Vers une approche locale du phénomène de fatigue mécanique. Application aux matériaux et aux structures en composites à fibres continues

Emilie Duboquet

▶ **To cite this version:**

Emilie Duboquet. Vers une approche locale du phénomène de fatigue mécanique. Application aux matériaux et aux structures en composites à fibres continues. Physique mathématique [math-ph]. Université Bourgogne Franche-Comté, 2018. Français. NNT : 2018UBFCK021 . tel-02063465

HAL Id: tel-02063465

https://theses.hal.science/tel-02063465

Submitted on 11 Mar 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE DE DOCTORAT DE L'ETABLISSEMENT UNIVERSITE BOURGOGNE FRANCHE-COMTE

PREPAREE A L'UNIVERSITE DE BOURGOGNE

Ecole doctorale N° 533

Carnot - Pasteur

Doctorat de Mathématiques

Par

Emilie DUBOQUET

Vers une approche locale du phénomène de fatigue mécanique. Application aux matériaux et aux structures en composites à fibres continues

Thèse présentée et soutenue à l'Université de Bourgogne (Dijon), le 12 juin 2018

Composition du Jury :

André DRAGON	Directeur de Recherche (CE) Emérite / ENSMA - CNRS UPR 3346	*Président*
Christian HOCHARD	Professeur - Université d'Aix-Marseille / LMA - CNRS UMR 7031	*Rapporteur*
Frédéric LAURIN	Ingénieur de recherche - ONERA Châtillon	*Rapporteur*
Christian KLEIN	Professeur - Université de Bourgogne / IMB - CNRS UMR 5584	*Directeur de thèse*
Alain THIONNET	Professeur - Université de Bourgogne / Mines ParisTech - CNRS UMR 7633	*Directeur de thèse*

Résumé

Le concept de fatigue mécanique au sens originel fait référence au niveau structural et opère donc sur les structures, c'est-à-dire dans le cadre de la Mécanique de la Rupture. Les modèles construits doivent réaliser leur identification sur une structure : toute modification de la structure change le modèle et par conséquent son identification. Les campagnes expérimentales sont alors longues et coûteuses. Aussi, l'emploi d'une Mécanique qui traite les problèmes d'endommagement, mais dans un cadre local, en particulier celui du Volume Elémentaire Représentatif (VER), est donc forcément judicieux : la Mécanique de l'Endommagement est ainsi tout à fait séduisante pour remplacer celle de la Rupture. Les modèles de comportements endommageables construits dans ce cadre ne nécessitent qu'une unique identification à l'échelle du VER, et sont utilisables dans n'importe quelle géométrie structurale. Cette voie a été évidemment empruntée depuis longtemps. Toutefois, des incohérences se retrouvent souvent dans les modèles écrits dans le cadre de la Mécanique de l'Endommagement, en raison du fait que les concepts originaux de la fatigue mécanique furent construits par la Mécanique de la Rupture. Par exemple, le compteur de cycles de la sollicitation appliquée à la structure gouverne la loi d'évolution des phénomènes d'endommagement au niveau local, sans qu'il n'y ait ni justification, ni précaution à cela. De même, les modèles locaux incluent des sollicitations structurales qui n'ont aucune validité au niveau local. Il s'agit dans cette étude de faire rentrer rigoureusement le concept de fatigue mécanique dans le cadre local de la Mécanique de l'Endommagement et de réaliser une approche locale de la fatigue. Le but ultime est de réaliser des calculs de structure sous sollicitations de fatigue avec la même exigence de validité que des calculs de structure sous sollicitations quasi-statiques.

En tout premier lieu, la mise en évidence des carences de l'existant démontre qu'à l'heure actuelle, rien ne permet de réaliser un calcul de structure en fatigue, utilisant la Mécanique de l'Endommagement, dans des conditions satisfaisantes.

C'est la raison pour laquelle, en second lieu, la notion de problème de fatigue est formalisée, en expliquant d'abord ce qui fait la spécificité de ces problèmes et la motivation de les conceptualiser et de les classer. Ensuite, la construction de deux classifications des problèmes de fatigue (l'une suivant des critères structuraux, l'autre suivant des critères locaux), prépare un cadre propice à l'écriture d'une approche locale de la fatigue.

Le souhait délibéré de ne pas construire des lois de fatigue incrémentales, mais des lois gouvernées par un compteur de sollicitations et surtout déduites de lois d'évolution écrites en quasi-statique, oblige à des règles de linéarisation, puis à l'énoncé précis d'une démarche. Ce cadre rigoureux trouve sa justification dans le souhait d'éviter les écueils usuels et le flou existant conduisant aux incohérences mises préalablement en évidence. Ceci étant fait, il n'est pourtant pas sûr que cette approche locale de la fatigue qui est souhaitée soit accessible pour tous les (types de comportements de) matériaux, et pour tous les types de sollicitation dits de fatigue.

En utilisant des classes structurales et locales particulières de problèmes de fatigue et en appliquant la démarche énoncée, l'écriture et l'identification d'un modèle d'endommagement en fatigue pour le phénomène de fissuration intralaminaire présent dans les composites à fibres continues est réalisée. Ainsi, pour ces classes particulières, pour ces matériaux et le phénomène considéré, une approche locale de la fatigue est faite de manière rigoureuse. En particulier, la loi locale d'évolution en fatigue du phénomène est justifiée vis-à-vis du Second Principe de la Thermodynamique. Cette justification repose sur sa loi d'évolution écrite pour des sollicitations quasi-statiques et en évoquant le fait que ce phénomène est, en première approximation, le même lorsqu'il apparaît sous des sollicitations quasi-statiques ou de fatigue. Cette particularité est l'hypothèse clé permettant cette justification. Tous les phénomènes d'endommagement présents dans tous les matériaux ne répondent pas à cette spécificité : c'est ce qui limite, pour l'heure, la généralité de notre démarche.

Enfin, les lois locales de fatigue écrites précédemment sont mises en place dans un processus de calcul de structure sous sollicitation de fatigue. Finalement, pour ce cas particulier de matériaux et de phénomène d'endommagement, nous constatons qu'avec la démarche mise en place, la résolution des problèmes de calcul de structure en fatigue peut être réalisée avec la même aisance que la résolution des problèmes de calcul de structure sous sollicitations quasi-statiques.

Ce travail pose des bases très générales pour une approche nouvelle de la fatigue des structures. Il clarifie le concept de fatigue en le faisant rentrer dans un cadre très structuré dans le but de mener à bien une approche locale de la fatigue, en vue d'une utilisation dans des calculs de structure en fatigue. Il a été utilisé avec succès dans une configuration particulière. Pourtant, pour l'heure, il est difficile de dire s'il va permettre une approche locale de la fatigue pour tous les phénomènes, tous les matériaux et pour les cas les plus généraux de sollicitations. Cette étude n'a pas pour ambition d'amener une réponse à tous ces cas, mais d'être une voie ouverte à la résolution d'autres cas, voire à une généralisation sans condition, d'une approche locale de la fatigue.

On ne réalise pas seul un travail de thèse, loin s'en faut. Aussi, je tenais à remercier les personnes qui ont contribué, de près ou de loin, à cette entreprise.

Je souhaiterais remercier tout d'abord les membres extérieurs de mon jury pour l'attention qu'ils ont portés à mon étude et pour les échanges scientifiques qui ont pu en découler pendant ma soutenance. Ainsi, merci à mes deux rapporteurs, le Professeur C. Hochard et F. Laurin. Leur expertise dans le domaine de la Fatigue m'a fait découvrir combien ce domaine était passionnant. Et puis, merci à A. Dragon, examinateur et Président du jury. L'honneur fut pour moi immense qu'il accepte de faire partie de ce jury et qu'il accepte de juger mon travail.

De le même manière, je voudrais remercier les membres extérieurs de mon dernier comité de suivi, J.C. Saut et une nouvelle fois donc F. Laurin pour sa relecture précise et attentive d'un manuscrit provisoire et des remarques qui ont induit un chapitre supplémentaire à ce manuscrit.

Un grand merci à mes différents professeurs de Mécanique pour m'avoir transmis la passion de cette science : mes professeurs de Physique de lycée, mes Professeurs de Mécanique / Conception de l'Ecole de l'Air au travers de différents projets (coupe de France de Robotique, Projet Fusex) et le Professeur Alexander Lion, mon directeur de stage à l'Institut de Mécanique de l'Universität der Bundeswehr à Munich pour m'avoir insufflé cette entreprise de doctorat.

Je voudrais également remercier tout le Département de Mathématiques de l'Université de Bourgogne et le Directeur de l'Ecole Doctorale Carnot, H. Jauslin pour avoir accepté ma candidature à un doctorat réalisé en parallèle d'une activité professionnelle à temps plein et l'avoir soutenu durant ces années.

Ensuite, j'ai eu la chance d'être doublement encadré par les Professeurs C. Klein et A. Thionnet. Je tiens à remercier le Professeur C. Klein pour ses remarques sur le cadre mathématique de l'étude, sa relecture précise de mon manuscrit, ainsi que pour le suivi administratif auquel il a activement pris part, de manière indéfectible. Cette aide a été considérable pour moi. Un énorme merci au Professeur A. Thionnet qui a été un véritable moteur dans cette étude et, sans qui, ce travail aurait été impossible. Une page ne suffirait pas à le remercier, tant sa disponibilité, sa patience et son aide ont été importantes. Que cela soit en terme de rédaction ou de calculs numériques, il m'a permis de tenir les délais malgré mes contraintes professionnelles. Ses conseils et remarques m'ont permis de me questionner sans cesse et construire une étude réfléchie.

Enfin, je tiens à remercier ma famille. Merci en particulier à mes grands parents et à ma sœur qui n'ont jamais cessé de me soutenir et de m'encourager. Je leur dois énormément. Enfin merci à Antoine pour avoir partagé patiemment le quotidien de ces longues années de recherche.

Emilie Duboquet, le 19 juin 2018

Table des matières

I INTRODUCTION **15**

1 Motivations de l'étude. Les faits : du flou sur la fatigue **17**
1.1 La fatigue mécanique. Le point de vue du concept : un concept dévoyé au fil des années . . . 17
1.1.1 Deux Mécaniques bien distinctes pour étudier l'endommagement des structures : la Mécanique de la Rupture et la Mécanique de l'Endommagement 17
1.1.2 La fatigue et la Mécanique de la Rupture . . . 19
1.1.3 La fatigue et la Mécanique de l'Endommagement . . . 25
1.1.4 Du flou dans la littérature scientifique... au sujet du concept de fatigue . . 26
1.1.5 La fatigue : concept local ou structural ? Uniaxial ou multiaxial ? Illustrations 27
1.1.6 Finalement, conceptuellement, que doit-on faire ? . . . 39
1.2 La fatigue dans le cadre de la Mécanique l'Endommagement. Le point de vue des phénomènes . . . 39
1.2.1 Pour les matériaux métalliques, un cadre mal adapté aux phénomènes et mal utilisé. Bibliographie succincte . . . 39
1.2.2 Pour les matériaux composites à fibres continues, un cadre bien adapté aux phénomènes mais mal utilisé. Bibliographie succincte . . . 40
1.3 Critères discriminants des modèles d'endommagement en fatigue . . . 42
1.3.1 Liste des critères discriminants importants pour un modèle de fatigue . . 42
1.3.2 Quelques exemples détaillés... et confirmation qu'il y a du flou au sujet du concept de fatigue . . . 44

2 Déroulement de l'étude **49**
2.1 Objectif et étapes importantes de l'étude . . . 49
2.1.1 Finalité de l'étude . . . 49
2.1.2 Etape A : précautions générales nécessaires à la mise en place du concept de fatigue dans une approche locale . . . 49
2.1.3 Etape B : approche locale de la fatigue pour des matériaux et un phénomène particulier . . . 50
2.1.4 Etape C : processus de calcul de structure en fatigue pour les composites à fibres continues . . . 50
2.2 Portée du travail . . . 51
2.3 Ce que ce document ne contiendra pas . . . 51
2.4 Description de la structure du document . . . 52

II PREALABLE GENERAL A UNE APPROCHE LOCALE DE LA FATIGUE (A) : CONCEPTUALISATION ET CLASSIFICATION DES PRO-

BLEMES DE FATIGUE **55**

3 Conceptualisation et classification des problèmes de fatigue. Objectif et vocabulaire **57**
3.1 Position du problème. Loi d'évolution temporelle et cyclique 57
3.2 Pourquoi conceptualiser et classifier les problèmes de fatigue ? 59
3.3 Convention de langage et d'écriture et définitions générales d'un problème de fatigue 60

4 Classification des problèmes de fatigue suivant des critères structuraux **63**
4.1 Ecriture générale d'un problème de calcul de structure 63
4.2 Vocabulaire nécessaire à la classification des problèmes de fatigue à l'aide de grandeurs structurales 65
4.2.1 Notions et définitions fondamentales 65
4.2.2 Illustrations 67
4.2.3 Nouvelles définitions : rapport de charge et indicateur de charge 68
4.3 Classification des problèmes de fatigue à partir de grandeurs structurales 68

5 Classification des problèmes de fatigue suivant des critères locaux **75**
5.1 Justification d'une classification des problèmes de fatigue à partir de grandeurs locales 75
5.2 Vocabulaire nécessaire à la classification des problèmes de fatigue à l'aide de grandeurs locales 75
5.2.1 Notions et définitions fondamentales 75
5.2.2 Illustrations 77
5.3 Concept de problème local de fatigue et début de la classification à partir de grandeurs locales 77
5.4 Concept de problème local de fatigue sur un domaine et suite de la classification basée sur des grandeurs locales 78
5.5 Pertinence des classifications réalisées et suite de la classification des problèmes locaux de fatigue à partir de grandeurs locales. Concept de problème local de fatigue approché 81
5.6 Concept de problème local de fatigue approché sur un domaine et fin de la classification basée sur des grandeurs locales 83
5.7 Annexe locale - Synthèse sur la classification locale 87
5.7.1 Problème local de fatigue au point M 87
5.7.2 Problème local de fatigue sur un domaine 88
5.7.3 Problème local de fatigue approché au point M 89
5.7.4 Problème local de fatigue approché sur un domaine 90
5.8 Annexe locale - Définition synthétique des classifications locales 91
5.8.1 Problèmes locaux de fatigue au point M 91
5.8.2 Problèmes locaux de fatigue sur un domaine 93
5.9 Annexe locale - Définition synthétique des classifications locales approchées . . . 94
5.9.1 Problèmes locaux de fatigue au point M 94
5.9.2 Problèmes locaux de fatigue approchés sur un domaine 96

III PREALABLE GENERAL A UNE APPROCHE LOCALE DE LA FATIGUE (B) : ECRITURE D'UNE LOI CYCLIQUE A PARTIR D'UNE

LOI TEMPORELLE 99

6 Equations de passage d'une loi temporelle à une loi cyclique 101
6.1 Reparamétrisation du temps. Compteur du nombre de cycles 101
6.2 Expression de la différentielle du temps dans le cadre de la fatigue 101
6.3 Approximation d'une fonction et de sa différence dans le cadre de la fatigue . . . 102
6.3.1 Hypothèse obligatoire de variations faibles avec le temps 102
6.3.2 Approximation d'une fonction 102
6.3.3 Approximation de la différence par une différentielle 102
6.4 Formules de passage d'une évolution temporelle à une évolution cyclique 104
6.5 Applications aux cas des différents types de problèmes de la classification locale . 104
6.5.1 Problèmes locaux de fatigue au point M 104
6.5.2 Problèmes locaux de fatigue sur un domaine 107
6.6 Annexe locale - Etablissement du nombre de cycles N sous la forme d'une fonction continue et dérivable 110
6.6.1 Méthode 1 111
6.6.2 Méthode 2 112

7 Principes de la démarche proposée pour la réalisation d'une approche locale de la fatigue 115
7.1 Synthèse pour une approche locale de la fatigue 115
7.2 Etape 1 - Vérification des limitations générales sur le phénomène d'endommagement considéré 116
7.2.1 Une première limitation obligatoire sur le phénomène physique 116
7.2.2 Une seconde limitation obligatoire sur le phénomène physique 116
7.2.3 Une limitation non obligatoire mais pertinente sur le phénomène physique : le seuil d'endommagement est supposé nul 116
7.3 Etape 2 - Ecriture du problème structural pour la mise en évidence de la classe structurale du problème et définition d'un compteur de nombre de cycles au niveau structural 117
7.4 Etape 3 - Mise en évidence de la classe locale du problème considéré et définition d'un compteur de nombre de cycles local par l'utilisation du problème approché . 117
7.5 Etape 4 - Discussion sur une possible extension du cadre de fonctionnement . . . 118
7.6 Etape 5 - Ecriture de la loi cyclique locale à partir de la loi temporelle locale à l'aide des équations de passage 119
7.6.1 Cas d'un phénomène insensible aux effets de vitesse 119
7.6.2 Cas d'un phénomène sensible aux effets de vitesse 119
7.7 Etape 6 - Identification de la loi cyclique locale par recours à l'ensemble des paramètres caractéristiques des sollicitations 120
7.8 Finalement, peut-on traiter tous les problèmes de calcul de structure en fatigue ? 120

IV APPROCHE LOCALE DE LA FATIGUE POUR LE PHENOMENE DE FISSURATION INTRALAMINAIRE DES COMPOSITES STRATIFIES D'UNIDIRECTIONNELS : LOI D'EVOLUTION ISSUE DE LA THERMODYNAMIQUE DES MILIEUX CONTINUS 121

8 Un modèle général du phénomène de fissuration intralaminaire dans les composites à fibres continues. Loi d'évolution locale quasi-statique 123
8.1 Description succinte du phénomène de fissuration intralaminaire 123

8.1.1 Définitions et notations des repères associés aux composites stratifiés d'unidirectionnels orientés . . . 123
8.1.2 Le phénomène de fissuration intralaminaire . . . 125
8.2 Un modèle de comportement pour un matériau anisotrope microfissuré . . . 126
8.2.1 Pourquoi ce modèle ? . . . 126
8.2.2 Cadre du modèle . . . 128
8.3 Définition d'un passage micro-macro pour la condition de contact unilatéral du dommage et les sauts de déplacements . . . 131
8.3.1 Formulation du problème d'homogénéisation périodique des milieux microfissurés selon la méthode de la moyenne . . . 131
8.3.2 Conséquences et hypothèses . . . 131
8.3.3 Formulation macroscopique de la condition de contact unilatéral . . . 132
8.3.4 Formulation macroscopique des sauts de déplacements . . . 133
8.3.5 Groupe des symétries matérielles du matériau homogène équivalent et conséquence . . . 134
8.4 Définition des modes de sollicitation d'un réseau de microfissures dans le cadre de la Mécanique de l'Endommagement . . . 134
8.4.1 Définition des modes de sollicitation d'une fissure plane pour la Mécanique de l'Endommagement . . . 134
8.4.2 Expression des variables mode et rayon en fonction des sauts de déplacements macroscopiques . . . 136
8.4.3 Expression des variables mode et rayon en fonction des déformations et des contraintes macroscopiques . . . 136
8.5 Application : un modèle général du comportement hyperélastique d'un milieu microfissuré . . . 137
8.5.1 Cadre de la modélisation . . . 138
8.5.2 Modélisation vectorielle de l'endommagement . . . 138
8.5.3 Construction d'une fonction d'état objective . . . 139
8.5.4 Ecriture des lois d'état . . . 140
8.5.5 Justification du caractère hyperélastique du comportement . . . 141
8.5.6 Loi d'évolution de l'endommagement . . . 141
8.5.7 Conditions de continuité et de convexité . . . 142
8.5.8 Expressions du tenseur de rigidité pour quelques configurations simples de la condition unilatérale . . . 142
8.6 Identification du modèle dans le cas du phénomène de fissuration intralaminaire . 142
8.6.1 Identification de la loi de comportement . . . 143
8.6.2 Identification de la loi d'évolution quasi-statique . . . 144
8.7 Le modèle original . . . 144
8.8 Quelques courbes expérimentales. Essais quasi-statiques . . . 147
8.9 Quelques courbes expérimentales. Essais de fatigue . . . 152
8.10 Annexe locale - Récapitulation des équations du modèle général de fissuration intralaminaire . . . 154
8.10.1 Fonction d'état et lois d'état. Dérivées partielles premières et secondes . . 154
8.10.2 Loi d'évolution de la variable d'endommagement scalaire du modèle général dans sa forme la plus générale . . . 155
8.10.3 Loi d'évolution de la variable d'endommagement scalaire du modèle général dans sa forme simplifiée 1 . . . 156
8.10.4 Loi d'évolution de la variable d'endommagement scalaire du modèle général dans sa forme simplifiée 2 . . . 156

8.10.5 Loi d'évolution de la variable d'endommagement scalaire du modèle original dans ses formes générale et simplifiée 157

9 Ecriture d'une loi d'évolution locale dans un cadre de fatigue. Cas du phénomène de fissuration intralaminaire 159

9.1 Objectif et démarche 159
9.2 Etape 1 - Vérification des limitations générales sur le phénomène d'endommagement considéré 160
9.3 Etape 2 - Ecriture du problème structural pour la mise en évidence de la classe structurale du problème et définition d'un compteur de nombre de cycles au niveau structural 161
9.3.1 Compteur de nombre de cycles au niveau structural : limitation non obligatoire sur les classes structurales des problèmes de fatigue... mais la plus grande généralité semble trop complexe pour notre étude qui est exploratoire 161
9.3.2 Définition du problème structural et du compteur de cycles structural . . 161
9.4 Etape 3 - Mise en évidence de la classe locale du problème considéré et définition d'un compteur de nombre de cycles local par l'utilisation du problème approché . 162
9.4.1 Mise en évidence de la variable pilote, du caractère identique de ses composantes et d'un type de problème local 162
9.4.2 Mise en évidence d'un compteur de nombre de cycles local par l'utilisation du problème approché 163
9.5 Etape 4 - Discussion sur une possible extension du cadre de fonctionnement . . . 163
9.6 Les deux types de lois d'évolution temporelles dont nous voulons écrire une forme cyclique : type DVE, type NDVE 164
9.7 Adaptation des formules de passage générales au cas du phénomène de fissuration intralaminaire. Cas des lois d'évolution de type DVE 166
9.7.1 Formules de passage des classes de problèmes locaux au point M 166
9.7.2 Formules de passage des classes de problèmes locaux sur un domaine. Cas où le domaine est celui de la structure considérée 168
9.8 Adaptation des formules de passage générales au cas du phénomène de fissuration intralaminaire. Cas des lois d'évolution de type NDVE 170
9.8.1 Formules de passage des classes de problèmes locaux au point M 170
9.8.2 Formules de passage des classes de problèmes locaux sur un domaine. Cas où le domaine est celui de la structure considérée 174
9.9 Etape 5 - Les lois d'évolution cycliques DVE (a) : cadre du modèle original dans sa forme simplifiée 177
9.9.1 Problèmes locaux de fatigue au point M 177
9.9.2 Problèmes locaux de fatigue sur un domaine 178
9.10 Etape 5 - Les lois d'évolution cycliques DVE (b) : cadre du modèle général dans sa seconde forme simplifiée 179
9.10.1 Problèmes locaux de fatigue au point M 180
9.10.2 Problèmes locaux de fatigue sur un domaine 181
9.11 Etape 5 - Les lois d'évolution cycliques NDVE (c) : cadre du modèle général dans sa première forme simplifiée 182
9.11.1 Problèmes locaux de fatigue au point M 182
9.11.2 Problèmes locaux de fatigue sur un domaine 185
9.12 Etape 6 - Identification de la loi cyclique locale par recours à l'ensemble des paramètres caractéristiques des sollicitations 188

V CALCUL DE STRUCTURES SOUS CHARGEMENT DE FATIGUE A L'AIDE D'UNE APPROCHE LOCALE. CAS DE STRUCTURES COMPOSITES 195

10 Description des calculs 197
10.1 Cadre général et commun à tous les calculs . . . 197
10.2 Description des géométries des cas traités . . . 198
10.3 Description des conditions aux limites des cas traités . . . 202
10.4 Description des matériaux . . . 204
10.5 Formulation du problème à résoudre (cas du modèle général dans sa seconde forme simplifiée) . . . 204
10.6 Formulation du problème à résoudre (cas du modèle original dans sa forme simplifiée) 205
10.7 Rôle de l'identification dans le processus . . . 206
10.8 Déroulement d'un calcul . . . 208
10.8.1 Le processus de calcul . . . 208
10.8.2 Un problème dû à l'identification . . . 208

11 Résultats des calculs 209
11.1 Les résultats présentés . . . 209
11.2 Eprouvette en traction uniaxiale . . . 210
11.3 Eprouvette entaillée en traction uniaxiale . . . 211
11.4 Eprouvette cruciforme en traction bi-axiale . . . 212
11.5 Eprouvette cruciforme trouée en traction bi-axiale . . . 213
11.6 Réservoir composite sous pression interne . . . 214

12 Extensions des conditions aux limites 219
12.1 Deux cas importants . . . 219
12.2 Sollicitations mono-niveau . . . 220
12.2.1 Rappel sur un problème d'intégration déjà évoqué . . . 220
12.2.2 Premiers cas . . . 221
12.2.3 Seconds cas . . . 221
12.2.4 Troisième cas . . . 221
12.2.5 Quatrième cas . . . 221
12.2.6 Cinquième cas . . . 222
12.2.7 Sixième cas . . . 222
12.2.8 Septième cas . . . 222
12.3 Sollicitations multi-niveaux simples . . . 223
12.4 Sollicitations multi-niveaux. Cas plus général . . . 228
12.5 Mise en évidence de l'intérêt d'une approche locale . . . 229

13 Un modèle probabiliste d'évolution de la fissuration intralaminaire en fatigue. Aide à l'identification 231
13.1 Position du problème . . . 231
13.2 Cadre mathématique du modèle probabiliste . . . 231
13.2.1 Notations sur la théorie des probabilités . . . 231
13.2.2 Hypothèses associées au modèle probabiliste . . . 232
13.3 Echelles de travail . . . 232
13.4 Probabilité d'apparition d'une fissure entre deux fissures préexistantes . . . 233
13.5 Etude des probabilités microscopiques issue des lois mathématiques de la fiabilité 234
13.5.1 Objectif et lois de probabilité . . . 234

13.5.2 La loi de Weibull : énoncé et justification 235
13.5.3 Probabilité microscopique d'apparition d'une fissure dans un maillon. Application de la loi de Weibull 237
13.6 Accroissement du nombre de fissures intralaminaires dans le pli i 238
13.7 Evolution du nombre de fissures dans un élément de volume en fonction du nombre de cycles. Cas général 239
13.8 Evolution du nombre de fissures dans un élément de volume en fonction du nombre de cycles. Cas d'une répartition uniforme des fissures 239
13.9 Le critère de rupture c 240
13.9.1 Expression du critère de rupture c 240
13.9.2 Evolution du critère de rupture c à travers une loi de répartition 243
13.10Bilan sur le modèle probabiliste mésoscopique établi 245
13.11Identification des paramètres du modèle probabiliste 245
13.11.1 Nombre de fissures u_{n0} 245
13.11.2 Critère de rupture c 245
13.11.3 Volume de non-recouvrement dv 246
13.11.4 Paramètres de Weibull a, c_0 et c_u 246
13.12Description de l'environnement expérimental 248
13.13Résultats et discussion 249

VI CONCLUSION ET PERSPECTIVES 257

14 Conclusion générale. Perspectives 259
14.1 Bilan sur le travail réalisé et la généralité de la démarche 259
14.2 Bilan sur l'application réalisée et le problème de l'identification de la loi cyclique 260
14.3 Les limitations 261
14.4 Mise en évidence de l'intérêt d'une approche locale 261
14.5 Les améliorations nécessaires 262
14.6 Pour terminer 262

VII ANNEXES 263

15 Annexe du chapitre 9 : toutes les lois cycliques pour toutes les classes locales pour toutes les formes de modèle étudié de fissuration intralaminaire 265
15.1 Annexe locale - Etape 5 - Les lois d'évolution cycliques DVE (a) : cadre du modèle original dans sa forme simplifiée 265
15.1.1 Problèmes locaux de fatigue au point M 265
15.1.2 Problèmes locaux de fatigue sur un domaine 267
15.2 Annexe locale - Etape 5 - Les lois d'évolution cycliques DVE (b) : cadre du modèle général dans sa seconde forme simplifiée 269
15.2.1 Problèmes locaux de fatigue au point M 269
15.2.2 Problèmes locaux de fatigue sur un domaine 271
15.3 Annexe locale - Etape 5 - Les lois d'évolution cycliques NDVE (c) : cadre du modèle général dans sa première forme simplifiée 273
15.3.1 Problèmes locaux de fatigue au point M 273
15.3.2 Problèmes locaux de fatigue sur un domaine 278

Bibliographie 288

Première partie

INTRODUCTION

Chapitre 1

Motivations de l'étude. Les faits : du flou sur la fatigue

1.1 La fatigue mécanique. Le point de vue du concept : un concept dévoyé au fil des années

1.1.1 Deux Mécaniques bien distinctes pour étudier l'endommagement des structures : la Mécanique de la Rupture et la Mécanique de l'Endommagement

Dans ce premier paragraphe, nous énonçons des idées assez tranchées sur la Mécanique de la Rupture et sur la Mécanique de l'Endommagement. En réalité, les choses sont un peu moins nettes. Mais, pour le but recherché, cette présentation est largement suffisante.

Les phénomènes d'endommagement qui peuvent exister dans une structure sont généralement classés suivant deux catégories :

- ceux dont les dimensions caractéristiques sont du même ordre que celles de la structure dans laquelle ils se développent ;
- ceux, diffus, dont les dimensions caractéristiques sont d'un ordre inférieur à celles de la structure dans laquelle ils se développent.

Les premiers sont étudiés et modélisés par la Mécanique de la Rupture (début du 20ème siècle, Hopkinson [31], Griffith [24]). Les seconds sont étudiés et modélisés par la Mécanique de l'Endommagement (milieu du 20ème siècle, Kachanov [32]).

La Mécanique de la Rupture aussi bien que la Mécanique de l'Endommagement travaillent sur de la matière construite par la Mécanique des Milieux Continus (début du 19ème siècle, Navier [41]) :

- à une échelle choisie, la matière est définie comme continue, au sens où d'un point matériel à un autre, ses propriétés évoluent de manière continue ;
- ces propriétés, en un point donné, sont évaluées sur un volume statistiquement représentatif de la matière au voisinage du point considéré, appelé le Volume Elémentaire Représentatif (VER) ;
- pour ce VER, la Mécanique des Milieux Continus définit la notion de déformation et de sollicitation locale au travers notamment des 2-tenseurs dits de déformations et de contraintes.

La Mécanique de la Rupture a pour objectif de prévoir la rupture d'une structure due à un endommagement (de grande taille) en le faisant apparaître et progresser à travers de la

matière continue qui ne se dégrade pas (Fig. 1.1, Fig. 1.2). Elle modélise cet endommagement par l'apparition et la croissance de surface plane, génératrice de discontinuités de déplacement au sein de la structure. La Mécanique de la Rupture ne travaille donc pas avec la notion de VER car la taille (l'aire des surfaces créées) des endommagements considérés est du même ordre que les dimensions de la structure dans laquelle ils se développent, et donc ne travaille pas non plus avec les notions de déformations et de contraintes. La Mécanique de la Rupture utilise des concepts structuraux (torseur d'effort, déplacement) et sa modélisation est totalement dépendante des effets géométriques, entre autres, car ces concepts travaillent sur les structures et non sur les matériaux constitutifs des structures.

La Mécanique de l'Endommagement se propose de prendre en compte les phénomènes d'endommagement de petite taille (diffus) qui peuvent exister dans le matériau d'une structure pour en prévoir sa rupture (Fig. 1.6, Fig. 1.8). Elle remplace la matière réelle endommagée par de la matière continue au sens des Milieux Continus, mais affaiblie par rapport à de la matière saine. Cet affaiblissement s'opère au travers de la substitution de l'endommagement diffus réel par des variables (généralement, d'état) indicatrices de l'endommagement au sein du Volume Elémentaire Représentatif, qui impactent notamment les propriétés mécaniques de la matière continue. Comme la Mécanique des Milieux Continus, la Mécanique de l'Endommagement utilise les notions de VER, de déformation et de contrainte. La modélisation faite par la Mécanique de l'Endommagement est donc insensible aux effets géométriques structuraux car ses concepts travaillent sur les matériaux (constitutifs des structures) et non sur les structures. L'évolution des variables d'endommagement (en fonction du temps) est écrite dans le cadre de la Thermodynamique des Milieux Continus et la Méthode de l'Etat local, respecte le Second Principe de la Thermodynamique et prend la forme, pour chacune des variables d'endommagement, d'une équation différentielle, appelée loi d'évolution temporelle (ou plus simplement loi d'évolution) de la variable d'endommagement.

Dans le but de prévoir la rupture de structures, avec la Mécanique de la Rupture ou bien la Mécanique de l'Endommagement, suivant le type d'endommagement existant, des calculs de structures effectués dans un cadre de sollicitations quasi-statiques (pour lesquelles les termes d'inertie présents dans la loi locale d'équilibre peuvent être négligés) ou dynamiques (pour lesquelles les termes d'inertie présents dans la loi locale d'équilibre ne peuvent pas être négligés) sont régulièrement réalisés par la technique des Eléments Finis avec un degré de confiance croissant.

Un autre type de sollicitations est particulièrement important parce qu'il est sans doute celui qui est le plus fréquemment vécu par les structures mises à notre service dans notre vie quotidienne (par exemple dans le domaine des transports : bus, automobiles, avions, trains...) : les sollicitations dites de fatigue. Ce sont des sollicitations dont la loi horaire présente une certaine répétitivité, mais dont l'intensité est faible (en tout cas, moindre que celle susceptible de provoquer la rupture immédiate, fragile ou ductile de la structure). L'idée est alors que ces sollicitations, même faibles, répétées un grand nombre de fois, peuvent être préjudiciables pour la tenue mécanique d'une structure. La notion de fatigue d'une structure fait ainsi référence à la dégradation progressive de l'intégrité mécanique de cette structure, suite à l'application de sollicitations de fatigue (Fig. 1.1 à Fig. 1.8).

Qu'en est-il alors des calculs de structures soumises à des sollicitations de fatigue ? Le degré de confiance quant aux prévisions, pour ces sollicitations de fatigue, est-il le même que pour les autres types de sollicitations ?

1.1.2 La fatigue et la Mécanique de la Rupture

Sous sollicitations de fatigue, le calcul de structures traitées par la Mécanique de la Rupture est un cas classique bien connu qui donne de bons résultats prévisionnels.

En fait, ceci est parfaitement compréhensible car à l'origine, le phénomène de fatigue est sans conteste appréhendé au niveau structural. En d'autres termes, il s'agit bien d'évaluer la dégradation de la tenue mécanique d'une structure sous l'action de sollicitations répétées, généralement (très) inférieures à celles susceptibles de causer sa rupture immédiate. La justification de cela peut se trouver dans les premiers essais de fatigue répertoriés, réalisés par Albert [1] en 1829, sur des câbles de puits de mine. Il s'agit alors d'appliquer une sollicitation répétée de traction uniaxiale sur des câbles de différentes constitutions et de noter le nombre de cycles à rupture. Un microscope amélioré par Van Leeuwenhoek [30] assez puissant pour voir des objets de la taille d'une cellule humaine datant du début 18ème siècle, les travaux de Navier (aidé de Cauchy) sur l'élasticité datant du début du 19ème siècle, il est difficile d'imaginer que des explications locales au phénomène de fatigue pouvaient exister au début du 19ème siècle. A l'appui de cela, nous pouvons signaler que Poncelet [46] est le premier, vers 1840, à utiliser le terme de fatigue associé au concept de matériau. En 1842, la rupture d'un essieu de locomotive provoque la catastrophe ferroviaire de Meudon, et Rankine [47], qui réalise des observations des faciès de rupture, montre que cette défaillance n'est pas liée à une rupture fragile des matériaux employés, mais à une rupture par fatigue. A partir de 1852, Wöhler [72] (estimé être le premier à réaliser des essais de fatigue sur des éprouvettes de laboratoire, entaillées ou non) travaille sur les ruptures d'axes d'essieux de train par fatigue et, là-encore, le concept de fatigue est résolument structural. Ce n'est que bien plus tard, au début du 20ème siècle, que des explications locales au phénomène de fatigue commencent à voir le jour, avec, par exemple, les observations par microscopie de Ewing et Humfrey [20].

Bien que, dès 1924, Palmgren [43] donne une loi d'évolution d'un phénomène de fatigue, ce n'est qu'en 1945 que Miner [37] la popularise. Il est désormais considéré que c'est à lui que nous devons l'écriture de la loi de fatigue (que nous appellerons loi de Miner structurale) qui inspire toutes les autres :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{n_i}{N_R^{(i)}} = D \tag{1.1}$$

où $N_R^{(i)}$ est le nombre de cycles à rupture de la structure considérée, sous le chargement référencé par l'indice i, n_i le nombre de cycles appliqué du chargement i et lorsque D atteint la valeur 1, la rupture est supposée atteinte. Dans ce papier, le discours de Miner est (assez) clair : il est question de structure (éprouvettes de géométries différentes, contenant ou non des trous). Nous pouvons ainsi lire : *Fig. 9 is representative of a more complex type specimen (in this case a dimpled flush screw joint) in which the S(tress)-N(umber of cycles to failure) curve has been established and two tests have been run at different stress levels. It should be pointed out at this point that the author believes that "stress-raisers" or stress concentrations are best handled in fatigue by experimentally establishing S-N curves on specimens or parts which contain the actual concentrations wherever possible. Applying factors or corrections does not seem feasible at the present time.*

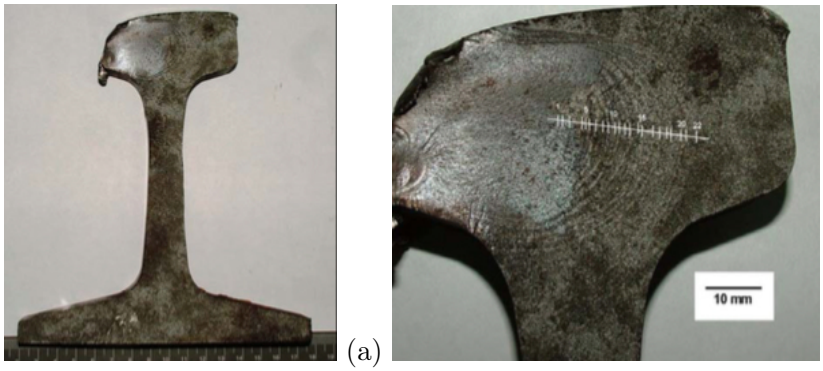
La loi originelle de Miner fait donc incontestablement référence au niveau structural et donne des résultats satisfaisants dans son cadre d'application. Pourtant, comme tout concept associé à la Mécanique de la Rupture, elle a un gros défaut : pour un même matériau, son identification dépend des données structurales (géométrie, sollicitation...). Il suffit donc, par exemple, que la

géométrie de la structure considérée change, même peu, pour que le processus complet d'identification de la loi ait l'obligation d'être recommencé. Nous comprenons ainsi l'inconvénient de cette approche et pourquoi la Mécanique de l'Endommagement s'est vue être rapidement un substitut.

FIGURE 1.1 – Propagation catastrophique d'une fissure de fatigue dans une structure métallique : phénomène d'endommagement non diffus qui pourrait être étudié dans le cadre de la fatigue à l'aide de la Mécanique de la Rupture [9]. Boeing 737 de la compagnie Aloha Airlines, Vol 243, 28 avril 1988, assurant la liaison entre les îles Hilo et Honolulu. Suite à un nombre de cycles décollage/atterissage très important (89090), et à un environnement agressif (salin, humide et chaud, vols dans l'archipel des îles Hawaï), l'adhésif assurant la liaison entre les plaques d'aluminium du fuselage s'est dégradé et a permis le phénomène de corrosion, qui a amplifié celui de fatigue, conduisant à l'arrachement d'une partie du fuselage de l'appareil.

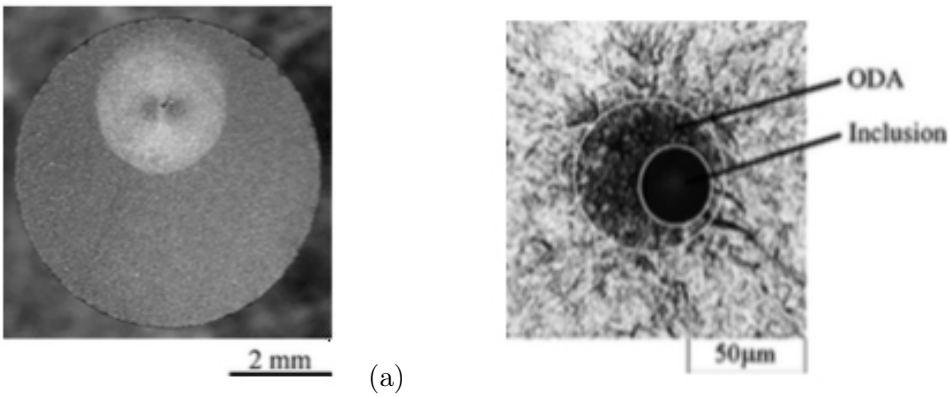
FIGURE 1.2 – Propagation d'une fissure de fatigue dans une structure : phénomène d'endommagement non diffus qui pourrait être étudié dans le cadre de la fatigue à l'aide de la Mécanique de la Rupture. Fracture de fatigue du calcanéum (os qui se situe au niveau du talon à l'arrière du pied) [2]. Cette pathologie touche surtout les coureurs en endurance.

FIGURE 1.3 – Rupture par fatigue d'une structure métallique : phénomène d'endommagement non diffus qui pourrait être étudié dans le cadre de la fatigue à l'aide de la Mécanique de la Rupture. Déraillement d'un train de transport de pétrole brut à Lac - Mégantic (Québec, Canada), le 6 juillet 2013 [15]. Le train comportait 5 locomotives en tête du train, puis un wagon couvert et 72 wagons-citernes. La cause du déraillement est une rupture de deux mâchoires d'attelage initiée par la présence de fissures de fatigue situées en surface des mâchoires : une des deux mâchoires d'attelage arrière de la seconde locomotive, une des deux mâchoires d'attelage avant du wagon couvert accrochée à la dernière locomotive. L'une (nous ne savons pas avec certitude laquelle) des deux mâchoires s'est rompue et a entraîné la rupture de la seconde. (a) Vue en situation de la mâchoire rompue de la locomotive. (b) Vue en situation de la mâchoire rompue du wagon couvert. (c) Mâchoire rompue de la locomotive. (d) Mâchoire rompue du wagon couvert. (e) Surface de rupture de la mâchoire rompue de la locomotive avec l'indication de fissures de fatigue antérieures au déraillement, situées en surface. (f) Surface de rupture de la mâchoire rompue du wagon couvert avec l'indication de fissures de fatigue antérieures au déraillement, situées en surface.



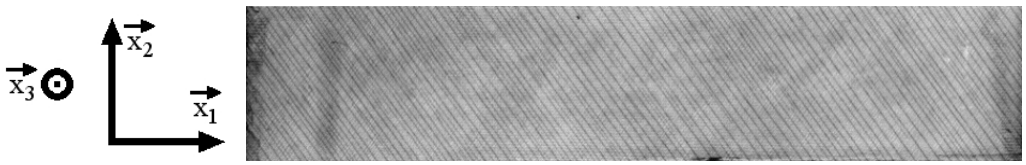
(a) (b)

FIGURE 1.4 – Rupture par fatigue d'une structure métallique : phénomène d'endommagement non diffus qui pourrait être étudié dans le cadre de la fatigue à l'aide de la Mécanique de la Rupture. Déraillement d'un train de marchandises à Lytton (Colombie - Britannique, Canada), le 31 juillet 2006 [14]. Le train comportait 20 wagons et transportait 1400 tonnes de charbon. La cause du déraillement est une rupture par fatigue du rail initiée à la surface du rail. Ce rail a été fabriqué en 2001 et posé en 2002. En 2005, 96 millions de tonnes ont été transportées sur cette voie de chemin de fer, et qu'au cours de l'année précédent l'accident, 25 millions de tonnes. (a) Vue de la section droite du rail au lieu de sa rupture par fatigue. (b) Zoom de la section droite du rail au lieu de sa rupture par fatigue.

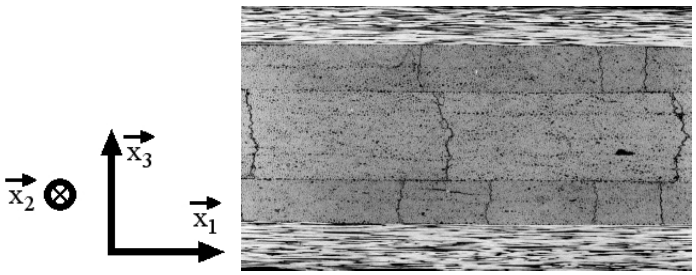


(a) (b)

FIGURE 1.5 – Illustration d'un phénomène de fatigue à très grand nombre de cycles sur un matériau métallique [38] : phénomène d'endommagement non diffus qui pourrait être étudié dans le cadre de la fatigue à l'aide de la Mécanique de la Rupture. Après un très grand nombre de cycles (1.11×10^8) d'une sollicitation faible de traction uniaxiale sur une éprouvette métallique cylindrique, une rupture de fatigue prend naissance au sein de l'éprouvette autour d'une inclusion. Ce phénomène n'apparaît pas pour un nombre de cycles plus faible. Ce phénomène a été baptisé phénomène Fish-Eye. (a) Vue de la section droite de rupture de l'éprouvette. (b) Zoom autour de l'inclusion qui est à l'origine de la rupture. Zone sombre (Optical Dark Area, ODA) autour de l'inclusion.



(a)



(b)

FIGURE 1.6 – Illustration d'un phénomène de fatigue sur un matériau composite à fibres continues : phénomène de fissuration intralaminaire (endommagement diffus) qui pourrait être étudié dans le cadre de la fatigue à l'aide de la Mécanique de l'Endommagement [65]. Eprouvette parallélépipédique stratifiée d'unidirectionnels orientés $(0°_2, +55°_2, -55°_2)_s$ sous sollicitation de fatigue en traction uniaxiale (vecteur directeur $\vec{x_1}$). Visualisation du phénomène de fissuration intralaminaire. (a) Observation par rayons X de la peau supérieure de l'éprouvette. (b) Observation par microscopie optique ($\times 45$) de la tranche de l'éprouvette.

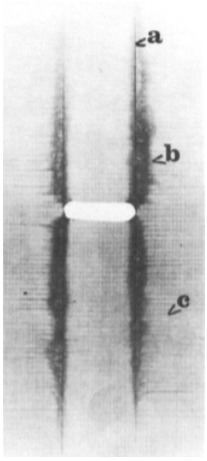


FIGURE 1.7 – Illustration de phénomènes de fatigue sur un matériau composite à fibres continues : phénomène de fissuration intralaminaire (endommagement diffus) qui pourrait être étudié dans le cadre de la fatigue à l'aide de la Mécanique de l'Endommagement et phénomène de délaminage (endommagement non diffus) qui pourrait être étudié dans le cadre de la fatigue à l'aide de la Mécanique de la Rupture. Eprouvette trouée parallélépipédique stratifiée d'unidirectionnels orientés [52] $(90°, 0°)_s$ sous sollicitation de traction uniaxiale (sens de la longueur de l'éprouvette). Observation par rayons X de la peau supérieure de l'éprouvette. (a) Fissuration intralaminaire dans la couche à 0°. (b) Délaminage entre les couches à 0° et 90°. (c) Fissuration intralaminaire dans la couche à 90°.

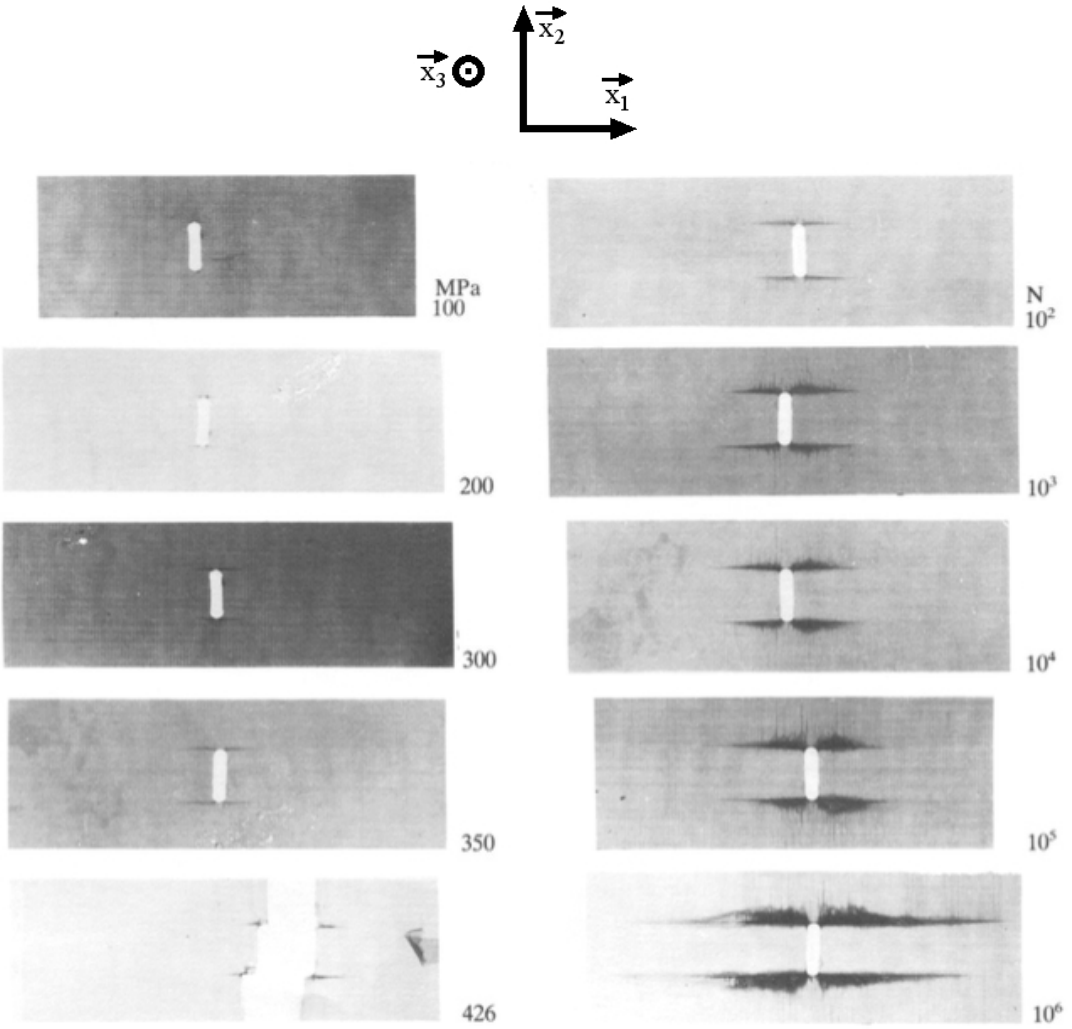


FIGURE 1.8 – Illustration de phénomènes de fatigue sur un matériau composite à fibres continues : fissuration intralaminaire et délaminage. Eprouvette trouée parallélépipédique stratifiée d'unidirectionnels orientés [52] $(90°, 0°)_s$ sous sollicitation de traction uniaxiale (vecteur directeur $\vec{x_1}$). Observation par rayons X de la peau supérieure de l'éprouvette. Visualisation du phénomène de fissuration intralaminaire et du phénomène de délaminage. (a) Sollicitation quasi-statique jusqu'à rupture. Visualisations à différents niveaux de charge. (b) Sollicitation de fatigue (300 MPa). Visualisations à différents nombre de cycles.

1.1.3 La fatigue et la Mécanique de l'Endommagement

Une idée très séduisante est alors de considérer la fatigue non pas du point de vue de la Mécanique de la Rupture, mais du point de vue de la Mécanique de l'Endommagement. Evidemment, il faut que le phénomène d'endommagement existant dans la structure puisse rentrer dans ce cadre : sa taille doit être petite au regard de celle d'une dimension caractéristique de la structure et diffus. Dans ce cas alors, pour un même matériau, les identifications ne sont plus dépendantes des grandeurs structurales et sont donc insensibles aux changements de forme ou aux changements de sollicitations. Tout semblerait alors résolu ? En réalité, les choses sont bien plus ambiguës que cela.

En fait, nous constatons, dans la littérature (nous verrons cela plus en détails dans les paragraphes suivants), le fait suivant pour ces cas de sollicitations de fatigue placées dans le cadre de la Mécanique de l'Endommagement : comme dans le cas quasi-statique, l'évolution locale des variables associées à chaque phénomène d'endommagement considéré prend la forme d'une équation différentielle. Mais hélas, au contraire du cas quasi-statique :

- ces équations ne sont quasiment jamais validées au regard du Second Principe de la Thermodynamique ;
- ces équations sont souvent élaborées de manière empirique, sans cadre mathématique rigoureux ;
- ces équations incorporent au niveau local, des grandeurs structurales qui n'ont aucune raison d'apparaître sans distorsion au niveau local. Nous pouvons notamment citer les classiques quantités nombre de cycles et rapport de charge, qui sont relatives à la sollicitation structurale, de fait appliquée sur la frontière de la structure considérée, et qui n'ont en aucun cas de lien avec le niveau local.

L'exemple le plus ancien (avant 1974 [11]) et le plus connu, est la construction d'une équation différentielle locale pour un usage dans le cadre de la Mécanique de l'Endommagement, à partir de la loi Miner structurale (Eq. 1.1). Cette équation différentielle prend une forme dite cyclique au sens où les incréments des variables d'endommagement (ici, dD) dépendent de l'incrément d'un compteur de nombre de cycles (ici, dn_i) :

$$\frac{dn_i}{N_R^{(i)}} = dD \tag{1.2}$$

Cette loi simple soulève déjà de nombreuses questions ? Que représentent $N_R^{(i)}$ et/ou n_i ? Un compteur local ? Il le faudrait, mais c'est toujours le même compteur structural que pour la loi de Miner structurale qui est considéré par les utilisateurs de cette loi. Un compteur de quoi ? Sûrement pas d'une (composante de) sollicitation qui n'a pas de sens au niveau de la Mécanique des Milieux Continus... Pourtant, c'est ce qui est pratiqué... Il faudrait que ce soit d'une composante du 2-tenseur des contraintes ... mais dans ce cas, comment y-avons-nous accès a priori lorsque nous savons que cette loi calcule un endommagement qui modifie les états locaux de contraintes ?

La loi Miner structurale (Eq. 1.1) a donc inspiré non seulement toutes les lois de fatigue construites dans le cadre de la Mécanique de la Rupture, mais aussi toutes celles construites dans le cadre de la Mécanique de l'Endommagement. Dans les deux cas, l'idée d'utiliser une variable compteur du nombre de cycles est bonne. Par contre, utiliser sans précaution, le compteur de la même grandeur physique dans les deux cas n'est pas correct. En fait, le problème vient du fait que le concept même de fatigue, s'il était parfaitement clair à son origine, ne l'est plus. Il suffit pour s'en convaincre de regarder la littérature.

1.1.4 Du flou dans la littérature scientifique... au sujet du concept de fatigue

Pour illustrer le flou qu'il existe actuellement au sujet de la notion de fatigue, regardons ce que présente l'encyclopédie Wikipédia au sujet du concept de Courbe de Wöhler (appelée aussi courbe $S - N$). L'avantage à l'examen de cette littérature est de ne pas citer de noms d'auteurs mais surtout d'avoir un reflet assez fidèle de ce que nous trouvons régulièrement dans de nombreux articles scientifiques qui traitent de la fatigue.

Extrait de la page de l'encyclopédie Wikipédia concernant la Courbe de Wöhler - La courbe de Wöhler est le plus ancien diagramme qui permette de visualiser *la tenue de la pièce ou des matériaux dans le domaine de fatigue.* Cette courbe définit une relation entre *la contrainte appliquée* (σ) (sigma parfois notée S) et le nombre de cycles à la rupture NR (en fait nombre de cycles pour lequel on observe P% de ruptures). En pratique, la courbe de Wöhler est généralement donnée pour une probabilité de rupture P = 0,5. Pour la tracer, on réalise généralement *des essais simples* qui consistent à soumettre chaque éprouvette à des cycles *d'efforts périodiques*, d'amplitude de chargement constante Sa fluctuant autour d'une valeur moyenne fixée et à noter le nombre de cycles au bout duquel l'amorçage d'une fissure est observé, appelé ici nombre de cycles à rupture NR ; ceci est fait pour plusieurs valeurs de l'amplitude alternée Sa et de R ; le rapport de charge R est le rapport de la contrainte minimum à la contrainte maximum du cycle périodique. Pour plus de commodité, ce nombre NR est reporté en abscisse sur une échelle logarithmique, et l'amplitude de contrainte Sa est reportée en ordonnée sur une échelle linéaire ou logarithmique pour plusieurs valeurs de R. R=-1 correspond à un cycle symétrique alterné, R=0 correspond à un cycle répété, R>0 correspond à des contraintes ondulés. La décomposition du chargement (par la méthode de comptage rainflow) permet d'exprimer celui-ci en cycles simples caractérisés par une contrainte alternée Sa et un rapport de charge R. Ainsi, à chaque structure essayée, correspond donc un point du plan (NR, Sa) et à partir d'un certain nombre d'essais à contrainte généralement décroissante, on peut établir la courbe de Wöhler. *La caractérisation d'un matériau* dans le domaine de la fatigue conventionnelle peut être faite par les courbes de Wöhler, en fonction du rapport de charge R, *issues d'essais sur éprouvettes lisses.* On peut aussi effectuer *des essais sur éprouvettes entaillées* pour valider les méthodes de calcul *en fatigue des structures.*

Nous reprenons à la suite, les extraits du texte indiqués en italique.

... *la tenue de la pièce ou des matériaux dans le domaine de fatigue* ... - La notion de fatigue est donc un concept aussi bien lié à une structure qu'à un matériau ?

... *la contrainte appliquée* ... - La notion de contrainte appliquée à une structure n'a aucun sens en Mécanique. Une sollicitation appliquée à une structure est modélisée par un torseur, c'est-à-dire, un champ de vecteurs possédant des propriétés particulières. Si la sollicitation appliquée est de type contact (à mettre en opposition avec un effort à distance), donc appliquée sur la frontière de la structure, alors, elle est modélisée par un champ de vecteurs (appelée densité surfacique d'effort), dont l'unité de chaque composante est identique à celle d'une contrainte.

... *des essais simples* ... - Pourquoi avoir ce besoin de simplicité ?

... *d'efforts périodiques* ... - Ici, contrairement à ce qui précède, la notion d'effort est correctement employée.

... *La caractérisation d'un matériau* ... - La notion d'effort est une notion structurale qui ne peut pas être associée avec la notion de matériau, qui sous-entend, la notion de Volume

Elémentaire Représentatif, soumis, dans ce cas, au tenseur des contraintes qui n'est pas un effort au sens Mécanique du terme.

... *issues d'essais sur éprouvettes lisses* ... - Est-cela qui caractérise la notion d'essai simple précédente ?

... *des essais sur éprouvettes entaillées* ... - Ces essais sont-ils là pour caractériser un matériau ? Une structure ?

... *en fatigue des structures* ... - Les essais sur éprouvettes lisses ou entaillées peuvent donc être représentatifs de ce qui se passe dans une structure ? Si nous souhaitons donner des éléments de réponse à cette question, rappellons que des essais de fatigue (traction simple uniaxiale) réalisés sur des éprouvettes minces ou épaisses en matériau métallique ne montrent pas les mêmes phénomènes d'endommagement : dans le premier cas, les phénomènes d'endommagement sont des phénomènes de peau [45], mais ce sont des phénomènes de cœur dans le second cas. En d'autres termes, dans le cas des matériaux métalliques, les effets de taille existent [54]. Cela justifie donc définitivement l'impossibilité de placer la fatigue des matériaux métalliques dans le cadre de la Mécanique de l'Endommagement, ou en tout cas, sans prendre beaucoup de précautions.

Nous pouvons également donner la définition de la durée de vie, selon l'American Society for Testing and Materials (ASTM) [53] : *the fatigue life is the number of cycle of stress or strain of a specified character that a given specimen sustains before failure of a specified nature occurs.* L'emploi du vocable specimen sous-entend que nous nous plaçons à l'échelle de la structure. Et donc, nous retrouvons dans cette définition la double incohérence qui confère, non seulement, aux vocables contrainte et déformation, la notion de sollicitation appliquée à une structure, mais aussi sous-entend que la notion de contrainte est potentiellement associée à la notion de structure. Nous pouvons aussi nous demander comment, à l'échelle d'une structure, appliquer une déformation.

Le paragraphe suivant illustre le caractère structural du concept de fatigue.

1.1.5 La fatigue : concept local ou structural ? Uniaxial ou multiaxial ? Illustrations

Sur un exemple de calcul de structure dont la géométrie est simple, ainsi que la sollicitation structurale, nous cherchons à illustrer les confusions qu'il ne faut pas faire concernant la notion de fatigue. Ces géométries et consignes structurales sont qualifiées de simples au sens où elles suffisent à l'illustration de nos propos sans distraire en raison d'une complexité non nécessaire. Cette simplicité est absolument différente de celle souhaitée précédemment, qui sous-entend (abusivement) qu'elle induit un état homogène uniaxial de contraintes.

Pour cela, nous nous appuyons sur deux géométries d'éprouvette parallélépipèdiques élancées peu épaisses, l'une étant entaillée, l'autre non (Fig. 1.9), la direction de l'élancement définissant l'axe longitudinal des éprouvettes. Chacune des éprouvettes est constituée de deux talons et d'un corps. Le plan moyen des éprouvettes est le plan $(\vec{x_1}, \vec{x_2})$ du repère d'observation (supposé galiléen) $R = (O, \vec{x_1}, \vec{x_2}, \vec{x_3})$, O étant situé au centre géométrique des éprouvettes. La géométrie de chaque éprouvette est symétrique par rapport aux trois plans de R et leur axe longitudinal est l'axe $(O, \vec{x_1})$. Selon leur axe longitudinal, les éprouvettes sont limitées par les sections droites notées S_{+a} et S_{-a}, situées dans les plans respectivement d'équation $x_1 = +a$ et $x_1 = -a$.

Chaque éprouvette est en équilibre global sous l'action de deux densités surfaciques d'effort uniformes alignées avec l'axe longitudinal, appliquées sur leurs faces extrêmes. La densité surfacique d'effort $\vec{F}_{+a}(M) = F(t)\vec{x_1}$ est appliquée sur S_{+a}. La densité surfacique d'effort $\vec{F}_{-a}(M) = -F(t)\vec{x_1}$ est appliquée sur S_{-a}. La loi horaire de $F(t)$ est une fonction en dent-de-scie. Les autres faces des éprouvettes sont libres d'effort. Nous supposons que les effets de la Pesanteur sont négligeables et que le problème peut être résolu dans le domaine quasi-statique.

Le couple d'éprouvettes non entaillée/entaillée est tour à tour constitué de deux matériaux différents. Pour les besoins de l'illustration, les deux matériaux considérés ont des comportements non linéaires radicalement différents : le premier est sensible aux effets de vitesse, le second est insensible aux effets de vitesse. Dans tous les cas, le corps des éprouvettes est supposé homogène et constitué de l'un des deux matériaux. Les talons, eux aussi supposés homogènes, sont constitués du même matériau que le corps mais restreint à la partie élastique linéaire du comportement.

Le premier matériau présente un comportement isotrope viscoélastique gouverné par une équation différentielle linéaire (de type Kelvin-Voigt).

Le second matériau est anisotrope élastique endommageable. Plus précisément, c'est un composite unidirectionnel de type carbone/résine dans lequel est susceptible de se développer le phénomène de fissuration (plane) intralaminaire usuellement baptisé fissuration transverse. Pour ce matériau anisotrope, nous définissons un repère d'anisotropie. Il est noté R_{loc} et $b_{loc} = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ définit sa base supposée orthonormée directe construite de la manière suivante :

- $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$ sont les vecteurs qui engendrent le plan contenant les fibres de l'unidirectionnel ;
- $\vec{e_1}$ est aligné avec l'axe longitudinal des fibres ;
- $\vec{e_2}$ est pris orthogonal à $\vec{e_1}$;
- $\vec{e_3} = \vec{e_1} \wedge \vec{e_2}$.

Dans ce repère, la géométrie du phénomène de fissuration est contenue dans le plan $(\vec{e_1}, \vec{e_3})$. Dans le cas des exemples traités ici, le corps des éprouvettes est constitué du composite pour lequel le repère d'anisotropie est : $\vec{x_1} = -\vec{e_2}$, $\vec{x_2} = \vec{e_1}$, $\vec{x_3} = \vec{e_3}$. En d'autre termes, selon la nomenclature usuelle associée à ces composites, le matériau constitutif est un unidirectionnel à (90°).

Nous souhaitons ici comparer aussi bien sur des aspects directionnels que d'intensité, les sollicitations appliquées à la structure (éprouvette), et les états de contraintes en différents (points) Volumes Elémentaires Représentatifs (VERs) du matériau constitutif des éprouvettes. En réalité, cette comparaison n'a pas lieu d'être car cela revient à comparer des choses qui ne sont pas comparables. Nous pouvons ainsi rappeler que les axiomes usuels de modélisation d'une action mécanique d'un système mécanique sur un autre, postulent que cette action utilise la notion de torseur (champ de vecteurs antisymétrique). Cette notion n'est évidemment pas celle tensorielle (tenseur de contrainte) qui a cours sur un VER. Néanmoins, pour réaliser ces comparaisons, pour les deux géométries d'éprouvette, nous définissons 5 points d'observation (seulement 4 sont utilisés sur les graphiques des comparaisons, Fig. 1.9), notés $(P_i)_{i=1,\dots,5}$, situés sur l'axe $(O, \vec{x_1})$ des éprouvettes, donc au centre géométrique des sections droites orthogonales à l'axe longitudinal :

- le point P_5 est situé sur la face S_{+a}. Il est donc un point matériel sur lequel est appliquée la sollicitation structurale ;
- le point P_1 est confondu avec le point O ;
- les autres points sont situés entre P_1 et P_5.

Nous allons également avoir une observation plus globale en construisant des grandeurs moyennes sur la totalité des éprouvettes. Plus précisément, si $Q(M,t)$ désigne une grandeur définie au point M, à l'instant t, nous allons chercher à comparer $Q(P_1,t)$, $Q(P_2,t)$, $Q(P_3,t)$, $Q(P_5,t)$ et $< Q >= \frac{1}{|eprouvette|} \int_{eprouvette} Q(M,t)$, sachant que $Q(P_5,t)$ est liée à la sollicitation globale.

La grandeur $Q(M,t)$ pourra être une composante du tenseur des contraintes ou de celui des déformations.

Nous constatons que, dans le cas d'une sollicitation en fatigue appliquée au matériau viscoélastique linéaire (éprouvette non entaillée : Fig. 1.10a / éprouvette entaillée : Fig. 1.12a) et à un matériau composite à fibres longues (éprouvette non entaillée : Fig. 1.14a / éprouvette entaillée : Fig. 1.16a), la consigne structurale n'est pas traduite de façon identique en chaque point d'observation à un instant donné (amplitudes différentes de σ_{11} et de ε_{11}). Pour le matériau viscoélastique linéaire, cette traduction dérive au fil des cycles pour chaque point d'observation (les valeurs moyennes de σ_{11} et ε_{11} augmentent), alors que pour le matériau composite à fibres longues, aucune dérive de σ_{11} et ε_{11} n'est observable en début de fatigue (comportement étudié sur les cinq premiers cycles). Le phénomène de distorsion de la consigne structurale diffère lorsque la géométrie de l'éprouvette change (Fig. 1.12 et 1.16) (amplitudes différentes de celle de l'éprouvette non entaillée à un instant et à un point d'observation donnés), et cette modification dépend du point d'observation. Tout cela tend à montrer que le phénomène d'endommagement en fatigue est un phénomène que nous devons, a priori, étudier au niveau local plutôt que structural.

Nous remarquons également que pour le matériau composite à fibres longues (Fig. 1.15) ou le matériau viscoélastique linéaire (Fig. 1.11), la consigne structurale uniaxiale est transmise non seulement suivant l'axe de la sollicitation, mais également dans toutes les directions, et les composantes de la contrainte varient en chaque point d'observation à un instant donné (amplitudes différentes). En outre, cette transmission dérive au fil des cycles pour chaque point d'observation (variation des valeurs moyennes des contraintes locales). Un changement de la géométrie de l'éprouvette (Fig. 1.17 et 1.13) implique des modifications, et ce, de manière différente en chaque point d'observation et pour chaque composante locale de la contrainte. Nous pouvons alors parler de multiaxialité de la fatigue.

En conclusion, la consigne structurale n'est en aucun cas le reflet de la consigne locale appliquée au VER, aussi bien en terme d'intensité (concentration ou gradient de contrainte possible), de direction (le tenseur des contraintes n'est pas uniaxial malgré l'application d'une consigne structurale uniaxiale) que de loi horaire (dans le cas d'un comportement sensible aux effets de vitesse). L'utilisation de grandeurs structurales (la norme d'une sollicitation structurale et le nombre de cycles qui lui est associé, par exemple) pour écrire une loi locale de fatigue peut donc s'avérer significativement incorrecte.

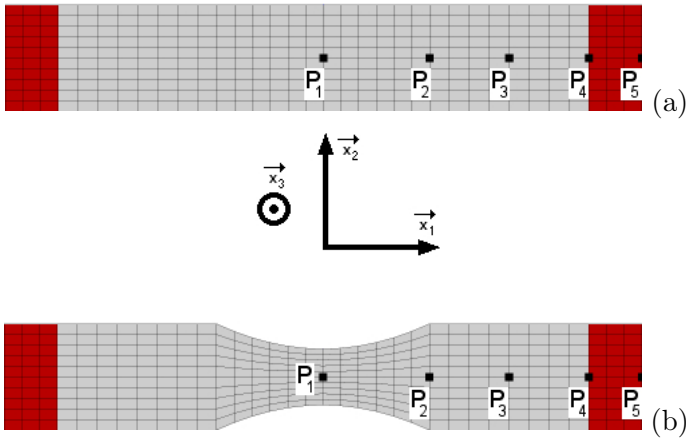
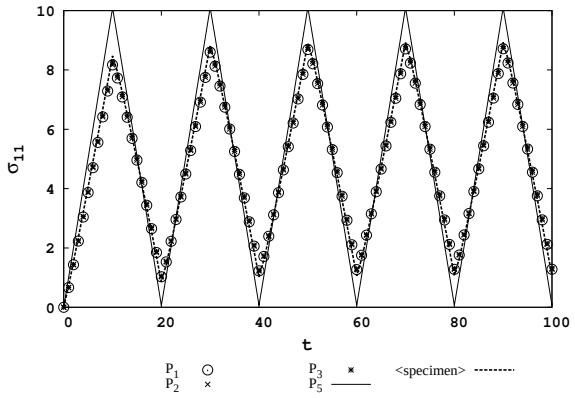
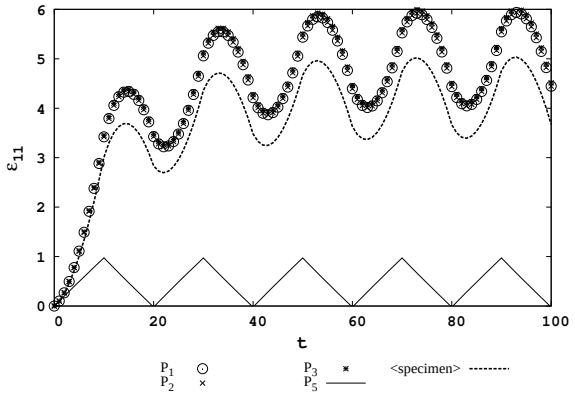


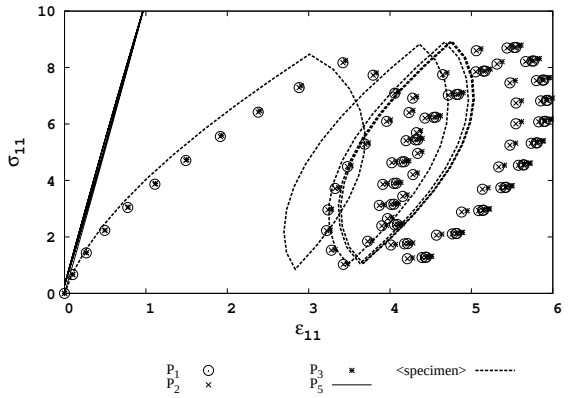
FIGURE 1.9 – Exemples pour l'illustration des problèmes rencontrés lors d'un problème de fatigue : distorsion locale d'une consigne structurale appliquée et multiaxialité. Traction uniaxiale cyclique sur éprouvette. Points P_1 à P_5 : points pour l'observation locale. Point P_5 est un des points où est appliquée la sollicitation structurale. (a) Eprouvette non entaillée. (b) Eprouvette entaillée.



(a)



(b)



(c)

FIGURE 1.10 – Illustration de la distorsion au niveau local d'une consigne structurale. Eprouvette non entaillée (Fig. 1.9a). Corps de l'éprouvette : matériau isotrope viscoélastique linéaire. Talons de l'éprouvette : restriction élastique linéaire du comportement du corps. Fonctions aux points P_1, P_2, P_3, P_5 (point d'application de la consigne) et moyennées sur l'éprouvette. (a) σ_{11} fonction du temps. Au point P_5, $\sigma_{11} = F$ (la consigne structurale appliquée). (b) ε_{11} fonction du temps. (c) σ_{11} fonction de ε_{11}.

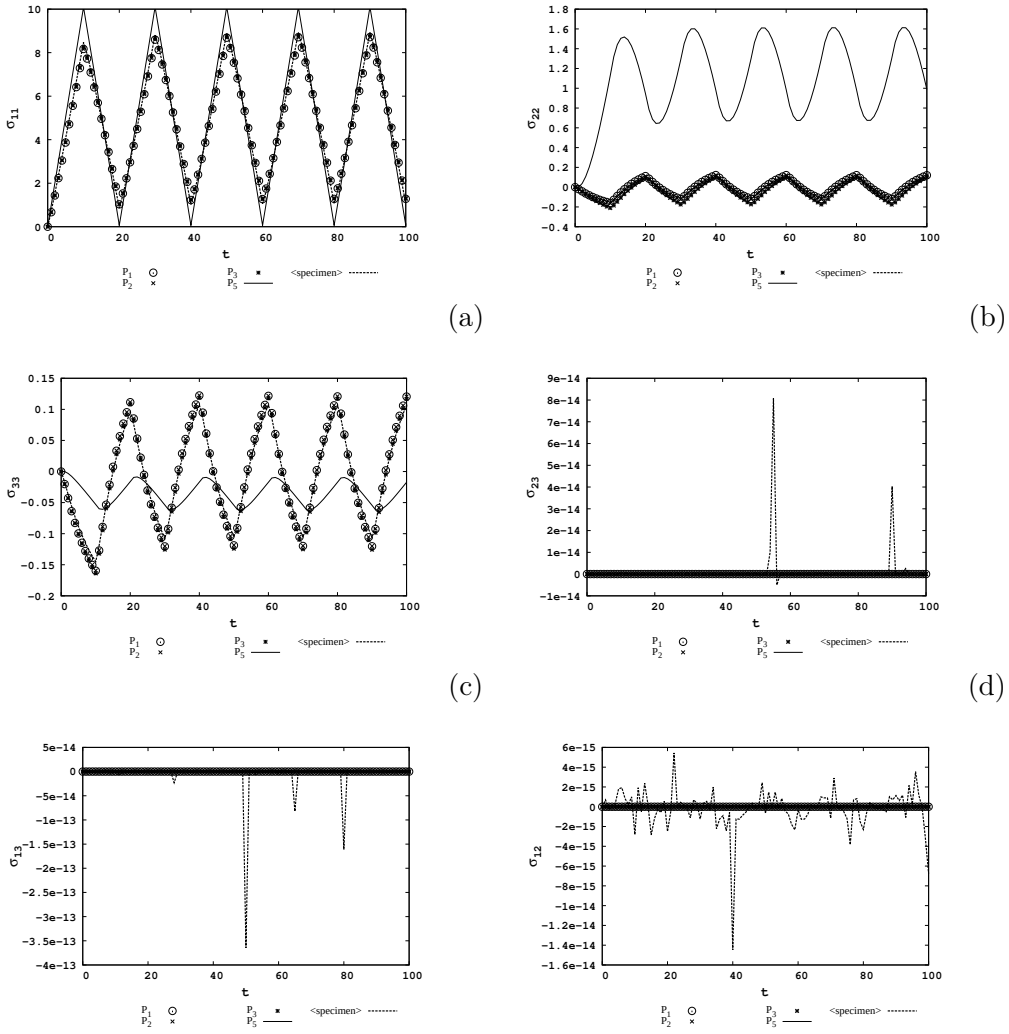
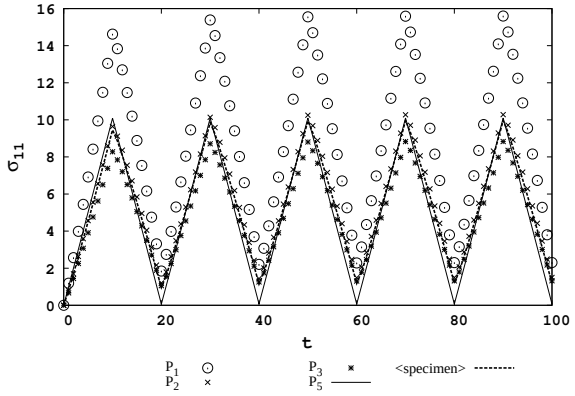
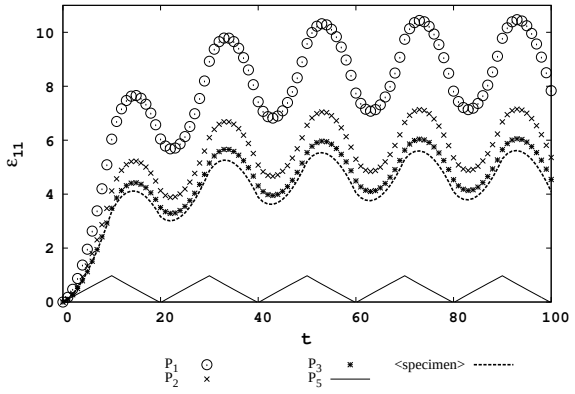


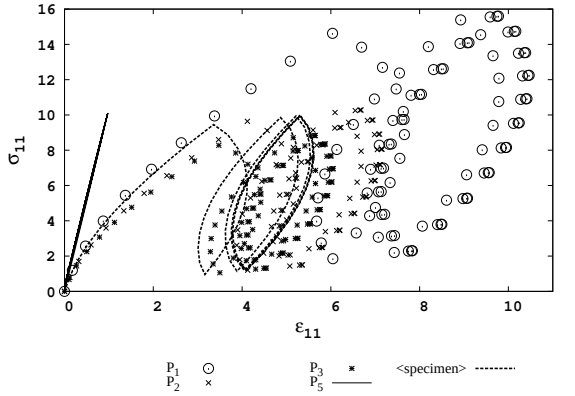
FIGURE 1.11 – Illustration de la multiaxialité locale induite par une consigne structurale uniaxiale. Eprouvette non entaillée (Fig. 1.9a). Corps de l'éprouvette : matériau isotrope viscoélastique linéaire. Talons de l'éprouvette : restriction élastique linéaire du comportement du corps. Fonctions aux points P_1, P_2, P_3, P_5 (point d'application de la consigne) et moyennées sur l'éprouvette. (a) σ_{11} fonction du temps. (b) σ_{22} fonction du temps. (c) σ_{33} fonction du temps. (d) σ_{23} fonction du temps. (e) σ_{13} fonction du temps. (f) σ_{12} fonction du temps. Les courbes (d), (e) et (f) indiquent des valeurs nulles ou très petites (bruit numérique).



(a)



(b)



(c)

FIGURE 1.12 – Illustration de la distorsion au niveau local d'une consigne structurale. Eprouvette entaillée (Fig. 1.9b). Corps de l'éprouvette : matériau isotrope viscoélastique linéaire. Talons de l'éprouvette : restriction élastique linéaire du comportement du corps. Fonctions aux points P_1, P_2, P_3, P_5 (point d'application de la consigne) et moyennées sur l'éprouvette. (a) σ_{11} fonction du temps. Au point P_5, $\sigma_{11} = F$ (la consigne structurale appliquée). (b) ε_{11} fonction du temps. (c) σ_{11} fonction de ε_{11}.

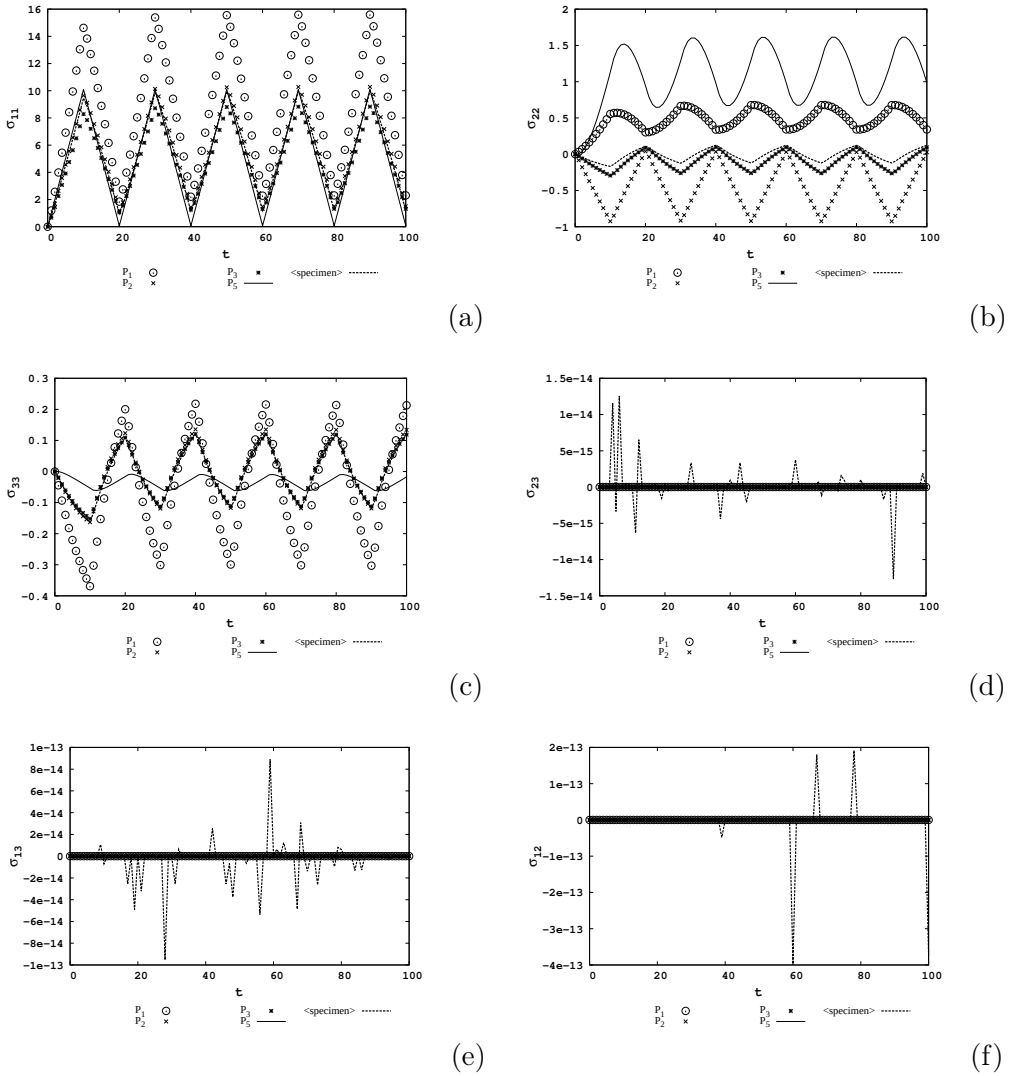
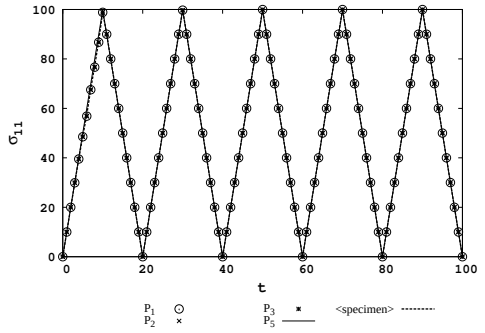
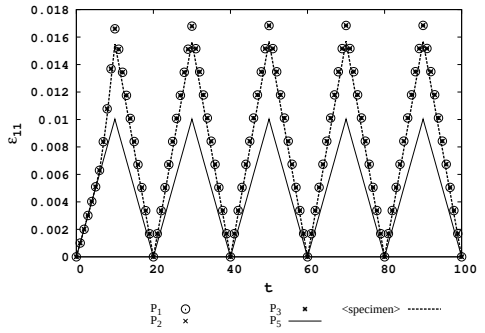


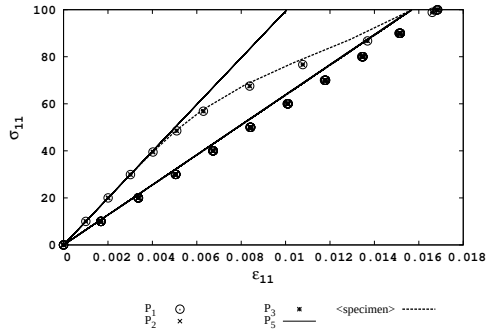
FIGURE 1.13 – Illustration de la multiaxialité locale induite par une consigne structurale uniaxiale. Eprouvette entaillée (Fig. 1.9b). Corps de l'éprouvette : matériau isotrope viscoélastique linéaire. Talons de l'éprouvette : restriction élastique linéaire du comportement du corps. Fonctions aux points P_1, P_2, P_3, P_5 (point d'application de la consigne) et moyennées sur l'éprouvette. (a) σ_{11} fonction du temps. (b) σ_{22} fonction du temps. (c) σ_{33} fonction du temps. (d) σ_{23} fonction du temps. (e) σ_{13} fonction du temps. (f) σ_{12} fonction du temps. Les courbes (d), (e) et (f) indiquent des valeurs nulles ou très petites (bruit numérique).



(a)



(b)



(c)

FIGURE 1.14 – Illustration de la distorsion au niveau local d'une consigne structurale. Eprouvette non entaillée (Fig. 1.9a). Corps de l'éprouvette : matériau composite carbone/résine (90°) élastique endommageable (fissuration intralaminaire). Talons de l'éprouvette : restriction élastique linéaire du comportement du corps. Fonctions aux points P_1, P_2, P_3, P_5 (point d'application de la consigne) et moyennées sur l'éprouvette. (a) σ_{11} fonction du temps. Au point P_5, $\sigma_{11} = F$ (la consigne structurale appliquée) (b) ε_{11} fonction du temps. (c) σ_{11} fonction de ε_{11}.

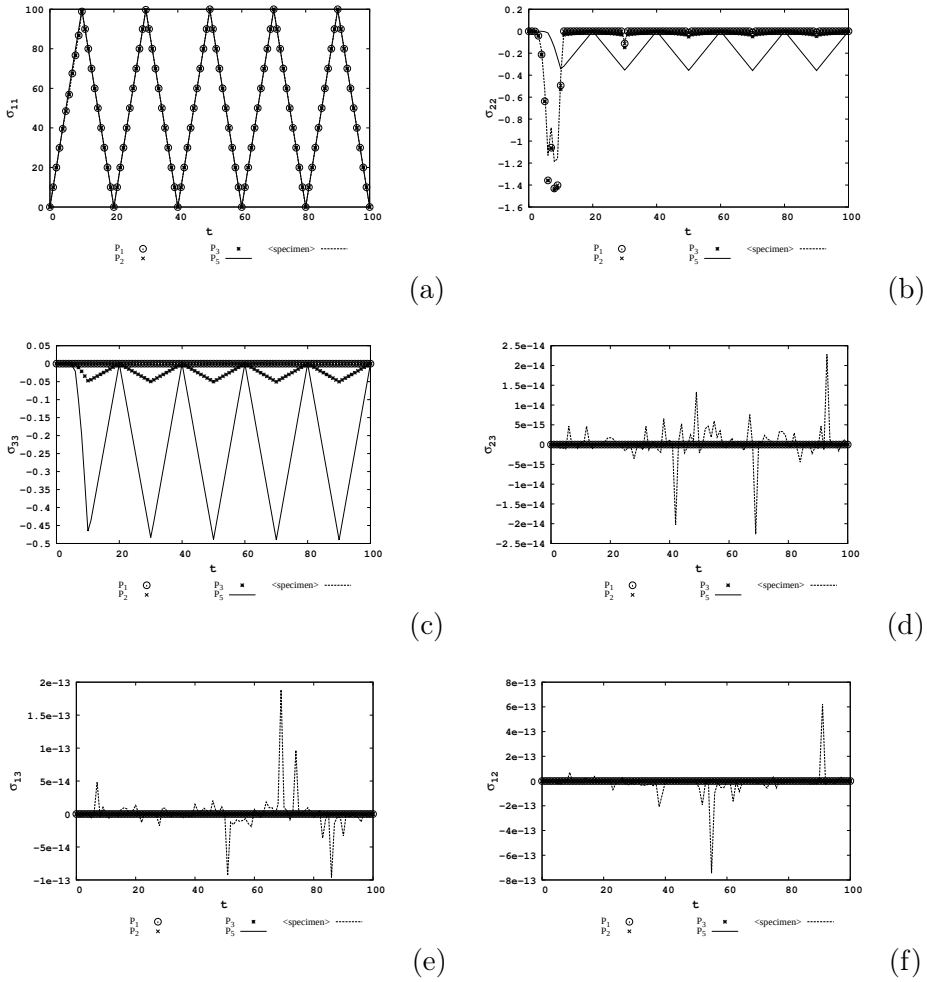
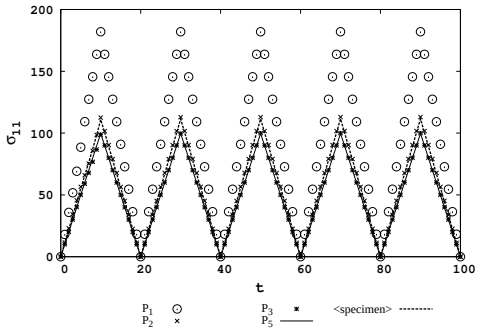
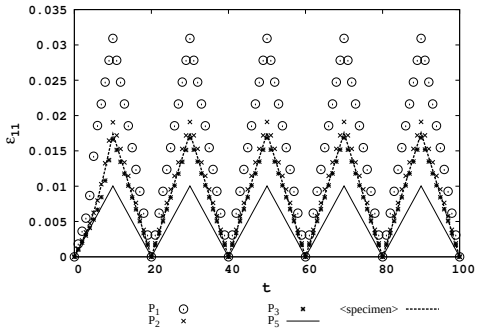


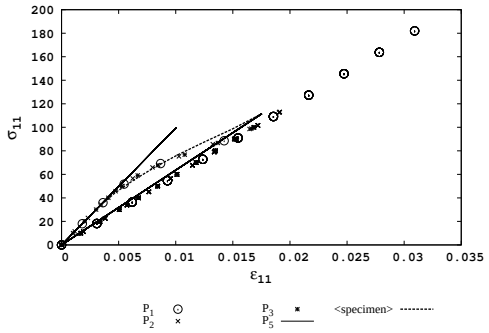
FIGURE 1.15 – Illustration de la multiaxialité locale induite par une consigne structurale uniaxiale. Eprouvette non entaillée (Fig. 1.9a). Corps de l'éprouvette : matériau composite carbone/résine (90°) élastique endommageable (fissuration intralaminaire). Talons de l'éprouvette : restriction élastique linéaire du comportement du corps. Fonctions aux points P_1, P_2, P_3, P_5 (point d'application de la consigne) et moyennées sur l'éprouvette. (a) σ_{11} fonction du temps. (b) σ_{22} fonction du temps. (c) σ_{33} fonction du temps. (d) σ_{23} fonction du temps. (e) σ_{13} fonction du temps. (f) σ_{12} fonction du temps. Les courbes (d), (e) et (f) indiquent des valeurs nulles ou très petites (bruit numérique).



(a)

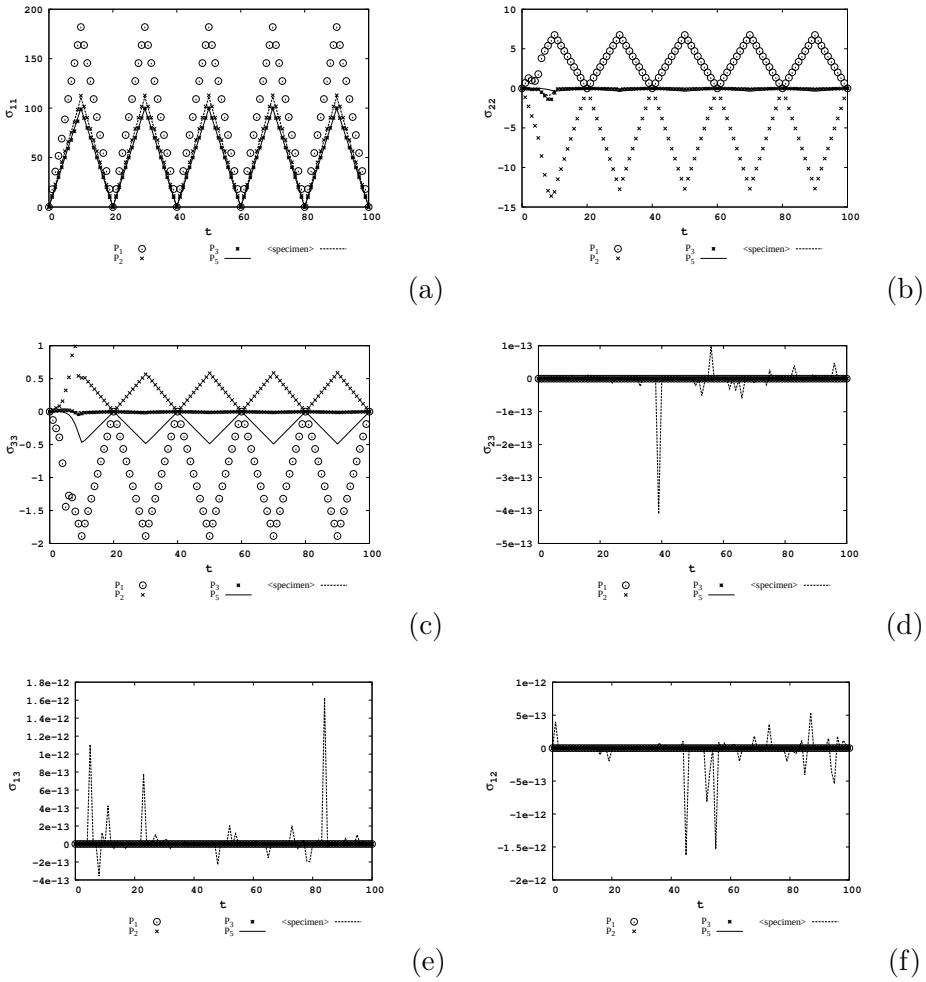


(b)



(c)

FIGURE 1.16 – Illustration de la distorsion au niveau local d'une consigne structurale. Eprouvette entaillée (Fig. 1.9b). Corps de l'éprouvette : matériau composite carbone/résine (90°) élastique endommageable (fissuration intralaminaire). Talons de l'éprouvette : restriction élastique linéaire du comportement du corps. Fonctions aux points P_1, P_2, P_3, P_5 (point d'application de la consigne) et moyennées sur l'éprouvette. (a) σ_{11} fonction du temps. Au point P_5, $\sigma_{11} = F$ (la consigne structurale appliquée). (b) ε_{11} fonction du temps. (c) σ_{11} fonction de ε_{11}.



(a) (b) (c) (d) (e) (f)

FIGURE 1.17 – Illustration de la multiaxialité locale induite par une consigne structurale uniaxiale. Eprouvette entaillée (Fig. 1.9b). Corps de l'éprouvette : matériau composite carbone/résine (90°) élastique endommageable (fissuration intralaminaire). Talons de l'éprouvette : restriction élastique linéaire du comportement du corps. Fonctions aux points P_1, P_2, P_3, P_5 (point d'application de la consigne) et moyennées sur l'éprouvette. (a) σ_{11} fonction du temps. (b) σ_{22} fonction du temps. (c) σ_{33} fonction du temps. (d) σ_{23} fonction du temps. (e) σ_{13} fonction du temps. (f) σ_{12} fonction du temps. Les courbes (d), (e) et (f) indiquent des valeurs nulles ou très petites (bruit numérique).

1.1.6 Finalement, conceptuellement, que doit-on faire ?

La naissance de l'étude de la fatigue (début du 19ème, Albert [1]) s'est faite sur des structures et donc dans le cadre de la Mécanique de la Rupture (début du 20ème siècle, Hopkinson [31], Griffith [24]). Dans ce cadre, nous pouvons estimer que les prévisions sont bonnes (surtout du point de vue expérimental). Ces bonnes prévisions sont essentiellement dues à un processus d'identification de ses lois qui est fait sur la structure considérée. Donc, le prix à payer pour cette qualité de résultats est une identification par problème (un matériau, une géométrie, un type de sollicitation) traité. Et, dans ce fonctionnement avec la Mécanique de la Rupture, rien n'est envisageable pour atténuer ce coût d'identification qui peut être rédhibitoire.

Alors, l'apparition de la Mécanique de l'Endommagement (milieu du 20ème siècle, Kachanov [32]) avec ses appuis sur la Mécanique des Milieux Continus (début du 19ème siècle, Navier [41]) a fait envisager que les problèmes de fatigue des structures pouvaient être traités dans un cadre plus souple. En particulier, les identifications ne sont alors plus dépendantes ni de la géométrie, ni de la sollicitation, mais uniquement attachées au matériau considéré. Pourtant, d'autres difficultés sont apparues qui induisent un emploi abusif des concepts de la Mécanique de l'Endommagement, lorsqu'elle traite les problèmes de fatigue des structures. Schématiquement, il s'agit de l'emploi systématique et non justifié, de grandeurs structurales dans une équation (différentielle) d'évolution locale.

Malgré cela, notre objectif est d'utiliser la Mécanique de l'Endommagement pour réaliser le dimensionnement à rupture de structures soumises à des sollicitations de fatigue. Pour y parvenir nous allons tenter de faire rentrer la fatigue dans un cadre de fonctionnement justifié et structuré afin qu'elle puisse utiliser correctement les concepts de la Mécanique de l'Endommagement.

La question qui se pose maintenant est de savoir si tous les phénomènes physiques d'endommagement qui peuvent apparaître dans les structures soumises à une sollicitation de fatigue se prêtent à ce cadre.

1.2 La fatigue dans le cadre de la Mécanique l'Endommagement. Le point de vue des phénomènes

Pour pouvoir utiliser la Mécanique de l'Endommagement à la prévision de la rupture d'une structure en fatigue, il faut que le phénomène d'endommagement considéré soit de petite taille et diffus. Des phénomènes d'endommagement de cette nature existent-ils si le matériau constitutif de la structure est un métal ? Des phénomènes d'endommagement de cette nature existent-ils si le matériau constitutif de la structure est un composite ?

1.2.1 Pour les matériaux métalliques, un cadre mal adapté aux phénomènes et mal utilisé. Bibliographie succincte

Un état de l'art quasi-exhaustif concernant la fatigue des structures et des matériaux métalliques peut être trouvé dans les publications de Schutz [49] (1996) et de Schijve [48] (2003). Il y est plutôt question des approches de la fatigue faite dans un cadre de la Mécanique de la Rupture. Il ressort de ces articles que jusqu'à donc il y a une quinzaine d'années :

— expérimentalement, les plus grands nombres de cycles effectués sont de l'ordre de 10^6 et les résultats obtenus sont admis comme étant extrapolables jusqu'à un nombre de cycles tendant vers l'infini ;

— ainsi, il existe une limite de fatigue non nulle (c'est-à-dire une intensité de sollicitation non nulle) en-dessous de laquelle le matériau de la structure considérée ne s'endommage pas, soit, en d'autres termes, en-dessous de laquelle la structure considérée ne sera jamais en état de rupture ;
— les phénomènes de fatigue sont observés comme étant des phénomènes surfaciques (Fig. 1.3, Fig. 1.4).

Cette dernière remarque est importante : elle souligne sans équivoque qu'une approche de la fatigue des structures métalliques basée sur la Mécanique de l'Endommagement n'est pas correcte. Pourtant ce type d'approche a été largement réalisée et utilisée, notamment pour son avantage considérable quant aux aspects d'identification des lois, par rapport à la Mécanique de la Rupture. Les publications de Chaboche [12] (1974), Chow et Wei [13] (1991), Xiao *et al.* [73] (1998) et Shen *et al.* [51] (2015) sont chronologiquement et scientifiquement représentatives de ce courant de pensée. Ces travaux ne devraient donc pas utiliser la Mécanique de l'Endommagement pour étudier ces phénomènes physique de fatigue.

Depuis une quinzaine d'année, les techniques expérimentales d'essais et d'observations ayant été améliorées, les idées plus anciennes ont été bousculées [36] [34] :

— expérimentalement, les plus grand nombres de cycles effectués sont supérieurs à 10^{10} ;
— les phénomènes de fatigue sont observés comme étant des phénomènes surfaciques si les structures testées sont minces, mais aussi volumiques si les structures testées sont épaisses et ceci pour à peu près tous les ordres de grandeurs de nombre de cycles ;
— pour des nombres de cycles très importants (de l'ordre de 10^9 et au-delà) donc des sollicitations d'intensité très faible, quelle que soit l'épaisseur de la structure testée, nous observons des endommagements volumiques, la rupture de la structure et par conséquent, la disparition de la notion de limite de fatigue qui avait été jusqu'à présent admise ;
— ces endommagements volumiques semblent naître à cause d'inclusions non métalliques et donc de manière aléatoire quant à la pureté du matériau de la structure (Fig. 1.5).

Ces nouvelles conclusions significativement différentes des précédentes, ne vont de toute façon toujours pas vers le bien-fondé de l'utilisation de la Mécanique de l'Endommagement pour traiter la fatigue des structures métalliques.

1.2.2 Pour les matériaux composites à fibres continues, un cadre bien adapté aux phénomènes mais mal utilisé. Bibliographie succincte

Pour bien aborder le cas des matériaux composites, il est important d'avoir en tête le fait que les habitudes nées de l'utilisation des matériaux métalliques et de leurs modèles ne sont pas toujours très bonnes lorsqu'il s'agit de les appliquer à ces matériaux [33].

Dans le cas où le concept de fatigue est appliqué aux structures dont le matériau constitutif est de type composite à fibres continues (typiquement les stratifiés d'unidirectionnels orientés), le point qu'il convient de mentionner en premier lieu est le fait que tous les endommagements présents dans ces structures composites sont des endommagements qui apparaissent dans l'épaisseur des structures. En revanche, ils ne sont pas tous diffus (le délaminage par exemple) : ils ne sont donc pas tous candidats à pouvoir être traités par la Mécanique de l'Endommagement. Par contre, à une échelle matérielle judicieusement choisie, le phénomène de fissuration intralaminaire l'est. C'est d'ailleurs lui sur lequel nous concentrerons nos efforts et qui servira de support à nos applications (Fig. 1.6, Fig. 1.7, Fig. 1.8). Ainsi, pour lui spécifiquement (et à cette échelle), nous pourrons parler de la fatigue du matériau composite à fibres continues dans le cadre de la Mécanique de l'Endommagement. Ce phénomène d'endommagement sera étudié très en détail plus loin dans le document.

En second lieu, précisons que si dans ce document une critique est formulée au niveau du choix de la modélisation des phénomènes d'endommagement de fatigue par la Mécanique de l'Endommagement, en revanche, aucune critique n'est formulée quant à l'utilisation même de cette Mécanique, ni à la description physique de ces phénomènes. En effet, de nombreux travaux, depuis de nombreuses années, les décrivent parfaitement, notamment ceux de Talreja *et al.* [55] [59] [58] [57] [21].

Ensuite, précisons que si notre propos est de parler de la fatigue des composites, il y a encore peu de temps, il était plutôt d'usage de penser que les phénomènes de fatigue ne concernaient pas ces matériaux et notamment ceux à fibres continues en carbone. Ainsi, il y a encore moins d'une dizaine d'années, l'endommagement en fatigue pour les composites à fibres longues de carbone n'était généralement pas considéré en conception [5]. En fait, cela est justifié en première approximation : les fibres de carbone ne sont effectivement pas sujettes à la fatigue et conservent leurs propriétés quelles que soient les sollicitations (inférieures à celles de rupture évidemment) auxquelles elles sont soumises. Néanmoins, il est désormais connu que des endommagements mineurs (fissuration intralaminaire, par exemple), provoqués sous sollicitations quasi-statiques ou de fatigue, peuvent être des sites privilégiés de concentrations de contraintes et à l'origine de ruptures de fibres ou de délaminage, endommagements fortement préjudiciables pour la tenue mécanique d'une structure en composites à fibres longues de carbone. De même, le caractère visqueux de la matrice de ces composites induit une augmentation, au cours du temps, de la charge supportée par les fibres, qui donc continuent de se rompre, même lorsque la sollicitation structurale appliquée est maintenue constante [8]. Finalement, parler de la fatigue des composites à fibres continues de carbone est désormais admis, d'autant que la rupture de ces matériaux est de type mort-subite, et que le carbone étant onéreux, diminuer les coefficients de sécurité permet d'envisager des économies importantes, sous réserve que les structures soient finement dimensionnées.

Les commentaires qui suivent sont relatifs ou issus de la lecture d'une unique publication, celle de Degriek et Van Paepegem [16]. Cette publication fait l'inventaire (en 2001, 141 références) quasi-exhaustif des modèles de fatigue existants (à cette date) sur les composites à fibres continues. Les remarques qui vont être faites sont toujours valables sur les modèles écrits depuis.

Les deux remarques majeures faites par Degriek et Van Paepegem qui illustrent le propos qui est le nôtre (mise en évidence de flou dans le discours relatif à la notion de fatigue) sont les suivantes :

- beaucoup de modèles sont établis pour des stratifiés particuliers, sous des sollicitations particulières et l'extrapolation à des structures réelles est très compliquée, voire impossible ;
- la plupart des campagnes expérimentales d'observation du phénomène de fatigue et/ou d'identification de ces modèles sont réalisées par des essais de traction uniaxiale sur des éprouvettes cylindriques, donc, dans des conditions d'uniaxialité des contraintes (à l'échelle qui ne voit qu'un matériau homogène au sein de l'éprouvette testée), ce qui est exceptionnel au sein d'une structure.

Il ressort également de l'analyse de Degriek et Van Paepegem que les modèles de fatigue peuvent se classer en trois grandes catégories :

- catégorie 1 - Les modèles visant à prédire la durée de vie. Ces approches, généralement macroscopiques, ne tiennent pas compte du mécanisme d'endommagement mais sont basées sur l'introduction d'un critère de rupture en fatigue et l'utilisation des courbes de Whöler, qui définissent, pour une structure, une relation entre la sollicitation (abusivement souvent appelée contrainte) appliquée et le nombre de cycles à rupture ;

— catégorie 2 - Les modèles phénoménologiques qui utilisent le concept de propriété résiduelle. Ils donnent généralement l'évolution d'une propriété en fonction du nombre de cycles ;
— catégorie 3 - Les modèles qui prennent en compte l'aspect progressif de l'endommagement et utilisent une ou plusieurs variables d'endommagement pour décrire l'accumulation de l'endommagement.

Les commentaires que nous pouvons faire sur les différentes classes précédentes sont les suivants :
— catégorie 1 - Ces modèles sont donc implicitement fondés (plus ou moins adroitement) sur la Mécanique de la Rupture. Ils sont, a priori, non sujets à caution ;
— catégorie 2 - Ces modèles sont généralement écrits ou utilisés de manière locale avec la Mécanique de l'Endommagement alors que leur formalisme est (ou devrait être clairement) celui la Mécanique de la Rupture ;
— catégorie 3 - Ces modèles sont généralement correctement écrits dans le cadre de la Mécanique de l'Endommagement. En revanche, leur loi d'évolution locale utilise le concept structural de nombre de cycles (sans justification), n'est jamais justifiée thermodynamiquement (à part, par le fait que l'endommagement est strictement croissant) et les essais d'identification se résument généralement à des essais où l'état de contrainte dans l'éprouvette d'identification est uniaxial.

Toutes ces remarques confirment, pour les matériaux composites à fibres longues, le flou déjà mis en évidence sur le sujet de la fatigue.

Rajoutons, pour clore cette discussion sur l'état de l'art des modèles de fatigue dédiés aux composites, quelques informations chronologiques en évoquant les grandes tendances (d'ailleurs plutôt indépendantes du concept de fatigue, mais bien plus liées à la nature même et à la nouveauté de ces matériaux [59]), qui se sont dégagées durant les 30 dernières années. Les premiers matériaux utilisés dans les applications industrielles de haute technologie furent les matériaux métalliques. Aussi, les lois de comportement de ces matériaux examinées sous l'angle de sollicitations quasi-statiques ou de fatigue furent largement étudiées. Il est donc légitime que l'histoire de la fatigue pour les matériaux composites y trouve son inspiration, avant de se distinguer par des techniques particulières récentes. Ainsi, dans les années 1980, période où l'essort des matériaux composites devient significatif, les modèles de fatigue pour ces matériaux se retrouvent en général, sous la forme de lois de Miner (années 1940) et Paris (années 1960) et des concepts de courbes de Whöler. Puis, à partir des années 1990, l'essor de la Mécanique de l'Endommagement, induit l'apparition de modèles dont la structure est spécifiquement adaptée aux composites [29] [28] [44]. Enfin, depuis les années 2000, ce cadre de la Mécanique de l'Endommagement est fortement couplé avec les processus multi-échelles.

Pour notre part, nous sommes placés dans cette dernière mouvance.

1.3 Critères discriminants des modèles d'endommagement en fatigue

1.3.1 Liste des critères discriminants importants pour un modèle de fatigue

Notre optique pour traiter le phénomène de fatigue structural est de se placer dans le cadre d'une approche locale rigoureuse déduite de la Mécanique de l'Endommagement (et de la Thermodynamique des Milieux Continus) et donc d'améliorer, au sens le plus large, l'existant (nous

verrons au chapitre suivant ce que concrètement cela signifie pour nous) : il est donc important de savoir ce sur quoi doivent porter ces améliorations, ou en d'autres termes, il est important de savoir ce que doit vérifier un modèle idéal, c'est-à-dire un modèle exempt de tout défaut de modélisation (évidemment limité à son cadre d'application). Pour cela, nous distinguons :

- l'analyse des phénomènes physiques d'endommagement et la pertinence de les placer dans le cadre de la Mécanique de l'Endommagement (**Condition C0**) ;
- la définition du modèle (hypothèses, variables d'état, lois d'état) ;
- les lois d'évolution des phénomènes écrites dans un cadre quasi-statique ;
- les lois d'évolution des phénomènes écrites dans un cadre de fatigue ;
- l'applicabilité de cet ensemble pour un calcul de structure en fatigue.

Pour être rigoureusement valide, un modèle de comportement doit respecter des conditions générales (C1 à C4) :

- il doit être cohérent avec les Grands Principes de la Physique et de la Mécanique. Ainsi, notamment, le modèle doit :
  - **Condition C1** : être S-invariant (où S est le groupe de symétries matérielles du matériau), c'est-à-dire que le modèle de comportement doit respecter les symétries du matériau [68] [67] ;
  - **Condition C2** : respecter le principe d'objectivité, encore appelé Principe d'Indifférence Matérielle (indépendance du modèle vis-à-vis du référentiel d'observation) ;
  - **Condition C3** : être thermodynamiquement admissible, c'est-à-dire, respecter le Second Principe de la Thermodynamique ;
- **Condition C4** : ne montrer aucune discontinuité dans les relations d'état. Ici spécifiquement, aucune discontinuité ne doit exister dans la relation 2-tensorielle contrainte / déformation.

Dans le cas où le modèle considéré est un modèle d'endommagement, des conditions (C5 à C7) plus spécifiquement liées au phénomène modélisé, viennent s'ajouter aux précédentes :

- **Condition C5** : le phénomène d'activation/désactivation de l'endommagement (effet unilatéral du dommage) doit être correctement traduit ;
- **Condition C6** : l'endommagement présent dans le matériau doit provoquer la dégradation cohérente de ses propriétés mécaniques ;
- **Condition C7** : l'anisotropie induite par l'endommagement doit être traduite correctement.

Dans le cas où les conditions précédentes sont vérifiées, il faut se demander avec quel degré de généralité. En d'autres termes :

- **Condition G1** : le cadre d'utilisation du modèle est-il restreint ou non par des hypothèses (par exemple, modélisation en contraintes ou déformations planes) ;
- **Condition G2** : le modèle est-il pertinent vis-à-vis du phénomène qu'il cherche à modéliser. En d'autres termes, le modèle vérifie-t-il l'ensemble des critères de cohérence, en raison de sa simplicité ou de simplifications, c'est-à-dire au détriment de la finesse de la modélisation du phénomène qu'il cherche à modéliser, ou, réciproquement, le modèle rend-t-il compte très précisément du phénomène qu'il modélise malgré des lacunes dans ses critères de cohérence, ou bien encore, est-il parfait dans son cadre d'application (au sens où il vérifie tous ses critères de cohérence) ;
- **Condition G3** : le fonctionnement des lois d'évolution dans un cadre quasi-statique est-il général ou non. Par exemple, les lois sont-elles multiaxiales ;
- quoi d'autre est susceptible de restreindre la généralité du modèle.

Si ce qui précède n'est pas spécifiquement dédié au sujet de ce travail, en revanche, pour notre propos (la mise en place d'une approche locale de la fatigue par la Mécanique de l'Endommagement), il faut absolument avoir un regard critique sur la loi de fatigue du modèle considéré (ou examiné), c'est-à-dire examiner attentivement le cadre de fonctionnement des lois de fatigue inscrites dans le modèle considéré (ou examiné). Notamment :

- **Condition F1** : sont-elles justifiées vis-à-vis du Second Principe de la Thermodynamique à partir de leur forme quasi-statique, ou autrement, ou pas du tout ;
- **Condition F2** : sont-elles locales ou non, c'est-à-dire, en d'autres termes, sont-elles inscrites dans un Volume Elémentaire Représentatif (VER) ;
- **Condition F3** : utilisent-elles des paramètres structuraux dans leur formulation (par exemple, un compteur du nombre de cycles, le classique rapport de charge) ;
- **Condition F4** : intègrent-elles tous ou une partie des éléments caractéristiques de la sollicitation structurale. La question qui se pose ici est de savoir si avec les éléments caractéristiques utilisés, nous avons la représentation complète de la sollicitation au sein de la loi. Par exemple, l'utilisation du minimum et du maximum ne donne aucune indication sur la sollicitation entre ces deux valeurs ;
- **Condition F5** : sont-elles écrites de manière multiaxiale ou non ;
- **Condition F6** : nécessitent-elle des hypothèses particulières (autres que celles classiques pouvant être posées sur les phénomènes physiques) ;
- **Condition F7** : comment sont réalisées leurs identifications.

Enfin, une question déterminante sera de juger, objectivement, si le modèle considéré pourrait être ou non employé à réaliser un calcul de structure complexe et le cas échéant, sous quelles conditions (**Condition F8**).

Afin de simplifier le discours de la suite du document :

- les conditions **C0** à **C7** sont baptisées les conditions (C) ;
- les conditions **G1** à **G3** sont baptisées les conditions (G) ;
- les conditions **F1** à **F8** sont baptisées les conditions (F).

1.3.2 Quelques exemples détaillés... et confirmation qu'il y a du flou au sujet du concept de fatigue

A fin d'illustration, nous discutons quelques modèles dans l'ordre chronologique de leur parution :

- pour les matériaux métalliques :
  - . 1974 Chaboche [12] ;
  - . 1991 Chow et Wei [13] ;
  - . 1998 Xiao *et al.* [73] ;
  - . 2015 Shen *et al.* [51] ;
- pour les matériaux composites :
  - . 2002 Thionnet *et al.* [65]
  - . 2004 Brighenti [10] ;
  - . 2010 Gude *et al.* [25].

Il est important de préciser que ces modèles ont été choisis car ils revendiquent l'utilisation du cadre de la Mécanique de l'Endommagement (celui dans lequel nous nous plaçons pour notre étude). Egalement, nous avons choisi des modèles qui couvrent la période de temps qui démarre avec le souhait de prendre en compte le phénomène de fatigue dans les applications industrielles de haute technologie jusqu'à maintenant. Enfin, nous avons estimé que ces modèles sont plutôt

représentatifs et symptomatiques de l'ensemble de la littérature sur le sujet. Evidemment, et notamment pour les plus anciens, les auteurs ont depuis modifié leur modèles.

Dans la discussion qui va suivre, seules les conditions (F), spécifiquement dédiées à cette étude, sont examinées. Ces modèles peuvent donc avoir failli à la vérification des conditions (C) et des conditions (G). Par exemple, nous avons vu dans les paragraphes précédents, que pour les matériaux métalliques, la condition C0 ne peut pas, en général, être vérifiée car les endommagement de fatigue ne sont pas diffus. Mais, ici, le propos n'est pas de discuter cela.

Le bilan de ces discussions figure dans les tableaux (Tab. 1.1) et (Tab. 1.2). Au-delà strictement de ce bilan, il ressort que d'avoir pu répondre précisément aux questions posées a été dans la très grande majorité des cas, compliqué. La raison à cela est la même que celle qui explique le sentiment général que nous avons mis en évidence depuis le début, au sujet de la notion de fatigue : il y a beaucoup de flou et d'imprécisions. Aussi, les réponses données dans les tableaux sont celles qui nous ont semblées le plus proche de la vérité.

