



HAL
open science

Étude de modèles spatiaux et spatio-temporels

Papa Ousmane Cisse

► **To cite this version:**

Papa Ousmane Cisse. Étude de modèles spatiaux et spatio-temporels. Topologie algébrique [math.AT]. Université Panthéon-Sorbonne - Paris I; Université de Saint-Louis (Sénégal), 2018. Français. NNT : 2018PA01E060 . tel-02065990

HAL Id: tel-02065990

<https://theses.hal.science/tel-02065990>

Submitted on 18 Jul 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



ÉCOLE DOCTORALE D'ÉCONOMIE DE PANTHÉON-SORBONNE (ED 465)
ÉCOLE DOCTORALE DES SCIENCES ET DES TECHNOLOGIES (ED ST)

THÈSE DE DOCTORAT

en cotutelle présentée pour obtenir le grade de Docteur de

**L'UNIVERSITE PARIS 1 PANTHEON-SORBONNE &
L'UNIVERSITE GASTON BERGER DE SAINT-LOUIS**

Spécialité : Mathématiques Appliquées

par

PAPA OUSMANE CISSE

ÉTUDE DE MODÈLES SPATIO-TEMPORELS ET LEURS APPLICATIONS

Soutenue publiquement le **11 Décembre 2018** devant le jury composé de

Jean-Marc BARDET	Professeur, Université Paris 1 Panthéon Sorbonne	Président
Sophie DABO-NIANG	Professeure, Université Lille 3	Rapporteur
Jean-Louis MONINO	Professeur, Université Montpellier 1	Rapporteur
Aliou DIOP	Professeur, Université Gaston BERGER	Examineur
Abdou Kâ DIONGUE	Professeur, Université Gaston BERGER	Directeur de Thèse
Dominique GUEGAN	Professeure, Université Paris 1 Panthéon Sorbonne	Directrice de Thèse

au Centre d'Économie de Sorbonne (CES), Maison des Sciences Économiques (MSE),
106-112 Boulevard de l'Hôpital, 75013 Paris.

"A mon cher Papa"

Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer ma profonde reconnaissance à mes directeurs de thèse, les professeurs Abdou Kâ Diongue et Dominique Guegan.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à l'égard de Dominique Guegan pour la confiance qu'elle m'a accordée en acceptant d'encadrer ma thèse et de l'avoir si bien fait. J'aimerais également lui dire à quel point j'ai apprécié ses compétences, sa rigueur et sa clairvoyance. J'ai beaucoup apprécié sa gentillesse, sa disponibilité et sa patience. Dans les périodes difficiles, elle m'a toujours offert du temps et de précieux conseils pour m'aider à avancer.

Je remercie également profondément Abdou Kâ Diongue avec qui j'ai travaillé depuis ma licence et qui m'a fait aimer les domaines de la modélisation mathématique. Par ses conseils avisés, ses multiples relectures et remarques pertinentes, il m'a offert le meilleur encadrement possible afin de mener mes travaux de recherche. J'ai été extrêmement sensible à ses qualités humaines, d'écoute, de disponibilité et de bienveillance.

Merci à tous les deux de m'avoir tant apporté aussi bien humainement que scientifiquement. Merci pour nos discussions si enrichissantes et d'avoir toujours été disponibles pour moi. J'ai pris un très grand plaisir à travailler avec vous. J'espère avoir été digne de la confiance que vous m'avez accordée. J'ai beaucoup appris à vos côtés et je suis très honoré de vous avoir eu pour encadrants. Merci également pour l'exigence.

Je remercie profondément Sophie Dabo-Niang et Jean-Louis Monino d'avoir accepté la tâche de rapporteur et pour leur relecture très attentive malgré un emploi du temps chargé. Leurs commentaires et suggestions ont permis d'améliorer la qualité du manuscrit. Qu'ils reçoivent mes vifs remerciements et l'expression de ma très haute reconnaissance.

Je voudrais exprimer ma gratitude à Jean-Marc Bardet pour l'intérêt qu'il a bien voulu porter à ce travail et pour avoir accepté de présider mon jury. Tous mes remerciements à Aliou Diop qui a bien voulu être membre du jury. Je le suis sincèrement reconnaissant.

Je tiens à saluer tous les membres du Laboratoire d'études et de Recherche en Statistique et Développement (LERSTAD) de l'Université Gaston Berger de Saint-Louis. Merci à tous mes professeurs de l'UFR SAT qui ont participé à ma formation, j'ai tant appris à vos côtés. Un grand merci à tous les membres de l'axe Finance et Modélisation du CES (Centre d'Economie de Sorbonne) pour l'accueil et l'aide scientifique indispensable à mes recherches.

Ce travail n'aurait pas été possible sans le soutien du Service de Coopération et d'Action Culturelle (SCAC) de l'Ambassade de France à Dakar et du Ministère de l'enseignement Supérieur de la Recherche et de l'Innovation du gouvernement du Sénégal, qui m'ont permis, grâce à des allocations de recherches et diverses aides financières, de me consacrer sereinement à l'élaboration de ma thèse. Je remercie également le Centre d'Excellence Africain en Mathématiques, Informatique et TIC (CEA-MITIC) pour les aides financiers lors des mobilités de recherches et conférences internationales.

Au terme de ce parcours, je remercie enfin celles et ceux qui me sont chers et que j'ai quelque peu délaissés ces derniers mois pour achever cette thèse. Leurs attentions et encouragements m'ont accompagnée tout au long de ces années. Je suis redevable à mes parents, pour leur soutien moral et matériel et leur confiance indéfectible dans mes choix. Je remercie toute ma famille pour le soutien et les encouragements qu'elle m'a témoigné.

Enfin, j'adresse mes remerciements à mon épouse pour sa gratitude, sa patience et pour le soutien morale qu'elle a su m'apporter dans l'accomplissement de ce travail.

*"Models are, for the most part, caricatures of reality,
but if they are good, like good caricatures,
they portray, though perhaps in a disturbed manner,
some features of the real world."*

Marc Kac.

Résumé / Abstract

Résumé: Étude de modèles spatio-temporels et Applications

Ce travail porte sur les séries spatiales. On étudie les phénomènes dont l'observation est un processus aléatoire indexé par un ensemble spatial. Dans cette thèse on s'intéresse aux données bi-dimensionnelles régulièrement dispersées dans l'espace, on travaille alors dans un rectangle régulier (sur \mathbb{Z}^2). Cette modélisation vise donc à construire des représentations des systèmes suivant leurs dimensions spatiales et ses applications dans de nombreux domaines tels que la météorologie, l'océanographie, l'agronomie, la géologie, l'épidémiologie, ou encore l'économétrie etc. La modélisation spatiale permet d'aborder la question importante de la prédiction de la valeur d'un champ aléatoire en un endroit donné d'une région. On suppose que la valeur à prédire dépend des observations dans les régions voisines. Ceci montre la nécessité de tenir compte, en plus de leurs caractéristiques statistiques, des relations de dépendance spatiale entre localisations voisines, pour rendre compte de l'ensemble des structures inhérentes aux données. Dans la plupart des champs d'applications, on est souvent confronté du fait que l'une des sources majeures de fluctuations est la saisonnalité. Dans nos travaux on s'intéresse particulièrement à ce phénomène de saisonnalité dans les données spatiales. Faire une modélisation mathématique en tenant en compte l'interaction spatiale des différents points ou localités d'une zone entière serait un apport considérable. En effet un traitement statistique qui prendrait en compte cet aspect et l'intègre de façon adéquat peut corriger une perte d'information, des erreurs de prédictions, des estimations non convergentes et non efficaces.

Mots-clés : processus spatiaux; modèles spatio-temporels; saisonnalité; mémoire longue; densité spectrale; autocovariance spectrale; estimation; méthode de régression; méthode d'estimation de Whittle; maximum de vraisemblance; simulation de Monte Carlo.

Classification JEL: C02; C21; C51; C52; C53; Q11; Q18.

Abstract: Spatiotemporal models and Applications

This thesis focuses on the time series in addition to being observed over time, also have a spatial component. By definition, a spatio-temporal phenomenon is a phenomenon which involves a change in space and time. The spatio-temporal modelling therefore aims to construct representations of systems taking into account their spatial and temporal dimensions. It has applications in many fields such as meteorology, oceanography, agronomy, geology, epidemiology, image processing or econometrics etc. It allows them to address the important issue of predicting the value of a random field at a given location in a region. Assume that the value depends predict observations in neighbouring regions. This shows the need to consider, in addition to their statistical characteristics, relations of spatial dependence between neighbouring locations, to account for all the inherent data structures. In the exploration of spatio-temporal data, refinement of time series models is to explicitly incorporate the systematic dependencies between observations for a given region, as well as dependencies of a region with neighboring regions. In this context, the class of spatial models called spatio-temporal auto-regressive models (Space-Time Autoregressive models) or STAR was introduced in the early 1970s. It will then be generalized as GSTAR model (Generalized Space-Time Autoregressive models). In most fields of applications, one is often confronted by the fact that one of the major sources of fluctuations is seasonality. In our work we are particularly interested in the phenomenon of seasonality in spatio-temporal data. We develop a new class of models and investigates the properties and estimation methods. Make a mathematical model taking into account the spatial interaction of different points or locations of an entire area would be a significant contribution. Indeed, a statistical treatment that takes into account this aspect and integrates appropriate way can correct a loss of information, errors in predictions, non-convergent and inefficient estimates.

Keywords: spatial processes; seasonality; long memory; spectral density; spatial autocovariance; regression method; Whittle method; MLE method; Monte Carlo study.

JEL Classification: C02; C21; C51; C52; C53; Q11; Q18.

Abréviations & Notations

Variables aléatoires et modes de convergence

- $\mathbb{P}(A)$: La probabilité de l'événement A .
- $\mathbb{E}(X)$: L'espérance mathématique de la variable aléatoire X .
- $X \stackrel{\mathcal{D}}{=} Y$: Les deux variables aléatoires X et Y ont la même loi de probabilité.
- $X \xrightarrow{\mathcal{D}} Y$: La variable aléatoire X converge en loi vers Y .
- $X_n \xrightarrow{p.s.} Y$: La suite de variables aléatoires $(X_n)_n$ converge presque sûrement vers Y .

Notations d'ordre général

- \mathbb{N} : ensemble des entiers naturels.
- \mathbb{N}^* : ensemble des entiers naturels non nuls.
- \mathbb{R} : ensemble des réels .
- \mathbb{Z} : ensemble des entiers relatifs et $\mathbb{Z}^d = \underbrace{\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}}_{d \text{ fois}}$.
- \mathbb{C} : ensemble des nombres complexes.
- i : le nombre complexe solution de l'équation $i^2 = -1$.
- X' : Transposée du vecteur X .
- i.i.d : indépendantes et identiquement distribuées.
- MCMC : Monte Carlo par Chaînes de Markov.

Table des matières

Introduction Générale	1
0.1 Revue de la littérature	1
0.2 Objectifs de la Thèse	8
0.3 Structure de la Thèse	9
1 Généralités sur la statistique spatiale	13
1.1 Champs aléatoires	14
1.1.1 Définitions et notations	14
1.1.2 Champs aléatoires stationnaires	15
1.1.3 Champs aléatoires gaussiens	17
1.2 Types de données spatiales	18
1.2.1 Données ponctuelles	18
1.2.2 Données surfaciques	19
1.2.3 Données en semis points	19
1.3 La dépendance spatiale	20
1.3.1 L'autocorrélation spatiale	20
1.3.2 L'hétérogénéité spatiale	22
1.3.3 Les indices d'autocorrélation spatiale	23
1.4 Exemples de modèles spatiaux	27
1.4.1 Modèles MA et ARMA	28
1.4.2 Quelques modèles de régression spatiale	29
2 Le modèle Seasonal FISSAR et ses propriétés	34
2.1 Introduction	35
2.2 A new model: The Seasonal FISSAR	37
2.3 Some properties of the seasonal FISSAR model	40
2.4 Illustrations	47
2.5 Conclusion	50

2.6	Appendix	50
3	Quelques méthodes d'estimation des paramètres d'un processus Seasonal FISSAR	62
3.1	Introduction	63
3.2	Estimation Procedures	66
3.2.1	Log-periodogram Regression Method	67
3.2.2	Exact Maximum Likelihood method	71
3.3	Simulation Results	74
3.4	Others methods	84
3.4.1	MLE method based on Whittle function	84
3.4.2	Whittle Method	85
3.4.3	MCMC Whittle Method	85
3.5	Conclusion	87
4	Theoretical variance and ACF of the Seasonal FISSAR model and simulations study	89
4.1	Introduction	90
4.2	Spatial autocorrelation function	92
4.3	Theoretical variance and Estimation	94
4.4	Simulation Results	94
4.5	Conclusion	97
	Conclusion et Perspectives	100
	Bibliographie	105

Table des figures

1.1 Les différents types d'autocorrélation	22
2.1 2D seasonal fractionally integrated white noise process, $d_1 = 0.1, d_2 = 0.1, D_1 = 0.15, D_2 = 0.2, s_1 = s_2 = 4$ and size 30×30	48
2.2 Seasonal FISSAR process: $d_1 = 0.1, d_2 = 0.1, D_1 = 0.1, D_2 = 0.2, \phi_{10} = 0.1, \phi_{01} = 0.15, \psi_{10} = 0.1, \phi_{0.2}, s_1 = s_2 = 4$ and size $N \times N = 30 \times 30$	49
3.1 <i>RMSE of \hat{d}_1 by regression method</i>	77
3.2 <i>RMSE of \hat{d}_2 by regression method</i>	77
3.3 <i>RMSE of \hat{D}_1 by regression method</i>	77
3.4 <i>RMSE of \hat{D}_2 by regression method</i>	77
3.5 <i>RMSE of $\hat{\phi}_{01}$ by MLE method</i>	80
3.6 <i>RMSE of $\hat{\phi}_{10}$ by MLE method</i>	80
3.7 <i>RMSE of $\hat{\psi}_{01}$ by MLE method</i>	80
3.8 <i>RMSE of $\hat{\psi}_{10}$ by MLE method</i>	80
3.9 <i>RMSE of \hat{d}_1 by MLE method</i>	81
3.10 <i>RMSE of \hat{d}_2 by MLE method</i>	81
3.11 <i>RMSE of \hat{D}_1 by MLE method</i>	81
3.12 <i>RMSE of \hat{D}_2 by MLE method</i>	81
3.13 <i>RMSE's Regression and MLE of \hat{d}_1</i>	83
3.14 <i>RMSE's Regression and MLE of \hat{d}_2</i>	83
3.15 <i>RMSE's Regression and MLE of \hat{D}_1</i>	83
3.16 <i>RMSE's Regression and MLE of \hat{D}_2</i>	83
4.2 Variance of the Seasonal FISSAR	97

Liste des tableaux

3.1	Simulation results of estimating the Seasonal FISSAR model by regression method	76
3.2	Simulation results of estimating the Seasonal FISSAR model by MLE method	79
4.1	Variance of the Seasonal FISSAR model by varying D_1 and D_2 . .	96

Introduction Générale

"In two dimensions, phenomena are richer than in one dimension."

Ron Bracewell.

Sommaire

0.1 Revue de la littérature	1
0.2 Objectifs de la Thèse	8
0.3 Structure de la Thèse	9

0.1 Revue de la littérature

En paraphrasant cette remarque de Ron Bracewell dans son livre intitulé *Two-Dimensional Imaging : "In two dimensions, phenomena are richer than in one dimension"*, on peut dire que travailler en dimension 2 (ou supérieur) offre plus de précisions dans les applications et la modélisation de certains phénomènes réels. Des données de type spatiale sont de plus en plus exploitées, et ce, dans divers domaines de recherche. Les données géographiques nous fournissent un ensemble d'informations sur les objets observés à la surface terrestre, ces données sont définies par leur position géographique, leur forme, leur description ainsi que leur évolution dans le temps. Un phénomène spatio-temporel est un phénomène qui implique un changement dans l'espace et dans le temps. La modélisation spatio-temporelle vise donc à construire des représentations de systèmes prenant en compte leurs dimensions spatiales et temporelles. L'objectif principal d'un SIG (Système d'Information Géographique) est la représentation de diverses connaissances géographiques et le raisonnement à partir de ces connaissances dans des domaines d'applications

très variés. L'étude de la dynamique de tels systèmes est très développée dans la théorie de la modélisation, ils fournissent des méthodes d'analyses spatiales performantes dans l'étude de données spatiales. Même si les SIG sont des outils sophistiqués qui permettent de faire de la cartographie professionnelle, précisons qu'ils n'intègrent en général que des méthodes statistiques élémentaires. Ainsi des outils propres à la statistique spatiale doivent être intégrés dans l'étude statistique pour une meilleure prise en charge de cette dimension. L'analyse spatiale participe avec les systèmes d'information géographique à l'analyse exploratoire des données spatiales. Elle est utilisée dans de très nombreux domaines, pour afficher ou présenter des données scientifiques, sociologiques, médicales, criminologiques, commerciales, de trafic routier, de consommation énergétique en fonction de leur localisation. Notons que l'étude de la dynamique spatiale ajoute la dimension temporelle au spatiale.

Les données spatio-temporelles sont actuellement au centre d'intérêt de plusieurs champs de recherche tels que la météorologie, l'océanographie, la géologie, l'agronomie, l'épidémiologie, le traitement d'image ou encore l'économétrie etc. Cette variété d'applications fait la richesse de ce domaine. Ainsi, la problématique de la modélisation spatio-temporelle est largement abordée dans la littérature. L'étude des mécanismes régissant ce processus requiert le développement de techniques statistiques propres. Cependant, du fait de la complexité du comportement de ces phénomènes, la construction de modèles spatio-temporels est souvent peu aisée.

Au cours de ces dernières années de nombreux travaux ont tenté d'approcher certaines formalisations des représentations disponibles pour restituer les processus spatio-temporels. Cependant, après une série d'articles sur la modélisation spatiale à la fin des années 60 et au début des années 70, Cliff and Ord (1973) [22] ont présenté de manière synthétique l'état des savoir en statistique et en économétrie spatiale (Le Gallo, 2000) [54]. Ils donnent un aperçu global de ce qui a été développé dans ce domaine. Après cette phase de reconnaissance, on assiste au développement de cette théorie qui occupe une place de choix dans la modélisation des phénomènes réels (Anselin, 1988) [3].

Dans les années 90, les méthodes de l'économétrie spatiale sont appliquées à des problèmes d'économie régionale, spatiale et urbaine. Can (1992) [17], Can et Megboluge (1997) [18] et Pace et Gilley (1997) [65] abordent le traitement de l'autocorrélation spatiale dans les modèles hédoniques de prix immobiliers tandis que Anselin et al. (1997) [4] et Varga (1998) [78] étudient les externalités spatiales d'informations dues à la recherche universitaire et à la recherche et développement. A partir de là, les méthodes de l'économétrie spatiale sont appliquées dans différents domaines économiques.

Les méthodes de l'économétrie spatiale visent à traiter les deux grandes particularités des données spatiales: l'autocorrélation spatiale qui se réfère à l'absence d'indépendance entre observations géographiques et l'hétérogénéité spatiale qui est liée à la différenciation dans l'espace des variables et des comportements (Le Gallo, 2000)[54]. Ces techniques ont connu de nombreux développements depuis ces dernières années et sont de plus en plus appliquées dans les études empiriques nécessitant l'utilisation des données géographiques. Elles sont souvent associées aux méthodes des séries temporelles pour l'étude des phénomènes spatio-temporels. Jayet (2001)[50], dans son article d'initiation à l'économétrie sur données spatiales ainsi que Le Gallo (2000)[54] mettent l'accent sur ces deux principaux problèmes rencontrés dans l'utilisation de ces types de données. Ils montrent comment les représenter en pratique et comment en tester la présence dans les données. Enfin, ils présentent les principaux modèles qui en tiennent compte et leurs procédures d'estimations selon des méthodes différentes.

Pour étudier certains phénomènes océaniques, avec des données océanométriques (vents et vagues), différents modèles ont été proposés pour décrire l'évolution temporelle de ces processus en un point fixé. Cependant ces modèles sont insuffisants pour certaines applications où la connaissance de l'évolution spatiale des données est nécessaire. Pour pallier à cette insuffisance dans la modélisation de ces types de données, Ailliot et Prevosto (2003) [1] modélisent l'évolution spatio-temporelle des champs de vents. Ils montrent qu'un modèle autorégressif à changements de régimes permet de décrire de manière satisfai-

sante les principales caractéristiques de ce type de processus.

Parmi les modèles spatiaux figurent aussi les modèles AR quadrantaux. Illig (2006) [47] montre, par l'étude d'un cas concret, que les modèles AR causaux et plus particulièrement les modèles AR quadrantaux stationnaires, peuvent être adaptés à l'étude de certaines données indexées par le temps et l'espace. Il étudie des données de températures mensuelles le long de l'équateur à la surface de l'océan Pacifique. Il montre que les modèles AR quadrantaux, de par leur linéarité, présentent l'avantage de fournir un algorithme à la fois simple et rapide pour calculer les prédictions afin de détecter certains phénomènes océanographiques tels que les périodes de forte ou de faible chaleur. D'autres auteurs se sont penchés sur ce domaine, raffinant ainsi sans cesse les modèles existants.

Les problèmes d'épidémie dans le domaine des cultures agricoles sont, de longue date, objets de réflexion en statistique spatiale. Les modèles les plus largement étudiés sont les champs de Markov et de Gibbs qui fournissent des algorithmes fréquemment utilisés. Dans ce cadre, Besag (1974) [12] donne une première réponse de modélisation à ce type d'épidémie dans le cas d'une seule maladie. Pour cela, il la modélise à la première date par un processus markovien aux plus proches voisins. Aux dates suivantes, il considère que l'état d'une plante à une date donnée ne dépend que de l'état sanitaire de ses voisins à la date précédente (Chadoeuf et al., 1992 [19]). Ils suggèrent alors une modélisation globale de ce type de phénomène, basée également sur ce type de modèle à chaque date. Chadoeuf et al. (1992) [19] ont proposé une modélisation spatio-temporelle d'une épidémie par un Processus de Gibbs dans le cadre de plusieurs maladies. Ils se sont plus particulièrement intéressés à la modélisation d'épidémies où il n'y a pas guérison d'une plante atteinte et où les observations sont disposées régulièrement dans l'espace comme dans le temps. Ils se basent sur les méthodes de pseudo-vraisemblance pour déterminer les estimations et tests.

La compréhension et la dissémination spatiale des maladies infectieuses également est un problème de grande importance pour la santé publique, et sa

modélisation est un domaine de recherche très actif. En effet, l'évolution réelle d'une épidémie, par exemple, impose de prendre en compte l'effet spatial et temporel pour sa modélisation d'où l'importance de la dynamique spatio-temporelle dans ce secteur de recherche. De nombreux auteurs se sont intéressés sur ce domaine.

La modélisation a connu dans ces dernières décennies un développement très important dans les disciplines agronomiques. Rares sont cependant les modélisations qui prennent en compte directement l'aspect spatial ou l'interaction entre le temps et l'espace. Récemment, Kêdowidé et al. (2010) [51] ont fait une étude sur la caractérisation de l'agriculture urbaine à Ouagadougou et de son évolution en s'intéressant spécifiquement à sa dynamique spatiale et temporelle depuis plus d'une décennie. Ils se basent sur les méthodes d'analyses spatiales offertes par les SIG pour dégager leurs résultats. Beaucoup d'auteurs ont notamment fait leurs études sur l'occupation spatio-temporelle des sols en agriculture.

Afin de modéliser certains types de données dispersées dans l'espace et sur une durée donnée, il importe d'avoir des modèles avec une structure tenant compte de la composante temporelle et spatiale. Pfeifer et Deutsch (1980) [68] ont présenté la théorie de l'estimation et des tests d'hypothèses pour les modèles multivariés spatiaux. Plus particulièrement, la classe des modèles autorégressifs moyennes mobiles spatio-temporels (STARMA) a été étudiée. Di Giacinto (2006) [25] a généralisé le modèle présenté par ces derniers et ont étudié les conditions de stationnarité tout en montrant que le modèle généralisé peut s'écrire sous la forme d'un modèle multivarié VARMA.

Bien que la liste des auteurs et domaines d'applications évoqués dans cette introduction puisse paraître longue, elle laisse pourtant des noms. Dès lors, les modèles spatio-temporels ne cessent de se développer pour une meilleure prise en charge des caractères spatiaux et temporels de certains phénomènes réels dans leur modélisation mathématique. En somme, ces modèles sont très développés dans les domaines cités précédemment où l'on étudie les phénomènes spatio-temporels de différents points de vue et pour des fins multiples.

La modélisation spatiale permet d'aborder la question importante de la prédiction de la valeur d'un champ aléatoire en un endroit donné d'une région. On suppose que la valeur à prédire dépend des observations dans les régions voisines. Ceci montre la nécessité de tenir compte, en plus de leurs caractéristiques statistiques, des relations de dépendance spatiale entre localisations voisines, pour rendre compte de l'ensemble des structures inhérentes aux données.

Dans l'exploration de données spatio-temporelles, un raffinement des modèles de séries chronologiques consiste à incorporer explicitement les dépendances systématiques entre les observations pour une région donnée, ainsi que les dépendances d'une région avec les régions avoisinantes. Dans ce contexte, la classe des modèles spatiaux appelée modèles auto-régressifs spatio-temporels (Space-Time AutoRegressive models) ou STAR a été introduite au début des années 1970. Elle sera ensuite généralisée sous forme de modèle GSTAR (Generalized Space-Time AutoRegressive models).

Les résultats obtenus par Illig(2006) [47] encouragent l'utilisation de modélisation AR spatiale comme outil d'études de données spatio-temporelles. Les procédures d'identification des paramètres du modèle peuvent être mises en oeuvre très simplement et le calcul des prédictions est très rapide avec une formule simple et pratique. Dans un contexte où aucune information supplémentaire sur le phénomène observé n'est disponible ou dans un cadre où la rapidité des prédictions est essentielle, les modèles ARMA spatiaux offrent ainsi une voie possible pour l'étude de données spatialisées.

En outre, Shitan (2008) [76] a introduit la classe de modèle FISSAR (fractionally Integrated Separable Spatial AutoRegressive) pour approcher la dynamique des données spatio-temporelles présentant un effet de longue mémoire. Des tests sur les données d'études permettront de préciser la présence ou pas de cet effet. La prise en compte de la composante longue mémoire a montré sur des données temporelles son intérêt pour la compréhension de nombreux phénomènes; en particulier pour la périodicité. Il y'a eu plusieurs étapes dans le développement des modèles de longue mémoire et de leur estimation.

Rappelons que le premier fut le modèle FARMA¹ introduit par Granger et Joyeux (1980) [39] et Hosking (1981) [45]. C'est celui que nous considérons dans nos travaux, dans un cadre spatial, même si le modèle de Gegenbauer (Andel, 1986; Gray et al, 1989) est important et pourrait être l'objet de travaux futurs. Pour tenir compte de la persistance à long terme des chocs dans certaines séries, Granger et Joyeux [1980] [39] ainsi que Hosking [1981] [45] ont suggéré d'utiliser les modèles ARFIMA². Mais toujours dans un cadre longue mémoire, si on désire modéliser simultanément un comportement longue mémoire et un comportement cyclique périodique, on ne pourra malheureusement pas utiliser un modèle ARFIMA. Pour palier à ce manque, plusieurs auteurs ont développé différents modèles longue mémoire intégrant une composante de saisonnalité. Par exemple, Porter-Hudak (1990) [69] ainsi que Reisen et al.(2006) [71] ont proposé les processus ARFISMA gaussiens qui prennent en compte les phénomènes de mémoire longue et de saisonnalité. De nombreuses méthodes d'estimation du paramètre de mémoire longue d'un modèle ARFIMA ont été développées depuis les années 50s. Elles peuvent être regroupées en trois grandes classes : les méthodes heuristiques (voir Hurst (1951) [46], Higuchi (1988) [44]), les méthodes semiparamétriques (Geweke et Porter-Hudak (1983) [33], Robinson (1994, 1995b) [73, 74], Reisen (1994) [72], Lobato et Robinson (1996)[57],) et les méthodes du maximum de vraisemblance (Whittle (1951) [81], Sowell (1992) [77]). Pour les modèles ARFISMA gaussiens, Reisen et al. (2006) [71] ont utilisé une forme modifiée de la méthode de Geweke et Porter-Hudak (1983)[33] et la méthode du maximum de vraisemblance pour estimer les paramètres de mémoire longue.

Dans la plupart des champs d'applications, on est souvent confronté du fait que l'une des sources majeures de fluctuations est la saisonnalité. Dans nos travaux on s'intéressera particulièrement à ce phénomène de saisonnalité. Une approche majeure est d'essayer de prendre en charge la saisonnalité dans le modèle FISSAR, par exemple, et d'étudier ses propriétés, on l'appellera le Seasonal

1. Fractionnal AutoRegressive Moving Average

2. AutoRegressive Fractionnal Integrated Moving Average

FISSAR. C'est l'objectif principal de cette thèse. On introduit ici la saisonnalité à partir de l'approche de Hassler (1994) [43].

D'autres choix d'études sont possibles, par exemple en considérant l'approche de l'analyse spatiale par de grandes masses de données. En effet, La généralisation des outils de géolocalisation (par GPS, GSM, Wifi ou encore adresse IP) aboutit à une explosion de la disponibilité des données à référence spatiale et faire une analyse avec les techniques du big data en analyse spatiale serait extrêmement important (voir les résultats récents de Giraldo et al 2018 [37] dans le cas d'une approche *functional data analysis* . On pourra aussi s'intéresser, toujours en analyse spatiale, à la modélisation spatiale des événements extrêmes comme en climatologie par exemple. Faire une modélisation mathématique en tenant en compte l'interaction spatiale des différents points ou localités d'une zone entière serait un apport considérable. En effet un traitement statistique qui prendrait en compte cet aspect et l'intègre de façon adéquat peut corriger une perte d'information, des erreurs de prédictions, des estimations non convergentes et non efficaces. Ces questions de feront l'objet de nos recherches futurs.

