



HAL
open science

Prise en compte des incertitudes des problèmes en vibro-acoustiques (ou interaction fluide-structure)

Khalil Dammak

► **To cite this version:**

Khalil Dammak. Prise en compte des incertitudes des problèmes en vibro-acoustiques (ou interaction fluide-structure). Génie mécanique [physics.class-ph]. Normandie Université; École nationale d'ingénieurs de Sfax (Tunisie), 2018. Français. NNT : 2018NORMIR19 . tel-02064258

HAL Id: tel-02064258

<https://theses.hal.science/tel-02064258>

Submitted on 11 Mar 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

Pour obtenir le diplôme de doctorat
Spécialité Mécanique

Préparée au sein de
Institut National des Sciences Appliquées de Rouen Normandie
Et
Ecole Nationale d'Ingénieurs de Sfax

Prise en compte des incertitudes des problèmes en vibroacoustiques (ou interaction fluide-structure)

Présentée et soutenue par
Khalil DAMMAK

Thèse soutenue publiquement le (27/11/2018)
devant le jury composé de

M. Mabrouk BEN TAHAR	Professeur des Universités, Université de Technologie de Compiègne	Président
M. Mohamed Najib ICHCHOU	Professeur des Universités, Ecole Centrale de Lyon	Rapporteur
M. Chokri BOURAOUI	Professeur des Universités, Ecole Nationale d'Ingénieurs de Sousse	Rapporteur
M. Tahar FAKHFAKH	Professeur des Universités, Ecole Nationale d'Ingénieurs de Sfax	Examineur
M. Abdelkhalek EL HAMI	Professeur des Universités, INSA de Rouen	Directeur de thèse
M. Mohamed HADDAR	Professeur des Universités, Ecole Nationale d'Ingénieurs de Sfax	Directeur de thèse
M. Lassaad WALHA	Professeur des Universités, Ecole Nationale d'Ingénieurs de Sfax	Co-directeur de thèse

Thèse dirigée par M. Abdelkhalak EI HAMI (LMN) et M. Mohamed HADDAR (LA2MP)

Remerciment

Le présent travail, qui s'inscrit dans le cadre d'une convention en cotutelle internationale de thèse, a été mené aux sein du *Laboratoire de Mécanique de Normandie (LMN)* de l'INSA de Rouen Normandie et du *Laboratoire de Mécanique, Modélisation et Production (LA2MP)* de l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Sfax.

En tout premier lieu, je souhaite remercier mes directeurs de thèse, qui m'ont accordé leurs confiances en acceptant de diriger ma thèse. J'exprime ma profonde gratitude à Messieurs:

Prof. Abdelkhalak EL HAMI pour son accueil, et sa disponibilité pendant mes séjours au Laboratoire de Mécanique de Normandie durant ma thèse, et pour son aide et ses précieux conseils.

Prof. Mohamed HADDAR pour sa grande disponibilité, sa rigueur scientifique, et pour son soutien permanent pendant mes séjours au Laboratoire de Mécanique, Modélisation et Production.

Mes sincères remerciements et ma profonde reconnaissance à monsieur **Lassaad WALHA**, Professeur des universités à l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Sfax, qui a co-encadré ce travail de recherche et qui a bien voulu m'aider pendant la durée de ma thèse.

Je remercie profondément Messieurs:

Prof. Mabrouk BEN TAHAR de m'avoir fait l'honneur de présider le jury de ma soutenance.

Prof. Mohamed ICHCHOU et **Prof. Chokri BOURAOU** d'avoir accepté la lourde tâche d'évaluer et de rapporter mes travaux.

Prof. Tahar FAKHFAKH d'avoir accepté d'examiner ce mémoire.

Enfin, je tiens à remercier spécialement ma famille et mes amis qui m'ont encouragé pendant toute la période de mes travaux.

Résumé

Ce travail de thèse porte sur l'analyse robuste et l'optimisation fiabiliste des problèmes vibro-acoustiques (ou en interaction fluide-structure) en tenant en compte des incertitudes des paramètres d'entrée.

En phase de conception et de dimensionnement, il paraît intéressant de modéliser les systèmes vibroacoustiques ainsi que leurs variabilités qui peuvent être essentiellement liées à l'imperfection de la géométrie ainsi qu'aux caractéristiques des matériaux. Il est ainsi important, voire indispensable, de tenir compte de la dispersion des lois de ces paramètres incertains afin d'en assurer une conception robuste. Par conséquent, l'objectif est de déterminer les capacités et les limites, en termes de précision et de coûts de calcul, des méthodes basées sur les développements en chaos polynomiaux en comparaison avec la technique référentielle de Monte Carlo pour étudier le comportement mécanique des problèmes vibroacoustique comportant des paramètres incertains.

L'étude de la propagation de ces incertitudes permet leur intégration dans la phase de conception. Le but de l'optimisation fiabiliste *Reliability-Based Design Optimization (RBDO)* consiste à trouver un compromis entre un coût minimum et une fiabilité accrue. Par conséquent, plusieurs méthodes, telles que la méthode hybride (*HM*) et la méthode *Optimum Safety Factor (OSF)*, ont été développées pour atteindre cet objectif.

Pour remédier à la complexité des systèmes vibro-acoustiques comportant des paramètres incertains, nous avons développé des méthodologies spécifiques à cette problématique, via des méthodes de méta-modélisation, qui nous ont permis de bâtir un modèle de substitution vibro-acoustique, qui satisfait en même temps l'efficacité et la précision du modèle.

L'objectif de cette thèse, est de déterminer la meilleure méthodologie à suivre pour l'optimisation fiabiliste des systèmes vibroacoustiques comportant des paramètres incertains.

Mots-clé:

Vibro-acoustique, Chaos polynomial généralisé, Monte Carlo, Optimisation fiabiliste, Modèle de substitution.

Abstract

This PhD thesis deals with the robust analysis and reliability optimization of vibro-acoustic problems (or fluid-structure interaction) taking into account the uncertainties of the input parameters.

In the design and dimensioning phase, it seems interesting to model the vibro-acoustic systems and their variability, which can be mainly related to the imperfection of the geometry as well as the characteristics of the materials. It is therefore important, if not essential, to take into account the dispersion of the laws of these uncertain parameters in order to ensure a robust design. Therefore, the purpose is to determine the capabilities and limitations, in terms of precision and computational costs, of methods based on polynomial chaos developments in comparison with the Monte Carlo referential technique for studying the mechanical behavior of vibro-acoustic problems with uncertain parameters.

The study of the propagation of these uncertainties allows their integration into the design phase. The goal of the reliability-Based Design Optimization (RBDO) is to find a compromise between minimum cost and a target reliability. As a result, several methods, such as the hybrid method (*HM*) and the Optimum Safety Factor (*OSF*) method, have been developed to achieve this goal.

To overcome the complexity of vibro-acoustic systems with uncertain parameters, we have developed methodologies specific to this problem, via meta-modeling methods, which allowed us to build a vibro-acoustic surrogate model, which at the same time satisfies the efficiency and accuracy of the model.

The objective of this thesis is to determine the best methodology to follow for the reliability optimization of vibro-acoustic systems with uncertain parameters.

Keywords:

Vibroacoustic, Generalized polynomial chaos, Monte Carlo, Reliability based design optimization, Surrogate model.

Table des matières

Table des matières	v
Table des figures	x
Liste des tableaux	xiii
Introduction générale	1
1 Quantification des incertitudes et fiabilité des problèmes vibro-acoustiques	5
1.1 Introduction	6
1.2 Présentation des problèmes vibro-acoustiques	6
1.2.1 Présentation du modèle global	7
1.2.2 Equations du modèle de la structure	8
1.2.2.1 Conditions aux limites	8
1.2.2.2 Formulation variationnelle du problème dynamique	9
1.2.2.3 Discrétisation par éléments finis du problème dynamique	10
1.2.3 Equations du modèle de la cavité acoustique	11
1.2.3.1 Conditions aux limites	11
1.2.3.2 Formulation variationnelle de la cavité acoustique	12
1.2.3.3 Discrétisation par éléments finis de la cavité acoustique	13
1.2.4 Equations du modèle vibro-acoustique couplé	14
1.2.4.1 Conditions aux limites et couplage fluide-structure	14

1.2.4.2	Discrétisation par éléments finis du problème vibro-acoustique couplé	15
1.3	Quantification des incertitudes	16
1.3.1	Classification des incertitudes	16
1.3.2	Modélisation et propagation des incertitudes	16
1.3.2.1	Approches Possibilistes	17
1.3.2.2	Approches Probabilistes	18
1.4	Fiabilité mécanique des systèmes	20
1.4.1	Fonction de performance	21
1.4.2	Probabilité de défaillance	22
1.4.2.1	Méthodes de simulations	22
1.4.2.2	Méthodes d'approximation FORM/SORM	24
1.4.3	Couplage mécano-fiabiliste	25
1.5	Conclusion	26
2	Approche robuste basée sur le chaos polynômial généralisé des systèmes vibro-acoustiques	27
2.1	Introduction	28
2.2	Méthode de Monte Carlo	28
2.3	Chaos polynômial généralisé (CPG)	30
2.3.1	Généralités	30
2.3.2	Calcul pratique du développement en polynômes du chaos polynômial généralisé	32
2.3.2.1	Approche non-intrusive	33
2.3.2.2	Critères de choix de l'ordre optimal de troncation	35
2.4	Modélisation numérique de l'incertitude de la propagation acoustique via le chaos polynômial généralisé	36
2.4.1	Modélisation analytique du guide cylindrique	37

2.4.2	Modélisation numérique du guide cylindrique	38
2.4.3	Analyse probabiliste	40
2.5	Etude vibro-acoustique d'une cavité simplifiée en présence d'incertitude	42
2.5.1	Etude vibro-acoustique (déterministe)	43
2.5.2	Etude avec prise en compte d'incertitudes	44
2.6	Conclusion	46
3	Optimisation fiabiliste des systèmes vibro-acoustiques	47
3.1	Introduction	49
3.2	Optimisation des structures	50
3.2.1	Formulation du problème d'optimisation	51
3.2.2	Optimisation de conception déterministe	52
3.2.3	Exemple d'une poutre en flexion	53
3.3	Optimisation fiabiliste (<i>Reliability-based design optimization RBDO</i>)	55
3.3.1	Formulation de l'optimisation fiabiliste de conception	56
3.3.2	Approche classique	57
3.3.3	Approche hybride (HM)	59
3.3.4	Facteurs de sécurité optimaux (OSF)	60
3.3.5	Méthode hybride robuste (RHM)	62
3.4	Méthode OSF couplée avec le chaos polynomial généralisé appliquée aux systèmes vibro-acoustiques en présence d'incertitudes	64
3.4.1	Exemple de plaque flexible couplée à une cavité acoustique rectangulaire	65
3.4.1.1	Modèle déterministe	67
3.4.1.2	Analyse probabiliste	69
3.4.1.3	Méthode OSF couplée avec le chaos polynomial généralisé	70
3.4.2	Exemple de cavité acoustique simplifiée d'un habitacle couplée avec des plaques structurelles	72

3.5	Optimisation fiabiliste basée sur la méthode RHM d'un simple silencieux à chambre d'expansion	75
3.6	Conclusion	79
4	Méta-modélisation pour l'analyse d'incertitudes des systèmes vibro-acoustiques	80
4.1	Introduction	82
4.2	Mise en oeuvre d'un modèle de substitution	83
4.3	Métamodèle estimé dans la boucle d'optimisation	83
4.4	Méthodes d'échantillonnage de l'espace de conception	84
4.4.1	Plans d'expérience standards	85
4.4.2	Méthodes de remplissage de l'espace de conception (Space filling design)	86
4.5	Construction des métamodèles	87
4.5.1	Régression polynômiale	88
4.5.2	Moindres carrés mobiles	89
4.5.3	Krigeage	91
4.5.4	Fonctions de bases radiales (RBF)	93
4.5.4.1	Formulation du modèle	93
4.5.4.2	Choix de la fonction de base radiale et effet du facteur d'atténuation	95
4.5.5	Régression à Vecteur de Support	95
4.6	Validation des métamodèles	98
4.6.1	Mesures d'erreur	98
4.6.1.1	MAE, RME, RMSE	98
4.6.1.2	Coefficient de corrélation linéaire R^2	99
4.6.2	Validation croisée	99
4.7	Analyse d'incertitudes basée sur des modèles de substitution pour les problèmes vibro-acoustiques	100
4.7.1	Simulation déterministe par la méthode éléments finis	100

4.7.2	Analyse d'incertitude basée sur le métamodèle	101
4.8	Conclusion	104
Conclusions et perspectives		106
Bibliographie		111
A Notions fondamentales de la théorie des probabilités		121
A.1	Notions d'expérience et d'événements aléatoires	121
A.1.1	Tribu des événements	122
A.1.2	Espace probabilisé	122
A.1.3	Probabilité conditionnelle, théorèmes de Bayes et des probabilités totales	122
A.2	Variable aléatoire	123
A.3	Espace d'Hilbert	125
A.4	Processus stochastique	125
A.5	Processus stochastique du second ordre	126
B Intégration numérique en utilisant les polynômes orthogonaux (méthodes de Gauss)		127
B.1	Produits scalaires	127
B.2	Bases orthogonales	128
B.2.1	Polynômes d'Hermite	129
B.2.2	Polynômes de Legendre	129
B.2.3	Polynômes de Laguerre	129
B.3	Méthode de quadrature de Gauss	130
B.3.1	Méthode de Gauss-Legendre	131
B.3.2	Méthode de Gauss-Laguerre	132
B.3.3	Méthode de Gauss-Hermite	132
C Algorithme d'optimisation SQP		133

Table des figures

Figure 1.1	Présentation schématique du système vibro-acoustique	7
Figure 1.2	Conditions aux limites du domaine structurel	9
Figure 1.3	Conditions aux limites du domaine fluide	12
Figure 1.4	Comparaison entre les incertitudes aléatoires et les incertitudes épistémiques	17
Figure 1.5	Méthodes de quantification des incertitudes	18
Figure 1.6	Domaines de sûreté et de défaillance dans le cas de deux variables de conception	21
Figure 1.7	Simulations de Monte Carlo pour la probabilité de défaillance	23
Figure 1.8	Simulations d'importance pour la probabilité de défaillance	23
Figure 1.9	Transformation iso-probabiliste de l'espace physique vers l'espace normal standard	24
Figure 1.10	Schéma du principe du couplage mécano-fiabiliste	26
Figure 2.1	Description du guide cylindrique	37
Figure 2.2	Modèle éléments finis ANSYS de la conduite cylindrique	39
Figure 2.3	Partie réelle de la pression acoustique à l'intérieur de la conduite cylindrique étudiée	39
Figure 2.4	Evolution de l'amplitude de la pression acoustique en fonction de la fréquence	40
Figure 2.5	Amplitude de la pression maximale en fonction du rayon	41
Figure 2.6	Amplitude de la pression maximale en fonction de la densité	41

Figure 2.7	Schéma 2D de la cavité acoustique	43
Figure 2.8	Modèle élément fini de la cabine acoustique	43
Figure 2.9	Moyenne de la SPL pour $p=6$	45
Figure 2.10	Ecart-type de la SPL pour $p=6$	45
Figure 3.1	Mise en oeuvre de l'optimisation des structures	50
Figure 3.2	Différents problèmes d'optimisation des structures	51
Figure 3.3	Minimisation d'une fonction objectif à une variable	52
Figure 3.4	Processus d'optimisation de conception déterministe	53
Figure 3.5	Shéma de la poutre en flexion	53
Figure 3.6	Evolution de la fonction objective	55
Figure 3.7	Evolution de la contrainte d'optimisation	55
Figure 3.8	Processus de l'optimisation fiable de conception	55
Figure 3.9	Classification des différentes méthodes de la RBDO	57
Figure 3.10	Algorithme de l'approche classique	58
Figure 3.11	Espace hybride de conception (HDS)	59
Figure 3.12	Algorithme de la méthode hybride	60
Figure 3.13	Algorithme de la méthode OSF	61
Figure 3.14	Divergence de la méthode hybride dans le HDS	63
Figure 3.15	Efficacité de la RHM dans le HDS	63
Figure 3.16	Algorithme de la méthode RHM	64
Figure 3.17	Schéma de la plaque simplement supportée couplée à l'extrémité d'une cavité rectangulaire à parois rigides	65
Figure 3.18	Organigramme de l'OSF combinée avec le CPG	68
Figure 3.19	Pression acoustique à l'intérieur de la cavité	69
Figure 3.20	Déplacement de la plaque à l'endroit de la force	69
Figure 3.21	Loi de distribution de la pression acoustique de la cavité (Gauche: MC, Droite: CPG)	70

Figure 3.22	Loi de distribution de la probabilité de la pression acoustique pour la solution optimale (Left: MC, Right: CPG)	72
Figure 3.23	Discrétisation éléments finis de la cabine	73
Figure 3.24	Comparaison de la SPL entre le modèle initial avec incertitudes et le modèle optimal	75
Figure 3.25	Silencieux d'expansion simple	76
Figure 3.26	Perte de transmission par la RHM	78
Figure 4.1	Métamodélisation du modèle mécanique réel	83
Figure 4.2	Organigramme du processus d'élaboration d'un modèle de substitution	84
Figure 4.3	a: Plan factoriel complet 3^3 , b: Plan composite centré pour 3 paramètres et 2 niveaux, c: Plan de Box-Behnken pour 3 paramètres	85
Figure 4.4	Échantillonnage en hypercube latin pour deux variables à cinq niveaux	87
Figure 4.5	Transformation de la variable de conception dans l'espace des caractéristiques	96
Figure 4.6	Modèle structurel-acoustique	101
Figure 4.7	Discrétisation par éléments finis du modèle structurel-acoustique	101
Figure 4.8	Niveau de pression acoustique à l'intérieur de la cavité	102
Figure 4.9	Validation croisée avec QRS	103
Figure 4.10	Validation croisée avec RBF	103
Figure 4.11	Validation croisée avec Krigeage	103
Figure 4.12	Valeur moyenne de la SPL	104
Figure 4.13	Ecart type de la SPL	104

Liste des tableaux

Tableau 2.1	Correspondance entre le type de distribution et le type de la base du chaos polynômial	31
Tableau 2.2	Comparaison des résultats entre MC et CPG	41
Tableau 2.3	Fréquences propres vibro-acoustique	43
Tableau 2.4	Valeurs caractéristiques de la SPL avec et sans absorption	44
Tableau 2.5	Caractéristiques des paramètres incertains	45
Tableau 2.6	Récapitulatif des résultats pour les deux positions	45
Tableau 3.1	Propriétés mécaniques de la poutre	53
Tableau 3.2	Résultats de l'optimisation déterministe pour la poutre en flexion	54
Tableau 3.3	Dimensions et propriétés du système	65
Tableau 3.4	Fréquences naturelles de la plaque flexible	68
Tableau 3.5	Fréquences naturelles de la cavité acoustique rectangulaire	68
Tableau 3.6	Caractéristiques des paramètres incertains	69
Tableau 3.7	Résultats de la DDO	70
Tableau 3.8	Résultats de la OSF couplé avec le CPG	71
Tableau 3.9	Comparaison de la solution optimale entre DDO et OSF	71
Tableau 3.10	Comparaison de l'erreur relative entre gPC et MC	72
Tableau 3.11	Caractéristiques matérielles de la structure	73
Tableau 3.12	Caractéristiques des paramètres incertains	73
Tableau 3.13	Variables de conception	74

Tableau 3.14	Résultats de la OSF couplé avec le CPG	74
Tableau 3.15	Dimensions et caractéristiques du silencieux	77
Tableau 3.16	Variables de conception et leurs intervalles	77
Tableau 3.17	Comparaison de la solution optimale et du modèle initial avec la méthode HM	77
Tableau 3.18	Comparaison de la solution optimale et du modèle initial avec la méthode OSF	78
Tableau 3.19	Principaux résultats de la méthode RHM	78
Tableau 4.1	Caractéristiques des variables aléatoires	102
Tableau 4.2	Comparaison de l'efficacité des métamodèles	103
Tableau B.1	Principales configurations de quadrature de Gauss	130
Tableau B.2	Information sur le calcul approché de l'intégrale I	131

Introduction générale

Ce travail de thèse porte sur l'analyse robuste et l'optimisation fiabiliste des problèmes vibro-acoustiques (ou en interaction fluide-structure) en tenant en compte des incertitudes des paramètres d'entrée.

En effet, l'interaction fluide-structure s'adresse à l'étude du comportement d'un solide en contact avec un fluide ce qui engendre la variation de sa réponse par l'action du fluide. Ces phénomènes du couplage fluide-structure sont à l'origine du fonctionnement de certains systèmes, ou au contraire manifestent un dysfonctionnement à cause des vibrations qui altèrent l'intégrité des structures. Ces vibrations doivent être prédites afin d'éviter la destruction et l'usure du système. Ainsi il est important d'établir, avant toute production, des modèles fiables permettant de prédire ces comportements vibro-acoustiques.

Actuellement, de multiples problèmes de couplage fluide-structure [1–4] se posent, par exemple, en génie environnemental dans le cas du transport de produits toxiques fluides, dans le cas de l'écoulement autour des pales d'éolienne, dans l'industrie automobile, dans le domaine aéronautique et aéro-acoustique, dans l'industrie de transport, et en industrie navale où l'étude de la réponse des systèmes couplés reste un sujet délicat et encore peu maîtrisée. L'étude de ces phénomènes nécessite des analyses vibro-acoustiques, ce qui a engendré des recherches scientifiques spécifiques sur le comportement des structures à moyennes et hautes fréquences [5–7].

Cependant, la plupart des systèmes mécaniques sont caractérisés par la présence de paramètres incertains qui affectent leur robustesse vis-à-vis des zones de stabilité et d'instabilité et des niveaux vibratoires. La nature incertaine des phénomènes mis en jeu sur les systèmes mécaniques considérée (variabilités des propriétés des matériaux, imprécisions géométriques, aléas des chargements appliqués,...), a un impact significatif sur les performances du système. Aussi, il est indispensable d'intégrer ces incertitudes de façon à travailler sur des modélisations réalistes. Dans la démarche probabiliste en revanche, on construit une modélisation stochastique

dans laquelle les données incertaines sont représentées par des variables aléatoires [8, 9].

La prise en compte des incertitudes dans l'analyse des systèmes est un domaine complexe qui englobe les étapes suivantes : l'identification et la modélisation des sources d'incertitudes, la propagation des incertitudes et le post-traitement pour mesurer l'influence de ces incertitudes sur le comportement du système. D'où l'intérêt d'utiliser des techniques numériques pour prendre en compte ces incertitudes. Parmi ces méthodes, figure celle de la simulation de Monte Carlo, qui est considérée comme référence pour l'étude stochastique dans ce travail. En revanche, la méthode du Chaos polynômial généralisé, qui est très reconnue, efficace et moins coûteuse en calcul, est appliquée sur des exemples vibro-acoustiques [10, 11].

De plus, lors de la conception d'un produit, les constructeurs doivent optimiser ces performances. La conception des structures économiques et performantes a suscité de nombreux progrès dans les domaines de la modélisation et de l'optimisation, permettant l'analyse des structures de plus en plus complexes. Cependant, la conception optimale sans prise en compte des incertitudes sur les paramètres, risque de ne pas respecter certains critères de fiabilité qui consiste à définir la probabilité de défaillance d'une structure par la probabilité que les conditions de bon fonctionnement ne soient pas respectées. Ainsi, l'optimisation fiabiliste (*Reliability-Based Design Optimization RBDO*) constitue une nouvelle discipline introduisant des critères de fiabilité dans la recherche de la configuration optimale. Elle a pour objectif de définir le meilleur compromis entre la réduction du coût et l'assurance de la fiabilité, en intégrant les incertitudes sur les variables du système.

Le problème d'optimisation, en utilisant les approches classiques de la RBDO, nécessite un temps de calcul important. En effet, ces approches sont réalisées dans deux espaces séparés : l'espace physique et l'espace normalisé. Pour pallier à cet inconvénient, une méthode efficace appelée méthode hybride est proposée par Kharmanda [12]. Cette méthode est basée sur la résolution simultanée des problèmes d'optimisation et de fiabilité, dans un seul espace, appelé espace hybride de conception. Elle permet de minimiser le temps de calcul par rapport à la méthode classique, mais le problème d'optimisation est toujours plus complexe que l'optimisation déterministe. Pour cela, Kharmanda [13] a proposé une méthode basée sur la solution semi-numérique, appelé Optimum Safety Factor (OSF). Cette méthode consiste à calculer des coefficients de sécurité déterminés à partir d'une analyse de sensibilité de la fonction d'état limite par rapport à chaque variable d'optimisation.

D'autre part, il est indispensable d'intégrer les méthodes de méta-modélisation dans l'ingénierie moderne puisqu'elles réduisent le coût de calcul des problèmes complexes. Ces méthodes consistent à construire des approximations, c'est-à-dire des modèles de substitution (*surrogate models*), développées à partir d'une série de simulations utilisant les modèles réels. L'idée provient de l'ajustement d'un modèle de substitution à une série d'expériences physiques conçues [14]. Puisque les méta-modèles sont des approximations des modèles de simulation réels, une source supplémentaire d'erreur est introduite et le but est de garder cette erreur en un niveau acceptable pour le problème traité.

Les méthodes liées aux modèles de substitution et à leurs applications ont été largement étudiées et développées au fil des années. L'utilisation des approximations lors des études d'optimisation, appelée optimisation de la conception basée sur le méta-modèle, s'est révélée efficace dans de nombreux cas. Cependant, le sujet est toujours un domaine de recherche actif.

L'objectif de cette thèse, est de déterminer la meilleure méthodologie à suivre pour l'optimisation fiable des systèmes vibro-acoustiques comportant des paramètres incertains. Pour cela, ce manuscrit est composé de quatre chapitres.

Dans le premier chapitre, on introduit le modèle du système vibro-acoustique. Le problème est traité pour la structure, pour la cavité acoustique interne séparément, puis pour le système vibro-acoustique couplé. Pour chacun des trois problèmes, on introduit le problème aux limites moyen, puis sa formulation faible et finalement sa discrétisation par la méthode des éléments finis afin d'obtenir les équations matricielles du système vibro-acoustique couplé. Une deuxième partie de ce chapitre est consacrée à un état d'art mené autour des approches robustes permettant la quantification des incertitudes. L'analyse des avantages et des inconvénients de chacune des méthodes relevées dans la littérature a permis d'orienter notre choix vers l'approche probabiliste en particulier vers la méthode basée sur le concept du chaos polynomial généralisé. Dans une troisième partie de ce chapitre, nous rappelons les notions fondamentales de la fiabilité pour les intégrer dans l'optimisation fiable dans le chapitre 3.

L'objet principal du deuxième chapitre concerne la théorie du chaos polynomial généralisé et la technique référentielle de Monte Carlo, qui sont des approches robustes évoquées dans l'état de

l'art du chapitre 1 et qui sont choisies pour traiter la problématique de la thèse. Les descriptions détaillées des formalismes mathématiques et des schémas numériques d'implémentation sont présentés. A la fin de ce chapitre, deux applications avec la prise en compte des incertitudes liées aux paramètres matériaux, géométriques ainsi que les conditions aux limites sont traitées.

Dans le troisième chapitre, les différentes méthodes d'optimisation fiables sont présentées. Au début, la mise en oeuvre de l'optimisation déterministe de conception (DDO) est facile à implémenter. Ainsi elle peut garantir une conception optimale, mais on ne peut pas contrôler le niveau de fiabilité du système. Ensuite, les méthodes RBDO telles que la méthode hybride et la méthode OSF sont appliquées. En comparant avec la méthode DDO, le modèle RBDO respecte un niveau de fiabilité cible. En utilisant la méthode hybride, l'algorithme peut converger vers un point optimal dans la région de défaillance et le résultat est ensuite rejeté. Pour ce faire, une nouvelle méthode appelée Robust Hybrid Method (RHM) est donc appliquée. A la fin de ce chapitre, les approches (HM, OSF et RHM) sont testées sur plusieurs exemples de problèmes vibro-acoustiques. Tout d'abord, deux applications qui tiennent en compte la présence d'incertitudes sont considérées. Ainsi, une analyse probabiliste est assurée pendant la procédure d'optimisation. En fait, l'approche choisie consiste à coupler la méthode OSF avec le chaos polynômial généralisé (CPG) (chapitre 2) pour garantir la robustesse du système pendant l'optimisation. Par la suite, un exemple valorisant la nouvelle méthode RHM est étudié. Il s'agit de l'optimisation fiable d'un simple silencieux d'expansion. Les résultats montrent bien que les nouvelles conceptions présentent bien des meilleures performances. De plus, le temps de calcul de la RHM est moins coûteux que les autres approches de la RBDO.

La construction des modèles de substitution, est présentée dans le quatrième chapitre. Elle nécessite des évaluations, du modèle réel, réalisées en un nombre limité de points de l'espace de conception. Une fois construite, l'approximation peut fournir une réponse en un point quelconque de cet espace en un temps très réduit (comparé au temps nécessaire au simulateur mécanique pour fournir la réponse exacte au même point). À ce titre, l'objectif de ce chapitre est de construire un modèle mathématique permettant d'assurer une bonne représentativité du modèle réel obtenu par le simulateur. Pour valider notre travail, un exemple d'application vibro-acoustique est traité par différentes techniques de méta-modélisation à la fin de ce chapitre.

Chapitre 1

Quantification des incertitudes et fiabilité des problèmes vibro-acoustiques

Sommaire

1.1	Introduction	6
1.2	Présentation des problèmes vibro-acoustiques	6
1.2.1	Présentation du modèle global	7
1.2.2	Equations du modèle de la structure	8
1.2.3	Equations du modèle de la cavité acoustique	11
1.2.4	Equations du modèle vibro-acoustique couplé	14
1.3	Quantification des incertitudes	16
1.3.1	Classification des incertitudes	16
1.3.2	Modélisation et propagation des incertitudes	16
1.4	Fiabilité mécanique des systèmes	20
1.4.1	Fonction de performance	21
1.4.2	Probabilité de défaillance	22
1.4.3	Couplage mécano-fiabiliste	25
1.5	Conclusion	26

1.1 Introduction

La vibro-acoustique vise à étudier un ou plusieurs fluides compressibles en contact avec un solide élastique dont la réponse peut être fortement affectée par l'action du fluide. Actuellement, multiples problèmes vibro-acoustiques se posent, par exemple, dans l'industrie automobile, dans le domaine aéronautique et aéro-acoustique, dans l'industrie de transport, et en industrie navale où l'étude de la réponse des systèmes couplés reste un sujet délicat et encore peu maîtrisé [15, 16].

L'optimisation des problèmes d'interaction fluides-structures ne cesse de jour en jour de se développer et les recherches qui visent la fiabilisation de ces problèmes et leurs perfectionnements ne cessent de progresser. La simulation numérique basée sur la méthode des éléments finis est un outil puissant permettant de simuler virtuellement le phénomène vibro-acoustique et fournit les informations nécessaires à la phase de fabrication. Une bonne prédiction dépend essentiellement de la précision sur les paramètres d'entrée souvent entachés d'incertitudes. Ceci rend l'approche déterministe classique peu fiable à prédire correctement par exemple le niveau des contraintes ou le champ de pression acoustique à l'intérieur de la cavité acoustique en interaction avec la structure.

De loin, les incertitudes peuvent être catégorisées comme des incertitudes aléatoires et des incertitudes épistémiques. La prise en compte de ces incertitudes paraît incontournable pour une bonne prédiction des propriétés finales. Pour prendre en compte les incertitudes, il existe des méthodes possibilistes (comme la méthode des intervalles ou encore celle basée sur l'utilisation des ensembles flous) et les méthodes probabilistes.

Ce chapitre présente un bref état de l'art des techniques permettant la modélisation et la propagation des incertitudes en vibro-acoustiques. A la fin, une brève introduction sur la notion de fiabilité est présentée.

1.2 Présentation des problèmes vibro-acoustiques

Il existe deux approches pour traiter les problèmes couplés fluide-structure: le couplage fort et le couplage faible. La première approche consiste à résoudre de façon simultanée toutes les équations couplées en combinant l'ensemble des degrés de liberté associés à chaque modèle au sein d'une seule et même matrice de résolution. La seconde est basée sur la résolution des

équations de manière séquentielle, en fixant à tour de rôle l'ensemble des paramètres d'un modèle, durant l'itération de l'autre modèle. Le couplage fort permet une meilleure précision des résultats mais il est prohibitif au sens du coût de calcul.

1.2.1 Présentation du modèle global

Le problème vibro-acoustique consiste en une structure en contact avec une cavité acoustique. La structure est constituée d'un matériau élastique et le fluide est supposé parfait, non pesant, compressible et homogène. Le bord du domaine structural Ω_s est constitué de la frontière Γ_s en contact avec l'extérieur et de la frontière Γ_f constituant l'interface du couplage fluid-structure Σ .

Le système est décrit dans le repère cartésien (o, x_1, x_2, x_3) . La normale extérieure à Ω_s est notée $n_s = (n_{s1}, n_{s2}, n_{s3})$ et extérieure à Ω_f est notée $n_f = (n_{f1}, n_{f2}, n_{f3})$. La normale à Γ_f extérieure à Ω_s est notée n_s . Le champ de déplacement u en chaque point du domaine structural Ω_s et à une fréquence ω donnée est $u(x, \omega) = (u_1(x, \omega), u_2(x, \omega), u_3(x, \omega))$. La structure est bloquée sur une partie de la frontière Γ_0 empêchant ainsi le déplacement du corps rigide de la structure (figure 1.1).

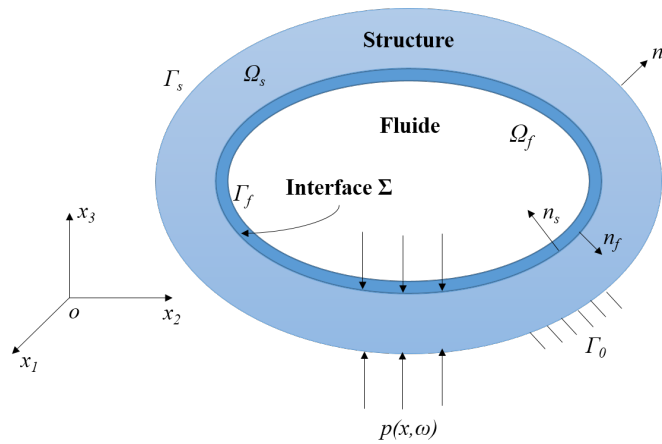


Figure 1.1: Présentation schématique du système vibro-acoustique

Le problème vibro-acoustique consiste alors à résoudre simultanément deux problèmes:

- L'un dans la structure soumise, sur Σ , à un champ de pression p imposé par le fluide.
- L'autre dans le fluide soumis à un champ de déplacement u de la paroi Σ .

Afin d'obtenir les équations discrétisées du système vibro-acoustique couplé, on doit dans un premier temps faire la modélisation de chacune des deux parties de ce système, à savoir la cavité

fluide et la structure. L'étude est menée dans le domaine fréquentiel sur une bande de fréquences $[\omega_{min}, \omega_{max}]$ avec $0 < \omega_{min} < \omega_{max}$. La formulation du problème est abordée en trois parties, pour la cavité acoustique, pour la structure, puis pour le système vibro-acoustique couplé. Pour chaque partie on présente le problème aux limites, sa formulation faible, puis sa discrétisation par la méthode des éléments finis.

1.2.2 Equations du modèle de la structure

On se place dans l'hypothèse des petites perturbations en élasticité linéaire. Le problème aux limites de la structure non couplée avec la cavité acoustique est défini par l'équation suivante [2, 17]:

$$\nabla \sigma^s + f = \rho_s \ddot{u} \text{ dans } \Omega_s \quad (1.1)$$

Avec: ∇ est l'opérateur différentiel vectoriel *nabla*, σ^s est le tenseur symétrique des contraintes de Cauchy, f est le vecteur des répartitions volumiques de forces, \ddot{u} est l'accélération en un point et ρ_s est la masse volumique de la structure.

La relation contraintes déformations donnée par la loi de Hooke généralisée, s'écrit:

$$\sigma = D_s \varepsilon \quad (1.2)$$

Où: $\varepsilon = \langle \varepsilon_{xx} \ \varepsilon_{yy} \ \varepsilon_{zz} \ 2\varepsilon_{xy} \ 2\varepsilon_{yz} \ 2\varepsilon_{zx} \rangle$ est le vecteur associé au tenseur des petites déformations, D_s est la matrice d'élasticité et $\sigma = \langle \sigma_{xx} \ \sigma_{yy} \ \sigma_{zz} \ \sigma_{xy} \ \sigma_{yz} \ \sigma_{zx} \rangle$ est le vecteur associé au tenseur des contraintes de Cauchy σ^s .

1.2.2.1 Conditions aux limites

Les Conditions aux limites, comme présentées dans la figure 1.2, s'écrivent:

$$\sigma \cdot n_s = -p \cdot n_s = p \cdot n_f \text{ sur } \Gamma_s \quad (1.3)$$

$$u = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \quad (1.4)$$

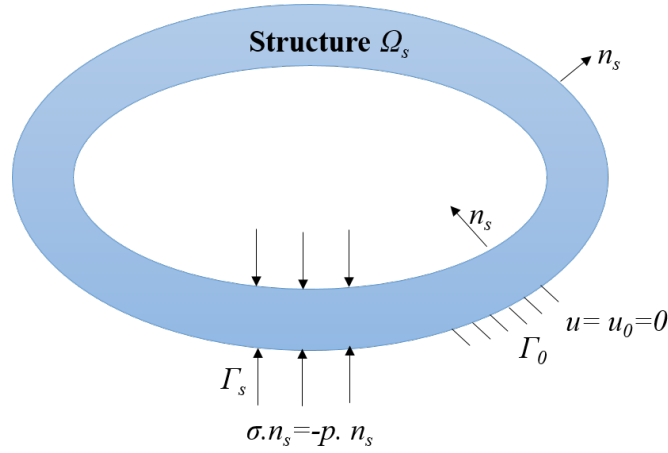


Figure 1.2: Conditions aux limites du domaine structurel

1.2.2.2 Formulation variationnelle du problème dynamique

La résolution du problème relatif à la structure revient à chercher une solution satisfaisant une formulation intégrale (ou formulation variationnelle faible), équivalente au problème initial. La formulation faible du problème est obtenue en utilisant la méthode des fonctions tests [7, 18]. On considère un vecteur déplacement δu arbitraire et régulier dans le domaine Ω_s appelé champ de déplacement virtuel vérifiant la condition $\delta u = 0$ sur Γ_s . La pondération de l'équation du mouvement de la structure (eq.1.1) par δu conduit après intégration sur le domaine Ω_s à l'équation suivante:

$$-\omega^2 \int_{\Omega_s} \rho_s u \delta u dV - \int_{\Omega_s} \frac{\partial \sigma(u)}{\partial x_j} \delta u dV = 0 \quad (1.5)$$

En appliquant la formule d'intégration par partie généralisée à la deuxième intégrale du terme de gauche de l'équation précédente on obtient:

$$\int_{\Omega_s} \frac{\partial \sigma(u)}{\partial x_j} \delta u dV = - \int_{\Omega_s} \sigma(u) \frac{\partial (\delta u)}{\partial x_j} dV + \int_{\Gamma_s} \sigma(u) n_{sj} \delta u dS \quad (1.6)$$

En utilisant la propriété de symétrie du tenseur de contraintes $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ et en tenant compte des conditions aux limites, la formulation variationnelle du problème structurel devienne:

$$-\omega^2 \int_{\Omega_s} \rho_s u \delta u dV + \int_{\Omega_s} \sigma(u) \varepsilon_{ij}(\delta u) dV = \int_{\Gamma_s} \sigma(u) n_{sj} \delta u dS \quad (1.7)$$

Ainsi, la fonctionnelle de la structure peut être écrite sous la forme suivante:

$$F(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_s} (\sigma(u) \varepsilon_{ij}(u) - \rho_s \omega^2 \langle u, u \rangle) dV - \int_{\Gamma_s} p u dS \quad (1.8)$$

1.2.2.3 Discrétisation par éléments finis du problème dynamique

La méthode des éléments finis est adoptée d'une façon classique pour la résolution de la formulation variationnelle. On cherche une solution discrète approchée de la solution exacte du problème continu. Le domaine Ω_s est ainsi approché par N_s volumes élémentaires Ω_{s_e} de forme polygonale de sorte qu'on puisse écrire [7]:

$$\Omega_s \cong \sum_{e=1}^{N_s} \Omega_{s_e} \quad (1.9)$$

On réalise ainsi un maillage de la structure étudiée et les intégrales de la formulation variationnelle sont alors approchées comme suit:

$$\int_{\Omega_{s_e}} \rho_s u v dV_e = V_e^T [M_s^e] U_e \quad (1.10)$$

Avec $[M_s^e] = \int_{\Omega_{s_e}} \rho_s N_s^{eT} N_s^e dV_e$ est la matrice de masse élémentaire, N_s^e est la matrice des fonctions d'interpolation et U_e est le vecteur des déplacements nodaux.

$$\int_{\Omega_{s_e}} \sigma(u) \varepsilon_{ij}(v) dV_e = V_e^T [K_s^e] U_e \quad (1.11)$$

Où $[K_s^e] = \int_{\Omega_{s_e}} B_s^{eT} D_s B_s^e dV_e$ est la matrice de raideur élémentaire et B_s^e est la matrice des dérivées des fonctions d'interpolation.

