



**HAL**  
open science

# Observateurs grand gain pour des systèmes non linéaires à sorties échantillonnées et retardées

Clement Treangle

► **To cite this version:**

Clement Treangle. Observateurs grand gain pour des systèmes non linéaires à sorties échantillonnées et retardées. Automatique / Robotique. Normandie Université, 2018. Français. NNT : 2018NORMC251 . tel-02064287

**HAL Id: tel-02064287**

**<https://theses.hal.science/tel-02064287v1>**

Submitted on 11 Mar 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Normandie Université

## THÈSE

**Pour obtenir le diplôme de doctorat**

**Spécialité AUTOMATIQUE, SIGNAL, PRODUCTIQUE, ROBOTIQUE**

**Préparée au sein de l'Université de Caen Normandie**

**Observateurs grand gain pour des systèmes non linéaires à sorties échantillonnées et retardées**

**Présentée et soutenue par  
Clement TREANGLE**

**Thèse soutenue publiquement le 04/12/2018  
devant le jury composé de**

M. HASSAN HAMMOURI	Professeur des universités, UNIVERSITE LYON 1 CLAUDE BERNARD	Rapporteur du jury
M. NICOLAS PETIT	Professeur des universités, EC NAT SUPERIEURE DES MINES	Rapporteur du jury
M. JEAN PIERRE BARBOT	Professeur des universités, ENSEA	Membre du jury
Mme DOROTHÉE NORMAND-CYROT	Directeur de recherche, Ecole Supérieure d'Electricité	Président du jury
M. MONDHER FARZA	Professeur des universités, UNIVERSITE CAEN NORMANDIE	Directeur de thèse
M. MOHAMMED M'SAAD	Professeur des universités, UNIVERSITE CAEN NORMANDIE	Co-directeur de thèse

**Thèse dirigée par MONDHER FARZA et MOHAMMED M'SAAD, Laboratoire  
d'Automatique de Caen (LAC)**



UNIVERSITÉ  
CAEN  
NORMANDIE





# Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier très chaleureusement mon directeur de thèse M. Mondher FARZA qui a su m'orienter dans mes choix de recherche et avec qui j'ai énormément appris au cours de ma thèse grâce à tous ses conseils. Nous avons par ailleurs beaucoup travaillé ensemble durant ma dernière de thèse et je le remercie notamment d'avoir été aussi patient et à l'écoute avec moi. J'ai pris un plaisir fou à travailler avec vous et j'espère que nous pourrons collaborer sur des projets de recherche à l'avenir. Je tiens également à remercier M. Mohammed M'SAAD, mon co-directeur de thèse, qui a su me donner quelques conseils utiles notamment lors de la rédaction de ce manuscrit.

Je remercie au même titre M. Tomas MENARD, qui a su m'écouter et m'aiguiller au mieux au début de ma thèse. L'aide qu'il m'a apporté m'a été particulièrement utile et ses suggestions de pistes de travail m'ont énormément aidé à cerner les différents problèmes étudiés.

Je remercie M. Olivier GEHAN qui m'a offert l'opportunité de réaliser cette thèse, alors que j'étais encore étudiant à l'ENSICAEN. J'adresse plus généralement mes remerciements à toute l'équipe du Laboratoire d'Automatique de Caen (M. Mathieu POULIQUEN, M. Éric PIGEON, M. Miloud FRIKEL, M. Boubeker TARGUI) de m'avoir accueilli au sein de l'équipe et d'avoir partagé avec vous tous ces bons moments.

Je voudrais également remercier M. Hassan HAMMOURI, Professeur à l'Université Claude Bernard Lyon 1, et M. Nicolas PETIT, Professeur aux MINES ParisTech, d'avoir accepté d'être rapporteur de mon jury de soutenance. Je remercie par la même occasion les autres personnes ayant accepté de faire partie de mon jury de thèse, M. Jean-Pierre BARBOT et Mme Dorothée NORMAND-CYROT, qui ont bien voulu être examinateur lors de ma soutenance de thèse.

J'adresse mes remerciements les plus chaleureux à ma conjointe, Solen, qui m'a permis de tenir le coup pendant ses trois ans de thèse parfois pénibles. Elle a su me reconforter et me motiver dans les moments un peu plus difficiles. Je suis fier de t'avoir à mes côtés et t'aime

de tout mon cœur.

Je n'oublie pas également de remercier toutes les personnes qui m'ont accompagné au laboratoire dans ce périple qu'est la thèse. Je remercie ainsi Romain, Tristan, Cédric, Abdelhak, Omar, Ibtissem et Ali d'avoir su m'accompagner avec leurs discussions plus ou moins loufoques et leur joie de vivre.

Enfin, j'adresse des derniers remerciements à ma famille, et plus particulièrement à mes parents, Gilles et Chantal, sans qui je ne serais rien sans eux. Merci également à mon frère, Julien, qui a toujours été là pour moi. Je remercie enfin ma belle famille qui a su m'accepter et qui compte beaucoup pour moi.

# Publications

## Revues internationales

- C. TRÉANGLE, M. FARZA et M. M'SAAD (p. d.[a]). “Filtered high gain observer for a class of uncertain nonlinear systems with sampled outputs”. *Automatica*. Accepted 2018.
- C. TRÉANGLE, M. FARZA et M. M'SAAD (p. d.[b]). “Observer design for a class of uncertain nonlinear systems with time-varying delayed outputs using mixed time-continuous and sampled measurements”. *Automatica*. Provisionally accepted 2018.

## Conférences internationales

- C. TRÉANGLE, M. FARZA et M. M'SAAD (2017a). “A simple filtered high gain observer for a class of uncertain nonlinear systems”. *18th International Conference on Sciences and Techniques of Automatic Control and Computer Engineering (STA)*. 2017, pp. 396-401.
- C. TRÉANGLE, T. MÉNARD et M. FARZA (2017b). “High gain observer design for a class of MIMO nonlinear systems triangular with respect to an order”. *18th International Conference on Sciences and Techniques of Automatic Control and Computer Engineering (STA)*. 2017, pp. 378-383.
- C. TRÉANGLE, T. MÉNARD, M. FARZA et M. M'SAAD (2018). “A cascade predictor for nonlinear systems with a constant output delay”. *IFAC-PapersOnLine*, Vol. 51, No. 2, 2018, pp. 421-426.
- C. TRÉANGLE, M. FARZA et M. M'SAAD (p. d.[c]). “On-line estimation of the reaction rates in bioreactors from multi-rate sampled-outputs”. *12th IFAC Symposium on Dynamics and Control of Process Systems, including Biosystems (DYCOPS 2019)*. Submitted 2018.



# Table des matières

Remerciements	i
Table des figures	x
Notations	1
<b>1 Introduction générale</b>	<b>3</b>
<b>2 Notions d'observabilité pour les systèmes non linéaires</b>	<b>13</b>
2.1 Introduction	13
2.2 Observabilité	13
2.2.1 Estimation d'état	13
2.2.2 Observabilité globale	15
2.2.3 Observabilité locale faible	16
2.2.4 Observabilité au sens du rang	17
2.2.5 $\mathcal{U}$ -uniforme observabilité	18
2.3 Synthèse d'observateurs	21
2.3.1 Systèmes linéaires à temps invariant - Observateur de Luenberger	22
2.3.2 Systèmes linéaires à temps variant - Filtre de Kalman	22
2.3.3 Synthèse d'un observateur grand gain pour une classe de systèmes non linéaires à plusieurs sorties regroupées en un bloc	23
2.3.4 Synthèse d'un observateur grand gain pour une classe de systèmes non linéaires non-triangulaire par bloc	25
2.4 Limites de la synthèse d'observateurs grand gain	25
2.5 Conclusion	27
<b>3 Observateur pour des systèmes non linéaires avec prise en compte du processus d'acquisition des mesures de sortie</b>	<b>31</b>
3.1 Introduction	31
3.2 Quelques résultats préliminaires	32
3.3 Synthèse d'observateur dans le cas d'une sortie sans retard	34



3.3.1	Description du processus d'acquisition des mesures de sortie . . . . .	34
3.3.2	Synthèse d'observateur . . . . .	34
3.4	Synthèse d'observateur dans le cas d'une sortie avec petit retard variable . . . . .	36
3.4.1	Synthèse de l'observateur . . . . .	37
3.4.2	Rapprochement avec le cas sans retard sur la sortie . . . . .	42
3.5	Synthèse d'observateur dans le cas d'une sortie avec retard relativement grand . . . . .	43
3.5.1	Cas d'un retard long constant sur la sortie . . . . .	43
3.5.2	Cas d'un retard long variable sur la sortie . . . . .	47
3.5.3	Retarder la sortie retardée disponible . . . . .	48
3.5.4	Lien avec le cas du retard constant . . . . .	51
3.6	Synthèse d'observateur pour des sorties avec retards variables multiples . . . . .	52
3.6.1	Description du processus d'acquisition des mesures pour chacune des composantes de la sortie, dans le cas sans retard . . . . .	52
3.6.2	Synthèse d'observateur dans le cas de petits retards variables multiples . . . . .	53
3.6.3	Synthèse d'observateur dans le cas de retards variables relativement grands . . . . .	59
3.7	Exemples illustratifs . . . . .	63
3.7.1	Exemple 1 - Système chaotique de Lorenz . . . . .	63
3.7.2	Exemple 2 - Joint flexible de bras robotique . . . . .	67
3.8	Conclusion . . . . .	71
<b>4</b>	<b>Observateur grand gain filtré</b> . . . . .	<b>73</b>
4.1	Introduction . . . . .	73
4.2	Formulation du problème . . . . .	74
4.2.1	Présentation de la classe d'étude . . . . .	74
4.2.2	Préliminaires . . . . .	75
4.3	Synthèse d'un observateur filtré pour une classe de systèmes uniformément observable . . . . .	80
4.3.1	Structure de l'observateur FHGO . . . . .	80
4.3.2	Comparaison avec l'observateur donné dans (ASTOLFI et MARCONI 2015) . . . . .	85
4.3.3	Étude de la sensibilité au bruit de mesure de l'observateur FHGO . . . . .	86
4.3.4	Structure de l'observateur avec prise en compte de l'échantillonnage de la sortie . . . . .	91
4.3.5	Extension au cas multi-sorties . . . . .	97
4.4	Exemples illustratifs . . . . .	98
4.4.1	Exemple 1 - Application à un oscillateur forcé de Van Der Pol . . . . .	98
4.4.2	Exemple 2 - Application à un bioréacteur - Estimation des taux de réaction . . . . .	102
4.5	Conclusion . . . . .	108

<b>5</b>	<b>Forme normale d'observabilité uniforme pour une classe de systèmes non linéaires à sorties multiples</b>	<b>111</b>
5.1	Introduction . . . . .	111
5.2	Formulation du problème . . . . .	112
5.2.1	Relation de dépendance d'observabilité et graphe d'uniforme observabilité	113
5.2.2	Caractérisation des non-linéarités du système d'étude . . . . .	115
5.3	Forme décomposée en étages du système d'étude . . . . .	116
5.3.1	Construction d'une suite décroissante finie d'ensembles $\Upsilon_k$ . . . . .	116
5.3.2	Décomposition en $R$ passes des paires d'indices du système d'étude . .	121
5.3.3	Construction de la forme décomposée en $R$ passes du système d'étude	125
5.4	Immersion du système d'étude . . . . .	128
5.5	Synthèse de l'observateur . . . . .	132
5.5.1	Notations . . . . .	132
5.5.2	Observateur . . . . .	138
5.6	Exemple : Application à un système hydraulique . . . . .	145
5.6.1	Description du système d'étude . . . . .	146
5.6.2	Difféomorphisme et forme décomposée en passes du système d'étude .	148
5.6.3	Construction de l'immersion du système d'étude . . . . .	150
5.6.4	Synthèse de l'observateur et résultats de simulation . . . . .	151
5.7	Conclusion . . . . .	152
<b>6</b>	<b>Conclusion générale</b>	<b>155</b>
	<b>Annexes</b>	<b>165</b>
<b>A</b>	<b>Forme normale d'observabilité pour une large classe de systèmes MIMO non triangulaires par bloc</b>	<b>165</b>
A.1	Description de la forme normale d'observabilité uniforme (FARZA et al. 2011)	165
A.2	Synthèse de l'observateur . . . . .	167
<b>B</b>	<b>Lemmes techniques</b>	<b>169</b>
B.1	Lemmes techniques du chapitre 3 . . . . .	169
B.2	Lemmes techniques du chapitre 4 . . . . .	171
	<b>Résumé</b>	
	<b>Abstract</b>	



# Table des figures

2.1	Schéma fonctionnel d'un estimateur d'état . . . . .	14
2.2	Mesure bruitée de $x_1$ . . . . .	26
2.3	Estimation de l'état $x_4$ fournie par l'observateur pour $\theta = 8$ . . . . .	28
2.4	Estimation de l'état $x_4$ fournie par l'observateur pour $\theta = 30$ - Au dessus en présence de bruit de mesure, en dessous en l'absence de bruit de mesure . . . . .	28
3.1	Structure d'un observateur grand gain avec prise en compte du processus d'acquisition des mesures de sortie . . . . .	37
3.2	Sorties avec leurs mesures retardées disponibles respectives . . . . .	65
3.3	Évolution temporelle de $\bar{d}(t)$ . . . . .	65
3.4	Estimation de $x^b$ , $x^c$ et $x^d$ avec leur erreur d'observation respective . . . . .	66
3.5	Norme de l'erreur ultime d'estimation pour $m = 12, 20, 40$ . . . . .	66
3.6	Sorties avec leurs mesures retardées disponibles respectives . . . . .	68
3.7	Estimation des états $x_{1,1}$ , $x_{1,2}$ , $x_2$ et $x_3$ . . . . .	70
4.1	Structure de l'observateur FHGO proposé . . . . .	81
4.2	Gain du filtre passe-haut $G_w$ appliqué au bruit gaussien $w(t)$ . . . . .	99
4.3	Mesures bruitées de $x_1$ . . . . .	100
4.4	Estimation des états à l'aide d'un observateur FHGO pour $\theta = 25$ . . . . .	102
4.5	Estimation des états à l'aide d'un observateur SHGO pour $\theta = 5$ . . . . .	102
4.6	Estimation des états via les observateur SHGO et FHGO, pour $\theta = 5$ et $\theta = 25$ respectivement - au-dessus sans bruit de mesure, en dessous en présence de bruit de mesure . . . . .	103
4.7	Évolution temporelle du taux de dilution . . . . .	105
4.8	Gain du filtre passe-haut $G_w$ appliqué au bruit gaussien $w(t)$ . . . . .	105
4.9	Mesures bruitées de $S$ et $P$ . . . . .	106
4.10	Estimation de $r_1$ et $r_2$ fournie par l'observateur FHGO, pour $\tau_M = 0.1h$ et $\theta = 5$ . . . . .	106
4.11	Estimation de $r_1$ et $r_2$ fournie par l'observateur SHGO, pour $\tau_M = 0.1h$ et $\theta = 3$ . . . . .	107
4.12	Estimation de $r_1$ et $r_2$ fournie par l'observateur FHGO, pour $\tau_M = 1h$ et $\theta = 5$ . . . . .	107
4.13	Estimation de $r_1$ et $r_2$ fournie par l'observateur SHGO, pour $\tau_M = 1h$ et $\theta = 3$ . . . . .	108

5.1	Graphe d'uniforme observabilité du système (5.3)	115
5.2	Modélisation d'un réservoir	146
5.3	Système à deux cascades de trois réservoirs	147
5.4	Estimation des états	153

# Notations

$\mathbb{R}$	Ensemble des nombres réels
$\mathbb{R}^+$	Ensemble des nombres réels positifs ou nuls
$\mathbb{R}^n$	Espace vectoriel de dimension $n$ dans l'ensemble des réels
$\mathbb{R}^{n \times m}$	Ensemble des matrices réelles de dimension $n \times m$
$I_n$	Matrice identité de dimension $n \times n$
$0_n$	Matrice carrée nulle de dimension $n \times n$
$0_{n \times m}$	Matrice nulle de dimension $n \times m$
$t$	Variable temporelle
$\theta$	Paramètre de synthèse de l'observateur grand gain
$\triangleq$	Égal par définition
$ a $	Valeur absolue du réel $a$
$x^T$	Transposée du vecteur $x$
$\ x\ $	Norme euclidienne du vecteur $x$
$A^T$	Transposée de la matrice $A$
$\ A\ $	Norme euclidienne de la matrice $A$
$\lambda_m(\cdot)$	Plus petite valeur propre de la matrice carrée $(\cdot)$
$\lambda_M(\cdot)$	Plus grande valeur propre de la matrice carrée $(\cdot)$
$[a, b]$	Intervalle fermé de $\mathbb{R}$ , d'extrémités $a$ et $b$
$[a, b[$	Intervalle semi-ouvert de $\mathbb{R}$ , d'extrémités $a$ et $b$
$]a, b[$	Intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ , d'extrémités $a$ et $b$
$\{1, \dots, r\}$	Ensemble constitué des $r$ premiers nombres entiers positifs
$diag(a_1, \dots, a_p)$	Matrice diagonale d'éléments diagonaux $a_i, i = 1, \dots, p$
$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}$	Dérivée temporelle de $x(t)$
$\sup x(t)$	Borne supérieure de $x(t)$
$\max x(t)$	Borne maximale de $x(t)$

**Acronymes :**

MIMO	Multi-entrées / Multi-sorties (Multi-input / Multi-output)
SISO	Mono-entrée / Mono-sortie (Single-input / Single-output)
LMI	Inégalité Matricielle Linéaire (Linear Matrix Inequality)
EDO	Équation Différentielle Ordinaire
EDP	Équation aux Dérivées Partielles
SDP	Matrice Symétrique Définie Positive
RII	Réponse Impulsionnelle Infinie
SHGO	Observateur Grand Gain Standard (Standard High Gain Observer)
FHGO	Observateur Grand Gain Filtré (Filtered High Gain Observer)

# Chapitre 1

## Introduction générale

Depuis plusieurs décennies, le problème de l'estimation d'état, communément appelé observation, est un problème d'automatique inhérent et essentiel dans l'étude des systèmes linéaires et non linéaires. Concrètement, l'étude de la dynamique d'un système physique donné est en bonne partie permise grâce à la mesure de ses grandeurs physiques. Cependant, de nombreuses raisons (coût ou incapacité de mesurer une grandeur par exemple) nous poussent à ne mesurer que certaines des grandeurs physiques du système d'étude. L'observation des systèmes est le domaine permettant d'estimer les grandeurs qui ne sont pas mesurées, et l'observateur est l'outil mathématique faisant office de capteur logiciel, permettant de collecter une estimation de l'état inconnu recherché. Cette estimation ne peut se faire en général qu'avec une connaissance du modèle du système étudié, mais aussi par la connaissance des différentes sorties et entrées de ce dernier. Une intense activité de recherche a ainsi été consacrée à travers le monde à l'étude de ce problème d'observation et à la synthèse d'observateurs qui en résulte, pour différents types de systèmes.

Il existe dans la littérature de nombreuses approches permettant de concevoir des observateurs que ce soit dans le cas linéaire ou dans le cas non linéaire. Les premières approches historiques ont d'abord concerné les systèmes linéaires invariant dans le temps, avec le très populaire filtre de Kalman (KALMAN 1960) et l'observateur de Luenberger (LUENBERGER 1971). La popularité du filtre de Kalman résulte directement de sa simplicité d'implémentation, qui constitue un atout majeur notamment dans l'industrie. Néanmoins, le filtre de Kalman ne garantit pas, pour les systèmes non linéaires, une convergence asymptotique de l'erreur d'observation. De nombreux travaux se sont ensuite intéressés aux systèmes non linéaires. L'approche de la linéarisation de l'erreur d'observation (KRENER et ISIDORI 1983; KRENER et RESPONDEK 1985; XIA et GAO 1989; HOU et PUGH 1999; GUAY 2002; SOULEIMAN et al. 2003; BOUTAT et al. 2009; TAMI et al. 2016) forme l'un des points de départ de l'étude de la synthèse d'observateur pour le cas non linéaire. Cette approche a la particularité de mettre le système non linéaire sous une forme où le système est affine selon l'état et où les non-linéarités ne dépendent que



de l'entrée et de la sortie par un changement de coordonnées approprié, permettant ainsi de synthétiser un observateur de Luenberger. Cependant, cette approche ne délivre pas une transformation systématique et la recherche d'une telle transformation permettant de linéariser l'erreur d'observation n'est pas forcément aisée. Une seconde approche pour les systèmes non linéaires, basée sur les LMI (Linear Matrix Inequality), est une autre méthode populaire permettant de transformer un problème d'observabilité en un problème de résolution de LMI (RAJAMANI 1998; ZEMOUCHE et BOUTAYEB 2009). Cependant, cette approche ne propose pas de conditions exploitables permettant d'assurer la faisabilité des LMI. Cette dernière doit ainsi être vérifiée *a priori* et ce numériquement (ARCAK et KOKOTOVIĆ 2001). Une troisième approche, appelée platitude, utilise l'algèbre différentielle pour exprimer les états non mesurés en fonction des signaux mesurés, à savoir les entrées et les sorties (FLIESS et al. 2008). Une quatrième approche est basée sur le calcul d'intervalles (EFIMOV et RAÏSSI 2016; MOISAN et al. 2009; RAÏSSI et al. 2012; MAZENC et al. 2012). Enfin, une dernière approche pour le cas des systèmes non linéaires est basée sur les formes canoniques d'observabilité. Ce concept vient naturellement du fait que l'observabilité des systèmes non linéaires dépend de l'entrée (SUSSMANN 1978). L'observabilité pour toute entrée a notamment longuement été considérée et une condition nécessaire et suffisante permettant la caractérisation des systèmes à une entrée et une sortie a été trouvée dans le cas où le système est affine en la commande (GAUTHIER et al. 1992). En particulier, un difféomorphisme a été proposé dans (GAUTHIER et al. 1992) permettant de transformer le système uniformément observable et affine en la commande sous une forme canonique d'observabilité où la partie non linéaire est triangulaire selon ses nouvelles coordonnées. Dans le cas où le système considéré est Lipschitz, il est alors possible de concevoir un observateur grand gain dont l'erreur d'observation sous-jacente converge exponentiellement vers zéro. Néanmoins, pour le cas des systèmes multi-sorties, la recherche d'une forme canonique reste un problème ouvert. Plusieurs structures générales de systèmes MIMO (Multiple-input/multiple-output) uniformément observables ont ainsi été proposées dans la littérature (DEZA et al. 1992; GAUTHIER et KUPKA 1994; RUDOLPH et ZEITZ 1994; BUSAWON et al. 1998; HOU et al. 2000; SHIM et al. 2001; HAMMOURI et FARZA 2003; FARZA et al. 2004; BESANÇON et TICLEA 2007; HAMMOURI et al. 2010; FARZA et al. 2011; DUFOUR et al. 2012; BORNARD et HAMMOURI 2002; GRIP et SABERI 2012). Les travaux présentés tout au long de ce manuscrit de thèse aborderont la synthèse de type grand gain à travers des systèmes uniformément observables.

Les travaux cités précédemment ont été réalisés dans le cas de systèmes sans retard et où la sortie est disponible en temps continu. Cependant, dans la pratique, les sorties peuvent éventuellement n'être disponibles qu'à certains instants précis de temps (sorties échantillonnées), et le système considéré peut être soumis à un retard (potentiellement variant dans le temps). Certains auteurs se sont intéressés au problème de la synthèse d'une commande pour des systèmes linéaires à temps variant dont l'entrée est soumise à un retard (BRESCH-PIETRI et al.

2012; BRESCH-PIETRI et al. 2018). En particulier, les auteurs dans (BRESCH-PIETRI et al. 2012) proposent une commande adaptative estimant des paramètres inconnus du modèle et rejetant des perturbations d'entrée, le tout via une entrée soumise à un retard constant. Dans (BRESCH-PIETRI et al. 2018), les auteurs s'intéressent au cas d'une entrée soumise à un retard variable continu par morceaux et dont la dérivée par rapport au temps peut être plus grande que 1, en contournant notamment le problème de causalité induit par cette dernière condition. D'autres auteurs se sont intéressés à la problématique d'un système dont l'état est soumis à un retard. C'est le cas notamment de (KADER et al. 2018) où les auteurs ont considéré le problème d'inversion à gauche d'un système non linéaire dont l'état est soumis à un retard constant. En particulier, ce problème consiste, à partir des états du système, à reconstruire l'entrée qui a permis d'obtenir ces états. Le problème de la synthèse d'observateurs avec retard sur la sortie a également été minutieusement examiné dans (KRISTIC 2009) pour des systèmes linéaires. Des observateurs ayant une structure en cascade ont été proposés dans (BESANÇON et TICLEA 2007; GERMANI et al. 2002; KAZANTZIS et WRIGHT 2005; VAFAEI et YAZDAN-PANAH 2016) pour des systèmes non linéaires exhibant un retard arbitrairement grand sur la sortie. L'observateur en cascade (prédicteur) est composé d'une chaîne de sous-systèmes où chaque sous-système prédit l'état du sous-système précédent dans la chaîne. Cette prédiction est effectuée sur un horizon dont la longueur est égale à une fraction du retard initial, de sorte que l'état du dernier sous-système fournisse une estimation de l'état réel du système. L'observation des systèmes non linéaires soumis à des perturbations inconnues et à des sorties retardées reste cependant un problème difficile à résoudre. Une classe de systèmes incertains uniformément observables avec sortie retardée a été considérée dans (FARZA et al. 2018). Un observateur en cascade a d'abord été proposé dans le cas où les mesures de sortie sont disponibles en temps continu, puis une re-synthèse a été réalisée dans l'objectif de prendre en compte le processus d'échantillonnage des mesures de sortie. D'un point de vue fondamental, il a été démontré que la limite ultime de l'erreur d'estimation asymptotique est une fonction décroissante de la longueur de la cascade. Enfin, les auteurs dans (CLERGET et al. 2017) se sont intéressés à un système en boucle fermée où la sortie est soumise à un retard relativement grand, variant dans le temps et incertain. Ils ont notamment donné des résultats de convergence et de robustesse du système considéré.

Les résultats mentionnés ci-dessus ont été obtenus en supposant que les mesures retardées de sortie sont exclusivement disponibles sous forme continue ou selon un processus d'échantillonnage approprié. Une re-synthèse des observateurs proposés est ainsi toujours nécessaire pour tenir compte de la nature des mesures de sortie (retardées) disponibles. En outre, la plupart des résultats disponibles concernant les sorties retardées ont été consacrés au cas des retards constants. Dans (CACACE et al. 2014), une classe de systèmes uniformément observables avec de longs retards variables dans le temps a été proposée. Les auteurs ont ainsi considéré une partition non uniforme du retard variable dans le temps et ont proposé un observateur en

cascade constitué de  $m$  systèmes dynamiques enchaînés et conçus de sorte que le premier sous-système de la cascade fournisse une estimation de l'état actuel du système. Cependant, afin de tenir compte des variations du retard variable, la structure du terme correcteur impliqué dans chaque système n'est pas fixée comme dans le cas du retard constant, mais elle est mise à jour de manière appropriée en fonction des valeurs instantanées du retard. Dans (FARZA et al. 2015), les auteurs ont proposé une solution innovante traitant les retards variables dans le temps de la même manière que les retards constants. L'idée fondamentale est d'introduire un retard supplémentaire sur la sortie retardée disponible de telle sorte que le retard global résultant soit constant et égal au maximum du retard variant dans le temps appliqué à la sortie originale.

La première contribution de ce manuscrit de thèse a proposé d'étendre, dans quatre directions, les résultats de (FARZA et al. 2018) pour des systèmes MIMO uniformément observables et soumis à des incertitudes dans le but de proposer un contexte de synthèse unifié des observateurs de type grand gain. Le résultat primordial de cette contribution consiste à considérer tous les cas possibles issus du processus d'acquisition des mesures de sortie. En d'autres termes, les sorties retardées (ou non) ne sont plus supposées disponibles exclusivement sous une forme fixe (mesures continues uniquement ou mesures échantillonnées uniquement à l'instar de (FARZA et al. 2018)). Plus précisément, les mesures de sortie sont désormais supposées vérifier l'un des cas suivant pour chaque intervalle de temps d'une partition de temps considérée :

- Mesures non retardées disponibles en temps continu
- Mesures disponibles en temps continu retardées par un retard variable dans le temps
- Mesures non retardées échantillonnées
- Mesures échantillonnées et retardées par un retard variable dans le temps

Nous appelons dans la suite de ce manuscrit processus d'acquisition des mesures de sortie le processus permettant d'obtenir des mesures de sortie sous l'une des quatre formes précédentes. C'est dans ce cadre très général d'acquisition des mesures de sortie que nous proposons la synthèse d'un observateur grand gain dans cette contribution. Il convient de souligner trois caractéristiques importantes dans le cadre du processus d'acquisition des mesures de sortie. Premièrement, la synthèse de l'observateur dans le cas d'un retard sur la sortie arbitrairement petit a été particulièrement allégée dans la mesure où la structure en cascade n'est plus nécessaire. En effet, nous avons montré qu'il est possible de traiter la synthèse de l'observateur dans le cas d'un retard relativement faible en utilisant un observateur ayant la même dimension que le système considéré contrairement à (FARZA et al. 2018) où la structure en cascade est requise quelle que soit la valeur du retard de sortie. Deuxièmement, le retard de sortie variable dans le temps a également été considéré contrairement à (FARZA et al. 2018) où ce dernier est supposé constant. À l'image de ce qui a été proposé dans (FARZA et al. 2015), le problème du retard variable dans le temps a été transformé en un problème de retard constant grâce à une

procédure appropriée. Enfin, tous les résultats précédents ont été adaptés au cas multi-sorties où chaque sortie est soumise à un retard et un échantillonnage potentiellement différents.

La synthèse d'observateurs grand gain, essentiellement motivée par des considérations de simplicité de mise en œuvre, comporte trois limites qu'il convient de souligner. La première limite qui résulte naturellement de ce type de synthèse consiste en des problèmes numériques pour les systèmes de grande dimension lorsque des valeurs relativement élevées du gain d'observation sont requises. La deuxième limite réside dans la sensibilité au bruit de mesure de la sortie. Cette dernière découle naturellement du fait que le terme correcteur de l'observateur grand gain est le produit du gain de l'observateur par l'erreur d'observation de sortie, c'est-à-dire la différence entre la sortie estimée par l'observateur et la sortie mesurée. Le signal résultant intervenant dans le terme correcteur est ainsi de plus en plus amplifié lorsque le gain d'observation augmente, fournissant ainsi des estimations d'état très bruitées, voire non-exploitable. La dernière limite liée à la synthèse grand gain est le phénomène caractérisé par de grandes amplitudes dans le régime transitoire de la convergence de l'observateur de type grand gain, appelé phénomène du 'pick'.

Plusieurs solutions ont ainsi été proposées dans le but de réduire la sensibilité au bruit de mesure de l'observateur grand gain. Les solutions fondatrices sont généralement basées sur un gain variant dans le temps qui est mis à jour de manière appropriée en tenant compte des exigences de stabilité et de convergence (AHRENS et KHALIL 2009 ; BOIZOT et al. 2010 ; OUEDER et al. 2012 ; SANFELICE et PRALY 2011 ; ALESSANDRI et ROSSI 2015). Plus récemment, un observateur grand gain dont le gain d'observation est petit, dit observateur grand gain 'low power', a été proposé dans (ASTOLFI et MARCONI 2015) pour une classe de systèmes non linéaires à une sortie et de dimension  $n \geq 3$ . La pierre angulaire de cette contribution consiste à limiter la puissance impliquée dans le gain de l'observateur à 2, améliorant ainsi la performance de l'observateur vis-à-vis du bruit de mesure sur la sortie. Deux caractéristiques de l'observateur proposé méritent alors d'être mentionnées. Premièrement, la dimension de l'observateur est égale à  $2(n - 1)$  où  $n$  est la dimension du système original. Deuxièmement, l'observateur fournit une estimation de la première et de la dernière composante de l'état du système ainsi que deux estimations pour chaque composante intermédiaire de l'état. Cette synthèse particulière a ensuite été reconsidérée dans (ASTOLFI et al. 2016) et (TEEL 2016) où un contexte de synthèse incorporant des saturations a été proposé dans le but de limiter le phénomène du 'pick' énoncé plus haut. Un autre observateur grand gain récent ayant la même dimension que le système original et où la puissance du gain de l'observateur est limitée à 1 a été proposé dans (KHALIL 2017) pour la même classe de systèmes considérés dans (ASTOLFI et al. 2016). Comme dans (ASTOLFI et al. 2016) et (TEEL 2016), des fonctions de saturation imbriquées ont été utilisées dans le but de limiter le phénomène du 'pick'.

La deuxième contribution proposée dans ce manuscrit de thèse a consisté à proposer un nouvel observateur grand gain filtré dans l'objectif de réduire la sensibilité au bruit de mesure. Le nouvel observateur filtré se distingue des observateurs 'low power' cités plus haut par sa simplicité d'implémentation et ses capacités de filtrage. La structure de l'observateur filtré proposé se décompose en deux sous-systèmes, chacun ayant la même dimension que le système original. La dynamique du premier sous-système, dont les états sont les estimations du système original, est une copie du système original avec un terme correctif qui dépend de l'état du second sous-système. Ce dernier est un filtre linéaire dont l'entrée est l'erreur d'observation de sortie, c'est-à-dire la différence entre la sortie estimée et la sortie mesurée. Le gain de l'observateur filtré résultant est constant et une approche systématique pour le calculer est donnée. L'application de ce nouvel observateur au cas de mesures échantillonnées a ensuite été considérée, où une re-synthèse a été effectuée.

Comme cela a été dit au début de cette introduction, la recherche d'une forme canonique d'observabilité pour les systèmes non linéaires multi-sorties reste un problème ouvert. De nombreux auteurs se sont dans cette optique intéressés aux systèmes observables pour toute entrée. Parmi les multiples définitions existant de l'observabilité des systèmes non linéaires, beaucoup pensent que l'observabilité pour toute entrée est une extension logique de l'observabilité des systèmes linéaires. À terme, les auteurs s'intéressant au problème de l'observabilité pour toute entrée pour les systèmes non linéaires à sorties multiples ont pour objectif de caractériser l'ensemble des systèmes observables pour toute entrée par une forme canonique d'observabilité, à l'instar de ce qui a été fait dans (GAUTHIER et al. 1992) dans le cas mono-sortie et affine en la commande. En particulier, la forme canonique exhibée dans ce dernier cas est constituée d'une partie linéaire en l'état du système auquel on a appliqué la matrice anti-décalage, et d'une partie non linéaire, triangulaire selon l'état du système et affine en la commande. Dans (GAUTHIER et KUPKA 2001), les auteurs ont alors généralisé les résultats de (GAUTHIER et al. 1992) dans le cas où la partie non linéaire n'est pas affine en la commande, complétant de ce fait l'étude sur les systèmes mono-sortie. Les systèmes non linéaires posent, eux, plus de problèmes, et seules des formes normales d'observabilité pour toute entrée ont été établies jusqu'à présent dans la littérature. Une première étape a consisté à reprendre la forme introduite dans (GAUTHIER et al. 1992) et à l'adapter dans le cas MIMO (HAMMOURI et FARZA 2003). Le résultat obtenu consiste alors à regrouper toutes les sorties un seul bloc, et les dérivées successives de ces dernières sont données par les blocs suivants. La matrice anti-décalage résultante est ainsi une matrice anti-décalage par bloc et la partie non linéaire est triangulaire par rapport aux blocs d'états. Un autre axe de travail a été fourni par (SHIM et al. 2001), où les auteurs considèrent cette fois le cas où chaque sortie est associée, avec ses dérivées successives, à un bloc donné. Notons cette fois-ci que la partie non linéaire est triangulaire selon les états dans le bloc considéré et selon les blocs d'états. Malgré tout, ces deux travaux ne fournissent pas une forme canonique d'observabilité, mais

bien deux formes normales, différentes et qui se complètent. Cela signifie qu'aucune de ces deux formes ne généralise l'autre. Plus récemment, d'autres formes ont été proposées dans le but d'étendre ces résultats. C'est le cas notamment de (HAMMOURI et al. 2010) qui propose plusieurs conditions suffisantes structurelles sur les non-linéarités du système à plusieurs sorties considéré permettant d'assurer l'observabilité pour toute entrée de ce dernier. Une autre forme normale plus générale, décrite dans (FARZA et al. 2011), reprend la forme triangulaire par bloc introduite dans (SHIM et al. 2001) en permettant, en plus, à la dernière dynamique de chaque bloc de dépendre de tout l'état du système considéré. Malgré cela, cette forme ne constitue toujours pas une forme canonique dans la mesure où certains systèmes observables pour toute entrée ne peuvent pas se mettre sous cette dernière forme. En réalité, la forme normale la plus générale actuellement a été proposée dans (BORNARD et HAMMOURI 2002) via une approche par graphe. Plus précisément, on associe à chaque système un graphe, qui, si le système est observable pour toute entrée, ne contient pas de cycle. Cette dernière forme normale a la particularité de contenir la forme introduite dans (FARZA et al. 2011) mais aussi une autre forme introduite dans (GRIP et SABERI 2012) et également basée sur une approche graphique. Cependant, les auteurs dans (BORNARD et HAMMOURI 2002) ne proposent pas une approche systématique permettant de synthétiser simplement un observateur grand gain pour l'ensemble de la classe de systèmes introduite dans (BORNARD et HAMMOURI 2002).

Notre dernière contribution de ce manuscrit de thèse a consisté à étendre la synthèse à grand gain standard sur la plus large classe possible de systèmes non linéaires MIMO uniformément observables. Nous avons ainsi repris la classe de systèmes introduite dans (BORNARD et HAMMOURI 2002), i.e. la forme normale la plus générale actuellement. Plus précisément, en nous basant sur les définitions (notamment celles en lien avec le graphe d'uniforme observabilité) introduites dans (BORNARD et HAMMOURI 2002), nous avons réécrit cette forme normale sous une autre forme qui ne va pas sans rappeler la forme normale introduite dans (FARZA et al. 2011). Nous avons ensuite proposé une immersion de cette réécriture permettant par la suite de synthétiser un observateur grand gain sur l'ensemble de la classe de systèmes considérée. L'objectif futur de cette dernière contribution consiste à adapter cette forme normale au cas où le système considéré est soumis au processus d'acquisition des mesures mentionné plus haut.

Ce manuscrit de thèse est organisé en 6 chapitres dont l'introduction et la conclusion, ainsi que de deux annexes [A](#) et [B](#).

Le deuxième chapitre propose un état de l'art sur l'observabilité et l'observation des systèmes non linéaires. Un ensemble de définitions est donné pour une bonne compréhension de ce manuscrit, et plusieurs exemples de synthèse d'observateurs, notamment des observateur grand gain, y ont été proposés. Enfin, les limites de l'observateur grand gain sont illustrées à travers un exemple pour une bonne compréhension des problèmes en jeu.

Le troisième chapitre, pour une classe de systèmes non linéaires MIMO uniformément observables où les sorties sont regroupées dans un seul bloc, traite le problème des mesures disponibles dans le cadre du processus d'acquisition des mesures de sortie. Un lemme technique constituant la clé de voûte du problème du retard variable et de l'échantillonnage est d'abord fourni. Une première synthèse a été considérée dans le cas où les mesures de sortie ne sont pas retardées, mais peuvent être continues ou échantillonnées selon le processus d'acquisition des mesures. Ce résultat est ensuite étendu au cas d'un retard variable dans le temps relativement petit. Le cas du retard arbitrairement long est ensuite traité, d'abord sous sa forme constante, via une structure en cascade. Ce dernier est ensuite considéré comme étant variant dans le temps, et une procédure appropriée permettant de reformuler le problème du retard variable dans le temps en un problème de retard constant et arbitrairement long est ensuite donnée, permettant ainsi d'effectuer directement la synthèse de l'observateur en exploitant l'approche suivie dans le cas constant. Enfin, tous ces résultats ont été adaptés au cas où chaque sortie est soumise à un retard et un échantillonnage potentiellement différents. Deux exemples de simulation sont finalement fournis selon la nature du processus d'acquisition des mesures de sortie considéré.

Le quatrième chapitre s'organise autour de la synthèse d'un nouvel observateur grand gain filtré pour une classe de systèmes non linéaires SISO (Single-input/single-output) uniformément observables. Dans un premier temps, un lemme technique fournissant une procédure systématique et simple pour assigner arbitrairement les pôles de l'observateur filtré est proposé. La synthèse de l'observateur filtré est ensuite donnée pour des mesures de sortie disponibles en temps continu. Une comparaison avec l'observateur 'low power' donné par (ASTOLFI et MARCONI 2015) puis une étude détaillée de la sensibilité au bruit de mesure de l'observateur filtré proposé, dans un particulier linéaire à l'instar de (ASTOLFI et MARCONI 2015), sont ensuite proposées. Enfin, l'observateur grand gain filtré a été re-synthétisé dans le but de prendre en compte l'échantillonnage de la sortie, et une extension de l'observateur filtré au cas multi-sorties est détaillée, dans le cas où les sorties sont regroupées dans un seul bloc. Plusieurs exemples (oscillateur forcé de Van Der Pol, bioréacteur) ont servi d'illustration en fin de chapitre afin de souligner les performances de l'observateur filtré.

Le cinquième chapitre s'articule autour de la forme normale d'observabilité introduite dans (BORNARD et HAMMOURI 2002) et vise à la réétudier sous un autre angle. Après avoir rappelé la définition du graphe d'uniforme observabilité introduit dans (BORNARD et HAMMOURI 2002), nous avons proposé de réécrire le système introduit dans (BORNARD et HAMMOURI 2002) sous la forme d'étages, appelés passes, dans l'optique de mettre en exergue le caractère observable pour toute entrée de la classe de systèmes étudiée. Une écriture sous la forme de passes via un formalisme similaire à ce qui a été introduit dans (FARZA et al. 2011) a alors été

proposé, puis une immersion de cette dernière forme a été donnée en vue d'une synthèse grand gain. Deux lemmes techniques similaires à ce qui a été démontré dans (FARZA et al. 2011) ont alors été fournis afin de prouver la convergence de l'observateur. Un exemple traitant d'un réseau de réservoirs interconnectés est enfin proposé à but illustratif.

Ce manuscrit de thèse se clôt par une conclusion globale mettant en avant les différents points évoqués au fil des chapitres et proposant un ensemble de perspectives pour les travaux futurs.

Enfin, l'annexe A rappelle l'une des formes normales d'observabilité uniforme les plus générales existant actuellement, et l'annexe B rassemble plusieurs lemmes techniques utilisés dans les chapitres 3 et 4, mis de côté dans une optique de clarté du manuscrit proposé.





# Chapitre 2

## Notions d'observabilité pour les systèmes non linéaires

### 2.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de donner les définitions clés de l'observabilité et de l'observation des systèmes non linéaires dans l'optique d'une lecture agréable de ce manuscrit de thèse. Dans la section 2.2, après avoir rapidement défini ce qu'est un observateur, il convient de donner tout un ensemble de définitions sur l'observabilité des systèmes non linéaires pour mieux apprécier les subtilités, en l'occurrence ce qui concerne l'observabilité pour toute entrée. Nous donnons ensuite dans la section 2.3 un aperçu de synthèses possibles d'observateurs. Nous mettons en particulier l'accent sur la synthèse grand gain, famille d'observateurs que nous avons choisi d'utiliser tout au long de ce mémoire. Enfin, nous proposons dans la section 2.4 de souligner quelques limites importantes (bruit de mesure, phénomène du 'pick') de la synthèse grand gain par le biais d'un exemple illustratif.

### 2.2 Observabilité

Nous allons dans cette section introduire le concept clé d'estimation d'état d'un système dynamique et donner des définitions élémentaires dans la compréhension de la suite de ce manuscrit.

#### 2.2.1 Estimation d'état

Un estimateur d'état, ou observateur, est un algorithme permettant de reconstruire des variables d'état d'un système dynamique en exploitant les mesures des différentes entrées et sorties de ce dernier. Un observateur peut être vu comme un capteur logiciel, jouant un rôle similaire à celui d'un capteur physique, mais pour une grandeur non mesurée. Nous considé-

rons dans ce qui suit le système dynamique suivant :

$$\text{SYS} \begin{cases} \dot{x}(t) = f(u(t), x(t)) \\ y(t) = h(x(t)) \end{cases} \quad (2.1)$$

où :

- l'état  $x(t) \in \mathcal{X}$  est une variété analytique de dimension  $n$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , i.e.  $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ ,
- $u \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$  et  $y \in \mathbb{R}^p$  sont respectivement l'entrée et la sortie du système (2.1),
- le champ de vecteurs  $f_u(x) = f(u, x)$  et la fonction  $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_q \end{pmatrix}$  sont de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathcal{X}$ .

Un observateur est un système dynamique qui permet donc d'estimer l'ensemble de l'état  $x(t)$  du système (2.1) par la connaissance de la sortie  $y(t)$ , de l'entrée  $u(t)$  et du modèle du système (2.1). Un observateur peut être schématisé par la figure 2.1.

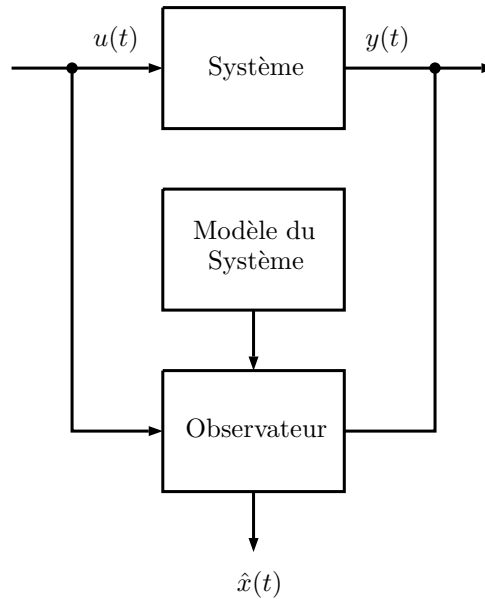


FIGURE 2.1 – Schéma fonctionnel d'un estimateur d'état

Un observateur pour un système non linéaire de la forme (2.1) est généralement donné par le système dynamique suivant

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = f(u(t), \hat{x}(t)) - L(\hat{y}(t) - y(t)) \\ \hat{y}(t) = h(\hat{x}(t)) \end{cases} \quad (2.2)$$

L'observateur (2.2) est composé de deux termes additifs : le premier correspond à une copie du modèle du système (2.1) alors que le deuxième est un terme correctif basé sur l'erreur d'observation ( $\hat{y}(t) - y(t)$ ). La dynamique du système (2.2) est fixée par la matrice de gain  $L$ . Notons que l'observateur peut également avoir une forme plus générale avec une dimension

---

différente de celle du système.

Le concept clé derrière la notion d'observabilité réside dans la détermination, à chaque instant de temps, de l'état du système (2.1). Cet ensemble d'états est appelé trajectoire du système (2.1). Il existe une infinité de trajectoires; chaque trajectoire dépend de l'instant initial  $t_0$ , de l'état initial  $x(t_0)$  et de l'entrée à chaque instant  $t$ , notée  $u(t)$ . Dans ce qui suit, on notera  $t_0$  un instant initial quelconque,  $T > 0$  un horizon temporel éventuellement infini, et on notera  $x(t, x(t_0), u(t))$  la trajectoire du système (2.1) lorsqu'elle existe et est unique, pour  $t \in [t_0, t_0 + T[$ .

L'observabilité exprime la possibilité de reconstruire la trajectoire d'état du système  $x(t, x(t_0), u(t))$  telle que définie ci-dessus par la simple connaissance de la sortie  $y(t, t_0)$  et de l'entrée  $u(t, t_0)$  sur un intervalle de temps  $[t_0, t_0 + T[$ . Concrètement, l'observabilité est basée sur la possibilité de distinguer deux trajectoires distinctes pour tout couple distinct de conditions initiales (HERMANN et KRENER 1977).

### 2.2.2 Observabilité globale

L'observabilité pour les systèmes non linéaires, contrairement aux systèmes linéaires, n'est pas un concept universel. Il existe ainsi plusieurs définitions traitant de l'observabilité; on parle notamment d'observabilité globale, observabilité locale, ou encore d'observabilité uniforme.

La première définition ci-après est directement liée à la distinguabilité de deux trajectoires à partir de deux conditions initiales différentes (HERMANN et KRENER 1977).

**Définition 2.2.1 (Distinguabilité et indistinguabilité)** *Deux états initiaux  $x_0, x_1 \in \mathcal{X}$  tels que  $x_0 \neq x_1$  sont dits distinguables dans  $\mathcal{X}$  si  $\exists t \geq 0$  et  $\exists u : [0, t] \rightarrow \mathcal{U}$  une entrée admissible telle que les trajectoires des sorties issues de  $x_0$  et  $x_1$ , respectivement, restent dans  $\mathcal{X}$  sur l'intervalle  $[0, t]$ , et vérifient  $y(t, x_0, u(t)) \neq y(t, x_1, u(t))$ . Dans ce cas, on dit que l'entrée  $u$  distingue  $x_0$  de  $x_1$  dans  $\mathcal{X}$ . Réciproquement, deux états initiaux  $x_0, x_1 \in \mathcal{X}$  tels que  $x_0 \neq x_1$  sont dits indistinguables si,  $\forall t \geq 0$  et  $\forall u : [0, t] \rightarrow \mathcal{U}$  pour lesquels les trajectoires issues de  $x_0$  et  $x_1$  restent dans  $\mathcal{X}$ , nous avons  $y(t, x_0, u(t)) = y(t, x_1, u(t))$ .*

La notion d'observabilité d'un système en un point (GAUTHIER et BORNARD 1981; ZEMOUCHE 2007; LIU 2007) découle directement de la précédente définition. Par extension, il est possible de définir l'observabilité d'un système en tout point de  $\mathcal{X}$ .

**Définition 2.2.2 (Observabilité)** *Le système (2.1) est dit observable en  $x_0 \in \mathcal{X}$  si pour tout autre état  $x_1 \neq x_0$ , les deux états  $x_0, x_1$  sont distinguables dans  $\mathcal{X}$ . Par extension, si cette dernière propriété est vraie pour tout  $x_0 \in \mathcal{X}$ , alors on dit que le système est observable.*

Cette dernière définition amène au théorème suivant que l'on peut retrouver dans (KALMAN 1960).

**Théorème 2.2.1** ((KALMAN 1960)) *Soit le système linéaire invariant suivant*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{cases} \quad (2.3)$$

avec  $A \in R^{n \times n}$ ,  $B \in R^n$ ,  $C \in R^{1 \times n}$ . Le système (2.3) est observable si et seulement si la matrice d'observabilité associée à ce système et donné par

$$\mathcal{O}_y = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

est de rang plein. Dans ce cas, on dit que la paire  $(C, A)$  est observable.

Ce résultat, très utilisé dans le cas linéaire, est en réalité particulièrement contraignant dans le cas non linéaire. En effet, la notion d'observabilité telle que donnée ci-dessus est un résultat global. Or, en pratique, nous n'avons pas besoin de distinguer chaque trajectoire sur l'ensemble  $\mathcal{X}$  et pour tout intervalle de temps  $[t_0, t_0 + T[$ . Pour cela, nous allons rappeler dans la partie suivante la notion d'observabilité locale faible, donnée par (HERMANN et KRENER 1977).

### 2.2.3 Observabilité locale faible

Il convient dans un premier temps de définir la notion d'observabilité locale (HERMANN et KRENER 1977).

**Définition 2.2.3 (Observabilité locale)** *Le système (2.1) est dit localement observable en  $x_0$  si, pour tout voisinage  $V_{x_0}$  de  $x_0$ , l'ensemble des états indistinguables de  $x_0$  dans  $V_{x_0}$  se réduit au singleton  $x_0$ . Par extension, le système (2.1) est dit localement observable s'il est localement observable pour tout  $x_0 \in \mathcal{X}$ .*

La notion d'observabilité locale faible donnée par (HERMANN et KRENER 1977) se définit alors comme suit.

**Définition 2.2.4 (Observabilité locale faible)** *Le système (2.1) est dit localement faiblement observable en  $x_0$  s'il existe un voisinage ouvert  $V_{x_0}$  de  $x_0$  tel que pour tout voisinage ouvert  $V'_{x_0} \subset V_{x_0}$ , l'ensemble des états indistinguables de  $x_0$  dans  $V'_{x_0}$  se réduit au singleton  $x_0$ . Par extension, le système (2.1) est dit localement faiblement observable s'il est localement faiblement observable pour tout  $x_0 \in \mathcal{X}$ .*

---

Cette dernière définition signifie qu'un système est localement faiblement observable si tout état  $x_0$  peut être distingué de ses voisins instantanément. Dans la partie suivante, nous allons traduire cette définition sous la forme d'une condition de rang similaire au cas linéaire.

#### 2.2.4 Observabilité au sens du rang

Avant de définir la notion d'observabilité au sens du rang, il convient de définir l'espace d'observation (HERMANN et KRENER 1977).

**Définition 2.2.5 (Espace d'observation)** *L'espace d'observation du système (2.1) est le plus petit sous-espace vectoriel, noté  $\mathcal{O}(h)$ , contenant les composantes de la fonction  $h$ , i.e.  $h_1, \dots, h_q$ , et qui soit fermé pour la dérivation de Lie le long de tous les champs de vecteurs  $f_u(x) = f(u, x)$ ,  $u \in \mathcal{U}$  constant.*

Notons que la dérivée de Lie de  $h^{(k)}(x)$  selon la direction du champ  $f_u$  à  $u$  constant est donnée par

$$L_{f_u} h^{(k)}(x) = \frac{\partial h^{(k)}(x)}{\partial x} \cdot f_u(x) = \left( \nabla h^{(k)}(x) \right)^T \cdot f_u(x) = \frac{dy^{(k)}(t)}{dt} \quad (2.4)$$

et, plus généralement,

$$L_{f_u}^i h^{(k)}(x) = L_{f_u} \left( L_{f_u}^{i-1} h^{(k)}(x) \right) = \frac{d^i y^{(k)}(t)}{dt^i} \quad (2.5)$$

Définissons maintenant l'observabilité au sens du rang (HERMANN et KRENER 1977).

**Définition 2.2.6 (Observabilité au sens du rang)** *Le système (2.1) est localement faiblement observable au sens du rang en  $x_0$  si l'espace des différentielles des éléments de  $\mathcal{O}(h)$  évaluées en  $x_0$ , noté  $d\mathcal{O}(h)|_{x_0}$ , vérifie*

$$\dim d\mathcal{O}(h)|_{x_0} = n \quad (2.6)$$

La condition (2.6) est appelée condition du rang. Si cette condition est respectée quel que soit  $x_0 \in \mathcal{X}$ , alors on dit que le système (2.1) est observable au sens du rang.

La définition ci-dessus donne une condition suffisante d'observabilité locale faible. Il est cependant possible de trouver une condition nécessaire, comme le montre le théorème suivant (NIJMEIJER et SCHAFT 1990).

**Théorème 2.2.2** *Supposons que le système (2.1) est localement faiblement observable. Alors la condition (2.6) est satisfaite presque partout dans  $\mathcal{X}$ , i.e.  $\dim d\mathcal{O}(h)|_{x_0} = n$  pour tout état  $x$  appartenant à un ouvert  $\mathcal{X}'$  dense dans  $\mathcal{X}$ .*

Dans toutes les définitions précédentes, l'influence de l'entrée  $u$  n'a pas été prise en compte. En effet, ces définitions n'impliquent pas que toute entrée distingue les couples de points de  $\mathcal{X}$ . Or, nous aimerions distinguer, pour toute entrée  $u \in \mathcal{U}$ , tout couple d'états distincts donnant lieu à des sorties différentes. Pour remédier à ce problème, nous allons introduire dans un dernier volet de définitions le concept d'entrée universelle et celui de  $\mathcal{U}$ -uniforme observabilité.

### 2.2.5 $\mathcal{U}$ -uniforme observabilité

Dans le cas de systèmes non linéaires, l'observabilité d'un système dépend fortement de l'entrée que l'on applique au système considéré. En effet, le système (2.1) peut tout à fait être observable pour certaines entrées, et être inobservables pour d'autres entrées. Dans cette optique, nous allons introduire la notion d'entrée universelle puis nous définirons l'observabilité pour toute entrée, concept clé des contributions présentées dans ce manuscrit (SUSSMANN 1978).

**Définition 2.2.7 (Entrée universelle)** *Une entrée  $u : [0, T] \rightarrow \mathcal{U}$  admissible est dite universelle pour le système (2.1) sur  $[0, T]$  si, quel que soit le couple d'états initiaux distincts  $x_0, x_1$ , il existe au moins un instant de temps  $t \in [0, T]$  pour lequel les sorties résultantes de  $x_0$  et  $x_1$  sont distinctes, i.e.  $y(t, x_0, u(t)) \neq y(t, x_1, u(t))$ . Une entrée non-universelle est appelée entrée singulière.*

Dans le cas où toutes les entrées admissibles de  $\mathcal{U}$  sont universelles, alors tout couple d'états initiaux est distinguable. C'est ce que l'on appelle l'observabilité pour toute entrée, ou  $\mathcal{U}$ -uniforme observabilité (WILLIAMSON 1977).

**Définition 2.2.8 ( $\mathcal{U}$ -uniforme observabilité)** *Un système (2.1) dont toutes les entrées admissibles à valeurs dans  $\mathcal{U}$  sont universelles est dit  $\mathcal{U}$ -uniformément observable.*

Dans la littérature, beaucoup de travaux traitent de la caractérisation de classes de systèmes  $\mathcal{U}$ -uniformément observables. Le cas des systèmes mono-sortie est étudié dans (WILLIAMSON 1977) pour les cas des systèmes bilinéaires, et dans (GAUTHIER et BORNARD 1981 ; GAUTHIER et al. 1992) pour le cas des systèmes affines en la commande. Ces deux cas sont détaillés dans les deux paragraphes suivants. Nous donnerons ensuite deux exemples traitant du cas multi-sorties, où nous verrons qu'il n'existe que des conditions suffisantes d'observabilité uniforme.

### Observabilité des systèmes mono-sortie bilinéaires

Dans (WILLIAMSON 1977), la classe de systèmes considérée est la suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + u(t)Bx(t) + Fu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{cases} \quad (2.7)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}$ ,  $y \in \mathbb{R}$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$  et  $F \in \mathbb{R}^n$ . La condition nécessaire et suffisante d'observabilité uniforme est donnée par le théorème suivant.

**Théorème 2.2.3** *Le système (2.7) est  $\mathbb{R}$ -uniformément observable si et seulement s'il existe un changement de coordonnées  $z = Tx$  pour lequel le système (2.7) peut être mis sous la forme*

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \bar{A}z(t) + u(t)\bar{B}z(t) + \bar{F}u(t) \\ y(t) = \bar{C}z(t) \end{cases}$$

avec

$$\bar{A} = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ a_1 & \dots & \dots & \dots & a_n \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = TBT^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{b}_{11} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ \bar{b}_{n1} & \dots & \dots & \bar{b}_{nn} \end{bmatrix},$$

$$\bar{F} = TF \quad \text{et} \quad \bar{C} = CT^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

### Observabilité des systèmes mono-sortie affines en la commande

Soit désormais le système non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(u(t), x(t)) = f(x(t)) + g(x(t))u(t) \\ y(t) = h(x(t)) \end{cases} \quad (2.8)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $y \in \mathbb{R}$  et  $u = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$ . La condition nécessaire et suffisante d'observabilité uniforme du système (2.8) et donnée par (GAUTHIER et BORNARD 1981) est décrite par le théorème suivant.

**Théorème 2.2.4** *Le système (2.8) est  $\mathbb{R}^m$ -uniformément observable si et seulement s'il existe un changement de coordonnées locales sur  $\mathbb{R}^n$  pour lequel le système (2.8) peut se mettre localement presque partout sous la forme suivante :*

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Az(t) + \varphi(z(t)) + \psi(z(t))u(t) \\ y(t) = Cz(t) \end{cases}$$

où :

- $A$  est la matrice anti-décalage, donnée par

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



- $C$  est la matrice d'observation, donnée par

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

- La fonction  $\varphi(z)$  est donnée par

$$\varphi(z) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \varphi_n(z) \end{pmatrix}$$

- La matrice  $\psi(z) = \begin{bmatrix} \psi^{(1)}(z) & \psi^{(2)}(z) & \dots & \psi^{(m)}(z) \end{bmatrix}$  est telle que chacune de ces composantes a une structure triangulaire par rapport à l'état  $z$ , i.e. chacune d'elles est décrite comme suit

$$\psi^{(k)}(z) = \begin{pmatrix} \psi_1^{(k)}(z_1) \\ \psi_2^{(k)}(z_1, z_2) \\ \vdots \\ \psi_n^{(k)}(z_1, \dots, z_n) \end{pmatrix}$$

Dans le dernier paragraphe de cette partie, nous proposons de donner une condition suffisante d'observabilité uniforme pour une classe de systèmes non linéaires à plusieurs sorties où toutes les sorties sont regroupées en un seul bloc.

### Observabilité d'une classe de systèmes non linéaires à plusieurs sorties regroupées en un bloc

Nous considérons donc la classe de systèmes suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + \varphi(u(t), x(t)) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (2.9)$$

où  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ ,  $x_k \in \mathbb{R}^p$  pour tout  $k = 1, \dots, q$ ,  $y \in \mathbb{R}^p$  avec  $n = qp$ ,  $u =$

$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$ , et les matrices  $A$  et  $C$  sont données par

$$A = \begin{bmatrix} 0_p & I_p & 0_p & \dots & 0_p \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0_p \\ 0_p & \dots & \dots & 0_p & I_p \\ 0_p & \dots & \dots & 0_p & 0_p \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad \text{et} \quad C = \begin{bmatrix} I_p & 0_p & \dots & 0_p \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p \times n}$$

---

La condition suffisante d'observabilité uniforme du système (2.9) est donnée par le théorème suivant.

**Théorème 2.2.5** *Le système (2.9) est  $\mathbb{R}^m$ -uniformément observable si la fonction non linéaire  $\varphi$  a la structure triangulaire suivante :*

$$\varphi(u, x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(u, x_1) \\ \varphi_2(u, x_1, x_2) \\ \vdots \\ \varphi_q(u, x_1, \dots, x_q) \end{pmatrix}$$

Maintenant que les différents concepts d'observabilité nécessaires dans ce manuscrit ont été définis et que plusieurs exemples dans le cas mono-sortie et le cas multi-sorties ont été donnés, il convient de présenter l'outil permettant d'estimer une trajectoire d'état à l'aide de la sortie et de l'entrée du système, à savoir un observateur. Nous présenterons en guise d'illustration plusieurs observateurs courants dans la littérature dans le cas linéaire, à savoir l'observateur de Luenberger et le filtre de Kalman. Nous présenterons ensuite des observateurs de type grand gain, type d'observateur considéré tout au long de ce manuscrit, synthétisés ici sur deux classes de systèmes non linéaires, uniformément observables.

## 2.3 Synthèse d'observateurs

Comme cela a été dit ci-dessus, un observateur, ou reconstituteur d'état, est un outil mathématique permettant de reconstruire la trajectoire d'état d'un système par la seule connaissance de la sortie et de l'entrée du système à l'instant présent et aux instants passés. Dans cette optique, considérons le système dynamique général suivant :

$$\text{OBS} \begin{cases} \dot{z}(t) &= \bar{f}(z(t), u(t), y(t), t) \\ \hat{x}(t) &= \bar{h}(z(t), u(t), y(t), t) \end{cases} \quad (2.10)$$

où  $z \in \mathcal{X}$ , et  $u$  et  $y$  sont respectivement l'entrée et la sortie du système (2.1).

**Définition 2.3.1 (Observateur)** *Le système dynamique (2.10) est un observateur asymptotique local pour le système (2.1) s'il existe un point  $x_0 \in \mathcal{X}$  et un voisinage  $V_{x_0}$  de  $x_0$  tels que*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\hat{x}(t) - x(t)\| = 0$$

*pour toute condition initiale  $x(0) \in V_{x_0}$ . De plus, cet observateur est un observateur global si*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\hat{x}(t) - x(t)\| = 0$$

pour toute condition initiale  $x(0) \in \mathcal{X}$ . Enfin, on dit que la système (2.10) est un observateur exponentiel pour le système (2.1) s'il vérifie :

$$\exists \lambda, \mu > 0 \text{ tels que } \|\hat{x}(t) - x(t)\| \leq \mu e^{-\lambda t} \|\hat{x}(0) - x(0)\|$$

Cette dernière propriété est généralement très recherchée dans le cadre de la synthèse d'un observateur. Généralement, un observateur se met sous la forme suivante :

$$\text{OBS} \begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) &= f(u(t), \hat{x}(t)) - G(g)(h(\hat{x}(t)) - y(t)) \\ \dot{g}(t) &= \varphi(\hat{x}(t), u(t), y(t), g(t)) \end{cases} \quad (2.11)$$

L'observateur (2.11) est ainsi composé de deux termes additifs : le premier terme  $f(u(t), \hat{x}(t))$  correspond simplement à une copie du modèle du système (2.1) ; le second terme, i.e. le terme  $G(g)(h(\hat{x}(t)) - y(t))$ , est ce que l'on appelle le terme de correction de l'observateur (2.11), et  $G(g)$  est appelé gain d'observation.

Donnons maintenant plusieurs exemples concrets de synthèse d'observateur.

### 2.3.1 Systèmes linéaires à temps invariant - Observateur de Luenberger

Considérons le système linéaire invariant suivant

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{cases} \quad (2.12)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$  et  $y \in \mathbb{R}^p$ . L'observateur de Luenberger (LUENBERGER 1971) est le système dynamique donné par l'expression suivante

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) - K(C\hat{x}(t) - y(t))$$

où la matrice  $K$  est choisie de sorte que la matrice  $\tilde{A} \triangleq A - KC$  soit Hurwitz, i.e. les valeurs propres de  $\tilde{A}$  sont toutes à partie réelle négative. Un tel observateur est un observateur exponentiel pour le système (2.12).

### 2.3.2 Systèmes linéaires à temps variant - Filtre de Kalman

Soit le système linéaire à temps variant suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t) \end{cases} \quad (2.13)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$  et  $y \in \mathbb{R}^p$ . Dans le cas où le système linéaire considéré est à temps variant, comme c'est le cas pour le système (2.13), il est possible de synthétiser un observateur de

---

type Kalman. La synthèse d'un tel observateur nécessite que les entrées soient régulièrement persistantes. Le filtre de Kalman peut prendre deux formes différentes, suivant si on utilise une équation dynamique de Lyapunov ou une équation dynamique de Riccati. Ces deux formes sont respectivement données par les expressions (2.14) et (2.15) suivantes :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) &= A(t)\hat{x}(t) + B(t)u(t) - S^{-1}(t)C^T(t)(C(t)\hat{x}(t) - y(t)) \\ \dot{S}(t) &= -\theta S(t) - A^T(t)S(t) - S(t)A(t) + C^T(t)C(t) \\ S(0) &= S_0 \end{cases} \quad (2.14)$$

et

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) &= A(t)\hat{x}(t) + B(t)u(t) - S^{-1}(t)C^T(t)(C(t)\hat{x}(t) - y(t)) \\ \dot{S}(t) &= -S(t)Q(t)S(t) - A^T(t)S(t) - S(t)A(t) + C^T(t)C(t) \\ S(0) &= S_0 \end{cases} \quad (2.15)$$

où  $\theta > 0$ , et les matrices  $S_0$  et  $Q_0$  sont définies positives.

La convergence de ces deux observateurs est garantie sous l'hypothèse de l'uniforme complète observabilité du système. Pour ce type de synthèse, il faut assurer à la fois la stabilité de l'équation d'erreur et celle de la matrice de gain  $S(t)$ . Cette dernière doit constamment être symétrique définie positive (SDP) et bornée, c'est-à-dire pour tout  $t$ .

Dans ce qui suit, nous allons reconsidérer la classe de systèmes non linéaires données par (2.9) dans l'optique de synthétiser sur cette classe un observateur. Nous considérerons ensuite une classe de systèmes plus générale introduite dans (FARZA et al. 2011). Dans les deux cas, un observateur de type grand gain est synthétisé.

### 2.3.3 Synthèse d'un observateur grand gain pour une classe de systèmes non linéaires à plusieurs sorties regroupées en un bloc

Considérons de nouveau le système dynamique donné en (2.9), i.e.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + \varphi(u(t), x(t)) \\ y(t) &= Cx(t) \end{cases} \quad (2.16)$$

où  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ ,  $y \in \mathbb{R}^p$  avec  $n = qp$ ,  $u = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$ , les matrices  $A$

et  $C$  sont données par

$$A = \begin{bmatrix} 0_p & I_p & 0_p & \dots & 0_p \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0_p \\ 0_p & \dots & \dots & 0_p & I_p \\ 0_p & \dots & \dots & 0_p & 0_p \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad \text{et} \quad C = \begin{bmatrix} I_p & 0_p & \dots & 0_p \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p \times n}$$

et la fonction non linéaire  $\varphi$  est décrite par

$$\varphi(u, x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(u, x_1) \\ \varphi_2(u, x_1, x_2) \\ \vdots \\ \varphi_q(u, x_1, \dots, x_q) \end{pmatrix}$$

En général, pour une synthèse d'observateur de type grand gain, les hypothèses suivantes sont considérées.

**Hypothèse 2.3.1** *L'état  $x(t)$  et la commande  $u(t)$  sont bornés, i.e.  $x(t) \in \mathcal{X}$  et  $u(t) \in \mathcal{U}$  où  $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$  et  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$  sont des ensembles compacts. Plus précisément, il existe des constantes  $\rho_i$ ,  $i = 1, \dots, q$ , telles que  $\max_{x \in \mathcal{X}} \|x_i(t)\| < \rho_i$  pour tout  $t \geq 0$ .*

**Hypothèse 2.3.2** *Les fonctions  $\varphi_i(u, x)$ ,  $i = 1, \dots, q$ , sont Lipschitz sur  $\mathcal{X}$  selon  $x$  uniformément en  $u$ , i.e.*

$$\exists L_{\varphi_i} > 0, \forall u \in \mathcal{U}, \forall (x, \bar{x}) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X} :$$

$$\|\varphi_i(u, x_1, \dots, x_i) - \varphi_i(u, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_i)\| \leq L_{\varphi_i} \sum_{k=1}^i \|x_k - \bar{x}_k\|, \quad i = 1, \dots, q. \quad (2.17)$$

Nous posons  $L_\varphi = \max_{1 \leq i \leq q} L_{\varphi_i}$ .

Un observateur grand gain pour le système (2.16) est alors donné par le système dynamique suivant

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + \varphi(u(t), \hat{x}(t)) - \theta \Delta_\theta^{-1} K (C\hat{x}(t) - y(t)) \quad (2.18)$$

où :

- $\theta \geq 1$  est un paramètre de synthèse propre aux observateurs de type grand gain,
- la matrice  $K$  est choisie de sorte que la matrice  $\tilde{A} \triangleq A - KC$  est Hurwitz,

- $\Delta_\theta$  est la matrice diagonale décrite par l'expression suivante

$$\Delta_\theta = \text{diag}\left( I_p, \frac{1}{\theta}I_p, \dots, \frac{1}{\theta^{q-1}}I_p \right) \quad (2.19)$$

Le théorème suivant stipule que l'observateur (2.18) est un observateur exponentiel pour le système (2.16).

**Théorème 2.3.1** *Dans le cas où le système (2.16) est soumis aux hypothèses 2.3.1 et 2.3.2, le système dynamique (2.18) est un observateur exponentiel pour le système (2.16) pour des valeurs suffisamment grandes du paramètre  $\theta$ , i.e. l'erreur d'observation  $\tilde{x}(t) = \hat{x}(t) - x(t)$  converge exponentiellement vers zéro quand  $t$  tend vers l'infini pour  $\theta$  assez grand.*

Le preuve du théorème 2.3.1 est donnée dans (MAATOUG 2009).

### 2.3.4 Synthèse d'un observateur grand gain pour une classe de systèmes non linéaires non-triangulaire par bloc

L'une des classes les plus générales existant actuellement de systèmes non linéaires MIMO uniformément observables est décrite dans (FARZA et al. 2011). La classe de systèmes proposée est composée de  $q \geq 1$  sorties, chacune représentée par un bloc. Cette classe de système se distingue des précédentes par le fait qu'elle n'est pas triangulaire par blocs. Plus particulièrement, les dépendances possibles des non-linéarités du système proposé sont décrites par les points suivants :

- Les non-linéarités d'un bloc donné  $k > 1$  peuvent dépendre de l'état d'un bloc précédent  $l < k$  : C'est la triangularité selon les blocs du système.
- Dans un bloc donné  $k \geq 1$ , la non-linéarité de la  $i$ -ème composante,  $i \geq 1$ , peut dépendre de l'état de la composante  $j \leq i$  du bloc  $k$  : C'est la triangularité au sein d'un bloc du système.
- La dernière composante de chaque bloc peut dépendre de l'état complet du système : Ce dernier cas représente le caractère non triangulaire du système d'étude.

Les auteurs dans (FARZA et al. 2011) ont montré que ce système est uniformément observable et qu'il est possible de synthétiser un observateur grand gain sur cette classe de systèmes. L'annexe A propose une description plus détaillée de la classe de systèmes et de la synthèse de l'observateur grand gain donné dans (FARZA et al. 2011).

