



HAL
open science

Dynamique quantique en temps longs d'états cohérents dans un champ magnétique fort

Grégory Boil

► **To cite this version:**

Grégory Boil. Dynamique quantique en temps longs d'états cohérents dans un champ magnétique fort. Physique mathématique [math-ph]. Université de Rennes, 2018. Français. NNT : 2018REN1S061 . tel-02064166

HAL Id: tel-02064166

<https://theses.hal.science/tel-02064166>

Submitted on 11 Mar 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE DE DOCTORAT DE

L'UNIVERSITE DE RENNES 1
COMUE UNIVERSITE BRETAGNE LOIRE

ECOLE DOCTORALE N° 601
*Mathématiques et Sciences et Technologies
de l'Information et de la Communication*
Spécialité : *Mathématiques*

Par
Grégory BOIL

**Dynamique quantique en temps longs d'états cohérents dans un champ
magnétique fort**

Thèse présentée et soutenue à Rennes, le 16 novembre 2018
IRMAR – UMR CNRS 6625

Rapporteurs avant soutenance :

Vincent BRUNEAU, Professeur, Université de Bordeaux
Søren FOURNAIS, Professeur, Aarhus University

Composition du Jury :

Examineurs : Jean-Marc BOUCLET
Vincent BRUNEAU
Clotilde FERMANIAN KAMMERER
Nicolas RAYMOND
Didier ROBERT
Dir. de thèse : San VU NGOC

Professeur, Université Paul Sabatier
Professeur, Université de Bordeaux
Professeur, Université Paris-Est
Professeur, Université d'Angers
Professeur, Université de Nantes
Professeur, Université de Rennes

À ma maman

Remerciements

Il sied de commencer ce manuscrit par remercier les différents contributeurs. Ils sont nombreux et ont contribué chacun à leur manière.

Le premier à qui je dois cette thèse est bien entendu San. Merci à toi. Merci d'abord pour ta rigueur, qui m'a permis de déceler mes nombreuses erreurs dans mes nombreux 'grands O', merci pour ta passion pour la géométrie et pour le calcul semi-classique, que j'ai fini par aimer aussi. Merci pour ton recul et ta grande connaissance mathématique, qui furent très inspirants. J'ai beaucoup appris à tes côtés, et je t'en suis vraiment reconnaissant.

Une autre personne à qui cette thèse doit énormément est Nicolas Raymond. Merci pour ta bonne humeur à faire des maths et à travailler dans le domaine des champs magnétiques. Merci pour ton aide précieuse, que ce soit en début de thèse, en me rassurant lors d'un trajet en bus, ou sur la fin, en coécrivant un papier qui a débloqué mon travail de recherche. J'ai pris beaucoup de plaisir à travailler avec toi ! Merci de me faire l'honneur aussi de présider aujourd'hui mon jury.

Merci à Søren Fournais et à Vincent Bruneau d'avoir accepté de rapporter ma thèse. Ce n'est pas une tâche aisée de relire le travail d'un autre et je vous remercie de l'avoir fait. Merci aussi à Clotilde Fermanian Kammerer, à Jean-Marc Bouclet et à Didier Robert de venir compléter mon jury. Merci de vous être déplacés jusqu'à Rennes.

Merci à tout le personnel de l'IRMAR. Une pensée particulière pour les gestionnaires, à savoir Florian, Xhensila, Marie-Aude, Emmanuelle, Chantal, Carole (même si elle n'y travaille plus). Merci d'être les "nouns" des doctorants, nous guidant à travers les affres administratives auxquelles nous sommes quelques fois confrontés et devant lesquelles je me suis souvent senti démuni. Merci particulièrement pour l'aide précieuse apportée lors de l'organisation des Rencontres Doctorales Lebesgues 2017. Ce fut un réel plaisir de collaborer avec vous.

Merci à tous les profs, qui par la suite sont devenus des collègues. Merci particulièrement à Florian Méhats et à François Castella pour leur transmission de l'amour de l'analyse, à Françoise Dal'Bo, à Dominique Cerveau et à Juan Souto de m'avoir montré les beautés de la géométrie et de la topologie. Mes années à l'ENS furent particulièrement marquées par les cours de Michel Pierre, d'Arnaud Debussche et de Benoit Cadre. Merci à Karine Beauchard, à Thibaut Deheuvels, à Benjamin Boutin, à Matthieu Romagny avec lesquels j'ai travaillé pour la prépa Agreg et auprès desquels j'ai beaucoup appris. Merci à Yannick Bonthonneau avec qui j'ai eu quelques réjouissantes discussions autour des états cohérents. Merci aussi à Christophe Cheverry, à Vincent Duchêne et aux autres chercheurs de l'IRMAR pour leur disponibilité et pour la bonne ambiance qui règne dans les couloirs du labo.

Merci à mes différents cobureaux, à Julie et Hélène pour les pauses thé, à Zoïs et à Tho. Un merci tout particulier pour Zoïs pour avoir calmement supporté mes "râleries" régulières sur les joies du doctorat. Merci à l'équipe des doctorants qui fait qu'il est agréable d'être à l'IRMAR. Merci aux potes de promo, à Jean-Jérôme pour sa philosophie de vie très personnelle (et toute mes félicitations ! Beaucoup de bonheur dans votre vie à deux avec Julie). Merci à Tristan et Pauline pour leur hospitalité à différentes occasions, pour les joies de parler anglais ensemble, pour notre amour de Bob Dylan.... je vous souhaite de réussir dans vos projets ! Merci à Adrien et Marine de m'avoir accompagné tout au long de ces années, de l'intégration à l'ENS jusqu'au doctorat, ce fut un réel plaisir d'être avec vous, et je suis sûr que vous serez des parents formidables ! Merci à Coralie pour ses pauses café où on refaisait le monde en partageant nos expériences

kinés de faux sportifs. Merci à Christophe et Maxime d'avoir rendu cette année de prépa Agreg si sympa ! Et merci à tous les autres, à Théo, Laurianne, Ysaline, Cyril, Olivier, Côme, Tristan H.... Bonne continuation à vous !

Reste à remercier les Rennais. Ou du moins ceux qui sont passés par Rennes. En premier lieu merci à tous ceux qui m'ont accueilli à mon arrivée. Merci à Laël, puis Céline, à la famille Cardinal, ma famille d'adoption bretonne, à Tony et Dominique. Merci à Virginie, puis Adrien, puis Ezio pour leur amitié.

Merci à mes soeurs, Lalie, Flo et Esther d'avoir été si présentes toutes ces années. Merci pour tous ces goûtés, pour ces soirées, ainsi que pour les repas préparés lors de la rédaction de ce manuscrit. Cette thèse doit beaucoup à votre bonne humeur, à votre bonne compagnie et à vos encouragements.

Ces années n'auraient pas été ce qu'elles furent sans le "Groupe Mongol". Qu'en dire sinon que c'est la chose la plus improbable de ma vie. Merci à toutes les aventures et tous ces *moments* qu'il a généré et qu'il génère encore. Mention spéciale à Papy et Mamie, à Takeru et Ai, et à Nob et Ayumi.

Merci à tous mes Amis. À ma soeur jumelle Titi et à sa vision très optimiste de la vie, à Deb et son pragmatisme, et ces soirées *vinfromagesuruncartonavecunbanoffee*, à Lynn et à son franc parler et à nos restos éclairs et à notre élitisme latent (lol). Merci à Smeuh, à Tatia, à Marine, à Chloé, à Marin mais aussi à Mel Mosco et à Sev pour tous ces Fest-Noz, pour nos discussions et pour toutes ses folies qui ont rendu nos différents services si trépidants. Merci à Mel et Steve, à Mayou (y su novio), merci à Petit-frère et à papa et maman Tilly pour votre hospitalité (et pour ces discussions autour d'un pot de lait concentré sucré, que je ne pense pas pouvoir oublier un jour), merci à Margot et à Giac pour nos discussions enflammées. Merci à Tristan du Béthel pour notre amitié de longue date (et pour ces semaines rennaises si fortes en émotions).

Merci à mes relecteurs, notamment à Mathilde pour ces soirées relecture/piano/whisky, à Gwen qui s'est appliqué à bien relire sans trop comprendre ce qu'il lisait, à Alban pour les corrections en anglais.

Romain... Merci de m'avoir supporté durant ces trois années de thèse. Je te dois beaucoup plus que tu ne l'imagines. Merci d'avoir été un si joyeux coloc, merci pour ta patience et pour ton amitié. Ces soirées *debrief* me manqueront à moi aussi (ainsi que les nombreux instants *slowmotion*). Et merci d'avoir fini par apprendre le titre de ma thèse.

Merci Arnaud pour ta fidèle amitié et pour ton soutien. Merci pour les innombrables soirées passées ensemble à refaire le monde.

Vincent. Merci d'être toujours aussi présent dans ma vie. Merci pour tes conseils, pour ton amitié. Merci de m'avoir permis de finir (on n'oublie pas cette discussion dans mon bureau, au tel, où tu m'enjoins de ne pas laisser tomber, ni ce merveilleux monde bleu quantique...). Merci bro ! Ayé, j'y suis !

Merci à tous ceux que je n'ai pas nommés, mais qui ont aidé à ce travail de thèse. Si je devais n'en mentionner que quelques uns, je remerciais Yann et Aurélie pour leurs encouragements, Stéphane et Tiffany pour leur compagnie plus qu'agréable et pour leur amitié spontanée, merci aux suédois, aux hongrois, et à plein d'autres.

Je finirai ces remerciements par ma famille. Merci à mon frère et à ma soeur que j'aime tendrement. Merci à mes parents pour leur indéfectible soutien, pour leur amour et pour leur amitié aussi. Merci à eux de rester eux-mêmes en toutes circonstances (on se remémore avec émotion la dynamique quantique qui chante au milieu des champs magnétiques, hein maman). Merci pour leur simplicité de vie qui m'inspire et me rappelle que derrière la beauté mathématique se cache un vrai monde réel.

DYNAMIQUE QUANTIQUE EN TEMPS LONGS D'ÉTATS
COHÉRENTS DANS UN CHAMP MAGNÉTIQUE FORT

Grégory BOIL

Table des matières

1	Introduction	5
1.1	Contexte historique	6
1.1.1	Mécanique céleste : les prémices de la dynamique hamiltonienne	6
1.1.2	La catastrophe ultraviolette, les quantas d'énergie et les grains de lumière	7
1.1.3	Mécanique ondulatoire et principe d'incertitude	7
1.2	Problématique étudiée	9
1.2.1	De l'incertitude d'Heisenberg à la cohérence d'un état	9
1.2.2	Champ magnétique et le cas 2-D	13
1.3	Résultats prouvés dans ce manuscrit	15
1.3.1	Définition d'une nouvelle classe d'états et étude de la propagation en temps finis	15
1.3.2	Propagation magnétique en temps long	20
1.3.3	Propagation magnétique d'états cohérents : un résultat d'ubiquité	26
1.4	Organisation du manuscrit	32
2	Un monde magnétique	33
2.1	Cadre magnétique	36
2.1.1	Du champ magnétique à l'hamiltonien magnétique	36
2.1.2	De l'hamiltonien magnétique au laplacien magnétique	41
2.2	Géométrie du champ magnétique et formes normales	48
2.2.1	Cas du champ constant	48
2.2.2	Forme normale symplectique de l'hamiltonien	49
2.2.3	Forme normale quantique	52
2.3	Une idée des preuves des théorèmes de formes normales	53
2.3.1	Étude géométrique du fibré normal symplectique à la surface caractéristique	54
2.3.2	Construction du symplectomorphisme Φ	55
2.3.3	Forme normale de Birkhoff	57
2.3.4	De la forme normale symplectique à la forme normale quantique	59
3	Propagation magnétique, temps longs et estimées de Schwartz	63
3.1	Introduction	64
3.1.1	Motivation and context	64
3.1.2	Main results	65
3.1.3	Organisation of the proofs	66
3.2	Magnetic elliptic estimates	67
3.2.1	Density argument	67
3.2.2	Preliminary lemmas	68
3.2.3	Case $n = 1$	69
3.2.4	Induction	70
3.3	Application to the evolution problem	71
3.3.1	Case when $\kappa = 0$	72

3.3.2	Case when $\kappa = 1$	72
3.3.3	Induction	72
4	Les états cohérents et leur propagation	75
4.1	États gaussiens et états comprimés	77
4.1.1	Définition de la classe d'états	77
4.1.2	Propagation quadratique	78
4.1.3	Opérateurs métaplectiques et transformation de Wigner	82
4.1.4	Propagation d'états cohérents comprimés par des hamiltoniens généraux	87
4.2	Une classe générale d'états cohérents et les résultats de propagation afférants	89
4.2.1	Definition of the class	89
4.2.2	Propagation results	90
4.2.3	Wigner transform of coherent states and applications	96
5	Propagation magnétique d'états cohérents en temps longs	103
5.1	Introduction	104
5.1.1	Motivation	104
5.1.2	Mathematical background	105
5.1.3	Description of the main results	106
5.1.4	Organization of the article	108
5.2	A general class of coherent states and related propagation results	108
5.3	Geometry and propagation under magnetic field	108
5.3.1	Symplectic normal form	109
5.3.2	Quantum normal form	109
5.3.3	Quantum propagation under magnetic field	110
5.4	Propagation of \mathfrak{C} -class states	110
5.4.1	Propagation through the normal form	111
5.4.2	Back to the initial magnetic laplacian	114
5.4.3	End of the proof of Theorems 5.1.1 and 5.1.2	119
5.5	Conclusion	120
6	Conclusion	121
6.1	Confinement magnétique, propriétés spectrales et propagation en temps longs	122
6.2	Étude numérique de la propagation en temps longs	123
6.3	Revivals magnétiques	124
A	Deux théorèmes importants	125
A.1	Théorème de Stone	125
A.2	Théorème d'Egorov	125
	Bibliographie	127

Chapitre 1

Introduction

And God said : “Let there be light.” Then there was light.

Genesis 1:3, *New World Translation of the Holy Scriptures*

1.1 Contexte historique

Messenger divin, rayonnement stellaire, onde, particule... la lumière a toujours fasciné l'homme. Sa perception et la compréhension de sa nature ont évolué au cours des siècles, menant à de nombreuses découvertes. L'homme commença par étudier la lumière qui lui venait du ciel, que ce soit celle du Soleil qu'il peine à regarder ou celle des étoiles qu'il contemple. Observant la périodicité et la précision de leur mouvement, les civilisations antiques apprirent à construire des calendriers, afin de prédire les saisons à venir ou les équinoxes. Ces mouvements furent mis en équations pour la première fois de manière précise par Newton. Une fois le mouvement de ces luminaires célestes appréhendé, il s'interrogea sur la nature même de la lumière. Ce fut Maxwell qui pour la première fois en proposa une description ondulatoire, la définissant comme un phénomène électromagnétique. Finalement, suite à la révolution quantique qu'initia Planck, l'étude de l'effet photoélectrique mena Einstein à suggérer une description corpusculaire de la lumière. Cette dualité onde/corpuscule poussa alors de Broglie à généraliser cette description ondulatoire à toutes les particules de matière, ce qui permit à Schrödinger d'établir sa célèbre équation...

1.1.1 Mécanique céleste : les prémices de la dynamique hamiltonienne

La présentation qui suit est inspirée de [14] et du très éclairant [53]. Elle introduit les outils nécessaires à l'exposé de la problématique étudiée dans ce manuscrit de thèse, qui sera développée dans la section 1.2.

L'histoire de la mécanique telle qu'on la connaît aujourd'hui débute avec Newton. Il s'appuie sur les travaux de Copernic et Galilée, pères de l'héliocentrisme, et de Kepler, qui introduisit ses trois lois, expliquant notamment que les planètes et les comètes ont des trajectoires elliptiques. Introduisant le calcul infinitésimal (indépendamment et simultanément à Leibniz), il obtient une description précise de la mécanique des corps célestes. C'est dans son livre *Principia* qu'il écrit ses lois, notamment la seconde loi de Newton, connue aussi sous le nom de 'principe fondamentale de la dynamique'. Ainsi naquit la *mécanique classique*.

Ces lois inspireront toute une génération de scientifiques (aujourd'hui célèbres), et pour cause, elles permettent une mise en équation du mouvement. On peut citer par exemple Euler, Lagrange ou encore Hamilton. Les travaux de ce dernier aboutiront sur une reformulation de la mécanique classique, à savoir la *mécanique hamiltonienne*. Cette mécanique exprime les trajectoires non plus en termes de position, mais en terme de *position et d'impulsion*. Le mouvement est donc vu dans l'espace $\mathbb{R}_q^n \times \mathbb{R}_p^n$, (q, p) désignant les variables (*position, impulsion*). Cet espace est appelé *espace des phases* ou *espace des configurations* et est

défini comme le cotangent $T^*\mathbb{R}_q^n$ de l'espace des positions \mathbb{R}_q^n , les covecteurs d'un vecteur fixé désignant les impulsions d'une position donnée. La mécanique hamiltonienne provient alors de la description des systèmes dynamiques par une fonction H en les variables (q, p) correspondante à l'énergie du système étudié, appelée la *fonction hamiltonienne* (nommée H par Lagrange en l'honneur de Huygens, et non de Hamilton contrairement aux apparences... voir [42]). Elle a pour expression dans de nombreux cas

$$H(q, p) = (p - A(q))^2 + V(q), \quad (q, p) \in \mathbb{R}_q^n \times \mathbb{R}_p^n$$

où A est un potentiel vecteur et V une fonction potentiel. Par exemple, en électromagnétisme, A désigne le *potentiel magnétique* et V le *potentiel électrique*. L'entier n désigne le nombre de variables de positions, $n = 2$ dans le cas d'un mouvement plan par exemple. De cette fonction on déduit les trajectoires de la dynamique via les équations hamiltoniennes du mouvement

$$\begin{cases} \dot{q}(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(q(t), p(t)) \\ \dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial q}(q(t), p(t)) \\ (q(0), p(0)) = (q_0, p_0) \end{cases} \quad . \quad (1.1)$$

Cette formulation permettra notamment l'introduction de la géométrie symplectique dans la dynamique classique, dont on illustrera quelques avantages dans le Chapitre 3. On peut insister sur le fait que l'état d'une particule, i.e. sa position et son impulsion, est alors décrit par un point de l'espace des phases.

Au 19^e siècle, la mécanique classique connaît une profonde évolution par l'introduction de la notion de *champs*. Jusque là, les 'particules' interagissaient entre elles via des 'forces'. Cependant, les travaux de Faraday prolongés par ceux de Maxwell montrent la nécessité d'introduire les 'champs', des objets physiques immatériels qui interagissent et mettent en mouvement la matière. Maxwell, en 1864, formule alors les célèbres *équations de Maxwell*, mettant ainsi en équation les *champs électrique et magnétique* et présentant les liens entre ces derniers. Il propose alors une description de la lumière en tant qu'onde électromagnétique.

1.1.2 La catastrophe ultraviolette, les quantas d'énergie et les grains de lumière

À la fin du 19^e siècle, Planck s'intéresse au rayonnement des corps noirs. Il n'arrive pas à concilier deux lois sur ce rayonnement, les lois de Wien et de Rayleigh-Jean, qui donnent la longueur d'onde du rayonnement en fonction de la température du corps noir mais dans des domaines spectraux différents. La loi de Rayleigh-Jean étant mise en défaut pour de petites longueurs d'onde, cela remet en cause la thermodynamique et en fait toute la dynamique classique de l'époque : il s'agit de la *catastrophe ultraviolette*. Cela le poussera à introduire timidement en 1901 la constante de Planck h et la théorie des quanta d'énergie. Il explique que les échanges d'énergie ΔE entre le corps noir et son rayonnement sont quantifiés, multiples entiers de la constante de Planck réduite

$$\Delta E = n\hbar$$

où $\hbar = h/2\pi$. Cette théorie ne sera confirmée que quelques années plus tard, en 1905, par Einstein et son explication de l'effet photoélectrique. Il introduisit alors les quanta de lumière, c'est à dire les photons, qui constituent une description corpusculaire de la lumière.

1.1.3 Mécanique ondulatoire et principe d'incertitude

En 1924, dans sa thèse de doctorat, Louis de Broglie suggère alors que cette dualité onde/corpuscule ne se limite pas uniquement aux photons mais à toute particule de matière. Il propose que l'on puisse associer une onde à chaque particule, et cette théorie sera confirmée dans le cas des électrons par l'expérience de Davisson et Germer en 1927. Seulement deux années après l'hypothèse de De Broglie, en réponse à une question de Debye ("*If there is a wave, there must be a wave equation!*"), Schrödinger propose une équation décrivant la propagation d'une telle onde (c.f. [64]). Il postule que la fonction d'onde ψ d'une particule seule évoluant sous un potentiel V doit être solution de

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + V\psi. \quad (1.2)$$

Cette formulation de la mécanique quantique est alors fortement rattachée à la mécanique hamiltonienne, l'opérateur $-\hbar^2\Delta + V$ étant obtenu par *quantification* de l'hamiltonien H .

La quantification a pour but d'associer à un hamiltonien, i.e. une fonction $H \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^*\mathbb{R}_q^n, \mathbb{R})$ que l'on appellera *symbole*, un opérateur $\hat{H} \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}_x^n))$, que l'on appellera *opérateur pseudo-différentiel* ou *opérateur de Schrödinger*. L'idée est de quantifier pour $1 \leq j \leq n$, le symbole de position

$$Q_j : (q, p) \mapsto q_j$$

en l'opérateur de multiplication par x_j

$$\hat{Q}_j : f \in L^2(\mathbb{R}^n) \mapsto x_j f$$

et le symbole d'impulsion

$$P_j : (q, p) \mapsto p_j$$

en l'opération de dérivation

$$\hat{P}_j : f \in L^2(\mathbb{R}_x^n) \mapsto -i\hbar\partial_j f.$$

Les opérateurs \hat{Q}_j et \hat{P}_j définissent alors des opérateurs autoadjoints, non bornés sur $L^2(\mathbb{R}^n)$. On cherche alors naïvement à remplacer q_j par \hat{Q}_j et p_j par \hat{P}_j dans l'expression de l'hamiltonien H . Ceci dit, du fait de la non-commutation des opérateurs \hat{Q}_j et \hat{P}_j , le symbole

$$(q, p) \mapsto q_j p_j$$

peut être quantifié de deux manières différentes : $\hat{Q}_j \hat{P}_j$ ou $\hat{P}_j \hat{Q}_j$. Il est donc nécessaire de définir une méthode de quantification. La méthode de quantification qui sera utilisée ici sera la *quantification de Weyl*, parfois appelée aussi quantification de Schrödinger. Elle concerne certaines classes de symboles que nous allons brièvement introduire. On se référera à [74] pour une présentation plus détaillée. On commence par définir une fonction d'ordre m . Il s'agit d'une fonction vérifiant la propriété

$$m \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^*\mathbb{R}_q^n, \mathbb{R}) \quad \text{telle que} \quad \exists C, r > 0, \forall X, Y \in \mathbb{T}^*\mathbb{R}^n \quad m(X) \leq C \langle X - Y \rangle^r m(Y)$$

où $\langle X \rangle := (1 + \|X\|^2)^{1/2}$. On définit alors la classe de symbole associée

$$S(m) := \{a \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^*\mathbb{R}_q^n, \mathbb{R}) \mid \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \exists C_\alpha > 0, |\partial^\alpha a| \leq C_\alpha m\}.$$

Alors, pour tout $a \in S(m)$, on associe l'opérateur $\text{Op}_\hbar^w(a)$ défini en $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ par

$$\text{Op}_\hbar^w(a)\psi : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \frac{1}{(2\pi\hbar)^n} \iint_{\mathbb{R}^{2n}} e^{\frac{i}{\hbar}(x-y)\xi} a\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) \psi(y) dy d\xi.$$

L'opérateur $\text{Op}_\hbar^w(a)$ peut alors être étendu en un opérateur non borné sur $L^2(\mathbb{R}^n)$. Cette quantification est une quantification symétrique car elle quantifie les symboles réels en des opérateurs symétriques, par exemple,

$$\text{Op}_\hbar^w((q, p) \mapsto q_j p_j) = \frac{\hat{Q}_j \hat{P}_j + \hat{P}_j \hat{Q}_j}{2}.$$

La théorie ondulatoire de la matière développée par de Broglie et Schrödinger se heurte alors à une difficulté majeure, tant d'ordre physique que philosophique ou pragmatique. Effectivement, en 1927 Heisenberg présente, sur la base des travaux de De Broglie et Schrödinger, son principe d'incertitude. Il se formule comme suit : pour ψ une fonction d'état, i.e. telle que $|\psi|^2$ soit une densité de probabilité, on définit les positions et impulsions moyennes de ψ comme

$$\langle Q \rangle_\psi = \langle \psi, x\psi \rangle_{L^2} \quad \text{et} \quad \langle P \rangle_\psi := \langle \psi, -i\hbar\partial_x \psi \rangle_\psi$$

et les variances associées

$$\Delta_\psi Q := \sqrt{\langle Q^2 \rangle_\psi - \langle Q \rangle_\psi^2} \text{ et } \Delta_\psi P := \sqrt{\langle P^2 \rangle_\psi - \langle P \rangle_\psi^2}$$

(en supposant que toutes ces quantités existent). Alors,

$$\Delta_\psi Q \Delta_\psi P \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (1.3)$$

Autrement dit, il est impossible de décrire avec précision à la fois la position et l'impulsion d'une particule quantique. Ceci remet en question l'existence même de particules quantiques (car non localisées) ainsi que la description de telles particules par un espace des phases quantique, comme c'était le cas pour la mécanique hamiltonienne.

Néanmoins, la question avait été anticipée par Schrödinger. En effet ce dernier montre dans [63] que la dynamique d'un état gaussien localisé propagé par un oscillateur harmonique reste localisée autour de la dynamique classique associée. On peut aussi citer les travaux d'Ehrenfest et sa communication [18] en 1927 dans laquelle il montre que pour des temps plus petits qu'un temps \mathcal{T}_E un état initialement localisé reste localisé autour de la trajectoire classique. Le temps \mathcal{T}_E sera alors dénommé *temps d'Ehrenfest* et correspondra au temps auquel un état localisé perd toute localisation. Cela mènera à l'étude d'une classe particulière d'états localisés : les *états cohérents*.

1.2 Problématique étudiée

Le sujet de ce manuscrit s'insère dans cette problématique. Il s'agit d'étudier l'évolution de la localisation d'états d'une classe particulière, les *états cohérents*, dans un cadre bien précis, celui de la *propagation magnétique 2-D*. Dans le cas de ces états extrêmement localisés, les liens entre la dynamique quantique et la dynamique classique sous-jacente sont forts. Ils seront mis en évidence de manière générale dans le Chapitre 4 et dans le cas précis de la propagation magnétique 2-D dans le Chapitre 5.

1.2.1 De l'incertitude d'Heisenberg à la cohérence d'un état

Reprenons le principe d'incertitude d'Heisenberg et donnons en un énoncé plus général et plus précis. Avant cela, on définit pour un opérateur auto-adjoint C non nécessairement borné sur $L^2(\mathbb{R}^n)$, et pour une fonction $\psi \in \mathbf{Dom}(C) \cap \mathbf{Dom}(C^2)$, la valeur moyenne de C en ψ

$$\langle C \rangle_\psi := \frac{\langle C\psi, \psi \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)}}{\|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2},$$

et sa variance

$$\Delta_\psi C := \sqrt{\langle C^2 \rangle_\psi - \langle C \rangle_\psi^2}.$$

Theorem 1.2.1. *Soient A et B deux opérateurs autoadjoints sur $L^2(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 1$. de domaines respectifs $\mathbf{Dom}(A)$ et $\mathbf{Dom}(B)$. On supposera que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset \mathbf{Dom}(A) \cap \mathbf{Dom}(B)$ et que A et B laissent $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ stable. Soit $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tel que $\|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 1$. Alors*

$$\Delta_\psi A \Delta_\psi B \geq \frac{1}{2} \left| \langle [A, B] \rangle_\psi \right|$$

où $[A, B] = AB - BA$ désigne le commutateur de A et de B .

Démonstration. On pose $f = (A - \langle A \rangle_\psi)\psi$ et $g = (B - \langle B \rangle_\psi)\psi$ et on commence par remarquer que

$$(\Delta_\psi A)^2 (\Delta_\psi B)^2 = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \geq |\langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)}|^2 \quad (1.4)$$

par l'inégalité de Cauchy-Schwarz. On observe d'une part que

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \langle BA \rangle_\psi - \langle A \rangle_\psi \langle B \rangle_\psi$$

et

$$\langle g, f \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \langle AB \rangle_\psi - \langle A \rangle_\psi \langle B \rangle_\psi$$

puis d'autre part que

$$|\langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)}|^2 \geq \mathbf{Im} (\langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)})^2 = \left(\frac{\langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} - \langle g, f \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)}}{2} \right)^2.$$

Un calcul donne alors que

$$\begin{aligned} \mathbf{Im} (\langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)})^2 &= \frac{1}{2} (\langle AB \rangle_\psi - \langle A \rangle_\psi \langle B \rangle_\psi - \langle BA \rangle_\psi + \langle A \rangle_\psi \langle B \rangle_\psi)^2 \\ &= \frac{1}{2} \langle [A, B] \rangle_\psi^2. \end{aligned}$$

□

Prenons alors pour opérateurs autoadjoints (non bornés) les opérateurs Q_j et P_j , où, pour rappels, Q_j désigne la multiplication par la coordonnée x_j de \mathbb{R}^n et P_j la dérivation en la j^e variable $P_j = -i\hbar\partial_j$, $1 \leq j \leq n$. La relation de commutation s'écrit alors

$$[Q_j, P_j] = i\hbar$$

et le Théorème 1.2.1 donne alors pour toute fonction $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\Delta_\psi Q \Delta_\psi P \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (1.5)$$

On retrouve la relation (1.3). On souhaite définir une classe d'états de localisation optimale, i.e. minimisant ce principe, des états ψ tels que

$$\Delta_\psi Q \Delta_\psi P = \frac{\hbar}{2}.$$

On obtient la proposition suivante.

Proposition 1.2.2. *Pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 1$, pour tout $1 \leq j \leq n$, les assertions suivantes sont équivalentes*

i. φ vérifie le cas d'égalité de (1.5), à savoir

$$\Delta_\varphi Q_j \Delta_\varphi P_j = \frac{\hbar}{2};$$

ii. il existe $q \in \mathbb{R}^n$, $p \in \mathbb{R}^n$ $\lambda > 0$ et $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n-1})$, $\|g\|_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})} = 1$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \varphi(x) = g(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n) \left(\frac{2\lambda}{\pi\hbar} \right)^{1/4} e^{i \frac{p \cdot x_j}{\hbar} - \frac{\lambda(x_j - q)^2}{\hbar}}.$$

Démonstration. On se place dans le cas $n = 1$ pour simplifier. Soit φ minimisant le principe d'Heisenberg (1.5). On pose $\langle Q \rangle_\varphi = q$ et $\langle P \rangle_\varphi = p$ et on considère à nouveau $f = (Q - \langle Q \rangle_\varphi)\varphi$ et $g = (P - \langle P \rangle_\varphi)\varphi$. Puisque φ minimise (1.5), on est dans le cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz (1.4), i.e. $f = \tilde{\gamma}g$ ou $g = \gamma f$ pour $\gamma, \tilde{\gamma}$ deux nombres complexes. Puisque φ est une fonction de Schwartz, on obtient que ni γ , ni $\tilde{\gamma}$ ne peut être nul. Considérons $g = \gamma f$, qui donne l'équation différentielle en φ :

$$\partial_x \varphi = \frac{i}{\hbar} (\gamma(x - q_0) - p_0)$$

qui admet des solutions dans l'espace de Schwartz si et seulement si $\text{Im}(\gamma) > 0$, de la forme

$$\varphi(x) = C e^{\frac{i\gamma}{\hbar}(x-q)^2 + i\frac{xp}{\hbar}}$$

avec C une constante de normalisation L^2 . En injectant alors dans

$$\Delta_\varphi Q \Delta_\varphi P = \frac{\hbar}{2}$$

on obtient que $\gamma = -i\lambda$, avec $\lambda > 0$ et C de la forme annoncée. La réciproque se vérifie par le calcul. \square

Dans la suite on considèrera la classe d'état de la forme

$$\varphi : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \left(\frac{1}{\pi\hbar}\right)^{n/4} e^{i\frac{p \cdot x}{\hbar} - \frac{(x-q)^2}{2\hbar}} \quad (1.6)$$

correspondant au cas $\lambda = 1/2$. Les états φ de la forme (1.6) sont aujourd'hui appelés les *états cohérents gaussiens*. Il s'agit d'une classe d'états dont la propagation a été beaucoup étudiée (voir [23, 39] par exemple). L'intérêt de tels états est leur localisation optimale autour d'un point (q_0, p_0) . Effectivement, on retrouve par le calcul les moyennes en position et impulsion $\langle Q \rangle_\varphi = q_0$ et $\langle P \rangle_\varphi = p_0$. Cette minimisation du principe d'Heisenberg donne alors des propriétés intéressantes de propagation. Dans [63], Schrödinger étudie la propagation d'une telle fonction, qu'il nomme alors *Gaussian error-curve* par un oscillateur harmonique. Il obtient deux résultats importants. Le premier est que la solution de l'équation de Schrödinger associée à l'oscillateur harmonique $-\hbar^2\Delta + x^2$ prise au temps t , issue d'un état cohérent gaussien de la forme (1.6), reste un état cohérent gaussien. Le second est que cet état cohérent gaussien suit exactement la trajectoire classique de l'hamiltonien sous-jacent, $H(q, p) = p^2 + q^2$. En d'autres termes, si l'état cohérent initial est 'centré' en (q_0, p_0) et si $(q(t), p(t))$ décrit la trajectoire classique issue de (q_0, p_0) , alors, le *propagé* au temps t par l'équation de Schrödinger est un état cohérent gaussien centré en $(q(t), p(t))$. Ainsi, un tel état cohérent reste localisé, 'optimal' au sens du principe d'incertitude de Heisenberg, pour tout temps de la propagation.

Il apparaît par la suite que ce fait n'est pas vrai pour des hamiltoniens généraux. L'exemple ci-dessus entre dans le cadre de la propagation d'états gaussiens par l'équation de Schrödinger associée à des hamiltoniens quadratiques. On peut se référer à [12, 60] pour des références sur le sujet. L'idée est que la propagation par des hamiltoniens quadratiques laisse stable une classe contenant les états gaussiens et qui lui est assez proche : il s'agit de la classe des *états comprimés*, de forme

$$\varphi : x \in \mathbb{R}^n \mapsto a_\Gamma e^{-i\frac{q \cdot p}{2\hbar}} e^{i\frac{x \cdot p}{\hbar}} e^{i\frac{(x-q) \cdot \Gamma (x-q)}{2\hbar}}$$

avec Γ une matrice carrée de taille n symétrique complexe de partie imaginaire définie positive et $a_\Gamma > 0$ telle que $\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 1$. On retrouve les états gaussiens en posant $\Gamma = iI_n$, où I_n désigne la matrice identité de taille n . Lorsque l'on propage par des hamiltoniens plus généraux, donc non nécessairement quadratiques, il se passe un phénomène de délocalisation en temps longs. Ce phénomène a été remarqué et quantifié pour la première fois par Ehrenfest en 1927, peu de temps après que Schrödinger ait mis en place son équation et que Heisenberg ait prouvé ses principes d'incertitudes. Dans une communication [18], il parle de l'effet dissipatif que peut avoir l'équation de Schrödinger et introduit un temps, le *temps d'Ehrenfest*, que l'on notera \mathcal{T}_E au delà duquel un état cohérent perd sa localisation. Comme la délocalisation est un phénomène quantique, il s'agit d'un temps dépendant du paramètre \hbar , de sorte que

$$\mathcal{T}_E \longrightarrow \infty \quad \text{lorsque} \quad \hbar \rightarrow 0.$$

L'ordre de grandeur de ce temps est directement relié à la nature du problème étudié (se référer à l'introduction éclairante de l'article [65]). Ainsi on peut identifier deux ordres de grandeurs de temps dans la propagation des états cohérents. La propagation en temps dits finis, concernant des temps t indépendants du paramètre \hbar , et la propagation en temps longs, concernant les temps t qui tendent vers l'infini lorsque \hbar tend vers 0.

La propagation en temps finis par des hamiltoniens généraux d'états cohérents comprimés a été étudiée par Hagedorn dans [25, 26, 27]. L'idée est d'approcher la solution de l'équation de Schrödinger associée à un opérateur \hat{H} par des superpositions d'états cohérents comprimés, centrés en la dynamique classique. Ce faisant, Hagedorn résout l'équation de Schrödinger dans le cas électrique $\hat{H} = -\hbar^2\Delta + V$, à une erreur d'ordre $\mathcal{O}(\hbar^{1/2})$ en norme L^2 près, l'entier l étant relié au nombre d'états comprimés utilisés dans la superposition d'état et à la régularité du potentiel V . Ces travaux seront prolongés dans [11] où la même étude sera menée pour des hamiltoniens très généraux, plus nécessairement de la forme $H = (p - A(q))^2 + V(q)$. Le point important de cette généralisation est l'utilisation de la concentration des états cohérents en un point de la trajectoire classique et la linéarisation du flot autour de ce point, faisant intervenir le Hessien de l'hamiltonien en ce point, qui est une forme quadratique... Ainsi la propagation des états comprimés par des hamiltoniens quadratiques fournira une bonne approximation de la propagation générale des états cohérents. Cette méthode d'approximation se montrera fertile. Elle permettra entre autres de retrouver la notion de 'temps limite' au bout duquel on perd toute localisation, voir encore [11]. On trouve aussi dans [60, 12] l'approximation de la propagation par l'équation de Schrödinger d'un état comprimé par un développement en série de puissances de $\hbar^{1/2}$ et de coefficients des états gaussiens multipliés par des polynômes dont on contrôle la croissance en degré. Cela donnera accès aux représentations de Bargman et de Wigner, qui permettront d'améliorer le temps de validité de l'approximation et la qualité de celle-ci pour des hamiltoniens plus réguliers par exemple. On peut citer [13] pour une référence plus récente. On cite aussi [51, 52, 48], où les états cohérents sont définis sous la forme

$$\varphi_{(q,p)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^n \hbar^{3n/4}} e^{-i\frac{q\cdot p}{2\hbar}} e^{i\frac{x\cdot p}{\hbar}} \rho_q(x) a_{\hbar} \left(\frac{x - q}{\sqrt{\hbar}} \right)$$

avec ρ_q une troncature autour de q et a_{\hbar} une famille de fonctions de Schwartz dépendant continuellement de \hbar et admettant un développement (au sens de Borel) de la forme

$$a_{\hbar} \sim \sum_{j \geq 0} \hbar^{j/2} a_j$$

avec les fonctions a_j des fonctions de Schwartz. On voit alors émerger la notion de *profil* d'un état cohérent, retrouvant les états cohérents gaussiens ou comprimés en posant pour a_{\hbar} un profil gaussien. Dans ses articles, Thierry Paul étudie la propagation en temps finis de tels états. Il obtient similairement à Didier Robert et Monique Combescure que les états cohérents propagés par des hamiltoniens (électriques cette fois ci) peuvent être approchés à tout ordre en \hbar par un état cohérent centré en la trajectoire classique et de profil $a(t)$. Le terme d'ordre 0 est obtenu par propagation du terme a_0 par le hessien de l'hamiltonien (ce qui n'est pas sans rappeler la propagation d'état gaussiens). Voir par exemple [48] pour un énoncé. Il en fera notamment des applications pour la construction de quasimodes pour les opérateurs de Schrödinger en jeu. Enfin, on peut aussi citer les travaux de Yajima dans [73] qui propose une formulation Lagrangienne des états cohérents et des résultats de propagation en temps court. Il s'intéresse à des solutions approchées sous la forme WKB et en temps courts, associées à des hamiltoniens avec potentiels magnétique et électrique.

Pour conclure cette présentation des résultats de propagation en temps finis, il est important de parler des liens entre la propagation en temps finis d'états cohérents et le Théorème d'Egorov. Ce dernier est un outil puissant permettant de faire le lien entre la propagation quantique et la dynamique classique sous jacente. Voir l'excellente référence [74, Chapitre 11] pour un énoncé précis, et le Chapitre 4 pour une discussion plus poussée sur le sujet. Une des applications de ce théorème est la suivante : la localisation d'une fonction que l'on propage évolue en temps finis selon la dynamique classique associée à la propagation quantique. Comme mentionné plus haut, les états cohérents sont un moyen de mesurer ce lien entre dynamique classique et propagation quantique. En effet, lors de la propagation quantique en temps finis d'un état cohérent, le centre de l'état propagé est donné par l'évolution classique issue du centre de l'état initial.

L'étude de la propagation en temps longs (i.e. pour des temps $t \rightarrow \infty$ lorsque $\hbar \rightarrow 0$) se heurte à un obstacle qui n'était pas présent lors de la propagation en temps finis. En effet les états cohérents introduits plus haut sont alors sujets à des phénomènes de délocalisations, i.e. ne peuvent plus être décrits par une position q et une impulsion p . L'ordre de grandeur des temps pour lesquels ce phénomène apparaît est

donné par le temps d'Ehrenfest \mathcal{T}_E . Il est alors connu que pour des cas où la dynamique classique est hyperbolique $\mathcal{T}_E \asymp |\ln(\hbar)|$ et que pour des trajectoires stables $\mathcal{T}_E \asymp \sqrt{\hbar}$, c.f. [11, 49, 50] par exemple. L'idée est alors d'étudier la dynamique des états cohérents pour des temps d'ordres inférieurs à celui du temps d'Ehrenfest en s'attendant à garder des états localisés, mais aussi d'étudier la propagation pour des temps de l'ordre de \mathcal{T}_E et au-delà et de voir quels phénomènes purement quantiques peuvent surgir. Par exemple, par des techniques impliquant les fonctions de Wigner (voir [20] pour une définition), dans [11] les auteurs montrent que l'approximation en sommes d'états cohérents d'un état gaussien propagé reste valide jusqu'à des temps proche du temps \mathcal{T}_E . Dans les mêmes années, Hagedorn et Joye dans [28, 29] prouvent un résultat similaire, impliquant une concentration de l'état propagé autour de la trajectoire classique pour des temps de l'ordre du temps \mathcal{T}_E . Utilisant des techniques de transformation de Wigner, on trouve dans [8] un énoncé du Théorème d'Egorov jusqu'en des temps de l'ordre de \mathcal{T}_E , i.e. logarithmiques en temps. Il y est alors étudié des phénomènes de concentration des états cohérents dans des propagations en des temps $t \asymp |\log(\hbar)|$ dans le cas d'un flot hyperbolique.

La propagation pour des temps au delà du temps d'Ehrenfest laisse quant à elle apparaître toute sorte de comportements... Il peut y avoir déconstruction de l'état, l'état cohérent transitant alors vers un état lagrangien. On peut se référer à [65] pour une étude de ce phénomène. Dans le cas de trajectoires périodiques, on peut avoir des échelles de temps pour lesquelles on a destruction de l'état cohérent, ce dernier se trouvant délocalisé sur toute la trajectoire classique, et pour d'autres échelles de temps on peut voir apparaître des reconstructions partielles voire une reconstruction totale de l'état. On peut citer à ce sujet la très instructive zoologie de Paul dans [49], ou encore l'étude détaillée des phénomènes de reconstruction dans [44]. On peut aussi se référer à l'introduction générale aux états cohérents [61]. Pour un point de vue plus 'dynamique classique' de ce genre de phénomènes, on peut aussi se référer au très clair exposé de [50]. On peut aussi se référer à [2], où est abordée la propagation en temps longs par le moyen des mesures semiclassiques. Pour diverses échelles de temps, comparées à \hbar^{-1} , les auteurs obtiennent une description précise de ces mesures dans le cas complètement intégrable du tore.

La problématique de cette thèse s'inscrit alors dans la propagation d'états cohérents pour des temps longs, de l'ordre de $t \asymp \hbar^{-1}$, donc bien au delà du temps d'Ehrenfest \mathcal{T}_E , laissant apparaître des phénomènes purement quantiques. Cela sera possible en raison du cadre magnétique que nous prodigue la dimension $n = 2$, que nous introduirons brièvement ci-dessous. Pour réaliser cette étude il est à noter qu'il nous faudra décider quelle définition d'états cohérents adopter, ce qui fera l'objet de la discussion du Chapitre 4.

1.2.2 Champ magnétique et le cas 2-D

Dans tout le reste de ce chapitre, nous nous placerons dans le cas de la dimension 2, i.e. dans le cas d'un mouvement plan : $(q, p) \in \mathbb{R}_q^2 \times \mathbb{R}_p^2$. Dans ce cadre là, on considère un champ magnétique \mathbf{B} comme un champ de vecteurs de \mathbb{R}^3 orthogonal en tout point au plan $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ que l'on identifiera à \mathbb{R}_q^2 . Les trajectoires obtenues laissent alors stable ce plan, et on limitera notre étude à \mathbb{R}_q^2 . On peut prouver qu'il existe un potentiel vecteur $\mathbf{A} \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, appelé *potentiel magnétique* de sorte que dans le formalisme hamiltonien la fonction hamiltonienne responsable du mouvement soit donnée par

$$H : (q, p) \in \mathbb{R}_q^2 \times \mathbb{R}_p^2 \mapsto \|p - \mathbf{A}(q)\|^2$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne de \mathbb{R}^2 . En quantifiant cet objet, on obtient le laplacien magnétique

$$\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}} := \|-i\hbar\nabla - \mathbf{A}\|^2 = (-i\hbar\partial_1 - A_1(q))^2 + (-i\hbar\partial_2 - A_2(q))^2.$$

Les trajectoires classiques sont alors obtenues en résolvant les équations hamiltoniennes associées à H et la dynamique quantique est quant à elle donnée par l'équation de Schrödinger afférente à $\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}$. Les définitions précises de ces objets et les questions d'existence des flots classiques et quantiques seront examinées en détail dans le Chapitre 3.

Comme dit précédemment, le formalisme hamiltonien ouvre l'accès aux outils de la géométrie symplectiques. Via de telles techniques, dans [57], dans le cadre d'un champ magnétique \mathbf{B} ne s'annulant pas, les auteurs prouvent des résultats de formes normales tant pour l'hamiltonien H que pour le laplacien magnétique $\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}$. Ces résultats de formes normales permettent une description fine du mouvement classique dans

un champ magnétique de particules à petites énergies et de l'impact de ces trajectoires sur le mouvement quantique associé. Donnons un énoncé simplifié de ces résultats.

Le premier est un résultat de forme normale classique, et concerne la transformation de l'hamiltonien H par une application compatible avec les équations du mouvement, à savoir un symplectomorphisme. Cette transformation se fait pour 'de petites valeurs de H ' i.e. sur un voisinage de la surface caractéristique $\Sigma := H^{-1}(\{0\})$.

Theorem 1.2.3. *Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}_q^2 sur lequel le champ \mathbf{B} ne s'annule pas. Alors il existe un symplectomorphisme κ d'un voisinage $\tilde{\Omega}$ de*

$$\{(q, \mathbf{A}(q)) \in \mathbb{R}_q^2 \times \mathbb{R}_p^2 | q \in \Omega\} \subset \Sigma$$

sur un voisinage de $\{0\} \times \mathbb{R}_{z_2}^2$, et une fonction

$$f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_{z_2}^2 \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R})$$

telle que

$$\forall (z_1, z_2) \in \kappa(\tilde{\Omega}), H \circ \kappa^{-1}(z_1, z_2) = f(z_2, |z_1|^2) + \mathcal{O}(|z_1|^\infty).$$

De plus,

$$\phi : q \in \mathbb{R}_q^2 \mapsto \kappa(q, \mathbf{A}(q)) \in \{0\} \times \mathbb{R}_{z_2}^2$$

définit un symplectomorphisme de \mathbb{R}_q^2 sur $\mathbb{R}_{z_2}^2$ et on a $f \circ \phi(q) = \mathbf{B}(q)$.

Ce théorème permet une description fine du mouvement classique d'une particule de petite énergie, i.e. de position q et d'impulsion p de sorte que (q, p) soit proche de la surface d'énergie nulle Σ . En effet, ce théorème prouve que sur un voisinage de la surface caractéristique, l'hamiltonien magnétique est proche d'un système intégrable, dont l'hamiltonien $K = f(z_2, |z_1|^2)$ est fonction de $|z_1|^2$, responsable d'oscillations rapides centrées en $\{z_1 = 0\}$, i.e. sur la surface d'énergie nulle, et dont le centre évolue selon l'hamiltonien

$$h_I = f(z_2, I) = \mathbf{B} \circ \kappa^{-1}(0, z_2)I + \mathcal{O}(I^{3/2})$$

en z_2 , la valeur de $I = |z_1|^2$ étant constante au cours du temps. Ce mouvement est appelé le mouvement *centre guide*, car il s'agit d'oscillations rapides dont le centre dérive plus lentement. Ce phénomène fut déjà étudié par Littlejohn dans [45], article dans lequel il introduit aussi une forme normale classique de l'hamiltonien magnétique. Dans [57], les auteurs utilisent des résultats de géométrie symplectique pour obtenir une première forme normale classique, qu'ils affinent en utilisant des résultats de formes normales de Birkhoff. Les preuves seront données dans le Chapitre 3, mais on peut se référer à [70, 9, 69, 71] en ce qui concerne l'outil des formes normales de Birkhoff. On peut remarquer finalement que les auteurs appliquaient ce résultat dans un cadre confinant, ce qui ne sera pas notre cas ici. Les résultats d'approximation de la dynamique classique issue de H par celle du système intégrable K seront valables pour des temps d'ordre $t \asymp \epsilon^{-1}$ où ϵ désigne l'énergie magnétique de la particule. Ce résultat sera établi dans le Chapitre 3.

La forme normale de Birkhoff permet une quantification des résultats ci-dessus en une forme normale quantique du Laplacien magnétique.

Theorem 1.2.4. *Il existe un opérateur unitaire U_{\hbar} et deux opérateurs pseudo-différentiels \mathcal{N} et R_{\hbar} tels que*

$$U_{\hbar} \mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}} U_{\hbar}^* = \mathcal{N} + R_{\hbar}$$

avec \mathcal{N} tel que si $\mathcal{H}_j := \text{Vect}(h_j) \otimes L^2(\mathbb{R})$, $j \in \mathbb{N}$, avec h_j la j^e fonction d'hermite, la restriction à \mathcal{H}_j , notée $\mathcal{N}^{(j)}$ soit un opérateur pseudo-différentiel 1-D de symbole principal

$$n^{(j)} = \hbar(2j + 1)\mathbf{B} \circ \phi^{-1}.$$

L'opérateur pseudo-différentiel R_{\hbar} est 'négligeable' sur un voisinage de $\kappa(\tilde{\Omega})$.

La négligeabilité de R_{\hbar} sera explicitée dans le Théorème 2.2.5. On reconnaît ici les niveaux d'énergie de l'oscillateur harmonique. En effet, les fonctions d'Hermite désignent les fonctions propres de l'oscillateur harmonique et les $\hbar(2j+1)$ les valeurs propres de ce dernier. Ceci est dû à la présence de l'oscillateur classique dans la forme normale classique, qui se quantifie en oscillateur quantique. Il se passe alors un phénomène intéressant d'un point de vue quantique : les restrictions $\mathcal{N}^{(j)}$ sont toutes d'ordre \hbar . En d'autres mots, d'un point de vue 'spectral' l'opérateur \mathcal{N} est d'ordre \hbar , ce qui ralentit la dynamique quantique associée. Ainsi sur chaque espace \mathcal{H}_j , la dynamique étant d'ordre \hbar , si on propage jusqu'en des temps d'ordre \hbar , on obtient une propagation d'ordre 1 en un 'temps réduit', ce qui permet d'appliquer la théorie usuelle de propagation des états cohérents en des temps finis, s'appuyant sur la dynamique classique. Dans le cas magnétique, pour de petites énergies, ce théorème de forme normale quantique permet une description de la propagation d'états cohérents en temps longs par la dynamique classique.

1.3 Résultats prouvés dans ce manuscrit

La contribution principale de cette thèse se répartie sur trois domaines :

- i/* la définition d'une classe d'états et les premières propriétés de propagation générale ;
- ii/* la propagation magnétique en temps longs de fonctions de la classe de Schwartz ;
- iii/* la propagation magnétique en temps longs d'états cohérents et l'étude de leur localisation.

Il est à noter que le résultat principal de ce manuscrit est celui concernant la propagation en temps longs des états cohérents. Comme expliqué dans la section 1.2, le grand défi de l'analyse semi-classique est la propagation pour des temps longs, où on fait tendre en même temps t vers l'infini et \hbar vers zéro, ces deux limites ne commutent pas. Le 'mur' que l'on rencontre alors dans le cas de la propagation d'états cohérents est le temps d'Ehrenfest \mathcal{T}_E , au plus de l'ordre de $\hbar^{-1/2}$. Le résultat prouvé ici est un résultat de propagation en temps d'ordre \hbar^{-1} , bien plus longs que le temps d'Ehrenfest. Il s'agit à notre connaissance du premier résultat de propagation pour des temps aussi longs. Ce résultat est obtenu pour des états cohérents d'énergie magnétique nulle, i.e. centrés sur la surface caractéristique. Dans ce cas, la dynamique classique est triviale, car le centre de l'état cohérent en est un point fixe. Le Théorème d'Egorov nous enseigne alors que l'état pour des *temps finis* ne bouge pas dans la limite semi-classique. Grâce aux résultats de formes normales de [57], on arrive alors à 'pousser' le temps de validité du Théorème d'Egorov à des *temps longs* de l'ordre de \hbar^{-1} , observant un phénomène d'ubiquité de l'électron, ou de quantification des trajectoires. L'état, localisé en un point pour des temps finis, se sépare en plusieurs états, se délocalisant sur les centres de ses états, tous suivant la même dynamique guidée par le champs magnétique \mathbf{B} mais à des vitesses différentes.

Les techniques mises en oeuvres pour prouver ce résultat sont assez sophistiquées. Il s'agit de techniques de géométrie symplectique, formes normales, d'analyse microlocale (transformation de Wigner, front d'onde, opérateurs \hbar -pseudodifférentiels et opérateurs intégraux de Fourier), équations de propagation, espaces de Sobolev semiclassiques, hypoellipticité... Le but de cette section est d'exposer une vision d'ensemble des résultats établis durant cette thèse et des idées clefs des preuves afférentes.

1.3.1 Définition d'une nouvelle classe d'états et étude de la propagation en temps finis

Un des premiers problèmes apparus dans l'étude de la propagation magnétique des états cohérents fût la nécessité de préciser la classe d'états que l'on allait étudier parmi celles prodiguées par la littérature, abondante à ce sujet. On peut citer entre autres deux définitions de classes d'états cohérents qui ont guidé l'introduction d'une nouvelle classe d'états. La première est celle que l'on retrouve dans les travaux de Robert et Combescure [11, 13] : les états comprimés. L'avantage de cette classe d'état est qu'elle est explicite, ce qui permet de faire des calculs. L'inconvénient est que la classe est uniquement stable par propagation par des hamiltoniens quadratiques et nécessite de sommer des états pour approcher une propagation plus générale. La seconde est celle utilisée par Paul ([52, 48]) : il s'agit d'états cohérents s'écrivant avec un profil a se

développant au sens de Borel en série de fonctions de Schwartz et de puissance de $\hbar^{1/2}$. De même cette classe n'était pas stable par propagation générale, mais un état cohérent propagé restait très proche en norme L^2 d'un état de la classe centré en la dynamique classique.

Ce qui a guidé le choix de la classe est le fait suivant : pour utiliser les résultats de forme normale, il est nécessaire d'appliquer à l'état cohérent que l'on souhaite propager l'opérateur de forme normale. Cet opérateur est en fait un propagateur pris au temps 1 d'une équation de Schrödinger avec hamiltonien borné. On souhaite alors que l'application de l'opérateur de forme normale à l'état initial de la propagation donne un état qui soit dans la même classe. Cette réflexion a mené à l'introduction de la classe suivante d'états cohérents.

Definition 1.3.1. On considère pour $\hbar > 0$ et $z \in T^*\mathbb{R}^2$ les opérateurs unitaires de dilatation

$$\Lambda_{\hbar} : f \in L^2(\mathbb{R}^2) \mapsto \frac{1}{\sqrt{\hbar}} f \left(\frac{\cdot}{\sqrt{\hbar}} \right) \in L^2(\mathbb{R}^2)$$

et de translation

$$T_{\hbar}(z) : f \in L^2(\mathbb{R}^2) \mapsto e^{-i\frac{z \cdot p}{2\hbar}} e^{i\frac{x \cdot p}{\hbar}} f(x - q)$$

où $z = (q, p)$. On définit l'ensemble \mathfrak{s} des profils sur \mathbb{R}^2 comme suit : $f_{\hbar} \in \mathfrak{s}$ si et seulement si il existe $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ indépendant de \hbar avec $\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = 1$, $\beta > 0$ et $(g_{\hbar})_{0 < \hbar \leq \hbar_0} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ une famille de fonctions de Schwartz uniformément bornée en \hbar dans les semi-normes de Schwartz tels que $f_{\hbar} = f + \hbar^{\beta} g_{\hbar}$. On définit alors la classe d'états cohérents comme

$$\mathfrak{C} := \left\{ e^{i\frac{\delta}{\hbar}} T_{\hbar}(z) \Lambda_{\hbar} f_{\hbar}, \delta \in \mathbb{R}, z \in T^*\mathbb{R}^2, f_{\hbar} \in \mathfrak{s}, \right\}.$$

Remark 1.3.2. Cette définition se généralise en toute dimension, en considérant $z \in T^*\mathbb{R}^n$ et f, g_{\hbar} comme des fonctions de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. On notera alors respectivement $\mathfrak{s}^{[n]}$ et $\mathfrak{C}[n]$ les classes de profils et d'états cohérents en dimension $n \geq 1$.

Cette définition emprunte la notion de profil f_{\hbar} translaté par l'opérateur $T_{\hbar}(z) \Lambda_{\hbar}$ aux définitions introduites précédemment. Elle englobe de plus les deux définitions précédentes lorsque l'on fixe le paramètre $\beta = 1/2$. L'idée est de concentrer un profil f_{\hbar} autour d'un point z , qui sera appelé *centre* de l'état cohérent, à un taux $\sqrt{\hbar}$. Ce profil est défini par une *partie classique*, f , qui est une distribution de probabilité, pouvant ainsi représenter une particule classique vue d'un point de vue quantique, et par une *partie semi-classique*, $\hbar^{\beta} g_{\hbar}$, disparaissant à la limite semi-classique $\hbar \rightarrow 0$. L'intérêt d'introduire cette partie semi-classique est que les théorèmes précédents de propagation en temps finis deviennent un théorème de stabilité.

Theorem 1.3.3. *Considérons $(H_t)_{t \in [0,1]}$ une famille d'hamiltoniens réels dépendant continuellement du temps, telle que uniformément en temps et en $\hbar \in (0, \hbar_0)$, $(H_t)_{t \in [0,1]} \in S(1)$. Considérons la dynamique classique $z(t) = (q(t), p(t))$ associée, issue d'un point $z = (q, p)$. Alors, si $\varphi_z \in \mathfrak{C}$, si l'équation de Schrödinger associée à $(H_t)_{t \in [0,1]}$ admet une solution jusqu'au temps $t = 1$ issue de cet état, le propagé quantique de φ_z au temps t est un état de la classe \mathfrak{C} centré en $z(1)$.*

Ce théorème prouve deux choses. La première est une stabilité de la classe \mathfrak{C} par propagation en des temps finis, et la deuxième est que le centre de l'état propagé est donné par la dynamique classique : il s'agit en quelque sorte d'un théorème d'Egorov de la classe \mathfrak{C} .