Pour généraliser sur toute la structure, il suffit d'assembler les matrices de rigidités élémentaires, et les matrices masses élémentaires. Ainsi, on obtient le système global à résoudre suivant:

$$([K_s] - \rho_s \omega^2 [M_s]) [u] = [P] \quad (1.12)$$

1.2.3 Equations du modèle de la cavité acoustique

Le fluide remplissant la cavité acoustique est considéré compressible homogène occupant un domaine à Ω_f et limité par la frontière Γ_f . Le fluide est analysé en variables eulériennes et il est décrit par deux équations locales [2, 7]:

- Equation de continuité ou conservation de la masse

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \nabla \rho_f v = 0 \text{ dans } \Omega_f \quad (1.13)$$

Avec ρ_f est la masse volumique du fluide et v est le vecteur de vitesse des particules.

– Equation de conservation de la quantité de mouvement

$$\rho_f \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla v \wedge v \right) = f + \nabla \sigma \text{ dans } \Omega_f \quad (1.14)$$

Le tenseur des contraintes s'exprime en fonction de la pression p , de la viscosité μ et du tenseur gradient des taux de déformations D par:

$$\sigma = pI + 2\mu D \quad (1.15)$$

avec $D = \frac{1}{2} (\nabla v + \nabla^t v)$ et I est le tenseur identité.

Dans ce travail, on considère que le fluide est parfait (à viscosité nulle), compressible et de petits mouvements. On obtient ainsi l'équation des ondes ou bien équation d'Helmholtz:

$$\Delta p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \text{ dans } \Omega_f \quad (1.16)$$

où c est la célérité du son dans le fluide.

1.2.3.1 Conditions aux limites

Si on impose une accélération normale \ddot{u}_n sur la surface Γ_f , comme le montre la figure 1.3, alors on obtient:

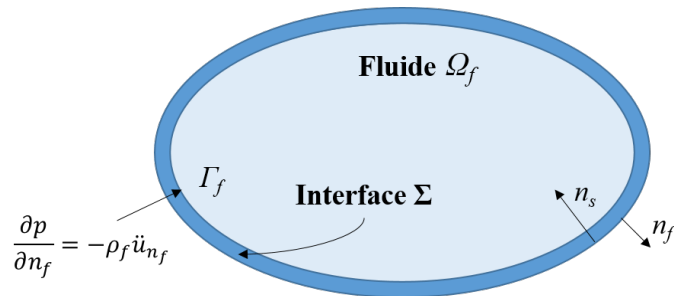


Figure 1.3: Conditions aux limites du domaine fluide

$$\frac{\partial p}{\partial n_f} = -\rho_f \ddot{u}_{n_f} \text{ sur } \Gamma_f \quad (1.17)$$

où n_f est la normale extérieure au domaine fluide, donc intérieure au domaine structural; $n_f = -n_s = n$

1.2.3.2 Formulation variationnelle de la cavité acoustique

Soit δp une fonction arbitraire et suffisamment régulière dans le domaine Ω_f du fluide, la pondération de l'équation d'Helmholtz par q conduit après intégration à l'équation suivante:

$$\int_{\Omega_f} (\Delta p + k^2 p) \delta p dV = 0 \quad (1.18)$$

avec $k = \frac{\omega}{c}$ est le vecteur d'onde. D'après la formule d'intégration par partie généralisée, on peut écrire:

$$\int_{\Omega_f} (-\nabla p \nabla \delta p + k^2 p \delta p) dV + \int_{\Gamma_f} \delta p \frac{\partial p}{\partial n} dS = 0 \quad (1.19)$$

Si on considère que δp est nulle sur Γ_0 , et en tenant compte des conditions aux limites sur Γ_f , on aboutit à:

$$\int_{\Omega_f} (\nabla p \nabla \delta p - k^2 p \delta p) dV = \int_{\Gamma_f} \rho_f \omega^2 u_n \delta p dS \quad (1.20)$$

On constate que quel que soit δp statiquement admissible, on peut écrire cette formulation sous la forme suivante:

$$B(p, \delta p) = L(\delta p) \quad (1.21)$$

Où B est une forme bilinéaire symétrique et L est une forme linéaire qui peuvent être écrites de la manière suivante:

$$B(p, \delta p) = 4\rho_f \omega^2 [H(p, \delta p) - Q(p, \delta p)] \quad (1.22)$$

avec

$$H(p, \delta p) = \frac{1}{4\rho_f \omega^2} \int_{\Omega_f} \nabla p \nabla \delta p dV \quad (1.23)$$

et

$$Q(p, \delta p) = \frac{1}{4} \int_{\Omega_f} \frac{p \cdot \delta p}{\rho_f c^2} dV \quad (1.24)$$

Puisque B est symétrique, la fonctionnelle $F(p)$ peut alors être écrite sous la forme suivante:

$$F(p) = \frac{1}{2} B(p, p) - L(p) \quad (1.25)$$

Ainsi la fonctionnelle du problème fluide peut se mettre sous la forme suivante:

$$F(p) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_f} (\nabla p \nabla p - k^2 p p) dV - \int_{\Gamma_f} \rho_f \omega^2 u_n p dS \quad (1.26)$$

1.2.3.3 Discrétisation par éléments finis de la cavité acoustique

Le domaine Ω_f est ainsi approché par N_f volumes élémentaires Ω_{f_e} de forme polygonale de sorte qu'on puisse écrire:

$$\Omega_f \cong \sum_{e=1}^{N_f} \Omega_{f_e} \quad (1.27)$$

On réalise ainsi un maillage du fluide étudié et les intégrales de la formulation variationnelle sont alors approchées comme suit:

$$H(p, q) = \frac{1}{4\rho_f \omega^2} \{q\}^T [H] \{p\} \quad (1.28)$$

$$Q(p, q) = \frac{1}{4\rho_f c^2} \{q\}^T [Q] \{p\} \quad (1.29)$$

$$L(q) = \rho_f \omega^2 \{q\}^T \{\ddot{u}_n\} \quad (1.30)$$

Avec: $[H]$ et $[Q]$ sont les matrices globales du fluide, $\{p\}$ est la pression nodale du fluide et $\{\ddot{u}_n\}$ est le vecteur nodal second membre. Ainsi la fonctionnelle du fluide peut être mise sous une forme matricielle:

$$F(p) = \frac{1}{2} \{p\}^T ([H] - k^2 [Q]) \{p\} - \rho_f \omega^2 \{p\}^T \{\ddot{u}_n\} \quad (1.31)$$

L'équation matricielle dynamique du fluide s'écrit:

$$([H] - k^2 [Q]) \{p\} = \rho_f \omega^2 \{\ddot{u}_n\} \quad (1.32)$$

Les modes acoustiques d'une cavité fluide sont déterminés à partir de la résolution de l'équation matricielle suivante:

$$([H] - k^2 [Q]) \{p\} = \{0\} \quad (1.33)$$

1.2.4 Equations du modèle vibro-acoustique couplé

L'objectif ici est de déterminer les équations du problème vibro-acoustique de la structure couplée avec sa cavité acoustique interne.

1.2.4.1 Conditions aux limites et couplage fluide-structure

A l'interface Σ entre le fluide et la structure, comme le fluide n'est pas visqueux il n'adhère pas à la paroi, par conséquent il y a une continuité des contraintes normales et des vitesses normales à la paroi, et puisque on n'a pas de frottement visqueux alors la contrainte tangentielle est considérée comme nulle.

- Continuité du déplacement normal

$$u_f.n = u.n \text{ sur } \Sigma \quad (1.34)$$

- Continuité des vitesses normales

$$\frac{\partial u_f}{\partial t}.n = \frac{\partial u}{\partial t}.n \text{ sur } \Sigma \quad (1.35)$$

- Continuité des contraintes normales

$$\sigma.n = -p.n \text{ sur } \Sigma \quad (1.36)$$

- Si on impose une accélération normale sur la surface d'interaction Σ , une condition s'ajoute:

$$\frac{\partial p}{\partial n} - \rho_f \omega^2 u.n = 0 \text{ sur } \Sigma \quad (1.37)$$

$$u = u_0 = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \quad (1.38)$$

La formulation variationnelle faible du couplage vibro-acoustique n'est que la somme des deux équations (eq.1.8) et (eq.1.26):

$$F(u,p) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_s} (\sigma(u)\varepsilon_{ij}(v) - \rho_s \omega^2 \langle u,u \rangle) dV - \int_{\Sigma} p u dS - \frac{1}{2\rho_f \omega^2} \int_{\Omega_f} \left[\left(\frac{\partial p}{\partial x_i} \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) + k^2 p^2 \right] dV \quad (1.39)$$

Enfin, la solution (u,p) est donnée par l'équation variationnelle $\delta F(u,p) = 0$.

1.2.4.2 Discrétisation par éléments finis du problème vibro-acoustique couplé

L'intégrale de surface apparaissant dans la formulation (eq.1.39), peut être approchée de la façon suivante:

$$\int_{\Sigma} p v d\Sigma \approx \sum_{e=1}^{E_e} \int_{\Sigma_e} p v d\Sigma_e = Q_e^T [C^e] P_e \quad (1.40)$$

Avec: $[C^e] = \int_{\Sigma_e} N_s^{eT} N_s^e d\Sigma_e$ est la matrice de couplage élémentaire. La matrice de couplage totale est donnée par:

$$[C] = \sum_e [C^e] \quad (1.41)$$

La discrétisation de la formulation faible (eq.1.39) du problème couplé, par éléments finis conduit au système matriciel suivant:

$$\begin{pmatrix} [K_s] - \omega^2 [M_s] & -[C] \\ -[C]^T & \frac{1}{\rho_f \omega^2} [M_f] - \frac{1}{\rho_f c^2} [K_f] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.42)$$

Avec $[K_s]$ et $[M_s]$ sont les matrices de rigidité et de masse de la structure respectivement; $[K_f]$ et $[M_f]$ sont les matrices globales du fluide respectivement; $[C]$ est la matrice de couplage; u est le vecteur déplacement nodal de la structure et p est le vecteur de la pression nodale dans la cavité fluide.

1.3 Quantification des incertitudes

1.3.1 Classification des incertitudes

Dans les problèmes vibro-acoustiques, les incertitudes peuvent provenir des variations de certains paramètres (géométriques, matériaux, chargements, etc). Oberkampf et al. [19] ont largement discuté des sources d'incertitude et des méthodes traitant de l'incertitude. Ils ont classé les incertitudes dans différentes classes:

1. Incertitudes aléatoires: L'incertitude associée au phénomène observé qui ne peut être décrite par une description déterministe. Cette incertitude est due au caractère aléatoire inhérent du phénomène.
2. Incertitudes épistémiques: Une déficience potentielle dans toute phase ou activité du processus de modélisation due au manque de connaissances.

L'incertitude aléatoire peut être trouvée dans la littérature comme étant une incertitude irréductible, une variabilité et une incertitude inhérente. Cette incertitude est la variabilité naturelle intrinsèquement présente. Des exemples d'incertitude aléatoire apparaissent entre autres dans les conditions aux limites ou dans la description géométrique du modèle. La variabilité des conditions aux limites et des paramètres géométriques sera toujours présente en raison de la variabilité naturelle et de la précision limitée, par exemple, des processus de production. L'incertitude épistémique s'appelle également une incertitude réductible car, en augmentant les connaissances, l'incertitude peut être réduite. Pour ces incertitudes, qui contiennent une certaine imprécision, aucune fonction de densité de probabilité ne peut être spécifiée. Les exemples liés à ce type d'incertitudes sont des données expérimentales insuffisantes ou des connaissances physiques insuffisantes du système analysé. La conclusion de la différence entre l'incertitude aléatoire et l'incertitude épistémique est clairement montrée sur la figure 1.4.

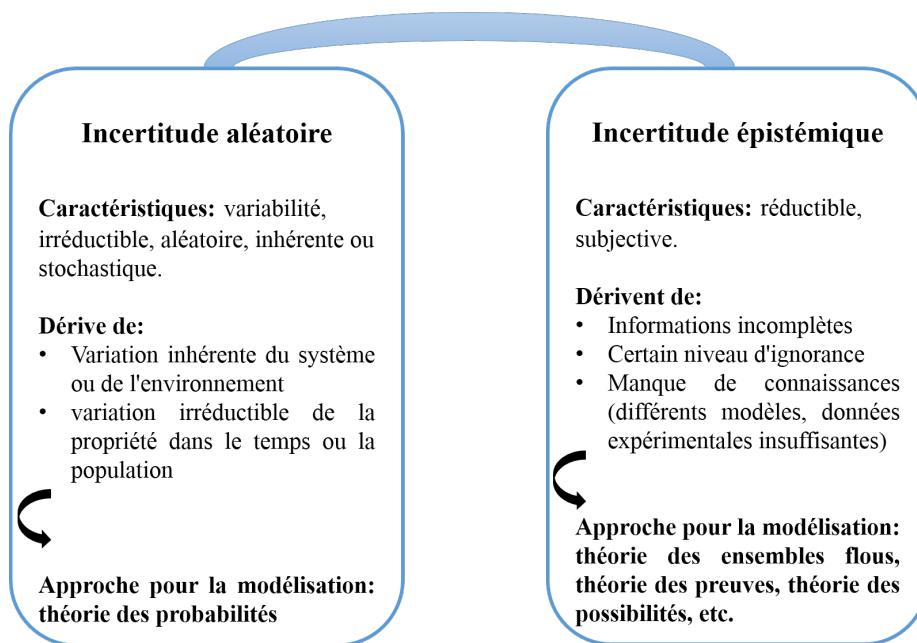


Figure 1.4: Comparaison entre les incertitudes aléatoires et les incertitudes épistémiques

1.3.2 Modélisation et propagation des incertitudes

Dans la figure 1.5, différentes méthodes traitant les incertitudes sont classées en fonction des données d'entrée disponibles. Ces méthodes peuvent être combinées et modifiées selon nos besoins. Suivant la complexité du problème, une méthode peut être mieux adaptée qu'une autre. L'approche possibiliste et l'approche probabiliste sont les plus utilisées en littérature.

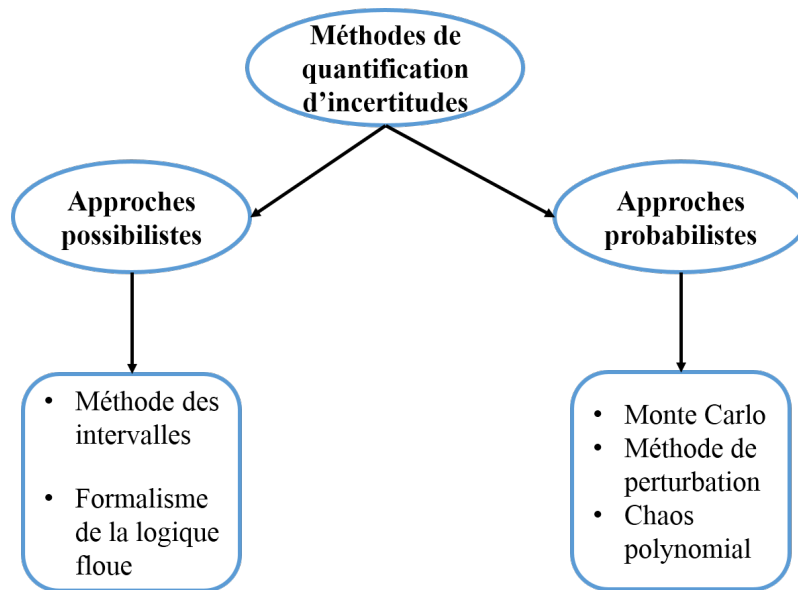


Figure 1.5: Méthodes de quantification des incertitudes

1.3.2.1 Approches Possibilistes

L'avantage majeur des méthodes possibilistes (ou encore ensemblistes) est qu'elles ne nécessitent pas la connaissance des lois régissant les incertitudes. Cette approche a pour objectif de modéliser des données imprécises. Les deux méthodes les plus importantes de cette approche sont: la méthode des intervalles [20] et le formalisme de la logique floue [21].

1.3.2.1.1 Méthode des intervalles L'idée principale de cette méthode est basée sur la modélisation des données incertaines par des intervalles dont les bornes représentent les limites minimales et maximales de ces paramètres [20] $x \in [x_{min}, x_{max}]$. En connaissant les intervalles de variation des paramètres incertains, on peut déterminer facilement l'intervalle de variation des sorties. Aucune information n'est nécessaire sur l'évolution de la dispersion dans son intervalle. Par contre, cette méthode présente une certaine limite dans le sens où ce n'est plus possible de savoir dans quel ensemble la variable peut être trouvée exactement, c'est-à-dire que l'information sur la variable est partiellement représentée. En revanche, grâce à son formalisme mathématique, cette approche est plus simple à utiliser pour les traitements non linéaires des incertitudes. Plusieurs problèmes sont parus et qui sont basés sur le traitement avec la méthode d'analyse des intervalles [22–25]. La méthode d'analyse des intervalles offre l'avantage de modéliser les variables incertaines uniquement par leurs bornes physiques qu'on peut facilement les mesurer et identifier.

1.3.2.1.2 Formalisme de la logique floue Le formalisme de la logique floue est une amélioration et une généralisation de l'algorithme des intervalles. Cette approche a été développée par [21] dans le but de résoudre le problème de surestimation des variables incertaines qui sont modélisées par des intervalles sans le besoin des informations probabilistes. Dans la logique floue, la notion d'intervalle est améliorée à l'aide d'une nouvelle composante qui permet d'affecter une valeur entre $[0,1]$ à la valeur de la variable incertaine. La logique floue a été appliquée dans plusieurs travaux pour la modélisation des incertitudes dans des problèmes de mécanique. Cette théorie a été utilisée par [26] en simulation numérique à travers la méthode des éléments finis flous. L'incertitude est décrite par des fonctions d'appartenance $\mu(x)$ dont leur détermination reste une tâche très difficile. En effet, elles dépendent des informations expérimentales fournies ce qui rapproche sa détermination d'une démarche statistique.

1.3.2.2 Approches Probabilistes

L'approche probabiliste est la théorie la plus répandue dans le domaine d'ingénierie. Cette approche est basée sur la représentation des incertitudes comme des variables aléatoires ou des processus stochastiques. Dans le contexte d'une approche probabiliste, deux difficultés sont rencontrées. La première est le choix du type de distribution (uniforme, normal, lognormal, etc.). Ce choix est connu à partir de l'expérience ou d'avis d'experts. La deuxième difficulté réside dans le manque de données adéquates pour estimer les paramètres de la distribution avec un degré de confiance élevé. Les méthodes de Monte Carlo [27, 28], perturbation [29] et celle du chaos polynômial [30] sont les plus développées dans la littérature et nécessitent toutes une caractérisation probabiliste de l'incertitude comme préalable à leur utilisation.

1.3.2.2.1 Monte Carlo (MC) La méthode de Monte Carlo a été présentée à partir des années 1930 grâce aux études de Fermi portant sur la caractérisation de nouvelles molécules. Cette méthode est un outil mathématique très général et facile à utiliser avec un système déterministe possédant des paramètres incertains modélisés par des variables aléatoires. La méthode consiste à générer des tirages aléatoires pour tous les paramètres incertains suivant leurs lois de probabilité. Un jeu de paramètres est alors obtenu pour chaque tirage et un calcul déterministe est effectué par la suite. Une caractérisation statistique et probabiliste des résultats (moments statistiques, lois de probabilité) est effectuée [28]. L'avantage principal de la méthode de MC est son applicabilité pour tous les systèmes et que ses résultats sont exacts au sens statistique.

Cependant, son inconvénient majeur réside dans le fait qu'elle nécessite un grand nombre de tirages pour avoir une précision raisonnable avec un niveau de confiance donné, ce qui rend cette méthode prohibitive en termes de coût de calcul [31].

1.3.2.2.2 Méthode de perturbation La méthode de perturbation définit une autre procédure permettant la propagation des incertitudes dans les systèmes. Elle est basée sur l'approximation de tous les paramètres incertains par leurs développements de Taylor autour de leurs valeurs moyennes [29]. Le principe de cette méthode est basé sur la substitution, dans l'expression du modèle, les fonctions aléatoires par leurs développements de Taylor. Les termes du même ordre sont regroupés et un système d'équations est généré par la suite. La résolution se fait alors successivement ordre par ordre à commencer par l'ordre zéro. Cependant, l'utilisation de cette méthode est très difficile pour les systèmes complexes qui ont un grand nombre de degré de liberté. L'inconvénient majeur de cette méthode réside dans le fait qu'elle ne peut être utilisée que pour les cas où les paramètres incertains ont de faibles dispersions autour de leurs valeurs moyennes.

1.3.2.2.3 Chaos polynomial Seul l'aspect bibliographique de la méthode du chaos polynomial est présenté dans cette section. Les formalismes mathématiques sont présentés en détails dans le chapitre 2. Le chaos polynômial formalise une séparation entre les composantes stochastiques d'une fonction aléatoire et ses composantes déterministes. C'est un outil mathématique puissant qui a été développé par [30] dans le cadre de sa théorie sur le chaos homogène et qui est de plus en plus utilisé dans la science et techniques. Le chaos polynômial permet d'obtenir une expression fonctionnelle d'une réponse aléatoire en décomposant son aléa sur une base de polynômes orthogonaux. De façon générale, cette théorie est basée sur le fait que tout champ de variables stochastiques du second ordre (à variance finie) peut être exprimé par un développement en série de polynômes d'Hermite. La partie déterministe est modélisée par des coefficients \bar{x}_j , appelés modes stochastiques, pondérant les fonctions polynômiales d'Hermite ϕ_j .

$$X(\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} \bar{x}_j \phi_j(\xi) \quad (1.43)$$

La famille des polynômes d'Hermite ϕ_j forme une base orthogonale permettant une convergence optimale au sens des moindres carrés du développement pour des processus Gaussien

[32]. Askey et Wilson [33] ont défini un schéma pour généraliser ces développements en chaos à des processus non-Gaussien afin d'assurer une correspondance entre des familles de polynômes orthogonaux et des lois de probabilité. La notion de développement en polynômes de chaos généralisé est alors définie et une convergence exponentielle est généralisée au cas de lois de probabilité arbitraires [34, 35]. Les premières applications du chaos polynomial remontent aux années 1960. [29] ont combiné le développement de Wiener-Hermite avec la méthode des éléments finis pour modéliser et propager les incertitudes dans des structures mécaniques. L'application du chaos polynomial a été développée dans différents domaines, par exemple dans la fiabilité des structures mécaniques [31, 36]. Le chaos polynomial a également été utilisé pour analyser et prédire de façon robuste le comportement dynamique des systèmes de transmission d'engrenage à paramètres incertains [37, 38]. Cette thèse a abouti à l'utilisation du chaos polynomial généralisé dans l'analyse robuste des problèmes en interaction fluide-structure en présence d'incertitudes [10, 11].

1.4 Fiabilité mécanique des systèmes

Selon la norme AFNOR [39], on peut définir la fiabilité comme étant *l'aptitude d'un dispositif à accomplir une fonction requise dans des conditions données*. La fiabilité d'une structure a pour objectif d'évaluer la probabilité qu'une structure, soumise à des aléas (vibration, chocs, fatigue, etc.), soit capable de satisfaire l'intégralité de ces besoins et ce pour une durée de vie donnée. L'analyse de la fiabilité se résume en 3 étapes:

- La sélection des variables aléatoires de base, qui vont intégrer les incertitudes mises en jeu au travers de leurs lois de distribution.
- Détermination de la fonction de performance définissant la défaillance du système.
- Le calcul des indicateurs de fiabilité, qui vont fournir une évaluation quantitative et qualitative de la fiabilité du système.

En outre, l'analyse de fiabilité se résume par l'évaluation de la probabilité de défaillance par rapport à chacun des scénarios de défaillance.

1.4.1 Fonction de performance

La notion de fiabilité étant posée, un critère de défaillance est défini à l'aide d'une fonction dite de performance (ou d'état limite), notée $G(X)$, et qui dépend des variables de conception du modèle. On définit le domaine de sûreté D_s et le domaine de défaillance D_f de \mathbb{R}^k comme suit (voir figure 1.6):

- $D_s = \{X \in \mathbb{R}^k, G(X) > 0\}$
- $D_f = \{X \in \mathbb{R}^k, G(X) \leq 0\}$

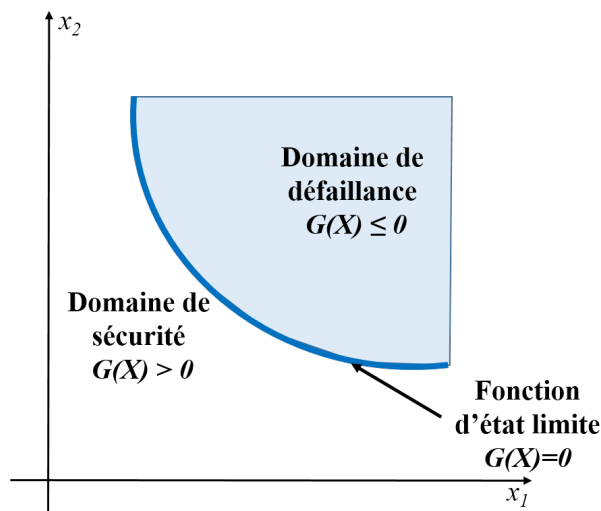


Figure 1.6: Domaines de sûreté et de défaillance dans le cas de deux variables de conception

1.4.2 Probabilité de défaillance

La fiabilité R (en anglais, reliability) d'une structure est par convention définie de la façon suivante:

$$R = 1 - P_f \quad (1.44)$$

Avec la probabilité de défaillance P_f (en anglais, probability of failure) correspond à la probabilité d'occurrence de l'événement $G(X) \leq 0$ et elle peut être écrite sous la forme:

$$P_f = \text{prob}(G(X) \leq 0) \quad (1.45)$$

Cette probabilité n'est que l'intégration de la densité conjointe de probabilité sur le domaine de défaillance.

$$P_f = \int_{D_f} f_X(x) \prod_{i=1}^k dx_i \quad (1.46)$$

Le calcul de cette intégrale est une tâche difficile vu que la densité conjointe est rarement connue, en plus la fonction de performance est généralement implicite résultant d'un modèle numérique comme par exemple la méthode des éléments finis. Dans la littérature, diverses méthodes de résolution ont été développées afin de pallier ces difficultés. On distingue deux catégories: les méthodes basées sur des simulations et celles recourant à l'approximation de l'indice de fiabilité.

1.4.2.1 Méthodes de simulations

Ces méthodes sont basées sur le calcul de la fonction de performance pour un échantillon représentatif. Elles sont les plus coûteuses en temps du calcul, mais restent la référence sur le résultat en probabilité de défaillance. De multiples travaux sont toutefois réalisés sur ces méthodes, car elles sont robustes.

- Les simulations Monte Carlo sont largement utilisées pour estimer la fiabilité dans le domaine du génie civil et en calcul de structures. Le principe de cette technique est décrit dans la section 1.2.2.2.1. La probabilité de défaillance n'est que le nombre de simulations défaillantes sur le nombre total de simulation (voir figure 1.7).

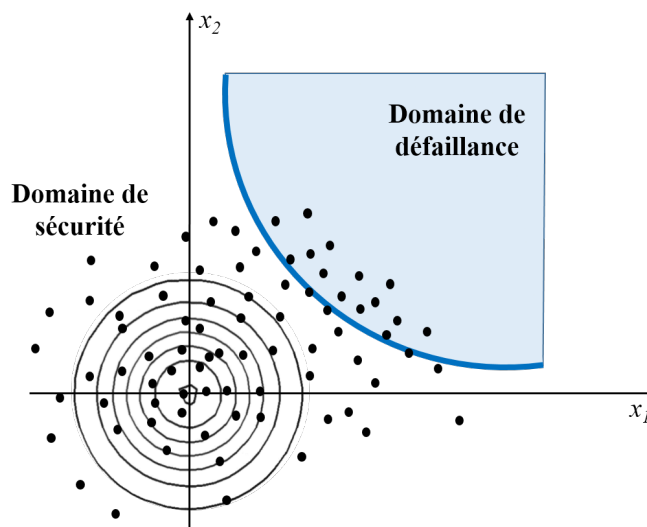


Figure 1.7: Simulations de Monte Carlo pour la probabilité de défaillance

Plus le nombre de tirages aléatoires, N , est grand plus l'estimation de la probabilité de défaillance est meilleure.

- On peut améliorer cette méthode de simulation de Monte Carlo en adoptant une technique qui consiste à réduire le nombre de simulations par leurs concentrations dans les zones les plus informatives: c'est la méthode des simulations d'importance. Ainsi on peut considérer que les tirages situés autour du point de conception ou le point de défaillance le plus probable P^* (figure 1.8).

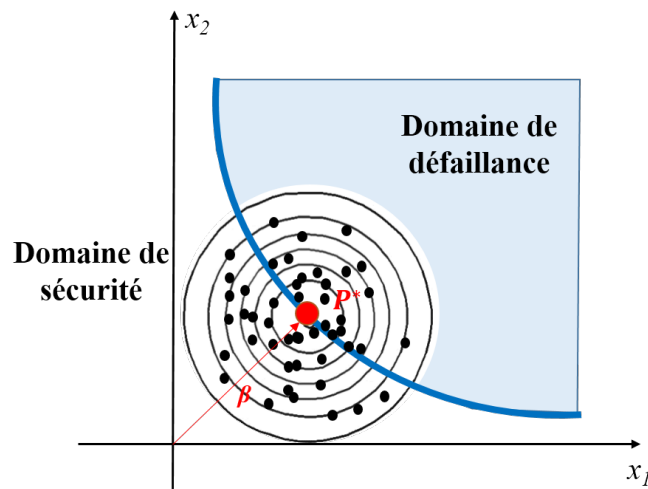


Figure 1.8: Simulations d'importance pour la probabilité de défaillance

1.4.2.2 Méthodes d'approximation FORM/SORM

Tout d'abord, il faut introduire la notion d'indice de fiabilité qui est la base de calcul des méthodes d'approximation. Plusieurs auteurs ont proposé des indices de fiabilité. Les plus connus dans la littérature sont ceux de Rjanitzyne-Cornell (β_c) et de Hasofer-Lind (β_{hl}). L'indice de Rjanitzyne-Cornell (β_c) est défini comme le rapport entre la moyenne et l'écart type de la fonction de performance.

$$\beta_c = \frac{\mu_G}{\sigma_G} \quad (1.47)$$

Hasofer et Lind ont proposé d'effectuer le calcul de β_{hl} dans l'espace des variables aléatoires normales centrées réduites et statistiquement indépendantes donc le vecteur des variables aléatoires X_i de l'espace physique doit être changé à l'aide d'une transformation iso-probabiliste [40] en un vecteur aléatoire U dans l'espace normal standard comme indique la figure 1.9. Selon la définition de Hasofer et Lind, l'indice de fiabilité β_{hl} n'est que la distance minimale de l'origine de l'espace normé à la fonction d'état limite $H(u) = 0$. La probabilité de défaillance peut

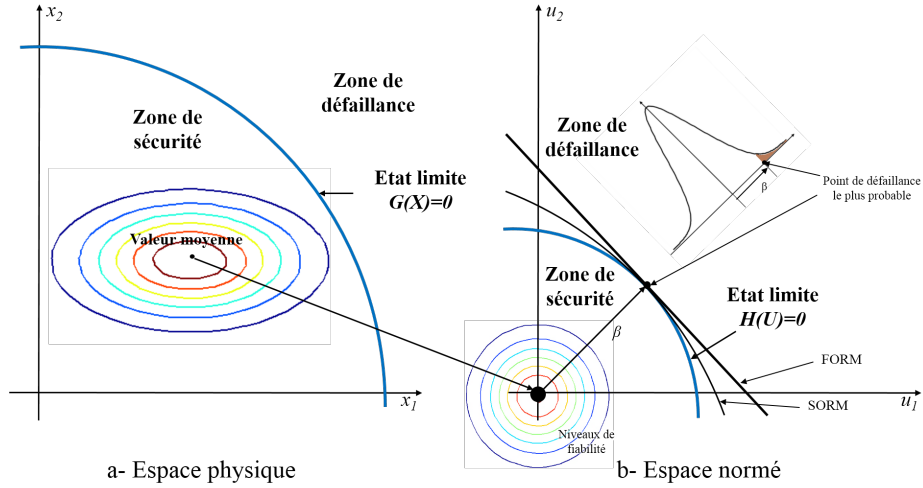


Figure 1.9: Transformation iso-probabiliste de l'espace physique vers l'espace normal standard

alors s'écrire sous la forme:

$$P_f = \int_{H(u) \leq 0} \Phi_m(u) du \quad (1.48)$$

Avec Φ_m est la fonction de densité de la loi multi-normale centrée réduite. En outre, la détermination du point de conception appelé aussi le point de défaillance le plus probable, (MPFP: Most Probable Failure Point) revient à résoudre le problème d'optimisation suivant:

$$\begin{aligned} \min_u \quad & d(u) = \sqrt{\sum u_i^2} \\ \text{s.t.} \quad & H(x,u) \leq 0 \end{aligned} \quad (1.49)$$

- Méthode FORM (First Order Reliability Method) [41]

Elle consiste à remplacer la surface d'état limite par un hyperplan tangent au point MPFP P^* . A l'aide de cette approximation, il est possible de donner une équation exprimant la probabilité de défaillance en fonction de l'indice de fiabilité $\beta = \beta_{hl}$:

$$P_f = \Phi(-\beta) \quad (1.50)$$

- Méthode SORM (Second Order Reliability Method) [42]

Cette approximation permet une meilleure précision sur la probabilité de défaillance. En fait, elle consiste à remplacer l'hyperplan par une hyper-surface quadratique tangente et ayant les mêmes courbures que la surface réelle au point de conception P^* . Ainsi, la fonction d'état limite est approchée au point MPFP par un développement de Taylor à

l'ordre deux et la probabilité de défaillance devienne ainsi:

$$P_f = \Phi(-\beta) \left(\prod_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1 + \beta\kappa_i}} \right) \quad (1.51)$$

Avec κ_i sont les courbures principales de la fonction de performance au point de défaillance P^* .

1.4.3 Couplage mécano-fiabiliste

Le couplage mécano-fiabiliste (figure 1.10) a été abordé dans plusieurs travaux de recherche notamment en calcul de structures afin d'assurer une conception optimale et fiable. Ce couplage consiste à combiner des méthodes de calcul des structures comme la méthode des éléments finis avec des algorithmes de fiabilité et optimisation. Il permet d'assurer une conception optimale en comparant les techniques classiques utilisées dans l'optimisation des structures mécaniques. L'étude de la fiabilité en mécanique nécessite une coopération entre différents acteurs: du mécanicien au probabiliste en passant par le statisticien et le fiabiliste.

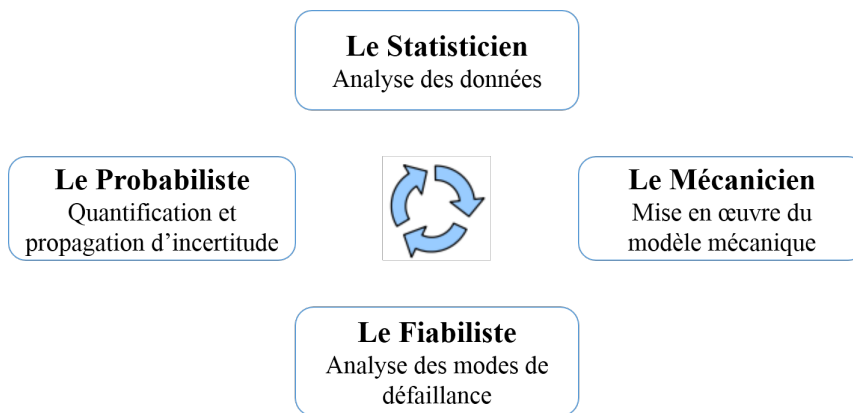


Figure 1.10: Schéma du principe du couplage mécano-fiabiliste

1.5 Conclusion

Dans ce chapitre, une étude bibliographique des problèmes vibro-acoustiques est présentée. Les équations aux dérivées partielles qui gouvernent le milieu fluide et le domaine structural ainsi que les équations qui régissent les conditions initiales et aux limites sont établies. Par la suite, la discrétisation par éléments finis du problème vibro-acoustique couplé est élaboré.

Différentes approches ont été proposées dans la littérature permettant une modélisation d'incertitudes. Le choix de la technique appropriée dépend essentiellement de la nature de ces incertitudes et aussi de la quantité d'informations disponibles. La méthode probabiliste basée sur le concept du chaos polynômial est choisie pour traiter la modélisation et l'analyse robuste de la réponse mécanique des problèmes vibro-acoustiques. Cette méthode est détaillée dans le chapitre 2 et est comparée à la technique référentielle de Monte Carlo (MC).

D'autre part, la fiabilité est indispensable dans l'optimisation de la conception des problèmes vibro-acoustiques qui est présentée dans le chapitre 3.

Chapitre 2

Approche robuste basée sur le chaos polynômial généralisé des systèmes vibro-acoustiques

Sommaire

2.1	Introduction	28
2.2	Méthode de Monte Carlo	28
2.3	Chaos polynômial généralisé (CPG)	30
2.3.1	Généralités	30
2.3.2	Calcul pratique du développement en polynômes du chaos polynômial généralisé	32
2.4	Modélisation numérique de l'incertitude de la propagation acoustique via le chaos polynômial généralisé	36
2.4.1	Modélisation analytique du guide cylindrique	37
2.4.2	Modélisation numérique du guide cylindrique	38
2.4.3	Analyse probabiliste	40
2.5	Etude vibro-acoustique d'une cavité simplifiée en présence d'incertitude	42
2.5.1	Etude vibro-acoustique (déterministe)	43
2.5.2	Etude avec prise en compte d'incertitudes	44
2.6	Conclusion	46

2.1 Introduction

Dans ce chapitre on présente les méthodes probabilistes permettant la quantification et la propagation des incertitudes dans les problèmes vibro-acoustiques. L'approche robuste (ou stochastique) est basée sur le concept fondamental appelé chaos polynômial, utilisant des fonctions orthogonales pour représenter des processus aléatoires du second ordre, solutions des systèmes stochastiques. Par ailleurs, ce chapitre revient brièvement au début sur la méthode référentielle de Monte Carlo dont l'algorithme est utilisé avec la méthode du chaos polynômial généralisé. De plus, la méthode du chaos polynômial généralisé non-intrusif est combinée avec la méthode numérique (EF/Ansys) pour résoudre deux problèmes vibro-acoustiques en présence d'incertitudes.

2.2 Méthode de Monte Carlo

Comme mentionnée dans le chapitre 1, la méthode de Monte Carlo (MC) est un outil mathématique très général et peut être appliquée pour tous les systèmes. C'est une approche probabiliste permettant la modélisation des paramètres incertains dans des systèmes dynamiques complexes comme par exemple les problèmes vibro-acoustiques. Dans cette section l'algorithme fondamental de la technique de Monte Carlo peut être résumé en 5 étapes [10, 43].

- Etape 1 : Identification probabiliste des paramètres incertains dans le modèle.
- Etape 2 : Echantillonnage et génération aléatoire de réalisations suivant les lois probabilistes identifiées.
- Etape 3 : Propagation de l'incertitude (les jeux de données de l'étape 2) dans le modèle et détermination des réponses correspondantes.
- Etape 4 : Analyse statistique des sorties correspondantes aux échantillons.
- Etape 5 : Analyse de la convergence de la distribution de la sortie du modèle.

