



HAL
open science

CONTRIBUTION A L'ETUDE DES PROPRIETES PHYSIQUES D'UN ATOME "HABILLE" PAR UN CHAMP DE RADIOFREQUENCE LINEAIRE

Claire Landré

► **To cite this version:**

Claire Landré. CONTRIBUTION A L'ETUDE DES PROPRIETES PHYSIQUES D'UN ATOME "HABILLE" PAR UN CHAMP DE RADIOFREQUENCE LINEAIRE. Physique Atomique [physics.atom-ph]. Université de Paris, Faculté des sciences, 1970. Français. NNT: . tel-02066295

HAL Id: tel-02066295

<https://theses.hal.science/tel-02066295>

Submitted on 13 Mar 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

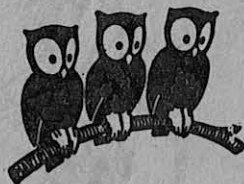
L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Alex 698

UNIVERSITÉ DE PARIS

T-1970. 13

LABORATOIRE DE PHYSIQUE
DE L'ÉCOLE NORMALE
SUPÉRIEURE



T H E S E
présentée

devant la Faculté des Sciences
de l'Université de Paris

pour obtenir le grade de DOCTEUR de 3ème CYCLE

Spécialité : PHYSIQUE THEORIQUE

Option : PHYSIQUE ATOMIQUE ET STATISTIQUE

par

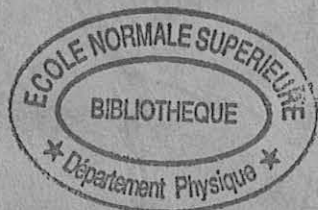
Claire L A N D R É

"CONTRIBUTION A L'ETUDE DES PROPRIETES PHYSIQUES D'UN ATOME "HABILLE" PAR UN CHAMP
DE RADIOFREQUENCE LINEAIRE"

Soutenue le

1970 devant la Commission d'Examen

MM. A. KASTLER	}	Président
J. BROSSEL		Examineurs
C. COHEN-TANNOUJJI		



1970 - 03

626279364 PG T 1970 LAN

UNIVERSITE DE PARIS

T H E S E

présentée

devant la Faculté des Sciences

de l'Université de Paris

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE 3ème CYCLE

Spécialité : PHYSIQUE THEORIQUE

Option : PHYSIQUE ATOMIQUE ET STATISTIQUE

par

Claire L A N D R É

"CONTRIBUTION A L'ETUDE DES PROPRIETES PHYSIQUES D'UN ATOME "HABILLE" PAR UN CHAMP
DE RADIOFREQUENCE LINEAIRE"

Soutenue le

1970, devant la Commission d'Examen

MM. A. KASTLER

Président

J. BROSSEL

C. COHEN-TANNOUJJI

}
} Examineurs

1970 - 03

Cette thèse a été effectuée au Laboratoire de Physique de l'E.N.S. pendant l'année 1968-69 dans le groupe de recherches de MM. les Professeurs A. KASTLER et J. BROSSEL que je tiens à remercier ici de leur bienveillant accueil.

Je voudrais exprimer toute ma gratitude à M. Claude COHEN-TANNOUJDI qui a bien voulu diriger mon travail. J'ai ainsi pu bénéficier tout au long de l'année de ses encouragements et de l'impulsion constante de ses suggestions et critiques. Je lui suis profondément reconnaissante de m'avoir ainsi guidée vers la recherche avec tant d'enthousiasme et de compétence.

Je tiens à associer à la présentation de ce travail mes camarades Jacques DUPONT-ROC et Serge HAROCHE qui m'ont accordé avec beaucoup de patience une aide bien souvent indispensable. J'ai toujours trouvé en eux des interlocuteurs disponibles et compétents et je suis heureuse de dire combien leur collaboration a été enrichissante.

Je remercie Lionel POTTIER dont les conseils pour la mise au point des divers calculs numériques m'ont été fort précieux.

Je remercie tous les techniciens du groupe pour l'ingéniosité, la promptitude et le soin avec lesquels ils m'ont aidée dans la réalisation matérielle de ce travail.

J'adresse enfin mes plus vifs remerciements à Mlle I. BRODSCHI qui a bien voulu se charger de la tâche ingrate qu'a été la frappe du présent mémoire.

TABLE DES MATIERES

<u>INTRODUCTION</u>	p. a
<u>CHAPITRE I</u> - POSITION DU PROBLEME. ETUDE QUALITATIVE	1
A) Calcul de la lumière diffusée par un atome "nu"	1
B) Rappels sur le diagramme de l'atome "habillé"	5
C) Calcul de la lumière diffusée par un atome "habillé"	7
D) Cas du champ linéaire	11
<u>CHAPITRE II</u> - ETUDE QUANTITATIVE. Première Partie : CHAMP TRES FAIBLE	17
A) Introduction	17
B) Introduction des $T_q^{(k)}$. Les observables de l'atome "habillé"	18
C) Une base orthonormée d'opérateurs : les $\mathcal{E}_q^{(k)}$	19
D) Relation entre les $T_q^{(k)}$ et les $\mathcal{E}_q^{(k)}$	21
E) Effet Zeeman de l'atome "habillé"	22
F) Pompage optique d'un atome "habillé"	25
1) excitation	25
2) équation d'évolution globale des observables de l'atome "habillé"	29
3) détection	32
G) Applications de l'équation pilote : calcul de quelques expériences réalisées sur un niveau atomique $S = 1/2$	34
1) Généralités sur l'excitation optique d'un niveau $S = 1/2$	34
2) Précession de Larmor de l'atome "habillé"	37
3) Effet Hanle de l'atome "habillé"	39
4) Résonance magnétique	43
5) Pompage transversal de l'atome "habillé" : résonance paramétrique	47
6) Pompage transversal par modulation de l'excitation optique	49
<u>CHAPITRE III</u> - ETUDE QUANTITATIVE. Deuxième Partie : ETUDE DE LA COURBURE DES NIVEAUX D'ENERGIE	51
A) Etude simple et qualitative	51
B) Courbure des niveaux d'énergie de l'atome "habillé"	55
C) Calcul quantique du déplacement. Sa relation avec la courbure	61
<u>CHAPITRE IV</u> - ETUDE QUANTITATIVE DU DIAGRAMME D'ENERGIE DE L'ATOME "HABILLE" DANS UN CHAMP H_0 QUELCONQUE	67
A) Calcul des niveaux d'énergie de l'atome "habillé" pour ω_0 et ω_1 quelconques	67
B) Principe des méthodes expérimentales d'étude de diagramme d'énergie	71

<u>CHAPITRE V</u> - RESULTATS EXPERIMENTAUX	75
A) Généralités sur les méthodes expérimentales	75
B) Facteur de Landé dans un champ H_0 de direction quelconque	80
C) La précession de Larmor de l'atome "habillé"	84
D) Résonance magnétique de l'atome "habillé"	88
E) Résonance paramétrique de l'atome "habillé"	91
F) Pompage optique transversal avec modulation de la polarisation	96
<u>CONCLUSION</u>	99
<u>APPENDICE I</u> -	
I) Rappels sur les états cohérents de GLAUBER et l'opérateur de déplacement	101
II) Calcul de la matrice densité d'excitation	103
III) Taux d'excitation des $\frac{nn'}{q} \mathcal{E}(k)$	106
<u>APPENDICE II</u> -	
Calcul du déplacement de la résonance paramétrique. Sa relation avec la courbure	109
<u>APPENDICE III</u> -	
Programme de calcul des niveaux d'énergie	116
<u>REFERENCES</u>	119

I N T R O D U C T I O N

Les méthodes de pompage optique permettent d'étudier de façon précise les divers processus d'interaction entre un atome et un champ de radiofréquence, grâce aux nombreuses résonances que l'on peut observer sur la lumière absorbée ou diffusée par l'atome. On a montré récemment ⁽¹⁾⁽⁵⁾⁽¹⁶⁾ tout l'intérêt qu'il y avait à adopter le point de vue suivant : l'atome et le champ de radiofréquence interagissent mutuellement et constituent un système global S que l'on appelle l'atome "habillé" par des photons de radiofréquence, la lumière incidente étant alors absorbée et diffusée par cet atome "habillé" S. Ce point de vue permet de classer très simplement les divers spectres de résonance magnétique en les associant soit à des anticroisements de niveaux d'énergie de S (résonance magnétique ordinaire, transitions à plusieurs quanta étudiées par WINTER), soit à des croisements de niveaux d'énergie de S (diverses résonances observées en pompage transversal). Il a permis d'envisager sous un éclairage nouveau un grand nombre de phénomènes bien connus tels que l'effet Autler-Townes, l'allure du spectre d'absorption d'un atome en présence de RF, ou encore l'effet Raman inverse; enfin, il a permis de prévoir et d'interpréter un phénomène curieux de modification du facteur de Landé d'un atome par suite du couplage avec la RF : les propriétés physiques de l'atome "habillé" apparaissent donc comme nettement différentes de celles de l'atome "nu".

Le travail que nous présentons ici est une contribution à l'étude de l'atome "habillé". Les problèmes que nous avons cherché à résoudre sont de plusieurs ordres.

1° - Du point de vue théorique, nous avons cherché à mettre au point un formalisme qui allège le calcul des signaux de résonance et qui tienne compte simultanément de la modification des énergies propres et des états propres de l'atome "nu". Par exemple, le couplage avec la radiofréquence n'a pas pour seul effet de modifier le moment magnétique atomique et, par suite, la vitesse de précession de Larmor; la modification des états propres rend également cette précession non plus circulaire mais elliptique.

Nous établissons des équations du cycle de pompage optique de l'atome "habillé" qui tiennent compte de tous ces effets et qui reposent sur l'utilisa-

tion d'opérateurs tensoriels irréductibles pour l'atome "habillé". Nous discutons plusieurs conséquences intéressantes de ces équations et vérifions un certain nombre d'entre elles dans le cas de ^{199}Hg .

2° - La classification et l'interprétation des diverses résonances qui avaient été à la base de l'élaboration de ce concept d'atome "habillé" s'appuient sur l'allure qualitative de son diagramme d'énergie. Il nous a donc semblé extrêmement intéressant de déterminer expérimentalement, par des méthodes usuelles de spectroscopie hertzienne, l'ensemble du diagramme d'énergie de cet atome "habillé". C'est cet objectif qui représente le deuxième fil conducteur de ce travail.

Le plan que nous suivrons dans notre exposé est le suivant :

Après avoir rappelé brièvement l'essentiel des travaux antérieurs sur lesquels nous nous appuyons (chap. I), nous présentons dans le deuxième chapitre un formalisme qui nous permet de rendre compte systématiquement, dans le domaine des champs magnétiques faibles, de l'ensemble des propriétés observables sur la lumière diffusée par l'atome "habillé".

Dans le troisième chapitre, nous montrons, sur un exemple précis, les limites de validité des précédents calculs et nous montrons alors comment les résonances paramétriques de l'atome "habillé" permettent d'atteindre très simplement la courbure des niveaux d'énergie. Nous abordons, dans le chapitre IV, l'étude du diagramme d'énergie de l'atome "habillé" et des différentes méthodes qui peuvent nous permettre de le déterminer. L'ensemble des résultats expérimentaux est présenté dans la dernière partie (chap. V).

- C H A P I T R E I -

POSITION DU PROBLEME. ETUDE QUALITATIVE

Dans l'introduction générale, nous avons rappelé l'idée essentielle suivie dans ce travail et ceux qui le précèdent (1).

Pour interpréter certains phénomènes observés sur la lumière absorbée ou réémise par des atomes soumis à un fort champ de RF, il peut être très utile de considérer que la lumière est diffusée par le système global atome + RF en interaction, c'est-à-dire "l'atome habillé".

Avant d'entrer dans le détail des calculs et des expériences, nous nous proposons, dans cette partie, de préciser davantage ce point de vue, et de dégager progressivement, et de façon qualitative, les principaux problèmes qu'il faudra résoudre ensuite.

Nous adopterons le plan suivant :

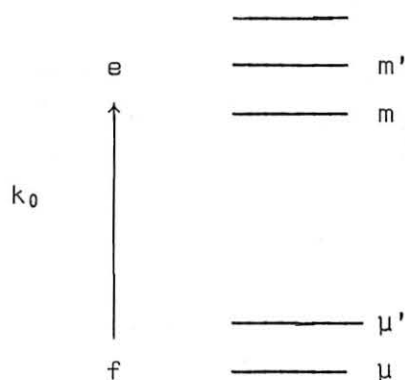
- A - Dans une première partie, nous rappelons les principales étapes du calcul de la lumière diffusée par un atome "nu".
- B - Puis, nous dégagons les aspects essentiels du diagramme d'énergie d'un atome habillé.
- C - Enfin, nous montrons ce que deviennent les problèmes rencontrés en A lorsqu'on étudie la diffusion de la lumière par le système étudié en B.

A - CALCUL DE LA LUMIERE DIFFUSEE PAR UN ATOME NU

La méthode d'exposé, le formalisme et les notations sont ceux adoptés par C. COHEN-TANNOUDJI dans sa thèse (2).

1) Rappel de notations

. Soient f et e respectivement le niveau fondamental et le niveau de résonance optique du système atomique envisagé. Dans un champ magnétique H_0 , le niveau f se scinde en $(2I + 1)$ sous-niveaux Zeeman μ, μ' (d'origine purement nucléaire), le niveau e , sous-niveau hyperfin F , en $(2F + 1)$ sous-niveaux m, m' .



. L'état du système est décrit par sa matrice densité σ . On distingue :

- les éléments diagonaux de σ qui représentent les populations des différents niveaux (σ_{mm} dans e, $\sigma_{\mu\mu}$ dans f).
- les diverses cohérences Zeeman du type $\sigma_{\mu\mu'}$, $\sigma_{mm'}$, appelées également cohérences hertziennes en égard à leur fréquence d'évolution. (Nous ne citerons que pour mémoire les cohérences "optiques" du type $\sigma_{m\mu}$: en effet, le pompage optique n'est pas réalisé avec une lumière suffisamment cohérente au sens de l'optique pour les exciter).

. Ce système atomique est excité par des photons de résonance optique ($\vec{k}_0, \vec{e}_{\lambda_0}$). Dans tout ce qui suit, nous supposons l'excitation "broad line" et nous nous intéresserons uniquement à la lumière réémise dans une direction déterminée (\vec{k}) avec une polarisation donnée (\vec{e}_{λ}).

2) Principales étapes du calcul de $L_F(\vec{e}_{\lambda})$

Les grandes lignes du calcul de l'intensité du signal émis par la vapeur sont articulées sur les trois processus essentiels du cycle de pompage optique : excitation - évolution propre - émission spontanée.

. excitation : l'atome initialement dans l'état fondamental $\sigma_{\mu\mu}$, absorbe un photon ($\vec{k}_0, \vec{e}_{\lambda_0}$). L'interaction entre le système atomique et le champ de rayonnement s'effectue par couplage dipolaire électrique. L'évolution dans le temps de la matrice densité de l'état excité sous l'action de l'excitation optique est alors décrite par :

$$(I.A.1) \quad \frac{d^{(1)}}{dt} \sigma = \frac{1}{T_p} \sum_{\mu\mu'} \vec{e}_{\lambda_0} \cdot \vec{D} | \mu \rangle \sigma_{\mu\mu'} \langle \mu' | \vec{e}_{\lambda_0}^* \cdot \vec{D}$$

(où T_p représente la durée de vie finie de l'état fondamental en présence de pho-

tons lumineux et D l'opérateur dipolaire électrique).

. évolution et calcul de la matrice densité de l'état excité : l'évolution dans l'état excité dépend essentiellement de 2 processus physiques :

- la relaxation vers l'état fondamental par émission spontanée
(\vec{k}, \vec{e}_λ)

$$(I.A.2) \quad \frac{d^{(2)}\sigma}{dt} = -\Gamma\sigma$$

(il est inutile, pour l'instant, de préciser la forme de l'opérateur Γ . Il nous suffit de savoir que c'est un opérateur indépendant du temps; pour plus de simplicité, nous prendrons en fait dans les calculs $\Gamma = \text{Cte}$).

- l'évolution propre (c'est-à-dire indépendante du champ de rayonnement) régie par le hamiltonien \mathcal{H} du système dans l'état excité

$$(I.A.3) \quad \frac{d^{(3)}\sigma}{dt} = -i (\mathcal{H}, \sigma)$$

l'évolution globale dans l'état excité est alors donnée par :

$$\frac{d}{dt} = \frac{d^{(1)}}{dt} + \frac{d^{(2)}}{dt} + \frac{d^{(3)}}{dt}$$

Cette équation générale nous permet de calculer la matrice densité dans diverses conditions : régime stationnaire atteint par pompage continu, régime transitoire sous l'action d'un pulse lumineux ou d'un pulse de champ magnétique (statique ou de radiofréquence), régime forcé sous l'action d'une excitation modulée.

Dans tous ces cas, il sera particulièrement agréable d'étudier ces différents opérateurs dans la base des états propres de \mathcal{H} (car le terme (I.A.3) est alors diagonal). En pompage continu, on atteint ainsi un régime stationnaire donné par

$$(I.A.4) \quad \sigma_{mm'} = \frac{1}{T_p} \langle m | \sigma_{exc}^0 | m' \rangle \frac{1}{\Gamma + i (E_m - E_{m'})}$$

où $\frac{1}{T} \sigma_{exc}^0$ représente le 2ème membre de (I.A.1), c'est-à-dire le taux de pompage, et Γ la largeur naturelle de l'état excité.

Pour une excitation modulée ($1/T_p$ est remplacé dans (I.A.1) par $\frac{1}{T_p} e^{+i\Omega t}$), l'état stationnaire est alors décrit par :

$$(I.A.5) \quad \sigma_{mm'} = \frac{1}{T_p} \langle m | \sigma_{exc}^0 | m' \rangle e^{+i\Omega t} \frac{1}{\Gamma + i(E_m - E_{m'} + \Omega)}$$

. détection : le signal de fluorescence (\vec{k}, \vec{e}_λ), proportionnel au nombre d'atomes qui retombent par unité de temps vers le fondamental, est donné par :

$$(I.A.6) \quad L_F(e_\lambda) = \sum_{\mu, m, m'} \langle \mu | \vec{e}_\lambda \cdot \vec{D} | m \rangle \sigma_{mm'} \langle m' | \vec{e}_\lambda^* \cdot \vec{D} | \mu \rangle$$

3) Résonances apparaissant sur la lumière diffusée

La forme de toutes ces expressions explique l'apparition des divers types de résonance observés sur la lumière diffusée.

- les résonances de croisement de niveaux

Dans cette situation ($E_m = E_{m'}$), le terme d'évolution propre des cohérences $\sigma_{mm'}$, est résonnant (dénominateur du 2ème membre de (I.A.4)). L'examen de (I.A.1) et (I.A.6) montre qu'on ne peut les exciter et les détecter qu'avec des photons de "polarisation" cohérente. Sont de ce type deux effets bien connus : l'effet Hanle de dépolarisation magnétique en champ magnétique nul et l'effet "Franken" (résonances de croisement de niveaux en champ non nul).

Les mêmes équations permettent également d'expliquer un deuxième type de "résonances de cohérences"; dans la situation précédente, il y a résonance de la cohérence $\sigma_{mm'}$, lorsque la fréquence d'excitation coïncide avec la fréquence propre d'évolution (0). Si le terme d'excitation est modulé à la fréquence Ω , on prévoit de même une résonance de la cohérence $\sigma_{mm'}$, lorsque la fréquence d'excitation est égale à sa fréquence propre d'évolution; ceci apparaît clairement sur le dénominateur du 2ème membre de (I.A.5) qui est résonnant pour $\Omega = E_m - E_{m'}$.

- les résonances d'anticroisement

En plus de la variation résonnante du dénominateur d'énergie, on doit tenir compte de la variation résonnante des éléments de matrice $\sigma_{mm'} = \langle m | \vec{e}_{\lambda_0} \cdot \vec{D} | \mu \rangle \langle \mu | \vec{e}_{\lambda_0} \cdot \vec{D} | m' \rangle$ figurant au numérateur de (I.A.4) et, $\langle \mu | \vec{e}_\lambda \cdot \vec{D} | m \rangle \langle m' | \vec{e}_\lambda \cdot \vec{D} | \mu \rangle$ figurant dans (I.A.6), au voisinage d'un point d'anticroisement.

Cette variation est, elle-même, due au fait que les états propres $| m \rangle$ dans l'état excité changent rapidement de part et d'autre du point d'anti-croisement.

B - RAPPELS SUR LE DIAGRAMME DE L'ATOME HABILÉ

Nous adoptons ici les notations et le point de vue de la référence (1). Nous traitons globalement le système S "atome + champ de radiofréquence en interaction". Pour préciser la structure de ce système que nous appelons l'atome "habillé", il nous faut rapidement revenir sur son diagramme d'énergie.

1) Hamiltonien

a) le système atomique

Il comporte un état fondamental $| f \rangle$ et un état excité $| e \rangle$ d'énergie E_0 , de spin S décomposé dans un champ H_0 parallèle à Oz en $(2S + 1)$ sous-niveaux Zeeman $| m_z \rangle$. L'état fondamental n'est pas couplé au champ H_0 , soit parce qu'il est diamagnétique, soit parce qu'il a une structure purement nucléaire négligeable devant ω_0 ($\omega_0 = -\gamma H_0$; $K = 1$). Le hamiltonien du système atomique s'écrit par suite

$$\mathcal{H}_{at} = (E_0 + \omega_0 S_z) P_e$$

(P_e projecteur dans l'état excité).

b) le champ de radiofréquence

Nous envisageons ici le cas où un seul mode du champ est rempli; soient a^+ et a les opérateurs création et annihilation de photons dans ce mode de pulsation ω et de polarisation $\vec{\epsilon}$. Le hamiltonien du champ s'écrit donc $\mathcal{H}_{RF} = \omega a^+ a$.

Les états propres de $\mathcal{H}_{at} + \mathcal{H}_{RF}$ sont les états propres $| f, n \rangle$ d'énergie $n\omega$ et $| m_z, n \rangle$ d'énergie $E_0 + n\omega + m_z \omega_0$ représentant l'atome dans l'état fondamental f ou excité m_z en présence de n photons RF. La figure (I) représente ce diagramme pour $I = 1/2$. Il présente une infinité de croisements dans l'état excité pour les valeurs $\omega_0 = p\omega$.

c) le couplage du système atomique et de la RF

Il n'est appréciable que dans l'état excité et est donné par (réf. 1, Appendice 1) :

$$V = \lambda \vec{S} (a \vec{\epsilon} + a^+ \vec{\epsilon}^*) P_e$$

(pour un champ linéaire d'amplitude moyenne H_1 et si N est le nombre moyen de photons, on démontre que $\lambda = -\frac{\gamma H_1}{2\sqrt{N}}$).

La structure de V est très simple; on peut en déduire immédiatement un certain nombre de règles de sélection et l'existence de sous-espaces propres de $\mathcal{H}_{at} + \mathcal{H}_{RF}$ globalement invariants par V . Ces différents résultats sont résumés dans le tableau (II); ils nous permettent d'aborder immédiatement l'étude qualitative des différents diagrammes.

2) Les diagrammes d'énergie

Dans une première approche, nous nous plaçons dans le cadre d'une théorie de perturbation en supposant que le couplage avec la RF n'est pas très fort

$$V \ll \omega_0, \omega$$

l'effet de ce couplage non diagonal peut présenter deux aspects essentiellement différents; à l'ordre le plus bas :

- en un point de croisement, le couplage entre 2 niveaux dégénérés a, b du diagramme (I) lève à l'ordre 1 la dégénérescence des états propres; il crée un anticroisement (ordre 1) dont la séparation en énergie est proportionnelle à l'élément de matrice du couplage $\langle a | V | b \rangle$.

Pour un couplage s'effectuant via $2p$ états intermédiaires, il y aura anticroisement d'ordre $2p+1$, la distance minimale entre les 2 branches de l'anticroisement étant proportionnelle à λ^{2p+1} , c'est-à-dire à $(H_1)^{2p+1}$.

- le couplage entre états non dégénérés est responsable de déplacements du second ordre des niveaux d'énergie.

Pour plus de clarté, ceux-ci sont tracés dans le cas d'un spin $1/2$; c'est d'ailleurs le cas qui a fait l'objet des études expérimentales présentées plus loin (^{199}Hg) (fig. III).

a) polarisation π parallèle à H_0 (fig. III-a)

Les règles de sélection sur V montrent qu'il n'y a couplage à aucun ordre entre les niveaux qui se croisent : il n'apparaît ni anticroisement, ni déplacement relatif des divers niveaux. Ce cas a fait l'objet d'un traitement rigoureux (³). Les niveaux d'énergie de \mathcal{H} sont identiques à ceux de H_0 (à une translation d'ensemble près de $-\frac{\lambda^2 m^2}{\omega}$), les états propres sont calculables rigoureusement et s'écrivent

$$e^{-\lambda S_z (a^+ - a)/\omega} | m, n \rangle$$

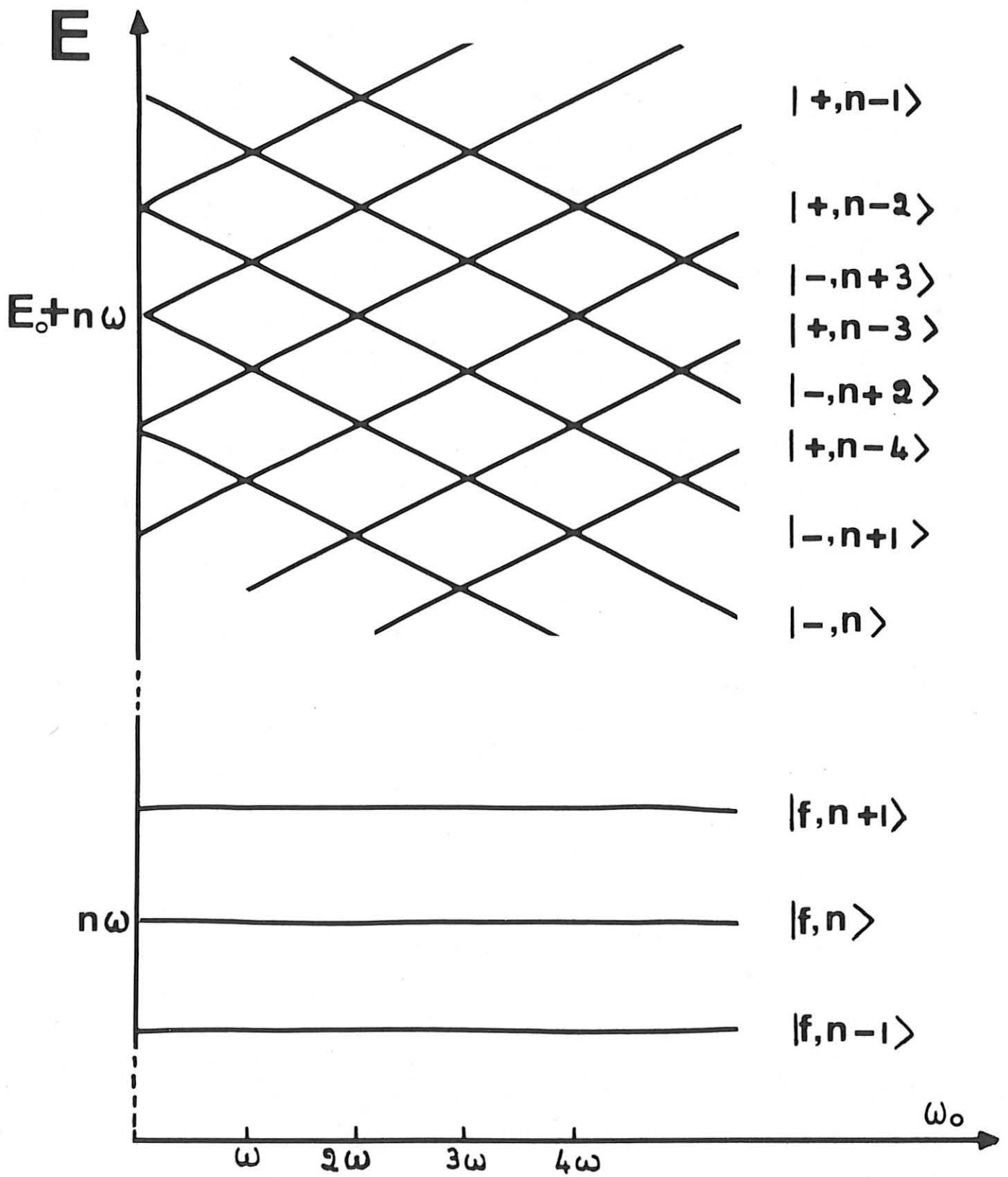


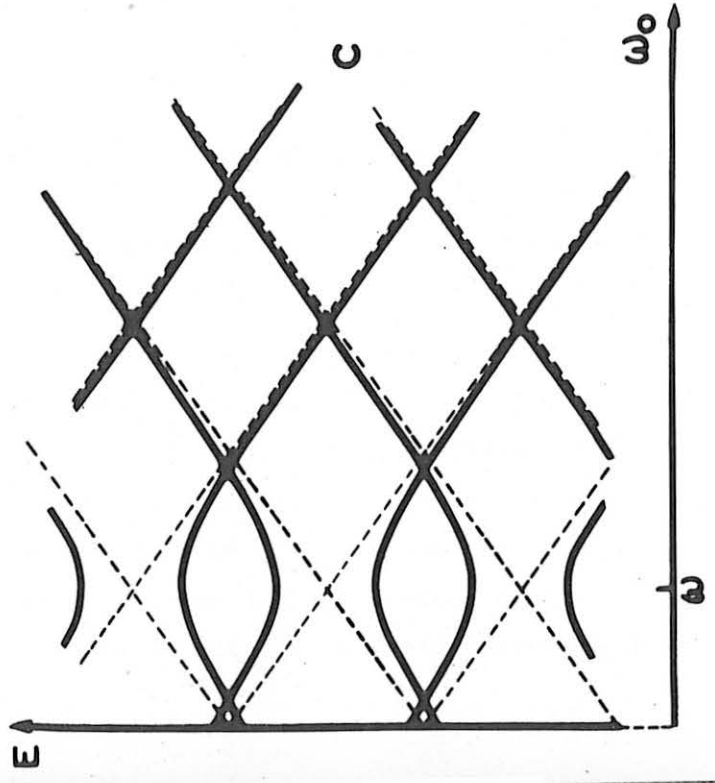
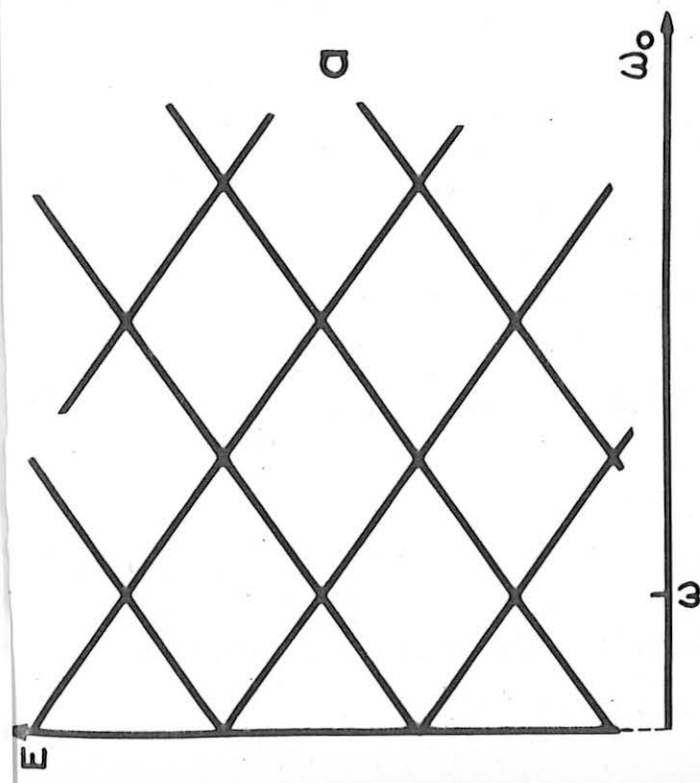
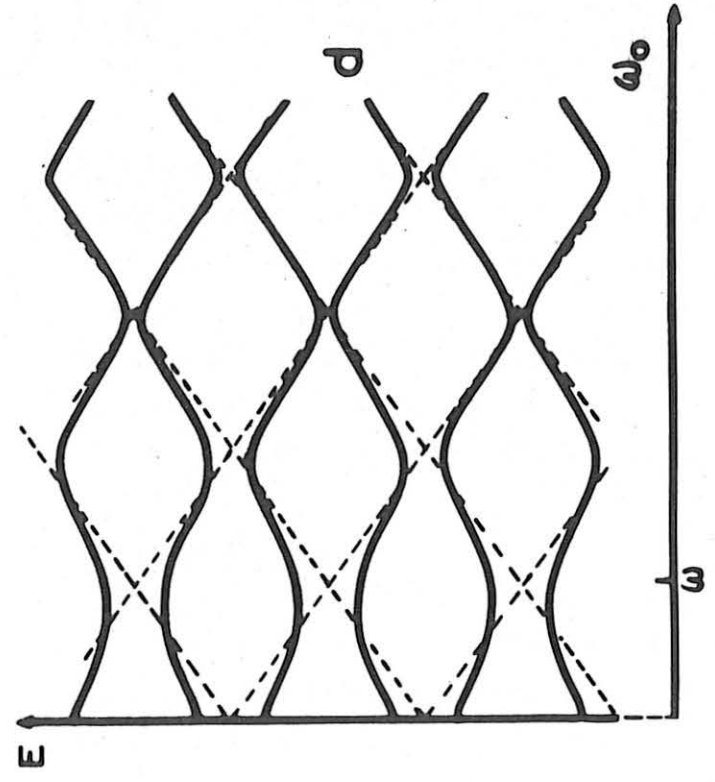
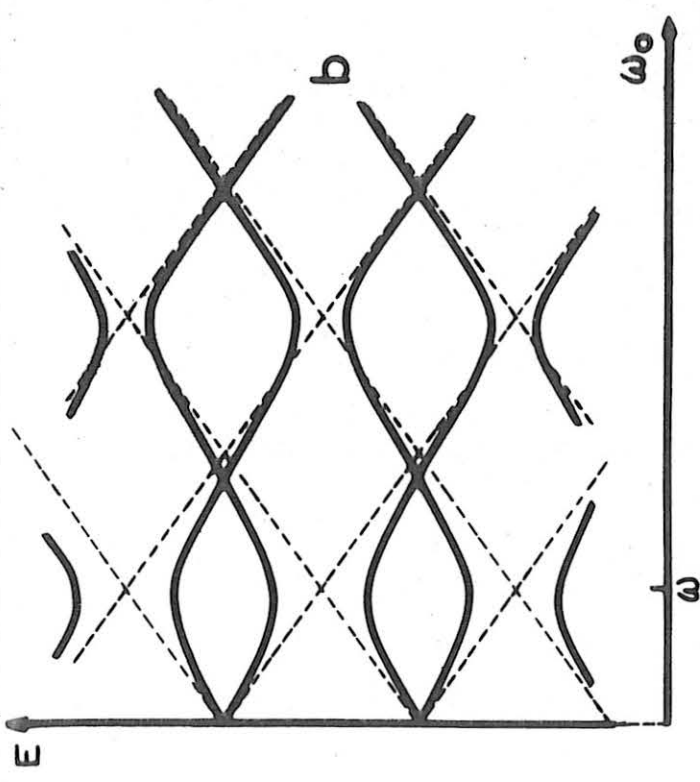
Fig. I

niveaux d'énergie de $\mathcal{H} = \omega a^\dagger a + (E_0 + \omega_0 S_z) P_e$

Polarisation	Hamiltonien de couplage	Règle de sélection	l'état $ m, n\rangle$ est couplé au 1er ordre	Sous-espaces globalement invariants par la perturbation V	
π	// Oz	$\lambda S_z (a+a^\dagger)$	$\Delta m_z = 0$ $\Delta n = \pm 1$	aux 2 états $ m, n+1\rangle$ $ m, n-1\rangle$	<ul style="list-style-type: none"> m_z reste un bon nombre quantique les sous-espaces de m_z donnés sont globalement invariants par V
	// Ox	$\lambda S_x (a+a^\dagger)$	$\Delta m_z = \pm 1$ $\Delta n = \pm 1$	4 états $ m\pm 1, n\pm 1\rangle$	<p>pour un spin 1/2 on définit ainsi 2 sous-espaces globalement invariants et disjoints</p> <p>A $\{ \epsilon, n+p \rangle, \epsilon = (-1)^p \}$</p> <p>B $\{ -\epsilon, n+p \rangle, \epsilon = (-1)^p \}$</p>
σ_+	\perp Oz	$\frac{\lambda}{\sqrt{2}} (aS_+ + a^\dagger S_-)$	$\Delta m \cdot \Delta n = -1$	2 états $ m+1, n-1\rangle$ $ m-1, n+1\rangle$	pour un spin 1/2, tous les sous-espaces de dimension 2 tels $\{ +, n\rangle -, n+1\rangle \}$ sont disjoints.
	\perp Ox	$\frac{\lambda}{\sqrt{2}} \{ (a+a^\dagger)S_y + (a-a^\dagger)S_z \}$	$\Delta n = \pm 1$ $\Delta m = 0, \pm 1$	6 états $\left\{ \begin{array}{l} m, n\pm 1\rangle \\ m\pm 1, n\pm 1\rangle \end{array} \right\}$	tous les états sont couplés entre eux; la perturbation ne laisse aucun sous-espace propre globalement invariant

TABLEAU II

Fig. III



Diagrammes d'énergie de l'atome habillé pour différentes polarisations du champ de RF

b) polarisation π perpendiculaire à H_0 (fig. III-b)

Aux points de croisements impairs (tels que $\omega_0 = (2p+1)\omega$), le couplage avec la RF lève la dégénérescence; il apparaît des anticroisements d'ordre $(2p + 1)$.

Aux points de croisements pairs, les niveaux qui se croisent ne sont pas couplés, il n'y a pas levée de dégénérescence. Toutefois, il apparaît sur tous les croisements et anticroisements un déplacement du 2ème ordre du fait du couplage avec les niveaux non résonnants.

c) polarisation σ^+ par rapport à Oz (fig. III-c)

Nous avons remarqué que le sous-espace $\{ |+, n-1\rangle, |-, n\rangle \}$ est globalement invariant par V ; nous sommes par suite ramenés à un problème de diagonalisation d'une matrice 2×2 , exactement soluble. Le diagramme ne présente qu'une série d'anticroisements d'ordre 1 pour $\omega_0 = \omega$. Les niveaux d'énergie hyperboliques admettent comme asymptotes les niveaux non perturbés.

d) polarisation σ^+ par rapport à Ox (fig. III-d)

Comme nous l'avons déjà remarqué, tous les niveaux sont alors couplés. Par suite, le diagramme d'énergie ne présente que des anticroisements. (Comme dans le cas b, le hamiltonien n'est pas exactement diagonalisable. Dans le cadre d'une théorie de perturbation, le formalisme de la résolvante ⁽⁴⁾⁽⁵⁾ permet aisément de calculer les déplacements des croisements et anticroisements ainsi que les distances minimales aux points d'anticroisement. La connaissance quantitative de l'ensemble du diagramme relève nécessairement du calcul numérique sur ordinateur).