0.2 Objectifs de la Thèse

L'objectif principal de cette thèse est l'étude des phénomènes dont l'observation est un processus aléatoire indexé par un ensemble spatial. Dans cette thèse on s'intéresse aux données bi-dimensionnelles régulièrement dispersées dans l'espace, on travaille alors dans un rectangle régulier (sur \mathbb{Z}^2) . Cette modélisation vise donc à construire des représentations des systèmes suivant leurs dimensions spatiales avec des termes de longues mémoires et de saisonnalité et a ses applications dans de nombreux domaines tels que la météorologie, l'océanographie, l'agronomie, la géologie, l'épidémiologie, ou encore l'économétrie etc. La modélisation spatiale permet d'aborder la question importante de la prédiction de la valeur d'un champ aléatoire en un endroit donné d'une région. On suppose que la valeur à prédire dépend des observations dans les régions

voisines. Ceci montre la nécessité de tenir compte, en plus de leurs caractéristiques statistiques, des relations de dépendance spatiale entre localisations voisines, pour rendre compte de l'ensemble des structures inhérentes aux données. Dans la plupart des champs d'applications, on est souvent confronté du fait que l'une des sources majeures de fluctuations est la saisonnalité. Dans nos travaux on s'intéresse particulièrement à ce phénomène de saisonnalité dans les données spatiaux. Faire une modélisation mathématique en tenant en compte l'interaction spatiale des différents points ou localités d'une zone entière serait un apport considérable. En effet un traitement statistique qui prendrait en compte cet aspect et l'intègre de façon adéquat peut corriger une perte d'information, des erreurs de prédictions, des estimations non convergentes et non efficaces. Notre principale contribution est:

1. d'introduire un nouveau modèle spatio-temporel avec longue mémoire et saisonnalité et d'en étudier les propriétés en étudiant les travaux de [14] et [76].
2. de proposer des méthodes d'estimations robustes pour les paramètres de ce nouveau modèle et étudiant d'une part les propriétés de [33] et d'autres part de Whittle (1986) [80].
3. d'analyser la variance et le comportement de la fonction d'autocorrelation de ces processus.

0.3 Structure de la Thèse

Cette thèse est divisée en fonction des objectifs énoncés ci-dessus et est donc structurée en cinq chapitres.

- ① **Contribution du Chapitre 1** Le premier chapitre fait un rappel des principes généraux de la statistique spatiale, des propriétés de processus spatiaux et spatio-temporels, en particulier autoregressifs. Il aborde également les mesures de dépendances entre des observations géographiques et leur caractéristiques.

② **Contribution du Chapitre 2 :** Ce chapitre introduit une nouvelle classe de processus appelée Processus autoregressif spatiaux, fractionnaires, intégrés et séparables avec saisonnalité. On considère la classe des modèles spatiaux dont la structure de corrélation peut être exprimée comme produit de fonctions de corrélations. Cette nouvelle modélisation permet de prendre en compte le phénomène de saisonnalité observé dans des données spatiales, bi-dimensionnelles. Nous étudions les propriétés statistiques du modèle proposé telles que les conditions de stationnarité, la fonction d'autocovariance (deux formes) et de la fonction de densité spectrale. Nous établissons aussi l'approximation asymptotique de la fonction de densité spectrale au niveau des fréquences saisonnières. Ce chapitre a fait l'objet d'un article publié:

1. Papa Ousmane CISSE, Abdou Kâ DIONGUE, Dominique GUEGAN, (2016). Statistical properties of the Seasonal Fractionally Integrated Separable Spatial Autoregressive Model. *Afrika Statistika* . Volume 11(1), pp 901-922. Doi : <http://dx.doi.org/10.16929/as/2016.901.82>
2. et d'une note en working paper: Papa Ousmane CISSE, Abdou Kâ DIONGUE, Dominique GUEGAN. Note on a new Seasonal Fractionally Integrated Separable Spatial Autoregressive Model. Documents de travail du Centre d'Economie de la Sorbonne 2016.13 - ISSN : 1955-611X. 2016. <halshs-01278126>5.

Ce chapitre a été présenté en conférences internationales avec comité de sélection:

1. "International Conference on Computational Statistics COMPSTAT 2016" Oviedo du 23-26 Mars Août 2016 (<http://www.compstat2016.org>): *"The seasonal fractionally integrated separable spatial autoregressive model and its properties"*. Invited session organizer (chair and oral communication)
2. "Seventh International Conference MAF 2016" Paris du 30 Mars au 1 avril 2016 (<http://maf2016-paris.dauphine.fr/fr.html>): *"Statistical*

properties of the Seasonal FISSAR model". Oral Communication

3. et en Séminaire du Labex-ReFi: "*The new Seasonal Model model and properties*", Décembre 2015, Paris. <http://www.labex-refi.com/en/research-seminar>

③ **Contribution du Chapitre 3** : Nous nous intéressons ici à l'estimation des paramètres du modèle introduit dans le chapitre précédent. On propose d'abord une méthode de régression basée sur le log-periodogramme et une méthode classique reprenant celle de Whittle qui permettent d'obtenir des estimations sur les paramètres longue mémoire. Pour estimer simultanément tous les paramètres du modèle Seasonal FISSAR, on propose la méthode du maximum de vraisemblance (MLE).

Ce chapitre a été présenté en conférences internationales avec comité de sélection:

1. "61st World statistics congress" Marrakech 16-21 July 2017:

"On the parameters estimation of the new Seasonal FISSAR model and simulations". Poster Plus Presentation

2. "International Conference on Computational Statistics COMPSTAT 2018" Iasi (Roumanie) 28-31 Août 2018 (<http://www.compstat2018.org>)

④ **Contribution du Chapitre 4** : Dans ce chapitre, nous examinons la variance théorique et l'estimateur de la variance pour le modèle Seasonal FISSAR. Nous avons également examiné l'autocovariance (ACVF) et la fonction d'autocorrélation (ACF) introduites dans le chapitre 2 à travers des simulations. Dans les données spatiales, il arrive souvent que certaines ou toutes les observations présentent une autocorrélation spatiale. Cela se produit lorsque les résultats relatifs de deux points sont liés avec leur distance. Il est donc important d'étudier le comportement de l'autocorrélation spatiale.

⑤ En conclusion, nous discutons des potentialités en application de ce nouveau modèle. Nous envisageons de le faire avec l'étude spatio-temporelle de la production de riz dans la vallée du fleuve Sénégal.

GÉNÉRALITÉS SUR LA STATISTIQUE SPATIALE

Le but de ce chapitre est de décrire et présenter les principaux résultats classiques sur la statistique spatiale qui permettent ainsi de faciliter la lecture de la thèse. Certains de ces résultats et notions seront utilisés dans les autres chapitres.

Sommaire

1.1 Champs aléatoires	14
1.1.1 Définitions et notations	14
1.1.2 Champs aléatoires stationnaires	15
1.1.3 Champs aléatoires gaussiens	17
1.2 Types de données spatiales	18
1.2.1 Données ponctuelles	18
1.2.2 Données surfaciques	19
1.2.3 Données en semis points	19
1.3 La dépendance spatiale	20
1.3.1 L'autocorrélation spatiale	20
1.3.2 L'hétérogénéité spatiale	22
1.3.3 Les indices d'autocorrélation spatiale	23
1.4 Exemples de modèles spatiaux	27
1.4.1 Modèles MA et ARMA	28
1.4.2 Quelques modèles de régression spatiale	29

De nos jours, avec le développement des nouvelles technologies, de nombreuses

données sont recueillies dans différentes localisations avec leurs positions géographiques. C'est le cas en géologie, sismologie, géographie, épidémiologie, agronomie, sciences de l'environnement et de la terre, météorologie, économie, dans le traitement d'images, dans l'industrie pétrolière et bien d'autres. L'étude de ces types de données ne peut se faire sans tenir compte de leurs positions géographiques. Ce qui conduit à un déploiement des méthodes paramétriques et non paramétriques usuelles (estimation de densité, prédiction, régression, tests, etc.) pour l'analyse de telles données spatiales. Les méthodes de statistique spatiale servent à décrire, modéliser des données géo-référencées ou localisées.

1.1 Champs aléatoires

1.1.1 Définitions et notations

Dans la cadre de notre étude, nous noterons $S = \{s \in \mathbb{R}^d\}$ un sous espace euclidien de dimension fini d . Cet ensemble S , représente l'ensemble spatial des sites sur lequel est définie une famille de variables aléatoires de nombres réels $X = \{X(s), s \in S\}$. Supposons que $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ un espace mesurable, avec $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ la tribu borélienne de \mathbb{R} .

Définition 1.1.1 *Un champ aléatoire à espace d'état \mathbb{R} est une famille $X = \{X(s), s \in S\}$ de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$.*

En fait, chaque site s est déterminé par ses coordonnées géographique suivant l'espace d'étude. Cet espace d'étude peut être une droite ($d = 1$), un plan ($d = 2$), un espace de dimension trois ou même plus. L'ensemble S peut être infini. Dans la suite, on considère que S est un ensemble fini de $N \geq 1$ sites.

La loi de probabilité du champ aléatoire X est appelé loi spatiale. Donc la loi spatiale de X est entièrement déterminée au cas où la loi de chacune des variables $X(s_i)_{1 \leq i \leq n}$ est connue.

Cette loi est déterminée par distribution finie-dimensionnelle donnée par

$$F_{s_1, \dots, s_n}(x_1, \dots, x_n) = \mathbb{P}(X(s_1) \leq x_1, \dots, X(s_n) \leq x_n), \quad x_i \in \mathbb{R}$$

telle que les conditions de consistance de Kolmogorov soit vérifiées, c'est à dire, pour toute permutation σ de $(1, \dots, N)$, on la:

Condition de symétrie:

$$F_{s_1, \dots, s_n}(z_1, \dots, z_m) = F_{s_{\sigma(1)}, \dots, s_{\sigma(n)}}(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$$

et

Condition de consistance par les marginales:

$$\forall s_{N+1} \in S, F_{s_1, \dots, s_N}(x_1, \dots, x_N) = F_{s_1, \dots, s_N, s_{N+1}}(x_1, \dots, x_N, +\infty)$$

1.1.2 Champs aléatoires stationnaires

Définition 1.1.2 *Un champs aléatoire $X(\cdot)$ est dit stationnaire de second ordre ou faiblement stationnaire si et seulement si:*

1. *L'espérance du processus est constante pour tout s appartenant à S*

$$E[X(s)] = c, \tag{1.1}$$

où c est une constante indépendante de s .

2. *La covariance de $X(\cdot)$ aux points s et $s + h$ existe et dépend uniquement de h ; le vecteur de translation entre ces points.*

$$Cov(X(s), X(s + h)) = k(s, s + h) \triangleq C(h). \tag{1.2}$$

La fonction de covariance stationnaire $C(\cdot)$ est nommée aussi **covariogramme**. L'une des propriétés importantes de la covariance est qu'elle est semi-définie positive, théorème de Bochner . Cette propriété est d'une importance capitale dans la théorie et la pratique. Nous la rappelons dans la définition suivante :

Définition 1.1.3 *Un noyau k est dit semi-définie positive si pour tout $(a_i)_{i=1, \dots, N} \in \mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N}^*$ et tous $(s_i)_{i=1, \dots, N} \in \mathbb{S}$, il satisfait la propriété suivante :*

$$\sum_{i,j=1}^N a_i a_j k(s_i, s_j) \geq 0$$

Remarque 1.1.4 *Les fonctions de covariance stationnaire vérifient les propriétés suivantes:*

1. *Par la positivité nous avons $C(0) \geq 0$.*
2. *Le covariogramme est paire: $C(h) = C(-h)$*
3. *L'inégalité de Cauchy-Schwartz implique que $|C(h)| \leq C(0)$*
4. *Les covariances stationnaires vérifient une propriété de stabilité que nous résumons comme suit : si $C_1(\cdot)$, $C_2(\cdot)$ sont des covariances stationnaires, les fonctions suivantes le sont aussi :*
 - $C(h) = a_1 C_1(h) + a_2 C_2(h)$, a_1 et $a_2 \geq 0$.
 - $C(h) = C_1(ah)$, $a > 0$.
 - $C(h) = C_1(h)C_2(h)$

La stationnarité du second ordre peut être limitée dans la mesure où, pour certains processus aléatoires, le covariogramme n'existe pas. Elle peut aussi être inadéquate, notamment sur les phénomènes régionalisés présentant une dispersion infinie (c'est-à-dire qui ont une variance infinie); c'est le cas par exemple des gisements d'or selon Krige. Donc pour gagner en généralité et pour être en adéquation avec certains phénomènes à étudier, on peut utiliser la stationnarité intrinsèque qui est définie comme suit :

Définition 1.1.5 *Un processus aléatoire $X(\cdot)$ est stationnaire intrinsèque ssi :*

1. *L'espérance de tout accroissement $X(s) - X(s+h)$ est nulle*

$$\mathbb{E}(X(s) - X(s+h)) = 0 \quad \forall s \in S.$$

2. *La variance de tout accroissement $X(s) - X(s+h)$ existe et dépend uniquement de h*

$$\text{Var}(X(s) - X(s+h)) = 2\gamma(h) \quad , \quad \forall s, s+h \in S.$$

La fonction $2\gamma(h)$ est nommée **variogramme** et ne dépend que du vecteur de translation.

Il y a un gain en généralité si on utilise la stationnarité intrinsèque par rapport à celle du second ordre parce que tout processus stationnaire du second ordre est intrinsèque. En effet dans le cas stationnaire de second ordre, l'équation

$$2\gamma(h) = 2(C(0) - C(h)),$$

relie le **variogramme** au **covariogramme**. L'implication inverse n'est pas vrai en général. Elle est vraie sauf si le variogramme est borné. Il suffit de considérer le mouvement brownien pour voir que la réciproque est fausse.

Une propriété importante du variogramme est le fait qu'il soit une fonction conditionnellement semi-définie négative. Le variogramme vérifie aussi les propriétés suivantes :

- La parité $\gamma(h) = \gamma(-h)$.
- La positivité $\gamma(h) \geq 0$.
- Nullité en zéro $\gamma(0) = 0$

Généralement le variogramme hérite de la plupart des propriétés de la covariance tout en gardant cette mesure de degré de liaison entre les variables régionalisées.

1.1.3 Champs aléatoires gaussiens

Définition 1.1.6 *Un processus stochastique est dit gaussien si toutes ses lois fini-dimensionnelles $\mathcal{L}(X(s_1), \dots, X(s_n))$ sont gaussiennes. Autrement dit $(X(s), s \in S)$ est gaussien si et seulement si toute combinaison linéaire $a_1X(s_1) + \dots + a_nX(s_n)$ suit une loi normale, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$, $s_1, \dots, s_n \in S$ et $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$.*

La loi d'un vecteur gaussien $(X(s_1), \dots, X(s_n))$ est caractérisée par le vecteur des moyennes $(\mathbb{E}[X(s_1)], \dots, \mathbb{E}[X(s_n)])$ et la matrice de variance-covariance $(Cov(X(s_i), X(s_j)))_1$. On comprend dès lors que toute la loi d'un processus gaussien est connue dès

qu'on se donne la fonction moyenne

$$\mu(s) = \mathbb{E}[X(s)]; \quad s \in S$$

et l'opérateur de covariance

$$k(s, \tilde{s}) = \text{Cov}(X(s), X(\tilde{s})); \quad s, \tilde{s} \in S.$$

En effet, la loi fini-dimensionnelle de $(X(s_1), \dots, X(s_n))$ est alors la loi normale multidimensionnelle $\mathcal{N}(\mu_n, K_n)$ avec $\mu_n = (\mu(s_1), \dots, \mu(s_n))$ et $K_n = (k(s_i, s_j))_{1 \leq i, j \leq n}$.

La moyenne $\mu(s)$ d'un processus gaussien représente sa tendance. Par exemple dans un cadre de régression linéaire généralisée (GLM), la fonction moyenne a la forme $\mu(s) = m'(s)\beta$, avec $m'(s) = (m_1(s), \dots, m_p(s))$ où $m'(s)$ est une famille de fonctions (base) dites aussi régresseurs. L'importance ou le poids de chaque fonction est donnée à travers le vecteur β de taille $p \times 1$ appelé paramètre de régression.

1.2 Types de données spatiales

On distingue habituellement trois grands types de données dans la statistique spatiale: les données ponctuelles ou de type géostatistique, les données surfaciques ou de type économétrie spatiale et les données de type semis de points. Ils diffèrent d'abord par la nature de l'unité géographique attachée à chaque unité statistique, soit un lieu précis soit une surface, mais aussi par la qualité aléatoire ou non des positions spatiales.

1.2.1 Données ponctuelles

Les données ponctuelles sont tout d'abord telles que la position observée n'est pas modélisée comme aléatoire car elle est fixée. Par exemple, C'est le cas des données pluviométriques ou des données météorologiques qui sont observées sur une collection de stations météo, ou encore des données de porosité d'un sol (Gaetan et Guyon 2008 [41]). En effet, l'unité géographique associée à

la donnée est ici ponctuelle : on peut repérer la latitude et longitude des stations météo ou des appareils de mesure. Plus formellement, pour le champ aléatoire servant à modéliser notre phénomène, l'espace des indices S est un sous-espace continu de \mathbb{R}^2 (ou \mathbb{R}^d pour $d \geq 2$), le champ $X = X_s, s \in S$ est observé en n sites fixés $s_1, \dots, s_n \in S$ et $X_s \in \mathbb{R}$ est à valeurs réelles.

1.2.2 Données surfaciques

De même que pour les données de type géostatistique, pour les données de type économétrie spatiale ou surfaciques, la position observée n'est pas modélisée comme aléatoire. Par contre, l'unité géographique associée à la donnée est ici de nature surfacique. Le territoire observé est partitionné en zones sur lesquelles le phénomène est observé. C'est le cas pour la majeure partie des données économiques qui sont mesurées sur des découpages administratifs du territoire comme par exemple le taux de chômage ou le revenu moyen par foyer d'un département, etc. L'indice s du champ aléatoire varie alors dans un nombre fini de localisations qui sont généralement les centroïdes des zones ou leurs représentants administratifs.

1.2.3 Données en semis points

Dans ce cas, la localisation de la donnée est modélisée comme aléatoire car elle est déterminée par le phénomène. Par exemple, supposons que l'on observe l'évolution d'une forêt et que l'on enregistre la localisation des arbres. Nous sommes alors en présence d'un semis de points et il y a une variable aléatoire bidimensionnelle pour chaque observation qui est la localisation de l'arbre exprimée par ses coordonnées dans un repère. Supposons que de plus on enregistre aussi le diamètre de chaque arbre. On a alors un processus ponctuel marqué : il y a deux variables aléatoires pour chaque observation qui sont la localisation d'une part et le diamètre d'autre part. Cette dernière est la marque aléatoire associée à cette localisation. On utilise la théorie des processus ponctuels pour modéliser les répartitions aléatoires de points. Ces points

sont généralement inclus dans \mathbb{R}^d avec $d \geq 2$ mais nous considérerons plus simplement le cas le plus courant où $d = 2$.

1.3 La dépendance spatiale

Généralement, la plupart des données sont des observations d'une variable mesurée en des localisations différentes réparties dans l'espace. C'est notamment le cas de la pluviométrie qui est mesurée dans chaque site d'une région ou d'un province d'un pays. Souvent, il est admis que ces données spatiales observées en coupe transversale sont indépendantes et les données sont alors traitées avec les méthodes statistiques standards. Cependant, il est important de justifier et de tester cette hypothèse d'indépendance des données spatiales puisqu'un traitement statistique de telles données qui ignore leur aspect spatial ou ne l'intègre pas de façon adéquate peut résulter en une perte d'information, des erreurs de spécifications et des estimations non convergentes et non efficaces. En effet, sur ce dernier point, il est essentiel de noter que l'analyse statistique des données spatiales n'est pas une juxtaposition de l'analyse géographique et de l'analyse statistique mais une interaction entre les deux. L'introduction de l'espace dans les modèles économétriques n'est ni neutre, ni immédiate, et les techniques de la statistique spatiale visent à prendre en compte la présence de deux effets spatiaux importants : l'autocorrélation spatiale qui se réfère à l'absence d'indépendance entre observations géographiques, et l'hétérogénéité spatiale qui est liée à la différenciation des variables et des comportements dans l'espace (Le Gallo, 2000) [54]

1.3.1 L'autocorrélation spatiale

L'autocorrélation spatiale indique une relation fonctionnelle entre ce qui se passe entre une unité spatiale et ses voisines. Elle fournit une information supplémentaire par rapport aux statistiques traditionnelles, invariantes par rapport à la configuration spatiale des données. L'autocorrélation spatiale est

différente de l'autocorrélation temporelle dans le sens qu'elle est multidimensionnelle. Par conséquent, les techniques valables pour les séries temporelles ne sont pas directement transposables au cas spatial.

Les sources de l'autocorrélation spatiale sont multiples : interactions spatiales, contagion, externalités spatiales, effets de débordement géographique (spillover), effets d'imitation ou encore une mauvaise spécification du modèle économétrique causée par l'omission de variables elles-mêmes spatialement autocorrélées. De manière transposée, les sources d'absence d'autocorrélation sont entre autres une répartition spatiale des valeurs de la variable aléatoire, une invariance par permutation aléatoire des individus (aléas spatial), des valeurs observées en une localisation qui ne dépendent pas des valeurs observées en des localisations voisines, une égalité de degré de vraisemblance entre le schéma spatial observé et tout autre schéma spatial et une modification de la localisation des individus sans conséquence sur le contenu informationnel des données.

Il existe deux types d'autocorrélation : l'autocorrélation positive et l'autocorrélation négative. L'autocorrélation positive apparaît lorsque des valeurs similaires tendent à se concentrer dans l'espace. Elle est présente dans les processus de diffusion et contagion bien qu'il faille signaler que la diffusion tend à produire une autocorrélation spatiale positive mais que la réciproque n'est pas nécessairement vraie. Quant à l'autocorrélation négative, elle intervient lorsque les valeurs sur lesquelles porte la concentration sont dissimilaires. Enfin il y'a absence d'autocorrélation (autocorrélation spatiale nulle) lorsque deux lieux proches se ressemblent ni plus ni moins (en moyenne) que deux lieux éloignés.

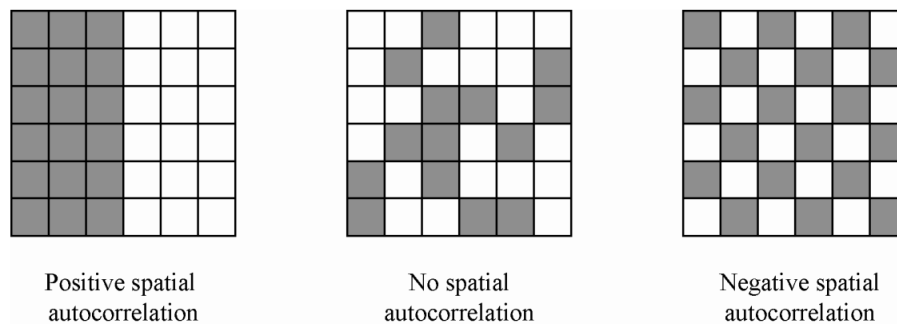


FIGURE 1.1 – Les différents types d'autocorrélation

1.3.2 L'hétérogénéité spatiale

L'hétérogénéité spatiale est liée à la différenciation des comportements dans l'espace. Il s'agit de l'instabilité structurelle due à une instabilité spatiale des coefficients de la régression et à la non-linéarité des formes fonctionnelles ou de l'hétéroscédasticité provenant de variables omises ou de toute autre forme de mauvaise spécification.

Ce phénomène se retrouve à plusieurs échelles : les comportements et les phénomènes économiques ne sont pas les mêmes dans le centre d'une ville et dans sa périphérie ou dans une région urbaine et dans une région rurale (Le Gallo, 2000) [54]. L'instabilité structurelle provient de l'absence de stabilité dans l'espace des comportements ou d'autres relations étudiées : les formes fonctionnelles et les paramètres varient selon leurs localisations et ne sont donc pas homogènes. Il est donc nécessaire de mobiliser des modélisations prenant en compte les caractéristiques particulières de chaque localisation de l'échantillon. S'agissant de l'hétérogénéité spatiale, dans les modèles économétriques, elle peut venir de variables manquantes ou de toute autre forme de mauvaise spécification. Par exemple, les unités spatiales elles-mêmes ne sont généralement ni de formes régulières, ni homogènes : des régions peuvent avoir des formes et des aires différentes, des niveaux de développement technologique variables, des populations plus ou moins importantes, etc.

Enfin, le traitement de l'hétérogénéité spatiale est effectué en prenant en

compte l'usage de variables explicatives pour modéliser la tendance. Certaines de ces variables peuvent être spatiales de nature comme, par exemple, la distance. Cependant, il faut noter qu'il n'est pas suffisant de prendre en compte ces variables dans la moyenne pour évacuer totalement la structure spatiale du problème qui peut rester présente à l'ordre 2.

1.3.3 Les indices d'autocorrélation spatiale

Les mesures d'autocorrélation spatiale permettent d'estimer la dépendance spatiale entre les valeurs d'une même variable en différents endroits de l'espace. Pour la mettre en évidence, les indices prennent en compte deux critères : la proximité spatiale et la ressemblance ou la dissemblance des valeurs de cette variable dans les unités spatiales de la zone d'étude.

On fait la distinction entre la mesure de l'autocorrélation spatiale globale d'une variable dans un territoire donné et celle de l'autocorrélation locale dans chaque unité spatiale. Cette dernière correspond à l'intensité et la significativité de la dépendance locale entre la valeur d'une variable dans une unité spatiale et les valeurs de cette même variable dans les unités spatiales environnantes (plus ou moins proches). Dans un cadre inférentiel classique, les indicateurs de corrélation utilisent la covariance d'échantillonnage $S_{XY} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})$ ou bien son expression standardisée c'est à dire le coefficient de corrélation linéaire

$$R_{XY} = \frac{S_{XY}}{S_X S_Y}$$

où $S_Z^2 = S_{ZZ}$ est la variance d'échantillonnage de la variable Z .

Dans un cadre temporel, on mesure la corrélation entre les valeurs prises par X à l'instant t et ses valeurs h unités plus tôt, c'est à dire avec un décalage de temps h . Cette définition est simple dans le cas de séries chronologiques, où h peut être regardé comme un nombre entier de pas de temps. Elle devient complexe dans le cas de données longitudinales qui ne supposent plus des observations régulièrement réparties dans le temps.

Dans un contexte spatial, on mesure la corrélation entre deux valeurs prises

par X au lieu s et dans les sites voisins de façon analogue. Mais alors la notion de voisinage est beaucoup plus complexe. Elle peut être définie soit en termes de relation, soit en termes de distance entre entités spatiales. De plus, du fait de l'absence d'unité des relations d'ordre naturel dans l'espace, la définition d'une relation de voisinage offre alors plus de possibilités que dans le cadre temporel.

1.3.3.1 Notion de voisinage et de proximité

La mesure du voisinage d'un point peut être abordée de plusieurs manières. Elle est souvent effectuée avec une matrice de voisinage qui est la version spatiale de l'opérateur retard en séries temporelles. Cette matrice de voisinage est également appelée matrice de poids.

Pour N sites, la matrice de voisinage W (qui peut être autre que géographique) est définie comme la matrice de dimension $N \times N$ telle que chacun de ses éléments w_{ij} indique l'intensité de la proximité de la zone i par rapport à la zone j . La matrice W n'est pas nécessairement symétrique. Elle peut cependant être symétrisée avec la transformation $W_s = (W + W^T)/2$. La matrice de voisinage est dite normalisée lorsqu'on impose la contrainte $\sum_j^N w_{ij} = 1$. L'intérêt de cette normalisation est qu'elle permet de rendre les paramètres spatiaux comparables entre divers modèles. On impose également, en général, que la diagonale soit nulle c'est à dire $\forall i, w_{ii} = 0$. La matrice de voisinage permet de construire le diagramme de voisinage qui facilite la visualisation des voisins; l'appréciation visuelle de la taille des voisinages lorsque la matrice est définie par un nombre de plus proches voisins (la largeur de la bande autour de la diagonale sur le nuage illustre l'étendue des voisinages); et l'appréciation visuelle du nombre de voisins lorsque la matrice est définie par une distance seuil.

Il existe plusieurs types de matrices de voisinage.

La matrice de contiguïté

Une matrice de contiguïté ne contient que des 0 et des 1.

$$w_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ et } j \text{ ont au moins une frontière commune} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.3)$$

Cette matrice est automatiquement symétrique et la contrainte de nullité de la diagonale est bien respectée. Par exemple avec une matrice de contiguïté pour trois sites 1, 2, et 3: le site 1 est contigu aux sites 2 et 3, le site 2 est contigu au site 1 mais pas au site 3 et le site 3 n'est contigu qu'au site 1.

La matrice basée sur la distance entre centroïdes

Soit $d(s_i, s_j)$ une mesure de distance au sens large (distance géographique, temps de trajet, etc) entre les sites s_i et s_j . On peut définir une matrice de voisinage à partir d'une distance de différentes manières :

$$w_{ij} = \mathbf{1}(d(s_i, s_j) \leq S) \quad (1.4)$$

où S est un seuil fixé.

$$w_{ij} = \frac{C}{d(s_i, s_j)^\alpha} \quad (1.5)$$

où C et α sont des constantes fixées.

$$w_{ij} = \exp(-\alpha d(s_i, s_j)) \quad (1.6)$$

où α est une constante fixe.