Soit M une fonction mathématique analytique (ou algorithmique) modélisant un système quelconque et $X = (X_1, X_2, \dots, X_r)$ un vecteur aléatoire de paramètres incertains. La réponse Y est alors la solution aléatoire du modèle suivant:

$$Y = M(X) \tag{2.1}$$

Généralement, on utilise la technique de Monte Carlo pour estimer la loi de distribution de la sortie dont les caractéristiques statistiques sont données par la valeur moyenne μ_Y et l'écart type σ_Y . Ces deux caractéristiques sont calculées à l'aide d'un ensemble de N simulations comme suit:

$$\begin{cases} \hat{\mu}_Y = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N M(X^{(j)}) \\ \hat{\sigma}_Y^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^N (M(X^j) - \hat{\mu}_Y)^2 \end{cases} \quad (2.2)$$

Selon le théorème de la limite centrale, la convergence de la technique de Monte Carlo est certifiée par le fait que l'écart entre l'espérance μ_Y de Y et son estimé $\hat{\mu}_Y$ converge vers une loi normale de moyenne nulle et d'écart type égal à σ_Y/\sqrt{N} .

Une utilisation rigoureuse de la technique de Monte Carlo implique la nécessité des intervalles de confiance des résultats. Par exemple, pour un nombre N donné de tirages et un niveau de confiance $1 - \alpha$ fixé, l'intervalle de confiance correspondant à la valeur moyenne est donné par:

$$\hat{\mu}_Y - \frac{u_{\alpha/2} \hat{\sigma}_Y}{\sqrt{N}} \leq \mu \leq \hat{\mu}_Y + \frac{u_{\alpha/2} \hat{\sigma}_Y}{\sqrt{N}} \quad (2.3)$$

avec $u_{\alpha/2} = -F_X^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})$, F_X étant la fonction de répartition définie par $F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^x e^{-z^2} dz$. L'inéquation (2.3) peut être utilisée pour calculer le nombre de tirages minimal, N_{\min} , nécessaire pour estimer la valeur moyenne avec une erreur relative $\pm \varepsilon_{\mu_Y}$ avec un niveau de confiance égal à $1 - \alpha$. Ce nombre minimal de tirage peut alors être calculé à partir de l'équation suivante:

$$N_{\min} = 1 + \text{ceil} \left[\left(\frac{u_{\alpha/2} \hat{C}_Y}{\varepsilon_{\mu_Y}} \right)^2 \right] \quad (2.4)$$

Où $\text{ceil}(x)$ est l'arrondi de x à la valeur entière la plus proche et $\hat{C}_Y = \hat{\sigma}_Y/\hat{\mu}_Y$ représente le coefficient de variation de la réponse Y .

La simplicité de la technique de Monte Carlo a permis son exploitation dans différents domaines de la science de l'ingénieur. Cependant son inconvénient majeur réside dans le fait qu'il est nécessaire de générer un grand nombre de tirages pour avoir une précision raisonnable avec un niveau de confiance fixé. Par la suite, le coût de calcul est très prohibitif et surtout pour les systèmes complexes ayant un grand nombre de degrés de liberté et/ou de nombreux paramètres incertains.

2.3 Chaos polynômial généralisé (CPG)

2.3.1 Généralités

La technique du chaos polynômial (PC) est une représentation spectrale basée sur la projection de grandeurs aléatoires dans un espace probabilisé. Cette méthode est basée sur la théorie du chaos homogène de Wiener et le théorème de Cameron-Martin selon lesquels un processus stochastique du second ordre peut être exprimé par un développement convergent, au sens des moindres carrés, en série de polynômes, fonctions orthogonales de variables aléatoires indépendantes gaussiennes [29, 30, 32].

Théoriquement, le chaos polynômial est un ensemble de fonctions polynômiales de l'ensemble infini $\{\xi_i\}$ de variables aléatoires. En pratique, l'expansion du chaos polynômial (Eq. 1.42) est tronquée à un nombre fini de termes:

$$X(\xi) = \sum_{j=0}^{N_p} \bar{x}_j \phi_j(\xi) \quad (2.5)$$

Le nombre de termes $N_p + 1$ dépend de l'ordre du chaos polynômial généralisé p et du nombre de paramètres incertains r , avec $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r)$. La relation qui donne le nombre de termes $N_p + 1$ en fonction de p et de r est exprimée comme suit:

$$N_p + 1 = \frac{(p+r)!}{p!r!} \quad (2.6)$$

L'ensemble $\{\phi_j\}$ regroupe des fonctions polynômiales orthogonales par rapport à la mesure gaussienne de probabilité. La famille ϕ_j est une base orthogonale vérifiant la condition d'orthogonalité suivante:

$$\langle \phi_i, \phi_j \rangle = \langle \phi_i, \phi_i \rangle \delta_{ij}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases} \quad (2.7)$$

δ_{ij} étant le symbole de Kronecker. Le produit scalaire $\langle \phi_i, \phi_i \rangle$ est défini par:

$$\langle \phi_i, \phi_i \rangle = \int \phi_i \phi_i W(\xi) d\xi \quad (2.8)$$

L'intégration que définit l'expression (eq.2.8) est effectuée sur un domaine déterminé par le support probabiliste du vecteur aléatoire $\xi \in \mathbb{R}$, où $W(\xi)$ est la fonction densité de probabilité de ξ décrite par:

$$W(\xi) = \prod_{l=1}^r \frac{\exp(-\xi_l^2/2)}{\sqrt{2\pi}} \quad (2.9)$$

Le développement (2.5) formalise une séparation entre le caractère stochastique et le caractère déterministe d'une variable aléatoire $X(\xi)$. Le caractère déterministe est modélisé par les coefficients stochastiques \bar{x}_j appelés aussi coefficient modaux. Ils peuvent être statiques ou dynamiques (en fonction de la nature de la fonction aléatoire approximée) et représentent les coordonnées de la variable aléatoire $X(\xi)$ dans sa base orthogonale des fonctions $\phi_j(\xi)$. Le caractère stochastique de la variable $X(\xi)$ est concentré dans la base orthogonale. Le mode \bar{x}_0 du développement en chaos polynômial n'est que la valeur moyenne de la variable aléatoire $X(\xi)$ tandis que les modes d'ordres supérieurs offrent une mesure de la variabilité de $X(\xi)$ autour de sa valeur moyenne. En effet, on peut directement déterminer sa variance par l'équation suivante:

$$\sigma_X^2 = \sum_{j=1}^{N_p} \bar{x}_j \langle \phi_j, \phi_j \rangle \quad (2.10)$$

Les fonctions aléatoires peuvent être décrites précisément par le développement de Wiener-Hermite. Sa convergence, démontrée par le théorème de Cameron-Martin, est vérifiée dans de nombreux exemples pratiques référencés dans le chapitre 1. Par contre, dans le cas des fonctions non-gaussiennes, la rapidité et la précision de la convergence présentent des insuffisances particulièrement. Dans ce contexte, une correspondance optimale, établie par [34], généralise la notion du chaos polynômial au cas non-gaussien. Cette généralisation conduit à la notion du *chaos polynômial généralisé (CPG)* appelé aussi le développement de Wiener-Askey à cause de la correspondance globale définie par le schéma d'Askey [33], présenté dans le tableau 2.1.

	Variable aléatoire ξ	Wiener-Askey PC $\phi(\xi)$	Support
Distribution continue	Gaussienne	Hermite	$] - \infty, + \infty[$
	Uniforme	Legendre	$[a, b]$
	Gamma	Laguerre	$[0, + \infty[$
	Beta	Jacobi	$[a, b]$

Tableau 2.1: Correspondance entre le type de distribution et le type de la base du chaos polynômial

2.3.2 Calcul pratique du développement en polynômes du chaos polynômial généralisé

Le chaos polynômial généralisé permet la quantification et la modélisation des incertitudes dans le modèle en se basant sur 3 étapes fondamentales [43]:

- Le choix de la base polynômiale appropriée au problème:

Le chaos polynômial généralisé permet de représenter de façon optimale une fonction aléatoire par un développement en série de polynômes orthogonaux en lien direct avec la loi de probabilité la régissant (Schéma d'Askey) qui n'est en général pas connue. En pratique, un test doit d'abord être réalisé avec la méthode de Monte Carlo avec un nombre modéré de tirages pour estimer la loi de distribution de la fonction aléatoire.

- Le choix de l'ordre de troncation N_p :

Le choix de l'ordre du chaos p est essentiel pour la précision de l'approximation obtenue avec chaos polynômial généralisé. Généralement, ce paramètre p est fixé via une étude de convergence qui consiste à évaluer la qualité de la représentation avec l'augmentation de l'ordre.

- Le calcul des coefficients stochastiques:

Le calcul d'une représentation par le chaos polynômial généralisé nécessite la détermination de $N_p + 1$ modes stochastiques. Deux schémas d'implémentation peuvent être utilisés: l'approche intrusive et l'approche non-intrusive. La première utilise des techniques de projection de Galerkin pour exprimer le modèle incertain dans la base du chaos polynômial sous forme d'un système d'équations couplées et déterministes gardant les mêmes propriétés de linéarité que celles du système original [29, 44]. Le calcul des modes stochastiques passe alors par l'adaptation d'un algorithme de calcul correspondant à la nature du système d'équations résultant. L'intérêt de cette approche est la nécessité d'un seul calcul pour déterminer les coefficients stochastiques. Néanmoins, dans le cas des systèmes à grand nombre de degrés de liberté, des systèmes non linéaires et celui où le nombre de paramètres incertains est important, cette approche devienne très prohibitive au sens du coût de calcul. Tous ces inconvénients rendent l'approche non-intrusive très intéressante. En effet, elle ne nécessite aucune modification et aucune manipulation du modèle incertain initial pour le calcul des coefficients stochastiques. L'approche non intrusive se résume à projeter directement mais aussi uniquement la solution stochastique

sur la base du chaos polynômial généralisé. La difficulté est liée essentiellement à l'obtention des points de simulation nécessaires au calcul des coefficients stochastiques par les méthodes d'intégration numériques.

Dans la suite, seule l'approche non-intrusive est utilisée dans la thèse. Considérons le problème qui consiste à caractériser la solution $y(x,t,\xi(\omega))$ de l'équation différentielle stochastique donnée sous sa forme générale suivante:

$$\mathfrak{S}(y(x,t,\xi(\omega))) = f(y(x,t,\xi(\omega)), x, \xi(\omega)) \quad (2.11)$$

Où \mathfrak{S} désigne un opérateur différentiel. La solution $y(x,t,\xi(\omega))$ dépend de l'espace x , du temps t et du phénomène aléatoire modélisé par la variable ξ , qui elle-même est liée à l'événement aléatoire ω . f est une fonction qui peut être non linéaire. La solution $y(x,t,\xi(\omega))$ peut être exprimée sous forme d'un développement en série de polynômes orthogonaux (eq.2.12).

$$y(x,t,\xi) = \sum_{j=0}^{N_p} \bar{y}_j(x,t) \phi_j(\xi) \quad (2.12)$$

2.3.2.1 Approche non-intrusive

L'avantage majeur de l'approche non-intrusive réside dans le fait qu'elle nécessite quelques calculs de solutions déterministes en un nombre fini de points du domaine de variation probabiliste. Le choix de ces points dépend essentiellement de la méthode utilisée pour le calcul des coefficients stochastiques. Deux techniques peuvent être distinguées à savoir la méthode de projection spectrale non-intrusive (NISP) et la méthode de régression.

2.3.2.1.1 Technique de projection spectrale non-intrusive (NISP) Dans la technique NISP, une fois la solution exprimée dans la base du chaos polynômial généralisé suivant l'expression (eq.2.12), elle y est projetée ce qui permet de déterminer directement les coefficients stochastiques par l'équation (eq.2.13):

$$\bar{y}_l(x,t) = \frac{\langle y(x,t,\xi), \phi_l(\xi) \rangle}{\langle \phi_l(\xi), \phi_l(\xi) \rangle}, l = 0, \dots, N_p \quad (2.13)$$

Ou de façon équivalente:

$$\bar{y}_l(x,t) = \frac{1}{\langle \phi_l^2 \rangle} \int y(x,t,\xi) \phi_l(\xi) W(\xi) d\xi, l = 0, \dots, N_p \quad (2.14)$$

Le coefficient $\bar{y}_l(x,t)$ mesure, à un facteur de normalisation près, la corrélation entre la fonction $y(x,t,\xi)$ et le polynôme $\phi_l(\xi)$. Le dénominateur dans l'équation (eq.2.14) est défini par des produits internes entre des polynômes identiques. Ces produits internes peuvent être calculés de façon indépendante. Leurs valeurs, qui sont des constantes réelles, peuvent être tabulées et sauvegardées. Le calcul du numérateur dans l'expression (eq.2.14) passe par le calcul d'intégrales multidimensionnelles le long du support probabiliste du vecteur aléatoire ξ . Différentes méthodes sont utilisées pour approximer ces intégrales telles que les techniques numériques de Monte Carlo, la méthode de Simpson ou les méthodes de collocation de Gauss. Par exemple, dans le cas d'une intégration de Gauss monodimensionnelle, l'approximation de l'intégrale (eq.2.14) est donnée par :

$$\bar{y}_l(x,t) = \frac{1}{\langle \phi_l^2 \rangle} \sum_{k=1}^Q y(x,t,\xi^{(k)}) \phi_l(\xi^{(k)}) W(\xi^{(k)}) , l = 0, \dots, N_p \quad (2.15)$$

Les points $\xi^{(k)}$ sont les points d'intégration de Gauss appelés aussi points de collocations et qui sont donnés par les racines du polynôme ϕ_l de degré p tandis que les $W(\xi^{(k)})$ représentent les poids d'intégration de Gauss.

2.3.2.1.2 La technique de régression La méthode de régression consiste à calculer les modes stochastiques de telle sorte à minimiser, au sens des moindres carrés, l'écart ε entre la solution du modèle stochastique et son approximation dans la base du chaos polynômial généralisé.

$$\varepsilon = \sum_{k=1}^Q \left[y(x,t,\xi^{(k)}) - \sum_{l=0}^{N_p} \bar{y}_l(x,t) \phi_l(\xi^{(k)}) \right]^2 \quad (2.16)$$

La méthode de régression n'utilise pas la propriété de l'orthogonalité de la base polynômiale contrairement à la technique de la projection spectrale non intrusive ou encore la méthode intrusive. Elle requiert, par contre, un nombre Q de simulations supérieur au nombre de coefficients modaux à calculer, d'où $N_p + 1 < Q$. Cette condition est nécessaire pour que la solution du problème des moindres carrés correspondant soit admissible. Q définit le nombre de simulations correspondant à un jeu de valeurs $\xi^{(k)}$. Deux approches différentes sont possibles pour

générer ce jeu de valeurs:

- L'approche aléatoire où les points $\xi^{(k)}$ sont générés suivant la loi de ξ .
- L'approche déterministe qui consiste à choisir à l'avance les points $\xi^{(k)}$ où l'on va évaluer le modèle (eq.2.11). Les $\xi^{(k)}$ peuvent être choisis à partir des racines d'un polynôme avec comme condition $Q > N_p + 1$.

En désignant par $\bar{Y} = (\bar{y}_0, \dots, \bar{y}_{N_p})^T$ le vecteur des coefficients modaux, par Z la matrice d'éléments $z_{q,l} = \phi_l(\xi^{(q)})$ et par $Y = (y(x,t,\xi^{(1)}), \dots, y(x,t,\xi^{(q)}))$ le vecteur des simulations correspondant au jeu $\{\xi^{(q)}\}$ et si la matrice $Z^T Z$ est non singulière alors la solution optimale du problème classique des moindres carrés est donnée par:

$$\bar{Y} = (Z^T Z)^{-1} Z^T Y \quad (2.17)$$

La qualité de la solution dépend du conditionnement de la matrice $Z^T Z$ appelée matrice de Fischer. Des méthodes telles que la décomposition en valeurs singulières peuvent être utilisées pour mieux conditionner cette matrice.

2.3.2.2 Critères de choix de l'ordre optimal de troncation

Plus l'ordre de troncation est élevé plus la précision du CPG est bonne mais plus le nombre de points de simulation avec le système stochastique initial est élevé. Il faut donc déterminer l'ordre optimal de troncation. L'erreur de variance $e_{\sigma^2,p}$ entre deux processus d'ordre successif est donnée par:

$$e_{\sigma^2,p} = \sigma_p^2 - \sigma_{p-1}^2 = \sum_{j=N_{p-1}+1}^{N_p} \bar{x}_j^2 \langle \phi_j^2 \rangle \quad (2.18)$$

L'erreur moyenne (au sens des moindres carrés) entre deux développements d'ordres successifs est calculée avec:

$$\varepsilon_p^2 = \frac{1}{N'} \sum_{k=1}^{N'} (x_p(\xi_k) - x_{p-1}(\xi_k))^2 = \frac{1}{N'} \sum_{k=1}^{N'} \left(\sum_{j=N_{p-1}+1}^{N_p} \bar{x}_j \phi_j(\xi_k) \right)^2 \quad (2.19)$$

avec N' le nombre d'échantillons. On peut montrer que cette erreur est égale à:

$$\varepsilon_p^2 = e_{\sigma^2,p} \quad (2.20)$$

On constate qu'il n'est pas nécessaire de faire des simulations avec le modèle initial ou avec le CPG pour calculer l'erreur qu'on pourra déterminer à partir des modes stochastiques. Le critère de choix de l'ordre optimal est basé sur le calcul du taux de décroissance de l'erreur relative de la variance entre deux développements d'ordre successif:

$$\eta_i = \frac{e_{\sigma^2,i,p}}{\sigma^2_{i,p}} \quad (2.21)$$

Ainsi on peut écrire:

$$\sqrt{\eta_i} \leq \theta \quad (2.22)$$

avec θ est lié au seuil du choix de l'ordre de troncation [45]. Un autre critère peut être utilisé pour choisir l'ordre optimal de troncation et qui est lié au nombre de calculs directs $Q < N$ (nombre de points de collocation de Gauss), avec $Q = (p + 1)^r$ et N : nombre d'échantillons utilisés avec Monte Carlo.

2.4 Modélisation numérique de l'incertitude de la propagation acoustique via le chaos polynomial généralisé

La propagation acoustique guidée est un domaine important de l'acoustique. Cette importance découle de la nécessité de réduire ou d'augmenter l'intensité sonore dans certaines régions des guides d'ondes. La propagation acoustique dans les guides d'ondes cylindriques est un champ commun dans les secteurs d'automobile et d'avion. L'équation de Helmholtz est normalement utilisée pour modéliser la propagation des ondes acoustiques [46–49]. Pour un grand nombre de problèmes, il n'y a pas de solution analytique exacte de cette équation. Généralement, une procédure numérique est appliquée pour calculer le champ de pression acoustique [50, 51]. La simulation par éléments finis (FES) est une technique très puissante, qui peut être appliquée pour obtenir une solution approchée de l'équation de Helmholtz. La simulation déterministe conduit à une solution approximative et nominale de la réalité. Dans certains cas, la prédiction du comportement d'un système est particulièrement difficile en raison de la variabilité induite par l'incertitude. L'objectif de cette section consiste à améliorer les performances des simulations numériques de la propagation acoustique guidée en présence d'incertitudes.

2.4.1 Modélisation analytique du guide cylindrique

Dans cette section, les équations de la propagation du son dans les conduites de section circulaire (voir la figure 2.1) sont présentées.

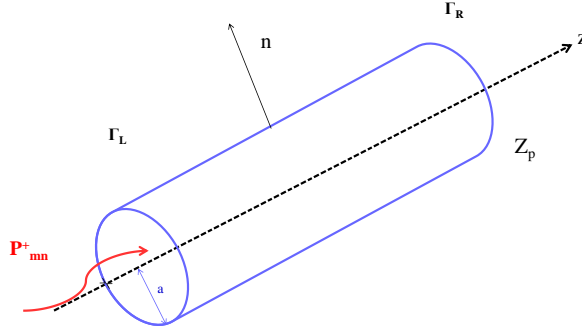


Figure 2.1: Description du guide cylindrique

L'équation gouvernant le comportement acoustique d'un fluide est l'équation de Helmholtz [52, 53]:

$$\Delta p_i + k^2 p_i = 0. \quad (2.23)$$

Δ est l'opérateur laplacien, p_i est la pression acoustique à l'intérieur de la conduite étudiée et k est le nombre d'ondes total. Il est clair que la résolution de cette équation dépend de la géométrie de la conduite. Dans ce travail, une conduite de section transversale cylindrique est considérée. Pour ce type de conduite, l'équation de résolution de Helmholtz dans le système de coordonnées cylindriques est réalisée par la méthode de séparation des variables. La pression acoustique est alors exprimée comme:

$$P(r_i, \theta, z) = R(r_i) \cdot \Theta(\theta) \cdot Z(z), \quad (2.24)$$

où:

$$\begin{cases} Z(z) = Ae^{jk_z z} + Be^{-jk_z z} \\ \Theta(\theta) = \theta_1 e^{-jm\theta} + \theta_2 e^{jm\theta} \\ R(r_i) = CJ_m(k_r r_i) \end{cases} \quad (2.25)$$

$A, B, \theta_{1,2}$ et C sont des constantes qui dépendent des conditions limites. Les nombres d'ondes sont liés par la relation de dispersion [54]:

$$\Gamma_{mn}^2 + k_{mn}^2 - k^2 = 0. \quad (2.26)$$

Dans le cas d'une paroi rigide, le nombre d'ondes radiales est défini par:

$$\Gamma_{mn} = \frac{\chi_{mn}}{a}, \quad (2.27)$$

avec χ_{mn} est la n th racine de la dérivée de la fonction de Bessel, J_m , du premier type d'ordre m . Ainsi l'analyse modale peut être appliquée [55, 56] et le champ de pression acoustique à l'intérieur de la conduite est obtenu comme:

$$P(r_i, \theta, z, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} P_{mn}(z) \cdot \Psi_{mn}(r_i, \theta) \cdot e^{-i\omega t}, \quad (2.28)$$

où P_{mn} sont les coefficients modaux associés aux modes (m, n) et définis par:

$$P_{mn}(z) = A_{mn} e^{-jk_{mn} \cdot z} + B_{mn} e^{jk_{mn} \cdot z} \quad (2.29)$$

et Ψ_{mn} sont les fonctions propres de la cavité [56, 57], qui satisfont l'équation de Helmholtz et peuvent être exprimées comme suit:

$$\Psi_{mn}(r_i, \theta) = J_m(\chi_{mn} \cdot \frac{r_i}{a}) \cdot e^{jm\theta}, \quad (2.30)$$

L'équation de Helmholtz sera résolue numériquement dans la suite à l'aide de la méthode des éléments finis.

2.4.2 Modélisation numérique du guide cylindrique

L'exemple choisi consiste à appliquer une pression modale à la limite gauche Γ_L de la conduite cylindrique, comme indiqué sur la figure 2.1. Les caractéristiques géométriques de la conduite étudiée sont les suivantes: rayon $a = 0.02m$ et longueur $L = 0.25m$. L'amplitude de la pression imposée est égale à $1Pa$. A la fin de la conduite Γ_R , une impédance acoustique normalisée est appliquée ($Z_p = 2$) afin de refléter l'onde acoustique plane. La conduite a été modélisée avec

8000 éléments FLUID30. C'est une analyse entièrement acoustique et il n'y a pas de degrés de liberté de déplacement actif. Le modèle élément fini ANSYS de la conduite est présenté dans la figure 2.2.

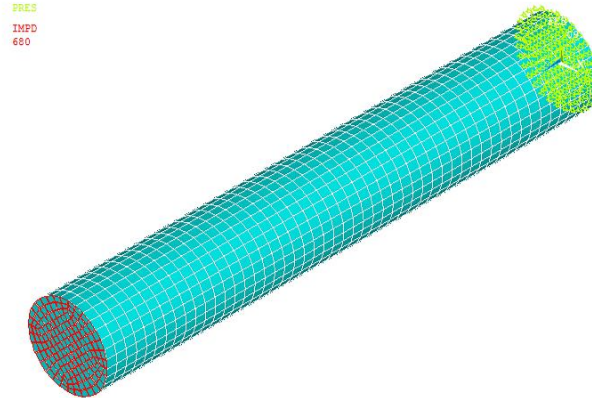


Figure 2.2: Modèle éléments finis ANSYS de la conduite cylindrique

La figure 2.3 présente le champ de pression à l'intérieur de la conduite à plusieurs fréquences. La propagation de l'onde est claire et la localisation du maximum de la partie réelle de la pression acoustique varie en fonction de la fréquence. L'évolution de la pression en fonction de la fréquence en un point à l'intérieur de la conduite cylindrique est montrée dans la figure 2.4. Les résultats trouvés sont pratiquement similaires avec ceux montrés dans [58].

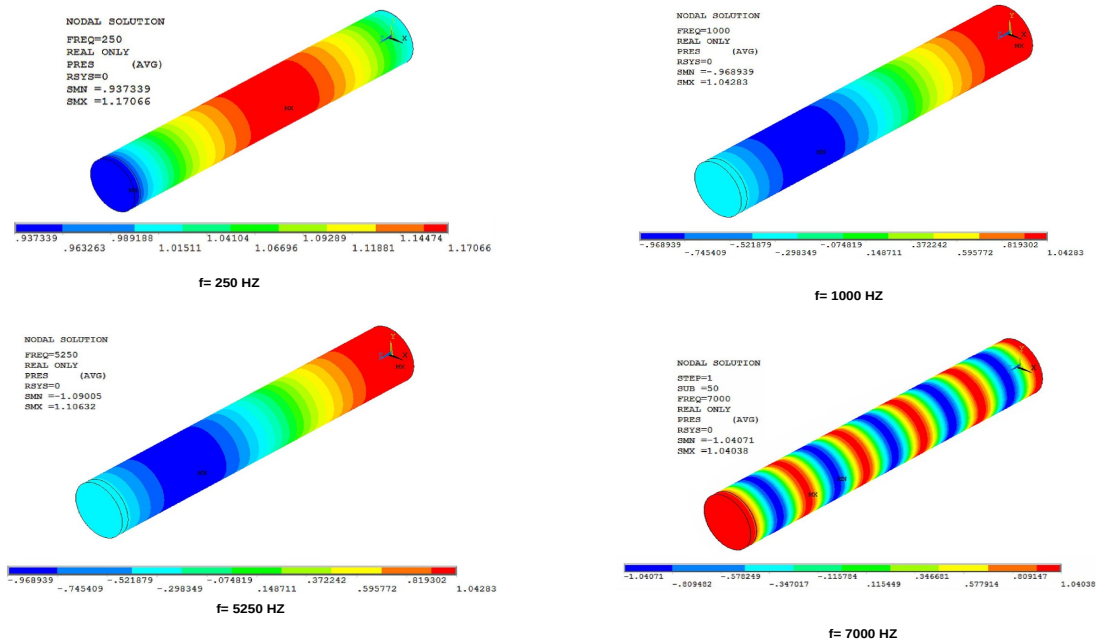


Figure 2.3: Partie réelle de la pression acoustique à l'intérieur de la conduite cylindrique étudiée

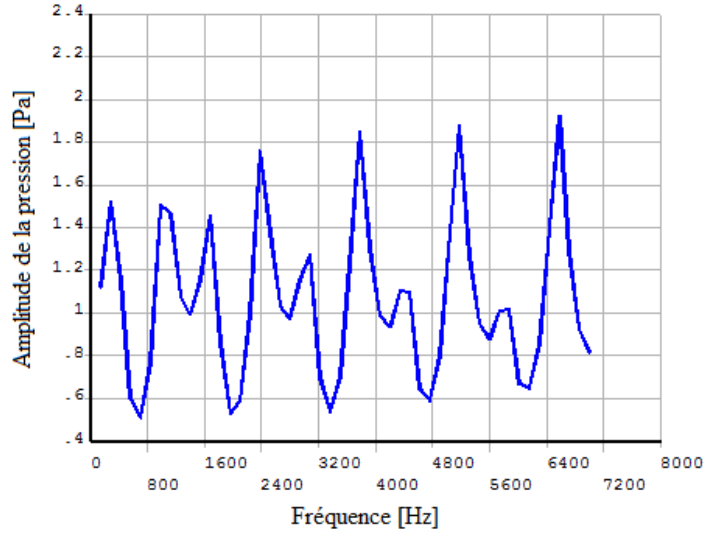


Figure 2.4: Evolution de l'amplitude de la pression acoustique en fonction de la fréquence

2.4.3 Analyse probabiliste

Dans cette section, les méthodes stochastiques discutées ci-dessus, MC et CPG, sont implémentées et intégrées dans la simulation par éléments finis du guide cylindrique. Le paramètre incertain géométrique considéré ici est le rayon du guide cylindrique a et le paramètre physique incertain est la densité ρ . Ces paramètres sont choisis pour être uniformément aléatoires autour de leurs valeurs nominales, $\pm 5\%$; $a = \bar{a}_0 + \xi \bar{a}_1$ et $\rho = \bar{\rho}_0 + \xi \bar{\rho}_1$, avec \bar{a}_0 , $\bar{\rho}_0$ sont les valeurs moyennes de a et ρ , respectivement et \bar{a}_1 , $\bar{\rho}_1$ sont des constantes pratiques.

L'utilisation de la méthode de Monte Carlo pour analyser le champ de pression consiste à créer une grille de valeurs numériques à partir des paramètres incertains probabilistes et à calculer la quantité d'intérêt du système linéarisé pour chaque valeur de la grille. La pression acoustique à l'intérieur du guide cylindrique est analysée pour 500 tirages aléatoires.

La représentation chaotique de la pression acoustique est donnée par:

$$P_{CPG}(r_i, \theta, z, \xi) = \sum_{j=0}^{N_p} \bar{P}_j(r_i, \theta, z) \cdot \phi_j(\xi) \quad (2.31)$$

La représentation de la pression acoustique par MC est donnée par:

$$P_{MC}(r_i, \theta, z, \xi) = M(X) \quad (2.32)$$

avec M est le modèle élément fini et $X = [a, \rho]^T$ est le vecteur des paramètres d'entrée incertains.

L'amplitude de la pression acoustique est représenté dans les figures 2.5 et 2.6 en fonction du rayon et de la densité de la conduite. On peut constater que pour $\pm 5\%$ de la variation de rayon, a , l'amplitude de la pression maximale varie linéairement. Dans le cas de la variabilité de la densité, ρ on peut remarquer que le rayon a plus d'effet sur la grandeur de la pression que la densité.

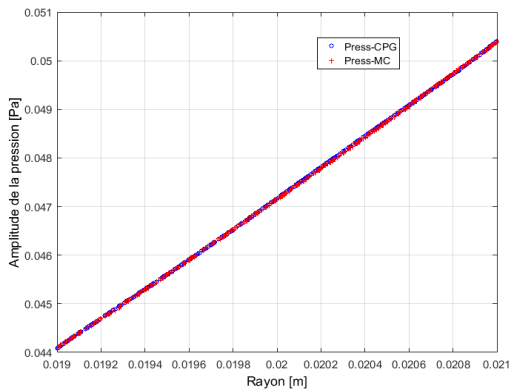


Figure 2.5: Amplitude de la pression maximale en fonction du rayon

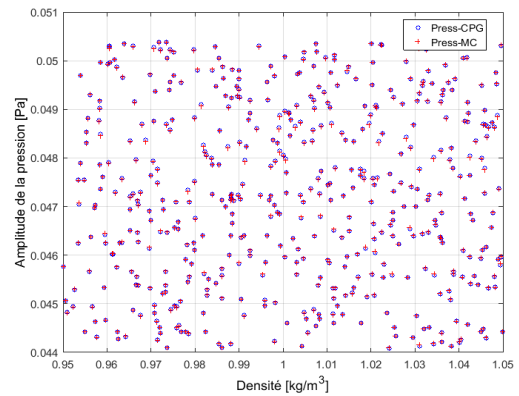


Figure 2.6: Amplitude de la pression maximale en fonction de la densité

Le tableau 2.2 montre les principales caractéristiques de chaque technique.

Frequence $f = 1000Hz$	Monte Carlo	CPG ($r = 2$)
Order p	-	4
Nombre de simulations	500	25
Erreur relative maximale entre MC et CPG	-	$6.4e^{-4}$
Moyenne de la pression (Pa)	0.047262	0.047262
Ecart type de pression	0.001821	0.001826
Temps (s)	43438.96	0.5182

Tableau 2.2: Comparaison des résultats entre MC et CPG

Il est à noter que la technique de Monte Carlo est une méthode très puissante pour résoudre la complexité des systèmes avec des paramètres aléatoires. Néanmoins, selon les résultats, cette technique présente une faible convergence pour la moyenne et l'écart-type de la solution, nécessitant un grand nombre d'échantillons pour obtenir une bonne précision des résultats, ce qui

entraîne des calculs coûteux. On constate que, pour un ordre $p = 4$, le CPG suit parfaitement l'évolution obtenue avec MC avec un nombre réduit de simulations ($500 \rightarrow 50$) et un temps négligeable.

2.5 Etude vibro-acoustique d'une cavité simplifiée en présence d'incertitude

'Bruit, vibrations et dureté', (Noise, vibration and harshness: NVH), est l'un des facteurs les plus importants et essentiels pour les industries d'automobile pour améliorer la qualité de leurs produits et de réduire le bruit à l'intérieur des cabines des véhicules. Cette 'NVH' représente l'analyse acoustique de la cavité. Bien que la nature de l'excitation puisse être unique pour chaque type de véhicule, le champ de pression interne dans la cavité fermée est significativement affecté par les caractéristiques modales acoustiques de la cavité, par le comportement dynamique de la structure environnante, ainsi que par la nature du couplage.

Dans cette section, la méthode du chaos polynômial généralisé non-intrusif est utilisée pour traiter les paramètres aléatoires présentes dans un problème vibro-acoustique. Cette technique est combinée avec la simulation numérique (EF / Ansys) pour étudier le comportement vibro-acoustique d'une simple cabine fermée de véhicule.

Le modèle considéré est une simple cabine de véhicule [10]. La figure 2.7 présente le diagramme 2D de l'habitacle. Les dimensions géométriques de la cavité étudiée sont: $L_x = 2.51m$, $L_y = 1.1m$, $L_z = 1.4m$. Le modèle éléments finis, présenté dans la figure 2.8, a été modélisé à l'aide du logiciel ANSYS en utilisant 3808 éléments pour le fluide interne et 70 éléments pour modéliser la tôle d'acier d'une épaisseur de $8mm$ située en avant de la cavité. Les éléments internes sont des éléments 3D délimités par 6 faces, ayant 8 nœuds avec un degré de liberté par nœud: la pression acoustique. Les éléments de la structure sont des éléments coques à quatre nœuds avec six degrés de liberté à chaque nœud: 3 translations dans les directions nodale x , y et z et 3 rotations autour des axes nodal x , y et z . Les conditions aux limites adoptées sont l'interaction fluide-structure dans tous les nœuds libres de la plaque structurelle. Tous les nœuds de la frontière de la plaque ont été contraints.

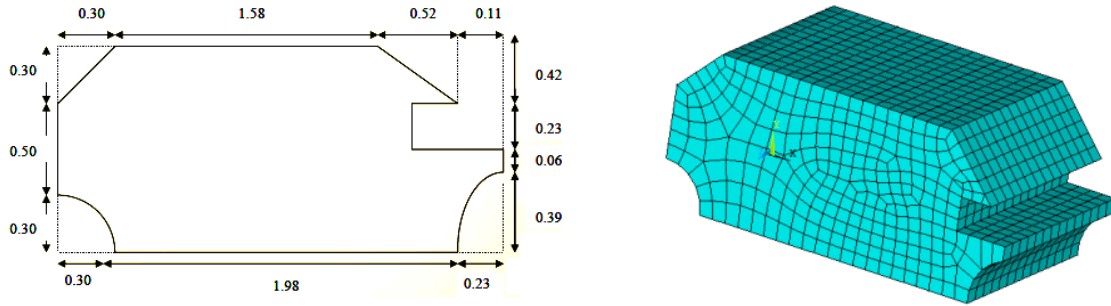


Figure 2.7: Schéma 2D de la cavité acoustique Figure 2.8: Modèle élément fini de la cabine acoustique

Le fluide à l'intérieur de la cabine est l'air dont les caractéristiques sont: sa masse volumique est $1.21\text{kg}/\text{m}^3$ et la célérité du son est $343\text{m}/\text{s}$. L'analyse par éléments finis (FEA) est utilisée pour prédire le niveau de la pression acoustique (SPL) à l'intérieur de la cavité. Cette 'SPL' peut être déterminée à partir de l'équation suivante:

$$SPL_{dB} = 20 \log_{10} \left(\frac{P}{P_{ref}} \right) = 20 \log_{10}(P) + 94 \quad (2.33)$$

Avec $P_{ref} = 20\mu\text{Pa}$ est la pression acoustique de l'audition humaine.

2.5.1 Etude vibro-acoustique (déterministe)

Dans cette section on va étudier l'influence de la vibration de la structure sur la réponse acoustique (SPL). On considère que la vibration de la structure en avant est la source la plus dominante du bruit dans l'habitacle [59]. Le tableau 2.3 montre les résultats pour les fréquences naturelles obtenues à partir de simulations FEA.

Cavité acoustique	Plaque structurelle	Système couplé
78.84	20.87	21.26
122.75	32.82	87.35
145.89	51.58	124.58
145.93	73.64	150.66
160.17	94.85	159.18
181.71	126.75	162.67
190.69	151.49	185.23
217.53	173.43	201.02

Tableau 2.3: Fréquences propres vibro-acoustique

On peut noter que lorsque la plaque structurelle devienne comme une partie du système couplé,

les fréquences naturelles obtenues lors des simulations FEM sont considérablement plus faibles. Maintenant, nous évaluons le niveau de pression acoustique (SPL) dans la cabine en fonction de la fréquence dans deux positions: la première à l'oreille droite du conducteur (DRE), située à (1.5,0.8,1.25) et la seconde à l'oreille droite du passager (PRE) située à l'arrière du conducteur et située à (0.6,0.8,1.25). Une force harmonique unitaire est appliquée au centre de la plaque frontale dans la bande de fréquences 0 – 200Hz. On présente dans le tableau 2.4 une comparaison des valeurs de la SPL entre les deux positions avec et sans la présence de matériau absorbant.

Matériau absorbant	Position	Max SPL (dB)	Min SPL (dB)	Fréquence (Hz)
Sans	DRE	124.8	81.52	185/60
	PRE	138.2	74.39	185/140
Avec	DRE	125.9	79.49	165/55
	PRE	105.9	60	140/55

Tableau 2.4: Valeurs caractéristiques de la SPL avec et sans absorption

Avec la présence de matériau absorbant, nous constatons que:

- Pour le DRE: une augmentation de 1dB pour la valeur maximale et une diminution de 2dB pour la valeur minimale du SPL.
- Pour le PRE: une réduction de 30dB pour la valeur maximale et de 15dB pour la valeur minimale du SPL.

Dans la suite on va introduire la variabilité des paramètres incertains dans l'étude vibro-acoustique dans le cas 'présence d'absorption'.

2.5.2 Etude avec prise en compte d'incertitudes

Dans cette section, la méthode stochastique discutée ci-dessus, CPG, est mise en oeuvre et intégrée dans la simulation par éléments finis de la section 2.3.1. L'objectif de cette section est d'améliorer la performance des systèmes vibro-acoustiques qui fonctionneront en présence d'incertitudes des paramètres inévitables associés en même temps aux propriétés matérielles et aux conditions aux limites. Ces paramètres sont choisis de façon aléatoire suivant une distribution uniforme autour de leurs valeurs nominales $\pm 5\%$. Le tableau 2.5 présente une idée sur les différents paramètres incertains choisis pour l'exemple de la cabine.