Idées de la preuve du Théorème 1.3.3 La preuve de ce théorème repose sur la localisation en un point des états cohérents, via l'opérateur de 'translation-concentration' $T_{\hbar}(z) \Lambda_{\hbar}$. Posons

$$\varphi(t) := U(t, 0) \varphi_z$$

la solution de l'équation de Schrödinger associée à l'hamiltonien H_t , où $U(t, s)$ définit la famille des propagateurs associés, i.e. la famille d'opérateurs unitaires sur $L^2(\mathbb{R}^2)$ tels que

$$i\hbar \partial_t U(t, s) = \text{Op}_{\hbar}^w(H_t) U(t, s) \quad U(s, s) = id_{L^2(\mathbb{R}^2)}.$$

On suppose l'existence d'une telle famille de classe \mathcal{C}^1 en les variables $(t, s) \in [0, 1]^2$. On pose alors $\psi = \varphi(1)$. Puisque H_t définit une famille de symboles uniformément bornée en temps, on peut prouver que pour tout $t \in [0, 1]$, $\varphi(t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$. On considère alors z le centre de φ et son profil $\mathfrak{f}_\hbar = f + \hbar^\beta g_\hbar \in \mathfrak{s}$. Considérant l'intégrale d'action

$$\delta_t := \delta_0 + \int_0^t (p_s \cdot \dot{q}_s - H_s(z_s)) ds - \frac{1}{2}(q_t \cdot p_t - q_0 \cdot p_0),$$

on définit

$$v(t) := e^{-i\delta_t/\hbar} \Lambda_\hbar^{-1} T_\hbar(-z(t)) U(t, 0) \varphi(0). \quad (1.7)$$

Il s'agit du propagé de $\varphi(0)$ au temps t que l'on translate par $-z(t)$ et que l'on dilate de $\sqrt{\hbar}$. On s'attend alors à retrouver un profil $\mathfrak{f}_\hbar(t)$, ce que l'on cherche à prouver. Pour cela, on commence par établir l'équation de propagation associée à v . Par le calcul, on est naturellement mené à considérer, via les opérateurs de concentration et de dilatation en $z(t)$, le développement de Taylor de $X \mapsto H_t(z(t) + \sqrt{\hbar}X)$ autour du point $z(t)$ et on pose

$$K_2(t, X) := X^T \text{Hess}(H_t, z(t)) X$$

et $R^{(3)}$ le reste intégral de Taylor d'ordre 3 dans ce développement. On obtient alors l'équation

$$\begin{cases} i\partial_t v(t) = \text{Op}_{\hbar=1}^w(K_2(t, X) + \sqrt{\hbar}R^{(3)}(t, X))v(t) \\ v(t=0) = \mathfrak{f}_\hbar \end{cases}$$

qui admet un propagateur $P_1(\cdot, \cdot)$ donné par

$$P_1 : (t, s) \in [0, 1]^2 \mapsto P_1(t, s) = (T_\hbar(z(t))\Lambda_\hbar)^{-1} U(t, s) T(z(t))\Lambda_\hbar$$

avec les mêmes propriétés de continuité que U , appliquant $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ sur lui-même et satisfaisant pour tout $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$,

$$i\partial_t P_1(t, 0)v = \text{Op}_{\hbar=1}^w(K_2 + \sqrt{\hbar}R^{(3)})P_1(t, 0)v,$$

On considère alors l'équation suivante, en $v^{(0)}$:

$$\begin{cases} i\partial_t v^{(0)}(t) = \text{Op}_{\hbar=1}^w(K_2(t, \cdot))v^{(0)}(t) \\ v^{(0)}(t=0) = f \end{cases}. \quad (1.8)$$

Par les travaux de [11], puisque (1.8) est une équation de propagation par un hamiltonien quadratique, on peut prouver que la condition d'existence d'un flot classique suffit à ce que le flot quantique existe aussi. Ainsi, pour $t \in [0, 1]$, l'équation (1.8) admet un propagateur $(P_q(t, s))_{t, s \in [0, 1]}$ de classe \mathcal{C}^1 en temps et unitaire sur $L^2(\mathbb{R}^2)$. On peut prouver, via des techniques d'états cohérents gaussiens et d'espaces de Sobolev semiclassique, que ce propagateur est continue sur la classe de Schwartz : pour toute semi-norme de Schwartz p , il existe une constante $C > 0$ et une semi-norme \tilde{p} telles que

$$p(P_q(t, 0)v^{(0)}) \leq C\tilde{p}(v^{(0)})$$

Pour $t \in [0, 1]$, on pose alors

$$v^{(0)}(t) := P_q(t, 0)f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

qui est la solution de (1.8). Il s'agit d'une famille de fonctions indépendantes de \hbar et telle que

$$\forall t \in [0, 1], \|v^{(0)}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \|v^{(0)}(0)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = 1.$$

La fonction $v^{(0)}(1)$ semble être un bon candidat pour la partie classique du potentiel profil de $\varphi(1)$. Reste à prouver que $\Lambda_\hbar^{-1} T_\hbar(z(1))\varphi(1) - v^{(0)}(1)$ s'écrit sous la forme $\hbar^{\tilde{\beta}} \tilde{g}_\hbar$ avec $\tilde{\beta} > 0$ et \tilde{g}_\hbar une fonction uniformément

bornée dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ par rapport à \hbar , désignant ainsi la partie semi-classique du profil de $\varphi(1)$. Par le principe de Duhamel, on a

$$v(t) - v^{(0)}(t) = \hbar^\beta P_1(t, 0) g_\hbar - i\sqrt{\hbar} \int_0^t P_1(t, s) \text{Op}_{\hbar=1}^w(R_\hbar^{(3)}) P_q(s, 0) f ds. \quad (1.9)$$

Par le caractère uniformément borné de H_t , on prouve alors que le propagateur P_1 est borné sur la classe de Schwartz, ce qui donne, avec (1.9) que

$$v(1) = v^{(0)}(1) + \hbar^{\tilde{\beta}} \tilde{g}_\hbar$$

où \tilde{g}_\hbar est une fonction uniformément bornée en \hbar dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ d'expression

$$\tilde{g}_\hbar := \hbar^{\beta - \tilde{\beta}} P_1(t, 0) g_\hbar - i\hbar^{1/2 - \tilde{\beta}} \int_0^t P_1(t, s) \text{Op}_{\hbar=1}^w(R_\hbar^{(3)}) P_q(s, 0) f ds$$

et $\tilde{\beta} := \min(1/2, \beta)$ ce qui prouve $v(1) \in \mathfrak{s}^{[n]}$ (en fait, on obtient $v_\hbar(t) \in \mathfrak{s}^{[n]}$ pour tout $t \in [0, 1]$). Finalement,

$$\psi = e^{i\delta_1/\hbar} T_\hbar(z_1) \Lambda_\hbar v_\hbar(1)$$

où $\delta_1 := \delta_{t=1}$ and $z_1 := z(1)$, ce qui prouve le résultat annoncé. \square

Dans l'étude de la dynamique en temps longs de ces états cohérents, il nous a été utile d'avoir, outre des estimées L^2 , des estimées précises des états cohérents dans la classe de Schwartz. Dans l'esprit de [60], nous avons prouvé les estimations suivantes, que nous nommerons *estimées de Wigner*.

Proposition 1.3.4. *Soit a un symbole d'une classe $S(m)$ avec m une fonction d'ordre quelconque, et soit $\varphi_z \in \mathfrak{C}$ un état cohérent de profil $f_\hbar \in \mathfrak{s}$. Alors, pour $\varepsilon > 0$ donné et pour M, N assez grands,*

$$\|\text{Op}_\hbar^w(a)\varphi_z\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \leq \hbar^{-3n/2} C_\varepsilon(f_\hbar) \|f_\hbar\|^{2-\varepsilon} \times \iint_{\mathbb{R}^{2n}} \iint_{\text{supp}(a)} \left\langle \frac{Y - \frac{z+z'}{2}}{\sqrt{\hbar}} \right\rangle^{-N} dY \left\langle \frac{z - z'}{\sqrt{\hbar}} \right\rangle^{-M} dz' \quad (1.10)$$

avec

$$C_\varepsilon(f_\hbar) = \max_{\alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq K} (\|\partial_\alpha a(Y)\langle Y \rangle^{-l}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}) \sum_{i \in I} \prod_{j \in J} p_{i,j}(f_\hbar)^{\delta_{i,j}} \quad (1.11)$$

où K est un entier dépendant de N et M et I, J des ensembles finis dépendant uniquement de N, M, ε et m , et enfin avec $p_{i,j}$ une semi-norme de Schwartz, $\delta_{i,j} > 0$ dépendants de ε .

Remark 1.3.5. Le paramètre ε est nécessaire ici pour contrôler la croissance (au plus polynomiale) du symbole a à l'infini. Moralement, on 'multiplie' le symbole par f_\hbar^ε qui décroît très rapidement à l'infini. C'est par ce biais que l'on obtient l'estimation (1.10) avec une constante dépendante de ε et avec un terme $\|f_\hbar\|^{2-\varepsilon}$ et c'est pourquoi on ne peut prendre directement $\varepsilon = 0$ en général. Cependant, on peut noter que pour $a \in S(1)$ il est possible de prendre $\varepsilon = 0$ grâce à la 'non-croissance' de a à l'infini.

L'intérêt de ce résultat réside dans l'arbitrarité de la fonction d'ordre m . En effet, ce résultat étant vrai pour tout symbole a de classe de symbole $S(m)$ arbitraire, il implique un contrôle des normes de Schwartz avec une expression explicite de la constante dans l'estimation (voir les liens entre semi-normes de Schwartz et espaces de Sobolev généralisés dans [74, Chapitre 8]). Il permet par exemple de prouver les résultats suivants sur la classe d'états introduite précédemment.

Corollary 1.3.6. *Soit $\varphi_z \in \mathfrak{C}$ un état cohérent de profil $f_\hbar \in \mathfrak{s}$ et soit m une fonction d'ordre sur \mathbb{R}^4 . alors, pour $\varepsilon > 0$ on a la propriété de continuité suivante*

$$\forall a \in S(m), \forall z \in \mathbb{R}^4, \|\text{Op}_\hbar^w(a)\varphi_z\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \leq \hbar^{-3} \tilde{C}(a) C_\varepsilon(f_\hbar) \|f_\hbar\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^{2-\varepsilon} \quad (1.12)$$

avec $\tilde{C}(a) \leq C \max_{0 \leq |\alpha| \leq K} \|m^{-1} \partial^\alpha a\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{2n})}$ où $C > 0$ dépend uniquement de m et avec $C_\varepsilon(f_\hbar)$ comme dans (1.11). Si de plus on considère un symbole $a \in S(m)$ s'annulant sur un voisinage de z , alors pour toute semi-norme de Schwartz p , on obtient

$$p(\text{Op}_\hbar^w(a)\varphi_z) = \tilde{C}(a, p) C_\varepsilon(f_\hbar) \|f_\hbar\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^{1-\varepsilon} \mathcal{O}(\hbar^\infty) \quad (1.13)$$

avec $\tilde{C}(a, p)$ ne dépendant que de a et de p , et $C_\varepsilon(f_\hbar)$ comme ci-dessus. Les constantes dans $\mathcal{O}(\hbar^\infty)$ ne dépendent que du voisinage sur lequel s'annule a et de la fonction d'ordre m .

Nous donnons une idée de la preuve des estimées de Wigner. Elle s'appuie sur la représentation dans l'espace des phases des états cohérents via la transformation de Wigner et sur la décroissance rapide du profil f_\hbar .

Esquisse des preuves de la Proposition 1.3.4 et du Corollaire 1.3.6. L'idée principale de la preuve de la Proposition 1.3.4 repose sur l'introduction d'une fonction associée aux états cohérents, la fonction de Wigner (voir [20] pour une définition plus complète). Cette fonction 'représente' les états cohérents dans l'espace des phases. Elle permet de tirer parti de la forte localisation des états cohérents dans l'espace des phases et de leur décroissance rapide à l'infini pour obtenir des estimations sur des opérateurs pseudo-différentiels à partir de leur symbole.

On considère une famille d'états cohérents $(\varphi_z)_{z \in \mathbb{R}^{2n}}$ de même profil $f_\hbar \in \mathfrak{s}$. On remarque alors que pour un symbole arbitraire $a \in S(m)$ avec $m(z) \leq \langle z \rangle^l$ où $l \in \mathbb{N}$,

$$\langle \text{Op}_\hbar^w(a) \varphi_z, \varphi_{z'} \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \frac{2^n}{(2\pi\hbar)^n} \times \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{\frac{2i}{\hbar}(x-\tilde{y})\eta} a(\tilde{y}, \eta) e^{-\frac{i}{2\hbar}q p + \frac{i}{\hbar}p(2\tilde{y}-x)} f_\hbar\left(\frac{2\tilde{y}-x-q}{\sqrt{\hbar}}\right) d\tilde{y} d\eta e^{\frac{i}{2\hbar}q' p' - \frac{i}{\hbar}p' x} \overline{f_\hbar\left(\frac{x-q'}{\sqrt{\hbar}}\right)} dx.$$

Ceci conduit à définir la fonction de Wigner $\mathcal{W}_{z, z'}$ associée à la famille d'états cohérents $(\varphi_z)_{z \in \mathbb{R}^4}$ de profil $f_\hbar \in \mathfrak{s}$,

$$\mathcal{W}_{z, z'}(y, \eta) = \frac{2^n}{\hbar^{n/2}} e^{\frac{i}{\hbar}\omega(Y - \frac{1}{2}z', z - z')} \times \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{2i}{\hbar}u(\eta - \frac{p+p'}{2})} f_\hbar\left(\frac{y - \frac{q+q'}{2} - u}{\sqrt{\hbar}}\right) \overline{f_\hbar\left(\frac{y - \frac{q+q'}{2} + u}{\sqrt{\hbar}}\right)} du$$

où ω désigne la forme symplectique canonique sur \mathbb{R}^4

$$\omega((a, b), (c, d)) = b \cdot c - a \cdot d$$

et où $Y := (y, \eta)$. Cette définition donne accès à la formule suivante

$$\langle \text{Op}_\hbar^w(a) \varphi_z, \varphi_{z'} \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \frac{1}{(2\pi\hbar)^n} \int_{\mathbb{R}^{2n}} a(Y) \mathcal{W}_{z, z'}(Y) dY, \quad (1.14)$$

qui montre que la fonction de Wigner peut être utilisée comme noyau intégral pour le calcul de l'action des opérateurs pseudo-différentiels sur les états cohérents. Posons maintenant

$$\Psi_\hbar := (\hat{y}, u) \in \mathbb{R}^4 \mapsto f_\hbar(\hat{y} - u) \overline{f_\hbar(\hat{y} + u)}.$$

L'application Ψ_\hbar est une fonction de Schwartz sur \mathbb{R}^4 de semi-normes toutes bornées uniformément en $\hbar \in (0, \hbar_0)$, et on a l'expression plus concise

$$\mathcal{W}_{z, z'}(y, \eta) = \frac{2^n}{\hbar^{n/2}} e^{\frac{i}{\hbar}\omega(Y - \frac{1}{2}z', z - z')} \times \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{2i}{\hbar}u(\eta - \frac{p+p'}{2})} \Psi_\hbar\left(\frac{u}{\sqrt{\hbar}}, \frac{y - \frac{q+q'}{2}}{\sqrt{\hbar}}\right) du.$$

Pour prouver la Proposition 1.3.4 on utilise alors les propriétés d'intégrale oscillante de la fonction de Wigner pour montrer une décroissance rapide en les variables $Y - \frac{z+z'}{2}$ et $z - z'$. Ce faisant, on arrive par la décroissance rapide de la fonction Ψ_\hbar à compenser la croissance polynomiale du symbole a et à avoir l'estimation ci-dessus. On ne fera pas la preuve de cette proposition ici car elle est très calculatoire et utilise les outils classiques de l'étude des intégrales oscillantes. On en fera la preuve complète dans le Chapitre 4.

La Proposition 1.3.4 permet de prouver le Corollaire 1.3.6. La propriété (1.12) en est une implication directe. En ce qui concerne la propriété (1.13), en considérant un état cohérent φ_z localisé en z et un symbole

a dans une classe $S(m)$ tel que a s'annule sur une boule $B(z, \delta)$, $\delta > 0$, la Proposition 1.3.4 permet de prouver que

$$\begin{aligned} \|\text{Op}_\hbar^w(a)\varphi_z\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 &\leq C_\varepsilon \underbrace{\left(\iint_{B(0,\delta)} \iint_{\mathbb{R}^{2n} \setminus B(0,\delta)} \left\langle \frac{\Upsilon}{\sqrt{\hbar}} \right\rangle^{-N} d\Upsilon \left\langle \frac{\zeta}{\sqrt{\hbar}} \right\rangle^{-M} d\zeta \right)}_{(1)} \\ &\quad + \underbrace{\iint_{\mathbb{R}^{2n} \setminus B(0,\delta)} \iint_{\mathbb{R}^{2n} \setminus B(0,\delta)} \left\langle \frac{\Upsilon}{\sqrt{\hbar}} \right\rangle^{-N} d\Upsilon \left\langle \frac{\zeta}{\sqrt{\hbar}} \right\rangle^{-M} d\zeta}_{(2)} \end{aligned}$$

avec $C_\varepsilon := \tilde{C}(a)C_\varepsilon(f_\hbar)\|f_\hbar\|^{2-\varepsilon}$, f_\hbar désignant le profil de φ_z . On peut alors prouver que (1) = $\mathcal{O}(\hbar^M)$ et que (2) = $\mathcal{O}(\hbar^N)$, de sorte que pour tout entier M, N , on ait

$$\|\text{Op}_\hbar^w(a)\varphi_z\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \leq C_\varepsilon \mathcal{O}(\hbar^N + \hbar^M)$$

ce qui implique la proposition de localisation (1.13). \square

1.3.2 Propagation magnétique en temps long

L'objet de cette thèse est la propagation magnétique. Posons succinctement le cadre de cette propagation, qui sera détaillée dans le Chapitre 3. On considère l'hamiltonien magnétique en dimension 2,

$$H(q, p) = \|p - \mathbf{A}(q)\|^2.$$

Si on suppose que \mathbf{B} est dans une classe de symbole $S(m)$, alors on peut prouver qu'il en est de même pour l'hamiltonien H , que l'on quantifie alors pour obtenir le Laplacien magnétique

$$\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}} := \|-i\hbar\nabla - \mathbf{A}(q)\|^2$$

de domaine

$$\mathbf{Dom}(\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}) = \{\psi \in L^2(\mathbb{R}^2) \text{ t.q. } \forall j \in \{1, 2\}, (-i\hbar\partial_j - A_j)\psi \in L^2(\mathbb{R}^2)\}.$$

On obtient donc l'équation de Schrödinger

$$\begin{cases} i\hbar\partial_t \psi^t = \mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}} \psi^t \\ \psi^{t=0} = \psi_0 \end{cases}. \quad (1.15)$$

pour ψ_0 un état de $L^2(\mathbb{R}^2)$ que l'on précisera plus tard. Puisque $\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}$ est un opérateur autoadjoint indépendant du temps, le théorème de Stone nous prodigue un groupe à un paramètre d'opérateurs unitaires sur $L^2(\mathbb{R}^n)$, $(P^t)_{t \in \mathbb{R}}$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad P^t : \mathbf{Dom}(\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}) \rightarrow \mathbf{Dom}(\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}})$$

et tel que la solution de (1.15), dans le cas où $\psi_0 \in \mathbf{Dom}(\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}})$, s'écrive

$$\psi^t : t \in \mathbb{R} \mapsto P^t \psi_0 \in \mathbf{Dom}(\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}).$$

La famille d'opérateurs $(P^t)_{t \in \mathbb{R}}$ est alors appelée la famille des propagateurs associée à $\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}$. Cette résolution de l'équation de Schrödinger par une famille de propagateurs n'est pas propre au cas magnétique, mais s'étend à tous les cas où l'opérateur de Schrödinger dirigeant la propagation est indépendant du temps et (essentiellement) autoadjoint, par exemple pour le laplacien magnétique sous sa forme normale \mathcal{N} , essentiellement autoadjoint sur le domaine $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$.

L'outil principal de l'étude de la propagation des états cohérents en temps longs par l'opérateur de Schrödinger magnétique est le résultat de forme normale quantique. Il permet l'étude de la propagation magnétique par le laplacien magnétique $\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}$, dont le propagateur est donné par l'équation

$$i\hbar\partial_t P^t = \mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}} P^t, \quad P^{t=0} = Id_{L^2(\mathbb{R}^2)}, \quad (1.16)$$

par comparaison avec la propagation par l'opérateur sous forme normale \mathcal{N} , d'équation

$$i\hbar\partial_t Q^t = \mathcal{N}Q^t, \quad Q^{t=0} = Id_{L^2(\mathbb{R}^2)}. \quad (1.17)$$

En effet, puisque par le Théorème 1.2.4 il existe un opérateur unitaire U_{\hbar} tel que

$$U_{\hbar}^* \mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}} U_{\hbar} = \mathcal{N} + R_{\hbar},$$

il nous faut comparer la propagation magnétique P^t avec la propagation sous forme normale $U_{\hbar}^* Q^t$, et pour cela on invoque la formule de Duhamel, qui s'écrit ici, pour $\psi_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$,

$$P^t \psi_0 - U_{\hbar}^* Q^t U_{\hbar} \psi_0 = -\frac{i}{\hbar} \int_0^t P^{t-s} R_{\hbar} U_{\hbar}^* Q^s U_{\hbar} \psi_0 ds. \quad (1.18)$$

Ceci dit, pour estimer la différence $P^t \psi_0 - U_{\hbar}^* Q^t U_{\hbar} \psi_0$ en temps longs il est alors nécessaire d'avoir des estimations sur P^t et Q^t en temps longs aussi. Quand il s'agit d'estimer dans la norme L^2 , le résultat est immédiat par les estimations de Wigner de la Proposition 1.3.4 et par unitarité des propagateurs. Or, si on veut un contrôle plus fin, comme dans des normes de Schwartz, le résultat est beaucoup moins évident. Il s'avère que grâce à la structure de l'opérateur \mathcal{N} , les estimations de propagation en temps finis restent valables pour des temps d'ordre \hbar^{-1} pour le propagateur Q^t . Ce n'est pas le cas pour P^t .

La question est donc : *peut-on contrôler en temps longs les semi-normes de Schwartz pour la propagation magnétique ?* La réponse est *oui* et a fait l'objet d'un travail en commun avec Nicolas Raymond et San Vũ Ngọc. Ce travail a donné lieu à un article soumis [5]. Le résultat prouvé dans cet article est à rapprocher de celui fait dans [46]. Dans cet article, les auteurs étudient la croissance en temps des normes de Sobolev de solutions d'équations de Schrödinger et en font une application aux opérateurs de Schrödinger magnétique et électrique. La force de ces résultats est que les opérateurs considérés dépendent du temps, et que sous des hypothèses sur des crochets de commutations avec un opérateur donné, indépendant du temps, on obtient une croissance exponentielle en temps, voire polynômiale sous certains cas. On peut aussi se référer au Chapitre 3 pour une littérature plus abondante à ce sujet.

Citons les théorèmes principaux de [5] et donnons l'essence des preuves. Le travail effectué le fut en dimension n quelconque, mais par souci de cohérence, nous nous restreindrons à la dimension 2.

Commençons par énoncer les hypothèses nécessaires aux théorèmes qui suivent :

Assumption 1.3.7. On suppose que

i. il existe $b_0 > 0$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}^2$,

$$B(x) \geq b_0,$$

ii. pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^2$, il existe $C > 0$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, $|\partial^\alpha \mathbf{B}(x)| \leq C |\mathbf{B}(x)|$.

Cette dernière hypothèse est une condition de 'régularité' à l'infini du champ \mathbf{B} . Dans ces conditions, nous avons le lemme suivant qui sera utile pour les preuves des résultats qui suivent (voir [35, Theorem 2.2] pour une référence).

Lemma 1.3.8. *On a*

$$\inf \text{sp}(\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}) = \hbar \inf_{x \in \mathbb{R}^2} \mathbf{B}(x) + o(\hbar).$$

En particulier, il existe $C > 0$ et $\hbar_0 > 0$, tels que, pour tout $\hbar \in (0, \hbar_0)$, $\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}$ est inversible et

$$\|\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}^{-1}\| \leq C \hbar^{-1}.$$

Ainsi, pour \hbar suffisamment petit, l'opérateur $\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}$ sera inversible, dont l'inverse est de norme de l'ordre \hbar^{-1}

Definition 1.3.9. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère

$$\mathbf{Dom}(\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}^n) = \{\psi \in L^2(\mathbb{R}^2) : \forall \ell \in \{1, \dots, n\} : \mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}^{\ell-1} \psi \in \mathbf{Dom}(\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}})\}.$$

L'opérateur $\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}^n$ est défini par récurrence via la relation

$$\forall \psi \in \mathbf{Dom}(\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}^n), \quad \mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}^n \psi = \mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}(\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}^{n-1} \psi).$$

L'opérateur $(\mathbf{Dom}(\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}^n), \mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}^n)$ est autoadjoint et inversible. Le théorème qui suit prouve une propriété de régularité elliptique du laplacien magnétique. On définit les dérivées magnétiques

$$\forall j \in \{1, 2\}, \quad L_j := -i\hbar \partial_j - A_j.$$

L'idée est de contrôler les dérivées magnétiques successives par une certaine puissance du laplacien $\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}$.

Theorem 1.3.10. *On suppose satisfaite l'Hypothèse 1.3.7. Soit $n \in \mathbb{N}$. Il existe $\hbar_0 > 0$ et $C > 0$ tels que pour tout $\hbar \in (0, \hbar_0)$, et pour tout $\psi \in \mathbf{Dom}(\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}^n)$,*

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{A}(2n)} \|L_\sigma \psi\| \leq C \hbar^{-3n/2} \|\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}^n \psi\|, \quad (1.19)$$

où, pour $k \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{A}(k) = \cup_{p=0}^k \{1, 2\}^{\{1, \dots, p\}}$, et pour $p \in \mathbb{N}$, pour $\sigma \in \{1, 2\}^{\{1, \dots, p\}}$, $L_\sigma := L_{\sigma(1)} \dots L_{\sigma(p)}$, avec la convention $L_\emptyset = \text{Id}$.

Definition 1.3.11. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, on considère

$$p_k(\psi) = \max_{\substack{(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^{2d} \\ |\alpha| + |\beta| \leq k}} \|x^\alpha \partial^\beta \psi\|_\infty.$$

On cite alors le théorème principal de cette sous-section, qui donne une estimation en temps longs de la dynamique quantique magnétique dans la classe de Schwartz.

Theorem 1.3.12. *On suppose que l'Hypothèse 1.3.7 est satisfaite. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a*

$$e^{\frac{it\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}}{\hbar}} \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d).$$

De manière plus précise, pour tout $M \in \mathbb{N}^*$, et tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $\hbar_0 > 0$, $C > 0$, $N \in \mathbb{N}^*$ et $K \in \mathbb{N}$, tels que, pour tout $\hbar \in (0, \hbar_0)$, pour tout $\psi_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, et tout $t \in [0, \hbar^{-M}]$,

$$p_k(e^{\frac{it\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}}{\hbar}} \psi_0) \leq C \hbar^{-N} p_K(\psi_0).$$

Un résultat similaire est dans l'article [60, Corollary 2.11], fondé sur l'analyse des états cohérents, et où est faite l'hypothèse que les dérivées du symbole d'ordre 3 ou plus sont bornées. L'approche choisie ici est directement reliée à la structure du laplacien magnétique, que l'on peut comparer à l'analyse dans [41].

On commence par donner les arguments principaux de la preuve du Théorème 1.3.10.

Esquisse de la preuve du Théorème 1.3.10 La preuve de ce théorème débute avec un résultat de densité, établissant qu'il suffit de prouver le Théorème 1.3.10 pour des fonctions de Schwartz. Considérons $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$. Il existe un unique $\psi \in \mathbf{Dom}(\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}^n)$ tel que $\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}^n \psi = f$. Soit alors $f_k \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ convergeant vers f dans $L^2(\mathbb{R}^2)$ et considérons à k fixé l'unique $\psi_k \in \mathbf{Dom}(\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}^n)$ tel que $\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}^n \psi_k = f_k$. On remarque alors que, par continuité de $(\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}^n)^{-1}$, ψ_k converge vers ψ dans $L^2(\mathbb{R}^2)$. Forts de ceci, munissons nous du lemme suivant.

Lemma 1.3.13. *Posons*

$$H_{\text{exp}}^\infty(\mathbb{R}^d) = \{\psi \in L^2(\mathbb{R}^2) : \forall \alpha \in \mathbb{N}^2, \exists \beta > 0 : e^{\beta \langle x \rangle} \partial^\alpha \psi \in L^2(\mathbb{R}^2)\}.$$

Considérons $f \in H_{\text{exp}}^\infty(\mathbb{R}^2)$. Alors, l'unique solution $u \in \mathbf{Dom}(\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}})$ de $\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}} u = f$ appartient à l'espace $H_{\text{exp}}^\infty(\mathbb{R}^2)$.

On peut noter que, par les injections de Sobolev on a, $H_{\text{exp}}^\infty(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Par le Lemme 1.3.13 on observe que $\psi_k \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$. Supposons alors que (1.19) est vérifiée pour tout $\psi \in \mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}(\mathbb{R}^2)$, avec $\psi = \psi_k - \psi_\ell$, for all $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$, cela montre que pour tout $\sigma \in \mathfrak{A}(2n)$, $(L_\sigma \psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de $L^2(\mathbb{R}^2)$. Ainsi, au sens des distributions, $L_\sigma \psi \in L^2(\mathbb{R}^2)$. Il reste à appliquer à nouveau (1.19) avec $\psi = \psi_k$ et à faire tendre $k \rightarrow +\infty$.

La preuve du Théorème 1.3.10 nécessite aussi les deux lemmes suivants.

Lemma 1.3.14. *Pour tout $\psi \in \text{Dom}(\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}})$, on a*

$$\|(-ih\nabla - \mathbf{A})\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \leq \frac{1}{2}\|\psi\|_{\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}}^2$$

où $\|\psi\|_{\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}}^2 := \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + \|\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2$.

Démonstration. La preuve de ce lemme est élémentaire. Par définition du domaine, pour tout $\psi \in \text{Dom}(\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}})$,

$$\langle \mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}\psi, \psi \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \|(-ih\nabla - \mathbf{A})\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 = \sum_{j=1}^2 \|L_j\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2,$$

de sorte que

$$\sum_{j=1}^2 \|L_j\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \leq \|\psi\| \|\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}.$$

□

Lemma 1.3.15. *Il existe $C > 0$ et $\hbar_0 > 0$ tels que pour tout $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ et tout $\hbar \in (0, \hbar_0)$,*

$$\|\langle \mathbf{B} \rangle \psi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \|\langle \mathbf{B} \rangle^{\frac{1}{2}}(-ih\nabla - \mathbf{A})\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq Ch^{-1}\|\psi\|_{\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}}. \quad (1.20)$$

De plus, pour tout $\psi \in \text{Dom}(\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}})$, on a

$$\mathbf{B}\psi \in L^2(\mathbb{R}^2) \quad \text{et} \quad |\mathbf{B}|^{\frac{1}{2}}(-ih\nabla - \mathbf{A})\psi \in L^2(\mathbb{R}^2),$$

et (1.20) est vérifiée pour tout $\psi \in \text{Dom}(\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}})$.

Démonstration. Par intégration par parties, en utilisant l'Hypothèse 1.3.7 et notamment le fait que $\langle \mathbf{B} \rangle$ contrôle ses dérivées,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \langle \mathbf{B} \rangle |(-ih\nabla - \mathbf{A})\psi|^2 dx &= \langle \langle \mathbf{B} \rangle (-ih\nabla - \mathbf{A})\psi, (-ih\nabla - \mathbf{A})\psi \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} \\ &\leq \langle \mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}\psi, \langle \mathbf{B} \rangle \psi \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} + C \|\langle \mathbf{B} \rangle \psi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \|(-ih\nabla - \mathbf{A})\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \\ &\leq C \|\langle \mathbf{B} \rangle \psi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \|\psi\|_{\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}}. \end{aligned} \quad (1.21)$$

On obtient

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} |h\mathbf{B}|^2 |\psi|^2 dx &= |\langle [L_1, L_2]\psi, h\mathbf{B}\psi \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)}| \\ &\leq Ch \|\langle \mathbf{B} \rangle \psi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \|(-ih\nabla - \mathbf{A})\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + Ch \int_{\mathbb{R}^d} \langle \mathbf{B} \rangle |(-ih\nabla - \mathbf{A})\psi|^2 dx, \end{aligned}$$

où on a utilisé une intégration par partie et l'Hypothèse 1.3.7. Par (1.21), on a alors

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{B}|^2 |\psi|^2 dx \leq Ch^{-1} \|\langle \mathbf{B} \rangle \psi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \|\psi\|_{\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}}$$

et ainsi

$$\|\langle \mathbf{B} \rangle \psi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq Ch^{-1} \|\psi\|_{\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}}.$$

On conclut en appliquant de nouveau (1.21). □

Le Théorème 1.3.10 se prouve par récurrence pour $n \geq 0$. Néanmoins, le cas $n = 1$ peut être prouvé directement et est éclairant sur la preuve du théorème. Nous ne ferons donc pas la preuve de l'hérédité et nous contenterons du cas $n = 1$.

Le cas $n = 1$. On cherche à prouver ce qu'il existe $C > 0$, $h_0 > 0$ tels que, pour tout $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ et tout $\hbar \in (0, \hbar_0)$,

$$\|L_1^2\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \|L_2^2\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \|L_1L_2\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \|L_2L_1\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq C\hbar^{-1}\|\mathcal{L}_{\hbar,\mathbf{A}}\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}.$$

Pour cela, considérons $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ et posons

$$\mathcal{L}_{\hbar,\mathbf{A}}\psi = f.$$

Considérons $j \in \{1, 2\}$. On a

$$\mathcal{L}_{\hbar,\mathbf{A}}(L_j\psi) = L_jf + [\mathcal{L}_{\hbar,\mathbf{A}}, L_j]\psi,$$

et

$$\|(-ih\nabla - \mathbf{A})(L_j\psi)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 = \langle L_jf, L_j\psi \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \langle [\mathcal{L}_{\hbar,\mathbf{A}}, L_j]\psi, L_j\psi \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)},$$

On a, pour $k \neq j$

$$[\mathcal{L}_{\hbar,\mathbf{A}}, L_j] = [L_k^2, L_j] = ([L_k, L_j]L_k + L_k[L_k, L_j]).$$

Ainsi,

$$|\langle [\mathcal{L}_{\hbar,\mathbf{A}}, L_j]\psi, L_j\psi \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)}| \leq C\|\mathbf{B}\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\|(-ih\nabla - \mathbf{A})\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + C\int_{\mathbb{R}^2} |\mathbf{B}| |(-ih\nabla - \mathbf{A})\psi|^2 dx.$$

Et, pour tout $\varepsilon \in (0, 1)$,

$$|\langle L_jf, L_j\psi \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)}| \leq \varepsilon\|L_j^2\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + C\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2,$$

d'où

$$\|(-ih\nabla - \mathbf{A})(L_j\psi)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \leq C\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + C\|\mathbf{B}\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\|(-ih\nabla - \mathbf{A})\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + C\int_{\mathbb{R}^2} |\mathbf{B}| |(-ih\nabla - \mathbf{A})\psi|^2 dx.$$

En appliquant le Lemme 1.3.14, conjointement à la remarque $\|\psi\|_{\mathcal{L}_{\hbar,\mathbf{A}}}^2 \leq C(1 + h^{-2})\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2$, on trouve

$$\|(-ih\nabla - \mathbf{A})(L_j\psi)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \leq Ch^{-3}\|f\|^2.$$

ce qui prouve le résultat annoncé. □

Donnons maintenant les idées de la preuve du Théorème 1.3.12.

Esquisse de la preuve du Théorème 1.3.12 Considérons tout d'abord $\psi_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$. On désigne par $\psi(\cdot)$ la solution de l'équation de Schrödinger (1.15). On introduit quelques notations.

Notation. Pour $\kappa, \lambda \in \mathbb{N}$, on définit $\Pi_{\kappa,\lambda}$ l'ensemble des opérateurs P qui sont la composition d'opérateurs pris parmi $(L_j)_{1 \leq j \leq 2}$ et $(x_k)_{1 \leq k \leq 2}$ avec κ occurrences de x et λ occurrences de L . On pose aussi $\Pi = \bigcup_{(\kappa,\lambda) \in \mathbb{N}^2} \Pi_{\kappa,\lambda}$.

La preuve du Théorème 1.3.12 s'appuie sur la proposition suivante.

Proposition 1.3.16. Soient $(\kappa, \lambda) \in \mathbb{N}^2$ et $P \in \Pi_{\kappa,\lambda}$. Il existe $\hbar_0 > 0$, $C \geq 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que, pour tout $t \geq 0$, et tout $\psi_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, pour $\lambda \leq 2n \leq \lambda + 1$,

$$\|P\psi(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq Ch^{-N}(1 + t^\kappa) \sum_{|\alpha| \leq \kappa: |\alpha| + \nu \leq \kappa + n} \|\mathcal{L}_{\hbar,\mathbf{A}}^\nu x^\alpha \psi_0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}.$$

Cette proposition prouve le contrôle des semi-normes de Schwartz et ainsi le Théorème 1.3.12. En effet, des injections de Sobolev on apprend que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$,

$$p_k(f) \leq \max_{|\alpha|, |\beta| \leq K} \|x^\alpha \partial^\beta f\|.$$

En utilisant que $\partial_j = (-ih)^{-1}(L_j + A_j)$, et que \mathbf{A} est dans une certaine classe de symboles, on a $C > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que, pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$, si $\|Pf\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} < +\infty$ pour tout $P \in \Pi$, $x^\alpha \partial^\beta f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^2$, et

$$\|x^\alpha \partial^\beta f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq Ch^{-N} \sum_{P \in R} \|Pf\|_{L^2(\mathbb{R}^2)},$$

où R est une partie finie de Π . Alors, la Proposition 3.3.1 implique, pour N , κ et n assez grands,

$$\|x^\alpha \partial^\beta \psi(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq Ch^{-N} \sum_{P \in R} \|P\psi(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq Ch^{-N} (1 + t^\kappa) \sum_{|\gamma| \leq \kappa, |\nu| \leq n} \|\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}^\nu x^\gamma \psi_0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}.$$

On conclut finalement par

$$\|\mathcal{L}_\hbar^\nu x^\alpha \psi_0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq C \|(1 + x^2)^m \mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}^\nu x^\alpha \psi_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq Cp_K(\psi_0),$$

pour m, K suffisamment grands.

Cette proposition se prouve par récurrence sur le nombre κ d'occurrences de x dans l'opérateur P . On ne prouvera pas ici cette récurrence, mais on peut l'illustrer en prouvant la Proposition 1.3.16 dans les $\kappa = 0$ et $\kappa = 1$.

Lorsque κ vaut 0 Pour tout $t \geq 0$, on a, par définition,

$$\psi(t) = e^{\frac{it}{\hbar} \mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}} \psi_0.$$

Pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, on obtient

$$\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}^\ell \psi(t) = e^{\frac{it}{\hbar} \mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}} \mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}^\ell \psi_0.$$

Par application du Théorème 1.3.10, on prouve l'estimation de la Proposition 1.3.16 pour $\kappa = 0$.

Lorsque κ vaut 1 On a

$$-ih\partial_t(x_j\psi) = \mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}(x_j\psi) + [x_j, \mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}]\psi.$$

On remarque que $[x_j, \mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}] = 2\hbar L_j$. Avec la formule de Duhamel, on a, pour tout $t \geq 0$,

$$x_j\psi(t) = e^{\frac{it}{\hbar} \mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}}(x_j\psi_0) + \int_0^t e^{\frac{i(t-s)}{\hbar} \mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}} 2L_j\psi(s) ds. \quad (1.22)$$

Par le Lemme 1.3.14, on obtient

$$\|x_j\psi(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq \|x_j\psi_0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + 2 \int_0^t \|L_j\psi(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} ds \leq \|x_j\psi_0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \sqrt{2} \int_0^t \|\psi(s)\|_{\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}} ds.$$

Puisque le propagateur est un opérateur unitaire, on a, pour tout $t \geq 0$,

$$\|x_j\psi(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq \|x_j\psi_0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + 2 \int_0^t \|L_j\psi(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} ds \leq \|x_j\psi_0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + t\sqrt{2} \|\psi_0\|_{\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}}.$$

De manière plus générale, par (1.22), on obtient pour tout $\ell \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}^\ell x_j\psi(t) = e^{\frac{it}{\hbar} \mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}} \mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}^\ell (x_j\psi_0) + \int_0^t e^{\frac{i(t-s)}{\hbar} \mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}} 2\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}^\ell L_j\psi(s) ds.$$

de sorte que

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}^\ell x_j \psi(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} &\leq \|\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}^\ell(x_j \psi_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + 2 \int_0^t \|\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}^\ell L_j \psi(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} ds \\
&\leq \|\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}^\ell(x_j \psi_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + Ch^{-N} \int_0^t \|\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}^{\ell+1} \psi(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} ds \\
&\leq \|\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}^\ell(x_j \psi_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + Cth^{-N} \|\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}^{\ell+1} \psi_0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}.
\end{aligned}$$

Il reste alors à appliquer le Théorème 1.3.10 et de commuter les x_j avec les L_k . La preuve de l'hérédité empruntant les même outils que ceux utilisés dans les cas $\kappa = 0$ et $\kappa = 1$, elle ne sera pas développée ici. \square

1.3.3 Propagation magnétique d'états cohérents : un résultat d'ubiquité

Après avoir introduit la classe d'états cohérents qui nous intéresse, les résultats de formes normales et de propagations magnétique, nous énonçons les théorèmes de propagation en temps longs d'états cohérents. Pour le théorème qui suit, nous supposons seulement que le champ magnétique \mathbf{B} ne s'annule pas sur un ouvert Ω de \mathbb{R}_q^2 .

Theorem 1.3.17. *Il existe un opérateur pseudo-différentiel \mathcal{J}_\hbar sur $L^2(\mathbb{R}^2)$ tel que pour tout $\alpha \in (0, 1)$ et $K > 0$, si $J_\hbar \in \mathbb{N}$ est une famille d'entiers tels que $J_\hbar \geq K\hbar^{-\alpha}$, alors les assertions qui suivent sont vraies. Soit $\varphi_\hbar^0 \in \mathfrak{C}$ un état cohérent centré en un point z_0 de la surface caractéristique $\Sigma = H^{-1}(0)$ et soit $(\varphi_\hbar^t)_{t \in \mathbb{R}}$ son propagé par l'équation de Schrödinger magnétique (1.16) :*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \varphi_\hbar^t := P^t \varphi_\hbar^0.$$

Alors φ_\hbar^t peut être décomposé comme suit :

$$\varphi_\hbar^t = \sum_{j=0}^{J_\hbar} \alpha_j \varphi_{j, \hbar}^t + r_\hbar^t \quad (1.23)$$

où $(\alpha_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{R}_+)$, et il existe $T > 0$ tel que le reste r_\hbar^t satisfasse, pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\sup_{t \in [0, T/\hbar]} \|(\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}})^N r_\hbar^t\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \mathcal{O}(\hbar^\infty), \quad (1.24)$$

et tel que $\varphi_{j, \hbar}^t$ ait les propriétés suivantes.

1. $\forall j \geq 0$, $\alpha_j \varphi_{j, \hbar}^t$ est la projection orthogonale de φ_\hbar^t sur $\ker(\mathcal{J}_\hbar - (2j+1)\hbar)$;
2. $\forall \tilde{t} \in [0, T]$,

$$\varphi_{j, \hbar}^{\tilde{t}/\hbar} \in \mathfrak{C}; \quad (1.25)$$

3. on peut suivre le centre de ces états cohérents : pour tout $\tilde{t} \in [0, T]$, on a $\varphi_{j, \hbar}^{\tilde{t}/\hbar}$ centré en $z((2j+1)\tilde{t})$ où $z(\tilde{t}) := \Phi_{\tilde{B}}^{\tilde{t}} z_0$, et $\Phi_{\tilde{B}}^{\tilde{t}}$ désigne le flot hamiltonien de \tilde{B} sur Σ .

Ici, \mathcal{J}_\hbar est un oscillateur harmonique 1-D 'déformé'. En effet, son spectre est composé des valeurs propres de l'oscillateur harmonique 1-D,

$$\{(2j+1)\hbar, j \in \mathbb{N}\}$$

et les espaces propres sont donnés par

$$\mathcal{H}_{j, \hbar} := \ker(\mathcal{J}_\hbar - (2j+1)\hbar)$$

tous de dimension infinie. Ces espaces sont appelés les *niveaux de Landau*. Le Théorème 1.3.17 nous apprend que pour des temps d'ordres \hbar^{-1} , ces niveaux de Landau sont stables par la dynamique quantique à un terme d'ordre $\mathcal{O}_{L^2}(\hbar^\infty)$ près.

Le Théorème 1.3.17 nous apprend alors que pour des temps d'ordre \hbar^{-1} , un phénomène d'ubiquité quantique de l'état cohérent apparaît, ce qui n'était pas prévisible par la dynamique classique. En effet la relation (1.23) montre que l'état se répartit sur les niveaux de Landau et se propage sur chacun de ces niveaux à une vitesse différente : il s'agit d'un *effet de dispersion en énergie* de l'état. Chaque paquet d'onde se propageant définit un état cohérent à un facteur près, qui correspond à la quantité d'énergie de l'état initial sur le niveau considéré.

Cette découpe de l'état cohérent est valide pour des temps plus courts. Cependant, la distance entre deux paquets d'onde de deux niveaux de Landau consécutifs étant de l'ordre de $t \times \hbar$, on obtient que pour des temps d'ordre plus petit que \hbar^{-1} , à la limite semiclassique, les états se trouvent tous confondus avec le centre z_0 de l'état cohérent initial, ce qui est cohérent avec le Théorème d'Egorov, z_0 étant un point fixe de la dynamique.

On peut noter que l'estimation du reste (1.24) se fait dans les normes adaptées au laplacien magnétique. Ce dernier n'étant pas elliptique, on ne peut conclure sur un contrôle par des normes de Sobolev semi-classiques plus générales. Pour cela, on peut invoquer le Théorème 1.3.10, pour obtenir le théorème suivant.

Theorem 1.3.18. *On reprend les notations du Théorème 1.3.17. Pour un champ magnétique \mathbf{B} satisfaisant l'hypothèse 1.3.7, en supposant de plus qu'il existe $b_0 > 0$ tel que*

$$\forall q \in \mathbb{R}^2, B(q) \geq b_0, \quad (1.26)$$

on obtient l'estimation suivante du terme de reste r_{\hbar}^t : pour $T \in \mathbb{R}$ un temps donné et pour une semi-norme de Schwartz p quelconque, on a

$$\sup_{t \in [0, T/\hbar]} p(r_{\hbar}^t) = \mathcal{O}(\hbar^{\infty}). \quad (1.27)$$

Ainsi, avec une hypothèse de régularité du champ magnétique à l'infini, et une hypothèse d'ellipticité (1.26), on obtient une estimation (1.27) dans toutes les semi-normes de Schwartz, ce qui est bien plus fort que l'estimation (1.24). L'estimation dans l'espace de Schwartz montre que l'état propagé est fortement localisé autour des centres des états cohérents répartis sur les niveaux de Landau.

L'hypothèse 1.3.7 suppose que le champ magnétique 'ne varie pas trop à l'infini', en contrôlant ses dérivées par lui-même. Il apparaît que cette hypothèse est assez connue et utilisée dans la littérature. En dimension $d \geq 3$, cette condition est cruciale pour obtenir, négociant des hypothèses d'ellipticité supplémentaires, que le laplacien magnétique a une résolvante compacte et ainsi n'a pas de spectre essentiel. En l'absence de ces conditions d'ellipticité, cette même hypothèse donne une description précise du spectre essentiel. On peut se référer à [4, 34]. Le bien fondé de cette hypothèse dans notre cas est son utilisation pour obtenir une borne inférieure au spectre essentiel de $\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}$, obtenue dans [34], et qui est un ingrédient important de la preuve du Théorème 1.3.10. De manière générale cette hypothèse est optimale pour obtenir la compacité de la résolvante du laplacien magnétique : dans [17] il est prouvé que même sous de bonnes conditions d'ellipticité, si l'hypothèse 1.3.7 n'est pas satisfaite, il peut y avoir des champs magnétiques donnant des laplaciens sans résolvante compacte et sans une bonne description du spectre essentiel.

Nous donnons maintenant les arguments principaux des preuves des théorèmes ci-dessus, reposant essentiellement sur les outils présentés jusqu'ici.

Étapes principales de la preuve des Théorèmes 1.3.17 et 1.3.18 : L'objet de ces deux théorèmes est de propager un état $\varphi_{\hbar}^0 \in \mathfrak{C}$ par l'équation de Schrödinger magnétique

$$\begin{cases} i\hbar \partial_t \varphi_{\hbar}^t = \mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}} \varphi_{\hbar}^t \\ \varphi_{\hbar}^{t=0} = \varphi_{\hbar}^0, \end{cases} \quad (1.28)$$

avec un état initial φ_{\hbar}^0 centré sur la variété caractéristique Σ . Reprenant les notations du Théorème 1.2.4, on considère l'opérateur unitaire U_{\hbar} . Appliquant la Proposition 1.3.3, on obtient que $\psi_{\hbar}^0 := U_{\hbar}^* \varphi_{\hbar}^0$ est encore un état cohérent de la classe \mathfrak{C} centré en un point $z_0 := \kappa^{-1}(X_0) \in \kappa^{-1}(\Sigma) = \{z_1 = 0\}$. La stratégie de la preuve est de propager dans un premier temps ψ_{\hbar}^0 par la forme normale \mathcal{N} et de relier cette propagation à celle de φ_{\hbar}^0 par l'équation de Schrödinger magnétique (1.28) initiale.

Propagation par la forme normale : On s'intéresse à l'équation de propagation suivante

$$\begin{cases} i\hbar\partial_t\psi_\hbar^t = \mathcal{N}\psi_\hbar^t \\ \psi_\hbar^{t=0} = \psi_\hbar^0. \end{cases} \quad (1.29)$$

qui, par le Théorème de Stone admet un propagateur $(Q^t)_{t \in \mathbb{R}}$, unitaire sur $L^2(\mathbb{R}^2)$ et satisfaisant

$$\forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2) \quad i\hbar\partial_t Q^t \psi = \mathcal{N}Q^t \psi.$$

On désigne alors par $\psi_\hbar^t := Q^t \psi_\hbar^0$ la solution de (1.29). Comme dit plus haut, l'état $\psi_\hbar^0 \in \mathfrak{C}$ est localisé en

$$\kappa^{-1}(X^0) = (0, z_2^0).$$

Considérons l'oscillateur harmonique en la variable z_1 ,

$$\mathcal{I}_\hbar = -\hbar^2 \partial_{x_1}^2 + x_1^2,$$

et les fonctions de Hermite associées $(h_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}_{x_1})$. On commence par énoncer le résultat suivant.

Lemma 1.3.19. *Il existe une famille d'états $(f_j^0)_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}_{x_2})$ et une suite $(\alpha_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset \ell^2(\mathbb{R}_+)$ telles que*

$$\psi_\hbar^0 = \sum_{j=0}^{\infty} h_j \otimes f_j^0$$

avec pour tout entier j pour lesquels $\alpha_j \neq 0$, $\alpha_j^{-1} f_j^0$ est un état cohérent de la classe $\mathfrak{C}^{[1]}$, centré en z_2^0 . Dans le cas où $\alpha_j = 0$, on obtient que $f_j = \mathcal{O}_{L^2}(\hbar^\beta)$

Le Lemme 1.3.19 montre que ψ_\hbar^0 est une somme de fonctions, chacune correspondant à un 'niveau de Landau' : f_j^0 correspond à l'occupation de ψ_\hbar^0 du j^{e} niveau d'énergie. Le lemme suivant donne la répartition en énergie sur les niveaux de Landau dans la limite semiclassique $\hbar \rightarrow 0$.

Lemma 1.3.20. *Reprenant la suite ci-dessus $(\alpha_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset \ell^2(\mathbb{R}_+)$ indépendante de \hbar , il existe une suite dépendante de \hbar , $(\varepsilon(\hbar))_j \subset \mathbb{R}$ telle que $j \in \mathbb{N}$*

$$\|f_j^0\|^2 = \alpha_j^2 + \hbar^\beta \varepsilon_j(\hbar)$$

avec $\sum_{j \geq 0} \alpha_j^2 = 1$ et où $\sum_{j \geq 0} |\varepsilon_j(\hbar)|$ est une suite bornée indépendamment de \hbar .

Appliquant le Lemme 1.3.19, on étudie maintenant la propagation

$$\psi_\hbar^0 = \sum_{j=0}^{\infty} h_j \otimes f_j^0.$$

Par le Théorème 1.2.4, la solution de (1.29) peut s'écrire

$$\psi_\hbar^t = \sum_{j=0}^{\infty} h_j \otimes f_j^t$$

avec pour tout $j \in \mathbb{N}$, f_j^t solution de l'équation de propagation

$$\begin{cases} i\partial_t f_j^t = (\frac{1}{\hbar} \mathcal{N}^{(j)}) f_j^t \\ f_j^{t=0} = f_j^0 \end{cases} \quad (1.30)$$

où $\frac{1}{\hbar} \mathcal{N}^{(j)}$ est un opérateur pseudo-différentiel dont le symbole principal s'écrit $(2j+1)B \circ \phi^{-1}$. Dans le but d'appliquer les résultats de propagations usuels à (1.30) on fait le 'rescaling' en temps suivant. Étant donné

$j \in \mathbb{N}$, on pose $\tau_j := t \times \hbar(2j+1)$ de sortes que τ_j corresponde au temps de la dérive lente sur le j^e niveau de Landau. Ainsi, pour un temps de propagation global $t \in [0, T\hbar^{-1}]$, on a des temps réduits $\tau_j \in [0, (2j+1)T]$. On pose alors $\tilde{f}_j^{\tau_j} := f_j^t$ et on obtient l'équation de propagation équivalente

$$\begin{cases} i\hbar\partial_{\tau_j}\tilde{f}_j^{\tau_j} = \mathcal{F}^{(j)}\tilde{f}_j^{\tau_j} \\ \tilde{f}_j^{\tau_j=0} = f_j^0, \end{cases}$$

où

$$\mathcal{F}^{(j)} := \frac{1}{\hbar(2j+1)}\mathcal{N}^{(j)}$$

est un opérateur pseudo-différentiel agissant sur $L^2(\mathbb{R}_{x_2})$ avec pour symbole principal $B \circ \phi^{-1}$. On met en avant le fait qu'ici, même si le symbole total de $\mathcal{F}^{(j)}$ dépend de j , le symbole principal quant à lui est indépendant de j . Puisque $\mathcal{N}^{(j)}$ est la restriction d'un opérateur autoadjoint sur un sous espace stable, il définit un opérateur autoadjoint sur $L^2(\mathbb{R}_{x_2})$. Toujours par le Théorème de Stone, il existe une famille de propagateurs $(Q_j^{\tau_j})_{\tau_j \in \mathbb{R}}$ pour l'équation (1.30); revenant à la propagation pour le temps initial t , on obtient pour $t \in [0, T/\hbar]$,

$$f_j^t = \tilde{f}_j^{\tau_j} = Q_j^{(2j+1)\hbar t} f_j^0.$$

De plus, par le Lemme 1.3.19 et par la Proposition 1.3.3, on sait que $\alpha_j^{-1}\tilde{f}_j^{\tau_j}$ est un état cohérent de la classe $\mathfrak{C}^{[1]}$ où τ_j est fixé, et l'évolution du centre de cet état cohérent est gouverné par le flot hamiltonien de

$$K := B \circ \phi^{-1},$$

qui est le pull-back du champ magnétique \mathbf{B} de $\Omega \subset \mathbb{R}_q^2$ sur la surface d'énergie nulle $\{z_1 = 0\}$ par ϕ . De manière plus précise, soit Φ_K^t le flot hamiltonien de K , et soit $T > 0$ tel que $\Phi_K^{(2j+1)\tilde{t}}(z_2^0)$ reste dans l'ouvert $\tilde{\Omega}$ pour $\tilde{t} \in [0, T]$. Alors, puisque $f_j^{\tilde{t}=0}$ est un état cohérent centré en z_2^0 , on obtient que $\tilde{f}_j^{\tau_j}$ est un état cohérent centré en $\Phi_K^{\tau_j}(z_2^0)$ pour $\tau_j \in [0, (2j+1)T]$. En d'autres mots, pour tout $\tilde{t} \in [0, T]$, le centre de $f_j^{\tilde{t}/\hbar}$ est donné par $\Phi_K^{(2j+1)\tilde{t}}(z_2^0)$, où la solution de (1.29) est donnée par

$$\forall t \in [0, T/\hbar], \quad \psi_h^t = \sum_{j \in \mathbb{N}} h_j \otimes f_j^t.$$

On retrouve déjà à ce stade de la preuve le phénomène d'ubiquité quantique annoncé. En effet, notre état cohérent se sépare en une somme pondérée d'états cohérents et chacun des centres des états cohérents a sa propre dynamique. Ainsi, pour des temps d'ordre \hbar^{-1} , la localisation de ψ_h^t n'est plus un point unique dans l'espace des phases, mais une suite de points tous sur la même trajectoire issue du flot de l'hamiltonien donné par le champ magnétique, en restriction à la surface caractéristique $\{z_1 = 0\}$.

Une autre remarque importante est que, dûe à la propriété de conservation de la norme L^2 par la propagation par l'équation de Schrödinger

$$\|f_j^t\|_{L^2(\mathbb{R}_{x_2})} = \|f_j^0\|_{L^2(\mathbb{R}_{x_2})}, \quad (1.31)$$

l'occupation en énergie du j^e niveau de Landau reste la même au cours du temps, à savoir α_j^2 . En d'autres mots, il n'y a pas de glissement énergétique vers des énergies plus hautes ou plus basses au cours de la propagation.

Retour à la propagation initiale Après avoir étudié la propagation magnétique par l'opérateur de forme normale, il nous faut maintenant revenir à la propagation initiale, par le laplacien magnétique $\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}$. Le lemme qui suit constitue le premier pas de cette preuve. Le Lemme 1.3.19 nous enseignait que

$$\psi_h^0 = \sum_{j=0}^{\infty} h_j \otimes f_j^0. \quad (1.32)$$

Lemma 1.3.21. *Pour $\alpha \in (0, 1)$ et $K > 0$, soit J_{\hbar} une suite d'entiers dépendante de \hbar , telle que $J_{\hbar} \geq K\hbar^{-\alpha}$. Alors, pour*

$$\tilde{\psi}_{\hbar}^0 := \sum_{j \leq J_{\hbar}} h_j \otimes f_j^0, \quad (1.33)$$

on a

$$\psi_{\hbar}^0 - \tilde{\psi}_{\hbar}^0 = \mathcal{O}_{\mathcal{S}}(\hbar^{\infty}).$$

Remark 1.3.22. Il apparaît en fait que pour toute semi-norme de Schwartz p pour tout $\delta > 0$, on a

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} p(f_j^0)^{\delta} < \infty$$

Cette propriété nous sera utile plus tard

Ce lemme nous montre que seuls les premiers niveaux de Landau de l'état ψ_{\hbar}^0 importent dans la propagation, mais qu'il nous faut considérer un nombre croissant de niveaux de Landau lorsque $\hbar \rightarrow 0$ pour avoir une bonne estimation du terme de reste. On compare maintenant la propagation de l'état

$$\tilde{\psi}_{\hbar}^0 := \sum_{j \leq J_{\hbar}} \psi_{\hbar, j}^0$$

par \mathcal{N} avec la propagation de φ_{\hbar}^0 par le Laplacien de départ.

