. \quad (\text{H.78})$$

Afin d'obtenir les équations intégrales satisfaites par  $S_{\bar{y}}^{uu}$  et  $S_{\bar{y}}^{uv}$ , nous dérivons d'abord (H.70) puis (H.69b) par rapport à  $\bar{y}$ . En utilisant (H.72) nous obtenons

$$S_{\bar{y}}^{uu}(\bar{x}, \bar{y}) = M^{21}(\bar{x}, \bar{y}) - \rho \frac{\sigma^{--} - \sigma^{++}}{2\lambda} \int_0^{\frac{\bar{x}-\bar{y}}{2}} S_{\bar{y}}^{uv} \left( \theta + \frac{\bar{x}-\bar{y}}{2}, -\theta + \frac{\bar{x}-\bar{y}}{2} \right) d\theta, \quad (\text{H.79})$$

avec

$$\begin{aligned}
M^{21}(\bar{x}, \bar{y}) &\doteq -\rho \frac{\sigma^{+-}}{2\lambda} S^{uu}(\bar{x} - \bar{y}, 0) - \rho \frac{\sigma^{--} - \sigma^{++}}{2\lambda} S^{uv}(\bar{x} - \bar{y}, 0) - \frac{1}{\lambda} S^{uv}(\bar{x} - \bar{y}, 0) C_1 E_1 \\
&\quad + \frac{\sigma^{-+}}{\lambda} S^{uv}(\bar{x}, \bar{y}) - \frac{1}{\lambda^2} \tilde{h}(\bar{x} - \bar{y}, 0) (-\sigma^{++} \mathbb{I}_m + A_1) E_1 \\
&\quad - \rho \frac{\sigma^{+-} - \sigma^{-+}}{2\lambda^2} \int_0^{\frac{\bar{x}-\bar{y}}{2}} S^{uv} \left( \theta + \frac{\bar{x} - \bar{y}}{2}, -\theta + \frac{\bar{x} - \bar{y}}{2} \right) d\theta \\
&\quad - \rho \frac{\sigma^{--} - \sigma^{++}}{2\lambda} \int_0^{\frac{\bar{x}-\bar{y}}{2}} S_{\bar{x}}^{uv} \left( \theta + \frac{\bar{x} - \bar{y}}{2}, -\theta + \frac{\bar{x} - \bar{y}}{2} \right) d\theta \\
&\quad - \frac{\sigma^{-+}}{\lambda} \int_0^{\bar{y}} S_{\bar{x}}^{uv}(\theta + \bar{x} - \bar{y}, \theta) d\theta.
\end{aligned} \tag{H.80}$$

Finalement, en dérivant (H.69b) par rapport à  $\bar{y}$  et en utilisant (H.72), nous obtenons

$$S_{\bar{y}}^{uv}(\bar{x}, \bar{y}) = M^{22}(\bar{x}, \bar{y}) + \frac{\sigma^{--} - \sigma^{++}}{2\lambda} \int_0^{\frac{\bar{x}-\bar{y}}{2}} S_{\bar{y}}^{uv} \left( \theta + \frac{\bar{x} + \bar{y}}{2}, -\theta + \frac{\bar{x} + \bar{y}}{2} \right) d\theta, \tag{H.81}$$

avec

$$\begin{aligned}
M^{22}(\bar{x}, \bar{y}) &\doteq -\frac{\sigma^{--} - \sigma^{++}}{2\lambda} S^{uv}(\bar{x}, \bar{y}) - \frac{\sigma^{+-}}{2\lambda} S^{uu}(\bar{x}, \bar{y}) \\
&\quad + \frac{\sigma^{+-} - \sigma^{-+}}{2\lambda^2} \int_0^{\frac{\bar{x}-\bar{y}}{2}} S^{uv} \left( \theta + \frac{\bar{x} + \bar{y}}{2}, -\theta + \frac{\bar{x} + \bar{y}}{2} \right) d\theta \\
&\quad + \frac{\sigma^{--} - \sigma^{++}}{2\lambda} \int_0^{\frac{\bar{x}-\bar{y}}{2}} S_{\bar{x}}^{uv} \left( \theta + \frac{\bar{x} + \bar{y}}{2}, -\theta + \frac{\bar{x} + \bar{y}}{2} \right) d\theta.
\end{aligned} \tag{H.82}$$

Les équations intégrales couplées (H.74) et (H.77) appartiennent à la classe des équations obtenues dans la preuve de [Di Meglio et al., 2018, Théorème 3.2]. Il en est de même pour (H.79) et (H.81). Nous déduisons que  $S_{\bar{x}}^{uu}$ ,  $S_{\bar{x}}^{uv}$ ,  $S_{\bar{y}}^{uu}$  et  $S_{\bar{y}}^{uv} \in C^0(\mathcal{T}_1; \mathbb{R})$ . Par suite,  $S^{uu}$  et  $S^{uv} \in C^1(\mathcal{T}_1; \mathbb{R})$ , ce qui entraîne que  $P^{uu}$  et  $P^{uv} \in C^1(\mathcal{T}_2; \mathbb{R})$  et  $g \in C^1([0, 1]; \mathbb{R})$ . Avec une démarche analogue à celle présentée dans cette preuve, nous trouvons que  $P^{vu}$  et  $P^{vv} \in C^1(\mathcal{T}_2; \mathbb{R})$  et  $w \in C^1([0, 1]; \mathbb{R})$ . □





## Annexe I.

# Caractère bien-posé de deux équations intégrales de Volterra couplées

Dans cette annexe, nous démontrons le caractère bien-posé de deux équations de Volterra de seconde espèce couplées. Nous nous appuyons sur le théorème du point fixe dans un espace de Banach [Almezal et al., 2016, Théorème 2.4]. L'énoncé de ce théorème est le suivant.