De même que précédemment, ces matrices sont automatiquement symétriques.

La matrice basée sur les plus proches voisins

Soit N sites et un entier $k \leq N - 1$. Pour chaque site s_i , on ordonne les autres sites en fonction de leurs distances à s_i et l'on détermine ainsi les k

voisins les plus proches de s_i . La matrice basée sur les plus proches voisins W_p est construite telle que $\forall i$:

$$w_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j \text{ fait partie des } k \text{ plus proches voisins de } i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.7)$$

Ces matrices ne sont en général pas symétriques.

La matrice de triangulation de Delauney

La triangulation de Delauney est l'unique triangulation telle que le cercle circonscrit à trois sommets quelconques ne contient aucun autre sommet. Deux sites sont alors voisins lorsque le segment qui les joint est une arête de la triangulation. Cependant, ces matrices présentent des liaisons pour les sites en bordure avec des voisins très éloignés.

Notons qu'on peut combiner le principe des plus proches voisins (ou de la contiguïté) et celui de la distance en une même matrice. Ceci permet de combiner les avantages des deux approches dans le cas de positions très hétérogènes des centroïdes de zones dans l'espace.

Les indices les plus utilisés sont l'indice de Moran et l'indice de Geary. Dans la littérature, le coefficient de Moran est souvent préféré à celui de Geary en raison d'une stabilité générale plus grande.

1.3.3.2 L'indice de Moran

Pour une matrice de voisinage W vérifiant $w_{ij} = 0$ et une variable $X_{si} = X_i$, $i = 1; \dots; n$, l'indice de Moran est défini par :

$$I = \frac{\frac{\sum_{ij} w_{ij} (X_i - \bar{X})(X_j - \bar{X})}{\sum_{ij} w_{ij}}}{\frac{\sum_i (X_i - \bar{X})^2}{n}} \quad (1.8)$$

L'indice de Moran définit le rapport d'une sorte de covariance entre unités contigües à la variance du champ: il est donc comparable à un coefficient d'autocorrélation. Cet indice est indépendant des unités dans lesquelles X est exprimé. Si l'on symétrise la matrice W , (i.e. $W \rightarrow (W + W')/2$), I est inchangé.

Si X est une variable centrée, les valeurs de X de même signe et géographiquement proches contribuent positivement à I . L'indice a des valeurs comprises entre -1 (indiquant une dispersion parfaite) et 1 (corrélation parfaite). Les valeurs positives et fortes de I indiquent une autocorrélation spatiale positive, les valeurs négatives et fortes de I une autocorrélation spatiale négative et les valeurs proches de 0 une absence d'autocorrélation. La valeur nulle signifie que la distribution spatiale de la variable étudiée est parfaitement aléatoire dans le territoire.

1.3.3.3 L'indice de Geary

Le coefficient C de Geary est défini par :

$$C = \frac{n-1}{2} \frac{\sum_{ij} w_{ij} (X_{si} - X_{sj})^2}{\sum_i (X_{si} - \bar{X})^2} \quad (1.9)$$

Cet indice ressemble à la statistique de Durbin Watson en séries temporelles. Les valeurs faibles de C indiquent une autocorrélation spatiale positive et les valeurs fortes de C une autocorrélation spatiale négative. Cet indice est indépendant des unités dans lesquelles le champ X est exprimé. Pour comparaison, on rappelle que la statistique de Durbin-Watson pour une série temporelle centrée est donnée par:

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^n (X_t - X_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^n X_t^2} \quad (1.10)$$

1.4 Exemples de modèles spatiaux

Les modèles spatiaux présentent des analogies avec les modèles utilisés en séries temporelles. Dans ces derniers, le temps, le t de $X(t)$, est une information à part entière. Il permet d'étudier la succession des observations, leur périodicité, et d'en construire des modélisations. Il en va de même pour les observations spatiales. La situation dans l'espace est une information aussi importante que la variable d'intérêt, et le modèle spatial $X(s)$ n'est pas la même chose qu'un modèle X , spécifié sans tenir compte de la position des observations. Sur le

plan théorique, les modèles temporels, comme les modèles spatiaux, reposent sur des processus stochastiques. On pourra trouver des analogies entre des outils comme les variogrammes utilisés en géostatistique et les corrélogrammes. Ceci dit, cette analogie a aussi des limites. En séries temporelles, on a une direction, et des intervalles de temps permettant de faire des modélisations empiriques (moyennes mobiles) ou probabilistes (ARMA et dérivés). Le spatial est plus complexe puisque l'on se situe dans un plan, et en général dans des structures présentant des discontinuités.

Une Auto-régression (AR) spatiale est un modèle de données réelles défini sur un ensemble discret spatial S . L'ensemble S est régulier (i.e. $S \in \mathbb{Z}^2$) ou non, sa géométrie étant associée à un graphe orienté d'influence \mathcal{R} . La corrélation spatiale d'une AR découlera du modèle retenu. Ces modèles explicatifs sont bien adaptés à des mesures agrégées par unités spatiales : par exemple, en épidémiologie, X_s est le nombre de personnes touchées par une maladie donnée dans un canton s d'un département S ; en agronomie, X_s est le rendement d'une parcelle de culture s .

1.4.1 Modèles MA et ARMA

Définition 1.4.1 *Un modèle moyenne mobile (Moving Average) infinie, $MA(\infty)$, est un processus linéaire*

$$X_t = \sum_{s \in \mathbb{Z}^d} c_s \eta_{t-s},$$

où $\sum_{s \in \mathbb{Z}^d} c_s^2 < \infty$ et (η) est un bruit blanc faible de variance σ_η^2 .

On parle de modèle MA si le support $M = \{s \in \mathbb{Z}^d : c_s \neq 0\}$ est fini. La covariance et densité spectrale d'un MA sur \mathbb{Z}^d valent respectivement :

$$\gamma(h) = \sigma_\eta^2 \sum_{t \in \mathbb{Z}^d} c_t c_{t+h} \quad \text{et} \quad f(u) = \frac{\sigma_\eta^2}{(2\pi)^2} \left| \sum_{t \in \mathbb{Z}^d} c_t \exp i \langle u, t \rangle \right|^2$$

Définition 1.4.2 Soient $P(z)$ et $Q(z)$ deux polynômes de la variable complexe multidimensionnelle $z \in \mathbb{C}^d$

$$P(z) = 1 - \sum_{s \in R} a_s z^s \text{ et } Q(z) = 1 + \sum_{s \in M} c_s z^s$$

où R (resp. M), le support AR (resp. le support MA) sont deux parties finies de \mathbb{Z}^d ne contenant pas l'origine, $z_s = (z_1^{s_1}, \dots, z_d^{s_d})$ si $s = (s_1, s_2, \dots, s_d)$. Notons $B_s X_t = X_{t-s}$. Le modèle ARMA est défini par:

$$P(B)X_t = Q(B)\eta_t, t \in \mathbb{Z}^d$$

où encore

$$X_t = \sum_{s \in R} a_s z^s + \eta_t + \sum_{s \in M} c_s \eta_{t-s} \quad t \in \mathbb{Z}^d$$

Un modèle MA correspond à $P \equiv 1$; un modèle AR à $Q \equiv 1$.

Comme pour une série temporelle ($d = 1$), un champ à densité spectrale continue peut être approché dans L_2 par un ARMA, les fractions rationnelles étant denses dans l'espace de fonctions continues sur le tore \mathbb{R}^d . La densité spectrale d'un ARMA étant rationnelle, sa covariance décroît exponentiellement vers 0 à l'infini. Comme pour une série temporelle, les covariances vérifient à partir d'un certain rang des équations de récurrences linéaires de Yule-Walker. Sur \mathbb{Z} , ces équations se résolvent analytiquement et elles constituent un outil d'identification des portées R et M et d'estimation des paramètres a et c . Ce n'est plus le cas si $d \geq 2$: c'est une des raisons qui rend difficile l'utilisation de modèles ARMA sur \mathbb{Z}^d pour $d \geq 2$.

1.4.2 Quelques modèles de régression spatiale

Soit le modèle suivant :

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

avec $\mathbb{E}(\varepsilon) = 0$; $Var(\varepsilon) = \sigma^2 \Omega$ où Ω est la matrice de variance-covariance. Étant donné une matrice de voisinage normalisée W et une variable Z , il vient automatiquement que WZ présente une autocorrélation spatiale avec Z . La famille des modèles spatiaux simultanés consiste à introduire une telle variable

dans le modèle non spatial (MCO, MCP ou MCG) à divers endroits (Bonneu et Thomas-Agnan, 2012 [15]):

- introduire WX en explicative dans le modèle non spatial conduit au modèle SLX (Spatially lagged-X);
- introduire WY dans le membre de droite du modèle non spatial conduit au modèle SAR (Spatial-Autoregressive Model) encore appelé LAG ;
- introduire WX dans le modèle SAR conduit au modèle SDM (Spatial Durbin Model);
- utiliser le modèle SAR pour le terme d'erreur conduit au modèle SEM (Spatial Error Model);
- combiner les modèles SAR et SEM conduit au modèle général SAC ;
- introduire $W\varepsilon$ dans le modèle non spatial conduit au modèle MA (Moving Average); et
- combiner les modèles SAR et MA conduit au modèle $SARMA$.

Nous ne présentons dans cette sous-section que les modèles SLX , SAR , SDM et SEM .

1.4.2.1 Le modèle SLX

La spécification du modèle SLX est la suivante :

$$Y = X\beta + \gamma WZ + \varepsilon \quad (1.11)$$

où $\varepsilon \rightsquigarrow \mathcal{L}(0, \sigma^2\Omega)$. L'ajustement de ce modèle peut se faire par MCO ou MCP, ou encore par MCG (selon Ω). Il faut également remarquer que si W est normalisé, et si X contient une constante alors Z ne doit pas en contenir. De plus Z peut être égale ou différente de X .

1.4.2.2 Le modèle SAR

La spécification du modèle SAR est la suivante :

$$Y = X\beta + \rho WY + \varepsilon \quad (1.12)$$

où ε est un bruit blanc spatial. Le paramètre ρ mesure l'intensité de l'autocorrélation spatiale présente dans Y . $(I - \rho W)Y$ est la variable endogène spatialement filtrée et si la matrice Y . $(I - \rho W)$ est non singulière, le modèle prend la forme réduite suivante :

$$Y = (I - \rho W)^{-1}X\beta + (I - \rho W)^{-1}\varepsilon \quad (1.13)$$

On obtient alors les moments suivants:

$$\mu = (I - \rho W)^{-1}X\beta \text{ et } Var = \sigma^2((I - \rho W)'(I - \rho W))^{-1} \quad (1.14)$$

Cette formule de la variance implique une hétéroscédasticité même si les résidus sont homoscedastiques.

1.4.2.3 Le modèle SDM

La spécification du modèle SDM est la suivante :

$$Y = X\beta + \rho WY + \gamma WZ + \varepsilon \quad (1.15)$$

où ε est un bruit blanc spatial. Sa forme réduite s'écrit:

$$Y = (I - \rho W)^{-1}(X\beta + \gamma WZ) + (I - \rho W)^{-1}\varepsilon \quad (1.16)$$

On obtient alors les moments suivants:

$$\mu = (I - \rho W)^{-1}(X\beta + \gamma WZ) \text{ et } Var = \sigma^2((I - \rho W)'(I - \rho W))^{-1} \quad (1.17)$$

1.4.2.4 Le modèle SEM

La spécification du modèle SEM est la suivante :

$$Y = X\beta + \lambda\varepsilon + u \quad (1.18)$$

où u est un bruit blanc spatial et λ une mesure de l'intensité de l'autocorrélation spatiale présente dans les erreurs résiduelles. Si la matrice $(I - \lambda W)$ est non singulière, la forme réduite du modèle est la suivante :

$$Y = X\beta(I - \lambda W)^{-1}u \quad (1.19)$$

On obtient alors :

$$\mu = X\beta \text{ et } Var = \sigma^2((I - \lambda W)'(I - \lambda W))^{-1} \quad (1.20)$$

Les paramètres de ces modèles peuvent être estimés soit par une régression spatiale ou par la méthode du maximum de vraisemblance. Dans le cas d'une estimation de la régression par MCO on peut voir que dans certaines conditions l'estimateur est consistant (Azaïs et Bardet 2005 [5]). En présence d'autocorrélation spatiale, les estimateurs MCO ne sont pas convergents (variable autorégressive) et ils sont non efficaces (autocorrélation spatiale des erreurs). Des estimateurs convergents et asymptotiquement efficaces sont alors obtenus grâce à la méthode du maximum de vraisemblance, celle des variables instrumentales ou des moments généralisés. Cependant, dans le cas de la méthode du maximum de vraisemblance, l'estimateur nécessitant une méthode d'optimisation itérative, la difficulté numérique sera le calcul du déterminant dans la fonction de vraisemblance (Gaetan et Guyon 2008 [41]).

LE MODÈLE SEASONAL FISSAR

ET SES PROPRIÉTÉS

Ce chapitre reprend l'article intitulé *Seasonnal Fractionally Integrated Separable Spatial Autoregressive Model and Statistical properties*, accepté et publié dans *Journal Afrika Statistika* (Doi: <http://dx.doi.org/10.16929/as/2016.901.82>).

Une note publiée en working paper est aussi associé à cette partie: *Note on a new Seasonal Fractionally Integrated Separable Spatial Autoregressive Model*. Documents de travail du Centre d'Economie de la Sorbonne 2016.13 - ISSN : 1955-611X. 2016. <halshs-01278126>5.

In this work we introduce a new model called Fractionally Integrated Separable Spatial Autoregressive processes with Seasonality and denoted Seasonal FISSAR. We focus on the class of separable spatial models whose correlation structure can be expressed as a product of correlations. This new modelling allows taking into account the seasonality patterns observed in spatial data. We investigate the properties of this new model providing stationary conditions, some explicit form of the autocovariance function and the spectral density. We also establish the asymptotic behaviour of the spectral density function near the seasonal frequencies.

Keywords: seasonality; spatial short memory; seasonal long memory; separable process; two-dimensional data; spatial stationary process; spatial autocovariance.

Sommaire

2.1 Introduction	35
-----------------------------------	-----------

2.2 A new model: The Seasonal FISSAR	37
2.3 Some properties of the seasonal FISSAR model	40
2.4 Illustrations	47
2.5 Conclusion	50
2.6 Appendix	50

2.1 Introduction

In recent years many studies have modelled the spatial process. In 1973, Cliff and Ord (1973) [22] give an general presentation on spatial econometrics models and introduce the STAR (Space-Time AutoRegressive) and the Generalized Space-Time AuRegressive (GSTAR) models. The literature on spatial models is relatively abundant, we can also cite the Simultaneous AutoRegression model, SAR (Whittle,1954 [79]), the Conditional AutoRegression model, CAR (Bartlett, 1971 [6]; Besag, 1974 [12]), the moving average model (Haining, 1978 [42])or the unilateral models (Basu and Keinsel, 1993 [9]) among others. Spatial models are currently investigated in many research fields like meteorology (Lim et al., 2002 [56]), oceanography (Illig, 2006 [47]), agronomy (Whittle, 1986 [80], Lambert et al., 2003 [53]), geology (Cressie, 1993 [23]), epidemiology (Marshall, 1991[61]), image processing (Jain, 1981 [48]), econometrics (Anselin, 1988 [3]) and many others in which the data of interest are collected across space. This large domain of applications is due to the richness of the modelling which associates a representation with a geographical component.

Spatial time series modellings concern times series collected with geographical position, in order to use the spatial information in the modelling. Some particularities are included in the modelling: *(i)* two close data tend to have similar values; *(ii)* it can exist repetition of values by periodicity (for example, a temperature observed on a site can be observed in the same site after a given period). It is important to explain this repetition and to model it we associate

with each direction i and j seasonal parameters s_1 et s_2 respectively.

The studies of spatial data have shown presence of long-range correlation structures (Lim et al., 2002 [56]). To deal with this specific feature Boissy et al. (2005) [14] had extended the long memory concept from times series to the spatial context and introduced the class of fractional spatial autoregressive model. At the same time Shitan (2008) [76] studies the model called Fractionally Integrated Separable Spatial Autoregressive (FISSAR) model to approximate the dynamics of spatial data when the autocorrelation function decays with a long memory effect.

In another hand some authors have also observed seasonality in some spatial observations: Benth et al. (2007) [11] proposed a spatial-temporal model for daily average temperature data. This model includes trend, seasonality and mean reversion. Portmann et al. (2009) [70] studied the spatial and seasonal patterns for climate change, temperatures and precipitations. Nobre et al. (2011) [64] introduce an spatially varying Autoregressive Processes for satellite data on sea surface temperature for the North Pacific to illustrate how the model can be used to separate trends, cycles, and short-term variability for high-frequency environmental data; a multivariate GSTAR has been developed by Pejman et al. (2009) [67] for the study of the water quality.

Thus, it appears natural to incorporate long memory seasonal patterns into the FISSAR model of Shitan (2008) [76] as soon as we work with data collected during several periods or cycles, allowing different seasonal patterns on the spatial locations. In that context common seasonal factors will receive different weights for these different spatial locations (Lopes et al., 2008 [58]). Inference problems in spatial location or two-dimensional process have been studied by several authors (for example, Zhu (2007) [84] use the maximum likelihood method from spatial random effects). In this work a way to identify and estimate the parameters model in not discussed and this will be the purpose in the next chapter.

In this paper, we focus our attention on the class of separable spatial models whose correlation structure can be expressed as a product of correlations ta-

king into account the seasonality patterns observed in spatial data. Therefore, we consider the Seasonal Fractionally Integrated Separable Spatial Autoregressive model, denoted in the following by Seasonal FISSAR extending at the same time the works Shitan (2008) [76] and Boissy et al. (2005) [14]. We investigate the properties of this new modelling, providing the stationary conditions, analytic expressions for the autocovariance function and the spectral density function. We also establish the asymptotic mean of the spectral density function. This new modelling will be able to take into account periodic and cyclical behaviours presented in a lot of applications, including the modelling of temperatures, agricultural data, epidemiology when the data are collected during different seasons at different locations, and also financial data to take into account the specific systemic risk observed on the global market (Benirschka and Binkley, 1994 [10]; de Graaff et al., 2001[38]; Jaworskia and Piterab, 2014[49]).

The chapter is organized as follows. The next Section 2.2 introduces the new class of Seasonal Fractionally Integrated Separable Spatial AutoRegressive model. In Section 2.3 we investigate some properties of the model, existence, invertibility, causality and stationary conditions. We compute the autocovariance function and provide an analytic expression for the spectral density and its asymptotic behaviour near the seasonal frequencies. In section 2.4 we provide some illustrations of this new modelling. Some proofs are given in the last section.

2.2 A new model: The Seasonal FISSAR

We introduce the Seasonal Fractionally Integrated Separable Autoregressive model and establish conditions for its existence and invertibility.

Let $\{X_{ij}\}_{i,j \in \mathbb{Z}_+}$ be a sequence of spatial observations in two dimensional regular

lattices, they are governed by a Seasonal FISSAR model if:

$$(1 - \phi_{10}B_1 - \phi_{01}B_2 + \phi_{10}\phi_{01}B_1B_2)(1 - \psi_{10}B_1^{s_1} - \psi_{01}B_2^{s_2} + \psi_{10}\psi_{01}B_1^{s_1}B_2^{s_2}) \times (1 - B_1)^{d_1} (1 - B_1^{s_1})^{D_1} (1 - B_2)^{d_2} (1 - B_2^{s_2})^{D_2} X_{ij} = \varepsilon_{ij} \quad (2.1)$$

where the integers s_1 and s_2 are respectively the seasonal periods in the i^{th} and j^{th} directions, $\phi_{10}, \phi_{01}, \psi_{10}, \psi_{01}$ are real numbers and $\{\varepsilon_{ij}\}_{i,j \in \mathbb{Z}_+}$ is a spatial white noise process, mean zero and variance σ_ε^2 . The backward shift operators B_1 and B_2 are such that $B_1X_{ij} = X_{i-1,j}$ and $B_2X_{ij} = X_{i,j-1}$. The long memory parameters are denoted d_1 and D_1 for the direction i and for the direction j they are denoted d_2 and D_2 .

We specify now the different components of this model in order to understand how we can investigate it, and provide a useful methodology for estimation. First, we provide a part which characterizes the spatial short memory behaviour, second we introduce a new modelling for spatial long memory behaviour with seasonals, extending the work of Shitan (2008) [76].

The spatial short memory behaviour of the variables $\{X_{ij}\}_{i,j \in \mathbb{Z}_+}$ is explained through the process $\{W_{ij}\}_{i,j \in \mathbb{Z}_+}$:

$$(1 - \phi_{10}B_1)(1 - \phi_{01}B_2)(1 - \psi_{10}B_1^{s_1})(1 - \psi_{01}B_2^{s_2}) X_{ij} = W_{ij}. \quad (2.2)$$

This representation extends the work of Shitan (2008) [76] introducing seasonality in the short memory behaviour with the filter $(1 - \psi_{10}B_1^{s_1})(1 - \psi_{01}B_2^{s_2})$. The process $\{W_{ij}\}_{i,j \in \mathbb{Z}_+}$ has a spatial seasonal long memory behaviour given by:

$$(1 - B_1)^{d_1} (1 - B_1^{s_1})^{D_1} (1 - B_2)^{d_2} (1 - B_2^{s_2})^{D_2} W_{ij} = \varepsilon_{ij}. \quad (2.3)$$

Thus, the Seasonal FISSAR model (4.1) can be rewritten formally by:

$$\Phi(B_1, B_2) \Psi(B_1^{s_1}, B_2^{s_2}) X_{ij} = W_{ij}, \quad (2.4)$$

where

$$\Phi(B_1, B_2) = (1 - \phi_{10}B_1)(1 - \phi_{01}B_2) \quad (2.5)$$

and

$$\Psi (B_1^{s_1}, B_2^{s_2}) = (1 - \psi_{10} B_1^{s_1}) (1 - \psi_{01} B_2^{s_2}). \quad (2.6)$$

This new modelling is characterized by four operators: two characterizing the short memory behaviour, $(1 - B_1^{s_1})^{D_1}$ and $(1 - B_2^{s_2})^{D_2}$ and two characterizing the long memory behaviour,

$(1 - \psi_{10} B_1^{s_1})$ and $(1 - \psi_{01} B_2^{s_2})$. They take into account the existence of seasonality in two directions.

We specify now the concept of long memory for stationary processes in two directions. Recall that a stationary process $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ with spectral density $f_X(\cdot)$, for which it exist a real number $b \in (0, 1)$, a constant $C_f > 0$ and a frequency $G \in [0, \pi[$ such that $f_x(\omega) \sim C_f |\omega - G|^{-b}$, when $\omega \rightarrow G$, then $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ has a long memory behaviour (Bisognin and Lopes, 2009 [13]). This definition can be extended in dimension two in the following way:

Definition 2.2.1 *Let $\{X_{ij}\}_{i,j \in \mathbb{Z}_+}$ be a stationary process with spectral density $f_X(\cdot, \cdot)$. Suppose there exist real numbers $a, b \in (0, 1)$, a constant $C_f > 0$ and frequencies $\lambda_1, \lambda_2 \in [0, \pi[$ such that $f_x(\omega_1, \omega_2) \sim C_f |\omega_1 - \lambda_1|^{-a} |\omega_2 - \lambda_2|^{-b}$, when $(\omega_1, \omega_2) \rightarrow (\lambda_1, \lambda_2)$, then $\{X_{ij}\}_{i,j \in \mathbb{Z}_+}$ has a long memory behaviour.*

We investigate now the following properties: (i) existence, (ii) invertibility, (iii) causality and (iv) stationarity for the model (4.1). We first provide the causal moving average representation of the seasonal FISSAR process (4.1).

Proposition 2.2.1 *Let be the process $\{X_{ij}\}_{i,j \in \mathbb{Z}_+}$ defined in equation (3.2). It has the following representation:*

$$X_{ij} = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \phi_{10}^k \phi_{01}^l \psi_{10}^m \psi_{01}^n W_{i-k-m s_1, j-l-n s_2}, \quad (2.7)$$

where

$$W_{ij} = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \phi_k(d_1) \phi_l(d_2) \phi_m(D_1) \phi_n(D_2) \varepsilon_{i-k-m s_1, j-l-n s_2}, \quad (2.8)$$

with

$$\phi_k(d_1) = \begin{cases} \frac{\Gamma(k+d_1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(d_1)} & \text{if } k \in \mathbb{Z}_+ \\ 0 & \text{if } k \notin \mathbb{Z}_+ \end{cases}; \quad \phi_l(d_2) = \begin{cases} \frac{\Gamma(l+d_2)}{\Gamma(l+1)\Gamma(d_2)} & \text{if } l \in \mathbb{Z}_+ \\ 0 & \text{if } l \notin \mathbb{Z}_+ \end{cases} \quad (2.9)$$

and

$$\phi_m(D_1) = \begin{cases} \frac{\Gamma(m+D_1)}{\Gamma(m+1)\Gamma(D_1)} & \text{if } m \in \mathbb{Z}_+ \\ 0 & \text{if } m \notin \mathbb{Z}_+ \end{cases}; \quad \phi_n(D_2) = \begin{cases} \frac{\Gamma(n+D_2)}{\Gamma(n+1)\Gamma(D_2)} & \text{if } n \in \mathbb{Z}_+ \\ 0 & \text{if } n \notin \mathbb{Z}_+ \end{cases} \quad (2.10)$$

$\Gamma(\cdot)$ is the Gamma function defined by $\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} dx$ and $\{\varepsilon_{ij}\}_{i,j \in \mathbb{Z}_+}$ is a two-dimensional white noise process. Equations (3.21)-(3.22) have an unique solution if the polynomials $\Phi(z_1, z_2)$ and $\Psi(z_1, z_2)$ are such that all their roots lie outside the unit polydisk, i.e

- i) $|\phi_{10}| < 1, |\phi_{01}| < 1, |\psi_{10}| < 1$ and $|\psi_{01}| < 1$
- ii) $(1 + \phi_{10}^2 - \phi_{01}^2 - \phi_{10}^2 \phi_{01}^2) - 4\phi_{10}(1 - \phi_{10}\phi_{01}) > 0$
- iii) $(1 + \psi_{10}^2 - \psi_{01}^2 - \psi_{10}^2 \psi_{01}^2) - 4\psi_{10}(1 - \psi_{10}\psi_{01}) > 0$

Proof : The sketch of the proof is provided in Appendix. It derives from Basu and Reisel (1993) [9]. ■

2.3 Some properties of the seasonal FISSAR model

We provide now the spectral density function of the process $\{W_{ij}\}$ and $\{X_{ij}\}$ and we establish the asymptotic mean of this function. We use this result to give the stationary conditions for the processes.

Proposition 2.3.1 *Let $\{W_{ij}\}$ be the process defined by (3.3) and $f_W(\lambda_1, \lambda_2)$ its spectral density. When $|d_i + D_i| < 0.5$ and $|d_i| < 0.5$ ($i = 1, 2$), its spectral density is equal to:*

$$f_W(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{\sigma^2}{4\pi^2} \left[2 \sin\left(\frac{\lambda_1}{2}\right) \right]^{-2d_1} \left[2 \sin\left(\frac{s_1 \lambda_1}{2}\right) \right]^{-2D_1} \left[2 \sin\left(\frac{\lambda_2}{2}\right) \right]^{-2d_2} \left[2 \sin\left(\frac{s_2 \lambda_2}{2}\right) \right]^{-2D_2} \quad (2.11)$$

with λ_1 and $\lambda_2 \in]0, \pi]$.

Proof : The proof of this Proposition is provided in the Appendix. ■

Proposition 2.3.2 *Let $\{X_{ij}\}_{i,j \in \mathbb{Z}_+}$ be the Seasonal FISSAR process defined in (3.4), the spectral density function $f_X(\lambda_1, \lambda_2)$ of this process is equal to*

$$f_X(\lambda_1, \lambda_2) = |\Phi(e^{-i\lambda_1}, e^{-i\lambda_2})|^{-2} |\Psi(e^{-is\lambda_1}, e^{-is\lambda_2})|^{-2} f_W(\lambda_1, \lambda_2) \quad (2.12)$$

where $f_W(\lambda_1, \lambda_2)$ is the spectral density function of the process $\{W_{ij}\}_{i,j \in \mathbb{Z}_+}$ given in (2.11) and $\Phi(., .)$ and $\Psi(., .)$ are respectively defined in (3.6) and (3.7) with λ_1 and $\lambda_2 \in]0, \pi]$.

Proof : This result derived from the definition of the spectral density function. ■

Corollary 2.3.1 *The spectral density of the process $\{X_{ij}\}_{i,j \in \mathbb{Z}_+}$ defined in (3.2) can be rewritten as*

$$f_X(\lambda_1, \lambda_2) = (1 - 2\phi_{10} \cos(\lambda_1) + \phi_{10}^2)^{-1} (1 - 2\psi_{10} \cos(s_1\lambda_1) + \psi_{10}^2)^{-1} (1 - 2\phi_{01} \cos(\lambda_2) + \phi_{01}^2)^{-1} (1 - 2\psi_{01} \cos(s_2\lambda_2) + \psi_{01}^2)^{-1} f_W(\lambda_1, \lambda_2) \quad (2.13)$$

where $f_W(\lambda_1, \lambda_2)$ is given in (2.11).

We analyse now the behaviour of the spectral density for the processes $\{W_{ij}\}_{i,j \in \mathbb{Z}_+}$ and $\{X_{ij}\}_{i,j \in \mathbb{Z}_+}$ near the seasonal frequencies.