## 2.4 Limites de la synthèse d'observateurs grand gain

Avant de clore ce chapitre d'état de l'art sur les principaux concepts d'observabilité impliqués dans ce manuscrit et présentant quelques synthèses classiques d'observateur, il convient de

souligner les principales limites résultant de la synthèse d'un observateur grand gain. Nous allons pour cela considérer dans cette section un exemple de système non linéaire, uniformément observable. Plus particulièrement, considérons l'exemple dynamique suivant

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) = x_4(t) \\ \dot{x}_4(t) = \varphi_4(x) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases} \quad (2.20)$$

où

$$\varphi_4(x) = -0.06x_1x_2x_3 - 0.02x_2^3 - x_3 - 0.01(x_1^2 - 1)x_4 - 4(x_3 + 0.01(x_1^2 - 1)x_2 + x_1)$$

où  $w(t)$  est le bruit de mesure sur la sortie  $y(t)$ . Les conditions initiales du système (2.20) sont choisies, pour chacune des simulations suivantes, comme suit

$$x(0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0.98 \end{pmatrix}^T$$

La sortie  $y(t)$  a été perturbée par un bruit gaussien  $w(t)$  de moyenne nulle et de variance relativement faible égale à 0.01 comme montré par la figure 2.2.

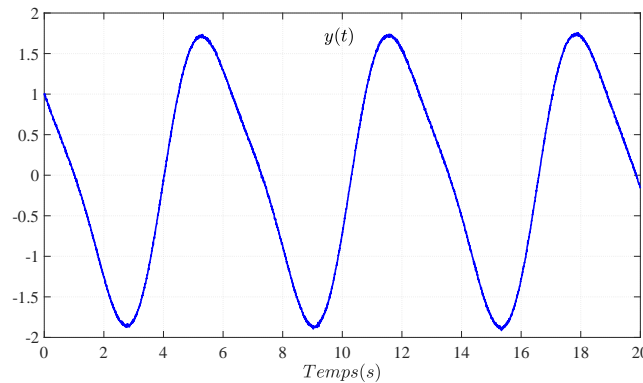


FIGURE 2.2 – Mesure bruitée de  $x_1$

Un observateur grand gain du type (2.18) dans le cas  $q = 1$  (i.e. une sortie) peut être modélisé pour le système (2.20), dont l'équation différentielle est donnée par

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + \varphi(\hat{x}(t)) - \theta\Delta_\theta^{-1}K(C\hat{x}(t) - y(t)) \quad (2.21)$$

avec  $\varphi(\hat{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \varphi_4(\hat{x}) \end{pmatrix}$ , et où la matrices  $\Delta_\theta$  est donnée par (2.19) et où la matrice  $K$  est

---

telle que la matrice  $\tilde{A} \triangleq A - KC$  est Hurwitz, en posant

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice de gain  $K$  de l'observateur (2.21) a été calculée de sorte que les valeurs propres de la matrice  $\tilde{A}$  soient toutes placées en  $(-1)$ , ce qui donne

$$K = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Deux simulations ont été proposées dans cet exemple, où seul le dernier état  $x_4$  du système (2.20) nous intéresse. Dans les deux cas, l'état estimé a été initialisé comme suit

$$\hat{x}(0)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

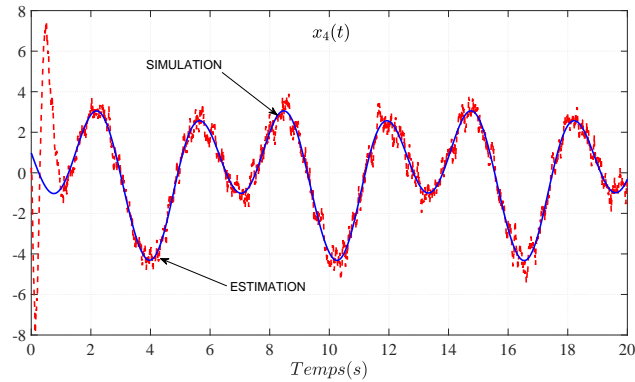
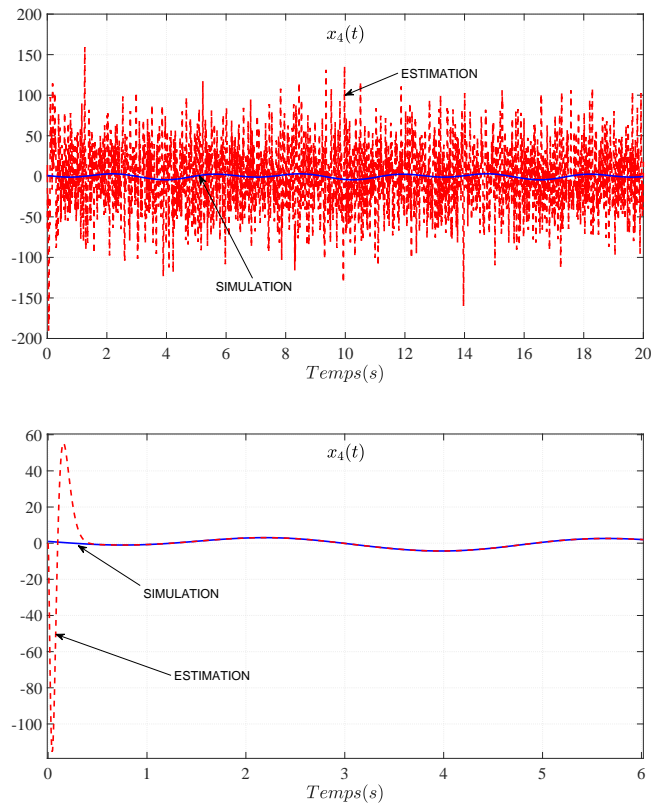
Les figures 2.3 et 2.4 illustrent l'estimation  $\hat{x}_4$  de l'état  $x_4$  pour un paramètre de synthèse  $\theta$  choisi égal à 8 et 30 respectivement. On notera que la première simulation réalisée pour  $\theta = 8$  donne une meilleure estimation de l'état  $x_4$  que dans le cas où  $\theta = 30$ . Cela nous pousse à souligner deux principaux problèmes :

- Par soucis de convergence de l'observateur, il convient de prendre une valeur du paramètre de synthèse  $\theta$  suffisamment élevée. Cependant, de grandes valeurs de ce paramètre provoquent une amplification du bruit de mesure sur la sortie comme l'illustre la figure 2.4.
- D'autre part, comme nous le montre la figure 2.4 dans le cas sans bruit, on observe pour de grandes valeurs du paramètre de synthèse  $\theta$  un phénomène du 'pick' à l'initialisation de l'observateur. Ce phénomène s'explique mathématiquement par la structure de l'observateur proposé, où lorsque la dimension  $n$  du système original devient grande, l'état estimé est en  $O(\theta^{n-1})$ .

## 2.5 Conclusion

Ce chapitre avait pour but d'effectuer quelques rappels sur l'observabilité et l'observation des systèmes, nécessaire à la bonne compréhension de la suite de ce manuscrit. Nous avons ainsi vu que la notion d'observabilité pour les systèmes non linéaires n'était pas unique à l'instar du



FIGURE 2.3 – Estimation de l'état  $x_4$  fournie par l'observateur pour  $\theta = 8$ FIGURE 2.4 – Estimation de l'état  $x_4$  fournie par l'observateur pour  $\theta = 30$  - Au dessus en présence de bruit de mesure, en dessous en l'absence de bruit de mesure

cas linéaire, et qu'elle pouvait notamment dépendre de l'entrée du système. Ce manuscrit de thèse mettra notamment l'accent sur le caractère indépendant de l'observabilité vis-à-vis des entrées du système, ce qui nous amène à nous intéresser à l'observabilité pour toute entrée. D'autre part, un éventail de synthèses possibles d'observateurs a été proposé. Notons que, de même que pour la définition de l'observabilité pour les systèmes non linéaires, il existe une multitude d'observateurs possibles. En ce qui nous concerne, nous nous intéresserons dans ce

---

qui suit à la synthèse grand gain, dont nous avons fait un rapide tour des limites rencontrées.



## Chapitre 3

# Observateur pour des systèmes non linéaires avec prise en compte du processus d'acquisition des mesures de sortie

### 3.1 Introduction

Ce chapitre s'articule autour du problème de l'acquisition des mesures disponibles de sortie pour une classe de systèmes MIMO uniformément observables dont les sorties sont regroupées dans un bloc. Plus précisément, l'objectif de ce chapitre est d'améliorer la synthèse de l'observateur grand gain proposé dans (FARZA et al. 2018) en considérant des sorties disponibles selon un processus d'acquisition des mesures de sortie respectant, suivant un partitionnement du temps en plusieurs intervalles de temps, l'un des quatre points suivants sur chaque intervalle de temps :

- Mesures non retardées disponibles en temps continu
- Mesures disponibles en temps continu retardées par un retard variable dans le temps
- Mesures non retardées sous la forme d'échantillons
- Mesures sous la forme d'échantillons retardées par un retard variable dans le temps

Nous montrons dans ce qui suit que nous pouvons nous affranchir de la structure en cascade donnée par (FARZA et al. 2018) dans le cas de retards arbitrairement petits. Ainsi, ce chapitre propose de synthétiser un observateur grand gain dans le cadre du processus d'acquisition des mesures présenté ci-dessus en procédant d'une manière progressive selon la nature du retard de la sortie du système :

- Mesures non retardées

- Mesures avec retard variable, arbitrairement petit sur la sortie
- Mesures avec retard constant, arbitrairement long sur la sortie
- Mesures avec retard variable, arbitrairement long sur la sortie

Nous nous proposons ensuite de généraliser ces résultats dans le cas où l'échantillonnage et le retard considérés sont potentiellement différents sur chaque composante de la sortie.

Les performances des observateurs résultants selon les scénarios considérés sont illustrées via deux problèmes d'observation relevant respectivement d'un système chaotique de Lorenz et d'un joint flexible de bras robotique.

## 3.2 Quelques résultats préliminaires

Nous considérons la classe de systèmes MIMO non linéaires difféomorphes à la classe de systèmes triangulaires de la forme

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + \varphi(u(t), x(t)) + B\varepsilon(t) \\ y(t) &= h(Cx(t)) = h(x_1(t)) \end{cases} \quad (3.1)$$

avec

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{q-1} \\ x_q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad \varphi(u, x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(u, x_1) \\ \varphi_2(u, x_1, x_2) \\ \vdots \\ \varphi_{q-1}(u, x_1, \dots, x_{q-1}) \\ \varphi_q(u, x) \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0_{(q-1)p,p} & I_{(q-1)p} \\ 0_{p,p} & 0_{p,(q-1)p} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0_p & \cdots & 0_p & I_p \end{pmatrix}^T, \quad C = \begin{pmatrix} I_p & 0_p & \cdots & 0_p \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

où  $x_l \in \mathbb{R}^p$  pour  $l = 1, \dots, q$  sont les blocs de variables d'état du système,  $u(t) \in \mathcal{U}$  est l'entrée du système, où  $\mathcal{U}$  est un ensemble compact,  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  représente la sortie du système, et  $\varepsilon : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^p$  est une fonction inconnue décrivant les incertitudes du système et peut éventuellement dépendre de l'état du système, de l'entrée et de paramètres inconnus. Il est important de noter que la sortie s'exprime seulement comme une fonction  $h$  du sous-état  $x_1$ , à savoir  $y(t) = h(x_1(t))$ . Cette dernière sera graduellement modifiée à travers ce chapitre selon le scénario envisagé concernant la disponibilité des mesures et selon les retards éventuels considérés.

Dans ce qui suit, l'objectif consiste à synthétiser un observateur grand gain délivrant une estimation continue de l'état complet du système (3.1) en exploitant judicieusement les propriétés des mesures disponibles de la sortie à partir d'une définition appropriée du processus

d'échantillonnage. La nature grand gain de l'observateur impose les hypothèses suivantes.

**Hypothèse 3.2.1** *L'état  $x(t)$  et la commande  $u(t)$  sont bornés, i.e.  $x(t) \in \mathcal{X}$  et  $u(t) \in \mathcal{U}$  où  $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$  et  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^s$  sont des ensembles compacts.*

**Hypothèse 3.2.2** *Les fonctions  $\varphi_l$  pour  $l = 1, \dots, q$  sont Lipschitz selon  $x$  uniformément en  $u$ , i.e.*

$$\exists L_\varphi > 0, \forall u \in \mathcal{U}, \forall (x, \bar{x}) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}, \|\varphi_l(u, x) - \varphi_l(u, \bar{x})\| \leq L_\varphi \|x - \bar{x}\| \quad (3.3)$$

**Hypothèse 3.2.3** *L'incertitude  $\varepsilon$  est une fonction essentiellement bornée, i.e.*

$$\exists \delta_\varepsilon > 0 \text{ tel que } \|\varepsilon\|_\infty \triangleq \text{ess sup}_{t \geq 0} \|\varepsilon(t)\| \leq \delta_\varepsilon$$

Plus spécifiquement, nous allons utiliser les notations suivantes

- $\Delta_\theta$  est une matrice diagonale par bloc donnée par

$$\Delta_\theta = \text{diag} \left( I_p, \frac{1}{\theta} I_p, \dots, \frac{1}{\theta^{q-1}} I_p \right) \text{ avec } \theta > 0 \quad (3.4)$$

- La matrice  $K$  est une matrice de taille  $n \times p$  donnée par

$$K = \begin{pmatrix} k_1 I_p \\ k_2 I_p \\ \vdots \\ k_q I_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times p} \text{ telle que } \tilde{A} \triangleq A - KC \text{ est une matrice Hurwitz.} \quad (3.5)$$

Notons que puisque la matrice  $\tilde{A}$  est Hurwitz, il existe une matrice SDP de taille  $n \times n$   $P$  et un réel positif  $\mu$  tels que

$$P\tilde{A} + \tilde{A}^T P \leq -2\mu I_n \quad (3.6)$$

Nous désignons respectivement par  $\lambda_m(P)$  et  $\lambda_M(P)$  la plus petite et la plus grande valeur propre de la matrice  $P$ .

**Remarque 3.2.1** *Comme il a été indiqué dans (FARZA et al. 2018), puisque la trajectoire de l'état du système reste dans un ensemble borné  $\mathcal{X}$ , nous pouvons étendre la fonction non linéaire  $\varphi(u, x)$  de telle sorte que cette extension devienne globalement Lipschitz sur tout  $\mathbb{R}^n$ . La synthèse de l'observateur sera ensuite basée sur le système étendu résultant qui coïncide avec le système original sur le domaine d'étude  $\mathcal{X}$ . Nous pouvons nous référer à (KHALIL 2017; SHIM et al. 2001) et aux références qui s'y trouvent pour plus de détails sur comment réaliser des prolongations globalement Lipschitz dans un contexte d'estimation d'état.*

Dans ce qui suit, il convient d'introduire graduellement les différents observateurs selon les scénarios proposés sur la disponibilité des mesures de sortie.

### 3.3 Synthèse d'observateur dans le cas d'une sortie sans retard

Notre premier objectif consiste à synthétiser un observateur grand gain délivrant une estimation complète de l'état du système (3.1) soumis aux hypothèses 3.2.1 à 3.2.3 et dont la sortie est le résultat d'un processus d'acquisition des mesures ne mettant pas en jeu de retard sur la sortie.

#### 3.3.1 Description du processus d'acquisition des mesures de sortie

Soient les entiers positifs  $N_0 \geq 0$  et  $N_k > 0$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , et soient

$$0 \leq t_0^{(0)} \leq t_0^{(N_0)} < t_1^{(0)} < t_1^{(1)} < \dots < t_1^{(N_1)} < \dots < t_k^{(0)} < t_k^{(1)} < \dots < t_k^{(N_k)} < t_{k+1}^{(0)} < \dots$$

des instants tels que la sortie prenne l'une des deux formes suivantes.

1. Pour tout  $t \in [t_k^{(0)}, t_k^{(N_k)}[$ ,  $k \geq 0$ , la sortie  $y(t)$  est disponible sous forme d'échantillons, i.e.

$$y(t) = y\left(t_k^{(n)}\right) = x_1\left(t_k^{(n)}\right), \quad \forall t \in \left[t_k^{(n)}, t_k^{(n+1)}\right[, \quad n = 0, \dots, N_k - 1, \quad k \geq 0$$

Par ailleurs, nous supposons naturellement qu'il existe  $0 < \tau_m \leq \tau_M < +\infty$  tels que

$$0 < \tau_m \leq \tau_k^{(n)} = t_k^{(n+1)} - t_k^{(n)} \leq \tau_M, \quad \forall k \geq 0, \quad n = 0, \dots, N_k - 1 \quad (3.7)$$

2. Pour tout  $t \in [t_k^{(N_k)}, t_{k+1}^{(0)}[$ ,  $k \geq 0$ , la sortie  $y(t)$  est disponible en temps continu, i.e.

$$y(t) = x_1(t), \quad \forall t \in [t_k^{(N_k)}, t_{k+1}^{(0)}[, \quad k \geq 0$$

Notons que les instants  $t_0^{(0)}$  et  $t_0^{(N_0)}$  sont tels que  $t_0^{(0)} \leq t_0^{(N_0)}$ . Ainsi, dans le cas où  $N_0 = 0$ , les premières mesures de la sortie sont disponibles en temps continu sur l'intervalle  $[t_0^{(0)}, t_1^{(0)}[$ . Dans le cas où  $N_0 > 0$ , les premières mesures de sortie sont disponibles sous la forme d'échantillons seulement aux instants  $t_0^{(0)}$ ,  $t_0^{(1)}$ ,  $\dots$ ,  $t_0^{(N_0)}$ . Dans les deux cas, la sortie est alors disponible en temps continu à partir de l'instant  $t_0^{(N_0)}$ .

#### 3.3.2 Synthèse d'observateur

La synthèse d'observateur proposée dans cette partie s'inspire de celle donnée dans (BOURAOUI et al. 2015) pour le système (3.1) dans le cas sans retard sur la sortie. Les sorties du système ont d'abord été supposées disponibles exclusivement en temps continu et un observateur grand gain a été proposé. Ces sorties ont ensuite été considérées comme étant

exclusivement échantillonnées, et l'observateur synthétisé dans le premier cas a été remodelé afin de prendre en compte le processus d'échantillonnage, délivrant une estimation continue de l'état complet du système. En gardant à l'esprit les deux observateurs proposés dans (BOURAOUI et al. 2015), nous suggérons dans cette partie un observateur délivrant une estimation continue de l'état complet du système selon le processus d'acquisition des mesures décrit précédemment. Cet observateur est donné par le système dynamique suivant

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + \varphi(u(t), \hat{x}(t)) - G(t), \quad \forall t \geq t_0^{(0)}, \quad \text{avec pour tout } k \geq 0 \\ G(t) = \theta \Delta_\theta^{-1} K e^{-\theta k_1(t-t_k^{(n)})} \left( C\hat{x}(t_k^{(n)}) - y(t_k^{(n)}) \right), \quad \forall t \in [t_k^{(n)}, t_k^{(n+1)}[ , \quad n = 0, \dots, N_k - 1, \\ G(t) = \theta \Delta_\theta^{-1} K (C\hat{x}(t) - y(t)), \quad \forall t \in [t_k^{(N_k)}, t_{k+1}^{(0)}[ , \end{cases} \quad (3.8)$$

où  $\hat{x} = \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \vdots \\ \hat{x}_q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$  est l'état estimé de l'état  $x$  avec  $\hat{x}_l \in \mathbb{R}^p$  pour  $l = 1, \dots, q$ ,  $\Delta_\theta$  est la matrice diagonale par blocs donnée par (3.4),  $\theta > 0$  est le paramètre de synthèse de l'observateur grand gain, et  $K$  est la matrice de taille  $n \times p$  donnée par (3.5) et respectant la propriété (3.6).

Le théorème suivant stipule que le système dynamique (3.8) est un observateur adapté au système (3.1) et cohérent avec les conditions d'acquisition des mesures de sortie, sans retard, décrites ci-dessus.

**Théorème 3.3.1** *Considérons le système (3.1) soumis aux hypothèses 3.2.1 à 3.2.3 conjointement avec l'observateur (3.8). Alors,  $\exists \theta_0 > 0$  tel que  $\forall \theta \geq \theta_0$ , pour tout  $u \in \mathcal{U}$ , il existe une constante positive  $\chi_\theta > 0$  telle que si la borne supérieure des périodes d'échantillonnages  $\tau_M$  définie dans (3.7) est choisie telle que  $\tau_M < \chi_\theta$ , alors pour tout  $\hat{x}(0) \in \mathbb{R}^n$ , nous avons*

$$\|\hat{x}(t) - x(t)\| \leq \rho_0 e^{-\varsigma a(t-t_0^{(0)})} \|\hat{x}(0) - x(0)\| + M_0 \delta_\varepsilon, \quad \forall t \geq t_0^{(0)},$$

avec

$$\begin{aligned} \chi_\theta &= \frac{\mu}{2(L_\varphi + \theta)\sigma \|K\| \lambda_M(P)}, \quad a_\theta = \frac{\mu\theta}{2\lambda_M(P)}, \quad b_\theta = \theta\sigma \|K\| (L_\varphi + \theta), \\ \rho_0 &= \sigma\theta^{q-1} \sqrt{1 + b_\theta \frac{e^{2\varsigma a_\theta \tau_M} - 2\varsigma a_\theta \tau_M - 1}{4\varsigma^2 a_\theta^2}} \\ M_0 &= \frac{\sigma}{\varsigma a_\theta} \quad \text{et } \varsigma \text{ est tel que } 0 < \varsigma \leq 1, \quad \text{avec } \frac{e^{2\varsigma a_\theta \tau_M} - 1}{2\varsigma a_\theta} \leq (1 - \varsigma)\chi_\theta \end{aligned} \quad (3.9)$$

où  $x$  est la trajectoire inconnue du système (3.1) associée à l'entrée  $u$ ,  $\hat{x}$  est une trajectoire du système dynamique (3.8) associée au couple  $(u, y)$ ,  $\theta_0 = \max(1, 2L_\varphi \sqrt{n} \lambda_M(P)/\mu)$ ,  $L_\varphi$  et  $\mu$  sont définis par (3.3) et (3.6), respectivement, et où  $\sigma = \sqrt{\lambda_M(P)/\lambda_m(P)}$  est le nombre de conditionnement de la matrice  $P$  donnée par (3.6).



Le résultat précédent constitue un cas particulier de ce qui va être énoncé dans la section suivante, en présence d'un retard sur la sortie. Ces résultats seront regroupés dans un autre théorème qui généralise le théorème 3.3.1 et dont la preuve sera détaillée.

### 3.4 Synthèse d'observateur dans le cas d'une sortie avec petit retard variable

La deuxième synthèse d'observateur est réalisée dans les mêmes conditions que pour la première synthèse, excepté pour le retard sur la sortie. Plus précisément, nous considérons dans cette partie un retard variant dans le temps de magnitude relativement faible sur la sortie comme suit

$$\begin{cases} d(t) = d_k(t), \forall t \in [t_k^{(N_k)}, t_{k+1}^{(0)}], k \geq 0, \\ d(t) = d_k(t_k^{(n)}), \forall t \in [t_k^{(n)}, t_k^{(n+1)}], k \geq 0, n = 1, \dots, N_k - 1, \end{cases} \quad (3.10)$$

où chaque  $d_k$  est une fonction continue  $[t_k^{(N_k)}, t_{k+1}^{(0)}] \rightarrow \mathbb{R}^+$ , différentiable sur  $]t_k^{(N_k)}, t_{k+1}^{(0)}[$  et bornée par  $d_M > 0$ . D'après la définition (3.10), la fonction retard  $d(t)$  est bornée pour tout  $t \geq t_0^{(0)}$ , i.e.

$$\exists d_M > 0, \forall t \geq t_0^{(0)}, \quad |d(t)| \leq d_M \quad (3.11)$$

Les mesures retardées de la sortie sont disponibles comme décrit par ce qui suit.

- Pour tout  $t \in [t_k^{(N_k)}, t_{k+1}^{(0)}], k \geq 0$ , la sortie retardée est disponible en temps continu, i.e.

$$y_d(t) = y(t - d(t)), \forall t \in [t_k^{(N_k)}, t_{k+1}^{(0)}], k \geq 0, \quad (3.12)$$

- Pour tout  $t \in [t_k^{(n)}, t_k^{(n+1)}], n = 0, \dots, N_k - 1, k \geq 0$ , la sortie retardée est seulement disponible aux instants d'échantillonnages, à savoir

$$\begin{aligned} y_d(t) &= y_d(t_k^{(n)}) \\ &= y\left(t_k^{(n)} - d(t_k^{(n)})\right), \forall t \in [t_k^{(n)}, t_k^{(n+1)}], \forall k \geq 0, n = 0, \dots, N_k - 1. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Désormais, il convient de définir un signal variant dans le temps  $\bar{d}: [t_0^{(0)}, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}^+$  qui va permettre une mise à jour automatique du terme de correction de l'observateur en prenant en compte la nature des mesures disponibles de la sortie, à savoir

$$\begin{cases} \bar{d}(t) = d(t), \forall t \in [t_k^{(N_k)}, t_{k+1}^{(0)}], k \geq 0 \\ \bar{d}(t) = t - t_k^{(n)} + d(t_k^{(n)}), \forall t \in [t_k^{(n)}, t_k^{(n+1)}], k \geq 0, n = 1, \dots, N_k - 1 \end{cases} \quad (3.14)$$

Il est à noter que la fonction  $\bar{d}$  est bien définie sur  $[t_0^{(0)}, +\infty[$  et continue sur chaque intervalle  $[t_k^{(N_k)}, t_{k+1}^{(0)}[$  pour  $k \geq 0$  ainsi que sur chaque intervalle  $[t_k^{(n)}, t_k^{(n+1)}[$  pour  $k \geq 0$  et  $n = 0, \dots, N_k - 1$ . D'autre part, cette fonction est continue par morceaux sur  $[t_0^{(0)}, +\infty[$  et bornée comme on peut le vérifier

$$\forall t \geq t_0^{(0)}, \bar{d}(t) \leq d_M + \tau_M, \quad (3.15)$$

où  $\tau_M$  et  $d_M$  sont donnés par (3.7) et (3.11), respectivement. L'objectif de ce qui suit est ainsi de synthétiser un observateur grand gain dont la sortie  $y$  est disponible à l'instant  $t - \bar{d}(t)$  comme le montre la figure 3.1 suivante.

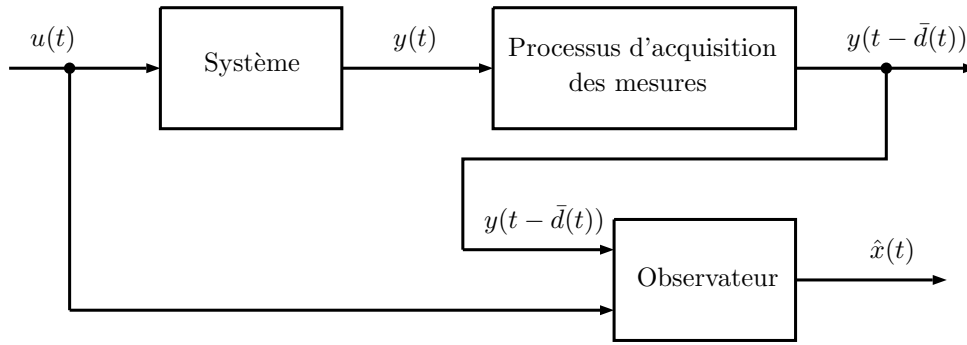


FIGURE 3.1 – Structure d'un observateur grand gain avec prise en compte du processus d'acquisition des mesures de sortie

### 3.4.1 Synthèse de l'observateur

Le signal variant dans le temps  $\bar{d}$  est crucial pour la synthèse de l'observateur avec prise en compte de la disponibilité des mesures de sortie et en présence d'un retard variant dans le temps sur la sortie de magnitude relativement petite. Ce dernier est donné par le système dynamique suivant

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + \varphi(u(t), \hat{x}(t)) - G(t), & \text{où } \forall t \geq t_0^{(0)}, \\ G(t) = \theta \Delta_\theta^{-1} K (g(t) - g(t - \bar{d}(t)) + C\hat{x}(t - \bar{d}(t)) - y_d(t)) & \text{avec} \\ \dot{g}(t) = -\theta k_1 (g(t) - g(t - \bar{d}(t)) + C\hat{x}(t - \bar{d}(t)) - y_d(t)), \\ g(s) = \psi(s), \forall s \in [t_0^{(0)} - d_M - \tau_M, t_0^{(0)}], \end{cases} \quad (3.16)$$

où  $\psi(s)$  est une fonction arbitraire continue sur  $[t_0^{(0)} - d_M - \tau_M, t_0^{(0)}]$ , où  $\hat{x} = \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \vdots \\ \hat{x}_q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

est l'état estimé de l'état  $x$  avec  $\hat{x}_l \in \mathbb{R}^p$  pour  $l = 1, \dots, q$ ,  $\Delta_\theta$  est la matrice diagonale par blocs donnée par (3.4),  $\theta > 0$  est le paramètre de synthèse de l'observateur grand gain,  $K$  est la matrice de taille  $n \times p$  donnée par (3.5) et respectant la propriété (3.6),  $y_d$  est la sortie retardée mesurée donnée par (3.12) et (3.13),  $\bar{d}$  est le signal à temps variant donné par (3.14),

$d_M$  est la borne supérieure du retard variable donné par (3.11), et  $\tau_M$  est la borne supérieure des périodes d'échantillonnages, définie dans (3.7).

Le résultat suivant confirme que le système dynamique ci-dessus est un observateur convenable et adapté au scénario considéré concernant la disponibilité des mesures de sortie, avec un retard variable de magnitude relativement faible.

**Théorème 3.4.1** *Considérons le système (3.1) soumis aux hypothèses 3.2.1 à 3.2.3 conjointement avec l'observateur (3.16). Alors,  $\exists \theta_0 > 0$  tel que  $\forall \theta \geq \theta_0$ , pour tout  $u \in \mathcal{U}$ , si la borne supérieure des périodes d'échantillonnages  $\tau_M$  et la borne supérieure du retard variable  $d_M$  donnés par (3.7) et (3.11), respectivement, sont telles que*

$$\tau_M + d_M < \chi_\theta, \quad (3.17)$$

où  $\chi_\theta$  est donné dans (3.9), alors pour tout  $\hat{x}(0) \in \mathbb{R}^n$ , nous avons

$$\|\hat{x}(t) - x(t)\| \leq \bar{\rho}_0 e^{-\bar{\varsigma} a_\theta (t - t_0^{(0)})} \sup_{s \in [t_0^{(0)} - \tau_M - d_M, t_0^{(0)}]} \|\hat{x}(s) - x(s)\| + \bar{M}_0 \delta_\varepsilon, \quad \forall t \geq t_0^{(0)}, \quad (3.18)$$

où  $a_\theta$  et  $b_\theta$  sont comme dans (3.9) et

$$\begin{cases} \bar{\rho}_0 = \sigma \theta^{q-1} \sqrt{1 + b_\theta \frac{e^{2\bar{\varsigma} a_\theta (\tau_M + d_M)} - 2\bar{\varsigma} a_\theta (\tau_M + d_M) - 1}{4\bar{\varsigma}^2 a_\theta^2}}, & \bar{M}_0 = \frac{\sigma}{\bar{\varsigma} a_\theta} \\ \text{et } \bar{\varsigma} \text{ est tel que } 0 < \bar{\varsigma} \leq 1 \text{ avec } \frac{e^{2\bar{\varsigma} a_\theta (\tau_M + d_M)} - 1}{2\bar{\varsigma} a_\theta} \leq (1 - \bar{\varsigma}) \chi_\theta \end{cases} \quad (3.19)$$

où  $x$  est la trajectoire inconnue du système (3.1) associée à l'entrée  $u$ ,  $\hat{x}$  est une trajectoire du système dynamique (3.16) associée au couple  $(u, y)$ ,  $\theta_0 = \max(1, 2L_\varphi \sqrt{n} \lambda_M(P) / \mu)$ ,  $L_\varphi$  et  $\mu$  sont définis par (3.3) et (3.6), respectivement, et où  $\sigma = \sqrt{\lambda_M(P) / \lambda_m(P)}$  est le nombre de conditionnement de la matrice  $P$  donnée par (3.6).

**Preuve du théorème 3.4.1.** Soit  $\tilde{x}(t) = \hat{x}(t) - x(t)$  l'erreur d'observation, et posons  $\bar{x} = \theta^{q-1} \Delta_\theta \tilde{x}$  où  $\Delta_\theta$  est donné par (3.4). D'après (3.1) et (3.16), nous avons

$$\dot{\tilde{x}}(t) = A\tilde{x}(t) + \tilde{\varphi}(u(t), \hat{x}(t), x(t)) - B\varepsilon(t) - G(t), \quad (3.20)$$

où  $\tilde{\varphi}(u(t), \hat{x}(t), x(t)) = \varphi(u(t), \hat{x}(t)) - \varphi(u(t), x(t))$ .

Nous pouvons tout d'abord remarquer que nous avons, pour tout  $t \in [t_k^{(N_k)}, t_{k+1}^{(0)}[$ ,  $k \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} y_d(t) &= y(t - d(t)) \\ &= y(t - \bar{d}(t)) = Cx(t - \bar{d}(t)), \quad \forall t \in [t_k^{(N_k)}, t_{k+1}^{(0)}[ , \quad k \geq 0 \end{aligned} \quad (3.21)$$

et, pour tout  $t \in [t_k^{(n)}, t_k^{(n+1)}[$ ,  $k \geq 0$ ,  $n = 0, \dots, N_k - 1$ ,

$$\begin{aligned}
 y_d(t) &= y\left(t_k^{(n)} - d(t_k^{(n)})\right) \\
 &= y\left(t - \left(t - t_k^{(n)} + d(t_k^{(n)})\right)\right) \\
 &= y(t - \bar{d}(t)) \\
 &= Cx(t - \bar{d}(t)), \quad \forall t \in [t_k^{(n)}, t_k^{(n+1)}[ , k \geq 0, n = 0, \dots, N_k - 1 \quad (3.22)
 \end{aligned}$$

Ainsi, d'après les relations (3.21) et (3.22), la sortie retardée disponible selon le scénario (3.12) et (3.13) peut s'exprimer à l'aide du signal à temps variant  $\bar{d}(t)$  défini par (3.14) comme suit

$$y_d(t) = y(t - \bar{d}(t)) = Cx(t - \bar{d}(t)), \quad \forall t \geq t_0^{(0)}$$

D'autre part, la dérivée première de la fonction  $g(t)$  ainsi que la fonction  $G(t)$ , données par (3.16), peuvent s'exprimer par

$$\begin{cases} \dot{g}(t) &= -\theta k_1(g(t) - g(t - \bar{d}(t))) + C\tilde{x}(t - \bar{d}(t)), \\ G(t) &= \theta \Delta_\theta^{-1} K(g(t) - g(t - \bar{d}(t))) + C\tilde{x}(t - \bar{d}(t)). \end{cases} \quad (3.23)$$

En prenant en considération le fait que  $\Delta_\theta A \Delta_\theta^{-1} = \theta A$  et  $C \Delta_\theta^{-1} = C$ , l'équation (3.20) mène à

$$\begin{aligned}
 \dot{\hat{x}}(t) &= \theta A \bar{x}(t) + \theta^{q-1} \Delta_\theta \tilde{\varphi}(u(t), \hat{x}(t), x(t)) - \theta^{q-1} \Delta_\theta B \varepsilon(t) - \theta^{q-1} \Delta_\theta G(t) \\
 &= \theta A \bar{x}(t) + \theta^{q-1} \Delta_\theta \tilde{\varphi}(u(t), \hat{x}(t), x(t)) - B \varepsilon(t) \\
 &\quad - \theta K(\bar{g}(t) - \bar{g}(t - \bar{d}(t))) + C \bar{x}(t - \bar{d}(t)), \quad (3.24)
 \end{aligned}$$

où  $\bar{g}(t) = \theta^{q-1} g(t)$ . Maintenant, d'après (3.23), nous avons

$$\dot{\bar{g}}(t) = -\theta k_1(\bar{g}(t) - \bar{g}(t - \bar{d}(t))) + C \bar{x}(t - \bar{d}(t)). \quad (3.25)$$

En ajoutant et soustrayant le terme  $\theta K C \bar{x}(t)$  à droite de l'équation (3.24), il vient

$$\dot{\hat{x}}(t) = \theta \tilde{A} \bar{x}(t) + \theta^{q-1} \Delta_\theta \tilde{\varphi}(u(t), \hat{x}(t), x(t)) - B \varepsilon(t) + \theta K z(t),$$

où  $\tilde{A} = A - KC$  est la matrice Hurwitz apparaissant dans (3.5), et où

$$z(t) = (C \bar{x}(t) - C \bar{x}(t - \bar{d}(t))) - (\bar{g}(t) - \bar{g}(t - \bar{d}(t))).$$

Le terme  $z(t)$  peut se réécrire comme suit

$$\begin{aligned}
 z(t) &= (C \bar{x}(t) - C \bar{x}(t - \bar{d}(t))) - (\bar{g}(t) - \bar{g}(t - \bar{d}(t))) \\
 &= \int_{t-\bar{d}(t)}^t C \dot{\hat{x}}(s) ds - \int_{t-\bar{d}(t)}^t \dot{\bar{g}}(s) ds = \int_{t-\bar{d}(t)}^t (\dot{\hat{x}}_1(s) - \dot{\bar{g}}(s)) ds. \quad (3.26)
 \end{aligned}$$

D'autre part, il est facile de vérifier d'après (3.24) que

$$\dot{\hat{x}}_1(t) = \theta \bar{x}_2(t) + \theta^{q-1} \tilde{\varphi}_1(u(t), \hat{x}(t), x(t)) - \theta k_1(\bar{g}(t) - \bar{g}(t - \bar{d}(t)) + C\bar{x}(t - \bar{d}(t))).$$

En exploitant (3.25), l'équation précédente devient

$$\dot{\hat{x}}_1(t) = \theta \bar{x}_2(t) + \theta^{q-1} \tilde{\varphi}_1(u(t), \hat{x}(t), x(t)) + \dot{\bar{g}}(t), \quad (3.27)$$

et en combinant avec (3.26) et (3.27), nous trouvons

$$z(t) = \int_{t-\bar{d}(t)}^t \theta \bar{x}_2(s) + \theta^{q-1} \tilde{\varphi}_1(u(s), \hat{x}(s), x(s)) ds. \quad (3.28)$$

Considérons désormais la fonction quadratique candidate de Lyapunov suivante :  $V(\bar{x}) = \bar{x}^T P \bar{x}$  où  $P$  est donné par (3.6). En procédant comme dans (BOURAOUI et al. 2015) et d'après l'hypothèse 3.2.2, nous pouvons montrer que pour  $\theta \geq 1$ , nous avons

$$\begin{aligned} \dot{V}(\bar{x}) &= 2\bar{x}^T(t)P \left( \theta \tilde{A}\bar{x} + \theta^{q-1} \Delta_\theta \tilde{\varphi}(u(t), \hat{x}(t), x(t)) - B\varepsilon(t) + \theta Kz(t) \right) \\ &\leq -(2\mu\theta - 2L_\varphi \sqrt{n} \lambda_M(P)) \|\bar{x}\|^2 + 2\theta \bar{x}^T P K z(t) - 2\bar{x}^T P B \varepsilon(t) \end{aligned} \quad (3.29)$$

En choisissant  $\theta$  de sorte que  $2\mu\theta - 2L_\varphi \sqrt{n} \lambda_M(P) > \mu\theta$ , i.e.

$$\theta > \theta_0 \triangleq 2L_\varphi \sqrt{n} \lambda_M(P) / \mu, \quad (3.30)$$

l'inégalité (3.29) devient

$$\begin{aligned} \dot{V}(\bar{x}) &\leq -\frac{\mu\theta}{\lambda_M(P)} V(\bar{x}) + 2\theta \|P\bar{x}\| \|K\| \|z(t)\| + 2\|P\bar{x}\| \|\varepsilon(t)\| \\ &\leq -\frac{\mu\theta}{\lambda_M(P)} V(\bar{x}) + 2\theta \sqrt{\lambda_M(P)} \sqrt{V(\bar{x})} \|K\| \|z(t)\| + 2\sqrt{\lambda_M(P)} \|\varepsilon(t)\| \sqrt{V(\bar{x})} \end{aligned} \quad (3.31)$$

Maintenant, la variable  $z$  donnée par (3.28) peut être bornée comme suit

$$\|z(t)\| \leq \frac{\theta + L_\varphi}{\sqrt{\lambda_m(P)}} \int_{t-\bar{d}(t)}^t \sqrt{V(\bar{x}(s))} ds \leq \frac{\theta + L_\varphi}{\sqrt{\lambda_m(P)}} \int_{t-\tau_M-d_M}^t \sqrt{V(\bar{x}(s))} ds, \quad (3.32)$$

où la dernière inégalité vient directement de (3.15). L'association de (3.29) et (3.32) mène à

$$\begin{aligned} \dot{V}(\bar{x}) &\leq -\frac{\mu\theta}{\lambda_M(P)} V(\bar{x}) + 2\theta\sigma(\theta + L_\varphi) \|K\| \int_{t-\tau_M-d_M}^t \sqrt{V(\bar{x}(s))} ds \\ &\quad + 2\sqrt{\lambda_M(P)} \|\varepsilon(t)\| \sqrt{V(\bar{x}(t))}, \end{aligned}$$

ou de manière équivalente,

$$\frac{d}{dt} \sqrt{V(\bar{x}(t))} \leq -a_\theta \sqrt{V(\bar{x}(t))} + b_\theta \int_{t-\tau_M-d_M}^t \sqrt{V(\bar{x}(s))} ds + p(t), \quad (3.33)$$

où

$$a_\theta = \frac{\mu\theta}{2\lambda_M(P)}, \quad b_\theta = \theta\sigma \|K\| (L_\varphi + \theta), \quad p(t) = \sqrt{\lambda_M(P)} \|\varepsilon(t)\|. \quad (3.34)$$

Notons que d'après l'hypothèse 3.2.3, la fonction  $p(t)$  donnée par (3.34) est essentiellement bornée par  $\sqrt{\lambda_M(P)}\delta_\varepsilon$ . Maintenant, si la borne supérieure des périodes d'échantillonnages  $\tau_M$  ainsi que la borne supérieure du retard variable  $d_M$  vérifient la condition  $\frac{b_\theta(\tau_M + d_M)}{a_\theta} < 1$ , i.e.

$$\tau_M + d_M < \frac{a_\theta}{b_\theta} \triangleq \chi_\theta = \frac{\mu}{2\lambda_M(P)\sigma\|K\|(L_\varphi + \theta)},$$

alors toutes les conditions d'applications du lemme B.1.1 donné en annexe B.1 sont remplies et d'après ce lemme, nous obtenons

$$\begin{aligned} \sqrt{V(\bar{x}(t))} &\leq e^{-\bar{\zeta}a_\theta(t-t_0^{(0)})} \sqrt{1 + b \frac{e^{2\bar{\zeta}a_\theta(\tau_M+d_M)} - 2\bar{\zeta}a_\theta(\tau_M+d_M) - 1}{4\bar{\zeta}^2 a_\theta^2}} \max_{\nu \in [t_0^{(0)} - \tau_M - d_M, t_0^{(0)}]} \sqrt{V(\bar{x}(\nu))} \\ &\quad + \frac{\sqrt{\lambda_M(P)}\delta_\varepsilon}{\bar{\zeta}a_\theta}, \quad \forall t \geq t_0^{(0)}, \end{aligned}$$

où  $\bar{\zeta}$  est tel que  $0 < \bar{\zeta} \leq 1$  et  $\frac{b_\theta}{a_\theta} \frac{e^{2\bar{\zeta}a_\theta(\tau_M+d_M)} - 1}{2\bar{\zeta}a_\theta} \leq 1 - \bar{\zeta}$ , c'est-à-dire

$$\frac{e^{2\bar{\zeta}a_\theta(\tau_M+d_M)} - 1}{2\bar{\zeta}a_\theta} \leq (1 - \bar{\zeta})\chi_\theta$$

En revenant à  $\tilde{x}(t)$  et d'après le fait que  $\|\tilde{x}(t)\| \leq \|\bar{x}(t)\| \leq \theta^{q-1}\|\tilde{x}(t)\|$  pour tout  $t \geq t_0^{(0)}$  avec  $\theta \geq 1$ , nous trouvons

$$\|\tilde{x}(t)\| \leq \bar{\rho}_0 e^{-\bar{\zeta}a_\theta(t-t_0^{(0)})} \max_{\nu \in [t_0^{(0)} - \tau_M - d_M, t_0^{(0)}]} \|\tilde{x}(\nu)\| + \bar{M}_0\delta_\varepsilon,$$

où  $\bar{\rho}_0$  et  $\bar{M}_0$  sont donnés par (3.19). Ceci termine la preuve du théorème 3.4.1.  $\square$

**Remarque 3.4.1** *La borne ultime de l'erreur d'observation asymptotique  $\bar{M}_0\delta_\varepsilon$  telle que donnée par (3.18) peut être rendue aussi petite que désirée en choisissant des valeurs du paramètre de synthèse  $\theta$  suffisamment grandes puisque  $\bar{M}_0 = \frac{\sigma}{\bar{\zeta}a_\theta}$  avec  $a_\theta = \frac{\mu\theta}{2\lambda_M(P)}$ .*

Maintenant que nous avons prouvé le théorème 3.4.1, il nous reste à montrer que ce dernier observateur est en réalité une généralisation de l'observateur (3.8) proposé dans le cas sans retard sur la sortie. C'est ce qui est fait dans ce qui suit.

### 3.4.2 Rapprochement avec le cas sans retard sur la sortie

Considérons l'observateur (3.16) et supposons que  $d(t) \equiv 0$ . Dans ce cas particulier, la fonction  $\bar{d}$  définie par (3.14) se spécialise comme suit

$$\begin{cases} \bar{d}(t) \equiv 0, & \forall t \in \left[ t_k^{(N_k)}, t_{k+1}^{(0)} \right], k \geq 0, \text{ et} \\ \bar{d}(t) = t - t_k^{(n)}, & \forall t \in \left[ t_k^{(n)}, t_k^{(n+1)} \right], k \geq 0, n = 0, \dots, N_k - 1. \end{cases}$$

- Soit  $t \in \left[ t_k^{(N_k)}, t_{k+1}^{(0)} \right], k \geq 0$ . Alors,  $\bar{d}(t) \equiv 0$  et  $y_d(t) \equiv y(t)$ . L'expression de  $G(t)$  donnée par (3.16) devient alors

$$\begin{aligned} G(t) &= \theta \Delta_\theta^{-1} K (g(t) - g(t - \bar{d}(t)) + C \hat{x}(t - \bar{d}(t)) - y_d(t)) \\ &= \theta \Delta_\theta^{-1} K (g(t) - g(t) + C \hat{x}(t) - y(t)) = \theta \Delta_\theta^{-1} K (C \hat{x}(t) - y(t)). \end{aligned} \quad (3.35)$$

Cette dernière expression coïncide ainsi avec l'expression de  $G(t)$  donnée dans (3.8) pour  $t \in \left[ t_k^{(N_k)}, t_{k+1}^{(0)} \right], k \geq 0$ .

- Soit maintenant  $t \in \left[ t_k^{(n)}, t_k^{(n+1)} \right], k \geq 0, n = 0, \dots, N_k - 1$ . Alors,  $\bar{d}(t) = t - t_k^{(n)}$  et  $y_d(t) \equiv y(t_k^{(n)})$ . La dynamique de  $g(t)$  donnée dans l'observateur (3.16) peut s'exprimer comme suit

$$\begin{aligned} \dot{g}(t) &= -\theta k_1 (g(t) - g(t - \bar{d}(t)) + C \hat{x}(t - \bar{d}(t)) - y_d(t)) \\ &= -\theta k_1 \left( g(t) - g(t_k^{(n)}) + C \hat{x}(t_k^{(n)}) - y(t_k^{(n)}) \right). \end{aligned}$$

Par application du lemme de comparaison, cette dernière relation nous mène à

$$\begin{aligned} g(t) &= e^{-\theta k_1 (t - t_k^{(n)})} g(t_k^{(n)}) + \theta k_1 \int_{t_k^{(n)}}^t e^{-\theta k_1 (t-s)} ds \left( g(t_k^{(n)}) + C \hat{x}(t_k^{(n)}) - y(t_k^{(n)}) \right) \\ &= e^{-\theta k_1 (t - t_k^{(n)})} g(t_k^{(n)}) + (1 - e^{-\theta k_1 (t - t_k^{(n)})}) \left( g(t_k^{(n)}) + C \hat{x}(t_k^{(n)}) - y(t_k^{(n)}) \right) \\ &= g(t_k^{(n)}) + (1 - e^{-\theta k_1 (t - t_k^{(n)})}) \left( C \hat{x}(t_k^{(n)}) - y(t_k^{(n)}) \right) \end{aligned}$$

Ceci nous permet par suite de réécrire  $G(t)$  de la manière suivante

$$\begin{aligned} G(t) &= \theta \Delta_\theta^{-1} \left( g(t) - g(t_k^{(n)}) - C \hat{x}(t_k^{(n)}) - y(t_k^{(n)}) \right) \\ &= \theta \Delta_\theta^{-1} e^{-\theta k_1 (t - t_k^{(n)})} \left( C \hat{x}(t_k^{(n)}) - y(t_k^{(n)}) \right) \end{aligned}$$

Nous retrouvons donc l'expression de  $G(t)$  donnée dans (3.8) pour  $t \in \left[ t_k^{(n)}, t_k^{(n+1)} \right], k \geq 0, n = 0, \dots, N_k - 1$ .

## 3.5 Synthèse d'observateur dans le cas d'une sortie avec retard relativement grand

### 3.5.1 Cas d'un retard long constant sur la sortie

La troisième synthèse d'observateur est réalisée en considérant toujours le processus d'acquisition des mesures décrit par la section 3.3.1 où le retard  $d_M$  sur la sortie est supposé constant et ne vérifie plus la condition (3.17), i.e.  $\tau_M + d_M \geq \chi_\theta$  où  $\chi_\theta$  est donné par (3.9). Ainsi, l'observateur (3.16) ne peut plus être utilisé pour l'estimation de l'état du système dans le contexte actuel. Ce dernier peut cependant être adapté en utilisant une structure en cascade similaire à ce qui a été proposé dans (FARZA et al. 2018). Plus précisément, supposons que  $\tau_M < \chi_\theta$  et soit  $d_0$  un réel non négatif tel que  $\tau_M + d_0 < \chi_\theta$ . L'observateur en cascade qui est proposé ici est composé de  $m + 1$  sous-systèmes en cascade. Le premier sous-système est similaire à l'observateur (3.16) et fournit une prédiction de l'état retardé, avec un horizon de prédiction de  $d_0$ . Chacun des sous-systèmes restants, dont l'état est noté  $\hat{x}^{(j)}$ , prédit l'état du sous-système précédent dans la cascade avec un horizon de prédiction égal à  $\frac{d_M - d_0}{m}$  de sorte que l'état du dernier sous-système est une estimation de l'état actuel du système  $x(t)$ .

La synthèse du premier sous-système de l'observateur en cascade peut être réalisée comme dans le cas d'un court retard en tenant compte de la mise à jour automatique du gain de l'observateur, quelle que soit la forme sous laquelle les mesures de sortie sont disponibles. Pour ce faire, définissons la fonction  $\bar{d}_0 : [t_0^{(0)}, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}^+$  comme suit

$$\begin{cases} \bar{d}_0(t) = d_0, & \forall t \in [t_k^{(N_k)}, t_{k+1}^{(0)}], \quad k \geq 0, \\ \bar{d}_0(t) = t - t_k^{(n)} + d_0, & \forall t \in [t_k^{(n)}, t_k^{(n+1)}], \quad k \geq 0, \quad n = 0, \dots, N_k - 1. \end{cases} \quad (3.36)$$

De la même façon que pour le cas du petit retard, la fonction  $\bar{d}_0$  est continue par morceaux sur  $[t_0^{(0)}, +\infty[$  et bornée par  $d_0 + \tau_M$  où  $\tau_M$  est donné par (3.7)

Avant de donner les équations de l'observateur, nous rappelons les notations usuellement utilisées dans le cadre d'observateurs en cascade (GERMANI et al. 2002; KAZANTZIS et WRIGHT 2005; FARZA et al. 2015)

$$x^{(j)}(t) = x\left(t - \underline{d} + \frac{j}{m}\underline{d}\right), \quad u^{(j)}(t) = u\left(t - \underline{d} + \frac{j}{m}\underline{d}\right), \quad j = 0, \dots, m, \quad t \geq -j\frac{\underline{d}}{m},$$

où  $m$  est un entier positif qui sera spécifié plus tard, et

$$\underline{d} = d_M - d_0. \quad (3.37)$$

Il est à noter que l'idée fondamentale derrière les observateurs en cascade est basée sur les propriétés suivantes

$$x^{(j)}\left(t - \frac{\underline{d}}{m}\right) = x^{(j-1)}(t) \quad \text{et} \quad u^{(j)}\left(t - \frac{\underline{d}}{m}\right) = u^{(j-1)}(t), \quad j = 1, \dots, m. \quad (3.38)$$



L'observateur en cascade est alors décrit par les équations différentielles suivantes

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}^{(0)}(t) = A\hat{x}^{(0)}(t) + \varphi(u^{(0)}(t), \hat{x}^{(0)}(t)) - G^{(0)}(t), & \text{avec} \\ G^{(0)}(t) = \theta \Delta_\theta^{-1} K (g(t) - g(t - \bar{d}_0(t)) + C\hat{x}^{(0)}(t - \bar{d}_0(t)) - y_d(t)) & \text{avec} \\ \dot{g}(t) = -\theta k_1 (g(t) - g(t - \bar{d}_0(t)) + C\hat{x}^{(0)}(t - \bar{d}_0(t)) - y_d(t)), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}^{(j)}(t) = A\hat{x}^{(j)}(t) + \varphi(u^{(j)}(t), \hat{x}^{(j)}(t)) - G^{(j)}(t), & \text{avec} \\ G^{(j)}(t) = e^{\bar{A}\frac{d}{m}} \left( G^{(j-1)}(t) + (A - \bar{A}) \left( \hat{x}^{(j)} \left( t - \frac{d}{m} \right) - \hat{x}^{(j-1)}(t) \right) \right. \\ \quad \left. + \varphi \left( u^{(j-1)}(t), \hat{x}^{(j)} \left( t - \frac{d}{m} \right) \right) - \varphi(u^{(j-1)}(t), \hat{x}^{(j-1)}(t)) \right), \quad j = 1, \dots, m, \end{cases} \quad (3.39)$$

où  $\hat{x}^{(j)} = \begin{pmatrix} \hat{x}_1^{(j)} \\ \vdots \\ \hat{x}_q^{(j)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$  est l'état estimé de  $x^{(j)}$  avec  $\hat{x}_l^{(j)} \in \mathbb{R}^p$  pour  $l = 1, \dots, q$  et

$j = 0, \dots, m$ ,  $\Delta_\theta$  est la matrice diagonale par blocs donnée par (3.4),  $\theta > 0$  est le paramètre de synthèse de l'observateur grand gain,  $K$  est la matrice de taille  $n \times p$  donnée par (3.5) et respectant la propriété (3.6),  $y_d$  est la sortie retardée mesurée, et enfin  $\bar{d}_0$  est défini comme dans (3.36) et  $\bar{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est une matrice Hurwitz qui constitue un paramètre de synthèse de l'observateur en cascade (3.39).

La propriété suivante sur la matrice Hurwitz  $\bar{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est essentielle pour l'analyse de convergence de l'erreur d'observation de l'observateur (3.39)

$$\exists \beta \geq 1 \quad \text{tel que} \quad \|e^{\bar{A}t}\| \leq \beta e^{-\bar{a}t} \quad \forall t \geq 0 \quad \text{avec} \quad \bar{a} = \min_{i \in \{1, \dots, n\}} |\Re(\lambda_i(\bar{A}))| \quad (3.40)$$

où  $\lambda_i(\bar{A})$ , pour  $i = 1, \dots, n$ , sont les  $n$  valeurs propres de  $\bar{A}$  (à partie réelle négative).

Il est particulièrement intéressant de noter que les équations différentielles à retard de l'observateur ci-dessus sont initialisées comme suit

$$\begin{cases} \hat{x}^{(0)}(t_0^{(0)}) = \hat{x} \left( t_0^{(0)} - \underline{d} \right) \quad \text{et} \quad \hat{x}^{(j)}(s) = \hat{x} \left( s - \underline{d} + \frac{j}{m} \underline{d} \right), \quad \forall s \in \left[ t_0^{(0)} - \frac{d}{m}, t_0^{(0)} \right], \quad j = 1, \dots, m, \\ g(s) = \psi(s), \quad \forall s \in \left[ t_0^{(0)} - d_0 - \tau_M, t_0^{(0)} \right], \end{cases}$$

où  $\hat{x}(s)$ ,  $s \in \left[ t_0^{(0)} - \underline{d}, t_0^{(0)} \right]$  est une estimation sélectionnée *a priori* du vecteur d'état, et  $\psi(s)$ ,  $s \in \left[ t_0^{(0)} - d_0 - \tau_M, t_0^{(0)} \right]$  est une fonction continue arbitraire.

L'observateur (3.39) a une structure en cascade avec  $m + 1$  sous-systèmes chaînés. La tête de la cascade, dont l'état est noté  $\hat{x}^{(0)}$ , fournit une estimation de l'état retardé du système  $x(t - d_m + d_0)$ . Une telle estimation est en réalité une prédiction de l'état retardé  $x(t - d_m)$  avec un horizon de prédiction égal à  $d_0$ . Chaque sous-système restant de la cascade, dont l'état est noté  $\hat{x}^{(j)}$ , prédit l'état du précédent sous-système dans la cascade avec un horizon

de prédiction égal à  $\frac{d}{m} = \frac{d_m - d_0}{m}$  de sorte que l'état du dernier sous-système de la cascade délivre une estimation de l'état actuel du système  $x(t)$ . Notons qu'une intéressante propriété de l'observateur (3.39) réside dans le fait que seule l'expression de  $G_0$  dépend du processus d'acquisition des mesures de sortie. Les sous-systèmes restants de la cascade, c'est-à-dire les sous-systèmes avec pour état  $\hat{x}_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ , gardent la même structure quelle que soit la forme sous laquelle la sortie est disponible. Remarquons enfin que deux observateurs ont été proposés dans (FARZA et al. 2018) pour le système (3.1) et que chacun d'entre eux est consacré au cas où la sortie retardée est disponible exclusivement sous l'une des deux formes considérées, à savoir disponible en temps continu ou échantillonnée. Il est à noter que dans le cas où  $d_0 = 0$ , l'observateur (3.39) coïncide avec chacun de ces deux observateurs, et le premier sous-système de la cascade de l'observateur (3.39) fournit une estimation de l'état retardée du système (3.1), à savoir une estimation de l'état  $x(t - d_m)$ .

Les propriétés de l'observateur en cascade sont similaires à celles de l'observateur en cascade proposé dans (FARZA et al. 2018) et sont résumées dans le théorème suivant, dont la preuve est semblable à celles proposées pour le théorème 3.4.1 et le théorème 4.1 dans (FARZA et al. 2018).

**Théorème 3.5.1** *Considérons le système (3.1) soumis aux hypothèses 3.2.1 à 3.2.3 conjointement avec l'observateur (3.39). Alors,  $\exists \theta_0 > 0$  tel que  $\forall \theta \geq \theta_0$ , pour tout  $u \in \mathcal{U}$ , si*

- la borne supérieure des périodes d'échantillonnages  $\tau_M$  et  $d_0$  sont tels que

$$\tau_M + d_0 < \chi_\theta, \quad (3.41)$$

où  $\chi_\theta$  est donné par (3.9),

- la matrice  $\bar{A}$  est choisie de sorte que  $\bar{a} \leq a_\theta$  où  $\bar{a}$  et  $a_\theta$  sont donnés respectivement par (3.40) et (3.9),
- le nombre  $m$  est choisi tel que

$$\xi \frac{d_m - d_0}{m} < 1, \quad \text{avec } \xi \triangleq \beta(L_\varphi + \|\bar{A} - A\|), \quad (3.42)$$

où  $L_\varphi$  est la constante de Lipschitz de  $\varphi$ ,  $A$  est la matrice anti-décalage donnée par (3.2) et  $\beta$  est donné (3.40),

alors nous avons, pour  $j = 1, \dots, m$ ,

$$\|\tilde{x}^{(j)}(t)\| \triangleq \|\hat{x}^{(j)}(t) - x^{(j)}(t)\| \leq \bar{\rho}_j e^{-\bar{a}t} + \bar{M}_j \delta_\varepsilon, \quad t \geq t_0^{(0)}, \quad (3.43)$$

avec

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_j &= \beta \chi_m^j \bar{\rho}_0 \|\tilde{x}^{(0)}(0)\| + \frac{\xi}{1 - \xi(d_m - d_0)/m} \int_{-(d_m - d_0)/m}^0 \|\tilde{x}^{(j)}(s)\| ds \\ &\quad + \frac{\beta}{1 - \xi(d_m - d_0)/m} \sum_{k=0}^{j-1} \chi_m^k \|r_{j-k}(0)\|, \end{aligned} \quad (3.44)$$

$$\bar{M}_j = \beta \chi_m^j \bar{M}_0 + \frac{\beta(d_m - d_0)/m}{1 - \xi(d_m - d_0)/m} \sum_{i=0}^{j-1} \chi_m^i, \quad (3.45)$$

où  $\bar{\rho}_0$  et  $\bar{M}_0$  sont donnés par (3.19) respectivement, et  $\delta_\varepsilon$  est la borne essentielle supérieure de l'incertitude  $\|\varepsilon\|$  apparaissant dans l'hypothèse 3.2.3. Les  $r_k$ 's,  $k = 1, \dots, j$ , sont des fonctions variables dans le temps et gouvernées par l'EDO suivante :  $\dot{r}_k(t) = \bar{A}r_k(t)$ ,  $\forall t \geq 0$ . Enfin, l'expression de  $\chi_m$  est donnée par

$$\chi_m = \frac{e^{-\bar{a} \frac{d_m - d_0}{m}}}{1 - \xi \frac{d_m - d_0}{m}}. \quad (3.46)$$

**Remarque 3.5.1** Soit  $\bar{M}_m \delta_\varepsilon$  la borne ultime de l'erreur entre l'état actuel  $x(t)$  du système (3.1) et l'état du dernier sous-système  $\hat{x}^{(m)}(t)$  dans l'observateur en cascade (3.39) tel qu'il est donné par (3.43) pour  $j = m$ , à savoir

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|\hat{x}^{(m)}(t) - x(t)\| \leq \bar{M}_m \delta_\varepsilon$$

Alors, il a été montré dans ((FARZA et al. 2018), Proposition 3.1) que la séquence  $(\bar{M}_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$  est une séquence décroissante avec

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \bar{M}_m = \beta \bar{M}_0 e^{(\xi - \bar{a})(d_M - d_0)} + \beta \left( e^{(\xi - \bar{a})(d_M - d_0)} - 1 \right) / (\xi - \bar{a}), \quad (3.47)$$

où  $\bar{M}_0$  est donné par (3.19),  $\beta, \bar{a}$  sont donnés par (3.40) et enfin  $\xi$  est donné par (3.42).

**Remarque 3.5.2** L'expression de la limite de  $\bar{M}_m$  donnée dans la remarque 3.5.1 par (3.47) est composée de deux termes additifs. Le premier peut être rendu aussi petit que possible en choisissant des valeurs de  $\theta$  suffisamment grandes, comme évoqué par la remarque 3.4.1. Le second terme est fixé, et représente une certaine limite quand  $m$  est choisi suffisamment grand. Une procédure judicieuse consiste à choisir la longueur  $m$  de la cascade en accord avec la condition (3.42) avec un compromis approprié entre la complexité de l'observateur, due à de grandes valeurs de  $m$ , et un comportement convenable de l'erreur d'observation (voir notamment les remarques 3.2 et 3.3 dans (FARZA et al. 2018)).

### 3.5.2 Cas d'un retard long variable sur la sortie

Jusqu'à présent, le retard long sur la sortie a été traité seulement dans le cas d'un retard constant. La synthèse du quatrième observateur de ce chapitre est réalisée en considérant un retard arbitrairement long et variable dans le temps, c'est-à-dire en supposant que la sortie est disponible selon le processus d'acquisition des mesures décrit par la section 3.3.1 et soumise à un retard variable  $d(t)$  tel qu'il est défini dans (3.10) mais de magnitude arbitrairement grande. Un problème similaire a été étudié dans (FARZA et al. 2018) où les mesures de sortie sont supposées disponibles en temps continu et dont le retard variable  $d(t)$  est différentiable avec  $\dot{d}(t) < 1$  pour tout  $t \geq 0$ . L'idée fondamentale derrière la solution proposée dans cette partie réside dans une reformulation du problème du retard variable dans le temps en un problème simplifié de retard constant, qui peut être traité via un observateur en cascade. Cette reformulation permet de retrouver la propriété essentielle de la synthèse d'observateurs en cascade, à savoir la relation  $x^{(j)}\left(t - \frac{d}{m}\right) = x^{(j-1)}(t)$ , qui n'est plus satisfaite dans le cas d'un retard variable sur la sortie. Pour obtenir cette reformulation, l'idée est d'augmenter le retard sur la sortie retardée disponible de sorte que le retard total résultant sur la sortie soit constant et égal au maximum du retard variable original. Nous aborderons ainsi la synthèse de l'observateur qui nous intéresse via une reformulation ingénieuse du problème de retard variant dans le temps en un retard constant avec les caractéristiques de synthèse d'observateur en cascade soulignées dans la section précédente. Il est à noter que l'extension de l'approche donnée dans (FARZA et al. 2015) que nous proposons dans ce qui suit n'est en rien évidente, et requiert un important réexamen de la définition du retard variable donnée par l'expression (3.10), détaillé ci-après.

Comme décrit précédemment, les échantillons de sortie, dans le cas d'un échantillonnage de la sortie, sont disponibles aux instants  $t_k^{(n)}$  pour  $k \geq 0$  et  $0 \leq n \leq N_k$ , et chacun de ces échantillons correspond à la mesure de la sortie à l'instant  $t_k^{(n)} - d(t_k^{(n)})$ . Ainsi, il convient naturellement de supposer que  $\left(t_k^{(n)} - d(t_k^{(n)})\right)_{0 \leq n \leq N_k-1}$  est une séquence strictement croissante. Notons que chaque instant  $\left(t_k^{(N_k)} - d(t_k^{(N_k)})\right)$ ,  $k \geq 0$ , peut être interprété comme étant le point de départ de l'intervalle de temps à partir duquel les mesures de sortie sont acquises de manière continue. Ces instants n'ont donc pas été considérés dans la séquence précédente. D'autre part, nous pouvons également supposer que la fonction  $t \mapsto t - d(t)$  est croissante sur tout intervalle  $\left[t_k^{(N_k)}, t_{k+1}^{(0)}\right]$ ,  $k \geq 0$ , pour lequel la sortie est disponible en temps continu. Autrement dit, nous supposons vraies les conditions suivantes :

- $\forall t \in \left[t_k^{(N_k)}, t_{k+1}^{(0)}\right]$ ,  $k \geq 0$ , la fonction  $t \mapsto t - d(t)$  est croissante. (3.48)

- Pour un entier  $k \geq 0$  fixé,

- (i) la séquence  $\left(t_k^{(n)} - d(t_k^{(n)})\right)_{0 \leq n \leq N_k-1}$  est strictement croissante, et (3.49)

- (ii)  $t_k^{(N_k-1)} - d(t_k^{(N_k-1)}) \leq t_k^{(N_k)} - d(t_k^{(N_k)})$ . (3.50)

D'autre part, nous supposons que la fonction  $d(t)$  est bornée, i.e.

$$\exists d_M > 0, \forall t \geq 0, \quad 0 \leq d(t) \leq d_M. \quad (3.51)$$

Notons que puisque le retard variable est défini comme dans (3.10), ce dernier est différentiable sur chaque intervalle  $\left] t_k^{(N_k)}, t_{k+1}^{(0)} \right[$ .

Soit  $\left( \nu_k^{(n)} \right)_{0 \leq n \leq N_k}$  la séquence des instants de temps définis par

$$\nu_k^{(n)} = t_k^{(n)} - d(t_k^{(n)}) + d_M, \quad k \geq 0, \quad 0 \leq n \leq N_k. \quad (3.52)$$

Dans ce qui suit, nous posons

$$\tau_k^{(n)} = \nu_k^{(n+1)} - \nu_k^{(n)}, \quad k \geq 0, \quad 0 \leq n \leq N_k - 1. \quad (3.53)$$

La variable  $\tau_k^{(n)}$  représente la période d'échantillonnage correspondant au retard variable  $d(t)$ . Notons que d'après (3.49) et (3.50), nous avons  $\tau_k^{(n)} > 0$  pour tout  $k \geq 0$  et  $n = 0, \dots, N_k - 2$ , ainsi que  $\tau_k^{(N_k-1)} \geq 0$ . Il convient de noter  $\bar{\tau}_M$  la valeur maximale des périodes d'échantillonnages  $\tau_k^{(n)}$ , i.e.

$$\bar{\tau}_M = \max_{\substack{0 \leq n \leq N_k - 1 \\ k \geq 0}} \tau_k^{(n)} \quad (3.54)$$

La synthèse du quatrième observateur de ce chapitre repose sur l'idée fondamentale d'exploiter une version retardée de la sortie retardée disponible de sorte que le retard total obtenu soit constant et égal au maximum du retard variable  $d(t)$ . Nous allons expliquer dans le paragraphe suivant comment obtenir la nouvelle version retardée de la sortie.

### 3.5.3 Retarder la sortie retardée disponible

Définissons la fonction  $\zeta : \left[ \nu_0^{(0)}, +\infty \right[ \rightarrow \mathbb{R}^+$  comme suit

$$\zeta(t) = \begin{cases} t + d(\zeta(t)) - d_M, & \forall t \in \left[ \nu_k^{(N_k)}, \nu_{k+1}^{(0)} \right[, \text{ avec } \zeta(\nu_k^{(N_k)}) = t_k^{(N_k)}, \quad k \geq 0, \\ t_k^{(n)}, & \forall t \in \left[ \nu_k^{(n)}, \nu_k^{(n+1)} \right[, \quad k \geq 0, \quad n = 0, \dots, N_k - 1. \end{cases} \quad (3.55)$$

La fonction  $\zeta(t)$  vérifie quelques propriétés importantes, résumées dans la proposition suivante.

**Proposition 3.5.1** *La fonction  $\zeta(t)$  définie par (3.55) est telle que*

1. (i)  $\forall t \geq \nu_k^{(0)}, \quad \zeta(t) \leq t,$
- (ii)  $\forall t \in \left[ \nu_k^{(N_k)}, \nu_{k+1}^{(0)} \right[,$

$$\zeta(t) - d(\zeta(t)) = t - d_M \in \left[ t_k^{(N_k)} - d(t_k^{(N_k)}), t_{k+1}^{(0)} - d(t_{k+1}^{(0)}) \right],$$

$$\begin{aligned}
 (iii) \quad \forall t \in \left[ \nu_k^{(n)}, \nu_k^{(n+1)} \right], \quad k \geq 0, \quad 0 \leq n \leq N_k - 1, \\
 \zeta(t) - d(\zeta(t)) = t_k^{(n)} - d(t_k^{(n)}) = \nu_k^{(n)} - d_M, \\
 2. \quad \forall t \in \left] \nu_k^{(N_k)}, \nu_{k+1}^{(0)} \right[ , \quad \zeta(t) \in \left] t_k^{(N_k)}, t_{k+1}^{(0)} \right[ \text{ et } \zeta(t) \text{ est différentiable à } t \text{ avec} \\
 \dot{\zeta}(t) = \frac{1}{1 - d(\zeta(t))}, \quad \text{avec } \zeta(\nu_k^{(N_k)}) = t_k^{(N_k)}. \tag{3.56}
 \end{aligned}$$

**Preuve de la proposition 3.5.1.**

1. (i) D'une part, pour tout  $t \in \left] \nu_k^{(N_k)}, \nu_{k+1}^{(0)} \right[$ , nous avons directement

$$\zeta(t) = t - (d_M - d(\zeta(t))) \leq t \text{ d'après la définition de } d_M.$$

D'autre part, pour tout  $t \in \left[ \nu_k^{(n)}, \nu_k^{(n+1)} \right]$ , nous avons directement

$$\zeta(t) = t_k^{(n)} \leq t_k^{(n)} + d_M - d(t_k^{(n)}) = \nu_k^{(n)} \leq t.$$

- (ii) Soit  $t \in \left[ \nu_k^{(N_k)}, \nu_{k+1}^{(0)} \right]$ . Puisque  $\zeta(t) - d(\zeta(t)) = t - d_M$ , il vient

$$\nu_k^{(N_k)} - d_M \leq \zeta(t) - d(\zeta(t)) < \nu_{k+1}^{(0)} - d_M. \tag{3.57}$$

En remplaçant dans l'inégalité ci-dessus  $\nu_k^{(N_k)}$  et  $\nu_{k+1}^{(0)}$  par leurs expressions respectives données par (3.52), nous avons

$$t_k^{(N_k)} - d(t_k^{(N_k)}) \leq \zeta(t) - d(\zeta(t)) < t_{k+1}^{(0)} - d(t_{k+1}^{(0)}). \tag{3.58}$$

- (iii) Soit  $t \in \left[ \nu_k^{(n)}, \nu_k^{(n+1)} \right]$ . D'après la définition de  $\zeta$  donnée par (3.55), nous avons

$$\zeta(t) - d(\zeta(t)) = t_k^{(n)} - d(t_k^{(n)}) = \nu_k^{(n)} - d_M \text{ d'après (3.52).}$$

2. Soit  $t \in \left] \nu_k^{(N_k)}, \nu_{k+1}^{(0)} \right[$ . Il convient dans un premier temps de prouver que  $\zeta(t) \in \left] t_k^{(N_k)}, t_{k+1}^{(0)} \right[$ . Pour cela, procédant comme pour (3.58), nous obtenons

$$t_k^{(N_k)} - d(t_k^{(N_k)}) < \zeta(t) - d(\zeta(t)) < t_{k+1}^{(0)} - d(t_{k+1}^{(0)}). \tag{3.59}$$

Supposons par l'absurde qu'il existe  $t^* \in \left] \nu_k^{(N_k)}, \nu_{k+1}^{(0)} \right[$  tel que  $\zeta(t^*) \geq t_{k+1}^{(0)}$ . Alors, puisque la fonction  $t \mapsto t - d(t)$  n'est pas décroissante pour tout  $t \geq t_0^{(0)}$ , il vient

$$\zeta(t^*) - d(\zeta(t^*)) \geq t_{k+1}^{(0)} - d(t_{k+1}^{(0)}),$$

ce qui est en contradiction avec (3.59).