Propagation sous des champs magnétiques généraux On considère dans ce paragraphe un champ magnétique \mathbf{B} ne s'annulant pas, sans autres hypothèses. Le Théorème 1.2.4 prodigue une relation entre $\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}$ et \mathcal{N} ,

$$\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}} = U_{\hbar} \mathcal{N} U_{\hbar}^* + U_{\hbar} R_{\hbar} U_{\hbar}^*.$$

Pour tout $j \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$, on pose $\psi_{j, \hbar}^t := h_j \otimes f_j^t$. De (1.30) on obtient que

$$i\hbar \partial_t U_{\hbar} \psi_{j, \hbar}^t = \mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}} U_{\hbar} \psi_{j, \hbar}^t - U_{\hbar} R_{\hbar} \psi_{j, \hbar}^t.$$

Considérons $\alpha \in (0, 1)$ et $J_{\hbar} \in \mathbb{N}$ comme dans le Lemme 1.3.21 et sommons en $j \leq J_{\hbar}$. On obtient alors l'équation de propagation suivante, en posant $\tilde{\psi}_{\hbar}^t := \sum_{j \leq J_{\hbar}} h_j \otimes f_j^t$,

$$\begin{cases} i\hbar \partial_t U_{\hbar} \tilde{\psi}_{\hbar}^t = \mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}} U_{\hbar} \tilde{\psi}_{\hbar}^t + \mathbf{e}_{\hbar}^t \\ \tilde{\psi}_{\hbar}^{t=0} = \tilde{\psi}_{\hbar}^0 \end{cases} \quad (1.34)$$

avec $\mathbf{e}_{\hbar}^t = U_{\hbar} R_{\hbar} \tilde{\psi}_{\hbar}^t$. On compare alors la solution de (1.34) avec la solution φ_{\hbar}^t de (1.28). Pour tout $\hbar > 0$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, posant $\mathcal{D}_{\hbar}^t = \varphi_{\hbar}^t - U_{\hbar} \tilde{\psi}_{\hbar}^t$, le principe de Duhamel nous enseigne que

$$\mathcal{D}_{\hbar}^t = P^t \mathcal{D}_{\hbar}^0 - \frac{i}{\hbar} \int_0^t P^{t-s} \mathbf{e}_{\hbar}^s ds \quad (1.35)$$

où P^t désigne le propagateur associé à l'équation (1.28), donné par le théorème de Stone. Notre but est de prouver que pour tout temps T et pour tout entier N , uniformément en temps $t \in [0, T/\hbar]$,

$$\|\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}^N \mathcal{D}_{\hbar}^t\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \mathcal{O}(\hbar^{\infty}).$$

Nous ne prouverons pas ce résultat ici, mais nous donnerons les ingrédients principaux de la preuve. Puisque P^t est unitaire et commute avec $\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}$, on obtient

$$\|\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}^N \mathcal{D}_{\hbar}^t\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq \|\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}^N \mathcal{D}_{\hbar}^0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \frac{T}{\hbar^2} \sup_{s \in [0, T/\hbar]} \|\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}^N \mathbf{e}_{\hbar}^s\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}.$$

Alors, par application du Lemme 1.3.21, on prouve que

$$\|\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}^N \mathcal{D}_{\hbar}^0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \mathcal{O}_{\mathcal{S}}(\hbar^{\infty}).$$

En utilisant maintenant les estimations de Wigner prodiguées par la Proposition 1.3.4 et le Corollaire 1.3.6, on prouve que

$$\|\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}^N \mathbf{e}_{\hbar}^s\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \mathcal{O}(\hbar^{\infty}).$$

On obtient alors

$$\sup_{t \in [0, T/\hbar]} \|\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}^N (\varphi_{\hbar}^t - U_{\hbar} \tilde{\psi}_{\hbar}^t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \mathcal{O}(\hbar^{\infty}). \quad (1.36)$$

Propagation par des champs magnetiques vérifiant la propriété (P) On donne maintenant les idées principales de la preuve du Théorème 1.3.18. On suppose alors que le champ magnétique \mathbf{B} vérifie la propriété (P). On suppose de plus qu'il existe $b_0 > 0$ tel que $\forall q \in \mathbb{R}^2, \mathbf{B}(q) \geq b_0$. On considère à nouveau $\mathcal{D}_{\hbar}^t = \varphi_{\hbar}^t - U_{\hbar} \tilde{\psi}_{\hbar}^t$, et (1.35) nous donne à nouveau

$$\mathcal{D}_{\hbar}^t = P^t \mathcal{D}_{\hbar}^0 - \frac{i}{\hbar} \int_0^t P^{t-s} \mathbf{e}_{\hbar}^s ds$$

et on cherche à prouver pour un temps $T > 0$ donné, uniformément pour des temps $t \in [0, T/\hbar]$,

$$\mathcal{D}_{\hbar}^t = \mathcal{O}_{\mathcal{S}}(\hbar^{\infty}).$$

Pour ce faire il faut d'abord prouver que $P^t \mathcal{D}_{\hbar}^0 = \mathcal{O}_{\mathcal{S}}(\hbar^{\infty})$, ce qui est directement donné par le Lemme 1.3.21 et par le Théorème 1.3.12. Il reste alors à prouver l'estimation

$$\int_0^t P^{t-s} \mathbf{e}_{\hbar}^s ds = \mathcal{O}_{\mathcal{S}}(\hbar^{\infty}). \quad (1.37)$$

on commence par prouver que uniformément en $s \in [0, T/\hbar]$, $\mathbf{e}_{\hbar}^s = \mathcal{O}_{\mathcal{S}}(\hbar^{\infty})$. On rappelle que $\mathbf{e}_{\hbar}^t = U_{\hbar} R_{\hbar} \sum_{j \leq J_{\hbar}} \psi_{j, \hbar}^t$. En appliquant alors à nouveau les estimations de Wigner de la Proposition 1.3.4 et du Corollaire 1.3.6 on obtient alors

$$\sup_{s \in [0, T/\hbar]} p(\mathbf{e}_{\hbar}^s) = \mathcal{O}(\hbar^{\infty}).$$

Les estimations de propagation magnétiques du Théorème 1.3.12 donnent alors

$$\sup_{t \in [T/\hbar]} p(\mathcal{D}_{\hbar}^t) = \mathcal{O}(\hbar^{\infty})$$

ce qui prouve

$$\sup_{t \in [0, T/\hbar]} p\left(\varphi_{\hbar}^t - \sum_{j \leq J_{\hbar}} \varphi_{j, \hbar}^t\right) = \mathcal{O}(\hbar^{\infty}). \quad (1.38)$$

Fin des preuves des Théorèmes 1.3.17 et 1.3.18 On définit alors pour tout j les espaces

$$\mathcal{H}_{j, \hbar} = U_{\hbar} \cdot (\text{Vect}(h_j) \otimes L^2(\mathbb{R}_{x_2}))$$

et on définit l'opérateur

$$\mathcal{J}_{\hbar} = U_{\hbar} \mathcal{I}_{\hbar} U_{\hbar}^*,$$

qui est un opérateur pseudo-différentiel par le Théorème d'Egorov. Puisque $(h_j)_{j \in \mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}_{x_1})$, les espaces $\mathcal{H}_{j, \hbar}$ sont en somme directe orthogonale et

$$\forall j \in \mathbb{N}, \forall f \in \mathcal{H}_{j, \hbar}, \mathcal{J}_{\hbar} f = (2j + 1)\hbar f.$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi_{j,\hbar}^t := U_{\hbar}\psi_{j,\hbar}^t$, et $\psi_{j,\hbar}^t$ est la projection de ψ_{\hbar}^t sur l'espace $\text{Vect}(h_j) \otimes L^2(\mathbb{R}_{x_2})$. Ainsi, $\varphi_{j,\hbar}^t$ est la projection de φ_{\hbar}^t sur $\mathcal{H}_{j,\hbar}$, d'où $\varphi_{j,\hbar}^t \in \mathcal{H}_{j,\hbar}$, et

$$\varphi_{\hbar}^t = \sum_{j \in \mathbb{N}} \varphi_{j,\hbar}^t.$$

Ceci, avec (1.36) prouve (1.23) et (1.24). De plus, pour tout j , en utilisant la Proposition 1.3.3 appliquée à l'opérateur U_{\hbar} , on constate que chaque état $\varphi_{j,\hbar}^{t\hbar^{-1}}$ est centré en $\Phi_B^{(2j+1)t} X_0$. Finalement, (1.25) est donné par le Lemme 1.3.19. Ceci achève la preuve du Théorème 1.3.17. En ce qui concerne la preuve du Théorème 1.3.18, il reste à estimer le terme de reste r_{\hbar} dans les semi-normes de Schwartz. Ces estimations sont données par (1.38), qui prouve (1.27). \square

1.4 Organisation du manuscrit

Le présent chapitre contient une entrée en matière historique, conduisant à l'introduction des bases mathématiques nécessaires à l'étude développée dans ce manuscrit. Elle permettra aussi d'introduire les différents résultats prouvés dans cette thèse et d'expliciter les outils nécessaires à ces preuves.

Le **Chapitre 2** introduira de manière précise les notions de champ magnétique, de dynamique classique et de propagation quantique, dans le cas spécifique de la dimension 2. Ceci permettra d'énoncer les théorèmes de formes normales que nous utiliserons, en absence de confinement. On donnera alors les idées majeures de la preuve de ces théorèmes.

Le **Chapitre 3** fait l'objet de l'article [5], soumis, en collaboration avec Nicolas Raymond et San Vũ Ngọc. Il y est prouvé un résultat de stabilité de la classe de Schwartz sous la propagation quantique magnétique, sous des hypothèses d'ellipticité du champ magnétique et de contrôle des dérivées de ce dernier, l'empêchant de 'trop osciller' à l'infini.

Le **Chapitre 4** est entièrement dédié à l'étude des états cohérents. Après un état de l'art plus développé que dans cette introduction, axé essentiellement sur la propagation des états comprimés de Didier Robert et Monique Combescure par des hamiltoniens quadratiques et plus généraux, on définira la classe d'états cohérents que l'on cherche à propager et on énoncera et prouvera les théorèmes de propagation afférants, s'inspirant des résultats concernant les états comprimés. Cette dernière partie sera tirée directement d'une section de l'article [6] soumis, écrit en collaboration avec San Vũ Ngọc.

Le **Chapitre 5** est constitué de l'article [6], moins la section contenant l'étude des états cohérents. Il s'agit de prouver les théorèmes principaux de ce manuscrit, le Théorème 5.1.1 et le Théorème 5.1.2, établissant les propriétés de délocalisation d'un état cohérent sous propagation magnétique en temps longs.

Chapitre 2

Un monde magnétique

[...] and the moral of that is – ‘Be what you would seem to be’ – or, if you’d like it put more simply – ‘Never imagine yourself not to be otherwise than what it might appear to others that what you were or might have been was not otherwise than what you had been would have appeared to them to be otherwise.’

*Alice’s Adventures in
Wonderland, Lewis Carroll*

Les phénomènes magnétiques sont connus depuis l'antiquité. Témoin en est le terme 'magnétique', qui provient de la ville antique de *Magnésie de Méandre*, au sud-ouest de l'actuelle Turquie, fondée autour de 500 avant notre ère, célèbre pour son temple d'Artémis et son amazonomachie (fresque représentant un combat impliquant des amazones) et d'où on extrayait la magnétite, pierre magnétique connue à l'époque par les grecs. On peut aussi mentionner l'invention de la boussole, entre le *II^{ème}* et le *I^{er}* siècle avant notre ère en Asie, qui prit la forme d'une cuillère en magnétite indiquant le sud (c.f. image 2.1). Les savants de l'époque attribuaient alors les phénomènes électromagnétiques à des 'esprits', conférant des propriétés animistes à la matière...

De nos jours, les 'esprits' qui se cachent derrière ces phénomènes sont démasqués, tant d'un point de vue classique que quantique. Du côté classique, la *géométrie symplectique* et le *formalisme hamiltonien* permettent de décrire le mouvement des particules chargées dans des champs magnétiques. Cependant, ce formalisme nécessite pour un champ magnétique \mathbf{B} donné de poser une fonction potentiel magnétique \mathbf{A} . Ce potentiel magnétique n'est pas défini de manière unique, mais à une jauge près. Il entre dans l'expression de l'hamiltonien magnétique

$$H(q, p) := \|p - \mathbf{A}(q)\|^2$$

qui désigne la fonction énergie d'une particule à la position q et d'impulsion p . La trajectoire d'une particule est alors donnée par les équations hamiltoniennes du mouvement (2.6). Ceci dit, le formalisme hamiltonien permet une description plus précise encore du mouvement classique magnétique car il ouvre la voie à toute la théorie symplectique. Plus précisément, le champ magnétique est connu pour courber les trajectoires des particules (FIGURE 2.1). Dans un champ uniforme, les trajectoires sont d'ailleurs circulaires, orthogonales aux lignes de champ. Dans des champs magnétiques 'presque uniformes', on observe de même des trajectoires circulaires, mais de centre mobile, se mouvant le long des lignes de champ magnétiques. Dans [45], on trouve une première explication à ce phénomène, appelé *mouvement centre guide*. Finalement, dans [57], dans le cadre du mouvement magnétique plan, via des outils de déformations symplectiques et des techniques de formes normales, et pour des particules de petite énergie magnétique, le responsable de ce mouvement oscillatoire rapide et de la variation plus lente du centre de ces oscillations est confondu : il s'agit de l'oscillateur harmonique (ce résultat était déjà connu, c.f. [47, 45] ; ce que [57] apporte est une description explicite de l'hamiltonien magnétique via un résultat de forme normale). Dans ce premier chapitre, nous introduirons le formalisme hamiltonien du mouvement magnétique, nous énoncerons le théorème de forme normale classique et expliquerons en quoi ce théorème permet de décrire avec précision les trajectoires magnétiques. Finalement, nous donnerons une preuve de ce résultat de forme normale, issue de [57]. L'exemple conducteur qui illustrera ces résultats sera le cas du champ constant.



FIGURE 2.1 – (a) Cuillère indiquant le sud du temps des Han (206 avant J.-C. - 220 après J.-C.) (b) Des électrons en trajectoire rectiligne sont propulsés dans une chambre à bulles soumise à un champ magnétique. Il s’agit d’un liquide à la limite de l’ébullition dans lequel l’électron, sur son trajet, forme un noyau d’ébullition et produit en cédant localement de l’énergie, un chapelet de bulles, ce qui permet de visualiser sa trajectoire. On remarque alors que les trajectoires sont courbées, ce qui est caractéristiques de la présence d’un champ magnétique.

Le formalisme hamiltonien de la mécanique classique donne accès à une description quantique du mouvement magnétique. En quantifiant l’hamiltonien magnétique, on identifie un autre de ces ‘esprits’ antiques, le laplacien magnétique

$$\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}} := \|\ -i\hbar\nabla - \mathbf{A}\|^2$$

et on peut définir le mouvement quantique via la célèbre équation de Schrödinger

$$\begin{cases} i\hbar\partial_t\psi^t = \mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}\psi^t \\ \psi^{t=0} = \psi_0 \end{cases}$$

où ψ^t désigne la fonction d’onde d’une particule prise au temps t , $|\psi^t|^2$ donnant la densité de présence de la particule. Le laplacien magnétique a été largement étudié durant les dernières décennies. On s’est notamment intéressé à ses propriétés spectrales, au développement asymptotique de ses valeurs propres et à la localisation des fonctions propres qui y sont associées (voir [43, 4, 17, 34, 35, 21, 33, 38, 56] et bien d’autres). Certains ont cherché les liens entre ce laplacien et le laplacien électrique via l’approximation de Borh-Oppenheimer, ce dernier de la forme $-\hbar^2\Delta + V$ où V est un potentiel dit ‘électrique’, comme étudié par Schrödinger lui-même dans un de ses trois articles de 1926 (voir [63] et [55, 16, 54] pour les liens entre le laplacien électrique et le laplacien magnétique). On peut citer aussi les résultats de type scattering et résonances dans le cas magnétique, comme dans [3, 7] où est considéré le cas du champ magnétique constant, perturbé par un champ électrique à courte portée. On y retrouve alors les niveaux de Landau, ce qui fait écho à l’étude développée dans ce chapitre et dans le Chapitre 5.

Nous ne nous intéresserons pas à la théorie spectrale du laplacien magnétique ici mais plutôt aux propriétés de propagation d’états très localisés. Nous nous restreindrons au cas 2-D, qui nous prodigue la forme normale annoncée ci-dessus. Une fois quantifiée, elle met en évidence un résultat de forme normale quantique dans lequel on retrouve l’oscillateur harmonique quantique, dont les niveaux d’énergies, que l’on appellera *niveaux de Landau* ici, sont quantifiés. Dans le Chapitre 5, il permettra d’étudier la propagation d’états en temps longs. Dans ce chapitre, on introduira aussi tout ce formalisme quantique, et on énoncera puis prouvera le résultat de forme normale quantique.

L'idée essentielle de ce chapitre est d'identifier l'origine du caractère oscillatoire des trajectoires classiques et de mettre en évidence les conséquences quantiques de ce mouvement classique oscillatoire. Ceci constituera l'outil principal du résultat de propagation en temps long du Chapitre 5. Par temps longs, on entend des temps t qui tendent vers l'infini dans la limite semi-classique, i.e. lorsque $\hbar \rightarrow 0$. L'expression *temps longs* est utilisée par opposition à l'expression *temps courts*, ou *temps finis*, qui désigne les temps admettant une limite finie dans la limite $\hbar \rightarrow 0$, par exemple les temps indépendants de \hbar .

2.1 Cadre magnétique

Soit $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ une base orthonormée de \mathbb{R}^3 . On considère une particule chargée se déplaçant dans le plan $\mathbb{R}^2 = \{q_1 \vec{e}_1 + q_2 \vec{e}_2 | (q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2\}$. On soumet cette particule à un champ magnétique orthogonal à ce plan : $\vec{\mathbf{B}} = \mathbf{B} \vec{e}_3$. On identifiera donc ce champ à une fonction $\mathbf{B} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. On considèrera de plus que ce champ ne s'annule pas à l'intérieur d'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, et pour simplifier on le supposera positif sur cet ouvert : $\mathbf{B} > 0$. On ne traitera pas le cas où un champ électrique est présent, i.e. ce dernier sera considéré comme nul dans tout le développement qui suit. Nous commencerons par décrire le mouvement classique d'une telle particule, et nous verrons comment on peut en déduire la dynamique quantique associée.

2.1.1 Du champ magnétique à l'hamiltonien magnétique

Comme annoncé ci-dessus, le formalisme hamiltonien permet de décrire le mouvement d'une particule dans un champ magnétique via une fonction hamiltonien H , appelé hamiltonien magnétique. On explique comment cet hamiltonien est construit à partir du champ \mathbf{B} . Pour le développement qui suit, on peut se référer à [45, 68, 14].

Définition d'un potentiel magnétique

L'idée vient d'une interprétation géométrique du champ magnétique. Comme présenté ci-dessus, le champ magnétique tel que l'on va l'utiliser est une fonction de classe \mathcal{C}^∞ de \mathbb{R}^2 , à valeurs dans \mathbb{R} . Or, les équations de Maxwell nous donnaient un tel champ comme étant à divergence nulle

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{B}}_{\text{théorique}} = 0$$

ce qui nous prodigue un champ $\vec{\mathbf{B}}_{\text{théorique}}$ comme un champ à rotationnel

$$\vec{\mathbf{B}}_{\text{théorique}} = \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{A}}_{\text{théorique}}.$$

On cherche donc à réécrire ces équations en terme de formes différentielles, compatibles avec une description symplectique du mouvement. On considère la dérivée extérieure d sur \mathbb{R}^2 et un champ de vecteur $\mathbf{A} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$. On a alors

$$\mathbf{A}(q) = \begin{pmatrix} A_1(q) \\ A_2(q) \end{pmatrix}$$

et de l'identification entre champs vectoriels et formes différentielles, en définissant la 1-forme $\omega_{\mathbf{A}} = A_1 dq_1 + A_2 dq_2$ on tire

$$d\omega_{\mathbf{A}} = (\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1) dq_1 \wedge dq_2.$$

Or, pour un champ de vecteur $\vec{\mathbf{A}}_{\text{théorique}} = (A_1, A_2, 0)^{\mathbf{T}}$, on a

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{A}}_{\text{théorique}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 \end{pmatrix}.$$

On définit alors la 2-forme $\sigma_{\mathbf{B}} = \mathbf{B} dq_1 \wedge dq_2$ et on cherche une 1-forme $\omega_{\mathbf{A}}$ sur \mathbb{R}^2 de sorte que $d\omega_{\mathbf{A}} = \sigma_{\mathbf{B}}$. Pour cela, on fait appelle au Lemme de Poincaré, dont on donnera une preuve constructive.

Theorem 2.1.1. (Lemme de Poincaré) *Soit p un entier non nul et σ une p -forme lisse sur \mathbb{R}^n fermée et définie sur un voisinage de 0. On définit la $(p-1)$ -forme*

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \omega_{\mathbf{x}}(\cdot) = \int_0^1 t^{p-1} \sigma_{t\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \cdot) dt. \quad (2.1)$$

Alors $d\omega = \sigma$.

Démonstration. On considère la famille de difféomorphismes $(\phi_t)_{t \in (0,1]}$ définie par $\phi_t(\mathbf{x}) = t\mathbf{x}$, que l'on prolonge par l'application nulle en $t = 0$. Cette famille est le flot issu du champ de vecteur $(\chi_t)_{t \in (0,1]}$ défini par $\chi_t(\mathbf{x}) = t^{-1}\mathbf{x}$. En notant $\phi_t^* \sigma$ le pull-back de σ par ϕ_t , on a

$$\sigma = \phi_1^* \sigma - \phi_0^* \sigma = \int_0^1 \frac{d}{dt} \phi_t^* \sigma dt.$$

Par définition de la dérivée de Lie \mathfrak{L}_{χ_t} , on obtient

$$\sigma = \int_0^1 \phi_t^* \mathfrak{L}_{\chi_t} \sigma dt.$$

La formule de Cartan nous donne que

$$\mathfrak{L}_X = d(\iota_X \sigma) + \iota_X d\sigma$$

où $\iota_X \sigma(\cdot) = \sigma(X, \cdot)$. La forme σ étant fermée, on a $d\sigma = 0$ et ainsi

$$\sigma = \int_0^1 \phi_t^* d(\iota_{\chi_t} \sigma) dt.$$

Par commutation de d avec le pull-back et l'intégrale en t , on obtient

$$\sigma = d\omega$$

avec

$$\omega_{\mathbf{x}} = \int_0^1 \phi_t^* (\iota_{\chi_t} \sigma_{\mathbf{x}}) dt.$$

Enfin, en utilisant la définition de ϕ_t et de χ_t , on obtient

$$\omega_{\mathbf{x}} = \int_0^1 t^{p-1} \sigma_{t\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \cdot) dt$$

ce qui prouve le résultat annoncé. \square

Ainsi, puisque la 2-forme $\sigma_{\mathbf{B}}$ est fermée sur Ω , il existe une 1-forme $\omega_{\mathbf{A}} = A_1 dq_1 + A_2 dq_2$ telle que $d\omega_{\mathbf{A}} = \sigma_{\mathbf{B}}$. On définit alors le potentiel magnétique de \mathbf{B} comme

$$\mathbf{A} := q \in \mathbb{R}^2 \mapsto \begin{pmatrix} A_1(q) \\ A_2(q) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Se pose alors la question de l'unicité d'un tel potentiel vecteur, élucidée dans le lemme suivant grâce au Lemme de Poincaré.

Lemma 2.1.2. *Soient $\tilde{\mathbf{A}}$ et $\mathbf{A} \in C^\infty(\mathbb{R}_q^2, \mathbb{R}^2)$ telles que, via l'identification avec les formes différentielles,*

$$d\omega_{\mathbf{A}} = d\omega_{\tilde{\mathbf{A}}} = \mathbf{B} dq_1 \wedge dq_2. \quad (2.2)$$

Alors, il existe une fonction $\Psi \in C^\infty(\mathbb{R}_q^2, \mathbb{R})$ telle que

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \nabla \Psi. \quad (2.3)$$

Inversement, si \mathbf{A} et $\tilde{\mathbf{A}}$ satisfont (2.3), alors (2.2) est vérifiée, ou, en d'autres termes, les potentiels vecteurs définissent le même champ \mathbf{B} .

Démonstration. Soient \mathbf{A} et $\tilde{\mathbf{A}}$ satisfaisant (2.2). Alors,

$$d(\omega_{\mathbf{A}} - \omega_{\tilde{\mathbf{A}}}) = 0,$$

i.e. la 1-forme $\omega_{\mathbf{A}} - \omega_{\tilde{\mathbf{A}}}$ est une forme fermée. En appliquant le Lemme de Poincaré ci-dessus il existe une 0-forme, donc une fonction $\Psi \in C^\infty(\mathbb{R}_q^2, \mathbb{R})$ telle que

$$\omega_{\mathbf{A}} - \omega_{\tilde{\mathbf{A}}} = d\Psi$$

en identifiant Ψ avec la 0-forme correspondante. Ainsi, puisque $d\Psi = \omega_{\nabla\Psi}$ on obtient (2.3). Inversément, en supposant (2.3),

$$d\omega_{\tilde{\mathbf{A}}} = d\omega_{\mathbf{A}} + (-\partial_2\partial_1\Psi + \partial_1\partial_2\Psi) = \mathbf{B} dq_1 \wedge dq_2$$

par lemme de Schwartz. □

Ainsi, on constate que le potentiel magnétique \mathbf{A} ainsi défini n'est pas unique, mais à une jauge Ψ près. L'introduction du potentiel magnétique permet alors de définir l'hamiltonien magnétique associé à \mathbf{B} .

Le formalisme hamiltonien

On commence par définir l'hamiltonien magnétique.

Definition 2.1.3. On considère l'espace des phases associé à \mathbb{R}^2 , $T^*\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{R}_q^2 \times \mathbb{R}_p^2$. L'hamiltonien magnétique est donné par

$$H : T^*\mathbb{R}^2 \ni (q, p) \mapsto H(q, p) = \|p - \mathbf{A}(q)\|^2 \in \mathbb{R}$$

où $\|\cdot\|$ définit la norme euclidienne sur \mathbb{R}^2 .

On remarque alors qu'une particule soumise à un champ magnétique pur, se situant en un point (q, p) de l'espace des phases, a une énergie $H(q, p)$ qui ne dépend pas directement de la valeur du champ magnétique en q mais de celle du potentiel magnétique.

Pour décrire les trajectoires du mouvement par cette fonction hamiltonienne, il est nécessaire d'introduire quelques notions de géométrie symplectique. Il est connu que l'on peut munir le cotangent $T^*\mathbb{R}^2$ d'une forme symplectique naturelle

$$\omega_0 = dq_1 \wedge dp_1 + dq_2 \wedge dp_2$$

où (q_1, q_2) désignent le système de coordonnées canonique de $T\mathbb{R}^2$ identifié à \mathbb{R}^2 et (p_1, p_2) correspondant aux coordonnées canoniques de $(T\mathbb{R}^2)^*$ identifié à $T\mathbb{R}^2$ via $q_1^* = p_1$ et $q_2^* = p_2$. Le théorème de représentation de Riesz nous apprend alors que pour toute 1-forme $L \in (T\mathbb{R}^2)^*$, il existe un unique champ de vecteur $\chi \in T\mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall q \in \mathbb{R}^2, \forall X \in T_q\mathbb{R}^2, L_q(X) = \omega_0(\chi(q), X).$$

Appliquons cela à l'hamiltonien H et considérons la 1-forme définie par la différentielle de H , à savoir dH .

Theorem 2.1.4. *Il existe un unique champ de vecteurs*

$$\chi_H \in T\mathbb{R}^2$$

tel que pour tout $q \in \mathbb{R}^2$, pour tout $X \in T_q\mathbb{R}^2$,

$$d_q H(X) = \omega_0(\chi_H(q), X).$$

Ce champ de vecteur est appelé le champ de vecteurs hamiltonien de H .

Remark 2.1.5. Si

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ -I_2 & 0 \end{pmatrix}$$

désigne la matrice symplectique de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, si ∇H désigne le vecteur gradient de H , on a la relation

$$\chi_H = J\nabla H.$$

Les trajectoires du mouvement magnétique sont alors obtenues en intégrant ce champ de vecteurs : si $X(t) = (q(t), p(t))$, $(q(t), p(t))$ correspondant à la trajectoire d'une particule issue de (q_0, p_0) dans le champ magnétique \mathbf{B} , on a

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = \chi_H(t) \\ X(0) = (q_0, p_0) \end{cases} . \quad (2.4)$$

Puisque la fonction hamiltonienne H est de classe $C^\infty(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})$, on a le théorème d'existence locale de solution à l'équation ci-dessus, donné par le Théorème de Cauchy-Lipshitz.

Theorem 2.1.6. *Pour tout $X_0 \in \mathbb{T}^*\mathbb{R}^2$, il existe $T(X_0) > 0$ et une unique application $(\Phi^t(X_0))_{t \in [0, T(X_0)]}$ de classe $C^1([0, T(X_0)], \mathbb{T}^*\mathbb{R}^2)$ solution de*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\Phi^t(X_0) = \chi_H(\Phi^t(X_0)) \\ \Phi^{t=0} = X_0 \end{cases} . \quad (2.5)$$

De plus, $t \mapsto \Phi(X_0)$ définit un groupe à un paramètre, que l'on appelle le flot hamiltonien issu de X_0 et l'application

$$\Phi : (t, X_0) \mapsto \Phi(t, X_0)$$

définie sur un voisinage ouvert \mathcal{U} de $\{0\} \times \mathbb{T}^*\mathbb{R}^2$ de $\mathbb{R}_t \times \mathbb{T}^*\mathbb{R}^2$ est un difféomorphisme global de \mathcal{U} sur son image.

Remark 2.1.7. On supposera dans la suite, pour des raisons de simplicité, que le flot est global en temps, ce qui n'est bien sûr pas le cas en toute généralité.

En explicitant (2.5), la trajectoire $(q(t), p(t))$ d'une telle particule est alors donnée par les équations hamiltoniennes du mouvement

$$\begin{cases} \dot{q} = \partial_p H(q, p) \\ \dot{p} = -\partial_q H(q, p) \end{cases} \quad (2.6)$$

et de manière tout aussi remarquable ces équations ne dépendent pas du champ magnétique directement mais de son potentiel vecteur associé. Un premier intérêt au formalisme hamiltonien développé ci-dessus est donné par le théorème suivant.

Theorem 2.1.8. *Le flot hamiltonien laisse H invariant, i.e.*

$$\forall t \in \mathbb{R}, (\Phi^t)^* H = H \circ \Phi^t = H.$$

De plus, le flot hamiltonien donné par H préserve la structure symplectique de $\mathbb{T}^*\mathbb{R}^2$, i.e.

$$\forall t \in \mathbb{R}, (\Phi^t)^* \omega_0 = \omega_0.$$

Ainsi, en plus d'être un difféomorphisme, l'application

$$X \in \mathbb{T}^*\mathbb{R}^2 \mapsto \Phi^t(X) \in \mathbb{T}^*\mathbb{R}^2,$$

pour t fixé, constitue un symplectomorphisme.

Démonstration. La première assertion se vérifie en dérivant par rapport au temps l'application $H \circ \Phi^t$. En effet, on obtient

$$\frac{d}{dt} H \circ \Phi^t = d_{\Phi^t} H \cdot \chi_H(\Phi^t) = \omega_0(\chi_H(\Phi^t), \chi_H(\Phi^t)) = 0$$

par antisymétrie de ω_0 , d'où

$$\forall t \in \mathbb{R}, H \circ \Phi^t = H \circ \Phi^0 = H.$$

Pour la deuxième assertion, on se référera à [68, chapitre 8] □

Ce théoème montre que le formalisme hamiltonien entre dans le cadre des systèmes conservatifs, i.e. systèmes dont l'énergie est conservée au cours du temps. Ainsi, l'énergie magnétique est constante lors de la propagation. De plus, cela prouve que les trajectoires sont piégées dans les lignes de niveau de H . Une application à ce théorème est que pour toute condition initiale X_0 appartenant à une ligne de niveau bornée de H , le flot correspondant est global. Puisque la fonction hamiltonien H est conservée au cours du temps, elle peut être appelée une *intégrale première du mouvement*. Dans le cas des systèmes 1-D, cela constitue des systèmes complètement intégrables (c.f. [68] pour une définition et la théorie qui en découle).

Compatibilité entre les équations de Hamilton et le principe fondamental de la dynamique

À ce stade du développement, il est bon de se poser la question suivante : quel est lien entre le formalisme hamiltonien développé ci-dessus et le principe fondamental de la dynamique, ou deuxième loi de Newton ? Effectivement, ce dernier nous enseigne que si x désigne la position d'une particule dans un champ magnétique $\vec{\mathbf{B}}$, alors elle est soumise à la force de Lorentz

$$\vec{\mathbf{F}}_{\text{Lorentz}} := \dot{x} \wedge \vec{\mathbf{B}}$$

et le mouvement est décrit par

$$\ddot{x} = \vec{\mathbf{F}}_{\text{Lorentz}} = \dot{x} \wedge \vec{\mathbf{B}}. \quad (2.7)$$

Il s'avère que les deux équations du mouvement (2.6) et (2.7) sont équivalentes. Dans le développement qui suit, on considèrera que l'hamiltonien magnétique est donné par

$$H := \frac{1}{2} \|p - \mathbf{A}(q)\|^2$$

ce qui simplifiera les différentes identifications entre les variables (q, p) du formalisme hamiltonien et les variables (x, \dot{x}) des équations de Newton. En effet, si on explicite les équations hamiltoniennes (2.6), on obtient

$$\dot{q} = p - \mathbf{A}(q) \dot{p} = (T_q \mathbf{A})^{\mathbf{T}}(p - \mathbf{A}(q)) = (T_q \mathbf{A})^{\mathbf{T}} \dot{q},$$

où $T_q \mathbf{A}$ désigne l'application tangente à \mathbf{A} en q , d'où en posant $x(t) = q(t)$, on obtient $\dot{x} = p - \mathbf{A}(x)$ et

$$\ddot{x} = \dot{p} - T_x \mathbf{A} \dot{x} = (T_x \mathbf{A}^{\mathbf{T}} - T_x \mathbf{A}) \dot{x}.$$

Finalement, par un calcul on obtient

$$\ddot{x} = \dot{x} \wedge \vec{\mathbf{B}},$$

et on retrouve la force de Lorentz et les équations newtoniennes du mouvement. Inversement, partant des équations de Newton (2.7), en posant pour position $q(t) := x(t)$ et pour impulsion magnétique $p(t) := \dot{x}(t) + \mathbf{A}(x(t))$, on retrouve les équations hamiltoniennes du mouvement. Ainsi, les descriptions hamiltonienne et newtonienne du mouvement sont équivalentes.

Il est à noter que le principe fondamental de la dynamique ne nécessite pas l'introduction d'un potentiel magnétique \mathbf{A} , et donc n'appelle pas l'outillerie des formes différentielles et de la géométrie symplectique. Comme on le verra dans la section 2.3, c'est ce qui fait la richesse du formalisme hamiltonien.

Exemple : cas du champ constant

Prenons le cas du champ constant $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0$. Un choix possible de potentiel magnétique est alors $\mathbf{A} = (A_1, A_2)^{\mathbf{T}}$ avec

$$A_1 : \mathbb{R}^2 \ni (q_1, q_2) \mapsto 0 \quad \text{et} \quad A_2 : \mathbb{R}^2 \ni (q_1, q_2) \mapsto \mathbf{B}_0 q_1.$$

On retrouve bien

$$d\sigma_{\mathbf{A}} = \mathbf{B}_0 dq_1 \wedge dq_2 = \omega_{\mathbf{B}_0}.$$

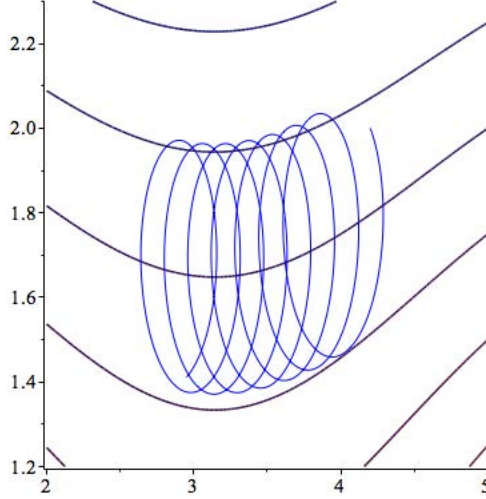


FIGURE 2.2 – Résolution numérique de la trajectoire $(q_1(t), q_2(t))$ d’une particule dans un champ variable $\mathbf{B}(q_1, q_2) = 2 - \cos(q_1) + q_2^2$. La trajectoire oscillante enserre une ligne de niveau de \mathbf{B} .

L’hamiltonien magnétique a alors pour expression

$$H : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \ni (q, p) \mapsto p_1^2 + (p_2 - \mathbf{B}_0 q_1)^2$$

et les équations hamiltoniennes du mouvement sont données par

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = 2p_1 \\ \dot{q}_2 = 2(p_2 - \mathbf{B}_0 q_1) \\ \dot{p}_1 = 2\mathbf{B}_0(p_2 - \mathbf{B}_0 q_1) \\ \dot{p}_2 = 0 \end{cases} .$$

La résolution de ces équations conduit à l’expression suivante de la trajectoire

$$\begin{pmatrix} q(t) \\ p(t) \end{pmatrix} = \alpha_0 \cos(2\mathbf{B}_0 t) + \beta_0 \sin(2\mathbf{B}_0 t) + C_0$$

avec α_0 , β_0 et C_0 dans \mathbb{R}^4 . On trouve alors un mouvement circulaire, de pulsation donnée par le champ magnétique $2\mathbf{B}_0$, appelée aussi pulsation cyclotron (voir [47] par exemple). On retrouve le mouvement circulaire caractéristique des particules chargées en présence de champ magnétique. Lorsque le champ magnétique varie peu, ou lorsque l’énergie de la particule est très petite, on constate que le mouvement d’une particule est circulaire rapide de centre suivant une dynamique plus lente, ce qui est lié au résultat de forme normale mentionné plus haut (c.f. section 2.2 pour les détails et la Figure 2.2).

2.1.2 De l’hamiltonien magnétique au laplacien magnétique

La formulation hamiltonienne de la dynamique classique permet de décrire le mouvement d’une particule grâce à une fonction hamiltonienne H , qui généralement correspond à une fonction énergie de la particule étudiée. D’une manière similaire, pour décrire la dynamique quantique d’une telle particule, on utilise une ‘fonction énergie’, en réalité le quantifié de la fonction H , et une équation du mouvement quantique, l’équation de Schrödinger. Dans cette section, on définit le quantifié de H et on donne des propriétés du propagateur associé.

On suppose à partir d'ici et pour toute la suite que le champ magnétique \mathbf{B} est dans une classe de symboles $S(m'')$, pour m'' une fonction d'ordre sur $\mathbb{T}^*\mathbb{R}^2$. Par le Lemme de Poincaré, et plus précisément via (2.1), on remarque que le potentiel magnétique \mathbf{A} a ses deux composantes A_1 et A_2 dans une classe $S(m')$. On obtient finalement que l'hamiltonien magnétique ci-dessus appartient à une classe $S(m)$, ce qui nous permet de le quantifier avec de bonnes propriétés de l'opérateur pseudo-différentiel obtenu.

Definition 2.1.9. On définit le laplacien magnétique comme le quantifié de l'hamiltonien magnétique

$$\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}} := \text{Op}_{\hbar}^w(H)$$

que l'on munit provisoirement du domaine $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$. Il a pour expression

$$\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}} = (-i\hbar\partial_1 - A_1)^2 + (-i\hbar\partial_2 - A_2)^2$$

que l'on écrira de manière plus concise $\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}} = \|-i\hbar\nabla - \mathbf{A}\|^2$.

On remarque immédiatement qu'un tel opérateur n'est pas borné sur $L^2(\mathbb{R}^2)$, qu'il est bien défini sur les fonctions de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ et qu'il y est symétrique :

$$\forall \varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2), \quad \langle \varphi, \mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}} \psi \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \langle \mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}} \varphi, \psi \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)}.$$

Nous énonçons quelques propriétés du laplacien magnétique.

Caractère autoadjoint du laplacien magnétique

On introduit l'espace $H_{\mathbf{A}}^1$ défini par

$$H_{\mathbf{A}}^1 := \{u \in L^2(\mathbb{R}^2) \quad \text{t.q.} \quad (-i\hbar\nabla - \mathbf{A})u \in L^2(\mathbb{R}^2)\}$$

que l'on munit de la forme sesquilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H_{\mathbf{A}}^1}$ donnée par

$$\forall \varphi, \psi \in H_{\mathbf{A}}^1, \quad \langle \varphi, \psi \rangle_{H_{\mathbf{A}}^1} := \int_{\mathbb{R}^2} (-i\hbar\nabla - \mathbf{A})\varphi \cdot \overline{(-i\hbar\nabla - \mathbf{A})\psi} dx + \int_{\mathbb{R}^2} \varphi \bar{\psi} dx.$$

On a alors la proposition suivante.

Proposition 2.1.10. *L'espace $(H_{\mathbf{A}}^1, \langle \cdot, \cdot \rangle_{H_{\mathbf{A}}^1})$ est un espace de Hilbert, dans lequel $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ est dense.*

Démonstration. La forme sesquilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H_{\mathbf{A}}^1}$ définit bien un produit scalaire sur $H_{\mathbf{A}}^1$. On prouve la complétude de l'espace. Pour cela on considère une suite de Cauchy $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $(H_{\mathbf{A}}^1, \langle \cdot, \cdot \rangle_{H_{\mathbf{A}}^1})$. Puisque pour tout u dans $H_{\mathbf{A}}^1$

$$\|u\|_{H_{\mathbf{A}}^1}^2 = \|(-i\hbar\nabla - \mathbf{A})u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2,$$

on obtient que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $((-i\hbar\nabla - \mathbf{A})u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définissent aussi des suites de Cauchy sur $L^2(\mathbb{R}^2)$. Par complétude de cet espace, il existe deux fonctions u et v dans $L^2(\mathbb{R}^2)$ telles que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $((-i\hbar\nabla - \mathbf{A})u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent respectivement vers u et v dans $L^2(\mathbb{R}^2)$. Enfin, par continuité de ∇ et de la multiplication par \mathbf{A} dans l'espace des distributions \mathcal{D}' , $((-i\hbar\nabla - \mathbf{A})u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $(-i\hbar\nabla - \mathbf{A})u$ au sens de \mathcal{D}' et par unicité de la limite

$$(-i\hbar\nabla - \mathbf{A})u = v \text{ dans } \mathcal{D}'.$$

Or, $v \in L^2(\mathbb{R}^2)$, d'où $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers u dans $H_{\mathbf{A}}^1$, ce qui achève la preuve de complétude.

En ce qui concerne le résultat de densité, on commence par poser

$$H_{\mathbf{A}, \text{comp}}^1 := \{\psi \in H_{\mathbf{A}}^1 \text{ tel que } \text{supp}(\psi) \text{ compact}\}.$$

Puisque $\mathbf{A} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2) \subset L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$, on a de manière directe que $H^1_{\mathbf{A}, \text{comp}} \subset H^1(\mathbb{R}^2)$. On prouve que $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ est dense dans $H^1_{\mathbf{A}, \text{comp}}$. Ce fait se prouve par régularisation. En effet, soit $\varphi \in H^1_{\mathbf{A}, \text{comp}}$ et soit $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une approximation de l'identité lisse à support compact. On pose $\varphi_n := \rho_n * \varphi$, qui définit une suite de fonctions de $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. Par les propriétés des approximations de l'identité, $\|\varphi_n - \varphi\|_{H^1(\mathbb{R}^2)} \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$, d'où

$$\varphi_n \xrightarrow{L^2} \varphi \quad \text{et} \quad \nabla \varphi_n \xrightarrow{L^2} \nabla \varphi.$$

Enfin, puisque $\mathbf{A} \in L^\infty_{\text{loc}}$ et puisque $(\varphi_n - \varphi)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions de supports inclus dans un compact fixe, on obtient que $\|\mathbf{A}(\varphi_n - \varphi)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \rightarrow 0$, ce qui achève la preuve de densité de $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ dans $H^1_{\mathbf{A}, \text{comp}}$.

On prouve maintenant que $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ est dense dans $H^1_{\mathbf{A}}$. Pour cela on considère $f \in H^1_{\mathbf{A}}$ tel que

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2), \quad \int_{\mathbb{R}^2} f \overline{\varphi} \, dx + \int_{\mathbb{R}^2} (-i\hbar \nabla - \mathbf{A}) f \overline{(-i\hbar \nabla - \mathbf{A}) \varphi} \, dx = 0. \quad (2.8)$$

Par densité de $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ dans $H^1_{\mathbf{A}, \text{comp}}$, (2.8) s'étend à toutes fonctions $\varphi \in H^1_{\mathbf{A}, \text{comp}}$. On considère alors $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ une fonction réelle positive valant 1 sur $B(0, 1)$ et 0 en dehors de $B(0, 2)$, et soit pour n entier $\chi_n(x) = \chi(x/n)$. On pose alors $\varphi_n = \chi_n f$. On a alors $\varphi_n \in H^1_{\mathbf{A}, \text{comp}}$ et ainsi (2.8) est vérifiée pour tout φ_n , $n \in \mathbb{N}$. Or, (2.8) se réécrit pour $\varphi = \varphi_n$, $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_{\mathbb{R}^2} \chi_n |f|^2 \, dx + \int_{\mathbb{R}^2} \chi_n |(-i\hbar \nabla - \mathbf{A}) f|^2 \, dx + \frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}^2} ((-i\hbar \nabla - \mathbf{A}) f) \cdot \overline{(-i\hbar f \nabla \chi \left(\frac{\cdot}{n}\right))} \, dx = 0. \quad (2.9)$$

Puisque $f \in H^1_{\mathbf{A}}$ et $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty$, on obtient que

$$\frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}^2} ((-i\hbar \nabla - \mathbf{A}) f) \cdot \overline{(-i\hbar f \nabla \chi \left(\frac{\cdot}{n}\right))} \, dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

et par application du théorème de Beppo-Levy, (2.9) donne à la limite $n \rightarrow \infty$

$$\int_{\mathbb{R}^2} |f|^2 + \int_{\mathbb{R}^2} |(-i\hbar \nabla - \mathbf{A}) f|^2 = 0.$$

Ainsi, si $f \in H^1_{\mathbf{A}}$ est orthogonal à toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ au sens du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^1_{\mathbf{A}}}$, alors $f = 0$, ce qui prouve la densité de $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ dans $H^1_{\mathbf{A}}$. \square

On a alors le théorème suivant qui donne une réalisation autoadjointe de $\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}$.

Theorem 2.1.11. *On définit l'espace*

$$H^2_{\mathbf{A}} := \{ \varphi \in L^2(\mathbb{R}^2) \text{ t.q. } (-i\hbar \nabla - \mathbf{A})^2 \varphi \in L^2(\mathbb{R}^2) \}.$$

Le laplacien magnétique muni du domaine

$$\text{Dom}(\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}) := H^2_{\mathbf{A}}$$

définit un opérateur autoadjoint sur $L^2(\mathbb{R}^2)$ et de plus

$$\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}} : \text{Dom}(\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2) \quad (2.10)$$

est une application bijective d'inverse continue.

Démonstration. Pour prouver ce résultat, on invoque le théorème de Lax-Milgram (c.f. [56, 31]) dont on donne un énoncé.

Theorem 2.1.12. Soient V et H deux espaces de Hilbert tels que V s'injecte continuellement dans H et tels que V soit dense dans H . Si \mathcal{B} est une forme sesquilinéaire hermitienne continue sur V coercive, i.e. telle qu'il existe $\alpha > 0$ avec

$$\forall u \in V, \mathcal{B}(u, u) \geq \alpha \|u\|_V^2,$$

alors il existe un opérateur \mathcal{L} de domaine

$$\mathbf{Dom}(\mathcal{L}) := \{u \in V : v \mapsto \mathcal{B}(u, v) \text{ est continue sur } V \text{ pour la topologie de } H\}$$

défini de manière unique pour tout $u \in \mathbf{Dom}(\mathcal{L})$ par

$$\forall v \in V, \mathcal{B}(u, v) = \langle \mathcal{L}u, v \rangle_H.$$

L'opérateur $\mathcal{L} : \mathbf{Dom}(\mathcal{L}) \rightarrow H$ ainsi défini est bijectif d'inverse continu et $\mathbf{Dom}(\mathcal{L})$ est dense dans H . Il s'agit d'un opérateur autoadjoint de domaine $\mathbf{Dom}(\mathcal{L})$ dense dans V .

En reprenant les notations du Théorème 2.1.12, on pose $H := L^2(\mathbb{R}^2)$ et $V := H_{\mathbf{A}}^1$. Selon la proposition précédente, ils définissent des espaces de Hilbert avec les normes associées, et V s'inclut continuellement dans H , avec densité du premier dans le deuxième. De plus, on définit la forme sesquilinéaire hermitienne sur V

$$\mathcal{B}_{\hbar, \mathbf{A}} : H_{\mathbf{A}}^1 \times H_{\mathbf{A}}^1 \ni (u, v) \mapsto \int_{\mathbb{R}^2} (-i\hbar\nabla - \mathbf{A})u \overline{(-i\hbar\nabla - \mathbf{A})v} dx + \int_{\mathbb{R}^2} u\bar{v} dx \in \mathbb{R}.$$

Pour $u \in V$, $\mathcal{B}_{\hbar, \mathbf{A}}(u, u) = \|u\|_{H_{\mathbf{A}}^1}^2$, ce qui donne la continuité de $\mathcal{B}_{\hbar, \mathbf{A}}$ sur V . En remarquant que pour tout $u \in V$,

$$\forall v \in V, \mathcal{B}_{\hbar, \mathbf{A}}(u, v) = \langle \mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}u, v \rangle_H,$$

on obtient alors par application du Théorème de Lax-Milgram que le laplacien magnétique $\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}$ de domaine $\mathbf{Dom}(\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}) = H_{\mathbf{A}}^2$ définit un opérateur autoadjoint. De plus,

$$\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}} : \mathbf{Dom}(\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2)$$

est une application bijective d'inverse continue. □

Le caractère autoadjoint de $(\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}, \mathbf{Dom}(\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}))$ nous permettra de définir le propagateur associé lorsqu'on introduira l'équation de Schrödinger associée. La propriété de régularité elliptique ci-dessus permet d'inverser le laplacien elliptique. En d'autres mots, si on se donne $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$, alors par le théorème précédent, il existe une fonction $u \in H_{\mathbf{A}}^2$ telle que

$$\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}u = f.$$

Liens entre le laplacien magnétique $\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}$ et le champ magnétique \mathbf{B}

Comme mentionné plus haut, il est surprenant de voir que le laplacien magnétique dépend non pas de la fonction \mathbf{B} directement mais du potentiel \mathbf{A} . On constate cependant que le champ \mathbf{B} resurgit dans la forme quadratique associée à $\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}$. On rappelle l'expression de la forme sesquilinéaire

$$\mathcal{B}_{\hbar, \mathbf{A}} : H_{\mathbf{A}}^1 \times H_{\mathbf{A}}^1 \ni (u, v) \mapsto \int_{\mathbb{R}^2} (-i\hbar\nabla - \mathbf{A})u \overline{(-i\hbar\nabla - \mathbf{A})v} dx + \int_{\mathbb{R}^2} u\bar{v} dx \in \mathbb{R}.$$

et on définit la forme quadratique associée à $\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}$

$$\mathcal{Q}_{\hbar, \mathbf{A}} : H_{\mathbf{A}}^1 \ni u \mapsto \mathcal{B}_{\hbar, \mathbf{A}}(u, u) \in \mathbb{R}.$$

La proposition suivante donne une estimation de la forme quadratique par le champ magnétique.

Proposition 2.1.13. Pour toute fonction u de $H_{\mathbf{A}}^1$,

$$\mathcal{Q}_{\hbar, \mathbf{A}}(u) := \int_{\mathbb{R}^2} \|(-i\hbar\nabla - \mathbf{A}(x))\varphi(x)\|^2 dx \geq \hbar \int \mathbf{B}|\varphi(x)|^2 dx.$$

Démonstration. On prouve le résultat sur l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, ce qui est suffisant par densité de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ dans $H_{\mathbf{A}}^1$. On a, pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$,

$$\mathcal{Q}_{\hbar, \mathbf{A}}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^2} \|-i\hbar\nabla - \mathbf{A}(x)\|^2 \varphi(x) \overline{\varphi(x)} dx.$$

On remarque alors que par intégration par partie, pour $j \in \{1, 2\}$,

$$\int_{\mathbb{R}^2} (-i\hbar\partial_j - A_j(x))^2 \varphi(x) \overline{\varphi(x)} dx = \int_{\mathbb{R}^2} |(-i\hbar\partial_j - A_j(x))\varphi(x)|^2 dx$$

d'où

$$\mathcal{Q}_{\hbar, \mathbf{A}}(\varphi) := \int_{\mathbb{R}^2} \|(-i\hbar\nabla - \mathbf{A}(x))\varphi(x)\|^2 dx.$$

Or

$$[-i\hbar\partial_1 - A_1, -i\hbar\partial_2 - A_2] = -i\hbar\mathbf{B}.$$

Ainsi

$$\langle [-i\hbar\partial_1 - A_1, -i\hbar\partial_2 - A_2] \varphi, \varphi \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} = -i\hbar \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{B}(x) |\varphi(x)|^2 dx,$$

et par intégration par parties,

$$\langle [-i\hbar\partial_1 - A_1, -i\hbar\partial_2 - A_2] \varphi, \varphi \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq 2 \|(-i\hbar\partial_1 - A_1)\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \|(-i\hbar\partial_2 - A_2)\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}$$

d'où, en utilisant

$$2 \|(-i\hbar\partial_1 - A_1)\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \|(-i\hbar\partial_2 - A_2)\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq \|(-i\hbar\partial_1 - A_1)\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + \|(-i\hbar\partial_2 - A_2)\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2$$

on obtient le résultat annoncé. \square

La Proposition 2.1.13 permet par exemple de pallier au manque d'ellipticité du symbole de $\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}$. En effet, dans [74, Chapitre 6], on trouve que des opérateurs pseudo-différentiels avec des conditions d'ellipticité sur le symbole définissent des opérateurs à résolvante compacte. Dans le cas présent, le laplacien magnétique n'a pas d'hypothèse d'ellipticité sur son symbole (la surface d'annulation ne peut pas être compacte). Ceci dit, la condition

$$\mathbf{B}(q) \xrightarrow[|q| \rightarrow \infty]{} \infty$$

suffit à prouver que $\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}$ est à résolvante compacte (voir [4, 17, 34]). Néanmoins, en dimension $n > 2$, il est nécessaire d'ajouter une condition de régularité sur le champ magnétique à l'infini (voir l'Hypothèse 3.1.1 du Chapitre 3).

Un autre lien entre le laplacien magnétique et le champ magnétique \mathbf{B} , qui sera énoncé et prouvé dans le Chapitre 3 est le suivant :

Proposition 2.1.14. *Sous l'hypothèse de contrôle suivante*

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^2, \exists C_\alpha > 0 \text{ t.q. } \forall q \in \mathbb{R}^2, |\partial^\alpha \mathbf{B}(q)| \leq C_\alpha \mathbf{B}(q),$$

il existe $C > 0$ et $\hbar_0 > 0$ tels que pour tout $\psi \in \mathbf{Dom}(\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}})$, pour tout $\hbar \in (0, \hbar_0)$,

$$\|\langle \mathbf{B} \rangle \psi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \|\langle \mathbf{B} \rangle^{1/2} (-i\hbar\nabla - \mathbf{A})\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \|\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}} \psi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}.$$

Autrement dit, cette proposition montre que la multiplication par le champ \mathbf{B} est en quelque sorte contrôlée au sens L^2 par le laplacien magnétique. Cette estimation sera un ingrédient central dans la preuve des estimées en temps longs de la propagation magnétique de fonctions de l'espace de Schwartz (c.f. Théorème 3.1.6).

Propagation quantique par un champ magnétique

On s'intéresse maintenant à la dynamique quantique d'un état soumis à un champ magnétique. La dynamique quantique est donnée par l'équation de Schrödinger, définie à partir de la fonction 'énergie quantique' du système, à savoir le quantifié de H , le laplacien magnétique $\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}$. Ainsi, pour un état initial $\varphi_0 \in L^2(\mathbb{R}^2)$, on considère l'équation de Schrödinger magnétique

$$\begin{cases} i\hbar\partial_t\varphi^t = \mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}\varphi^t \\ \varphi^{t=0} = \varphi_0 \end{cases} . \quad (2.11)$$

Une première question est celle de l'existence de solutions à (2.11). Puisque $(\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}, \text{Dom}(\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}))$ est un opérateur autoadjoint et indépendant du temps, le Théorème de Stone y répond (voir Annexe A pour un énoncé et [56, 31] pour une référence).

Theorem 2.1.15. *Pour tout $\varphi_0 \in H_{\mathbf{A}}^1$, il existe une unique solution locale et de classe C^1 en temps*

$$\varphi^t : t \mapsto P^t\varphi_0.$$

Cette solution est globale, et vérifie

$$\|\varphi^t\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \|\varphi_0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}.$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tout $\varphi_0 \in H_{\mathbf{A}}^1$, on a $P^t\varphi_0 \in H_{\mathbf{A}}^1$ et ainsi l'opérateur P^t est unitaire sur $L^2(\mathbb{R}^2)$ et laisse $H_{\mathbf{A}}^1$ stable. De plus, pour tout $t, s \in \mathbb{R}$, on a

$$P^t P^s = P^s P^t = P^{t+s},$$

i.e. la famille $(P^t)_{t \in \mathbb{R}}$ est un semi-groupe.

Ce théorème prouve l'existence et l'unicité d'un *propagateur magnétique*

$$t \in \mathbb{R} \mapsto P^t \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^2))$$

de classe C^1 en temps et solution de

$$\begin{cases} i\hbar\partial_t P^t = \mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}} P^t \\ P^{t=0} = id_{L^2(\mathbb{R}^2)} \end{cases} .$$

Il s'agit de l'analogie quantique du flot hamiltonien Φ^t introduit plus haut. Il est à noter que ce qui nous donne l'existence et la globalité en temps de solutions d'une telle équation est le caractère autoadjoint et indépendant du temps de $\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}$. Cela ne serait pas vrai en toute généralité, par exemple dans le cas d'un opérateur dépendant du temps. De plus, cela souligne une première différence entre la propagation quantique, qui est globale en temps, et la propagation classique, qui a besoin d'hypothèses plus fortes sur H pour avoir un flot global.

Une deuxième question est la suivante : *Quelle régularité peut-on espérer pour une solution $P^t\varphi_0$ de (2.11) ?* Le Théorème 2.1.15 nous donne seulement le caractère unitaire de la famille $(P^t)_{t \in \mathbb{R}}$, i.e. que la norme L^2 d'une fonction propagée est constante au court du temps, donc exactement contrôlée. En fait, en fonction de la régularité de φ_0 , on peut espérer une meilleure régularité du propagé $P^t\varphi_0$. On peut se référer par exemple à [72], qui traite de la régularité des solutions dans des cas où le potentiel décroît à l'infini, ou encore le Chapitre 3 qui traite le cas de la régularité au sens de Schwartz avec des estimations uniformes en temps longs (i.e. pour des temps $t \rightarrow \infty$ quand $\hbar \rightarrow 0$, c.f. Théorème 3.1.6). Ces estimations nous seront utiles lorsqu'on étudiera la propagation pour une classe particulière d'états, que l'on appellera *états cohérents*. Voir aussi le Chapitre 4 pour un résultat de propagation par des hamiltoniens généraux permettant un contrôle en temps finis (par rapport au paramètre \hbar) des normes de Schwartz.

Changement de jauge

Comme expliqué plus haut, on a vu que le potentiel magnétique n'est pas défini de manière unique et que si \mathbf{A} et $\tilde{\mathbf{A}}$ proviennent du même champ magnétique, alors il existe une fonction $\Psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ telle que $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \nabla\Psi$. On obtient alors deux hamiltoniens

$$H : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \ni (q, p) \mapsto \|p - \mathbf{A}(q)\|^2 \quad \text{et} \quad \tilde{H} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \ni (q, p) \mapsto \|p - \tilde{\mathbf{A}}(q)\|^2$$

et les deux laplaciens magnétiques associés, $\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}$ et $\mathcal{L}_{\hbar, \tilde{\mathbf{A}}}$, autoadjoints de domaines $\mathbf{Dom}(\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}) = \mathbf{H}_{\mathbf{A}}^2$ et $\mathbf{Dom}(\mathcal{L}_{\hbar, \tilde{\mathbf{A}}}) = \mathbf{H}_{\tilde{\mathbf{A}}}^2$ définis ci-dessus. Se pose alors naturellement la question du lien entre ces deux objets et les propagateurs correspondants. Effectivement, provenant d'un même champ \mathbf{B} , ces deux potentiels doivent définir les même 'géométries', i.e. les hamiltoniens doivent être équivalents d'un point de vue symplectique et les laplaciens doivent être unitairement conjugués. Pour expliciter ce lien, on commence par poser l'application Φ définie par

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \ni (q, p) \mapsto (q, p - \nabla\Psi(q)).$$

On peut aisément vérifier qu'il s'agit d'un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ sur lui-même, et d'inverse

$$\Phi^{-1} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \ni (q, p) \mapsto (q, p + \nabla\Psi(q)).$$

On remarque de plus que

$$\Phi^*(dq \wedge dp) = dq \wedge dp$$

par le théorème de Schwartz, puisque $\Psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$. Ainsi Φ est un symplectomorphisme, c'est-à-dire qu'il s'agit d'un difféomorphisme conservant la structure symplectique sur \mathbb{R}^4 , et donc les équations hamiltoniennes du mouvement. On voit alors clairement, que

$$\tilde{H} = \Phi^* H.$$

Ainsi, les dynamiques définies par H et \tilde{H} sont équivalentes via ce symplectomorphisme et ne dépendent pas du choix du potentiel \mathbf{A} . D'un point de vue quantique, on commence par la remarque suivante : pour toute fonction $f \in e^{\frac{i}{\hbar}\Psi} \mathbf{Dom}(\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}})$, on a

$$(-i\hbar\nabla - \mathbf{A})e^{-\frac{i}{\hbar}\Psi} f = e^{-\frac{i}{\hbar}\Psi} (-i\hbar\nabla - \mathbf{A} - \nabla\Psi) f.$$

Ainsi, on obtient

$$e^{\frac{i}{\hbar}\Psi} \mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}} e^{-\frac{i}{\hbar}\Psi} = \tilde{\mathcal{L}}_{\hbar, \tilde{\mathbf{A}}}$$

et, puisque l'opérateur $e^{-\frac{i}{\hbar}\Psi}$ est unitaire sur $L^2(\mathbb{R}^2)$, les deux laplaciens sont unitairement équivalents. Il en est de même pour les propagateurs associés.

De la dynamique quantique à la dynamique classique : le cas magnétique

Nous avons présenté jusqu'ici les différentes notions de propagation magnétique, que ce soit la propagation classique par le formalisme hamiltonien ou la propagation quantique à l'aide de l'équation de Schrödinger. Il est alors légitime de se demander quels sont les liens entre ces deux propagations. Une première réponse est fournie par le théorème d'Egorov, dont on a discuté dans le chapitre précédent. Ce dernier permet d'affirmer que pour des temps finis (par temps finis on entend des temps indépendants du paramètre \hbar) la dynamique quantique de n'importe quel hamiltonien 'raisonnable' suit la dynamique classique associée. C'est ce qui sera mesuré par le biais des états cohérents dans le Chapitre 4. *Quid des temps longs ?* On répondra à cette question dans le Chapitre 5, où on montrera notamment que la dynamique classique permet d'expliquer la propagation magnétique quantique d'états microlocalisés en un point, les états cohérents, pour des temps d'ordre \hbar^{-1} . Ce dernier résultat s'appuiera sur les résultats de formes normales classique et quantique propres au champ magnétique en dimension 2. Il s'agit là aussi d'un lien important entre la dynamique classique et la dynamique quantique magnétique.

2.2 Géométrie du champ magnétique et formes normales

Comme illustré dans la section précédente, le champ magnétique courbe les trajectoires classiques des particules. Un premier responsable de ce phénomène est la force de Lorentz qui s'exerce sur les particules en présence de champ magnétique

$$\vec{\mathbf{F}}_{Lorentz} = \dot{x}(t) \wedge \vec{\mathbf{B}}.$$

Cette force s'écrivant comme un produit vectoriel avec le vecteur vitesse, par principe fondamental de la dynamique, ceci contraint l'accélération à être orthogonale à la vitesse de la particule, d'où le mouvement courbé. Puisque l'on a introduit le formalisme hamiltonien, il serait intéressant de mettre en lumière un responsable plus 'symplectique'. C'est tout l'objet de cette section : confondre par des outils de géométrie symplectique l'élément de la dynamique hamiltonienne qui courbe les trajectoires. De manière plus précise, nous énoncerons deux résultats de formes normales (symplectique et quantique) qui permettront d'expliciter la trajectoire de particules à *petites énergies* dans des champs magnétiques.