**Théorème.** [Almezal et al., 2016], Théorème 2.4. Soit  $(\mathcal{X}, d)$  un espace métrique complet et soit  $\mathcal{Z}: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$  une application telle que  $\mathcal{Z}^n$  est strictement contractante sur  $\mathcal{X}$  pour un entier positif  $n$ . Alors  $\mathcal{Z}$  admet un point fixe unique.

Nous rappelons qu'un opérateur  $\mathcal{Z}: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$  est strictement contractant s'il existe une constante positive  $\varepsilon < 1$  telle que

$$d(\mathcal{Z}[f], \mathcal{Z}[\tilde{f}]) \leq \varepsilon d(f, \tilde{f}), \quad \forall f, \tilde{f} \in \mathcal{X}. \quad (\text{I.1})$$

Le résultat présenté dans cette annexe est appliqué aux équations intégrales (D.13) et (H.42). Nous considérons d'abord le domaine  $\mathcal{T}_2 \doteq \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]; y \geq x\}$ . Nous définissons l'espace fonctionnel  $\bar{\Phi} \doteq C^1(\mathcal{T}_2; \mathbb{R})$  muni de la norme

$$\|\varphi\|_{\bar{\Phi}} \doteq \sup_{(x,y) \in \mathcal{T}_2} |\varphi(x, y)| + \sup_{(x,y) \in \mathcal{T}_2} |\varphi_x(x, y)| + \sup_{(x,y) \in \mathcal{T}_2} |\varphi_y(x, y)|, \quad \forall \varphi \in \bar{\Phi}. \quad (\text{I.2})$$

Nous définissons de même l'espace  $\Phi \doteq \bar{\Phi} \times \bar{\Phi}$ , avec la norme associée

$$\|f\|_{\Phi} \doteq \max\{\|f_1\|_{\bar{\Phi}}, \|f_2\|_{\bar{\Phi}}\}, \quad \forall f \doteq (f_1, f_2) \in \Phi. \quad (\text{I.3})$$

Nous pouvons constater que  $(\Phi, \|\cdot\|_{\Phi})$  est un espace de Banach.

Nous considérons ensuite les fonctions  $Q^{11}$ ,  $Q^{12}$ ,  $Q^{21}$  et  $Q^{22} \in \bar{\Phi}$ , avec  $\bar{Q} \doteq \max\{\|Q^{11}\|_{\bar{\Phi}}, \|Q^{12}\|_{\bar{\Phi}}, \|Q^{21}\|_{\bar{\Phi}}, \|Q^{22}\|_{\bar{\Phi}}\}$ . Les fonctions  $K^1(x, y)$  et  $K^2(x, y)$  vérifient les équations intégrales de Volterra de seconde espèce suivantes

$$K^1(x, y) = K_0^1(x, y) + \int_x^y K^1(x, \theta) Q^{11}(\theta, y) d\theta + \int_x^y K^2(x, \theta) Q^{21}(\theta, y) d\theta \quad (\text{I.4a})$$

$$K^2(x, y) = K_0^2(x, y) + \int_x^y K^1(x, \theta) Q^{12}(\theta, y) d\theta + \int_x^y K^2(x, \theta) Q^{22}(\theta, y) d\theta \quad (\text{I.4b})$$

pour tout  $(x, y) \in \mathcal{T}_2$ . Nous signalons que dans [Kress, 1999, Théorème 3.10], le caractère bien-posé de deux équations de Volterra a été démontré, les fonctions dans ce théorème comprennent un seul argument. Dans cette annexe, nous effectuons une modification sur la preuve de ce théorème en vue de démontrer que les équations (I.4a) et (I.4b) sont bien-posées dans  $\bar{\Phi}$ .

Nous introduisons l'opérateur  $Z: \Phi \rightarrow \Phi$  associé à (I.4), défini comme suit

$$\begin{aligned} Z[K](x, y) &\doteq K_0(x, y) + \mathcal{Q}[K](x, y) \\ &\doteq \begin{bmatrix} K_0^1(x, y) \\ K_0^2(x, y) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathcal{Q}^{11} & \mathcal{Q}^{21} \\ \mathcal{Q}^{12} & \mathcal{Q}^{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K^1 \\ K^2 \end{bmatrix}(x, y), \end{aligned} \quad (\text{I.5})$$

pour  $K_0 \doteq \begin{bmatrix} K_0^1 \\ K_0^2 \end{bmatrix} \in \Phi$  et avec  $K(x, y) \doteq \begin{bmatrix} K^1(x, y) \\ K^2(x, y) \end{bmatrix}$ . Les opérateurs linéaires  $\mathcal{Q}^{ij}: \bar{\Phi} \rightarrow \bar{\Phi}$  sont définis par

$$\mathcal{Q}^{ij}[K^l](x, y) \doteq \int_x^y K^l(x, \theta) Q^{ij}(\theta, y) d\theta, \quad (\text{I.6})$$

pour  $i, j, l \in \{1, 2\}$ . Remarquons qu'en utilisant l'opérateur  $Z$ , (I.4) s'écrit

$$Z[K](x, y) = K(x, y). \quad (\text{I.7})$$

L'équation (I.7) admet une solution unique dans l'espace de Banach  $\Phi$  si et seulement si l'opérateur  $Z$  admet un point fixe unique dans cet espace pour tout  $Z_0 \in \Phi$ . En vue d'appliquer [Almezal et al., 2016, Théorème 2.4], nous cherchons à démontrer qu'il existe un  $\bar{n} \in \mathbb{N}$  tel que  $Z^{\bar{n}}$  est strictement contractant, i.e. il existe  $\varepsilon \in [0, 1)$  tel que

$$\| Z^{\bar{n}}[f] - Z^{\bar{n}}[\tilde{f}] \|_{\Phi} \leq \varepsilon \| f - \tilde{f} \|_{\Phi}, \quad \forall f, \tilde{f} \in \Phi. \quad (\text{I.8})$$