	Partie Acoustique			Partie Structure	
Paramètres	$c(m/s)$	$Z(Pa.s/m)$	coef-Abs	$E(GPa)$	$\rho_s(kg/m^3)$
Valeurs	$U[325.85,360.15]$	$U[0.95,1.05]$	$U[0.2375,0.2625]$	$U[199.5,220.5]$	$U[7457.5,8242.5]$

Tableau 2.5: Caractéristiques des paramètres incertains

L'utilisation de la méthode de MC, pour analyser le niveau de pression acoustique (SPL) à l'intérieur de la cabine, consiste à créer une grille de valeurs numériques à partir des paramètres incertains et à calculer la quantité d'intérêt (SPL) du système linéarisé pour chaque valeur de la grille. La quantité d'intérêt est analysée pour 2000 tirages aléatoires. On présente dans les figures 2.9 et 2.10 l'évolution de la SPL en fonction de la fréquence calculée par les deux méthodes stochastiques MC et CPG. On constate que, pour un ordre $p = 6$, le CPG suit parfaitement l'évo-

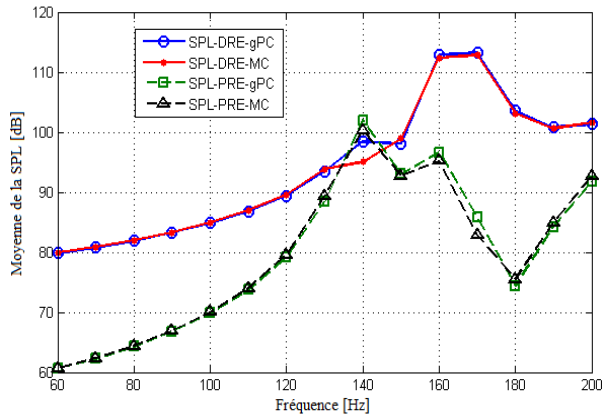


Figure 2.9: Moyenne de la SPL pour p=6

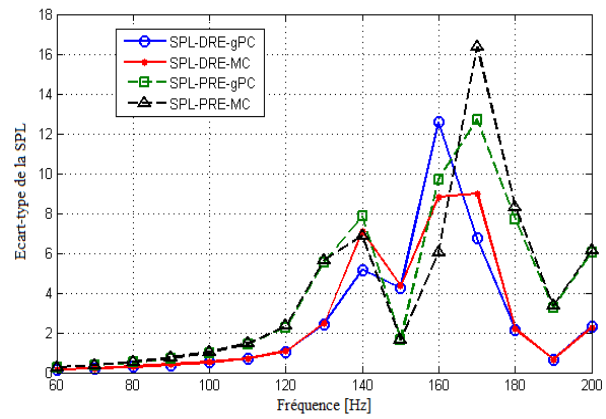


Figure 2.10: Ecart-type de la SPL pour p=6

lution obtenue avec MC. Le tableau 2.6 présente un récapitulatif de toutes les simulations faites par les deux méthodes. Pour 3 paramètres incertains, on constate que pour un ordre $p = 2$, le

Nombre de paramètres incertains	$r = 3$	$r = 4$	$r = 5$
	(z, E, ρ_s)	(z, c, E, ρ_s)	$(z, c, \alpha, E, \rho_s)$
N_{MC}	500	1000	2000
Ordre du chaos	2	4	6
Moyenne maxi de la SPL (MC/CPG)	DRE: 125.36/124.57	DRE: 120.47/121.26	DRE: 113.28/113.75
	PRE: 105.19/106.48	PRE: 103.62/103.39	PRE: 100.14/102.26
Ecart type maxi de la SPL (MC/CPG)	DRE: 10.54/10.68	DRE: 9.78/11.17	DRE: 9.45/12.24
	PRE: 13.28/14.36	PRE: 14.36/15.87	PRE: 16.32/12.48
Temps MC (h)	4.16	8.2	25.43
Temps CPG (s)	1.24	5.26	45.18

Tableau 2.6: Récapitulatif des résultats pour les deux positions

CPG suit exactement la réponse obtenue par MC avec une erreur de l'ordre 10^{-5} et un temps très négligeable. Si la vitesse du son, c , devient incertaine, on doit augmenter l'ordre du CPG jusqu'à

$p = 4$ pour qu'on puisse suivre la réponse de MC. Si on tient compte encore de la variabilité du coefficient d'absorption α , le système devient plus complexe en termes de dimension et le CPG a besoin d'un ordre $p = 6$ pour pouvoir suivre l'évolution obtenue par MC. On remarque que lorsque les plages de variation des paramètres incertains sont supposées être celles-ci figurant dans le tableau 2.5, les fréquences propres dans la bande de fréquence $[50 - 200]Hz$ sont situés dans les bandes de fréquences $130 - 140Hz$, $160 - 180Hz$ respectivement. Il faut aussi noter qu'avec la présence d'incertitudes, l'évolution de la SPL en fonction de la fréquence devient plus stable et les pics de résonance deviennent plus lisses.

2.6 Conclusion

Ce chapitre présente les théories sur lesquelles sont basées les approches robustes qui vont être utilisées dans ces travaux de thèse pour étudier le comportement dynamique des systèmes vibroacoustiques plus particulièrement les approches non-intrusives du chaos polynômial généralisé (CPG). L'approche robuste basée sur le CPG est utilisée afin de contourner l'inconvénient majeur de la méthode référentielle de Monte-Carlo qui est prohibitive en terme de coût de calcul pour les systèmes industriels. Généralement, trois problèmes sont présentés dans l'utilisation pratique du CPG: le choix de la méthode non-intrusive, le choix des points de collocation de Gauss et le choix de l'ordre optimal.

A la fin de ce chapitre, deux applications ont été étudiées avec la prise en compte de l'incertitudes des paramètres liés aux caractéristiques des matériaux, géométriques et aux conditions aux limites. Une analyse numérique acoustique d'un guide cylindrique est adressée au début. A la fin, une étude vibro-acoustique d'une cavité simplifiée d'un habitacle est présentée. Les résultats ont montré la performance de la méthode du CPG comparée à la technique du MC au sens du coût de calcul. En fait, le CPG nous a permis de minimiser le nombre de simulations nécessaires et bien sur le temps de calcul qui est devenu négligeable par rapport au temps prohibitif de MC. Cette étude a montré que les résultats dépendent fortement de l'ordre du gPC. Une augmentation dans cet ordre s'accompagne d'une meilleure projection de la solution. Cependant, il est nécessaire de mentionner que la méthode du CPG présente un inconvénient majeur au sens que son efficacité diminue avec l'augmentation du nombre de paramètres incertains.

Chapitre 3

Optimisation fiabiliste des systèmes vibro-acoustiques

Sommaire

3.1	Introduction	49
3.2	Optimisation des structures	50
3.2.1	Formulation du problème d'optimisation	51
3.2.2	Optimisation de conception déterministe	52
3.2.3	Exemple d'une poutre en flexion	53
3.3	Optimisation fiabiliste (<i>Reliability-based design optimization RBDO</i>)	55
3.3.1	Formulation de l'optimisation fiabiliste de conception	56
3.3.2	Approche classique	57
3.3.3	Approche hybride (HM)	59
3.3.4	Facteurs de sécurité optimaux (OSF)	60
3.3.5	Méthode hybride robuste (RHM)	62
3.4	Méthode OSF couplée avec le chaos polynomial généralisé appliquée aux systèmes vibro-acoustiques en présence d'incertitudes	64
3.4.1	Exemple de plaque flexible couplée à une cavité acoustique rectangulaire	65
3.4.2	Exemple de cavité acoustique simplifiée d'un habitacle couplée avec des plaques structurelles	72
3.5	Optimisation fiabiliste basée sur la méthode RHM d'un simple silencieux à chambre d'expansion	75

3.6 Conclusion 79

3.1 Introduction

L'optimisation des structures soulève depuis plusieurs années le plus vif intérêt des concepteurs. Elle s'y intègre progressivement, dans les techniques classiques de modélisation, au fur et à mesure que s'élargit sa performance. Au début, l'optimisation est utilisée dans des systèmes très simples, son champ d'application s'étend aujourd'hui à de nouveaux défis toujours plus complexes.

La détermination de la conception optimale d'un système est un enjeu majeur pour les concepteurs. Le dimensionnement idéal (optimal) doit garantir plusieurs critères tels que la fiabilité, la durabilité, la faisabilité tout en minimisant le coût de la structure. En conséquence, l'objectif de l'optimisation des structures consiste à trouver la meilleure conception qui permet en même temps de réduire les coûts et augmenter les performances.

Généralement, l'optimisation est formulée par un problème de minimisation d'une fonction appelée '*fonction objectif*' sous des contraintes appelées '*limitations*'. Cette problématique est généralement résolue à partir des algorithmes itératifs [60] qui nécessitent le calcul des gradients de la fonction objectif et des contraintes.

La mise en oeuvre de l'optimisation des structures [61] est présentée par la figure 3.1. Sur la base d'une conception initiale définie par des variables de conception, l'optimisation vise à déterminer de manière itérative la conception optimale vérifiant les critères de performance.

Cependant, une optimisation sans tenir compte des incertitudes liées à la structure peut conduire à des écarts imprévisibles des performances réelles et espérées. Par ailleurs, la présence d'un grand risque de défaillance de la conception qui ne respecte pas la fiabilité souhaitée. Pour cette raison, plusieurs méthodes d'optimisation fiabiliste ont été développées afin de concevoir des structures satisfaisant à la fois les performances économiques et fiables. Ces méthodes ont été appliquées dans différents domaines telles que: génie civile [62], mécatronique [63], vibro-acoustique [11], aérodynamique [64] et biomécanique [65, 66].

On présente dans ce chapitre l'implémentation des différentes méthodes d'optimisation de conception basée sur la fiabilité (*Reliability Based Design Optimization RBDO*) dans des problèmes vibro-acoustiques.

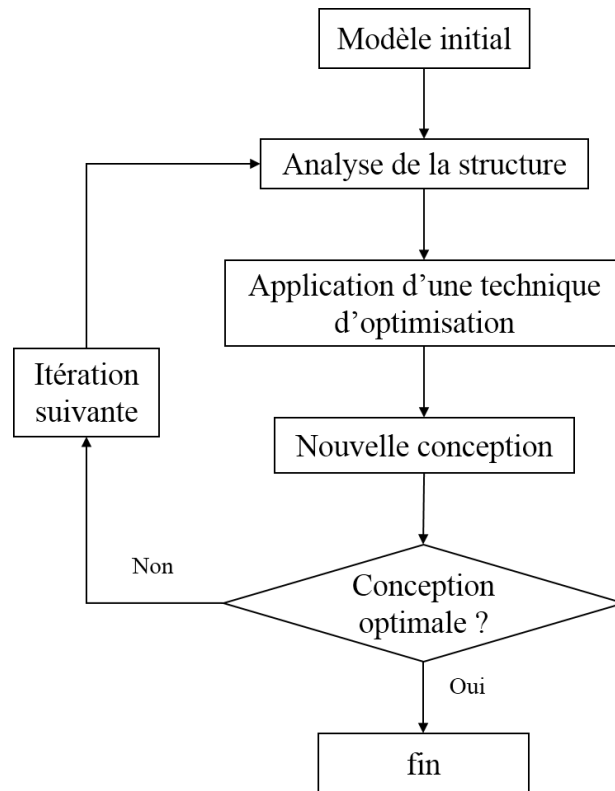


Figure 3.1: Mise en oeuvre de l'optimisation des structures

3.2 Optimisation des structures

L'optimisation des structures a pour objectif de concilier les exigences contradictoires de la conception: minimiser le coût et augmenter les performances. Parmi les problèmes d'optimisation des structures, on peut distinguer trois grandes catégories selon la nature des variables de décision [61] (voir figure 3.2):

- Optimisation de contrôle (optimisation de dimensionnement)
Elle vise à améliorer le modèle dont la forme et la topologie sont fixes. Les variables de conception sont par exemple l'épaisseur d'une plaque, section d'un treilli,....,etc.
- Optimisation de forme
Elle vise à modifier la géométrie avec une topologie définie à l'avance. Les variables de conception sont donc des paramètres représentant les frontières du domaine.
- Optimisation de la topologie
Elle consiste à contrôler, en plus de la géométrie, la topologie de la pièce. Elle cherche la topologie optimale d'une structure à partir de la géométrie initiale, des conditions aux limites et des chargements appliqués.

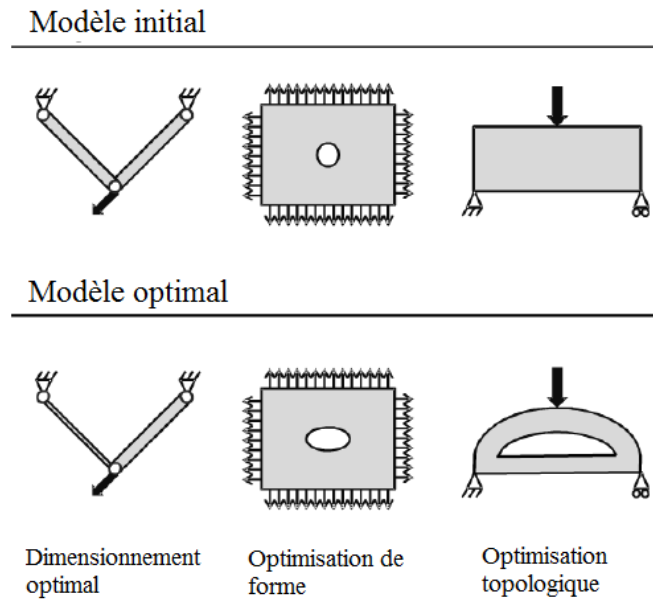


Figure 3.2: Différents problèmes d'optimisation des structures

Dans la suite de ce travail, nous intéressons à l'optimisation de conception (ou bien de dimensionnement).

3.2.1 Formulation du problème d'optimisation

L'optimisation de conception est formulée par la recherche des paramètres intervenant dans la phase de conception, qui minimisent une fonction objectif, (en mécanique, l'objectif est souvent de minimiser la masse de la structure ou de maximiser sa raideur), et qui vérifient les contraintes de performances mécaniques, physiques et géométriques.

$$\begin{aligned}
 \min_x \quad & f(x) \\
 \text{s.t.} \quad & g_k(x) \leq 0, \quad k = 1, \dots, K \\
 & h_j(x) = 0, \quad j = 1, \dots, J \\
 & x_L \leq x \leq x_U
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Où x est le vecteur des variables de conception (appelées aussi variables de décision), $f(x)$ est la fonction objectif à minimiser, $g_k(x)$ et $h_j(x)$ sont respectivement les contraintes d'inégalité et les contraintes d'égalité et x_L, x_U sont respectivement les bornes inférieures et supérieures du domaine de recherche des variables de décision. Il est possible de passer d'un problème de

maximisation à un problème de minimisation grâce à la propriété suivante [61]:

$$\min_x f(x) = \max_x (-f(x)) \quad (3.2)$$

Les algorithmes d'optimisation peuvent être classés en deux classes: avec et sans gradient de la fonction objectif et aussi des contraintes. En général, ces algorithmes convergent vers un minimum local plutôt qu'un minimum global. La Figure 3.3 montre un exemple d'une fonction à une variable avec des minimums locaux et un minimum global.

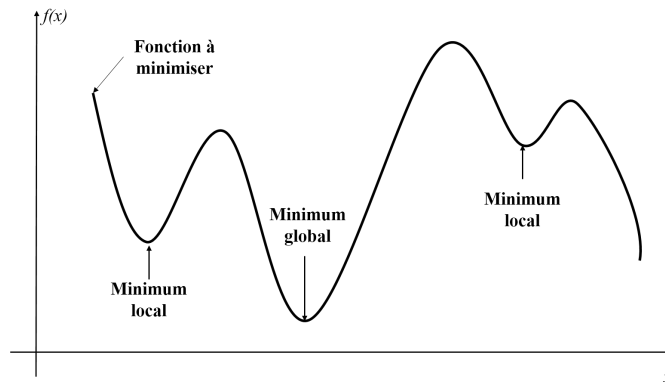


Figure 3.3: Minimisation d'une fonction objectif à une variable

3.2.2 Optimisation de conception déterministe

L'optimisation de conception déterministe (*deterministic design optimisation* DDO) telle que formulée dans l'équation (eq.3.1) ne tient pas en considération des incertitudes sur les variables d'entrée. Lors d'une optimisation déterministe, le concepteur introduit des coefficients de sécurité pour augmenter la sûreté de sa conception. Ces coefficients sont utilisés pour remplacer la présence d'incertitudes dans la structure. Le choix de ces facteurs de sécurité est basé sur l'expérience des ingénieurs.

Le processus d'optimisation déterministe est illustré dans la figure 3.4. Elle contient trois étapes:

- La représentation de la géométrie par un modèle géométrique à l'aide d'un logiciel CAO.
- Analyse du modèle par la méthode des éléments finis.
- Optimisation de la structure en minimisant une fonction objectif comme le coût ou le volume.

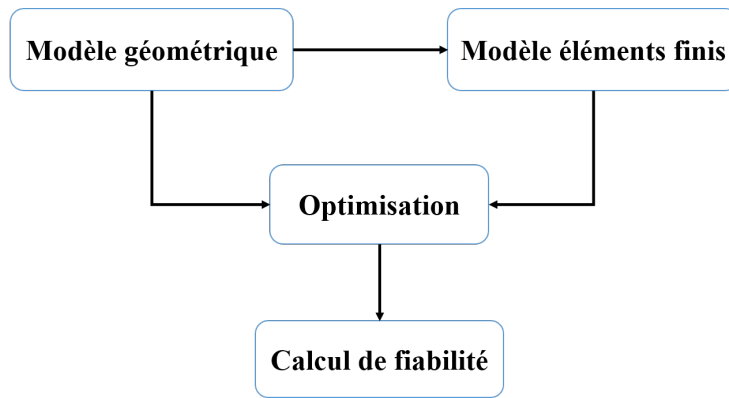


Figure 3.4: Processus d'optimisation de conception déterministe

Plusieurs algorithmes et techniques ont été développés pour résoudre le problème d'optimisation de conception déterministe [67–69].

Bien que l'approche DDO offre une conception optimale, on ne peut pas contrôler le niveau de fiabilité [70] puisque les coefficients de sécurité sont basés sur l'expérience. D'où l'intérêt de l'optimisation fiabiliste pour garantir à la fois l'optimalité et la fiabilité de la conception.

3.2.3 Exemple d'une poutre en flexion

La figure 3.5 présente le schéma d'une poutre en flexion soumise à une force concentrée F . Les différentes propriétés mécaniques de la poutre sont regroupées dans le tableau 3.1.

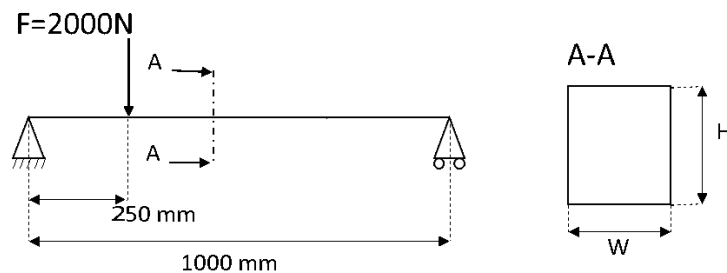


Figure 3.5: Schéma de la poutre en flexion

Module d'Young (MPa)	Coefficient de poisson	Limite élastique (MPa)
$210e^3$	0.3	235

Tableau 3.1: Propriétés mécaniques de la poutre

Il s'agit d'une poutre en acier de forme rectangulaire et de longueur $L = 1000mm$. Cette poutre se repose sur deux supports: un appui double du côté gauche et un appui simple du côté droite.

Elle est sollicitée par une force concentrée $F = 2000N$ située au premier quart de la poutre. Le but de ce problème d'optimisation est de minimiser le volume de la poutre sans dépasser la contrainte admissible. Les variables de conception sont la largeur W et la hauteur H . Afin de prendre en compte les incertitudes, un coefficient de sécurité est appliqué sur la limite élastique de la poutre. Le choix de ce coefficient est basé sur l'expérience de l'ingénieur. La contrainte maximale dans la poutre ne doit pas donc dépasser $150MPa$ et les variables de conception doivent être comprises entre $10\text{ mm} \leq W; H \leq 50\text{ mm}$. Le calcul de la contrainte maximale s'effectue par le logiciel de calcul par éléments finis ANSYS qui a été couplé avec Matlab. Le problème d'optimisation est donc défini par l'équation suivante:

$$\begin{aligned}
 \min_{W,H} \quad & V = W \times H \times L \\
 \text{s.t.} \quad & \sigma_{adm} \leq 150\text{ MPa} \\
 & 10\text{mm} \leq W \leq 50\text{ mm} \\
 & 10\text{mm} \leq H \leq 50\text{ mm}
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Le tableau 3.2 présente les résultats du problème d'optimisation de l'équation (eq.3.3). On remarque bien que le volume de la poutre est réduit et que la contrainte maximale est égale à $150MPa$. Les figures 3.6 et 3.7 montrent respectivement l'évolution de la fonction objective et de la contrainte d'optimisation en fonction du nombre d'itérations.

	Point initial	Point optimal
$H\text{ (mm)}$	20	38.73
$W\text{ (mm)}$	20	10
$V\text{ (mm}^3\text{)}$	$4e^5$	$3.87e^5$
$\sigma\text{ (MPa)}$	281.25	150

Tableau 3.2: Résultats de l'optimisation déterministe pour la poutre en flexion

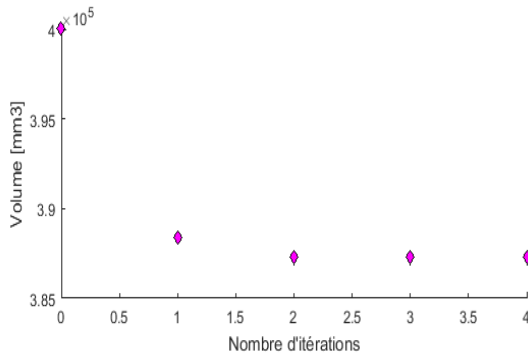


Figure 3.6: Evolution de la fonction objective

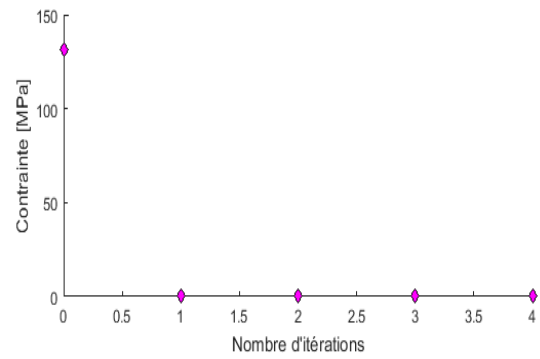


Figure 3.7: Evolution de la contrainte d'optimisation

3.3 Optimisation fiabiliste (*Reliability-based design optimization RBDO*)

L'optimisation fiabiliste est basée sur l'analyse de la défaillance à chaque itération afin de déterminer les rôles des incertitudes sur le système. Cependant, dans les applications pratiques, le couplage entre l'analyse de fiabilité et les procédures d'optimisation conduit à des temps de calcul très élevés et à une faible stabilité de la convergence. Dans le processus de la RBDO, comme présenté dans la figure 3.8, deux boucles imbriquées sont présentes: une est concernée par l'optimisation de la fonction objectif sous des contraintes physiques, géométriques, fonctionnelles, etc., et l'autre est consacrée au calcul de la fiabilité, qui elle-même nécessite une procédure d'optimisation de la fonction de performance du système.

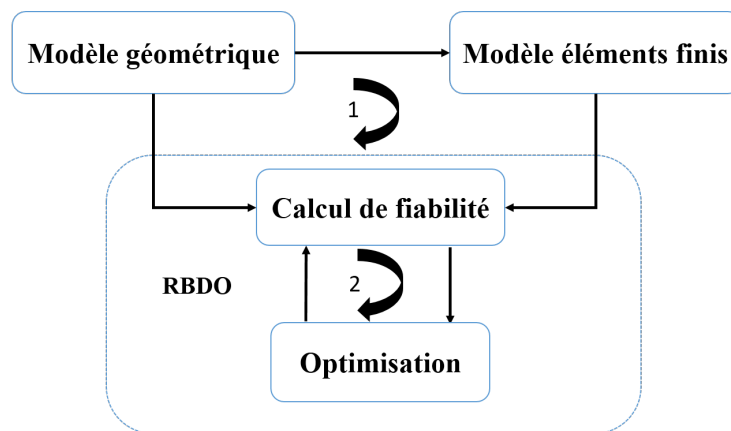


Figure 3.8: Processus de l'optimisation fiabiliste de conception

3.3.1 Formulation de l'optimisation fiabiliste de conception

A la différence de l'optimisation déterministe, la RBDO a pour objectif de rechercher la solution optimale, tel que sa fonction de performance (état limite de défaillance) soit maintenue suffisamment loin du point de conception.

La formulation de base de la RBDO peut être écrite comme suit:

$$\begin{aligned}
 \min_x \quad & f(x) \\
 \text{s.t.} \quad & P_r[G_i(x,y) \leq 0] \leq P_i^T, i = 1, \dots, m \\
 & h_j(x) \leq 0, j = m + 1, \dots, M
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Où x est le vecteur des variables déterministes de la conception, y est le vecteur des variables aléatoires. f est la fonction objectif (coût, masse, ...,etc.), $P_r[.]$ est l'opérateur de probabilité, P_i^T est le niveau de fiabilité cible, $G_i(x,y)$ est la fonction de performance (état de limite) et $h_j(x)$ est la contrainte déterministe.

Cette formulation (eq.3.4) est à l'origine de tous les développements en RBDO. Elle peut être réalisée par deux types d'algorithmes:

- Les algorithmes stochastiques basés sur les simulations aléatoires, comme par exemple les algorithmes génétiques.
- Les algorithmes de la programmation non linéaire (NLP) basés sur le calcul des gradients de la fonction objectif et des contraintes mécaniques.

D'après [71], on peut également classer les différentes approches RBDO dans trois catégories principales comme le montre la figure 3.9:

- Méthodes mono-niveau (*Mono-level Approches MLA*)
- Méthodes à deux-niveaux (*Double-level Approches DLA*)
- Méthodes séquentielles découplées (*Sequential Decoupled Approches SDA*)

Le calcul de l'indice de fiabilité demande un temps de calcul très important. Afin d'améliorer les performances numériques, Kharmanda et al. ont développé une méthode efficace appelée méthode hybride (*Hybrid method HM*) [12, 72, 73]. Elle consiste à résoudre simultanément le problème de fiabilité et d'optimisation. La solution est réalisée dans un nouveau espace appelé espace hybride de conception (*Hybrid Design Space HSD*) contenant à la fois les variables déterministes et aléatoires.

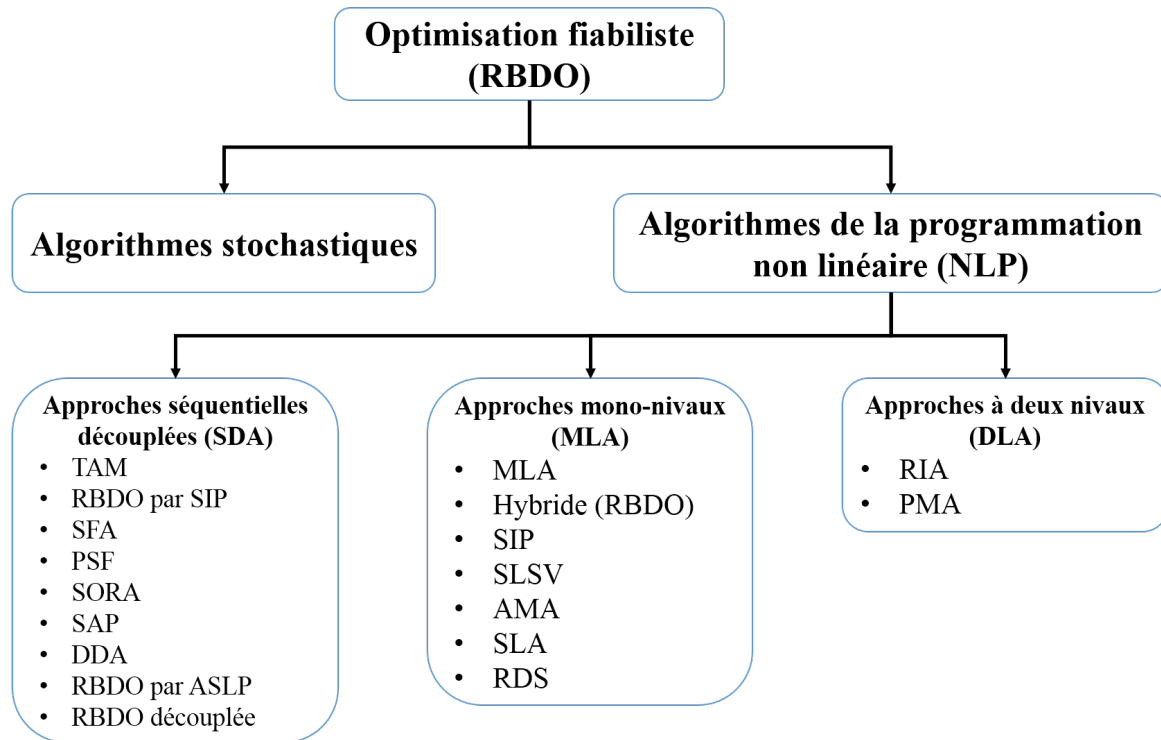


Figure 3.9: Classification des différentes méthodes de la RBDO

Cette méthode a réduit énormément le temps de calcul mais le problème RBDO devient plus complexe que le problème DDO. Par conséquent, une autre méthode appelée facteurs de sécurité optimaux (*Optimum Safety Factor OSF*) a été développée [13, 74, 75]. La solution optimale est obtenue en considérant le point de conception et les facteurs de sécurité calculés à partir des dérivées des contraintes. Cette méthode a permis de réduire le temps de calcul par rapport à la méthode hybride. L'efficacité de ces méthodes n'a été démontrée que pour des cas statiques et des cas dynamiques bien spécifiques. Une amélioration de la méthode hybride appelée méthode hybride robuste (*Robust Hybrid Method RHM*) est proposée [76] pour couvrir les inconvénients des deux méthodes HM et OSF.

3.3.2 Approche classique

Traditionnellement, la RBDO classique consiste, tout d'abord, à effectuer l'analyse de la fiabilité mécanique. Ainsi, la solution obtenue est utilisée pour minimiser la fonction objectif sous des contraintes mécaniques y compris la contrainte de fiabilité. Par conséquent, la formulation classique de la RBDO est effectuée, dans deux espaces séparés: l'espace physique et l'espace

normé [77–79], par l’intégration des deux problèmes suivants:

1. Problème d’optimisation

Ce problème consiste à minimiser une fonction objectif $f(x)$ sous des contraintes déterministes $g_k(x)$ ainsi que les exigences de fiabilité. Sa formulation peut être définie comme suit:

$$\begin{aligned} \min_x \quad & f(x) \\ \text{s.t.} \quad & g_k(x) \leq 0, k = 1, \dots, K \\ & \beta(x, u) \geq \beta_t \end{aligned} \tag{3.5}$$

Avec u est le module vectoriel dans l’espace normalisé, $\beta(x, u)$ est l’indice de fiabilité de la structure et β_t est l’indice de fiabilité souhaité.

2. Problème de fiabilité

L’indice de fiabilité, qui est considéré comme la distance minimale entre l’origine et la fonction d’état limite $H(x, u)$ dans l’espace normalisé (voir figure 1.7), est déterminé en résolvant le problème de minimisation suivant:

$$\begin{aligned} \min_u \quad & d(u) = \sqrt{\sum u_i^2} \\ \text{s.t.} \quad & H(x, u) \leq 0 \end{aligned} \tag{3.6}$$

L’algorithme de cette formulation classique est illustré dans la figure 3.10.

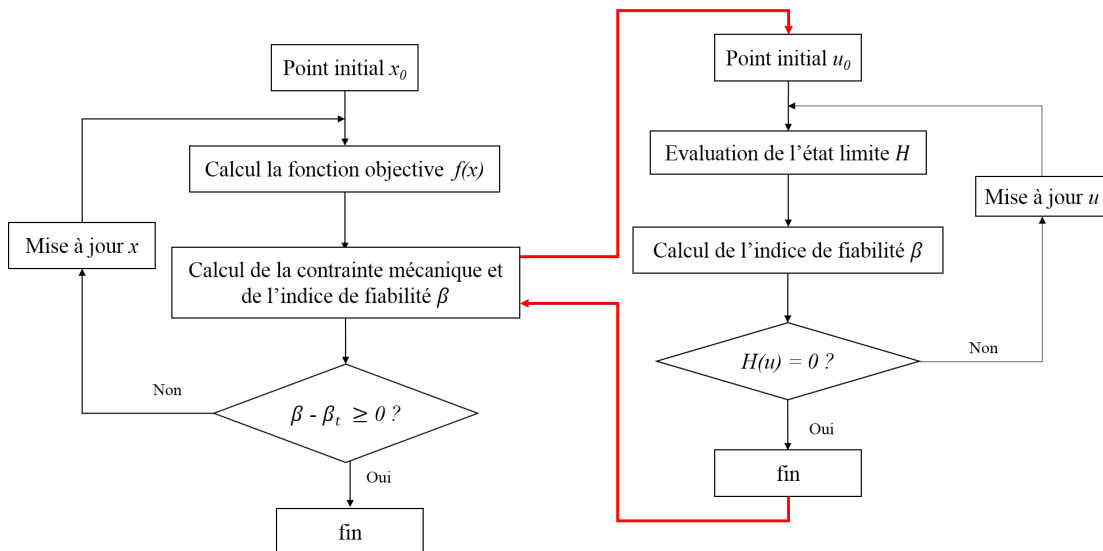


Figure 3.10: Algorithme de l’approche classique

Il est claire que dans cette approche classique, le nombre total d’itérations des deux problèmes conduit à un nombre important d’évaluations du modèle mécanique et par conséquent un

temps de calcul assez grand. Pour pallier cet inconveignant majeur, une approche efficace appelée Méthode Hybride (HM), basée sur la résolution simultanée de la fiabilité et d'optimisation, a été élaborée [12].

3.3.3 Approche hybride (HM)

Cette approche consiste à résoudre simultanément le problème de fiabilité et d'optimisation dans l'espace hybride de conception contenant à la fois les variables déterministes et aléatoires. L'idée de base de cette approche est basée sur le développement d'une nouvelle fonction objectif liant les deux problèmes de la formulation classique. Cette nouvelle fonction peut s'exprimer sous la forme suivante:

$$F(x,y) = f(x).d_{\beta}(x,y) \quad (3.7)$$

avec $f(x)$ est la fonction objectif standard et $d_{\beta}(x,y)$ représente la distance, dans l'espace hybride de conception, entre le point optimal et le point de conception (voir figure 3.11 dans le cas d'une distribution normale des variables aléatoires). Dans cet espace, les niveaux de fiabilité

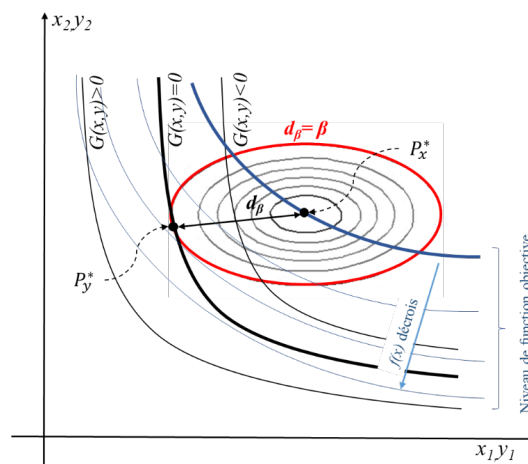


Figure 3.11: Espace hybride de conception (HDS)

d_{β} peuvent être représentés par des ellipses. De plus, deux points importants sont présentés: la solution optimale, P_x^* et le point de défaillance P_y^* , qui est basé sur l'intersection de la courbe d'état limite $G(x,y) = 0$ et l'indice de fiabilité cible $d_{\beta} = \beta_t$. La nouvelle formulation de la

RBDO par l'approche hybride est écrite comme suit:

$$\begin{aligned}
 \min_{x,y} \quad & F(x,y) = f(x) \cdot d_{\beta}(x,y) \\
 \text{s.t.} \quad & G(x,y) \leq 0 \\
 & g_k(x,y) \leq 0, \quad k = 1, \dots, K \\
 & d_{\beta}(x,y) \geq \beta_t
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

L'algorithme de la formulation basée sur l'approche hybride est illustré dans la figure 3.12.

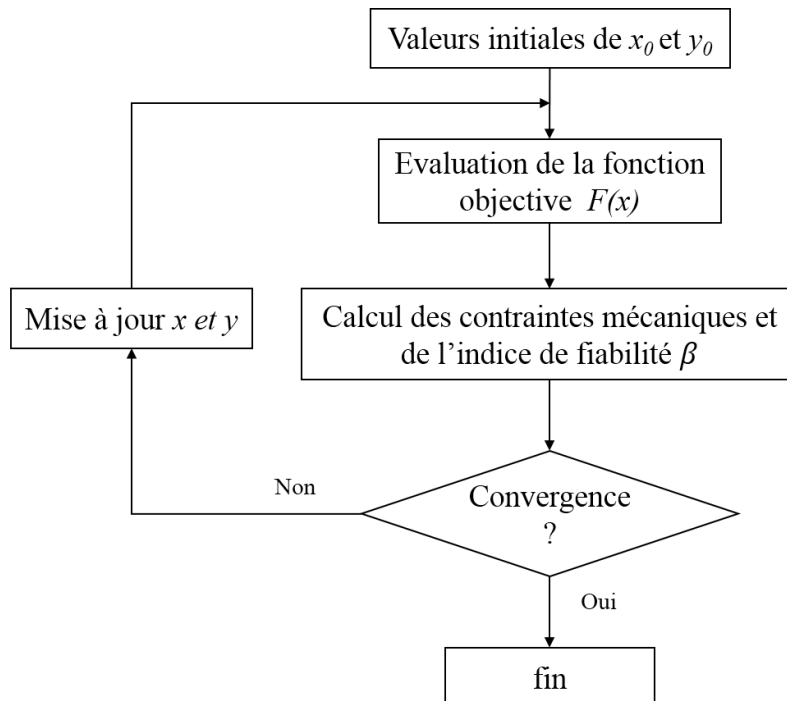


Figure 3.12: Algorithme de la méthode hybride

3.3.4 Facteurs de sécurité optimaux (OSF)

Dans l'approche d'optimisation déterministe (DDO), le choix du coefficient de sécurité est basé sur l'expérience de l'ingénierie et la solution obtenue ne peut pas satisfaire le niveau de fiabilité approprié. Cependant, lors de la conception d'une nouvelle structure, nous avons besoin habituellement d'un certain contexte expérimental pour proposer des facteurs de sécurité appropriés. Cependant, avec l'approche OSF, la détermination de ces facteurs de sécurité devrait être indépendante de l'expérience de l'ingénieur.

Bien que la méthode hybride conduit à améliorer le niveau de fiabilité, l'approche OSF conduit

à minimiser le temps de calcul. Elle consiste à utiliser l'analyse de sensibilité combinée à l'analyse de fiabilité afin d'éliminer les inconvénients de la méthode DDO et des méthodes RBDO [13, 73, 80].

L'algorithme de la méthode OSF est composé de trois étapes principales comme présenté dans la figure 3.13:

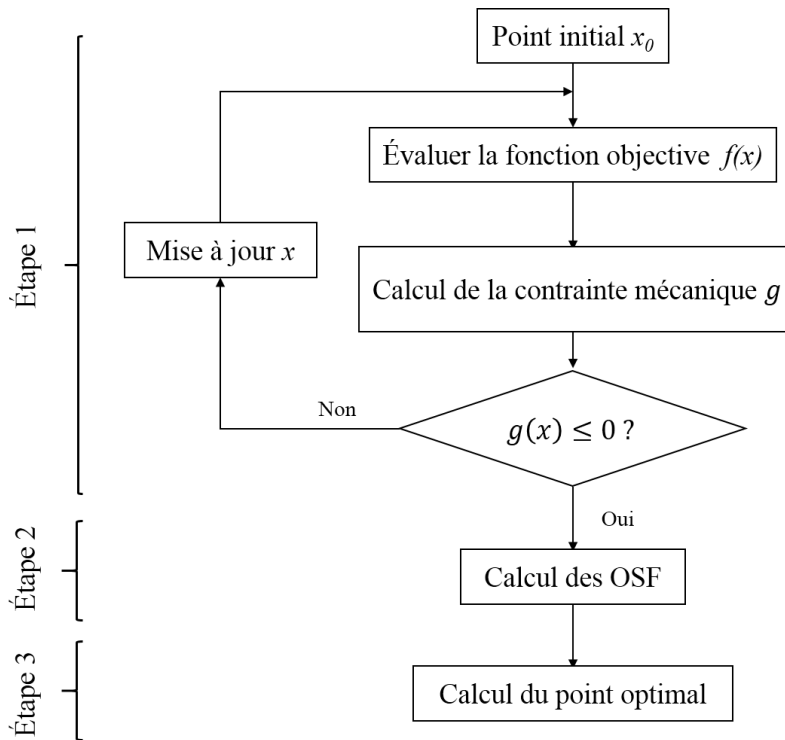


Figure 3.13: Algorithme de la méthode OSF

- Détermination du point de conception y_i^*

Nous minimisons ici la fonction objectif sous les conditions de la fonction d'état limite $G(y)$ et les contraintes déterministes. La solution résultante est conçue par le point de défaillance le plus probable.