2.2.1 Cas du champ constant

On considère un champ magnétique \mathbf{B} constant, i.e. tel qu'il existe $\mathbf{B}_0 > 0$ avec

$$\mathbf{B} : \mathbb{R}^2 \ni q \mapsto \mathbf{B}_0 \in \mathbb{R}.$$

On considère le potentiel magnétique

$$\mathbf{A} : \mathbb{R}^2 \ni q \mapsto (0, \mathbf{B}_0 q_1)$$

associé au champ \mathbf{B} . L'hamiltonien magnétique est donné par

$$H : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \ni (q, p) \mapsto p_1^2 + (p_2 - \mathbf{B}_0 q_1)^2.$$

On considère alors l'application linéaire

$$L : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2(q, p) \mapsto \left(\sqrt{\mathbf{B}_0} q_1 - \frac{p_2}{\sqrt{\mathbf{B}_0}}, \sqrt{\mathbf{B}_0} q_2 - \frac{p_1}{\sqrt{\mathbf{B}_0}}, \frac{p_1}{\sqrt{\mathbf{B}_0}}, \frac{p_2}{\mathbf{B}_0} \right)^{\mathbf{T}} \in \mathbb{R}^4$$

qui est symplectique, et on remarque que

$$L^* H : \mathbb{R}^4 \ni (q_1, q_2, p_1, p_2)^{\mathbf{T}} \mapsto \mathbf{B}_0 (q_1^2 + p_1^2).$$

En posant

$$I^{(1)} := \mathbb{R}_q^2 \times \mathbb{R}_p^2 \ni (q, p) \mapsto q_1^2 + p_1^2$$

qui est l'oscillateur harmonique classique dans la coordonnée (q_1, p_1) , on obtient que l'hamiltonien magnétique est à un symplectomorphisme près un oscillateur harmonique à une dimension. Cela explique l'aspect oscillatoire des trajectoires classiques. Mais on assiste à un autre phénomène : on a une réduction de la dimension. En effet, l'hamiltonien magnétique à deux coordonnées est symplectiquement équivalent à un oscillateur harmonique à une dimension. D'un point de vue quantique, les conséquences sont d'autant plus importantes. En effet, en quantifiant l'application symplectique L par un opérateur métaplectique U_{\hbar} associé (voir [20, 48, 13] pour une définition ou le Chapitre 4), en désignant l'oscillateur harmonique quantique dans la première coordonnée par

$$\mathcal{I}_{\hbar}^{(1)} := -\hbar^2 \partial_1^2 + x_1^2,$$

on obtient

$$U_{\hbar}^* \mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}} U_{\hbar} = \mathbf{B}_0 \mathcal{I}_{\hbar}^{(1)}.$$

En posant $(h_j)_{j \in \mathbb{N}}$ la suite des fonctions de Hermite en la coordonnée x_1 , et en posant pour un entier $j \geq 0$,

$$\mathcal{H}_j := \text{Vect}_{x_1}(h_j) \otimes L^2(\mathbb{R}_{x_2})$$

on a, puisque les \mathcal{H}_j sont en somme directe orthogonale,

$$U_h^* \mathcal{L}_{h,\mathbf{A}} U_h = \mathbf{B}_0 \sum_{j \in \mathbb{N}} \hbar(2j+1) \Pi_{\mathcal{H}_j}$$

où les $\Pi_{\mathcal{H}_j}$ sont les projecteurs orthogonaux associés aux espaces \mathcal{H}_j ce qui donne une expression du propagateur

$$P^t := U_h \sum_{j \geq 0} e^{it\mathbf{B}_0(2j+1)} \Pi_{\mathcal{H}_j}.$$

Il se passe alors un phénomène qui motive toute l'étude du Chapitre 5 : en posant $\tilde{t} = t\hbar$, et en considérant

$$\tilde{P}^{\tilde{t}} = P^t = U_h \sum_{j \geq 0} e^{\frac{i\tilde{t}}{\hbar}\mathbf{B}_0(2j+1)} \Pi_{\mathcal{H}_j},$$

on obtient sur chaque espace \mathcal{H}_j une nouvelle dynamique quantique, générée par le propagateur

$$\Pi_{U_h^{-1}\mathcal{H}_j} \tilde{P} = e^{\frac{i\tilde{t}}{\hbar}\mathbf{B}_0(2j+1)}$$

associé à l'opérateur pseudo-différentiel de multiplication par $(2j+1)\mathbf{B}_0$, pour des temps d'ordre $t = \hbar^{-1}\tilde{t}$. Ainsi, le laplacien magnétique dans le cas du champ constant hérite des propriétés spectrales de l'oscillateur harmonique et permet une description de la propagation niveau de Landau par niveau de Landau. On peut alors étendre les résultats de propagation connus en temps finis à des temps d'ordre \hbar^{-1} .

L'opérateur plus simple (l'oscillateur harmonique 1-D) obtenu par conjugaison par un opérateur unitaire est ce que l'on appelle la *forme normale* de $\mathcal{L}_{h,\mathbf{A}}$ (c.f. [74] par exemple pour une théorie générale des formes normales d'opérateur pseudo-différentiels). Dans le cas de l'hamiltonien magnétique et de son pendant quantique le laplacien magnétique, San Vũ Ngọc et Nicolas Raymond ont prouvé des résultats de formes normales que nous allons présenter ci dessous. On donnera la preuve de ces résultats à la fin de ce chapitre.

2.2.2 Forme normale symplectique de l'hamiltonien

On considère à partir de maintenant un champ variable \mathbf{B} qui ne s'annule pas sur un ouvert Ω de \mathbb{R}^2 (on supposera $\mathbf{B} > 0$). Soit \mathbf{A} un potentiel vecteur associé, et $H(q, p) := \|p - \mathbf{A}(q)\|^2$ l'hamiltonien associé. On définit la surface caractéristique Σ de H comme son lieu d'annulation, i.e.

$$\Sigma := H^{-1}(\{0\}) = \{(q, p) \in \mathbb{R}^4 \mid p = \mathbf{A}(q)\}.$$

Le théorème suivant montre l'existence d'un symplectomorphisme Φ qui transforme l'hamiltonien magnétique initial en une forme normale modulo un reste infiniment petit en la distance à la surface caractéristique Σ .

Theorem 2.2.1. *Il existe un symplectomorphisme Φ défini sur un ouvert $\tilde{\Omega}$ de $\mathbb{C}_{z_1} \times \mathbb{R}_{z_2}^2$, à valeurs dans $T^*\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}_q^2 \times \mathbb{R}_p^2$, qui envoie le plan $\{z_1 = 0\}$ sur Σ , et tel que*

$$H \circ \Phi = |z_1|^2 f(z_2, |z_1|^2) + \mathcal{O}(|z_1|^\infty),$$

où $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une application lisse. De plus, l'application

$$\phi : \Omega \ni q \mapsto \Phi^{-1}(q, \mathbf{A}(q)) \in (\{0\} \times \mathbb{R}_{z_2}^2) \cap \tilde{\Omega}$$

est un difféomorphisme local vérifiant

$$f \circ (\phi(q), 0) = \mathbf{B}(q).$$

On remarquera que contrairement au cas du champ constant, ce résultat est un résultat local, le symplectomorphisme Φ étant construit sur un voisinage de $\{z_1 = 0\}$, i.e. pour des 'petites valeurs' de l'hamiltonien H .

Ce théorème permet une meilleure compréhension du mouvement classique magnétique. En effet, il donne accès au théorème suivant. On pose

$$K : (z_1, z_2) \in \tilde{\Omega} \mapsto |z_1|^2 f(z_2, |z_1|^2).$$

Theorem 2.2.2. *Pour $\epsilon > 0$ suffisamment petit, pour (q, p) tel que $H(q, p) = \mathcal{O}(\epsilon)$, pour $T_\epsilon = T\epsilon^{-1}$ avec $T > 0$ donné, alors le flot $t \mapsto \Phi_H^t(q, p)$ est défini pour tout $t \in (-T_\epsilon, T_\epsilon)$ et l'image de $(-T_\epsilon, T_\epsilon)$ par ce flot est un ensemble borné. De plus, on a*

i. *uniformément pour des temps d'ordre $T'_\epsilon = \mathcal{O}(\ln(\epsilon))$,*

$$\|\Phi_H^t(q, p) - \Phi_K^t(q, p)\| = \mathcal{O}(\epsilon^\infty);$$

ii. *si on suppose en outre qu'il existe un intervalle J fermé tel que $B(q) \in J$ et tel que $d\mathbf{B}$ ne s'annule pas sur $\mathbf{B}^{-1}(J)$, alors uniformément pour des temps $T_\epsilon = \mathcal{O}(\epsilon^{-1})$,*

$$\|\Phi_H^t(q, p) - \Phi_K^t(q, p)\| = \mathcal{O}(\epsilon^\infty).$$

La preuve du Théorème 2.2.2 repose sur le lemme suivant.

Lemma 2.2.3. *On pose $I := |z_1|^2$ et on rappelle que*

$$K : (z_1, z_2) \in \tilde{\Omega} \mapsto |z_1|^2 f(z_2, |z_1|^2)$$

de sorte que

$$H := K + \mathcal{O}(I^\infty). \quad (2.12)$$

Soit $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$ et $M > 0$. On considère

$$\mathcal{U}_\epsilon := \left\{ |z_1|^2 \leq \frac{\epsilon^2}{2}, |z_2| \leq M \right\}$$

et

$$\mathcal{V}_\epsilon := \{|z_1|^2 < \epsilon^2, |z_2| < 2M\}.$$

Soit

$$T_\epsilon := \sup \{T \text{ t.q. } \forall t \in (-T, T), \forall X_0 \in \mathcal{U}_\epsilon, \Phi_H^t(X_0) \in \mathcal{V}_\epsilon\}.$$

Alors, il existe une constante C_{ϵ_0} , indépendante de ϵ , ne dépendant que de la géométrie des ensembles \mathcal{U}_{ϵ_0} et \mathcal{V}_{ϵ_0} et de celle du champ magnétique \mathbf{B} , telle que

$$T_\epsilon \geq \frac{C_{\epsilon_0}}{\epsilon}.$$

Démonstration. Soit $X_0 \in \mathcal{U}_\epsilon$. Par (2.12), on a l'expression de H en X_0 :

$$H(X_0) = L(\epsilon)\epsilon^2$$

avec $L(\epsilon) = \mathbf{B} \circ \phi(X_0)(1 + R_2(X_0)(\epsilon^2))$, avec R_2 une fonction lisse. On pose $T_\epsilon(X_0)$ le temps de première sortie du flot $\Phi_H^t(X_0)$ de l'ensemble \mathcal{V}_ϵ . Si $T_\epsilon(X_0) = \infty$, la propriété est trivialement vraie en ce X_0 , on supposera alors que X_0 est tel que $T_\epsilon(X_0)$ soit fini. Puisque H est invariant par le flot Φ_H^t , si $\Phi_H^t(X_0) = (q(t), p(t))$ dans les coordonnées d'origine, on obtient

$$\forall t \in (-T_\epsilon(X_0), T_\epsilon(X_0)), \quad \|p(t) - \mathbf{A}(q(t))\| = \sqrt{L(\epsilon)}\epsilon.$$

En écrivant le champ de vecteur hamiltonien $\chi_H(q, p) = (p - \mathbf{A}(q), D_q \mathbf{A}^T(p - \mathbf{A}(q)))^T$, $\forall t \in (-T_\epsilon(X_0), T_\epsilon(X_0))$

$$\|\Phi_H^t(X_0) - X_0\| \leq \int_0^{|t|} \|\chi_H \circ \Phi_H^s(X_0)\| ds \leq \sqrt{L(\epsilon)} (1 + \|D\mathbf{A}\|_{\infty, \mathcal{V}_{\epsilon_0}}) |t| \epsilon. \quad (2.13)$$

On pose de plus $I(t) := I \circ \Phi_H^t(X_0)$. On regarde l'évolution $I(t)$ au cours du temps. Par (2.12), pour N un entier arbitraire, on peut trouver une fonction lisse R_N telle que $H = K + I^N R_N$. On obtient alors $\forall t \in (-T_\epsilon(X_0), T_\epsilon(X_0))$

$$\left| \frac{d}{dt} I(t) \right| = |\{I, H\} \circ \Phi_H^t(X_0)| = I^N(t) |\{I(t), R_N(t)\}| \leq I^{N+1/2}(t) \|\nabla R_N\|_{\infty, \mathcal{V}_{\epsilon_0}}.$$

En intégrant,

$$|I(t) - I(0)| \leq 2C_N \epsilon^{2N+1} |t| \quad (2.14)$$

avec $C_N = \|\nabla R_N\|_{\infty, \mathcal{V}_\epsilon}$. On fait alors la dichotomie suivante : le flot $\Phi_H^t(X_0)$ sort de \mathcal{V}_ϵ au temps $T_\epsilon(X_0)$ soit parce que $I(T_\epsilon(X_0)) = \epsilon^2$, soit parce que $|z_2(t)| = 2M$. Dans le premier cas, par continuité du flot, (2.14) donne

$$\frac{\epsilon^2}{2} \leq |I(T_\epsilon(X_0)) - I(0)| \leq 2C_N \epsilon^{2N+1} T_\epsilon$$

d'où $T_\epsilon \geq 4C_N \epsilon^{2N-1}$ pour N arbitrairement grand. Dans le deuxième cas, toujours par continuité du flot, l'estimation (2.13) donne

$$M \leq \|\Phi_H^t(X_0) - X_0\| \leq \sqrt{L(\epsilon)} (1 + \|D\mathbf{A}\|_{\infty, \mathcal{V}_{\epsilon_0}}) T_\epsilon(X_0) \epsilon.$$

Ainsi, en prenant N suffisamment grand et $\epsilon_0 < 1$, et en remarquant que

$$L(\epsilon) \leq \|\mathbf{B} \circ \phi^{-1}\|_{\infty, \mathcal{U}_{\epsilon_0}} ((1 + \|R_2\|_{\infty, \mathcal{U}_{\epsilon_0}})) = C \|\mathbf{B} \circ \phi^{-1}\|_{\infty, \mathcal{U}_{\epsilon_0}}$$

on obtient

$$T_\epsilon(X_0) \geq \frac{M}{\sqrt{C \|\mathbf{B} \circ \phi^{-1}\|_{\infty, \mathcal{U}_{\epsilon_0}} (1 + \|D\mathbf{A}\|_{\infty, \mathcal{V}_{\epsilon_0}})}} \epsilon^{-1}. \quad (2.15)$$

Comme le membre de droite dans (2.15) ne dépend pas de X_0 , notant que

$$T_\epsilon = \inf_{X_0 \in \mathcal{U}_\epsilon} T_\epsilon(X_0)$$

on obtient le résultat annoncé. \square

On ne prouvera pas ici le Théorème 2.2.2 puisque il s'agit exactement de la même preuve que dans [57]. En effet le Lemme 2.2.3 joue le même rôle que [57, Lemme 3.1] en remarquant que, puisque on n'a pas d'hypothèse de confinement, le contrôle des trajectoires ne se fait que pour des temps d'ordre $T_\epsilon \sim \epsilon^{-1}$ où ϵ correspond informellement à la fois à \sqrt{H} et à la distance à la variété caractéristique Σ dans les coordonnées (z_1, z_2) .

Le Théorème 2.2.2 ci-dessus implique que les deux dynamiques sont assez proches. Il suffit donc d'expliquer la dynamique issue de l'hamiltonien K . Pour comprendre le flot Φ_K^t , on commence par s'intéresser à la quantité $I := |z_1|^2$. On a

$$\{K, I\} = 0,$$

d'où I est une quantité invariante, ou *intégrale première*, du mouvement. De même,

$$\{K, f(\cdot, I)\} = 0,$$

d'où $f(\cdot, I)$ désigne une autre intégrale première du mouvement. On remarque de plus que ces deux quantités sont en involution :

$$\{I, f(\cdot, I)\} = 0.$$

On obtient donc que les champs de vecteurs hamiltoniens associés χ_I et χ_f génèrent des flots hamiltoniens qui commutent :

$$\forall t, s, \Phi_f^t \circ \Phi_I^s = \Phi_I^s \circ \Phi_f^t.$$

Or, le champ de vecteurs χ_K s'écrit

$$\chi_K = I\chi_f + f\chi_I.$$

On obtient donc la décomposition abélienne du flot issu de K

$$\Phi_K^t = \Phi_I^{ft} \circ \Phi_f^{It}.$$

Reste alors à décrire les flots générés par χ_I et χ_f . Puisque $I = |z_1|^2$, le flot Φ_I s'intègre facilement dans les coordonnées (z_1, z_2) :

$$\Phi_I^t(z_1^0, z_2^0) = (e^{it}z_1^0, z_2^0).$$

Ainsi, le flot $\Phi_I^{ft}(z_1^0, z_2^0)$ décrit des oscillations autour d'un centre $(0, z_2^0) \in \Sigma$ de pulsation

$$\omega := f(z_2^0, I) = B \circ \phi^{-1}(z_2^0) + \mathcal{O}(I).$$

On reconnaît en particulier la pulsation cyclotron. En ce qui concerne le flot associé à f , si $\Phi_f^t = (z_1(t), z_2(t))$, on obtient

$$\begin{aligned} \dot{z}_2(t) &= \chi_{z_2, f}(z_2(t), I) \\ \dot{z}_1(t) &= \partial_I f(z_2(t), I) \chi_I(z_1(t)) \end{aligned}$$

où $\chi_{z_2, f}$ désigne la composante z_2 du champs de vecteur hamiltonien issu de f . On obtient alors que le flot associé à f est donné par une dérive en z_2 , d'hamiltonien

$$h_I : z_2 \in \mathbb{R}_{z_2}^2 \mapsto f(z_2, I) = \mathbf{B} \circ \phi^{-1} + \mathcal{O}(I)$$

où I est fixé, et une oscillation en z_1 , de période $\partial_I f$. Ainsi, Φ_f^{It} est responsable de la dérive en la coordonnée z_2 (coordonnée correspondant à la surface caractéristique), à vitesse d'ordre $I \sim \epsilon$, et la dérive est lente devant la période des oscillations, de période $f + I\partial_I f = \partial_I K$. On obtient alors le corollaire suivant.

Corollary 2.2.4. *Soit $T > 0$ et soit ϵ_0 comme introduit dans le Théorème 2.2.2. On considère $X_0 \in \mathbb{R}_q^2 \times \mathbb{R}_p^2$ tel que $H(X_0) \leq \epsilon$ pour $\epsilon \leq \epsilon_0$, ϵ_0 introduit ci-dessus. Alors, le flot Φ_H issu de X_0 est donné pour des temps $|t| \leq T/\epsilon$ à un terme d'ordre $\mathcal{O}(\epsilon^\infty)$ près par la composition abélienne d'un flot périodique obtenu par action transitive de \mathbb{S}^1 , de période $\partial_I K$, et d'une dérive lente du centre de ces oscillations le long de Σ , à vitesse de l'ordre $\mathcal{O}(\epsilon)$.*

On obtient le mouvement centre-guide annoncé. En effet, ce corollaire donne une description précise du mouvement : il s'agit d'oscillations de rayon

$$r(t) = \sqrt{I \circ \Phi_H^t} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mathbf{B} \circ \Phi_H^t}} + \mathcal{O}(\epsilon^{3/2})$$

pour une énergie $H = \epsilon$, la vitesse angulaire de la rotation étant donnée par

$$\dot{\theta}(t) = -2\mathbf{B} \circ \Phi_H^t + \mathcal{O}(\epsilon).$$

En ce qui concerne le centre $c(t)$ des oscillations, il dérive lentement dans la surface caractéristique en suivant l'hamiltonien

$$h_I := I(t)B \circ \Phi_H^t$$

et ainsi avec une vitesse $\dot{c}(t) = \mathcal{O}(\epsilon)$.

2.2.3 Forme normale quantique

On cite le théorème de forme normale quantique, qui est la version quantique de Théorème 2.2.1

Theorem 2.2.5. *Pour \hbar assez petit, il existe un opérateur intégral de Fourier unitaire U_\hbar tel que*

$$U_\hbar^* \mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}} U_\hbar = \mathcal{N} + R_\hbar,$$

où

1. \mathcal{N} est un opérateur pseudo-différentiel qui commute avec

$$\mathcal{I}_{\hbar} := \hbar^2 \partial_{x_1}^2 + x_1^2;$$

2. Pour toute fonction d'hermite h_j , telle que $\mathcal{I}_{\hbar}^{(1)} h_j = \hbar(2j+1)h_j$, l'opérateur $\mathcal{N}^{(j)}$ défini sur $L^2(\mathbb{R}_{x_2})$ par

$$h_j \otimes \mathcal{N}^{(j)}(u) = \mathcal{N}(h_j \otimes u)$$

est un opérateur pseudo-différentiel de classe $S(1)$ et d'ordre 1 en \hbar , avec pour symbole principal

$$n^{(j)}(x_2, \xi_2) = \hbar(2j+1)B \circ \phi^{-1}(x_2, \xi_2)$$

avec ϕ le difféomorphisme introduit dans le Théorème 2.2.1 ;

3. Étant donné un opérateur pseudo-différentiel D_{\hbar} avec pour symbole principal d_0 tel que $d_0(z_1, z_2) = c(z_2)|z_1|^2 + \mathcal{O}(|z_1|^3)$, et pour tout $N \geq 1$, il existe deux opérateurs pseudo-différentiels $S_{\hbar, N}$ et Z_N tels que

$$R_{\hbar} = S_{\hbar, N}(D_{\hbar})^N + Z_N,$$

avec Z_N un opérateur pseudo-différentiel dont le symbole est nul sur un voisinage fixe de la surface caractéristique de la forme normale symplectique K , c'est-à-dire sur un voisinage fixe de $\{z_1 = 0\}$;

4. $\mathcal{N} = \mathcal{H}_{\hbar}^0 + Q_{\hbar}$, où $\mathcal{H}_{\hbar}^0 = \text{Op}_{\hbar}^w(H^0)$, $H^0 = B \circ \phi^{-1}(z_2)|z_1|^2$, et l'opérateur Q_{\hbar} est relativement borné par rapport à \mathcal{H}_{\hbar}^0 avec une borne arbitrairement petite.

Ce théorème est une version légèrement différente de celui présenté dans [57]. En effet, dans l'article d'origine, l'Opérateur Intégral de Fourier U_{\hbar} était microlocalement unitaire sur un voisinage de la surface $\{z_1 = 0\}$. Cependant, il est possible de le définir comme globalement unitaire et satisfaisant les mêmes hypothèses locales du Théorème 2.2.5 quitte à changer Z_N (c.f. la preuve dans la section 2.3). L'unitarité de U_{\hbar} va être un outil important dans la description géométrique de la propagation en temps longs du Chapitre 5.

On remarque de plus que la forme normale \mathcal{N} ci-dessus définit un opérateur essentiellement autoadjoint sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$. En effet, on apprend de [31] par exemple que, puisque Q_{\hbar} est relativement borné par rapport à \mathcal{H}_{\hbar}^0 , si \mathcal{H}_{\hbar}^0 est essentiellement autoadjoint, alors \mathcal{N} aussi. Et \mathcal{H}_{\hbar}^0 étant un produit tensoriel d'opérateurs essentiellement autoadjoints sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, il est lui aussi essentiellement autoadjoint sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ et il en va de même pour \mathcal{N} . Ceci permet entre autre de définir le propagateur associé par application du Théorème de Stone.

Le Théorème 2.2.5 sera un outil central de l'étude en temps long d'états cohérents dans le cadre magnétique. Il permet de faire le lien entre la dynamique classique de particules et la dynamique quantique d'états localisés. L'oscillateur harmonique $\mathcal{I}_{\hbar}^{(1)}$ joue un rôle central dans ce résultat. Effectivement, il permet l'écriture de cette forme normale en somme directe d'opérateurs pseudo-différentiels 1-D, chacun correspondant à un niveau de Landau de l'oscillateur : il s'agit d'un phénomène de réduction de dimension, dont on tirera pleinement partie dans le Chapitre 5.

Ce théorème a de nombreuses implications spectrales. Dans [57], les auteurs font l'hypothèse d'un champ magnétique confinant, ce qui leur donne un laplacien magnétique avec le bas du spectre discret. Ils obtiennent alors de bonnes propriétés de localisation des fonctions propres associées via les estimées d'Agmon et en déduisent des développements asymptotiques complets des valeurs propres correspondant à ce bas de spectre discret.

2.3 Une idée des preuves des théorèmes de formes normales

Dans cette partie, on présente les arguments principaux des preuves des deux théorèmes de formes normales, le Théorème 2.2.1 et le Théorème 2.2.5. L'idée est de présenter une forme normale de l'hamiltonien magnétique en munissant la surface caractéristique d'une structure symplectique, puis de remanier cette

forme normale par un procédé de Birkhoff (voir [70, 9] pour la théorie générale) pour obtenir le terme $f(z_2, |z_1|^2) + \mathcal{O}(|z_1|^\infty)$ de manière à pouvoir le quantifier et obtenir la forme normale quantique. Il s'agit d'une preuve très géométrique et assez belle. C'est pourquoi je la joins au présent manuscrit. Cette section est entièrement tirée de l'article où elle est donnée, à savoir [57]. Dans toute la preuve, on remplacera Ω par \mathbb{R}^2 pour simplifier. Il faut néanmoins garder à l'esprit que l'hypothèse principale que l'on utilise est la non annulation du champ \mathbf{B} sur Ω et qu'ainsi, ce qui suit est vrai sur tout ouvert de \mathbb{R}^2 sur lequel \mathbf{B} ne s'annule pas.

2.3.1 Étude géométrique du fibré normal symplectique à la surface caractéristique

Tout commence avec la définition de la surface caractéristique :

$$\Sigma := H^{-1}(\{0\}) = \{(q, p) \in T^*\mathbb{R}^2 \mid p = \mathbf{A}(q)\}.$$

Dans cette définition de Σ on remarque tout de suite qu'il s'agit d'une surface, en tant qu'image de \mathbb{R}^2 par la fonction

$$j : q \in \mathbb{R}^2 \mapsto (q, \mathbf{A}(q)) \in \Sigma.$$

Par définition, j est surjective sur Σ (et même bijective). On va s'aider de cette fonction pour transporter la structure symplectique de \mathbb{R}^2 sur Σ . On pose $\omega := dq_1 \wedge dp_1 + dq_2 \wedge dp_2$ la forme symplectique naturelle sur $T^*\mathbb{R}^2$.

Lemma 2.3.1. *L'application j définit un symplectomorphisme de Σ sur \mathbb{R}^2 et $j^*d\omega|_\Sigma : T^*\mathbb{R}^2 \rightarrow T^*\Sigma$ est donné par*

$$j^*d\omega|_\Sigma = d\mathbf{A} = \mathbf{B}dq_1 \wedge dq_2.$$

Démonstration. Soit $q \in \mathbb{R}^2$. On a alors

$$\begin{aligned} j^*\omega(q) &= \omega(j(q)) \circ dj(q) \\ &= dq_1 \wedge d(A_1(q)) + dq_2 \wedge d(A_2(q)) \\ &= (\partial_2 A_1(q) - \partial_1 A_2(q))dq_1 \wedge dq_2. \end{aligned}$$

Comme le champ magnétique est supposé comme ne s'annulant pas, ceci prouve que j transporte la structure symplectique sur Σ en une structure symplectique sur \mathbb{R}^2 vu comme $T^*\mathbb{R}$. De plus j est un difféomorphisme : il s'agit donc d'un symplectomorphisme de \mathbb{R}^2 sur Σ . \square

Notre but est de décrire l'hamiltonien H pour de petites énergies, c'est à dire sur un voisinage de Σ . On s'aide alors du symplectomorphisme j pour définir une structure symplectique sur ce voisinage. On considère pour cela l'application tangente de \mathbf{A} :

$$\forall q \in \mathbb{R}^2, T_q\mathbf{A} : X \in \mathbb{R}^2 \rightarrow T_q\mathbf{A} \cdot X \in T_{j(q)}\Sigma.$$

Puisque Σ est le graphe de j , on obtient pour tout $q \in \mathbb{R}^2$:

$$T_{j(q)}\Sigma = T_qj(T_q\mathbb{R}^2), \quad \text{avec} \quad T_qj = (id_{T_q\mathbb{R}^2}, T_q\mathbf{A}).$$

Ceci donne accès à une description précise du fibré normal symplectique $T^\perp\Sigma$.

Lemma 2.3.2. *Pour tout $q \in \mathbb{R}^2$, on pose les vecteurs*

$$u_1(q) := \frac{1}{\sqrt{\mathbf{B}}}(e_1, (T_q\mathbf{A})^\mathbf{T}e_1) \quad \text{et} \quad v_1(q) := \frac{1}{\sqrt{\mathbf{B}}}(e_2, (T_q\mathbf{A})^\mathbf{T}e_2).$$

Alors (u_1, v_1) définit une base symplectique de $T_j(q)^\perp\Sigma$.

Démonstration. Il suffit de vérifier que u_1 et v_1 sont deux vecteurs de $T_{j(q)}^\perp \Sigma$ et que $\omega(u_1, v_1) = \pm 1$. \square

Cette description du fibré normal permet d'expliciter le Hessien de H en restriction à $T^\perp \Sigma$, que l'on appellera le Hessien transverse.

Lemma 2.3.3. *Le Hessien transverse de H est donné par*

$$\text{Mat}_{(u_1, v_1)} d^2 H|_{T^\perp \Sigma} = 2\mathbf{B}I_2$$

où I_2 désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. En d'autres termes, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, pour tout $q \in \mathbb{R}^2$

$$d_{j(q)}^2 H(xu_1(q) + yv_1(q)) = 2\mathbf{B}(x^2 + y^2).$$

Démonstration. Le Hessien de H est donné par

$$d^2 H = 2\|dp - T_q \mathbf{A} \circ dq\|^2 + 2\langle p - \mathbf{A}, d(T_q \mathbf{A} \circ dq) \rangle$$

où $\|\cdot\|$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désignent la norme et le produit scalaire euclidien sur $T^* \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^4$. Soit alors $(q, p) \in \Sigma$, c'est à dire tel que $p = \mathbf{A}(q)$. Pour tout $(X, Y) \in T_{j(q)}^\perp \Sigma^2$, on a alors, puisque $(X, Y) \in \text{Vect}(u_1(q), v_1(q))$, $Y = T_q \mathbf{A}^T X$ et

$$\begin{aligned} d_{(q,p)}^2 H(X, Y) &= 2\|Y - T_q \mathbf{A} X\|^2 \\ &= 2\|(T_q \mathbf{A}^T - T_q \mathbf{A})X\|^2. \end{aligned}$$

Un calcul donne $(T_q \mathbf{A}^T - T_q \mathbf{A})X = \vec{\mathbf{B}} \wedge X$, d'où

$$d_{(q,p)}^2 H(X, Y) = 2\|\vec{\mathbf{B}} \wedge X\|^2$$

et enfin, pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, pour $X = \alpha u_1(q) + \beta v_1(q)$, on obtient

$$d_{(q,p)}^2 H(X, Y) = 2\mathbf{B}(\alpha^2 + \beta^2)$$

d'où le résultat annoncé. \square

On reconnaît ici un oscillateur harmonique classique, responsable des oscillations rapides autour de la dérive lente dans la dynamique classique magnétique (c.f. Corollaire 2.2.4).

2.3.2 Construction du symplectomorphisme Φ

Considérons maintenant l'espace $\mathbb{C}_{z_1} \times \mathbb{R}_{z_2}^2$, muni des variables canoniques $z_1 = x_1 + i\xi_1$ et $z_2 = (x_2, \xi_2)$ et ainsi de la forme symplectique $\omega_0 = dx_1 \wedge d\xi_1 + dx_2 \wedge d\xi_2$. Posons maintenant

$$\phi : (q_1, q_2) \in \mathbb{R}_q^2 \mapsto (x_2, \xi_2) = \left(q_1, \int_0^{q_2} \mathbf{B}(q_1, s) ds \right).$$

On voit aisément que ϕ réalise un difféomorphisme de \mathbb{R}_q^2 sur son image $\phi(\mathbb{R}_q^2) \subset \mathbb{R}_{z_2}^2$ et que

$$\phi^*(dx_2 \wedge d\xi_2) = j^* \omega.$$

En posant alors $\tilde{j} = j \circ \phi^{-1}$ on obtient que

$$\tilde{j} : \phi(\mathbb{R}_q^2) \rightarrow \Sigma$$

est un symplectomorphisme. L'idée est maintenant de s'appuyer sur ce symplectomorphisme et d'utiliser la base (u_1, v_1) pour d'écrire un voisinage de Σ . Dans ce but on pose $\tilde{u}_1 := u \circ \phi^{-1}$ et $\tilde{v}_1 := v \circ \phi^{-1}$ et on définit l'application

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi} & : \quad \mathbb{C}_{z_1} \times \mathbb{R}_{z_2}^2 & \rightarrow & \quad T^\perp \Sigma \\ & (x_1 + i\xi_1, z_2) & \mapsto & \quad x_1 \tilde{u}_1(z_2) + \xi_1 \tilde{v}_1(z_2) \end{aligned}$$

Il s'agit d'un difféomorphisme envoyant $T^\perp g(\mathbb{R}_q^2)$ sur $T^\perp \Sigma$, dont la différentielle est égale à l'identité sur $\{0\} \times g(\mathbb{R}_q^2)$. On aimerait alors que $\tilde{\Phi}$ soit un symplectomorphisme car, par développement de Taylor en $z_1 = 0$ (voir (2.16)),

$$H \circ \tilde{\Phi}(z_1, z_2) = B \circ g^{-1}(z_2) |z_1|^2 + \mathcal{O}(|z_1|^3).$$

Malheureusement, il n'y aucune raison pour que $\tilde{\Phi}$ soit un symplectomorphisme. Cependant, on a le lemme suivant.

Lemma 2.3.4. *Pour tout ouvert borné \mathcal{U} de $g(\mathbb{R}_q^2)$, il existe $\varepsilon > 0$ et un difféomorphisme $S_{\mathcal{U}}$ de $\mathbf{B}(0, \varepsilon) \times \mathcal{U}$ sur lui-même tel que, $\forall z_2 \in \mathcal{U}$,*

$$d_{(0, z_2)} S_{\mathcal{U}} = id_{T_{(0, z_2)} \mathbb{C}_{z_1} \times \mathbb{R}_{z_2}^2}$$

et tel que

$$S_{\mathcal{U}}^* \tilde{\Phi}^* \omega = \omega_0.$$

Autrement dit, ce lemme propose pour chaque ouvert borné de $\phi(\mathbb{R}_q^2)$ de relever le difféomorphisme $\tilde{\Phi}$ en un un symplectomorphisme sur un voisinage tubulaire de cet ouvert dans $\mathbb{C}_{z_1} \times \mathbb{R}_{z_2}^2$. On ne donnera pas la preuve de ce lemme, mais on peut en donner une idée (se référer à [57] pour une preuve complète). On commence par remarquer que l'application

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_0 & : \quad \mathbb{C}_{z_1} \times \phi(\mathbb{R}_{z_2}^2) & \rightarrow & \quad T^* \mathbb{R}_q^2 = \mathbb{R}_q^2 \times \mathbb{R}_p^2 \\ & (x_1 + i\xi_1, z_2) & \mapsto & \quad \tilde{j}(z_2) + \tilde{\Phi}(x_1 + i\xi_1, z_2) = \tilde{j}(z_2) + x_1 \tilde{u}(z_2) + \xi_1 \tilde{v}_1(z_2) \end{aligned}$$

est un difféomorphisme d'un voisinage de $\{0\} \times \phi(\mathbb{R}_q^2)$ sur un voisinage de Σ . Fixant un ouvert borné \mathcal{U} dans $\phi(\mathbb{R}_q^2)$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\tilde{\Phi}_0$ réalise un difféomorphisme de $B(0, \varepsilon) \times \phi(\mathbb{R}_q^2)$ sur $B(0, \varepsilon) \times \phi(\mathcal{U}) \subset T^\perp \Sigma \times \Sigma$. On remarque de plus que

$$(\tilde{\Phi}_0^* \omega - \omega_0)|_{\{0\} \times \mathcal{U}} = 0.$$

Par une méthode semblable à celle utilisée pour construire la forme différentielle dans le Lemme de Poincaré (Théorème 2.1.1), on peut alors construire le difféomorphisme $S_{\mathcal{U}}$ du lemme ci-dessus. Il est à noter que pour deux ouverts bornés \mathcal{U} et \mathcal{V} d'intersection non vide, les difféomorphismes associés $S_{\mathcal{U}}$ et $S_{\mathcal{V}}$ coïncident sur $\mathbf{B}(0, \varepsilon) \times \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ quite à prendre un ε plus petit. Ceci permet alors de définir un difféomorphisme S , d'un voisinage \mathcal{A} de $\{0\} \times g(\mathbb{R}_q^2)$ sur lui-même tel que

$$\forall a \in \mathcal{A}, \quad S^* \tilde{\Phi}_0^* \omega = \omega_0.$$

Posons $\Phi := \tilde{\Phi}_0 \circ S$. Cette application est ainsi un symplectomorphisme de \mathcal{A} sur son image qui est un voisinage ouvert de Σ . Étudions alors l'hamiltonien $H \circ \Phi$. Il s'agit d'un hamiltonien sur \mathcal{A} , de surface caractéristique $\Phi^{-1}(\Sigma) = \{0\} \times g(\mathbb{R}_q^2)$. Le fibré symplectique normal est transporté, pour $z_2 \in \mathbb{R}_{z_2}^2$, de $T_{(0, z_2)}^\perp \Sigma$ sur $\mathbb{C} \times \{z_2\}$. On a de plus l'expression du Hessien transverse :

$$d^2(H \circ \Phi)|_{\mathbb{C} \times \{z_2\}} = d_{\Phi(0, z_2)}^2 H \circ (d_{(0, z_2)} \Phi, d_{(0, z_2)} \Phi) = 2\mathbf{B} \circ g^{-1}(z_2) id_{(T_{(0, z_2)} \mathbb{C} \times \{z_2\})^\perp}.$$

Ainsi, par les formules de Taylor, en développant en la variable z_1 autour de 0, on obtient

$$\begin{aligned} H \circ \Phi(z_1, z_2) & = H \circ \Phi(0, z_2) + d_{(0, z_2)}(H \circ \Phi) z_1 + \frac{1}{2} d_{(0, z_2)}^2(H \circ \Phi)(z_1, z_1) + \mathcal{O}(|z_1|^3) \\ & = 0 + 0 + \mathbf{B} \circ \phi^{-1}(z_2) |z_1|^2 \mathcal{O}(|z_1|^3). \end{aligned} \tag{2.16}$$

On parvient alors à un résultat semblable à celui de l'énoncé du Théorème 2.2.1. Cependant, on a ici un terme de reste de l'ordre $\mathcal{O}(|z_1|^3)$, alors que l'on aimerait avoir un terme d'ordre $\mathcal{O}(|z_1|^\infty)$. Pour ce faire, on utilise un procédé de forme normale de Birkhoff.

2.3.3 Forme normale de Birkhoff

Le résultat de forme normale ci-dessus montre, en posant $\hat{H} = H \circ \Phi$,

$$\hat{H} = H_0 + \mathcal{O}(|z_1|^3)$$

avec $H_0 = \mathbf{B} \circ \phi^{-1}(z_2)|z_1|^2$. Le but est d'appliquer de nouveau une transformation à \hat{H} de sorte à obtenir un reste d'ordre $\mathcal{O}(|z_1|^\infty)$, quitte à modifier le terme H_0 en une autre fonction toujours en les variables z_2 et $|z_1|^2$. Il est à souligner que l'objectif est exactement d'obtenir une fonction en la variable $|z_1|^2$. Un outil puissant pour parvenir à ce but est la forme normale de Birkhoff, que l'on va détailler dans la suite. Ce qui suit est inspiré de [9, 70]. On trouve aussi une version classique des formes normales de Birkhoff dans [69].

L'idée de la forme normale de Birkhoff est de travailler sur la série de Taylor de \hat{H} en la variable z_1 en 0, notée $T(\hat{H})$, et d'y appliquer une transformation qui se relèvera en un symplectomorphisme sur \hat{H} . Ce dernier transformera la série $T(\hat{H})$ en une série en $|z_1|^2$, ce qui permettra de conclure au résultat qui nous intéresse par application du Lemme de Borel.

Commençons par poser le cadre des séries formelles qui nous intéresse ici. On considère

$$\mathcal{E} := \mathcal{C}^\infty(z_2)[[x_1, \xi_1, \hbar]]$$

l'espace des séries formelles en x_1, ξ_1 et \hbar , et à coefficients dans les fonctions lisses en z_2 . On définit de plus l'application

$$T : \mathcal{C}^\infty(z_1, z_2) \rightarrow \mathcal{E}$$

qui à une fonction lisse en (z_1, z_2) associe sa série de Taylor en $z_1 = 0$. Par le lemme de Borel, il s'agit d'une application surjective non injective. On définit enfin le degré d'un monôme $x_1^k \xi_1^m \hbar^l$ comme l'entier $|k| + |m| + 2l$, avec $k, m \in \mathbb{N}^2$ et $l \in \mathbb{N}$. L'espace vectoriel des monômes de degrés N sera alors noté \mathcal{D}_N et \mathcal{O}_N désignera l'espace des séries formelles de valuation au moins N .

Puisque l'on cherche à obtenir un résultat compatible avec le cadre symplectique de $T^*\mathbb{R}^2$, on munit \mathcal{E} du produit de moyale $\#$, définit par

$$\forall F, G \in \mathcal{E}, \quad F \# G = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k \hbar^k}{k!} [A(D)^k (F(x, \eta) G(y, \xi))]_{|y=x, \eta=\xi} \quad (2.17)$$

avec

$$A(D) = \frac{1}{2} (\partial_{x_1} \partial_\eta - \partial_y \partial_{\xi_1}).$$

En remarquant que $\hbar A(D)(\mathcal{D}_N) \subset \mathcal{D}_{N+1}$ pour tout entier N , le produit $\#$ étant bien défini sur les séries formelles au sens de la topologie usuelle. On munit ainsi \mathcal{E} d'une structure d'algèbre non commutative, et on définit le crochet de commutation correspondant, appelé crochet de Weyl,

$$\forall F, G \in \mathcal{E}, \quad [F, G] = F \# G - G \# F.$$

En appliquant la formule (2.17), on obtient que pour tout entier N_1, N_2 ,

$$\hbar^{-1}[\mathcal{O}_{N_1}, \mathcal{O}_{N_2}] \subset \mathcal{O}_{N_1+N_2-2}. \quad (2.18)$$

Une application naturelle définie sur les algèbres non commutatives est l'application adjointe associée à un élément F , définie par

$$\text{ad}_A : K \in \mathcal{E} \rightarrow [A, K].$$

Si $A \in \mathcal{O}_3$, on remarque, par (2.18), que $\text{ad}_A(\mathcal{O}_N) \subset \mathcal{O}_{N+1}$. On peut ainsi définir l'application

$$e^{i\hbar^{-1}\text{ad}_A} : K \in \mathcal{E} \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\hbar^{-1})^k}{k!} \text{ad}_A^k K \in \mathcal{E}$$

qui désigne alors une série convergente au sens de la topologie des séries formelles, où on a posé $\text{ad}_A^0 = \text{id}_{\mathcal{E}}$, et on a, pour $K \in \mathcal{O}_N$,

$$e^{i\hbar^{-1}\text{ad}_A}K = K + i\hbar^{-1}\text{ad}_A K + \mathcal{O}_{M+2} \quad (2.19)$$

avec $i\hbar^{-1}\text{ad}_A K \in \mathcal{O}_{M+1}$. On énonce à présent le résultat de forme normale de Birkhoff. Pour simplifier les notations, puisque H_0 est égal à sa série de Taylor, on l'identifiera avec sa série formelle $T(H_0) \in \mathcal{E}$.

Proposition 2.3.5. *Soit $\gamma \in \mathcal{O}_3$. Alors il existe $\tau, \kappa \in \mathcal{O}_3$ tel que*

$$e^{i\hbar^{-1}\text{ad}_\tau}(H_0 + \gamma) = H_0 + \kappa$$

avec, $[\kappa, H_0] = 0$.

Démonstration. On prouve le résultat par récurrence. Soit, pour $N \geq 1$, \mathcal{P}_N la proposition suivante

\mathcal{P}_N : il existe $\tau_N \in \mathcal{O}_3$ tel que

$$e^{-i\hbar^{-1}\text{ad}_{\tau_N}}(H_0 + \gamma) = H_0 + \kappa_3 + \dots + \kappa_{N+1} + R_{N+2} + \mathcal{O}_{N+3} \quad (2.20)$$

avec, en posant $\kappa_2 := H_0$, pour tout $2 \leq j \leq N+1$, $\kappa_j \in \mathcal{D}_j$, $\text{ad}_{|z_1|^2}\kappa_j = 0$ et $R_{N+2} \in \mathcal{D}_{N+2}$.

Par définition de H_0 et de γ , la proposition \mathcal{P}_2 est vérifiée. Supposons alors \mathcal{P}_N vraie pour $N \geq 1$ et prouvons \mathcal{P}_{N+1} . La proposition \mathcal{P}_N nous prodigue alors $\tau_N, \kappa_3, \dots, \kappa_{N+1}$ et R_{N+2} tels que (2.20) et les hypothèses suivantes sont satisfaites. Considérons alors $\tau' \in \mathcal{D}_{N+2}$. On remarque alors que

$$\begin{aligned} e^{i\hbar^{-1}\text{ad}_{\tau_N+\tau'}}(H_0 + \gamma) &= (i\hbar^{-1}\text{ad}_{\tau'}e^{i\hbar^{-1}\text{ad}_{\tau_N}}(H_0 + \gamma)) + \mathcal{O}_{N+3} \\ &= H_0 + \kappa_3 + \dots + \kappa_{N+1} + \kappa_{N+2} + \mathcal{O}_{N+3} \end{aligned}$$

avec, par (2.19),

$$\kappa_{N+2} = R_{N+2} + (i\hbar^{-1}\text{ad}_{\tau'}H_0) = H_0 - \mathbf{B} \circ \phi^{-1}(z_2)\text{ad}_{|z_1|^2}\tau'.$$

En notant que $\text{ad}_{|z_1|^2}(\mathcal{D}_M) \subset \mathcal{D}_M$ pour tout entier M , on a $\kappa_{N+2} \in \mathcal{D}_{N+2}$. Or,

$$\hbar^{-1}\text{ad}_{|z_1|^2} = 2x_1\partial_{\xi_1} - 2\xi_1\partial_{x_1},$$

d'où, par un calcul, on peut trouver τ' tel que $\text{ad}_{|z_1|^2}\kappa_{N+2} = 0$, ce qui prouve \mathcal{P}_{N+1} . En posant alors

$$\tau = \sum_{N \geq 0} \tau_N \quad \text{et} \quad \kappa = \sum_{N \geq 0} \kappa_N,$$

qui sont bien des séries convergentes dans \mathcal{E} , on a $[\kappa, |z_1|^2] = 0$ et

$$e^{i\hbar^{-1}\text{ad}_\tau}(H_0 + \gamma) = H_0 + \kappa$$

ce qui conclut la preuve. □

Appliquons ceci à \hat{H} . On a

$$\hat{H} = H_0 + R$$

avec $R = \mathcal{O}(|z_1|^3)$ le reste de Taylor du développement (2.16). On obtient alors au sens de \mathcal{E}

$$T(\hat{H}) = H_0 + \gamma$$

avec $\gamma = T(R)$ le développement de Taylor à tout ordre de R en $z_1 = 0$, d'où $\gamma \in \mathcal{O}_3$. Par la proposition précédente, il existe alors κ et τ dans \mathcal{O}_3 telles que

$$e^{i\hbar^{-1}\text{ad}_\tau}T(\hat{H}) = H_0 + \kappa \quad (2.21)$$

avec κ telle que $[\kappa, |z_1|^2] = 0$. Cela implique que κ peut s'écrire comme une série formelle en les indéterminées $|z_1|^2$ et \hbar , i.e.

$$\kappa = \sum_{k \geq 1} \sum_{2l+m=k} \hbar^l c_{m,l}(z_2) |z_1|^{2m}$$

avec $(c_{m,l}(z_2))_{m,l \geq 0} \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_{z_2}^2)$. On vise dans un premier temps une application classique du résultat de forme normale de Birkhoff, l'application quantique étant faite dans la sous-section 2.3.4. Pour ce faire, on commence par remarquer que

$$i\hbar^{-1} \text{ad}_\tau \xrightarrow{\hbar \rightarrow 0} \text{ad}_{\tau_{cl}}$$

avec $\tau_{cl} \in \mathcal{E}$ indépendant de \hbar . En faisant tendre le paramètre \hbar vers 0 dans (2.21), on obtient

$$e^{\text{ad}_{\tau_{cl}}} T(\hat{H}) = H_0 + \kappa_{cl} \quad (2.22)$$

avec

$$\kappa_{cl} = \sum_{m \geq 1} c_{m,0}(z_2) |z_1|^{2m}$$

Par le lemme de Borel, on conclut qu'il existe une fonction

$$f : \mathbb{R}_{z_2}^2 \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

de classe \mathcal{C}^∞ telle que $T(f) = H_0 + \kappa_{cl}$. Il reste alors à relever l'application $e^{\text{ad}_{\tau_{cl}}}$ sur \mathcal{E} en un symplectomorphisme agissant sur les hamiltoniens. Pour cela, on invoque un lemme issu de [69], dont on ne donnera pas la preuve.

Lemma 2.3.6. *Soient $H \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^*\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{O}_3$ indépendant de \hbar . Soit $a \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^*\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ vérifiant $T(a) = A$. Alors,*

$$T((\Phi_a^t)^* H) = e^{t \text{ad}_A} T(H) \quad (2.23)$$

pour des temps $t \geq 0$ tels que le flot dans le membre de gauche soit bien défini.

Ce lemme se prouve en montrant que les deux membres de l'égalité (2.23) satisfont à la même équation différentielle. En posant $S \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^*\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telle que $T(S) = \tau_{cl}$, et en considérant le flot hamiltonien issu de S , on obtient un symplectomorphisme $\Phi_S^{t=1}$ sur un voisinage ouvert de $\{0\} \times \phi(\mathbb{R}_q^2)$ tel que

$$(\Phi_S^{t=1})^* H \circ \Phi(z_1, z_2) = f(z_2, |z_1|^2) + \mathcal{O}(|z_1|^\infty)$$

ce qui achève la preuve du Théorème 2.2.1.

2.3.4 De la forme normale symplectique à la forme normale quantique

Reste à prouver le Théorème 2.2.5. La preuve repose sur la forme normale de Birkhoff ci-dessus. On commence par faire un choix différent de fonction f . En effet, il est possible de réordonner les coefficients de la série de Taylor de f comme

$$\kappa = \sum_{k \geq 1} \sum_{2l+m=k} \hbar^l c_{m,l}(z_2) \#(|z_1|^2)^{\#m}$$

où $(|z_1|^2)^{\#m} = |z_1|^2 \# \dots \# |z_1|^2$, m fois. Ceci est possible puisque $(X^{\#m})_m$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}[X]$. Grâce au lemme de Borel, on peut trouver une fonction $f^\#$ à support compact telle que la série de Taylor de $f^\#$ corresponde à la série réordonnée :

$$T^w(f^\#(\hbar, |z_1|^2, z_2)) = \sum_{k \geq 0} \sum_{2l+m=k} \hbar^l c_{m,l}(z_2) \#(|z_1|^2)^{\#m}.$$

Ici, T^w désigne l'application qui associe à une fonction sa série de Taylor ordonnée en puissances au sens du produit de moyai. Par le calcul fonctionnel (voir [15] pour une référence), si $\mathcal{I}_\hbar := \text{Op}_\hbar^w(|z_1|^2)$ désigne

l'oscillateur harmonique en la variable z_1 , on définit $f^\#(\hbar, \mathcal{I}_\hbar, z_2)$ comme un symbole en z_2 à valeurs opérateurs, que l'on quantifie en un opérateur pseudo-différentiel en la variable z_2 . Ces opérations sont licites car la fonction $f^\#$ est à support compact. Par définition de $f^\#$, il existe une fonction $\tilde{f}^\#$ telle que

$$f^\#(\hbar, \mathcal{I}_\hbar, z_2) = \mathcal{I}_\hbar \tilde{f}^\#(\hbar, \mathcal{I}_\hbar, z_2).$$

Dû à ceci, quitte à restreindre le support de $f^\#$, il existe η_0 tel que pour tout $\eta \in (0, \eta_0)$, pour toute fonction $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2)$,

$$\left| \langle \text{Op}_\hbar^w(f^\#(\hbar, \mathcal{I}_\hbar, z_2))\psi, \psi \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} \right| \leq \eta \|\mathcal{I}_\hbar^{1/2}\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}. \quad (2.24)$$

On revient alors à l'hamiltonien magnétique H . En (2.16), on a l'existence d'un symplectomorphisme Φ tel que $H \circ \Phi = H_0 + r_\hbar$ avec $T^w(r_\hbar) = \gamma \in \mathcal{O}_3$. Par le Théorème d'Egorov (voir Annexe A, [74] pour une référence), il existe un Opérateur Intégral de Fourier unitaire V_\hbar associé au symplectomorphisme Φ tel que

$$V_\hbar^* \mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}} V_\hbar = \mathcal{H}_0 + \text{Op}_\hbar^w(r_\hbar) + \mathcal{O}_{S(m)}(\hbar)$$

où m est une fonction d'ordre telle que $H \in S(m)$. Quitte à modifier r_\hbar en \tilde{r}_\hbar , en y ajoutant les termes du $\mathcal{O}(\hbar)$ de symbole de séries de Taylor d'ordre au moins 3, on obtient

$$V_\hbar^* \mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}} V_\hbar = \mathcal{H}_0 + C_0 \hbar + \text{Op}_\hbar^w(\tilde{r}_\hbar)$$

avec C_0 une constante, le terme $C_0 \hbar$ correspondant au seul terme d'ordre 2 dans le $\mathcal{O}(\hbar)$. En fait, on peut prouver que $C_0 = 0$ (voir [57] pour les détails). En appliquant la Proposition 2.3.5, si $T^w(\tilde{r}_\hbar) = \tilde{\gamma}$, on obtient l'existence de deux séries formelles τ et κ dans \mathcal{O}_3 telles que

$$e^{i\hbar^{-1}\text{ad}_\tau}(H_0 + \tilde{\gamma}) = H_0 + \kappa$$

avec $[H_0, \kappa] = 0$, ce qui nous prodigue une fonction $f^\#$ comme introduite ci-dessus, vérifiant $T^w(f^\#) = \kappa$ et (2.24). En appliquant le lemme de Borel à la série formelle τ , on obtient une fonction lisse réelle à support compact a_\hbar telle que $T^w(a_\hbar) = \tau$. Par le théorème d'Egorov, en considérant le propagateur associé à a_\hbar pris au temps 1, noté $e^{i\hbar^{-1}\text{Op}_\hbar^w(a_\hbar)}$, l'opérateur

$$e^{-i\hbar^{-1}\text{Op}_\hbar^w(a_\hbar)} V_\hbar^* \mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}} V_\hbar e^{i\hbar^{-1}\text{Op}_\hbar^w(a_\hbar)}$$

est un opérateur pseudo-différentiel. Par le calcul, on constate que le symbole de cet opérateur à pour série de Taylor

$$e^{i\hbar^{-1}\text{ad}_\tau} T^w(H \circ \Phi) = H_0 + \kappa.$$

Il vient alors que

$$e^{-i\hbar^{-1}\text{Op}_\hbar^w(a_\hbar)} (V_\hbar^* \mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}} V_\hbar) e^{i\hbar^{-1}\text{Op}_\hbar^w(a_\hbar)} = \mathcal{H}_0 + \text{Op}_\hbar^w(f^\#(\hbar, \mathcal{I}_\hbar, z_2)) + R_\hbar$$

avec R_\hbar un opérateur pseudo-différentiel dont le symbole a sa série de Taylor nulle à tout ordre en $z_1 = 0$. En posant

$$U_\hbar := V_\hbar e^{i\hbar^{-1}\text{Op}_\hbar^w(a_\hbar)},$$

et

$$\mathcal{N} := \mathcal{H}_0 + \text{Op}_\hbar^w(f^\#(\hbar, \mathcal{I}_\hbar, z_2))$$

on obtient alors l'opérateur unitaire ainsi que l'opérateur \mathcal{N} annoncés dans le Théorème 2.2.5. Le calcul fonctionnel nous donne alors les points 1 et 2 et le point 4 est prouvé par (2.24). Il ne nous reste plus qu'à prouver le point 3. On se donne donc D_\hbar un opérateur pseudo-différentiel avec pour symbole $d_0(z_1, z_2) = c(z_2)|z_1|^2 + \mathcal{O}(|z_1|^3)$. Par le lemme de Morse, on peut trouver un difféomorphisme d'un voisinage de $\{z_1 = 0\}$ sur lui-même tel que, si \tilde{z}_1 désigne la coordonnée dans la nouvelle carte, $d_0(\tilde{z}_1, z_2) = c(z_2)|\tilde{z}_1|^2$. Étant donné que tous les résultats ci-dessus sont locaux en $z_1 = 0$, quitte à restreindre le voisinage de $\{0\} \times g(\mathbb{R}_q^2)$, on peut

faire la preuve sur le voisinage prescrit par le difféomorphisme du lemme de Morse. Nous allons prouver 4 par récurrence. Supposons que l'on ait

$$R_{\hbar} = \text{Op}_{\hbar}^w (s_0 + \hbar s_1 + \dots + \hbar^k s_k) D_{\hbar}^N + \hbar^{k+1} R_{\hbar, k+1},$$

avec les symboles s_j de série de Taylor s'annulant à tout ordre en $\tilde{z}_1 = 0$. On cherche à construire le symbole s_{k+1} tel que

$$R_{\hbar} = \text{Op}_{\hbar}^w (s_0 + \hbar s_1 + \dots + \hbar^k s_k + \hbar^{k+1} s_{k+1}) D_{\hbar}^N + \hbar^{k+2} R_{\hbar, k+2}.$$

Il suffit de trouver s_{k+1} tel que, si $r_{\hbar, k+1}$ désigne le symbole de $R_{\hbar, k+1}$,

$$r_{\hbar, k+1} = d_0^N s_{k+1}.$$

Or, puisque le symbole $r_{\hbar, k+1}$ s'annule à tout ordre en $\tilde{z}_1 = 0$, il existe une fonction ϕ_{k+1} telle que

$$r_{\hbar, k+1} = \phi_{k+1} |z_1|^{2N}.$$

Alors

$$s_{k+1} = \frac{\phi_{k+1}}{c^N}$$

convient, ce qui prouve 3. Ceci achève la preuve du Théorème 2.2.5.

Chapitre 3

Propagation magnétique, temps longs et estimées de Schwartz

When you appeal to force, there's
one thing you must never do –
lose.

Dwight Eisenhower

L'objet de ce chapitre est l'article [5] soumis en collaboration avec Nicolas Raymond et San Vũ Ngọc. Contrairement au chapitre précédent, il concerne la propagation magnétique en dimensions quelconque. Cependant, l'application de ce résultat quant à elle sera faite dans le Chapitre 5 en dimension 2. Je remercie tout particulièrement Nicolas pour sa contribution à la mise en forme et à la preuve du résultat présenté ici.

ON THE STABILITY OF THE SCHWARTZ CLASS UNDER THE MAGNETIC SCHRÖDINGER FLOW

Abstract : We prove that the Schwartz class is stable under the magnetic Schrödinger flow when the magnetic 2-form is non-degenerate and does not oscillate too much at infinity.

3.1 Introduction

3.1.1 Motivation and context

This paper is devoted to describing the solutions to the magnetic Schrödinger equation. Let \mathbf{B} be a smooth and closed 2-form on \mathbb{R}^d . Let $\mathbf{A} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ be a 1-form (identified with a vector field) such that $d\mathbf{A} = \mathbf{B}$. The magnetic Schrödinger operator is the essentially self-adjoint differential operator

$$\mathcal{L}_h = (-ih\nabla - \mathbf{A})^2 = \sum_{j=1}^d L_j^2,$$

where $h > 0$ and, for all $j \in \{1, \dots, d\}$, $L_j = -ih\partial_j - A_j$. Its domain is given by

$$\begin{aligned} \text{Dom}(\mathcal{L}_h) &= \{\psi \in L^2(\mathbb{R}^d) : (-ih\nabla - \mathbf{A})\psi \in L^2(\mathbb{R}^d), (-ih\nabla - \mathbf{A})^2\psi \in L^2(\mathbb{R}^d)\} \\ &= \{\psi \in L^2(\mathbb{R}^d) : (-ih\nabla - \mathbf{A})^2\psi \in L^2(\mathbb{R}^d)\}. \end{aligned}$$

The time dependent magnetic Schrödinger equation is given by

$$-ih\partial_t\psi = \mathcal{L}_h\psi, \quad \psi(0) = \psi_0 \in \text{Dom}(\mathcal{L}_h). \quad (3.1)$$

By Stone's theorem, this Cauchy problem admits a unique solution, evolving in the domain of \mathcal{L}_h , and it is given by

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \psi(t) = e^{\frac{it\mathcal{L}_h}{h}}\psi_0.$$

By unitarity of the flow, we have

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \|\psi(t)\| = \|\psi_0\|, \quad \|\mathcal{L}_h\psi(t)\| = \|\mathcal{L}_h\psi_0\|,$$

where $\|\cdot\|$ denotes the usual norm on $L^2(\mathbb{R}^d)$. This norm controls the rough phase space localization of the quantum state $\psi(t)$; a natural question is to know to which extent a strong phase space localization of ψ_0

is preserved by the flow. More precisely, this paper was inspired by the following rather naive question. Is it true that

$$\psi_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \implies \forall t \in \mathbb{R}, \psi(t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \quad ? \quad (3.2)$$

If so, what kind of explicit control do we have in terms of the Schwartz semi-norms?

These questions are motivated by the recent investigation of the propagation of coherent states by the magnetic Hamiltonian flow in two dimensions (see Chapitre 5). The present paper gives a positive answer to (3.2). Our explicit estimates of the Schwartz semi-norms (in terms of the semiclassical parameter h), combined with the use of the Birkhoff normal form from [57], turn out to be the key ingredients in the study by [6] of the propagation of coherent states up to times of order h^{-N} , for all $N \in \mathbb{N}$. This gives a quantum analog to the low energy (say of order ε) classical propagation for times of order $\varepsilon^{-\infty}$ (see [57, Theorem 1.2]). Taking into account the analysis of [32], one can even hope to extend these results to three dimensions where the classical dynamics has a more complex behavior.