Notons qu'en vertu de la linéarité de  $\mathcal{Q}$ , nous avons pour tout  $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} Z^n[f] - Z^n[\tilde{f}] &= Z[Z^{n-1}f] - Z[Z^{n-1}\tilde{f}] \\ &= \mathcal{Q}[Z^{n-1}f] - \mathcal{Q}[Z^{n-1}\tilde{f}] \\ &= \mathcal{Q}[Z^{n-1}f - Z^{n-1}\tilde{f}] \\ &= \mathcal{Q}^n[f - \tilde{f}], \quad \forall f, \tilde{f} \in \Phi. \end{aligned} \quad (\text{I.9})$$

Afin de démontrer (I.8) pour un  $\bar{n} \in \mathbb{N}$ , nous commençons par majorer les premiers termes de  $|\mathcal{Q}^n[f - \tilde{f]}(x, y)|$  (pour  $n = 1, 2, 3$ ). Nous serons ensuite amenés par récurrence sur  $n$  à majorer la norme de  $\mathcal{Q}^n[f - \tilde{f}]$  dans  $\Phi$ . Pour  $n = 1$ , nous avons

$$\left| \mathcal{Q}[f - \tilde{f]}(x, y) \right| \leq 2\bar{Q}(y - x) \| f - \tilde{f} \|_{\Phi} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{I.10})$$

Pour  $n = 2$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} \left| \mathcal{Q}^2[f - \tilde{f]}(x, y) \right| &\leq \left[ 4\bar{Q}^2 \| f - \tilde{f} \|_{\Phi} \int_x^y (\theta - x) d\theta \right] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= 4\bar{Q}^2 \frac{(y - x)^2}{2!} \| f - \tilde{f} \|_{\Phi} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{I.11})$$

Effectuons la même démarche pour  $n = 3$

$$\begin{aligned} \left| \mathcal{Q}^3[f - \tilde{f]}(x, y) \right| &\leq \left[ \frac{8}{2!} \bar{Q}^3 \| f - \tilde{f} \|_{\Phi} \int_x^y (\theta - x)^2 d\theta \right] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= 8\bar{Q}^3 \frac{(y - x)^3}{3!} \| f - \tilde{f} \|_{\Phi} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{I.12})$$

Par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$ , nous trouvons que

$$\left| \mathcal{Q}^n[f - \tilde{f]}(x, y) \right| \leq \frac{[2\bar{Q}(y - x)]^n}{n!} \| f - \tilde{f} \|_{\Phi} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{I.13})$$

En conséquence

$$\| \mathcal{Q}^n[f - \tilde{f}] \|_{\Phi} \leq \frac{(2\bar{Q})^n}{n!} \| f - \tilde{f} \|_{\Phi}. \quad (\text{I.14})$$

En passant à la limite  $n \rightarrow \infty$ , le quotient  $\frac{(2\bar{Q})^n}{n!} \rightarrow 0$ . Ainsi, il existe  $\bar{n} \in \mathbb{N}$  tel que  $\frac{(2\bar{Q})^{\bar{n}}}{\bar{n}!} < 1$  et  $Z^{\bar{n}}$  est strictement contractant sur  $\Phi$  d'après (I.9). La solution de (I.5) est obtenue par des itérations successives (voir [Carothers et al., 2004] et [Krstic and Smyshlyaev, 2008b]) de la manière suivante

$$K(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{Q}^n[K_0](x, y), \quad (\text{I.15})$$

avec  $\mathcal{Q}^0[K_0] = K_0$ . La norme de la solution est majorée par

$$\begin{aligned} \|K\|_{\Phi} &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \|\mathcal{Q}^n[K_0]\|_{\Phi} \\ &\leq e^{2\bar{Q}} \|K_0\|_{\Phi}, \quad i \in \{1, 2\}. \end{aligned} \tag{I.16}$$

Nous prouvons ainsi qu'il existe une solution unique des équations intégrales (I.4) satisfaisant  $K^1, K^2 \in \bar{\Phi}$ .

# Bibliographie

- Aamo, O. M. (2013). Disturbance rejection in  $2 \times 2$  linear hyperbolic systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 58(5) :1095–1106. [33](#), [83](#), [85](#)
- Aamo, O. M. (2016). Leak detection, size estimation and localization in pipe flows. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 61(1) :246–251. [32](#), [43](#)
- Almezel, S., Ansari, Q. H., and Khamsi, M. A. (2016). *Topics in fixed point theory*. Springer. [208](#), [209](#)
- Amin, S., Hante, F. M., and Bayen, A. M. (2011). Exponential stability of switched linear hyperbolic initial-boundary value problems. [20](#)
- Argomedeo, F. B., Witrant, E., and Prieur, C. (2012).  $D^1$ -input-to-state stability of a time-varying nonhomogeneous diffusive equation subject to boundary disturbances. In *American Control Conference (ACC), 2012*, pages 2978–2983. IEEE. [14](#)
- Auriol, J., Aarsnes, U., Martin, P., and Di Meglio, F. (2017). Delay-robust control design for heterodirectional linear coupled hyperbolic PDEs. *Accepted in IEEE-Transactions on Automatic Control*. [22](#), [35](#), [37](#), [38](#), [97](#), [111](#), [120](#)
- Auriol, J., Bribiesca-Argomedeo, F., Bou Saba, D., Di Loreto, M., and Di Meglio, F. (2018). Delay-robust stabilization of a hyperbolic PDE–ODE system. *Automatica*, 95 :494–502. [9](#), [111](#), [123](#)
- Auriol, J. and Di Meglio, F. (2016a). Minimum time control of heterodirectional linear coupled hyperbolic PDEs. *Automatica*, 71 :300–307. [33](#), [97](#)
- Auriol, J. and Di Meglio, F. (2016b). Two-sided boundary stabilization of two linear hyperbolic PDEs in minimum time. In *Decision and Control (CDC), 2016 IEEE 55th Conference on*, pages 3118–3124. IEEE. [33](#), [122](#)
- Avanessoff, D., Fioravanti, A., and Bonnet, C. (2013). Yalta : a Matlab toolbox for the  $H_\infty$ -stability analysis of classical and fractional systems with commensurate delays. *IFAC Proceedings Volumes*, 46(2) :839–844. [63](#)
- Baker, R. and Vakharia, D. (1970). Input-output stability of linear time-invariant systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 15(3) :316–319. [24](#), [43](#), [53](#), [56](#)
- Balogh, A. and Krstic, M. (2002). Infinite dimensional backstepping-style feedback transformations for a heat equation with an arbitrary level of instability. *European Journal of Control*, 8(2) :165–175. [29](#)
- Bastin, G. and Coron, J.-M. (2011). On boundary feedback stabilization of non-uniform linear  $2 \times 2$  hyperbolic systems over a bounded interval. *Systems & Control Letters*, 60(11) :900–906. [14](#), [17](#), [25](#)
- Bastin, G. and Coron, J.-M. (2016). *Stability and boundary stabilization of 1-D hyperbolic systems*, volume 88 of *Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications Subseries in Control*. Birkhäuser. [6](#), [7](#), [8](#), [15](#), [16](#), [18](#), [19](#), [20](#), [21](#), [31](#), [36](#), [46](#), [49](#), [54](#), [59](#), [60](#), [61](#), [62](#), [67](#), [74](#), [75](#), [97](#), [103](#), [136](#)
- Bastin, G., Coron, J.-M., d’Andréa Novel, B., et al. (2009). On lyapunov stability of linearised saint-venant equations for a sloping channel. *NHM*, 4(2) :177–187. [17](#)
- Bastin, G., Coron, J.-M., Hayat, A., and Shang, P. (2018). Exponential boundary feedback stabilization of a shock steady state for the inviscid Burgers equation. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01723361>. [25](#)