- Calcul des facteurs de sécurité S_f

Pour calculer ces facteurs de sécurité, une analyse de sensibilité de la fonction d'état limite est requise. En général, pour une distribution normale de la variable aléatoire y_i , et pour un problème de n variables de conception, la transformation de l'espace physique vers l'espace normalisé peut être définie par l'équation (eq.3.9):

$$u_i = \frac{y_i - x_i}{\sigma_i}, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.9)$$

Les facteurs de sécurité peuvent donc être déterminés à partir des u_i^* par:

$$S_{f_i} = 1 + \gamma_i \cdot u_i^*, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.10)$$

Avec γ_i est le coefficient reliant la valeur moyenne et l'écart type: $\gamma_i = \frac{\sigma_i}{m_i}$.

Selon Kharmanda [75], la valeur optimale du vecteur normalisé u_i^* peut être déterminée à partir des dérivées de la fonction d'état limite au niveau du point de conception comme suit:

$$u_i^* = \pm \beta_t \sqrt{\frac{|\frac{\partial G}{\partial y_i}|}{\sum_{i=1}^n |\frac{\partial G}{\partial y_i}|}}, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.11)$$

Avec le signe \pm dépend du signe du dérivé:

$$\begin{cases} \frac{\partial G}{\partial y_i} > 0 \Leftrightarrow u_i^* > 0 \\ \frac{\partial G}{\partial y_i} < 0 \Leftrightarrow u_i^* < 0 \end{cases}, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.12)$$

– Calcul de la solution optimale x_i^*

Dans la dernière étape, pour déterminer la conception optimale, il faut ajouter les valeurs des facteurs de sécurité dans la valeur du point de conception par l'équation suivante:

$$x_i^* = y_i^* / S_{f_i} \quad (3.13)$$

3.3.5 Méthode hybride robuste (RHM)

L'inconvénient majeur de la méthode hybride est son temps de calcul élevé. En plus de ça, elle n'est pas toujours stable et peut facilement diverger. C'est-à-dire, la solution obtenue P_x^* peut être située dans la région de défaillance ($G(P_x^*) > 0$) tandis que la distance entre le point optimal et le point de conception P_y^* satisfait la contrainte de fiabilité, comme le montre la figure 3.14. Une nouvelle approche appelée méthode hybride robuste (RHM) est donc développée par [76] afin de pallier la difficulté de divergence. Cette méthode consiste à forcer l'algorithme d'optimisation hybride à trouver la solution optimale dans la zone de sécurité par l'ajout d'une nouvelle contrainte liée à la fonction objectif de la solution optimale qui devrait être supérieure à celle au point de conception. La méthode hybride robuste peut alors être définie par l'équation

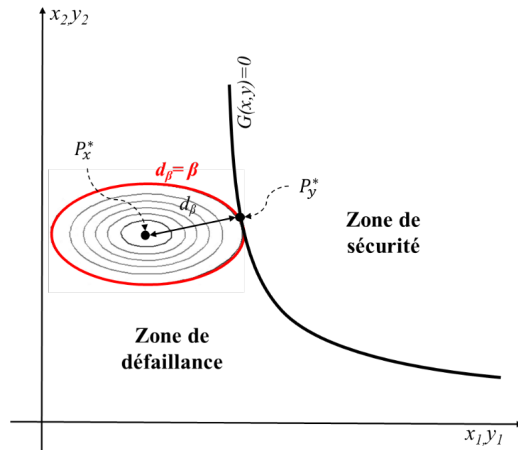


Figure 3.14: Divergence de la méthode hybride dans le HDS

(eq.3.14) comme suit:

$$\begin{aligned}
 \min_{x,y} \quad & F(x,y) = f(x) \cdot d_\beta(x,y) \\
 \text{s.t.} \quad & G(x,y) \leq 0 \\
 & g_k(x,y) \leq 0, \quad k = 1, \dots, K \\
 & d_\beta(x,y) \geq \beta_t \\
 & f(x) \geq f(y)
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

La figure 3.15 montre un exemple de l'efficacité de cette méthode dans l'espace hybride de conception. $f_1(x)$ et $f_2(x)$ sont deux niveaux de la fonction objectif qui se croisent respectivement avec le point optimal P_x^* et le point de conception P_y^* . Après cette modification, il est clair que la solution optimale se trouve bien dans la zone de sécurité, $f(P_x^*) \geq f(P_y^*)$ et que la fiabilité cible est bien satisfaite ($d_\beta = \beta_t$).

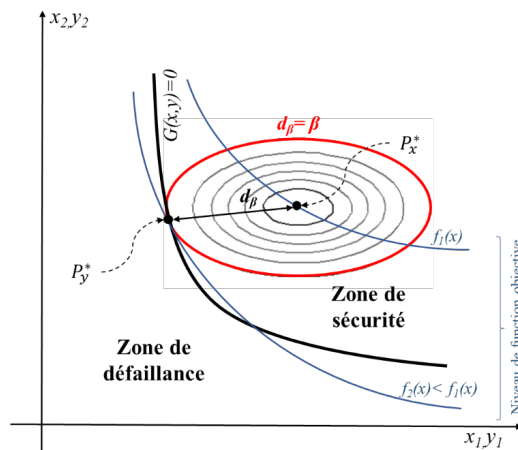


Figure 3.15: Efficacité de la RHM dans le HDS

L'algorithme de cette méthode RHM est présenté dans la figure 3.16:

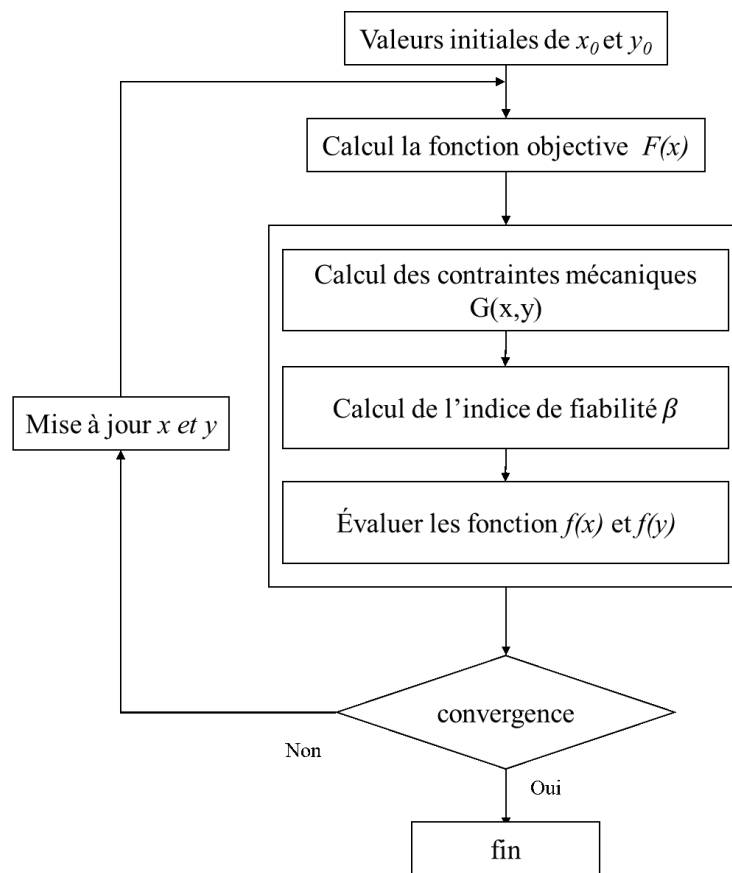


Figure 3.16: Algorithme de la méthode RHM

3.4 Méthode OSF couplée avec le chaos polynomial généralisé appliquée aux systèmes vibro-acoustiques en présence d'incertitudes

Dans cette section, deux exemples numériques sont étudiés: une plaque flexible couplée avec une cavité acoustique rectangulaire et un habitacle automobile simplifié couplé avec des plaques flexibles [11]. Dans la première application, une procédure analytique est considérée dans le cas déterministe. Ensuite, une analyse probabiliste est mise en place pour étudier la robustesse du système. Enfin, une optimisation fiabiliste utilisant le chaos polynomial généralisé est adressée afin d'obtenir la conception optimale et robuste du système. Dans la seconde application, seuls les résultats de l'étape finale, qui est l'optimisation de la conception basée sur la fiabilité utilisant le chaos polynomial généralisé, sont présentés.

3.4.1 Exemple de plaque flexible couplée à une cavité acoustique rectangulaire

La figure 3.17 montre un schéma d'une cavité rectangulaire avec 5 parois rigides couplée avec une plaque flexible simplement supportée sur la paroi d'extrémité. Une force ponctuelle harmonique agit sur la plaque qui fournit la vibration. La plaque vibrante génère ainsi une pression acoustique à l'intérieur de la cavité.

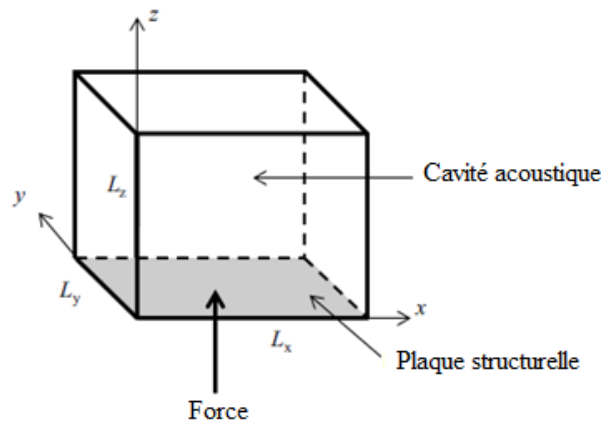


Figure 3.17: Schéma de la plaque simplement supportée couplée à l'extrémité d'une cavité rectangulaire à parois rigides

Les dimensions et les propriétés du système sont représentés dans le tableau 3.3. Les fréquences

Description	Paramètres	Valeurs
Largeur de la cavité	L_x	$0.5m$
Hauteur de la cavité	L_y	$0.3m$
Profondeur de la cavité	L_z	$1.1m$
Vitesse du son	c	$344(m/s)$
Densité de l'air	ρ	$1.21(kg/m^3)$
Emplacement de sortie	—	$(0.125m, 0.15m, 0.875m)$
Largeur de la plaque	L_x	$0.5m$
Hauteur de la plaque	L_y	$0.3m$
Épaisseur de la plaque	h	$3mm$
Densité de la plaque	ρ_p	$2700(kg/m^3)$
Module d'Young de la plaque	E	$70(GPa)$
Le coefficient de Poisson de la plaque	ν	0.3
Amplitude de la force	F_z	$1(N)$
Emplacement de la force	—	$(0.1m, 0.075m, 0m)$

Tableau 3.3: Dimensions et propriétés du système

naturelles d'une plaque rectangulaire simplement supportée peuvent être calculées comme:

$$\omega_m(m_1, m_2) = \sqrt{\frac{D}{h \cdot \rho_p} \cdot \left(\left(\frac{m_1 \cdot \pi}{L_x} \right)^2 + \left(\frac{m_2 \cdot \pi}{L_y} \right)^2 \right)} \quad (3.15)$$

où m_1, m_2 sont les indices modaux le long des axes x, y , respectivement et D est la rigidité à la flexion. Le déplacement d'un point de la plaque flexible peut être décrit en termes de sommation des facteurs de participation modaux structurels u_m et de ses formes de mode ϕ_m as:

$$u(x, y) = \sum_{m=1}^{N_s} \phi_m(x, y) \cdot u_m, \quad (3.16)$$

où N_s est le nombre de modes structurels et ϕ_m sont donnés par:

$$\phi_{m_1, m_2}(x, y) = \sin\left(\frac{m_1 \cdot \pi \cdot x}{L_x}\right) \cdot \sin\left(\frac{m_2 \cdot \pi \cdot y}{L_y}\right) \quad (3.17)$$

Les fréquences propres d'une cavité acoustique rectangulaire à parois rigides sont données par:

$$\omega_n(n_1, n_2, n_3) = \pi \cdot c \cdot \sqrt{\left(\frac{n_1}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{n_2}{L_y}\right)^2 + \left(\frac{n_3}{L_z}\right)^2} \quad (3.18)$$

où n_1, n_2, n_3 sont les indices modaux le long des axes x, y, z de la cavité rectangulaire. La pression acoustique à l'intérieur de la cavité peut être décrite en termes de sommation des facteurs de participation modaux acoustiques p_n et de ses formes de mode ψ_n as:

$$p(x, y, z) = \sum_{n=1}^{N_a} \psi_n(x, y, z) \cdot p_n, \quad (3.19)$$

où N_a est le nombre de modes acoustiques et ψ_n est donné par:

$$\psi_{n_1, n_2, n_3}(x, y, z) = \cos\left(\frac{n_1 \cdot \pi \cdot x}{L_x}\right) \cdot \cos\left(\frac{n_2 \cdot \pi \cdot y}{L_y}\right) \cdot \cos\left(\frac{n_3 \cdot \pi \cdot z}{L_z}\right) \quad (3.20)$$

Les équations du mouvement de la plaque et la réponse acoustique de la cavité peuvent être réarrangées en une équation matricielle comme indiqué dans (eq.3.21):

$$\begin{bmatrix} \Lambda_m \cdot (\omega_m^2 - \omega^2) & -S \cdot [C_{nm}]^T \\ (-\omega^2) \cdot S \cdot [C_{nm}] & \frac{\Lambda_n}{\rho \cdot c^2} (\omega_n^2 - \omega^2) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_m \\ p_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_m \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

où F_m est la force modale agissant sur la plaque, S est la surface de la structure, Λ_m est la masse modale de la plaque simplement supportée, Λ_n est le volume modal de la cavité rectangulaire et C_{nm} est le coefficient de couplage sans dimension entre le mode structural, m , et le mode acoustique, n .

Pour le problème d'optimisation, la fonction objectif consiste à minimiser la masse, W , de la plaque soumise à la contrainte probabiliste liée à la pression acoustique. Nous considérons que les points de conception sont associés à l'épaisseur de la plaque et à l'amplitude de la force appliquée à la plaque.

Pour réaliser l'optimisation de la conception déterministe, un facteur de sécurité $S_f = 1.2$ est proposé sur la pression acoustique cible $P_t = 50Pa$.

Le modèle mathématique du DDO est formulé comme suit:

$$\begin{aligned} \min_x \quad & W(x) \\ \text{s.t.} \quad & P_{max}(x, \xi) \leq \frac{P_t}{S_f} \end{aligned} \quad (3.22)$$

Pour réaliser l'optimisation de la conception basée sur la fiabilité par la méthode OSF, la première étape consiste à obtenir le point de conception. La formulation du problème d'optimisation est donnée par:

$$\begin{aligned} \min_y \quad & W(y) \\ \text{s.t.} \quad & P_{max}(y, \xi) \leq P_t = 50Pa \end{aligned} \quad (3.23)$$

L'étape suivante consiste à calculer les facteurs de sécurité à l'aide de l'équation (eq.3.7) et à déterminer la solution optimale en divisant la valeur du point de conception par les coefficients de sécurité calculés par (eq.3.10). L'algorithme de la méthode OSF combinée avec le chaos polynomial généralisé est présenté dans la figure 3.18. Le problème d'optimisation est résolu à l'aide de l'algorithme de programmation séquentielle quadratique (SQP) du logiciel MATLAB (voir Annexe C).

3.4.1.1 Modèle déterministe

Le modèle théorique décrit ci-dessus a été implémenté dans Matlab. D'après les équations (eq.3.12) et (eq.3.15), les tableaux 3.4 et 3.5 montrent, respectivement, les 5 premières fréquences naturelles de la plaque flexible et de la cavité acoustique. Une comparaison avec une simulation éléments finis utilisant Ansys pour le cas non couplé est effectuée pour validation. Il est

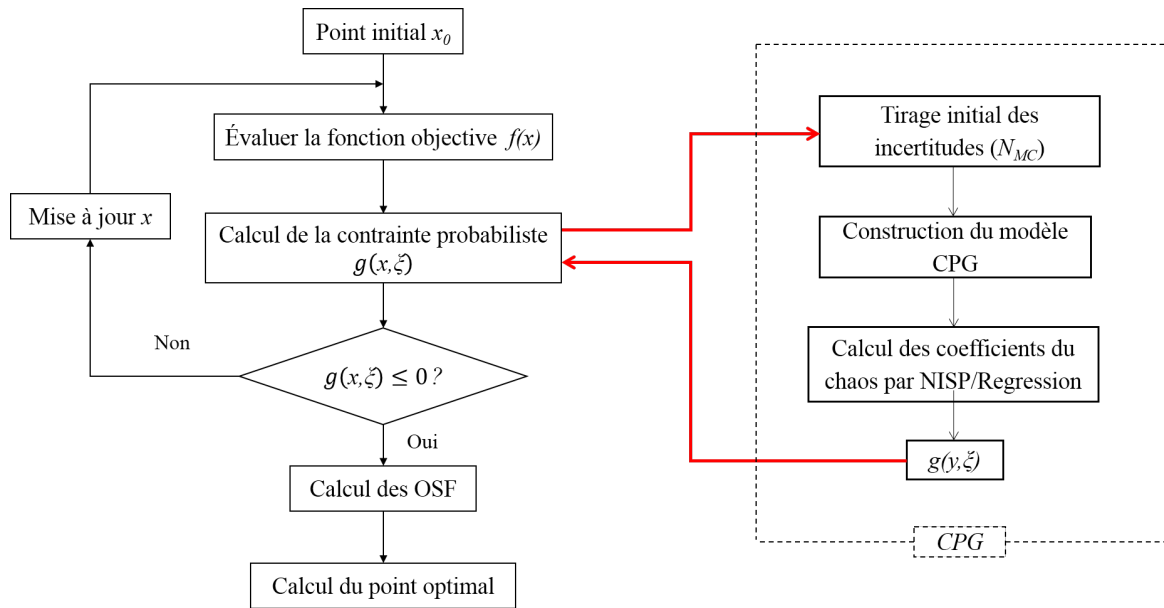


Figure 3.18: Organigramme de l'OSF combinée avec le CPG

remarquable que la formulation théorique donne des résultats précis comparée avec l'analyse éléments finis. La figure 3.19 montre l'amplitude de la pression acoustique dans la cavité à

Modes	Analytique (Hz)	Ansys-FE (Hz)
1	110.43	108.30
2	198.12	196.36
3	344.27	344.80
4	354.01	359.96
5	441.70	446.43

Tableau 3.4: Fréquences naturelles de la plaque flexible

Modes	Analytique (Hz)	Ansys-FE (Hz)
1	156.36	159.53
2	312.73	313.51
3	344	347.40
4	377.87	378.96
5	464.90	465.76

Tableau 3.5: Fréquences naturelles de la cavité acoustique rectangulaire

l'emplacement de sortie et la figure 3.20 montre l'amplitude du déplacement de la plaque à l'emplacement de la force dans une bande de fréquence de $[0 - 500]Hz$. Ces résultats sont comparés avec les simulations éléments finis utilisant ANSYS. On peut noter que les pics de fréquence des résultats calculés coïncident avec les fréquences de résonance de la plaque et de la cavité acoustique qui ont été provoquées soit par les modes de la cavité, soit par les modes

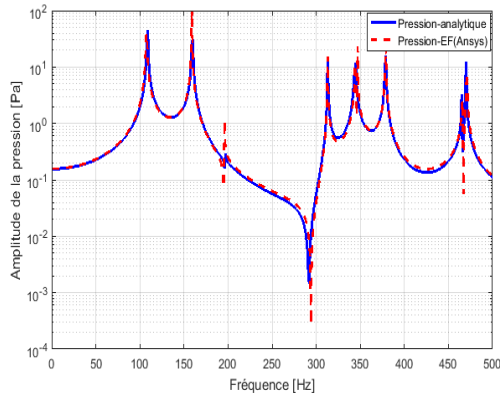


Figure 3.19: Pression acoustique à l'intérieur de la cavité

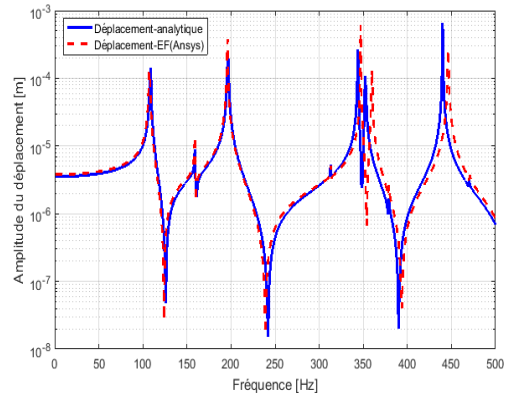


Figure 3.20: Déplacement de la plaque à l'endroit de la force

de vibration de la plaque. Un excellent accord entre les résultats analytiques et numériques est obtenu qui évalue le modèle.

3.4.1.2 Analyse probabiliste

Dans cette partie, la méthode stochastique discutée dans le chapitre 2, CPG, est implémentée et intégrée dans la simulation analytique décrite ci-dessus. L'objectif est d'améliorer la performance et la robustesse des systèmes vibro-acoustiques couplés qui opèrent en présence d'inévitables paramètres incertains associés simultanément aux propriétés du matériau. Ces paramètres sont choisis de manière aléatoire suivant une distribution uniforme autour de leurs valeurs nominales $\pm 5\%$ présenté dans le tableau 3.6.

	Partie acoustique	Partie structurale	
Paramètres	$c(m/s)$	$E(GPa)$	ν
Valeurs	$U[326.8,361.2]$	$U[67.35,74.45]$	$U[0.285,0.315]$

Tableau 3.6: Caractéristiques des paramètres incertains

L'utilisation de la méthode MC pour analyser la pression acoustique à l'intérieur de la cavité rectangulaire et le déplacement de la plaque consiste à créer une grille de valeurs numériques à partir des paramètres incertains et calculer la quantité d'intérêt du système linéarisé pour chaque valeur de cette grille. La quantité d'intérêt est analysée pour 1000 simulations.

Avant de procéder au problème d'optimisation, il devrait être testé si le CPG fonctionne comme un bon métamodèle par rapport au modèle initial. À cette fin, la fonction de densité de proba-

bilité (PDF) de la pression acoustique estimée à l'aide de l'approche CPG est comparée à celle obtenue par la simulation MC et est représentée dans la figure 3.21. Le CPG est obtenu à partir d'un ordre $p = 3$ (donc 64 évaluations) par l'approche de régression. Les résultats montrent une bonne correspondance pour la forme de la distribution avec une légère différence dans la valeur moyenne de la pression, ce qui implique que le CPG peut servir pour le problème d'optimisation.

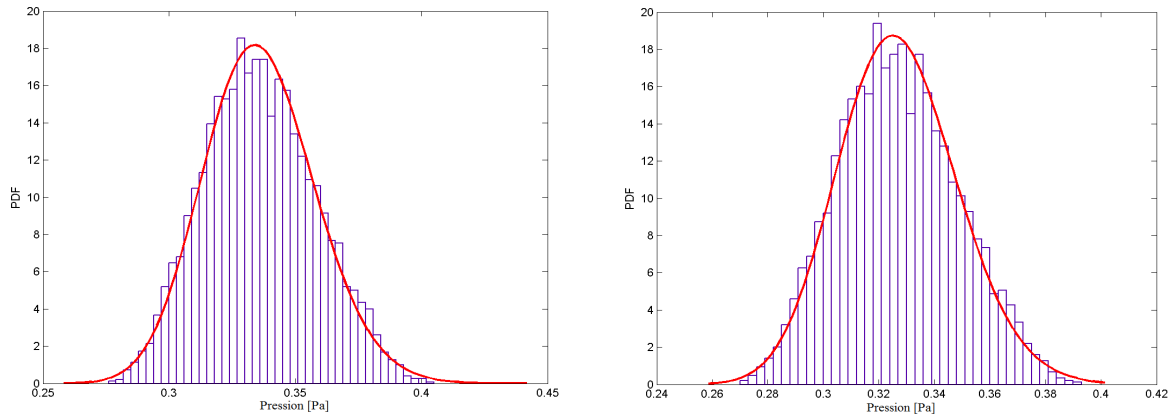


Figure 3.21: Loi de distribution de la pression acoustique de la cavité (Gauche: MC, Droite: CPG)

3.4.1.3 Méthode OSF couplée avec le chaos polynomial généralisé

Afin d'obtenir la meilleure conception de la structure, nous introduisons l'approche RBDO combinée avec la formulation analytique de l'exemple de cavité couplée.

Les résultats de la DDO sont présentés dans le tableau 3.7. Il est nécessaire de mentionner que la solution optimale satisfait la contrainte requise de la pression à l'intérieur de la cavité mais le niveau de fiabilité trouvé est inférieur au niveau de fiabilité cible $\beta_t = 3.35$ correspondant à une probabilité de défaillance $P_f = 0.04\%$.

		Valeurs initiales	Point de conception y_i^*	Point optimal x_i^*
Variables de conception	$h(mm)$	4.9	2	2
	$F(N)$	1.49	1.16	1.06
Fonction objectif	$W(kg)$	1.98	0.81	0.81
Contrainte d'optimisation	$P_{max}(Pa)$	56.57	45.02	40.82
Indice de fiabilité	β	—	—	1.028

Tableau 3.7: Résultats de la DDO

C'est pour cette raison que la méthode, OSF couplée avec le CPG, est utilisée pour assurer la robustesse et la fiabilité du système. La robustesse est garantie par l'estimation de la moyenne

		Valeurs initiales	Point de conception y_i^*	S_f	Point optimal x_i^*
Variables de conception	$h(mm)$	4.9	2	0.67	3
	$F(N)$	1.49	1.164	1.01	1.156
Fonction objectif	$W(kg)$	1.98	0.81	—	1.22
Contrainte d'optimisation	$P_{max}(Pa)$	56.57	45.02	—	36.91
Indice de fiabilité	β	—	—	—	3.35

Tableau 3.8: Résultats de la OSF couplé avec le CPG

et de la variance de la réponse. Le tableau 3.8 montre les résultats de cette approche. Il est remarquable qu'avec l'approche OSF; le coût de calcul est très faible par rapport aux autres méthodes RBDO. Le tableau 3.9 présente une comparaison pour le point optimal entre DDO et OSF en utilisant le CPG.

	DDO	OSF
Masse (kg)	0.81	1.22
Pression maximale (Pa)	40.82	36.91
Niveau de fiabilité	1.028	3.35
CPU (s)	3593.19	2158.79

Tableau 3.9: Comparaison de la solution optimale entre DDO et OSF

D'après le tableau 3.9 on peut remarquer que:

- Dans l'optimisation déterministe utilisant le CPG, la pression acoustique maximale dans la bande de fréquence $[0-500]Hz$ est de $40.82Pa$, ce qui satisfait la condition de contrainte mécanique (inférieure à $50/S_f = 41,67Pa$), et la masse de la structure est de $0.81kg$ mais le niveau de fiabilité est très faible ($\beta = 1,028$) ce qui ne garantit pas la fiabilité cible et donc risque de défaillance.
- Dans l'optimisation fiabiliste (OSF utilisant le CPG), la pression acoustique maximale dans la bande de fréquence $[0 - 500]Hz$ est de $36.91Pa$, ce qui satisfait la condition de contrainte mécanique (moins de $50Pa$) et la masse de la structure est $1.22kg$.

Il est nécessaire de s'assurer que le modèle CPG est également bien adapté à MC après la procédure d'optimisation. Pour cette raison, la fonction de densité de probabilité (PDF) de la pression acoustique pour la solution optimale est représentée sur la figure 3.22. Le tableau 3.10 montre une comparaison de l'erreur relative entre CPG et MC pour le point initial ainsi que la solution optimale.

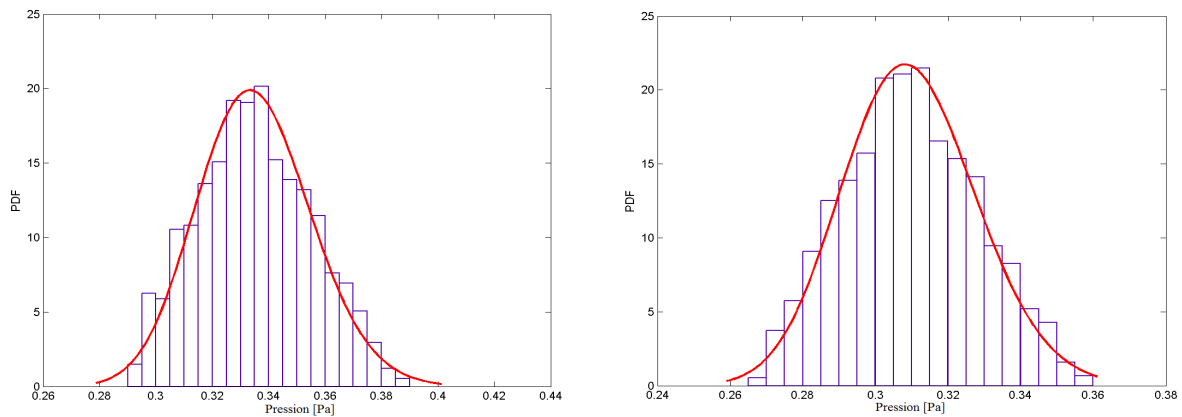


Figure 3.22: Loi de distribution de la probabilité de la pression acoustique pour la solution optimale (Left: MC, Right: CPG)

	Solution initiale	Solution optimale
Erreur relative maximale	6.24%	7.86%

Tableau 3.10: Comparaison de l'erreur relative entre gPC et MC

Pour mieux valider la méthode proposée, un deuxième exemple de problème vibro-acoustique sera étudié dans la section suivante. Il s'agit de l'optimisation fiabiliste en présence d'incertitudes d'un habitacle automobile simplifié.

3.4.2 Exemple de cavité acoustique simplifiée d'un habitacle couplée avec des plaques structurelles

Dans cette partie, nous avons considéré un modèle vibro-acoustique d'un habitacle automobile simplifié. Le modèle d'éléments finis présenté dans la figure 3.23 a été modélisé avec le logiciel ANSYS. Pour la modélisation de la cavité acoustique, des éléments FLUID30 ont été utilisés. Ce sont des éléments 3D ayant 8 nœuds avec 4 degrés de liberté par nœud: 3 déplacements de translation dans les directions nodale x, y, z et la pression. Pour les plaques de la structure, on a utilisé des éléments SHELL181 qui sont des éléments 2D quadrilatéraux. Une force harmonique unitaire dans la bande de fréquences [0-300] Hz est appliquée. Le fluide à l'intérieur de la cabine est l'air dont les propriétés sont: sa densité est de $1,21 kg/m^3$ et la vitesse du son est de $343 m/s$. Dans le tableau 3.11, les propriétés matérielles de la structure sont présentées. L'analyse par éléments finis (FEA) est utilisée pour prédire le niveau de pression acoustique (SPL) à l'intérieur de la cabine.

Structure	Elasticité (Pa)	Coefficient de Poisson	Densité (kg/m^3)
Acier	$2.1e^{11}$	0.3	7850
Verre	$6.2e^{10}$	0.24	2300

Tableau 3.11: Caractéristiques matérielles de la structure

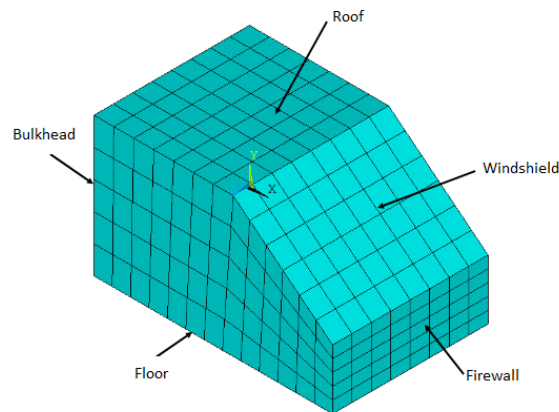


Figure 3.23: Discretisation éléments finis de la cabine

Le tableau 3.12 présente une idée sur les différents paramètres incertains choisis pour cet exemple. Ces paramètres sont choisis de manière aléatoire suivant une distribution uniforme autour de leurs valeurs nominales $\pm 5\%$.

	Partie acoustique		Partie de la structure
Paramètres	Densité(kg/m^3)	Elasticité de l'acier (GPa)	Elasticité du verre (GPa)
Valeurs	$U[1.1495,1.2705]$	$U[199.5,220.5]$	$U[58.9,65.1]$

Tableau 3.12: Caractéristiques des paramètres incertains

La quantité d'intérêt est analysée pour 1000 simulations en utilisant MC. Le CPG a été obtenu à partir d'un ordre $p = 4$ (donc 125 évaluations) par l'approche de régression. Les résultats montrent une bonne correspondance, ce qui implique que le GPC peut servir pour le problème d'optimisation. Les panneaux de la structure et la force harmonique sont choisis comme des variables de conception (voir tableau 3.13).

Panneaux de la structure	Initial	Borne inférieur	Borne supérieur
Bulkhead (mm)	0.8	0.72	0.88
Roof (mm)	0.7	0.63	0.77
Floor (mm)	0.9	0.81	0.99
Force (N)	1	0.5	1.1

Tableau 3.13: Variables de conception

La fonction objectif consiste à minimiser la masse structurelle globale, W , soumise à la contrainte probabiliste liée au niveau maximum de pression acoustique, qui devrait être inférieur à $105dB$. Pour l'optimisation fiabiliste, nous prendrons en compte la propagation des incertitudes à l'intérieur du modèle en couplant l'approche OSF avec le CPG. Le tableau 3.14 montre les résultats de cette méthode.

		Valeurs initiales	Point de conception y_i^*	S_f	Point optimal x_i^*
Variables de conception	<i>Bulkhead</i> (mm)	0.8	0.72	1.179	0.61
	<i>Roof</i> (mm)	0.7	0.63	1.169	0.54
	<i>Floor</i> (mm)	0.9	0.812	1.169	0.69
	<i>Force</i> (N)	1	0.881	1.008	0.87
Fonction objectif	W (kg)	31.93	30.64	—	28.9
Contrainte d'optimisation	SPL_{max} (dB)	110.5	104.47	—	104.57
Indice de fiabilité	β	—	—	—	3

Tableau 3.14: Résultats de la OSF couplé avec le CPG

On remarque que la présence d'incertitudes, décrites dans le tableau 3.11, affecte le niveau de pression acoustique (SPL). Pour le modèle initial probabiliste, le niveau de pression acoustique maximal à l'oreille du conducteur est égal à $110,5dB$. Après 13 itérations du processus d'optimisation, la masse structurelle est réduite de $31,93kg$ à $28,9kg$ et le niveau de pression acoustique maximum a été diminué de $6dB$. La figure 3.24 présente une comparaison entre le niveau de pression acoustique pour le modèle initial probabiliste et la conception optimale.

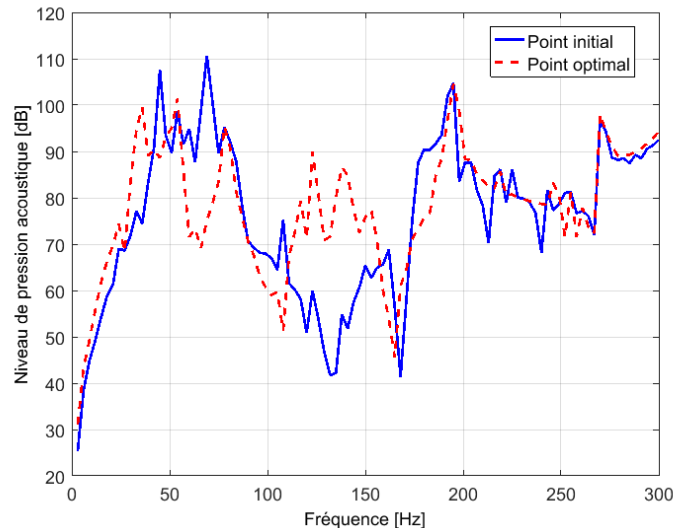


Figure 3.24: Comparaison de la SPL entre le modèle initial avec incertitudes et le modèle optimal

Dans les deux exemples précédents, une étude probabiliste est effectuée via le chaos polynomial généralisé dans la procédure d'optimisation. Dans la section suivante, la méthode RHM sera validée sur un exemple d'un simple silencieux.

3.5 Optimisation fiabiliste basée sur la méthode RHM d'un simple silencieux à chambre d'expansion

Un simple silencieux à chambre d'expansion est un dispositif acoustique installé à l'extrémité des véhicules d'échappement et d'autres systèmes d'évacuation pour améliorer l'atténuation du bruit dans la plage de fréquences cible. La perte de transmission (TL) est utilisée pour évaluer le comportement acoustique, qui est l'un des principaux indices de performance d'un silencieux [81].

La figure 3.25 montre la géométrie du silencieux d'expansion simple considéré dans cette étude. Une conduite d'entrée de diamètre d_i est connectée à un grand tube de diamètre d . La chambre d'expansion a une longueur l et se termine par une conduite de sortie de diamètre d_o ($d_i = d_o$). L'excitation acoustique sur la conduite d'entrée est considérée comme une vitesse de particule acoustique harmonique. Il est également supposé que les conduites d'entrée et de sortie avaient une terminaison anéchoïque ($Z = \rho_0 c_0$). La méthode de la matrice de transfert à 4 pôles peut

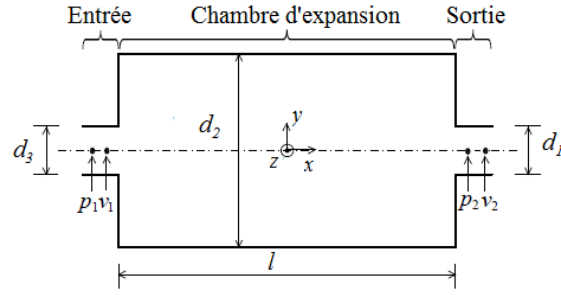


Figure 3.25: Silencieux d'expansion simple

être décrite par [81, 82]:

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

où p_1 et p_2 sont des pressions acoustiques à l'entrée et à la sortie, et v_1 et v_2 sont les vitesses des particules à l'entrée et à la sortie, respectivement; T_{11} , T_{12} , T_{21} et T_{22} sont les paramètres à quatre pôles.

La TL est la différence de niveau de puissance acoustique entre les ondes incidentes et transmises d'un silencieux à terminaison anéchoïque (voir la figure 3.25). Son expression peut être formulée comme suit:

$$TL = 20 \log \left| \frac{T_{11} + \frac{S_i}{c_0} T_{12} + \frac{c_0}{S_i} T_{21} + T_{22}}{2} \right| \quad (3.25)$$

Où S_i est la section transversale de la conduite d'entrée et c_0 est la vitesse du son de l'air à l'intérieur du silencieux. La matrice combinée à 4 pôles pour le silencieux de la chambre d'expansion est donnée par:

$$T_{\text{expansion}} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(kl) & \frac{j c_0}{S} \sin(kl) \\ \frac{j S}{c_0} \sin(kl) & \cos(kl) \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

S est la section transversale de la chambre d'expansion et k est le nombre d'onde.

Dans un cas simplifié, l'équation (eq.3.24) peut être réduite à une expression linéaire pour la perte de transmission (TL):

$$TL = 10 \log \left[1 + 0.25 \left(N - \frac{1}{N} \right)^2 \sin^2(kl) \right] \quad (3.27)$$

La chambre d'expansion simple a les dimensions et les caractéristiques présentées dans le tableau 3.15. La bande de fréquence est de $[0 - 3000] Hz$. La fonction objectif consiste à minimiser

Description	Paramètres	Valeurs	Unités
Diamètre de la conduite d'entrée	d_3	0.05	m
Diamètre de la chambre d'expansion	d_2	0.2	m
Diamètre de la conduite de sortie	d_1	0.05	m
Longueur de la chambre d'expansion	l	0.5	m
La vitesse du son	c_0	343.24	m/s
Densité	ρ_0	1.2	Kg/m^3
Vitesse à l'entrée	v_1	1	m/s

Tableau 3.15: Dimensions et caractéristiques du silencieux

le volume total, V , soumis à la contrainte mécanique liée à la perte de transmission requise ($TL_{mean} \geq 25dB$) et à l'indice de fiabilité ($\beta = 3$).

$$TL_{mean} = \frac{1}{f_{max} - f_{min}} \int_{f_{min}}^{f_{max}} TL(f)df \quad (3.28)$$

où x est le vecteur des variables de conception qui sont présentées dans le tableau 3.16.

Variables de conception	Borne inférieure (m)	Borne supérieure (m)
d_3	0.03	0.07
d_2	0.1	0.3
l	0.03	0.07

Tableau 3.16: Variables de conception et leurs intervalles

Les tableaux 3.17 et 3.18, présentent les résultats trouvées avec les méthodes HM et OSF, respectivement.