En conclusion, quelle que soit la polarisation du champ habillant, nous voyons que l'atome "habillé" possède une structure complexe; en champ faible, il présente dans l'état excité une infinité de multiplicités (n) de dimension $(2S + 1)$, dont la séparation en énergie est ω ($K = 1$).

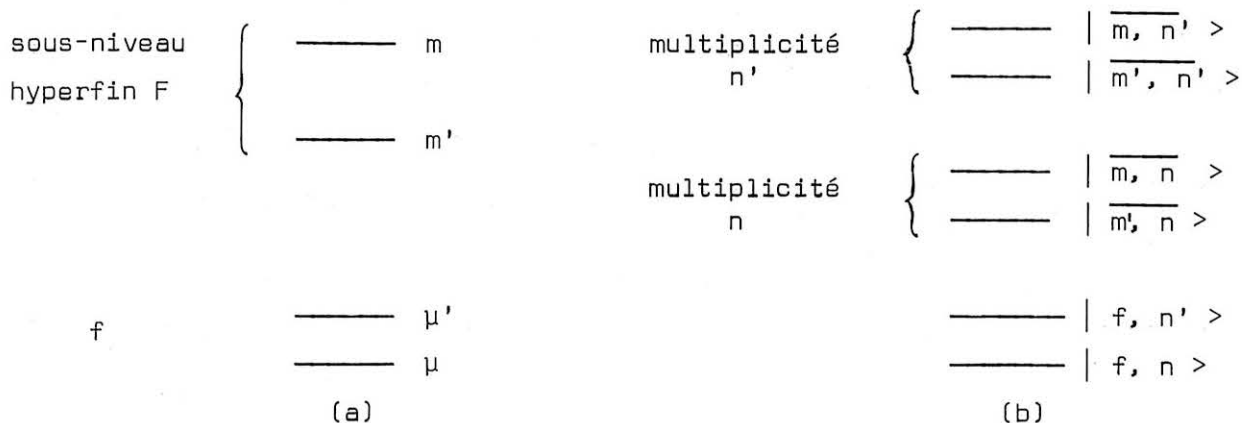
C - CALCUL DE LA LUMIERE DIFFUSEE PAR UN ATOME "HABILLE"

Soumis à une excitation optique $(\vec{k}_0, \vec{e}_{\lambda_0})$, l'atome "habillé" dont nous venons rapidement de rappeler le diagramme d'énergie réémet par émission spontanée un signal L_F partiellement dépolarisé. Pour calculer la lumière réémise avec la polarisation \vec{e}_{λ} , nous allons reprendre étape par étape le calcul fait pour la diffusion de la lumière par un atome nu. Dans ce but, il est intéressant de déve-

lopper les analogies qui existent entre un atome "nu" et un atome "habillé".

1) Parallèle entre les 2 diagrammes d'énergie

Reprenons schématiquement les diagrammes d'énergie des 2 systèmes étudiés en A) et B) dans un champ magnétique H_0



- dans l'état fondamental, nous pouvons faire un parallèle entre les états μ, μ' et les états $| f, n \rangle, | f, n' \rangle$.

Dans le cas a), nous avons supposé qu'il y a une structure dans l'état fondamental. Dans le cas b), même si l'atome ne possède qu'un seul sous-niveau, f, dans l'état fondamental, "l'habillage" par la R.F. en fait apparaître toute une série $| f, n \rangle, | f, n' \rangle \dots$

Remarquons d'autre part que, dans la mesure où le champ de RF est cohérent (⁶), la matrice densité représentant le système S dans l'état fondamental présente des cohérences "hertziennes" ($\sigma_{fn, fn'} \neq 0$) évoluant aux diverses harmoniques de la fréquence du champ habillant.

$\sigma_{fn, fn'}$ est donc l'analogue de $\sigma_{\mu\mu'}$. "Habiller" un atome diamagnétique dans l'état fondamental avec un champ RF cohérent revient à introduire des cohérences hertziennes dans son état fondamental.

- dans l'état excité, il nous faut faire le parallèle entre l'état propre $| \overline{m, n} \rangle$ de \mathcal{H} et l'état $| m \rangle$ de l'atome nu.

Poursuivons l'analogie :

Le système atomique (a), de spin nucléaire I, possède dans l'état excité une structure hyperfine, dont nous n'avons représenté en (a) qu'une multiplicité de F donné. Il est alors tentant de faire le parallèle entre les diverses multiplicités $n, n' \dots$ de (b) et les multiplicités hyperfines F, F', de (a) : séparées en champ nul, ces multiplicités se scindent l'une comme l'autre dans un

champ magnétique statique respectivement en $(2F + 1)$ et $(2S + 1)$ sous-niveaux Zeeman.

Nous sommes ainsi amenés à distinguer différents types de cohérences hertziennes dans l'état excité de l'atome "habillé" : d'une part, les cohérences entre états d'une même multiplicité analogues aux cohérences "Zeeman" de (a) $(\langle \overline{m n} | \sigma | \overline{m' n} \rangle)$; d'autre part, les cohérences entre multiplicités différentes $(\langle \overline{m n} | \sigma | \overline{m' n'} \rangle)$ analogues aux "cohérences hyperfines" de (a).

Remarque : Lorsque le champ RF est cohérent, les cohérences $\sigma_{\overline{m n}, \overline{m' n'}}$, dont la fréquence propre est voisine, en champ faible, de $(n-n') \omega$, peuvent être excitées de façon résonnante à partir des cohérences σ_{f_n, f_n} , qui oscillent à $(n-n') \omega$. Ceci nous permettra plus loin de rendre compte des diverses modulations de la lumière de fluorescence aux harmoniques de ω .

2) Les principales étapes du calcul de la lumière diffusée

Reprenons maintenant les différents processus du cycle de pompage.

- l'excitation par absorption d'un photon $(\vec{k}_0, \vec{e}_{\lambda_0})$ porte l'atome dans un état excité σ^0 . De même que pour l'atome nu, l'interaction de couplage est dipolaire électrique; dans la mesure où l'excitation optique est une excitation en raie large ($\Delta > \omega_0$, ω, ω_1 où Δ est la largeur de la raie excitatrice), le processus d'excitation peut être considéré comme instantané (par rapport au temps propre du couplage avec la radiofréquence $1/\gamma H_1$) et par suite, il est justifié ⁽³⁾ de le considérer comme globalement indépendant des photons de radiofréquence : en particulier, la durée de vie finie T_p de l'état fondamental en présence de photons optiques est indépendante de la présence de photons de RF. Il en résulte que, pour l'atome "habillé", le terme d'évolution de la matrice densité sous l'effet de l'excitation optique prend la forme simple :

$$(I.C.1) \quad \frac{d^{(1)}\sigma}{dt} = \frac{1}{T_p} \sum_{f, n_1 n'_1} \vec{e}_{\lambda_0} \cdot \vec{D} | f, n_1 \rangle \sigma_{f n_1 f n'_1} \langle f, n'_1 | \vec{e}_{\lambda_0}^* \cdot \vec{D}$$

L'analogie formelle entre (I.A.1) et (I.C.1) ne doit pas nous faire oublier le caractère remarquable de l'excitation d'un atome "habillé" lorsque le champ de RF est cohérent : du fait de l'existence de cohérences hertziennes dans l'état fondamental ($\sigma_{f_n f_n'} \neq 0$) le terme d'excitation comporte tout un spectre de modulations aux fréquences $(n-n') \omega$.

- évolution globale et calcul de la matrice densité : dans l'état excité, le système évolue ensuite sous l'action du couplage avec le champ de rayonnement d'une part (émission spontanée) et de l'ensemble des autres interactions.

De même que le processus d'excitation, le processus d'émission spontanée est globalement indépendant des photons de RF. Il en résulte que sa contribution à l'évolution de la matrice densité de l'état excité est donnée tout simplement par :

$$(I.C.2) \quad \frac{d^{(2)}\sigma}{dt} = -\Gamma\sigma$$

où Γ indépendant des photons de RF représente la largeur naturelle de l'état excité. L'évolution propre, sous l'action de l'ensemble des autres couplages, est enfin donnée par :

$$(I.C.3) \quad \frac{d^{(3)}\sigma}{dt} = -i (\mathcal{H}, \sigma)$$

\mathcal{H} étant le hamiltonien de l'atome habillé en présence des diverses perturbations. L'évolution globale est la somme de ces 3 effets.

Comme nous l'avons déjà remarqué pour l'atome nu, l'équation (I.C.3) est simple lorsqu'on l'écrit dans la base des états propres de \mathcal{H} . Le choix de cette base permet de reconduire l'ensemble des calculs, développés pour un atome nu.

On trouve en particulier, pour un pompage continu, la solution statique des équations d'évolution sous la forme :

$$(I.C.4) \quad \sigma_{mn, m'n'}^0 = \frac{1}{T_p} \langle \overline{m, n} | \sigma_{exc}^0 | \overline{m', n'} \rangle \cdot \frac{1}{\Gamma + i (E_{mn} - E_{m'n'})}$$

où $|\overline{m, n}\rangle$ et E_{mn} représentent respectivement les états propres et vecteurs propres de \mathcal{H} et $\frac{1}{T_p} \sigma_{exc}^0$ la partie statique du 2ème membre de (I.C.1).

On trouve de même, pour la solution stationnaire évoluant à la fréquence $p\omega$ (liée à l'existence de cohérences hertziennes $\sigma_{fn, fn-p} \neq 0$) :

$$(I.C.5) \quad \sigma_{mn, m'n'}^p = \frac{1}{T_p} \langle \overline{m, n} | \sigma_{exc}^p | \overline{m', n'} \rangle \cdot \frac{1}{\Gamma + i (E_{mn} - E_{m'n'} - p\omega)}$$

$\frac{1}{T_p} \sigma_{exc}^p$ représentant la partie du 2ème membre de (I.C.1) oscillant à $p\omega$.

L'étude de (I.C.5), compte tenu de la structure du diagramme d'énergie, montre la possibilité d'un transfert résonnant de cohérence si $(n-n') = p$.

- émission spontanée et détection : le signal réémis par l'atome habillé est proportionnel au nombre d'atomes qui, par émission spontanée, retombent à l'état fondamental.

Soit

$$(I.C.6) \quad L_F(e_\lambda) = \sum_{\substack{m, m' \\ n, n', n''}} \langle f, n'' | \vec{e}_\lambda \cdot \vec{D} | \overline{m, n} \rangle \sigma_{mn, m'n'} \langle \overline{m', n'} | \vec{e}_\lambda^* \cdot \vec{D} | f, n'' \rangle$$

En conclusion, dans la mesure où les processus d'excitation optique et d'émission spontanée sont instantanés et, par suite, globalement indépendants de la présence de photons de RF, nous constatons que les équations du cycle de pompage optique de l'atome "habillé" (C.1,2,3) sont formellement analogues à celles du cycle de pompage optique de l'atome "nu". De même que pour l'atome nu, il sera donc possible d'observer sur la lumière diffusée par l'atome "habillé" des résonances liées aux croisements et anticroisements des niveaux d'énergie de cet atome "habillé". L'examen des figures III montre qu'ils sont beaucoup plus nombreux que pour un atome nu.

Le problème fondamental à résoudre pour l'interprétation quantitative de ces signaux est donc le calcul des énergies propres E_{mn} et des états propres $|\overline{m, n}\rangle$ qui interviennent dans toutes les formules que nous venons de donner.

D - CAS DU CHAMP LINEAIRE

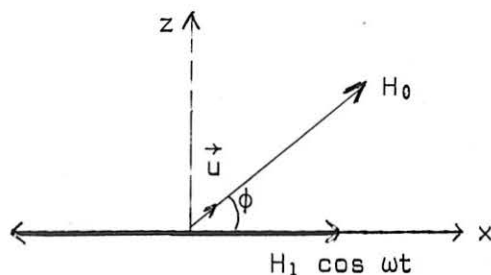
1) Direction privilégiée. Axe de quantification

Dans tout ce qui suit, nous nous intéresserons plus particulièrement aux propriétés d'un spin S en interaction avec un champ de RF linéaire $H_1 \cos \omega t$ car c'est la situation expérimentale la plus courante et la plus simple.

Comme nous le mettrons en évidence ultérieurement, la direction du champ de RF est une direction privilégiée tant du point de vue mathématique que du point de vue physique. Dans toute la suite de ce travail, l'axe de quantification sera donc donné par la direction du champ de RF (Ox).

En particulier, les opérateurs tensoriels irréductibles atomiques T_q^k que nous introduisons plus tard sont définis relativement à la base standard des vecteurs propres de $\{S^2, S_x\}$ et le nombre quantique magnétique q est relatif à Ox.

Le champ magnétique H_0 auquel est soumis l'atome ainsi habillé est a priori quelconque. Compte tenu de la symétrie de révolution du système par rapport à Ox , nous conviendrons de le prendre toujours dans le plan xOz ; sa direction sera repérée par le vecteur unitaire \vec{u}



2) Rappels sur les états propres pour $H_0 = 0$

En l'absence de perturbation extérieure, en particulier en champ magnétique nul, le hamiltonien de l'atome habillé s'écrit :

$$(I.D.1) \quad \begin{aligned} \mathcal{H}_0 &= \mathcal{H}_{RF} + V \\ &= \omega a^\dagger a + \lambda S_x (a + a^\dagger) \end{aligned}$$

Sa diagonalisation a déjà été effectuée ⁽³⁾⁽¹⁾. Nous n'en retiendrons que l'idée directrice :

\mathcal{H}_0 commutant avec S_x , la diagonalisation se ramène à un problème plus simple dans les $(2S + 1)$ sous-espaces propres de m donné. (Nous voyons dès maintenant apparaître le rôle privilégié de la direction du champ de RF; nous remarquons incidemment que seule la composante selon Ox du spin atomique se conserve lors du couplage avec la RF).

Introduisant l'opérateur de déplacement ⁽⁶⁾

$$(I.D.2) \quad D\left(-\frac{\lambda m}{\omega}\right) = \exp\left(-\frac{\lambda m}{\omega}(a^\dagger - a)\right),$$

on trouve aisément le spectre de \mathcal{H}_0 dans chaque sous-espace m

$$(I.D.3) \quad E_{m_x, n} = n\omega - \frac{\lambda^2 m^2}{\omega}$$

et ses états propres

$$(I.D.4) \quad \left| \overline{m_x, n} \right\rangle = D\left(-\frac{\lambda m}{\omega}\right) \left| m_x \right\rangle \left| n \right\rangle$$

où $| m_x \rangle$ est vecteur propre de l'opérateur moment cinétique S_x

$$S_x | m_x \rangle = m_x | m_x \rangle \quad \hbar = 1$$

et $| n \rangle$ état du champ de RF à n photons

$$a^+ a | n \rangle = n | n \rangle$$

Nous écrirons parfois (I.D.4) en séparant la partie atomique de la partie relative aux photons de RF sous la forme :

$$(I.D.5) \quad | \overline{m_x, n} \rangle = | m_x \rangle | \overline{n_m} \rangle$$

avec

$$(I.D.6) \quad | \overline{n_m} \rangle = D \left(- \frac{\lambda m}{\omega} \right) | n \rangle$$

Le terme $\frac{m^2 \lambda^2}{\omega}$ étant parfaitement inobservable ^{*)}, on constate que les états propres de \mathcal{H}_0 se groupent en multiplicités distantes de ω , (2S + 1) fois dégénérées.

Remarques

1) Les états d'une multiplicité n ne sont pas des états à n photons :

En effet, l'amplitude de probabilité de trouver p photons de RF dans $| \overline{m_x, n} \rangle$ est donnée par

$$(I.D.7) \quad A_n(p) = \langle p | D \left(- \frac{\lambda m}{\omega} \right) | n \rangle$$

D'après les résultats de l'appendice 1 de la référence (1), nous savons que, dans la mesure où n et p sont très grands, on a :

$$(I.D.8) \quad \langle p | D \left(- \frac{\lambda m}{\omega} \right) | n \rangle = J_{n-p} \left(\frac{m\omega_1}{\omega} \right)$$

où $J_{n-p}(x)$ est la fonction de Bessel simple d'ordre $(n-p)$. Dans un état de nombre quantique magnétique $m \neq 0$, la probabilité de trouver la RF dans un état à p photons ($p \neq n$) est donc généralement non nulle et égale à $J_{n-p}^2 \left(\frac{m\omega_1}{\omega} \right)$. D'après des

*) En effet, rappelons que $\lambda = \frac{\omega_1}{2\sqrt{N}}$, d'où $\frac{m^2 \lambda^2}{\omega} \sim m^2 \frac{\omega_1^2}{\omega} \frac{1}{N}$, ce qui est une quantité parfaitement négligeable compte tenu du très grand nombre de photons N contenus dans le champ de RF.

propriétés usuelles des fonctions de Bessel, nous savons que cette probabilité tend rapidement vers 0 lorsque $(n-p)$ croît et devient supérieur à quelques $m\omega_1/\omega$.

Comme le montre l'évolution du spectre des fonctions de Bessel, que nous reproduisons sur la figure (IV), pour un couplage avec un champ de RF peu intense, l'état $|\overline{n}_m\rangle$ est un état $|n\rangle$ peu contaminé, mais dès que l'intensité du champ de RF croît (et c'est en fait ici le cas qui nous intéresse), la distribution des amplitudes de probabilité, tout en restant centrée sur l'état $|n\rangle$, varie considérablement. Remarquons toutefois que le nombre moyen de photons dans ce mode reste toujours exactement \underline{n}

$$\langle \overline{n}_m | a^\dagger a | \overline{n}_m \rangle = n$$

(à un terme $\frac{\lambda^2 m^2}{\omega^2}$ près).

2) La distorsion de la partie "radiofréquence" de la fonction d'onde de l'atome "habillé" dépend d'autre part du nombre quantique magnétique m de l'état envisagé. Le recouvrement des différents états de radiofréquence est donné par (cf. réf. ¹, app. 1)

$$(I.D.9) \quad \langle \overline{n}_m | \overline{n}'_{m'} \rangle = J_{n-n'} \left((m-m') \frac{\omega_1}{\omega} \right)$$

Cette relation, de même que la relation (I.D.8), n'est valable que pour n et n' très grands. (Dans le problème qui nous intéresse, les n et n' qui interviendront sont très grands de l'ordre du nombre moyen de photons dans le mode et, par suite, cette approximation est parfaitement justifiée). Ici encore, il nous faut remarquer que ce terme tend rapidement vers 0 dès que $(n-n') > \left((m-m') \frac{\omega_1}{\omega} \right)$.

3) Distinction des différents domaines de champ H_0

Appliquons à l'atome ainsi "habillé" un champ magnétique H_0 de direction \vec{u} , le hamiltonien du système s'écrit alors

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \omega_0 S_{\vec{u}} \quad (\omega_0 = -\gamma H_0)$$

l'étude qualitative nous a montré que la dégénérescence des diverses multiplicités n est alors levée, l'étude des différents diagrammes nous permet alors de distinguer différents domaines de champ.

- Champ H_0 faible, $\omega_0 \ll \omega$, l'atome "habillé" présente un diagramme Zeeman d'aspect classique. On peut envisager la diagonalisation de \mathcal{H} dans le cadre d'une théorie de perturbations ($\omega_0 \ll \omega$)

- Champ H_0 fort ($\omega_0 \gtrsim \omega$), il apparaît, selon la direction \vec{u} du champ magnétique, une infinité de croisements ou d'anticroisements de niveaux au voisinage des points $\omega_0 = p\omega$.

Rappelons que diverses approximations ont déjà permis d'aborder ce problème :

- pour un faible couplage avec la RF, le hamiltonien $\lambda S_x (a + a^\dagger)$ peut être traité comme une perturbation ⁽⁵⁾ (c'est cette méthode qui nous a permis de tracer l'allure qualitative des diagrammes d'énergie).
- au voisinage des points de croisements ou d'anticroisements, la méthode de la résolvante ⁽¹⁾ permet de tenir compte du couplage avec l'ensemble des niveaux non résonnants et de rendre compte aisément de tous les anticroisements et déplacements à l'ordre le plus bas où ils apparaissent.

Nous adopterons donc le plan suivant pour l'étude quantitative relative au champ linéaire.

- Dans une première partie, nous étudierons les effets linéaires en champ H_0 faible ($\omega_0 \ll \omega$) (chap. II).
- Puis, dans une seconde partie, nous rechercherons, toujours en champ faible ($\omega_0 < \omega$), la contribution des termes d'ordres supérieurs. En particulier, nous mettrons en évidence un effet lié à la courbure des niveaux d'énergie (chap. III).
- Enfin, nous aborderons le problème pour un champ H_0 et un couplage H_1 quelconques (chap. IV).

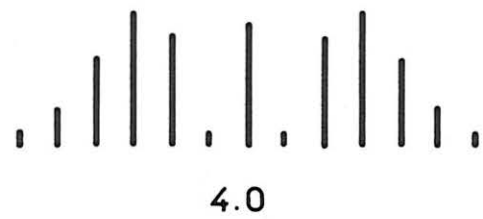
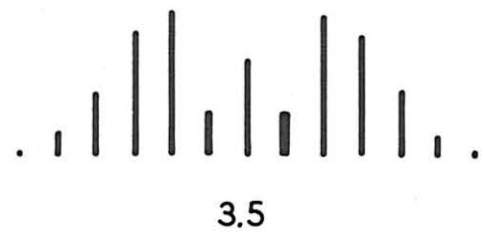
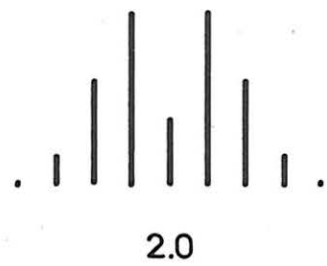
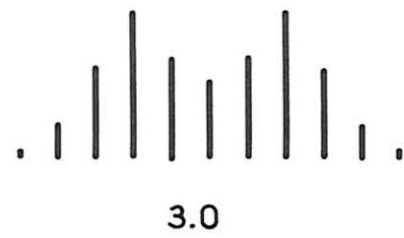
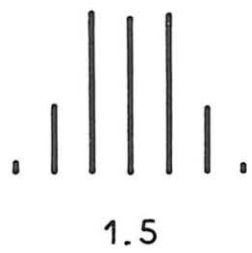


Fig. IV

Spectres des fonctions de Bessel $J_n(\theta)$

CHAPITRE I I

ETUDE QUANTITATIVE

Première Partie : CHAMP TRES FAIBLE

A - INTRODUCTION

Si le champ H_0 est très faible, nous pouvons traiter l'effet du Hamiltonien Zeeman comme une faible perturbation devant la structure de l'atome "habillé" en champ nul ($\omega_0 \ll \omega$). Pour rendre compte des effets linéaires en ω_0 , le calcul de perturbation à l'ordre le plus bas peut être mené très simplement et complètement de façon opératorielle. C'est cette méthode particulièrement compacte et élégante que nous adoptons ici.

Pour donner l'idée directrice des calculs qui suivent, il est intéressant de revenir encore une fois sur l'effet Zeeman de structure hyperfine. Dans le cadre d'une théorie de perturbation à l'ordre le plus bas $\omega_0 \ll A$ (A constante de structure hyperfine), seul intervient l'effet du champ magnétique à l'intérieur des différents sous-niveaux F définis en champ nul; on est amené alors à parler par exemple du moment magnétique d'un sous-niveau hyperfin F donné. De manière tout à fait analogue, nous commençons ici par définir un certain nombre d'opérateurs agissant soit dans une multiplicité n donnée, soit entre deux multiplicités n, n' . Les premiers introduits (§ B) sont très importants du point de vue physique; on peut en quelque sorte les considérer comme les "observables" de l'atome "habillé". Dans la mesure où ces opérateurs n'obéissent pas à des relations de commutation simples, nous en introduisons une deuxième série plus commode du point de vue mathématique (§ C) et nous établissons les diverses relations existant entre eux (§ D). Nous montrons ensuite comment ces divers opérateurs permettent de calculer simplement l'effet Zeeman de l'atome "habillé" (§ E). Enfin, nous abordons le problème du calcul de la lumière diffusée par l'atome "habillé" en explicitant chacune des étapes du cycle de pompage optique (§ F). Le dernier paragraphe (§ G) est consacré au calcul de quelques expériences dans le formalisme que nous venons d'introduire.

B - INTRODUCTION DES ${}^{nn'}T_q^{(k)}$. LES OBSERVABLES DE L'ATOME "HABILLE"

Les $(2S + 1)$ états $|\overline{m_x}, n\rangle$ (I.D.5) forment en champ nul une multiplicité $(2S + 1)$ fois dégénérée. Soit P_n le projecteur sur ce sous-espace propre ϵ_n .

Les vecteurs $|\overline{m_x}, n\rangle$ formant une base de l'espace des états, les projecteurs P_n satisfont aux relations classiques de fermeture et d'orthogonalité :

$$(II.B.1) \quad P_n P_{n'} = \delta_{nn'} P_n$$

$$(II.B.2) \quad \sum P_n = 1$$

α) Pour calculer, à l'ordre le plus bas, l'effet du champ \vec{H}_0 d'intensité H_0 ($\omega_0 = -\gamma H_0$) et de vecteur directeur \vec{u} , il faut diagonaliser le hamiltonien Zeeman $\omega_0 S_{\vec{u}}$ dans chacune des multiplicités dégénérées. En d'autres termes, à l'ordre le plus bas, nous sommes ramenés à la diagonalisation de l'opérateur $P_n S_{\vec{u}} P_n$ dans un sous-espace à $(2S + 1)$ dimensions. Les corrections d'ordre supérieur feront ensuite intervenir le couplage entre les différentes multiplicités, c'est-à-dire les termes de la forme $P_n S_{\vec{u}} P_{n'}$.

β) D'autre part, comme nous le verrons plus loin, les caractéristiques de la lumière émise ne dépendent que des valeurs moyennes à un instant donné d'opérateurs purement atomiques du type $S_x, S_y, S_z, 3S_x^2 - S^2, \dots$. De façon plus précise, σ étant la matrice densité du système S, tous les signaux optiques peuvent être calculés très aisément en fonction des quantités

$$\text{Tr} \left(\sigma (T_q^{(k)} \otimes 1_{RF}) \right)$$

où $T_q^{(k)}$ est un opérateur tensoriel irréductible agissant sur les variables atomiques (et défini par rapport à l'axe de quantification Ox)

- 1_{RF} l'opérateur identité dans l'espace de la RF et où le symbole Tr signifie que l'on doit prendre la trace totale de l'opérateur sur l'ensemble des variables atomiques et de RF. (En fait, par suite du caractère dipolaire électrique de la transition optique, ce sont seulement les valeurs $k = 1$ (orientation) et $k = 2$ (alignement) qui interviennent ici).

γ) Posons :

$$(II.B.3) \quad P_n T_q^{(k)} \otimes 1_{RF} P_{n'} = {}^{nn'}T_q^{(k)}$$

utilisant la relation (II.B.2), il vient immédiatement :

$$(II.B.4) \quad T_q^{(k)} \otimes 1_{RF} = \sum_{nn'} nn' T_q^{(k)}$$

la trace étant une opération linéaire, les signaux optiques s'expriment donc très aisément en fonction des opérateurs $P_n, \sigma P_n, nn' T_q^{(k)}$ (avec $k = 0, 1, 2$), et les opérateurs $P_n S_u \rightarrow P_n$ et $P_n S_v \rightarrow P_n$, introduits en (α) sont également des combinaisons linéaires simples des $nn' T_q^{(k)}$ et $nn' T_q^{(k)}$ avec $k = 1$.

Notons l'analogie entre les opérateurs $nn' T_q^{(k)}$ que nous venons de définir et les opérateurs introduits par FANO (⁷), BEN REUVEN (⁸), OMONT (⁹) : $FF' T_q^{(k)}$ projections des $T_q^{(k)}$ dans les sous-niveaux hyperfins F d'un niveau atomique donné ("observables" du sous-niveau F) et $FF' T_q^{(k)}$ projection des $T_q^{(k)}$ entre sous-niveaux hyperfins distincts F et F'.

δ) Remarquons enfin que, en champ H_0 nul, les $nn' T_q^{(k)}$ observables *) de l'atome "habillé" pour un habillage correspondant à un nombre moyen de photons \bar{n} ont des fréquences d'évolution nulle : ce sont des observables statiques. Par contre, même en champ nul, les $nn' T_q^{(k)}$ évoluent aux fréquences $(n-n') \omega$.

Nous verrons plus loin qu'en champ faible, les $nn' T_q^{(k)}$ et $nn' T_q^{(k)}$ représentent respectivement les composantes basse et haute fréquence du mouvement de l'observable $T_q^{(k)}$ sur l'atome "habillé".

C - UNE BASE ORTHONORMEE D'OPERATEURS : LES $nn' T_q^{(k)}$

α) Comme nous venons de le voir, les $nn' T_q^{(k)}$ sont des opérateurs importants du point de vue physique. Mais du point de vue mathématique, ils présentent un certain nombre de défauts.

- les $|m_x, n\rangle$ ne formant pas une base standard, les éléments de matrice des $nn' T_q^{(k)}$ ne sont pas simples; utilisant la relation (II.B.3), on trouve ainsi :

*) En toute rigueur, les opérateurs $nn' T_q^{(k)}$ ne sont pas des observables, car ils ne sont pas hermitiques. On peut néanmoins écrire toutes les observables atomiques sous forme de combinaisons linéaires simples des $nn' T_q^{(k)}$ (k fixé) que nous appellerons donc par extension des observables.

$$(II.C.1) \quad \langle \overline{m_x n} | {}^{n_1 n'_1} T_q^{(k)} | \overline{m'_x n'} \rangle = \delta_{nn_1} \cdot \delta_{n'n'_1} J_{n-n'} \left(\frac{(m-m')\omega_1}{\omega} \right) \langle m_x | T_q^{(k)} | m'_x \rangle$$

ce qui s'écrit encore, compte tenu des règles de sélection sur les $T_q^{(k)}$

$$(II.C.2) \quad \langle \overline{m_x n} | {}^{n_1 n'_1} T_q^{(k)} | \overline{m'_x n'} \rangle = \delta_{nn_1} \delta_{n'n'_1} J_{n-n'} \left(\frac{q\omega_1}{\omega} \right) \langle m_x | T_q^{(k)} | m'_x \rangle$$

tous les calculs des éléments de matrice des ${}^{nn'} T_q^{(k)}$ dans cette base sont lourds, car les coefficients de Clebsch-Gordan se trouvent pondérés par des fonctions de Bessel.

- enfin, et c'est le plus important : les ${}^{nn'} T_q^{(k)}$ n'obéissent pas aux lois de commutation et par suite à l'algèbre classique des opérateurs tensoriels irréductibles (¹⁰).

Prenons l'exemple du moment cinétique ($k = 1$); il vient en effet

$$(II.C.3) \quad ({}^{nn} S_x, {}^{nn} S_{\pm}) = \pm {}^{nn} S_{\pm}$$

et

$$(II.C.4) \quad ({}^{nn} S_+, {}^{nn} S_-) = 2J_0^2 \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right) {}^{nn} S_x$$

Il en résulte en particulier que les opérateurs ${}^{nn'} T_q^{(k)}$ d'une multiplicité n ne se transforment pas sous l'action d'une rotation R selon la loi donnée dans la référence (¹⁰); les $(2k + 1)$ opérateurs ${}^{nn'} T_q^{(k)}$ ne sont donc pas les composantes standard d'un opérateur tensoriel irréductible dans la multiplicité n (on en déduit immédiatement que le mouvement des observables de l'atome "habillé" diffère de celui des observables de l'atome "nu").

β) Définition des ${}^{nn'} \mathcal{L}_q^{(k)}$

Pour remédier à ces inconvénients, nous allons introduire des nouveaux opérateurs beaucoup plus maniables sur le plan mathématique et que l'on peut relier assez simplement aux ${}^{nn'} T_q^{(k)}$. Nous définissons ces nouveaux opérateurs, ${}^{nn'} \mathcal{L}_q^{(k)}$, de telle sorte qu'ils aient mêmes éléments de matrice sur la base des $|\overline{m_x, n}\rangle$ que les $T_q^{(k)}$ de l'atome "nu" sur une base standard. Soit :

$$(II.C.5) \quad \langle \overline{m_x, p} | {}^{nn'} \mathcal{L}_q^{(k)} | \overline{m'_x, p'} \rangle = \delta_{n,p} \delta_{n',p'} \langle m_x | T_q^{(k)} | m'_x \rangle$$

γ) Propriétés des ${}^{nn'}\mathcal{E}_q^{(k)}$

(1) - Les ${}^{nn'}\mathcal{E}_q^{(k)}$ forment un ensemble complet d'opérateurs. Avec une normalisation convenable, les ${}^{nn'}\mathcal{E}_q^{(k)}$ vérifient les relations d'orthogonalité

$$(II.C.6) \quad \text{Tr} \left\{ {}^{nn'}\mathcal{E}_q^{(k)} {}^{nn'}\mathcal{E}_{q'}^{(k')} \right\}^\dagger = \delta_{kk'} \delta_{qq'}$$

et la relation de conjugaison hermitique :

$$(II.C.7) \quad {}^{nn'}\mathcal{E}_q^{(k)\dagger} = (-)^q {}^{n'n}\mathcal{E}_{-q}^{(k)}$$

Ils constituent donc une base orthonormée particulièrement commode pour les opérateurs de l'espace de Hilbert.

(2) - Tous les calculs sur les ${}^{nn'}\mathcal{E}_q^{(k)}$ dans la base des états $| \overline{m_x}, n \rangle$ sont formellement analogues à ceux sur les $T_q^{(k)}$, dans une base standard $\{ S^2, S_x \}$. En particulier, il y a transposition de toutes les règles de sélection classiques (Clebsch-Gordan).

(3) - Enfin, ils obéissent aux lois de commutation classiques : introduisant l'opérateur ${}^{nn}\mathcal{S}$, opérateur de l'atome "habillé" qui s'identifie au moment cinétique S à intensité de couplage nul, il vient :

$$(II.C.8) \quad ({}^{nn}\mathcal{S}_\pm, {}^{nn}\mathcal{E}_q^{(k)}) = \sqrt{k(k+1) - q(q \pm 1)} {}^{nn}\mathcal{E}_{q \pm 1}^{(k)}$$

$$(II.C.9) \quad ({}^{nn}\mathcal{S}_x, {}^{nn}\mathcal{E}_q^{(k)}) = q {}^{nn}\mathcal{E}_q^{(k)}$$

On en déduit que les opérateurs ${}^{nn}\mathcal{E}_q^{(k)}$ obéissent à l'algèbre classique des opérateurs tensoriels irréductibles de l'atome "nu".

(4) - Remarquons enfin que le produit ${}^{nn'}\mathcal{E}_q^{(k)} {}^{n'n}\mathcal{E}_{q'}^{(k')}$ est une combinaison linéaire des seuls opérateurs ${}^{nn''}\mathcal{E}_Q^{(K)}$ avec $| k-k' | \leq K \leq k+k'$
 $Q = q + q'$

D - RELATION ENTRE LES ${}^{nn'}T_q^{(k)}$ ET LES ${}^{nn'}\mathcal{E}_q^{(k)}$

D'après les relations (II.C.2) et (II.C.5), on trouve immédiatement que l'opérateur ${}^{nn'}T_q^{(k)}$ se déduit de l'opérateur ${}^{nn'}\mathcal{E}_q^{(k)}$ par la relation

$$(II.D.1) \quad {}^{nn'}T_q^{(k)} = J_{n-n'} \left(q \frac{\omega_1}{\omega} \right) {}^{nn'}\mathcal{E}_q^{(k)}$$

Sachant que $J_{n-n'}(0) = \delta(n-n')$, l'équation (II.D.1) nous montre que seules les observables transverses par rapport à la radiofréquence ($q \neq 0$) sont altérées par "l'habillage".

Dans le cas particulier du moment cinétique ($k = 1$), on trouve ainsi :

$$(II.D.2) \quad nn' S_x = \delta(n-n') nn' \mathcal{S}_x$$

$$(II.D.3) \quad nn' S_{\pm} = J_{n-n'} \left(\pm \frac{\omega_1}{\omega} \right) nn' \mathcal{S}_{\pm}$$

ce qui conduit aux relations suivantes entre les composantes cartésiennes

$$(II.D.4) \quad n-n' = 2p \quad \left\{ \begin{array}{l} nn' S_y = J_{n-n'} \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right) nn' \mathcal{S}_y \\ nn' S_z = J_{n-n'} \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right) nn' \mathcal{S}_z \end{array} \right.$$

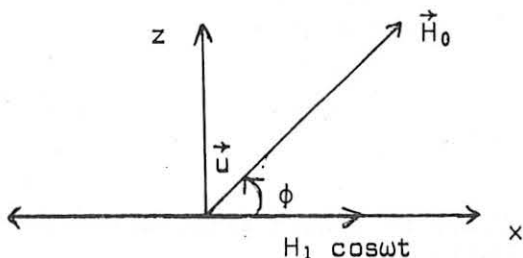
$$n-n' = 2p+1 \quad \left\{ \begin{array}{l} nn' S_y = +i J_{n-n'} \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right) \mathcal{S}_z \\ nn' S_z = -i J_{n-n'} \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right) \mathcal{S}_y \end{array} \right.$$

E - EFFET ZEEMAN DE L'ATOME "HABILLE"

Montrons immédiatement sur cet exemple simple que le formalisme que nous venons de développer est particulièrement bien adapté pour les calculs de perturbation à l'ordre le plus bas.

α) Le hamiltonien Zeeman

Soit \vec{H}_0 le champ magnétique statique dirigé le long du vecteur unitaire \vec{u} faisant l'angle ϕ avec Ox, auquel est soumis l'atome "habillé". (Rappelons que H_0 est faible, tel que $\omega_0 = -\gamma H_0 \ll \omega_1, \omega$).



L'action de ce champ lève la dégénérescence d'ordre $(2S+1)$ de chaque multiplicité n .

La séparation des sous-niveaux est donnée à l'ordre le plus bas par les valeurs propres du hamiltonien de perturbation ${}^{nn} \mathcal{H}_{\text{Zeeman}}$

$$(II.E.1) \quad {}^{nn} \mathcal{H}_{\text{Zeeman}} = P_n \omega_0 S_U P_n$$

qui, compte tenu de (II.D.4), se met sous la forme

$$(II.E.2) \quad {}^{nn} \mathcal{H}_{\text{Zeeman}} = \omega_0 \cos \phi \, {}^{nn} \mathcal{H}_x + \omega_0 \sin \phi J_0 \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right) {}^{nn} \mathcal{H}_z$$

le hamiltonien Zeeman de l'atome "habillé" est donc formellement le même que celui d'un atome "nu" plongé dans un champ fictif H'_0 tel que :

$$(II.E.3) \quad \begin{cases} H'_{0x} = H_0 \cos \phi \\ H'_{0z} = H_0 \sin \phi J_0 \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right) \\ H'_{0y} = 0 \end{cases}$$

Sous l'action de cette perturbation, chaque multiplicité se scinde donc en $(2S + 1)$ sous-niveaux équidistants séparés de

$$(II.E.4) \quad \Delta E_z = \omega_0 \sqrt{\cos^2 \phi + \sin^2 \phi J_0^2 \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right)}$$

Cas particuliers : 1) $\phi = 0$. Le champ H_0 est parallèle au champ habitant le hamiltonien. \mathcal{H} est alors exactement diagonalisé (³). Nous constatons que la séparation Zeeman est indépendante de ω_1/ω et égale à celle obtenue dans le même champ pour un atome "nu". Le couplage avec la RF ne modifie pas les propriétés magnétiques de l'atome le long de la direction du champ de RF.