- Bastin, G., Coron, J.-M., and Tamasoiu, S. O. (2015). Stability of linear density-flow hyperbolic systems under PI boundary control. *Automatica*, 53 :37–42. 4, 26
- Bellman, R. E. and Cooke, K. L. (1963). Differential-difference equations. A report prepared for United States Air Force Project Rand. 24, 26, 43
- Bossavit, A. (1998). *Computational electromagnetism : variational formulations, complementarity, edge elements*. Academic Press. 5, 126
- Bregeon, S., Benchaib, A., Poullain, S., and Thomas, J. L. (2003). Robust DC bus voltage control based on Backstepping and Lyapunov methods for long distance VSC transmission scheme. In *Proceedings of the 10th European Conference on Power Electronics and Applications*, Toulouse, France. 4
- Bresch-Pietri, D. and Krstic, M. (2014). Output-feedback adaptive control of a wave PDE with boundary anti-damping. *Automatica*, 50(5) :1407–1415. 35
- Bribiesca-Argomedo, F. and Krstic, M. (2015). Backstepping-forwarding control and observation for hyperbolic PDEs with Fredholm integrals. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 60(8) :2145–2160. 32
- Carothers, D., Ingham, W., Liu, J., Lyons, C., Marafino, J., Parker, G. E., Pruett, D., Rudmin, J., Sochacki, J. S., Warne, D., et al. (2004). An overview of the modified Picard method. *Department of Mathematics and Statistics, Physics, James Madison University, Harrisonburg, Report VA22807*. 158, 209
- Carson, J. R. (1927). Electromagnetic theory and the foundations of electric circuit theory. *Bell System Technical Journal*, 6(1) :1–17. 5
- Castillo, F., Witrant, E., Prieur, C., and Dugard, L. (2013). Boundary observers for linear and quasi-linear hyperbolic systems with application to flow control. *Automatica*, 49(11) :3180–3188. 83
- Cerpa, E. and Prieur, C. (2017). Effect of time scales on stability of coupled systems involving the wave equation. In *Decision and Control (CDC), 2017 IEEE 56th Annual Conference on*, pages 1236–1241. 17
- Cheng, M.-B., Radisavljevic, V., and Su, W.-C. (2011). Sliding mode boundary control of a parabolic PDE system with parameter variations and boundary uncertainties. *Automatica*, 47(2) :381–387. 34
- Coron, J.-M. and Bastin, G. (2015). Dissipative boundary conditions for one-dimensional quasi-linear hyperbolic systems : Lyapunov stability for the  $C^1$ -norm. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 53(3) :1464–1483. 19
- Coron, J.-M., Bastin, G., and d’Andréa Novel, B. (2008). Dissipative boundary conditions for one-dimensional nonlinear hyperbolic systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 47(3) :1460–1498. 15
- Coron, J.-M., d’Andrea Novel, B., and Bastin, G. (2007). A strict Lyapunov function for boundary control of hyperbolic systems of conservation laws. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 52(1) :2–11. 6, 14, 15, 16, 25, 26, 43
- Coron, J.-M. and Hayat, A. (2018). PI controllers for 1-D nonlinear transport equation. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01766261>. 26