Conditions	F1	F2	F3	F4
Année / Auteurs / Thématique	Justification vis-à-vis du 2^{nd} Principe de la Thermodynamique ?	Loi locale (VER) ?	Utilisation de paramètres structuraux (nombre de cycles. . .) ?	Sollicitation structurale totalement prise en compte ?
1974 / Chaboche [12] / Endommagement des matériaux métalliques	Loi justifiée vis-à-vis du 2^{nd} Principe de la Thermodynamique mais non issue du cas quasi-statique car la distinction est faite avec d'autres types d'endommagement (fluage notamment).	Loi locale.	Utilisation de paramètres structuraux dans la formulation de la loi : minimum et maximum d'une sollicitation uniaxiale, nombre de cycles et nombre de cycles à rupture sous traction uniaxiale.	Utilisation d'éléments caractéristiques de la sollicitation structurale mais ne suffisant pas à décrire la sollicitation structurale complète. Ceci est d'autant plus vrai que des hautes températures sont considérées induisant un comportement potentiellement visqueux : le minimum et le maximum (ou des équivalents) de la sollicitation ne décrivent pas l'évolution entre ces deux valeurs alors que cela peut-être nécessaire.
1991 / Chow et Wei [13] / Endommagement des matériaux métalliques	Loi justifiée vis-à-vis du 2^{nd} Principe de la Thermodynamique mais non issue du cas quasi-statique : écriture d'un potentiel d'endommagement en fatigue et d'un critère d'endommagement en fatigue.	Loi locale.	Utilisation de paramètres structuraux dans la formulation de la loi : minimum et maximum d'une sollicitation uniaxiale, nombre de cycles et nombre de cycles à rupture sous traction uniaxiale.	Utilisation d'éléments caractéristiques de la sollicitation structurale mais ne suffisant pas à décrire la sollicitation structurale complète si nécessaire.
1998 / Xiao *et al.* [73] / Endommagement des matériaux métalliques	Loi justifiée vis-à-vis du 2^{nd} Principe de la Thermodynamique mais non issue du cas quasi-statique : écriture à partir d'une fonction de dissipation.	Loi locale.	Utilisation de paramètres structuraux dans la formulation de la loi : moyenne et maximum d'une sollicitation uniaxiale, contrainte à rupture sous chargement uniaxial, nombre de cycles.	Utilisation d'éléments caractéristiques de la sollicitation structurale mais ne suffisant pas à décrire la sollicitation structurale complète si nécessaire.
2015 / Shen *et al.* [51] / Endommagement des matériaux métalliques	Loi justifiée vis-à-vis du 2^{nd} Principe de la Thermodynamique mais non issue du cas quasi-statique : loi d'évolution inspirée des travaux de Xiao *et al.* [73] étendue au cas multiaxial.	Loi locale.	Utilisation de paramètres structuraux dans la formulation de la loi : moyenne et maximum d'une sollicitation multiaxiale, nombre de cycles.	Utilisation d'éléments caractéristiques de la sollicitation structurale mais ne suffisant pas à décrire la sollicitation structurale complète si nécessaire.
2002 / Thionnet *et al.* [65] / Endommagement des matériaux composites à fibres continues (fissuration intralaminaire)	Loi justifiée vis-à-vis du 2^{nd} Principe de la Thermodynamique et issue du cas quasi-statique : utilisation d'un critère de fatigue qui dépend de la sollicitation locale et du nombre de cycles, déduit du critère quasi-statique.	Loi locale.	Utilisation de paramètres structuraux dans la formulation de la loi : nombre de cycles.	Pas d'utilisation explicite de paramètres structuraux dans la formulation de la loi.
2004 / Brighenti [10] / Endommagement des matériaux composites à fibres courtes (décohésion fibres/matrice)	Loi non justifiée vis-à-vis du 2^{nd} Principe de la Thermodynamique.	Loi locale.	Utilisation de paramètres structuraux dans la formulation de la loi : minimun et maximum d'une sollicitation uniaxiale, nombre de cycles, nombre de cycles à rupture sous sollicitation uniaxiale.	Utilisation d'éléments caractéristiques de la sollicitation structurale mais ne suffisant pas à décrire la sollicitation structurale complète si nécessaire.
2010 / Gude *et al.* [25] / Endommagement des matériaux composites tissés (fissuration intralaminaire)	Loi non justifiée vis-à-vis du 2^{nd} Principe de la Thermodynamique.	Loi locale.	Utilisation du compteur structural de nombre de cycles.	Utilisation d'éléments caractéristiques de la sollicitation structurale mais ne suffisant pas à décrire la sollicitation structurale complète si nécessaire.

TABLE 1.1 – Examen des conditions F1 à F4 pour quelques modèles de fatigue.

Conditions	F5	F6	F7	F8
Année / Auteurs / Thématique	Loi multiaxiale ?	Hypothèses particulières ?	Méthode d'identification	Possibilité d'emploi pour un calcul de structure ?
1974/ Chaboche [12] / Endommagement des matériaux métalliques	Loi non multiaxiale.	Aucune hypothèse particulière à part des hypothèses sur les phénomènes.	Identification à partir d'essais classiques de fatigue sur une éprouvette en sollicitation uniaxiale (VER sous sollicitation uniaxiale).	Impossibilité d'emploi pour un calcul de structure : écriture et identification limitées à un VER sous un état uniaxial de contrainte.
1991 / Chow et Wei [13] / Endommagement des matériaux métalliques	Loi écrite initialement dans un cadre multiaxial, mais écriture finale pour un chargement uniaxial.	Aucune hypothèse particulière à part des hypothèses sur les phénomènes.	Identification à partir d'essais classiques de fatigue sur une éprouvette en sollicitation uniaxiale (VER sous sollicitation uniaxiale).	Impossibilité d'emploi pour un calcul de structure : écriture finale puis identification limitées à un VER sous un état uniaxial de contrainte.
1998 / Xiao *et al.* [73] / Endommagement des matériaux métalliques	Loi écrite initialement dans un cadre multiaxial, mais écriture finale pour un chargement uniaxial.	L'évolution de l'endommagement au cours d'un cycle est négligée. Aucune autre hypothèse particulière à part des hypothèses sur les phénomènes (notamment, effet de fermeture des microfissures négligé).	Identification à partir de courbes de Wöhler (ou des équivalents) obtenus à partir d'essais classiques de fatigue sur une éprouvette en sollicitation uniaxiale (VER sous sollicitation uniaxiale).	Impossibilité d'emploi pour un calcul de structure : écriture finale puis identification limitées à un VER sous un état uniaxial de contrainte.
2015 / Shen *et al.* [51] / Endommagement des matériaux métalliques	Loi d'évolution inspirée des travaux de Xiao *et al.* [73] étendue au cas multiaxial.	Aucune hypothèse particulière à part des hypothèses sur les phénomènes.	Identification à partir d'essais classiques de fatigue sur une éprouvette en sollicitation uniaxiale (VER sous sollicitation uniaxiale) et sur une éprouvette avec entaille en sollicitation uniaxiale.	Possibilité d'emploi pour un calcul de structure : loi d'évolution mutiaxiale intégrée dans un calcul par éléments finis (éprouvette avec encoche et système aéronautique), couplage évolution de l'endommagement et redistribution des contraintes dans la structure.
2002 / Thionnet *et al.* [65] / Endommagement des matériaux composites à fibres continues (fissuration intralaminaire)	Loi multiaxiale.	Une hypothèse importante : le phénomène d'endommagement considéré est identique en quasistatique et en fatigue. Aucune autre hypothèse particulière à part des hypothèses sur les phénomènes (notamment, effet de fermeture des microfissures non négligé, réseau périodique de microfissures identiques, étude de la multiplication et non de la propagation paramètres de géométrie des microfissures non dissipatifs).	Identification à partir d'essais classiques de fatigue sur des éprouvettes stratifiés avec des empilements variés : le critère d'endommagement en fatigue dépend implicitement de l'essai d'identification considéré car il y a une forte influence du mode d'ouverture des fissures sur l'évolution de l'endommagement.	Possibilité d'emploi pour un calcul de structure sous réserve de l'identification d'une famille importante de critères de fatigue. Dans la pratique, c'est donc très difficile.
2004 / Brighenti [10] / Endommagement des matériaux composites à fibres courtes (décohésion fibres/matrice)	Loi écrite d'abord de manière uniaxiale avec l'aide de grandeurs uniaxiales (contrainte uniaxiale, contrainte uniaxiale minimum et maximum, nombre de cycles à rupture sous sollicitation uniaxiale) : elle fait appel notamment à des courbes de Wöhler obtenues de manière uniaxiale. Extension au cas multiaxial en remplaçant uniquement la contrainte uniaxiale par la contrainte équivalente classique (ainsi, le nombre de cycles à rupture sous sollicitation uniaxiale est toujours présent). L'aspect multiaxial de la loi n'est pas illustré.	La loi suppose une amplitude constante du chargement cyclique. Aucune autre hypothèse particulière à part des hypothèses sur les phénomènes.	Identification à partir d'essais classiques de fatigue sur une éprouvette en sollicitation uniaxiale (VER sous sollicitation uniaxiale).	Impossibilité d'emploi pour un calcul de structure : la loi écrite a beaucoup de lacune (trop voisine d'une approche uniaxiale) pour espérer être utilisée avantageusement dans un cas multiaxial. Néanmoins, le modèle est implémenté par l'auteur dans un calcul par Eléments Finis.
2010 / Gude *et al.* [25] / Endommagement des matériaux composites tissés (fissuration intralaminaire)	Loi multiaxiale.	Aucune hypothèse particulière à part des hypothèses sur les phénomènes.	Identification à partir d'essais classiques de fatigue sur une éprouvette en sollicitation uniaxiale (VER sous sollicitation uniaxiale) et sur une éprouvette cylindrique en torsion : relation entre la densité d'endommagement et une chute de rigidité, en fonction du nombre de cycles. Evidemment, ces relations différent avec chaque sollicitation macroscopique appliquée.	Possibilité d'emploi pour un calcul de structure sous réserve de l'identification d'un large échantillon de sollicitations. Dans la pratique, c'est donc très difficile.

TABLE 1.2 – Examen des conditions F5 à F8 pour quelques modèles de fatigue.

Chapitre 2

Déroulement de l'étude

2.1 Objectif et étapes importantes de l'étude

2.1.1 Finalité de l'étude : calcul de structure sous sollicitations de fatigue

L'objectif final visé est la possibilité de réaliser un calcul de structure en fatigue, quelle que soit la structure, quel que soit le (comportement du) matériau constitutif de cette structure, et quelle que soit la sollicitation appliquée dès lors qu'elle revêt un caractère répétitif (de fatigue).

Nous allons voir que cet objectif peut-être atteint en passant par trois étapes importantes (Etape A, Etape B, Etape C). Nous allons voir aussi (rapidement) que cet objectif est trop ambitieux pour être mené à bien. Alors, finalement, chacune de ces trois étapes n'aura parfois pas la généralité voulue et verra son champ d'action restreint.

D'abord, illustrons ce que nous souhaitons dans toute sa généralité, en disant que nous voulons réaliser un calcul de structure en fatigue avec la même aisance avec laquelle est réalisé un calcul de structure en élasticité linéaire sous sollicitation quasi-statique. Ainsi, par exemple, le matériau de deux structures de noms A et B (géométries différentes) étant le même, nous souhaitons pouvoir réaliser un calcul de structure en fatigue sur A, puis sur B, sans changer rien d'autre dans le processus de calcul que la géométrie et les conditions aux limites du problème comme nous le ferions dans un cas d'élasticité linéaire quasi-statique. En clair, la partie comportementale (au sens le plus large) resterait inchangée entre les deux calculs.

Cela sous-entend donc de placer le concept de fatigue dans le cadre de la Mécanique de l'Endommagement et donc au niveau du matériau (identifications des lois sur le Volume Elémentaire Représentatif), et non dans celui de la Mécanique de la Rupture et donc à son niveau naturel, celui structural (identifications des lois dépendant de la structure).

Ainsi, déjà, au regard de ce qui précède, et cela sera implicitement sous-entendu dans toute la suite :

- la fatigue sous chargement aléatoire est exclue de notre propos ;
- le phénomène d'endommagement considéré peut être placé dans le cadre de la Mécanique de l'Endommagement.

2.1.2 Etape A : précautions générales nécessaires à la mise en place du concept de fatigue dans une approche locale

Le cadre naturel de fonctionnement de la fatigue n'étant pas la Mécanique de l'Endommagement, se placer dans ce cadre suppose de prendre des précautions. Ces précautions seront inscrites

dans deux classifications formulées l'une au niveau structural, et l'autre au niveau local, et faites relativement à la notion de sollicitation (au sens le plus large). Ces classifications définissent ce qui est, pour nous, un problème de fatigue. C'est la première étape (étape A) importante de l'étude. Pour cette étape, la généralité reste maximale au sens où ces classifications qui sont construites sur la notion de répétitivité d'une sollicitation n'exclut que le cas de la fatigue aléatoire.

2.1.3 Etape B : approche locale de la fatigue pour des matériaux et un phénomène particulier

La notion de problème de fatigue étant désormais définie (Etape A), il faut ensuite passer à l'écriture des modèles d'endommagement qui seront actifs dans ces problèmes. C'est la seconde étape du travail (Etape B). C'est maintenant le moment de clairement préciser que pour nous, le concept de fatigue au niveau local doit permettre d'écrire les lois d'évolution de variables d'état internes non pas sous une forme incrémentale, mais sous une forme associée à la répétitivité d'une sollicitation. En d'autres termes, nous ne voulons pas modéliser un microphénomène par une loi locale basée sur une approche incrémentale dont la coalescence aboutirait au phénomène de fatigue initialement considéré. Le but est délibérément d'écrire les lois d'évolution de fatigue sous une forme pilotée par la répétitivité d'une sollicitation et de pouvoir résoudre des problèmes structuraux complexes de fatigue en tenant compte du caractère tridimensionnel et non uniforme des états locaux de contraintes et de déformations. Il s'agit donc ici de placer le phénomène de fatigue dans une approche locale basée sur la Mécanique de l'Endommagement.

Il est également maintenant clairement évident que la généralité cherchée (l'écriture des modèles d'endommagement qui seront actifs dans ces problèmes, sous-entendant : tous matériaux, tous phénomènes) est illusoire et que cette seconde étape va être forcément limitée.

Nous verrons ainsi :
- qu'en choisissant des matériaux sujets à un phénomène d'endommagement bien identifié ;
- qu'en se plaçant délibérément dans des classes de problèmes judicieusement choisies, qui limitent donc le cadre d'utilisation (c'est-à-dire qui ne permettront pas de résoudre les problèmes de fatigue les plus complexes des autres classes),

nous pourrons justifier d'une loi locale d'évolution en fatigue et aboutir à l'objectif final du calcul de structure. Les matériaux auxquels nous faisons référence sont les composites à fibres longues, et le phénomène d'endommagement identifié est celui de fissuration intralaminaire. Ce phénomène a la particularité d'être volumique (il se prête donc très bien au cadre de la Mécanique de l'Endommagement), mais surtout il est physiquement le même sous sollicitation quasi-statique que sous sollicitation de fatigue. L'évocation de cette dernière caractéristique sera essentielle au moment de prouver la validité thermodynamique de sa loi d'évolution locale en fatigue.

2.1.4 Etape C : processus de calcul de structure en fatigue pour les composites à fibres continues

La notion de problème de fatigue ayant été définie (Etape A), l'écriture locale d'un modèle particulier ayant été faite (Etape B), la troisième étape du travail (Etape C) consistera à mettre en place un processus de calcul par éléments finis qui permette de réaliser un calcul de structure en fatigue. Nous verrons ainsi que pour des structures :
- sollicitées en fatigue dans des classes particulières de problèmes (i.e., sollicitations particulières) ;
- constituées de composite stratifiés d'unidirectionels orientés, siège du phénomène de fissuration intralaminaire,

des calculs en fatigue seront réalisés. Pour cette Etape C, dans le contexte précédent, nous allons pouvoir atteindre la généralité souhaitée relativement à la géométrie de la structure : il sera possible de traiter n'importe quelles géométries de structures aussi simplement qu'il serait possible de le faire dans le cadre de l'élasticité linéaire quasi-statique.

2.2 Portée du travail

Enfin, pour évaluer de manière précise ce sur quoi notre travail peut agir en faisant référence aux trois catégories de modèles mises en évidence par Degriek et Van Paepegem [16] (Chapitre 1 - Paragraphe 1.2.2), nous pouvons dire que :

- les modèles de la catégorie 1 ne sont pas sujet à caution parce qu'ils sont basés sur la Mécanique de la Rupture : ils ne sont pas ceux sur lesquels nous souhaitons apporter notre contribution ;
- les modèles de la catégorie 2 utilisent la Mécanique de l'Endommagement pour des phénomènes physiques qui ne rentrent pas dans ce cadre, et qui devraient utiliser la Mécanique de la Rupture. Notre travail n'apportera donc rien sur ces modèles car notre propos est de travailler avec la Mécanique de l'Endommagement et des phénomènes qui rentrent dans son cadre ;
- les modèles de la catégorie 3 sont écrits dans le cadre de la Mécanique de l'Endommagement, mais présentent des défauts significatifs. C'est sur ces modèles que notre apport sera le plus important.

Cet apport débouche sur la possibilité de réaliser des calculs de structures en fatigue, certes dans des conditions restrictives, mais jusqu'à maintenant évalués par Degriek et Van Paepegem [16] comme très complexes, voire impossibles.

Au-delà de cela, de manière générale, ce que nous souhaitons c'est clarifier le concept de fatigue. Nous espérons ainsi que tous les modèles écrits, qui montrent actuellement des lacunes ou des imperfections, puissent bénéficier de notre apport. Bien que les étapes A et C soient réalisées dans une grande généralité, l'étape B étant placée dans un cas particulier, la très grande généralité affichée au départ ne sera pas atteinte. Nous souhaitons ainsi que cette étude soit une voie ouverte à la résolution d'autres cas, voire à une généralisation sans condition, d'une approche locale de la fatigue. Pour l'heure, la grande difficulté reste le cas où le comportement du matériau constitutif de la structure montre un caractère visqueux. Dans ce cas, la propriété de linéarité (éventuellement par morceau) des opérateurs présents dans la formulation du problème de calcul de structure en fatigue tombe, mais surtout fait place à une dépendance vis-à-vis des effets de vitesse : le nombre de cycle N (grandeur structurale) ne se transmettra donc pas au niveau local : que devient alors la loi d'évolution en fatigue exprimée avec cette variable ? Doit-elle utiliser un nombre de cycle local (s'il existe) ? Si oui, comment ? Pourtant, la propriété de similitude du phénomène sous chargement quasi-statiques ou de fatigue peut sans doute exister (par exemple dans le cas de certains polymères, où déjà cette similitude est démontrée entre des chargements quasi-statiques et de fluage [50]) et aider. Mais cela pourrait-il être suffisant, pour ces matériaux pour arriver à une approche locale de la fatigue via la Mécanique de l'Endommagement ?

2.3 Ce que ce document ne contiendra pas

Dans ce travail, nous avons voulu lancer des pistes vers une approche locale de la fatigue. Certains concepts développés sont peut-être inutiles ou en tout cas, nous n'avons soit pas vu comment les utiliser plus avant, soit pas exploité pleinement leurs intêrets. Nous laissons à d'autres le soin d'avoir un regard plus éclairé sur ce travail. Mais quoi qu'il en soit, même si ce n'est pas

dans un cas complètement général, et uniquement dans un cas particulier de phénomène une approche locale de la fatigue, ces pistes lancées nous ont permis de montrer que la réalisation d'une approche locale de la fatigue était possible.

Et, afin de bien comprendre dans quel état d'esprit ce travail a été réalisé, il est fondamental de préciser qu'il est là pour poser des bases très générales pour une approche totalement nouvelle de la fatigue des structures. Mais surtout il est fondamental de préciser que ce travail n'est pas là pour construire un n-ème modèle de comportement en fatigue, pas plus qu'il n'est là pour montrer une n-ème confrontation entre un modèle et des expériences. L'application qui est faite (au phénomène de fissuration intralaminaire dans les composites à fibres longues) est une illustration des idées avancées, mais en aucun cas un travail sur le phénomène de fissuration intralaminaire dans les composites à fibres longues, proprement-dit. Il n'y aura donc aucune partie expérimentale (les données expérimentales utilisées sont tirées de la littérature), ni des confrontations fines expériences/modélisations avec des barres d'incertitudes. En fait, cette partie illustrative doit maintenant se transformer en une véritable phase d'exploitation.

2.4 Description de la structure du document

Nous pouvons finalement synthétiser tout ce qui vient d'être dit jusqu'à présent :
- sans aucune contestation possible, le concept de fatigue au sens originel fait référence au niveau structural ;
- nous souhaitons pour notre part le faire rentrer dans le cadre local de la Mécanique de l'Endommagement et réaliser une approche locale de la fatigue afin d'arriver à notre but ultime qui est la réalisation de calculs de structure sous sollicitations de fatigue (tenant compte, notamment, du caractère multiaxial et tridimensionnel des états de contraintes et de déformations) ;
- mais cela est impossible sans prendre des précautions : nous allons donc d'abord définir un cadre de fonctionnement par le biais de la définition des problèmes de fatigue au sein de deux classifications (Etape A, généralité maximale) ;
- ceci étant fait, il n'est pas sûr que cette approche locale de la fatigue que nous souhaitons, soit accessible pour tous les (types de comportements de) matériaux, et pour tous les types de sollicitation dits de fatigue ;
- nous avons réussi à le faire dans le cas du phénomène de fissuration intralaminaire des composites stratifiés à base d'unidirectionnels carbone/résine, car ce phénomène particulier se prête bien au cadre de fonctionnement posé et qu'il possède aussi une caractéristique très particulière (que nous évoquerons plus tard) sans laquelle ce passage au niveau local aurait été impossible (Etape B, dans un cas particulier, donc non en toute généralité) ;
- enfin, pour les matériaux composites à fibres longues et le phénomène de fissuration intralaminaire, nous sommes parvenus (pour certaines classes de problèmes de fatigue) à réaliser un calcul de structure en fatigue aussi aisément qu'il pourrait être fait dans le cas de l'élasticité linéaire quasi-statique (Etape C).

La première partie (Partie I) du document a été une partie introductive :
- le premier chapitre (Chapitre 1) a exposé le contexte général dans lequel s'inscrit le présent travail de thèse. Par la mise en évidence des carences de l'existant, il a été démontré qu'à l'heure actuelle rien ne permet de réaliser un calcul de structure en fatigue dans des conditions satisfaisantes ;
- le (présent) second chapitre (Chapitre 2) explique la finalité de l'étude, ainsi que les trois étapes (Etape A, Etape B, Etape C) pour y parvenir. Ces trois étapes forment le cœur de ce document.

La seconde partie (Partie II) du document est consacrée à l'Etape A. Elle formalise la notion de problème de fatigue :

- le premier chapitre (Chapitre 3) explique ce qui fait la singularité des problèmes de fatigue et la motivation de les conceptualiser et de les classer ;
- le second chapitre (Chapitre 4) propose une classification des problèmes de fatigue suivant des critères structuraux ;
- le troisième chapitre (Chapitre 5) en propose une classification des problèmes de fatigue suivant des critères locaux.

Cette conceptualisation et ces classifications préparent un cadre propice à une approche locale de la fatigue.

Les troisième, quatrième et cinquième parties du document sont consacrées à l'Etape B d'écriture et d'identification d'un modèle d'endommagement en fatigue dans le cadre de la Mécanique de l'Endommagement, c'est-à-dire à la mise en place d'une approche locale de la fatigue.

La troisième partie (Partie III) du document montre de manière générale (mais sous l'hypothèse d'un phénomène identique en quasi-statique et en fatigue) comment obtenir une loi d'évolution écrite en terme de nombre de cycles à partir d'une loi évolution temporelle obtenue dans le cadre de la Thermodynamique des Milieux Continus et de la Méthode de l'Etat Local :

- le premier chapitre (Chapitre 6) est consacré à l'établissement des formules générales de passage d'une loi temporelle à une loi cyclique. Ces formules sont ensuite écrites pour chaque classe de la classification des problèmes de fatigue suivant des critères locaux ;
- le second chapitre (Chapitre 7) expose la démarche du passage d'une loi temporelle à une loi cyclique.

La quatrième partie du document (Partie IV) utilise les concepts des seconde et troisième parties et se propose d'écrire une loi locale d'évolution de fatigue pour le phénomène de fissuration intralaminaire présent dans les composites à fibres continues. En particulier, la loi locale d'évolution en fatigue de ce phénomène est justifiée vis-à-vis du Second Principe de la Thermodynamique en utilisant sa loi d'évolution écrite pour des sollicitations quasi-statiques et en évoquant le fait que ce phénomène est, en première approximation, le même lorsqu'il apparaît sous des sollicitations quasi-statiques ou de fatigue. Cette particularité est l'hypothèse clé sur laquelle repose notre démarche de justification thermodynamique d'une loi locale de fatigue. Tous les phénomènes d'endommagement présents dans tous les matériaux ne répondent pas à cette spécificité : c'est ce qui limite, pour l'heure, la généralité de notre démarche. Ainsi, pour cette partie :

- le premier chapitre (Chapitre 8) expose un modèle d'endommagement en quasi-statique issu de la Thermodynamique des Milieux Continus, pour le phénomène de fissuration intralaminaire présent dans les composites à fibres continues ;
- le second chapitre (Chapitre 9) explicite l'établissement mathématique de la loi d'évolution en fatigue de ce phénomène à partir de sa loi d'évolution quasi-statique ainsi que son identification ;

La dernière partie du document (Partie V) est consacrée à l'Etape C de calcul de structures sous sollicitation de fatigue. Pour l'heure, puisque l'Etape B n'a considéré que le phénomène d'endommagement par fissuration intralaminaire au sein des composites unidirectionnels orientés, les calculs de structure envisagés ne sont réalisés, eux aussi, que pour ces matériaux et ce phénomène. En outre, les problèmes de fatigue traités sont ceux de classes bien identifiées, mais ne sont pas ceux qui appartiennent aux classes des problèmes les plus généraux (i.e., les plus

complexes en terme de sollicitation). Néanmoins, dans ces conditions, n'importe quelle géométrie est envisageable. Plusieurs structures sont considérées sous plusieurs sollicitations de fatigue. Pour cette partie :

- le premier chapitre (Chapitre 10) donne la description des géométries traitées et formule les problèmes à résoudre ;
- le second chapitre (Chapitre 11) expose les résultats des calculs ;
- le troisième chapitre (Chapitre 12) examine des extensions possibles des conditions aux limites traitées directement à l'aide des classifications structurales et locales.

Au moment de réaliser l'identification de loi cyclique pour le phénomène de fissuration intralaminaire, nous nous sommes aperçus que le manque de données expérimentales était très pénalisant ne serait-ce que pour avoir un rendu seulement correct du phénomène physique dans les calculs. D'une manière plus générale, nous savons que l'identification des lois de fatigue est très coûteuse au sens où beaucoup de paramètres associés aux sollicitations de fatigue appliquées (amplitude, fréquence, valeur minimale, valeur maximale...) doivent y être pris en compte : cela multiplie donc la réalisation d'essais qui peuvent être très longs (jusqu'à 10^6 cycles à une fréquence de quelques Hertz). C'est souvent ce qui explique que, dans les faits, les campagnes d'essais pour ces identifications sont incomplètes. Alors, le quatrième chapitre de cette partie est née et se consacre au développement d'un outil probabiliste permettant de combler au moins partiellement le manque de données expérimentales. En termes plus concrets, cet outil fournit des points supplémentaires à des courbes expérimentales facilitant ainsi leur lissage par des fonctions analytiques simples (polynômes, exponentielles...). Nous proposons donc dans cette partie l'établissement d'une loi d'évolution en fatigue du phénomène de fissuration intralaminaire, fondée sur des concepts probabilistes, valable uniquement pour des éprouvettes parallélépipédiques de composites stratifiés d'unidirectionnels orientés. Cette loi probabiliste est identifiée sur les quelques essais dont nous disposons, mais permet, par simulations, d'enrichir la base de données expérimentale qui alimente le processus d'identification de la loi locale. Il faut noter que cette loi probabiliste a la particularité d'être une suite dépendant du nombre de cycles dont le terme général est connu : la simulation des essais expérimentaux complémentaires par cette loi est donc peu consommatrice de temps de calculs, au sens où l'accès à une valeur d'endommagement pour un nombre de cycles donné ne nécessite aucune itération (d'un processus d'intégration d'une équation différentielle).

Enfin, le document se termine par une conclusion et des perspectives générales (Partie VI).

Dans le présent document il figure des répétitions de certains paragraphes de chapitres dans d'autres, en termes d'équations mais aussi sur le discours. Il nous a semblé plus judicieux de faire ces répétitions, plutôt que de faire des renvois continuels à de nombreux endroits du document. Egalement, le lecteur rencontrera souvent une rédaction parfois un peu "catalogue". Par son caractère même, l'étude, qui définit des classifications au début, pour les utiliser plus loin, induit inévitablement ce type de rédaction. Néanmoins, cette vue synthétique des différentes classes, ou des différents cas, a ainsi l'avantage de rendre visible des choses qui auraient pu passer inaperçues. Le lecteur aura peut-être alors lui aussi des remarques qui naîtront de ces exposés "catalogues". De plus, cela pourra constituer la base de futurs travaux.

Deuxième partie

PREALABLE GENERAL A UNE APPROCHE LOCALE DE LA FATIGUE (A) : CONCEPTUALISATION ET CLASSIFICATION DES PROBLEMES DE FATIGUE

Chapitre 3

Conceptualisation et classification des problèmes de fatigue. Objectif et vocabulaire

3.1 Position du problème. Loi d'évolution temporelle et cyclique

Considérons un modèle de comportement de matériau écrit dans le cadre de la Mécanique de l'Endommagement et de la Thermodynamique des Milieux Continus qui prend en compte un ensemble de phénomènes physiques décrits par un ensemble de variables d'état (variables internes et variable externe pilote). Pour un phénomène physique particulier, insensible aux effets de vitesse, dont a désigne l'une des variables d'état qui rentre dans sa modélisation, la loi d'évolution locale au point M de cette variable a peut s'écrire sous la forme (Eq. 3.1) :

$$\frac{da(M,t)}{dt} = \Phi_a(Q(M,t), V_{EI}(M,t))\frac{dQ(M,t)}{dt} \tag{3.1}$$

avec :

- Φ_a une fonction relative à la variable a et au phénomène considéré ;
- V_{EI} l'ensemble des variables d'état internes ;
- Q la variable d'état externe pilote supposée 2-tensorielle (usuellement le 2-tenseur symétrique des déformations).

Cette écriture résulte de la réécriture du système différentiel qui donne l'évolution de chaque variable d'état interne en fonction de la variable d'état pilote (éventuellement couplée avec celle des autres variables d'état internes), et si nécessaire du Théorème des Fonctions Implicites. Dans la suite, nous qualifions de loi d'évolution temporelle cette équation différentielle descriptive de l'évolution de la variable a, issue de la Thermodynamique des Milieux Continus (et de la Méthode de l'Etat Local) (même si souvent les incréments du temps sont finalement absents de cette équation différentielle).

Dans l'industrie aéronautique et spatiale par exemple, les éléments structuraux primaires sont soumis à des sollicitations cycliques de charge/décharge. En phase de développement, les pièces fortement sollicitées (pâles d'hélicoptères, trains d'atterissage, pylônes d'emport...) sont dimensionnées pour garantir une sûreté de fonctionnement optimale, c'est-à-dire pour assurer l'ensemble des aptitudes de la pièce considérée, qui lui permettent de disposer des performances fonctionnelles spécifiées, au moment voulu, pendant la durée de vie prévue, sans dommage pour elle-même et son environnement. Dans le cas idéal d'une modélisation parfaite, quelle que soit l'évolution temporelle des sollicitations appliquées à la structure considérée, l'intégration de

l'équation (Eq. 3.1) conduirait à une valeur de la variable d'état coïncidant avec la réalité, à tout instant, aux erreurs numériques d'intégration près. Mais, ce calcul peut être très long. A titre d'exemple, considérons certaines pièces d'hélicoptère dimensionnées pour avoir une durée de vie comprise entre 10^6 et 10^9 cycles de charge/décharge. Dans ce cas, le schéma numérique de résolution en temps devrait résoudre au moins entre 10^7 et 10^{10} itérations. En imaginant qu'une itération (un calcul sur la structure industrielle complète) est résolue en une seconde (ce qui peut être très loin de la réalité), alors le calcul durerait entre 100 jours et 300 ans : même la borne inférieure de cet exemple minimaliste n'est pas envisageable pour un calcul de structure industrielle. L'ajout du vocable fatigue à un problème de calcul de structures, tel que nous l'entendons ici, a pour but essentiel de modifier l'écriture des lois d'évolution des phénomènes de manière à rendre leur intégration accessible dans des délais de temps raisonnables pour un calcul industriel.

Si l'évolution horaire des sollicitations appliquées ne montre aucun caractère particulier, notamment de répétitivité, il y a peu de chance de solutionner le problème. Si l'évolution horaire des sollicitations appliquées montre un certain nombre de répétitions temporelles, appelées cycles, alors le concept de fatigue peut aider à la résolution du problème. Cette notion de fatigue, indissociable du vocable cycle, implique la modification de l'écriture des lois d'évolution usuelles, de manière à restreindre leur intégration à des délais de résolution raisonnables. Ainsi, dans la littérature concernant l'endommagement en fatigue, la loi d'évolution locale (Eq. 3.1) au point M se rencontre sous la forme (Eq. 3.2) :

$$da(M,N) = \overline{\Phi_a}(\mathbb{P}, Q(M,N), V_{EI}(M,N))dN \tag{3.2}$$

avec :
- $\overline{\Phi_a}$ une fonction relative à la variable a et au phénomène considéré ;
- N le nombre de cycles ;
- $\mathbb{P}$ un ensemble des paramètres.

La loi d'évolution d'un phénomène associé au vocable de fatigue est écrite en utilisant comme variable incrémentale, non plus la variable pilote $Q(M,t)$, mais celle associée au nombre de cycles N. En outre, cette nouvelle forme de loi d'évolution gomme les évolutions temporelles inscrites dans le cycle lui-même, c'est-à-dire qu'en terme d'intégration numérique de la loi d'évolution, les itérations d'intégration temporelles inscrites dans le cycle sont supprimées. Le temps de calcul est ainsi diminué et peut devenir raisonnable pour un calcul industriel. Dans la suite, nous qualifions de loi d'évolution cyclique cette équation différentielle descriptive de l'évolution de la variable a écrite avec des incréments du nombre de cycles N.

En revanche, il ne faut pas que l'abaissement du temps de calcul se fasse au détriment de la qualité de la prévision. En effet, des informations importantes ont disparu, sans aucune justification, lors du passage de la forme (Eq. 3.1) à la forme (Eq. 3.2). Par exemple, la forme (Eq. 3.1) utilise les incréments de chaque composante de la variable d'état 2-tensorielle Q, alors que la forme (Eq. 3.2) substitue à cela le scalaire N : même dans le cas idéal d'une modélisation parfaite, la forme (Eq. 3.2) soulève des questions et notamment sur la manière de traduire une sollicitation extérieure au niveau local. C'est la raison pour laquelle, dans le but d'éclaircir ce point essentiel et d'apporter ainsi un cadre d'écriture propice à une approche de la fatigue dans le cadre de la Mécanique de l'Endommagement, en tout premier lieu il est absolument nécessaire de définir ce qu'est finalement un problème de fatigue : c'est l'étape A précédemment évoquée. Dans la suite, nous conceptualisons et classifions les problèmes de fatigue, tant au niveau structural que local. Cette formalisation est faite de manière très générale à ceci près qu'elle suppose la notion de répétitivité de la sollicitation appliquée : de fait, la fatigue sous charge aléatoire est donc exclue de notre propos.

Il reste enfin à signaler que le discours fait sur les équations (Eq. 3.1) et (Eq. 3.2) suppose implicitement que le phénomène étudié a la même nature physique lorsqu'il apparaît sous des chargements quasi-statiques et sous des chargements de fatigue : tous les phénomènes, de tous les matériaux n'ont pas cette spécificité. Cette contrainte pourrait-elle être levée ? Nous n'apporterons pas de réponse à cette question dans ce travail d'autant que pour nous, ici, elle est essentielle. Soulignons toutefois que cette propriété restrictive n'a aucun impact sur la généralité de la conceptualisation et la classification des problèmes de fatigue qui va suivre.

3.2 Pourquoi conceptualiser et classifier les problèmes de fatigue ?

La premier concept qui vient à l'esprit dès que nous évoquons le vocable "fatigue" est celui de "cycle". Si ce concept est clairement défini pour une fonction périodique qui modélise une composante d'une sollicitation appliquée à une structure, les choses sont moins simples dès lors qu'il en est fait état au niveau local. En effet, au niveau local, en fonction du comportement du matériau, et de la position dans la structure (donc de la valeur de l'état de contrainte ou de déformation), la périodicité d'une grandeur locale n'est aucunement assurée (par exemple, dans le cas d'un milieu très visqueux). Un autre exemple consiste à évoquer une structure sollicitée par deux composantes non nulles de sollicitations périodiques dont le rapport des fréquences serait irrationnel : quand bien même le milieu constitutif de la structure serait élastique linéaire (en raison du théorème de superposition), la notion de cycle n'existe pas. Pourtant, nous rencontrons dans la littérature une multitude de lois de fatigue qui utilise le concept de nombre de cycles sans définir clairement un cadre de fonctionnement, ni même être justifiée vis-à-vis du Second Principe de la Thermodynamique.

L'examen de la littérature dans le domaine de l'endommagement en fatigue, non seulement des matériaux, mais aussi des structures, ne montre aucune justification complète du passage de la première forme d'équation à la seconde. L'obtention des lois locales de fatigue et leur utilisation dans les calculs structuraux restent assez floues. De plus, ces mêmes lois utilisent parfois un ensemble de paramètres d'origine structurale (par exemple, le classique rapport de charge R). Or, ces paramètres n'ont aucune raison de se transmettre au niveau local sans distorsion. Ces défauts soulignent la particularité et complexité des problèmes de fatigue, par rapport aux traditionnels problèmes quasi-statiques : des questions qui ont une réponse simple dans le cas de problèmes de calculs de structures quasi-statiques peuvent devenir insurmontables dès lors que le vocable fatigue y est associé. Répondre à la question "qu'est-ce-qu'un problème de calcul de structure en fatigue ?" revient à s'interroger sur "quelle est la formulation mathématique d'un problème de fatigue ?" et non sur "qu'est-ce que la fatigue des matériaux ?". C'est sur cette conceptualisation qu'est basée la classification des problèmes de fatigue, ce qui implique de définir mathématiquement un certain nombre de notions de base.

Cette classification doit permettre de cerner ce qu'il est possible de faire ou non pour un problème de fatigue d'une classe donnée. Plus précisément, elle doit aider à la justification rarement faite du passage d'une loi d'évolution obtenue par la Thermodynamique dans un cadre quasi-statique (Eq. 3.1) à sa forme écrite dans le cadre de la fatigue (Eq. 3.2). Chaque classe construite doit donner des éléments quantifiables structurés dont l'examen permettrait d'évaluer la faisabilité d'un problème de calcul de structure traité dans le cadre de la fatigue avec des garanties de qualité en indiquant quels sont les éléments importants qui doivent être inclus dans la loi locale de fatigue utilisée. Enfin, deux précisions importantes sont à souligner. La première est que nous ne souhaitons pas résoudre les problèmes de fatigue en modélisant un "microphénomène" dont la coalescence aboutirait au phénomène physique de fatigue initialement considéré et gouverné par une loi locale de la forme (Eq. 3.1). Ici, nous souhaitons résolument que les lois

de fatigue soient écrites sous la forme (Eq. 3.2). La seconde est que notre propos n'est pas que cette conceptualisation et cette classification aient la prétention d'induire directement les clés de la résolution générale d'un problème de fatigue quels que soient les matériaux et les phénomènes physiques.

3.3 Convention de langage et d'écriture et définitions générales d'un problème de fatigue

Dans la suite, notre raisonnement s'attachera à l'examen de la dépendance temporelle (au travers de la variable indiquant le temps t) de différentes fonctions dépendant également d'une variable d'espace (le point M de l'espace affine modélisant l'espace physique). Pour cette raison, la précision du point M, comme argument des fonctions considérées, permet uniquement d'indiquer que nous travaillons avec des champs (supposés réguliers par rapport aux variables scalaires spatiales contenues dans l'indication du point M), car aucune propriété ou opération (différentiation, par exemple) n'est particulièrement requise par rapport aux variables d'espace dans cette étude. En outre, toutes les indications et/ou définitions nécessaires concernant la dépendance temporelle des fonctions considérées sont formulées comme si ces fonctions n'étaient dépendantes que du temps. Ainsi, par exemple, la mention des bornes d'une fonction sera implicitement entendue comme étant relative aux bornes temporelles, de même, les notions de continuité et de dérivabilité, à la variable t.

Nous proposons également un vocabulaire général relatif à des fonctions dépendant du temps, qui sera plus spécifiquement adapté dans la suite. Soit une fonction f définie sur un intervalle de temps I non constante, de bornes f_{min} et f_{max} (régulière autant que nécessaire).

Définition (D0) - Fonction cyclique et fonction transitoire. La fonction f, définie sur I, est cyclique, si dans l'intervalle de temps I, il existe des sous-intervalles où elle se répète à l'identique, sinon, elle y est dite transitoire (Fig. 3.1). Le cycle élémentaire de f, noté $c[f]$, est défini comme la restriction de la fonction considérée sur le sous-intervalle qui définit sa période $T[f]$.

Définition (D1) - Fonction périodique. La fonction f est périodique, si les sous-intervalles précédents forment une partition de I (Fig. 3.1).

Définition (D2) - Fonctions identiques. Deux fonctions dépendant du temps f_1 et f_2 sont identiques, si et seulement si, $\exists \overline{f}_1 \in \mathbb{R}^*, \exists \overline{f}_2 \in \mathbb{R}^* /\ f_1(t)/\overline{f}_1 = f_2(t)/\overline{f}_2 = V(t)$ (Fig. 3.2).

Définition (D3) - Fonctions identiques affines. Deux fonctions dépendant du temps f_1 et f_2 sont identiques affines, si et seulement si, $\exists \overline{f}_1 \in \mathbb{R}^*, \exists \overline{\overline{f}}_1 \in \mathbb{R}, \exists \overline{f}_2 \in \mathbb{R}^*, \exists \overline{\overline{f}}_2 \in \mathbb{R} /\ (f_1(t) - \overline{\overline{f}}_1)/\overline{f}_1 = (f_2(t) - \overline{\overline{f}}_2)/\overline{f}_2 = V(t)$ (Fig. 3.2).

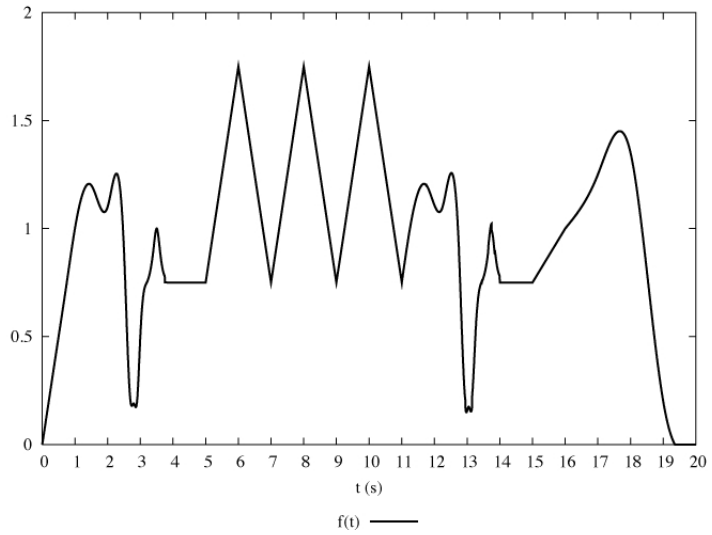


FIGURE 3.1 – La fonction f est cyclique sur $[0, 20]$ (le cycle élémentaire défini sur $[0.75, 5]$ apparaît 2 fois sur $[0, 20]$), périodique sur $[5, 11]$ (le cycle élémentaire est défini sur $[5, 7]$), transitoire, par exemple, sur $[15, 20]$.

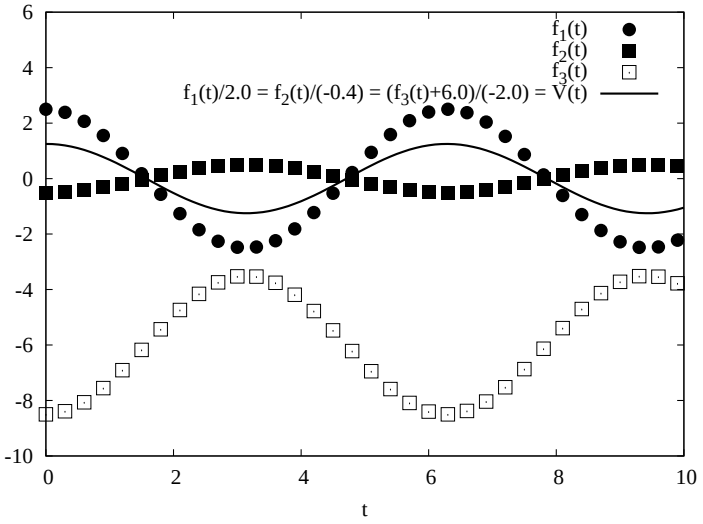


FIGURE 3.2 – Les fonctions f_1 et f_2 sont identiques. Les fonctions f_1 et f_3 ne sont pas identiques. Les fonctions f_2 et f_3 ne sont pas identiques. Les fonctions f_1, f_2 et f_3 sont identiques affines.

Chapitre 4

Classification des problèmes de fatigue suivant des critères structuraux

4.1 Ecriture générale d'un problème de calcul de structure

Afin de fixer clairement quel est le problème physique à résoudre, nous écrivons dans les lignes qui suivent ce qui va constituer un problème de calcul de structure. Nous définissons un problème de calcul de structure comme étant un problème de Mécanique des Milieux Continus posé sur toute ou partie d'une structure industrielle et pour lequel nous avons pour objectif de le résoudre par une technique numérique adéquate : ici celle des éléments finis. Ce qui est rappelé dans les lignes qui suivent est donc tout à fait classique. Néanmoins, cela constitue la base des problèmes de calcul de structures plus spécifiques que nous devons résoudre dans le cadre de ce travail : ceux auxquels le vocable de fatigue est adjoint, lorsque les sollicitations appliquées à la structure auront un caractère de répétitivité.

Le système matériel étudié S est en mouvement dans l'espace physique, modélisé par un espace affine à 3 dimensions ε^3, rapporté au référentiel $\zeta = (R, H)$, R désignant le repère d'espace, supposé galiléen, dont $b = (\vec{x_1}, \vec{x_2}, \vec{x_3})$ est la base cartésienne orthonormée directe et H le repère de temps. Dans R, un point M de ε^3 est repéré, à l'instant t, par l'ensemble de ses coordonnées $x = (x_1, x_2, x_3)$. Le système coïncide au cours du temps avec le domaine $D = \Omega \cup \partial\Omega$. D est un ensemble continu (connexe par arc) fermé borné de ε^3, Ω désigne son intérieur et $\partial\Omega$ sa frontière supposée régulière. Plus précisément, D coïncide avec $D(t) = \Omega(t) \cup \partial\Omega(t)$ à l'instant t et avec $D_0 = D(t_0) = \Omega(t_0) \cup \partial\Omega(t_0)$ à l'instant t_0.

L'évolution du domaine est étudiée entre les instants t_0 et t_{max}.

Nous nous plaçons sous l'Hypothèse des Petites Perturbations (HPP). Nous supposons que la masse volumique du milieu étudié est constante au cours du temps, et qu'elle ne dépend éventuellement que des variables d'espace, indiquant ainsi que le milieu est inhomogène. Nous la notons $\rho(M)$. Egalement, nous estimons que les variations de température qui pourraient être induites par les phénomènes dissipatifs sont négligeables. La température au sein du domaine est donc uniforme et constante au cours du temps.

Les sollicitations appliquées au domaine peuvent être : des actions à distance agissant dans $\Omega(t)$ et induites par une densité volumique d'efforts notée $\rho(M)\vec{f}(M,t)$ (la Pesanteur par exemple) et des actions de contact agissant sur $\partial\Omega(t)$.

Pour construire un cadre général à ses actions de contact, la frontière du domaine est découpée en trois parties distinctes $\partial\Omega_U$, $\partial\Omega_F$ et $\partial\Omega_{FU}$. Nous supposons que ce découpage est indépendant

du temps et qu'il forme une partition de $\partial\Omega(t)$, c'est-à-dire notamment que la réunion de ces différentes parties redonne la totalité de $\partial\Omega(t)$ et que leur intersection deux à deux est égale à l'ensemble vide. Soit :

$$\partial\Omega(t) = \partial\Omega_U \cup \partial\Omega_F \cup \partial\Omega_{FU} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \partial\Omega_U \cap \partial\Omega_F = \emptyset \\ \partial\Omega_F \cap \partial\Omega_{FU} = \emptyset \\ \partial\Omega_U \cap \partial\Omega_{FU} = \emptyset \end{array} \right.$$

Nous autorisons à ce que chaque partie puisse se réduire à l'ensemble vide. En revanche, dès lors qu'une partie ne se réduit pas à l'ensemble vide, sa mesure est strictement positive. A partir de ce découpage, les conditions aux limites suivantes sont définies :

- sur $\partial\Omega_F$, nous donnons la densité surfacique d'efforts $\vec{F}(M,t)$;
- sur $\partial\Omega_U$, nous donnons le déplacement $\vec{U}(M,t)$ en chaque point ;
- sur $\partial\Omega_{FU}$, nous donnons un vecteur $\vec{D}(M,t)$ de renseignements locaux dont les composantes sont celles, soit d'un déplacement, soit d'une densité surfacique d'efforts, par exemple :

$$\vec{D}(M,t) = \left(\begin{array}{c} F'_1(M,t) \\ U'_2(M,t) \\ F'_3(M,t) \end{array} \right)$$

où $F'_1(M,t)$ et $F'_3(M,t)$ sont les composantes d'une densité surfacique d'effort et $U'_2(M,t)$ les composantes d'un champ de déplacement. Sans plus de précisions sur la forme que peuvent prendre l'ensemble des sollicitations, ces conditions aux limites sont celles d'un problème dit standard.

Le problème (noté (P)) à résoudre consiste à trouver, en tout point du domaine, les inconnues suivantes :

- le vecteur déplacement $\vec{u}(M,t)$;
- le tenseur des contraintes $\sigma(M,t)$;
- les variables d'état internes (et leur variable associée) incluses dans la modélisation du comportement. Ici, ces variables sont :
  - . n_a scalaires notés $(a^m(M,t))_{m=1,\ldots,n_a}$. Les variables associées sont notées $(A^m(M,t))_{m=1,\ldots,n_a}$;
  - . n_b vecteurs notés $(b^n(M,t))_{n=1,\ldots,n_b}$. Les variables associées sont notées $(B^n(M,t))_{n=1,\ldots,n_b}$;
  - . n_c 2-tenseurs notés $(c^p(M,t))_{p=1,\ldots,n_c}$. Les variables associées sont notées $(C^p(M,t))_{p=1,\ldots,n_c}$.

Les équations (EQPB) locales données en tout point $M(t)$ de $\Omega(t)$ sont :

- l'équation d'équilibre (EQL) :

$$\overrightarrow{div}\ \sigma(M,t) + \rho(M)\vec{f}(M,t) = \rho(M)\frac{\partial^2\vec{u}(M,t)}{\partial t^2}$$

- la loi de comportement constituée par :
  - . les lois d'état (EQETAT) ($\psi(M,t)$ étant une fonction d'état donnée) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial\psi(M,t)}{\partial\bar{\bar{\varepsilon}}} = \frac{1}{\rho(M)}\sigma(M,t) \\ \frac{\partial\psi(M,t)}{\partial a^m} = A^m(M,t) \\ \frac{\partial\psi(M,t)}{\partial b^n} = B^n(M,t) \\ \frac{\partial\psi(M,t)}{\partial c^p} = C^p(M,t) \end{array} \right.$$

  - . les lois d'évolution (EQEVOL) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{da^m(M,t)}{dt} = \ldots \\ \frac{db^n(M,t)}{dt} = \ldots \\ \frac{dc^p(M,t)}{dt} = \ldots \end{array} \right.$$

— les conditions aux limites :

$$\begin{cases} \text{sur } \partial\Omega_F \ : \ \sigma(M \in \partial\Omega_F, t) \times \vec{n}(M \in \partial\Omega_F, t) = \vec{F}(M,t) \\ \\ \text{sur } \partial\Omega_U \ : \ \vec{u}(M \in \partial\Omega_U, t) = \vec{U}(M,t) \\ \\ \text{sur } \partial\Omega_{FU} \ : \ \begin{cases} \{\sigma(M \in \partial\Omega_{FU}, t) \times \vec{n}(M \in \partial\Omega_{FU}, t)\}_1 = F_1'(M,t) \\ \{\vec{u}(M \in \partial\Omega_{FU}, t)\}_2 = U_2'(M,t) \\ \{\sigma(M \in \partial\Omega_{FU}, t) \times \vec{n}(M \in \partial\Omega_{FU}, t)\}_3 = F_3'(M,t) \end{cases} \end{cases}$$

Lorsque le comportement du milieu constituant le domaine est élastique linéaire, ces problèmes types sont qualifiés de problèmes standards d'élasticité linéaire. Dans ce cas, des théorèmes portant sur l'existence et l'unicité des solutions sont connus, ces problèmes répondent au Théorème de Superposition, en raison de la linéarité de tous les opérateurs qui entrent dans leur formulation et de ce fait, leurs solutions sont linéaires par rapport aux données.

Il convient ici de bien préciser que le cadre dans lequel le problème précédent a été écrit est celui de la Mécanique des Milieux Continus ou de ses dérivées (comme celui de la Mécanique de l'Endommagement), qui font implicitement référence à la Thermodynamique et à la Méthode de l'Etat Local. Aussi, les problèmes de propagation de fissures inscrits dans le cadre de la Mécanique de la Rupture, ne s'y retrouvent pas. En ce qui nous concerne, nous allons nous intéresser (comme application à notre travail) plus particulièrement à la multiplication de fissures (intralaminaires au sein d'un composite) plutôt qu'à leur croissance. Pour cette raison, tous les développements que nous serons amenés à faire ne s'adresseront qu'aux problèmes susceptibles d'être résolus dans le cadre de la Mécanique des Milieux Continus.

4.2 Vocabulaire nécessaire à la classification des problèmes de fatigue à l'aide de grandeurs structurales

4.2.1 Notions et définitions fondamentales

Soit $\left\{\vec{F}(M,t), \vec{U}(M,t), F_1'(M,t), U_2'(M,t), F_3'(M,t), \rho(M,t)\vec{f}(M,t), t_a \leq t \leq t_b\right\}$ l'ensemble des champs (de vecteurs ou de scalaires) qui définissent les sollicitations du problème (P). Par soucis de simplification, nous notons $S(I)$ l'ensemble de toutes les composantes des champs de vecteurs, qui définissent les sollicitations du problème (P) au cours du temps entre les instants t_a et t_b $(t_0 \leqslant t_a < t_b \leqslant t_{max})$, qui définissent l'intervalle $I = [t_a, t_b]$, tel que :

$$S(I) = S_c(I) \cup S_t(I) \tag{4.1}$$

avec :

— $S_c(I)$ l'ensemble de toutes les composantes des champs de vecteurs qui définissent les sollicitations constantes du problème (P) ;

— $S_t(I)$ l'ensemble de toutes les composantes des champs de vecteurs qui définissent les sollicitations non constantes du problème (P).

Soient n, n_c, n_t les cardinaux de ces ensembles et $n = n_c + n_t$. Soit $s_\alpha(M)$ un élément quelconque de $S_c(I)$, tel que $S_c(I) = s_\alpha(M)_{\alpha\in\{1,\ldots,n_c\}}$ et $s_\alpha(M,t)$ un élément quelconque de $S_t(I)$, tel que $S_t(I) = s_\alpha(M,t)_{\alpha\in\{1,\ldots,n_t\}}$, avec l'hypothèse que $s_\alpha(M,t)$ soit une fonction continue et dérivable sur son intervalle de définition I. L'ensemble des grandeurs nécessaires à la connaissance de l'ensemble $S_t(I)$ est noté $\mathbb{S}_t(I)$. Ce sont les éléments des ensembles $S_t(I)$ et $\mathbb{S}_t(I)$ qui évoluent

au cours du temps et donc sont susceptibles de montrer un caractère répétitif, et par voie de conséquence, d'induire la notion de cycle et de fatigue. Les classifications des problèmes de fatigue reposent sur ces ensembles.

Définition (S0) - Nous appelons $\mathbb{S}_t(I)$ l'ensemble des paramètres caractéristiques des sollicitations temporelles structurales. Deux ensembles de paramètres caractéristiques des sollicitations temporelles structurales sont de même type s'ils contiennent les mêmes grandeurs mathématiques. Deux ensembles des paramètres caractéristiques des sollicitations temporelles structurales sont égaux s'ils contiennent les mêmes grandeurs mathématiques et que ces grandeurs sont égales.

Par exemple :
- soient les grandeurs mathématiques suivantes :
  - . les scalaires T, V_{min}, V_{max}, $T^{(1)}$, $V_{min}^{(1)}$, $V_{max}^{(1)}$, $T^{(2)}$, $V_{min}^{(2)}$, $V_{max}^{(2)}$ tels que $T \neq T^{(1)} = T^{(2)}$, $V_{min} \neq V_{min}^{(1)} = V_{min}^{(2)}$, $V_{max} \neq V_{max}^{(1)} = V_{max}^{(2)}$;
  - . $\overline{s}^{(0)}(M)$ un champ scalaire défini sur le domaine Ω ;
  - . $\overline{s}^{(1)}(M)$, $\overline{s}^{(2)}(M)$ et $\overline{s}^{(3)}(M)$ trois champs scalaires définis sur le domaine ω tels que $\overline{s}^{(1)}(M) = \overline{s}^{(2)}(M) \neq \overline{s}^{(3)}(M)$;
- soient les ensembles de paramètres caractéristiques des sollicitations temporelles structurales suivants :
  - . $\mathbb{S}_t(I) = \left\{\overline{s}^{(0)}(M)\right\}$;
  - . $\mathbb{S}_t(I^{(0)}) = \{T, V_{min}, V_{max}, \overline{s}(M)\}$;
  - . $\mathbb{S}_t(I^{(1)}) = \left\{T^{(1)}, V_{min}^{(1)}, V_{max}^{(1)}, \overline{s}^{(1)}(M)\right\}$;
  - . $\mathbb{S}_t(I^{(2)}) = \left\{T^{(2)}, V_{min}^{(2)}, V_{max}^{(2)}, \overline{s}^{(2)}(M)\right\}$;
  - . $\mathbb{S}_t(I^{(3)}) = \left\{T^{(2)}, V_{min}^{(2)}, V_{max}^{(2)}, \overline{s}^{(3)}(M)\right\}$,
- alors :
  - . $\mathbb{S}_t(I^{(0)})$, $\mathbb{S}_t(I^{(1)})$, $\mathbb{S}_t(I^{(2)})$ et $\mathbb{S}_t(I^{(3)})$ sont du même type ;
  - . $\mathbb{S}_t(I)$ et $\mathbb{S}_t(I^{(0)})$ ne sont pas du même type ;
  - . $\mathbb{S}_t(I^{(0)})$ et $\mathbb{S}_t(I^{(1)})$ sont du même type mais ne sont pas égaux ;
  - . $\mathbb{S}_t(I^{(1)})$ et $\mathbb{S}_t(I^{(2)})$ sont du même type et sont égaux ;
  - . $\mathbb{S}_t(I^{(2)})$ et $\mathbb{S}_t(I^{(3)})$ sont du même type mais ne sont pas égaux.

Hypothèse (H0) - La fonction $s_\alpha(M,t)$ identifiant une sollicitation de manière unique, sa description au travers de ses caractéristiques dans $\mathbb{S}_t(I)$ doit conserver cette unicité. Par conséquent, nous imposons que la relation entre $s_\alpha(M,t)$ et les éléments qui la décrivent dans $\mathbb{S}_t(I)$ soit bi-univoque.

Dans l'optique de définir un problème de fatigue, nous allons éclaircir les aspects relatifs à la notion de cycle, à savoir celui des sollicitations.

Définition (D0) - Sollicitation. Une sollicitation appliquée au système entre les instants t_a et t_b est un élément quelconque de $S(I)$.

Définition (D1) - Sollicitation cyclique. La sollicitation $s_\alpha(M,t)$ est cyclique sur un intervalle de temps I pour le cycle élémentaire $c[s_\alpha(M,t)](M,t) = s_\alpha(M,t)$ défini sur $I_0^c[s_\alpha(M,t)](M)$ avec $I_0^c[s_\alpha(M,t)](M) \subset I$, s'il existe k ($k \in \mathbb{N}^*$) intervalles $(I_i^c[s_\alpha(M,t)](M))_{i\in\{1,\dots,k\}}$ tels que $\forall i \in [1;k]$:

- $I_i^c[s_\alpha(M,t)](M) \neq I_0^c[s_\alpha(M,t)](M)$ (avec $I_i^c[s_\alpha(M,t)](M) \cap I_{i+1}^c[s_\alpha(M,t)](M) = \emptyset$) ;
- $\exists p_i \in \mathbb{R}_+, \exists t' \in I_0^c[s_\alpha(M,t)](M) / \forall t \in I_i^c[s_\alpha(M,t)](M), s_\alpha(M,t) = s_\alpha(M,t'+p_i)$.

Les k périodes de la fonction $s_\alpha(M,t)$ associés au cycle élémentaire $c[s_\alpha(M,t)](M,t)$ sont les k valeurs $c_i[s_\alpha(M,t)] = p_i - p_{i-1}$, en notant $p_0 = 0$. Le cycle élémentaire $c[s_\alpha(M,t)](M,t)$ apparaît k+1 fois dans l'intervalle I. Les cycles (en excluant le cycle élémentaire) de la sollicitation cyclique $s_\alpha(M,t)$ correspondent à ses restrictions sur les k intervalles $(I_i^c[s_\alpha(M,t)](M))_{i\in\{1,\dots,k\}}$.

Définition (D2) - Sollicitation transitoire. La sollicitation $s_\alpha(M,t)$ est transitoire sur un intervalle de temps I, si elle n'est pas cyclique sur cet intervalle.

Définition (D3) - Sollicitation périodique. La sollicitation $s_\alpha(M,t)$ est périodique sur un intervalle de temps I, si les k+1 intervalles $(I_i^c[s_\alpha(M,t)](M))_{i\in\{0,\dots,k\}}$ sont tels que $I = \bigcup_{i=0}^{i=k} I_i^c[s_\alpha(M,t)](M)$ (avec $I_i^c[s_\alpha(M,t)](M) \cap I_{i+1}^c[s_\alpha(M,t)](M) = \emptyset$). Nous notons $T[s_\alpha(M,t)](M)$ sa période, $I^{cp}[s_\alpha(M,t)](M)$ $(= I_0^c[s_\alpha(M,t)](M))$ l'intervalle de temps qui définit le cycle élémentaire, $c^p[s_\alpha(M,t)](M,t)$ la restriction de $s_\alpha(M,t)$ sur l'intervalle $I^{cp}[s_\alpha(M,t)](M)$ (autrement dit, il s'agit du cycle élémentaire unique de la sollicitation). La fonction $s_\alpha(M,t)$ est continue et périodique : elle possède donc une borne inférieure $s_{\alpha min}(M)$ et une borne supérieure $s_{\alpha max}(M)$ (avec $s_{\alpha min}(M) < s_{\alpha max}(M)$), elle atteint ses bornes et la fonction $c^p(s_\alpha(t))$, continue sur $I^{cp}[s_\alpha(M,t)](M)$, possède les mêmes bornes.

Néanmoins, la fonction $c^p[s_\alpha(M,t)](M,t)$ peut posséder des extremums relatifs autres que ses extremums absolus définis par ses bornes. Aussi, la classification des problèmes de fatigue qui va être développée utilisera deux hypothèses supplémentaires.

Hypothèse (H1). La fonction $c^p[s_\alpha(M,t)](M,t)$ ne possède aucun extrémum autre que $s_{\alpha\, min}(M)$ et $s_{\alpha\, max}(M)$. Elle évolue donc de façon monotone entre ses bornes. La seule connaissance du triplet $(T[s_\alpha(M,t)](M), s_{\alpha min}(M), s_{\alpha max}(M))$ ne permet pas de décrire complètement $c^p[s_\alpha(M,t)](M,t)$. En particulier, l'évolution entre ses bornes reste inconnue. Aussi, une hypothèse supplémentaire s'avère nécessaire.

Hypothèse (H2). La fonction $c^p[s_\alpha(M,t)](M,t)$ vérifie l'hypothèse (H1), est symétrique par rapport à sa demi-période (symétrie axiale d'axe $t = T[s_\alpha(M,t)](M)/2$ et évolue de façon linéaire entre les bornes $s_{\alpha\, min}(M)$ et $s_{\alpha\, max}(M)$. Cette hypothèse fixe le profil de la loi horaire de $s_\alpha(M,t)$, à savoir un profil en "dent-de-scie". Certes, une autre forme d'évolution aurait pu être choisie, néanmoins il s'agit là de la forme usuelle la plus rencontrée dans les problèmes de fatigue. Sous l'hypothèse (H2), $s_\alpha(M,t)$ est identifiée de manière unique par $(T[s_\alpha(M,t)](M)$, $s_{\alpha\, min}(M)$, $s_{\alpha\, max}(M))$ ou bien $(T[s_\alpha(M,t)](M)$, $s_{\alpha\, min}(M)$ ou $s_{\alpha\, max}(M)$, le rapport de charge $R[s_\alpha(M,t)](M)$, l'indicateur de charge $I_c[s_\alpha(M,t)](M))$.

Définition (D4) - Sollicitations identiques. Les sollicitations $s_\alpha(M,t)$ sont identiques de loi horaire $V(t)$ sur un intervalle de temps I, si et seulement si $\forall s_\alpha(M,t) \in S_t(I), \exists \overline{s}_\alpha(M) \in \mathbb{R}^*$ tel que $s_\alpha(M,t)/\overline{s}_\alpha(M) = V(t)$. Ces éléments $s_\alpha(M,t)$ de $S(I)$ ont alors la même loi horaire $V(t)$.

Définition (D5) - Sollicitations identiques affines. Les sollicitations $s_\alpha(M,t)$ sont identiques affines de loi horaire $V(t)$ sur un intervalle de temps I, si et seulement si $\forall s_\alpha(M,t) \in S_t(I), \exists \overline{s}_\alpha(M) \in \mathbb{R}^*, \exists \overline{\overline{s}}_\alpha(M) \in \mathbb{R}$ tels que $\left(s_\alpha(M,t) - \overline{\overline{s}}_\alpha(M)\right)/\overline{s}_\alpha(M) = V(t)$. Ces éléments $s_\alpha(M,t)$ de $S(I)$ ont alors la même loi horaire $V(t)$.

4.2.2 Illustrations

Ces différents concepts sont illustrés avec deux sollicitations s_1 et s_2 :

— Fig. 4.1a : s_1 et s_2 sont cycliques sur l'intervalle $I = [0, 20]$, car elles se retrouvent à l'identique respectivement sur $[1, 5]$ et $[11, 15]$, et, $[0, 8]$ et $[12, 20]$. Elles sont transitoires respectivement sur $[15, 20]$ et sur $[8, 12]$ et s_1 est périodique sur $[5, 11]$ (donc, a fortiori, cyclique) ;
— Fig. 4.1b : s_1 et s_2 sont périodiques sur $[0, 20]$ (donc, a fortiori cycliques), car les intervalles de temps où elles se retrouvent à l'identique forment une partition de $[0, 20]$. Le cycle élémentaire est respectivement défini sur $[0, 4]$ et sur $[0, 2]$ et leur évolution dans cet intervalle ne vérifie aucune des hypothèses (H1) et (H2). En effet, s_1 et s_2 possèdent d'autres extrémums que ceux définis par leurs bornes ;
— Fig. 4.2 : s_1 et s_2 sont périodiques sur $[0, 16]$. Le cycle élémentaire est défini respectivement sur $[0, 4]$ et sur $[0, 2]$. Contrairement au cas précédent, l'hypothèse (H1) est vérifiée sur Fig. 4.2a : s_1 et s_2 ne possèdent pas d'extrémum autres que ceux définis par leurs bornes. L'hypothèse (H2) est vérifiée sur Fig. 4.2b : s_1 et s_2 vérifient (H1) et le profil est en dent-de-scie ;
— Fig. 4.3 : s_1 et s_2 sont périodiques sur $[0, 16]$ et identiques. Sur Fig. 4.3a, les hypothèses (H1) et (H2) ne sont pas vérifiées. Sur Fig. 4.3b, les hypothèses (H1) et (H2) sont vérifiées.

4.2.3 Nouvelles définitions : rapport de charge et indicateur de charge

Nous posons les grandeurs suivantes pour une sollicitation $s_\alpha(M, t)$ périodique :

— le rapport de charge $R[s_\alpha(M,t)](M) = \frac{min(|s_{\alpha\,min}(M)|,|s_{\alpha\,max}(M)|)}{max(|s_{\alpha\,min}(M)|,|s_{\alpha\,max}(M))|)}$. Il est habituellement défini par $R[s_\alpha(M,t)](M) = s_{\alpha\,min}(M)/s_{\alpha\,max}(M)$, ce qui engendre des problèmes pour $s_{\alpha max}(M) = 0$ et dans le cas où l'écriture d'une loi d'évolution de fatigue doit être insensible aux changements de signe de la sollicitation, comme cela peut être le cas lors d'un cisaillement.
— l'indicateur de charge $I_c[s_\alpha(M,t)](M)$ qui prend quatre valeurs distinctes relatives aux quatre possibilités suivantes : $s_\alpha(M, t)$ est une fonction positive ou nulle, négative, positive/négative et admet une valeur moyenne positive ou nulle, positive/négative et admet une valeur moyenne négative. La forme explicite de l'indicateur de charge ne sera pas utilisée dans les développements qui suivent.

4.3 Classification des problèmes de fatigue à partir de grandeurs structurales

En utilisant les ensembles $S_t(I)$ et $\mathbb{S}_t(I)$, c'est-à-dire des grandeurs structurales, nous proposons une première classification structurale.

Définition (C0) - Problème de fatigue. Un problème posé est un problème de fatigue sur l'intervalle I, si l'évolution temporelle de tous les éléments de $S_t(I)$ est cyclique sur l'intervalle I. Soit : $\mathbb{S}_t(I) = S_t(I) = \left\{s_\alpha(M,t)_{\alpha\in\{1,\ldots,n_t\}}\right\}$.

Cette définition d'un problème de fatigue reste générale. A ce stade, il est difficile de la distinguer de celle d'un problème standard et d'en extraire des caractéristiques propres à la notion de fatigue.

Définition (C1) - Problème de fatigue de type Sollicitations Périodiques sur l'intervalle I SP(I). Un problème posé est un problème de fatigue de type SP(I), si c'est un problème de fatigue sur l'intervalle I pour lequel l'évolution temporelle de tous les éléments de

$S_t(I)$ est périodique. Ainsi, pour les problèmes SP(I), $S_t(I)$ est connu, si le cycle élémentaire $c^p[s_\alpha(M,t)](M,t)$ (associé à la période $T[s_\alpha(M,t)](M)$) de chacun de ses éléments sont connus. Soit : $\mathbb{S}_t(I) = \left\{(c^p[s_\alpha(M,t)](M,t))_{\alpha\in\{1,\dots,n_t\}}\right\}$. La généralité des problèmes induits est encore très importante, voire difficile à inscrire dans un problème dit de fatigue. Par exemple, si deux sollicitations sont périodiques, de rapport de périodes non rationnel, définir la notion de cycle peut s'avérer délicat. Une simplification possible est de supposer que les sollicitations sont identiques.

Définition (C2) - Problème de fatigue de type Sollicitations Périodiques Identiques sur l'intervalle I SPI(I). Un problème posé est un problème de fatigue de type SPI(I), si c'est un problème de fatigue de type SP(I) pour lequel les sollicitations sont identiques. Ainsi, pour les problèmes SPI(I), $S_t(I)$ est connu, si le cycle élémentaire $c^p[V(t)](t)$ (associé à la période $T[V(t)]$) communs à chaque $s_\alpha(M,t)$ et l'ensemble $\overline{s}_\alpha(M)$ sont connus. Soit : $\mathbb{S}_t(I) = \left\{c^p[V(t)](t), (\overline{s}_\alpha(M))_{\alpha\in\{1,\dots,n_t\}}\right\}$

Définition (C3) - Problème de fatigue de type Sollicitations Périodiques Monotones sur l'intervalle I SPM(I). Un problème posé est un problème de fatigue de type SPM(I), si c'est un problème de fatigue de type SP(I) pour lequel chaque élément de $S_t(I)$ obéit à l'hypothèse (H1). La connaissance complète de l'ensemble $S_t(I)$ requiert le même type de renseignements que pour les problèmes de type SP(I), c'est-à-dire le nombre important de renseignements induit par l'intégralité des valeurs de la loi horaire des cycles élémentaires. Soit : $\mathbb{S}_t(I) = \left\{(c^p[s_\alpha(M,t)](M,t))_{\alpha\in\{1,\dots,n_t\}}\right\}$.

Définition (C4) - Problème de fatigue de type Sollicitations Périodiques Monotones Identiques sur l'intervalle I SPMI(I). Un problème posé est un problème de fatigue de type SPMI(I), si c'est un problème de fatigue de type SPM(I) dont les sollicitations sont identiques. La connaissance complète de l'ensemble $S_t(I)$ requiert le même type de renseignements que pour les problèmes de type SPM(I), c'est-à-dire le nombre infini de renseignements induit par l'intégralité des valeurs de la loi horaire du cycle élémentaire commun à l'ensemble des sollicitations. Soit : $\mathbb{S}_t(I) = \left\{c^p[V(t)](t), (\overline{s}_\alpha(M))_{\alpha\in\{1,\dots,n_t\}}\right\}$.

Définition (C5) - Problème de fatigue de type Sollicitations Périodiques Monotones Linéaires sur l'intervalle I SPML(I). Un problème posé est un problème de fatigue de type SPML(I), si c'est un problème de fatigue de type SPM(I) pour lequel chaque élément de $S_t(I)$ obéit à l'hypothèse (H2). Un nombre restreint de renseignements est suffisant pour connaître $S_t(I)$: pour chaque $s_\alpha(M,t)$, la période $T[s_\alpha(M,t)](M)$ et ses bornes $s_{\alpha\,min}(M)$ et $s_{\alpha\,max}(M)$. Soit : $\mathbb{S}_t(I) = \left\{(T[s_\alpha(M,t)](M), s_{\alpha\,min}(M), s_{\alpha\,max}(M))_{\alpha\in\{1,\dots,n_t\}}\right\}$.

Définition (C6) - Problème de fatigue de type Sollicitations Périodiques Monotones Linéaires Identiques sur l'intervalle I SPMLI(I). Un problème posé est un problème de fatigue de type SPMLI(I), si c'est un problème de fatigue type SPML(I) dont les sollicitations sont identiques. Un nombre fini de renseignements est suffisant pour connaître $S_t(I)$: la période $T[V(t)]$, les bornes V_{min} et V_{max} du cycle élémentaire commun à chaque $s_\alpha(M,t)$ et l'ensemble des nombres $\overline{s}_\alpha(M)$. Soit : $\mathbb{S}_t(I) = \left\{T[V(t)], V_{min}, V_{max}, (\overline{s}_\alpha(M))_{\alpha\in\{1,\dots,n_t\}}\right\}$.

Les classes construites peuvent être hiérarchisées de la plus complexe à la plus simple par le nombre décroissant de renseignements nécessaires à la connaissance de l'ensemble $\mathbb{S}_t(I)$.

Remarque. Si les phénomènes physiques considérés ne sont pas sensibles aux effets de vitesse, mais uniquement au caractère incrémental de la variable d'état pilote, alors les problèmes de fatigue de type SPM(I) et SPML(I) sont équivalents au sens suivant : sous réserve de conserver les mêmes extrémums de sollicitations, l'intégration des lois d'évolution conduira au même résultat

final, que les évolutions des sollicitations entre leurs extrémums soient linéaires ou non. Aussi, pour ces mêmes types de phénomènes physiques, et dans des conditions identiques, des problèmes de fatigue de type SPMI(I) et SPMLI(I) sont équivalents.

Nous illustrons les différents types de problèmes précédents :
— (Fig. 4.1) donne des problèmes (généraux) de fatigue et de type SP(I) ;
— (Fig. 4.2) donne des problèmes de type SPM(I) et SPML(I) ;
— (Fig. 4.3) donne des problèmes de type SPI(I) et SPMLI(I).

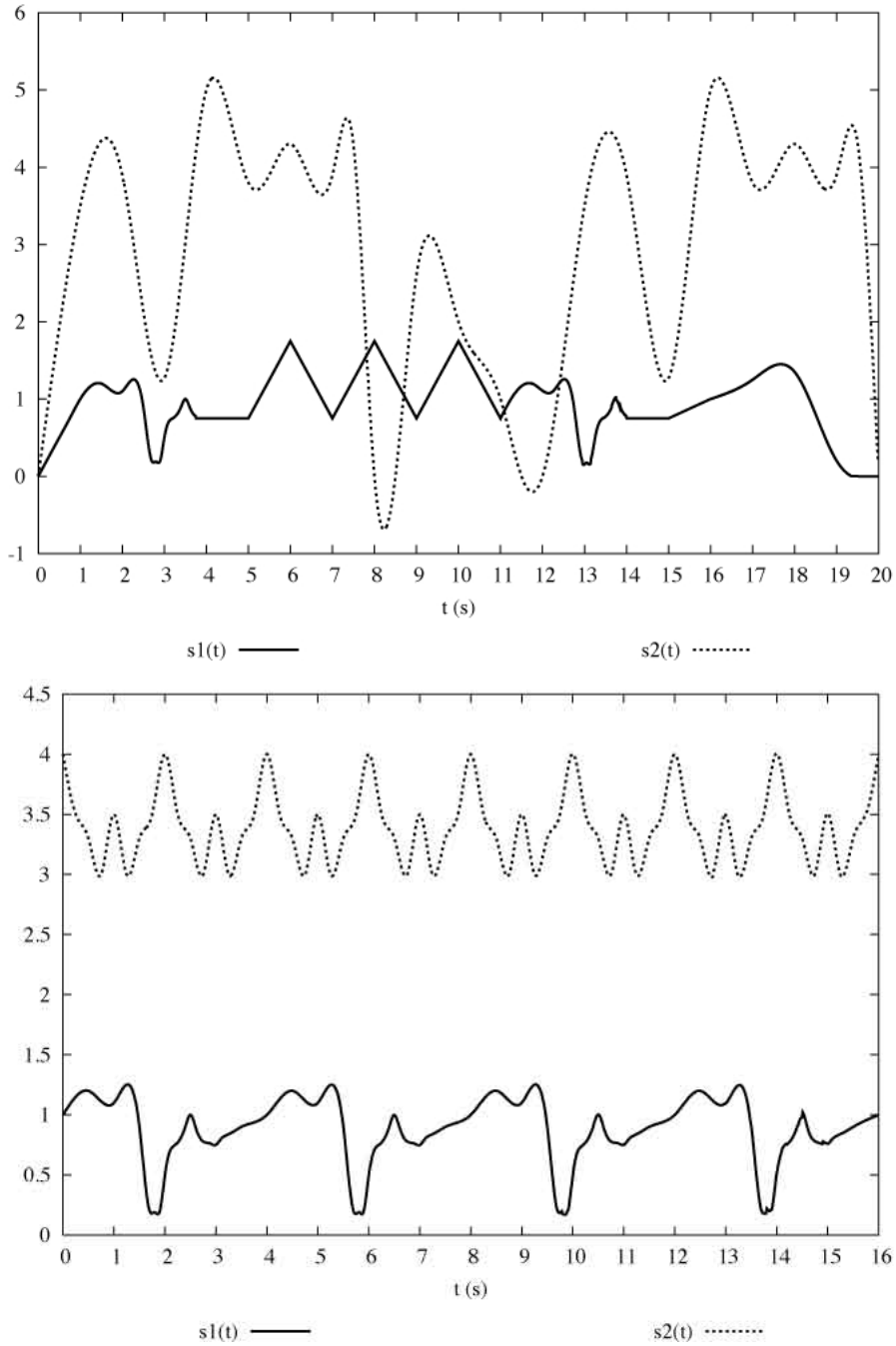
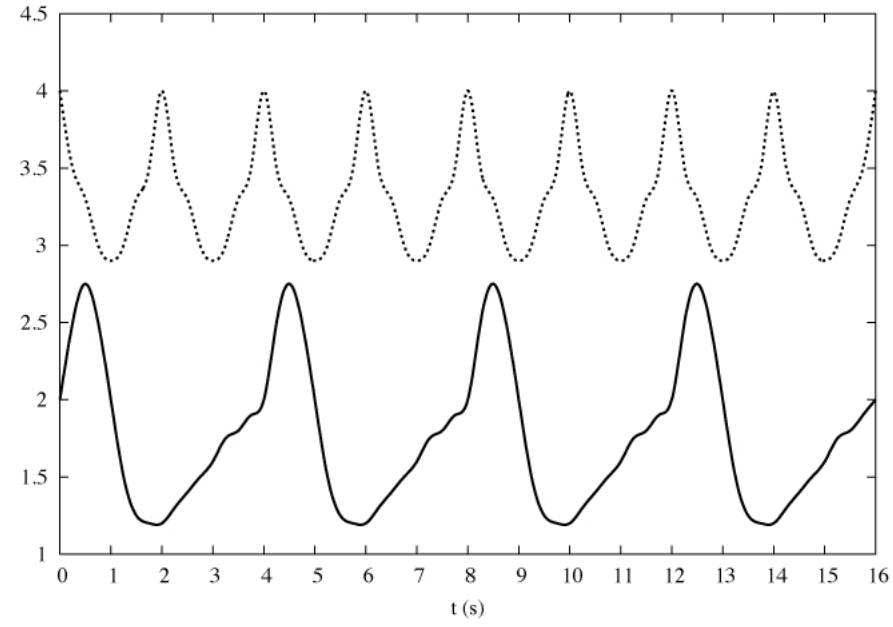
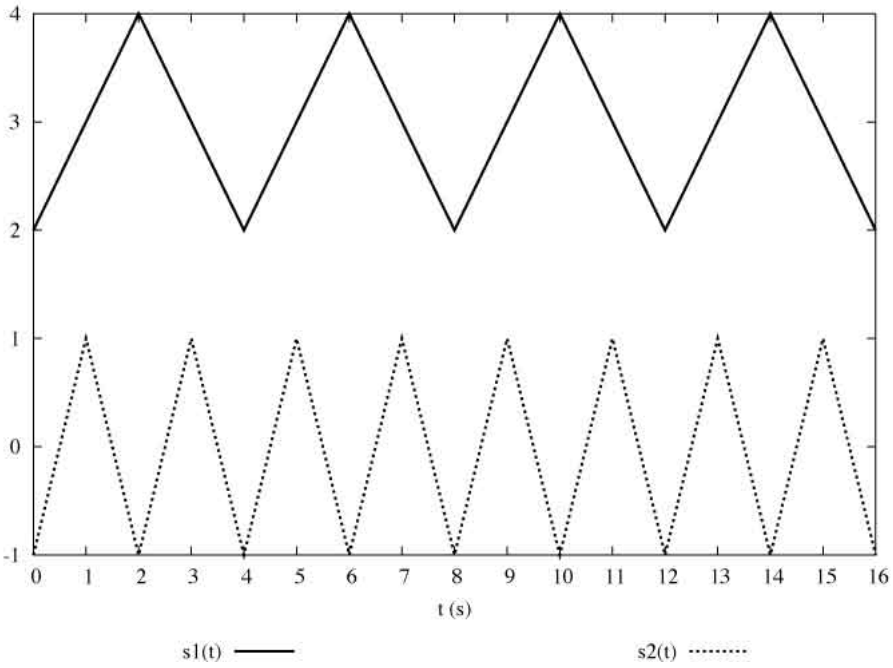


FIGURE 4.1 – Problèmes de fatigue, dans le cadre de la classification structurale pour des sollicitations supposées uniformes : $S_t(I) = \{s_1(M,t) = s_1(t), s_2(M,t) = s_2(t)\}$. (a) Problème de fatigue, $I = [0, 20]$: s_1 et s_2 sont cycliques, s_1 se retrouve à l'identique sur $[1, 5]$ et $[11, 15]$, s_2 se retrouve à l'identique sur $[0, 8]$ et $[12, 20]$. (b) Problème de fatigue de type SP(I), $I = [0, 20]$: s_1 et s_2 sont périodiques de cycle élémentaire respectif $[0, 4]$ et $[0, 2]$ [64].

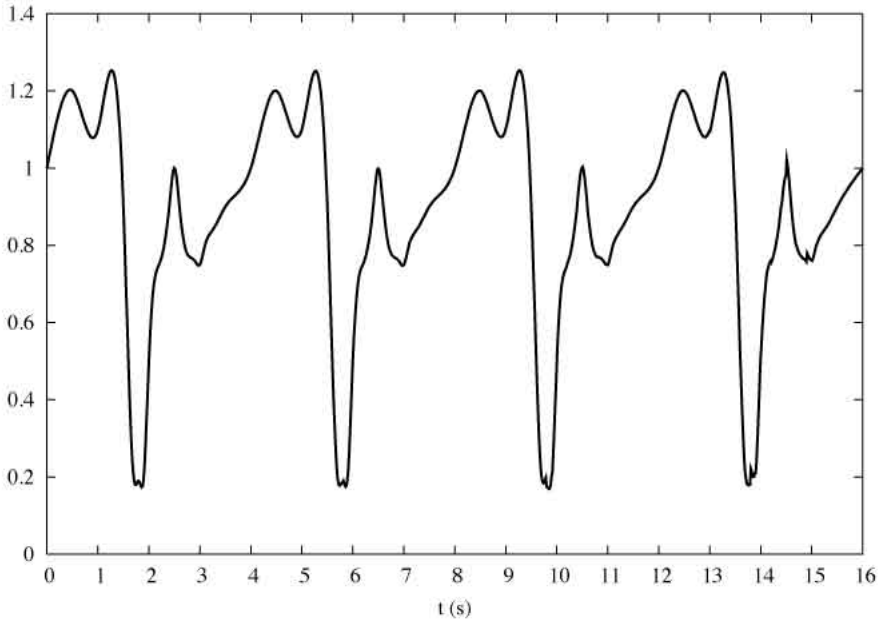


(a)

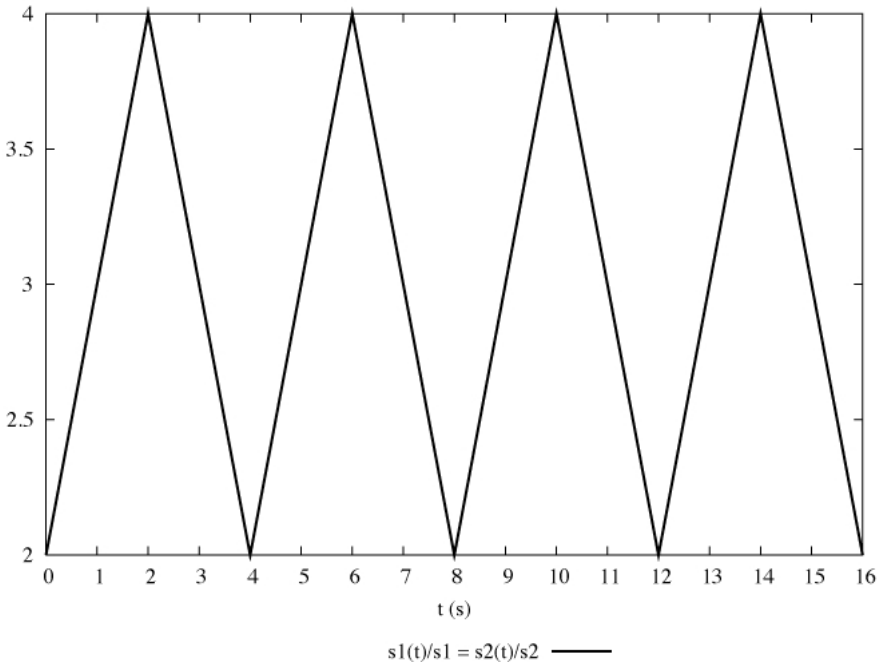


(b)

FIGURE 4.2 – Problèmes de fatigue, dans le cadre de la classification structurale pour des sollicitations supposées uniformes : $S_t(I) = \{s_1(M,t) = s_1(t), s_2(M,t) = s_2(t)\}$. (a) Problème de fatigue de type SPM(I), $I = [0, 16]$ ("Type SPM(I) = Type SP(I) + Hypothèse (H1)") : s_1 et s_2 sont périodiques de cycle élémentaire respectif $[0, 4]$ et $[0, 2]$ et évoluent de manière monotone entre leurs bornes. (b) Problème de fatigue de type SPML(I), $I = [0, 16]$ ("Type SPML(I) = Type SPM(I) + Hypothèse (H2)") s_1 et s_2 sont périodiques de cycle élémentaire respectif $[0, 4]$ et $[0, 2]$ et évoluent de manière monotone linéaire entre leurs bornes [64].



(a)



(b)

FIGURE 4.3 – Problèmes de fatigue, dans le cadre de la classification structurale pour des sollicitations supposées uniformes : $S_t(I) = \{s_1(M,t) = s_1(t), s_2(M,t) = s_2(t)\}$. (a) Problème de fatigue de type SPI(I), $I = [0, 16]$ ("Type SPI(I) = Type SP(I) + chargements identiques"). (b) Problème de fatigue de type SPMLI(I), $I = [0, 16]$ ("Type SPMLI(I) = Type SPML(I) + chargements identiques"). Dans les deux cas (a) et (b), il existe des nombres $\overline{s}_1$ et $\overline{s}_2$ tels que : $s_1(t)/\overline{s}_1 = s_2(t)/\overline{s}_2$ [64].

Chapitre 5

Classification des problèmes de fatigue suivant des critères locaux

5.1 Justification d'une classification des problèmes de fatigue à partir de grandeurs locales

Nous souhaitons attribuer au concept local de fatigue l'écriture de la loi d'évolution d'un modèle de comportement sous une forme déduite de la Thermodynamique des Milieux Continus (par exemple Eq. 3.1), mais en s'affranchissant de la connaissance de la loi horaire complète de la variable pilote, au profit d'une variable associée à la répétitivité de son application et d'éléments caractéristiques de cette loi horaire. Cette loi d'évolution, dite de fatigue, prendra alors la forme générale Eq. 3.2.

Toutefois, il ne faut pas que l'abaissement du temps de calcul se fasse au détriment de la qualité de la prévision. Aussi, les lois d'évolution écrites en fatigue Eq. 3.2 doivent être le plus proches possible des "vraies" lois : les éléments caractéristiques de la loi horaire de la variable pilote pris en compte doivent permette d'identifier sans ambiguité la loi horaire complète de la variable pilote (nous poserons pour cela des hypothèses identiques à l'hypothèse (H0), mais au niveau local).

Ces éléments caractéristiques locaux reposent sur des éléments caractéristiques des sollicitations structurales imposées par le milieu extérieur. Identifier ces éléments locaux semble délicat dans le cas de problèmes de fatigue généraux. Cela justifie ainsi le fait d'avoir d'abord construit une classification des problèmes de fatigue au niveau structural. Enfin, ce sont les lois locales d'évolution qui sont finalement résolues, ce qui justifie la classification suivante réalisée à l'aide de grandeurs locales. Certes, il est aisé d'analyser des grandeurs structurales, afin d'en identifier des éléments caractéristiques, néanmoins, il est fort complexe de savoir si toutes ou partie de ces éléments caractéristiques se transmettent sans distorsion au niveau local à la variable pilote. La classification faite au niveau local permet d'amener des réponses à cette question.

5.2 Vocabulaire nécessaire à la classification des problèmes de fatigue à l'aide de grandeurs locales

5.2.1 Notions et définitions fondamentales

Définition (d1) - Composantes actives de la variable pilote. Les composantes actives de la variable pilote $Q(M,t)$, supposée 2-tensorielle utilisée dans la modélisation d'un phénomène,

et de composantes $(Q_{ij}(M,t))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}$, sont les composantes de $Q(M,t)$ présentes dans la loi d'évolution du phénomène considéré $(Q^*_{ij}(M,t))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}$.

L'intérêt de la définition de ces composantes particulières est que leur emploi peut simplifier la démarche évoquée, notamment la justification du passage de Eq. 3.1 à Eq. 3.2 (Par exemple, le phénomène de rupture des fibres d'un composite, qui n'est gouverné (au moins en première approximation) que par la déformation axiale au sein des fibres). Les composantes actives jouent au niveau local le même rôle que jouent les grandeurs $s_\alpha(M,t)$ (Définition (D1)) au niveau structural. Aussi, comme cela a été fait avec $s_\alpha(M,t)$, nous définissons pour chaque composante $Q^*_{ij}(M,t)$, si elle est périodique :

- son cycle élémentaire $c[Q^*_{ij}(M,t)](M,t)$, noté $c^{*(ij)}(M,t)$, qui est la restriction de $Q^*_{ij}(M,t)$ sur l'intervalle $I(Q^*_{ij}(M,t))$ qui définit sa période ;
- sa période $T(c^{*(ij)}(M,t))$;
- les valeurs respectivement minimale et maximale de $c^{*(ij)}(M,t)$:
  - . $min(c^{*(ij)}(M,t))$;
  - . $max(c^{*(ij)}(M,t))$;
- l'indicateur de charge $I_c(Q^*_{ij}(M,t))$;
- le rapport de charge : $R(Q^*_{ij}(M,t)) = \frac{min(|min(Q^*_{ij}(M,t))|,|max(Q^*_{ij}(M,t))|)}{max(|min(Q^*_{ij}(M,t))|,|max(Q^*_{ij}(M,t))|)}$.

Définition (d2) - Ensemble des paramètres locaux caractéristiques d'une composante de la variable pilote. L'ensemble des paramètres locaux caractéristiques de la composante $Q_{ij}(M,t)$ de la variable pilote, sur l'intervalle I, au point M, est l'ensemble $\mathbb{Q}^{(ij)}(I,M)$ des grandeurs nécessaires à la connaissance de $Q_{ij}(M,t)$ sur l'intervalle I.

Définition (d3) - Ensemble des paramètres locaux caractéristiques de la variable pilote. L'ensemble des paramètres locaux caractéristiques de la variable pilote, sur l'intervalle I, au point M, est l'ensemble $\mathbb{Q}(I,M) = \bigcup_{i,j}\mathbb{Q}^{(ij)}(I,M)$.

Définition (d2*) - Ensemble des paramètres locaux caractéristiques d'une composante active de la variable pilote. L'ensemble des paramètres locaux caractéristiques de la composante active $Q^*_{ij}(M,t)$ de la variable pilote, sur l'intervalle I, au point M, est l'ensemble $\mathbb{Q}^{*(ij)}(I,M)$ des grandeurs nécessaires à la connaissance de $Q^*_{ij}(M,t)$ sur l'intervalle I.

Définition (d3*) - Ensemble des paramètres locaux caractéristiques des composantes actives de la variable pilote. L'ensemble des paramètres locaux caractéristiques des composantes actives de la variable pilote, sur l'intervalle I, au point M, est l'ensemble $\mathbb{Q}^*(I,M) = \bigcup_{i,j}\mathbb{Q}^{*(ij)}(I,M)$. Deux ensembles des paramètres locaux caractéristiques des composantes actives de la variable pilote sont du même type s'ils contiennent les mêmes grandeurs mathématiques, et sont égaux s'ils contiennent les mêmes grandeurs mathématiques et que ces grandeurs sont égales.

De la même manière que cela a été supposé pour les classifications structurales (hypothèse (H0)), nous posons l'hypothèse (h0*/M).

Hypothèse (h0*/M). La relation entre chaque composante $Q^*_{ij}(M,t)$ et sa description au travers de ses caractéristiques dans $\mathbb{Q}^{*(ij)}(I,M)$ est bi-univoque.

5.2.2 Illustrations

Les différents concepts précédents peuvent s'illustrer avec les mêmes images que pour le cas de la classification faite sur des grandeurs structurales (Chapitre 4 - Paragraphe 4.2.2), avec s_1 et s_2 deux composantes actives de la variable pilote. Les commentaires sont quasiment identiques et sont donc significativement simplifiés :

- Le graphe Fig. 4.1a donne un exemple où les deux composantes actives sont cycliques ;
- Le graphe Fig. 4.1b donne un exemple où les deux composantes actives sont périodiques ;
- Les graphes Fig. 4.2 donnent un exemple où les deux composantes actives sont périodiques et pour lesquelles l'hypothèse (H1) est vérifiée sur Fig. 4.2a, l'hypothèse (H2) est vérifiée sur Fig. 4.2b ;
- Le graphe Fig. 4.3 donne un exemple où les deux composantes actives sont périodiques et identiques.

5.3 Concept de problème local de fatigue et début de la classification à partir de grandeurs locales

Suivant une terminologie similaire à celle utilisée pour la classification au niveau structural, différentes classes de problèmes locaux de fatigue peuvent être construites.

Définition (c0) - Problème local de fatigue. Un problème posé est un problème local de fatigue, sur l'intervalle I, au point M, si l'évolution temporelle de chaque composante active de la variable pilote est cyclique, sur l'intervalle I, au point M. Pour ce problème :

$$\mathbb{Q}^*(I,M) = \left\{(Q^*_{ij}(M,t))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}\right\}$$

Définition (c1) - Problème local de fatigue de type variable Pilote à composantes actives Périodiques sur l'intervalle I au point M PP(I,M). Un problème posé est un problème local de fatigue de type PP(I,M), si c'est un problème local de fatigue, sur l'intervalle I, au point M, pour lequel l'évolution temporelle de chaque composante active de la variable pilote est périodique. Pour ce problème :

$$\mathbb{Q}^*(I,M) = \left\{(c^{*(ij)}(M,t))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}\right\}$$

Définition (c2) - Problème local de fatigue de type variable Pilote à composantes actives Périodiques Identiques sur l'intervalle I au point M PPI(I,M). Un problème posé est un problème local de fatigue de type PPI(I,M), si c'est un problème local de fatigue de type PP(I,M) pour lequel les composantes actives de la variable pilote sont identiques, c'est-à-dire, $\forall Q^*_{ij}(M,t), \exists \overline{Q^*_{ij}}(M) \in \mathbb{R}^*$ tel que $Q^*_{ij}(M,t)/\overline{Q^*_{ij}}(M) = V^*(M,t)$. En notant $c^*(M,t)$ le cycle élémentaire (correspondant à la période $T(c^*(M,t))$) de la fonction $V^*(M,t)$, pour ce problème :

$$\mathbb{Q}^*(I,M) = \left\{c^*(M,t), (\overline{Q^*_{ij}}(M))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}\right\}$$

Définition (c3) - Problème local de fatigue de type variable Pilote à composantes actives Périodiques Monotones sur l'intervalle I au point M PPM(I,M). Un problème posé est un problème local de fatigue de type PPM(I,M), si c'est un problème local de fatigue de type PP(I,M), pour lequel l'évolution temporelle de chaque composante active de la variable

pilote obéit à l'hypothèse (H1). L'ensemble $\mathbb{Q}^*(I,M)$ est identique à celui de la classe PP(I,M). Soit :

$$\mathbb{Q}^*(I,M) = \left\{ (c^{*(ij)}(M,t))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2} \right\}$$

Définition (c4) - Problème local de fatigue de type variable Pilote à composantes actives Périodiques Monotones Identiques sur l'intervalle I au point M PPMI(I,M). Un problème posé est un problème local de fatigue de type PPMI(I,M), si c'est un problème local de fatigue de type PPI(I,M), pour lequel l'évolution temporelle de chaque composante active de la variable pilote obéit à l'hypothèse (H1). L'ensemble $\mathbb{Q}^*(I,M)$ est identique à celui de la classe PPI(I,M). Soit :

$$\mathbb{Q}^*(I,M) = \left\{ c^*(M,t), (\overline{Q^*_{ij}}(M))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2} \right\}$$

Définition (c5) - Problème local de fatigue de type variable Pilote à composantes actives Périodiques Monotones Linéaires sur l'intervalle I au point M PPML(I,M). Un problème posé est un problème local de fatigue de type PPML(I,M), si c'est un problème local de fatigue de type PPM(I,M), pour lequel l'évolution temporelle de chaque composante active de la variable pilote obéit à l'hypothèse (H2). Pour ce problème :

$$\mathbb{Q}^*(I,M) = \left\{ (T(c^{*(ij)}(M,t)), min(c^{*(ij)}(M,t)), max(c^{*(ij)}(M,t)))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2} \right\}$$

Définition (c6) - Problème local de fatigue de type variable Pilote à composantes actives Périodiques Monotones Linéaires Identiques sur l'intervalle I au point M PPMLI(I,M). Un problème posé est un problème local de fatigue de type PPMLI(I,M), si c'est un problème local de fatigue de type PPMI(I,M), pour lequel l'évolution temporelle de chaque composante active de la variable pilote obéit à l'hypothèse (H2). En notant $c^*(M,t)$ le cycle élémentaire (correspondant à la période $T(c^*(M,t))$) de la fonction $V^*(M,t)$, pour ce problème :

$$\mathbb{Q}^*(I,M) = \left\{ T(c^*(M,t)), min(c^*(M,t)), max(c^*(M,t)), (\overline{Q^*_{ij}}(M))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2} \right\}$$

5.4 Concept de problème local de fatigue sur un domaine et suite de la classification basée sur des grandeurs locales

Les définitions qui viennent d'être données imposent l'examen de chaque point M du domaine Ω qui définit la géométrie de la structure étudiée, pour laquelle se pose le problème de la fatigue. Afin de pouvoir appliquer les définitions précédentes non plus à un point, mais à un sous-ensemble de points ω (connexe par arc ou non) de l'ensemble Ω, nous définissons un nouveau concept de problème de fatigue : un problème local de fatigue sur un domaine. Pour cela, le concept de problème local de fatigue sur un domaine est guidé par l'idée que la loi horaire des composantes $Q^*_{ij}(M,t)$ peut être indépendante du point considéré sur ω. Cela va induire une propriété mathématique intéressante sur les composantes $Q^*_{ij}(M,t)$: elles doivent être à variables séparables sur ω.

Dans un premier temps, nous pouvons étendre les définitions des problèmes locaux de fatigue et celles des ensembles des paramètres locaux caractéristiques.

Définition (d4) - Ensemble des paramètres locaux caractéristiques sur un domaine d'une composante de la variable pilote. Un ensemble des paramètres locaux caractéristiques de la composante active $Q_{ij}(M,t)$ de la variable pilote, sur l'intervalle I, sur le domaine ω, est l'ensemble $\mathbb{Q}^{(ij)}(I,\omega)$ des grandeurs nécessaires à la connaissance de $Q_{ij}(M,t)$ sur l'intervalle I, sur le domaine ω.

Définition (d5) - Ensemble des paramètres locaux caractéristiques sur un domaine de la variable pilote. Un ensemble des paramètres locaux caractéristiques de la variable pilote, sur l'intervalle I, sur le domaine ω, est l'ensemble $\mathbb{Q}(I,\omega) = \bigcup_{i,j}\mathbb{Q}^{(ij)}(I,\omega)$.

Définition (d4*) - Ensemble des paramètres locaux caractéristiques sur un domaine d'une composante active de la variable pilote. Un ensemble des paramètres locaux caractéristiques de la composante active $Q^*_{ij}(M,t)$ de la variable pilote, sur l'intervalle I, sur le domaine ω, est l'ensemble $\mathbb{Q}^{*(ij)}(I,\omega)$ des grandeurs nécessaires à la connaissance de $Q^*_{ij}(M,t)$, sur l'intervalle I, sur le domaine ω.

Définition (d5*) - Ensemble des paramètres locaux caractéristiques sur un domaine des composantes actives de la variable pilote. Un ensemble des paramètres locaux caractéristiques des composantes actives de la variable pilote, sur l'intervalle I, sur le domaine ω, est l'ensemble $\mathbb{Q}^*(I,\omega) = \bigcup_{i,j}\mathbb{Q}^{*(ij)}(I,\omega)$. Deux ensembles des paramètres locaux caractéristiques sur un domaine des composantes actives de la variable pilote sont du même type s'ils contiennent les mêmes grandeurs mathématiques, et sont égaux s'ils contiennent les mêmes grandeurs mathématiques et que ces grandeurs sont égales.

De la même manière que pour l'hypothèse (h0*/M), nous posons l'hypothèse (h0*/ω).

Hypothèse (h0*/ω). La relation entre chaque composante $Q^*_{ij}(M,t)$ et sa description au travers de ses caractéristiques dans $\mathbb{Q}^{*(ij)}(I,\omega)$ est bi-univoque.

Définition (cd0) - Problème local de fatigue sur un domaine. Un problème posé est un problème local de fatigue, sur l'intervalle I, sur le domaine ω, si en tout point M de ω, nous sommes en présence d'un problème local de fatigue, sur l'intervalle I, pour lequel pour toutes les composantes $Q^*_{ij}(M,t)$, il existe un réel $q^*_{ij}(M)$ et une même fonction $V^{*(ij)}(\omega,t)$ tels que : $Q^*_{ij}(M,t) = V^{*(ij)}(\omega,t)q^*_{ij}(M)$. Pour ce problème :

$$\mathbb{Q}^*(I,\omega) = \left\{(q^*_{ij}(M), V^{*(ij)}(\omega,t))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}\right\}$$

Relativement à la fonction $V^{*(ij)}(\omega,t)$, nous définissons :
- son cycle élémentaire $c[V^{*(ij)}(\omega,t)](\omega,t)$, noté $c^{*(ij)}(\omega,t)$, qui est sa restriction sur l'intervalle $I(V^{*(ij)}(\omega,t))$ qui définit sa période ;
- sa période $T(c^{*(ij)}(\omega,t))$;
- les valeurs respectivement minimale et maximale de $c^{*(ij)}(\omega,t)$:
  - $min(c^{*(ij)}(\omega,t))$;
  - $max(c^{*(ij)}(\omega,t))$;
- l'indicateur de charge $I_c(V^{*(ij)}(\omega,t))$;
- le rapport de charge : $R(V^{*(ij)}(\omega,t)) = \frac{min(|min(V^{*(ij)}(\omega,t))|,|max(V^{*(ij)}(\omega,t))|}{max(|min(V^{*(ij)}(\omega,t))|,|max(V^{*(ij)}(\omega,t))|)}$.

Définition (cd1) - Problème local de fatigue sur un domaine de type PP(I,ω). Un problème posé est un problème local de fatigue de type PP(I,ω), sur l'intervalle I, sur le domaine

ω, si c'est un problème local de fatigue, sur l'intervalle I, sur le domaine ω, pour lequel l'évolution temporelle de chaque composante active de la variable pilote (i.e., la loi horaire $V^{*(ij)}(\omega,t)$) est périodique. Pour ce problème :

$$\mathbb{Q}^*(I,\omega) = \left\{ (q^*_{ij}(M), c^{*(ij)}(\omega,t))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2} \right\}$$

Définition (cd2) - Problème local de fatigue sur un domaine de type PPI(I,ω). Un problème posé est un problème local de fatigue de type PPI(I,ω), si c'est un problème local de fatigue de type PP(I,ω) pour lequel l'évolution temporelle de chaque composante active de la variable pilote (i.e., les lois horaires $V^{*(ij)}(\omega,t)$) sont identiques, c'est-à-dire, $\forall Q^*_{ij}(M,t), \exists \overline{q^{*(ij)}}(\omega) \in \mathbb{R}^*, \exists V^*(\omega,t) \in \mathbb{R}^*$ tel que $Q^*_{ij}(M,t)/\overline{q^{*(ij)}}(\omega) = V^*(\omega,t) q^*_{ij}(M)$. En notant $c^*(\omega,t)$ le cycle élémentaire (correspondant à la période $T(c^*(\omega,t))$) de la fonction $V^*(\omega,t)$, pour ce problème :

$$\mathbb{Q}^*(I,\omega) = \left\{ (q^*_{ij}(M), \overline{q^{*(ij)}}(\omega))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}, c^*(\omega,t) \right\}$$

$$\forall M \in \omega, \forall Q^*_{ij}(M,t), \exists \overline{q^{*(ij)}}(\omega) \in \mathbb{R}^*, \exists V^*(\omega,t) \in \mathbb{R}^* / Q^*_{ij}(M,t) = V^*(\omega,t) \overline{q^{*(ij)}}(\omega) q^*_{ij}(M)$$

Définition (cd3) - Problème local de fatigue sur un domaine de type PPM(I,ω). Un problème posé est un problème local de fatigue de type PPM(I,ω), si c'est un problème local de fatigue de type PP(I,ω) pour lequel l'évolution temporelle de chaque composante active de la variable pilote obéit à l'hypothèse (H1). L'ensemble $\mathbb{Q}^*(I,\omega)$ est identique à celui de la classe PP(I,ω). Soit :

$$\mathbb{Q}^*(I,\omega) = \left\{ (q^*_{ij}(M), c^{*(ij)}(\omega,t))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2} \right\}$$

Définition (cd4) - Problème local de fatigue sur un domaine de type PPMI(I,ω). Un problème posé est un problème local de fatigue de type PPMI(I,ω), si c'est un problème local de fatigue de type PPI(I,ω) pour lequel l'évolution temporelle de chaque composante active de la variable pilote obéit à l'hypothèse (H1). L'ensemble $\mathbb{Q}^*(I,\omega)$ est identique à celui de la classe PPI(I,ω). Soit :

$$\mathbb{Q}^*(I,\omega) = \left\{ (q^{*(ij)}_{ij}(M), \overline{q^{*(ij)}}(\omega))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}, c^*(\omega,t) \right\}$$

Définition (cd5) - Problème local de fatigue sur un domaine de type PPML(I,ω). Un problème posé est un problème local de fatigue de type PPML(I,ω), si c'est un problème local de fatigue de type PPM(I,ω) pour lequel l'évolution temporelle de chaque composante active de la variable pilote obéit à l'hypothèse (H2). Pour ce problème :

$$\mathbb{Q}^*(I,\omega) = \left\{ (q^*_{ij}(M), T(c^{*(ij)}(\omega,t)), min(c^{*(ij)}(\omega,t)), max(c^{*(ij)}(\omega,t)))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2} \right\}$$

Définition (cd6) - Problème local de fatigue sur un domaine de type PPMLI(I,ω). Un problème posé est un problème local de fatigue de type PPMLI(I,ω), si c'est un problème local de fatigue de type PPMI(I,ω) pour lequel l'évolution temporelle de chaque composante active de la variable pilote obéit à l'hypothèse (H2). En notant $c^*(\omega,t)$ le cycle élémentaire (correspondant à la période $T(c^*(\omega,t))$) de la fonction $V^*(\omega,t)$, pour ce problème :

$$\mathbb{Q}^*(I,\omega) = \left\{ (q^*_{ij}(M))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}, T(c^*(\omega,t)), min(c^*(\omega,t)), max(c^*(\omega,t)), (\overline{q^{*(ij)}}(\omega))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2} \right\}$$

Remarque importante - L'intérêt de définir des problèmes de fatigue sur des domaines pourrait être d'écrire des problèmes de fatigue différents sur des sous-domaines distincts d'un domaine plus grand. Il pourrait par exemple s'agir de partitionner une structure occupant le domaine Ω en plusieurs sous-domaines suivant par exemple, les matériaux qui la constituent et de profiter ainsi, le cas échéant, des propriétés particulières de chacun d'eux. Imaginons une structure séparable en deux sous-domaines chacun constitué d'un matériau distinct dont l'un montre un comportement élastique linéaire et l'autre viscoélastique. Nous imaginons aisément que des propriétés de linéarité vis-à-vis des données pourront être écrites pour le premier, mais pas pour le second. Dans ce cas, les grandeurs indépendantes du temps marquant la séparabilité géométrique du domaine considéré en sous-domaines prendraient des valeurs distinctes. A contrario, si rien n'est susceptible de provoquer l'intérêt d'un découpage d'un domaine en sous-domaines, alors toutes les grandeurs marquant la séparabilité géométrique, si elles sont indépendantes du temps, pourront être prises égales à 1.

5.5 Pertinence des classifications réalisées et suite de la classification des problèmes locaux de fatigue à partir de grandeurs locales. Concept de problème local de fatigue approché

La classification faite à partir des sollicitations structurales a défini des classes de problèmes susceptibles d'exister réellement, puisque c'est l'expérimentateur (l'extérieur du système étudié) qui impose l'évolution temporelle des sollicitations. Concernant la classification faite à partir des sollicitations locales (la variable pilote), les redistributions du champ local de la variable pilote (contrainte, déformation...) induites par les évolutions locales des variables internes empêchent, sauf cas exceptionnels, que les composantes $Q^*_{ij}(M,t)$ soient réellement cycliques (a fortiori périodiques) sur un intervalle de temps donné. Cela nous oblige donc à créer des classes de problèmes locaux de fatigue (ou locaux par domaine) plus réalistes, qui nécessitent au préalable de définir des fonctions susceptibles de remplacer les composantes actives "réelles" $Q^*_{ij}(M,t)$ de la variable pilote. Ces fonctions, choisies "parfaitement cycliques" ou "parfaitement périodiques", sont appelées les composantes actives approchées de la variable pilote et remplacent les composantes actives "réelles" $Q^*_{ij}(M,t)$ au sein de la loi d'évolution de fatigue, par exemple, justifiant et autorisant ainsi l'emploi de cette loi. Elles donnent naissance aux différentes classes de problèmes de fatigue dites approchées.

Définition (d1*+) - Composantes actives approchées de la variable pilote. La composante $Q^{*+}_{ij}(M,t)$ est une composante active approchée de la composante $Q^*_{ij}(M,t)$, sur l'intervalle I, au sens du critère $c(I, Q^*_{ij}, Q^{*+}_{ij}, M)$, si et seulement si, $c(I, Q^*_{ij}, Q^{*+}_{ij}, M) \leq c_{MAX}$ (c_{MAX} étant un nombre réel positif donné) (Fig. 5.1).

Le critère $c(I, Q^*_{ij}, Q^{*+}_{ij}, M)$ peut prendre par exemple la forme suivante :

$$c(I, Q^*_{ij}, Q^{*+}_{ij}, M) = \frac{\int_{t_a}^{t_b} |Q^*_{ij}(M,t) - Q^{*+}_{ij}(M,t)|dt}{\int_{t_a}^{t_b} |Q^*_{ij}(M,t)|dt}$$

Comme cela a été fait avec $Q^*_{ij}(M,t)$, nous définissons pour chaque composante $Q^{*+}_{ij}(M,t)$, si elle est périodique :

— son cycle élémentaire $c[Q^{*+}_{ij}(M,t)](M,t)$ noté $c^{*+(ij)}(M,t)$, qui est la restriction de $Q^{*+}_{ij}(M,t)$ sur l'intervalle $I[Q^{*+}_{ij}(M,t)](M)$, noté $I^{*+(ij)}(M)$, qui définit sa période ;

— sa période $T(c^{*+(ij)}(M,t))$, plus précisément $T[c^{*+(ij)}(M,t)](M)$, notée $T^{*+(ij)}(M)$;
— les valeurs respectivement minimale et maximale de $c^{*+(ij)}(M,t)$:
  . $min(c^{*+(ij)}(M,t))$ notée $c^{*+(ij)}_{min}(M)$;
  . $max(c^{*+(ij)}(M,t))$ notée $c^{*+(ij)}_{max}(M)$;
— l'indicateur de charge $I_c[Q^{*+}_{ij}(M,t)](M)$, noté $I^{*+(ij)}_c(M)$;
— le rapport de charge $R[Q^{*+}_{ij}(M,t)](M) = \frac{min(|min(Q^{*+}_{ij}(M,t))|,|max(Q^{*+}_{ij}(M,t))|)}{max(|min(Q^{*+}_{ij}(M,t))|,|max(Q^{*+}_{ij}(M,t))|)}$, noté $R^{*+(ij)}(M)$.

Définition (d2*+) - Ensemble des paramètres locaux caractéristiques d'une composante active approchée de la variable pilote. L'ensemble des paramètres locaux caractéristiques de la composante active approchée $Q^{*+}_{ij}(M,t)$ de la variable pilote, sur l'intervalle I, au point M, est l'ensemble $\mathbb{Q}^{*+(ij)}(I,M)$ des grandeurs nécessaires à la connaissance de $Q^{*+}_{ij}(M,t)$ sur l'intervalle I.

Définition (d3*+) - Ensemble des paramètres locaux caractéristiques des composantes actives approchées de la variable pilote. L'ensemble des paramètres locaux caractéristiques des composantes actives approchées de la variable pilote, sur l'intervalle I, au point M, est l'ensemble $\mathbb{Q}^{*+}(I,M) = \bigcup_{i,j}\mathbb{Q}^{*+(ij)}(I,M)$. Deux ensembles des paramètres locaux caractéristiques des composantes actives approchées de la variable pilote sont du même type s'ils contiennent les mêmes grandeurs mathématiques, et sont égaux s'ils contiennent les mêmes grandeurs mathématiques et que ces grandeurs sont égales.

Hypothèse (h0*+/M). La relation entre chaque composante $Q^{*+}_{ij}(M,t)$ et sa description au travers de ses caractéristiques dans $\mathbb{Q}^{*+(ij)}(I,M)$ est bi-univoque.

Définition (c0+) - Problème local de fatigue approché. Un problème local de fatigue approché, sur l'intervalle I, au point M, est un problème local de fatigue, sur l'intervalle I, au point M, pour lequel l'évolution temporelle de chaque composante active approchée de la variable pilote du problème local de fatigue considéré est cyclique, sur l'intervalle I, au point M. Pour ce problème :

$$\mathbb{Q}^{*+}(I,M) = \left\{(Q^{*+}_{ij}(M,t))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}\right\}$$

Définition (c1+) - Problème local de fatigue approché de type variable Pilote à composantes actives approchées Périodiques sur l'intervalle I au point M $\mathbf{P^+P}(I,M)$. Un problème posé est un problème local de fatigue approché de type $\mathrm{P^+P}(I,M)$, si c'est un problème local de fatigue approché, sur l'intervalle I, au point M, pour lequel l'évolution temporelle de chaque composante active approchée de la variable pilote est périodique. Pour ce problème :

$$\mathbb{Q}^{*+}(I,M) = \left\{(c^{*+(ij)}(M,t))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}\right\}$$

Définition (c2+) - Problème local de fatigue approché de type variable Pilote à composantes actives approchées Périodiques Identiques sur l'intervalle I au point M $\mathbf{P^+PI}(I,M)$. Un problème posé est un problème local de fatigue approché de type $\mathrm{P^+PI}(I,M)$, si c'est un problème local de fatigue approché de type $\mathrm{P^+P}(I,M)$ pour lequel les composantes actives approchées de la variable pilote sont identiques, c'est-à-dire, $\forall Q^{*+}_{ij}(M,t), \exists\overline{Q^{*+}_{ij}}(M) \in \mathbb{R}^*$ tel que $Q^{*+}_{ij}(M,t)/\overline{Q^{*+}_{ij}}(M) = V^{*+}(M,t)$. En notant $c^{*+}(M,t)$ le cycle élémentaire de la fonction $V^{*+}(M,t)$ de période $T^{*+}(M)$, pour ce problème :

$$\mathbb{Q}^{*+}(I,M) = \left\{c^{*+}(M,t), (\overline{Q^{*+}_{ij}}(M))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}\right\}$$

Définition (c3+) - Problème local de fatigue approché de type variable Pilote à composantes actives approchées Périodiques Monotones sur l'intervalle I au point M $\mathbf{P^+PM}(I,M)$. Un problème est un problème local de fatigue de type $\mathrm{P^+PM}(I,M)$, si c'est un problème local de fatigue de type $\mathrm{P^+P}(I,M)$ pour lequel l'évolution temporelle de chaque composante active approchée de la variable pilote obéit à l'hypothèse (H1). L'ensemble $\mathbb{Q}^{*+}(I,M)$ est identique à celui de la classe $\mathrm{P^+P}$. Soit :

$$\mathbb{Q}^{*+}(I,M) = \left\{ (c^{*+(ij)}(M,t))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2} \right\}$$

Définition (c4+) - Problème local de fatigue approché de type variable Pilote à composantes actives approchées Périodiques Monotones Identiques sur l'intervalle I au point M $\mathbf{P^+PMI}(I,M)$. Un problème est un problème local de fatigue de type $\mathrm{P^+PMI}(I,M)$, si c'est un problème local de fatigue de type $\mathrm{P^+PI}(I,M)$ pour lequel l'évolution temporelle de chaque composante active approchée de la variable pilote obéit à l'hypothèse (H1). L'ensemble $\mathbb{Q}^{*+}(I,M)$ est identique à celui de la classe $\mathrm{P^+PI}$. Soit :

$$\mathbb{Q}^{*+}(I,M) = \left\{ c^{*+}(M,t), (\overline{Q_{ij}^{*+}}(M))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2} \right\}$$

Définition (c5+) - Problème local de fatigue approché de type variable Pilote à composantes actives approchées Périodiques Monotones Linéaires sur l'intervalle I, au point M $\mathbf{P^+PML}(I,M)$. Un problème posé est un problème local de fatigue approché de type $\mathrm{P^+PML}(I,M)$, si c'est un problème local de fatigue de type $\mathrm{P^+PM}(I,M)$ pour lequel l'évolution temporelle de chaque composante active approchée de la variable pilote obéit à l'hypothèse (H2). Pour ce problème :

$$\mathbb{Q}^{*+}(I,M) = \left\{ (T^{*+(ij)}(M), c_{min}^{*+(ij)}(M), c_{max}^{*+(ij)}(M))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2} \right\}$$

Définition (c6+) - Problème local de fatigue approché de type variable Pilote à composantes actives approchées Périodiques Monotones Linéaires Identiques sur l'intervalle I, au point M $\mathbf{P^+PMLI}(I,M)$. Un problème posé est un problème local de fatigue approché de type $\mathrm{P^+PMLI}(I,M)$, si c'est un problème local de fatigue de type $\mathrm{P^+PMI}(I,M)$ pour lequel l'évolution temporelle de chaque composante active approchée de la variable pilote obéit à l'hypothèse (H2). En notant $T[c^{*+}(M,t)](M) = T^{*+}(M)$, $min(c^{*+}(M,t)) = V_{min}^{*+}(M)$ et $max(c^{*+}(M,t)) = V_{max}^{*+}(M)$, la période et les bornes du cycle élémentaire commun $c^{*+}(M,t)$ de la fonction $V^{*+}(M,t)$, pour ce problème :

$$\mathbb{Q}^{*+}(I,M) = \left\{ T^{*+}(M), V_{min}^{*+}(M), V_{max}^{*+}(M), (\overline{Q_{ij}^{*+}}(M))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2} \right\}$$

Il reste enfin à étendre au cas approché, les définitions données auparavant pour les problèmes de fatigue sur un domaine.