Similairement, supposons par l'absurde qu'il existe  $t^* \in ]\nu_k^{(N_k)}, \nu_{k+1}^{(0)}[$  tel que  $\zeta(t^*) \leq t_k^{(N_k)}$ . Alors, puisque la fonction  $t \mapsto t - d(t)$  n'est pas décroissante pour tout  $t \geq t_0^{(0)}$ , il vient

$$\zeta(t^*) - d(\zeta(t^*)) \leq t_k^{(N_k)} - d(t_k^{(N_k)}),$$

ce qui est une nouvelle fois en contradiction avec (3.59).

Montrons maintenant que  $\zeta(t)$  est différentiable à  $t$  avec  $\dot{\zeta}(t)$  tel que donné dans (3.56). En effet, d'après le fait que  $\zeta(t) \in ]t_k^{(N_k)}, t_{k+1}^{(0)}[$  et le fait que  $d(t)$  est différentiable sur  $]t_k^{(N_k)}, t_{k+1}^{(0)}[$  avec  $\dot{d}(t) < 1$  (puisque la fonction  $t \mapsto t - d(t)$  est croissante et  $d(t)$  est différentiable sur cet intervalle), nous en concluons directement que  $\zeta(t)$  est différentiable pour tout  $t \in ]\nu_k^{(N_k)}, \nu_{k+1}^{(0)}[$  et l'équation (3.56) peut être retrouvée en prenant la dérivée première à gauche et à droite de l'expression  $\zeta(t) = t + d(\zeta(t)) - d_M$ .

Ceci termine la preuve de la proposition 3.5.1.  $\square$

Évaluons maintenant la sortie mesurée  $y_d(t)$  à l'instant  $\zeta(t)$ . La nouvelle sortie obtenue correspond à une version retardée de  $y_d(t)$  puisque  $\zeta(t) \leq t$  d'après le point 1.(i) de la proposition 3.5.1. Notons que

$$y_d(\zeta(t)) \stackrel{\Delta}{=} y(\zeta(t) - d(\zeta(t))).$$

Pour tout  $t \in ]\nu_k^{(N_k)}, \nu_{k+1}^{(0)}[ = ]t_k^{(N_k)} + d_M - d(t_k^{(N_k)}), t_{k+1}^{(0)} + d_M - d(t_{k+1}^{(0)})[$ , le signal  $y_d(\zeta(t))$  est toujours disponible puisque  $\zeta(t) - d(\zeta(t)) \in ]t_k^{(N_k)} - d(t_k^{(N_k)}), t_{k+1}^{(0)} - d(t_{k+1}^{(0)})[$  d'après le point 1.(ii) de la proposition 3.5.1 d'une part, et le signal  $y_d(t) = y(t - d(t))$  est disponible en temps continu pour tout  $t \in ]t_k^{(N_k)}, t_{k+1}^{(0)}[$  d'autre part.

Similairement, pour tout  $t \in ]\nu_k^{(n)}, \nu_k^{(n+1)}[ = ]t_k^{(n)} + d_M - d(t_k^{(n)}), t_k^{(n+1)} + d_M - d(t_k^{(n+1)})[$ , nous avons  $y(\zeta(t) - d(\zeta(t))) = y(t_k^{(n)} - d(t_k^{(n)}))$  qui est une quantité disponible. Ainsi, le signal  $y_d(\zeta(t))$  est bien disponible pour tout  $t \geq \nu_0^{(0)}$  et correspond à une version retardée de la sortie retardée disponible  $y_d(t)$ . Notons que l'obtention de  $y_d(\zeta(t))$  requiert le calcul de  $\zeta(t)$ . Ce dernier est égal à  $t_k^{(n)}$  pour tout  $t \in ]\nu_k^{(n)}, \nu_k^{(n+1)}[$ , et est solution de l'EDO donnée par (3.56) pour tout  $t \in ]\nu_k^{(N_k)}, \nu_{k+1}^{(0)}[$ , i.e.

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \forall t \in ]\nu_k^{(n)}, \nu_k^{(n+1)}[, \quad k \geq 0, \quad 0 \leq n \leq N_k - 1, \quad \zeta(t) = t_k^{(n)}, \\ \bullet \forall t \in ]\nu_k^{(N_k)}, \nu_{k+1}^{(0)}[, \quad k \geq 0, \quad \dot{\zeta}(t) = \frac{1}{1 - \dot{d}(\zeta(t))} \quad \text{avec} \quad \zeta(\nu_k^{(N_k)}) = t_k^{(N_k)}. \end{array} \right. \quad (3.60)$$

A ce stade, nous avons prouvé la disponibilité du signal  $y_d(\zeta(t))$  pour tout  $t \geq \nu_0^{(0)}$ . Il reste à remarquer d'après les points 1.(ii) et 1.(iii) de la proposition 3.5.1 que la sortie retardée  $y_d(\zeta(t))$  peut s'exprimer comme suit

$$\bullet \quad \forall t \in \left[ \nu_k^{(N_k)}, \nu_{k+1}^{(0)} \right], \quad k \geq 0,$$

$$y_d(\zeta(t)) = y(\zeta(t) - d(\zeta(t))) = y(t - d_M), \quad (3.61)$$

$$\bullet \quad \forall t \in \left[ \nu_k^{(n)}, \nu_k^{(n+1)} \right], \quad k \geq 0, \quad 0 \leq n \leq N_k - 1,$$

$$y_d(\zeta(t)) = y(\zeta(t) - d(\zeta(t))) = y\left(\nu_k^{(n)} - d_M\right). \quad (3.62)$$

D'après (3.61) et (3.62), la sortie retardée  $y_d(\zeta(t))$  n'est rien de plus qu'une version retardée de la sortie actuelle, à savoir la sortie actuelle retardée par un retard constant égal à  $d_M$ . Ainsi, un observateur similaire à ce qui a été proposé dans le cas d'un retard long constant peut être employé ici dans le but d'estimer l'état actuel du système (3.1).

### 3.5.4 Lien avec le cas du retard constant

Les équations du nouvel observateur sont identiques à celles de l'observateur proposé dans le cas du long retard constant, i.e. les équations du système dynamique (3.39) avec  $\underline{d} = d_M - d_0$  où  $\bar{d}_0 : \left[ \nu_0^{(0)}, +\infty \right] \rightarrow \mathbb{R}^+$  sont données par (à comparer avec (3.14) et (3.36))

$$\begin{cases} \bar{d}_0(t) = d_0, & \forall t \in \left[ \nu_k^{(N_k)}, \nu_{k+1}^{(0)} \right], \quad k \geq 0, \\ \bar{d}_0(t) = t - \nu_k^{(n)} + d_0, & \forall t \in \left[ \nu_k^{(n)}, \nu_k^{(n+1)} \right], \quad k \geq 0, \quad n = 0, \dots, N_k - 1. \end{cases} \quad (3.63)$$

Rappelons que  $\bar{d}_0$  permet une mise à jour automatique du terme correctif de l'observateur, et similairement au cas du petit retard variable, la fonction  $\bar{d}_0(t)$  est continue par morceaux sur  $\left[ \nu_0^{(0)}, +\infty \right]$  et bornée par  $d_0 + \bar{\tau}_M$  où  $\bar{\tau}_M$  est donné par (3.54). Notons que la sortie retardée disponible  $y_d(t)$  utilisée dans le cas du retard constant est remplacée ici par sa version retardée  $y_d(\zeta(t))$  donnée par (3.60). L'observateur résultant est alors initialisé par

$$\begin{cases} \hat{x}^{(0)}\left(\nu_0^{(0)}\right) = \hat{x}\left(\nu_0^{(0)} - \underline{d}\right) \\ \hat{x}^{(j)}(s) = \hat{x}\left(s - \underline{d} + \frac{j}{m}\underline{d}\right), \quad \forall s \in \left[\nu_0^{(0)} - \frac{\underline{d}}{m}, \nu_0^{(0)}\right], \quad j = 1, \dots, m, \\ g(s) = \psi(s), \quad \forall s \in \left[\nu_0^{(0)} - d_0 - \bar{\tau}_M, \nu_0^{(0)}\right], \end{cases}$$

où  $\hat{x}(s)$ ,  $s \in \left[\nu_0^{(0)} - \underline{d}, \nu_0^{(0)}\right]$  est une estimée sélectionnée *a priori* du vecteur d'état et  $\psi(s)$ ,  $s \in \left[\nu_0^{(0)} - d_0 - \bar{\tau}_M, \nu_0^{(0)}\right]$  est une fonction continue choisie arbitrairement.



### 3.6 Synthèse d'observateur pour des sorties avec retards variables multiples

Jusqu'à maintenant, la sortie retardée  $y_d(t) \in \mathbb{R}^p$  disponible selon le processus d'acquisition des mesures décrit par la section 3.3.1 est telle que chacune de ses composantes est soumise au même échantillonnage et au même retard. Nous allons désormais généraliser les résultats des sections 3.4 et 3.5 pour un retard et un échantillonnage potentiellement différents pour chacune des composantes de la sortie  $y_d(t)$ . Dans cette section, il convient de souligner que la sortie  $y(t)$  et l'état  $x_1(t)$  se décomposent comme suit

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p \text{ avec } y_i(t) \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, p$$

$$x_1(t) = \begin{pmatrix} x_{1,1}(t) \\ x_{1,2}(t) \\ \vdots \\ x_{1,p}(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p \text{ avec } x_{1,i}(t) \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, p$$

#### 3.6.1 Description du processus d'acquisition des mesures pour chacune des composantes de la sortie, dans le cas sans retard

Dans ce paragraphe, nous ne considérons aucun retard sur les sorties  $y_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, p$ . Similairement à la section 3.3, nous allons dans un premier temps décrire le processus d'acquisition des mesures pour chaque composante  $y_i(t)$  de la sortie, dans le cas sans retard sur la sortie. Pour tout  $i = 1, \dots, p$ , soient les entiers  $N_{0,i} \geq 0$  et  $N_{k,i} \geq 0$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , et soient

$$0 \leq t_{0,i}^{(0)} \leq t_{0,i}^{(N_{0,i})} < t_{1,i}^{(0)} < t_{1,i}^{(N_{1,i})} < \dots < t_{k,i}^{(0)} < t_{k,i}^{(N_{k,i})} < t_{k+1,i}^{(0)} < \dots$$

des réels positifs tels que la sortie  $y_i$  prenne l'une des deux formes suivantes :

1. Pour tout  $t \in [t_{k,i}^{(0)}, t_{k,i}^{(N_{k,i})}]$ ,  $k \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, p$ , la sortie  $y_i(t)$  est disponible sous forme d'échantillons, i.e. l'intervalle  $[t_{k,i}^{(0)}, t_{k,i}^{(N_{k,i})}]$  est l'union de  $N_{k,i}$  sous-intervalles, à savoir

$$[t_{k,i}^{(0)}, t_{k,i}^{(N_{k,i})}] = \bigcup_{n=0}^{N_{k,i}-1} [t_{k,i}^{(n)}, t_{k,i}^{(n+1)}] \text{ avec } t_{k,i}^{(0)} < t_{k,i}^{(1)} < \dots < t_{k,i}^{(N_{k,i})}$$

tel que  $y_i(t) = y_i(t_{k,i}^{(n)}) = x_{1,i}(t_{k,i}^{(n)})$  pour tout  $t \in [t_{k,i}^{(n)}, t_{k,i}^{(n+1)}]$ ,  $n = 0, \dots, N_{k,i} - 1$ . Par ailleurs, nous supposons naturellement qu'il existe  $0 < \tau_m \leq \tau_M < +\infty$  tels que

$$0 < \tau_m \leq \tau_{k,i}^{(n)} = t_{k,i}^{(n+1)} - t_{k,i}^{(n)} \leq \tau_M, i = 1, \dots, p, k \geq 0, n = 0, \dots, N_{k,i} - 1 \quad (3.64)$$

2. Pour tout  $t \in [t_{k,i}^{(N_{k,i})}, t_{k+1,i}^{(0)}]$ ,  $i = 1, \dots, p$ ,  $k \geq 0$ ,  $y_i(t) = x_{1,i}(t)$  est disponible en temps continu.

Dans ce qui suit et sans perte de généralité, nous supposons que les composantes de la sortie sont toutes disponibles à l'instant initial  $t_0^{(0)}$ , à savoir

$$\forall i = 1, \dots, p, \quad t_{0,i}^{(0)} = t_0^{(0)}$$

### 3.6.2 Synthèse d'observateur dans le cas de petits retards variables multiples

Nous considérons désormais, à l'instar de la section 3.4, que les mesures des composantes de la sortie résultant du processus d'acquisition des mesures sont retardées par de petits retard variables multiples. En particulier, pour tout  $i = 1, \dots, p$ , chaque sortie  $y_i$  est soumise au retard variable  $d_i$  suivant

$$\begin{cases} d_i(t) = d_{k,i}(t), & \forall t \in [t_{k,i}^{(N_{k,i})}, t_{k+1,i}^{(0)}], \quad k \geq 0, \\ d_i(t) = d_{k,i}(t_{k,i}^{(n)}), & \forall t \in [t_{k,i}^{(n)}, t_{k,i}^{(n+1)}], \quad k \geq 0, \quad n = 1, \dots, N_{k,i} - 1, \end{cases} \quad (3.65)$$

où chaque  $d_{k,i}$  est une fonction continue  $[t_{k,i}^{(N_{k,i})}, t_{k+1,i}^{(0)}] \rightarrow \mathbb{R}^+$ , différentiable sur  $[t_{k,i}^{(N_{k,i})}, t_{k+1,i}^{(0)}]$  et bornée par  $d_M > 0$ . D'après la définition (3.65), chaque fonction retard  $d_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, p$ , est bornée pour tout  $t \geq t_0^{(0)}$ , i.e.

$$\exists d_M > 0, \quad \forall i = 1, \dots, p, \quad \forall t \geq t_0^{(0)}, \quad 0 \leq d_i(t) \leq d_M \quad (3.66)$$

Ainsi, chaque sortie  $y_i$  possède un échantillonnage et un retard variable qui lui sont propres.

Les mesures retardées de chaque composante de la sortie sont disponibles comme décrit par ce qui suit.

- Pour tout  $t \in [t_{k,i}^{(N_{k,i})}, t_{k+1,i}^{(0)}]$ ,  $i = 1, \dots, p$ ,  $k \geq 0$ , la  $i$ -ième composante de la sortie retardée, notée  $y_{d_i}$ , est disponible en temps continu, i.e.

$$y_{d_i}(t) = y_i(t - d_i(t)), \quad \forall t \in [t_{k,i}^{(N_{k,i})}, t_{k+1,i}^{(0)}], \quad k \geq 0 \quad (3.67)$$

- Pour tout  $t \in [t_{k,i}^{(n)}, t_{k,i}^{(n+1)}]$ ,  $i = 1, \dots, p$ ,  $k \geq 0$ ,  $n = 0, \dots, N_{k,i} - 1$ , la  $i$ -ième composante  $y_{d_i}$  de la sortie retardée est seulement disponible aux instants d'échantillonnages, à savoir

$$\begin{aligned} y_{d_i}(t) &= y_{d_i}(t_{k,i}^{(n)}) \\ &= y_i(t_{k,i}^{(n)} - d_i(t_{k,i}^{(n)})), \quad \forall t \in [t_{k,i}^{(n)}, t_{k,i}^{(n+1)}], \quad k \geq 0, \quad n = 0, \dots, N_{k,i} - 1. \end{aligned} \quad (3.68)$$

Désormais, et comme dans la section 3.4, il convient de définir pour tout  $i = 1, \dots, p$  le signal variant dans le temps  $\bar{d}_i : [t_0^{(0)}, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}^+$  permettant de mettre à jour automatiquement le terme de correction de l'observateur en tenant compte de la nature des mesures disponibles de la sortie  $y_{d_i}(t)$ ,  $i = 1, \dots, p$ , à savoir

$$\begin{cases} \bar{d}_i(t) = d_i(t), & \forall t \in [t_{k,i}^{(N_{k,i})}, t_{k+1,i}^{(0)}], k \geq 0 \\ \bar{d}_i(t) = t - t_{k,i}^{(n)} + d_i(t_{k,i}^{(n)}), & \forall t \in [t_{k,i}^{(n)}, t_{k,i}^{(n+1)}], k \geq 0, n = 1, \dots, N_{k,i} - 1 \end{cases} \quad (3.69)$$

Chaque fonction  $\bar{d}_i$ ,  $i = 1, \dots, p$ , est alors bien définie sur  $[t_0^{(0)}, +\infty[$  et continue sur chaque intervalle  $[t_{k,i}^{(N_{k,i})}, t_{k+1,i}^{(0)}[$  pour  $k \geq 0$  ainsi que sur chaque intervalle  $[t_{k,i}^{(n)}, t_{k,i}^{(n+1)}[$  pour  $k \geq 0$  et  $n = 0, \dots, N_{k,i} - 1$ . De plus, chaque fonction  $\bar{d}_i$  est continue par morceaux sur  $[t_0^{(0)}, +\infty[$  et bornée comme suit

$$\forall t \geq t_0^{(0)}, \forall i = 1, \dots, p, \quad \bar{d}_i(t) \leq d_M + \tau_M, \quad (3.70)$$

où  $\tau_M$  et  $d_M$  sont donnés par (3.64) et (3.66), respectivement.

## Observateur

Dans ce qui suit, nous posons

$$y_d(t) = \begin{pmatrix} y_{d_1}(t) \\ y_{d_2}(t) \\ \vdots \\ y_{d_p}(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C\hat{x}_{\bar{d}}(t) = \begin{pmatrix} \hat{x}_{1,1}(t - \bar{d}_1(t)) \\ \hat{x}_{1,2}(t - \bar{d}_2(t)) \\ \vdots \\ \hat{x}_{1,p}(t - \bar{d}_p(t)) \end{pmatrix}$$

L'observateur avec prise en compte du processus d'acquisition des mesures de sortie, en présence de retards variables multiples variant dans le temps sur les différentes composantes de la sortie et de magnitudes relativement petites, est donné par le système dynamique suivant

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + \varphi(u(t), \hat{x}(t)) - G(t), \text{ où } \forall t \geq t_0^{(0)}, \\ G(t) = \theta \Delta_\theta^{-1} K (g(t) - g_{\bar{d}}(t) + C\hat{x}_{\bar{d}}(t) - y_d(t)) \text{ avec} \\ \dot{g}(t) = -\theta k_1 (g(t) - g_{\bar{d}}(t) + C\hat{x}_{\bar{d}}(t) - y_d(t)), \\ g(s) = \psi(s), \forall s \in [t_0^{(0)} - d_M - \tau_M, t_0^{(0)}], \end{cases} \quad (3.71)$$

avec

$$g(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ \vdots \\ g_p(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p \quad \text{et} \quad g_{\bar{d}}(t) = \begin{pmatrix} g_1(t - \bar{d}_1(t)) \\ g_2(t - \bar{d}_2(t)) \\ \vdots \\ g_p(t - \bar{d}_p(t)) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p, \quad (3.72)$$

où  $\hat{x} = \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \vdots \\ \hat{x}_q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$  est l'état estimé de l'état  $x$  avec  $\hat{x}_l \in \mathbb{R}^p$  pour  $l = 1, \dots, q$ ,  $\Delta_\theta$

est la matrice diagonale par blocs donnée par (3.4),  $\theta > 0$  est le paramètre de synthèse de l'observateur grand gain,  $K$  est la matrice de taille  $n \times p$  donnée par (3.5) et respectant la propriété (3.6),  $y_d$  est la sortie retardée mesurée donnée par (3.67) et (3.68),  $\bar{d}$  est le signal à temps variant donné par (3.69),  $\psi : [t_0^{(0)} - d_M - \tau_M, t_0^{(0)}] \rightarrow \mathbb{R}^p$  est une fonction arbitraire continue sur  $[t_0^{(0)} - d_M - \tau_M, t_0^{(0)}]$ ,  $d_M$  est la borne supérieure du retard variable donnée par (3.66), et  $\tau_M$  est la borne supérieure des périodes d'échantillonnages, définie dans (3.64).

Le théorème suivant stipule que le système dynamique ci-dessus est un observateur convenable et adapté au scénario considéré concernant la disponibilité des mesures de sortie en présence de retards variables multiples de magnitude relativement faible.

**Théorème 3.6.1** *Considérons le système (3.1) soumis aux hypothèses 3.2.1 à 3.2.3 conjointement avec l'observateur (3.71). Alors,  $\exists \theta_0 > 0$  tel que  $\forall \theta \geq \theta_0$ , pour tout  $u \in \mathcal{U}$ , si la borne supérieure des périodes d'échantillonnages  $\tau_M$  et la borne supérieure du retard variable  $d_M$  donnés par (3.64) et (3.66), respectivement, sont telles que*

$$\tau_M + d_M < \bar{\chi}_\theta, \quad (3.73)$$

alors pour tout  $\hat{x}(0) \in \mathbb{R}^n$ , nous avons

$$\|\hat{x}(t) - x(t)\| \leq \bar{\rho}_0 e^{-\bar{\varsigma} \bar{a}_\theta (t - t_0^{(0)})} \sup_{s \in [t_0^{(0)} - \tau_M - d_M, t_0^{(0)}]} \|\hat{x}(s) - x(s)\| + \bar{M}_0 \delta_\varepsilon, \quad \forall t \geq t_0^{(0)}, \quad (3.74)$$

où

$$\begin{aligned} \bar{a}_\theta &= \frac{\mu \theta}{2\lambda_M(P)}, \quad \bar{b}_\theta = \theta p \sigma \|K\| (L_\varphi + \theta), \quad \bar{\chi}_\theta = \frac{\mu}{2p(L_\varphi + \theta) \sigma \|K\| \lambda_M(P)}, \\ \bar{\rho}_0 &= \sigma \theta^{q-1} \sqrt{1 + \bar{b}_\theta \frac{e^{2\bar{\varsigma} \bar{a}_\theta (\tau_M + d_M)} - 2\bar{\varsigma} \bar{a}_\theta (\tau_M + d_M) - 1}{4\bar{\varsigma}^2 \bar{a}_\theta^2}}, \\ \bar{M}_0 &= \frac{\sigma}{\bar{\varsigma} \bar{a}_\theta} \quad \text{et } \bar{\varsigma} \text{ est tel que } 0 < \bar{\varsigma} \leq 1, \quad \text{avec } \frac{e^{2\bar{\varsigma} \bar{a}_\theta (\tau_M + d_M)} - 1}{2\bar{\varsigma} \bar{a}_\theta} \leq (1 - \bar{\varsigma}) \bar{\chi}_\theta \end{aligned} \quad (3.75)$$

où  $x$  est la trajectoire inconnue du système (3.1) associée à l'entrée  $u$ ,  $\hat{x}$  est une trajectoire du système dynamique (3.71) associée au couple  $(u, y)$ ,  $\theta_0 = \max(1, 2L_\varphi \sqrt{n} \lambda_M(P) / \mu)$ ,  $L_\varphi$  et  $\mu$  sont définis par (3.3) et (3.6), respectivement, et où  $\sigma = \sqrt{\lambda_M(P) / \lambda_m(P)}$  est le nombre de conditionnement de la matrice  $P$  donnée par (3.6).

**Preuve du théorème 3.6.1.** Soit  $\tilde{x}(t) = \hat{x}(t) - x(t)$  l'erreur d'observation, et posons  $\bar{x} = \theta^{q-1} \Delta_\theta \tilde{x}$  où  $\Delta_\theta$  est donné par (3.4). L'association de (3.1) et (3.71) nous mène à

$$\dot{\tilde{x}}(t) = A\tilde{x}(t) + \tilde{\varphi}(u(t), \hat{x}(t), x(t)) - B\varepsilon(t) - G(t), \quad (3.76)$$

où  $\tilde{\varphi}(u(t), \hat{x}(t), x(t)) = \varphi(u(t), \hat{x}(t)) - \varphi(u(t), x(t))$ . Remarquons d'une part que nous avons, pour tout  $t \in [t_{k,i}^{(N_{k,i})}, t_{k+1,i}^{(0)}]$ ,  $i = 1, \dots, p$ ,  $k \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} y_{d_i}(t) &= y_i(t - d_i(t)) \\ &= y_i(t - \bar{d}_i(t)) = x_{1,i}(t - \bar{d}_i(t)), \quad \forall t \in [t_{k,i}^{(N_{k,i})}, t_{k+1,i}^{(0)}], \quad k \geq 0 \end{aligned} \quad (3.77)$$

et, pour tout  $t \in [t_{k,i}^{(n)}, t_{k,i}^{(n+1)}]$ ,  $i = 1, \dots, p$ ,  $k \geq 0$ ,  $n = 0, \dots, N_{k,i} - 1$ ,

$$\begin{aligned} y_{d_i}(t) &= y_i(t_{k,i}^{(n)} - d(t_{k,i}^{(n)})) \\ &= y_i\left(t - \left(t - t_{k,i}^{(n)} + d_i(t_{k,i}^{(n)})\right)\right) \\ &= y_i(t - \bar{d}_i(t)) \\ &= x_{1,i}(t - \bar{d}_i(t)), \quad \forall t \in [t_{k,i}^{(n)}, t_{k,i}^{(n+1)}], \quad k \geq 0, \quad n = 0, \dots, N_k - 1 \end{aligned} \quad (3.78)$$

Les relations (3.77) et (3.78) impliquent ainsi que toute composante  $y_{d_i}$ ,  $i = 1, \dots, p$ , de la sortie retardée disponible selon le scénario (3.67) et (3.68) peut s'exprimer à l'aide du signal à temps variant  $\bar{d}_i(t)$  défini par (3.69) par

$$y_{d_i}(t) = y_i(t - \bar{d}_i(t)) = x_{1,i}(t - \bar{d}_i(t)), \quad \forall t \geq t_0^{(0)},$$

et par suite

$$y_d(t) = y_{\bar{d}}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t - \bar{d}_1(t)) \\ y_2(t - \bar{d}_2(t)) \\ \vdots \\ y_p(t - \bar{d}_p(t)) \end{pmatrix}, \quad \forall t \geq t_0^{(0)}.$$

La dérivée première de la fonction  $g(t)$  et la fonction  $G(t)$ , données par (3.71), s'expriment ainsi par

$$\begin{cases} \dot{g}(t) &= -\theta k_1(g(t) - g_{\bar{d}}(t) + C\tilde{x}_{\bar{d}}(t)), \\ G(t) &= \theta \Delta_\theta^{-1} K(g(t) - g_{\bar{d}}(t) + C\tilde{x}_{\bar{d}}(t)), \end{cases} \quad (3.79)$$

où  $g_{\bar{d}}(t)$  est donné par (3.72), et où

$$C\tilde{x}_{\bar{d}}(t) \triangleq C\hat{x}_{\bar{d}}(t) - y_d(t) = C\hat{x}_{\bar{d}}(t) - y_{\bar{d}}(t) = \begin{pmatrix} \tilde{x}_{1,1}(t - \bar{d}_1(t)) \\ \tilde{x}_{1,2}(t - \bar{d}_2(t)) \\ \vdots \\ \tilde{x}_{1,p}(t - \bar{d}_p(t)) \end{pmatrix}. \quad (3.80)$$

En prenant en considération le fait que  $\Delta_\theta A \Delta_\theta^{-1} = \theta A$  et  $C \Delta_\theta^{-1} = C$ , nous obtenons

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= \theta A \bar{x}(t) + \theta^{q-1} \Delta_\theta \tilde{\varphi}(u(t), \hat{x}(t), x(t)) - \theta^{q-1} \Delta_\theta B \varepsilon(t) - \theta^{q-1} \Delta_\theta G(t) \\ &= \theta A \bar{x}(t) + \theta^{q-1} \Delta_\theta \tilde{\varphi}(u(t), \hat{x}(t), x(t)) - B \varepsilon(t) \\ &\quad - \theta K(\bar{g}(t) - \bar{g}_{\bar{d}}(t) + C \bar{x}_{\bar{d}}(t)),\end{aligned}\tag{3.81}$$

où

$$\bar{g}(t) = \theta^{q-1} g(t), \quad \bar{g}_{\bar{d}}(t) = \theta^{q-1} g_{\bar{d}}(t), \quad C \bar{x}_{\bar{d}}(t) = \theta^{q-1} C \tilde{x}_{\bar{d}}(t)$$

Il vient alors, d'après (3.79),

$$\dot{\bar{g}}(t) = -\theta k_1(\bar{g}(t) - \bar{g}_{\bar{d}}(t) + C \bar{x}_{\bar{d}}(t)),\tag{3.82}$$

et en particulier, d'après (3.72) et (3.80) et pour tout  $i = 1, \dots, p$ ,

$$\dot{\bar{g}}_i(t) = -\theta k_1(\bar{g}_i(t) - \bar{g}_i(t - \bar{d}_i(t)) + \bar{x}_{1,i}(t - \bar{d}_i(t))).\tag{3.83}$$

En ajoutant et soustrayant le terme  $\theta K C \bar{x}(t)$  à droite de l'équation (3.81), il vient

$$\dot{\hat{x}}(t) = \theta \tilde{A} \bar{x}(t) + \theta^{q-1} \Delta_\theta \tilde{\varphi}(u(t), \hat{x}(t), x(t)) - B \varepsilon(t) + \theta K z(t),$$

où  $\tilde{A} = A - KC$  est la matrice Hurwitz apparaissant dans (3.5), et où

$$z(t) = (C \bar{x}(t) - C \bar{x}_{\bar{d}}(t)) - (\bar{g}(t) - \bar{g}_{\bar{d}}(t)).\tag{3.84}$$

La  $i$ -ème composante  $z_i(t)$  de  $z(t)$  vérifie alors, toujours d'après les relations (3.72) et (3.80),

$$\begin{aligned}z_i(t) &= (\bar{x}_{1,i}(t) - \bar{x}_{1,i}(t - \bar{d}_i(t))) - (\bar{g}_i(t) - \bar{g}_i(t - \bar{d}_i(t))) \\ &= \int_{t-\bar{d}_i(t)}^t \dot{\bar{x}}_{1,i}(s) ds - \int_{t-\bar{d}_i(t)}^t \dot{\bar{g}}_i(s) ds = \int_{t-\bar{d}_i(t)}^t (\dot{\bar{x}}_{1,i}(s) - \dot{\bar{g}}_i(s)) ds.\end{aligned}\tag{3.85}$$

D'autre part, il est facile de vérifier d'après (3.81) que

$$\dot{\hat{x}}_1(t) = \theta \bar{x}_2(t) + \theta^{q-1} \tilde{\varphi}_1(u(t), \hat{x}(t), x(t)) - \theta k_1(\bar{g}(t) - \bar{g}_{\bar{d}}(t) + C \bar{x}_{\bar{d}}(t)),$$

et par suite, pour tout  $i = 1, \dots, p$ ,

$$\dot{\hat{x}}_{1,i}(t) = \theta \bar{x}_{2,i}(t) + \theta^{q-1} \tilde{\varphi}_{1,i}(u(t), \hat{x}(t), x(t)) - \theta k_1(\bar{g}_i(t) - \bar{g}_i(t - \bar{d}_i(t)) + \bar{x}_{1,i}(t - \bar{d}_i(t))),$$

L'exploitation de la relation (3.83) mène à

$$\dot{\hat{x}}_{1,i}(t) = \theta \bar{x}_{2,i}(t) + \theta^{q-1} \tilde{\varphi}_{1,i}(u(t), \hat{x}(t), x(t)) + \dot{\bar{g}}_i(t),\tag{3.86}$$

et l'association de (3.85) avec (3.86) donne

$$z_i(t) = \int_{t-\bar{d}_i(t)}^t (\theta \bar{x}_{2,i}(s) + \theta^{q-1} \tilde{\varphi}_{1,i}(u(s), \hat{x}(s), x(s))) ds.\tag{3.87}$$

Considérons désormais la fonction quadratique candidate de Lyapunov suivante :  $V(\bar{x}) = \bar{x}^T P \bar{x}$  où  $P$  est donné par (3.6). En procédant comme dans (BOURAOUI et al. 2015) et en considérant l'hypothèse 3.2.2, nous avons pour  $\theta \geq 1$

$$\begin{aligned} \dot{V}(\bar{x}) &= 2\bar{x}^T(t)P \left( \theta \tilde{A}\bar{x} + \theta^{q-1} \Delta_\theta \tilde{\varphi}(u(t), \hat{x}(t), x(t)) - B\varepsilon(t) + \theta Kz(t) \right) \\ &\leq -(2\mu\theta - 2L_\varphi \sqrt{n} \lambda_M(P)) \|\bar{x}\|^2 + 2\theta \bar{x}^T P K z(t) - 2\bar{x}^T P B \varepsilon(t) \end{aligned} \quad (3.88)$$

En choisissant  $\theta$  de sorte que  $2\mu\theta - 2L_\varphi \sqrt{n} \lambda_M(P) > \mu\theta$ , i.e.

$$\theta > \theta_0 \triangleq 2L_\varphi \sqrt{n} \lambda_M(P) / \mu, \quad (3.89)$$

l'inégalité (3.88) devient

$$\begin{aligned} \dot{V}(\bar{x}) &\leq -\frac{\mu\theta}{\lambda_M(P)} V(\bar{x}) + 2\theta \|P\bar{x}\| \|K\| \|z(t)\| + 2\|P\bar{x}\| \|\varepsilon(t)\| \\ &\leq -\frac{\mu\theta}{\lambda_M(P)} V(\bar{x}) + 2\theta \sqrt{\lambda_M(P)} \sqrt{V(\bar{x})} \|K\| \|z(t)\| + 2\sqrt{\lambda_M(P)} \|\varepsilon(t)\| \sqrt{V(\bar{x})} \end{aligned} \quad (3.90)$$

La variable  $z$  donnée par (3.84) peut alors être bornée comme suit

$$\begin{aligned} \|z(t)\| &\leq \sum_{i=1}^p \|z_i(t)\| \leq \sum_{i=1}^p \frac{\theta + L_\varphi}{\sqrt{\lambda_m(P)}} \int_{t-\bar{d}_i(t)}^t \sqrt{V(\bar{x}(s))} ds \\ &\leq \sum_{i=1}^p \frac{\theta + L_\varphi}{\sqrt{\lambda_m(P)}} \int_{t-\tau_M-d_M}^t \sqrt{V(\bar{x}(s))} ds \\ &= p \frac{\theta + L_\varphi}{\sqrt{\lambda_m(P)}} \int_{t-\tau_M-d_M}^t \sqrt{V(\bar{x}(s))} ds, \end{aligned} \quad (3.91)$$

où la dernière inégalité vient de la relation (3.70). L'association de (3.88) et (3.91) nous donne alors

$$\begin{aligned} \dot{V}(\bar{x}) &\leq -\frac{\mu\theta}{\lambda_M(P)} V(\bar{x}) + 2p\theta\sigma(\theta + L_\varphi) \|K\| \int_{t-\tau_M-d_M}^t \sqrt{V(\bar{x}(s))} ds \\ &\quad + 2\sqrt{\lambda_M(P)} \|\varepsilon(t)\| \sqrt{V(\bar{x}(t))}, \end{aligned}$$

ou de manière équivalente,

$$\frac{d}{dt} \sqrt{V(\bar{x}(t))} \leq -\bar{a}_\theta \sqrt{V(\bar{x}(t))} + \bar{b}_\theta \int_{t-\tau_M-d_M}^t \sqrt{V(\bar{x}(s))} ds + p(t), \quad (3.92)$$

où

$$\bar{a}_\theta = \frac{\mu\theta}{2\lambda_M(P)}, \quad \bar{b}_\theta = \theta p \sigma \|K\| (L_\varphi + \theta), \quad p(t) = \sqrt{\lambda_M(P)} \|\varepsilon(t)\|. \quad (3.93)$$

Puisque la fonction  $p(t)$  donnée par (3.93) est essentiellement bornée par  $\sqrt{\lambda_M(P)}\delta_\varepsilon$  d'après l'hypothèse 3.2.3, si la borne supérieure des périodes d'échantillonnages  $\tau_M$  ainsi que la borne supérieure du retard variable  $d_M$  vérifient la condition  $\frac{\bar{b}_\theta(\tau_M + d_M)}{\bar{a}_\theta} < 1$ , i.e.

$$\tau_M + d_M < \frac{\bar{a}_\theta}{\bar{b}_\theta} \triangleq \bar{\chi}_\theta = \frac{\mu}{2p(L_\varphi + \theta)\sigma\|K\|\lambda_M(P)},$$

alors toutes les conditions d'applications du lemme B.1.1 donné en annexe B.1 sont remplies et d'après ce lemme, nous trouvons

$$\begin{aligned} \sqrt{V(\bar{x}(t))} &\leq e^{-\bar{\varsigma}\bar{a}_\theta(t-t_0^{(0)})} \sqrt{1 + \bar{b}_\theta \frac{e^{2\bar{\varsigma}\bar{a}_\theta(\tau_M+d_M)} - 2\bar{\varsigma}\bar{a}_\theta(\tau_M+d_M) - 1}{4\bar{\varsigma}^2\bar{a}_\theta^2}} \max_{\nu \in [t_0^{(0)} - \tau_M - d_M, t_0^{(0)}]} \sqrt{V(\bar{x}(\nu))} \\ &\quad + \frac{\sqrt{\lambda_M(P)}\delta_\varepsilon}{\bar{\varsigma}\bar{a}_\theta}, \quad \forall t \geq t_0^{(0)}, \end{aligned}$$

où  $\bar{\varsigma}$  est tel que  $0 < \bar{\varsigma} \leq 1$  et  $\frac{\bar{b}_\theta}{\bar{a}_\theta} \frac{e^{2\bar{\varsigma}\bar{a}_\theta(\tau_M+d_M)} - 1}{2\bar{\varsigma}\bar{a}_\theta} \leq 1 - \bar{\varsigma}$ , c'est-à-dire

$$\frac{e^{2\bar{\varsigma}\bar{a}_\theta(\tau_M+d_M)} - 1}{2\bar{\varsigma}\bar{a}_\theta} \leq (1 - \bar{\varsigma})\bar{\chi}_\theta$$

En revenant à  $\tilde{x}(t)$  et d'après le fait que  $\|\tilde{x}(t)\| \leq \|\bar{x}(t)\| \leq \theta^{q-1}\|\tilde{x}(t)\|$  pour tout  $t \geq t_0^{(0)}$  avec  $\theta \geq 1$ , nous trouvons

$$\|\tilde{x}(t)\| \leq \bar{\rho}_0 e^{-\bar{\varsigma}\bar{a}_\theta(t-t_0^{(0)})} \max_{\nu \in [t_0^{(0)} - \tau_M - d_M, t_0^{(0)}]} \|\tilde{x}(\nu)\| + \bar{M}_0\delta_\varepsilon,$$

où  $\bar{\rho}_0$  et  $\bar{M}_0$  sont donnés par (3.75). Ceci termine la preuve du théorème 3.6.1.  $\square$

### 3.6.3 Synthèse d'observateur dans le cas de retards variables relativement grands

A l'instar de la section 3.5, nous considérons désormais que chaque composante  $y_i$  de la sortie  $y$  est disponible selon le processus d'échantillonnage de la section 3.6.1 et est soumise à un retard variable  $d_i(t)$  arbitrairement grand. En particulier, nous supposons que  $\tau_M + d_M \geq \bar{\chi}_\theta$  où  $\tau_M$ ,  $d_m$  et  $\bar{\chi}_\theta$  sont donnés par (3.64), (3.66) et (3.75) respectivement.

Comme détaillé précédemment, les échantillons de mesures de la  $i$ -ème composante de la sortie, dans le cas d'un échantillonnage de la sortie, sont disponibles aux instants  $t_{k,i}^{(n)}$  pour  $k \geq 0$  et  $0 \leq n \leq N_{k,i}$ , et chacun de ces échantillons correspond à la mesure de la sortie à l'instant  $t_{k,i}^{(n)} - d_i(t_{k,i}^{(n)})$ . Encore une fois, il convient de supposer que toute séquence



$(t_{k,i}^{(n)} - d_i(t_{k,i}^{(n)}))_{0 \leq n \leq N_{k,i}-1}$ , pour  $i = 1, \dots, p$ , est croissante. Comme pour la section 3.5, nous supposons donc vraies les conditions suivantes, pour tout  $i = 1, \dots, p$  :

- $\forall t \in [t_{k,i}^{(N_{k,i})}, t_{k+1,i}^{(0)}]$ ,  $k \geq 0$ , la fonction  $t \mapsto t - d_i(t)$  est croissante. (3.94)

- Pour un entier  $k \geq 0$  fixé,

- (i) la séquence  $(t_{k,i}^{(n)} - d_i(t_{k,i}^{(n)}))_{0 \leq n \leq N_{k,i}-1}$  est croissante, et (3.95)

- (ii)  $t_{k,i}^{(N_{k,i}-1)} - d_i(t_{k,i}^{(N_{k,i}-1)}) \leq t_{k,i}^{(N_{k,i})} - d_i(t_{k,i}^{(N_{k,i})})$ . (3.96)

Nous supposons encore une fois que toute fonction  $d_i(t)$  est bornée, i.e.

$$\exists d_M > 0, \forall i = 1, \dots, p, \forall t \geq t_0^{(0)}, \quad 0 \leq d_i(t) \leq d_M \quad (3.97)$$

Notons que tout retard variable  $d_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, p$ , est défini comme dans (3.65). Ce dernier est différentiable sur chaque intervalle  $]t_{k,i}^{(N_{k,i})}, t_{k+1,i}^{(0)}[$ .

Soit maintenant pour tout  $i = 1, \dots, p$  la séquence des instants  $(\nu_{k,i}^{(n)})_{0 \leq n \leq N_{k,i}}$  définis par

$$\nu_{k,i}^{(n)} = t_{k,i}^{(n)} - d_i(t_{k,i}^{(n)}) + d_M, \quad k \geq 0, \quad 0 \leq n \leq N_{k,i} \quad (3.98)$$

et soit

$$\tau_{k,i}^{(n)} = \nu_{k,i}^{(n+1)} - \nu_{k,i}^{(n)}, \quad k \geq 0, \quad 0 \leq n \leq N_{k,i} - 1. \quad (3.99)$$

La variable  $\tau_{k,i}^{(n)}$  représente la période d'échantillonnage correspondant au retard variable  $d_i(t)$ . D'après (3.95) et (3.96), il vient  $\tau_{k,i}^{(n)} > 0$  pour tout  $k \geq 0$  et  $n = 0, \dots, N_{k,i} - 2$ , et  $\tau_{k,i}^{(N_{k,i}-1)} \geq 0$ . Enfin, soit  $\bar{\tau}_M$  la valeur maximale des périodes d'échantillonnages  $\tau_{k,i}^{(n)}$ , i.e.

$$\exists \bar{\tau}_M > 0, \forall i = 1, \dots, p, \forall k \geq 0, \forall n = 0, \dots, N_{k,i} - 1, \quad 0 \leq \tau_{k,i}^{(n)} \leq \bar{\tau}_M \quad (3.100)$$

Nous allons donner dans le paragraphe suivant chaque fonction retard  $\zeta_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, p$  permettant de retarder chaque composante  $y_i$  de la sortie de façon à obtenir un retard maximal égal à  $d_M$  sur chacune de ces composantes.

### Retarder chaque composante de la sortie retardée disponible

Définissons pour tout  $i = 1, \dots, p$  la fonction  $\zeta_i : ]\nu_{0,i}^{(0)}, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}^+$  comme suit

$$\zeta_i(t) = \begin{cases} t + d_i(\zeta_i(t)) - d_M, & \forall t \in [\nu_{k,i}^{(N_{k,i})}, \nu_{k+1,i}^{(0)}], \text{ avec } \zeta_i(\nu_{k,i}^{(N_{k,i})}) = t_{k,i}^{(N_{k,i})}, \quad k \geq 0, \\ t_{k,i}^{(n)}, & \forall t \in [\nu_{k,i}^{(n)}, \nu_{k,i}^{(n+1)}], \quad k \geq 0, \quad n = 0, \dots, N_{k,i} - 1. \end{cases} \quad (3.101)$$

Chaque fonction  $\zeta_i(t)$  vérifie alors la propriété 3.5.1 de la section 3.5, réécrite pour chaque fonction  $\zeta_i(t)$  comme suit et dont la preuve est identique à celle de la proposition 3.5.1.

**Proposition 3.6.1** *Toute fonction  $\zeta_i(t)$ , pour  $i = 1, \dots, p$  et définie par (3.101), est telle que*

1. (i)  $\forall t \geq \nu_{k,i}^{(0)}, \zeta_i(t) \leq t$ ,  
 (ii)  $\forall t \in \left[ \nu_{k,i}^{(N_{k,i})}, \nu_{k+1,i}^{(0)} \right[$ ,  

$$\zeta_i(t) - d_i(\zeta_i(t)) = t - d_M \in \left[ t_{k,i}^{(N_{k,i})} - d_i(t_{k,i}^{(N_{k,i})}), t_{k+1,i}^{(0)} - d_i(t_{k+1,i}^{(0)}) \right],$$
  
 (iii)  $\forall t \in \left[ \nu_{k,i}^{(n)}, \nu_{k,i}^{(n+1)} \right[$ ,  $k \geq 0$ ,  $0 \leq n \leq N_{k,i} - 1$ ,  

$$\zeta_i(t) - d_i(\zeta_i(t)) = t_{k,i}^{(n)} - d_i(t_{k,i}^{(n)}) = \nu_{k,i}^{(n)} - d_M,$$
2.  $\forall t \in \left[ \nu_{k,i}^{(N_{k,i})}, \nu_{k+1,i}^{(0)} \right[$ ,  $\zeta_i(t) \in \left] t_{k,i}^{(N_{k,i})}, t_{k+1,i}^{(0)} \right[$  et  $\zeta_i(t)$  est différentiable à  $t$  avec  

$$\dot{\zeta}_i(t) = \frac{1}{1 - \dot{d}_i(\zeta_i(t))}, \text{ avec } \zeta_i(\nu_{k,i}^{(N_{k,i})}) = t_{k,i}^{(N_{k,i})}. \quad (3.102)$$

L'évaluation de la  $i$ -ème composante de la sortie mesurée  $y_{d_i}(t)$  à l'instant  $\zeta_i(t)$  nous donne ainsi

$$y_{d_i}(\zeta_i(t)) \stackrel{\Delta}{=} y_i(\zeta_i(t) - d_i(\zeta_i(t))).$$

Comme pour la section 3.5, le signal  $y_{d_i}(\zeta_i(t))$  est disponible pour tout  $t \geq \nu_{0,i}^{(0)}$ , où  $\zeta_i(t)$  est donné par

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \forall t \in \left[ \nu_{k,i}^{(n)}, \nu_{k,i}^{(n+1)} \right[ , k \geq 0, 0 \leq n \leq N_{k,i} - 1, \quad \zeta_i(t) = t_{k,i}^{(n)}, \\ \bullet \forall t \in \left[ \nu_{k,i}^{(N_{k,i})}, \nu_{k+1,i}^{(0)} \right[ , k \geq 0, \quad \dot{\zeta}_i(t) = \frac{1}{1 - \dot{d}_i(\zeta_i(t))} \text{ avec } \zeta_i(\nu_{k,i}^{(N_{k,i})}) = t_{k,i}^{(N_{k,i})}. \end{array} \right. \quad (3.103)$$

Enfin, d'après les points 1.(ii) et 1.(iii) de la proposition 3.6.1, la sortie retardée  $y_{d_i}(\zeta_i(t))$  peut s'exprimer comme suit

$$\bullet \forall t \in \left[ \nu_{k,i}^{(N_{k,i})}, \nu_{k+1,i}^{(0)} \right[ , k \geq 0,$$

$$y_{d_i}(\zeta_i(t)) = y_i(\zeta_i(t) - d_i(\zeta_i(t))) = y_i(t - d_M), \quad (3.104)$$

$$\bullet \forall t \in \left[ \nu_{k,i}^{(n)}, \nu_{k,i}^{(n+1)} \right[ , k \geq 0, 0 \leq n \leq N_{k,i} - 1,$$

$$y_{d_i}(\zeta_i(t)) = y_i(\zeta_i(t) - d_i(\zeta_i(t))) = y_i\left(\nu_{k,i}^{(n)} - d_M\right). \quad (3.105)$$

D'après (3.104)-(3.105), la composante retardée  $y_{d_i}(\zeta_i(t))$  n'est rien de plus qu'une version retardée de la composante actuelle  $y_i$  de la sortie, à savoir la sortie actuelle retardée par un retard constant égal à  $d_M$ . Nous proposons ainsi dans le paragraphe suivant et de façon similaire à la section 3.5 un observateur dont la structure est similaire à celui de la section 3.5 dans le cas d'un retard long constant et identique sur chaque composante de la sortie.

### Observateur

Les équations du nouvel observateur sont similaires à celles de l'observateur proposé dans le cas du long retard constant dans la section 3.5. Pour tout  $i = 1, \dots, p$ , la fonction  $\bar{d}_{0,i} : [\nu_{0,i}^{(0)}, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}^+$  est définie comme suit

$$\begin{cases} \bar{d}_{0,i}(t) = d_0, & \forall t \in [\nu_{k,i}^{(N_{k,i})}, \nu_{k+1,i}^{(0)}[, \quad k \geq 0, \\ \bar{d}_{0,i}(t) = t - \nu_{k,i}^{(n)} + d_0, & \forall t \in [\nu_{k,i}^{(n)}, \nu_{k,i}^{(n+1)}[, \quad k \geq 0, \quad n = 0, \dots, N_{k,i} - 1. \end{cases} \quad (3.106)$$

et soit  $\underline{d} = d_M - d_0$ . Chaque fonction  $\bar{d}_{0,i}$ ,  $i = 1, \dots, p$ , permet ainsi une mise à jour automatique de la  $i$ -ème composante du terme correctif de l'observateur, et similairement au cas du petit retard variable, la fonction  $\bar{d}_{0,i}(t)$  est continue par morceaux sur  $[\nu_{0,i}^{(0)}, +\infty[$  et bornée par  $d_0 + \bar{\tau}_M$  où  $\bar{\tau}_M$  est donné par (3.100).

L'observateur en cascade est alors décrit par les équations différentielles suivantes pour tout  $t \in [\bar{\nu}_0^{(0)}, +\infty[$ , avec  $\bar{\nu}_0^{(0)} = \max_{i=1, \dots, p} \nu_{0,i}^{(0)}$  :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}^{(0)}(t) = A\hat{x}^{(0)}(t) + \varphi(u^{(0)}(t), \hat{x}^{(0)}(t)) - G^{(0)}(t), & \text{avec} \\ G^{(0)}(t) = \theta \Delta_\theta^{-1} K \left( g(t) - g_{\bar{d}_0}(t) + C\hat{x}_{\bar{d}_0}^{(0)}(t) - y_d(\zeta(t)) \right) & \text{avec} \\ \dot{g}(t) = -\theta k_1 \left( g(t) - g_{\bar{d}_0}(t) + C\hat{x}_{\bar{d}_0}^{(0)}(t) - y_d(\zeta(t)) \right), \\ \\ \begin{cases} \dot{\hat{x}}^{(j)}(t) = A\hat{x}^{(j)}(t) + \varphi(u^{(j)}(t), \hat{x}^{(j)}(t)) - G^{(j)}(t), & \text{avec} \\ G^{(j)}(t) = e^{\bar{A} \frac{d}{m}} \left( G^{(j-1)}(t) + (A - \bar{A}) \left( \hat{x}^{(j)} \left( t - \frac{d}{m} \right) - \hat{x}^{(j-1)}(t) \right) \right. \\ \quad \left. + \varphi \left( u^{(j-1)}(t), \hat{x}^{(j)} \left( t - \frac{d}{m} \right) \right) - \varphi \left( u^{(j-1)}(t), \hat{x}^{(j-1)}(t) \right) \right), & j = 1, \dots, m, \end{cases} \end{cases} \quad (3.107)$$

avec

$$\begin{aligned} g(t) &= \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ \vdots \\ g_p(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p, \quad g_{\bar{d}_0}(t) = \begin{pmatrix} g_1(t - \bar{d}_{0,1}(t)) \\ g_2(t - \bar{d}_{0,2}(t)) \\ \vdots \\ g_p(t - \bar{d}_{0,p}(t)) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p \\ y_d(\zeta(t)) &= \begin{pmatrix} y_{d_1}(\zeta_1(t)) \\ y_{d_2}(\zeta_2(t)) \\ \vdots \\ y_{d_p}(\zeta_p(t)) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p, \quad C\hat{x}_{\bar{d}_0}^{(0)}(t) = \begin{pmatrix} \hat{x}_{1,1}(t - \bar{d}_{0,1}(t)) \\ \hat{x}_{1,2}(t - \bar{d}_{0,2}(t)) \\ \vdots \\ \hat{x}_{1,p}(t - \bar{d}_{0,p}(t)) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p, \end{aligned} \quad (3.108)$$

où  $y_{d_i}(\zeta_i(t))$  est donné par (3.104) et (3.105), où  $\hat{x}^{(j)} = \begin{pmatrix} \hat{x}_1^{(j)} \\ \vdots \\ \hat{x}_q^{(j)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$  est l'état estimé de

$x^{(j)}$  avec  $\hat{x}_l^{(j)} \in \mathbb{R}^p$  pour  $l = 1, \dots, q$  et  $j = 0, \dots, m$ ,  $\Delta_\theta$  est la matrice diagonale par blocs donnée par (3.4),  $\theta > 0$  est le paramètre de synthèse de l'observateur grand gain,  $K$  est la

matrice de taille  $n \times p$  donnée par (3.5) et respectant la propriété (3.6), et  $\bar{d}_{0,i}$ ,  $i = 1, \dots, p$ , est le signal à temps variant donné par (3.106).

L'observateur résultant est alors initialisé par

$$\begin{cases} \hat{x}^{(0)}(\bar{\nu}_0^{(0)}) &= \hat{x}(\bar{\nu}_0^{(0)} - \underline{d}) \\ \hat{x}^{(j)}(s) &= \hat{x}\left(s - \underline{d} + \frac{j}{m}\underline{d}\right), \quad \forall s \in \left[\bar{\nu}_0^{(0)} - \frac{\underline{d}}{m}, \bar{\nu}_0^{(0)}\right], \quad j = 1, \dots, m, \\ g(s) &= \psi(s), \quad \forall s \in \left[\bar{\nu}_0^{(0)} - d_0 - \bar{\tau}_M, \bar{\nu}_0^{(0)}\right], \end{cases}$$

où  $\hat{x}(s)$ ,  $s \in \left[\bar{\nu}_0^{(0)} - \underline{d}, \bar{\nu}_0^{(0)}\right]$  est une estimée sélectionnée *a priori* du vecteur d'état et  $\psi(s)$ ,  $s \in \left[\bar{\nu}_0^{(0)} - d_0 - \bar{\tau}_M, \bar{\nu}_0^{(0)}\right]$  est une fonction continue choisie arbitrairement.

La preuve de convergence de l'erreur d'observation associée à l'observateur (3.107) est donnée par l'application directe des théorèmes 3.5.1 et 3.6.1, en prenant  $\bar{\tau}_M + d_0 < \bar{\chi}_\theta$ , où  $\bar{\tau}_M$ ,  $d_0$  et  $\bar{\chi}_\theta$  sont donnés par (3.100), (3.106) et (3.75) respectivement.

## 3.7 Exemples illustratifs

Dans cette section, les performances des observateurs étudiés précédemment sont illustrées par le biais de deux exemples. Le premier exemple traite d'un système chaotique de Lorenz soumis à un échantillonnage et un retard variable unique sur toutes les composantes de la sortie du système. Le second exemple étudie le cas d'un échantillonnage multiple et de petits retards multiples constants sur les différentes composantes de la sortie d'un joint flexible de bras robotique.

### 3.7.1 Exemple 1 - Système chaotique de Lorenz

L'efficacité de l'observateur en cascade proposé est étudiée dans un cadre de simulation réaliste impliquant une synchronisation hyperchaotique conjointement avec un problème de mesures tamponnées. Un tel problème a déjà été abordé dans (CACACE et al. 2014) où les mesures de sortie sont stockées dans un buffer sous forme de paquets de données avant d'être envoyées à l'unité de traitement. La synthèse de l'observateur est basée sur le système de Lorenz suivant

$$\begin{cases} \dot{x}_a(t) &= \alpha (x_b(t) - x_a(t)) \\ \dot{x}_b(t) &= \beta x_a(t) + x_b(t) - x_a(t)x_c(t) - x_d(t) \\ \dot{x}_c(t) &= x_a(t)x_b(t) - \gamma x_c(t) \\ \dot{x}_d(t) &= \delta x_b(t)x_c(t) + \varepsilon_d(t) \end{cases} \quad (3.109)$$

où  $x^T = \begin{pmatrix} x_a & x_b & x_c & x_d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$  est l'état du système,  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^{+4}$  sont les paramètres du système et  $\varepsilon_d$  est une incertitude. Ce système fournit un comportement chaotique

à condition que ses paramètres soient correctement spécifiés, par exemple  $\alpha = 10$ ,  $\beta = 28$ ,  $\gamma = 8/3$  et  $\delta = 0.1$ . Une telle propriété a été utilisée de manière appropriée dans l'ingénierie des communications sécurisées (voir par exemple (PENG et al. 1996) et (XIANG-JUN et al. 2011)). La sortie disponible  $y$  dépend de  $x_1 = \begin{pmatrix} x_a & x_b + x_c \end{pmatrix}^T$ . On suppose que les mesures sont récupérées à intervalles réguliers  $\left[ t_k^{(N_k)}, t_{k+1}^{(0)}, \dots, t_{k+1}^{(N_{k+1})} \right]$  dont la longueur de chacun de ces intervalles est égale à  $T_c = T_a + 4\tau_m + \tau_M$  où  $T_a, \tau_m$  et  $\tau_M$  avec  $\tau_m < \tau_M$ , sont des constantes réelles positives, et  $N_k = 5$ ,  $t_k^{(n)} = (k-1)T_c + T_a + n\tau_m$ ,  $k \geq 0$ ,  $n = 1, \dots, N_k - 1$  et  $t_k^{(N_k)} = kT_c$ . Toutes les mesures arrivent au buffer avec un retard constant  $d_m > 0$  selon le scénario suivant.

- (i) Les mesures sont fournies à l'unité de traitement à une fréquence élevée pendant l'intervalle de temps  $\left[ t_k^{(N_k)}, t_{k+1}^{(0)} \right] = [kT_c, kT_c + T_a]$ ,  $k \geq 0$ . En particulier, le premier paquet, disponible pour l'observateur en cascade à l'instant  $t = 0$ , contient les mesures acquises sur l'intervalle de temps  $[-T_c, 0]$ . Le délai de transmission entre le buffer et l'unité de traitement,  $d_k^{(T)}$  peut être modélisé comme un signal continu dont l'expression est

$$d_k^{(T)}(t) = (d_M - d_m) \left( 1 - \frac{t - t_k^{(N_k)}}{T_a} \right) \quad (3.110)$$

où  $0 < d_m < d_M$  sont des constantes positives.

- (ii) Sur chaque intervalle de temps  $\left[ t_{k+1}^{(n)}, t_{k+1}^{(n+1)} \right]$ ,  $k \geq 0$ ,  $n = 1, \dots, N_{k+1} - 2 = 3$ , le buffer envoie instantanément à l'unité de traitement une nouvelle sortie échantillonnée retardée  $y_d(t_{k+1}^{(n)})$  puis attend une période de temps  $\tau_m$  avant de renvoyer le prochain échantillon. Par conséquent, nous avons  $d_k^{(T)}(t_{k+1}^{(n)}) = 0$ .
- (iii) Sur chaque intervalle de temps  $\left[ t_{k+1}^{(N_{k+1}-1)}, t_{k+1}^{(N_{k+1})} \right]$  dont la longueur est  $\tau_M$ , le buffer envoie instantanément à l'unité de traitement une nouvelle sortie échantillonnée retardée  $y_d(t_{k+1}^{(N_{k+1}-1)})$  (ici aussi  $d_k^{(T)}(t_{k+1}^{(N_{k+1}-1)}) = 0$ ). Ensuite, le buffer attend une période de temps  $\tau_M$  atteignant ainsi l'instant de temps  $t_{k+1}^{(N_{k+1})}$ . Nous revenons alors à la situation (i) où un flux continu de mesures retardées est fourni à l'unité de traitement à partir du buffer.

Selon le scénario ci-dessus, la sortie est disponible avec un retard global égal à  $d_m$  auquel est ajouté le retard de transmission. Par conséquent, on a

$$\begin{cases} d_k(t) &= d_M - \frac{d_M - d_m}{T_a} (t - t_k^{(N_k)}), \quad \forall t \in \left[ t_k^{(N_k)}, t_{k+1}^{(0)} \right], k \geq 0 \\ d_k(t_k^{(n)}) &= d_m, \quad \forall t \in \left[ t_k^{(n)}, t_k^{(n+1)} \right], n = 1, \dots, N_k - 1 \end{cases} \quad (3.111)$$

En résumé, les sorties retardées disponibles (rapportées dans la figure 3.2) peuvent être ex-

primées en  $y_d(t) = y(t - \bar{d}(t))$  où  $\bar{d}$  est défini comme suit (voir figure 3.3)

$$\begin{cases} \bar{d}(t) = d_M - \frac{d_M - d_m}{T_a} (t - t_k^{(N_k)}), \forall t \in [t_k^{(N_k)}, t_{k+1}^{(0)}], k \geq 0 \\ \bar{d}(t) = t - t_k^{(n)} + d_m, \forall t \in [t_k^{(n)}, t_k^{(n+1)}], n = 1, \dots, N_k - 1 \end{cases} \quad (3.112)$$

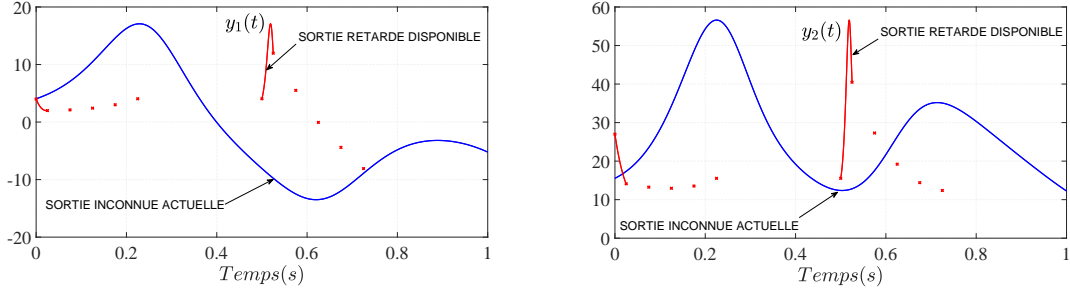


FIGURE 3.2 – Sorties avec leurs mesures retardées disponibles respectives

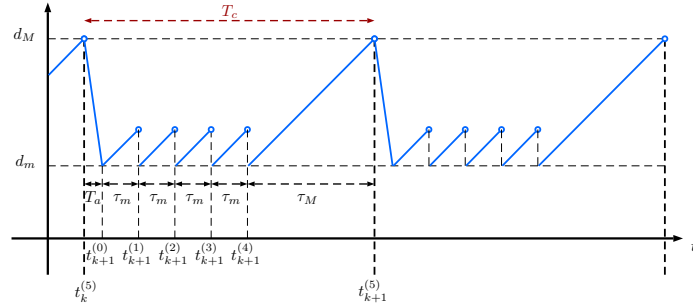


FIGURE 3.3 – Évolution temporelle de  $\bar{d}(t)$

La synthèse de l'observateur a été réalisée selon les étapes décrites dans la section 3.5.2, grâce à la transformation d'état  $\Phi : x \in \mathbb{R}^4 \rightarrow z \in \mathbb{R}^4$  où

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \text{ avec } z_1 = \begin{pmatrix} x_a \\ x_b + x_c \end{pmatrix} \text{ et } z_2 = \begin{pmatrix} \alpha (x_b - x_a) \\ \beta x_a + x_b - x_a x_c - x_d + x_a x_b - \gamma x_c \end{pmatrix}$$

Il a été montré dans (CACACE et al. 2014) que la transformation  $\Phi$  place le système de Lorenz (3.109) sous la forme désirée, c'est-à-dire sous la forme (3.1). Un observateur en cascade avec un retard variant dans le temps a été conçu dans les coordonnées en  $z$  et implémenté dans les coordonnées en  $x$  en utilisant l'inverse de la transformation d'état jacobienne, et en choisissant les paramètres de réglage et de synthèse suivants

$$\tau_c = d_M = 0.5s, \tau_a = 0.025s, d_m = 0.225s, \tau_M = 0.275s, \tau_m = 0.05s$$

$$\theta = 30, \quad m = 12, \quad d_0 = 0.025s, \quad K = \begin{pmatrix} 2I_2 \\ I_2 \end{pmatrix}, \quad \bar{A} = A - 30I_4$$

### 3.7. Exemples illustratifs

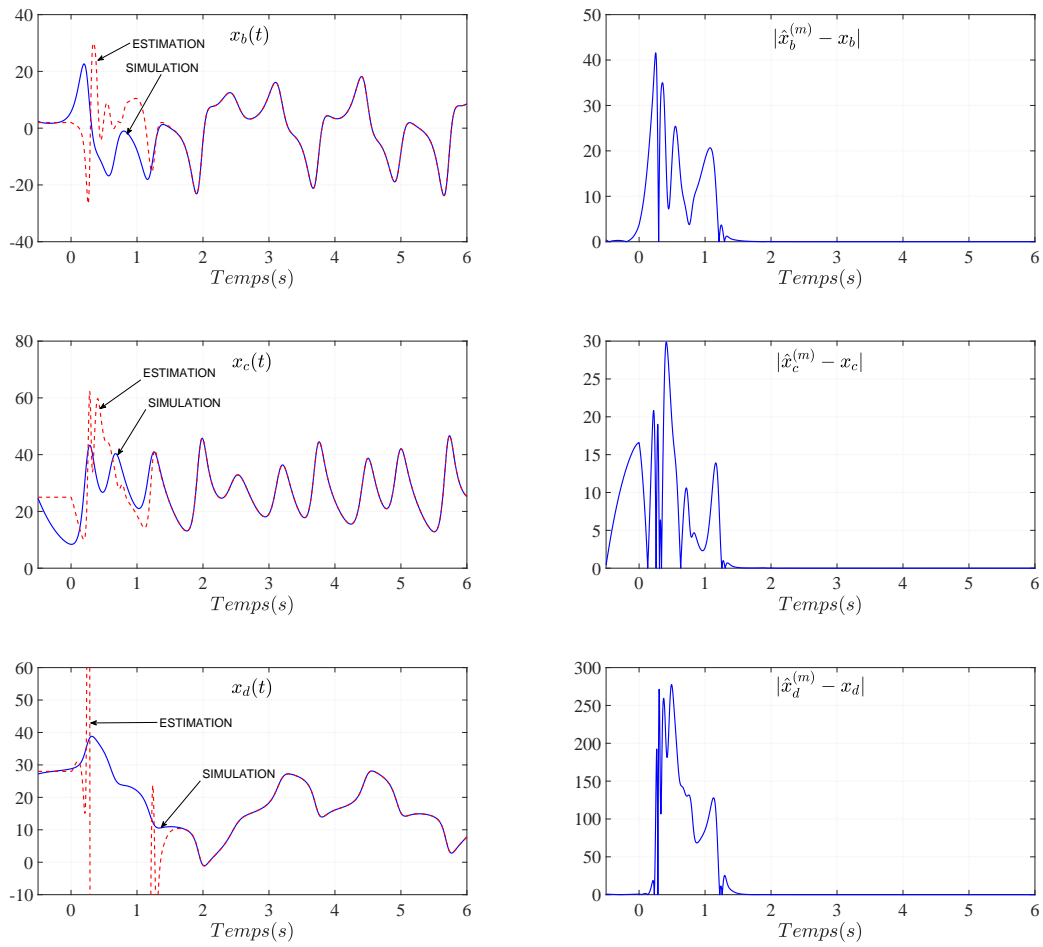


FIGURE 3.4 – Estimation de  $x^b$ ,  $x^c$  et  $x^d$  avec leur erreur d'observation respective

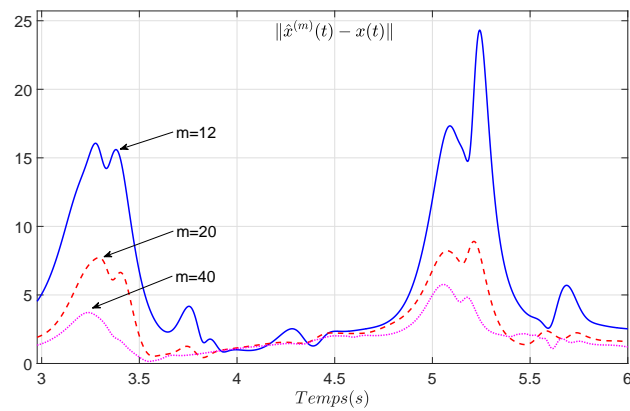


FIGURE 3.5 – Norme de l'erreur ultime d'estimation pour  $m = 12, 20, 40$

Les conditions initiales du système ainsi que celles de l'observateur en cascade ont été choisies comme dans (CACACE et al. 2014), à savoir  $x^T(0) = \begin{pmatrix} 4.0 & 2.4 & 24.6 & 27.2 \end{pmatrix}$  et  $\hat{x}^T(s) = \begin{pmatrix} 4.0 & 2.0 & 25.0 & 28.0 \end{pmatrix}$  avec  $s \in [-d_M, 0]$ . Deux ensembles de résultats de simulation ont été obtenus en fonction de l'incertitude. Le premier ensemble correspond au cas sans incertitude, tandis que le second est consacré au cas où l'incertitude a été choisie égale à  $\varepsilon_d(t) = 3.5 \sin(t)$ . La figure 3.4 montre le comportement des variables d'état non mesurées du système ainsi que leur erreur d'estimation respective dans le cas sans incertitude, tandis que la figure 3.5 montre l'évolution de l'erreur d'estimation ultime en présence de l'incertitude, dans le cas de différentes longueurs de cascade, à savoir  $m = 12, 20, 40$ . En plus de la capacité de l'observateur proposé à traiter les problèmes d'ingénierie des communications sécurisées, les résultats de ces simulations corroborent les résultats fondamentaux et plus spécifiquement une propriété intéressante qui a été soulignée dans la remarque 3.5.2, à savoir que l'erreur d'estimation ultime est une fonction décroissante de la longueur de la cascade de l'observateur.