Proposition 2.3.3 *The asymptotic expression of the spectral density of the process $\{W_{ij}\}_{i,j \in \mathbb{Z}_+}$ near the seasonal frequencies is such that*

(i) For $\lambda_0 = 0$,

$$f_W(\lambda_1, \lambda_2) \sim C_1 |\lambda_1 - \lambda_0|^{-2(d_1+D_1)} |\lambda_2 - \lambda_0|^{-2(d_2+D_2)}, \quad \text{when } (\lambda_1, \lambda_2) \longrightarrow (0, 0), \quad (2.14)$$

with

$$C_1 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{4\pi^2} s_1^{-2D_1} s_2^{-2D_2} \quad (2.15)$$

(ii) For $\lambda_i = \frac{2\pi i}{s_1}$, $\lambda_j = \frac{2\pi j}{s_2}$, $i = 1, \dots, [s_1/2]$ and $j = 1, \dots, [s_2/2]$, where $[x]$ means the integer part of x ,

$$f_W(\lambda_1, \lambda_2) \sim C_2 |\lambda_1 - \lambda_i|^{-2D_1} |\lambda_2 - \lambda_j|^{-2D_2}, \text{ when } (\lambda_1, \lambda_2) \longrightarrow (\lambda_i, \lambda_j) \quad (2.16)$$

with

$$C_2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{4\pi^2} s_1^{-2D_1} s_2^{-2D_2} \left[2 \sin \left(\frac{\lambda_i}{2} \right) \right]^{-2d_1} \left[2 \sin \left(\frac{\lambda_j}{2} \right) \right]^{-2d_2} \quad (2.17)$$

Proof : The proof of this Proposition is provided in the Appendix. ■

Proposition 2.3.4 *The asymptotic expression of the spectral density of the process $\{X_{ij}\}_{i,j \in \mathbb{Z}_+}$ near the seasonal frequencies is such that*

(i) For $\lambda_0 = 0$,

$$f_X(\lambda_1, \lambda_2) \sim C_3 |\lambda_1 - \lambda_0|^{-2(d_1+D_1)} |\lambda_2 - \lambda_0|^{-2(d_2+D_2)}, \text{ when } (\lambda_1, \lambda_2) \longrightarrow (0, 0) \quad (2.18)$$

with

$$\begin{aligned} C_3 &= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{4\pi^2} s_1^{-2D_1} s_2^{-2D_2} |\Phi(e^{-i\lambda_0}, e^{-i\lambda_0})|^{-2} |\Psi(e^{-i\lambda_0}, e^{-i\lambda_0})|^{-2} \\ &= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{4\pi^2} s_1^{-2D_1} s_2^{-2D_2} (1 - \phi_{10})^{-2} (1 - \psi_{10})^{-2} (1 - \phi_{01})^{-2} (1 - \psi_{10})^{-2}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

(ii) For $\lambda_i = \frac{2\pi i}{s_1}$, $\lambda_j = \frac{2\pi j}{s_2}$, $i = 1, \dots, [s_1/2]$ and $j = 1, \dots, [s_2/2]$, where $[x]$ means the integer part of x ,

$$f_X(\lambda_1, \lambda_2) \sim C_4 |\lambda_1 - \lambda_i|^{-2D_1} |\lambda_2 - \lambda_j|^{-2D_2}, \text{ when } (\lambda_1, \lambda_2) \longrightarrow (\lambda_i, \lambda_j) \quad (2.20)$$

with

$$\begin{aligned} C_4 &= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{4\pi^2} s_1^{-2D_1} s_2^{-2D_2} \left[2 \sin \left(\frac{\lambda_i}{2} \right) \right]^{-2d_1} \left[2 \sin \left(\frac{\lambda_j}{2} \right) \right]^{-2d_2} \\ &\quad |\Phi(e^{-i\lambda_i}, e^{-i\lambda_j})|^{-2} |\Psi(e^{-is_1\lambda_0}, e^{-is_2\lambda_0})|^{-2}, \end{aligned} \quad (2.21)$$

the polynomials $\Phi(.,.)$ and $\Psi(.,.)$ are introduced in (3.6) and (3.7).

Proof : The proof is given in the Appendix. ■

We investigate now the stationary conditions for the model (4.1) as well as its long memory behaviour. We give also two expressions for the autocovariance function of the Seasonal FISSAR process.

Proposition 2.3.5 *The two-dimensional process $\{W_{ij}\}_{i,j \in \mathbb{Z}_+}$ defined in (3.3)*

(i) *is stationary when $d_i + D_i < 0.5$, $D_i < 0.5$, $i = 1, 2$.*

(ii) *has a long memory behaviour when $0 < d_i + D_i < 0.5$, $0 < D_i < 0.5$, $i = 1, 2$.*

Proof : The proof is given in the Appendix. ■

Proposition 2.3.6 *Let $\{X_{ij}\}_{i,j \in \mathbb{Z}_+}$ be a Seasonal FISSAR process defined in (4.1). The process $\{X_{ij}\}_{i,j \in \mathbb{Z}_+}$*

(i) *is stationary when $d_i + D_i < 0.5$, $D_i < 0.5$, $i = 1, 2$ and $\Phi(z_1, z_2) \Psi(z_1^s, z_2^s) \neq 0$*

for $|z_1| < 1$ and $|z_2| < 1$.

(ii) *has long memory property when $0 < d_i + D_i < 0.5$, $0 < D_i < 0.5$, $i = 1, 2$*

and $\Phi(z_1, z_2) \Psi(z_1^{s_1}, z_2^{s_2}) \neq 0$, for $|z_1| \leq 1$ and $|z_2| \leq 1$.

Proof : The proof is given in the Appendix. ■

To investigate the autocovariance function of the process defined in (3.2), we show that its autocovariance function can be written as a product of the autocovariance function for two processes $\{Z_{ij}\}_{i,j \in \mathbb{Z}_+}$ and $\{Y_{ij}\}_{i,j \in \mathbb{Z}_+}$ defined in the following way.

Let respectively $\{\varepsilon_{ij}^*\}$, $\{\varepsilon'_{ij}\}$ be two orthogonal two-dimensional white noise processes with mean zero and respectively variance $\sigma_{\varepsilon^*}^2$ and $\sigma_{\varepsilon'}^2$, we define the processes $\{Z_{ij}\}_{i,j \in \mathbb{Z}_+}$ and $\{Y_{ij}\}_{i,j \in \mathbb{Z}_+}$:

$$(1 - B_1^{s_1})^{D_1} (1 - B_2^{s_2})^{D_2} Z_{ij} = \varepsilon_{ij}^* \quad (2.22)$$

$$(1 - B_1)^{d_1} (1 - B_2)^{d_2} Y_{ij} = \varepsilon'_{ij} \quad (2.23)$$

Shitan (2008) prove that the autocovariance function of the process $\{Y_{ij}\}_{i,j \in \mathbb{Z}_+}$ is such that:

$$\gamma_Y(h_1, h_2) = \sigma_{\varepsilon'}^2 \frac{(-1)^{h_1+h_2} \Gamma(1-2d_1)\Gamma(1-2d_2)}{\Gamma(h_1-d_1+1)\Gamma(1-h_1-d_1)\Gamma(h_2-d_2+1)\Gamma(1-h_2-d_2)} \quad (2.24)$$

We can derive the expression of the process $\{Z_{ij}\}_{i,j \in \mathbb{Z}_+}$ from (4.7) and obtain

$$\gamma_Z(s_1 h_1 + \xi_1, s_2 h_2 + \xi_2) = \begin{cases} \sigma_{\varepsilon^*}^2 \frac{(-1)^{h_1+h_2} \Gamma(1-2D_1)\Gamma(1-2D_2)}{\Gamma(h_1-D_1+1)\Gamma(1-h_1-D_1)\Gamma(h_2-D_2+1)\Gamma(1-h_2-D_2)} \\ \text{if } (\xi_1, \xi_2) = (0, 0) \end{cases} \quad (2.25)$$

$$\gamma_Z(s_1 h_1 + \xi_1, s_2 h_2 + \xi_2) = \gamma_Z(s_1 h_1 + \xi_1, s_2 h_2 + \xi_2) = 0 \text{ if } (\xi_1, \xi_2) \in A_1 \times A_2 \quad (2.26)$$

where $A_1 = \{1, \dots, s_1 - 1\}$ and $A_2 = \{1, \dots, s_2 - 1\}$.

We can now give the autocovariance function of $\{X_{ij}\}_{i,j \in \mathbb{Z}_+}$ introduced in (3.2):

Proposition 2.3.7 *Let $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{Z}_+$, $(\xi_1, \xi_2) \in A_1 \times A_2$ where $A_1 = \{1, \dots, s_1 - 1\}$ and $A_2 = \{1, \dots, s_2 - 1\}$. The autocovariance function of the process $\{X_{ij}\}_{i,j \in \mathbb{Z}_+}$ is given by:*

$$\begin{aligned} \gamma_X(h_1, h_2) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{q=0}^{+\infty} \sum_{r=0}^{+\infty} \sum_{t=0}^{+\infty} \phi_{10}^{k+p} \phi_{01}^{l+q} \psi_{10}^{m+r} \psi_{01}^{n+t} \\ &\quad \times \gamma_W(h_1 + k + s_1(m-r) - p, h_2 + l + s_2(n-t) - q) \end{aligned} \quad (2.27)$$

where

$$\begin{aligned} \gamma_W(h_1, h_2) &= \sigma_{\varepsilon}^2 \sum_{\nu_1=0}^{+\infty} \sum_{\nu_2=0}^{+\infty} \gamma_Z(s_1 \nu_1, s_2 \nu_2) \\ &\quad \times \gamma_Y(h_1 - s_1 \nu_1, h_2 - s_2 \nu_2) \text{ if } (h_1, h_2) = (s_1 \ell_1, s_2 \ell_2) \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$\gamma_W(h_1, h_2) = 0, \text{ if } (h_1, h_2) = (s_1 \ell_1 + \xi_1, s_2 \ell_2 + \xi_2) \quad (2.29)$$

with $\gamma_Z(.,.)$ and $\gamma_Y(.,.)$ given respectively in (4.8)-(4.8) and (4.7).

Proof : The proof is given in the Appendix. ■

Corollary 2.3.2 *The variance of the Seasonal FISSAR process has the following expression*

$$\begin{aligned} \gamma_X(0, 0) = & \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{q=0}^{+\infty} \sum_{r=0}^{+\infty} \sum_{t=0}^{+\infty} \phi_{10}^{k+p} \phi_{01}^{l+q} \psi_{10}^{m+r} \psi_{01}^{n+t} \\ & \times \gamma_W(k + s_1(m - r) - p, l + s_2(n - t) - q) \end{aligned} \quad (2.30)$$

where $\gamma_W(\cdot, \cdot)$ is given by (4.5)-(4.6) where $h_1 = h_2 = 0$.

For practical purpose, we propose a general formula of the autocovariance function of the stationary process $\{X_{ij}\}_{i,j \in \mathbb{Z}_+}$ which does not depend on the two-dimensional seasonal fractionally integrated white noise ($\{W_{ij}\}_{i,j \in \mathbb{Z}_+}$). For that, we introduce two new processes $\{U_{ij}\}_{i,j \in \mathbb{Z}_+}$ and $\{V_{ij}\}_{i,j \in \mathbb{Z}_+}$.

Let respectively $\{\tilde{\varepsilon}_{ij}\}$, $\{\tilde{\varepsilon}_{ij}^*\}$ be two 2-dimensional white noise processes with mean zero and respectively variances $\sigma_{\tilde{\varepsilon}_{ij}}^2$ and $\sigma_{\tilde{\varepsilon}_{ij}^*}^2$. We introduce respectively the processes $\{U_{ij}\}_{i,j \in \mathbb{Z}_+}$ and $\{V_{ij}\}_{i,j \in \mathbb{Z}_+}$:

$$\Psi(B_1^{s_1}, B_2^{s_2}) (1 - B_1^{s_1})^{D_1} (1 - B_2^{s_2})^{D_2} U_{ij} = \tilde{\varepsilon}_{ij} \quad (2.31)$$

$$\Phi(B_1, B_2) (1 - B_1)^{d_1} (1 - B_2)^{d_2} V_{ij} = \tilde{\varepsilon}_{ij}^* \quad (2.32)$$

where $\Psi(B_1^s, B_2^s)$ and $\Phi(B_1, B_2)$ are respectively defined in (3.6) and (3.7).

Note that the process $\{U_{ij}\}_{i,j \in \mathbb{Z}_+}$ generalizes the process $\{Z_{ij}\}_{i,j \in \mathbb{Z}_+}$ introduced in (4.2) through the operator $\Psi(B_1^s, B_2^s)$ and the process $\{V_{ij}\}_{i,j \in \mathbb{Z}_+}$ generalizes the process $\{Y_{ij}\}_{i,j \in \mathbb{Z}_+}$ introduced in (4.3) through the operator $\Phi(B_1, B_2)$.

Proposition 2.3.8 *The autocovariance function of the stationary process $\{U_{ij}\}_{i,j \in \mathbb{Z}_+}$ in spatial lags (h_1, h_2) is equal to:*

$$\begin{aligned} \gamma_U(h_1, h_2) = & \sigma_{\tilde{\varepsilon}}^2 \sum_{\nu_1=0}^{+\infty} \sum_{\nu_2=0}^{+\infty} \gamma_{\tilde{U}}(s_1 \nu_1, s_2 \nu_2) \\ & \times \gamma_Z(h_1 - s_1 \nu_1, h_2 - s_2 \nu_2), \quad \text{if } (h_1, h_2) = (s_1 \ell_1, s_2 \ell_2) \end{aligned} \quad (2.33)$$

$$\gamma_U(h_1, h_2) = 0, \quad \text{if } (h_1, h_2) = (s_1 \ell_1 + \xi_1, s_2 \ell_2 + \xi_2) \quad (2.34)$$

where \tilde{U} is equal to:

$$\Psi(B_1^{s_1}, B_2^{s_2}) \tilde{U}_{ij} = \tilde{\varepsilon}_{ij}^*$$

$$\gamma_{\tilde{U}}(s_1\nu_1, s_2\nu_2) = \sigma_{\varepsilon^*}^2 \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_{\nu_1+m}^1 \varphi_m^1 \varphi_{\nu_2+n}^2 \varphi_n^2,$$

and $\gamma_Z(\cdot, \cdot)$ is introduced in (4.8)-(4.8). The coefficients φ_k^1 and φ_l^2 are linked by the relationship

$$\Psi^{-1}(z_1^s, z_2^s) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \varphi_k^1 \varphi_l^2 z_1^{s_1 k} z_2^{s_2 l}$$

.

Proof : The proof is given in the Appendix. ■

Proposition 2.3.9 *The autocovariance function of the stationary processes $\{V_{ij}\}_{i,j \in \mathbb{Z}_+}$ in spatial lags (h_1, h_2) is equal to:*

$$\gamma_V(h_1, h_2) = \sigma_{\varepsilon'}^2 \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \gamma_{\tilde{V}}(k, l) \gamma_Y(h_1 - k, h_2 - l) \quad (2.35)$$

where \tilde{V} is given by:

$$\begin{aligned} \Phi(B_1, B_2) \tilde{V}_{ij} &= \tilde{\varepsilon}'_{ij}, \\ \gamma_{\tilde{V}}(k, l) &= \sigma_{\varepsilon'}^2 \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_{k+m}^1 \varphi_m^1 \varphi_{l+n}^2 \varphi_n^2, \end{aligned}$$

$\gamma_Y(\cdot, \cdot)$ being defined by (4.7) and the coefficients φ_k^1 and φ_l^2 are linked by the relationship

$$\Phi^{-1}(z_1, z_2) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \varphi_k^1 \varphi_l^2 z_1^k z_2^l$$

Proof : The proof of this Proposition is given in the Appendix. ■

Now we provide the autocovariance function of the Seasonal FISSAR process defined in (3.4).

Proposition 2.3.10 *Let $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{Z}_+$, $\xi \in A$ where $A = \{1, \dots, s-1\}$.*

The Seasonal FISSAR stationary process $\{X_{ij}\}_{i,j \in \mathbb{Z}_+}$ has autocovariance function at spatial lags (h_1, h_2) given by

$$\begin{aligned} \gamma_X(h_1, h_2) &= \sigma_{\varepsilon}^2 \sum_{\nu_1=0}^{+\infty} \sum_{\nu_2=0}^{+\infty} \gamma_U(s_1\nu_1, s_2\nu_2) \\ &\quad \times \gamma_V(h_1 - s_1\nu_1, h_2 - s_2\nu_2), \text{ if } (h_1, h_2) = (s_1\ell_1, s_2\ell_2) \end{aligned} \quad (2.36)$$

$$\gamma_X(h_1, h_2) = 0, \text{ if } (h_1, h_2) = (s_1\ell_1 + \xi_1, s_2\ell_2 + \xi_2). \quad (2.37)$$

where the autocovariance functions $\gamma_U(\cdot, \cdot)$ and $\gamma_V(\cdot, \cdot)$ are defined respectively in (2.33)-(2.34) and (2.35).

Proof : The sketch of the proof is provided in the Appendix. ■

Corollary 2.3.3 *The variance for this second representation of the Seasonal FISSAR process is given by,*

$$\gamma_X(0, 0) = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{\nu_1=0}^{+\infty} \sum_{\nu_2=0}^{+\infty} \gamma_U(s_1\nu_1, s_2\nu_2) \gamma_V(s_1\nu_1, s_2\nu_2) \quad (2.38)$$

where the autocovariance functions $\gamma_U(\cdot, \cdot)$ and $\gamma_V(\cdot, \cdot)$ are defined respectively in (2.33)-(2.34) and (2.35) with $h_1 = h_2 = 0$.

2.4 Illustrations

A realisation of the two-dimensional seasonal fractionally integrated white noise processes $\{W_{ij}\}_{i,j \in \mathbb{Z}_+}$ with $d_1 = 0.1, d_2 = 0.1, D_1 = 0.15, D_2 = 0.2, s_1 = s_2 = 4$ is shown in Figure 2.1. In this study, we generated 100×100 grid and we use only the values in south east corner in the matrix (they correspond to the interior values of grid size 30×30). The truncation points for the infinite sums used in this study is 100.

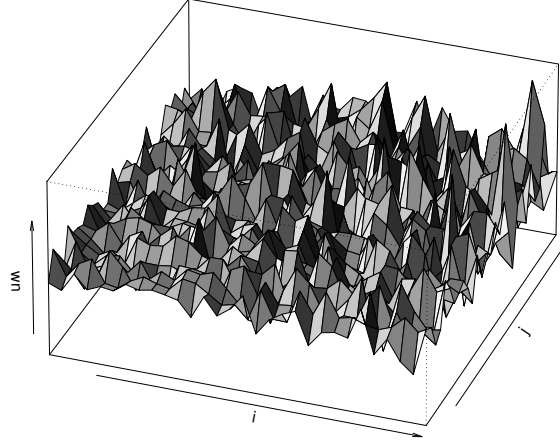


FIGURE 2.1 – 2D seasonal fractionally integrated white noise process, $d_1 = 0.1$, $d_2 = 0.1$, $D_1 = 0.15$, $D_2 = 0.2$, $s_1 = s_2 = 4$ and size 30×30 .

The spatial white noise process $\{W_{ij}\}_{i,j \in \mathbb{Z}_+}$ can be considered as a special case of the Seasonal FISSAR model. However, it is rare to see applications in a phenomenon that is only modelled by white noise.

We simulated the Seasonal FISSAR process in two stages. First we generate the two dimensional white noise $\{\varepsilon_{ij}\}_{i,j \in \mathbb{Z}_+}$ and second using (3.3) we obtained $\{W_{ij}\}_{i,j \in \mathbb{Z}_+}$. Then using the relationship (3.2), we get $\{X_{ij}\}_{i,j \in \mathbb{Z}_+}$. We use also the 30×30 values in south east corner by simulating 100×100 values in a regular grid with $d_1 = 0.1$, $d_2 = 0.1$, $D_1 = 0.1$, $D_2 = 0.2$, $\phi_{10} = 0.1$, $\phi_{01} = 0.15$, $\psi_{10} = 0.1$, $\phi_{0.2}$ and $s_1 = s_2 = 4$.

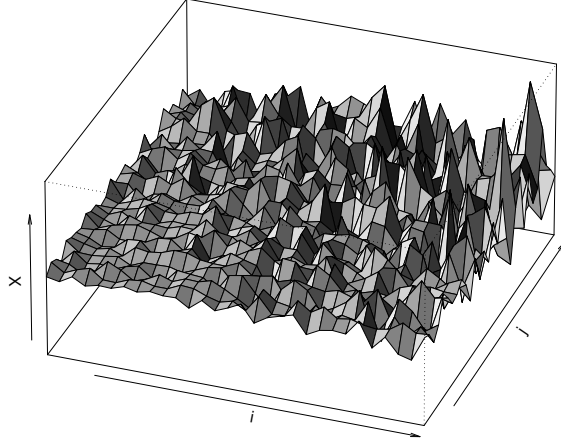


FIGURE 2.2 – Seasonal FISSAR process: $d_1 = 0.1, d_2 = 0.1, D_1 = 0.1, D_2 = 0.2, \phi_{10} = 0.1, \phi_{01} = 0.15, \psi_{10} = 0.1, \phi_{0,2}, s_1 = s_2 = 4$ and size $N \times N = 30 \times 30$.

In practice, the Seasonal FISSAR model has many possible applications of real data sets from different fields when the observations are collected during different seasons at different locations: temperature data, agricultural data, systemic risk etc. An possible application may concern variability of the rice production over Senegal river valley. Indeed yields vary widely from season to season and depending on the growing areas in the valley. Thus, our model could be applied to these data for better management of forecasting yields, which would be a considerable contribution to the management of rice production, an influential factor on economic issues of the country and the West African sub region.

In practice then, many observations are reporting by longitude and altitude and this new modelling is defined in two dimensional regular lattices. In this case we re-coded the position of the stations by assigning an integer value from number for both longitude and altitude, reflecting the relative position on the lattice into which the study region has been mapped.

2.5 Conclusion

The spatial modelling has a lot of applications in different fields. To take into account at the same time existence of short memory behaviour and long memory behaviour in time and space permits a greater flexibility for the use of these modellings. It is the objective of this paper which introduces and investigates the statistical properties of a new class of model called Fractionally Integrated Separable Spatial Autoregressive processes with Seasonality. The stationary conditions, an explicit expression form of the autocovariance function and spectral density function have also been given. On another hand, a practical formula of the autocovariance function as a product of covariance for the Seasonal FISSAR process is given. Extension of the results to the spatio-temporal data or d -dimensional ($d > 2$) fields is immediate but not provided in this paper. For the spatio-temporal representation, time can be represented by the direction i and the spatial components by the direction j taken in \mathbb{Z}^d , $d \geq 2$. We provide some representations of these models. It remains to provide a way to identify and estimate these models from data sets: this will be the purpose of the next chapter.

2.6 Appendix

In this section we establish the main results and give the necessary technical proofs for the propositions. **Proof** of the Proposition 2.2.1.

According to equation (3.2), we have

$$X_{ij} = (1 - \phi_{10}B_1)^{-1} (1 - \psi_{10}B_1^{s_1})^{-1} (1 - \phi_{01}B_2)^{-1} (1 - \psi_{01}B_2^{s_2})^{-1} W_{ij}$$

Thus,

$$\begin{aligned} X_{ij} &= \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \phi_{10}^k B_1^k \right) \left(\sum_{m=0}^{+\infty} \psi_{10}^m B_1^{ms_1} \right) \left(\sum_{l=0}^{+\infty} \phi_{01}^l B_2^l \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \psi_{01}^n B_2^{ns_2} \right) W_{ij} \\ &= \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \phi_{10}^k B_1^k \psi_{10}^m B_1^{ms_1} \phi_{01}^l B_2^l \psi_{01}^n B_2^{ns_2} \right) W_{ij}. \end{aligned}$$

If $\Phi(z_1, z_2)$ and $\Psi(z_1, z_2)$ have their roots outside the unit polydisk then we have the convergent representation (3.21), see Proposition 1 in Basu and Reisel (1993). ■

Proof of the Proposition 2.3.1.

We consider (3.3) and denote $f_\varepsilon(\lambda_1, \lambda_2)$ the spectral density of the process $\{\varepsilon_{ij}\}$.

Let

$$\Psi(z_1, z_2) = (1 - z_1)^{-d_1} (1 - z_1^{s_1})^{-D_1} (1 - z_2)^{-d_2} (1 - z_2^{s_2})^{-D_2},$$

Then

$$\begin{aligned} f_W(\lambda_1, \lambda_2) &= \Psi(e^{i\lambda_1}, e^{i\lambda_2}) \Psi(e^{-i\lambda_1}, e^{-i\lambda_2}) f_\varepsilon(\lambda_1, \lambda_2) \\ &= (1 - e^{i\lambda_1})^{-d_1} (1 - e^{is_1\lambda_1})^{-D_1} (1 - e^{i\lambda_2})^{-d_2} (1 - e^{is_2\lambda_2})^{-D_2} \\ &\quad \times (1 - e^{-i\lambda_1})^{-d_1} (1 - e^{-is_1\lambda_1})^{-D_1} (1 - e^{-i\lambda_2})^{-d_2} (1 - e^{-is_2\lambda_2})^{-D_2} f_\varepsilon(\lambda_1, \lambda_2) \\ &= [(1 - e^{i\lambda_1})(1 - e^{-i\lambda_1})]^{-d_1} [(1 - e^{is_1\lambda_1})(1 - e^{-is_1\lambda_1})]^{-D_1} \\ &\quad \times [(1 - e^{i\lambda_2})(1 - e^{-i\lambda_2})]^{-d_2} [(1 - e^{is_2\lambda_2})(1 - e^{-is_2\lambda_2})]^{-D_2} f_\varepsilon(\lambda_1, \lambda_2) \end{aligned}$$

Thus

$$f_W(\lambda_1, \lambda_2) = |1 - e^{-i\lambda_1}|^{-2d_1} |1 - e^{-is_1\lambda_1}|^{-2D_1} |1 - e^{-i\lambda_2}|^{-2d_2} |1 - e^{-is_2\lambda_2}|^{-2D_2} f_\varepsilon(\lambda_1, \lambda_2)$$

as soon as

$$(1 - e^{i\lambda_1})(1 - e^{-i\lambda_1}) = |1 - e^{-i\lambda_1}|^2 = \left[2 \sin\left(\frac{\lambda_1}{2}\right)\right]^2,$$

we obtain (2.11) since $f_\varepsilon(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{\sigma^2}{4\pi^2}$. ■

Proof of the Proposition 2.3.3.

(i) We consider the spectral density function of the process $\{W_{ij}\}_{i,j \in \mathbb{Z}_+}$ defined in (2.11) and we use the following approximations:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\sin(s\lambda)}{s\lambda} = 1 \text{ and } \sin(s\lambda) \simeq s\lambda,$$

then

$$\begin{aligned} f_W(\lambda_1, \lambda_2) &= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{4\pi^2} |\lambda_1|^{-2d_1} s_1^{-2D_1} |\lambda_1|^{-2D_1} |\lambda_2|^{-2d_2} s_2^{-2D_2} |\lambda_2|^{-2D_2} \\ &= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{4\pi^2} |\lambda_1|^{-2(d_1+D_1)} |\lambda_2|^{-2(d_2+D_2)} s_1^{-2D_1} s_2^{-2D_2} \end{aligned}$$

when $(\lambda_1, \lambda_2) \rightarrow (0, 0)$. As soon as $\lambda_0 = 0$ we obtain (2.14).

(ii) Let $\lambda_i = \frac{2\pi i}{s_1}$ and $\lambda_j = \frac{2\pi j}{s_2}$ for all $i = 1, \dots, [s_1/2]$ and $j = 1, \dots, [s_2/2]$, where $[x]$ means the integer part of x , then

$$\begin{aligned} f_W(\lambda_1 + \lambda_i, \lambda_2 + \lambda_j) &= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{4\pi^2} \left[2 \sin \left(\frac{\lambda_1}{2} + \frac{\lambda_i}{2} \right) \right]^{-2d_1} \left[2 \sin \left(\frac{s_1 \lambda_1}{2} + \frac{s_1 \lambda_i}{2} \right) \right]^{-2D_1} \\ &\quad \left[2 \sin \left(\frac{\lambda_2}{2} + \frac{\lambda_j}{2} \right) \right]^{-2d_2} \left[2 \sin \left(\frac{s_2 \lambda_2}{2} + \frac{s_2 \lambda_j}{2} \right) \right]^{-2D_2} \end{aligned}$$

If $\lambda \rightarrow 0$ then

$$\left[2 \sin \left(\frac{s\lambda}{2} + \frac{s\lambda_j}{2} \right) \right]^{-2D} \simeq s^{-2D} |\lambda|^{-2D}$$

Therefore,

$$f_W(\lambda_1 + \lambda_i, \lambda_2 + \lambda_j) \simeq \frac{\sigma_\varepsilon^2}{4\pi^2} s_1^{-2D_1} |\lambda_1|^{-2D_1} s_2^{-2D_2} |\lambda_2|^{-2D_2} \left[2 \sin \left(\frac{\lambda_i}{2} \right) \right]^{-2d_1} \left[2 \sin \left(\frac{\lambda_j}{2} \right) \right]^{-2d_2} \quad (2.39)$$

Replacing λ_1 by $\lambda_1 - \lambda_i$ and λ_2 by $\lambda_2 - \lambda_j$ in (2.39), we obtain (2.16). \blacksquare

Proof of the Proposition 2.3.4.

(i) For this proof we need to use the corollary (2.3.1).

Suppose that the process $\{X_{ij}\}_{i,j \in \mathbb{Z}_+}$ defined in (4.1) is causal and invertible.