5.6 Concept de problème local de fatigue approché sur un domaine et fin de la classification basée sur des grandeurs locales

Définition (d4*+) - Ensemble des paramètres locaux caractéristiques sur un domaine d'une composante active approchée de la variable pilote. Un ensemble des paramètres locaux caractéristiques de la composante active approchée $Q_{ij}^{*+}(M,t)$ de la variable pilote,

sur l'intervalle I, sur le domaine ω, est l'ensemble $\mathbb{Q}^{*+(ij)}(I,\omega)$ des grandeurs nécessaires à la connaissance de $Q_{ij}^{*+}(M,t)$, sur l'intervalle I, sur le domaine ω.

Définition (d5*+) - Ensemble des paramètres locaux caractéristiques sur un domaine des composantes actives approchées de la variable pilote. Un ensemble des paramètres locaux caractéristiques des composantes actives approchées de la variable pilote, sur l'intervalle I, sur le domaine ω, est l'ensemble $\mathbb{Q}^{*+}(I,\omega) = \bigcup_{i,j}\mathbb{Q}^{*+(ij)}(I,\omega)$. Deux ensembles des paramètres locaux caractéristiques sur un domaine des composantes actives approchées de la variable pilote sont du même type s'ils contiennent les mêmes grandeurs mathématiques, et sont égaux s'ils contiennent les mêmes grandeurs mathématiques et que ces grandeurs sont égales.

Hypothèse (h0*+/ω). La relation entre chaque composante $Q_{ij}^{*+}(M,t)$ et sa description au travers de ses caractéristiques dans $\mathbb{Q}^{*+(ij)}(I,\omega)$ est bi-univoque.

Définition (cd0+) - Problème local de fatigue approché sur un domaine. Un problème posé est un problème local de fatigue approché, sur l'intervalle I, sur le domaine ω, si en tout point M de ω, nous sommes en présence d'un problème local de fatigue approché, sur l'intervalle I, pour lequel pour toutes les composantes $Q_{ij}^{*+}(M,t)$, il existe un réel $q_{ij}^{*+}(M)$ et une même fonction $V^{*+(ij)}(\omega,t)$ tels que : $Q_{ij}^{*+}(M,t) = V^{*+(ij)}(\omega,t)q_{ij}^{*+}(M)$. Pour ce problème :

$$\mathbb{Q}^{*+}(I,\omega) = \left\{(q_{ij}^{*+}(M), V^{*+(ij)}(\omega,t))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}\right\}$$

Relativement à la fonction $V^{*+(ij)}(\omega,t)$, nous définissons :
- son cycle élémentaire $c[V^{*+(ij)}(\omega,t)](\omega,t)$, noté $c^{*+(ij)}(\omega,t)$, qui est sa restriction sur l'intervalle $I[V^{*+(ij)}(\omega,t)](\omega)$, noté $I^{*+(ij)}(\omega)$, qui définit sa période ;
- sa période $T[c^{*+(ij)}](\omega,t)$, plus précisément $T[c^{*+(ij)}(\omega,t)](\omega)$, notée $T^{*+(ij)}(\omega)$;
- les valeurs respectivement minimale et maximale de $c^{*+(ij)}(\omega,t)$:
  - . $min(c^{*+(ij)}(\omega,t))$ notée $c_{min}^{*+(ij)}(\omega)$;
  - . $max(c^{*+(ij)}(\omega,t))$ notée $c_{max}^{*+(ij)}(\omega)$;
- l'indicateur de charge $I_c[V^{*+(ij)}(\omega,t)](\omega)$, noté $I_c^{*+(ij)}(\omega)$;
- le rapport de charge : $R[V^{*+(ij)}(\omega,t)](\omega) = \frac{min(|min(V^{*+(ij)}(\omega,t))|,|max(V^{*+(ij)}(\omega,t))|)}{max(|min(V^{*+(ij)}(\omega,t))|,|max(V^{*+(ij)}(\omega,t))|)}$, noté $R^{*+(ij)}(\omega)$.

Définition (cd1+) - Problème local de fatigue approché sur un domaine de type P$^+$P(I,ω). Un problème posé est un problème local de fatigue approché de type P$^+$P(I,ω), si c'est un problème local de fatigue approché, sur le domaine ω, sur l'intervalle I, pour lequel l'évolution temporelle de chaque composante active approchée de la variable pilote (i.e., la loi horaire $V^{*+(ij)}(\omega,t)$) est périodique. Pour ce problème :

$$\mathbb{Q}^{*+}(I,\omega) = \left\{(q_{ij}^{*+}(M), c^{*+(ij)}(\omega,t))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}\right\}$$

Définition (cd2+) - Problème local de fatigue approché sur un domaine de type P$^+$PI(I,ω). Un problème posé est un problème local de fatigue approché de type P$^+$PI(I,ω), si c'est un problème local de fatigue approché de type P$^+$P(I,ω) pour lequel les composantes actives approchées de la variable pilote (i.e., les lois horaires $V^{*+(ij)}(\omega,t)$) sont identiques, c'est-à-dire, $\forall Q_{ij}^{*+}(M,t), \exists\overline{q^{*+(ij)}}(\omega)\in\mathbb{R}^*, \exists V^{*+}(\omega,t)$ tel que $Q_{ij}^{*+}(M,t)/\overline{q^{*+(ij)}}(\omega) = V^{*+}(\omega,t)q_{ij}^{*+}(M)$.

En notant $c^{*+}(\omega,t)$ le cycle élémentaire de la fonction $V^{*+}(\omega,t)$ (de période $T^{*+}(\omega)$), pour ce problème :

$$\mathbb{Q}^{*+}(I,\omega)=\left\{(q_{ij}^{*+}(M),\overline{q^{*+(ij)}}(\omega))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2},c^{*+}(\omega,t)\right\}$$

Définition (cd3+) - Problème local de fatigue approché sur un domaine de type $\mathbf{P^+PM}(I,\omega)$. Un problème posé est un problème local de fatigue approché de type $\mathrm{P^+PM}(I,\omega)$, si c'est un problème local de fatigue approché de type $\mathrm{P^+P}(I,\omega)$ pour lequel l'évolution temporelle de chaque composante active approchée de la variable pilote obéit à l'hypothèse (H1). L'ensemble $\mathbb{Q}^{*+}(I,\omega)$ est identique à celui de la classe $\mathrm{P^+P}(\omega)$. Soit :

$$\mathbb{Q}^{*+}(I,\omega)=\left\{(q_{ij}^{*+}(M),c^{*+(ij)}(\omega,t))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}\right\}$$

Définition (cd4+) - Problème local de fatigue approché sur un domaine de type $\mathbf{P^+PMI}(I,\omega)$. Un problème posé est un problème local de fatigue approché de type $\mathrm{P^+PMI}(I,\omega)$, si c'est un problème local de fatigue approché de type $\mathrm{P^+PI}(I,\omega)$ pour lequel l'évolution temporelle de chaque composante active approchée de la variable pilote obéit à l'hypothèse (H1). L'ensemble $\mathbb{Q}^{*+}(I,\omega)$ est identique à celui de la classe $\mathrm{P^+PI}(\omega)$. Soit :

$$\mathbb{Q}^{*+}(I,\omega)=\left\{(q_{ij}^{*+}(M),\overline{q^{*+(ij)}}(\omega))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2},c^{*+}(\omega,t)\right\}$$

Définition (cd5+) - Problème local de fatigue approché sur un domaine de type $\mathbf{P^+PML}(I,\omega)$. Un problème posé est un problème local de fatigue approché de type $\mathrm{P^+PML}(I,\omega)$, si c'est un problème local de fatigue approché de type $\mathrm{P^+PM}(I,\omega)$ pour lequel l'évolution temporelle de chaque composante active approchée de la variable pilote obéit à l'hypothèse (H2). Pour ce problème :

$$\mathbb{Q}^{*+}(I,\omega)=\left\{(q_{ij}^{*+}(M),T^{*+(ij)}(\omega),c_{min}^{*+(ij)}(\omega),c_{max}^{*+(ij)}(\omega))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}\right\}$$

Définition (cd6+) - Problème local de fatigue approché sur un domaine de type $\mathbf{P^+PMLI}(I,\omega)$. Un problème posé est un problème local de fatigue approché de type $\mathrm{P^+PMLI}(I,\omega)$, si c'est un problème local de fatigue approché de type $\mathrm{P^+PMI}(I,\omega)$ pour lequel l'évolution temporelle de chaque composante active approchée de la variable pilote obéit à l'hypothèse (H2). En notant $T[c^{*+}(\omega,t)](\omega)=T^{*+}(\omega)$, $min(c^{*+}(\omega,t))=V_{min}^{*+}(\omega)$ et $max(c^{*+}(\omega,t))=V_{max}^{*+}(\omega)$ la période et les bornes de la fonction $V^{*+}(\omega,t)$, pour ce problème :

$$\mathbb{Q}^{*+}(I,\omega)=\left\{(q_{ij}^{*+}(M))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2},T^{*+}(\omega),V_{min}^{*+}(\omega),V_{max}^{*+}(\omega),(\overline{q^{*+(ij)}}(\omega))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}\right\}$$

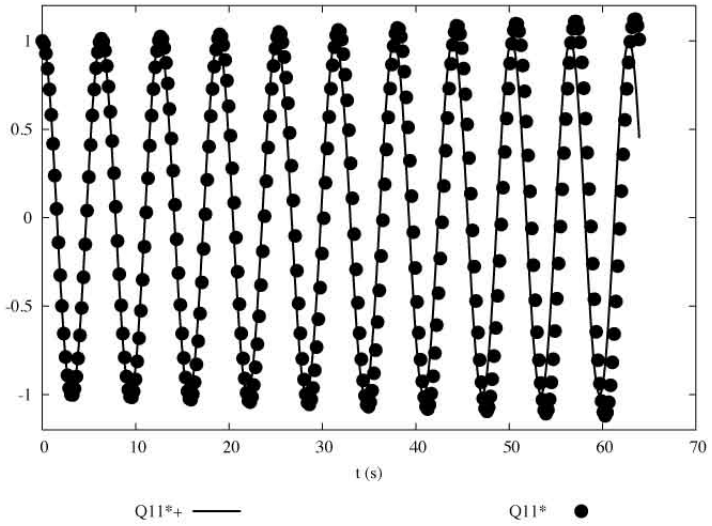


FIGURE 5.1 – Exemple d'une composante active (Q_{11}^{*}) et active approchée (Q_{11}^{*+}) : Q_{11}^{*} n'est pas rigoureusement périodique en raison, par exemple, des redistributions locales de contraintes ou de déformations induites par l'évolution des variables internes. Elle est alors remplacée par Q_{11}^{*+} qui est rigoureusement périodique [64].

5.7 Annexe locale - Synthèse sur la classification locale

5.7.1 Problème local de fatigue au point M

- Variable pilote au point M : $Q(M,t)$
- Composantes de la variable pilote au point M : $(Q_{ij}(M,t))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}$
- Composantes actives de la variable pilote au point M : $(Q^*_{ij}(M,t))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}$
- Composantes actives identiques de la variable pilote au point M :

$$\forall Q^*_{ij}(M,t), \exists \overline{Q^*_{ij}}(M) \in \mathbb{R}^* / Q^*_{ij}(M,t) = V^*(M,t)\overline{Q^*_{ij}}(M)$$

- Classes de problèmes ayant pour base un problème local de fatigue au point M

$$\left\{ \begin{array}{c} L'évolution\ temporelle\ de\ chaque \\ composante\ active\ de\ la\ variable \\ pilote\ est\ cyclique\ sur\ l'intervalle\ I \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} Problème\ local \\ de\ fatigue\ au\ point\ M \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} L'évolution\ temporelle\ de\ chaque \\ composante\ active\ de\ la\ variable \\ pilote\ est\ périodique\ sur\ l'intervalle\ I \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} Problème\ local \\ de\ fatigue\ au\ point\ M \\ de\ type\ PP(I,M) \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} L'évolution\ temporelle\ de\ chaque \\ composante\ active\ de\ la\ variable \\ pilote\ est\ périodique\ sur\ l'intervalle\ I \\ +\ les\ composantes\ sont\ identiques \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} Problème\ local \\ de\ fatigue\ au\ point\ M \\ de\ type\ PPI(I,M) \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} L'évolution\ temporelle\ de\ chaque \\ composante\ active\ de\ la\ variable \\ pilote\ est\ périodique\ sur\ l'intervalle\ I \\ +\ Hypothèse\ (H1) \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} Problème\ local \\ de\ fatigue\ au\ point\ M \\ de\ type\ PPM(I,M) \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} L'évolution\ temporelle\ de\ chaque \\ composante\ active\ de\ la\ variable \\ pilote\ est\ périodique\ sur\ l'intervalle\ I \\ +\ les\ composantes\ sont\ identiques \\ +\ Hypothèse\ (H1) \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} Problème\ local \\ de\ fatigue\ au\ point\ M \\ de\ type\ PPMI(I,M) \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} L'évolution\ temporelle\ de\ chaque \\ composante\ active\ de\ la\ variable \\ pilote\ est\ périodique\ sur\ l'intervalle\ I \\ +\ Hypothèse\ (H1) \\ +\ Hypothèse\ (H2) \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} Problème\ local \\ de\ fatigue\ au\ point\ M \\ de\ type\ PPML(I,M) \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} L'évolution\ temporelle\ de\ chaque \\ composante\ active\ de\ la\ variable \\ pilote\ est\ périodique\ sur\ l'intervalle\ I \\ +\ les\ composantes\ sont\ identiques \\ +\ Hypothèse\ (H1) \\ +\ Hypothèse\ (H2) \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} Problème\ local \\ de\ fatigue\ au\ point\ M \\ de\ type\ PPMLI(I,M) \end{array} \right\}$$

5.7.2 Problème local de fatigue sur un domaine

- Variable pilote au point M : $Q(M,t)$
- Composantes de la variable pilote au point M : $(Q_{ij}(M,t))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}$
- Composantes actives de la variable pilote au point M : $(Q^*_{ij}(M,t))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}$
- Composantes actives de la variable pilote sur le domaine ω :

$$\forall M \in \omega, \forall Q^*_{ij}(M,t), \exists q^*_{ij}(M) \in \mathbb{R}^*, \exists V^{*(ij)}(\omega,t) \in \mathbb{R}^* / Q^*_{ij}(M,t) = V^{*(ij)}(\omega,t) q^*_{ij}(M)$$

- Composantes actives identiques de la variable pilote sur le domaine ω :

$$\forall M \in \omega, \forall Q^*_{ij}(M,t), \exists \overline{q^{*(ij)}}(\omega) \in \mathbb{R}^*, \exists V^*(\omega,t) \in \mathbb{R}^* / Q^*_{ij}(M,t) = V^*(\omega,t) \overline{q^{*(ij)}}(\omega) q^*_{ij}(M)$$

- Classes de problèmes ayant pour base un problème local de fatigue sur le domaine ω

$$\left\{ \begin{array}{c} L'évolution\ temporelle\ de\ chaque \\ composante\ active\ de\ la\ variable \\ pilote\ est\ cyclique\ sur\ l'intervalle\ I \\ +\ les\ composantes\ sont\ définies \\ sur\ le\ domaine\ \omega \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} Problème\ local \\ de\ fatigue\ sur\ le\ domaine\ \omega \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} L'évolution\ temporelle\ de\ chaque \\ composante\ active\ de\ la\ variable \\ pilote\ est\ périodique\ sur\ l'intervalle\ I \\ +\ les\ composantes\ sont\ définies \\ sur\ le\ domaine\ \omega \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} Problème\ local \\ de\ fatigue\ sur\ le\ domaine\ \omega \\ de\ type\ PP(I,\omega) \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} L'évolution\ temporelle\ de\ chaque \\ composante\ active\ de\ la\ variable \\ pilote\ est\ périodique\ sur\ l'intervalle\ I \\ +\ les\ composantes\ sont\ définies\ identiques \\ sur\ le\ domaine\ \omega \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} Problème\ local \\ de\ fatigue\ sur\ le\ domaine\ \omega \\ de\ type\ PPI(I,\omega) \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} L'évolution\ temporelle\ de\ chaque \\ composante\ active\ de\ la\ variable \\ pilote\ est\ périodique\ sur\ l'intervalle\ I \\ +\ les\ composantes\ sont\ définies \\ sur\ le\ domaine\ \omega \\ +\ Hypothèse\ (H1) \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} Problème\ local \\ de\ fatigue\ sur\ le\ domaine\ \omega \\ de\ type\ PPM(I,\omega) \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} L'évolution\ temporelle\ de\ chaque \\ composante\ active\ de\ la\ variable \\ pilote\ est\ périodique\ sur\ l'intervalle\ I \\ +\ les\ composantes\ sont\ définies\ identiques \\ sur\ le\ domaine\ \omega \\ +\ Hypothèse\ (H1) \end{array} \right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} Problème\ local \\ de\ fatigue\ sur\ le\ domaine\ \omega \\ de\ type\ PPMI(I,\omega) \end{array} \right\}$$

$$\left\{\begin{array}{c} \textit{L'évolution temporelle de chaque} \\ \textit{composante active de la variable} \\ \textit{pilote est périodique sur l'intervalle } I \\ \textit{+ les composantes sont définies} \\ \textit{sur le domaine } \omega \\ \textit{+ Hypothèse } (H1) \\ \textit{+ Hypothèse } (H2) \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} \textit{Problème local} \\ \textit{de fatigue sur le domaine } \omega \\ \textit{de type } PPML(I,\omega) \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{c} \textit{L'évolution temporelle de chaque} \\ \textit{composante active de la variable} \\ \textit{pilote est périodique sur l'intervalle } I \\ \textit{+ les composantes sont définies identiques} \\ \textit{sur le domaine } \omega \\ \textit{+ Hypothèse } (H1) \\ \textit{+ Hypothèse } (H2) \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} \textit{Problème local} \\ \textit{de fatigue sur le domaine } \omega \\ \textit{de type } PPMLI(I,\omega) \end{array}\right\}$$

5.7.3 Problème local de fatigue approché au point M

- Variable pilote au point M : $Q(M,t)$
- Composantes de la variable pilote au point M : $(Q_{ij}(M,t))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}$
- Composantes actives de la variable pilote au point M : $(Q^*_{ij}(M,t))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}$
- Composantes actives approchées de la variable pilote au point M : $(Q^{*+}_{ij}(M,t))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}$
- Composantes actives approchées identiques de la variable pilote au point M :

$$\forall Q^{*+}_{ij}(M,t), \exists \overline{Q^{*+}_{ij}}(M) \in \mathbb{R}^* \ / \ Q^{*+}_{ij}(M,t) = V^*(M,t)\overline{Q^{*+}_{ij}}(M)$$

- Classes de problèmes ayant pour base un problème local de fatigue approché au point M

$$\left\{\begin{array}{c} \textit{L'évolution temporelle de chaque} \\ \textit{composante active approchée de la variable} \\ \textit{pilote est cyclique sur l'intervalle } I \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} \textit{Problème local} \\ \textit{de fatigue approché au point } M \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{c} \textit{L'évolution temporelle de chaque} \\ \textit{composante active approchée de la variable} \\ \textit{pilote est périodique sur l'intervalle } I \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} \textit{Problème local} \\ \textit{de fatigue approché au point } M \\ \textit{de type } P^+P(I,M) \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{c} \textit{L'évolution temporelle de chaque} \\ \textit{composante active approchée de la variable} \\ \textit{pilote est périodique sur l'intervalle } I \\ \textit{+ les composantes sont identiques} \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} \textit{Problème local} \\ \textit{de fatigue approché au point } M \\ \textit{de type } P^+PI(I,M) \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{c} \textit{L'évolution temporelle de chaque} \\ \textit{composante active approchée de la variable} \\ \textit{pilote est périodique sur l'intervalle } I \\ \textit{+ Hypothèse } (H1) \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} \textit{Problème local} \\ \textit{de fatigue approché au point } M \\ \textit{de type } P^+PM(I,M) \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{c} \textit{L'évolution temporelle de chaque} \\ \textit{composante active approchée de la variable} \\ \textit{pilote est périodique sur l'intervalle } I \\ + \textit{ les composantes sont identiques} \\ + \textit{ Hypothèse } (H1) \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} \textit{Problème local} \\ \textit{de fatigue approché au point } M \\ \textit{de type } P^+PMI(I,M) \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{c} \textit{L'évolution temporelle de chaque} \\ \textit{composante active approchée de la variable} \\ \textit{pilote est périodique sur l'intervalle } I \\ + \textit{ Hypothèse } (H1) \\ + \textit{ Hypothèse } (H2) \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} \textit{Problème local} \\ \textit{de fatigue approché au point } M \\ \textit{de type } P^+PML(I,M) \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{c} \textit{L'évolution temporelle de chaque} \\ \textit{composante active approchée de la variable} \\ \textit{pilote est périodique sur l'intervalle } I \\ + \textit{ les composantes sont identiques} \\ + \textit{ Hypothèse } (H1) \\ + \textit{ Hypothèse } (H2) \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} \textit{Problème local} \\ \textit{de fatigue approché au point } M \\ \textit{de type } P^+PMLI(I,M) \end{array}\right\}$$

5.7.4 Problème local de fatigue approché sur un domaine

- Variable pilote au point M : $Q(M,t)$
- Composantes de la variable pilote au point M : $(Q_{ij}(M,t))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}$
- Composantes actives de la variable pilote au point M : $(Q^*_{ij}(M,t))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}$
- Composantes actives approchées de la variable pilote au point M : $(Q^{*+}_{ij}(M,t))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}$
- Composantes actives approchées de la variable pilote sur le domaine ω :

$$\forall M \in \omega, \exists q^{*+}_{ij}(M) \in \mathbb{R}^*, \exists V^{*+(ij)}(\omega,t) \ / \ Q^{*+}_{ij}(M,t) = V^{*+(ij)}(\omega,t) q^{*+}_{ij}(M)$$

- Composantes actives approchées identiques de la variable pilote sur le domaine ω :

$$\forall M \in \omega, \forall Q^{*+}_{ij}(M,t), \exists \overline{q^{*+(ij)}}(\omega) \in \mathbb{R}^*, \exists V^{*+}(\omega,t) \ / \ Q^{*+}_{ij}(M,t) = V^{*+}(\omega,t) q^{*+}_{ij}(M) \overline{q^{*+(ij)}}(\omega)$$

- Classes de problèmes ayant pour base un problème local de fatigue approché sur le domaine ω

$$\left\{\begin{array}{c} \textit{L'évolution temporelle de chaque} \\ \textit{composante active approchée de la variable} \\ \textit{pilote est cyclique sur l'intervalle } I \\ + \textit{ les composantes sont définies} \\ \textit{sur le domaine } \omega \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} \textit{Problème local} \\ \textit{de fatigue approché sur le domaine } \omega \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{c} \textit{L'évolution temporelle de chaque} \\ \textit{composante active approchée de la variable} \\ \textit{pilote est périodique sur l'intervalle } I \\ + \textit{ les composantes sont définies} \\ \textit{sur le domaine } \omega \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} \textit{Problème local} \\ \textit{de fatigue approché sur le domaine } \omega \\ \textit{de type } P^+P(I,\omega) \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{c} L'évolution\ temporelle\ de\ chaque \\ composante\ active\ approchée\ de\ la\ variable \\ pilote\ est\ périodique\ sur\ l'intervalle\ I \\ +\ les\ composantes\ sont\ définies\ identiques \\ sur\ le\ domaine\ \omega \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} Problème\ local \\ de\ fatigue\ approché\ sur\ le\ domaine\ \omega \\ de\ type\ P^{+}PI(I,\omega) \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{c} L'évolution\ temporelle\ de\ chaque \\ composante\ active\ approchée\ de\ la\ variable \\ pilote\ est\ périodique\ sur\ l'intervalle\ I \\ +\ les\ composantes\ sont\ définies \\ sur\ le\ domaine\ \omega \\ +\ Hypothèse\ (H1) \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} Problème\ local \\ de\ fatigue\ approché\ sur\ le\ domaine\ \omega \\ de\ type\ P^{+}PM(I,\omega) \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{c} L'évolution\ temporelle\ de\ chaque \\ composante\ active\ approchée\ de\ la\ variable \\ pilote\ est\ périodique\ sur\ l'intervalle\ I \\ +\ les\ composantes\ sont\ définies\ identiques \\ sur\ le\ domaine\ \omega \\ +\ Hypothèse\ (H1) \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} Problème\ local \\ de\ fatigue\ approché\ sur\ le\ domaine\ \omega \\ de\ type\ P^{+}PMI(I,\omega) \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{c} L'évolution\ temporelle\ de\ chaque \\ composante\ active\ approchée\ de\ la\ variable \\ pilote\ est\ périodique\ sur\ l'intervalle\ I \\ +\ les\ composantes\ sont\ définies \\ sur\ le\ domaine\ \omega \\ +\ Hypothèse\ (H1) \\ +\ Hypothèse\ (H2) \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} Problème\ local \\ de\ fatigue\ approché\ sur\ le\ domaine\ \omega \\ de\ type\ P^{+}PML(I,\omega) \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{c} L'évolution\ temporelle\ de\ chaque \\ composante\ active\ approchée\ de\ la\ variable \\ pilote\ est\ périodique\ sur\ l'intervalle\ I \\ +\ les\ composantes\ sont\ définies\ identiques \\ sur\ le\ domaine\ \omega \\ +\ Hypothèse\ (H1) \\ +\ Hypothèse\ (H2) \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} Problème\ local \\ de\ fatigue\ approché\ sur\ le\ domaine\ \omega \\ de\ type\ P^{+}PMLI(I,\omega) \end{array}\right\}$$

5.8 Annexe locale - Définition synthétique des classifications locales

5.8.1 Problèmes locaux de fatigue au point M

• **Problème local de fatigue** :

— l'évolution temporelle de chaque composante active de la variable pilote, $(Q^{*}_{ij}(M,t))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}$, est cyclique, sur l'intervalle I, au point M ;

— ensemble des paramètres locaux :

$$\mathbb{Q}^{*}(I,M) = \left\{(Q^{*}_{ij}(M,t))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}\right\}$$

• **Problème local de fatigue de type PP**(I, M) :
— variable Pilote à composantes actives Périodiques sur l'intervalle I au point M ;
— problème local de fatigue pour lequel l'évolution temporelle de chaque composante active de la variable pilote est périodique ;
— ensemble des paramètres locaux :

$$\mathbb{Q}^*(I, M) = \left\{ (c^{*(ij)}(M, t))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2} \right\}$$

• **Problème local de fatigue de type PPI**(I, M) :
— variable Pilote à composantes actives Périodiques Identiques sur l'intervalle I au point M ;
— problème local de fatigue de type PP(I, M) pour lequel les composantes actives de la variable pilote $(Q^*_{ij}(M, t))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}$ sont identiques :

$$\forall Q^*_{ij}(M, t), \exists \overline{Q^*_{ij}}(M) \in \mathbb{R}^* / Q^*_{ij}(M, t) = V^*(M, t)\overline{Q^*_{ij}}(M)$$

— ensemble des paramètres locaux :

$$\mathbb{Q}^*(I, M) = \left\{ c^*(M, t), (\overline{Q^*_{ij}}(M))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2} \right\}$$

• **Problème local de fatigue de type PPM**(I, M) :
— variable Pilote à composantes actives Périodiques Monotones sur l'intervalle I au point M ;
— problème local de fatigue de type PP(I, M), pour lequel l'évolution temporelle de chaque composante active de la variable pilote obéit à l'hypothèse (H1) (évolution monotone) ;
— ensemble des paramètres locaux :

$$\mathbb{Q}^*(I, M) = \left\{ (c^{*(ij)}(M, t))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2} \right\}$$

• **Problème local de fatigue de type PPMI**(I, M) :
— variable Pilote à composantes actives Périodiques Monotones Identiques sur l'intervalle I au point M ;
— problème local de fatigue de type PPI(I, M) pour lequel l'évolution temporelle de chaque composante active de la variable pilote obéit à l'hypothèse (H1) (évolution monotone) ;
— ensemble des paramètres locaux :

$$\mathbb{Q}^*(I, M) = \left\{ c^*(M, t), (\overline{Q^*_{ij}}(M))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2} \right\}$$

• **Problème local de fatigue de type PPML**(I, M) :
— variable Pilote à composantes actives Périodiques Monotones Linéaires sur l'intervalle I au point M ;
— problème local de fatigue de type PPM(I, M) pour lequel l'évolution temporelle de chaque composante active de la variable pilote obéit à l'hypothèse (H2) (évolution en dent-de-scie) ;
— ensemble des paramètres locaux :

$$\mathbb{Q}^*(I, M) = \left\{ (T(c^{*(ij)}(M, t)), min(c^{*(ij)}(M, t)), max(c^{*(ij)}(M, t)))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2} \right\}$$

• **Problème local de fatigue de type PPMLI**(I, M) :
— variable Pilote à composantes actives Périodiques Monotones Linéaires Identiques sur l'intervalle I au point M ;
— problème local de fatigue de type PPMI(I, M) pour lequel l'évolution temporelle de chaque composante active de la variable pilote obéit à l'hypothèse (H2) (évolution en dent-de-scie) ;
— ensemble des paramètres locaux :

$$\mathbb{Q}^*(I, M) = \left\{ T(c^*(M,t)), min(c^*(M,t)), max(c^*(M,t)), (\overline{Q^*_{ij}}(M))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2} \right\}$$

5.8.2 Problèmes locaux de fatigue sur un domaine

• **Problème local de fatigue sur un domaine** :
— problème local de fatigue pour lequel les composantes actives de la variable pilote, $(Q^*_{ij}(M,t))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}$ sur le domaine ω, sont telles que :

$$\forall M \in \omega, \forall Q^*_{ij}(M,t), \exists q^*_{ij}(M) \in \mathbb{R}^*, \exists V^{*(ij)}(\omega,t) \in \mathbb{R}^* / Q^*_{ij}(M,t) = V^{*(ij)}(\omega,t) q^*_{ij}(M)$$

— ensemble des paramètres locaux :

$$\mathbb{Q}^*(I, \omega) = \left\{ (q^*_{ij}(M), V^{*(ij)}(\omega,t))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2} \right\}$$

• **Problème local de fatigue sur un domaine de type PP**(I, ω) :
— variable Pilote à composantes actives Périodiques sur l'intervalle I dans le domaine ω ;
— problème local de fatigue sur un domaine pour lequel l'évolution temporelle de chaque composante active de la variable pilote est périodique ;
— ensemble des paramètres locaux :

$$\mathbb{Q}^*(I, \omega) = \left\{ (q^*_{ij}(M), c^{*(ij)}(\omega,t))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2} \right\}$$

• **Problème local de fatigue sur un domaine de type PPI**(I, ω) :
— variable Pilote à composantes actives Périodiques Identiques sur l'intervalle I dans le domaine ω ;
— problème local de fatigue sur un domaine de type PP(I, ω) pour lequel les composantes actives de la variable pilote, $(Q^*_{ij}(M,t))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}$, sont identiques :

$$\forall M \in \omega, \forall Q^*_{ij}(M,t), \exists \overline{q^{*(ij)}}(\omega) \in \mathbb{R}^*, \exists V^*(\omega,t) \in \mathbb{R}^* / Q^*_{ij}(M,t) = V^*(\omega,t) \overline{q^{*(ij)}}(\omega) q^*_{ij}(M)$$

— ensemble des paramètres locaux :

$$\mathbb{Q}^*(I, \omega) = \left\{ (q^*_{ij}(M), \overline{q^{*(ij)}}(\omega))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}, c^*(\omega,t) \right\}$$

• **Problème local de fatigue sur un domaine de type PPM**(I, ω) :
— variable Pilote à composantes actives Périodiques Monotones sur l'intervalle I dans le domaine ω ;
— problème local de fatigue sur un domaine de type PP(I, ω) pour lequel l'évolution temporelle de chaque composante active de la variable pilote obéit à l'hypothèse (H1) (évolution monotone) ;

— ensemble des paramètres locaux :

$$\mathbb{Q}^*(I,\omega) = \left\{ (q^*_{ij}(M), c^{*(ij)}(\omega,t))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2} \right\}$$

• **Problème local de fatigue sur un domaine de type PPMI(I,ω)** :
— variable Pilote à composantes actives Périodiques Monotones Identiques sur l'intervalle I dans le domaine ω ;
— problème local de fatigue sur un domaine de type PPI(I,ω) pour lequel l'évolution temporelle de chaque composante active de la variable pilote obéit à l'hypothèse (H1) (évolution monotone) ;
— ensemble des paramètres locaux :

$$\mathbb{Q}^*(I,\omega) = \left\{ (q^*_{ij}(M), \overline{q^{*(ij)}}(\omega))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}, c^*(\omega,t) \right\}$$

• **Problème local de fatigue sur un domaine de type PPML(I,ω)** :
— variable Pilote à composantes actives Périodiques Monotones Linéaires sur l'intervalle I dans le domaine ω ;
— problème local de fatigue sur un domaine de type PPM(I,ω) pour lequel l'évolution temporelle de chaque composante active de la variable pilote obéit à l'hypothèse (H2) (évolution en dent-de-scie) ;
— ensemble des paramètres locaux :

$$\mathbb{Q}^*(I,\omega) = \left\{ (q^*_{ij}(M), T(c^{*(ij)}(\omega,t)), min(c^{*(ij)}(\omega,t)), max(c^{*(ij)}(\omega,t)))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2} \right\}$$

• **Problème local de fatigue sur un domaine de type PPMLI(I,ω)** :
— variable Pilote à composantes actives Périodiques Monotones Linéaires Identiques sur l'intervalle I dans le domaine ω ;
— problème local de fatigue sur un domaine de type PPMI(I,ω) pour lequel l'évolution temporelle de chaque composante active de la variable pilote obéit à l'hypothèse (H2) (évolution en dent-de-scie) ;
— ensemble des paramètres locaux :

$$\mathbb{Q}^*(I,\omega) = \left\{ (q^*_{ij}(M))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}, T(c^*(\omega,t)), min(c^*(\omega,t)), max(c^*(\omega,t)), (\overline{q^{*(ij)}}(\omega))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2} \right\}$$

5.9 Annexe locale - Définition synthétique des classifications locales approchées

5.9.1 Problèmes locaux de fatigue au point M

• **Problème local de fatigue approché** :
— l'évolution temporelle de chaque composante active approchée de la variable pilote du problème local de fatigue considéré est cyclique, sur l'intervalle I, au point M ;
— ensemble des paramètres locaux :

$$\mathbb{Q}^{*+}(I,M) = \left\{ (Q^{*+}_{ij}(M,t))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2} \right\}$$

• **Problème local de fatigue approché de type P$^+$P(I,M)** :

— variable Pilote à composantes actives approchées Périodiques sur l'intervalle I au point M ;
— problème local de fatigue approché pour lequel l'évolution temporelle de chaque composante active approchée de la variable pilote est périodique ;
— ensemble des paramètres locaux :

$$\mathbb{Q}^{*+}(I,M) = \left\{ (c^{*+(ij)}(M,t))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2} \right\}$$

• **Problème local de fatigue de type $\mathbf{P^+PI}(I,M)$:**
— variable Pilote à composantes actives approchées Périodiques Identiques sur l'intervalle I au point M ;
— problème local de fatigue approché de type $\mathrm{P^+PI}(I,M)$ pour lequel les composantes actives approchées de la variable pilote $(Q^*_{ij}(M,t))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}$ sont identiques :

$$\forall Q^{*+}_{ij}(M,t), \exists \overline{Q^{*+}_{ij}}(M) \in \mathbb{R}^* / Q^{*+}_{ij}(M,t) = V^*(M,t)\overline{Q^{*+}_{ij}}(M)$$

— ensemble des paramètres locaux :

$$\mathbb{Q}^{*+}(I,M) = \left\{ c^{*+}(M,t), (\overline{Q^{*+}_{ij}}(M))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2} \right\}$$

• **Problème local de fatigue de type $\mathbf{P^+PM}(I,M)$:**
— variable Pilote à composantes actives approchées Périodiques Monotones sur l'intervalle I au point M ;
— problème local de fatigue de type $\mathrm{P^+P}(I,M)$ pour lequel l'évolution temporelle de chaque composante active approchée de la variable pilote obéit à l'hypothèse (H1) (évolution monotone) ;
— ensemble des paramètres locaux :

$$\mathbb{Q}^{*+}(I,M) = \left\{ (c^{*+(ij)}(M,t))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2} \right\}$$

• **Problème local de fatigue de type $\mathbf{P^+PMI}(I,M)$:**
— variable Pilote à composantes actives approchées Périodiques Monotones Identiques sur l'intervalle I au point M ;
— problème local de fatigue de type $\mathrm{P^+PI}(I,M)$ pour lequel l'évolution temporelle de chaque composante active approchée de la variable pilote obéit à l'hypothèse (H1) (évolution monotone) ;
— ensemble des paramètres locaux :

$$\mathbb{Q}^{*+}(I,M) = \left\{ c^{*+}(M,t), (\overline{Q^{*+}_{ij}}(M))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2} \right\}$$

• **Problème local de fatigue de type $\mathbf{P^+PML}(I,M)$:**
— variable Pilote à composantes actives approchées Périodiques Monotones Linéaires sur l'intervalle I au point M ;
— problème local de fatigue de type $\mathrm{P^+PM}(I,M)$ pour lequel l'évolution temporelle de chaque composante active approchée de la variable pilote obéit à l'hypothèse (H2) (évolution en dent-de-scie) ;

— ensemble des paramètres locaux :

$$\mathbb{Q}^{*+}(I,M) = \left\{ (T^{*+(ij)}(M), c_{min}^{*+(ij)}(M), c_{max}^{*+(ij)}(M))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2} \right\}$$

• **Problème local de fatigue de type P$^+$PMLI(I,M) :**
— variable Pilote à composantes actives approchées Périodiques Monotones Linéaires Identiques sur l'intervalle I au point M ;
— problème local de fatigue de type P$^+$PMI(I,M) pour lequel l'évolution temporelle de chaque composante active approchée de la variable pilote obéit à l'hypothèse (H2) (évolution en dent-de-scie) ;
— ensemble des paramètres locaux :

$$\mathbb{Q}^{*+}(I,M) = \left\{ T^{*+}(M), V_{min}^{*+}(M), V_{max}^{*+}(M), (\overline{Q_{ij}^{*+}}(M))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2} \right\}$$

5.9.2 Problèmes locaux de fatigue approchés sur un domaine

• **Problème local de fatigue approché sur un domaine** :
— problème local de fatigue approché pour lequel les composantes actives approchées de la variable pilote, $(Q_{ij}^{*+}(M,t))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}$ sur le domaine ω, sont telles que :

$$\forall M \in \omega, \forall Q_{ij}^{*+}(M,t), \exists q_{ij}^{*+}(M) \in \mathbb{R}^*, \exists V^{*+(ij)}(\omega,t) \in \mathbb{R}^* / Q_{ij}^{*+}(M,t) = V^{*+(ij)}(\omega,t) q_{ij}^{*+}(M)$$

— ensemble des paramètres locaux :

$$\mathbb{Q}^{*+}(I,\omega) = \left\{ (q_{ij}^{*+}(M), V^{*+(ij)}(\omega,t))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2} \right\}$$

• **Problème local de fatigue sur un domaine de type P$^+$P(I,ω) :**
— variable Pilote à composantes actives approchées Périodiques sur l'intervalle I dans le domaine ω ;
— problème local de fatigue approché sur un domaine pour lequel l'évolution temporelle de chaque composante active approchée de la variable pilote est périodique ;
— ensemble des paramètres locaux :

$$\mathbb{Q}^{*+}(I,\omega) = \left\{ (q_{ij}^{*+}(M), c^{*+(ij)}(\omega,t))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2} \right\}$$

• **Problème local de fatigue sur un domaine de type P$^+$PI(I,ω) :**
— variable Pilote à composantes actives approchées Périodiques Identiques sur l'intervalle I dans le domaine ω ;
— problème local de fatigue approché de type P$^+$P(I,ω) les composantes actives approchées de la variable pilote, $(Q_{ij}^{*+}(M,t))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}$, sont identiques :

$$\forall M \in \omega, \forall Q_{ij}^{*+}(M,t), \exists \overline{q^{*+(ij)}}(\omega) \in \mathbb{R}^*, \exists V^{*+}(\omega,t) \in \mathbb{R}^* / Q_{ij}^{*+}(M,t) = V^{*+}(\omega,t) \overline{q^{*+(ij)}}(\omega) q_{ij}^{*+}(M)$$

— ensemble des paramètres locaux :

$$\mathbb{Q}^{*+}(I,\omega) = \left\{ (q_{ij}^{*+}(M), \overline{q^{*+(ij)}}(\omega))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}, c^{*+}(\omega,t) \right\}$$

• **Problème local de fatigue sur un domaine de type P$^+$PM(I,ω) :**

— variable Pilote à composantes actives approchées Périodiques Monotones sur l'intervalle I dans le domaine ω ;
— problème local de fatigue approché de type $\mathrm{P}^{+}\mathrm{P}(I,\omega)$ pour lequel l'évolution temporelle de chaque composante active approchée de la variable pilote obéit à l'hypothèse (H1) (évolution monotone) ;
— ensemble des paramètres locaux :

$$\mathbb{Q}^{*+}(I,\omega) = \left\{ (q_{ij}^{*+}(M), c^{*+(ij)}(\omega,t))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2} \right\}$$

• **Problème local de fatigue sur un domaine de type $\mathbf{P^{+}PMI}(I,\omega)$** :
— variable Pilote à composantes actives approchées Périodiques Monotones Identiques sur l'intervalle I dans le domaine ω ;
— problème local de fatigue approché de type $\mathrm{P}^{+}\mathrm{PI}(I,\omega)$ pour lequel l'évolution temporelle de chaque composante active approchée de la variable pilote obéit à l'hypothèse (H1) (évolution monotone) ;
— ensemble des paramètres locaux :

$$\mathbb{Q}^{*+}(I,\omega) = \left\{ (q_{ij}^{*+}(M), \overline{q^{*+(ij)}}(\omega))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}, c^{*+}(\omega,t) \right\}$$

• **Problème local de fatigue sur un domaine de type $\mathbf{P^{+}PML}(I,\omega)$** :
— variable Pilote à composantes actives approchées Périodiques Monotones Linéaires sur l'intervalle I dans le domaine ω ;
— problème local de fatigue approché de type $\mathrm{P}^{+}\mathrm{PM}(I,\omega)$ pour lequel l'évolution temporelle de chaque composante active approchée de la variable pilote obéit à l'hypothèse (H2) (évolution en dent-de-scie) ;
— ensemble des paramètres locaux :

$$\mathbb{Q}^{*+}(I,\omega) = \left\{ (q_{ij}^{*+}(M), T^{*+(ij)}(\omega), c_{min}^{*+(ij)}(\omega), c_{max}^{*+(ij)}(\omega))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2} \right\}$$

• **Problème local de fatigue sur un domaine de type $\mathbf{P^{+}PMLI}(I,\omega)$** :
— variable Pilote à composantes actives approchées Périodiques Monotones Linéaires Identiques sur l'intervalle I dans le domaine ω ;
— problème local de fatigue approché de type $\mathrm{P}^{+}\mathrm{PMI}(I,\omega)$ pour lequel l'évolution temporelle de chaque composante active approchée de la variable pilote obéit à l'hypothèse (H2) (évolution en dent-de-scie) ;
— ensemble des paramètres locaux :

$$\mathbb{Q}^{*+}(I,\omega) = \left\{ (q_{ij}^{*+}(M))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}, T^{*+}(\omega), V_{min}^{*+}(\omega), V_{max}^{*+}(\omega), (\overline{q^{*+(ij)}}(\omega))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2} \right\}$$

Troisième partie

PREALABLE GENERAL A UNE APPROCHE LOCALE DE LA FATIGUE (B) : ECRITURE D'UNE LOI CYCLIQUE A PARTIR D'UNE LOI TEMPORELLE

Chapitre 6

Equations de passage d'une loi temporelle à une loi cyclique

6.1 Reparamétrisation du temps. Compteur du nombre de cycles

Nous considèrons une fonction réelle du temps t de classe C^∞ et périodique, notée $\tau(t)$. Nous notons T la période de cette fonction. Ainsi : $\tau(t+Tn) = \tau(t)\ \forall n \in \mathbb{Z}$. Nous choisissons ensuite d'écrire :

$$t = T \times N'(t) + t'(t) = \Phi(N', t')$$

avec :

$$\begin{cases} N'(t) = [\dfrac{t}{T}] \\ t'(t) = t - [\dfrac{t}{T}]T,\ 0 \leq t' \leq T \end{cases} \tag{6.1}$$

Cette écriture définit une re-paramétrisation du temps (et non un changement de variable).

La fonction $N'(t)$ est appelée compteur de nombre de cycles (ou plus simplement nombre de cycles) et, telle qu'elle est définie, prend des valeurs discrètes et n'est donc pas continue. Aussi, au préalable de son utilisation ultérieure, et afin d'éviter tout problème de régularité, nous souhaitons la justifier comme une fonction continue. Cette justification, classique, repose sur le fait que nous pouvons approcher cette fonction discrète de manière aussi proche que nous le voulons par une fonction continue (Paragraphe 6.6). Nous admettons donc ici que $N'(t)$ peut être approchée d'une manière aussi précise que nous le voulons par une fonction réelle continue $N(t)$, baptisée "nombre de cycles" comme $N'(t)$, par souci de simplicité. Finalement :

$$t = T \times N(t) + t'(t) = \Phi(N, t') \tag{6.2}$$

6.2 Expression de la différentielle du temps dans le cadre de la fatigue

Ecrivons : $t = TN(t) + t'(t) = TN(t)(1 + \frac{t'(t)}{TN(t)})$. Puisque $\frac{t'(t)}{TN(t)} \ll 1$, nous avons finalement : $t \approx TN(t)$. Nous pouvons alors écrire ($N(t)$ étant continue, donc différentiable) :

$$dt \approx TdN(t)$$

6.3 Approximation d'une fonction et de sa différence dans le cadre de la fatigue

6.3.1 Hypothèse obligatoire de variations faibles avec le temps

Soit $\tilde{f}(t)$ une fonction réelle de classe C^∞. Nous supposons que $\tilde{f}(t)$ ne possède aucune propriété particulière quant à son évolution (en particulier, elle n'est pas a priori périodique) sauf celle d'évoluer faiblement avec le temps, c'est-à-dire faiblement avec N et t'. Plus précisément, nous supposons :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \left| \frac{\partial^p \tilde{f}}{\partial t^p}(t) \right| \ll \tilde{f}(t)$$

Nous cherchons les expressions que peut prendre cette fonction ainsi que sa différentielle, pour les valeurs $t = NT$ caractéristiques des temps qui sont observés dans le cadre usuel de la fatigue.

Pour arriver à cela, nous considérons la variable suivante :

$$x = \frac{NT + t'}{NT} = 1 + \frac{t'}{NT}$$

Nous avons : $\frac{t'}{NT} < 1$ (au-delà du premier cycle). Nous posons :

$$\tilde{f}(t) = \overline{f}(x)$$

6.3.2 Approximation d'une fonction

Ecrivons la formule de Taylor-Lagrange pour la fonction $\tilde{f}(t)$ au voisinage de la valeur NT en utilisant la formule de Taylor-Lagrange pour la fonction $\overline{f}$ au voisinage de la valeur 1 :

$$\begin{aligned} \tilde{f}(t) = \overline{f}(x) &= \overline{f}(1 + \frac{t'}{NT}) \\ &= \overline{f}(1) + \frac{\partial \overline{f}}{\partial x}(1)\frac{t'}{NT} + \ldots + \frac{\partial^p \overline{f}}{\partial x^p}(1)\frac{1}{p!}(\frac{t'}{NT})^p + R_p(\frac{t'}{NT}) \end{aligned} \tag{6.3}$$

Le terme $R_p(\frac{t'}{NT}) = \frac{\partial^{p+1}\overline{f}}{\partial x^{p+1}}(\xi)\frac{1}{(p+1)!}(\frac{t'}{NT})^{p+1}$ $(1 < \xi < 1 + t'/NT)$ tend vers 0 si $\frac{\partial^{p+1}\overline{f}}{\partial x^{p+1}}(x)$ évolue faiblement (ce qui fait partie des hypothèses) et parce que $(\frac{t'}{NT})^{p+1} \to 0$. Donc : $\tilde{f}(t) \approx \overline{f}(1)$. La valeur $x = 1$ correspond aux temps entiers de nombre de périodes, c'est-à-dire à des valeurs du temps de la forme $t = NT$. En d'autres termes, $\tilde{f}(t)$ est proche de la valeur de l'image de $\tilde{f}$ calculée pour l'entier (inférieur) N le plus proche de t tel que $t = NT$. Nous pouvons donc écrire $\tilde{f}(t)$ comme une fonction de N :

$$\tilde{f}(t) \approx \tilde{f}(NT) =: f(N) \tag{6.4}$$

6.3.3 Approximation de la différence par une différentielle

Regardons maintenant la différence :

$$\begin{aligned} \tilde{f}(t) - \tilde{f}(t_0) &= \tilde{f}(NT + t') - \tilde{f}(N_0T + t'_0) \\ &= \tilde{f}(NT + t') - \tilde{f}(NT - (N - N_0)T + t'_0) \\ &= \overline{f}(x = (NT + t')/NT) - \overline{f}(x_0 = (NT - (N - N_0)T + t'_0)/NT) \\ &= \overline{f}(1 + \frac{t'}{NT}) - \overline{f}(1 - \frac{N - N_0}{N} + \frac{t'_0}{NT}) \end{aligned}$$

Regardons chacun des deux termes séparément pour lesquels nous allons écrire la formule de Taylor-Lagrange.

Pour le premier terme, nous avons :

$$\overline{f}(1+\frac{t'}{NT}) = \overline{f}(1) + \frac{\partial \overline{f}}{\partial x}(1)\frac{t'}{NT} + \ldots + \frac{\partial^p \overline{f}}{\partial x^p}(1)\frac{1}{p!}(\frac{t'}{NT})^p + R_p(\frac{t'}{NT}) \tag{6.5}$$

Le terme $R_p(\frac{t'}{NT}) = \frac{\partial^{p+1}\overline{f}}{\partial x^{p+1}}(\xi)\frac{1}{(p+1)!}(\frac{t'}{NT})^{p+1}$ $(1 < \xi < 1 + t'/NT)$ tend vers 0 si $\frac{\partial^{p+1}\overline{f}}{\partial x^{p+1}}(x)$ évolue faiblement (ce qui fait partie des hypothèses) et parce que $(\frac{t'}{NT})^{p+1} \to 0$. Ainsi, finalement au premier ordre, pour le premier terme, nous avons :

$$\overline{f}(1+\frac{t'}{NT}) \approx \overline{f}(1) + \frac{\partial \overline{f}}{\partial x}(1)\frac{t'}{NT} \tag{6.6}$$

Pour le second terme, nous avons :

$$\begin{aligned}
\overline{f}(1-\frac{N-N_0}{N}+\frac{t'_0}{NT}) &= \overline{f}(1-\frac{N-N_0}{N}(1-\frac{t'_0}{(N-N_0)T})) \\
&= \overline{f}(1) - \frac{\partial \overline{f}}{\partial x}(1)\frac{N-N_0}{N}\left(1-\frac{t'_0}{(N-N_0)T}\right) + \ldots \\
&+ (-1)^p\frac{\partial^p \overline{f}}{\partial x^p}(1)\frac{1}{p!}\left(\frac{N-N_0}{N}\right)^p\left(1-\frac{t'_0}{(N-N_0)T}\right)^p + \ldots \\
&+ R_p\left(\frac{N-N_0}{N}(1-\frac{t'_0}{(N-N_0)T})\right)
\end{aligned} \tag{6.7}$$

Le terme $R_p\left(\frac{N-N_0}{N}(1-\frac{t'_0}{(N-N_0)T})\right) = (-1)^{p+1}\frac{\partial^{p+1}\overline{f}}{\partial x^{p+1}}(\xi)\frac{1}{(p+1)!}\left(\frac{N-N_0}{N}\right)^{p+1}\left(1-\frac{t'_0}{(N-N_0)T}\right)^{p+1}$ $(1-\frac{N-N_0}{N}(1-\frac{t'_0}{(N-N_0)T}) < \xi < 1)$ tend vers 0 si $\frac{\partial^{p+1}\overline{f}}{\partial x^{p+1}}(x)$ évolue faiblement (ce qui fait partie des hypothèses) et parce que $\frac{1}{(p+1)!}\left(\frac{N-N_0}{N}\right)^{p+1}\left(1-\frac{t'_0}{(N-N_0)T}\right)^{p+1} \to 0$. Ainsi, finalement au premier ordre, pour le second terme, nous avons :

$$\overline{f}(1-\frac{N-N_0}{N}+\frac{t'_0}{NT}) \approx \overline{f}(1) - \frac{\partial \overline{f}}{\partial x}(1)\left(\frac{N-N_0}{N}-\frac{t'_0}{NT}\right) \tag{6.8}$$

Finalement, en reprenant ce qui vient d'être trouvé pour les deux termes, il vient :

$$\tilde{f}(t) - \tilde{f}(t_0) \approx \frac{\partial \overline{f}}{\partial x}(1)\left(\frac{t'-t'_0}{NT}+\frac{N-N_0}{N}\right)$$

En outre, nous pouvons considérer $\frac{t'-t'_0}{NT} \ll \frac{N-N_0}{N}$. Ainsi, finalement au premier ordre :

$$\tilde{f}(t) - \tilde{f}(t_0) \approx \frac{\partial \overline{f}}{\partial x}(1)\frac{N-N_0}{N}$$

Comme nous pouvons considérer que $\frac{N-N_0}{N} \ll 1$, alors la différence précédente, peut être considérée comme une différentielle, c'est-à-dire :

$$d\tilde{f}(t) \approx \frac{\partial \overline{f}}{\partial x}(1)\frac{dN}{N}$$

Comme pour le cas précédent, $x = 1$ correspond aux temps entiers de nombre de périodes, c'est-à-dire à des valeurs du temps de la forme $t = NT$. Nous pouvons donc ainsi écrire :

$$d\tilde{f}(t) \approx d\tilde{f}(NT) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial t}(NT)TdN \tag{6.9}$$

En utilisant la fonction f (Eq. 6.4, $\tilde{f}(t) \approx \tilde{f}(NT) =: f(N)$), il vient alors :

$$d\tilde{f}(t) \approx df(N) = \frac{\partial f}{\partial N}(N)dN \tag{6.10}$$

6.4 Formules de passage d'une évolution temporelle à une évolution cyclique

Nous venons de montrer les relations suivantes :

$$\begin{cases} t \approx NT \\ dt \approx TdN \\ \tilde{f}(t) \approx \tilde{f}(NT) =: f(N) \\ d\tilde{f}(t) \approx \dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial t}(NT)TdN = df(N) = \dfrac{\partial f}{\partial N}(N)dN \end{cases} \tag{6.11}$$

Dans les cas particuliers où cela va être appliqué, les grandeurs qui sont manipulées sont définies en chaque point M du domaine étudié. Afin de rendre compte de cela, nous ré-écrivons les formules précédentes (en changeant symboliquement le nom de la fonction afin d'être plus proche des notations des problèmes de fatigue) en faisant clairement apparaître que cette dépendance est paramétrique par rapport à la géométrie, de la manière suivante :

$$\begin{cases} t \approx NT \\ dt \approx TdN \\ Q(M,t) \approx Q(M,NT) =: Q^F(M|N) \\ dQ(M,t) \approx \dfrac{\partial Q}{\partial t}(M,NT)TdN = dQ^F(M|N) = \dfrac{\partial Q^F}{\partial N}(M|N)dN \end{cases} \tag{6.12}$$

6.5 Applications aux cas des différents types de problèmes de la classification locale

6.5.1 Problèmes locaux de fatigue au point M

• **Problème local de fatigue** :
— l'évolution temporelle de chaque composante active de la variable pilote, $(Q^*_{ij}(M,t))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}$, est cyclique, sur l'intervalle I, au point M ;
— ensemble des paramètres locaux :

$$\mathbb{Q}^*(I,M) = \left\{(Q^*_{ij}(M,t))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}\right\}$$

Dans le cadre d'un tel problème, les composantes actives de la variable pilote sont cycliques, mais non périodiques (Définition (D0) et Définition (D1), Chapitre 3). Les hypothèses permettant d'obtenir les formules de passage ne sont donc pas a priori vérifiées et par conséquent, ces formules de passage pour ce cas ne sont pas définies.

• **Problème local de fatigue de type PP**(I,M) :

— variable Pilote à composantes actives Périodiques sur l'intervalle I au point M ;
— problème local de fatigue pour lequel l'évolution temporelle de chaque composante active de la variable pilote est périodique ;
— ensemble des paramètres locaux :

$$\mathbb{Q}^*(I,M) = \left\{ (c^{*(ij)}(M,t))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2} \right\}$$

Dans le cadre d'un tel problème, l'ensemble des paramètres locaux et les formules de passage (Eq. 6.12) s'écrivent $\forall (i,j) \in \{1,2,3\}^2$:

$$\begin{cases} t \approx NT \\ dt \approx TdN \\ Q^*_{ij}(M,t) \approx Q^*_{ij}(M,NT) =: Q^{*F}_{ij}(M|N) \\ dQ^*_{ij}(M,t) \approx dQ^{*F}_{ij}(M|N) = \dfrac{\partial Q^{*F}_{ij}}{\partial N}(M|N)dN \\ \mathbb{Q}^*(I,M) = \left\{ (c^{*F(ij)}(M|N))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2} \right\} \end{cases} \tag{6.13}$$

• **Problème local de fatigue de type PPI**(I,M) :
— variable Pilote à composantes actives Périodiques Identiques sur l'intervalle I au point M ;
— problème local de fatigue de type PP(I,M) pour lequel les composantes actives de la variable pilote $(Q^*_{ij}(M,t))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}$ sont identiques :

$$\forall Q^*_{ij}(M,t), \exists \overline{Q^*_{ij}}(M) \in \mathbb{R}^* / Q^*_{ij}(M,t) = V^*(M,t)\overline{Q^*_{ij}}(M)$$

— ensemble des paramètres locaux :

$$\mathbb{Q}^*(I,M) = \left\{ c^*(M,t), (\overline{Q^*_{ij}}(M))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2} \right\}$$

Dans le cadre d'un tel problème, l'ensemble des paramètres locaux et les formules de passage (Eq. 6.12) s'écrivent $\forall (i,j) \in \{1,2,3\}^2$:

$$\begin{cases} t \approx NT \\ dt \approx TdN \\ Q^*_{ij}(M,t) = V^*(M,t)\overline{Q^*_{ij}}(M) \approx V^*(M,NT)\overline{Q^*_{ij}}(M) =: V^{*F}(M|N)\overline{Q^*_{ij}}(M) \\ dQ^*_{ij}(M,t) \approx \overline{Q^*_{ij}}(M)\dfrac{\partial V^{*F}}{\partial N}(M|N)dN \\ \mathbb{Q}^*(I,M) = \left\{ c^{*F}(M|N), (\overline{Q^*_{ij}}(M))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2} \right\} \end{cases} \tag{6.14}$$

• **Problème local de fatigue de type PPM**(I,M) :
— variable Pilote à composantes actives Périodiques Monotones sur l'intervalle I au point M ;
— problème local de fatigue de type PP(I,M), pour lequel l'évolution temporelle de chaque composante active de la variable pilote obéit à l'hypothèse (H1) (évolution monotone) ;
— ensemble des paramètres locaux :

$$\mathbb{Q}^*(I,M) = \left\{ (c^{*(ij)}(M,t))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2} \right\}$$

Dans le cadre d'un tel problème, l'ensemble des paramètres locaux et les formules de passage sont identiques à celles d'un problème de type PP(I,M) $\forall (i,j) \in \{1,2,3\}^2$:

$$\left\{\begin{array}{r} t \approx NT \\ dt \approx TdN \\ Q^*_{ij}(M,t) \approx Q^*_{ij}(M,NT) =: Q^{*F}_{ij}(M|N) \\ dQ^*_{ij}(M,t) \approx dQ^{*F}_{ij}(M|N) = \dfrac{\partial Q^{*F}_{ij}}{\partial N}(M|N)dN \\ \mathbb{Q}^*(I,M) = \left\{(c^{*F(ij)}(M|N))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}\right\} \end{array}\right. \tag{6.15}$$

• **Problème local de fatigue de type PPMI**(I,M) :
— variable Pilote à composantes actives Périodiques Monotones Identiques sur l'intervalle I au point M) ;
— problème local de fatigue de type PPI(I,M) pour lequel l'évolution temporelle de chaque composante active de la variable pilote obéit à l'hypothèse (H1) (évolution monotone) ;
— ensemble des paramètres locaux :

$$\mathbb{Q}^*(I,M) = \left\{c^*(M,t), (\overline{Q^*_{ij}}(M))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}\right\}$$

Dans le cadre d'un tel problème, l'ensemble des paramètres locaux et les formules de passage sont identiques à celles d'un problème de type PPI(I,M) $\forall (i,j) \in \{1,2,3\}^2$:

$$\left\{\begin{array}{r} t \approx NT \\ dt \approx TdN \\ Q^*_{ij}(M,t) = V^*(M,t)\overline{Q^*_{ij}}(M) \approx V^*(M,NT)\overline{Q^*_{ij}}(M) =: V^{*F}(M|N)\overline{Q^*_{ij}}(M) \\ dQ^*_{ij}(M,t) \approx \overline{Q^*_{ij}}(M)\dfrac{\partial V^{*F}}{\partial N}(M|N)dN \\ \mathbb{Q}^*(I,M) = \left\{c^{*F}(M|N), (\overline{Q^*_{ij}}(M))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}\right\} \end{array}\right. \tag{6.16}$$

• **Problème local de fatigue de type PPML**(I,M) :
— variable Pilote à composantes actives Périodiques Monotones Linéaires sur l'intervalle I au point M ;
— problème local de fatigue de type PPM(I,M) pour lequel l'évolution temporelle de chaque composante active de la variable pilote obéit à l'hypothèse (H2) (évolution en dent-de-scie) ;
— ensemble des paramètres locaux :

$$\mathbb{Q}^*(I,M) = \left\{(T(c^{*(ij)}(M,t)), min(c^{*(ij)}(M,t)), max(c^{*(ij)}(M,t)))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}\right\}$$

Dans le cadre d'un tel problème, l'ensemble des paramètres locaux et les formules de passage (Eq. 6.12) s'écrivent $\forall (i,j) \in \{1,2,3\}^2$:

$$\left\{\begin{array}{r} t \approx NT \\ dt \approx TdN \\ Q^*_{ij}(M,t) \approx Q^*_{ij}(M,NT) =: Q^{*F}_{ij}(M|N) \\ dQ^*_{ij}(M,t) \approx dQ^{*F}_{ij}(M|N) = \dfrac{\partial Q^{*F}_{ij}}{\partial N}(M|N)dN \\ \mathbb{Q}^*(I,M) = \left\{(T(c^{*F(ij)}(M|N)), min(c^{*F(ij)}(M|N)), max(c^{*F(ij)}(M|N)))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}\right\} \end{array}\right. \tag{6.17}$$

• **Problème local de fatigue de type PPMLI**(I, M) :
— variable Pilote à composantes actives Périodiques Monotones Linéaires Identiques sur l'intervalle I au point M ;
— problème local de fatigue de type PPMI(I, M) pour lequel l'évolution temporelle de chaque composante active de la variable pilote obéit à l'hypothèse (H2) (évolution en dent-de-scie) ;
— ensemble des paramètres locaux :

$$\mathbb{Q}^*(I,M) = \left\{ T(c^*(M,t)), min(c^*(M,t)), max(c^*(M,t)), (\overline{Q^*_{ij}}(M))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2} \right\}$$

Dans le cadre d'un tel problème, l'ensemble des paramètres locaux et les formules de passage (Eq. 6.12) s'écrivent $\forall (i,j) \in \{1,2,3\}^2$:

$$\begin{cases} t \approx NT \\ dt \approx TdN \\ Q^*_{ij}(M,t) = V^*(M,t)\overline{Q^*_{ij}}(M) \approx V^*(M,NT)\overline{Q^*_{ij}}(M) =: V^{*F}(M|N)\overline{Q^*_{ij}}(M) \\ dQ^*_{ij}(M,t) \approx \overline{Q^*_{ij}}(M)\dfrac{\partial V^{*F}(M|N)}{\partial N}dN \\ \mathbb{Q}^*(I,M) = \left\{ T(c^{*F}(M|N)), min(c^{*F}(M|N)), max(c^{*F}(M|N)), (\overline{Q^*_{ij}}(M))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2} \right\} \end{cases} \tag{6.18}$$

6.5.2 Problèmes locaux de fatigue sur un domaine

• **Problème local de fatigue sur un domaine** :
— problème local de fatigue pour lequel les composantes actives de la variable pilote, $(Q^*_{ij}(M,t))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}$ sur le domaine ω, sont telles que :

$$\forall M \in \omega, \forall Q^*_{ij}(M,t), \exists q^*_{ij}(M) \in \mathbb{R}^*, \exists V^{*(ij)}(\omega,t) \in \mathbb{R}^* / Q^*_{ij}(M,t) = V^{*(ij)}(\omega,t) q^*_{ij}(M)$$

— ensemble des paramètres locaux :

$$\mathbb{Q}^*(I,\omega) = \left\{ (q^*_{ij}(M), V^{*(ij)}(\omega,t))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2} \right\}$$

Dans le cadre d'un tel problème, les composantes actives de la variable pilote sont cycliques, mais non périodiques (Définition (D0) et Définition (D1), Chapitre 3). Les hypothèses permettant d'obtenir les formules de passage ne sont donc pas a priori vérifiées et par conséquent, ces formules de passage pour ce cas ne sont pas définies.

• **Problème local de fatigue sur un domaine de type PP**(I, ω) :
— variable Pilote à composantes actives Périodiques sur l'intervalle I dans le domaine ω ;
— problème local de fatigue sur un domaine pour lequel l'évolution temporelle de chaque composante active de la variable pilote est périodique ;
— ensemble des paramètres locaux :

$$\mathbb{Q}^*(I,\omega) = \left\{ (q^*_{ij}(M), c^{*(ij)}(\omega,t))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2} \right\}$$

Dans le cadre d'un tel problème, l'ensemble des paramètres locaux et les formules de passage

(Eq. 6.12) s'écrivent $\forall (i,j) \in \{1,2,3\}^2$:

$$\left\{\begin{array}{r} t \approx NT \\ dt \approx TdN \\ Q^*_{ij}(M,t) = V^{*(ij)}(\omega,t) q^*_{ij}(M) \approx V^{*(ij)}(\omega,NT) q^*_{ij}(M) =: V^{*F(ij)}(\omega|N) q^*_{ij}(M) \\ dQ^*_{ij}(M,t) \approx q^*_{ij}(M) \dfrac{\partial V^{*F(ij)}}{\partial N}(\omega|N) dN \\ \mathbb{Q}^*(I,\omega) = \left\{ (q^*_{ij}(M), c^{*F(ij)}(\omega|N))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2} \right\} \end{array}\right. \tag{6.19}$$

• **Problème local de fatigue sur un domaine de type PPI(I,ω)** :
— variable Pilote à composantes actives Périodiques Identiques sur l'intervalle I dans le domaine ω ;
— problème local de fatigue sur un domaine de type PP(I,ω) pour lequel les composantes actives de la variable pilote, $(Q^*_{ij}(M,t))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}$, sont identiques :

$$\forall M \in \omega, \forall Q^*_{ij}(M,t), \exists \overline{q^{*(ij)}}(\omega) \in \mathbb{R}^*, \exists V^*(\omega,t) \in \mathbb{R}^* / Q^*_{ij}(M,t) = V^*(\omega,t) \overline{q^{*(ij)}}(\omega) q^*_{ij}(M)$$

— ensemble des paramètres locaux :

$$\mathbb{Q}^*(I,\omega) = \left\{ (q^*_{ij}(M), \overline{q^{*(ij)}}(\omega))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}, c^*(\omega,t) \right\}$$

Dans le cadre d'un tel problème, l'ensemble des paramètres locaux et les formules de passage (Eq. 6.12) s'écrivent $\forall (i,j) \in \{1,2,3\}^2$:

$$\left\{\begin{array}{r} t \approx NT \\ dt \approx TdN \\ Q^*_{ij}(M,t) = V^*(\omega,t) q^*_{ij}(M) \overline{q^{*(ij)}}(\omega) \approx V^*(\omega,NT) q^*_{ij}(M) \overline{q^{*(ij)}}(\omega) =: V^{*F}(\omega|N) q^*_{ij}(M) \overline{q^{*(ij)}}(\omega) \\ dQ^*_{ij}(M,t) \approx q^*_{ij}(M) \overline{q^{*(ij)}}(\omega) \dfrac{\partial V^{*F}}{\partial N}(\omega|N) dN \\ \mathbb{Q}^*(I,\omega) = \left\{ (q^*_{ij}(M), \overline{q^{*(ij)}}(\omega))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}, c^{*F}(\omega|N) \right\} \end{array}\right. \tag{6.20}$$

• **Problème local de fatigue sur un domaine de type PPM(I,ω)** :
— variable Pilote à composantes actives Périodiques Monotones sur l'intervalle I dans le domaine ω ;
— problème local de fatigue sur un domaine de type PP(I,ω) pour lequel l'évolution temporelle de chaque composante active de la variable pilote obéit à l'hypothèse (H1) (évolution monotone) ;
— ensemble des paramètres locaux :

$$\mathbb{Q}^*(I,\omega) = \left\{ (q^*_{ij}(M), c^{*(ij)}(\omega,t))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2} \right\}$$

Dans le cadre d'un tel problème, l'ensemble des paramètres locaux et les formules de passage

sont identiques à celles d'un problème de type PP(I,ω) $\forall (i,j) \in \{1,2,3\}^2$:

$$\left\{\begin{array}{r} t \approx NT \\ dt \approx TdN \\ Q^*_{ij}(M,t) = V^{*(ij)}(\omega,t)q^*_{ij}(M) \approx V^{*(ij)}(\omega,NT)q^*_{ij}(M) =: V^{*F(ij)}(\omega|N)q^*_{ij}(M) \\ dQ^*_{ij}(M,t) \approx q^*_{ij}(M)\dfrac{\partial V^{*F(ij)}}{\partial N}(\omega|N)dN \\ \mathbb{Q}^*(I,\omega) = \left\{(q^*_{ij}(M)_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}, c^{*F(ij)}(\omega|N))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}\right\} \end{array}\right. \tag{6.21}$$

• **Problème local de fatigue sur un domaine de type PPMI(I,ω)** :
— variable Pilote à composantes actives Périodiques Monotones Identiques sur l'intervalle I dans le domaine ω ;
— problème local de fatigue sur un domaine de type PPI(I,ω) pour lequel l'évolution temporelle de chaque composante active de la variable pilote obéit à l'hypothèse (H1) (évolution monotone) ;
— ensemble des paramètres locaux :

$$\mathbb{Q}^*(I,\omega) = \left\{(q^*_{ij}(M), \overline{q^{*(ij)}}(\omega))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}, c^*(\omega,t)\right\}$$

Dans le cadre d'un tel problème, l'ensemble des paramètres locaux et les formules de passage sont identiques à celles d'un problème de type PPI(I,ω) :

$$\left\{\begin{array}{r} t \approx NT \\ dt \approx TdN \\ Q^*_{ij}(M,t) = V^*(\omega,t)q^*_{ij}(M)\overline{q^{*(ij)}}(\omega) \approx V^*(\omega,NT)q^*_{ij}(M)\overline{q^{*(ij)}}(\omega) =: V^{*F}(\omega|N)q^*_{ij}(M)\overline{q^{*(ij)}}(\omega) \\ dQ^*_{ij}(M,t) \approx q^*_{ij}(M)\overline{q^{*(ij)}}(\omega)\dfrac{\partial V^{*F}}{\partial N}(\omega|N)dN \\ \mathbb{Q}^*(I,\omega) = \left\{(q^*_{ij}(M), \overline{q^{*(ij)}}(\omega))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}, c^{*F}(\omega|N)\right\} \end{array}\right. \tag{6.22}$$

• **Problème local de fatigue sur un domaine de type PPML(I,ω)** :
— variable Pilote à composantes actives Périodiques Monotones Linéaires sur l'intervalle I dans le domaine ω ;
— problème local de fatigue sur un domaine de type PPM(I,ω) pour lequel l'évolution temporelle de chaque composante active de la variable pilote obéit à l'hypothèse (H2) (évolution en dent-de-scie) ;
— ensemble des paramètres locaux :

$$\mathbb{Q}^*(I,\omega) = \left\{(q^*_{ij}(M), T(c^{*(ij)}(\omega,t)), min(c^{*(ij)}(\omega,t)), max(c^{*(ij)}(\omega,t)))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}\right\}$$

Dans le cadre d'un tel problème, l'ensemble des paramètres locaux et les formules de passage

(Eq. 6.12) s'écrivent $\forall (i,j) \in \{1,2,3\}^2$:

$$\left\{ \begin{array}{r} t \approx NT \\ dt \approx TdN \\ Q^*_{ij}(M,t) = V^{*(ij)}(\omega,t) q^*_{ij}(M) \approx V^{*(ij)}(\omega,NT) q^*_{ij}(M) =: V^{*F(ij)}(\omega|N) q^*_{ij}(M) \\ dQ^*_{ij}(M,t) \approx q^*_{ij}(M) \dfrac{\partial V^{*F}_{ij}}{\partial N}(\omega|N) dN \\ \mathbb{Q}^*(I,\omega) = \left\{ (q^*_{ij}(M), T(c^{*F(ij)}(\omega|N)), min(c^{*F(ij)}(\omega|N)), max(c^{*F(ij)}(\omega|N)))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2} \right\} \end{array} \right. \tag{6.23}$$

• **Problème local de fatigue sur un domaine de type PPMLI(I,ω)** :
— variable Pilote à composantes actives Périodiques Monotones Linéaires Identiques sur l'intervalle I dans le domaine ω ;
— problème local de fatigue sur un domaine de type PPMI(I,ω) pour lequel l'évolution temporelle de chaque composante active de la variable pilote obéit à l'hypothèse (H2) (évolution en dent-de-scie) ;
— ensemble des paramètres locaux :

$$\mathbb{Q}^*(I,\omega) = \left\{ (q^*_{ij}(M))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}, T(c^*(\omega,t)), min(c^*(\omega,t)), max(c^*(\omega,t)), (\overline{q^{*(ij)}}(\omega))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2} \right\}$$

Dans le cadre d'un tel problème, l'ensemble des paramètres locaux et les formules de passage (Eq. 6.12) s'écrivent $\forall (i,j) \in \{1,2,3\}^2$:

$$\left\{ \begin{array}{r} t \approx NT \\ dt \approx TdN \\ Q^*_{ij}(M,t) = V^*(\omega,t) q^*_{ij}(M) \overline{q^{*(ij)}}(\omega) \approx V^*(\omega,NT) q^*_{ij}(M) \overline{q^{*(ij)}}(\omega) =: V^{*F}(\omega|N) q^*_{ij}(M) \overline{q^{*(ij)}}(\omega) \\ dQ^*_{ij}(M,t) \approx q^*_{ij}(M) \overline{q^{*(ij)}}(\omega) \dfrac{\partial V^{*F}}{\partial N}(\omega|N) dN \\ \mathbb{Q}^*(I,\omega) = \left\{ (q^*_{ij}(M))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}, T(c^{*F}(\omega|N)), min(c^{*F}(\omega|N)), max(c^{*F}(\omega|N)), (\overline{q^{*(ij)}}(\omega))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2} \right\} \end{array} \right. \tag{6.24}$$

6.6 Annexe locale - Etablissement du nombre de cycles N sous la forme d'une fonction continue et dérivable

La fonction du temps $N'(t)$, à valeurs entières et baptisée nombre de cycles, est assimilable à la fonction partie entière :

$$N'(t) = [\frac{t}{T}]$$

(T étant la période d'une fonction donnée). Or, cette fonction est une fonction en escalier et est donc définie et continue seulement par morceaux. Or, la notion de nombre de cycles intervient dans les lois d'évolution en fatigue dans un cadre d'utilisation de variables continues et dérivables dans $\mathbb{R}^+$ (par rapport à la variable t allant de 0 à l'infini). C'est la raison pour laquelle nous souhaitons utiliser à la place de la fonction $N'(t)$ discontinue sur $\mathbb{R}^+$ une autre fonction qui soit continue et dérivable sur $\mathbb{R}^+$.

Pour cela, nous allons démontrer que la fonction entière $N'(t) = [\frac{t}{T}]$ peut être approchée d'une manière aussi proche que nous le voulons par une fonction continue dérivable sur $\mathbb{R}^+$ notée

$N(t)$ et baptisée "nombre de cycles", comme $N'(t)$, par souci de simplicité. Ainsi l'approximation continue $N(t)$ de $N'(t)$ sera continue et dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et non plus, comme $N'(t)$, uniquement sur des intervalles de $\mathbb{R}^+$.

Deux méthodes employant les séries de Fourier ont été retenues. Soit $\mathbb{F}_P$ l'ensemble des fonctions réelles, périodiques de période T et de pulsation $\omega = 2\pi/T$, continues par morceaux sur une période et y admettant un nombre fini de discontinuités de première espèce. A la fonction f appartenant à $\mathbb{F}_P$, nous associons sa série de Fourier S_f :

$$S_f(t) = a_0(f) + \sum_{p\geq 1} \left(a_p(f)\cos(p\omega t) + b_p(f)\sin(p\omega t)\right) \tag{6.25}$$

avec :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} a_0(f) = \frac{1}{T}\int_{x_0}^{x_0+T} f(t)dt \\ a_p(f) = \frac{2}{T}\int_{x_0}^{x_0+T} f(t)\cos(p\omega t)dt \\ b_p(f) = \frac{2}{T}\int_{x_0}^{x_0+T} f(t)\sin(p\omega t)dt \end{cases} \tag{6.26}$$

6.6.1 Méthode 1

Soit f_1 la fonction définie par :

$$\begin{array}{rcl} f_1 : \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}^+ \\ t & \mapsto & f_1(t) = \begin{cases} 0, & 0[2] \leq t < 1[2] \\ 1, & 1[2] \leq t < 2[2] \end{cases} \end{array} \tag{6.27}$$

Soit $\forall p \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{cases} a_0(f_1) = \frac{1}{2} \\ a_p(f_1) = 0 \\ b_p(f_1) = \frac{-(1-(-1)^p)}{\pi p} \end{cases} \tag{6.28}$$

Finalement, la transformée de Fourier S_{f_1} de f_1 s'écrit :

$$S_{f_1}(t) = \frac{1}{2} + \sum_{p\geq 1} \frac{-(1-(-1)^p)}{\pi p}\sin(p\pi t) \tag{6.29}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}sin(\pi t) - \frac{2}{3\pi}sin(3\pi t) - \frac{2}{5\pi}sin(5\pi t)\ldots \tag{6.30}$$

Soit H_1 définie par :

$$\begin{array}{rcl} H_1 : \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}^+ \\ t & \mapsto & H_1(t) = \begin{cases} 0, & \forall t \in [0; r_{S_{f_1}}^{\frac{p+1}{2}}[\\ min(E(t)), & \forall t \in [r_{S_{f_1}}^{\frac{p+1}{2}}; r_{S_{f_1}}^{\frac{p+1}{2}} + 2[[2] \end{cases} \end{array} \tag{6.31}$$

avec $min(E(t))$ le plus petit entier de l'intervalle $[r_{S_{f_1}}^{\frac{p+1}{2}}; r_{S_{f_1}}^{\frac{p+1}{2}} + 2[$ considéré et $r_{S_{f_1}}^{\frac{p+1}{2}}$ la $\frac{p+1}{2}$ème racine de S_{f_1} sur $[0;2[$ si p est impair et la $\frac{p}{2}$ème racine de S_{f_1} sur $[0;2[$ si p est pair (une période) : cette racine tend vers $\frac{1}{2}$ lorsque p tend vers $+\infty$. Nous écrivons de la même manière $f_2(t) = f_1(t+1)$ et la transformée de Fourier associée $S_{f_2}(t) = S_{f_1}(t+1)$, puis nous définissons H_2 en utilisant la racine $r_{S_{f_1}}^{\frac{p+1}{2}}$ de S_{f_1} :

$$\begin{array}{rcl} H_2 : \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}^+ \\ t & \mapsto & H_2(t) = \begin{cases} 0, & \forall t \in [0; r_{S_{f_1}}^{\frac{p+1}{2}} + 1[\\ min(E(t)), & \forall t \in [r_{S_{f_1}}^{\frac{p+1}{2}} + 1; r_{S_{f_1}}^{\frac{p+1}{2}} + 3[[2] \end{cases} \end{array} \tag{6.32}$$

Soit N la fonction cycle, définie par une fonction escalier approchée continue :

$$\begin{array}{rcccc} N & : & \mathbb{R}^+ & \rightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & & t & \mapsto & N(t) \end{array} \tag{6.33}$$

La solution retenue pour la construction de la fonction N emploie deux fonctions pseudo-périodiques F_1 et F_2 avec variation d'amplitude à chaque pseudo-période :

$$\begin{array}{rcl} F_1 : \mathbb{R}^+ & \rightarrow & \mathbb{R}^+ \\ t & \mapsto & F_1(t) = S_{f_1}(t) * H_1(t) \quad avec \quad p = 50 \end{array} \tag{6.34}$$

$$\begin{array}{rcl} F_2 : \mathbb{R}^+ & \rightarrow & \mathbb{R}^+ \\ t & \mapsto & F_2(t) = S_{f_1}(t+1) * H_2(t) \quad avec \quad p = 50 \end{array} \tag{6.35}$$

Nous construisons la fonction cycle N (Fig. 6.1), continue et dérivable sur $\mathbb{R}^+$, et nous choisissons $p = 50$ afin d'avoir une approximation fine d'une fonction en escaliers telle que :

$$N(t) = S_{f_1}(t) * H_1(t) + S_{f_1}(t+1) * H_2(t) \quad avec \quad p = 50 \tag{6.36}$$

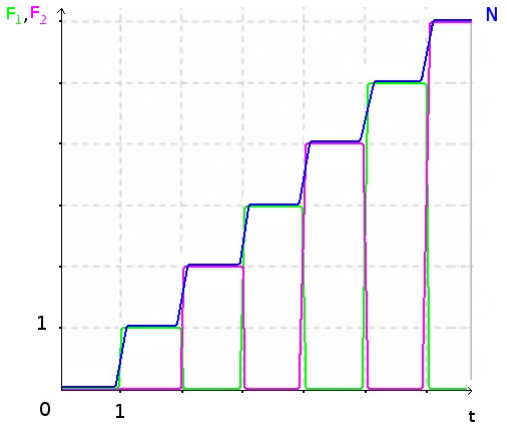


FIGURE 6.1 – Construction de la fonction N avec les fonctions F_1 et F_2.

6.6.2 Méthode 2

Soit f_1 la fonction définie par :

$$\begin{array}{rcl} f_1 : \mathbb{R}^+ & \rightarrow & \mathbb{R}^+ \\ t & \mapsto & f_1(t) = \begin{cases} 0, & 0[2] \leq t < 1[2] \\ 1, & 1[2] \leq t < 2[2] \end{cases} \end{array} \tag{6.37}$$

Soit $\forall p \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{cases} a_0(f_1) = \frac{1}{2} \\ a_p(f_1) = 0 \\ b_p(f_1) = \frac{-(1-(-1)^p)}{\pi p} \end{cases} \tag{6.38}$$

Finalement, la transformée de Fourier S_{f_1} de f_1 s'écrit :

$$S_{f_1}(t) = \frac{1}{2} + \sum_{p\geq 1} \frac{-(1-(-1)^p)}{\pi p} \sin(p\pi t) \tag{6.39}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} sin(\pi t) - \frac{2}{3\pi} sin(3\pi t) - \frac{2}{5\pi} sin(5\pi t) \dots \tag{6.40}$$

Soit ${}^1f$ une fonction définie par :

$${}^1f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$$
$$t \mapsto {}^1f(t) = \begin{cases} S_{f_1}(t), \ \forall t \in [r_{S_{f_1}}^{\frac{p+1}{2}}; r_{S_{f_1}}^{\frac{p+1}{2}} + 2[\\ 0, \ \forall t \in \mathbb{R}^+ \setminus [r_{S_{f_1}}^{\frac{p+1}{2}}; r_{S_{f_1}}^{\frac{p+1}{2}} + 2[\end{cases} \tag{6.41}$$

avec $r_{S_{f_1}}^{\frac{p+1}{2}}$ la $\frac{p+1}{2}$ème racine de S_{f_1} sur $[0;2[$ (une période) si p est impair ou la $\frac{p}{2}$ème racine de S_{f_1} sur $[0;2[$ si p est pair.

Soit f_2 une fonction définie par :

$$f_2 : \mathbb{R}^+ \rightarrow [0;+\infty[$$
$$t \mapsto f_2(t) = \begin{cases} 0, \ 1[2] \leq t < 2[2] \\ 2, \ 2[2] \leq t < 3[2] \end{cases} \tag{6.42}$$

Soit, $\forall p \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{cases} a_0(f_2) = 1 \\ a_p(f_2) = 0 \\ b_p(f_2) = \frac{-2(1-(-1)^p)}{\pi p} \end{cases} \tag{6.43}$$

Finalement, la transformée de Fourier S_{f_2} de f_2 s'écrit :

$$S_{f_2}(t) = 1 + 2\sum_{p\geq 1} \frac{-(1-(-1)^p)}{\pi p} \sin(pw(t+1)) \tag{6.44}$$

Soit ${}^2f$ une fonction définie par :

$${}^2f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$$
$$t \mapsto {}^2f(t) = \begin{cases} S_{f_2}(t), \ \forall t \in [r_{S_{f_1}}^{\frac{p+1}{2}} + 1; r_{S_{f_1}}^{\frac{p+1}{2}} + 3[\\ 0, \ \forall t \in \mathbb{R}^+ \setminus [r_{S_{f_1}}^{\frac{p+1}{2}} + 1; r_{S_{f_1}}^{\frac{p+1}{2}} + 3[\end{cases} \tag{6.45}$$

Soit f_3 une fonction définie par :

$$f_3 : \mathbb{R}^+ \rightarrow [0;+\infty[$$
$$t \mapsto f_3(t) = \begin{cases} 0, \ 2[2] \leq t < 3[2] \\ 3, \ 3[2] \leq t < 4[2] \end{cases} \tag{6.46}$$

Soit, $\forall p \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{cases} a_0(f_3) = 1,5 \\ a_p(f_3) = 0 \\ b_p(f_3) = \frac{-3(1-(-1)^p)}{\pi p} \end{cases} \tag{6.47}$$

Finalement, la transformée de Fourier S_{f_3} de f_3 s'écrit :

$$S_{f_3}(t) = 1,5 + 3\sum_{p\geq 1} \frac{-(1-(-1)^p)}{\pi p}\sin(pwt) \tag{6.48}$$

Soit ${}^3f$ une fonction définie par :

$$\begin{array}{rcl} {}^3f : \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}^+ \\ t & \mapsto & {}^3f(t) = \left\{ \begin{array}{l} S_{f_3}(t),\ \forall t \in [r_{S_{f_1}^{\frac{p+1}{2}}} + 2; r_{S_{f_1}^{\frac{p+1}{2}}} + 4[\\ 0,\ \forall t \in \mathbb{R}^+ \setminus [r_{S_{f_1}^{\frac{p+1}{2}}} + 2; r_{S_{f_1}^{\frac{p+1}{2}}} + 4[\end{array} \right. \end{array} \tag{6.49}$$

De manière générale, soit f_k une fonction définie par :

$$\begin{array}{rcl} f_k : \mathbb{R}^+ & \to & [0; +\infty[\\ t & \mapsto & f_k(t) = \left\{ \begin{array}{l} 0,\ (k-1)[2] \leq t < k[2] \\ k,\ k[2] \leq t < (k+1)[2] \end{array} \right. \end{array} \tag{6.50}$$

Soit S_{f_k} la transformée de Fourier de f_k et soit ${}^kf$ une fonction définie par :

$$\begin{array}{rcl} {}^kf : \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}^+ \\ t & \mapsto & {}^kf(t) = \left\{ \begin{array}{l} S_{f_k}(t),\ \forall t \in [r_{S_{f_1}^{\frac{p+1}{2}}} + k - 1; r_{S_{f_1}^{\frac{p+1}{2}}} + k + 1[\\ 0,\ \forall t \in \mathbb{R}^+ \setminus [r_{S_{f_1}^{\frac{p+1}{2}}} + k - 1; r_{S_{f_1}^{\frac{p+1}{2}}} + k + 1[\end{array} \right. \end{array} \tag{6.51}$$

Par récurrence, il est possible de construire la fonction cycle N (Fig. 6.2), somme de plusieurs fonctions dérivables et continues sur $\mathbb{R}^+$, telle que N soit continue et dérivable sur $\mathbb{R}^+$ avec :

$$N(t) = \sum_{k\geq 1}({}^kf(t)) \quad avec \quad p = 50 \tag{6.52}$$

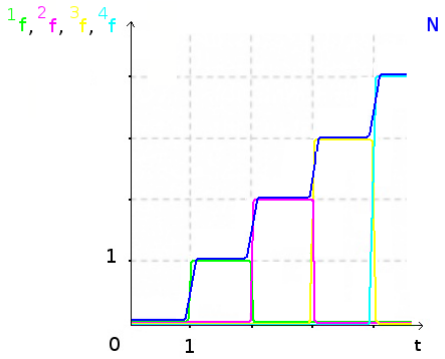


FIGURE 6.2 – Construction de la fonction N avec les fonctions ${}^1f$, ${}^2f$, ${}^3f$ ...

Chapitre 7

Principes de la démarche proposée pour la réalisation d'une approche locale de la fatigue

7.1 Synthèse pour une approche locale de la fatigue

L'objectif de ce chapitre est de synthétiser le formalisme développé jusqu'à présent :
- la conceptualisation et les classifications des problèmes de fatigue (Partie II) :
  . les classifications structurales (Chapitre 4) ;
  . les classifications locales (Chapitre 5 - Paragraphe 5.8) ;
- l'écriture d'une loi cyclique à partir d'une loi temporelle (Partie III) au travers des équations de passage (Chapitre 6 - Paragraphe 6.5) ;

dans une démarche d'obtention d'une loi locale d'évolution en fatigue sous forme cyclique d'un phénomène d'endommagement identifié, qui puisse être utilisée dans un calcul de structure sollicitée en fatigue.

Pour cela, nous disposons donc d'un modèle de comportement de matériau écrit dans le cadre de la Mécanique de l'Endommagement et de la Thermodynamique des Milieux Continus, qui prend en compte un ensemble de phénomènes physiques décrits par un ensemble de variables d'état (variables internes et variable externe pilote). Nous désignons par V_{EI} l'ensemble des variables d'état internes qui ont été choisies pour la modélisation de ce comportement, et Q la variable d'état externe pilote. Parmi toutes les variables d'état qui rentrent dans la modélisation du phénomène d'endommagement considéré, nous ne nous occupons que d'une seule, notée a. Evidemment, ce qui vaut pour cette variable vaut pour les autres suivant les mêmes considérations. Le phénomène considéré peut être sensible ou insensible aux effets de vitesse.

Les étapes importantes que nous avons identifiées pour cette démarche sont :
- Etape 1 - Vérification des limitations générales sur le phénomène d'endommagement considéré ;
- Etape 2 - Ecriture du problème structural pour la mise en évidence de la classe structurale du problème et la définition d'un compteur de nombre de cycles au niveau structural ;
- Etape 3 - Mise en évidence de la classe locale du problème considéré et définition d'un compteur de nombre de cycles local par l'utilisation du problème approché ;
- Etape 4 - Discussion sur une possible extension du cadre de fonctionnement ;
- Etape 5 - Ecriture de la loi cyclique locale à partir de la loi temporelle locale à l'aide des formules de passage ;

— Etape 6 - Identification de la loi cyclique locale par recours à l'ensemble des paramètres caractéristiques des sollicitations.

Une application est faite dans la partie suivante (Partie IV) dans le cas du phénomène connu dans les composites à fibres continues sous le vocable usuel de fissuration intralaminaire. Cette application reprend point par point ce qui est exposé ici.

7.2 Etape 1 - Vérification des limitations générales sur le phénomène d'endommagement considéré

7.2.1 Une première limitation obligatoire sur le phénomène physique

La justification de l'écriture de la loi locale de fatigue est faite à partir de la loi locale d'évolution du phénomène sous forme temporelle obtenue par la Thermodynamique des Milieux Continus dans un cas quasi-statique. Cela sous-entend donc implicitement que le phénomène considéré est physiquement le même lorsqu'il apparaît sous chargement quasi-statique et sous chargement cyclique. Cette hypothèse forte est une première limitation à la plus grande des généralités. Le processus décrit ne pourra donc sans doute pas s'appliquer à n'importe quel phénomène.

C'est le recours à des observations des phénomènes considérés (par microscopie optique, microscopie à balayage, tomographie haute résolution...) qui aidera à valider ou invalider cette hypothèse. Par exemple, il a été observé que les phénomènes de fatigue qui se développent dans les matériaux métalliques sont plus généralement des phénomènes surfaciques (sauf à très grands nombres de cycles [38]) et sont différents de ceux qui apparaissent sous charges quasi-statiques. En revanche, le phénomène de fissuration intralaminaire dans les composites à fibres continues respecte (en tout cas au premier ordre) cette hypothèse (Fig. 8.2).

7.2.2 Une seconde limitation obligatoire sur le phénomène physique

Le phénomène considéré doit être tel que ses variations sont lentes et faibles (Chapitre 6 - Paragraphe 6.3.1) avec le temps. Sans cette hypothèse, le principe de la linéarisation des lois (inscrit sous la forme des formules de passage) ne peut pas être valide. Seuls des essais expérimentaux pourront valablement aider à faire le choix des sollicitations qui rendront cette hypothèse valide.

7.2.3 Une limitation non obligatoire mais pertinente sur le phénomène physique : le seuil d'endommagement est supposé nul

L'existence d'une limite de fatigue (i.e., il existe une intensité de sollicitation en-deçà de laquelle la durée de vie d'une structure est infinie) est un concept couramment admis depuis de très nombreuses années. Elle apparaît pour la première fois en 1870 dans les travaux de Wöhler [49]. En 1924, Gough [23] est le premier à prendre en compte la rugosité de surface sur la limite de fatigue. Plus récemment, en 1939, Thum [71] donne des règles rapides pour la déterminer. En réalité, d'abord le bon sens, et ensuite des observations [4] [36] [38], conduisent à affirmer que ce concept peut être abandonné, ou bien qu'alors il est nécessaire de borner la notion de durée de vie (i.e., il existe une intensité de sollicitation en-deçà de laquelle la durée de vie est infinie, la notion d'infini étant alors, par exemple, comme dans le cas des structures hélicoptères, limitée à 10^9 cycles).

Cela a pour conséquence de supposer que le seuil d'endommagement sous sollicitations cycliques est nul. Nous verrons lors de l'application faite sur le phénomène de fissuration intralaminaire que cela simplifie significativement les lois d'évolution.

7.3 Etape 2 - Ecriture du problème structural pour la mise en évidence de la classe structurale du problème et définition d'un compteur de nombre de cycles au niveau structural

Notre souhait étant de traiter le problème de la fatigue par une loi cyclique et non une loi incrémentale, cela sous-entend la nécessité de l'existence d'un compteur de nombre de cycles au niveau local. Cette existence est conditionnée par celle de sollicitations périodiques au niveau structural, donc d'un compteur de nombre de cycles au niveau structural.

Au niveau structural, ce compteur peut exister (problèmes de fatigue de type $SP(I)$ et suivants, Chapitre 4) dès lors que les sollicitations sont périodiques. Concrètement (en terme de simulations aussi bien qu'en terme expérimental), il est tout à fait aisé de se placer dans les conditions définies par la classe d'un problème structural car, à l'échelle structurale, les conditions aux limites sont imposées par l'Expérimentateur ou en d'autres termes, imposées par le fonctionnement en service de la structure considérée. L'Expérimentateur ou l'analyse du fonctionnement de la structure définit donc les conditions aux limites du problème structural et ainsi, la classe structurale.

7.4 Etape 3 - Mise en évidence de la classe locale du problème considéré et définition d'un compteur de nombre de cycles local par l'utilisation du problème approché

Un compteur structural de nombre de cycles est défini par la classe structurale. En revanche, même sous cette condition, rien ne permet de dire qu'il est celui qui existe au niveau local et encore moins qu'il est valide pour toutes les composantes de la variable pilote. En effet, contrairement au cas du compteur structural, le compteur local ne peut pas être imposé, mais il est le résultat implicite d'un ensemble de données géométriques, comportementales et de sollicitations structurales (donc du compteur structural).

Notons (ou rappelons) que si la notion de cycle pouvait être (facilement) identifiée au niveau local, le problème que nous nous posons ici (faire une approche locale de la fatigue) n'existerait pas. En d'autres termes, s'il était simple de connaître, a priori, quel que soit le matériau, quelle que soit la géométrie de la structure et quelles que soient les conditions aux limites, les caractéristiques (loi horaire, intensité) de toutes les composantes de la variable pilote au niveau local, la problématique que nous cherchons à résoudre ne se poserait pas.

Mais ce n'est pas le cas, et donc, pour réaliser la justification souhaitée de l'équation d'évolution temporelle à une forme cyclique, la notion de cycle local doit être précisée : en fait, cette clarification est réalisée par la classification locale des problèmes de fatigue (Chapitre 5) dont certaines classes garantissent l'existence de la notion de cycle. Nous pouvons par exemple volontairement nous placer dans le cas le plus favorable pour lequel le compteur local indiquant le nombre de cycles est le même dans toute la structure, mais aussi pour toutes les composantes actives $(Q^*_{ij}(M,t))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}$ de la variable pilote (i.e., cadre des problèmes locaux de fatigue sur un domaine de type $PPMLI(I,\omega)$) (Définition (cd6), Chapitre 5).

Hélas, il ne suffit pas de décider de se placer dans le cadre $PPMLI(I,\omega)$ pour qu'il soit celui qui existe réellement pour le problème posé. Car comme précisé précédemment : le compteur local ne peut pas être imposé, mais il est le résultat implicite d'un ensemble de données géométriques, comportementales et de sollicitations structurales (donc du compteur structural).

C'est finalement à ce stade que la vraie difficulté apparaît car il faut justifier d'une classe locale a priori, c'est-à-dire savoir a priori comment des paramètres structuraux vont se transmettre au niveau local. Il est clair que nous n'avons aucune justification générale (elles n'existent d'ailleurs sans doute pas) indépendantes du phénomène d'endommagement considéré. C'est la raison pour laquelle nous resterons finalement évasif sur la question et que notre étude ne résoudra pas le cas général.

Nous verrons en revanche, dans l'application que nous ferons sur le phénomène de fissuration intralaminaire, que des justifications rationnelles et mathématiques permettront la désignation de la classe locale.

Concernant le compteur de nombre de cycles local, il n'y a que les problèmes locaux approchés sur lesquels nous pouvons nous appuyer pour le construire. En effet, dans la mesure où pour les problèmes locaux, toutes les variables internes évoluant (a priori) et induisant donc une redistribution des différents champs et notamment celui de la variable pilote, la périodicité de la variable pilote n'est pas strictement acquise, même si la structure dans laquelle elle opère est soumise à une sollicitation (structurale) périodique (Fig. 1.10). L'intérêt des classifications des problèmes approchés est donc maintenant justifié. Plus précisément, si un problème local de fatigue (en M ou sur un domaine) sur l'intervalle de temps I est identifié comme celui que nous pouvons considérer, c'est son homologue approché qui va garantir la notion de cycle local : sur I, si $Q(t)$ est proche d'une fonction périodique notée $Q^+(t)$, alors nous allons ainsi faire jouer à $Q^+(t)$ le rôle joué par la fonction $\tau(t)$ (Chapitre 6 - Paragraphe 6.1). Elle va ainsi permettre de définir le compteur de cycles N du formalisme. Le cas échéant l'intervalle du temps d'étude I est découpé en sous-intervalles $I_k = [t_{ak}, t_{bk}]$ où cette notion de proximité est valide au sens d'un critère donné, et réactualisée sur l'intervalle suivant.

Un critère sur l'intervalle I_k, noté $c(I_k, \varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ij}^+, M)$ qui peut être utilisé pour la définition de la proximité recherchée, est (Définition (d1*+), Chapitre 5) :

$$c(I_k, Q_{ij}^*, Q_{ij}^{*+}, M) = \frac{\int_{t_{ak}}^{t_{bk}} |Q_{ij}^*(M,t) - Q_{ij}^{*+}(M,t)|dt}{\int_{t_{ak}}^{t_{bk}} |Q_{ij}^*(M,t)|dt}$$

Ce critère indique finalement si la déviation de la composante réelle par rapport à la composante approchée est acceptable ou non, sur l'intervalle de temps I_k.

7.5 Etape 4 - Discussion sur une possible extension du cadre de fonctionnement

Les classes structurale et locale ayant été identifiées, il peut être intéressant de voir si, en invoquant des raisons soit mathématiques (donc générales... ce qui serait le mieux), soit purement phénoménologiques associées spécifiquement au phénomène étudié (donc particulières... ce qui serait le moins bien), soit un peu des deux, il est possible d'élargir le cadre de fonctionnement de la loi cyclique écrite.

A notre avis, toutes les justifications mathématiques auront été utilisées pour justifier la classe de la loi locale. Il semble ainsi peu probable (sauf en cas d'oubli) que d'autres raisons mathématiques puissent justifier de l'assouplissement du cadre de fonctionnement de la classe initialement identifiée. Ce sont donc sans doute plus des raisons spécifiquement liées au phénomène considéré qui pourront justifier de cet assouplissement.

Par exemple, dans le cas du modèle fait pour la fissuration intralaminaire qui servira dans l'application ultérieure, la non prise en compte des effets du temps (viscosité de la matrice du composite) va permettre d'envisager un élargissement du cadre de fonctionnement par rapport à celui initialement identifié. Ce n'est pas une raison mathématique.

7.6 Etape 5 - Ecriture de la loi cyclique locale à partir de la loi temporelle locale à l'aide des équations de passage

7.6.1 Cas d'un phénomène insensible aux effets de vitesse

Il est facile de montrer, de manière très générale, qu'en utilisant une ré-écriture du système différentiel qui donne l'évolution de chaque variable d'état interne en fonction de la variable d'état pilote (éventuellement couplée avec celle des autres variables d'état internes), et si nécessaire du Théorème des Fonctions Implicites, la loi d'évolution temporelle issue de la Thermodynamique des Milieux Continus de la variable a relative au phénomène considéré supposé insensible aux effets de vitesse, s'écrit sous la forme générale :

$$\frac{d\tilde{a}(t)}{dt} = \Phi_a(\tilde{Q}(t), \tilde{V}_{EI}(t))\frac{d\tilde{Q}(t)}{dt} \tag{7.1}$$

où Φ_a est une fonction relative à la variable a et au phénomène considéré. Finalement, cette équation laisse entendre que les incréments $d\tilde{a}$ sont reliés aux incréments $d\tilde{Q}$, mais pas à $d\tilde{Q}/dt$. Ainsi, la loi d'évolution temporelle précédente, prend la forme :

$$d\tilde{a}(t) = \Phi_a(\tilde{Q}(t), \tilde{V}_{EI}(t))d\tilde{Q}(t) \tag{7.2}$$

Si nous nous plaçons dans un cadre de sollicitation de fatigue et qu'un compteur de cycles (local) peut être défini par la fonction périodique $Q^+(t)$ proche (en un certain sens) de $Q(t)$ (qui n'a aucune raison d'être périodique), alors les formules de passage (Eq. 6.11) permettent d'écrire la loi d'évolution cyclique du phénomène à partir de sa loi d'évolution temporelle :

$$da(N) = \Phi_a(Q(N), V_{EI}(N))\frac{\partial Q(N)}{\partial N}dN \tag{7.3}$$

7.6.2 Cas d'un phénomène sensible aux effets de vitesse

Dès lors qu'un phénomène est sensible aux effets de vitesse, les incréments da sont reliés aux incréments dQ/dt et à d'autres termes. L'équation d'évolution temporelle de a peut prendre des formes multiples et variées. Ici, nous supposons que cette équation a la forme suivante :

$$\frac{d\tilde{a}(t)}{dt} = \Phi_a(\tilde{Q}(t), \tilde{V}_{EI}(t))\frac{d\tilde{Q}(t)}{dt} + \phi_a(\tilde{Q}(t), \tilde{V}_{EI}(t))\tilde{Q}(t) \tag{7.4}$$

où Φ_a et ϕ_a sont des fonctions relatives à la variable a et au phénomène considéré. Cette loi d'évolution temporelle peut ainsi prendre la forme suivante :

$$d\tilde{a}(t) = \Phi_a(\tilde{Q}(t), \tilde{V}_{EI}(t))d\tilde{Q}(t) + \phi_a(\tilde{Q}(t), \tilde{V}_{EI}(t))\tilde{Q}(t)dt \tag{7.5}$$

Si nous nous plaçons dans un cadre de sollicitation de fatigue et qu'un compteur de cycles (local) peut être défini par la fonction périodique $Q^+(t)$ proche (en un certain sens) de $Q(t)$ (qui n'a aucune raison d'être périodique), alors les formules de passage donnent :

$$da(N) = \Phi_a(Q(N), V_{EI}(N))\frac{\partial Q(N)}{\partial N}dN + \phi_a(Q(N), V_{EI}(N))Q(N)TdN \tag{7.6}$$

7.7 Etape 6 - Identification de la loi cyclique locale par recours à l'ensemble des paramètres caractéristiques des sollicitations

Jusqu'à présent :
- l'ensemble des paramètres caractéristiques des sollicitations temporelles structurales, $\mathbb{S}_t(I)$ (Définition (S0), Chapitre 4) ;
- les ensembles des paramètres locaux caractéristiques des composantes actives et actives approchées de la variable pilote, en M ou sur un domaine, $\mathbb{Q}^*(I, M)$, $\mathbb{Q}^*(I, \omega)$, $\mathbb{Q}^{*+}(I, M)$, $\mathbb{Q}^{*+}(I, \omega)$ (Définitions (d3*), (d5*), (d3*+) et (d5*+), Chapitre 5) ;

ont été construits sans réelle justification. Mais, au titre d'être les descripteurs des sollicitations locales, i.e. de l'évolution des composantes de la variable pilote, ils sont directement en relation avec l'évolution de la variable d'endommagement a au travers de la loi locale cyclique. Ainsi, une grande partie de leur intérêt va résider dans l'aide qu'ils vont amener à l'identification de la loi locale en guidant le protocole d'identification. Les éléments de cet ensemble vont permettre de mener une campagne expérimentale d'identification raisonnée : ce protocole doit parcourir l'ensemble des paramètres locaux du problème approché au point M, $\mathbb{Q}^{*+}(I, M)$, ou sur un domaine, $\mathbb{Q}^{*+}(I, \Omega)$ de la classe locale identifiée, de la manière la plus complète possible.

7.8 Finalement, peut-on traiter tous les problèmes de calcul de structure en fatigue ?

A l'heure actuelle, il ne nous a pas semblé possible de traiter de manière générale tous les problèmes potentiellement susceptibles d'être posés et d'avoir un discours global, général et précis pour tous les problèmes des classifications structurales et locales.

Cette impossibilité peut être justifiée par le fait, que déjà au niveau structural, il peut exister un éventail infiniment large de possibilités de sollicitations qui induisent des difficultés qui nous semblent pour l'instant impossible à résoudre. Par exemple, le cas de sollicitations qui sont cycliques mais non périodiques ou bien de plusieurs sollicitations qui battent à des fréquences dans un rapport irrationnel.

Pour cette raison, l'application faite dans la partie suivante (Partie IV) est restreinte à des classes structurales pour lesquelles $\mathbb{S}_t(I)$, l'ensemble des paramètres caractéristiques des sollicitations temporelles structurales (Chapitre 4 - Paragraphe 4.2), est le plus simple. Mais aussi restreinte à un phénomène d'endommagement qui possède les bonnes propriétés pour rentrer dans le cas de la démarche énoncée.

Quatrième partie

APPROCHE LOCALE DE LA FATIGUE POUR LE PHENOMENE DE FISSURATION INTRALAMINAIRE DES COMPOSITES STRATIFIES D'UNIDIRECTIONNELS : LOI D'EVOLUTION ISSUE DE LA THERMODYNAMIQUE DES MILIEUX CONTINUS

Chapitre 8

Un modèle général du phénomène de fissuration intralaminaire dans les composites à fibres continues. Loi d'évolution locale quasi-statique

8.1 Description succinte du phénomène de fissuration intralaminaire

8.1.1 Définitions et notations des repères d'espace associés aux composites stratifiés d'unidirectionnels orientés

Les composites à fibres continues sont plus usuellement appelés composites unidirectionnels. Ils sont constitués de fibres rectilignes et parallèles noyées dans un liant appelé aussi matrice. Les fibres sont placées de telle sorte qu'elles sont finalement contenues dans une géométrie parallélépipédique de faible épaisseur pour laquelle il existe un plan moyen. Nous qualifions de pli de base cet assemblage fibre/résine dont la géométrie est quasi-bidimensionnelle [22]. Si la description qui vient d'être faite est très générale au sens où la nature du matériau des fibres et de la matrice peut varier presque à l'infini, en fait, ici, nous supposons que les propriétés mécaniques des renforts sont très largement supérieures à celles du liant. Aussi, les composites considérés sont à forte anisotropie. Ainsi, par exemple, les fibres sont en carbone ou en verre et la matrice en matériau polymère.

Le caractère anisotrope de ces matériaux fait qu'à ce pli de base est associé un repère local d'anisotropie. Soit R_{loc} ce repère dont la base orthonormée directe est notée $b_{loc} = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. La direction orthogonale au plan moyen du pli de base est définie par le vecteur $\vec{e_3}$ et la direction des fibres est indiquée par le vecteur $\vec{e_1}$ (Fig. 8.1). Compte tenu de l'arrangement géométrique des fibres, le matériau a une structure orthotrope dont le repère R_{loc} est un repère privilégié d'anisotropie : il est facile de voir que les trois plans orthogonaux définis par les vecteurs de la base b_{loc} sont plans de symétrie matérielle.

Par empilement, suivant la direction de leur épaisseur, de plusieurs plis de base dont les fibres peuvent être orientés différemment par rapport à une direction donnée indiquée par le vecteur unitaire $\vec{x_1}$ (orthogonale au vecteur $\vec{e_3}$), nous obtenons des stratifiés d'unidirectionnels orientés. A ce vecteur $\vec{x_1}$ est adjoint le vecteur $\vec{x_3} = \vec{e_3}$, puis nous construisons le vecteur $\vec{x_2} = \vec{x_3} \wedge \vec{x_1}$. Les trois vecteurs précédent forment la base orthonormée directe notée $b = (\vec{x_1}, \vec{x_2}, \vec{x_3})$. Le repère R,

dont la base est b, est appelé repère du stratifié. Nous notons $\theta = \widehat{(\vec{x_1}, \vec{e_1})}$ l'angle qui oriente les fibres d'un pli de base.

Un stratifié est donc constitué de manière générale par n plis de base, distincts, indicés par k ($k = 1, \ldots, n$) au sein de cette stratification. La numérotation des plis est faite de manière croissante en partant du pli inférieur (pli 1) jusqu'au pli supérieur (pli n). Le pli k possède un repère local d'anisotropie au sein de la stratification également indicé par k et noté R_{loc}^k dont la base est $b_{loc}^k = (\vec{e_1}^k, \vec{e_2}^k, \vec{e_3}^k = \vec{x_3})$. L'inclinaison du pli de base k au sein de la stratification est défini par l'angle $\theta_k = \widehat{(\vec{x_1}, \vec{e_1}^k)}$. Si dans la description faite, un pli n'a pas la nécessité de voir préciser son appartenance à une stratification, son indice k est supprimé, son repère local d'anisotropie est R_{loc} dont la base est $b_{loc} = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ définie précédemment, et son angle d'inclinaison est θ.

Dans le cas d'une stratification constituée de n plis de base, la description des orientations des plis du stratifié est faite par la donnée des n inclinaisons des plis de base sous la forme suivante : $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n)$. La donnée des inclinaisons est également appelée séquence d'empilement des angles (ou de manière plus concise, séquence d'empilement). Cette notation peut s'enrichir :

- la notation $((\theta_1)_p, (\theta_2)_q, \ldots, (\theta_n)_r)$ signifie que le pli de base incliné à θ_1 est présent p fois successivement, que le pli de base incliné à θ_2 est présent q fois successivement et que le pli de base incliné à θ_n est présent r fois successivement ;
- la notation $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n)_s$ signifie que la séquence d'empilement est symétrique par rapport à son plan moyen, c'est-à-dire que les inclinaisons sont $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n, \theta_n, \ldots, \theta_2, \theta_1)$.

Par extension de la notion de pli de base, nous appelons désormais pli ou couche (au sein d'un stratifié donné) la monocouche constituée par l'empilement successif de plis de base de même orientation.

Compte tenu des différents niveaux d'hétérogénéités de ces matériaux, plusieurs échelles de travail peuvent être définies. Historiquement, il en existe trois :

- l'échelle microscopique est celle qui distingue, au sein de chaque couche, les fibres et la matrice ;
- l'échelle mésoscopique est celle qui ne distingue plus les fibres et la matrice au sein de chaque couche : le pli de base est perçu comme un milieu homogène et anisotrope ;
- l'échelle macroscopique est celle qui ne distingue pas les couches du stratifé : le stratifié est assimilé à un matériau homogène et anisotrope.

Maintenant, en raison de l'augmentation de la puissance des calculateurs, l'échelle macroscopique est de moins en moins utilisée car elle gomme des phénomènes qui peuvent être importants (délaminage, par exemple). Aussi, ici, nous ne considérons désormais plus que deux échelles de travail :

- l'échelle microscopique est celle qui distingue, au sein de chaque couche, les fibres et la matrice. A cette échelle de travail, nous attachons un système de coordonnées dont nous notons R_y le repère associé et $b_y = (\vec{y_1}, \vec{y_2}, \vec{y_3})$ la base orthonormée directe. Dans ce repère, un point M a pour coordonnées $y = (y_i)_{i=1,2,3}$. Usuellement : $R_y = R_{loc}$ et $b_y = b_{loc}$;
- l'échelle mésoscopique est celle qui ne distingue plus les fibres et la matrice au sein de chaque couche : le pli de base est perçu comme un milieu homogène et anisotrope.

Il convient enfin de signaler que, concernant une structure industrielle dont la géométrie peut être complexe, rien ne dit que l'affirmation "les fibres sont placées de telle sorte qu'elles sont finalement contenues dans une géométrie parallélépipédique de faible épaisseur pour laquelle il existe un plan moyen" soit valide. Il faut alors l'étendre de la manière suivante : les fibres sont

placées de telle sorte qu'elles sont finalement contenues entre deux surfaces homothétiques peu éloignées l'une de l'autre pour lesquelles il existe une surface moyenne et, en chaque point M de cette surface, un plan tangent (unique) et un repère local $R(M)$ dont la base est $b_M = (\vec{x_1}(M), \vec{x_2}(M), \vec{x_3}(M)))$: la normale unitaire est le vecteur $\vec{x_3}(M)$ et donc $(\vec{x_1}(M), \vec{x_2}(M))$ une base de ce plan. Nous estimons ainsi que localement au point M, pour le repère $R(M)$, toute la description initiale des fibres placées dans une géométrie parallélépipédique de faible épaisseur, faite avec le repère noté R, est valide. Ensuite, si nous désignons par $R_{structure}$ le repère attaché à l'espace physique dans laquelle la structure est décrite et évolue (et dont la base est $b_{structure} = (\vec{x_1}^{structure}, \vec{x_2}^{structure}, \vec{x_3}^{structure})$), alors, nous pouvons connaître les 3 angles d'Euler nécessaires pour mettre en coïncidence $R_{structure}$ et $R(M)$.

Dans toute la suite, la description des phénomènes est faite dans le repère R et la description dans le repère $R(M)$ est donc implicite.

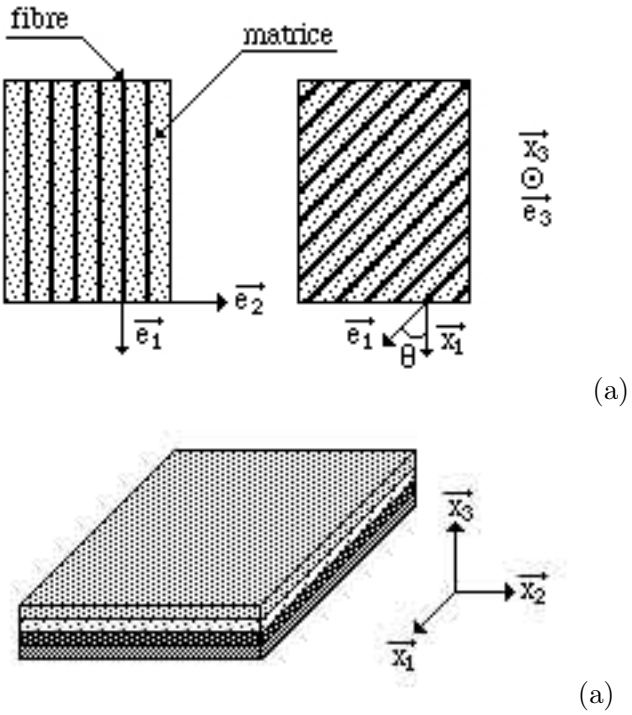


FIGURE 8.1 – Définition des repères associés à un stratifié d'unidirectionnels orientés [66] [68]. (a) Pli de base d'un stratifié. (b) Stratifié d'unidirectionnels orientés.