### 3.7.2 Exemple 2 - Joint flexible de bras robotique

Le second exemple de ce chapitre traite le problème d'observation d'un bras robotique avec joint flexible qui a déjà été considéré dans plusieurs publications (RAFF et al. 2008 ; HOWELL et HEDRICK 2008 ; FARZA et al. 2014). Nous allons illustrer par le biais de cet exemple les performances de l'observateur (3.71) dans le cas d'un échantillonnage et de petits retards constants multiples sur les différentes composantes de la sortie. Le bras de robot considéré est décrit par le système dynamique suivant

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Fx(t) + \varphi(u(t), x(t)) + B\varepsilon(t) \\ y(t) &= \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{1,1}(t) \\ x_{1,2}(t) \end{pmatrix} \end{cases} \quad (3.113)$$

où l'état  $x$  est donné par

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4, \text{ avec } x_1 = \begin{pmatrix} x_{1,1} \\ x_{1,2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, x_2 \in \mathbb{R}, x_3 \in \mathbb{R},$$

où  $u(t) = \sin(t) - \sin(7t)$  est l'entrée du système (3.113),  $y(t)$  est la sortie inconnue actuelle du système (3.113) et  $\varepsilon(t)$  est une incertitude, la matrice  $B$  est telle que  $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$ , la matrice  $F$  est donnée par

$$F = \begin{pmatrix} 0_2 & F_1 & 0_{2 \times 1} \\ 0_{1 \times 2} & 0 & 1 \\ 0_{1 \times 2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } F_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 48.6 \end{pmatrix},$$



et la fonction  $\varphi(u, x)$  est décrite par

$$\varphi(u, x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(u, x_1) \\ 0 \\ \varphi_3(x_{1,1}, x_2) \end{pmatrix}, \quad \varphi_1(u, x_1) = \begin{pmatrix} x_{1,2} \\ -48.6x_{1,1} - 1.25x_{1,2} + 21.6u \end{pmatrix},$$

$$\varphi_3(x_{1,1}, x_2) = 19.5x_{1,1} - 19.5x_2 - 3.3\sin(x_2).$$

La sortie actuelle  $y(t)$  est inconnue, et nous ne disposons que d'une sortie échantillonnée et retardée  $y_d(t) = \begin{pmatrix} y_{d_1}(t) \\ y_{d_2}(t) \end{pmatrix}$ . Les composantes  $y_1$  et  $y_2$  sont disponibles avec un retard égal à  $d_1$  et  $d_2$  respectivement. Plus précisément, les mesures de la sortie  $y_1$  sont récupérées à intervalles réguliers  $[t_{0,1}^{(n)}, t_{0,1}^{(n+1)}[$ ,  $n \geq 0$ , et la longueur de chaque intervalle vaut  $\tau_1$ . De même, les mesures de la sortie  $y_2$  sont récupérées à intervalles réguliers  $[t_{0,2}^{(n)}, t_{0,2}^{(n+1)}[$ ,  $n \geq 0$ , chaque intervalle étant de longueur  $\tau_2$ . En outre, nous supposons que les sorties  $y_1$  et  $y_2$  sont disponibles à partir de l'instant  $t_{0,1}^{(0)} = t_{0,2}^{(0)} = 0$ . Le retard maximal  $d_M$  et la plus grande période d'échantillonnage  $\tau_M$ , donnés respectivement par (3.66) et (3.64), vérifient

$$\begin{cases} d_M = \max\{d_1, d_2\} \\ \tau_M = \max\{\tau_1, \tau_2\} \end{cases} \quad (3.114)$$

Les sorties retardées disponibles  $y_{d_1}$  et  $y_{d_2}$  (rapportées dans la figure 3.6), purement échantillonnées au regard de ce qui a été dit précédemment, vérifient ainsi

$$\begin{cases} y_{d_1}(t) = y_1\left(t_{0,1}^{(n)} - d\left(t_{0,1}^{(n)}\right)\right), \quad \forall t \in \left[t_{0,1}^{(n)}, t_{0,1}^{(n+1)}\right], \quad n \geq 0, \\ y_{d_2}(t) = y_2\left(t_{0,2}^{(n)} - d\left(t_{0,2}^{(n)}\right)\right), \quad \forall t \in \left[t_{0,2}^{(n)}, t_{0,2}^{(n+1)}\right], \quad n \geq 0, \end{cases} \quad (3.115)$$

et les signaux à temps variant correspondant  $\bar{d}_1$  et  $\bar{d}_2$  et décrits par la relation (3.69) sont calculés comme suit

$$\begin{cases} \bar{d}_1(t) = t - t_{0,1}^{(n)} + d_1, \quad \forall t \in \left[t_{0,1}^{(n)}, t_{0,1}^{(n+1)}\right], \quad n \geq 0, \\ \bar{d}_2(t) = t - t_{0,2}^{(n)} + d_2, \quad \forall t \in \left[t_{0,2}^{(n)}, t_{0,2}^{(n+1)}\right], \quad n \geq 0. \end{cases} \quad (3.116)$$

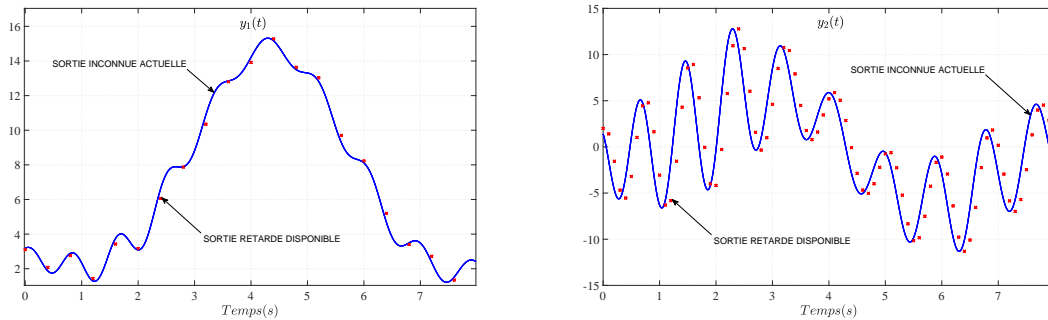


FIGURE 3.6 – Sorties avec leurs mesures retardées disponibles respectives

Puisque le système (3.113) n'est pas sous la forme (3.1), il convient d'exhiber une transformation d'état permettant de le mettre sous cette forme (HAMMOURI et FARZA 2003; FARZA et al. 2004). Plus précisément, considérons l'application injective suivante

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}^4 &\longrightarrow \mathbb{R}^6 \\ x &\longmapsto z = \Phi(x) = \Lambda x \end{aligned}$$

où

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}, \text{ avec } z_1 = \begin{pmatrix} z_{1,1} \\ z_{1,2} \end{pmatrix}, z_2 = \begin{pmatrix} z_{2,1} \\ z_{2,2} \end{pmatrix}, z_3 = \begin{pmatrix} z_{3,1} \\ z_{3,2} \end{pmatrix}$$

et

$$\Lambda = \begin{pmatrix} I_2 & 0_{2 \times 1} & 0_{2 \times 1} \\ 0_2 & F_1 & 0_{2 \times 1} \\ 0_2 & 0_{2 \times 1} & F_1 \end{pmatrix}$$

Cette dernière matrice vérifie l'égalité  $\Lambda F = A\Lambda$  où  $A = \begin{pmatrix} 0_{4 \times 2} & I_4 \\ 0_2 & 0_{2 \times 4} \end{pmatrix}$  est la matrice anti-décalage. La dynamique de la nouvelle variable  $z$  est alors donnée par l'équation différentielle suivante

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \Lambda F x(t) + \Lambda \varphi(u(t), x(t)) = Az(t) + \Lambda \varphi(u(t), \Lambda^+ z(t)) \\ y(t) = Cz(t) \end{cases} \quad (3.117)$$

où  $y(t)$  est la sortie inconnue actuelle du système (3.113), et où  $C = \begin{pmatrix} I_2 & 0_2 & 0_2 \end{pmatrix}$  et  $\Lambda^+ \triangleq (\Lambda^T \Lambda)^{-1} \Lambda^T$  est l'inverse à gauche de la matrice  $\Lambda$ . Nous pouvons ainsi synthétiser pour ce dernier système dynamique un observateur grand gain du type (3.71) dans le but d'estimer l'état complet du système (3.113). Plus particulièrement, les équations de l'observateur sont données, dans les coordonnées originales en  $x$ , par le système suivant (à comparer avec (3.71))

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = F\hat{x}(t) + \varphi(u(t), \hat{x}(t)) - \Lambda^+ G(t), \text{ où } \forall t \geq 0, \\ G(t) = \theta \Delta_\theta^{-1} K (g(t) - g_{\bar{d}}(t) + C\hat{x}_{\bar{d}}(t) - y_d(t)) \text{ avec} \\ \dot{g}(t) = -\theta k_1 (g(t) - g_{\bar{d}}(t) + C\hat{x}_{\bar{d}}(t) - y_d(t)), \\ g(s) = 0_{2 \times 1}, \forall s \in [-d_M - \tau_M, 0], \end{cases} \quad (3.118)$$

avec

$$\begin{aligned} g(t) &= \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p, \quad g_{\bar{d}}(t) = \begin{pmatrix} g_1(t - \bar{d}_1(t)) \\ g_2(t - \bar{d}_2(t)) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p \\ \text{et } C\hat{x}_{\bar{d}}(t) &= \begin{pmatrix} \hat{x}_{1,1}(t - \bar{d}_1(t)) \\ \hat{x}_{1,2}(t - \bar{d}_2(t)) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p, \end{aligned}$$

### 3.7. Exemples illustratifs

où la sortie retardée disponible  $y_d$  est décrite par (3.115), les signaux à temps variant  $\bar{d}_1$  et  $\bar{d}_2$  sont donnés par (3.116), et  $d_M$  et  $\tau_M$  vérifient la relation (3.114). Les matrices  $\Delta_\theta$  et  $K$  ont été déterminées en prenant  $q = 3$  et  $p = 2$  puisque l'observateur est synthétisé sur la base des coordonnées en  $z$ . La simulation a été effectuée avec les valeurs

$$d_1 = 0.05s, \quad d_2 = d_M = 0.1s, \quad \tau_1 = \tau_M = 0.4s, \quad \tau_2 = 0.1s$$

et en spécifiant les paramètres de synthèse de l'observateur comme suit

$$\theta = 4, \quad K = \begin{pmatrix} 3I_2 \\ 3I_2 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

Les conditions initiales du système et de l'observateur ont été choisies comme suit

$$x^T(0) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \hat{x}^T(s) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad s \in [-d_M, 0] \quad (3.119)$$

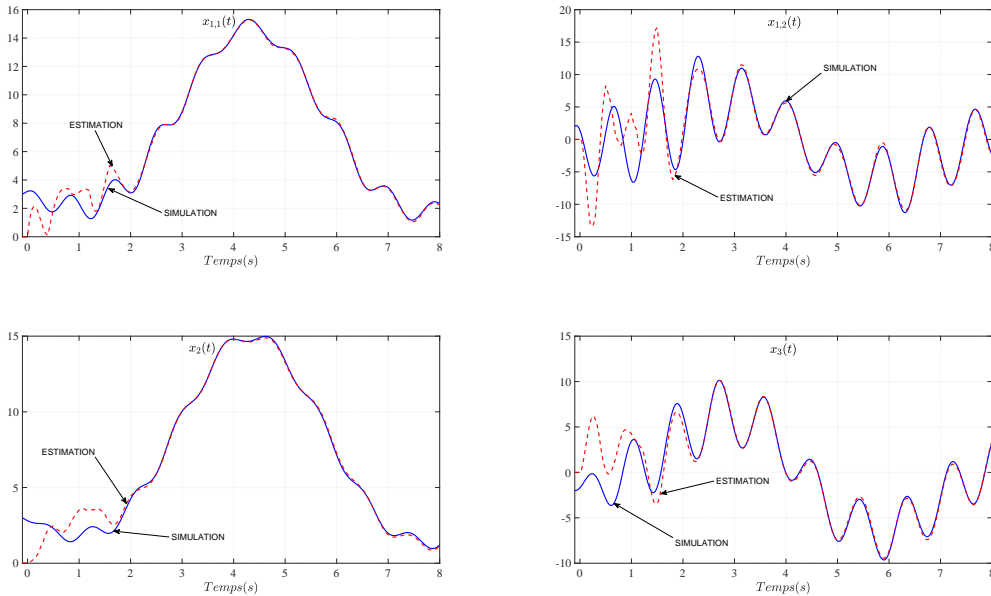


FIGURE 3.7 – Estimation des états  $x_{1,1}$ ,  $x_{1,2}$ ,  $x_2$  et  $x_3$

Par ailleurs, les simulations ont été réalisées en choisissant l'incertitude  $\varepsilon(t) = 0.5\sin(2t)$ . La figure 3.7 décrit le comportement des variables d'état du système ainsi que leur erreur d'estimation respective. Les résultats de cette nouvelle simulation montre donc bien la capacité de l'observateur synthétisé à estimer l'ensemble de l'état du système dans le cas où les différentes composantes de la sortie sont soumises à un échantillonnage et un retard différents, et en présence d'incertitudes.

### 3.8 Conclusion

Ce chapitre a principalement été motivé par la synthèse d'observateurs grand gain pour une classe de systèmes non linéaires MIMO uniformément observables et dont les sorties sont regroupées en un seul bloc, avec prise en compte du processus d'acquisition des mesures de sortie (mesures continues, échantillonnées, retardées). Plusieurs aspects de synthèse méritent d'être soulignés. Tout d'abord, la dimension de l'observateur est égale à celle du système dans le cas où le retard (variant dans le temps) de la sortie est relativement petit. Ensuite, un observateur en cascade approprié a été utilisé dans le but de traiter les retards arbitrairement longs et constants. Cette synthèse a ensuite été adaptée au cas des retards arbitrairement longs et variant dans le temps par le biais d'une procédure systématique. Enfin, ces résultats, d'abord établis dans le cas où l'échantillonnage et le retard sont identiques pour chacune des sorties, ont été étendus au cas où chaque sortie possède son propre échantillonnage et son propre retard (variant dans le temps). Par ailleurs, deux remarques méritent d'être mentionnées d'un point de vue fondamental. La première concerne la convergence exponentielle de l'erreur d'observation vers zéro en l'absence d'incertitude. Cette propriété a été établie dans le cas sans retard sous une condition bien définie mettant en jeu la valeur maximale de la période d'échantillonnage. La seconde est consacrée à la convergence ultime de l'erreur d'estimation en présence d'incertitude sous une condition faisant intervenir la valeur maximale de la période d'échantillonnage. Une attention particulière est réservée au fait que la limite ultime peut être rendue aussi petite que souhaitée dans le cas d'un retard arbitrairement petit, alors qu'il s'agit d'une fonction décroissante de la longueur de la cascade pour des retards arbitrairement longs.

Les performances des observateurs proposés suivant le scénario de disponibilité des mesures de sortie ont été illustrées par deux exemples. Le premier concerne une synchronisation hyperchaotique avec mesures 'bufferisées' conduisant à des résultats prometteurs dans un cadre technique de communication sécurisée appropriée. La synthèse est réalisée en supposant que toutes les sorties ont été échantillonnées simultanément et sont affectées par le même retard (variant dans le temps). Le second exemple est un bras robotique avec un joint flexible qui a été particulièrement utilisé pour illustrer les performances de l'observateur proposé dans le cas où l'échantillonnage et le retard sont considérés différents sur chaque sortie du système considéré.



# Chapitre 4

## Observateur grand gain filtré

### 4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous proposons de synthétiser un observateur grand gain incorporant une fonction de filtrage appropriée pour réduire sa sensibilité au bruit de mesure. Une importante activité de recherche a été récemment consacrée à cette problématique (ASTOLFI et MARCONI 2015; ASTOLFI et al. 2016; TEEL 2016; KHALIL 2017) en introduisant une limitation du gain d'observation adéquate et soucieuse, dite 'low power', de la convergence de l'observateur. Les observateurs proposés dans (ASTOLFI et al. 2016; TEEL 2016) ont été en plus judicieusement modifiés en y ajoutant des saturations pour limiter le phénomène connu sous l'appellation phénomène du 'pick' intrinsèque au régime transitoire des observateurs grand gain. On notera toutefois que la mise en œuvre de ces observateurs est relativement fastidieuse pour percevoir l'horizon d'une ingénierie des observateurs grand gain.

Les performances réalisées par l'observateur grand gain filtré (FHGO) sont comparées par rapport à celles d'un observateur grand gain standard (SHGO). Le FHGO se distingue par sa simplicité structurelle puisqu'il consiste tout simplement en deux sous-systèmes de même dimension que le système original. La dynamique du premier sous-système, dont l'état est constitué d'une estimée de l'état du système original, est une simple copie du système original avec un terme de correction dépendant de l'état du second système. Ce dernier est un filtre linéaire dont l'entrée correspond à l'erreur d'observation de sortie, i.e. la différence entre la sortie prédite par l'observateur et la sortie mesurée. Les matrices de gain de l'observateur sont constantes et une procédure simple est donnée afin de les calculer convenablement. Une analyse détaille les propriétés de filtrage de ce dernier observateur. Nous étendrons ensuite les conditions d'application du FHGO en présence de mesures échantillonnées, mais également dans le cadre de sorties multiples. Les performances du FHGO sont illustrées par le biais de deux exemples : un oscillateur forcé de Van Der Pol et un bioréacteur.

## 4.2 Formulation du problème

### 4.2.1 Présentation de la classe d'étude

Considérons la classe de systèmes non linéaires suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_n x(t) + \varphi(u(t), x(t)) + B_n \varepsilon(t) \\ y(t) = C_n x(t) + w(t) = x_1(t) + w(t) \end{cases} \quad (4.1)$$

avec

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad \varphi(u, x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(u, x_1) \\ \varphi_2(u, x_1, x_2) \\ \vdots \\ \varphi_n(u, x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$$A_n = \begin{pmatrix} 0_{n-1,1} & I_{n-1} \\ 0 & 0_{1,n-1} \end{pmatrix}, \quad B_n = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}^T, \quad C_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

où  $x_i \in \mathbb{R}$  pour  $i = 1, \dots, n$  sont les variables d'état du système,  $u(t) \in \mathcal{U}$  est l'entrée du système, où  $\mathcal{U}$  est un ensemble compact,  $y(t) \in \mathbb{R}$  représente la sortie du système,  $w(t)$  est le bruit de mesure et  $\varepsilon : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction inconnue décrivant les incertitudes du système et peut éventuellement dépendre de l'état du système, de l'entrée et de paramètres inconnus.

Dans cette partie, la synthèse de l'observateur se fera sous les hypothèses usuelles suivantes.

**Hypothèse 4.2.1** *L'état  $x(t)$  et la commande  $u(t)$  sont bornés, i.e.  $x(t) \in \mathcal{X}$  et  $u(t) \in \mathcal{U}$  où  $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$  et  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}$  sont des ensembles compacts. Plus précisément, il existe des constantes  $\rho_i, i = 1, \dots, n$ , telles que  $\max_{x \in \mathcal{X}} |x_i(t)| < \rho_i$  pour tout  $t \geq 0$ .*

**Hypothèse 4.2.2** *Les fonctions  $\varphi_i(u, x), i = 1, \dots, n$ , sont Lipschitz sur  $\mathcal{X}$  selon  $x$  uniformément en  $u$ , i.e.*

$\exists L_\varphi > 0, \forall u \in \mathcal{U}, \forall (x, \bar{x}) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X} :$

$$\|\varphi_i(u, x_1, \dots, x_i) - \varphi_i(u, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_i)\| \leq L_\varphi \sum_{k=1}^i |x_k - \bar{x}_k|, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.3)$$

**Hypothèse 4.2.3** *L'incertitude  $\varepsilon$  et le bruit de mesure  $w$  sont des fonctions essentiellement bornées, i.e.*

$$\exists \delta_\varepsilon, \delta_w > 0, \quad |\varepsilon|_\infty \stackrel{\Delta}{=} \text{ess sup}_{t \geq 0} |\varepsilon(t)| \leq \delta_\varepsilon \quad \text{et} \quad |w|_\infty \stackrel{\Delta}{=} \text{ess sup}_{t \geq 0} |w(t)| \leq \delta_w \quad (4.4)$$

**Remarque 4.2.1** *De la même façon que dans le chapitre précédent, puisque l'état est borné, nous pouvons construire des prolongations globalement Lipschitz des non-linéarités  $\varphi_i$  via l'utilisation de fonctions de saturation (KHALIL 2017). Par soucis de simplification, nous supposons dans ce qui suit que la fonction  $\varphi$  résulte de ces prolongations.*

#### 4.2.2 Préliminaires

Il convient dans un premier temps de rappeler quelques résultats liés à la synthèse d'un observateur grand gain standard (SHGO) pour la classe de système MIMO introduite dans (BOURAOUI et al. 2015) dont le cas SISO coïncide avec la classe de systèmes (4.1) sous les hypothèses 4.2.1 à 4.2.3. Nous énoncerons ensuite un lemme technique qui constitue la clé de voûte de la synthèse de l'observateur grand gain filtré.

Les équations du SHGO pour le système (4.1) sont données par

$$\dot{\hat{x}}(t) = A_n \hat{x}(t) + \varphi(u(t), \hat{x}(t)) - \theta \Delta_\theta^{-1} G_n (C_n \hat{x}(t) - y(t)) \quad (4.5)$$

avec

$$\Delta_\theta = \text{diag} \left( 1, \frac{1}{\theta}, \dots, \frac{1}{\theta^{n-1}} \right) \quad (4.6)$$

où  $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$  représente l'état estimé, la matrice de gain  $G_n \triangleq (g_1 \dots g_n)^T \in \mathbb{R}^n$  est choisie de sorte que la matrice  $\tilde{A}_n \triangleq A_n - G_n C_n$  est Hurwitz, et  $\theta \geq 1$  est un paramètre de synthèse typique de la synthèse grand gain. Notons que puisque la matrice  $\tilde{A}_n = A_n - G_n C_n$  est Hurwitz, il existe une matrice SDP  $P_n = P_n^T > 0$  de taille  $n \times n$  et un réel positif  $\mu_n$  tels que

$$P_n \tilde{A}_n + \tilde{A}_n^T P_n \leq -2\mu_n I_n \quad (4.7)$$

Nous désignons respectivement par  $\lambda_m(P_n)$  et  $\lambda_M(P_n)$  la plus petite et la plus grande valeur propre de la matrice  $P_n$ .

Il a été montré que l'erreur d'observation  $\tilde{x}(t) = \hat{x}(t) - x(t)$ , relative à l'observateur (4.5), vérifie l'inégalité suivante

$\exists \theta_0 > 0, \forall \theta \geq \theta_0, \forall u \in \mathcal{U}, \forall \hat{x}(0) \in \mathbb{R}^n$ , nous avons

$$\|\hat{x}(t) - x(t)\| \leq \sigma_n \theta^{n-1} e^{-\frac{\mu_n \theta}{2\lambda_M(P_n)} t} \|\hat{x}(0) - x(0)\| + \frac{2\sigma_n \lambda_M(P_n)}{\mu_n} \left( \frac{\delta_\varepsilon}{\theta} + \theta^{n-1} \|G_n\| \delta_w \right),$$

où  $\mu_n > 0$  est un réel positif donné par (4.7),  $\delta_\varepsilon$  et  $\delta_w$  sont les bornes essentielles supérieures de  $\|\varepsilon(t)\|$  et  $\|w(t)\|$  données par l'hypothèse 4.2.3,  $\theta_0 = \max \left( 1, \frac{2L_\varphi \sqrt{n} \lambda_M(P_n)}{\mu_n} \right)$ ,  $L_\varphi$  est la constante de Lipschitz donnée par l'hypothèse 4.2.2, et  $\sigma_n = \sqrt{\frac{\lambda_M(P_n)}{\lambda_m(P_n)}}$  est le nombre de



conditionnement de la matrice  $P_n$  donnée en (4.7).

Il convient désormais de présenter le résultat suivant permettant de sélectionner convenablement la dynamique de l'observateur filtré que nous proposons ci-après.

**Lemme 4.2.1** Soit  $M_n = \begin{pmatrix} A_n & -K_n \\ C_n^T C_n & -D_n + A_n^T \end{pmatrix}$  où  $n \geq 2$  est un entier positif,  $A_n$  et  $C_n$  sont données par (4.2), et  $D_n, K_n$  sont les matrices diagonales suivantes :

$$D_n = \text{diag} \left( \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n \right) \text{ et } K_n = \text{diag} \left( k_1, k_2, \dots, k_n \right) \quad (4.8)$$

où chaque  $\delta_i$  et chaque  $k_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , est un réel constant. Il existe un choix de  $\delta_i$  et de  $k_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , tel que les valeurs propres de la matrice  $M_n$  peuvent être assignées arbitrairement.

**Preuve du lemme 4.2.1.** Soit  $\lambda \in \mathbb{C}$  un nombre complexe arbitraire. La matrice  $M_n - \lambda I_{2n}$  peut tout d'abord se factoriser comme suit :

$$\begin{aligned} M_n - \lambda I_{2n} &= \begin{pmatrix} -\lambda I_n + A_n & -K_n \\ C_n^T C_n & -(\lambda I_n + D_n) + A_n^T \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -K_n & -\lambda I_n + A_n \\ -(\lambda I_n + D_n) + A_n^T & C_n^T C_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix} \\ &\triangleq N \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

La matrice  $N$  définie dans la dernière équation satisfait l'équation

$$\begin{aligned} N &\begin{pmatrix} I_n & K_n^{-1}(-\lambda I_n + A_n) \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -K_n & -\lambda I_n + A_n \\ -(\lambda I_n + D_n) + A_n^T & C_n^T C_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & K_n^{-1}(-\lambda I_n + A_n) \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -K_n & 0_n \\ -(\lambda I_n + D_n) + A_n^T & C_n^T C_n + ((\lambda I_n + D_n) - A_n^T) K_n^{-1}(\lambda I_n - A_n) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De la dernière égalité, nous obtenons

$$\begin{aligned} \det(N) &= \det(-K_n) \det \left( C_n^T C_n + ((\lambda I_n + D_n) - A_n^T) K_n^{-1}(\lambda I_n - A_n) \right) \\ &= (-1)^n \det(L) \end{aligned} \quad (4.10)$$

avec

$$L \triangleq K_n C_n^T C_n + K_n ((\lambda I_n + D_n) - A_n^T) K_n^{-1}(\lambda I_n - A_n). \quad (4.11)$$

De l'équation (4.9), nous en déduisons que  $\det(M_n - \lambda I_{2n}) = (-1)^n \det(N) = (-1)^{2n} \det(L) = \det(L)$ .

Calculons désormais le déterminant de la matrice  $L$ . Il convient tout d'abord de souligner que cette matrice est tridiagonale et fournit une expression de l'entrée  $l_{i,j}$  localisée à la ligne  $i$  et la colonne  $j$  de cette matrice. En effet,  $L$  peut être réécrite comme suit :

$$\begin{aligned} L &= K_n C_n^T C_n + ((\lambda I_n + D_n) - K_n A_n^T K_n^{-1}) (\lambda I_n - A_n) \\ &= \lambda(\lambda I_n + D_n) - ((\lambda I_n + D_n) A_n + \lambda K_n A_n^T K_n^{-1}) + (K_n A_n^T K_n^{-1} A_n + K_n C_n^T C_n) \end{aligned}$$

Soit  $\Gamma$  la matrice diagonale suivante :

$$\Gamma = \text{diag} \left( k_1, \frac{k_2}{k_1}, \frac{k_3}{k_2}, \dots, \frac{k_n}{k_{n-1}} \right) \quad (4.12)$$

Il est aisé de vérifier que les identités suivantes sont valables

$$K_n A_n^T K_n^{-1} = \Gamma A_n^T \quad \text{et} \quad K_n C_n^T C_n = \Gamma C_n^T C_n (= k_1 C_n^T C_n)$$

De ce fait, la matrice  $L$  peut s'exprimer par

$$\begin{aligned} L &= \lambda(\lambda I_n + D_n) - ((\lambda I_n + D_n) A_n + \lambda \Gamma A_n^T) + \Gamma (A_n^T A_n + C_n^T C_n) \\ &= \lambda(\lambda I_n + D_n) - ((\lambda I_n + D_n) A_n + \lambda \Gamma A_n^T) + \Gamma \end{aligned} \quad (4.13)$$

où la dernière égalité vient du fait que  $A_n^T A_n + C_n^T C_n = I_n$ .

D'après la structure des matrices  $A_n$  et  $\Gamma$ , il peut être démontré que la matrice  $L$  est tridiagonale, i.e.  $l_{i,j} = 0$  pour  $|j - i| > 1$ . En particulier, nous avons

$$\begin{cases} l_{1,1} = \lambda(\lambda + \delta_1) + k_1, & l_{1,2} = -(\lambda + \delta_1), \\ l_{i,i} = \lambda(\lambda + \delta_i) + \frac{k_i}{k_{i-1}}, & l_{i,i-1} = -\lambda \frac{k_i}{k_{i-1}}, & l_{i,i+1} = -(\lambda + \delta_i), & \text{pour } i = 2, \dots, n-1, \\ l_{n,n-1} = -\lambda \frac{k_n}{k_{n-1}}, & l_{n,n} = \lambda(\lambda + \delta_n) + \frac{k_n}{k_{n-1}} \end{cases}$$

Pour tout entier  $i \in \{1, \dots, n\}$ , désignons par  $L_i$  la sous-matrice de taille  $i \times i$  de  $L$  composée des  $i$  premières lignes et des  $i$  premières colonnes de la matrice  $L$ , et posons  $L_0 = 1$ . Pour plus de simplicité, nous posons également  $u_i = \det(L_i)$  pour  $i = 0, \dots, n$ . Prenant en considération la structure tridiagonale de la matrice  $L$ , nous montrons que

$$u_i = \left( \lambda(\lambda + \delta_i) + \frac{k_i}{k_{i-1}} \right) u_{i-1} - \lambda(\lambda + \delta_{i-1}) \frac{k_i}{k_{i-1}} u_{i-2}, \quad \text{pour } i = n, \dots, 2.$$

Puisque  $u_0 = 1$  et  $u_1 = l_{1,1} = \lambda(\lambda + \delta_1) + k_1$  par construction, nous avons alors pour tout  $i = n, \dots, 1$

$$\begin{aligned} u_i - \lambda(\lambda + \delta_i) u_{i-1} &= \frac{k_i}{k_{i-1}} (u_{i-1} - \lambda(\lambda + \delta_{i-1}) u_{i-2}) \\ &= \frac{k_i}{k_{i-1}} \frac{k_{i-1}}{k_{i-2}} \dots \frac{k_2}{k_1} (u_1 - \lambda(\lambda + \delta_1) u_0) \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$u_i - \lambda(\lambda + \delta_i)u_{i-1} = \frac{k_i}{k_1} (\lambda(\lambda + \delta_1) + k_1 - \lambda(\lambda + \delta_1)) = k_i,$$

ou de manière équivalente,

$$u_i - k_i = \lambda(\lambda + \delta_i)u_{i-1}. \quad (4.14)$$

Dans ce qui suit, il convient de montrer comment l'expression itérative (4.14) peut être utilisée afin de déterminer les coefficients  $\delta_i, k_i$ , pour  $i = 1, \dots, n$ . Pour ce faire, soit

$$Q_{2n}(\lambda) = \lambda^{2n} + \sum_{i=1}^{2n-1} b_i^{(n)} \lambda^{2n-i} + b_{2n}^{(n)}, \quad (4.15)$$

un polynôme arbitraire Hurwitz d'ordre  $2n$  dont les  $b_i^{(n)}$ ,  $i = 1, \dots, 2n$ , sont des réels positifs. Rappelons que l'objectif ici est de déterminer les coefficients  $\delta_i, k_i$ , pour  $i = 1, \dots, n$ , tels que le polynôme caractéristique de la matrice  $M_n$  coïncide avec  $Q_{2n}$ , i.e.  $u_n = Q_{2n}(\lambda)$ .

Tout d'abord, l'équation (4.14) s'écrit comme suit pour  $i = n$  :

$$u_n - k_n = \lambda(\lambda + \delta_n)u_{n-1}. \quad (4.16)$$

D'autre part, l'équation (4.15) peut être réécrite de la manière suivante

$$Q_{2n}(\lambda) - b_{2n}^{(n)} = \lambda^{2n} + \sum_{i=1}^{2n-1} b_i^{(n)} \lambda^{2n-i} = \lambda \left( \lambda^{2n-1} + \sum_{i=1}^{2n-1} b_i^{(n)} \lambda^{2n-1-i} \right) \triangleq \lambda Q_{2n-1}(\lambda). \quad (4.17)$$

Notons que le polynôme  $Q_{2n-1}(\lambda)$  est d'ordre impair ( $2n - 1$ ). Par conséquent, ce dernier admet au moins une racine réelle que l'on notera  $-p_n$ , où  $p_n$  est un réel constant. Ce polynôme peut ainsi se factoriser comme suit :

$$Q_{2n-1}(\lambda) = (\lambda + p_n)Q_{2(n-1)}(\lambda)$$

où  $Q_{2(n-1)}(\lambda)$  est un polynôme d'ordre  $2(n - 1)$ . L'équation (4.17) peut alors se réécrire de la manière suivante

$$Q_{2n}(\lambda) - b_{2n}^{(n)} = \lambda(\lambda + p_n)Q_{2(n-1)}(\lambda). \quad (4.18)$$

Maintenant, si  $u_n = Q_{2n}(\lambda)$ , alors les coefficients  $k_n$  et  $\delta_n$ , et  $u_{n-1}$  présents dans l'équation (4.16) peuvent être déterminés par une simple identification d'après (4.16) et (4.18), ce qui nous mène à

$$k_n = b_{2n}^{(n)}, \quad \delta_n = p_n, \quad u_{n-1} = Q_{2(n-1)}(\lambda). \quad (4.19)$$

La procédure ci-dessus peut ensuite être appliquée à  $u_{n-1}$  et le polynôme connu  $Q_{2(n-1)}$  dans le but de déterminer  $k_{n-1}$ ,  $\delta_{n-1}$  et  $u_{n-2}$ . En effet,  $Q_{2(n-1)}$  s'écrit

$$Q_{2(n-1)}(\lambda) = \lambda^{2(n-1)} + \sum_{i=1}^{2(n-1)-1} b_i^{(n-1)} \lambda^{2(n-1)-i} + b_{2(n-1)}^{(n-1)}$$

ou de manière équivalente

$$Q_{2(n-1)}(\lambda) - b_{2(n-1)}^{(n-1)} = \lambda^{2(n-1)} + \sum_{i=1}^{2(n-1)-1} b_i^{(n-1)} \lambda^{2(n-1)-i} \triangleq \lambda Q_{2n-3}(\lambda)$$

où  $b_i^{(n-1)}$ ,  $i = 1, \dots, 2(n-1)$ , sont des réels constants et  $Q_{2n-3}(\lambda)$  est un polynôme d'ordre impair  $(2n-3)$ . En poursuivant la même procédure que pour  $Q_{2n}$  et  $u_n$ , nous obtenons

$$k_{n-1} = b_{2(n-1)}^{(n-1)}, \quad \delta_{n-1} = p_{n-1} \quad \text{et} \quad u_{n-2} = Q_{2(n-2)}(\lambda),$$

où  $p_{n-1}$  est une racine réelle de  $Q_{2n-3}(\lambda)$ , et le polynôme  $Q_{2(n-2)}(\lambda)$  est tel que

$$Q_{2n-3}(\lambda) = (\lambda + p_{n-1})Q_{2(n-2)}(\lambda)$$

L'application de cette procédure pour  $i = n, \dots, 1$  nous permet alors de déterminer chaque coefficient  $k_i$  et  $\delta_i$ . Notons que pour la dernière étape, nous trouvons  $Q_2(\lambda) = \lambda^2 + b_1^{(1)}\lambda + b_2^{(1)}$ , ou de manière équivalente  $Q_2(\lambda) - b_2^{(1)} = \lambda(\lambda + b_1^{(1)})Q_0(\lambda)$  avec  $Q_0(\lambda) = u_0 = 1$ . Ainsi, nous en déduisons directement les valeurs de  $\delta_1$  et de  $k_1$ , i.e.  $\delta_1 = b_1^{(1)}$  et  $k_1 = b_2^{(1)}$ . Ceci termine la preuve du lemme 4.2.1.  $\square$

**Remarque 4.2.2** Selon la preuve du lemme 4.2.1, le choix arbitraire des valeurs propres de la matrice  $M_n$  peut s'effectuer par un calcul simple des coefficients  $\delta_i$  et  $k_i$  pour  $i = 1, \dots, n$ . Ces derniers peuvent en effet être déterminés facilement via une procédure itérative impliquant les deux étapes suivantes, exécutées de manière séquentielle de  $i = n$  à  $i = 1$ .

1. Soient  $\lambda_j^{(i)}$ ,  $j = 1, \dots, 2i$ , les valeurs propres désirées et soit

$$G_{2i} = \left( b_1^{(i)} \quad \dots \quad b_{2i}^{(i)} \right)^T \in \mathbb{R}^{2i}$$

le vecteur des coefficients du polynôme caractéristique correspondant d'ordre  $2i$ , à savoir  $Q_{2i}(\lambda)$ . Le vecteur  $G_{2i}$  peut être facilement calculé en utilisant les fonctions prédéfinies de Matlab 'place', 'acker' ou 'poly'. En supposant que chaque coefficient  $b_j^{(i)}$  correspond au coefficient multipliant  $\lambda^{2i-j}$  dans le polynôme  $Q_{2i}(\lambda)$ , pour  $j = 1, \dots, 2i$ , nous avons directement  $k_i = b_{2i}^{(i)}$  en nous basant sur la relation (4.19).

2. Nous calculons ensuite le vecteur  $R_{2i-1}$  contenant les racines du polynôme d'ordre  $2i-1$

résultant de l'étape 1, à savoir le polynôme

$$Q_{2i-1} = \lambda^{2i-1} + b_1^{(i)} \lambda^{2i-2} + \dots + b_j^{(i)} \lambda^{2i-1-j} + \dots + b_{2i-1}^{(i)}.$$

Ce dernier polynôme étant d'ordre impair  $2i - 1$ , il admet nécessairement au moins une racine réelle, notée  $p_i$ , et nous posons  $\delta_i = -p_i$ . Notons que la racine  $p_i$  est strictement négative, et donc  $\delta_i$  est strictement positif, puisque tous les coefficients du polynôme  $Q_{2i-1}$  sont strictement positifs. Les racines du polynôme  $Q_{2i-1}$  peuvent être facilement calculées à l'aide de la fonction 'roots' de Matlab. Les  $2i - 2$  racines restantes, c'est-à-dire les éléments de l'ensemble  $R_{2i-1} \setminus \{p_i\}$  sont ensuite réécrites  $\lambda_j^{(i-1)}$ , avec  $j = 1, \dots, 2(i-1)$ . Nous effectuons alors l'affectation  $i \leftarrow i - 1$ . Si  $i = 0$  alors la procédure se termine, sinon nous retournons à l'étape 1.

### 4.3 Synthèse d'un observateur filtré pour une classe de systèmes uniformément observable

Dans cette partie, nous allons proposer un observateur grand gain filtré (FHGO) pour une classe de systèmes SISO uniformément observables. Nous effectuerons une analyse de convergence de l'erreur d'observation puis nous comparerons la structure de l'observateur FHGO proposé avec celle de l'observateur proposé dans (ASTOLFI et MARCONI 2015). Nous procéderons ensuite à une étude détaillée de la sensibilité au bruit de mesure de l'observateur FHGO dans un cadre comparable à celui donné dans (ASTOLFI et MARCONI 2015), à savoir le cas d'une fonction  $\varphi(u, x)$  du système (4.1) linéaire en  $x$  et intervenant seulement sur la dernière dynamique du système. Nous étendrons enfin l'utilisation du FHGO pour les systèmes multi-sorties dans le cas où les mesures sont échantillonnées.

#### 4.3.1 Structure de l'observateur FHGO

Rappelons que notre objectif est d'améliorer les performances en terme de sensibilité au bruit de mesure de l'observateur SHGO (4.5). Nous proposons dans ce chapitre une structure innovante composée de deux sous-systèmes bouclés, comme le montre la figure 4.1.

Chacun des deux sous-systèmes du FHGO est de la même dimension que le système original (4.1). En particulier, le premier sous-système, la partie observateur, est une copie du système original avec un terme correctif dépendant de l'état du second sous-système. Ce dernier est un filtre linéaire dont l'entrée est la différence entre la sortie estimée par l'observateur et la sortie mesurée, en l'occurrence l'erreur d'observation de sortie. L'observateur proposé dans cette partie est donné par l'ensemble des équations différentielles suivantes :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) &= A_n \hat{x}(t) + \varphi(u(t), \hat{x}(t)) - \theta K_n \eta(t), \\ \dot{\eta}(t) &= -\theta D_n \eta(t) + \theta^2 A_n^T \eta(t) + \theta C_n^T (C_n \hat{x}(t) - y(t)) \text{ avec } \eta(0) = 0, \end{cases} \quad (4.20)$$

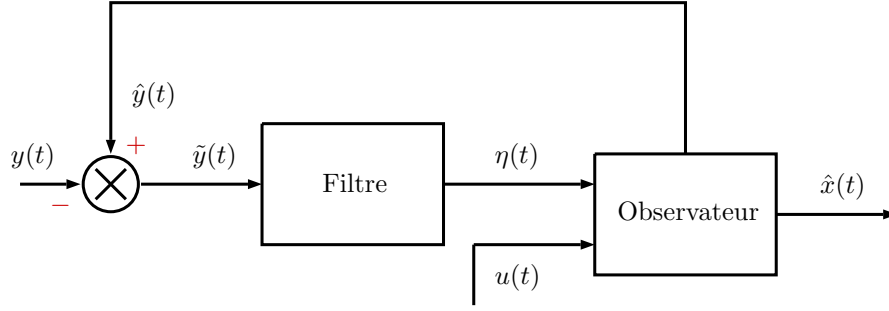


FIGURE 4.1 – Structure de l'observateur FHGO proposé

où  $\hat{x} = \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \vdots \\ \hat{x}_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$  avec  $\hat{x}_i, \eta_i \in \mathbb{R}$  pour tout  $i = 1, \dots, n$ ,  $\theta > 0$  est un paramètre de synthèse réel positif, et où  $D_n$  et  $K_n$  sont les matrices diagonales

$$D_n = \text{diag}(\delta_1, \dots, \delta_n), \quad K_n = \text{diag}(k_1, \dots, k_n)$$

Les coefficients  $\delta_i$  et  $k_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , sont des réels constants et sont choisis de sorte que la matrice

$$M_n = \begin{pmatrix} A_n & -K_n \\ C_n^T C_n & -D_n + A_n^T \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n} \quad (4.21)$$

est Hurwitz. Notons qu'un tel choix est possible d'après le lemme 4.2.1 sur la base de la procédure établie dans la preuve du lemme 4.2.1. Par ailleurs, puisque la matrice  $M_n$  est Hurwitz, il existe une matrice SDP  $P_n = P_n^T > 0$  de taille  $n \times n$  et un réel positif  $\mu_n > 0$  tels que

$$M_n^T P_n + P_n M_n \leq -2\mu_n I_{2n} \quad (4.22)$$

Nous désignons respectivement par  $\lambda_m(P_n)$  et  $\lambda_M(P_n)$  la plus petite et la plus grande valeur propre de la matrice  $P_n$ .

Avant d'établir le théorème décrivant les propriétés principales de l'observateur FHGO (4.20), il convient de comparer la structure de l'observateur FHGO (4.20) avec celle de l'observateur SHGO donné par (4.5) afin de mettre en avant les capacités de filtrage de l'observateur proposé. Nous allons pour cela nous focaliser sur l'état  $\eta = \begin{pmatrix} \eta_1 & \dots & \eta_n \end{pmatrix}^T$ . La première composante  $\eta_1$  correspond à une version filtrée de l'erreur d'observation  $\hat{x}_1 - y$  par un filtre d'ordre 1 et dont le gain statique ne dépend pas de  $\theta$ . En effet, la composante  $\eta_1$  vérifie d'après (4.20) l'équation différentielle suivante

$$\dot{\eta}_1(t) = -\theta\delta_1\eta_1(t) + \theta(\hat{x}_1(t) - y(t))$$

ce qui donne, dans le domaine de Laplace,

$$H_1(p) = \frac{\theta}{p + \theta\delta_1} \left( \hat{X}_1(p) - Y(p) \right)$$

où  $H_1(p)$  et  $\hat{X}_1(p) - Y(p)$  sont les transformées de Laplace de  $\eta_1(t)$  et  $\hat{x}_1(t) - y(t)$ , respectivement. En raisonnant de façon similaire, la  $i$ -ème composante  $\eta_i$  correspond à une version filtrée d'ordre  $i$  de l'erreur d'observation  $\hat{x}_1 - y$ , de gain statique proportionnel à  $\theta^{i-1}$ , comme l'atteste la relation suivante dans le domaine de Laplace, basée sur les équations de l'observateur (4.20)

$$H_i(p) = \frac{\theta^{2i-1}}{\prod_{j=1}^i (p + \theta\delta_j)} \left( \hat{X}_1(p) - Y(p) \right) \quad (4.23)$$

où  $H_i(p)$  et  $\hat{X}_1(p) - Y(p)$  sont les transformées de Laplace de  $\eta_i(t)$  et  $\hat{x}_1(t) - y(t)$ , respectivement. Ainsi, l'EDO associée à l'état  $\hat{x}_i$  dans l'observateur FHGO est similaire à celle vérifiée par  $\hat{x}_i$  dans l'observateur SHGO, excepté le fait que le terme correctif  $\theta^{i-1}\gamma_i(\hat{x}_1 - y)$  est remplacé par sa version filtrée  $k_i\eta_i$ . Deux propriétés importantes sont à souligner en lien avec cette transformation. La première correspond au fait que la puissance maximale associée au paramètre  $\theta$  n'excède pas 2 dans l'observateur FHGO, alors qu'elle est de  $n - 1$  pour l'observateur SHGO. La deuxième caractéristique vient du fait que le remplacement de l'erreur d'observation par une version filtrée appropriée améliore nécessairement les capacités de filtrage de l'observateur FHGO, et donc son comportement vis-à-vis du bruit de mesure comme nous le verrons plus tard.

Le théorème suivant stipule que le système dynamique (4.20) est un observateur convenable pour le système (4.1), à savoir l'erreur d'observation ( $\hat{x}(t) - x(t)$ ) converge exponentiellement vers zéro.

**Théorème 4.3.1** *Considérons le système (4.1) soumis aux hypothèses 4.2.1 à 4.2.3 conjointement avec l'observateur (4.20). Alors, il existe  $\theta_0 > 0$  tel que pour tout  $\theta \geq \theta_0$ , pour tout  $u \in \mathcal{U}$ , pour tout  $\hat{x}(0) \in \mathbb{R}^n$ , nous avons*

$$\|\hat{x}(t) - x(t)\| \leq \sigma_n \theta^{n-1} e^{-\frac{\mu_n \theta}{2\lambda_M(P_n)} t} \|\hat{x}(0) - x(0)\| + \frac{2\sigma_n \lambda_M(P_n)}{\mu_n} \left( \frac{\delta_\varepsilon}{\theta} + \theta^{n-1} \delta_w \right), \quad (4.24)$$

pour tout  $t \geq 0$ , où  $x(t)$  est la trajectoire inconnue du système associée à l'entrée  $u$ ,  $\hat{x}(t)$  est n'importe quelle trajectoire du système (4.20) associée à  $(u, y)$ ,  $\mu_n > 0$  est un réel positif donné par (4.22),  $\delta_\varepsilon$  et  $\delta_w$  sont les bornes essentielles supérieures de  $|\varepsilon(t)|$  et  $|w(t)|$ , respectivement, où  $\theta_0 = \max(1, 2\lambda_M(P_n)\sqrt{n}L_\varphi/\mu_n)$ ,  $L_\varphi$  est la constante de Lipschitz donnée par l'hypothèse 4.2.2 et  $\sigma_n = \sqrt{\lambda_M(P_n)/\lambda_m(P_n)}$  est le nombre de conditionnement de la matrice  $P_n$  donnée par (4.22).

**Preuve du théorème 4.3.1.** Posons  $\tilde{x} = \hat{x} - x$  et  $\bar{x} = \theta^{n-1}\Delta_\theta\tilde{x}$  où  $\Delta_\theta$  est la matrice diagonale donnée par (4.6). Les inégalités suivantes peuvent être facilement vérifiées :

$$\Delta_\theta A_n \Delta_\theta^{-1} = \theta A_n \quad \text{et} \quad C_n \Delta_\theta^{-1} = C_n. \quad (4.25)$$

D'après les relations (4.1) et (4.20),  $\tilde{x}(t)$  vérifie

$$\dot{\tilde{x}}(t) = A_n \tilde{x}(t) + \tilde{\varphi}(u(t), \hat{x}(t), x(t)) - B_n \varepsilon(t) - \theta K_n \eta(t),$$

où  $\tilde{\varphi}(u(t), \hat{x}(t), x(t)) = \varphi(u(t), \hat{x}(t)) - \varphi(u(t), x(t))$ . En prenant en considération les identités (4.25) et puisque les matrices  $\Delta_\theta$  et  $K_n$  commutent entre elles, il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}(t) &= \Delta_\theta A_n \Delta_\theta^{-1} \bar{x}(t) + \theta^{n-1} \Delta_\theta \tilde{\varphi}(u(t), \hat{x}(t), x(t)) - \theta^{n-1} \Delta_\theta B_n \varepsilon(t) - \theta^n \Delta_\theta K_n \eta(t) \\ &= \theta A_n \bar{x}(t) + \theta^{n-1} \Delta_\theta \tilde{\varphi}(u(t), \hat{x}(t), x(t)) - B_n \varepsilon(t) - \theta K_n \bar{\eta}(t) \end{aligned} \quad (4.26)$$

où  $\bar{\eta}(t) = \theta^{n-1} \Delta_\theta \eta(t)$ . En utilisant (4.20) et par commutation de  $\Delta_\theta$  et  $K_n$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\eta}}(t) &= -\theta D_n \bar{\eta}(t) + \theta^2 \Delta_\theta A_n^T \Delta_\theta^{-1} \bar{\eta}(t) + \theta C_n^T C_n \bar{x}(t) - \theta^n C_n^T w(t) \\ &= -\theta D_n \bar{\eta}(t) + \theta A_n^T \bar{\eta}(t) + \theta C_n^T C_n \bar{x}(t) - \theta^n C_n^T w(t) \end{aligned} \quad (4.27)$$

Les équations différentielles (4.26) et (4.27) peuvent être regroupées en une seule équation comme suit :

$$\dot{\bar{z}}(t) = \theta M_n \bar{z}(t) + \begin{pmatrix} \theta^{n-1} \Delta_\theta \tilde{\varphi}(u(t), \hat{x}(t), x(t)) \\ 0_{n,1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} B_n \varepsilon(t) \\ \theta^n C_n^T w(t) \end{pmatrix} \quad (4.28)$$

où  $\bar{z}(t) = \begin{pmatrix} \bar{x}(t) \\ \bar{\eta}(t) \end{pmatrix}$  et  $M_n$  est la matrice Hurwitz donnée par (4.21).

Soit  $V(\bar{z}(t)) = \bar{z}(t)^T P_n \bar{z}(t)$  la fonction de Lyapunov candidate pour l'équation d'erreur (4.28), où  $P_n$  est la matrice SDP donnée par (4.22). D'après l'inégalité (4.22), la dérivée par rapport au temps de la fonction  $V$  vérifie

$$\begin{aligned} \dot{V}(\bar{z}(t)) &\leq -2\mu_n \theta \|\bar{z}(t)\|^2 + 2\|P_n \bar{z}(t)\| \|\theta^{n-1} \Delta_\theta \tilde{\varphi}(u(t), \hat{x}(t), x(t))\| \\ &\quad + 2\|P_n \bar{z}(t)\| (\theta^n \|C_n^T w(t)\| + \|B_n \varepsilon(t)\|) \\ &\leq -2\mu_n \theta \|\bar{z}(t)\|^2 + 2\lambda_M(P_n) \|\bar{z}(t)\| \|\theta^{n-1} \Delta_\theta \tilde{\varphi}(u(t), \hat{x}(t), x(t))\| \\ &\quad + 2\sqrt{\lambda_M(P_n)} \sqrt{V(\bar{z}(t))} (\theta^n \|C_n^T w(t)\| + \|B_n \varepsilon(t)\|) \\ &\leq -2\mu_n \theta \|\bar{z}(t)\|^2 + 2\lambda_M(P_n) \|\bar{z}(t)\| \|\theta^{n-1} \Delta_\theta \tilde{\varphi}(u(t), \hat{x}(t), x(t))\| \\ &\quad + 2\sqrt{\lambda_M(P_n)} \sqrt{V(\bar{z}(t))} (\theta^n |w(t)| + |\varepsilon(t)|) \end{aligned}$$

En prenant en considération la structure triangulaire de la fonction  $\varphi$ , nous pouvons montrer que (voir par exemple (BOURAOUI et al. 2015))

$$\|\theta^{n-1} \Delta_\theta \tilde{\varphi}(u(t), \hat{x}(t), x(t))\| \leq \sqrt{n} L_\varphi \|\bar{x}(t)\| \leq \sqrt{n} L_\varphi \|\bar{z}(t)\| \quad (4.29)$$



où  $L_\varphi$  est la constante de Lipschitz donnée par l'hypothèse 4.2.2. Désormais, en prenant  $\theta$  suffisamment grand de sorte que  $2\mu_n\theta - 2\lambda_M(P_n)\sqrt{n}L_\varphi > \mu_n\theta$ , i.e.

$$\theta > \theta'_0 \triangleq 2 \frac{\lambda_M(P_n)\sqrt{n}L_\varphi}{\mu_n}, \quad (4.30)$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} \dot{V}(\bar{z}(t)) &\leq -\mu_n\theta\|\bar{z}(t)\|^2 + 2\sqrt{\lambda_M(P_n)}\sqrt{V(\bar{z}(t))}(\theta^n|w(t)| + |\varepsilon(t)|) \\ &\leq -\frac{\mu_n\theta}{\lambda_M}V(\bar{z}(t)) + 2\sqrt{\lambda_M(P_n)}\sqrt{V(\bar{z}(t))}(\theta^n|w(t)| + |\varepsilon(t)|) \end{aligned} \quad (4.31)$$

ou d'une manière équivalente

$$\frac{d}{dt}\sqrt{V(\bar{z}(t))} \leq -\frac{\mu_n\theta}{2\lambda_M(P_n)}\sqrt{V(\bar{z}(t))} + \sqrt{\lambda_M(P_n)}(\theta^n|w(t)| + |\varepsilon(t)|)$$

En considérant l'hypothèse 4.2.3, et en utilisant le lemme de comparaison donné dans (KHAILIL 2015), il vient alors

$$\sqrt{V(\bar{z}(t))} \leq e^{-\frac{\mu_n\theta}{2\lambda_M(P_n)}t} \sqrt{V(\bar{z}(0))} + 2\frac{(\lambda_M(P_n))^{3/2}}{\mu_n} \left( \theta^{n-1}\delta_w + \frac{\delta_\varepsilon}{\theta} \right)$$

L'inégalité

$$\frac{\sqrt{V(\bar{z}(t))}}{\sqrt{\lambda_M(P_n)}} \leq \|\bar{z}(t)\| \leq \frac{\sqrt{V(\bar{z}(t))}}{\sqrt{\lambda_m(P_n)}}$$

mène ensuite à

$$\|\bar{z}(t)\| \leq \sigma_n e^{-\frac{\mu_n\theta}{2\lambda_M(P_n)}t} \|\bar{z}(0)\| + 2\frac{\lambda_M(P_n)\sigma_n}{\mu_n} \left( \theta^{n-1}\delta_w + \frac{\delta_\varepsilon}{\theta} \right)$$

Comme  $\|z(t)\| \leq \|\bar{z}(t)\| \leq \theta^{n-1}\|z(t)\|$  pour  $\theta \geq 1$ , on obtient

$$\|z(t)\| \leq \sigma_n \theta^{n-1} e^{-\frac{\mu_n\theta}{2\lambda_M(P_n)}t} \|z(0)\| + 2\frac{\lambda_M(P_n)\sigma_n}{\mu_n} \left( \theta^{n-1}\delta_w + \frac{\delta_\varepsilon}{\theta} \right)$$

En revenant à  $\|\tilde{x}(t)\|$ , et puisque  $\|\tilde{x}(t)\| \leq \|z(t)\|$  et  $\|z(0)\| = \|\tilde{x}(0)\|$  (car  $\eta(0) = 0$ ), nous obtenons finalement

$$\|\tilde{x}(t)\| \leq \sigma_n \theta^{n-1} e^{-\frac{\mu_n\theta}{2\lambda_M(P_n)}t} \|\tilde{x}(0)\| + 2\frac{\lambda_M(P_n)\sigma_n}{\mu_n} \left( \theta^{n-1}\delta_w + \frac{\delta_\varepsilon}{\theta} \right)$$

pour tout  $\theta \geq \theta_0 = \max(1, \theta'_0)$  où  $\theta'_0$  est donné par (4.30). Ceci termine la preuve du théorème 4.3.1.  $\square$

**Remarque 4.3.1** *Il convient de comparer la borne supérieure de  $\|\tilde{x}\|$  donnée par la relation (4.24) et associée à l'observateur FHGO avec celle donnée par l'observateur SHGO dans (BOURAOUI et al. 2015). En absence d'incertitudes et de bruit de mesure, l'erreur d'observation converge exponentiellement vers zéro dans les deux cas et avec un taux de décroissance identique. D'autre part, en présence d'incertitudes et en l'absence de bruit de mesure, le comportement de ces deux observateurs est également similaire puisque l'erreur asymptotique d'observation peut être rendue aussi petite que désirée en choisissant  $\theta$  suffisamment grand.*

### 4.3.2 Comparaison avec l'observateur donné dans (ASTOLFI et MARCONI 2015)

Dans ce paragraphe, nous allons comparer la structure de l'observateur FHGO (4.20) avec l'observateur donné dans (ASTOLFI et MARCONI 2015). Notons que ce dernier a été synthétisé dans le cas particulier où  $n \geq 3$  et  $\varphi_i = 0$  pour  $i = 1, \dots, n-1$ . L'idée fondamentale derrière l'observateur donné dans (ASTOLFI et MARCONI 2015) réside dans une duplication de toutes les composantes de l'état du système, excepté la première et la dernière. Soit donc  $x_i$  la  $i$ -ème composante de l'état du système, pour  $i = 1, \dots, n$ . Nous considérons également le vecteur d'état  $x^c = \begin{pmatrix} x_2^c \\ \vdots \\ x_{n-1}^c \end{pmatrix}$  des composantes dupliquées de l'état du système, avec  $x_i^c = x_i$  pour tout  $i = 2, \dots, n-1$ . Les équations différentielles de l'observateur proposé dans (ASTOLFI et MARCONI 2015) peuvent s'écrire de manière équivalente comme suit :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1(t) = \hat{x}_2^c(t) - \theta k_{1,1} (\hat{x}_1(t) - y(t)) \\ \dot{\hat{x}}_2^c(t) = \hat{x}_3^c(t) - \theta^2 k_{1,2} (\hat{x}_1(t) - y(t)) \\ \dot{\hat{x}}_2(t) = \hat{x}_3^c(t) - \theta k_{2,1} (\hat{x}_2(t) - \hat{x}_2^c(t)) \\ y(t) = x_1(t) + w(t), \\ \begin{cases} \dot{\hat{x}}_i^c(t) = \hat{x}_{i+1}^c(t) - \theta^2 k_{i-1,2} (\hat{x}_{i-1}(t) - \hat{x}_{i-1}^c(t)) \\ \dot{\hat{x}}_i(t) = \hat{x}_{i+1}^c(t) - \theta k_{i,1} (\hat{x}_i(t) - \hat{x}_i^c(t)) \end{cases} \text{ pour tout } i = 3, \dots, n-2, \\ \begin{cases} \dot{\hat{x}}_{n-1}^c(t) = \hat{x}_n(t) - \theta^2 k_{n-2,2} (\hat{x}_{n-2}(t) - \hat{x}_{n-2}^c(t)) \\ \dot{\hat{x}}_{n-1}(t) = \hat{x}_n(t) - \theta k_{n-1,1} (\hat{x}_{n-1}(t) - \hat{x}_{n-1}^c(t)) \\ \dot{\hat{x}}_n(t) = \varphi_n(u(t), \hat{x}(t)) - \theta^2 k_{n-1,2} (\hat{x}_{n-1}(t) - \hat{x}_{n-1}^c(t)) \end{cases} \end{cases} \quad (4.32)$$

où  $y$  est la sortie du système,  $w$  est le bruit de mesure et les paires  $(k_{i,1}, k_{i,2})$ , pour  $i = 1, \dots, n-1$ , sont des nombres réels calculés selon la procédure détaillée dans (ASTOLFI et MARCONI 2015), dans le but d'assigner arbitrairement les pôles de la partie linéaire de l'erreur d'observation.

Désormais, posons  $\eta_1 = \tilde{x}_1 = \hat{x}_1 - y$  et  $\eta_i = \hat{x}_i - \hat{x}_i^c$  pour  $i = 2, \dots, n-1$ . L'observateur

précédent (4.32) peut se réécrire de la manière suivante

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\hat{x}}_1(t) = \hat{x}_2(t) - \theta k_{1,1} \tilde{x}_1(t) - \eta_2(t), \\ \dot{\hat{x}}_i(t) = \hat{x}_{i+1}(t) - \theta k_{i,1} \eta_i(t) - \eta_{i+1}(t), \quad i = 2, \dots, n-2, \\ \dot{\hat{x}}_{n-1}(t) = \hat{x}_n(t) - \theta k_{n-1,1} \eta_{n-1}(t), \\ \dot{\hat{x}}_n(t) = \varphi_n(u(t), \hat{x}(t)) - \theta^2 k_{n-1,2} \eta_{n-1}(t), \\ \dot{\eta}_2(t) = -\theta k_{2,1} \eta_2(t) + \theta^2 k_{1,2} \tilde{x}_1(t), \\ \dot{\eta}_i(t) = -\theta k_{i,1} \eta_i(t) + \theta^2 k_{i-1,2} \eta_{i-1}(t), \quad i = 3, \dots, n-1. \end{array} \right. \quad (4.33)$$

D'une part, l'état  $\eta_2$  correspond à une version filtrée d'ordre 1 de l'erreur d'observation  $\tilde{x}_1$ , de gain statique proportionnel à  $\theta$ . D'autre part, pour  $i \geq 3$ , l'état  $\eta_i$  est une version filtrée d'ordre 1 de l'état  $\eta_{i-1}$ , de gain statique également proportionnel à  $\theta$ . Par conséquent, pour tout  $i \geq 2$ , l'état  $\eta_i$  est une version d'ordre  $i-1$  de l'état  $\tilde{x}_1$ , de gain statique proportionnel à  $\theta^{i-1}$ . Ainsi, le terme correctif impliqué dans la dynamique de la composante  $\hat{x}_i$ , pour  $i = 1, \dots, n-2$ , est composée de deux termes additifs impliquant  $\eta_i$  et  $\eta_{i+1}$  qui sont des versions filtrées de  $\tilde{x}_1$  d'ordre  $i-1$  et  $i$ , respectivement. Les estimations  $\hat{x}_{n-1}$  et  $\hat{x}_n$  sont, elles, mises à jour via un terme correctif impliquant seulement l'état  $\eta_{n-1}$ , version filtrée d'ordre  $n-2$  de  $\tilde{x}_1$ . Remarquons au passage que l'erreur de sortie  $\tilde{x}_1 = \hat{x}_1 - y$  est directement injectée dans le terme correctif lié à la dynamique de  $\hat{x}_1$ . Nous pouvons alors résumer les différences de structure entre l'observateur (4.33) et l'observateur FHGO donné par (4.20) par les aspects suivants :

1. La puissance du paramètre  $\theta$ , présent dans les deux observateurs, ne dépasse pas 2 dans ces derniers.
2. Le terme correctif injecté dans la dynamique de l'état estimé  $\hat{x}_i$ , dans le cas de l'observateur FHGO, est composé d'un seul terme correspondant à une version filtrée d'ordre  $i$  de l'erreur de mesure  $\tilde{x}_1$ . Dans l'observateur (4.33), le terme correctif injecté dans la dynamique de l'état estimé  $\hat{x}_i$  dépend de la valeur de  $i$  :
  - (a) Pour  $i = 1$ , ce terme contient deux composantes faisant intervenir l'erreur de mesure non filtrée  $\tilde{x}_1$  et sa version filtrée d'ordre 1, respectivement.
  - (b) Pour  $i = 2, \dots, n-2$ , le terme correctif contient deux composantes faisant intervenir, respectivement, une version filtrée d'ordre  $i-1$  de l'erreur de mesure  $\tilde{x}_1$  et une version filtrée d'ordre  $i$  de cette même erreur.
  - (c) Enfin, pour  $i = n-1, n$ , ce terme ne contient qu'une seule composante et ne fait intervenir qu'une version d'ordre  $n-2$  de l'erreur de mesure  $\tilde{x}_1$ .

### 4.3.3 Étude de la sensibilité au bruit de mesure de l'observateur FHGO

La plupart des travaux traitant de la sensibilité au bruit de mesure de l'état estimé d'observateurs grand gain en régime permanent délivrent une borne  $\mathcal{H}_\infty$ . Récemment, une approche

prometteuse basée sur l'approximation d'une EDP modélisant l'état d'équilibre non linéaire de l'estimation a été proposée dans le but de caractériser la sensibilité au bruit de mesure hautes fréquences des observateurs non linéaires grand gain (ASTOLFI et al. 2016). Nous allons mettre en avant dans cette partie les caractéristiques de filtrage passe-bas de l'observateur FHGO (4.20). L'établissement d'une telle propriété dans le cas général, à savoir pour des systèmes non linéaires, peut être assez complexe. C'est pourquoi nous allons, à l'instar de (ASTOLFI et MARCONI 2015), considérer le cas linéaire, et plus particulièrement le cas où  $\varphi_i = 0$  pour

$i = 1, \dots, n-1$  et  $\varphi_n(u, x) = Rx$  avec  $R = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$ . L'étude d'un tel cas sera instructif

et pourra être considérée comme une première étape dans l'objectif d'une étude complète pour les systèmes non linéaires. Cette étude permettra en outre de comparer les résultats obtenus ici avec ceux soulignés par (ASTOLFI et MARCONI 2015). L'objectif est ici de tirer une expression de la fonction de transfert entre la  $i$ -ème composante de l'erreur d'observation  $\tilde{x}_i(t) = \hat{x}_i(t) - x_i(t)$ , pour tout  $i = 1, \dots, n$ , et le bruit de mesure  $w(t)$ .

Le théorème suivant décrit les propriétés de filtrage de l'observateur FHGO (4.20).

**Théorème 4.3.2** *Soit  $n \geq 1$ , et soit  $\rho \in \{1, 2, \dots, n\}$  l'indice correspondant au premier coefficient non nul du vecteur de coefficients  $R$  (et  $\rho = n$  si  $R = 0_{n,1}$ ) intervenant dans la fonction non linéaire  $\varphi(u, x) = B_n Rx$ , où  $B_n$  est la matrice donnée par (4.74). Enfin, soit  $d_i$ , pour tout  $i = 1, \dots, n$ , l'ordre relatif de la fonction de transfert entre la  $i$ -ème composante de l'erreur d'observation  $\tilde{x}_i(t) = \hat{x}_i(t) - x_i(t)$  et le bruit de mesure  $w(t)$ . Alors nous avons*

$$d_i \geq \min \{(i+1), (\rho + n - i + 2)\}, \quad i = 1, \dots, n \quad (4.34)$$

**Preuve du théorème 4.3.2.** Soit  $\tilde{x}(t) = \hat{x}(t) - x(t)$ . En considérant le fait que  $\varphi(u, x) = B_n Rx$ , les équations de l'observateur FHGO (4.20) se spécialisent par

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) &= A_n \tilde{x}(t) + B_n R \tilde{x}(t) - \theta K_n \eta(t) \\ \dot{\eta}(t) &= -\theta D_n \eta(t) + \theta^2 A_n^T \eta(t) + \theta C_n^T C_n \tilde{x}(t) - \theta C_n^T w(t) \end{cases}$$

L'application de la transformée de Laplace à la première équation en  $\tilde{x}$  donne immédiatement

$$\tilde{X}(p) = -\theta(pI_n - A_n - B_n R)^{-1} K_n H(p) \quad (4.35)$$

et il a été montré d'après (4.23) que pour tout  $i = 1, \dots, n$ ,

$$H_i(p) = \frac{\theta^{2i-1}}{\prod_{j=1}^i (p + \theta \delta_j)} \left( \tilde{X}_1(p) - W(p) \right) \quad (4.36)$$

où  $p$  est la variable de Laplace, et  $\tilde{X}$ ,  $\tilde{X}_1$ ,  $H$ ,  $H_i$  et  $W$  sont les transformées de Laplace de  $\tilde{x}$ ,  $\tilde{x}_1$ ,  $\eta$ ,  $\eta_i$  et  $w$ , respectivement. Soit

$$(X_{i,j}(p))_{1 \leq i,j \leq n} \triangleq (pI_n - A_n - B_n R)^{-1}$$

Nous avons, d'après le lemme B.2.1 et pour tout  $i, j = 1, \dots, n$ ,

$$X_{i,j}(p) = \begin{cases} \frac{p^{n+i-j-1} - \sum_{m=j+1}^n r_m p^{m+i-j-2}}{p^n - \sum_{m=1}^n r_m p^{m-1}} & \text{si } i \leq j \\ \frac{\sum_{m=1}^j r_m p^{m+i-j-2}}{p^n - \sum_{m=1}^n r_m p^{m-1}} & \text{si } i > j \end{cases} \quad (4.37)$$

où  $X_{i,j}(p)$  est l'entrée de la matrice  $(pI_n - A_n - B_n R)^{-1}$  localisée à ligne  $i$  et la ligne  $j$ .

Nous avons alors d'après (4.35), (4.36) et (4.37), pour tout  $i = 1, \dots, n$ ,

$$\begin{aligned} \tilde{X}_i(p) &= -\theta \sum_{j=1}^n k_j X_{i,j}(p) H_j(p) \\ &= -\theta \sum_{j=1}^{i-1} k_j X_{i,j}(p) H_j(p) - \theta \sum_{j=i}^n k_j X_{i,j}(p) H_j(p) \\ &= -\theta \sum_{j=1}^{i-1} k_j \frac{\sum_{m=1}^j r_m p^{m+i-j-2}}{p^n - \sum_{m=1}^n r_m p^{m-1}} H_j(p) \\ &\quad - \theta \sum_{j=i}^n k_j \frac{p^{n+i-j-1} - \sum_{m=j+1}^n r_m p^{m+i-j-2}}{p^n - \sum_{m=1}^n r_m p^{m-1}} H_j(p) \\ &= - \left[ \sum_{j=1}^{i-1} \frac{k_j \theta^{2j} \left( \sum_{m=1}^j r_m p^{m+i-j-2} \right)}{(p^n - \sum_{m=1}^n r_m p^{m-1}) \prod_{m=1}^j (p + \theta \delta_m)} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=i}^n \frac{k_j \theta^{2j} \left( p^{n+i-j-1} - \sum_{m=j+1}^n r_m p^{m+i-j-2} \right)}{(p^n - \sum_{m=1}^n r_m p^{m-1}) \prod_{m=1}^j (p + \theta \delta_m)} \right] \left( \tilde{X}_1(p) - W(p) \right) \\ &= - \frac{F_{i,1}(p) + F_{i,2}(p)}{(p^n - \sum_{m=1}^n r_m p^{m-1}) \prod_{m=1}^n (p + \theta \delta_m)} \left( \tilde{X}_1(p) - W(p) \right) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{cases} F_{i,1}(p) \triangleq \sum_{j=1}^{i-1} \left( k_j \theta^{2j} \left( \sum_{m=1}^j r_m p^{m+i-j-2} \right) \prod_{m=j+1}^n (p + \theta \delta_m) \right) \\ F_{i,2}(p) \triangleq \sum_{j=i}^n \left( k_j \theta^{2j} \left( p^{n+i-j-1} - \sum_{m=j+1}^n r_m p^{m+i-j-2} \right) \prod_{m=j+1}^n (p + \theta \delta_m) \right) \end{cases} \quad (4.38)$$

Dans ce qui suit, pour tout  $i = 1, \dots, n$ , nous cherchons à calculer la fonction de transfert  $G_i(p)$  vérifiant

$$\tilde{X}_i(p) = G_i(p) W(p)$$

**Cas  $i = 1$  :** Dans le cas  $i = 1$ ,  $F_{i,1}(p)$  et  $F_{i,2}(p)$  se spécialisent comme suit

$$\begin{cases} F_{1,1}(p) = 0 \\ F_{1,2}(p) = \sum_{j=1}^n \left( k_j \theta^{2j} \left( p^{n-j} - \sum_{m=j+1}^n r_m p^{m-j-1} \right) \prod_{m=j+1}^n (p + \theta \delta_m) \right) \end{cases} \quad (4.39)$$

ce qui donne

$$\tilde{X}_1(p) = -\frac{F_{1,2}(p)}{(p^n - \sum_{m=1}^n r_m p^{m-1}) \prod_{m=1}^n (p + \theta \delta_m)} (\tilde{X}_1(p) - W(p))$$

ou, écrit de manière équivalente,

$$\tilde{X}_1(p) = \frac{F_{1,2}(p)}{\rho_n + F_{1,2}(p)} W(p) \quad (4.40)$$

en posant

$$\rho_n \triangleq \left( p^n - \sum_{m=1}^n r_m p^{m-1} \right) \prod_{m=1}^n (p + \theta \delta_m) \quad (4.41)$$

Ainsi, il vient

$$G_1(p) \triangleq \frac{F_{1,2}(p)}{\rho_n + F_{1,2}(p)} \quad (4.42)$$

où  $F_{1,2}(p)$  et  $\rho_n$  sont donnés par (4.39) et (4.41), respectivement.

**Cas  $i > 1$  :** Nous avons, d'après l'expression de  $\tilde{X}_i(p)$  et en utilisant l'expression de  $\rho_n$  donné par (4.41)

$$\tilde{X}_i(p) = -\frac{F_{i,1}(p) + F_{i,2}(p)}{\rho_n} (\tilde{X}_i(p) - W(p)) \quad (4.43)$$

où  $F_{i,1}(p)$  et  $F_{i,2}(p)$  sont donnés par (4.38), et  $\rho_n$  est donné par (4.41).