2) $\phi = \pi/2$. Le champ H_0 est dirigé selon Oz; la séparation Zeeman est alors minimale pour un champ d'intensité ω_0 donnée ($\Delta E = \omega_0 J_0 \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right)$). Pour les valeurs de ω_1/ω annulant $J_0 \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right)$, on observe même que les $(2S+1)$ sous-niveaux du multiplet viennent se confondre (c'est le cas déjà étudié par HAROCHE théoriquement et expérimentalement (¹¹)).

Nous voyons donc que l'effet du couplage avec la RF modifie de façon anisotrope les propriétés magnétiques de l'atome. Cette modification est, d'autre part, fonction de l'intensité du couplage (ω_1/ω).

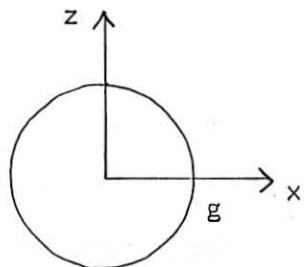
β) Facteur de Landé de l'atome "habillé"

Pour rendre compte de ces propriétés et du résultat (II.E.4), nous pouvons introduire, pour l'atome "habillé", un facteur de Landé à caractère tensoriel, donné par :

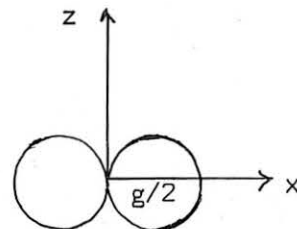
$$(II.E.5) \quad \bar{g}(\phi) = g \sqrt{\cos^2 \phi + J_0^2 \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right) \sin^2 \phi}$$

où g est le facteur de Landé de l'atome "nu".

On peut envisager de représenter le magnétisme de l'atome "habillé" en construisant la surface de révolution dont la représentation en coordonnées polaires est donnée par (II.E.5)



a) $\frac{\omega_1}{\omega} = 0$



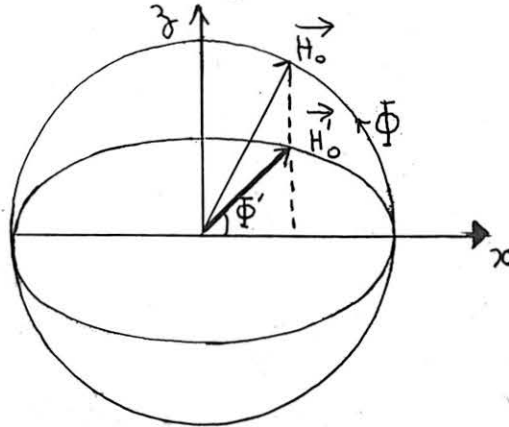
b) $J_0 \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right) = 0$

C'est une surface de révolution du 4^e degré (fig. XIII) qui se déforme continuellement depuis la sphère de rayon g (fig. a ; $\omega_1/\omega = 0$) jusqu'à la figure b : 2 sphères de rayon $g/2$ tangentes en 0 le long de Oz (cette situation se produit chaque fois que ω_1/ω est égal à l'un des zéros de la fonction de Bessel J_0). C'est le seul cas pour lequel le facteur de Landé s'annule exactement dans le plan perpendiculaire à la direction de la RF; pour toutes les autres directions, on obtient alors le minimum de $g(\phi)$ (Notons pour mémoire que l'on peut, comme en optique des milieux uniaxes, décrire cette anisotropie en représentant $1/\bar{g}$ en fonction de ϕ : on obtient ainsi un ellipsoïde de révolution d'ellipticité $\sqrt{1 - J_0^2 \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right)}$ qui peut être appelé l'ellipsoïde des facteurs de Landé; dans cette représentation, le grand axe de l'ellipsoïde tend vers l'infini lorsque ω_1/ω tend vers un des zéros de $J_0 \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right)$).

γ) Représentation géométrique du champ fictif \vec{H}'

Grâce à l'introduction des opérateurs $nn' \mathcal{L}_q^{(k)}$, nous avons pu montrer, dans le paragraphe α, que l'effet Zeeman de l'atome "habillé" dans le champ \vec{H}_0 se déduit très simplement de celui d'un atome "nu" dans le champ fictif \vec{H}'_0 donné par (II.F.3). Il est donc utile de donner une représentation géométrique de

$\vec{H}'_0(\phi')$. C'est un champ de vecteurs à symétrie de révolution (axe Ox). En chaque point de l'espace, on peut construire aisément le vecteur $\vec{H}'_0(\phi')$ qui se déduit du champ réel $\vec{H}_0(\phi)$ par une affinité orthogonale d'axe Ox et de rapport $J_0(\frac{\omega_1}{\omega})$.



F - POMPAGE OPTIQUE D'UN ATOME "HABILÉ"

Après avoir introduit les observables de l'atome "habillé" et étudié leur comportement physique, nous montrons maintenant comment l'on peut mener le calcul quantitatif d'une expérience donnée.

Nous calculons pour cela la lumière diffusée par l'atome "habillé" pour des conditions d'excitation et de détection données, en suivant les différentes étapes décrites dans la partie qualitative : excitation, évolution propre et calcul de l'équation globale d'évolution ("équation pilote"), détection. Nous effectuons systématiquement tous ces calculs dans la base des ${}^{nn'}\mathcal{C}_Q^{(K)}$ sachant, d'après la formule (II.D.1), que la connaissance des ${}^{nn'}\mathcal{C}_Q^{(K)}$ nous renseigne immédiatement sur les observables ${}^{nn'}T_q^{(k)}$ de l'atome "habillé".

I) Excitation

a) opérateur densité décrivant l'état obtenu par excitation optique

Nous avons montré dans la partie qualitative (I.C.1) que l'effet d'une excitation optique "broadline" sur le système atomique pouvait être décrit par l'opérateur :

$$(II.F.1) \quad \frac{d^{(1)}\sigma}{dt} = \frac{1}{T_p} (\vec{e}_{\lambda_0} \cdot \vec{D}) (\sigma_f) (\vec{e}_{\lambda_0}^* \cdot \vec{D})$$

où \vec{D} est l'opérateur dipolaire électrique

\vec{e}_{λ_0} la polarisation de la lumière excitatrice

σ_f la matrice densité de l'atome "habillé" dans l'état fondamental.

Dans la mesure où nous n'envisageons que des atomes diamagnétiques dans l'état fondamental (ou éventuellement à structure magnétique nucléaire négligeable), la matrice σ_f ne présente pas de corrélations entre les variables atomiques et celles de radiofréquence.

Comme les variables optiques et de radiofréquence commutent, l'opérateur d'excitation optique se met sous la forme

$$(II.F.2) \quad \frac{d^{(1)}\sigma}{dt} = \frac{1}{T_p} \vec{e}_{\lambda_0} \cdot \vec{D} | f \rangle \langle f | \vec{e}_{\lambda_0}^* \cdot \vec{D} \otimes \sigma_{RF}$$

Ceci traduit le fait suivant : durant le temps de passage $1/\Delta$ du train d'onde optique sur le système atomique, celui-ci n'a pas le temps de se coupler avec la RF, car pour une excitation "broadline" $1/\Delta \ll 1/\omega_1$. Comme pour un atome "nu" (⁹), nous pouvons faire une décomposition tensorielle de la partie atomique du terme d'excitation optique. La transition étant dipolaire électrique, les éléments de matrice de l'excitation optique obéissent à la règle de sélection $\sigma_{mm'}^{exc} = 0$ si $|m-m'| > 2$. L'opérateur d'excitation optique s'écrit donc :

$$(II.F.3) \quad \frac{d^{(1)}\sigma}{dt} = \frac{1}{T_p} \left(\sum_{k,q} c_q^{*k} T_q^{(k)} \right) \otimes \sigma_{RF} \quad \underline{k \leq 2}$$

l'hermiticité de la matrice densité et les règles d'orthogonalité des $T_q^{(k)}$ impliquent que

$$c_q^{*k} = (-1)^q c_{-q}^k$$

A ce stade du calcul, il est important de remarquer que les coefficients c_q^k sont indépendants du couplage avec la RF; ils représentent exactement la population, les 3 composantes de l'orientation et les 5 composantes de l'alignement créés par la même excitation optique sur l'atome "nu".

b) taux d'excitation des observables $nn'_q^{(k)}$

Connaissant la forme de la matrice densité d'excitation, il nous faut maintenant calculer la vitesse avec laquelle sont excitées les différentes observables de l'atome "habillé". C'est dans ce but que nous évaluons

$$(II.F.4) \quad \frac{d^{(1)}}{dt} \langle nn' \mathcal{E}_Q^{(K)} \rangle = \frac{1}{T_p} \text{Tr} \left(\frac{d^{(1)}\sigma}{dt} \cdot nn' \mathcal{E}_Q^{(K)} \right)$$

Pour ceci, il nous faut au préalable préciser la forme de σ_{RF} décrivant le champ de radiofréquence libre.

1) Dans un premier modèle, nous supposons que le champ de RF est dans une superposition incohérente d'états propres de $\omega a^\dagger a$ (la matrice σ_{RF} est alors diagonale sur la base des kets $|n\rangle$).

2) Puis, dans une approche plus réaliste, nous tiendrons compte du caractère cohérent du champ de RF (phase bien définie). L'état quantique du champ cohérent est alors un état de GLAUBER (⁶), $|\alpha\rangle$, dont nous rappelons les propriétés essentielles dans l'appendice I. Compte tenu de (II.F.3), nous voyons alors que le calcul de (II.F.4) nécessite la décomposition sur la base des $n'n'' \mathcal{E}_Q^{(K)}$ d'expressions tensorielles du type $(T_Q^{(K)} \text{ o } \sigma_{RF})$. C'est ce que nous réalisons en détail dans l'appendice I. Tous calculs faits, il vient :

pour un champ incohérent :

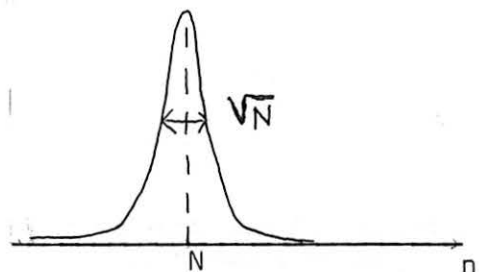
$$(II.F.5) \quad \frac{d^{(1)}}{dt} \langle nn' \mathcal{E}_Q^{(K)} \rangle = \frac{1}{T_p} c_Q^K p(n) J_{n-n'} \left(\frac{Q\omega_1}{\omega} \right)$$

et pour un champ cohérent :

$$(II.F.5 \text{ bis}) \quad \frac{d^{(1)}}{dt} \langle nn' \mathcal{E}_Q^{(K)} \rangle = \frac{1}{T_p} c_Q^K p(n) e^{i(n-n')\omega t} e^{-i \frac{Q\omega_1}{\omega} \sin \omega t}$$

où $p(n)$ représente la probabilité de trouver n photons de RF dans le mode considéré. Rappelons que dans les 2 cas envisagés ici, cette loi de probabilité centrée en N (nombre moyen de photons dans le mode) présente une dispersion grande en valeur absolue, mais extrêmement faible en valeur relative (de l'ordre de $1/\sqrt{N}$). Rappelons enfin qu'elle vérifie la condition de normalisation :

$$(II.F.6) \quad \sum_n p(n) = 1 \quad p(n)$$



Des équations (II.F.5) et (II.F.5 bis), on tire immédiatement la vitesse d'excitation des observables $nn'T_Q^{(K)}$:

pour un champ incohérent :

$$(II.F.7) \quad \frac{d^{(1)}}{dt} \langle nn'T_Q^{(K)} \rangle = \frac{1}{T_p} c_Q^K p(n) J_{n-n'}^2 \left(\frac{Q\omega_1}{\omega} \right)$$

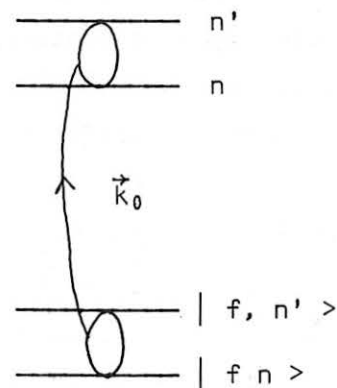
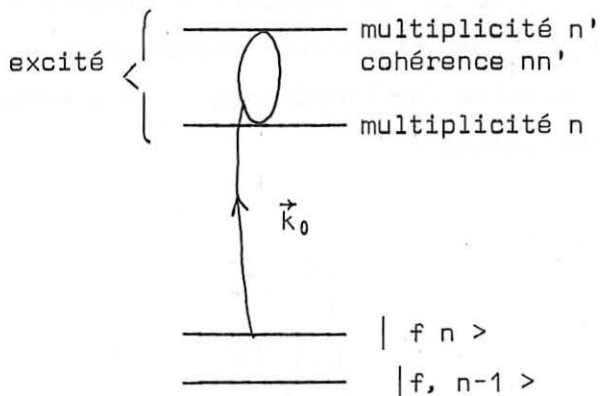
et pour un champ cohérent :

$$(II.F.7 \text{ bis}) \quad \frac{d^{(1)}}{dt} \langle nn'T_Q^{(K)} \rangle = \frac{1}{T_p} c_Q^K p(n) J_{n-n'} \left(\frac{Q\omega_1}{\omega} \right) e^{i(n-n')\omega t} e^{-iQ\frac{\omega_1}{\omega} \sin \omega t}$$

c) Remarques

1° Ce calcul est réalisé dans une approximation d'ordre 0 en ω_0 . Nous avons en effet calculé la vitesse d'excitation des différentes "observables" de l'atome "habillé" comme si le pompage s'effectuait en champ nul ($\omega_0 = 0$), ce qui n'est généralement pas le cas. Toutefois, dans la mesure où l'excitation se fait en raie large ($1/\Delta \ll 1/\omega_0$), il est tout aussi justifié de négliger le couplage avec le champ magnétique statique que le couplage avec le champ de RF (cf remarque page 26). Notons d'ailleurs que l'on effectue une approximation analogue lors du calcul du pompage optique d'un niveau hyperfin.

2° La comparaison des expressions (II.F.5) et (II.F.5 bis) (ou (II.F.7) et (II.F.7 bis)) appelle d'autre part les commentaires suivants :



a) excitation optique dans un champ de RF incohérent

b) excitation optique dans un champ de RF cohérent

lorsque le champ de RF est incohérent, l'atome "habillé" dans l'état fondamental ne possède pas de cohérences hertziennes. L'excitation des diverses grandeurs de l'état excité ne peut être que statique. D'autre part, l'efficacité d'excitation des opérateurs $nn' \mathcal{E}_q^{(k)}$ varie comme $J_{n-n'}(q \frac{\omega_1}{\omega})$. L'étude du spectre des fonctions de Bessel nous montre que cette efficacité décroît très rapidement lorsque $(n-n') \gtrsim \omega_1/\omega$.

Considérons maintenant le cas où le champ de RF est cohérent. Le développement de (II.F.5 bis), compte tenu de l'égalité

$$(II.F.8) \quad e^{-iQ \frac{\omega_1}{\omega} \sin \omega t} = \sum_p J_p \left(Q \frac{\omega_1}{\omega} \right) e^{-ip \omega t},$$

nous donne le même terme statique que (II.F.5) :

$$\frac{1}{T_p} c_Q^K p(n) J_{n-n'} \left(Q \frac{\omega_1}{\omega} \right)$$

terme qui provient de l'excitation des cohérences (n, n') à partir des populations de l'état fondamental. Il apparaît en outre tout un spectre de modulations aux harmoniques du champ "habillant"; dans notre formalisme, ces termes sont liés à l'existence dans l'état fondamental de l'atome "habillé" par un champ de RF cohérent, de cohérences hertziennes évoluant avec des relations de phase bien définies, aux fréquences $(n-n') \omega$. Remarquons que ce phénomène est bien connu dans les expériences de pompage optique classique : c'est en particulier ce transfert de cohérences hertziennes de l'état fondamental à l'état excité qui permet d'expliquer les modulations aux fréquences d'évolution de l'état fondamental de la lumière de fluorescence ⁽²⁾.

II) Equation d'évolution globale des observables de l'atome "habillé"

Connaissant le terme source de l'équation globale d'évolution des $nn' \mathcal{E}_q^{(k)}$, il nous faut maintenant expliciter les 2 autres termes correspondant respectivement aux processus d'évolution propre dans l'état excité et de relaxation.

a) évolution propre

Dans l'état excité, l'évolution des observables de l'atome "habillé" est régie par le hamiltonien

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + V$$

où $\mathcal{H}_0 = \omega a^\dagger a + \lambda S_x (a + a^\dagger)$

et V représente le hamiltonien de perturbation auquel est soumis l'atome "habillé" dans l'état excité (hamiltonien Zeeman, etc...).

Par raison de simplicité, nous raisonnons toujours sur les opérateurs $nn' \mathcal{C}_q^{(k)}$: leur équation d'évolution propre dans l'état excité s'écrit :

$$(II.F.9) \quad i \frac{d^{(2)}}{dt} nn' \mathcal{C}_q^{(k)} = (nn' \mathcal{C}_q^{(k)}, \mathcal{H})$$

- Considérons d'abord le cas où $V = 0$. Il vient alors :

$$i \frac{d^{(2)}}{dt} nn' \mathcal{C}_q^{(k)} = (n' - n)\omega nn' \mathcal{C}_q^{(k)}$$

Comme nous l'avons annoncé dans le paragraphe (II-B- δ), l'on voit que chaque opérateur $nn' \mathcal{C}_q^{(k)}$ évolue à la fréquence $(n - n')\omega$.

- Si $V \neq 0$, l'équation (II.F.9) se met sous la forme

$$(II.F.10) \quad i \frac{d^{(2)}}{dt} nn' \mathcal{C}_q^{(k)} = (n' - n)\omega nn' \mathcal{C}_q^{(k)} + (nn' \mathcal{C}_q^{(k)}, V)$$

Introduisant deux fois la relation de fermeture sur les projecteurs P_n , nous pouvons développer le hamiltonien de perturbation V sous la forme

$$V = \sum_{n, n'} P_n V P_{n'}$$

l'équation d'évolution (II.F.10) de $nn' \mathcal{C}_q^{(k)}$ fait donc intervenir des opérateurs de la forme : $nn' \mathcal{C}_q^{(k)} P_{n'} V P_n$: de tels opérateurs agissant entre les multiplicités n et n'' peuvent être décomposés de façon univoque sur le sous-espace des $nn'' \mathcal{C}_q^{(k)}$. A l'ordre 0 en V , la remarque précédente nous montre que ces opérateurs évoluent à la fréquence $(n - n'')\omega$. Si $n - n'' \neq n - n'$, l'effet de ces termes sur l'évolution de $nn' \mathcal{C}_q^{(k)}$ est faible (approximation séculaire). Dans tous les calculs qui suivent, nous négligerons donc ces termes non séculaires ($n'' \neq n'$).

Dans cette approximation, l'équation (II.F.10) devient :

$$(II.F.11) \quad i \frac{d^{(2)}}{dt} nn' \mathcal{C}_q^{(k)} = (n' - n)\omega nn' \mathcal{C}_q^{(k)} + nn' \mathcal{C}_q^{(k)} P_{n'} V P_n - P_n V P_n nn' \mathcal{C}_q^{(k)}$$

Remarquons que dans la mesure où $|n-n'| \ll N$, nombre moyen de photons dans le mode envisagé, on a :

$$P_n V P_n \neq P_{n'}, V P_{n'} = \bar{V} \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right)$$

l'équation (II.F.11) prend alors la forme

$$(II.F.12) \quad i \frac{d^{(2)}}{dt} nn' \mathcal{C}_q^{(k)} = (n'-n)\omega nn' \mathcal{C}_q^{(k)} + (nn' \mathcal{C}_q^{(k)}, \bar{V} \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right))$$

Dans la représentation d'interaction définie par

$$(II.F.13) \quad nn' \mathcal{C}_q^{(k)} = e^{i(n-n')\omega t} nn' \tilde{\mathcal{C}}_q^{(k)}$$

tous les opérateurs $nn' \tilde{\mathcal{C}}_q^{(k)}$ ont même loi d'évolution

$$(II.F.14) \quad i \frac{d^{(2)}}{dt} nn' \tilde{\mathcal{C}}_q^{(k)} = (nn' \tilde{\mathcal{C}}_q^{(k)}, \bar{V} \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right))$$

leur mouvement peut donc être décrit très simplement comme celui de l'observable $T_q^{(k)}$ d'un atome "nu" sous l'effet de la perturbation "fictive" $\bar{V} \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right)$. En particulier, si V décrit l'interaction avec un champ magnétique \vec{H}_0 , $\bar{V} \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right)$ décrit l'interaction avec le champ fictif \vec{H}'_0 calculable à partir de \vec{H}_0 (cf. § II-E-γ).

b) relaxation

L'évolution propre dans l'état excité est limitée par la relaxation vers l'état fondamental sous l'effet de l'émission spontanée. Nous avons montré dans l'étude qualitative que ce phénomène était globalement indépendant des photons de RF; nous le supposons de plus isotrope et régi par une seule constante de temps $1/\Gamma$. Il vient alors :

$$(II.F.15) \quad \frac{d^{(3)}}{dt} \langle nn' \mathcal{C}_q^{(k)} \rangle = -\Gamma \langle nn' \mathcal{C}_q^{(k)} \rangle$$

Dans le cas général, l'équation (II.F.15) s'écrit :

$$(II.F.16) \quad \frac{d^{(3)}}{dt} \langle nn' \mathcal{C}_q^{(k)} \rangle = -\Gamma^{(k)} \langle nn' \mathcal{C}_q^{(k)} \rangle$$

c) évolution globale

L'évolution du système sous l'action de ces 3 processus est alors régie par l'ensemble des équations opératorielles

$$(II.F.17) \quad \frac{d}{dt} nn' \mathcal{C}_q^{(k)} = \left(\frac{d^{(1)}}{dt} + \frac{d^{(2)}}{dt} + \frac{d^{(3)}}{dt} \right) nn' \mathcal{C}_q^{(k)}$$

Utilisant les relations (II.F.5), (II.F.12), (II.F.15), nous sommes alors en mesure de calculer l'évolution des opérateurs $nn' \mathcal{C}_q^{(k)}$ et, par suite, des observables $nn' T_q^{(k)}$ dans n'importe quelle expérience de pompage optique (régime transitoire ou stationnaire).

III) Détection

Connaissant l'évolution de la matrice densité σ dans l'état excité, il ne nous reste plus qu'à calculer les signaux de détection optique. Nous prenons, à titre d'exemple, les signaux de fluorescence (\vec{e}_λ) . Comme nous l'avons montré dans la partie qualitative, le signal de fluorescence est égal à la valeur moyenne de l'opérateur de l'état excité

$$(II.F.18) \quad F = \sum_n \vec{e}_\lambda \cdot \vec{D} | f n \rangle \langle f, n | \vec{e}_\lambda^* \cdot \vec{D}$$

$$L_F = \text{Tr} (\sigma F) = \langle F \rangle$$

Comme les variables optiques et de radiofréquence commutent, F se met sous la forme

$$F = \vec{e}_\lambda \cdot \vec{D} | f \rangle \langle f | \vec{e}_\lambda^* \cdot \vec{D} \otimes \sum_n | n \rangle \langle n |$$

l'opérateur atomique se décompose sur les $T_q^{(k)}$ ($k = 1, 2$ en raison du caractère dipolaire électrique de l'interaction) et il vient :

$$(II.F.19) \quad F = \sum_{k,q} d_q^k T_q^{(k)} \otimes I_{RF}$$

où $I_{RF} = \sum_n | n \rangle \langle n |$ est l'opérateur identité dans l'espace des états du champ de RF.

En projetant sur les multiplicités n l'expression du signal de fluorescence devient :

$$(II.F.20) \quad L_F = \sum_{k,q} \sum_{n,n'} d_q^k \langle nn' T_q^{(k)} \rangle$$

Remarquons à cet effet que les coefficients d_q^k sont indépendants du couplage avec le champ de RF et qu'ils sont identiques à ceux obtenus dans le calcul du signal de fluorescence d'un atome "nu".

Compte tenu des relations (II.D.1) et (II.F.13), il vient :

$$(II.F.27) \quad L_F = \sum_{k,q} \sum_{n,n'} d_q^k J_{n-n'} \left(q \frac{\omega_1}{\omega} \right) e^{i(n-n')\omega t} \langle nn' \tilde{\mathcal{E}}_q^{(k)}(t) \rangle$$

On obtient immédiatement l'amplitude de la modulation à $r\omega$. En prenant $r = n-n'$, il vient en effet :

$$(II.F.28) \quad \text{Mod } r (L_F) = \sum_{k,q} \sum_n d_q^k J_r \left(q \frac{\omega_1}{\omega} \right) e^{ir\omega t} \langle n, n-r \tilde{\mathcal{E}}_q^{(k)}(t) \rangle$$

. Or chaque $n, n-r \tilde{\mathcal{E}}_q^{(k)}$ est préparé avec une efficacité proportionnelle à $p(n)$ (poids statistique de l'état à n photons dans le champ de RF à l'état libre) : cette préparation ne dépend par ailleurs que de k, q et $n-n' = r$ (cf. II.F.5).
 . Leur évolution propre également ne dépend pas de n (cf. II.F.14; dans le domaine de variation de $p(n)$, $\omega_1 = 2\lambda \sqrt{n}$ varie très peu; il en est donc de même de $\bar{V}(\frac{\omega_1}{\omega})$).
 . Le phénomène de relaxation enfin, indépendant des photons de RF, est le même pour tous les $n, n-r \tilde{\mathcal{E}}_q^{(k)}$. Il en résulte que toutes les expressions

$\frac{1}{p(n)} \langle n, n-r \tilde{\mathcal{E}}_q^{(k)}(t) \rangle$ sont identiques quel que soit n ; nous les noterons sous la forme :

$$(II.F.29) \quad \langle n, n-r \tilde{\mathcal{E}}_q^{(k)}(t) \rangle = p(n) \langle |^{(r)} \tilde{\mathcal{E}}_q^{(k)} | \rangle$$

La modulation à la fréquence $r\omega$ prend alors la forme

$$(II.F.30) \quad \text{Mod } r (L_F) = \sum_{k,q} \sum_n d_q^k J_r \left(q \frac{\omega_1}{\omega} \right) e^{ir\omega t} p(n) \langle |^{(r)} \tilde{\mathcal{E}}_q^{(k)} | \rangle$$

Compte tenu de la condition de normalisation (II.F.6), il vient :

$$(II.F.31) \quad \text{Mod } r (L_F) = \sum_{k,q} d_q^k J_r \left(q \frac{\omega_1}{\omega} \right) e^{ir\omega t} \langle |^{(r)} \tilde{\mathcal{E}}_q^{(k)} | \rangle$$

La connaissance des expressions réduites $\langle | \tilde{\mathcal{E}}_q^{(k)}(t) | \rangle$, c'est-à-dire le calcul de $\frac{1}{p(n)} n, n-r \tilde{\mathcal{E}}_q^{(k)}$ pour une valeur de n quelconque suffit donc pour calculer le signal (II.F.31).

Le calcul d'une expérience de pompage optique d'un atome "habillé" est donc formellement analogue au calcul classique de la même expérience sur un atome "nu" : pour déterminer un signal correspondant à une polarisation et à une modulation données de la lumière de fluorescence, il suffit de calculer, à l'aide de (II.F.17) l'évolution d'une seule observable ${}^{nn'} \mathcal{E}_q^{(k)}$. Le couplage avec le champ de radiofréquence modifie :

a) le terme de pompage $d^{(1)}/dt$ (équations II.F.5) en faisant apparaître notamment un terme d'excitation modulé aux diverses fréquences $r\omega$ harmoniques de ω ;

b) le terme d'évolution propre $d^{(2)}/dt$ (équation II.F.12) qui peut être décrit comme celui de l'observable correspondante de l'atome "nu" en présence d'un champ "fictif" décrit par le terme de couplage $\bar{V}(\frac{\omega_1}{\omega})$ (auquel vient s'ajouter, pour les observables "haute fréquence" un terme de modulation à la fréquence $(n-n')\omega$);

c) l'expression de la lumière détectée (II.F.31) qui fait apparaître des fonctions de Bessel comme facteurs de polarisation.

G - APPLICATIONS DE L'EQUATION PILOTE : CALCUL DE QUELQUES EXPERIENCES REALISEES SUR UN NIVEAU ATOMIQUE S = 1/2

1) Généralités sur l'excitation optique d'un niveau S = 1/2

Ce cas est l'un des plus simples possibles. L'état d'un ensemble d'atomes dans le niveau $S = 1/2$ est en effet entièrement déterminé par la donnée de la population globale du niveau, $T_0^{(0)}$, et des composantes du moment cinétique : $T_q^{(1)}$ avec $q = -1, 0, +1$ (ce résultat peut être retrouvé immédiatement par l'application du théorème de WIGNER-ECKART). Les résultats du paragraphe II-F, transposés dans ce cas particulier, nous montrent que le taux d'excitation des divers opérateurs ${}^{nn'} \mathcal{S}_q = ({}^{nn'} \mathcal{E}_q^{(1)})$ dépend de la polarisation du faisceau excitateur et du caractère cohérent ou incohérent du champ de RF :

En représentation d'interaction (II.F.13), les relations (II.F.5 et 5 bis) se mettent alors respectivement sous la forme (II.G.1 - 1 bis) :

pour un champ incohérent :

$$(II.G.1) \quad \frac{d^{(1)}}{dt} \langle r \rangle \tilde{J}_q = c_q^1 \times J_r \left(q \frac{\omega_1}{\omega} \right) e^{-ir\omega t}$$

pour un champ cohérent :

$$(II.G.1 \text{ bis}) \quad \frac{d^{(1)}}{dt} \langle r \rangle \tilde{J}_q = c_q^1 \times e^{-iq \frac{\omega_1}{\omega} \sin \omega t}$$

Et les coefficients c_q^1 valent respectivement :

- pour une excitation polarisée circulairement le long de Ox : $c_q^1 = \delta_{q,0}$
- pour une excitation polarisée circulairement le long de Oy ou Oz : $c_q^1 = \delta_{q,\pm 1}$
(où δ représente le symbole de Kronecker).

Deux types d'expériences différentes peuvent alors être envisagés :

a) Expériences en régime transitoire :

L'atome est excité en "pulse" à l'instant t_0 . On doit alors résoudre l'équation (II.F.17) avec, pour terme d'excitation optique, l'expression (II.G.1 ou 1 bis) multipliée par $\delta(t-t_0)$. Ceci revient à étudier l'évolution libre du moment cinétique de l'atome "habillé" à partir des conditions initiales

$$(II.G.2) \quad \langle r \rangle \tilde{J}_q(t_0) = c_q^1 J_r \left(q \frac{\omega_1}{\omega} \right) e^{-ir\omega t_0} \quad \text{pour un champ incohérent}$$

et

$$(II.G.2 \text{ bis}) \quad \langle r \rangle \tilde{J}_q(t_0) = c_q^1 e^{-iq \frac{\omega_1}{\omega} \sin \omega t_0} \quad \text{pour un champ cohérent}$$

b) Expérience en régime stationnaire :

C'est le cas de la plupart des expériences de pompage optique où l'excitation optique est continue. Il est alors légitime d'effectuer une approximation séculaire en ne gardant dans les expressions (II.G.1 ou 1 bis) que les termes oscillant à la fréquence propre de l'observable de l'atome "habillé" considérée; dans la représentation d'interaction utilisée, il convient donc de ne garder que les termes d'excitation statique (Rappelons en effet que $\langle r \rangle \tilde{J}_q$ a une fréquence

propre d'évolution qui est nulle) . On a ainsi :

$$\begin{aligned}
 \text{(II.G.3)} \quad & \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^{(1)}}{dt} \langle r \rangle \tilde{\mathcal{S}}_q = \delta_{r,0} c_q^1 J_0 \left(q \frac{\omega_1}{\omega} \right) \quad \text{(champ incohérent)} \\ \frac{d^{(1)}}{dt} \langle r \rangle \tilde{\mathcal{S}}_q = c_q^1 J_0 \left(q \frac{\omega_1}{\omega} \right) \quad \text{(champ cohérent)} \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

En représentation cartésienne, les équations précédentes deviennent :

$$\text{(II.G.4)} \quad \begin{array}{l} \text{pour un champ} \\ \text{cohérent} \\ \text{quelle que soit} \\ \text{la modulation} \\ \text{envisagée} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{pompage selon Ox} \\ \quad (// \text{ RF}) \\ \text{pompage selon Oy} \\ \quad (\perp \text{ RF}) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \frac{d^{(1)}}{dt} \langle r \rangle \tilde{\mathcal{S}}_x = \frac{\lambda_x}{T_p} \\ \frac{d^{(1)}}{dt} \langle r \rangle \tilde{\mathcal{S}}_y = \frac{\lambda_y}{T_p} J_0 \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right) \end{array}$$

où $\frac{\lambda_x}{T_p}$ ($\frac{\lambda_y}{T_p}$) représentent l'efficacité de la même excitation optique selon Ox (respectivement Oy) sur un système d'atomes "nus".

Dans un champ de RF incohérent, seule la composante statique est excitée ($r = 0$) et elle l'est avec l'efficacité donnée par les formules précédentes (II.G.4)

Conclusion : Les aspects essentiels de l'excitation optique d'un système atomique en interaction avec un champ de RF sont :

- son caractère anisotrope : cette propriété est vraie sur toutes les composantes (cf. II.G.1 ou 1 bis). Nous remarquerons en particulier que la composante basse fréquence du spin $\langle r \rangle \tilde{\mathcal{S}}^{(0)}$ est excitée avec une efficacité maximale et indépendante de l'intensité du champ de radiofréquence dans la direction Ox (// RF), alors que dans toute direction transverse, cette efficacité est réduite par un facteur < 1 , dépendant de l'intensité du couplage (précisons bien que cette excitation présente la symétrie de révolution autour de l'axe Ox, direction privilégiée du champ de radiofréquence);
- son caractère modulé : l'excitation d'une observable quelconque comporte un spectre de modulations aux fréquences harmoniques du champ "habillant" (l'intensité des diverses composantes du spectre donnée par les formules précédentes dépend en général du caractère cohérent ou incohérent du champ de RF). Nous retiendrons en particulier

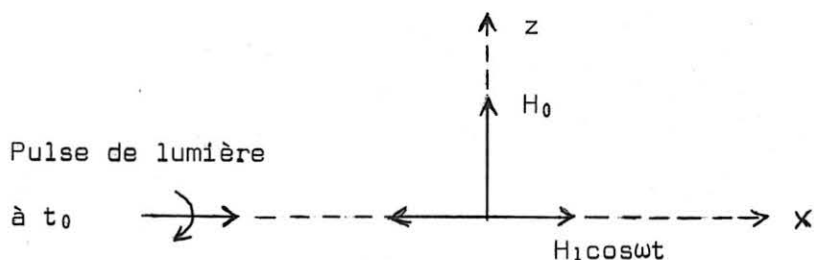
que le terme résonnant de l'excitation optique pour l'observable $\tilde{r}^{(r)}$ est nul pour un champ incohérent, alors que dans le cas du champ cohérent, toutes les observables $\tilde{r}^{(r)}$ sont excitées avec la même efficacité que $\tilde{r}^{(0)}$.

Nous pouvons aborder maintenant l'étude d'un certain nombre d'effets physiques.

2) Précession de Larmor de l'atome "habillé"

a) Problème

Un champ magnétique statique \vec{H}_0 est appliqué le long de Oz



Supposons qu'on introduise brusquement à l'instant t_0 une certaine aimantation dans le système, en effectuant par exemple à cet instant un pulse de lumière σ^+ se propageant le long de Ox, direction du champ "habillant". Nous désirons étudier l'évolution ultérieure des observables de l'atome "habillé", c'est-à-dire, en d'autres termes, la précession de Larmor de cet atome.

D'après les résultats du paragraphe précédent, il s'agit de résoudre l'équation pilote (II.F.17) décrivant l'évolution au cours du temps de $\tilde{S}^{nn'}$ avec les conditions initiales

$$\begin{cases} \tilde{S}_x^{nn'}(t_0) \neq 0 & \text{(cf. II.G.2 ou 2 bis)} \\ \tilde{S}_y^{nn'}(t_0) = \tilde{S}_z^{nn'}(t_0) = 0 \end{cases}$$

puis de revenir aux observables de l'atome "habillé" $\tilde{S}^{nn'}$ en utilisant la formule (II.D.1), les signaux de détection optique nous étant enfin donnés par (II.F.31).

Pour simplifier, nous nous limitons à l'étude des composantes basse fréquence $\tilde{S}^{(0)}$.

b) Equation pilote

Le couplage avec le champ \vec{H}_0 s'écrit :

$$(II.G.5) \quad \bar{V} \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right) = \omega_0 J_0 \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right) {}^{nn} \mathcal{S}_z$$

de sorte que l'équation pilote pour les grandeurs réduites ${}^{(0)} \vec{\mathcal{S}}$ (cf. II.F.29) s'écrit :

$$(II.G.6) \quad \frac{d}{dt} {}^{(0)} \vec{\mathcal{S}} = -\Gamma \cdot {}^{(0)} \vec{\mathcal{S}} + \frac{1}{i} \left({}^{(0)} \vec{\mathcal{S}}, \omega_0 J_0 \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right) {}^{nn} \mathcal{S}_z \right)$$

avec les conditions initiales :

$$(II.G.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} {}^{(0)} \mathcal{S}_x(t_0) = \lambda_0 \\ {}^{(0)} \mathcal{S}_y(t_0) = {}^{(0)} \mathcal{S}_z(t_0) = 0 \end{array} \right.$$

L'équation (II.G.6) est formellement identique à celle qui décrirait la précession de Larmor d'un atome "nu", orienté à t_0 le long de Ox , autour d'un champ fictif \vec{H}'_0 parallèle à Oz et d'intensité $H_0 J_0 \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right)$; la solution est donc

$$(II.G.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} {}^{(0)} \mathcal{S}_x(t) + i {}^{(0)} \mathcal{S}_y(t) = \lambda_0 e^{i\omega_0 J_0 \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right) (t-t_0)} e^{-\Gamma(t-t_0)} \\ {}^{(0)} \mathcal{S}_z(t) = 0 \end{array} \right.$$

On en déduit immédiatement, grâce à (II.D.1), l'évolution des observables de l'atome "habillé" (en changeant l'origine des temps de telle sorte que $t_0 = 0$),

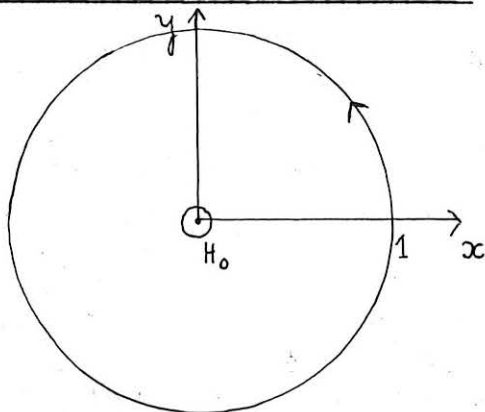
$$(II.G.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} {}^{(0)} S_x(t) = \lambda_x e^{-\Gamma t} \cos \left\{ \omega_0 J_0 \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right) t \right\} \\ {}^{(0)} S_y(t) = \lambda_x e^{-\Gamma t} J_0 \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right) \sin \left\{ \omega_0 J_0 \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right) t \right\} \\ {}^{(0)} S_z(t) = 0 \end{array} \right.$$

D'après (II.F.31), nous voyons que ces diverses grandeurs sont accessibles expérimentalement de manière directe par la mesure de la composante statique de la lumière de fluorescence σ^+ réémise le long de Ox , Oy , Oz .