- Coron, J.-M. and Nguyen, H.-M. (2015). Dissipative boundary conditions for nonlinear 1-d hyperbolic systems : sharp conditions through an approach via time-delay systems. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 47(3) :2220–2240. [22](#)
- Coron, J. M. and Tamasoiu, S. O. (2015). Feedback stabilization for a scalar conservation law with PID boundary control. *Chinese Annals of Mathematics, Series B*, 36(5) :763–776. [25](#), [26](#)
- Coron, J.-M. and Trélat, E. (2006). Global steady-state stabilization and controllability of 1d semilinear wave equations. *Communications in Contemporary Mathematics*, 8(04) :535–567. [15](#)
- Coron, J.-M., Vazquez, R., Krstic, M., and Bastin, G. (2013). Local exponential  $H^2$  stabilization of a  $2 \times 2$  quasilinear hyperbolic system using backstepping. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 51(3) :2005–2035. [14](#), [20](#), [31](#), [32](#), [43](#), [47](#), [48](#), [49](#), [50](#), [51](#), [56](#), [97](#), [138](#), [139](#), [144](#), [145](#), [153](#), [157](#), [158](#), [192](#)
- Curtain, R. and Morris, K. (2009). Transfer functions of distributed parameter systems : A tutorial. *Automatica*, 45(5) :1101–1116. [21](#)
- da Silva Jr, J. G., Seuret, A., Fridman, E., and Richard, J.-P. (2011). Stabilisation of neutral systems with saturating control inputs. *International Journal of Systems Science*, 42(7) :1093–1103. [24](#)
- Damak, S., Di Loreto, M., and Mondié, S. (2015). Stability of linear continuous-time difference equations with distributed delay : Constructive exponential estimates. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 25(17) :3195–3209. [23](#), [24](#), [43](#), [54](#), [56](#), [57](#)
- Datko, R., Lagnese, J., and Polis, M. (1986). An example on the effect of time delays in boundary feedback stabilization of wave equations. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 24(1) :152–156. [35](#)
- de Halleux, J., Prieur, C., Coron, J.-M., d’Andréa Novel, B., and Bastin, G. (2003). Boundary feedback control in networks of open channels. *Automatica*, 39(8) :1365–1376. [19](#), [25](#)
- Di Loreto, M., Damak, S., and Mondié, S. (2016). Stability and stabilization for continuous-time difference equations with distributed delay. In *Delays and Networked Control Systems*, pages 17–36. Springer. [22](#)
- Di Meglio, F., Argomedo, F. B., Hu, L., and Krstic, M. (2018). Stabilization of coupled linear heterodirectional hyperbolic PDE–ODE systems. *Automatica*, 87 :281–289. [14](#), [20](#), [33](#), [37](#), [83](#), [84](#), [85](#), [89](#), [93](#), [94](#), [95](#), [97](#), [200](#), [201](#), [202](#), [205](#)
- Di Meglio, F., Vazquez, R., and Krstic, M. (2012a). Stabilization of a linear hyperbolic system with one boundary controlled transport PDE coupled with n counterconvecting PDEs. In *Decision and Control (CDC), 2012 IEEE 51st Annual Conference on*, pages 2914–2919. IEEE. [33](#), [97](#)
- Di Meglio, F., Vazquez, R., and Krstic, M. (2013). Stabilization of a system of coupled first-order hyperbolic linear PDEs with a single boundary input. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 58(12) :3097–3111. [33](#)
- Di Meglio, F., Vazquez, R., Krstic, M., and Petit, N. (2012b). Backstepping stabilization of an underactuated  $3 \times 3$  linear hyperbolic system of fluid flow equations. In *American Control Conference (ACC), 2012*, pages 3365–3370. IEEE. [33](#)

- Diagne, A., Bastin, G., and Coron, J.-M. (2012). Lyapunov exponential stability of 1-D linear hyperbolic systems of balance laws. *Automatica*, 48(1) :109–114. [14](#), [16](#), [36](#)
- Diekmann, O., Van Gils, S. A., Lunel, S. M., and Walther, H.-O. (2012). *Delay equations : functional-, complex-, and nonlinear analysis*, volume 110. Springer Science & Business Media. [22](#), [24](#), [43](#)
- Dos Santos, V., Bastin, G., Coron, J.-M., and d’Andréa Novel, B. (2008). Boundary control with integral action for hyperbolic systems of conservation laws : Stability and experiments. *Automatica*, 44(5) :1310–1318. [14](#), [26](#), [43](#)
- Elaydi, S. (1999). *An introduction to difference equations*. Springer Science & Business Media. [23](#)
- Engelborghs, K., Luzyanina, T., and Roose, D. (2002). Numerical bifurcation analysis of delay differential equations using dde-biftool. *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, 28(1) :1–21. [63](#)
- Evans, G. C. (1911). Volterra’s integral equation of the second kind, with discontinuous kernel. ii. *transactions of the American Mathematical Society*, 12(4) :429–472. [136](#)
- Fliess, M., Lévine, J., Martin, P., and Rouchon, P. (1995). Flatness and defect of non-linear systems : introductory theory and examples. *International Journal of Control*, 61(6) :1327–1361. [27](#)
- Glizer, V. Y., Fridman, E., and Feigin, Y. (2017). A novel approach to exact slow-fast decomposition of linear singularly perturbed systems with small delays. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 55(1) :236–274. [43](#)
- Greenberg, J. M. and Tsien, L. T. (1984). The effect of boundary damping for the quasilinear wave equation. *Journal of Differential Equations*, 52(1) :66–75. [19](#)
- Gu, K., Kharitonov, V., and Chen, J. (2003). *Stability of time-delay systems*. Birkhäuser. [22](#), [23](#), [24](#), [35](#)
- Gumussoy, S. and Michiels, W. (2010). A predictor–corrector type algorithm for the pseudospectral abscissa computation of time-delay systems. *Automatica*, 46(4) :657–664. [63](#)
- Hale, J. and Verduyn Lunel, S. (1993). *Introduction to functional differential equations*. Springer-Verlag. [22](#)
- Hale, J. K. (1971). Functional differential equations. In *Analytic theory of differential equations*, pages 9–22. Springer. [24](#)
- Hale, J. K. and Lunel, S. M. V. (2002). Strong stabilization of neutral functional differential equations. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 19(1–2) :5–23. [24](#), [36](#), [43](#)
- Hasan, A., Aamo, O. M., and Krstic, M. (2016). Boundary observer design for hyperbolic PDE–ODE cascade systems. *Automatica*, 68 :75–86. [15](#), [33](#), [122](#)
- Heaviside, O. (1892). *Electrical Papers*, chapter Electromagnetic induction and its propagation (second half.), pages 39–155. Cambridge University Press. [5](#)
- Hebertt, S.-R. (1989). Distributed sliding mode control in systems described by quasilinear partial differential equations. *Systems & Control Letters*, 13 :177–181. [34](#)