Using the expressions (2.13), and $\cos(s\lambda) \simeq 1$, $\lambda \rightarrow 0$, then

$$\begin{aligned} f_W(\lambda_1, \lambda_2) &= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{4\pi^2} |\lambda_1|^{-2d_1} s_1^{-2D_1} |\lambda_1|^{-2D_1} |\lambda_2|^{-2d_2} s_2^{-2D_2} |\lambda_2|^{-2D_2} \\ &\quad (1 - \phi_{10})^{-2} (1 - \psi_{10})^{-2} (1 - \phi_{01})^{-2} (1 - \psi_{10})^{-2} \\ &= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{4\pi^2} |\lambda_1|^{-2(d_1+D_1)} |\lambda_2|^{-2(d_2+D_2)} s_1^{-2D_1} s_2^{-2D_2} \\ &\quad (1 - \phi_{10})^{-2} (1 - \psi_{10})^{-2} (1 - \phi_{01})^{-2} (1 - \psi_{10})^{-2} \end{aligned}$$

when $(\lambda_1, \lambda_2) \rightarrow (0, 0)$. For $\lambda_0 = 0$ we obtain (2.18).

(ii) Let $\lambda_i = \frac{2\pi i}{s_1}$ and $\lambda_j = \frac{2\pi j}{s_2}$ for all $i = 1, \dots, [s_1/2]$ and $j = 1, \dots, [s_2/2]$, where $[x]$ means the integer part of x .

$$\begin{aligned}
f_X(\lambda_1 + \lambda_i, \lambda_2 + \lambda_j) &= |\Phi(e^{-i(\lambda_1 + \lambda_i)}, e^{-i(\lambda_2 + \lambda_j)})|^{-2} |\Psi(e^{-is_1(\lambda_1 + \lambda_i)}, e^{-is_2(\lambda_2 + \lambda_j)})|^{-2} \\
&\quad f_W(\lambda_1 + \lambda_j, \lambda_2 + \lambda_j) \\
&= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{4\pi^2} \left[2 \sin\left(\frac{\lambda_1}{2} + \frac{\lambda_i}{2}\right) \right]^{-2d_1} \left[2 \sin\left(\frac{s_1\lambda_1}{2} + \frac{s_1\lambda_j}{2}\right) \right]^{-2D_1} \\
&\quad \left[2 \sin\left(\frac{\lambda_2}{2} + \frac{\lambda_j}{2}\right) \right]^{-2d_2} \left[2 \sin\left(\frac{s_2\lambda_2}{2} + \frac{s_2\lambda_j}{2}\right) \right]^{-2D_2} \\
&\quad |\Phi(e^{-i\lambda_i}, e^{-i\lambda_j})|^{-2} |\Psi(e^{-is_1\lambda_0}, e^{-is_2\lambda_0})|^{-2}
\end{aligned}$$

If $\lambda \rightarrow 0$ then

$$\left[2 \sin\left(\frac{s\lambda}{2} + \frac{s\lambda_j}{2}\right) \right]^{-2D} \simeq s^{-2D} |\lambda|^{-2D}$$

Therefore,

$$\begin{aligned}
f_X(\lambda_1 + \lambda_i, \lambda_2 + \lambda_j) &\simeq \frac{\sigma_\varepsilon^2}{4\pi^2} s_1^{-2D_1} |\lambda_1|^{-2D_1} s_2^{-2D_2} |\lambda_2|^{-2D_2} \left[2 \sin\left(\frac{\lambda_i}{2}\right) \right]^{-2d_1} \left[2 \sin\left(\frac{\lambda_j}{2}\right) \right]^{-2d_2} \\
&\quad |\Phi(e^{-i\lambda_i}, e^{-i\lambda_j})|^{-2} |\Psi(e^{-is_1\lambda_0}, e^{-is_2\lambda_0})|^{-2} \tag{2.40}
\end{aligned}$$

Replacing λ_1 by $\lambda_1 - \lambda_i$ and λ_2 by $\lambda_2 - \lambda_j$ in (2.40), we obtain (2.20). \blacksquare

Proof of the Proposition 2.3.5.

(i) Let $f_W(\cdot, \cdot)$ the spectral density function of the process $\{W_{ij}\}_{i,j \in \mathbb{Z}_+}$ given in (2.11). Then $f_W(\lambda_1, \lambda_2) = f_W(-\lambda_1, -\lambda_2)$ and $f_W(\lambda_1, \lambda_2) \geq 0$. Therefore the process is stationary if

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_W(\lambda_1, \lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2 = 4 \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} f_W(\lambda_1, \lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2 < \infty \tag{2.41}$$

From (2.14) and (2.16) we have

$$C_1 \int_0^{\pi} |\lambda_1|^{-2(d_1+D_1)} d\lambda_1 \int_0^{\pi} |\lambda_2|^{-2(d_2+D_2)} d\lambda_2 < \infty$$

and

$$C_2 \int_0^{\pi} |\lambda_1 - \lambda_j|^{-2D_1} d\lambda_1 \int_0^{\pi} |\lambda_2 - \lambda_j|^{-2D_2} d\lambda_2 < \infty$$

when $d_i + D_i < 0.5$ and $D_i < 0.5$, $i = 1, 2$. Thus (2.41) is verified, and the process $\{W_{ij}\}_{i,j \in \mathbb{Z}_+}$ is stationary.

(ii) From the asymptotic expression of the spectral density function of the process $\{W_{ij}\}_{i,j \in \mathbb{Z}_+}$ and using Proposition 2.3.1 we derive that the process $\{W_{ij}\}_{i,j \in \mathbb{Z}_+}$ has long memory property if $0 < d_i + D_i < 0.5$ and $0 < D_i < 0.5$, $i = 1, 2$. ■

Proof of the Proposition 2.3.6.

(i) The process $\{X_{ij}\}_{i,j \in \mathbb{Z}_+}$ can be rewritten as

$$X_{ij} = \Phi(B_1, B_2)^{-1} \Psi(B_1^{s_1}, B_2^{s_2})^{-1} (1 - B_1)^{-d_1} (1 - B_1^{s_1})^{-D_1} (1 - B_2)^{-d_2} (1 - B_2^{s_2})^{-D_2} \varepsilon_{ij}$$

Let

$$\pi(z_1, z_2) = \Phi(z_1, z_2)^{-1} \Psi(z_1^{s_1}, z_2^{s_2})^{-1} (1 - z_1)^{-d_1} (1 - z_1^{s_1})^{-D_1} (1 - z_2)^{-d_2} (1 - z_2^{s_2})^{-D_2} \varepsilon_{ij}$$

Then

$$X_{ij} = \pi(B_1, B_2) \varepsilon_{ij}$$

If $d_i + D_i < 0.5$ and $D_i < 0.5$, $i = 1, 2$ the item (i) of Proposition 2.3.5 assures that the power series expansion of $(1 - z_1)^{-d_1} (1 - z_1^{s_1})^{-D_1} (1 - z_2)^{-d_2} (1 - z_2^{s_2})^{-D_2}$ converges for $|z_1| \leq 1$ and $|z_2| \leq 1$. In another hand, the polynomial $(\Phi(z_1, z_2) \Psi(z_1^{s_1}, z_2^{s_2}))^{-1}$ converges for $|z_1| \leq 1$ and $|z_2| \leq 1$ when the roots of $\Phi(z_1, z_2) \Psi(z_1^{s_1}, z_2^{s_2}) = 0$ are outside the unit disk. Therefore, the power series $\pi(z_1, z_2)$ converges for all $|z_1| \leq 1$ and $|z_2| \leq 1$ and the process $\{X_{ij}\}_{i,j \in \mathbb{Z}_+}$ is stationary.

(ii) Let $\{X_{ij}\}_{i,j \in \mathbb{Z}_+}$ be a Seasonal FISSAR process in (3.4) whose all roots of $\Phi(z_1, z_2) \Psi(z_1^{s_1}, z_2^{s_2}) = 0$ are outside the unit polydisk. From the asymptotic expression of the spectral density function of $\{X_{ij}\}_{i,j \in \mathbb{Z}_+}$ and the Proposition 2.3.2 the Seasonal FISSAR process has long memory property when $0 < d_i + D_i < 0.5$ and $0 < D_i < 0.5$, $i = 1, 2$ if all the roots of $\Phi(z_1, z_2) \Psi(z_1^{s_1}, z_2^{s_2}) = 0$ are outside the unit polydisk. ■

Proof of the Proposition 4.2.1.

First, we prove the expression of the autocovariance function for the process $\{W_{ij}\}_{i,j \in \mathbb{Z}_+}$ as a product of the autocovariance function of $\{Z_{ij}\}_{i,j \in \mathbb{Z}_+}$ and $\{Y_{ij}\}_{i,j \in \mathbb{Z}_+}$. Let $\{Z_{ij}\}_{i,j \in \mathbb{Z}_+}$ the process defined in (4.2). Then

$$Z_{ij} = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \varphi_k(D_1) B_1^{s_1 k} \varphi_l(D_2) B_2^{s_2 l} (\varepsilon_{ij}^*) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \varphi_k(D_1) \varphi_l(D_2) \varepsilon_{i-s_1 k, j-s_2 l}^* \quad (2.42)$$

where the quantity $\varphi_k(D_1)$ and $\varphi_l(D_2)$ are

$$\phi_k(D_1) = \frac{\Gamma(k + D_1)}{\Gamma(k + 1)\Gamma(D_1)}; \quad \phi_l(D_2) = \frac{\Gamma(l + D_2)}{\Gamma(l + 1)\Gamma(D_2)}. \quad (2.43)$$

For an easier representation we note in the following $\varphi_k(D_1) = \varphi_k^1$ and $\varphi_l(D_2) = \varphi_l^2$.

Therefore

$$\begin{aligned} \gamma_Z(h_1, h_2) &= \mathbf{Cov}(Z_{i+h_1, j+h_2}, Z_{ij}) \\ \gamma_Z(h_1, h_2) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_k^1 \varphi_l^2 \varphi_m^1 \varphi_n^2 \gamma_{\varepsilon^*}(h_1 - s_1 k + s_1 m, h_2 - s_2 l + s_2 n) \end{aligned} \quad (2.44)$$

When $h_1 - s_1 k + s_1 m = 0$ and $h_2 - s_2 l + s_2 n = 0$, we have $k = \frac{h_1}{s_1} + m$ and $l = \frac{h_2}{s_2} + n$, thus (2.44) can be rewritten as

$$\gamma_Z(h_1, h_2) = \sigma_{\varepsilon^*}^2 \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_{\frac{h_1}{s_1} + m}^1 \varphi_{\frac{h_2}{s_2} + n}^2 \varphi_m^1 \varphi_n^2. \quad (2.45)$$

Taking $(h_1, h_2) = (s_1 \ell_1, s_2 \ell_2)$ for $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{Z}_+$, then

$$\gamma_Z(s_1 \ell_1, s_2 \ell_2) = \sigma_{\varepsilon^*}^2 \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_{\ell_1 + m}^1 \varphi_{\ell_2 + n}^2 \varphi_m^1 \varphi_n^2,$$

if $(h_1, h_2) = (s_1 \ell_1 + \xi_1, s_2 \ell_2 + \xi_2)$ for $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{Z}_+$, $(\xi_1, \xi_2) \in A_1 \times A_2$, where $A_1 = \{1, \dots, s_1 - 1\}$, $A_2 = \{1, \dots, s_2 - 1\}$ then $\gamma_Z(h_1, h_2) = 0$.

Thus the autocovariance function of the stationary process $\{Z_{ij}\}_{i,j \in \mathbb{Z}_+}$ is given by

$$\gamma_Z(h_1, h_2) = \begin{cases} \sigma_{\varepsilon^*}^2 \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_{\ell_1 + m}^1 \varphi_{\ell_2 + n}^2 \varphi_m^1 \varphi_n^2 & \text{if } (h_1, h_2) = (s_1 \ell_1, s_2 \ell_2) \\ 0 & \text{if } (h_1, h_2) = (s_1 \ell_1 + \xi_1, s_1 \ell_2 + \xi_2). \end{cases} \quad (2.46)$$

Now the process $\{W_{ij}\}_{i,j \in \mathbb{Z}_+}$ can be rewritten by

$$W_{ij} = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \varphi_k^1 \varphi_l^2 Y_{i-s_1 k, j-s_2 l}$$

Then its autocovariance function is given by

$$\begin{aligned} \gamma_W(h_1, h_2) &= \text{Cov}(W_{i+h_1, j+h_2}, W_{ij}) \\ &= \text{Cov}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \varphi_k^1 \varphi_l^2 Y_{i+h_1-s_1 k, j+h_2-s_2 l}, \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_m^1 \varphi_n^2 Y_{i-m s_1, j-n s_2}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_k^1 \varphi_l^2 \varphi_m^1 \varphi_n^2 \text{Cov}(Y_{i+h_1-s_1 k, j+h_2-s_2 l}, Y_{i-m s_1, j-n s_2}) \\ &= \sigma_{\varepsilon'}^2 \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_k^1 \varphi_l^2 \varphi_m^1 \varphi_n^2 \gamma_Y(h_1 - s_1 k + s_1 m, h_2 - s_2 l + s_2 n). \end{aligned}$$

Thus

$$\gamma_W(h_1, h_2) = \sigma_{\varepsilon'}^2 \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_k^1 \varphi_l^2 \varphi_m^1 \varphi_n^2 \gamma_Y(h_1 - s_1(k-m), h_2 - s_2(l-n)) \quad (2.47)$$

Taking $\nu_1 = k - m$ and $\nu_2 = l - n$ in (2.47), we get

$$\gamma_W(h_1, h_2) = \sigma_{\varepsilon'}^2 \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_{\nu_1+m}^1 \varphi_{\nu_2+n}^2 \varphi_m^1 \varphi_n^2 \gamma_Y(h_1 - s_1 \nu_1, h_2 - s_2 \nu_2). \quad (2.48)$$

Using (2.46) and denoting $\sigma_{\varepsilon}^2 = \sigma_{\varepsilon'}^2 / \sigma_{\varepsilon^*}^2$ the variance of the two-dimensional white noise process $\{\varepsilon_{ij}\}_{i,j \in \mathbb{Z}_+}$ we obtain (4.5) and (4.6).

We give now the proof of the of the expression of the autocovariance function for the Seasonal FISSAR model defined in (3.2). Since $\mathbb{E}(W_{ij}) = 0$ we have $\mathbb{E}(X_{ij}) = 0$ and

$$\gamma_X(h_1, h_2) = \mathbb{E}(X_{i+h_1, j+h_2} X_{ij}).$$

Thus

$$\begin{aligned} \gamma_X(h_1, h_2) &= \mathbb{E} \left[\sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{q=0}^{+\infty} \sum_{r=0}^{+\infty} \sum_{t=0}^{+\infty} \phi_{10}^p \phi_{01}^q \psi_{10}^r \psi_{01}^t W_{i+h_1-p-r s_1, j+h_2-q-t s_2} \right. \\ &\quad \left. \times \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \phi_{10}^k \phi_{01}^l \psi_{10}^m \psi_{01}^n W_{i-k-m s_1, j-l-n s_2} \right] \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \gamma_X(h_1, h_2) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{q=0}^{+\infty} \sum_{r=0}^{+\infty} \sum_{t=0}^{+\infty} \phi_{10}^{k+p} \phi_{01}^{l+q} \psi_{10}^{m+r} \psi_{01}^{n+t} \\ &\quad \times \mathbb{E} (W_{i+h_1-p-rs_1, j+h_2-q-ts_2} W_{i-k-ms_1, j-l-ns_2}). \end{aligned}$$

Now,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} (W_{i+h_1-p-rs_1, j+h_2-q-ts_2} W_{i-k-ms_1, j-l-ns_2}) &= \gamma_W (h_1 + k + ms_1 - p - rs_1, h_2 + l + ns_2 - q - ts_2) \\ &= \gamma_W (h_1 + k + s_1(m - r) - p, h_2 + l + s_2(n - t) - q), \end{aligned}$$

then we obtain (4.4). ■

Proof of the Proposition 2.3.8.

Let \tilde{U} a causal and stationary process,

$$\tilde{U}_{ij} = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \varphi_k^1 \varphi_l^2 \tilde{\varepsilon}_{i-s_1k, j-s_2l}^*$$

where the coefficients φ_k^1 and φ_l^2 are such that,

$$\Psi^{-1}(z_1^{s_1}, z_2^{s_2}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \varphi_k^1 \varphi_l^2 z_1^{s_1k} z_2^{s_2l}.$$

Therefore

$$\begin{aligned} \gamma_{\tilde{U}}(h_1, h_2) &= \text{Cov} \left(\tilde{U}_{i+h_1, j+h_2}, \tilde{U}_{ij} \right) \\ \gamma_{\tilde{U}}(h_1, h_2) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_k^1 \varphi_l^2 \varphi_m^1 \varphi_n^2 \gamma_{\tilde{\varepsilon}^*} (h_1 - s_1k + s_1m, h_2 - s_2l + s_2n). \end{aligned} \quad (2.49)$$

When $h_1 - s_1k + s_1m = 0$ and $h_2 - s_2l + s_2n = 0$ in (2.49) we have $k = \frac{h_1}{s_1} + m$ and $l = \frac{h_2}{s_2} + n$ then (2.49) can be rewritten as

$$\gamma_{\tilde{U}}(h_1, h_2) = \sigma_{\tilde{\varepsilon}^*}^2 \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_{\frac{h_1}{s_1}+m}^1 \varphi_{\frac{h_2}{s_2}+n}^2 \varphi_m^1 \varphi_n^2. \quad (2.50)$$

Taking $(h_1, h_2) = (s_1\ell_1, s_2\ell_2)$ in (2.50) for $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{Z}_+$ then

$$\gamma_{\tilde{U}}(s_1\ell_1, s_2\ell_2) = \sigma_{\tilde{\varepsilon}^*}^2 \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_{\ell_1+m}^1 \varphi_{\ell_2+n}^2 \varphi_m^1 \varphi_n^2.$$

If $(h_1, h_2) = (s_1\ell_1 + \xi_1, s_2\ell_2 + \xi_2)$ for $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{Z}_+$, $(\xi_1, \xi_2) \in A_1 \times A_2$, where $A_1 = \{1, \dots, s_1 - 1\}$, $A_2 = \{1, \dots, s_2 - 1\}$ then $\gamma_Z(h_1, h_2) = 0$. Therefore the autocovariance function of the process $\{\tilde{U}_{ij}\}_{i,j \in \mathbb{Z}_+}$ is equal to

$$\gamma_{\tilde{U}}(h_1, h_2) = \begin{cases} \sigma_{\tilde{\varepsilon}^*}^2 \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_{\ell_1+m}^1 \varphi_m^1 \varphi_{\ell_2+n}^2 \varphi_n^2 & \text{if } (h_1, h_2) = (s_1\ell_1, s_2\ell_2) \\ 0 & \text{if } (h_1, h_2) = (s_1\ell_1 + \xi_1, s_2\ell_2 + \xi_2). \end{cases} \quad (2.51)$$

Now the process $\{U_{ij}\}_{i,j \in \mathbb{Z}_+}$ can be rewritten by

$$U_{ij} = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \varphi_k^1 \varphi_l^2 Z_{i-s_1k, j-s_2l},$$

where the process $\{Z_{ij}\}_{i,j \in \mathbb{Z}_+}$ is given by (4.2). Then its autocovariance function is equal to

$$\begin{aligned} \gamma_U(h_1, h_2) &= \text{Cov} \left(\tilde{U}_{i+h_1, j+h_2}, \tilde{U}_{ij} \right) \\ &= \text{Cov} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \varphi_k^1 \varphi_l^2 Y_{i+h_1-s_1k, j+h_2-s_2l}, \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_m^1 \varphi_n^2 Z_{i-s_1m, j-s_2n} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_k^1 \varphi_l^2 \varphi_m^1 \varphi_n^2 \text{Cov} (Z_{i+h_1-s_1k, j+h_2-s_2l}, Z_{i-s_1m, j-s_2n}) \\ &= \sigma_{\tilde{\varepsilon}^*}^2 \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_k^1 \varphi_l^2 \varphi_m^1 \varphi_n^2 \gamma_Z(h_1 - s_1k + s_1m, h_2 - s_2l + s_2n) \\ &= \sigma_{\varepsilon^*}^2 \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_k^1 \varphi_l^2 \varphi_m^1 \varphi_n^2 \gamma_Z(h_1 - s_1(k-m), h_2 - s_2(l-n)) \end{aligned}$$

Taking $\nu_1 = k - m$ and $\nu_2 = l - n$, we get

$$\gamma_U(h_1, h_2) = \sigma_{\varepsilon^*}^2 \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_{\nu_1+m}^1 \varphi_{\nu_2+n}^2 \varphi_m^1 \varphi_n^2 \gamma_Z(h_1 - s_1\nu_1, h_2 - s_2\nu_2). \quad (2.52)$$

Using (2.51) and denoting $\sigma_{\tilde{\varepsilon}^*}^2 = \sigma_{\varepsilon^*}^2 / \sigma_{\tilde{\varepsilon}^*}^2$ the variance of the two-dimensional white noise process $\{\varepsilon_{ij}^*\}_{i,j \in \mathbb{Z}_+}$ we obtain the results (2.33) and (2.34). ■

Proof of the Proposition 2.3.9.

Let \tilde{V} a causal and stationary process,

$$\tilde{V}_{ij} = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \varphi_k^1 \varphi_l^2 \tilde{\varepsilon}_{i-k, j-l}^l$$

where the coefficients φ_k^1 and φ_l^2 are given in

$$\Phi^{-1}(z_1, z_2) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \varphi_k^1 \varphi_l^2 z_1^k z_2^l,$$

then

$$\begin{aligned} \gamma_{\tilde{V}}(h_1, h_2) &= \text{Cov} \left(\tilde{V}_{i+h_1, j+h_2}, \tilde{V}_{ij} \right) \\ \gamma_{\tilde{V}}(h_1, h_2) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_k^1 \varphi_l^2 \varphi_m^1 \varphi_n^2 \gamma_{\tilde{\varepsilon}^l}(h_1 - k + m, h_2 - l - n). \end{aligned} \quad (2.53)$$

When $h_1 - k + m = 0$ and $h_2 - l + n = 0$, we have $k = h_1 + m$ and $l = h_2 + n$.

Now (2.53) can be rewritten as

$$\gamma_{\tilde{V}}(h_1, h_2) = \sigma_{\tilde{\varepsilon}^l}^2 \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_{h_1+m}^1 \varphi_m^1 \varphi_{h_2+n}^2 \varphi_n^2, \quad (2.54)$$

and the process $\{V\}_{ij \in \mathbb{Z}_+}$ is equal to

$$V_{ij} = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \varphi_k^1 \varphi_l^2 Y_{i-k, j-l}$$

where $\{Y_{ij}\}_{i, j \in \mathbb{Z}_+}$ is given by (4.3). Then its autocovariance function is given by

$$\begin{aligned} \gamma_V(h_1, h_2) &= \text{Cov} \left(\tilde{V}_{i+h_1, j+h_2}, \tilde{V}_{ij} \right) \\ &= \text{Cov} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \varphi_k^1 \varphi_l^2 Y_{i+h_1-k, j+h_2-l}, \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_m^1 \varphi_n^2 Y_{i-m, j-n} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_k^1 \varphi_l^2 \varphi_m^1 \varphi_n^2 \text{Cov} (Y_{i+h_1-k, j+h_2-l}, Y_{i-m, j-n}) \end{aligned}$$

and

$$\gamma_V(h_1, h_2) = \sigma_{\varepsilon^*}^2 \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_k^1 \varphi_l^2 \varphi_m^1 \varphi_n^2 \gamma_Y(h_1 - k + m, h_2 - l + n). \quad (2.55)$$

Applying (2.54) into (2.55), with $\sigma_{\tilde{\varepsilon}}^2 = \sigma_{\varepsilon'}^2 / \sigma_{\varepsilon}^2$ the variance of the two-dimensional white noise process $\{\tilde{\varepsilon}_{ij}\}_{i,j \in \mathbb{Z}_+}$, we obtain (2.35). ■

Proof of the Proposition 4.2.2.

We obtain the autocovariance function of the Seasonal FISSAR stationary process by repeating the same method as in the proof of the Proposition (2.3.8) where the processes $\{U_{ij}\}_{i,j \in \mathbb{Z}_+}$ and $\{V_{ij}\}_{i,j \in \mathbb{Z}_+}$ are respectively defined by (4.9) and (4.10) and taking the variance of the two-dimensional white noise process $\{\varepsilon_{ij}\}_{i,j \in \mathbb{Z}_+}$ equal to $\sigma_{\varepsilon}^2 = \sigma_{\tilde{\varepsilon}}^2 / \sigma_{\varepsilon'}^2$. ■

QUELQUES MÉTHODES D'ESTIMATION DES PARAMÈTRES D'UN PROCESSUS SEASONAL FISSAR

Dans ce chapitre, nous présentons différentes méthodes d'estimation des paramètres de mémoire longue d'un processus Seasonal FISSAR. Ce chapitre reprend l'article suivant: *On the parameters estimation of the Seasonal Fractionally Integrated Separable Spatial Autoregressive processes.*

In this paper we discuss on the methods of estimating the parameters of the Seasonal FISSAR model. First we implement the regression method based on the log-periodogram and the classical Whittle method for estimating the memory parameters. For estimating all model parameters simultaneously, innovation parameters and memory parameters, the maximum likelihood method, and the Whittle method based on the MCMC simulation are considered. We can show empirically the consistency and we investigate the asymptotic normality of the estimators by various results from simulation. The simulation results give the average values, the corresponding sample standard deviation (sd), the root mean square error (RMSE) and the mean absolute error (MAE) of the estimation procedures based on Monte Carlo replications.

Sommaire

3.1 Introduction	63
3.2 Estimation Procedures	66

3.2.1	Log-periodogram Regression Method	67
3.2.2	Exact Maximum Likelihood method	71
3.3	Simulation Results	74
3.4	Others methods	84
3.4.1	MLE method based on Whittle function	84
3.4.2	Whittle Method	85
3.4.3	MCMC Whittle Method	85
3.5	Conclusion	87

3.1 Introduction

Spatial statistics are used for a variety of different types of fields; including meteorology (Lim et al., 2002 [56]), oceanography (Illig, 2006 [47]), agronomy (Whittle, 1986 [80]; Lambert et al., 2003 [53]), geology (Cressie, 1993 [23]), epidemiology (Marshall, 1991 [61]), image processing (Jain, 1981 [48]) or econometrics (Anselin, 1988 [3]). This large domain of applications is due to the richness of the modelling which associates a representation in time and in space. Cliff and Ord (1973) [22] introduce specific modellings including the STAR (Space-Time AutoRegressive) model and GSTAR (Generalized Space-Time AutoRegressive) model. The more interesting model are probably the Simultaneous AutoRegression model, SAR, (Whittle, 1954 [79]), the Conditional AutoRegression model, CAR (Bartlett, 1971 [6]; Besag, 1974 [12]), the moving average model (Haining, 1978 [42]) or the unilateral models (Basu and Keinsel, 1993 [9]).

Statistics for spatially referenced data are becoming increasingly important as they are nowadays collected in large quantities in various areas of science. This requires specific probabilistic models and corresponding statistical methods. Boissy et al. (2005) [14] had extended the long memory concept from

times series to the spatial context and introduced the class of fractional spatial autoregressive model. Shitan (2008) [76] used independently this model, called the Fractionally Integrated Separable Spatial Autoregressive (FISSAR) model to approximate the dynamics of spatial data when the autocorrelation function decays slowly. Cisse et al. (2016) [20] incorporated Seasonal patterns into the FISSAR, thus introduced the Seasonal FISSAR model and discussed on the statistical properties of the model. In this paper, we investigate on estimating procedures of this model parameters. Spatial analysis includes a variety of techniques, many still in their early development, using different analytic approaches and applied in fields as diverse as econometrics techniques.

Inference problems in spatial location or two-dimensional process have been studied by several authors. Hosking(1981) [45], Yajima (1985) [83], Yajima (1991) [82] and Fox and Taqqu (1986) [31] have discussed problems of asymptotic estimation based on one-dimensional fractionally differenced autoregressive process. Sethuraman and Basawa (1995) [75] have studied the asymptotic properties of the maximum likelihood estimators in two-dimensional lattice. The authors considered models which permit dependence between time points as well as within the group of individuals at each time point. Anderson (1978) [2], Basawa et al. (1984) [8] and Basawa and Billard (1989) [7] have studied the case when the dependence extends only along the time axis.

Periodic and cyclical behaviours are present in many observations, and the Seasonal FISSAR model will have a lot of applications, including the modelling of temperatures, rainfalls when the data are collected during different seasons for different locations. In this paper, we consider the Seasonal FISSAR (Fractionally Integrated Separable Spatial Autoregressive model), introduced in Cisse et al. (2016)[20] and we assumed the same pattern for all locations for the seasonal parameter. We discuss how to estimate the parameters of this new model and examine the properties of the estimators. The main purpose of this work is to assess and compare the finite sample performance of several estimation

methods for Seasonal FISSAR model. Several estimation methods have been proposed in the literature. We generally find semiparametric methods (GPH (1983) [33], Robinson (1994, 1995a, 1995b), Hurvich and Beltrao (1993), Hurvich and Deo (1999)) and maximum likelihood methods (Exact MLE, Whittle (1951)). The first class estimate only the long memory parameters, which requires estimating the parameters in two steps which is expensive in computation time, while the last class estimate all the parameters simultaneously.

We first briefly describe the Seasonal FISSAR Model defined in Cisse et al. (2016) [20].