D'autre part, nous avons d'après (4.42),

$$\tilde{X}_1(p) - W(p) = (G_1(p) - 1) W(p) = -\frac{\rho_n}{\rho_n + F_{1,2}(p)} W(p) \quad (4.44)$$

L'association des relations (4.43) et (4.44) nous donne alors directement, pour  $i = 2, \dots, n$ ,

$$\begin{aligned} \tilde{X}_i(p) &= \frac{F_{i,1}(p) + F_{i,2}(p)}{\rho_n} \frac{\rho_n}{\rho_n + F_{1,2}(p)} W(p) \\ &= \frac{F_{i,1}(p) + F_{i,2}(p)}{\rho_n + F_{1,2}(p)} W(p) \end{aligned}$$

où  $F_{i,1}(p)$  et  $F_{i,2}(p)$  sont donnés par (4.38), ce qui donne finalement

$$G_i(p) \triangleq \frac{F_{i,1}(p) + F_{i,2}(p)}{\rho_n + F_{1,2}(p)} \quad (4.45)$$

Notons que l'expression de  $G_i(p)$  donnée par (4.45) pour  $i = 2, \dots, n$  reste valable pour  $i = 1$  d'après les expressions de  $F_{1,1}(p)$  et  $F_{1,2}(p)$  donnés par (4.39).

**Détermination du degré relatif de la fonction de transfert**  $G_i(p)$ ,  $i = 1, \dots, n$  :

Il nous reste désormais à calculer l'ordre relatif de la fonction de transfert  $G_i(p)$ , pour  $i = 1, \dots, n$ . Notons tout d'abord que puisque  $\deg(\rho_n) = 2n$  et  $\deg(F_{1,2}(p)) = 2(n-1)$ , nous avons

$$\deg(\rho_n + F_{1,2}(p)) = \deg(\rho_n) = 2n. \quad (4.46)$$

Ainsi, l'ordre relatif de la fonction de transfert  $G_1(p)$  vaut

$$d_1 = -\deg(G_1(p)) = 2n - 2(n-1) = 2 \quad (4.47)$$

et vérifie bien la relation (4.34) du théorème 4.3.2. D'autre part, pour  $i = 2, \dots, n$  nous avons

$$\deg(F_{i,2}(p)) = 2n - i - 1 \quad (4.48)$$

et, en posant  $\rho \in \{1, 2, \dots, n\}$  comme étant le plus indice tel que le coefficient  $r_\rho$  du vecteur  $R$  est non nul (et  $\rho = n$  si  $R$  est le vecteur nul),

$$\begin{aligned} \deg(F_{i,1}(p)) &= \deg \left( \sum_{j=1}^{i-1} \left( k_j \theta^{2j} \left( \sum_{m=1}^j r_m p^{m+i-j-2} \right) \prod_{m=j+1}^n (p + \theta \delta_m) \right) \right) \\ &= \deg \left( k_\rho r_\rho \theta^{2\rho} p^{i-2} \prod_{m=\rho+1}^n (p + \theta \delta_m) \right) = n + i - \rho - 2 \end{aligned} \quad (4.49)$$

Ainsi, nous avons, pour  $i = 2, \dots, n$ ,

$$\deg(F_{i,1}(p) + F_{i,2}(p)) \leq \max \{ (2n - i - 1), (n + i - \rho - 2) \} \quad (4.50)$$

et par suite

$$\begin{aligned} d_i &\stackrel{\Delta}{=} -\deg(G_i(p)) = 2n - \deg(F_{i,1}(p) + F_{i,2}(p)) \\ &\geq 2n - \max \{ (2n - i - 1), (n + i - \rho - 2) \} \\ &= 2n + \min \{ (-2n + i + 1), (-n - i + \rho + 2) \} \\ &= \min \{ (i + 1), (\rho + n - i + 2) \} \end{aligned} \quad (4.51)$$

et vérifie encore une fois la relation (4.34) du théorème 4.3.2. Ceci termine la preuve du théorème 4.3.2.  $\square$

**Remarque 4.3.2** Il convient de comparer le résultat du théorème précédent 4.3.2 avec celui de la proposition 2 de (ASTOLFI et MARCONI 2015). L'ordre relatif  $d_i$  de la fonction de transfert

$G_i(p)$  est tel que

$$d_i \geq \min \{(i+1), (\rho+n-i+2)\}$$

alors qu'il vérifie, dans (ASTOLFI et MARCONI 2015),

$$d'_i = \min \{i, (\rho+n-i+1), (n-1)\}$$

Par conséquent, l'observateur FHGO procure un gain de 1 dans l'ordre relatif de la fonction de transfert  $G_i(p)$ , pour  $i = 1, \dots, n-1$ , et un gain de 1 et un gain de 2 pour  $i = n$ , dans les cas  $\rho < n-1$  et  $\rho \geq n-1$  respectivement. L'observateur FHGO (4.20) propose ainsi un filtrage d'ordre relatif plus important que ce qui a été proposé dans (ASTOLFI et MARCONI 2015).

#### 4.3.4 Structure de l'observateur avec prise en compte de l'échantillonnage de la sortie

L'observateur synthétisé ci-dessus suppose que la sortie est disponible de manière continue. Ce n'est en général pas le cas en pratique du fait que la sortie est généralement disponible qu'à des instants d'échantillonnage donnés  $0 \leq t_0 < \dots < t_k < t_{k+1} < \dots$  avec des intervalles d'échantillonnage (variant dans le temps)  $\tau_k = t_{k+1} - t_k$  et avec  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \tau_k = +\infty$ . Dans ce qui suit, nous proposons une nouvelle synthèse de l'observateur en considérant cette fois-ci le processus d'échantillonnage. Pour ce faire, nous supposons que les intervalles de temps  $\tau_k$  sont bornés par une borne inférieure  $\tau_m > 0$  et une borne supérieure  $\tau_M$ , i.e.

$$0 < \tau_m \leq \tau_k = t_{k+1} - t_k \leq \tau_M, \quad \forall k \geq 0 \quad (4.52)$$

Plus précisément, le système dynamique qui sera soumis à l'observateur FHGO continu-discret est le suivant

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_n x(t) + \varphi(u(t), x(t)) + B_n \varepsilon(t) \\ y(t_k) = C_n x(t_k) + w(t_k) = x_1(t_k) + w(t_k) \end{cases} \quad (4.53)$$

L'approche adoptée pour la synthèse de l'observateur FHGO continu-discret est similaire à celle proposée dans (BOURAOUI et al. 2015), excepté que le terme correctif est légèrement différent comme nous le montrerons ci-après. Similairement à (BOURAOUI et al. 2015), il nous est nécessaire de considérer l'hypothèse supplémentaire suivante sur la bornitude des échantillons de bruit  $w(t_k)$ .

**Hypothèse 4.3.1** Pour tout  $t_k$ ,  $k \geq 0$ , les échantillons  $w(t_k)$  sont bornés par  $\delta_w$  où  $\delta_w$  est la borne essentielle supérieure donnée par l'hypothèse 4.2.3.

Afin de prendre en compte le processus d'échantillonnage, l'observateur SHGO (4.5) donné dans (BOURAOUI et al. 2015) a été réécrit sous la forme suivante

$$\dot{\hat{x}}(t) = A_n \hat{x}(t) + \varphi(u(t), \hat{x}(t)) - \theta \Delta_\theta^{-1} G_n e^{-\theta g_1(t-t_k)} (C_n \hat{x}(t_k) - y(t_k)) \quad (4.54)$$



où  $G_n$  et  $\Delta_\theta$  sont donnés comme dans le cas continu, i.e. la matrice  $\Delta_\theta$  est donnée par

$$(4.6) \text{ et la matrice } G_n = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix} \text{ est choisie de sorte que la matrice } \tilde{A}_n \triangleq A_n - G_n C_n$$

est Hurwitz. Dès lors, en comparant les équations de l'observateur continu (4.5) avec son équivalent continu-discret (4.54), nous remarquons que l'erreur d'observation  $C_n \hat{x}(t) - y(t)$  dans le terme correctif de l'observateur continu a été remplacé dans le cas échantillonné par le terme  $e^{-\theta g_1(t-t_k)} (C_n \hat{x}(t_k) - y(t_k))$  qui peut être interprété comme étant une version filtrée de l'erreur impulsionnelle de sortie  $C_n \hat{x}(t_k) - y(t_k)$ . En nous basant sur une approche similaire à ce qui a été proposé dans (BOURAOUI et al. 2015) et dans l'objectif de synthétiser un observateur FHGO avec mesures échantillonnées, il est naturel de remplacer le terme correctif  $C_n \hat{x}(t) - y(t)$  dans ce dernier par un signal de la forme  $e^{-\theta k_1(t-t_k)} (C_n \hat{x}(t_k) - y(t_k)) + \beta(t)$  où  $\beta(t)$  est un signal à temps variant à déterminer. Ainsi, l'observateur FHGO continu-discret est donné par les équations différentielles suivantes

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) &= A_n \hat{x}(t) + \varphi(u(t), \hat{x}(t)) - \theta K_n \eta(t), \\ \dot{\eta}(t) &= -\theta D_n \eta(t) + \theta^2 A_n^T \eta(t) + \theta C_n^T (e^{-\theta k_1(t-t_k)} (C_n \hat{x}(t_k) - y(t_k)) + \beta(t)), \quad t \in [t_k, t_{k+1}[ , \\ \dot{\beta}(t) &= g(t), \quad t \in [t_k, t_{k+1}[ \text{ avec } \beta(t_k) = 0. \end{cases} \quad (4.55)$$

où l'expression de  $g(t)$  est à déterminer.

Nous établissons alors le théorème suivant.

**Théorème 4.3.3** *Considérons le système (4.53) soumis aux hypothèses 4.2.1 à 4.2.3 et à l'hypothèse 4.3.1 conjointement avec l'observateur (4.55). Alors, il existe  $\theta_0 > 0$  tel que pour tout  $\theta \geq \theta_0$ , il existe des constantes positives  $\chi_\theta > 0$  et  $\eta_\theta(\tau_M) > 0$  telles que si la borne supérieure des périodes d'échantillonnage  $\tau_M$  est choisi de sorte que  $\tau_M < \chi_\theta$ , en choisissant*

$$\dot{\beta}(t) = g(t) \triangleq \theta k_1 e^{-\theta k_1(t-t_k)} (\hat{x}_1(t_k) - y(t_k)) - \theta k_1 \eta_1(t), \quad (4.56)$$

alors pour tout  $u \in \mathcal{U}$  et pour tout  $\hat{x}(0) \in \mathbb{R}^n$ , nous avons

$$\|\hat{x}(t) - x(t)\| \leq \sigma_n \theta^{n-1} e^{-\eta_\theta(\tau_M)t} \|\hat{x}(0) - x(0)\| + \sigma_n N_\theta(\tau_m, \tau_M) \left( \frac{\delta_\varepsilon}{\theta} + \theta^{n-1} \delta_w \right), \quad (4.57)$$

pour tout  $t \geq 0$ , où  $x(t)$  est la trajectoire inconnue du système associée à l'entrée  $u$ ,  $\hat{x}(t)$  est n'importe quelle trajectoire du système (4.55) associée à  $(u, y)$ ,  $\mu_n > 0$  est un réel positif donné par (4.22),  $\delta_\varepsilon$  et  $\delta_w$  sont les bornes essentielles supérieures de  $|\varepsilon(t)|$  et  $|w(t)|$ , respectivement,  $\theta_0$  est donné dans le théorème 4.3.1,  $L_\varphi$  est la constante de Lipschitz donnée par l'hypothèse 4.2.2,  $\sigma_n = \sqrt{\lambda_M(P_n)/\lambda_m(P_n)}$  est le nombre de conditionnement de la matrice  $P_n$  donnée par (4.22), et  $\tau_m$  et  $\tau_M$  sont définis dans (4.52), avec

$$\begin{aligned} \eta_\theta(\tau_M) &= a_\theta \left( 1 - \frac{\tau_M}{\chi_\theta} \right) e^{-a_\theta \tau_M}, & \chi_\theta &= \frac{\mu_n}{2(L_\varphi + \theta)\sigma_n \lambda_M(P_n)}, \\ a_\theta &= \frac{\mu_n \theta}{2\lambda_M(P_n)}, & N_\theta(\tau_m, \tau_M) &= \theta \tau_M \frac{2 - e^{-\eta_\theta(\tau_M)\tau_m}}{1 - e^{-\eta_\theta(\tau_M)\tau_m}}. \end{aligned} \quad (4.58)$$

**Preuve du théorème 4.3.3.** De la même façon que dans la preuve du théorème 4.3.1, nous posons  $\tilde{x}(t) = \hat{x}(t) - x(t)$ ,  $\bar{x}(t) = \theta^{n-1} \Delta_\theta \tilde{x}(t)$  et  $\bar{\eta}(t) = \theta^{n-1} \Delta_\theta \eta(t)$ , où la matrice  $\Delta_\theta$  est donné par (4.6). Comme dans la preuve du théorème 4.3.1, nous pouvons montrer que (par comparaison des équations ci-dessous avec (4.26) et (4.27), respectivement)

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \theta A_n \bar{x}(t) + \theta^{n-1} \Delta_\theta \tilde{\varphi}(u(t), \hat{x}(t), x(t)) - B_n \varepsilon(t) - \theta K_n \bar{\eta}(t), \quad (4.59)$$

$$\dot{\bar{\eta}}(t) = -\theta D_n \bar{\eta}(t) + \theta A_n^T \bar{\eta}(t) + \theta C_n^T \left( e^{-\theta k_1(t-t_k)} (C_n \hat{x}(t_k) - y(t_k)) + \beta(t) \right). \quad (4.60)$$

L'ajout et la soustraction du terme  $\theta C_n^T C_n \bar{x}(t) - \theta^n C_n^T w(t_k)$  à droite de l'équation (4.60) mène à l'expression

$$\dot{\bar{\eta}}(t) = -\theta D_n \bar{\eta}(t) + \theta A_n^T \bar{\eta}(t) + \theta C_n^T C_n \bar{x}(t) - \theta^n C_n^T w(t_k) - \theta C_n^T \xi(t), \quad (4.61)$$

où

$$\xi(t) = C_n \left( \bar{x}(t) - e^{-\theta k_1(t-t_k)} \bar{x}(t_k) \right) - \theta^{n-1} \beta(t) + \theta^{n-1} \left( e^{-\theta k_1(t-t_k)} - 1 \right) w(t_k). \quad (4.62)$$

Les équations d'erreur (4.59) et (4.61) peuvent également s'écrire sous la forme condensée suivante

$$\dot{\bar{z}}(t) = \theta M_n \bar{z}(t) + \begin{pmatrix} \theta^{n-1} \Delta_\theta \tilde{\varphi}(u(t), \hat{x}(t), x(t)) \\ 0_{n,1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} B_n \varepsilon(t) \\ \theta^n C_n^T w(t_k) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0_{n,1} \\ \theta C_n^T \xi(t) \end{pmatrix} \quad (4.63)$$

où  $\bar{z} = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{\eta} \end{pmatrix}$  et  $M_n$  est la matrice Hurwitz introduite par le lemme 4.2.1.

L'inégalité ci-dessus (4.63) est similaire à l'équation (4.28) issue du cas continu, excepté la présence d'un terme supplémentaire à droite de l'inégalité (4.63) impliquant la variable  $\xi(t)$ , conséquence de la considération de l'échantillonnage. Dans ce qui suit, notre objectif est de trouver la plus petite borne supérieure possible de ce terme additionnel de sorte que la borne supérieure des périodes d'échantillonnage  $\tau_M$  puisse être la plus grande possible. D'une part, puisque  $\beta(t_k) = 0$ , il vient  $\xi(t_k) = 0$ , et d'après les relations (4.59) et (4.62), la dérivée par rapport au temps de  $\xi$  peut s'écrire comme suit

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= \theta \bar{x}_2(t) + \theta^{n-1} \tilde{\varphi}_1(u(t), \hat{x}_1(t), x_1(t)) - \theta k_1 \bar{\eta}_1(t) \\ &\quad + \theta k_1 e^{-\theta k_1(t-t_k)} \bar{x}_1(t_k) - \theta^{n-1} \dot{\beta}(t) - \theta^n k_1 e^{-\theta k_1(t-t_k)} w(t_k) \\ &= \theta \bar{x}_2(t) + \theta^{n-1} \tilde{\varphi}_1(u(t), \hat{x}_1(t), x_1(t)) \\ &\quad - \theta^{n-1} \left( \dot{\beta}(t) - \theta k_1 e^{-\theta k_1(t-t_k)} (\hat{x}_1(t_k) - y(t_k)) + \theta k_1 \eta_1(t) \right) \end{aligned} \quad (4.64)$$

La dernière égalité résulte du fait que  $\bar{x}_1(t_k) = \theta^{n-1} \tilde{x}_1(t_k)$  et  $\bar{\eta}_1(t) = \theta^{n-1} \eta_1(t)$ . En choisissant

$$\dot{\beta}(t) = g(t) \triangleq \theta k_1 e^{-\theta k_1(t-t_k)} (\hat{x}_1(t_k) - y(t_k)) - \theta k_1 \eta_1(t),$$

l'équation (4.64) se transforme en  $\dot{\xi}(t) = \theta \bar{x}_2(t) + \theta^{n-1} \tilde{\varphi}_1(u(t), \hat{x}_1(t), x_1(t))$ . L'intégration de cette dernière équation entre les instants  $t_k$  et  $t \geq t_k$  nous donne alors

$$\xi(t) = \int_{t_k}^t (\theta \bar{x}_2(s) + \theta^{n-1} \tilde{\varphi}_1(u(s), \hat{x}_1(s), x_1(s))) ds$$

et d'après la propriété de Lipschitz de la fonction  $\varphi_1$ , nous avons

$$|\xi(t)| \leq (\theta + L_\varphi) \int_{t_k}^t \|\bar{x}(s)\| ds \quad (4.65)$$

Soit  $V(\bar{z}(t)) = \bar{z}(t)^T P_n \bar{z}(t)$  la fonction candidate de Lyapunov, avec la matrice  $P_n$  donnée par (4.22). En procédant comme dans la preuve du théorème 4.3.1, nous montrons que (par comparaison avec (4.31))

$$\dot{V}(\bar{z}(t)) \leq -\frac{\mu_n \theta}{\lambda_M(P_n)} V(\bar{z}(t)) + 2\sqrt{\lambda_M(P_n)} \sqrt{V(\bar{z}(t))} (\theta^n |w(t_k)| + |\varepsilon(t)| + \theta |\xi(t)|) \quad (4.66)$$

D'après (4.65), et puisque nous avons  $\|\bar{x}(s)\| \leq \|\bar{z}(s)\|$ , il vient

$$|\xi(t)| \leq (\theta + L_\varphi) \int_{t_k}^t \|\bar{z}(s)\| ds \leq \frac{\theta + L_\varphi}{\sqrt{\lambda_m(P_n)}} \int_{t_k}^t \sqrt{V(\bar{z}(s))} ds \quad (4.67)$$

La combinaison des inégalités (4.66) et (4.67) nous donne

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sqrt{V(\bar{z}(t))} &\leq -\frac{\mu_n \theta}{2\lambda_M(P_n)} \sqrt{V(\bar{z}(t))} \\ &\quad + \theta \sigma_n (\theta + L_\varphi) \int_{t_k}^t \sqrt{V(\bar{z}(s))} ds + \sqrt{\lambda_M(P_n)} (\theta^n \delta_w + |\varepsilon(t)|) \end{aligned} \quad (4.68)$$

Posons  $a_\theta = \frac{\mu_n \theta}{2\lambda_M(P_n)}$ ,  $b_\theta = \theta \sigma_n (\theta + L_\varphi)$  et  $p_\theta(t) = \sqrt{\lambda_M(P_n)} (\theta^n \delta_w + |\varepsilon(t)|)$ , et supposons que la borne supérieure des périodes d'échantillonnage  $\tau_M$  vérifie la condition suivante

$$\tau_M < \chi_\theta \triangleq \frac{a_\theta}{b_\theta} = \frac{\mu_n}{2(\theta + L_\varphi) \sigma_n \lambda_M(P_n)} \quad (4.69)$$

Alors, d'après le lemme B.2.2 donné en annexe B.2, nous obtenons

$$\sqrt{V(\bar{z}(t))} \leq e^{-\eta_\theta t} \sqrt{V(\bar{z}(0))} + c_\theta \tau_M \frac{2 - e^{-\eta_\theta \tau_m}}{1 - e^{-\eta_\theta \tau_m}}, \quad (4.70)$$

où  $\text{ess sup}_{t \geq 0} p_\theta(t) \leq c_\theta \triangleq \sqrt{\lambda_M(P_n)} (\delta_\varepsilon + \theta^n \delta_w)$  et  $\eta_\theta(\tau_M) = a_\theta \left(1 - \frac{\tau_M}{\chi_\theta}\right) e^{-a_\theta \tau_M}$ . En remplaçant  $c_\theta$  par son expression dans l'équation (4.70) et en revenant à  $z(t)$ , on trouve

$$\|z(t)\| \leq \sigma_n \theta^{n-1} e^{-\eta_\theta t} \|z(0)\| + \sigma_n N_\theta(\tau_m, \tau_M) \left( \frac{\delta_\varepsilon}{\theta} + \theta^{n-1} \delta_w \right), \quad (4.71)$$

où  $N_\theta(\tau_m, \tau_M)$  est donné par (4.58). Comme  $\|\tilde{x}(t)\| \leq \|z(t)\|$  et  $\|z(0)\| = \|\tilde{x}(0)\|$ , l'inégalité (4.71) implique (4.57). Ceci termine la preuve du théorème 4.3.3.  $\square$

**Remarques 4.3.1**

1. La fonction  $\beta(t)$ , dont la dynamique est donnée par l'expression (4.56), peut se réécrire comme suit pour tout  $t \in [t_k, t_{k+1}[$

$$\begin{aligned}\beta(t) &= \left(1 - e^{-\theta k_1(t-t_k)}\right) (\hat{x}_1(t_k) - y(t_k)) + \alpha(t) \text{ avec} \\ \dot{\alpha}(t) &= -\theta k_1 \eta_1(t), \quad t \in [t_k, t_{k+1}[, \quad \alpha(t_k) = 0.\end{aligned}$$

En remplaçant  $\beta$  par sa nouvelle expression dans (4.55), l'observateur FHGO avec prise en compte du processus d'échantillonnage se spécialise comme suit, pour tout  $t \in [t_k, t_{k+1}[$ ,

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) &= A_n \hat{x}(t) + \varphi(u(t), \hat{x}(t)) - \theta K_n \eta(t), \\ \dot{\eta}(t) &= -\theta D_n \eta(t) + \theta^2 A_n^T \eta(t) + \theta C_n^T (C_n \hat{x}(t_k) - y(t_k) + \alpha(t)), \\ \dot{\alpha}(t) &= -\theta k_1 \eta_1(t), \text{ avec } \alpha(t_k) = 0. \end{cases} \quad (4.72)$$

2. La borne de l'erreur d'observation liée à l'observateur continu-discret, i.e. l'expression à droite de l'inégalité (4.57), est très similaire à celle obtenue dans le cas d'une sortie disponible continûment, i.e. l'expression à droite de l'inégalité (4.24), à deux différences près :

(i) Le taux de décroissance exponentielle est égal à  $\mu_n \theta / (2\lambda_M(P_n))$  dans le cas d'une sortie disponible en temps continu, alors qu'il est égal à  $\eta_\theta(\tau_M)$  quand la sortie est échantillonnée.

(ii) Le terme  $2\lambda_M(P_n)/\mu_n$  résultant de l'expression de la borne supérieure dans le cas continu est remplacé par  $N_\theta(\tau_m, \tau_M)$  quand la sortie est échantillonnée.

3. Il a été montré dans (BOURAOUI et al. 2015) que dans le cas d'une période d'échantillonnage constante, i.e.  $\tau_M = \tau_m = T_s$ ,  $\eta_\theta(T_s)$  est une fonction décroissante de  $T_s$  avec  $\lim_{T_s \rightarrow 0} \eta_\theta(T_s) = \mu_n \theta / (2\lambda_M(P_n))$ . Il a également été montré dans (BOURAOUI et al. 2015) que  $N_\theta(T_s)$  est une fonction croissante de  $T_s$  avec  $\lim_{T_s \rightarrow 0} N_\theta(T_s) = 2\lambda_M(P_n)/\mu_n$ . Ainsi, les résultats obtenus dans le cas d'une sortie échantillonnée sont en concordance avec ceux issus d'une sortie disponible continûment. Concrètement, la décroissance vers zéro de l'erreur d'observation est inversement proportionnelle à l'amplitude de la période d'échantillonnage alors que sa borne supérieure ultime est proportionnelle à cette même amplitude. D'autre part, quand la période d'échantillonnage tend vers zéro, les expressions du taux de décroissance exponentielle et de la borne supérieure ultime tendent vers celles issues du cas où la sortie est disponible continûment.

Les équations de l'observateur FHGO continu-discret données par (4.72) sont calculées pour un choix précis de la fonction  $\beta(t)$  gouverné par (4.56). D'autres expressions de  $\beta(t)$  sont

cependant possibles, menant à d'autres synthèses possibles de l'observateur FHGO continu-discret et dont les propriétés de convergence asymptotique sont similaires à celles soulignées dans les remarques 4.3.1. La principale différence entre ces dernières et la fonction  $\beta$  choisie (4.56) réside dans la valeur maximale possible du diamètre maximum des périodes d'échantillonnages  $\tau_M$ . Concrètement, la fonction  $\beta$  choisie (4.56) maximise la borne supérieure de  $\tau_M$ . Pour souligner ce fait, considérons dans ce qui suit  $\beta = 0$  et trouvons une nouvelle expression de  $\chi_\theta$ .

Dans le cas où  $\beta = 0$ , l'expression (4.62) se spécialise comme suit

$$\xi(t) = C_n \left( \bar{x}(t) - e^{-\theta k_1(t-t_k)} \bar{x}(t_k) \right) + \theta^{n-1} \left( e^{-\theta k_1(t-t_k)} - 1 \right) w(t_k).$$

La dérivée temporelle de  $\xi$  devient ainsi

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= \theta \bar{x}_2(t) + \theta^{n-1} \tilde{\varphi}_1(u(t), \hat{x}_1(t), x_1(t)) - \theta k_1 \bar{\eta}_1(t) + \theta k_1 e^{-\theta k_1(t-t_k)} (\bar{x}_1(t_k) - \theta^{n-1} w(t_k)) \\ &= \theta \bar{x}_2(t) + \theta^{n-1} \tilde{\varphi}_1(u(t), \hat{x}_1(t), x_1(t)) - \theta k_1 \bar{\eta}_1(t) + \theta k_1 (\bar{x}_1(t_k) - \theta^{n-1} w(t_k) - \xi(t)) \end{aligned}$$

D'après le lemme de comparaison entre les instants  $t_k$  et  $t \geq t_k$ , et puisque  $\xi(t_k) = 0$ , il vient

$$\begin{aligned} \xi(t) &= \int_{t_k}^t e^{-\theta k_1(t-s)} (\theta \bar{x}_2(s) + \theta^{n-1} \tilde{\varphi}_1(u(s), \hat{x}_1(s), x_1(s)) - \theta k_1 \bar{\eta}_1(s) + \theta k_1 \bar{x}_1(s)) ds \\ &\quad - \theta^{n-1} \left( 1 - e^{-\theta k_1(t-t_k)} \right) w(t_k) \end{aligned}$$

En remplaçant  $\xi(t)$  par sa nouvelle expression dans (4.63), nous obtenons

$$\dot{\bar{z}}(t) = \theta M_n \bar{z}(t) + \begin{pmatrix} \theta^{n-1} \Delta_\theta \tilde{\varphi}(u(t), \hat{x}(t), x(t)) \\ 0_{n,1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} B_n \varepsilon(t) \\ \theta^n C_n^T e^{-\theta k_1(t-t_k)} w(t_k) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0_{n,1} \\ \theta C_n^T \zeta(t) \end{pmatrix},$$

où

$$\begin{aligned} \zeta(t) &\triangleq \xi(t) + \theta^{n-1} \left( 1 - e^{-\theta k_1(t-t_k)} \right) w(t_k) \\ &= \int_{t_k}^t e^{-\theta k_1(t-s)} (\theta \bar{x}_2(s) + \theta^{n-1} \tilde{\varphi}_1(u(s), \hat{x}_1(s), x_1(s)) - \theta k_1 \bar{\eta}_1(s) + \theta k_1 \bar{x}_1(s)) ds \end{aligned}$$

Considérons maintenant et comme dans la preuve précédente la fonction candidate de Lyapunov suivante :  $V(\bar{z}) = \bar{z}^T P_n \bar{z}$ . Ainsi, en procédant de la même manière que dans cette dernière preuve, nous montrons que (en comparant avec (4.67) et (4.68), respectivement)

$$\begin{aligned} |\zeta(t)| &\leq \frac{\theta(1+2k_1) + L_\varphi}{\sqrt{\lambda_m(P_n)}} \int_{t_k}^t \sqrt{V(\bar{z}(s))} ds, \\ \text{et } \frac{d}{dt} \sqrt{V(\bar{z}(t))} &\leq -\frac{\mu_n \theta}{2\lambda_M(P_n)} \sqrt{V(\bar{z}(t))} + \theta \sigma_n (\theta(1+2k_1) + L_\varphi) \int_{t_k}^t \sqrt{V(\bar{z}(s))} ds \\ &\quad + \sqrt{\lambda_M(P_n)} (\theta^n \delta_w + |\varepsilon(t)|) \end{aligned}$$

L'expression résultante de  $\chi_\theta$  est alors donnée par (à comparer avec (4.68) et (4.69))

$$\chi_\theta \triangleq \frac{(\mu_n \theta) / (2\lambda_M(P_n))}{\theta \sigma_n (\theta(1+2k_1) + L_\varphi)} = \frac{\mu_n}{2\sigma_n \lambda_M(P_n) (\theta(1+2k_1) + L_\varphi)} \quad (4.73)$$

Nous en concluons donc que la norme de  $\chi_\theta$  donnée par l'expression (4.73) est plus petite que pour celle donnée par (4.69).

### 4.3.5 Extension au cas multi-sorties

La synthèse de l'observateur FHGO peut être étendue au cas d'un système à sorties multiples décrit par les équations (4.1), où l'état  $x \in \mathbb{R}^n$  est partitionné sous la forme de  $q$  sous-états  $x_i \in \mathbb{R}^p$  pour  $i = 1, \dots, q$ , avec  $n = qp$ , i.e.  $x(t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$  avec  $\varphi(u, x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(u, x_1) \\ \vdots \\ \varphi_q(u, x) \end{pmatrix}$  pour  $i = 1, \dots, q$ ,  $u(t) \in \mathcal{U}$  où  $\mathcal{U}$  est un sous-ensemble compact de  $\mathbb{R}^s$ ,  $y(t) \in \mathbb{R}^p$ ,  $w(t) \in \mathbb{R}^p$  et les incertitudes du système sont telles que  $\varepsilon : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^p$ . Finalement, les matrices  $A_n$ ,  $B_n$  et  $C_n$  se spécialisent comme suit

$$\begin{aligned} A_n &= \begin{bmatrix} 0_{(q-1)p,p} & I_{(q-1)p} \\ 0_{p,p} & 0_{p,(q-1)p} \end{bmatrix}, & B_n &= \begin{pmatrix} 0_p & \dots & 0_p & I_p \end{pmatrix}^T, \\ C_n &= \begin{pmatrix} I_p & 0_p & \dots & 0_p \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.74)$$

Les équations de l'observateur FHGO résultantes sont similaires à celles du système (4.20) où  $A_n$ ,  $B_n$  et  $C_n$  sont telles que définies par (4.74), où les états  $\hat{x}$  et  $\eta$  de l'observateur sont partitionnés comme suit :

$$\hat{x}(t) = \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \vdots \\ \hat{x}_q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad \text{et} \quad \eta(t) = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

avec  $\hat{x}_i, \eta_i \in \mathbb{R}^p$  pour  $i = 1, \dots, q$ , et les matrices de gain d'observation  $K_n$  et  $D_n$  sont des matrices diagonales par bloc et s'écrivent comme suit

$$K_n = \text{diag} \left( k_1 I_p, \dots, k_q I_p \right) \quad \text{et} \quad D_n = \text{diag} \left( \delta_1 I_p, \dots, \delta_q I_p \right),$$

où les coefficients  $k_i$  et  $\delta_i$ ,  $i = 1, \dots, q$ , sont des réels constants choisis comme dans le cas mono-sortie, c'est-à-dire choisis de sorte que la matrice de taille  $2q \times 2q$  suivante

$$M_q = \begin{pmatrix} A_q & K_q \\ C_q^T C_q & -D_q + A_q^T \end{pmatrix}$$

soit Hurwitz, où les matrices  $A_q$ ,  $C_q$ ,  $D_q$  et  $K_q$  sont les matrices données dans le lemme 4.2.1 dans le cas  $n = q$ . En effet, nous pouvons facilement montrer que la matrice  $M_n$  obtenue dans le cas multi-sorties peut être transformée par le biais de permutations adaptées de lignes et de colonnes sous la forme  $M_n = \text{diag} \left( M_q, \dots, M_q \right)$ . Ainsi, chaque valeur propre de la matrice Hurwitz  $M_q$  est également une valeur propre, de multiplicité  $p$ , de la matrice  $M_n$ .

L'analyse de la sensibilité au bruit de mesure de l'observateur FHGO peut être menée à bien de la même manière que dans le cas mono-sortie, et nous pouvons montrer que la fonction de transfert entre la  $i$ -ème composante de l'erreur d'observation  $\tilde{x}^{(i)} = \hat{x}^{(i)} - x^{(i)}$  et le bruit de mesure  $w(t)$  est identique à celle fournie dans le cas mono-sortie, à savoir

$$\tilde{X}^{(i)}(p) = G_i(p)W(p), \quad \text{pour } i = 1, \dots, q$$

où  $\tilde{X}^{(i)}(p)$  et  $W(p)$  sont les transformées de Laplace de  $\tilde{x}^{(i)}(t)$  et  $w(t)$ , respectivement, et l'expression de  $G_i(p) \in \mathbb{C}$  est donnée par (4.45). Notons que dans ce cas, on a  $\tilde{X}^{(i)}(p), W(p) \in \mathbb{C}^p$ . Cela signifie que la fonction de transfert entre chaque composante de  $\tilde{X}^{(i)}(p)$  et  $W(p)$  est la même, chacune étant égale à  $G_i(p)$ .

Dans le cas d'une sortie échantillonnée, les équations de l'observateur FHGO continu-discret résultantes sont également similaires à celles données dans le cas mono-sortie par (4.72), où les états estimés  $\hat{x}$  et  $\eta$  de même que les matrices  $A_n, B_n, C_n, D_n$  et  $K_n$  sont celle spécifiées dans le cas de sorties disponibles continûment et la fonction  $\alpha \in \mathbb{R}^p$  est gouverné par l'EDO suivante :

$$\dot{\alpha}(t) = -\theta k_1 \eta_1(t), \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}[ \text{ avec } \alpha(t_k) = 0.$$

## 4.4 Exemples illustratifs

Dans cette section, les performances de l'observateur FHGO étudié précédemment sont illustrées par le biais de deux exemples. Le premier exemple, qui traite d'un oscillateur forcé de Van Der Pol, met en avant les capacités de filtrage de l'observateur FHGO. La seconde application, traitant d'un bioréacteur, souligne les capacités de filtrage de l'observateur FHGO en présence de mesures échantillonnées et met en pratique un problème d'ingénierie difficile consistant à considérer des états inconnus comme étant des incertitudes et à les estimer.

### 4.4.1 Exemple 1 - Application à un oscillateur forcé de Van Der Pol

Il convient d'illustrer les performances de l'observateur FHGO et de les comparer avec celles de l'observateur SHGO. Pour cela, nous considérons dans cette première partie un exemple traitant d'un oscillateur forcé de Van Der Pol (voir (ASTOLFI et al. 2016) pour plus de précisions). Ce dernier, avec  $n = 4$  et  $\varphi_i = 0, i = 1, \dots, 3$ , est modélisé par les équations

différentielles suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) = x_4(t) \\ \dot{x}_4(t) = \varphi_4(x) + \varepsilon(t) \\ y(t) = x_1(t) + w_f(t) \end{cases} \quad (4.75)$$

où

$$\varphi_4(x) = -0.06x_1x_2x_3 - 0.02x_2^3 - x_3 - 0.01(x_1^2 - 1)x_4 - 4(x_3 + 0.01(x_1^2 - 1)x_2 + x_1)$$

La sortie  $y(t)$  a été perturbée par un bruit gaussien  $w(t)$  de moyenne nulle et de variance égale à 0.5 et filtré par un filtre passe-haut  $G_w$  rejetant les fréquences inférieures à 100Hz. Le gabarit de ce filtre est décrit par la figure 4.2.

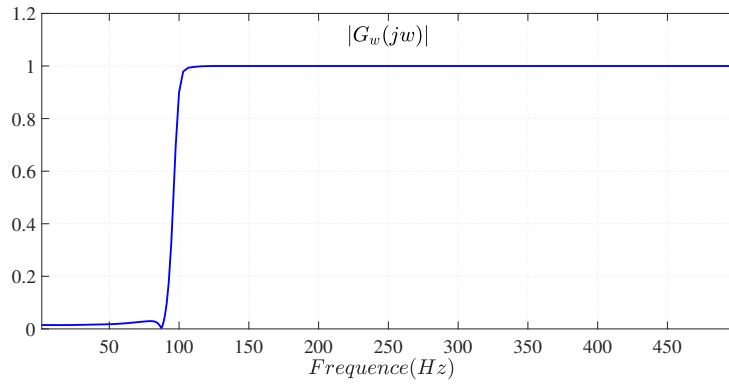


FIGURE 4.2 – Gain du filtre passe-haut  $G_w$  appliqué au bruit gaussien  $w(t)$

Ce filtre passe-haut, filtre RII de butterworth, a été conçu via les fonctions 'buttord' et 'butter' de Matlab comme suit

$$[N_{ord}, W_n] = \text{buttord}(W_p, W_s, R_p, R_s), \quad [N_z, D_z] = \text{butter}(N_{ord}, W_n, 'high')$$

où  $W_p$ ,  $W_s$ , sont les fréquences normalisées (par rapport à  $\frac{F_s}{2} = \frac{1}{2dt}$  où  $dt$  est le pas de simulation) en bande passante et en bande coupante respectivement,  $R_p$  et  $R_s$  sont les atténuations en dB pour les fréquences normalisées  $W_p$  et  $W_s$  respectivement,  $N_{ord}$  est l'ordre du filtre passe-haut et  $W_n$  la fréquence normalisée de coupure, tous ces paramètres résultants de la fonction Matlab 'buttord', et enfin  $N_z$  et  $D_z$  sont respectivement le numérateur et le dénominateur du filtre passe-haut résultant. Les fréquences normalisées  $W_p$ ,  $W_s$  et les atténuations  $R_p$ ,  $R_s$ , pour un pas de simulation  $dt = 0.001$ , ont été calculées comme suit

$$W_p = 0.2, \quad W_s = 0.18, \quad R_p = 20\log_{10}(0.9) = -0.9151, \quad R_s = 20\log_{10}(0.1) = -20$$



ce qui conduit à

$$N_{ord} = 28, W_n = 0.1945$$

La sortie bruitée résultante, bruitée par le bruit de mesure  $w_f = G_w w$ , est donnée par la figure 4.3. Les conditions initiales pour la simulation ont été prises comme suit :

$$x(0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0.98 \end{pmatrix}^T$$

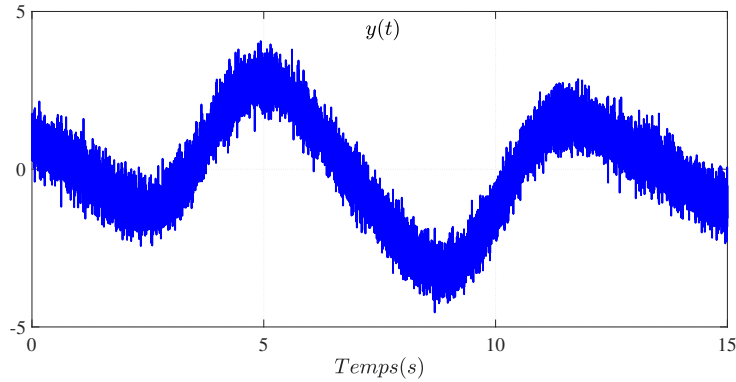


FIGURE 4.3 – Mesures bruitées de  $x_1$

Les conditions des observateurs SHGO et FHGO ont été fixées par

$$\hat{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$$

Les matrices de gain  $K_4$  et  $D_4$  ont été calculées de sorte que la matrice Hurwitz  $M_4$  de l'observateur FHGO (4.20) ait quatre valeurs propres doubles localisées en  $(-0.5, -0.9, -2, -3)$ . Pour ce faire, la procédure décrite dans la remarque 4.2.2 a été exécutée, ce qui donne

$$K_4 = \text{diag} \begin{pmatrix} 6.4337 & 15.7134 & 17.3948 & 7.29 \end{pmatrix}$$

$$D_4 = \text{diag} \begin{pmatrix} 3.0893 & 3.1581 & 3.2465 & 3.3062 \end{pmatrix}$$

Concrètement, les résultats intermédiaires fournis par cette procédure sont donnés par ce qui suit, basés sur les notations introduites dans la remarque 4.2.2.

- $i = 4$  :

$$G_{2i} = \begin{bmatrix} 2.8 \\ 67.86 \\ 193.4600 \\ 322.6225 \\ 321.045 \\ 186.0525 \\ 57.51 \\ 7.29 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad R_{2i-1} = \begin{bmatrix} -3.3062 \\ -2.7676 + 0.5721i \\ -2.7676 - 0.5721i \\ -1.5469 + 0.9101i \\ -1.5469 - 0.9101i \\ -0.4324 + 0.6994i \\ -0.4324 - 0.6994i \end{bmatrix}$$

i.e.  $k_4 = 7.29$  et  $\delta_4 = 3.3062$ .

- $i = 3$  :

$$G_{2i} = \begin{bmatrix} 9.4938 \\ 36.4719 \\ 72.8784 \\ 81.6755 \\ 51.0133 \\ 17.3948 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad R_{2i-1} = \begin{bmatrix} -3.2465 \\ -2.4548 + 1.2294i \\ -2.4548 - 1.2294i \\ -0.6688 + 1.2796i \\ -0.6688 - 1.2796i \end{bmatrix}$$

i.e.  $k_3 = 17.3948$  et  $\delta_3 = 3.2465$ .

- $i = 2$  :

$$G_{2i} = \begin{bmatrix} 6.2474 \\ 16.1899 \\ 20.3180 \\ 15.7134 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad R_{2i-1} = \begin{bmatrix} -3.1581 \\ -1.5447 + 2.0119i \\ -1.5447 - 2.0119i \end{bmatrix}$$

i.e.  $k_2 = 15.7134$  et  $\delta_2 = 3.1581$ .

- $i = 1$  :

$$G_{2i} = \begin{bmatrix} 3.0893 \\ 6.4337 \end{bmatrix}$$

i.e.  $k_1 = 6.4337$  et  $\delta_1 = 3.0893$ .

Par soucis de comparaisons, la matrice de gain  $G_4$  a été choisie de sorte que la matrice Hurwitz résultante  $\tilde{A}_4 \triangleq A_4 - C_4 G_4$  ait ses quatre valeurs propres localisées en  $(-0.5, -0.9, -2, -3)$ .

Dans ce qui suit, deux ensembles de simulations ont été exécutés. Le premier ensemble de simulations a été réalisé en l'absence d'incertitude, i.e. pour  $\varepsilon(t) = 0$ . Le paramètre de synthèse  $\theta$  a été choisi égal à 5 pour l'observateur SHGO, et à 25 pour l'observateur FHGO. Les états estimés du système fournis par l'observateur FHGO sont donnés en figure 4.4 où ils sont comparés à leur vraie trajectoire (sans bruit) issue du modèle de simulation. De même, les états estimés du système fournis par l'observateur SHGO sont donnés en figure 4.5. Il convient notamment de souligner les estimations relativement lisses fournies par l'observateur en présence d'un bruit relativement élevé sur la sortie. En particulier, l'estimation fournie par l'observateur FHGO, pour une vitesse de convergence identique, est nettement moins bruitée que celle fournie par l'observateur SHGO. De telles courbes confirment sans conteste les capacités de filtrage de l'observateur FHGO proposé. La deuxième simulation a été réalisée en présence d'une incertitude  $\varepsilon(t) = 3\sin(0.5t)$ . Le paramètre de synthèse  $\theta$  a de nouveau été fixé à 5 pour l'observateur SHGO et à 25 pour l'observateur FHGO. La figure 4.6 montre le

#### 4.4. Exemples illustratifs

comportement des observateurs SHGO et FHGO en présence d'une incertitude sur le système. Plus précisément, une simulation sans bruit de mesure sur la sortie et une seconde avec bruit de mesure sur la sortie ont été réalisées comme le montre la figure 4.6. Il est à noter que l'observateur FHGO fournit une estimation moins bruitée que l'observateur SHGO et permet une compensation plus forte de l'incertitude considérée.

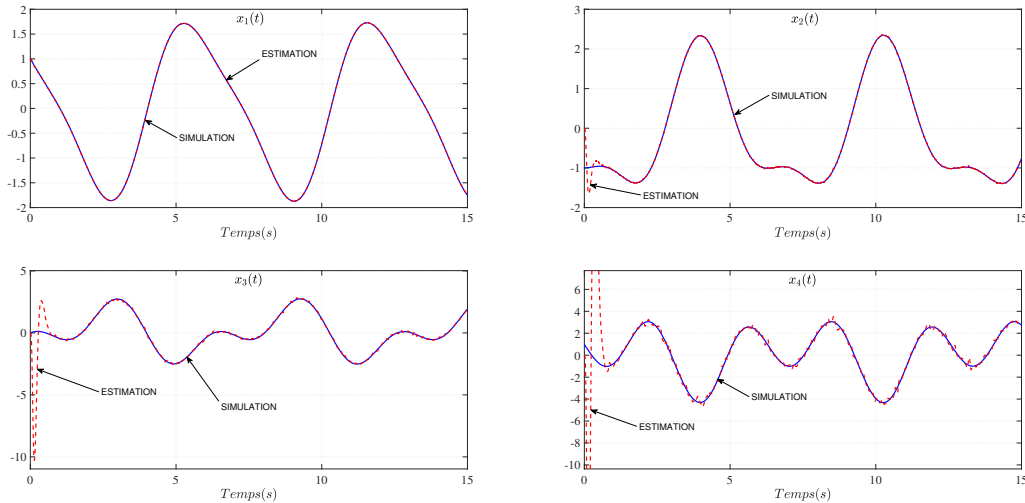


FIGURE 4.4 – Estimation des états à l'aide d'un observateur FHGO pour  $\theta = 25$

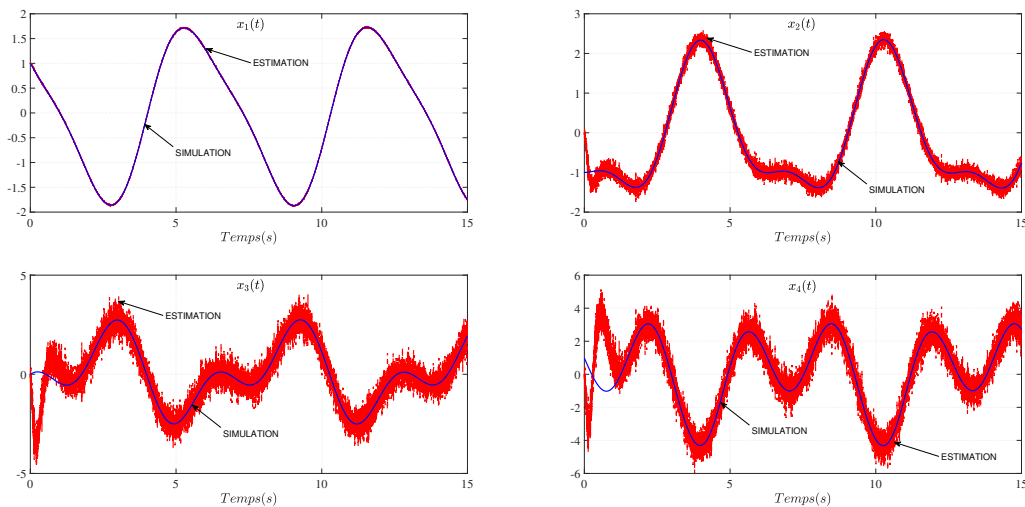


FIGURE 4.5 – Estimation des états à l'aide d'un observateur SHGO pour  $\theta = 5$

#### 4.4.2 Exemple 2 - Application à un bioréacteur - Estimation des taux de réaction

Dans ce second exemple, nous allons montrer que l'observateur FHGO proposé peut être utilisé avec succès dans le but de résoudre un problème d'ingénierie difficile, à savoir l'estimation en ligne des taux de réaction impliqués dans les processus de fermentation à partir des mesures échantillonnées du substrat et des concentrations du produit. Un tel problème d'estimation a

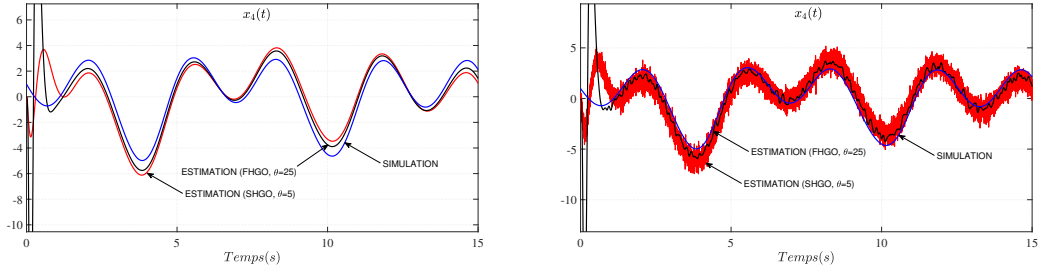


FIGURE 4.6 – Estimation des états via les observateur SHGO et FHGO, pour  $\theta = 5$  et  $\theta = 25$  respectivement - au-dessus sans bruit de mesure, en dessous en présence de bruit de mesure

déjà été étudié dans (BOURAOUÏ et al. 2015) à l'aide d'un observateur SHGO. Le processus de fermentation considéré consiste en la production d'éthanol (produit) par *Saccharomyces cerevisiae* (biomasse) qui pousse sur du jus de tige de sorgho sucré contenant du glucose comme source de carbone (substrat) (BIROL et al. 1998 ; JIN et al. 2012). Le bioprocédé concerné fonctionne en mode continu avec un taux de dilution variant dans le temps et une concentration constante du substrat d'entrée, et peut être décrit de manière appropriée par le modèle dynamique suivant :

$$\begin{cases} \dot{X} = r_1 - D_l X \\ \dot{S} = -a_1 r_1 - a_2 r_2 + D_l (S_{in} - S) \\ \dot{P} = r_2 - D_l P \end{cases} \quad (4.76)$$

où  $D_l$  et  $S_{in}$  représentent respectivement le taux de dilution et le substrat d'entrée,  $X$ ,  $S$  et  $P$  sont les concentrations respectives de la biomasse, du substrat et du produit,  $r_1$  et  $r_2$  sont les taux de réaction, et  $a_1$  et  $a_2$  sont des rendements constants. Les taux de réaction  $r_1$  et  $r_2$  sont généralement des fonctions très complexes des conditions de fonctionnement et de l'état du procédé. La modélisation analytique de ces fonctions est souvent lourde et fait encore l'objet de recherches approfondies et intensives. Pour résoudre ce problème, ces fonctions sont traitées comme des paramètres variant dans le temps qui doivent être estimés à l'aide des mesures des concentrations de certains composants. Ainsi, les taux de réaction  $r_1$  et  $r_2$  doivent être traités comme des paramètres cinétiques variant dans le temps avec une dynamique inconnue, et l'objectif consiste à estimer ces paramètres clé à partir des échantillons mesurés de  $S$  et  $P$ . Cet objectif peut être atteint en considérant le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = Y x_2(t) - D_l(t) x_1(t) + \begin{pmatrix} D_l(t) S_{in} \\ 0 \end{pmatrix} \\ \dot{x}_2(t) = \varepsilon(t) \\ y(t_k) = x_1(t_k) + w_f(t_k) \end{cases} \quad (4.77)$$

où  $x_1 = \begin{pmatrix} x_{1,1} \\ x_{1,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S \\ P \end{pmatrix}$ ,  $x_2 = \begin{pmatrix} x_{2,1} \\ x_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$ ,  $Y = \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  est la matrice

des coefficients de rendement,  $w_f$  est le bruit de mesure sur la sortie et  $\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{r}_1 \\ \dot{r}_2 \end{pmatrix}$  est une fonction bornée inconnue. En effet, le système (4.77) peut se mettre sous la forme (4.1) par le biais du changement de variable suivant :

$$\Phi : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longrightarrow z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ Yx_2 \end{pmatrix} \quad (4.78)$$

De ce fait, un observateur continu-discret de la forme (4.72) peut être synthétisé dans le but d'estimer en temps réel les taux de réaction  $r_1$  et  $r_2$ . Les équations de l'observateur peuvent s'écrire dans les coordonnées originales en considérant la transformation jacobienne inverse comme suit :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1(t) = Y\hat{x}_2(t) - D_l(t)\hat{x}_1(t) + \begin{pmatrix} D_l(t)S_{in} \\ 0 \end{pmatrix} - \theta k_1 \eta_1(t) \\ \dot{\hat{x}}_2(t) = -\theta k_2 Y^{-1} \eta_2(t) \\ \dot{\eta}_1(t) = -\theta \delta_1 \eta_1(t) + \theta (\hat{x}_1(t_k) - y(t_k) + \alpha(t)) \\ \dot{\eta}_2(t) = -\theta \delta_2 \eta_2(t) + \theta^2 \eta_1(t) \\ \dot{\alpha}(t) = -\theta k_1 \eta_1(t) \end{cases} \quad (4.79)$$

Dans ce qui suit, il convient de fournir des résultats de simulation dans le but d'illustrer les performances de l'observateur grand gain filtré, en utilisant les expressions de modélisation suivantes des taux de réaction (BIROL et al. 1998 ; JIN et al. 2012)

$$r_1 = \frac{\mu_{max}XS}{K_{SX} + S} (1 - K_{PX}P) \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{q_{max}XS}{K_{SP} + S} (1 - K_{PP}P) \quad (4.80)$$

où  $\mu_{max}$ ,  $q_{max}$ ,  $K_{SX}$ ,  $K_{SP}$ ,  $K_{PX}$  et  $K_{PP}$  sont des paramètres cinétiques constants. Les expériences de simulation ont été effectuées avec le paramétrage suivant :

$$\begin{aligned} \mu_{max} &= 0.259(1/h), \quad q_{max} = 1.916(1/h), \\ K_{SX} &= 0.258(g/L), \quad K_{SP} = 0.83(g/L), \quad K_{PX} = 0.007(g/L)^{-1}, \quad K_{PP} = 0.01(g/L)^{-1}, \\ a_1 &= 23.3(g/g), \quad a_2 = 2.4(g/g), \quad S_{in} = 100(g/L). \end{aligned} \quad (4.81)$$

La figure 4.7 montre le taux de dilution, et les conditions initiales ont été choisies comme suit :

$$\begin{aligned} S(0) &= \hat{S}(0) = 92.45(g/L), \quad P(0) = \hat{P}(0) = 1.37(g/L), \quad X(0) = 0.19(g/L), \\ \hat{r}_1(0) &= \hat{r}_2(0) = 0(1/h). \end{aligned}$$

Les mesures de  $S$  et  $P$  issues de la simulation du système (4.76) avec (4.80) ont été corrompues par un bruit blanc gaussien additif de moyenne nulle et de variance égale à 0.2, filtré par un filtre passe-haut RII de Butterworth  $G_w$  filtrant les fréquences inférieures à 200Hz et similaire

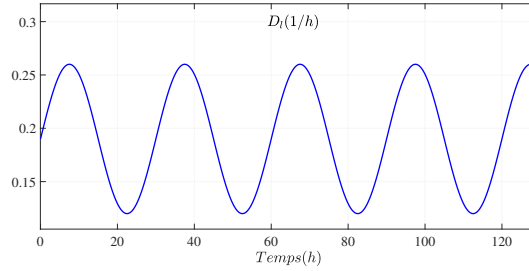


FIGURE 4.7 – Évolution temporelle du taux de dilution

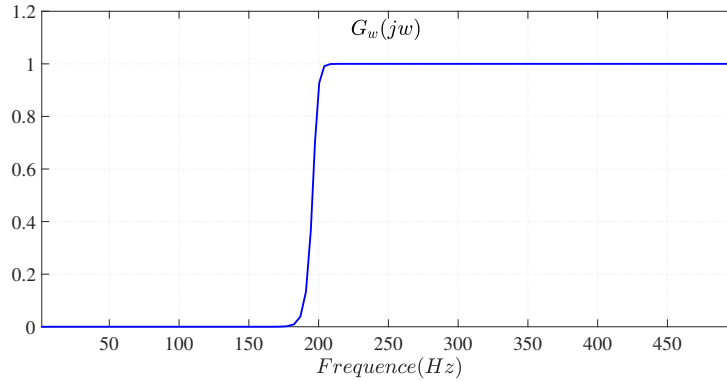
à ce qui a été proposé dans l'exemple 1. Suivant la même procédure, nous avons choisi un pas de simulation  $dt = 0.001s$ , et

$$W_p = 0.4, W_s = 0.38, R_p = 20\log_{10}(0.9) = -0.9151, R_s = 20\log_{10}(0.1) = -20$$

ce qui nous a conduit à

$$N_{ord} = 46, W_n = 0.3949$$

Le gabarit résultant de ce filtre est décrit par la figure 4.8.


 FIGURE 4.8 – Gain du filtre passe-haut  $G_w$  appliqué au bruit gaussien  $w(t)$ 

La sortie résultante  $y$  a donc été bruitée par le bruit hautes fréquences  $w_f$  et les mesures continues résultants de  $S$  et  $P$  sont décrites par la figure 4.9.

Deux ensembles de simulations sont proposés dans ce qui suit, pour une période d'échantillonnage  $\tau_M = 0.1h$  dans le premier ensemble et à  $\tau_M = 1h$  dans le second ensemble. Pour chaque ensemble de simulation, une comparaison de l'estimation des taux de réaction est proposée pour un observateur SHGO et un observateur FHGO. En particulier, le paramètre de synthèse  $\theta$  est choisi égal à 3 pour l'observateur SHGO et à égal à 5 pour l'observateur FHGO de façon à ce que les deux observateurs aient une vitesse de convergence similaire. Les résultats fournis pour l'observateur FHGO ont été réalisés pour des matrices de gain  $K_2$  et  $D_2$  calculées comme

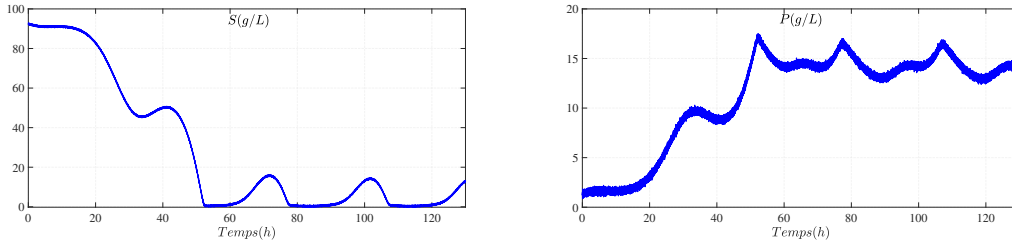


FIGURE 4.9 – Mesures bruitées de  $S$  et  $P$

suit

$$K_2 = \text{diag} \left( 2I_2 \quad I_2 \right) \quad \text{et} \quad D_2 = \text{diag} \left( 2I_2 \quad 2I_2 \right).$$

de sorte que les valeurs propres de la matrice Hurwitz  $M_2$  soient toutes localisées en  $(-1)$ . Par soucis de comparaisons, le gain  $G_2$  de l'observateur SHGO a été choisi comme suit

$$G_2 = \begin{pmatrix} 2I_2 \\ I_2 \end{pmatrix} \quad (4.82)$$

de façon à ce que les valeurs propres de la matrice Hurwitz  $\tilde{A}_2 \triangleq A_2 - C_2 G_2$  soient également localisées en  $(-1)$ .

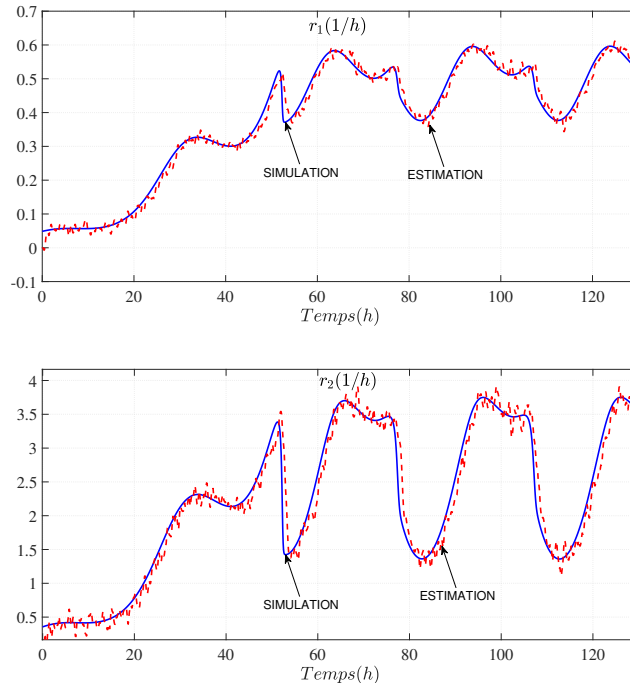


FIGURE 4.10 – Estimation de  $r_1$  et  $r_2$  fournie par l'observateur FHGO, pour  $\tau_M = 0.1h$  et  $\theta = 5$

Les estimations de  $r_1$  et de  $r_2$  fournies pour l'observateur FHGO et l'observateur SHGO pour  $\tau_M = 0.1h$  sont illustrées par les figures 4.10 et 4.11, respectivement. Celles correspondantes

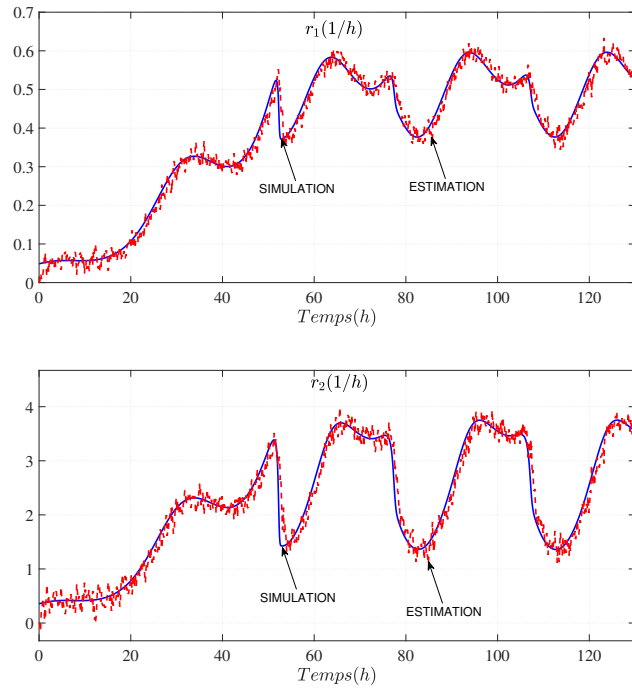


FIGURE 4.11 – Estimation de  $r_1$  et  $r_2$  fournie par l'observateur SHGO, pour  $\tau_M = 0.1h$  et  $\theta = 3$

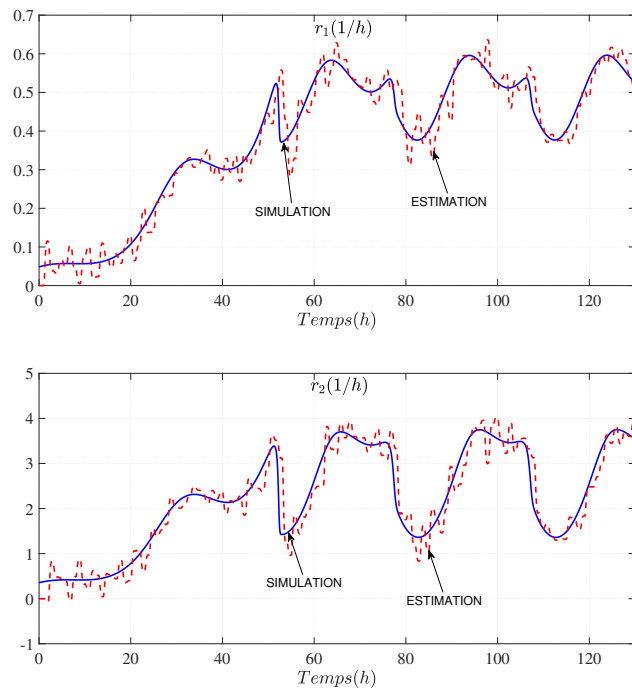


FIGURE 4.12 – Estimation de  $r_1$  et  $r_2$  fournie par l'observateur FHGO, pour  $\tau_M = 1h$  et  $\theta = 5$



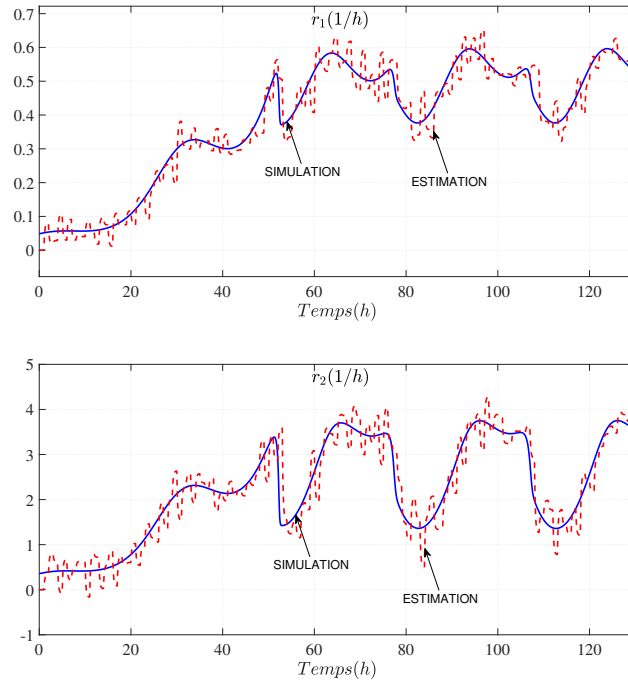


FIGURE 4.13 – Estimation de  $r_1$  et  $r_2$  fournie par l’observateur SHGO, pour  $\tau_M = 1h$  et  $\theta = 3$

au cas  $\tau_M = 0.1h$  sont illustrées par les figures 4.12 et 4.13. Notons que dans tous les cas, les résultats obtenus sont en accord avec le bon comportement de l’observateur FHGO en présence de bruit de mesure sur la sortie, et confirment donc les propriétés de filtrage de ce dernier. Notons par ailleurs que pour de grandes périodes d’échantillonnages, les performances de l’observateur FHGO, à l’instar de celles de l’observateur SHGO, sont dégradées.

## 4.5 Conclusion

Une version filtrée de l’observateur grand gain standard a été proposée dans ce chapitre pour le cas mono-sortie. Deux principales caractéristiques de cette version sont à souligner. La première caractéristique concerne la simplicité de la structure de l’observateur. La seconde caractéristique, et sans doute la plus importante, réside dans les capacités de filtrage de l’observateur proposé. Il est à noter que le choix du gain de l’observateur est réalisé ici à travers une procédure simple et systématique permettant d’assigner arbitrairement les valeurs propres de la matrice Hurwitz résultante. Une analyse de sensibilité au bruit de mesure a été fournie dans un cadre simplifié et similaire à ce qui a été proposé dans (ASTOLFI et MARCONI 2015) afin de souligner les capacités de filtrage de l’observateur proposé. Deux extensions de cet observateur ont par ailleurs été proposées : une version avec prise en compte de l’échantillonnage des mesures de sortie, et une version adaptée au cas multi-sorties, où tous les résultats précé-

dents y sont rappelés. Enfin, deux exemples ont été considérés dans ce chapitre. Le premier, traitant d'un oscillateur forcé de Van Der Pol, et le second, traitant d'un bioréacteur, ont permis d'illustrer les capacités filtrantes de l'observateur filtré à mesures continues et mesures échantillonnées en présence d'un bruit hautes fréquences et d'incertitudes.



## Chapitre 5

# Forme normale d'observabilité uniforme pour une classe de systèmes non linéaires à sorties multiples

### 5.1 Introduction

Comme cela a été évoqué dans l'introduction générale, la plus grande classe de systèmes non linéaires MIMO uniformément observables a été proposée dans (BORNARD et HAMMOURI 2002). Plus spécifiquement, il a été montré que tout système appartenant à cette classe est uniformément observable si le graphe d'uniforme observabilité associé au système est défini dans (BORNARD et HAMMOURI 2002) ne comporte pas de cycle. Rappelons que la classe de systèmes considérée dans (BORNARD et HAMMOURI 2002) généralise la classe de systèmes non-triangulaires introduite dans (FARZA et al. 2011) et celle donnée par (GRIP et SABERI 2012), basée sur une autre approche graphique. Néanmoins, la synthèse de l'observateur suppose l'existence d'un ensemble d'entiers nécessaires pour construire le gain de l'observateur. Contrairement à (FARZA et al. 2011), aucune procédure systématique n'est proposée pour trouver ces entiers.

Dans ce chapitre, nous proposons une approche permettant de synthétiser un observateur grand gain pour l'ensemble de la classe de systèmes considérée dans (BORNARD et HAMMOURI 2002). À cet égard, une décomposition précise en étages de la classe de systèmes considérée est introduite et nous montrons que cette dernière est rendue possible par l'absence de cycle dans le graphe d'uniforme observabilité défini dans (BORNARD et HAMMOURI 2002), impliquant que le système considéré est uniformément observable. Une immersion est ensuite proposée, permettant par la suite la synthèse de l'observateur. Un exemple hydraulique est enfin donné à titre illustratif dans le but de témoigner des performances de l'observateur synthétisé.

## 5.2 Formulation du problème

Considérons l'ensemble des systèmes non linéaires à sorties multiples diffeomorphes à la classe de systèmes suivante :

$$\text{SYS} \begin{cases} \dot{\xi}(t) = A\xi(t) + \varphi(u(t), \xi(t)) \\ y(t) = C\xi(t) \end{cases} \quad (5.1)$$

où :

- $\xi$  est l'état du système (5.1), donné par

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad \text{avec} \quad \xi_k = \begin{pmatrix} \xi_{(k,1)} \\ \xi_{(k,2)} \\ \vdots \\ \xi_{(k,\lambda_k)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n_k} \quad \text{et} \quad \xi_{(k,i)} \in \mathbb{R}^{p_k}, \quad (5.2)$$

pour  $k = 1, \dots, q$  et  $i = 1, \dots, \lambda_k$ , avec  $n = \sum_{k=1}^q n_k = \sum_{k=1}^q \lambda_k p_k$  et  $\lambda_k \geq 2$ ,

- $u \in \mathbb{R}^m$  est l'entrée du système, et  $y \in \mathbb{R}^p$  est la sortie du système, donnée par

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p \quad \text{avec} \quad y_k \in \mathbb{R}^{p_k}, \quad k = 1, \dots, q,$$

avec  $p = \sum_{k=1}^q p_k$ .

- les matrices  $A$  et  $C$  sont données respectivement par

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_q \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad \text{avec} \quad A_k = \begin{bmatrix} 0_{p_k} & I_{p_k} & 0_{p_k} & \dots & 0_{p_k} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0_{p_k} \\ 0_{p_k} & \dots & \dots & 0_{p_k} & I_{p_k} \\ 0_{p_k} & \dots & \dots & 0_{p_k} & 0_{p_k} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_k \times n_k}$$

et

$$C = \begin{bmatrix} C_1 & & \\ & \ddots & \\ & & C_q \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{q \times n} \quad \text{avec} \quad C_k = \begin{bmatrix} I_{p_k} & 0_{p_k} & \dots & 0_{p_k} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p_k \times n_k}$$

- la fonction non linéaire  $\varphi$  est telle que

$$\varphi(u, \xi) = \begin{pmatrix} \varphi_1(u, \xi) \\ \varphi_2(u, \xi) \\ \vdots \\ \varphi_q(u, \xi) \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \varphi_k(u, \xi) = \begin{pmatrix} \varphi_{(k,1)}(u, \xi) \\ \varphi_{(k,2)}(u, \xi) \\ \vdots \\ \varphi_{(k,\lambda_k)}(u, \xi) \end{pmatrix}, \quad k = 1, \dots, q,$$

Dans ce chapitre, nous allons déterminer la structure des non-linéarités  $\varphi_{(k,i)}$ ,  $k = 1, \dots, q$ ,  $i = 1, \dots, \lambda_k$ , d'après la notion de graphe d'uniforme observabilité introduite dans (BORNARD et HAMMOURI 2002). Plus précisément, la description des non-linéarités  $\varphi_{(k,i)}$  du système (5.1) va se faire grâce à la relation d'ordre  $\mathcal{R}$  introduite dans (BORNARD et HAMMOURI 2002) et qui sert de base au graphe d'uniforme observabilité. Ces deux notions sont introduites dans le paragraphe suivant.