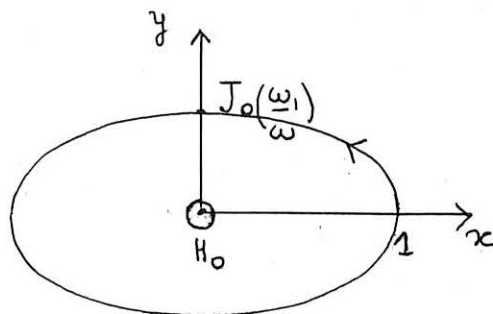
c) Conclusions

Elles apparaissent clairement sur (II.G.9) :

- le moment magnétique de l'atome "habillé" évolue à une vitesse différente de $\omega_0 : \omega_0 J_0 \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right)$.
- son extrémité décrit, dans le plan xOy perpendiculaire à H_0 , une ellipse (amortie en $e^{-\Gamma t}$ par suite de la relaxation); le rapport entre le petit et le grand axe b/a vaut $J_0 \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right)$. L' "habillage" de l'atome a donc deux effets : il ralentit et distord le mouvement de précession



a) précession d'un spin "nu"



b) précession d'un spin "habillé"

Remarque : Dans la mesure où un mouvement elliptique tel que (b) est toujours susceptible d'être décomposé en un mouvement circulaire droit et un mouvement circulaire gauche, on peut ainsi prévoir la possibilité d'observer, avec un champ de RF purement circulaire de pulsation Ω , une résonance magnétique de l'atome "habillé" à la fois pour $\Omega = \omega_0 J_0 \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right)$ et $\Omega = -\omega_0 J_0 \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right)$.

C'est ce que nous étudierons plus loin au paragraphe 4.

3) Effet Hanle de l'atome "habillé"

Après nous être intéressés aux phénomènes transitoires de l'évolution d'atomes "habillés" dans un champ magnétique H_0 , nous allons maintenant envisager ce même phénomène en régime permanent, c'est-à-dire l'effet Hanle de l'atome "habillé" (effet de dépolarisation magnétique).

a) Problème

Nous supposons que l'on excite la vapeur de façon continue avec un faisceau lumineux σ^+ se propageant soit dans la direction du champ de RF (Ox, fig. a), soit dans la direction perpendiculaire (Oy, fig. b)

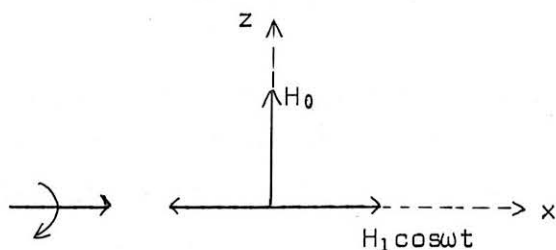


fig. a

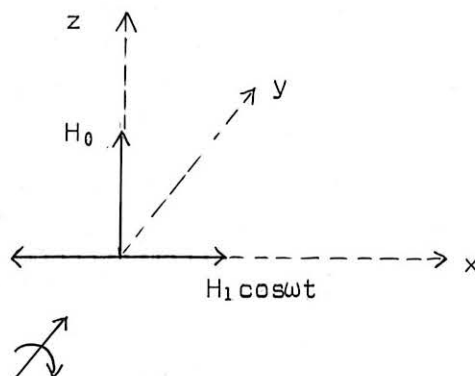


fig. b

le champ magnétique statique H_0 parallèle à Oz est balayé lentement autour de la valeur 0. On observe la lumière de fluorescence σ^+ réémise soit le long de Oy , soit le long de Ox en isolant sur chaque signal soit la composante statique, soit la composante modulée à ω . Pour déterminer tous les signaux ainsi obtenus, il faut trouver la solution stationnaire de l'équation pilote répondant aux conditions d'excitation des figures a et b, puis en déduire, à partir de II-F-31, les signaux optiques proportionnels à $(^{(0)}S_x, ^{(0)}S_y, ^{(r)}S_x, ^{(r)}S_y)$.

b) Equation pilote

1) terme de pompage :

Dans la mesure où nous nous intéressons seulement à la solution stationnaire, il suffit de garder l'expression (II.G.3 ou 3 bis) résultant d'une approximation séculaire. Il vient ainsi pour l'excitation le long de Ox : $(^{(r)}\tilde{J}_{ex})$

$$(II.G.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^{(1)}}{dt} \quad (^{(r)}\tilde{J}_x = \frac{\lambda x}{T_p} \\ \frac{d^{(1)}}{dt} \quad (^{(r)}\tilde{J}_y = \frac{d^{(1)}}{dt} \quad (^{(r)}\tilde{J}_z = 0 \end{array} \right.$$

et pour l'excitation le long de Oy : $(^{(r)}\tilde{J}_{ex})$

$$(II.G.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^{(1)}}{dt} \quad (^{(r)}\tilde{J}_y = \frac{\lambda y}{T_p} \quad J_0 \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right) \\ \frac{d^{(1)}}{dt} \quad (^{(r)}\tilde{J}_x = \frac{d^{(1)}}{dt} \quad (^{(r)}\tilde{J}_z = 0 \end{array} \right.$$

2) résolution de l'équation pilote :

Compte tenu de la relaxation et de la précession de Larmor

l'équation pilote s'écrit :

$$(II.G.12) \quad \frac{d}{dt} \langle \vec{r} \rangle \approx \frac{1}{T_p} \langle \vec{r} \rangle_{ex} - \Gamma \langle \vec{r} \rangle + \frac{1}{i} \left[\langle \vec{r} \rangle, \omega_0 J_0 \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right) n_n \mathcal{S}_z \right]$$

elle est formellement analogue à l'équation décrivant l'effet Hanle d'un atome "nu" préparé avec l'efficacité λ_x/T_p le long de Ox, ou $(\lambda_y/T_p) J_0(\frac{\omega_1}{\omega})$ le long de Oy et précessant autour du champ fictif H'_0 , parallèle à Oz. On en déduit immédiatement :

- Pour une excitation le long de Ox (direction du champ de RF)

$$(II.G.13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \langle \vec{r} \rangle_x \approx \lambda_x \cdot \frac{\Gamma}{\Gamma^2 + \omega'_0{}^2} \\ \langle \vec{r} \rangle_y \approx \lambda_x \cdot \frac{\omega'_0}{\Gamma^2 + \omega'_0{}^2} \\ \langle \vec{r} \rangle_z \approx 0 \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad \begin{array}{l} \omega'_0 = -\gamma H'_0 \\ = \omega_0 J_0 \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right) \end{array}$$

- Pour une excitation le long de Oy (perpendiculaire au champ de RF)

$$(II.G.14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \langle \vec{r} \rangle_x \approx \lambda_y J_0 \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right) \frac{\omega'_0}{\Gamma^2 + \omega'_0{}^2} \\ \langle \vec{r} \rangle_y \approx \lambda_y J_0 \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right) \frac{\Gamma}{\Gamma^2 + \omega'_0{}^2} \\ \langle \vec{r} \rangle_z \approx 0 \end{array} \right.$$

avec $\omega'_0 = -\gamma H'_0 = \omega_0 J_0 \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right)$

3) signaux de détection

D'après (II.F.31) les signaux de détection ont la forme :

- pour une excitation optique dans la direction de la radiofréquence (Ox)

$$(II.G.15) \quad \begin{array}{l} \text{signaux statiques} \\ \text{signaux modulés à } r\omega \text{ (strictement liés au caractère cohérent du champ)} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{selon Ox} \\ \text{selon Oy} \end{array} \right. \begin{array}{l} \langle {}^o S_x \rangle = \lambda_x \cdot \frac{\Gamma}{\Gamma^2 + \omega'_0{}^2} \\ \langle {}^o S_y \rangle = J_0 \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right) \lambda_x \cdot \frac{\omega'_0}{\Gamma^2 + \omega'_0{}^2} \\ \langle {}^r S_x \rangle = 0 \\ \langle {}^r S_y \rangle = J_r \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right) \lambda_x \cdot \frac{\omega'_0}{\Gamma^2 + \omega'_0{}^2} \end{array}$$

- pour un pompage dans une direction transverse l'efficacité du pompage est multipliée par un facteur $J_0 \left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)$; il en résulte la même homothétie sur les signaux de détection.

$$(II.G.16) \quad \text{signaux statiques} \quad \left\{ \begin{array}{l} \langle S_x \rangle = J_0 \left(\frac{\omega_1}{\omega}\right) \lambda_Y \cdot \frac{\omega'_0}{\Gamma^2 + \omega'_0{}^2} \\ \langle S_y \rangle = J_0^2 \left(\frac{\omega_1}{\omega}\right) \lambda_Y \cdot \frac{\Gamma}{\Gamma^2 + \omega'_0{}^2} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} \text{signaux modulés à } r\omega \\ \text{(champ cohérent)} \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} \langle S_x^r \rangle = 0 \\ \langle S_y^r \rangle = J_r \left(\frac{\omega_1}{\omega}\right) \cdot J_0 \left(\frac{\omega_1}{\omega}\right) \lambda_Y \cdot \frac{\Gamma}{\Gamma^2 + \omega'_0{}^2} \end{array} \right.$$

c) Conclusion

1°) la forme des signaux obtenus est la même que pour l'effet Hanle de l'atome "nu". Le signal est un signal d'absorption lorsque excitation et détection se font dans la même direction, de dispersion lorsque l'excitation et la détection se font à angle droit.

2°) la largeur de tous les signaux de dépolarisation magnétique est la même et varie comme $\frac{1}{J_0 \left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)}$: l'étude de cette largeur permet donc directement la mesure des variations du facteur de Landé de l'atome "habillé" ⁽¹¹⁾.

3°) l'intensité maximale des différentes courbes dépend

- 1) des directions d'excitation (II.G.13, 14) et de détection (II.G.15, 16)
- 2) de la modulation étudiée (II.G. 15, 16)

4°) les modulations ne sont observables qu'avec une détection transverse (II.G.15, 16).

L'ensemble de ces résultats est consigné dans le tableau suivant. Nous y avons noté la forme du signal (A : absorption, D : dispersion) et la variation de son intensité maximale en fonction du couplage.

		excitation \vec{e}_{λ_0}	
		selon Ox // RF	selon Oy ⊥ RF
signal statique	selon Ox	A : 1	D : $J_0 \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right)$
	selon Oy	D : $J_0 \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right)$	A : $J_0^2 \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right)$
signal modulé à <u>rw</u>	selon Ox	0	0
	selon Oy	D : $J_r \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right)$	A : $J_0 \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right) J_r \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right)$

D'après (II.F.14), nous savons que toutes les modulations ont, dans une expérience en régime stationnaire, mêmes propriétés intrinsèques que la composante évoluant à basse fréquence. Ayant précisé, à propos de l'étude de l'effet Hanle, l'intensité relative des différentes composantes du spectre de modulations, nous jugerons désormais inutile d'y revenir et nous nous restreindrons dorénavant à l'étude des ${}^{(0)}\mathcal{E}_q^k$ qui régissent l'évolution de la composante centrale du spectre.

4) Résonance magnétique

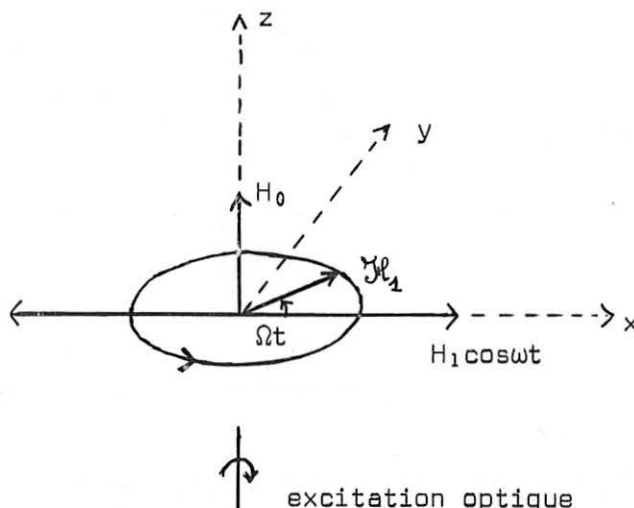
Cette résonance (comme la résonance paramétrique que nous étudierons dans le prochain paragraphe) nécessite l'utilisation d'un deuxième champ de RF qu'il faut bien distinguer du champ "habillant". Nous rappelons que ce dernier est un champ intense qui modifie les niveaux d'énergie et les états propres de l'atome "nu", alors que le deuxième champ est d'intensité beaucoup plus faible. En quelque sorte, ce deuxième champ nous sert d'instrument de mesure, le but étant de déterminer -en les perturbant le moins possible- les niveaux d'énergie, les états propres et, par suite, les propriétés physiques de l'atome "habillé" par le premier champ. Enfin, alors que le champ "habillant" est traité quantiquement, le deuxième champ sera, dans ce chapitre, toujours envisagé d'un point de vue classique.

a) Problème

Le système S (atome + photons de RF) orienté par pompage optique dans la direction Oz du champ magnétique statique H_0 est soumis à un champ de radio-fréquence circulaire droit \mathcal{H}_1 , tournant dans le plan xOy avec une vitesse angulaire Ω (on pose $\Omega_1 = -\gamma \mathcal{H}_1$).

Nous rappelons que nous sommes dans des conditions telles que

$$\frac{\Omega}{\omega}, \frac{\Omega}{\omega} \sim \frac{\omega_0}{\omega} \ll \frac{\omega_1}{\omega}.$$



Pour un atome "nu", nous savons qu'il y a résonance lorsque $\omega_0 = \Omega$; pour un spin "habillé", d'après les résultats du § II-G-2, la précession autour de H_0 est elliptique et s'effectue à la vitesse angulaire $\omega'_0 \neq \omega_0$: comme nous l'avons déjà signalé, ce mouvement peut être décomposé en un mouvement circulaire droit et un mouvement circulaire gauche; on s'attend donc à trouver deux conditions de résonances distinctes $\omega'_0 = \Omega$ et $\omega'_0 = -\Omega$. La méthode la plus élégante pour étudier ce phénomène consiste à toujours résoudre l'équation pilote d'évolution de $\vec{S}^{(0)}$ compte tenu des nouvelles conditions d'excitation et d'évolution propre, pour revenir ensuite au calcul des signaux détectés proportionnels respectivement à $\langle S_x \rangle$, $\langle S_y \rangle$ ou $\langle S_z \rangle$.

b) Résolution de l'équation pilote. Calcul des signaux de détection

1) terme de pompage

Dans l'approximation séculaire, le terme statique $\vec{S}^{(0)}$ qui seul nous intéresse est excité avec une efficacité (donnée par II.G.3) :

$$(II.G.17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \langle {}^{(0)} \tilde{\mathcal{J}}_x \rangle_{ex} = \langle {}^{(0)} \tilde{\mathcal{J}}_y \rangle_{ex} = 0 \\ \langle {}^{(0)} \tilde{\mathcal{J}}_z \rangle_{ex} = \lambda_z J_0 \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right) \end{array} \right.$$

2) l'évolution propre se fait sous l'action du couplage avec H_0

$$(II.G.18) \quad V_z \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right) = \omega_0 J_0 \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right) {}^{nn} \mathcal{J}_z$$

et du couplage avec le champ de RF tournant (\mathcal{H}_1)

$$(II.G.19) \quad V_{RF} \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right) = \Omega_1 \cos \Omega t {}^{nn} \mathcal{J}_x + \Omega_1 J_0 \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right) \sin \Omega t {}^{nn} \mathcal{J}_y$$

3) l'équation pilote s'écrit alors

$$(II.G.20) \quad \frac{d}{dt} {}^{(0)} \tilde{\mathcal{J}} = {}^{(0)} \frac{\tilde{\mathcal{J}}}{T_p} \text{ex} - \Gamma {}^{(0)} \tilde{\mathcal{J}} + \frac{1}{i} \left[{}^{(0)} \tilde{\mathcal{J}}, V_z \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right) + V_{RF} \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right) \right]$$

Cette équation est formellement analogue à celle qui décrit l'évolution d'un spin "nu" excité avec l'efficacité (II.G.17) et soumis, dans un champ magnétique \vec{H}'_0 , à l'action d'un champ de radiofréquence elliptique dont les composantes circulaires (par rapport à Oz) sont respectivement (en unités de pulsation) :

$$(II.G.21) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Omega'_{1D} = \Omega_1 \left(\frac{1 + J_0 \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right)}{2} \right) \quad \text{(composante circulaire droite)} \\ \Omega'_{1G} = \Omega_1 \left(\frac{1 - J_0 \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right)}{2} \right) \quad \text{(composante circulaire gauche)} \end{array} \right.$$

Il existe donc 2 résonances à 1 quantum dans les champs \vec{H}'_0 tels que $\omega_0 J_0 \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right) = \pm \Omega$, induites respectivement par les composantes droite et gauche du champ \mathcal{H}'_1 .

4) Signaux détectés

Ces résonances présentent par suite, comme les résonances magnétiques de l'atome "nu" en champ non exactement circulaire.

- 1) un élargissement de RF dû à l'existence de transitions réelles (de l'état $|\overline{n} \rangle$ à $|\overline{n} \rangle$ ou inversement) provoquées par la composante résonnante.
- 2) elles subissent par ailleurs un déplacement du type Bloch-Siegert du fait de l'existence d'une composante non résonnante.

Les expressions des signaux détectés et de leurs principales propriétés sont consignées dans le tableau ci-dessous.

Résonance à	$\omega'_0 = \omega_0 J_0\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right) = +\Omega$	$\omega'_0 = \omega_0 J_0\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right) = -\Omega$
provoquée par	$\Omega'_{1D} = \Omega_1 \left(\frac{1 + J_0\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)}{2}\right)$	$\Omega'_{1G} = \Omega_1 \left(\frac{1 - J_0\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)}{2}\right)$
solution de l'équation pilote II.G.20	$\langle {}^{(0)}\mathcal{S}_Z \rangle = \lambda_Z \cdot J_0\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right) \cdot \frac{\Omega'_{1D}{}^2}{\Omega'_{1D}{}^2 + \Gamma^2 + (\omega'_0 - \Omega)^2}$	$\langle {}^{(0)}\mathcal{S}_Z \rangle = \lambda_Z \cdot J_0\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right) \cdot \frac{\Omega'_{1G}{}^2}{\Omega'_{1G}{}^2 + \Gamma^2 + (\omega'_0 + \Omega)^2}$
Signal selon Oz $\alpha \langle {}^{(0)}S_Z \rangle$	$J_0\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right) \cdot \langle {}^{(0)}\mathcal{S}_Z \rangle$	$J_0\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right) \langle {}^{(0)}\mathcal{S}_Z \rangle$
élargissement de RF en	$\Omega'_{1D} = \Omega_1 \left(\frac{1 + J_0\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)}{2}\right)$	$\Omega'_{1G} = \Omega_1 \left(\frac{1 - J_0\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)}{2}\right)$
déplacement de Bloch-Siegert α	$\Omega'_{1G}{}^2 = \Omega_1^2 \left(\frac{1 - J_0\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)}{2}\right)^2$	$\Omega'_{1D}{}^2 = \Omega_1^2 \left(\frac{1 + J_0\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)}{2}\right)^2$

c) Conclusion

L'effet de "l'habillage" de l'atome présente sur cette résonance de multiples aspects; nous ne citerons pour mémoire que :

- 1) son incidence sur l'efficacité de l'excitation optique (déjà discutée en détail pour l'effet Hanle (§ II-G-3) et sur laquelle nous reviendrons dans l'étude expérimentale.)
- 2) la modification de la fréquence de la résonance observée dans un champ H_0 donné, qui est liée à la modification du facteur de Landé, et qui a été envisagée dans le § II-G-2.
- 3) la caractéristique principale (et la plus spectaculaire) de cette nouvelle expérience est en fait l'apparition dans un champ purement circulaire droit d'une résonance à 1 quantum dans le champ H_0 tel que $\omega_0 J_0\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right) = -\Omega$

Ce phénomène dont nous avons donné une première explication physique (ellipticité du mouvement du spin dans un champ H_0) puis un calcul mathématique

(grâce au champ elliptique fictif \mathcal{H}'_1) peut encore être envisagé sous un autre aspect :
 - pour un atome "nu" placé dans un champ de radiofréquence circulaire droit, la résonance magnétique dans le champ \vec{H}_0 tel que $\omega_0 = -\Omega$ est interdite car elle violerait le principe de conservation du moment cinétique total.

- pour l'atome "habillé", le champ de RF "habillant" représente un "réservoir" de moment cinétique et c'est ce qui explique en particulier la non conservation apparente du moment cinétique pour la résonance $\omega_0 J_0(\frac{\omega_1}{\omega}) = -\Omega$.

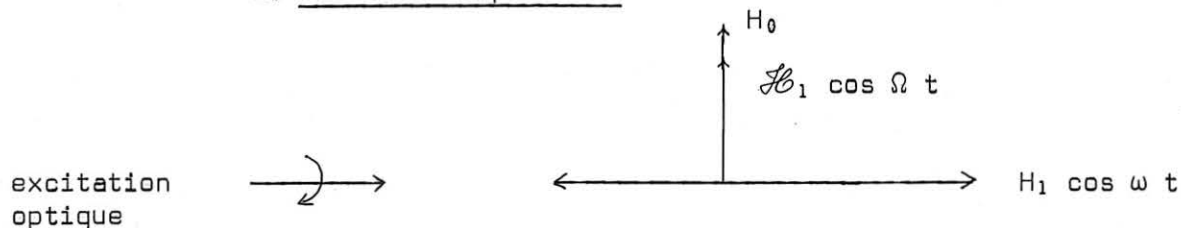
En fait, il y a conservation du moment cinétique du système total : champ de résonance magnétique + atome + champ "habillant".

Notons enfin que tout ceci justifierait également l'observation sur l'atome "habillé" de résonance à $(2p+1)$ quanta dans les champs tels que $(2p+1)\Omega = \pm \omega_0 J_0(\frac{\omega_1}{\omega})$ et ceci même avec un champ purement circulaire : il suffirait en effet de revenir à l'équation pilote et de tenir compte, à un ordre supérieur, de l'action conjuguée des 2 composantes Ω'_{1D} et Ω'_{1G} pour retrouver les transitions à plusieurs quanta.

5) Pompage transversal de l'atome "habillé" : Résonance paramétrique

L'un des buts expérimentaux de notre travail était la détermination quantitative des niveaux d'énergie de l'atome "habillé" : il apparaît clairement que la résonance magnétique que nous venons d'étudier dans la mesure où elle présente un déplacement et un élargissement dû au champ explorateur est assez mal adaptée au but que nous nous proposons; c'est la raison pour laquelle nous nous sommes intéressés aux résonances de cohérence en pompage transversal (résonance paramétrique ou résonance en pompage modulé qui, pour un atome "nu", ne présentent ni élargissement ni déplacement).

a) Position du problème



Par une excitation optique transversale par rapport à H_0 (par exemple selon Ox), nous introduisons de façon continue dans la vapeur une aimantation transversale qui, aussitôt créée, se met à précesser autour de H_0 (à la vitesse angulaire $\omega_0 J_0(\frac{\omega_1}{\omega})$). Nous savons, d'après les résultats du § II-F-3 que si le champ H_0 est tel que $\omega_0 J_0(\frac{\omega_1}{\omega}) \gg \Gamma$, il y a répartition isotrope dans le plan xOy de

l'aimantation ainsi introduite et que le moment magnétique résultant est nul. Plusieurs méthodes permettent de bâtir un moment résultant non nul dans le plan xOy : nous choisirons ici la modulation d'amplitude au champ magnétique statique (d'intensité \mathcal{H}_1 et de pulsation Ω) qui, modulant la précession des spins dans le plan xOy, peut, dans certaines conditions à déterminer, rendre anisotrope la répartition des spins dans ce plan. Le problème posé consiste donc à résoudre l'équation pilote donnant l'évolution de $^{(0)}\vec{S}$ compte tenu des conditions d'excitation et du nouveau couplage introduit (modulation d'amplitude $\mathcal{H}_1 \cos \omega t$). La connaissance de $^{(0)}\vec{S}$ nous donnera ensuite immédiatement les conditions de résonance et grâce aux formules (II.F.31) les signaux de détection.

b) L'équation pilote

L'équation pilote est particulièrement simple à écrire. Nous rappelons que le terme d'excitation optique indépendant du couplage est

$$(II.G.22) \quad \begin{cases} \langle ^{(0)}\vec{S}_y \rangle = \langle ^{(0)}\vec{S}_z \rangle = 0 \\ \langle ^{(0)}\vec{S}_x \rangle = \lambda_x \end{cases}$$

Le hamiltonien de couplage s'écrit :

$$(II.G.23) \quad V\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right) = (\omega_0 J_0\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right) + \Omega_1 J_0\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right) \cos \Omega t) {}^{nn}S_z$$

L'équation pilote prend donc la forme :

$$(II.G.24) \quad \frac{d}{dt} {}^{(0)}\vec{S} = \frac{1}{T_p} {}^{(0)}\vec{S}_{exc} + \frac{1}{i} (\omega_0 + \Omega_1 \cos \Omega t) J_0\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right) \left[{}^{(0)}\vec{S}, {}^{nn}S_z \right] - \Gamma {}^{(0)}\vec{S}$$

Nous sommes alors ramenés au problème classique de l'évolution d'un spin "nu" dans le champ magnétique $(H_0 + \mathcal{H}_1 \cos \Omega t) J_0\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)$ dirigé selon Oz ⁽³⁾⁽¹²⁾⁽¹³⁾. L'on montre aisément que la composante ${}^{nn}S_z$ est invariante et que l'évolution de ${}^{nn}S_x$ (${}^{nn}S_x$) est donnée par :

$$(II.G.25) \quad {}^{nn}S_x = {}^{nn}S_{exc} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} (B_r e^{+ir\omega t} + cc)$$

avec :

$$(II.G.26) \quad B_r = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \frac{J_p \left[\frac{\Omega_1}{\Omega} J_0 \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right) \right] J_{p+r} \left[\frac{\Omega_1}{\Omega} J_0 \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right) \right]}{\Gamma - i \left[\omega_0 J_0 \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right) + p\Omega \right]}$$

c) Conclusion

Le signal détecté proportionnel à S_x apparaît comme composé d'une infinité d'harmoniques de fréquence $r\Omega$, chacune d'elles étant résonnante pour $\omega_0 J_0 \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right) = -p\Omega$. Tous les calculs menés dans cette partie supposent le champ statique très faible, $\omega_0/\omega \ll 1$. Dans le cadre de cette approximation, nous voyons que la résonance paramétrique ne présente ni déplacement, ni élargissement de radio-fréquence. En fait, nous verrons plus loin (chapitre III), par un calcul d'ordre supérieur en ω_0/ω , qu'il y a un déplacement en Ω_1^2 de la résonance paramétrique.

6) Pompage transversal par modulation de l'excitation optique

a) Position du problème

Reprenant les mêmes conditions d'excitation optique que précédemment (faisceau polarisé circulairement se propageant le long de Ox), on peut également réaliser un pompage transversal en modulant soit l'intensité, soit la polarisation du faisceau excitateur. Le problème consiste alors à résoudre l'équation pilote d'évolution de $\vec{J}^{(0)}$ dans un champ $H_0 (0, 0, H_0)$ sous l'action d'une excitation forcée modulée à la fréquence Ω .

b) L'équation pilote

Pour un faisceau excitateur dirigé selon Ox dont la polarisation est modulée à $\Omega/2$, le terme d'excitation optique prend alors la forme

$$(II.G.27) \quad \frac{d^{(1)} \vec{J}^{(0)}}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{\lambda_x}{T_p} \cdot \cos \Omega t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

l'équation pilote à résoudre devient :

$$(II.G.28) \quad \frac{d}{dt} \vec{J}^{(0)} = \frac{\lambda_x}{T_p} \cos \Omega t + \frac{1}{i} \left[\vec{J}^{(0)}, \omega_0 J_0 \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right) n_n \mathcal{J}_z \right] - \Gamma \vec{J}^{(0)}$$

l'évolution de $\vec{J}^{(0)}$ est formellement analogue à l'évolution du moment cinétique d'un atome "nu" soumis à une excitation forcée $\left(\frac{\lambda_x}{T_p} \cos \Omega t \right)$ évoluant dans un champ $\vec{H}'_0 (0, 0, H_0 \cdot J_0 \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right))$.

Remarquons que cette équation diffère essentiellement de celle de la résonance paramétrique (II.G.24) dans la mesure où c'est le terme source et non le terme homogène qui est modulé. La solution stationnaire de (II.G.28) s'écrit :

$$(II.G.29) \quad \langle {}^{(0)}\mathcal{A}_x \rangle = \frac{\lambda_x}{\Gamma_p} \operatorname{Re} \left\{ \frac{e^{+i\Omega t}}{\Gamma + i(\omega_0 J_0 (\frac{\omega_1}{\omega}) - \Omega)} + \frac{e^{-i\Omega t}}{\Gamma + i(\omega_0 J_0 (\frac{\omega_1}{\omega}) + \Omega)} \right\}$$

Il apparaît donc sur la lumière détectée ($L_F \propto \langle {}^{(0)}\mathcal{A}_x \rangle$) modulée à Ω des résonances dans les champs $\omega_0 J_0 (\frac{\omega_1}{\omega}) = \pm \Omega$.

c) Nous retiendrons en conclusion que cette résonance semble particulièrement bien adaptée à l'étude des niveaux d'énergie de l'atome "habillé", car les résonances obtenues ne présentent ni déplacement ni élargissement inhérent à la méthode de mesure.

L'étude des divers cas exposés dans ce paragraphe G nous a amplement montré l'intérêt du formalisme introduit dans ce chapitre pour le calcul quantitatif et l'analyse des signaux obtenus dans les expériences de pompage optique en champ faible d'un atome "habillé" par un champ de RF linéaire.

- C H A P I T R E III -

ETUDE QUANTITATIVE

Deuxième Partie

ETUDE DE LA COURBURE DES NIVEAUX D'ENERGIE

Nous avons montré dans le chapitre précédent que dans le cadre d'une approximation linéaire, valable dans des champs H_0 faibles, $\omega_0 \ll \omega$, la résonance paramétrique ne présente pas de déplacement de radiofréquence en Ω_1^2 . Or l'expérience nous a montré (cf. chapitre V) que ce résultat était mis en défaut même dans des champs H_0 assez faibles. Ceci est manifestement un effet d'ordre supérieur et il devient donc nécessaire, pour le calculer, de pousser plus loin le développement de perturbation des états et vecteurs propres. Toutefois, avant d'entreprendre ces calculs, il nous semble intéressant d'aborder ce problème d'une façon très simple et très qualitative.

A - ETUDE SIMPLE ET QUALITATIVE

1) Rappels de l'interprétation physique de la résonance paramétrique
observée sur un atome "nu".

(effet GENEUX (¹²), ALEXANDROV (¹³), POLONSKY (³))

Les notations sont celles utilisées dans la partie qualitative de ce travail. Un exposé plus détaillé se trouve dans la thèse de 3e cycle de N. POLONSKY (³).

Soit σ la matrice densité du système atomique ($S = 1/2$) dans l'état excité; la loi d'évolution de l'élément non diagonal σ_{+-} qui représente l'aimantation transversale s'écrit simplement :

$$(III.A.1) \quad \frac{d}{dt} \sigma_{+-} = \frac{\lambda}{T_p} - i (\omega_0 + \Omega_1 \cos \Omega t) \sigma_{+-} - \Gamma \sigma_{+-}$$

Nous rappelons que le premier terme représente l'effet du pompage transversal; le deuxième terme traduit la précession de Larmor du spin dans le

champ H_0 modulé en amplitude par $\mathcal{H}_1 \cos \Omega t$ ($\omega_0 = -\gamma H_0$; $\Omega_1 = -\gamma \mathcal{H}_1$) et le dernier l'effet de la relaxation.

La résolution de cette équation montre l'existence de résonances ($\omega_0 = n\omega$), ne présentant ni élargissement, ni déplacement de RF.

L'image physique que l'on peut en donner est la suivante. Considérons dans le plan perpendiculaire à H_0 les dipôles orientés par pompage optique pendant une période du champ de RF ($T = 2\pi/\Omega$); le nombre de dipôles créés par unité de temps est constant (car pour une intensité lumineuse constante, le taux de pompage λ/T_p ne varie pas en fonction du temps).

Par contre, leur vitesse angulaire de précession varie au cours du temps selon la loi :

$$(III.A.2) \quad \omega_0(t) = \omega_0 + \Omega_1 \cos \Omega t$$

Il en résulte que la densité angulaire des dipôles créés varie au cours du temps; inversement proportionnelle à la vitesse de précession des spins à l'instant envisagé, elle est maximale lorsque $\Omega(t) = \omega_0 - \Omega_1$ et minimale lorsque $\Omega(t) = \omega_0 + \Omega_1$. Par suite de cette variation de densité angulaire, la résultante de tous les dipôles créés pendant une période $2\pi/\Omega$ n'est pas nulle. Ceci n'est pas vrai si $\Omega_1 = 0$; en effet, dans la mesure où $\omega_0 \gg \Gamma$ (ce que l'on suppose implicitement ici), les dipôles effectuent un grand nombre de tours autour de H_0 avant de disparaître; il en résulte que leur répartition angulaire dans le plan xOy est isotrope et que leur résultante est nulle.

Autrement dit, le fait de moduler la vitesse de précession des spins permet de créer, pendant une période $2\pi/\Omega$, un paquet de dipôles dont la résultante $\vec{m}(t)$ n'est pas nulle.

Raisonnons maintenant sur ces paquets de dipôles. Leur aimantation globale $\vec{m}(t)$ précesse dans le champ H_0 avec la vitesse moyenne $\overline{\omega_0(t)}$ donnée par

$$(III.A.3) \quad \overline{\omega_0(t)} = \frac{1}{2\pi/\Omega} \int_0^{2\pi/\Omega} \omega_0(t) dt$$

Pour qu'il se bâtit, à l'état stationnaire, une aimantation transversale non nulle, il faut que l'introduction tous les $2\pi/\Omega$ d'une aimantation moyenne $\vec{m}(t)$ ait un effet cumulatif. Ceci ne peut être réalisé que si pendant le temps $2\pi/\Omega$, l'aimantation \vec{m} précédemment introduite a effectué un nombre entier de révolutions

autour du champ.

Or l'angle θ dont $\vec{m}(t)$ a tourné pendant $2\pi/\Omega$ est donné par $\theta = \frac{2\pi}{\Omega} \overline{\omega_0(t)}$. La condition de résonance s'écrit donc

$$\theta = n 2\pi$$

ou encore

$$(III.A.4) \quad \overline{\omega_0(t)} = n\Omega$$

Pour l'atome "nu", compte tenu de (III.A.2), il vient :

$$\overline{\omega_0(t)} = \omega_0$$

d'où la condition de résonance bien connue :

$$(III.A.5) \quad \omega_0 = n\Omega$$

2) Résonance paramétrique sur l'atome "habillé"

Considérons maintenant l'atome "habillé". Ses niveaux d'énergie dans un champ H_0 peuvent être exprimés par un développement de la forme :

$$(III.A.6) \quad E_{\pm}(\omega_0) = \pm \frac{1}{2} \omega_0 J_0\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right) \pm b\omega_0^3 + \dots$$

(par raison de symétrie, le développement ne peut en effet contenir de puissance paire de ω_0).

La vitesse de précession des dipôles "habillés" dans le champ H_0 est par suite égale à :

$$(III.A.7) \quad E_+ - E_- = \omega_0 J_0\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right) + 2b\omega_0^3 \quad (K = 1)$$

la modulation d'amplitude du champ fait varier cette vitesse de précession selon la loi :

$$(III.A.8) \quad \omega_0(t) = (\omega_0 + \Omega_1 \cos \Omega t) J_0\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right) + 2b \left[\omega_0 + \Omega_1 \cos \Omega t \right]^3$$

Il en résulte que la vitesse moyenne de précession de la résultante \vec{m} de l'aimantation introduite pendant une période $2\pi/\Omega$ est maintenant égale à :

$$(III.A.9) \quad \overline{\omega_0(t)} = \omega_0 J_0\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right) + 3b\omega_0 \Omega_1^2 + 2b\omega_0^3$$

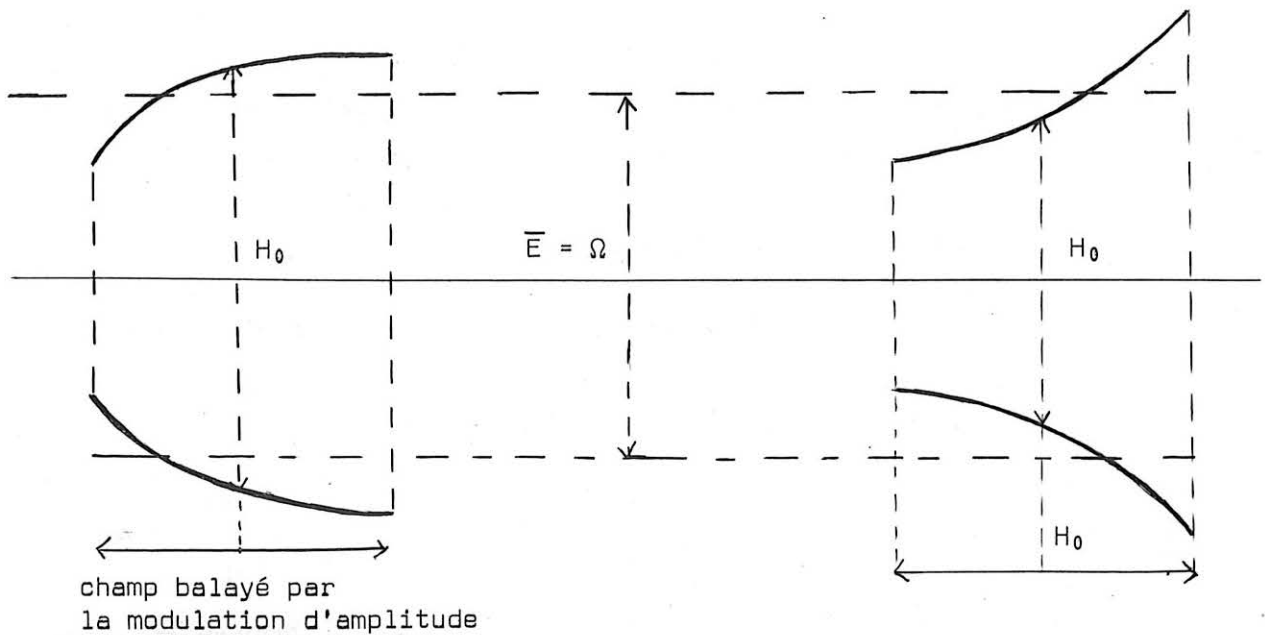
la condition de résonance s'écrit alors :

(III.A.10) $\omega_0 J_0 = n\omega - 3b \omega_0 \Omega_1^2 - 2b \omega_0^3$

Ce calcul rapide nous montre donc que la résonance paramétrique de l'atome "habillé" présente un déplacement de RF en Ω_1^2 directement proportionnel à la courbure des niveaux d'énergie. En particulier, cette théorie simple prévoit que le sens du déplacement dépend directement du signe de la courbure des niveaux (concave ou convexe).