Let $\{X_{ij}\}_{i,j \in \mathbb{Z}_+}$ be a sequence of spatial observations on two dimensional regular lattices. The Seasonal FISSAR process is defined as

$$(1 - \phi_{10}B_1 - \phi_{01}B_2 + \phi_{10}\phi_{01}B_1B_2)(1 - \psi_{10}B_1^s - \psi_{01}B_2^s + \psi_{10}\psi_{01}B_1^sB_2^s) \times (1 - B_1)^{d_1} (1 - B_1^s)^{D_1} (1 - B_2)^{d_2} (1 - B_2^s)^{D_2} X_{ij} = \varepsilon_{ij} \quad (3.1)$$

This equation (4.1) is equivalent to the following equations:

$$(1 - \phi_{10}B_1)(1 - \phi_{01}B_2)(1 - \psi_{10}B_1^s)(1 - \psi_{01}B_2^s) X_{ij} = W_{ij} \quad (3.2)$$

$$(1 - B_1)^{d_1} (1 - B_1^s)^{D_1} (1 - B_2)^{d_2} (1 - B_2^s)^{D_2} W_{ij} = \varepsilon_{ij} \quad (3.3)$$

where s is the seasonal period, B_1 and B_2 are the usual backward shift operators acting in the i^{th} and j^{th} direction, respectively. In addition, the parameters d_1 and d_2 are called memory parameters D_1 and D_2 are fractional parameters and $\{\varepsilon_{ij}\}_{i,j \in \mathbb{Z}_+}$ is a two-dimensional white noise process, mean zero and variance σ_ε^2 . We denote $\{W_{ij}\}_{i,j \in \mathbb{Z}_+}$ the two-dimensional seasonal fractionally integrated white noise process.

The Seasonal FISSAR model can be rewritten as

$$\Phi(B_1, B_2) \Psi(B_1^s, B_2^s) X_{ij} = W_{ij} \quad (3.4)$$

or

$$\Phi(B_1, B_2) \Psi(B_1^s, B_2^s) (1 - B_1)^{d_1} (1 - B_1^s)^{D_1} (1 - B_2)^{d_2} (1 - B_2^s)^{D_2} X_{ij} = \varepsilon_{ij} \quad (3.5)$$

where

$$\Phi(B_1, B_2) = (1 - \phi_{10}B_1)(1 - \phi_{01}B_2), \quad (3.6)$$

$$\Psi(B_1^s, B_2^s) = (1 - \psi_{10}B_1^s)(1 - \psi_{01}B_2^s), \quad (3.7)$$

with W_{ij} given by (3.3).

The paper is organized as follows. The next section provides several techniques for estimating parameters of the Seasonal FISSAR model. We describe a semi parametric method based on the periodogram and the exact MLE method. The methods are illustrated in Section 3 by simulation study. In Section 4 we present others methods for estimating model parameters, the MLE based on Whittle, the Whittle method and the MCMC Whittle method. However, this approach results are omitted here and will be in a companion paper. Conclusions are given in Section 5.

3.2 Estimation Procedures

In this section, we discuss the methods of estimation of the memory parameters and examine the properties of the estimators through a simulation study. The fundamental concept of parameter estimation is to determine optimal values of parameters for a numerical model that predicts dependent variable outputs of a function, process or phenomenon based on observations of independent variable inputs.

On the estimation procedure of the parameters models in times series, a well-known procedure is the Whittle Method. It is known that under fairly general assumptions, it leads to consistent estimates and asymptotically normal. More in the Gaussian case, it's asymptotically efficient. Here we will present this method in spatial context and make a comparison with a regression method based on the log-periodogram that we will present in following.

3.2.1 Log-periodogram Regression Method

In this paragraph, we investigate the regression method to estimate long memory parameters of the process defined in 4.1. Probably the most commonly applied semi parametric estimator in time series is the log-periodogram regression estimator introduced by Geweke and Porter-Hudak (1983) [33]. Following the work of Ghodsi and Shitan (2009) [34] we establish a regression method of estimating long memory parameters of the Seasonal FISSAR model. We briefly describe this method.

Let

$$H_{ij} = (1 - B_1)^{d_1} (1 - B_1^s)^{D_1} (1 - B_2)^{d_2} (1 - B_2^s)^{D_2} X_{ij}, \quad (3.8)$$

and $f_X(\lambda_1, \lambda_2)$ the spectral density function of the process defined in (4.1). Then $f_X(\lambda_1, \lambda_2)$ can be written as:

$$f_X(\lambda_1, \lambda_2) = |1 - e^{-i\lambda_1}|^{-2d_1} |1 - e^{-i\lambda_2}|^{-2d_2} |1 - e^{-is\lambda_1}|^{-2D_1} |1 - e^{-is\lambda_2}|^{-2D_2} f_H(\lambda_1, \lambda_2) \quad (3.9)$$

where

$$f_H(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{4\pi^2 |1 - \phi_{10} e^{-i\lambda_1}|^2 |1 - \phi_{01} e^{-i\lambda_2}|^2 |1 - \psi_{10} e^{-is\lambda_1}|^2 |1 - \psi_{01} e^{-is\lambda_2}|^2}. \quad (3.10)$$

Taking the natural logarithm in (3.9), we obtain:

$$\begin{aligned} \log f_X(\lambda_1, \lambda_2) &= -d_1 \log |1 - e^{-i\lambda_1}|^2 - d_2 \log |1 - e^{-i\lambda_2}|^2 \\ &\quad - D_1 \log |1 - e^{-is\lambda_1}|^2 - D_2 \log |1 - e^{-is\lambda_2}|^2 \\ &\quad + \log f_H(\lambda_1, \lambda_2) \\ &= \log f_H(0, 0) - d_1 \log |1 - e^{-i\lambda_1}|^2 - d_2 \log |1 - e^{-i\lambda_2}|^2 - D_1 \log |1 - e^{-is\lambda_1}|^2 \\ &\quad - D_2 \log |1 - e^{-is\lambda_2}|^2 + \log \frac{f_H(\lambda_1, \lambda_2)}{f_H(0, 0)} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Replacing λ_1 by $\omega_{1,j}$ and λ_2 by $\omega_{2,j}$ in (3.11), we obtain

$$\begin{aligned} \log f_X(\omega_{1,j}, \omega_{2,j}) &= \log f_H(0, 0) - d_1 \log |1 - e^{-i\omega_{1,j}}|^2 - d_2 \log |1 - e^{-i\omega_{2,j}}|^2 \\ &\quad - D_1 \log |1 - e^{-is\omega_{1,j}}|^2 - D_2 \log |1 - e^{-is\omega_{2,j}}|^2 \\ &\quad + \log \frac{f_H(\omega_{1,j}, \omega_{2,j})}{f_H(0, 0)} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Denote $N_1 \times N_2$ the size of the regular rectangle when the process $\{X_{ij}\}$ is defined, and define

$$I(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{4\pi^2 N_1 N_2} \left| \sum_{k=1}^{N_1} \sum_{l=1}^{N_2} X_{k,l} e^{-i(k\lambda_1 + l\lambda_2)} \right|^2 \quad (3.13)$$

to be the periodogram of the process. By adding $\log I(\omega_{1,j}, \omega_{1,j})$ in (3.12), we obtain:

$$\begin{aligned} \log I(\omega_{1,j}, \omega_{1,j}) &= \log f_H(0, 0) - d_1 \log |1 - e^{-i\omega_{1,j}}|^2 - d_2 \log |1 - e^{-i\omega_{2,j}}|^2 \\ &\quad - D_1 \log |1 - e^{-is\omega_{1,j}}|^2 - D_2 \log |1 - e^{-is\omega_{2,j}}|^2 \\ &\quad + \log \frac{f_H(\omega_{1,j}, \omega_{2,j})}{f_H(0, 0)} + \log \frac{I(\omega_{1,j}, \omega_{1,j})}{f_X(\omega_{1,j}, \omega_{2,j})} \end{aligned} \quad (3.14)$$

If $\omega_{1,j}$ and $\omega_{2,j}$ are close to zero, then the term $\log \frac{f_H(\omega_{1,j}, \omega_{2,j})}{f_H(0, 0)}$ would be negligible when compared with the other terms of (3.14), and equation (3.14) reduces to:

$$\begin{aligned} \log I(\omega_{1,j}, \omega_{1,j}) &\approx \log f_H(0, 0) - d_1 \log |1 - e^{-i\omega_{1,j}}|^2 - d_2 \log |1 - e^{-i\omega_{2,j}}|^2 \\ &\quad - D_1 \log |1 - e^{-is\omega_{1,j}}|^2 - D_2 \log |1 - e^{-is\omega_{2,j}}|^2 \\ &\quad + \log \frac{I(\omega_{1,j}, \omega_{1,j})}{f_X(\omega_{1,j}, \omega_{2,j})}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Equation (3.15) is a pseudo-regression model. If the pseudo-errors $\log \frac{I(\omega_{1,j}, \omega_{2,j})}{f_X(\omega_{1,j}, \omega_{2,j})}$ behave like iid random variables, then the regression estimator is a reasonable estimation procedure (GPH in temporal case). We can write (3.15) as a multiple regression equation

$$X_j = \beta_0 + \beta_1 Z_{1,j} + \beta_2 Z_{2,j} + \beta_3 Z_{3,j} + \beta_4 Z_{4,j} + \varepsilon_j \quad (3.16)$$

where $X_j = \log I(\omega_{1,j}, \omega_{1,j})$, $\beta_0 = \log f_H(0, 0)$, $\beta_1 = -d_1$, $\beta_2 = -d_2$, $\beta_3 = -D_1$, $\beta_4 = -D_2$, $Z_{1,j} = \log |1 - e^{-i\omega_{1,j}}|^2$, $Z_{2,j} = \log |1 - e^{-i\omega_{2,j}}|^2$, $Z_{3,j} = \log |1 - e^{-is\omega_{1,j}}|^2$, $Z_{4,j} = \log |1 - e^{-is\omega_{2,j}}|^2$, and $\varepsilon_j = \log \frac{I(\omega_{1,j}, \omega_{2,j})}{f_X(\omega_{1,j}, \omega_{2,j})}$. We consider the harmonic ordinates $\omega_{1,j}$ and $\omega_{2,j}$ are respectively, such that

$$\begin{aligned} \omega_{j,1}^i &= \frac{2\pi i}{s} + \frac{2\pi j}{N_1}, & i = 0, 1, \dots, \left[\frac{s}{2}\right] - 1, & j = 1, 2, \dots, m_1, \\ \omega_{j,2}^i &= \frac{2\pi i}{s} + \frac{2\pi j}{N_2}, & i = 0, 1, \dots, \left[\frac{s}{2}\right] - 1, & j = 1, 2, \dots, m_2, \end{aligned}$$

where m_1 and m_2 which satisfies respectively the condition $(1/m_1) + (m_1/N_1) \rightarrow 0$ as $N_1 \rightarrow \infty$, $(1/m_2) + (m_2/N_2) \rightarrow 0$ as $N_2 \rightarrow \infty$.

Now d_1, d_2, D_1 and D_2 may be estimates as $-\hat{\beta}_1, -\hat{\beta}_2, -\hat{\beta}_3$, and $-\hat{\beta}_4$ respectively by last squares estimation as in the usual multiple regression. This is a natural extension of the non-seasonal method given in Ghodsi and Shitan (2009) [34]. We note that different estimation methods for d_1, d_2, D_1 and D_2 may be obtained by appropriate choices of the harmonic frequencies and bandwidth m_1 and m_2 . Next we consider bandwidth $m_k = \lfloor \frac{N_k}{s} \rfloor - 1, k = 1, 2$.

The least squares optimality criterion minimizes the sum of squares of residuals between actual observed outputs and output values of the numerical model that are predicted from input observations. The least squares (LS) estimators of the coefficients in the linear prediction function are obtained by minimizing the following sum of squared deviations of observed from expected responses:

$$\begin{aligned} S(\beta) = S(\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) &= \sum_{j=1}^T (X_j - (\beta_0 + \beta_1 Z_{1,j} + \beta_2 Z_{2,j} + \beta_3 Z_{3,j} + \beta_4 Z_{4,j}))^2 \\ &= \sum_{j=1}^T \left(X_j - \sum_{k=0}^4 \beta_k Z_{k,j} \right)^2, \text{ where } Z_{0,j} = 1 \text{ for all } j. \end{aligned}$$

Similar to the procedure in finding the minimum of a function in calculus, the least squares estimate β can be found by solving the equation based on the first derivative of $S(\beta)$. Partial derivatives have the following form:

$$\frac{\partial S}{\partial \beta_i} = -2 \left[\sum_{j=1}^T X_j Z_{i,j} - \sum_{k=0}^4 \beta_k \left(\sum_{j=1}^T Z_{k,j} Z_{i,j} \right) \right] \quad (3.17)$$

The minimum of $S(\beta)$ is obtained by setting the derivatives of $S(\beta)$ in (3.17) equal to zero. We obtain the following system of equations:

$$\frac{\partial S}{\partial \beta_i} = 0, \text{ for } i = 0, 1, 2, 3, 4.$$

or equivalently,

$$\sum_{k=0}^4 \left(\sum_{j=1}^T Z_{k,j} Z_{i,j} \right) \beta_k = \sum_{j=1}^T X_j Z_{i,j}, \text{ for } i = 0, 1, 2, 3, 4. \quad (3.18)$$

Let

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_T \end{bmatrix}; \quad Z = \begin{bmatrix} 1 & Z_{1,1} & Z_{2,1} & Z_{3,1} & Z_{4,1} \\ 1 & Z_{1,2} & Z_{2,2} & Z_{3,2} & Z_{4,2} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & Z_{1,T} & Z_{2,T} & Z_{3,T} & Z_{4,T} \end{bmatrix}; \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{bmatrix}$$

The system (3.18) becomes:

$$(Z'Z)\beta = Z'X, \quad (3.19)$$

where Z' is the transpose of the matrix Z . Finally the vector of LS estimators is:

$$\hat{\beta} = (Z'Z)^{-1} Z'X \quad (3.20)$$

The asymptotic properties of $\hat{\beta}$ will be obtaining by simulations. The parameters estimations were carried out by writing R programs. To summarize the main steps of the algorithm of the least squares estimates can be computed as follows:

Step 1: Choice of variables. Choose the variable to be explained (X) and the explanatory variables (Z_0, Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 where Z_0 is often the constant that always takes the value 1).

Step 2: Collect data. Collect T observations of X and of the related values of Z_0, Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 and store the data of X in an $T \times 1$ vector and the data on the explanatory variables in the $T \times 5$ matrix Z .

Step 3: Compute the estimates. Compute the least squares estimates by the LS formula (3.20) by using a regression package.

Our simulation results are presented for both the two-dimensional seasonal fractionally integrated white noise process and the Seasonal FISSAR model. For the two-dimensional seasonal fractionally integrated white noise model we have done the study for various values of d_1, d_2, D_1, D_2 and we have fixed $s_1 = s_2 = 4$.

Remark 3.2.1 *The GPH estimator requires two important assumptions:*

H1: For small frequencies $\omega_{1,j}$ and $\omega_{2,j}$ the term $\log \frac{f_H(\omega_{1,j}, \omega_{2,j})}{f_H(0,0)}$ would be negligible.

H2: The term $\log \frac{I(\omega_{1,j}, \omega_{1,j})}{f_X(\omega_{1,j}, \omega_{2,j})}$ (pseudo-errors) consists of asymptotically iid random variables.

Remark 3.2.2 The regression method only estimates the long memory and short memory parameters. For inference purposes, however, estimation of the innovation parameter is required.

3.2.2 Exact Maximum Likelihood method

The maximum likelihood methods are considered among the most important estimation methods to estimate the long memory parameter. These are the most effective methods to estimate all parameters simultaneously. The advantages of the maximum likelihood estimation are discussed. Several researchers have used ML approach for estimating the statistical parameters in spatial models. On spatial linear models Mardia (1990) [60] studied ML estimators for Direct Representation (DR), Conditional AutoRegression (CAR) models and Simultaneous AutoRegression (SAR) models in gaussian case. In addition, the author gives extension of the method in multivariate case, block data and missing value in lattice data. Earlier, Mardia and Marshall (1984) [59] described the maximum likelihood method for fitting the linear model when residuals are correlated and when the covariance among the residuals is determined by a parametric model containing unknown parameters. Pardo-Iguzquiza (1998) [66] used the maximum likelihood method for inferring the parameters of spatial covariances. The advantages of the ML estimation are discussed in Pardo-Iguzquiza (1998) [66] for the multivariate distribution of the data and spatial analysis.

In this section, the maximum likelihood (ML) method for inferring the parameters of the Seasonal FISSAR model introduced in Cisse et al. (2016) is examined. The causal moving average representation for the processes $\{X_{ij}\}$ in (4.1) and $\{W_{ij}\}$ in (3.2) are given in Cisse et al. (2016) [20], Proposition (2.1):

$$X_{ij} = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \phi_{10}^k \phi_{01}^l \psi_{10}^m \psi_{01}^n W_{i-k-ms_1, j-l-ns_2}, \quad (3.21)$$

where

$$W_{ij} = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \phi_k(d_1) \phi_l(d_2) \phi_m(D_1) \phi_n(D_2) \varepsilon_{i-k-ms_1, j-l-ns_2}, \quad (3.22)$$

with

$$\phi_k(d_1) = \begin{cases} \frac{\Gamma(k+d_1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(d_1)} & \text{if } k \in \mathbb{Z}_+ \\ 0 & \text{if } k \notin \mathbb{Z}_+ \end{cases}; \quad \phi_l(d_2) = \begin{cases} \frac{\Gamma(l+d_2)}{\Gamma(l+1)\Gamma(d_2)} & \text{if } l \in \mathbb{Z}_+ \\ 0 & \text{if } l \notin \mathbb{Z}_+ \end{cases} \quad (3.23)$$

and

$$\phi_m(D_1) = \begin{cases} \frac{\Gamma(m+D_1)}{\Gamma(m+1)\Gamma(D_1)} & \text{if } m \in \mathbb{Z}_+ \\ 0 & \text{if } m \notin \mathbb{Z}_+ \end{cases}; \quad \phi_n(D_2) = \begin{cases} \frac{\Gamma(n+D_2)}{\Gamma(n+1)\Gamma(D_2)} & \text{if } n \in \mathbb{Z}_+ \\ 0 & \text{if } n \notin \mathbb{Z}_+ \end{cases} \quad (3.24)$$

$\Gamma(\cdot)$ is the Gamma function defined by $\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} dx$ and $\{\varepsilon_{ij}\}_{i,j \in \mathbb{Z}_+}$ is a two-dimensional white noise process.

Our ML method is presented for both the two-dimensional seasonally integrated white noise process and the Seasonal FISSAR model. Asymptotic properties of maximum likelihood estimators for fractionally differenced AR model on a two-dimensional lattice were considered by Sethuraman and Basawa (1995) [75], who showed that the usual asymptotic properties of consistency and asymptotic normality are satisfied under several conditions. Some procedures in Sethuraman and Basawa (1995) [75] have been developed for obtaining maximum likelihood estimates of the parameters of the Seasonal FISSAR model and their asymptotic properties.

We consider a $\{W_{ij}\}$ process defined as (3.2). We suppose that the stationary conditions are satisfied. Under this assumption and the normality assumption of the bi-dimensional white noise, construction of the likelihood function simply amounts to expressing the autocovariances of the process. The covariance of $\{W_{ij}\}$ is given by:

$$\text{Cov}(W_{ij}, W_{i_1j_1}) = \text{Cov} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \phi_k(d_1) \phi_l(d_2) \phi_m(D_1) \phi_n(D_2) \varepsilon_{i-k-ms_1, j-l-ns_2}, \right. \\ \left. \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \phi_k(d_1) \phi_l(d_2) \phi_m(D_1) \phi_n(D_2) \varepsilon_{i_1-k-ms_1, j_1-l-ns_2} \right)$$

Let $\{Y_{ij}\}$ define by

$$(1 - B_1)^{d_1} (1 - B_2)^{d_2} Y_{ij} = \varepsilon'_{ij} \quad (3.25)$$

The process $\{W_{ij}\}$ can be rewritten as

$$W_{ij} = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \varphi_k(d_1) \varphi_l(d_2) Y_{i-s_1k, j-s_2l} \quad (3.26)$$

Therefore

$$\text{Cov}(W_{ij}, W_{i_1j_1}) = \text{Cov} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \varphi_k(d_1) \varphi_l(d_2) Y_{i-s_1k, j-s_2l}, \right. \\ \left. \sum_{k_1=0}^{+\infty} \sum_{l_1=0}^{+\infty} \varphi_{k_1}(d_1) \varphi_{l_1}(d_2) Y_{i_1-s_1k_1, j_1-s_2l_1} \right) \\ = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \varphi_k(d_1) \varphi_l(d_2) \sum_{k_1=0}^{+\infty} \sum_{l_1=0}^{+\infty} \varphi_{k_1}(d_1) \varphi_{l_1}(d_2) \text{Cov}(Y_{i-s_1k, j-s_2l}, Y_{i_1-s_1k_1, j_1-s_2l_1}) \\ = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{k_1=0}^{+\infty} \sum_{l_1=0}^{+\infty} \varphi_k(d_1) \varphi_l(d_2) \varphi_{k_1}(d_1) \varphi_{l_1}(d_2) \text{Cov}(Y_{i-s_1k, j-s_2l}, Y_{i_1-s_1k_1, j_1-s_2l_1})$$

Assuming that the process is gaussian, the likelihood function of the sample $W = (W_{ij}, i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n)$ is seen to be

$$L_W = (2\pi\sigma_\varepsilon^2)^{-n^2/2} |\Sigma_W|^{-1/2} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} W^T \Sigma_W^{-1} W \right],$$

where Σ_W is the variance-covariance matrix of X determined by (??).

The likelihood function of the Seasonal FISSAR $X = (X_{ij}, i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n)$ sample defined in a $n \times n$ regular lattice will be defined by the same way.

$$L_X = (2\pi\sigma_\varepsilon^2)^{-n^2/2} |\Sigma_W|^{-1/2} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} X^T \Sigma_X^{-1} X \right],$$

For the computational algorithm of the maximum likelihood method, we summarize the main steps of the algorithm as follows:

Step 1: Compute the likelihood function $L(\phi, D)$ and fixe a real parameters ε_0 .

Step 2: We fixe starter value of ϕ , ϕ_0 and we give a first estimation of D by $\max_D L(\phi, D)$ to obtain \hat{D} .

Step 3: Given \hat{D} , we estimate ϕ by $\max_\phi L(\phi, \hat{D})$ and we obtain $\hat{\phi}$.

Step 4: Given $\hat{\phi}$, we estimate again a new value of D by $\max_D L(\hat{\phi}, D)$ and we obtain $\hat{\hat{D}}$.

If $\hat{\hat{D}} - \hat{D} \leq \varepsilon_0$ then $D = \hat{\hat{D}}$, else

Step 5: Step 2 with $D = \hat{\hat{D}}$.

3.3 Simulation Results

To demonstrate the performance of the proposed methods several experiments was performed. The Monte Carlo study is designed to check variability of the Regression method in comparison with the MLE method. Simulation experiments have also aim to implement some theoretical results concerning the properties of these estimators. In other words, we try to study the validity of these properties in small and large samples. We will perform an experiment of 500 replications for a Seasona FISSAR process with spatial Gaussian noise process for 3 different sample sizes ($N \times N = 50 \times 50$, $N \times N = 100 \times 50$ and $N \times N = 150 \times 150$). The simulation results give the average values, the corresponding sample standard deviation (sd) and the root mean square error

(RMSE) of the estimation procedures based on MCMC replications. All calculations were carried out with fixed seasonal period $s = 4$ of the following models for various sample sizes.

Parameters	innovation parameters				memory parameters			
	ϕ_{10}	ϕ_{01}	ψ_{10}	ψ_{01}	d_1	d_2	D_1	D_2
Model	0.10	0.25	0.10	0.25	0.10	0.10	0.10	0.10
50×50								
mean	-	-	-	-	0.1310	0.1354	0.1321	0.1505
bias	-	-	-	-	0.0310	0.0354	0.0321	0.0505
sd	-	-	-	-	0.1127	0.1044	0.1148	0.1043
RMSE	-	-	-	-	0.1169	0.1102	0.1192	0.1159
$100 \times$								
100								
mean	-	-	-	-	0.1107	0.1110	0.1108	0.1247
bias	-	-	-	-	0.0107	0.0110	0.0108	0.0247
sd	-	-	-	-	0.0634	0.0658	0.0634	0.0659
RMSE	-	-	-	-	0.0643	0.0657	0.0653	0.0704
$150 \times$								
150								
mean	-	-	-	-	0.1108	0.1096	0.1236	0.1193
bias	-	-	-	-	0.0108	0.0096	0.0236	0.0193
sd	-	-	-	-	0.0499	0.0528	0.0527	0.0503
RMSE	-	-	-	-	0.0511	0.0536	0.0577	0.0539

TABLE 3.1 – Simulation results of estimating the Seasonal FISSAR model by regression method

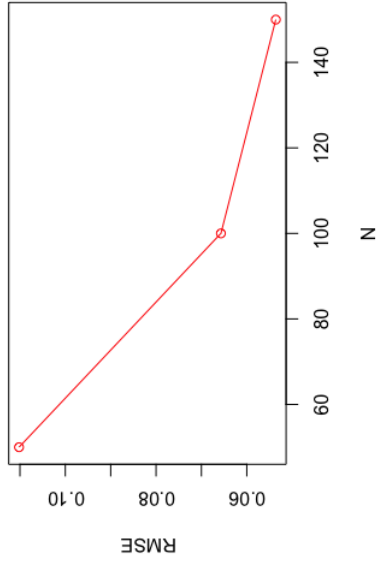


FIGURE 3.2 – RMSE of \hat{d}_2 by regression method

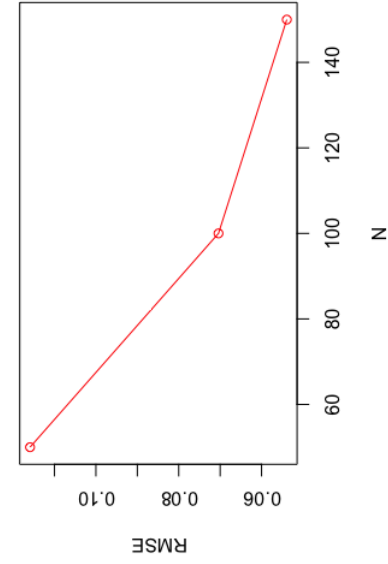


FIGURE 3.4 – RMSE of \hat{D}_2 by regression method

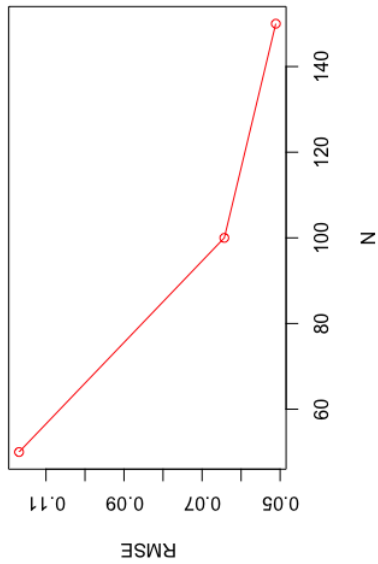


FIGURE 3.1 – RMSE of \hat{d}_1 by regression method

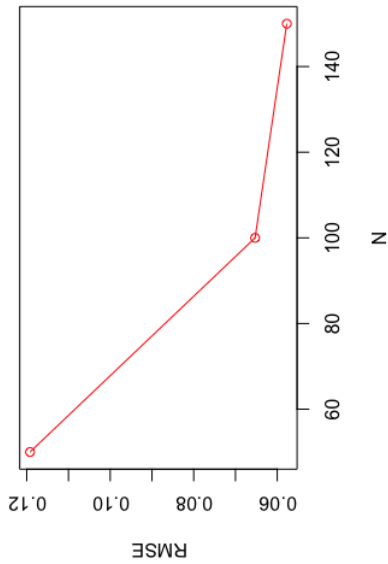


FIGURE 3.3 – RMSE of \hat{D}_1 by regression method

The results of the application of the regression method are summarized in Table 3.1. The estimation method provides a reasonable approximation, for each parameter, the sample mean and the standard deviation of the estimated parameter parameter are reasonably close to the theoretical values. As expected, standard errors and estimated values of the parameter d_1, d_2, D_1 and D_2 become better as sample size increases. Figures 3.1 - 3.4 shows the influence of the sample size on the application of this method (when N increases the results are better).