8.1.2 Le phénomène de fissuration intralaminaire

Le phénomène de fissuration intralaminaire est un phénomène d'endommagement observé au sein des plis d'un stratifié d'unidirectionnels orientés à forte anisotropie. Cette dernière précision est très importante. En effet, pour ce type de matériau, la géométrie des endommagements susceptibles d'exister est guidée, non pas par l'état de contrainte mais par l'arrangement des renforts. Ainsi, quelle que soient les sollicitations (intensité et direction) appliquées au pli, le phénomène de fissuration intralaminaire est un phénomène d'endommagement diffus, se présentant sous la forme d'un réseau (relativement périodique) de fissures planes identiques, chacune localisée dans le plan $(\vec{y_1}, \vec{y_3})$ du repère local du pli.

Le phénomène de fissuration intralaminaire est couramment observé dans le pli à 90° d'une

éprouvette $(0°, 90°, 0°)$ soumise à une traction uniaxiale dans le sens des plis à 0° (Fig. 8.2abc). Dans le cas de sollicitation plus complexes, ou bien pour des stratifications différentes, cette description géométrique est toujours valide (Fig. 8.2). Les fissures apparaissent sur toute la hauteur du pli et traversent toute la largeur des éprouvettes (suivant la direction des fibres). La propagation des fissures se fait de manière très rapide suivant la direction de l'épaisseur et suivant celle de leur longueur. En d'autres termes, la durée de propagation des fissures est suffisamment courte pour estimer que l'instant de leur apparition coïncide avec celui de leur propagation complète. La densité de fissures maximale dépend de l'état de contrainte (Fig. 8.2c, Fig. 8.2e) au sein du pli et converge dans tous les cas vers une valeur dite de saturation qui dépend (d'une certaine manière), elle aussi, de l'état de contrainte (en fait, des valeurs relatives des composantes du tenseur des contraintes). Nous constatons en outre que, au moins au premier ordre :

— dans le cas d'essais cycliques, dans une gamme de fréquences assez étendue (de l'ordre du dixième de Hertz à quelques dizaines de Hertz), l'apparition du phénomène est insensible à l'effet de la fréquence ;
— dans le cas d'essais quasi-statiques, l'apparition du phénomène est insensible au effet de vitesse.

Nous estimons ainsi qu'au moins au premier ordre, le phénomène est indépendant du temps.

En outre, et c'est pour nous une caractéristique essentielle, la description précédente est valable que la sollicitation soit de type quasi-statique ou bien de fatigue. Cela justifie donc que ce phénomène puisse être inscrit dans le cadre de la Mécanique de l'Endommagement pour ces deux types de sollicitations. En réalité, si l'apparition des fissures et l'atteinte de leur taille maximale sont (au premier ordre) deux phénomènes confondus pour le cas des sollicitations quasi-statiques, c'est un peu moins vrai dans le cas de sollicitations de fatigue pour lesquelles plusieurs cycles peuvent être nécessaires pour observer une fissure atteindre sa taille maximale (Fig. 8.2d) et ceci d'autant plus que la sollicitation est faible. Toutefois, dans la suite, nous estimerons négligeable cette différence entre le cas des sollicitations quasi-statiques et de fatigue. Ainsi, que les sollicitations soient quasi-statiques ou de fatigue, nous nous intéressons à la multiplication des fissures et non pas à leur propagation.

Enfin, nous notons une caractéristique du phénomène considéré, peu importante sur le fond, mais qui va aider à l'identification du modèle : les changements de forme des lèvres des fissures en fonction des sollicitations sont négligeables. Ceci a pour conséquence concrètement de postuler que ces changements de forme n'ont aucune influence au premier ordre sur la modélisation du phénomène lui-même, et en particulier :

— l'anisotropie induite due aux changements de forme des fissures est négligeable (Hypothèse $(H1)$) ;
— l'influence de la forme des fissures sur le comportement est négligeable, exceptée au voisinage des états de refermeture des fissures (Hypothèse $(H2)$) ;
— l'influence des changements de forme des fissures est négligeable sur l'évolution du phénomène en terme de densité (Hypothèse $(H3)$).

8.2 Un modèle de comportement pour un matériau anisotrope microfissuré

8.2.1 Pourquoi ce modèle ?

Nous proposons maintenant de rappeler la modélisation d'un modèle de comportement d'un matériau anisotrope microfissuré écrit dans le cadre de la Mécanique de l'Endommagement et

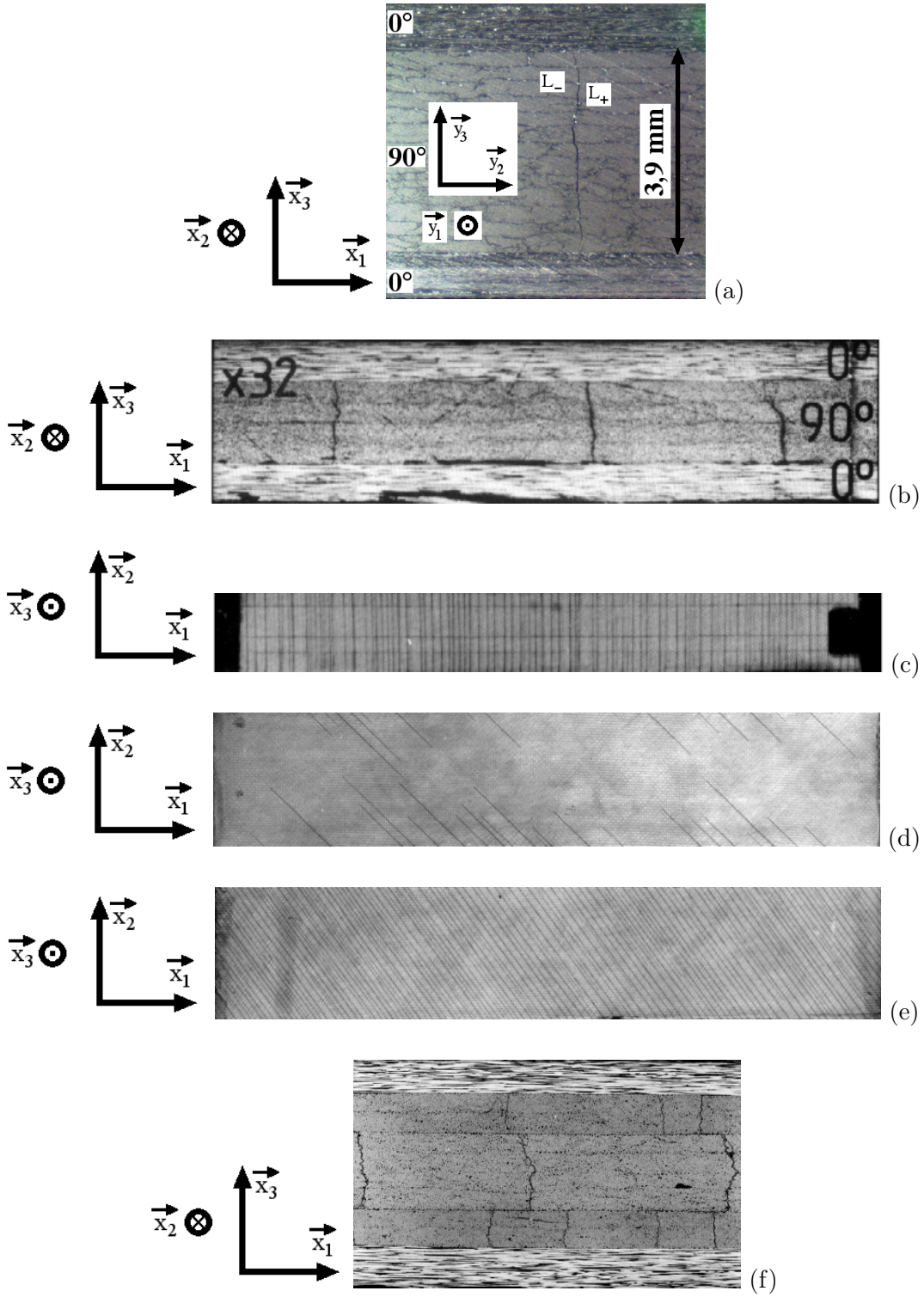


FIGURE 8.2 – Phénomène de fissuration intralaminaire. (a) Eprouvette $(0°_2, 90°_4)_s$. Sollicitation de fatigue. Observation par microscopie optique. Indication de la base du repère local du matériau de la couche à 90°. (b) Eprouvette $(0°_2, 90°_2)_s$. Sollicitation quasi-statique. Observation par microscopie optique, grossissement ×32. (c) Eprouvette $(0°_2, 90°_2)_s$. Sollicitation quasi-statique. Etat de fissuration à saturation. Observation par rayons X. (d) Eprouvette $(0°_2, +45°_2, -45°_2)_s$. Sollicitation de fatigue. Observation par rayons X. (e) Eprouvette $(0°_2, +55°_2, -55°_2)_s$. Sollicitation de fatigue. Observation par rayons X. Etat de fissuration à saturation. (f) Eprouvette $(0°_2, +55°_2, -55°_2)_s$. Sollicitation de fatigue. Observation par microscopie optique, grossissement ×45.

dans un cadre quasi-statique [68] [63]. Ce modèle est parfaitement adapté au phénomène de fissuration intralaminaire qui existe au sein des composites à fibres continues, phénomène que nous souhaitons utiliser pour illustrer l'écriture d'une approche locale de la fatigue dans le cadre de la Mécanique de l'Endommagement. Cette adaptation parfaite est due au fait que ce phénomène est physiquement le même qu'il apparaisse sous des sollicitations quasi-statiques que sous des sollicitations de fatigue. Ceci a comme premier avantage de justifier le fait que ce phénomène peut être inscrit, dans le cadre de la Mécanique de l'Endommagement, même pour des sollicitations de fatigue. Le second avantage est que l'écriture de sa loi d'évolution en fatigue viendra s'appuyer sur sa loi d'évolution en quasi-statique, permettant ainsi sa justification vis-à-vis du Second Principe de la Thermodynamique.

Dans les paragraphes suivant, nous reprenons les articles de Thionnet [68] [63] [67]. Même si la précision aussi importante de ce qui suit n'est pas a priori nécessaire, nous avons préféré ne laisser aucune zone d'ombre quant à la modélisation dans un cadre quasi-statique du phénomène que nous voulons utiliser pour illustrer l'écriture d'une approche locale de la fatigue : nous souhaitons être sûr que rien dans cette modélisation est un frein au passage au cas de la fatigue.

8.2.2 Cadre du modèle

La présence d'un endommagement sous forme de petites fissures planes diffuses dans un matériau provoque des pertes de toutes ou parties de ses propriétés mécaniques. Par exemple, dans le cas d'une sollicitation de traction axiale, et suivant le plan dans lequel se trouve les fissures, nous observons ou non la baisse de certains modules de rigidité axiaux. La même constatation peut être faite dans le cas d'une sollicitation de cisaillement pour les modules de rigidité de cisaillement. Si le signe de la sollicitation est changé, alors , dans le cas d'une sollicitation axiale de compression, se produit la restoration des modules de rigidité axiaux auparavant dégradés. En revanche, aucune restoration n'est observée, en général, pour les modules de rigidité de cisaillement. L'effet décrit précédemment est communément appelé "effet unilatéral du dommage".

Ce modèle va assurer :
- (C4) la continuité de la relation contrainte/déformation ;
- (C7) la traduction correcte de l'anisotropie induite par l'endommagement ;
- (C6) la mise en évidence cohérente des modules dégradés ;
- (C5) la prise en compte du caractère unilatéral du dommage.

Il va également respecter les Grands Principes de la Mécanique et de la Physique :
- (C1) l'invariance de son écriture vis-à-vis des symétries matérielles de la microstructure du matériau ;
- (C2) le Principe d'Objectivité ;
- (C3) le Second Principe de la Thermodynamique.

Ces conditions sont celles énoncées auparavant, pour assurer la qualité d'un modèle (Paragraphe 1.3).

Le matériau considéré est un matériau endommagé par un réseau de fissures planes identiques. Sa microstructure est périodique représentée par la cellule élémentaire notée Y (Fig. 8.3). Le contact entre les lèvres, s'il existe, est supposé sans frottement. Il n'y a aucune contrainte interne résiduelle due à l'endommagement qui soit susceptible de bloquer de l'énergie dans le matériau. Nous nous plaçons dans une configuration où l'endommagement est dans un état donné fixe. Nous notons α la variable scalaire qui caractérise cet état. Cette variable peut être, par exemple, indicatrice de la densité de fissures au sein du matériau, c'est-à-dire indicatrice du volume de la cellule Y. Ici, nous ne nous intéressons pas particulièrement à l'évolution de la variable α,

mais plutôt à la prise en compte cohérente et générale du phénomène d'endommagement au sein d'un modèle de comportement élastique endommageable écrit dans le cadre de la Mécanique de l'Endommagement. Nous nous plaçons sous l'Hypothèse des Petites Perturbations. Le matériau vierge d'endommagement est supposé orthotrope.

Le repère cartésien $R = (O, \vec{x_1}, \vec{x_2}, \vec{x_3})$ est attaché à l'échelle macroscopique du matériau étudié. $x = (x_i)_{i=1,2,3}$ désigne, dans ce repère, la position d'un point M. $\vec{U} = (U_i)_{i=1,2,3}$ désigne le déplacement du point M. A cette échelle, au point M, le tenseur des contraintes est noté σ, le tenseur des déformations est noté ε avec $\varepsilon = \left(\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i})\right)_{i,j=1,2,3}$.

Le repère cartésien $R_y = (O_y, \vec{y_1}, \vec{y_2}, \vec{y_3})$ est attaché à l'échelle microscopique du matériau étudié, c'est-à-dire à sa cellule de base. $y = (y_i)_{i=1,2,3}$ désigne la position d'un point M. Le vecteur $\vec{u} = (u_i)_{i=1,2,3}$ désigne le déplacement du point M. A cette échelle, au point M, le tenseur des contraintes (microscopique) est noté s et le tenseur des déformations (microscopique) est noté e avec $e = \left(e_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial y_j} + \frac{\partial u_j}{\partial y_i})\right)_{i,j=1,2,3}$. Nous supposons que ce repère coïncide avec le repère privilégié d'orthotropie du matériau sain. Ainsi, le groupe de symétries matérielles du matériau sain est $S_8 = \{T_i, i = 0, \ldots, 7\}$ avec : $T_0 = diag(1,1,1), T_1 = diag(-1,1,1), T_2 = diag(1,-1,1), T_3 = diag(1,1,-1), T_4 = diag(1,-1,-1), T_5 = diag(-1,1,-1), T_6 = diag(-1,-1,1), T_7 = -T_0$. Nous supposons également que les axes des repères R et R_y coïncident.

La géométrie de la cellule élémentaire du matériau est un parallèlépipède rectangle qui contient une unique fissure F (Fig. 8.3). Ce parallèlépipède est limité par les plans $y_1 = +a$, $y_1 = -a$, $y_2 = +b$, $y_2 = -b$, $y_3 = +c$, $y_3 = -c$, et donc par les surfaces suivantes : S_{+a} située à $y_1 = +a$, S_{-a} située à $y_1 = -a$, S_{+b} située à $y_2 = +b$, S_{-b} située à $y_2 = -b$, S_{+c} située à $y_3 = +c$, S_{-c} située à $y_3 = -c$. Les surfaces L_+ et L_- qui désignent les lèvres de la fissure F sont supposées être dans le plan $(\vec{y_1}, \vec{y_3})$. Le groupe de symétries matérielles du milieu fissuré au repos est donc également S_8. Nous notons $\partial\Omega = S_{+a} \cup S_{-a} \cup S_{+b} \cup S_{-b} \cup S_{+c} \cup S_{-c}$ et $\partial\overline{\Omega} = \partial\Omega \cup L_+ \cup L_-$. Le domaine limité par la surface $\partial\Omega$ (c'est-à-dire le volume de matière plus le volume de la fissure) est noté Ω. Le domaine limité par la surface $\partial\overline{\Omega}$ (c'est-à-dire exclusivement le volume de matière) est noté $\overline{\Omega}$. Nous notons $\vec{n}$ le vecteur normal extérieur unitaire en tout point de la frontière du domaine.

Un point M de la fissure F correspond à deux points en regard l'un de l'autre. L'un, M_+, appartient à L_+. L'autre, M_-, appartient à L_-. Les coordonnées de ces points sont :

$$M_+ = \begin{pmatrix} Y_1 \\ +e \\ Y_3 \end{pmatrix}, M_- = \begin{pmatrix} Y_1 \\ -e \\ Y_3 \end{pmatrix}, Y_1 \in [-e_a, e_a], Y_3 \in [-e_c, e_c], e_a < a, e_c < c$$

Nous posons : $-\vec{n}(M_+) = \vec{n}(M_-) = \vec{y_2} = \vec{n}(M)$. Nous définissons le saut de la quantité Q par : $[Q(M)] = Q(M_+) - Q(M_-)$. Ainsi, le saut de déplacement des lèvres de la fissure, en M, est $[\vec{u}(M)] = \vec{u}(M_+) - \vec{u}(M_-)$. Les composantes de ce vecteur sont appelés dans la suite *sauts de déplacement microscopiques au point M.*

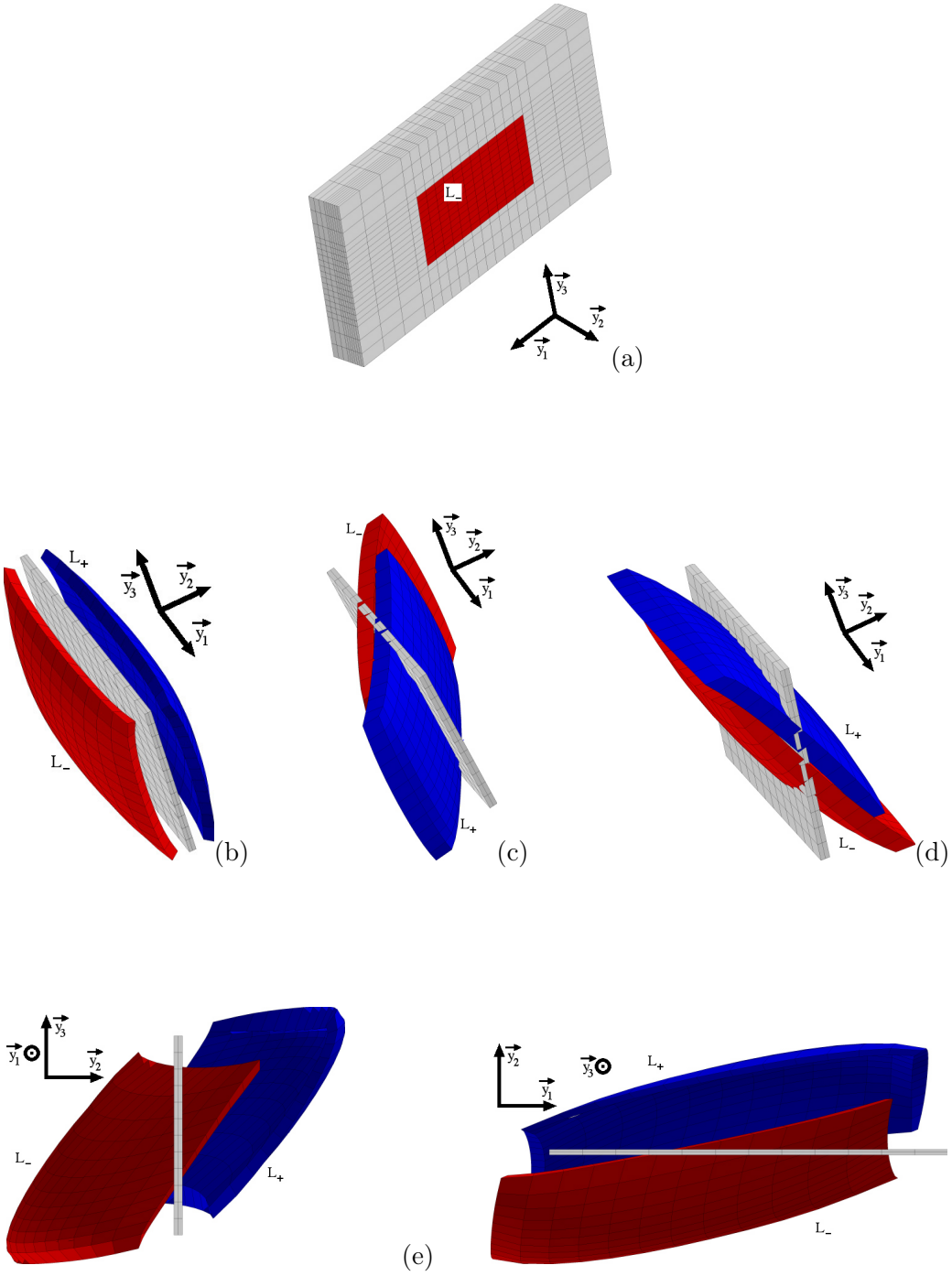


FIGURE 8.3 – Illustration des différents modes de sollicitation d'une fissure à l'échelle microscopique : (a) Demi cellule élémentaire du solide microfissuré (en rouge le bord L_- de la fissure). (b) $m_1 = 1$, $m_{23} = 2$: $[u_1]_F = 0$, $[u_2]_F > 0$ et $[u_3]_F = 0$ (situation similaire au Mode I de la Mécanique de la Rupture). (c) $m_1 = 2$, $m_{23} = 2$: $[u_1]_F \neq 0$, $[u_2]_F = 0$ et $[u_3]_F = 0$ (situation similaire au Mode II de la Mécanique de la Rupture). (d) $m_1 = 2$, $m_{23} = 3$: $[u_1]_F = 0$, $[u_2]_F = 0$ et $[u_3]_F \neq 0$ (situation similaire au Mode III de la Mécanique de la Rupture). (e) $m_1 = 1$, $m_{23} = 2.5$: $[u_1]_F \neq 0$, $[u_2]_F \neq 0$ et $[u_3]_F \neq 0$ obtenu avec le chargement macroscopique ($\varepsilon_{11} = 1$, $\varepsilon_{23} = 1$, $\varepsilon_{12} = 1$) (situation similaire à un mélange de Mode I/Mode II/Mode III de la Mécanique de la Rupture). (b) à (e) Le plan de la fissure non soumise à chargement est représenté en gris. En cas de déformation irréversible, le plan gris symbolise les microparticules entre les bords de la fissure.

8.3 Définition d'un passage micro-macro pour la condition de contact unilatéral du dommage et les sauts de déplacements

8.3.1 Formulation du problème d'homogénéisation périodique des milieux microfissurés selon la méthode de la moyenne

Dans le cadre de l'homogénéisation périodique selon la méthode de la moyenne, le problème, noté (P_H^F), associé à la recherche du comportement du milieu homogène équivalent, consiste à trouver $(s(M), \vec{u}(M))$ tels qu'ils vérifient :

— l'équilibre local : $\vec{div}s(M) = \vec{0}$, $\forall M \in \overline{\Omega}$;

— la loi de comportement (milieu orthotrope) : $s_{ij}(M) = C_{ijkh}e_{kh}(M)$;

— condition de contact unilatéral sans frottement sur les lèvres de la fissure :

$$\forall M \in F \begin{cases} [\vec{u}(M).\vec{n}(M)] \geq 0 \\ [s(M)\vec{n}(M)] = \vec{0} \\ s(M_-)\vec{n}(M).\vec{n}(M) < 0 \text{ si } [\vec{u}(M).\vec{n}(M)] = 0 \\ s(M_-)\vec{n}(M).\vec{n}(M) = 0 \text{ si } [\vec{u}(M).\vec{n}(M)] > 0 \end{cases}$$

et :

— dans le cas d'une formulation en déformation :

$$\begin{cases} e(M) \text{ périodique} \\ \frac{1}{|\Omega|}\int_{\overline{\Omega}} e(M)dy = E \text{ donnée} \end{cases}$$

— dans le cas d'une formulation en contrainte :

$$\begin{cases} s(M) \text{ périodique} \\ \frac{1}{|\Omega|}\int_{\overline{\Omega}} s(M)dy = \Sigma \text{ donnée} \end{cases}$$

Ce problème est un problème dont les conditions aux limites sont de type *Signorini*. Il existe une unique solution $s(M)$ [17] et, à un mouvement de translation près, une unique solution $\vec{u}(M)$. Leguillon et Sanchez [35] montrent, pour un état d'endommagement donné, et sous l'hypothèse de non frottement sur les lèvres, que le comportement du matériau homogène équivalent est hyperélastique.

8.3.2 Conséquences et hypothèses

La déformation macroscopique est définie par : $\varepsilon = \frac{1}{|\Omega|}\int_{\partial\Omega} \vec{u}(M) \otimes_s \vec{n}(M)dS$. La moyenne des déformations microscopiques est : $E = \frac{1}{|\Omega|}\int_{\overline{\Omega}} e(M)dy$. En intégrant par partie, et sous l'Hypothèse des Petites Perturbations, nous obtenons :

$$\varepsilon = E + \int_F [\vec{u}(M)] \otimes_s \vec{n}(M)dS = E + \begin{pmatrix} 0 & [u_1]_F & 0 \\ [u_1]_F & [u_2]_F & [u_3]_F \\ 0 & [u_3]_F & 0 \end{pmatrix}$$

où nous avons posé $[\vec{u}]_F = \int_{L_+} \vec{u}(M_+)dS - \int_{L_-} \vec{u}(M_-)dS = \int_F [\vec{u}(M)]dS$, avec, pour une quantité Q quelconque : $[Q]_F = \int_{L_+} Q(M_+)dS - \int_{L_-} Q(M_-)dS = \int_F (Q(M_+) - Q(M_-)dS = \int_F [Q(M)]dS$. Les composantes du vecteur $[\vec{u}]_F$ sont appelés dans la suite *sauts de déplacement macroscopiques*.

Nous observons ainsi que la description macroscopique du milieu endommagé nécessite la déformation macroscopique et 3 autres variables (les composantes du vecteur $[\vec{u}]_F$). Toutefois,

pour un état d'endommagement donné α, le comportement est hyperélastique. Nous pouvons donc écrire : $[\vec{u}]_F = \eta_\varepsilon(\varepsilon, \alpha)$. En tenant compte du lien qu'il existe entre la déformation macroscopique et la contraite macroscopique, nous pouvons également écrire : $[\vec{u}]_F = \eta_\sigma(\sigma, \alpha)$.

Une forme explicite de ces relations est nécessaire pour atteindre notre but. L'objectif du paragraphe suivant est de trouver une écriture de ces relations. Pour cela, nous donnons d'abord deux définitions. L'une ($D1$) définit une règle de passage de l'échelle microscopique à celle macroscopique pour le contact unilatéral. L'autre ($D2$) définit le rôle des fonctions η_ε et η_σ.

Définition ($D1$) - Le contact unilatéral est vérifié au niveau macroscopique s'il est vérifié au premier ordre au niveau microscopique.

Définition ($D2$) - L'état géométrique du réseau de microfissures est connu si les grandeurs $([u_i]_F)_{i=1,2,3}$ le sont. Plus précisément ici, puisque pour un état d'endommagement donné, le comportement du milieu est hyperélastique, $([u_i]_F)_{i=1,2,3}$ sont des fonctions des déformations ou des contraintes macroscopiques. Par conséquent, l'état géométrique du réseau de microfissures sera connu si nous connaissons l'expression des grandeurs $([u_i]_F)_{i=1,2,3}$ en fonction des déformations ou des contraintes macroscopiques, c'est-à-dire les fonctions η_ε et η_σ.

8.3.3 Formulation macroscopique de la condition de contact unilatéral

Nous notons symboliquement (P^F) les problèmes d'élasticité posés sur des milieux microfissurés ((P_H^F) est un problème (P^F)). La résolution des problèmes (P^F) a fait l'objet de nombreuses études depuis de longues années. Sous l'hypothèse des milieux infinis, (P^F) possèdent des solutions analytiques exactes [19] [39] [60]. Hors de cette hypothèse, même dans le cas de géométries simples, (P^F) ne possède pas de solutions analytiques exactes. Dans ce cas, nous utilisons des méthodes numériques pour obtenir une approximation des solutions [35].

Pour trouver une forme à $[\vec{u}]_F = \eta_\varepsilon(\varepsilon, \alpha)$ et $[\vec{u}]_F = \eta_\sigma(\varepsilon, \alpha)$, nous reprenons les résultats des auteurs précédents et une résolution numérique du problème (P_H^F) (pour des caractéristiques géométriques et un matériau donnés). Les conclusions déduites de ces travaux, formulées en terme de déformation sont données dans les trois premières colonnes du tableau (Tab. 8.1). Celles des approches formulées en contraintes sont données dans les trois premières colonnes du tableau (Tab. 8.2). Les colonnes suivantes de ces deux tableaux donnent les conclusions après application de la définition ($D1$).

Nous pouvons conclure que, dans l'espace des déformations (respectivement, contraintes) macroscopiques, la frontière qui délimite les configurations où les lèvres sont ouvertes ($[u_2]_F > 0$) ou collées ($[u_2]_F = 0$) est un plan dont l'équation est de la forme : $F_\varepsilon(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}) = a(Y)\varepsilon_{22} + b(Y)\varepsilon_{11} + c(Y)\varepsilon_{33} = 0$, (respectivement, $F_\sigma(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}) = p(Y)\sigma_{22} + q(Y)\sigma_{11} + r(Y)\sigma_{33} = 0$). Les grandeurs $a(Y)$, $b(Y)$ et $c(Y)$ (respectivement, $p(Y)$, $q(Y)$ et $r(Y)$) sont des constantes qui dépendent des caractéristiques géométriques (dont celles des lèvres de la fissure) et du matériau de la cellule Y. Les écritures de F_ε et F_σ en dépendent donc aussi. Toutefois, leur caractère qualitatif est tout à fait général. Leur caractère quantitatif peut être résolu par des expériences ou des calculs comme dans une procédure d'identification des coefficients d'un modèle associé à matériau donné. Pour une formulation en déformation (respectivement, contrainte) :

— les lèvres sont ouvertes si $F_\varepsilon(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}) > 0$ (respectivement, $F_\sigma(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}) > 0$),
— les lèvres sont collées si $F_\varepsilon(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}) \leq 0$ (respectivement, $F_\sigma(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}) \leq 0$).

$\varepsilon_{ij} \neq 0$	$[u_1(\forall M \in F)]$	$[u_2(\forall M \in F)]$	$[u_3(\forall M \in F)]$	$[u_1]_F$	$[u_2]_F$	$[u_3]_F$
ε_{11}	0	> 0 si $\varepsilon_{11} > 0$ $= 0$ si $\varepsilon_{11} \leq 0$	0	0	> 0 si $\varepsilon_{11} > 0$ $= 0$ si $\varepsilon_{11} \leq 0$	0
ε_{22}	0	> 0 si $\varepsilon_{22} > 0$ $= 0$ si $\varepsilon_{22} \leq 0$	0	0	> 0 si $\varepsilon_{22} > 0$ $= 0$ si $\varepsilon_{22} \leq 0$	0
ε_{33}	0	> 0 si $\varepsilon_{33} > 0$ $= 0$ si $\varepsilon_{33} \leq 0$	0	0	> 0 si $\varepsilon_{33} > 0$ $= 0$ si $\varepsilon_{33} \leq 0$	0
ε_{23}	$\simeq 0^1$	$\simeq 0^2$	$\neq 0$	0	0	$\neq 0$
ε_{13}	$\simeq 0^2$	$\simeq 0^1$	$\simeq 0^2$	0	0	0
ε_{12}	$\neq 0$	$\simeq 0^2$	$\simeq 0^1$	$\neq 0$	0	0

TABLE 8.1 – Sauts de déplacements microscopiques et macroscopiques pour une approche en déformation ($\simeq 0^n$: terme infiniment petit d'ordre n)

$\sigma_{ij} \neq 0$	$[u_1(\forall M \in F)]$	$[u_2(\forall M \in F)]$	$[u_3(\forall M \in F)]$	$[u_1]_F$	$[u_2]_F$	$[u_3]_F$
σ_{11}	0	0	0	0	0	0
σ_{22}	0	> 0 si $\sigma_{22} > 0$ $= 0$ si $\sigma_{22} \leq 0$	0	0	> 0 si $\sigma_{22} > 0$ $= 0$ si $\sigma_{22} \leq 0$	0
σ_{33}	0	0	0	0	0	0
σ_{23}	$\simeq 0^1$	$\simeq 0^2$	$\neq 0$	0	0	$\neq 0$
σ_{13}	$\simeq 0^2$	$\simeq 0^1$	$\simeq 0^2$	0	0	0
σ_{12}	$\neq 0$	$\simeq 0^2$	$\simeq 0^1$	$\neq 0$	0	0

TABLE 8.2 – Conclusions sur les sauts de déplacements microscopiques et macroscopiques pour une approche en contrainte ($\simeq 0^n$: terme infiniment petit d'ordre n)

8.3.4 Formulation macroscopique des sauts de déplacements

L'unicité de la solution en déplacement (à une translation près) et la linéarité des problèmes (P_H^F) permettent d'écrire, de manière unique, pour une formulation en déformation (respectivement, en contrainte) :

$$[\vec{u}]_F = \eta_\varepsilon(\varepsilon, \alpha) = \left(\begin{array}{l} [u_1]_F = k_1^\varepsilon(Y)\varepsilon_{12} \\ [u_2]_F = \left\{ \begin{array}{l} k_2^\varepsilon(Y) F_\varepsilon(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}) \text{ si } F_\varepsilon(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}) > 0 \\ 0 \text{ si } F_\varepsilon(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}) \leq 0 \end{array} \right. \\ [u_3]_F = k_3^\varepsilon(Y)\varepsilon_{23} \end{array} \right)$$

$$[\vec{u}]_F = \eta_\sigma(\sigma, \alpha) = \left(\begin{array}{l} [u_1]_F = k_1^\sigma(Y)\sigma_{12} \\ [u_2]_F = \left\{ \begin{array}{l} k_2^\sigma(Y) F_\sigma(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}) \text{ si } F_\sigma(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}) > 0 \\ 0 \text{ si } F_\sigma(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}) \leq 0 \end{array} \right. \\ [u_3]_F = k_3^\sigma(Y)\sigma_{23} \end{array} \right)$$

Les grandeurs $(k_i^\varepsilon(Y))_{i=1,2,3}$ (respectivement, $(k_i^\sigma(Y))_{i=1,2,3}$) sont, elles-aussi, des constantes qu'il convient d'identifier.

8.3.5 Groupe des symétries matérielles du matériau homogène équivalent et conséquence

Le groupe de symétries matérielles du milieu fissuré au repos est S_8. Les résultats (Tab. 8.1, Tab. 8.2) montrent que la géométrie déformée induite par des sollicitations axiales ou de cisaillement dans le plan $(\vec{y_1}, \vec{y_3})$ conserve ce groupe de symétries matérielles intact. Pour une sollicitation de cisaillement dans le plan $(\vec{y_2}, \vec{y_3})$ (respectivement, $(\vec{y_1}, \vec{y_2})$), le groupe de symétries matérielles se réduit à $S_3^{23} = \{T_0, T_7, T_4\}$ (respectivement, $S_3^{12} = \{T_0, T_7, T_6\}$).

La Théorie des Invariants sait calculer les invariants d'un ensemble de variables tensorielles lorsqu'un groupe de symétries est donné [68] [67]. Ainsi, dans le cas de la formulation d'un modèle de comportement mécanique, le groupe de symétries de la microstructure du matériau doit être constant au cours du temps. Il convient donc de considérer l'ensemble des configurations géométriques possibles de cette microstructure. Ensuite, il faut analyser leur groupe de symétries. Ensuite, il faut faire l'intersection de tous ces groupes afin que le groupe de symétries pour le matériau soit celui qui s'applique à toutes les configurations possibles. Dans le cas présent, le groupe de symétries matérielles du matériau fissuré est $S_2 = \{T_0, T_7\}$.

Ce groupe de symétries exprime, en particulier, que la modélisation du comportement du matériau doit être insensible aux changement de signe des grandeurs vectorielles qui pourraient y être incluses. Ainsi, la définition $(D2)$ peut être reformulée en la définition $(D2')$.

Définition $(D2')$ - L'état géométrique du réseau de microfissures est connu si l'expression des grandeurs $(|[u_i]_F|)_{i=1,2,3}$ en fonction des déformations ou des contraintes macroscopiques l'est.

8.4 Définition des modes de sollicitation d'un réseau de microfissures dans le cadre de la Mécanique de l'Endommagement

8.4.1 Définition des modes de sollicitation d'une fissure plane pour la Mécanique de l'Endommagement

Selon le vocabulaire de la Mécanique de la Rupture, l'ouverture de la fissure plane F est définie par un scalaire appelé *mode* qui peut prendre trois valeurs distinctes. Chaque valeur correspondant à un mouvement particulier de ses lèvres. Ainsi :

— le mode d'ouverture qualifié de *mode 1* est défini comme étant celui associé à un saut de déplacement des points des lèvres de la fissure strictement positif dans la direction perpendiculaire à son plan, c'est-à-dire ici suivant l'axe $(\vec{y_2})$:

$$\textit{mode 1} \iff [\vec{u}(M)] = \begin{pmatrix} [u_1(M)] = 0 \\ [u_2(M)] > 0 \\ [u_3(M)] = 0 \end{pmatrix}$$

— le mode d'ouverture qualifié de *mode 2* est défini comme étant celui associé à un saut de déplacement des points des lèvres de la fissure non nul suivant l'axe $(\vec{y_1})$:

$$\textit{mode 2} \iff [\vec{u}(M)] = \begin{pmatrix} [u_1(M)] \neq 0 \\ [u_2(M)] = 0 \\ [u_3(M)] = 0 \end{pmatrix}$$

— le mode d'ouverture qualifié de *mode 3* est défini comme étant celui associé à un saut de déplacement des points des lèvres de la fissure non nul suivant l'axe $(\vec{y_3})$:

$$\textit{mode 3} \iff [\vec{u}(M)] = \begin{pmatrix} [u_1(M)] = 0 \\ [u_2(M)] = 0 \\ [u_3(M)] \neq 0 \end{pmatrix}$$

Nous cherchons à généraliser les notions qui viennent d'être définies par la Mécanique de la Rupture au cas de la Mécanique de l'Endommagement. Nous souhaitons également inclure ces nouveaux concepts dans l'écriture de la relation comportement.

Pour cela, nous allons définir des variables qui soient des indicateurs à l'échelle macroscopique, de l'état géométrique du réseau de microfissures contenues dans le matériau, i.e., de l'état géométrique de la fissure F contenue dans la cellule Y. Nous choisissons ici que ces variables soient des scalaires. La définition de ces variables doit être cohérente avec la définition $(D2')$. Pour cela, il faut que leur connaissance permette le calcul biunivoque des trois grandeurs $(|[u_i]_F|)_{i=1,2,3}$. Par ce choix, nous nous imposons finalement le nombre de variables scalaires indépendantes à utiliser pour généraliser le concept de la Mécanique de Rupture à la Mécanique de l'Endommagement : il est de 3.

Dans la suite, toutefois, 4 variables sont définies. Nous verrons qu'en fait seules 3 sont de vraies variables. La quatrième est une constante présente seulement pour rendre proches le concept de mode de sollicitation écrit pour la Mécanique de l'Endommagement et celui existant pour la Mécanique de la Rupture.

Deux de ses variables sont notées m_1 et m_{23} et appelées *mode 1* et *mode 2-3*. Elles représentent pour la Mécanique de l'Endommagement, la notion de mode d'ouverture d'une fissure qui existe en Mécanique de la Rupture. Par référence au langage habituel, elles sont définies de la manière suivante :

— quels que soient les sauts de déplacement colinéaires aux axes $(\vec{y_1})$ et $(\vec{y_3})$, m_1 est égale à 1 si le saut de déplacement colinéaire à l'axe $(\vec{y_2})$ est non nul. Nous posons que m_1 est égale à 2 si ce saut est nul. Cette définition est l'extension de la définition du *mode 1* de la Mécanique de la Rupture ;

— quels que soient les sauts de déplacement colinéaire à l'axe $(\vec{y_2})$,
  . m_{23} est égale à 2 si le seul saut de déplacement non nul est celui colinéaire à l'axe $(\vec{y_1})$;
  . m_{23} est égale à 3 si le seul saut de déplacement non nul est celui colinéaire à l'axe $(\vec{y_3})$;
  . m_{23} prend toutes valeurs intermédiaires dans des configurations mixtes des deux précédentes et nous posons que m_{23} est égale à 2 si les deux sauts sont nuls.

  Cette définition est l'extension de la définition du *mode 2* et du *mode 3* de la Mécanique de la Rupture.

Deux autres variables sont définies. Elles sont notées r_1 et r_{23} et appelées *rayon 1* et *rayon 2-3*. Elles traduisent l'amplitude de l'ouverture des lèvres suivant les modes *mode 1* et *mode 2-3*.

Nous identifions dans les paragraphes suivants une expression possible de ces variables en fonction des grandeurs $([u_i]_F)_{i=1,2,3}$. Nous trouverons ensuite une expression de ces variables en fonction soit des déformations macroscopiques, soit des contraintes macroscopiques. Ces expressions permettront de retrouver le caractère hyperélastique du comportement du milieu fissuré et sont inspirées de travaux antérieurs réalisés dans le cadre d'une modélisation plane [3] [69] [62].

8.4.2 Expression des variables mode et rayon en fonction des sauts de déplacements macroscopiques

En fonction des sauts de déplacements macroscopiques, nous écrivons les quantités m_1, m_{23}, r_1 et r_{23} de la manière suivante :

$$m_1 = \mu_1([\vec{u}]_F) = \begin{cases} 1 \text{ si } [u_2]_F > 0 \\ 2 \text{ si } [u_2]_F = 0 \end{cases}$$

$$m_{23} = \mu_{23}([\vec{u}]_F) = \begin{cases} \frac{2[u_1]_F^2+3[u_3]_F^2}{[u_1]_F^2+[u_3]_F^2} \text{ si } [u_3]_F \neq 0 \\ 2 \text{ si } [u_3]_F = 0 \end{cases}$$

$$r_1 = \rho_1([\vec{u}]_F) = \begin{cases} \sqrt{[u_2]_F^2} \text{ si } [u_2]_F > 0 \\ 0 \text{ si } [u_2]_F = 0 \end{cases}$$

$$r_{23} = \rho_{23}([\vec{u}]_F) = \sqrt{[u_1]_F^2 + [u_3]_F^2}$$

Nous vérifions aisément que la connaissance du triplet $\{m_{23}, r_1, r_{23}\}$ donne accès de manière unique au triplet $\{|[u_i]_F|_{i=1,2,3}\}$. Nous confirmons ainsi que seules 3 grandeurs sont finalement inscrites dans la modélisation et que la grandeur m_1 n'est qu'accessoire.

8.4.3 Expression des variables mode et rayon en fonction des déformations et des contraintes macroscopiques

Nous notons $\varepsilon_{22}^c(\alpha)$, $\varepsilon_{12}^c(\alpha)$ et $\varepsilon_{23}^c(\alpha)$ les déformations à rupture du matériau équivalent à celui fissuré, dépendant a priori de l'état d'endommagement (α). Compte tenu de l'expression des sauts de déplacements macroscopiques en fonction des déformations macroscopiques (§-8.3.4), nous écrivons :

$$\begin{cases} m_1 = m_1^\varepsilon(\varepsilon,\alpha) = \begin{cases} 1 \text{ si } \varepsilon_{22} + b(Y)\varepsilon_{11} + c(Y)\varepsilon_{33} > 0 \\ 2 \text{ si } \varepsilon_{22} + b(Y)\varepsilon_{11} + c(Y)\varepsilon_{33} \leq 0 \end{cases} \\ m_{23} = m_{23}^\varepsilon(\varepsilon,\alpha) = \begin{cases} \frac{2\frac{\varepsilon_{12}^2}{\varepsilon_{12}^c(\alpha)^2}+3\frac{\varepsilon_{23}^2}{\varepsilon_{23}^c(\alpha)^2}}{\frac{\varepsilon_{12}^2}{\varepsilon_{12}^c(\alpha)^2}+\frac{\varepsilon_{23}^2}{\varepsilon_{23}^c(\alpha)^2}} \text{ si } \varepsilon_{23} \neq 0 \\ 2 \text{ si } \varepsilon_{23} = 0 \end{cases} \\ r_1 = r_1^\varepsilon(\varepsilon,\alpha) = \begin{cases} \sqrt{\frac{(\varepsilon_{22}+b(Y)\varepsilon_{11}+c(Y)\varepsilon_{33})^2}{\varepsilon_{22}^c(\alpha)^2}} \text{ si } \varepsilon_{22} + b(Y)\varepsilon_{11} + c(Y)\varepsilon_{33} > 0 \\ 0 \text{ si } \varepsilon_{22} + b(Y)\varepsilon_{11} + c(Y)\varepsilon_{33} \leq 0 \end{cases} \\ r_{23} = r_{23}^\varepsilon(\varepsilon,\alpha) = \sqrt{\frac{\varepsilon_{12}^2}{\varepsilon_{12}^c(\alpha)^2} + \frac{\varepsilon_{23}^2}{\varepsilon_{23}^c(\alpha)^2}} \end{cases} \tag{8.1}$$

Nous notons $\sigma_{22}^c(\alpha)$, $\sigma_{12}^c(\alpha)$ et $\sigma_{23}^c(\alpha)$ les contraintes à rupture du matériau équivalent à celui fissuré, dépendant a priori de l'état d'endommagement (α). Compte tenu de l'expression des sauts de déplacements macroscopiques en fonction des contraintes macroscopiques (§-8.3.4),

nous écrivons :

$$\left\{\begin{array}{l} m_1 = m_1^\sigma(\sigma,\alpha) = \left\{\begin{array}{l} 1 \text{ si } \sigma_{22} > 0 \\ 2 \text{ si } \sigma_{22} \leq 0 \end{array}\right. \\ m_{23} = m_{23}^\sigma(\sigma,\alpha) = \left\{\begin{array}{l} \frac{2\frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_{12}^c(\alpha)^2} + 3\frac{\sigma_{23}^2}{\sigma_{23}^c(\alpha)^2}}{\frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_{12}^c(\alpha)^2} + \frac{\sigma_{23}^2}{\sigma_{23}^c(\alpha)^2}} \text{ si } \sigma_{23} \neq 0 \\ 2 \text{ si } \sigma_{23} = 0 \end{array}\right. \\ r_1 = r_1^\sigma(\sigma,\alpha) = \left\{\begin{array}{l} \sqrt{\frac{\sigma_{22}^2}{\sigma_{22}^c(\alpha)^2}} \text{ si } \sigma_{22} > 0 \\ 0 \text{ si } \sigma_{22} \leq 0 \end{array}\right. \\ r_{23} = r_{23}^\sigma(\sigma,\alpha) = \sqrt{\frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_{12}^c(\alpha)^2} + \frac{\sigma_{23}^2}{\sigma_{23}^c(\alpha)^2}} \end{array}\right. \tag{8.2}$$

Nous vérifions aisément que la connaissance du triplet $\{m_{23}, r_1, r_{23}\}$ donne accès de manière unique au triplet $\left\{\frac{(\varepsilon_{22}+b(Y)\varepsilon_{11}+c(Y)\varepsilon_{33})^2}{\varepsilon_{22}^c(\alpha)^2}, \frac{\varepsilon_{12}^2}{\varepsilon_{12}^c(\alpha)^2}, \frac{\varepsilon_{23}^2}{\varepsilon_{23}^c(\alpha)^2}\right\}$ dans le cas d'une formulation écrite en déformation, et au triplet $\left\{\frac{\sigma_{22}^2}{\sigma_{22}^c(\alpha)^2}, \frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_{12}^c(\alpha)^2}, \frac{\sigma_{23}^2}{\sigma_{23}^c(\alpha)^2}\right\}$ dans le cas d'une formulation écrite en contrainte. En effet, nous montrons :

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{(\varepsilon_{22}+b(Y)\varepsilon_{11}+c(Y)\varepsilon_{33})^2}{\varepsilon_{22}^c(\alpha)^2} = (r_1^\varepsilon)^2 \\ \frac{\varepsilon_{12}^2}{\varepsilon_{12}^c(\alpha)^2} = (r_{23}^\varepsilon)^2(3 - m_{23}^\varepsilon) \\ \frac{\varepsilon_{13}^2}{\varepsilon_{13}^c(\alpha)^2} = (r_{23}^\varepsilon)^2(m_{23}^\varepsilon - 2) \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} \frac{\sigma_{22}^2}{\sigma_{22}^c(\alpha)^2} = (r_1^\sigma)^2 \\ \frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_{12}^c(\alpha)^2} = (r_{23}^\sigma)^2(3 - m_{23}^\sigma) \\ \frac{\sigma_{13}^2}{\sigma_{13}^c(\alpha)^2} = (r_{23}^\sigma)^2(m_{23}^\sigma - 2) \end{array}\right. \tag{8.3}$$

L'utilisation de la relation η_ε (respectivement, η_σ) dans le cas de l'approche en déformation (respectivement, contrainte) donne alors accès de manière unique au triplet $\{|[u_i]_F|_{i=1,2,3}\}$. Remarquons également que m_1 est directement reliée à r_1. Sa présence n'est donc pas utile : toutefois, comme nous l'avons déjà signalé (§- 8.4.1), m_1 permet retrouver aisément les définitions usuelles de la Mécanique de la Rupture.

Nous avons généralisé le concept de Mode de Sollicitation propre à la Mécanique de la Rupture à la Mécanique de l'Endommagement en substituant le triplet $\{|[u_i]_F|_{i=1,2,3}\}$ par le triplet $\{m_{23}, r_1, r_{23}\}$. Cette substitution est bijective. Elle est donc cohérente avec la définition $(D2')$: la connaissance des variables $\{m_{23}, r_1, r_{23}\}$ donne la connaissance de l'état géométrique du réseau de fissures.

Remarque importante - Les grandeurs m_1 et m_{23}, vues comme des fonctions des grandeurs macroscopiques σ ou ε, ne sont pas continues en tout point. Nous verrons néanmoins que cela n'empêchera pas d'avoir la continuité de la relation comportementale hyperélastique entre σ et ε.

8.5 Application : un modèle général du comportement hyperélastique d'un milieu microfissuré

Nous appliquons maintenant le nouveau concept qui a été développé pour écrire le comportement homogène équivalent hyperélastique d'un milieu microfissuré. Nous verrons que son utilisation rend cette écriture particulièrement simple tout en garantissant facilement le respect des conditions $(C1 - C7)$.

8.5.1 Cadre de la modélisation

Les hypothèses sous lesquelles la modélisation va être faite sont les suivantes :

— à l'échelle microscopique, le matériau considéré est un matériau endommagé par un réseau de fissures planes identiques. Sa microstructure est périodique. Elle est représentée par la cellule élémentaire Y (Fig. 8.3). Le matériau sain est supposé orthotrope. La géométrie des fissures au repos respecte cette orthotropie ;
— la durée de propagation des fissures est suffisamment courte pour estimer que l'instant de leur apparition coïncide avec celui de leur propagation complète. Nous nous intéressons donc ici à la multiplication des fissures et non à leur propagation ;
— s'il existe, le contact entre les lèvres des fissures est supposé sans frottement ;
— il n'y a aucune contrainte interne résiduelle due à l'endommagement qui soit susceptible de bloquer de l'énergie dans le matériau ;
— nous nous plaçons donc dans le cadre de la Mécanique de l'Endommagement. Nous allons chercher à remplacer le milieu endommagé par un milieu homogène équivalent dont R est le repère privilégié d'anisotropie ;
— nous nous plaçons sous l'Hypothèse des Petites Perturbations ;
— la modélisation va utiliser la Thermodynamique des Milieux Continus sous l'Hypothèse de l'Etat Local. Cette hypothèse postule que la connaissance de l'état du système à un instant t est donnée par la connaissance d'un nombre fini de variables, les variables d'état ;
— la dissipation d'énergie induite par la création des fissures est suffisamment faible pour estimer qu'elle ne provoque aucune élévation de température appréciable au cours des transformations. La température est donc supposée constante et uniforme et n'est finalement pas incluse dans la modélisation ;
— le phénomène d'endommagement est supposé indépendant du temps (c'est-à-dire insensible aux effets de vitesse) ;
— la modélisation est réalisée sans aucune limitation sur les composantes du tenseur des contraintes ou des déformations. Nous n'utilisons donc pas les hypothèses de contraintes ou de déformations planes ;
— le groupe de symétries matérielles de la microstructure du matériau est le groupe $S_2 = \{T_0, T_7\}$.

Le tenseur des déformations ε est pris comme variable d'état. Sa variable associée est le tenseur des contraintes σ. La modélisation de l'endommagement est faite au travers de 4 variables d'état scalaires : α caractérise l'endommagement quantitativement, m_{23}, r_1 et r_{23}, caractérisent la géométrie de l'endommagement. Leur variable associée respective est A, M_{23}, R_1 et R_{23}. Les variables d'état sont par définition supposées indépendantes. Or, il a été démontré auparavant que le comportement du milieu, pour un état d'endommagement donné et sous l'hypothèse de non-frottement sur les lèvres, est hyperélastique : m_{23}, r_1 et r_{23} ne sont donc pas indépendantes des autres variables d'état. Elles ne peuvent donc pas être prises comme variables d'état. Néanmoins, dans le cadre d'une modélisation plus complexe (frottement sur les lèvres, irréversibilités dues à l'endommagement), ces variables seraient des variables d'état. Aussi, ici, elles sont considérées comme telles, donc a priori indépendantes. Nous observerons a posteriori leur caractère "non-indépendant" en traduisant le fait, qu'en raison de l'hypothèse de frottement nul, elles sont non dissipatives. Nous retrouverons ainsi le caractère hyperélastique du comportement.

8.5.2 Modélisation vectorielle de l'endommagement

En s'inspirant de précédents travaux [56] [62] [69], nous modélisons l'endommagement présent dans le milieu à l'aide d'un vecteur. Par rapport à ces précédents travaux, le vecteur a une

direction non-fixe et possède 3 composantes non nulles. Ce vecteur pourrait être $[\vec{u}]_F$. Néanmoins, les composantes de ce vecteur n'ont pas été choisies pour être les variables d'état. Aussi, c'est le vecteur suivant qui modélise le phénomène d'endommagement :

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} V_1(\alpha, m_{23}, r_1, r_{23}) \\ V_2(\alpha, m_{23}, r_1, r_{23}) \\ V_3(\alpha, m_{23}, r_1, r_{23}) \end{pmatrix}$$

Afin que la modélisation soit cohérente, la direction de ce vecteur ne doit pas dépendre explicitement de la quantité d'endommagement (i.e., de la variable α). Nous supposons donc qu'il a la forme suivante :

$$\vec{V} = f(\alpha)\vec{U}(m_{23}, r_1, r_{23}) = f(\alpha) \begin{pmatrix} U_1(m_{23}, r_1, r_{23}) = U_{T1}(m_{23}, r_1, r_{23}) \\ U_2(m_{23}, r_1, r_{23}) = U_N(m_{23}, r_1, r_{23}) \\ U_3(m_{23}, r_1, r_{23}) = U_{T3}(m_{23}, r_1, r_{23}) \end{pmatrix}$$

Pour être cohérent avec le concept de mode de sollicitation, ce vecteur doit être construit de la manière suivante :

$$\vec{V} = f(\alpha) \begin{pmatrix} U_{T1}(m_{23}, r_1, r_{23}) \begin{cases} = 0 \text{ si } r_{23} = 0 (\Leftrightarrow m_{23} = 2), \forall r_1 \\ = 0 \text{ si } m_{23} = 3, \forall r_{23} \neq 0, \forall r_1 \\ \neq 0 \text{ si } m_{23} = 2, \forall r_{23} \neq 0, \forall r_1 \\ \neq 0 \text{ si } 2 < m_{23} < 3, \forall r_{23} \neq 0, \forall r_1 \end{cases} \\ U_N(m_{23}, r_1, r_{23}) \begin{cases} = 0 \text{ si } r_1 = 0, \forall m_{23}, \forall r_{23} \\ \neq 0 \text{ si } r_1 \neq 0, \forall m_{23}, \forall r_{23} \end{cases} \\ U_{T3}(m_{23}, r_1, r_{23}) \begin{cases} = 0 \text{ si } r_{23} = 0 (\Leftrightarrow m_{23} = 2), \forall r_1 \\ = 0 \text{ si } m_{23} = 2, \forall r_{23} \neq 0, \forall r_1 \\ \neq 0 \text{ si } m_{23} = 3, \forall r_{23} \neq 0, \forall r_1 \\ \neq 0 \text{ si } 2 < m_{23} < 3, \forall r_{23} \neq 0, \forall r_1 \end{cases} \end{pmatrix}$$

Ces conditions induisent $(c8 - c12)$:
— $U_{T1}(m_{23} = 2, r_1, r_{23} = 0) = 0, \forall r_1$ $(c8)$;
— $U_{T3}(m_{23} = 2, r_1, r_{23} = 0) = 0, \forall r_1$ $(c9)$;
— $U_N(m_{23}, r_1 = 0, r_{23}) = 0, \forall r_{23}, \forall m_{23}$ $(c10)$;
— $U_{T1}(m_{23} = 3, r_1, r_{23}) = 0, \forall r_{23} \neq 0, \forall r_1$ $(c11)$;
— $U_{T3}(m_{23} = 2, r_1, r_{23}) = 0, \forall r_{23} \neq 0, \forall r_1$ $(c12)$.
Le respect des conditions $(c8 - c12)$ conduit au respect de la condition $(C4)$.

8.5.3 Construction d'une fonction d'état objective

Nous choisissons de construire la fonction d'état :

$$\psi = \psi(\varepsilon, \alpha, m_{23}, r_1, r_{23}) = \varphi(\varepsilon, \vec{V}(\alpha, m_{23}, r_1, r_{23}))$$

de sorte à obtenir un modèle de comportement élastique endommageable. Elle est donc choisie comme ayant la forme suivante : $\varphi(\varepsilon, \vec{V}) = \varphi_{20}(\varepsilon) + \varphi_{22}(\varepsilon, \vec{V}) + \overline{\Phi}(\vec{V})$ où φ_{20} et φ_{22} sont des fonctions polynômiales dont les indices indiquent, dans l'ordre, le degré partiel associé à la variable ε et à la variable $\vec{V}$. La fonction $\overline{\Phi}$ est une fonction a priori quelconque de la variable $\vec{V}$ qui doit être invariante sous S_2, objective et nulle en l'absence de sollicitation. Ici, la forme explicite de $\overline{\Phi}(\vec{V})$ n'est pas nécessaire : elle ne sera donc pas écrite.

L'application du Théorème de Noether [68] [67] permet de construire une base d'intégrité, notée F_{12}, des polynômes de l'ensemble des variables $V = \left\{\varepsilon, \vec{V}\right\}$ et invariants sous S_2 :

$$F_{12} = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{12}, V_1^2, V_2^2, V_3^2, V_2V_3, V_1V_3, V_1V_2\}$$

Nous en déduisons alors la forme la plus générale de la fonction recherchée :

$$\varphi(\varepsilon,\vec{V}) = \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j,k,h=1\\ i\leq j,k\leq h}}^{3} C^0_{ijkh}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kh} + \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j,k,h,p,q=1\\ i\leq j,k\leq h,p\leq q}}^{3} D_{ijkhpq}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kh}V_pV_q + \overline{\Phi}(\vec{V})$$

La partie polynômiale de $\varphi(\varepsilon,\vec{V})$ est invariante sous S_2, mais pour l'instant non-objective. Cette objectivité est acquise dès lors que nous imposons aux grandeurs $C^0 = (C^0_{ijkh})_{i,j,k,h=1,2,3}$ et $D = (D_{ijkhpq})_{i,j,k,h,p,q=1,2,3}$ d'être des tenseurs respectivement d'ordre 4, 6. La dualité de ces tenseurs avec les quantités auxquelles ils sont associés confère à la fonction $\overline{\varphi}(\varepsilon,\vec{V},C^0,D)$ le caractère d'être objective [68] [67]. Nous vérifions ainsi les conditions $(C7, C1, C2)$.

En adoptant les notations de Voigt, et en utilisant les variables d'état, nous avons finalement : $\psi(\varepsilon,\alpha,m_{23},r_1,r_{23}) = \psi^0(\varepsilon) + \sum_{\substack{p,q=1\\ p\leq q}}^{3}\psi^{(pq)}(\varepsilon,V_p(\alpha,m_{23},r_1,r_{23}),V_q(\alpha,m_{23},r_1,r_{23})) + \overline{\Phi}(\vec{V}(\alpha,m_{23},r_1,r_{23}))$, avec :

$$\begin{cases} \psi^{(0)}(\varepsilon) = F^{(0)}(\varepsilon) = \frac{1}{2}C^0_{ij}\varepsilon_i\varepsilon_j \\ \psi^{(pq)}(\varepsilon,V_p(\alpha,m_{23},r_1,r_{23}),V_q(\alpha,m_{23},r_1,r_{23})) = F^{(pq)}(\varepsilon)f^2(\alpha)U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23}) \\ F^{(pq)}(\varepsilon) = \frac{1}{2}D^{(pq)}_{ij}\varepsilon_i\varepsilon_j \end{cases}$$

8.5.4 Ecriture des lois d'état

Nous avons :

$$\begin{aligned} d\psi(\varepsilon,\alpha,m_{23},r_1,r_{23}) &= \sigma(\varepsilon,\alpha,m_{23},r_1,r_{23})d\varepsilon + A(\varepsilon,\alpha,m_{23},r_1,r_{23})d\alpha + \dots \\ &\dots M_{23}(\varepsilon,\alpha,m_{23},r_1,r_{23})dm_{23} + R_1(\varepsilon,\alpha,m_{23},r_1,r_{23})dr_1 + R_{23}(\varepsilon,\alpha,m_{23},r_1,r_{23})dr_{23} \\ &= \frac{\partial\psi(\varepsilon,\alpha,m_{23},r_1,r_{23})}{\partial\varepsilon}d\varepsilon + \frac{\partial\psi(\varepsilon,\alpha,m_{23},r_1,r_{23})}{\partial\alpha}d\alpha + \dots \\ &\dots \frac{\partial\psi(\varepsilon,\alpha,m_{23},r_1,r_{23})}{\partial m_{23}}dm_{23} + \frac{\partial\psi(\varepsilon,\alpha,m_{23},r_1,r_{23})}{\partial r_1}dr_1 + \frac{\partial\psi(\varepsilon,\alpha,m_{23},r_1,r_{23})}{\partial r_{23}}dr_{23} \end{aligned}$$

Les lois d'état s'écrivent alors :

$$\sigma_i = \frac{\partial\psi(\varepsilon,\alpha,m_{23},r_1,r_{23})}{\partial\varepsilon_i} = \left(C^0_{ij} + f^2(\alpha)\sum_{\substack{p,q=1\\ p\leq q}}^{3} D^{(pq)}_{ij}U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)\varepsilon_j$$

$$\begin{aligned} A(\varepsilon,\alpha,m_{23},r_1,r_{23}) &= \frac{\partial\psi(\varepsilon,\alpha,m_{23},r_1,r_{23})}{\partial\alpha} = \frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}(\alpha,m_{23},r_1,r_{23}) + \dots \\ &\dots f(\alpha)f'(\alpha)\left(\sum_{\substack{p,q=1\\ p<q}}^{3} D^{(pq)}_{ij}U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)\varepsilon_i\varepsilon_j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{23}(\varepsilon,\alpha,m_{23},r_1,r_{23}) &= \frac{\partial\psi(\varepsilon,\alpha,m_{23},r_1,r_{23})}{\partial m_{23}} = \frac{\partial\Phi}{\partial m_{23}}(\alpha,m_{23},r_1,r_{23}) + \dots \\ \dots \frac{1}{2}f^2(\alpha)\sum_{\substack{p,q=1\\ p<q}}^{3} D^{(pq)}_{ij}&\left(\frac{\partial U_p}{\partial m_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23}) + U_p(m_{23},r_1,r_{23})\frac{\partial U_q}{\partial m_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})\right)\varepsilon_i\varepsilon_j \end{aligned}$$

$$R_1(\varepsilon,\alpha,m_{23},r_1,r_{23}) = \frac{\partial\psi(\varepsilon,\alpha,m_{23},r_1,r_{23})}{\partial r_1} = \frac{\partial\Phi}{\partial r_1}(\alpha,m_{23},r_1,r_{23}) + \ldots$$
$$\ldots \frac{1}{2}f^2(\alpha)\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}\left(\frac{\partial U_p}{\partial r_1}(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23}) + U_p(m_{23},r_1,r_{23})\frac{\partial U_q}{\partial r_1}(m_{23},r_1,r_{23})\right)\varepsilon_i\varepsilon_j$$

$$R_{23}(\varepsilon,\alpha,m_{23},r_1,r_{23}) = \frac{\partial\psi(\varepsilon,\alpha,m_{23},r_1,r_{23})}{\partial r_{23}} = \frac{\partial\Phi}{\partial r_{23}}(\alpha,m_{23},r_1,r_{23}) + \ldots$$
$$\ldots \frac{1}{2}f^2(\alpha)\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}\left(\frac{\partial U_p}{\partial r_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23}) + U_p(m_{23},r_1,r_{23})\frac{\partial U_q}{\partial r_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})\right)\varepsilon_i\varepsilon_j$$

8.5.5 Justification du caractère hyperélastique du comportement

La création d'une fissure est un processus dissipatif : la variable A est donc non nulle en phase d'endommagement. En revanche, l'hypothèse d'absence de frottement sur les lèvres des fissures indique que $M_{23}(\varepsilon,\alpha,m_{23},r_1,r_{23}) = 0, R_1(\varepsilon,\alpha,m_{23},r_1,r_{23}) = 0, R_{23}(\varepsilon,\alpha,m_{23},r_1,r_{23}) = 0$. Les expressions obtenues précédemment et l'application du Théorème des Fonctions Implicites permettent d'affirmer, qu'au moins localement, les variables m_{23}, r_1 et r_{23} peuvent s'écrire comme des fonctions des variables ε et α. Cela rend légitime les expressions écrites pour m_{23}, r_1 et r_{23} (§-8.4.3). Cela confirme également que, pour un état d'endommagement donné, le comportement du milieu microfissuré est hyperélastique.

8.5.6 Loi d'évolution de l'endommagement

Les variables m_{23}, r_1 et r_{23} étant non dissipatives, l'inégalité de Clausius-Duhem se résume à : $-A(\varepsilon,\alpha,m_{23},r_1,r_{23})\dot{\alpha} \geq 0, \forall\dot{\alpha} \geq 0$. Une méthode classique pour obtenir une loi d'évolution pour la variable α est d'utiliser une fonction (ici, scalaire) c écrite sous la forme : $c(\varepsilon,\alpha,m_{23},r_1,r_{23}) = A_c(\alpha,m_{23},r_1,r_{23}) - A(\varepsilon,\alpha,m_{23},r_1,r_{23})$, où $A_c(\alpha,m_{23},r_1,r_{23})$ est appelé seuil d'endommagement, caractéristique du matériau étudié. L'endommagement n'évolue pas si $c(\varepsilon,\alpha,m_{23},r_1,r_{23}) < 0$. La condition de cohérence ($c(\varepsilon,\alpha,m_{23},r_1,r_{23}) = 0, dc(\varepsilon,\alpha,m_{23},r_1,r_{23}) = 0$) écrite en phase d'endommagement conduit à la loi d'évolution suivante :

$$d\alpha = \frac{D}{\frac{\partial A_c(\alpha,m_{23},r_1,r_{23})}{\partial\alpha} - \frac{\partial^2\psi(\varepsilon,\alpha,m_{23},r_1,r_{23})}{\partial\alpha^2}} \tag{8.4}$$

avec :

$$\begin{aligned} D = {} & \frac{\partial^2\psi(\varepsilon,\alpha,m_{23},r_1,r_{23})}{\partial\alpha\partial\varepsilon}d\varepsilon + \ldots \\ & \ldots\left(\frac{\partial^2\psi(\varepsilon,\alpha,m_{23},r_1,r_{23})}{\partial\alpha\partial m_{23}} - \frac{\partial A_c(\alpha,m_{23},r_1,r_{23})}{\partial m_{23}}\right)dm_{23} + \ldots \\ & \ldots\left(\frac{\partial^2\psi(\varepsilon,\alpha,m_{23},r_1,r_{23})}{\partial\alpha\partial r_1} - \frac{\partial A_c(\alpha,m_{23},r_1,r_{23})}{\partial r_1}\right)dr_1 + \ldots \\ & \ldots\left(\frac{\partial^2\psi(\varepsilon,\alpha,m_{23},r_1,r_{23})}{\partial\alpha\partial r_{23}} - \frac{\partial A_c(\alpha,m_{23},r_1,r_{23})}{\partial r_{23}}\right)dr_{23} \end{aligned} \tag{8.5}$$

8.5.7 Conditions de continuité et de convexité

La relation de comportement entre ε et σ doit être continue. Par conséquent, la fonction $f^2(\alpha)$ et les fonctions $U_{T1}(m_{23}, r_1, r_{23})$, $U_N(m_{23}, r_1, r_{23})$ et $U_{T3}(m_{23}, r_1, r_{23})$ doivent être de classe C^1. Toutefois, le caractère hyperélastique de la relation comportementale mis en évidence dans les relations m_{23}^{ε}, r_1^{ε} et r_{23}^{ε} (ou bien m_{23}^{σ}, r_1^{σ} et r_{23}^{σ}) (§-8.4.3) impose qu'en fait ce sont les fonctions $U_{T1}(m_{23}^{\varepsilon}(\varepsilon,\alpha), r_1^{\varepsilon}(\varepsilon,\alpha), r_{23}^{\varepsilon}(\varepsilon,\alpha))$, $U_N(m_{23}^{\varepsilon}(\varepsilon,\alpha), r_1^{\varepsilon}(\varepsilon,\alpha), r_{23}^{\varepsilon}(\varepsilon,\alpha))$ et $U_{T3}(m_{23}^{\varepsilon}(\varepsilon,\alpha), r_1^{\varepsilon}(\varepsilon,\alpha), r_{23}^{\varepsilon}(\varepsilon,\alpha))$ qui doivent être des fonctions de classe C^1. Nous noterons $(c13)$ cette condition. Son respect conduit au respect de la condition $(C4)$.

Enfin, souvent pour simplifier la vérification du Second Principe de la Thermodynamique, nous utilisons des fonctions d'état qui sont convexes par rapport à toutes ou partie de leurs variables. Cette condition, si elle est nécessaire, se rajoute aux précédentes et permet la vérification de la condition $(C3)$.

8.5.8 Expressions du tenseur de rigidité pour quelques configurations simples de la condition unilatérale

Dans le cas général, le tenseur de comportement prend la forme suivante $(i, j = 1, \ldots, 6)$:

$$C_{ij}(\alpha, m_{23}, r_1, r_{23}) = C_{ij}^0 + f^2(\alpha) \sum_{\substack{p,q=1 \\ p \leq q}}^{3} D_{ij}^{(pq)} U_p(m_{23}, r_1, r_{23}) U_q(m_{23}, r_1, r_{23})$$

Regardons plusieurs configurations différentes des variables m_{23}, r_1 et r_{23}, en supposant que l'état d'endommagement est non nul, i.e. $\alpha \neq 0$. Supposons que nous soyons dans la configuration au repos. Dans ce cas : $r_1 = 0$ et $r_{23} = 0$, soit, $m_1 = 2$ et $m_{23} = 2$. Le comportement est alors : $C_{ij}(\alpha, m_{23} = 2, r_1 = 0, r_{23} = 0) = C_{ij}^0$. Supposons que nous soyons dans la configuration où seul le saut de déplacement des lèvres suivant l'axe $(\vec{y_2})$ est non nul : cela correspond à la configuration de *mode 1*. Dans ce cas : $r_1 \neq 0$ et $r_{23} = 0$, soit, $m_1 = 1$ et $m_{23} = 2$. Le comportement est alors : $C_{ij}(\alpha, m_{23} = 2, r_1, r_{23} = 0) = C_{ij}^0 + f^2(\alpha) D_{ij}^{(22)} U_2^2(m_{23} = 2, r_1, r_{23} = 0)$. Supposons que nous soyons dans la configuration où le saut de déplacement des lèvres suivant l'axe $(\vec{y_2})$ est nul : cela correspond à la configuration de *mode 2-3*. Dans ce cas : $r_1 = 0$ (soit, $m_1 = 2$), $r_{23} \neq 0$ et $2 \leq m_{23} \leq 3$. Le comportement est alors :

$$\begin{aligned} C_{ij}(\alpha, m_{23}, r_1 = 0, r_{23}) = C_{ij}^0 + f^2(\alpha) \Big(& D_{ij}^{(11)} U_1^2(m_{23}, r_1 = 0, r_{23}) + \ldots \\ & \ldots D_{ij}^{(33)} U_3^2(m_{23}, r_1 = 0, r_{23}) + D_{ij}^{(13)} U_1(m_{23}, r_1 = 0, r_{23}) U_3(m_{23}, r_1 = 0, r_{23}) \Big) \end{aligned} \quad (8.6)$$

8.6 Identification du modèle dans le cas du phénomène de fissuration intralaminaire

Au regard des caractéristiques physiques du phénomène de fissuration intralaminaire et du cadre d'écriture du modèle précédent, il est légitime d'utiliser ce modèle pour ce phénomène pour lequel, nous identifions d'abord que $\alpha = e_{pli} \times d$ (e_{pli} est l'épaisseur du pli dans lequel apparaît le phénomène et d la densité de fissures (nb/mm)) [70]. Il faut ensuite identifier :

— la loi de comportement au travers du tenseur de rigidité $C(\alpha, m_{23}, r_1, r_{23})$;
— la loi d'évolution au travers de la fonction $A_c(\alpha, m_{23}, r_1, r_{23})$.

8.6.1 Identification de la loi de comportement

Le tenseur C a la forme suivante $(i, j = 1, \ldots, 6)$:

$$C_{ij}(\alpha, m_{23}, r_1, r_{23}) = C^0_{ij} + f^2(\alpha) \sum_{\substack{p,q=1 \\ p \leq q}}^{3} D^{(pq)}_{ij} U_p(m_{23}, r_1, r_{23}) U_q(m_{23}, r_1, r_{23}) \tag{8.7}$$

D'une manière générale, cette identification peut être réalisée par le lissage de résultats de calculs d'homogénéisation périodique. Plus précisément, pour une valeur donnée de la variable α (donc pour des dimensions données de la cellule Y), nous calculons les propriétés élastiques du matériau homogène équivalent à celui représenté par cette cellule. Dans cette cellule, les lèvres de la fissure sont placées dans une configuration géométrique donnée reflètant une valeur de triplet $\{m_{23}, r_1, r_{23}\}$. Un lissage de l'ensemble de ces résultats, vérifiant les conditions $(c8 - c13)$, fournit une expression possible des fonctions U_{T1}, U_N et U_{T3} et les composantes des tenseurs $(D^{(pp)})_{p=1,2,3}$ et $(D^{(pq)})_{p<q=1,2,3}$.

Pour le cas particulier du phénomène considéré, les hypothèses $(H1)$ et $(H2)$ permettent de simplifier les identifications. Tout d'abord, l'hypothèse $(H1)$ simplifie l'identification des tenseurs $(D^{(pp)})_{p=1,2,3}$ et $(D^{(pq)})_{p<q=1,2,3}$: nous traduisons cette hypothèse en disant que les termes U_{T1} et U_{T2} sont négligeables par rapport au terme U_N et que le tenseur $C(\alpha, m_{23}, r_1, r_{23})$ a la même structure que le tenseur C^0. En se servant des résultats précédents (Tab. 8.1), nous pouvons ainsi prendre :

— $D^{(11)}_{ij} = 0$, $(i, j = 1, \ldots, 6)$ sauf $D^{(11)}_{66}$;
— $D^{(22)}_{ij} = 0$, $(i, j = 1, \ldots, 6)$ sauf $D^{(22)}_{ij}$, $(i, j = 1, 2, 3)$;
— $D^{(33)}_{ij} = 0$, $(i, j = 1, \ldots, 6)$ sauf $D^{(33)}_{44}$;
— $D^{(pq)}_{ij} = 0$, $p < q = 1, 2, 3$, $(i, j = 1, \ldots, 6)$.

La géométrie des fissures étant contenue dans un plan dont l'un des vecteurs de base est celui qui oriente l'axe des fibres, et le matériau étant à forte anisotropie, l'impact de cet endommagement dans la direction des fibres est (quasi) nul : $D^{(22)}_{11} \approx 0$. Les différents coefficients non nuls et $f(\alpha)$ sont identifiés par le lissage des résultats d'homogénéisation :

$$\begin{aligned} C(\alpha, m_{23}, r_1, r_{23}) = C^0 + f^2(\alpha) U^2_N(r_1) & \begin{pmatrix} D^{(22)}_{11} & D^{(22)}_{12} & D^{(22)}_{13} & 0 & 0 & 0 \\ D^{(22)}_{12} & D^{(22)}_{22} & D^{(22)}_{23} & 0 & 0 & 0 \\ D^{(22)}_{13} & D^{(22)}_{23} & D^{(22)}_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \ldots \\ \ldots f^2(\alpha) & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D^{(33)}_{44} U^2_{T3}(m_{23}, r_{23}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D^{(11)}_{66} U^2_{T1}(m_{23}, r_{23}) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{8.8}$$

avec $f(\alpha) = \sqrt{\frac{\alpha}{1+\alpha}}$. Un ordre de grandeur des chutes de rigidité maximales pour les différentes composantes du tenseur de rigidité est de 30 à 50%.

8.6.2 Identification de la loi d'évolution quasi-statique

A_c est défini comme une fonction de α, m_{23}, r_1 and r_{23}. La présence de α souligne que pour un état d'endommagement donné, le matériau équivalent n'a pas les mêmes propriétés que le matériau sain. La présence de m_{23}, r_1 and r_{23} souligne quant à elle le fait que, du point de vue de la Mécanique de la Rupture, l'énergie nécessaire pour créer une fissure dans un mode donné est différente de celle nécessaire pour créer une fissure dans un autre mode. Ainsi, la fonction seuil $A_c(\alpha, m_{23}, r_1, r_{23})$ peut être identifiée de la manière suivante :

- choisir des valeurs caractéristiques $(m_{23}^0, r_1^0, r_{23}^0)$ de (m_{23}, r_1, r_{23}) ;
- pour chacune de ces valeurs, en utilisant le modèle (voir plus loin), calculer $A_c(\alpha, m_{23}^0, r_1^0, r_{23}^0)$;
- lisser les résultats pour finalement construire une fonction continue $A_c(\alpha, m_{23}, r_1, r_{23})$.

Pour identifier $A_c(\alpha, m_{23}^0, r_1^0, r_{23}^0)$, nous pouvons procéder de la manière suivante :

- pour les valeurs $(m_{23}^0, r_1^0, r_{23}^0)$, construire une séquence d'empilement susceptible de placer le (seul) pli qui va s'endommager dans l'état défini par ces valeurs lors d'un essai de traction uniaxiale ;
- réaliser l'essai expérimental de traction uniaxiale en utilisant des moyens d'observation in-situ (microscopie optique par exemple), pour suivre l'évolution de la densité de fissures en fonction de la norme F_L de la sollicitation appliquée afin de connaître la courbe $\alpha = g(F_L)$;
- simuler l'essai précédent avec le modèle où la valeur de l'endommagement est une donnée d'entrée de la simulation à l'aide de la fonction $\alpha = g(F_L)$. Lors de cette simulation, toutes les grandeurs thermodynamiques sont calculées et en particulier la variable duale de α ;
- puisque l'essai est toujours en phase de progression d'endommagement, en écrivant la condition de cohérence nous sommes capables de calculer $A_c(\alpha, m_{23}^0, r_1^0, r_{23}^0) = A(\varepsilon, \alpha, m_{23}^0, r_1^0, r_{23}^0)$;
- nous accédons ainsi au couple $(\alpha, A_c(\alpha, m_{23}^0, r_1^0, r_{23}^0))$ pour chaque $(m_{23}^0, r_1^0, r_{23}^0)$;
- nous procédons alors au lissage de la fonction $A_c(\alpha, m_{23}^0, r_1^0, r_{23}^0)$.

8.7 Le modèle original

Nous donnons ici des éléments de rappel sur le modèle qui a été mis en place préalablement [69] à celui présenté dans les paragraphes précédents. Il est notablement plus simple parce qu'il utilise une formulation soit en déformations planes, soit en contraintes planes. La justification de ces formulations réside dans la géométrie et les sollicitations des structures sur lesquelles il a fonctionné originellement : des structures stratifiées minces sollicitées dans leur plan moyen (tangent éventuellement). Le modèle actuel peut quant à lui être utilisé avec n'importe quel type de géométrie, et n'importe quel type de sollicitation (bien que cela n'ait pas encore été fait, à l'heure actuelle).

A part le fait que ce modèle original est écrit dans un cadre de déformations ou contraintes planes, rien ne le distingue du modèle général actuel : le cadre, les hypothèses... sont identiques. Nous ne redonnons ici que le strict minimum nécessaire à son utilisation à l'écriture de la loi de fatigue.

Le tenseur des déformations ε, dans sa forme plane, est pris comme variable d'état. Sa variable associée est le tenseur des contraintes σ. La modélisation de l'endommagement est faite au travers de 3 variables d'état scalaires : α caractérise l'endommagement quantitativement, m et r caractérisent la géométrie de l'endommagement. Leur variable associée respective est A, M et R.

Dans le cadre d'une formulation en déformations planes :

$$\left\{\begin{array}{l} m = m^{\varepsilon}(\varepsilon,\alpha) = \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\frac{\varepsilon_{22}^2}{\varepsilon_{22}^c(\alpha)^2}+2\frac{\varepsilon_{12}^2}{\varepsilon_{12}^c(\alpha)^2}}{\frac{\varepsilon_{22}^2}{\varepsilon_{22}^c(\alpha)^2}+\frac{\varepsilon_{12}^2}{\varepsilon_{12}^c(\alpha)^2}} \text{ si } \varepsilon_{22} > 0 \\ 2 \text{ si } \varepsilon_{22} \leq 0 \end{array}\right. \\ r = r^{\varepsilon}(\varepsilon,\alpha) = \left\{\begin{array}{l} \sqrt{\frac{\varepsilon_{22}^2}{\varepsilon_{22}^c(\alpha)^2}+\frac{\varepsilon_{12}^2}{\varepsilon_{12}^c(\alpha)^2}} \text{ si } \varepsilon_{22} > 0 \\ \sqrt{\frac{\varepsilon_{12}^2}{\varepsilon_{12}^c(\alpha)^2}} \text{ si } \varepsilon_{22} \leq 0 \end{array}\right. \end{array}\right. \tag{8.9}$$

Dans le cadre d'une formulation en contraintes planes :

$$\left\{\begin{array}{l} m = m^{\sigma}(\sigma,\alpha) = \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\frac{\sigma_{22}^2}{\sigma_{22}^c(\alpha)^2}+2\frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_{12}^c(\alpha)^2}}{\frac{\sigma_{22}^2}{\sigma_{22}^c(\alpha)^2}+\frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_{12}^c(\alpha)^2}} \text{ si } \sigma_{22} > 0 \\ 2 \text{ si } \sigma_{22} \leq 0 \end{array}\right. \\ r = r^{\sigma}(\sigma,\alpha) = \left\{\begin{array}{l} \sqrt{\frac{\sigma_{22}^2}{\sigma_{22}^c(\alpha)^2}+\frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_{12}^c(\alpha)^2}} \text{ si } \sigma_{22} > 0 \\ \sqrt{\frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_{12}^c(\alpha)^2}} \text{ si } \sigma_{22} \leq 0 \end{array}\right. \end{array}\right. \tag{8.10}$$

La connaissance du couple $\{m, r\}$ donne accès de manière unique au couple $\{\varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}\}$ dans le cas d'une formulation écrite en déformations planes, et au couple $\{\sigma_{22}, \sigma_{12}\}$ dans le cas d'une formulation écrite en contraintes planes :

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\varepsilon_{22}^2}{\varepsilon_{22}^c(\alpha)^2} = r^2(2-m) \\ \frac{\varepsilon_{12}^2}{\varepsilon_{12}^c(\alpha)^2} = r^2(m-1) \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} \frac{\sigma_{22}^2}{\sigma_{22}^c(\alpha)^2} = r^2(2-m) \\ \frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_{12}^c(\alpha)^2} = r^2(m-1) \end{array}\right. \tag{8.11}$$

Le vecteur suivant qui modélise le phénomène d'endommagement est le suivant :

$$\vec{V} = \left(\begin{array}{l} V_1(\alpha,m,r) \\ V_2(\alpha,m,r) \end{array}\right) = f(\alpha)\vec{U}(m,r) = f(\alpha)\left(\begin{array}{l} U_1(m,r) = U_T(m,r) \\ U_2(m,r) = U_N(m,r) \end{array}\right)$$

En adoptant les notations de Voigt, la fonction d'état s'écrit (avec : $i, j = 1, 2, 6$) :

$$\psi(\varepsilon,\alpha,m) = \frac{1}{2}C_{ij}^0\varepsilon_i\varepsilon_j + \frac{1}{2}f^2(\alpha)\left(C_{ij}^N U_N^2(m,r) + C_{ij}^T U_T^2(m,r) + C_{ij}^{NT}U_N(m,r)U_T(m,r)\right)\varepsilon_i\varepsilon_j$$

avec :

$$C^0 = \begin{pmatrix} C_{11}^0 & C_{12}^0 & C_{16}^0 \\ C_{12}^0 & C_{22}^0 & C_{26}^0 \\ C_{16}^0 & C_{26}^0 & C_{66}^0 \end{pmatrix} \quad C^N = \begin{pmatrix} C_{11}^N & C_{12}^N & C_{16}^N \\ C_{12}^N & C_{22}^N & C_{26}^N \\ C_{16}^N & C_{26}^N & C_{66}^N \end{pmatrix}$$

$$C^T = \begin{pmatrix} C_{11}^T & C_{12}^T & C_{16}^T \\ C_{12}^T & C_{22}^T & C_{26}^T \\ C_{16}^T & C_{26}^T & C_{66}^T \end{pmatrix} \quad C^{NT} = \begin{pmatrix} C_{11}^{NT} & C_{12}^{NT} & C_{16}^{NT} \\ C_{12}^{NT} & C_{22}^{NT} & C_{26}^{NT} \\ C_{16}^{NT} & C_{26}^{NT} & C_{66}^{NT} \end{pmatrix}$$

et $f(\alpha) = \sqrt{\frac{\alpha}{1+\alpha}}$, $U_N(m,r) = h_N(m)j_N(r)$, $U_T(m,r) = h_T(m)j_T(r)$, $h_N(m) = 2-m$, $h_T(m) = m-1$, $j_N(r) = j_T(r) = 1-e^{-xr}$ (x grand).

Nous avons ensuite :

$$d\psi(\varepsilon,\alpha,m) = \sigma(\varepsilon,\alpha,m)d\varepsilon + A(\varepsilon,\alpha,m)d\alpha + M(\varepsilon,\alpha,m)dm + R(\varepsilon,\alpha,m)dr$$

Les lois d'état s'écrivent alors :

$$\begin{aligned}\sigma_i &= \frac{\partial\psi(\varepsilon,\alpha,m)}{\partial\varepsilon_i} \\ &= C^0_{ij}\varepsilon_j + f^2(\alpha)\left(C^N_{ij}U^2_N(m,r) + C^T_{ij}U^2_T(m,r) + C^{NT}_{ij}U_N(m,r)U_T(m,r)\right)\varepsilon_j\end{aligned} \tag{8.12}$$

$$\begin{aligned}A(\varepsilon,\alpha,m) &= \frac{\partial\psi(\varepsilon,\alpha,m)}{\partial\alpha} \\ &= f(\alpha)f'(\alpha)\left(C^N_{ij}U^2_N(m,r) + C^T_{ij}U^2_T(m,r) + C^{NT}_{ij}U_N(m,r)U_T(m,r)\right)\varepsilon_i\varepsilon_j\end{aligned} \tag{8.13}$$

$$\begin{aligned}M(\varepsilon,\alpha,m) = \frac{\partial\psi(\varepsilon,\alpha,m)}{\partial m} &= \frac{1}{2}f^2(\alpha)\ldots \\ \ldots\Bigg(2C^N_{ij}U_N(m,r)\frac{\partial U_N(m,r)}{\partial m} &+ 2C^T_{ij}U_T(m,r)\frac{\partial U_T(m,r)}{\partial m} + \ldots \\ \ldots C^{NT}_{ij}\{U_N(m,r)\frac{\partial U_T(m,r)}{\partial m} &+ \frac{\partial U_N(m,r)}{\partial m}U_T(m,r)\}\Bigg)\varepsilon_i\varepsilon_j\end{aligned} \tag{8.14}$$

$$\begin{aligned}R(\varepsilon,\alpha,m) = \frac{\partial\psi(\varepsilon,\alpha,m)}{\partial r} &= \frac{1}{2}f^2(\alpha)\ldots \\ \ldots\Bigg(2C^N_{ij}U_N(m,r)\frac{\partial U_N(m,r)}{\partial r} &+ 2C^T_{ij}U_T(m,r)\frac{\partial U_T(m,r)}{\partial r} + \ldots \\ \ldots C^{NT}_{ij}\{U_N(m,r)\frac{\partial U_T(m,r)}{\partial r} &+ \frac{\partial U_N(m,r)}{\partial r}U_T(m,r)\}\Bigg)\varepsilon_i\varepsilon_j\end{aligned} \tag{8.15}$$

La condition de cohérence $(c(\varepsilon,\alpha,m) = 0, dc(\varepsilon,\alpha,m) = 0)$ écrite en phase d'endommagement conduit à la loi d'évolution suivante :

$$d\alpha = \frac{\frac{\partial^2\psi(\varepsilon,\alpha,m)}{\partial\alpha\partial\varepsilon}d\varepsilon + \left(\frac{\partial^2\psi(\varepsilon,\alpha,m)}{\partial\alpha\partial m} - \frac{\partial A_c(\alpha,m)}{\partial m}\right)dm + \left(\frac{\partial^2\psi(\varepsilon,\alpha,m)}{\partial\alpha\partial r} - \frac{\partial A_c(\alpha,m)}{\partial r}\right)dr}{\frac{\partial A_c(\alpha,m)}{\partial\alpha} - \frac{\partial^2\psi(\varepsilon,\alpha,m)}{\partial\alpha^2}} \tag{8.16}$$

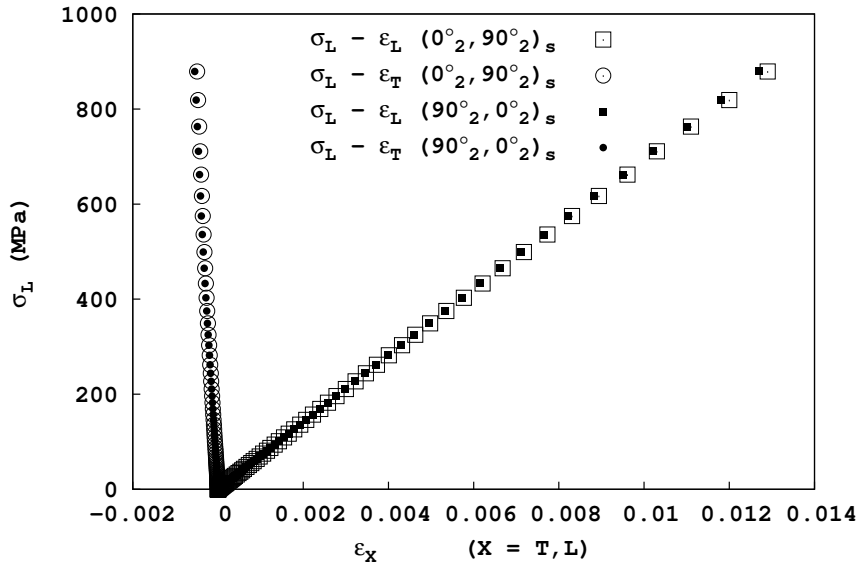
L'influence de l'évolution de la géométrie des fissures $(m,\ r)$ sur leur évolution en terme de densité peut être importante [26]. Mais, ici, pour le type de matériau considéré, au regard d'observations expérimentales, nous pouvons supposer que l'influence de l'évolution des variables (m,r) sur l'évolution de la variable α est négligeable. Cette hypothèse est légitime car les changements de forme des fissures ne sont pas significatifs (Paragraphe 8.1). Nous obtenons alors la loi d'évolution simplifiée suivante :

$$d\alpha = \frac{\frac{\partial^2\psi(\varepsilon,\alpha,m)}{\partial\alpha\partial\varepsilon_i}d\varepsilon_i}{\frac{\partial A_c(\alpha,m)}{\partial\alpha} - \frac{\partial^2\psi(\varepsilon,\alpha,m)}{\partial\alpha^2}} \tag{8.17}$$

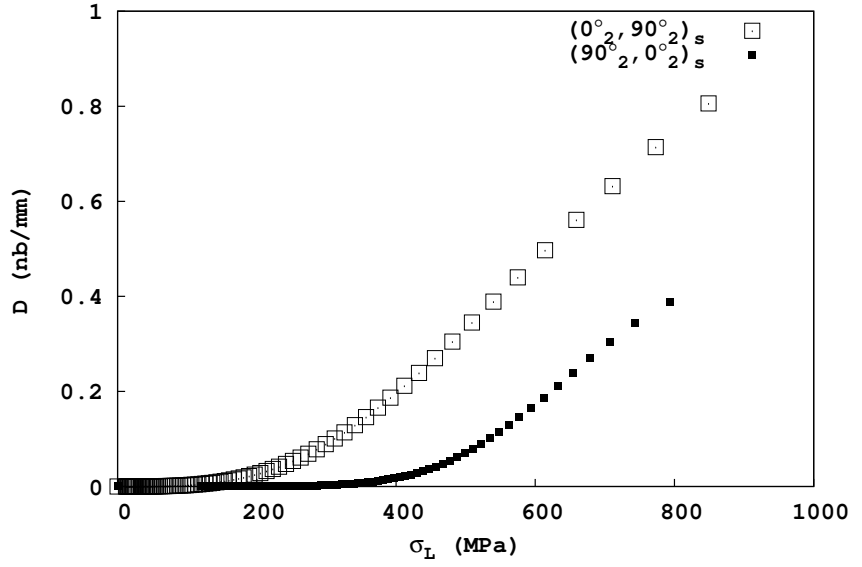
avec :

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2\psi(\varepsilon,\alpha,m)}{\partial\alpha\partial\varepsilon_i} = 2f(\alpha)f'(\alpha)\left(C^N_{ij}U^2_N(m,r) + C^T_{ij}U^2_T(m,r) + C^{NT}_{ij}U_N(m,r)U_T(m,r)\right)\varepsilon_j \\ \dfrac{\partial^2\psi(\varepsilon,\alpha,m)}{\partial\alpha^2} = (f'(\alpha)^2 + f(\alpha)f''(\alpha))\left(C^N_{ij}U^2_N(m,r) + C^T_{ij}U^2_T(m,r) + C^{NT}_{ij}U_N(m,r)U_T(m,r)\right)\varepsilon_i\varepsilon_j\end{cases}$$

8.8 Quelques courbes expérimentales. Essais quasi-statiques



(a)



(b)

FIGURE 8.4 – Essai de traction longitudinale sur éprouvette $(0°_2, 90°_2)_s$ et $(90°_2, 0°_2)_s$ [61]. Matériau T300/914. (a) Contrainte longitudinale appliquée σ_L en fonction de la déformation longitudinale ε_L et de la déformation transversale ε_T. (b) Densité de fissures intralaminaires dans les plis à 90° en fonction de la contrainte longitudinale appliquée σ_L.

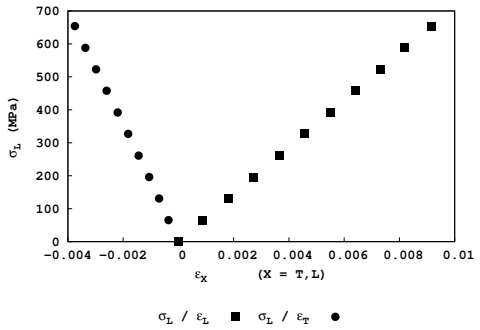


FIGURE 8.5 – Essai de traction longitudinale sur éprouvette $(0°_2, 45°_2)_s$ [61]. Matériau T300/914. Contrainte longitudinale appliquée σ_L en fonction de la déformation longitudinale ε_L et de la déformation transversale ε_T.

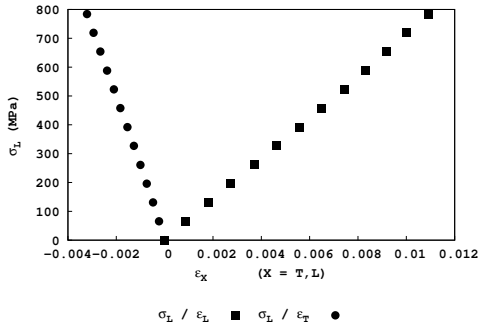


FIGURE 8.6 – Essai de traction longitudinale sur éprouvette $(0°_2, 60°_2)_s$ [61]. Matériau T300/914. Contrainte longitudinale appliquée σ_L en fonction de la déformation longitudinale ε_L et de la déformation transversale ε_T.

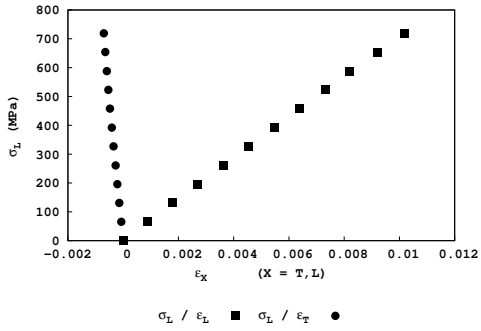


FIGURE 8.7 – Essai de traction longitudinale sur éprouvette $(0°_2, 80°_2)_s$ [61]. Matériau T300/914. Contrainte longitudinale appliquée σ_L en fonction de la déformation longitudinale ε_L et de la déformation transversale ε_T.

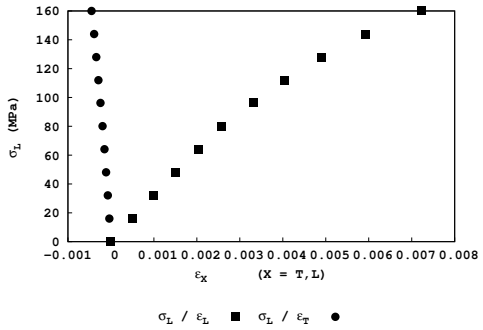


FIGURE 8.8 – Essai de traction longitudinale sur éprouvette $(20°_2, 90°_2)_s$ [61]. Matériau T300/914. Contrainte longitudinale appliquée σ_L en fonction de la déformation longitudinale ε_L et de la déformation transversale ε_T.

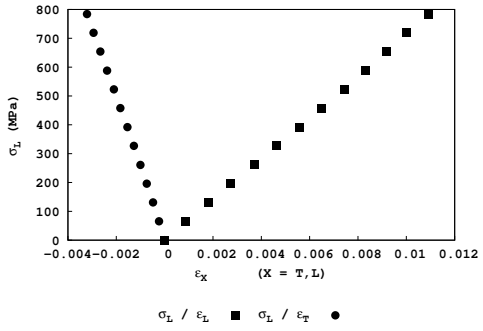


FIGURE 8.9 – Essai de traction longitudinale sur éprouvette $(40°_2, 90°_2)_s$ [61]. Matériau T300/914. Contrainte longitudinale appliquée σ_L en fonction de la déformation longitudinale ε_L et de la déformation transversale ε_T.

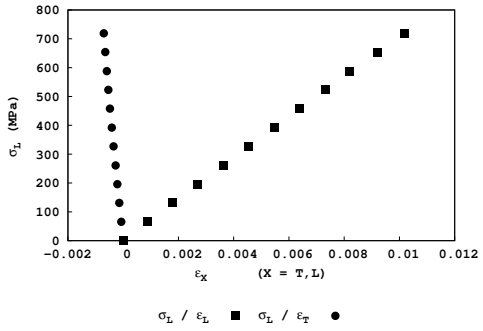
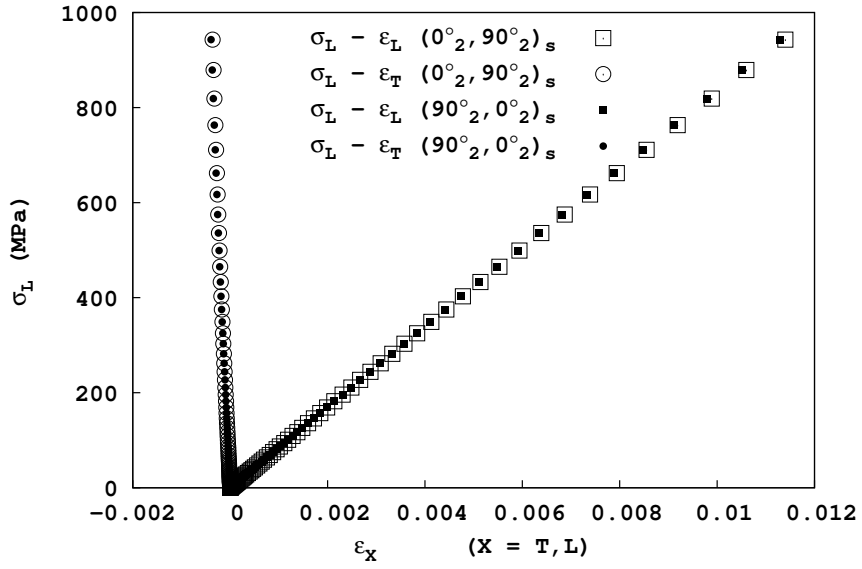
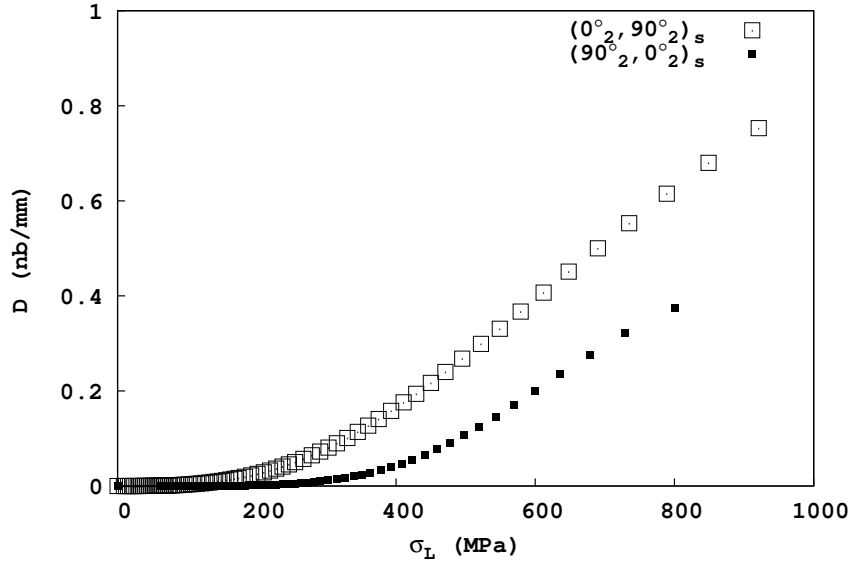


FIGURE 8.10 – Essai de traction longitudinale sur éprouvette $(60°_2, 90°_2)_s$ [61]. Matériau T300/914. Contrainte longitudinale appliquée σ_L en fonction de la déformation longitudinale ε_L et de la déformation transversale ε_T.



(a)



(b)

FIGURE 8.11 – Essai de traction longitudinale sur éprouvette $(0°_2, 90°_2)_s$ et $(90°_2, 0°_2)_s$ [61]. Matériau T300/5208. (a) Contrainte longitudinale appliquée σ_L en fonction de la déformation longitudinale ε_L et de la déformation transversale ε_T. (b) Densité de fissures intralaminaires dans les plis à 90° en fonction de la contrainte longitudinale appliquée σ_L.

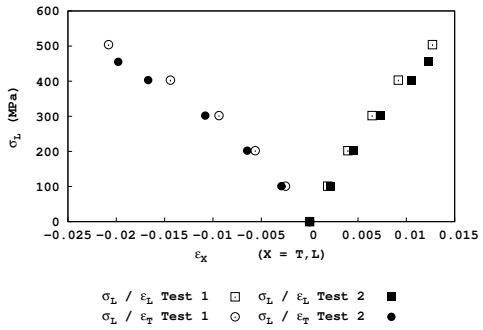


FIGURE 8.12 – Essai de traction longitudinale sur éprouvette $(30°, -30°)_{2s}$ [42]. Matériau T300/5208. Contrainte longitudinale appliquée σ_L en fonction de la déformation longitudinale ε_L et de la déformation transversale ε_T.

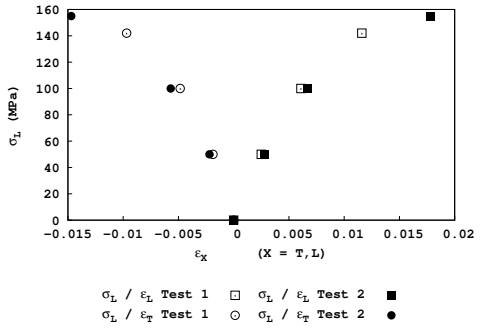


FIGURE 8.13 – Essai de traction longitudinale sur éprouvette $(45°, -45°)_{2s}$ [42]. Matériau T300/5208. Contrainte longitudinale appliquée σ_L en fonction de la déformation longitudinale ε_L et de la déformation transversale ε_T.

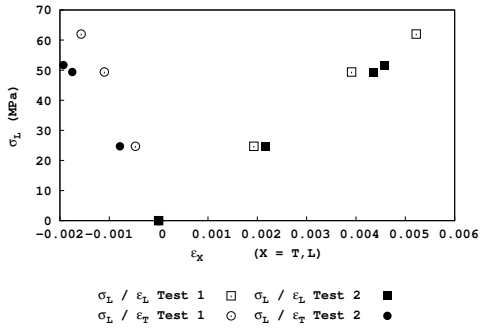


FIGURE 8.14 – Essai de traction longitudinale sur éprouvette $(60°, -60°)_{2s}$ [42]. Matériau T300/5208. Contrainte longitudinale appliquée σ_L en fonction de la déformation longitudinale ε_L et de la déformation transversale ε_T.

8.9 Quelques courbes expérimentales. Essais de fatigue

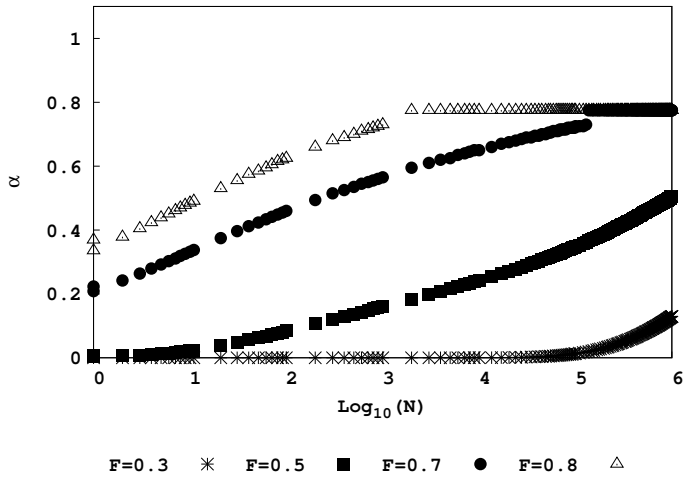


FIGURE 8.15 – Essai de fatigue en traction longitudinale sur une éprouvette $(0°_2, 90°_2)_s$ [65]. Matériau T300/914. Variable d'endommagement α dans le pli à 90° en fonction du nombre de cycles N pour différentes fractions ($F = 0.3, 0.5, 0.7, 0.8$) de la sollicitation à rupture de l'éprouvette (pour un rapport de charge égal à 0.1 et une fréquence comprise entre 0.1 Hz et 10 Hz).

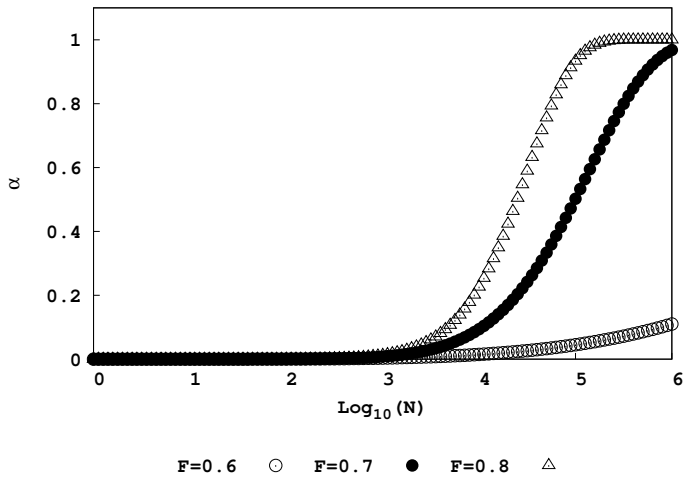


FIGURE 8.16 – Essai de fatigue en traction longitudinale sur éprouvette $(0°_2, +55°_2, -55°_2)_s$ [65]. Variable d'endommagement α dans le pli à $+55°$ (égale à celle dans le pli à $-55°$) en fonction du nombre de cycles N pour différentes fractions ($F = 0.6, 0.7, 0.8$) de la sollicitation à rupture de l'éprouvette (pour un rapport de charge égal à 0.1 et une fréquence comprise entre 0.1 Hz et 10 Hz).

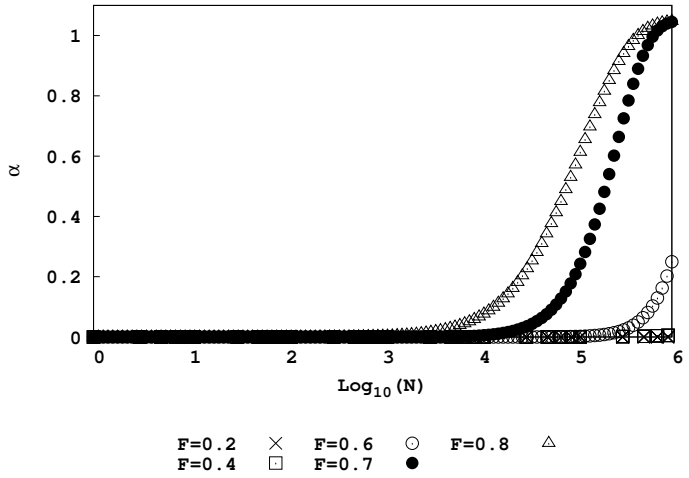


FIGURE 8.17 – Essai de fatigue en traction longitudinale sur éprouvette $(0°_2, +45°_2, -45°_2)_s$ [65]. Matériau T300/914. Variable d'endommagement α dans le pli à $+45°$ (égale à celle dans le pli à $-45°$) en fonction du nombre de cycles N pour différentes fractions ($F = 0.2, 0.4, 0.6, 0.7, 0.8$) de la sollicitation à rupture de l'éprouvette (pour un rapport de charge égal à 0.1 et une fréquence comprise entre 0.1 Hz et 10 Hz).