### 5.2.1 Relation de dépendance d'observabilité et graphe d'uniforme observabilité

Dans ce qui suit, soit  $\mathcal{N}$  l'ensemble des paires d'indices  $(k, i)$ ,  $k = 1, \dots, q$ ,  $i = 1, \dots, \lambda_k$ , du système (5.1). Avant de déterminer le graphe d'observabilité uniforme donné par (BORNARD et HAMMOURI 2002), il convient d'introduire la relation d'ordre  $\mathcal{R}$  appelée relation de dépendance d'observabilité et définie comme suit.

**Définition 5.2.1 (Relation de dépendance d'observabilité)** *Pour tout  $k, l = 1, \dots, q$ ,  $i = 1, \dots, \lambda_k$  et  $j = 1, \dots, \lambda_l$ , nous avons  $(l, j)\mathcal{R}(k, i)$  si et seulement si l'une des trois conditions suivantes est respectée :*

- (i)  $k = l$  et  $i = j + 1$ ,
- (ii)  $k = l$  et  $\frac{\partial \varphi_{(k,i)}}{\partial \xi_{(l,j)}}(u, \xi) \neq 0$ ,
- (iii)  $k \neq l$  et  $\frac{\partial \varphi_{(k,i)}}{\partial \xi_{(l,j+1)}}(u, \xi) \neq 0$

#### Remarques 5.2.1

1. Les points (i) et (iii) de la définition 5.2.1 ne sont valables que pour  $j < \lambda_l$ .
2. Les dérivées non nulles de la forme  $\frac{\partial \varphi_{(k,i)}}{\partial \xi_{(l,1)}}(u, \xi)$  n'ont pas d'élément correspondant pour le point (iii). En d'autres termes, pour tout  $k, l = 1, \dots, q$ ,  $i = 1, \dots, \lambda_k$ ,  $\frac{\partial \varphi_{(k,i)}}{\partial \xi_{(l,1)}}(u, \xi) \neq 0$  n'implique pas de relation de dépendance d'observabilité.

De la relation de dépendance d'observabilité  $\mathcal{R}$  donnée par la définition 5.2.1, nous introduisons la notion de graphe d'uniforme d'observabilité comme suit.

**Définition 5.2.2 (Graphe d'uniforme observabilité, ou graphe UO)** *Pour tout  $k, l = 1, \dots, q$ ,  $i = 1, \dots, \lambda_k$  et  $j = 1, \dots, \lambda_l$ , chaque paire de nœuds relatifs  $(l, j)\mathcal{R}(k, i)$  de la relation de dépendance d'observabilité  $\mathcal{R}$ , donnée par la définition 5.2.1, est appelé arc orienté du nœud  $(l, j)$  vers le nœud  $(k, i)$ . L'ensemble des arcs orientés issus de la relation de dépendance d'observabilité  $\mathcal{R}$  forment le graphe d'uniforme observabilité, ou graphe UO. Le graphe UO obtenu à partir de toutes les paires de nœuds relatifs de  $\mathcal{R}$  est ensuite simplifié comme suit :*

- Si deux arcs ont la même origine et la même fin, alors ils sont remplacés par un seul arc.
- Chaque arc partant d'un nœud vers lui-même est supprimé.

**Exemple 5.2.1** *En guise d'illustration, considérons le système dynamique suivant :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\xi}_{(1,1)}(t) = \xi_{(1,2)}(t) + \xi_{(1,1)}(t).u(t) \\ \dot{\xi}_{(1,2)}(t) = \xi_{(1,3)}(t) + \xi_{(2,2)}(t).u(t) \\ \dot{\xi}_{(1,3)}(t) = 0 \\ y_1(t) = \xi_{(1,1)}(t) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{\xi}_{(2,1)}(t) = \xi_{(2,2)}(t) \\ \dot{\xi}_{(2,2)}(t) = \xi_{(2,3)}(t) + \xi_{(1,3)}(t).u(t) \\ \dot{\xi}_{(2,3)}(t) = 0 \\ y_2(t) = \xi_{(2,1)}(t) \end{array} \right. \quad (5.3)$$

Le système (5.3) se met bien sous la forme (5.1). D'après la définition 5.2.1 de la relation de dépendance d'observabilité  $\mathcal{R}$ , le point (i) donne les paires de nœuds relatifs de  $\mathcal{R}$  suivantes :

$$(1, 1)\mathcal{R}(1, 2) , (1, 2)\mathcal{R}(1, 3) \quad \text{et} \quad (2, 1)\mathcal{R}(2, 2) , (2, 2)\mathcal{R}(2, 3)$$

D'après le point (ii) de la définition 5.2.1, il vient  $(1, 1)\mathcal{R}(1, 1)$ . Notons que l'arc orienté associé à cette paire de nœuds relatifs de  $\mathcal{R}$  n'intervient pas dans le graphe UO d'après les règles de simplification du graphe. Enfin, d'après le point (iii) de la définition 5.2.1, nous avons

$$(2, 1)\mathcal{R}(1, 2) \quad \text{et} \quad (1, 2)\mathcal{R}(2, 2)$$

Toutes ces paires de nœuds relatifs de  $\mathcal{R}$  amènent au graphe UO suivant, donné par la figure 5.1.

Avant de donner une caractérisation des non-linéarités du système (5.1) à partir de la relation de dépendance d'observabilité  $\mathcal{R}$  et du graphe UO définis ci-dessus, il convient de donner les définitions suivantes.

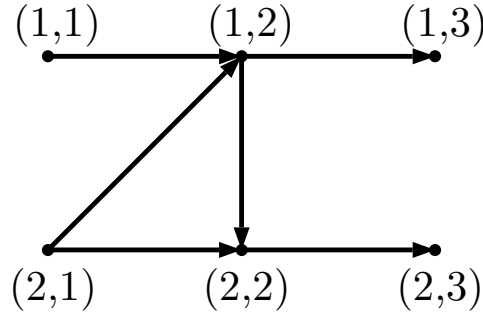


FIGURE 5.1 – Graphe d'uniforme observabilité du système (5.3)

**Définition 5.2.3**

1. Pour tout  $k, l = 1, \dots, q$ ,  $i = 1, \dots, \lambda_k$  et  $j = 1, \dots, \lambda_l$ , on dit que le couple  $(k, i)$  est accessible via le couple  $(l, j)$ , si et seulement si

$$(l, j)\mathcal{R} \dots \mathcal{R}(k, i)$$

Dans ce cas, nous notons  $(l, j)\mathcal{A}(k, i)$ . En particulier, nous avons

$$(l, j)\mathcal{R}(k, i) \implies (l, j)\mathcal{A}(k, i)$$

2. On dit que le graphe  $UO$  possède un cycle lorsqu'il existe deux couples  $(k, i) \neq (l, j)$ , avec  $k, l = 1, \dots, q$ ,  $i = 1, \dots, \lambda_k$  et  $j = 1, \dots, \lambda_l$ , pour lesquels nous avons

$$(l, j)\mathcal{A}(k, i) \text{ et } (k, i)\mathcal{A}(l, j)$$

**5.2.2 Caractérisation des non-linéarités du système d'étude**

Dans un premier temps, rappelons le théorème 4.1 issu de (BORNARD et HAMMOURI 2002) pour un système de la forme (5.1).

**Théorème 5.2.1** *Considérons le système (5.1) et supposons que son graphe  $UO$  n'a pas de cycle. Alors le système (5.1) est  $\mathbb{R}^m$ -uniformément observable.*

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser aux systèmes de la forme (5.1) dont le graphe  $UO$  n'a pas de cycle. Contrairement à ce qui est donné dans (BORNARD et HAMMOURI 2002), nous nous proposons de synthétiser un observateur de type de grand gain pour tout système (5.1) dont le graphe  $UO$  n'a pas de cycle. Pour tout ce qui suit, considérons donc l'hypothèse suivante.

**Hypothèse 5.2.1** *Le graphe  $UO$  du système (5.1) n'a pas de cycle. Par conséquent, par application du théorème 5.2.1, le système (5.1) est  $\mathbb{R}^m$ -uniformément observable.*



Dans le but de rendre possible la synthèse d'un observateur grand gain pour le système (5.1), nous proposons dans le paragraphe suivant de le réécrire sous une forme mettant en avant son observabilité pour toute entrée. Cette nouvelle forme est directement construite à partir du graphe UO. Ensuite, nous proposerons une immersion de cette nouvelle forme dans le but de rendre possible la synthèse de l'observateur.

### 5.3 Forme décomposée en étages du système d'étude

Dans ce qui suit, soit l'ensemble  $\Upsilon_0$  défini par

$$\Upsilon_0 = \{(l, j) / l = 1, \dots, q, j = 2, \dots, \lambda_l\} \quad (5.4)$$

avec  $\text{card}(\Upsilon_0) = \sum_{k=1}^q (\lambda_k - 1)$ . L'ensemble  $\Upsilon_0$  correspond à l'ensemble des paires d'indices des états non mesurés du système (5.1). Notre objectif dans cette section est de proposer une nouvelle forme pour le système (5.1) composée de  $R \geq 1$  ensembles appelés passes, mettant en avant son observabilité pour toute entrée. Pour ce faire, il convient dans un premier temps de re-partitionner les couples d'indices  $(l, j)$ ,  $l = 1, \dots, q$ ,  $j = 2, \dots, \lambda_j$ , du système (5.1) dont nous n'avons pas la mesure. Ce partitionnement passe par l'introduction d'une suite décroissante stricte et finie d'ensembles  $\Upsilon_k$ , proposée dans le paragraphe suivant.

#### 5.3.1 Construction d'une suite décroissante finie d'ensembles $\Upsilon_k$

À partir de l'ensemble  $\Upsilon_0$ , nous cherchons à construire une suite décroissante stricte et finie d'ensembles  $\Upsilon_1, \Upsilon_2, \dots, \Upsilon_Q$ , avec  $Q \triangleq \text{card}(\Upsilon_0)$ , telle que

$$\Upsilon_0 \supset \Upsilon_1 \supset \Upsilon_2 \supset \dots \supset \Upsilon_Q$$

et où

$$\text{card}(\Upsilon_k) = Q - k, \quad \forall k = 0, \dots, Q$$

En particulier, pour tout  $k = 1, \dots, Q$ , nous souhaitons que chaque ensemble  $\Upsilon_k$  vérifie

$$\begin{aligned} \Upsilon_1 &= \Upsilon_0 \setminus \{(l_1, j_1)\} \\ \Upsilon_2 &= \Upsilon_1 \setminus \{(l_2, j_2)\} \\ &\vdots \\ \Upsilon_Q &= \Upsilon_{Q-1} \setminus \{(l_Q, j_Q)\} \end{aligned}$$

où les paires d'indices  $(l_1, j_1), (l_2, j_2), \dots, (l_Q, j_Q)$  sont toutes différentes deux à deux. Une telle construction implique nécessairement  $\Upsilon_Q = \emptyset$ . Le choix des paires d'indices  $(l_1, j_1)$ ,

$(l_2, j_2), \dots, (l_Q, j_Q)$  et la construction précise des ensembles  $\Upsilon_1, \Upsilon_2, \dots, \Upsilon_Q$ , sont donnés par le lemme suivant.

**Lemme 5.3.1** *Soit le système (5.1) vérifiant l'hypothèse 5.2.1. Alors :*

- (i) *Il existe  $l_1 = 1, \dots, q$  et  $j_1 = 2$  tels que  $(l_1, j_1) = (l_1, 2) \in \Upsilon_0$  et  $(l_1, j_1 - 1) = (l_1, 1) \notin \Upsilon_0$ , et tels que*

$$\forall (l, j) \in \Upsilon_0 \setminus \{(l_1, j_1)\}, \quad (l, j - 1) \not\mathcal{R}(l_1, j_1 - 1) \quad (5.5)$$

*Nous construisons alors l'ensemble  $\Upsilon_1$  de la manière suivante :*

$$\Upsilon_1 = \Upsilon_0 \setminus \{(l_1, j_1)\} \quad (5.6)$$

- (ii) *Supposons désormais les ensembles  $\Upsilon_1, \Upsilon_2, \dots, \Upsilon_{k-1}$  définis, avec  $k = 1, \dots, Q$ . Alors il existe une paire d'indices  $(l_k, j_k) \in \Upsilon_{k-1}$  avec  $l_k = 1, \dots, q$ ,  $j_k = 2, \dots, \lambda_{l_k}$ , vérifiant  $(l_k, j_k - 1) \notin \Upsilon_{k-1}$ , et telle que*

$$\forall (l, j) \in \Upsilon_{k-1} \setminus \{(l_k, j_k)\}, \quad (l, j - 1) \not\mathcal{R}(l_k, j_k - 1) \quad (5.7)$$

*Nous construisons alors l'ensemble  $\Upsilon_k$  de la manière suivante :*

$$\Upsilon_k = \Upsilon_{k-1} \setminus \{(l_k, j_k)\} \quad (5.8)$$

### Preuve du lemme 5.3.1.

- (i) Notons tout d'abord que pour tout  $l = 1, \dots, q$ , nous avons immédiatement  $(l, 2) \in \Upsilon_0$  et  $(l, 1) \notin \Upsilon_0$  par construction de l'ensemble  $\Upsilon_0$  donnée par (5.4). Maintenant, supposons par l'absurde que la condition (5.5) n'est pas vraie, i.e.

$$\forall l = 1, \dots, q, \quad \exists (k, i) \in \Upsilon_0 \setminus \{(l, 2)\} \text{ t.q. } (k, i - 1) \mathcal{R}(l, 1) \quad (5.9)$$

Soit un entier  $l_0 = 1, \dots, q$  vérifiant la condition (5.9), il existe donc une paire  $(l_1, j_1) \in \Upsilon_0 \setminus \{(l_0, 2)\}$  telle que  $(l_1, j_1 - 1) \mathcal{R}(l_0, 1)$ . D'après le point (i) de la définition 5.2.1,  $(l_1, 1) \mathcal{R} \dots \mathcal{R}(l_1, j_1 - 1)$  et donc

$$(l_1, 1) \mathcal{A}(l_1, j_1 - 1) \mathcal{R}(l_0, 1) \quad (5.10)$$

Puisque le graphe UO n'a pas de cycle par hypothèse 5.2.1, nécessairement  $l_1 \neq l_0$ . D'autre part, puisque la paire  $(l_1, 1)$  vérifie également la condition (5.9), il existe

$(l_2, j_2) \in \Upsilon_0 \setminus \{(l_1, 2)\}$  tel que  $(l_2, j_2 - 1)\mathcal{R}(l_1, 1)$ . Toujours d'après le point (i) de la définition 5.2.1, en combinant avec la relation (5.10), nous obtenons

$$(l_2, 1)\mathcal{A}(l_2, j_2 - 1)\mathcal{R}(l_1, 1)\mathcal{A}(l_1, j_1 - 1)\mathcal{R}(l_0, 1) \quad (5.11)$$

ou de manière condensée

$$(l_2, 1)\mathcal{A}(l_1, 1)\mathcal{A}(l_0, 1)$$

où les entiers  $l_0, l_1, l_2$  sont différents deux à deux puisque le graphe UO n'a pas de cycle, d'après l'hypothèse 5.2.1. Plus généralement, il existe  $q - 1$  entiers  $l_1, l_2, \dots, l_{q-1}$  tels que nous ayons

$$(l_{q-1}, 1)\mathcal{A}(l_{q-2}, 1)\mathcal{A} \dots \mathcal{A}(l_1, 1)\mathcal{A}(l_0, 1)$$

où les entiers  $l_0, l_1, l_2, \dots, l_{q-1}$  sont différents deux à deux puisque le graphe UO n'a pas de cycle, d'après l'hypothèse 5.2.1. Puisque la paire d'indices  $(l_{q-1}, 1)$  vérifie également la condition (5.9), il existe  $(l_q, j_q) \in \Upsilon_0 \setminus \{(l_{q-1}, 2)\}$  tel que  $(l_q, j_q - 1)\mathcal{R}(l_{q-1}, 1)$ . Nécessairement,  $l_q \in \{l_0, l_1, l_2, \dots, l_{q-1}\}$ . Autrement dit, nous obtenons

$$(l_q, 1)\mathcal{A}(l_q, j_q - 1)\mathcal{R}(l_{q-1}, 1) \quad \text{et} \quad (l_{q-1}, 1)\mathcal{A}(l_q, j_q - 1)$$

ce qui mène à

$$(l_q, j_q - 1)\mathcal{A}(l_{q-1}, 1)\mathcal{A}(l_q, j_q - 1) \quad (5.12)$$

Puisque  $(l_q, j_q) \neq (l_{q-1}, 2)$ , i.e.  $(l_q, j_q - 1) \neq (l_{q-1}, 1)$ , la dernière relation (5.12) est en contradiction avec le fait que le graphe UO n'a pas de cycle. En réalité, la condition (5.9) n'est pas vraie, i.e. la condition (5.5) du lemme 5.3.1 est bien satisfaite.

- (ii) Tout d'abord, pour tout  $k = 1, \dots, Q$ ,  $\Upsilon_k \neq \emptyset$  par construction, donc il existe au moins une paire d'indices  $(l, j) \in \Upsilon_k$ . Par suite, en posant  $j' = 2, \dots, j$  le plus petit entier vérifiant  $(l, j') \in \Upsilon_k$ , nous obtenons par construction  $(l, j' - 1) \notin \Upsilon_k$ , ce qui témoigne de l'existence d'au moins une paire d'indices  $(l_k, j_k) \in \Upsilon_{k-1}$  avec  $l_k = 1, \dots, q$ ,  $j_k = 2, \dots, \lambda_{l_k}$ , vérifiant  $(l_k, j_k - 1) \notin \Upsilon_{k-1}$ . Maintenant, supposons par l'absurde que la condition (5.7) n'est pas vraie. Ainsi, pour tout  $l = 1, \dots, q$ ,  $j = 1, \dots, \lambda_l - 1$  tels que  $(l, j) \in \Upsilon_{k-1}$  et  $(l, j - 1) \notin \Upsilon_{k-1}$ ,

$$\exists (k, i) \in \Upsilon_{k-1} \setminus \{(l, j)\} \quad \text{t.q.} \quad (k, i - 1)\mathcal{R}(l, j - 1) \quad (5.13)$$

Soit une paire  $(l_0, j_0) \in \Upsilon_{k-1}$  avec  $(l_0, j_0 - 1) \notin \Upsilon_{k-1}$  vérifiant la condition (5.13). Il existe donc  $(l_1, j_1) \in \Upsilon_{k-1} \setminus \{(l_0, j_0)\}$  tel que  $(l_1, j_1 - 1)\mathcal{R}(l_0, j_0 - 1)$ . Soit  $j'_1 = 2, \dots, j_1$

le plus petit entier vérifiant  $(l_1, j'_1) \in \Upsilon_{k-1}$ . D'après le point (i) de la définition 5.2.1, nous avons en particulier  $(l_1, j'_1 - 1)\mathcal{R} \dots \mathcal{R}(l_1, j_1 - 1)$ , et par suite

$$(l_1, j'_1 - 1)\mathcal{A}(l_1, j_1 - 1)\mathcal{R}(l_0, j_0 - 1) \quad (5.14)$$

Puisque le graphe UO n'a pas de cycle par hypothèse 5.2.1, nécessairement  $l_1 \neq l_0$ . D'autre part, puisque nous avons  $(l_1, j'_1) \in \Upsilon_{k-1}$  et  $(l_1, j'_1 - 1) \notin \Upsilon_{k-1}$ , cette dernière vérifie également la condition (5.13). Par conséquent, il existe  $(l_2, j_2) \in \Upsilon_{k-1} \setminus \{(l_1, j'_1)\}$  tel que  $(l_2, j_2 - 1)\mathcal{R}(l_1, j'_1 - 1)$ . Soit  $j'_2 = 2, \dots, j_2$  le plus petit entier vérifiant  $(l_2, j'_2) \in \Upsilon_{k-1}$ . Toujours d'après le point (i) de la définition 5.2.1, en combinant avec la relation (5.14), nous obtenons

$$(l_2, j'_2 - 1)\mathcal{A}(l_2, j_2 - 1)\mathcal{R}(l_1, j'_1 - 1)\mathcal{A}(l_1, j_1 - 1)\mathcal{R}(l_0, j_0 - 1)$$

ou de manière condensée

$$(l_2, j'_2 - 1)\mathcal{A}(l_1, j'_1 - 1)\mathcal{A}(l_0, j_0 - 1)$$

où les entiers  $l_0, l_1, l_2$  sont différents deux à deux puisque le graphe UO n'a pas de cycle, d'après l'hypothèse 5.2.1. Plus généralement, il existe  $q - 1$  paires d'indices  $(l_1, j'_1), (l_2, j'_2), \dots, (l_{q-1}, j'_{q-1}) \in \Upsilon_{k-1}$ , avec  $(l_k, j'_k - 1) \notin \Upsilon_{k-1}$  pour  $k = 1, \dots, q - 1$ , tel que

$$(l_{q-1}, j'_{q-1} - 1)\mathcal{A}(l_{q-2}, j'_{q-2} - 1)\mathcal{A} \dots \mathcal{A}(l_1, j'_1 - 1)\mathcal{A}(l_0, j_0 - 1) \quad (5.15)$$

où les entiers  $l_0, l_1, l_2, \dots, l_{q-1}$  sont différents deux à deux puisque le graphe UO n'a pas de cycle, d'après l'hypothèse 5.2.1. Comme la paire d'indices  $(l_{q-1}, j'_{q-1})$  vérifie également la condition (5.13), il existe  $(l_q, j_q) \in \Upsilon_{k-1} \setminus \{(l_{q-1}, j'_{q-1})\}$  tel que  $(l_q, j_q - 1)\mathcal{R}(l_{q-1}, j'_{q-1} - 1)$ . Nécessairement,  $l_q \in \{l_0, l_1, l_2, \dots, l_{q-1}\}$ . Soit  $j'_q = 2, \dots, j_q$  le plus petit entier vérifiant  $(l_q, j'_q) \in \Upsilon_{k-1}$ . Nous obtenons donc

$$(l_q, j'_q - 1)\mathcal{A}(l_q, j_q - 1)\mathcal{R}(l_{q-1}, j'_{q-1} - 1)$$

et puisque  $l_q \in \{l_0, l_1, l_2, \dots, l_{q-1}\}$ , alors d'après (5.15)

$$(l_{q-1}, j'_{q-1} - 1)\mathcal{A}(l_q, j_q - 1)$$

ce qui mène à

$$(l_q, j_q - 1)\mathcal{A}(l_{q-1}, j'_{q-1} - 1)\mathcal{A}(l_q, j_q - 1) \quad (5.16)$$

Puisque  $(l_q, j_q) \neq (l_{q-1}, j'_{q-1})$ , i.e.  $(l_q, j_q - 1) \neq (l_{q-1}, j'_{q-1} - 1)$ , la dernière relation (5.16) est en contradiction avec le fait que le graphe UO n'a pas de cycle. En réalité, la condition (5.13) n'est pas vraie, i.e. la condition (5.7) du lemme 5.3.1 est bien satisfaite.

Ceci termine la preuve du lemme 5.3.1.  $\square$

La construction de la suite décroissante stricte finie d'ensembles  $\Upsilon_k$ ,  $k = 1, \dots, Q$ , par le lemme 5.3.1, fournit les paires d'indices  $(l_1, j_1), (l_2, j_2), \dots, (l_{Q-1}, j_{Q-1}), (l_Q, j_Q)$ . Ces dernières, qui constituent une base pour le partitionnement des paires d'indices du système (5.1) en passes, vérifient deux propriétés importantes, énoncées par la proposition suivante.

**Proposition 5.3.1**

- (i) Pour tout  $k = 1, \dots, Q$ , la paire d'indices  $(l_k, j_k - 1)$  avec  $l_k = 1, \dots, q$  et  $j_k = 2, \dots, \lambda_{l_k}$  vérifie

$$(l_k, j_k - 1) \in \{(l_1, j_1), (l_2, j_2), \dots, (l_{k-1}, j_{k-1})\} \cup \{(1, 1), \dots, (q, 1)\} \quad (5.17)$$

En particulier, lorsque  $j_k > 2$ , il existe  $s < k$  tel que

$$(l_s, j_s) = (l_k, j_k - 1)$$

- (ii) Pour tout  $k = 1, \dots, Q$ , l'état  $\xi_{(l_k, j_k - 1)}$  associé à la paire d'indices  $(l_k, j_k - 1)$  vérifie l'équation différentielle suivante

$$\dot{\xi}_{(l_k, j_k - 1)} = \xi_{(l_k, j_k)} + \varphi_{(l_k, j_k - 1)}(u, \xi_{(l_1, j_1)}, \dots, \xi_{(l_{k-1}, j_{k-1})}, y) \quad (5.18)$$

**Preuve de la proposition 5.3.1.**

- (i) Lorsque  $j_k = 2$ , alors il est clair que

$$(l_k, 1) \in \{(l_1, j_1), (l_2, j_2), \dots, (l_{k-1}, j_{k-1})\} \cup \{(1, 1), \dots, (q, 1)\}$$

Considérons donc le cas  $j_k > 2$ . Supposons par l'absurde que la condition (5.17) n'est pas correcte, i.e. il existe  $k = 1, \dots, Q$  tel que  $l_k = 1, \dots, q$ ,  $j_k > 2$  et tel que

$$(l_k, j_k - 1) \notin \{(l_1, j_1), (l_2, j_2), \dots, (l_{k-1}, j_{k-1})\} \quad (5.19)$$

D'après le point (ii) du lemme 5.3.1, nous avons  $(l_k, j_k - 1) \notin \Upsilon_{k-1}$  par construction. De plus, l'ensemble  $\Upsilon_{k-1}$  peut se réécrire comme suit

$$\begin{aligned} \Upsilon_{k-1} &= \Upsilon_{k-2} \setminus \{(l_{k-1}, j_{k-1})\} \\ &= \Upsilon_{k-3} \setminus \{(l_{k-2}, j_{k-2}), (l_{k-1}, j_{k-1})\} \\ &= \Upsilon_0 \setminus \{(l_1, j_1), (l_2, j_2), \dots, (l_{k-1}, j_{k-1})\} \end{aligned} \quad (5.20)$$

ce qui implique que

$$(l_k, j_k - 1) \notin \Upsilon_0 \setminus \{(l_1, j_1), (l_2, j_2), \dots, (l_{k-1}, j_{k-1})\} \quad (5.21)$$

Les conditions (5.19) et (5.21) impliquent que  $(l_k, j_k - 1) \notin \Upsilon_0$ . Or  $j_k > 2$ , ce qui est en contradiction avec le fait que  $(l_k, j_k - 1) \notin \Upsilon_0$ , par définition de  $\Upsilon_0$  donnée par (5.4). En fait, la condition (5.17) est correcte.

(ii) Pour tout  $k = 1, \dots, Q$ , la paire d'indices  $(l_k, j_k - 1)$  construite dans le lemme 5.3.1 est telle que

$$\begin{aligned} (l, j - 1)\mathcal{R}(l_k, j_k - 1) &\implies (l, j) \notin \Upsilon_{k-1} \setminus \{(l_k, j_k)\} \\ &\implies (l, j) \notin \Upsilon_k \end{aligned} \quad (5.22)$$

Puisque  $\Upsilon_k = \Upsilon_0 \setminus \{(l_1, j_1), (l_2, j_2), \dots, (l_k, j_k)\}$  d'après (5.20), nécessairement  $(l, j) \in \{(l_1, j_1), (l_2, j_2), \dots, (l_k, j_k)\}$ . Ainsi, il existe  $s \leq k$  tel que  $(l, j) = (l_s, j_s)$ . Deux cas sont alors possibles :

—  $l = l_k$  : Puisque  $(l_s, j_s - 1)\mathcal{R}(l_k, j_k - 1)$ , comme  $l_s = l_k$ , d'après le point (ii) de la définition 5.2.1, nous obtenons  $\frac{\partial \varphi_{(l_k, j_k - 1)}}{\partial \xi_{(l_s, j_s - 1)}}(u, \xi) \neq 0$ , où

$$(l_s, j_s - 1) \in \{(l_1, j_1), (l_2, j_2), \dots, (l_{s-1}, j_{s-1})\} \cup \{(1, 1), \dots, (q, 1)\} \quad (5.23)$$

—  $l \neq l_k$  : D'après le point (iii) de la définition 5.2.1, puisque  $(l_s, j_s - 1)\mathcal{R}(l_k, j_k - 1)$ , il vient  $\frac{\partial \varphi_{(l_k, j_k - 1)}}{\partial \xi_{(l_s, j_s)}}(u, \xi) \neq 0$ , où

$$(l_s, j_s) \in \{(l_1, j_1), (l_2, j_2), \dots, (l_{k-1}, j_{k-1})\} \quad (5.24)$$

D'après les relations (5.23) et (5.24), nous en déduisons alors que la fonction non linéaire  $\varphi_{(l_k, j_k - 1)}(u, \xi)$  vérifie la structure suivante

$$\varphi_{(l_k, j_k - 1)}(u, \xi) = \varphi_{(l_k, j_k - 1)}(u, \xi_{(l_1, j_1)}, \xi_{(l_2, j_2)}, \dots, \xi_{(l_{k-1}, j_{k-1})}, y)$$

ce qui conduit à l'équation différentielle (5.18).

Ceci termine la preuve de la proposition 5.3.1.  $\square$

Dans le paragraphe suivant, nous proposons donc de re-partitionner les paires d'indices  $(l_1, j_1), (l_2, j_2), \dots, (l_Q, j_Q)$  en  $R \geq 1$  ensembles de blocs appelés passes dans l'objectif de proposer ensuite une nouvelle forme décomposée en plusieurs passes du système (5.1).

### 5.3.2 Décomposition en $R$ passes des paires d'indices du système d'étude

Les paires d'indices  $(l_k, j_k)$ ,  $k = 1, \dots, Q$ , introduites par le lemme 5.3.1 peuvent ainsi se réécrire comme donné par la proposition suivante.

**Lemme 5.3.2** *Soient les paires d'indices  $(l_k, j_k)$ ,  $k = 1, \dots, Q$ , données par le lemme 5.3.1. Il existe  $R \geq 1$  tel que pour tout  $r = 1, \dots, R$ , il existe  $q_r \leq q$  entiers positifs  $v_{(\bar{q}_{r-1}+1)}$ ,*

### 5.3. Forme décomposée en étages du système d'étude

$v_{(\bar{q}_{r-1}+2)}, \dots, v_{(\bar{q}_r)}$ , avec  $v_k \geq 1$  pour tout  $k = \bar{q}_{r-1} + 1, \dots, \bar{q}_r$ , tels que les paires d'indices

$$(l_{(\bar{v}_{k-1}+1)}, j_{(\bar{v}_{k-1}+1)}), (l_{(\bar{v}_{k-1}+2)}, j_{(\bar{v}_{k-1}+2)}), \dots, (l_{(\bar{v}_k)}, j_{(\bar{v}_k)})$$

appartiennent au même bloc  $l_{(\bar{v}_{k-1}+1)}$ , pour  $r = 1, \dots, R$ ,  $k = \bar{q}_r + 1, \dots, \bar{q}_{r+1}$ , où

$$\begin{aligned} \bar{q}_r &= \sum_{r_i=1}^r q_{r_i}, \quad r = 1, \dots, R, \\ \bar{v}_k &= \sum_{l=1}^k v_l, \quad r = 1, \dots, R, \quad k = \bar{q}_{r-1} + 1, \dots, \bar{q}_r \end{aligned} \quad (5.25)$$

avec pour convention  $\bar{q}_0 = \bar{v}_0 = 0$ . D'autre part, pour tout  $r = 2, \dots, R$ , le bloc  $l_{(\bar{v}_{(\bar{q}_{r-1})}+1)}$  vérifie

$$l_{(\bar{v}_{(\bar{q}_{r-1})}+1)} \in \left\{ l_{(\bar{v}_{(k-1)}+1)} / k = \bar{q}_{r-2} + 1, \dots, \bar{q}_{r-1} - 1 \right\} \quad (5.26)$$

**Preuve du lemme 5.3.2.** Dans ce qui suit, nous allons raisonner par récurrence sur  $r = 1, \dots, R$ .

(1) Il existe  $v_1 \geq 1$  tel que les paires

$$(l_1, j_1), (l_2, j_2), \dots, (l_{v_1}, j_{v_1})$$

appartiennent au même bloc  $l_1$ , de sorte que

$$(l_i, j_i) = (l_1, j_1 + i - 1), \quad i = 1, \dots, v_1$$

Par extension, il existe  $q_1 \leq q$  blocs différents et  $q_1$  entiers positifs  $v_1, v_2, \dots, v_{q_1}$ , avec  $v_k \geq 1$  pour tout  $k = 1, \dots, q_1$ , tels que les paires

$$(l_{(\bar{v}_{k-1}+1)}, j_{(\bar{v}_{k-1}+1)}), (l_{(\bar{v}_{k-1}+2)}, j_{(\bar{v}_{k-1}+2)}), \dots, (l_{(\bar{v}_k)}, j_{(\bar{v}_k)})$$

appartiennent au même bloc  $l_{(\bar{v}_{k-1}+1)}$ , pour  $k = 1, \dots, q_1$ , avec

$$\bar{v}_k = \sum_{l=1}^k v_l, \quad k = 1, \dots, q_1 \quad \text{et} \quad \bar{v}_0 = 0$$

en accord avec (5.25). Plus précisément, nous avons pour tout  $k = 1, \dots, q_1$

$$(l_{(\bar{v}_{k-1}+i)}, j_{(\bar{v}_{k-1}+i)}) = (l_{(\bar{v}_{k-1}+1)}, j_{(\bar{v}_{k-1}+1)} + i - 1), \quad i = 1, \dots, v_k$$

(2) En utilisant les notations (5.25), supposons maintenant que les paires d'indices

$$(l_{(\bar{v}_{k-1}+1)}, j_{(\bar{v}_{k-1}+1)}), (l_{(\bar{v}_{k-1}+2)}, j_{(\bar{v}_{k-1}+2)}), \dots, (l_{(\bar{v}_k)}, j_{(\bar{v}_k)})$$

ont été construites pour  $s = 1, \dots, r$  et  $k = \bar{q}_{s-1} + 1, \dots, \bar{q}_s$ , avec  $\bar{q}_s = \bar{q}_{s-1} + q_s$  d'après (5.25), et supposons que  $\bar{v}_{(\bar{q}_r)} < Q$ . En effet, si ce n'est pas le cas, i.e. si  $\bar{v}_{(\bar{q}_r)} = Q$ , alors toutes les paires d'indices  $(l_1, j_1), (l_2, j_2), \dots, (l_Q, j_Q)$  ont été intégralement réparties en  $R = r$  ensembles de blocs. Plaçons-nous donc dans le cas où  $\bar{v}_{(\bar{q}_r)} < Q$ , et supposons sans perte de généralité que

$$l_{(\bar{v}_{(\bar{q}_r)}+1)} \in \left\{ l_{(\bar{v}_{(\bar{q}_{r-1})}+1)} / k = \bar{q}_{r-1} + 1, \dots, \bar{q}_r - 1 \right\} \quad (5.27)$$

Notons que dans le cas où la relation (5.27) n'est pas vérifiée, ou bien nous avons  $l_{(\bar{v}_{(\bar{q}_r)}+1)} = l_{(\bar{v}_{(\bar{q}_{r-1})}+1)}$  i.e. le bloc  $l_{(\bar{v}_{(\bar{q}_r)}+1)}$  n'est qu'une simple prolongation du bloc  $l_{(\bar{v}_{(\bar{q}_{r-1})}+1)}$ , ou bien le bloc  $l_{(\bar{v}_{(\bar{q}_r)}+1)}$  est un bloc supplémentaire de l'ensemble de blocs  $l_{(\bar{v}_{(\bar{q}_{r-1})}+1)}, l_{(\bar{v}_{(\bar{q}_{r-1}+1)}+1)}, \dots, l_{(\bar{v}_{(\bar{q}_{r-2})}+1)}$ , composé alors de  $q_r + 1$  blocs.

Dans le cas où la relation (5.27) est vérifiée, il existe  $v_{(\bar{q}_r+1)} \geq 1$  tel que les paires d'indices

$$(l_{(\bar{v}_{(\bar{q}_r)}+1)}, j_{(\bar{v}_{(\bar{q}_r)}+1)}), (l_{(\bar{v}_{(\bar{q}_r)}+2)}, j_{(\bar{v}_{(\bar{q}_r)}+2)}), \dots, (l_{(\bar{v}_{(\bar{q}_r+1)})}, j_{(\bar{v}_{(\bar{q}_r+1)})})$$

appartiennent au même bloc  $l_{(\bar{v}_{(\bar{q}_r)}+1)}$  avec

$$\bar{v}_{(\bar{q}_r+1)} = \bar{v}_{(\bar{q}_r)} + v_{(\bar{q}_r+1)} = \sum_{l=1}^{\bar{q}_r+1} v_l$$

en accord avec (5.25). Plus précisément, nous avons pour  $i = 1, \dots, v_{(\bar{q}_r+1)}$ ,

$$(l_{(\bar{v}_{(\bar{q}_r)}+i)}, j_{(\bar{v}_{(\bar{q}_r)}+i)}) = (l_{(\bar{v}_{(\bar{q}_r)}+1)}, j_{(\bar{v}_{(\bar{q}_r)}+1)} + i - 1)$$

Par extension, il existe  $q^{r+1} \leq q$  blocs différents et  $q^{r+1}$  entiers positifs  $v_{(\bar{q}_r+1)}, v_{(\bar{q}_r+2)}, \dots, v_{(\bar{q}_{r+1})}$ , avec  $v_k \geq 1$  pour tout  $k = \bar{q}_r + 1, \dots, \bar{q}_{r+1}$  où  $\bar{q}_{r+1} = \bar{q}_r + q_r$  d'après (5.25), tels que les paires

$$(l_{(\bar{v}_{(\bar{q}_{r-1})}+1)}, j_{(\bar{v}_{(\bar{q}_{r-1})}+1)}), (l_{(\bar{v}_{(\bar{q}_{r-1})}+2)}, j_{(\bar{v}_{(\bar{q}_{r-1})}+2)}), \dots, (l_{(\bar{v}_{(\bar{q}_r)})}, j_{(\bar{v}_{(\bar{q}_r)})})$$

appartiennent au même bloc  $l_{(\bar{v}_{(\bar{q}_{r-1})}+1)}$ , pour  $k = \bar{q}_r + 1, \dots, \bar{q}_{r+1}$ , avec

$$\bar{v}_k = \sum_{l=1}^k v_l, \quad k = \bar{q}_r + 1, \dots, \bar{q}_{r+1}$$

en accord avec (5.25). Plus précisément, nous avons pour tout  $k = \bar{q}_r + 1, \dots, \bar{q}_{r+1}$

$$(l_{(\bar{v}_{(\bar{q}_{r-1})}+i)}, j_{(\bar{v}_{(\bar{q}_{r-1})}+i)}) = (l_{(\bar{v}_{(\bar{q}_{r-1})}+1)}, j_{(\bar{v}_{(\bar{q}_{r-1})}+1)} + i - 1), \quad i = 1, \dots, v_k \quad (5.28)$$

Le raisonnement effectué dans les points (1) et (2) s'arrête pour  $r = R$  lorsque les paires d'indices  $(l_1, j_1), (l_2, j_2), \dots, (l_Q, j_Q)$  ont été intégralement réparties en  $R$  ensembles de blocs, c'est-à-dire lorsque  $\bar{v}_{\bar{q}_R} = Q$ . Ceci termine la preuve du lemme 5.3.2.  $\square$



Notons que les paires

$$(l_1, j_1), (l_2, j_2), \dots, (l_{(\bar{v}_1)}, j_{(\bar{v}_1)}), (l_{(\bar{v}_1+1)}, j_{(\bar{v}_1+1)}), (l_{(\bar{v}_1+2)}, j_{(\bar{v}_1+2)}), \dots \\ \dots, (l_{(\bar{v}_{(\bar{q}_1)})}, j_{(\bar{v}_{(\bar{q}_1)})}), (l_{(\bar{v}_{(\bar{q}_1)}+1)}, j_{(\bar{v}_{(\bar{q}_1)}+1)}), (l_{(\bar{v}_{(\bar{q}_1)}+2)}, j_{(\bar{v}_{(\bar{q}_1)}+2)}), \dots, (l_{(\bar{v}_{(\bar{q}_R)})}, j_{(\bar{v}_{(\bar{q}_R)})})$$

ne sont qu'un simple partitionnement des paires d'indices  $(l_1, j_1), (l_2, j_2), \dots, (l_Q, j_Q)$ , où chaque paire d'indices  $(l_{(\bar{v}_{k-1+i})}, j_{(\bar{v}_{k-1+i})} - 1)$ , pour  $r = 1, \dots, R$ ,  $k = \bar{q}_{r-1} + 1, \dots, \bar{q}_r$ ,  $i = 1, \dots, v_k$ , respecte la propriété (ii) de la proposition 5.3.1. Autrement dit, d'après (5.18), nous avons pour tout  $r = 1, \dots, R$ ,  $k = \bar{q}_{r-1} + 1, \dots, \bar{q}_r$ ,  $i = 1, \dots, v_k$ ,

$$\dot{\xi}_{(l_{(\bar{v}_{k-1+i})}, j_{(\bar{v}_{k-1+i})} - 1)} = \xi_{(l_{(\bar{v}_{k-1+i})}, j_{(\bar{v}_{k-1+i})})} + \varphi_{(l_{(\bar{v}_{k-1+i})}, j_{(\bar{v}_{k-1+i})} - 1)}(u, \xi_{(l_1, j_1)}, \xi_{(l_2, j_2)}, \dots \\ \dots, \xi_{(l_{(\bar{v}_{k-1})}, j_{(\bar{v}_{k-1})})}, \xi_{(l_{(\bar{v}_{k-1}+1)}, j_{(\bar{v}_{k-1}+1)})}, \dots \\ \dots, \xi_{(l_{(\bar{v}_{k-1+i-1})}, j_{(\bar{v}_{k-1+i-1})})}, y) \quad (5.29)$$

Le lemme 5.3.2 introduit ainsi  $R \geq 1$  ensembles de blocs que l'on appelle passes. Chaque passe du système (5.1) est alors définie de la manière suivante.

**Définition 5.3.1** *Pour tout  $r = 1, \dots, R$ , l'ensemble de  $q_r \leq q$  différents blocs  $l_{(\bar{v}_{(k-1)+1})}$ , pour  $k = \bar{q}_{r-1} + 1, \dots, \bar{q}_r$  où  $\bar{q}_r = \bar{q}_{r-1} + q_r$ , est appelé passe  $r$  du système (5.1). En particulier, chaque passe  $r = 2, \dots, R$  vérifie, d'après le lemme 5.3.2,*

$$l_{(\bar{v}_{(\bar{q}_{r-1})+1})} \in \left\{ l_{(\bar{v}_{(k-1)+1})} / k = \bar{q}_{r-2} + 1, \dots, \bar{q}_{r-1} - 1 \right\}$$

*Autrement dit, le premier bloc de toute passe  $r = 2, \dots, R$  est déjà présent dans la passe précédente  $r - 1$ .*

Dans la prochaine et dernière partie de cette section, nous allons construire un état  $x_k$  pour chaque bloc  $k$  de chaque passe  $r$ , avec  $r = 1, \dots, R$  et  $k = \bar{q}_{r-1} + 1, \dots, \bar{q}_r$ , en exploitant notamment la relation (5.29).

### 5.3.3 Construction de la forme décomposée en $R$ passes du système d'étude

Soit  $x \in \mathbb{R}^n$  l'état de la forme décomposée en  $R$  passes du système (5.1), avec

$$x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^{\bar{q}_1} \\ x^{\bar{q}_1+1} \\ \vdots \\ x^{\bar{q}_2} \\ x^{\bar{q}_2+1} \\ \vdots \\ x^{\bar{q}_R} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad \text{avec } x^k \in \mathbb{R}^{n^k}$$

pour  $r = 1, \dots, R$ ,  $k = \bar{q}_{r-1} + 1, \dots, \bar{q}_r$ , en utilisant les notations (5.25), et où nous avons  $\sum_{k=1}^{\bar{q}_R} n^k = n$ . En remarquant que  $j_{(\bar{v}_{(k-1)+1})} \geq 2$  d'après le lemme 5.3.1, chaque état  $x^k$  pour  $r = 1, \dots, R$  et  $k = \bar{q}_{r-1} + 1, \dots, \bar{q}_r$  se construit de la manière suivante :

- (i) Cas  $j_{(\bar{v}_{(k-1)+1})} = 2$  : Nous avons  $(l_{(\bar{v}_{(k-1)+1})}, j_{(\bar{v}_{(k-1)+1})} - 1) = (l_{(\bar{v}_{(k-1)+1})}, 1)$ . Dans ce cas, nous définissons l'état  $x^k$  par

$$x^k = \begin{pmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ x_3^k \\ \vdots \\ x_{\lambda^k}^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_{(l_{(\bar{v}_{(k-1)+1})}, j_{(\bar{v}_{(k-1)+1})} - 1)} \\ \xi_{(l_{(\bar{v}_{(k-1)+1})}, j_{(\bar{v}_{(k-1)+1})})} \\ \xi_{(l_{(\bar{v}_{(k-1)+2})}, j_{(\bar{v}_{(k-1)+2})})} \\ \vdots \\ \xi_{(l_{(\bar{v}_k)}, j_{(\bar{v}_k)})} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_{(l_{(\bar{v}_{(k-1)+1})}, 1)} \\ \xi_{(l_{(\bar{v}_{(k-1)+1})}, 2)} \\ \xi_{(l_{(\bar{v}_{(k-1)+1})}, 3)} \\ \vdots \\ \xi_{(l_{(\bar{v}_{(k-1)+1})}, \lambda^k)} \end{pmatrix} \quad (5.30)$$

avec  $\lambda^k = v_k + 1 \geq 2$ , où  $\bar{v}_k = \bar{v}_{k-1} + v_k$  d'après (5.25).

- (ii) Cas  $j_{(\bar{v}_{(k-1)+1})} > 2$  : Dans ce cas, en utilisant la relation (5.28), nous définissons l'état  $x^k$  par

$$x^k = \begin{pmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ \vdots \\ x_{\lambda^k}^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_{(l_{(\bar{v}_{(k-1)+1})}, j_{(\bar{v}_{(k-1)+1})})} \\ \xi_{(l_{(\bar{v}_{(k-1)+2})}, j_{(\bar{v}_{(k-1)+2})})} \\ \vdots \\ \xi_{(l_{(\bar{v}_k)}, j_{(\bar{v}_k)})} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_{(l_{(\bar{v}_{(k-1)+1})}, j_{(\bar{v}_{(k-1)+1})})} \\ \xi_{(l_{(\bar{v}_{(k-1)+1})}, j_{(\bar{v}_{(k-1)+1})} + 1)} \\ \vdots \\ \xi_{(l_{(\bar{v}_{(k-1)+1})}, j_{(\bar{v}_{(k-1)+1})} + v_k - 1)} \end{pmatrix} \quad (5.31)$$

avec  $\lambda^k = v_k \geq 1$ . Dans ce cas, d'après le point (i) de la proposition 5.3.1, il existe  $s < r$  et  $k_s = \bar{q}_{s-1} + 1, \dots, \bar{q}_s$  tels que

$$(l_{(\bar{v}_{(k-1)+1})}, j_{(\bar{v}_{(k-1)+1})} - 1) = (l_{(\bar{v}_{k_s})}, j_{(\bar{v}_{k_s})}) \quad (5.32)$$

### 5.3. Forme décomposée en étages du système d'étude

---

La construction des états  $x^k$ ,  $r = 1, \dots, R$ ,  $k = \bar{q}_{r-1} + 1, \dots, \bar{q}_r$ , donnée par les deux situations ci-dessus amène à deux cas de figure possible pour la composante  $x_{\lambda^k}^k$  de chaque bloc  $k$ .

- La première situation correspond au cas où l'équation différentielle vérifiée par  $x_{\lambda^k}^k$  mène à une nouvelle variable d'état. Cette dernière correspond à la première composante d'un bloc  $k_s = \bar{q}_{s-1} + 1, \dots, \bar{q}_s$  d'une passe future  $s > r$ , à savoir la variable d'état  $x_1^{k_s}$ .
- La seconde situation correspond au cas où aucune nouvelle variable d'état n'apparaît dans l'équation différentielle vérifiée par la variable  $x_{\lambda^k}^k$ . Le bloc  $l_{(\bar{v}_{k-1}+1)}$  se termine alors, c'est-à-dire que nous avons

$$x_{\lambda^k}^k = \xi_{(l_{(\bar{v}_{k-1}+1)} \cdot j_{(\bar{v}_{k-1}+1)} + \lambda^k - 1)} = \xi_{(b_k, \lambda_{b_k})}$$

où pour tout  $r = 1, \dots, R$ ,  $k = \bar{q}_{r-1} + 1, \dots, \bar{q}_r$ , nous posons

$$b_k \triangleq l_{(\bar{v}_{k-1}+1)} \quad (5.33)$$

Avant d'introduire la nouvelle classe de systèmes décomposée en passes, nous définissons une fonction de permutation  $P_r$  pour tout  $r = 1, \dots, R$  comme suit.

**Définition 5.3.2** *Pour tout  $r = 1, \dots, R$ , nous définissons l'application  $P_r$  donnée de l'ensemble  $\{\bar{q}_{r-1} + 1, \dots, \bar{q}_r\}$  vers l'ensemble  $\{\bar{q}_r + 1, \dots, \bar{q}_R\} \cup \{0\}$  et vérifiant les propriétés suivantes :*

- Dans le cas où une nouvelle variable d'état apparaît dans l'équation différentielle vérifiée par la variable  $x_{\lambda^k}^k$ , pour  $k = \bar{q}_{r-1} + 1, \dots, \bar{q}_r$ , cette dernière est décrite par la première composante du bloc  $P_r(k)$ , et la nouvelle variable d'état est notée  $x_1^{P_r(k)}$ .
- Dans le cas où aucune nouvelle variable d'état n'apparaît dans l'équation différentielle vérifiée par la variable  $x_{\lambda^k}^k$ , pour  $k = \bar{q}_{r-1} + 1, \dots, \bar{q}_r$ , nous avons  $P_r(k) = 0$ .
- Pour tout  $k = \bar{q}_{R-1} + 1, \dots, \bar{q}_R$ , nous avons  $P_R(k) = 0$ .

Similairement, pour tout  $r = 1, \dots, R$ , la fonction inverse  $P_r^{-1}$  donnée de l'ensemble  $\{\bar{q}_{r-1} + 1, \dots, \bar{q}_r\}$  vers l'ensemble  $\{1, \dots, \bar{q}_{r-1}\} \cup \{0\}$  vérifie les propriétés suivantes :

- Dans le cas où la variable  $x_1^k$  ne correspond pas à la sortie du bloc  $b_k$ , pour  $k = \bar{q}_{r-1} + 1, \dots, \bar{q}_r$  et avec  $b_k$  donné par (5.33), d'après la proposition 5.3.1, il existe une variable d'état correspondant à la composante précédent la variable  $x_1^k$  dans le bloc  $b_k$ . Cette dernière se note alors  $x_{\lambda^{P_r^{-1}(k)}}^{P_r^{-1}(k)}$ .
- Dans le cas où la variable  $x_1^k$  est la sortie du bloc  $b_k$ , pour  $k = \bar{q}_{r-1} + 1, \dots, \bar{q}_r$ , nous avons  $P_r^{-1}(k) = 0$ .
- Pour tout  $k = 1, \dots, \bar{q}_1$ , nous avons  $P_1^{-1}(k) = 0$ .

Nous devons également définir une fonction de dépendance  $\varsigma_r$  pour tout  $r = 1, \dots, R-1$  comme donné par la définition suivante.

**Définition 5.3.3** *Pour tout  $r = 1, \dots, R-1$ , nous définissons l'application  $\varsigma_r$  donnée de l'ensemble  $\{\bar{q}_{r-1} + 1, \dots, \bar{q}_r\}$  vers l'ensemble  $\{\bar{q}_{r-1} + 1, \dots, \bar{q}_R\}$  telle que  $\varsigma_r(k) \geq k$  et telle que pour tout  $k_s = \varsigma_r(k) + 1, \dots, \bar{q}_R$  et  $i = 1, \dots, \bar{\lambda}^{k_s}$ ,*

$$\frac{\partial \varphi_{\lambda^k}^k}{\partial x_i^{k_s}}(u, x) \equiv 0.$$

Nous pouvons désormais introduire la nouvelle classe de systèmes décomposée en passes. Ainsi en nous basant sur la relation (5.29) et d'après les définitions précédentes 5.3.2 et 5.3.3, chaque variable d'état  $x^k$ , pour tout  $r = 1, \dots, R$ ,  $k = \bar{q}_{r-1} + 1, \dots, \bar{q}_r$ , vérifie l'ensemble des équations différentielles suivantes :

- $1 \leq r \leq R-1$  et  $k = \bar{q}_{r-1} + 1, \dots, \bar{q}_r$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1^k = x_2^k + \varphi_1^k(u, x^1, \dots, x^{\bar{q}_{r-1}}, x^{\bar{q}_{r-1}+1}, \dots, x^{k-1}, x_1^k, y) \\ \dot{x}_2^k = x_3^k + \varphi_2^k(u, x^1, \dots, x^{\bar{q}_{r-1}}, x^{\bar{q}_{r-1}+1}, \dots, x^{k-1}, x_1^k, x_2^k, y) \\ \vdots \\ \dot{x}_{\lambda^{k-1}}^k = x_{\lambda^k}^k + \varphi_{\lambda^{k-1}}^k(u, x^1, \dots, x^{\bar{q}_{r-1}}, x^{\bar{q}_{r-1}+1}, \dots, x^{k-1}, x_1^k, \dots, x_{\lambda^{k-1}}^k, y) \\ \dot{x}_{\lambda^k}^k = \begin{cases} x_1^{P_r(k)} + \varphi_{\lambda^k}^k(u, x^1, x^2, \dots, x^{k-1}, x^k, \dots, x^{P_r(k)-1}, y) & \text{si } P_r(k) \neq 0 \\ \varphi_{\lambda^k}^k(u, x^1, x^2, \dots, x^{k-1}, x^k, \dots, x^{\varsigma_r(k)}, y) & \text{si } P_r(k) = 0 \end{cases} \end{array} \right. \quad (5.34)$$

- $r = R$  et  $k = \bar{q}_{R-1} + 1, \dots, \bar{q}_R$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1^k = x_2^k + \varphi_1^k(u, x^1, \dots, x^{\bar{q}_{R-1}}, x^{\bar{q}_{R-1}+1}, \dots, x^{k-1}, x_1^k, y) \\ \dot{x}_2^k = x_3^k + \varphi_2^k(u, x^1, \dots, x^{\bar{q}_{R-1}}, x^{\bar{q}_{R-1}+1}, \dots, x^{k-1}, x_1^k, x_2^k, y) \\ \vdots \\ \dot{x}_{\lambda^{k-1}}^k = x_{\lambda^k}^k + \varphi_{\lambda^{k-1}}^k(u, x^1, \dots, x^{\bar{q}_{R-1}}, x^{\bar{q}_{R-1}+1}, \dots, x^{k-1}, x_1^k, \dots, x_{\lambda^{k-1}}^k, y) \\ \dot{x}_{\lambda^k}^k = \varphi_{\lambda^k}^k(u, x^1, x^2, \dots, x^{\bar{q}_R}, y) \end{array} \right. \quad (5.35)$$

où  $\varphi_i^k(\cdot) = \varphi_{(l_{(\bar{v}_{k-1}+i)}, j_{(\bar{v}_{k-1}+i)})}$  pour tout  $r = 1, \dots, R$ ,  $k = \bar{q}_{r-1} + 1, \dots, \bar{q}_r$ ,  $i = 1, \dots, \lambda^k$ .

**Remarque 5.3.1** *Pour tout  $r = 1, \dots, R-1$ ,  $k = \bar{q}_{r-1} + 1, \dots, \bar{q}_r$ , dans le cas où  $P_r(k) \neq 0$ , nous avons  $\varsigma_r(k) = P_r(k)$  d'après la définition 5.3.3, et par suite*

$$\begin{aligned} \dot{x}_{\lambda^k}^k &= x_1^{P_r(k)} + \varphi_{\lambda^k}^k(u, x^1, x^2, \dots, x^{k-1}, x^k, \dots, x^{P_r(k)-1}, y) \\ &= x_1^{\varsigma_r(k)} + \varphi_{\lambda^k}^k(u, x^1, x^2, \dots, x^{k-1}, x^k, \dots, x^{\varsigma_r(k)-1}, y) \end{aligned}$$

Ainsi, l'équation différentielle vérifiée par la variable  $x_{\lambda^k}^k$  se réécrit pour tout  $r = 1, \dots, R-1$ ,  $k = \bar{q}_{r-1} + 1, \dots, \bar{q}_r$ , de la manière suivante

$$\dot{x}_{\lambda^k}^k = \bar{\varphi}_{\lambda^k}^k(u, x^1, x^2, \dots, x^{k-1}, x^k, \dots, x^{\varsigma_r(k)}, y)$$

où

$$\bar{\varphi}_{\lambda^k}^k(u, x) = \begin{cases} x_1^{s_r(k)} + \varphi_{\lambda^k}^k(u, x) = x_1^{P_r(k)} + \varphi_{\lambda^k}^k(u, x) & \text{si } P_r(k) \neq 0 \\ \varphi_{\lambda^k}^k(u, x) & \text{si } P_r(k) = 0 \end{cases} \quad (5.36)$$

Dans la suite de ce chapitre, nous allons considérer le cas où pour tout  $k = \bar{q}_{R-1} + 1, \dots, \bar{q}_R$ , il existe une fonction inconnue  $\varepsilon^k : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^{b_k}$  décrivant des incertitudes sur la dernière dynamique du bloc  $b_k$ , donné par (5.33), pouvant dépendre de l'état du système (5.1), de l'entrée  $u$  et de paramètres inconnus. Chaque dynamique  $\dot{x}_{\lambda^k}^k$ ,  $k = \bar{q}_{R-1} + 1, \dots, \bar{q}_R$ , décrite dans (5.35) se spécialise alors comme suit

$$\dot{x}_{\lambda^k}^k = \varphi_{\lambda^k}^k(u, x^1, x^2, \dots, x^{\bar{q}_R}) + \varepsilon^k(t)$$

**Remarque 5.3.2** Dans le cas  $R = 1$  et  $\bar{q}_1 = 1$ , nous retrouvons la classe de système introduite dans (HAMMOURI et FARZA 2003) où le système est triangulaire selon l'état du système. Dans le cas où  $R = 1$ , nous retrouvons la classe de système non linéaire introduite dans (FARZA et al. 2011) pour un système triangulaire par bloc et où la dernière composante non linéaire de chaque bloc du système peut dépendre de tout l'état.

Nous proposons dans la partie suivante de construire une immersion du système (5.34)-(5.35) dans le but ensuite de synthétiser un observateur grand gain.

## 5.4 Immersion du système d'étude

Pour chaque variable d'état  $x^k$ ,  $r = 2, \dots, R$ ,  $k = \bar{q}_{r-1} + 1, \dots, \bar{q}_r$ , telle que  $P_r^{-1}(k) \neq 0$ , c'est-à-dire dans le cas où  $x_1^k$  n'est pas la sortie du bloc  $b_k$ , nous allons construire un nouvel état  $z^k$  de telle sorte que  $z_2^k, \dots, z_{\lambda^k}^k, z_{\lambda^k+1}^k$  correspondent aux variables  $x_1^k, \dots, x_{\lambda^k-1}^k, x_{\lambda^k}^k$ , et tel que l'état  $z_1^k$  correspond à une copie de l'état  $x_{\lambda^{P_r^{-1}(k)}}^{P_r^{-1}(k)}$ , composante précédent l'état  $x_1^k$  dans le bloc  $b_k$ .

Soit

$$z = \begin{pmatrix} z^1 \\ \vdots \\ z^{\bar{q}_1} \\ z^{\bar{q}_1+1} \\ \vdots \\ z^{\bar{q}_2} \\ z^{\bar{q}_2+1} \\ \vdots \\ z^{\bar{q}_R} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\bar{n}} \text{ avec } z^k \in \mathbb{R}^{\bar{n}^k} \text{ avec } \bar{n} = \sum_{k=1}^{\bar{q}_R} \bar{n}^k, \quad (5.37)$$

où chaque état  $z^k$ ,  $r = 1, \dots, R$ ,  $\bar{q}_{r-1} + 1, \dots, \bar{q}_r$ , est défini par l'un des deux cas suivants :

- $P_r^{-1}(k) = 0$  : Dans ce cas, la variable d'état  $x_1^k$  correspond à la sortie du bloc  $b_k$ . Nous posons dans ce cas  $z^k = x^k$ , c'est-à-dire

$$z^k = \begin{pmatrix} z_1^k \\ \vdots \\ z_{\lambda^{k-1}}^k \\ z_{\lambda^k}^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^k \\ \vdots \\ x_{\lambda^{k-1}}^k \\ x_{\lambda^k}^k \end{pmatrix} \quad (5.38)$$

- $P_r^{-1}(k) \neq 0$  : Dans ce cas, nous construisons l'état  $z^k$ , composé de  $(\lambda^k + 1)$  composantes, de la manière suivante :

$$z^k = \begin{pmatrix} z_1^k \\ z_2^k \\ \vdots \\ z_{\lambda^k}^k \\ z_{\lambda^k+1}^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{\lambda^{P_r^{-1}(k)}}^{P_r^{-1}(k)} \\ x_1^k \\ \vdots \\ x_{\lambda^{k-1}}^k \\ x_{\lambda^k}^k \end{pmatrix} \quad (5.39)$$

Dans les deux cas (i) et (ii), soit  $\bar{\lambda}^k$  le nombre de composantes de l'état  $z^k$ , pour  $r = 1, \dots, R$ ,  $k = \bar{q}_{r-1}, \dots, \bar{q}_r$ . Ainsi, pour tout  $r = 1, \dots, R$ ,  $k = \bar{q}_{r-1}, \dots, \bar{q}_r$ , puisque l'état  $x_1^k$  est une sortie lorsque  $P_r^{-1}(k) = 0$ , nous avons d'après (5.30) et (5.38) d'une part, et (5.31) et (5.39) d'autre part,

$$\bar{\lambda}^k = \begin{cases} \lambda^k = v_k + 1 & \text{si } P_r^{-1}(k) = 0 \\ \lambda^k + 1 = v_k + 1 & \text{si } P_r^{-1}(k) \neq 0 \end{cases}$$

Par conséquent, nous obtenons  $\bar{\lambda}^k = v_k + 1 \geq 2$  pour tout  $r = 1, \dots, R$ ,  $k = \bar{q}_{r-1}, \dots, \bar{q}_r$ . D'autre part,  $\bar{n}$  se spécialise par

$$\bar{n} = \sum_{k=1}^{\bar{q}_R} \bar{n}^k = \sum_{k=1}^{\bar{q}_R} \bar{\lambda}^k p_{b_k}$$

#### 5.4. Immersion du système d'étude

---

où l'entier  $p_k$  est introduit dans (5.2). La construction des variables  $z^k$  donnée par les cas (i) et (ii) ci-dessus est telle que dans le cas où  $P_r^{-1}(k) \neq 0$ , pour  $r = 2, \dots, R$ ,  $k = \bar{q}_{r-1}, \dots, \bar{q}_r$ , l'état  $z_1^k$  vérifie

$$z_1^k = z_{\lambda^{P_r^{-1}(k)}}^{P_r^{-1}(k)}$$

Autrement dit, dans le cas où  $P_r^{-1}(k) \neq 0$ , l'état  $z_1^k$  est une copie de l'état  $z_{\lambda^{P_r^{-1}(k)}}^{P_r^{-1}(k)}$  provenant d'un bloc d'une passe  $s < r$ , d'après la définition 5.3.2.

Avant d'introduire l'immersion du système (5.34)-(5.35), notons que pour tout  $r = 2, \dots, R$ ,  $k = \bar{q}_{r-1} + 1, \dots, \bar{q}_r$  tels que  $P_r^{-1}(k) = k_s \neq 0$  avec  $\bar{q}_{s-1} + 1 \leq k_s \leq \bar{q}_s$  et  $s < r$ , il est facile de vérifier que

$$P_s(P_r^{-1}(k)) = P_s(k_s) = k$$

Autrement dit, l'état  $z_{\lambda^{P_r^{-1}(k)}}^{P_r^{-1}(k)}$  vérifie l'équation différentielle suivante

$$\begin{aligned} \dot{z}_{\lambda^{P_r^{-1}(k)}}^{P_r^{-1}(k)} &= \dot{x}_{\lambda^{P_r^{-1}(k)}}^{P_r^{-1}(k)} \quad \text{d'après (5.38) et (5.39)} \\ &= x_1^k + \varphi_{\lambda^{P_r^{-1}(k)}}^{P_r^{-1}(k)}(u, x^1, x^2, \dots, x^{P_r^{-1}(k)-1}, x^{P_r^{-1}(k)}, \dots, x^{k-1}, y) \quad \text{d'après (5.34)} \\ &= z_2^k + \psi_{\lambda^{P_r^{-1}(k)}}^{P_r^{-1}(k)}(u, z^1, z^2, \dots, z^{P_r^{-1}(k)-1}, z^{P_r^{-1}(k)}, \dots, z^{k-1}, y) \end{aligned}$$

La dernière égalité vient du fait que  $z_2^k = x_1^k$  pour tout  $r = 2, \dots, R$ ,  $k = \bar{q}_{r-1} + 1, \dots, \bar{q}_r$  tels que  $P_r^{-1}(k) \neq 0$  d'après (5.39), mais aussi du fait que les états supplémentaires dans les variables  $z^k$  ne sont que des copies d'états antérieurs, c'est-à-dire que nous vérifions

$$\varphi_{\lambda^{P_r^{-1}(k)}}^{P_r^{-1}(k)}(u, x^1, x^2, \dots, x^{k-1}, y) = \psi_{\lambda^{P_r^{-1}(k)}}^{P_r^{-1}(k)}(u, z^1, z^2, \dots, z^{k-1}, y)$$

où  $\psi_{\lambda^{P_r^{-1}(k)}}^{P_r^{-1}(k)}(\cdot) \triangleq \varphi_{\lambda^{P_r^{-1}(k)}}^{P_r^{-1}(k)}(\cdot)$ . D'autre part, puisque  $z_1^k = z_{\lambda^{P_r^{-1}(k)}}^{P_r^{-1}(k)}$ , il vient

$$\begin{aligned} \dot{z}_1^k &= z_2^k + \psi_{\lambda^{P_r^{-1}(k)}}^{P_r^{-1}(k)}(u, z^1, z^2, \dots, z^{k-1}, y) \\ &= z_2^k + \psi_1^k(u, z^1, z^2, \dots, z^{k-1}, y) \end{aligned}$$

avec  $\psi_1^k(\cdot) \triangleq \psi_{\lambda^{P_r^{-1}(k)}}^{P_r^{-1}(k)}(\cdot)$ . Remarquons au passage que la fonction  $\psi_1^k(u, z)$  ne dépend pas de l'état  $z_1^k$  car étant une copie de l'état  $z_{\lambda^{P_r^{-1}(k)}}^{P_r^{-1}(k)}$ . Enfin, la dernière équation différentielle peut aussi se généraliser au cas où  $z_1^k$  est la sortie du bloc  $b_k$  puisque  $z_1^k$  est inclus dans  $y$  dans ce cas particulier, ce qui donne, pour tout  $r = 1, \dots, R$  et  $k = \bar{q}_{r-1} + 1, \dots, \bar{q}_r$ ,

$$\dot{z}_1^k = z_2^k + \psi_1^k(u, z^1, z^2, \dots, z^{k-1}, y) \quad (5.40)$$

D'après la relation (5.40) et les remarques précédentes, en nous basant sur le système (5.34)-(5.35), chaque état  $z^k$  vérifie ainsi les équations différentielles suivantes.

- $1 \leq r \leq R-1$  et  $k = \bar{q}_{r-1} + 1, \dots, \bar{q}_r$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z}_1^k = z_2^k + \psi_1^k(u, z^1, \dots, z^{\bar{q}_{r-1}}, z^{\bar{q}_{r-1}+1}, \dots, z^{k-1}, y) \\ \dot{z}_2^k = z_3^k + \psi_2^k(u, z^1, \dots, z^{\bar{q}_{r-1}}, z^{\bar{q}_{r-1}+1}, \dots, z^{k-1}, z_2^k, y) \\ \vdots \\ \dot{z}_{\bar{\lambda}^{k-1}}^k = z_{\bar{\lambda}^k}^k + \psi_{\bar{\lambda}^{k-1}}^k(u, z^1, \dots, z^{\bar{q}_{r-1}}, z^{\bar{q}_{r-1}+1}, \dots, z^{k-1}, z_2^k, \dots, z_{\bar{\lambda}^{k-1}}^k, y) \\ \dot{z}_{\bar{\lambda}^k}^k = \begin{cases} z_2^{P_r(k)} + \psi_{\bar{\lambda}^k}^k(u, z^1, z^2, \dots, z^{k-1}, z^k, \dots, z^{P_r(k)-1}, y) & \text{si } P_r(k) \neq 0 \\ \psi_{\bar{\lambda}^k}^k(u, z^1, z^2, \dots, z^{k-1}, z^k, \dots, z^{s_r(k)}, y) & \text{si } P_r(k) = 0 \end{cases} \end{array} \right. \quad (5.41)$$

- $r = R$  et  $k = \bar{q}_{R-1} + 1, \dots, \bar{q}_R$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z}_1^k = z_2^k + \psi_1^k(u, z^1, \dots, z^{\bar{q}_{R-1}}, z^{\bar{q}_{R-1}+1}, \dots, z^{k-1}, y) \\ \dot{z}_2^k = z_3^k + \psi_2^k(u, z^1, \dots, z^{\bar{q}_{R-1}}, z^{\bar{q}_{R-1}+1}, \dots, z^{k-1}, z_2^k, y) \\ \vdots \\ \dot{z}_{\bar{\lambda}^{k-1}}^k = z_{\bar{\lambda}^k}^k + \psi_{\bar{\lambda}^{k-1}}^k(u, z^1, \dots, z^{\bar{q}_{R-1}}, z^{\bar{q}_{R-1}+1}, \dots, z^{k-1}, z_2^k, \dots, z_{\bar{\lambda}^{k-1}}^k, y) \\ \dot{z}_{\bar{\lambda}^k}^k = \psi_{\bar{\lambda}^k}^k(u, z^1, z^2, \dots, z^{\bar{q}_R}, y) + \varepsilon^k \end{array} \right. \quad (5.42)$$

où pour tout  $r = 1, \dots, R$ ,  $k = \bar{q}_{r-1} + 1, \dots, \bar{q}_r$ , les fonctions  $\psi_1^k, \dots, \psi_{\bar{\lambda}^k}^k$  sont définies comme suit :

- Si  $P_r^{-1}(k) = 0$ , alors

$$\psi_i^k(\cdot) \triangleq \varphi_i^k(\cdot), \quad i = 1, \dots, \bar{\lambda}^k$$

- Si  $P_r^{-1}(k) \neq 0$ , alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_1^k(\cdot) \triangleq \varphi_{\bar{\lambda}^{P_r^{-1}(k)}}^{P_r^{-1}(k)}(\cdot), \quad \text{et} \\ \psi_i^k(\cdot) \triangleq \varphi_{i-1}^k(\cdot), \quad i = 2, \dots, \bar{\lambda}^k \end{array} \right.$$

Les équations différentielles (5.41)-(5.42) vérifiées par chaque état  $z^k$  pour tout  $r = 1, \dots, R$ ,  $k = 1, \dots, q^r$ , peuvent finalement s'écrire de manière condensée comme suit

$$\dot{z}^k = A^k z^k + \psi^k(u, z) + B^k \bar{\varepsilon}^k$$

avec

$$A^k = \begin{bmatrix} 0_{p_{b_k}} & I_{p_{b_k}} & 0_{p_{b_k}} & \dots & 0_{p_{b_k}} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0_{p_{b_k}} \\ 0_{p_{b_k}} & \dots & \dots & 0_{p_{b_k}} & I_{p_{b_k}} \\ 0_{p_{b_k}} & \dots & \dots & 0_{p_{b_k}} & 0_{p_{b_k}} \end{bmatrix} \in R^{\bar{n}^k \times \bar{n}^k}, \quad B^k = \begin{pmatrix} 0_{p_{b_k}} \\ \vdots \\ 0_{p_{b_k}} \\ I_{p_{b_k}} \end{pmatrix} \in R^{\bar{n}^k},$$

$$\text{et } \psi^k(u, z) = \begin{pmatrix} \psi_1^k(u, z^1, z^2, \dots, z^{k-1}, y) \\ \psi_2^k(u, z^1, z^2, \dots, z^{k-1}, z_2^k, y) \\ \vdots \\ \psi_{\bar{\lambda}^{k-1}}^k(u, z^1, z^2, \dots, z^{k-1}, z_2^k, \dots, z_{\bar{\lambda}^{k-1}}^k, y) \\ \psi_{\bar{\lambda}^k}^k(u, z^1, z^2, \dots, z^{s_r(k)}, y) \end{pmatrix} \in R^{\bar{n}^k}$$



où pour tout  $r = 1, \dots, R-1$ ,  $k = \bar{q}_{r-1} + 1, \dots, \bar{q}_r$  (à comparer avec (5.36)),

$$\bar{\psi}_{\bar{\lambda}^k}^k(u, z) = \begin{cases} z_2^{\varsigma_r(k)} + \psi_{\bar{\lambda}^k}^k(u, z^1, z^2, \dots, z^{\varsigma_r(k)-1}, y) & \text{si } P_r(k) \neq 0 \\ \psi_{\bar{\lambda}^k}^k(u, z^1, z^2, \dots, z^{\varsigma_r(k)}, y) & \text{si } P_r(k) = 0 \end{cases}$$

et pour tout  $k = \bar{q}_{R-1} + 1, \dots, \bar{q}_R$ ,

$$\bar{\psi}_{\bar{\lambda}^k}^k(u, z) = \psi_{\bar{\lambda}^k}^k(u, z^1, z^2, \dots, z^{\bar{q}_R}, y),$$

et en définissant la fonction inconnue  $\bar{\varepsilon}^k$  pour tout  $r = 1, \dots, R$ ,  $k = \bar{q}_{r-1} + 1, \dots, \bar{q}_r$ , par

$$\bar{\varepsilon}^k = \begin{cases} 0 & \text{si } r < R \\ \varepsilon^k(t) & \text{si } r = R \end{cases} \quad (5.43)$$

## 5.5 Synthèse de l'observateur

Dans le but de synthétiser un observateur grand gain pour l'immersion (5.41)-(5.42) du système (5.34)-(5.35), il convient d'introduire les notations suivantes.