Parameters	innovation parameters					memory parameters				
	ϕ_{10}	ϕ_{01}	ψ_{10}	ψ_{01}		d_1	d_2	D_1	D_2	
Model	0.10	0.25	0.10	0.25		0.10	0.10	0.10	0.10	
$(s = 4)$										
50×50										
mean	0.0874	0.2431	0.1101	0.2411		0.1225	0.1440	0.1503	0.1439	
bias	-0.0126	-0.0069	0.0101	-0.0089		0.0225	0.0440	0.0503	0.0439	
sd	0.0830	0.0825	0.0632	0.0833		0.1042	0.1132	0.1050	0.1134	
RMSE	0.0836	0.0824	0.0640	0.0833		0.1066	0.1214	0.1164	0.1216	
$100 \times$										
100										
mean	0.1100	0.2706	0.1026	0.2871		0.1171	0.1339	0.1245	0.1110	
bias	0.0100	0.0206	0.0026	0.0371		0.0171	0.0339	0.0245	0.0110	
sd	0.0633	0.0649	0.0636	0.0650		0.0634	0.0660	0.0633	0.0661	
RMSE	0.0641	0.0681	0.0633	0.0748		0.0656	0.0742	0.0679	0.0670	
$150 \times$										
150										
mean	0.1114	0.2615	0.1108	0.2652		0.1133	0.1108	0.1179	0.1146	
bias	0.0114	0.0114	0.0108	0.0152		0.0133	0.0108	0.0179	0.0146	
sd	0.0514	0.0529	0.0500	0.0530		0.0527	0.0501	0.0527	0.0502	
RMSE	0.0526	0.0542	0.0512	0.0551		0.0544	0.0513	0.0557	0.0522	

TABLE 3.2 – Simulation results of estimating the Seasonal FISSAR model by MLE method

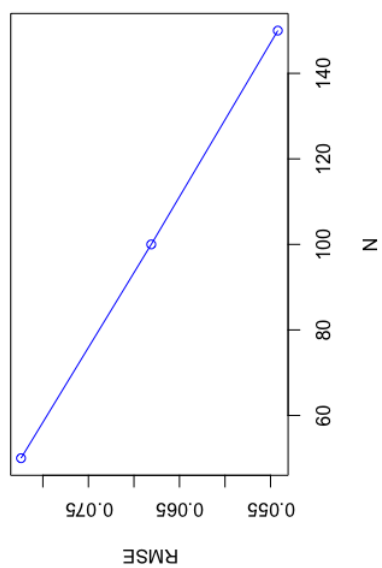


FIGURE 3.6 – RMSE of $\hat{\phi}_{10}$ by MLE method

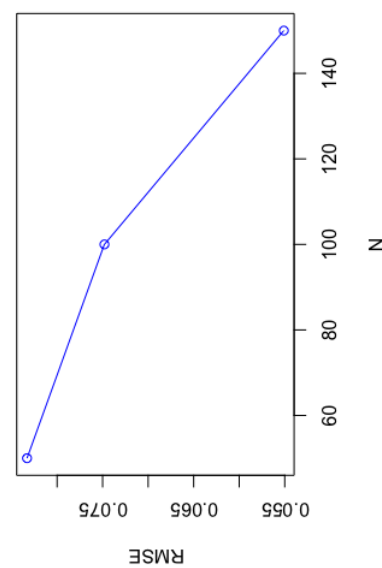


FIGURE 3.8 – RMSE of $\hat{\psi}_{10}$ by MLE method

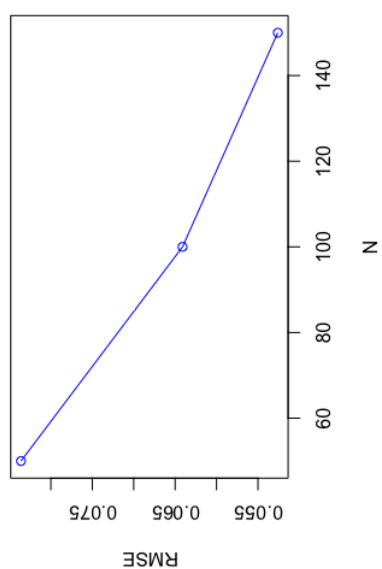


FIGURE 3.5 – RMSE of $\hat{\phi}_{01}$ by MLE method

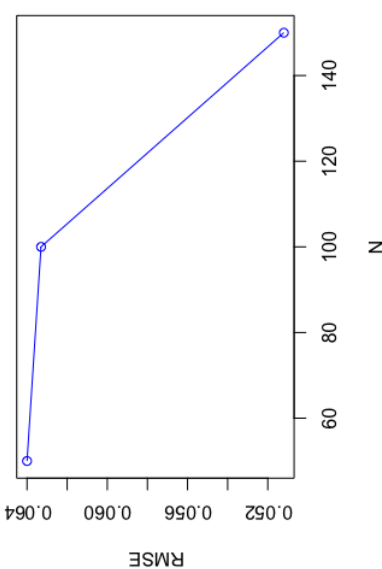


FIGURE 3.7 – RMSE of $\hat{\psi}_{01}$ by MLE method

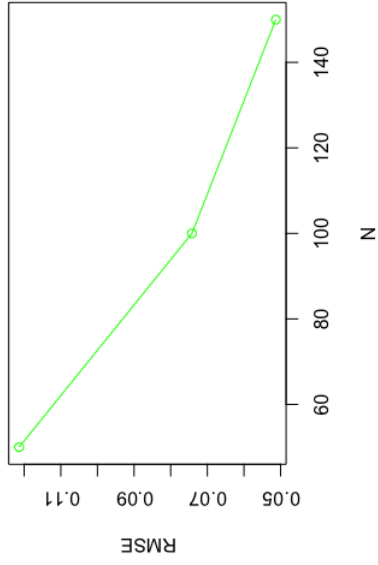


FIGURE 3.10 – RMSE of \hat{d}_2 by MLE method

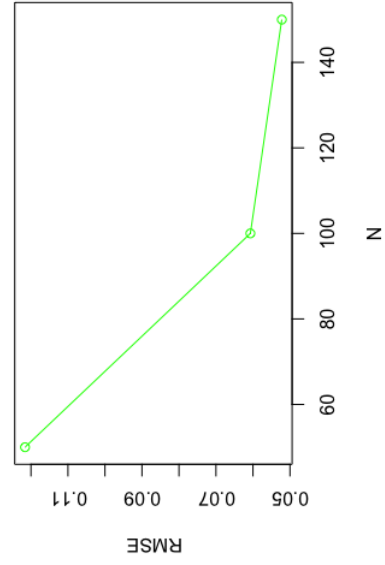


FIGURE 3.12 – RMSE of \hat{D}_2 by MLE method

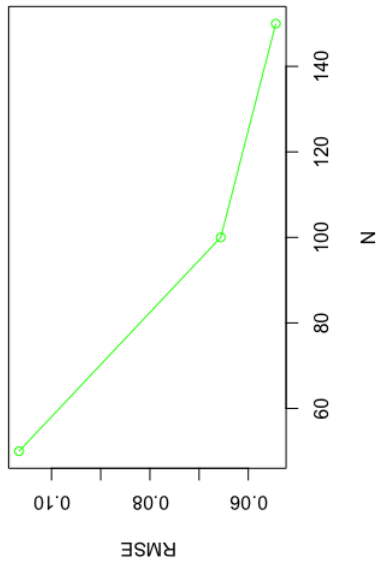


FIGURE 3.9 – RMSE of \hat{d}_1 by MLE method

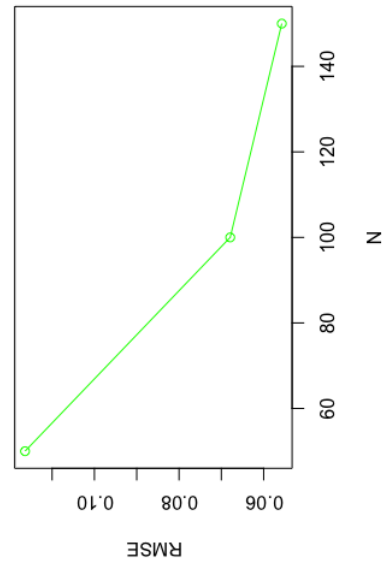


FIGURE 3.11 – RMSE of \hat{D}_1 by MLE method

Table 3.2 present the results concerned the maximum likelihood method for all parameters. Results reveal that estimates parameters are satisfactory in the sense that the Bias and the RMSE are very small. Figures 3.5 - 3.12 shows the plots of the RMSE of the different estimated parameters and we show the influence of the sample size on the application of this method.

Comparing the two methods, their results are fairly similar for large size. However, as the size increases the bias and RSME of d_1, d_2, D_1 and D_2 decreases substantially (see Figures 3.5 - 3.12), and these two methods become very competitive.

Which one to choose? MLE is of fundamental importance in the theory of inference and is a basis of many inferential techniques in statistics. The first motivation behind ML estimation is to estimate all parameters simultaneously, unlike our proposal regression method and Wittle method. On the other hand referring to the computational times the Regression method bases on Log-periodogram would be preferred. unfortunately the AR parameters are typically not accurately estimated. We can also observe that the results from the MLE procedure seem to perform better than those obtained by regression approach . However, the computational complexity of maximum likelihood (if there are $N \times N$ sampling points, then Σ is an $N \times N$ matrix, and the process can be slow if N is large) may be outweighed by its convenience as a very widely applicable method of estimation. Generally, it is suggested to try all proposal estimation approaches and compare.

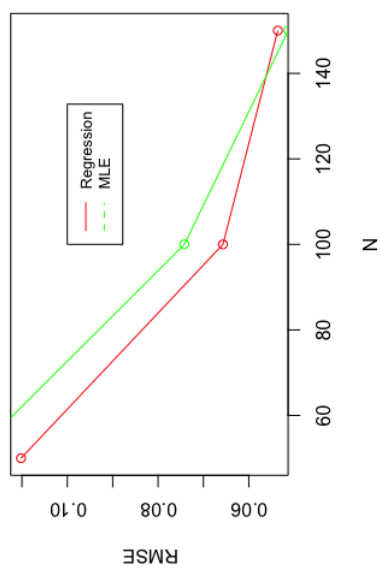


FIGURE 3.14 – RMSE’s Regression and MLE of \hat{d}_2

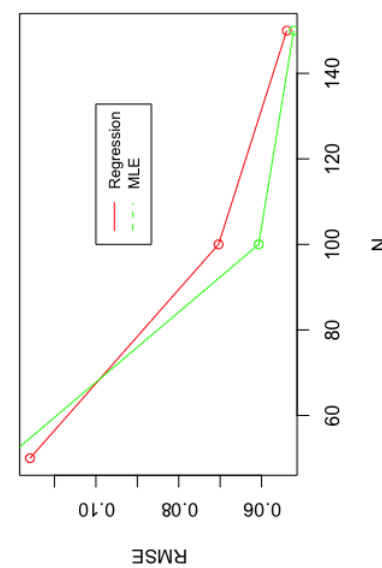


FIGURE 3.16 – RMSE’s Regression and MLE of \hat{D}_2

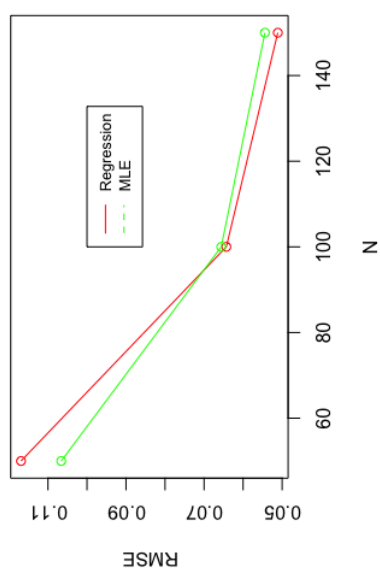


FIGURE 3.13 – RMSE’s Regression and MLE of \hat{d}_1

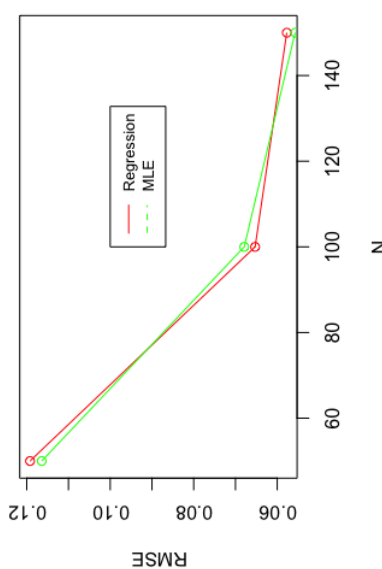


FIGURE 3.15 – RMSE’s Regression and MLE of \hat{D}_1

3.4 Others methods

Beside these methods, there are several other estimation methods such as, for example: the MLE method based on Whittle function, the MCMC Whittle method... These are all simple and easy to implement methods but in this section we will just give the methodology of some methods and calculation steps without simulations.

3.4.1 MLE method based on Whittle function

Here we consider the maximum likelihood method based on approximated Whittle function that usually gives a good estimator.

This estimator is a parametric procedure due to Whittle with extension in the spatial context for the regular lattice. The estimator is based on the periodogram and it involves the function

$$L(\beta) = \iint_{-\pi}^{\pi} \frac{I(\lambda_1, \lambda_2)}{f_X(\lambda_1, \lambda_2, \beta)} d\lambda_1 d\lambda_2, \quad (3.27)$$

where $f_X(\lambda_1, \lambda_2, \beta)$ is the known spectral density function at frequencies λ_1 and λ_2 defined in (2.12) and β denotes the vector of unknown parameters. The estimator is the value of β which minimizes the function $L()$. For the Seasonal FISSAR process the vector β contains the parameter d_1, d_2, D_1, D_2 and also all the unknown autoregressive parameters. For computational purposes, the estimator is obtained by using the discret form of $L()$:

$$L(\beta) = \frac{1}{4N_1N_2} \sum_{j_1} \sum_{j_2} \left\{ \log f_X(\omega_{1,j_1}, \omega_{1,j_2}) + \frac{I(\omega_{1,j_1}, \omega_{1,j_2})}{f_X(\omega_{1,j_1}, \omega_{1,j_2}, \beta)} \right\}, \quad (3.28)$$

We have that the maximum likelihood estimator of the long memory parameters in temporal case is strongly consistent, asymptotically normally distributed and asymptotically efficient in the Fisher sense (Dahlhaus,1989 [24] and Yajima,1985 [83]).

3.4.2 Whittle Method

The Whittle method was studied by many authors to estimate the long memory parameters and it is based on evaluation of the Whittle likelihood function in temporal context. See for instance Kluppelberg and Mikosch (1993) [52], Kluppelberg and Mikosch (1994) [21], Mikosch et al. (1995) [62], Embrechts et al. (1997) [30]. Assuming the process $\{X_{ij}\}_{i,j \in \mathbb{Z}_+}$ is a stationary Seasonal FIS-SAR model defined in (3.5), the Whittle likelihood function may expressed as

$$\sigma^2(\beta) = \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{j_1} \sum_{j_2} \frac{I(\omega_{1,j_1}, \omega_{1,j_2})}{g(\omega_{1,j_1}, \omega_{1,j_2})}, \quad (3.29)$$

where $\beta = (d_1, d_1, D_1, D_2, \phi_{10}, \phi_{01}, \psi_{10}, \psi_{01})$ is the parameter vector of interest, $I(\omega_{1,j_1}, \omega_{1,j_2})$ is the periodogram define as

$$I(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{4\pi^2 N_1 N_2} \left| \sum_{k=1}^{N_1} \sum_{l=1}^{N_2} X_{k,l} e^{i(k\lambda_1 + l\lambda_2)} \right|^2 \quad (3.30)$$

and $g(\omega_{1,j_1}, \omega_{1,j_2}) = \frac{4\pi^2}{\sigma_\varepsilon^2} f(\omega_{1,j_1}, \omega_{1,j_2})$ and $f(\cdot, \cdot)$ is the spectral density defined in (2.12).

Hence, an estimation procedure of β is to minimize (3.29) over β . The Whittle estimator is given by:

$$\hat{\beta} = \text{Argmin} \{ \sigma^2(\beta) \} \quad (3.31)$$

3.4.3 MCMC Whittle Method

The MCMC Whittle method was studied in Diongue et al. (2008) [28] in temporal context to estimate the long-memory parameters of stable ARFISMA model. It is based on evaluation of the Whittle likelihood function, using Markov Chains Monte Carlo (MCMC, in short) method. We briefly review it here. Assuming the process $\{X_{ij}\}_{i,j \in \mathbb{Z}_+}$ is a stationary Seasonal FISSAR model defined in (3.5), the Whittle likelihood function may expressed as

$$\sigma^2(\beta) = \int \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\tilde{I}(\lambda_1, \lambda_2)}{h(\lambda_1, \lambda_2, \beta)} d\lambda_1 d\lambda_2, \quad -\pi \leq \lambda_1, \lambda_2 \leq \pi, \quad (3.32)$$

where $\beta = (d_1, d_1, D_1, D_2, \phi_{10}, \phi_{01}, \psi_{10}, \psi_{01})$ is the parameter vector of interest. The functions $h(\lambda_1, \lambda_2, \beta)$ and $\tilde{I}(\lambda_1, \lambda_2)$ represent respectively the power transfer function and the normalized periodogram and they are defined by:

$$h(\lambda_1, \lambda_2, \beta) = |\Phi(e^{-i\lambda_1}, e^{-i\lambda_2}, \beta) \Psi(e^{-is\lambda_1}, e^{-is\lambda_2}, \beta)|^{-2} f_W(\lambda_1, \lambda_2), \quad -\pi \leq \lambda_i \leq \pi \quad (3.33)$$

and

$$\tilde{I}(\lambda) = \left(\sum_{k=1}^{N_1} \sum_{l=1}^{N_2} X_{k,l}^2 \right)^{-1} \left| \sum_{k=1}^{N_1} \sum_{l=1}^{N_2} X_{k,l} e^{i(k\lambda_1 + l\lambda_2)} \right|^2, \quad -\pi \leq \lambda_1, \lambda_2 \leq \pi. \quad (3.34)$$

Let C be a constant such that $C = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{I}(\lambda_1, \lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2$. Thus the Whittle likelihood function can be written as:

$$\sigma^2(\beta) = C \mathbb{E}_f \left(\frac{1}{h(\lambda_1, \lambda_2, \beta)} \right), \quad (3.35)$$

where $f(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{C} \tilde{I}(\lambda_1, \lambda_2)$ is a density on $[-\pi, \pi]$ that is known up to a multiplicative factor. We can approximate the expectation in (3.35) by the empirical average

$$\bar{\sigma}^2(\beta) = \frac{1}{MN} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \frac{1}{h(\lambda_i, \lambda_j, \beta)}, \quad (3.36)$$

where M and N are taken large enough from the strong law of large number. The sequences λ_i, λ_j , where $i = 1, \dots, M, j = 1, \dots, N$ is generated using a Metropolis-Hastings algorithm.

Using an ergodic Markov chain with stationary distribution f , we can obtain $\lambda_1, \dots, \lambda_N \sim f$ without directly simulating from f . Consequently, to generate the sample $(\lambda_1, \dots, \lambda_M) \times (\lambda_1, \dots, \lambda_N)$, we can fix M and N and use a Metropolis-Hastings algorithm which will be computed as follows:

- Given λ_t where $t = 1, \dots, M, 1, \dots, N$
- Generate Y_t from a uniform $\mathcal{U}_{[-\pi, \pi]}$ and denote the value obtained by y_t .
- Take

$$\lambda_{t+1} = \begin{cases} y_t & \text{with probability } \rho(\lambda_t, y_t), \\ \lambda_t & \text{with probability } 1 - \rho(\lambda_t, y_t), \end{cases}$$

where $\rho(\lambda_t, y_t) = \min \left\{ \frac{f(y_t)}{f(\lambda_t)}, 1 \right\} = \min \left\{ \frac{\tilde{I}(y_t)}{\tilde{I}(\lambda_t)}, 1 \right\}$. Hence, an estimation procedure of β is to minimize (3.36).

3.5 Conclusion

The paper discuss and investigates the procedures estimation of the Seasonal FISSAR model. The classical Whittle and a regression method are used to estimate the memory parameters. For estimating the innovation parameters and memory parameters simultaneously , the maximum likelihood method and the Whittle method based on the MCMC simulation are considered. Two parameter estimation techniques process have been considered for simulation study, regression and MLE. From the results, we see that all methods perform very well as the Bias, sd and RMSE are in most cases small. In general, the estimates parameters from the MLE approach are better than those given by regression method. Thus, it is suggested that the proposed methods can be applied to real data, empirical data, and real-world situations applications for a variety of data processes such as in economics, finance, agriculture, hydrology, environmental, etc. These issues should be addressed in future research. Another interesting issue for future research will focus on analyzing the asymptotics properties of the regression and MLE methods.

THEORETICAL VARIANCE AND ACF OF THE SEASONAL FISSAR MODEL AND SIMULATIONS STUDY

"Everything is related to everything else, but near things are more related than distant things" Tobler, 1970.

In spatial data, it is often the case that some or all outcome measures exhibit spatial autocorrelation. This occurs when the relative outcomes of two points is related to their distance. When analyzing spatial data, it is important to check for autocorrelation. In this paper we examine the theoretical variance and the variance estimator for the Seasonal Fractionally Integrated Separable Spatial Autoregressive model. We have also examine the autocovariance (ACVF) and the autocorrelation (ACF) function of the seasonal this model through a simulation study.

Sommaire

4.1 Introduction	90
4.2 Spatial autocorrelation function	92
4.3 Theoretical variance and Estimation	94
4.4 Simulation Results	94
4.5 Conclusion	97

4.1 Introduction

Spatial models are currently investigated in many research fields like meteorology (Lim et al., 2002 [56]), oceanography (Illig, 2006 [47]), agronomy (Whittle, 1986 [80]; Lambert et al., 2003 [53]), geology (Cressie, 1993 [23]), epidemiology (Marshall, 1991 [61]), image processing (Jain, 1981 [48]) or econometrics (Anselin, 1988 [3]). Cliff and Ord (1973) [22] introduce specific modellings including the STAR (Space-Time AutoRegressive) model and GSTAR (Generalized Space-Time AutoRegressive) model. The more interesting model are probably the Simultaneous AutoRegression model, SAR, (Whittle, 1954 [79]), the Conditional AutoRegression model, CAR (Bartlett, 1971 [6]; Besag, 1974 [12]), the moving average model (Haining, 1978 [42]) or the unilateral models (Basu and Keinsel, 1993 [9]).

Shitan (2008) [76] introduced the Fractionally Integrated Separable Spatial Autoregressive (FISSAR) model to approximate the dynamics of spatial data when the autocorrelation function decays slowly. Cisse et al (2016)[20] incorporated Seasonal patterns into the FISSAR and introduced the new Seasonal FISSAR model. When analyzing spatial data, it is important to check for autocovariance and autocorrelation. In this work, we focus on the theoretical variance of the Seasonal FISSAR and the correlation and covariance function.

Spatial dependency is the co-variation of properties within geographic space: characteristics at proximal locations appear to be correlated, either positively or negatively. Spatial dependency leads to the spatial autocorrelation problem in statistics since, like temporal autocorrelation, this violates standard statistical techniques that assume independence among observations. Spatial autocorrelation is frequently encountered in many observations spatial theories and models implicitly assume an underlying spatial pattern in the distributions of organisms and their environment (Legendre and Fortin 1989 [55]). Typically, species abundances are positively autocorrelated, such that nearby points in

space tend to have more similar values than would be expected by random chance.

Classical statistical tests rely on the assumption that subjects are independent of one another. The assumption of independence implies that variables are homogeneous. In such a world, parameters would exhibit homogeneous distributions: precipitation, soil, wind, plants and animals would be constant, unvarying and evenly distributed across a landscape. In practice, this is almost never the case. Parameters vary over space and time and their interaction results in complex spatial patterns. For example, the abundance of a plant at one location may be much greater than at other locations due to differences in parameters such as soil type and slope, which vary over space, and precipitation, wind direction and wind speed, which vary over space and time.

Recall that autocorrelation literally means that a variable is correlated with itself. The simplest definition of autocorrelation states that pairs of subjects that are close to each other are more likely to have values that are more similar, and pairs of subjects far apart from each other are more likely to have values that are less similar. The spatial structure of the data refers to any patterns that may exist. Spatial autocorrelation is concerned with the degree to which objects or activities at some place on the earth's surface are similar to other objects or activities located nearby.

Spatial autocorrelation is the correlation among values of a single variable strictly attributable to their relatively close locational positions on a two-dimensional (2-D) surface, introducing a deviation from the independent observations assumption of classical statistics. Spatial autocorrelation exists because real-world phenomena are typified by orderliness, (map) pattern, and systematic concentration, rather than randomness (Griffith 2009 [40]). When analyzing geospatial data, describing the spatial pattern of a measured variable is of great importance. A common way of visualizing the theoretical spatial autocorrela-

tion of a variable is a variogram plot. The functions most often used to describe spatial autocorrelation are related to variance, covariance and of course, correlation.

In this paper, we examine the theoretical variance and the variance estimator for the Seasonal Fractionally Integrated Separable Spatial Autoregressive model. We have also examine the covariance and the correlation function of the seasonal FISSAR model through a simulation study.

The paper is organized as follows. In the next Section, we compute the theoretical variance of the Seasonal FISSAR and the methods for estimating this variance. Section 3 is devoted to illustrate the behaviour of the autocorrelation function modelling and...

4.2 Spatial autocorrelation function

Spatial autocorrelation occurs when observations are not independent of one another because of their spatial arrangement. When data are spatially autocorrelated the value of one observation can be predicted based on adjacent observations. Spatial autocorrelation violates the assumption of independence of observations which is a serious concern for traditional hypothesis tests in statistics.

Recall that the Seasonal FISSAR process is given by following equations:

$$(1 - \phi_{10}B_1 - \phi_{01}B_2 + \phi_{10}\phi_{01}B_1B_2)(1 - \psi_{10}B_1^{s_1} - \psi_{01}B_2^{s_2} + \psi_{10}\psi_{01}B_1^{s_1}B_2^{s_2}) \\ \times (1 - B_1)^{d_1} (1 - B_1^{s_1})^{D_1} (1 - B_2)^{d_2} (1 - B_2^{s_2})^{D_2} X_{ij} = \varepsilon_{ij} \quad (4.1)$$

We define the processes $\{Z_{ij}\}_{i,j \in \mathbb{Z}_+}$ and $\{Y_{ij}\}_{i,j \in \mathbb{Z}_+}$ by:

$$(1 - B_1^{s_1})^{D_1} (1 - B_2^{s_2})^{D_2} Z_{ij} = \varepsilon_{ij}^* \quad (4.2)$$

$$(1 - B_1)^{d_1} (1 - B_2)^{d_2} Y_{ij} = \varepsilon'_{ij} \quad (4.3)$$

Let $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{Z}_+$, $(\xi_1, \xi_2) \in A_1 \times A_2$ where $A_1 = \{1, \dots, s_1 - 1\}$ and $A_2 = \{1, \dots, s_2 - 1\}$ then the first form of the autocovariance function of the Seasonal FISSAR process $\{X_{ij}\}_{i,j \in \mathbb{Z}_+}$ is given in Cisse et al. (2016) as:

Proposition 4.2.1 (*Voir Chapitre 2*)

$$\begin{aligned} \gamma_X(h_1, h_2) = & \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{q=0}^{+\infty} \sum_{r=0}^{+\infty} \sum_{t=0}^{+\infty} \phi_{10}^{k+p} \phi_{01}^{l+q} \psi_{10}^{m+r} \psi_{01}^{n+t} \\ & \times \gamma_W(h_1 + k + s_1(m - r) - p, h_2 + l + s_2(n - t) - q) \end{aligned} \quad (4.4)$$

where

$$\begin{aligned} \gamma_W(h_1, h_2) = & \sigma_\varepsilon^2 \sum_{\nu_1=0}^{+\infty} \sum_{\nu_2=0}^{+\infty} \gamma_Z(s_1\nu_1, s_2\nu_2) \\ & \times \gamma_Y(h_1 - s_1\nu_1, h_2 - s_2\nu_2) \text{ if } (h_1, h_2) = (s_1\ell_1, s_2\ell_2) \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\gamma_W(h_1, h_2) = 0, \text{ if } (h_1, h_2) = (s_1\ell_1 + \xi_1, s_2\ell_2 + \xi_2) \quad (4.6)$$

with $\gamma_Z(.,.)$ and $\gamma_Y(.,.)$ given respectively by

$$\gamma_Y(h_1, h_2) = \sigma_{\varepsilon'}^2 \frac{(-1)^{h_1+h_2} \Gamma(1 - 2d_1) \Gamma(1 - 2d_2)}{\Gamma(h_1 - d_1 + 1) \Gamma(1 - h_1 - d_1) \Gamma(h_2 - d_2 + 1) \Gamma(1 - h_2 - d_2)} \quad (4.7)$$

and

$$\begin{aligned} \gamma_Z(s_1h_1, s_2h_2) &= \sigma_{\varepsilon^*}^2 \frac{(-1)^{h_1+h_2} \Gamma(1 - 2D_1) \Gamma(1 - 2D_2)}{\Gamma(h_1 - D_1 + 1) \Gamma(1 - h_1 - D_1) \Gamma(h_2 - D_2 + 1) \Gamma(1 - h_2 - D_2)} \\ \gamma_Z(s_1h_1 + \xi_1, s_2h_2 + \xi_2) &= 0 \text{ if } (\xi_1, \xi_2) \in A_1 \times A_2 \end{aligned} \quad (4.8)$$

Another way to compute the autocovariance function is to generalize the processes $\{Z_{ij}\}_{i,j \in \mathbb{Z}_+}$ and $\{Y_{ij}\}_{i,j \in \mathbb{Z}_+}$ by adding the characterization of short and long memory behaviour. Let $\{U_{ij}\}_{i,j \in \mathbb{Z}_+}$ and $\{V_{ij}\}_{i,j \in \mathbb{Z}_+}$ define by:

$$(1 - \psi_{10} B_1^{s_1}) (1 - \psi_{01} B_2^{s_2}) (1 - B_1^{s_1})^{D_1} (1 - B_2^{s_2})^{D_2} U_{ij} = \tilde{\varepsilon}_{ij} \quad (4.9)$$

$$(1 - \phi_{10} B_1) (1 - \phi_{01} B_2) (1 - B_1)^{d_1} (1 - B_2)^{d_2} V_{ij} = \tilde{\tilde{\varepsilon}}_{ij} \quad (4.10)$$

We derive the following result

Proposition 4.2.2 (See Chapter 2)

The Seasonal FISSAR stationary process $\{X_{ij}\}_{i,j \in \mathbb{Z}_+}$ has autocovariance function at spatial lags (h_1, h_2) given by

$$\begin{aligned} \gamma_X(h_1, h_2) &= \sigma_\varepsilon^2 \sum_{\nu_1=0}^{+\infty} \sum_{\nu_2=0}^{+\infty} \gamma_U(s_1\nu_1, s_2\nu_2) \\ &\quad \times \gamma_V(h_1 - s_1\nu_1, h_2 - s_2\nu_2), \text{ if } (h_1, h_2) = (s_1\ell_1, s_2\ell_2) \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\gamma_X(h_1, h_2) = 0, \text{ if } (h_1, h_2) = (s_1\ell_1 + \xi_1, s_2\ell_2 + \xi_2). \quad (4.12)$$

where the autocovariance functions $\gamma_U(\cdot, \cdot)$ and $\gamma_V(\cdot, \cdot)$ are defined respectively in Cisse et al (2016) [20] and in Chapter 2.