8.10 Annexe locale - Récapitulation des équations du modèle général de fissuration intralaminaire

8.10.1 Fonction d'état et lois d'état. Dérivées partielles premières et secondes

$$\psi(\varepsilon,\alpha,m_{23},r_1,r_{23}) = \Phi(\alpha,m_{23},r_1,r_{23}) + \ldots \\ \ldots \frac{1}{2}\left(C^0_{ij} + f^2(\alpha)\left(\sum_{p,q=1,p\leqslant q}^{3} D^{(pq)}_{ij} U_p(\alpha,m_{23},r_1,r_{23})U_q(\alpha,m_{23},r_1,r_{23})\right)\right)\varepsilon_i\varepsilon_j \quad (8.18)$$

$$d\psi(\varepsilon,\alpha,m_{23},r_1,r_{23}) = \frac{\partial\psi(\varepsilon,\alpha,m_{23},r_1,r_{23})}{\partial\varepsilon}d\varepsilon + \frac{\partial\psi(\varepsilon,\alpha,m_{23},r_1,r_{23})}{\partial\alpha}d\alpha + \ldots \\ \ldots \frac{\partial\psi(\varepsilon,\alpha,m_{23},r_1,r_{23})}{\partial m_{23}}dm_{23} + \frac{\partial\psi(\varepsilon,\alpha,m_{23},r_1,r_{23})}{\partial r_1}dr_1 + \frac{\partial\psi(\varepsilon,\alpha,m_{23},r_1,r_{23})}{\partial r_{23}}dr_{23} \quad (8.19)$$

$$\sigma_i = \frac{\partial\psi(\varepsilon,\alpha,m_{23},r_1,r_{23})}{\partial\varepsilon_i} = \left(C^0_{ij} + f^2(\alpha)\sum_{\substack{p,q=1\\p\leq q}}^{3} D^{(pq)}_{ij} U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)\varepsilon_j \\ = C_{ij}(\alpha,m_{23},r_1,r_{23})\varepsilon_j \quad (8.20)$$

$$A(\varepsilon,\alpha,m_{23},r_1,r_{23}) = \frac{\partial\psi(\varepsilon,\alpha,m_{23},r_1,r_{23})}{\partial\alpha} = \frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}(\alpha,m_{23},r_1,r_{23}) + \ldots \\ \ldots f(\alpha)f'(\alpha)\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D^{(pq)}_{ij} U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)\varepsilon_i\varepsilon_j \quad (8.21)$$

$$M_{23}(\varepsilon,\alpha,m_{23},r_1,r_{23}) = \frac{\partial\psi(\varepsilon,\alpha,m_{23},r_1,r_{23})}{\partial m_{23}} = \frac{\partial\Phi}{\partial m_{23}}(\alpha,m_{23},r_1,r_{23}) + \ldots \\ \ldots \frac{1}{2}f^2(\alpha)\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D^{(pq)}_{ij}\left(\frac{\partial U_p}{\partial m_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23}) + U_p(m_{23},r_1,r_{23})\frac{\partial U_q}{\partial m_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})\right)\varepsilon_i\varepsilon_j\right) \quad (8.22)$$

$$R_1(\varepsilon,\alpha,m_{23},r_1,r_{23}) = \frac{\partial\psi(\varepsilon,\alpha,m_{23},r_1,r_{23})}{\partial r_1} = \frac{\partial\Phi}{\partial r_1}(\alpha,m_{23},r_1,r_{23}) + \ldots \\ \ldots \frac{1}{2}f^2(\alpha)\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D^{(pq)}_{ij}\left(\frac{\partial U_p}{\partial r_1}(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23}) + U_p(m_{23},r_1,r_{23})\frac{\partial U_q}{\partial r_1}(m_{23},r_1,r_{23})\right)\varepsilon_i\varepsilon_j\right) \quad (8.23)$$

$$R_{23}(\varepsilon,\alpha,m_{23},r_1,r_{23}) = \frac{\partial\psi(\varepsilon,\alpha,m_{23},r_1,r_{23})}{\partial r_{23}} = \frac{\partial\Phi}{\partial r_{23}}(\alpha,m_{23},r_1,r_{23}) + \ldots \\ \ldots \frac{1}{2}f^2(\alpha)\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D^{(pq)}_{ij}\left(\frac{\partial U_p}{\partial r_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23}) + U_p(m_{23},r_1,r_{23})\frac{\partial U_q}{\partial r_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})\right)\varepsilon_i\varepsilon_j\right) \quad (8.24)$$

$$\frac{\partial^2\psi(\varepsilon,\alpha,m_{23},r_1,r_{23})}{\partial\alpha^2} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial\alpha^2}(\alpha,m_{23},r_1,r_{23}) + \ldots \\ \ldots \left(f'^2(\alpha) + f(\alpha)f''(\alpha)\right)\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D^{(pq)}_{ij} U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)\varepsilon_i\varepsilon_j \quad (8.25)$$

$$\frac{\partial^2\psi(\varepsilon,\alpha,m_{23},r_1,r_{23})}{\partial\alpha\partial\varepsilon_i} = 2f(\alpha)f'(\alpha)\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p\leq q}}^{3} D^{(pq)}_{ij} U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)\varepsilon_j \quad (8.26)$$

$$\frac{\partial^2\psi(\varepsilon,\alpha,m_{23},r_1,r_{23})}{\partial\alpha\partial m_{23}} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial\alpha\partial m_{23}}(\alpha,m_{23},r_1,r_{23}) + \dots \\ \dots f(\alpha)f'(\alpha)\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}\left(\frac{\partial U_p}{\partial m_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23}) + U_p(m_{23},r_1,r_{23})\frac{\partial U_q}{\partial m_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})\right)\right)\varepsilon_i\varepsilon_j \quad (8.27)$$

$$\frac{\partial^2\psi(\varepsilon,\alpha,m_{23},r_1,r_{23})}{\partial\alpha\partial r_1} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial\alpha\partial r_1}(\alpha,m_{23},r_1,r_{23}) + \dots \\ \dots f(\alpha)f'(\alpha)\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}\left(\frac{\partial U_p}{\partial r_1}(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23}) + U_p(m_{23},r_1,r_{23})\frac{\partial U_q}{\partial r_1}(m_{23},r_1,r_{23})\right)\right)\varepsilon_i\varepsilon_j \quad (8.28)$$

$$\frac{\partial^2\psi(\varepsilon,\alpha,m_{23},r_1,r_{23})}{\partial\alpha\partial r_{23}} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial\alpha\partial r_{23}}(\alpha,m_{23},r_1,r_{23}) + \dots \\ \dots f(\alpha)f'(\alpha)\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}\left(\frac{\partial U_p}{\partial r_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23}) + U_p(m_{23},r_1,r_{23})\frac{\partial U_q}{\partial r_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})\right)\right)\varepsilon_i\varepsilon_j \quad (8.29)$$

8.10.2 Loi d'évolution de la variable d'endommagement scalaire du modèle général dans sa forme la plus générale

Nous supposons ici qu'il peut y avoir de l'énergie résiduelle dans le matériau, due au fait de l'endommagement. Par conséquent, la fonction $\Phi(\alpha,m_{23},r_1,r_{23})$ n'est donc pas nulle.

$$d\alpha(M,t) = \frac{Q_{nume}}{\frac{\partial A_c(\alpha,m_{23},r_1,r_{23})}{\partial\alpha} - \frac{\partial^2\psi(\varepsilon,\alpha,m_{23},r_1,r_{23})}{\partial\alpha^2}} \quad (8.30)$$

$$Q_{nume} = \frac{\partial^2\psi(\epsilon,\alpha,m_{23},r_1,r_{23})}{\partial\alpha\partial\varepsilon}d\varepsilon + \dots \\ \dots\left(\frac{\partial^2\psi(\epsilon,\alpha,m_{23},r_1,r_{23})}{\partial\alpha\partial m_{23}} - \frac{\partial A_c(\alpha,m_{23},r_1,r_{23})}{\partial m_{23}}\right)dm_{23} + \dots \\ \dots\left(\frac{\partial^2\psi(\epsilon,\alpha,m_{23},r_1,r_{23})}{\partial\alpha\partial r_1} - \frac{\partial A_c(\alpha,m_{23},r_1,r_{23})}{\partial r_1}\right)dr_1 + \dots \\ \dots\left(\frac{\partial^2\psi(\epsilon,\alpha,m_{23},r_1,r_{23})}{\partial\alpha\partial r_{23}} - \frac{\partial A_c(\alpha,m_{23},r_1,r_{23})}{\partial r_{23}}\right)dr_{23} \quad (8.31)$$

$$Q_{nume} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial\alpha\partial m_{23}}(\alpha,m_{23},r_1,r_{23})dm_{23} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\alpha\partial r_1}(\alpha,m_{23},r_1,r_{23})dr_1 + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\alpha\partial r_{23}}(\alpha,m_{23},r_1,r_{23})dr_{23} + \dots \\ \dots 2f(\alpha)f'(\alpha)\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p\le q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)\varepsilon_j d\varepsilon_i + \dots \\ \dots f(\alpha)f'(\alpha)\left(\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}\left(\frac{\partial U_p}{\partial m_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23}) + U_p(m_{23},r_1,r_{23})\frac{\partial U_q}{\partial m_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})\right)\right)\varepsilon_i\varepsilon_j\right)dm_{23} + \dots \\ \dots f(\alpha)f'(\alpha)\left(\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}\left(\frac{\partial U_p}{\partial r_1}(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23}) + U_p(m_{23},r_1,r_{23})\frac{\partial U_q}{\partial r_1}(m_{23},r_1,r_{23})\right)\right)\varepsilon_i\varepsilon_j\right)dr_1 + \dots \\ \dots f(\alpha)f'(\alpha)\left(\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}\left(\frac{\partial U_p}{\partial r_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23}) + U_p(m_{23},r_1,r_{23})\frac{\partial U_q}{\partial r_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})\right)\right)\varepsilon_i\varepsilon_j\right)dr_{23} + \dots \\ - \frac{\partial A_c(\alpha,m_{23},r_1,r_{23})}{\partial m_{23}}dm_{23} - \frac{\partial A_c(\alpha,m_{23},r_1,r_{23})}{\partial r_1}dr_1 - \frac{\partial A_c(\alpha,m_{23},r_1,r_{23})}{\partial r_{23}}dr_{23} \quad (8.32)$$

$$\frac{\partial^2\psi(\varepsilon,\alpha,m_{23},r_1,r_{23})}{\partial\alpha^2} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial\alpha^2}(\alpha,m_{23},r_1,r_{23}) + \dots \\ \dots\left(f'^2(\alpha) + f(\alpha)f''(\alpha)\right)\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)\varepsilon_i\varepsilon_j \quad (8.33)$$

8.10.3 Loi d'évolution de la variable d'endommagement scalaire du modèle général dans sa forme simplifiée 1

Nous supposons ici qu'il n'y a pas d'énergie résiduelle dans le matériau, due au fait de l'endommagement. Par conséquent, la fonction $\Phi(\alpha, m_{23}, r_1, r_{23})$ est identiquement nulle.

$$d\alpha(M,t) = \frac{Q_{nume}}{\dfrac{\partial A_c(\alpha, m_{23}, r_1, r_{23})}{\partial \alpha} - \dfrac{\partial^2 \psi(\varepsilon, \alpha, m_{23}, r_1, r_{23})}{\partial \alpha^2}} \tag{8.34}$$

$$\begin{aligned} Q_{nume} = \frac{\partial^2 \psi(\epsilon, \alpha, m_{23}, r_1, r_{23})}{\partial \alpha \partial \varepsilon} d\varepsilon + \dots \\ \dots \Big(\frac{\partial^2 \psi(\epsilon, \alpha, m_{23}, r_1, r_{23})}{\partial \alpha \partial m_{23}} - \frac{\partial A_c(\alpha, m_{23}, r_1, r_{23})}{\partial m_{23}}\Big) dm_{23} + \dots \\ \dots \Big(\frac{\partial^2 \psi(\epsilon, \alpha, m_{23}, r_1, r_{23})}{\partial \alpha \partial r_1} - \frac{\partial A_c(\alpha, m_{23}, r_1, r_{23})}{\partial r_1}\Big) dr_1 + \dots \\ \dots \Big(\frac{\partial^2 \psi(\epsilon, \alpha, m_{23}, r_1, r_{23})}{\partial \alpha \partial r_{23}} - \frac{\partial A_c(\alpha, m_{23}, r_1, r_{23})}{\partial r_{23}}\Big) dr_{23} \end{aligned} \tag{8.35}$$

$$\begin{aligned} Q_{nume} = 2f(\alpha)f'(\alpha) \left(\sum_{\substack{p,q=1 \\ p \le q}}^{3} D_{ij}^{(pq)} U_p(m_{23}, r_1, r_{23}) U_q(m_{23}, r_1, r_{23}) \right) \varepsilon_j d\varepsilon_i + \dots \\ \dots f(\alpha)f'(\alpha) \left(\left(\sum_{\substack{p,q=1 \\ p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)} \left(\frac{\partial U_p}{\partial m_{23}}(m_{23}, r_1, r_{23}) U_q(m_{23}, r_1, r_{23}) + U_p(m_{23}, r_1, r_{23}) \frac{\partial U_q}{\partial m_{23}}(m_{23}, r_1, r_{23}) \right) \right) \varepsilon_i \varepsilon_j \right) dm_{23} + \dots \\ \dots f(\alpha)f'(\alpha) \left(\left(\sum_{\substack{p,q=1 \\ p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)} \left(\frac{\partial U_p}{\partial r_1}(m_{23}, r_1, r_{23}) U_q(m_{23}, r_1, r_{23}) + U_p(m_{23}, r_1, r_{23}) \frac{\partial U_q}{\partial r_1}(m_{23}, r_1, r_{23}) \right) \right) \varepsilon_i \varepsilon_j \right) dr_1 + \dots \\ \dots f(\alpha)f'(\alpha) \left(\left(\sum_{\substack{p,q=1 \\ p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)} \left(\frac{\partial U_p}{\partial r_{23}}(m_{23}, r_1, r_{23}) U_q(m_{23}, r_1, r_{23}) + U_p(m_{23}, r_1, r_{23}) \frac{\partial U_q}{\partial r_{23}}(m_{23}, r_1, r_{23}) \right) \right) \varepsilon_i \varepsilon_j \right) dr_{23} + \dots \\ - \frac{\partial A_c(\alpha, m_{23}, r_1, r_{23})}{\partial m_{23}} dm_{23} - \frac{\partial A_c(\alpha, m_{23}, r_1, r_{23})}{\partial r_1} dr_1 - \frac{\partial A_c(\alpha, m_{23}, r_1, r_{23})}{\partial r_{23}} dr_{23} \end{aligned} \tag{8.36}$$

$$\frac{\partial^2 \psi(\varepsilon, \alpha, m_{23}, r_1, r_{23})}{\partial \alpha^2} = \Big(f'^2(\alpha) + f(\alpha) f''(\alpha) \Big) \left(\sum_{\substack{p,q=1 \\ p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)} U_p(m_{23}, r_1, r_{23}) U_q(m_{23}, r_1, r_{23}) \right) \varepsilon_i \varepsilon_j \tag{8.37}$$

8.10.4 Loi d'évolution de la variable d'endommagement scalaire du modèle général dans sa forme simplifiée 2

Nous supposons ici qu'il n'y a pas d'énergie résiduelle dans le matériau, due au fait de l'endommagement. Par conséquent, la fonction $\Phi(\alpha, m_{23}, r_1, r_{23})$ est identiquement nulle. Nous faisons l'hypothèse également, que l'influence de l'évolution des variables (m_{23}, r_1, r_{23}) sur l'évolution de la variable α est négligeable. Cette hypothèse est légitime si les changements de forme des fissures ne sont pas significatifs. Pour le cas du phénomène considéré ici, cette hypothèse est légitime (Paragraphe 8.1).

$$d\alpha(M,t) = \frac{Q_{nume}}{\dfrac{\partial A_c(\alpha, m_{23}, r_1, r_{23})}{\partial \alpha} - \dfrac{\partial^2 \psi(\varepsilon, \alpha, m_{23}, r_1, r_{23})}{\partial \alpha^2}} \tag{8.38}$$

$$Q_{nume} = \frac{\partial^2 \psi(\epsilon, \alpha, m_{23}, r_1, r_{23})}{\partial \alpha \partial \varepsilon} d\varepsilon = 2f(\alpha)f'(\alpha) \left(\sum_{\substack{p,q=1 \\ p \le q}}^{3} D_{ij}^{(pq)} U_p(m_{23}, r_1, r_{23}) U_q(m_{23}, r_1, r_{23}) \right) \varepsilon_j d\varepsilon_i \tag{8.39}$$

$$\frac{\partial^2 \psi(\varepsilon, \alpha, m_{23}, r_1, r_{23})}{\partial \alpha^2} = \Big(f'^2(\alpha) + f(\alpha) f''(\alpha) \Big) \left(\sum_{\substack{p,q=1 \\ p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)} U_p(m_{23}, r_1, r_{23}) U_q(m_{23}, r_1, r_{23}) \right) \varepsilon_i \varepsilon_j \tag{8.40}$$

8.10.5 Loi d'évolution de la variable d'endommagement scalaire du modèle original dans ses formes générale et simplifiée

La loi d'évolution de la variable d'endommagement scalaire du modèle original est :

$$d\alpha = \frac{\frac{\partial^2\psi(\varepsilon,\alpha,m)}{\partial\alpha\partial\varepsilon}d\varepsilon + \left(\frac{\partial^2\psi(\varepsilon,\alpha,m)}{\partial\alpha\partial m} - \frac{\partial A_c(\alpha,m)}{\partial m}\right)dm + \left(\frac{\partial^2\psi(\varepsilon,\alpha,m)}{\partial\alpha\partial r} - \frac{\partial A_c(\alpha,m)}{\partial r}\right)dr}{\frac{\partial A_c(\alpha,m)}{\partial\alpha} - \frac{\partial^2\psi(\varepsilon,\alpha,m)}{\partial\alpha^2}} \tag{8.41}$$

Lorsque l'influence de l'évolution des variables (m, r) sur l'évolution de la variable α est négligée, l'équation précédente prend la forme simplifiée suivante :

$$d\alpha = \frac{\frac{\partial^2\psi(\varepsilon,\alpha,m)}{\partial\alpha\partial\varepsilon_i}d\varepsilon_i}{\frac{\partial A_c(\alpha,m)}{\partial\alpha} - \frac{\partial^2\psi(\varepsilon,\alpha,m)}{\partial\alpha^2}} \tag{8.42}$$

Chapitre 9

Ecriture d'une loi d'évolution locale dans un cadre de fatigue. Cas du phénomène de fissuration intralaminaire

9.1 Objectif et démarche

L'objectif de ce chapitre est d'appliquer, dans un cas particulier de phénomène d'endommagement, le formalisme général développé jusqu'à présent et synthétisé dans (Chapitre 7). Les différentes étapes décrites (Chapitre 7) sont reprises point par point en vue de justifier l'obtention d'une loi locale d'évolution en fatigue sous forme cyclique et ainsi d'obtenir une approche locale de la fatigue qui puisse être utilisée pour le calcul d'une structure sollicitée en fatigue. Le phénomène d'endommagement considéré est le phénomène de fissuration intralaminaire qui existe notamment dans les composites à fibres continues. La modélisation utilisée de ce phénomène dans un cadre quasi-statique est essentiellement celle faite (Chapitre 8) de manière générale (sans hypothèse particulière de formulation plane) et dénommée modèle général. Toutefois, pour des raisons d'allègement des écritures, le modèle original qui a donné naissance à ce modèle dit général, est également utilisé (Chapitre 8 - Paragraphe 8.7).

Dans cette démarche, nous essayons de mettre le moins d'hypothèse possible afin de rester le plus général. Toutefois, dans l'état actuel des choses, la définition de la notion de cycles semble être la contrainte la plus limitante et nous sommes alors dans l'obligation de nous placer dans un cadre de classification structurale relativement contraignant, c'est-à-dire, finalement, une classe qui permet de mener à bien, sans trop de difficulté, notre projet d'approche locale.

Ainsi, après avoir vérifié que le phénomène considéré obéit effectivement aux limitations générales définies (Etape 1), une classification structurale et un compteur de cycles structural sont définis (Etape 2). Puis la classe locale est mise en évidence et le compteur de nombre de cycles local identifié (Etape 3) et nous regardons si des dispositions particulières du phénomène et de sa modélisation peuvent finalement permettre d'étendre les cadres structural et local (Etape 4). Ensuite, nous donnons le préalable indispensable à l'écriture de la loi locale cyclique (Etape 5) et à son identification (Etape 6) : l'adaptation des formules de passage au phénomène considéré. Ce préalable est volontairement très complet : il est réalisé pour toutes les classes locales au point M et toutes celles sur un domaine, et ne se limite pas à la classe locale spécifique identifiée à l'Etape 3. De même, les lois locales cycliques sont écrites pour tous ces cas, même si pour certaines

des classes locales ces équations ne sont pas valides (à l'heure actuelle de nos réflexions). Ce que nous voulons montrer en gardant cette généralité (et donc une présentation très "catalogue" des différents cas), c'est que finalement le point bloquant à ces écritures est la définition du compteur de nombre de cycle local, mais pas l'écriture de la loi proprement-dite. Si ce verrou peut être un jour levé, les équations auront ainsi été écrites.

En résumé, nous écrivons les lois cycliques pour :

- le modèle original dans sa forme simplifiée (Chapitre 8 - Paragraphe 8.7, Eq. 8.17) et le modèle général dans sa seconde forme simplifiée (Chapitre 8 - Paragraphe 8.10, Eq. 8.38), pour lesquels seuls les incréments de la variable pilote sont présents dans la loi d'évolution de l'endommagement ;
- le modèle général dans sa première forme simplifiée (Chapitre 8 - Paragraphe 8.10, Eq. 8.34), pour lequel les incréments d'autres variables d'état que la variable pilote sont présents dans la loi d'évolution de l'endommagement,

et :

- pour une classe structurale spécifique (Etape 2) qui garantit la notion de compteur de nombre de cycles structural, étendue à une autre, plus générale, en raison des spécificités de l'endommagement considéré (Etape 4) ;
- pour, plus spécifiquement, les classes locales déduites des classes structurales choisies (Etape 3) ou induites (Etape 4) en raison des spécificités de l'endommagement considéré, et garantissant la notion de compteur de nombre de cycles local ;
- en annexe, pour toutes les classes locales au point M et toutes les classes locales sur un domaine, valides ou non quant à l'existence d'un compteur de nombre de cycles local.

En ce qui concerne l'étape 6 d'identification de la loi cyclique, nous nous limitons au cas de la loi la plus simple (modèle original dans sa forme simplifiée). Plusieurs raisons à cela :

- nous ne disposons pas des résultats expérimentaux nécessaires à l'identification des autres lois plus complexes ;
- cette étude ne concerne pas le phénomène de fissuration intralaminaire, mais le concept de fatigue. Le phénomène de fissuration intralaminaire n'est que le support d'illustration aux idées développées pour ce concept. En conséquence, il a été délibérément choisi et annoncé qu'il n'y aurait aucune campagne expérimentale sur ce sujet ;
- le processus d'identification d'une loi de fatigue (bonne ou mauvaise) est long. Celui mis en place pour la loi volontairement choisie l'a donc été. Il nous a semblé inutile de placer nos efforts sur ce point d'autant que tout le discours fait à cette étape est parfaitement illustré avec la loi choisie.

9.2 Etape 1 - Vérification des limitations générales sur le phénomène d'endommagement considéré

Le cadre général de la démarche nécessite la vérification de deux hypothèses fortes (Chapitre 7) :

- le phénomène considéré doit être physiquement le même lorsqu'il apparaît sous chargement quasi-statique et sous chargement cyclique. Des observations (Fig. 8.2) notamment par microscopie optique valident cette hypothèse dans le cas du phénomène considéré ici ;
- le phénomène considéré doit être tel que ses variations sont lentes et faibles en fonction du temps, ou en d'autres termes, en fonction de l'application de la sollicitation qui elle-même dépend du temps. Sans cette hypothèse, le principe de la linéarisation des lois (inscrit sous la forme des formules de passage) ne peut pas être valide. Des mesures expérimentales (Fig. 8.15, Fig. 8.17, Fig. 8.16) faites sur des éprouvettes simples, qui relèvent la variable

d'endommagement (α) caractéristique du phénomène en fonction du nombre de cycles, valident cette hypothèse.

A ces deux conditions, il s'ajoute une condition validée expérimentalement, mais aussi dictée par le bon sens signalant que quoi que subisse un matériau, aussi faible cela soit-il, il s'endommage. Ainsi, nous supposons que le seuil d'endommagement est nul.

9.3 Etape 2 - Ecriture du problème structural pour la mise en évidence de la classe structurale du problème et définition d'un compteur de nombre de cycles au niveau structural

9.3.1 Compteur de nombre de cycles au niveau structural : limitation non obligatoire sur les classes structurales des problèmes de fatigue... mais la plus grande généralité semble trop complexe pour notre étude qui est exploratoire

Nous décidons dans l'application qui va être faite d'imposer une autre limitation à celles précédentes : elle concerne la notion de cycle.

Au niveau structural, le compteur de nombre de cycles peut exister (problèmes de fatigue de type $SP(I)$ et suivants, Chapitre 4) dès lors que les sollicitations sont périodiques. Mais, pour le but que nous poursuivons (faire une approche locale de la fatigue), traiter la plus grande des généralités de ces problèmes ne semble pas accessible. Par exemple, comment définir un compteur de cycles, déjà au niveau structural, dès lors que deux sollicitations sont périodiques mais dans une proportion non rationnelle de leurs fréquences. Pour cette raison, les problèmes de fatigue envisagés ici se limitent à ceux dénommés $SPMLI(I)$ (Définition (C6), Chapitre 4). Nous rappelons que pour cette classe de problèmes, toutes les sollicitations sont périodiques avec la même période et que leur évolution temporelle est monotone linéaire (Hypothèse (H2), Chapitre 4). Un compteur structural (ou global) de nombre de cycles unique est donc alors bien défini.

9.3.2 Définition du problème structural et du compteur de cycles structural

Au niveau structural, le problème posé, noté (P), considère un système mécanique (la structure) qui occupe, au cours du temps, le domaine borné $D(t) = \Omega(t) \cup \partial\Omega(t)$, $\Omega(t)$ désignant son intérieur et $\partial\Omega(t)$ sa frontière sur laquelle sont imposées les conditions aux limites du problème, écrites pour constituer un problème bien posé (Chapitre 4 - Paragraphe 4.1). Les champs de vecteurs qui définissent les sollicitations sur la structure sont donc ces conditions aux limites et les éventuelles densités volumiques d'effort existantes (Pesanteur, par exemple).

Ce problème est supposé (imposé par l'Expérimentateur, en fait) être un problème de fatigue de type $SPMLI(I)$ (Sollicitations Périodiques Monotones Linéaires Identiques) sur l'intervalle $I = [t_a = t_0, t_b = t_{max}]$ où t_0 et t_{max} définissent respectivement l'instant initial et l'instant final de la sollicitation de la structure. Nous rappelons que :

- $S(I) = \{s_\alpha(M,t), \alpha = 1, ..., n\}$ désigne alors l'ensemble de toutes les n composantes $s_\alpha(M)$ des champs de vecteurs qui définissent les sollicitations du problème (P) au cours du temps entre les instants t_a et t_b ;
- $S(I) = S_c(I) \cup S_t(I)$ où :
  - $S_c(I)$ est l'ensemble de toutes les n_c composantes des champs de vecteurs qui définissent les sollicitations constantes au cours du temps du problème (P) ;
  - $S_t(I)$ est l'ensemble de toutes les n_t composantes des champs de vecteurs qui définissent les sollicitations non constantes au cours du temps du problème (P) ;

— dans le cadre de la fatigue, c'est l'ensemble $S_t(I)$ qui est important ;

— l'ensemble des grandeurs nécessaires à la connaissance de l'ensemble $S_t(I)$ est noté $\mathbb{S}_t(I)$.

Le problème de fatigue étant de type $SPMLI(I)$ (Définition (C6), Chapitre 4), il est donc d'une part de type $SPI(I)$, c'est-à-dire que les sollicitations $s_\alpha(M,t)$ sont identiques (Définition (D4), Chapitre 4) de loi horaire $V(t)$ sur l'intervalle de temps I. Soit :

$$\forall s_\alpha(M,t) \in S_t(I), \exists \overline{s}_\alpha(M) \in \mathbb{R}^* \text{ tel que } s_\alpha(M,t)/\overline{s}_\alpha(M) = V(t)$$

Ainsi, $\mathbb{S}_t(I) = \left\{V(t), (\overline{s}_\alpha(M))_{\alpha\in\{1,\ldots,n_t\}}\right\}$. D'autre part, les sollicitations sont monotones linéaires (Hypothèse (H2), Chapitre 4), c'est-à-dire, plus concrètement, que la fonction $V(t)$ est une fonction périodique en "dent-de-scie", de période $T[V(t)]$ de minimun V_{min} et de maximum V_{max}. Ainsi, un nombre fini de renseignements est suffisant pour connaître $S_t(I)$: $T[V(t)]$, V_{min} et V_{max} du cycle élémentaire commun à chaque $s_\alpha(M,t)$ et l'ensemble des nombres $\overline{s}_\alpha(M)$. Soit, finalement :

$$\mathbb{S}_t(I) = \left\{T[V(t)], V_{min}, V_{max}, (\overline{s}_\alpha(M))_{\alpha\in\{1,\ldots,n_t\}}\right\} \tag{9.1}$$

Ainsi, un compteur de cycles structural est défini sur la base de la période de la fonction $V(t)$ (imposée par l'Expérimentateur qui s'est placé délibérément dans un cadre $SPMLI(I)$).

9.4 Etape 3 - Mise en évidence de la classe locale du problème considéré et définition d'un compteur de nombre de cycles local par l'utilisation du problème approché

9.4.1 Mise en évidence de la variable pilote, du caractère identique de ses composantes et d'un type possible de problème local

La variable pilote est le 2-tenseur des déformations et au regard de la forme des lois d'évolution quasi-statique (Eq. 9.3, Eq. 9.4, Eq. 9.5, Eq. 9.6) toutes ses composantes sont actives dans leur cadre de modélisation (bidimensionnel ou tridimensionnel). Ainsi :

$$Q_{ij}(M,t) = \varepsilon_{ij}(M,t) = \varepsilon^*_{ij}(M,t)$$

Le comportement est élastique linéaire endommageable. Ainsi, pour un état d'endommagement donné, les composantes de la solution en contrainte, et par voie de conséquence, les composantes de la déformation, sont proportionnelles aux données, et ceci dans l'intégralité du domaine $\omega = \Omega$. Cette qualité particulière induit donc de fait que la périodicité temporelle des composantes de la déformation est acquise puisque le problème structural est de type $SPMLI(I)$. Par suite, nous pouvons nous poser la question de savoir si finalement, les composantes de la déformation pourraient être identiques, et éventuellement même, sur un domaine (ici, qui serait en fait, Ω). Pour un problème posé sur un domaine, nous devons vérifier :

$$\forall M \in \Omega, \forall \varepsilon_{ij}(M,t), \exists q_{ij}(M) \in \mathbb{R}^*, \exists V^{(ij)}(\Omega,t) \in \mathbb{R}^* / \varepsilon_{ij}(M,t) = V^{(ij)}(\Omega,t) q_{ij}(M)$$

Ainsi en prenant $V^{(ij)}(\Omega,t) = V(t)$, la relation précédente traduit en fait la linéarité aux données, qui est donc acquise de fait. Pour des composantes identiques, dès lors que le problème est posé sur un domaine, nous devons vérifier :

$$\forall M \in \Omega, \forall \varepsilon_{ij}(M,t), \exists \overline{q^{(ij)}}(\Omega) \in \mathbb{R}^*, \exists V(\Omega,t) \in \mathbb{R}^* / \varepsilon_{ij}(M,t) = V(\Omega,t) \overline{q^{(ij)}}(\Omega) q_{ij}(M)$$

Cette relation est vérifiée en prenant : $V(\Omega,t) = V(t)$, $\overline{q^{(ij)}}(\Omega) = 1$.

En conclusion, nous pouvons donc affirmer que le problème de fatigue posé est localement, un problème local de fatigue posé sur le domaine Ω de type $PPI(I,\Omega)$. En outre, compte tenu du fait que le problème structural est de type $SPMLI(I)$, finalement, nous sommes en présence d'un problème local de fatigue posé sur le domaine Ω de type $PPMLI(I,\Omega)$.

9.4.2 Mise en évidence d'un compteur de nombre de cycles local par l'utilisation du problème approché

Le cas précédent n'a aucune chance d'être le reflet de la réalité la plus générale dans la mesure où, le comportement étant dépendant de l'endommagement, donc agissant sur la variable pilote, elle ne peut pas être rigoureusement périodique. En supposant que les variations de l'endommagement sont lentes et faibles (hypothèse obligatoire, Chapitre 6 - Paragraphe 6.3.1), sur l'intervalle d'étude I, nous pouvons alors nous placer dans un cas approché idéal où la variable pilote définie comme approchée ε^+ au sens du critère :

$$c(I_k, \varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ij}^+, M) = \frac{\int_{t_{ak}}^{t_{bk}} |\varepsilon_{ij}(M,t) - \varepsilon_{ij}^+(M,t)|dt}{\int_{t_{ak}}^{t_{bk}} |\varepsilon_{ij}(M,t)|dt}$$

voit ses composantes (actives) être rigoureusement périodiques. Le cas échéant, l'intervalle I est découpé en sous-intervalles $I_k = [t_{ak}, t_{bk}]$ où cette hypothèse est vérifiée et réactualisée sur le sous-intervalle suivant.

Le problème local de fatigue approché du problème de type $PPMLI(I, \Omega)$ sur l'intervalle I_k est le problème de type $P^+PMLI(I_k, \Omega)$ (Définitions (cd6+), Chapitre 5). Les composantes de la variable pilote approchée vérifient des relations similaires à celles sur la variable pilote. Pour un problème posé sur le domaine Ω :

$$\forall M \in \Omega, \forall \varepsilon_{ij}^+(M,t), \exists q_{ij}^+(M) \in \mathbb{R}^*, \exists V^{+(ij)}(\Omega,t) \in \mathbb{R}^* / \varepsilon_{ij}^+(M,t) = V^{+(ij)}(\Omega,t) q_{ij}^+(M)$$

avec $V^{+(ij)}(\Omega,t) = V(t)$.

Pour des composantes identiques (Définition (cd2+), Chapitre 5) :

$$\forall M \in \Omega, \forall \varepsilon_{ij}^+(M,t), \exists \overline{q^{+(ij)}}(\Omega) \in \mathbb{R}^*, \exists V^+(\Omega,t) \in \mathbb{R}^* / \varepsilon_{ij}^+(M,t) = V^+(\Omega,t) \overline{q^{+(ij)}}(\Omega) q_{ij}^+(M)$$

avec : $V^+(\Omega,t) = V(t)$, $\overline{q^{+(ij)}}(\Omega) = 1$.

Les grandeurs indépendantes du temps marquant la séparabilité géométrique du domaine considéré sont choisies égales à 1 (Remarque importante, Chapitre 5.4). Pour ce problème, l'ensemble des paramètres locaux caractéristiques des composantes actives approchées de la variable pilote, sur l'intervalle I_k, sur le domaine Ω, est l'ensemble :

$$\mathbb{Q}^{*+}(I_k, \Omega) = \left\{ (q_{ij}^+(M))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}, T^+(\Omega), V_{min}^+(\Omega), V_{max}^+(\Omega) \right\}$$

Or, par hypothèse, le compteur local est le même dans toute la structure (sur un domaine, ici Ω)et pour toutes les composantes de la variable pilote approchée, dans l'intervalle I_k. Il est en fait basé sur le compteur structural, à savoir sur $T[V(t)]$. Aussi, nous pouvons écrire :

$$\mathbb{Q}^{*+}(I_k, \Omega) = \left\{ (q_{ij}^+(M))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}, T[V(t)], V_{min}, V_{max} \right\} \tag{9.2}$$

9.5 Etape 4 - Discussion sur une possible extension du cadre de fonctionnement

A cette étape, le problème structural a été choisi pour être le plus simple possible et est donc de type $SPMLI(I)$ et par voie de conséquence, celui local a été identifié comme étant de type $PPMLI(I, \Omega)$.

Toutefois, puisque le phénomène de fissuration intralaminaire conduit à un comportement élastique linéaire endommageable et n'est pas sensible aux effets de vitesse, nous avons vu précédemment que le problème local est en fait de type $PPI(I,\Omega)$ car finalement la forme de l'évolution de la variable pilote entre sa valeur minimale et sa valeur maximale n'a aucun effet : imposer une évolution monotone linéaire n'est donc pas nécessaire. Ainsi, le choix fait a priori sur la classe structurale peut être revu sans que cela change la classe locale, en considérant au niveau structural une classe plus générale de problème : la classe des problèmes structuraux $SPI(I)$ conduira localement aux mêmes résultats que la classe des problèmes structuraux $SPMLI(I)$.

En conclusion, nous pouvons donc affirmer que le problème de fatigue initialement posé de type $SPMLI(I)$ et localement de type $PPMLI(I,\Omega)$ conduira à des résultats identiques à un problème posé de type $SPI(I)$ et localement de type $PPI(I,\Omega)$.

Les justifications à l'extension du cadre qui viennent d'être données sont très concrètement associées au phénomène considéré. Les espoirs que nous avions quant à trouver une extension qui soit plus générale sont ici réduits à néant.

9.6 Les deux types de lois d'évolution temporelles dont nous voulons écrire une forme cyclique : type DVE, type NDVE

Les lois d'évolution temporelles dont nous voulons écrire une forme cyclique sont celles qui ont été écrites pour le phénomène de fissuration intralaminaire (Chapitre 8) par la Thermodynamique des Milieux Continus, dans un cadre quasi-statique.

La première des lois (la plus simple) à laquelle le processus est appliqué est celle simplifiée du modèle original (Chapitre 8 - Paragraphe 8.7, Eq. 8.17) :

$$d\alpha = \frac{2f(\alpha)f'(\alpha)\left(C_{ij}^{N}U_{N}^{2}(m,r)+C_{ij}^{T}U_{T}^{2}(m,r)+C_{ij}^{NT}U_{N}(m,r)U_{T}(m,r)\right)\varepsilon_{j}d\varepsilon_{i}}{-(f'^{2}(\alpha)+f(\alpha)f''(\alpha))\left(C_{ij}^{N}U_{N}^{2}(m,r)+C_{ij}^{T}U_{T}^{2}(m,r)+C_{ij}^{NT}U_{N}(m,r)U_{T}(m,r)\right)\varepsilon_{i}\varepsilon_{j}} \quad (9.3)$$

Cette loi est écrite dans un cadre plan avec la notation de Voigt usuelle. Les indices prennent les valeurs 1, 2 et 6.

Ensuite, par ordre croissant de complexité, le processus est appliqué à la loi générale du modèle général (Chapitre 8 - Paragraphe 8.5, Eq. 8.5) écrite dans sa seconde forme simplifiée (Chapitre 8 - Paragraphe 8.10, Eq. 8.38) :

$$d\alpha = \frac{2f(\alpha)f'(\alpha)\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p\leq q}}^{3}D_{ij}^{(pq)}U_{p}(m_{23},r_{1},r_{23})U_{q}(m_{23},r_{1},r_{23})\right)\varepsilon_{j}d\varepsilon_{i}}{-(f'^{2}(\alpha)+f(\alpha)f''(\alpha))\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3}D_{ij}^{(pq)}U_{p}(m_{23},r_{1},r_{23})U_{q}(m_{23},r_{1},r_{23})\right)\varepsilon_{i}\varepsilon_{j}} \quad (9.4)$$

Cette loi est écrite dans un cadre général tridimensionnel avec la notation de Voigt usuelle. En fait, cette loi est l'extension au cas tridimensionnel de la loi précédente écrite dans un cadre bidimensionnel.

Puis finalement, le processus est mis en œuvre pour la loi générale du modèle général (Chapitre 8 - Paragraphe 8.5, Eq. 8.5) écrite dans sa première forme simplifiée (Chapitre 8 - Paragraphe

8.10, Eq. 8.34) :

$$
\begin{aligned}
d\alpha = \frac{
&2f(\alpha)f'(\alpha)\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p\leq q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)\varepsilon_j d\varepsilon_i + \dots\\
&\dots f(\alpha)f'(\alpha)\left(\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}\left(\frac{\partial U_p}{\partial m_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23}) + U_p(m_{23},r_1,r_{23})\frac{\partial U_q}{\partial m_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})\right)\right)\varepsilon_i\varepsilon_j\right) dm_{23} + \dots\\
&\dots f(\alpha)f'(\alpha)\left(\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}\left(\frac{\partial U_p}{\partial r_1}(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23}) + U_p(m_{23},r_1,r_{23})\frac{\partial U_q}{\partial r_1}(m_{23},r_1,r_{23})\right)\right)\varepsilon_i\varepsilon_j\right) dr_1 + \dots\\
&\dots f(\alpha)f'(\alpha)\left(\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}\left(\frac{\partial U_p}{\partial r_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23}) + U_p(m_{23},r_1,r_{23})\frac{\partial U_q}{\partial r_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})\right)\right)\varepsilon_i\varepsilon_j\right) dr_{23}\\
&\hline
&-\left(f'^2(\alpha)+f(\alpha)f''(\alpha)\right)\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)\varepsilon_i\varepsilon_j
\end{aligned}
\tag{9.5}
$$

Cette loi est la forme la (presque) plus générale de l'équation précédente. Elle prend notamment en compte des termes qui ont été auparavant considérés comme négligeables. Ce que nous voulons montrer par l'application du formalisme à cette équation, c'est la présence de termes autres que ceux de la variable pilote qui rentrent, par leurs incréments, dans l'évolution de la variable d'endommagement (dm_{23}, dr_1, dr_{23}). Nous pouvons noter que la loi générale du modèle original (Chapitre 8 - Paragraphe 8.7, Eq 8.16) présente la même caractéristique :

$$
d\alpha = \frac{\frac{\partial^2\psi(\varepsilon,\alpha,m)}{\partial\alpha\partial\varepsilon}d\varepsilon + \left(\frac{\partial^2\psi(\varepsilon,\alpha,m)}{\partial\alpha\partial m} - \frac{\partial A_c(\alpha,m)}{\partial m}\right)dm + \left(\frac{\partial^2\psi(\varepsilon,\alpha,m)}{\partial\alpha\partial r} - \frac{\partial A_c(\alpha,m)}{\partial r}\right)dr}{\frac{\partial A_c(\alpha,m)}{\partial\alpha} - \frac{\partial^2\psi(\varepsilon,\alpha,m)}{\partial\alpha^2}} \tag{9.6}
$$

Nous n'appliquerons pas le processus à la loi d'évolution la plus générale du modèle général, qui suppose que de l'énergie est possiblement existante au sein du matériau endommagé, dans la mesure où dans ce cas, des irréversibilités devraient être prises en compte. Pour l'heure, nous estimons que ce surcroît de complexité ne contribuerait qu'à rajouter une difficulté purement formelle inutile au discours sur le concept de fatigue qui est l'objet central de cette étude.

Au regard de ce qui précède, il apparaît deux types de lois d'évolution :

— le type DVE pour lequel seuls les incréments de la variable pilote sont présents dans la loi d'évolution quasi-statique (Eq. 9.3, Eq. 9.4) de la variable d'état interne considérée ;

— le type NDVE pour lequel, en plus des incréments de la variable pilote, les incréments des autres variables d'état internes sont présents dans la loi d'évolution quasi-statique (Eq. 9.6, Eq. 9.5) de la variable d'état interne considérée.

Imaginons que la modélisation du matériau considéré utilise un comportement qui contient $n_{interne}$ variables d'état internes (donc, au total $n_{interne}+1$ variables d'état). Si chacune possède une loi d'évolution de type DVE, alors l'évolution du matériau consiste à résoudre $n_{interne}$ équations différentielles, gouvernées chacune par les incréments de la variable d'état pilote. Si chacune des variables d'état internes à une loi d'évolution de type NDVE, alors, l'évolution du matériau doit résoudre un système de $n_{interne}$ équations différentielles couplées. Dans ce dernier cas, il est possible d'envisager deux méthodes disctinctes :

— la première, en appliquant à l'évolution des variables internes supplémentaires, un formalisme identique à celui de la variable pilote, puis ensuite, de résoudre le système d'équations différentielles couplées ;

— la seconde, en reformulant les équations NDVE pour les rendre de type DVE.

9.7 Adaptation des formules de passage générales au cas du phénomène de fissuration intralaminaire. Cas des lois d'évolution de type DVE

Comme travail préparatoire à l'Etape 5 d'écriture des lois cycliques locales, nous appliquons le formalisme général des formules de passage (Chapitre 6 - Paragraphe 6.5) au cas du phénomène de fissuration intralaminaire à toutes les classes locales au point M ou sur un domaine. Ici, nous considérons des lois d'évolution de type DVE : l'évolution de la variable d'état interne considérée est gérée par une équation différentielle gouvernée uniquement par l'évolution de la variable pilote.

Dans la très grande majorité des cas, c'est-à-dire quels que soient les phénomènes inclus au sein d'un modèle de comportement écrit dans le cadre de la Méthode de l'Etat Local et de la Thermodynamique des Milieux Continus, la variable pilote notée Q est le 2-tenseur des déformations ε. Les formules de passage qui suivent sont donc finalement utilisables, non seulement dans le cas du modèle que nous utilisons, mais aussi dans tous les cas où la variable pilote est 2-tenseur des déformations ε. Dans les formules de passage générales, nous avons donc juste substitué le symbole Q par le symbole ε, les autres symboles étant inchangés.

9.7.1 Formules de passage des classes de problèmes locaux au point M

• **Problème local de fatigue -** Ce cas est sans objet.

• **Problème local de fatigue de type PP(I,M) -** Appliqués au cas de la fissuration transverse, l'ensemble des paramètres locaux du problème approché et les formules de passage (Eq. 6.13) sont :

$$\left\{\begin{array}{r} t \approx NT \\ dt \approx TdN \\ \varepsilon_i^*(M,t) \approx \varepsilon_i^*(M,NT) =: \varepsilon_i^{*F}(M|N) \\ d\varepsilon_i^*(M,t) \approx d\varepsilon_i^{*F}(M|N) = \dfrac{\partial \varepsilon_i^{*F}}{\partial N}(M|N)dN \\ \mathbb{Q}^*(I,M) = \left\{(c^{*F(i)}(M|N))_{(i)\in\{1,\ldots,6\}}\right\} \\ \mathbb{Q}^{*+}(I,M) = \left\{(c^{*+F(i)}(M))_{(i)\in\{1,\ldots,6\}}\right\} \end{array}\right. \tag{9.7}$$

• **Problème local de fatigue de type PPI(I,M) -** Appliqués au cas de la fissuration transverse, l'ensemble des paramètres locaux du problème approché et les formules de passage (Eq. 6.14) sont :

$$\left\{\begin{array}{r} t \approx NT \\ dt \approx TdN \\ \varepsilon_i^*(M,t) = V^*(M,t)\overline{\varepsilon_i^*}(M) \approx V^*(M,NT)\overline{\varepsilon_i^*}(M) =: V^{*F}(M|N)\overline{\varepsilon_i^*}(M) \\ d\varepsilon_i^*(M,t) \approx \overline{\varepsilon_i^*}(M)\dfrac{\partial V^{*F}}{\partial N}(M|N)dN \\ \mathbb{Q}^*(I,M) = \left\{c^{*F}(M|N), (\overline{\varepsilon_i^*}(M))_{(i)\in\{1,\ldots,6\}}\right\} \\ \mathbb{Q}^{*+}(I,M) = \left\{c^{*+F}(M), (\overline{\varepsilon_i^{*+}}(M))_{(i)\in\{1,\ldots,6\}}\right\} \end{array}\right. \tag{9.8}$$

• **Problème local de fatigue de type PPM(I,M) -** Appliqués au cas de la fissuration transverse, l'ensemble des paramètres locaux du problème approché et les formules de passage (Eq. 6.15) sont :

$$\left\{\begin{array}{r} t \approx NT \\ dt \approx TdN \\ \varepsilon_i^*(M,t) \approx \varepsilon_i^*(M,NT) =: \varepsilon_i^{*F}(M|N) \\ d\varepsilon_i^*(M,t) \approx d\varepsilon_i^{*F}(M|N) = \dfrac{\partial \varepsilon_i^{*F}}{\partial N}(M|N)dN \\ \mathbb{Q}^*(I,M) = \left\{(c^{*F(i)}(M|N))_{(i)\in\{1,...,6\}}\right\} \\ \mathbb{Q}^{*+}(I,M) = \left\{(c^{*+F(i)}(M))_{(i)\in\{1,...,6\}}\right\} \end{array}\right. \tag{9.9}$$

• **Problème local de fatigue de type PPMI(I,M) -** Appliqués au cas de la fissuration transverse, l'ensemble des paramètres locaux du problème approché et les formules de passage (Eq. 6.16) sont :

$$\left\{\begin{array}{r} t \approx NT \\ dt \approx TdN \\ \varepsilon_i^*(M,t) = V^*(M,t)\overline{\varepsilon_i^*}(M) \approx V^*(M,NT)\overline{\varepsilon_i^*}(M) =: V^{*F}(M|N)\overline{\varepsilon_i^*}(M) \\ d\varepsilon_i^*(M,t) \approx \overline{\varepsilon_i^*}(M)\dfrac{\partial V^{*F}}{\partial N}(M|N)dN \\ \mathbb{Q}^*(I,M) = \left\{c^{*F}(M|N), (\overline{\varepsilon_i^*}(M))_{(i)\in\{1,...,6\}}\right\} \\ \mathbb{Q}^{*+}(I,M) = \left\{c^{*+F}(M), (\overline{\varepsilon_i^{*+}}(M))_{(i)\in\{1,...,6\}}\right\} \end{array}\right. \tag{9.10}$$

• **Problème local de fatigue de type PPML(I,M) -** Appliqués au cas de la fissuration transverse, l'ensemble des paramètres locaux du problème approché et les formules de passage (Eq. 6.17) sont :

$$\left\{\begin{array}{r} t \approx NT \\ dt \approx TdN \\ \varepsilon_i^*(M,t) \approx \varepsilon_i^*(M,NT) =: \varepsilon_i^{*F}(M|N) \\ d\varepsilon_i^*(M,t) \approx d\varepsilon_i^{*F}(M|N) = \dfrac{\partial \varepsilon_i^{*F}}{\partial N}(M|N)dN \\ \mathbb{Q}^*(I,M) = \left\{(T(c^{*F(i)}(M|N)), min(c^{*F(i)}(M|N)), max(c^{*F(i)}(M|N)))_{(i)\in\{1,...,6\}}\right\} \\ \mathbb{Q}^{*+}(I,M) = \left\{(T^{*+(i)}(M), c_{min}^{*+(i)}(M), c_{max}^{*+(i)}(M))_{(i)\in\{1,...,6\}}\right\} \end{array}\right. \tag{9.11}$$

• **Problème local de fatigue de type PPMLI(I,M) -** Appliqués au cas de la fissuration transverse, l'ensemble des paramètres locaux du problème approché et les formules de passage (Eq. 6.18) sont :

$$\left\{\begin{array}{r} t \approx NT \\ dt \approx TdN \\ \varepsilon_i^*(M,t) = V^*(M,t)\overline{\varepsilon_i^*}(M) \approx V^*(M,NT)\overline{\varepsilon_i^*}(M) =: V^{*F}(M|N)\overline{\varepsilon_i^*}(M) \\ d\varepsilon_i^*(M,t) \approx \overline{\varepsilon_i^*}(M)\dfrac{\partial V^{*F}(M|N)}{\partial N}dN \\ \mathbb{Q}^*(I,M) = \left\{T(c^{*F}(M|N)), min(c^{*F}(M|N)), max(c^{*F}(M|N)), (\overline{\varepsilon_i^*}(M))_{(i)\in\{1,...,6\}}\right\} \\ \mathbb{Q}^{*+}(I,M) = \left\{T^{*+}(M), V_{min}^{*+}(M), V_{max}^{*+}(M), (\overline{\varepsilon_i^{*+}}(M))_{(i)\in\{1,...,6\}}\right\} \end{array}\right. \tag{9.12}$$

9.7.2 Formules de passage des classes de problèmes locaux sur un domaine. Cas où le domaine est celui de la structure considérée

Le cas de calcul de structure qui est envisagé dans la suite suppose que la totalité de la structure est constituée du même matériau. Aussi, le domaine total qu'elle occupe n'a pas la nécessité d'être séparé en sous-domaines. Alors, il convient de rappeler (Remarque importante, Chapitre 5.4) la propriété suivante : les grandeurs indépendantes du temps marquant la séparabilité géométrique du domaine considéré, dans les classes des problèmes de fatigue sur un domaine, pourront être prises égales à 1.

• **Problème local de fatigue sur un domaine -** Ce cas est sans objet.

• **Problème local de fatigue sur un domaine de type PP(I,Ω) -** Appliqués au cas de la fissuration transverse, l'ensemble des paramètres locaux du problème approché et les formules de passage (Eq. 6.19) sont :

$$\left\{\begin{array}{r} t \approx NT \\ dt \approx TdN \\ \varepsilon_i^*(M,t) = V^{*(i)}(\Omega,t)q_i^*(M) \approx V^{*(i)}(\Omega,NT)q_i^*(M) =: V^{*F(i)}(\Omega|N)q_i^*(M) \\ d\varepsilon_i^*(M,t) \approx q_i^*(M)\dfrac{\partial V^{*F(i)}}{\partial N}(\Omega|N)dN \\ \mathbb{Q}^*(I,\Omega) = \left\{(q_i^*(M)_{(i)\in\{1,\ldots,6\}}, c^{*F(i)}(\Omega|N))_{(i)\in\{1,\ldots,6\}}\right\} \\ \mathbb{Q}^{*+}(I,\Omega) = \left\{(q_i^{*+}(M)_{(i)\in\{1,\ldots,6\}}, c^{*+F(i)}(\Omega))_{(i)\in\{1,\ldots,6\}}\right\} \end{array}\right. \tag{9.13}$$

• **Problème local de fatigue sur un domaine de type PPI(I,Ω) -** Appliqués au cas de la fissuration transverse, l'ensemble des paramètres locaux du problème approché et les formules de passage (Eq. 6.20) sont :

$$\left\{\begin{array}{r} t \approx NT \\ dt \approx TdN \\ \varepsilon_i^*(M,t) = V^*(\Omega,t)q_i^*(M) \approx V^*(\Omega,NT)q_i^*(M) =: V^{*F}(\Omega|N)q_i^*(M) \\ d\varepsilon_i^*(M,t) \approx q_i^*(M)\dfrac{\partial V^{*F}}{\partial N}(\Omega|N)dN \\ \mathbb{Q}^*(I,\Omega) = \left\{(q_i^*(M))_{(i)\in\{1,\ldots,6\}}, c^{*F}(\Omega|N)\right\} \\ \mathbb{Q}^{*+}(I,\Omega) = \left\{(q_i^{*+}(M))_{(i)\in\{1,\ldots,6\}}, c^{*+F}(\Omega)\right\} \end{array}\right. \tag{9.14}$$

• **Problème local de fatigue sur un domaine de type PPM(I,Ω) -** Appliqués au cas de la fissuration transverse, l'ensemble des paramètres locaux du problème approché et les formules de passage (Eq. 6.21) sont :

$$\left\{\begin{array}{r} t \approx NT \\ dt \approx TdN \\ \varepsilon_i^*(M,t) = V^{*(i)}(\Omega,t)q_i^*(M) \approx V^{*(i)}(\Omega,NT)q_i^*(M) =: V^{*F(i)}(\Omega|N)q_i^*(M) \\ d\varepsilon_i^*(M,t) \approx q_i^*(M)\dfrac{\partial V^{*F(i)}}{\partial N}(\Omega|N)dN \\ \mathbb{Q}^*(I,\Omega) = \left\{(q_i^*(M)_{(i)\in\{1,\ldots,6\}}, c^{*F(i)}(\Omega|N))_{(i)\in\{1,\ldots,6\}}\right\} \\ \mathbb{Q}^{*+}(I,\Omega) = \left\{(q_i^{*+}(M)_{(i)\in\{1,\ldots,6\}}, c^{*+F(i)}(\Omega))_{(i)\in\{1,\ldots,6\}}\right\} \end{array}\right. \tag{9.15}$$

• **Problème local de fatigue sur un domaine de type PPMI(I,Ω) -** Appliqués au cas de la fissuration transverse, l'ensemble des paramètres locaux du problème approché et les formules de passage (Eq. 6.22) sont :

$$\left\{\begin{aligned} t &\approx NT \\ dt &\approx TdN \\ \varepsilon_i^*(M,t) = V^*(\Omega,t)q_i^*(M) &\approx V^*(\Omega,NT)q_i^*(M) =: V^{*F}(\Omega|N)q_i^*(M) \\ d\varepsilon_i^*(M,t) &\approx q_i^*(M)\frac{\partial V^{*F}}{\partial N}(\Omega|N)dN \\ \mathbb{Q}^*(I,\Omega) &= \left\{(q_i^*(M))_{(i)\in\{1,\dots,6\}}, c^{*F}(\Omega|N)\right\} \\ \mathbb{Q}^{*+}(I,\Omega) &= \left\{(q_i^{*+}(M))_{(i)\in\{1,\dots,6\}}, c^{*+F}(\Omega)\right\} \end{aligned}\right. \tag{9.16}$$

• **Problème local de fatigue sur un domaine de type PPML(I,Ω) -** Appliqués au cas de la fissuration transverse, l'ensemble des paramètres locaux du problème approché et les formules de passage (Eq. 6.23) sont :

$$\left\{\begin{aligned} t &\approx NT \\ dt &\approx TdN \\ \varepsilon_i^*(M,t) = V^{*(i)}(\Omega,t)q_i^*(M) &\approx V^{*(i)}(\Omega,NT)q_i^*(M) =: V^{*F(i)}(\Omega|N)q_i^*(M) \\ d\varepsilon_i^*(M,t) &\approx q_i^*(M)\frac{\partial V_i^{*F}}{\partial N}(\Omega|N)dN \\ \mathbb{Q}^*(I,\Omega) &= \left\{(q_i^*(M), T(c^{*F(i)}(\Omega|N)), min(c^{*F(i)}(\Omega|N)), max(c^{*F(i)}(\Omega|N)))_{(i)\in\{1,\dots,6\}}\right\} \\ \mathbb{Q}^{*+}(I,\Omega) &= \left\{(q_i^{*+}(M), T^{*+(i)}(\Omega), c_{min}^{*+(i)}(\Omega), c_{max}^{*+(i)}(\Omega))_{(i)\in\{1,\dots,6\}}\right\} \end{aligned}\right. \tag{9.17}$$

• **Problème local de fatigue sur un domaine de type PPMLI(I,Ω) -** Appliqués au cas de la fissuration transverse, l'ensemble des paramètres locaux du problème approché et les formules de passage (Eq. 6.24) sont :

$$\left\{\begin{aligned} t &\approx NT \\ dt &\approx TdN \\ \varepsilon_i^*(M,t) = V^*(\Omega,t)q_i^*(M) &\approx V^*(\Omega,NT)q_i^*(M) =: V^{*F}(\Omega|N)q_i^*(M) \\ d\varepsilon_i^*(M,t) &\approx q_i^*(M)\frac{\partial V^{*F}(\Omega|N)}{\partial N}dN \\ \mathbb{Q}^*(I,\Omega) &= \left\{(q_i^*(M))_{(i)\in\{1,\dots,6\}}, T(c^{*F}(\Omega|N)), min(c^{*F}(\Omega|N)), max(c^{*F}(\Omega|N))\right\} \\ \mathbb{Q}^{*+}(I,\Omega) &= \left\{(q_i^{*+}(M))_{(i)\in\{1,\dots,6\}}, T^{*+}(\Omega), V_{min}^{*+}(\Omega), V_{max}^{*+}(\Omega)\right\} \end{aligned}\right. \tag{9.18}$$

9.8 Adaptation des formules de passage générales au cas du phénomène de fissuration intralaminaire. Cas des lois d'évolution de type NDVE

Comme travail préparatoire à l'Etape 5 d'écriture des lois cycliques locales, nous appliquons le formalisme général des formules de passage (Chapitre 6 - Paragraphe 6.5) au cas du phénomène de fissuration intralaminaire à toutes les classes locales au point M ou sur un domaine. Ici, nous considérons des lois d'évolution de type NDVE : l'évolution de chaque variable d'état interne considérée est gérée par l'évolution de la variable pilote, mais aussi par l'évolution des autres variables d'état internes.

Dans la très grande majorité des cas, c'est-à-dire quels que soient les phénomènes inclus au sein d'un modèle de comportement écrit dans le cadre de la Méthode de l'Etat Local et de la Thermodynamique des Milieux Continus, la variable pilote notée Q est le 2-tenseur des déformations ε. Ceci est parfaitement identique au type DVE. Par contre, la présence des incréments des autres variables d'état internes ne permet plus d'avoir un discours général. En effet, chaque phénomène ayant sa spécificité propre en terme de modélisation, ses variables d'état lui sont propres en terme de nombre et de nature mathématique. Il n'est pas possible de traiter tous les cas possibles. Ici, il nous a semblé néanmoins intéressant de traiter ce cas NDVE car les variables supplémentaires sont d'une nature mathématique différente de celle de la variable pilote : elles sont scalaires.

Notons également que dans cette approche, c'est un système d'équations différentielles qu'il faut résoudre pour prédire l'évolution de toutes les variables d'état internes.

Nous rappelons qu'une autre solution à la résolution des équations de type NDVE, est une ré-écriture en des équations de type DVE. Ainsi, nous pourrions exprimer les variables m_{23}, r_1 et r_{23} en fonction des composantes de la variable pilote ε en utilisant les expressions de m_{23}, r_1 et r_{23} établies précédemment (Chapitre 8 - Paragraphe 8.4.3). Puis, les formules de passage (Paragraphe 9.7) nous permettraient d'obtenir la loi locale d'évolution de l'endommagement en fatigue.

9.8.1 Formules de passage des classes de problèmes locaux au point M

• **Problème local de fatigue -** Ce cas est sans objet.

• **Problème local de fatigue de type PP(I, M) -** Appliqués au cas de la fissuration transverse, l'ensemble des paramètres locaux du problème approché et les formules de passage (Eq. 6.13) sont :

$$\left\{\begin{array}{r}
t \approx NT \\
dt \approx TdN \\
\varepsilon_i^*(M,t) \approx \varepsilon_i^*(M,NT) =: \varepsilon_i^{*F}(M|N) \\
m_{23}^*(M,t) \approx m_{23}^*(M,NT) =: m_{23}^{*F}(M|N) \\
r_1^*(M,t) \approx r_1^*(M,NT) =: r_1^{*F}(M|N) \\
r_{23}^*(M,t) \approx r_{23}^*(M,NT) =: r_{23}^{*F}(M|N) \\
d\varepsilon_i^*(M,t) \approx d\varepsilon_i^{*F}(M|N) = \dfrac{\partial \varepsilon_i^{*F}}{\partial N}(M|N)dN \\
dm_{23}^*(M,t) \approx dm_{23}^{*F}(M|N) = \dfrac{\partial dm_{23}^{*F}}{\partial N}(M|N)dN \\
dr_1^*(M,t) \approx dr_{21}^{*F}(M|N) = \dfrac{\partial dr_1^{*F}}{\partial N}(M|N)dN \\
dr_{23}^*(M,t) \approx dr_{23}^{*F}(M|N) = \dfrac{\partial dr_{23}^{*F}}{\partial N}(M|N)dN \\
\mathbb{Q}^*(I,M) = \left\{(c_\varepsilon^{*F(i)}(M|N))_{(i)\in\{1,\dots,6\}}, c_{m_{23}}^{*F}(M|N), c_{r_1}^{*F}(M|N), c_{r_{23}}^{*F}(M|N)\right\} \\
\mathbb{Q}^{*+}(I,M) = \left\{(c_\varepsilon^{*+F(i)}(M))_{(i)\in\{1,\dots,6\}}, c_{m_{23}}^{*+F}(M), c_{r_1}^{*+F}(M), c_{r_{23}}^{*+F}(M)\right\}
\end{array}\right. \tag{9.19}$$

• **Problème local de fatigue de type PPI(I, M) -** Appliqués au cas de la fissuration transverse, l'ensemble des paramètres locaux du problème approché et les formules de passage (Eq. 6.14) sont :

$$\left\{\begin{array}{r}
t \approx NT \\
dt \approx TdN \\
\varepsilon_i^*(M,t) = V_\varepsilon^*(M,t)\overline{\varepsilon_{\varepsilon i}^*}(M) \approx V_\varepsilon^*(M,NT)\overline{\varepsilon_i^*}(M) =: V_\varepsilon^{*F}(M|N)\overline{\varepsilon_i^*}(M) \\
m_{23}^*(M,t) = V_{m_{23}}^*(M,t)\overline{m_{23}^*}(M) \approx V_{m_{23}}^*(M,NT)\overline{m_{23}^*}(M) =: V_{m_{23}}^{*F}(M|N)\overline{m_{23}^*}(M) \\
r_1^*(M,t) = V_{r_1}^*(M,t)\overline{r_1^*}(M) \approx V_{r_1}^*(M,NT)\overline{r_1^*}(M) =: V_{r_1}^{*F}(M|N)\overline{r_1^*}(M) \\
r_{23}^*(M,t) = V_{r_{23}}^*(M,t)\overline{r_{23}^*}(M) \approx V_{r_{23}}^*(M,NT)\overline{r_{23}^*}(M) =: V_{r_{23}}^{*F}(M|N)\overline{r_{23}^*}(M) \\
d\varepsilon_i^*(M,t) \approx \overline{\varepsilon_i^*}(M)\dfrac{\partial V_\varepsilon^{*F}}{\partial N}(M|N)dN \\
dm_{23}^*(M,t) \approx \overline{m_{23}^*}(M)\dfrac{\partial V_{m_{23}}^{*F}}{\partial N}(M|N)dN \\
dr_1^*(M,t) \approx \overline{r_1^*}(M)\dfrac{\partial V_{r_1}^{*F}}{\partial N}(M|N)dN \\
dr_{23}^*(M,t) \approx \overline{r_{23}^*}(M)\dfrac{\partial V_{r_{23}}^{*F}}{\partial N}(M|N)dN \\
\mathbb{Q}^*(I,M) = \left\{\begin{array}{r} c_\varepsilon^{*F}(M|N), c_{m_{23}}^{*F}(M|N), c_{r_1}^{*F}(M|N), c_{r_{23}}^{*F}(M|N), \\ (\overline{\varepsilon_i^*}(M))_{(i)\in\{1,\dots,6\}}, \overline{m_{23}^*}(M), \overline{r_1^*}(M), \overline{r_{23}^*}(M) \end{array}\right\} \\
\mathbb{Q}^{*+}(I,M) = \left\{\begin{array}{r} c_\varepsilon^{*+F}(M), c_{m_{23}}^{*+F}(M), c_{r_1}^{*+F}(M), c_{r_{23}}^{*+F}(M), \\ (\overline{\varepsilon_i^{*+}}(M))_{(i)\in\{1,\dots,6\}}, \overline{m_{23}^{*+}}(M), \overline{r_1^{*+}}(M), \overline{r_{23}^{*+}}(M) \end{array}\right\}
\end{array}\right. \tag{9.20}$$

• **Problème local de fatigue de type PPM(I,M) -** Appliqués au cas de la fissuration transverse, l'ensemble des paramètres locaux du problème approché et les formules de passage (Eq. 6.15) sont :

$$\left\{\begin{array}{r}
t \approx NT \\
dt \approx TdN \\
\varepsilon_i^*(M,t) \approx \varepsilon_i^*(M,NT) =: \varepsilon_i^{*F}(M|N) \\
m_{23}^*(M,t) \approx m_{23}^*(M,NT) =: m_{23}^{*F}(M|N) \\
r_1^*(M,t) \approx r_1^*(M,NT) =: r_1^{*F}(M|N) \\
r_{23}^*(M,t) \approx r_{23}^*(M,NT) =: r_{23}^{*F}(M|N) \\
d\varepsilon_i^*(M,t) \approx d\varepsilon_i^{*F}(M|N) = \dfrac{\partial \varepsilon_i^{*F}}{\partial N}(M|N)dN \\
dm_{23}^*(M,t) \approx dm_{23}^{*F}(M|N) = \dfrac{\partial dm_{23}^{*F}}{\partial N}(M|N)dN \\
dr_1^*(M,t) \approx dr_1^{*F}(M|N) = \dfrac{\partial dr_1^{*F}}{\partial N}(M|N)dN \\
dr_{23}^*(M,t) \approx dr_{23}^{*F}(M|N) = \dfrac{\partial dr_{23}^{*F}}{\partial N}(M|N)dN \\
\mathbb{Q}^*(I,M) = \left\{(c_\varepsilon^{*F(i)}(M|N))_{(i)\in\{1,\dots,6\}}, c_{m_{23}}^{*F}(M|N), c_{r_1}^{*F}(M|N), c_{r_{23}}^{*F}(M|N)\right\} \\
\mathbb{Q}^{*+}(I,M) = \left\{(c_\varepsilon^{*+F(i)}(M))_{(i)\in\{1,\dots,6\}}, c_{m_{23}}^{*+F}(M), c_{r_1}^{*+F}(M), c_{r_{23}}^{*+F}(M)\right\}
\end{array}\right. \tag{9.21}$$

• **Problème local de fatigue de type PPMI(I,M) -** Appliqués au cas de la fissuration transverse, l'ensemble des paramètres locaux du problème approché et les formules de passage (Eq. 6.16) sont :

$$\left\{\begin{array}{r}
t \approx NT \\
dt \approx TdN \\
\varepsilon_i^*(M,t) = V_\varepsilon^*(M,t)\overline{\varepsilon_{\varepsilon i}^*}(M) \approx V_\varepsilon^*(M,NT)\overline{\varepsilon_i^*}(M) =: V_\varepsilon^{*F}(M|N)\overline{\varepsilon_i^*}(M) \\
m_{23}^*(M,t) = V_{m_{23}}^*(M,t)\overline{m_{23}^*}(M) \approx V_{m_{23}}^*(M,NT)\overline{m_{23}^*}(M) =: V_{m_{23}}^{*F}(M|N)\overline{m_{23}^*}(M) \\
r_1^*(M,t) = V_{r_1}^*(M,t)\overline{r_1^*}(M) \approx V_{r_1}^*(M,NT)\overline{r_1^*}(M) =: V_{r_1}^{*F}(M|N)\overline{r_1^*}(M) \\
r_{23}^*(M,t) = V_{r_{23}}^*(M,t)\overline{r_{23}^*}(M) \approx V_{r_{23}}^*(M,NT)\overline{r_{23}^*}(M) =: V_{r_{23}}^{*F}(M|N)\overline{r_{23}^*}(M) \\
d\varepsilon_i^*(M,t) \approx \overline{\varepsilon_i^*}(M)\dfrac{\partial V_\varepsilon^{*F}}{\partial N}(M|N)dN \\
dm_{23}^*(M,t) \approx \overline{m_{23}^*}(M)\dfrac{\partial V_{m_{23}}^{*F}}{\partial N}(M|N)dN \\
dr_1^*(M,t) \approx \overline{r_1^*}(M)\dfrac{\partial V_{r_1}^{*F}}{\partial N}(M|N)dN \\
dr_{23}^*(M,t) \approx \overline{r_{23}^*}(M)\dfrac{\partial V_{r_{23}}^{*F}}{\partial N}(M|N)dN \\
\mathbb{Q}^*(I,M) = \left\{\begin{array}{r} c_\varepsilon^{*F}(M|N), c_{m_{23}}^{*F}(M|N), c_{r_1}^{*F}(M|N), c_{r_{23}}^{*F}(M|N), \\ (\overline{\varepsilon_i^*}(M))_{(i)\in\{1,\dots,6\}}, \overline{m_{23}^*}(M), \overline{r_1^*}(M), \overline{r_{23}^*}(M) \end{array}\right\} \\
\mathbb{Q}^{*+}(I,M) = \left\{\begin{array}{r} c_\varepsilon^{*+F}(M), c_{m_{23}}^{*+F}(M), c_{r_1}^{*+F}(M), c_{r_{23}}^{*+F}(M), \\ (\overline{\varepsilon_i^{*+}}(M))_{(i)\in\{1,\dots,6\}}, \overline{m_{23}^{*+}}(M), \overline{r_1^{*+}}(M), \overline{r_{23}^{*+}}(M) \end{array}\right\}
\end{array}\right. \tag{9.22}$$

• **Problème local de fatigue de type PPML(I,M) -** Appliqués au cas de la fissuration transverse, l'ensemble des paramètres locaux du problème approché et les formules de passage (Eq. 6.17) sont :

$$\left\{\begin{array}{r}
t \approx NT \\
dt \approx TdN \\
\varepsilon_i^*(M,t) \approx \varepsilon_i^*(M,NT) =: \varepsilon_i^{*F}(M|N) \\
m_{23}^*(M,t) \approx m_{23}^*(M,NT) =: m_{23}^{*F}(M|N) \\
r_1^*(M,t) \approx r_1^*(M,NT) =: r_1^{*F}(M|N) \\
r_{23}^*(M,t) \approx r_{23}^*(M,NT) =: r_{23}^{*F}(M|N) \\
d\varepsilon_i^*(M,t) \approx d\varepsilon_i^{*F}(M|N) = \dfrac{\partial \varepsilon_i^{*F}}{\partial N}(M|N)dN \\
dm_{23}^*(M,t) \approx dm_{23}^{*F}(M|N) = \dfrac{\partial m_{23}^{*F}}{\partial N}(M|N)dN \\
dr_1^*(M,t) \approx dr_1^{*F}(M|N) = \dfrac{\partial r_1^{*F}}{\partial N}(M|N)dN \\
dr_{23}^*(M,t) \approx dr_{23}^{*F}(M|N) = \dfrac{\partial r_{23}^{*F}}{\partial N}(M|N)dN \\
\mathbb{Q}^*(I,M) = \left\{\begin{array}{r}
(T(c_\varepsilon^{*(i)}(M|N)))_{(i)\in\{1,\dots,6\}}, T(c_{m_{23}}^*(M|N), T(c_{r_1}^*(M|N), T(c_{r_{23}}^*(M|N), \\
(min(c_\varepsilon^{*(i)}(M|N)))_{(i)\in\{1,\dots,6\}}, min(c_{m_{23}}^*(M|N)), min(c_{r_1}^*(M|N)), min(c_{r_{23}}^*(M|N)), \\
(max(c_\varepsilon^{*(i)}(M|N)))_{(i)\in\{1,\dots,6\}}, max(c_{m_{23}}^*(M|N)), max(c_{r_1}^*(M|N)), max(c_{r_{23}}^*(M|N))
\end{array}\right\} \\
\mathbb{Q}^{*+}(I,M) = \left\{\begin{array}{r}
(T_\varepsilon^{*+(i)}(M))_{(i)\in\{1,\dots,6\}}, T_{m_{23}}^{*+}(M), T_{r_1}^{*+}(M), T_{r_{23}}^{*+}(M), \\
(c_{\varepsilon min}^{*+(i)}(M))_{(i)\in\{1,\dots,6\}}, c_{m_{23}min}^{*+}(M), c_{r_1 min}^{*+}(M), c_{r_{23}min}^{*+}(M), \\
(c_{\varepsilon max}^{*+(i)}(M))_{(i)\in\{1,\dots,6\}}, c_{m_{23}max}^{*+}(M), c_{r_1 max}^{*+}(M), c_{r_{23}max}^{*+}(M)
\end{array}\right\}
\end{array}\right. \tag{9.23}$$

• **Problème local de fatigue de type PPMLI(I,M) -** Appliqués au cas de la fissuration transverse, l'ensemble des paramètres locaux du problème approché et les formules de passage (Eq. 6.18) sont :

$$\left\{\begin{array}{r}
t \approx NT \\
dt \approx TdN \\
\varepsilon_i^*(M,t) = V_\varepsilon^*(M,t)\overline{\varepsilon_i^*}(M) \approx V_\varepsilon^*(M,NT)\overline{\varepsilon_i^*}(M) =: V_\varepsilon^{*F}(M|N)\overline{\varepsilon_i^*}(M) \\
m_{23}^*(M,t) = V_{m_{23}}^*(M,t)\overline{m_{23}^*}(M) \approx V_{m_{23}}^*(M,NT)\overline{m_{23}^*}(M) =: V_{m_{23}}^{*F}(M|N)\overline{m_{23}^*}(M) \\
r_1^*(M,t) = V_{r_1}^*(M,t)\overline{r_1^*}(M) \approx V_{r_1}^*(M,NT)\overline{r_1^*}(M) =: V_{r_1}^{*F}(M|N)\overline{r_1^*}(M) \\
r_{23}^*(M,t) = V_{r_{23}}^*(M,t)\overline{r_{23}^*}(M) \approx V_{r_{23}}^*(M,NT)\overline{r_{23}^*}(M) =: V_{r_{23}}^{*F}(M|N)\overline{r_{23}^*}(M) \\
d\varepsilon_i^*(M,t) \approx \overline{\varepsilon_i^*}(M)\dfrac{\partial V_\varepsilon^{*F}(M|N)}{\partial N}dN \\
dm_{23}^*(M,t) \approx \overline{m_{23}^*}(M)\dfrac{\partial V_{m_{23}}^{*F}(M|N)}{\partial N}dN \\
dr_1^*(M,t) \approx \overline{r_1^*}(M)\dfrac{\partial V_{r_1}^{*F}(M|N)}{\partial N}dN \\
dr_{23}^*(M,t) \approx \overline{r_{23}^*}(M)\dfrac{\partial V_{r_{23}}^{*F}(M|N)}{\partial N}dN \\
\mathbb{Q}^*(I,M) = \left\{\begin{array}{r}
T(c_\varepsilon^{*F}(M|N)), T(c_{m_{23}}^{*F}(M|N)), T(c_{r_1}^{*F}(M|N)), T(c_{r_{23}}^{*F}(M|N)), \\
min(c_\varepsilon^{*F}(M|N)), min(c_{m_{23}}^{*F}(M|N)), min(c_{r_1}^{*F}(M|N)), min(c_{r_{23}}^{*F}(M|N)), \\
max(c_\varepsilon^{*F}(M|N)), max(c_{m_{23}}^{*F}(M|N)), max(c_{r_1}^{*F}(M|N)), max(c_{r_{23}}^{*F}(M|N)), \\
(\overline{\varepsilon_i^*}(M))_{(i)\in\{1,\dots,6\}}, \overline{m_{23}^*}(M), \overline{r_1^*}(M), \overline{r_{23}^*}(M)
\end{array}\right\} \\
\mathbb{Q}^{*+}(I,M) = \left\{\begin{array}{r}
T_\varepsilon^{*+}(M), T_{m_{23}}^{*+}(M), T_{r_1}^{*+}(M), T_{r_{23}}^{*+}(M), \\
V_{\varepsilon min}^{*+}(M), V_{\varepsilon max}^{*+}(M), V_{m_{23}min}^{*+}(M), V_{m_{23}max}^{*+}(M), \\
V_{r_1 min}^{*+}(M), V_{r_1 max}^{*+}(M), V_{r_{23}min}^{*+}(M), V_{r_{23}max}^{*+}(M), \\
(\overline{\varepsilon_i^{*+}}(M))_{(i)\in\{1,\dots,6\}}, \overline{m_{23}^{*+}}(M), \overline{r_1^{*+}}(M), \overline{r_{23}^{*+}}(M)
\end{array}\right\}
\end{array}\right. \tag{9.24}$$

Remarque pour les problèmes PP(I,M), PPM(I,M), PPML(I,M) - Nous considérons que toutes les restrictions sont différentes pour toutes les variables d'état présentes par leurs incréments dans la loi d'évolution

Remarque pour les problèmes PPI(I,M), PPMI(I,M), PPMLI(I,M) - Dans le cas de ces problèmes, les composantes de la variable pilote sont identiques. Mais, ici, nous avons plusieurs autres variables d'état présentes par leurs incréments dans la loi d'évolution. Aussi, deux interprétations de la notion d'identité sont possibles : soit chacune de ces variables est identique indépendamment des autres (avec une loi horaire propre), soit elles sont identiques entre elles (avec la même loi horaire). Pour que le concept soit efficace et facile à mettre en place, la seconde solution est à privilégier. Toutefois, elle peut ne pas être physiquement valide. Par exemple, dans un comportement viscoélastique, les parties élastiques et visqueuses peuvent avoir des lois horaires différentes (par exemple dû à un cycle stabilisé élastique et un cycle stabilisé visqueux).

9.8.2 Formules de passage des classes de problèmes locaux sur un domaine. Cas où le domaine est celui de la structure considérée

Le cas de calcul de structure qui est envisagé dans la suite suppose que la totalité de la structure est constituée du même matériau. Aussi, le domaine total qu'elle occupe n'a pas la nécessité d'être séparé en sous-domaines. Alors, il convient de rappeler (Remarque importante, Chapitre 5.4) la propriété suivante : les grandeurs indépendantes du temps marquant la séparabilité géométrique du domaine considéré, dans les classes des problèmes de fatigue sur un domaine, pourront être prises égales à 1.

• **Problème local de fatigue sur un domaine -** Ce cas est sans objet.

• **Problème local de fatigue sur un domaine de type PP(I,Ω) -** Appliqués au cas de la fissuration transverse, l'ensemble des paramètres locaux du problème approché et les formules de passage (Eq. 6.19) sont :

$$
\left\{
\begin{array}{r}
t \approx NT \\
dt \approx TdN \\
\varepsilon_i^*(M,t) = V_\varepsilon^{*(i)}(\Omega,t)q_{\varepsilon i}^*(M) \approx V_\varepsilon^{*(i)}(\Omega,NT)q_{\varepsilon i}^*(M) =: V_\varepsilon^{*F(i)}(\Omega|N)q_{\varepsilon i}^*(M) \\
m_{23}^*(M,t) = V_{m_{23}}^*(\Omega,t)q_{m_{23}}^*(M) \approx V_{m_{23}}^*(\Omega,NT)q_{m_{23}}^*(M) =: V_{m_{23}}^{*F}(\Omega|N)q_{m_{23}}^*(M) \\
r_1^*(M,t) = V_{r_1}^*(\Omega,t)q_{r_1}^*(M) \approx V_{r_1}^*(\Omega,NT)q_{r_1}^*(M) =: V_{r_1}^{*F}(\Omega|N)q_{r_1}^*(M) \\
r_{23}^*(M,t) = V_{r_{23}}^*(\Omega,t)q_{r_{23}}^*(M) \approx V_{r_{23}}^*(\Omega,NT)q_{r_{23}}^*(M) =: V_{r_{23}}^{*F}(\Omega|N)q_{r_{23}}^*(M) \\
d\varepsilon_i^*(M,t) \approx q_{\varepsilon i}^*(M)\dfrac{\partial V_\varepsilon^{*F(i)}}{\partial N}(\Omega|N)dN \\
dm_{23}^*(M,t) \approx q_{m_{23}}^*(M)\dfrac{\partial V_{m_{23}}^{*F}}{\partial N}(\Omega|N)dN \\
dr_1^*(M,t) \approx q_{r_1}^*(M)\dfrac{\partial V_{r_1}^{*F}}{\partial N}(\Omega|N)dN \\
dr_{23}^*(M,t) \approx q_{r_{23}}^*(M)\dfrac{\partial V_{r_{23}}^{*F}}{\partial N}(\Omega|N)dN \\
\mathbb{Q}^*(I,\Omega) = \left\{ \begin{array}{r} (q_{\varepsilon i}^*(M))_{(i)\in\{1,\ldots,6\}}, q_{m_{23}}^*(M), q_{r_1}^*(M), q_{r_{23}}^*(M), \\ (c_\varepsilon^{*F(i)}(\Omega|N))_{(i)\in\{1,\ldots,6\}}, c_{m_{23}}^{*F}(\Omega|N), c_{r_1}^{*F}(\Omega|N), c_{r_{23}}^{*F}(\Omega|N) \end{array} \right\} \\
\mathbb{Q}^{*+}(I,\Omega) = \left\{ \begin{array}{r} (q_{\varepsilon i}^{*+}(M))_{(i)\in\{1,\ldots,6\}}, q_{m_{23}}^{*+}(M), q_{r_1}^{*+}(M), q_{r_{23}}^{*+}(M), \\ (c_\varepsilon^{*+F(i)}(\Omega))_{(i)\in\{1,\ldots,6\}}, c_{m_{23}}^{*+F}(\Omega), c_{r_1}^{*+F}(\Omega), c_{r_{23}}^{*+F}(\Omega) \end{array} \right\}
\end{array}
\right. \tag{9.25}
$$

• **Problème local de fatigue sur un domaine de type PPI(I,Ω) -** Appliqués au cas de la fissuration transverse, l'ensemble des paramètres locaux du problème approché et les formules de passage (Eq. 6.20) sont :

$$\left\{\begin{array}{r}
t \approx NT \\
dt \approx TdN \\
\varepsilon_i^*(M,t) = V_\varepsilon^*(\Omega,t)q_{\varepsilon i}^*(M) \approx V_\varepsilon^*(\Omega,NT)q_{\varepsilon i}^*(M) =: V_\varepsilon^{*F}(\Omega|N)q_{\varepsilon i}^*(M) \\
m_{23}(M,t) = V_{m_{23}}^*(\Omega,t)q_{m_{23}}^*(M) \approx V_{m_{23}}^*(\Omega,NT)q_{m_{23}}^*(M) =: V_{m_{23}}^{*F}(\Omega|N)q_{m_{23}}^*(M) \\
r_1^*(M,t) = V_{r_1}^*(\Omega,t)q_{r_1}^*(M) \approx V_{r_1}^*(\Omega,NT)q_{r_1}^*(M) =: V_{r_1}^{*F}(\Omega|N)q_{r_1}^*(M) \\
r_{23}^*(M,t) = V_{r_{23}}^*(\Omega,t)q_{r_{23}}^*(M) \approx V_{r_{23}}^*(\Omega,NT)q_{r_{23}}^*(M) =: V_{r_{23}}^{*F}(\Omega|N)q_{r_{23}}^*(M) \\
d\varepsilon_i^*(M,t) \approx q_{\varepsilon i}^*(M)\dfrac{\partial V_\varepsilon^{*F}}{\partial N}(\Omega|N)dN \\
dm_{23}^*(M,t) \approx q_{m_{23}}^*(M)\dfrac{\partial V_{m_{23}}^{*F}}{\partial N}(\Omega|N)dN \\
dr_1^*(M,t) \approx q_{r_1}^*(M)\dfrac{\partial V_{r_1}^{*F}}{\partial N}(\Omega|N)dN \\
dr_{23}^*(M,t) \approx q_{r_{23}}^*(M)\dfrac{\partial V_{r_{23}}^{*F}}{\partial N}(\Omega|N)dN \\
\mathbb{Q}^*(I,\Omega) = \left\{\begin{array}{r}(q_{\varepsilon i}^*(M))_{(i)\in\{1,\dots,6\}}, q_{m_{23}}^*(M), q_{r_1}^*(M), q_{r_{23}}^*(M), \\ c_\varepsilon^{*F}(\Omega|N), c_{m_{23}}^{*F}(\Omega|N), c_{r_1}^{*F}(\Omega|N), c_{r_{23}}^{*F}(\Omega|N)\end{array}\right\} \\
\mathbb{Q}^{*+}(I,\Omega) = \left\{\begin{array}{r}(q_{\varepsilon i}^{*+}(M))_{(i)\in\{1,\dots,6\}}, q_{m_{23}}^{*+}(M), q_{r_1}^{*+}(M), q_{r_{23}}^{*+}(M), \\ c_\varepsilon^{*+F}(\Omega), c_{m_{23}}^{*+F}(\Omega), c_{r_1}^{*+F}(\Omega), c_{r_{23}}^{*+F}(\Omega)\end{array}\right\}
\end{array}\right. \tag{9.26}$$

• **Problème local de fatigue sur un domaine de type PPM(I,Ω) -** Appliqués au cas de la fissuration transverse, l'ensemble des paramètres locaux du problème approché et les formules de passage (Eq. 6.21) sont :

$$\left\{\begin{array}{r}
t \approx NT \\
dt \approx TdN \\
\varepsilon_i^*(M,t) = V_\varepsilon^{*(i)}(\Omega,t)q_{\varepsilon i}^*(M) \approx V_\varepsilon^{*(i)}(\Omega,NT)q_{\varepsilon i}^*(M) =: V_\varepsilon^{*F(i)}(\Omega|N)q_{\varepsilon i}^*(M) \\
m_{23}^*(M,t) = V_{m_{23}}^*(\Omega,t)q_{m_{23}}^*(M) \approx V_{m_{23}}^*(\Omega,NT)q_{m_{23}}^*(M) =: V_{m_{23}}^{*F}(\Omega|N)q_{m_{23}}^*(M) \\
r_1^*(M,t) = V_{r_1}^*(\Omega,t)q_{r_1}^*(M) \approx V_{r_1}^*(\Omega,NT)q_{r_1}^*(M) =: V_{r_1}^{*F}(\Omega|N)q_{r_1}^*(M) \\
r_{23}^*(M,t) = V_{r_{23}}^*(\Omega,t)q_{r_{23}}^*(M) \approx V_{r_{23}}^*(\Omega,NT)q_{r_{23}}^*(M) =: V_{r_{23}}^{*F}(\Omega|N)q_{r_{23}}^*(M) \\
d\varepsilon_i^*(M,t) \approx q_{\varepsilon i}^*(M)\dfrac{\partial V_\varepsilon^{*F(i)}}{\partial N}(\Omega|N)dN \\
dm_{23}^*(M,t) \approx q_{m_{23}}^*(M)\dfrac{\partial V_{m_{23}}^{*F}}{\partial N}(\Omega|N)dN \\
dr_1^*(M,t) \approx q_{r_1}^*(M)\dfrac{\partial V_{r_1}^{*F}}{\partial N}(\Omega|N)dN \\
dr_{23}^*(M,t) \approx q_{r_{23}}^*(M)\dfrac{\partial V_{r_{23}}^{*F}}{\partial N}(\Omega|N)dN \\
\mathbb{Q}^*(I,\Omega) = \left\{\begin{array}{r}(q_{\varepsilon i}^*(M))_{(i)\in\{1,\dots,6\}}, q_{m_{23}}^*(M), q_{r_1}^*(M), q_{r_{23}}^*(M), \\ (c_\varepsilon^{*F(i)}(\Omega|N))_{(i)\in\{1,\dots,6\}}, c_{m_{23}}^{*F}(\Omega|N), c_{r_1}^{*F}(\Omega|N), c_{r_{23}}^{*F}(\Omega|N)\end{array}\right\} \\
\mathbb{Q}^{*+}(I,\Omega) = \left\{\begin{array}{r}(q_{\varepsilon i}^{*+}(M))_{(i)\in\{1,\dots,6\}}, q_{m_{23}}^{*+}(M), q_{r_1}^{*+}(M), q_{r_{23}}^{*+}(M), \\ (c_\varepsilon^{*+F(i)}(\Omega))_{(i)\in\{1,\dots,6\}}, c_{m_{23}}^{*+F}(\Omega), c_{r_1}^{*+F}(\Omega), c_{r_{23}}^{*+F}(\Omega)\end{array}\right\}
\end{array}\right. \tag{9.27}$$

• **Problème local de fatigue sur un domaine de type PPMI(I,Ω) -** Appliqués au cas de la fissuration transverse, l'ensemble des paramètres locaux du problème approché et les formules de passage (Eq. 6.22) sont :

$$\left\{\begin{array}{r}
t \approx NT \\
dt \approx TdN \\
\varepsilon_i^*(M,t) = V_\varepsilon^*(\Omega,t)q_{\varepsilon i}^*(M) \approx V_\varepsilon^*(\Omega,NT)q_{\varepsilon i}^*(M) =: V_\varepsilon^{*F}(\Omega|N)q_{\varepsilon i}^*(M) \\
m_{23}(M,t) = V_{m_{23}}^*(\Omega,t)q_{m_{23}}^*(M) \approx V_{m_{23}}^*(\Omega,NT)q_{m_{23}}^*(M) =: V_{m_{23}}^{*F}(\Omega|N)q_{m_{23}}^*(M) \\
r_1^*(M,t) = V_{r_1}^*(\Omega,t)q_{r_1}^*(M) \approx V_{r_1}^*(\Omega,NT)q_{r_1}^*(M) =: V_{r_1}^{*F}(\Omega|N)q_{r_1}^*(M) \\
r_{23}^*(M,t) = V_{r_{23}}^*(\Omega,t)q_{r_{23}}^*(M) \approx V_{r_{23}}^*(\Omega,NT)q_{r_{23}}^*(M) =: V_{r_{23}}^{*F}(\Omega|N)q_{r_{23}}^*(M) \\
d\varepsilon_i^*(M,t) \approx q_{\varepsilon i}^*(M)\dfrac{\partial V_\varepsilon^{*F}}{\partial N}(\Omega|N)dN \\
dm_{23}^*(M,t) \approx q_{m_{23}}^*(M)\dfrac{\partial V_{m_{23}}^{*F}}{\partial N}(\Omega|N)dN \\
dr_1^*(M,t) \approx q_{r_1}^*(M)\dfrac{\partial V_{r_1}^{*F}}{\partial N}(\Omega|N)dN \\
dr_{23}^*(M,t) \approx q_{r_{23}}^*(M)\dfrac{\partial V_{r_{23}}^{*F}}{\partial N}(\Omega|N)dN \\
\mathbb{Q}^*(I,\Omega) = \left\{\begin{array}{r}(q_{\varepsilon i}^*(M))_{(i)\in\{1,\dots,6\}}, q_{m_{23}}^*(M), q_{r_1}^*(M), q_{r_{23}}^*(M), \\ c_\varepsilon^{*F}(\Omega|N), c_{m_{23}}^{*F}(\Omega|N), c_{r_1}^{*F}(\Omega|N), c_{r_{23}}^{*F}(\Omega|N)\end{array}\right\} \\
\mathbb{Q}^{*+}(I,\Omega) = \left\{\begin{array}{r}(q_{\varepsilon i}^{*+}(M))_{(i)\in\{1,\dots,6\}}, q_{m_{23}}^{*+}(M), q_{r_1}^{*+}(M), q_{r_{23}}^{*+}(M), \\ c_\varepsilon^{*+F}(\Omega), c_{m_{23}}^{*+F}(\Omega), c_{r_1}^{*+F}(\Omega), c_{r_{23}}^{*+F}(\Omega)\end{array}\right\}
\end{array}\right. \tag{9.28}$$

• **Problème local de fatigue sur un domaine de type PPML(I,Ω) -** Appliqués au cas de la fissuration transverse, l'ensemble des paramètres locaux du problème approché et les formules de passage (Eq. 6.23) sont :

$$\left\{\begin{array}{r}
t \approx NT \\
dt \approx TdN \\
\varepsilon_i^*(M,t) = V_\varepsilon^{*(i)}(\Omega,t)q_{\varepsilon i}^*(M) \approx V_\varepsilon^{*(i)}(\Omega,NT)q_{\varepsilon i}^*(M) =: V_\varepsilon^{*F(i)}(\Omega|N)q_{\varepsilon i}^*(M) \\
m_{23}^*(M,t) = V_{m_{23}}^*(\Omega,t)q_{m_{23}}^*(M) \approx V_{m_{23}}^*(\Omega,NT)q_{m_{23}}^*(M) =: V_{m_{23}}^{*F}(\Omega|N)q_{m_{23}}^*(M) \\
r_1^*(M,t) = V_{r_1}^*(\Omega,t)q_{r_1}^*(M) \approx V_{r_1}^*(\Omega,NT)q_{r_1}^*(M) =: V_{r_1}^{*F}(\Omega|N)q_{r_1}^*(M) \\
r_{23}^*(M,t) = V_{r_{23}}^*(\Omega,t)q_{r_{23}}^*(M) \approx V_{r_{23}}^*(\Omega,NT)q_{r_{23}}^*(M) =: V_{r_{23}}^{*F}(\Omega|N)q_{r_{23}}^*(M) \\
d\varepsilon_i^*(M,t) \approx q_{\varepsilon i}^*(M)\dfrac{\partial V_{\varepsilon i}^{*F}}{\partial N}(\Omega|N)dN \\
dm_{23}^*(M,t) \approx q_{m_{23}}^*(M)\dfrac{\partial V_{m_{23}}^{*F}}{\partial N}(\Omega|N)dN \\
dr_1^*(M,t) \approx q_{r_1}^*(M)\dfrac{\partial V_{r_1}^{*F}}{\partial N}(\Omega|N)dN \\
dr_{23}^*(M,t) \approx q_{r_{23}}^*(M)\dfrac{\partial V_{r_{23}}^{*F}}{\partial N}(\Omega|N)dN \\
\mathbb{Q}^*(I,\Omega) = \left\{\begin{array}{r}(T(c_\varepsilon^{*F(i)}(\Omega|N))_{(i)\in\{1,\dots,6\}}, T(c_{m_{23}}^{*F}(\Omega|N), T(c_{r_1}^{*F}(\Omega|N), T(c_{r_{23}}^{*F}(\Omega|N), \\ (q_{\varepsilon i}^*(M))_{(i)\in\{1,\dots,6\}}, q_{m_{23}}^*(M), q_{r_1}^*(M), q_{r_{23}}^*(M), \\ (min(c_\varepsilon^{*F(i)}(\Omega|N)), max(c_\varepsilon^{*F(i)}(\Omega|N)))_{(i)\in\{1,\dots,6\}}, min(c_{m_{23}}^{*F}(\Omega|N)), max(c_{m_{23}}^{*F}(\Omega|N)), \\ min(c_{r_1}^{*F}(\Omega|N)), max(c_{r_1}^{*F}(\Omega|N)), min(c_{r_{23}}^{*F}(\Omega|N)), max(c_{r_{23}}^{*F}(\Omega|N))\end{array}\right\} \\
\mathbb{Q}^{*+}(I,\Omega) = \left\{\begin{array}{r}(T_\varepsilon^{*+(i)}(\Omega))_{(i)\in\{1,\dots,6\}}, T_{m_{23}}^{*+}(\Omega), T_{r_1}^{*+}(\Omega), T_{r_{23}}^{*+}(\Omega), \\ (q_{\varepsilon i}^{*+}(M))_{(i)\in\{1,\dots,6\}}, q_{m_{23}}^{*+}(M), q_{r_1}^{*+}(M), q_{r_{23}}^{*+}(M), \\ (c_{\varepsilon min}^{*+(i)}(\Omega), c_{\varepsilon max}^{*+(i)}(\Omega))_{(i)\in\{1,\dots,6\}}, c_{m_{23}min}^{*+}(\Omega), c_{m_{23}max}^{*+}(\Omega), \\ c_{r_1min}^{*+}(\Omega), c_{r_1max}^{*+}(\Omega), c_{r_{23}min}^{*+}(\Omega), c_{r_{23}max}^{*+}(\Omega)\end{array}\right\}
\end{array}\right. \tag{9.29}$$

• **Problème local de fatigue sur un domaine de type PPMLI(I,Ω) -** Appliqués au cas de la fissuration transverse, l'ensemble des paramètres locaux du problème approché et les formules de passage (Eq. 6.24) sont :

$$\left\{\begin{array}{r}
t \approx NT \\
dt \approx TdN \\
\varepsilon_i^*(M,t) = V_\varepsilon^*(\Omega,t)q_{\varepsilon i}^*(M) \approx V_\varepsilon^*(\Omega,NT)q_{\varepsilon i}^*(M) =: V_\varepsilon^{*F}(\Omega|N)q_{\varepsilon i}^*(M) \\
m_{23}^*(M,t) = V_{m_{23}}^*(\Omega,t)q_{m_{23}}^*(M) \approx V_{m_{23}}^*(\Omega,NT)q_{m_{23}}^*(M) =: V_{m_{23}}^{*F}(\Omega|N)q_{m_{23}}^*(M) \\
r_1^*(M,t) = V_{r_1}^*(\Omega,t)q_{r_1}^*(M) \approx V_{r_1}^*(\Omega,NT)q_{r_1}^*(M) =: V_{r_1}^{*F}(\Omega|N)q_{r_1}^*(M) \\
r_{23}^*(M,t) = V_{r_{23}}^*(\Omega,t)q_{r_{23}}^*(M) \approx V_{r_{23}}^*(\Omega,NT)q_{r_{23}}^*(M) =: V_{r_{23}}^{*F}(\Omega|N)q_{r_{23}}^*(M) \\
d\varepsilon_i^*(M,t) \approx q_{\varepsilon i}^*(M)\dfrac{\partial V_\varepsilon^{*F}(\Omega|N)}{\partial N}dN \\
dm_{23}^*(M,t) \approx q_{m_{23}}^*(M)\dfrac{\partial V_{m_{23}}^{*F}(\Omega|N)}{\partial N}dN \\
dr_1^*(M,t) \approx q_{r_1}^*(M)\dfrac{\partial V_{r_1}^{*F}(\Omega|N)}{\partial N}dN \\
dr_{23}^*(M,t) \approx q_{r_{23}}^*(M)\dfrac{\partial V_{r_{23}}^{*F}(\Omega|N)}{\partial N}dN \\
\mathbb{Q}^*(I,\Omega) = \left\{\begin{array}{r}
((q_{\varepsilon i}^*(M))_{(i)\in\{1,\dots,6\}}, q_{m_{23}}^*(M), q_{r_1}^*(M), q_{r_{23}}^*(M), \\
T(c_\varepsilon^{*F}(\Omega|N)), T(c_{m_{23}}^{*F}(\Omega|N)), T(c_{r_1}^{*F}(\Omega|N)), T(c_{r_{23}}^{*F}(\Omega|N)), \\
min(c_\varepsilon^{*F}(\Omega|N)), max(c_\varepsilon^{*F}(\Omega|N)), min(c_{m_{23}}^{*F}(\Omega|N)), max(c_{m_{23}}^{*F}(\Omega|N)), \\
min(c_{r_1}^{*F}(\Omega|N)), max(c_{r_1}^{*F}(\Omega|N)), min(c_{r_{23}}^{*F}(\Omega|N)), max(c_{r_{23}}^{*F}(\Omega|N))
\end{array}\right\} \\
\mathbb{Q}^{*+}(I,\Omega) = \left\{\begin{array}{r}
(q_{\varepsilon i}^{*+}(M))_{(i)\in\{1,\dots,6\}}, q_{m_{23}}^{*+}(M), q_{r_1}^{*+}(M), q_{r_{23}}^{*+}(M), \\
T_\varepsilon^{*+}(\Omega), T_{m_{23}}^{*+}(\Omega), T_{r_1}^{*+}(\Omega), T_{r_{23}}^{*+}(\Omega), \\
V_{\varepsilon min}^{*+}(\Omega), V_{\varepsilon max}^{*+}(\Omega), V_{m_{23}min}^{*+}(\Omega), V_{m_{23}max}^{*+}(\Omega), \\
V_{r_1min}^{*+}(\Omega), V_{r_1max}^{*+}(\Omega), V_{r_{23}min}^{*+}(\Omega), V_{r_{23}max}^{*+}(\Omega)
\end{array}\right\}
\end{array}\right. \tag{9.30}$$

9.9 Etape 5 - Les lois d'évolution cycliques DVE (a) : cadre du modèle original dans sa forme simplifiée

Nous donnons ici les lois d'évolution pour les classes de problèmes les plus utiles pour l'application qui est faite (PP(I,M), PPI(I,M), PPMLI(I,M), PP(I,Ω), PPI(I,Ω), PPMLI(I,Ω)). Les lois d'évolution pour l'intégralité des classes se trouve en annexe (Partie VII - Chapitre 15 - Paragraphe 15.1).

Nous rappelons que la loi locale dont il est question ici est la suivante (Eq. 9.3) :

$$d\alpha = \frac{2f(\alpha)f'(\alpha)\left(C_{ij}^N U_N^2(m,r) + C_{ij}^T U_T^2(m,r) + C_{ij}^{NT} U_N(m,r)U_T(m,r)\right)\varepsilon_j d\varepsilon_i}{-(f'^2(\alpha) + f(\alpha)f''(\alpha))\left(C_{ij}^N U_N^2(m,r) + C_{ij}^T U_T^2(m,r) + C_{ij}^{NT} U_N(m,r)U_T(m,r)\right)\varepsilon_i\varepsilon_j}$$

9.9.1 Problèmes locaux de fatigue au point M

• **Problème local de fatigue de type PP(I,M)**

En utilisant les formules de passage (Eq. 9.7), la loi d'évolution de l'endommagement en fatigue du modèle original dans le cadre un problème local de fatigue de type PP(I,M) s'écrit alors :

$$d\alpha = \frac{2f(\alpha)f'(\alpha)\left(C_{ij}^N U_N^2(m,r) + C_{ij}^T U_T^2(m,r) + C_{ij}^{NT} U_N(m,r)U_T(m,r)\right)\varepsilon_j^F(M|N)\dfrac{\partial\varepsilon_i^F(M|N)}{\partial N}}{-(f'^2(\alpha)f(\alpha)f''(\alpha))\left(C_{ij}^N U_N^2(m,r) + C_{ij}^T U_T^2(m,r) + C_{ij}^{NT} U_N(m,r)U_T(m,r)\right)\varepsilon_i^F(M|N)\varepsilon_j^F(M|N)}dN \tag{9.31}$$

L'ensemble des paramètres locaux du problème approché est :

$$\mathbb{Q}^{*+}(I,M) = \left\{ (c^{+F(i)}(M))_{(i)\in\{1,2,6\}} \right\}$$

- **Problème local de fatigue de type PPI**(I,M)

En utilisant les formules de passage (Eq. 9.8), la loi d'évolution de l'endommagement en fatigue du modèle original dans le cadre un problème local de fatigue de type PPI(I,M) s'écrit alors :

$$d\alpha = \frac{2f(\alpha)f'(\alpha)\left(C_{ij}^N U_N^2(m,r) + C_{ij}^T U_T^2(m,r) + C_{ij}^{NT} U_N(m,r)U_T(m,r)\right)\overline{\varepsilon_j}(M)\overline{\varepsilon_i}(M)\dfrac{\partial V^F(M|N)}{\partial N}}{-(f'^2(\alpha)+f(\alpha)f''(\alpha))\left(C_{ij}^N U_N^2(m,r) + C_{ij}^T U_T^2(m,r) + C_{ij}^{NT} U_N(m,r)U_T(m,r)\right)\overline{\varepsilon_i}(M)\overline{\varepsilon_j}(M)V^F(M|N)}dN \tag{9.32}$$

Cette équation se simplifie en :

$$d\alpha = \frac{2f(\alpha)f'(\alpha)\dfrac{\partial V^F(M|N)}{\partial N}}{-(f'^2(\alpha)+f(\alpha)f''(\alpha))V^F(M|N)}dN \tag{9.33}$$

L'ensemble des paramètres locaux du problème approché est :

$$\mathbb{Q}^{*+}(I,M) = \left\{ c^{+F}(M), (\overline{\varepsilon_i^+}(M))_{(i)\in\{1,2,6\}} \right\}$$

- **Problème local de fatigue de type PPMLI**(I,M)

En utilisant les formules de passage (Eq. 9.12), la loi d'évolution de l'endommagement en fatigue du modèle original dans le cadre un problème local de fatigue de type PPMLI(I,M) s'écrit alors :

$$d\alpha = \frac{2f(\alpha)f'(\alpha)\left(C_{ij}^N U_N^2(m,r) + C_{ij}^T U_T^2(m,r) + C_{ij}^{NT} U_N(m,r)U_T(m,r)\right)\overline{\varepsilon_j}(M)\overline{\varepsilon_i}(M)\dfrac{\partial V^F(M|N)}{\partial N}}{-(f'^2(\alpha)+f(\alpha)f''(\alpha))\left(C_{ij}^N U_N^2(m,r) + C_{ij}^T U_T^2(m,r) + C_{ij}^{NT} U_N(m,r)U_T(m,r)\right)\overline{\varepsilon_i}(M)\overline{\varepsilon_j}(M)V^F(M|N)}dN \tag{9.34}$$

Cette équation se simplifie en :

$$d\alpha = \frac{2f(\alpha)f'(\alpha)\dfrac{\partial V^F(M|N)}{\partial N}}{-(f'^2(\alpha)+f(\alpha)f''(\alpha))V^F(M|N)}dN \tag{9.35}$$

L'ensemble des paramètres locaux du problème approché est :

$$\mathbb{Q}^{*+}(I,M) = \left\{ T^+(M), V_{min}^+(M), V_{max}^+(M), (\overline{\varepsilon_i^+}(M))_{(i)\in\{1,2,6\}} \right\}$$

9.9.2 Problèmes locaux de fatigue sur un domaine

- **Problème local de fatigue sur un domaine de type PP**(I,Ω)

En utilisant les formules de passage (Eq. 9.13), la loi d'évolution de l'endommagement en fatigue du modèle original dans le cadre un problème local de fatigue de type PP(I,Ω) s'écrit alors :

$$d\alpha = \frac{2f(\alpha)f'(\alpha)\left(C_{ij}^N U_N^2(m,r) + C_{ij}^T U_T^2(m,r) + C_{ij}^{NT} U_N(m,r)U_T(m,r)\right)V^{F(j)}(\Omega|N)q_j(M)q_i(M)\dfrac{\partial V^{F(i)}(\Omega|N)}{\partial N}}{-(f'^2(\alpha)f(\alpha)f''(\alpha))\left(C_{ij}^N U_N^2(m,r) + C_{ij}^T U_T^2(m,r) + C_{ij}^{NT} U_N(m,r)U_T(m,r)\right)q_i(M)V^{F(i)}(\Omega|N)q_j(M)V^{F(j)}(\Omega|N)}dN \tag{9.36}$$

L'ensemble des paramètres locaux du problème approché est :

$$\mathbb{Q}^{*+}(I,\Omega) = \left\{ (q_i^+(M)_{(i)\in\{1,2,6\}}, c^{+F(i)}(\Omega))_{(i)\in\{1,2,6\}} \right\}$$

• **Problème local de fatigue sur un domaine de type PPI(I,Ω)**

En utilisant les formules de passage (Eq. 9.14), la loi d'évolution de l'endommagement en fatigue du modèle original dans le cadre un problème local de fatigue de type PPI(I,Ω) s'écrit alors :

$$d\alpha = \frac{2f(\alpha)f'(\alpha)\left(C_{ij}^{N}U_N^2(m,r)+C_{ij}^{T}U_T^2(m,r)+C_{ij}^{NT}U_N(m,r)U_T(m,r)\right)q_j(M)q_i(M)\dfrac{\partial V^F(\Omega|N)}{\partial N}}{-(f'^2(\alpha)+f(\alpha)f''(\alpha))\left(C_{ij}^{N}U_N^2(m,r)+C_{ij}^{T}U_T^2(m,r)+C_{ij}^{NT}U_N(m,r)U_T(m,r)\right)q_i(M)q_j(M)V^F(\Omega|N)}dN \tag{9.37}$$

Cette équation se simplifie en :

$$d\alpha = \frac{2f(\alpha)f'(\alpha)\dfrac{\partial V^F(\Omega|N)}{\partial N}}{-(f'^2(\alpha)+f(\alpha)f''(\alpha))V^F(\Omega|N)}dN \tag{9.38}$$

L'ensemble des paramètres locaux du problème approché est :

$$\mathbb{Q}^{*+}(I,\Omega)=\left\{(q_i^+(M))_{(i)\in\{1,2,6\}},c^{+F}(\Omega)\right\}$$

• **Problème local de fatigue sur un domaine de type PPMLI(I,Ω)**

En utilisant les formules de passage (Eq. 9.18), la loi d'évolution de l'endommagement en fatigue du modèle original dans le cadre un problème local de fatigue de type PPMLI(I,Ω) s'écrit alors :

$$d\alpha = \frac{2f(\alpha)f'(\alpha)\left(C_{ij}^{N}U_N^2(m,r)+C_{ij}^{T}U_T^2(m,r)+C_{ij}^{NT}U_N(m,r)U_T(m,r)\right)q_j(M)q_i(M)\dfrac{\partial V^F(\Omega|N)}{\partial N}}{-(f'^2(\alpha)+f(\alpha)f''(\alpha))\left(C_{ij}^{N}U_N^2(m,r)+C_{ij}^{T}U_T^2(m,r)+C_{ij}^{NT}U_N(m,r)U_T(m,r)\right)q_i(M)q_j(M)V^F(\Omega|N)}dN \tag{9.39}$$

Cette équation se simplifie en :

$$d\alpha = \frac{2f(\alpha)f'(\alpha)\dfrac{\partial V^F(\Omega|N)}{\partial N}}{-(f'^2(\alpha)+f(\alpha)f''(\alpha))V^F(\Omega|N)}dN \tag{9.40}$$

L'ensemble des paramètres locaux du problème approché est :

$$\mathbb{Q}^{*+}(I,\Omega)=\left\{(q_i^+(M))_{(i)\in\{1,2,6\}},T^+(\Omega),V_{min}^+(\Omega),V_{max}^+(\Omega)\right\}$$

9.10 Etape 5 - Les lois d'évolution cycliques DVE (b) : cadre du modèle général dans sa seconde forme simplifiée

Nous donnons ici les lois d'évolution pour les classes de problèmes les plus utiles pour l'application qui est faite (PP(I,M), PPI(I,M), PPMLI(I,M), PP(I,Ω), PPI(I,Ω), PPMLI(I,Ω)). Les lois d'évolution pour l'intégralité des classes se trouve en annexe (Partie VII - Chapitre 15 - Paragraphe 15.2).

Nous rappelons que la loi dont il est question ici est la suivante (Eq. 9.4) :

$$d\alpha = \frac{2f(\alpha)f'(\alpha)\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p\leq q}}^{3}D_{ij}^{(pq)}U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)\varepsilon_j d\varepsilon_i}{-\left(f'^2(\alpha)+f(\alpha)f''(\alpha)\right)\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3}D_{ij}^{(pq)}U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)\varepsilon_i\varepsilon_j}$$

9.10.1 Problèmes locaux de fatigue au point M

• **Problème local de fatigue de type PP**(I, M)

En utilisant les formules de passage (Eq. 9.7), la loi d'évolution de l'endommagement en fatigue du modèle dans sa seconde forme simplifiée dans le cadre un problème local de fatigue de type PP(I, M) s'écrit alors :

$$d\alpha = \frac{2f(\alpha)f'(\alpha)\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p\leq q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)\varepsilon_j^F(M|N)\dfrac{\partial\varepsilon_i^F(M|N)}{\partial N}}{-(f'^2(\alpha)+f(\alpha)f''(\alpha))\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)\varepsilon_i^F(M|N)\varepsilon_j^F(M|N)}dN \tag{9.41}$$

L'ensemble des paramètres locaux du problème approché est :

$$\mathbb{Q}^{*+}(I,M) = \left\{(c^{+F(i)}(M))_{(i)\in\{1,\ldots,6\}}\right\}$$

• **Problème local de fatigue de type PPI**(I, M)

En utilisant les formules de passage (Eq. 9.8), la loi d'évolution de l'endommagement en fatigue du modèle dans sa seconde forme simplifiée dans le cadre un problème local de fatigue de type PPI(I, M) s'écrit alors :

$$d\alpha = \frac{2f(\alpha)f'(\alpha)\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p\leq q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)\overline{\varepsilon_j}(M)\overline{\varepsilon_i}(M)\dfrac{\partial V^F(M|N)}{\partial N}}{-(f'^2(\alpha)+f(\alpha)f''(\alpha))\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)\overline{\varepsilon_i}(M)\overline{\varepsilon_j}(M)V^F(M|N)}dN \tag{9.42}$$

Cette équation se simplifie en :

$$d\alpha = \frac{2f(\alpha)f'(\alpha)\dfrac{\partial V^F(M|N)}{\partial N}}{-(f'^2(\alpha)+f(\alpha)f''(\alpha))V^F(M|N)}dN \tag{9.43}$$

L'ensemble des paramètres locaux du problème approché est :

$$\mathbb{Q}^{*+}(I,M) = \left\{c^{+F}(M), (\overline{\varepsilon_i^+}(M))_{(i)\in\{1,\ldots,6\}}\right\}$$

• **Problème local de fatigue de type PPMLI**(I, M)

En utilisant les formules de passage (Eq. 9.12), la loi d'évolution de l'endommagement en fatigue du modèle dans sa seconde forme simplifiée dans le cadre un problème local de fatigue de type PPMLI(I, M) s'écrit alors :

$$d\alpha = \frac{2f(\alpha)f'(\alpha)\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p\leq q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)\overline{\varepsilon_j}(M)\overline{\varepsilon_i}(M)\dfrac{\partial V^F(M|N)}{\partial N}}{-(f'^2(\alpha)+f(\alpha)f''(\alpha))\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)\overline{\varepsilon_i}(M)\overline{\varepsilon_j}(M)V^F(M|N)}dN \tag{9.44}$$

Cette équation se simplifie en :

$$d\alpha = \frac{2f(\alpha)f'(\alpha)\dfrac{\partial V^F(M|N)}{\partial N}}{-(f'^2(\alpha)+f(\alpha)f''(\alpha))V^F(M|N)}dN \tag{9.45}$$

L'ensemble des paramètres locaux du problème approché est :

$$\mathbb{Q}^{*+}(I,M) = \left\{T^+(M), V_{min}^+(M), V_{max}^+(M), (\overline{\varepsilon_i^+}(M))_{(i)\in\{1,\ldots,6\}}\right\}$$

9.10.2 Problèmes locaux de fatigue sur un domaine

• **Problème local de fatigue sur un domaine de type PP(I,Ω)**

En utilisant les formules de passage (Eq. 9.13), la loi d'évolution de l'endommagement en fatigue du modèle dans sa seconde forme simplifiée dans le cadre un problème local de fatigue de type PP(I,Ω) s'écrit alors :

$$d\alpha = \frac{2f(\alpha)f'(\alpha)\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p\leq q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)V_j^F(\Omega|N)q_j(M)q_i(M)\dfrac{\partial V_i^F(\Omega|N)}{\partial N}}{-(f'^2(\alpha)+f(\alpha)f''(\alpha))\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)V_i^F(\Omega|N)q_i(M)V_j^F(\Omega|N)q_j(M)}dN \tag{9.46}$$

L'ensemble des paramètres locaux du problème approché est :

$$\mathbb{Q}^{*+}(I,\Omega) = \left\{(q_i^+(M)_{(i)\in\{1,2,6\}}, c^{+F(i)}(\Omega))_{(i)\in\{1,\ldots,6\}}\right\}$$

• **Problème local de fatigue sur un domaine de type PPI(I,Ω)**

En utilisant les formules de passage (Eq. 9.14), la loi d'évolution de l'endommagement en fatigue du modèle dans sa seconde forme simplifiée dans le cadre un problème local de fatigue de type PPI(I,Ω) s'écrit alors :

$$d\alpha = \frac{(f(\alpha)f'(\alpha)\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p\leq q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)q_j(M)q_i(M)\dfrac{\partial V^F(\Omega|N)}{\partial N}}{-(f'^2(\alpha)+f(\alpha)f''(\alpha))\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)q_i(M)q_j(M)V^F(\Omega|N)}dN \tag{9.47}$$

Cette équation se simplifie en :

$$d\alpha = \frac{(f(\alpha)f'(\alpha)\dfrac{\partial V^F(\Omega|N)}{\partial N}}{-(f'^2(\alpha)+f(\alpha)f''(\alpha))V^F(\Omega|N)}dN \tag{9.48}$$

L'ensemble des paramètres locaux du problème approché est :

$$\mathbb{Q}^{*+}(I,\Omega) = \left\{(q_i^+(M))_{(i)\in\{1,\ldots,6\}}, c^{+F}(\Omega)\right\}$$

• **Problème local de fatigue sur un domaine de type PPMLI(I,Ω)**

En utilisant les formules de passage (Eq. 9.18), la loi d'évolution de l'endommagement en fatigue du modèle dans sa seconde forme simplifiée dans le cadre un problème local de fatigue de type PPMLI(I,Ω) s'écrit alors :

$$d\alpha = \frac{(f(\alpha)f'(\alpha)\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p\leq q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)q_j(M)q_i(M)\dfrac{\partial V^F(\Omega|N)}{\partial N}}{-(f'^2(\alpha)+f(\alpha)f''(\alpha))\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)q_i(M)q_j(M)V^F(\Omega|N)}dN \tag{9.49}$$

Cette équation se simplifie en :

$$d\alpha = \frac{(f(\alpha)f'(\alpha)\dfrac{\partial V^F(\Omega|N)}{\partial N}}{-(f'^2(\alpha)+f(\alpha)f''(\alpha))V^F(\Omega|N)}dN \tag{9.50}$$

L'ensemble des paramètres locaux du problème approché est :

$$\mathbb{Q}^{*+}(I,\Omega) = \left\{(q_i^+(M))_{(i)\in\{1,\ldots,6\}}, T^+(\Omega), V_{min}^+(\Omega), V_{max}^+(\Omega)\right\}$$

9.11 Etape 5 - Les lois d'évolution cycliques NDVE (c) : cadre du modèle modèle général dans sa première forme simplifiée

Nous donnons ici les lois d'évolution pour les mêmes classes de problèmes que dans les cas précédents (PP(I,M), PPI(I,M), PPMLI(I,M), PP(I,Ω), PPI(I,Ω), PPMLI(I,Ω)). Les lois d'évolution pour l'intégralité des classes se trouve en annexe (Partie VII - Chapitre 15 - Paragraphe 15.3).