On peut remarquer que les résultats de la méthode OSF respectent toutes les conditions de

	HM			
	Point initial x_0	Point initial y_0	Point de conception y	Point optimal x
$V (m^3)$	0.129	0.071	0.065	0.037
$TL(dB)$	13.21	13.72	25	20.37
Niveau de fiabilité	3.77	-	-	3

Tableau 3.17: Comparaison de la solution optimale et du modèle initial avec la méthode HM

contraintes dans le problème d'optimisation. Cependant, nous avons trouvé que le point optimal n'est pas dans l'intervalle d'optimisation du tableau 3.16. Il est également clair que le

OSF			
	Point initial x_0	Point de conception y	Point optimal x
$V (m^3)$	0.071	0.063	0.0512
$TL(dB)$	13.21	25	31.98
Niveau de fiabilité	1.01	-	3

Tableau 3.18: Comparaison de la solution optimale et du modèle initial avec la méthode OSF

point optimal résultant, obtenu à partir de la méthode HM, est dans la zone de défaillance ($TL_{mean} = 20,37 \leq 25dB$). Pour ces raisons, la méthode RHM est nécessaire afin d'obtenir la meilleure conception du silencieux tout en respectant le niveau de fiabilité cible. Le tableau 3.19 présente les principaux résultats de la RHM.

RHM				
	Point initial x_0	Point initial y_0	Point de conception y	Point optimal x
$V (m^3)$	0.053	0.065	0.076	0.046
$TL(dB)$	10.76	8.09	25	26.68
Niveau de fiabilité	0.5	-	-	3

Tableau 3.19: Principaux résultats de la méthode RHM

Avec la RHM, la solution optimale est dans la zone de sécurité ($TL_{mean} = 26.68 \geq 25dB$) et le niveau de fiabilité est vérifié. La perte de transmission (TL) du modèle initial et celle de la conception optimale sont présentées dans la figure 3.26. On remarque que la perte de

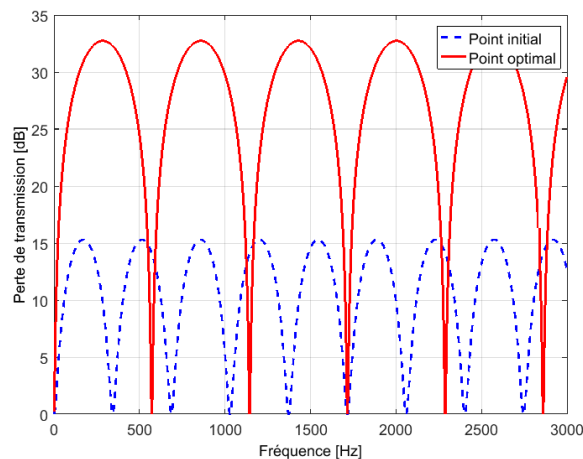


Figure 3.26: Perte de transmission par la RHM

transmission dans le modèle optimal est beaucoup plus importante que celle du modèle initial avec une conception vérifiant un volume minimal.

3.6 Conclusion

L'objectif de l'optimisation fiabiliste est de définir le meilleur compromis entre la réduction du coût et l'assurance de la fiabilité. Ce chapitre est consacré à l'étude de l'optimisation de conception basé sur la fiabilité des problèmes vibro-acoustiques.

Dans la première partie, les différentes méthodes de l'optimisation fiabiliste de conception sont rappelées. Nous montrons au début que la mise en oeuvre de la méthode DDO est facile. Ainsi la DDO peut garantir une conception optimale, mais on ne peut pas contrôler le niveau de fiabilité. Ensuite, les méthodes RBDO telles que la méthode hybride et la méthode OSF ont été appliquées. En comparant avec la méthode DDO, le modèle RBDO respecte un niveau de fiabilité cible. En utilisant la méthode hybride, l'algorithme peut converger vers un point optimal dans la région de défaillance et le résultat est ensuite rejeté. Pour ce faire, une nouvelle méthode appelée Robust Hybrid Method (RHM) est donc appliquée.

Dans une deuxième partie, nous avons appliqué ces approches (HM, OSF et RHM) sur plusieurs exemples de problèmes vibro-acoustiques. Tout d'abord, nous avons considéré deux applications qui tiennent en compte la présence d'incertitudes. Ainsi, une analyse probabiliste est assurée pendant la procédure d'optimisation. En fait, l'approche choisie consiste à coupler la méthode OSF avec le chaos polynômial généralisé pour assurer la robustesse du système pendant l'optimisation. Par la suite, un exemple valorisant la nouvelle méthode RHM est étudié. Il s'agit de l'optimisation fiabiliste d'un silencieux d'expansion simple. Les résultats montrent bien que les nouvelles conceptions présentent bien des meilleures performances que les modèles initiaux. De plus, le temps de calcul de la RHM est moins coûteux que les autres approches de la RBDO.

Chapitre 4

Méta-modélisation pour l'analyse d'incertitudes des systèmes vibro-acoustiques

Sommaire

4.1	Introduction	82
4.2	Mise en oeuvre d'un modèle de substitution	83
4.3	Métamodèle estimé dans la boucle d'optimisation	83
4.4	Méthodes d'échantillonnage de l'espace de conception	84
4.4.1	Plans d'expérience standards	85
4.4.2	Méthodes de remplissage de l'espace de conception (Space filling design)	86
4.5	Construction des métamodèles	87
4.5.1	Régression polynômiale	88
4.5.2	Moindres carrés mobiles	89
4.5.3	Krigeage	91
4.5.4	Fonctions de bases radiales (RBF)	93
4.5.5	Régression à Vecteur de Support	95
4.6	Validation des métamodèles	98
4.6.1	Mesures d'erreur	98
4.6.2	Validation croisée	99

- 4.7 Analyse d'incertitudes basée sur des modèles de substitution pour les problèmes vibro-acoustiques **100**
- 4.7.1 Simulation déterministe par la méthode éléments finis 100
- 4.7.2 Analyse d'incertitude basée sur le métamodèle 101
- 4.8 Conclusion **104**

4.1 Introduction

Les entreprises du secteur automobile, aéronautique, etc. travaillent dans un environnement fortement concurrentiel et s'efforcent continuellement de concevoir de meilleurs produits de manière moins coûteuse et plus rapide. C'est un défi qui nécessite des améliorations continues des méthodes et des processus. Le développement industriel est ainsi passé d'une approche d'essai et d'erreur dans un environnement matériel pour s'appuyer entièrement sur l'ingénierie assistée par ordinateur (CAE). Le nombre de prototypes est réduit au minimum afin de réduire les coûts et le temps de développement. Au lieu de cela, tous les aspects possibles du produit sont évalués à l'aide de modèles de simulation détaillés. Ces modèles complets sont souvent coûteux à évaluer, ce qui représente un défi lorsque de nombreuses évaluations sont nécessaires, comme lors d'études d'optimisation ou de robustesse. Une façon d'alléger la charge de calcul peut consister à utiliser des approximations des modèles réels qui prennent peu de temps à évaluer. Une approche consiste à construire des méta-modèles, c'est-à-dire des modèles de substitution (*surrogate models*) développés à partir d'une série de simulations utilisant les modèles réels. L'idée provient de l'ajustement d'un modèle de substitution à une série d'expériences physiques conçues [14]. Puisque les méta-modèles sont des approximations des modèles de simulation réels, une source supplémentaire d'erreur est introduite et le but est de garder cette erreur en un niveau acceptable pour le problème à traiter.

La construction de ces modèles de substitution, qui sera détaillée dans ce chapitre, nécessite des évaluations réalisées en un nombre limité de points de l'espace de conception. Une fois construite, l'approximation peut fournir une réponse en un point quelconque de cet espace en un temps très réduit (comparé au temps nécessaire au simulateur mécanique pour fournir la réponse exacte au même point). Comme le montre la figure 4.1, le modèle de substitution s'intègre dans la modélisation du modèle réel. À ce titre, il est nécessaire de noter que notre objectif est de construire une approximation permettant d'assurer une bonne représentativité du modèle réel obtenu par le simulateur, c'est-à-dire une analyse valide du problème réel. Les méthodes liées aux modèles de substitution et à leurs applications ont été largement étudiées et développées au fil des années. L'utilisation des approximations lors des études d'optimisation, appelée optimisation de la conception basée sur le méta-modèle, s'est révélée efficace dans de nombreux cas. Cependant, le sujet est toujours un domaine de recherche actif.

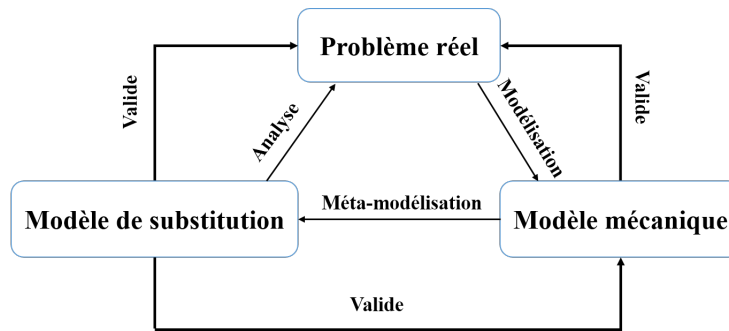


Figure 4.1: Métamodélisation du modèle mécanique réel

4.2 Mise en oeuvre d'un modèle de substitution

La mise en oeuvre d'un modèle de substitution est un processus basé sur plusieurs étapes. Elle fait appel à plusieurs techniques telle que celles présentées par [83]. La représentation schématique du processus d'élaboration d'un modèle de substitution est présentée dans la figure 4.2 et composée de 5 étapes:

- Une procédure d'échantillonnage permettant d'obtenir un ensemble de points x_i de l'espace de conception par la méthode des plans d'expériences.
- Une procédure d'évaluation des réponses exactes y_i de la fonction considérée aux points obtenus soit par la stratégie de tirages soit par la procédure d'enrichissement. Cette phase fait appel au modèle mécanique considéré et finalise la construction de la base d'apprentissage E_a composée de couples de sites et de réponses (x_i, y_i) .
- La procédure de construction du métamodèle à proprement parler. Elle nécessite l'emploi de méthodologies spécifiques au modèle de substitution utilisé. Cette phase de construction peut s'avérer particulièrement longue pour certains modèles de substitution.
- Validation du métamodèle par la mesure de sa précision basée sur la minimation de l'erreur entre le modèle de substitution et le modèle exacte en quelques points.
- Une procédure d'enrichissement (si la convergence n'est pas assurée) permettant d'ajouter des nouveaux sites dans la base d'apprentissage.

4.3 Métamodèle estimé dans la boucle d'optimisation

C'est ce qu'on appelle l'optimisation de conception basée sur le métamodèle (MBDO) [84, 85] lorsque des modèles de substitution sont utilisés pour les évaluations pendant le processus d'op-

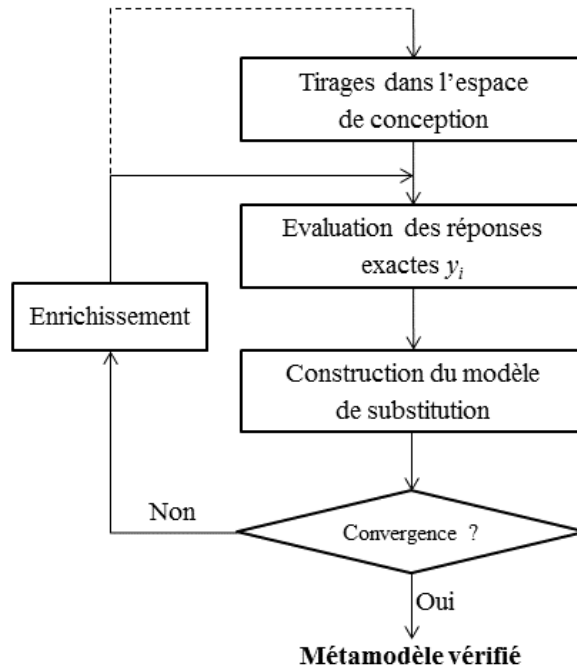


Figure 4.2: Organigramme du processus d'élaboration d'un modèle de substitution

timisation. Ainsi, à chaque pas d'optimisation x_i , on construit un modèle de substitution pour la fonction objectif $f(x_i)$ et les contraintes d'optimalité $g_k(x_i)$, $k = 1, \dots, K$. L'avantage d'utiliser les métamodèles dans l'optimisation consiste au fait que le nombre de points nécessaires à leurs constructions est beaucoup plus petit que pour les méthodes de Monte Carlo.

4.4 Méthodes d'échantillonnage de l'espace de conception

Afin de construire un métamodèle, un ensemble de données d'entrée (variables de conception) et la sortie correspondante (valeurs de réponse) est nécessaire. La théorie sur l'endroit où ces points de conception doivent être placés dans l'espace de conception afin d'obtenir la meilleure information possible à partir d'une taille d'échantillon limitée est appelée plans d'expérience (*Design of experiments DOE*) [86, 87]. Les plans d'expérience classiques sont principalement utilisés comme base pour la construction de métamodèles polynomiaux. Lorsque l'ensemble des données est utilisé pour ajuster un métamodèle plus complexe, d'autres plans d'expérience sont préférés.

4.4.1 Plans d'expérience standards

Les théories des plans d'expériences proviennent de la planification d'expériences physiques. L'idée est de recueillir autant d'informations que possible à partir d'un nombre limité d'expériences. Ces informations obtenues sont souvent utilisées pour identifier l'influence sur la réponse causée par les changements des variables. Parmi ces plans d'expérience usuels on trouve:

- **Les plans factoriels complets** l^k qui consistent à remplir l'espace de conception à l'aide d'une grille régulière. Ces plans présentent l'avantage d'offrir un très bon remplissage qui n'est cependant valable que pour des faibles niveaux ($l = 2$ ou bien $l = 3$), avec k est le nombre de variables dans l'espace de conception.
- **Les plans factoriels fractionnaires** l^{k-r} qui consistent à prendre des sous ensembles des plans factoriels complets. Il s'agit donc d'une réduction du nombre de simulations.
- **Les plans composites (CDD)** qui consistent à améliorer certaines propriétés des plans factoriels à 2 niveaux. Leur construction s'appuie sur un plan factoriel complet ou fractionnaire avec l'ajout de nouveaux points. Ces plans d'expérience ont été proposés pour approcher des surfaces de réponse de second degré. Cependant, ils ne présentent pas une bonne répartition des points sur l'espace de conception.
- **Les plans de Box-Behnken (BBD)** où chaque paramètre ne peut prendre que 3 niveaux. Les tirages obtenus correspondent aux milieux des arêtes de l'hypercube formé par l'espace de conception avec l'ajout du point central de l'hypercube.

La figure 4.3 présente des exemples de configuration des plans d'expérience.

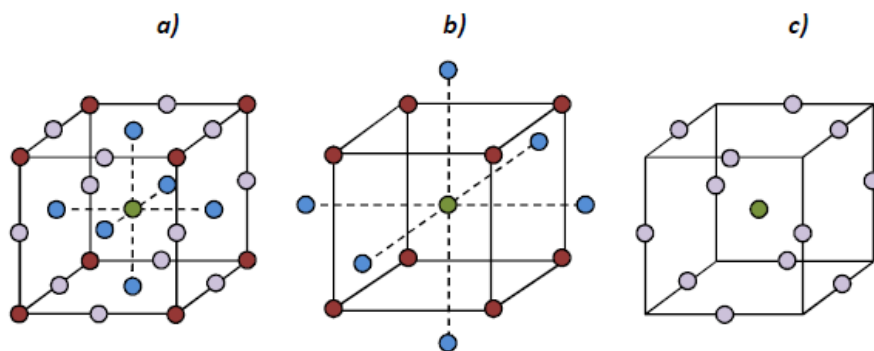


Figure 4.3: a: Plan factoriel complet 3^3 , b: Plan composite centré pour 3 paramètres et 2 niveaux, c: Plan de Box-Behnken pour 3 paramètres

Il existe de nombreux autres plans d'expériences utilisables principalement pour des approches

de type surface de réponse [87].

4.4.2 Méthodes de remplissage de l'espace de conception (Space filling design)

Comme nous l'avons vu précédemment, les plans d'expérience standards tendent à étendre les points d'échantillonnage autour de la frontière et ne mettent que quelques points à l'intérieur de l'espace de conception. Souvent, de nombreuses variables de conception sont étudiées sur un grand espace de conception et généralement un métamodèle complexe doit être installé. Il semble y avoir un consensus parmi les scientifiques sur le fait qu'un plan d'expérience approprié pour ces cas devrait être l'espace de remplissage, ce qui vise à étendre les points de conception dans l'espace de conception complet. L'idée est trouver un compromis entre le nombre de sites fournis par la méthode, le remplissage de l'espace et l'uniformité de ces sites. La méthode Hypercube Latin (LHS) a été proposée par [88] dans le cadre du calcul numérique des intégrales multiples. L'objectif était d'améliorer la qualité de convergence des méthodes de Monte Carlo, qui nécessitent un nombre important de tirages pour parvenir à converger vers une valeur correcte de l'intégrale considérée. Actuellement, cette méthode est énormément utilisée, par exemple pour la construction des modèles de substitution de type krigeage [89]. La LHS consiste à diviser, chacun des axes des k variables, en n intervalles de même longueur, sans chevauchement et de probabilité égale. Il en résulte une matrice, S , de plan d'échantillonnage de dimension $n \times k$, où les k colonnes décrivent les niveaux de chaque variable, et les n lignes présentent les paramètres correspondants à chacune des variables de conception (voir figure 4.4). Mathématiquement, cela pourrait être décrit comme une base de plan d'échantillonnage de matrice X avec les éléments suivants:

$$X_{ij} = \frac{\pi_j(i) - U_{ij}}{n}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq k \quad (4.1)$$

où $\pi_j(i)$ sont des permutations indépendantes uniformément aléatoires des entiers 1 à n et U_{ij} sont des valeurs aléatoires de distribution uniforme sur $[0,1]$. Ainsi, les ensembles $\pi_j(i)$ et U_{ij} représentent la cellule dans laquelle se trouve le point et l'endroit où se situe le point dans la cellule, respectivement. Afin de générer un meilleur remplissage de l'espace de conception, le LHS peut être pris comme un plan de départ et les valeurs de chaque colonne dans la matrice de dimension $n \times k$ sont ensuite permutées afin d'optimiser certains critères. Une approche

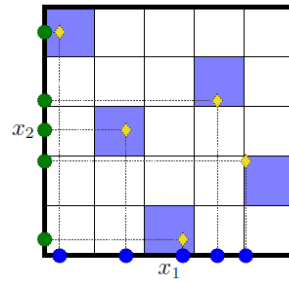


Figure 4.4: Échantillonnage en hypercube latin pour deux variables à cinq niveaux

consiste à maximiser la distance minimale entre deux points quelconques (c'est-à-dire entre deux lignes quelconques) à l'aide d'un algorithme d'optimisation. Une autre méthode consiste à minimiser l'écart, qui représente la mesure de la non-uniformité des points de conception sur un domaine expérimental.

Les stratégies d'échantillonnage forment un large champ de prospection scientifique. De ce fait, il existe plusieurs autres techniques de remplissage de l'espace de conception telles que celles destinées à construire un hypercube latin orthogonal en améliorant un critère de corrélation [90–92], celles visant à minimiser le critère IMSE (Integrated Mean Square Error) [93] ou celles permettant de sélectionner un tirage LHS ayant de bonnes propriétés d'uniformité (IHS - Improved Hypercube Sampling) [94].

4.5 Construction des métamodèles

Les techniques du métamodèle sont aujourd'hui largement utilisées en ingénierie, car l'analyse technique consiste à implémenter des codes informatiques complexes. Les métamodèles sont utilisés pour construire des approximations du code d'analyse et décrire la relation fonctionnelle entre les variables de conception et les réponses correspondantes. De cette manière, le coût de calcul est réduit.

Le nombre de métamodèles existants dans la littérature est assez important. On peut cependant les classer en deux catégories:

- Les métamodèles paramétriques qui, comme leur nom l'indique, nécessitent de choisir des paramètres internes de manière manuelle par un choix plus ou moins empirique de l'utilisateur ou de manière automatique en mettant en oeuvre une méthodologie destinée à les fixer. Pour certains métamodèles paramétriques, le choix précis de ces paramètres est indispensable et ne peut être ignoré. Ces techniques, souvent spécifiques au type de mé-

tamodèles employés, nécessitent des outils adaptés tels que, par exemple, un algorithme d'optimisation. Cette phase de choix du ou des paramètres peut accaparer la majorité du coût nécessaire à la construction du modèle de substitution. Parmi les modèles paramétriques, on trouve les modèles de type krigeage, fonctions de base radiales (RBF), les régression à vecteur de support (SVR).

- Les métamodèles non-paramétriques qui, à l'inverse des précédents, ne requièrent aucune détermination de paramètres internes. Historiquement, c'est ce type de modèles qui furent les premiers utilisés avec par exemple la régression linéaire, quadratique et polynomiale.

4.5.1 Régression polynomiale

Les modèles à régression polynomiale s'inscrivent dans une démarche de modélisation par surface de réponse (Response Surface Methodology (RSM)) [87, 95]. Cette technique a été décrite par [14] comme étant un ensemble de méthodes statistiques et mathématiques pour développer, améliorer et optimiser les processus et les produits. Les modèles sont développés à l'aide de la régression, qui se définit comme étant un processus d'ajustement d'un modèle de régression $y = \hat{y}(x, \beta^r) + \varepsilon$ à un ensemble de données de n paramètres, x_i et de la réponse, y correspondante.

La méthode des moindres carrés choisit le coefficient de régression β^r pour que l'erreur quadratique soit minimale, c'est-à-dire résoudre la régression du problème:

$$\min \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \min_{\beta^r} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}(x_i, \beta^r))^2 \quad (4.2)$$

Un modèle de régression peut être de différentes formes, pas nécessairement un polynôme. Toutefois, la classe la plus fréquemment utilisée dans la régression linéaire, où $\hat{y}(x, \beta^r)$ est linéaire en β^r , se compose de polynômes d'ordre inférieur. Par exemple le modèle quadratique de deuxième ordre (QRS) peut servir pour tenir un métamodèle de k variables de conception:

$$\hat{y} = s(x, \beta^r) = \beta_0^r + \sum_{i=1}^k \beta_i^r x_i + \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{i < j=2}^k \beta_{ij}^r x_i x_j + \sum_{i=1}^k \beta_{ii}^r x_{ii}^2 \quad (4.3)$$

Le modèle de régression peut être écrit sous forme matricielle:

$$\mathbf{y} = \mathbf{F}\boldsymbol{\beta}^r + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.4)$$

avec $\mathbf{y} = [y_1, \dots, y_n]^T$ est un vecteur des n réponses, $\boldsymbol{\beta}^r = [\beta_0^r, \beta_1^r, \dots, \beta_{kk}^r]^T$ est un vecteur de $p = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$ coefficients de régression et $\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n]^T$ est un vecteur de n erreurs.

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & \dots & x_{1k} & x_{11}x_{12} & \dots & x_{1(k-1)}x_{1k} & x_{11}^2 & \dots & x_{1n}^2 \\ 1 & x_{21} & \dots & x_{2k} & x_{21}x_{22} & \dots & x_{2(k-1)}x_{2k} & x_{21}^2 & \dots & x_{2n}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & x_{11}x_{12} & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & \dots & x_{nk} & x_{n1}x_{n12} & \dots & x_{n(k-1)}x_{nk} & x_{n1}^2 & \dots & x_{nn}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f^T(x_1) \\ f^T(x_2) \\ \vdots \\ f^T(x_n) \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

\mathbf{F} est la matrice de modèle de dimensions $n \times p$ constituée des paramètres variables étendus à la forme du modèle. Dans cette matrice, chaque ligne correspond à un seul point de conception et chaque colonne à un seul coefficient de régression. Le modèle de régression ajusté devient:

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{F}\mathbf{b} \quad (4.6)$$

où:

$$\mathbf{b} = (\mathbf{F}^T \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F}^T \mathbf{y} \quad (4.7)$$

L'approximation polynomiale est à la fois facile d'utilisation et d'implémentation. Elle est cependant d'une précision faible lorsque la fonction à approcher est multimodale suivant certaines composantes. Lorsque l'ensemble d'ajustements est si petit, c'est-à-dire qu'il y a assez de données disponibles pour déterminer tous les coefficients de régression dans le modèle, les métamodèles polynomiaux puissent interpoler facilement les données d'ajustement. Cependant, de tels petits ensembles d'ajustements ne sont généralement pas recommandés. Ces métamodèles sont donc principalement utilisés dans des procédures d'optimisation itératives où une séquence de métamodèles est construite dans une région de plus en plus petite de l'espace de conception autour du point optimal. Des compléments concernant l'usage de la régression polynomiale pour l'optimisation peuvent être trouvés dans [96].

4.5.2 Moindres carrés mobiles

L'approche des moindres carrés mobiles (MLS) [97, 98] est devenue populaire suite à son utilisation pour construire des fonctions de forme dans le cadre des méthodes sans maillage pour résoudre des problèmes d'équations aux dérivées partielles. Selon [99], la description mathé-

matique d'un métamodèle à base MLS peut être formulée comme:

$$\hat{y} = \sum_{i=1}^p f_i(x)b_i(x) \quad (4.8)$$

où f est un vecteur des fonctions de base (polynômes) pour le métamodèle et b est un vecteur des coefficients. Le nombre de coefficients p dépend de l'ordre d'approximation. La différence de cette approche avec la régression polynomiale classique réside dans le fait que les coefficients de b_i sont dépendants du point x où l'on cherche l'approximation. Leur détermination se base sur l'utilisation d'une méthode de type moindres carrés pondérés. On cherche alors les coefficients b_i qui minimisent l'erreur pondérée entre la réponse de la base du modèle détaillé $y(x)$ et la valeur approchée du métamodèle $\hat{y}(x)$:

$$\min \sum_{i=1}^n w_i \varepsilon_i^2 = \min_b \sum_{i=1}^n w(\|x_i - x\|) [f^T(x_i - x)b - y_i]^2 \quad (4.9)$$

où n est le nombre de modèle d'ajustement et x est l'entrée de la conception i . Les poids $w_i \geq 0$ assurent la continuité et la localité de l'approximation. w_i prend sa valeur maximale au point x_i et diminue dans une zone fixe autour du point, appelé le domaine d'influence de x_i et s'annule à l'extérieur de cette région. Les fonctions de poids, y compris la taille du domaine d'Influence, jouent un rôle important en régissant les modalités des coefficients $b_i(x)$ dépendant de l'emplacement du point étudié x . La minimisation de l'erreur conduit à la solution suivante:

$$\mathbf{b} = (\mathbf{X}^T \mathbf{W} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{W} \mathbf{y} \quad (4.10)$$

où

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \mathbf{X}(x) = \begin{bmatrix} f^T(x_1 - x) \\ \vdots \\ f^T(x_n - x) \end{bmatrix}, \mathbf{W}(x) = \begin{bmatrix} w(\|x_1 - x\|) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & w(\|x_n - x\|) \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

Ce type de métamodèle a été utilisé dans le cadre de l'optimisation fiabiliste [100], pour les études stochastiques [101] et pour l'approximation locale de la fonction objectif [99].

4.5.3 Krigeage

Construire des modèles de substitution afin de réduire le coût de calcul associé à l'analyse de fiabilité, les problèmes stochastiques ou d'optimisation a reçu le nom générique (*Design and Analysis for Computer Experiments-DACE*) dans la littérature. À cet égard, le krigeage est apparu au cours des deux dernières décennies comme un outil puissant pour construire des méta-modèles. Historiquement, le krigeage a été nommé d'après l'ingénieur sud-africain D. Krige [102] qui a initié une méthode statistique pour évaluer les ressources et les réserves minérales. L'idée de base est de modéliser une fonction connue seulement à un nombre fini de points d'échantillonnage comme la réalisation d'un champ aléatoire gaussien. Aujourd'hui, le krigeage est très appliqué en raison de sa robustesse et de la qualité de l'approximation qu'il peut fournir. Par ailleurs, il fournit une estimation de l'erreur des moindres carrés du processus qu'il estime. Le cadre moderne du krigeage (appelé aussi modélisation gaussienne des processus [103]) est basé sur le fait que la fonction de substitution est supposée être une réalisation d'un processus gaussien noté $y(x)$. La réponse $y(x)$ se formule de la manière suivante:

$$y(x) = f(x) + Z(x) \quad (4.12)$$

où $f(x)$ est généralement donnée comme une combinaison linéaire de fonctions polynomiales de base:

$$f(x) = \beta_0^r + \sum_{i=1}^n \beta_i^r f_i(x) \quad (4.13)$$

et $Z(x)$ est un processus stochastique (fonction aléatoire) à moyenne nulle ($\mathbb{E}[Z(x)] = 0$), de variance σ^2 et de covariance non nulle donnée par:

$$Cov(Z(x) - Z(x')) = \sigma^2 R(x, x') \quad (4.14)$$

$R(x, x')$ est la fonction de corrélation entre les points d'échantillonnage évalués x et x' . Celle-ci contrôle la fluidité du modèle de Kriging résultant et l'influence des points voisins en quantifiant la corrélation entre les observations. En pratique, les modèles exponentiels carrés sont généralement utilisés pour décrire la fonction de corrélation:

$$R(x, x') = \exp \left(- \sum_{i=1}^k \theta_i |x_i - x'_i| \right) \quad (4.15)$$

où $\theta_i (i = 1, 2, \dots, n)$ sont des paramètres de la fonction de corrélation. Les paramètres θ_i sont essentiellement des paramètres qui affectent la mesure dans laquelle l'influence d'un point d'échantillon s'étend [104]. Un θ_i faible signifie que tous les points auront une corrélation R élevée, avec $Z(x_i)$ étant similaire à travers l'échantillon, tandis qu'un θ_i élevé signifie qu'il existe une différence significative entre les $Z(x_i)$ pour différents points d'échantillonnage. L'estimateur de krigeage à un point x donné est par définition une variable aléatoire gaussienne obtenue comme une combinaison linéaire des observations et qui est non biaisé avec une variance minimale (*the best linear unbiased predictor-BLUP*):

$$\hat{y}(x) = \mathbf{f}^T(x)\boldsymbol{\beta}^r + \mathbf{r}^T(x)\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{F}^T\boldsymbol{\beta}^r) \quad (4.16)$$

où $\mathbf{f}(x)$ est un vecteur correspondant à une ligne de la matrice modèle des fonctions de régression \mathbf{F} pour x , $\boldsymbol{\beta}^r$ est le vecteur des coefficients de régression, $\mathbf{r}(x) = [R(x, x_1), \dots, R(x, x_n)]^T$ est le vecteur des fonctions de corrélation entre le point inconnu et les n points d'observation, \mathbf{R} est la matrice de dimension $n \times n$ des fonctions de corrélation pour l'échantillon ajusté, et \mathbf{y} est le vecteur des réponses observées correspondant à l'ensemble des entrées. Le vecteur $(\mathbf{y} - \mathbf{F}^T\boldsymbol{\beta}^r)$ correspond au vecteur des erreurs (résidus) de l'ensemble des données lorsque le terme stochastique du modèle est éliminé. Afin de pouvoir construire le métamodèle de krigeage, il faut tout d'abord, déterminer les paramètres de corrélation du vecteur $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n]$, les coefficients de régression du vecteur $\boldsymbol{\beta}^r$ ainsi que la variance du modèle stochastique σ^2 . La méthode actuellement la plus employée pour déterminer tous ces paramètres, s'appuie sur le cadre statistique du krigeage et en particulier sur celui des processus gaussiens. En effet, elle propose de déterminer les paramètres du modèle en maximisant la fonction vraisemblance qui a été utilisée pour déterminer la covariance d'un processus aléatoire spatial [105–107]. L'idée repose sur la recherche des paramètres du modèle de sorte que l'observation des réponses soit la plus vraisemblable possible, c'est-à-dire tel que l'on maximise la probabilité des réponses. Dans le cadre d'un krigeage universel, la vraisemblance s'écrit sous la forme suivante:

$$L(\boldsymbol{\beta}^r, \sigma^2, \boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}^n \sqrt{|\mathbf{R}(\boldsymbol{\theta})|}} \exp \left[-\frac{(\mathbf{y} - \mathbf{F}^T\boldsymbol{\beta}^r)^T \mathbf{R}^{-1}(\boldsymbol{\theta})(\mathbf{y} - \mathbf{F}^T\boldsymbol{\beta}^r)}{2\sigma^2} \right] \quad (4.17)$$

Dans la pratique, on applique le logarithme népérien sur l'expression du vraisemblance et on obtient:

$$\ln(L) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln(\sigma^2) - \frac{1}{2} \ln(|\mathbf{R}(\boldsymbol{\theta})|) - \frac{(\mathbf{y} - \mathbf{F}^T \boldsymbol{\beta}^r)^T \mathbf{R}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) (\mathbf{y} - \mathbf{F}^T \boldsymbol{\beta}^r)}{2\sigma^2} \quad (4.18)$$

La vraisemblance est maximale lorsque sa dérivé par rapport à $\boldsymbol{\theta}$ et σ^2 s'annule, ainsi on obtient:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}^r = (\mathbf{F}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{y}, \quad (4.19)$$

et

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{(\mathbf{y} - \mathbf{F}^T \hat{\boldsymbol{\beta}}^r)^T \mathbf{R}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) (\mathbf{y} - \mathbf{F}^T \hat{\boldsymbol{\beta}}^r)}{n} \quad (4.20)$$

Les valeurs optimales de $\boldsymbol{\theta}$ sont déterminées en résolvant le problème d'optimisation non linéaire de la maximisation de la fonction de vraisemblance:

$$\begin{aligned} \max_{\boldsymbol{\theta}} \quad & L(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{1}{2} [n \ln(\hat{\sigma}^2) + \ln(|\mathbf{R}|)] \\ \text{s.t.} \quad & \theta_i > 0, i = 1, \dots, k \end{aligned} \quad (4.21)$$

Ainsi, en résolvant ce problème d'optimisation unidimensionnel, le modèle de krigeage $\hat{y}(x)$ est complètement défini par l'équation (eq.4.16).

4.5.4 Fonctions de bases radiales (RBF)

Le principe des fonctions de base radiales consiste à construire l'approximation sous la forme d'une combinaison linéaire de fonctions radiales. Cette méthode fut introduite pour l'interpolation de fonctions de plusieurs variables [108–110] et utilisée dans la résolution de problèmes aux dérivées partielles sans maillage.

4.5.4.1 Formulation du modèle

Les fonctions de base radiale ne dépendent que de la distance radiale d'un point x à partir d'un point spécifique x_i tel que:

$$\phi(x, x_i) = \phi(\|x - x_i\|) = \phi(r) \quad (4.22)$$

où r est la distance entre les points x et x_i . Les RBF peuvent avoir plusieurs formes mais sont toujours radialement symétriques. Un métamodèle à base des RBF consiste en une combinaison linéaire de fonctions radialement symétriques pour approcher des réponses complexes, qui peuvent être exprimées comme:

$$\hat{y} = \sum_{i=1}^n w_i \phi(\|x - x_i\|) \quad (4.23)$$

Le métamodèle est donc représenté par une somme de n RBF, chacun associé à un point d'échantillonnage x_i , représentant le centre du RBF, et pondéré par un coefficient w_i . Les coefficients w_i , c'est-à-dire les paramètres inconnus qui doivent être déterminés lors de la construction du métamodèle, peuvent être collectés dans un vecteur $\mathbf{w} = [w_1, \dots, w_n]^T$. Ainsi, ces n équations linéaires conduisent à un système sous forme matricielle:

$$\hat{\mathbf{y}} = \Phi \mathbf{w} \quad (4.24)$$

avec $\hat{\mathbf{y}} = [\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_n]^T$ est le vecteur des réponses et Φ est la matrice d'interpolation symétrique de dimension $n \times n$:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi(\|x_1 - x_1\|) & \dots & \phi(\|x_1 - x_n\|) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi(\|x_n - x_1\|) & \dots & \phi(\|x_n - x_n\|) \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

Le système d'équation (4.24) peut être résolu par des méthodes standard, en utilisant des décompositions matricielles, pour n petit. Des méthodes spéciales doivent être appliquées lorsque n devient trop grand, comme décrit par [111], puisque la matrice d'interpolation est souvent pleine et mal conditionnée. Lorsque le nombre de fonctions de base n_{RBF} est inférieur à la taille de l'échantillon n_s , le modèle sera approximatif. De manière similaire au modèle de régression polynomiale, les poids optimaux dans le sens des moindres carrés sont obtenus analytiquement comme:

$$\mathbf{w} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T \mathbf{y} \quad (4.26)$$

4.5.4.2 Choix de la fonction de base radiale et effet du facteur d'atténuation

Parmi les fonctions de base radiales $\phi(x, x_i) = \phi(r)$ classiquement employées, on trouve:

- Splines linéaires: $\phi(r) = r$
- Splines cubiques: $\phi(r) = r^3$
- Splines en plaque mince: $\phi(r) = r^k \ln(r), k = 2p + 1$ avec $p \in \mathbb{N}$
- Gaussienne: $\phi(r) = \exp(-\frac{r^2}{c})$
- Multiquadrique: $\phi(r) = \sqrt{1 + \frac{r}{c}}$
- Multiquadrique inverse: $\phi(r) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{r}{c}}}$

où c est un paramètre de forme, appelé aussi facteur d'atténuation, qui contrôle le lissage de la fonction. Ce facteur a une influence critique sur la précision du modèle d'interpolation. Au sens physique, le paramètre de forme c contrôle la largeur des fonctions et donc l'influence des points proches. Une grande valeur de c donne une région affectée plus large, c'est-à-dire que des points plus éloignés d'un point inconnu auront un effet sur la prédiction de la réponse à ce point. D'autre part, une petite valeur de c signifie que seuls les points proches influenceront la prédiction. Par conséquent, le choix du facteur d'atténuation influe également sur le risque de sur ou sous-ajustement. En effet, si la valeur est choisie trop petite, un sur-ajustement se produira, c'est-à-dire que chaque point d'échantillonnage n'influencera que son voisinage très proche. D'un autre côté, si la valeur est sélectionnée assez grande, le sous-ajustement apparaîtra et le modèle perdra des détails fins. D'autres fonctions de base radiale peuvent être trouvées dans [24].

Les RBF gaussiens ont une caractéristique souhaitable en ce que la variance de prédiction peut facilement être évaluée à n'importe quel point x dans l'espace de conception par [104, 112, 113]:

$$s_{RBF}^2(x) = 1 - \Phi^T(x) \Phi^{-1} \Phi(x) \quad (4.27)$$

4.5.5 Régression à Vecteur de Support

La Régression à Vecteur de support est issu des Machines à Vecteur de Support (SVM) développées par Vapnik, V.N [114] dans le cadre de la théorie de l'apprentissage. C'est une méthode relativement récente. Initialement utilisées pour résoudre des problèmes de classification de données, elles ont été étendues à l'estimation de fonctions à partir d'un échantillon de sites

et de réponses associées. On pourra se référer à [83, 115, 116] pour plus de détails sur la Régression à Vecteur de Support.

Le métamodèle SVR peut être décrit par la formulation mathématique suivante:

$$\hat{y}(x) = \mathbf{b} + \sum_{m=1}^M w_m Q_m(x) = \mathbf{b} + \mathbf{w} \cdot \mathbf{Q}(x) \quad (4.28)$$

Par conséquent, il s'agit d'une somme de fonctions de base $\mathbf{Q} = [Q_1(x), \dots, Q_M(x)]^T$ avec des poids $\mathbf{w} = [w_1, \dots, w_M]^T$ ajouté à un terme de base \mathbf{b} . Les paramètres b et w_m doivent être estimés, mais d'une manière différente de celle des autres métamodèles (RBF et Krigeage). Les fonctions de base \mathbf{Q} dans le modèle SVR peuvent être considérées comme une transformation de la variable de conception, x , dans un espace de caractéristiques dans lequel le modèle est linéaire, comme présenté dans la figure 4.5. Le modèle non linéaire est réduit à un modèle linéaire par le mappage \mathbf{Q} à partir de l'espace d'entrée dans l'espace des caractéristiques et les vecteurs de support contribuent au coût par la fonction de perte $\varepsilon - insensitive$.