Independently of this motivation, the answer to (3.2) has an interest of its own, especially because it lives at the confluence of two closely related domains : hypoellipticity and semiclassical analysis with magnetic fields. On these vast subjects, the literature is enormous, and we only refer to [41, 36, 34, 37, 66, 67, 22, 56]. We can also refer to [46] for a related work. In this paper, we will use many classical ideas from these two contexts, and provide an elementary and self-contained presentation.

3.1.2 Main results

Let us now describe our assumptions and results.

Let \mathcal{P} be the class defined by

$$\mathcal{P} = \{ \psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d) : \forall \alpha \in \mathbb{N}^d, \exists (C, m) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \forall x \in \mathbb{R}^d, |\partial^\alpha \psi| \leq C \langle x \rangle^m \}.$$

The following assumption will hold throughout the paper, where we identify \mathbf{B} with its antisymmetric matrix obtained in the usual basis ($dx_j \wedge dx_k; j < k$).

Assumption 3.1.1. We assume that

- i.* \mathbf{A} belongs to \mathcal{P} (in particular $\mathbf{B} \in \mathcal{P}$),
- ii.* there exists $b_0 > 0$ such that, for all $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\mathrm{Tr}^+ \mathbf{B}(x) \geq b_0,$$

where $\mathrm{Tr}^+ \mathbf{B}(x)$ denotes the sum of the moduli of the eigenvalues with positive imaginary part of the matrix $\mathbf{B}(x)$,

- iii.* for all $\alpha \in \mathbb{N}^d$, there exists $C > 0$ such that, for all $x \in \mathbb{R}^d$, $\|\partial^\alpha \mathbf{B}(x)\| \leq C \|\mathbf{B}(x)\|$, where $\|\cdot\|$ denotes a norm on the space of matrices.

Assumption 3.1.1 is stronger than really necessary as we can see in our proofs. In this context, we will use the following lemma (see [35, Theorem 2.2]).

Lemma 3.1.2. *We have*

$$\inf \mathrm{sp}(\mathcal{L}_h) = h \inf_{x \in \mathbb{R}^d} \mathrm{Tr}^+ \mathbf{B}(x) + o(h).$$

In particular, there exist $C > 0$ and $h_0 > 0$, such that, for all $h \in (0, h_0)$, \mathcal{L}_h is invertible and

$$\|\mathcal{L}_h^{-1}\| \leq Ch^{-1}.$$

In the following, we will always assume that h is small enough and such that \mathcal{L}_h is invertible.

Definition 3.1.3. For all $n \in \mathbb{N}$, we let

$$\text{Dom}(\mathcal{L}_h^n) = \{\psi \in L^2(\mathbb{R}^d) : \forall \ell \in \{1, \dots, n\} : \mathcal{L}_h^{\ell-1} \psi \in \text{Dom}(\mathcal{L}_h)\}.$$

The operator \mathcal{L}_h^n is defined by induction by

$$\forall \psi \in \text{Dom}(\mathcal{L}_h^n), \quad \mathcal{L}_h^n \psi = \mathcal{L}_h(\mathcal{L}_h^{n-1} \psi).$$

The operator $(\text{Dom}(\mathcal{L}_h^n), \mathcal{L}_h^n)$ is self-adjoint and invertible. The following theorem proves some magnetic elliptic estimates, showing that iterations of the magnetic laplacian \mathcal{L}_h control iterations of the magnetic derivatives $(L_j)_{1 \leq j \leq d}$. This will be an important tool on the proof of the main result of the paper.

Theorem 3.1.4. *Let Assumption 3.1.1 hold. Let $n \in \mathbb{N}$. There exist $h_0 > 0$ and $C > 0$ such that, for all $h \in (0, h_0)$, and all $\psi \in \text{Dom}(\mathcal{L}_h^n)$,*

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{A}(2n)} \|L_\sigma \psi\| \leq Ch^{-3n/2} \|\mathcal{L}_h^n \psi\|, \quad (3.3)$$

where, for $k \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{A}(k) = \cup_{p=0}^k \{1, \dots, d\}^{\{1, \dots, p\}}$, and for $p \in \mathbb{N}$, for $\sigma \in \{1, \dots, d\}^{\{1, \dots, p\}}$, $L_\sigma := L_{\sigma(1)} \dots L_{\sigma(p)}$, with the convention $L_\emptyset = \text{Id}$.

In the case where \mathbf{A} is bounded, Theorem 3.3 is closely related to [66, Theorem 3], which deals with the context of general Gårding inequalities.

Definition 3.1.5. For all $k \in \mathbb{N}$ and all $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, we let

$$p_k(\psi) = \max_{\substack{(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^{2d} \\ |\alpha| + |\beta| \leq k}} \|x^\alpha \partial^\beta \psi\|_\infty.$$

We can now state the main result of this paper.

Theorem 3.1.6. *Let Assumption 3.1.1 hold. For all $t \in \mathbb{R}$, we have*

$$e^{\frac{it\mathcal{L}_h}{h}} \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d).$$

More precisely, for all $M \in \mathbb{N}^*$, for all $k \in \mathbb{N}$, there exist $h_0 > 0$, $C > 0$, $N \in \mathbb{N}^*$ and $K \in \mathbb{N}$, such that, for all $h \in (0, h_0)$, and for all $\psi_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, and all $t \in [0, h^{-M}]$,

$$p_k(e^{\frac{it\mathcal{L}_h}{h}} \psi_0) \leq Ch^{-N} p_K(\psi_0).$$

Theorem 3.1.6 is related to the (pseudo-differential) analysis in [67, Section 7]. In this work, under the assumption that the derivatives of order two or higher of the symbol of the propagator should be bounded, a parametrix of the evolution operator was constructed. Closely related is also the paper [60, Corollary 2.11], based on the analysis of coherent states, where the derivatives of order three or higher of the symbol have to be bounded. Our approach here is more directly related to the structure of the magnetic Laplacian, and is reminiscent of the analysis in [41] of the ellipticity of certain algebras of non-commuting vector fields.

3.1.3 Organisation of the proofs

In Section 3.2, we prove Theorem 3.1.4 by using a regularization argument involving exponentially weighted estimates and commutator estimates. In Section 3.3, we apply our magnetic elliptic estimates to prove Theorem 3.1.6.

3.2 Magnetic elliptic estimates

This section is devoted to the proof of Theorem 3.1.4.

3.2.1 Density argument

Let us explain here why it is sufficient to prove Theorem 3.1.4 for $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Let us consider $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$. There is a unique $\psi \in \text{Dom}(\mathcal{L}_h^n)$ such that $\mathcal{L}_h^n \psi = f$. Consider $f_k \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ converging to f in $L^2(\mathbb{R}^d)$ and consider the unique $\psi_k \in \text{Dom}(\mathcal{L}_h^n)$ such that $\mathcal{L}_h^n \psi_k = f_k$. Note that, by continuity of $(\mathcal{L}_h^n)^{-1}$, ψ_k converges to ψ in $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Lemma 3.2.1. *We let*

$$H_{\text{exp}}^\infty(\mathbb{R}^d) = \{\psi \in L^2(\mathbb{R}^d) : \forall \alpha \in \mathbb{N}^d, \exists \beta > 0 : e^{\beta \langle x \rangle} \partial^\alpha \psi \in L^2(\mathbb{R}^d)\}.$$

Consider $f \in H_{\text{exp}}^\infty(\mathbb{R}^d)$. Then, the unique solution $u \in \text{Dom}(\mathcal{L}_h)$ to $\mathcal{L}_h u = f$ satisfies $u \in H_{\text{exp}}^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Démonstration. The proof follows from the classical Agmon estimates (see [1, 30]). Consider $\beta > 0$ such that $e^{\beta \langle x \rangle} f \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Let $\varepsilon > 0$ and $\Phi_\varepsilon = \beta \min(\langle x \rangle, \varepsilon^{-1})$. We have the Agmon formula (see [56, Section 4.2]) :

$$\langle \mathcal{L}_h u, e^{2\Phi_\varepsilon} u \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} |(-ih\nabla - \mathbf{A})e^{\Phi_\varepsilon} u|^2 dx - h^2 \|\nabla \Phi_\varepsilon e^{\Phi_\varepsilon} u\|^2.$$

In particular,

$$\int_{\mathbb{R}^d} |(-ih\nabla - \mathbf{A})e^{\Phi_\varepsilon} u|^2 dx - \beta^2 h^2 \|e^{\Phi_\varepsilon} u\|^2 \leq \|e^{\Phi_\varepsilon} f\| \|e^{\Phi_\varepsilon} u\|. \quad (3.4)$$

On the other hand, by Lemma 3.1.2, we get, for some $c > 0$,

$$(hc - \beta^2 h^2) \|e^{\Phi_\varepsilon} u\|^2 \leq \int_{\mathbb{R}^d} |(-ih\nabla - \mathbf{A})e^{\Phi_\varepsilon} u|^2 dx - \beta^2 h^2 \|e^{\Phi_\varepsilon} u\|^2.$$

Choosing β small enough, we get, for some $C(h) > 0$ independent of ε ,

$$\|e^{\Phi_\varepsilon} u\| \leq C(h) \|e^{\Phi_\varepsilon} f\|.$$

Then, we take the limit $\varepsilon \rightarrow 0$ and apply Fatou's Lemma to find

$$\|e^{\beta \langle x \rangle} u\| \leq C(h) \|e^{\beta \langle x \rangle} f\|. \quad (3.5)$$

Coming back to (3.4), and replacing β by $\tilde{\beta} < \beta$, we get

$$\int_{\mathbb{R}^d} |e^{\Phi_\varepsilon} (-ih\nabla - \mathbf{A} - ih\nabla \Phi_\varepsilon) u|^2 dx - \tilde{\beta}^2 h^2 \|e^{\Phi_\varepsilon} u\|^2 \leq \|e^{\Phi_\varepsilon} f\| \|e^{\Phi_\varepsilon} u\|.$$

Thus,

$$\begin{aligned} \frac{h^2}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |e^{\Phi_\varepsilon} \nabla u|^2 dx &\leq \|e^{\Phi_\varepsilon} f\| \|e^{\Phi_\varepsilon} u\| + \tilde{\beta}^2 h^2 \|e^{\Phi_\varepsilon} u\|^2 + 2\|(ih\nabla \Phi_\varepsilon + \mathbf{A})e^{\Phi_\varepsilon} u\|^2 \\ &\leq \|e^{\Phi_\varepsilon} f\| \|e^{\Phi_\varepsilon} u\| + \tilde{\beta}^2 h^2 \|e^{\Phi_\varepsilon} u\|^2 + 4\|\nabla \Phi_\varepsilon e^{\Phi_\varepsilon} u\|^2 + 4\|\mathbf{A} e^{\Phi_\varepsilon} u\|^2. \end{aligned}$$

Using that $\mathbf{A} \in \mathcal{P}$, (3.5), and Fatou's Lemma, we get $e^{\tilde{\beta} \langle x \rangle} \nabla u \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

Considering the equation $\mathcal{L}_h u = f$, we get, in the sense of tempered distributions,

$$-h^2 \Delta u = f - |\mathbf{A}|^2 u - ih(\nabla \cdot \mathbf{A})u - 2ih(\mathbf{A} \cdot \nabla)u. \quad (3.6)$$

Noticing that we have just controlled the terms of order at most one, we deduce that, for some $\beta > 0$,

$$e^{\beta\langle x \rangle} \Delta u \in L^2(\mathbb{R}^d),$$

and also

$$\Delta \left(e^{\beta\langle x \rangle} u \right) \in L^2(\mathbb{R}^d).$$

By Fourier transform, we get

$$e^{\beta\langle x \rangle} u \in H^2(\mathbb{R}^d),$$

which implies that, for all $\alpha \in \mathbb{N}^d$ with $|\alpha| \leq 2$,

$$e^{\beta\langle x \rangle} \partial^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^d).$$

The higher order derivatives can be controlled by induction (taking successive derivatives of (3.6)). \square

Remark 3.2.2. By the Sobolev embeddings, we have $H_{\text{exp}}^\infty(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

By Lemma 3.2.1, we see that $\psi_k \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Assume that (3.3) holds for any $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, with $\psi = \psi_k - \psi_\ell$, for all $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$, this shows that, for all $\sigma \in \mathfrak{A}(2n)$, $(L_\sigma \psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is a Cauchy sequence in $L^2(\mathbb{R}^d)$. Thus, in the sense of distributions, $L_\sigma \psi \in L^2(\mathbb{R}^d)$. It remains to use again (3.3) with $\psi = \psi_k$ and to take the limit $k \rightarrow +\infty$.

3.2.2 Preliminary lemmas

Lemma 3.2.3. *For all $\psi \in \text{Dom}(\mathcal{L}_h)$, we have*

$$\|(-ih\nabla - \mathbf{A})\psi\|^2 \leq \frac{1}{2} \|\psi\|_{\mathcal{L}_h}^2$$

where $\|\psi\|_{\mathcal{L}_h}^2 = \|\psi\|^2 + \|\mathcal{L}_h \psi\|^2$.

Démonstration. We recall that, by definition of the domain, for all $\psi \in \text{Dom}(\mathcal{L}_h)$,

$$\langle \mathcal{L}_h \psi, \psi \rangle = \|(-ih\nabla - \mathbf{A})\psi\|^2 = \sum_{j=1}^d \|L_j \psi\|^2,$$

so that

$$\sum_{j=1}^d \|L_j \psi\|^2 \leq \|\psi\| \|\mathcal{L}_h \psi\|.$$

\square

Lemma 3.2.4. *There exist $C > 0$ and $h_0 > 0$ such that, for all $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ and all $h \in (0, h_0)$,*

$$\|\langle \mathbf{B} \rangle \psi\| + \|\langle \mathbf{B} \rangle^{\frac{1}{2}} (-ih\nabla - \mathbf{A})\psi\| \leq Ch^{-1} \|\psi\|_{\mathcal{L}_h}. \quad (3.7)$$

Moreover, for all $\psi \in \text{Dom}(\mathcal{L}_h)$, we have

$$\mathbf{B}\psi \in L^2(\mathbb{R}^d) \quad \text{and} \quad |\mathbf{B}|^{\frac{1}{2}} (-ih\nabla - \mathbf{A})\psi \in L^2(\mathbb{R}^d),$$

and (3.7) holds for $\psi \in \text{Dom}(\mathcal{L}_h)$.

Démonstration. By integration by parts and using Assumption 3.1.1,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \langle \mathbf{B} \rangle |(-ih\nabla - \mathbf{A})\psi|^2 dx &= \langle \langle \mathbf{B} \rangle (-ih\nabla - \mathbf{A})\psi, (-ih\nabla - \mathbf{A})\psi \rangle \\ &\leq \langle \mathcal{L}_h \psi, \langle \mathbf{B} \rangle \psi \rangle + C \| \langle \mathbf{B} \rangle \psi \| \| (-ih\nabla - \mathbf{A})\psi \| \\ &\leq C \| \langle \mathbf{B} \rangle \psi \| \| \psi \|_{\mathcal{L}_h}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Then, we have

$$\int_{\mathbb{R}^d} |h\mathbf{B}|^2 |\psi|^2 dx = \sum_{(k,\ell) \in \{1,\dots,d\}^2} \int_{\mathbb{R}^d} |hB_{k,\ell}|^2 |\psi|^2 dx$$

and we write

$$\begin{aligned} \sum_{(k,\ell) \in \{1,\dots,d\}^2} \int_{\mathbb{R}^d} |hB_{k,\ell}|^2 |\psi|^2 dx &= \sum_{(k,\ell) \in \{1,\dots,d\}^2} | \langle [L_k, L_\ell] \psi, hB_{k,\ell} \psi \rangle | \\ &\leq Ch \| \langle \mathbf{B} \rangle \psi \| \| (-ih\nabla - \mathbf{A})\psi \| + Ch \int_{\mathbb{R}^d} \langle \mathbf{B} \rangle |(-ih\nabla - \mathbf{A})\psi|^2 dx, \end{aligned}$$

where we used an integration by parts and Assumption 3.1.1.

By (3.8), it follows

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{B}|^2 |\psi|^2 dx \leq Ch^{-1} \| \langle \mathbf{B} \rangle \psi \| \| \psi \|_{\mathcal{L}_h}$$

and then

$$\| \langle \mathbf{B} \rangle \psi \| \leq Ch^{-1} \| \psi \|_{\mathcal{L}_h}.$$

Using again (3.8), the conclusion follows. \square

3.2.3 Case $n = 1$

The estimate of Theorem 3.1.4 is obvious when $n = 0$. Let us consider the case when $n = 1$ to explain the principle producing these estimates.

Lemma 3.2.5. *There exist $C > 0$, $h_0 > 0$ such that, for all $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ and all $h \in (0, h_0)$,*

$$\|L_1^2 \psi\| + \|L_2^2 \psi\| + \|L_1 L_2 \psi\| + \|L_2 L_1 \psi\| \leq Ch^{-1} \| \mathcal{L}_h \psi \|.$$

Démonstration. Let us consider $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ and let

$$\mathcal{L}_h \psi = f.$$

Consider $j \in \{1, \dots, d\}$. We have

$$\mathcal{L}_h(L_j \psi) = L_j f + [\mathcal{L}_h, L_j] \psi,$$

and

$$\|(-ih\nabla - \mathbf{A})(L_j \psi)\|^2 = \langle L_j f, L_j \psi \rangle + \langle [\mathcal{L}_h, L_j] \psi, L_j \psi \rangle,$$

We have

$$[\mathcal{L}_h, L_j] = \sum_{k=1}^d [L_k^2, L_j] = \sum_{k=1}^d ([L_k, L_j] L_k + L_k [L_k, L_j]).$$

Thus,

$$| \langle [\mathcal{L}_h, L_j] \psi, L_j \psi \rangle | \leq C \| \mathbf{B} \psi \| \| (-ih\nabla - \mathbf{A})\psi \| + C \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{B}| |(-ih\nabla - \mathbf{A})\psi|^2 dx.$$

We have, for all $\varepsilon \in (0, 1)$,

$$| \langle L_j f, L_j \psi \rangle | \leq \varepsilon \| L_j^2 \psi \|^2 + C \| f \|^2,$$

and then

$$\begin{aligned} \|(-ih\nabla - \mathbf{A})(L_j\psi)\|^2 &\leq C\|f\|^2 + C\|\mathbf{B}\psi\| \|(-ih\nabla - \mathbf{A})\psi\| + C \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{B}| |(-ih\nabla - \mathbf{A})\psi|^2 dx. \end{aligned}$$

With Lemma 3.2.3, noting that $\|\psi\|_{\mathcal{L}_h}^2 \leq C(1+h^{-2})\|f\|^2$, we find

$$\|(-ih\nabla - \mathbf{A})(L_j\psi)\|^2 \leq Ch^{-3}\|f\|^2.$$

□

3.2.4 Induction

Let $n \in \mathbb{N}^*$. Let us assume that, for all $k \in \{1, \dots, n\}$, the ellipticity property (3.3) is true. Let us consider $f, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ such that

$$\mathcal{L}_h\psi = f.$$

Consider $\sigma \in \mathfrak{A}(2n)$. Since the functions are in the Schwartz class, all the following computations are justified.

We have

$$\mathcal{L}_h L_\sigma \psi = L_\sigma f + [\mathcal{L}_h, L_\sigma]\psi,$$

and then

$$\langle \mathcal{L}_h L_\sigma \psi, L_\sigma \psi \rangle = \langle L_\sigma f, L_\sigma \psi \rangle + \langle [\mathcal{L}_h, L_\sigma]\psi, L_\sigma \psi \rangle. \quad (3.9)$$

By using the Cauchy-Schwarz inequality and the induction assumption, we have for all $\varepsilon \in (0, 1)$,

$$|\langle L_\sigma f, L_\sigma \psi \rangle| \leq Ch^{-3n} \|\mathcal{L}_h^n f\| \|\mathcal{L}_h^n \psi\| \leq Ch^{-3n} \|\mathcal{L}_h^{n+1} \psi\|^2 + Ch^{-3n} \|\mathcal{L}_h^n \psi\|^2,$$

so that, by Lemma 3.1.2,

$$|\langle L_\sigma f, L_\sigma \psi \rangle| \leq Ch^{-(3n+2)} \|\mathcal{L}_h^{n+1} \psi\|^2.$$

Let us now deal with $\langle [\mathcal{L}_h, L_\sigma]\psi, L_\sigma \psi \rangle$. The commutator $[\mathcal{L}_h, L_\sigma]$ is the sum of various terms. Each of them is the composition of at most $2n-2$ of the L_j and with exactly one of the $B_{k,\ell}$. By commuting the $B_{k,\ell}$ to put it on the left, and using Assumption 3.1.1, we get

$$\|[\mathcal{L}_h, L_\sigma]\psi\| \leq C \sum_{\tau \in \mathfrak{A}(2n-2)} \|(\mathbf{B})L_\tau \psi\|.$$

By applying Lemma 3.2.4, and then the induction assumption, we get

$$\|[\mathcal{L}_h, L_\sigma]\psi\| \leq Ch^{-1} \sum_{\tau \in \mathfrak{A}(2n-2)} \|L_\tau \psi\|_{\mathcal{L}_h} \leq Ch^{-(3n-1)/2} \|\mathcal{L}_h^n \psi\|.$$

Thus, we deduce

$$|\langle \mathcal{L}_h L_\sigma \psi, L_\sigma \psi \rangle| \leq Ch^{-3n-1/2} \|\mathcal{L}_h^{n+1} \psi\|^2.$$

This shows that, for all $\gamma \in \mathfrak{A}(2n+1)$,

$$\|L_\gamma \psi\| \leq Ch^{-(3n/2+1)} \|\mathcal{L}_h^{n+1} \psi\|. \quad (3.10)$$

Now, we want to get the control for $\gamma \in \mathfrak{A}(2n+2)$. Let $\sigma \in \mathfrak{A}(2n+1)$. We consider again (3.9). By integration by parts, we can write

$$\langle L_\sigma f, L_\sigma \psi \rangle = \langle L_{\check{\sigma}} f, L_{\hat{\sigma}} \psi \rangle,$$

with $\check{\sigma} \in \mathfrak{A}(2n)$ and $\hat{\sigma} \in \mathfrak{A}(2n+2)$. Thus, by Cauchy-Schwarz, and the induction assumption, for all $\varepsilon > 0$, there exists $C > 0$ such that

$$|\langle L_\sigma f, L_\sigma \psi \rangle| \leq \varepsilon \|L_{\hat{\sigma}} \psi\|^2 + Ch^{-3n/2} \|\mathcal{L}_h^{n+1} \psi\|^2. \quad (3.11)$$

As previously, we have

$$\|[\mathcal{L}_h, L_\sigma]\psi\| \leq C \sum_{\tau \in \mathfrak{A}(2n-1)} \|(\mathbf{B})L_\tau\psi\|.$$

We use Lemma 3.2.4 and (3.10) to find

$$\|[\mathcal{L}_h, L_\sigma]\psi\| \leq Ch^{-1} \sum_{\tau \in \mathfrak{A}(2n-1)} \|L_\tau\psi\|_{\mathcal{L}_h} \leq Ch^{-(3n/2+2)} \|\mathcal{L}_h^{n+1}\psi\|.$$

Then, with Cauchy-Schwarz and (3.10), we get

$$|([\mathcal{L}_h, L_\sigma]\psi, L_\sigma\psi)| \leq Ch^{-(3n+3)} \|\mathcal{L}_h^{n+1}\psi\|^2. \quad (3.12)$$

From (3.9), (3.11), and (3.12), summing over $\sigma \in \mathfrak{A}(2n+1)$, and choosing ε small enough, we get (3.3) with n replaced by $n+1$.

This achieves the proof of Theorem 3.1.4 when $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ and it remains to use the discussion of Section 3.2.1.

3.3 Application to the evolution problem

We can now prove Theorem 3.1.6. Let $\psi_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. We denote by $\psi(\cdot)$ the solution to the Schrödinger equation (3.1).

Notation. For $\kappa, \lambda \in \mathbb{N}$, we define $\Pi_{\kappa, \lambda}$ the set of the operators P that are composition of operators taken among $(L_j)_{1 \leq j \leq d}$ and $(x_k)_{1 \leq k \leq d}$ with κ occurrences of x and λ occurrences of L . We also set $\Pi = \bigcup_{(\kappa, \lambda) \in \mathbb{N}^2} \Pi_{\kappa, \lambda}$.

The aim of this section is to prove the following proposition.

Proposition 3.3.1. *Let $(\kappa, \lambda) \in \mathbb{N}^2$ and consider $P \in \Pi_{\kappa, \lambda}$. There exist $h_0 > 0$, $C \geq 0$ and $N \in \mathbb{N}$ such that, for all $t \geq 0$, and all $\psi_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, for $\lambda \leq 2n \leq \lambda + 1$,*

$$\|P\psi(t)\| \leq Ch^{-N} (1 + t^\kappa) \sum_{|\alpha| \leq \kappa: |\alpha| + \nu \leq \kappa + n} \|\mathcal{L}_h^\nu x^\alpha \psi_0\|.$$

This proposition implies the control of the Schwartz semi-norms and achieves the proof of Theorem 3.1.6. Indeed, from Sobolev embeddings, for all $k \in \mathbb{N}$, there exists $K \in \mathbb{N}$ such that for all $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$p_k(f) \leq \max_{|\alpha|, |\beta| \leq K} \|x^\alpha \partial^\beta f\|.$$

Using now that $\partial_j = (-ih)^{-1}(L_j + A_j)$, and $A \in \mathcal{P}$, there exists $C > 0$ and $N \in \mathbb{N}$ such that, for all $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, if $\|Pf\| < +\infty$ for all $P \in \Pi$, then $x^\alpha \partial^\beta f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ for all $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$, and

$$\|x^\alpha \partial^\beta f\| \leq Ch^{-N} \sum_{P \in R} \|Pf\|,$$

where R is a finite part of Π . Then, Proposition 3.3.1 implies, for N , κ and n large enough,

$$\|x^\alpha \partial^\beta \psi(t)\| \leq Ch^{-N} \sum_{P \in R} \|P\psi(t)\| \leq Ch^{-N} (1 + t^\kappa) \sum_{|\gamma| \leq \kappa, |\nu| \leq n} \|\mathcal{L}_h^\nu x^\gamma \psi_0\|.$$

Finally, we conclude by

$$\|\mathcal{L}_h^\nu x^\alpha \psi_0\| \leq C \|(1 + x^2)^m \mathcal{L}_h^\nu x^\alpha \psi_0\|_\infty \leq Cp_K(\psi_0),$$

for m, K large enough.

3.3.1 Case when $\kappa = 0$

For all $t \geq 0$, we have, by definition,

$$\psi(t) = e^{\frac{it}{h}\mathcal{L}_h}\psi_0.$$

For all $\ell \in \mathbb{N}$, we get

$$\mathcal{L}_h^\ell \psi(t) = e^{\frac{it}{h}\mathcal{L}_h}\mathcal{L}_h^\ell \psi_0.$$

Applying Theorem 3.1.4, this establishes the estimate of Proposition 3.3.1 when $\kappa = 0$.

3.3.2 Case when $\kappa = 1$

Before starting the induction procedure, let us understand first the mechanism with only one occurrence of x . Let $j \in \{1, \dots, d\}$. We have

$$-ih\partial_t(x_j\psi) = \mathcal{L}_h(x_j\psi) + [x_j, \mathcal{L}_h]\psi.$$

Note that $[x_j, \mathcal{L}_h] = 2hL_j$. With the Duhamel formula, we have, for all $t \geq 0$,

$$x_j\psi(t) = e^{\frac{it}{h}\mathcal{L}_h}(x_j\psi_0) + \int_0^t e^{\frac{i(t-s)}{h}\mathcal{L}_h}2L_j\psi(s)ds. \quad (3.13)$$

With Lemma 3.2.3, we get

$$\|x_j\psi(t)\| \leq \|x_j\psi_0\| + 2 \int_0^t \|L_j\psi(s)\|ds \leq \|x_j\psi_0\| + \sqrt{2} \int_0^t \|\psi(s)\|_{\mathcal{L}_h} ds.$$

Since the evolution is unitary, we get, for all $t \geq 0$,

$$\|x_j\psi(t)\| \leq \|x_j\psi_0\| + 2 \int_0^t \|L_j\psi(s)\|ds \leq \|x_j\psi_0\| + t\sqrt{2}\|\psi_0\|_{\mathcal{L}_h}.$$

More generally, with (3.13), we have, for all $\ell \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{L}_h^\ell x_j\psi(t) = e^{\frac{it}{h}\mathcal{L}_h}\mathcal{L}_h^\ell(x_j\psi_0) + \int_0^t e^{\frac{i(t-s)}{h}\mathcal{L}_h}2\mathcal{L}_h^\ell L_j\psi(s)ds.$$

so that

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}_h^\ell x_j\psi(t)\| &\leq \|\mathcal{L}_h^\ell(x_j\psi_0)\| + 2 \int_0^t \|\mathcal{L}_h^\ell L_j\psi(s)\|ds \\ &\leq \|\mathcal{L}_h^\ell(x_j\psi_0)\| + Ch^{-N} \int_0^t \|\mathcal{L}_h^{\ell+1}\psi(s)\|ds \\ &\leq \|\mathcal{L}_h^\ell(x_j\psi_0)\| + Cth^{-N}\|\mathcal{L}_h^{\ell+1}\psi_0\|. \end{aligned}$$

It remains to apply Theorem 3.1.4 and to commute the x_j with the L_k .

3.3.3 Induction

Let us now end the proof of Proposition 3.3.1 by induction. We set the following two induction assumptions. For $\kappa \in \mathbb{N}$, let

$$\mathcal{Q}_\kappa : \forall n \in \mathbb{N}, \forall \alpha \in \mathbb{N}^d, |\alpha| = \kappa, \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t.}$$

$$\|\mathcal{L}_h^n x^\alpha \psi(t)\| \leq \|\mathcal{L}_h^n x^\alpha \psi_0\| + C \sum_{|\beta| \leq \kappa-1: |\beta|+\nu \leq \kappa+n} \|\mathcal{L}_h^\nu x^\beta \psi_0\| h^{-N}(1+t^\kappa);$$

and

$$\mathcal{P}_\kappa : \forall P \in \Pi_{\kappa, \lambda}, \|P\psi(t)\| \leq C \sum_{|\alpha| \leq \kappa: |\alpha| + \nu \leq \kappa + n} \|\mathcal{L}_h^\nu x^\alpha \psi_0\| h^{-N} (1 + t^\kappa), \text{ for } \lambda \leq 2n \leq \lambda + 1.$$

We have proved propositions \mathcal{P}_0 , \mathcal{Q}_0 and \mathcal{Q}_1 . We assume now that for a given $\kappa \in \mathbb{N}^*$, for any $k \leq \kappa$, \mathcal{Q}_k and \mathcal{P}_k hold, and we prove $\mathcal{P}_{\kappa+1}$ and $\mathcal{Q}_{\kappa+1}$. We begin with $\mathcal{Q}_{\kappa+1}$. Let $\alpha \in \mathbb{N}^d$, with $|\alpha| = \kappa + 1$ and $n \in \mathbb{N}$. We have

$$-ih\partial_t(\mathcal{L}_h^n x^\alpha \psi(t)) = \mathcal{L}_h^{n+1} x^\alpha \psi(t) + \mathcal{L}_h^n [x^\alpha, \mathcal{L}_h] \psi(t).$$

Then, noting that

$$[x^\alpha, \mathcal{L}_h] = hP_1$$

with P_1 a sum of elements in $\Pi_{\kappa, 1}$, we get from the Duhamel formula

$$\mathcal{L}_h^n x^\alpha \psi(t) = e^{i\frac{t}{h}\mathcal{L}_h} \mathcal{L}_h^n x^\alpha \psi_0 + i \int_0^t e^{i\frac{t-s}{h}\mathcal{L}_h} \mathcal{L}_h^n P_1 \psi(s) ds.$$

As $\mathcal{L}_h^n P_1$ is a sum of elements in $\Pi_{\kappa, (2n+1)}$, we can apply \mathcal{P}_κ , and integrating in time and using the unitariness of $e^{i\frac{t}{h}\mathcal{L}_h}$, we find, for some integer $N \in \mathbb{N}$

$$\|\mathcal{L}_h^n x^\alpha \psi(t)\| \leq \|\mathcal{L}_h^n x^\alpha \psi_0\| + Ch^{-N} \sum_{|\beta| \leq \kappa: |\beta| + \nu \leq \kappa + n + 1} \|\mathcal{L}_h^\nu x^\beta \psi_0\| (1 + t^{\kappa+1})$$

that proves $\mathcal{Q}_{\kappa+1}$. It remains to prove $\mathcal{P}_{\kappa+1}$. We consider so some $P \in \Pi_{\kappa+1, \lambda}$, for a given $\lambda \in \mathbb{N}$. Then, because of the commutation relation of the $(x_k)_{1 \leq k \leq d}$ with the $(L_j)_{1 \leq j \leq d}$, that is $[x_k, L_j] = -ih\delta_{k,j}$, there is $\alpha \in \mathbb{N}^d$, $|\alpha| = \kappa + 1$ such that

$$P = P_2 + P_3 x^\alpha$$

with P_2 a sum of elements in $\Pi_{\kappa, \lambda-1}$ and $P_3 \in \Pi_{0, \lambda}$. So

$$\|P\psi(t)\| \leq \|P_2\psi(t)\| + \|P_3\psi(t)\|.$$

Then, applying \mathcal{P}_κ , we get, for some integer $N \in \mathbb{N}$

$$\|P_2\psi(t)\| \leq Ch^{-N} (1 + t^\kappa) \sum_{|\beta| \leq \kappa: |\beta| + \nu \leq \kappa + n} \|\mathcal{L}_h^\nu x^\beta \psi_0\| \quad (3.14)$$

and applying Theorem 3.1.4 along with $\mathcal{Q}_{\kappa+1}$, for some integer $N \in \mathbb{N}$, and for $\lambda \leq 2n \leq \lambda + 1$, we have

$$\begin{aligned} \|P_3 x^\alpha \psi(t)\| &\leq Ch^{-n} \|\mathcal{L}_h^n x^\alpha \psi(t)\| \\ &\leq Ch^{-N} (1 + t^{\kappa+1}) \left(\|\mathcal{L}_h^n x^\alpha \psi_0\| + \sum_{|\beta| \leq \kappa: |\beta| + \nu \leq \kappa + n + 1} \|\mathcal{L}_h^\nu x^\beta \psi_0\| \right). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Now, gathering (3.14) and (3.15), we find, for some integer N ,

$$\|P\psi(t)\| \leq Ch^{-N} (1 + t^{\kappa+1}) \sum_{|\beta| \leq \kappa+1: |\beta| + \nu \leq \kappa + n + 1} \|\mathcal{L}_h^\nu x^\beta \psi_0\|$$

that proves $\mathcal{P}_{\kappa+1}$ and achieves the proof of Proposition 3.3.1.

Acknowledgments

The authors are grateful to Karel Pravda-Starov for sharing useful references.

Chapitre 4

Les états cohérents et leur propagation

"Puisque ces mystères me dépassent, feignons d'en être l'organisateur"

Jean Cocteau, *Les Mariés de la tour Eiffel*

Les mystères qui nous dépassent sont ici ceux de la dynamique quantique qui, comme indiqué dans l'introduction à ce manuscrit, ne suit pas toujours la dynamique classique. Cependant, ces deux dynamiques sont liées, comme se fût anticipé par Schrödinger dans son article [63] de 1926. Un lien possible entre ses deux dynamiques est l'utilisation d'états initiaux à la propagation très localisés, au sens qu'ils minimisent le principe d'incertitude d'Heisenberg. Ces états étaient appelés 'gaussian error-curves' par Schrödinger, qui remarqua par le calcul qu'ils restaient localisés sur la dynamique classique au cours de leur propagation par l'oscillateur harmonique. La dénomination d'*états cohérents* est introduite en 1963 par J. R. Glauber dans [23], où il utilise ces états localisés pour décrire les états de la lumière dans les lasers. Il y justifie alors le choix du mot *cohérent* pour décrire ces états localisés. On peut aussi mentionner les travaux du physicien Hepp dans [40], s'intéressant à la propagation des états cohérents en linéarisant l'hamiltonien dirigeant la propagation quantique autour de la trajectoire classique, procédé qui sera largement repris par la suite, ainsi que les travaux de Heller dans [39] qui utilise les états cohérents pour étudier l'effet de la lumière sur des réactions chimiques.

L'intérêt des états cohérents est leur forte localisation dans l'espace des phases qui permet en quelque sorte de microlocaliser la dynamique quantique en un point. Considérons qu'un tel état décrive la fonction d'onde d'un système tel qu'une particule sous un champ de forces hamiltonien. L'évolution quantique de cet état devrait alors être lié à la propagation classique de cette particule par l'hamiltonien sous-jacent. Dans [11], Monique Combescure et Didier Robert prouvent que pour des temps classiques, i.e. des temps finis indépendants du paramètre semi-classique \hbar , cette propriété est vraie pour une classe raisonnable d'hamiltoniens. Ce résultat avait déjà été prouvé pour des classes plus restreintes d'hamiltoniens, voir les travaux de Hagedorn et Joye dans [25, 26, 27, 28, 29]. Ces propriétés de propagation sont liées au théorème d'Egorov, dont une des conséquences est que la localisation d'un état initial propagé est donnée par la propagation classique de la localisation de cet état. Se pose alors naturellement la question de la propagation de tels états pour des temps plus longs, i.e. tendant vers l'infini lorsque le paramètre \hbar tend vers 0. Dans ce cas, pour des temps de l'ordre du temps d'Ehrenfest ou plus, des phénomènes purement quantiques, non prévisibles par la mécanique classique, apparaissent mais ces phénomènes peuvent toujours être décrits par la dynamique classique sous-jacente. On peut se référer à nouveau aux travaux de Combescure et Robert, ou à ceux de Hagedorn et Joye cités plus haut, mais aussi aux exposés éclairants de Thierry Paul [49, 50]. On peut aussi se référer aux résultats prouvés dans [6], présentés dans le Chapitre 5 du présent manuscrit.

L'objet de ce chapitre est de présenter la classe d'états cohérents que l'on souhaite propager par l'hamiltonien magnétique, et d'énoncer les propriétés relatives à la propagation générale et à la localisation de ces états. Cependant, avant d'introduire ces résultats, il apparaît important de présenter des résultats

antérieurs, concernant la propagation d'états cohérents gaussiens ou comprimés. On traitera notamment de la propagation quadratique de ces états. Ces résultats seront par la suite étendus dans le cadre de la classe d'états plus générale que l'on souhaite propager sous un champ magnétique (voir le Chapitre 5).

4.1 États gaussiens et états comprimés

Dans cette section on introduit la classe des états cohérents gaussiens et comprimés, étudiés par Combescure, Robert, Hagedorn Joye et d'autres. Les résultats de propagations de ces états serviront alors de modèle pour les preuves dans le cas plus général qui sera abordé dans la deuxième partie de ce chapitre.

4.1.1 Définition de la classe d'états

On commence par définir la classe des états cohérents gaussiens et comprimés. Pour cela, on introduit l'opérateur de translation

$$T_{\hbar}(z) := f \in L^2(\mathbb{R}^n) \mapsto \left[x \in \mathbb{R}^n \mapsto e^{-i\frac{q \cdot x}{\hbar}} e^{i\frac{p \cdot x}{\hbar}} f(x - q) \right] \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

défini pour $z = (q, p) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ et l'opérateur de dilatation

$$\Lambda_{\hbar} : f \in L^2(\mathbb{R}^n) \mapsto \frac{1}{\hbar^{n/4}} f\left(\frac{\cdot}{\sqrt{\hbar}}\right),$$

tous deux unitaires sur $L^2(\mathbb{R}^n)$. On pose de plus

$$g : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \frac{1}{(\pi\hbar)^{n/4}} e^{-x \cdot x/2}$$

la fonction gaussienne sur \mathbb{R}^n , et en considérant Σ_n l'espace de Siegel, i.e. l'espace des matrices de taille n , symétriques complexes de partie imaginaire définie positive, on pose pour $\Gamma \in \Sigma_n$ la fonction gaussienne comprimée

$$g_{\Gamma} : x \in \mathbb{R}^n \mapsto a_{\Gamma} e^{i\frac{x \cdot \Gamma x}{2}} \in \mathbb{R}$$

où $a_{\Gamma} > 0$ tel que $\|g_{\Gamma}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 1$. On définit alors les classes d'états cohérents gaussiens et comprimés.

Definition 4.1.1. La classe des états cohérents gaussiens est définie par

$$\mathfrak{G}^{[n]} := \{T_{\hbar}(z)\Lambda_{\hbar}g, z \in \mathbb{R}^{2n}, \hbar \in (0, 1)\}$$

et on définit la classe des états cohérents comprimés par

$$\mathfrak{G}_{\Sigma}^{[n]} := \{T_{\hbar}(z)\Lambda_{\hbar}g_{\Gamma}, z \in \mathbb{R}^{2n}, \hbar \in (0, 1); \Gamma \in \Sigma_n\}.$$

Remark 4.1.2. La classe des états cohérents gaussiens est un cas particulier de la classe des états cohérents comprimés. En effet, on retrouve $g = g_{iI_n}$, où I_n désigne la matrice identité de taille n .

Dans [13] on trouve une définition plus générale des états cohérents. Ils sont construits à partir d'une fonction $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, que l'on peut appeler *profil* de l'état cohérent, comme la famille $(\varphi_z)_{z \in \mathbb{R}^{2n}}$ avec

$$\varphi_z = T_{\hbar}(z)\Lambda_{\hbar}u.$$

Cette définition correspond à celle utilisée par Thierry Paul dans [48, 52], ce dernier autorisant un développement en puissance de $\hbar^{1/2}$ du profil dans la classe de Schwartz. Ce développement convient aux résultats de propagation prouvés plus tard par Combescure et Robert dans le cas gaussien, voir la sous-section 4.1.4. Pour chaque famille d'états cohérents, utilisant des résultats de la théorie de la représentation, on peut prouver la formule de reconstruction suivante.

Lemma 4.1.3. Soit $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, et soit $(\varphi_z)_{z \in \mathbb{R}^{2n}}$ la famille d'états cohérents correspondante,

$$\varphi_z = T_{\hbar}(z)\Lambda_{\hbar}u.$$

Alors, pour tout $v \in L^2(\mathbb{R}^n)$,

$$v = \frac{1}{(2\pi\hbar)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \langle v, \varphi_z \rangle \varphi_z dz.$$

L'application

$$\mathcal{F}_u^B : v \in L^2(\mathbb{R}^n) \mapsto [z \mapsto \langle v, \varphi_z \rangle]$$

est appelée transformation de Fourier-Bargman (voir [13] pour les propriétés de cette application).

4.1.2 Propagation quadratique

Un premier résultat concernant les classes $\mathfrak{G}^{[n]}$ et $\mathfrak{G}_{\Sigma}^{[n]}$ est leur propagation par des hamiltoniens quadratiques. On considère un hamiltonien quadratique réel dépendant du temps $(H_t)_{t \in \mathbb{R}}$. On le suppose continu en temps. Il existe alors une famille de matrices symétriques réelles $(S(t))_{t \in \mathbb{R}}$ de taille $2n$, dépendant continuellement du temps, telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall X \in \mathbb{R}^{2n}, H_t(X) = X^T S(t) X.$$

Puisque $S(t)$ est symétrique, on peut l'écrire par blocs de taille n comme

$$S(t) = \begin{pmatrix} K_t & L_t \\ L_t^T & G_t \end{pmatrix}.$$

L'équation du flot classique est alors donnée par

$$\begin{cases} \dot{F}(t) = JS(t)F(t) \\ F(0) = Id. \end{cases} \quad (4.1)$$

Solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients continus sur \mathbb{R} , le flot $F(t)$ est bien défini pour tout temps. Il est linéaire (d'où l'appellation $F(t)$ préférée à celle Φ_H utilisée jusqu'ici), et vérifie de plus pour tout t réel $F^T(t)JF(t) = J$. Le flot est donc constitué de matrices symplectiques. Comme pour $S(t)$, on écrit ce dernier par blocs de taille n ,

$$F(t) = \begin{pmatrix} A_t & B_t \\ C_t & D_t \end{pmatrix}.$$

On cherche maintenant à résoudre l'équation de Schrödinger

$$\begin{cases} i\hbar \partial_t \varphi^t = \text{Op}_{\hbar}^w(H_t) \varphi^t \\ \varphi^{t=0} = \varphi_0 \end{cases} \quad (4.2)$$

avec $\varphi_0 \in \mathfrak{G}_{\Sigma}^{[n]}$. On va prouver en particulier que cette équation admet une solution pour tout temps et que cette solution est entièrement déterminée par le flot classique.

Existence d'un flot quantique

On commence par discuter de l'existence d'un propagateur $(U(t, s))_{t, s \in \mathbb{R}}$ pour l'équation (4.2), i.e. d'un opérateur unitaire défini sur $L^2(\mathbb{R}^n)$, de classe \mathcal{C}^1 en temps vérifiant pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{cases} i\hbar \partial U(t, s) \varphi = \text{Op}_{\hbar}^w(H_t) U(t, s) \varphi \\ U(s, s) \varphi = \varphi \end{cases} \quad (4.3)$$

Dans l'article [11], Combes et Robert prouvent l'existence et l'unicité d'un tel propagateur pour le cas quadratique. Il s'avère que dans ce cadre, il est possible d'expliciter complètement cette famille d'opérateurs en fonction du flot classique $F(t)$. Ainsi dans le cas quadratique, la dynamique classique détermine complètement la dynamique quantique. De manière plus précise, les auteurs prouvent la proposition suivante.

Proposition 4.1.4. *Il existe une unique famille de propagateurs $(U(t, s))_{t, s \in \mathbb{R}}$ satisfaisant (4.3). Cette famille se décompose en la composition de deux opérateurs unitaires (en fait métaplectiques) $C(t)$ et $R(t)$ de sorte que*

$$U(t, 0) = C(t)R(t)$$

la famille $C(t)$ étant responsable de la compression des états, $R(t)$ étant responsable de la rotation de ces derniers.

Voir l'article [11] pour un exposé détaillé et [13] pour une explication plus fine du phénomène de *compression/rotation*, en se référant en particulier à la représentation complexe des opérateurs métaplectiques. Ce résultat d'existence et d'unicité du flot quantique est aussi prouvé dans [74, Chapitre 11], via les fonctions génératrices du flot classique.

Résultat de stabilité de la classe $\mathfrak{G}_\Sigma^{[n]}$ par propagation quadratique

On souhaite expliciter la propagation quadratique d'éléments de la classe $\mathfrak{G}_\Sigma^{[n]}$. On commence par prouver le lemme suivant.

Lemma 4.1.5. *Soit $U(t) := U(t, 0)$. Alors, si \hat{Q} désigne l'opérateur auto-adjoint non borné de multiplication par x sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ et si $\hat{P} := -i\hbar\nabla_x$, lui aussi auto-adjoint non borné, on obtient pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$*

$$U(t)^* \begin{pmatrix} \hat{Q} \\ \hat{P} \end{pmatrix} U(t)\varphi = F(t) \begin{pmatrix} \hat{Q} \\ \hat{P} \end{pmatrix} \varphi.$$

Démonstration. On pose $\hat{Q}_t := U(t)^*\hat{Q}U(t)$ et $\hat{P}_t := U(t)^*\hat{P}U(t)$. Par (4.3), on a pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$-i\hbar\partial_t \begin{pmatrix} \hat{Q}_t \\ \hat{P}_t \end{pmatrix} \varphi = U(t)^* \left[\text{Op}_\hbar^w(H_t), \begin{pmatrix} \hat{Q} \\ \hat{P} \end{pmatrix} \right] U(t)\varphi.$$

Or, un calcul montre

$$\left[\text{Op}_\hbar^w(H_t), \begin{pmatrix} \hat{Q} \\ \hat{P} \end{pmatrix} \right] = -i\hbar JS(t) \begin{pmatrix} \hat{Q} \\ \hat{P} \end{pmatrix}$$

avec J la matrice symplectique standard de taille $2n$,

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

On obtient alors le résultat voulu par intégration de l'équation différentielle

$$\partial_t \begin{pmatrix} \hat{Q}_t \\ \hat{P}_t \end{pmatrix} \varphi = JS(t) \begin{pmatrix} \hat{Q} \\ \hat{P} \end{pmatrix} \varphi.$$

□

Fort de ce lemme, on prouve le résultat suivant.

Proposition 4.1.6. *Soit $T_\hbar(z)$ l'opérateur de translation en z . Alors,*

$$U(t)^*T_\hbar(z)U(t) = T_\hbar(F(t)^{-1} \cdot z).$$

Démonstration. On commence par remarquer que pour $z = (q, p) \in \mathbb{R}^{2n}$, si on pose $(L_s)_{s \in [0, 1]}$ la famille d'opérateurs unitaires satisfaisant

$$\forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \quad i\hbar\partial_s L_s \psi = (p\hat{Q} - q\hat{P})L_s \psi, \quad L_{s=0} = id_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

alors $L_{s=1}\psi = T_{\hbar}(z)\psi$. Ainsi, on obtient

$$\forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \quad i\hbar \partial_s(U(t)^* L_s U(t))\psi = (p\hat{Q}_t - q\hat{P}_t)U(t)^* L_s U(t)\psi.$$

Or, puisque le flot $F(t)$ est symplectique, on obtient que, si ω_0 définit la forme symplectique canonique sur \mathbb{R}^{2n} ,

$$\omega_0(z, F(t) \cdot \hat{Z}) = \omega_0(F(t)^{-1} \cdot z, \hat{Z})$$

en posant $\hat{Z} := (\hat{Q}, \hat{P})^{\mathbf{T}}$. Ainsi, pour toute fonction $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$i\hbar \partial_s(U(t)^* L_s U(t))\psi = (p_{-t}\hat{Q} - q_{-t}\hat{P})U(t)^* L_s U(t)\psi$$

où $(q_{-t}, p_{-t}) := F(t)^{-1} \cdot z$ et

$$U(t)^* T_{\hbar}(z) U(t) = T_{\hbar}(F(t)^{-1} \cdot z).$$

□

Une première conséquence de ce résultat est la suivante. Considérons $\varphi_0 = T_{\hbar}(z)\Lambda_{\hbar}g_{\Gamma}$, avec $z \in \mathbb{R}^{2n}$ et $\Gamma \in \Sigma_n$. Alors, $U(t)\varphi_0 = T_{\hbar}(z_t)U(t)\Lambda_{\hbar}g_{\Gamma}$. Ainsi, un état cohérent de la classe $\mathfrak{G}_{\Sigma}^{[n]}$ reste ‘centré’ en la dynamique classique au cours de la propagation quantique. On explicitera ceci à la fin de cette section. Une deuxième conséquence est que pour résoudre (4.2) pour des états de la classe $\mathfrak{G}_{\Sigma}^{[n]}$, il est suffisant en fait de résoudre cette équation pour des états centrés en $z = 0$. On considère alors l’ansatz φ^{Γ_t} donné par

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \varphi^{\Gamma_t}(x) = a_{\Gamma_t} \exp\left(\frac{i}{\hbar} x \cdot \Gamma_t x\right)$$

où a_{Γ_t} tel que $\|\varphi^{\Gamma_t}\|_{L^2} = 1$ et Γ_t un chemin de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} dans Σ_n , et on suppose cet ansatz solution de (4.2). Injectons-le dans l’équation de Schrödinger (pour simplifier les calculs, on prendra $\hbar = 1$). Le but est d’obtenir une équation sur Γ_t et sur $a(t) := a_{\Gamma_t}$. En notant que

$$\text{Op}_{\hbar}^w(x \cdot L\xi) = \sum_{j,k} L_{j,k} \left(x_j D_k - \frac{i}{2} \delta_{jk} \right)$$

et que

$$\text{Op}_{\hbar}^w(\xi \cdot G\xi)\varphi^{\Gamma} = a_{\Gamma} \left(\sum_{j,k} G_{j,k} D_j D_k \right) e^{ix \cdot \Gamma x / 2} = (G\Gamma x \cdot \Gamma x - i\text{tr}(G\Gamma))\varphi^{\Gamma},$$

le calcul donne

$$\partial_t \varphi^{\Gamma_t} = \left(\dot{a}(t) + \frac{i}{2} x \cdot \dot{\Gamma}_t x \right) \exp(ix \cdot \Gamma_t x)$$

et

$$\hat{H}\varphi^{\Gamma_t} = \left(x \cdot K_t x + \frac{1}{2} x \cdot L_t \Gamma_t x + \frac{1}{2} x \cdot \Gamma_t L_t^{\mathbf{T}} x + \Gamma_t x \cdot G_t \Gamma_t x - \frac{i}{2} \text{tr}(L_t + G_t \Gamma_t) \right) \varphi^{\Gamma_t}$$

ce qui aboutit aux équations différentielles

$$\begin{cases} \dot{\Gamma}_t + 2K_t + L_t \Gamma_t + \Gamma_t L_t + 2\Gamma_t G_t \Gamma_t \\ \dot{a}(t) = -\frac{1}{2} \text{tr}(L_t + G_t \Gamma_t) a(t) \\ \Gamma_{|t=0} = \Gamma \in \Sigma_n, a(0) = a_{\Gamma}. \end{cases}$$

Pour résoudre ces équations, nous utilisons le lemme suivant.

Lemma 4.1.7. *Soit F une matrice symplectique,*

$$F = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

et soit $Z \in \Sigma_n$. Alors $A + BZ$ et $C + DZ$ sont inversibles et $(C + DZ)(A + BZ)^{-1} \in \Sigma_n$.

Remark 4.1.8. En dimension $n = 1$, ce résultat est bien connu. En effet, $\text{Sp}(1) = \text{SL}_2(\mathbb{R})$ et $\Sigma_1 = \Pi_+$, où Π_+ correspond au demi-plan de Poincaré (nombres complexes de partie imaginaire strictement positive). Ainsi, le lemme dit simplement que $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ laisse stable Π_+ par action par homographies. En fait, on peut même prouver que l'action est transitive dans le lemme, ce qui peut se voir comme une généralisation à toute dimension de l'action transitive $\text{SL}_2(\mathbb{R}) \curvearrowright \Pi_+$.

Démonstration. Posons $M = A + BZ$ et $N = C + DZ$. Puisque F est symplectique, on a $F^{\mathbf{T}}JF = J$. En remarquant que

$$F \begin{pmatrix} Id \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Id \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix}$$

on obtient la propriété

$$M^{\mathbf{T}}N - N^{\mathbf{T}}M = (M, N)J \begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix} = (Id, Z^{\mathbf{T}})J \begin{pmatrix} Id \\ Z \end{pmatrix} = Z - Z^{\mathbf{T}} = 0$$

d'où $M^{\mathbf{T}}N = N^{\mathbf{T}}M$. Le même calcul donne

$$M^{\mathbf{T}}\bar{N} - N^{\mathbf{T}}\bar{M} = 2i\Im(Z).$$

Ainsi pour tout $x \in \mathbb{C}^n$

$$2ix \cdot \Im(Z)\bar{x} = Mx \cdot \bar{N}\bar{x} - Nx \cdot \bar{M}\bar{x}.$$

On en déduit que M et N sont injectifs. En effet, supposons qu'il existe $x \in \mathbb{C}^n$ tel que $Mx = 0$ (ou $Nx = 0$). La relation ci-dessus devient $x\Im(Z)\bar{x} = 0$, ce qui entraîne que $x = 0$ puisque $\Im(Z)$ est définie positive. Ainsi M et N sont inversibles.

Prouvons que $NM^{-1} \in \Sigma_n$. On a

$$(NM^{-1})^{\mathbf{T}} = (M^{-1})^{\mathbf{T}}N^{\mathbf{T}} = (M^{-1})^{\mathbf{T}}(M^{\mathbf{T}}NM^{-1}) = NM^{-1}$$

et

$$\frac{NM^{-1} - \bar{N}\bar{M}^{-1}}{2i} = \frac{(M^{-1})^{\mathbf{T}}N^{\mathbf{T}}MM^{-1} - (M^{-1})^{\mathbf{T}}M^{\mathbf{T}}\bar{N}\bar{M}^{-1}}{2i} = (M^{-1})^{\mathbf{T}}\Im(Z)\bar{M}$$

et par injectivité de M , on obtient que $\Im(NM^{-1})$ est définie positive. \square

Comme pour tout temps $F(t) \in \text{Sp}(n)$ en appliquant le lemme, on pose $M_t = A_t + B_t\Gamma_0$ et $N_t = C_t + D_t\Gamma_0$ qui sont inversibles et qui vérifient $N_tM_t^{-1} \in \Sigma_n$. De plus, on remarque que

$$\begin{aligned} \dot{M}_t &= \dot{A}_t + \dot{B}_t\Gamma_0 \\ &= L_t^{\mathbf{T}}A_t + G_tC_t + L_t^{\mathbf{T}}B_t\Gamma_0 + G_tD_t\Gamma_0 \\ &= L_t^{\mathbf{T}}M_t + G_tN_t \end{aligned}$$

et de même

$$\dot{N}_t = -K_tM_t - L_tN_t.$$

Prenant la dérivée de $N_tM_t^{-1}$, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(N_tM_t^{-1}) &= \dot{N}_tM_t^{-1} - N_tM_t^{-1}\dot{M}_tM_t^{-1} \\ &= -K_t - L_tN_tM_t^{-1} - N_tM_t^{-1}L_t^{\mathbf{T}} - N_tM_t^{-1}G_tN_tM_t^{-1}. \end{aligned}$$

Ainsi, $N_tM_t^{-1}$ et Γ_t sont solutions de la même équation différentielle linéaire, avec même condition initiale ($M_0 = Id$, $N_0 = \Gamma_0$), donc $\Gamma_t = N_tM_t^{-1}$ pour tout temps.

Reste à calculer $a(t)$. En utilisant que $\Gamma_t = N_t M_t^{-1}$, $a(t)$ satisfait à l'équation différentielle linéaire

$$\dot{a}(t) = -\frac{1}{2} \text{tr}(\dot{M}_t M_t^{-1}).$$

En utilisant la formule de Liouville

$$\frac{d}{dt} \log(\det(M_t)) = \text{tr}(\dot{M}_t M_t^{-1})$$

on obtient

$$a(t) = a_\Gamma \det(M_t)^{-1/2}.$$

Ainsi, partant de l'ansatz φ^Γ , on obtient que l'équation d'évolution ne peut avoir des solutions de cette forme que si

$$\Gamma_t = N_t M_t^{-1} = (C_t + D_t \Gamma)(A_t + B_t \Gamma)^{-1}$$

et

$$a(t) = a_\Gamma \det(M_t)^{-1/2}.$$

Or, on vérifie aisément que ces fonctions sont bien solutions de l'équation d'évolution. On obtient ainsi la proposition suivante.

Proposition 4.1.9. *Pour tout $\Gamma \in \Sigma_n$, pour tout t réel et pour tout $z \in \mathbb{R}^{2n}$,*

$$U(t) T_\hbar(z) \Lambda_{\hbar g_\Gamma} = T_\hbar(F(t) \cdot z) \Lambda_{\hbar g_{\Gamma_t}}$$

avec $\Gamma_t = N_t M_t^{-1} = (C_t + D_t \Gamma)(A_t + B_t \Gamma)^{-1}$ et $a_{\Gamma_t} = a_\Gamma \det(M_t)^{-1/2}$.

Cette proposition se reformule en le théorème suivant.

Theorem 4.1.10. *La classe $\mathfrak{G}_\Sigma^{[n]}$ est stable par propagation par des hamiltoniens quadratiques.*

Ce théorème fait suite en quelque sorte à la remarque de Schrödinger dans [63], où il constate que la classe $\mathfrak{G}^{[n]}$ est stable par propagation par l'oscillateur harmonique. Un fait important et spécifique à la classe des états comprimés est qu'en tout temps, les états restent des états comprimés, centrés en la dynamique classique : il n'y a pas de phénomènes de délocalisation. De plus, la propagation est complètement explicite en termes du flot classique et de l'hamiltonien quadratique. Ces faits permettront de prouver l'approximation (4.10) du Théorème 4.1.24, où on approche la dynamique quantique par des hamiltoniens généraux par la propagation quantique associée à la partie quadratique de l'hamiltonien.

4.1.3 Opérateurs métapectiques et transformation de Wigner

Le théorème d'Egorov nous enseigne que pour tout propagateur $U(t, s)$ associé à un hamiltonien H_t et pour tout symbole a , H_t et a étant raisonnables (voir [13, 74] pour des hypothèses précises), alors pour des temps t indépendants de \hbar

$$U(t, 0)^* \text{Op}_\hbar^w(a) U(t, 0) = \text{Op}_\hbar^w(b)$$

avec $b = \Phi_H^* a + \mathcal{O}(\hbar)$. En d'autres termes, la conjugaison par un flot quantique en temps finis d'un opérateur pseudo-différentiel donne à nouveau un opérateur pseudo-différentiel dont le symbole principal est donné par la dynamique classique. Il s'avère que dans le cas d'un propagateur quadratique, cette assertion est exacte, c'est-à-dire sans termes d'erreurs.

Theorem 4.1.11. *Soient $a \in S(m)$ pour m une fonction d'ordre quelconque et soit $(U(t, 0))_{t \in \mathbb{R}}$ le propagateur associé à un hamiltonien quadratique $(H_t)_{t \in \mathbb{R}}$, de flot classique $F(t)$. Alors, pour tout temps $t \in \mathbb{R}$, on obtient*

$$U(t, 0)^* \text{Op}_\hbar^w(a) U(t, 0) = \text{Op}_\hbar^w(F(t)^* a) \tag{4.4}$$

où $F(t)^* a : X \in \mathbb{R}^{2n} \mapsto a(F(t) \cdot X)$ désigne le pull-back de a par $F(t)$.

Les opérateurs satisfaisant une équation du type (4.4) sont appelés des *opérateurs métapectiques*.

Opérateurs métaplectiques

On commence par une définition.