(1)
 $b < 0$; le diagramme
 d'énergie $E_{n\pm}$ est biconcave

(2)
 $b > 0$; le diagramme
 d'énergie $E_{n\pm}$ est biconvexe



l'énergie moyenne est alors inférieure à $E(\omega_0)$ et il y a résonance pour $\Omega = E(\omega_0) - \sqrt{b} |\Omega_1|^2 \frac{\omega_0}{\omega^2}$
 la résonance est déplacée vers les champs forts

l'énergie moyenne est supérieure à $E(\omega_0)$ et il y a résonance pour $\Omega = E + \sqrt{b} |\Omega_1|^2 \frac{\omega_0}{\omega^2}$
 la résonance est déplacée vers les champs faibles

Si l'image physique que nous venons de donner de la résonance paramétrique est correcte, l'étude du déplacement en Ω_1^2 doit donc nous donner très simplement des renseignements sur la courbure des niveaux d'énergie au point considéré. Cette exploitation systématique nécessite donc la connaissance des termes d'ordre supérieur du développement de perturbation. C'est ce qui fera l'objet du prochain paragraphe (B). Dans le paragraphe (C), nous donnerons les résultats du calcul quantique du déplacement de RF; nous pourrons alors montrer qu'ils concordent avec ceux obtenus par l'approche classique de A. Nous décrivons, dans la partie expérimentale, les expériences qui nous ont permis de vérifier tous ces phénomènes.

B - COURBURE DES NIVEAUX D'ENERGIE DE L'ATOME "HABILLE"

1) Hamiltonien du problème. Quelques rappels sur la méthode de la résolvante

Avec les notations du chapitre I, le hamiltonien de l'atome "habillé" dans un champ magnétique H_0 s'écrit :

$$(III.B.1) \quad \mathcal{H}_S = \underbrace{\omega a^\dagger a + \lambda S_x (a + a^\dagger)}_{\mathcal{H}_0} + \omega_0 S_z$$

Soient $|m, n\rangle$ les $2S+1$ vecteurs propres issus de la multiplicité n ($2S+1$) fois dégénérée en champ nul, et E_{mn} leur énergie propre; nous avons obtenu leur expression à l'ordre le plus bas en diagonalisant dans chaque multiplicité n le hamiltonien $\omega_0 S_z$.

Pour poursuivre le calcul, il nous faut maintenant tenir compte du couplage avec l'ensemble des autres multiplicités ($\omega_0 S_z$). La méthode de la résolvante ⁽⁴⁾(¹⁴) semble ici particulièrement indiquée, dans la mesure où elle nous permet, tout en tenant compte du couplage avec l'ensemble des autres multiplicités, de nous ramener à un problème de perturbation dans la multiplicité dégénérée, c'est-à-dire dans un espace de dimension $(2S+1)$.

Dans tout ce qui suit, nous utiliserons les notations de la référence ⁽⁴⁾. Pour plus de simplicité dans l'écriture, nous traiterons directement le cas du spin $1/2$.

Soient $G(z)$ la résolvante du hamiltonien \mathcal{H} , $G(z) = \frac{1}{z - \mathcal{H}}$,

P_n le projecteur sur la multiplicité n non perturbée

Q_n le projecteur sur le sous-espace complémentaire

$$Q_n = \sum_{n' \neq n} P_{n'}$$

$$(III.B.2) \quad E_{+n} = E_{-n} = n\omega - \frac{\lambda^2}{4\omega}$$

l'énergie propre de cette même multiplicité non perturbée

R l'opérateur défini par

$$(III.B.3) \quad R(E) P_n = V P_n + V Q_n \frac{1}{E - H_0 - Q_n V Q_n} Q_n V P_n$$

${}^{nn}R$ sa projection sur la multiplicité n

$f(E)$ l'opérateur défini par

$$(III.B.4) \quad f(E) P_n = \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{Q_n}{E - H_0} \cdot \omega_0 S_z \right)^p P_n$$

Nous rappelons que les valeurs propres exactes du hamiltonien apparaissent alors comme solutions de l'équation implicite :

$$(III.B.5) \quad \left[E - E_{+n} - {}^{nn}R_{++}(E) \right] \left[E - E_{-n} - {}^{nn}R_{--}(E) \right] - |{}^{nn}R_{+-}(E)|^2 = 0$$

et que l'on obtient les vecteurs propres correspondants sous la forme

$$(III.B.6) \quad f(E) P_n | \pm, n^0 \rangle$$

où $| \pm, n^0 \rangle$ représentent les approximations d'ordre le plus bas des vecteurs propres exacts $| \pm, n \rangle$ (cf. I.D.4)

$$(III.B.7) \quad | \pm, n^0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ | +x, n \rangle \pm | -x, n \rangle \}$$

Rappelons que l'emploi des symboles \pm ne doit pas prêter à confusion, ce n'est qu'une notation commode pour distinguer les 2 vecteurs propres de la multiplicité; sauf exception (cas trivial $\lambda = 0$), ces paramètres ne décrivent pas l'état du spin atomique dans l'état propre envisagé.

2) Etude de $R(E)$: développement et approximations

La résolution de l'équation implicite (III.B.5) nécessite la connaissance de ${}^{nn}R(E)$. Sous réserve de donner à E des valeurs voisines de E_n , on montre que ${}^{nn}R(E)$ peut s'exprimer sous forme d'un développement de Wigner-Brillouin convergent :

$$(III.B.8) \quad {}^{nn}R(E) = \sum_0^{\infty} P_n (\omega_0 S_z \cdot \frac{Q_n}{E - \mathcal{H}_0})^P \omega_0 S_z P_n$$

- Comme pour le calcul de $f(E)$, on voit apparaître ici le rôle primordial joué par les opérateurs $P_n S_z P_n$ et $P_n S_z P_{n'}$, c'est-à-dire avec les notations du chapitre II (§ II-B) par les opérateurs ${}^{nn'}S_z$.

Dans la base standard utilisée dans tout ce travail (axe de quantification Ox), nous rappelons que :

$$(III.B.9) \quad {}^{nn'}S_z = \frac{{}^{nn'}S_+ - {}^{nn'}S_-}{2i}$$

Utilisant la base d'opérateurs tensoriels irréductibles définis au chapitre II, § C, il vient :

$${}^{nn'}S_z = \frac{J_{n-n', \frac{\omega_1}{\omega}} {}^{nn'}\mathcal{J}_+ - J_{n-n', -\frac{\omega_1}{\omega}} {}^{nn'}\mathcal{J}_-}{2i}$$

compte tenu des propriétés de parité des fonctions de Bessel, il vient alors :

$$(III.B.10) \quad {}^{nn'}S_z = \begin{cases} J_{2p, \frac{\omega_1}{\omega}} {}^{nn'}\mathcal{J}_z & \text{si } n-n' = 2p; \\ -i J_{2p+1, \frac{\omega_1}{\omega}} {}^{nn'}\mathcal{J}_y & \text{si } n-n' = 2p+1; \end{cases}$$

soit, dans la base des $|\overline{m, n^0}\rangle$

$${}^{nn'}\mathcal{J}_z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$-i {}^{nn'}\mathcal{J}_y = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- On vérifie alors aisément les propriétés du couplage Zeeman :

- 1- dans une multiplicité de n donné, il est diagonal sur la base des états propres à l'ordre 0 : $|\pm, \overline{n^0}\rangle$;
- 2- il effectue une partition de l'ensemble des états.

On vérifie aisément qu'à quelqu'ordre que ce soit, l'état $|\overline{+, n^0}\rangle$ (resp $|\overline{-, n^0}\rangle$) n'est couplé qu'aux états $|\overline{\varepsilon, n+p^0}\rangle$ (resp $|\overline{-\varepsilon, n+p^0}\rangle$ avec

$\epsilon = (-1)^P$); les deux sous-espaces A et B ainsi définis :

$$(III.B.11) \quad \begin{array}{l} \text{A} \\ |-, n-3^0 \rangle \\ |+, n-2^0 \rangle \\ |-, n-1^0 \rangle \\ |+, n^0 \rangle \\ |-, n+1^0 \rangle \\ |+, n+2^0 \rangle \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{B} \\ |+, n-3^0 \rangle \\ |-, n-2^0 \rangle \\ |+, n-1^0 \rangle \\ |-, n^0 \rangle \\ |+, n+1^0 \rangle \\ |-, n+2^0 \rangle \end{array}$$

sont donc disjoints.

Soient P_A et P_B les projecteurs sur ces 2 sous-espaces.

Ceci nous permet alors de trouver aisément la forme de $R(E)$.

- ${}^{nn}R(E)$ est un opérateur diagonal sur la base des $|\overline{\epsilon, n^0}\rangle$

Dans la mesure où le hamiltonien de perturbation n'établit à quelque ordre que ce soit aucun couplage entre les 2 familles A et B définies respectivement à partir des états $|\overline{+, n^0}\rangle$ et $|\overline{-, n^0}\rangle$, quel que soit l'ordre p, le terme de perturbation

$$(III.B.12) \quad P_n \left(\omega_0 S_z \frac{J_n^Q}{E - J_0} \right)^P \omega_0 S_z P_n$$

est strictement diagonal; il en est donc de même pour l'opérateur ${}^{nn}R$ lui-même.

Il en résulte la factorisation de l'équation implicite (III.B.5). La "renormalisation" de l'état $|\overline{+, n^0}\rangle$ ne fait ainsi intervenir que les états de la famille A avec lesquels il est couplé.

- Le calcul montre enfin qu'à tous les ordres ${}^{nn}R_{++} = -{}^{nn}R_{--}$, d'où il résulte que E_{+n} et E_{-n} sont symétriques par rapport au niveau non perturbé d'énergie $n\omega$. Ayant ainsi bien analysé la structure du couplage et la forme de l'opérateur ${}^{nn}R(E)$, on en déduit immédiatement le développement de perturbation des niveaux d'énergie et des vecteurs propres.

3) Les niveaux d'énergie

Sachant que les niveaux $E_{+\frac{n}{2}}$ et $E_{-\frac{n}{2}}$ sont symétriques par rapport à l'ordonnée $n\omega$, nous écrirons donc uniquement le développement de $E_{+\frac{n}{2}}$; à l'ordre (1) le terme le plus bas du développement (III.B.8) nous donne :

$$(III.B.13) \quad E^{(1)} = E_n + \frac{1}{2} \omega_0 J_0 \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right)$$

à l'ordre (2), il faut évaluer l'opérateur

$$(III.B.14) \quad P_n (\omega_0 S_z \frac{Q_n}{E - \cancel{H}_0}) \omega_0 S_z P_n$$

Nous pouvons dans cette approximation remplacer E par sa valeur à l'ordre 0, $n\omega$.
Remarquons que le projecteur Q_n peut s'écrire

$$Q_n = \sum_{p > 0} P_{n+p} + P_{n-p}$$

et que les contributions des deux termes

$$P_n S_z \frac{P_{n+p}}{-p\omega} S_z P_n \quad \text{et} \quad P_n S_z \frac{P_{n-p}}{p\omega} S_z P_n$$

s'annulent.

à l'ordre (3), les contributions à l'énergie propre proviennent alors :

1) de la correction introduite dans le terme précédent en tenant compte au dénominateur de (III.B.14) du 1er terme en ω_0 du développement (III.B.13).

Il vient ainsi :

$$-\frac{1}{2} \omega_0^3 \sum_{\substack{p \\ p>0 \\ p<0}} \left(\frac{J_p(\frac{\omega_1}{\omega}) J_{-p}(\frac{\omega_1}{\omega}) \mathcal{A}_z^{n, n+p} \cdot \mathcal{A}_z^{n+p, n}}{p^2 \omega^2} \right) J_0(\frac{\omega_1}{\omega})$$

La parité des fonctions de Bessel et les résultats (III.B.10) nous montrent alors que, quel que soit $p \neq 0$, le résultat se met sous la forme :

$$(III.B.15) \quad - \left(\frac{\omega_0}{2}\right)^3 \sum_{p \neq 0} J_0(\frac{\omega_1}{\omega}) \cdot \frac{J_p^2(\frac{\omega_1}{\omega})}{p^2 \omega^2}$$

2) et de la contribution normale du terme d'ordre 3 de (III.B.8) qui donne :

$$(III.B.16) \quad +(\omega_0)^3 \sum_{p \text{ et } q \neq n} \frac{J_{n-p}(\frac{\omega_1}{\omega}) J_{p-q}(\frac{\omega_1}{\omega}) J_{q-n}(\frac{\omega_1}{\omega}) \mathcal{A}_z^{n, p} \mathcal{A}_z^{p, q} \mathcal{A}_z^{q, n}}{(n-p)(n-q) \omega^2}$$

l'examen des différentes parités possibles de p et q nous montre que, compte tenu de (III.B.10) dans tous les cas, $\langle +n^0 | \mathcal{A}_z^{n, p} \mathcal{A}_z^{p, q} \mathcal{A}_z^{q, n} | +n^0 \rangle = (-)^{p-q} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3$.

Compte tenu de la parité des fonctions de Bessel, (III.B.16) peut donc se réécrire sous la forme :

$$(III.B.17) \quad + \left(\frac{\omega_0}{2}\right)^3 \sum_{p \text{ et } q \neq n} \frac{J_{n-p}\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right) J_{q-p}\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right) J_{q-n}\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)}{(n-p)(n-q) \omega^2}$$

d'où le développement à l'ordre 3 de l'énergie propre des niveaux de la multiplicité n

$$(III.B.18) \quad E_{\pm} = n\omega - \frac{\lambda^2}{4\omega} \pm \frac{1}{2} \omega_0 J_0 + \left(\frac{\omega_0}{2}\right)^3 \frac{1}{\omega^2} \sum_{\substack{p \text{ et } q \\ \neq n}} \left(- \frac{J_{n-p} J_{q-p} J_{q-n}}{(n-p)(n-q)} + \frac{J_0 J_p^2}{p^2} \right)$$

Pour plus de simplicité dans l'écriture, nous avons omis, dans cette formule, comme nous le ferons dans la suite, l'argument $\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)$ des fonctions de Bessel.

Remarque : On vérifie aisément, lorsque ω_1/ω est assez petit (~ 1), que les premiers termes significatifs de la sommation sont négatifs : la correction d'ordre 3 introduit un effet de saturation.

4) Les états propres

De la même façon, appliquant la formule (III.B.6), on obtient le développement à l'ordre 1 des états propres sous la forme :

$$| \pm, n^1 \rangle = | \pm, n^0 \rangle + \sum_{p, \epsilon} | \epsilon, p^0 \rangle \langle \epsilon, p^0 | \frac{1}{E - \mathcal{H}_0} \cdot \omega_0 S_z | \pm n^0 \rangle$$

Compte tenu des résultats de (III.B.10), il vient de façon explicite :

$$(III.B.19) \quad \begin{aligned} | +, n^{(1)} \rangle &= | +, n^0 \rangle - \frac{1}{2} \cdot \frac{\omega_0}{\omega} \sum_{p \neq 0} \frac{J_p\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)}{p} | \epsilon, n+p^0 \rangle \\ | -, n^{(1)} \rangle &= | -, n^0 \rangle + \frac{1}{2} \cdot \frac{\omega_0}{\omega} \sum_{p \neq 0} \frac{J_p\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)}{p} | -\epsilon, n+p^0 \rangle \end{aligned}$$

avec $\epsilon = (-)^p$.

On remarque :

- 1) que les vecteurs $| +, n^{(1)} \rangle$ (resp $| -, n^{(1)} \rangle$) appartiennent respectivement aux sous-espaces A et B précédemment définis. Compte tenu de la forme de la perturbation atomique étudiée précédemment (A-2-a), ceci est vrai à tout ordre de perturbation, donc vrai pour les vecteurs propres exacts.

2) les vecteurs propres tels qu'ils sont écrits dans la formule (III.B.19) ne sont pas de norme 1. Le carré de leur norme vaut :

$$N^2 = 1 + \frac{1}{4} \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 \sum_p \frac{J_p^2\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)}{p^2}$$

à l'ordre 1 en champ, il est logique de les considérer comme normés.

C - CALCUL QUANTIQUE DU DEPLACEMENT

Nous avons vu dans le paragraphe A que l'on pouvait, dans une approche très classique, rendre compte du déplacement observé sur la résonance paramétrique et le relier très simplement à la courbure des niveaux dans le champ H_0 considéré. Nous nous proposons, dans ce paragraphe, de confirmer ce résultat par un calcul quantique du déplacement; le premier problème à résoudre est le choix de la méthode de calcul : pour le calcul des propriétés (déplacement-élargissement) des diverses résonances magnétiques observées sur un atome "nu", la méthode la plus élégante et la plus puissante est certainement celle utilisée dans la référence (5); nous en rappelons les 2 aspects fondamentaux :

- la quantification du champ de RF avec lequel on effectue la résonance magnétique permet de ramener le problème à un problème de perturbations indépendantes du temps.
- l'emploi du formalisme de la résolvante (4)(13) permet ensuite de réduire la dimension de l'espace des états à considérer de l'infini à $(2S+1)$.

Cette méthode met, d'autre part, clairement en évidence l'origine des déplacements de radiofréquence, qui sont dus à des couplages avec des niveaux non résonnants (transitions virtuelles); les élargissements étant dus à des couplages entre niveaux résonnants (transitions réelles). C'est donc cette méthode que nous avons choisi d'utiliser ici. Elle nécessite la quantification du 2e champ de RF, celui de modulation d'amplitude $\mathcal{H}_1 \cos \Omega t$ qui est dirigé selon Oz. C'est ce que nous exposons dans le paragraphe 1.

Insistons ici encore sur le fait qu'il y a deux champs de RF, C_1 et C_2 qui jouent des rôles dissymétriques :

C_1 : le champ linéaire $H_1 \cos \omega t$ dirigé selon Ox qui "habille" l'atome; son intensité $\omega_1 = -\gamma H_1$ peut varier de ω à 10 ou 15 ω ; c'est un champ très intense qui perturbe profondément le système atomique. Nous appellerons atome "habillé" S le système global atome + champ C_1 en interaction.

C_2 : le champ linéaire $\mathcal{H}_1 \cos \Omega t$ de modulation d'amplitude dirigé selon Oz; il sert d'instrument de mesure en provoquant la résonance paramétrique de l'atome "habillé"; l'intensité $\Omega_1 = -\gamma \mathcal{H}_1$ nécessaire à cette fin est de l'ordre de ω_0 ou encore de ω . En général, C_2 est donc beaucoup moins intense que C_1 , ce qui justifie les rôles dissymétriques que nous leur assignons.

1) Description du système S + C_2 (atome "habillé" + champ de modulation d'amplitude de H_0)

* notations

\mathcal{H}_S est le hamiltonien de l'atome "habillé" S

$$(III.C.1) \quad \mathcal{H}_S = \omega a^\dagger a + \lambda S_x (a + a^\dagger) + \omega_0 S_z$$

$\Omega b^\dagger b$ le hamiltonien du champ $\mathcal{H}_1 \cos \Omega t$ de modulation d'amplitude
 $\mu S_z (b^\dagger + b)$ le hamiltonien de couplage entre ce champ et le système
 S objet de l'étude

b est l'opérateur d'annihilation d'un photon Ω

$$\mu = \frac{\Omega_1}{2 \sqrt{P}} \quad P : \text{nombre moyen de photons } \Omega \text{ dans le champ de résonance paramétrique}$$

* le hamiltonien du système total s'écrit :

$$(III.C.2) \quad H_{TOT} = \mathcal{H}_S + \Omega b^\dagger b + \mu S_z (b^\dagger + b)$$

Nous noterons respectivement :

$$(III.C.3) \quad H_{S+C_2}^0 = \mathcal{H}_S + \Omega b^\dagger b$$

et

$$(III.C.4) \quad H_{S.C_2}^{int} = \mu S_z (b^\dagger + b)$$

* niveaux d'énergie et états propres de $H_{S+C_2}^0 = \mathcal{H}_S + \Omega b^\dagger b$.

Supposons nul le couplage entre S et C_2 ; les états propres du hamiltonien $H_{S+C_2}^0$ sont alors :

$$(III.C.5) \quad | \overline{m, n} \rangle \otimes | p \rangle$$

où $| \overline{m, n} \rangle$ est l'état propre exact de l'atome "habillé", vecteur propre de \mathcal{H}_S correspondant à la valeur propre $E_{m, n}$ et $| p \rangle$ le vecteur propre de $\Omega b^\dagger b$ qui représente

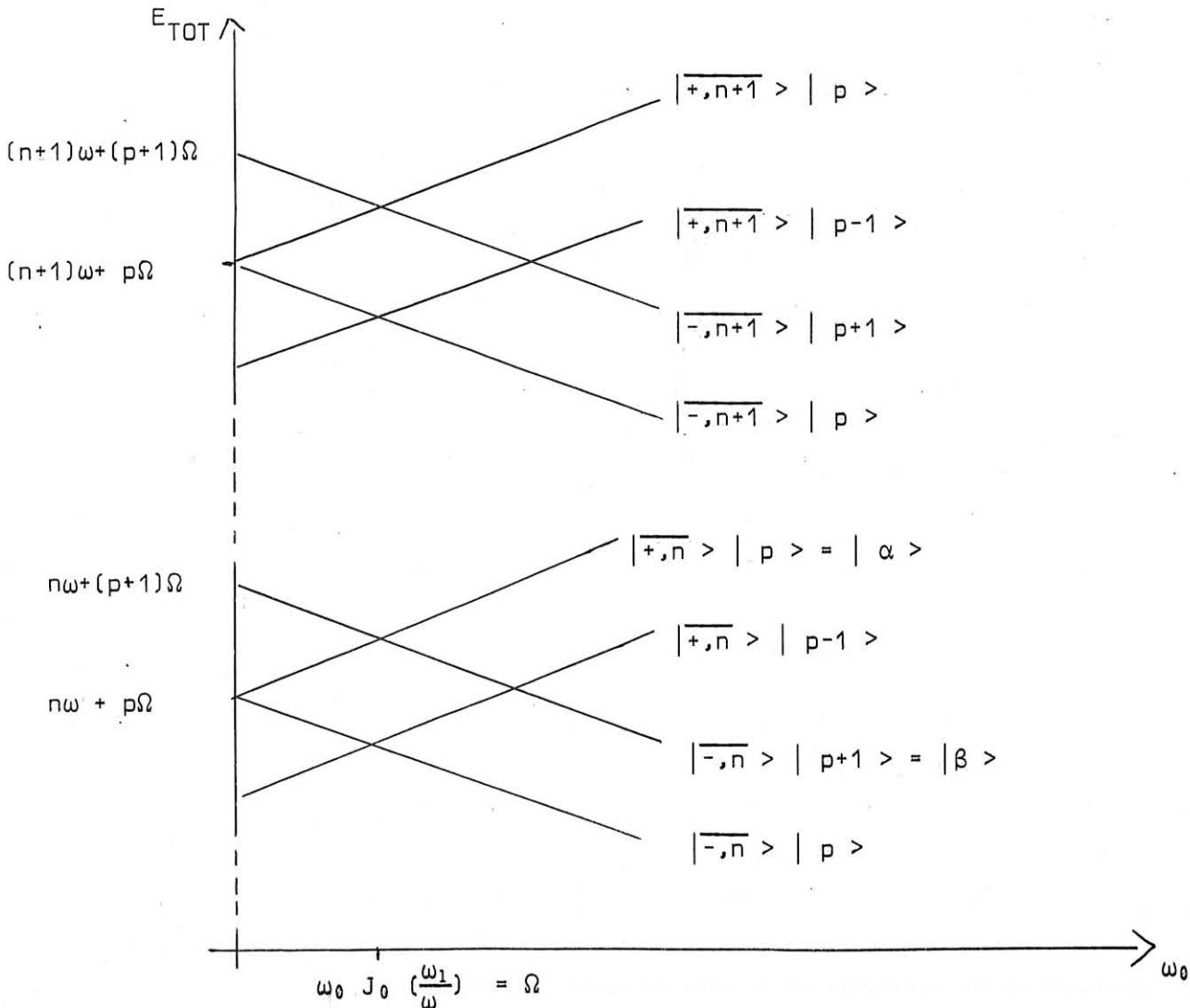
un état à p photons de fréquence Ω .

L'énergie propre de (III.C.5) vaut :

$$E_{m n} + p\Omega \quad K = 1 \quad (\text{avec } m = \pm 1/2 \text{ pour } S = 1/2)$$

* le diagramme d'énergie tracé en fonction de ω_0 ($\omega_0 = -\gamma H_0$) représenté sur la figure ci-dessous présente une infinité de points de croisements.

Remarque : nous l'avons représenté dans la zone où $\omega_0 \ll \omega, \omega_1$, zone dans laquelle la variation en champ de $E_{m n}$ peut être, à une bonne approximation près, considérée comme linéaire, $E_{m n} = m \omega_0 J_0 \left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)$.
 Nous nous intéressons pour l'instant plus particulièrement au croisement de niveaux situés au voisinage du champ H_0 tel que $\Omega = \omega_0 J_0 \left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)$.



* le couplage dû au champ de modulation d'amplitude (C₂).

Du fait du couplage $H_{S.C_2}^{int} = \mu S_Z (b^+ + b)$ entre états d'une même multiplicité n d'une part et entre états de multiplicités n et n' différentes, le croisement peut être déplacé et éventuellement transformé en anticroisement. Ce sont ces diverses possibilités que nous allons maintenant étudier.

2) L'opérateur R_b : étude qualitative du déplacement et de l'élargissement de la résonance paramétrique

Considérons deux des états qui se croisent dans le champ H_0 tel que :

$$(III.C.6) \quad \Omega = E_{+n} - E_{-n} = \omega_0 J_0 \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right) + \frac{\omega_0^3}{4\omega^2} \left[\sum_{\substack{n \neq p \\ n \neq q}} \frac{J_{n-p} J_{q-p} J_{q-n}}{(n-p)(n-q)} - J_0 \frac{J_p^2}{p^2} \right] + O(\omega_0^4)$$

soient par exemple les états

$$\begin{cases} |\alpha\rangle = | \overline{+n} \rangle | p \rangle \\ |\beta\rangle = | \overline{-n} \rangle | p+1 \rangle \end{cases}$$

Nous appellerons P_0 le projecteur sur ce sous-espace

Q_0 le projecteur sur le sous-espace complémentaire.

a) Existence éventuelle d'anticroisements : pour $\Omega = E_{+n} - E_{-n}$

Prenons l'étude du problème grâce à la méthode de la résolvante.

Un anticroisement éventuel serait lié à l'existence d'un élément non diagonal de l'opérateur R_b

$$(III.C.7) \quad R_b(E) = \sum_{p=0}^{\infty} P_0 \left(\mathcal{H}_{S.C_2}^{int} \cdot \frac{Q_0}{E - H_{S+C_2}^0} \right)^p \mathcal{H}_{S.C_2}^{int} P_0$$

Il faut bien noter que R_b est différent de l'opérateur R introduit au paragraphe B précédent.

1) il n'agit pas dans le même espace des états : R agit dans l'espace des états ϵ_S de S atome "habillé". R_b agit dans l'espace des états $\epsilon_S \otimes \epsilon_{C_2}$ (où ϵ_{C_2} est l'espace des états du 2e champ de RF).

2) cet opérateur est relatif au couplage de S avec C_2 . C'est pourquoi nous l'avons appelé R_b en voulant ainsi souligner que cet opérateur était une fonction de b^+ et b opérateurs de création et d'annihilation de photons de C_2 .

3) nous avons cependant gardé la notation \mathcal{R}_b , car elle souligne en particulier le fait que cet opérateur présente beaucoup d'analogie avec la matrice de réaction de la théorie des collisions.

Etudions maintenant l'opérateur (III.C.7).

D'après l'étude faite au paragraphe III-B-2, nous savons que : à quelque ordre que ce soit, la partie atomique de $\mathcal{H}_{S.C_2}^{int}$, S_z , n'établit aucun couplage entre les niveaux $| +n \rangle$ et $| -n \rangle$ de l'atome "habillé". Par suite, $\mathcal{R}_b(E)$ n'a pas d'éléments non diagonaux dans le sous-espace $|\alpha\rangle$, $|\beta\rangle$ considéré; la dégénérescence locale au point ω_0 défini par (III.C.6) entre $|\alpha\rangle$ et $|\beta\rangle$ n'est pas levée, le croisement reste un croisement, la résonance paramétrique ne présentera pas d'élargissement dû à C_2 .

b) Déplacement des niveaux d'énergie et de la résonance

Par contre, l'existence de termes diagonaux de l'opérateur \mathcal{R}_b introduit un déplacement des niveaux d'énergie. L'opérateur $(b^+ + b)$ n'étant pas diagonal sur la base choisie, il en résulte que les premiers termes non nuls apparaissent au deuxième ordre en Ω_1^2 .

A l'ordre le plus bas, les éléments diagonaux de \mathcal{R}_b sont donnés par :

$$(III.C.8) \quad \langle \alpha | \mathcal{R}_b | \alpha \rangle = \langle \alpha | P_0 \mathcal{H}_{S.C_2}^{int} \frac{Q_0}{E - H_{S+C_2}^0} \mathcal{H}_{S.C_2}^{int} P_0 | \alpha \rangle$$

Remarquons que jusqu'ici, nous n'avons fait aucune approximation quant à l'évaluation des vecteurs et énergies propres de l'atome "habillé" S.

Le calcul de $\langle \alpha | \mathcal{R}_b | \alpha \rangle$ est effectué dans l'Appendice II au 1er ordre en ω_0 . On trouve, tous calculs faits, que :

$$\langle \alpha | \mathcal{R}_b | \alpha \rangle = - \langle \beta | \mathcal{R}_b | \beta \rangle$$

Le croisement de niveaux se trouve donc déplacé ainsi que la résonance paramétrique de $2 \langle \alpha | \mathcal{R}_b | \alpha \rangle$.

3) Expression quantitative du déplacement. Sa relation avec la courbure

Tous calculs faits, on trouve que la résonance apparaît pour :

$$\Omega = \omega_0 J_0 - \frac{\Omega_1^2}{4} \frac{\omega_0}{\omega^2} \left\{ \sum_{p=2S+1} J_0 \frac{J_p^2}{p^2} + \frac{J_p}{p} \sum_{r \neq 0} \frac{J_r (J_{r+p} + J_{r-p})}{r} \right\}$$

(III.C.9)

$$= \frac{\omega_0^3}{4\omega^2} \sum_{\substack{r \neq 0 \\ s \neq 0}} \left\{ \frac{J_r}{r} \cdot \frac{J_s}{s} \cdot J_{r+s} + J_0 \frac{J_r^2}{r^2} \right\}$$

Remarques :

1) Ici encore, l'argument non explicité des fonctions de Bessel est ω_1/ω .

2) Le déplacement qui est, en fait, un effet d'ordre 3 en perturbation apparaît ici comme du 1er ordre en ω_0

et du 2e ordre en Ω_1

ce qui explique que la correction d'ordre 3 en énergie puisse être faible sans que le déplacement soit négligeable, car $\omega_0 \Omega_1^2 \gg \omega_0^3$ si $\Omega_1 \gg \omega_0$. En d'autres termes, même si le champ statique est faible (ω_0 petit), la courbure des niveaux peut se manifester d'une façon très sensible dès lors que le champ de la résonance paramétrique a une amplitude Ω_1 suffisante ($\Omega_1 \gg \omega_0$) pour "explorer" une région où la courbure des niveaux de l'atome "habillé" est importante.

3) Utilisant la relation démontrée dans l'appendice II, § III, on voit que le déplacement de la résonance donné par (III.C.9) est proportionnel à la courbure des niveaux d'énergie (coefficient du terme d'ordre 3 de (III.B.18)); le coefficient de proportionnalité étant exactement celui prévu par l'approche classique du paragraphe A (ce qui, a posteriori, est une bonne justification de l'image physique utilisée dans ce paragraphe).

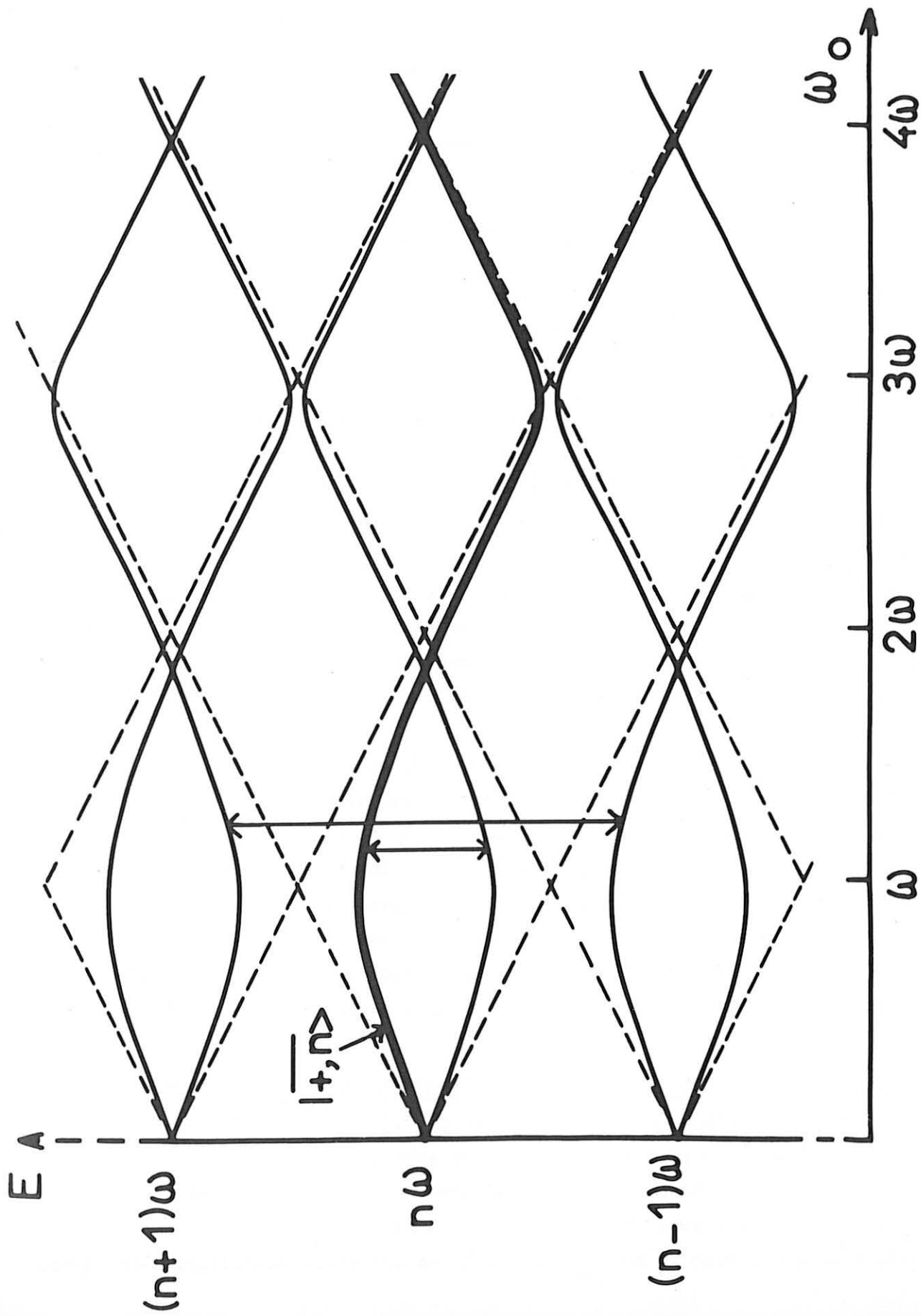


Fig.-V

- C H A P I T R E I V -

ETUDE QUANTITATIVE DU DIAGRAMME D'ENERGIE DE L'ATOME "HABILLE"

DANS UN CHAMP H_0 QUELCONQUE

INTRODUCTION

- Faisons brièvement le point sur notre étude quantitative du diagramme d'énergie de l'atome "habillé". Dans une première partie (chap. II), nous avons étudié les valeurs et vecteurs propres de \mathcal{H}_0 à l'ordre le plus bas en ω_0/ω ; nous en avons déduit un certain nombre d'effets linéaires en ω_0 et ceci pour des intensités de couplage ω_1/ω quelconques. Dans le chapitre III, nous avons ensuite abordé l'étude des termes d'ordre supérieur en ω_0/ω ; en particulier, nous avons pu mettre en évidence un effet directement lié à la courbure des niveaux. Il nous faut maintenant aborder l'étude du diagramme d'énergie pour ω_0/ω quelconque et avec un couplage ω_1/ω quelconque (en effet, si $\omega_1 \ll \omega_0$, on peut traiter $\lambda S_x (a + a^+)$ comme une perturbation (⁵)).

- Lorsque ω_0 et ω_1 sont quelconques, une diagonalisation numérique de \mathcal{H}_0 est nécessaire. Nous présentons le calcul correspondant dans le paragraphe A en indiquant les propriétés de \mathcal{H}_0 qui permettent de le simplifier au maximum. Nous donnons les résultats de ce calcul et en discutons la précision.

- Puis, au paragraphe B, nous étudions les diverses méthodes qui permettraient de déterminer expérimentalement le diagramme d'énergie de l'atome "habillé". Les expériences effectivement réalisées seront décrites dans la partie expérimentale et l'on discutera alors de l'accord entre les résultats expérimentaux et les prévisions théoriques.

A - CALCUL DES NIVEAUX D'ENERGIE DE L'ATOME "HABILLE" POUR ω_0 ET ω_1 QUELCONQUES

1) Etude qualitative de la déformation du diagramme quand ω_1 croît

Nous supposons dans toute cette partie H_0 et H_1 perpendiculaires, de sorte que le hamiltonien de l'atome "habillé" est donné par la formule (III.B.1).

Supposons d'abord ω_1/ω très petit; on peut alors traiter $\lambda S_x (a + a^+)$ comme une perturbation vis-à-vis de $\mathcal{H}_0 = \omega_0 S_z + \omega a^+ a$. Nous avons déjà décrit

l'allure du diagramme d'énergie dans ce cas (chap. I, § B).