Nous rappelons que la loi dont il est question ici est la suivante (Eq. 9.5) :

$$
\begin{aligned}
d\alpha = \frac{
\begin{aligned}
&2f(\alpha)f'(\alpha)\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p\leq q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)\varepsilon_j d\varepsilon_i + \dots\\
&\dots f(\alpha)f'(\alpha)\left(\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}\left(\frac{\partial U_p}{\partial m_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})+U_p(m_{23},r_1,r_{23})\frac{\partial U_q}{\partial m_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})\right)\right)\varepsilon_i\varepsilon_j\right)dm_{23} + \dots\\
&\dots f(\alpha)f'(\alpha)\left(\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}\left(\frac{\partial U_p}{\partial r_1}(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})+U_p(m_{23},r_1,r_{23})\frac{\partial U_q}{\partial r_1}(m_{23},r_1,r_{23})\right)\right)\varepsilon_i\varepsilon_j\right)dr_1 + \dots\\
&\dots f(\alpha)f'(\alpha)\left(\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}\left(\frac{\partial U_p}{\partial r_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})+U_p(m_{23},r_1,r_{23})\frac{\partial U_q}{\partial r_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})\right)\right)\varepsilon_i\varepsilon_j\right)dr_{23}
\end{aligned}
}{
-\left(f'^2(\alpha)+f(\alpha)f''(\alpha)\right)\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)\varepsilon_i\varepsilon_j
}
\end{aligned}
\tag{9.51}
$$

9.11.1 Problèmes locaux de fatigue au point M

• **Problème local de fatigue de type PP(I,M)**

En utilisant les formules de passage (Eq. 9.19), la loi d'évolution de l'endommagement en fatigue du modèle dans sa première forme simplifiée dans le cadre un problème local de fatigue de type PP(I,M) s'écrit alors avec la notation de Voigt :

$$
\begin{aligned}
d\alpha = \frac{
\begin{aligned}
&2f(\alpha)f'(\alpha)\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p\leq q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)\varepsilon_j^{*F}(M|N)\dots\\
&\dots\frac{\partial\varepsilon_i^{*F}}{\partial N}(M|N)dN + \dots\\
&\dots f(\alpha)f'(\alpha)\left(\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}\left(\frac{\partial U_p}{\partial m_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})+U_p(m_{23},r_1,r_{23})\frac{\partial U_q}{\partial m_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})\right)\right)\varepsilon_i^{*F}(M|N)\varepsilon_j^{*F}(M|N)\right)\dots\\
&\dots\frac{\partial dm_{23}^{*F}}{\partial N}(M|N)dN + \dots\\
&\dots f(\alpha)f'(\alpha)\left(\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}\left(\frac{\partial U_p}{\partial r_1}(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})+U_p(m_{23},r_1,r_{23})\frac{\partial U_q}{\partial r_1}(m_{23},r_1,r_{23})\right)\right)\varepsilon_i^{*F}(M|N)\varepsilon_j^{*F}(M|N)\right)\dots\\
&\dots\frac{\partial dr_1^{*F}}{\partial N}(M|N)dN + \dots\\
&\dots f(\alpha)f'(\alpha)\left(\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}\left(\frac{\partial U_p}{\partial r_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})+U_p(m_{23},r_1,r_{23})\frac{\partial U_q}{\partial r_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})\right)\right)\varepsilon_i^{*F}(M|N)\varepsilon_j^{*F}(M|N)\right)\dots\\
&\dots\frac{\partial dr_{23}^{*F}}{\partial N}(M|N)dN
\end{aligned}
}{
-\left(f'^2(\alpha)+f(\alpha)f''(\alpha)\right)\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)\varepsilon_i^{*F}(M|N)\varepsilon_j^{*F}(M|N)
}
\end{aligned}
\tag{9.52}
$$

L'ensemble des paramètres locaux du problème approché est :

$$\mathbb{Q}^{*+}(I,M)=\left\{(c_{\varepsilon}^{+F(i)}(M))_{(i)\in\{1,\ldots,6\}},c_{m_{23}}^{+F}(M),c_{r_1}^{+F}(M),c_{r_{23}}^{+F}(M)\right\}$$

• **Problème local de fatigue de type PPI**(I,M)

En utilisant les formules de passage (Eq. 9.20), la loi d'évolution de l'endommagement en fatigue du modèle dans sa première forme simplifiée dans le cadre un problème local de fatigue de type PPI(I,M) s'écrit alors avec la notation de Voigt :

$$\begin{aligned}
d\alpha=\frac{\begin{array}{r}
2f(\alpha)f'(\alpha)\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p\leq q}}^{3}D_{ij}^{(pq)}U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)V_{\varepsilon}^{*F}(M|N)\overline{\varepsilon_j^*}(M)\overline{\varepsilon_i^*}(M)\frac{\partial V_{\varepsilon}^{*F}}{\partial N}(M|N)dN+\ldots\\
\ldots f(\alpha)f'(\alpha)\left(\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3}D_{ij}^{(pq)}\left(\frac{\partial U_p}{\partial m_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})+U_p(m_{23},r_1,r_{23})\frac{\partial U_q}{\partial m_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})\right)\right)V_{\varepsilon}^{*F}(M|N)\overline{\varepsilon_i^*}(M)V_{\varepsilon}^{*F}(M|N)\overline{\varepsilon_j^*}(M)\right)\ldots\\
\ldots\overline{m_{23}^*}(M)\frac{\partial V_{m_{23}}^{*F}}{\partial N}(M|N)dN+\ldots\\
\ldots f(\alpha)f'(\alpha)\left(\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3}D_{ij}^{(pq)}\left(\frac{\partial U_p}{\partial r_1}(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})+U_p(m_{23},r_1,r_{23})\frac{\partial U_q}{\partial r_1}(m_{23},r_1,r_{23})\right)\right)V_{\varepsilon}^{*F}(M|N)\overline{\varepsilon_i^*}(M)V_{\varepsilon}^{*F}(M|N)\overline{\varepsilon_j^*}(M)\right)\ldots\\
\ldots\overline{r_1^*}(M)\frac{\partial V_{r_1}^{*F}}{\partial N}(M|N)dN+\ldots\\
\ldots f(\alpha)f'(\alpha)\left(\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3}D_{ij}^{(pq)}\left(\frac{\partial U_p}{\partial r_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})+U_p(m_{23},r_1,r_{23})\frac{\partial U_q}{\partial r_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})\right)\right)V_{\varepsilon}^{*F}(M|N)\overline{\varepsilon_i^*}(M)V_{\varepsilon}^{*F}(M|N)\overline{\varepsilon_j^*}(M)\right)\ldots\\
\ldots\overline{r_{23}^*}(M)\frac{\partial V_{r_{23}}^{*F}}{\partial N}(M|N)dN
\end{array}}{\begin{array}{r}
-\left(f'^2(\alpha)+f(\alpha)f''(\alpha)\right)\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3}D_{ij}^{(pq)}U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)V_{\varepsilon}^{*F}(M|N)\overline{\varepsilon_i^*}(M)V_{\varepsilon}^{*F}(M|N)\overline{\varepsilon_j^*}(M)\\
\end{array}}
\end{aligned}\tag{9.53}$$

En simplifiant, cela donne finalement :

$$\begin{aligned}
d\alpha=\frac{\begin{array}{r}
2f(\alpha)f'(\alpha)\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p\leq q}}^{3}D_{ij}^{(pq)}U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)\overline{\varepsilon_j^*}(M)\overline{\varepsilon_i^*}(M)\frac{\partial V_{\varepsilon}^{*F}}{\partial N}(M|N)dN+\ldots\\
\ldots f(\alpha)f'(\alpha)\left(\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3}D_{ij}^{(pq)}\left(\frac{\partial U_p}{\partial m_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})+U_p(m_{23},r_1,r_{23})\frac{\partial U_q}{\partial m_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})\right)\right)\overline{\varepsilon_i^*}(M)V_{\varepsilon}^{*F}(M|N)\overline{\varepsilon_j^*}(M)\right)\ldots\\
\ldots\overline{m_{23}^*}(M)\frac{\partial V_{m_{23}}^{*F}}{\partial N}(M|N)dN+\ldots\\
\ldots f(\alpha)f'(\alpha)\left(\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3}D_{ij}^{(pq)}\left(\frac{\partial U_p}{\partial r_1}(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})+U_p(m_{23},r_1,r_{23})\frac{\partial U_q}{\partial r_1}(m_{23},r_1,r_{23})\right)\right)\overline{\varepsilon_i^*}(M)V_{\varepsilon}^{*F}(M|N)\overline{\varepsilon_j^*}(M)\right)\ldots\\
\ldots\overline{r_1^*}(M)\frac{\partial V_{r_1}^{*F}}{\partial N}(M|N)dN+\ldots\\
\ldots f(\alpha)f'(\alpha)\left(\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3}D_{ij}^{(pq)}\left(\frac{\partial U_p}{\partial r_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})+U_p(m_{23},r_1,r_{23})\frac{\partial U_q}{\partial r_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})\right)\right)\overline{\varepsilon_i^*}(M)V_{\varepsilon}^{*F}(M|N)\overline{\varepsilon_j^*}(M)\right)\ldots\\
\ldots\overline{r_{23}^*}(M)\frac{\partial V_{r_{23}}^{*F}}{\partial N}(M|N)dN
\end{array}}{\begin{array}{r}
-\left(f'^2(\alpha)+f(\alpha)f''(\alpha)\right)\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3}D_{ij}^{(pq)}U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)\overline{\varepsilon_i^*}(M)V_{\varepsilon}^{*F}(M|N)\overline{\varepsilon_j^*}(M)\\
\end{array}}
\end{aligned}\tag{9.54}$$

L'ensemble des paramètres locaux du problème approché est :

$$\mathbb{Q}^{*+}(I,M)=\left\{\begin{array}{c} c_{\varepsilon}^{+F}(M),c_{m_{23}}^{+F}(M),c_{r_1}^{+F}(M),c_{r_{23}}^{+F}(M),\\ (\overline{\varepsilon_i^+}(M))_{(i)\in\{1,\dots,6\}},\overline{m_{23}^+}(M),\overline{r_1^+}(M),\overline{r_{23}^+}(M)\end{array}\right\}$$

• **Problème local de fatigue de type PPMLI**(I,M)

En utilisant les formules de passage (Eq. 9.24), la loi d'évolution de l'endommagement en fatigue du modèle dans sa première forme simplifiée dans le cadre un problème local de fatigue de type PPMLI(I,M) s'écrit alors avec la notation de Voigt :

$$\begin{array}{r} 2f(\alpha)f'(\alpha)\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p\leq q}}^{3}D_{ij}^{(pq)}U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)V_{\varepsilon}^{*F}(M|N)\overline{\varepsilon_j^*}(M)\overline{\varepsilon_i^*}(M)\frac{\partial V_{\varepsilon}^{*F}(M|N)}{\partial N}dN+\dots\\ \dots f(\alpha)f'(\alpha)\left(\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3}D_{ij}^{(pq)}\left(\frac{\partial U_p}{\partial m_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})+U_p(m_{23},r_1,r_{23})\frac{\partial U_q}{\partial m_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})\right)\right)V_{\varepsilon}^{*F}(M|N)\overline{\varepsilon_i^*}(M)V_{\varepsilon}^{*F}(M|N)\overline{\varepsilon_j^*}(M)\right)\dots\\ \dots\overline{m_{23}^*}(M)\frac{\partial V_{m_{23}}^{*F}(M|N)}{\partial N}dN+\dots\\ \dots f(\alpha)f'(\alpha)\left(\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3}D_{ij}^{(pq)}\left(\frac{\partial U_p}{\partial r_1}(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})+U_p(m_{23},r_1,r_{23})\frac{\partial U_q}{\partial r_1}(m_{23},r_1,r_{23})\right)\right)V_{\varepsilon}^{*F}(M|N)\overline{\varepsilon_i^*}(M)V_{\varepsilon}^{*F}(M|N)\overline{\varepsilon_j^*}(M)\right)\dots\\ \dots\overline{r_1^*}(M)\frac{\partial V_{r_1}^{*F}(M|N)}{\partial N}dN+\dots\\ \dots f(\alpha)f'(\alpha)\left(\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3}D_{ij}^{(pq)}\left(\frac{\partial U_p}{\partial r_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})+U_p(m_{23},r_1,r_{23})\frac{\partial U_q}{\partial r_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})\right)\right)V_{\varepsilon}^{*F}(M|N)\overline{\varepsilon_i^*}(M)V_{\varepsilon}^{*F}(M|N)\overline{\varepsilon_j^*}(M)\right)\dots\\ \dots\overline{r_{23}^*}(M)\frac{\partial V_{r_{23}}^{*F}(M|N)}{\partial N}dN \end{array}$$

$$d\alpha=\frac{}{-\left(f'^2(\alpha)+f(\alpha)f''(\alpha)\right)\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3}D_{ij}^{(pq)}U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)V_{\varepsilon}^{*F}(M|N)\overline{\varepsilon_i^*}(M)V_{\varepsilon}^{*F}(M|N)\overline{\varepsilon_j^*}(M)} \tag{9.55}$$

En simplifiant, cela donne finalement :

$$\begin{array}{r} 2f(\alpha)f'(\alpha)\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p\leq q}}^{3}D_{ij}^{(pq)}U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)\overline{\varepsilon_j^*}(M)\overline{\varepsilon_i^*}(M)\frac{\partial V_{\varepsilon}^{*F}(M|N)}{\partial N}dN+\dots\\ \dots f(\alpha)f'(\alpha)\left(\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3}D_{ij}^{(pq)}\left(\frac{\partial U_p}{\partial m_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})+U_p(m_{23},r_1,r_{23})\frac{\partial U_q}{\partial m_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})\right)\right)\overline{\varepsilon_i^*}(M)V_{\varepsilon}^{*F}(M|N)\overline{\varepsilon_j^*}(M)\right)\dots\\ \dots\overline{m_{23}^*}(M)\frac{\partial V_{m_{23}}^{*F}(M|N)}{\partial N}dN+\dots\\ \dots f(\alpha)f'(\alpha)\left(\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3}D_{ij}^{(pq)}\left(\frac{\partial U_p}{\partial r_1}(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})+U_p(m_{23},r_1,r_{23})\frac{\partial U_q}{\partial r_1}(m_{23},r_1,r_{23})\right)\right)\overline{\varepsilon_i^*}(M)V_{\varepsilon}^{*F}(M|N)\overline{\varepsilon_j^*}(M)\right)\dots\\ \dots\overline{r_1^*}(M)\frac{\partial V_{r_1}^{*F}(M|N)}{\partial N}dN+\dots\\ \dots f(\alpha)f'(\alpha)\left(\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3}D_{ij}^{(pq)}\left(\frac{\partial U_p}{\partial r_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})+U_p(m_{23},r_1,r_{23})\frac{\partial U_q}{\partial r_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})\right)\right)\overline{\varepsilon_i^*}(M)V_{\varepsilon}^{*F}(M|N)\overline{\varepsilon_j^*}(M)\right)\dots\\ \dots\overline{r_{23}^*}(M)\frac{\partial V_{r_{23}}^{*F}(M|N)}{\partial N}dN \end{array}$$

$$d\alpha=\frac{}{-\left(f'^2(\alpha)+f(\alpha)f''(\alpha)\right)\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3}D_{ij}^{(pq)}U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)\overline{\varepsilon_i^*}(M)V_{\varepsilon}^{*F}(M|N)\overline{\varepsilon_j^*}(M)} \tag{9.56}$$

L'ensemble des paramètres locaux du problème approché est :

$$\mathbb{Q}^{*+}(I,M)=\left\{\begin{array}{r} T_{\varepsilon}^{+}(M),T_{m_{23}}^{+}(M),T_{r_1}^{+}(M),T_{r_{23}}^{+}(M),\\ V_{\varepsilon min}^{+}(M),V_{m_{23}min}^{+}(M),V_{r_1min}^{+}(M),V_{r_{23}min}^{+}(M),\\ V_{\varepsilon max}^{+}(M),V_{m_{23}max}^{+}(M),V_{r_1max}^{+}(M),V_{r_{23}max}^{+}(M),\\ (\overline{\varepsilon_i^{+}}(M))_{(i)\in\{1,...,6\}},\overline{m_{23}^{+}}(M),\overline{r_1^{+}}(M),\overline{r_{23}^{+}}(M) \end{array}\right\}$$

9.11.2 Problèmes locaux de fatigue sur un domaine

• Problème local de fatigue sur un domaine de type PP(I,Ω)

En utilisant les formules de passage (Eq. 9.25), la loi d'évolution de l'endommagement en fatigue du modèle dans sa première forme simplifiée dans le cadre un problème local de fatigue de type PP(I,Ω) s'écrit alors avec la notation de Voigt :

$$\begin{aligned} d\alpha = \frac{ \begin{array}{l} 2f(\alpha)f'(\alpha)\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p\leq q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)V_{\varepsilon}^{*F(j)}(\Omega|N)q_{\varepsilon j}^{*}(M)q_{\varepsilon i}^{*}(M)\frac{\partial V_{\varepsilon}^{*F(i)}}{\partial N}(\Omega|N)dN+.\\ \ldots f(\alpha)f'(\alpha)\left(\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}\left(\frac{\partial U_p}{\partial m_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})+U_p(m_{23},r_1,r_{23})\frac{\partial U_q}{\partial m_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})\right)\right)V_{\varepsilon}^{*F(i)}(\Omega|N)q_{\varepsilon i}^{*}(M)V_{\varepsilon}^{*F(j)}(\Omega|N)q_{\varepsilon j}^{*}(M)\right).\\ \ldots q_{m_{23}}^{*}(M)\frac{\partial V_{m_{23}}^{*F}}{\partial N}(\Omega|N)dN+.\\ \ldots f(\alpha)f'(\alpha)\left(\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}\left(\frac{\partial U_p}{\partial r_1}(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})+U_p(m_{23},r_1,r_{23})\frac{\partial U_q}{\partial r_1}(m_{23},r_1,r_{23})\right)\right)V_{\varepsilon}^{*F(i)}(\Omega|N)q_{\varepsilon i}^{*}(M)V_{\varepsilon}^{*F(j)}(\Omega|N)q_{\varepsilon j}^{*}(M)\right).\\ \ldots .\\ \ldots q_{r_1}^{*}(M)\frac{\partial V_{r_1}^{*F}}{\partial N}(\Omega|N)dN+.\\ \ldots f(\alpha)f'(\alpha)\left(\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}\left(\frac{\partial U_p}{\partial r_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})+U_p(m_{23},r_1,r_{23})\frac{\partial U_q}{\partial r_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})\right)\right)V_{\varepsilon}^{*F(i)}(\Omega|N)q_{\varepsilon i}^{*}(M)V_{\varepsilon}^{*F(j)}(\Omega|N)q_{\varepsilon j}^{*}(M)\right).\\ \ldots q_{r_{23}}^{*}(M)\frac{\partial V_{r_{23}}^{*F}}{\partial N}(\Omega|N)d \end{array} }{ -\left(f'^{2}(\alpha)+f(\alpha)f''(\alpha)\right)\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)V_{\varepsilon}^{*F(i)}(\Omega|N)q_{\varepsilon i}^{*}(M)V_{\varepsilon}^{*F(j)}(\Omega|N)q_{\varepsilon j}^{*}(M) } \end{aligned} \tag{9.57}$$

L'ensemble des paramètres locaux du problème approché est :

$$\mathbb{Q}^{*+}(I,\Omega)=\left\{\begin{array}{l} (q_{\varepsilon i}^{+}(M))_{(i)\in\{1,...,6\}},q_{m_{23}}^{+}(M),q_{r_1}^{+}(M),q_{r_{23}}^{+}(M),\\ (c_{\varepsilon}^{+F(i)}(\Omega))_{(i)\in\{1,...,6\}},c_{m_{23}}^{+F}(\Omega),c_{r_1}^{+F}(\Omega),c_{r_{23}}^{+F}(\Omega) \end{array}\right\}$$

• Problème local de fatigue sur un domaine de type PPI(I,Ω)

En utilisant les formules de passage (Eq. 9.26), la loi d'évolution de l'endommagement en fatigue du modèle dans sa première forme simplifiée dans le cadre un problème local de fatigue

de type PPI(I,Ω) s'écrit alors avec la notation de Voigt :

$$
\begin{aligned}
&2f(\alpha)f'(\alpha)\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p\leq q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)V_\varepsilon^{*F}(\Omega|N)q_{\varepsilon j}^*(M)q_{\varepsilon i}^*(M)\frac{\partial V_\varepsilon^{*F}}{\partial N}(\Omega|N)dN+\dots\\
&\dots f(\alpha)f'(\alpha)\left(\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}\left(\frac{\partial U_p}{\partial m_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})+U_p(m_{23},r_1,r_{23})\frac{\partial U_q}{\partial m_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})\right)\right)V_\varepsilon^{*F}(\Omega|N)q_{\varepsilon i}^*(M)V_\varepsilon^{*F}(\Omega|N)q_{\varepsilon j}^*(M)\right)\dots\\
&\dots q_{m_{23}}^*(M)\frac{\partial V_{m_{23}}^{*F}}{\partial N}(\Omega|N)dN+\dots\\
&\dots f(\alpha)f'(\alpha)\left(\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}\left(\frac{\partial U_p}{\partial r_1}(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})+U_p(m_{23},r_1,r_{23})\frac{\partial U_q}{\partial r_1}(m_{23},r_1,r_{23})\right)\right)V_\varepsilon^{*F}(\Omega|N)q_{\varepsilon i}^*(M)V_\varepsilon^{*F}(\Omega|N)q_{\varepsilon j}^*(M)\right)\dots\\
&\dots q_{r_1}^*(M)\frac{\partial V_{r_1}^{*F}}{\partial N}(\Omega|N)dN+\dots\\
&\dots f(\alpha)f'(\alpha)\left(\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}\left(\frac{\partial U_p}{\partial r_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})+U_p(m_{23},r_1,r_{23})\frac{\partial U_q}{\partial r_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})\right)\right)V_\varepsilon^{*F}(\Omega|N)q_{\varepsilon i}^*(M)V_\varepsilon^{*F}(\Omega|N)q_{\varepsilon j}^*(M)\right)\dots\\
&\dots q_{r_{23}}^*(M)\frac{\partial V_{r_{23}}^{*F}}{\partial N}(\Omega|N)dN\\
d\alpha=&\frac{}{-\left(f'^2(\alpha)+f(\alpha)f''(\alpha)\right)\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)V_\varepsilon^{*F}(\Omega|N)q_{\varepsilon i}^*(M)V_\varepsilon^{*F}(\Omega|N)q_{\varepsilon j}^*(M)}
\end{aligned}
\tag{9.58}
$$

En simplifiant, cela donne finalement :

$$
\begin{aligned}
&2f(\alpha)f'(\alpha)\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p\leq q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)q_{\varepsilon j}^*(M)q_{\varepsilon i}^*(M)\frac{\partial V_\varepsilon^{*F}}{\partial N}(\Omega|N)dN+\dots\\
&\dots f(\alpha)f'(\alpha)\left(\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}\left(\frac{\partial U_p}{\partial m_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})+U_p(m_{23},r_1,r_{23})\frac{\partial U_q}{\partial m_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})\right)\right)q_{\varepsilon i}^*(M)V_\varepsilon^{*F}(\Omega|N)q_{\varepsilon j}^*(M)\right)\dots\\
&\dots q_{m_{23}}^*(M)\frac{\partial V_{m_{23}}^{*F}}{\partial N}(\Omega|N)dN+\dots\\
&\dots f(\alpha)f'(\alpha)\left(\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}\left(\frac{\partial U_p}{\partial r_1}(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})+U_p(m_{23},r_1,r_{23})\frac{\partial U_q}{\partial r_1}(m_{23},r_1,r_{23})\right)\right)q_{\varepsilon i}^*(M)V_\varepsilon^{*F}(\Omega|N)q_{\varepsilon j}^*(M)\right)\dots\\
&\dots q_{r_1}^*(M)\frac{\partial V_{r_1}^{*F}}{\partial N}(\Omega|N)dN+\dots\\
&\dots f(\alpha)f'(\alpha)\left(\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}\left(\frac{\partial U_p}{\partial r_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})+U_p(m_{23},r_1,r_{23})\frac{\partial U_q}{\partial r_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})\right)\right)q_{\varepsilon i}^*(M)V_\varepsilon^{*F}(\Omega|N)q_{\varepsilon j}^*(M)\right)\dots\\
&\dots q_{r_{23}}^*(M)\frac{\partial V_{r_{23}}^{*F}}{\partial N}(\Omega|N)dN\\
d\alpha=&\frac{}{-\left(f'^2(\alpha)+f(\alpha)f''(\alpha)\right)\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)q_{\varepsilon i}^*(M)V_\varepsilon^{*F}(\Omega|N)q_{\varepsilon j}^*(M)}
\end{aligned}
\tag{9.59}
$$

L'ensemble des paramètres locaux du problème approché est :

$$
\mathbb{Q}^{*+}(I,\Omega)=\left\{\begin{array}{r}(q_{\varepsilon i}^+(M))_{(i)\in\{1,\dots,6\}},q_{m_{23}}^+(M),q_{r_1}^+(M),q_{r_{23}}^+(M),\\ c_\varepsilon^{+F}(\Omega),c_{m_{23}}^{+F}(\Omega),c_{r_1}^{+F}(\Omega),c_{r_{23}}^{+F}(\Omega)\end{array}\right\}
$$

• **Problème local de fatigue sur un domaine de type PPMLI(I,Ω)**

En utilisant les formule de passage (Eq. 9.30), la loi d'évolution de l'endommagement en fatigue du modèle dans sa première forme simplifiée dans le cadre un problème local de fatigue

de type PPMLI(I,Ω) s'écrit alors avec la notation de Voigt :

$$
\begin{aligned}
d\alpha = \frac{
\begin{array}{r}
2f(\alpha)f'(\alpha)\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p\leq q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)V_\varepsilon^{*F}(\Omega|N)q_{\varepsilon j}^*(M)q_{\varepsilon i}^*(M)\dfrac{\partial V_\varepsilon^{*F}(\Omega|N)}{\partial N}dN+\dots\\
\dots f(\alpha)f'(\alpha)\left(\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}\left(\dfrac{\partial U_p}{\partial m_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})+U_p(m_{23},r_1,r_{23})\dfrac{\partial U_q}{\partial m_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})\right)\right)V_\varepsilon^{*F}(\Omega|N)q_{\varepsilon i}^*(M)V_\varepsilon^{*F}(\Omega|N)q_{\varepsilon j}^*(M)\right)\dots\\
\dots q_{m_{23}}^*(M)\dfrac{\partial V_{m_{23}}^{*F}(\Omega|N)}{\partial N}dN+\dots\\
\dots f(\alpha)f'(\alpha)\left(\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}\left(\dfrac{\partial U_p}{\partial r_1}(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})+U_p(m_{23},r_1,r_{23})\dfrac{\partial U_q}{\partial r_1}(m_{23},r_1,r_{23})\right)\right)V_\varepsilon^{*F}(\Omega|N)q_{\varepsilon i}^*(M)V_\varepsilon^{*F}(\Omega|N)q_{\varepsilon j}^*(M)\right)\dots\\
\dots{}_j\, q_{r_1}^*(M)\dfrac{\partial V_{r_1}^{*F}(\Omega|N)}{\partial N}dN+\dots\\
\dots f(\alpha)f'(\alpha)\left(\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}\left(\dfrac{\partial U_p}{\partial r_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})+U_p(m_{23},r_1,r_{23})\dfrac{\partial U_q}{\partial r_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})\right)\right)V_\varepsilon^{*F}(\Omega|N)q_{\varepsilon i}^*(M)V_\varepsilon^{*F}(\Omega|N)q_{\varepsilon j}^*(M)\right)\dots\\
\dots q_{r_{23}}^*(M)\dfrac{\partial V_{r_{23}}^{*F}(\Omega|N)}{\partial N}dN
\end{array}
}{
\begin{array}{r}
-\left(f'^2(\alpha)+f(\alpha)f''(\alpha)\right)\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)V_\varepsilon^{*F}(\Omega|N)q_{\varepsilon i}^*(M)V_\varepsilon^{*F}(\Omega|N)q_{\varepsilon j}^*(M)
\end{array}
}
\end{aligned}
\tag{9.60}
$$

En simplifiant, cela donne finalement :

$$
\begin{aligned}
d\alpha = \frac{
\begin{array}{r}
2f(\alpha)f'(\alpha)\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p\leq q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)q_{\varepsilon j}^*(M)q_{\varepsilon i}^*(M)\dfrac{\partial V_\varepsilon^{*F}(\Omega|N)}{\partial N}dN+\dots\\
\dots f(\alpha)f'(\alpha)\left(\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}\left(\dfrac{\partial U_p}{\partial m_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})+U_p(m_{23},r_1,r_{23})\dfrac{\partial U_q}{\partial m_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})\right)\right)q_{\varepsilon i}^*(M)V_\varepsilon^{*F}(\Omega|N)q_{\varepsilon j}^*(M)\right)\dots\\
\dots q_{m_{23}}^*(M)\dfrac{\partial V_{m_{23}}^{*F}(\Omega|N)}{\partial N}dN+\dots\\
\dots f(\alpha)f'(\alpha)\left(\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}\left(\dfrac{\partial U_p}{\partial r_1}(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})+U_p(m_{23},r_1,r_{23})\dfrac{\partial U_q}{\partial r_1}(m_{23},r_1,r_{23})\right)\right)q_{\varepsilon i}^*(M)V_\varepsilon^{*F}(\Omega|N)q_{\varepsilon j}^*(M)\right)\dots\\
\dots{}_j\, q_{r_1}^*(M)\dfrac{\partial V_{r_1}^{*F}(\Omega|N)}{\partial N}dN+\dots\\
\dots f(\alpha)f'(\alpha)\left(\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}\left(\dfrac{\partial U_p}{\partial r_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})+U_p(m_{23},r_1,r_{23})\dfrac{\partial U_q}{\partial r_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})\right)\right)q_{\varepsilon i}^*(M)V_\varepsilon^{*F}(\Omega|N)q_{\varepsilon j}^*(M)\right)\dots\\
\dots q_{r_{23}}^*(M)\dfrac{\partial V_{r_{23}}^{*F}(\Omega|N)}{\partial N}dN
\end{array}
}{
\begin{array}{r}
-\left(f'^2(\alpha)+f(\alpha)f''(\alpha)\right)\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)q_{\varepsilon i}^*(M)V_\varepsilon^{*F}(\Omega|N)q_{\varepsilon j}^*(M)
\end{array}
}
\end{aligned}
\tag{9.61}
$$

L'ensemble des paramètres locaux du problème approché est :

$$
\mathbb{Q}^{*+}(I,\Omega)=\left\{
\begin{array}{r}
(q_{\varepsilon i}^+(M))_{(i)\in\{1,\dots,6\}},q_{m_{23}}^+(M),q_{r_1}^+(M),q_{r_{23}}^+(M),\\
T_\varepsilon^+(\Omega),T_{m_{23}}^+(\Omega),T_{r_1}^+(\Omega),T_{r_{23}}^+(\Omega),\\
V_{\varepsilon min}^+(\Omega),V_{\varepsilon max}^+(\Omega),V_{m_{23}min}^+(\Omega),V_{m_{23}max}^+(\Omega),\\
V_{r_1min}^+(\Omega),V_{r_1max}^+(\Omega),V_{r_{23}min}^+(\Omega),V_{r_{23}max}^+(\Omega)
\end{array}
\right\}
$$

9.12 Etape 6 - Identification de la loi cyclique locale par recours à l'ensemble des paramètres caractéristiques des sollicitations

Nous allons procéder maintenant à l'identification de la plus simple des lois de type DVE : celle du modèle original simplifié dans le cadre d'un problème local de fatigue de type PPMLI(I,Ω), pour laquelle il a été montré que la classe PPI(I,Ω) était équivalente (Paragraphe 9.5). Bien qu'il s'agisse d'un cas particulier, il ne restreint en rien la généralité de la démarche ici proposée. En outre, le modèle général dans sa seconde forme simplifiée présente une loi cyclique de type DVE très similaire à celle du modèle original simplifié, à l'exception de son caractère tridimensionnel.

Il convient en tout premier lieu de remarquer que l'examen de la loi d'évolution cyclique seule peut induire des erreurs d'interprétation quant au processus d'identification. Ainsi, pour le modèle original dans sa forme simplifiée, la loi cyclique dans le cas de la classe locale PPI(I,Ω) (Eq. 9.37) :

$$d\alpha = \frac{2f(\alpha)f'(\alpha)\left(C_{ij}^{N}U_N^2(m,r)+C_{ij}^{T}U_T^2(m,r)+C_{ij}^{NT}U_N(m,r)U_T(m,r)\right)q_j(M)q_i(M)\dfrac{\partial V^F(\Omega|N)}{\partial N}}{-(f'^2(\alpha)+f(\alpha)f''(\alpha))\left(C_{ij}^{N}U_N^2(m,r)+C_{ij}^{T}U_T^2(m,r)+C_{ij}^{NT}U_N(m,r)U_T(m,r)\right)q_i(M)q_j(M)V^F(\Omega|N)}dN$$

se simplifie en la loi cyclique (Eq. 9.38) :

$$d\alpha = \frac{2f(\alpha)f'(\alpha)\dfrac{\partial V^F(\Omega|N)}{\partial N}}{-(f'^2(\alpha)+f(\alpha)f''(\alpha))V^F(\Omega|N)}dN \tag{9.62}$$

Nous pourrions alors penser que seule la dépendance vis-à-vis de N de la fonction périodique $V^F(\Omega|N)$ au travers de son cycle élémentaire approché $c^{+F}(\Omega)$ agit sur l'évolution de α. Evidemment, il n'en est rien. Il suffit pour s'en convaincre de regarder l'ensemble des paramètres locaux du problème approché :

$$\mathbb{Q}^{*+}(I,\Omega) = \left\{(q_i^+(M))_{(i)\in\{1,2,6\}}, c^{+F}(\Omega)\right\}$$

La fonction $V^F(\Omega|N)$ dépend donc non seulement de N mais aussi des éléments contenus dans l'ensemble des paramètres locaux du problème approché. Ainsi, c'est l'ensemble des paramètres locaux du problème approché au point M, $\mathbb{Q}^{*+}(I,M)$, ou sur un domaine, $\mathbb{Q}^{*+}(I,\Omega)$ qui guide le protocole d'identification : ce protocole doit être tel qu'il parcourt cet ensemble de la manière la plus complète possible afin que l'identification de la fonction $V^F(\Omega|N)$ puisse refléter au mieux sa dépendance vis-à-vis des élements de l'ensemble des paramètres locaux du problème approché.

Ces ensembles sont, pour le modèle original ($\{1,\ldots,6\} = \{1,2,6\}$) simplifié et le modèle général dans sa seconde forme simplifiée :

— pour les problèmes locaux de fatigue au point M :
  . cas PP(I,M) - $\mathbb{Q}^{*+}(I,M) = \left\{(c^{+F(i)}(M))_{(i)\in\{1,\ldots,6\}}\right\}$
  . cas PPI(I,M) - $\mathbb{Q}^{*+}(I,M) = \left\{c^{+F}(M), (\overline{\varepsilon_i^+}(M))_{(i)\in\{1,\ldots,6\}}\right\}$
  . cas PPM(I,M) - $\mathbb{Q}^{*+}(I,M) = \left\{(c^{+F(i)}(M))_{(i)\in\{1,\ldots,6\}}\right\}$
  . cas PPMI(I,M) - $\mathbb{Q}^{*+}(I,M) = \left\{c^{+F}(M), (\overline{\varepsilon_i^+}(M))_{(i)\in\{1,\ldots,6\}}\right\}$
  . cas PPML(I,M) - $\mathbb{Q}^{*+}(I,M) = \left\{(T^{+(i)}(M), c_{min}^{+(i)}(M), c_{max}^{+(i)}(M))_{(i)\in\{1,\ldots,6\}}\right\}$
  . cas PPMLI(I,M) - $\mathbb{Q}^{*+}(I,M) = \left\{T^+(M), V_{min}^+(M), V_{max}^+(M), (\overline{\varepsilon_i^+}(M))_{(i)\in\{1,\ldots,6\}}\right\}$
— pour les problèmes locaux de fatigue sur un domaine :
  . cas PP(I,Ω) - $\mathbb{Q}^{*+}(I,\Omega) = \left\{(q_i^+(M)_{(i)\in\{1,\ldots,6\}}, c^{+F(i)}(\Omega))_{(i)\in\{1,\ldots,6\}}\right\}$
  . cas PPI(I,Ω) - $\mathbb{Q}^{*+}(I,\Omega) = \left\{(q_i^+(M))_{(i)\in\{1,\ldots,6\}}, c^{+F}(\Omega)\right\}$

. cas PPM(I,Ω) - $\mathbb{Q}^{*+}(I,\Omega) = \left\{(q_i^+(M)_{(i)\in\{1,\dots,6\}}, c^{+F(i)}(\Omega))_{(i)\in\{1,\dots,6\}}\right\}$
. cas PPMI(I,Ω) - $\mathbb{Q}^{*+}(I,\Omega) = \left\{(q_i^+(M))_{(i)\in\{1,\dots,6\}}, c^{+F}(\Omega)\right\}$
. cas PPML(I,Ω) - $\mathbb{Q}^{*+}(I,\Omega) = \left\{(q_i^+(M), T^{+(i)}(\Omega), c_{min}^{+(i)}(\Omega), c_{max}^{+(i)}(\Omega))_{(i)\in\{1,\dots,6\}}\right\}$
. cas PPMLI(I,Ω) - $\mathbb{Q}^{*+}(I,\Omega) = \left\{(q_i^+(M))_{(i)\in\{1,\dots,6\}}, T^+(\Omega), V_{min}^+(\Omega), V_{max}^+(\Omega)\right\}$

Si ces ensembles permettent d'appréhender précisément ce sur quoi doit agir l'identification, il n'en demeure pas moins que cela souligne aussi l'ampleur de la campagne expérimentale nécessaire et sa complexité. Alors, nous devons admettre qu'il est difficile de mener à bien une campagne expérimentale rationnelle et efficace sans se rattacher à des spécificités propres au phénomène étudié et donc de perdre de la généralité à notre propos. C'est ce que nous allons faire maintenant pour tenter de mieux cerner l'ensemble des paramètres locaux du problème approché.

Dans le cas spécifique du problème posé ici, le problème local de fatigue sur le domaine Ω est de type PPMLI(I,Ω) et donc l'ensemble des paramètres locaux du problème approché sur le domaine Ω est :

$$\mathbb{Q}^{*+}(I,\Omega) = \left\{(q_i^+(M))_{(i)\in\{1,\dots,6\}}, \dots \right.$$
$$\left. \dots T^+(\Omega) = T[V(t)], V_{min}^+(\Omega) = V_{min}, V_{max}^+(\Omega) = V_{max}\right\}$$

En raison des spécificités du phénomène étudié, cette classe peut être étendue à la classe PPI(I,Ω) pour laquelle l'ensemble des paramètres locaux du problème approché sur le domaine Ω est :

$$\mathbb{Q}^{*+}(I,\Omega) = \left\{(q_i^+(M))_{(i)\in\{1,\dots,6\}}, c^{+F}(\Omega)\right\}$$

Le protocole expérimental qui doit s'appuyer sur l'un de ces ensembles, strictement équivalent d'un point de vue du phénomène, saura être plus simple en utilisant celui de la classe PPMLI(I,Ω) qui affiche plus clairement les descripteurs de la sollicitation. En outre, le phénomène est, au premier ordre, supposé être insensible aux effets de vitesse. La grandeur associée à la période peut donc disparaître de l'ensemble $\mathbb{Q}^{*+}(I,\Omega)$ qui devient donc :

$$\mathbb{Q}^{*+}(I,\Omega) = \left\{(q_i^+(M))_{(i)\in\{1,\dots,6\}}, V_{min}, V_{max}\right\}$$

Les équations (Eq. 8.9, Eq. 8.10, Eq. 8.11) dans le cas de l'utilisation du modèle original ou les équations (Eq. 8.1, Eq. 8.2, Eq. 8.3) dans le cas de l'utilisation du modèle général, sont importantes pour l'identification de la loi de fatigue, autant qu'elles le sont pour l'identification de la loi quasi-statique. En effet, le modèle soit original, soit général, montre qu'en fait, pour une valeur de la variable scalaire d'endommagement α donnée :

— le comportement est sensible à la géométrie des microfissures, et que cette géométrie est décrite par les variables $(mode, rayon) = (m, r)$ pour le modèle original et $(mode, rayon) = (m_{23}, r_1, r_{23})$ pour le modèle général ;
— pour les deux modèles, l'évolution de la variable α dépend de la variable pilote, mais aussi de ces mêmes variables $(mode, rayon)$.

Et pour les deux modèles, les formules précédentes montrent que les variables $(mode, rayon)$ permettent de calculer, de manière bi-univoque, les composantes (ou une combinaison des composantes) soit du tenseur des déformations, soit du tenseur de contraintes. Finalement, l'ensemble des descripteurs de la sollicitation contenue dans $\mathbb{Q}^{*+}(I,\Omega)$ peut être remplacé de manière équivalente :

— pour le modèle original, par :

$$\mathbb{Q}^{*+}(I,\Omega) = \left\{m^+(M), r^+(M), V_{min}, V_{max}\right\} \tag{9.63}$$

— pour le modèle général, par :

$$\mathbb{Q}^{*+}(I,\Omega) = \left\{m_{23}^{+}(M), r_{1}^{+}(M), r_{23}^{+}(M), V_{min}, V_{max}\right\} \tag{9.64}$$

Les essais expérimentaux mis en place pour une telle identification sont très majoritairement réalisés comme étant des essais de traction uniaxiale sur des éprouvettes parallélépipédiques stratifiées pour lesquelles les plis qui s'endommagent, finalement les seuls intéressants pour l'identification de la loi, sont orientés judicieusement pour permettre de couvrir l'ensemble $\mathbb{Q}^{*+}(I,\Omega)$. Compte tenu de la sollicitation et de la géométrie de l'éprouvette, il est aisé de montrer que l'état de contrainte (à l'échelle mésoscopique) et dans le cadre de la Mécanique de l'Endommagement, est (au premier ordre) uniforme dans la zone utile de tous les plis. Ensuite, il est généralement commode d'exprimer les caractéristiques d'essais de fatigue à l'aide du rapport de charge usuel qui s'exprime ici par : $R = V_{min}/V_{max}$. Finalement :

— pour le modèle original :

$$\mathbb{Q}^{*+}(I,\Omega) = \left\{m^{+}, r^{+}, V_{min}, V_{max}\right\} = \left\{m^{+}, r_{max}^{+}, R\right\}$$

— pour le modèle général :

$$\mathbb{Q}^{*+}(I,\Omega) = \left\{m_{23}^{+}, r_{1}^{+}, r_{23}^{+}, V_{min}, V_{max}\right\} = \left\{m_{23}^{+}, r_{1max}^{+}, r_{23max}^{+}, R\right\}$$

Désormais, nous ne faisons plus référence qu'au modèle original simplifié. Et donc, finalement, l'objet de l'identification est de trouver la fonction $V^F(\Omega|N)|_{(m^+,r_{max}^+,R)}$ où l'indication de (m^+, r_{max}^+, R) souligne que la fonction dépend de N, mais aussi du triplet (m^+, r_{max}^+, R). Pour atteindre ce but, les essais expérimentaux qui vont être utilisés sont issus de la littérature [65].

Pour le modèle considéré, la variable m balaye théoriquement l'intervalle compris entre 1 et 2. Les stratifications issues de [65] sont telles qu'expérimentalement la variable m dans les plis qui s'endommagent balaye à peu près le même intervalle : $(0°_2, 90°_2)_s$, $(0°_2, +55°_2, -55°_2)_s$, $(0°_2, +45°_2, -45°_2)_s$ donnent pour les orientations respectivement 90°, ±55° et ±45°, les valeurs respectivement $m = 1.000, 1.353, 1.891$ (Tab. 9.1). Dans le cas de la stratification $(0°_2, 90°_2)_s$, le pli à 0° ne s'endommage jamais (de manière significative) et, pour ce pli, la variable m vaut 2. Finalement, l'ensemble de la campagne expérimentale permet de couvrir l'intervalle de variation théorique complet de m ainsi que celui de r pour n'importe quelle valeur de R et donc notamment pour $R = 0.1$, seule valeur de R de la campagne expérimentale. La campagne expérimentale va donc permettre d'accéder à $V^F(\Omega|N)|_{(m^+,r_{max}^+,R)}$ pour tous les triplets $(m^+ = m^{exp}, r_{max}^+ = r_{max}^{exp}, R = R^{exp})$ de la campagne expérimentale (Tab. 9.1) car $\mathbb{Q}^{*+}(I,\Omega) = \{m^+, r_{max}^+, R\}$.

Pour cela, on ré-écrit (Eq. 9.62) sous la forme :

$$\frac{1}{V^F(\Omega|N)|_{(m^{exp},r_{max}^{exp},R^{exp})}} \frac{\partial V^F(\Omega|N)|_{(m^{exp},r_{max}^{exp},R^{exp})}}{\partial N} dN = \frac{-(f'^2(\alpha^{exp}(N)) + f(\alpha^{exp}(N))f''(\alpha^{exp}(N)))}{2f(\alpha^{exp}(N))f'(\alpha^{exp}(N))} d\alpha^{exp}(N) \tag{9.65}$$

où $\alpha^{exp}(N)$ désigne la valeur de la mesure expérimentale de la variable α au nombre de cycles N, pour les conditions expérimentales $(m^{exp}, r_{max}^{exp}, R^{exp})$. Un processus inverse dont la donnée est $\alpha^{exp}(N)$ (alors que lors d'un calcul normal, $\alpha(N)$ est prédite par la loi) permet d'obtenir, avec la relation (Eq. 9.65), la fonction $V^F(\Omega|N)|_{(m^{exp},r_{max}^{exp},R^{exp})}$ pour chaque triplet $(m^{exp}, r_{max}^{exp}, R^{exp})$. Une interpolation de toutes ces fonctions donne $V^F(\Omega|N)|_{(m,r_{max},R)}$.

Le processus inverse résout évidemment les problèmes de calcul des essais réalisés pour la campagne expérimentale. Il s'agit d'essais de traction uniaxiale sur des éprouvettes parallélépipédiques. Ce problème de traction uniaxiale sur des éprouvettes parallélépipédiques est le premier des cinq calculs qui est traité dans la partie suivante consacrée à la réalisation de calculs sur des structures complexes, mettant en œuvre l'ensemble des concepts développés. La formulation de ce problème est réalisée (Partie V - Chapitre 10). Le processus de calcul qualifié d'inverse utilisé pour l'identification résout ces équations à l'exception de l'équation d'évolution du processus de calcul (Eq. 10.6) qui est remplacée par l'équation (Eq. 9.65).

Caractéristiques	Stratifications		
des éprouvettes	$(0^\circ_2, 90^\circ_2)_s$	$(0^\circ_2, +55^\circ_2, -55^\circ_2)_s$	$(0^\circ_2, +45^\circ_2, -45^\circ_2)_s$
Largeur	25 mm	25 mm	25 mm
Epaisseur	1 mm	1.5 mm	1.5 mm
Aire de la section droite (s)	25 mm^2	37.5 mm^2	37.5 mm^2
Sollicitation de traction à rupture ($S_{rupture}$)	20750 N	31725 N	34762 N
Contrainte équivalente à rupture ($S_{rupture}/s$)	830 MPa	846 MPa	927 MPa
Pli d'intérêt	90° (*)	−55° ou +55° (**)	−45° ou +45° (**)
Epaisseur du pli de base	0.125 mm	0.125 mm	0.125 mm
Sollicitation de traction appliquée ($S(t)$) ($S_{min} \leq S(t) \leq S_{max}$) $S(t)$: profil en dent-de-scie	Conditions expérimentales - Essai de traction uniaxiale cyclique Rapport de charge $R = S_{min}/S_{max} = R^{exp} = 0.1$ Fréquence comprise entre 0.1 Hz et 10 Hz Classe structurale $SPMLI(I)$ avec $\mathbb{S}_t(I) = \{S_{max}/s, R = 0.1\}$ (Partie V - Chapitre 10 - Paragraphe 10.7)		
$f = S_{max}/S_{rupture}$ $\sigma_{max} = S_{max}/s$ m^{exp} = valeur de m dans le pli d'intêret r^{exp}_{max} = valeur maximale de r dans le pli d'intêret	Figure (Fig. 9.1) (***) f / S_{max} / σ_{max} / m^{exp} / r^{exp}_{max} 0.3 / 6225 / 249 / 1.000 / 0.545 0.5 / 10375 / 415 / 1.000 / 0.909 0.7 / 14525 / 581 / 1.000 / 1.273 0.8 / 16600 / 664 / 1.000 / 1.455	Figure (Fig. 9.2) (***) f / S_{max} / σ_{max} / m^{exp} / r^{exp}_{max} 0.3 / 6338 / 169 / 1.353 / 0.350 0.5 / 10575 / 282 / 1.353 / 0.583 0.7 / 14813 / 395 / 1.353 / 0.816 0.8 / 16913 / 451 / 1.353 / 0.932	Figure (Fig. 9.3) (***) f / S_{max} / σ_{max} / m^{exp} / r^{exp}_{max} 0.3 / 6938 / 185 / 1.891 / 0.288 0.5 / 11588 / 309 / 1.891 / 0.480 0.7 / 16238 / 433 / 1.891 / 0.672 0.8 / 18525 / 494 / 1.891 / 0.769

TABLE 9.1 – Campagne expérimentale [65] pour l'identification de lois locales de fatigue. Cas du modèle original. (*) Le pli à 0° ne s'endommage jamais significativement et la variable m y vaut 2 : cette donnée complète celles obtenues dans les autres stratifications. (**) plis équivalents pour les mesures de la variable α. (***) Les valeurs de f dans ce tableau et la figure associée ne correspondent pas forcément.

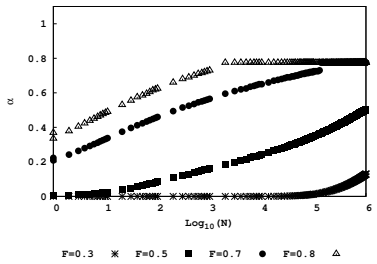


FIGURE 9.1 – Essai de fatigue en traction longitudinale sur une éprouvette $(0°_2, 90°_2)_s$ [65]. Matériau T300/914. Variable d'endommagement α dans le pli à 90° en fonction du nombre de cycles N pour différentes fractions ($f = 0.3, 0.5, 0.7, 0.8$) de la sollicitation à rupture de l'éprouvette (pour un rapport de charge égal à 0.1 et une fréquence comprise entre 0.1 Hz et 10 Hz).

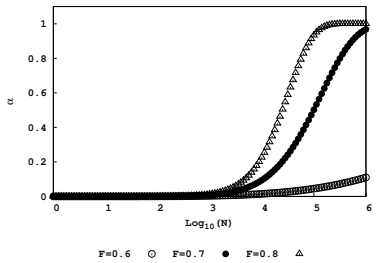


FIGURE 9.2 – Essai de fatigue en traction longitudinale sur éprouvette $(0°_2, +55°_2, -55°_2)_s$ [65]. Variable d'endommagement α dans le pli à +55° (égale à celle dans le pli à −55°) en fonction du nombre de cycles N pour différentes fractions ($f = 0.6, 0.7, 0.8$) de la sollicitation à rupture de l'éprouvette (pour un rapport de charge égal à 0.1 et une fréquence comprise entre 0.1 Hz et 10 Hz).

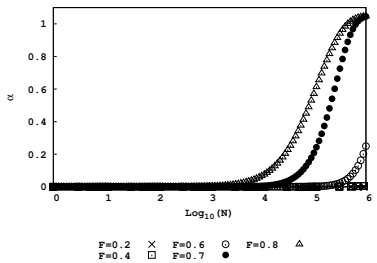


FIGURE 9.3 – Essai de fatigue en traction longitudinale sur éprouvette $(0°_2, +45°_2, -45°_2)_s$ [65]. Matériau T300/914. Variable d'endommagement α dans le pli à +45° (égale à celle dans le pli à −45°) en fonction du nombre de cycles N pour différentes fractions ($f = 0.2, 0.4, 0.6, 0.7, 0.8$) de la sollicitation à rupture de l'éprouvette (pour un rapport de charge égal à 0.1 et une fréquence comprise entre 0.1 Hz et 10 Hz.

Cinquième partie

CALCUL DE STRUCTURES SOUS CHARGEMENT DE FATIGUE A L'AIDE D'UNE APPROCHE LOCALE. CAS DE STRUCTURES COMPOSITES

Chapitre 10

Description des calculs

10.1 Cadre général et commun à tous les calculs

Nous considérons plusieurs structures distinctes sur lesquelles un chargement de fatigue est appliqué. Bien que les géométries sont différentes, nous définissons un cadre général commun à tous les cas.

Le système matériel étudié, noté S, est en mouvement dans l'espace physique, modélisé par un espace affine à 3 dimensions ε^3, rapporté au référentiel $\zeta = (R, H)$. R désigne le repère d'espace, supposé galiléen, dont O définit l'origine et $b = (\vec{x_1}, \vec{x_2}, \vec{x_3})$ la base cartésienne orthonormée directe, H est le repère de temps. Dans R, un point M de ε^3 est repéré, à l'instant t, par l'ensemble de ses coordonnées $x = (x_1, x_2, x_3)$ et son vecteur déplacement est noté $\vec{u}(x, t)$.

Le système coïncide au cours du temps avec le domaine $D = \Omega \cup \partial\Omega$. D est un ensemble continu (connexe par arc) fermé borné de ε^3, Ω désigne son intérieur et $\partial\Omega$ sa frontière. Plus précisément, D coïncide avec $D(t) = \Omega(t) \cup \partial\Omega(t)$ à l'instant t et avec $D_0 = D(t_0) = \Omega(t_0) \cup \partial\Omega(t_0)$ à l'instant t_0.

L'évolution du domaine est étudiée entre les instants t_0 et t_{max}. Pour faire référence au formalisme des classifications, l'intervalle I est donc ici $I = [t_0, t_{max}]$.

Nous nous plaçons dans le cadre suivant :
- choix de l'Hypothèse des Petites Perturbations ;
- cadre quasi-statique ;
- à l'intérieur du domaine, c'est-à-dire dans Ω, la densité volumique d'effort est supposée nulle, signifiant que nous négligeons les effets de la Pesanteur.

Les conditions aux limites sont imposées sur $\partial\Omega$ qui, suivant le cas, est découpée en plusieurs surfaces distinctes. Ce découpage respecte les hypothèses usuelles (partition de la surface totale, invariance au cours du temps...).

Pour toutes les géométries, au repos, l'origine O du repère R est située en leur centre géométrique et elles sont symétriques par rapport aux trois plans définis par les trois couples des vecteurs de base de R. En revanche, cela ne signifie pas que la structure lorsqu'elle est définie dans son ensemble, notamment avec ses matériaux, respecte encore ces symétries.

10.2 Description des géométries des cas traités

Nous considérons d'abord quatre géométries de type plaque (Fig. 10.1, Fig. 10.2). Leur plan moyen est le plan $(O, \vec{x_1}, \vec{x_2})$. L'axe $(O, \vec{x_1})$ définit leur longueur L. L'axe $(O, \vec{x_2})$ définit leur largeur l. L'axe $(O, \vec{x_3})$ donne leur épaisseur e. Suivant leur longueur, nous définissons les sections droites notées S_{+a} et S_{-a}, situées respectivement dans les plans d'équation $x_1 = +a$ et $x_1 = -a$. Suivant leur épaisseur, elles sont limitées par les surfaces planes notées S_{+c} et S_{-c}, situées respectivement dans les plans d'équation $x_3 = +c$ et $x_3 = -c$.

Deux de ces géométries sont parallélépipèdiques élancées peu épaisses, l'une étant entaillée, l'autre non (Fig. 10.1). La direction de l'élancement définit la longueur de ces deux géométries. En plus des surfaces définies précédemment, nous définissons les surfaces notées S_{+b} et S_{-b} qui indiquent les bords latéraux de ces géométries. Pour la géométrie non entaillée, ces surfaces sont planes et sont situées intégralement dans les plans respectivement d'équation $x_2 = +b$ et $x_2 = -b$. Pour la géométrie entaillée, ces surfaces ne sont pas planes et ne sont situées que partiellement dans ces mêmes plans. Finalement, la frontière $\partial\Omega$ de ces deux géométries est telle que : $\partial\Omega = S_{-a} \cup S_{+a} \cup S_{-b} \cup S_{+b} \cup S_{-c} \cup S_{+c}$. Ces deux géométries vont être celles de deux structures que nous appelons respectivement éprouvette et éprouvette entaillée. Les différentes valeurs numériques utilisées pour ces géométries sont les suivantes : $L = 2a = 60$ mm, $l = 2b = 20$ mm, $e = 2c = 1$ mm.

Les deux autres géométries sont cruciformes peu épaisses (Fig. 10.2), l'une percée suivant l'axe de son épaisseur $(O, \vec{x_3})$ par un trou de rayon r, l'autre non. En plus des surfaces définies précédemment, nous définissons :

— pour la géométrie percée, la surface du bord du trou, que nous notons S_{trou} ;
— pour les deux géométries :
  . les sections droites notées S_{+b} et S_{-b}, situées respectivement dans les plans d'équation $x_2 = +b$ et $x_2 = -b$;
  . la surface S_0 qui regroupe le bord des quatre arc-de-cercles des branches de la croix.

Ainsi :

— pour la géométrie non percée, $\partial\Omega = S_{-a} \cup S_{+a} \cup S_{-b} \cup S_{+b} \cup S_{-c} \cup S_{+c} \cup S_0$;
— pour la géométrie percée, $\partial\Omega = S_{-a} \cup S_{+a} \cup S_{-b} \cup S_{+b} \cup S_{-c} \cup S_{+c} \cup S_0 \cup S_{trou}$.

Ces deux géométries vont être celles de deux structures que nous appelons respectivement éprouvette cruciforme et éprouvette cruciforme trouée. Les différentes valeurs numériques utilisées pour ces géométries sont les suivantes : $L = 2a = 60$ mm, $l = 2b = 60$ mm, $e = 2c = 1$ mm, $r = 10$ mm.

Enfin, nous considérons la géométrie d'un réservoir composite (Fig. 10.3). L'axe longitudinal qui définit la longueur du réservoir est l'axe $(O, \vec{x_3})$. Le réservoir est constitué d'une partie cylindrique de longueur L et de deux hémisphères dont les centres sont notés A et B. Le diamètre intérieur du cylindre et des deux hémisphères est D. Le cylindre est constitué d'un liner d'épaisseur e_l recouvert par enroulement filamentaire de plusieurs couches de matériau composite à fibres longues dont l'épaisseur totale est e_c. Les pôles de deux hémisphères sont percés par un trou débouchant d'axe $(O, \vec{x_3})$ et de diamètre d. Nous notons :

— S_{int}, la surface intérieure du réservoir ;
— S_{ext}, la surface extérieure du réservoir ;
— S_0, la surface qui regroupe la surface de chacun des deux trous des hémisphères.

Ainsi : $\partial\Omega = S_{int} \cup S_{ext} \cup S_0$. Les différentes valeurs numériques utilisées pour cette géométrie sont les suivantes : $L = 1000$ mm, $D = 400$ mm, $d = 50$ mm, $e_c = 10$ mm, $e_l = 3.5$ mm.

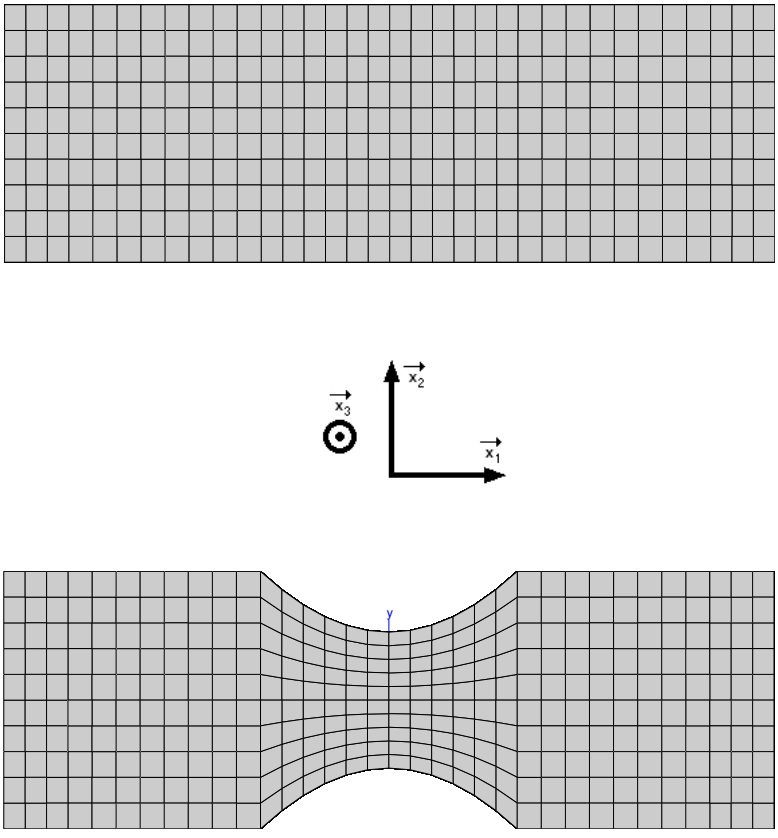
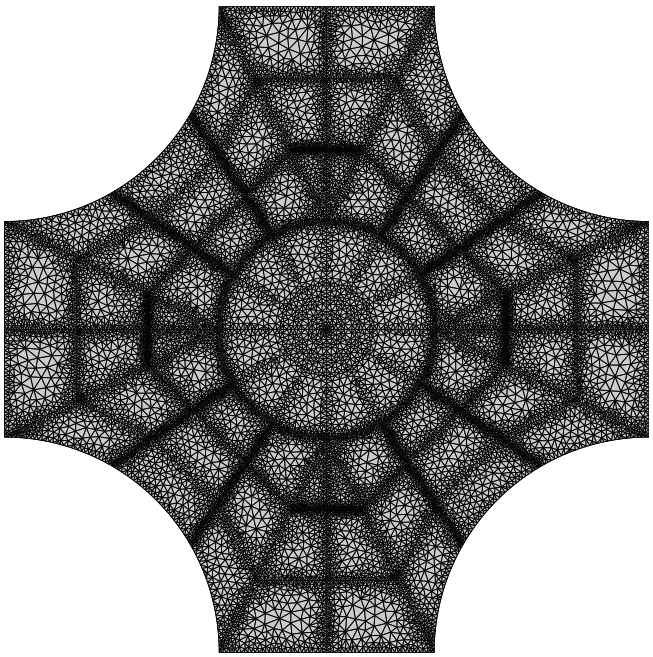
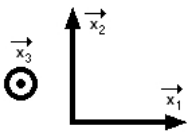
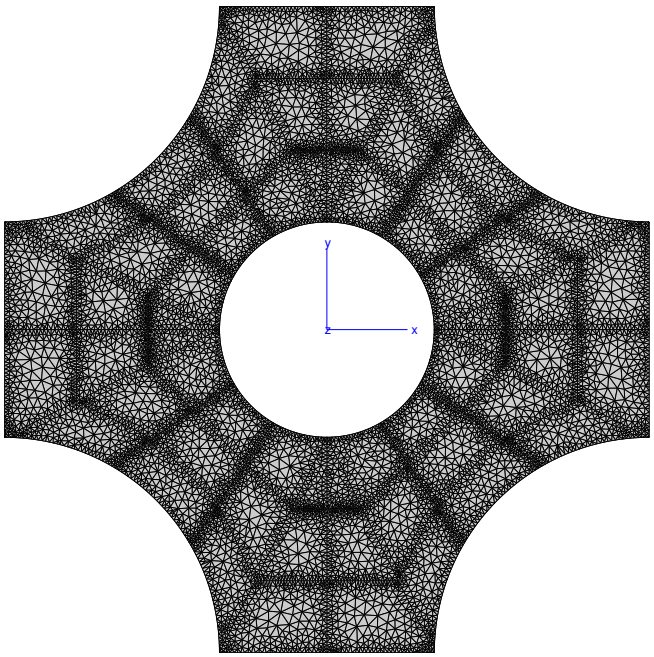


FIGURE 10.1 – Géométries des structures étudiées. (a) Eprouvette non entaillée. (b) Eprouvette entaillée.



(a)





(b)

FIGURE 10.2 – Géométries des structures étudiées. (a) Eprouvette cruciforme non trouée. (b) Eprouvette cruciforme trouée.

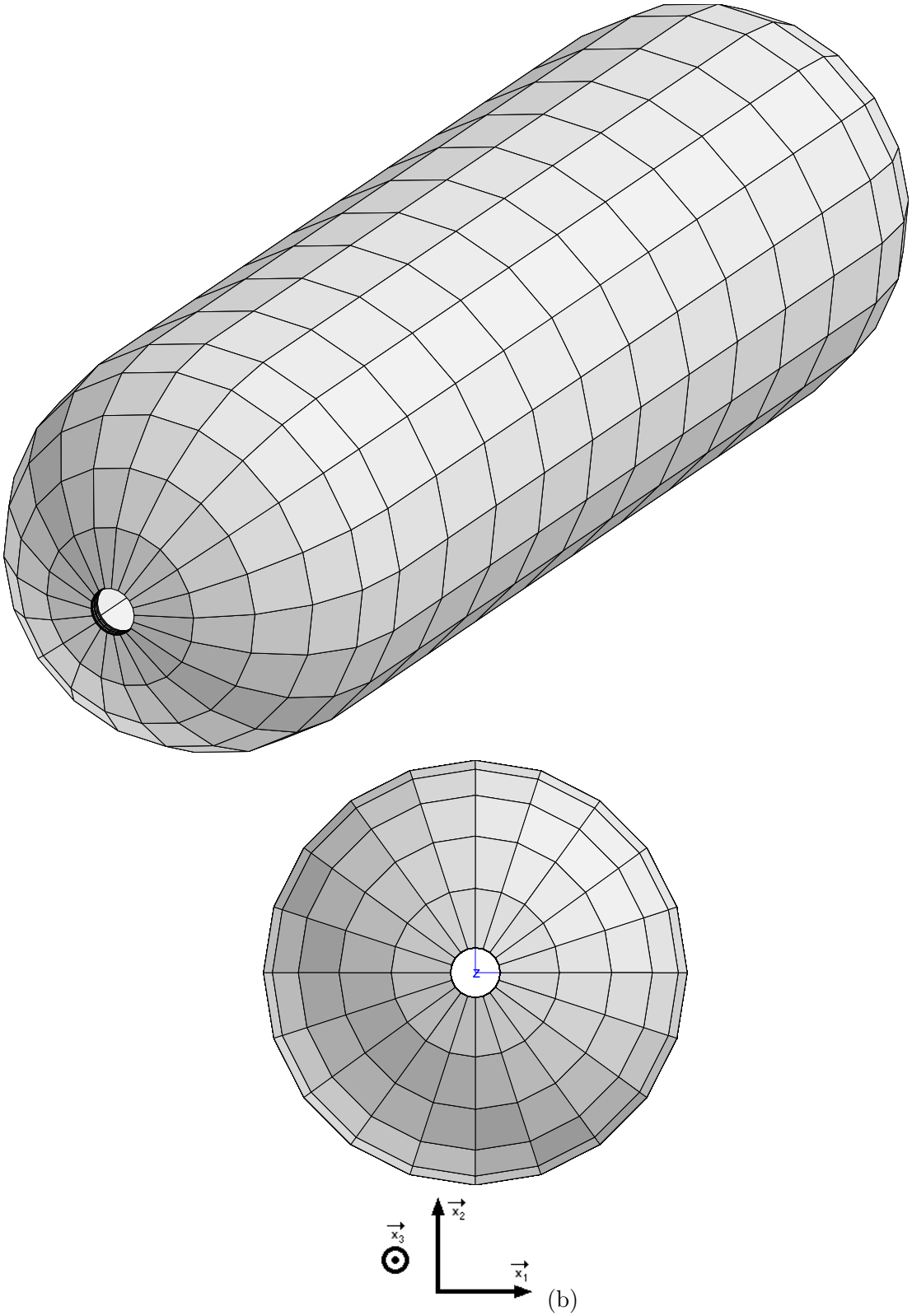


FIGURE 10.3 – Géométries des structures étudiées. (a) Réservoir. (b) Réservoir, vue axiale et repère.

10.3 Description des conditions aux limites des cas traités

Pour l'éprouvette et l'éprouvette entaillée, les conditions aux limites sont les suivantes :
— sur S_{-a}, nous appliquons une densité surfacique d'effort $\vec{F}_{-a}(M,t) = -F(t)\vec{x_1}$;
— sur S_{+a}, nous appliquons une densité surfacique d'effort $\vec{F}_{+a}(M,t) = +F(t)\vec{x_1}$;
— les autres surfaces, que nous regroupons dans la surface unique nommée S_{le}, sont libres d'effort, donc soumises à une densité surfacique d'effort $\vec{F}_{le}(M,t)$ égale au vecteur nul ;
— la fonction $F(t)$ est une fonction en "dent-de-scie" périodique de période T et de valeurs minimale et maximale respectivement égale à F_{min} et F_{max}.

Pour ces deux problèmes, nous construisons de la même manière :
— l'ensemble $S(I)$ de toutes les composantes des champs de vecteurs qui définissent les sollicitations du problème dans l'intervalle de temps I défini par les instants t_a et t_b :

$$S(I) = \Big\{ s_1(M \in S_{-a}, t) = \{\vec{F}_{-a}(M,t)\}_1 = -F(t), s_2(M \in S_{-a}, t) = \{\vec{F}_{-a}(M,t)\}_2 = 0,$$
$$s_3(M \in S_{-a}, t) = \{\vec{F}_{-a}(M,t)\}_3 = 0, s_4(M \in S_{+a}, t) = \{\vec{F}_{+a}(M,t)\}_1 = +F(t),$$
$$s_5(M \in S_{+a}, t) = \{\vec{F}_{+a}(M,t)\}_2 = 0, s_6(M \in S_{+a}, t) = \{\vec{F}_{+a}(M,t)\}_3 = 0,$$
$$s_7(M \in S_{le}, t) = \{\vec{F}_{le}(M,t)\}_1 = 0, s_8(M \in S_{le}, t) = \{\vec{F}_{le}(M,t)\}_2 = 0,$$
$$s_9(M \in S_{le}, t) = \{\vec{F}_{le}(M,t)\}_3 = 0 \Big\}$$

— $S(I) = S_c(I) \cup S_t(I)$ où :
. $S_c(I)$ est l'ensemble de toutes les composantes des champs de vecteurs qui définissent les sollicitations constantes au cours du temps du problème (P) :

$$S_c(I) = \Big\{ s_2(M \in S_{-a}, t) = \{\vec{F}_{-a}(M,t)\}_2 = 0, s_3(M \in S_{-a}, t) = \{\vec{F}_{-a}(M,t)\}_3 = 0,$$
$$s_5(M \in S_{+a}, t) = \{\vec{F}_{+a}(M,t)\}_2 = 0, s_6(M \in S_{+a}, t) = \{\vec{F}_{+a}(M,t)\}_3 = 0,$$
$$s_7(M \in S_{le}, t) = \{\vec{F}_{le}(M,t)\}_1 = 0, s_8(M \in S_{le}, t) = \{\vec{F}_{le}(M,t)\}_2 = 0,$$
$$s_9(M \in S_{le}, t) = \{\vec{F}_{le}(M,t)\}_3 = 0 \Big\}$$

. $S_t(I)$ est l'ensemble de toutes les composantes des champs de vecteurs qui définissent les sollicitations non constantes au cours du temps du problème (P) :

$$S_t(I) = \Big\{ s_1(M \in S_{-a}, t) = \{\vec{F}_{-a}(M,t)\}_1 = -F(t), s_4(M \in S_{+a}, t) = \{\vec{F}_{+a}(M,t)\}_1 = +F(t) \Big\}$$

Finalement, de manière plus synthétique : $S_t(I) = \{F(t)\}$. Ces deux problèmes appartiennent à la classe structurale $SPMLI(I)$. Par suite, leur ensemble des paramètres caractéristiques des sollicitations temporelles structurales est $\mathbb{S}_t(I) = \{T, F_{min}, F_{max}\}$, c'est-à-dire qu'ils sont du même type et égaux pour les deux problèmes.

Pour l'éprouvette cruciforme et l'éprouvette cruciforme trouée, les conditions aux limites sont les suivantes :
— sur S_{-a}, nous appliquons une densité surfacique d'effort $\vec{F}_{-a}(M,t) = -F(t)\vec{x_1}$;
— sur S_{+a}, nous appliquons une densité surfacique d'effort $\vec{F}_{+a}(M,t) = +F(t)\vec{x_1}$;
— sur S_{-b}, nous appliquons une densité surfacique d'effort $\vec{F}_{-b}(M,t) = -F(t)\vec{x_2}$;
— sur S_{+b}, nous appliquons une densité surfacique d'effort $\vec{F}_{+b}(M,t) = +F(t)\vec{x_2}$;
— les autres surfaces, que nous regroupons dans la surface unique nommée S_{le}, sont libres d'effort, donc soumises à une densité surfacique d'effort $\vec{F}_{le}(M,t)$ égale au vecteur nul ;

— la fonction $F(t)$ est une fonction en "dent-de-scie" périodique de période T et de valeurs minimale et maximale respectivement égale à F_{min} et F_{max}.

Les ensembles $S_t(I)$, $\mathbb{S}_t(I)$ et la classe structurale pour ces deux problèmes, sont comme précédemment, respectivement : $S_t(I) = \{F(t)\}$, $\mathbb{S}_t(I) = \{T, F_{min}, F_{max}\}$ et $SPMLI(I)$. Ainsi, comme auparavant, les ensembles des paramètres caractéristiques des sollicitations temporelles structurales des deux problèmes posés sont du même type et égaux.

Pour le réservoir, les conditions aux limites sont les suivantes :

— sur S_{int}, nous appliquons une pression uniforme $p_{int}(t)$ qui induit donc une densité surfacique d'effort $\vec{F}_{int}(M,t) = -F(t)\vec{n}(M)$, $\vec{n}(M)$ désignant la normale extérieure unitaire en chaque point M de cette surface et $F(t) = p_{int}(t)$;
— la surface S_{ext} est libre d'effort, donc soumise à une densité surfacique d'effort égale au vecteur nul ;
— sur S_0, nous supposons que le déplacement de chaque point est égal au vecteur nul (même si cela ne correspond pas aux conditions de service d'un réservoir en exploitation réelle), signifiant que finalement les trous des dômes voient un encastrement ;
— la fonction $F(t) = p_{int}(t)$ est une fonction en "dent-de-scie" périodique de période T et de valeurs minimale et maximale respectivement égale à F_{min} et F_{max}.

Encore une fois ici, les ensembles $S_t(I)$, $\mathbb{S}_t(I)$ et la classe structurale pour ce problème, sont comme précédemment, respectivement : $S_t(I) = \{F(t)\}$, $\mathbb{S}_t(I) = \{T, F_{min}, F_{max}\}$ et $SPMLI(I)$.

Nous constatons ainsi que pour tous les problèmes posés, les ensembles des paramètres caractéristiques des sollicitations temporelles structurales sont du même type et égaux : $S_t(I) = \{F(t)\}$ et $\mathbb{S}_t(I) = \{T, F_{min}, F_{max}\}$. En exprimant ces grandeurs avec le rapport de charge usuel et compte tenu de l'indépendance du phénomène vis-à-vis des effets de vitesse (suppression de T) nous obtenons, pour tous les problèmes :

$$\mathbb{S}_t(I) = \{F_{max}, R\} \tag{10.1}$$

D'une manière identique à ce qui a été fait (Chapitre 9 - Paragraphe 9.12), nous pouvons montrer que l'ensemble des paramètres locaux caractéristiques des composantes actives de la variable pilote s'écrit :

$$\mathbb{Q}^{*+}(I,\Omega) = \left\{(q_{ij}^{+}(M))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}, T[V(t) = F(t)] = T, V_{min} = F_{min}, V_{max} = F_{max}\right\}$$

Par suite, compte tenu des spécificités du modèle considéré (modèle original simplifié), et en utilisant le rapport de charge usuel, cet ensemble prend la forme (Eq. 9.63 - Partie IV - Chapitre 9) :

$$\mathbb{Q}^{*+}(I,\Omega) = \left\{m^{+}(M), r_{max}^{+}(M), R\right\} \tag{10.2}$$

Ainsi, pour tous les problèmes posés, les ensembles des paramètres locaux caractéristiques des composantes actives de la variable pilote sont du même type, mais en revanche, ils ne sont évidemment pas égaux. En effet :

— pour chacun des problèmes posés, l'ensemble $\mathbb{Q}^{*+}(I,\Omega)$ contient bien toujours les mêmes éléments, à savoir, deux champs scalaires ($m^{+}(M)$ et $r_{max}^{+}(M)$) et le même scalaire R pour tous ;
— pour chacun des problèmes posés, les deux champs sont calculés lorsque la valeur F_{max} est atteinte, donnant ainsi la valeur $r_{max}^{+}(M)$;
— mais les géométries des différents problèmes n'étant notamment pas identiques, les champs considérés ne sont donc pas égaux.

10.4 Description des matériaux

Toutes les structures dont il est question ici sont constituées par un empilement de couches orientées de composite unidirectionnel identique à celui dont nous avons fait l'étude précédemment (Chapitre 8).

Pour les quatre géométries de type plaque, leur épaisseur totale e_t de composite est répartie selon n couches d'épaisseur identiques $e_0 = 0.125$ mm dont l'orientation des fibres (par rapport à l'axe de la longueur) est $(\theta_{i=1,\dots,n})$ ($i = 1$ désignant la couche inférieure et $i = n$ désignant la couche supérieure). Trois cas distincts de stratification sont considérés :

— stratification 1 - $(0°_2, 90°_2)_s$, $n = 8$, $e_t = 1$ mm ;
— stratification 2 - $(0°_2, +55°_2, -55°_2)_s$, $n = 12$, $e_t = 1.5$ mm ;
— stratification 3 - $(0°_2, +45°_2, -45°_2)_s$, $n = 12$, $e_t = 1.5$ mm.

Dans le cas du réservoir, l'épaisseur totale de composite est répartie selon 7 couches distinctes d'épaisseur $(e_{i=1,\dots,7})$ dont l'orientation des fibres (par rapport à l'axe du cylindre) est $(\theta_{i=1,\dots,7})$. En partant de la couche la plus externe vers la couche la plus interne, nous avons successivement : $e_1 = e_2 = e_3 = e_5 = e_6 = 1$ mm, $e_4 = e_7 = 2.5$ mm, $\theta_1 = \theta_4 = \theta_7 = +90°$, $\theta_2 = \theta_5 = +20°$, $\theta_3 = \theta_6 = -20°$. Nous avons donc : $e_c = e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 + e_6 + e_7 = 10$ mm. Le liner, d'épaisseur $e_l = 3.5$ mm, est en polyéthylène.

10.5 Formulation du problème à résoudre (cas du modèle général dans sa seconde forme simplifiée)

Résoudre le problème consiste finalement à trouver, en tout point M du domaine :

— le déplacement $\vec{u}(M,t)$ (donc le tenseur des déformations) ;
— le tenseur des contraintes $\sigma(M,t)$;
— les variables d'état internes $\alpha(M,t), m_{23}(M,t), r_1(M,t), r_{23}(M,t)$;

vérifiant :

• l'équation locale d'équilibre : $\vec{div}\,\sigma = \vec{0}\ \forall M \in \Omega$;

• la loi de comportement (en tout point M du domaine, et écrite dans le repère local d'anisotropie du matériau unidirectionnel, Chapitre 8) :

— la loi d'état :

$$\sigma_i = \left(C^0_{ij} + f^2(\alpha) \sum_{\substack{p,q=1 \\ p \leq q}}^{3} D^{(pq)}_{ij} U_p(m_{23}, r_1, r_{23}) U_q(m_{23}, r_1, r_{23}) \right) \varepsilon_j$$

— les lois complémentaires pour les variables m_{23}, r_1, r_{23} :

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 = m_1^{\varepsilon}(\varepsilon, \alpha) = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ si } \varepsilon_2 + b(Y)\varepsilon_1 + c(Y)\varepsilon_3 > 0 \\ 2 \text{ si } \varepsilon_2 + b(Y)\varepsilon_1 + c(Y)\varepsilon_3 \leq 0 \end{array} \right. \\ m_{23} = m_{23}^{\varepsilon}(\varepsilon, \alpha) = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{2\frac{\varepsilon_6^2}{\varepsilon_6^c(\alpha)^2} + 3\frac{\varepsilon_4^2}{\varepsilon_4^c(\alpha)^2}}{\frac{\varepsilon_6^2}{\varepsilon_6^c(\alpha)^2} + \frac{\varepsilon_4^2}{\varepsilon_4^c(\alpha)^2}} \text{ si } \varepsilon_4 \neq 0 \\ 2 \text{ si } \varepsilon_4 = 0 \end{array} \right. \\ r_1 = r_1^{\varepsilon}(\varepsilon, \alpha) = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{\frac{(\varepsilon_2 + b(Y)\varepsilon_1 + c(Y)\varepsilon_3)^2}{\varepsilon_2^c(\alpha)^2}} \text{ si } \varepsilon_2 + b(Y)\varepsilon_1 + c(Y)\varepsilon_3 > 0 \\ 0 \text{ si } \varepsilon_2 + b(Y)\varepsilon_1 + c(Y)\varepsilon_3 \leq 0 \end{array} \right. \\ r_{23} = r_{23}^{\varepsilon}(\varepsilon, \alpha) = \sqrt{\frac{\varepsilon_6^2}{\varepsilon_6^c(\alpha)^2} + \frac{\varepsilon_4^2}{\varepsilon_4^c(\alpha)^2}} \end{array} \right.$$

— la loi complémentaire (loi d'évolution) pour la variable α dans un cadre quasi-statique :

$$d\alpha = \frac{2f(\alpha)f'(\alpha)\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p\leq q}}^{3} D_{ij}^{(pq)} U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)\varepsilon_j d\varepsilon_i}{\dfrac{\partial A_c(\alpha,m_{23},r_1,r_{23})}{\partial\alpha} - \dots} \tag{10.3}$$
$$\dots\left(f'^2(\alpha)+f(\alpha)f''(\alpha)\right)\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)} U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)\varepsilon_i\varepsilon_j$$

— la loi complémentaire (loi d'évolution) pour la variable α dans un cadre de fatigue pour une approche locale (cas d'un problème local de fatigue sur un domaine de type PPMLI(I,Ω)) :

$$d\alpha = \frac{2f(\alpha)f'(\alpha)\dfrac{\partial V^F(\Omega|N)}{\partial N}}{-(f'^2(\alpha)+f(\alpha)f''(\alpha))V^F(\Omega|N)}dN \tag{10.4}$$

• les conditions aux limites, $\vec{n}$ désignant la normale extérieure unitaire au point M considéré :

— pour l'éprouvette et l'éprouvette entaillée :
  . sur S_{-a}, $\sigma\times(-\vec{x_1}) = -F(t)\vec{x_1}$;
  . sur S_{+a}, $\sigma\times\vec{x_1} = +F(t)\vec{x_1}$;
  . sur les autres surfaces, $\sigma\times\vec{n}=\vec{0}$;
— pour l'éprouvette cruciforme et l'éprouvette cruciforme trouée :
  . sur S_{-a}, $\sigma\times(-\vec{x_1}) = -F(t)\vec{x_1}$;
  . sur S_{+a}, $\sigma\times\vec{x_1} = +F(t)\vec{x_1}$;
  . sur S_{-b}, $\sigma\times(-\vec{x_2}) = -F(t)\vec{x_2}$;
  . sur S_{+b}, $\sigma\times\vec{x_2} = +F(t)\vec{x_2}$;
  . sur les autres surfaces, $\sigma\times\vec{n}=\vec{0}$;
— pour le réservoir :
  . sur S_{int}, $\sigma\times\vec{n} = -p_{int}(t)\vec{n}$;
  . sur S_{ext}, $\sigma\times\vec{n}=\vec{0}$;
  . sur S_0, $\vec{u}=\vec{0}$.

10.6 Formulation du problème à résoudre (cas du modèle original dans sa forme simplifiée)

Résoudre le problème consiste finalement à trouver, en tout point M du domaine :
— le déplacement $\vec{u}(M,t)$ (donc le tenseur des déformations) ;
— le tenseur des contraintes $\sigma(M,t)$;
— les variables d'état internes $\alpha(M,t), m(M,t), r(M,t)$;

vérifiant :

• l'équation locale d'équilibre : $\vec{div}\,\sigma = \vec{0}\ \forall M\in\Omega$;

• la loi de comportement (en tout point M du domaine, et écrite dans le repère local d'anisotropie du matériau unidirectionnel, Chapitre 8) :

— la loi d'état :

$$\sigma_i = C_{ij}^0\varepsilon_j + f^2(\alpha)\left(C_{ij}^N U_N^2(m,r) + C_{ij}^T U_T^2(m,r) + C_{ij}^{NT}U_N(m,r)U_T(m,r)\right)\varepsilon_j$$

— les lois complémentaires pour les variables m, r :

$$\begin{cases} m = m^{\varepsilon}(\varepsilon,\alpha) = \begin{cases} \frac{\frac{\varepsilon_2^2}{\varepsilon_2^c(\alpha)^2}+2\frac{\varepsilon_6^2}{\varepsilon_6^c(\alpha)^2}}{\frac{\varepsilon_2^2}{\varepsilon_2^c(\alpha)^2}+\frac{\varepsilon_6^2}{\varepsilon_6^c(\alpha)^2}} \text{ si } \varepsilon_2 > 0 \\ 2 \text{ si } \varepsilon_2 \leq 0 \end{cases} \\ r = r^{\varepsilon}(\varepsilon,\alpha) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\varepsilon_2^2}{\varepsilon_2^c(\alpha)^2}+\frac{\varepsilon_6^2}{\varepsilon_6^c(\alpha)^2}} \text{ si } \varepsilon_2 > 0 \\ \sqrt{\frac{\varepsilon_6^2}{\varepsilon_6^c(\alpha)^2}} \text{ si } \varepsilon_2 \leq 0 \end{cases} \end{cases}$$

— la loi complémentaire (loi d'évolution) pour la variable α dans un cadre quasi-statique :

$$d\alpha = \frac{2f(\alpha)f'(\alpha)\left(C_{ij}^N U_N^2(m,r) + C_{ij}^T U_T^2(m,r) + C_{ij}^{NT} U_N(m,r)U_T(m,r)\right)\varepsilon_j d\varepsilon_i}{\frac{\partial A_c(\alpha,m)}{\partial\alpha} - \ldots \\ \ldots (f'(\alpha)^2 + f(\alpha)f''(\alpha))\left(C_{ij}^N U_N^2(m,r) + C_{ij}^T U_T^2(m,r) + C_{ij}^{NT} U_N(m,r)U_T(m,r)\right)\varepsilon_i\varepsilon_j} \tag{10.5}$$

— la loi complémentaire (loi d'évolution) pour la variable α dans un cadre de fatigue pour une approche locale (cas d'un problème local de fatigue sur un domaine de type PPMLI(I,Ω)) :

$$d\alpha = \frac{2f(\alpha)f'(\alpha)\dfrac{\partial V^F(\Omega|N)}{\partial N}}{-(f'^2(\alpha) + f(\alpha)f''(\alpha))V^F(\Omega|N)}dN \tag{10.6}$$

• les conditions aux limites, $\vec{n}$ désignant la normale extérieure unitaire au point M considéré :

— pour l'éprouvette et l'éprouvette entaillée :
  . sur S_{-a}, $\sigma \times (-\vec{x_1}) = -F(t)\vec{x_1}$;
  . sur S_{+a}, $\sigma \times \vec{x_1} = +F(t)\vec{x_1}$;
  . sur les autres surfaces, $\sigma \times \vec{n} = \vec{0}$;
— pour l'éprouvette cruciforme et l'éprouvette cruciforme trouée :
  . sur S_{-a}, $\sigma \times (-\vec{x_1}) = -F(t)\vec{x_1}$;
  . sur S_{+a}, $\sigma \times \vec{x_1} = +F(t)\vec{x_1}$;
  . sur S_{-b}, $\sigma \times (-\vec{x_2}) = -F(t)\vec{x_2}$;
  . sur S_{+b}, $\sigma \times \vec{x_2} = +F(t)\vec{x_2}$;
  . sur les autres surfaces, $\sigma \times \vec{n} = \vec{0}$;
— pour le réservoir :
  . sur S_{int}, $\sigma \times \vec{n} = -p_{int}(t)\vec{n}$;
  . sur S_{ext}, $\sigma \times \vec{n} = \vec{0}$;
  . sur S_0, $\vec{u} = \vec{0}$.

10.7 Rôle de l'identification dans le processus

Tous les problèmes posés présentent un certain nombre de points communs :
— les ensembles des paramètres caractéristiques des sollicitations temporelles structurales qui leurs sont associés sont du même type et égaux : $S_t(I) = \{F(t)\}$ et $\mathbb{S}_t(I) = \{F_{max}, R\}$;

— les ensembles des paramètres locaux caractéristiques des composantes actives de la variable pilote qui leurs sont associés sont du même type, mais non égaux : $\mathbb{Q}^{*+}(I,\Omega) = \{m^+(M), r^+_{max}(M), R\}$.

En particulier le problème posé sur l'éprouvette modélise en fait exactement le type des problèmes associés aux essais expérimentaux réalisés dans le cadre de l'identification de la loi cyclique (Partie IV - Chapitre 9 - Paragraphe 9.12). C'est un problème dont la classe structurale est la classe $SPMLI(I)$ pour lequel (en appliquant le Principe de Saint-Venant) $S_t(I) = \{F(t) = S(t)/s\}$, $\mathbb{S}_t(I) = \{T, F_{min} = S_{min}/s, F_{max} = S_{max}/s\}$. En exprimant ces grandeurs avec le rapport de charge usuel et compte tenu de l'indépendance du phénomène vis-à-vis des effets de vitesse (suppression de T), nous obtenons : $\mathbb{S}_t(I) = \{F_{max} = S_{max}/s, R\}$. Dans le cadre de la campagne expérimentale, seule la valeur $R = 0.1$ est investiguée.

Finalement, l'ensemble des paramètres caractéristiques des sollicitations temporelles structurales $\mathbb{S}_t(I) = \{S_{max}/s, R = 0.1\}$ est du même type pour chacun des 12 types d'essais expérimentaux définis précédemment (Partie IV - Chapitre 9 - Paragraphe 9.12). Ce qui fait qu'ils peuvent ne pas être égaux, est la valeur de S_{max}/s (les sollicitations à rupture sont différentes, les sections s sont différentes). Ils induisent des ensembles des paramètres locaux caractéristiques des composantes actives de la variable pilote du même type, mais évidemment non égaux : $\mathbb{Q}^{*+}(I,\Omega) = \{m^+(M), r^+_{max}(M), R = F_{min}/F_{max} = 0.1\}$ dépend de la stratification considérée et de la sollicitation appliquée :

— pour la stratification $(0°_2, 90°_2)_s$:
  . $\mathbb{Q}^{*+}(I, 90°_2) = \{m^+ = 1.000, r^+_{max} = 0.545, R = 0.1\}$;
  . $\mathbb{Q}^{*+}(I, 90°_2) = \{m^+ = 1.000, r^+_{max} = 0.909, R = 0.1\}$;
  . $\mathbb{Q}^{*+}(I, 90°_2) = \{m^+ = 1.000, r^+_{max} = 1.273, R = 0.1\}$;
  . $\mathbb{Q}^{*+}(I, 90°_2) = \{m^+ = 1.000, r^+_{max} = 1.455, R = 0.1\}$;
— pour la stratification $(0°_2, +55°_2, -55°_2)_s$:
  . $\mathbb{Q}^{*+}(I, +55°_2) = \mathbb{Q}^{*+}(I, -55°_4) = \{m^+ = 1.353, r^+_{max} = 0.350, R = 0.1\}$;
  . $\mathbb{Q}^{*+}(I, +55°_2) = \mathbb{Q}^{*+}(I, -55°_4) = \{m^+ = 1.353, r^+_{max} = 0.583, R = 0.1\}$;
  . $\mathbb{Q}^{*+}(I, +55°_2) = \mathbb{Q}^{*+}(I, -55°_4) = \{m^+ = 1.353, r^+_{max} = 0.816, R = 0.1\}$;
  . $\mathbb{Q}^{*+}(I, +55°_2) = \mathbb{Q}^{*+}(I, -55°_4) = \{m^+ = 1.353, r^+_{max} = 0.932, R = 0.1\}$;
— pour la stratification $(0°_2, +45°_2, -45°_2)_s$:
  . $\mathbb{Q}^{*+}(I, +45°_2) = \mathbb{Q}^{*+}(I, -45°_4) = \{m^+ = 1.891, r^+_{max} = 0.288, R = 0.1\}$;
  . $\mathbb{Q}^{*+}(I, +45°_2) = \mathbb{Q}^{*+}(I, -45°_4) = \{m^+ = 1.891, r^+_{max} = 0.480, R = 0.1\}$;
  . $\mathbb{Q}^{*+}(I, +45°_2) = \mathbb{Q}^{*+}(I, -45°_4) = \{m^+ = 1.891, r^+_{max} = 0.672, R = 0.1\}$;
  . $\mathbb{Q}^{*+}(I, +45°_2) = \mathbb{Q}^{*+}(I, -45°_4) = \{m^+ = 1.891, r^+_{max} = 0.769, R = 0.1\}$.

Ces douze cas ont permis d'identifier (Partie IV - Chapitre 9 - Paragraphe 9.12) la loi d'évolution cyclique pour toutes (après lissage) valeurs de m et de r pour $R = 0.1$.

Finalement, avec l'identification faite, il est possible de traiter n'importe quel problème de fatigue de n'importe quelle classe structurale qui induit comme ensemble des paramètres locaux caractéristiques des composantes actives de la variable pilote, un ensemble du type $\mathbb{Q}^{*+}(I,\Omega) = \{m^+(M), r^+_{max}(M), R = 0.1\}$, mais sans nécessité d'égalité. Nous notons cet ensemble $\mathbb{Q}^{*+}_{\mathbb{ID}}(I,\Omega)$:

$$\mathbb{Q}^{*+}_{\mathbb{ID}}(I,\Omega) = \left\{m^+(M), r^+_{max}(M), R = 0.1\right\} \tag{10.7}$$

Ainsi, pour tous les problèmes posés ici, les ensembles $\mathbb{Q}^{*+}(I,\Omega)$ sont du même type que $\mathbb{Q}^{*+}_{\mathbb{ID}}(I,\Omega)$, mais ils ne sont pas égaux. Pourtant, avec les conditions aux limites écrites, ils peuvent tous être résolus avec la même identification faite (avec $R = 0.1$) : les quatre structures de type plaque (l'éprouvette, l'éprouvette entaillée, l'éprouvette cruciforme non trouée, l'éprouvette cruciforme trouée), ainsi que le réservoir.

10.8 Déroulement d'un calcul

10.8.1 Le processus de calcul

Pour tous les problèmes posés, le premier cycle est réalisé à l'aide d'un modèle incrémental : celui écrit pour le cas quasi-statique (Eq. 10.3 ou Eq. 10.5). La fin de ce cycle définit l'instant t_0 à partir duquel la loi cyclique va être utilisée.

L'évolution du domaine est ensuite étudiée dans l'intervalle de temps $I = [t_0, t_{max}]$. Toutefois il se peut qu'il soit nécessaire de découper cet intervalle en deux, voire plus, suivant que $\mathbb{Q}^{*+}(I, \Omega) = \{m^+(M), r^+_{max}(M), R = 0.1\}$ doive être réactualisé (Partie IV - Chapitre 9 - Section 9.4 - Paragraphe 9.4.2). Imaginons (et c'est suffisant pour avoir un discours général) que I se découpe en deux intervalles I_1 et I_2, faisant apparaître l'instant t_i : $I_1 = [t_0, t_i[$ et $I_2 = [t_i, t_{max}]$. Sur I_1, l'ensemble des paramètres locaux caractéristiques des composantes actives de la variable pilote est $\mathbb{Q}^{*+}(I_1, \Omega) = \{m^{+(1)}(M), r^{+(1)}_{max}(M), R = 0.1\}$ et sur I_2, il est $\mathbb{Q}^{*+}(I_2, \Omega) = \{m^{+(2)}(M), r^{+(2)}_{max}(M), R = 0.1\}$.

Le calcul démarre à partir d'une structure vierge d'endommagement et intègre, en chaque point M, la loi cyclique (Eq. 10.4 ou Eq. 10.6) associée aux valeurs $m^{+(1)}(M)$, $r^{+(1)}_{max}(M)$ et $R = 0.1$, entre les instants t_0 et t_i. L'instant t_i est atteint et à partir d'une structure non vierge d'endommagement, le calcul poursuit l'intégration de la loi cyclique, en chaque point M, associée aux valeurs $m^{+(2)}(M)$, $r^{+(2)}_{max}(M)$ et $R = 0.1$, entre les instants t_i et t_{max}.

Enfin, le dernier cycle est réalisé à l'aide du modèle incrémental utilisé lors du premier cycle. Cette dernière étape permet de garantir l'équilibre local final en chaque point de la structure.

10.8.2 Un problème dû à l'identification

Si l'énoncé de cet algorithme est évident, il cache néanmoins un problème qu'il faut éclaircir. En effet, pour l'intervalle I_1, l'état initial d'endommagement étant celui qui correspond à celui de la procédure d'identification, l'intégration fait coïncider en chaque point M, le nombre de cycles N et le nombre de cycles vu par le point M. En revanche, pour l'intervalle I_2, l'état initial d'endommagement n'est pas celui qui correspond à celui de la procédure d'identification. Aussi, avant de réaliser l'intégration pour l'intervalle I_2, il faut d'abord chercher, pour chaque point M, à quel nombre de cycles $N_i(M)$ dans les conditions $m^{+(2)}(M)$, $r^{+(2)}_{max}(M)$ et $R = 0.1$ correspond l'état d'endommagement atteint à t_i. L'intégration pour l'intervalle I_2 doit alors démarrer, en M, à partir de cette valeur.

Chapitre 11

Résultats des calculs

11.1 Les résultats présentés

Les calculs ainsi que les maillages ont été réalisés avec le code de calculs Zébulon (http ://www.zset-software.com) développé notamment au sein du Centre des Matériaux de l'Ecole Mines ParisTech

Nous présentons les résultats des calculs pour toutes les géométries planes (éprouvettes, éprouvettes entaillée, éprouvettes cruciformes trouées ou non) dans le cas de la stratification $(0°_2, 90°_2)_s$. Les résultats du calcul sur le réservoir sont également présentés.

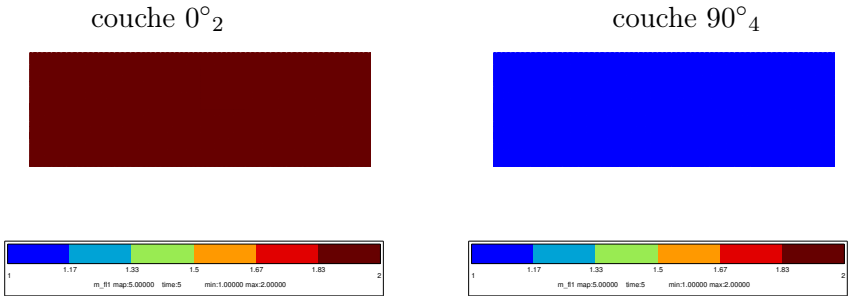
Nous donnons les cartographies des iso-valeurs des éléments $m^+(M)$ et $r^+_{max}(M)$ de l'ensemble $\mathbb{Q}^{*+}(I,\Omega)$ de chaque problème car ces grandeurs sont essentielles dans le processus de calcul : elles conditionnent les coefficients qui sont utilisés dans la loi d'évolution cyclique. Ces cartographies illustrent donc l'ensemble $\mathbb{Q}^{*+}_{\mathbb{ID}}(I,\Omega) = \{m^+(M), r^+_{max}(M), R = 0.1\}$ (Eq. 10.7 - Chapitre 10 - Section 10.7).

Nous constatons que ces champs $m^+(M)$ et $r^+_{max}(M)$ peuvent être évidemment non uniformes, illustrant ainsi le caractère local de l'approche qui vient d'être faite du concept de fatigue.

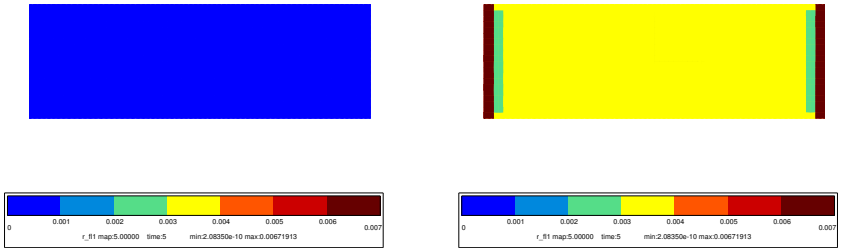
Egalement, les cartographies des iso-valeurs de la variable d'endommagement α sont données à la fin du premier cycle (calculées par le modèle incrémental du formalisme quasi-statique) et à la fin du cyclage (calculées par la loi locale d'évolution cyclique de fatigue).

Ici, nous ne discutons pas la validité de l'algorithme du calcul et notamment de la réactualisation nécessaire ou non en cours de calcul, car ce n'est pas l'objet essentiel de ce travail.

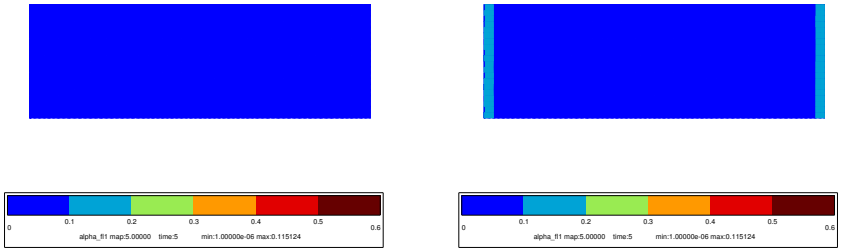
11.2 Eprouvette en traction uniaxiale



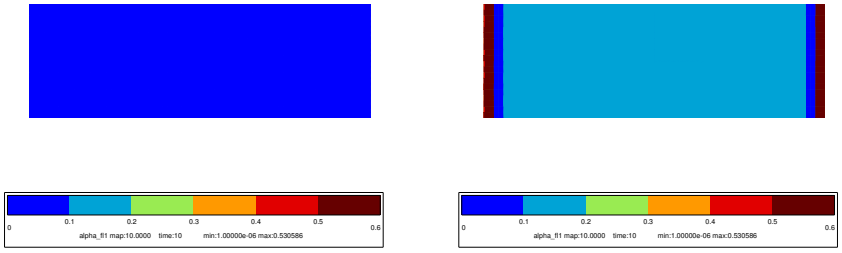
(a) Elément $m^+(M)$ de l'ensemble $\mathbb{Q}^{*+}(I,\Omega)$ à la fin du premier cycle



(b) Elément $r^+_{max}(M)$ de l'ensemble $\mathbb{Q}^{*+}(I,\Omega)$ à la fin du premier cycle



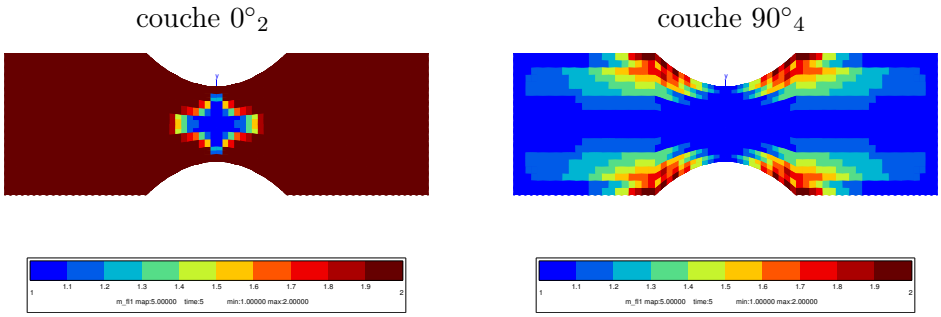
(c) Iso-valeurs de la variable α à la fin du premier cycle



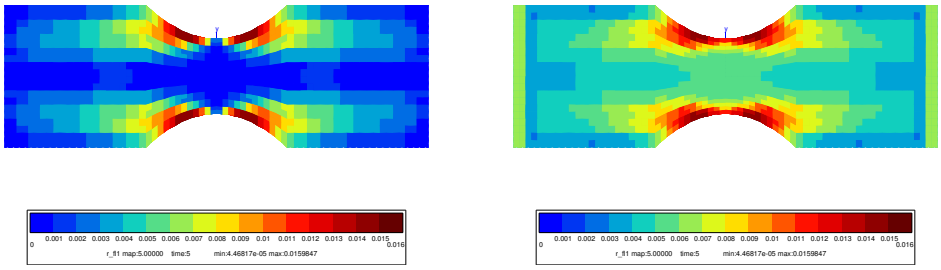
(d) Iso-valeurs de la variable α à la fin du cyclage

FIGURE 11.1 – Résultats du calcul sur l'éprouvette / Stratification 1 - $(0°_2, 90°_2)_s$.

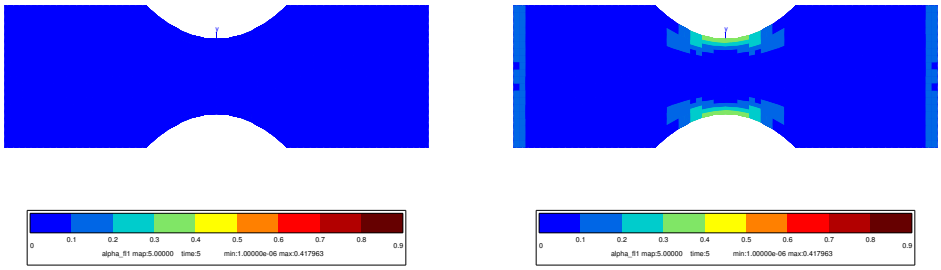
11.3 Eprouvette entaillée en traction uniaxiale



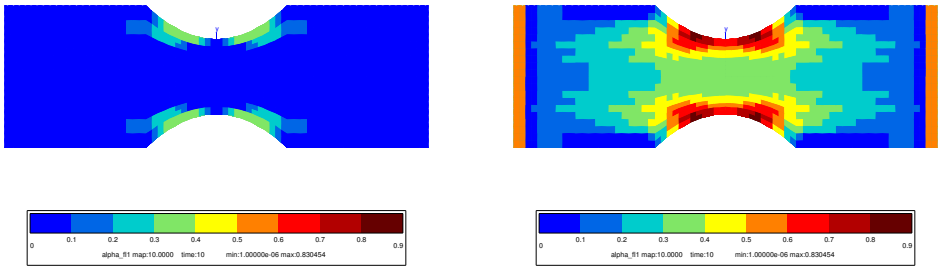
(a) Elément $m^+(M)$ de l'ensemble $\mathbb{Q}^{*+}(I,\Omega)$ à la fin du premier cycle



(b) Elément $r^+_{max}(M)$ de l'ensemble $\mathbb{Q}^{*+}(I,\Omega)$ à la fin du premier cycle



(c) Iso-valeurs de la variable α à la fin du premier cycle

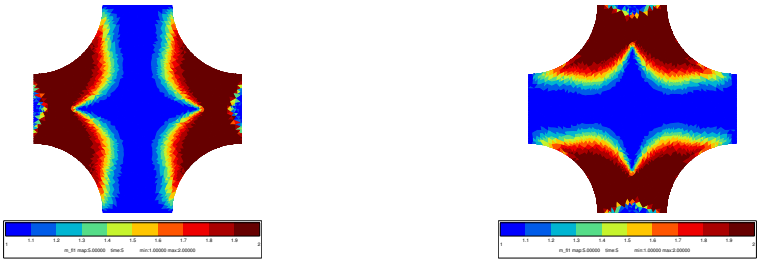


(d) Iso-valeurs de la variable α à la fin du cyclage

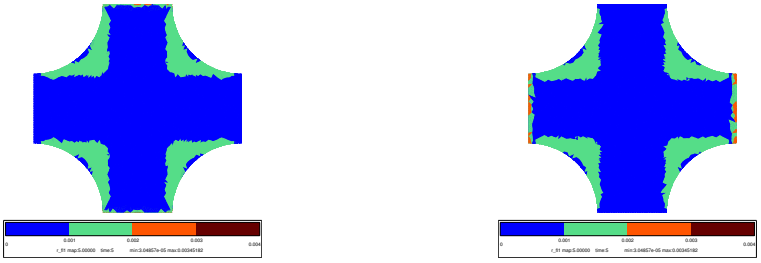
FIGURE 11.2 – Résultats du calcul sur l'éprouvette entaillée / Stratification 1 - $(0°_2, 90°_2)_s$.

11.4 Eprouvette cruciforme en traction bi-axiale

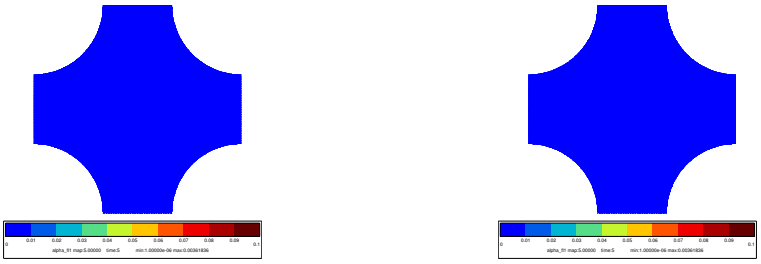
couche $0°_2$ couche $90°_4$



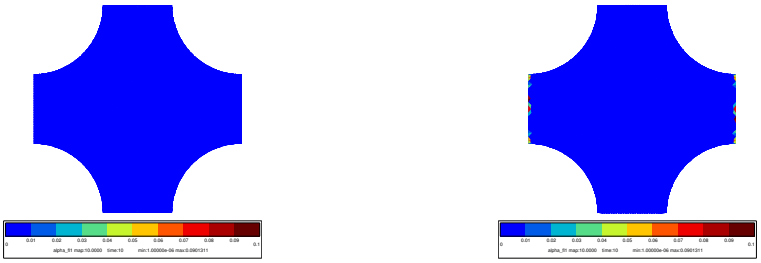
(a) Elément $m^+(M)$ de l'ensemble $\mathbb{Q}^{*+}(I,\Omega)$ à la fin du premier cycle



(b) Elément $r^+_{max}(M)$ de l'ensemble $\mathbb{Q}^{*+}(I,\Omega)$ à la fin du premier cycle



(c) Iso-valeurs de la variable α à la fin du premier cycle



(d) Iso-valeurs de la variable α à la fin du cyclage

FIGURE 11.3 – Résultats du calcul sur l'éprouvette cruciforme non trouée / Stratification 1 - $(0°_2, 90°_2)_s$.

11.5 Eprouvette cruciforme trouée en traction bi-axiale

couche $0°_2$ couche $90°_4$

(a) Elément $m^+(M)$ de l'ensemble $\mathbb{Q}^{*+}(I,\Omega)$ à la fin du premier cycle

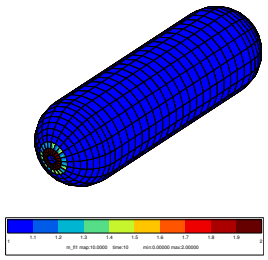
(b) Elément $r^+_{max}(M)$ de l'ensemble $\mathbb{Q}^{*+}(I,\Omega)$ à la fin du premier cycle

(c) Iso-valeurs de la variable α à la fin du premier cycle

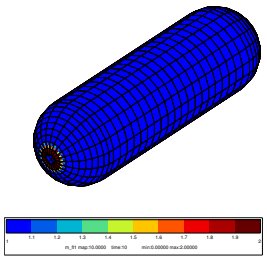
(d) Iso-valeurs de la variable α à la fin du cyclage

FIGURE 11.4 – Résultats du calcul sur l'éprouvette cruciforme trouée / Stratification 1 - $(0°_2, 90°_2)_s$.

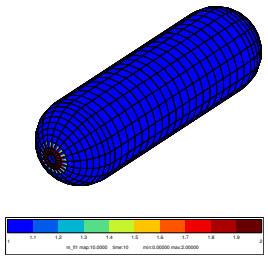
11.6 Réservoir composite sous pression interne



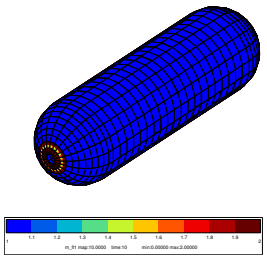
(a) Couche 1 (+90°)



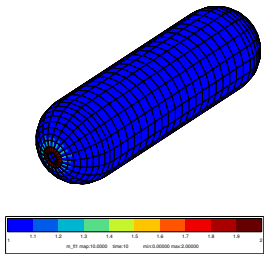
(b) Couche 2 (+20°)



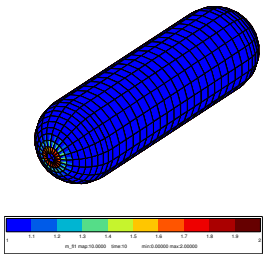
(c) Couche 3 (−20°)



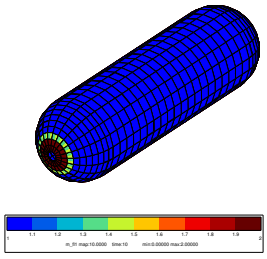
(d) Couche 4 (+90°)



(e) Couche 5 (+20°)

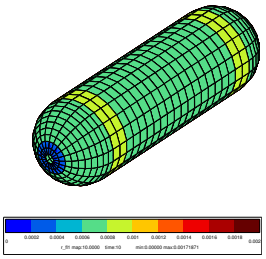


(f) Couche 6 (−20°)

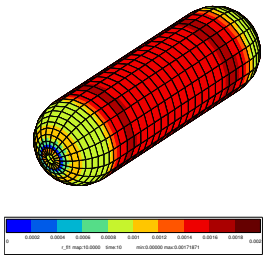


(e) Couche 7 (+90°)

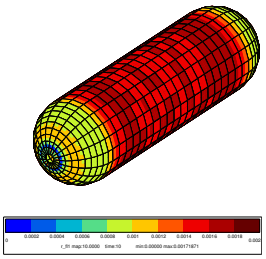
FIGURE 11.5 – Résultats du calcul sur le réservoir. Elément $m^+(M)$ de l'ensemble $\mathbb{Q}^{*+}(I,\Omega)$ à la fin du premier cycle.



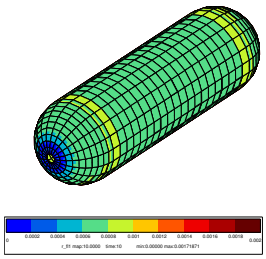
(a) Couche 1 (+90°)



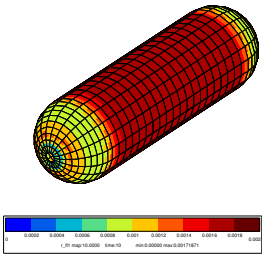
(b) Couche 2 (+20°)



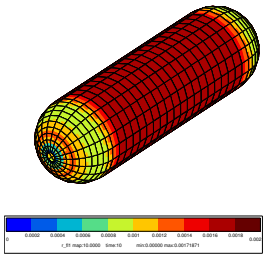
(c) Couche 3 (−20°)



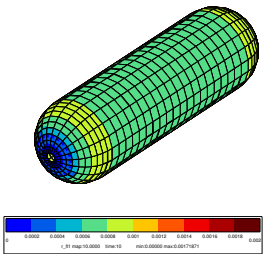
(d) Couche 4 (+90°)



(e) Couche 5 (+20°)

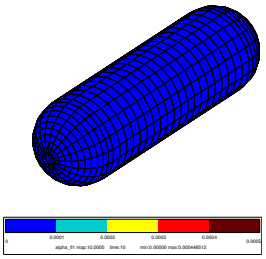


(f) Couche 6 (−20°)

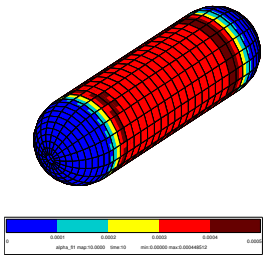


(e) Couche 7 (+90°)

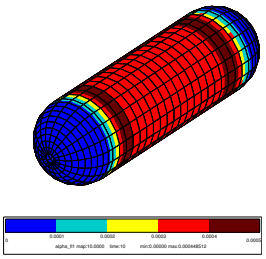
FIGURE 11.6 – Résultats du calcul sur le réservoir. Elément $r^{+}_{max}(M)$ de l'ensemble $\mathbb{Q}^{*+}(I,\Omega)$ à la fin du premier cycle.



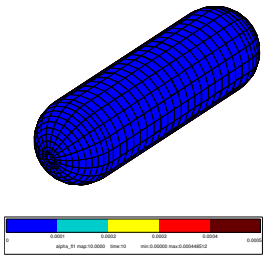
(a) Couche 1 (+90°)



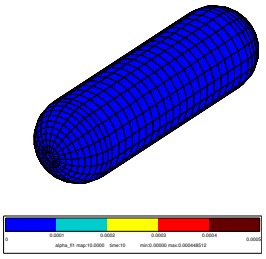
(b) Couche 2 (+20°)



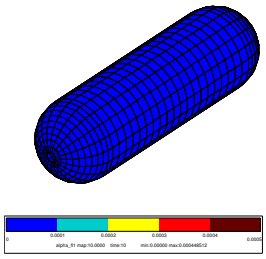
(c) Couche 3 (−20°)



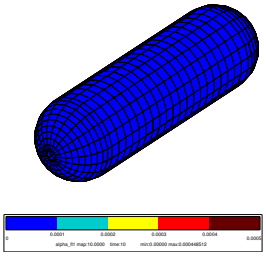
(d) Couche 4 (+90°)



(e) Couche 5 (+20°)

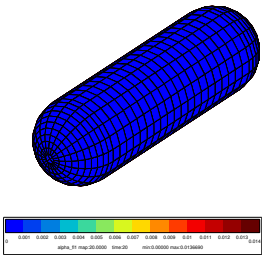


(f) Couche 6 (−20°)

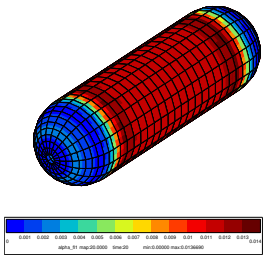


(e) Couche 7 (+90°)

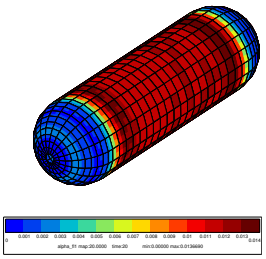
FIGURE 11.7 – Résultats du calcul sur le réservoir. Iso-valeurs de la variable α à la fin du premier cycle.



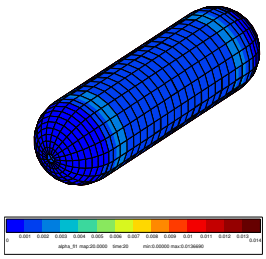
(a) Couche 1 (+90°)



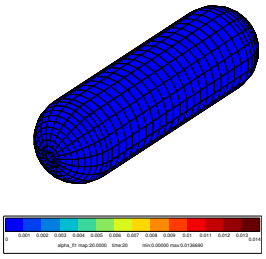
(b) Couche 2 (+20°)



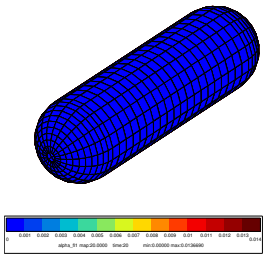
(c) Couche 3 (−20°)



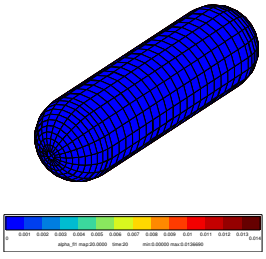
(d) Couche 4 (+90°)



(e) Couche 5 (+20°)



(f) Couche 6 (−20°)



(e) Couche 7 (+90°)

FIGURE 11.8 – Résultats du calcul sur le réservoir. Iso-valeurs de la variable α à la fin du cyclage.

Chapitre 12

Extensions des conditions aux limites

12.1 Deux cas importants

Nous souhaitons regarder maintenant si en faisant des changements dans les conditions aux limites des problèmes proposés initialement, cela induit ou non des modifications quant à la résolution du nouveau problème.

Nous allons voir que les réponses qui vont être amenées se traitent directement avec l'ensemble des paramètres caractéristiques des sollicitations temporelles structurales et l'ensemble des paramètres locaux caractéristiques des composantes actives de la variable pilote.

Comme support à nos propos, nous traitons le cas des deux éprouvettes cruciformes. Ainsi, formulons les conditions aux limites suivantes :

— sur S_{-a}, nous appliquons une densité surfacique d'effort $\vec{F}_{-a}(M,t) = -F_1(t)\vec{x_1}$;
— sur S_{+a}, nous appliquons une densité surfacique d'effort $\vec{F}_{+a}(M,t) = +F_1(t)\vec{x_1}$;
— sur S_{-b}, nous appliquons une densité surfacique d'effort $\vec{F}_{-b}(M,t) = -F_2(t)\vec{x_2}$;
— sur S_{+b}, nous appliquons une densité surfacique d'effort $\vec{F}_{+b}(M,t) = +F_2(t)\vec{x_2}$;
— les autres surfaces, que nous regroupons dans la surface unique nommée S_{le}, sont libres d'effort, donc soumises à une densité surfacique d'effort $\vec{F}_{le}(M,t)$ égale au vecteur nul,

pour lesquelles nous allons regarder des cas particuliers définis par des choix des fonctions $F_1(t)$ et $F_2(t)$ parmi les fonctions suivantes :

— des fonctions qui évoluent entre F_{max} et $F_{min} = RF_{max}$:
  . $f_a(t) = \frac{F_{max}}{2}(1-R)sin(2\pi\frac{t}{T}) + \frac{F_{max}}{2}(1+R)$ avec $R = R_a = R_0 = 0.1$;
  . $f_b(t) = \frac{F_{max}}{2}(1-R)sin(2\pi\frac{t}{T}) + \frac{F_{max}}{2}(1+R)$ avec $R = R_b = -1.0$;
  . $f_c(t) = -\frac{F_{max}}{2}(1-R)sin(2\pi\frac{t}{T}) + \frac{F_{max}}{2}(1+R)$ avec $R = R_c = R_0 = 0.1$;
  . $f_d(t) = -\frac{F_{max}}{2}(1-R)sin(2\pi\frac{t}{T}) + \frac{F_{max}}{2}(1+R)$ avec $R = R_d = -1.0$;
  . $f_e(t) = \frac{F_{max}}{2}(1-R)sin(2\pi\frac{t}{T_e}) + \frac{F_{max}}{2}(1+R)$ avec $T_e = e \neq T$ et $R = R_e = R_0 = 0.1$;
  . $f_f(t) = \frac{F_{max}}{2}(1-R)sin(2\pi\frac{t}{T_f}) + \frac{F_{max}}{2}(1+R)$ avec $T_f = \pi \neq T$ et $R = R_f = R_0 = 0.1$;
  . $f_g(t) = \frac{F_{max}}{2}(1-R)sin(2\pi\frac{t}{T_g}) + \frac{F_{max}}{2}(1+R)$ avec $T_g = e \neq T$ et $R = R_g = -1.0$;
  . $f_h(t) = \frac{F_{max}}{2}(1-R)sin(2\pi\frac{t}{T_h}) + \frac{F_{max}}{2}(1+R)$ avec $T_h = \pi \neq T$ et $R = R_h = -1.0$.
— des fonctions qui évoluent entre $0.1F_{max}$ et $0.1F_{min}$:
  . $f_i(t) = \frac{0.1F_{max}}{2}(1-R)sin(2\pi\frac{t}{T}) + \frac{0.1F_{max}}{2}(1+R)$ avec $R = R_i = R_0 = 0.1$;
  . $f_j(t) = -\frac{0.1F_{max}}{2}(1-R)sin(2\pi\frac{t}{T}) + \frac{0.1F_{max}}{2}(1+R)$ avec $R = R_j = R_0 = 0.1$;

L'évolution des systèmes est étudiée dans l'intervalle de temps $I = [t_0, t_{max}]$ en considérant deux cas distincts :

— le premier suppose que l'ensemble des paramètres caractéristiques des sollicitations temporelles structurales est invariant au cours du temps. Nous qualifions ce cas comme cas d'une sollicitation mono-niveau ;
— le second suppose que l'ensemble des paramètres caractéristiques des sollicitations temporelles structurales n'est pas invariant au cours du temps. Nous qualifions ce cas comme cas d'une sollicitation multi-niveaux.

Dans le cas mono-niveau, l'évolution des domaines est étudiée dans l'intervalle de temps $I = [t_0, t_{max}]$ pour lequel l'ensemble des paramètres caractéristiques structuraux est $\mathbb{S}_t(I) = \{F_1(t), F_2(t)\}$. Cet ensemble induit l'ensemble des paramètres caractéristiques locaux $\mathbb{Q}^{*+}(I, \Omega)$.