Definition 4.1.12. Un opérateur \hat{R} est appelé opérateur métaplectique s'il existe une transformation symplectique linéaire F telle que pour tout symbole $a \in S(m)$, $\hat{R}^* \text{Op}_h^w(a) \hat{R}$ est un opérateur pseudo différentiel et si

$$\hat{R}^* \text{Op}_h^w(a) \hat{R} = \text{Op}_h^w(F^*a).$$

Ces opérateurs sont liés à la propagation quadratique par les deux théorèmes qui suivent.

Theorem 4.1.13. On considère le flot quantique $(U(t, s))_{t, s \in \mathbb{R}}$ associé à une famille d'hamiltoniens quadratiques $(H_t)_{t \in \mathbb{R}}$. Soit $F(t)$ le flot classique associé. Alors pour tout couple $(t, s) \in \mathbb{R}^2$, l'opérateur $U(t, s)$ est un opérateur métaplectique associé à la transformation symplectique linéaire $F(t)F(s)^{-1}$ donnée par le flot classique.

On ne prouve pas ce théorème mais on en donne une idée de la preuve. Elle réside dans la démonstration du théorème d'Egorov, où, pour un symbole quadratique, on montre l'égalité sur le crochet de commutation

$$[\text{Op}_h^w(H_t), \text{Op}_h^w(a)] = -i\hbar \text{Op}_h^w(\{H_t, a\})$$

pour tout symbole $a \in S(m)$, m une fonction d'ordre arbitraire sur \mathbb{R}^{2n} . Cette égalité prouve que

$$i\hbar \partial_t (U(t, 0)^* \text{Op}_h^w(a) U(t, 0) - \text{Op}_h^w(a \circ F(t))) = 0$$

ce qui entraîne le résultat. Ce théorème laisse entendre que les propagateurs quadratiques sont un cas particulier des opérateurs métaplectiques, mais il permet en fait de construire à partir d'une transformation symplectique linéaire donnée un opérateur métaplectique associé. On prouve alors le théorème suivant.

Theorem 4.1.14. Soit F une application linéaire symplectique de \mathbb{R}^{2n} . Alors, il existe un opérateur métaplectique associé, unique à multiplication près par un complexe de module 1.

Démonstration. On ne donnera pas une preuve complète de ce résultat mais seulement les étapes principales. On renvoie à [13, 74] pour une preuve complète du résultat. On commence par relier F à l'identité par un chemin $(F(t))_{t \in [0, 1]}$ de matrices symplectiques de classe \mathcal{C}^1 (ce chemin existe par décomposition polaire symplectique par exemple), de sorte que $F(0) = I_n$, $F(1) = F$. On y associe alors une famille d'hamiltoniens quadratiques

$$H_t : X \in \mathbb{R}^{2n} \mapsto X^T S(t) X \in \mathbb{R},$$

de sorte que le flot hamiltonien issu de H_t soit donné par $F(t)$. De là, on obtient par application de la Proposition 4.1.4 qu'il existe un flot quantique associé à $(H_t)_{t \in [0, 1]}$ et par application du Théorème 4.1.13 que ce flot quantique pris au temps $t = 1$ est un opérateur métaplectique associé à F .

Soient alors \hat{R} et \hat{V} deux opérateurs métaplectiques associés à F . On remarque par ce qui précède que \hat{V}^{-1} est un opérateur métaplectique associé à F^{-1} . En utilisant les translations $T_h(z)$ et la Proposition 4.1.6, on obtient en posant $\hat{B} = \hat{V}^{-1} \hat{R}$ que

$$T_h(z)^{-1} \hat{B} T_h(z) = \hat{B}$$

pour tout $z \in \mathbb{R}^{2n}$. On conclut alors par un argument de la théorie des représentations, impliquant qu'un opérateur commutant avec les translations $T_h(z)$ est alors scalaire. On obtient que $\hat{B} = \lambda \text{Id}_{L^2(\mathbb{R}^n)}$. Puisque \hat{B} est unitaire on obtient que λ est un nombre complexe de module 1. \square

Ainsi, les opérateurs métaplectiques sont ceux donnés par propagation quadratique à multiplication par un complexe de module 1 près. L'intérêt de ces opérateurs est qu'il s'agit d'objets quantiques construits à partir de la dynamique classique qui leur est associée. Ces objets sont un cas particulier des Opérateurs Intégraux de Fourier (voir [15, 74] pour une référence). Il existe diverses constructions des opérateurs métaplectiques. On pourra se référer par exemple à [15, 74, 13, 20].

Transformation de Wigner des états cohérents et représentation dans l'espace des phases

Un état cohérent est une fonction sur \mathbb{R}^n qui est extrêmement localisée dans l'espace des phases \mathbb{R}^{2n} . Un outil pour 'voir' cette localisation est la transformation de Wigner. Ce qui suit est tiré de [13]. On peut consulter aussi [20] pour une référence plus complète.

Definition 4.1.15. La transformation de Wigner de deux fonctions φ et ψ de $L^2(\mathbb{R}^n)$ est donnée par

$$\mathcal{W}_{\varphi,\psi} : (x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{i}{\hbar}u \cdot \xi} \varphi\left(x + \frac{u}{2}\right) \overline{\psi\left(x - \frac{u}{2}\right)} du.$$

Un premier intérêt de cette fonction est le suivant.

Proposition 4.1.16. Pour $a \in S(1)$, pour $\varphi, \psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$,

$$\langle \varphi, \text{Op}_{\hbar}^w(a)\psi \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \frac{1}{(2\pi\hbar)^n} \int_{\mathbb{R}^{2n}} A(Y) \mathcal{W}_{\varphi,\psi} dY. \quad (4.5)$$

On prouvera cette proposition dans la deuxième partie de ce chapitre, dans le cadre de la transformée de Wigner de fonctions de Schwartz, ce qui permettra en particulier d'étendre le résultat à tout symbole $a \in S(m)$, m fonction d'ordre arbitraire. Historiquement, ce que Wigner cherchait en introduisant cette fonction était une représentation des états comme des densités de probabilités sur l'espace des phases, de sorte que la relation (4.5) soit vérifiée. Il obtint alors la fonction $\mathcal{W}_{\varphi,\varphi}$ introduite ci-dessus. Il se trouve que cette fonction n'est en générale pas une densité de probabilité, car pas nécessairement positive (on peut même prouver que les seuls cas dans lesquels elle est positive correspondent aux cas des états cohérents comprimés). Ceci dit, la fonction de Wigner satisfait tout de même aux propriétés suivantes.

Proposition 4.1.17. Pour une fonction $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ telle que $\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 1$, si on écrit $\mathcal{W}_{\varphi} := \mathcal{W}_{\varphi,\varphi}$, on a

1. pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$(2\pi\hbar)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{W}_{\varphi}(x, \eta) d\eta = |\varphi(x)|^2; \quad (4.6)$$

2. si $\mathcal{F}\varphi$ désigne la transformée de Fourier de φ , pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$(2\pi\hbar)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{W}_{\varphi}(y, \xi) d\eta = |\mathcal{F}\varphi(\xi)|^2; \quad (4.7)$$

3. on a de plus

$$(2\pi\hbar)^{-n} \int_{\mathbb{R}^{2n}} \mathcal{W}_{\varphi}(y, \eta) dy d\eta = 1; \quad (4.8)$$

4. pour tout $x \in \mathbb{R}^n, \xi \in \mathbb{R}^n, \mathcal{W}_{\varphi}(x, \xi) \in \mathbb{R}$.

Ainsi en intégrant la transformée de Wigner \mathcal{W}_{φ} de φ on retrouve une interprétation probabiliste de cette fonction. En effet, si φ correspond à la fonction d'onde d'une particule, (4.6) donne qu'en intégrant \mathcal{W}_{φ} sur les impulsions, on obtient la probabilité de présence de cette particule en la position x . De même, en intégrant sur les positions, (4.7) nous donne la probabilité de présence en l'impulsion ξ de la particule. Finalement (4.8) donne que la masse totale de la fonction de Wigner est de 1. On a de plus le comportement suivant de la transformation de Wigner avec les translations de Weyl $T_{\hbar}(z)$ et les opérateurs métaplectiques.

Proposition 4.1.18. Soit $z \in \mathbb{R}^{2n}$ et soit F une application linéaire symplectique sur \mathbb{R}^{2n} . On considère la translation de Weyl $T_{\hbar}(z)$ et l'opérateur métaplectique \hat{R} correspondants. Alors, pour tout $\varphi, \psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$, pour tout $Y \in \mathbb{R}^{2n}$,

$$\mathcal{W}_{T_{\hbar}(z)\varphi, T_{\hbar}(z)\psi}(Y) = \mathcal{W}_{\varphi,\psi}(Y - z) \quad \text{et} \quad \mathcal{W}_{\hat{R}\varphi, \hat{R}\psi}(Y) = \mathcal{W}_{\varphi,\psi}(F^{-1}Y).$$

On a de plus, pour $\hbar > 0$,

$$\mathcal{W}_{\Lambda_{\hbar}\varphi, \Lambda_{\hbar}\psi}(Y) = \mathcal{W}_{\varphi,\psi}^{\hbar=1}\left(\frac{Y}{\sqrt{\hbar}}\right).$$

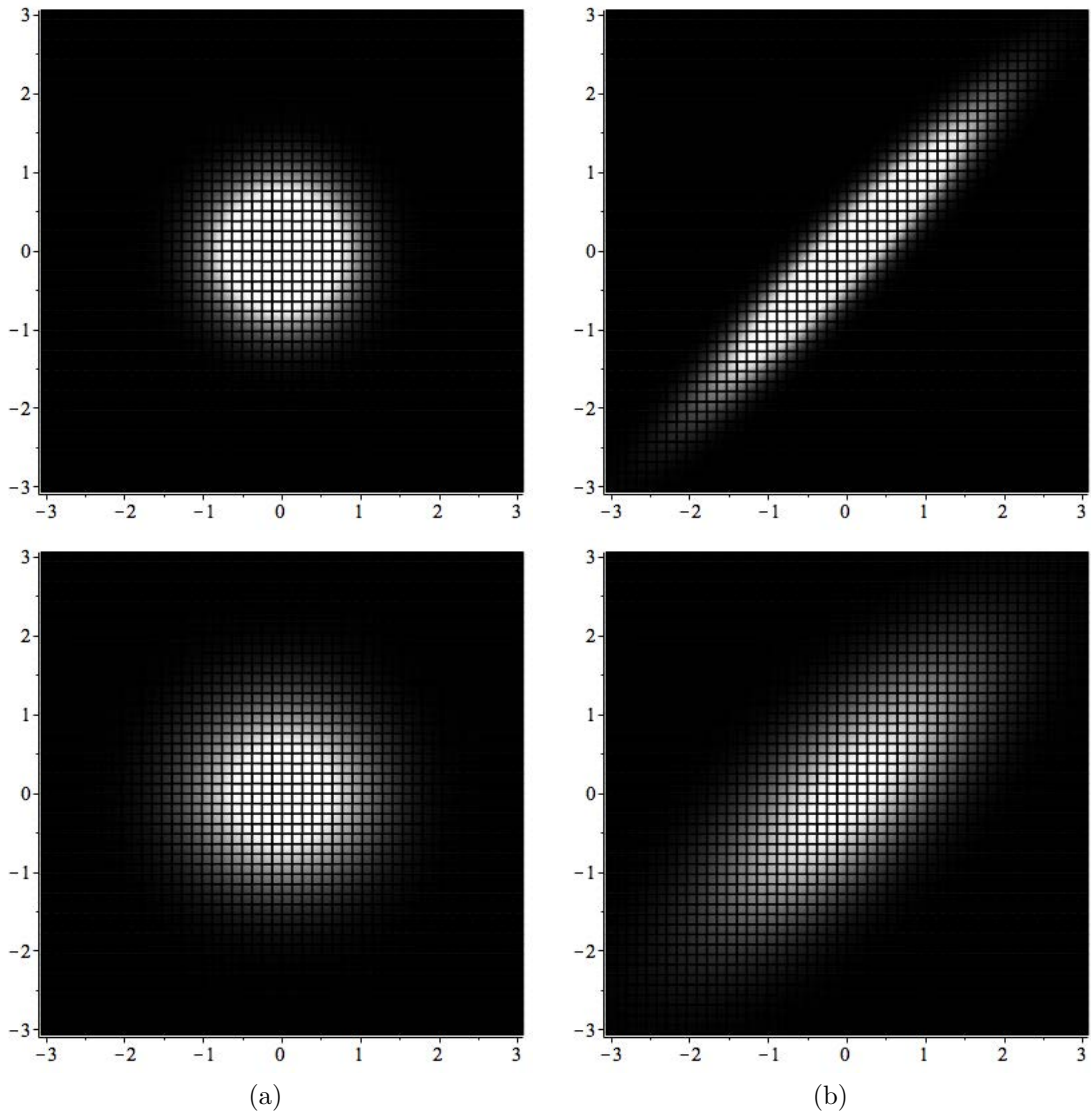


FIGURE 4.1 – En haut fonction de Wigner, en bas fonction de Husimi d'états cohérents à une dimension, centrés en 0 : (a) un état cohérent gaussien, (b) un état cohérent comprimé φ^γ avec $\gamma = 1 + 0.3i$. En abscisse est la variable position x , en ordonnée la variable d'impulsion ξ .

Ces quelques propositions montrent que la transformation de Wigner d'états permet une représentation de ces derniers dans l'espace des phases. On illustre ceci dans le cas des états cohérents gaussiens, de la classe $\mathfrak{G}^{[n]}$. On pose $\varphi_z := T_{\hbar}(z)\Lambda_{\hbar}g$, pour $z \in \mathbb{R}^{2n}$.

Proposition 4.1.19. *Pour tout $z, z' \in \mathbb{R}^{2n}$ en désignant $\mathcal{W}_{z,z'} = \mathcal{W}_{\varphi_z, \varphi_{z'}}$,*

$$\mathcal{W}_{z,z'}(Y) = 2^n \exp \left(-\frac{1}{\hbar} \left| Y - \frac{z+z'}{2} \right|^2 - \frac{i}{\hbar} \omega_0 \left(Y - \frac{1}{2}z', z - z' \right) \right).$$

En particulier

$$\mathcal{W}_z(Y) = 2^n \exp \left(-\left| \frac{Y-z}{\sqrt{\hbar}} \right|^2 \right)$$

On remarque alors que la transformée de Wigner d'un état cohérent gaussien centré en z est une Gaussienne centrée en z dans l'espace des phases, de 'rayon' $\sqrt{\hbar}$, comme on pouvait s'y attendre. Une application des transformations de Wigner est la suivante.

Lemma 4.1.20. *Soit $a \in S(1)$. Alors, pour $M \geq M' \geq 0$ arbitrairement grands, il existe une constante $C_{M,M'} > 0$ telle que pour tout $z, z' \in \mathbb{R}^{2n}$, on a*

$$|\langle \text{Op}_{\hbar}^w(a)\varphi_z, \varphi_{z'} \rangle| \leq C_{M,M'} \int_{\mathbb{R}^{2n}} \left(1 + \frac{|Y-z|}{\sqrt{\hbar}} \right)^{-M'} \left(1 + \frac{|z-z'|}{\sqrt{\hbar}} \right)^{M'-M} dY.$$

Cette estimation est un cas particulier des estimations de Wigner que l'on démontrera dans un cadre plus général (pour une classe d'états cohérents plus grande et des symboles a dans des classes arbitraires de symboles $S(m)$). Le Lemme 4.1.20 permet notamment de préciser la propriété de localisation des états cohérents.

Definition 4.1.21. On considère une fonction $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $\|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \mathcal{O}_{\hbar}(1)$. On définit le front d'onde semi-classique de ψ , désigné par $\mathcal{WF}(\psi)$ comme suit : pour $X_0 \in \mathbb{R}^{2n}$, $X_0 \notin \mathcal{WF}(\psi)$ si et seulement s'il existe un symbole $a \in S(1)$ tel que sur un voisinage \mathcal{V} de X_0 , il existe $\gamma > 0$ tel que

$$\forall \hbar \in (0, 1), \forall X \in \mathcal{V}, a(X) \geq \gamma > 0$$

et tel que

$$\|\text{Op}_{\hbar}^w(a)\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \mathcal{O}(\hbar^{\infty}).$$

La notion de front d'onde semi-classique permet de 'voir' la localisation des fonctions dans l'espace des phases. En effet il s'agit de l'ensemble des points de l'espace des phases où, à la limite semi-classique, la fonction n'est pas $\mathcal{O}(\hbar^{\infty})$. L'estimation du Lemme 4.1.20 permet de prouver le résultat de localisation suivant.

Proposition 4.1.22. *Soit $\varphi \in \mathfrak{G}^{[n]}$, centré en z , i.e. s'écrivant*

$$\varphi = T_{\hbar}(z)\Lambda_{\hbar}g.$$

Alors, le front d'onde de φ est donné par

$$\mathcal{WF}(\varphi) = \{z\}.$$

Ces résultats seront prouvés dans la deuxième partie de ce chapitre dans un cadre plus général. On généralisera notamment le Lemme 4.1.20, pour obtenir des estimées de Wigner plus précises. On s'attachera particulièrement à expliciter la constante $C_{M,M'}$, ce qui nous sera utile dans le Chapitre 5, où on considèrera des états cohérents avec des profils différents.

Pour conclure cette partie, on peut noter qu'une manière de palier à la non positivité des fonctions de Wigner est l'introduction des fonctions de Husimi (voir [13]).

Definition 4.1.23. La fonction de Husimi d'une fonction $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ vérifiant $\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \mathcal{O}_{\hbar}(1)$ est définie par

$$\mathcal{H}_u : z \in \mathbb{R}^{2n} \frac{1}{(2\pi\hbar)^n} |\langle u, \varphi_z \rangle|^2$$

où les fonctions φ_z désignent les états cohérents gaussiens,

$$\forall z \in \mathbb{R}^{2n}, \varphi_z = T_{\hbar}(z)\Lambda_{\hbar}g.$$

Les fonctions d'Husimi permettent d'étudier plus directement la localisation des états, la fonction d'Husimi d'une fonction u 'étant petite' à tout ordre en \hbar au voisinage des points où n'est pas localisée u (au sens du front d'onde). Ces fonctions sont aussi généralement utilisées pour représenter numériquement des fonctions dans l'espace des phases. On renvoie à nouveau à [13, 61] pour plus de détails à ce sujet.

4.1.4 Propagation d'états cohérents comprimés par des hamiltoniens généraux

On considère maintenant une plus grande classe d'hamiltoniens. Le cas quadratique était confortable car il permettait d'avoir un calcul exact de la propagation des états cohérents gaussiens. On ne peut en espérer autant pour un hamiltonien quelconque. Cependant, en utilisant le cas quadratique, on peut obtenir une forme approchée de la propagation. On renvoie à [60] pour un exposé détaillé et approfondi de ce qui suit.

Approximation de la propagation pour des hamiltoniens à croissance modérée

Soit $H_t(X)$ un hamiltonien continu en $t \in \mathbb{R}$ et de classe C^∞ en $X \in \mathbb{R}^{2n}$. On suppose que H_t est à croissance modérée : $\forall \gamma \in \mathbb{N}^n, \exists \mu > 0$ et $\exists C_\gamma > 0$ tels que

$$|\partial_X^\gamma H_t(X)| \leq C_\gamma (1 + |X|)^\mu.$$

L'objet de cette section est d'obtenir une approximation à tout ordre de l'équation de Schrödinger, autrement dit pour N un entier arbitraire, on cherche ψ_z^N telle que

$$\begin{cases} i\hbar \frac{\partial \psi_z^N}{\partial t} = \text{Op}_{\hbar}^w(H_t)\psi_z^N + \mathcal{O}(\hbar^N) \\ \psi_z^N(t=0) = \varphi_z. \end{cases} \quad (4.9)$$

Pour ce faire, on va travailler l'équation de Schrödinger (4.9), le but étant de faire apparaître le terme principal du développement souhaité dans l'équation elle-même. Tout d'abord on remarque que $\Lambda_{\hbar}^{-1}\psi_z(t=0)$ est indépendant de \hbar , ce qui paraît être un bon candidat pour un terme principal d'un développement asymptotique en \hbar . Se rappelant que la dynamique quantique est centrée sur la dynamique classique, on pose

$$f_z(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}\delta_z(t)}\Lambda_{\hbar}^{-1}T_{\hbar}(-z_t)\psi_z(t)$$

ce qui revient à recentrer la dynamique en l'origine et à renormaliser la largeur de la 'gaussienne propagée'. L'utilité de la phase δ_z sera précisée plus tard. Pour trouver l'équation d'évolution satisfaite par f_z , on calcule

$$\partial_t f_z(t) = e^{\frac{i}{\hbar}\delta_z(t)}\Lambda_{\hbar}^{-1} \left(-\frac{i}{\hbar}\dot{\delta}_z(t)T_{\hbar}(-z_t) + \partial_t T_{\hbar}(z_t) - \frac{i}{\hbar}T_{\hbar}(-z_t)\hat{H} \right) \psi_z(t).$$

Se rappelant que pour $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, (T_{\hbar}(z_t)\psi)(x) = e^{-i\frac{q_t \cdot p_t}{2\hbar}} e^{i\frac{p_t \cdot x}{\hbar}} \psi(x - q_t)$$

on obtient

$$\partial_t T_{\hbar}(-z_t) = T_{\hbar}(-z_t) \left(\frac{i}{2\hbar}(\dot{q}_t \cdot p_t - q_t \cdot \dot{p}_t) + \frac{i}{\hbar}(\dot{q}_t \cdot \hat{P} + \dot{p}_t \hat{Q}) \right).$$

L'équation vérifiée par f_z devient donc

$$i\partial_t f_z(t) = \Lambda_{\hbar}^{-1} T_{\hbar}(z_t)^{-1} \left(\frac{1}{\hbar} \dot{\delta}_z(t) - \frac{1}{2\hbar} (\dot{q}_t \cdot p_t - q_t \cdot \dot{p}_t) - \frac{1}{\hbar} (\dot{q}_t \cdot \hat{P} + \dot{p}_t \cdot \hat{Q}) + \frac{1}{\hbar} \hat{H} \right) T_{\hbar}(z_t) \Lambda_{\hbar} f_z(t)$$

Or, on a, par le théorème d'Egorov, $\Lambda_{\hbar}^{-1} T_{\hbar}(z_t)^{-1} \hat{H} T_{\hbar}(z_t) \Lambda_{\hbar} = \text{Op}_{\hbar=1}^w(H_t(z_t + \sqrt{\hbar}X))$. En développant en série l'hamiltonien H autour de z_t , et en posant pour j, k entiers

$$K_j(t; X) = \sum_{|\gamma|=j} \frac{1}{\gamma!} \partial_X^\gamma H_t(z_t) X^\gamma$$

et

$$R_z^{(k)}(t; x) = \left(H_t(z_t + \sqrt{\hbar}X) - \sum_{j < k} \hbar^{j/2} K_j(t; X) \right)$$

on obtient

$$i\partial_t f_z(t) = \frac{1}{\hbar} \underbrace{\left(\dot{\delta}_z(t) - \frac{1}{2} (\dot{q}_t \cdot p_t - q_t \cdot \dot{p}_t) + H_t(z_t) \right)}_A - \underbrace{\left(\sqrt{\hbar} (\dot{q}_t \cdot \hat{P} + \dot{p}_t \cdot \hat{Q}) + \sqrt{\hbar} (\partial_x H_t(z_t) \cdot \hat{Q} + \partial_\xi \cdot \hat{P}) \right)}_B + \text{Op}_{\hbar=1}^w(K_2(t; X)) + \hbar^{-1} \text{Op}_{\hbar=1}^w(R_z^{(3)}(t; X)).$$

On annule alors le terme A en posant

$$\delta_z(t) = \int_0^t (p_s \cdot q_s - H_s(z_s)) ds - \frac{q_t \cdot p_t - q \cdot p}{2}$$

et le terme B est nul puisque (q_t, p_t) décrit une trajectoire classique, i.e. est solution des équations du mouvement. Finalement, si on pose

$$g : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \pi^{-n/4} e^{-\frac{|x|^2}{2}},$$

on obtient que f_z est solution du problème d'évolution

$$\begin{cases} i\partial_t f_z(t) = \text{Op}_{\hbar=1}^w(K_2(t; X)) + \hbar^{-1} \text{Op}_{\hbar=1}^w(R_z^{(3)}) \\ f_z(0) = g. \end{cases}$$

On remarque alors que, $K_2(t; X)$ étant quadratique, cette équation est une perturbation d'ordre $\sqrt{\hbar}$ d'une équation de Schrödinger avec hamiltonien quadratique ($\hbar = 1$). Considérons alors $f_z(t)$ comme une perturbation de la solution de l'équation non perturbée. Si $F(t)$ est le flot symplectique associé à $K_2(t; X)$ et si $U_q(t, 0)$ est le propagateur associé, la solution s'écrit $U_q(t, 0)g$. On cherche alors f_z sous la forme $f_z(t) = U_q(t, 0)b(t)g$. L'équation vérifiée par b est donc

$$\begin{cases} i\partial_t b(t, x)g(x) = \text{Op}_{\hbar=1}^w \left(R_z^{(3)}(t; F(t) \cdot X) \right) (b(t)g)(x) \\ b(0, x) = 1. \end{cases}$$

Puisque $R_z^{(3)}(t; X)$ admet un développement en $\sqrt{\hbar}$, on cherche b sous la forme

$$b(t, x) = \sum_{j \geq 0} \hbar^{j/2} b_j(t, x).$$

En remplaçant et en identifiant les puissances de $\sqrt{\hbar}$, on obtient que les b_j sont déterminés par les relations

$$\begin{cases} i\partial_t b_j(t, x)g(x) = \sum_{k+l=j+2+l, l \geq 3} \text{Op}_{\hbar=1}^w(K_l(t, F(t) \cdot X))(b(t, \cdot)g)(x) \\ \forall t \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n b_0(t, x) = 1 \\ \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall l \geq 1, b_j(0, x) = 0. \end{cases}$$

Une conséquence directe de ceci, considérant la forme des K_l , est que les $b_j(t, x)$ sont polynomiaux en x . Après estimations des termes de restes, on obtient alors le théorème qui suit.

Theorem 4.1.24. *Sous les hypothèses et avec les notations ci-dessus, pour ψ_z^N comme suit*

$$\psi_z^N = e^{i\delta_z(t)/\hbar} D(z_t) \Lambda_{\hbar} \hat{U}(t) \left(\sum_{j=0}^N b_j(t)g \right), \quad (4.10)$$

on a

$$i\hbar\partial_t \psi_z^N = \hat{H} \psi_z^N(t) + \mathcal{O}_{L^2}(\hbar^{(N+3)/2})$$

l'estimation de l'erreur étant uniforme sur tout intervalle de temps borné.

Dans le cas sous quadratique, où les dérivées d'ordre supérieur à 2 sont bornées, i.e. dans la classe $S(1)$, la preuve de ce théorème est essentiellement faite ci-dessus. Par le calcul, on montre, en utilisant la formule de Taylor avec reste intégral, que

$$i\hbar\partial_t \psi_z^N - \hat{H} \psi_z^N = i\hbar e^{i\delta_z(t)} D(z_t) \Lambda_{\hbar} \hat{U}(t) [\text{Op}_1^W(\hbar^{(N+1)/2} R(t; X)) b(t, \cdot)g](x)$$

avec R une fonction continue en t , ne faisant intervenir que des dérivées de H d'ordre au moins 2, ce qui implique $R \in S(1)$. On conclut par application du théorème de Caldéron Vaillancourt. En ce qui concerne le cas général, on renvoie à [60]. On y trouve aussi des estimations plus fortes pour des temps non seulement finis sous des hypothèses plus fortes sur la famille d'hamiltoniens H_t .

4.2 Une classe générale d'états cohérents et les résultats de propagation afférants

La section qui suit est une partie de l'article [6]. On y détaille la définition de la classe d'états utilisée dans le Chapitre 5 pour l'étude de la propagation magnétique, ainsi que leur propagation sous des hamiltoniens généraux. On y aborde aussi la question de leur localisation via des estimations des Wigner.

The goal of this section is to introduce a class of 'coherent states', which is large enough to contain the usual ones (such as the *Gaussian* coherent states and the *squeezed* ones — see for instance [11]), but also more flexible, allowing to replace exponential localization by a softer Schwartz-like 'rapid decay'. As the following discussion holds in any dimension, in this paper we will not limit ourselves to the dimension 2, but we will consider instead the general dimension n . Recall that the Schwartz space $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ has the Fréchet topology induced by the seminorms

$$p_{m,N}(f) := \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq m \\ \beta \in \mathbb{N}^n, |\beta| \leq N}} |x^\beta \partial^\alpha f(x)|, \quad m, N \in \mathbb{N}. \quad (4.11)$$

4.2.1 Definition of the class

We consider first $\mathfrak{s}^{[n]}$, the set of shapes of coherent states defined as follows.

Definition 4.2.1. We say that $f_{\hbar} \in \mathfrak{s}^{[n]}$ if and only if one can find $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ with $\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 1$, a family $(g_{\hbar})_{\hbar \in (0, \hbar_0)} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ with seminorms uniformly bounded with respect to \hbar , and a real number $\beta > 0$ such that

$$f_{\hbar} = f + \hbar^\beta g_{\hbar}.$$

In the definition below, we use the following unitary operators on $L^2(\mathbb{R}^n)$: the rescaling operator

$$(\Lambda_{\hbar}u)(x) = \frac{1}{\hbar^{n/4}}u\left(\frac{x}{\sqrt{\hbar}}\right)$$

and the translation operator

$$\forall z = (q, p) \in \mathbb{R}^{2n}, \quad (T_{\hbar}(z)u)(x) = e^{-\frac{i}{2\hbar}q \cdot p} e^{\frac{i}{\hbar}x \cdot p} u(x - q).$$

Definition 4.2.2. A coherent state φ_{\hbar} in the class $\mathfrak{C}^{[n]}$ is given by its center z in the phase space $\mathbb{R}_q^2 \times \mathbb{R}_p^2$, a phase $\delta \in \mathbb{R}$ and a shape $\mathfrak{f}_{\hbar} \in \mathfrak{s}^{[n]}$ by the formula

$$\varphi_{\hbar} = e^{-i\delta/\hbar} T_{\hbar}(z) \Lambda_{\hbar} \cdot \mathfrak{f}_{\hbar}.$$

In other words, we have

$$\mathfrak{C}^{[n]} := \left\{ \varphi_{\hbar} = e^{-i\delta/\hbar} T_{\hbar}(z) \Lambda_{\hbar} \cdot \mathfrak{f}_{\hbar} \mid \delta \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}^{2n}, \mathfrak{f}_{\hbar} \in \mathfrak{s}^{[n]} \right\}.$$

We will denote $\mathfrak{C} := \mathfrak{C}^{[2]}$. In this text, unless explicitly stated, the expression ‘coherent state’ will always refer to an element of \mathfrak{C} . This definition generalizes the ones in [25] or [13] that only allow a \hbar independent part in the shape \mathfrak{f}_{\hbar} . In [52, 48], the author uses a full expansion in $\hbar^{1/2}$ for the shape in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ in the Borel sense. In this paper, the shape of the coherent state admits an expansion at the first order in any \hbar^{β} in the shape, $\beta > 0$, bounded in \hbar in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Finally, an interesting thing in this definition is that, using results in [11, 13, 61], under short-time propagation this class must remain stable. This point will be dealt with in what follows.

4.2.2 Propagation results

A first and natural question is ‘*How is such a coherent state propagated for finite times?*’. The propagation of coherent states has been widely studied over the last few decades. A lot of results are related to approximation of the propagation of coherent states by sums of coherent states whose parameters depend on time. In [25, 26, 27] we find such propagation results for finite times and for Gaussian like coherent states, defined as the squeezed states in [13]. In [28, 29], the authors investigate the propagation for longer times, reaching Ehrenfest times, i.e. times of order $|\log(\hbar)|$ and the bounds in these approximations are precised in [11] in terms of the linearized flow around the underlying classical dynamics, using the well-known propagation of purely Gaussian coherent states through quadratic Hamiltonians and the theory of metaplectic operators. One can find a precise review of the quadratic propagation of coherent states in [60, 48]. In [73] the authors investigate expansion in power of \hbar instead of $\hbar^{1/2}$ of the dynamics of coherent states defined in the formalism of Lagrangian states. Nevertheless, due to the analysis of the turning points, this study holds for short times in the propagation. Finally, we can state the work done in [51, 52] where the authors use coherent states and their propagation in order to build quasimodes for general Schrodinger operators

We now present some facts about the propagation of coherent states in the class $\mathfrak{C}^{[n]}$, and some Schwartz estimates of these propagations. Our goal is not to approximate the propagation by expansions of coherent states but, because of the general definition of the shape \mathfrak{f}_{\hbar} , to turn these results into a stability property of the class through finite time propagation. We also give estimates on these propagations. To do so, it will be convenient to introduce the semiclassical Sobolev spaces, which are more suitable for pseudodifferential computations. We recall here their definition, and refer to [74, Chapter 8] for a more detailed presentation.

An order function on \mathbb{R}^{2n} is a function $m : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ for which there is an integer N and a constant $C > 0$ such that for any $X, Y \in \mathbb{R}^{2n}$

$$m(X) \leq C \langle X - Y \rangle^N m(Y)$$

where $\langle X \rangle := (1 + \|X\|^2)^{1/2}$, $\|\cdot\|$ denoting the euclidian norm on \mathbb{R}^n (see for instance [15, Definition 7.4]). The symbol class associated with this function is

$$S(m) := \left\{ a \in C^{\infty}(\mathbb{R}^{2n}; \mathbb{R}) \mid \forall \alpha \in \mathbb{N}^{2n}, \exists C_{\alpha} > 0, \forall X \in \mathbb{R}^{2n}, |\partial^{\alpha} a(X)| \leq C_{\alpha} m(X) \right\}.$$

One can find an order function \tilde{m} such that $S(\tilde{m}) = S(m)$ and $\tilde{m} \in S(\tilde{m})$; therefore we will always assume that the order function m lies in its own class, i.e.

$$m \in S(m). \quad (4.12)$$

Given an ‘observable’ $a \in S(m)$, its Weyl quantization is the operator

$$[\text{Op}_\hbar^w(a)\psi](x) := \frac{1}{(2\pi\hbar)^n} \iint_{\mathbb{R}^{2n}} e^{\frac{i}{\hbar}(x-y)\eta} a\left(\frac{x+y}{2}, \eta\right) \psi(y) dy d\eta$$

for $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Let $g := \log(m)$ and $g^w := \text{Op}_\hbar^w(g)$; the exponential $e^{\pm g^w}$ is a pseudodifferential operator with symbol $c_\pm \in S(m)$.

Definition 4.2.3. The generalized Sobolev space associated with m is given by

$$\mathbf{H}_\hbar(m) := \left\{ u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \mid e^{g^w} u \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n) \right\}$$

and the norm on $\mathbf{H}_\hbar(m)$ is defined by

$$\|u\|_{\mathbf{H}_\hbar(m)} = \|e^{g^w} u\|_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)}.$$

We have the following equivalence of seminorms.

Lemma 4.2.4. *Let p be a Schwartz seminorm. One can find two order functions m and \tilde{m} satisfying (4.12) and $C > 0$ such that for any $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ and $\hbar \in (0, 1]$,*

$$\frac{1}{C} \|u\|_{\mathbf{H}_\hbar(m)} \leq p(u) \leq C \|u\|_{\mathbf{H}_\hbar(\tilde{m})}.$$

Operators with a symbol in $S(m)$ map the Schwartz space to itself and, more precisely, the continuity between semiclassical Sobolev spaces is given by the following proposition.

Proposition 4.2.5. *Given two order functions m_1, m_2 , if $a \in S(m_1)$, then*

$$\text{Op}_\hbar^w(a) : \mathbf{H}_\hbar(m_2) \rightarrow \mathbf{H}_\hbar\left(\frac{m_2}{m_1}\right)$$

defines a continuous operator uniformly for $\hbar \in (0, 1]$, such that as $\hbar \rightarrow 0$

$$\|\text{Op}_\hbar^w(a)\|_{\mathbf{H}_\hbar(m_2) \rightarrow \mathbf{H}_\hbar(m_2/m_1)} = \mathcal{O}(1).$$

The following well-known (and straightforward) lemma will be repeatedly used to deal with the $\sqrt{\hbar}$ -localization of coherent states.

Lemma 4.2.6. *Let $c \in S(m)$, for some order function m on \mathbb{R}^{2n} . Then*

$$(T_\hbar(z)\Lambda_\hbar)^{-1} \text{Op}_\hbar^w(c) T_\hbar(z)\Lambda_\hbar = \text{Op}_{\hbar=1}^w(c_1),$$

where $c_1(X) := c(z + \sqrt{\hbar}X)$ (and hence $c_1 \in S(m)$).

We can now prove some propagator estimates.

Lemma 4.2.7. *Let $z \in \mathbb{R}^{2n}$ and $\hbar > 0$. Then for any $f, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, for any order function ν on \mathbb{R}^{2n} ,*

$$\|T_\hbar(z)\Lambda_\hbar f\|_{\mathbf{H}_\hbar(\nu)} \leq C_1 \|f\|_{\mathbf{H}_1(\nu)}$$

and

$$\left\| (T_\hbar(z)\Lambda_\hbar)^{-1} \varphi \right\|_{\mathbf{H}_1(\nu)} \leq C_2 \|\varphi\|_{\mathbf{H}_\hbar(\nu)}$$

with C_1, C_2 independent of \hbar , and $\mathbf{H}_1(\nu) := \mathbf{H}_{\hbar=1}(\nu)$.

Démonstration. Let f, z, ν as above. Let $\gamma := \log(\nu)$, and $\gamma^w := \text{Op}_h^w(\gamma)$, $\gamma_1^w := \text{Op}_{h=1}^w(\gamma)$. Then, using the unitarity of $T_h(z)\Lambda_h$,

$$\|T_h(z)\Lambda_h f\|_{\mathbb{H}_h(\nu)} = \left\| (T_h(z)\Lambda_h)^{-1} e^{\gamma^w} T_h(z)\Lambda_h e^{-\gamma_1^w} e^{\gamma_1^w} f \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Since $e^{\pm\gamma^w} = \text{Op}_h^w(c^\pm)$ with $c^\pm \in S(\nu^{\pm 1})$, Lemma 4.2.6 gives

$$(T_h(z)\Lambda_h)^{-1} e^{\gamma^w} T_h(z)\Lambda_h = \text{Op}_{h=1}^w(c_1)$$

with $c_1 : X \mapsto c(z + \sqrt{h}X)$, $c_1 \in S(\nu)$. Therefore,

$$(T_h(z)\Lambda_h) e^{\gamma^w} T_h(z)\Lambda_h e^{-\gamma_1^w} = \text{Op}_{h=1}^w(c_1) e^{-\gamma_1^w}$$

is bounded on $L^2(\mathbb{R})$ because it is a pseudodifferential operator with a symbol in $S(1)$. Finally,

$$\|T_h(z)\Lambda_h f\|_{\mathbb{H}_h(\nu)} \leq \|\text{Op}_{h=1}^w(c_1) e^{-\gamma_1^w}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \|f\|_{\mathbb{H}_1(\nu)}.$$

For the reverse inequality, we can write

$$\left\| (T_h(z)\Lambda_h)^{-1} \varphi \right\|_{\mathbb{H}_1(\nu)} = \|T_h(z)\Lambda_h e^{\gamma_1^w} (T_h(z)\Lambda_h)^{-1} e^{-\gamma^w} e^{\gamma^w} \varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

But,

$$T_h(z)\Lambda_h e^{\gamma_1^w} (T_h(z)\Lambda_h)^{-1} = \text{Op}_h^w(c_{-1})$$

with

$$c_{-1} : X \mapsto c\left(\frac{X - z}{\sqrt{h}}\right),$$

The symbol c_{-1} belongs to the ‘limit’ class $S_{1/2}(\nu)$ (see [74, Chapitre 4] for a definition and the related theory). Thus, $\text{Op}_h^w(c_{-1})\text{Op}_h^w(c^-)$ is a pseudodifferential operator with a symbol in $S_{1/2}(1)$, and from the Calderon-Vaillancourt theorem it defines a bounded operator on $L^2(\mathbb{R}^n)$. Finally,

$$\|(T_h(z)\Lambda_h)^{-1} \varphi\|_{\mathbb{H}_1(\nu)} \leq \|\text{Op}_h^w(c_{-1}) e^{-\gamma^w}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \|\varphi\|_{\mathbb{H}_h(\nu)},$$

which concludes the proof. \square

We prove now the following continuity property of bounded propagators on generalized Sobolev spaces.

Lemma 4.2.8. *Let $(H_t)_{t \in [0,1]}$ be a real-valued time-dependent family of Hamiltonians. We assume $(H_t)_{t \in [0,1]}$ to be continuous in time and to lie in $S(1)$ uniformly in time. Then there exists a family $(U_h(t, s))_{t, s \in [0,1]}$ of unitary operators on $L^2(\mathbb{R}^n)$ satisfying*

1. $U_h(0, 0) = \text{id}_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ and for any $r \in [0, 1]$,

$$U_h(t, s) = U_h(t, r)U_h(r, s);$$

2. $U_h(\cdot, \cdot)$ is strongly continuous on $L^2(\mathbb{R}^n)$;

3. for any $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ and any $s \in [0, 1]$, the map $t \mapsto U_h(t, s)\psi$ is differentiable, and satisfies

$$i\hbar \partial_t U_h(t, s)\psi = \text{Op}_h^w(H_t)U_h(t, s)\psi \quad \text{in } L^2(\mathbb{R}^n), \quad (4.13)$$

and this family is unique. Moreover, for any order function ν , for any $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, we have

$$\|U_h(t, 0)\varphi\|_{\mathbb{H}_h(\nu)} \leq C \|\varphi\|_{\mathbb{H}_h(\nu)}$$

where C is \hbar -independent.

Démonstration. We consider the equation

$$i\hbar\partial_t U_\hbar(t,0)\varphi = \text{Op}_\hbar^w(H_t)U_\hbar(t,0)\varphi \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \quad (4.14)$$

Let ν be an order function on $T^*\mathbb{R}^n$. Since $H_t \in S(1)$ uniformly for $t \in [0,1]$, $\text{Op}_\hbar^w(H_t)$ defines a continuous linear operator on $H_\hbar(\nu)$ with a uniform bound for $t \in [0,1]$. So, considering (4.14) as an EDO with values in $H_\hbar(\nu)$, the Cauchy-Lipschitz theorem gives us a unique solution $(U_\hbar(t,0)\varphi) \in \mathcal{C}^1([0,1], H_\hbar(\nu))$, with $(U_\hbar(t,s))_{(t,s) \in [0,1]}$ satisfying the above assumptions (1), (2) and (3). One should remark that $U_\hbar(t,0)$ then defines an operator in $\mathcal{C}^1([0,1], \mathcal{L}(H_\hbar(\nu)))$, that is unitary for $\nu = 1$, i.e. on $L^2(\mathbb{R}^n)$. In order to prove the announced estimate, let now $\gamma := \log(\nu)$ and $\gamma^w := \text{Op}_\hbar^w(\gamma)$. We set also $U_\hbar^\gamma := e^{\gamma^w} U_\hbar e^{-\gamma^w}$, and $\hat{H}_t^\gamma := e^{\gamma^w} \text{Op}_\hbar^w(H_t) e^{-\gamma^w}$, so that $U_\hbar^\gamma \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n)))$ and \hat{H}_t^γ is a pseudodifferential operator with symbol in $S(1)$ such that

$$i\hbar\partial_t U_\hbar^\gamma(t,0) = \hat{H}_t^\gamma U_\hbar^\gamma(t,0) \quad \text{and} \quad -i\hbar\partial_t U_\hbar^\gamma(t,0)^* = U_\hbar^\gamma(t,0)^* \hat{H}_t^{-\gamma}.$$

Then we have for $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned} i\hbar\partial_t \|U_\hbar^\gamma(t,0)\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 &= \left\langle U_\hbar^\gamma(t,0)^* e^{-\gamma^w} [e^{2\gamma^w}, \text{Op}_\hbar^w(H_t)] e^{-\gamma^w} U_\hbar^\gamma(t,0)\varphi_0, \varphi_0 \right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &= \hbar \langle \eta^w(t) U_\hbar^\gamma(t,0)\varphi, U_\hbar^\gamma(t,0)\varphi \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} \end{aligned}$$

where $\eta^w(t) := \text{Op}_\hbar^w(\eta(t)) = \frac{i}{\hbar} e^{-\gamma^w} [e^{2\gamma^w}, \text{Op}_\hbar^w(H_t)] e^{-\gamma^w}$ whose symbol $\eta(t)$ belongs to $S(1)$ uniformly in time. Therefore $\eta^w(t) U_\hbar^\gamma(t,0)\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$, which justifies the above computation. Then by Proposition 4.2.5, we have

$$\partial_t \|U_\hbar^\gamma(t,0)\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \leq \|\eta^w(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)} \|U_\hbar^\gamma(t,0)\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2$$

which implies

$$\|U_\hbar^\gamma(t,0)\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \left(\exp \int_0^1 \|\eta^w(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)} ds \right) \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Considering now $\psi \in H_\hbar(\nu)$ and $\varphi = e^{\gamma^w} \psi$ proves the result. \square

We now turn to the propagation of coherent states for finite times. The following proposition generalizes to the class $\mathfrak{C}^{[n]}$ the result obtained by Robert for Gaussian states (see [13, Section 4.3.1]).

Proposition 4.2.9. *Let $(H_t)_{t \in [0,1]}$ and the associated propagator $(U_\hbar(t,s))_{t,s \in [0,1]}$ be as in Lemma 4.2.8. Consider the associated Hamiltonian flow $\Phi_H : [0,1] \times \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$. Then, for a coherent state $\varphi_\hbar \in \mathfrak{C}^{[n]}$ centered at $z_0 \in \mathbb{R}^{2n}$, the state $\psi_\hbar := U_\hbar(1,0)\varphi_\hbar$ is still a coherent state in $\mathfrak{C}^{[n]}$, centered at $z_1 := \Phi_H^{t=1}(z_0)$.*

Démonstration. Let

$$\varphi_\hbar(t) = U_\hbar(t,0)\varphi_\hbar \quad \text{and} \quad \psi_\hbar = \varphi_\hbar(1).$$

Since $\varphi_\hbar \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, from Lemma 4.2.8 we know that, for all t in $[0,1]$, $\varphi_\hbar(t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Because $\varphi_\hbar \in \mathfrak{C}^{[n]}$, there are $f_\hbar^0 \in \mathfrak{s}^{[n]}$, $\delta_0 \in \mathbb{R}$ and $z_0 \in \mathbb{R}^{2n}$ such that

$$\varphi_\hbar = e^{-i\delta_0/\hbar} T_\hbar(z_0) \Lambda_\hbar(f + \hbar^\beta g_\hbar), \quad (4.15)$$

$\beta > 0$, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ and $(g_\hbar)_{\hbar \in (0,\hbar_0)} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (see Definition 4.2.2). Let $(z_t)_{0 \leq t \leq 1}$ denote the classical evolution from z_0 led by the time-dependent Hamiltonian $(H_t)_{0 \leq t \leq 1}$,

$$\forall t \in [0,1], \quad z_t = \Phi_H^t(z_0).$$

As $(H_t)_{t \in [0,1]}$ lies uniformly in time in $S(1)$, the corresponding Hamiltonian vector field is uniformly bounded in times, that ensures us the global existence of the flow $(\Phi_H^t)_{t \in [0,1]}$. Introducing the action integral

$$\delta_t := \delta_0 + \int_0^t (p_s \cdot \dot{q}_s - H_s(z_s)) ds - \frac{1}{2} (q_t \cdot p_t - q_0 \cdot p_0),$$

we define

$$v_h(t) := e^{-i\delta_t/\hbar} \Lambda_h^{-1} T_h(-z_t) U_h(t, 0) \varphi_h(0). \quad (4.16)$$

We establish the propagation equation of $v_h(t)$. Noting that $\forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$\partial_t (T(z_t) \psi)(x) = \left[T_h(-z_t) \left(-\frac{i}{\hbar} \left(\frac{\dot{q}_t p_t - q_t \dot{p}_t}{2} + \dot{p}_t \cdot x + \dot{q}_t \cdot i\hbar \nabla_x \right) \right) \psi \right] (x)$$

and by the differentiability property (4.13),

$$\begin{aligned} i\partial_t v_h(t) = \frac{1}{\hbar} \left[\Lambda_h^{-1} T_h(-z_t) \text{Op}_h^w(H_t) T_h(z_t) \Lambda_h \right. \\ \left. - \Lambda_h^{-1} \left(\text{Op}_h^w(x) \partial_q H_t(z_t) - \text{Op}_h^w(\xi) \partial_p H_t(z_t) \right) \Lambda_h - H_t(z_t) \right] v_h(t) \end{aligned}$$

where $(x, \xi) = X \in \mathbb{R}^{2n}$. Since

$$\Lambda_h^{-1} T_h(-z_t) \text{Op}_h^w(H_t) T_h(z_t) \Lambda_h = \text{Op}_h^w(X \mapsto H_t(z_t + \sqrt{\hbar} X)),$$

we are naturally led to Taylor expanding the function $X \mapsto H_t(z_t + \sqrt{\hbar} X)$ around the point z_t ; let

$$K_2(t, X) := X^T \text{Hess}(H_t, z_t) X$$

and let $R_h^{(3)}$ be the integral remaining term of order 3 in this Taylor expansion. We obtain

$$\begin{cases} i\partial_t v_h(t) = \text{Op}_{\hbar=1}^w(K_2(t, X) + \sqrt{\hbar} R_h^{(3)}(t, X)) v_h(t) \\ v_h(t=0) = f + \hbar^\beta g_h \end{cases}$$

Recall, from the definition (4.16) of $v_h(t)$, that this equation admits a propagator $P_1(\cdot, \cdot)$ given by

$$P_1 : (t, s) \in [0, 1]^2 \mapsto P_1(t, s) = (T_h(z_t) \Lambda_h)^{-1} U_h(t, s) T_h(z_t) \Lambda_h.$$

From this formula, P_1 inherits the group and strong continuity properties of U_h . Moreover, it defines a map from $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ to itself that satisfies, for any $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$i\partial_t P_1(t, 0)v = \text{Op}_{\hbar=1}^w(K_2 + \sqrt{\hbar} R_h^{(3)})v,$$

and from Lemma 4.2.7 and Lemma 4.2.8, for any order function ν ,

$$\|P_1(t, 0)v\|_{\mathbb{H}_1(\nu)} \leq C \|v\|_{\mathbb{H}_1(\nu)},$$

where C is time and \hbar independent. We consider now the following propagation equation in $v^{(0)}$:

$$\begin{cases} i\partial_t v^{(0)}(t) = \text{Op}_{\hbar=1}^w(K_2(t, \cdot)) v^{(0)}(t) \\ v^{(0)}(t=0) = f \end{cases}. \quad (4.17)$$

Since it is defined by a time-dependent quadratic Hamiltonian, we may apply the result of [11, Theorem 2.8], which asserts that the propagator is well-defined as long as the classical flow z_t exists. Hence for $t \in [0, 1]$, Equation (4.17) admits a propagator $(P_q(t, s))_{t, s \in [0, 1]}$ (where the subscript q stands for ‘quadratic’), which is smooth in t and unitary on $L^2(\mathbb{R}^n)$, satisfying

$$P_q(t, r) P_q(r, s) = P_q(t, s).$$

In order to prove that P_q acts on $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, we will use Gaussian coherent states. Let G_0 be the normalized Gaussian on \mathbb{R}^n ,

$$G_0(X) = \frac{1}{\pi^{n/4}} e^{-\frac{x \cdot x}{2}}$$

and define

$$G_{\tilde{z}} := T_{\hbar=1}(\tilde{z})G_0.$$

Since $P_q(t, 0)f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, the resolution of identity property of Gaussian coherent states gives

$$P_q(t, 0)f = \int_{\mathbb{R}^{2n}} \langle f, P_q(t, 0)^* G_{\tilde{z}} \rangle G_{\tilde{z}} d\tilde{z}. \quad (4.18)$$

From [13, Chapter 3, Theorem 16], there is a differentiable map

$$t \in [0, 1] \mapsto \Gamma_t \in \Pi_n^+$$

where Π_n^+ is the Siegel space of complex and symmetric matrices with positive-definite imaginary part, such that,

$$P_q(t, 0)G_{\tilde{z}} = G_{\tilde{z}_t}^{\Gamma_t}.$$

Here we have denoted, for $\Gamma \in \Pi_n^+$,

$$G_0^\Gamma(X) = a_\Gamma e^{-i\frac{x \cdot \Gamma x}{2}},$$

where a_Γ is the L^2 -normalization constant and \tilde{z}_t corresponds to the Hamiltonian flow of the quadratic Hamiltonian starting from \tilde{z} . Since $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ we can, for any $t \in [0, 1]$, integrate by parts and obtain, for any integer $N > 0$

$$\langle f, G_{\tilde{z}_t} \rangle_{L^2} \leq \frac{C_N(f, \Gamma_t)}{\langle \tilde{z}_t \rangle^N}.$$

This ensures, from usual theorems of derivation under the integral (4.18), that

$$[0, 1] \ni t \mapsto P_q(t, 0)f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

is continuous. We now prove that such a quadratic propagator satisfies the Schwartz estimates as in Lemma 4.2.8. To do so, considering ν an order function, $\gamma := \log(\nu)$, and $\gamma_1^w := \text{Op}_{\hbar=1}^w(\gamma)$, we have for any Schwartz function f ,

$$\|P_q(t, 0)f\|_{\mathbb{H}_1(\nu)} = \|e^{\gamma_1^w} P_q(t, 0)f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \iint_{\mathbb{R}^{2n}} |\langle f, G_{\tilde{z}_t}^{\Gamma_t} \rangle| \|e^{\gamma_1^w} G_{\tilde{z}}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} d\tilde{z}.$$

A computation gives (see Proposition 4.2.12) that there is an integer l depending only on the order function ν such that

$$\|e^{\gamma_1^w} G_{\tilde{z}}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C \langle \tilde{z} \rangle^l,$$

where C is a constant depending only on ν ; hence one can find an order function $\tilde{\nu}$ such that

$$\|P_q(t, 0)f\|_{\mathbb{H}_1(\nu)} \leq C(\nu) \|f\|_{\mathbb{H}_1(\tilde{\nu})}.$$

So, Equation (4.17) admits a propagator family $(P_q(t, s))_{t, s \in [0, 1]}$ that satisfies the same Schwartz continuity property as P_1 . For $t \in [0, 1]$, let

$$v^{(0)}(t) := P_q(t, 0)f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

be the solution to (4.17); notice that $v^{(0)}(t)$ does not depend on \hbar and satisfies, for any $t \in [0, 1]$, $\|v^{(0)}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|v^{(0)}(0)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$. Using now Duhamel's principle, we get

$$v_\hbar(t) - v^{(0)}(t) = \hbar^\beta P_1(t, 0) g_\hbar - i\sqrt{\hbar} \int_0^t P_1(t, s) \text{Op}_{\hbar=1}^w(R_\hbar^{(3)}) P_q(s, 0) f ds.$$

From Lemma 4.2.8, as the Schwartz seminorms of $(g_{\hbar})_{\hbar>0}$ are bounded, the same holds for $(P_1(t, 0)g_{\hbar})_{\hbar>0}$ for any $t \in [0, 1]$. Since $H_t \in S(1)$, it follows from Taylor's formula that $R_{\hbar}^{(3)} \in S(\langle X \rangle^2)$, uniformly for $t \in [0, 1]$. Therefore we may apply Lemma 4.2.4 and Proposition 4.2.5 to conclude, from the continuity of $(P_1(t, s))_{t,s \in [0,1]}$ and $(P_q(s, 0))_{s \in [0,1]}$ with respect to (t, s) in $[0, 1]$, that the integral

$$\int_0^t P_1(t, s) \text{Op}_{\hbar=1}^w(R_{\hbar}^{(3)})P_q(s, 0) f ds$$

is uniformly bounded in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ for all $t \in [0, 1]$ and $\hbar \in (0, 1]$. Finally, we have

$$v_{\hbar}(1) = v^{(0)}(1) + \hbar^{\tilde{\beta}} \tilde{g}_{\hbar}$$

where

$$\tilde{g}_{\hbar} := \hbar^{\beta - \tilde{\beta}} P_1(t, 0)g_{\hbar} - i\hbar^{1/2 - \tilde{\beta}} \int_0^t P_1(t, s) \text{Op}_{\hbar=1}^w(R_{\hbar}^{(3)})P_q(s, 0) f ds$$

and $\tilde{\beta} := \min(1/2, \beta)$, which proves $v_{\hbar}(1) \in \mathfrak{s}^{[n]}$ (actually we obtain $v_{\hbar}(t) \in \mathfrak{s}^{[n]}$ for any $t \in [0, 1]$). Finally,

$$\psi_{\hbar} = e^{i\delta_1/\hbar} T_{\hbar}(z_1) \Lambda_{\hbar} v_{\hbar}(1)$$

where $\delta_1 := \delta_{t=1}$ and $z_1 := z_{t=1}$, which establishes the announced result. \square

Remark 4.2.10. The fact that the function f in (4.15) is normalized in L^2 is not relevant. Indeed, the proof still works for any shape function of the form $f_{\hbar} = f + \hbar^{\beta} g_{\hbar}$, where f is an \hbar -independent function of $L^2(\mathbb{R}^2)$, $\beta > 0$ and $(g_{\hbar})_{\hbar>0}$ is a family of functions in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ with bounded seminorms, uniformly with respect to $\hbar \in (0, 1]$.

We now develop some very useful tools on the study of the coherent state class we introduced earlier on, that is the Wigner transform.

4.2.3 Wigner transform of coherent states and applications

The main idea of the Wigner transform is to take advantage of the strong localization of coherent states (sometimes called 'peak states') to get estimates on pseudodifferential operators from the associated symbol. We refer to [20] for the definition below of the Wigner transform. In [60, 13], authors use fast decay properties of the Wigner transform of coherent states to get strong approximation results on the propagation of coherent states depending on the regularity of the generator of the propagation. Here, we will take advantage of the Schwartz property of our class of coherent states to prove some estimates on pseudodifferential operators for symbols class $S(m)$ for arbitrary large order functions m .

We consider a family $(\varphi_z)_{z \in \mathbb{R}^{2n}}$ of coherent states with the same shape : for any $z \in \mathbb{R}^{2n}$, $\varphi_z = T_{\hbar}(z) \Lambda_{\hbar} f_{\hbar}$, where f_{\hbar} is a given shape in $\mathfrak{s}^{[n]}$. Now, let $a \in S(m)$ a given symbol, with $m(z) \leq \langle z \rangle^l$ for an integer l . We have

$$\begin{aligned} \langle \text{Op}_{\hbar}^w(a) \varphi_z, \varphi_{z'} \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= \frac{2^n}{(2\pi\hbar)^n} \times \\ &\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{\frac{2i}{\hbar}(x-\tilde{y})\eta} a(\tilde{y}, \eta) e^{-\frac{i}{2\hbar}q p + \frac{i}{\hbar}p(2\tilde{y}-x)} f_{\hbar}\left(\frac{2\tilde{y}-x-q}{\sqrt{\hbar}}\right) d\tilde{y} d\eta e^{\frac{i}{2\hbar}q' p' - \frac{i}{\hbar}p' x} \overline{f_{\hbar}\left(\frac{x-q'}{\sqrt{\hbar}}\right)} dx, \end{aligned}$$

which leads to the following definition.

Definition 4.2.11. We define the Wigner function $\mathcal{W}_{z,z'}$ associated with the family $(\varphi_z)_{z \in \mathbb{R}^{2n}}$ of coherent states with shape $f_{\hbar} \in \mathfrak{s}^{[n]}$ as

$$\mathcal{W}_{z,z'}(y, \eta) = \frac{2^n}{\hbar^{n/2}} e^{\frac{i}{\hbar} \omega(Y - \frac{1}{2} z', z - z')} \times \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{2i}{\hbar} u \left(\eta - \frac{p+p'}{2} \right)} f_{\hbar} \left(\frac{y - \frac{q+q'}{2} - u}{\sqrt{\hbar}} \right) \overline{f_{\hbar} \left(\frac{y - \frac{q+q'}{2} + u}{\sqrt{\hbar}} \right)} du$$

where ω is the canonical symplectic form on \mathbb{R}^{2n}

$$\omega((a, b), (c, d)) = b \cdot c - a \cdot d$$

and where $Y := (y, \eta)$.

With this definition we have the following formula

$$\langle \text{Op}_{\hbar}^w(a) \varphi_z, \varphi_{z'} \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \frac{1}{(2\pi\hbar)^n} \int_{\mathbb{R}^{2n}} a(Y) \mathcal{W}_{z,z'}(Y) dY, \quad (4.19)$$

which highlights the Wigner function as a Kernel to compute the action of pseudodifferential operators on coherent states. Setting

$$\Psi_{\hbar} := (\hat{y}, u) \in \mathbb{R}^{2n} \mapsto f_{\hbar}(\hat{y} - u) \overline{f_{\hbar}(\hat{y} + u)},$$

Ψ_{\hbar} is a Schwartz function on \mathbb{R}^{2n} with all Schwartz seminorm uniformly bounded with $\hbar \in (0, \hbar_0)$ and we have the shorter expression

$$\mathcal{W}_{z,z'}(y, \eta) = \frac{2^n}{\hbar^{n/2}} e^{\frac{i}{\hbar} \omega(Y - \frac{1}{2} z', z - z')} \times \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{2i}{\hbar} u \left(\eta - \frac{p+p'}{2} \right)} \Psi_{\hbar} \left(\frac{u}{\sqrt{\hbar}}, \frac{y - \frac{q+q'}{2}}{\sqrt{\hbar}} \right) du.$$

The goal is to use the oscillating integral structure to show some fast decay with respect to $Y - \frac{z+z'}{2}$ and $z - z'$ and to prove the following key property for this article.