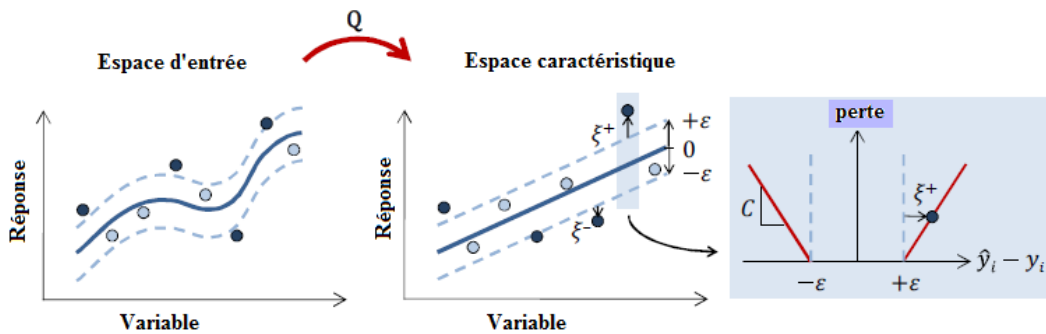


Figure 4.5: Transformation de la variable de conception dans l'espace des caractéristiques

Le principe de cette SVR repose sur la construction de marges ε définissant une zone dans laquelle la différence entre les réponses de l'ensemble d'ajustement et la prédiction du métamodèle est acceptée. Cela signifie que les points d'ajustement qui se trouvent dans la bande $\pm\varepsilon$ sont ignorés, et le métamodèle est entièrement défini par les points, appelés vecteurs de support, qui se trouvent sur ou en dehors de cette zone. L'estimation des paramètres inconnus d'un métamodèle SVR est un problème d'optimisation. L'objectif est de trouver un modèle qui présente au plus un écart de ε par rapport aux réponses observées $y_i, i = (1, \dots, n)$ et en même temps minimise la complexité du modèle, c'est-à-dire, rend le métamodèle aussi plat que possible dans l'espace des caractéristiques [116]. La planéité signifie que w devrait être petit, ce qui peut être assuré en minimisant la norme vectorielle $\|\mathbf{w}\|^2$. Comme c'est impossible de trouver

une solution qui se rapproche de tout y_i avec une précision $\pm\varepsilon$, les variables d'écart ξ^+ et ξ^- peuvent être introduites, voir figure 4.5. Le problème d'optimisation peut alors être écrit comme suit:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \frac{1}{2} \|w\|^2 + C \sum_{i=1}^n (\xi_i^+ + \xi_i^-) \\
 \text{s.t.} \quad & y_i - w \cdot Q(x_i) - b \leq \varepsilon + \xi_i^+ \\
 & w \cdot Q(x_i) + b - y_i \leq \varepsilon + \xi_i^- \\
 & \xi_i^+, \xi_i^- \geq 0
 \end{aligned} \tag{4.29}$$

Le problème d'optimisation présente un compromis entre le respect de la tolérance en chaque point échantillonné et le lissage de la fonction d'approximation. Ce compromis est régi par la constante définie par l'utilisateur $C > 0$. Cette approche est connu comme la fonction de perte ε -insensitive. Cette fonction de perte signifie qu'aucune perte ne sera associée aux points à l'intérieur de la bande $\pm\varepsilon$, tandis que les points à l'extérieur auront une perte qui augmente linéairement avec un taux déterminé par C . Bien qu'il puisse y avoir une valeur optimale de C , selon [104] le choix exact n'est pas critique. Il suffit donc d'essayer quelques valeurs de C d'ordres de grandeur variables et de choisir celle qui fournit la mesure d'erreur la plus faible. Dans la plupart des cas, le problème d'optimisation décrit par l'équation (4.29) est plus facilement résolu sous sa forme double, et il est donc écrit comme la minimisation de la fonction lagrangienne L . En optimum, les dérivées partielles de L par rapport à ses variables primales w , b , ξ^+ et ξ^- doivent disparaître, ce qui conduit au problème d'optimisation dans sa forme double suivante:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n (\alpha_i^+ - \alpha_i^-)(\alpha_j^+ - \alpha_j^-) k(x_i, x_j) + \varepsilon \sum_{i=1}^n (\alpha_i^+ + \alpha_i^-) - \sum_{i=1}^n y_i (\alpha_i^+ - \alpha_i^-) \\
 \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^n (\alpha_i^+ - \alpha_i^-) = 0 \\
 & (\alpha_i^+ - \alpha_i^-) \in [0, C]
 \end{aligned} \tag{4.30}$$

où α_i^+ et α_i^- sont les multiplicateurs de Lagrange et $k(x_i, x_j) = Q(x_i) \cdot Q(x_j)$ représente la fonction de Kernel. Ces multiplicateurs doivent avoir certaines propriétés et les choix possibles incluent des fonctions linéaires $k(x_i, x_j) = x_i \cdot x_j$ et gaussiennes $k(x_i, x_j) = \exp -\frac{\|x_i - x_j\|}{c}$ [116]. La dérivée partielle de L par rapport à w étant nul donne $w = \sum_{i=1}^n (\alpha_i^+ - \alpha_i^-) \cdot Q(x_i)$. Cela signifie que l'équation (4.28) peut alors être réécrite et fournir la réponse dans un point quelconque x comme suit [115]:

$$\hat{y}(x) = \mathbf{b} + \mathbf{w} \cdot \mathbf{Q}(x) = b + \sum_{i=1}^n (\alpha_i^+ - \alpha_i^-) Q(x_i) \cdot Q(x) = b + \sum_{i=1}^n (\alpha_i^+ - \alpha_i^-) k(x_i, x) \quad (4.31)$$

Le problème d'optimisation dans les équations (4.29) et (4.30) permet la recherche de la fonction la plus plate dans l'espace des caractéristiques, pas dans l'espace d'entrée. Le terme de base \mathbf{b} est encore inconnu qui pourrait être déterminé à partir de:

$$\mathbf{b} = y_j - \mathbf{w} \cdot \mathbf{Q}(x_j) + \varepsilon = y_j + \sum_{i=1}^n (\alpha_i^+ - \alpha_i^-) k(x_i, x_j) + \varepsilon \quad \text{si } 0 < \alpha_i^- < C \quad (4.32)$$

$$\mathbf{b} = y_j - \mathbf{w} \cdot \mathbf{Q}(x_j) - \varepsilon = y_j + \sum_{i=1}^n (\alpha_i^+ - \alpha_i^-) k(x_i, x_j) - \varepsilon \quad \text{si } 0 < \alpha_i^+ < C \quad (4.33)$$

ce qui signifie que \mathbf{b} peut être calculé pour un ou plusieurs α_i . Selon [104], de meilleurs résultats sont obtenus pour un α_i pas trop proche des limites.

4.6 Validation des métamodèles

Une fois le métamodèle est obtenu, il est nécessaire d'évaluer sa qualité. La précision d'un métamodèle est influencée par le type de métamodèle ainsi que par la qualité et la quantité de l'ensemble de données à partir duquel il est construit. La qualité d'un métamodèle ne peut pas être décrite par une seule mesure. Au lieu de cela, il existe plusieurs méthodes qui peuvent être utilisées pour évaluer la précision d'un métamodèle et le comparer à d'autres.

4.6.1 Mesures d'erreur

Une façon d'évaluer la précision d'un métamodèle consiste à étudier ses résidus, c'est-à-dire la différence entre la valeur simulée y_i et la valeur prédite à partir du métamodèle \hat{y}_i . Les petits résidus signifient que le modèle reflète l'ensemble de données avec plus de précision que si les résidus étaient plus grands, c'est-à-dire que l'erreur d'ajustement est plus petite.

4.6.1.1 MAE, RME, RMSE

L'erreur quadratique carrés (RMSE) et l'erreur moyenne relative (RME), sont les deux indicateurs les plus utilisés pour mesurer l'écart entre deux fonctions. Ces deux critères servent à

mesurer l'écart entre la la fonction réelle et son approchée en un ensemble de n points d'échantillonnage.

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2} \quad (4.34)$$

$$RME = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{y_i - \hat{y}_i}{y_i} \quad (4.35)$$

L'erreur maximum absolue (MAE) donne une mesure de précision locale, c'est-à-dire qu'elle indique s'il existe une erreur importante dans une zone de l'espace de conception.

$$MAE = \max_{i \in [1, n]} |y_i(x) - \hat{y}_i(x)| \quad (4.36)$$

Au sens de ces critères, plus leur valeur est faible, plus le modèle approché est précis.

4.6.1.2 Coefficient de corrélation linéaire R^2

Le coefficient de corrélation linéaire de Bravais-Pearson (R^2) traduit une dépendance linéaire entre deux variables en n points d'échantillonnage. C'est une mesure de la capacité du métamodèle à saisir la variabilité dans l'ensemble de données.

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i(x) - \hat{y}_i(x))^2}{\sum_{i=1}^n (y_i(x) - \bar{y}_i(x))^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i(x) - \bar{y}_i(x))^2}{\sum_{i=1}^n (y_i(x) - \bar{y}_i(x))^2} \quad (4.37)$$

où n est le nombre de points de conception et \bar{y}_i , \hat{y}_i et y_i représentent la réponse moyenne, prédite et réelle respectivement. Au sens de ce critère, plus la valeur R^2 est élevée plus le modèle réduit est précis avec $R^2 \in [0,1]$.

4.6.2 Validation croisée

Une autre façon d'évaluer la qualité d'un métamodèle et de le comparer à d'autres modèles s'appelle la validation croisée (CV) [117–119], dans laquelle le même ensemble de données est utilisé pour l'ajustement et la validation du modèle. Lorsque le temps de simulation est long et que les données disponibles sont limitées, il peut être souhaitable d'utiliser l'ensemble de données complet pour ajuster les métamodèles plutôt que de réduire potentiellement la précision en

laissant une partie de l'ensemble pour validation. Dans le '**p-fold CV**', l'ensemble de données de n paires de données d'entrée-sortie est divisé en p sous-ensembles différents. Le métamodèle est alors ajusté p fois, en omettant chaque fois l'un des sous-ensembles. Le sous-ensemble omis est utilisé pour évaluer les mesures d'erreur d'intérêt. Une variation de cette méthode est le '**leave-k-out CV**', dans lequel tous les $\binom{n}{k}$ sous-ensembles possibles de tailles k sont omis, et le métamodèle est ajusté à l'ensemble restant. Chaque fois, les mesures d'erreur pertinentes sont évaluées aux points omis. Cette approche est plus coûteuse que le '**p-fold CV**'. Cependant, pour le cas spécial où $k = 1$, appelé '**leave-one-out CV**', une estimation de l'erreur de prédiction peut être calculée pour certains métamodèles, comme par exemple; régression polynomiale, krigeage et RBF. L'erreur de généralisation, c'est-à-dire l'erreur de prédiction, pour un calcul de '**leave-one-out CV**' lorsque l'erreur est décrite par le MSE, peut être représentée par:

$$MSE_{LOOCV} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e_i^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i(x) - \hat{y}_{(-i)}(x))^2 \quad (4.38)$$

où $\hat{y}_{(-i)}(x)$ représente la prédiction en x en utilisant le métamodèle construit à partir de tous les points d'échantillonnage sauf (x, y) [104].

4.7 Analyse d'incertitudes basée sur des modèles de substitution pour les problèmes vibro-acoustiques

Dans la méthode proposée, la simulation déterministe par la méthode des éléments finis est utilisée pour obtenir la réponse caractéristique aux points générés en utilisant l'échantillonnage hypercube latin (LHS), ensuite le métamodèle est utilisé pour illustrer la relation entre les entrées (points de conception) et les sorties (réponses), et enfin l'analyse d'incertitudes est effectuée en utilisant la méthode Monte Carlo basée sur le modèle de substitution construit. Dans cette section, la faisabilité de la méthodologie proposée pour l'analyse d'incertitudes basée sur le modèle de substitution est appliquée à un exemple vibro-acoustique.

4.7.1 Simulation déterministe par la méthode éléments finis

Le modèle déterministe consiste en deux plaques 1 et 2 flexibles en aluminium d'épaisseur $t_1 = 2mm$ et $t_2 = 4mm$ comme le montre la figure 4.6 [120]. Ces plaques sont imposées

sur la surface droite et sur la surface supérieure de la cavité acoustique, respectivement. Les surfaces restantes de la cavité acoustique sont parfaitement rigides et le système composé de plaques flexibles et de cavité acoustique présente un problème structural-acoustique couplé. La simulation numérique de la réponse vibro-acoustique est réalisée à l'aide du logiciel commercial ANSYS. En ce qui concerne la discrétisation du fluide interne et des plaques, des éléments 3000 et 200 sont adoptés respectivement pour le fluide et la structure. Les éléments fluides internes sont des éléments 3D délimités par 6 faces, ayant 8 nœuds avec un degré de liberté par nœud: la pression acoustique. Les éléments de la structure sont des éléments coques à 4 nœuds avec 6 degrés de liberté par nœud: 3 translations dans les directions nodale x , y et z et 3 rotations autour du nœud dans les directions nodale x , y et z (voir figure 4.7). Les conditions aux limites adoptées étaient l'interaction fluide-structure dans tous les nœuds libres de la structure. Tous les nœuds à la frontière des plaques sont contraints.

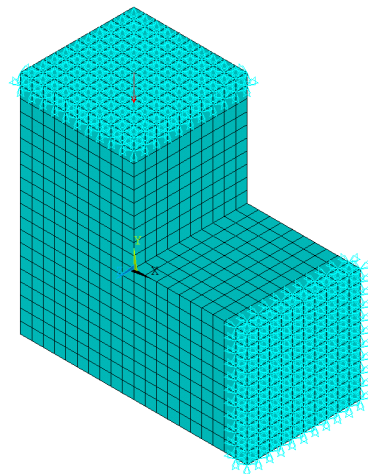
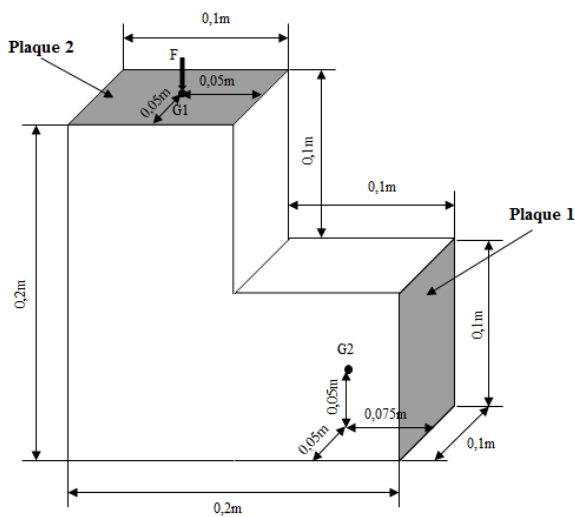


Figure 4.6: Modèle structurel-acoustique Figure 4.7: Discrétisation par éléments finis du modèle structurel-acoustique

L'analyse par éléments finis (FEA) est utilisée pour prédire le niveau de pression acoustique (SPL) au point G2 comme indiqué sur la figure 4.8.

4.7.2 Analyse d'incertitude basée sur le métamodèle

Dans cet exemple, les paramètres de matériaux (élasticité et densité) et les épaisseurs des plaques d'aluminium sont pris comme des variables incertaines. Les caractéristiques probabilistes de ces variables sont listés dans le tableau 4.1.

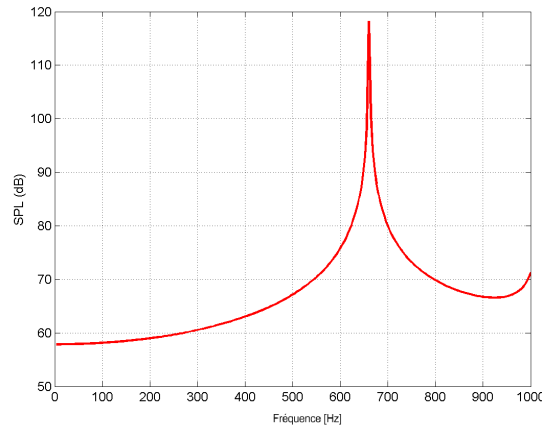


Figure 4.8: Niveau de pression acoustique à l'intérieur de la cavité

Variables	Valeurs moyennes	Cov	Distributions
Module d'Young E (Pa)	$2.1e^{11}$	0.05	Normale
Densité ρ (kg/m^3)	7850	0.05	Normale
t_1 (mm)	4	0.02	Uniforme
t_2 (mm)	2	0.02	Uniforme

Tableau 4.1: Caractéristiques des variables aléatoires

Le niveau de pression acoustique (SPL) à l'intérieur de la cavité est approximé en utilisant les métamodèles QRS (eq.4.3), Krigeage (eq.4.16) et RBF (eq.4.23). Ici, les fonctions multi-quadratiques inverses sont choisies comme les fonctions Kernel pour construire le métamodèle RBF. Les approximations de Krigeage sont construits en utilisant Matlab *Design and Analysis of Computer Experiments (DACE)* [121]. La fonction polynomiale de second ordre de tendance globale et la fonction exponentielle de corrélation sont adoptées. Les estimateurs sont construits à partir de 30 points d'échantillonnage hypercubes latins (LHS). 30 points d'échantillonnage supplémentaires sont générés afin de valider l'efficacité des modèles de substitution. Les simulations par éléments finis (FES) sont répétées en prenant les données d'entraînement (tableau 4.1) comme des entrées. Les 30 simulations de FES utilisant les points LHS sont implémentées en interfonctionnement avec MATLAB et ANSYS. Après avoir généré les données d'échantillonnage, le modèle de substitution peut être construit. Il est utilisé pour approcher la relation entre la sortie (SPL) et ses entrées (E, ρ, t_1, t_2).

L'efficacité des trois types de méta-modèles est validée par leur RMSE (eq.4.34), RME (eq.4.35) et MAE (eq.4.36). Les résultats de la mesure d'erreur des métamodèles sont présentés dans le

tableau 4.2. Un résultat plus intuitif est montré par la validation croisée (CV) dans les figures 4.9 à 4.11.

Métamodèles	Mesures d'erreur		
	MAE	RME	RMSE
QRS	10.202	0.089	7.746
RBF	0.107	$4.55e^{-4}$	0.268
Krigeage	0.433	0.003	0.002

Tableau 4.2: Comparaison de l'efficacité des métamodèles

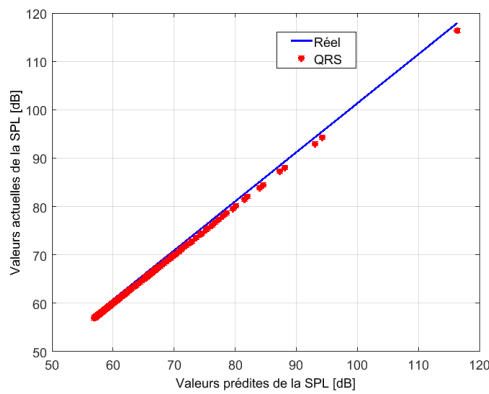


Figure 4.9: Validation croisée avec QRS

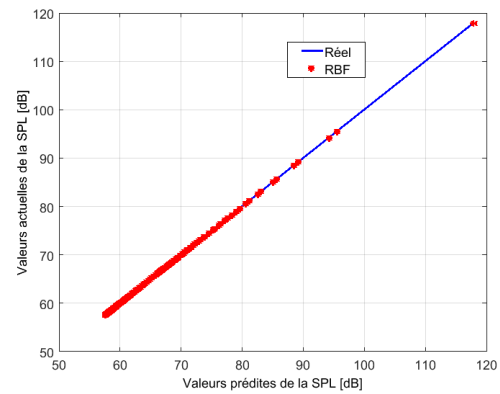


Figure 4.10: Validation croisée avec RBF

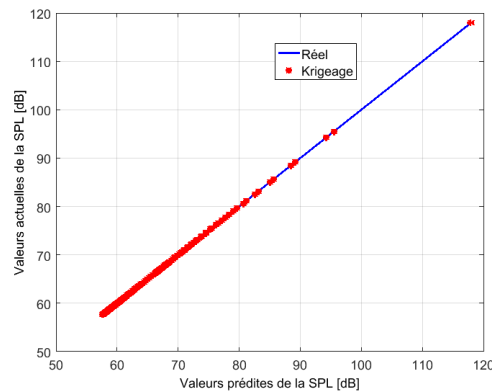


Figure 4.11: Validation croisée avec Krigeage

Les résultats montrent que le prédicteur QRS ne fournit pas une approximation du modèle original avec une grande précision. Puisque le modèle RBF est extrêmement lié au choix de la fonction de Kernel, nous pouvons conclure que le Krigeage fournit une bien meilleure approximation que les autres estimateurs. Par conséquent, les modèles de Krigeage sont utilisés dans la simulation de Monte Carlo pour l'analyse d'incertitudes. Ainsi, un ensemble d'échantillon-

nage avec le nombre de $N = 10^6$ pour les variables aléatoires, présentées dans le tableau 4.1 est généré, puis le MCS est effectué en utilisant les modèles de Krigeage. La valeur moyenne et l'écart-type du niveau de pression acoustique (SPL) sont présentés respectivement dans les figures 4.12 et 4.13.

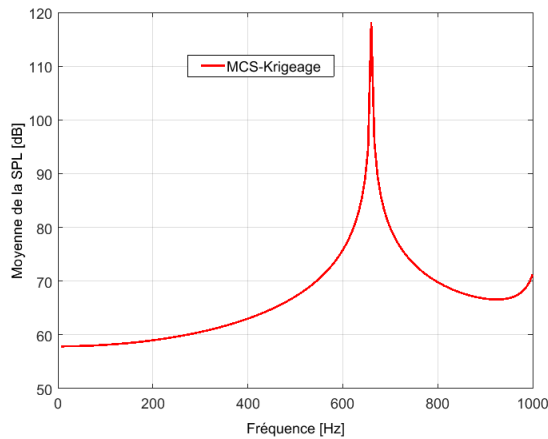


Figure 4.12: Valeure moyenne de la SPL

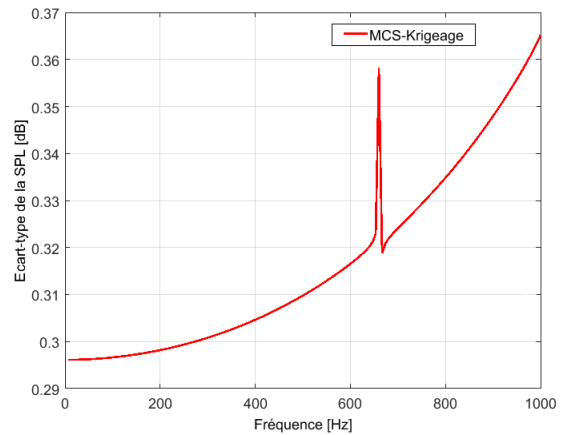


Figure 4.13: Ecart type de la SPL

Il faut noter que le temps de calcul FES déterministes pour un échantillonnage est d'environ 3 min. Donc, si l'analyse d'incertitudes est réalisée en utilisant les simulations de Monte Carlo basées sur FES, le temps de calcul sera pris environ 3×10^6 min. Les MCS basées sur les modèles de Krigeage réduisent fortement le coût de calcul (environ 27s). En d'autres termes, la méthode proposée utilisant MCS basées sur le modèle de substitution est plus efficace que la méthode classique utilisant les FES déterministes.

4.8 Conclusion

Les méthodes de métamodélisation sont devenues indispensables dans l'ingénierie moderne vu qu'elles réduisent le coût de calcul des problèmes complexe. Ce chapitre présente une idée sur les théories sur lesquelles sont basées les techniques permettant l'approximation des systèmes complexes '*les modèles de substitution*'. Des mesures d'efficacité de ces métamodèles sont présentés pour vérifier leur capacité à estimer le modèle mécanique réel. A la fin de ce chapitre, la méthode d'analyse d'incertitude basée sur les modèles de substitution est appliquée dans des modèles vibro-acoustiques. L'approche proposée consiste à combiner la simulation par éléments finis (FES), les techniques de métamodélisation et les simulations de Monte Carlo

(MCS). Pour approcher la relation entre la réponse (sortie) et les variables de conception (entrées), les modèles QRS, RBF et Krigeage sont utilisés pour construire l'estimation du modèle original. D'après les résultats des mesures d'erreur et de la validation croisée (CV), les modèles de Krigeage sont les plus précis et adaptés dans les systèmes acoustiques-structurels couplés. Les résultats montrent également que la méthode proposée est beaucoup plus facile et rapide à mettre en oeuvre pour des problèmes compliqués, tels que les systèmes vibro-acoustiques industriels, que les simulations de Monte Carlo traditionnelles avec la méthode des éléments finis.

Conclusions et perspectives

L'objectif principal de cette thèse est le développement des outils analytiques et numériques permettant la quantification et la propagation d'incertitudes des systèmes vibro-acoustiques dans le cadre d'interaction fluide-structure et introduire la fiabilité mécanique dans l'optimisation de conception pour assurer la robustesse et la fiabilité de la conception optimale. Ce travail a été réalisé en collaboration entre le *Laboratoire de Mécanique de Normandie (LMN)* de l'INSA de Rouen et le *Laboratoire de recherche de Mécanique, Modélisation et Production (LA2MP)* de l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Sfax en tant que thèse en cotutelle internationale.

Nous avons d'abord modélisé le système vibro-acoustique par un modèle numérique déterministe. Pour cette construction, on a utilisé les méthodes numériques existantes qui sont utilisées par l'industrie. Dans ces méthodes, le problème vibro-acoustique est formulé dans le domaine fréquentiel et en terme de champ de déplacement pour la structure et de champ de pression pour la cavité acoustique. Le problème a été traité pour la structure, pour la cavité acoustique interne séparément, puis pour le système vibro-acoustique couplé. Pour chacun des trois problèmes, on introduit le problème aux limites, puis sa formulation faible et finalement sa discrétisation par la méthode des éléments finis afin d'obtenir les équations matricielles du système vibro-acoustique couplé.

Par la suite, nous avons effectué la modélisation probabiliste des incertitudes en utilisant l'approche robuste basée sur le chaos polynômial généralisé. Cette approche a été validée par la méthode référentielle de Monte Carlo sur des exemples vibro-acoustiques. En fait, les approches de quantification des incertitudes sont basées sur des formalismes différents dans la façon d'incorporer les incertitudes, c'est la deuxième étape considérée dans cette thèse. L'approche probabiliste choisie est basée sur une caractérisation des incertitudes par des modèles stochastiques. La simulation de Monte Carlo est couramment utilisée puisqu'elle garanti de très bon résultats. L'un des principaux avantages de cette technique est qu'elle peut s'appliquer à tous les systèmes linéaires ou non linéaires. Cependant, la simulation de Monte Carlo pose de sérieux problèmes

puisqu'elle nécessite beaucoup de tirages pour assurer une précision raisonnable. C'est pour cette raison qu'on a choisi le chaos polynômial généralisé pour traiter les incertitudes dans des exemples vibro-acoustiques.

L'objectif de l'étape suivante, était de développer une approche efficace qui nous permet d'obtenir la meilleure conception des systèmes vibro-acoustiques avec la nécessité de garantir le niveau de fiabilité cible. Pour cela, les méthodes RBDO telles que la méthode OSF et la méthode hybride ont été appliquées tout en garantissant un niveau de fiabilité donné, comparées avec la méthode DDO. Une nouvelle méthode appelée Robust Hybrid Method (RHM) a été appliquée pour forcer la procédure d'optimisation d'avoir une solution dans la zone de sureté. Tout d'abord, deux applications qui tiennent en compte la présence d'incertitudes ont été considérées. L'approche proposée consiste à coupler la méthode OSF avec le chaos polynômial généralisé pour assurer la robustesse du système pendant l'optimisation. Par la suite, un exemple valorisant la nouvelle méthode RHM est étudié. Il s'agit de l'optimisation fiabiliste d'un silencieux d'expansion simple. Les résultats montrent bien que les nouvelles conceptions présentent bien des meilleurs performances que les modèles initiaux.

La dernière étape dans cette thèse consiste à construire des modèles de substitution du système vibro-acoustique original. L'approximation peut fournir une réponse en un point quelconque de l'espace de conception en un temps très réduit par rapport à celui nécessaire au simulateur mécanique. À ce titre, notre objectif était de construire une approximation permettant d'assurer une bonne représentativité du modèle réel obtenu par le simulateur, c'est-à-dire une analyse valide du problème réel. Pour valider notre travail, un exemple d'application vibro-acoustique est traité par différentes techniques de méta-modélisation. D'après les résultats des mesures d'erreur et de la validation croisée (CV), il a été démontré que les modèles de Krigeage sont les plus précis et adaptés dans les systèmes acoustiques-structuraux couplés. Les résultats montrent également que la méthode proposée est beaucoup plus facile et rapide à mettre en oeuvre pour des problèmes compliqués, tels que les systèmes vibro-acoustiques industriels.

De nombreuses perspectives sont envisageables à la suite de ce travail:

- Introduire la méthode de réduction de modèle en interaction fluide-structure dans les problèmes vibro-acoustiques pour réduire le nombre de degré de liberté du système couplé.
- Passer à l'optimisation multi-objectif de conception pour traiter des problèmes vibro-acoustiques complexes qui présentent plusieurs fonctions objectif.

- Intégration des techniques de méta-modélisation dans la procédure d'optimisation fiable pour minimiser le temps de calcul.
- Appliquer les différentes méthodes proposées d'incertitudes, d'optimisation et de méta-modélisation sur des exemples industriels complexes.

Publications scientifiques

Ce travail de recherche a abouti aux publications scientifiques suivantes:

1. Articles

A1. K. Dammak, S. Koubaa, A. El hami, L. Walha, et M. Haddar. **Numerical modelling of vibro-acoustic problem in presence of uncertainty: Application to a vehicle cabin;** Applied Acoustics. 144: 113-123, 2019. DOI: 10.1016/j.apacoust.2017.06.001

A2. K. Dammak, A. El hami, S. Koubaa, L. Walha, and M. Haddar. **Reliability based design optimization of coupled acoustic-structure system using generalized polynomial chaos;** International Journal of Mechanical Sciences. 134: 75-84, 2017. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2017.10.003

A3. Khalil Dammak, Ahmed Yaich, Abdelkhalak El Hami, Lassaad Walha, Mohamed Haddar. **An efficient optimization based on the robust hybrid method for the coupled acoustic-structural system;** Mechanics of Advanced Materials and Structures, 2018. DOI:10.1080/15376494.2018.1525629

A4. Khalil Dammak, Sana Koubaa, Abdelkhalak El Hami, Lassaad Walha, Mohamed Haddar. **Numerical modeling of uncertainty in acoustic propagation via generalized Polynomial Chaos;** Journal of Theoretical and Applied Mechanics. Avril, 2018

2. Communications

C1. K. Dammak, S. Koubaa, L. Walha, M. Haddar, A. El Hami. **Probabilistic approach of hydroforming process;** International Conference on Advanced Materials, Mechanics and Manufacturing (A3M'2016), Hammamet, 19-21 December 2016, Tunisia.

C2. K. Dammak, S. Koubaa, L. Walha, M. Haddar, A. El Hami. **Vibro-acoustic analysis of a**

coupled rectangular cavity with a flexible plate in presence of uncertainties; 7ième Congrès International Conception et Modélisation des Systèmes Mécaniques (CMSM'2017), Hammamet, 27-29 Mars 2017, Tunisia.

C3. K. Dammak, A. El Hami, L. Walha, M. Haddar. Reliability based design optimization of double wall panels including a visco-thermal air; The Second International Conference on Acoustics and Vibration (ICAV'2018) Mars 19-21, 2018, Hammamet Tunisia.

C4. K. Dammak, A. El Hami, F. Djemal, L. Walha, M. Haddar. Reliability based design optimization of transmission loss of a simple expansion chamber muffler; 7th International Symposium on Aircraft Materials (ACMA2018) April 24-26, 2018, Compiègne, France.

Bibliographie

- [1] R. Morand, H. J.-P.; Ohayon. Fluid structure interaction. applied numerical methods. chichester etc., john wiley & sons; paris etc., masson 1995. viii, 212 pp., f 320,-. isbn 2-225-84682-0. *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 76(7):376–376, 1995. doi: 10.1002/zamm.19960760705.
- [2] Roger Ohayon and Christian Soize. *Structural Acoustics and Vibration. Mechanical Models, Variational Formulations and Discretization*. Academic Press, San Diego, USA, 1998.
- [3] François Axisa. *Modélisation des systèmes mécaniques. Interactions fluide-structure*. Hermès Science publ., Paris, 2001.
- [4] J.F. Sigrist. *Interaction fluide-structure: analyse vibratoire par éléments finis*. Les cours de l'ENSTA Bretagne. Ellipses, 2011. ISBN 9782729870829.
- [5] P.J. Shorter and R.S. Langley. Vibro-acoustic analysis of complex systems. journal of sound and vibration. *Journal of Sound and Vibration*, 288:669–699, 12 2005.
- [6] Abdelkhalak El-Hami, Dan Borza, and Eduardo Cursi. Vibroacoustic analysis of cyclic structures by using dof's size reduction and holographic measurements. *Shock and Vibration*, 13:355–366, 12 2006.
- [7] Mohamed Mansouri. *Mechanical-reliability study and reduction model of vibro-acoustic problems at random parameters*. Theses, INSA de Rouen, April 2013.
- [8] Christian Soize. A nonparametric model of random uncertainties for reduced matrix models in structural dynamics. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 15(3):277–294, 2000. doi: 10.1016/S0266-8920(99)00028-4.
- [9] Hamid Chebli and Christian Soize. Experimental validation of a nonparametric probabilistic model of nonhomogeneous uncertainties for dynamical systems. *The Journal of the*

- Acoustical Society of America*, 115(2):697–705, 2004. doi: 10.1121/1.1639335.
- [10] K. Dammak, S. Koubaa, A. El Hami, L. Walha, and M. Haddar. Numerical modelling of vibro-acoustic problem in presence of uncertainty: Application to a vehicle cabin. *Applied Acoustics*, 144:113–123, 2019. ISSN 0003-682X. doi: <https://doi.org/10.1016/j.apacoust.2017.06.001>.
- [11] K. Dammak, A. El Hami, S. Koubaa, L. Walha, and M. Haddar. Reliability based design optimization of coupled acoustic-structure system using generalized polynomial chaos. *International Journal of Mechanical Sciences*, 134:75 – 84, 2017. ISSN 0020-7403. doi: <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2017.10.003>.
- [12] G. Kharmanda, A. Mohamed, and M. Lemaire. Efficient reliability-based design optimization using a hybrid space with application to finite element analysis. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 24(3):233–245, Sep 2002. doi: 10.1007/s00158-002-0233-z.
- [13] G. Kharmanda, N. Olhoff, and A. El-Hami. Optimum values of structural safety factors for a predefined reliability level with extension to multiple limit states. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 27(6):421–434, Jul 2004. doi: 10.1007/s00158-004-0405-0.
- [14] Raymond H. Myers, Douglas C. Montgomery, and Anderson-Cook Christine M. *Response Surface Methodology: Process and Product in Optimization Using Designed Experiments*. John Wiley & Sons, Inc., New York, NY, USA, 3rd edition, 2008.
- [15] C. Lesueur. *Rayonnement acoustique des structures, vibroacoustique, interactions fluide-structures*. Eyrolles, Paris, 1988.
- [16] WANG XIAODONG and BATHE KLAUS-JÜRGEN. Displacement/pressure based mixed finite element formulations for acoustic fluid–structure interaction problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40(11):2001–2017, 1997. doi: 10.1002/(SICI)1097-0207(19970615)40:11<2001::AID-NME152>3.0.CO;2-W.
- [17] Robert. Dautray and J.-L. Lions. *Mathematical analysis and numerical methods for science and technology*. Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1992.
- [18] K.-J. Bathe. *Finite element procedures in engineering analysis*. Prentice-Hall, 1982. doi: 10.1002/nag.1610070412.
- [19] William Oberkampf, Jon Helton, and Kari Sentz. Mathematical representation of uncertainty. In *19th AIAA Applied Aerodynamics Conference*, page 1645, 2001.
- [20] R Moore. Interval arithmetic, 1966.

- [21] L.A. Zadeh. Fuzzy sets. *Information and Control*, 8(3):338 – 353, 1965. ISSN 0019-9958. doi: [https://doi.org/10.1016/S0019-9958\(65\)90241-X](https://doi.org/10.1016/S0019-9958(65)90241-X).
- [22] O. Didrit. *Analyse par intervalles pour l'automatique ; resolution globale et garantie de problemes non lineaires en robotique et en commande robuste*. Theses, Université de Parisud, UFR scientifique d'Orsay, 1997.
- [23] Olivier Dessombz. *Analyse dynamique de structures comportant des paramètres incertains*. Theses, Ecole centrale de Lyon, 2000.
- [24] Kyarash Shahriari. *Analyse de sûreté de procédés multi-modes par des méthodes à base d'intervalles*. Theses, Université Joseph Fourier, Mai 2007.
- [25] Nacim Meslem, Nacim Ramdani, and Yves Candau. Interval observers for uncertain non-linear systems. application to bioreactors. *IFAC Proceedings Volumes*, 41(2):9667–9672, 2008.
- [26] S. S. Rao and L. Berke. Analysis of uncertain structural systems using interval analysis. *AIAA Journal*, 35(4):727–735, 12 1997. ISSN 0001-1452.
- [27] Reuven Y. Rubinstein. *Simulation and the Monte Carlo Method*. John Wiley & Sons, Inc., New York, NY, USA, 1st edition, 1981. ISBN 0471089176.
- [28] George Fishman. *Monte Carlo: concepts, algorithms, and applications*. Springer Verlag, 1996.
- [29] Roger G Ghanem and Pol D Spanos. Stochastic finite element method: Response statistics. In *Stochastic finite elements: a spectral approach*, pages 101–119. Springer Verlag, 1991.
- [30] Norbert Wiener. The homogeneous chaos. *American Journal of Mathematics*, 60(4):897–936, 1938.
- [31] Bruno Sudret. *Uncertainty propagation and sensitivity analysis in mechanical models: Contributions to structural reliability and stochastic spectral methods*. Hdr, Université Blaise Pascal, 2007.
- [32] H. Cameron and W. Martin. The orthogonal development of non linear functionals in series of fourier-hermite functional. *Annals of Mathematics*, 48:385–392, 1947.
- [33] Richard Askey and James Arthur Wilson. *Some basic hypergeometric orthogonal polynomials that generalize Jacobi polynomials*. Providence, R.I., U.S.A. : American Mathematical Society, 1985. ISBN 0821823213.
- [34] D. Xiu and G. E. Karniadakis. The wiener-askey polynomial chaos for stochastic differential equations. *J.SCI.Comput*, 24:619–644, 2002.