Dans le cas multi-niveaux, l'évolution des domaines est étudiée dans l'intervalle de temps $I = [t_0, t_{max}]$ découpé en deux intervalles I_1 et I_2, faisant apparaître l'instant t_i : $I_1 = [t_0, t_i[$ et $I_2 = [t_i, t_{max}]$. Sur I_1, l'ensemble des paramètres caractéristiques structuraux est $\mathbb{S}_t(I_1) = \{F_1(t), F_2(t)\}$. Sur I_2, l'ensemble des paramètres caractéristiques structuraux est $\mathbb{S}_t(I_2) = \{F_1(t), F_2(t)\}$. Dans ce cas multi-niveaux $\mathbb{S}_t(I_1)$ et $\mathbb{S}_t(I_2)$ sont du même type mais non égaux. Chacun de ces ensembles induit respectivement l'ensemble des paramètres caractéristiques locaux $\mathbb{Q}^{*+}(I_1, \Omega)$ et $\mathbb{Q}^{*+}(I_2, \Omega)$ (qui peuvent être du même type, mais en tout cas, non égaux).

Le cas des deux éprouvettes cruciformes initialement traité, qualifié de calcul de référence, est un cas mono-niveau pour lequel :
— $F_1(t) = F_2(t) = F(t)$;
— la fonction $F(t)$ est une fonction en "dent-de-scie" périodique de période T qui évolue entre F_{max} et $F_{min} = RF_{max}$ avec $R = R_0 = 0.1$;
— l'ensemble des paramètres caractéristiques structuraux est noté :

$$\mathbb{S}^{\mathbb{REF}}{}_t(I) = \{F_{max}, R = R_0 = 0.1\}$$

— l'ensemble des paramètres caractéristiques locaux est noté :

$$\mathbb{Q}^{*+}_{\mathbb{REF}}(I, \Omega) = \left\{m^+(M), r^+_{max}(M), R = R_0 = 0.1\right\}$$

— $\mathbb{Q}^{*+}_{\mathbb{REF}}(I, \Omega)$ est du même type que $\mathbb{Q}^{*+}_{\mathbb{ID}}(I, \Omega) = \{m^+(M), r^+_{max}(M), R = 0.1\}$ (Eq. 10.7 - Chapitre 10 - Section 10.7) ce qui explique que ces problèmes ont pu être résolus avec l'identification faite.

Nous allons maintenant étudier différents cas particuliers de conditions aux limites, et regarder à chaque fois, si le (ou les) ensemble(s) des paramètres caractéristiques locaux associé(s) (suivant que nous nous trouvions dans un cas mono-niveau ou multi-niveaux) est (sont) identique(s) ou non à $\mathbb{Q}^{*+}_{\mathbb{ID}}(I, \Omega)$. Si la réponse est positive, le calcul considéré pourra être traité sans refaire d'identification.

12.2 Sollicitations mono-niveau

12.2.1 Rappel sur un problème d'intégration déjà évoqué

Dans le cas de sollicitations mono-niveau, l'ensemble des paramètres caractéristiques locaux $\mathbb{Q}^{*+}(I, \Omega)$ est constant au cours du temps, sauf si la nécessité d'une réactualisation en cours de calcul est avérée. Ce problème a déja été évoqué (Chapitre 10 - Section 10.8.1 - Paragraphe 10.8.2) et nous nous retrouvons finalement dans un cas identique à celui d'une sollicitation multi-niveau. Si la réactualisation se fait nécessaire à partir de l'instant t_i, alors l'intervalle

I se découpe en deux intervalles I_1 et I_2 : $I_1 = [t_0, t_i[$ et $I_2 = [t_i, t_{max}]$. Sur I_1, l'ensemble des paramètres locaux caractéristiques des composantes actives de la variable pilote est $\mathbb{Q}^{*+}(I_1, \Omega) = \{m^{+(1)}(M), r^{+(1)}_{max}(M), R = 0.1\}$ et sur I_2, il est $\mathbb{Q}^{*+}(I_2, \Omega) = \{m^{+(2)}(M), r^{+(2)}_{max}(M), R = 0.1\}$. Aussi, avant de réaliser l'intégration pour l'intervalle I_2, il faut d'abord chercher, pour chaque point M, à quel nombre de cycles $N_i(M)$ dans les conditions $m^{+(2)}(M)$, $r^{+(2)}_{max}(M)$ et $R = 0.1$ correspond l'état d'endommagement atteint à t_i. L'intégration pour l'intervalle I_2 doit alors démarrer, en M, à partir de cette valeur.

12.2.2 Premiers cas

Compte tenu du caractère d'indépendance du phénomène d'endommagement face aux effets de vitesse, en fait, toute fonction périodique qui évolue entre F_{max} et $F_{min} = R_0 F_{max}$ conduit aux mêmes résultats qu'avec la fonction $F(t)$ et les calculs peuvent être faits comme le calcul de référence, c'est-à-dire sans refaire d'identification. En effet, pour toutes les fonctions indiquées, l'ensemble des paramètres locaux caractéristiques des composantes actives de la variable pilote est du même type que $\mathbb{Q}^{*+}_{\mathbb{REF}}(I, \Omega)$ et surtout, du même type que $\mathbb{Q}^{*+}_{\mathbb{ID}}(I, \Omega)$. Ainsi, avec $F_1(t) = F_2(t) = F(t)$ ou $f_a(t)$ ou $f_c(t)$ ou $f_e(t)$ ou $f_f(t)$ les calculs peuvent être menés sans nouvelle identification (Fig. 12.2).

12.2.3 Seconds cas

Maintenant, si nous considérons n'importe quelle fonction périodique qui évolue entre F_{max} et $F_{min} = RF_{max}$ où $R \neq R_0$ alors les calculs ne peuvent pas être faits comme le calcul de référence, c'est-à-dire sans refaire d'identification. En effet, pour ces fonctions indiquées, l'ensemble des paramètres locaux caractéristiques des composantes actives de la variable pilote $\mathbb{Q}^{*+}(I, \Omega)$ n'est pas du même type que $\mathbb{Q}^{*+}_{\mathbb{ID}}(I, \Omega)$. Ainsi, avec $F_1(t) = F_2(t) = f_b(t)$ ou $f_d(t)$ ou $f_g(t)$ ou $f_h(t)$ les calculs ne peuvent pas être menés sans nouvelle identification (Fig. 12.3).

12.2.4 Troisième cas

Nous supposons ici (Fig. 12.4(a)) :
— $F_1(t) = f_a(t) = \frac{F_{max}}{2}(1 - R)sin(2\pi\frac{t}{T}) + \frac{F_{max}}{2}(1 + R)$ avec $R = R_a = R_0 = 0.1$;
— $F_2(t) = f_c(t) = -\frac{F_{max}}{2}(1 - R)sin(2\pi\frac{t}{T}) + \frac{F_{max}}{2}(1 + R)$ avec $R = R_c = R_0 = 0.1$.
Dans ce cas, les sollicitations ne sont pas identiques. Néanmoins, les deux fonctions ont la même période T, la même valeur minimale F_{min} et la même valeur maximale F_{max}, c'est-à-dire que : $\mathbb{S}_t(I) = \{T, F_{min}, F_{max}\}$. En éliminant la dépendance par rapport au temps du fait de l'insensibilité du phénomène aux effets de vitesse, finalement : $\mathbb{S}_t(I) = \{F_{max}, R = R_0 = 0.1\} = \mathbb{S}^{\mathbb{REF}}{}_t(I)$. Cet ensemble induit l'ensemble des paramètres locaux caractéristiques des composantes actives de la variable pilote $\mathbb{Q}^{*+}(I, \Omega)$ qui est du même type que $\mathbb{Q}^{*+}_{\mathbb{ID}}(I, \Omega)$. En conclusion le nouveau calcul proposé ici peut être réalisé comme le calcul de référence, sans nouvelle identification.

12.2.5 Quatrième cas

Nous supposons ici (Fig. 12.4(b)) :
— $F_1(t) = f_b(t) = \frac{F_{max}}{2}(1 - R)sin(2\pi\frac{t}{T}) + \frac{F_{max}}{2}(1 + R)$ avec $R = R_b = -1.0$;
— $F_2(t) = f_d(t) = -\frac{F_{max}}{2}(1 - R)sin(2\pi\frac{t}{T}) + \frac{F_{max}}{2}(1 + R)$ avec $R = R_d = -1.0$.
Dans ce cas, les sollicitations sont identiques et $\mathbb{S}_t(I) = \{T, F_{min}, F_{max}\}$. En éliminant la dépendance par rapport au temps du fait de l'insensibilité du phénomène aux effets de vitesse, finalement : $\mathbb{S}_t(I) = \{F_{max}, R = -1.0\}$. Cet ensemble induit l'ensemble des paramètres locaux caractéristiques des composantes actives de la variable pilote $\mathbb{Q}^{*+}(I, \Omega)$ qui est du même type

que $\mathbb{Q}^{*+}_{\mathbb{ID}}(I,\Omega)$. En conclusion le nouveau calcul proposé ici ne peut pas être réalisé comme le calcul de référence, sans nouvelle identification. Il convient donc de refaire une identification compatible avec l'ensemble $\mathbb{Q}^{*+}(I,\Omega) = \{m^+(M), r^+_{max}(M), R = -1.0\}$ au préalable de réaliser ce calcul.

La différence entre les deux précédents cas vient du fait que la moyenne des fonctions $F_1(t)$ et $F_2(t)$ est soit nulle, soit non nulle (Fig. 12.1). Si ce critère de différentiation n'est pas jugé utile, nous pouvons alors faire référence à la définition de sollicitations identiques affines (Définition (D5) - Partie II - Chapitre 4 - Section 4.2) et construire le cas échéant une nouvelle classe structurale.

12.2.6 Cinquième cas

Nous supposons ici (Fig. 12.4(c)) :
— $F_1(t) = f_e(t) = \frac{F_{max}}{2}(1-R)sin(2\pi\frac{t}{T_e}) + \frac{F_{max}}{2}(1+R)$ avec $T_e = e$ et $R = R_e = R_0 = 0.1$;
— $F_2(t) = f_f(t) = \frac{F_{max}}{2}(1-R)sin(2\pi\frac{t}{T_f}) + \frac{F_{max}}{2}(1+R)$ avec $T_f = \pi$ et $R = R_f = R_0 = 0.1$.
Dans ce cas, les sollicitations ne sont pas identiques et $\mathbb{S}_t(I) = \{T_e = e, T_f = \pi, F_{min}, F_{max}\}$. Soit finalement : $\mathbb{S}_t(I) = \{T_e = e, T_f = \pi, F_{max}, R = R_0 = 0.1\}$. Bien que le phénomène soit insensible aux effets de vitesse, les périodes ne peuvent pas être supprimées : en fait, il est impossible de définir un compteur de nombre de cycles pour ces sollicitations qui battent avec des fréquences qui sont dans un rapport non rationnel. Pour l'heure, nous ne savons donc pas comment résoudre ce problème. Le cas $F_1(t) = F(t)$ (de période T) et $F_2(t) = f_f(t)$ (de période $T_f = \pi \neq T$) conduit évidemment à la même conclusion.

12.2.7 Sixième cas

Nous supposons ici (Fig. 12.5(a)) :
— $F_1(t) = f_a(t) = \frac{F_{max}}{2}(1-R)sin(2\pi\frac{t}{T}) + \frac{F_{max}}{2}(1+R)$ avec $R = R_a = R_0 = 0.1$;
— $F_2(t) = f_i(t) = \frac{0.1F_{max}}{2}(1-R)sin(2\pi\frac{t}{T}) + \frac{0.1F_{max}}{2}(1+R)$ avec $R = R_i = R_0 = 0.1$.
Dans ce cas, les sollicitations ne sont pas identiques. Néanmoins, les deux fonctions ont la même période T et peuvent toutes les deux dans leur ensemble, se caractériser par la valeur minimale $0.1F_{min}$ et la valeur maximale $0.1F_{max}$ car le minimum de l'une coïncide au maximum de l'autre, c'est-à-dire que : $\mathbb{S}_t(I) = \{T, 0.1F_{min}, 0.1F_{max}\}$. En éliminant la dépendance par rapport au temps du fait de l'insensibilité du phénomène aux effets de vitesse, finalement : $\mathbb{S}_t(I) = \{0.1F_{max}, R = R_0 = 0.1\} \neq \mathbb{S}^{\mathbb{REF}}{}_t(I)$. Cet ensemble induit l'ensemble des paramètres locaux caractéristiques des composantes actives de la variable pilote $\mathbb{Q}^{*+}(I,\Omega)$ qui est du même type que $\mathbb{Q}^{*+}_{\mathbb{ID}}(I,\Omega)$. En conclusion le nouveau calcul proposé ici peut être réalisé comme le calcul de référence, sans nouvelle identification.

12.2.8 Septième cas

Nous supposons ici (Fig. 12.5(b)) :
— $F_1(t) = f_i(t) = \frac{0.1F_{max}}{2}(1-R)sin(2\pi\frac{t}{T}) + \frac{0.1F_{max}}{2}(1+R)$ avec $R = R_i = R_0 = 0.1$;
— $F_2(t) = f_j(t) = -\frac{0.1F_{max}}{2}(1-R)sin(2\pi\frac{t}{T}) + \frac{0.1F_{max}}{2}(1+R)$ avec $R = R_i = R_0 = 0.1$.
Dans ce cas, les sollicitations ne sont pas identiques. Néanmoins, les deux fonctions ont la même période T, la même valeur minimale $0.1F_{min}$ et la même valeur maximale $0.1F_{max}$, c'est-à-dire que : $\mathbb{S}_t(I) = \{T, 0.1F_{min}, 0.1F_{max}\}$. En éliminant la dépendance par rapport au temps du fait de l'insensibilité du phénomène aux effets de vitesse, finalement : $\mathbb{S}_t(I) = \{0.1F_{max}, R = R_0 = 0.1\} \neq \mathbb{S}^{\mathbb{REF}}{}_t(I)$. Cet ensemble induit l'ensemble des paramètres locaux caractéristiques des composantes actives de la variable pilote $\mathbb{Q}^{*+}(I,\Omega)$ qui est du même type que $\mathbb{Q}^{*+}_{\mathbb{ID}}(I,\Omega)$. En conclusion le

nouveau calcul proposé ici peut être réalisé comme le calcul de référence, sans nouvelle identification.

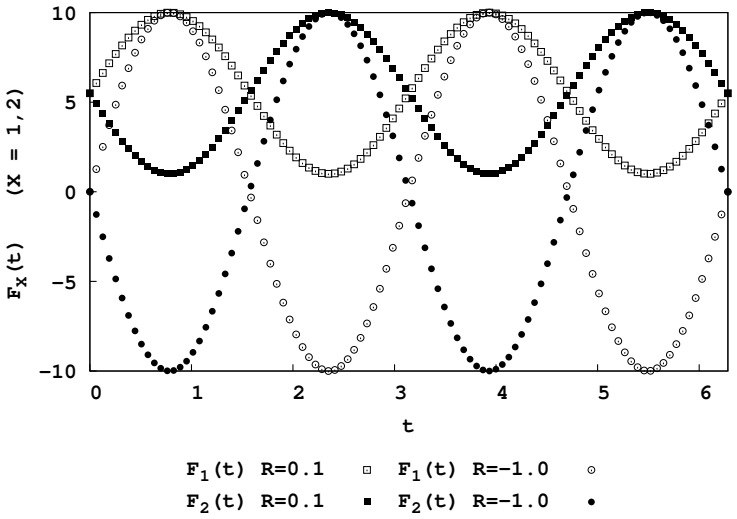


FIGURE 12.1 – Sollicitations identiques dans le cas $R = -1.0$, mais non identiques dans le cas $R = 0.1$.

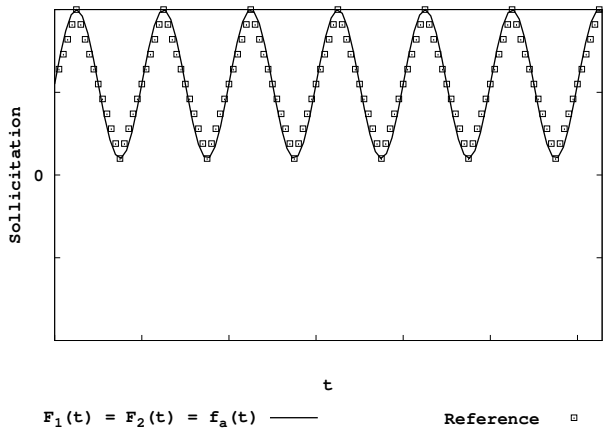
12.3 Sollicitations multi-niveaux simples

Examinons deux cas distincts de sollicitations multi-niveaux simples.

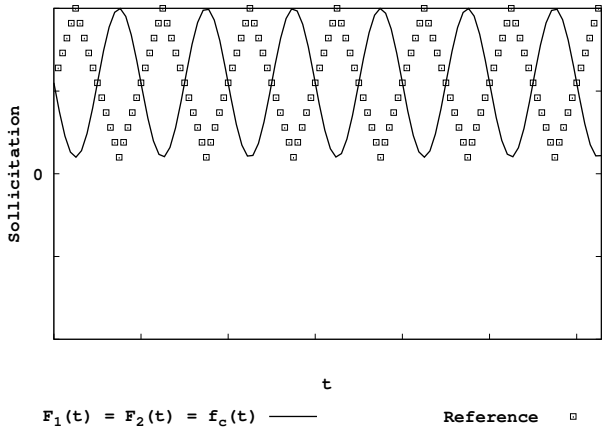
Le premier cas est le cas d'un chargement fort suivi d'un chargement faible (Fig. 12.6(a)) :
— $F_1(t) = F_2(t) = f_a(t)$ sur l'intervalle I_1 ;
— $F_1(t) = F_2(t) = f_i(t)$ sur l'intervalle I_2.
Nous avons donc :
— $\mathbb{S}_t(I_1) = \{F_{max}, R_0 = 0.1\}$ et $\mathbb{Q}^{*+}(I_1, \Omega) = \left\{m^{+(1)}(M), r^{+(1)}_{max}(M), R_0 = 0.1\right\}$;
— $\mathbb{S}_t(I_2) = \{0.1F_{max}, R_0 = 0.1\}$ et $\mathbb{Q}^{*+}(I_2, \Omega) = \left\{m^{+(2)}(M), r^{+(2)}_{max}(M), R_0 = 0.1\right\}$.

Le second cas est le cas d'un chargement faible suivi d'un chargement fort (Fig. 12.6(b)) :
— $F_1(t) = F_2(t) = f_i(t)$ sur l'intervalle I_1 ;
— $F_1(t) = F_2(t) = f_a(t)$ sur l'intervalle I_2.
Nous avons donc :
— $\mathbb{S}_t(I_1) = \{0.1F_{max}, R_0 = 0.1\}$ et $\mathbb{Q}^{*+}(I_1, \Omega) = \left\{m^{+(1)}(M), r^{+(1)}_{max}(M), R_0 = 0.1\right\}$;
— $\mathbb{S}_t(I_2) = \{F_{max}, R_0 = 0.1\}$ et $\mathbb{Q}^{*+}(I_2, \Omega) = \left\{m^{+(2)}(M), r^{+(2)}_{max}(M), R_0 = 0.1\right\}$.

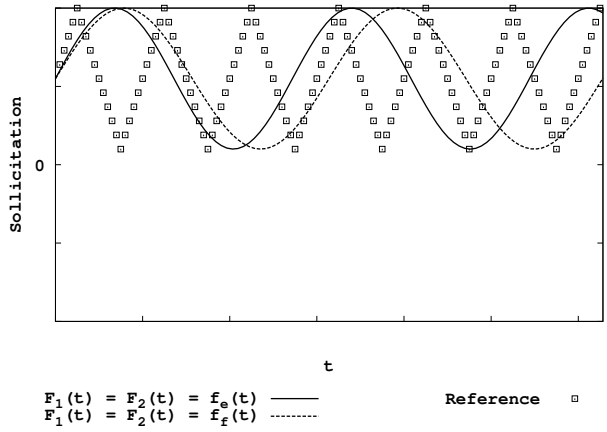
Dans chacun des deux cas, pour les deux intervalles, l'ensemble des paramètres locaux caractéristiques des composantes actives de la variable pilote est du même type que $\mathbb{Q}^{*+}_{\mathbb{ID}}(I, \Omega)$. Les deux calculs proposés peuvent donc être réalisés comme le calcul de référence, sans nouvelle identification, avec néanmoins une petite modification : en effet, dans ces deux configurations de conditions aux limites, nous sommes confrontés au même problème que celui évoqué précédemment (Chapitre 10 - Paragraphe 10.8), mais pas pour les mêmes raisons. le calcul démarre



(a)

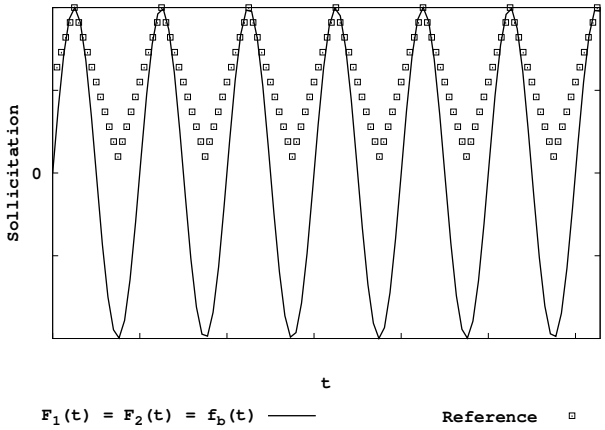


(b)

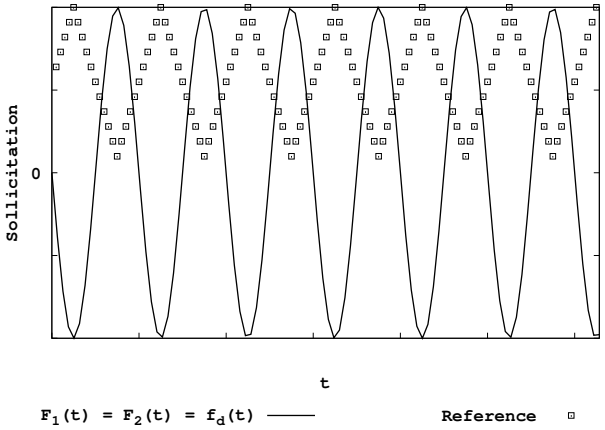


(c)

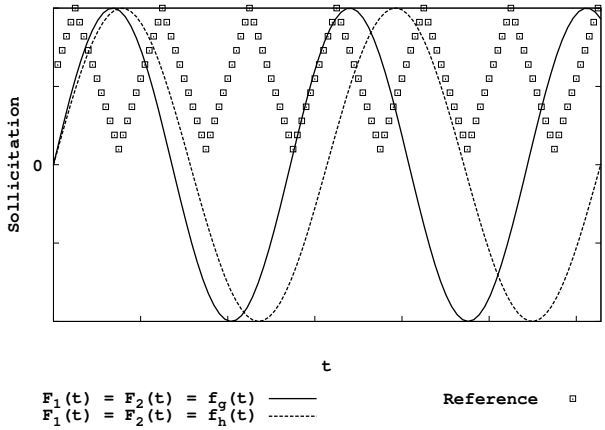
FIGURE 12.2 – Modifications des conditions aux limites par rapport au problème de référence. Sollicitations mono-niveau. Sollicitations qui peuvent être appliquées sans avoir à refaire une identification. Toutes ces sollicitations conduisent à un ensemble des paramètres locaux caractéristiques des composantes actives de la variable pilote du même type que $\mathbb{Q}_{\mathbb{ID}}^{*+}(I,\Omega)$.



(a)

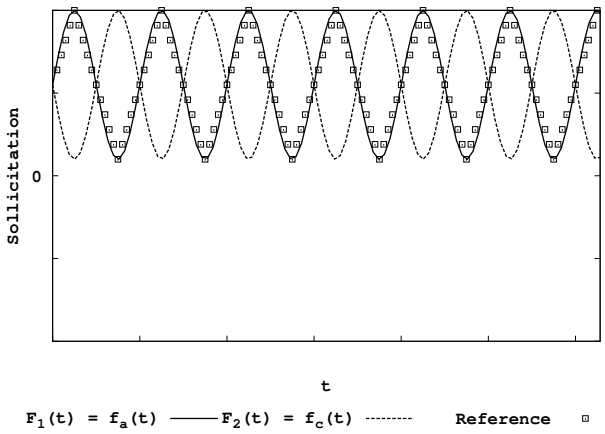


(b)

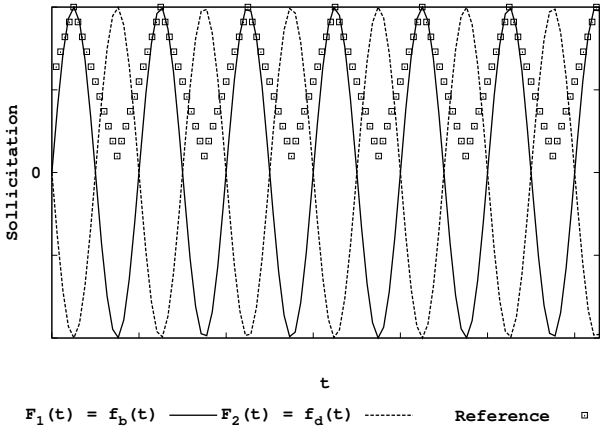


(c)

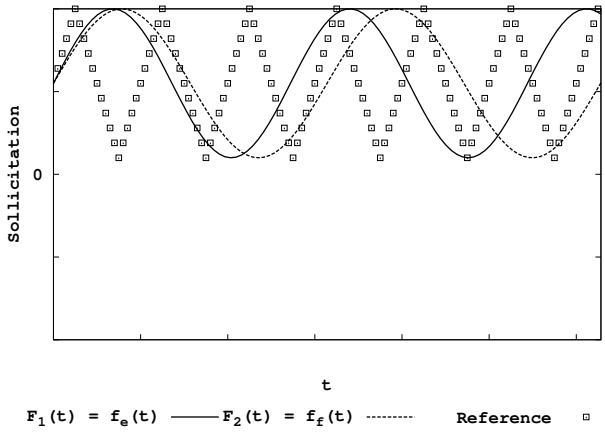
FIGURE 12.3 – Modifications des conditions aux limites par rapport au problème de référence. Sollicitations mono-niveau. Sollicitations qui ne peuvent pas être appliquées sans avoir à refaire une identification. Aucune de ces sollicitations ne conduit à un ensemble des paramètres locaux caractéristiques des composantes actives de la variable pilote du même type que $\mathbb{Q}^{*+}_{\mathbb{ID}}(I,\Omega)$.



(a)

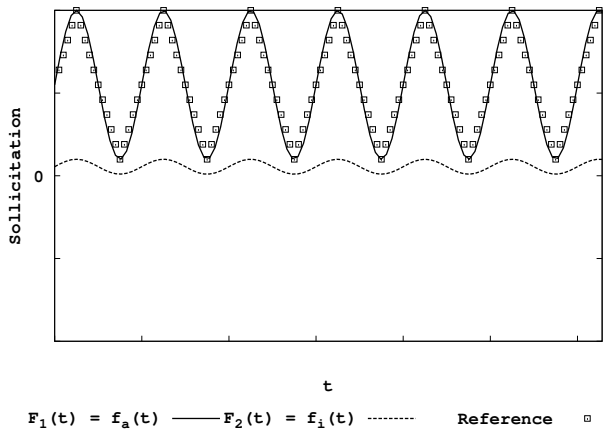


(b)

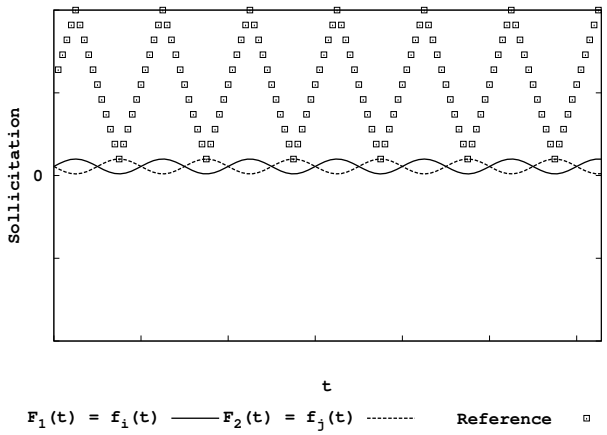


(c)

FIGURE 12.4 – Modifications des conditions aux limites par rapport au problème de référence. Sollicitations mono-niveau. (a) Sollicitation qui peut être appliquée sans avoir à refaire une identification : l'ensemble des paramètres locaux caractéristiques des composantes actives de la variable pilote associé est du même type que $\mathbb{Q}^{*+}_{\mathbb{ID}}(I,\Omega)$. (b) Sollicitation qui ne peut pas être appliquée sans avoir à refaire une identification : l'ensemble des paramètres locaux caractéristiques des composantes actives de la variable pilote associé n'est pas du même type que $\mathbb{Q}^{*+}_{\mathbb{ID}}(I,\Omega)$. (c) Sollicitations qui ne permettent pas de définir un compteur de cycles : ce problème est donc pour l'heure insoluble.



(a)



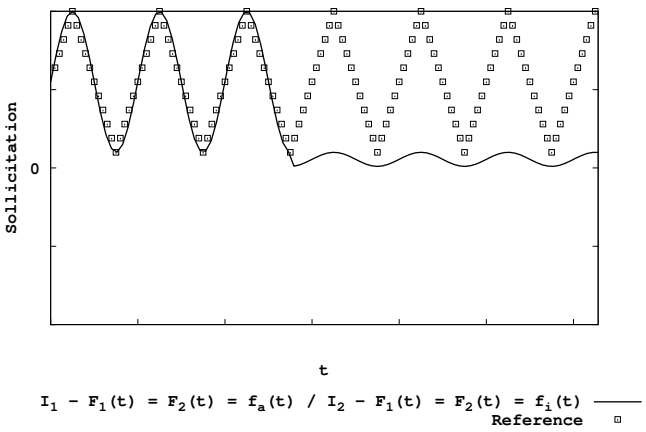
(b)

FIGURE 12.5 – Modifications des conditions aux limites par rapport au problème de référence. Sollicitations mono-niveau. Sollicitations qui peuvent être appliquées sans avoir à refaire une identification. Toutes ces sollicitations conduisent à un ensemble des paramètres locaux caractéristiques des composantes actives de la variable pilote du même type que $\mathbb{Q}^{*+}_{\mathbb{ID}}(I,\Omega)$.

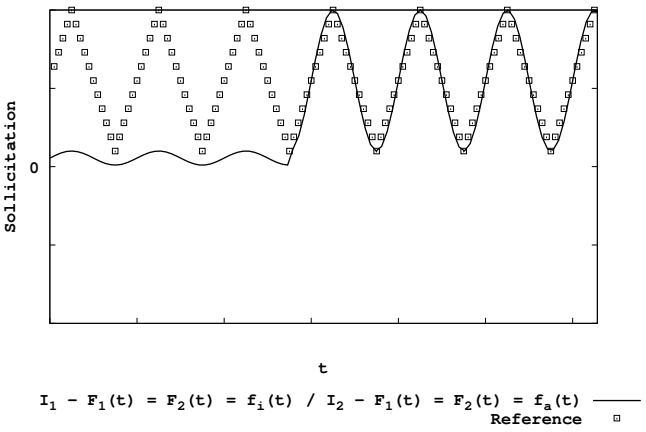
à partir d'une structure vierge d'endommagement et intègre, en chaque point M, la loi cyclique (Eq. 10.4 ou Eq. 10.6 - Chapitre 10) associée aux valeurs $m^{+(1)}(M)$, $r^{+(1)}_{max}(M)$ et $R = 0.1$, entre les instants t_0 et t_i. L'instant t_i est atteint et à partir d'une structure non vierge d'endommagement, le calcul poursuit l'intégration de la loi cyclique, en chaque point M, associée aux valeurs $m^{+(2)}(M)$, $r^{+(2)}_{max}(M)$ et $R = 0.1$, entre les instants t_i et t_{max}. Pour l'intervalle I_1, l'état initial d'endommagement étant celui qui correspond à celui de la procédure d'identification, l'intégration fait coïncider en chaque point M, le nombre de cycles N et le nombre de cycles vu par le point M. Pour l'intervalle I_2, l'état initial d'endommagement n'est pas celui qui correspond à celui de la procédure d'identification. Alors au préalable de réaliser l'intégration pour l'intervalle I_2, il faut d'abord chercher, pour chaque point M, à quel nombre de cycles $N_i(M)$ dans les conditions $m^{+(2)}(M)$, $r^{+(2)}_{max}(M)$ et $R = 0.1$ correspond l'état d'endommagement atteint à t_i. L'intégration pour l'intervalle I_2 démarre alors, en M, à partir de cette valeur.

Alors, nous pouvons remarquer que dans le premier cas (sollicitation forte puis faible), il est

possible qu'en chaque point de la structure, l'état d'endommagement atteint à la fin de I_1 soit toujours supérieur à ce que la sollicitation sur I_2 induise : dans ce cas, l'endommagement n'évolue plus. Ce n'est évidemment pas ce qui se passe dans le second cas (sollicitation faible puis forte).



(a)



(b)

FIGURE 12.6 – Modifications des conditions aux limites par rapport au problème de référence. Sollicitations multi-niveaux. Sollicitations qui peuvent être appliquées sans avoir à refaire une identification. Toutes ces sollicitations, pour les deux intervalles I_1 et I_2 conduisent à un ensemble des paramètres locaux caractéristiques des composantes actives de la variable pilote du même type que $\mathbb{Q}^{*+}_{\mathbb{ID}}(I,\Omega)$. (a) Chargement fort suivi d'un chargement faible. (b) Chargement faible suivi d'un chargement fort.

12.4 Sollicitations multi-niveaux. Cas plus général

En fait, nous constatons depuis le début de ce chapitre, que ce qui gène essentiellement la réalisation d'un calcul, c'est l'identification de la loi cyclique. Ici, dans un esprit de généralité, nous supposons que ce problème est résolu, de telle sorte que l'ensemble $\mathbb{Q}^{*+}_{\mathbb{ID}}(I,\Omega)$ soit :

$$\mathbb{Q}^{*+}_{\mathbb{ID}}(I,\Omega) = \left\{m^+(M), r^+_{max}(M), R\right\}$$

c'est-à-dire connu pour toute valeur de R et non plus limité à la valeur $R = 0.1$.

Essayons maintenant d'appréhender ce que peut être le cas de problème de fatigue le plus général que nous puissions traiter avec l'identification donnée.

Imaginons ainsi l'évolution d'un domaine étudiée dans l'intervalle de temps $I = [t_0, t_{max}]$ et que cet intervalle de temps est découpé en n intervalles I_i $(i = 1, \ldots, n)$: $I_i = [t_{i-1}, t_i[$ avec $t_n = t_{max}$. Sur I_i, l'ensemble des paramètres caractéristiques structuraux est $\mathbb{S}_t(I_i)$ qui induit l'ensemble des paramètres caractéristiques locaux $\mathbb{Q}^{*+}(I_i, \Omega)$.

La conclusion de pouvoir ou non faire un calcul est conditionnée par le fait que l'ensemble des paramètres caractéristiques locaux $\mathbb{Q}^{*+}(I_i, \Omega)$ est ou non identique à $\mathbb{Q}^{*+}_{\mathbb{ID}}(I, \Omega)$. Si c'est le cas, le calcul est possible, sans identification supplémentaire, sous réserve de déterminer, pour chaque intervalle, et pour chaque point, le nombre de cycles à partir duquel démarre l'intégration de la loi.

12.5 Mise en évidence de l'intérêt d'une approche locale

Dès lors que l'ensemble des paramètres caractéristiques locaux du calcul est ou n'est pas identique à celui de l'identification, le calcul peut être réalisé. Et, finalement, en imaginant, l'accès à des données expérimentales qui permettent l'identification la plus complète possible, tous les calculs sont possibles sans limitation (dès que la notion de compteur de cycles peut être définie, évidemment).

Nous constatons ainsi que l'utilisation d'une approche locale par la Mécanique de l'Endommagement pour une loi cyclique est aussi simple que son homologue quasi-statique : dès lors que la loi de comportement (loi d'état et d'évolution) est identifiée, la discrétisation de la structure est faite, les conditions aux limites sont imposées, et le calcul se résout, sous réserve d'une éventuelle réactualisation du compteur de cycles.

En revanche, l'utilisation d'une approche basée sur la Mécanique de la Rupture, empêche cette simplicité : l'identification doit être faite, a minima, pour tous les couples (géométrie, sollicitation).

Chapitre 13

Un modèle probabiliste d'évolution de la fissuration intralaminaire en fatigue Aide à l'identification

13.1 Position du problème

Nous souhaitons ici écrire une loi d'évolution du phénomène de fissuration intralaminaire basée sur des concepts probabilistes. Nous soutenons alors l'hypothèse que tout endommagement est initié à partir d'un défaut. Aussi, une description statistique de l'apparition et l'évolution de certains endommagements microscopiques peut être envisagée. Des approches probabilistes ont déjà été menées pour ce même phénomène dans le cas d'éprouvettes soumises à un chargement en traction longitudinale [6] [61] [7] [18]. Pour ce qui nous concerne, une originalité de l'approche réside dans le fait que la loi d'évolution est finalement une suite dont le terme général est connu.

13.2 Cadre mathématique du modèle probabiliste

13.2.1 Notations sur la théorie des probabilités

Une expérience (V) conduit à une éventualité ω, élément d'un ensemble Ω appelé Univers associé à (V). Une partie de Ω est appelée évènement et ω est appelé évènement élémentaire. Une probabilité P est associée à l'ensemble $(\Omega, P(\Omega))$.

La variable aléatoire X est une application de Ω dans $\mathbb{R}$ telle que : $\forall I \subset \mathbb{R}, X^{-1}(I)$ est un évènement.

La fonction de répartition ou loi de probabilité F_X de la variable aléatoire X est la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = P(\{\omega \subset \Omega / X(\omega)\}) = P(X \leq x)$$

A toute fonction de répartition F_X d'une variable aléatoire X, nous associons une fonction $f_X(x)$, appelée densité de probabilité de X, telle que :

— $\forall x \in \mathbb{R}, f_X(x) \geq 0$;

— $\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du = 1$.

Une loi de probabilité de la valeur minimale est la loi du minimum Y d'un ensemble de variables aléatoires. Dans le cas où celles-ci sont indépendantes, elle a la forme suivante :

$$F_Y = 1 - e^{F_{Y0}}$$

13.2.2 Hypothèses associées au modèle probabiliste

Nous émettons l'hypothèse que les défauts, distribués de manière aléatoire dans le matériau, n'interagissent pas mutuellement et nous subdivisons l'élément de volume du matériau en une chaîne de n maillons, la rupture du plus faible provoquant la rupture de cet élément.

Ce type d'approche statistique de la rupture est qualifiée d'approche du maillon le plus faible. Elle peut s'écrire à l'aide de la loi de probabilité de la valeur minimale. En effet, à chaque maillon, nous pouvons associer un ensemble Univers Ω_i et une variable aléatoire X_i tels que : $\Omega_i = \Omega$ et $X_i = X$. Ainsi, nous définissons un ensemble de n variables aléatoires indépendantes et de même fonction de répartition. Soit $X_r(\omega)$ la valeur du critère où a lieu la rupture de l'élément de volume :

$$X_r(\omega) = \inf_{i=1}^{n} X_i(\omega)$$

$X_r(\omega)$ obéit à une loi de probabilité du type loi de la valeur minimale.

Nous nous intéressons au phénomène de fisssuration intralaminaire, principalement provoqué par les phénomènes microscopiques d'endommagement de décohésion fibre/matrice et de microfissuration de la matrice. Ce modèle restera le plus général possible afin, le cas échéant, de pouvoir être appliqué pour d'autres types de phénomènes.

L'expérience V est assimilée à un essai, effectué sur le matériau stratifié vierge d'endommagement. Les éventualités w que nous attribuons à ces essais sont les états de première rupture atteint au cycle N. L'espace Univers Ω est donc l'ensemble de toutes ces éventualités. Le repérage de ces états de manière précise se fait à travers une variable aléatoire $X(w)$ sur Ω.

13.3 Echelles de travail

L'échelle microscopique correspond au Volume Elémentaire Représentatif (VER), choisi en cohérence avec les deux types d'endommagements microscopiques principaux identifiés. Au niveau microscopique, la distinction de volumes de nature différente s'impose :

— le volume efficace, qui participe à la transmission des efforts ;

— le volume de non recouvrement, qui ne transmet plus d'effort.

Néanmoins, la définition précise de ces deux volumes au sein du VER s'avère complexe, du fait de l'hétérogénéité de ce dernier (présence de deux phases). Par exemple, pour le phénomène de décohésion fibre/matrice, nous pourrions choisir le volume de cylindre creux, formé par l'interface fibre/matrice comme volume de non recouvrement. En outre, le volume efficace microscopique dépend du phénomène microscopique d'endommagement considéré. Aussi, nous ne nous attarderons pas à définir précisément ce volume au niveau microscopique, mais plutôt au niveau mésoscopique, à savoir le niveau du pli unidirectionnel : l'élément de volume caractéristique de la fissuration intralaminaire est la portion de matière contenant un assez grand nombre de fissures et sur laquelle les grandeurs physiques caractéristiques sont homogènes.

Finalement, nous nous abstenons volontairement de spécifier les phénomènes microscopiques concernés. L'intérêt est double. Premièrement, le modèle probabiliste sera ainsi indépendant des

phénomènes microscopiques d'endommagement, ce qui peut être un avantage. Deuxièmement, lors de l'identification expérimentale des paramètres du modèle, il s'avèrerait délicat de devoir identifier indépendamment les paramètres propres à chacun des phénomènes microscopiques.

Le volume de la monocouche i vierge de fissure est noté v_i. Après apparition de $(k-1)$ fissures, le pli unidirectionnel i est partagé en k sections. Une partie du volume est inhibée et seule une partie participe à la transmission des efforts. Au sein de chaque portion de pli de volume dv_{if}^k, nous distinguons un volume efficace dv_{ife}^k, qui transmet réellement les efforts et un volume de non recouvrement dv^k autour des fissures, qui ne transmet aucun effort, tels que $dv_{ife}^k = dv_{if}^k - dv^k$. Chaque volume dv_{ife}^k est partagé en m^k maillons identiques, caractérisés par leur position l^k, leur volume $dv_l^k = dv_{m^k}^k$, et la probabilité d'apparition d'une fissure dans le maillon considéré p^k. A chaque apparition de fissure, chaque volume efficace est scindé fictivement en maillons équivalents homogènes (Fig. 13.1). L'état d'endommagement à saturation est une caractéristique de dv^k, car il correspond à l'état où la matière est découpée en tronçons qui ne peuvent plus se fissurer, les efforts y restant stables malgré une augmentation des sollicitations extérieures.

Contrairement à certaines modélisations fondées sur la Mécanique de l'Endommagement qui nécessitent d'emblée de supposer un réarrangement uniforme fictif des fissures, nous ne faisons pas pour l'instant cette hypothèse : les fissures ne sont pas régulièrement réparties.

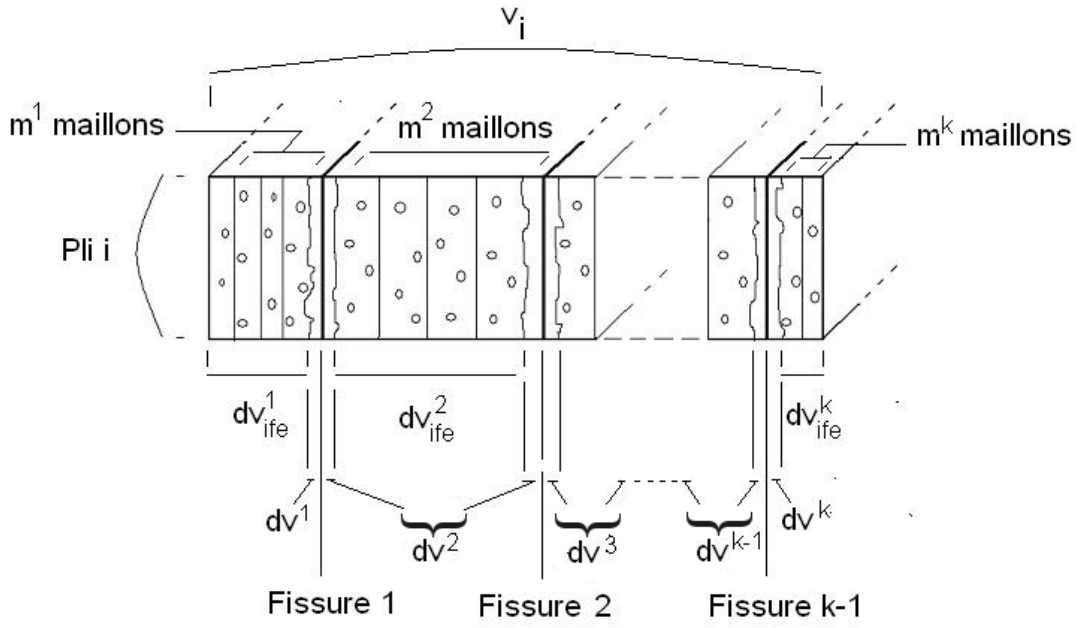


FIGURE 13.1 – Illustration de la notion de volume efficace et notations associées.

13.4 Probabilité d'apparition d'une fissure entre deux fissures préexistantes

Pour écrire la probabilité d'apparition d'une nouvelle fissure entre deux fissures existantes, c'est-à-dire dans le volume dv_{if}^k, il faut tenir compte de la zone inhibée. Ainsi, une fissure peut apparaître n'importe où dans dv_{ife}^k, c'est-à-dire partout dans dv_{if}^k sauf dans dv^k.

En utilisant les probabilités conditionnelles, la probabilité d'apparition d'une fissure dans le maillon l^k du volume dv^k_{ife}, sachant qu'aucune fissure n'est apparue dans les autres maillons de la section k, s'exprime par :

p(f l^k).[(1-p(f l^1)).(1-p(f l^2))...(1-p(l^{k-1})).(1-p(f l^{k+1}))...(1-p(f l^{m^k}))]

avec p(f l^k) la probabilité d'apparition de fissure dans le maillon l^k.

D'après l'hypothèse d'équivalence et d'homogénéité des m^k maillons du volume dv^k_{ife}, en notant p^k la probabilité d'une fissure dans un maillon, cela devient :

$$p^k(\bar{p^k})^{(m^k-1)} = p^k(1-p^k)^{(m^k-1)} \tag{13.1}$$

Aussi, la probabilité P_k d'apparition d'une seule fissure dans le volume dv^k_{ife}, ou dans le volume dv^k_{if}, provoquant la rupture de la chaîne, soit encore, la probabilité d'apparition d'une fissure dans un seul des m^k maillons identiques du volume dv^k_{ife}, sachant qu'aucune fissure n'est apparue dans les autres maillons, s'écrit (m^k possibilités) :

$$P_k = \sum_{i=1}^{m^k} \left\{ p^k \prod_{k=1}^{m^k-1} (1-p^k) \right\} = m^k p^k (1-p^k)^{(m^k-1)} \tag{13.2}$$

Une sollicitation de fatigue implique un chargement cyclique. Le modèle ayant été défini au niveau local, nous pouvons définir la notion de cycle de chargement. L'accroissement du nombre de fissures est assimilé à une suite mathématique d'indice n, dont chaque incrément correspond à une variation du nombre de cycles $\Delta N = \Delta n$. Pour une plus grande précision, nous choisissons d'étudier l'endommagement en fatigue à travers un saut de cycle unitaire $\Delta N = 1$. Par conséquent, chaque incrément de suite correspond à une variation du nombre de cycle $\Delta N = \Delta n = 1$: la probabilité P_k est assimilée à la probabilité d'apparition d'une fissure dans le volume efficace considéré à l'issue du cycle de chargement N, relatif au rang n de la suite mathématique associée. En notant respectivement u_{n+1} et u_n le nombre de fissures au sein du pli au cycle de chargement $N+1$ et N, l'accroissement du nombre de fissures intralaminaires dans le pli considéré s'écrit :

$$u_{n+1} = u_n + \sum_{k=1}^{u_n+1} P_k = u_n + \sum_{k=1}^{u_n+1} m^k p^k (1-p^k)^{m^k-1} \tag{13.3}$$

Implicitement, le modèle choisi limite la cadence d'apparition des fissures à une seule fissure dans chaque volume dv^k_{ife} par cycle. Néanmoins, plusieurs fissures peuvent apparaître dans le volume du pli v_i au cours d'un cycle.

13.5 Etude des probabilités microscopiques issue des lois mathématiques de la fiabilité

13.5.1 Objectif et lois de probabilité

Nous disposons de l'expression de la suite régissant la densité de fissure dans un pli considéré au cours de chargements en fatigue. Il reste à définir l'expression littérale de la probabilité d'apparition d'une fissure dans un maillon, notée p^k.

Expérimentalement, il s'avère délicat de remonter directement à la valeur des probabilités microscopiques p^k et obtenir ainsi, à travers un certain nombre d'essais sur des éprouvettes de type monocouche, une série de valeurs pour p^k du type :

$p^k = \frac{1}{N^0}$, $p^k = \frac{1}{N^{0'}}$, $p^k = \frac{1}{N^{0''}}$, etc... avec N_0, N_0', N_0'', ..., les nombres de cycles nécessaires à l'apparition de la première fissure dans le maillon m^k du pli considéré.

Une telle entreprise impliquerait d'effectuer un contrôle microscopique à chaque cycle, afin de comptabiliser l'apparition ou non de fissures et de mettre en évidence le cycle N_0. En outre, la probabilité ainsi chiffrée ne correspond pas à la probabilité d'apparition d'une fissure dans un maillon, mais à la probabilité d'apparition d'une fissure dans le pli considéré. En effet, il faudrait également repérer les maillons sur l'éprouvette, avant de mener une observation microscopique. Aussi, nous optons pour une méthode plus théorique : un panorama des lois de probabilité existantes va nous permettre de définir la probabilité p^k.

La probabilité d'apparition d'une fissure, en d'autres termes un défaut, peut être mise en parallèle avec la probabilité d'occurence d'une panne dans un système ou équipement, régie par des lois de probabilités particulières, dites de fiabilité, fondée en particulier sur les lois de Gamma, de Weibull et la loi exponentielle (loi de Gamma de paramètres λ>0 et a=1).

13.5.2 La loi de Weibull : énoncé et justification

Dans l'insdustrie, le plan de maintenance des éléments d'un système (maintenance préventive, échange programmée de sous-systèmes,..) est définie en fonction du Mean Time Beween Failure (MTBF), notion inhérente aux domaines de la fiabilité et mathématiques de la décision, à travers des lois de probabilités adaptées : la loi exponentielle ou la loi de Weibull.

En fiabilité, la notion de taux de défaillance instantannée λ, attachée à la variable aléatoire de temps T est la fonction $t \mapsto \lambda(t)$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$, telle que la probabilité pour que l'équipement E tombe en panne durant l'intervalle [t ;t+dt], sachant qu'il fonctionne à l'instant t est $\lambda(t)dt$. Le taux de défaillance $\lambda(t)$ de l'équipement E est défini par :

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)} \tag{13.4}$$

avec $f(t)$ la densité de défaillance (densité de probabilité) et $F(t)$ la fonction de défaillance (fonction de répartition), à savoir la probabilité que le système ait une défaillance avant l'instant t.

La fonction λ caractérise complètement la loi de probabilité, car elle permet de déterminer la fonction de répartition F en résolvant l'équation différentielle $F'+ \lambda F=\lambda$. Le taux de défaillance $\lambda(t)$ de l'équipement E à un instant t correspond à la probabilité pour qu'il tombe en panne dans l'intervalle $[t; t + dt[$, sachant qu'il fonctionne à l'instant t. D'un point de vue fréquentiste, cela revient à dire que, dans un parc d'équipements E identiques, la proportion d'équipements qui tomberont en panne dans l'intervalle $[t; t + dt[$, sachant qu'ils fonctionnent à l'instant t, est $\lambda(t)dt$.

La loi exponentielle de paramètre λ, encore appelée loi de durée de vie sans vieillissement, est la loi de probabilité, avec pour variable aléatoire x la durée de vie d'un phénomène. Sa densité

f_λ est la fonction définie par :

$$\begin{cases} f_\lambda(t) = \exp(\lambda t), \forall t \in [0; +\infty[\\ f_\lambda(t) = 0, \forall t \in]-\infty; 0[\end{cases} \tag{13.5}$$

avec λ(t)=λ constante strictement positive.

Le taux de défaillance de la loi exponentielle est constant et égal à l'inverse de l'espérance de vie du phénomène. Il ne permet pas de rendre compte de variations de la vitesse d'apparition des défaillances. Ainsi, la probabilité qu'un phénomène se produise entre les instants t et $t + dt$, sachant qu'il ne s'est pas produit auparavant, est la même que la probabilité qu'il se produise entre les instants 0 et dt.

La loi de Weibull, ou encore loi de Waloddi-Weibull, est la loi de probabilité continue, dont la densité de probabilité sous forme généralisée (trois paramètres) s'écrit :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{k}{\lambda}(\dfrac{x-\theta}{\lambda})^{k-1} \exp(-(\dfrac{x-\theta}{\lambda})^k), \forall x \geqslant \theta \\ f(x) = 0, \forall x < \theta \end{cases} \tag{13.6}$$

avec $k > 0$ le paramètre de forme, $\lambda > 0$ le paramètre d'échelle et θ le paramètre de localisation de la distribution.

La fonction de répartition pour la loi de Waloddi-Weibull à trois paramètres est définie par :

$$\begin{cases} F(x) = 1 - \exp(-(\dfrac{x-\theta}{\lambda})^k), \forall x \geqslant \theta \\ F(x) = 0, \forall x < \theta \end{cases} \tag{13.7}$$

La grande flexibilité de la loi de Weibull permet de représenter approximativement une multitude de lois de probabilité : il est possible de trouver dans la famille des lois de Weibull une loi cohérente avec une distribution de valeurs en calculant k et λ à partir de la moyenne et la variance observées. Si le taux de panne diminue au cours du temps, le paramètre k est strictement inférieur à 1. Si le taux de panne est constant, alors k est égal à 1. Si le taux de panne augmente, alors k est strictement supérieur à 1. La compréhension du taux de panne fournit une indication au sujet de la cause des pannes : un taux de panne décroissant s'apparente à un défaut de jeunesse, un taux de panne constant suggère que la panne est dûe à une cause stationnaire, et un taux de panne décroissant implique une usure ou vieillissement. En fiabilité, l'utilisation de la loi de Weibull implique un taux de défaillance évoluant au cours de la vie d'un système (Fig. 13.2) :

- initialement, ce taux est élevé, témoignant des erreurs de jeunesse du système (pannes fréquentes) ;
- puis il diminue et se stabilise lors de l'emploi opérationnel du système (pannes régulières et peu fréquentes) ;
- finalement, il augmente de nouveau, rendant compte du vieillissement accru du système.

Le phénomène d'endommagement par fissuration intralaminaire des matériaux composites soumis à des sollicitations en fatigue nécessite également un taux d'avarie évoluant au fil des cycles de chargement : lors de la vie en fatigue d'un matériau, la vitesse de fissuration est d'abord lente, puis accèlère brusquement et enfin ralentit (phase de saturation). Aussi, nous retiendrons la loi de Weibull pour étudier le phénomène de fissuration intralaminaire en fatigue.

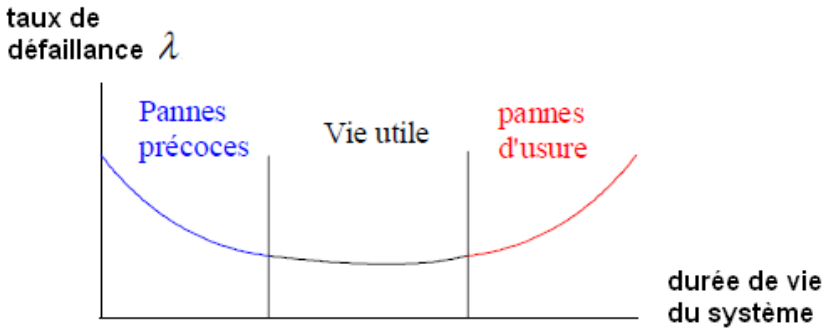


FIGURE 13.2 – Graphe représentant le taux de défaillance d'un système au cours du temps (fiabilté d'un système).

13.5.3 Probabilité microscopique d'apparition d'une fissure dans un maillon. Application de la loi de Weibull

La fonction de répartition utilisée est donc celle du maillon le plus faible et plus précisément, la loi de Weibull, appliquée dans le volume dv_{if}^k compris entre deux fissures. Soit un volume v suffisamment petit, tel que les quantités N et c^k y sont constantes (elles pourraient ne pas l'être en raison de comportement fortement visco-élastique par exemple), la fonction de répartition s'écrit :

$$F(c^k, v) = 1 - e^{-v(\frac{c^k - c_u^k}{c_0^k})^a} = \int_0^{c^k} f(u, v)du$$

avec :

- v le volume sur lequel le critère c^k est actif ;
- c^k le critère de première rupture, qui évolue avec le nombre de cycles N ;
- c_u^k le paramètre de localisation de la dispersion ;
- c_0^k le facteur d'échelle ;
- a le paramètre de dispersion (paramètre de forme).

Cette grandeur désigne la probabilité qu'une fissure apparaisse dans le volume v quand le critère de rupture passe de 0 à c^k. A l'aide de la probabilité conditionnelle, nous exprimons la probabilité $F(c^k/c^{k1}, v)$, pour qu'une fissure apparaisse dans le volume v, entre c^{k1} et c^k sachant qu'elle ne l'a pas fait entre 0 et c^{k1} :

$$F(c^k/c^{k1}, v) = \frac{\int_{c^{k1}}^{c^k} f(u, v)du}{1 - \int_{c^{k1}}^{0} f(u, v)du} = \frac{\int_{c^{k1}}^{c^k} f(u, v)du}{1 - F(c^{k1}, v)}$$

Nous déduisons la probabilité qu'une fissure apparaîsse dans le volume v durant un accroissement dc^k du critère de rupture, sachant qu'elle n'existait pas entre 0 et c^k :

$$F(c^k + dc^k/c^k, v) = \frac{f(c^k, v)dc^k}{1 - F(c^k, v)}$$

La probabilité p^k d'apparition d'une première fissure dans un des maillons de volume $dv_{m^k}^k$, identique pour chacun d'eux, c'est à dire à la probabilité d'apparition d'une fissure sachant

qu'aucune fissure n'était apparue avant, est assimilable au taux de défaillance de la loi de Weibull :

$$p^k = \frac{f(c^k, dv^k_{m^k})dc^k}{1 - F(c^k, dv^k_{m^k})}$$

En appliquant l'expression de la fonction de répartition généralisé (Eq. 13.7) à la présente étude, sur le volume d'un maillon $dv^k_{m^k}$, la loi de Weibull s'écrit :

$$\begin{cases} F(c^k, dv^k_{m^k}) = 1 - \exp^{-dv^k_{m^k}(\frac{c^k - c^k_u}{c^k_o})^{a^k}} \\ f(c^k, dv^k_{m^k}) = \frac{a^k dv^k_{m^k}}{c^k_0}\left(\frac{c^k - c^k_u}{c^k_0}\right)^{a^k-1}(1 - F(c^k, dv^k_{m^k})) = dv^k_{m^k}\frac{a^k}{c^k_o}(\frac{c^k - c^k_u}{c^k_o})^{a^k-1}\exp^{-dv^k_{m^k}(\frac{c^k - c^k_u}{c^k_o})^{a^k}} \end{cases} \tag{13.8}$$

Soit :

$$p^k = \frac{a^k dv^k_{m^k}}{c^k_0}(\frac{c^k - c^k_u}{c^k_o})^{a^k-1} \tag{13.9}$$

avec :

- c^k équation du critère de rupture qui caractérise l'état de premier endommagement microscopique ;
- a^k, c^k_o et c^k_u coefficients de Weibull associés au maillon m^k considéré ;
- $dv^k_{m^k}$ volume d'un maillon k.

13.6 Accroissement du nombre de fissures intralaminaires dans le pli i

La probabilité $P(dv^k_{if})$ d'apparition d'une fissure et une seule dans dv^k_{if} provoquant la rupture de la chaine, s'écrit donc :

$$P_k = m^k p^k (1-p^k)^{m^k-1} = P(dv^k_{if}) = m^k \frac{f(c^k, dv^k_{m^k})dN}{1 - F(c^k, dv^k_{m^k})}\left(1 - \frac{f(c^k, dv^k_{m^k})dN}{1 - F(c^k, dv^k_{m^k})}\right)^{m^k-1}$$

Finalement, en remarquant que $dv^k_{ife} = m^k dv^k_{m^k}$, la probabilité d'apparition d'une fissure dans un des $(u_n + 1)$ volumes dv^k_{ife} s'écrit :

$$P_k = (\frac{a^k dv^k_{ife}}{c^k_0}(\frac{c^k - c^k_u}{c^k_o})^{a^k-1})(1 - (\frac{a^k dv^k_{ife}}{c^k_0 m^k}(\frac{c^k - c^k_u}{c^k_o})^{a^k-1}))^{m^k-1} \tag{13.10}$$

En faisant tendre m^k vers l'infini (cf. hypothèse des $dv^k_{m^k}$ suffisament petits), il vient :

$$P_k = (\frac{a^k dv^k_{ife}}{c^k_0}(\frac{c^k - c^k_u}{c^k_o})^{a^k-1}) \tag{13.11}$$

Ceci est donc la probabilité qu'une fissure apparaisse dans le volume interfissure dv^k_{if} quand le nombre de cycles passe de N à $N + dN$ avec $dN = 1$ et que le critère c^k passe de c^k à $c^k + dc^k$. Le volume dv^k_{if} donne naissance à deux volumes dv^k_{if}' et dv^k_{if}", qui obéissent à la même modélisation. La nouvelle fissure est supposée apparaître de manière aléatoire dans dv^k_{ife} de telle sorte que : dv^k_{if}'$= \beta dv^k_{if}$ et dv^k_{if}"$= (1 - \beta)dv^k_{if}$ où $0 < \beta < 1$ et β est tirée de manière aléatoire.

L'accroissement du nombre de fissures intralaminaires dans le pli i de volume v_i se traduit par la suite mathématique :

$$u_{n+1} = u_n + \sum_{k=1}^{u_n+1} \frac{a^k dv_{ife}^k}{c_0^k} (\frac{c^k - c_u^k}{c_0^k})^{a^k-1} \tag{13.12}$$

13.7 Evolution du nombre de fissures dans un élément de volume en fonction du nombre de cycles. Cas général

Soit un élément de volume v_i, dans lequel nous souhaitons connaître l'évolution du nombre de fissures. Lorsque le nombre de cycles augmente et que dans v_i, il règne un certain état de contraintes ou de déformations supposé uniforme dans les zones efficaces conduisant à la valeur c^k du critère, et qu'il existe $u_n = u(N)$ fissures, alors la probabilité d'apparition d'une fissure dans un des $u_n + 1$ volumes dv_{if}^k, lorsque le nombre de cycles s'est accru de dN, et parallèlement que le critère c^k s'est accru de dc^k, s'écrit :

$$P_k = \frac{a^k dv_{ife}^k}{c_0^k} \left(\frac{c^k - c_u^k}{c_0^k} \right)^{a^k-1}$$

L'accroissement du nombre de fissures u_{n+1}, dans v_i, est alors donné par :

$$u_{n+1} = u_n + \sum_{k=1}^{u_n+1} P_k$$

13.8 Evolution du nombre de fissures dans un élément de volume en fonction du nombre de cycles. Cas d'une répartition uniforme des fissures

Pour se placer dans le cadre de la Mécanique de l'Endommagement, qui suppose une répartition uniforme de fissures, nous adoptons une hypothèse supplémentaire : chaque nouvelle fissure est supposée apparaître au milieu d'un volume efficace (réarrangement fictif). En
réalité, les fissures apparaissent dans un premier temps de manière aléatoire, formant un réseau irrégulier. Puis, avec l'augmentation du chargement (accumulation des cycles de sollicitation), la distance interfissures diminue, jusqu'à créer un réseau de fissures qui devient rapidement quasi-périodique. Au regard de cette hypothèse, tous les volumes efficaces et leurs paramètres associés sont identiques :

- les constantes de Weibull deviennent : $a^k = a$, $c_0^k = c_0$ et $c_u^k = c_u$;
- le critère de premier endommagement c^k est désormais noté c ;
- les volumes ne participant pas à la transmission d'effort sont identiques $dv^k = dv$;
- de même, les volumes efficaces sont identiques, tel que :

$$dv_{ife}^k = dv_{ife} = \frac{v_i}{u_n + 1} - dv \tag{13.13}$$

.

Par suite :

$$P_k = \frac{a}{c_0} (\frac{v_i}{u_n + 1} - dv)(\frac{c - c_u}{c_0})^{a-1} = P(u_n) \tag{13.14}$$

Soit :

$$u_{n+1} = u_n + \sum_{k=1}^{u_n+1} \frac{a}{c_0} (\frac{v_i}{u_n + 1} - dv)(\frac{c - c_u}{c_0})^{a-1} \tag{13.15}$$

Finalement :

$$u_{n+1} = u_n + \frac{a}{c_0}(v_i - dv(u_n + 1))(\frac{c - c_u}{c_0})^{a-1} \tag{13.16}$$

L'évolution se poursuit tant que la condition suivante est vérifiée : $v_i - (u_n + 1)dv > 0$. Au-delà, le phénomène est arrivé à saturation.

L'implémentation de cette suite dans un calcul par éléments finis, afin de déterminer son comportement en fatigue, implique de réaliser autant d'itérations que de cycles appliqués, et ce, en chaque point de Gauss de la structure étudiée, ce qui soulève le problème de la capacité de calcul des processeurs. Une solution consisterait, a priori, à augmenter l'incrément de cycles correspondant à une itération de la suite, en remplaçant l'indice de suite n, associé jusqu'alors au nombre de cycles, par un saut de plusieurs cycles. En raisonnant en indice $log(n)$, au cours d'une itération Δn correspondant à un saut de cycles $\Delta N = 10^{log(n)+1} - 10^{log(n)}$, une fissure maximum apparaitrait entre deux fissures préexistantes : le processus de fissuration est considérablement ralenti, notamment pour les grands indices de suite, ce qui est peu crédible. Aussi, cette solution est rejetée. De même, en faisant un saut de cycles multiple de n, le problème s'avèrerait similaire.

Afin d'éviter des itérations successives, ralentissant le processus de calcul, la suite de terme général u_n est finalement écrite sous la forme d'une suite arithmético-géométrique :

$$u_{n+1} = u_n(1 - dv\frac{a}{c_0}(\frac{c - c_u}{c_0})^{a-1}) + \frac{a}{c_0}(v_i - dv)(\frac{c - c_u}{c_0})^{a-1} \tag{13.17}$$

Ainsi, la suite régissant l'évolution du nombre de fissures dans le pli considéré s'écrit :

$$u_n = \frac{v_i - dv}{dv} + (1 - dv\frac{a}{c_0}(\frac{c - c_u}{c_0})^{a-1})^{(n-n_0)}(u_{n0} - \frac{v_i - dv}{dv}) \tag{13.18}$$

13.9 Le critère de rupture c

13.9.1 Expression du critère de rupture c

Pour un état de contrainte σ, le critère c s'apparente à une condition du type : $f(\sigma) < 1$ avec f fonction scalaire du tenseur des contraintes (ou respectivement en déformation ϵ, $g(\epsilon) < 1$, avec g fonction scalaire du tenseur des déformations).

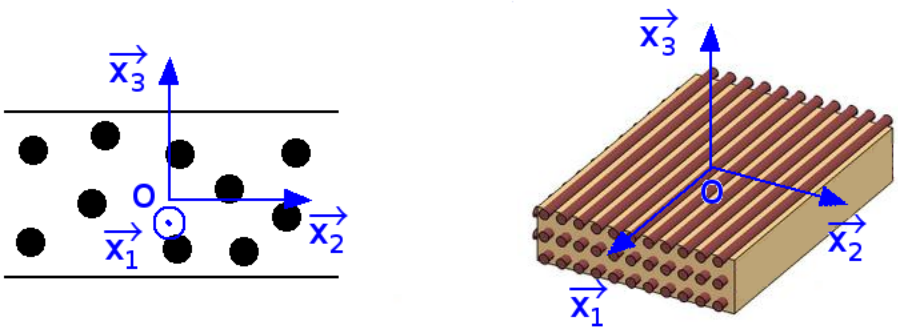


FIGURE 13.3 – Représentation du repère de l'espace associé à l'étude d'un pli.

Au contraire des critères de Tsaï-Hill et de Tsaï-Wu, le critère de Hashin réalise une distinction entre quatre modes de rupture, auxquels sont respectivement associés des critères de rupture particuliers et s'écrit pour des contraintes à trois dimensions [27] :

— rupture de fibres en traction :

$$(\frac{\sigma_{11}}{\sigma_L^+})^2 + \frac{\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2}{\tau_L^2} = 1 \quad si \quad \sigma_{11} > 0 \tag{13.19}$$

— rupture de fibres en compression :

$$\sigma_{11} = -\sigma_L^- \quad si \quad \sigma_{11} < 0 \tag{13.20}$$

— rupture de la matrice en traction :

$$\frac{(\sigma_{22} + \sigma_{33})^2}{\sigma_T^{+2}} + \frac{\sigma_{23}^2 - \sigma_{22}\sigma_{33}}{\tau_T^2} + \frac{\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2}{\tau_L^2} = 1 \quad si \quad \sigma_{22} + \sigma_{33} > 0 \tag{13.21}$$

— rupture de la matrice en compression :

$$((\frac{\sigma_T^-}{2\tau_T})^2 - 1)(\frac{\sigma_{22} + \sigma_{33}}{\sigma_T^-}) + \frac{(\sigma_{22} + \sigma_{33})^2}{4\tau_T^2} + \frac{\sigma_{22}^2 - \sigma_{22}\sigma_{33}}{\tau_T^2} + \frac{\sigma_{11}^2 + \sigma_{13}^2}{\tau_L^2} = 1 \quad si \quad \sigma_{22} + \sigma_{33} < 0 \tag{13.22}$$

avec :

— σ_{ij} les composantes du tenseur des contraintes σ ;
— σ_L^+ et σ_T^+ les contraintes de résistance ultime en tension respectivement suivant dans le sens des fibres et dans le sens transverse aux fibres ;
— σ_L^- et σ_T^- les contraintes de résistance ultime en compression respectivement suivant dans le sens des fibres et dans le sens transverse aux fibres ;
— τ_L est la contrainte de résistance ultime en cisaillement longitudinal (σ_{12} ou σ_{13}) ;
— τ_T est la contrainte de résistance ultime en cisaillement transversal (σ_{23})
— $< x >_- = x$ si $x \leq 0$ sinon $< x >_- = 0$;
— $< x >_+ = x$ si $x > 0$ sinon $< x >_+ = 0$.

Le critère retenu s'écrit :

$$\begin{aligned}&(\frac{\langle \sigma_{22} + \sigma_{33} \rangle_+}{\sigma_T^+})^2 + (\frac{\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2}{\tau_L^2}) + \frac{(\langle \sigma_{22} + \sigma_{33} \rangle_-)^2}{4\tau_T^2} + \frac{(\sigma_{23})^2 - \sigma_{22}\sigma_{33}}{\tau_T^2} \\ &+ \frac{\langle \sigma_{22} + \sigma_{33} \rangle_-}{\sigma_T^-}((\frac{\sigma_T^-}{2\tau_T})^2 - 1) + \frac{\langle \sigma_{22} + \sigma_{33} \rangle_-}{\sigma_{22} + \sigma_{33}} \frac{\sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2}{\tau_T^2} \leqslant 1\end{aligned} \tag{13.23}$$

Soit :

$$c(\sigma) = \sqrt{\begin{aligned}&(\frac{\langle \sigma_{22} + \sigma_{33} \rangle_+}{\sigma_T^+})^2 + (\frac{\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2}{\tau_L^2}) + \frac{(\langle \sigma_{22} + \sigma_{33} \rangle_-)^2}{4\tau_T^2} + \frac{(\sigma_{23})^2 - \sigma_{22}\sigma_{33}}{\tau_T^2} \\ &+ \frac{\langle \sigma_{22} + \sigma_{33} \rangle_-}{\sigma_T^-}((\frac{\sigma_T^-}{2\tau_T})^2 - 1) + \frac{\langle \sigma_{22} + \sigma_{33} \rangle_-}{\sigma_{22} + \sigma_{33}} \frac{\sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2}{\tau_T^2}\end{aligned}} \tag{13.24}$$

avec :

— σ_{ij} les composantes du tenseur des contraintes σ ;
— σ_L^+ et σ_T^+ les contraintes de résistance ultime en tension respectivement suivant dans le sens des fibres et dans le sens transverse aux fibres ;
— σ_L^- et σ_T^- les contraintes de résistance ultime en compression respectivement suivant dans le sens des fibres et dans le sens transverse aux fibres ;

— τ_L est la contrainte de résistance ultime en cisaillement longitudinal (σ_{12} ou σ_{13}) ;
— τ_T est la contrainte de résistance ultime en cisaillement transversal (σ_{23}) ;

Nous retrouvons aisément les cas particuliers de la compression et de la traction de la matrice.

De part sa définition, le critère choisi est défini au niveau du pli et non de la structure entière : les contraintes locales sont déduites des sollicitations expérimentales appliquées au niveau macroscopique (au niveau du stratifié).

D'un point de vue expérimental, il est difficile d'imaginer un procédé permettant d'accéder aux composantes σ_{33}, σ_{13}, et σ_{23} au niveau du pli. Aussi, nous nous restreignons à la théorie des plaques (2 dimensions). Le critère de Hashin s'écrit alors :

— rupture de fibres en traction :

$$(\frac{\sigma_{11}}{\sigma_{11}^t})^2 + (\frac{\sigma_{12}}{\sigma_{12}^r})^2 < 1 \quad si \quad \sigma_{11} \geqslant 0 \tag{13.25}$$

— rupture de fibres en compression :

$$(\frac{|\sigma_{11}|}{\sigma_{11}^c}) < 1 \quad si \quad \sigma_{11} \leqslant 0 \tag{13.26}$$

— rupture de la matrice en traction :

$$(\frac{\sigma_{22}}{\sigma_{22}^t})^2 + (\frac{\sigma_{12}}{\sigma_{12}^r})^2 < 1 \quad si \quad \sigma_{22} \geqslant 0 \tag{13.27}$$

— rupture de la matrice en compression :

$$\frac{\sigma_{22}}{\sigma_{22}^c}(\frac{\sigma_{22}^c}{2\sigma_{12}^r} - 1) + (\frac{\sigma_{22}}{2\sigma_{12}^r})^2 + (\frac{\sigma_{12}}{\sigma_{12}^r})^2 < 1 \quad si \quad \sigma_{22} \leqslant 0 \tag{13.28}$$

avec :

— $\langle x \rangle_- = x$ si x<0, sinon x=0 ;
— σ_{ij} les composantes du tenseur des contraintes σ ;
— σ_{11}^t, σ_{22}^t les contraintes de première rupture en traction ;
— σ_{11}^c, σ_{22}^c les contraintes de première rupture en compression ;
— σ_{12}^r les contraintes de première rupture en cisaillement.

Le critère ainsi utilisé pour l'identification est :

$$(\frac{\langle \sigma_{22} \rangle_+}{\sigma_{22}^t})^2 + (\frac{\sigma_{12}}{\sigma_{12}^r})^2 + \frac{\langle \sigma_{22} \rangle_-}{\sigma_{22}^c}(\frac{\sigma_{22}^c}{2\sigma_{12}^r} - 1) + (\frac{\langle \sigma_{22} \rangle_-}{2\sigma_{12}^r})^2 < 1 \tag{13.29}$$

Soit :

$$c(\sigma) = \sqrt{(\frac{(\langle \sigma_{22} \rangle_+}{\sigma_{22}^t})^2 + (\frac{\sigma_{12}}{\sigma_{12}^r})^2 + \frac{\langle \sigma_{22} \rangle_-}{\sigma_{22}^c}(\frac{\sigma_{22}^c}{2\sigma_{12}^r} - 1) + (\frac{\langle \sigma_{22} \rangle_-}{2\sigma_{12}^r})^2} \tag{13.30}$$

avec :

— $\langle x \rangle_-$=x si x<0, sinon $\langle x \rangle_-$=0, et, $\langle x \rangle_+$=x si x>0, sinon $\langle x \rangle_+$=0 ;
— σ_{ij} les composantes du tenseur des contraintes σ ;
— σ_{11}^t, σ_{22}^t les contraintes de première rupture en traction ;
— σ_{11}^c, σ_{22}^c les contraintes de première rupture en compression ;
— σ_{12}^r les contraintes de première rupture en cisaillement.

Le phénomène d'unilatéralité est implémenté au coeur du présent algorithme en interdisant la création de nouvelles fissures lors d'une sollicitation en compression. L'implémentation du programme nous fournit un nombre de fissures intralaminaires au sein du pli étudié.

13.9.2 Evolution du critère de rupture c à travers une loi de répartition

Le critère de rupture c évolue au fil des cycles de chargement. Le but est, a priori, de simuler cette tendance, via une répartition statistique, tout en limitant le nombre d'expériences. Dans un cas presqu'idéal, les expériences menées nous fournissent les valeurs des contraintes macroscopiques du matériau tout au long du chargement jusqu'à la rupture de l'éprouvette, pour une sollicitation donnée. Les contraintes de première rupture sont obtenues en faisant la moyenne des valeurs expérimentales à rupture, ramenées au niveau mésoscopique (théorie des plaques), pour chaque type de sollicitation (compression, traction, cisaillement). A partir de ces contraintes limites et des plusieurs lots de contraintes expérimentales au sein du pli, le critère c peut être calculé. Nous obtenons ainsi plusieurs séries de c_i^j, valeurs de c :

— essai 1 : (c_1^1,N_1^1) ; (c_2^1,N_2^1) ; (c_3^1,N_3^1) ... (c_r^1,N_r^1),
— essai 2 : (c_1^2,N_1^2) ; (c_2^2,N_2^2) ; (c_3^2,N_3^2) ... (c_r^2,N_r^2),
— ...
— essai V_i : $(c_1^{V_i},N_1^{V_i})$; $(c_2^{V_i},N_2^{V_i})$; $(c_3^{V_i},N_3^{V_i})$ ... $(c_r^{V_i},N_r^{V_i})$,
— ...
— essai V : (c_1^V,N_1^V) ; (c_2^V,N_2^V) ; (c_3^V,N_3^V) ... (c_r^V,N_r^V).

avec (c_1^1,N_1^1), (c_1^2,N_1^2), ..., (c_1^V,N_1^V) les premiers points de mesure et (c_r^1,N_r^1), (c_r^2,N_r^2), ..., (c_r^V,N_r^V) les points de rupture des éprouvettes au cours des V essais.

Nous cherchons alors à associer au critère c une loi de répartition, via des moyens statistiques, probabilistes ou expérimentaux, afin de simuler une évolution du critère c au fil des cycles N. Nous ne cherchons pas à écrire un modèle thermodynamique pour identifier le critère c. Aussi, nous étudions une série de valeurs des critères à rupture expérimentaux c_r, respectivement caractérisées par une série de nombres de cycles à rupture N_r.

Une méthode pour déterminer la distribution associée au critère c consiste à noter $f(t)$ la densité de défaillance, soit encore la densité de probabilité de T (variable aléatoire qui à tout dispositif associe son temps de bon fonctionnement avant défaillance), tel que, en notant $F(t)$ la probabilité que le système ait une défaillance avant l'instant t :

$$F(t) = prob(T \leqslant t) = \int_0^t f(x)dx \tag{13.31}$$

Un échantillon de M systèmes est testé. Soit $m(t)$ le nombre de systèmes ayant subi une défaillance avant l'instant t. La densité de probabilité $F(t)$ peut être approchée par :

— Méthode des rangs bruts (échantillonnage important)

$$F(t) = \frac{m(t)}{M} \tag{13.32}$$

— Méthode des rangs moyens

$$F(t) = \frac{m(t)}{M+1} \tag{13.33}$$

— Méthode des rangs médians

$$F(t-0,3) = \frac{m(t)}{M+0,4} \tag{13.34}$$

En associant la notion de défaillance à celle de rupture, nous pouvons définir une loi de répartition des critères c calculés en utilisant l'une des méthodes suivantes en raisonnant en grandeur cyclique :

$$F(N) = prob(T \leqslant N) \tag{13.35}$$

Dans un premier temps, nous classons les V critères à rupture par ordre croissant : $c_r^1 < c_r^2 < ... < c_r^V$, respectivement associés à la série non ordonnée N_r^1, N_r^2,... et N_r^V. En appliquant la méthode des rangs moyens, les probabilités associées pour que le système ait une défaillance avant le cycle N_i s'écrivent :

$$F_i = F(N_i) \simeq \frac{V_i}{V+1} \tag{13.36}$$

Il est également possible de classer les nombres de cycles à rupture de façon croissante, d'y associer les valeurs du critère expérimental correspondant, et calculer similairement les probabilités associées (Tab. 13.2). La première solution (Tab. 13.1) implique que l'évènement "critère à rupture élevé" soit le plus probable. La seconde solution (Tab. 13.2) signifie que l'évènement "nombre de cycles à rupture élevé" soit le plus probable. Le classement par ordre croissant ou décroissant des critères à rupture ne présente pas a priori une réalité physique directe. En raisonnant sur le nombre de cycles à rupture, l'aspect phénoménologique induit est plus perceptible : il s'agit simplement de se placer dans une hypothèse favorable ou défavorable. Pour rester dans la logique du maillon le plus faible, nous choisissons le cas défavorable (i.e. l'évènement "nombre de cycles à rupture faible" est le plus probable) : cela revient à classer les valeurs de N_r par ordre décroissant et d'y associer les probabilités F_i correspondantes (Tab. 13.3).

numéros des essais V_i	1, 2, ...,V
critères de rupture associés	$c_r^1 < c_r^2 < ... < c_r^V$
nombres de cycles	N_r^1, N_r^2, ..., N_r^V
probabilités associées	$F_1 < F_2 < ... < F_V$

TABLE 13.1 – Classement croissant de c.

numéros des essais V_i	1, 2, ...,V
nombres de cycle associés	$N_r^1 < N_r^2 < ... < N_r^V$
critères de rupture	$c_r^1, c_r^2, ..., c_r^V$
probabilités associées	$F_1 < F_2 < ... < F_V$

TABLE 13.2 – Classement croissant de N.

numéros des essais V_i	1, 2, ...,V
nombres de cycle associés	$N_r^V > .... > N_r^2 > N_r^1$
critères de rupture	$c_r^V, ..., c_r^2, c_r^1$
probabilités associées	$F_1 < F_2 < ... < F_V$

TABLE 13.3 – Classement décroissant de N retenu.

Cette solution permet de réduire le nombre de valeurs expérimentales nécessaires à celles en fin de vie de l'éprouvette. En outre, cette méthode est indépendante de la sollicitation : le calcul des probabilités F_i est identique. Il n'aurait, en effet, pas pu être envisageable de réaliser autant d'études que de types de chargement possibles, même si cela aurait été, a priori, plus proche de la réalité.

13.10 Bilan sur le modèle probabiliste mésoscopique établi

Expérimentalement, la propagation des fissures intralaminaires n'est pas, sous sollicitation de fatigue, un phénomène instantanné : à chaque cycle, des fissures peuvent se créer, pendant que d'autres, apparues à des cycles antérieurs, se propagent jusqu'à traverser le pli. Or, le présent modèle probabiliste n'en tient pas compte : la propagation des fissures au niveau du pli y est instantannée. De plus, nous négligeons l'évolution de la cinétique de fissuration d'un pli en fonction de sa position dans l'empilement, à savoir s'il se trouve dans les couches intérieures ou dans les couches de peau [40]. En effet, les coefficients a et c_0 dépendent de leur position dans le stratifié.

Finalement, pour le modèle probabiliste retenu, certaines hypothèses réductrices ont dû être appliquées dans un soucis de simplification de la suite régissant le nombre de fissures existantes au sein du pli considéré. Ainsi, au niveau du pli, seulement une fissure peut apparaître entre deux fissures, à chaque cycle. Néanmoins, cette hypothèse, certes restrictive, n'entâche pas la cohérence des résultats. De plus, même si ce modèle a eu pour vocation d'être écrit en multi-axial, son identification est réalisée avec des essais uniaxiaux, mettant en oeuvre des chargements plans. Nous rappelons que ce modèle probabiliste sert principalement à identifier les paramètres du modèle issu de la Thermodynamique et non à calculer l'endommagement d'une structure complexe avec précision. Il permet ainsi de simuler des expériences dans des configurations bien particulières.

13.11 Identification des paramètres du modèle probabiliste

13.11.1 Nombre de fissures u_{n0}

La suite écrite précédemment (Equation 13.18) est intégrée dans un algorithme qui fournit la densité de fissures, à partir de la valeur N_0 de cycles pour laquelle la première fissure est observée dans le pli. Nous posons $N_0 = 1$: le nombre de fissures u_{n0} correspond au nombre de fissures apparues à l'issue du chargement quasi-statique.

Chargement	$0/90_2/0$	$0/55/-55/55/0$	$0/45/-45/45/0$
0.30sr	0.31994	0.13301E-03	0.20764E-08
0.50sr	5.7790	0.68391E-02	0.51077E-6
0.70sr	35.449	0.91612E-01	0.19194E-04
0.80sr	66.312	0.25659	0.81002E-04

TABLE 13.4 – Nombre de fissures u_{n0} dans le volume du pli étudié v^i, à l'issue du chargement quasi-statique.

13.11.2 Critère de rupture c

Faute de données expérimentales suffisantes, l'évolution du critère c au fil des cycles de chargement n'a pas été simulée comme spécifié précédemment. Nous avons choisi c constant tout au long de la vie du matériau, pour une sollicitation macroscopique constante. Cette hypothèse, fortement réductrice, est fausse d'un point de vue physique. En effet, à chaque cycle de chargement appliqué à un stratifié, le pli étudié voit son critère c évoluer : les contraintes au sein du pli évoluent du fait de l'endommagement du stratifié, qui implique une redistribution des contraintes au niveau des plis. Ainsi, un pli fissuré est le siège d'une chute de rigidité, ce qui engendre une

augmentation de la rigidité des plis adjacents, qui reprennent alors les efforts. Aussi, même si le chargement appliqué à chaque cycle au niveau du stratifié est constant, les contraintes locales varient et donc le critère c également. Le présent modèle a uniquement pour but de fournir de manière simple une multitude de valeurs expérimentales simulées pour identifier le modèle thermodynamique, qui lui, tiendra compte du phénomène de redistribution des contraintes. Finalement, au regard de l'expression du terme général de la suite (u_n), l'évolution du nombre de fissures n'est pas dictée par l'évolution du critère c et du nombre de cycles N, mais uniquement par l'évolution de N.

En outre, nous observons que le critère c calculé a la même valeur que le rayon r (plus précisément r_1), notion empruntée à la Mécanique de la Rupture, qui quantifie le déplacement relatif des lèvres des fissures. La suite régissant l'évolution du nombre de fissures dans le pli considéré s'écrit alors :

$$u_n = \frac{v^i - dv}{dv} + (1 - dv\frac{a}{c_0}(\frac{r}{c_0})^{a-1})^{(n-n_0)}(u_{n0} - \frac{v^i - dv}{dv}) \tag{13.37}$$

13.11.3 Volume de non-recouvrement dv

Le volume de non-recouvrement dv est caractéristique de la saturation. En effet, dans cette phase, le nombre de fissures contenues dans le pli n'évolue plus et est égal à v_i/dv. Aussi, il est défini sous la forme d'une fonction polynômiale du mode d'ouverture m des fissures. En effet, pour une direction de chargement donnée (géométrie du stratifié), le volume dv est indépendant de l'amplitude de chargement appliqué. Il ne dépend que de la direction des fibres du pli étudié. Soit, après identification :

$$dv = 15.984 - 13.645 * m + 4.071 * m^2 \tag{13.38}$$

13.11.4 Paramètres de Weibull a, c_0 et c_u

Le paramètre c_u est choisi nul. Deux paramètres suffisent à décrirent la présente loi de Weibull. En testant des éprouvettes de type monocouche, le volume d'étude est le volume du pli v_i, et le critère de rupture s'apparente à c_{c_r}. La probabilité d'apparition d'une première fissure dans l'éprouvette s'écrit :

$$F(v^i, c_r) = 1 - \exp^{-v^i(\frac{c_r}{c_0})^a} = F_i \tag{13.39}$$

Soit finalement, en utilisant les résultats expérimentaux c_r^i :

$$a\ln(\frac{c_r^i}{c_0}) + \ln(v^i) = \ln(-\ln(1 - F(v^i, c_r^i))) \tag{13.40}$$

Le paramètre a correspond à la pente de la meilleure droite de la méthode des moindres carrés, passant par les points $(ln(c_r^i), -ln(v^i)+\ln(-\ln(1-F(v^i, c_r^i))))$. Le paramètre c_0 peut être calculé en mettant en relation deux expressions de moyenne du critère à rupture :

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} c_r^i = \int_0^\infty c_r f(c_r, v^i) dc_r = c_0(\frac{1}{v^i})^{\frac{1}{a}}\Gamma(\frac{1}{a} + 1) \tag{13.41}$$

avec Γ la fonction Γ et f la densité de probabilité de la fonction de répartition F.

Dans un premier temps, les paramètres a et c_0 sont identifiés de sorte que la courbe représentative de l'endommagement en fonction du nombre de cycles appliqués du modèle probabiliste

Chargement	$0/90_2/0$	$0/55/-55/55/0$	$0/45/-45/45/0$
0.30sr	4.3	5.5	4.7
0.50sr	4.495	4.62	4.85
0.70sr	4.44	4.72	4.9
0.80sr	4.74	4.73	5

TABLE 13.5 – Identification du paramètre a de la loi de Weibull.

Chargement	$0/90_2/0$	$0/55/-55/55/0$	$0/45/-45/45/0$
0.30sr	50.19	80	100
0.50sr	30.7	32	85
0.70sr	24	22	17.7
0.80sr	7.3	17	16.3

TABLE 13.6 – Identification du paramètre c_0 de la loi de Weibull.

corresponde à la courbe expérimentale, et ce, pour chaque chargement pour chaque stratifié étudié (Tab. 13.5 et 13.6).

L'objectif est de rendre le modèle facilement exploitable pour toute géométrie et chargement, sans avoir à identifier à chaque fois les paramètres a et c_0. Aussi, nous écrivons a et c_0 sous la forme de fonctions polynômiales f et g du rayon r et du mode d'ouverture des fissures m, deux notions empruntées à la Mécanique de la Rupture, tel que $a = f(m, r)$ et $c_0 = g(m, r)$.

Soit, après identification :

$$a = 3.605 + 0.5231 * m + 0.2736 * r + 0.1331 * r * m \tag{13.42}$$

$$c_0 = 129.02 - 53.588 * m - 82.8 * r + 34.631 * r * m \tag{13.43}$$

Ainsi, nous pouvons désormais obtenir une multitude de courbes représentant l'endommagement en fonction du nombre de cycles.

En outre, deux essais expérimentaux réalisés dans les mêmes conditions ne produisent pas des résultats strictement identiques. Aussi, soucieux de simuler des expériences les plus réalistes possibles, nous associons aux coefficients de la loi de Weibull a et c_0 une loi de répartition, afin de prendre en compte l'aspect aléatoire intrinsèque à la notion d'expérimentation.

Pour simuler la dispersion de a et c_0 autour d'une valeur moyenne, nous pouvons envisager une loi de Gauss, usuellement utilisée pour décrire le comportement des séries d'expériences aléatoires lorsque le nombre d'essais est important (loi limite dans le théorème central limite). Cette loi se retrouve ainsi en abîme dans une loi de Weibull : soient μ_a et μ_{c0} les moyennes et σ_a et σ_{c0} les écarts-types des lois gaussiennes respectivement associées à a et à c_0.

Dans l'algorithme de programmation à chaque essai, un lancé de dés avec une graine de tirage

initialisée nous fournit deux nombres p_a et p_{c_0} compris entre 0 et 1. Nous écrivons :

$$\begin{cases} p_a = \dfrac{1}{\sigma_{a^{disp}}\sqrt{2\pi}} \exp^{-\frac{1}{2}\frac{(a-\mu_a)^2}{\sigma_a^2}} \\ p_{c0} = \dfrac{1}{\sigma_{c0^{disp}}\sqrt{2\pi}} \exp^{-\frac{1}{2}\frac{(c_0-\mu_{c0})^2}{\sigma_{c0}^2}} \end{cases} \tag{13.44}$$

L'écart-type est un pourcentage d'erreur : il reflète l'étalement des données. Nous choisissons la dispersion voulue. Les valeurs moyennes μ_a et μ_{c0} correspondent aux valeurs de a et c_0 déterminées à l'issue de l'identification. Nous en déduisons alors les nouvelles valeurs de a^{disp} et c_0^{disp} qui tiennent compte de la réalité des essais :

$$\begin{cases} a^{disp} = \sqrt{(-2\sigma_a^2) * (ln(\dfrac{\sigma_a\sqrt{2\pi}}{p_a}))} + \mu_a \\ c_0^{disp} = \sqrt{(-2\sigma_{c0}^2) * (ln(\dfrac{\sigma_{c0}\sqrt{2\pi}}{p_{c0}}))} + \mu_{c_0} \end{cases} \tag{13.45}$$

Une alternative simplifiée à la répartition de Gauss consiste à choisir un pourcentage de dispersion d et d'associer, à chaque essai, un lancé de dés fournissant deux nombres p_a et p_{c_0} compris entre 0 et 1, tel que :

$$a^{disp} = a + a * d * (p_a - 0.5) \tag{13.46}$$

$$c_0^{disp} = c_0 + c_0 * d * (p_{c_0} - 0.5) \tag{13.47}$$

13.12 Description de l'environnement expérimental

Ce modèle ne nécessite que des données au niveau du pli. Elles nous sont fournies pour 3 stratifiés $(0, (90)_2, 0)$, $(0, 55, -55, 55, 0)$ et $(0, 45, -45, 45, 0)$, dont les caractéristiques géométriques des éprouvettes sont :

Longueur (mm)	100
Largeur (mm)	20
Epaisseur de chaque pli (mm)	0,25

TABLE 13.7 – Dimensions de l'éprouvette.

L'éprouvette est soumise à une sollicitation cyclique de traction σ_{ep}. Nous notons σ_{ep}^r la contrainte macroscopique de rupture de l'éprouvette.

σ_{ep} (MPa)	σ_{ep} (MPa) $(0,(90)_2,0)$	σ_{22} (MPa) $(0,(90)_2,0)$	σ_{12} (MPa) $(0,(90)_2,0)$
$0,30\sigma^r_{ep}$	249.000	32.730	0.000
$0,50\sigma^r_{ep}$	415.000	54.530	0.000
$0,70\sigma^r_{ep}$	581.000	76.370	0.000
$0,80\sigma^r_{ep}$	664.000	87.280	0.000

TABLE 13.8 – Contraintes au niveau du pli étudié (pli à 90°) dans le stratifié $(0,(90)_2,0)$.

σ_{ep} (MPa)	σ_{ep} (MPa) $(0,55,-55,55,0)$	σ_{22} (MPa) $(0,55,-55,55,0)$	σ_{12} (MPa) $(0,55,-55,55,0)$
$0,30\sigma^r_{ep}$	169.200	16.880	-20.760
$0,50\sigma^r_{ep}$	282.000	28.130	-34.600
$0,70\sigma^r_{ep}$	394.800	39.387	-48.441
$0,80\sigma^r_{ep}$	451.200	45.013	-55.361

TABLE 13.9 – Contraintes au niveau du pli étudié (pli à -55°) dans le stratifié $(0,55,-55,55,0)$.

σ_{ep} (MPa)	σ_{ep} (MPa) $(0,45,-45,45,0)$	σ_{22} (MPa) $(0,45,-45,45,0)$	σ_{12} (MPa) $(0,45,-45,45,0)$
$0,30\sigma^r_{ep}$	185.40	5.719	-27.200
$0,50\sigma^r_{ep}$	309.00	9.531	-45.330
$0,70\sigma^r_{ep}$	432.60	13.344	-63.459
$0,80\sigma^r_{ep}$	494.40	15.250	-72.524

TABLE 13.10 – Contraintes au niveau du pli étudié (pli à -45°) dans le stratifié $(0,45,-45,45,0)$.

13.13 Résultats et discussion

Les résultats obtenus à l'aide du présent modèle probabiliste de fatigue s'avèrent cohérents avec les valeurs expérimentales, et ce, durant toute la durée de vie du matériau en fatigue (Fig. 13.4, 13.5, 13.6, 13.7, 13.8 et 13.9). En effet, ce modèle décrit le comportement sous chargements cycliques des matériaux composites à fibres longues, d'une part pour des types de chargements variés (traction pure (éprouvette $(0,(90)_2,0)$), cisaillement (éprouvette $(0,45,-45,45,0)$) et chargements plans (éprouvette $(0,55,-55,55,0)$)), et d'autre part pour une gamme d'amplitude étendue (chargement faible ou fort).

En outre, ce modèle est fidèle aux diverses observations expérimentales, quant à l'influence des paramètres de chargement (orientation par rapport aux fibres, sens, amplitude) sur la saturation en endommagement du pli. Ainsi, la valeur à saturation dépend de l'orientation du chargement (angle formé entre la direction de la sollicitation appliquée et celle des fibres du pli étudié), et donc du mode d'ouverture m, indépendamment de l'amplitude du chargement. Par contre, pour une orientation donnée, la saturation est atteinte d'autant plus rapidement que l'amplitude de chargement est élevée.

La comparaison des résultats obtenus avec les courbes expérimentales montrent une adéquation fort satisfaisante pour tous les niveaux et types de chargements et pour toutes les géométries étudiés. Aussi, le présent modèle fournit la densité d'endommagement à tout instant de la vie en fatigue au sein d'un pli d'un matériau donné. La simplicité de la mise en oeuvre de ce modèle repose sur le fait qu'il nécessite la connaissance de trois paramètres pour fonctionner : le nombre

de fissures à l'issue du chargement quasi-statique u_{n0}, le mode d'ouverture des fissures m et le rayon r. En outre, il s'appuie sur une suite arithmético-géométrique qui permet de s'affranchir des itérations successives. Enfin, ce modèle est écrit au niveau du pli et pourra par la suite être appliqué à tous types de stratifiés et donc à des structures complexes.

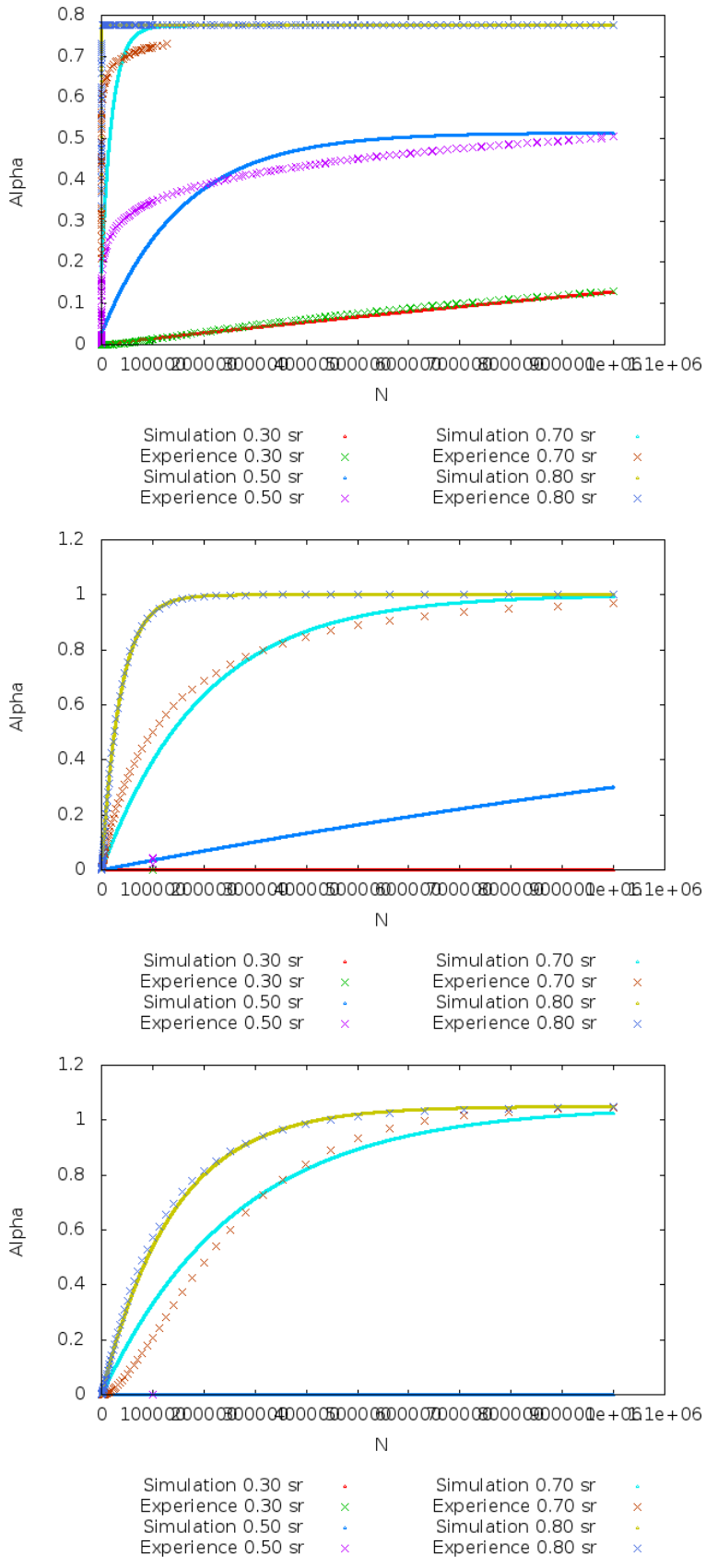


FIGURE 13.4 – Courbes représentant l'endommagement α en fonction du nombre de cycles N pour différents chargements. Le matériau étudié est un composite stratifié. Les courbes issues des valeurs calculées à partir du modèle probabiliste sans dispersion sont mises en relation avec les courbes expérimentales : (a) dans le pli à 90° du stratifié $(0, (90)_2, 0)$, (b) dans le pli à -55° du stratifié $(0, 55, -55, 55, 0)$, (c) dans le pli à -45° du stratifié $(0, 45, -45, 45, 0)$.

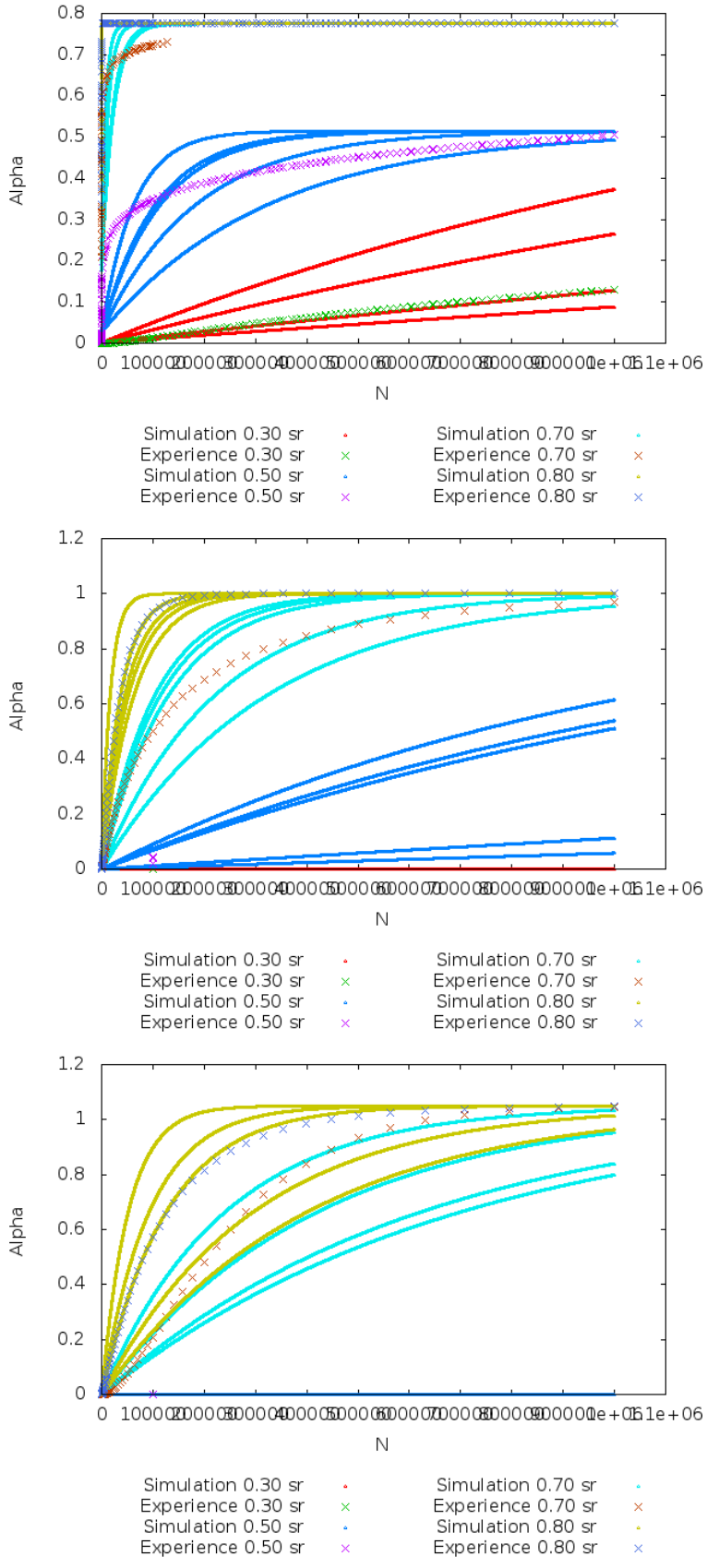


FIGURE 13.5 – Courbes représentant l'endommagement α en fonction du nombre de cycles N pour différents chargements. Le matériau étudié est un composite stratifié. Les courbes issues des valeurs calculées à partir du modèle probabiliste avec une dispersion de 15 pour cent sont mises en relation avec les courbes expérimentales : (a) dans le pli à 90° du stratifié $(0, (90)_2, 0)$, (b) dans le pli à -55° du stratifié $(0, 55, -55, 55, 0)$, (c) dans le pli à -45° du stratifié $(0, 45, -45, 45, 0)$.

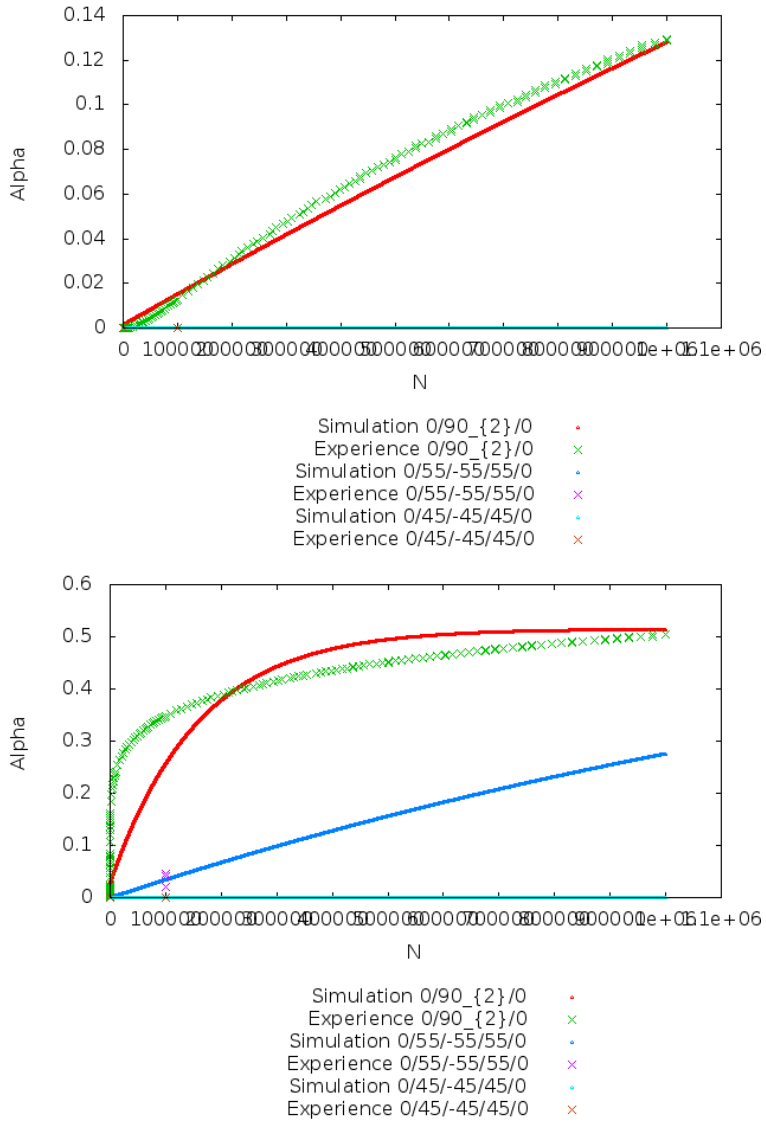


FIGURE 13.6 – Courbes représentant l'endommagement α en fonction du nombre de cycles N pour les composites stratifiés $(0,(90)_2,0)$, $(0,55,-55,55,0)$ et $(0,45,-45,45,0)$. Les courbes issues des valeurs calculées à partir du modèle probabiliste sans dispersion sont mises en relation avec les courbes expérimentales : (a) pour un chargement de 0.30Sr, (b) pour un chargement de 0.50Sr.

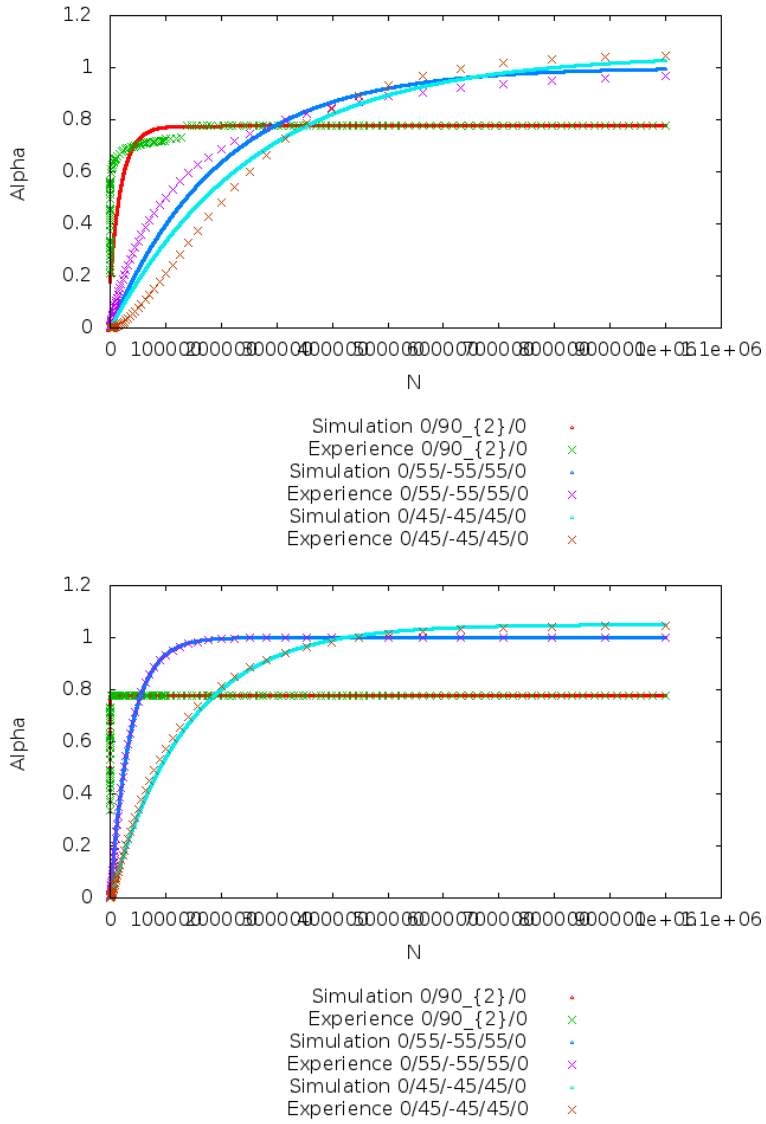


FIGURE 13.7 – Courbes représentant l'endommagement α en fonction du nombre de cycles N pour les composites stratifiés $(0,(90)_2,0)$, $(0,55,-55,55,0)$ et $(0,45,-45,45,0)$ (suite). Les courbes issues des valeurs calculées à partir du modèle probabiliste sans dispersion sont mises en relation avec les courbes expérimentales : (c) pour un chargement de 0.70Sr, (d) pour un chargement de 0.80Sr.

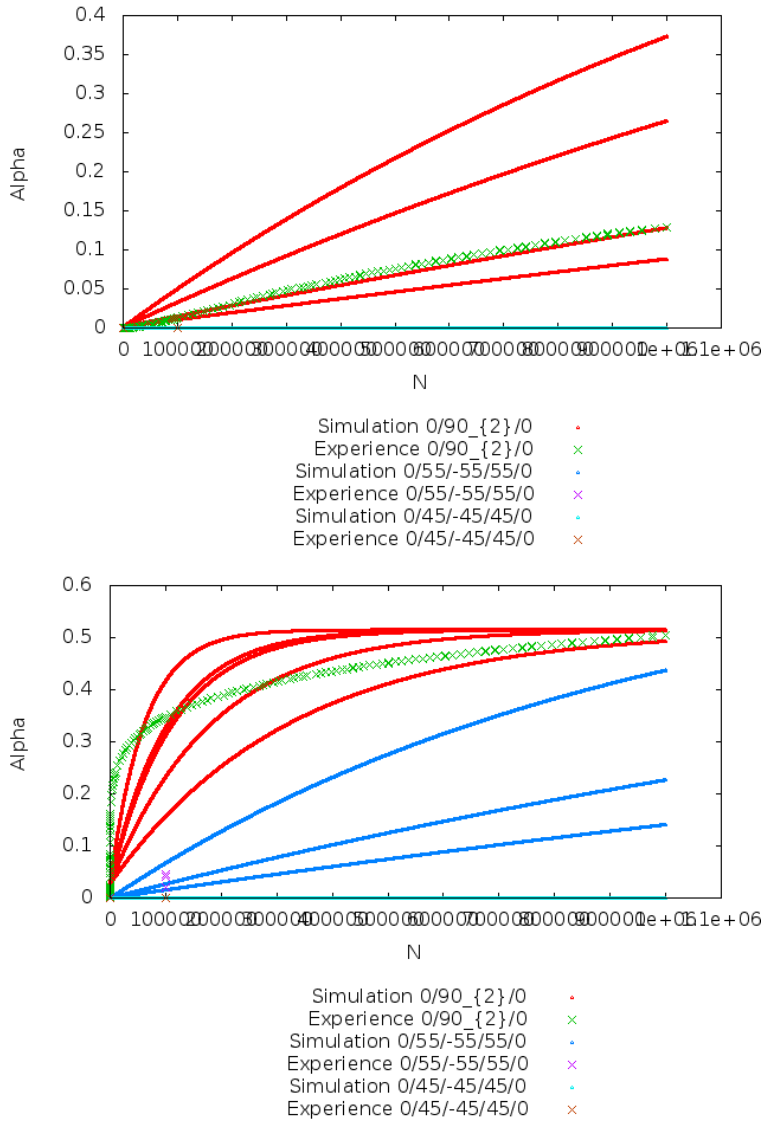


FIGURE 13.8 – Courbes représentant l'endommagement α en fonction du nombre de cycles N pour les composites stratifiés $(0,(90)_2,0)$, $(0,55,-55,55,0)$ et $(0,45,-45,45,0)$. Les courbes issues des valeurs calculées à partir du modèle probabiliste avec une dispersion de 15 pour cent sont mises en relation avec les courbes expérimentales : (a) pour un chargement de 0.30Sr, (b) pour un chargement de 0.50Sr.

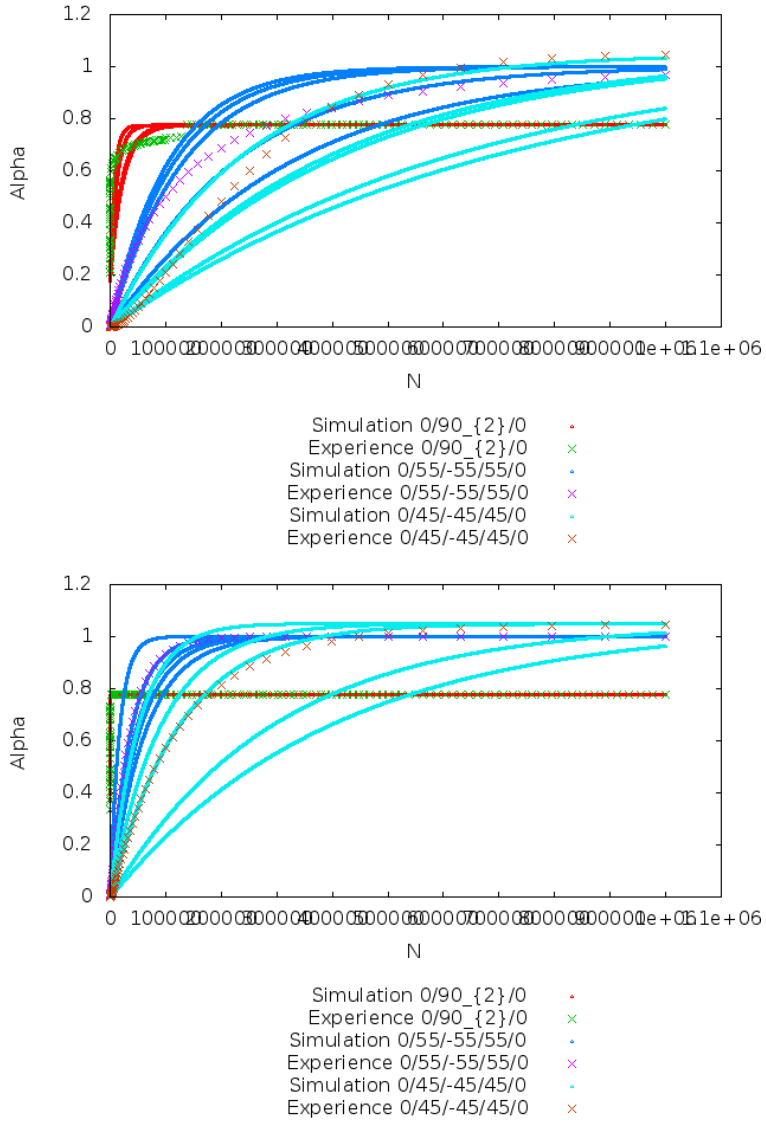


FIGURE 13.9 – Courbes représentant l'endommagement α en fonction du nombre de cycles N pour les composites stratifiés $(0,(90)_2,0)$, $(0,55,-55,55,0)$ et $(0,45,-45,45,0)$ (suite). Les courbes issues des valeurs calculées à partir du modèle probabiliste avec une dispersion de 15 pour cent sont mises en relation avec les courbes expérimentales : (c) pour un chargement de 0.70Sr, (d) pour un chargement de 0.80Sr.

Sixième partie

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Chapitre 14

Conclusion générale. Perspectives

14.1 Bilan sur le travail réalisé et la généralité de la démarche

Les premières études de fatigue ont été réalisées sur des structures et donc dans le cadre de la Mécanique de la Rupture. Ce cadre donne de bons résultats prévisionnels. Par contre, il impose une identification par problème puisque celle-ci dépend des données structurales (géométrie, sollicitation...). Par contre, les approches de la fatigue faites dans le cadre de la Mécanique de l'Endommagement permettent une identification sur le Volume Elementaire Représentatif du matériau considéré, et sont donc indépendantes de la géométrie de la structure et de la sollicitation qui lui est imposée. Néanmoins, une approche de la fatigue faite dans ce cadre est très souvent source d'inexactitudes diverses et variées.