- La figure III-b rappelle les résultats essentiels. Par suite de l'existence d'anticroisements en $\omega_0 = \omega, 3\omega, 5\omega, \dots$ et de croisements en $\omega_0 = 0, 2\omega, 4\omega, \dots$, les niveaux d'énergie ont l'allure de fuseaux partant des points d'ordonnées $n\omega$ pour $\omega_0 = 0$. Même si ω_1 est très petit, n est très grand en valeur absolue : un champ de RF contient toujours un nombre très grand de photons (de l'ordre de 10^{+23} dans notre cas lorsque $\omega_1/\omega \sim 1$). Ainsi, lorsque n varie de quelques unités seulement, la forme des fuseaux ne change pas, ce qui explique l'allure périodique de la figure V lorsqu'on se déplace sur l'axe des ordonnées.

Sur cette figure, nous avons représenté en traits renforcés la branche de fuseau correspondant à ce que nous appelons l'état $|\overline{+n}\rangle$ de \mathcal{H} ; $|\overline{+n}\rangle$ est l'état propre de \mathcal{H} qui tend, lorsque ω_0 et ω_1 tendent vers 0, vers l'état propre $|+, n\rangle$ de \mathcal{H}_0 représentant l'atome dans l'état $|+1/2\rangle$ de S_z en présence de n photons (les états propres de \mathcal{H}_0 sont représentés en traits pointillés).

Etudions qualitativement la déformation de la branche du fuseau correspondant à l'état $|\overline{+n}\rangle$, lorsque n augmente, non plus de quelques unités seulement, mais de façon appréciable (de l'ordre de 10^{+23}) de sorte que ω_1/ω change de quelques unités. La figure VI représente la déformation de cette branche de fuseau pour des valeurs de ω_1/ω croissant de bas en haut et repérées par les chiffres figurant à droite.

On voit sur cette figure que la pente du niveau en champ nul qui représente en fait le moment magnétique de l'atome "habillé" décroît quand ω_1/ω augmente, s'annule, change de signe, croît à nouveau et ainsi de suite... C'est l'effet de modification du facteur de Landé, déjà décrit en détail de nombreuses fois (voir par exemple réf. (11)). On voit également que les divers croisements situés pour ω_1/ω très petit au voisinage de $\omega_0 = 2\omega, 4\omega, 6\omega, \dots$ se déplacent vers 0 quand ω_1 augmente, l'arrivée en 0 du croisement parti de $\omega_0 = 2p\omega$ correspondant à la p ème annulation successive du moment magnétique de l'atome "habillé" (la position des croisements $p = 1, p = 2$ est indiquée par des flèches sur la figure VI). Le calcul par perturbations du diagramme d'énergie n'est possible que dans les 2 cas limites suivants : $\omega_1 \ll \omega, \omega_0$ (couplage faible) et $\omega_0 \ll \omega_1, \omega$ (couplage quelconque mais champ statique très faible). Dans le cas général, en particulier pour un couplage fort et des champs H_0 quelconques, seule une diagonalisation numérique de \mathcal{H} est possible.

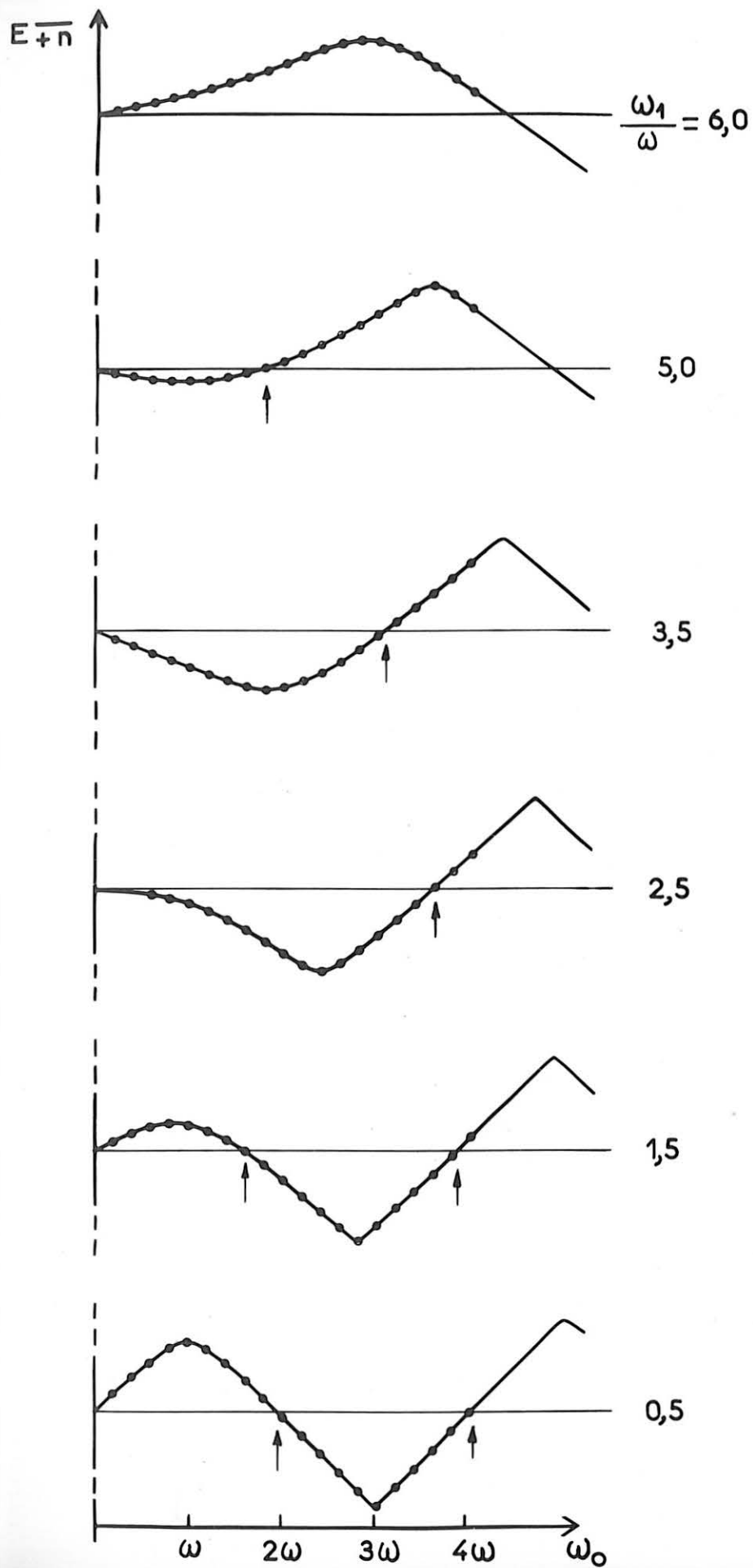


Fig. VI

Evolution du niveau $|+,n\rangle$
 pour un couplage $\frac{\omega_1}{\omega}$
 croissant

Les courbes de la figure VI représentent ainsi les résultats d'un calcul numérique fait sur ordinateur Univac 1108, calcul dont nous indiquons maintenant le principe.

2) Calcul des énergies de l'atome "habillé" pour ω_0 et ω_1 quelconques

a) Structure de la matrice \mathcal{H} dans la base $|\pm, n\rangle$

La propriété essentielle utilisée pour aborder le calcul numérique est celle que nous avons signalée dans l'introduction qualitative (chap. I, tableau II). A tous les ordres, il n'y a pas de couplage entre les 2 sous-espaces propres ϵ_1, ϵ_2 définis par

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \{ \dots |+, n-2\rangle, |-, n-1\rangle, |+, n\rangle, |-, n+1\rangle, |+, n+2\rangle, \dots |(-)^P, n+p\rangle \dots \} \\ \epsilon_2 &= \{ \dots |-, n-2\rangle, |+, n-1\rangle, |-, n\rangle, |+, n+1\rangle, |-, n+2\rangle, \dots | -(-)^P, n+p\rangle \dots \} \end{aligned}$$

les états $|+, n\rangle$ étant les états propres de \mathcal{H}_0 .

Il suffira donc de considérer la restriction de \mathcal{H} sur l'un de ces 2 sous-espaces, ϵ_1 par exemple. La matrice représentant \mathcal{H} dans ce sous-espace a l'allure suivante :

$$|-, n-1\rangle \quad |+, n\rangle \quad |-, n+1\rangle$$

$$\begin{array}{l} \langle -, n-1 | \\ \langle +, n | \\ \langle -, n+1 | \end{array} \left[\begin{array}{ccc} & & 0 \\ & & \\ & & \\ (n-1)\omega - \frac{\omega_0}{2} & \frac{\omega_1}{4} & \\ & & \\ \frac{\omega_1}{4} & n\omega + \frac{\omega_0}{2} & \frac{\omega_1}{4} \\ & & \\ & & \\ & & \\ \frac{\omega_1}{4} & & (n+1)\omega - \frac{\omega_0}{2} \\ & & \\ & & \end{array} \right]$$

les seuls éléments non nuls sont ceux de la diagonale principale et des 2 premières obliques adjacentes situées à droite et à gauche de la diagonale principale. Il s'agit de trouver les valeurs propres de cette matrice. Le problème mathématique auquel nous aboutissons est formellement analogue à celui traité par J.H. SHIRLEY (15). Toutefois, son attaque du problème, semi-classique, l'oblige à développer tout un préliminaire mathématique (théorème de Floquet) pour transformer le hamiltonien dépendant du temps en un problème équivalent indépendant du temps.

b) Principe du calcul numérique

Pour trouver numériquement l'énergie propre du niveau $|\overline{+n}\rangle$ nous tronquons symétriquement la matrice H par rapport à la ligne et à la colonne correspondant à l'état $|\overline{+n}\rangle$ de façon à obtenir une matrice $(2p+1) \times (2p+1)$.

Il est clair que la précision sera d'autant plus grande que p sera grand; on comprend d'autre part aisément que pour être valable dans un domaine de plus en plus étendu en ω_0/ω et ω_1/ω , le calcul nécessite des valeurs de p de plus en plus importantes.

En effet, supposons tout d'abord ω_1/ω petit; la figure VII montre les seuls niveaux obtenus en prenant $p = 3$ (le niveau $|\overline{+n}\rangle$ est tracé en trait renforcé). On voit que l'énergie $E_{+\overline{n}}$ du niveau $|\overline{+n}\rangle$ est déterminée à l'ordre 3 inclus tant que $\omega_0/\omega \lesssim 3$. Sa variation avec ω_0 est donc bien reproduite dans ce domaine. De façon générale, on montre que l'énergie, $E_{+\overline{n}}$, est calculée à l'ordre p inclus tant que $\omega_0/\omega \lesssim p$, lorsqu'on prend une matrice tronquée de dimension $(2p+1) \times (2p+1)$.

Supposons maintenant ω_0 nul, mais ω_1/ω quelconque. On sait que les états propres de $\omega a^\dagger a + \lambda S_x (a + a^\dagger)$, d'énergie $n\omega$, sont des combinaisons linéaires des états $|\pm, n+q\rangle$ avec des coefficients $J_q(\frac{\omega_1}{2\omega})$. Or $J_q(\frac{\omega_1}{2\omega})$ est pratiquement négligeable dès que $|q| > \frac{\omega_1}{\omega}$. Il suffira donc, pour calculer $E_{+\overline{n}}$ dans ce cas, de prendre $p > \frac{\omega_1}{\omega}$.

On conçoit alors que lorsque ω_0/ω et ω_1/ω sont tous les deux importants, il faille prendre p au moins égal à $\omega_0/\omega + \omega_1/\omega$,

$$(IV.A.1) \quad p \gtrsim \frac{\omega_0}{\omega} + \frac{\omega_1}{\omega}$$

Le domaine que nous voulons explorer étant le domaine

$$0 < \frac{\omega_0}{\omega} < 6 \qquad 0 < \frac{\omega_1}{\omega} < 6$$

Nous avons pris $p = 14$, ce qui remplit bien la condition (IV.A.1).

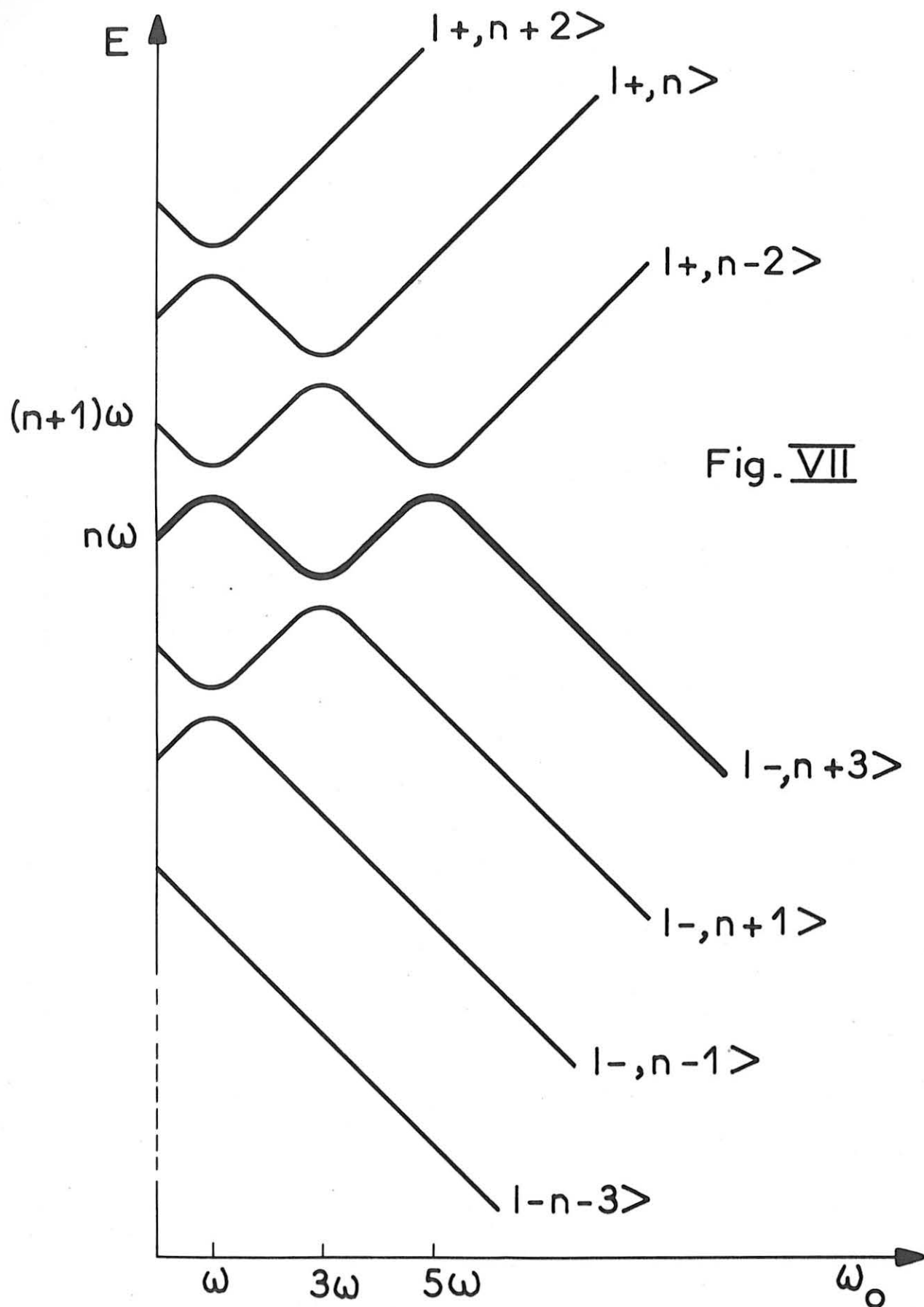


Fig. VII

Résultat de la diagonalisation avec $p = 3$

c) Précision du calcul

Le programme mis au point pour ce calcul est donné dans l'Appendice III.

La précision du calcul est testée en faisant varier p et en examinant la façon dont les résultats dépendent de p .

Nous estimons cette précision égale à 10^{-3} dans le cas le plus défavorable (valeur la plus grande simultanément pour ω_1/ω et ω_0/ω). Par contre, pour les faibles valeurs de ω_1/ω et ω_0/ω , elle est de l'ordre de 10^{-5} (nous pouvons comparer les résultats du calcul numérique avec ceux de la théorie des perturbations lorsque soit ω_1/ω soit ω_0/ω sont petits).

Par rapport aux méthodes classiques de diagonalisation numérique, l'intérêt de notre programme est le suivant : dans la mesure où il utilise à fond les propriétés de symétrie du hamiltonien, nous pouvons prendre des matrices tronquées extrêmement grandes, la seule limitation étant le temps de calcul du polynôme caractéristique. La seule quantité qui nous intéresse E_{+n} peut alors être obtenue sans aucune ambiguïté, grâce à l'encadrement suivant, évident sur la figure V (tout au moins pour $\omega_0/\omega \lesssim p$)

$$(n - 1/2)\omega < E_{+n} < (n+1/2)\omega$$

B - PRINCIPE DES METHODES EXPERIMENTALES D'ETUDE DU DIAGRAMME D'ENERGIE

Connaissant maintenant l'allure théorique du diagramme d'énergie, le problème consiste à étudier les diverses méthodes qui nous permettraient de mesurer ces énergies.

1) Les fréquences de Bohr de l'atome "habillé".

Comme dans toutes les méthodes de spectroscopie des radiofréquences, nous ne pouvons pas mesurer directement l'énergie d'un niveau donné mais simplement des différences d'énergie du type $E_{m n} - E_{m' n'}$, c'est-à-dire les fréquences de Bohr de l'atome "habillé" $\Omega_{m n, m' n'}$. Nous avons noté 2 des fréquences par une double flèche sur le diagramme d'énergie V. Compte tenu des symétries du diagramme d'énergie, il apparaît de façon évidente sur cette figure que la mesure des fréquences $\Omega_{m n, m' n'}$ permet de construire point par point pour ω_1 donné et en faisant varier ω_0 le diagramme Zeeman des niveaux $| \pm, n \rangle$. La connaissance des valeurs des fréquences de Bohr de l'atome "habillé" pour tout un réseau de valeurs de ω_1/ω et ω_0/ω nous permettra donc de reconstituer expérimentalement le diagramme d'énergie de

l'atome "habillé". *)

A priori, les diverses résonances étudiées dans le chapitre II permettraient de mesurer expérimentalement ces fréquences de Bohr. Nous avons vu cependant que celles qui nécessitent l'utilisation d'un 2e champ de RF, C_2 d'amplitude, \mathcal{H}_1 , distinct du champ "habillant" présentent l'inconvénient suivant : elles nécessitent une extrapolation à \mathcal{H}_1 nul, car la résonance subit un déplacement en \mathcal{H}_1^2 . Aussi nous envisagerons uniquement les résonances obtenues par pompage transversal modulé.

2) Pompage optique transversal avec modulation de la polarisation

a) Principe

Nous utiliserons un pompage transversal par rapport à H_0 dirigé selon Ox (rappelons que cette seule méthode suffit à déterminer la position des croisements de niveaux du diagramme III-b (¹⁶)). En général, l'aimantation macroscopique ainsi introduite le long de Ox ne subsiste pas si $\Omega \frac{\sigma_{m,n}}{\sigma_{m',n'}} > \Gamma$: largeur naturelle du niveau atomique, il faut alors réaliser une excitation forcée de la cohérence $\sigma_{m,n}, \sigma_{m',n'}$ en modulant à Ω le faisceau excitateur (soit en intensité (¹⁷), soit en polarisation (¹⁸)) (cf. équations du cycle de pompage optique, § I-A-C).

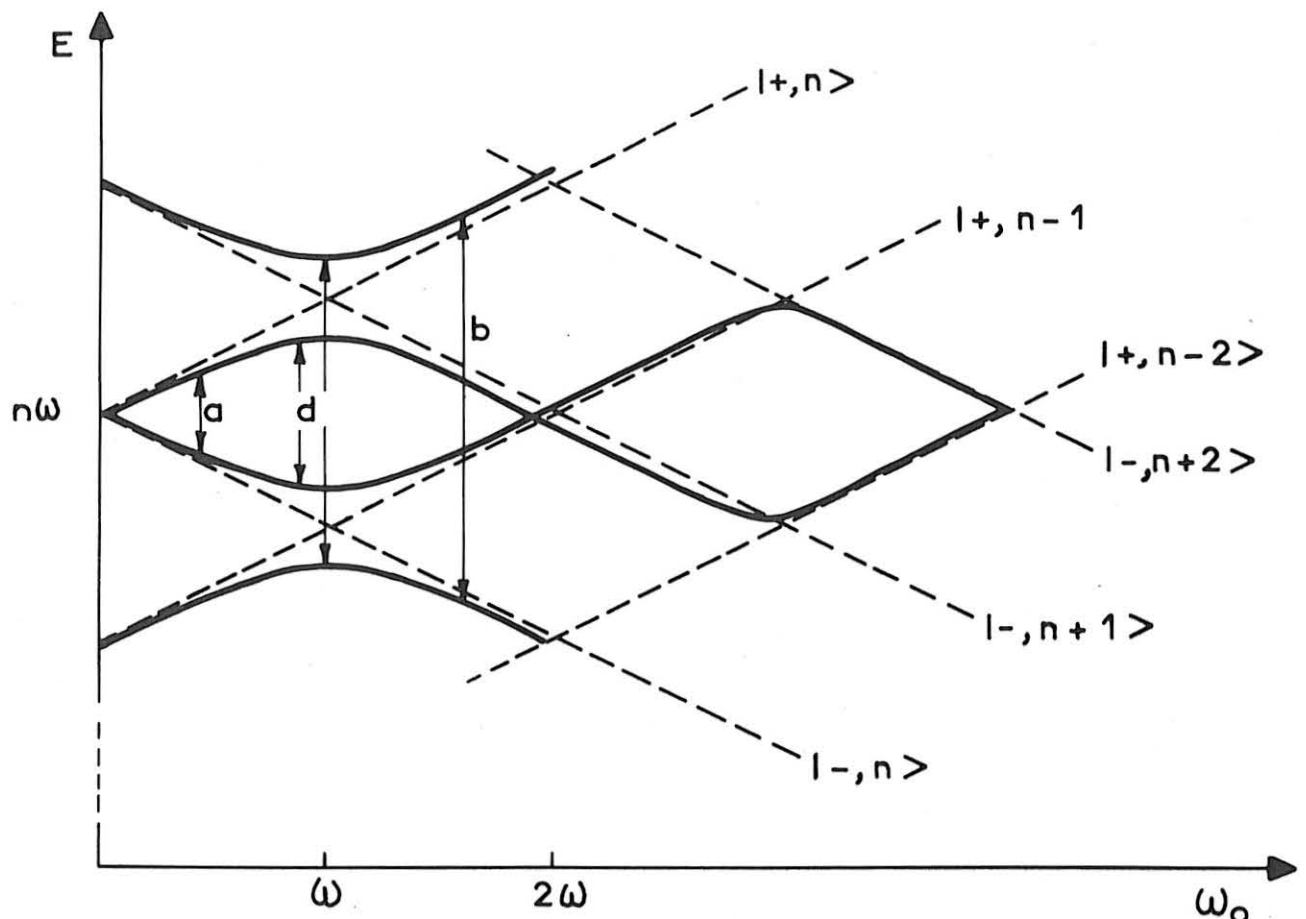
b) Avantages

Cette méthode ne perturbe pas l'évolution individuelle des spins : la fréquence de résonance mesurée est donc exactement la fréquence de Bohr cherchée et les raies ne présentent aucun élargissement dû à la méthode d'exploration (I.A.5).

c) Intensité des différentes raies

Le seul problème théorique qu'il s'agit de résoudre pour interpréter sans ambiguïté les résultats expérimentaux obtenus est celui de l'intensité relative des différentes résonances observables dans une situation donnée ($\omega_0/\omega, \omega_1/\omega$). Le calcul exact de l'intensité de ces raies n'est pas aisé; en effet, d'après l'équation (I.C.1) du cycle de pompage optique, il nécessite la connaissance des états propres $|\overline{m,n}\rangle$ et $|\overline{m',n'}\rangle$ du hamiltonien. Toutefois, comme nous allons le voir, le spectre des résonances présente en général une composante prépondérante qu'il est assez facile d'identifier. La méthode que nous utilisons est très simple : elle consiste à suivre par continuité pour ω_1/ω croissant, une résonance bien iden-

*) Le procédé de détermination du diagramme d'énergie (mesure d'une fréquence) montre clairement le lien existant entre ce diagramme d'énergie et les diagrammes de fréquence de PRYCE, SERIES et al (²⁴)(²⁵).



Pompage modulé : intensité des différentes raies observables

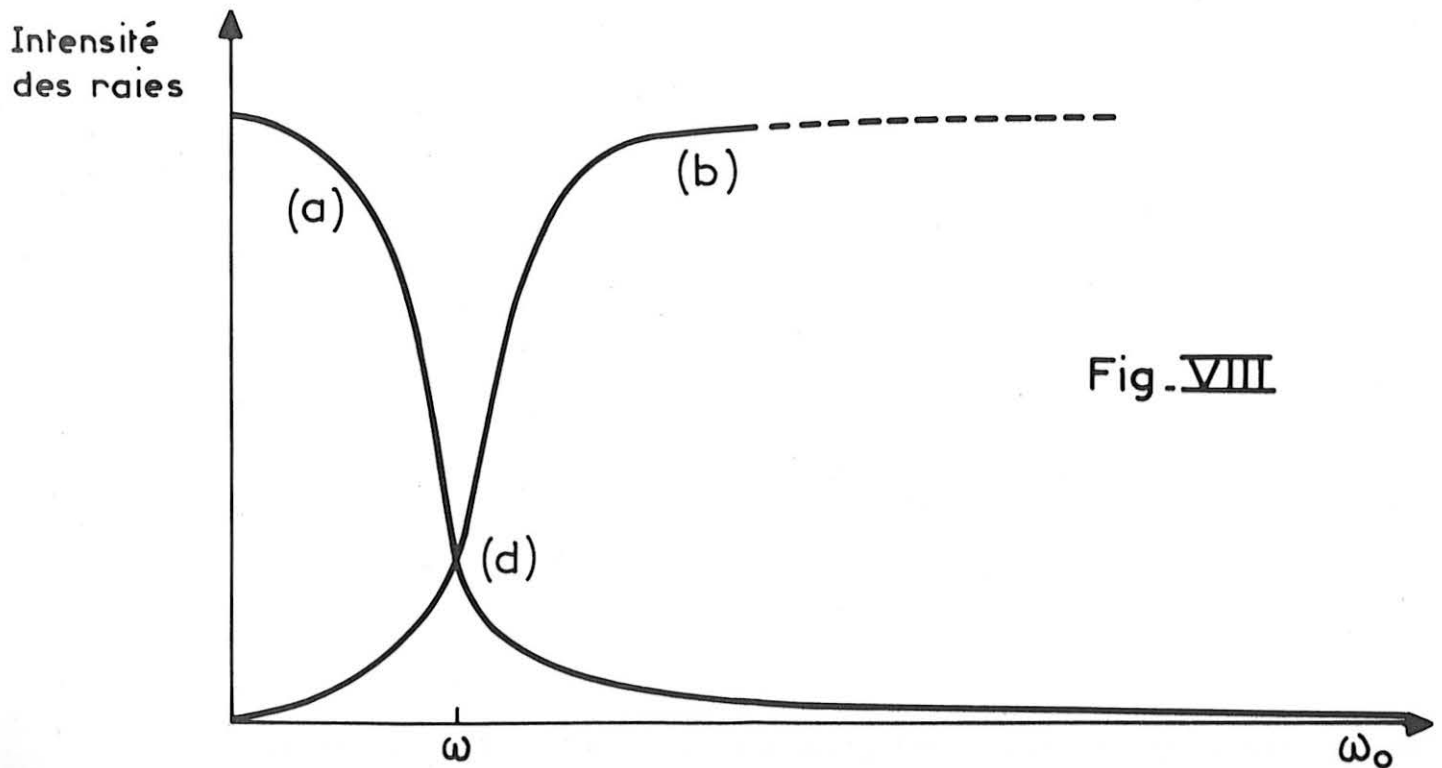


Fig. VIII

tifiée, pour un champ de RF faible. On sait alors déterminer sans ambiguïté pour chaque valeur de ω_1/ω le couple de niveaux auquel chaque résonance correspond.

Lorsque ω_1/ω est faible, on peut calculer, pour toute valeur de ω_0 , une expression approchée à l'ordre le plus bas en ω_1/ω des niveaux d'énergie et vecteurs propres. Nous ne redonnerons pas ici les détails de ce calcul élémentaire (voir par exemple réf. (5)(19)).

α) Au voisinage du premier anticroisement et pour $0 < \frac{\omega_0}{\omega} < 2$, l'approximation d'ordre le plus bas consiste à négliger la composante circulaire gauche du champ de RF. Les états propres issus des états non perturbés $|+, n\rangle$ et $|-, n+1\rangle$ s'écrivent alors

$$(IV.B.1) \quad \begin{cases} |+, n\rangle^* &= \cos \frac{\theta}{2} |-, n+1\rangle + \sin \frac{\theta}{2} |+, n\rangle \\ |-, n+1\rangle^* &= -\sin \frac{\theta}{2} |-, n+1\rangle + \cos \frac{\theta}{2} |+, n\rangle \end{cases} \quad \text{avec} \quad \text{tg } \theta = \frac{\omega_1}{2(\omega_0 - \omega)}$$

Les intensités des différentes raies observables avec un pompage modulé dans la direction Ox peuvent être calculées à partir de (IV.B.1). Les résultats de ce calcul sont résumés sur la figure VIII.

Pour $\omega_0/\omega < 1$, la résonance d'intensité maximale est la résonance (a). ($\sigma_{+,n, -n}$). Nous voyons apparaître ensuite le doublet d'AUTLER-TOWNES (21) (d) au voisinage de l'anticroisement (contamination maximale des fonctions d'onde). Les 2 résonances a et b ont alors même intensité.

Puis, pour $\omega_0/\omega > 1$, c'est la résonance (b) qui devient prépondérante ($\sigma_{-,n+1, +n-1}$).

En conclusion, la résonance d'intensité maximale est celle dont la fréquence d'évolution est la plus voisine de ω_0 .

β) Par des calculs d'approximation d'ordre supérieur dont le principe reste le même, on démontre aisément qu'il apparaît un doublet à chaque anticroisement et que pour $\omega_0 \neq (2p+1)\omega$ la composante prépondérante de ce doublet est celle dont la fréquence est la plus proche de ω_0 (cf. figure IX, les couples de niveaux auxquels il convient d'attribuer la résonance la plus intense ont été renforcés).

En suivant par continuité en ω_0 la composante la plus intense du spectre, on passe donc de l'étude de la résonance de

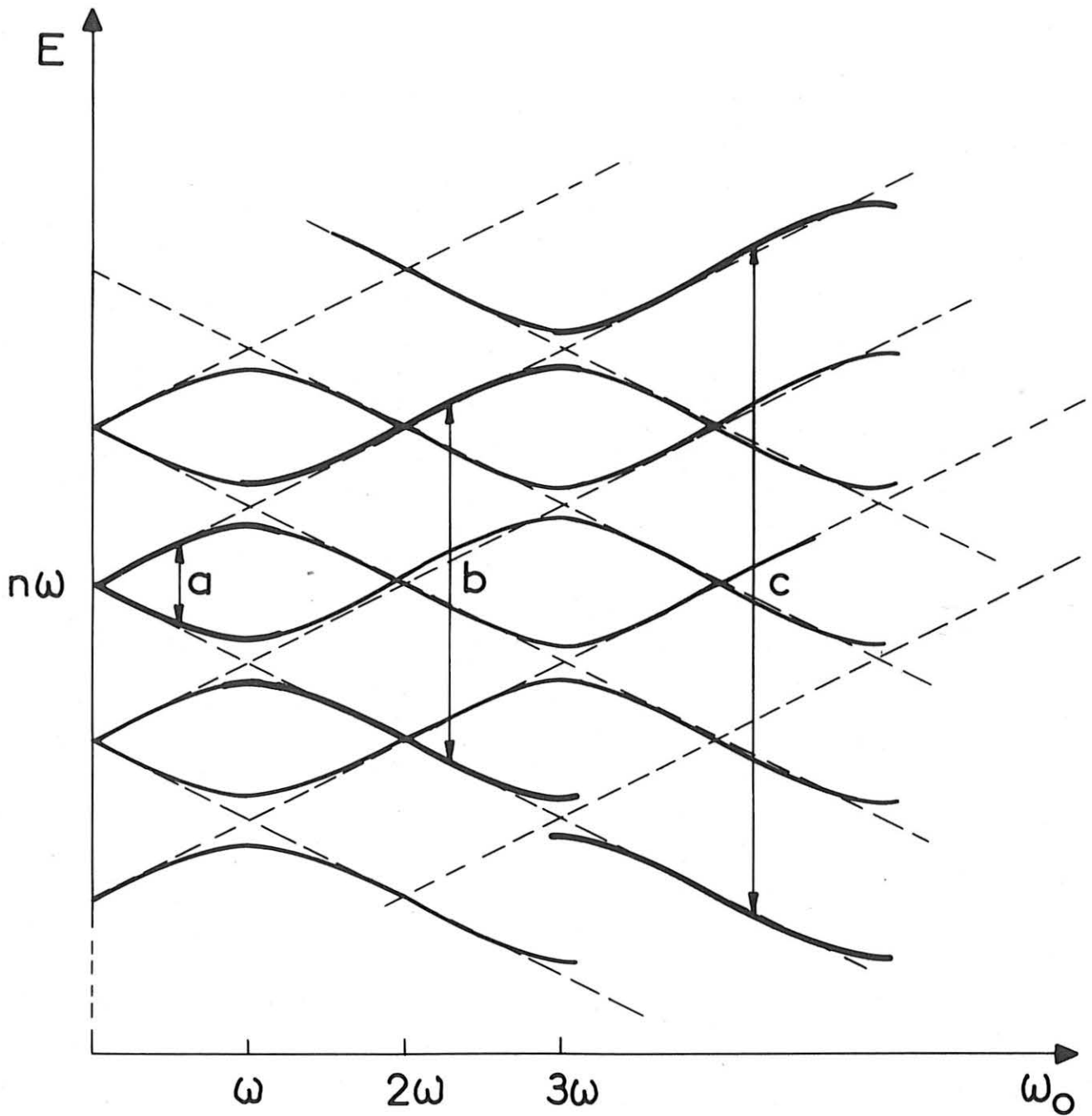
$$\sigma_{+,n, -n} \quad \text{pour} \quad \omega_0/\omega < 1$$

à
$$\sigma_{-,n+1, +n-1} \quad \text{pour} \quad \omega_0/\omega > 1$$

puis à
$$\sigma_{+,n+2, -n-2} \quad \text{pour} \quad \omega_0/\omega > 3$$

et ainsi de suite. On peut donc déduire sans ambiguïté ^{de} l'étude des fréquences de résonance le tracé quantitatif du diagramme d'énergie.

Fig. IX



Cohérences excitées avec une efficacité maximale dans les divers domaines de champ.

CHAPITRE V

RESULTATS EXPERIMENTAUX

Le modèle théorique que nous venons de présenter nous a permis de prévoir et calculer aisément un certain nombre de modifications des propriétés physiques d'un système atomique couplé à un fort champ de RF. Le but des expériences présentées ici est de mettre en évidence par l'étude de la lumière diffusée quelques-uns des effets étudiés dans les chapitres précédents.

Les expériences ont été réalisées sur l'état fondamental de l'isotope ^{199}Hg de spin nucléaire 1/2 (ce cas ne correspond pas aux calculs théoriques développés précédemment, qui sont relatifs à un état excité; toutefois, on montre aisément ⁽³⁾ qu'aux retombées de cohérence près, les équations d'évolution dans l'état fondamental ont la même forme que celles d'un état excité de moment cinétique $S = 1/2$).

Nous nous proposons donc, dans ce chapitre, après avoir envisagé dans un premier paragraphe tous les caractères communs aux expériences réalisées (§ A), d'exposer en détail celles qui concernent les effets suivants :

- § B : facteur de Landé dans un champ \vec{H}_0 de direction quelconque.
- § C : précession elliptique de l'atome "habillé" dans un champ H_0 .
- § D : résonance magnétique de l'atome "habillé".
- § E : résonance paramétrique de l'atome "habillé". Effet de la courbure.
- § F : résonance en pompage transversal modulé. Tracé du diagramme d'énergie de l'atome "habillé".

A - GENERALITES SUR LES METHODES EXPERIMENTALES

1) Pompage optique de ^{199}Hg

Les techniques expérimentales utilisées sont les techniques classiques du pompage optique mises au point par CAGNAC ⁽²²⁾. Les lampes excitatrices sont des lampes à ^{204}Hg + (Argon ou Néon) qui excitent sélectivement la composante $F = 1/2$ de ^{199}Hg (séparation isotopique 98,7%). L'ensemble de l'optique est en silice fondue. La cellule de résonance est une cellule à vapeur sèche, à isotope séparé, de 4 cm de côté. Le temps de relaxation sur les parois est de l'ordre de 1 s pour une cellule de 4 cm de côté dont les parois sont chauffées à 200°C environ. Les raies de résonance

observées sont donc fines, leur largeur varie de 0,2 à 0,5 c.p.s ($\sim 0,4$ mGauss) selon l'intensité du faisceau pompant. Les photomultiplicateurs utilisés sont du type RCA 1P.28.

2) Le champ magnétique statique \vec{H}_0

Le champ magnétique terrestre est compensé dans les trois directions grâce à trois paires de bobines de Helmholtz disposées respectivement selon la direction verticale et les 2 directions horizontales rectangulaires des 2 bancs de pompe optique.

Dans la mesure où nous avons fait un certain nombre de mesures en champ magnétique faible, et compte tenu de la finesse des raies, il est impossible de travailler sans protection contre les bruits magnétiques aléatoires de toute sorte présents dans le laboratoire : en effet, après avoir compensé, grâce au dispositif mis au point par S. HAROCHE et Mme BERLAND (²³), la perturbation magnétique due aux déplacements de l'ascenseur du laboratoire, il subsistait sur le montage un bruit magnétique aléatoire dont la composante verticale était en moyenne de 0,3 mG (et atteignait parfois une amplitude maximum de 0,8 mG); le bruit sur les 2 autres composantes horizontales toujours plus faible a varié de 0,1 à 0,3 mG. Compte tenu de la finesse des raies étudiées, il est évident qu'un bruit magnétique de cet ordre est prohibitif.

Citons encore, pour mémoire, un essai de compensation automatique des perturbations magnétiques dans une direction donnée que J. DUPONT-ROC nous a aidé à mettre au point. Le principe en est le suivant : on envoie en contre réaction sur une paire de bobines de compensation verticales le courant débité par un gaussmètre Hewlett-Packard, dont la sonde mesure, à chaque instant, la composante verticale du champ magnétique au niveau de la cellule de résonance. Cette méthode nous a donné de très bons résultats, mais elle nécessite un gaussmètre et une sonde par direction de champ à compenser et ne peut être employée si l'on envisage de balayer adiabatiquement une composante du champ magnétique statique H_0 .