- [35] Christian Soize and Roger Ghanem. Physical systems with random uncertainties: Chaos representations with arbitrary probability measure. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 26(2):395–410, 2004. doi: 10.1137/S1064827503424505.
- [36] Thierry Crestaux, Olivier Le Maître, and Jean-Marc Martinez. Polynomial chaos expansion for sensitivity analysis. *Reliability Engineering & System Safety*, 94(7):1161 – 1172, 2009. ISSN 0951-8320. doi: <https://doi.org/10.1016/j.ress.2008.10.008>.
- [37] A. Guerine, A. El Hami, L. Walha, T. Fakhfakh, and M. Haddar. A polynomial chaos method for the analysis of the dynamic behavior of uncertain gear friction system. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 59:76 – 84, 2016. ISSN 0997-7538. doi: <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2016.03.007>.
- [38] Ahmed Guerine, Abdelkhalak El Hami, Lassaad Walha, Tahar Fakhfakh, and Mohamed Haddar. Dynamic response of a spur gear system with uncertain parameters. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 54(3), 2016.
- [39] Norme NF X 60-500. *Terminologie relative à la fiabilité, maintenabilité, disponibilité*. Afnor, 1988.
- [40] Seifedine Kadry. *Couplage éléments finis et méthode de transformation probabiliste*. Theses, Université Blaise Pascal - Clermont-Ferrand II, May 2007.
- [41] Hasofer AM and Niels Lind. An exact and invariant first order reliability format. *Journal of Engineering Mechanics*, 100:111–121, 1974.
- [42] Bernd Fiessler, H.J. Neumann, and Rudiger Rackwitz. Quadratic limit states in structural reliability. *ASME*, 105(04):669–670, 1979.
- [43] Lyes. Nechak. *Approche robuste du comportement dynamique des systèmes nonlinéaire. Application aux systèmes frottants*. Theses, Université de Haute-Alsace, Mar 2011.
- [44] I.M. Babuska, R. Tempone, and G.E. Zouraris. Galerkin finite element approximation of stochastic elliptic partial differential equations. *SIAM Journal of Scientific Computing*, 24(2):619–644, 2004.
- [45] Trinh Minh Hoang. *Etude du comportement dynamique d'un système d'embrayage en présence d'incertitudes*. Theses, Université de Haute-Alsace, Mar 2015.
- [46] Y F. Cheung and W G. Jin. Solution of helmholtz equation by trefftz method. *Int Journal for numerical methods in engineering*, 32:63–78, 1991.
- [47] D M. Nark, F. Farassat, D. S Pope, and V. Vatsa. The development of the ducted fan

- noise propagation and radiation code cduct-larc. *American Institute of Aeronautics and Astronautics*, 2003.
- [48] D M. Nark, W R. Watson, and M G. Jones. An investigation of two acoustic propagation codes for three-dimensional geometries. *American Institute of Aeronautics and Astronautics*, 2005.
- [49] M. Taktak, M A. Majdoub, M. Bentahar, and M. Haddar. Numerical modelling of the acoustic pressure inside an axisymmetric lined flow duct. *Archives of Acoustics*, 37:151–160, 2012.
- [50] J H. Lan. Validation of 3d acoustic propagation code with analytical and experimental results. *11th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, 2005.
- [51] E F. Lins and F A. Rochinha. Analysis of uncertainty propagation in acoustics through a sparse grid collocation scheme. *20th International Congress of Mechanical Engineering*, 2009.
- [52] Y. Kim and P A. Nelson. Estimation of acoustic source strength with in a cylindrical duct by inverse methods. *Journal of sound and vibration*, 275:391–413, 2004.
- [53] M. Taktak, H. Jrad, C. Karra, M. Bentahar, and M. Haddar. Numerical modeling of the acoustic propagation in a three-dimensional wave guide in the presence of flow. *ACTA Acoustica United with Acoustica*, 97:354–465, 2011.
- [54] M. Taktak. *Mesure de la matrice de diffusion d'un tronçon traité « cylindrique » recouvert par un matériaux : application à la mesure de son efficacité et à la détermination de son impédance homogénéisée*. PhD thesis, L'Université de Technologie de Compiègne, 2008.
- [55] A. Blazejewski. Modal analysis application in passive sound level control inside bounded space in steady state. In *12th Conference of dynamical systems theory and applications*, pages 409–420. Dynamical Systems-Application, 2013.
- [56] A. Blazejewski, P. Koziol, and M. Luczak. Acoustical analysis of enclosure as initial approach to vehicle induced noise analysis comparatively using stft and wavelets. *Archives of Acoustics*, 39:385–394, 2014.
- [57] M. Meissner. Influence of wall absorption on low-frequency dependence of reverberation time in room of irregular shape. *Applied Acoustics*, 69:583–590, 2008.
- [58] A. Kessentini, M. Taktak, M A. Ben Souf, O. Bareille, M N. Ichchou, and M. Haddar. Computation of the scattering matrix of guided acoustical propagation by the wave finite element approach. *Applied Acoustics*, 2015.

- [59] A. Coroian and I. Lupea. Vibro–acoustic analysis of passenger compartmentns. *Applied Mathematics and Mechanics*, 4(155):118–124, 2012.
- [60] R. Fletcher. *Practical methods of optimization*. John Wiley & Sons, New York, USA, 1987.
- [61] Michaël Bruyneel, Jean-Charles Craveur, and Pierre Gourmelen. *Optimisation de structures mécaniques: méthodes numériques et éléments finis*. DUNOD, 2014.
- [62] I. Kusano, A. Baldomir, J. A. Jurado, and S. Hernández. Reliability based design optimization of long-span bridges considering flutter. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 135:149–162, 2014.
- [63] A. Makhloufi, Y. Aoues, and A. El Hami. Reliability based design optimization of wire bonding in power microelectronic devices. *Microsystem Technologies*, 22:2737–2748, 2016.
- [64] Rabii El Maani. *Étude basée sur l’optimisation fiabiliste en aérodynamique*. Theses, INSA de Rouen, Oct 2016.
- [65] G. Kharmanda and A. El Hami. *Reliability in Biomechanics*. Wiley & ISTE, UK, 2016.
- [66] G. Kharmanda and A. El Hami. *iomechanics: Optimization, Uncertainties and Reliability*. Wiley & ISTE, UK, 2017.
- [67] M.A. Bhatti. *Practical Optimization Methods: With Mathematica® Applications*. Springer, New York, 2000. ISBN 9780387986319.
- [68] V. T. T Nguyen. *Introduction to Optimum design*. Elsevier, California, 2nd edition, 01 2004.
- [69] K. Lange. *Optimization*. Springer Texts in Statistics. Springer, New York, 2004. ISBN 9780387203324.
- [70] M. Allen and K. Maute. Reliability-based design optimization of aeroelastic structures. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 27(4):228–242, Jun 2004. ISSN 1615-1488. doi: 10.1007/s00158-004-0384-1.
- [71] Younes Aoues and Alaa Chateaneuf. Benchmark study of numerical methods for reliability-based design optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 41(2):277–294, Mar 2010. ISSN 1615-1488. doi: 10.1007/s00158-009-0412-2.
- [72] G Kharmanda, A Mohamed, and M Lemaire. New hybrid formulation for reliability-based optimization of structures. In *The Fourth World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization (WCSMO-4)*, 2001.
- [73] G Kharmanda, S Sharabatey, H Ibrahim, A Makhloufi, and A Elhami. Reliability-based design optimization using semi-numerical strategies for structural engineering applications. *International Journal of CAD/CAM*, 9(1):1–16, 2009.

- [74] Ghias Kharmanda. Numerical and semi-numerical methods for reliability-based design optimization. *Structural Design Optimization Considering Uncertainties: Structures & Infrastructures Book, Vol. 1, Series, Series Editor: Dan M. Frangopol*, page 189, 2008.
- [75] G Kharmanda, Mohamed Haisam Ibrahim, A Abo Al-Kheer, Fabrice Guerin, and Abdelkhalak El-Hami. Reliability-based design optimization of shank chisel plough using optimum safety factor strategy. *Computers and electronics in agriculture*, 109:162–171, 2014.
- [76] A. Yaich, G. Kharmanda, Abdelkhalak El Hami, L. Walha, and M. Haddar. Reliability based design optimization for multiaxial fatigue damage analysis using robust hybrid method. *Journal of Mechanics*, page 16, 07 2017. ISSN 1727-7191.
- [77] Dan M. Frangopol and Samer Hendawi. Incorporation of corrosion effects in reliability-based optimization of composite hybrid plate girders. *Structural Safety*, 16(1):145 – 169, 1994. ISSN 0167-4730. doi: [https://doi.org/10.1016/0167-4730\(94\)00032-L](https://doi.org/10.1016/0167-4730(94)00032-L). Reliability-based Structural System Assessment, Design and Optimization.
- [78] Samer A. Barakat, Abdallah I.Husein Malkawi, and Ra'ed H. Tahat. Reliability-based optimization of laterally loaded piles. *Structural Safety*, 21(1):45 – 64, 1999. ISSN 0167-4730. doi: [https://doi.org/10.1016/S0167-4730\(99\)00004-1](https://doi.org/10.1016/S0167-4730(99)00004-1).
- [79] M. Lemaire. *Fiabilité des structures*. HERMES-LAVOISIER, Paris, 2005.
- [80] G. Kharmanda and N. Olhoff. Extension of optimum safety factor method to nonlinear reliability-based design optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 34(5):367–380, Nov 2007. ISSN 1615-1488. doi: 10.1007/s00158-007-0107-5.
- [81] Manchar Lal Munjal. *Acoustics of ducts and mufflers*. John Wiley & Sons, 2014.
- [82] I.L. Vér and L.L. Beranek. *Noise and vibration control engineering: principles and applications*. John Wiley & Sons, 2006. ISBN 9780471449423.
- [83] Alexander Forrester, Andras Sobester, Andy Keane, and Wiley InterScience (Online service). *Engineering design via surrogate modelling : a practical guide*. Hoboken, N.J. : Wiley ; Chichester : John Wiley [distributor], 2008. ISBN 9780470770795 (ebk.). Description based upon print version of record.
- [84] Timothy W Simpson, JD Poplinski, Patrick N Koch, and Janet K Allen. Metamodels for computer-based engineering design: survey and recommendations. *Engineering with computers*, 17(2):129–150, 2001.
- [85] Nestor V Queipo, Raphael T Haftka, Wei Shyy, Tushar Goel, Rajkumar Vaidyanathan,

- and P Kevin Tucker. Surrogate-based analysis and optimization. *Progress in aerospace sciences*, 41(1):1–28, 2005.
- [86] Genichi Taguchi and Asian Productivity Organization. *Introduction to quality engineering: designing quality into products and processes*. Tokyo: Asian Productivity Organization, 1986. ISBN 9283310837 (casebound). Translation of Sekkeisha no tame no hinshitsu kanri. Cf. verso t.p.
- [87] Raymond H. Myers and Douglas C. Montgomery. *Response Surface Methodology: Process and Product in Optimization Using Designed Experiments*. John Wiley & Sons, Inc., New York, USA, 1st edition, 1995. ISBN 0471581003.
- [88] M. D. McKay, R. J. Beckman, and W. J. Conover. Comparison of three methods for selecting values of input variables in the analysis of output from a computer code. *Technometrics*, 21(2):239–245, 1979. doi: 10.1080/00401706.1979.10489755.
- [89] Felipe AC Viana. Things you wanted to know about the latin hypercube design and were afraid to ask. In *10th World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization*, Orlando, Florida, USA, 2013.
- [90] Boxin Tang. Orthogonal array-based latin hypercubes. *Journal of the American Statistical Association*, 88(424):1392–1397, 1993. doi: 10.1080/01621459.1993.10476423.
- [91] Art B. Owen. Controlling correlations in latin hypercube samples. *Journal of the American Statistical Association*, 89(428):1517–1522, 1994. doi: 10.1080/01621459.1994.10476891.
- [92] Boxin Tang. Selecting latin hypercubes using correlation criteria. *Statistica Sinica*, pages 965–977, 1998.
- [93] Jeong-Soo Park. Optimal latin-hypercube designs for computer experiments. *Journal of statistical planning and inference*, 39(1):95–111, 1994.
- [94] B. Beachkofski and R. Grandhi. Improved distributed hypercube sampling. In *43rd Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*, Reston, VA, 2002. American Institute of Aeronautics and Astronautics.
- [95] George EP Box and Norman R Draper. *Empirical model-building and response surfaces*. John Wiley & Sons, 1987.
- [96] Gerhard Venter, Raphael T Haftka, and James H Starnes. Construction of response surface approximations for design optimization. *AIAA journal*, 36(12):2242–2249, 1998.
- [97] Peter Lancaster and Kes Salkauskas. Surfaces generated by moving least squares methods. *Mathematics of computation*, 37(155):141–158, 1981.

- [98] Peter Lancaster and Kestutis Salkauskas. *Curve and surface fitting: an introduction*. Academic press, 1986.
- [99] Piotr Breitkopf, Hakim Naceur, Alain Rassineux, and Pierre Villon. Moving least squares response surface approximation: Formulation and metal forming applications. *Computers & Structures*, 83(17-18):1411–1428, 2005.
- [100] KK Choi, Byeng D Youn, and Ren-Jye Yang. Moving least square method for reliability-based design optimization. In *Proceedings of the 4th World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization*, Dalian, China, 2001.
- [101] Vassili V Toropov, Uwe Schramm, Atul Sahai, Royston D Jones, and Tayeb Zeguer. Design optimization and stochastic analysis based on the moving least squares method. In *6th World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization*, Rio de Janeiro, Brasil., 2005.
- [102] Daniel G Krige. A statistical approach to some basic mine valuation problems on the witwatersrand. *Journal of the Southern African Institute of Mining and Metallurgy*, 52(6): 119–139, 1951.
- [103] Thomas J Santner, Brian J Williams, and William I Notz. *The design and analysis of computer experiments*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [104] Alexander IJ Forrester and Andy J Keane. Recent advances in surrogate-based optimization. *Progress in Aerospace Sciences*, 45(1-3):50–79, 2009.
- [105] Peter K Kitanidis. Statistical estimation of polynomial generalized covariance functions and hydrologic applications. *Water Resources Research*, 19(4):909–921, 1983.
- [106] Kanti V Mardia and Roger J Marshall. Maximum likelihood estimation of models for residual covariance in spatial regression. *Biometrika*, 71(1):135–146, 1984.
- [107] Richard H Jones and Aldo V Vecchia. Fitting continuous arma models to unequally spaced spatial data. *Journal of the American Statistical Association*, 88(423):947–954, 1993.
- [108] Rolland L Hardy. Multiquadric equations of topography and other irregular surfaces. *Journal of geophysical research*, 76(8):1905–1915, 1971.
- [109] Jean Duchon. Splines minimizing rotation-invariant semi-norms in sobolev spaces. In *Constructive theory of functions of several variables*, pages 85–100. Springer, 1977.
- [110] Michael James David Powell. *Approximation theory and methods*. Cambridge university press, 1981.

- [111] Nira Dyn, David Levin, and Samuel Rippa. Numerical procedures for surface fitting of scattered data by radial functions. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 7(2):639–659, 1986.
- [112] Mark N Gibbs. *Bayesian Gaussian processes for regression and classification*. Theses, University of Cambridge, 1997.
- [113] András Sóbester, Stephen J Leary, and Andy J Keane. On the design of optimization strategies based on global response surface approximation models. *Journal of Global Optimization*, 33(1):31–59, 2005.
- [114] Vladimir N Vapnik. *The Nature of Statistical Learning Theory*. Springer-Verlag, New York, 1995.
- [115] Steve R Gunn et al. Support vector machines for classification and regression. Technical report, University of Southampton, 1998.
- [116] Alex J Smola and Bernhard Scholkopf. A tutorial on support vector regression. *Statistics and computing*, 14(3):199–222, 2004.
- [117] Mervyn Stone. Cross-validatory choice and assessment of statistical predictions. *Journal of the royal statistical society. Series B (Methodological)*, pages 111–147, 1974.
- [118] Seymour Geisser. The predictive sample reuse method with applications. *Journal of the American statistical Association*, 70(350):320–328, 1975.
- [119] Martin Meckesheimer, Andrew J Booker, Russell R Barton, and Timothy W Simpson. Computationally inexpensive metamodel assessment strategies. *AIAA journal*, 40(10):2053–2060, 2002.
- [120] B. Xia, S. Yin, and D. Yu. A new random interval method for response analysis of structural–acoustic system with interval random variables. *Applied Acoustics*, 99:31–42, 2015.
- [121] HB. Nielsen, SN. Lophaven, J. Søndergaard, and A. Dace. A matlab kriging toolbox. Technical report, Technical University of Denmark, 2002.
- [122] G. Baillargeon. *Méthodes statistiques de l'ingénieur*, volume 1. Les Editions SMG, 1990. ISBN 9782890940383.
- [123] Milton Abramowitz and Irene A Stegun. *Handbook of mathematical functions: with formulas, graphs, and mathematical tables*, volume 55. Courier Corporation, 1964.
- [124] Jorge Nocedal and Stephen J Wright. Numerical optimization. 2000.

Annexe A

Notions fondamentales de la théorie des probabilités

L'ensemble des définitions énoncées dans cette section est issu de l'ouvrage de Baillargeon [122], et a été présenté aussi dans la thèse de Lyes Nechak [43].

A.1 Notions d'expérience et d'événements aléatoires

Définition A.1 : Une expérience aléatoire ε_x est un processus qu'on peut répéter aussi souvent que l'on veut sous des conditions fixées.

L'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire est caractérisé formellement par la notion de l'univers Ω . Son résultat ne peut, par contre, être prédit avec certitude.

Définition A.2 : A toute expérience aléatoire est liée la notion d'événement aléatoire ω qu'on définit comme un sous-ensemble de l'univers Ω correspondant à un énoncé d'une expérience aléatoire.

Définition A.3 : Deux événements ω_1 et ω_2 sont mutuellement exclusifs si dans le cas où ω_1 se produit, ω_2 ne se produit pas et vice versa.

Définition A.4 : Des événements sont collectivement exhaustifs si leur union donne Ω .

Définition A.5 : Une partition est un ensemble d'événements mutuellement exclusifs et collectivement exhaustifs.

A.1.1 Tribu des événements

L'ensemble de tous les événements possibles définit une tribu β (ou une σ -algèbre) sur Ω . Une tribu β se dit de toute partition de Ω vérifiant les propriétés suivante:

- $\beta \neq \emptyset$
- Si $\omega \in \beta$ alors son complémentaire $\bar{\omega} \in \beta$
- Si $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de ε_x alors $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \omega_n \in \beta$

A.1.2 Espace probabilisé

Définition A.6 : L'espace probabilisable lié à l'expérience ε_x est défini par le couple (Ω, β) où Ω est l'univers des résultats de ε_x et β la tribu des événements liés à ε_x .

Définition A.7 : Soit (Ω, β) un espace probabilisable. Toute application $\text{Pr} : \beta \mapsto [0, 1]$ qui vérifie les propriétés ci-dessous, définit la probabilité sur (Ω, β) .

- $\text{Pr}(\Omega) = 1$
- Pour toute suite $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'événements deux à deux incompatibles,

$$\text{Pr}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \omega_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \text{Pr}(\omega_n)$$

L'espace probabilisé est alors défini par le triplet $(\Omega, \beta, \text{Pr})$.

A.1.3 Probabilité conditionnelle, théorèmes de Bayes et des probabilités totales

Définition A.8 : Soit $(\Omega, \beta, \text{Pr})$ un espace probabilisé et soit $\omega_2 \in \beta$ un événement de probabilité non nulle. La probabilité conditionnelle sachant ω_2 est l'application $\text{Pr}(\cdot/\omega_2) : \beta \mapsto [0, 1]$ telle que,

$$\text{Pr}(\omega_1/\omega_2) = \frac{\text{Pr}(\omega_1 \cap \omega_2)}{\text{Pr}(\omega_2)}, \forall \omega_1 \in \beta \tag{A.1}$$

Lorsque la connaissance de la réalisation de l'événement ω_2 n'influe pas sur la probabilité que l'événement ω_1 se produise, les deux événements ω_1 et ω_2 sont indépendants, c'est-à-dire $\text{Pr}(\omega_1/\omega_2) = \text{Pr}(\omega_1)$. Par conséquent, en utilisant la formule de la probabilité conditionnelle, il advient:

$$\text{Pr}(\omega_1 \cap \omega_2) = \text{Pr}(\omega_2) \text{Pr}(\omega_1); \forall \omega_1, \omega_2 \in \beta \tag{A.2}$$

La première formule du théorème de Bayes est une application de la probabilité conditionnelle. Elle est donnée comme suit:

$$\Pr(\omega_1/\omega_2) = \frac{\Pr(\omega_1/\omega_2) \Pr(\omega_1)}{\Pr(\omega_2)}, \forall \omega_1, \omega_2 \in \beta \quad (\text{A.3})$$

Théorème A.1 (de la probabilité totale): Soit $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ une partition de Ω alors, quel que soit l'événement $\omega \in \beta$, sa probabilité est donnée par:

$$\Pr(\omega) = \sum_{k=1}^n \Pr(\omega/\omega_k) \Pr(\omega_k) \quad (\text{A.4})$$

La deuxième formule du théorème de Bayes est une conséquence du théorème de la probabilité totale. Ainsi,

$$\Pr(\omega_i/\omega) = \frac{\Pr(\omega/\omega_i) \Pr(\omega_i)}{\sum_{k=1}^n \Pr(\omega/\omega_k) \Pr(\omega_k)}; \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (\text{A.5})$$

A.2 Variable aléatoire

Définition A.9: Soient (Ω_1, β_1) et (Ω_2, β_2) deux espaces mesurables. Une application $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ est mesurable si l'image réciproque de la tribu β_2 est une sous-tribu de β_1 , c'est-à-dire $\forall \omega \in \beta_2, f^{-1}(\omega) \in \beta_1$.

Définition A.10: Soit (Ω, β, Pr) un espace probabilisé. Une variable aléatoire réelle est définie par toute application mesurable $\omega \rightarrow X(\omega)$ de (Ω, β, Pr) dans \mathbb{R} .

Définition A.11: La fonction de répartition d'une variable aléatoire X de support I_X est une application $F_X : I_X \subset \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ telle que:

$$F_X(x) = \Pr(X \leq x) \quad (\text{A.6})$$

La fonction densité de probabilité notée f_X associée à la variable aléatoire X est une fonction positive, d'intégrale égale à 1 sur I_X et définie par:

$$\Pr(a \leq x \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx = F_X(b) - F_X(a) \quad (\text{A.7})$$

Définition A.12 : Les notions suivantes sont définies pour une variable aléatoire X dont la densité de probabilité est donnée par f_X :

- L'espérance mathématique (ou moyenne ou moment d'ordre 1) notée $\mathbb{E}[\cdot]$

$$\mu_X = E[X] = \int_{I_X} x f(x) dx \quad (\text{A.8})$$

- La variance (ou moment d'ordre 2), écart type et coefficient de variation

$$\text{Var}[X] = E[(X - \mu_X)^2] \quad (\text{A.9})$$

$$\sigma_X = \sqrt{\text{Var}[X]} \quad (\text{A.10})$$

$$C_v = \frac{\sigma_X}{\mu_X} \quad (\text{A.11})$$

- Les moments d'ordre α

$$E[(X - E(X))^\alpha] = \int_{I_X} (X - E(X))^\alpha f_X(x) dx \quad (\text{A.12})$$

Pour une variable aléatoire réelle, la loi de probabilité est complètement déterminée par sa fonction de répartition dont la valeur en chaque réel x est la probabilité que la variable aléatoire soit inférieure ou égale à x . Les lois gaussiennes et uniformes seront très utilisées dans la suite de ce chapitre.

- Loi gaussienne:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma_X \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x - \mu_X)^2}{2\sigma_X^2}\right) \quad (\text{A.13})$$

avec $\mu_X = E[X]$ et $\text{Var}(X) = \sigma_X^2$

- Loi uniforme bornée sur un intervalle $[a, b]$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (\text{A.14})$$

avec $\mu_X = \frac{b+a}{2}$ et $\text{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

Définition A.13 : Un vecteur aléatoire (ou variable vectorielle) réel X est une application $X : \Omega \rightarrow I^n \subset \mathbb{R}$ où n est la dimension de X ($n \geq 2$). Les composantes de X sont des variables

aléatoires, $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ avec $i = 1, \dots, n$.

Définition A.14 : Un vecteur aléatoire X défini sur l'espace probabilisé (Ω, β, Pr) et à valeur dans \mathbb{R}^n est dit du second ordre si:

$$\mathbb{E} [\|X(\omega)\|^2] = \int \|X(\omega)\|^2 Pr(d\omega) < +\infty \quad (\text{A.15})$$

Où $\|X\|^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2$.

A.3 Espace d'Hilbert

Soit (Ω, β, Pr) un espace probabilisé. L'espace Θ des fonctions mesurables de Ω dans \mathbb{R} est défini par:

$$\Theta = \{g/g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}\} \quad (\text{A.16})$$

Le produit interne (appelé aussi produit scalaire) $\langle \cdot \rangle$ sur Θ est défini comme suit:

$$\langle g, h \rangle = \int_{\Omega} g(\omega) h(\omega) dPr(\omega) \quad (\text{A.17})$$

Soit $X(\omega)$ une variable aléatoire dont la densité de probabilité est notée f_X . L'espace Ω des fonctions mesurables qui associe à tout élément $\omega \in \mathbb{R}$ une valeur dans \mathbb{R} et muni du produit interne $\langle X, Y \rangle = \mathbb{E} [XY]$ définit un espace d'Hilbert noté $L^2(\Omega, \beta, Pr)$.

Une variable aléatoire $X(\omega) \in L^2(\Omega, \beta, Pr)$ est une variable du second ordre qui vérifie l'équation (eq.A.15).

A.4 Processus stochastique

Un processus stochastique ou processus aléatoire représente une évolution, généralement dans le temps, d'une variable aléatoire.

Soit (Ω, β, Pr) un espace probabilisé et T un intervalle de \mathbb{R} . Un processus stochastique X défini sur (Ω, β, Pr) et indexé sur T à valeurs dans \mathbb{R}^n est une application telle que: $T \rightarrow L^0(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $t \mapsto X(t, \omega) = (X_1(t, \omega), \dots, X_n(t, \omega))$

où $L^0(\Omega, \mathbb{R}^n)$ est l'espace des variables aléatoires définies sur (Ω, β, Pr) à valeurs dans \mathbb{R}^n .

Le processus $X(t, \omega)$ sera noté indifféremment X ou encore $X_t(\omega)$, cette dernière notation indiquant qu'un processus est en fait une famille de variables aléatoires: pour t fixé, $X_t(\omega)$ est une variable aléatoire.

Dans la définition du processus, le paramètre d'indexation est choisi réel. Lorsque ce paramètre est vectoriel, $t \in \mathbb{R}^q$, la notion de processus aléatoire est substituée par celle du champ stochastique.

A.5 Processus stochastique du second ordre

Soit X un processus indexé sur $T = \mathbb{R}$ à valeurs dans \mathbb{R}^n . Le processus $X(t, \omega)$ est dit du second ordre si pour tout t fixé, la variable aléatoire $X(t, \omega)$ est du second ordre c'est-à-dire:

$$\forall t \in T : \mathbb{E} [\|X(t, \omega)\|^2] = \int \|X(t, \omega)\|^2 \Pr(d\omega) < +\infty \quad (\text{A.18})$$

Annexe B

Intégration numérique en utilisant les polynômes orthogonaux (méthodes de Gauss)

Les méthodes d'intégration de Gauss utilisent une subdivision particulière de l'intervalle d'intégration. En effet, elles considèrent les points x_i comme étant les racines d'une famille de polynômes orthogonaux. Ces points ne sont pas régulièrement espacés contrairement à ceux considérés par les méthodes d'intégration numérique en utilisant les polynômes d'interpolation (Méthode des trapèzes, Méthode de Simpson, etc.). Tout d'abord, quelques notions relatives à la propriété d'orthogonalité sont rappelées [43, 45, 123].

B.1 Produits scalaires

Soit \mathbb{E} un espace vectoriel réel.

Définition B.1 : Un produit scalaire sur \mathbb{E} est une application $\mathbb{E} \times \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$

$(x,y) \rightarrow \langle x,y \rangle$ qui vérifie:

- $\langle x,x \rangle \geq 0, \forall x \in E, \langle x,x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $\forall x,y \in \mathbb{E}, \langle x,y \rangle = \langle y,x \rangle$
- $\forall x,y,z \in \mathbb{E}, \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}, \langle \alpha x + \beta y,z \rangle = \alpha \langle x,y \rangle + \beta \langle y,z \rangle$

\mathbb{E} est dit dans ces cas-là Euclidien.

Sur l'espace des fonctions continues $C([a,b]) = f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$, le produit scalaire est défini par:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x) dx \quad (\text{B.1})$$

Définition B.2 : Une norme sur un espace vectoriel réel \mathbb{E} est une application: $\| \cdot \| : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que :

- $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire)
- $\forall x \in E, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$

Sur \mathbb{R}^n , les expressions suivantes définissent des normes:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \quad (\text{B.2})$$

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (\text{B.3})$$

$$\|x\|_\infty = \max(|x_1|, \dots, |x_n|) \quad (\text{B.4})$$

B.2 Bases orthogonales

Dans cette section on considère encore un espace Euclidien (E, \langle, \rangle) .

Définition B.3 : Un ensemble de vecteurs $\{v_1, \dots, v_p\} \subset \mathbb{E}$ est une famille orthogonale si les v_i sont orthogonaux entre eux. La famille est alors dite orthogonale. Si de plus, les v_i sont unitaires (i.e de norme égale à 1) alors la famille est dite orthonormée. De façon formelle, une famille de vecteurs $\{v_1, \dots, v_p\} \subset \mathbb{E}$ est orthonormale si et seulement si:

$$\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij} \text{ pour } i, j = 1, \dots, p \quad (\text{B.5})$$

Où δ_{ij} étant le symbole de Kronecker avec $\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$

La définition B.3 est valable pour l'espace de fonctions continues $C([a,b]) = f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$. Il existe plusieurs familles de fonctions polynômiales orthogonales. Quelques exemples sont

donnés ci-dessous.

B.2.1 Polynômes d’Hermite

Les polynômes d’Hermite monodimensionnels d’ordre n sont des fonctions vérifiant la forme réursive:

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x) \quad (\text{B.6})$$

avec $H_0(x) = 1$ et $H_1(x) = 2x$.

La fonction de poids correspondant aux polynômes d’Hermite est donnée par $W(x) = e^{-x^2}$ définie sur $]-\infty, +\infty[$.

L’orthogonalité des polynômes d’Hermite se traduit par le produit scalaire:

$$\langle H_n, H_m \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x) H_m(x) e^{-x^2} dx = 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{nm} \quad (\text{B.7})$$

B.2.2 Polynômes de Legendre

Les polynômes de Legendre d’ordre n sont définis par la relation de récurrence suivante:

$$(n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1)xL_n(x) - nL_{n-1}(x) \quad (\text{B.8})$$

avec $L_0(x) = 1$ et $L_1(x) = x$.

La fonction de poids correspondant aux polynômes de Legendre est donnée par $W(x) = 1$ définie sur l’intervalle $[-1, 1]$.

L’orthogonalité des polynômes de Legendre se traduit par le produit scalaire:

$$\langle L_n, L_m \rangle = \int_{-1}^1 L_n(x) L_m(x) dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{nm} \quad (\text{B.9})$$

B.2.3 Polynômes de Laguerre

Les polynômes de Laguerre d’ordre n sont définis par la relation de récurrence suivante:

$$(n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1-x)L_n(x) - nL_{n-1}(x) \quad (\text{B.10})$$

avec $L_0(x) = 1$ et $L_1(x) = 1 - x$.

La fonction de poids correspondant aux polynômes de Legendre est donnée par $W(x) = 1$ définie sur l'intervalle $[-1, 1]$.

L'orthogonalité des polynômes de Laguerre se traduit par le produit scalaire:

$$\langle L_n, L_m \rangle = \int_0^{+\infty} L_n(x) L_m(x) e^{-x} dx = \delta_{nm} \quad (\text{B.11})$$

B.3 Méthode de quadrature de Gauss

Dans le domaine mathématique de l'analyse numérique, les méthodes de quadrature sont des approximations de la valeur numérique d'une intégrale. En général, on remplace le calcul de l'intégrale par une somme pondérée prise en un certain nombre de points du domaine d'intégration. La méthode de quadrature de Gauss est une méthode de quadrature exacte pour un polynôme de degré $2n - 1$ avec n points pris sur le domaine d'intégration. Si ce dernier est (a, b) , les méthodes sont de la forme:

$$I = \int_a^b f(x) \varpi(x) dx = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) \quad (\text{B.12})$$

où $\varpi : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction de pondération, qui peut assurer l'intégrabilité de f . Les w_i sont appelés les coefficients de quadrature (ou poids). Les points x_i , ou noeuds, sont réels, distincts, uniques et sont les racines de polynômes orthogonaux pour le produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x) \varpi(x) dx$. Les poids et les noeuds sont choisis de façon à obtenir des degrés d'exactitude les plus grands possibles.

Les formules de Gauss jouent un rôle fondamental dans la méthode des éléments finis. Le domaine d'intégration et la fonction de pondération déterminent le type de la quadrature de Gauss.

Le tableau B.1 résume les situations les plus communes:

Domaine d'intégration (a, b)	Fonction de pondération $\varpi(x)$	Famille de polynômes orthogonaux
$[-1, 1]$	1	Legendre
$[0, +\infty[$	e^{-x}	Laguerre
$] -\infty, +\infty[$	e^{-x^2}	Hermite

Tableau B.1: Principales configurations de quadrature de Gauss

Une fois le type de quadrature choisi, la formule à n points s'écrit:

$$I(f) = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) \quad (\text{B.13})$$

Les noeuds sont déterminés comme les n racines du nième polynôme orthogonal associé à la formule de quadrature (polynômes de Legendre pour la formule de Gauss-Legendre, etc.). On définit l'erreur comme $E(f) = |I - I(f)|$. Le degré d'exactitude d'une formule de quadrature est le degré le plus élevé de la famille des polynômes annulant $E(f)$. On a le résultat suivant: une formule à n points admet un degré d'exactitude de $2n - 1$.

B.3.1 Méthode de Gauss-Legendre

Pour le problème d'intégration le plus classique, on utilise la méthode de Gauss-Legendre. Il s'agit d'intégrer la fonction f sur l'intervalle $[-1,1]$. Les n noeuds sont les racines du $n^{ième}$ polynôme de Legendre, $P_n(x)$, et les coefficients sont donnés par l'une ou l'autre égalité:

$$w_i = \frac{-2}{(n+1) P'_n(x_i) P_{n+1}(x_i)} = \frac{2}{(1-x_i^2) P'_n(x_i)^2} \quad (\text{B.14})$$

On peut aussi remarquer que la somme des coefficients est égale à 2. Le tableau B.2 donne l'ensemble des informations pour réaliser le calcul approché de I pour les formules à un, deux et trois points.

Nombre de points n	Poids (w_i)	Points (x_i)	Polynôme de Legendre
1	2	0	x
2	1, 1	$-\sqrt{1/3}, \sqrt{1/3}$	$(3x^2 - 1)/2$
3	5/9, 8/9, 5/9	$-\sqrt{3/5}, 0, \sqrt{3/5}$	$(5x^3 - 3x)/2$

Tableau B.2: Information sur le calcul approché de l'intégrale I

B.3.2 Méthode de Gauss-Laguerre

Cette formule est associée au poids $\varpi(x) = e^{-x}$ sur $]0, +\infty[$. Les n noeuds sont les racines du n ème polynôme de Laguerre L_n , et les coefficients sont:

$$w_i = \frac{1}{(n+1) L'_n(x_i) L_{n+1}(x_i)} \quad (\text{B.15})$$

B.3.3 Méthode de Gauss-Hermite

Sur $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$, la formule de Gauss-Hermite est caractérisée par la pondération $\varpi(x) = e^{-x^2}$. Pour une formule à n points, les x_i sont calculés comme les racines du n ème polynôme d'Hermite H_n ; quant aux pondérations, elles sont obtenues à partir de:

$$w_i = \frac{2^{n+1} n! \sqrt{\pi}}{[H'_n(x_i)]^2} \quad (\text{B.16})$$

Annexe C

Algorithme d'optimisation SQP

La méthode de programmation quadratique séquentielle (SQP) est l'une des méthodes les plus utilisées de l'optimisation non-linéaire pour résoudre un tel problème. Elle est très robuste et très efficace [60]. Historiquement, cet algorithme peut être vu comme une extension de la méthode de Newton permettant d'intégrer des contraintes. Un tel problème peut être écrit sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} \min_x \quad & f(x) \\ \text{s.t.} \quad & g_k(x) \leq 0, \quad k = 1, \dots, K \\ & h_j(x) = 0, \quad j = 1, \dots, J \end{aligned} \tag{C.1}$$

où f est la fonction objectif, $\mathbf{h} = (h_1(x), \dots, h_J(x))^t$ est le vecteur des contraintes d'égalités et $\mathbf{g} = (g_1(x), \dots, g_K(x))^t$ est celui des contraintes d'inégalités.

Il est courant d'introduire SQP comme une telle extension avant d'expliciter les principales différences avec la formulation actuelle. Considérons en premier que le problème à résoudre ne comporte que des contraintes d'égalité:

$$\begin{aligned} \min_x \quad & f(x) \\ \text{s.t.} \quad & h_k(x) = 0, \quad k = 1, \dots, K \end{aligned} \tag{C.2}$$

La méthode SQP est basée sur la création d'une suite de vecteur convergeant vers la solution :

$$x^{it+1} = x^{it} + \alpha d^{(it)} \tag{C.3}$$

A chaque étape it , le problème initial est alors approché par un problème quadratique. Cette approximation doit être construite de façon à produire une suite qui converge rapidement vers la solution du problème. Dans le cadre sans contrainte, la méthode de Newton satisfait ces critères. C'est donc tout naturellement que cette méthode est adaptée. Considérons pour cela le lagrangien L du problème (eq.C.2):

$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda^t \mathbf{h}(x) \quad (\text{C.4})$$

où λ est le vecteur des multiplicateurs de Lagrange et \mathbf{h} est le K -vecteur dont la composante k contient la fonction $h_k(x)$. Notons également $A(x)$ la matrice jacobienne de ce vecteur des contraintes \mathbf{h} . L'application des conditions *Karush-Kuhn-Tucker* (KKT) [60] du problème (eq.C.2) à ce lagrangien donne un système F :

$$\mathbf{F}(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \nabla f(x) + A(x)^t \lambda \\ \mathbf{h}(x) \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{C.5})$$

Sous certaines hypothèses liées à l'indépendance des contraintes, le couple (x^*, λ^*) solution du problème initial vérifie également l'équation (eq.C.5). Le principe fondamental de la méthode SQP consiste à résoudre ce système par la méthode de Newton. Le jacobien du système est donné par:

$$\begin{bmatrix} W & A(x)^t \\ A(x) & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{C.6})$$

où $W = \nabla_{xx}^2 L(x, \lambda)$ est le hessien du lagrangien. La direction de descente d^{it} introduite dans l'équation (eq.C.3) est donnée par:

$$\mathbf{d}^{it} = \begin{pmatrix} \mathbf{d}_x^{it} \\ \mathbf{d}_\lambda^{it} \end{pmatrix} = - \begin{bmatrix} W^{it} & A(x^{it})^t \\ A(x^{it}) & 0 \end{bmatrix}^{-1} \mathbf{F}(x^{it}, \lambda^{it}) \quad (\text{C.7})$$

Sous certaines conditions, l'itération de ce procédé fournit un algorithme convergent et performant. Cette première approche est souvent appelée méthode de Newton-Lagrange. La méthode SQP est une variante de ce schéma. Elle est basée sur une interprétation alternative du système

(eq.C.7). A l'itération $(x^{it}, \lambda^{it})^t$, on introduit le sous-problème quadratique de la forme suivante:

$$\begin{aligned} \min_p \quad & \mathbf{p}^t W^{it} \mathbf{p} + \nabla f(x^{it})^t \mathbf{p} \\ \text{s.t.} \quad & A(x^{it}) \mathbf{p} + \mathbf{h}(x^{it}) = 0, \quad k = 1, \dots, K \end{aligned} \tag{C.8}$$

Les conditions d'optimalité permettent de mettre en correspondance les solutions (\mathbf{p}^*, μ^*) de ce problème quadratique avec les solutions du système linéaire (eq.C.7). Ces conditions impliquent en effet les équations $\mathbf{d}_x^{it} = \mathbf{p}^*$ et $\lambda^{it+1} = \mu^*$. Autrement dit, à chaque itération, la direction de descente et les nouvelles valeurs des multiplicateurs de Lagrange peuvent être obtenues en résolvant le système quadratique (eq.C.8). Dans [124], les auteurs soulignent l'intérêt de pouvoir calculer ces grandeurs de deux façons différentes: d'une part, le point de vue de la méthode de Newton est pratique à des fins d'analyse; d'autre part, la résolution du programme quadratique permet de définir un nouvel algorithme et d'étendre la méthode au cadre des contraintes d'inégalité. De nombreuses méthodes numériques permettent en effet de résoudre efficacement de tels problèmes quadratiques. Lorsque des contraintes d'inégalités doivent également être prises en compte, le sous-problème à résoudre devient alors:

$$\begin{aligned} \min_p \quad & \mathbf{p}^t W^{it} \mathbf{p} + \nabla f(x^{it})^t \mathbf{p} \\ \text{s.t.} \quad & A_k(x^{it}) \mathbf{p} + \mathbf{g}_k(x^{it}) \geq 0, \quad k = 1, \dots, K \\ & A_j(x^{it}) \mathbf{p} + \mathbf{h}_j(x^{it}) = 0, \quad j = 1, \dots, J \end{aligned} \tag{C.9}$$

où A_k et A_j sont les matrices jacobiennes des vecteurs \mathbf{g}_k et \mathbf{h}_j respectivement.

Comme pour la méthode de Newton, l'algorithme SQP peut diverger si le point initial n'est suffisamment proche de l'optimum. Ce schéma est donc souvent qualifié de '*local*'. Comme pour les algorithmes n'intégrant pas les contraintes, il est possible de renforcer les propriétés de convergence de la méthode en le couplant à une étape de calcul du pas ou de région de confiance. De plus, à l'instar des méthodes de quasi-Newton, il est possible de remplacer l'évaluation coûteuse du hessien par le calcul d'une matrice approchée [124].