Sans se poser la question de la faisabilité, en supposant que nous disposions d'un modèle de comportement endommageable écrit dans le cadre de la Mécanique de l'Endommagement qui est capable de traiter les problèmes de calcul de structures sous sollicitations cycliques (typiquement, les modèles dits incrémentaux), alors les temps de calculs peuvent être extraordinairement longs : il faut en effet résoudre au moins un (car il peut y avoir plusieurs itérations avant d'arriver à convergence) calcul de structure (souvent non linéaire) à chaque instant de la discrétisation temporelle de la sollicitation. Il est alors intéressant de ne plus regarder l'état de la structure considérée à chaque instant, mais à chaque (fin de) cycle. Dans ce cas, il y a implicitement l'hypothèse sous-jacente qu'en terme d'endommagement, ce qui se passe à l'intérieur d'un cycle, est faible au regard de ce qui se passe après un nombre significatif de cycles. Ainsi, après une reparamétrisation du temps qui induit de n'observer l'état de la structure considérée qu'aux instants coïncidant avec un nombre entier de cycles, il est possible, non pas de faire évoluer les phénomènes locaux plus rapidement, mais d'y avoir accès plus rapidement en terme de temps de calcul. Ce type d'approche existe depuis longtemps, néanmoins elles confondent très fréquemment grandeurs locales et structurales. Aussi, l'objet de la présente étude a été de structurer une démarche complète avec ses outils, pour faire en sorte que ce passage soit correct et inscrit dans un cadre précis mathématique. Cette démarche repose sur une linéarisation justifiée d'une loi d'évolution locale issue d'un formalisme quasi-statique afin de faire apparaître un compteur de cycles : la loi locale de fatigue obtenue a été qualifiée de cyclique. Cette démarche, à travers ses outils, a permis de rationaliser la mise en place de cette loi, mais aussi, son identification.

Les étapes importantes identifiées pour cette démarche sont :
- Etape 1 - Vérification des limitations générales sur le phénomène d'endommagement considéré ;
- Etape 2 - Ecriture du problème structural pour la mise en évidence de la classe structurale du problème et la définition d'un compteur de nombre de cycles au niveau structural ;

— Etape 3 - Mise en évidence de la classe locale du problème considéré et définition d'un compteur de nombre de cycles local par l'utilisation du problème approché ;
— Etape 4 - Discussion sur une possible extension du cadre de fonctionnement ;
— Etape 5 - Ecriture de la loi cyclique locale à partir de la loi temporelle locale à l'aide des formules de passage ;
— Etape 6 - Identification de la loi cyclique locale par recours à l'ensemble des paramètres caractéristiques des sollicitations.

Toutes ces étapes sont écrites de manière très générale et doivent être menées les unes après les autres. Par exemple, pour l'étape 1, si le phénomène ne rentre pas dans le cadre de la Mécanique de l'Endommagement, il est inutile de poursuivre. Cette étape étant passée, l'étape 2, consiste à identifier la classe structurale du problème posé. Pour cette étape, aucune difficulté particulière n'a été rencontrée : nous sommes ou non dans les classes structurales définies. Les étapes 3 et 4 sont celles qui marquent la fin de la généralité : nous n'avons pas trouvé d'argument pour les justifier de manière générale, pour tous les phénomènes et pour toutes les classes de problèmes structuraux. Par contre, les étapes suivantes redeviennent générales : les formules de passage sont générales, l'identification de la loi cyclique structurée par l'ensemble des paramètres caractéristiques l'est également.

14.2 Bilan sur l'application réalisée et le problème de l'identification de la loi cyclique

L'application très spécifique qui a été faite (classe structurale particulière, phénomène particulier, comportement élastique endommageable) a permis de passer chacune des étapes de la démarche, et de réaliser des calculs de structures.

Dans le cas particulier du phénomène de fissuration intralaminaire dans les composites à fibres continues, cette approche locale de la fatigue a été réalisée avec succès, mais pour le cadre le plus simple de sollicitations structurales particulières (classe $SPMLI$). Elle a permis de réaliser différents calculs de structures (éprouvettes parallélépipédiques avec et sans entaille, éprouvettes cruciformes trouée et non trouée, réservoir cylindrique), et cela, sans refaire d'identification, sous réserve de se trouver dans les bons espaces de fonctionnement, et notamment dans ceux compatibles avec l'identification. La présente démarche a permis de réaliser simplement et dans des délais satisfaisants des calculs de structures sous sollicitations de fatigue, grâce à l'approche locale proposée par la Mécanique de l'Endommagement. Dans le cadre de la Mécanique de la Rupture, une modification de la structure aurait induit la nécessité d'une ré-identification.

Le discours précédent peut laisser croire que l'identification de la loi cyclique est aisée, comparativement à ce que pourrait être une identification faite pour une approche fonctionnant dans le cadre de la Mécanique de la Rupture. Ce n'est évidemment pas vrai. En prenant le cas de l'application faite, une identification a été faite pour une valeur de rapport de charge égale à 0.1 : les coefficients contenus dans la loi sont identifiés pour cette valeur. En dehors de ce cas, il n'est pas possible de faire un calcul. Donc, une identification pour une autre valeur est nécessaire. Un nouveau jeu de coefficients est alors obtenu pour cette nouvelle valeur de rapport de charge. Un lissage de ces coefficients vus comme fonction du rapport de charge permet alors d'enrichir l'identification, pour la rendre plus proche du cas complet, pour lequel nous disposons de la dépendance de ces coefficients en fonction du rapport de charge, pour l'intervalle d'évolution complet du rapport de charge.

En fait, un avantage considérable d'une loi locale cyclique écrite dans le cadre de la Mécanique

de l'Endommagement est que les identifications de cette loi sont capitalisables au contraire d'une approche faite dans le cadre de la Mécanique de la Rupture.

Il est possible d'imaginer qu'un phénomène soit dépendant d'un nombre important de paramètres physiques (rapport de charge, température, fréquence...) : ceci multiplie d'autant le nombre d'essais d'identification. Dans le cas particulier du phénomène étudié, afin de compléter une base expérimentale d'accès coûteux, il nous a semblé judicieux de développer un modèle probabiliste. Cela a facilité les lissages de courbes. Pourtant, cette approche probabiliste est à l'opposé de tout ce qui a été notre motivation : c'est une approche fondée sur la Mécanique de la Rupture qu'il convient de ne pas utiliser, par exemple, dans le cadre d'une autre géométrie.

14.3 Les limitations

Une méthode générale pour réaliser une approche locale des problèmes de fatigue dans le cadre de la Mécanique de l'Endommagement a été posée à travers les classifications des problèmes de fatigue. Néanmoins, cette approche locale de la fatigue présente certaines limites en termes de généralité. Elle ne fournit pas, pour l'instant, toutes les clefs de résolution :

- pour tous les phénomènes d'endommagement de fatigue : lorsque ceux-ci diffèrent sous sollicitations quasi-statiques et de fatigue, le passage au niveau local est impossible dans le cadre de notre démarche qui prend appui sur le quasi-statique ;
- uniquement certaines classes ont été illustrées. Il ne nous a pas semblé possible de traiter de manière générale tous les problèmes potentiellement susceptibles d'être posés. Au niveau structural, il peut exister un éventail infiniment large de possibilités de sollicitations qui induisent des difficultés qui nous semblent pour l'instant impossible à résoudre. Par exemple, le cas de sollicitations qui sont cycliques mais non périodiques, ou bien de plusieurs sollicitations qui battent à des fréquences dans un rapport irrationnel. De même, lorsque le comportement du matériau constitutif de la structure montre un caractère visqueux, la propriété de linéarité (éventuellement par morceau) des opérateurs présents dans la formulation du problème de calcul de structure en fatigue tombe et fait place à une dépendance vis-à-vis des effets de vitesse : le nombre de cycle (grandeur structurale) ne se transmettra donc pas au niveau local.

A l'heure actuelle, la méthode proposée ne résout pas tous les problèmes de fatigue.

14.4 Mise en évidence de l'intérêt d'une approche locale

Malgré les limitations précédentes, il est néanmoins clair que l'intérêt d'une approche locale est indéniable, d'autant que ce que nous proposons est très clairement indépendant du modèle utilisé pour décrire le phénomène physique de dégradation envisagé.

En fait, et c'est cela le point-clé du processus de calcul, dès lors que l'ensemble des paramètres caractéristiques locaux du calcul est ou non identique à celui de l'identification, le calcul peut être réalisé. Et, finalement, en imaginant, l'accès à des données expérimentales qui permettent l'identification la plus complète possible de la loi cyclique, tous les calculs sont possibles sans limitation (dès que la notion de compteur de cycles peut être définie, évidemment).

Nous constatons ainsi que l'utilisation d'une approche locale par la Mécanique de l'Endommagement pour une loi cyclique de fatigue est aussi simple que son homologue quasi-statique :

- les étapes pour la réalisation d'un calcul sont identiques, dès lors que la loi de comportement (loi d'état et loi d'évolution) est identifiée :

. discrétisation de la structure ;
. mise en place des conditions aux limites ;
. résolution du calcul ;

— la discussion quant aux résultats portent sur les mêmes choses : les faiblesses ou les points forts du modèle, mais en aucun cas (en tout cas en premier lieu) sur les fondements même qui ont permis d'obtenir les lois (la Thermodynamique, la Méthode de l'Etat Local, l'équation locale d'équilibre issue du Principe Fondamental de la Dynamique...). En d'autres termes, ce qui peut être remis en question est la modélisation du phénomène considéré, mais non les concepts généraux qui ont permis d'obtenir la loi cyclique.

Comparativement, l'utilisation d'une approche basée sur la Mécanique de la Rupture, empêche cette simplicité : l'identification doit être faite, a minima, pour tous les couples (géométrie, sollicitation).

14.5 Les améliorations nécessaires

L'ensemble des concepts proposés semble correct et plutôt bien convenir à ce que nous voulions faire. Pourtant, au fur et à mesure de l'avancée du travail, des améliorations ont été ressenties comme devant être faites. Deux nous ont plus particulièrement parues comme importantes :

— les classes locales et les classes locales approchées. En fait, nous postulons dans les premières que les sollicitations sont, notamment, périodiques, pour dire ensuite que ces configurations sont inenvisageables et qu'il convient de construire des sollicitations approchées pour avoir une exacte périodicité. Finalement, les deux types de classes sont-ils nécessaires ?
— la notion d'ensemble de paramètres structuraux ou locaux, égaux ou identiques. Nous avons pu constaté que le maniement de ces deux concepts n'était en fait pas suffisamment clair pour être utilisés sans précaution. Il convient d'améliorer cela car ces notions conditionnent finalement l'utilisation de la méthode à partir d'une identification faite.

Il y en a sans doute beaucoup d'autres modifications à faire dans ce travail prospectif. Toutefois, les deux précédentes nous ont plus particulièrement parues comme importantes pour aller vers une utilisation plus simple et plus systématique de la méthode.

14.6 Pour terminer

Nous avons voulu dans cette étude clarifier le concept de fatigue et surtout rendre simple son utilisation dans un cadre rigoureux qui élimine les défauts d'approches existantes. Autant qu'il a été possible, nous avons discuté de manière générale. Pourtant, le travail développé ne résout pas tous les problèmes de fatigue et certaines hypothèses fortes en limitent l'utilisation. Un cas particulier a été traité, et montre malgré tout combien le processus d'un calcul de structure en fatigue gagne en simplicité. Cette étude doit alors être vue comme une voie ouverte à la résolution d'autres cas, voire à une généralisation sans condition, d'une approche locale de la fatigue. La question finale que nous pouvons nous poser est la suivante : avons-nous eu raison d'approcher la notion de fatigue au travers d'une loi cyclique, plutôt qu'une loi incrémentale. En fait, les deux approches sont nécessaires, notamment lorsque les hypothèses pour la linéarisation ne sont pas valides. Ainsi, même si les calculs peuvent être longs par une voie incrémentale, le nombre de cycles à calculer est probablement faible puisque l'endommagement évolue rapidement. Par contre, c'est bien une approche cyclique qu'il convient d'utiliser si l'évolution de l'endommagement est faible au cours de chaque cycle.

Septième partie

ANNEXES

Chapitre 15

Annexe du chapitre 9 : toutes les lois cycliques pour toutes les classes locales pour toutes les formes des modèle de fissuration intralaminaire

15.1 Annexe locale - Etape 5 - Les lois d'évolution cycliques DVE (a) : cadre du modèle original dans sa forme simplifiée

Nous rappelons que la loi locale dont il est question ici est la suivante (Eq. 9.3) :

$$d\alpha = \frac{2f(\alpha)f'(\alpha)\left(C_{ij}^{N}U_{N}^{2}(m,r)+C_{ij}^{T}U_{T}^{2}(m,r)+C_{ij}^{NT}U_{N}(m,r)U_{T}(m,r)\right)\varepsilon_{j}d\varepsilon_{i}}{-(f'^{2}(\alpha)+f(\alpha)f''(\alpha))\left(C_{ij}^{N}U_{N}^{2}(m,r)+C_{ij}^{T}U_{T}^{2}(m,r)+C_{ij}^{NT}U_{N}(m,r)U_{T}(m,r)\right)\varepsilon_{i}\varepsilon_{j}}$$

15.1.1 Problèmes locaux de fatigue au point M

• **Problème local de fatigue**

Ce cas est sans objet.

• **Problème local de fatigue de type PP**(I,M)

En utilisant les formules de passage (Eq. 9.7), la loi d'évolution de l'endommagement en fatigue du modèle original dans le cadre un problème local de fatigue de type PP(I,M) s'écrit alors :

$$d\alpha = \frac{2f(\alpha)f'(\alpha)\left(C_{ij}^{N}U_{N}^{2}(m,r)+C_{ij}^{T}U_{T}^{2}(m,r)+C_{ij}^{NT}U_{N}(m,r)U_{T}(m,r)\right)\varepsilon_{j}^{F}(M|N)\dfrac{\partial\varepsilon_{i}^{F}(M|N)}{\partial N}}{-(f'^{2}(\alpha)f(\alpha)f''(\alpha))\left(C_{ij}^{N}U_{N}^{2}(m,r)+C_{ij}^{T}U_{T}^{2}(m,r)+C_{ij}^{NT}U_{N}(m,r)U_{T}(m,r)\right)\varepsilon_{i}^{F}(M|N)\varepsilon_{j}^{F}(M|N)}dN \tag{15.1}$$

L'ensemble des paramètres locaux du problème approché est :

$$\mathbb{Q}^{*+}(I,M)=\left\{\left(c^{+F(i)}(M)\right)_{(i)\in\{1,2,6\}}\right\}$$

• **Problème local de fatigue de type PPI**(I,M)

En utilisant les formules de passage (Eq. 9.8), la loi d'évolution de l'endommagement en fatigue du modèle original dans le cadre un problème local de fatigue de type PPI(I,M) s'écrit alors :

$$d\alpha = \frac{2f(\alpha)f'(\alpha)\left(C_{ij}^{N}U_N^2(m,r)+C_{ij}^{T}U_T^2(m,r)+C_{ij}^{NT}U_N(m,r)U_T(m,r)\right)\overline{\varepsilon_j}(M)\overline{\varepsilon_i}(M)\dfrac{\partial V^F(M|N)}{\partial N}}{-(f'^2(\alpha)+f(\alpha)f''(\alpha))\left(C_{ij}^{N}U_N^2(m,r)+C_{ij}^{T}U_T^2(m,r)+C_{ij}^{NT}U_N(m,r)U_T(m,r)\right)\overline{\varepsilon_i}(M)\overline{\varepsilon_j}(M)V^F(M|N)}dN \tag{15.2}$$

Cette équation se simplifie en :

$$d\alpha = \frac{2f(\alpha)f'(\alpha)\dfrac{\partial V^F(M|N)}{\partial N}}{-(f'^2(\alpha)+f(\alpha)f''(\alpha))V^F(M|N)}dN \tag{15.3}$$

L'ensemble des paramètres locaux du problème approché est :

$$\mathbb{Q}^{*+}(I,M)=\left\{c^{+F}(M),(\overline{\varepsilon_i^{+}}(M))_{(i)\in\{1,2,6\}}\right\}$$

- **Problème local de fatigue de type PPM**(I,M)

En utilisant les formules de passage (Eq. 9.9), la loi d'évolution de l'endommagement en fatigue du modèle original dans le cadre un problème local de fatigue de type PPM(I,M) s'écrit alors :

$$d\alpha = \frac{2f(\alpha)f'(\alpha)\left(C_{ij}^{N}U_N^2(m,r)+C_{ij}^{T}U_T^2(m,r)+C_{ij}^{NT}U_N(m,r)U_T(m,r)\right)\varepsilon_j^F(M|N)\dfrac{\partial\varepsilon_i^F(M|N)}{\partial N}}{-(f'^2(\alpha)f(\alpha)f''(\alpha))\left(C_{ij}^{N}U_N^2(m,r)+C_{ij}^{T}U_T^2(m,r)+C_{ij}^{NT}U_N(m,r)U_T(m,r)\right)\varepsilon_i^F(M|N)\varepsilon_j^F(M|N)}dN \tag{15.4}$$

L'ensemble des paramètres locaux du problème approché est :

$$\mathbb{Q}^{*+}(I,M)=\left\{(c^{+F(i)}(M))_{(i)\in\{1,2,6\}}\right\}$$

- **Problème local de fatigue de type PPMI**(I,M)

En utilisant les formules de passage (Eq. 9.10), la loi d'évolution de l'endommagement en fatigue du modèle original dans le cadre un problème local de fatigue de type PPMI(I,M) s'écrit alors :

$$d\alpha = \frac{2f(\alpha)f'(\alpha)\left(C_{ij}^{N}U_N^2(m,r)+C_{ij}^{T}U_T^2(m,r)+C_{ij}^{NT}U_N(m,r)U_T(m,r)\right)\overline{\varepsilon_j}(M)\overline{\varepsilon_i}(M)\dfrac{\partial V^F(M|N)}{\partial N}}{-(f'^2(\alpha)+f(\alpha)f''(\alpha))\left(C_{ij}^{N}U_N^2(m,r)+C_{ij}^{T}U_T^2(m,r)+C_{ij}^{NT}U_N(m,r)U_T(m,r)\right)\overline{\varepsilon_i}(M)\overline{\varepsilon_j}(M)V^F(M|N)}dN \tag{15.5}$$

Cette équation se simplifie en :

$$d\alpha = \frac{2f(\alpha)f'(\alpha)\dfrac{\partial V^F(M|N)}{\partial N}}{-(f'^2(\alpha)+f(\alpha)f''(V^F\alpha))V^F(M|N)}dN \tag{15.6}$$

L'ensemble des paramètres locaux du problème approché est :

$$\mathbb{Q}^{*+}(I,M)=\left\{c^{+F}(M),(\overline{\varepsilon_i^{+}}(M))_{(i)\in\{1,2,6\}}\right\}$$

- **Problème local de fatigue de type PPML**(I,M)

En utilisant les formules de passage (Eq. 9.11), la loi d'évolution de l'endommagement en fatigue du modèle original dans le cadre un problème local de fatigue de type PPML(I,M) s'écrit alors :

$$d\alpha = \frac{2f(\alpha)f'(\alpha)\left(C_{ij}^{N}U_N^2(m,r)+C_{ij}^{T}U_T^2(m,r)+C_{ij}^{NT}U_N(m,r)U_T(m,r)\right)\varepsilon_j^F(M|N)\dfrac{\partial\varepsilon_i^F(M|N)}{\partial N}}{-(f'^2(\alpha)f(\alpha)f''(\alpha))\left(C_{ij}^{N}U_N^2(m,r)+C_{ij}^{T}U_T^2(m,r)+C_{ij}^{NT}U_N(m,r)U_T(m,r)\right)\varepsilon_i^F(M|N)\varepsilon_j^F(M|N)}dN \tag{15.7}$$

L'ensemble des paramètres locaux du problème approché est :

$$\mathbb{Q}^{*+}(I,M) = \left\{ (T^{+(i)}(M), c_{min}^{+(i)}(M), c_{max}^{+(i)}(M))_{(i)\in\{1,2,6\}} \right\}$$

- **Problème local de fatigue de type PPMLI(I,M)**

En utilisant les formules de passage (Eq. 9.12), la loi d'évolution de l'endommagement en fatigue du modèle original dans le cadre un problème local de fatigue de type PPMLI(I,M) s'écrit alors :

$$d\alpha = \frac{2f(\alpha)f'(\alpha)\left(C_{ij}^N U_N^2(m,r) + C_{ij}^T U_T^2(m,r) + C_{ij}^{NT} U_N(m,r)U_T(m,r)\right)\overline{\varepsilon_j}(M)\overline{\varepsilon_i}(M)\dfrac{\partial V^F(M|N)}{\partial N}}{-(f'^2(\alpha)+f(\alpha)f''(\alpha))\left(C_{ij}^N U_N^2(m,r) + C_{ij}^T U_T^2(m,r) + C_{ij}^{NT} U_N(m,r)U_T(m,r)\right)\overline{\varepsilon_i}(M)\overline{\varepsilon_j}(M)V^F(M|N)}dN \tag{15.8}$$

Cette équation se simplifie en :

$$d\alpha = \frac{2f(\alpha)f'(\alpha)\dfrac{\partial V^F(M|N)}{\partial N}}{-(f'^2(\alpha)+f(\alpha)f''(\alpha))V^F(M|N)}dN \tag{15.9}$$

L'ensemble des paramètres locaux du problème approché est :

$$\mathbb{Q}^{*+}(I,M) = \left\{ T^{+}(M), V_{min}^{+}(M), V_{max}^{+}(M), (\overline{\varepsilon_i^{+}}(M))_{(i)\in\{1,2,6\}} \right\}$$

15.1.2 Problèmes locaux de fatigue sur un domaine

- **Problème local de fatigue sur un domaine**

Ce cas est sans objet.

- **Problème local de fatigue sur un domaine de type PP(I,Ω)**

En utilisant les formules de passage (Eq. 9.13), la loi d'évolution de l'endommagement en fatigue du modèle original dans le cadre un problème local de fatigue de type PP(I,Ω) s'écrit alors :

$$d\alpha = \frac{2f(\alpha)f'(\alpha)\left(C_{ij}^N U_N^2(m,r) + C_{ij}^T U_T^2(m,r) + C_{ij}^{NT} U_N(m,r)U_T(m,r)\right)V^{F(j)}(\Omega|N)q_j(M)q_i(M)\dfrac{\partial V^{F(i)}(\Omega|N)}{\partial N}}{-(f'^2(\alpha)f(\alpha)f''(\alpha))\left(C_{ij}^N U_N^2(m,r) + C_{ij}^T U_T^2(m,r) + C_{ij}^{NT} U_N(m,r)U_T(m,r)\right)q_i(M)V^{F(i)}(\Omega|N)q_j(M)V^{F(j)}(\Omega|N)}dN \tag{15.10}$$

L'ensemble des paramètres locaux du problème approché est :

$$\mathbb{Q}^{*+}(I,\Omega) = \left\{ (q_i^{+}(M)_{(i)\in\{1,2,6\}}, c^{+F(i)}(\Omega))_{(i)\in\{1,2,6\}} \right\}$$

- **Problème local de fatigue sur un domaine de type PPI(I,Ω)**

En utilisant les formules de passage (Eq. 9.14), la loi d'évolution de l'endommagement en fatigue du modèle original dans le cadre un problème local de fatigue de type PPI(I,Ω) s'écrit alors :

$$d\alpha = \frac{2f(\alpha)f'(\alpha)\left(C_{ij}^N U_N^2(m,r) + C_{ij}^T U_T^2(m,r) + C_{ij}^{NT} U_N(m,r)U_T(m,r)\right)q_j(M)q_i(M)\dfrac{\partial V^F(\Omega|N)}{\partial N}}{-(f'^2(\alpha)+f(\alpha)f''(\alpha))\left(C_{ij}^N U_N^2(m,r) + C_{ij}^T U_T^2(m,r) + C_{ij}^{NT} U_N(m,r)U_T(m,r)\right)q_i(M)q_j(M)V^F(\Omega|N)}dN \tag{15.11}$$

Cette équation se simplifie en :

$$d\alpha = \frac{2f(\alpha)f'(\alpha)\dfrac{\partial V^F(\Omega|N)}{\partial N}}{-(f'^2(\alpha)+f(\alpha)f''(\alpha))V^F(\Omega|N)}dN \tag{15.12}$$

L'ensemble des paramètres locaux du problème approché est :

$$\mathbb{Q}^{*+}(I,\Omega) = \left\{(q_i^+(M))_{(i)\in\{1,2,6\}}, c^{+F}(\Omega)\right\}$$

- **Problème local de fatigue sur un domaine de type PPM(I,Ω)**

En utilisant les formules de passage (Eq. 9.15), la loi d'évolution de l'endommagement en fatigue du modèle original dans le cadre un problème local de fatigue de type PPM(I,Ω) s'écrit alors :

$$d\alpha = \frac{2f(\alpha)f'(\alpha)\left(C_{ij}^N U_N^2(m,r) + C_{ij}^T U_T^2(m,r) + C_{ij}^{NT} U_N(m,r)U_T(m,r)\right) V^{F(j)}(\Omega|N) q_j(M) q_i(M) \dfrac{\partial V^{F(i)}(\Omega|N)}{\partial N}}{-(f'^2(\alpha)f(\alpha)f''(\alpha))\left(C_{ij}^N U_N^2(m,r) + C_{ij}^T U_T^2(m,r) + C_{ij}^{NT} U_N(m,r)U_T(m,r)\right) V^{F(i)}(\Omega|N) q_i(M) V^{F(j)}(\Omega|N) q_j(M)} dN \quad (15.13)$$

L'ensemble des paramètres locaux du problème approché est :

$$\mathbb{Q}^{*+}(I,\Omega) = \left\{(q_i^+(M)_{(i)\in\{1,2,6\}}, c^{+F(i)}(\Omega))_{(i)\in\{1,2,6\}}\right\}$$

- **Problème local de fatigue sur un domaine de type PPMI(I,Ω)**

En utilisant les formules de passage (Eq. 9.16), la loi d'évolution de l'endommagement en fatigue du modèle original dans le cadre un problème local de fatigue de type PPMI(I,ω) s'écrit alors avec la notation de Voigt en simplifiant les notations $m = m_{23}, r_1, r_{23}$:

$$d\alpha = \frac{2f(\alpha)f'(\alpha)\left(C_{ij}^N U_N^2(m,r) + C_{ij}^T U_T^2(m,r) + C_{ij}^{NT} U_N(m,r)U_T(m,r)\right) q_j(M) q_i(M) \dfrac{\partial V^{F}(\Omega|N)}{\partial N}}{-(f'^2(\alpha) + f(\alpha)f''(\alpha))\left(C_{ij}^N U_N^2(m,r) + C_{ij}^T U_T^2(m,r) + C_{ij}^{NT} U_N(m,r)U_T(m,r)\right) q_i(M) q_j(M) V^{F}(\Omega|N)} dN \quad (15.14)$$

Cette équation se simplifie en :

$$d\alpha = \frac{2f(\alpha)f'(\alpha)\dfrac{\partial V^F(\Omega|N)}{\partial N}}{-(f'^2(\alpha) + f(\alpha)f''(\alpha))V^F(\Omega|N)} dN \quad (15.15)$$

L'ensemble des paramètres locaux du problème approché est :

$$\mathbb{Q}^{*+}(I,\Omega) = \left\{(q_i^+(M))_{(i)\in\{1,2,6\}}, c^{+F}(\Omega)\right\}$$

- **Problème local de fatigue sur un domaine de type PPML(I,Ω)**

En utilisant les formules de passage (Eq. 9.17), la loi d'évolution de l'endommagement en fatigue du modèle original dans le cadre un problème local de fatigue de type PPML(I,Ω) s'écrit alors :

$$d\alpha = \frac{2f(\alpha)f'(\alpha)\left(C_{ij}^N U_N^2(m,r) + C_{ij}^T U_T^2(m,r) + C_{ij}^{NT} U_N(m,r)U_T(m,r)\right) V^{F(j)}(\Omega|N) q_j(M) q_i(M) \dfrac{\partial V^{F(i)}(\Omega|N)}{\partial N}}{-(f'^2(\alpha)f(\alpha)f''(\alpha))\left(C_{ij}^N U_N^2(m,r) + C_{ij}^T U_T^2(m,r) + C_{ij}^{NT} U_N(m,r)U_T(m,r)\right) V^{F(i)}(\Omega|N) q_i(M) V^{F(j)}(\Omega|N) q_j(M)} dN \quad (15.16)$$

L'ensemble des paramètres locaux du problème approché est :

$$\mathbb{Q}^{*+}(I,\Omega) = \left\{(q_i^+(M), T^{+(i)}(\Omega), c_{min}^{+(i)}(\Omega), c_{max}^{+(i)}(\Omega))_{(i)\in\{1,2,6\}}\right\}$$

- **Problème local de fatigue sur un domaine de type PPMLI(I,Ω)**

En utilisant les formules de passage (Eq. 9.18), la loi d'évolution de l'endommagement en fatigue du modèle original dans le cadre un problème local de fatigue de type PPMLI(I,Ω) s'écrit alors :

$$d\alpha = \frac{2f(\alpha)f'(\alpha)\left(C_{ij}^N U_N^2(m,r) + C_{ij}^T U_T^2(m,r) + C_{ij}^{NT} U_N(m,r)U_T(m,r)\right) q_j(M) q_i(M) \dfrac{\partial V^{F}(\Omega|N)}{\partial N}}{-(f'^2(\alpha) + f(\alpha)f''(\alpha))\left(C_{ij}^N U_N^2(m,r) + C_{ij}^T U_T^2(m,r) + C_{ij}^{NT} U_N(m,r)U_T(m,r)\right) q_i(M) q_j(M) V^{F}(\Omega|N)} dN \quad (15.17)$$

Cette équation se simplifie en :

$$d\alpha = \frac{2f(\alpha)f'(\alpha)\dfrac{\partial V^F(\Omega|N)}{\partial N}}{-(f'^2(\alpha)+f(\alpha)f''(\alpha))V^F(\Omega|N)}dN \tag{15.18}$$

L'ensemble des paramètres locaux du problème approché est :

$$\mathbb{Q}^{*+}(I,\Omega) = \left\{(q_i^+(M))_{(i)\in\{1,2,6\}}, T^+(\Omega), V^+_{min}(\Omega), V^+_{max}(\Omega)\right\}$$

15.2 Annexe locale - Etape 5 - Les lois d'évolution cycliques DVE (b) : cadre du modèle général dans sa seconde forme simplifiée

Nous rappelons que la loi dont il est question ici est la suivante (Eq. 9.4) :

$$d\alpha = \frac{2f(\alpha)f'(\alpha)\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p\leq q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)\varepsilon_j d\varepsilon_i}{-\left(f'^2(\alpha)+f(\alpha)f''(\alpha)\right)\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)\varepsilon_i\varepsilon_j}$$

15.2.1 Problèmes locaux de fatigue au point M

• Problème local de fatigue

Ce cas est sans objet.

• Problème local de fatigue de type PP(I,M)

En utilisant les formules de passage (Eq. 9.7), la loi d'évolution de l'endommagement en fatigue du modèle dans sa seconde forme simplifiée dans le cadre un problème local de fatigue de type PP(I,M) s'écrit alors :

$$d\alpha = \frac{2f(\alpha)f'(\alpha)\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p\leq q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)\varepsilon_j^F(M|N)\dfrac{\partial\varepsilon_i^F(M|N)}{\partial N}}{-\left(f'^2(\alpha)+f(\alpha)f''(\alpha)\right)\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)\varepsilon_i^F(M|N)\varepsilon_j^F(M|N)}dN \tag{15.19}$$

L'ensemble des paramètres locaux du problème approché est :

$$\mathbb{Q}^{*+}(I,M) = \left\{(c^{+F(i)}(M))_{(i)\in\{1,\ldots,6\}}\right\}$$

• Problème local de fatigue de type PPI(I,M)

En utilisant les formules de passage (Eq. 9.8), la loi d'évolution de l'endommagement en fatigue du modèle dans sa seconde forme simplifiée dans le cadre un problème local de fatigue de type PPI(I,M) s'écrit alors :

$$d\alpha = \frac{2f(\alpha)f'(\alpha)\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p\leq q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)\overline{\varepsilon_j}(M)\overline{\varepsilon_i}(M)\dfrac{\partial V^F(M|N)}{\partial N}}{-\left(f'^2(\alpha)+f(\alpha)f''(\alpha)\right)\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)\overline{\varepsilon_i}(M)\overline{\varepsilon_j}(M)V^F(M|N)}dN \tag{15.20}$$

Cette équation se simplifie en :

$$d\alpha = \frac{2f(\alpha)f'(\alpha)\dfrac{\partial V^F(M|N)}{\partial N}}{-(f'^2(\alpha)+f(\alpha)f''(\alpha))V^F(M|N)}dN \tag{15.21}$$

L'ensemble des paramètres locaux du problème approché est :

$$\mathbb{Q}^{*+}(I,M)=\left\{c^{+F}(M),(\overline{\varepsilon_i^+}(M))_{(i)\in\{1,...,6\}}\right\}$$

- **Problème local de fatigue de type PPM**(I,M)

En utilisant les formules de passage (Eq. 9.9), la loi d'évolution de l'endommagement en fatigue du modèle dans sa seconde forme simplifiée dans le cadre un problème local de fatigue de type PPM(I,M) s'écrit alors :

$$d\alpha=\frac{2f(\alpha)f'(\alpha)\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p\leq q}}^{3}D_{ij}^{(pq)}U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)\varepsilon_j^F(M|N)\dfrac{\partial\varepsilon_i^F(M|N)}{\partial N}}{-(f'^2(\alpha)+f(\alpha)f''(\alpha))\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3}D_{ij}^{(pq)}U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)\varepsilon_i^F(M|N)\varepsilon_j^F(M|N)}dN \tag{15.22}$$

L'ensemble des paramètres locaux du problème approché est :

$$\mathbb{Q}^{*+}(I,M)=\left\{(c^{+F(i)}(M))_{(i)\in\{1,...,6\}}\right\}$$

- **Problème local de fatigue de type PPMI**(I,M)

En utilisant les formules de passage (Eq. 9.10), la loi d'évolution de l'endommagement en fatigue du modèle dans sa seconde forme simplifiée dans le cadre un problème local de fatigue de type PPMI(I,M) s'écrit alors :

$$d\alpha=\frac{2f(\alpha)f'(\alpha)\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p\leq q}}^{3}D_{ij}^{(pq)}U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)\overline{\varepsilon_j}(M)\overline{\varepsilon_i}(M)\dfrac{\partial V^F(M|N)}{\partial N}}{-(f'^2(\alpha)+f(\alpha)f''(\alpha))\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3}D_{ij}^{(pq)}U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)\overline{\varepsilon_i}(M)\overline{\varepsilon_j}(M)V^F(M|N)}dN \tag{15.23}$$

Cette équation se simplifie en :

$$d\alpha=\frac{2f(\alpha)f'(\alpha)\dfrac{\partial V^F(M|N)}{\partial N}}{-(f'^2(\alpha)+f(\alpha)f''(\alpha))V^F(M|N)}dN \tag{15.24}$$

L'ensemble des paramètres locaux du problème approché est :

$$\mathbb{Q}^{*+}(I,M)=\left\{c^{+F}(M),(\overline{\varepsilon_i^+}(M))_{(i)\in\{1,...,6\}}\right\}$$

- **Problème local de fatigue de type PPML**(I,M)

En utilisant les formules de passage (Eq. 9.11), la loi d'évolution de l'endommagement en fatigue du modèle dans sa seconde forme simplifiée dans le cadre un problème local de fatigue de type PPML(I,M) s'écrit alors :

$$d\alpha=\frac{2f(\alpha)f'(\alpha)\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p\leq q}}^{3}D_{ij}^{(pq)}U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)\varepsilon_j^F(M|N)\dfrac{\partial\varepsilon_i^F(M|N)}{\partial N}}{-(f'^2(\alpha)+f(\alpha)f''(\alpha))\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3}D_{ij}^{(pq)}U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)\varepsilon_i^F(M|N)\varepsilon_j^F(M|N)}dN \tag{15.25}$$

L'ensemble des paramètres locaux du problème approché est :

$$\mathbb{Q}^{*+}(I,M)=\left\{(T^{+(i)}(M),c_{min}^{+(i)}(M),c_{max}^{+(i)}(M))_{(i)\in\{1,...,6\}}\right\}$$

- **Problème local de fatigue de type PPMLI**(I,M)

En utilisant les formules de passage (Eq. 9.12), la loi d'évolution de l'endommagement en fatigue du modèle dans sa seconde forme simplifiée dans le cadre un problème local de fatigue de type PPMLI(I,M) s'écrit alors :

$$d\alpha = \frac{2f(\alpha)f'(\alpha)\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p\leq q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)\overline{\varepsilon_j}(M)\overline{\varepsilon_i}(M)\dfrac{\partial V^F(M|N)}{\partial N}}{-(f'^2(\alpha)+f(\alpha)f''(\alpha))\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)\overline{\varepsilon_i}(M)\overline{\varepsilon_j}(M)V^F(M|N)}dN \tag{15.26}$$

Cette équation se simplifie en :

$$d\alpha = \frac{2f(\alpha)f'(\alpha)\dfrac{\partial V^F(M|N)}{\partial N}}{-(f'^2(\alpha)+f(\alpha)f''(\alpha))V^F(M|N)}dN \tag{15.27}$$

L'ensemble des paramètres locaux du problème approché est :

$$\mathbb{Q}^{*+}(I,M) = \left\{T^+(M), V^+_{min}(M), V^+_{max}(M), (\overline{\varepsilon_i^+}(M))_{(i)\in\{1,\ldots,6\}}\right\}$$

15.2.2 Problèmes locaux de fatigue sur un domaine

- **Problème local de fatigue sur un domaine**

Ce cas est sans objet.

- **Problème local de fatigue sur un domaine de type PP(I,Ω)**

En utilisant les formules de passage (Eq. 9.13), la loi d'évolution de l'endommagement en fatigue du modèle dans sa seconde forme simplifiée dans le cadre un problème local de fatigue de type PP(I,Ω) s'écrit alors :

$$d\alpha = \frac{2f(\alpha)f'(\alpha)\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p\leq q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)V_j^F(\Omega|N)q_j(M)q_i(M)\dfrac{\partial V_i^F(\Omega|N)}{\partial N}}{-(f'^2(\alpha)+f(\alpha)f''(\alpha))\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)V_i^F(\Omega|N)q_i(M)V_j^F(\Omega|N)q_j(M)}dN \tag{15.28}$$

L'ensemble des paramètres locaux du problème approché est :

$$\mathbb{Q}^{*+}(I,\Omega) = \left\{(q_i^+(M)_{(i)\in\{1,2,6\}}, c^{+F(i)}(\Omega))_{(i)\in\{1,\ldots,6\}}\right\}$$

- **Problème local de fatigue sur un domaine de type PPI(I,Ω)**

En utilisant les formules de passage (Eq. 9.14), la loi d'évolution de l'endommagement en fatigue du modèle dans sa seconde forme simplifiée dans le cadre un problème local de fatigue de type PPI(I,Ω) s'écrit alors :

$$d\alpha = \frac{(f(\alpha)f'(\alpha)\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p\leq q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)q_j(M)q_i(M)\dfrac{\partial V^F(\Omega|N)}{\partial N}}{-(f'^2(\alpha)+f(\alpha)f''(\alpha))\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)q_i(M)q_j(M)V^F(\Omega|N)}dN \tag{15.29}$$

Cette équation se simplifie en :

$$d\alpha = \frac{(f(\alpha)f'(\alpha)\dfrac{\partial V^F(\Omega|N)}{\partial N}}{-(f'^2(\alpha)+f(\alpha)f''(\alpha))V^F(\Omega|N)}dN \tag{15.30}$$

L'ensemble des paramètres locaux du problème approché est :

$$\mathbb{Q}^{*+}(I,\Omega) = \left\{(q_i^+(M))_{(i)\in\{1,\ldots,6\}}, c^{+F}(\Omega)\right\}$$

• **Problème local de fatigue sur un domaine de type PPM(I,Ω)**

En utilisant les formules de passage (Eq. 9.15), la loi d'évolution de l'endommagement en fatigue du modèle dans sa seconde forme simplifiée dans le cadre un problème local de fatigue de type PPM(I,Ω) s'écrit alors :

$$d\alpha = \frac{2f(\alpha)f'(\alpha)\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p\leq q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)V_j^F(\Omega|N)q_j(M)q_i(M)\dfrac{\partial V_i^F(\Omega|N)}{\partial N}}{-(f'^2(\alpha)+f(\alpha)f''(\alpha))\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)V_i^F(\Omega|N)q_i(M)V_j^F(\Omega|N)q_j(M)}dN \tag{15.31}$$

L'ensemble des paramètres locaux du problème approché est :

$$\mathbb{Q}^{*+}(I,\Omega)=\left\{(q_i^+(M)_{(i)\in\{1,...,6\}},c^{+F(i)}(\Omega))_{(i)\in\{1,...,6\}}\right\}$$

• **Problème local de fatigue sur un domaine de type PPMI(I,Ω)**

En utilisant les formules de passage (Eq. 9.16), la loi d'évolution de l'endommagement en fatigue du modèle dans sa seconde forme simplifiée dans le cadre un problème local de fatigue de type PPMI(I,Ω) s'écrit alors :

$$d\alpha = \frac{(f(\alpha)f'(\alpha)\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p\leq q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)q_j(M)q_i(M)\dfrac{\partial V^F(\Omega|N)}{\partial N}}{-(f'^2(\alpha)+f(\alpha)f''(\alpha))\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)q_i(M)q_j(M)V^F(\Omega|N)}dN \tag{15.32}$$

Cette équation se simplifie en :

$$d\alpha = \frac{(f(\alpha)f'(\alpha)\dfrac{\partial V^F(\Omega|N)}{\partial N}}{-(f'^2(\alpha)+f(\alpha)f''(\alpha))V^F(\Omega|N)}dN \tag{15.33}$$

L'ensemble des paramètres locaux du problème approché est :

$$\mathbb{Q}^{*+}(I,\Omega)=\left\{(q_i^+(M))_{(i)\in\{1,...,6\}},c^{+F}(\Omega)\right\}$$

• **Problème local de fatigue sur un domaine de type PPML(I,Ω)**

En utilisant les formules de passage (Eq. 9.17), la loi d'évolution de l'endommagement en fatigue du modèle dans sa seconde forme simplifiée dans le cadre un problème local de fatigue de type PPML(I,Ω) s'écrit alors :

$$d\alpha = \frac{2f(\alpha)f'(\alpha)\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p\leq q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)V_j^F(\Omega|N)q_j(M)q_i(M)\dfrac{\partial V_i^F(\Omega|N)}{\partial N}}{-(f'^2(\alpha)+f(\alpha)f''(\alpha))\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)V_i^F(\Omega|N)q_i(M)V_j^F(\Omega|N)q_j(M)}dN \tag{15.34}$$

L'ensemble des paramètres locaux du problème approché est :

$$\mathbb{Q}^{*+}(I,\Omega)=\left\{(q_i^+(M),T^{+(i)}(\Omega),c_{min}^{+(i)}(\Omega),c_{max}^{+(i)}(\Omega))_{(i)\in\{1,...,6\}}\right\}$$

• **Problème local de fatigue sur un domaine de type PPMLI(I,Ω)**

En utilisant les formules de passage (Eq. 9.18), la loi d'évolution de l'endommagement en fatigue du modèle dans sa seconde forme simplifiée dans le cadre un problème local de fatigue de type PPMLI(I,Ω) s'écrit alors :

$$d\alpha = \frac{(f(\alpha)f'(\alpha)\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p\leq q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)q_j(M)q_i(M)\dfrac{\partial V^F(\Omega|N)}{\partial N}}{-(f'^2(\alpha)+f(\alpha)f''(\alpha))\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)q_i(M)q_j(M)V^F(\Omega|N)}dN \tag{15.35}$$

Cette équation se simplifie en :

$$d\alpha = \frac{(f(\alpha)f'(\alpha)\dfrac{\partial V^F(\Omega|N)}{\partial N}}{-(f'^2(\alpha)+f(\alpha)f''(\alpha))V^F(\Omega|N)}dN \tag{15.36}$$

L'ensemble des paramètres locaux du problème approché est :

$$\mathbb{Q}^{*+}(I,\Omega) = \left\{(q_i^+(M))_{(i)\in\{1,\dots,6\}}, T^+(\Omega), V^+_{min}(\Omega), V^+_{max}(\Omega)\right\}$$

15.3 Annexe locale - Etape 5 - Les lois d'évolution cycliques NDVE (c) : cadre du modèle modèle général dans sa première forme simplifiée

Nous rappelons que la loi dont il est question ici est la suivante (Eq. 9.5) :

$$\begin{aligned}
d\alpha = \frac{\begin{array}{r}
2f(\alpha)f'(\alpha)\left(\sum\limits_{\substack{p,q=1\\p\leq q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)\varepsilon_j d\varepsilon_i + \dots\\
\dots f(\alpha)f'(\alpha)\left(\left(\sum\limits_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}\left(\frac{\partial U_p}{\partial m_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})+U_p(m_{23},r_1,r_{23})\frac{\partial U_q}{\partial m_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})\right)\right)\varepsilon_i\varepsilon_j\right)dm_{23} + \dots\\
\dots f(\alpha)f'(\alpha)\left(\left(\sum\limits_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}\left(\frac{\partial U_p}{\partial r_1}(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})+U_p(m_{23},r_1,r_{23})\frac{\partial U_q}{\partial r_1}(m_{23},r_1,r_{23})\right)\right)\varepsilon_i\varepsilon_j\right)dr_1 + \dots\\
\dots f(\alpha)f'(\alpha)\left(\left(\sum\limits_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}\left(\frac{\partial U_p}{\partial r_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})+U_p(m_{23},r_1,r_{23})\frac{\partial U_q}{\partial r_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})\right)\right)\varepsilon_i\varepsilon_j\right)dr_{23}
\end{array}}{-(f'^2(\alpha)+f(\alpha)f''(\alpha))\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)\varepsilon_i\varepsilon_j}
\end{aligned} \tag{15.37}$$

15.3.1 Problèmes locaux de fatigue au point M

• Problème local de fatigue

Ce cas est sans objet.

• Problème local de fatigue de type PP(I,M)

En utilisant les formules de passage (Eq. 9.19), la loi d'évolution de l'endommagement en fatigue du modèle dans sa première forme simplifiée dans le cadre un problème local de fatigue de type PP(I,M) s'écrit alors avec la notation de Voigt :

$$
\begin{aligned}
d\alpha = \frac{
\begin{array}{r}
2f(\alpha)f'(\alpha)\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p\leq q}}^{3} D_{ij}^{(pq)} U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)\varepsilon_j^{*F}(M|N)\ldots\\
\ldots\frac{\partial \varepsilon_i^{*F}}{\partial N}(M|N)dN+\ldots\\
\ldots f(\alpha)f'(\alpha)\left(\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}\left(\frac{\partial U_p}{\partial m_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})+U_p(m_{23},r_1,r_{23})\frac{\partial U_q}{\partial m_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})\right)\right)\varepsilon_i^{*F}(M|N)\varepsilon_j^{*F}(M|N)\right)\ldots\\
\ldots\frac{\partial dm_{23}^{*F}}{\partial N}(M|N)dN+\ldots\\
\ldots f(\alpha)f'(\alpha)\left(\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}\left(\frac{\partial U_p}{\partial r_1}(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})+U_p(m_{23},r_1,r_{23})\frac{\partial U_q}{\partial r_1}(m_{23},r_1,r_{23})\right)\right)\varepsilon_i^{*F}(M|N)\varepsilon_j^{*F}(M|N)\right)\ldots\\
\ldots\frac{\partial dr_1^{*F}}{\partial N}(M|N)dN+\ldots\\
\ldots f(\alpha)f'(\alpha)\left(\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}\left(\frac{\partial U_p}{\partial r_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})+U_p(m_{23},r_1,r_{23})\frac{\partial U_q}{\partial r_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})\right)\right)\varepsilon_i^{*F}(M|N)\varepsilon_j^{*F}(M|N)\right)\ldots\\
\ldots\frac{\partial dr_{23}^{*F}}{\partial N}(M|N)dN
\end{array}
}{
-\left(f'^2(\alpha)+f(\alpha)f''(\alpha)\right)\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)\varepsilon_i^{*F}(M|N)\varepsilon_j^{*F}(M|N)
}
\end{aligned}
\tag{15.38}
$$

L'ensemble des paramètres locaux du problème approché est :

$$\mathbb{Q}^{*+}(I,M)=\left\{(c_\varepsilon^{+F(i)}(M))_{(i)\in\{1,\ldots,6\}},c_{m_{23}}^{+F}(M),c_{r_1}^{+F}(M),c_{r_{23}}^{+F}(M)\right\}$$

• **Problème local de fatigue de type PPI(I,M)**

En utilisant les formules de passage (Eq. 9.20), la loi d'évolution de l'endommagement en fatigue du modèle dans sa première forme simplifiée dans le cadre un problème local de fatigue de type PPI(I,M) s'écrit alors avec la notation de Voigt :

$$
\begin{aligned}
d\alpha = \frac{
\begin{array}{r}
2f(\alpha)f'(\alpha)\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p\leq q}}^{3} D_{ij}^{(pq)} U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)V_\varepsilon^{*F}(M|N)\overline{\varepsilon_j^*}(M)\overline{\varepsilon_i^*}(M)\frac{\partial V_\varepsilon^{*F}}{\partial N}(M|N)dN+\ldots\\
\ldots f(\alpha)f'(\alpha)\left(\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}\left(\frac{\partial U_p}{\partial m_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})+U_p(m_{23},r_1,r_{23})\frac{\partial U_q}{\partial m_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})\right)\right)V_\varepsilon^{*F}(M|N)\overline{\varepsilon_i^*}(M)V_\varepsilon^{*F}(M|N)\overline{\varepsilon_j^*}(M)\right)\ldots\\
\ldots\overline{m_{23}^*}(M)\frac{\partial V_{m_{23}}^{*F}}{\partial N}(M|N)dN+\ldots\\
\ldots f(\alpha)f'(\alpha)\left(\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}\left(\frac{\partial U_p}{\partial r_1}(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})+U_p(m_{23},r_1,r_{23})\frac{\partial U_q}{\partial r_1}(m_{23},r_1,r_{23})\right)\right)V_\varepsilon^{*F}(M|N)\overline{\varepsilon_i^*}(M)V_\varepsilon^{*F}(M|N)\overline{\varepsilon_j^*}(M)\right)\ldots\\
\ldots\overline{r_1^*}(M)\frac{\partial V_{r_1}^{*F}}{\partial N}(M|N)dN+\ldots\\
\ldots f(\alpha)f'(\alpha)\left(\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}\left(\frac{\partial U_p}{\partial r_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})+U_p(m_{23},r_1,r_{23})\frac{\partial U_q}{\partial r_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})\right)\right)V_\varepsilon^{*F}(M|N)\overline{\varepsilon_i^*}(M)V_\varepsilon^{*F}(M|N)\overline{\varepsilon_j^*}(M)\right)\ldots\\
\ldots\overline{r_{23}^*}(M)\frac{\partial V_{r_{23}}^{*F}}{\partial N}(M|N)dN
\end{array}
}{
-\left(f'^2(\alpha)+f(\alpha)f''(\alpha)\right)\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)V_\varepsilon^{*F}(M|N)\overline{\varepsilon_i^*}(M)V_\varepsilon^{*F}(M|N)\overline{\varepsilon_j^*}(M)
}
\end{aligned}
\tag{15.39}
$$

En simplifiant, cela donne finalement :

$$
\begin{aligned}
d\alpha = \frac{
\begin{array}{r}
2f(\alpha)f'(\alpha)\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p\leq q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)\overline{\varepsilon_j^*}(M)\overline{\varepsilon_i^*}(M)\frac{\partial V_\varepsilon^{*F}}{\partial N}(M|N)dN+\dots\\
\dots f(\alpha)f'(\alpha)\left(\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}\left(\frac{\partial U_p}{\partial m_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})+U_p(m_{23},r_1,r_{23})\frac{\partial U_q}{\partial m_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})\right)\right)\overline{\varepsilon_i^*}(M)V_\varepsilon^{*F}(M|N)\overline{\varepsilon_j^*}(M)\right)\dots\\
\dots\overline{m_{23}^*}(M)\frac{\partial V_{m_{23}}^{*F}}{\partial N}(M|N)dN+\dots\\
\dots f(\alpha)f'(\alpha)\left(\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}\left(\frac{\partial U_p}{\partial r_1}(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})+U_p(m_{23},r_1,r_{23})\frac{\partial U_q}{\partial r_1}(m_{23},r_1,r_{23})\right)\right)\overline{\varepsilon_i^*}(M)V_\varepsilon^{*F}(M|N)\overline{\varepsilon_j^*}(M)\right)\dots\\
\dots\overline{r_1^*}(M)\frac{\partial V_{r_1}^{*F}}{\partial N}(M|N)dN+\dots\\
\dots f(\alpha)f'(\alpha)\left(\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}\left(\frac{\partial U_p}{\partial r_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})+U_p(m_{23},r_1,r_{23})\frac{\partial U_q}{\partial r_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})\right)\right)\overline{\varepsilon_i^*}(M)V_\varepsilon^{*F}(M|N)\overline{\varepsilon_j^*}(M)\right)\dots\\
\dots\overline{r_{23}^*}(M)\frac{\partial V_{r_{23}}^{*F}}{\partial N}(M|N)dN
\end{array}
}{
-\left(f'^2(\alpha)+f(\alpha)f''(\alpha)\right)\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)\overline{\varepsilon_i^*}(M)V_\varepsilon^{*F}(M|N)\overline{\varepsilon_j^*}(M)
}
\end{aligned}
\tag{15.40}
$$

L'ensemble des paramètres locaux du problème approché est :

$$
\mathbb{Q}^{*+}(I,M)=\left\{\begin{array}{c} c_\varepsilon^{+F}(M),c_{m_{23}}^{+F}(M),c_{r_1}^{+F}(M),c_{r_{23}}^{+F}(M),\\ (\overline{\varepsilon_i^+}(M))_{(i)\in\{1,\dots,6\}},\overline{m_{23}^+}(M),\overline{r_1^+}(M),\overline{r_{23}^+}(M)\end{array}\right\}
$$

• **Problème local de fatigue de type PPM(I,M)**

En utilisant les formules de passage (Eq. 9.9), la loi d'évolution de l'endommagement en fatigue du modèle dans sa seconde forme simplifiée dans le cadre un problème local de fatigue de type PPM(I,M) s'écrit alors avec la notation de Voigt :

$$
\begin{aligned}
d\alpha = \frac{
\begin{array}{r}
2f(\alpha)f'(\alpha)\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p\leq q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)\varepsilon_j^{*F}(M|N)\frac{\partial\varepsilon_i^{*F}}{\partial N}(M|N)dN+\dots\\
\dots f(\alpha)f'(\alpha)\left(\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}\left(\frac{\partial U_p}{\partial m_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})+U_p(m_{23},r_1,r_{23})\frac{\partial U_q}{\partial m_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})\right)\right)\varepsilon_i^{*F}(M|N)\varepsilon_j^{*F}(M|N)\right)\dots\\
\dots\frac{\partial dm_{23}^{*F}}{\partial N}(M|N)dN+\dots\\
\dots f(\alpha)f'(\alpha)\left(\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}\left(\frac{\partial U_p}{\partial r_1}(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})+U_p(m_{23},r_1,r_{23})\frac{\partial U_q}{\partial r_1}(m_{23},r_1,r_{23})\right)\right)\varepsilon_i^{*F}(M|N)\varepsilon_j^{*F}(M|N)\right)\dots\\
\dots\frac{\partial dr_1^{*F}}{\partial N}(M|N)dN+\dots\\
\dots f(\alpha)f'(\alpha)\left(\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}\left(\frac{\partial U_p}{\partial r_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})+U_p(m_{23},r_1,r_{23})\frac{\partial U_q}{\partial r_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})\right)\right)\varepsilon_i^{*F}(M|N)\varepsilon_j^{*F}(M|N)\right)\dots\\
\dots\frac{\partial dr_{23}^{*F}}{\partial N}(M|N)dN
\end{array}
}{
-\left(f'^2(\alpha)+f(\alpha)f''(\alpha)\right)\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)\varepsilon_i^{*F}(M|N)\varepsilon_j^{*F}(M|N)
}
\end{aligned}
\tag{15.41}
$$

L'ensemble des paramètres locaux du problème approché est :

$$\mathbb{Q}^{*+}(I,M)=\left\{(c_{\varepsilon}^{+F(i)}(M))_{(i)\in\{1,\ldots,6\}},c_{m_{23}}^{+F}(M),c_{r_1}^{+F}(M),c_{r_{23}}^{+F}(M)\right\}$$

• **Problème local de fatigue de type PPMI**(I,M)

En utilisant les formules de passage (Eq. 9.22), la loi d'évolution de l'endommagement en fatigue du modèle dans sa première forme simplifiée dans le cadre un problème local de fatigue de type PPMI(I,M) s'écrit alors avec la notation de Voigt :

$$\begin{aligned}
&2f(\alpha)f'(\alpha)\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p\leq q}}^{3}D_{ij}^{(pq)}U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)V_{\varepsilon}^{*F}(M|N)\overline{\varepsilon_j^*}(M)\overline{\varepsilon_i^*}(M)\frac{\partial V_{\varepsilon}^{*F}}{\partial N}(M|N)dN+\ldots\\
&\ldots f(\alpha)f'(\alpha)\left(\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3}D_{ij}^{(pq)}\left(\frac{\partial U_p}{\partial m_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})+U_p(m_{23},r_1,r_{23})\frac{\partial U_q}{\partial m_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})\right)\right)V_{\varepsilon}^{*F}(M|N)\overline{\varepsilon_i^*}(M)V_{\varepsilon}^{*F}(M|N)\overline{\varepsilon_j^*}(M)\right)\ldots\\
&\ldots\overline{m_{23}^*}(M)\frac{\partial V_{m_{23}}^{*F}}{\partial N}(M|N)dN+\ldots\\
&\ldots f(\alpha)f'(\alpha)\left(\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3}D_{ij}^{(pq)}\left(\frac{\partial U_p}{\partial r_1}(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})+U_p(m_{23},r_1,r_{23})\frac{\partial U_q}{\partial r_1}(m_{23},r_1,r_{23})\right)\right)V_{\varepsilon}^{*F}(M|N)\overline{\varepsilon_i^*}(M)V_{\varepsilon}^{*F}(M|N)\overline{\varepsilon_j^*}(M)\right)\ldots\\
&\ldots\overline{r_1^*}(M)\frac{\partial V_{r_1}^{*F}}{\partial N}(M|N)dN+\ldots\\
&\ldots f(\alpha)f'(\alpha)\left(\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3}D_{ij}^{(pq)}\left(\frac{\partial U_p}{\partial r_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})+U_p(m_{23},r_1,r_{23})\frac{\partial U_q}{\partial r_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})\right)\right)V_{\varepsilon}^{*F}(M|N)\overline{\varepsilon_i^*}(M)V_{\varepsilon}^{*F}(M|N)\overline{\varepsilon_j^*}(M)\right)\ldots\\
&\ldots\overline{r_{23}^*}(M)\frac{\partial V_{r_{23}}^{*F}}{\partial N}(M|N)dN\\
d\alpha=&\frac{}{-\left(f'^2(\alpha)+f(\alpha)f''(\alpha)\right)\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3}D_{ij}^{(pq)}U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)V_{\varepsilon}^{*F}(M|N)\overline{\varepsilon_i^*}(M)V_{\varepsilon}^{*F}(M|N)\overline{\varepsilon_j^*}(M)}
\end{aligned}\tag{15.42}$$

En simplifiant, cela donne finalement :

$$\begin{aligned}
&2f(\alpha)f'(\alpha)\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p\leq q}}^{3}D_{ij}^{(pq)}U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)\overline{\varepsilon_j^*}(M)\overline{\varepsilon_i^*}(M)\frac{\partial V_{\varepsilon}^{*F}}{\partial N}(M|N)dN+\ldots\\
&\ldots f(\alpha)f'(\alpha)\left(\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3}D_{ij}^{(pq)}\left(\frac{\partial U_p}{\partial m_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})+U_p(m_{23},r_1,r_{23})\frac{\partial U_q}{\partial m_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})\right)\right)\overline{\varepsilon_i^*}(M)V_{\varepsilon}^{*F}(M|N)\overline{\varepsilon_j^*}(M)\right)\ldots\\
&\ldots\overline{m_{23}^*}(M)\frac{\partial V_{m_{23}}^{*F}}{\partial N}(M|N)dN+\ldots\\
&\ldots f(\alpha)f'(\alpha)\left(\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3}D_{ij}^{(pq)}\left(\frac{\partial U_p}{\partial r_1}(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})+U_p(m_{23},r_1,r_{23})\frac{\partial U_q}{\partial r_1}(m_{23},r_1,r_{23})\right)\right)\overline{\varepsilon_i^*}(M)V_{\varepsilon}^{*F}(M|N)\overline{\varepsilon_j^*}(M)\right)\ldots\\
&\ldots\overline{r_1^*}(M)\frac{\partial V_{r_1}^{*F}}{\partial N}(M|N)dN+\ldots\\
&\ldots f(\alpha)f'(\alpha)\left(\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3}D_{ij}^{(pq)}\left(\frac{\partial U_p}{\partial r_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})+U_p(m_{23},r_1,r_{23})\frac{\partial U_q}{\partial r_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})\right)\right)\overline{\varepsilon_i^*}(M)V_{\varepsilon}^{*F}(M|N)\overline{\varepsilon_j^*}(M)\right)\ldots\\
&\ldots\overline{r_{23}^*}(M)\frac{\partial V_{r_{23}}^{*F}}{\partial N}(M|N)dN\\
d\alpha=&\frac{}{-\left(f'^2(\alpha)+f(\alpha)f''(\alpha)\right)\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3}D_{ij}^{(pq)}U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)\overline{\varepsilon_i^*}(M)V_{\varepsilon}^{*F}(M|N)\overline{\varepsilon_j^*}(M)}
\end{aligned}\tag{15.43}$$

L'ensemble des paramètres locaux du problème approché est :

$$\mathbb{Q}^{*+}(I,M)=\left\{\begin{array}{c}c_{\varepsilon}^{+F}(M),c_{m_{23}}^{+F}(M),c_{r_1}^{+F}(M,c_{r_{23}}^{+F}(M),\\(\overline{\varepsilon_i^+}(M),)_{(i)\in\{1,\ldots,6\}},\overline{m_{23}^+}(M),\overline{r_1^+}(M),\overline{r_{23}^+}(M)\end{array}\right\}$$

• **Problème local de fatigue de type PPML**(I,M)

En utilisant les formules de passage (Eq. 9.23), la loi d'évolution de l'endommagement en fatigue du modèle dans sa première forme simplifiée dans le cadre un problème local de fatigue de type PPML(I,M) s'écrit alors avec la notation de Voigt :

$$
\begin{aligned}
d\alpha = \frac{
\begin{aligned}
&2f(\alpha)f'(\alpha)\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p\leq q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)\varepsilon_j^{*F}(M|N)\frac{\partial\varepsilon_i^{*F}}{\partial N}(M|N)dN+\dots\\
&\dots f(\alpha)f'(\alpha)\left(\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}\left(\frac{\partial U_p}{\partial m_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})+U_p(m_{23},r_1,r_{23})\frac{\partial U_q}{\partial m_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})\right)\right)\varepsilon_i^{*F}(M|N)\varepsilon_j^{*F}(M|N)\right)\dots\\
&\dots\frac{\partial m_{23}^{*F}}{\partial N}(M|N)dN+\dots\\
&\dots f(\alpha)f'(\alpha)\left(\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}\left(\frac{\partial U_p}{\partial r_1}(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})+U_p(m_{23},r_1,r_{23})\frac{\partial U_q}{\partial r_1}(m_{23},r_1,r_{23})\right)\right)\varepsilon_i^{*F}(M|N)\varepsilon_j^{*F}(M|N)\right)\dots\\
&\dots\frac{\partial r_1^{*F}}{\partial N}(M|N)dN+\dots\\
&\dots f(\alpha)f'(\alpha)\left(\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}\left(\frac{\partial U_p}{\partial r_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})+U_p(m_{23},r_1,r_{23})\frac{\partial U_q}{\partial r_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})\right)\right)\varepsilon_i^{*F}(M|N)\varepsilon_j^{*F}(M|N)\right)\dots\\
&\dots\frac{\partial r_{23}^{*F}}{\partial N}(M|N)dN
\end{aligned}
}{
-\left(f'^2(\alpha)+f(\alpha)f''(\alpha)\right)\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)\varepsilon_i^{*F}(M|N)\varepsilon_j^{*F}(M|N)
}
\end{aligned}
\tag{15.44}
$$

L'ensemble des paramètres locaux du problème approché est :

$$
\mathbb{Q}^{*+}(I,M)=\left\{\begin{array}{c}(T_\varepsilon^{+(i)}(M),c_{\varepsilon min}^{+(i)}(M),c_{\varepsilon max}^{+(i)}(M))_{(i)\in\{1,\dots,6\}},T_{m_{23}}^{+}(M),T_{r_1}^{+}(M),T_{r_{23}}^{+}(M),\\ c_{m_{23}min}^{+}(M),c_{m_{23}max}^{+}(M),c_{r_1min}^{+}(M),c_{r_1max}^{+}(M),c_{r_{23}min}^{+}(M),c_{r_{23}max}^{+}(M)\end{array}\right\}
$$

• **Problème local de fatigue de type PPMLI**(I,M)

En utilisant les formules de passage (Eq. 9.24), la loi d'évolution de l'endommagement en fatigue du modèle dans sa première forme simplifiée dans le cadre un problème local de fatigue de type PPMLI(I,M) s'écrit alors avec la notation de Voigt :

$$
\begin{aligned}
d\alpha = \frac{
\begin{aligned}
&2f(\alpha)f'(\alpha)\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p\leq q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)V_\varepsilon^{*F}(M|N)\overline{\varepsilon_j^{*}}(M)\overline{\varepsilon_i^{*}}(M)\frac{\partial V_\varepsilon^{*F}(M|N)}{\partial N}dN+\dots\\
&\dots f(\alpha)f'(\alpha)\left(\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}\left(\frac{\partial U_p}{\partial m_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})+U_p(m_{23},r_1,r_{23})\frac{\partial U_q}{\partial m_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})\right)\right)V_\varepsilon^{*F}(M|N)\overline{\varepsilon_i^{*}}(M)V_\varepsilon^{*F}(M|N)\overline{\varepsilon_j^{*}}(M)\right)\dots\\
&\dots\overline{m_{23}^{*}}(M)\frac{\partial V_{m_{23}}^{*F}(M|N)}{\partial N}dN+\dots\\
&\dots f(\alpha)f'(\alpha)\left(\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}\left(\frac{\partial U_p}{\partial r_1}(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})+U_p(m_{23},r_1,r_{23})\frac{\partial U_q}{\partial r_1}(m_{23},r_1,r_{23})\right)\right)V_\varepsilon^{*F}(M|N)\overline{\varepsilon_i^{*}}(M)V_\varepsilon^{*F}(M|N)\overline{\varepsilon_j^{*}}(M)\right)\dots\\
&\dots\overline{r_1^{*}}(M)\frac{\partial V_{r_1}^{*F}(M|N)}{\partial N}dN+\dots\\
&\dots f(\alpha)f'(\alpha)\left(\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}\left(\frac{\partial U_p}{\partial r_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})+U_p(m_{23},r_1,r_{23})\frac{\partial U_q}{\partial r_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})\right)\right)V_\varepsilon^{*F}(M|N)\overline{\varepsilon_i^{*}}(M)V_\varepsilon^{*F}(M|N)\overline{\varepsilon_j^{*}}(M)\right)\dots\\
&\dots\overline{r_{23}^{*}}(M)\frac{\partial V_{r_{23}}^{*F}(M|N)}{\partial N}dN
\end{aligned}
}{
-\left(f'^2(\alpha)+f(\alpha)f''(\alpha)\right)\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)V_\varepsilon^{*F}(M|N)\overline{\varepsilon_i^{*}}(M)V_\varepsilon^{*F}(M|N)\overline{\varepsilon_j^{*}}(M)
}
\end{aligned}
\tag{15.45}
$$

En simplifiant, cela donne finalement :

$$
\begin{aligned}
d\alpha = \frac{
\begin{aligned}
&2f(\alpha)f'(\alpha)\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p\leq q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)\overline{\varepsilon_j^*}(M)\overline{\varepsilon_i^*}(M)\frac{\partial V_\varepsilon^{*F}(M|N)}{\partial N}dN+\dots\\
&\dots f(\alpha)f'(\alpha)\left(\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}\left(\frac{\partial U_p}{\partial m_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})+U_p(m_{23},r_1,r_{23})\frac{\partial U_q}{\partial m_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})\right)\right)\overline{\varepsilon_i^*}(M)V_\varepsilon^{*F}(M|N)\overline{\varepsilon_j^*}(M)\right)\dots\\
&\dots\overline{m_{23}^*}(M)\frac{\partial V_{m_{23}}^{*F}(M|N)}{\partial N}dN+\dots\\
&\dots f(\alpha)f'(\alpha)\left(\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}\left(\frac{\partial U_p}{\partial r_1}(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})+U_p(m_{23},r_1,r_{23})\frac{\partial U_q}{\partial r_1}(m_{23},r_1,r_{23})\right)\right)\overline{\varepsilon_i^*}(M)V_\varepsilon^{*F}(M|N)\overline{\varepsilon_j^*}(M)\right)\dots\\
&\dots\overline{r_1^*}(M)\frac{\partial V_{r_1}^{*F}(M|N)}{\partial N}dN+\dots\\
&\dots f(\alpha)f'(\alpha)\left(\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}\left(\frac{\partial U_p}{\partial r_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})+U_p(m_{23},r_1,r_{23})\frac{\partial U_q}{\partial r_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})\right)\right)\overline{\varepsilon_i^*}(M)V_\varepsilon^{*F}(M|N)\overline{\varepsilon_j^*}(M)\right)\dots\\
&\dots\overline{r_{23}^*}(M)\frac{\partial V_{r_{23}}^{*F}(M|N)}{\partial N}dN
\end{aligned}
}{
-\left(f'^2(\alpha)+f(\alpha)f''(\alpha)\right)\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)\overline{\varepsilon_i^*}(M)V_\varepsilon^{*F}(M|N)\overline{\varepsilon_j^*}(M)
}
\end{aligned}
\tag{15.46}
$$

L'ensemble des paramètres locaux du problème approché est :

$$
\mathbb{Q}^{*+}(I,M)=\left\{\begin{array}{r}
T_\varepsilon^+(M),T_{m_{23}}^+(M),T_{r_1}^+(M),T_{r_{23}}^+(M),\\
V_{\varepsilon min}^+(M),V_{m_{23}min}^+(M),V_{r_1min}^+(M),V_{r_{23}min}^+(M),\\
V_{\varepsilon max}^+(M),V_{m_{23}max}^+(M),V_{r_1max}^+(M),V_{r_{23}max}^+(M),\\
(\overline{\varepsilon_i^+}(M))_{(i)\in\{1,\dots,6\}},\overline{m_{23}^+}(M),\overline{r_1^+}(M),\overline{r_{23}^+}(M)
\end{array}\right\}
$$

15.3.2 Problèmes locaux de fatigue sur un domaine

• Problème local de fatigue sur un domaine

Ce cas est sans objet.

• Problème local de fatigue sur un domaine de type PP(I,Ω)

En utilisant les formules de passage (Eq. 9.25), la loi d'évolution de l'endommagement en fatigue du modèle dans sa première forme simplifiée dans le cadre un problème local de fatigue

de type PP(I,Ω) s'écrit alors avec la notation de Voigt :

$$
\begin{aligned}
d\alpha = \frac{
\begin{aligned}
&2f(\alpha)f'(\alpha)\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p\leq q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)V_\varepsilon^{*F(j)}(\Omega|N)q_{\varepsilon j}^*(M)q_{\varepsilon i}^*(M)\frac{\partial V_\varepsilon^{*F(i)}}{\partial N}(\Omega|N)dN+\ldots\\
&\ldots f(\alpha)f'(\alpha)\left(\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}\left(\frac{\partial U_p}{\partial m_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})+U_p(m_{23},r_1,r_{23})\frac{\partial U_q}{\partial m_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})\right)\right)V_\varepsilon^{*F(i)}(\Omega|N)q_{\varepsilon i}^*(M)V_\varepsilon^{*F(j)}(\Omega|N)q_{\varepsilon j}^*(M)\right)\ldots\\
&\ldots q_{m_{23}}^*(M)\frac{\partial V_{m_{23}}^{*F}}{\partial N}(\Omega|N)dN+\ldots\\
&\ldots f(\alpha)f'(\alpha)\left(\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}\left(\frac{\partial U_p}{\partial r_1}(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})+U_p(m_{23},r_1,r_{23})\frac{\partial U_q}{\partial r_1}(m_{23},r_1,r_{23})\right)\right)V_\varepsilon^{*F(i)}(\Omega|N)q_{\varepsilon i}^*(M)V_\varepsilon^{*F(j)}(\Omega|N)q_{\varepsilon j}^*(M)\right)\ldots\\
&\ldots q_{r_1}^*(M)\frac{\partial V_{r_1}^{*F}}{\partial N}(\Omega|N)dN+\ldots\\
&\ldots f(\alpha)f'(\alpha)\left(\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}\left(\frac{\partial U_p}{\partial r_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})+U_p(m_{23},r_1,r_{23})\frac{\partial U_q}{\partial r_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})\right)\right)V_\varepsilon^{*F(i)}(\Omega|N)q_{\varepsilon i}^*(M)V_\varepsilon^{*F(j)}(\Omega|N)q_{\varepsilon j}^*(M)\right)\ldots\\
&\ldots q_{r_{23}}^*(M)\frac{\partial V_{r_{23}}^{*F}}{\partial N}(\Omega|N)dN
\end{aligned}
}{
-\left(f'^2(\alpha)+f(\alpha)f''(\alpha)\right)\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)V_\varepsilon^{*F(i)}(\Omega|N)q_{\varepsilon i}^*(M)V_\varepsilon^{*F(j)}(\Omega|N)q_{\varepsilon j}^*(M)
}
\end{aligned}
\tag{15.47}
$$

L'ensemble des paramètres locaux du problème approché est :

$$
\mathbb{Q}^{*+}(I,\Omega)=\left\{\begin{array}{l}(q_{\varepsilon i}^{+}(M))_{(i)\in\{1,\ldots,6\}},q_{m_{23}}^{+}(M),q_{r_1}^{+}(M),q_{r_{23}}^{+}(M),\\(c_{\varepsilon}^{+F(i)}(\Omega))_{(i)\in\{1,\ldots,6\}},c_{m_{23}}^{+F}(\Omega),c_{r_1}^{+F}(\Omega),c_{r_{23}}^{+F}(\Omega)\end{array}\right\}
$$

• **Problème local de fatigue sur un domaine de type PPI(I,Ω)**

En utilisant les formules de passage (Eq. 9.26), la loi d'évolution de l'endommagement en fatigue du modèle dans sa première forme simplifiée dans le cadre un problème local de fatigue de type PPI(I,Ω) s'écrit alors avec la notation de Voigt :

$$
\begin{aligned}
d\alpha = \frac{
\begin{aligned}
&2f(\alpha)f'(\alpha)\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p\leq q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)V_\varepsilon^{*F}(\Omega|N)q_{\varepsilon j}^*(M)q_{\varepsilon i}^*(M)\frac{\partial V_\varepsilon^{*F}}{\partial N}(\Omega|N)dN+\ldots\\
&\ldots f(\alpha)f'(\alpha)\left(\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}\left(\frac{\partial U_p}{\partial m_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})+U_p(m_{23},r_1,r_{23})\frac{\partial U_q}{\partial m_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})\right)\right)V_\varepsilon^{*F}(\Omega|N)q_{\varepsilon i}^*(M)V_\varepsilon^{*F}(\Omega|N)q_{\varepsilon j}^*(M)\right)\ldots\\
&\ldots q_{m_{23}}^*(M)\frac{\partial V_{m_{23}}^{*F}}{\partial N}(\Omega|N)dN+\ldots\\
&\ldots f(\alpha)f'(\alpha)\left(\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}\left(\frac{\partial U_p}{\partial r_1}(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})+U_p(m_{23},r_1,r_{23})\frac{\partial U_q}{\partial r_1}(m_{23},r_1,r_{23})\right)\right)V_\varepsilon^{*F}(\Omega|N)q_{\varepsilon i}^*(M)V_\varepsilon^{*F}(\Omega|N)q_{\varepsilon j}^*(M)\right)\ldots\\
&\ldots q_{r_1}^*(M)\frac{\partial V_{r_1}^{*F}}{\partial N}(\Omega|N)dN+\ldots\\
&\ldots f(\alpha)f'(\alpha)\left(\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}\left(\frac{\partial U_p}{\partial r_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})+U_p(m_{23},r_1,r_{23})\frac{\partial U_q}{\partial r_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})\right)\right)V_\varepsilon^{*F}(\Omega|N)q_{\varepsilon i}^*(M)V_\varepsilon^{*F}(\Omega|N)q_{\varepsilon j}^*(M)\right)\ldots\\
&\ldots q_{r_{23}}^*(M)\frac{\partial V_{r_{23}}^{*F}}{\partial N}(\Omega|N)dN
\end{aligned}
}{
-\left(f'^2(\alpha)+f(\alpha)f''(\alpha)\right)\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)V_\varepsilon^{*F}(\Omega|N)q_{\varepsilon i}^*(M)V_\varepsilon^{*F}(\Omega|N)q_{\varepsilon j}^*(M)
}
\end{aligned}
\tag{15.48}
$$

En simplifiant, cela donne finalement :

$$
\begin{aligned}
d\alpha = \frac{
\begin{aligned}
&2f(\alpha)f'(\alpha)\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p\leq q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)q^*_{\varepsilon j}(M)q^*_{\varepsilon i}(M)\frac{\partial V_\varepsilon^{*F}}{\partial N}(\Omega|N)dN+\dots\\
&\dots f(\alpha)f'(\alpha)\left(\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}\left(\frac{\partial U_p}{\partial m_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})+U_p(m_{23},r_1,r_{23})\frac{\partial U_q}{\partial m_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})\right)\right)q^*_{\varepsilon i}(M)V_\varepsilon^{*F}(\Omega|N)q^*_{\varepsilon j}(M)\right)\dots\\
&\dots q^*_{m_{23}}(M)\frac{\partial V^{*F}_{m_{23}}}{\partial N}(\Omega|N)dN+\dots\\
&\dots f(\alpha)f'(\alpha)\left(\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}\left(\frac{\partial U_p}{\partial r_1}(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})+U_p(m_{23},r_1,r_{23})\frac{\partial U_q}{\partial r_1}(m_{23},r_1,r_{23})\right)\right)q^*_{\varepsilon i}(M)V_\varepsilon^{*F}(\Omega|N)q^*_{\varepsilon j}(M)\right)\dots\\
&\dots q^*_{r_1}(M)\frac{\partial V^{*F}_{r_1}}{\partial N}(\Omega|N)dN+\dots\\
&\dots f(\alpha)f'(\alpha)\left(\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}\left(\frac{\partial U_p}{\partial r_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})+U_p(m_{23},r_1,r_{23})\frac{\partial U_q}{\partial r_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})\right)\right)q^*_{\varepsilon i}(M)V_\varepsilon^{*F}(\Omega|N)q^*_{\varepsilon j}(M)\right)\dots\\
&\dots q^*_{r_{23}}(M)\frac{\partial V^{*F}_{r_{23}}}{\partial N}(\Omega|N)dN
\end{aligned}
}{
-\left(f'^2(\alpha)+f(\alpha)f''(\alpha)\right)\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)q^*_{\varepsilon i}(M)V_\varepsilon^{*F}(\Omega|N)q^*_{\varepsilon j}(M)
}
\end{aligned}
\tag{15.49}
$$

L'ensemble des paramètres locaux du problème approché est :

$$
\mathbb{Q}^{*+}(I,\Omega)=\left\{\begin{matrix}(q^+_{\varepsilon i}(M))_{(i)\in\{1,\dots,6\}},q^+_{m_{23}}(M),q^+_{r_1}(M),q^+_{r_{23}}(M),\\ c^{+F}_\varepsilon(\Omega),c^{+F}_{m_{23}}(\Omega),c^{+F}_{r_1}(\Omega),c^{+F}_{r_{23}}(\Omega)\end{matrix}\right\}
$$

• Problème local de fatigue sur un domaine de type PPM(I,Ω)

En utilisant les formules de passage (Eq. 9.27), la loi d'évolution de l'endommagement en fatigue du modèle dans sa première forme simplifiée dans le cadre un problème local de fatigue de type PPM(I,Ω) s'écrit alors avec la notation de Voigt :

$$
\begin{aligned}
d\alpha = \frac{
\begin{aligned}
&2f(\alpha)f'(\alpha)\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p\leq q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)V_\varepsilon^{*F(j)}(\Omega|N)q^*_{\varepsilon j}(M)q^*_{\varepsilon i}(M)\frac{\partial V_\varepsilon^{*F(i)}}{\partial N}(\Omega|N)dN+.\\
&\dots f(\alpha)f'(\alpha)\left(\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}\left(\frac{\partial U_p}{\partial m_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})+U_p(m_{23},r_1,r_{23})\frac{\partial U_q}{\partial m_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})\right)\right)V_\varepsilon^{*F(i)}(\Omega|N)q^*_{\varepsilon i}(M)V_\varepsilon^{*F(j)}(\Omega|N)q^*_{\varepsilon j}(M)\right).\\
&\dots q^*_{m_{23}}(M)\frac{\partial V^{*F}_{m_{23}}}{\partial N}(\Omega|N)dN+.\\
&\dots f(\alpha)f'(\alpha)\left(\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}\left(\frac{\partial U_p}{\partial r_1}(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})+U_p(m_{23},r_1,r_{23})\frac{\partial U_q}{\partial r_1}(m_{23},r_1,r_{23})\right)\right)V_\varepsilon^{*F(i)}(\Omega|N)q^*_{\varepsilon i}(M)V_\varepsilon^{*F(j)}(\Omega|N)q^*_{\varepsilon j}(M)\right).\\
&\dots q^*_{r_1}(M)\frac{\partial V^{*F}_{r_1}}{\partial N}(\Omega|N)dN+.\\
&\dots f(\alpha)f'(\alpha)\left(\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}\left(\frac{\partial U_p}{\partial r_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})+U_p(m_{23},r_1,r_{23})\frac{\partial U_q}{\partial r_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})\right)\right)V_\varepsilon^{*F(i)}(\Omega|N)q^*_{\varepsilon i}(M)V_\varepsilon^{*F(j)}(\Omega|N)q^*_{\varepsilon j}(M)\right).\\
&\dots q^*_{r_{23}}(M)\frac{\partial V^{*F}_{r_{23}}}{\partial N}(\Omega|N)d
\end{aligned}
}{
-\left(f'^2(\alpha)+f(\alpha)f''(\alpha)\right)\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)V_\varepsilon^{*F(i)}(\Omega|N)q^*_{\varepsilon i}(M)V_\varepsilon^{*F(j)}(\Omega|N)q^*_{\varepsilon j}(M)
}
\end{aligned}
\tag{15.50}
$$

L'ensemble des paramètres locaux du problème approché est :

$$\mathbb{Q}^{*+}(I,\Omega)=\left\{\begin{array}{l}(q_{\varepsilon i}^{+}(M))_{(i)\in\{1,\ldots,6\}},q_{m_{23}}^{+}(M),q_{r_1}^{+}(M),q_{r_{23}}^{+}(M),\\(c_{\varepsilon}^{+F(i)}(\Omega))_{(i)\in\{1,\ldots,6\}},c_{m_{23}}^{+F}(\Omega),c_{r_1}^{+F}(\Omega),c_{r_{23}}^{+F}(\Omega)\end{array}\right\}$$

• **Problème local de fatigue sur un domaine de type PPMI(I,Ω)**

En utilisant les formules de passage (Eq. 9.28), la loi d'évolution de l'endommagement en fatigue du modèle dans sa première forme simplifiée dans le cadre un problème local de fatigue de type PPMI(I,Ω) s'écrit alors avec la notation de Voigt :

$$\begin{aligned}d\alpha=\frac{\begin{array}{r}2f(\alpha)f'(\alpha)\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p\leq q}}^{3}D_{ij}^{(pq)}U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)V_{\varepsilon}^{*F}(\Omega|N)q_{\varepsilon j}^{*}(M)q_{\varepsilon i}^{*}(M)\frac{\partial V_{\varepsilon}^{*F}}{\partial N}(\Omega|N)dN+\ldots\\ \ldots f(\alpha)f'(\alpha)\left(\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3}D_{ij}^{(pq)}\left(\frac{\partial U_p}{\partial m_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})+U_p(m_{23},r_1,r_{23})\frac{\partial U_q}{\partial m_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})\right)\right)V_{\varepsilon}^{*F}(\Omega|N)q_{\varepsilon i}^{*}(M)V_{\varepsilon}^{*F}(\Omega|N)q_{\varepsilon j}^{*}(M)\right)\ldots\\ \ldots q_{m_{23}}^{*}(M)\frac{\partial V_{m_{23}}^{*F}}{\partial N}(\Omega|N)dN+\ldots\\ \ldots f(\alpha)f'(\alpha)\left(\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3}D_{ij}^{(pq)}\left(\frac{\partial U_p}{\partial r_1}(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})+U_p(m_{23},r_1,r_{23})\frac{\partial U_q}{\partial r_1}(m_{23},r_1,r_{23})\right)\right)V_{\varepsilon}^{*F}(\Omega|N)q_{\varepsilon i}^{*}(M)V_{\varepsilon}^{*F}(\Omega|N)q_{\varepsilon j}^{*}(M)\right)\ldots\\ \ldots q_{r_1}^{*}(M)\frac{\partial V_{r_1}^{*F}}{\partial N}(\Omega|N)dN+\ldots\\ \ldots f(\alpha)f'(\alpha)\left(\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3}D_{ij}^{(pq)}\left(\frac{\partial U_p}{\partial r_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})+U_p(m_{23},r_1,r_{23})\frac{\partial U_q}{\partial r_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})\right)\right)V_{\varepsilon}^{*F}(\Omega|N)q_{\varepsilon i}^{*}(M)V_{\varepsilon}^{*F}(\Omega|N)q_{\varepsilon j}^{*}(M)\right)\ldots\\ \ldots q_{r_{23}}^{*}(M)\frac{\partial V_{r_{23}}^{*F}}{\partial N}(\Omega|N)dN\end{array}}{\begin{array}{r}-\left(f'^{2}(\alpha)+f(\alpha)f''(\alpha)\right)\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3}D_{ij}^{(pq)}U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)V_{\varepsilon}^{*F}(\Omega|N)q_{\varepsilon i}^{*}(M)V_{\varepsilon}^{*F}(\Omega|N)q_{\varepsilon j}^{*}(M)\end{array}}\end{aligned}\tag{15.51}$$

En simplifiant, cela donne finalement :

$$\begin{aligned}d\alpha=\frac{\begin{array}{r}2f(\alpha)f'(\alpha)\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p\leq q}}^{3}D_{ij}^{(pq)}U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)q_{\varepsilon j}^{*}(M)q_{\varepsilon i}^{*}(M)\frac{\partial V_{\varepsilon}^{*F}}{\partial N}(\Omega|N)dN+\ldots\\ \ldots f(\alpha)f'(\alpha)\left(\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3}D_{ij}^{(pq)}\left(\frac{\partial U_p}{\partial m_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})+U_p(m_{23},r_1,r_{23})\frac{\partial U_q}{\partial m_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})\right)\right)q_{\varepsilon i}^{*}(M)V_{\varepsilon}^{*F}(\Omega|N)q_{\varepsilon j}^{*}(M)\right)\ldots\\ \ldots q_{m_{23}}^{*}(M)\frac{\partial V_{m_{23}}^{*F}}{\partial N}(\Omega|N)dN+\ldots\\ \ldots f(\alpha)f'(\alpha)\left(\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3}D_{ij}^{(pq)}\left(\frac{\partial U_p}{\partial r_1}(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})+U_p(m_{23},r_1,r_{23})\frac{\partial U_q}{\partial r_1}(m_{23},r_1,r_{23})\right)\right)q_{\varepsilon i}^{*}(M)V_{\varepsilon}^{*F}(\Omega|N)q_{\varepsilon j}^{*}(M)\right)\ldots\\ \ldots q_{r_1}^{*}(M)\frac{\partial V_{r_1}^{*F}}{\partial N}(\Omega|N)dN+\ldots\\ \ldots f(\alpha)f'(\alpha)\left(\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3}D_{ij}^{(pq)}\left(\frac{\partial U_p}{\partial r_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})+U_p(m_{23},r_1,r_{23})\frac{\partial U_q}{\partial r_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})\right)\right)q_{\varepsilon i}^{*}(M)V_{\varepsilon}^{*F}(\Omega|N)q_{\varepsilon j}^{*}(M)\right)\ldots\\ \ldots q_{r_{23}}^{*}(M)\frac{\partial V_{r_{23}}^{*F}}{\partial N}(\Omega|N)dN\end{array}}{\begin{array}{r}-\left(f'^{2}(\alpha)+f(\alpha)f''(\alpha)\right)\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3}D_{ij}^{(pq)}U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)q_{\varepsilon i}^{*}(M)V_{\varepsilon}^{*F}(\Omega|N)q_{\varepsilon j}^{*}(M)\end{array}}\end{aligned}\tag{15.52}$$

L'ensemble des paramètres locaux du problème approché est :

$$\mathbb{Q}^{*+}(I,\Omega)=\left\{\begin{array}{r}(q_{\varepsilon i}^{+}(M))_{(i)\in\{1,...,6\}},q_{m_{23}}^{+}(M),q_{r_1}^{+}(M),q_{r_{23}}^{+}(M),\\ c_{\varepsilon}^{+F}(\Omega),c_{m_{23}}^{+F}(\Omega),c_{r_1}^{+F}(\Omega),c_{r_{23}}^{+F}(\Omega)\end{array}\right\}$$

• **Problème local de fatigue sur un domaine de type PPML(I,Ω)**

En utilisant les formules de passage (Eq. 9.29), la loi d'évolution de l'endommagement en fatigue du modèle dans sa premiere forme simplifiée dans le cadre un problème local de fatigue de type PPML(I,Ω) s'écrit alors avec la notation de Voigt :

$$\begin{aligned}d\alpha=\frac{\begin{array}{r}2f(\alpha)f'(\alpha)\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p\leq q}}^{3}D_{ij}^{(pq)}U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)V_{\varepsilon}^{*F(j)}(\Omega|N)q_{\varepsilon j}^{*}(M)q_{\varepsilon i}^{*}(M)\frac{\partial V_{\varepsilon i}^{*F}}{\partial N}(\Omega|N)dN+.\\ \ldots f(\alpha)f'(\alpha)\left(\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3}D_{ij}^{(pq)}\left(\frac{\partial U_p}{\partial m_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})+U_p(m_{23},r_1,r_{23})\frac{\partial U_q}{\partial m_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})\right)\right)V_{\varepsilon}^{*F(i)}(\Omega|N)q_{\varepsilon i}^{*}(M)V_{\varepsilon}^{*F(j)}(\Omega|N)q_{\varepsilon j}^{*}(M)\right).\\ \ldots q_{m_{23}}^{*}(M)\frac{\partial V_{m_{23}}^{*F}}{\partial N}(\Omega|N)dN+.\\ \ldots f(\alpha)f'(\alpha)\left(\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3}D_{ij}^{(pq)}\left(\frac{\partial U_p}{\partial r_1}(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})+U_p(m_{23},r_1,r_{23})\frac{\partial U_q}{\partial r_1}(m_{23},r_1,r_{23})\right)\right)V_{\varepsilon}^{*F(i)}(\Omega|N)q_{\varepsilon i}^{*}(M)V_{\varepsilon}^{*F(j)}(\Omega|N)q_{\varepsilon j}^{*}(M)\right).\\ \ldots q_{r_1}^{*}(M)\frac{\partial V_{r_1}^{*F}}{\partial N}(\Omega|N)dN+.\\ \ldots f(\alpha)f'(\alpha)\left(\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3}D_{ij}^{(pq)}\left(\frac{\partial U_p}{\partial r_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})+U_p(m_{23},r_1,r_{23})\frac{\partial U_q}{\partial r_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})\right)\right)V_{\varepsilon}^{*F(i)}(\Omega|N)q_{\varepsilon i}^{*}(M)V_{\varepsilon}^{*F(j)}(\Omega|N)q_{\varepsilon j}^{*}(M)\right).\\ \ldots q_{r_{23}}^{*}(M)\frac{\partial V_{r_{23}}^{*F}}{\partial N}(\Omega|N)d\end{array}}{\begin{array}{r}-\left(f'^{2}(\alpha)+f(\alpha)f''(\alpha)\right)\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3}D_{ij}^{(pq)}U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)V_{\varepsilon}^{*F(i)}(\Omega|N)q_{\varepsilon i}^{*}(M)V_{\varepsilon}^{*F(j)}(\Omega|N)q_{\varepsilon j}^{*}(M)\end{array}}\end{aligned}\tag{15.53}$$

L'ensemble des paramètres locaux du problème approché est :

$$\mathbb{Q}^{*+}(I,\Omega)=\left\{\begin{array}{r}(T_{\varepsilon}^{+(i)}(\Omega))_{(i)\in\{1,...,6\}},T_{m_{23}}^{+}(\Omega),T_{r_1}^{+}(\Omega),T_{r_{23}}^{+}(\Omega),\\ (q_{\varepsilon i}^{+}(M))_{(i)\in\{1,...,6\}},q_{m_{23}}^{+}(M),q_{r_1}^{+}(M),q_{r_{23}}^{+}(M),\\ (c_{\varepsilon min}^{+(i)}(\Omega),c_{\varepsilon max}^{+(i)}(\Omega))_{(i)\in\{1,...,6\}},c_{m_{23}min}^{+}(\Omega),c_{m_{23}max}^{+}(\Omega),\\ c_{r_1min}^{+}(\Omega),c_{r_1max}^{+}(\Omega),c_{r_{23}min}^{+}(\Omega),c_{r_{23}max}^{+}(\Omega)\end{array}\right\}$$

• **Problème local de fatigue sur un domaine de type PPMLI(I,Ω)**

En utilisant les formule de passage (Eq. 9.30), la loi d'évolution de l'endommagement en fatigue du modèle dans sa première forme simplifiée dans le cadre un problème local de fatigue

de type PPMLI(I,Ω) s'écrit alors avec la notation de Voigt :

$$
\begin{aligned}
d\alpha = \frac{
\begin{array}{r}
2f(\alpha)f'(\alpha)\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p\leq q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)V_\varepsilon^{*F}(\Omega|N)q_{\varepsilon j}^*(M)q_{\varepsilon i}^*(M)\frac{\partial V_\varepsilon^{*F}(\Omega|N)}{\partial N}dN+\dots\\
\dots f(\alpha)f'(\alpha)\left(\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}\left(\frac{\partial U_p}{\partial m_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})+U_p(m_{23},r_1,r_{23})\frac{\partial U_q}{\partial m_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})\right)\right)V_\varepsilon^{*F}(\Omega|N)q_{\varepsilon i}^*(M)V_\varepsilon^{*F}(\Omega|N)q_{\varepsilon j}^*(M)\right)\dots\\
\dots q_{m_{23}}^*(M)\frac{\partial V_{m_{23}}^{*F}(\Omega|N)}{\partial N}dN+\dots\\
\dots f(\alpha)f'(\alpha)\left(\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}\left(\frac{\partial U_p}{\partial r_1}(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})+U_p(m_{23},r_1,r_{23})\frac{\partial U_q}{\partial r_1}(m_{23},r_1,r_{23})\right)\right)V_\varepsilon^{*F}(\Omega|N)q_{\varepsilon i}^*(M)V_\varepsilon^{*F}(\Omega|N)q_{\varepsilon j}^*(M)\right)\dots\\
\dots j\ q_{r_1}^*(M)\frac{\partial V_{r_1}^{*F}(\Omega|N)}{\partial N}dN+\dots\\
\dots f(\alpha)f'(\alpha)\left(\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}\left(\frac{\partial U_p}{\partial r_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})+U_p(m_{23},r_1,r_{23})\frac{\partial U_q}{\partial r_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})\right)\right)V_\varepsilon^{*F}(\Omega|N)q_{\varepsilon i}^*(M)V_\varepsilon^{*F}(\Omega|N)q_{\varepsilon j}^*(M)\right)\dots\\
\dots q_{r_{23}}^*(M)\frac{\partial V_{r_{23}}^{*F}(\Omega|N)}{\partial N}dN
\end{array}
}{
-\left(f'^2(\alpha)+f(\alpha)f''(\alpha)\right)\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)V_\varepsilon^{*F}(\Omega|N)q_{\varepsilon i}^*(M)V_\varepsilon^{*F}(\Omega|N)q_{\varepsilon j}^*(M)
}
\end{aligned}
\tag{15.54}
$$

En simplifiant, cela donne finalement :

$$
\begin{aligned}
d\alpha = \frac{
\begin{array}{r}
2f(\alpha)f'(\alpha)\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p\leq q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)q_{\varepsilon j}^*(M)q_{\varepsilon i}^*(M)\frac{\partial V_\varepsilon^{*F}(\Omega|N)}{\partial N}dN+\dots\\
\dots f(\alpha)f'(\alpha)\left(\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}\left(\frac{\partial U_p}{\partial m_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})+U_p(m_{23},r_1,r_{23})\frac{\partial U_q}{\partial m_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})\right)\right)q_{\varepsilon i}^*(M)V_\varepsilon^{*F}(\Omega|N)q_{\varepsilon j}^*(M)\right)\dots\\
\dots q_{m_{23}}^*(M)\frac{\partial V_{m_{23}}^{*F}(\Omega|N)}{\partial N}dN+\dots\\
\dots f(\alpha)f'(\alpha)\left(\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}\left(\frac{\partial U_p}{\partial r_1}(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})+U_p(m_{23},r_1,r_{23})\frac{\partial U_q}{\partial r_1}(m_{23},r_1,r_{23})\right)\right)q_{\varepsilon i}^*(M)V_\varepsilon^{*F}(\Omega|N)q_{\varepsilon j}^*(M)\right)\dots\\
\dots j\ q_{r_1}^*(M)\frac{\partial V_{r_1}^{*F}(\Omega|N)}{\partial N}dN+\dots\\
\dots f(\alpha)f'(\alpha)\left(\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}\left(\frac{\partial U_p}{\partial r_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})+U_p(m_{23},r_1,r_{23})\frac{\partial U_q}{\partial r_{23}}(m_{23},r_1,r_{23})\right)\right)q_{\varepsilon i}^*(M)V_\varepsilon^{*F}(\Omega|N)q_{\varepsilon j}^*(M)\right)\dots\\
\dots q_{r_{23}}^*(M)\frac{\partial V_{r_{23}}^{*F}(\Omega|N)}{\partial N}dN
\end{array}
}{
-\left(f'^2(\alpha)+f(\alpha)f''(\alpha)\right)\left(\sum_{\substack{p,q=1\\p<q}}^{3} D_{ij}^{(pq)}U_p(m_{23},r_1,r_{23})U_q(m_{23},r_1,r_{23})\right)q_{\varepsilon i}^*(M)V_\varepsilon^{*F}(\Omega|N)q_{\varepsilon j}^*(M)
}
\end{aligned}
\tag{15.55}
$$

L'ensemble des paramètres locaux du problème approché est :

$$
\mathbb{Q}^{*+}(I,\Omega)=\left\{\begin{array}{r}
(q_{\varepsilon i}^+(M))_{(i)\in\{1,\dots,6\}},q_{m_{23}}^+(M),q_{r_1}^+(M),q_{r_{23}}^+(M),\\
T_\varepsilon^+(\Omega),T_{m_{23}}^+(\Omega),T_{r_1}^+(\Omega),T_{r_{23}}^+(\Omega),\\
V_{\varepsilon min}^+(\Omega),V_{\varepsilon max}^+(\Omega),V_{m_{23}min}^+(\Omega),V_{m_{23}max}^+(\Omega),\\
V_{r_1min}^+(\Omega),V_{r_1max}^+(\Omega),V_{r_{23}min}^+(\Omega),V_{r_{23}max}^+(\Omega)
\end{array}\right\}
$$

Bibliographie

[1] W. Albert. Über teibseile am harz. *Archive für mineralogie geognosie bergbau und hüttenkunde*, 10 :215–234, 1838.

[2] H. Auquier. Fracture de fatigue du calcanéum. *medical-athletics.eu*, medical-athletics.eu/pathologies/pied/fracture-de-fatigue-du-calcaneum.html, Bruxelles, Belgique, 2016.

[3] E. Aussedat, A. Thionnet, and J. Renard. Comportement en compression des composites par une définition du mode de sollicitation en mécanique de l'endommagement. *Comptes-rendus de l'Académie des Sciences de Paris, Série II*, 321 :533–540, 1995.

[4] C. Bathias. There is no infinite fatigue life in metallic materials. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, 22 :559 ?565, 1999.

[5] C. Bathias. An engineering point of view about fatigue of polymer matrix composite materials. *International Journal of Fatigue*, 28 :1094–1099, 2006.

[6] S. Bauchet and S. Lacaze. *Matériaux composites, mode de dégradation en traction (fissuration transverse) des composites stratifiés carbone/époxy.* Rapport de stage de DEA, Ecole Polytechnique / Onera, 1987.

[7] J. Berthelot and J.F. Le Corre. Statistical analysis of the progression of transverse cracking and delamination in cross-ply laminates. *Composites Sciences and Technology*, 60 :2659–2669, 2000.

[8] S. Blassiau, A. Thionnet, and A. Bunsell. Damage accumulation processes and life prediction in unidirectional composites. *Proceedings of the Royal Society (A)*, 463 :1135–1152, 2007.

[9] National Transportation Safety Board. Aircraft accident report - aloha airlines, flight 243. *Report NTSB/AAR-89/03*, 1989.

[10] R. Brighenti. Numerical modelling of the fatigue behavior of fibre-reinforced composite. *Composites Part B*, 35 :197–210, 2004.

[11] J.L. Chaboche. Une loi différentielle d'endommagement de fatigue avec cumulation non linéaire. *Revue française de Mécanique*, pages 50–51, 1974.

[12] J.L. Chaboche, P.M. Lesne, and J.F. Maire. A constitutive and damage model mixing scalar and tensorial damage variables. *Comptes-rendus de l'Académie des Sciences de Paris, Série IIb*, 322 :187–193, 1996.

[13] C.L. Chow and Y. Wei. A model of continuum damage mechanics for fatigue failure. *International journal of fracture*, 50 :301 – 316, 1991.

[14] Bureau de sécurité des transports du Canada. Déraillement en voie principale du train cp 803-111. *Rapport d'enquête ferroviaire*, R06C0104, 2006.

[15] Bureau de sécurité des transports du Canada. Déraillement du train maine et atlantic railway train, mma 2. *Rapport du laboratoire d'ingénierie*, LP184/2013, 2013.

[16] J. Degrieck and W. VanPaepegem. Fatigue damage modeling of fibre-reinforced composite materials : Review. *Applied Mechanics Review*, 54 :279–300, 2001.

[17] G. Duvaut and J.L. Lions. Les inéquations en mécanique et en physique. *Dunod, Paris*, 1972.

[18] Y.A. Dzenis. Cycle-based analysis of damage and failure in advances composite under fatigue. 2-stochastic mesomechanics modeling. *International Journal of Fatigue*, 25 :511–520, 2003.

[19] J.D. Eshelby. The determination of an elastic field of an ellipsoïdal inclusion and related problem. *Proceedings of The Royal Society of London, A*, 24/1226 :376–396, 1957.

[20] J.A. Ewing and J.C.W. Humfrey. The fracture of metals under repeated alternations of stress. *Proceedings of the Royal Society of London*, 71 :79, 1903.

[21] E.K. Gamstedt and R. Talreja. Fatigue damage mechanisms in unidirectional carbon-fibre-reinforced plastics. *Journal of materials science*, 34 :2535–2546, 1999.

[22] D. Gay. *Matériaux composites*. Hermés, 1997.

[23] H.J. Gough. The fatigue of metals. *Scott, Greenwood and son, Ed.*, 1924.

[24] A.A. Griffith. The phenomena of rupture and flow in solids. *Philosophical transactions of the Royal Society*, A221 :163–173, 1921.

[25] M. Gude, W. Hufenbach, and I. Koch. Damage evolution of novel 3d textile-reinforced composites under fatigue loading conditions. *Composites Science and Technology*, 70 :186–192, 2010.

[26] D. Halm and A. Dragon. An anisotropic model of damage and frictional sliding for brittle materials. *European Journal of Mechanics, A/Solids*, 17 :439–460, 1998.

[27] Z. Hashin. Analysis of composites materials. a survey. *Journal of Applied Mechanics*, 50 :481–505, 1983.

[28] C. Hochard, S. Miot, and Y. Thollon. Fatigue of laminated composite structures with stress concentrations. *Composites : Part B*, 65 :11–16, 2014.

[29] C. Hochard, J. Payan, and C. Bordreuil. A progressive first ply failure model for woven ply cfrp laminates under static and fatigue loads. *International Journal of Fatigue*, 28 :1270–1276, 2006.

[30] S. Hoole. The select works of antony van leeuwenhoek : containing his microscopical discoveries in many of the works of nature. *Publisher G. Sydney (London)*, 1800.

[31] B. Hopkinson. Discussion to paper by inglis. *Transactions of the Royal Institution of Naval Architects*, 55 :219 – 230, 1913.

[32] L.M. Kachanov. Time of the rupture process under creep conditions. *Izvestia Akademii Nauk, USSR, Nauk 8*, 1958.

[33] M. Kaminski, F. Laurin, J.F. Maire, C. Rakotoarisoa, and E. Hémon. Fatigue damage modeling of composite structures : the onera viewpoint. *AerospaceLab*, pages 1–12, 2015.

[34] V. Kazymyrovych. Very high cycle fatigue of engineering materials a literature review. *Research Report, ISBN 978-91-7063-246-4*, Karlstad University Studies :1403–8099, 2009 :22, 2009.

[35] D. Leguillon and E. Sanchez-Palencia. On the behaviour of a cracked elastic body with or without friction. *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée (1)*, 2 :195–209, 1982.

[36] I. Marines, X. Bin, and C. Bathias. An understanding of very high cycle fatigue of metals. *International Journal of Fatigue*, 25 :1101–1107, 2003.

[37] K.A. Miner. Cumulative damage in fatigue. *Journal of Applied Mechanics Transactions of ASME*, 67 :A159–A164, 1945.

[38] Y. Murakami and H. Matsunaga. The effect of hydrogen on fatigue properties of steels used for fuel cell system. *International journal of fatigue*, 28 :1509 – 1520, 2006.

[39] N.I. Muskhelishvili. Some basics problems of the mathematical theory of elasticity. *Noordhoff*, 1953.

[40] J. Nairn, S. Hu, and J. Bark. A critical evaluation of theories for predicting microcracking in composite materials. *Journal of Materials Science*, 28 :5099–5111, 1993.

[41] M. Navier. Mémoire sur les lois de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques. *Académie royale des Sciences*, lue le 14 mai 1821 :375–395, 1827.

[42] R.J. Nuismer. Predicting the performance and failure of multidirectional polymeric matrix composites laminates. *3rd International Conference on Composite Materials*, 1980.

[43] A.G. Palmgren. Die lebensdauer von kugellagern. *Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure (VDI Zeitschrift, ISSN 0341-7258)*, 68 :339–341, 1924.

[44] J. Payan and C. Hochard. Damage modelling of laminated carbon/epoxy composites under static and fatigue loadings. *International Journal of Fatigue*, 24 :299–306, 2002.

[45] A. Pineau and F. Hourlier. Propagation of fatigue cracks under polymodal fatigue. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, 5 :287–302, 1982.

[46] J.V. Poncelet. Introduction à la mécanique industrielle, physique ou expérimentale. *2nd Edition*, 1839.

[47] W.J.M. Rankine. On the causes of the unexpected breakage of the journals of railway axles, and on the means of preventing such accidents by observing the law of continuity in their construction. *Institution of Civil Engineering*, 2 :105–108, 1842.

[48] J. Schijve. Fatigue of structures and materials in the 20th century and the state of the art. *Materials Science*, 39 :307–333, 2003.

[49] W. Schütz. A history of fatigue. *Engineering fracture mechanics*, 54 :263–300, 1996.

[50] N. Selles, F. Nguyen, T.F. Morgeneyer, H. Proudhon, W. Ludwig, and L. Laiarinandrasana. Comparison of voiding mechanisms in semi-crystalline polyamide 6 during tensile and creep tests. *Polymer Testing*, 49 :137 – 146, 2016.

[51] F. Shen, W. Hu, Q. Meng, and M. Zhang. A new fatigue mechanics based approach to fatigue life prediction and its engineering application. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 28 :510–520, 2015.

[52] S.M. Spearing and P.W.R. Beaumont. Fatigue damage mechanics of composite materials. i : Experimental measurement of damage and post-fatigue properties. *Composites Science and Technology*, 44 :159–168, 1992.

[53] R.I. Stephens, A. Fatemi, R.R. Stephens, and H.O. Fuchs. Metal fatigue in engineering. *2nd Edition, J. Wiley and Son Inc.*, 2001.

[54] C. Sun, X. Zhang, X. Liu, and Y. Hong. Effects of specimen size on fatigue life of metallic materials in high-cycle and very-high-cycle fatigue regimes. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, Special issue :In press, 2016.

[55] R. Talreja. *Fatigue of Composite Materials*. Technical University of Denmark, 1985.

[56] R. Talreja. Fatigue of composite materials. *Technical University of Denmark*, 1985.

[57] R. Talreja. Transverse cracking and stiffness reduction in composite laminates. *Journal of Composite Materials*, 19 :355–375, 1985.

[58] R. Talreja. Stiffness properties of composite laminates with matrix cracking and interior delamination. *Engineering Fracture Mechanics*, 25 :751–762, 1986.

[59] R. Talreja. Damage and fatigue in composites. a personal account. *Composites Science and Technologie*, 68 :2585–2591, 2008.

[60] M. Taya and T.W. Chou. On two kinds of ellipsoïdal inhomogeneities in a infinite elastic body : an application to a hybrid composite. *International Journal of Solids and Structures*, 17 :553–563, 1981.

[61] A. Thionnet. *Prévision d'endommagement sous chargements quasi-statiques et cycliques des structures composites stratifiées.* Thèse d'Université, Université Paris 6, 1991.

[62] A. Thionnet. A model for the recovery of thermomechanical properties in strongly anisotropic damaged materials. *Journal of Composite Materials*, 35 :731–750, 2001.

[63] A. Thionnet. From fracture to damage mechanics : a behavior law for microcracked composites using the concept of crack opening mode. *Composite structures*, 92 :780–794, 2010.

[64] A. Thionnet. Conceptualisation et classification des problèmes de fatigue mécanique. *Comptes Rendus Mécanique*, 339 :573–590, 2011.

[65] A. Thionnet, L. Chambon, and J. Renard. A theoretical and experimental study to point out the notion of loading mode in damage mechanics : application to the identification and validation of a fatigue damage modeling for laminates composites. *International Journal of solids and structures*, 24 :147–154, 2002.

[66] A. Thionnet and C. Martin. *Mécanique et comportements des milieux continus. Tome 1 : concepts généraux.* Ellipses, 2003.

[67] A. Thionnet and C. Martin. A new constructive method using the theory of invariants to obtain material behavior laws. *International Journal of Solids and Structures*, 43/2 :325–345, 2006.

[68] A. Thionnet, C. Martin, and S. Barradas. *Mécanique et comportements des milieux continus. Tome 2 : applications et théorie des invariants.* Ellipses, 2003.

[69] A. Thionnet and J. Renard. Modelling unilateral damage effect in strongly anisotropic materials by the introduction of loading mode in damage mechanics. *International Journal of Solids and Structures*, 36 :4269–4287, 1999.

[70] A. Thionnet and J. Renard. Une étude théorique et expérimentale pour mettre en évidence la notion de mode en mécanique de l'endommagement. *Revue des composites et des matériaux avancés*, 11(3) :349–364, 2001.

[71] A. Thum. Festigkeitsprüfung beischwingender beanspruchung. *Siebel, Handbuch der Werkstoffprüfung, 2.Bd.S. 175/231. Verlag Springer, Berlin*, 1939.

[72] A. Wöhler. Wöhler's experiments on the strength of metals. *Engineering*, 2 :160–161, 1867.

[73] Y.C. Xiao, S. Li, and Z. Gao. A continuum damage mechanics model for high cycle fatigue. *International journal of fatigue*, 20 :503 – 508, 1998.

Titre : Vers une approche locale du phénomène de fatigue mécanique. Application aux matériaux et aux structures en composites à fibres continues.

Mot clés : Fatigue / Modélisation / Endommagement / Lois d'évolution.

Résumé : Le concept de fatigue mécanique au sens originel fait référence au niveau structural et opère donc sur les structures, c'est-à-dire dans le cadre de la Mécanique de la Rupture. Les modèles construits doivent donc réaliser leur identification sur une structure : changer la structure, change donc le modèle et donc l'identification du modèle. L'emploi d'une Mécanique qui traite toujours les problèmes d'endommagement mais dans un cadre plus local est donc forcément judicieux : la Mécanique de l'Endommagement est une bonne candidate. Les modèles de comportements endommageables construits dans ce cadre ne nécessitent qu'une unique identification à l'échelle du VER et sont utilisables dans n'importe quelle géométrie structurale. Cette voie a été évidemment prise depuis longtemps. Toutefois, on y rencontre souvent des incohérences. Par exemple, le compteur de cycles de la sollicitation appliquée à la structure se retrouve gouverner la loi d'évolution des phénomènes d'endommagement au niveau local. Pourtant, il n'y a aucune raison objective qui puisse justifier cela sans précaution, et c'est parfois parfaitement faux. Il s'agit dans cette étude de faire rentrer rigoureusement le concept de fatigue mécanique dans le cadre local de la Mécanique de l'Endommagement et de réaliser une approche locale de la fatigue. Le but ultime est de réaliser des calculs de structure sous sollicitations de fatigue avec la même exigence de validité que des calculs de structure sous sollicitations quasi-statiques. En tout premier lieu, la mise en évidence des carences de l'existant démontre qu'à l'heure actuelle rien ne permet de réaliser un calcul de structure en fatigue, utilisant la Mécanique de l'Endommagement, dans des conditions parfaitement satisfaisantes. C'est la raison pour laquelle, en second lieu, la notion de problème de fatigue est formalisée Cette formalisation est à la base d'un cadre que l'on estime propice à l'écriture d'une approche locale de la fatigue. Le souhait délibéré de ne pas construire des lois de fatigue incrémentales mais des lois gouvernées par un compteur de sollicitations et surtout déduites de lois d'évolution écrites en quasi-statique, oblige à des règles de linéarisation, puis à l'énoncé précis d'une démarche. En utilisant des cas particuliers de problèmes de fatigue et en appliquant la démarche énoncée, l'écriture rigoureuse et l'identification d'un modèle d'endommagement en fatigue pour le phénomène de fissuration intralaminaire présent dans les composites à fibres continues est réalisée. Les lois locales de fatigue écrites sont mises en place dans un processus de calcul de structure sous sollicitation de fatigue. On constate, pour ces cas particulier de matériaux et de phénomène d'endommagement, qu'avec la démarche mise en place, la résolution des problèmes de calcul de structure en fatigue peut être réalisée avec la même aisance que la résolution des problèmes de calcul de structure sous sollicitations quasi-statiques. Ce travail pose des bases très générales pour une approche nouvelle de la fatigue des structures. Il clarifie le concept de fatigue en le faisant rentrer dans un cadre très structuré dans le but de mener à bien une approche locale de la fatigue, en vue d'une utilisation dans des calculs de structure en fatigue. Il a été utilisé avec succès dans une configuration particulière. Pourtant, pour l'heure, il est difficile de dire s'il va permettre une approche locale de la fatigue pour tous les phénomènes, tous les matériaux et pour les cas les plus généraux de sollicitations. Cette étude n'a pas pour ambition d'amener une réponse à tous ces cas mais d'être une voie ouverte à la résolution d'autres cas, voire à une généralisation sans condition, d'une approche locale de la fatigue.

Title : Toward a local approach to the mechanical fatigue phenomenon. Application to continuous fibres composite structures and materials.

Keywords : Fatigue / Modelling / Damage / Evolution laws.

Abstract : The original concept of mechanical fatigue was linked to the failure of structures and was treated at first within the framework of Fracture Mechanics. Models developed to explain this phenomenon must therefore be able to be applied to structures : changing the structure means changes to the model and its identification. It is therefore judicious to develop models capable of treating both the damage processes and also able to be used within a local framework : to this end a method based on Damage Mechanics seems appropriate. This approach has long been employed and requires only the identification of damage processes at the level of the RVE (Representative Volume Element) to be used for any structural geometry. However incoherencies can be encountered such as when the number of load cycles applied to the macroscopic structure does not reflect the internal loading kinetics, leading, for example to effects due to the frequency of loading. This can be found to influence the laws governing the evolution of damage phenomena at the local level, leading to wrong conclusions. Nevertheless this is not inevitable if precautions are taken. This goal of this study has been to introduce rigorous concepts of mechanical fatigue in the local framework of Damage Mechanics and to carry out a local approach to fatigue. The ultimate aim has been to be able to carry out calculations on structures subjected to fatigue loading with the same degree of finesse as under quasi-static conditions. An initial step has been to reveal the shortcomings of existing models and show that at present no model of a structure subjected to fatigue using Damage Mechanics is perfectly satisfactory. As a result the notion of the fatigue problem has been formulated and used as a base for defining a suitable framework for developing a local approach to fatigue. A deliberate goal has been to avoid constructing incremental fatigue laws but to introduce the real effects of loading cycles deduced from the evolution of behavioural laws obtained in quasi-static tests, requiring rules of linearization and a clear definition of the adopted approach. Benefiting from specific problems involving fatigue damage and applying them to this approach, a rigorous description of the phenomena and the identification of a fatigue damage model applied to intra-laminar cracking has been developed. The laws governing the local approach have been described for the case of a structure subjected to fatigue. It has been shown that for a given case of a material and damage processes the proposed approach applied to a structure subjected to fatigue loading can be modelled with the same ease as resolving the effects of quasi-static loading. This study has created very general foundations for a new approach to understanding the fatigue of structures. It clarifies the fatigue concept by defining it within a tightly defined framework with the goal of formulating a local approach to fatigue applied to the calculation of structures subjected to fatigue loading. It has been successfully used for a particular configuration. However for the present it is difficult to assert that it can be used as a local approach for all fatigue phenomena, in all materials and for the most general types of loading. The study has not had the ambition of providing a solution to all these cases but rather to open a new approach to resolve other cases and possibly to provide a guideline to achieving a truly local approach to a general solution of the fatigue of structures.

UBFC
UNIVERSITÉ
BOURGOGNE FRANCHE-COMTÉ

Université de Bourgogne Franche-Comté
32, avenue de l'Observatoire
25000 Besançon