### 5.5.1 Notations

Pour tout  $r = 1, \dots, R$ ,  $k = \bar{q}_{r-1} + 1, \dots, \bar{q}_r$ , définissons la matrice diagonale  $\Delta^k(\theta)$  comme suit

$$\Delta^k(\theta) = \text{diag} \left( 1, \frac{1}{\theta^{\delta^k}}, \dots, \frac{1}{\theta^{(\bar{\lambda}^k - 1)\delta^k}} \right) \quad (5.44)$$

où  $\theta > 0$  est un entier positif, où les puissances de  $\theta$  représentées par les entiers  $\delta^k$  sont définies de la manière suivante

$$\begin{cases} \delta^k &= 2 \left( \bar{\lambda}^{k+1} - \frac{3}{2} \right) \delta^{k+1} + \epsilon, \quad r = 1, \dots, R, \quad k = \bar{q}_{r-1} + 1, \dots, \bar{q}_r - 1 \\ \delta^{\bar{q}_r} &= 2 \sum_{s=r+1}^{\bar{q}_r} (\bar{\lambda}^{\bar{q}_s - 1 + 1} - 1) \delta^{\bar{q}_s - 1 + 1} - \delta^{\bar{\varsigma}_r} + \epsilon, \quad r = 1, \dots, R-1 \\ \delta^{\bar{q}_R} &= 1 \end{cases} \quad (5.45)$$

où, pour tout  $r = 1, \dots, R-1$ ,

$$\bar{\varsigma}_r = \max_{\bar{q}_{r-1} + 1 \leq k \leq \bar{q}_r} \varsigma_r(k) \quad \text{et } \bar{q}_r \in \{r+1, \dots, R\} \text{ est tel que } \bar{q}_{\bar{q}_r - 1} + 1 \leq \bar{\varsigma}_r \leq \bar{q}_{\bar{q}_r} \quad (5.46)$$

où la fonction  $\varsigma_r$  est donnée par la définition 5.3.3, et  $\epsilon > 0$  est un paramètre de synthèse. Notons que pour tout  $r = 1, \dots, R-1$ , l'entier  $\bar{q}_r$  vérifie  $\bar{q}_r \geq r+1$  par définition de la fonction  $P_r(k)$  et par suite de la fonction  $\varsigma_r$ , données respectivement par les définitions

5.3.2 et 5.3.3. Nous introduisons également la séquence d'entiers  $\sigma_i^k$  pour tout  $r = 1, \dots, R$ ,  $\bar{q}_{r-1} + 1, \dots, \bar{q}_r$ ,  $i = 1, \dots, \bar{\lambda}^k$ , comme suit

$$\begin{aligned}\sigma_i^k &= \sigma_1^{\bar{q}_{r-1}} - (\bar{\lambda}^k - 1) \delta^k + (i - 1) \delta^k \\ \sigma_1^{\bar{q}_{r-1}} &= \sum_{r_i=1}^r (\bar{\lambda}_1^{\bar{q}_{r_i-1}+1} - 1) \delta_1^{\bar{q}_{r_i-1}+1}\end{aligned}\quad (5.47)$$

Enfin, similairement aux matrices  $\Delta^k(\theta)$ , nous définissons, pour tout  $r = 1, \dots, R$ ,  $k = \bar{q}_{r-1} + 1, \dots, \bar{q}_r$ , la matrice diagonale  $\Lambda^k(\theta)$  par

$$\Lambda^k(\theta) = \theta^{-\sigma_1^k} \Delta^k(\theta) = \text{diag} \left( \frac{1}{\theta^{\sigma_1^k}}, \frac{1}{\theta^{\sigma_2^k}}, \dots, \frac{1}{\theta^{\sigma_{\bar{\lambda}^k}^k}} \right) \quad (5.48)$$

Nous établissons alors la proposition suivante.

**Proposition 5.5.1**

(i) La séquence d'entiers positifs  $\delta^k$  vérifie l'inégalité suivante :

$$\delta^1 > \delta^2 > \dots > \delta^{\bar{q}_1} > \delta^{\bar{q}_1+1} > \dots > \delta^{\bar{q}_{R-1}} > \delta^{\bar{q}_R} = 1 \quad (5.49)$$

(ii) La séquence d'entiers  $\sigma_i^k$  vérifie

$$\sigma_i^k \geq 0, \quad \text{pour tout } r = 1, \dots, R, \quad k = \bar{q}_{r-1} + 1, \dots, \bar{q}_r, \quad i = 1, \dots, \bar{\lambda}^k \quad (5.50)$$

**Preuve de la proposition 5.5.1.**

(i) Procédons par récurrence pour  $r = R, \dots, 1$ . Pour  $r = R$ , puisque  $\bar{\lambda}^k \geq 2$  pour tout  $k = \bar{q}_{R-1} + 1, \dots, \bar{q}_R$ , nous avons directement d'après (5.45)

$$\delta^k \geq \delta^{k+1} + \epsilon > \delta^{k+1}, \quad k = \bar{q}_{R-1} + 1, \dots, \bar{q}_R - 1$$

avec  $\delta^{\bar{q}_R} = 1$ . Soit maintenant  $r \in \{1, \dots, R-1\}$ , et supposons la relation (5.49) vraie pour les étages  $r+1, \dots, R$ . D'une part, puisque  $\bar{\lambda}^k \geq 2$  pour tout  $k = \bar{q}_{r-1} + 1, \dots, \bar{q}_r$ , nous avons directement d'après (5.45)

$$\delta^k \geq \delta^{k+1} + \epsilon > \delta^{k+1}, \quad k = \bar{q}_{r-1} + 1, \dots, \bar{q}_r - 1$$

D'autre part, puisque  $\bar{q}_r \geq r+1$ , il vient  $\bar{c}_r \geq \bar{q}_{\bar{q}_r-1} + 1 \geq \bar{q}_r + 1$  et par suite  $\delta^{\bar{c}_r} \leq \delta^{\bar{q}_r+1}$  puisque la relation (5.49) est vraie pour les étages  $r+1, \dots, R$ . Nous obtenons alors d'après (5.45),

$$\delta^{\bar{q}_r} \geq 2\delta^{\bar{q}_r+1} - \delta^{\bar{c}_r} + \epsilon \geq 2\delta^{\bar{q}_r+1} - \delta^{\bar{q}_r+1} + \epsilon > \delta^{\bar{q}_r+1}$$

Nous en déduisons alors que la relation (5.49) est vraie pour tout  $k = \bar{q}_{r-1} + 1, \dots, \bar{q}_r$  soit pour l'ensemble de la passe  $r$ . Par suite, la relation (5.49) pour tout  $r = 1, \dots, R$  et  $k = \bar{q}_{r-1} + 1, \dots, \bar{q}_r$ .

(ii) Notons que nous avons d'après (5.47), pour tout  $r = 1, \dots, R$ ,  $k = \bar{q}_{r-1} + 1, \dots, \bar{q}_r$ ,  $i = 1, \dots, \bar{\lambda}^k$ ,

$$\begin{aligned}\sigma_i^k &= \sum_{r_i=1}^r \left( \bar{\lambda}_1^{\bar{q}_{r_i-1}+1} - 1 \right) \delta_1^{\bar{q}_{r_i-1}+1} - \left( \bar{\lambda}^k - 1 \right) \delta^k + (i-1) \delta^k \\ &= \sum_{r_i=1}^r \left( \bar{\lambda}_1^{\bar{q}_{r_i-1}+1} - 1 \right) \delta_1^{\bar{q}_{r_i-1}+1} - \left( \bar{\lambda}^k - i \right) \delta^k\end{aligned}$$

Montrons que  $\sigma_i^k \geq 0$  pour tout  $r = 1, \dots, R$ ,  $k = \bar{q}_{r-1} + 1, \dots, \bar{q}_r$ ,  $i = 1, \dots, \bar{\lambda}^k$ .

• D'une part, pour tout  $r = 1, \dots, R$  et pour  $k = \bar{q}_{r-1} + 1$ , nous avons

$$\begin{aligned}\sigma_i^k &= \sum_{r_i=1}^r \left( \bar{\lambda}_1^{\bar{q}_{r_i-1}+1} - 1 \right) \delta_1^{\bar{q}_{r_i-1}+1} - \left( \bar{\lambda}^{\bar{q}_{r-1}+1} - i \right) \delta^{\bar{q}_{r-1}+1} \\ &\geq (i-1) \delta^{\bar{q}_{r-1}+1} \geq 0\end{aligned}$$

• D'autre part, pour tout  $r = 1, \dots, R$  et pour  $k > \bar{q}_{r-1} + 1$ , nous avons

$$\begin{aligned}\sigma_i^k &= \sum_{r_i=1}^r \left( \bar{\lambda}_1^{\bar{q}_{r_i-1}+1} - 1 \right) \delta_1^{\bar{q}_{r_i-1}+1} - \left( \bar{\lambda}^k - i \right) \delta^k \\ &\geq \left( \bar{\lambda}^{\bar{q}_{r-1}+1} - 1 \right) \delta^{\bar{q}_{r-1}+1} - \left( \bar{\lambda}^k - i \right) \delta^k \\ &\geq \left( \bar{\lambda}^{\bar{q}_{r-1}+1} - 1 \right) \delta^{\bar{q}_{r-1}+1} - \frac{\delta^{k-1}}{2} - \frac{\delta^k}{2} \quad \text{d'après (5.45)} \\ &\geq \left( \bar{\lambda}^{\bar{q}_{r-1}+1} - 2 \right) \delta^{\bar{q}_{r-1}+1} \geq 0 \quad \text{d'après la relation (5.49)}\end{aligned}$$

Ceci termine la preuve de la proposition 5.5.1.  $\square$

Dans ce qui suit, pour tout  $r = 1, \dots, R$ ,  $k = \bar{q}_{r-1} + 1, \dots, \bar{q}_r$ , nous choisissons la matrice de gain  $K^k$  de sorte que la matrice  $\bar{A}^k = A^k - K^k C^k$  soit Hurwitz, avec

$$C^k = \begin{bmatrix} I_{p_{b_k}} & 0_{p_{b_k}} & \dots & 0_{p_{b_k}} \end{bmatrix} \in R^{p_{b_k} \times \bar{n}^k}$$

Ainsi, il existe une matrice SDP  $P^k$  et un réel positif  $\mu^k$  tels que

$$P^k \bar{A}^k + (\bar{A}^k)^T P^k \leq -2\mu^k I_{\bar{\lambda}^k p_{b_k}} \quad (5.51)$$

D'après la structure des matrices diagonales  $\Delta^k(\theta)$  et  $\Lambda^k(\theta)$ , nous avons les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}\Lambda^k(\theta) \bar{A}^k \Lambda^k(\theta)^{-1} &= \Delta^k(\theta) \bar{A}^k \Delta^k(\theta)^{-1} = \theta^{\delta^k} \bar{A}^k \\ \theta^{-\sigma_1^k} C^k \Lambda^k(\theta)^{-1} &= C^k \Delta^k(\theta)^{-1} = C^k\end{aligned} \quad (5.52)$$

Pour finir, dans ce qui suit, nous notons  $\lambda_m(P^k)$  et  $\lambda_M(P^k)$  la plus petite valeur propre et la plus grande valeur propre de la matrice  $P^k$ , respectivement. De plus, soit  $\lambda_m(P)$  et  $\lambda_M(P)$

respectivement la plus petite et la plus grande valeur propre de la matrice  $P$ , définie par

$$P = \text{diag} \left( P^1, P^2, \dots, P^{\bar{q}_1}, P^{\bar{q}_1+1}, \dots, P^{\bar{q}_R} \right)$$

Avant de conclure de paragraphe et de passer à la synthèse de l'observateur, il convient de donner les deux lemmes techniques suivants.

**Lemme 5.5.1** *Soit*

$$\chi_{(l,j)}^{(k,i)} = \begin{cases} 0 & \text{si } \frac{\partial \psi_i^k(u,z)}{\partial z_j^l} \equiv 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

pour  $r, s = 1, \dots, R$ ,  $k = \bar{q}_{r-1} + 1, \dots, \bar{q}_r$ ,  $l = \bar{q}_{s-1} + 1, \dots, \bar{q}_s$ ,  $i = 1, \dots, \bar{\lambda}^k$  et  $j = 2, \dots, \bar{\lambda}^l$ . Alors, la séquence d'entiers positifs  $\sigma_i^k$  définie par (5.47) est telle que

$$\text{Si } \chi_{(l,j)}^{(k,i)} = 1, \text{ alors } \sigma_j^l - \sigma_i^k - \frac{\delta^l}{2} - \frac{\delta^k}{2} \leq -\frac{\epsilon}{2} \quad (5.53)$$

**Preuve du lemme 5.5.1.** D'une part, d'après la structure du système (5.41)-(5.42), nous avons  $\chi_{(l,j)}^{(k,i)} = 1$  pour  $r, s = 1, \dots, R$ ,  $k = \bar{q}_{r-1} + 1, \dots, \bar{q}_r$ ,  $l = \bar{q}_{s-1} + 1, \dots, \bar{q}_s$ ,  $i = 1, \dots, \bar{\lambda}^k$  et  $j = 2, \dots, \bar{\lambda}^l$  si et seulement si l'une des cinq situations suivantes est rencontrée.

- $r > s$ ,  $k \in \{\bar{q}_{r-1} + 1, \dots, \bar{q}_r\}$  et  $i \in \{1, \dots, \bar{\lambda}^k\}$  : Ceci traduit une dépendance triangulaire du système par rapport aux passes.
- $r = s$ ,  $k > l$  et  $i \in \{1, \dots, \bar{\lambda}^k\}$  : Ceci traduit une dépendance triangulaire d'une passe du système en fonction de ses sous-blocs.
- $r = s$ ,  $k = l$  et  $i \in \{1, \dots, \bar{\lambda}^k\}$  avec  $i \geq j$  : Ceci traduit la dépendance triangulaire d'un sous-bloc au sein d'une passe du système en fonction de ses propres variables.
- $r = 1, \dots, R - 1$ ,  $k \in \{\bar{q}_{r-1} + 1, \dots, \bar{q}_r\}$ ,  $i = \bar{\lambda}^k$ , et  $s \geq r + 1$ ,  $l \in \{\bar{q}_{s-1} + 1, \dots, \bar{q}_s\}$  avec  $l \leq \bar{q}_r$  : Ceci traduit le fait que la dernière composante de chaque sous-bloc  $k$  de chaque passe  $r = 1, \dots, R - 1$  peut dépendre de tous les états  $z^1, z^2, \dots, z^{\bar{q}_r}$ .
- $r = R$ ,  $k \in \{\bar{q}_{r-1} + 1, \dots, \bar{q}_r\}$ ,  $i = \bar{\lambda}^k$  : Ceci traduit le fait que la dernière composante de chaque sous-bloc  $k$  du dernier étage  $R$  peut dépendre de tout l'état du système.

D'autre part, de la relation (5.47), nous avons

$$\begin{aligned} \sigma_j^l - \sigma_i^k - \frac{\delta^l}{2} - \frac{\delta^k}{2} &= \sigma^{\bar{q}_{s-1}+1} - \sigma^{\bar{q}_{r-1}+1} - (\bar{\lambda}^l - 1) \delta^l + (j-1) \delta^l \\ &\quad + (\bar{\lambda}^k - 1) \delta^k - (i-1) \delta^k - \frac{\delta^l}{2} - \frac{\delta^k}{2} \\ &= \sigma^{\bar{q}_{s-1}+1} - \sigma^{\bar{q}_{r-1}+1} + \left( \bar{\lambda}^k - i - \frac{1}{2} \right) \delta^k + \left( j - \bar{\lambda}^l - \frac{1}{2} \right) \delta^l \end{aligned}$$

Vérifions désormais que la condition (5.53) est vérifiée dans chacun des cinq cas listés précédemment.

- $r > s$ ,  $k \in \{\bar{q}_{r-1} + 1, \dots, \bar{q}_r\}$  et  $i \in \{1, \dots, \bar{\lambda}^k\}$  : Nous avons en particulier, d'après (5.47) et puisque  $r > s$ ,

$$\begin{aligned} \sigma_j^l - \sigma_i^k - \frac{\delta^l}{2} - \frac{\delta^k}{2} &= - \sum_{r_i=s+1}^r (\bar{\lambda}^{\bar{q}_{r_i-1}+1} - 1) \delta^{\bar{q}_{r_i-1}+1} \\ &\quad + \left( \bar{\lambda}^k - i - \frac{1}{2} \right) \delta^k + \left( j - \bar{\lambda}^l - \frac{1}{2} \right) \delta^l \\ &\leq - (\bar{\lambda}^{\bar{q}_{r-1}+1} - 1) \delta^{\bar{q}_{r-1}+1} + \left( \bar{\lambda}^k - \frac{3}{2} \right) \delta^k - \frac{1}{2} \delta^l \quad \text{d'après (5.49)} \end{aligned}$$

Si  $k > \bar{q}_{r-1} + 1$ , alors

$$\left( \bar{\lambda}^k - \frac{3}{2} \right) \delta^k \leq \frac{1}{2} \delta^{k-1} \leq \frac{1}{2} \delta^{\bar{q}_{r-1}+1} \leq \left( \bar{\lambda}^{\bar{q}_{r-1}+1} - \frac{3}{2} \right) \delta^{\bar{q}_{r-1}+1} \quad \text{d'après (5.45),}$$

et par suite

$$\begin{aligned} \sigma_j^l - \sigma_i^k - \frac{\delta^l}{2} - \frac{\delta^k}{2} &\leq - (\bar{\lambda}^{\bar{q}_{r-1}+1} - 1) \delta^{\bar{q}_{r-1}+1} + \left( \bar{\lambda}^{\bar{q}_{r-1}+1} - \frac{3}{2} \right) \delta^{\bar{q}_{r-1}+1} - \frac{1}{2} \delta^l \\ &= -\frac{1}{2} \delta^{\bar{q}_{r-1}+1} - \frac{1}{2} \delta^l \leq -1 \leq -\frac{\epsilon}{2} \end{aligned}$$

- $r = s$ ,  $k > l$  et  $i \in \{1, \dots, \bar{\lambda}^k\}$  : Puisque  $r = s$  et  $k > l$ , il vient

$$\begin{aligned} \sigma_j^l - \sigma_i^k - \frac{\delta^l}{2} - \frac{\delta^k}{2} &= \left( \bar{\lambda}^k - i - \frac{1}{2} \right) \delta^k + \left( j - \bar{\lambda}^l - \frac{1}{2} \right) \delta^l \\ &\leq \left( \bar{\lambda}^k - \frac{3}{2} \right) \delta^k - \frac{1}{2} \delta^l \\ &\leq \frac{1}{2} \delta^{k-1} - \frac{1}{2} \delta^l - \frac{\epsilon}{2} \quad \text{d'après (5.45)} \\ &\leq -\frac{\epsilon}{2} \quad \text{d'après (5.49)} \end{aligned}$$

- $r = s$ ,  $k = l$  et  $i \in \{1, \dots, \bar{\lambda}^k\}$  avec  $i \geq j$  : Dans ce particulier, et puisque  $i \geq j$ , nous avons directement

$$\begin{aligned} \sigma_j^l - \sigma_i^k - \frac{\delta^l}{2} - \frac{\delta^k}{2} &= (j - i - 1) \delta^k \\ &\leq -\delta^k \leq -\frac{\epsilon}{2} \end{aligned}$$

- $r = 1, \dots, R-1$ ,  $k \in \{\bar{q}_{r-1} + 1, \dots, \bar{q}_r\}$ ,  $i = \bar{\lambda}^k$ , et  $s \geq r+1$ ,  $l \in \{\bar{q}_{s-1} + 1, \dots, \bar{q}_s\}$  avec  $l \leq \bar{\zeta}_r$  : Dans ce quatrième cas, puisque  $s \geq r$ , nous avons

$$\begin{aligned}
 \sigma_j^l - \sigma_i^k - \frac{\delta^l}{2} - \frac{\delta^k}{2} &= \sum_{r_i=r+1}^s (\bar{\lambda}^{\bar{q}_{r_i-1+1}} - 1) \delta^{\bar{q}_{r_i-1+1}} - \frac{1}{2} \delta^k + \left( j - \bar{\lambda}^l - \frac{1}{2} \right) \delta^l \\
 &\leq \sum_{r_i=r+1}^s (\bar{\lambda}^{\bar{q}_{r_i-1+1}} - 1) \delta^{\bar{q}_{r_i-1+1}} - \frac{1}{2} \delta^{\bar{q}_r} - \frac{1}{2} \delta^l \\
 &= \sum_{r_i=r+1}^s (\bar{\lambda}^{\bar{q}_{r_i-1+1}} - 1) \delta^{\bar{q}_{r_i-1+1}} - \sum_{r_i=r+1}^{\bar{q}_r} (\bar{\lambda}^{\bar{q}_{r_i-1+1}} - 1) \delta^{\bar{q}_{r_i-1+1}} \\
 &\quad + \frac{1}{2} \delta^{\bar{\zeta}_r} - \frac{\epsilon}{2} - \frac{1}{2} \delta^l \quad \text{d'après (5.45)} \\
 &\leq \frac{1}{2} \delta^{\bar{\zeta}_r} - \frac{1}{2} \delta^l - \frac{\epsilon}{2} \quad \text{puisque } s \leq \bar{q}_r \\
 &\leq -\frac{\epsilon}{2} \quad \text{puisque } l \leq \bar{\zeta}_r
 \end{aligned}$$

- $r = R$ ,  $k \in \{\bar{q}_{r-1} + 1, \dots, \bar{q}_r\}$ ,  $i = \bar{\lambda}^k$  : Dans ce dernier cas, nous avons directement

$$\begin{aligned}
 \sigma_j^l - \sigma_i^k - \frac{\delta^l}{2} - \frac{\delta^k}{2} &= \sigma_{\bar{q}_{s-1}+1}^l - \sigma_{\bar{q}_{R-1}+1}^k - \frac{1}{2} \delta^k + \left( j - \bar{\lambda}^l - \frac{1}{2} \right) \delta^l \\
 &\leq -\frac{1}{2} \delta^k - \frac{1}{2} \delta^l \quad \text{puisque } s \leq R \\
 &\leq -1 \leq -\frac{\epsilon}{2}
 \end{aligned}$$

Ceci termine la preuve du lemme 5.5.1.  $\square$

**Lemme 5.5.2** Soient  $r = 2, \dots, R$ ,  $k = \bar{q}_{r-1} + 1, \dots, \bar{q}_r$  tels que nous ayons  $P_r^{-1}(k) \neq 0$  et  $z_{\bar{\lambda}^{P_r^{-1}(k)}}^{P_r^{-1}(k)} = z_1^k$ . Alors

$$\sigma_{\bar{\lambda}^{P_r^{-1}(k)}}^{P_r^{-1}(k)} - \sigma_1^k - \frac{\delta^{P_r^{-1}(k)}}{2} + \frac{\delta^k}{2} \leq -\frac{\epsilon}{2}$$

**Preuve du lemme 5.5.2.** Soit  $s < r$  la passe contenant le bloc  $P_r^{-1}(k)$ , i.e. telle que

$\bar{q}_{s-1} + 1 \leq P_r^{-1}(k) \leq \bar{q}_s$ . De la relation (5.47), nous avons

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\lambda^{P_r^{-1}(k)}}^{P_r^{-1}(k)} - \sigma_1^k - \frac{\delta^{P_r^{-1}(k)}}{2} + \frac{\delta^k}{2} &= \sigma^{\bar{q}_{s-1}+1} - \sigma^{\bar{q}_{r-1}+1} + (\bar{\lambda}^k - 1) \delta^k - \frac{\delta^{P_r^{-1}(k)}}{2} + \frac{\delta^k}{2} \\
 &= - \sum_{r_i=s+1}^r (\bar{\lambda}^{\bar{q}_{r_i-1}+1} - 1) \delta^{\bar{q}_{r_i-1}+1} \\
 &\quad + (\bar{\lambda}^k - 1) \delta^k - \frac{\delta^{P_r^{-1}(k)}}{2} + \frac{\delta^k}{2} \\
 &\leq - \sum_{r_i=s+1}^r (\bar{\lambda}^{\bar{q}_{r_i-1}+1} - 1) \delta^{\bar{q}_{r_i-1}+1} \\
 &\quad + (\bar{\lambda}^{\bar{q}_{r-1}+1} - 1) \delta^{\bar{q}_{r-1}+1} - \frac{\delta^{P_r^{-1}(k)}}{2} + \frac{\delta^k}{2} \\
 &\leq \frac{\delta^k}{2} - \frac{\delta^{P_r^{-1}(k)}}{2} \leq -\frac{\epsilon}{2} \quad \text{d'après (5.45) et (5.49)}
 \end{aligned}$$

Ceci termine la preuve du lemme 5.5.2.  $\square$

### 5.5.2 Observateur

Avant de synthétiser un observateur pour l'immersion (5.41)-(5.42) du système (5.34)-(5.35), nous considérons les hypothèses suivantes sur le système (5.1).

**Hypothèse 5.5.1** *L'état  $\xi(t)$  et la commande  $u(t)$  sont bornés, i.e.  $\xi(t) \in \mathcal{X}$  et  $u(t) \in \mathcal{U}$  où  $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$  et  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$  sont des ensembles compacts.*

**Hypothèse 5.5.2** *La fonction  $\varphi(u, \xi)$  est une fonction non linéaire globalement Lipschitz sur  $\mathbb{R}^n$  selon  $\xi$  uniformément en  $u$ .*

**Hypothèse 5.5.3** *Pour tout  $k = \bar{q}_{R-1}+1, \dots, \bar{q}_R$ , la fonction inconnue  $\varepsilon^k$  est essentiellement bornée, i.e.*

$$\exists \delta_\varepsilon > 0 ; \forall k = \bar{q}_{R-1} + 1, \dots, \bar{q}_R, \quad \|\varepsilon^k\|_\infty = \text{ess sup}_{t \geq 0} \|\varepsilon^k(t)\| \leq \delta_\varepsilon$$

Un observateur pour l'immersion (5.41)-(5.42) du système (5.34)-(5.35) est donné par l'ensemble des équations différentielles suivantes, pour tout  $r = 1, \dots, R$  et  $k = \bar{q}_{r-1} + 1, \dots, \bar{q}_r$  :

$$\begin{aligned}
 \dot{\hat{z}}^k(t) &= A^k \hat{z}^k(t) + \psi^k(u(t), \hat{z}(t)) - G^k(t), \quad \text{avec} \\
 G^k(t) &= \begin{cases} \theta^{\delta^k} \Delta^k(\theta)^{-1} K^k (C^k \hat{z}^k(t) - y_{b_k}(t)) & \text{si } P_r^{-1}(k) = 0 \\ \theta^{\delta^k} \Delta^k(\theta)^{-1} K^k (C^k \hat{z}^k(t) - B^{P_r^{-1}(k)} \hat{z}^{P_r^{-1}(k)}(t)) & \text{si } P_r^{-1}(k) \neq 0 \end{cases} \quad (5.54)
 \end{aligned}$$

où  $u$  et  $y$  sont respectivement l'entrée et la sortie du système (5.1),  $\hat{z} \in \mathbb{R}^{\bar{n}}$  est une estimation de l'état de l'immersion (5.41)-(5.42) avec

$$\hat{z} = \begin{pmatrix} \hat{z}^1 \\ \hat{z}^2 \\ \vdots \\ \hat{z}^{\bar{q}_R} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\bar{n}} \quad \text{avec} \quad \hat{z}^k = \begin{pmatrix} \hat{z}_1^k \\ \hat{z}_2^k \\ \vdots \\ \hat{z}_{\bar{\lambda}^k}^k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\bar{n}^k}$$

où  $\hat{z}_i^k \in \mathbb{R}^{p_{b_k}}$ , pour  $r = 1, \dots, R$ ,  $k = \bar{q}_{r-1} + 1, \dots, \bar{q}_r$  et  $i = 1, \dots, \bar{\lambda}^k$ ,  $\theta > 0$  est le paramètre de synthèse de l'observateur grand gain, et  $\Delta^k(\theta)$ ,  $\delta^k$  et  $K^k$  sont définis dans le paragraphe précédent par (5.44), (5.45) et (5.51), respectivement. Enfin,  $\hat{z}$  représente une estimation par injection de sortie, c'est-à-dire

$$\hat{z}_i^k = \begin{cases} z_1^k & \text{si } P_r^{-1}(k) = 0 \text{ et } i = 1 \\ \hat{z}_i^k & \text{sinon} \end{cases}$$

Le résultat suivant stipule que le système dynamique (5.54) constitue un observateur convenable pour l'immersion (5.41)-(5.42) du système (5.34)-(5.35).

**Théorème 5.5.1** *Considérons l'immersion (5.41)-(5.42) du système (5.34)-(5.35) soumis aux hypothèses 5.2.1, 5.5.1, 5.5.2 et 5.5.3 conjointement avec l'observateur (5.54). Alors, il existe  $\theta_0 > 0$  tel que pour tout  $\theta > \theta_0$ , il existe  $\lambda_\theta > 0$  et  $\mu_\theta > 0$  tels que pour tout  $r = 1, \dots, R$ ,  $k = \bar{q}_{r-1} + 1, \dots, \bar{q}_r$ ,*

$$\|\hat{z}^k(t) - z^k(t)\| \leq \lambda_\theta e^{-\mu_\theta t} \|\hat{z}(0) - z(0)\| + \alpha_\theta \delta_\varepsilon$$

pour tout  $t \geq 0$ , pour toute entrée  $u \in \mathcal{U}$ , où  $\delta_\varepsilon$  est la borne essentielle supérieure de  $\|\varepsilon^k\|$  donnée par l'hypothèse 5.5.3, où  $\lambda_\theta$  est un polynôme en  $\theta$ ,  $\lim_{\theta \rightarrow +\infty} \mu_\theta = +\infty$  et  $\lim_{\theta \rightarrow +\infty} \alpha_\theta = 0$ .

**Preuve du théorème 5.5.1.** En guise de simplification d'écriture, il convient d'omettre dans ce paragraphe le temps  $t$  de chaque variable. Pour  $r = 1, \dots, R$  et  $k = \bar{q}_{r-1} + 1, \dots, \bar{q}_r$ , posons

$$\tilde{z}^k = \hat{z}^k - z^k \quad \text{et} \quad \bar{z}^k = \Lambda^k(\theta) \tilde{z}^k$$

où  $\Lambda^k(\theta)$  est défini par (5.48). Posons également

$$V_k^r(\bar{z}^k) = (\bar{z}^k)^T P^k \bar{z}^k \quad (5.55)$$

où  $P^k$  est la matrice SDP définie par (5.51), et soit

$$V = \sum_{r=1}^R \sum_{k=\bar{q}_{r-1}+1}^{\bar{q}_r} V^k$$



la fonction de Lyapunov candidate. Enfin, nous notons

$$(V^k)^* = \theta^{\delta^k} V^k \quad \text{et} \quad V^* = \sum_{r=1}^R \sum_{k=\bar{q}_{r-1}+1}^{\bar{q}_r} (V^k)^* \quad (5.56)$$

Remarquons simplement que nous avons, pour  $\theta \geq 1$ , la relation suivante

$$V^* \geq \sum_{r=1}^R \sum_{k=\bar{q}_{r-1}+1}^{\bar{q}_r} \theta^{\delta^{\bar{q}_R}} V^k = \theta \sum_{r=1}^R \sum_{k=\bar{q}_{r-1}+1}^{\bar{q}_r} V^k = \theta V$$

Dans la suite de la preuve, nous allons considérer deux situations possibles, pour tout  $r = 1, \dots, R$  et  $k = 1, \dots, q^r$  : les cas  $P_r^{-1}(k) = 0$  et  $P_r^{-1}(k) \neq 0$ .

**Cas  $P_r^{-1}(k) = 0$  :** Dans ce cas, d'après (5.54), l'observateur s'écrit

$$\begin{aligned} \dot{\hat{z}}^k &= A^k \hat{z}^k + \psi^k(u, \hat{z}) - \theta^{\delta^k} \Delta^k(\theta)^{-1} K^k \left( C^k \hat{z}^k - y_{b_k} \right) - B^k \bar{\varepsilon}^k \\ &= A^k \hat{z}^k + \psi^k(u, \hat{z}) - \theta^{\delta^k} \Delta^k(\theta)^{-1} K^k C^k \left( \hat{z}^k - z^k \right) - B^k \bar{\varepsilon}^k, \end{aligned}$$

et par suite

$$\dot{\hat{z}}^k = A^k \hat{z}^k + \tilde{\psi}^k(u, \hat{z}, z) - \theta^{\delta^k} \Delta^k(\theta)^{-1} K^k C^k \hat{z}^k - B^k \bar{\varepsilon}^k,$$

en posant  $\tilde{\psi}^k(u, \hat{z}, z) = \psi^k(u, \hat{z}) - \psi^k(u, z)$ . Le passage à la variable d'état  $\bar{z}^k$  nous donne alors

$$\begin{aligned} \dot{\bar{z}}^k &= \Lambda^k(\theta) A^k \Lambda^k(\theta)^{-1} \bar{z}^k + \Lambda^k(\theta) \tilde{\psi}^k(u, \hat{z}, z) \\ &\quad - \theta^{\delta^k} \Lambda^k(\theta) \Delta^k(\theta)^{-1} K^k C^k \Lambda^k(\theta)^{-1} \bar{z}^k - \Lambda^k(\theta) B^k \bar{\varepsilon}^k \\ &= \Lambda^k(\theta) A^k \Lambda^k(\theta)^{-1} \bar{z}^k + \Lambda^k(\theta) \tilde{\psi}^k(u, \hat{z}, z) - \theta^{\delta^k} \theta^{-\sigma_1^k} K^k C^k \Lambda^k(\theta)^{-1} \bar{z}^k - \Lambda^k(\theta) B^k \bar{\varepsilon}^k \\ &= \theta^{\delta^k} A^k \bar{z}^k + \Lambda^k(\theta) \tilde{\psi}^k(u, \hat{z}, z) - \theta^{\delta^k} K^k C^k \bar{z}^k - \Lambda^k(\theta) B^k \bar{\varepsilon}^k \quad \text{d'après les identités (5.52)} \\ &= \theta^{\delta^k} \bar{A}^k \bar{z}^k + \Lambda^k(\theta) \tilde{\psi}^k(u, \hat{z}, z) - \Lambda^k(\theta) B^k \bar{\varepsilon}^k \quad (5.57) \end{aligned}$$

La dérivée par rapport au temps de la fonction  $V^k$  définie par (5.55) est telle que

$$\begin{aligned} \dot{V}^k &= 2(\bar{z}^k)^T P^k \dot{\bar{z}}^k \\ &= 2\theta^{\delta^k} (\bar{z}^k)^T P^k \bar{A}^k \bar{z}^k + 2(\bar{z}^k)^T P^k \Lambda^k(\theta) \tilde{\psi}^k(u, \hat{z}, z) - 2(\bar{z}^k)^T P^k \Lambda^k(\theta) B^k \bar{\varepsilon}^k \end{aligned}$$

En exploitant l'inégalité (5.51), la dérivée  $\dot{V}^k$  vérifie alors

$$\begin{aligned} \dot{V}^k &\leq -2\mu^k \theta^{\delta^k} \|\bar{z}^k\|^2 + 2\|P^k \bar{z}^k\| \|\Lambda^k(\theta) \tilde{\psi}^k(u, \hat{z}, z)\| + 2\|P^k \bar{z}^k\| \|\Lambda^k(\theta) B^k \bar{\varepsilon}^k\| \\ &\leq -\frac{2\mu^k}{\lambda_M(P^k)} \theta^{\delta^k} V^k + 2\sqrt{\lambda_M(P^k)} \sqrt{V^k} \sum_{i=1}^{\bar{\lambda}^k} \frac{1}{\theta^{\sigma_i^k}} \|\tilde{\psi}^k(u, \hat{z}, z)\| \\ &\quad + 2\theta^{-\sigma_{\bar{\lambda}^k}^k} \sqrt{\lambda_M(P^k)} \sqrt{V^k} \|\bar{\varepsilon}^k\| \end{aligned}$$

D'autre part, d'après l'hypothèse 5.5.2,  $\frac{\partial \psi}{\partial x}$  est borné et nous obtenons

$$\begin{aligned} \dot{V}^k &\leq -\frac{2\mu^k}{\lambda_M(P^k)}\theta^{\delta^k}V^k + 2\rho^k\sqrt{\lambda_M(P^k)}\sqrt{V^k}\sum_{i=1}^{\bar{\lambda}^k}\sum_{s=1}^R\sum_{l=\bar{q}_{s-1}+1}^{\bar{q}_s}\sum_{j=2}^{\bar{\lambda}^l}\chi_{(l,j)}^{(k,i)}\theta^{-\sigma_i^k}\|\bar{z}^k\| \\ &\quad + 2\theta^{-\sigma_{\bar{\lambda}^k}^k}\sqrt{\lambda_M(P^k)}\sqrt{V^k}\|\bar{\varepsilon}^k\| \end{aligned} \quad (5.58)$$

où

$$\rho^k \triangleq \sup \left\{ \left\| \frac{\partial \psi_i^k}{\partial x_j^l}(u, x) \right\| \mid x \in \mathbb{R}^{\bar{n}} \text{ et } \|u\|_\infty \leq M \right\}$$

et où  $\chi_{(l,j)}^{(k,i)}$  est donné par le lemme 5.5.1. L'inégalité précédente (5.58) peut se réécrire comme suit

$$\begin{aligned} \dot{V}^k &\leq -\frac{2\mu^k}{\lambda_M(P^k)}\theta^{\delta^k}V^k + 2\rho^k\sqrt{\lambda_M(P^k)}\sqrt{V^k}\sum_{i=1}^{\bar{\lambda}^k}\sum_{s=1}^R\sum_{l=\bar{q}_{s-1}+1}^{\bar{q}_s}\sum_{j=2}^{\bar{\lambda}^l}\chi_{(l,j)}^{(k,i)}\theta^{\sigma_j^l-\sigma_i^k}\|\bar{z}^k\| \\ &\quad + 2\theta^{-\sigma_{\bar{\lambda}^k}^k}\sqrt{\lambda_M(P^k)}\sqrt{V^k}\|\bar{\varepsilon}^k\| \\ &\leq -\frac{2\mu^k}{\lambda_M(P)}\theta^{\delta^k}V^k + 2\eta\rho^k\sqrt{V^k}\sum_{i=1}^{\bar{\lambda}^k}\sum_{s=1}^R\sum_{l=\bar{q}_{s-1}+1}^{\bar{q}_s}\sum_{j=2}^{\bar{\lambda}^l}\chi_{(l,j)}^{(k,i)}\theta^{\sigma_j^l-\sigma_i^k}\sqrt{V^l} \\ &\quad + 2\theta^{-\sigma_{\bar{\lambda}^k}^k}\sqrt{\lambda_M(P^k)}\sqrt{V^k}\|\bar{\varepsilon}^k\| \end{aligned} \quad (5.59)$$

en posant  $\eta = \sqrt{\frac{\lambda_M(P)}{\lambda_m(P)}}$ . Enfin, en utilisant (5.56), l'inégalité (5.59) vérifie

$$\begin{aligned} \dot{V}^k &\leq -\frac{2\mu^k}{\lambda_M(P)}\theta^{\delta^k}V^k + 2\eta\rho^k\sqrt{\theta^{\delta^k}V^k}\sum_{i=1}^{\bar{\lambda}^k}\sum_{s=1}^R\sum_{l=\bar{q}_{s-1}+1}^{\bar{q}_s}\sum_{j=2}^{\bar{\lambda}^l}\chi_{(l,j)}^{(k,i)}\theta^{\sigma_j^l-\sigma_i^k-\frac{\delta^k}{2}-\frac{\delta^l}{2}}\sqrt{\theta^{\delta^l}V^l} \\ &\quad + 2\theta^{-\sigma_{\bar{\lambda}^k}^k}\sqrt{\lambda_M(P^k)}\sqrt{V^k}\|\bar{\varepsilon}^k\| \\ &= -\frac{2\mu^k}{\lambda_M(P)}(V^k)^* + 2\eta\rho^k\sqrt{(V^k)^*}\sum_{i=1}^{\bar{\lambda}^k}\sum_{s=1}^R\sum_{l=\bar{q}_{s-1}+1}^{\bar{q}_s}\sum_{j=2}^{\bar{\lambda}^l}\chi_{(l,j)}^{(k,i)}\theta^{\sigma_j^l-\sigma_i^k-\frac{\delta^k}{2}-\frac{\delta^l}{2}}\sqrt{(V^l)^*} \\ &\quad + 2\theta^{-\sigma_{\bar{\lambda}^k}^k}\sqrt{\lambda_M(P^k)}\sqrt{V^k}\|\bar{\varepsilon}^k\| \end{aligned}$$

Par application du lemme 5.5.1, il vient

$$\sigma_j^l - \sigma_i^k - \frac{\delta^k}{2} - \frac{\delta^l}{2} \leq -\frac{\epsilon}{2}$$

ce qui mène à

$$\begin{aligned}
 \dot{V}^k &\leq -\frac{2\mu^k}{\lambda_M(P)}(V^k)^* + 2\eta\rho^k\sqrt{(V^k)^*}\sum_{i=1}^{\bar{\lambda}^k}\sum_{s=1}^R\sum_{l=\bar{q}_{s-1}+1}^{\bar{q}_s}\sum_{j=2}^{\bar{\lambda}^l}\theta^{-\frac{\epsilon}{2}}\sqrt{(V^l)^*} \\
 &\quad + 2\theta^{-\sigma_{\bar{\lambda}^k}^k}\sqrt{\lambda_M(P)}\sqrt{V^k}\|\bar{\epsilon}^k\| \\
 &= -\frac{2\mu^k}{\lambda_M(P)}(V^k)^* + 2\eta\bar{\lambda}^k\rho^k\sqrt{(V^k)^*}\theta^{-\frac{\epsilon}{2}}\sum_{s=1}^R\sum_{l=\bar{q}_{s-1}+1}^{\bar{q}_s}\sum_{j=2}^{\bar{\lambda}^l}\sqrt{(V^l)^*} \\
 &\quad + 2\theta^{-\sigma_{\bar{\lambda}^k}^k}\sqrt{\lambda_M(P)}\sqrt{V^k}\|\bar{\epsilon}^k\| \\
 &\leq -\frac{2\mu^k}{\lambda_M(P)}(V^k)^* + 2\eta\bar{\lambda}^k\rho^k\theta^{-\frac{\epsilon}{2}}\sqrt{V^*}\sum_{s=1}^R\sum_{l=\bar{q}_{s-1}+1}^{\bar{q}_s}\sum_{j=2}^{\bar{\lambda}^l}\sqrt{V^*} + 2\theta^{-\sigma_{\bar{\lambda}^k}^k}\sqrt{\lambda_M(P)}\sqrt{V}\|\bar{\epsilon}^k\| \\
 &\leq -\frac{2\mu^k}{\lambda_M(P)}(V^k)^* + 2\eta\bar{n}\bar{\lambda}^k\rho^k\theta^{-\frac{\epsilon}{2}}V^* + 2\theta^{-\sigma_{\bar{\lambda}^k}^k}\sqrt{\lambda_M(P)}\sqrt{V}\|\bar{\epsilon}^k\| \tag{5.60}
 \end{aligned}$$

**Cas  $P_r^{-1}(k) \neq 0$  :** Dans ce second cas, d'après (5.54), l'observateur s'écrit

$$\begin{aligned}
 \dot{\hat{z}}^k &= A^k\hat{z}^k + \psi^k(u, \hat{z}) - \theta^{\delta^k}\Delta^k(\theta)^{-1}K^k\left(C^k\hat{z}^k - B^{P_r^{-1}(k)}\hat{z}^{P_r^{-1}(k)}\right) - B^k\bar{\epsilon}^k \\
 &= A^k\hat{z}^k + \psi^k(u, \hat{z}) - \theta^{\delta^k}\Delta^k(\theta)^{-1}K^kC^k\hat{z}^k + \theta^{\delta^k}\Delta^k(\theta)^{-1}K^kB^{P_r^{-1}(k)}\hat{z}^{P_r^{-1}(k)} - B^k\bar{\epsilon}^k,
 \end{aligned}$$

puisque  $z_1^k = z_{\frac{\lambda^{P_r^{-1}(k)}}{\lambda^{P_r^{-1}(k)}}}$ . En procédant de manière similaire au cas précédent, nous trouvons

$$\dot{\hat{z}}^k = \theta^{\delta^k}\bar{A}^k\hat{z}^k + \Lambda^k(\theta)\tilde{\psi}^k(u, \hat{z}, z) + \theta^{\left(\delta^k - \sigma_1^k + \sigma_{\frac{\lambda^{P_r^{-1}(k)}}{\lambda^{P_r^{-1}(k)}}}\right)}K^kB^k\hat{z}^{P_r^{-1}(k)} - B^k\bar{\epsilon}^k$$

En utilisant exactement le même raisonnement pour la dérivée  $\dot{V}_k^r$  par rapport au premier cas, nous obtenons alors

$$\begin{aligned}
 \dot{V}^k &\leq -\frac{2\mu^k}{\lambda_M(P)}(V^k)^* + 2\eta\bar{n}\bar{\lambda}^k\rho^k\theta^{-\frac{\epsilon}{2}}V^* + 2\theta^{-\sigma_{\bar{\lambda}^k}^k}\sqrt{\lambda_M(P)}\sqrt{V}\|\bar{\epsilon}^k\| \\
 &\quad + 2\theta^{\left(\delta^k - \sigma_1^k + \sigma_{\frac{\lambda^{P_r^{-1}(k)}}{\lambda^{P_r^{-1}(k)}}}\right)}(\bar{z}^k)^T P^k K^k B^k \bar{z}^{P_r^{-1}(k)}
 \end{aligned}$$

Notons que l'on a

$$\begin{aligned}
 2\theta^{\left(\delta^k - \sigma_1^k + \sigma_{\frac{\lambda^{P_r^{-1}(k)}}{\lambda^{P_r^{-1}(k)}}}\right)}(\bar{z}^k)^T P^k K^k B^k \bar{z}^{P_r^{-1}(k)} &\leq 2\theta^{\left(\delta^k - \sigma_1^k + \sigma_{\frac{\lambda^{P_r^{-1}(k)}}{\lambda^{P_r^{-1}(k)}}}\right)}\|P^k\bar{z}^k\|\|K^k\|\|\bar{z}^{P_r^{-1}(k)}\| \\
 &\leq 2\eta\bar{K}\theta^{\left(\sigma_{\frac{\lambda^{P_r^{-1}(k)}}{\lambda^{P_r^{-1}(k)}}} - \sigma_1^k - \frac{\delta^{P_r^{-1}(k)}}{2} + \frac{\delta^k}{2}\right)}\sqrt{(V^k)^*}\sqrt{(V^{P_r^{-1}(k)})^*}
 \end{aligned}$$

où

$$\bar{K} = \max\left\{\|K^k\|, \quad k = 1, \dots, \bar{q}_R\right\}$$

D'après le lemme 5.5.2, nous avons

$$\sigma_{\bar{\lambda}^{P_r^{-1}(k)}}^{P_r^{-1}(k)} - \sigma_1^k - \frac{\delta^{P_r^{-1}(k)}}{2} + \frac{\delta^k}{2} \leq -\frac{\epsilon}{2}$$

de sorte que  $\dot{V}^k$  vérifie l'inégalité suivante

$$\begin{aligned} \dot{V}^k &\leq -\frac{2\mu^k}{\lambda_M(P)}(V^k)^* + 2\eta\bar{n}\bar{\lambda}^k\rho^k\theta^{-\frac{\epsilon}{2}}V^* + 2\eta\theta^{-\frac{\epsilon}{2}}\bar{K}V^* + 2\theta^{-\sigma_{\bar{\lambda}^k}^k}\sqrt{\lambda_M(P)}\sqrt{V}\|\varepsilon^k\| \\ &= -\frac{2\mu^k}{\lambda_M(P)}(V^k)^* + 2\eta(\bar{n}\bar{\lambda}^k\rho^k + \bar{K})\theta^{-\frac{\epsilon}{2}}V^* + 2\theta^{-\sigma_{\bar{\lambda}^k}^k}\sqrt{\lambda_M(P)}\sqrt{V}\|\varepsilon^k\| \end{aligned} \quad (5.61)$$

**Regroupement des deux cas :** Remarquons tout d'abord que seulement  $q$  sous-blocs vérifient le premier cas, alors que les  $\bar{q}_R - q$  sous-blocs restants vérifient le second cas. Ainsi, la combinaison des deux inégalités (5.60) et (5.61) pour les cas  $P_r^{-1}(k) = 0$  et  $P_r^{-1}(k) \neq 0$  respectivement nous donne

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \sum_{r=1}^R \sum_{k=\bar{q}_{r-1}+1}^{\bar{q}_r} \dot{V}^k \\ &\leq -2\left(\frac{\mu}{\lambda_M(P)} - \eta(\bar{n}^2\rho + q(R-1)\bar{K})\theta^{-\frac{\epsilon}{2}}\right)V^* + \sum_{r=1}^R \sum_{k=\bar{q}_{r-1}+1}^{\bar{q}_r} 2\theta^{-\sigma_{\bar{\lambda}^k}^k}\sqrt{\lambda_M(P)}\sqrt{V}\|\varepsilon^k\| \\ &= -2\left(\frac{\mu}{\lambda_M(P)} - \eta(\bar{n}^2\rho + q(R-1)\bar{K})\theta^{-\frac{\epsilon}{2}}\right)V^* \\ &\quad + \sum_{k=\bar{q}_{R-1}+1}^{\bar{q}_R} 2\theta^{-\sigma_{\bar{\lambda}^k}^k}\sqrt{\lambda_M(P)}\sqrt{V}\|\varepsilon^k\| \text{ d'après (5.43),} \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \mu &= \max\{\|\mu^k\|, k = 1, \dots, \bar{q}_R\} \\ \rho &= \max\{\|\rho^k\|, k = 1, \dots, \bar{q}_R\} \end{aligned}$$

Choisissons  $\theta$  de telle sorte que

$$\theta > \theta_0 \triangleq \max\left\{\left[\frac{\eta\lambda_M(P)}{\mu}(\bar{n}^2\rho + q(R-1)\bar{K})\right]^{\frac{2}{\epsilon}}, 1\right\},$$

et puisque  $V^* \geq \theta V$  car  $\theta \geq 1$ , alors

$$\frac{\mu}{\lambda_M(P)} - \eta(\bar{n}^2\rho + q(R-1)\bar{K})\theta^{-\frac{\epsilon}{2}} > 0, \quad \forall \theta > \theta_0,$$

et nous obtenons

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -2\theta\left(\frac{\mu}{\lambda_M(P)} - \eta(\bar{n}^2\rho + q(R-1)\bar{K})\theta^{-\frac{\epsilon}{2}}\right)V + \sum_{k=\bar{q}_{R-1}+1}^{\bar{q}_R} 2\theta^{-\sigma_{\bar{\lambda}^k}^k}\sqrt{\lambda_M(P)}\sqrt{V}\|\varepsilon^k\| \\ &\leq -2\theta\left(\frac{\mu}{\lambda_M(P)} - \eta(\bar{n}^2\rho + q(R-1)\bar{K})\theta^{-\frac{\epsilon}{2}}\right)V + 2q_R\sqrt{\lambda_M(P)}\sqrt{V}\frac{\delta_\varepsilon}{\theta\sigma_1^{\bar{q}_{R-1}}} \end{aligned}$$

puisque  $\sigma_{\bar{\lambda}^k}^k = \sum_{r_i=1}^R \left( \bar{\lambda}_1^{\bar{q}_{r_i-1+1}} - 1 \right) \delta_1^{\bar{q}_{r_i-1+1}} = \sigma_1^{\bar{q}_{R-1}}$  pour tout  $k = \bar{q}_{R-1} + 1, \dots, \bar{q}_R$ , d'après (5.47). De manière équivalente, nous avons

$$\frac{d}{dt} \left( \sqrt{V(\bar{z}(t))} \right) \leq -\theta \left( \frac{\mu}{\lambda_M(P)} - \eta(\bar{n}^2 \rho + q(R-1)\bar{K})\theta^{-\frac{\epsilon}{2}} \right) \sqrt{V(\bar{z}(t))} + q_R \sqrt{\lambda_M(P)} \frac{\delta_\epsilon}{\theta^{\sigma_1^{\bar{q}_{R-1}}}}$$

Cette dernière relation mène en particulier par application du lemme de comparaison à

$$\begin{aligned} \sqrt{V^k(\bar{z}^k(t))} &\leq \sqrt{V(\bar{z}(t))} \\ &\leq \exp \left( -\theta \left( \frac{\mu}{\lambda_M(P)} - \eta(\bar{n}^2 \rho + q(R-1)\bar{K})\theta^{-\frac{\epsilon}{2}} \right) t \right) \sqrt{V(\bar{z}(0))} \\ &\quad + q_R \sqrt{\lambda_M(P)} \frac{\delta_\epsilon}{\left( \frac{\mu}{\lambda_M(P)} - \eta(\bar{n}^2 \rho + q(R-1)\bar{K})\theta^{-\frac{\epsilon}{2}} \right) \theta^{(1+\sigma_1^{\bar{q}_{R-1}})}} \end{aligned} \quad (5.62)$$

D'une part, nous avons

$$\frac{\sqrt{V(\bar{z})}}{\sqrt{\lambda_M(P)}} \leq \|\bar{z}\| \leq \frac{\sqrt{V(\bar{z})}}{\sqrt{\lambda_m(P)}} \quad (5.63)$$

D'autre part,

$$\frac{\sqrt{V^k(\bar{z}^k)}}{\sqrt{\lambda_M(P)}} \leq \frac{\sqrt{V^k(\bar{z}^k)}}{\sqrt{\lambda_M(P^k)}} \leq \|\bar{z}^k\| \leq \frac{\sqrt{V^k(\bar{z}^k)}}{\sqrt{\lambda_m(P^k)}} \leq \frac{\sqrt{V^k(\bar{z}^k)}}{\sqrt{\lambda_m(P)}} \quad (5.64)$$

et

$$\|\bar{z}^k\| \leq \|\bar{z}^k\| \leq \theta^{(\sigma_1^k + (\bar{\lambda}^k - 1)\delta^k)} \|\bar{z}^k\|, \quad (5.65)$$

Les relations (5.63) et (5.65) mènent à

$$\sqrt{V(\bar{z})} \leq \sqrt{\lambda_M(P)} \|\bar{z}\| \leq \sqrt{\lambda_M(P)} \|\bar{z}\| \quad (5.66)$$

et la combinaison des relations (5.64) et (5.65) nous donne

$$\|\bar{z}^k\| \leq \theta^{(\sigma_1^k + (\bar{\lambda}^k - 1)\delta^k)} \|\bar{z}^k\| \leq \theta^{(\sigma_1^k + (\bar{\lambda}^k - 1)\delta^k)} \frac{\sqrt{V^k(\bar{z}^k)}}{\sqrt{\lambda_m(P)}} \quad (5.67)$$

L'association des inégalités (5.62), (5.66) et (5.67) amène finalement à

$$\begin{aligned} \|\bar{z}^k(t)\| &\leq \frac{\theta^{(\sigma_1^k + (\bar{\lambda}^k - 1)\delta^k)}}{\sqrt{\lambda_m(P)}} \exp \left( -\theta \left( \frac{\mu}{\lambda_M(P)} - \eta(\bar{n}^2 \rho + q(R-1)\bar{K})\theta^{-\frac{\epsilon}{2}} \right) t \right) \sqrt{V(\bar{z}(0))} \\ &\quad + q_R \eta \frac{\theta^{(\sigma_1^k + (\bar{\lambda}^k - 1)\delta^k)} \delta_\epsilon}{\left( \frac{\mu}{\lambda_M(P)} - \eta(\bar{n}^2 \rho + q(R-1)\bar{K})\theta^{-\frac{\epsilon}{2}} \right) \theta^{(1+\sigma_1^{\bar{q}_{R-1}})}} \\ &\leq \eta \theta^{(\sigma_1^k + (\bar{\lambda}^k - 1)\delta^k)} \exp \left( -\theta \left( \frac{\mu}{\lambda_M(P)} - \eta(\bar{n}^2 \rho + q(R-1)\bar{K})\theta^{-\frac{\epsilon}{2}} \right) t \right) \|\bar{z}(0)\| \\ &\quad + q_R \eta \frac{\theta^{(\sigma_1^k + (\bar{\lambda}^k - 1)\delta^k)} \delta_\epsilon}{\left( \frac{\mu}{\lambda_M(P)} - \eta(\bar{n}^2 \rho + q(R-1)\bar{K})\theta^{-\frac{\epsilon}{2}} \right) \theta^{(1+\sigma_1^{\bar{q}_{R-1}})}} \\ &\leq \eta \theta^{(\sigma_1^{\bar{q}_{R-1}})} \exp \left( -\theta \left( \frac{\mu}{\lambda_M(P)} - \eta(\bar{n}^2 \rho + q(R-1)\bar{K})\theta^{-\frac{\epsilon}{2}} \right) t \right) \|\bar{z}(0)\| \\ &\quad + q_R \eta \frac{\delta_\epsilon}{\left( \frac{\mu}{\lambda_M(P)} - \eta(\bar{n}^2 \rho + q(R-1)\bar{K})\theta^{-\frac{\epsilon}{2}} \right) \theta} \end{aligned}$$

en remarquant d'après (5.47) que

$$\begin{aligned}\sigma_1^{\bar{q}_{R-1}} &= \sum_{r_i=1}^R \left( \bar{\lambda}_1^{\bar{q}_{r_i-1}+1} - 1 \right) \delta_1^{\bar{q}_{r_i-1}+1} \\ &\geq \sigma_1^k + (\bar{\lambda}^k - 1)\delta^k, \quad r = 1, \dots, R, \quad k = \bar{q}_{r-1} + 1, \dots, \bar{q}_r\end{aligned}$$

Nous obtenons donc

$$\|\hat{z}^k(t) - z^k(t)\| \leq \lambda_\theta e^{-\mu_\theta t} \|\hat{z}(0) - z(0)\| + \alpha_\theta \delta_\varepsilon$$

où les paramètres  $\theta_0$ ,  $\lambda_\theta$ ,  $\mu_\theta$  et  $\alpha_\theta$  du théorème 5.5.1 sont donnés par

$$\begin{aligned}\theta_0 &= \max \left\{ \left[ \frac{\eta \lambda_M(P)}{\mu} (\bar{n}^2 \rho + q(R-1)\bar{K}) \right]^{\frac{2}{\varepsilon}}, 1 \right\} \\ \lambda_\theta &= \eta \theta \left( \sum_{r_i=1}^R \left( \bar{\lambda}_1^{\bar{q}_{r_i-1}+1} - 1 \right) \delta_1^{\bar{q}_{r_i-1}+1} \right) \\ \mu_\theta &= \theta \left( \frac{\mu}{\lambda_M(P)} - \eta (\bar{n}^2 \rho + q(R-1)\bar{K}) \theta^{-\frac{\varepsilon}{2}} \right) \\ \alpha_\theta &= \frac{qR\eta}{\left( \frac{\mu}{\lambda_M(P)} - \eta (\bar{n}^2 \rho + q(R-1)\bar{K}) \theta^{-\frac{\varepsilon}{2}} \right) \theta}\end{aligned}$$

Ceci termine la preuve du théorème 5.5.1.  $\square$

## 5.6 Exemple : Application à un système hydraulique

Les systèmes hydrauliques à réservoirs sont communément utilisés dans l'industrie, dans le cas notamment où l'on considère des échanges de liquide entre réservoirs. De nombreuses études sur les systèmes de réservoirs se trouvent dans la littérature (IQBAL et al. 2009 ; IBRIR 2011 ; LIN et al. 2012). En particulier, dans (IQBAL et al. 2009 ; IQBAL et al. 2011), un système à trois réservoirs en série avec des paramètres inconnus (débit, coefficients de viscosité) est considéré. Un observateur d'état étendu est alors utilisé afin d'estimer les états du système et les paramètres inconnus. Dans (IQBAL et al. 2009), ce système est également étudié dans le but de réaliser une détection de défauts sur d'éventuels blocages de tuyauterie entre réservoirs.

Dans cette partie, un système de réservoirs plus général comportant deux cascades de trois réservoirs est envisagé. D'autre part, des interconnexions entre réservoirs des deux cascades sont possibles, de sorte que le système proposé est plus complexe et plus réaliste. Le but de cette étude est d'estimer la hauteur de liquide de chaque réservoir du système, en ne connaissant que la hauteur de liquide du réservoir inférieur de chaque cascade.

Dans ce qui suit, nous supposons que chaque réservoir contient uniquement de l'eau. Dans un premier temps, après avoir introduit le modèle hydraulique, nous le poserons sous la forme décomposée en étages (5.34)-(5.35). Ensuite, une immersion sera construite sur ce dernier, et un observateur grand gain sera synthétisé.

### 5.6.1 Description du système d'étude

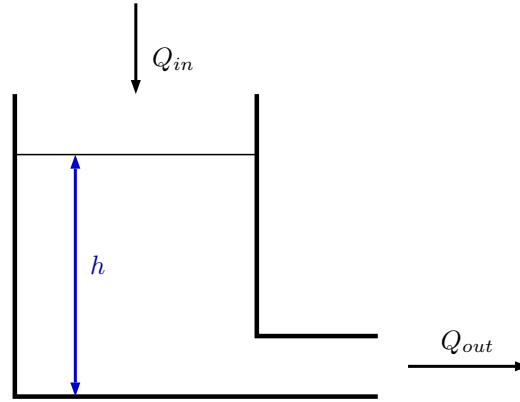


FIGURE 5.2 – Modélisation d'un réservoir

Avant tout, d'après (IQBAL et al. 2009), tout réservoir comme décrit par la figure 5.2 vérifie l'équation différentielle suivante

$$\dot{h}(t) = Q_{in} - Q_{out} = Q_{in} - c\sqrt{h(t)} \quad (5.68)$$

où  $c = \frac{s_p}{S}\sqrt{2g}$ , avec  $g = 9.81m/s^2$ , et où  $s_p$  et  $S$  sont la section transversale du tuyau de sortie et l'aire du réservoir, respectivement.

Considérons dans ce qui suit deux cascades de trois réservoirs, inter-connectés comme décrit par la figure 5.3. On désigne par  $h_{ij}$  la hauteur (en mètres) de l'eau dans le réservoir  $j$  de la cascade  $i$ , pour  $i = 1, 2, j = 1, \dots, 3$ .  $Q_{ij}$  désigne le débit d'eau qui sort du réservoir  $j$  de la cascade  $i$  et qui est entièrement déversé dans le réservoir suivant. Notons que le débit d'eau  $Q_{i1}$  qui quitte le réservoir  $i1$  est déversé dans le réservoir  $i3$ , réservoir supérieur de la cascade  $i$ . Dans chaque cascade  $i$ , un débit d'eau d'entrée  $Q$ , déversé dans le réservoir supérieur de la cascade  $i$ , et un débit de fuite contrôlé  $Q_1^i$  du réservoir inférieur de la cascade  $i$  sont également présents. Connaissant la hauteur d'eau  $h_{i1}$  de réservoir  $i1$ , un observateur peut être conçu pour estimer les hauteurs d'eau  $h_{i2}$  et  $h_{i3}$ . Les différents débits d'eau peuvent être exprimés comme suit :

$$\begin{aligned} Q_{ik} &= s_p\sqrt{2g}\sqrt{h_{ik}} \\ Q_1^i &= q_i s_p\sqrt{2g}\sqrt{\max(0, h_{i1} - h_{i0})} \end{aligned}$$

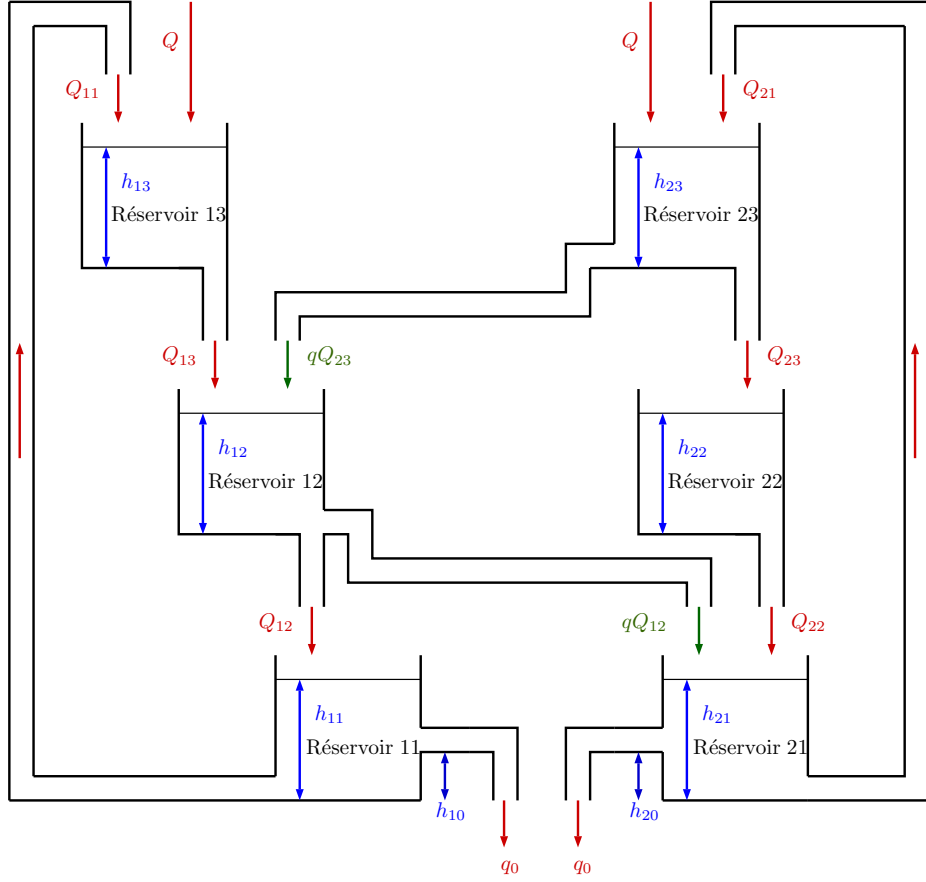


FIGURE 5.3 – Système à deux cascades de trois réservoirs

où la hauteur d'eau  $h_{i0}$  est choisie égale à  $4m$  pour  $i = 1, 2$ , où  $S$  correspond à l'aire de chaque réservoir,  $s_p$  est la section transversale de chaque tuyau de sortie et  $g = 9.81 m.s^{-2}$  est l'accélération de pesanteur. Dans notre exemple, nous prenons  $S = 3.14 m^2$  et  $s_p = 0.0314 m^2$ . Le coefficient  $q_0$  correspond au taux d'ouverture de sortie des réservoir 11 et 21, et est compris entre 0 and 1. Le coefficient  $q$  correspond au taux d'ouverture des tuyaux  $12 \rightarrow 21$  et  $23 \rightarrow 12$ , également compris 0 and 1. Selon un raisonnement similaire à (IQBAL et al. 2009), en utilisant la relation (5.68), le système dynamique complet composé des deux cascades s'exprime par le biais des équations différentielles suivantes :

$$\begin{cases} \dot{h}_{11} = c\sqrt{h_{12}} - c\sqrt{h_{11}} - q_0c\sqrt{\max(0, h_{11} - h_{10})} \\ \dot{h}_{12} = c\sqrt{h_{13}} - c\sqrt{h_{12}} - qc\sqrt{h_{12}} + qc\sqrt{h_{23}} \\ \dot{h}_{13} = c\sqrt{h_{11}} - c\sqrt{h_{13}} + \frac{Q}{S} \\ y_1 = h_{11} \end{cases} \quad (5.69)$$

$$\begin{cases} \dot{h}_{21} = c\sqrt{h_{22}} - c\sqrt{h_{21}} - q_0c\sqrt{\max(0, h_{21} - h_{20})} + qc\sqrt{h_{12}} \\ \dot{h}_{22} = c\sqrt{h_{23}} - c\sqrt{h_{22}} \\ \dot{h}_{23} = c\sqrt{h_{21}} - c\sqrt{h_{23}} - qc\sqrt{h_{23}} + \frac{Q}{S} \\ y_2 = h_{21} \end{cases} \quad (5.70)$$



## 5.6. Exemple : Application à un système hydraulique

où les entrées  $q \in [0, 1]$ ,  $q_0 \in [0, 1]$ , et  $Q \geq 0$  sont les entrées du système dynamique (5.69)-(5.70), décrites comme suit

$$\begin{aligned} q &= \begin{cases} 0 & \text{si } t < 100 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \\ q_0 &= \begin{cases} 0 & \text{si } t < 50 \\ 0.5 + 0.5\cos(\frac{\pi}{50}t) & \text{sinon} \end{cases} \\ Q &= \begin{cases} 0 & \text{si } t < 50 \\ 0.1 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned} \quad (5.71)$$

et où  $c = \frac{S_p}{S} \sqrt{2g}$ .

### 5.6.2 Difféomorphisme et forme décomposée en passes du système d'étude

Dans ce qui suit, nous considérons le difféomorphisme  $F$  suivant

$$F : \mathbb{R}^6 \longrightarrow \mathbb{R}^6$$

$$\begin{pmatrix} h_{11} \\ h_{12} \\ h_{13} \\ h_{21} \\ h_{22} \\ h_{23} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} h_{11} \\ c\sqrt{h_{12}} \\ \frac{c^2}{2} \frac{\sqrt{h_{13}}}{\sqrt{h_{12}}} \\ h_{21} \\ c\sqrt{h_{22}} \\ \frac{c^2}{2} \frac{\sqrt{h_{23}}}{\sqrt{h_{22}}} \end{pmatrix} \quad (5.72)$$

Le système hydraulique (5.69)-(5.70) écrit dans les nouvelles coordonnées  $\xi = F(h)$  est donné par les équations différentielles suivantes

$$\begin{cases} \dot{\xi}_{(1,1)} = \xi_{(1,2)} + \varphi_{(1,1)}(u, \xi_{(1,1)}) \\ \dot{\xi}_{(1,2)} = \xi_{(1,3)} + \varphi_{(1,2)}(u, \xi_{(1,2)}, \xi_{(2,2)}, \xi_{(2,3)}) \\ \dot{\xi}_{(1,3)} = \varphi_{(1,3)}(u, \xi_{(1,1)}, \xi_{(1,2)}, \xi_{(1,3)}, \xi_{(2,2)}, \xi_{(2,3)}) \\ y_1 = \xi_{(1,1)} \\ \dot{\xi}_{(2,1)} = \xi_{(2,2)} + \varphi_{(2,1)}(u, \xi_{(1,2)}, \xi_{(2,1)}) \\ \dot{\xi}_{(2,2)} = \xi_{(2,3)} + \varphi_{(2,2)}(u) \\ \dot{\xi}_{(2,3)} = \varphi_{(2,3)}(u, \xi_{(2,1)}, \xi_{(2,2)}, \xi_{(2,3)}) \\ y_2 = \xi_{(2,1)} \end{cases}$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_{(1,1)}(u, \xi) = -c\sqrt{\xi_{(1,1)}} - q_0c\sqrt{\max(0, \xi_{(1,1)} - h_{10})} \\ \varphi_{(1,2)}(u, \xi) = -\frac{c^2}{2}(1+q) + q\frac{\xi_{(2,3)}\xi_{(2,2)}}{\xi_{(1,2)}} \\ \varphi_{(1,3)}(u, \xi) = -\frac{c^7}{8}\frac{\sqrt{\xi_{(1,1)}}}{\xi_{(1,2)}^2\xi_{(1,3)}} - \frac{c^4}{4\xi_{(1,2)}} + \frac{c^6}{8\xi_{(1,2)}^2\xi_{(1,3)}}\frac{Q}{S} \\ \quad + \frac{\xi_{(1,3)}}{\xi_{(1,2)}}\left(\frac{c^2}{2}(1+q) - \xi_{(1,3)}\right) + q\frac{c^4}{4}\frac{\xi_{(2,2)}\xi_{(2,3)}}{\xi_{(1,2)}^2\xi_{(1,3)}} \\ \varphi_{(2,1)}(u, \xi) = -c\sqrt{\xi_{(2,1)}} - q_0c\sqrt{\max(0, \xi_{(2,1)} - h_{20})} + q\xi_{(1,2)} \\ \varphi_{(2,2)}(u, \xi) = -\frac{c^2}{2} \\ \varphi_{(2,3)}(u, \xi) = -\frac{c^7}{8}\frac{\sqrt{\xi_{(2,1)}}}{\xi_{(2,2)}^2\xi_{(2,3)}} - \frac{c^4}{4\xi_{(2,2)}}(1+q) + \frac{c^6}{8\xi_{(2,2)}^2\xi_{(2,3)}}\frac{Q}{S} + \frac{\xi_{(2,3)}}{\xi_{(2,2)}}\left(\frac{c^2}{2} - \xi_{(2,3)}\right) \end{array} \right.$$

et où  $u \triangleq \begin{pmatrix} q_0 \\ q \\ Q \end{pmatrix}$ , avec  $p_1 = p_2 = 1$ .