Proposition 4.2.12. *Let $a \in S(m)$ for an order function m on \mathbb{R}^{2n} satisfying for $l \in \mathbb{N}$, $C > 0$,*

$$\forall Y \in \mathbb{R}^{2n}, |m(Y)| \leq C \langle Y \rangle^l.$$

Let $(\varphi_z)_{z \in \mathbb{R}^{2n}}$ being a family of coherent states with shape $f_{\hbar} \in \mathfrak{s}^{[n]}$. Then we have for $\varepsilon > 0$, for $N, M \in \mathbb{N}$ large enough,

$$\|\text{Op}_{\hbar}^w(a) \varphi_z\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \leq \hbar^{-3n/2} C_{\varepsilon}(f_{\hbar}) \|f_{\hbar}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^{2-\varepsilon} \times \iint_{\mathbb{R}^{2n}} \iint_{\text{supp}(a)} \left\langle \frac{Y - \frac{z+z'}{2}}{\sqrt{\hbar}} \right\rangle^{-N} dY \left\langle \frac{z - z'}{\sqrt{\hbar}} \right\rangle^{-M} dz'$$

with

$$C_{\varepsilon}(f_{\hbar}) = \max_{\alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq K} \left(\|\partial_{\alpha} a(Y) \langle Y \rangle^{-l}\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^n)} \right) \sum_{i \in I} \prod_{j \in J} p_{i,j}(f_{\hbar})^{\delta_{i,j}} \quad (4.20)$$

where K is an integer depending on N and M and I, J finite sets depending only on N, M, l and ε , and with $p_{i,j}$ being some Schwartz seminorm, $\delta_{i,j} > 0$ depending on ε .

Remark 4.2.13. The parameter ε is necessary to handle the growth of the symbol a at infinity, by somehow ‘multiplying’ by f_{\hbar}^{ε} that decays very fast at infinity. That is the reason why we get an estimate by an ε depending constant and by $\|f_{\hbar}\|^{2-\varepsilon}$ and we can’t take $\varepsilon = 0$ in general. Nevertheless, one can remark that for $a \in S(1)$ it is possible to take $\varepsilon = 0$, because of the ‘non-growing’ property at infinity.

Démonstration. Applying Plancherel's theorem along with (4.19), we first get

$$\|\text{Op}_\hbar^w(a)\varphi_z\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \|\mathbf{f}_\hbar\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3n}} \iint_{\mathbb{R}^{2n}} \left| \iint_{\mathbb{R}^{2n}} a(Y) \mathcal{W}_{z,z'}(Y) dY \right|^2 dz'.$$

We now use the fact that the Wigner function is an oscillating integral. Noting that

$$\left\langle \frac{z-z'}{\sqrt{\hbar}} \right\rangle^{-2N} \times (1 - \hbar\Delta_Y)^N \cdot e^{\frac{i}{\hbar}\omega(Y - \frac{z+z'}{2}, z-z')} = e^{\frac{i}{\hbar}\omega(Y - \frac{z+z'}{2}, z-z')}$$

and, for any integer M ,

$$\left\langle \frac{\eta - \frac{p+p'}{2}}{\sqrt{\hbar}} \right\rangle^{-2M} \times (1 - \hbar\Delta_u)^M e^{\frac{2i}{\hbar}u \cdot (\eta - \frac{p+p'}{2})} = 2^M e^{\frac{2i}{\hbar}u \cdot (\eta - \frac{p+p'}{2})}$$

we get

$$\begin{aligned} \|\text{Op}_\hbar^w(a)\varphi_z\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \|\mathbf{f}_\hbar\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 &\leq \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3n}} \cdot \frac{2^{2n}}{\hbar^n} \times \\ &\iint_{\mathbb{R}^{2n}} \left[\iint_{\mathbb{R}^{2n}} \langle Y \rangle^l \left\langle \frac{z-z'}{\sqrt{\hbar}} \right\rangle^{-2N} \left\langle \frac{Y - \frac{z+z'}{2}}{\sqrt{\hbar}} \right\rangle^{-2M} \sum_{|k|=0}^{2N} 2^{2M} C_k \langle Y \rangle^{-l} |\partial_Y^k a(Y)| \times \right. \\ &\quad \left. \int_{\mathbb{R}^n} \left\langle \frac{y - \frac{q+q'}{2}}{\sqrt{\hbar}} \right\rangle^{2M} \left| (1 - \hbar\Delta_u)^M \Psi_\hbar^{[k]} \left(\frac{u}{\sqrt{\hbar}}, \frac{y - \frac{q+q'}{2}}{\sqrt{\hbar}} \right) \right| dudY \right]^2 dz' \end{aligned}$$

with

$$\Psi_\hbar^{[k]} \left(\frac{u}{\sqrt{\hbar}}, \frac{y - \frac{q+q'}{2}}{\sqrt{\hbar}} \right) = \sum_{0 \leq |j_k^1|, |j_k^2| \leq 2N} \tilde{C}_k \left(\frac{u}{\sqrt{\hbar}} \right)^{j_k^1} \partial_y^{j_k^2} \Psi_\hbar \left(\frac{u}{\sqrt{\hbar}}, \frac{y - \frac{q+q'}{2}}{\sqrt{\hbar}} \right)$$

constants \tilde{C}_k not depending on \hbar , for $k \in \mathbb{N}^{2n}$. As $a \in S(m)$, with $\forall Y \in \mathbb{R}^{2n} |m(Y)| \leq \langle Y \rangle^l$, we have

$$\sup_{0 \leq |k| \leq N} \|2^{2M} C_k \partial_Y^k a(Y) \langle Y \rangle^{-l}\|_{L^\infty(dY)} \leq C(l, M)$$

with $C(l, M)$ independent of \hbar . Moreover,

$$\frac{\langle Y \rangle^l}{\left\langle \frac{z-z'}{\sqrt{\hbar}} \right\rangle^{2N} \left\langle \frac{Y - \frac{z+z'}{2}}{\sqrt{\hbar}} \right\rangle^{2M}} \leq \frac{C^l \langle z \rangle^l}{\left\langle \frac{z-z'}{2} \right\rangle^{2N-l} \left\langle \frac{Y - \frac{z+z'}{2}}{\sqrt{\hbar}} \right\rangle^{2M-l}}.$$

Finally, setting

$$C_{l,M}(Y) = C(k, l, M) \times \sum_{|k|=0}^{2N} \int_{\mathbb{R}^n} \left\langle \frac{y - \frac{q+q'}{2}}{\sqrt{\hbar}} \right\rangle^{2M} \left| (1 - \hbar\Delta_u)^M \Psi_\hbar^{[k]} \left(\frac{u}{\sqrt{\hbar}}, \frac{y - \frac{q+q'}{2}}{\sqrt{\hbar}} \right) \right| du,$$

from Hölder inequality in Y variable, we get

$$\begin{aligned} \|\text{Op}_\hbar^w(a)\varphi_z\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \|\mathbf{f}_\hbar\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 &\leq C^{2l} \langle z \rangle^{2l} \cdot \frac{2^{2n}}{(2\pi\hbar)^{3n} \hbar^n} \times \\ &\iint_{\mathbb{R}^{2n}} \left[\iint_{\text{supp}(a)} \left(\left\langle \frac{z-z'}{\sqrt{\hbar}} \right\rangle^{2N-l} \left\langle \frac{Y - \frac{z+z'}{2}}{\sqrt{\hbar}} \right\rangle^{2M-l} \right)^{-2} dY \right] \times \\ &\quad \left[\iint_{\text{supp}(a)} |C_{l,M}(Y)|^2 dY \right] dz'. \end{aligned}$$

We now estimate

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} |C_{l,M}(Y)|^2 dY.$$

For more simplicity, we set

$$\hat{y} := y - \frac{q+q'}{2} \quad \hat{\eta} := \eta - \frac{p+p'}{2} \quad \hat{Y} := Y - \frac{z+z'}{2}$$

Noting that

$$\left\langle \frac{\hat{Y}}{\sqrt{\hbar}} \right\rangle^{-1} \leq \left\langle \frac{\hat{\eta}}{\sqrt{\hbar}} \right\rangle^{-1}$$

and that

$$\begin{aligned} \sum_{|k|=0}^{2N} \left\langle \frac{\hat{y}}{\sqrt{\hbar}} \right\rangle^{2M} (1 - \hbar \Delta_u)^M \Psi_{\hbar}^{[k]} \left(\frac{u}{\sqrt{\hbar}}, \frac{\hat{y}}{\sqrt{\hbar}} \right) = \\ \sum_{i,j \in \hat{I}} C^{i,j} \left(\frac{\hat{y}}{\sqrt{\hbar}} \right)^i \left(\frac{u}{\sqrt{\hbar}} \right)^j \partial^{\alpha_{i,j}} f_{\hbar} \left(\frac{u - \hat{y}}{\sqrt{\hbar}} \right) \overline{\partial^{\beta_{i,j}} f_{\hbar} \left(\frac{\hat{y} + u}{\sqrt{\hbar}} \right)} \end{aligned}$$

where the \hat{I} is a finite set and $C^{i,j}$ only depends on the integers k, N, M and l , but not on the shape f_{\hbar} , we get for $\delta > 0$ small enough

$$\begin{aligned} |C_{l,M}(Y)|^2 \leq \sum_{i,j \in \tilde{J}} \tilde{C}^{i,j} \left\langle \frac{\hat{\eta}}{\sqrt{\hbar}} \right\rangle^{-2\tilde{M}} p_{i,j} \left((v, w) \mapsto f_{\hbar} \left(\frac{v}{\sqrt{\hbar}} \right) f_{\hbar} \left(\frac{w}{\sqrt{\hbar}} \right) \right)^{2\delta} \times \\ \left[\left| \partial^{\alpha_{i,j}} f_{\hbar} \left(\frac{\cdot}{\sqrt{\hbar}} \right) \right|^{1-\delta} \star \left| \partial^{\beta_{i,j}} f_{\hbar} \left(\frac{\cdot}{\sqrt{\hbar}} \right) \right|^{1-\delta} \right]^2 (2\hat{y}) \end{aligned}$$

with again \tilde{J} a finite set and $\tilde{C}^{i,j} > 0$, these two only depending on the integers k, N, M and l , but not on the shape f_{\hbar} , and where \star is the convolution product. So, integrating, we have

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{2n}} |C_{l,M}(Y)|^2 dY \leq \sum_{i,j \in \tilde{J}} \tilde{C}^{i,j} \int_{\mathbb{R}^n} \left\langle \frac{\hat{\eta}}{\sqrt{\hbar}} \right\rangle^{-2\tilde{M}} d\eta \times \\ p_{i,j} \left(f_{\hbar} \left(\frac{\cdot}{\sqrt{\hbar}} \right) \right)^{2\delta} p_{i,j} \left(f_{\hbar} \left(\frac{\cdot}{\sqrt{\hbar}} \right) \right)^{2\delta} 2^{-n} \times \\ \left\| \partial^{\alpha_{i,j}} f_{\hbar}^{(1-\delta)} \left(\frac{\cdot}{\sqrt{\hbar}} \right) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \left\| \partial^{\beta_{i,j}} f_{\hbar}^{(1-\delta)} \left(\frac{\cdot}{\sqrt{\hbar}} \right) \right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^2 \end{aligned}$$

due to usual estimates on the convolution product. Noting that

$$\left\| \partial^{\alpha_{i,j}} f_{\hbar}^{(1-\delta)} \left(\frac{\cdot}{\sqrt{\hbar}} \right) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \leq \hbar^{-n/2} \|\partial^{\alpha_{i,j}} f_{\hbar}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^{2(1-2\delta)} \|\partial^{\alpha_{i,j}} f_{\hbar}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{2\delta}$$

and that

$$\left\| \partial^{\beta_{i,j}} f_{\hbar}^{(1-\delta)} \left(\frac{\cdot}{\sqrt{\hbar}} \right) \right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \hbar^{-n/2} \|\partial^{\beta_{i,j}} f_{\hbar}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^{(1-2\delta)} p_K (\partial^{\beta_{i,j}} f_{\hbar})^{2\delta/(1+2\delta)} \int_{\mathbb{R}^n} \langle x \rangle^K dx$$

for some fixed integer K and for p_K a seminorm depending on K , we use the following lemma to estimate the terms $\|\partial^{\alpha} f_{\hbar}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ and $\|\partial^{\beta} f_{\hbar}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$. This lemma is known as the Kolmogorov inequalities.

Lemma 4.2.14. *Let $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Then for any $L \in \mathbb{N}$, for any $c \in \mathbb{N}$, $c \leq L$, for any integer i such that $1 \leq i \leq n$, we have*

$$\|\partial_i^c f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^{1-\frac{c}{L}} \|\partial_i^L f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^{\frac{c}{L}}$$

Then, for any $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, for $\underline{c} = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{N}^n$, for $L \in \mathbb{N}$, $L \geq \max \underline{c}$, and $\underline{L} := (L, \dots, L)$, we have

$$\|\partial^{\underline{c}} f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^{\prod_{i=1}^n (1-\frac{c_i}{L})} \prod \|\partial^{\underline{L}} f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^{\frac{c_i}{L}}.$$

So,

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} |C_{l,M}(Y)|^2 dY \leq \hbar^{-3n/2} C_{L,K,N,M,l}(\mathfrak{f}_\hbar) \times \sum_{i,j \in \hat{J}} \|\mathfrak{f}_\hbar\|_{L^2}^{4(1-2\delta) \prod_k \left(1 - \frac{\alpha_{i,j}^{(k)}}{L}\right) \left(1 - \frac{\beta_{i,j}^{(k)}}{L}\right)} \quad (4.21)$$

for, given $i, j \in \hat{J}$, $\alpha_{i,j} = (\alpha_{i,j}^{(0)}, \dots, \alpha_{i,j}^{(n)})$, $\beta_{i,j} = (\beta_{i,j}^{(0)}, \dots, \beta_{i,j}^{(n)})$, and for $L \in \mathbb{N}$, $L \geq \max_{i,j,k} (\alpha_{i,j}^{(k)}, \beta_{i,j}^{(k)})$. Let now $\varepsilon > 0$: for L great enough and δ small enough, from (4.21) we get

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} |C_{l,M}(Y)|^2 dY \leq \hbar^{-3n/2} C_\varepsilon(\mathfrak{f}_\hbar) \|\mathfrak{f}_\hbar\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^{4-\varepsilon}$$

with $C_\varepsilon(\mathfrak{f}_\hbar)$ satisfying (4.20). We then get the expected result

$$\|\text{Op}_\hbar^w(a)\varphi_z\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \leq \hbar^{-3n/2} C_\varepsilon(\mathfrak{f}_\hbar) \|\mathfrak{f}_\hbar\|^{2-\varepsilon} \times \iint_{\mathbb{R}^{2n}} \iint_{\text{supp}(a)} \left\langle \frac{Y - \frac{z+z'}{2}}{\sqrt{\hbar}} \right\rangle^{-N} dY \left\langle \frac{z - z'}{\sqrt{\hbar}} \right\rangle^{-M} dz'$$

□

We state two applications of this result. The first one is a straightforward application of the above Proposition 4.2.12.

Proposition 4.2.15. *Let $(\varphi_z)_{z \in \mathbb{R}^{2n}}$ a family of coherent states with shape $\mathfrak{f}_\hbar \in \mathfrak{s}^{[n]}$ and let m be any order function on \mathbb{R}^{2n} . Then, given any $\varepsilon > 0$ we have the continuity property*

$$\forall a \in S(m), \forall z \in \mathbb{R}^{2n}, \|\text{Op}_\hbar^w(a)\varphi_z\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \leq \hbar^{-3n/2} \tilde{C}(a) C_\varepsilon(\mathfrak{f}_\hbar) \|\mathfrak{f}_\hbar\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^{2-\varepsilon} \quad (4.22)$$

with $\tilde{C}(a) \leq C \max_{0 \leq |\alpha| \leq K} \|m^{-1} \partial^\alpha a\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{2n})}$ where $C > 0$ only depending on m and with $C_\varepsilon(\mathfrak{f}_\hbar)$ as in (4.20).

This property gives a useful boundedness property for pseudodifferential operators acting on the coherent states of $\mathfrak{C}^{[n]}$. We will mainly use this property in the last part of the paper, where the shape will depend on a parameter $j \in \mathbb{N}$. The second property is about the localization of elements of $\mathfrak{C}^{[n]}$. We first define what we are saying by localization (one could also say microlocalization) of a function depending on \hbar .

Definition 4.2.16. Let $\hbar_0 > 0$ and let $(\varphi_\hbar)_{\hbar \in (0, \hbar_0]}$ be a family of Schwartz functions on \mathbb{R}^n such that

$$\|\varphi_\hbar\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \mathcal{O}_\hbar(1).$$

We define its semi-classical wavefront set $\mathcal{WF}(\varphi_\hbar)$ as follows. Let $Z_0 \in T^*\mathbb{R}^n$, then $Z_0 \notin \mathcal{WF}(\varphi_\hbar)$ if and only if there exists $a \in S(1)$ such that $a(Z) \geq \gamma > 0$ for a fixed $\gamma \in \mathbb{R}$ and for Z in a small neighborhood of Z_0 with

$$\|\text{Op}_\hbar^w(a)\varphi_\hbar\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \mathcal{O}(\hbar^\infty).$$

Then a function $\varphi_\hbar \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ is said localized at $X_0 \in T^*\mathbb{R}^n$ if $\mathcal{WF}(\varphi_\hbar) \subset \{X_0\}$.

Proposition 4.2.17. *Let φ_z be a coherent state centered at $z \in T^*\mathbb{R}^n$. Let $a \in S(m)$, for some order function m , and assume that one can find $\delta > 0$ such that a vanishes on $B(z, \delta)$, then*

$$\|\mathrm{Op}_\hbar^w(a)\varphi_z\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 = \tilde{C}(a)C_\varepsilon(\mathbf{f}_\hbar)\|\mathbf{f}_\hbar\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^{2-\varepsilon}\mathcal{O}(\hbar^\infty)$$

with $\tilde{C}(a)$ and $C_\varepsilon(\mathbf{f}_\hbar)$ as in Proposition 4.2.15 and with constants in $\mathcal{O}(\hbar^\infty)$ only depending on δ .

Démonstration. Let $\delta > 0$ and $a \in S(m)$ such that $\mathrm{supp}(a) \subset T^*\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n} \setminus B(z, \delta)$. Then, if $\varepsilon > 0$, because of Proposition 4.2.12, we have

$$\|\mathrm{Op}_\hbar^w(a)\varphi_z\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \leq C_\varepsilon(\mathbf{f}_\hbar)\|\mathbf{f}_\hbar\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^{2-\varepsilon} \times \iint_{\mathbb{R}^{2n}} \iint_{\mathbb{R}^{2n} \setminus B(z, \delta)} \left\langle \frac{Y - \frac{z+z'}{2}}{\sqrt{\hbar}} \right\rangle^{-N} dY \left\langle \frac{z-z'}{\sqrt{\hbar}} \right\rangle^{-M} dz'.$$

We denote $C_\varepsilon := \tilde{C}(a)C_\varepsilon(\mathbf{f}_\hbar)\|\mathbf{f}_\hbar\|^{2-\varepsilon}$. Then, setting $\Upsilon := Y - z$ and $\zeta := z' - z$, we get

$$\begin{aligned} \|\mathrm{Op}_\hbar^w(a)\varphi_z\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 &\leq C_\varepsilon \underbrace{\left(\iint_{B(0, \delta)} \iint_{\mathbb{R}^{2n} \setminus B(0, \delta)} \left\langle \frac{\Upsilon}{\sqrt{\hbar}} \right\rangle^{-N} d\Upsilon \left\langle \frac{\zeta}{\sqrt{\hbar}} \right\rangle^{-M} d\zeta \right)}_{(1)} \\ &\quad + \underbrace{\iint_{\mathbb{R}^{2n} \setminus B(0, \delta)} \iint_{\mathbb{R}^{2n} \setminus B(0, \delta)} \left\langle \frac{\Upsilon}{\sqrt{\hbar}} \right\rangle^{-N} d\Upsilon \left\langle \frac{\zeta}{\sqrt{\hbar}} \right\rangle^{-M} d\zeta}_{(2)} \end{aligned}$$

and one can check that $(1) = \mathcal{O}(\hbar^M)$ and $(2) = \mathcal{O}(\hbar^N)$, so that for any integer M, N , we have

$$\|\mathrm{Op}_\hbar^w(a)\varphi_z\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \leq C_\varepsilon \mathcal{O}(\hbar^N + \hbar^M).$$

□

From this we get the following strong localization property.

Proposition 4.2.18. *Let $z \in T^*\mathbb{R}^n$ and $\varphi_z = T_\hbar(z)\Lambda_\hbar \mathbf{f}_\hbar \in \mathfrak{E}^{[n]}$. Then φ_z is localized at z , i.e.*

$$\mathcal{WF}(\varphi_z) = \{z\}.$$

Moreover if $a \in S(m)$, where m is a given order function, a vanishing near z , then for any order function μ and any $\varepsilon > 0$ we have

$$\|\mathrm{Op}_\hbar^w(a)\varphi_z\|_{H_\hbar(\mu)} = \tilde{C}(a, \mu)C_\varepsilon(\mathbf{f}_\hbar)\|\mathbf{f}_\hbar\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^{1-\varepsilon}\mathcal{O}(\hbar^\infty)$$

with $\tilde{C}(a, \mu)$, $C_\varepsilon(\mathbf{f}_\hbar)$ as in Proposition 4.2.17.

Démonstration. From Proposition 4.2.17, we get that

$$\mathcal{WF}(\varphi_z) \subset \{z\}.$$

Now, using stationary phase methods (see e.g. [74, Chapter 3]), for $a \in S(1)$ with compact support we get

$$\|\mathrm{Op}_\hbar^w(a)\varphi_z\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 = |a(q, p)|^2 \|\mathbf{f}_\hbar\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + \mathcal{O}(\hbar),$$

which gives

$$\mathcal{WF}(\varphi_z) = \{z\}.$$

We now consider $a \in S(m)$ and $\gamma := \log(\mu)$, for some order functions m, μ . We have

$$\|\mathrm{Op}_\hbar^w(a)\varphi_z\|_{H_\hbar(\mu)} = \|e^{\gamma w} \mathrm{Op}_\hbar^w(a)\varphi_z\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Since $L := e^{\gamma w} \mathrm{Op}_\hbar^w(a)$ is a pseudodifferential operator with its symbol in $S(m\mu)$, we may apply Proposition 4.2.17 to obtain the announced result. □

Chapitre 5

Propagation magnétique d'états cohérents en temps longs

Il croyait qu'en faisant le bien, on récoltait le bien, or, quand ça arrive, ce n'est qu'un hasard.

Boris Vian, *J'irai cracher sur vos tombes*

Ce chapitre est en quelque sorte le point culminant de ce manuscrit. Au moment de ma thèse où le résultat principal de cet article à commencer à poindre, il apparut important de bien définir les notions utilisées, notamment celle d'*état cohérent*, mais aussi d'étudier et de développer les outils nécessaires à leur propagation magnétique, que ce soit les résultats de formes normales et leurs applications dans le Chapitre 2, le résultat de propagation magnétique en temps longs du Chapitre 3 ou encore les estimations de Wigner de la classe d'états du Chapitre 4. Une fois ces outils développés et rassemblés, nous obtenons le présent chapitre, qui est intégralement constitué d'un article [6] coécrit avec San Vũ Ngọc, soumis à ce jour.

LONG-TIME DYNAMICS OF COHERENT STATES IN STRONG MAGNETIC FIELDS

Abstract : We consider a charged particle on a plane, subject to a strong, purely magnetic external field. It is well known that quantum dynamics closely follows the classical one for short periods of time. Using a recent completely integrable microlocal normal form by Raymond and the coauthor of this paper, we prove that for times of order $1/\hbar$, the quantum evolution of (generalized) coherent states splits into multiple wavepackets, each one following the average dynamics of the guiding center motion but at its own speed.

5.1 Introduction

5.1.1 Motivation

The aim of this article is to study the propagation of coherent states in the 2-dimensional plane $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$, subject to a strong magnetic field $\vec{B} = B e_3$ perpendicular to the plane. In this article, B will be a C^∞ smooth, non vanishing function $B : \mathbb{R}^2 \rightarrow (0, +\infty)$. From the Poincaré lemma, one can find a smooth function $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, the magnetic potential, such that

$$dA := \partial_2 A_1 - \partial_1 A_2 = B.$$

The classical magnetic Hamiltonian is

$$H : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \ni (q, p) \mapsto \|p - A(q)\|^2 \in \mathbb{R},$$

giving rise to the Hamiltonian flow $\Phi_H^t(q_0, p_0) = (q(t), p(t))$ defined by Hamilton's equations

$$\begin{cases} \dot{q}(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(q(t), p(t)) \\ \dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial q}(q(t), p(t)), \end{cases} \quad (5.1)$$

with initial condition $q(0) = q_0, p(0) = p_0$. The corresponding quantum operator, or magnetic Laplacian, is the differential operator given by

$$\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}} := \| -i\hbar\nabla - A(q) \|^2 = (-i\hbar\partial_1 - A_1(q))^2 + (-i\hbar\partial_2 - A_2(q))^2. \quad (5.2)$$

It is well known that $\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}$, as an unbounded operator acting on $L^2(\mathbb{R}^2)$, is essentially self-adjoint [43], and one can define the associated Schrödinger unitary group on $L^2(\mathbb{R}^2)$ given by

$$\begin{cases} i\hbar\partial_t\varphi_\hbar^t = \mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}\varphi_\hbar^t \\ \varphi_\hbar^{t=0} = \varphi_\hbar^0 \end{cases} \quad (5.3)$$

We shall consider the case where the initial quantum state φ_\hbar^0 is coherent, which means strongly localized in phase space (see Section 4.2). The general semiclassical theory states that, for *finite* times (by *finite*, we mean a time t that does not depend on \hbar), the quantum evolution (5.3) closely follows the classical trajectories (5.1), in the regime where \hbar is small. Early works in semiclassical physics and chemistry emphasize the importance of this idea, see [45, 39]. More precisely, one can define the classical limit (or semiclassical wavefront set, see Definition 4.2.16) of a coherent state; this is a position $z = (q, p)$ in phase space. Then, if z_0 denotes the classical limit of the initial quantum state φ_\hbar^0 , Egorov’s theorem (Proposition 4.2.9) ensures that the classical limit of φ_\hbar^t coincides with the flow at time t of the classical Hamiltonian starting from z_0 . See for instance [25] for a mathematical account of this in the case of electric potentials, or [59, 74] for a more general formulation.

However, for *long times*, *i.e.* times that tend to infinity when $\hbar \rightarrow 0$, most of the results break down. In many cases, the non-commutativity of the limits $\hbar \rightarrow 0$ and $t \rightarrow \infty$ is simply inextricable, at least beyond the so-called Ehrenfest time $t \asymp |\ln \hbar|$. In this paper, we will investigate the propagation of a coherent quantum wave packet under the action of strong magnetic fields, for times of order $t \asymp 1/\hbar$. How is this possible?

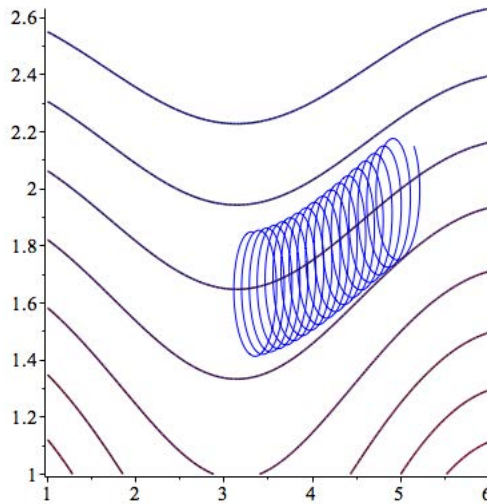


FIGURE 5.1 – Motion of a classical particle in a strong magnetic field. The particle oscillates around a level line of B . Here $B(q_1, q_2) = 2 - \cos(q_1) + q_2^2$.

Classical trajectories of a charged particle under a strong magnetic field have a distinctive feature : they can be approximately described as a superposition of a fast rotation motion (cyclotron, or Larmor motion) with a slow drifting motion (often called the *guiding center motion* [45]), see Figure 5.1. *If the energy of the initial state is small enough*, then this guiding center motion can be controlled, and the fast rotation is almost decoupled, giving rise to an adiabatic invariant (see the classical book [47], or the recent review [10]). Then, since we work on a two-dimensional plane, the motion becomes nearly integrable. This near-integrability is a crucial element in an attempt to explain why it is possible to describe the motion for such long times.

5.1.2 Mathematical background

We shall assume that the magnetic field B and its derivatives have at most polynomial growth at infinity, in the sense that B belongs to a symbol class $S(m)$ for some order function m on \mathbb{R}^2 (see Section 4.2.2).

For instance, $m(q) = (\|q\|^2 + 1)^M$ for some $M \in \mathbb{R}$. Then one can find a potential A lying in some $S(m')$, with an order function m' on \mathbb{R}^2 , showing that $H \in S(m'')$ for an order function m'' on \mathbb{R}^4 . The magnetic Laplacian defined in (5.2) is the natural symmetric (Weyl) quantization of H , acting of the Schwartz space $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$:

$$\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}} := \text{Op}_{\hbar}^w(H).$$

Since $\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}$ is essentially self-adjoint on $L^2(\mathbb{R}^2)$ we will identify $\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}$ with its self-adjoint extension, and we may now consider the magnetic Schrödinger evolution equation (5.3), where $\varphi_{\hbar}^0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$. From Stone's theorem (see *e.g.* [58]), there is a unique continuous family of unitary operators $(P^t)_{t \in \mathbb{R}}$ satisfying the propagation equation

$$\begin{cases} i\hbar \partial_t P^t = \mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}} P^t \\ P^{t=0} = id_{L^2(\mathbb{R}^2)} \end{cases}$$

and for any $t \in \mathbb{R}$, the solution to (5.3) is given by $\varphi_{\hbar}^t := P^t \varphi_{\hbar}^0$. In this work, φ_{\hbar}^0 will be a coherent state in a generalized sense, as follows (see Section 4.2 for a precise definition).

Defining for $\hbar > 0$ and $z = (q, p) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ the rescaled translation operator

$$T_{\hbar}(z) \circ \Lambda_{\hbar} : L^2(\mathbb{R}^2) \ni f \mapsto \left[x \mapsto \frac{1}{\sqrt{\hbar}} e^{-\frac{i}{2\hbar} q \cdot p} e^{\frac{i}{\hbar} x \cdot p} f\left(\frac{x - q}{\sqrt{\hbar}}\right) \right]$$

a state φ_z will be called a coherent state if one can find a function $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ with normalized L^2 -norm, a family of functions $(g_{\hbar})_{\hbar \in (0, \hbar_0)} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ with seminorms that are uniformly bounded in \hbar , and a real number $\beta > 0$, such that

$$\varphi_z := T_{\hbar}(z) \Lambda_{\hbar} \cdot (f + \hbar^{\beta} g_{\hbar}).$$

Such a coherent state is said to be centered at z in phase space. We denote by \mathfrak{C} the set of coherent states. Since we are interested in the propagation of quantum states with low energy, we shall consider coherent states centered at a vanishing point of the Hamiltonian H , *i.e.* $z \in \Sigma$ with

$$\Sigma := H^{-1}(\{0\}) = \{(q, A(q)) \mid q \in \mathbb{R}^2\} \subset \mathbb{R}_q^2 \times \mathbb{R}_p^2.$$

On this smooth surface we define the pull-back \tilde{B} of the magnetic field B as follows. Let j be the projection

$$j : \Sigma \ni (q, A(q)) \mapsto q \in \mathbb{R}_q^2.$$

Since Σ is the graph of the function A , j is invertible and then we can view the magnetic field as a function on Σ via

$$\tilde{B} := B \circ j$$

One can check that, when B is non-vanishing, Σ is a symplectic submanifold of the canonical phase space $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 = T^*\mathbb{R}^2$ (in fact, the restriction to Σ of the canonical symplectic form on $T^*\mathbb{R}^2$ is exactly the pull-back $j^*(Bdq_1 \wedge dq_2)$). Hence \tilde{B} is now a Hamiltonian on Σ and we can consider its Hamiltonian flow $\Phi_{\tilde{B}}^t$. A basic result in magnetic dynamics (see also [57]) is that this flow gives a good approximation of the guiding center motion.

5.1.3 Description of the main results

The main goal is to prove the following fact. Let φ_{\hbar}^0 be a coherent state centered at a point z in the characteristic surface Σ . Classically, this state cannot move because it has zero kinetic energy. However, due to the uncertainty principle, the quantum state lives on a ball of radius $\asymp \hbar^{1/2}$ around z , and so almost all the points in this ball will actually move slowly, at various speeds of order \hbar , with a precise factor depending on the distance to Σ . But, because of energy quantization, the involved speeds will actually be *quantized* : only integer multiples of $\hbar B_0$, for some positive constant B_0 , will play a part. Thus, the initial state will be *split* into a number of new coherent states evolving at these speed scales, becoming genuinely separated from each other after a time of order $\asymp \hbar^{-1}$.

Theorem 5.1.1. *There exists a self-adjoint pseudodifferential operator \mathcal{J}_\hbar (the ‘Quantum adiabatic invariant’) on $L^2(\mathbb{R}^2)$ such that for any $\alpha \in (0, 1)$ and $K > 0$, if $J_\hbar \in \mathbb{N}$ is a family of integers satisfying $J_\hbar \geq K\hbar^{-\alpha}$, then the following holds.*

Let $\varphi_\hbar^0 \in \mathfrak{C}$ be a coherent state centered in $z_0 \in \Sigma = H^{-1}(0)$ and consider its propagation $(\varphi_\hbar^t)_{t \in \mathbb{R}}$ through the Schrödinger equation (5.3) :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \varphi_\hbar^t := P^t \varphi_\hbar^0.$$

Then φ_\hbar^t can be decomposed as follows :

$$\varphi_\hbar^t = \sum_{j=0}^{J_\hbar} \alpha_j \varphi_{j,\hbar}^t + r_\hbar^t \quad (5.4)$$

where $(\alpha_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{R}_+)$, there exists $T > 0$ such that the remainder r_\hbar^t satisfies, for any $N \in \mathbb{N}$,

$$\sup_{t \in [0, T/\hbar]} \|(\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}})^N r_\hbar^t\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \mathcal{O}(\hbar^\infty), \quad (5.5)$$

and the $\varphi_{j,\hbar}^t$ have the following properties.

1. $\forall j \geq 0$, $\alpha_j \varphi_{j,\hbar}^t$ is the orthogonal projection of φ_\hbar^t onto $\ker(\mathcal{J}_\hbar - (2j + 1)\hbar)$;
2. $\forall \tilde{t} \in [0, T]$,

$$\varphi_{j,\hbar}^{\tilde{t}/\hbar} \in \mathfrak{C}; \quad (5.6)$$

3. *we can follow the center of these coherent states : for any $\tilde{t} \in [0, T]$, we have*

$$\mathcal{WF}\left(\varphi_{j,\hbar}^{\tilde{t}/\hbar}\right) = \{z((2j + 1)\tilde{t})\} \quad (5.7)$$

where $z(\tilde{t}) := \Phi_{\tilde{B}}^{\tilde{t}} z_0$, and $\Phi_{\tilde{B}}^{\tilde{t}}$ is the Hamiltonian flow of \tilde{B} on Σ .

Here, $\mathcal{WF}(f)$ denotes the semiclassical wavefront set of the function $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, see Definition 4.2.16 below. The quantum adiabatic invariant \mathcal{J}_\hbar corresponds to the pure cyclotron motion that one would obtain for a homogeneous magnetic field of strength 1. Its spectrum consists of the eigenvalues $\{(2j + 1)\hbar; j \in \mathbb{N}\}$, and the corresponding eigenspaces

$$\mathcal{H}_{j,\hbar} = \ker(\mathcal{J}_\hbar - (2j + 1)\hbar)$$

are infinite dimensional Hilbert spaces that one can call the adiabatic *Landau levels* of the system. Up to an error of size $\mathcal{O}(\hbar^\infty)$, these spaces are preserved by the quantum dynamics. We see from (5.7) that the ‘adiabatic value’ $(2j + 1)\hbar$ is coupled with the original dynamics in that it defines a quantized speed of motion for a coherent state living in $\mathcal{H}_{j,\hbar}$. It would be very interesting to observe this quantization effect in a (real or numerical) experiment, but the long time \hbar^{-1} clearly poses serious numerical challenges.

Notice that the remainder in (5.5) is controlled in terms of the obvious Sobolev-like norms that are preserved by the dynamics : the L^2 -norms of arbitrary powers of the magnetic Laplacian (which, in particular, control the quadratic form $\langle \mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}} \psi, \psi \rangle$), and hence, by the Cauchy-Schwarz inequality, the norm of the usual magnetic Sobolev space H_A^1 , where derivatives are replaced by magnetic derivatives $\hbar \partial_j + A_j$). But recall that $\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}$ is not elliptic in the semiclassical sense, since the characteristic manifold Σ extends to infinity in q . Therefore, if one is interested in quantum transport or, rather, quantum localization, it is in general an important, non obvious question to check whether, and to which extent, these norms can be compared to more ‘localized’ norms like Schwartz seminorms or standard Sobolev norms. The answer is expected to depend on the geometry of the magnetic field. Recently, the control of Schwartz seminorms has been obtained in [5], under the assumption that the magnetic field is uniformly non-vanishing, and satisfies the following property.

(P) : for all $\alpha \in \mathbb{N}^2$, there exists $C > 0$ such that, for all $x \in \mathbb{R}^2$, $\|\partial^\alpha B(x)\| \leq C \|B(x)\|$.

This assumption states that the derivatives of the magnetic field are controlled by the magnetic field itself, preventing B from ‘oscillate too much’ at infinity. It appears to be rather known and used in literature. In dimension $d \geq 3$, this property is crucial to obtain that, under some ellipticity condition, $\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}$ has compact resolvent and hence no essential spectrum; and if these ellipticity conditions do not hold, there is a rather precise description of the essential spectrum (see [4, 34]). The lower bound at the bottom of the essential spectrum of $\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}$ obtained in [35] is an important ingredient in the localization estimates of [5].

In general, Property **(P)** is optimal to prove the compactness of the resolvent : in the paper [17], the author constructs a magnetic field that does not satisfy this property and such that $\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}$, while enjoying some ellipticity properties, has no compact resolvent. On the other hand, in dimension 2, the diamagnetic inequality gives an immediate lower bound on the essential spectrum *without* needing **(P)**. It would be interesting to investigate whether, in dimension 2, the localization estimates of [5] could be obtained under a weaker condition than **(P)**.

In this work, we take advantage of the results of [5] to obtain a stronger estimate of the remainder r_{\hbar}^t in Theorem 5.1.1, as follows.

Theorem 5.1.2. *With the same notations as in Theorem 5.1.1, for a magnetic field B satisfying the above property **(P)**, assuming that there exists $b_0 > 0$ such that*

$$\forall q \in \mathbb{R}^2, B(q) \geq b_0, \quad (5.8)$$

we get the following estimate of r_{\hbar}^t : given any $T \in \mathbb{R}$ and any Schwartz seminorm p , we have

$$\sup_{t \in [0, T/\hbar]} p(r_{\hbar}^t) = \mathcal{O}(\hbar^{\infty}). \quad (5.9)$$

We surmise that this result does not hold for general magnetic fields B . Although the control in terms of Schwartz seminorms is much more satisfying in the setting of coherent states, the price to pay for this is that the proof of Theorem 5.1.2 is substantially more involved than the proof of Theorem 5.1.1.

5.1.4 Organization of the article

In section 4.2, we define the class of coherent states that we will use, and we present some facts about their propagation. We will prove some short time propagation properties for these coherent states and some long-time estimates in the case of coherent states centered at a critical point of the classical dynamics. In section 5.3, we introduce the symplectic and quantum magnetic normal forms, which are here the main tools to study the long time dynamics. In section 5.4, we prove Theorems 5.1.1 and 5.1.2.

5.2 A general class of coherent states and related propagation results

Pour cette section se rapporter à la Section 4.2, ou pour la cohérence du manuscrit est rapportée la définition de la classe d’états cohérents étudiée dans cette article et les résultats de propagations afférents.

5.3 Geometry and propagation under magnetic field

The first part of this section is about the underlying geometry of the magnetic field, more precisely about the classical and quantum normal forms of $\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}$. Classical and quantum normal forms for the magnetic Hamiltonian were introduced by Raymond and one of the co-author of the present article, see [57]. We first briefly present the symplectic normal form adapted to the Hamiltonian H , and then we will explain how, from the symplectic setting, one can obtain the corresponding quantum normal form (we mainly refer to [57]). The second part of this section is about the long time quantum propagation. It turns out that, assuming some control of the derivatives of the magnetic field by the magnetic field itself, we can get uniform estimates of the propagation in the Schwartz class.

5.3.1 Symplectic normal form

The following symplectic normal form result is about the existence of a symplectomorphism that locally around $\Sigma \cap \Omega$ transform the magnetic Hamiltonian H into an almost integrable system.

Theorem 5.3.1 ([57]). *Let*

$$H(q, p) := \|p - A(q)\|^2, \quad (q, p) \in T^*\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2,$$

where the magnetic potential $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ is smooth. Let $B := \partial_{q_1} A_2 - \partial_{q_2} A_1$ be the corresponding magnetic field. Let $\Omega \subset \mathbb{R}^4$ be a bounded open set such that B does not vanish on

$$\Omega_0 = \{q \in \mathbb{R}^2 \mid (q, A(q)) \in \Omega\}.$$

Then there exists a symplectic diffeomorphism κ , defined in an open set $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{C}_{z_1} \times \mathbb{R}_{z_2}^2$, with values in $T^*\mathbb{R}^2$, which identifies the plane $\{z_1 = 0\} \cap \tilde{\Omega}$ with the surface $\{H(q, p) = 0 \mid q \in \Omega_0\}$, and such that

$$H \circ \kappa = |z_1|^2 f(z_2, |z_1|^2) + \mathcal{O}(|z_1|^\infty),$$

where $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is smooth. Moreover, the map

$$\phi : \Omega_0 \ni q \mapsto \kappa^{-1} \circ j(q) \in (\{0\} \times \mathbb{R}_{z_2}^2) \cap \tilde{\Omega}$$

is a local diffeomorphism and

$$f \circ (\phi(q), 0) = |B(q)|.$$

From this theorem, we get a better understanding of the dynamics near the characteristic surface Σ . Indeed, up to an $\mathcal{O}(|z_1|^\infty)$ term, that is for trajectories very close to Σ , the trajectories in the (z_1, z_2) coordinates are given by the Hamiltonian $|z_1|^2 f(z_2, |z_1|^2)$ that gives the center-guide dynamics, whose center $z_2(t)$ follows the Hamiltonian flow led by $f(\cdot, |z_1|^2)$. Moreover, as $f(z_2, |z_1|^2) = \tilde{B}(z_2) + \mathcal{O}(|z_1|^2)$, still near the surface Σ , the dynamics of the center $z_2(t)$ is given by the magnetic field pulled back on Σ , $B := B \circ \phi^{-1}$.

5.3.2 Quantum normal form

The following theorem is the quantum version of Theorem 5.3.1. It introduces the normal form of $\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}$.

Theorem 5.3.2 ([57]). *For \hbar small enough, there is a unitary Fourier integral operator U_\hbar such that*

$$U_\hbar^* \mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}} U_\hbar = \mathcal{N} + R_\hbar,$$

where

1. \mathcal{N} is a pseudodifferential operator that commutes with

$$\mathcal{I}_\hbar := \hbar^2 \partial_{x_1}^2 + x_1^2;$$

2. For any hermite function h_j , such that $\mathcal{I}_\hbar h_j = \hbar(2j + 1)h_j$, the operator $\mathcal{N}^{(j)}$ acting on $L^2(\mathbb{R}_{x_2})$ by

$$h_j \otimes \mathcal{N}^{(j)}(u) = \mathcal{N}(h_j \otimes u) \tag{5.10}$$

is a classical pseudodifferential operator in $S(1)$ of order 1 in \hbar with its principal symbol

$$n^{(j)}(x_2, \xi_2) = \hbar(2j + 1)B \circ \phi^{-1}(x_2, \xi_2)$$

with ϕ the diffeomorphism in Theorem 5.3.1;

3. Given any pseudodifferential operator D_{\hbar} whose principal symbol d_0 such that $d_0(z_1, z_2) = c(z_2)|z_1|^2 + \mathcal{O}(|z_1|^3)$, and any $N \geq 1$, there exist pseudodifferential operators $S_{\hbar, N}$ and Z_N such that

$$R_{\hbar} = S_{\hbar, N}(D_{\hbar})^N + Z_N,$$

with Z_N a pseudodifferential operator whose symbol is supported away from a fixed neighborhood of $|z_1| = 0$.

4. $\mathcal{N} = \mathcal{H}_{\hbar}^0 + \mathcal{H}_{\hbar}^1$, where $\mathcal{H}_{\hbar}^0 = \text{Op}_{\hbar}^w(H^0)$, $H^0 = B \circ \phi^{-1}(z_2)|z_1|^2$, and the operator \mathcal{H}_{\hbar}^1 is relatively bounded with respect to \mathcal{H}_{\hbar}^0 with an arbitrarily small relative bound.

Actually, the above theorem is a slightly different formulation of the one stated in [57]. Indeed, the authors introduced a Fourier integral operator \tilde{U}_{\hbar} that is unitary only microlocally in a fixed neighborhood of Σ . It will be useful for us to have a genuinely unitary operator, which microlocally satisfies the same assumptions. Since the canonical transformation associated to U_{\hbar} is obtained by the flow of a compactly supported, time-dependent Hamiltonian, one can in fact obtain U_{\hbar} as the quantum flow of a time-dependent, uniformly bounded self-adjoint propagator, as in Lemma 4.2.8; see [74, Chapter 11].

5.3.3 Quantum propagation under magnetic field

The main topic of this article is the long time propagation of coherent states. It is well known that, for a general Schrödinger operator, and for times bigger than the Erhenfest time $\asymp |\ln \hbar|$, propagated coherent states may not remain coherent. Thus, in order to obtain a rough control on the localization of the propagated state, it is natural to estimate the growth of its Schwartz seminorms. In the case of a purely magnetic propagation, this is given by the following theorem, proved in [5]. For the purpose of this article, we only state it in the 2-dimensional case.

Theorem 5.3.3 ([5]). *Let P^t be the propagator of $\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}$, given by Stone's theorem,*

$$P : t \in \mathbb{R} \mapsto P^t = e^{-\frac{it}{\hbar} \mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}}.$$

Under property (P), and assuming $B \geq b_0 > 0$, we have

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad P^t \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d).$$

More precisely, for all $M \in \mathbb{N}^$, for any Schwartz seminorm p , there exist $\hbar_0 > 0$, $C > 0$, $N \in \mathbb{N}^*$ and a seminorm \tilde{p} , such that, for all $\hbar \in (0, \hbar_0)$, and for all $\psi_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, and all $t \in [0, \hbar^{-M}]$,*

$$p(P^t \psi_0) \leq C \hbar^{-N} \tilde{p}(\psi_0).$$

5.4 Propagation of \mathfrak{C} -class states

Our goal is to propagate a state $\varphi_{\hbar}^0 \in \mathfrak{C}$ through the magnetic Schrödinger equation,

$$\begin{cases} i\hbar \partial_t \varphi_{\hbar}^t = \mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}} \varphi_{\hbar}^t \\ \varphi_{\hbar}^{t=0} = \varphi_{\hbar}^0, \end{cases} \quad (5.11)$$

where the initial state φ_{\hbar}^0 is such that

$$\mathcal{WF}(\varphi_{\hbar}^0) \subset \{X^0\} \text{ for } X^0 \in \Sigma \cap \Omega.$$

We consider the Fourier integral operator U_{\hbar} from Theorem 5.3.2. Since U_{\hbar} is the time-1 flow of a time-dependent quantum Hamiltonian, the same holds for the adjoint (or inverse) U_{\hbar}^* , and we may apply Proposition 4.2.9, which shows that $\psi_{\hbar}^0 := U_{\hbar}^* \varphi_{\hbar}^0$ is still a coherent state of the class \mathfrak{C} . Moreover, because the canonical transformation associated with U_{\hbar}^* is the symplectomorphism κ^{-1} , we obtain that ψ_{\hbar}^0 is centered at a point $z_0 := \kappa^{-1}(X_0) \in \kappa^{-1}(\Sigma) = \{z_1 = 0\}$. Our strategy is to first propagate ψ_{\hbar}^0 through the quantum normal form \mathcal{N} and then to relate it to the propagation of φ_{\hbar}^0 through the initial Schrödinger equation (5.11).

5.4.1 Propagation through the normal form

The normal form \mathcal{N} of Theorem 5.3.2 defines an essentially self-adjoint operator on $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$. Indeed, as

$$\mathcal{N} = \mathcal{H}_\hbar^0 + \mathcal{H}_\hbar^1$$

with \mathcal{H}_\hbar^1 relatively bounded with respect to \mathcal{H}_\hbar^0 , it suffices to prove that \mathcal{H}_\hbar^0 is essentially self-adjoint. This follows from the fact that \mathcal{H}_\hbar^0 is a tensor product of two essentially self-adjoint operators on $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Thus, we can study the following Cauchy problem :

$$\begin{cases} i\hbar\partial_t\psi_\hbar^t = \mathcal{N}\psi_\hbar^t \\ \psi_\hbar^{t=0} = \psi_\hbar^0. \end{cases} \quad (5.12)$$

From Stone's theorem, we have a unique family of propagators $(Q^t)_{t \in \mathbb{R}}$, unitary on $L^2(\mathbb{R}^2)$ and satisfying

$$\forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2) \quad i\hbar\partial_t Q^t \psi = \mathcal{N}Q^t \psi.$$

Then, we denote $\psi_\hbar^t := Q^t \psi_\hbar^0$ the solution to (5.12). As explained above, $\psi_\hbar^0 \in \mathfrak{C}$ is localized on

$$\kappa^{-1}(X^0) = (0, z_2^0).$$

Considering the harmonic oscillator in the variable z_1 ,

$$\mathcal{I}_\hbar = -\hbar^2 \partial_{x_1}^2 + x_1^2,$$

and the associated Hermite functions $(h_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}_{x_1})$, we get the following Lemma.

Lemma 5.4.1. *There is a family of states $(f_j^0)_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}_{x_2})$ and a sequence $(\alpha_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset \ell^2(\mathbb{R}_+)$ such that*

$$\psi_\hbar^0 = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j h_j \otimes f_j^0$$

with for any integer j , if $\alpha_j \neq 0$ then $\alpha_j^{-1} f_j^0 \in \mathfrak{C}^{[1]}$, and $\mathcal{WF}^{x_2}(f_j^0) = \{z_2^0\}$. In the case of $\alpha_j = 0$, we have $f_j = \mathcal{O}_{L^2}(\hbar^\beta)$ and $\mathcal{WF}^{x_2}(f_j^0) \subset \{z_2^0\}$.

Démonstration. From Definition 4.2.2, one can find a function f in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, with $\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = 1$, and a family $(g_\hbar)_{\hbar \in (0, \hbar_0)} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, with seminorms in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ bounded uniformly in \hbar , such that

$$\psi_\hbar^0 = T_\hbar(0, z_2^0) \Lambda_\hbar(f + \hbar^\beta g_\hbar).$$

Then we let

$$f_j^0 := \langle \psi_\hbar^0, h_j \rangle_{\text{d}x_1} = T_\hbar^{(z_2)}(z_2^0) \Lambda_\hbar^{(z_2)} \langle (f + \hbar^\beta g_\hbar), h_j^{(\hbar=1)} \rangle_{\text{d}x_1} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_{x_2}). \quad (5.13)$$

Since $(h_j)_{j \in \mathbb{N}}$ is a Hilbert basis of $L^2(\mathbb{R}_{x_1})$, after defining

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad \alpha_j := \|\langle f, h_j^{(\hbar=1)} \rangle_{L^2(\mathbb{R}_{x_1})}\|_{L^2(\mathbb{R}_{x_2})},$$

we get $\sum \alpha_j^2 = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 = 1$ and, for $j \in \mathbb{N}$, $\alpha_j \neq 0$, $\alpha_j^{-1} f_j^0 \in \mathfrak{C}^{[1]}$, centered at z_2^0 . In the case of $\alpha_j = 0$, we get $f_j^0 = \mathcal{O}_{\mathcal{S}}(\hbar^\beta)$ and applying Proposition 4.2.17 we have $\mathcal{WF}^{x_2}(f_j^0) \subset \{z_2^0\}$, with equality if g_\hbar is not $\mathcal{O}_{\mathcal{S}}(\hbar^\infty)$ (in that case, we have $\mathcal{WF}^{x_2}(f_j^0) = \emptyset$). \square

Lemma 5.4.1 expresses ψ_\hbar^0 as a sum of functions, each one corresponding to a 'Landau level' of the harmonic oscillator : f_j^0 corresponds to the occupation of the j^{th} energy level. The following lemma gives the energy distribution of these levels, in the semiclassical limit $\hbar \rightarrow 0$.

Lemma 5.4.2. *Taking the \hbar -independent sequence $(\alpha_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset \ell^2(\mathbb{R}_+)$ introduced above, there is an \hbar -dependent sequence $(\varepsilon(\hbar))_j \subset \mathbb{R}$ such that for any $j \in \mathbb{N}$*

$$\|f_j^0\|^2 = \alpha_j^2 + \hbar^\beta \varepsilon_j(\hbar)$$

with $\sum_{j \geq 0} \alpha_j^2 = 1$ and where $\sum_{j \geq 0} |\varepsilon_j(\hbar)|$ is bounded independently of \hbar .

Démonstration. From the proof of Lemma 5.4.1 we have $\sum_{j \geq 0} \alpha_j^2 = 1$ and we can compute, using (5.13) :

$$\begin{aligned} \|f_j^0\|_{L^2(\mathbb{R}_{x_2})}^2 &= \|\langle f, h_j^{(\hbar=1)} \rangle_{dx_1}\|_{dx_2}^2 + \\ &\quad \hbar^\beta \left(2\mathbf{Re} \left(\left\langle \langle f, h_j^{(\hbar=1)} \rangle_{dx_1}, \langle g_{\hbar}, h_j^{(\hbar=1)} \rangle_{dx_1} \right\rangle_{dx_2} \right) + \hbar^\beta \|\langle g_{\hbar}, h_j^{(\hbar=1)} \rangle_{dx_1}\|_{dx_2}^2 \right) \\ &= \alpha_j^2 + \hbar^\beta \varepsilon_j(\hbar), \end{aligned}$$

where

$$|\varepsilon_j(\hbar)| \leq \frac{1}{2} (\|\langle f, h_j^{(\hbar=1)} \rangle_{dx_1}\|_{dx_2}^2 + \|\langle g_{\hbar}, h_j^{(\hbar=1)} \rangle_{dx_1}\|_{dx_2}^2) + \hbar^\beta \|\langle g_{\hbar}, h_j^{(\hbar=1)} \rangle_{dx_1}\|_{dx_2}^2$$

and

$$\sum_{j \geq 0} |\varepsilon_j(\hbar)| \leq \|g_{\hbar}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \left(\frac{1}{2} + \hbar^\beta \right) + 1,$$

which is uniformly bounded for $\hbar \in (0, \hbar_0)$. □

Remark 5.4.3. The result of Lemma 5.4.2 can be extended to the functions $x^\gamma \partial_x^\delta \psi_{\hbar}^0$, for any γ, δ in \mathbb{N}^2 . Indeed, we have

$$x^\gamma \partial_x^\delta T_{\hbar}(z) \Lambda_{\hbar} = \hbar^{-|\delta|} T_{\hbar}(z) \Lambda_{\hbar} [q + \sqrt{\hbar} x]^\gamma [ip + \sqrt{\hbar} \partial_x]^\delta$$

where we denote $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^2$, $z_1 = q_1 + ip_1$, $z_2 = (q_2, p_2)$ and finally $q = (q_1, q_2)$, $p = (p_1, p_2)$. Then, for $\psi_{\hbar}^0 = T_{\hbar}(z) \Lambda_{\hbar} \cdot (f + \hbar^\beta g_{\hbar})$, with f and the family $(g_{\hbar})_{\hbar}$ as in Definition 4.2.2, we get

$$x^\gamma \partial_x^\delta \psi_{\hbar}^0 = \hbar^{-|\delta|} T_{\hbar}(z) \Lambda_{\hbar} (f^{\gamma, \delta} + \hbar^{\tilde{\beta}} g_{\hbar}^{\gamma, \delta}),$$

with $\tilde{\beta} = \min(1/2, \beta)$, where the function $f^{\gamma, \delta} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ is independent of \hbar , and the family $(g_{\hbar}^{\gamma, \delta})_{\hbar}$ belongs to the Schwartz class with bounded seminorms, uniformly in \hbar , satisfying the definition of \mathfrak{C} . Then, letting

$$x^\gamma \partial_x^\delta \psi_{\hbar}^0 = \hbar^{-|\delta|} \sum_{j \in \mathbb{N}} h_j \otimes f_j^{\gamma, \delta}$$

with $f_j^{\gamma, \delta} = \hbar^{|\delta|} \langle x^\gamma \partial_x^\delta \psi_{\hbar}^0, h_j \rangle_{dx_1}$, mimicking the above proof, we get

$$\|f_j^{\gamma, \delta}\|_{L^2(dx_2)}^2 = |\alpha_j^{\gamma, \delta}|^2 + \hbar^{\tilde{\beta}} \varepsilon_j^{\gamma, \delta}(\hbar)$$

where $(\alpha_j^{\gamma, \delta})_j$ and $(\varepsilon_j^{\gamma, \delta})_j$ are sequences as in Lemma 5.4.2 except that $\sum_j |\alpha_j^{\gamma, \delta}|^2$ is not necessarily equal to 1.

Applying Lemma 5.4.1, we now study the propagation of

$$\psi_{\hbar}^0 = \sum_{j=0}^{\infty} h_j \otimes f_j^0.$$

From (5.10), the solution to (5.12) can be written as

$$\psi_{\hbar}^t = \sum_{j=0}^{\infty} h_j \otimes f_j^t$$

where for all $j \in \mathbb{N}$, f_j^t satisfies the evolution equation

$$\begin{cases} i\partial_t f_j^t = (\frac{1}{\hbar}\mathcal{N}^{(j)}) f_j^t \\ f_j^{t=0} = f_j^0 \end{cases} \quad (5.14)$$

where $\frac{1}{\hbar}\mathcal{N}^{(j)}$ is a semi classical pseudodifferential operator whose principal symbol is $(2j+1)B \circ \phi^{-1}$. In order to apply usual propagation results to (5.14) we rescale time as follows. Given $j \in \mathbb{N}$, we set $\tau_j := t \times \hbar(2j+1)$ so that τ_j represents the reduced time corresponding to the slow drift of the j^{th} Landau level. So for a global time propagation $t \in [0, T\hbar^{-1}]$, we have a reduced time $\tau_j \in [0, (2j+1)T]$. We let now $\tilde{f}_j^{\tau_j} := f_j^t$ and get the following equivalent propagation equation

$$\begin{cases} i\hbar\partial_{\tau_j} \tilde{f}_j^{\tau_j} = \mathcal{F}^{(j)} \tilde{f}_j^{\tau_j} \\ \tilde{f}_j^{\tau_j=0} = f_j^0, \end{cases}$$

where

$$\mathcal{F}^{(j)} := \frac{1}{\hbar(2j+1)}\mathcal{N}^{(j)}$$

is a pseudodifferential operator acting on $L^2(\mathbb{R}_{x_2})$ whose principal symbol is $B \circ \phi^{-1}$. At this point, we may highlight that even if the total symbol of $\mathcal{F}^{(j)}$ depends on j , its principal symbol does not. Since $\mathcal{N}^{(j)}$ is the restriction of an essentially selfadjoint operator to a stable subspace, it is essentially selfadjoint on $L^2(\mathbb{R}_{x_2})$. Therefore, from Stone's theorem we get a family of propagators $(Q_j^{\tau_j})_{\tau_j \in \mathbb{R}}$ for this equation; coming back to the initial propagation time t , we obtain, for $t \in [0, T/\hbar]$,

$$f_j^t = \tilde{f}_j^{\tau_j} = Q_j^{(2j+1)\hbar t} f_j^0.$$

Furthermore, from Lemma 5.4.1 and Proposition 4.2.9, we know that $\alpha_j^{-1} \tilde{f}_j^{\tau_j}$ is a coherent state in $\mathfrak{C}^{[1]}$ when τ_j is fixed, and the evolution of its wavefront set is governed by the Hamiltonian flow of

$$K := B \circ \phi^{-1},$$

which is the pull back of the magnetic field B from $\Omega_0 \subset \mathbb{R}_q^2$ on the zero energy surface $\{z_1 = 0\}$ by $\phi = \kappa \circ (j|_{\Sigma})^{-1}$. More precisely, let Φ_K^t denote the Hamiltonian flow of K , and let $T > 0$ be such that $\Phi_K^{(2j+1)\tilde{t}}(z_2^0)$ stays in the open set $\tilde{\Omega}$ for $\tilde{t} \in [0, T]$. Then, since

$$\mathcal{WF}_{x_2}(f_j^{\tilde{t}=0}) \subset \{z_2^0\},$$

we get

$$\mathcal{WF}_{x_2}(\tilde{f}_j^{\tau_j}) \subset \{\Phi_K^{\tau_j}(z_2^0)\}$$

for $\tau_j \in [0, (2j+1)T]$. In other words, for any $\tilde{t} \in [0, T]$, the wavefront set of $f_j^{\tilde{t}/\hbar}$ is given by

$$\mathcal{WF}_{x_2}(f_j^{\tilde{t}/\hbar}) \subset \{\Phi_K^{(2j+1)\tilde{t}}(z_2^0)\}, \quad (5.15)$$

while the solution to (5.12) is given by

$$\forall t \in [0, T/\hbar], \quad \psi_{\hbar}^t = \sum_{j \in \mathbb{N}} h_j \otimes f_j^t.$$

We can then at this stage of the proof give an informal explanation about the quantum phenomenon occurring here. Actually, our coherent state splits into a weighted sum of coherent states, each one with a wavefront set with its own dynamics. For times t of order \hbar^{-1} , the localization of ψ_{\hbar}^t is no more a point in phase space but a sequence of points lying on the integral curve of the Hamiltonian provided by the magnetic field in restriction to the characteristic set, or the zero set. The point labelled by ' j ' corresponds to the occupation of the j^{th} Landau levels of \mathcal{I}_{\hbar} . Furthermore, since the Schrödinger evolution preserves the L^2 -norm, that is

$$\|f_j^t\|_{L^2(\mathbb{R}_{x_2})} = \|f_j^0\|_{L^2(\mathbb{R}_{x_2})}, \quad (5.16)$$

the occupied energy level of the harmonic oscillator remains occupied with the same amount of energy, that is α_j^2 . In other words, we do not have any shift of energy to higher or lower levels during the evolution.