4.3 Theoretical variance and Estimation

We derive in Proposition 4.2.1 the theoretical variance of the Seasonal FIS-SAR model by:

$$\begin{aligned} \gamma_X(0, 0) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{q=0}^{+\infty} \sum_{r=0}^{+\infty} \sum_{t=0}^{+\infty} \phi_{10}^{k+p} \phi_{01}^{l+q} \psi_{10}^{m+r} \psi_{01}^{n+t} \\ &\quad \times \gamma_W(k + s_1(m - r) - p, l + s_2(n - t) - q) \end{aligned} \quad (4.13)$$

where $\gamma_W(\cdot, \cdot)$ is defined in 4.5 and 4.5.

The formula derivated in Propostion 4.2.2 is given by

$$\gamma_X(0, 0) = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{\nu_1=0}^{+\infty} \sum_{\nu_2=0}^{+\infty} \gamma_U(s_1\nu_1, s_2\nu_2) \times \gamma_V(s_1\nu_1, s_2\nu_2)$$

where the autocovariance functions $\gamma_U(\cdot, \cdot)$ and $\gamma_V(\cdot, \cdot)$ are defined respectively in Cisse et al (2016) [20] and in Chapter 2.

4.4 Simulation Results

The variances defined above depends on infinite sums and we will set an arbitrary truncation parameter. Table 4.1 show the approximate theoretical variances defined in 4.13. the selected parameter values are $d_1 = 0.1, d_2 = 0.1\phi_{10} =$

0.1, $\phi_{01} = 0.15$, $\psi_{10} = 0.1$, $\phi_{0.2}$ and $s_1 = s_2 = 4$. The truncation points for the infinite sums used in this study is 100.

$D_2 \backslash D_1$	-0.5	-0.4	-0.3	-0.2	-0.1	0	0.1	0.2	0.3	0.5	0.5
-0.5	1.4680	1.3379	1.3315	1.2156	1.2712	1.2028	1.3277	1.3618	1.9006	2.6050	3.2021
-0.4	1.3379	1.3522	1.3204	1.2798	1.2207	1.1716	1.2032	1.2347	1.1712	2.4317	3.1801
-0.3	1.3315	1.3204	1.2912	1.2631	1.2015	1.1667	1.1902	1.2563	1.6004	2.2329	3.1705
-0.2	1.2156	1.2798	1.2631	1.2334	1.1802	1.1723	1.2087	1.3043	1.5512	2.0933	3.1201
-0.1	1.2712	1.2207	1.2015	1.1802	1.0922	1.0874	1.1766	1.2398	1.4823	2.1265	3.1904
0	1.2028	1.1716	1.1667	1.1723	1.0874	1.1527	1.2109	1.3217	1.5003	2.2405	3.4164
0.1	1.3277	1.2347	1.2563	1.3043	1.2398	1.3217	1.3561	1.3827	1.7301	2.2742	3.8039
0.2	1.3618	1.2139	1.2642	1.2977	1.2501	1.3432	1.3794	1.4266	1.8531	2.4018	3.8677
0.3	1.9006	1.7512	1.6004	1.5512	1.4823	1.5003	1.6223	1.7301	2.0117	2.5695	4.3233
0.4	2.6050	2.4317	2.3229	2.0933	2.1265	2.2405	1.2742	2.4018	2.5695	3.1120	5.4380
0.5	3.2021	3.180105	3.1705	3.1201	3.1904	3.4164	3.8039	3.8677	4.3233	5.4380	8.1527

TABLE 4.1 – Variance of the Seasonal FISSAR model by varying D_1 and D_2

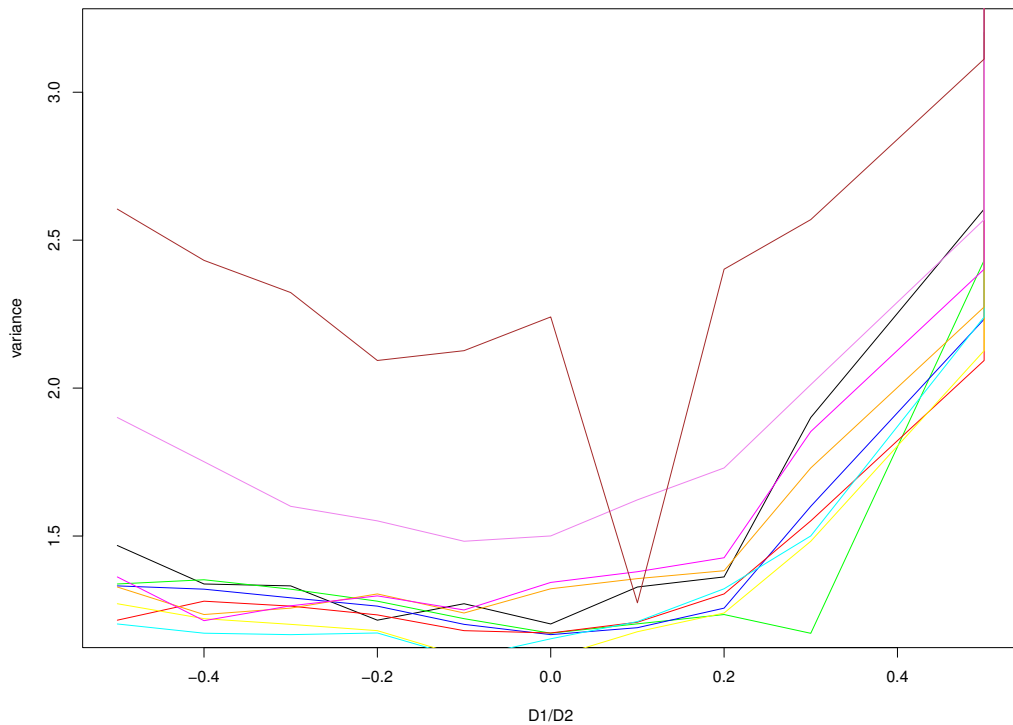


FIGURE 4.2 – Variance of the Seasonal FISSAR

The results show that we have a symmetric matrix and it has a quadratic shaped curve. Indeed, taking the rows or columns, we note that the variance decreases, takes a minimum value before increasing again. In this simulation we have fixed the values of the parameters $d_1 = 0.1, d_2 = 0.1$ and estimate the variance by varying D_1 and D_2 . The trends of the evolution of the theoretical variance will remain the same in the opposite case, ie to fix D_1 and D_2 and varying d_1 and d_2 . It would still be interesting to look at the results of this variance by combining d and D in the table

4.5 Conclusion

We have presented a simulation study of the theoretical variance of the Seasonal FISSAR model. The objectives is to examine the ACF function and derive an approximate theoretical variance. We specify that it is still possible to esti-

mate the variance of the model by other procedures in order to compare with the theoretical value. This work (in progress) will be in a future paper.

Conclusion et Perspectives

AU cours de cette thèse, nous avons proposé et mis en œuvre de nouvelles approches de traitement statistique de données spatiales avec tendance saisonnière. En effet, on a introduit une nouvelle classe de modèles AR spatiaux qui permet de prendre en compte la saisonnalité présente dans des données bidimensionnelles. Les propriétés statistiques et les méthodes d'estimations de ce nouveau modèle ont été fait dans le cadre d'une dispersion régulière des observations. Des études de simulations ont été réalisées pour illustrer nos résultats théoriques. Ainsi, nous avons effectué des études de simulations pour les différentes méthodes d'estimations des paramètres du modèle. Ces études visaient à montrer que, sous l'hypothèse de stationnarité du processus, les erreurs d'estimations sont relativement petites en tenant compte de la taille de l'échantillon. Nous avons constaté que pour une estimation simultanée de tous les paramètres ou une estimation partielle des paramètres de longues mémoires, les méthodes proposées donnent des résultats similaires en termes d'évolution de RMSE. Ainsi, le choix d'une des méthodes dépend des paramètres à estimer et de la complexité en temps de calcul.

L'extension du modèle Seasonal FISSAR dans le cas de données non régulières se fait avec l'introduction de matrice de voisinage dans le modèle initial. Cette matrice permettra de prendre en compte la dispersion entre les sites et d'en tenir compte au cour de la modélisation. Classiquement, dans le cadre spatial, l'ensemble des localisations des sites est un sous-ensemble bidimensionnel. On peut aussi envisager l'étude des observations sur l'espace \mathbb{Z}^d où $d > 2$. En effet, d'autres domaines, imagerie 3-D, ainsi que la statistique bayésienne ou la planification des expériences numériques, peuvent faire appel à des espaces

de dimensions $d \geq 3$. Notons que l'étude de la dynamique spatiale ajoute la dimension temporelle au spatial, en indexant par exemple l'observation par $(i, j) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^d$.

A court terme, nous envisageons d'illustrer notre méthodologie avec des données réelles. Il sera d'abord question de l'étude spatio-temporelle de la production de riz dans la vallée du fleuve Sénégal et de l'évolution du prix du riz (prix du riz local versus prix du riz importé) avec composante géographique (travail en collaboration avec AfricaRice Sénégal). Avec les périodes de sécheresse qui ont frappé les différents pays de l'Afrique subsaharienne depuis les années 1970, la vulnérabilité des populations s'est amplifiée. Dès lors, ses États s'activent pleinement dans leurs politiques agricoles pour un objectif d'autosuffisance alimentaire.

L'agriculture est un secteur essentiel dans la stratégie nationale (Sénégal) de réduction de la pauvreté. En effet, elle constitue une source importante de revenus pour une bonne partie de la population du Sénégal et en particulier du monde rural. La culture de Riz occupe une bonne place dans la production nationale et la consommation locale de riz dépasse de loin celle de toutes les autres céréales. En effet, la consommation totale de riz au Sénégal a fortement augmenté au cours de ces dernières décennies à cause de la croissance démographique et de l'augmentation de la consommation par habitant, en particulier dans les urbains. C'est d'ailleurs pour cette raison que l'État, dans le but de réduire les problèmes liés à la sécurité alimentaire aujourd'hui, a mis en place des politiques de subventions pour l'agriculture du secteur rizicole pour favoriser la réduction du prix du riz sur tout le territoire sénégalais. Cette forte demande à la consommation du riz appelle une production intensive et efficace.

Dans de nombreuses régions, les faibles rendements, combinés à une croissance démographique rapide, ont forcé les producteurs à cultiver de nouvelles terres peu adaptées à l'agriculture, occasionnant de ce fait une inégale répartition des rendements. L'un des défis actuels pour un pays qui se veut émergent est de faire recours à l'agriculture de précision afin de réduire les affres de l'in-

sécurité alimentaire actuelle et de satisfaire aux besoins futurs des populations sans causer de grandes inégalités entre les prix dans ses différents régions.

L'objectif premier est d'énumérer les caractéristiques spatio-temporelles de la production de riz dans la vallée du fleuve Sénégal. En effet les rendements varient très largement d'une année à une autre et selon les zones de culture au niveau de la vallée. Ainsi, on essaiera d'explicitier un modèle spatio-temporel adéquat pour une meilleure gestion des prévisions des rendements. Ce qui serait un apport considérable dans la gestion de la riziculture, facteur très influent sur les enjeux socio-économiques du pays.

Malgré les efforts réalisés dans la culture de la filière rizicole, la demande reste largement supérieure à l'offre. La production nationale arrive à satisfaire à peine un tiers de la demande nationale. De plus elle est instable et varie très largement d'une année à une autre. Aussi, la consommation du riz local demeure très faible dans la consommation locale au regard du riz importé. En effet, l'État se lance dans une politique d'importation massive de riz pour garantir l'alimentation des populations. D'où la place fulgurante de l'importation de ce céréale dans l'économie nationale.

Pendant la crise alimentaire de 2007 – 2008, beaucoup de pays asiatiques ont réduit leurs exportations de riz. La pénurie soudaine a provoqué une hausse des prix qui a entraîné des soulèvements dans bon nombre de capitales africaines. Reconnaissant que la trop forte dépense sur les importations de riz est risquée, beaucoup de gouvernements africains de même que la communauté internationale des donateurs ont initié des programmes de développement du secteur rizicole. Les investisseurs étrangers s'intéressent aussi aux terres et aux eaux africaines pour la culture du riz. Comme résultat, la production rizicole augmente dans toute l'Afrique subsaharienne. Cependant, l'Afrique importe toujours environ 40% du riz qu'elle consomme.

Ceci nous motive à étudier de près l'évolution des prix du riz local et celle du riz importé sur le territoire national. Avec l'instabilité de la production nationale de riz, combinée à celle du marché international et certains facteurs économiques, les prix du riz local et importé évoluent de façon temporelle. De

plus, pour chaque période donnée ces prix diffèrent selon des positions géographiques (par région en général) et ne sont donc pas le même sur tout le territoire national d'où l'effet spatio-temporel dans ces types de données. Nous nous intéressons alors à la dynamique spatio-temporelle de l'évolution de ces prix. Nous analysons également le rapport entre le marché national et le marché international, notamment les mécanismes de transmission de prix entre ces marchés.

La mise à disposition d'outils de prévision de rendement et de production agricoles, ainsi que la connaissance à priori de l'évolution des prix sur le plan national constituent un atout non négligeable dans la réduction de la vulnérabilité de ces populations. Ces outils, combinés à d'autres facteurs, sont une aide considérable à la prise de décision en matière de politiques agricoles.

Bibliographie

- [1] Pierre Ailliot and Marc Prevosto. Modélisation de l'évolution spatio-temporelle des champs de vent. Technical Report 1-4, Journées de statistiques, 2003. [3](#)
- [2] N Anderson. On the calculation of filter coefficients for maximum entropy spectral analysis. *Modern Spectrum Analysis*, IEEE Press:252–255, 1978. [64](#)
- [3] L. Anselin. *Spatial Econometrics: Methods and Models*. Springer Science & Business Media, 1988. [2](#), [35](#), [63](#), [90](#)
- [4] L. Anselin, A. Varga, and Z. Acs. Local geographic spillovers between university research and high technology innovations. *Journal of Urban Economics*, 42:442–448, 1997. [3](#)
- [5] Jean-Marc Azaïs and Jean-Marc Bardet. *Le modèle linéaire par l'exemple: régression, analyse de la variance et plans d'expériences illustrés avec R, SAS et Splus*. Dunod, 2005. [32](#)
- [6] M. S. Bartlett. Physical nearest-neighbour models and non-linear time-series. *Journal of Applied Probability*, 8(2):222–232, 1971. [35](#), [63](#), [90](#)
- [7] I V Basawa and L Billard. Large sample inference for a regression model with autocorrelated errors. *Biometrika*, 76:283–288, 1989. [64](#)
- [8] I V Basawa, L Billard, and R Srinivasan. Large sample tests for homogeneity for time series models. *Biometrika*, 71:203–206, 1984. [64](#)

- [9] Sabyasachi Basu and Gregory C. Reinsel. Properties of the spatial unilateral first-order arma model. *Advances in Applied Probability*, 25(3):631–648, 1993. 35, 40, 63, 90
- [10] Martin Benirschka and James K. Binkley. Land Price Volatility in a Geographically Dispersed Market. *American Journal of Agricultural Economics*, 76(2):185–195, 1994. 37
- [11] Jurate Saltyte Benth, Fred Espen Benth, and Paulius Jalinskas. A spatial-temporal model for temperature with seasonal variance. *Journal of Applied Statistics*, 24(7):823–841, 2007. 36
- [12] Julian Besag. Spatial interaction and the statistical analysis of lattice systems. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 36(2):192–236, 1974. 4, 35, 63, 90
- [13] C. Bisognin and S. R. C Lopes. Properties of seasonal long memory processes. *Mathematical and Computer Modeling*, 49:1837–1851, 2009. 39
- [14] Y Boissy, B. B Bhattacharyya, X. Li, and G. D. Richardson. Parameter estimates for fractional autoregressive spatial processes. *The Annals of Statistics*, 33(6):2553–2567, 2005. 9, 36, 37, 63
- [15] Florent Bonneu and Christine Thomas-Agnan. Spatial point process models for location-allocation problems. *Computational Statistics and Data Analysis, Amsterdam : Elsevier Science*, 53:3070–3081, 2012. 30
- [16] E.H.M Brietzke, S.R.C Lopes, and C. Bisognin. A close formula for the durbin-levinson’s algorithm in seasonal fractionally integrated processes. *Mathematical and Computer Modeling*, 42(11-12):1191–1206, 2005.
- [17] A. Can. Specification and estimation of hedonic housing price models. *Regional Science and Urban Economics*, 22:453–474, 1992. 3

- [18] Ayse Can and Isaac Megbolugbe. Spatial Dependence and House Price Index Construction. *The Journal of Real Estate Finance and Economics*, 14(1-2):203–222, 1997. 3
- [19] J. Chadoeuf, D. Nandris, J. P. Geiger, M. Nicole, and J. C. Pierrat. Modélisation spatio-temporelle d’une épidémie par un processus de gibbs: Estimation et tests. *Biometrics*, 48(4):1165–1175, 1992. 4
- [20] Papa Ousmane Cisse, Abdou Ka Diongue, and Dominique Guegan. Statistical properties of the seasonal fractionally integrated separable spatial autoregressive model. *Journal Afrika Statistika*, 11(1):901–922, 2016. 64, 65, 71, 90, 94
- [21] Thomas Mikosch Claudia Kluppelberg. Some limit theory for the self-normalised periodogram of stable processes. *Scandinavian Journal of Statistics*, 21(4):485–491, 1994. 85
- [22] A. D. Cliff and J. K. Ord. *Spatial autocorrelation*. London: Pion, 1973. 2, 35, 63, 90
- [23] Noel Cressie. *Statistics for spatial data*. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics: Applied Probability and Statistics. John Wiley & Sons Inc., New York, 1993. A Wiley-Interscience Publication. 35, 63, 90
- [24] Rainer Dahlhaus. Efficient parameter estimation for self-similar processes. *Ann. Statist.*, 17(4):1749–1766, 12 1989. 84
- [25] Valter Di Giacinto and Giorgio Nuzzo. Explaining labour productivity differentials across italian regions: the role of socio-economic structure and factor endowments. *Papers in Regional Science*, 85(2):299–320, 2006. 5
- [26] Peter J. Diggle. *Statistical analysis of spatial point patterns*. Mathematics in Biology. Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], London, 1983.

- [27] Peter J. Diggle and Robin K. Milne. Bivariate Cox processes: some models for bivariate spatial point patterns. *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B*, 45(1):11–21, 1983.
- [28] Abdou Ka Diongue, Aliou Diop, and Mor Ndongo. Seasonal fractional arima with stable innovations. *Statistics and Probability Letters*, 78:1404–1411, 2008. 85
- [29] Jean-Jacques Droesbeke, Michel Lejeune, and Gilbert Saporta. *Analyse statistique des données spatiales*. Editions Technip. Presses internationales Polytechnique, Montréal, Canada, 2006.
- [30] Paul Embrechts, Thomas Mikosch, and Claudia Kluppelberg. *Modelling Extremal Events: For Insurance and Finance*. Springer-Verlag, London, UK, UK, 1997. 85
- [31] Robert Fox and Murad S. Taqqu. Large-sample properties of parameter estimates for strongly dependent stationary gaussian time series. *Ann. Statist.*, 14(2):517–532, 06 1986. 64
- [32] Carlo Gaëtan and Xavier Guyon. *Modélisation et statistique spatiale*. Mathématiques et applications. Springer, Berlin, 2008.
- [33] John Geweke and Susan Porter-Hudak. The estimation and application of long memory time series models. *Journal of Time Series Analysis*, 4(4):221–238, 1983. 7, 9, 65, 67
- [34] Alireza Ghodsi and Mahendran Shitan. Estimation of the memory parameters of the fractionally integrated separable spatial autoregressive (fissar(1, 1)) model: A simulation study. *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, 38:6:38:6, 1256–1268, 2009. 67, 69
- [35] Alireza Ghodsi and Mahendran Shitan. Some properties of the normalized periodogram of a fractionally integrated separable spatial arma (fissarma)

- model. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 42:8:1515–1530, 2013.
- [36] L. Giraitis and L. Leipus. A generalized fractionnaly differencing approach in long memory modelling. *Lithuanian Mathematical Journal*, 35(1):53–65, 1995.
- [37] Ramon Giraldo, Sophie Dabo-Niang, and Sergio Martinez. Statistical modeling of spatial big data: An approach from a functional data analysis perspective. *Statistics & Probability Letters*, 136(C):126–129, 2018. 8
- [38] Thomas De Graaff, Raymond J.C.M. Florax, Peter Nijkamp, and Aura Reggiani. A General Misspecification Test for Spatial Regression Models: Dependence, Heterogeneity, and Nonlinearity. *Journal of Regional Science*, 41:255–276, 2001. 37
- [39] C. W J Granger and Roselyne Joyeux. An introduction to long memory time series models and fractional differencing. *Journal of Time Series Analysis*, 1(1):15–29, 1980. 7
- [40] D. Griffith. Methods: Spatial autocorrelation. In *International Encyclopedia of Human Geography*. Edited by R. Kitchin and N. Thrift, New York: Elsevier:396–402, 2009. 91
- [41] Xavier Guyon and Carlo Gaetan. *Modélisation et statistique spatiales*. Springer, August 2008. ISBN : 978-3-540-36710-1 Livre écrit en collaboration avec Carlo Gaetan, Université de Venise Chaque chapitre comporte des exercices. La table des matières est visible sur la page de l’auteur. 18, 32
- [42] R. P. Haining. The moving average model for spatial interaction. *Transactions of the Institute of British Geographers*, 3:202–225, 1978. 35, 63, 90

- [43] Hassler, U. (mis)specification of long memory in seasonal time. *Journal of Time Series Analysis*, **15**(1): 19–30, 1994. 8
- [44] Higuchi, T. Approach to an irregular time series on the basis of the fractal theory. *Physica, D*, **31**: 277–283, 1988. 7
- [45] J. R. M. Hosking. Fractional differencing. *Biometrika*, 68(1):165–176, 1981. 7, 64
- [46] Hurst, H. E. Long-term storage capacity of reservoirs. *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, **116**: 770–799, 1951. 7
- [47] Aude Illig. Une modélisation de données spatio-temporelles par modèles AR spatiaux. *Journal de la Société Française de Statistique*, 147(4):47–64, 2006. 4, 6, 35, 63, 90
- [48] A. Jain. Advances in mathematical models for image processing. *Proceedings of the IEEE*, 69(5):502–528, 1981. 35, 63, 90
- [49] Piotr Jaworski and Marcin Piterab. On spatial contagion and multivariate GARCH models. *Applied Stochastic Models Business and Industry*, 30:303–327, 2014. 37
- [50] Hubert Jayet. Econométrie et données spatiales : une introduction à la pratique. Technical Report 58-59, Cahiers d'économie et sociologie rurales, 2001. 3
- [51] M.G Kedowide, P.M. Sedogo, and G. Cisse. Dynamique spatio temporelle de l'agriculture urbaine Ã ouagadougou : Cas du maraichage comme une activité montante de stratégie de survie. *JVertigO - la revue électronique en sciences de l'environnement*, 10, 2010. 5
- [52] Claudia Kluppelberg and Thomas Mikosch. Spectral estimates and stable processes. *Stochastic Processes and their Applications*, 47(2):323 – 344, 1993. 85

- [53] Dayton M. Lambert, James Lowenberg DeBoer, and Rodolfo Bongiovanni. Spatial regression models for yield monitor data: A case study from Argentina. In *Paper prepared for presentation at the American Agricultural Economics Association Annual Meeting, Montreal, Canada, July 27-30, 2003*. 35, 63, 90
- [54] Julie Le Gallo. Econométrie spatiale 1 -autocorrélation spatiale. LATEC - Document de travail - Economie (1991-2003) 2000-05, LATEC, Laboratoire d'Analyse et des Techniques Economiques, CNRS UMR 5118, Université de Bourgogne, 2000. 2, 3, 20, 22
- [55] Pierre Legendre and Marie Josée Fortin. Spatial pattern and ecological analysis. *Vegetatio*, 80(2):107–138, Jun 1989. 90
- [56] Young-Kwon Lim, Kwang-Yul Kim, and Hee-Sang Lee. Temporal and spatial evolution of the Asian summer monsoon in the seasonal cycle of synoptic fields. *Journal of Climate*, 15:3630–3644, 2002. 35, 36, 63, 90
- [57] Lobato, I. and Robinson, P. M. Average periodogram estimation of long memory. *Journal of Econometrics*, 73 : 303–324, 1996. 7
- [58] Hedibert Freitas Lopes, Esther Salazary, and Dani Gamerman. Spatial dynamic factor analysis. *Bayesian Analysis*, 3(4):759–792, 2008. 36
- [59] K V Mardia and R J Marshall. Maximum likelihood estimation of models for residual covariance in spatial regression. *Biometrika*, 71(1):135–146, 1984. 71
- [60] Kanti V Mardia. Maximum likelihood estimation for spatial models. *Spatial statistics: Past, present and future*, 12, 1990. 71
- [61] Roger J. Marshall. A review of methods for the statistical analysis of spatial patterns of disease. *Journal of the Royal Statistical Society. Series A (Statistics in Society)*, 154(3):421–441, 1991. 35, 63, 90

- [62] T Mikosch, T Gdrich, C Klupelberg, and R.J. Adler. Parameter estimation for arma models with infinite variance innovations. *Ann. Statist.*, 23:305–326, 1995. 85
- [63] Jesper Møller and Rasmus P. Waagepetersen. Modern statistics for spatial point processes. *Scand. J. Statist.*, 34(4):643–684, 2007.
- [64] Aline A. Nobre, Bruno Sanso, and Alexandra M. Schmidt. Spatially Varying Autoregressive Processes. *Technometrics*, 50(3):310–321, 2011. 36
- [65] Kelley Pace and Otis W Gilley. Using the spatial configuration of the data to improve estimation. *The Journal of Real Estate Finance and Economics*, 14(3):333–40, 1997. 3
- [66] Eulogio Pardo-Igúzquiza. Maximum likelihood estimation of spatial covariance parameters. *Mathematical Geology*, 30(1):95–108, 1998. 71
- [67] A. H. Pejman, G. R. Nabi Bidhendi, A. R. Karbassi, N. Mehrdadi, and M. Esmaeili Bidhendi. Evaluation of spatial and seasonal variations in surface water quality using multivariate statistical techniques. *International Journal of Environmental Science & Technology*, 6 (3):467–476, 2009. 36
- [68] P.E. Pfeifer and J.S. Deutsch. Identification and interpretation of first order space-time arma models. *Technometrics*, 22(3):397–408, 1980. 5
- [69] Susan Porter-Hudak. An application of the seasonal fractionally differenced model to the monetary aggregates. *Journal of the American Statistical Association*, 85(410):338–344, 1990. 7
- [70] Robert W. Portmann, Susan Solomon, and Gabriele C. Hegerl. Spatial and seasonal patterns in climate change, temperatures, and precipitation across the United State. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 106(18):7324–7329, 2009. 36

- [71] Valderio Anselmo Reisen, Alexandre L. Rodrigues, and Wilfredo Palma. Estimation of seasonal fractionally integrated processes. *Computational Statistics & Data Analysis*, 50:568–582, 2006. 7
- [72] Reisen, V. A. Estimation of the fractional difference parameter in the ARIMA(p, d, q) model using the smoothed periodogram. *Journal of Time Series Analysis*, **15** : 335–350, 1994. 7
- [73] Robinson, P. M. Semiparametric analysis of long-memory time series. *The Annals of Statistics*, **22** : 515–539, 1994. 7
- [74] Robinson, P. M. Gaussian semiparametric estimation of long range dependence. *The Annals of Statistics*, **23** : 1630–1661, 1995b. 7
- [75] S. Sethuraman and I. V. Basawa. Maximum likelihood estimation for a fractionally differenced autoregressive model on a two-dimensional lattice. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 44(2):219–235, 4 1995. 64, 72
- [76] Mahendran Shitan. Fractionnaly Intergrated Separable Spatial Autoregressive (FISSAR) model and some of its properties. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 37:1266–1273, 2008. 6, 9, 36, 37, 38, 64, 90
- [77] Sowell, F. Maximum likelihood estimation of stationary univariate fractionally integrated time series models. *Journal of Econometrics*, **53** : 165–188, 1992. 7
- [78] A Varga. a spatial econometric analysis of academic technology transfers. Technical report, Kluwer Academic Publishers, 1998. 3
- [79] Paul Whittle. On stationary processes in the plane. *Biometrika*, 41:434–449, 1954. 35, 63, 90
- [80] Paul Whittle. Increments and decrements: Luminance discrimination. *Vision Research*, 26(10):1677–1691, 1986. 9, 35, 63, 90

- [81] Whittle, P. *Hypothesis Testing in Time Series Analysis*. New York, 1951. 7
- [82] MINORU Yajima. The insect ecological land at tama zoo. *International Zoo Yearbook*, 30(1):7–15, 1991. 64
- [83] Yoshihiro Yajima. On estimation of long-memory time series models. *Australian Journal of Statistics*, 27(3):303–320, 1985. 64, 84
- [84] Hongtu Zhu, Minggao Gu, and Bradley Peterson. Maximum likelihood from spatial random effects models via the stochastic approximation expectation maximization algorithm. *Statistics and Computing*, 17:163–177, 2007. 36