- Hu, L., Di Meglio, F., Vazquez, R., and Krstic, M. (2016). Control of homodirectional and general heterodirectional linear coupled hyperbolic PDEs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 61(11) :3301–3314. 33
- Ioannou, P. A. and Sun, J. (1996). *Robust adaptive control*, volume 1. PTR Prentice-Hall Upper Saddle River, NJ. 34
- Kailath, T. (1980). *Linear systems*, volume 156. Prentice-Hall Englewood Cliffs, NJ. 90
- Karafyllis, I. and Krstic, M. (2014). On the relation of delay equations to first-order hyperbolic partial differential equations. *ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 20(3) :894–923. 22
- Khalil, H. K. (1996). Nonlinear systems. *Prentice-Hall, New Jersey*, 2(5). 28
- Khamsi, M. A. and Kirk, W. A. (2011). *An introduction to metric spaces and fixed point theory*, volume 53. John Wiley & Sons. 32
- Kharitonov, V. L., Mondié, S., and Ochoa, G. (2009). Frequency stability analysis of linear systems with general distributed delays. In *Topics in Time Delay Systems*, pages 25–36. Springer. 24
- Khatir, M., Zidi, S., Fellah, M., Hadjeri, S., and Dahou, O. (2006). HVDC transmission line models for steady-state and transients analysis in SIMULINK environment. In *IEEE Industrial Electronics, IECON 2006-32nd Annual Conference on*, pages 436–441. IEEE. 4
- Knüppel, T., Woittennek, F., and Rudolph, J. (2010). Flatness-based trajectory planning for the shallow water equations. In *Decision and Control (CDC), 2010 49th IEEE Conference on*, pages 2960–2965. IEEE. 28
- Kreh, M. (2012). Bessel functions. *Lecture Notes, Penn State-Göttingen Summer School on Number Theory*, 82. 161, 162, 164, 165
- Kress, R. (1999). *Linear integral equations*, volume 82 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York,. 197, 208
- Krstic, M. (2009). Adaptive control of an anti-stable wave pde. In *American Control Conference, 2009. ACC'09.*, pages 1505–1510. IEEE. 35
- Krstic, M., Kanellakopoulos, I., Kokotovic, P. V., et al. (1995). *Nonlinear and adaptive control design*, volume 222. Wiley New York. 28
- Krstic, M. and Smyshlyaev, A. (2008a). Adaptive control of pdes. *Annual Reviews in Control*, 32(2) :149–160. 34
- Krstic, M. and Smyshlyaev, A. (2008b). Backstepping boundary control for first-order hyperbolic PDEs and application to systems with actuator and sensor delays. *Systems & Control Letters*, 57(9) :750–758. 14, 22, 32, 97, 158, 209
- Krstic, M. and Smyshlyaev, A. (2008c). *Boundary control of PDEs : A course on backstepping designs*, volume 16. Siam. 29, 30, 34, 38, 83, 92, 94, 198
- Krstic, M., Smyshlyaev, A., and Vazquez, R. (2006). Boundary control of PDEs and applications to turbulent flows and flexible structures. In *Control Conference, 2006. CCC 2006. Chinese*, pages 4–16. IEEE. 30
- Krstic, M., Smyshlyaev, A., and Vazquez, R. (2008). Infinite-dimensional backstepping and applications to flows in electromagnetic fields. In *Control and Automation, 2008 16th Mediterranean Conference on*, pages 1–14. IEEE. 30

- Lamare, P.-O. and Bekiaris-Liberis, N. (2015). Control of  $2 \times 2$  linear hyperbolic systems : Backstepping-based trajectory generation and PI-based tracking. *Systems & Control Letters*, 86 :24–33. [32](#), [38](#), [43](#)
- LeVeque, R. J. and Yee, H. C. (1990). A study of numerical methods for hyperbolic conservation laws with stiff source terms. *Journal of computational physics*, 86(1) :187–210. [98](#), [102](#)
- Liapounoff, A. (1907). Problème général de la stabilité du mouvement. In *Annales de la Faculté des sciences de Toulouse : Mathématiques*, volume 9, pages 203–474. Gauthier-Villars, Imprimeur-Editeur ; Ed. Privat, Imprimeur-Libraire. [13](#)
- Litrico, X. and Fromion, V. (2009). Boundary control of hyperbolic conservation laws using a frequency domain approach. *Automatica*, 45(3) :647–656. [21](#)
- Liu, W.-J. and Krstić, M. (2000). Backstepping boundary control of Burgers' equation with actuator dynamics. *Systems & Control Letters*, 41(4) :291–303. [15](#), [38](#)
- Logemann, H., Rebarber, R., and Weiss, G. (1996). Conditions for robustness and nonrobustness of the stability of feedback systems with respect to small delays in the feedback loop. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 34(2) :572–600. [36](#)
- Luo, Z.-H., Guo, B.-Z., and Morgül, Ö. (2012). *Stability and stabilization of infinite dimensional systems with applications*. Springer Science & Business Media. [14](#)
- Macchelli, A., Le Gorrec, Y., and Ramírez, H. (2017). Boundary control of distributed port-hamiltonian systems via generalised canonical transformations. In *Decision and Control (CDC), 2017 IEEE 56th Annual Conference on*, pages 70–75. IEEE. [37](#)
- Magnusson, P. C., Weisshaar, A., Tripathi, V. K., and Alexander, G. C. (2000). *Transmission lines and wave propagation*. CRC Press. [5](#), [16](#), [83](#), [126](#)
- Martin, P., Murray, R. M., and Rouchon, P. (2003). Flat systems, equivalence and trajectory generation. [http://www.cds.caltech.edu/murray/papers/2003d\\_mmr03-cds.html](http://www.cds.caltech.edu/murray/papers/2003d_mmr03-cds.html). [27](#)
- Mawhin, J. (2005). Alexandr mikhailovich liapunov, the general problem of the stability of motion (1892). *ResearchGate.[cit. 28.2. 2015]*. Dostupné z : <http://www.researchgate.net>. [13](#)
- Maxwell, J. C. (1881). *A treatise on electricity and magnetism*, volume 1. Clarendon press. [5](#)
- Melchor-Aguilar, D. (2013). Exponential stability of linear continuous time difference systems with multiple delays. *Systems & Control Letters*, 62(10) :811–818. [23](#), [24](#), [43](#)
- Niculescu, S.-I. (2001). On delay-dependent stability under model transformations of some neutral linear systems. *International Journal of Control*, 74(6) :609–617. [43](#)
- Okba, M. H., Saied, M. H., Mostafa, M., and Abdel-Moneim, T. (2012). High voltage direct current transmission - a review, part i. In *Cleveland 2012, Energytech, IEEE*, pages 1–7. IEEE. [4](#)
- Orlov, Y. V. and Utkin, V. (1987). Sliding mode control in indefinite-dimensional systems. *Automatica*, 23(6) :753–757. [34](#)
- Orta, R. (2009). Lecture notes on transmission line theory. [5](#), [126](#)