Nous avons donc dû nous résoudre à effectuer toutes les expériences à l'intérieur d'un blindage; nous avons utilisé le montage expérimental réalisé par N. POLONSKY et J. DUPONT-ROC et décrit dans la thèse de 3^e cycle de ce dernier (¹⁸). Sur ce montage, 3 paires de bobines de Helmholtz munies de plusieurs enroulements permettent :

- 1 - de compenser le champ magnétique résiduel dans les 3 directions Ox , Oy , Oz (le réglage du champ nul est effectué selon la méthode décrite dans les références (3) et (23).)
- 2 - de créer, au niveau de la cellule de résonance, un champ magnétique statique H_0 et un champ de radiofréquence dont les directions et les intensités respectives peuvent être a priori quelconques.

Toutefois, la présence du blindage nécessite certaines précautions, en particulier sur un tel montage, l'on ne peut réaliser des "pulses" de champ magnétique statique supérieurs à 100 mGauss environ, sans observer une saturation du blindage qui se traduit par l'apparition d'une magnétisation rémanente nécessitant une démagnétisation ultérieure.

3) Le champ de radiofréquence $H_1 \cos \omega t$

Les problèmes essentiels que nous avons dû résoudre concernent en fait le champ de radiofréquence linéaire intense $H_1 \cos \omega t$ qui "habille" l'atome.

a) stabilité en amplitude et en fréquence

La finesse des raies étudiées nécessite l'emploi d'un générateur très stable en fréquence (nous avons utilisé pour ceci l'oscillateur P.A.R. modèle 110). Pour obtenir un niveau de RF dont l'intensité et la stabilité sont suffisantes, nous avons dû amplifier la tension fournie par l'oscillateur à l'aide d'un amplificateur Krohn-Hite. Nous avons pu ainsi réaliser des couplages, ω_1/ω , du système atomique avec le champ de RF dont la stabilité tant en fréquence qu'en amplitude était au moins de l'ordre de 10^{-4} .

b) Mesure de ω_1/ω

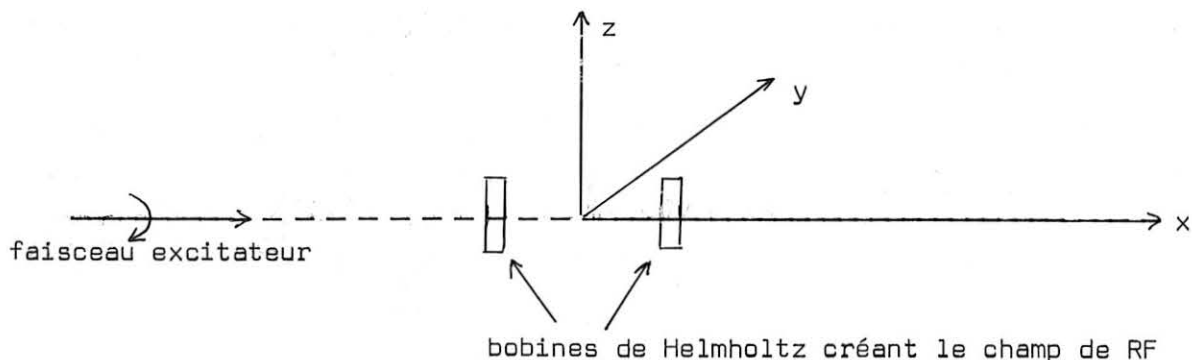
Nous avons vu dans la partie théorique que l'étalonnage absolu de H_1 n'était pas nécessaire; seul est nécessaire la connaissance de l'intensité du couplage, ω_1/ω ; nous avons réalisé cet étalonnage en étudiant les variations du facteur de Landé dans le plan perpendiculaire à la radiofréquence (11). C'est en réalisant cet étalonnage que nous avons pu constater que le caractère linéaire du champ de RF produit par une paire de bobines de Helmholtz n'était pas parfait.

c) Existence de composantes circulaires parasites

1. Anomalies observées sur l'effet Hanle

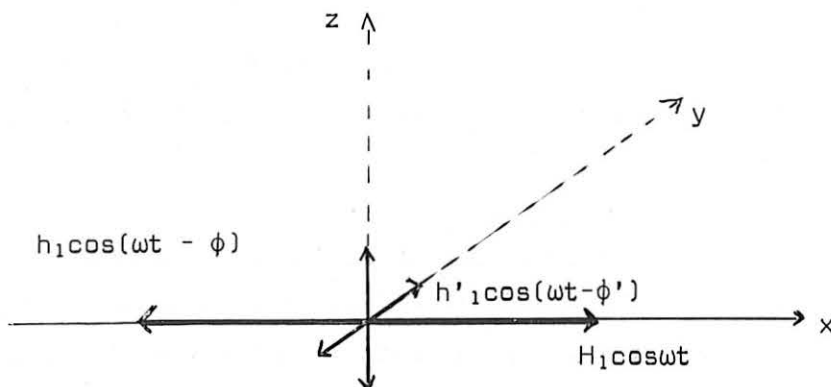
Les premières courbes d'effet Hanle que nous avons obtenues sur l'atome "habillé" présentaient les 2 anomalies suivantes :

- un déplacement dont le signe et l'amplitude variait en fonction de ω_1/ω .
- des variations d'intensité en fonction de ω_1/ω , ce qui ne devrait pas se produire, le pompage se faisant dans la direction de H_1 (voir schéma ci-dessous)



2. Explication possible

Montrons que ce phénomène peut être attribué à l'existence de composantes parasites de la radiofréquence dans les directions Oy et Oz, difficiles à éviter dans la mesure où nous travaillons à l'intérieur d'un blindage. Supposons donc que la topographie réelle des champs de RF au niveau de la cellule de résonance soit la suivante :



où h_1 et h'_1 sont très inférieurs à H_1 .

Remarquons tout d'abord que chacune de ces composantes parasites peut être décomposée en 1 composante en phase avec H_1 et une composante en quadrature. L'effet de la composante en phase consiste juste à modifier très légèrement la direction du champ linéaire $H_1 \cos \omega t$; nous avons pu voir expérimentalement que cet effet était négligeable, h_1/H_1 étant de l'ordre du millièème.

Considérons donc seulement les composantes en quadrature ($\phi = \phi' = \frac{\pi}{2}$). Elles font apparaître des champs de radiofréquence circulaires parasites tournant respectivement dans les plans xOz et xOy, qui perturbent l'atome "habillé" par le champ linéaire $H_1 \cos \omega t$.

Considérons alors les diagrammes de la figure III-c et -d : on trouve aisément une explication plausible des anomalies signalées dans le paragraphe précédent. Que se passe-t-il en effet si l'on balaie H_0 le long de Oy ? la composante tournante dans le plan xOz σ^+ par rapport à la direction du champ H_0 déplace le croisement de niveau étudié (fig. III-c), tandis que la composante tournante dans le plan xOy fait apparaître un anticroisement de niveau en champ nul (fig. III-d) qui explique l'élargissement et la diminution d'intensité de la résonance observée.

De la même façon, si l'on balaie le champ magnétique statique dans la direction Oz, l'effet de la composante tournante dans le plan xOz explique l'élargissement de la résonance tandis que l'effet de la composante tournante dans le plan xOy explique le déplacement de la résonance.

Ordre de grandeur du déplacement

Le croisement de niveau est déplacé par rapport au champ nul d'une quantité ΔH_0 telle que :

$$(V.A.1) \quad \gamma J_0 \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right) \Delta H_0 \sim \frac{h_1^2}{\omega}$$

(chaque niveau, de pente $\pm 1/2 \gamma J_0 \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right)$, est en effet déplacé d'une quantité du 2e ordre par rapport au champ tournant parasite h_1). On en déduit

$$(V.A.2) \quad \gamma \Delta H_0 = \Delta \omega_0 \propto \frac{h_1^2}{\omega J_0 \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right)}$$

On voit sur cette formule que même si h_1 est très petit, le déplacement devient non négligeable dès que ω_1/ω tend vers un zéro de la fonction de Bessel.

Notons d'ailleurs que la formule (V.A.2) permet de rendre compte du signe et du sens de variation du déplacement anormal effectivement observé.

3. Suppression de cet effet parasite

Le principe de la compensation de cet effet parasite est alors évident.

On crée dans les directions Oy et Oz de petites composantes linéaires déphasées de $\pi/2$ par rapport à la composante principale $H_1 \cos \omega t$.

Balayant H_0 sur Oy , on détermine l'intensité de h_z (compensation selon Oz) de telle sorte que l'effet Hanle ne subisse pas de déplacement de RF (cette méthode est extrêmement précise puisqu'il suffit, pour augmenter la grandeur du déplacement parasite, de s'approcher de plus en plus près de l'annulation du facteur de Landé). En balayant ensuite H_0 sur Oz on règle de la même façon la composante h_y .

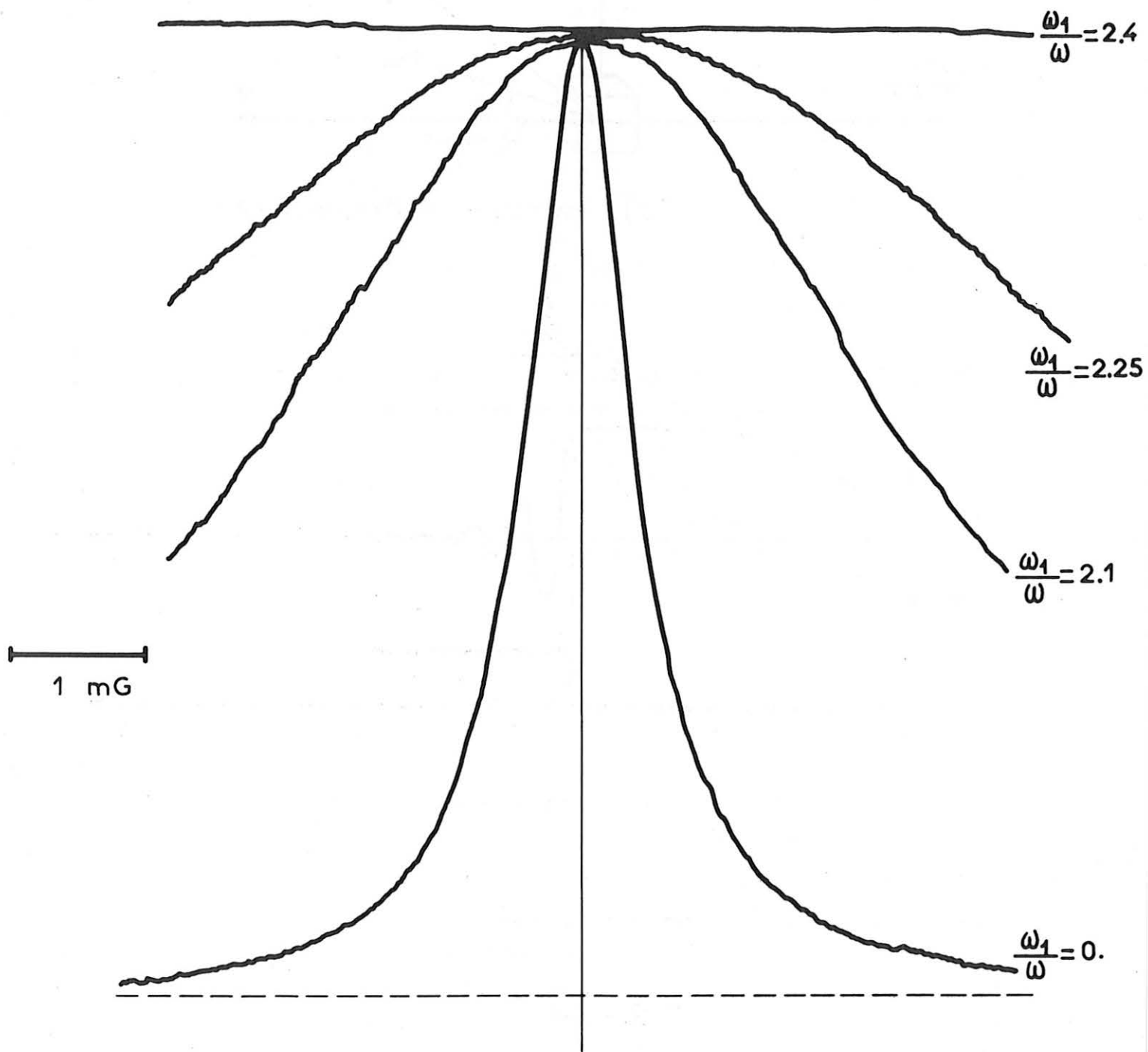
Nous avons pu ainsi obtenir un réseau de courbes d'effet Hanle normales tant en position qu'en intensité et étalonner ω_1/ω (fig. X).

- Remarques :
- 1) La méthode utilisée pour régler h_y et h_z n'est pas la seule possible. On peut en effet envisager de régler h_y et h_z en utilisant l'effet parasite de variation d'intensité de la résonance Hanle. En tout état de cause, nous avons toujours vérifié que, quelle que soit la manière utilisée pour opérer, la compensation d'un des phénomènes parasites sur les 2 composantes entraînait automatiquement la suppression de l'autre, ce qui apporte a posteriori un argument supplémentaire en faveur de notre explication.
 - 2) On peut se demander pourquoi S. HAROCHE n'avait pas été gêné par ces effets parasites lors de son premier travail sur l'effet Hanle de l'atome "habillé" (¹¹). L'explication est vraisemblablement la suivante : il n'opérait pas à l'intérieur d'un blindage et son montage ne comportait pas autant de paires de bobines d'Helmholtz que le nôtre. Les courants induits par le champ $\vec{H}_1 \cos \omega t$ devaient donc être beaucoup plus faibles, et par suite également, les champs de radiofréquence parasites dans les directions perpendiculaires à H_1 .

B - FACTEUR DE LANDE DANS UN CHAMP \vec{H}_0 DE DIRECTION QUELCONQUE

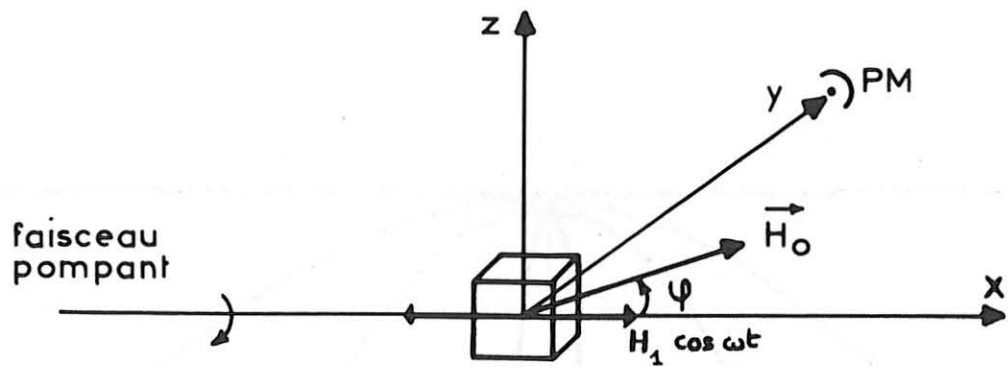
1) Principe de l'expérience

Nous désirons vérifier l'effet décrit par la formule (II.E.5.) de la partie théorique. Le schéma de principe de l'expérience est représenté sur la figure XI-a : en l'absence de champ \vec{H}_0 , on oriente par pompage optique le système atomique dans la direction Ox ; la figure b montre l'exponentielle de pompage telle qu'on l'observe, entre les instants 0 et t_0 , sur la lumière diffusée. A l'instant

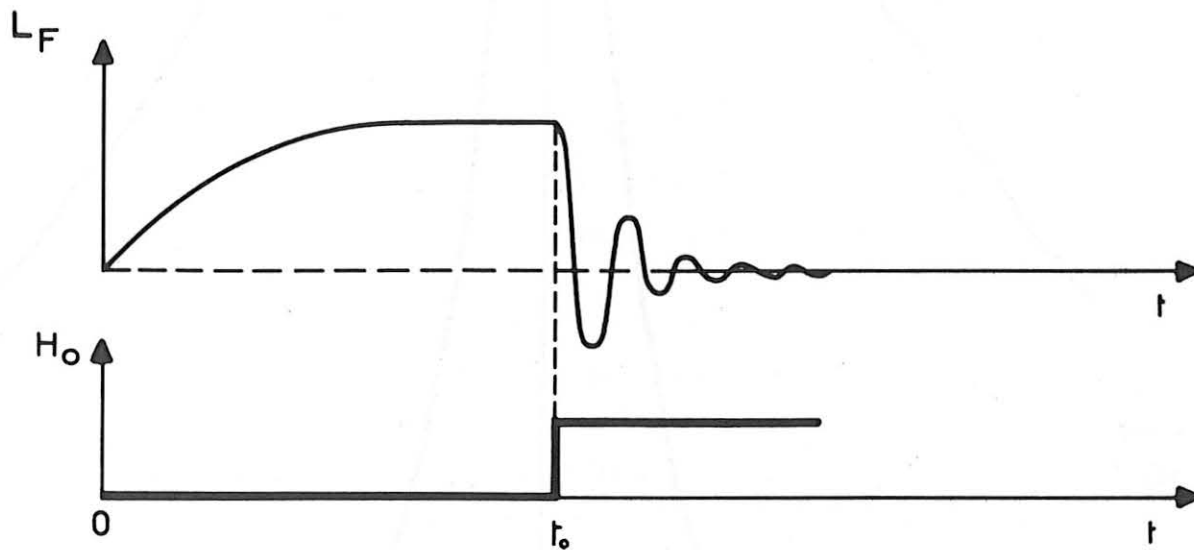


Réseau de courbes d'effet Hanle

Fig. X



a) principe de l'expérience



b) transitoires

Anisotropie du facteur de Landé

Fig. XI

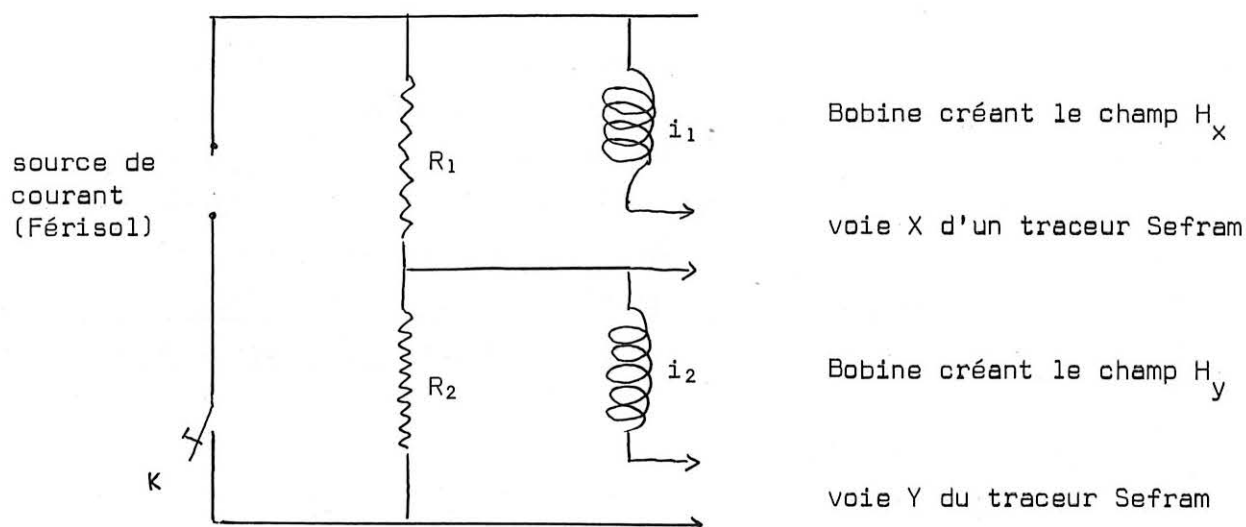
t_0 , on établit brusquement le champ magnétique statique \vec{H}_0 ; on observe alors sur la lumière diffusée le régime transitoire correspondant au passage de l'état stationnaire en champ nul au nouvel état stationnaire dans le champ \vec{H}_0 . D'après l'étude théorique, nous savons que la période apparaissant au cours de ce phénomène transitoire est celle de la précession de Larmor de l'atome "habillé" par $H_1 \cos \omega t$ dans le champ \vec{H}_0 : la connaissance de \vec{H}_0 en grandeur et direction (ϕ) nous permet alors de déterminer le facteur de Landé $g(\phi)$ pour la valeur du couplage ω_1/ω envisagée.

ω_1/ω étant fixé de même que ω_0 , nous recommençons l'expérience en faisant varier ϕ de façon à vérifier expérimentalement l'anisotropie du facteur de Landé de l'atome "habillé". Nous reprenons ensuite la même série d'expériences pour différentes valeurs de ω_1/ω afin d'étudier la variation de $g(\phi)$ avec ω_1/ω .

Remarques :

- 1) Le schéma de la figure XI-b représente une transitoire pour laquelle la dépolarisation magnétique est totale à la fin du pulse : $|\vec{H}_0|$ est plus grand que le champ correspondant à la largeur des courbes d'effet Hanle. Dans un champ \vec{H}_0 moins intense ($\omega_0 J_0(\frac{\omega_1}{\omega}) < \Gamma$), on constate expérimentalement qu'on atteint un état stationnaire différent : la dépolarisation magnétique n'est alors pas totale.
- 2) Comme cette expérience (et toutes celles qui suivent) sont relatives à un état fondamental, le signal optique de détection est la lumière absorbée, L_A , par la vapeur. On peut cependant utiliser également la lumière de fluorescence L_F qui varie dans le même sens que L_A (on ne met pas d'analyseur devant le photomultiplicateur qui détecte L_F). Suivant les cas, il peut être plus avantageux d'utiliser L_A ou L_F (en ce qui concerne le rapport signal sur bruit).
- 2) Réalisation de l'expérience
 - a) Réalisation du pulse de champ oblique, \vec{H}_0

Nous avons réalisé très simplement le pulse de champ oblique H_0 à l'aide d'un circuit avec pont diviseur. L'interrupteur K permet d'établir simultanément les courants i_1 et i_2 , donc de créer simultanément H_x et H_y , ce qui réalise un pulse oblique.



la variation des résistances R_1 et R_2 permet le réglage de i_1 et i_2 donc de H_x et H_y . Nous avons étalonné directement en champ les sorties X et Y du traceur Sefram : à chaque pulse de champ, on enregistre ainsi un segment de droite qui nous renseigne immédiatement sur les composantes H_x , H_y du champ et sur l'angle ϕ que fait leur résultante \vec{H}_0 avec Ox .

Connaissant H_x et H_y , on en déduit H_0 ; nous avons également mesuré directement H_0 en étudiant les transitoires de l'atome "nu" (la période de ces transitoires est en effet $2\pi/\omega_0$); la comparaison de ce résultat expérimental à la détermination de H_0 faite à partir des mesures de H_x et H_y nous a donné un accord parfaitement satisfaisant à la précision de nos mesures près qui est ici de l'ordre de 1 à 2%

b) Intensité du pulse de champ H_0

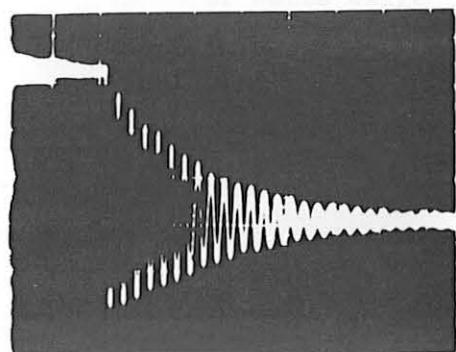
Pour voir un nombre suffisant d'oscillations (cf fig. XI-b), il faut appliquer un champ magnétique H_0 tel que la période de précession de Larmor dans un tel champ soit très inférieure au temps de relaxation, soit :

$$\frac{2\pi}{\omega_0 J_0 \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right)} < \frac{1}{\Gamma}$$

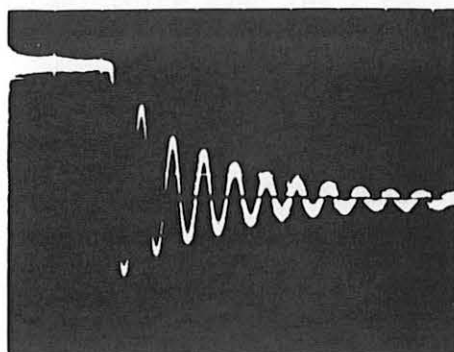
l'expérience nécessite donc l'utilisation d'un champ magnétique H_0 qui croît en raison inverse de $J_0 \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right)$.

Fig. XII

Pression de Larmor ($\psi = \frac{\pi}{2}$)

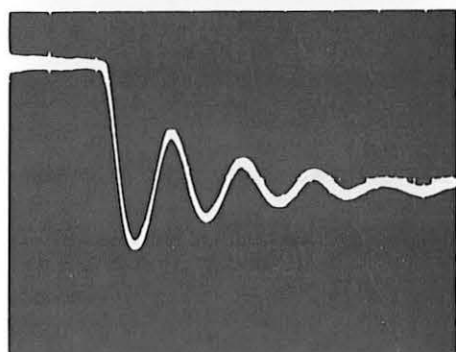


a

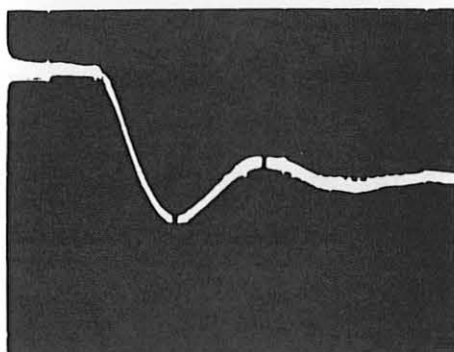


b

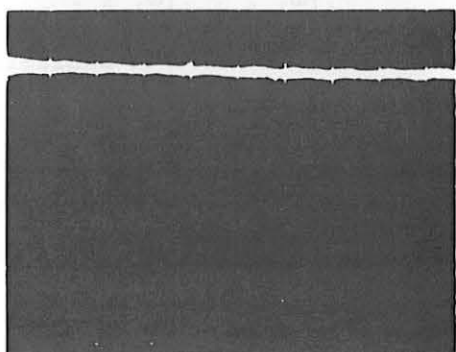
100 ms



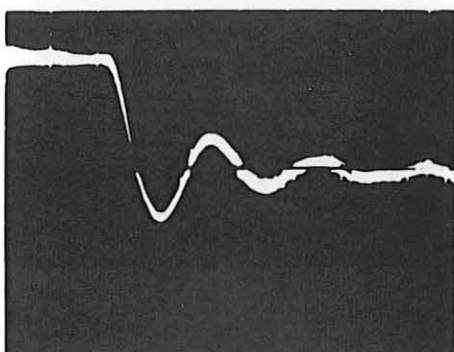
c



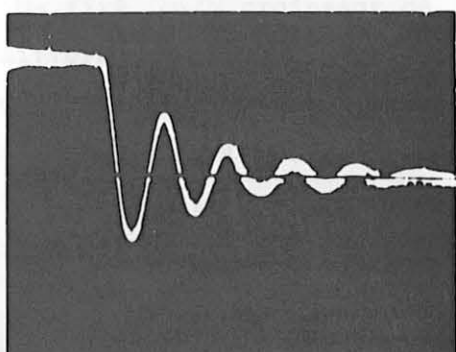
d



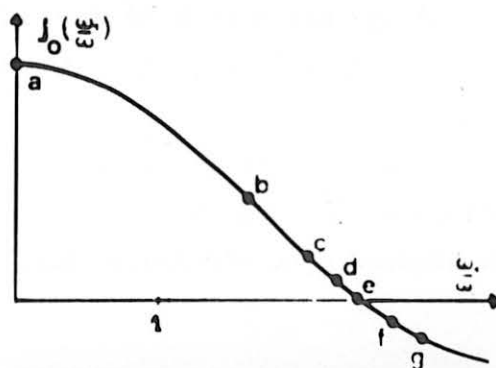
e



f



g



Or cette exigence se trouve contradictoire avec les 2 remarques suivantes :

. La première, d'ordre théorique, est que l'expression (II.E.5) du facteur de Landé n'est valable que dans l'hypothèse du chapitre II, $\omega_0 \ll \omega$. Sachant que la fréquence du champ $H_1 \cos \omega t$ utilisée est de 265 Hz, ceci nous introduit une première limitation.

. La deuxième est d'ordre pratique : compte tenu des risques de saturation du blindage (cf § A - Généralités), nous ne pouvons réaliser de pulse de champ supérieur à 60 mG environ. Si la première de nos limitations est assez artificielle puisque ω est arbitraire, la deuxième est absolument impérative sous peine de devoir démagnétiser le blindage après chaque pulse.

c) Efficacité de la détection

Dans la mesure où nous pompons le système dans la direction Ox, l'efficacité de l'excitation est indépendante du couplage avec la RF (cf chap. II, § F-1°), mais si ϕ est petit, il n'y a plus qu'un pourcentage infime de l'orientation introduite qui précesse autour de \vec{H}_0 . Ainsi lorsque ϕ décroît et devient de l'ordre de 20° , le signal n'est pratiquement plus exploitable. Pour ces valeurs de ϕ , nous avons dû alors réaliser un pompage et une détection selon Oy, ce qui présente essentiellement ici deux inconvénients : il y a tout d'abord perte d'un facteur $J_0^2(\frac{\omega_1}{\omega})$ ($J_0(\frac{\omega_1}{\omega})$ au pompage et $J_0(\frac{\omega_1}{\omega})$ à la détection) et apparition de modulations HF.

Notons enfin que le signal délivré par le photomultiplicateur (PM, fig. XI-a) est envoyé sur un oscillographe cathodique muni d'une caméra. Les modulations HF quand elles existent sont éliminées à la détection par utilisation d'un filtre passe-bas convenable.

3) Résultats

a) Exemple de transitoires pour $\phi = \pi/2$

La figure XII montre les diverses transitoires observées pour $\phi = \pi/2$, H_0 fixé, ω_1/ω croissant de la photo (a) ($\omega_1/\omega = 0$) à la photo (g) ($\omega_1/\omega = 2.9$). Les différentes valeurs intermédiaires de ω_1/ω sont notées sur le graphique en bas à droite, ainsi que les valeurs correspondantes de $J_0(\frac{\omega_1}{\omega})$. On voit bien que la fréquence des oscillations varie comme $J_0(\frac{\omega_1}{\omega})$. Le but de cette expérience préliminaire était de tester le montage expérimental en retrouvant un effet dont la manifestation statique (effet Hanle de dépolarisation magnétique) avait été déjà étudiée en détail

par HAROCHE. La base de temps de l'oscillographe étant bien calibrée, la détermination de la période des transitoires photographiées est extrêmement précise, tant que le nombre d'oscillations reste suffisant et l'accord entre l'expérience et la théorie est parfaitement satisfaisant.

b) Anisotropie du facteur de Landé

Les résultats sont présentés sur la figure XIII. C'est un diagramme polaire dont l'axe Ox représente la direction du champ de RF et l'axe perpendiculaire la direction Oz de la figure XI-a. L'angle polaire ϕ représente l'angle de \vec{H}_0 avec Ox; la longueur du rayon vecteur est proportionnelle au facteur de Landé mesuré dans la direction ϕ par les méthodes précédemment décrites. On obtient ainsi, en faisant varier ϕ de 0 à $\pi/2$, une courbe qui donne pour chaque valeur de ω_1/ω la variation de $g(\phi)$ avec ϕ . Il ne faut pas oublier que la variation du facteur de Landé est un phénomène ayant la symétrie de révolution autour de Ox et présentant 2 plans de symétrie (xOy et yOz). La représentation dans l'espace du facteur de Landé pour ω_1/ω donné est donc un volume de révolution dont la coupe par un plan méridien est obtenue en complétant par symétrie par rapport à Ox et Oz la courbe représentée sur la figure XIII pour la valeur de ω_1/ω envisagée.

Chacune des courbes tracées correspond à une valeur de ω_1/ω indiquée dans la partie gauche de la figure. Les courbes ont été tracées à partir de la formule théorique inscrite à droite, les points sont les résultats expérimentaux. Compte tenu de la précision de l'expérience réalisée (qui varie selon les domaines de ϕ et ω_1/ω de 1 à 6% environ) l'accord entre la théorie et l'expérience est tout à fait satisfaisant.

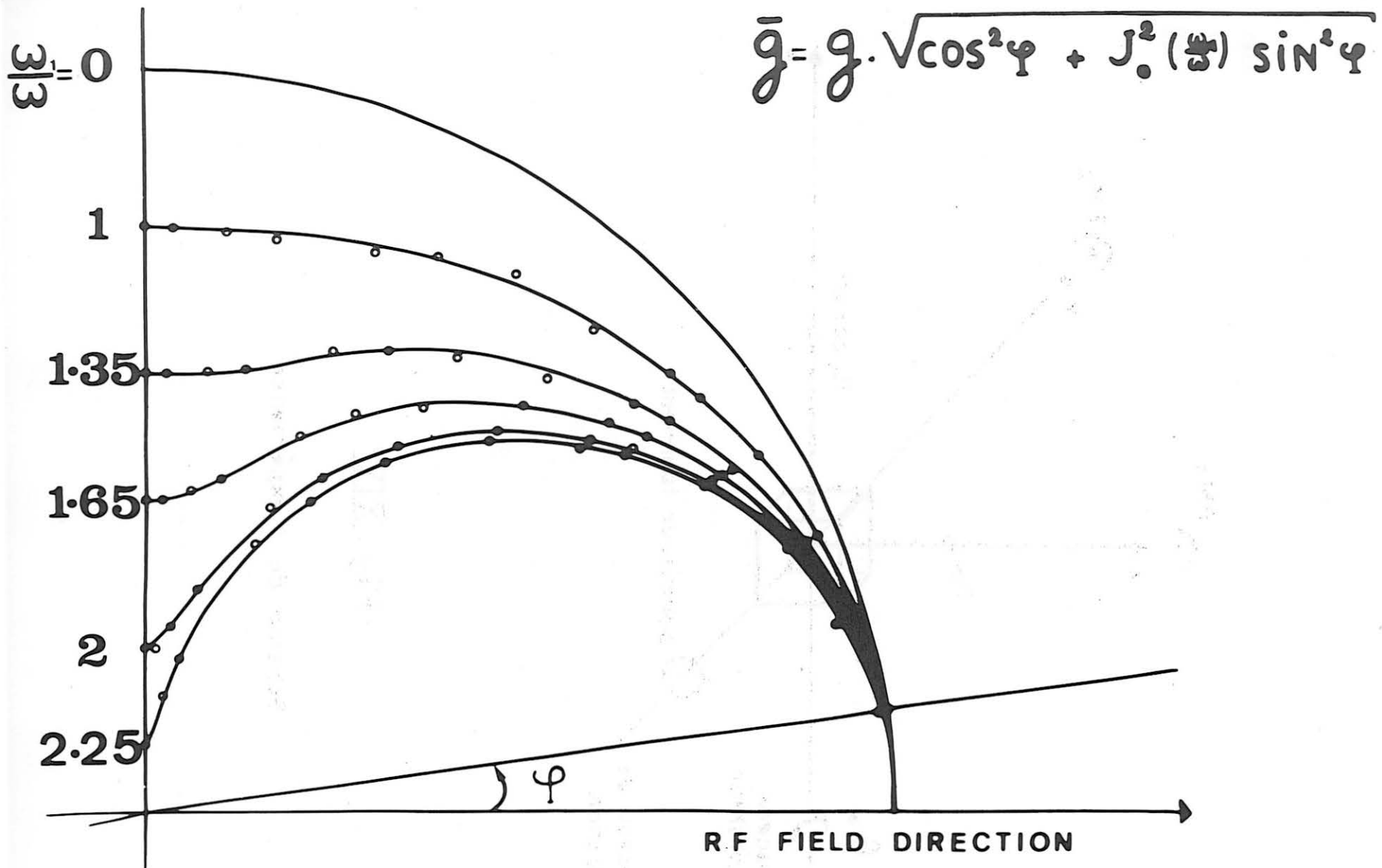
C - LA PRECESSION DE LARMOR DE L'ATOME "HABILLE"

1) Principe de l'expérience

Dans l'expérience précédente, nous nous sommes intéressés essentiellement à la modification due au couplage avec la RF de la vitesse de précession de l'atome "habillé" dans un champ H_0 . Le but de cette nouvelle expérience est de mettre en évidence l'ellipticité du mouvement du spin et de vérifier les formules théoriques du chapitre II, § 6-II.

L'expérience réalisée est schématisée sur la figure XIV.

L'orientation du système se fait selon Ox grâce à un faisceau exciteur de polarisation σ^+ . On applique brusquement, à l'instant t_0 , un champ magnétique statique H_0 dans la direction Oz et l'on suit la précession des spins dans le plan



Anisotropie du facteur de Landé

Fig. XIII

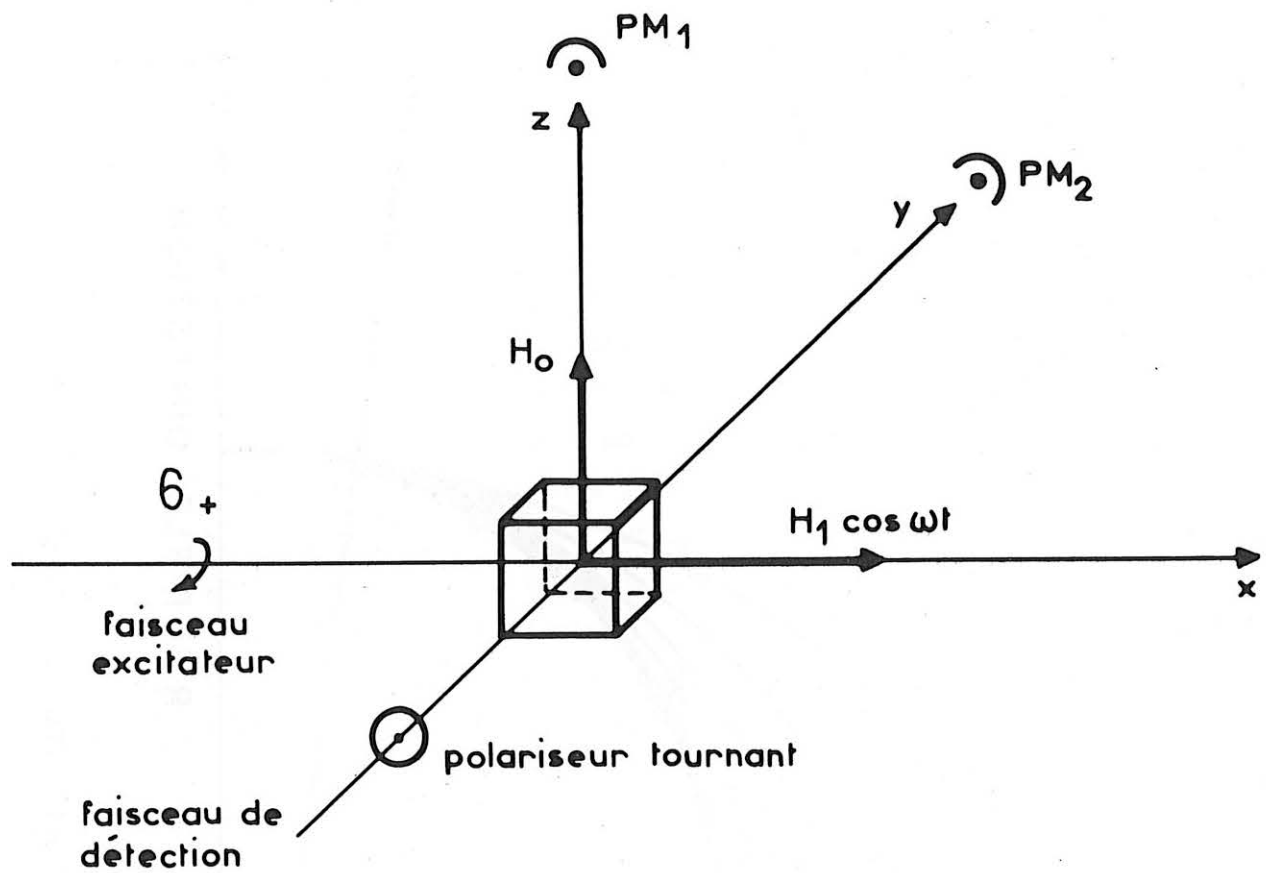


Fig. XIV

Schéma de l'expérience

xOy. On détecte $\langle {}^{(0)}M_x \rangle$ grâce au faisceau excitateur et $\langle {}^{(0)}M_y \rangle$ au moyen d'un faisceau croisé de détection. En envoyant les 2 signaux de détection sur un traceur XY, on reconstitue ainsi la précession des spins.