5.4.2 Back to the initial magnetic laplacian

After the study of the propagation in the normal form setting, we need to return to the initial laplacian $\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}$. The first step is the following lemma. Recall that from Lemma 5.4.1 that we write

$$\psi_{\hbar}^0 = \sum_{j=0}^{\infty} h_j \otimes f_j^0. \quad (5.17)$$

Lemma 5.4.4. *Let $\alpha \in (0, 1)$ and for $K > 0$ consider an \hbar dependent integer J_{\hbar} such that $J_{\hbar} \geq K\hbar^{-\alpha}$. Then, for*

$$\tilde{\psi}_{\hbar}^0 := \sum_{j \leq J_{\hbar}} h_j \otimes f_j^0, \quad (5.18)$$

we have

$$\psi_{\hbar}^0 - \tilde{\psi}_{\hbar}^0 = \mathcal{O}_{\mathcal{S}}(\hbar^{\infty}).$$

Démonstration. Let us first recall a useful fact about Hermite coefficients of Schwartz functions. Consider some function ψ in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. We have

$$\psi = \sum_{j \in \mathbb{N}} c_j h_j$$

with $c_j := \langle \psi, h_j \rangle_{L^2(\mathbb{R})}$. Since $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, for any $N \in \mathbb{N}$, for any $\hbar > 0$, $\mathcal{I}_{\hbar}^N \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Furthermore, we have

$$\mathcal{I}_{\hbar}^N \psi = \sum_{j \in \mathbb{N}} \hbar^N (2j+1)^N c_j h_j.$$

Hence, taking the L^2 -norm of $\mathcal{I}_{\hbar}^N \psi$, and $\hbar = 1$, we get

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} (2j+1)^{2N} |c_j|^2 < \infty \quad (5.19)$$

and so for any non negative integer N the sequence $(j^{2N} |c_j|^2)_{j \in \mathbb{N}}$ is bounded. Consider now the above function $\psi_{\hbar}^0 \in \mathfrak{C} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$. We have

$$\psi_{\hbar}^0 = T_{\hbar}(0, z_2) \Lambda_{\hbar} \cdot (f + \hbar^{\beta} g_{\hbar})$$

with f and $(g_{\hbar})_{\hbar}$ as in Definition 4.2.2. In (5.17) we have $f_j^0 = \langle \psi_{\hbar}^0, h_j \rangle_{L^2(dx_1)}$ and $\|f_j^0\|_{L^2(dx_2)}^2 = \alpha_j^2 + \hbar^{\beta} \varepsilon(\hbar)$ according to Lemma 5.4.2. Then, from (5.19), and by definition of the sequence $(\alpha_j)_j$, for any non negative integer N , $(\alpha_j^2 j^{2N})_j$ is bounded (and independent of \hbar). Moreover, from the \hbar -boundedness of $(g_{\hbar})_{\hbar}$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, we get that for any N , $\|\mathcal{I}_{\hbar}^N g_{\hbar}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}$ is bounded uniformly with $\hbar \in (0, \hbar_0)$. From this, we have that for any non negative integer N , $(j^{2N} \varepsilon_j(\hbar))_j$ is bounded uniformly with $\hbar \in (0, \hbar_0)$. We now turn to (5.18); let

$$\mathfrak{d} := \psi_{\hbar}^0 - \tilde{\psi}_{\hbar}^0 = \sum_{j > J_{\hbar}} h_j \otimes f_j^0,$$

and we wish to prove that, for any $\gamma, \delta \in \mathbb{N}^2$

$$\|x^{\gamma} \partial_x^{\delta} \mathfrak{d}\|_{\infty} = \mathcal{O}(\hbar^{\infty}).$$

To do so, we note that

$$x^{\gamma} \partial_x^{\delta} \mathfrak{d} = \sum_{j > J_{\hbar}} x_1^{\gamma_1} \partial_{x_1}^{\delta_1} h_j \otimes x_2^{\gamma_2} \partial_{x_2}^{\delta_2} f_j^0.$$

First, if we set

$$f_j^{\gamma_2 \delta_2} := \hbar^{\delta_2} (x_2^{\gamma_2} \partial_{x_2}^{\delta_2} f_j^0),$$

then because of the definition of the sequence $(f_j)_j$ and applying Remark 5.4.3, we get that there is a sequence of real numbers $(\alpha_j^{\gamma_2 \delta_2})_j$ independent of \hbar and a family of sequences $(\varepsilon_j^{\gamma_2 \delta_2}(\hbar))_j$ uniformly bounded with respect to $\hbar \in (0, \hbar_0)$ such that

$$\|f_j^{\gamma_2 \delta_2}\|_{L^2(dx_2)}^2 = (\alpha_j^{\gamma_2 \delta_2})^2 + \hbar^{\tilde{\beta}} \varepsilon_j^{\gamma_2 \delta_2}(\hbar).$$

We now study the $x_1^{\gamma_1} \partial_{x_1}^{\delta_1} h_j$ term. One can note that from the 1-D recursion relations

$$h'_j = \sqrt{\frac{j}{2}} h_{j-1} - \sqrt{\frac{j+1}{2}} h_{j+1}$$

and

$$x h'_j = \sqrt{\frac{j}{2}} h_{j-1} + \sqrt{\frac{j+1}{2}} h_{j+1}$$

we get

$$x_1^{\gamma_1} \partial_{x_1}^{\delta_1} h_j = \sum_{k=j-(\gamma_1+\delta_1)}^{j+(\gamma_1+\delta_1)} C_k^{\gamma_1 \delta_1 j} h_k$$

where $(C_k^{\gamma_1 \delta_1 j})_{k,j}$ is a sequence of real numbers such that for any integers γ_1, δ_1 , there exists $C_{\gamma_1, \delta_1} > 0$ such that for any k, j in \mathbb{N} ,

$$|C_k^{\gamma_1 \delta_1 j}| \leq C_{\gamma_1 \delta_1} j^{\frac{\gamma_1 + \delta_1}{2}}.$$

We finally get

$$x^\gamma \partial_x^\delta \mathfrak{d} = \hbar^{-\delta_2} \sum_{j > J_\hbar} \left(\sum_{k=j-(\gamma_1+\delta_1)}^{j+\gamma_1+\delta_1} C_k^{\gamma_1 \delta_1 j} h_k \right) \otimes f_j^{\gamma_2 \delta_2}$$

that we rewrite as

$$x^\gamma \partial_x^\delta \mathfrak{d} = \hbar^{-\delta_2} \sum_{k > J_\hbar - (\gamma_1 + \delta_1)} h_k \otimes \left(\sum_{j=k-(\gamma_1+\delta_1)}^{k+\gamma_1+\delta_1} C_k^{\gamma_1 \delta_1 j} f_j^{\gamma_2 \delta_2} \right).$$

Denoting

$$\check{f}_k^{\gamma \delta} := \sum_{j=k-(\gamma_1+\delta_1)}^{k+\gamma_1+\delta_1} C_k^{\gamma_1 \delta_1 j} f_j^{\gamma_2 \delta_2},$$

which is a Schwartz function as a finite sum of Schwartz functions on \mathbb{R} , we get that

$$\|x^\gamma \partial_x^\delta \mathfrak{d}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \leq \hbar^{-2\delta_2} \sum_{k > J_\hbar^{\gamma_1 \delta_1}} \|\check{f}_k^{\gamma \delta}\|_{L^2(dx_2)}^2$$

with $J_\hbar^{\gamma_1 \delta_1} := J_\hbar - (\gamma_1 + \delta_1)$. Note that there is a constant $\tilde{K} > 0$ such that $J_\hbar^{\gamma_1 \delta_1} \geq \tilde{K} \hbar^{-\alpha}$. The sequence $((2k+1)^N \|\check{f}_k^{\gamma \delta}\|_{L^2(dx_2)})_k$, is bounded uniformly with $\hbar \in (0, \hbar_0)$. Indeed, from above computations,

$$\begin{aligned} (2k+1)^N \|\check{f}_k^{\gamma \delta}\|_{L^2(dx_2)} &\leq C_{\gamma_1 \delta_1} \sum_{j=k-(\gamma_1+\delta_1)}^{k+(\gamma_1+\delta_1)} j^{\frac{\gamma_1+\delta_1}{2}+N} \left(\frac{2k+1}{j} \right)^N \left[(\alpha_j^{\gamma_2 \delta_2})^2 + \hbar_0^{\tilde{\beta}} |\varepsilon_j^{\gamma_2 \delta_2}(\hbar)| \right] \\ &\leq C_{N \gamma_1 \delta_1} \sum_{j=k-(\gamma_1+\delta_1)}^{k+(\gamma_1+\delta_1)} \left[j^{\frac{\gamma_1+\delta_1}{2}+N} (\alpha_j^{\gamma_2 \delta_2})^2 + j^{\frac{\gamma_1+\delta_1}{2}+N} \hbar_0^{\tilde{\beta}} |\varepsilon_j^{\gamma_2 \delta_2}(\hbar)| \right] \\ &\leq (2(\gamma_1 + \delta_1) + 1) C_{N \gamma_1 \delta_1} \left(\|j^{\frac{\gamma_1+\delta_1}{2}+N} (\alpha_j^{\gamma_2 \delta_2})^2\|_\infty \right. \\ &\quad \left. + \hbar_0^{\tilde{\beta}} \|j^{\frac{\gamma_1+\delta_1}{2}+N} \varepsilon_j^{\gamma_2 \delta_2}(\hbar)\|_\infty \right) \end{aligned}$$

and from what precedes, for any non negative integer N , the sequences $((\alpha_j^{\gamma_2 \delta_2})^2 j^{2N})_j$ and $(\varepsilon_j^{\gamma_2 \delta_2}(\hbar) j^{2N})$ are bounded uniformly in $\hbar \in (0, \hbar_0)$. Finally, from the boundedness of $((2k+1)^N \|\check{f}_k^{\gamma \delta}\|_{L^2})$, we get

$$\begin{aligned} \|x^\gamma \partial_x^\delta \mathfrak{d}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 &= \hbar^{-2\delta_2} \sum_{k > J_h^{\gamma_1 \delta_1}} \|\check{f}_k^{\gamma \delta}\|_{L^2(dx_2)}^2 \\ &= \hbar^{-2\delta_2} \sum_{k > J_h^{\gamma_1 \delta_1}} (\|\check{f}_k^{\gamma \delta}\|_{L^2(dx_2)}^2 k^{2N}) (k\hbar^\alpha)^{-2N} \hbar^{2N\alpha} \\ &\leq C_{\gamma \delta N} \hbar^{2(N\alpha - \delta_2)} \sum_{k > J_h^{\gamma_1 \delta_1}} (k\hbar^\alpha)^{-2N} \end{aligned}$$

for any non negative integer N . Then, by sum-integral comparison methods, we have

$$\|x^\gamma \partial_x^\delta \mathfrak{d}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 = \mathcal{O}(\hbar^{(2N-1)\alpha - 2\delta_2}),$$

from what we obtain that $x^\gamma \partial_x^\delta \mathfrak{d} = \mathcal{O}_{L^2}(\hbar^\infty)$ for any multi-indices γ, δ in \mathbb{N}^2 . So, giving any order function m , we get $\|\mathfrak{d}\|_{H_\hbar(m)} = \mathcal{O}(\hbar^\infty)$, which is the expected result. \square

Remark 5.4.5. It appears in the above proof that for any Schwartz seminorm p and for any $\delta > 0$, we have

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} p(f_j^0)^\delta < \infty$$

We will use this property later on.

Thus, this lemma teaches us that only the first Landau levels of our initial state ψ_h^0 matter in the propagation, but we need to consider a large number of levels in order to get a nice estimation of the remainder. We now relate the propagation of the state

$$\tilde{\psi}_h^0 := \sum_{j \leq J_h} \psi_{j, \hbar}^0$$

through \mathcal{N} to the propagation of φ_h^0 through the initial laplacian.

Propagation under general magnetic fields

In what follows, we only assume that the magnetic field B does not vanish on Ω_0 . We do not make any further assumptions on the magnetic field. Theorem 5.3.2 gives the relation between $\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}$ and \mathcal{N} ,

$$\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}} = U_h \mathcal{N} U_h^* + U_h R_h U_h^*.$$

For $j \in \mathbb{N}$ and $t \in \mathbb{R}$, we let $\psi_{j, \hbar}^t := h_j \otimes f_j^t$. From (5.14) we get the following propagation equation :

$$i\hbar \partial_t U_h \psi_{j, \hbar}^t = \mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}} U_h \psi_{j, \hbar}^t - U_h R_h \psi_{j, \hbar}^t.$$

Considering $\alpha \in (0, 1)$ and $J_h \in \mathbb{N}$ as in Lemma 5.4.4 and summing for $j \leq J_h$, we get the following propagation equation for $\tilde{\psi}_h^t := \sum_{j \leq J_h} h_j \otimes f_j^t$:

$$\begin{cases} i\hbar \partial_t U_h \tilde{\psi}_h^t = \mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}} U_h \tilde{\psi}_h^t + \mathbf{e}_h^t \\ \tilde{\psi}_h^{t=0} = \tilde{\psi}_h^0 \end{cases} \quad (5.20)$$

with $\mathbf{e}_h^t = U_h R_h \tilde{\psi}_h^t$. We compare the solution to (5.20) to the solution φ_h^t to (5.11). For any $\hbar > 0$ and for any $t \in \mathbb{R}$, setting $\mathcal{D}_h^t = \varphi_h^t - U_h \tilde{\psi}_h^t$, the Duhamel principle gives

$$\mathcal{D}_h^t = P^t \mathcal{D}_h^0 - \frac{i}{\hbar} \int_0^t P^{t-s} \mathbf{e}_h^s ds \quad (5.21)$$

where P^t is the propagator associated with (5.11), given by Stone's theorem. We aim at proving that for a given time T and a given integer N , uniformly for times $t \in [0, T/\hbar]$,

$$\|\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}^N \mathcal{D}_h^t\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \mathcal{O}(\hbar^\infty).$$

Since P^t is unitary and commutes with $\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}$, we have

$$\|\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}^N \mathcal{D}_h^t\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq \|\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}^N \mathcal{D}_h^0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \frac{T}{\hbar^2} \sup_{s \in [0, T/\hbar]} \|\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}^N \mathbf{e}_h^s\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}.$$

Since $\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}^N$ is a pseudo-differential operator with symbol in $S(m^N)$ and U_h is unitary, we have due to Lemma 5.4.4

$$\|\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}^N \mathcal{D}_h^0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq \left\| \sum_{j > J_h} \psi_{j, \hbar}^0 \right\|_{\mathbb{H}_{\hbar}(m^{-N})} = \mathcal{O}(\hbar^\infty).$$

Noting that $\|\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}^N \mathbf{e}_h^s\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq \|R_h \tilde{\psi}_h^s\|_{\mathbb{H}_{\hbar}(m^{-N})}$, it remains to prove

$$\sup_{s \in [0, T/\hbar]} \|R_h \tilde{\psi}_h^s\|_{\mathbb{H}_{\hbar}(m^{-N})} = \mathcal{O}(\hbar^\infty). \quad (5.22)$$

Actually, we prove that for any order function μ ,

$$\sup_{s \in [0, T/\hbar]} \|R_h \tilde{\psi}_h^s\|_{\mathbb{H}_{\hbar}(\mu)} = \mathcal{O}(\hbar^\infty), \quad (5.23)$$

which implies (5.22). To do so, we begin with giving an explicit expression of R_h . Using $D_h = \mathcal{H}_0$ in Item 3 of Theorem 5.3.2, we get that for any $N \in \mathbb{N}$, there are pseudodifferential operators $S_{\hbar, N}$, Z_N such that $R_h = S_{\hbar, N} \mathcal{H}_0^N + Z_N$. Then, for any order function μ , as $j \leq K\hbar^{-\alpha}$

$$\begin{aligned} \|R_h \sum_{j \leq J_h} \psi_{j, \hbar}^t\|_{\mathbb{H}_{\hbar}(\mu)} &\leq C_N \hbar^{(1-\alpha)N} \sum_{j \leq J_h} \|S_{\hbar, N} \text{Op}_h^w(B \circ \phi^{-1})(h_j \otimes f_j^t)\|_{\mathbb{H}_{\hbar}(\mu)} \\ &\quad + \sum_{j \leq J_h} \|Z_N \psi_{j, \hbar}^t\|_{\mathbb{H}_{\hbar}(\mu)}. \end{aligned} \quad (5.24)$$

From Proposition 4.2.15, we get that for $t \in [0, T/\hbar]$, for a given $\varepsilon \in (0, 1)$,

$$\|S_{\hbar, N} \text{Op}_h^w(B \circ \phi^{-1})(h_j \otimes f_j^t)\|_{\mathbb{H}_{\hbar}(\mu)} \leq \hbar^{-3/2} C(\mu, N) C(\psi_{j, \hbar}^t) \|f_j^0\|_{L^2(\mathbb{R}_{x_2})}^{1-\varepsilon} \quad (5.25)$$

because of (5.16), with $C(\psi_{j, \hbar}^t)$ as in (4.22). To estimate this constant, we note that

$$\psi_{j, \hbar}^t = id_{L^2(\mathbb{R}_{x_1})} \otimes Q_j^{\tilde{t}} \cdot [h_j \otimes \tilde{f}_j^0]$$

where $\tilde{t} = t\hbar \in [0, T]$ so from Lemma 4.2.8 and because of $n^{(j)} \in S(1)$, we have for any order function μ

$$\sup_{t \in [0, T/\hbar]} \|\psi_{j, \hbar}^t\|_{\mathbb{H}_{\hbar}(\mu)} \leq \sup_{\tilde{t} \in [0, T]} \|id_{L^2(\mathbb{R}_{x_1})} \otimes Q_j^{\tilde{t}} \cdot [h_j \otimes \tilde{f}_j^0]\|_{\mathbb{H}_{\hbar}(\mu)} \leq C(\mu) \|f_j^0\|_{\mathbb{H}_{\hbar}(\mu)}.$$

Then using the link between the Schwartz seminorms and the weighted Sobolev norms in Lemma 4.2.4, we get

$$\sup_{t \in [0, T/\hbar]} C(\psi_{j, \hbar}^t) \leq \tilde{C}(f_j^0) \quad (5.26)$$

and because of the definition of f_j^0 , $(\|f_j^0\|_{\mathbb{H}_h(\nu)})_{j \in \mathbb{N}}$ is a bounded sequence for any order function ν , and so is $(\tilde{C}(f_j^0))_{j \in \mathbb{N}}$. Then (5.25) becomes

$$\sup_{t \in [0, T/\hbar]} \left(\|S_{h, N} \text{Op}_h^w(B \circ \phi^{-1})(h_j \otimes f_j^t)\|_{\mathbb{H}_h(\mu)} \right) \leq \hbar^{-3/2} M C(\mu, N) \|f_j^0\|_{L^2(\mathbb{R}^{x_2})}^{1-\varepsilon}. \quad (5.27)$$

We now estimate the Schwartz seminorms of $Z_N \psi_{j, \hbar}^t$. Using Proposition 4.2.18, as Z_N is a pseudodifferential operator with symbol ℓ_N supported away from a fixed neighborhood of $\{z_1 = 0\}$, where the states $\psi_{j, \hbar}^t$ are centered at any time $t \in [0, T/\hbar]$, and because of (5.26), we get for any order function μ and for any $\varepsilon > 0$,

$$\sup_{t \in [0, T/\hbar]} (\|Z_N \psi_{j, \hbar}^t\|_{\mathbb{H}_h(\mu)}) \leq \tilde{C}(\ell_N, \mu) C_\varepsilon(f_j^0) \|f_j^0\|_{L^2(\mathbb{R})}^{1-\varepsilon} \mathcal{O}(\hbar^\infty). \quad (5.28)$$

Finally, using (5.27) and (5.28) with (5.24) we get, for any $t \in [0, T/\hbar]$,

$$\begin{aligned} \|R_\hbar \sum_{j \leq J_\hbar} \psi_{j, \hbar}^t\|_{\mathbb{H}_h(\mu)} &\leq M C_N C(\mu, N) \hbar^{(1-\alpha)N-3/2} \sum_{j \leq J_\hbar} \|f_j^0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^{1-\varepsilon} \\ &\quad + \tilde{C}(\ell_N, \mu) \mathcal{O}(\hbar^\infty) \sum_{j \leq J_\hbar} C_\varepsilon(f_j^0) \|f_j^0\|_{L^2(\mathbb{R})}^{1-\varepsilon}. \end{aligned}$$

Now, from Remark 5.4.5, we get that

$$\sum_{j \leq J_\hbar} (1 + C_\varepsilon(f_j^0)) \|f_j^0\|_{L^2(\mathbb{R})}^{1-\varepsilon}$$

is a convergent series whose sum is bounded uniformly with \hbar , so that

$$\sup_{t \in [0, T/\hbar]} \|R_\hbar \sum_{j \leq J_\hbar} \psi_{j, \hbar}^t\|_{\mathbb{H}_h(\mu)} = \mathcal{O}(\hbar^\infty) \quad (5.29)$$

for any order function μ . This proves (5.23), and then we get

$$\sup_{t \in [0, T/\hbar]} \|\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}^N(\varphi_\hbar^t - U_\hbar \tilde{\psi}_\hbar^t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \mathcal{O}(\hbar^\infty). \quad (5.30)$$

Propagation under magnetic fields satisfying the property (P)

We now establish the propagation result for magnetic fields satisfying (P). We assume henceforth that (P) holds for B . We assume also there exists $b_0 > 0$ such that $\forall q \in \mathbb{R}^2$, $B(q) \geq b_0$. Considering again $\mathcal{D}_\hbar^t = \varphi_\hbar - U_\hbar \tilde{\psi}_\hbar^t$, from (5.21) we have

$$\mathcal{D}_\hbar^t = P^t \mathcal{D}_\hbar^0 - \frac{i}{\hbar} \int_0^t P^{t-s} \mathbf{e}_\hbar^s ds$$

and we now aim at proving that for a given $T > 0$, uniformly for times $t \in [0, T/\hbar]$,

$$\mathcal{D}_\hbar^t = \mathcal{O}_\mathcal{S}(\hbar^\infty).$$

We will reach this goal in two steps. We first prove that $P^t \mathcal{D}_\hbar^0 = \mathcal{O}_\mathcal{S}(\hbar^\infty)$. We have

$$U_\hbar^* \mathcal{D}_\hbar^0 = \sum_{j > J_\hbar} \psi_{j, \hbar}^0$$

then from Lemma 5.4.4, we get that

$$U_{\hbar}^* \mathcal{D}_{\hbar}^0 = \mathcal{O}_{\mathcal{S}}(\hbar^{\infty}). \quad (5.31)$$

Applying Lemma 4.2.8 to U_{\hbar} , which is a time-1 quantum flow, we get

$$\mathcal{D}_{\hbar}^0 = U_{\hbar} (U_{\hbar}^* \mathcal{D}_{\hbar}^0) = \mathcal{O}_{\mathcal{S}}(\hbar^{\infty}).$$

Finally, applying Theorem 5.3.3 to P^t , $t \in [0, T/\hbar]$, we have the long-time estimate

$$\sup_{t \in [0, T/\hbar]} (p(P^t \mathcal{D}_{\hbar}^0)) = \mathcal{O}(\hbar^{\infty}).$$

It remains now to be shown that

$$\int_0^t P^{t-s} \mathbf{e}_{\hbar}^s ds = \mathcal{O}_{\mathcal{S}}(\hbar^{\infty}). \quad (5.32)$$

We first prove that uniformly for times $s \in [0, T/\hbar]$, $\mathbf{e}_{\hbar}^s = \mathcal{O}_{\mathcal{S}}(\hbar^{\infty})$. Recall that $\mathbf{e}_{\hbar}^t = U_{\hbar} R_{\hbar} \sum_{j \leq J_{\hbar}} \psi_{j, \hbar}^t$ and the estimate (5.29), holding for any order function μ . Using Lemma 4.2.4 and Lemma 4.2.8, we get for any Schwartz seminorm p ,

$$\sup_{t \in [0, T/\hbar]} p \left(U_{\hbar} R_{\hbar} \sum_{j \leq J_{\hbar}} \psi_{j, \hbar}^t \right) = \mathcal{O}(\hbar^{\infty})$$

and so

$$\sup_{s \in [0, T/\hbar]} p(\mathbf{e}_{\hbar}^s) = \mathcal{O}(\hbar^{\infty}).$$

Now, applying Theorem 5.3.3 again, the same estimate holds for $p(P^{t-s} \mathbf{e}_{\hbar}^s)$, and by the semi-norm property we may integrate and obtain (5.32). This gives

$$\sup_{t \in [T/\hbar]} p(\mathcal{D}_{\hbar}^t) = \mathcal{O}(\hbar^{\infty}).$$

In other words, letting $\varphi_{j, \hbar}^t = U_{\hbar} \psi_{j, \hbar}^t$, we have proved

$$\sup_{t \in [0, T/\hbar]} p \left(\varphi_{\hbar}^t - \sum_{j \leq J_{\hbar}} \varphi_{j, \hbar}^t \right) = \mathcal{O}(\hbar^{\infty}), \quad (5.33)$$

where $(\varphi_{\hbar}^t)_{t \in \mathbb{R}}$ is the solution to (5.11),

5.4.3 End of the proof of Theorems 5.1.1 and 5.1.2

We consider for any j the subspaces

$$\mathcal{H}_{j, \hbar} = U_{\hbar} \cdot (\text{span}(h_j) \otimes L^2(\mathbb{R}_{x_2}))$$

and the operator

$$\mathcal{J}_{\hbar} = U_{\hbar} \mathcal{I}_{\hbar} U_{\hbar}^*,$$

which is pseudodifferential by the Egorov theorem. Since $(h_j)_{j \in \mathbb{N}}$ is a Hilbert basis, the spaces $\mathcal{H}_{j, \hbar}$ are in direct sum, and

$$\forall j \in \mathbb{N}, \forall f \in \mathcal{H}_{j, \hbar}, \mathcal{J}_{\hbar} f = (2j + 1)\hbar f.$$

For all $t \in \mathbb{R}$, $\varphi_{j, \hbar}^t := U_{\hbar} \psi_{j, \hbar}^t$, and $\psi_{j, \hbar}^t$ is the projection of ψ_{\hbar}^t on the space $\text{span}(h_j) \otimes L^2(\mathbb{R}_{x_2})$. Therefore, $\varphi_{j, \hbar}$ is the projection of φ_{\hbar}^t on $\mathcal{H}_{j, \hbar}$, so $\varphi_{j, \hbar}^t \in \mathcal{H}_{j, \hbar}$, and

$$\varphi_{\hbar}^t = \sum_{j \in \mathbb{N}} \varphi_{j, \hbar}^t.$$

This with (5.30) proves (5.4) and (5.5). Now, for each j , using (5.15) and Proposition 4.2.9 applied to the Fourier integral operator U_{\hbar} , we see that the wavefront set of $\varphi_{j,\hbar}^{t\hbar^{-1}}$ is located at the point

$$\kappa(0, \Phi_K^{(2j+1)t} z_2^0) = \Phi_B^{(2j+1)t} X_0$$

which proves (5.7). Finally, (5.6) is proved by Lemma 5.4.1. This ends the proof of Theorem 5.1.1. In order to prove Theorem 5.1.2, we still need to estimate the remainder r_{\hbar} in Schwartz seminorms. These estimates are given by (5.33), which gives (5.9).

5.5 Conclusion

In this paper, we have shown that localized quantum particles can be split into distinct pieces by long time magnetic propagation, a property that is sometimes called quantum ubiquity. On a mathematical level, this splitting always holds modulo a small $\mathcal{O}(\hbar^\infty)$ term in L^2 norm (Theorem 5.1.1). In order to get the stronger Schwartz estimates (5.9), in our study it was necessary for the magnetic field to satisfy property **(P)** and the ellipticity condition (5.8). These properties allow the use of Theorem 5.3.3 which is crucial in handling the remainder terms. It would be interesting to investigate whether, under magnetic confinement leading to discrete spectrum, as in [57], we could get rid of property **(P)**. In this case, thanks to the control on the Hamiltonian dynamics (see [57, Section 3]), one expects to get good estimates for quantum propagators up to times of order \hbar^{-M} for any $M > 0$. In this regime, the split wave-packets should self-interfere, giving rise to magnetic revivals (see [62, 44]). We hope to return to this question in the future.

Acknowledgement : The authors are grateful to Nicolas Raymond for his important contribution to the article by bringing to their attention the property **(P)**, leading to the proof of Theorem 5.3.3.

Chapitre 6

Conclusion

“Begin at the beginning,” the King said, very gravely, “and go on till you come to the end : then stop.”

Lewis Carroll, *Alice in Wonderland*

En guise de conclusion, il semble approprié d'énoncer quelques pistes non abouties de ce travail de thèse. On peut en citer trois. La première concerne l'étude de la propagation magnétique dans le cas du confinement magnétique. Ce dernier permet des propriétés spectrales absentes dans le cas général prouvé ici. Il semble possible de s'absoudre alors de la propriété de 'régularité à l'infini' du champ magnétique qui permettait un contrôle en temps long du flot quantique magnétique associé. Une deuxième piste que l'on peut mentionner ici est celle de l'étude des *revivals magnétiques*. En suivant les calculs d'Olivier Lablée dans sa thèse de doctorat, il semble possible de mettre en évidence des temps de renaissances pour des états bien préparés. Finalement, une dernière piste est celle du numérique. Il serait intéressant de mettre en évidence numériquement ce phénomène de découpe de l'état cohérent en temps longs, mais cela pose des problèmes difficiles à résoudre numériquement. Développons un peu plus chacune de ces pistes.

6.1 Confinement magnétique, propriétés spectrales et propagation en temps longs

On commence par donner une définition du confinement.

Definition 6.1.1. Le champ magnétique \mathbf{B} est dit confinant s'il existe deux constantes $C > 0$ et $M > 0$ telles que pour tout $q \in \mathbb{R}^2$,

$$\mathbf{B}(q) \geq C \quad \text{pour} \quad \|q\| \geq M. \quad (6.1)$$

Cette propriété de confinement donne la proposition suivante sur les spectres des opérateurs $\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}$ et \mathcal{N} .

Proposition 6.1.2. Soit C la constante de confinement du champ \mathbf{B} , donnée par (6.1). Alors, pour $\tilde{C} < C$, les opérateurs $\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}$ et \mathcal{N} n'ont pas de spectre essentiel dans l'intervalle $(-\infty, \tilde{C}\hbar]$ (le spectre y est donc discret). Si $0 < \lambda_1(\hbar) \leq \lambda_2(\hbar) \leq \dots$ désignent les valeurs propres de $\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}$ et $0 < \mu_1(\hbar) \leq \mu_2(\hbar) \leq \dots$ celles de \mathcal{N} , alors, pour $j \in \mathbb{N}^*$ tel que $\lambda_j(\hbar) \leq \tilde{C}\hbar$ et $\mu_j(\hbar) \leq \tilde{C}\hbar$,

$$|\lambda_j(\hbar) - \mu_j(\hbar)| = \mathcal{O}(\hbar^\infty).$$

En introduisant Π le projecteur spectral de $\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}$ associé à $(-\infty, \tilde{C}\hbar]$, un état cohérent φ se décompose alors en

$$\varphi = \Pi\varphi + (1 - \Pi)\varphi.$$

On s'attend à ce que la partie $\Pi\varphi$ corresponde à la partie confinée de l'état cohérent, la partie $(1 - \Pi)\varphi$ n'étant pas nécessairement confinée par le champ magnétique. L'image du projecteur $\mathbf{Im}(\Pi)$ restant stable par propagation magnétique, il semble que par des estimations du type Agmon (voir celles faites dans [57]) on puisse prouver un résultat de propagation pour l'état $\Pi\varphi$ similaire à celui du Chapitre 5 sans utiliser de propriétés de régularités à l'infini. Cette approche tirerait parti du caractère discret du bas du spectre de $\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}$ et de \mathcal{N} . On remplacerait alors une propriété de régularité à l'infini par une propriété locale de confinement. L'inconvénient de ceci est que la partie $(1 - \Pi)\varphi$ est a priori non négligeable : il n'y a pas de raison pour qu'elle soit $\mathcal{O}(\hbar^\infty)$. C'est par cette approche qu'avait débuté ce travail de thèse, mais elle fut vite mise de côté au profit du cadre plus général développé dans ce manuscrit.

6.2 Étude numérique de la propagation en temps longs

La troisième piste explorée dans ce travail de thèse est celle de l'observation numérique de la propagation en temps longs d'états gaussiens. L'approche utilisée ici est celle de [19], que l'on adapte au cas 2-D. L'objet est d'illustrer numériquement le phénomène de découpe d'un état cohérent gaussien par un hamiltonien magnétique, associé à un champ magnétique polynomial. On utilise pour ceci une méthode spectrale.

Considérons un champ magnétique \mathbf{B} polynomial. Il admet un potentiel \mathbf{A} lui aussi polynomial, d'où un hamiltonien polynomial. On peut alors exprimer le laplacien magnétique en termes des opérateurs de création et d'annihilation

$$a := \frac{\hat{Q} + i\hat{P}}{\sqrt{2\hbar}} \quad \text{et} \quad a^\dagger := \frac{\hat{Q} - i\hat{P}}{\sqrt{2\hbar}}.$$

En considérant la base hilbertienne $(h_j \otimes h_k)_{j,k \geq 0}$, donnée par les fonctions de Hermite, on obtient une expression de $\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}$ dans cette base sous la forme d'une matrice infinie, que l'on tronque en $j, k \leq N$, N choisi numériquement. On obtient alors le laplacien magnétique approché par une matrice tronquée M_N . Connaissant l'écriture des états cohérents gaussiens (et comprimés) dans la base des fonctions de Hermite, on obtient un vecteur colonne tronqué C_N et l'équation

$$\begin{cases} i\hbar \partial_t \varphi^t = \mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}} \varphi^t \\ \varphi^{t=0} = \varphi_0 \end{cases}$$

est alors approchée par

$$\begin{cases} i\hbar \frac{d}{dt} C_N^t = M_N C_N^t \\ C_N^{t=0} = C_N^0 \end{cases}. \quad (6.2)$$

Pour résoudre (6.2), on diagonalise M_N en une matrice diagonale D_N , de matrice de passage P_N et on obtient

$$C_N^t = P_N^{-1} e^{-\frac{it}{\hbar} D_N} P_N C_N^0.$$

Si $C_N^t = (c_{j,k}^t)_{j,k \leq N}$, on approche l'état cohérent propagé par φ^t par

$$\varphi_N^t = \sum_{j,k \leq N} c_{j,k}^t h_j \otimes h_k$$

et on trace le module de cette fonction ce qui donne la FIGURE 6.2

On remarque que la méthode est assez robuste pour des temps longs, et on constate l'allongement de l'état attendu, mais sans pouvoir clairement constater la découpe de l'état cohérent en somme d'états cohérents. Il est à noter aussi que pour les valeurs de N considérées ici, du 'bruit' numérique apparaît. Finalement, pour des valeurs de N grandes, dû à la dimension 2, on en vient à considérer des vecteurs C_N de taille N^2 et une matrice M_N de taille N^4 , qu'il nous faut alors diagonaliser. Cette méthode impose donc des temps de calculs importants (plusieurs heures pour ceux effectués ici).

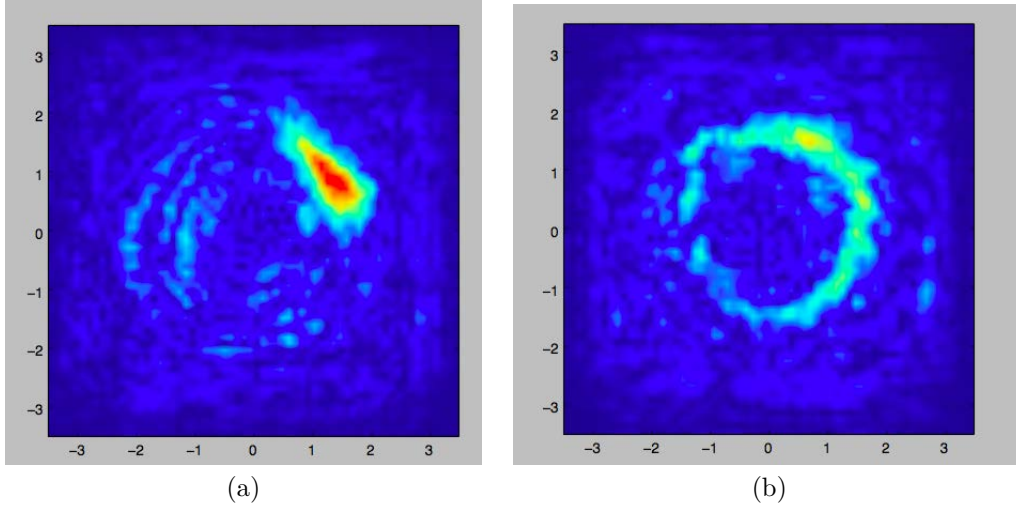


FIGURE 6.1 – Propagation d’un état gaussien (a) pour des temps proches du temps initial et (b) pour des temps de l’ordre \hbar^{-1} . Le champ est donné par $\mathbf{B}(x_1, x_2) = 1 + x_1^2 + x_2^2$, les vecteurs sont tronqués à $N = 70$ et on prend $\hbar = 0.3$. On remarque que pour des temps petits, numériquement l’état cohérent reste localisé sur la trajectoire classique, mais que pour des temps plus long, l’état se délocalise sur la trajectoire classique. Cependant, la méthode mise en oeuvre ici n’est pas assez précise pour pouvoir discerner la découpe de l’état.

6.3 Revivals magnétiques

Une deuxième piste est celle des phénomènes de délocalisations et de renaissances des états cohérents dans la propagation magnétique. On peut motiver cette perspective par l’étude réalisée dans le cas électrique, voir [24, 61]. Dans [44], Lablée étudie des phénomènes de renaissance et de destruction d’états localisés excités dans la propagation par un hamiltonien qui est une fonction de l’oscillateur harmonique. Il se trouve que ces calculs s’adaptent directement pour des états initiaux non excités, en *fond de puit*, qui dans le cas 1-D prene la forme

$$\psi = \sum_{j \leq \hbar^{-\delta}} \alpha_j h_j,$$

h_j désignant les fonctions de Hermite, et la suite $(\alpha_j) \in \ell^2(\mathbb{N})$ étant normalisée.

Les résultats du Chapitre 3 montrent que la propagation par $\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}$ suit dans toutes les normes de Schwartz la propagation par la forme normale \mathcal{N} à $\mathcal{O}(\hbar^\infty)$ près. Or, il se trouve que dans certains cas de confinement, la forme normale est le quantifié d’un hamiltonien de la forme

$$I_{\hbar}^{(1)} g(I_{\hbar}^{(2)}, I_{\hbar}^{(1)}).$$

Se pose donc la question : *peut-on adapter les calculs de [44] dans le cas de la propagation par la forme normale ci-dessus* ? Si oui, par les résultats du Chapitre 3, on obtiendrait des temps de renaissances pleines et fractionnaires et des temps de délocalisation pour des états cohérents bien préparés, de faible énergie.

Ces trois pistes n’ont pas été développées dans ce travail de thèse car elles ne répondaient pas à la problématique principale. Néanmoins elles ouvrent des perspectives intéressantes pour des travaux ultérieurs.

Annexe A

Deux théorèmes importants

A.1 Théorème de Stone

Le théorème de Stone s'énonce comme suit.

Theorem A.1.1. *Soit $(\mathcal{L}, \mathbf{Dom}(\mathcal{L}))$ un opérateur autoadjoint de $L^2(\mathbb{R}^n)$. Alors, pour tout $\psi_0 \in \mathbf{Dom}(\mathcal{L})$, il existe une unique solution locale $t \mapsto S(t)\psi_0$ de classe \mathcal{C}^1 à l'équation*

$$i\hbar\partial_t\psi^t = \mathcal{L}\psi^t \quad \psi^{t=0} = \psi_0.$$

Cette solution est globale et, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\|S(t)\psi_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\psi_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $\psi_0 \in \mathbf{Dom}(\mathcal{L})$, $S(t)\psi_0 \in \mathbf{Dom}(\mathcal{L})$.

Ce théorème donne l'existence d'un groupe à un paramètre, résolvant l'équation de Schrödinger associée à un opérateur autoadjoint. Cette famille d'opérateurs est alors appelée *propagateurs associés à \mathcal{L}* . Les hypothèses importantes sont le caractère autoadjoint et l'indépendance en temps de l'opérateur \mathcal{L} . On utilise abondamment ce théorème de le cadre de la propagation par des hamiltoniens indépendants du temps, tel l'hamiltonien magnétique qui se quantifie en le laplacien magnétique $\mathcal{L}_{\hbar, \mathbf{A}}$. Dans le Chapitre 3, on démontre des propriétés de régularité de cette famille de propagateurs dans le cas magnétique et pour de la propagation en des temps semi-classiquement longs.

A.2 Théorème d'Egorov

On donne l'énoncé du théorème d'Egorov de [74]. On considère une famille d'hamiltoniens à support compact $(H_t)_{t \in [0, T]}$. Le flot associé à cette famille d'hamiltoniens constitue alors une famille de symplectomorphismes $(\kappa_t)_{t \in [0, T]}$, donnés par

$$\partial\kappa_t = \chi_{H_t} \circ \kappa_t$$

où χ_{H_t} désigne le champ de vecteur hamiltonien associé à $(H_t)_{t \in [0, T]}$. On considère de plus le flot quantique $(P^t)_{t \in [0, T]}$ associé à $(H_t)_{t \in [0, T]}$, solution de

$$i\hbar\partial_t P^t = \text{Op}_{\hbar}^w(H_t)P^t, \quad P^{t=0} = Id_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Ce flot est bien défini, par les résultats du Chapitre 3. On énonce le théorème d'Egorov.

Theorem A.2.1. *Soit $a \in S(m)$ un symbole, avec m une fonction d'ordre arbitraire. Alors, pour $t \in [0, T]$,*

$$P^{-t}\text{Op}_{\hbar}^w(a)P^t = \text{Op}_{\hbar}^w(b_t)$$

avec b_t un symbole de la classe $S(m)$ et on a

$$b_t = \kappa_t^* a_t + \mathcal{O}_{S(m)}(\hbar).$$

Ce théorème nous enseigne deux choses. La première est que lorsque l'on conjugue un opérateur pseudo-différentiel par un flot quantique, on obtient à nouveau un opérateur pseudo-différentiel. La deuxième est que le symbole de ce dernier est donné par le flot classique de l'hamiltonien sous-jacent au système quantique. Une conséquence sur la localisation des états est la suivante. On définit le front d'onde semi-classique.

Definition A.2.2. Soit $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ un état tel que $\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \mathcal{O}_\hbar(1)$. Le front d'onde de φ est l'ensemble $\mathcal{WF}(\varphi)$ défini comme : $X_0 \notin \mathcal{WF}(\varphi)$ si et seulement s'il existe un symbole $a \in S(1)$, $\gamma > 0$ et un voisinage \mathcal{V} de X_0 tels que $\forall X \in \mathcal{V}$, $a(X) \geq \gamma$ et $\|\text{Op}_\hbar^w(a)\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \mathcal{O}(\hbar^\infty)$.

Le théorème d'Egorov nous prodigue alors la proposition suivante.

Proposition A.2.3. Soit φ un état de $L^2(\mathbb{R}^n)$ tel que $\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \mathcal{O}(1)$. Alors, pour tout $t \in [0, T]$,

$$\mathcal{WF}(P^t \varphi) = \kappa_t(\mathcal{WF}(\varphi)).$$

Le théorème d'Egorov et la proposition précédente montrent que pour des temps finis, la dynamique classique guide la dynamique quantique. Effectivement, en appliquant cela à un état cohérent, on obtient que ce dernier est localisé sur les trajectoires classiques. Dans le Chapitre 3, on montre qu'en fait, un état cohérent reste un état cohérent au cours de la propagation en temps finis par des hamiltoniens bornés.

Bibliographie

- [1] S. Agmon. Bounds on exponential decay of eigenfunctions of Schrödinger operators. In *Schrödinger operators (Como, 1984)*, volume 1159 of *Lecture Notes in Math.*, pages 1–38. Springer, Berlin, 1985.
- [2] N. Anantharaman, C. Fermanian-Kammerer, and F. Macià. Long-time dynamics of completely integrable Schrödinger flows on the torus. 41 pages, November 2012.
- [3] M. A. Astaburuaga, P. Briet, V. Bruneau, C. Fernandez, and G. Raikov. Dynamical resonances and SSF singularities for a magnetic Schroedinger operator. *Serdica Math. J.*, 34 :179–218, 2008. 29 pages, published version.
- [4] J. Avron, I. Herbst, and B. Simon. Schrodinger operators with magnetic fields. i. General interactions. *Duke Math. J.*, 45(4) :847–883, 12 1978.
- [5] G. Boil, N. Raymond, and S. Vũ Ngọc. On the stability of the Schwartz class under the magnetic Schrödinger flow. *Preprint*, 2018.
- [6] G. Boil and S. Vũ Ngọc. Long time dynamics of coherent states in strong magnetic fields. *Preprint*, 2018.
- [7] J. F. Bony, V. Bruneau, and G. Raikov. *Spectral and Scattering Theory and Related Topics*, chapter Resonances and Spectral Shift Function Singularities for Magnetic Quantum Hamiltonians. RIMS, 2014, 2013.
- [8] J.-M. Bouclet and S. De Bièvre. Long time propagation and control on scarring for perturbed quantized hyperbolic toral automorphisms. *Annales Henri Poincaré*, 6(5) :885–913, Oct 2005.
- [9] L. Charles and S. Vũ Ngọc. Spectral asymptotics via the semiclassical Birkhoff normal form. *Duke Math. J.*, 143(3) :463–511, 06 2008.
- [10] C. Cheverry. Mathematical perspectives in plasma turbulence. [hal-01617652](#), to appear in *Research and Reports on Mathematics*.
- [11] M. Combescure and D. Robert. Semiclassical spreading of quantum wave packets and applications near unstable fixed points of the classical flow. *Asymptotic Analysis*, 14(4) :377–404, 1997.
- [12] M. Combescure and D. Robert. Quadratic Quantum Hamiltonians revisited. *Cubo Mathematical Journal*, 8 :61–66, 2006. Théorie.
- [13] M. Combescure and D. Robert. *Coherent States and Applications in Mathematical Physics*. Theoretical and Mathematical Physics. Springer Netherlands, 2012.
- [14] M. De Gosson. *The principles of Newtonian and quantum mechanics : the need for Planck’s constant, h*. World Scientific Publishing Company, 1st edition, 2001.
- [15] M. Dimassi and J. Sjöstrand. *Spectral asymptotics in the semi-classical limit*, volume 268 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

- [16] N. Dombrowski and N. Raymond. Semiclassical Analysis with Vanishing Magnetic Fields. *Journal of Spectral Theory*, 3(3) :423–464, 2013. 35 pages.
- [17] A. Dufresnoy. Un exemple de champ magnétique dans \mathbf{R}^{ν} . *Duke Math. J.*, 50(3) :729–734, 09 1983.
- [18] P. Ehrenfest. Bemerkung über die angenäherte gültigkeit der klassischen mechanik innerhalb der quantenmechanik. *Zeitschrift für Physik*, 45(7) :455–457, Jul 1927.
- [19] F. Faure. Projet de mécanique quantique.
- [20] G. B. Folland. *Harmonic analysis in phase space*. The Annals of mathematics studies 122. Princeton University Press, 1989.
- [21] B. Fournais, S. ; Helffer. Accurate eigenvalue asymptotics for the magnetic Neumann Laplacian. *Annales de l’Institut Fourier*, 56(1) :1–67, 2006.
- [22] S. Fournais and B. Helffer. *Spectral methods in surface superconductivity*, volume 77 of *Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2010.
- [23] Roy J. Glauber. The quantum theory of optical coherence. *Phys. Rev.*, 130 :2529–2539, Jun 1963.
- [24] F. Golse. équation de Schrödinger, dispersion et analyse numérique. *Matapli*, 68, 2002.
- [25] G. A. Hagedorn. Semiclassical quantum mechanics. i. The $\hbar \rightarrow 0$ limit for coherent states. *Comm. Math. Phys.*, 71(1) :77–93, 1980.
- [26] G. A. Hagedorn. Semiclassical quantum mechanics. iii. The large order asymptotics and more general states. *Annals of Physics*, 135(1) :58 – 70, 1981.
- [27] G. A. Hagedorn. Semiclassical quantum mechanics, iv. Large order asymptotics and more general states in more than one dimension. *Annales de l’I.H.P. Physique théorique*, 42(4) :363 – 374, 1985.
- [28] G. A. Hagedorn and A. Joye. Semiclassical dynamics with exponentially small error estimates. *Communications in Mathematical Physics*, 207(2) :439–465, Nov 1999.
- [29] G. A. Hagedorn and A. Joye. Exponentially accurate semiclassical dynamics : Propagation, localization, Ehrenfest times, scattering, and more general states. *Annales Henri Poincaré*, 1(5) :837–883, Nov 2000.
- [30] B. Helffer. *Semi-classical analysis for the Schrödinger operator and applications*, volume 1336 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1988.
- [31] B. Helffer. *Spectral Theory and its Applications*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics 139. Cambridge University Press, 2013.
- [32] B. Helffer, Y. Kordyukov, N. Raymond, and S. Vũ Ngọc. Magnetic wells in dimension three. *Anal. PDE*, 9(7) :1575–1608, 2016.
- [33] B. Helffer and Y. A. Kordyukov. Accurate semiclassical spectral asymptotics for a two-dimensional magnetic Schrödinger operator. *Annales Henri Poincaré*, 16(7) :1651–1688, Jul 2015.
- [34] B. Helffer and A. Mohamed. Caractérisation du spectre essentiel de l’opérateur de Schrödinger avec un champ magnétique. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 38(2) :95–112, 1988.
- [35] B. Helffer and A. Mohamed. Semiclassical analysis for the ground state energy of a Schrödinger operator with magnetic wells. *J. Funct. Anal.*, 138(1) :40–81, 1996.
- [36] B. Helffer and J. Nourrigat. *Hypoellipticité maximale pour des opérateurs polynômes de champs de vecteurs*, volume 58 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1985.

- [37] B. Helffer and J. Nourrigat. Décroissance à l'infini des fonctions propres de l'opérateur de Schrödinger avec champ électromagnétique polynomial. *J. Anal. Math.*, 58 :263–275, 1992. Festschrift on the occasion of the 70th birthday of Shmuel Agmon.
- [38] Y. A Helffer, B.; Kordyukov. Eigenvalue estimates for a three-dimensional magnetic Schrödinger operator. *Asymptotic Analysis*, 82(1-2) :65–89, 2013.
- [39] E. J. Heller. The semiclassical way to molecular spectroscopy. *Acc. Chem. Res.*, 14(12) :368—375, 1981.
- [40] Klaus Hepp. The classical limit for quantum mechanical correlation functions. *Comm. Math. Phys.*, 35(4) :265–277, 1974.
- [41] L. Hörmander. Hypoelliptic second order differential equations. *Acta Math.*, 119 :147–171, 1967.
- [42] P. Iglesias. Le mystère de la lettre H. <http://math.huji.ac.il/~piz/documents/LMLH.pdf>, 1998.
- [43] T. Ikebe and T. Kato. Uniqueness of the self-adjoint extension of singular elliptic differential operators. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 9 :77–92, 1962.
- [44] O. Lablée. *Autour de la dynamique semi-classique de certains systèmes complètement intégrables*. PhD thesis, Université Joseph Fourier de Grenoble 1, 2009.
- [45] R. G. Littlejohn. A guiding center Hamiltonian : a new approach. *J. Math. Phys.*, 20(12) :2445–2458, 1979.
- [46] A. Maspero and D. Robert. On time dependent schrodinger equations : Global well-posedness and growth of sobolev norms. *Journal of Functional Analysis*, 273(2) :721 – 781, 2017.
- [47] T. G. Northrop. *The adiabatic motion of charged particles*. Interscience Tracts on Physics and Astronomy, Vol. 21. Interscience Publishers John Wiley & Sons New York-London-Sydney, 1963.
- [48] T. Paul. *Semi-Classical Methods with Emphasis on Coherent States*, pages 51–88. Springer New York, New York, NY, 1997.
- [49] T. Paul. échelles de temps pour l'évolution quantique à petite constante de PLANCK. *Séminaire X-EDP*, 2007.
- [50] T. Paul. Semiclassical analysis and sensitivity to initial conditions. *Information and Computation*, 207(5) :660 – 669, 2009. From Type Theory to Morphological Complexity : Special Issue dedicated to the 60th Birthday Anniversary of Giuseppe Longo.
- [51] T. Paul and A. Uribe. A construction of quasi-modes using coherent states. *Annales de l'I.H.P. Physique théorique*, 59(4) :357–381, 1993.
- [52] T. Paul and A. Uribe. On the pointwise behavior of semi-classical measures. *Communications in Mathematical Physics*, 175 :51–88, 1996.
- [53] R. Penrose. *Road to Reality*. cape jonathan (rand), 2004.
- [54] N. Popoff and N. Raymond. When the 3d magnetic Laplacian meets a curved edge in the semiclassical limit. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 45(4) :2354–2395, 2013.
- [55] N. Raymond. From the Laplacian with variable magnetic field to the electric Laplacian in the semiclassical limit. *Anal. PDE*, 6(6) :1289–1326, 2013.
- [56] N. Raymond. *Bound states of the magnetic Schrödinger operator*, volume 27 of *EMS Tracts in Mathematics*. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2017.

- [57] N. Raymond and S. Vũ Ngọc. Geometry and spectrum in 2d magnetic wells. *Annales de l'Institut Fourier*, 65(1) :137–169, 2015.
- [58] Simon B. Reed M. *Methods of mathematical physics. Functional analysis*, volume Vol 1. AP, 1980.
- [59] D. Robert. *Autour de l'approximation semi-classique*, volume 68 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser, 1987.
- [60] D. Robert. Propagation of coherent states in quantum mechanics and applications. In *Partial differential equations and applications*, volume 15 of *Sémin. Congr.*, pages 181–252. Soc. Math. France, Paris, 2007.
- [61] D. Robert. La cohérence dans tout ses états. *SMF - Gazette*, 132, 2012.
- [62] R. W. Robinett. Quantum wave packet revivals. *Phys. Rep.*, 392(1-2) :1–119, 2004.
- [63] E. Schrödinger. The continuous transition from the micro- to the macro-mechanics. *Die Naturwissenschaften*, 28, 1926.
- [64] E. Schrödinger. Quantisation as a problem of proper values (part 2). *Annalen der Physik*, 79, 1926.
- [65] R. Schubert, R. O. Vallejos, and Fabricio T. How do wave packets spread? Time evolution on Ehrenfest time scales. *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, 45(21), 6 2012.
- [66] D. Tataru. On the Fefferman-Phong inequality and related problems. *Comm. Partial Differential Equations*, 27(11-12) :2101–2138, 2002.
- [67] D. Tataru. Phase space transforms and microlocal analysis. In *Phase space analysis of partial differential equations. Vol. II*, Pubbl. Cent. Ric. Mat. Ennio Giorgi, pages 505–524. Scuola Norm. Sup., Pisa, 2004.
- [68] K. Vogtmann V. I. Arnold, A. Weinstein. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2nd edition, 1989.
- [69] S. Vũ Ngọc and C. Wacheux. Smooth normal forms for integrable hamiltonian systems near a focus-focus singularity. *Acta Mathematica Vietnamica*, 38(1) :107–122, 2013. 29 pages.
- [70] S. Vũ Ngọc. *Sur le spectre des systèmes complètement intégrables semi-classiques avec singularités*. PhD thesis, Université de Grenoble 1 – Joseph Fourier, 1998.
- [71] S. Vũ Ngọc. *Systèmes intégrables semi-classiques : du local au global*. Habilitation à diriger des recherches, Université Joseph-Fourier - Grenoble I, December 2003.
- [72] K. Yajima. Schrodinger evolution equations with magnetic fields. *Journal d'Analyse Mathématique*, 56 :29–76, 1991.
- [73] K. Yajima. Gevrey frequency set and semi-classical behaviour of wave packets. *Schrodinger operators, Proceeding of the workshop, Aarhus, 1991*, pages 248–264, 1992.
- [74] M. Zworski. *Semiclassical Analysis*. Graduate studies in mathematics. American Mathematical Society, 2012.

Titre : Dynamique quantique en temps longs d'états cohérents dans un champ magnétique fort.

Mots clés : états cohérents, propagation magnétique, temps longs, centre-guide

La propagation des *états cohérents* est un sujet actif de la recherche des dernières décennies. Due à leur forte localisation dans l'espace des phases, la propagation quantique de ces états est très liée à la dynamique classique sous-jacente. En particulier, pour des temps de propagation indépendants de \hbar , voire pour des temps de l'ordre du temps d'Erhenfest $\mathcal{T}_E = \mathcal{O}(|\ln(\hbar)|)$, la dynamique quantique des états cohérents suit exactement les trajectoires classiques associées. C'est ce que prouve le théorème d'Egorov. Le problème est alors celui de la propagation en temps longs, c'est à dire des temps T_h plus grands que le temps \mathcal{T}_E , notamment des temps de l'ordre $\mathcal{O}(\hbar^{-1})$.

Dans le cadre de la propagation quantique dans un *champ magnétique fort*, l'opérateur de Schrödinger est donné par le laplacien magnétique,

$$\mathcal{L}_\hbar := \| -i\hbar\nabla - \mathbf{A} \|^2$$

avec $\mathbf{A} \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ le potentiel magnétique associé au champ magnétique $\mathbf{B} > 0$. Il s'agit du quantifié de Weyl de l'hamiltonien

$$H : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \ni (q, p) \mapsto \|p - \mathbf{A}(q)\|^2 \in \mathbb{R}.$$

La dynamique classique sous-jacente est alors bien connue : il s'agit du mouvement *centre-guide*, i.e. une rotation rapide, de pulsation appelée pulsation synchrotron ou de Larmor, qui se fait autour d'un centre virtuel qui, lui, décrit un mouvement 'lent' le long des lignes de champs. Le travail de cette thèse est alors d'étudier l'impact de cette dynamique *centre-guide* sur la propagation quantique des états cohérents de basse énergie, i.e. de l'ordre de \hbar , en des temps $T \asymp \hbar^{-1}$.

Pour y parvenir, il est tout d'abord nécessaire de préciser la classe d'états cohérents que l'on étudie ici. Il s'agit d'une classe suffisamment générale pour qu'elle englobe les résultats déjà prouvés sur les états cohérents, mais suffisamment précise aussi pour pouvoir la propager par des opérateurs pseudo-différentiels. Ceci fait, s'appuyant sur des estimations de Wigner sur les états cohérents sus-définis, et sur des techniques de régularités elliptiques et de forme normale, on prouve que pour des temps de propagation magnétique de l'ordre \hbar^{-1} , il apparaît un phénomène purement quantique de séparation de l'état cohérent propagé en somme d'états cohérents, tous suivant la même dynamique mais à des vitesses différentes.

Title : Long time quantum dynamics of coherent states under a strong magnetic field

Keywords : coherent states, magnetic propagation, long time behavior, center-guide

In recent decades, the propagation of *coherent states* was intensely studied. Due to their strong localization in the phase space, the quantum dynamics narrowly follows the associated classic dynamics. Actually, for propagation times of order less or equal to the Erhenfest time $\mathcal{O}(|\ln(\hbar)|)$, one can prove that the dynamics of the coherent state follows exactly the classic dynamics. This follows from the Egorov Theorem. So, the aim is to study the propagation of coherent states for times beyond the Erhenfest time \mathcal{T}_E , notably for times of order $\mathcal{O}(\hbar^{-1})$.

In the case the quantum propagation under strong magnetic field, the Schrödinger operator is given by the magnetic Laplacien

$$\mathcal{L}_\hbar := \| -i\hbar\nabla - \mathbf{A} \|^2$$

with $\mathbf{A} \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ the magnetic potential associated with the magnetic field $\mathbf{B} > 0$. It is in fact the Weyl quantization of the magnetic hamiltonian

$$H : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \ni (q, p) \mapsto \|p - \mathbf{A}(q)\|^2 \in \mathbb{R}.$$

The underlying classical dynamics is given by the famous *center guide* movement : it is a fast oscillation with pulsation given by the synchrotron, or Larmor, pulsation around a virtual center that describes a 'slow' motion along the field lines of the magnetic field. This thesis is about studying the consequence of this *center guide* motion on the quantum propagation of coherent states with low energy, of order \hbar , for long times $T \asymp \hbar^{-1}$.

To do so, it is first of all necessary to precisely define the class of the coherent states we are studying here. It is a class that must be wide enough so that the ... can apply to it but precise enough to fit to the propagation through pseudo-differential operators. Then, using Wigner estimates on the above class of coherent states, and results of magnetic elliptic regularity and normal form, one can prove the following. For times of order \hbar^{-1} , under a strong magnetic field, a propagated coherent state splits on a sum of coherent states, each one following the same dynamics, led by the magnetic field \mathbf{B} , each one with its own speed.