En accord avec le lemme 5.3.1, les paires d'indices  $(l_k, j_k)$ ,  $k = 1, \dots, Q$ , où  $Q = 6 - 2 = 4$ , sont construites de la manière suivante

$$(l_1, j_1) = (1, 2), \quad (l_2, j_2) = (2, 2), \quad (l_3, j_3) = (2, 3), \quad (l_4, j_4) = (1, 3),$$

et en nous basant sur le lemme 5.3.2 de décomposition des paires d'indices  $(l_k, j_k)$  en passes, nous obtenons les trois ensembles suivants

$$\{(l_1, j_1)\} = \{(1, 2)\}, \quad \{(l_2, j_3), (l_2, j_3)\} = \{(2, 2), (2, 3)\}, \quad \{(l_4, j_4)\} = \{(1, 3)\}$$

Par conséquent, la forme décomposée en passes contient  $R = 2$  passes, avec  $\bar{q}_1 = 2$ ,  $\bar{q}_2 = 3$ , et

$$v_1 = 1, \quad v_2 = v_{\bar{q}_1} = 2, \quad v_3 = v_{\bar{q}_2} = 1$$

Soit enfin l'état  $x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^{\bar{q}_1} \\ x^{\bar{q}_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$  construit de la manière suivante

$$x^1 = \begin{pmatrix} x^1_{\lambda^1} \\ x^1_{\lambda^1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_{(1,1)} \\ \xi_{(1,2)} \end{pmatrix}, \quad x^2 = \begin{pmatrix} x^2_{\lambda^2} \\ x^2_{\lambda^2} \\ x^2_{\lambda^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_{(2,1)} \\ \xi_{(2,2)} \\ \xi_{(2,3)} \end{pmatrix}, \quad x^3 = \begin{pmatrix} x^3_{\lambda^3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_{(1,3)} \end{pmatrix}$$

avec  $\lambda^1 = v^1 + 1 = 2$ ,  $\lambda^2 = v^2 + 1 = 3$ ,  $\lambda^3 = v^3 = 1$ . Le système (5.69)-(5.70) se met ainsi sous la forme (5.34)-(5.35) comme suit

- Passe 1 :

$$\begin{cases} \dot{x}_1^1 = x_2^1 + \varphi_1^1(u, x_1^1) \\ \dot{x}_2^1 = x_3^1 + \varphi_2^1(u, x_2^1, x_3^1) \\ y_1 = x_1^1 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}_1^2 = x_2^2 + \varphi_1^2(u, x_2^1, x_1^2) \\ \dot{x}_2^2 = x_3^2 + \varphi_2^2(u) \\ \dot{x}_3^2 = \varphi_3^2(u, x_1^2, x_2^2, x_3^2) \\ y_2 = x_1^2 \end{cases} \quad (5.73)$$

- Passe 2 :

$$\begin{cases} \dot{x}_1^3 = \varphi_1^3(u, x_1^1, x_2^1, x_2^2, x_3^2, x_1^3) \end{cases} \quad (5.74)$$

avec

$$\left( \begin{array}{l} \varphi_1^1(\cdot) \triangleq \varphi_{(1,1)}(\cdot) \\ \varphi_2^1(\cdot) \triangleq \varphi_{(1,2)}(\cdot) \end{array} \right), \quad \left( \begin{array}{l} \varphi_1^2(\cdot) \triangleq \varphi_{(2,1)}(\cdot) \\ \varphi_2^2(\cdot) \triangleq \varphi_{(2,2)}(\cdot) \\ \varphi_3^2(\cdot) \triangleq \varphi_{(2,3)}(\cdot) \end{array} \right), \quad \left( \varphi_1^3(\cdot) \triangleq \varphi_{(1,3)}(\cdot) \right)$$

### 5.6.3 Construction de l'immersion du système d'étude

En nous basant sur la procédure décrite dans la section 5.4, puisque par définition 5.3.2 de la fonction  $P_r$ , nous avons

$$P_1(1) = 3, \quad P_1(2) = 0, \quad P_2(3) = 0 \quad \text{et} \quad P_2^{-1}(3) = 1, \quad P_1^{-1}(2) = 0, \quad P_1^{-1}(1) = 0$$

nous construisons les états  $z^1$ ,  $z^2$  et  $z^3$  comme suit

$$z^1 = \begin{pmatrix} z_1^1 \\ z_2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{pmatrix}, \quad z^2 = \begin{pmatrix} z_1^2 \\ z_2^2 \\ z_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ x_3^2 \end{pmatrix},$$

$$z^3 = \begin{pmatrix} z_1^3 \\ z_2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{\lambda^{P_2^{-1}(3)}}^{P_2^{-1}(3)} \\ x_1^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2^1 \\ x_1^3 \end{pmatrix}$$

L'immersion du système (5.73)-(5.74) est alors décrite par les équations différentielles suivantes

- Passe 1 :

$$\begin{cases} \dot{z}_1^1 = z_2^1 + \psi_1^1(u, z_1^1) \\ \dot{z}_2^1 = z_3^1 + \psi_2^1(u, z_2^1, z_3^1) \\ y_1 = z_1^1 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{z}_1^2 = z_2^2 + \psi_1^2(u, z_2^1, z_1^2) \\ \dot{z}_2^2 = z_3^2 + \psi_2^2(u) \\ \dot{z}_3^2 = \psi_3^2(u, z_1^2, z_2^2, z_3^2) \\ y_2 = z_1^2 \end{cases} \quad (5.75)$$

- Passe 2 :

$$\begin{cases} \dot{z}_1^3 = z_2^3 + \psi_1^3(u, z_2^1, z_2^2, z_3^2) \\ \dot{z}_2^3 = \psi_2^3(u, z_1^1, z_2^1, z_2^2, z_3^2) \end{cases} \quad (5.76)$$

avec

$$\left( \begin{array}{l} \psi_1^1(\cdot) \triangleq \varphi_1^1(\cdot) \\ \psi_2^1(\cdot) \triangleq \varphi_2^1(\cdot) \end{array} \right), \quad \left( \begin{array}{l} \psi_1^2(\cdot) \triangleq \varphi_1^2(\cdot) \\ \psi_2^2(\cdot) \triangleq \varphi_2^2(\cdot) \\ \psi_3^2(\cdot) \triangleq \varphi_3^2(\cdot) \end{array} \right), \quad \left( \begin{array}{l} \psi_1^3(\cdot) \triangleq \varphi_1^3(\cdot) \\ \psi_2^3(\cdot) \triangleq \varphi_2^3(\cdot) \end{array} \right)$$

et  $\bar{\lambda}^1 = 2$ ,  $\bar{\lambda}^2 = 3$ ,  $\bar{\lambda}^3 = 2$ .

#### 5.6.4 Synthèse de l'observateur et résultats de simulation

Comme décrit par la section 5.5, nous proposons l'observateur suivant pour l'immersion (5.75)-(5.76) du système (5.73)-(5.74)

$$\left( \begin{array}{l} \dot{\hat{z}}_1^1 \\ \dot{\hat{z}}_2^1 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{l} \hat{z}_2^1 \\ \hat{z}_3^3 \end{array} \right) + \left( \begin{array}{l} \psi_1^1(u, z_1^1) \\ \psi_2^1(u, \hat{z}_2^1, \hat{z}_2^2, \hat{z}_3^2) \end{array} \right) - \theta^{\delta^1} (\Delta^1(\theta))^{-1} K^1 (\hat{z}_1^1 - y_1) \quad (5.77)$$

$$\left( \begin{array}{l} \dot{\hat{z}}_1^2 \\ \dot{\hat{z}}_2^2 \\ \dot{\hat{z}}_3^2 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{l} \hat{z}_2^2 \\ \hat{z}_3^3 \\ 0 \end{array} \right) + \left( \begin{array}{l} \psi_1^2(u, \hat{z}_2^1, z_1^2) \\ \psi_2^2(u) \\ \psi_3^2(u, z_1^2, \hat{z}_2^2, \hat{z}_3^2) \end{array} \right) - \theta^{\delta^2} (\Delta^2(\theta))^{-1} K^2 (\hat{z}_1^2 - y_2) \quad (5.78)$$

$$\left( \begin{array}{l} \dot{\hat{z}}_1^3 \\ \dot{\hat{z}}_2^3 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{l} \hat{z}_3^3 \\ 0 \end{array} \right) + \left( \begin{array}{l} \psi_1^3(u, \hat{z}_2^1, \hat{z}_2^2, \hat{z}_3^2) \\ \psi_2^3(u, z_1^1, \hat{z}_2^1, \hat{z}_2^2, \hat{z}_3^2, \hat{z}_3^3) \end{array} \right) - \theta^{\delta^3} (\Delta^3(\theta))^{-1} K^3 (\hat{z}_1^3 - \hat{z}_2^1) \quad (5.79)$$

Les gains  $K^1$ ,  $K^2$  et  $K^3$  sont calculés de sorte que les valeurs propres de la matrice Hurwitz de l'erreur d'observation résultante soient toutes placées en  $(-0.1)$ , i.e.

$$K^1 = \begin{pmatrix} 2e^{-1} \\ 1e^{-2} \end{pmatrix}, \quad K^2 = \begin{pmatrix} 3e^{-1} \\ 3e^{-2} \\ 1e^{-3} \end{pmatrix}, \quad K^3 = \begin{pmatrix} 2e^{-1} \\ 1e^{-2} \end{pmatrix}$$

et les matrices diagonales  $\Delta^k$ ,  $k = 1, 2, 3$ , sont calculées comme suit

$$\begin{aligned} \Delta^1(\theta) &= \text{diag} \left( 1, \frac{1}{\theta^{\delta^1}} \right), \\ \Delta^2(\theta) &= \text{diag} \left( 1, \frac{1}{\theta^{\delta^2}}, \frac{1}{\theta^{2\delta^2}} \right), \\ \Delta^3(\theta) &= \text{diag} \left( 1, \frac{1}{\theta^{\delta^3}} \right) \end{aligned}$$

Enfin, les entiers  $\delta^1$ ,  $\delta^2$  et  $\delta^3$  sont choisis comme dans (5.45), à savoir

$$\begin{aligned} \delta^3 &= 1, \quad \delta^2 = 2(\bar{\lambda}^3 - 1)\delta^3 - \delta^3 + \varepsilon = \delta^3 + \varepsilon = 1 + \varepsilon, \\ \text{et} \quad \delta^1 &= 2\left(\bar{\lambda}^2 - \frac{3}{2}\right)\delta^2 + \varepsilon = 3\delta^2 + \varepsilon = 3 + 4\varepsilon \end{aligned}$$

en prenant  $\varepsilon = 0.001$ , et où  $\delta^2$  a été calculé en remarquant que  $\bar{\varrho}_1 = 2$ ,  $\bar{\varsigma}_1 = 3$  d'après (5.46) et la définition 5.3.3 de la fonction de dépendance  $\varsigma_r$ .

L'observateur (5.78)-(5.79)-(5.79) a été simulé sur 200 s en utilisant les mesures disponibles, à savoir l'entrée  $u$  et les sorties  $y_1$  et  $y_2$ , obtenues par simulation du système (5.69)-(5.70). La simulation a été réalisée pour  $\theta = 3$ , et avec les conditions initiales suivantes

$$\begin{cases} h_{11}(0) = 7 \\ h_{12}(0) = 2.5 \\ h_{13}(0) = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} h_{21}(0) = 1 \\ h_{22}(0) = 1.5 \\ h_{23}(0) = 3.5 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \hat{h}_{11}(0) = 7 \\ \hat{h}_{12}(0) = 5 \\ \hat{h}_{13}(0) = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} \hat{h}_{21}(0) = 1 \\ \hat{h}_{22}(0) = 5 \\ \hat{h}_{23}(0) = 5 \end{cases}$$

et par suite

$$\begin{cases} \hat{z}_1^1(0) = 7 \\ \hat{z}_2^1(0) = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} \hat{z}_1^2(0) = 1 \\ \hat{z}_2^2(0) = 5 \\ \hat{z}_3^2(0) = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} \hat{z}_1^3(0) = 5 \\ \hat{z}_2^3(0) = 5 \end{cases}$$

de sorte que l'on ait  $\hat{z}_1^3(0) = \hat{z}_2^1(0)$ . Les entrées sont choisies comme décrit par (5.71). La figure 5.4 fournit l'évolution des états  $h_{12}$ ,  $h_{13}$ ,  $h_{22}$  et  $h_{23}$  avec leurs estimées respectives  $\hat{h}_{12}$ ,  $\hat{h}_{13}$ ,  $\hat{h}_{22}$  et  $\hat{h}_{23}$ , calculées par

$$\begin{cases} \hat{h}_{12} = \left(\frac{\hat{z}_2^1}{c}\right)^2, & \hat{h}_{13} = \left(\frac{2\hat{z}_2^1\hat{z}_2^3}{c^3}\right)^2 \\ \hat{h}_{22} = \left(\frac{\hat{z}_2^2}{c}\right)^2, & \hat{h}_{23} = \left(\frac{2\hat{z}_2^2\hat{z}_2^3}{c^3}\right)^2 \end{cases}$$

Nous notons que les estimations des états convergent vers leurs vraies valeurs malgré un bruit de mesure relativement élevé.

## 5.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé un observateur grand gain pour une large classe de systèmes non linéaires MIMO observables pour toute entrée. La classe de systèmes uniformément observables considérée dans ce chapitre constitue la forme normale d'observabilité uniforme la plus générale existant actuellement, et une équivalence entre cette forme et l'approche par graphe proposée dans (BORNARD et HAMMOURI 2002) a été démontrée. Par le biais d'une immersion, un observateur grand gain a été synthétisé pour l'ensemble de la classe de systèmes contrairement à ce qui a été proposé dans (BORNARD et HAMMOURI 2002). Il a été montré que l'erreur d'observation converge exponentiellement vers zéro en l'absence d'incertitude, et est proportionnel à  $1/\theta$  en présence d'incertitude. Un exemple mettant en jeu plusieurs réservoirs hydraulique en cascade et inter-connectés a été proposé en guise d'illustration.

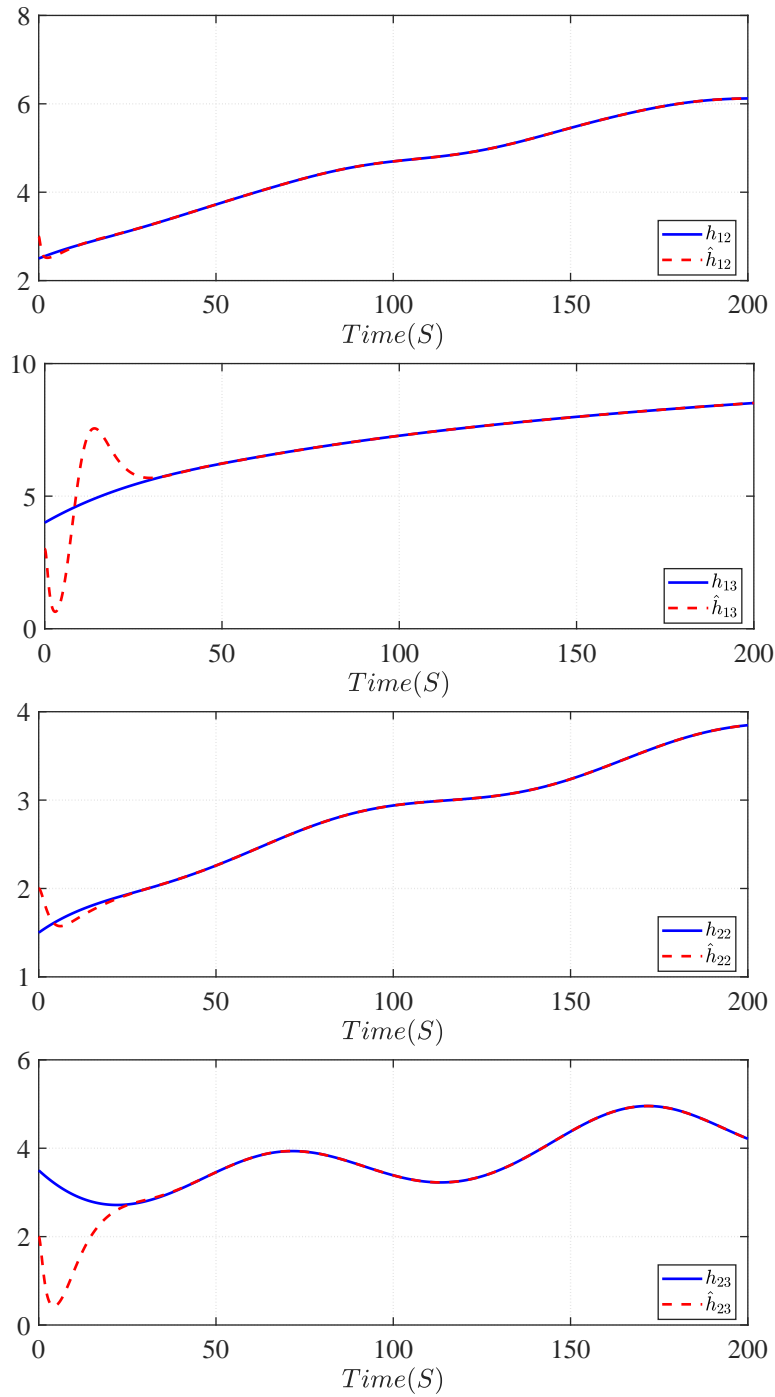


FIGURE 5.4 – Estimation des états



## Chapitre 6

# Conclusion générale

Dans ce manuscrit de thèse, nous nous sommes penchés sur la synthèse d'observateurs grand gain pour plusieurs classes de systèmes non linéaires observables pour toute entrée. Trois contributions ont été réalisées dans ce manuscrit de thèse. Nous nous sommes en particulier intéressés à trois problèmes ouverts :

- L'étude de la disponibilité des mesures de sortie à travers un processus général d'acquisition des mesures de sortie (mesures continues, échantillonnées, retardées),
- L'insensibilité au bruit de mesure,
- L'étude de la forme normale d'observabilité uniforme la plus générale actuellement.

Pour mieux apprécier nos contributions, nous avons effectué dans le chapitre 2 quelques rappels sur l'observation et l'observabilité des systèmes non linéaires, indispensables à la bonne compréhension de l'ensemble du travail réalisé. Des exemples de synthèses d'observateurs ont été proposés où l'accent a en particulier été mis sur la synthèse grand gain, synthèse considérée tout au long de ce manuscrit. Le chapitre 2 a finalement été clos par une illustration brève des limites rencontrées dans la synthèse grand gain.

La première contribution a été détaillée au chapitre 3 où le processus d'acquisition des mesures de sortie a été pris en compte dans la synthèse de l'observateur pour une classe de systèmes non linéaires MIMO où toutes les sorties ont été regroupées dans un seul et unique bloc. En particulier, cette contribution a permis de traiter le cas général d'un processus d'acquisition des mesures de sortie mettant en jeu des mesures de sortie continues ou échantillonnées, retardées ou non, selon les intervalles d'une partition de temps donnée. Nous avons ainsi proposé un observateur pour des mesures disponibles via le processus d'acquisition des mesures selon le retard considéré. On distingue successivement le cas sans retard, le cas d'un retard variant dans le temps arbitrairement petit, le cas d'un retard constant, arbitrairement long et le cas d'un retard variant dans le temps et arbitrairement long. En particulier, la structure de



l'observateur pour un retard variant dans le temps et arbitrairement petit a la particularité d'avoir la même dimension que celle du système original, nous permettant de nous affranchir de la structure en cascade proposée dans (FARZA et al. 2018). Le cas du retard variant dans le temps et arbitrairement long a été traité en s'inspirant de ce qu'ont proposé les auteurs dans (FARZA et al. 2015) : une procédure systématique a été proposée afin de retarder la sortie retardée disponible de sorte d'obtenir, à chaque instant, une sortie retardée par la valeur maximale du retard de la sortie originale. D'autre part, nous avons retrouvé les propriétés inhérentes de la synthèse grand gain avec mesures retardées données dans (FARZA et al. 2018) et portant sur la borne ultime de l'erreur d'estimation entre l'état du dernier sous-système de la cascade et l'état réel du système, en présence d'incertitude. En effet, cette borne constitue une fonction décroissante selon la longueur  $m$  de la cascade, et sa limite quand  $m$  tend vers l'infini est composée de deux termes additifs, l'un pouvant être rendu aussi petit que possible pour de grandes valeurs du paramètres  $\theta$ , l'autre terme étant fixé et représentant une certaine limite quand  $m$  tend vers l'infini. Tous ces résultats ont ensuite été repris dans le cas où l'échantillonnage et le retard ont été rendus potentiellement différents sur chacune des composantes de la sortie du système, généralisant ainsi les différents observateurs proposés dans le cas où l'échantillonnage et le retard sont uniques.

La deuxième contribution présentée au chapitre 4 a concerné la synthèse d'un observateur grand gain filtré pour une classe de systèmes non linéaires SISO uniformément observables. L'objectif derrière cette synthèse a été de réduire la sensibilité au bruit de mesure tout en proposant un observateur dit 'low power', permettant de limiter la puissance impliquée dans le gain de l'observateur à 2, améliorant ainsi la performance de l'observateur vis-à-vis du bruit de mesure sur la sortie. L'un des précieux avantages de cette nouvelle synthèse est la simplicité de spécification de la dynamique d'observation via une procédure systématique de synthèse. L'observateur filtré proposé est composé de deux sous-systèmes, de la même dimension que le système original. Le premier sous-système est une simple copie du système original avec un terme correctif dépendant de l'état du second sous-système, alors que le second sous-système est un filtre linéaire dont l'entrée correspond à l'erreur d'observation de sortie. Une comparaison de cet observateur avec l'observateur 'low power' proposé dans (ASTOLFI et MARCONI 2015) a été réalisée mettant en avant le filtrage supplémentaire induit par le nouvel observateur proposé. Une analyse plus détaillée de la sensibilité au bruit de mesure dans un cas linéaire semblable à ce qui a été proposé dans (ASTOLFI et MARCONI 2015) a ensuite été fournie, allant dans le sens de la comparaison précédente. Enfin, l'observateur filtré a été re-synthétisé dans le cas de mesures échantillonnées, et une généralisation a été établie pour le cas d'un système non linéaire MIMO uniformément observables et où les sorties sont regroupées dans un seul bloc.

La dernière contribution proposée dans ce manuscrit a été présentée par le chapitre 5. La forme

normale d'observabilité uniforme la plus générale actuellement, introduite dans (BORNARD et HAMMOURI 2002), a été remise au goût du jour par le biais d'une réécriture sous forme d'étages, appelés passes. Cette construction a été réalisée en nous basant sur le résultat portant sur le graphe d'uniforme observabilité introduit dans (BORNARD et HAMMOURI 2002). Plus précisément, en reprenant la définition donnée par (BORNARD et HAMMOURI 2002), le graphe d'uniforme observabilité associé à la classe de systèmes étudiée est considéré, et l'observabilité pour toute entrée de cette dernière est directement caractérisée par une absence de cycle dans le graphe. Cette absence de cycle permet la construction d'une suite d'ensembles de paires d'indices permettant ainsi de décomposer le système uniformément observable sous forme de passes. Une immersion de cette forme est alors proposée, permettant par la suite de synthétiser, à partir cette immersion, un observateur grand gain dont l'erreur d'observation converge exponentiellement vers zéro en l'absence d'incertitude, et converge dans une boule de rayon  $1/\theta$  en présence d'incertitude. La synthèse grand gain réalisée a été rendue possible en utilisant le formalisme (notations, lemmes techniques équivalents) introduit dans (FARZA et al. 2011).

Ces différentes contributions ont été illustrées par un ensemble d'exemples provenant de plusieurs horizons (système hydraulique, bioréacteur, oscillateur forcé de Van Der Pol, bras de robot).

Chaque contribution présentée dans ce document offre cependant de nombreuses perspectives de travail, dont certaines seront présentées dans ce qui suit :

- Le travail effectué dans le chapitre 3 sur la disponibilité des mesures de sortie vise à être généralisé à une classe de systèmes non linéaires MIMO uniformément observables plus générale, comme celle donnée par (FARZA et al. 2011) ou la forme normale introduite dans le chapitre 5.
- La synthèse de l'observateur grand gain filtré établie dans le chapitre 4, à l'instar de ce qui a été proposé dans (ASTOLFI et MARCONI 2015; ASTOLFI et al. 2016; TEEL 2016; KHALIL 2017), invite à revisiter l'observateur grand gain en s'affranchissant de ses principales limites. En particulier, nous envisageons de synthétiser un observateur grand gain filtré saturé permettant, en plus des propriétés de l'observateur grand gain filtré, de supprimer le phénomène de 'pick'. D'autre part, il semblerait intéressant de considérer le problème du processus d'acquisition des mesures de sortie dans le cadre de la synthèse d'un observateur grand gain filtré.
- La forme normale d'observabilité uniforme présenté dans le chapitre 5 n'étant pas une forme canonique, il reste éventuellement à généraliser cette forme normale dans le but d'englober l'ensemble des systèmes non linéaires uniformément observables, afin de rendre possible une synthèse grand gain sur l'ensemble des systèmes non linéaires

uniformément observables.

# Bibliographie

- J.H. AHRENS et H. KHALIL (2009). “High-gain observer in the presence of measurement noise : A switched approach”. *Automatica*, Vol. 45, 2009, pp. 936-943.
- A. ALESSANDRI et A. ROSSI (2015). “Increasing-gain observers for nonlinear systems : Stability and design”. *Automatica*, Vol. 57, 2015, pp. 180-188.
- M. ARCAK et P. KOKOTOVIĆ (2001). “Nonlinear observers : a circle criterion design and robustness analysis”. *Automatica*, Vol. 37, 2001, pp. 1923-1930.
- D. ASTOLFI et L. MARCONI (2015). “A high-gain nonlinear observer with limited gain power”. *IEEE Trans. Autom. Control*, Vol. 60, 2015, pp. 3059-3064.
- D. ASTOLFI, L. MARCONI et A. TEEL (2016). “Low-power peaking-free high gain observers for nonlinear systems”. *In Proc. of the European Control Conference*. Aalborg, Denmark, 2016.
- G. BESANÇON et A. TICLEA (2007). “An immersion-based observer design for rank-observable nonlinear systems”. *IEEE Trans. Autom. Control*, Vol. 52, 2007, pp. 83-88.
- G. BIROL, P. DORUKER, B. KIRDAR, K. ULGEN et Z.I. ONSAN (1998). “Mathematical description of ethanol fermentation by immobilised *saccharomyces cerevisiae*”. *Process Biochemistry*, Vol. 33, 1998, pp. 763-771.
- N. BOIZOT, E. BUSVELLE et J.P. GAUTHIER (2010). “An adaptive high-gain observer for nonlinear systems”. *Automatica*, Vol. 46, 2010, pp. 1483-1488.
- G. BORNARD et H. HAMMOURI (2002). “A graph approach to uniform observability of nonlinear multi output systems”. *In Proc. 41th IEEE CDC*. Las Vegas, NV, 2002.
- I. BOURAOUI, M. FARZA, T. MÉNARD, R. Ben ABDENNOUR, M. M'SAAD et H. MOSRATI (2015). “Observer design for a class of uncertain nonlinear systems with sampled outputs - application to the estimation of kinetic rates in bioreactors”. *Automatica*, Vol. 55, 2015, pp. 78-87.

- D. BOUTAT, A. BENALI, H. HAMMOURI et K. BUSAWON (2009). “New algorithm for observer error linearization with a diffeomorphism on the outputs”. *Automatica*, Vol. 45, 2009, pp. 2187-2193.
- D. BRESCH-PIETRI, J. CHAUVIN et N. PETIT (2012). “Adaptive control scheme for uncertain time-delay systems”. *Automatica*, Vol. 48, 2012, pp. 1536-1552.
- D. BRESCH-PIETRI, F. MAZENC et N. PETIT (2018). “Robust compensation of a chattering time-varying input delay with jumps”. *Automatica*, Vol. 92, 2018, pp. 225-234.
- K. BUSAWON, M. FARZA et H. HAMMOURI (1998). “A nonlinear observer for induction motors”. *International Journal of Control*, Vol. 71, 1998, pp. 405-418.
- F. CACACE, A. GERMANI et C. MANES (2014). “A chain observer for nonlinear systems with multiple time-varying measurements delays”. *SIAM J. Control and Optimiz.* Vol. 52, No. 3, 2014, pp. 1862-1885.
- C. H. CLERGET, J. P. GRIMALDI, M. CHÈBRE et N. PETIT (2017). “An example of robust internal model control under variable and uncertain delay”. *Journal of Process Control*, Vol. 60, 2017, pp. 14-23.
- F. DEZA, E. BUSVELLE et J.P. GAUTHIER (1992). “Exponentially Converging Observers for Distillation Columns and Internal Stability of the Dynamic Output Feedback”. *Chemical Engineering Science*, Vol. 47, 1992, pp. 3935-3941.
- P. DUFOUR, S. FLILA et H. HAMMOURI (2012). “Observer Design for MIMO non-uniformly observable systems”. *IEEE Trans. Autom. Control*, Vol. 57, 2012, pp. 511-516.
- D. EFIMOV et T. RAÏSSI (2016). “Design of interval observers for uncertain dynamical systems”. *Automation and Remote Control*, Vol. 77, No. 2, 2016, pp. 135-143.
- M. FARZA, O. HERNÁNDEZ-GONZÁLES, T. MÉNARD, B. TARGUI, M. M’SAAD et C.M. ASTORGA-ZARAGOZA (2018). “Cascade observer design for a class of uncertain nonlinear systems with delayed outputs”. *Automatica*, Vol. 89, 2018, pp. 125-134.
- M. FARZA, M. M’SAAD, M.L. FALL, E. PIGEON, O. GEHAN et K. BUSAWON (2014). “Continuous-Discrete Time Observers for a Class of MIMO Nonlinear Systems”. *IEEE Trans. Automat. Control*, Vol. 59, No. 4, 2014, pp. 1060-1065.
- M. FARZA, M. M’SAAD, T. MÉNARD, M.L. FALL, O. GEHAN et E. PIGEON (2015). “Simple cascade observer for a class of nonlinear systems with long output delays”. *IEEE Trans. Automat. Control*, Vol. 60, No. 12, 2015, pp. 3338-3343.
- M. FARZA, M. M’SAAD et L. ROSSIGNOL (2004). “Observer Design for a class of MIMO nonlinear systems”. *Automatica*, Vol. 40, 2004, pp. 135-143.

- M. FARZA, M. M'SAAD, M. TRIKI et T. MAATOUG (2011). "High gain observer for a class of non-triangular systems". *Systems & Control Letters*, Vol. 60, No. 1, 2011, pp. 27-35.
- M. FLIESS, C. JOIN et H. SIRA-RAMIREZ (2008). "Nonlinear estimation is easy". *Int. J. Model. Ident. Control*, Vol. 4, 2008, pp. 12-27.
- J.P. GAUTHIER et G. BORNARD (1981). "Observability for any  $u(t)$  of a class of nonlinear systems". *IEEE Trans. Automat. Control*, Vol. 26, 1981, pp. 922-926.
- J.P. GAUTHIER, H. HAMMOURI et S. OTHMAN (1992). "A simple observer for nonlinear systems - Application to bioreactors". *IEEE Trans. Automat. Control*, Vol. 37, 1992, pp. 875-880.
- J.P. GAUTHIER et I. KUPKA (1994). "Observability and observers for nonlinear systems". *SIAM J. Control Optim.* Vol. 32, 1994, pp. 975-994.
- J.P. GAUTHIER et I. KUPKA (2001). *Deterministic Observation Theory and Applications*. U.K. : Cambridge University Press, 2001.
- A. GERMANI, C. MANES et P. PEPE (2002). "A new approach to state observation of nonlinear systems with delayed output". *IEEE Trans. Automat. Control*, Vol. 47, No. 1, 2002, pp. 96-101.
- H.F. GRIP et A. SABERI (2012). "High-gain observer design for multi-output systems - Transformation to a canonical form by dynamic output shaping". *Int. J. Contr., Special Issue on High Gain Observers and Nonlinear Output Feedback Control*, 2012.
- M. GUAY (2002). "Observer linearization by output-dependent time-scale transformations". *IEEE Trans. Automat. Control*, Vol. 47, 2002, pp. 1730-1735.
- H. HAMMOURI, G. BORNARD et K. BUSAWON (2010). "High gain observer for structured multi-output nonlinear systems". *IEEE Trans. Autom. Control*, Vol. 55, 2010, pp. 987-992.
- H. HAMMOURI et M. FARZA (2003). "Nonlinear observers for locally uniformly observable systems". *ESAIM : COCV*, Vol. 9, 2003, pp. 353-370.
- R. HERMANN et A.J. KRENER (1977). "Nonlinear controllability and observability". *IEEE Trans. Autom. Control*, Vol. 22, No. 2, 1977, pp. 728-740.
- M. HOU, K. BUSAWON et M. SAIF (2000). "Observer design based on triangular form generated by injective map". *IEEE Trans. Automat. Control*, Vol. 45, No. 7, 2000, pp. 1350-1355.
- M. HOU et A.C. PUGH (1999). "Observer with linear error dynamics for nonlinear multi-output systems". *Systems & Control Letters*, Vol. 37, 1999, pp. 1-9.

- A. HOWELL et J.K. HEDRICK (2008). “Nonlinear observer design via convex optimization”. *Proc. American Control Conf.* Washington, DC, 2008.
- S. IBRIR (2011). “Observer-based control for a class of time-delay nonlinear systems having triangular structure”. *Automatica*, Vol. 47, No. 2, 2011, pp. 388-394.
- M. IQBAL, A.I. BHATTI, S.I. AYUBI et Q. KHAN (2011). “Robust Parameter Estimation of Nonlinear Systems Using Sliding-Mode Differentiator Observer”. *IEEE Trans. on Industrial Electronics*, Vol. 58, 2011, pp. 680-689.
- M. IQBAL, A.I. BHATTI, S. IQBAL, Q. KHAN et I.H. KAZMI (2009). “Parameter estimation of uncertain nonlinear MIMO three tank systems using higher order sliding modes”. *Proc. 7th ICCA*. Christchurch, New Zealand, 2009.
- H. JIN, R. LIU et Y. HE (2012). “Kinetics of batch fermentations for ethanol production with immobilized *saccharomyces cerevisiae* growing on sweet sorghum stalk juice”. *Procedia Environmental Sciences*, Vol. 55, 2012, pp. 987-992.
- Z. KADER, G. ZHENG et J. P. BARBOT (2018). “Finite-time and asymptotic left inversion of nonlinear time-delay systems”. *Automatica*, Vol. 95, 2018, pp. 283-292.
- R.E. KALMAN (1960). “A new approach to linear filtering and prediction problems”. *J. Basic Eng.* Vol. 82, 1960, pp. 35-45.
- N. KAZANTZIS et R.A. WRIGHT (2005). “Nonlinear observer design in the presence of delayed output measurements”. *Systems & Control Letters*, Vol. 54, No. 9, 2005, pp. 877-886.
- H. H. KHALIL (2015). *Nonlinear Control*. Boston : Pearson, 2015.
- H. H. KHALIL (2017). “Cascade high-gain observers in output feedback control”. *Automatica*, Vol. 80, 2017, pp. 110-118.
- A. J. KRENER et A. ISIDORI (1983). “Linearization by output injection and nonlinear observers”. *Systems & Control Letters*, Vol. 3, 1983, pp. 47-52.
- A. J. KRENER et W. RESPONDEK (1985). “Nonlinear observers with linearizable error dynamics”. *SIAM J. Control Optim.* Vol. 23, 1985, pp. 197-216.
- M. KRISTIC (2009). *Delay Compensation for Nonlinear, Adaptive and PDE Systems*. Boston, MA, USA : Birkhauser, 2009.
- P. P. LIN, D. YE, Z. GAO et Q. ZHENG (2012). “Intelligent Process Fault Diagnosis for Nonlinear Systems with Uncertain Plant Model via Extended State Observer and Soft Computing”. *Intelligent Control and Automation*, Vol. 3, 2012, pp. 346-355.
- F. LIU (2007). “Synthèse d’observateurs à entrées inconnues pour les systèmes non linéaires”. Thèse de doct. Université de Caen Basse-Normandie, France, 2007.

- D. LUENBERGER (1971). “An Introduction to Observers”. *IEEE Trans. Automat. Control*, Vol. 16, 1971, pp. 596-602.
- T. MAATOUG (2009). “Synthèse d’observateurs adaptatifs pour les systèmes non linéaires”. Thèse de doct. Ecole Nationale d’Ingénieurs de Sfax-Tunisie et Université de Caen Basse-Normandie-France, 2009.
- F. MAZENC, S.I. NICULESCU et O. BERNARD (2012). “Exponentially stable interval observers for linear systems with delay”. *SIAM Journal on Control and Optimization*, Vol. 50, 2012, pp. 286-305.
- M. MOISAN, O. BERNARD et J. GOUZÉ (2009). “Near optimal interval observers bundle for uncertain bioreactors”. *Automatica*, Vol. 45, No. 1, 2009, pp. 291-295.
- H. NIJMEIJER et A. J. Van der SCHAFT (1990). *Nonlinear Dynamical Control Systems*. Springer-Verlag, 1990.
- M. OUEDER, M. FARZA, R. Ben ABDENNOUR et M. M’SAAD (2012). “A high gain observer with updated gain for a class of MIMO non triangular systems”. *Systems & Control Letters*, Vol. 61, 2012, pp. 298-308.
- J.H. PENG, E.J. DING, M. DING et W. YANG (1996). “Synchronizing hyperchaos with a scalar transmitted signal”. *Phys. Rev. Lett.* Vol. 76, No. 6, 1996, pp. 904-907.
- T. RAFF, M. KÖGEL et F. ALLGÖWER (2008). “Observer with sample-and-hold updating for Lipschitz nonlinear systems with nonuniformly sampled measurements”. *Proc. American Control Conf.* Washington, DC, 2008.
- T. RAÏSSI, D. EFIMOV et A. ZOLGHARDI (2012). “Interval state estimation for a class of nonlinear systems”. *IEEE Trans. Automat. Control*, Vol. 57, No. 1, 2012, pp. 260-265.
- R. RAJAMANI (1998). “Observers for Lipschitz nonlinear systems”. *IEEE Trans. Automat. Control*, Vol. 43, No. 3, 1998, pp. 397-401.
- J. RUDOLPH et M. ZEITZ (1994). “A block triangular nonlinear observer normal form”. *Systems & Control Letters*, Vol. 23, 1994, pp. 1-8.
- R.G. SANFELICE et L. PRALY (2011). “On the performance of high-gain observers with gain adaptation under measurement noise”. *Automatica*, Vol. 47, 2011, pp. 2165-2176.
- H. SHIM, Y. I. SON et J. H. SEO (2001). “Semi-global observer for multi-output nonlinear systems”. *Systems and Control Letters*, Vol. 42, 2001, pp. 233-244.
- I. SOULEIMAN, A. GLUMINEAU et G. SCHREIRER (2003). “Direct transformation of nonlinear systems into state affine MISO form and nonlinear observers design”. *IEEE Trans. Automat. Control*, Vol. 48, 2003, pp. 2191-2196.



- H.J. SUSSMANN (1978). “Single-input observability of continuous-time systems”. *Math. Syst. Theory*, Vol. 12, 1978, pp. 371-393.
- R. TAMI, G. ZHENG, D. BOUTAT, D. AUBRY et H. WANG (2016). “Partial observer normal form for nonlinear system”. *Automatica*, Vol. 64, 2016, pp. 54-62.
- A. TEEL (2016). “Further variants of the astolfi/marconi highgain observer”. *In Proc. of the American Control Conference*. Boston, MA, USA, 2016.
- A. VAFAEI et M. J. YAZDANPANAHI (2016). “A chain observer for nonlinear long constant delay systems : A matrix inequality approach”. *Automatica*, Vol. 65, 2016, pp. 164-169.
- D. WILLIAMSON (1977). “Observation of bilinear systems with application to biological control”. *Automatica*, Vol. 13, 1977, pp. 243-254.
- X.H. XIA et W.B. GAO (1989). “Nonlinear observer design by observer error linearization”. *SIAM J. Control Optim.* Vol. 27, No. 1, 1989, pp. 199-216.
- W. XIANG-JUN, W. HUI et L. HONG-TAO (2011). “Hyperchaotic secure communication via generalized function projective synchronization”. *Nonlinear Analysis : Real World Applications*, Vol. 12, 2011, pp. 1288-1299.
- A. ZEMOUCHE (2007). “Sur l’observation de l’état des systèmes dynamiques non linéaires”. Thèse de doct. Université Louis Pasteur, Strasbourg, 2007.
- A. ZEMOUCHE et M. BOUTAYEB (2009). “A unified  $H_\infty$  adaptive observer synthesis method for a class of systems with both Lipschitz and monotone nonlinearities”. *Systems & Control Letters*, Vol. 58, 2009, pp. 282-288.

## Annexe A

# Forme normale d'observabilité pour une large classe de systèmes MIMO non triangulaires par bloc

### A.1 Description de la forme normale d'observabilité uniforme (FARZA et al. 2011)

La classe de systèmes introduite dans (FARZA et al. 2011) est donnée par

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + \varphi(u(t), x(t)) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

où :

— L'état  $x$  du système (A.1) se décompose comme suit

$$x = \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \\ \vdots \\ x^{(q)} \end{pmatrix} \in R^n \quad \text{avec} \quad x^{(k)} = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_{\lambda_k}^{(k)} \end{pmatrix} \in R^{n_k}$$

où  $x_i^{(k)} \in R^{p_k}$  pour  $k = 1, \dots, q$ ,  $i = 1, \dots, \lambda_k$ , avec  $\sum_{k=1}^q n_k = \sum_{k=1}^q p_k \lambda_k = n$ ,  $p_k \geq 1$  et  $\lambda_k \geq 2$ .

—  $u \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$  et  $y \in \mathbb{R}^p$  sont respectivement l'entrée et la sortie du système (A.1). En particulier, la sortie  $y$  est décrite par

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p \quad \text{avec} \quad y_k \in \mathbb{R}^{p_k} \quad \text{pour} \quad k = 1, \dots, q$$

en donc  $\sum_{k=1}^q p_k = p$ .

— Les matrices  $A$  et  $C$  sont données par

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_q \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad \text{avec} \quad A_k = \begin{bmatrix} 0_{p_k} & I_{p_k} & 0_{p_k} & \cdots & 0_{p_k} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0_{p_k} \\ 0_{p_k} & \cdots & \cdots & 0_{p_k} & I_{p_k} \\ 0_{p_k} & \cdots & \cdots & 0_{p_k} & 0_{p_k} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_k \times n_k}$$

et

$$C = \begin{bmatrix} C_1 & & \\ & \ddots & \\ & & C_q \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p \times n} \quad \text{avec} \quad C_k = \begin{bmatrix} I_{p_k} & 0_{p_k} & \cdots & 0_{p_k} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p_k \times n_k}$$

La condition suffisante d'observabilité uniforme du système (A.1) est donnée par le théorème suivant.

**Théorème A.1.1** *Le système (A.1) est  $\mathbb{R}^m$ -uniformément observable si la fonction non linéaire  $\varphi$  a la structure particulière suivante :*

$$\varphi(u, x) = \begin{pmatrix} \varphi^{(1)}(u, x) \\ \varphi^{(2)}(u, x) \\ \vdots \\ \varphi^{(q)}(u, x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad \text{avec} \quad \varphi^{(k)}(u, x) = \begin{pmatrix} \varphi_1^{(k)}(u, x) \\ \varphi_2^{(k)}(u, x) \\ \vdots \\ \varphi_{\lambda_k}^{(k)}(u, x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n_k}, \quad k = 1, \dots, q$$

où chaque fonction  $\varphi_i^{(k)}(u, x)$  est dérivable selon l'état  $x$  et satisfait la structure de dépendance en  $x$  suivante :

— Pour  $1 \leq i \leq \lambda_k - 1$ ,

$$\varphi_i^{(k)}(u, x) = \varphi_i^{(k)}(u, x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k-1)}, x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_i^{(k)}, x_1^{(k+1)}, x_1^{(k+2)}, \dots, x_1^{(q)})$$

— Pour  $i = \lambda_k$ ,

$$\varphi_{\lambda_k}^{(k)}(u, x) = \varphi_{\lambda_k}^{(k)}(u, x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(q)})$$

### Remarques A.1.1

- La classe de systèmes (A.1) contient celle donnée par (2.16) dans le chapitre 2. En effet, cette dernière se déduit de (A.1) en prenant  $q = 1$ .
- Contrairement à la classe donnée par (2.16), cette classe de systèmes n'est pas triangulaire dans la mesure où chaque fonction  $\varphi_{\lambda_k}^{(k)}$ ,  $k = 1, \dots, q$  dépend de tout l'état du système.

## A.2 Synthèse de l'observateur

Comme pour la classe de systèmes (2.16) présentée dans le chapitre 2, nous supposons ici les hypothèses suivantes vérifiées.

**Hypothèse A.2.1** *L'état  $x(t)$  et la commande  $u(t)$  sont bornées, i.e.  $x(t) \in \mathcal{X}$  et  $u(t) \in \mathcal{U}$  où  $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$  et  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$  sont des ensembles compacts.*

**Hypothèse A.2.2** *Les fonctions  $\varphi_i^{(k)}(u, x)$ ,  $k = 1, \dots, q$ ,  $i = 1, \dots, \lambda_k$ , sont Lipschitz sur  $\mathcal{X}$  selon  $x$  uniformément en  $u$ .*

D'autre part, avant de donner l'expression de l'observateur grand gain, nous devons introduire plusieurs notations.

- Nous définissons la matrice diagonale  $\Delta_k(\theta)$  comme suit

$$\Delta_k(\theta) = \text{diag} \left( I_{p_k}, \frac{1}{\theta^{\delta_k}} I_{p_k}, \dots, \frac{1}{\theta^{\delta_k(\lambda_k-1)}} I_{p_k} \right)$$

où  $\theta > 0$  est le paramètre de synthèse propre à tout observateur grand gain, et où les entiers positifs  $\delta_k$ ,  $k = 1, \dots, q$ , sont calculés de la manière suivante :

$$\begin{cases} \delta_k = 2^{q-k} \left( \prod_{i=k+1}^q \lambda_i - \frac{3}{2} \right), & k = 1, \dots, q-1 \\ \delta_q = 1 \end{cases}$$

- La matrice  $S_k$  est l'unique solution de l'équation algébrique de Lyapunov suivante

$$S_k + A_k^T S_k + S_k A_k = C_k^T C_k$$

ce qui donne  $S_k^{-1} C_k^T = \begin{pmatrix} C_{\lambda_k}^1 I_{p_k} \\ C_{\lambda_k}^2 I_{p_k} \\ \vdots \\ C_{\lambda_k}^{\lambda_k} I_{p_k} \end{pmatrix}$ , où  $C_{\lambda_k}^i = \frac{\lambda_k!}{i!(\lambda_k - i)!}$  pour  $i = 1, \dots, \lambda_k$ .

Un observateur pour le système (A.1) est donné par le système dynamique de  $q$  blocs suivant :

$$\dot{\hat{x}}^{(k)}(t) = A_k \hat{x}^{(k)}(t) + \varphi^{(k)}(u, \hat{x}) - \theta^{\delta_k} \Delta_k^{-1}(\theta) S_k^{-1} C_k^T \left( C \hat{x}^{(k)}(t) - y^{(k)}(t) \right), \quad k = 1, \dots, q, \quad (\text{A.2})$$

où  $u$  et  $y$  sont respectivement l'entrée et la sortie du système (A.1),  $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$  représente l'état estimé donné par

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} \hat{x}^{(1)} \\ \hat{x}^{(2)} \\ \vdots \\ \hat{x}^{(q)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad \text{avec} \quad \hat{x}^{(k)} = \begin{pmatrix} \hat{x}_1^{(k)} \\ \hat{x}_2^{(k)} \\ \vdots \\ \hat{x}_{\lambda_k}^{(k)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n_k}$$

où  $\hat{x}_i^{(k)} \in \mathbb{R}^{p_k}$  pour  $k = 1, \dots, q$ ,  $i = 1, \dots, \lambda_k$ , et  $\hat{x}^{(k)} \in \mathbb{R}^{n_k}$  représente une estimation de l'état  $x^{(k)}$  avec injection de sortie, c'est-à-dire

$$\hat{x}_i^{(k)} = \begin{cases} x_1^{(k)} & \text{pour } i = 1 \\ \hat{x}_i^{(k)} & \text{pour } i = 2, \dots, \lambda_k \end{cases}$$

Le théorème suivant stipule que l'observateur (A.2) est un observateur exponentiel pour le système (A.1).

**Théorème A.2.1** *Supposons que le système (A.1) est soumis aux hypothèses A.2.1 et A.2.2 conjointement avec l'observateur (A.2). Alors*

$$\begin{aligned} &\exists \theta_0 > 0; \forall \theta \geq \theta_0, \exists \lambda_\theta > 0, \exists \mu_\theta > 0 \text{ tels que pour } k = 1, \dots, q, \\ &\|\hat{x}^{(k)}(t) - x^{(k)}(t)\| \leq \lambda_\theta e^{-\mu_\theta t} \|\hat{x}(0) - x(0)\|, \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

pour toute entrée admissible  $u \in \mathcal{U}$ , où  $\lambda_\theta$  est un polynôme en  $\theta$  et  $\lim_{\theta \rightarrow +\infty} \mu_\theta = +\infty$ .

Le preuve du théorème A.2.1 est donné dans (FARZA et al. 2011).

## Annexe B

# Lemmes techniques

### B.1 Lemmes techniques du chapitre 3

Le lemme technique suivant est un résultat vital intervenant dans toutes les preuves de convergence du chapitre 3.

**Lemme B.1.1** *Soit une fonction différentiable  $v : t \in [t_0 - \delta, +\infty[ \rightarrow v(t) \in \mathbb{R}^+$  avec  $t_0, \delta \geq 0$ , vérifiant l'inégalité suivante*

$$\dot{v}(t) \leq -av(t) + b \int_{t-\delta}^t v(s)ds + p(t), \quad \forall t \geq t_0$$

où  $a > 0$ ,  $b \geq 0$ , et  $p : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  est une fonction essentiellement bornée avec  $\|p\|_\infty \triangleq \text{ess sup}_{t \geq 0} \|p(t)\| \leq \delta_p$ . Si

$$\frac{b\delta}{a} < 1,$$

alors la fonction  $v$  vérifie

$$v(t) \leq e^{-\varsigma a(t-t_0)} \sqrt{1 + b \frac{e^{2\varsigma a \delta} - 2\varsigma a \delta - 1}{4\varsigma^2 a^2}} \max_{\nu \in [t_0 - \delta, t_0]} v(\nu) + \frac{\delta_p}{\varsigma a}, \quad \forall t \geq t_0 \quad (\text{B.1})$$

où  $\varsigma$  est tel que  $0 < \varsigma \leq 1$  et vérifie

$$\frac{b(e^{2\varsigma a \delta} - 1)}{a \cdot 2\varsigma a} \leq 1 - \varsigma \quad (\text{B.2})$$

**Preuve du lemme B.1.1.** Prouvons dans un premier temps l'existence de  $\varsigma$  donnée par (B.2). En effet, puisque  $\frac{b\delta}{a} < 1$ , et puisque la fonction  $\alpha \rightarrow \frac{e^{\alpha\delta} - 1}{\alpha}$ , où  $\alpha > 0$  est un réel, est une fonction strictement croissante sur  $[0, +\infty[$ , il existe  $\bar{\alpha} > 0$  tel que, pour tout  $\alpha \in ]0, \bar{\alpha}]$ , nous avons (GERMANI et al. 2002; FARZA et al. 2015)

$$\frac{b(e^{\alpha\delta} - 1)}{a \cdot \alpha} < 1 \quad (\text{B.3})$$

Maintenant, soit  $0 < \varsigma_1 \leq 1$  tel que  $2\varsigma_1 a \leq \bar{\alpha}$ , il est clair que (B.3) est satisfaite pour  $\alpha = 2\varsigma_1 a$ . D'autre part, puisque toutes les variables impliquées dans le terme à gauche de l'inégalité (B.3) sont constantes, il existe  $\varsigma_2$  avec  $0 < \varsigma_2 \leq 1$  tel que

$$\frac{b}{a} \frac{(e^{2\varsigma_1 a \delta} - 1)}{2\varsigma_1 a} \leq 1 - \varsigma_2 < 1 \quad (\text{B.4})$$

Maintenant, il convient de considérer deux cas suivant  $\varsigma_1 \leq \varsigma_2$  ou non.

**Cas 1 :**  $\varsigma_1 \leq \varsigma_2$ . Dans ce cas, nous avons  $1 - \varsigma_2 \leq 1 - \varsigma_1$ , et selon la relation (B.4) il vient

$$\frac{b}{a} \frac{(e^{2\varsigma_1 a \delta} - 1)}{2\varsigma_1 a} \leq 1 - \varsigma_1$$

Ainsi, l'inégalité (B.2) est vérifiée avec  $\varsigma = \varsigma_1$ .

**Cas 2 :**  $\varsigma_1 > \varsigma_2$ . Dans ce cas, nous avons

$$\frac{b}{a} \frac{(e^{2\varsigma_2 a \delta} - 1)}{2\varsigma_2 a} \leq \frac{b}{a} \frac{(e^{2\varsigma_1 a \delta} - 1)}{2\varsigma_1 a} \leq 1 - \varsigma_2 \quad \text{d'après (B.4)}$$

Cette fois, l'inégalité (B.2) est vérifiée pour  $\varsigma = \varsigma_2$ .

Désormais, considérons la fonction candidate de Lyapunov suivante

$$W(v, t) = v^2(t) + b \int_0^\delta \int_{t-s}^t e^{2\varsigma a(\nu-t+s)} v^2(\nu) d\nu ds, \quad \forall t \geq t_0 \quad (\text{B.5})$$

où  $\varsigma$  est défini par (B.2). Nous avons ainsi

$$\begin{aligned} \dot{W}(v, t) &= 2v(t)\dot{v}(t) - 2\varsigma a (W(v, t) - v^2(t)) + b \int_0^\delta e^{2\varsigma a s} v^2(t) ds - b \int_0^\delta v^2(t-s) ds \\ &= 2v(t)\dot{v}(t) - 2\varsigma a (W(v, t) - v^2(t)) + b \frac{e^{2\varsigma a \delta} - 1}{2\varsigma a} - b \int_{t-\delta}^t v^2(s) ds \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

D'après (B.2), la précédente inégalité (B.6) nous donne

$$\begin{aligned} \dot{W}(v, t) + 2\varsigma a W(v, t) &\leq 2v(t)\dot{v}(t) + 2\varsigma a v^2(t) + (1 - \varsigma) a v^2(t) - b \int_{t-\delta}^t v^2(s) ds \\ &\leq -2a v^2(t) + 2b \int_{t-\delta}^t v(t)v(s) ds + 2v(t)p(t) \\ &\quad + (1 + \varsigma) a v^2(t) - b \int_{t-\delta}^t v^2(s) ds \\ &\leq -2a v^2(t) + b \int_{t-\delta}^t v^2(t) + v^2(s) ds + 2v(t)p(t) \\ &\quad + (1 + \varsigma) a v^2(t) - b \int_{t-\delta}^t v^2(s) ds \\ &= -2a v^2(t) + b \delta v^2(t) + 2v(t)p(t) + (1 + \varsigma) a v^2(t) \\ &\leq a \left( -2 + \frac{b\delta}{a} + 1 + \varsigma \right) v^2(t) + 2v(t)p(t) \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

L'association de la relation (B.2) avec le fait que  $\frac{b}{a} \frac{e^{2\zeta a \delta} - 1}{2\zeta a} \geq \frac{b\delta}{a}$ ,  $\forall \delta > 0$ , mène à

$$\frac{b\delta}{a} \leq 1 - \varsigma \quad (\text{B.8})$$

D'après (B.8), l'inégalité (B.7) nous donne

$$\dot{W}(v, t) + 2\zeta a W(v, t) \leq 2v(t)p(t)$$

D'après (B.5), nous avons  $v^2(t) \leq W(v, t)$  pour tout  $t \geq 0$ , et par suite

$$\dot{W}(v, t) + 2\zeta a W(v, t) \leq 2p(t)\sqrt{W(v, t)}$$

ou de manière équivalente

$$\frac{d}{dt}\sqrt{W(v, t)} \leq -\zeta a \sqrt{W(v, t)} + p(t)$$

En utilisant le lemme de comparaison, nous obtenons alors

$$\sqrt{W(v(t), t)} \leq e^{-\zeta a(t-t_0)}\sqrt{W(v(t_0), t_0)} + \frac{1}{\zeta a}\delta_p, \quad \forall t \geq t_0 \quad (\text{B.9})$$

D'autre part, d'après (B.5) nous avons

$$\begin{aligned} W(v(t_0), t_0) &\leq v^2(t_0) + b \left( \int_0^\delta \int_{t_0-s}^{t_0} e^{2\zeta a(\nu-t_0+s)} d\nu ds \right) \max_{\nu \in [t_0-\delta, t_0]} v^2(\nu) \\ &= v^2(t_0) + b \frac{e^{2\zeta a \delta} - 2\zeta a \delta - 1}{4\zeta^2 a^2} \max_{\nu \in [t_0-\delta, t_0]} v^2(\nu) \\ &\leq \left( 1 + b \frac{e^{2\zeta a \delta} - 2\zeta a \delta - 1}{4\zeta^2 a^2} \right) \max_{\nu \in [t_0-\delta, t_0]} v^2(\nu) \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

D'après le fait que  $v(t) \leq \sqrt{W(v(t), t)}$ ,  $\forall t \geq t_0$ , la combinaison de (B.9) et (B.10) mène à (B.1). Ceci termine la preuve du lemme B.1.1.  $\square$

## B.2 Lemmes techniques du chapitre 4

Le lemme suivant est utilisé dans l'analyse de sensibilité au bruit de mesure de l'observateur FHGO (théorème 4.3.2).

**Lemme B.2.1** *Considérons les matrices suivantes :*

$$A_n = \begin{bmatrix} 0_{n-1,1} & I_{n-1} \\ 0 & 0_{1,n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad B_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad R = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_{n-1} \\ r_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$



où les coefficients  $r_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , sont des réels, de sorte que nous ayons

$$pI_n - A_n - B_nR = \begin{bmatrix} p & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & p & -1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & p & -1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & p & -1 \\ -r_1 & -r_2 & \dots & \dots & -r_{n-1} & p - r_n \end{bmatrix} \quad (\text{B.11})$$

où  $p$  est la variable associée à la transformée de Laplace. Soit également

$$(X_{i,j}(p))_{1 \leq i,j \leq n} \triangleq (pI_n - A_n - B_nR)^{-1}$$

Alors l'entrée  $X_{i,j}(p)$  de la matrice  $(pI_n - A_n - B_nR)^{-1}$  localisée à la ligne  $i$  et la colonne  $j$  vérifie

$$X_{i,j}(p) = \begin{cases} \frac{p^{n+i-j-1} - \sum_{m=j+1}^n r_m p^{m+i-j-2}}{p^n - \sum_{m=1}^n r_m p^{m-1}} & \text{si } i \leq j \\ \frac{\sum_{m=1}^j r_m p^{m+i-j-2}}{p^n - \sum_{m=1}^n r_m p^{m-1}} & \text{si } i > j \end{cases} \quad (\text{B.12})$$

**Preuve du lemme B.2.1.** Notre objectif est de calculer la matrice  $(pI_n - A_n - B_nR)^{-1}$  vérifiant

$$(pI_n - A_n - B_nR)(pI_n - A_n - B_nR)^{-1} = I_n$$

Soit donc  $(X_{i,j}(p))_{1 \leq i,j \leq n} \triangleq (pI_n - A_n - B_nR)^{-1}$ . Nous avons alors, pour tout  $i, j = 1, \dots, n$ ,

$$\left( (pI_n - A_n - B_nR)(pI_n - A_n - B_nR)^{-1} \right)_{i,j} = (I_n)_{i,j}$$

i.e.

$$\sum_{k=1}^n (pI_n - A_n - B_nR)_{i,k} X_{k,j}(p) = (I_n)_{i,j} \quad (\text{B.13})$$

Nous allons dans ce qui suit raisonner de manière itérative sur  $j$  de façon à déterminer, pour  $j$  fixé, tous les termes  $X_{i,j}(p)$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

**Colonne  $j = 1$  :** Dans le cas  $j = 1$ , la relation précédente (B.13) se spécialise comme suit

$$\sum_{k=1}^n (pI_n - A_n - B_nR)_{i,k} X_{k,1}(p) = (I_n)_{i,1}$$

ce qui, en exploitant la relation (B.11), mène au système d'équations suivant

$$\begin{cases} pX_{1,1}(p) - X_{2,1}(p) = 1, \\ pX_{i,1}(p) - X_{i+1,1}(p) = 0, \quad i = 2, \dots, n-1 \\ pX_{n,1}(p) - \sum_{m=1}^n r_m X_{m,1}(p) = 0. \end{cases} \quad (\text{B.14})$$

D'une part, d'après le système d'équations (B.14) précédent, nous avons pour tout  $m = 2, \dots, n$

$$X_{m,1}(p) = p^{m-1} X_{2,1}(p)$$

ce qui donne

$$pX_{n,1}(p) - \sum_{m=1}^n r_m X_{m,1}(p) = \left( p^{n-1} - \sum_{m=2}^n r_m p^{m-2} \right) X_{2,1}(p) - r_1 X_{1,1}(p) = 0$$

En injectant dans l'équation précédente l'expression de  $X_{2,1}(p) = pX_{1,1}(p) - 1$  donnée par le système (B.14), il vient

$$\left( p^n - \sum_{m=2}^n r_m p^{m-1} \right) X_{1,1}(p) - r_1 X_{1,1}(p) = \left( p^{n-1} - \sum_{m=2}^n r_m p^{m-2} \right)$$

i.e.

$$X_{1,1}(p) = \frac{p^{n-1} - \sum_{m=2}^n r_m p^{m-2}}{p^n - \sum_{m=1}^n r_m p^{m-1}} \quad (\text{B.15})$$

D'après (B.14), il vient alors

$$X_{2,1}(p) = pX_{1,1}(p) - 1 = \frac{r_1}{p^n - \sum_{m=1}^n r_m p^{m-1}} \quad (\text{B.16})$$

et, pour  $i = 3, \dots, n$ ,

$$X_{i,1}(p) = pX_{i-1,1}(p) = \frac{r_1 p^{i-2}}{p^n - \sum_{m=1}^n r_m p^{m-1}} \quad (\text{B.17})$$

Les relations (B.15), (B.16) et (B.17) vérifient donc le résultat (B.12).

**Colonne  $j = 2, \dots, n-1$  :** En exploitant la relation (B.11), nous obtenons cette fois-ci le système d'équations suivant, pour  $j = 2, \dots, n-1$ ,

$$\begin{cases} pX_{i,j}(p) - X_{i+1,j}(p) = 0, \quad i = 1, \dots, j-1 \\ pX_{j,j}(p) - X_{j+1,j}(p) = 1, \\ pX_{i,j}(p) - X_{i+1,j}(p) = 0, \quad i = j+1, \dots, n-1 \\ pX_{n,j}(p) - \sum_{m=1}^n r_m X_{m,j}(p) = 0. \end{cases} \quad (\text{B.18})$$

D'une part, d'après le système d'équations (B.14) précédent, nous avons les relations suivantes

$$\begin{cases} X_{m,j}(p) = p^{m-1} X_{1,j}(p), \quad m = 1, \dots, j, \\ X_{j+1,j}(p) = pX_{j,j}(p) - 1, \\ X_{m,j}(p) = p^{m-j-1} X_{j+1,j}(p), \quad m = j+1, \dots, n, \end{cases} \quad (\text{B.19})$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
 pX_{n,j}(p) - \sum_{m=1}^n r_m X_{m,j}(p) &= \left( p^{n-j} - \sum_{m=j+1}^n r_m p^{m-j-1} \right) X_{j+1,j}(p) - \sum_{m=1}^j r_m X_{m,j}(p) \\
 &= \left( p^{n-j} - \sum_{m=j+1}^n r_m p^{m-j-1} \right) (pX_{j,j}(p) - 1) - \sum_{m=1}^j r_m X_{m,j}(p) \\
 &= \left( p^{n+1-j} - \sum_{m=j+1}^n r_m p^{m-j} \right) p^{j-1} X_{1,j}(p) - \sum_{m=1}^j r_m p^{m-1} X_{1,j}(p) \\
 &\quad - \left( p^{n-j} - \sum_{m=j+1}^n r_m p^{m-j-1} \right) \\
 &= \left( p^n - \sum_{m=1}^n r_m p^{m-1} \right) X_{1,j}(p) - \left( p^{n-j} - \sum_{m=j+1}^n r_m p^{m-j-1} \right) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

i.e.

$$X_{1,j}(p) = \frac{p^{n-j} - \sum_{m=j+1}^n r_m p^{m-j-1}}{p^n - \sum_{m=1}^n r_m p^{m-1}} \quad (\text{B.20})$$

D'après (B.18), nous avons pour  $i = 2, \dots, j$

$$X_{i,j}(p) = p^{i-1} X_{1,j}(p) = \frac{p^{n+i-j-1} - \sum_{m=j+1}^n r_m p^{m+i-j-2}}{p^n - \sum_{m=1}^n r_m p^{m-1}}, \quad (\text{B.21})$$

nous avons pour  $i = j + 1$

$$\begin{aligned}
 X_{j+1,j}(p) &= pX_{j,j}(p) - 1 \\
 &= \frac{p^n - \sum_{m=j+1}^n r_m p^{m-1}}{p^n - \sum_{m=1}^n r_m p^{m-1}} - 1 = \frac{\sum_{m=1}^j r_m p^{m-1}}{p^n - \sum_{m=1}^n r_m p^{m-1}}, \quad (\text{B.22})
 \end{aligned}$$

et, pour  $i = j + 2, \dots, n$ ,

$$X_{i,j}(p) = p^{i-j-1} X_{j+1,j}(p) = \frac{\sum_{m=1}^j r_m p^{m+i-j-2}}{p^n - \sum_{m=1}^n r_m p^{m-1}}, \quad (\text{B.23})$$

Les relations (B.20), (B.21), (B.22) et (B.23) sont ainsi en accord avec le résultat (B.12).

**Colonne  $j = n$  :** Par un raisonnement similaire aux cas précédents, en exploitant la relation (B.11), nous obtenons cette fois-ci le système d'équations suivant pour  $j = n$ ,

$$\begin{cases} pX_{i,n}(p) - X_{i+1,n}(p) = 0, & i = 1, \dots, n-1 \\ pX_{n,n}(p) - \sum_{m=1}^n r_m X_{m,n}(p) = 1. \end{cases} \quad (\text{B.24})$$

ce qui implique notamment la relation suivante, pour  $m = 1, \dots, n$ ,

$$X_{m,n}(p) = p^{m-1} X_{1,n}(p)$$

Nous avons alors directement

$$p^n X_{1,n}(p) - \sum_{m=1}^n r_m p^{m-1} X_{1,n}(p) = 1 \quad (\text{B.25})$$

et par suite

$$X_{i,n}(p) = \frac{p^{i-1}}{p^n - \sum_{m=1}^n r_m p^{m-1}}, \quad i = 1, \dots, n \quad (\text{B.26})$$

La relation (B.26) est donc également en accord avec le résultat (B.12). Nous avons donc montré que le résultat (B.12) est vrai pour tout  $i, j = 1, \dots, n$ , ce qui termine la preuve du lemme B.2.1.  $\square$

Le lemme suivant est utilisé dans la preuve de convergence de l'observateur FHGO continu-discret, donnée par le théorème 4.3.3 du chapitre 4.

**Lemme B.2.2 (BOURAOUÏ et al. 2015)** *Considérons une fonction différentiable réelle à valeurs positives  $v : t \in \mathbb{R}^+ \rightarrow v(t) \in \mathbb{R}^+$  vérifiant, pour tout  $t \geq 0$ ,*

$$\dot{v}(t) \leq -av(t) + b \int_{t_k}^t v(s) ds + p(t), \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}[ , \quad (\text{B.27})$$

avec  $k \in \mathbb{N}$ ,  $t_0 \geq 0$ , où  $0 < \tau_m \leq \tau_k = t_{k+1} - t_k \leq \tau_M < +\infty$ ,  $p(t) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction essentiellement bornée avec  $|p|_\infty \triangleq \text{ess sup}_{t \geq 0} p(t) \leq c$ , et  $a$  et  $b$  sont des réels positifs.

Si la borne supérieure  $\tau_M$  vérifie la relation  $\tau_M < \chi \triangleq \frac{a}{b}$ , alors la fonction  $v$  vérifie

$$v(t) \leq e^{-\varsigma(t-t_0)} v(t_0) + c\tau_M \frac{2 - e^{-\varsigma\tau_m}}{1 - e^{-\varsigma\tau_m}} \quad \text{avec} \quad 0 < \varsigma = a \left( 1 - \frac{\tau_M}{\chi} \right) e^{-a\tau_M} \quad (\text{B.28})$$





# Observateurs grand gain pour des systèmes non linéaires à sorties échantillonnées et retardées

## Résumé

Ce manuscrit porte sur la synthèse d'observateurs grand gain pour des systèmes non linéaires à sorties échantillonnées et retardées. Trois contributions sont proposées à la lecture de ce manuscrit. La première contribution, pour une classe de systèmes Multi-entrées / Multi-sorties uniformément observables et dont les sorties sont regroupées en un seul bloc, met en jeu le problème du processus d'acquisition des mesures de sortie (continues, échantillonnées, retardées ou non) et propose un cadre commun pour l'ensemble des cas possibles. La deuxième contribution propose un observateur grand gain filtré sur cette même classe de systèmes dans l'optique de réduire la sensibilité au bruit de mesure, dans le cas où la sortie est continue puis dans le cas où cette dernière est échantillonnée. La dernière contribution vise à étendre la synthèse grand gain standard pour une large classe de systèmes Multi-entrées / Multi-sorties uniformément observables dont les mesures de sortie sont continues. Pour chacune de ces contributions, il a été montré que l'erreur d'observation de chacun des observateurs proposés converge exponentiellement vers zéro en l'absence d'incertitudes sur le système. Toutes ces contributions ont été illustrées par différents exemples issus de plusieurs domaines d'étude.

**Mots-clés :** Systèmes non linéaires, Observateur grand gain, Observabilité uniforme, Processus d'acquisition des mesures de sortie, Observateur grand gain filtré, Bioréacteur.

## Abstract

This manuscript deals with the synthesis of high gain observers for nonlinear systems with sampled and delayed outputs. Three contributions are proposed for consideration in this manuscript. The first contribution, for a class of Multi-input / Multi-output systems whose outputs are grouped into a single block, involves the problem of the acquisition process of output measurements (continuous, sampled, delayed or not) and proposes a common framework for all possible cases. The second contribution proposes a filtered high gain observer on this same class of systems in order to reduce the sensitivity to measurement noise, in the case where the output is continuous and then in the case where the latter is sampled. The last contribution aims to extend the standard high gain synthesis for a large class of uniformly observable Multi-input / Multi-output systems with continuous output measurements. For each of these contributions, it has been shown that the observation error of each of the proposed observers converges exponentially towards zero in the absence of uncertainties in the system. All these contributions have been illustrated through several examples from different fields of study.

**Keywords :** Nonlinear systems, High gain observer, Uniform observability, Acquisition process of output measurements, Filtered high gain observer, Bioreactor.