- Park, J. H. (2004). Design of a dynamic output feedback controller for a class of neutral systems with discrete and distributed delays. *IEE Proceedings-Control Theory and Applications*, 151(5) :610–614. [24](#), [122](#)
- Perrollaz, V. and Rosier, L. (2014). Finite-time stabilization of  $2 \times 2$  hyperbolic systems on tree-shaped networks. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 52(1) :143–163. [19](#)
- Petit, N. and Rouchon, P. (2001). Flatness of heavy chain systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 40(2) :475–495. [27](#)
- Polyanin, A. D. and Manzhirov, A. V. (2006). *Handbook of mathematics for engineers and scientists*. CRC Press. [175](#)
- Poullain, S., Heliodore, F., Henni, A., Thomas, J., and Courbon, E. (2001). Modelling of the dynamic characteristics of the DC line for VSC transmission scheme. In *London, UK, 7th International Conference on AC-DC Power Transmission*, pages 305–310. IET. [4](#)
- Prieur, C., Girard, A., and Witrant, E. (2012). Lyapunov functions for switched linear hyperbolic systems. *IFAC Proceedings Volumes*, 45(9) :382–387. [14](#), [16](#)
- Prieur, C., Girard, A., and Witrant, E. (2014). Stability of switched linear hyperbolic systems by lyapunov techniques. *IEEE Transactions on Automatic control*, 59(8) :2196–2202. [15](#), [16](#), [36](#)
- Prieur, C. and Mazenc, F. (2012). ISS-lyapunov functions for time-varying hyperbolic systems of balance laws. *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, 24(1-2) :111–134. [13](#), [14](#)
- Prieur, C., Winkin, J., and Bastin, G. (2008). Robust boundary control of systems of conservation laws. *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, 20(2) :173–197. [19](#), [20](#), [25](#), [36](#)
- Rager, D., Neumann, R., and Murrenhoff, H. (2015). Simplified fluid transmission line model for pneumatic control applications. In *Proc. 14th Scandinavian International Conference on Fluid Power (SICFP15). Tampere, Finland*. [6](#), [123](#)
- Ramirez, H., Zwart, H., Le Gorrec, Y., and Macchelli, A. (2017). On backstepping boundary control for a class of linear port-hamiltonian systems. In *Decision and Control (CDC), 2017 IEEE 56th Annual Conference on*, pages 658–663. IEEE. [37](#)
- Riley, K. F., Hobson, M. P., and Bence, S. J. (2006). *Mathematical methods for physics and engineering : a comprehensive guide*. Cambridge University Press. [98](#)
- Roman, C., Bresch-Pietri, D., Cerpa, E., Prieur, C., and Sename, O. (2018). Backstepping control of a wave pde with unstable source terms and dynamic boundary. *IEEE Control Systems Letters*. [33](#)
- Rouchon, P., Fliess, M., Lévine, J., and Martin, P. (1993). Flatness, motion planning and trailer systems. In *Decision and Control, 1993., Proceedings of the 32nd IEEE Conference on*, pages 2700–2705. IEEE. [27](#)
- Russell, D. L. (1978). Canonical forms and spectral determination for a class of hyperbolic distributed parameter control systems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 62(1) :186–225. [22](#)
- Russell, D. L. (1991). Neutral FDE canonical representations of hyperbolic systems. *The Journal of Integral Equations and Applications*, pages 129–166. [22](#)

- Schelkunoff, S. (1955). Conversion of maxwell's equations into generalized telegraphist's equations. *Bell System Technical Journal*, 34(5) :995–1043. 5
- Schmuck, C., Woittennek, F., Gensior, A., and Rudolph, J. (2014). Feed-forward control of an HVDC power transmission network. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 22(2) :597–606. 28
- Sharkovsky, A., Maistrenko, Y. L., and Romanenko, E. Y. (2012). *Difference equations and their applications*, volume 250. Springer Science & Business Media. 22, 24
- Slotine, J.-J. E., Li, W., et al. (1991). *Applied nonlinear control*, volume 199. Prentice hall Englewood Cliffs, NJ. 33
- Sontag, E. D. (2008). Input to state stability : Basic concepts and results. In *Nonlinear and optimal control theory*, pages 163–220. Springer. 14
- Tang, Y. and Mazanti, G. (2017). Stability analysis of coupled linear ODE-hyperbolic PDE systems with two time scales. *Automatica*, 85 :386–396. 17, 83
- Tang, Y., Prieur, C., and Girard, A. (2015a). Stability analysis of a singularly perturbed coupled ODE-PDE system. In *Decision and Control (CDC), 2015 IEEE 54th Annual Conference on*, pages 4591–4596. IEEE. 17
- Tang, Y., Prieur, C., and Girard, A. (2015b). Tikhonov theorem for linear hyperbolic systems. *Automatica*, 57 :1–10. 15, 17
- Tang, Y., Prieur, C., and Girard, A. (2016). Singular perturbation approximation of linear hyperbolic systems of balance laws. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 61(10) :3031–3037. 15, 17
- Tchoussou, A., Besson, T., and Xu, C.-Z. (2009). Exponential stability of distributed parameter systems governed by symmetric hyperbolic partial differential equations using Lyapunov's second method. *ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 15(2) :403–425. 14, 16, 60
- Terrand-Jeanne, A., Andrieu, V., and Dos Santos Martins, V. (2018). Regulation of the downside angular velocity of a drilling string with a PI controller. In *European Control Conference, ECC*. 14, 27
- Thomson, W. (1884). *Mathematical and physical papers*. Cambridge University Press. 5
- Trinh, N.-T., Andrieu, V., and Xu, C.-Z. (2017). Design of integral controllers for nonlinear systems governed by scalar hyperbolic partial differential equations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 62(9) :4527–4536. 25, 26
- Vazquez, R. and Krstic, M. (2014). Marcum Q-functions and explicit kernels for stabilization of  $2 \times 2$  linear hyperbolic systems with constant coefficients. *Systems & Control Letters*, 68 :33–42. 32, 38, 44, 142, 144, 157
- Vazquez, R., Krstic, M., and Coron, J.-M. (2011). Backstepping boundary stabilization and state estimation of a  $2 \times 2$  linear hyperbolic system. In *Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC), 2011 50th IEEE Conference on*, pages 4937–4942. IEEE. 15, 31, 32, 35, 43, 47, 48, 85, 97, 122
- Vidyasagar, M. (1972). Input-output stability of a broad class of linear time-invariant multivariable systems. *SIAM Journal on Control*, 10(1) :203–209. 24, 43, 46, 51, 52, 53, 79

- Wang, J.-M., Liu, J.-J., Ren, B., and Chen, J. (2015). Sliding mode control to stabilization of cascaded heat PDE–ODE systems subject to boundary control matched disturbance. *Automatica*, 52 :23–34. [34](#)
- Woittennek, F. (2011). On flatness and controllability of simple hyperbolic distributed parameter systems. In *Proc. 18th IFAC World Congress*, pages 14452–14457. [28](#)
- Woittennek, F., Rudolph, J., and Knüppel, T. (2009). Flatness based trajectory planning for a semi-linear hyperbolic system of first order PDE modeling a tubular reactor. *PAMM*, 9(1) :3–6. [28](#)
- Zhong, Q.-C. (2006). *Robust control of time-delay systems*. Springer-Verlag. [22](#)
- Zuazua, E. (2005). Propagation, observation, and control of waves approximated by finite difference methods. *SIAM review*, 47(2) :197–243. [4](#)



## FOLIO ADMINISTRATIF

### THESE DE L'UNIVERSITE DE LYON OPEREE AU SEIN DE L'INSA LYON

NOM : BOU SABA

DATE de SOUTENANCE : 26 Novembre 2018

Prénom : David

TITRE : Analyse et commande modulaires de réseaux de lois de bilan en dimension infinie

NATURE : Doctorat

Numéro d'ordre : 2018LYSEI084

Ecole doctorale : Electronique, Electrotechnique, Automatique

Spécialité : Automatique

RESUME : Les réseaux de lois de bilan sont définis par l'interconnexion, via des conditions aux bords, de modules élémentaires individuellement caractérisés par la conservation de certaines quantités. Des applications industrielles se trouvent dans les réseaux de lignes de transmission électriques (réseaux HVDC), hydrauliques et pneumatiques (réseaux de distribution du gaz, de l'eau et du fuel). La thèse se concentre sur l'analyse modulaire et la commande au bord d'une ligne élémentaire représentée par un système de lois de bilan en dimension infinie, où la dynamique de la ligne est prise en considération au moyen d'équations aux dérivées partielles (EDP) hyperboliques linéaires du premier ordre et couplées deux à deux. Cette dynamique permet de modéliser d'une manière rigoureuse les phénomènes de transport et les vitesses finies de propagation, aspects normalement négligés dans le régime transitoire. Les développements de ces travaux sont des outils d'analyse qui testent la stabilité du système, et de commande au bord pour la stabilisation autour d'un point d'équilibre.

Dans la partie analyse, nous considérons un système de lois de bilan avec des couplages statiques aux bords et anti-diagonaux à l'intérieur du domaine. Nous proposons des conditions suffisantes de stabilité, tant explicites en termes des coefficients du système, que numériques par la construction d'un algorithme. La méthode se base sur la reformulation du problème en une analyse, dans le domaine fréquentiel, d'un système à retard obtenu en appliquant une transformation backstepping au système de départ.

Dans le travail de stabilisation, un couplage avec des dynamiques décrites par des équations différentielles ordinaires (EDO) aux deux bords des EDP est considéré. Nous développons une transformation backstepping (bornée et inversible) et une loi de commande qui, à la fois stabilise les EDP à l'intérieur du domaine et la dynamique des EDO, et élimine les couplages qui peuvent potentiellement mener à l'instabilité. L'efficacité de la loi de commande est illustrée par une simulation numérique.

MOTS-CLÉS : Équations aux dérivées partielles hyperboliques, systèmes à paramètres distribués, stabilisation par backstepping, équations aux différences, systèmes à retard, analyse de stabilité.

Laboratoire (s) de recherche : Ampère, UMR CNRS 5005, INSA de Lyon

Directeur de thèse: MARQUIS-FAVRE Wilfrid

Président de jury : SEURET Alexandre

Composition du jury :

Rapporteurs :	PRIEUR Christophe, MONDIE Sabine
Examineurs :	SEURET Alexandre, BRESCH-PIETRI Delphine
Directeur de thèse :	MARQUIS-FAVRE Wilfrid
Co-directeur de thèse :	BRIBIESCA ARGOMEDO Federico
Encadrants de thèse:	DI LORETO Michael, EBERARD Damien