Remarque : En fait les conditions expérimentales sont légèrement différentes de celles supposées dans la partie théorique dans la mesure où on réalise un pulse de H_0 et non pas de pompage. Néanmoins, on voit aisément que le régime transitoire effectivement réalisé a les mêmes caractéristiques fondamentales que le régime transitoire étudié dans la partie théorique.

2) Réalisation de l'expérience

a) difficultés expérimentales

Le problème spécifique de cette expérience est celui de la détection de l'orientation dans le plan xOy. La composante $\langle {}^{(0)}M_x \rangle$ du moment magnétique de la vapeur est détectée sur la lumière réémise par les atomes orientés selon Ox (PM). Le rapport signal sur bruit γ est excellent, de l'ordre de 50.

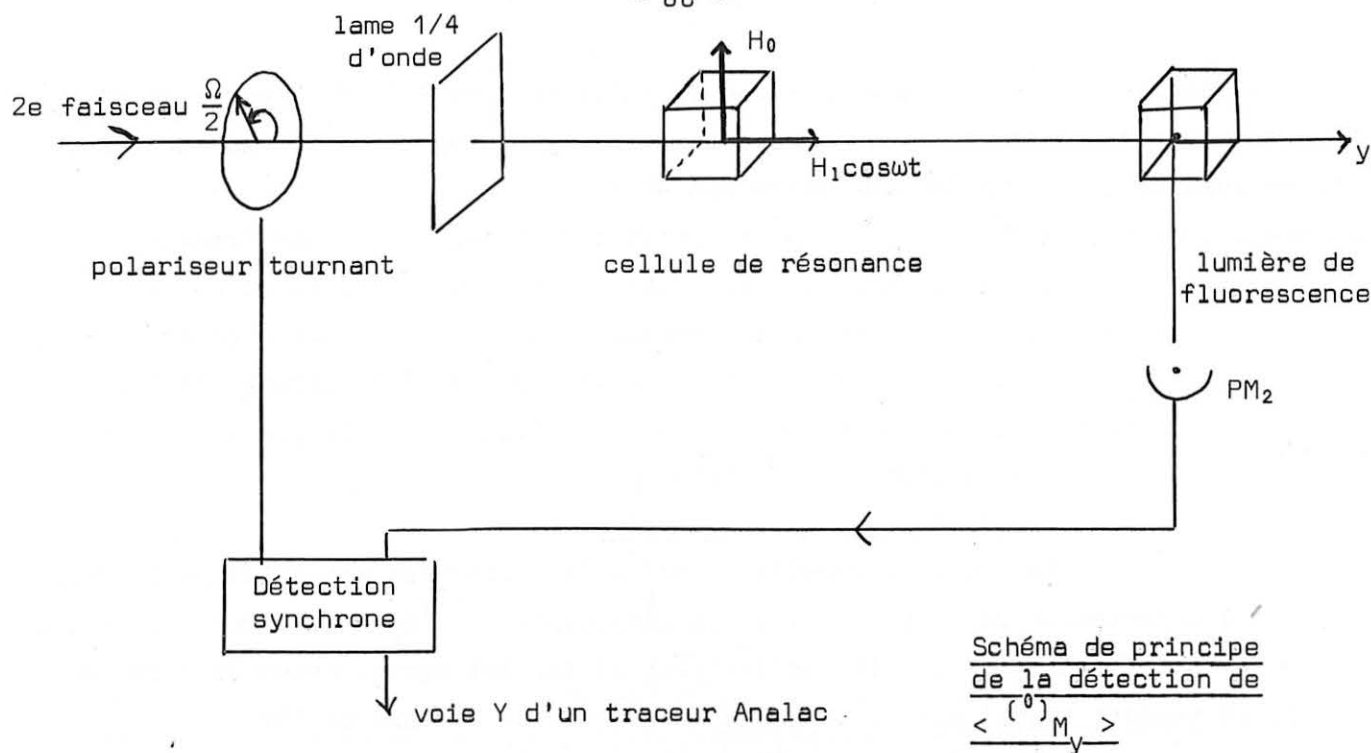
La détection de $\langle {}^{(0)}M_y \rangle$ nécessite l'emploi d'un 2e faisceau lumineux le long de Oy. Il est exclu de faire selon Oy une détection de même type que celle utilisée le long de Ox, car l'introduction de ce 2e faisceau perturberait complètement le pompage et les conditions initiales de notre expérience : $\langle M_x(0) \rangle \neq 0$, $\langle M_y(0) \rangle = \langle M_z(0) \rangle = 0$. Nous avons donc essayé d'utiliser une détection de type Faraday (faisceau non résonnant). Cette méthode, qui s'avère bonne pour un régime stationnaire (car on peut alors lui adjoindre une détection synchrone), nous a donné, pour un régime transitoire, un rapport signal sur bruit très insuffisant.

b) Procédé de détection de $\langle {}^{(0)}M_y \rangle$

Nous avons finalement choisi le procédé suivant (schéma ci-dessous). La polarisation du 2e faisceau est modulée à une fréquence Ω en utilisant un polariseur tournant à $\Omega/2$ devant une lame 1/4 d'onde.

Ω est choisi de façon que le faisceau 2 n'effectue aucun pompage transversal:

Tout d'abord, Ω est différent de la pulsation de Larmor, $\omega_0 J_0 \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right)$, de l'atome "habillé". Il n'y a donc aucun effet résonnant. D'autre part, Ω est très grand devant la largeur Γ du niveau atomique, de telle sorte que les spins ne peuvent pas suivre une perturbation aussi rapide.



Le seul effet cherché est donc de moduler à Ω la lumière transmise qui est proportionnelle à $\langle M_y(t) \rangle$ d'où la possibilité d'utiliser une détection synchrone dont la constante de temps soit très inférieure à la période de Larmor. Enfin, au lieu de mesurer la lumière directement transmise par la cellule de résonance, nous avons utilisé la lumière réémise par une 2e cellule de ^{199}Hg éclairée par la lumière transmise par la cellule de résonance (nous éliminons ainsi les ailes de la raie optique du faisceau 2 qui ne contribuent pas au signal). Ces dernières améliorations nous ont permis d'atteindre, sur le signal de détection de $\langle {}^{(0)}M_y \rangle$, un rapport signal/bruit de l'ordre de 50.

c) Enregistrement de $\langle {}^{(0)}M_x \rangle$ et $\langle {}^{(0)}M_y \rangle$

Comme nous l'avons dit dans le paragraphe a, les signaux proportionnels à $\langle {}^{(0)}M_x \rangle$ et $\langle {}^{(0)}M_y \rangle$ sont respectivement envoyés sur les voies X et Y d'un traceur.

1) Notons qu'il a été nécessaire d'utiliser un traceur à bande passante suffisamment large pour qu'il puisse suivre la précession (nous avons employé le traceur ANALAC dont la bande passante est, d'après le constructeur, de l'ordre de 15 cps. En fait, nous nous sommes toujours bornés à des fréquences de précession inférieures ou égales à 10 cps).

LARMOR PRECESSION
 OF THE MAGNETIC
 MOMENT OF DRESSED
¹⁹⁹Hg ATOMS.

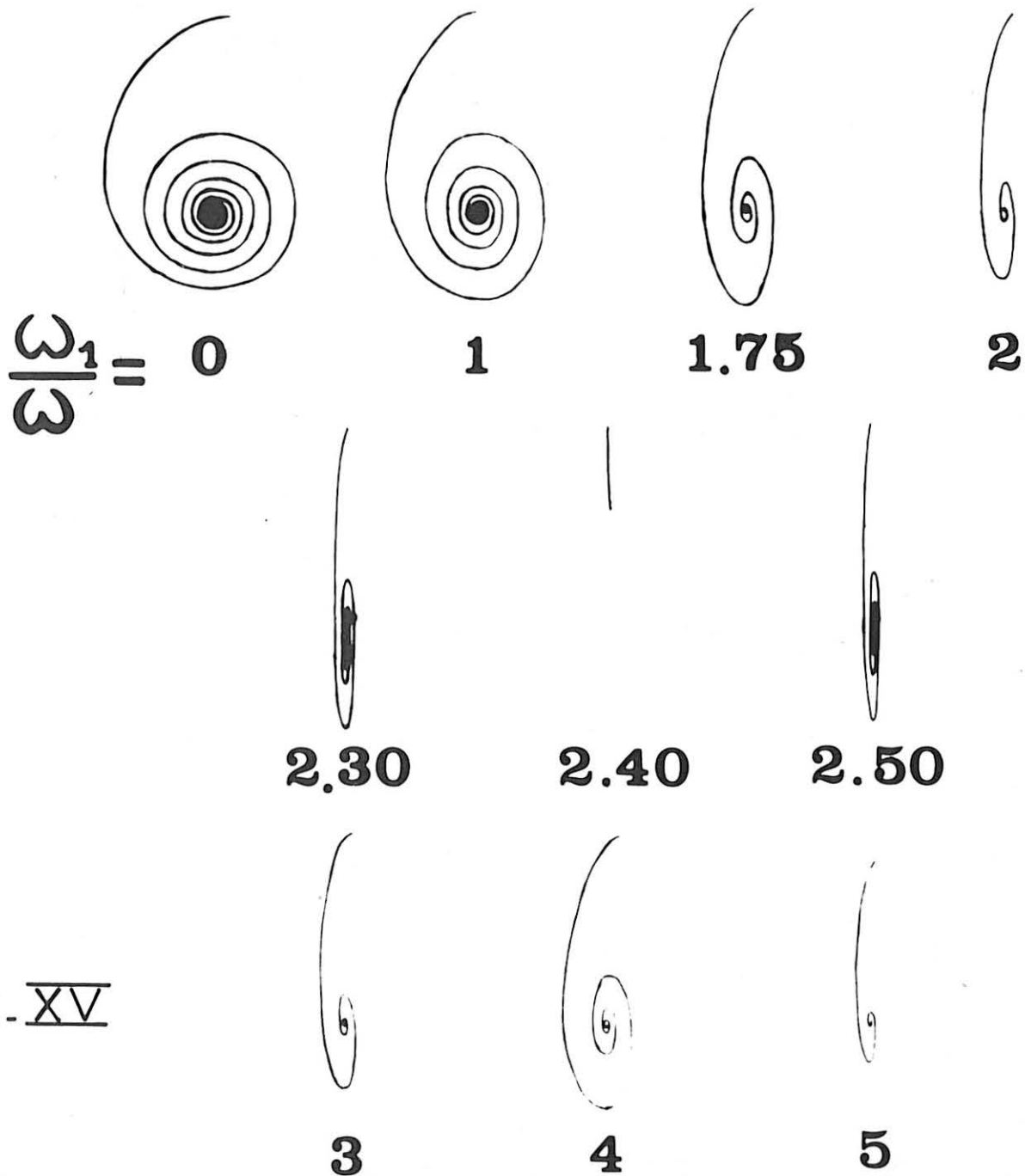
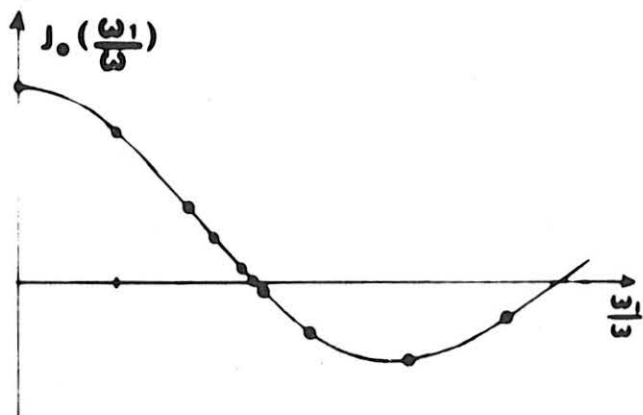


Fig. XV

2) Dans tout ce qui précède, nous nous intéressons uniquement à la composante basse fréquence, $\langle {}^{(0)}M_y \rangle$, de $\langle M_y \rangle$; les composantes modulées à ω ont été éliminées à l'entrée du traceur grâce à un filtre passe-bas.

3) Résultats

L'expérience proprement dite a été réalisée ainsi : Faisant d'abord $\omega_1/\omega = 0$, nous avons réglé l'amplification sur les 2 voies de façon à obtenir sur l'enregistrement un mouvement circulaire. En fait, par suite de la relaxation, l'extrémité du moment magnétique résultant décrit non pas un cercle mais une spirale logarithmique (cf. 1ère courbe de la figure XV représentant l'enregistrement de la précession sur le traceur XY : en abscisse $\langle {}^{(0)}M_x \rangle$, en ordonnée $\langle {}^{(0)}M_y \rangle$).

On établit ensuite le couplage avec la RF ($\omega_1/\omega \neq 0$) et on réalise la même expérience pour différentes valeurs de ω_1/ω . Chaque courbe de la figure XV correspond à une valeur particulière de ω_1/ω notée sous la photo de l'enregistrement. Les valeurs correspondantes de $J_0(\frac{\omega_1}{\omega})$ sont reportées sur le graphique en haut à droite.

On constate les phénomènes suivants.

a) La précession des spins devient elliptique sous l'action du couplage.

L'ellipticité est d'autant plus marquée que $J_0(\frac{\omega_1}{\omega})$ devient plus petit; à la limite $J_0(\frac{\omega_1}{\omega}) = 0$, l'ellipse devient une droite. La mesure de c/a est en bon accord avec les prévisions théoriques. Nous avons trouvé en effet :

ω_1/ω	0,5	1	1,5	1,75	2
$\frac{c}{a}$ exp	0,90	0,76	0,50	0,34	0,18
$\frac{c}{a}$ th = $J_0(\frac{\omega_1}{\omega})$	0,94	0,765	0,51	0,37	0,22

b) Lorsque $J_0(\frac{\omega_1}{\omega})$ décroît, le nombre de tours réalisé par l'aimantation avant sa disparition décroît. Le temps de relaxation τ étant constant, ceci signifie que la vitesse de précession diminue.

c) Le sens de rotation sur l'ellipse ne change pas quand on traverse un zéro de la fonction de Bessel.

Reprenons en effet les formules théoriques (II.G.9).

Lorsque $J_0(\frac{\omega_1}{\omega})$ s'annule et change de signe, le changement de signe de la fréquence de Larmor (lié à la modification des énergies propres) est accompagné d'un changement de signe du coefficient d'efficacité de détection de $\langle M_y^{(0)} \rangle$ (lié à la modification des fonctions d'onde) : il y a compensation des 2 effets et le sens de rotation sur l'ellipse demeure le même.

Remarques :

- 1 - Les trois enregistrements faits pour $\omega_1/\omega = 2,30; 2,40; 2,50$ ont été réalisés avec un pulse de champ statique 20 fois plus grand que pour les autres (pour la 1ère et la 3e ligne $H_0 = 4$ mG, pour la seconde $H_0 \approx 80$ mG).
En effet, sans cette précaution, on ne verrait aucune précession, la fréquence de précession $\omega_0 J_0(\frac{\omega_1}{\omega})$ devenant très inférieure à la largeur des niveaux Γ .
- 2 - A l'annulation de $J_0(\frac{\omega_1}{\omega})$ ($\omega_1/\omega \approx 2,4$), en toute rigueur, on devrait observer juste un point. En fait, on observe une ligne traduisant une petite désorientation, car le champ H_0 est suffisamment fort pour nous faire sortir de la zone linéaire du diagramme d'énergie; le terme en ω_0^3 est alors responsable de l'évolution du régime stationnaire $H_0 = 0$ à un régime stationnaire légèrement différent.

D - RESONANCE MAGNETIQUE DE L'ATOME "HABILLE"

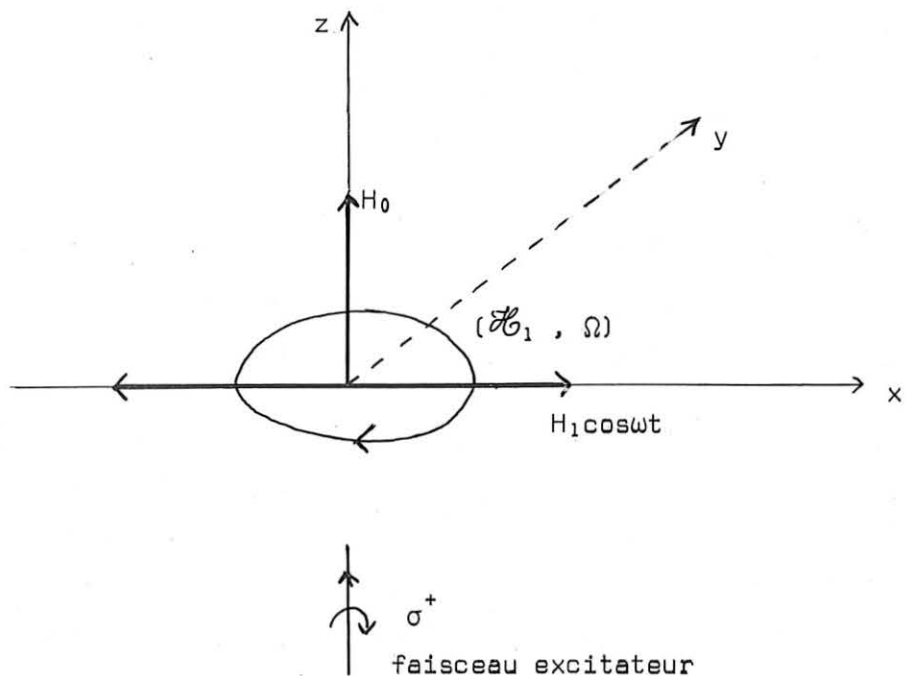
1) But et principe de l'expérience

Comme nous l'avons vu dans la partie théorique, la conséquence directe de l'ellipticité du mouvement du spin "habillé" est l'apparition dans un champ magnétique purement circulaire de 2 résonances magnétiques à 1 quantum,

l'une pour $\Omega = + \omega_0 J_0(\frac{\omega_1}{\omega})$: résonance magnétique "ordinaire" si $\omega_1/\omega = 0$

l'autre pour $\Omega = - \omega_0 J_0(\frac{\omega_1}{\omega})$: résonance "extraordinaire" dont l'apparition est strictement liée à l'existence du couplage ω_1/ω .

L'expérience que nous présentons maintenant est la manifestation statique de la propriété que nous venons d'étudier en régime dynamique (ellipticité de la précession de Larmor). La géométrie des divers champs et du faisceau pompant est la suivante :



le système atomique, couplé au champ de RF "habillant" $H_1 \cos \omega t$ (dirigé selon Ox) et orienté par pompage optique dans la direction Oz du champ magnétique statique \vec{H}_0 , est soumis à un champ de RF circulaire, d'intensité faible \mathcal{H}_1 tournant dans le plan xOy à la vitesse angulaire Ω .

2) Réalisation

Le seul problème technique nouveau présenté par cette expérience est la réalisation d'un champ tournant (\mathcal{H}_1, Ω) . Nous l'avons résolu de la même façon que pour les champs circulaires de compensation (V-A-2). Le dispositif expérimental comporte deux paires de bobines de Helmholtz semblables, dans les directions Ox, Oy, sur lesquelles on envoie deux courants alternatifs de fréquence Ω déphasés de $\pi/2$ environ : le réglage fin de la différence des phases et de l'égalité des intensités des 2 composantes du champ circulaire s'effectue à l'aide de la résonance magnétique de l'atome nu ($\omega_1/\omega = 0$). Nous savons en effet que dans un champ circulaire pur, il n'existe qu'une seule résonance magnétique pour $\Omega = +\omega_0$; il suffit donc, pour régler correctement l'ellipticité du champ produit, de faire disparaître la résonance à $\Omega = -\omega_0$, induite par la composante circulaire gauche du champ. La précision sur l'ellipticité du champ obtenu par cette méthode est de l'ordre de $3 \cdot 10^{-3}$ (ordre de grandeur du rapport $\frac{\text{bruit}}{\text{signal}}$ sur les composantes modulées de la lumière absorbée).

D'autre part, nous avons utilisé systématiquement une détection sur un faisceau croisé dirigé selon Ox, ce qui présente un double intérêt.

- 1°) ce signal ne présente pas de modulations aux harmoniques du champ "habillant" et le facteur d'efficacité introduit à la détection est constant quel que soit ω_1/ω .
- 2°) d'autre part, ce signal est modulé à la fréquence Ω du champ de résonance magnétique \mathcal{H}_1 ce qui permet, en faisant une détection synchrone, d'atteindre un excellent rapport signal/bruit, de l'ordre de 1.000.

3) Résultats

Nous n'avons pas eu le temps de développer une étude quantitative détaillée de cet effet; toutefois, les résultats expérimentaux qualitatifs que nous avons obtenus coïncident bien avec les prévisions théoriques.

Pour toutes les expériences dont nous rapportons les résultats, nous avons laissé constante l'intensité \mathcal{H}_1 du champ circulaire; ω et Ω sont respectivement fixés à 265 et 30 hz et nous regardons l'évolution des 2 résonances.

- a)- pour $\omega_1/\omega = 0$, le champ de radiofréquence circulaire étant bien réglé, nous n'observons qu'une seule résonance dans le champ $\omega_0 = + \Omega$ (fig.XVI, signaux observés). Avec une sensibilité 25 fois plus grande, rien n'apparaît en $\omega_0 = - \Omega$.
- b)- faisons croître ω_1/ω . On constate les faits suivants :
 - 1) il n'y a plus résonance au voisinage de $\omega_0 = + \Omega$, mais au voisinage d'un champ H_0 plus intense tel que $\omega_0 = \frac{\Omega}{J_0\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)}$.
 - 2) il apparaît -et c'est là l'effet important- une résonance dans le champ H_0 tel que

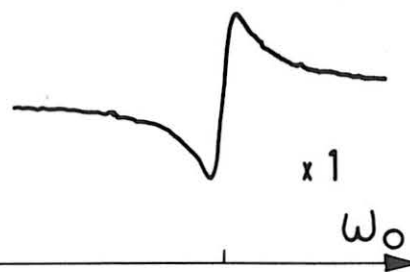
$$\omega_0 = - \frac{\Omega}{J_0\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)}$$

Rappelons que dans la partie théorique, nous avons montré que l'on pouvait calculer cet effet en envisageant le problème mathématiquement analogue d'un atome "nu" soumis à un champ de RF elliptique dont les composantes circulaires gauche et droite sont respectivement :

Fig. XVI

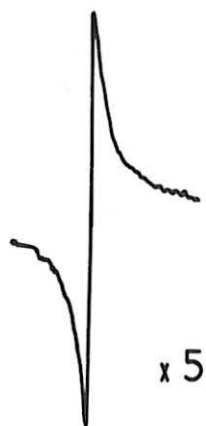


$$\frac{\omega_1}{\omega} = 1.5$$



$$\omega_0 = -\frac{\Omega}{J_0(1.5)}$$

$$\omega_0 = +\frac{\Omega}{J_0(1.5)}$$



$$\frac{\omega_1}{\omega} = 1$$



$$\omega_0 = -\frac{\Omega}{J_0(1)}$$

$$\omega_0 = +\frac{\Omega}{J_0(1)}$$



$$\frac{\omega_1}{\omega} = 0$$



$$\omega_0 = -\Omega$$

$$\omega_0 = +\Omega$$

10 cps

Courbes de résonance magnétique de l'atome habillé

$$\begin{aligned} \text{comp } \sigma+ & \frac{1 + J_0 \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right)}{2} \cdot \mathcal{H}_1 \\ \text{comp } \sigma- & \frac{1 - J_0 \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right)}{2} \cdot \mathcal{H}_1 \end{aligned}$$

Cette formulation nous permet très aisément de comprendre et de prévoir l'évolution des 2 résonances provoquées par un champ \mathcal{H}_1 d'intensité constante ($\Omega_1 = -\gamma \mathcal{H}_1 = \text{cste}$) lorsque l'on fait varier ω_1/ω (fig. XVI).

Pour $\omega_1/\omega = 0$, le niveau de \mathcal{H}_1 est réglé de telle sorte que la résonance à $\omega_0 = +\Omega$ soit tout juste saturée. Lorsque l'on fait croître ω_1/ω , $J_0 \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right)$ décroît; par suite, l'intensité de la composante fictive circulaire droite $\left(\frac{1 + J_0}{2} \right) \mathcal{H}_1$ décroît; on constate corrélativement une décroissance de l'intensité du signal de résonance à $\omega_0 = + \frac{\Omega}{J_0 \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right)}$. Simultanément, la composante fictive circulaire gauche $\frac{1 - J_0 \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right)}{2} \mathcal{H}_1$ croît : il apparaît alors une résonance dans le champ $\omega_0 = - \frac{\Omega}{J_0 \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right)}$ dont l'intensité et la largeur augmentent avec ω_1/ω .

Une étude plus quantitative de ces 2 résonances (en particulier de leur largeur, position et intensité) est en cours au laboratoire.

E - RESONANCE PARAMETRIQUE DE L'ATOME "HABILLE"

1) But et principe de l'expérience

L'étude théorique de la résonance paramétrique nous a montré que celle-ci pouvait nous donner assez aisément de multiples informations sur l'atome "habillé"; nous avons cherché, dans l'étude expérimentale, à vérifier les aspects essentiels suivants :

- α) forme de la résonance à l'ordre le plus bas en ω_0 et vérification des formules théoriques du chapitre II, § G-5.
- β) existence d'un déplacement de RF quadratique (Ω_1^2); son lien avec la courbure des niveaux (chap. III, formule (III.C.9)).

Nous avons effectué chacune de ces vérifications sur l'harmonique $p = 1$.

. Pour le premier point, α, nous avons choisi le signal qui résonne en champ nul ($n = 0$), le but de l'étude expérimentale a donc été la vérification de

la formule suivante qui donne la forme de la résonance $n = 0, p = 1$:

$$(V.E.1) \quad J_0(\theta) J_1(\theta) \sin \Omega t. \frac{\omega_0 J_0\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)}{\Gamma^2 + \left[\omega_0 J_0\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)\right]^2}$$

$$\text{où} \quad \theta = -\frac{\mathcal{H}_1}{\Omega} \gamma. J_0\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right) = \frac{\Omega_1}{\Omega} \cdot J_0\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)$$

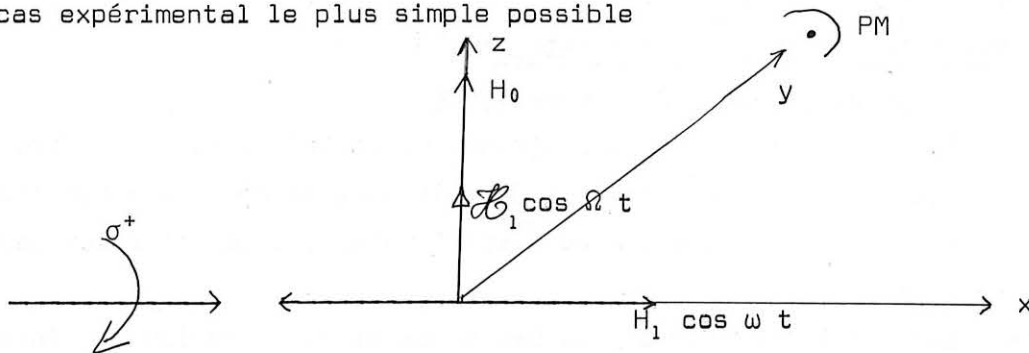
. Le deuxième point, β , a été étudié sur la résonance $n = 1, p = 1$. Rappelons que le déplacement de la résonance n calculé au chapitre III est donné par :

$$(V.E.2) \quad n\Omega = \Delta E(\omega_0, \omega) - \frac{\Omega_1^2 \omega_0}{4 \omega^2} \left(\sum_{p=2s+1} J_0 \frac{J_p^2}{p^2} + \frac{J_p}{p} \sum_{r \neq 0} \frac{J_r (J_{r+p} + J_{r-p})}{r} \right)$$

qui, dans l'approximation du 1er ordre en ω_0 , se met sous la forme :

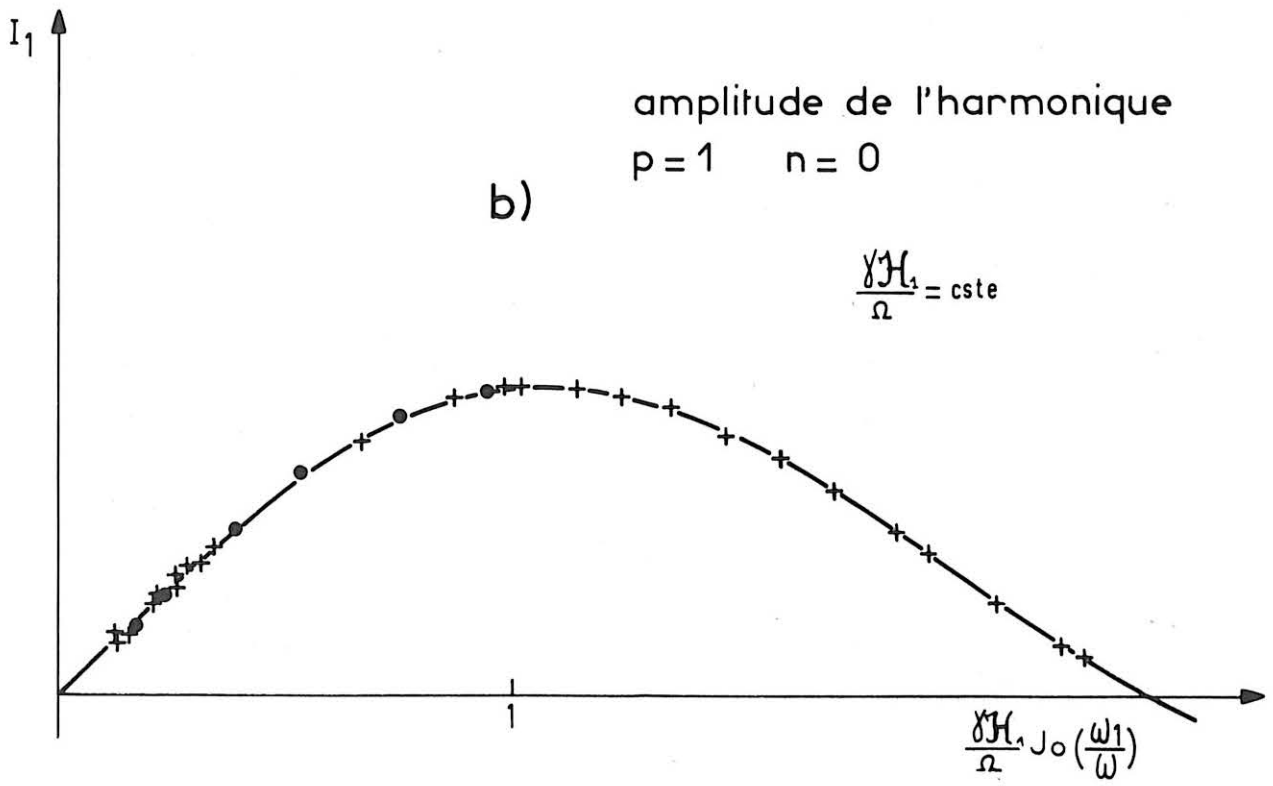
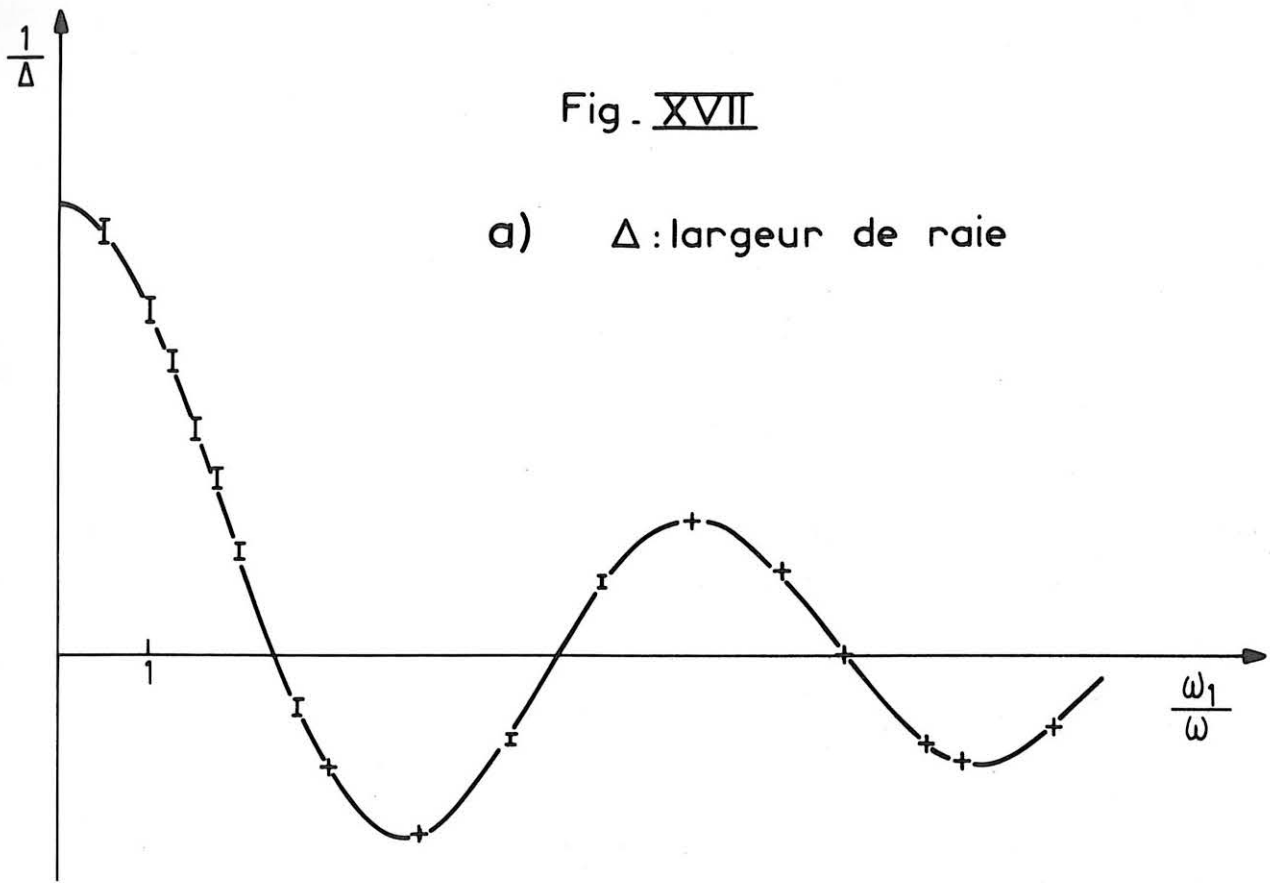
$$(V.E.3) \quad n \frac{\Omega}{\omega} = \frac{\omega_0}{\omega} J_0\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right) - \frac{\omega_0}{\omega} \frac{\Omega_1^2}{\omega^2} \frac{1}{4} \left[\sum_{p=2s+1} J_0 \frac{J_p^2}{p^2} + \frac{J_p}{p} \sum_{r \neq 0} \frac{J_r (J_{r+p} + J_{r-p})}{r} \right] + O\left(\frac{\omega_0^3}{\omega^3}\right)$$

Nous nous sommes placés, pour réaliser ces diverses vérifications dans le cas expérimental le plus simple possible



le système est orienté par pompage optique selon Ox, direction du champ "habillant" $H_1 \cos \omega t$; l'orientation ainsi introduite est soumise à l'action d'un champ magnétique statique H_0 modulé en amplitude par le champ $\mathcal{H}_1 \cos \Omega t$; l'orientation selon Ox est détectée sur la lumière réémise par les atomes et recueillie par le photomultiplicateur (P.M); les diverses harmoniques du courant photoélectrique sont amplifiées sélectivement et analysées à l'aide d'une détection synchrone P.A.R. HR8. Nous nous sommes toujours limités à l'étude de l'harmonique $p = 1$.

Fig. XVII



2) Résultats

a) largeur des raies de résonance

Nous avons pu vérifier, sur l'ensemble des courbes enregistrées, qu'il n'y a pas d'élargissement des raies dû au champ de modulation d'amplitude $\mathcal{H}_1 \cos \Omega t$.

Par ailleurs, nous avons vérifié sur la raie de résonance en champ nul ($n=0, p=1$) que la largeur Γ' des raies dépend de la pente des niveaux d'énergie au point 0 (V.E.1). Nous avons pu vérifier, à mieux de 2%, la loi de variation de la largeur en $\frac{1}{J_0(\frac{\omega_1}{\omega})}$ (cf. formule (V.E.1)), loi déjà vérifiée par HAROCHE ⁽¹¹⁾ sur les courbes d'effet Hanle. Les résultats sont portés sur la figure XVII-a; la courbe qui représente la variation de l'inverse de la largeur $1/\Gamma'$ en fonction de ω_1/ω est dessinée à partir de la formule théorique; les points sont expérimentaux.

b) forme et amplitude des raies

La résonance ($n=0, p=1$) qui a fait l'objet de notre étude apparaît sous la forme d'une courbe de dispersion sur un signal en quadrature avec le champ de modulation d'amplitude; nous avons étudié systématiquement son amplitude I_1 en fonction de l'argument $\theta = \frac{\Omega_1}{\Omega} J_0(\frac{\omega_1}{\omega})$ en gardant $\Omega_1/\Omega = \text{Cste}$ et en faisant varier ω_1/ω . Les résultats sont portés sur la figure XVII-b. La courbe est dessinée à partir de la formule théorique (V.E.1), les points sont expérimentaux; on voit que l'accord est excellent.

c) position de la résonance $n=1, p=1$

Utilisant les résultats du chapitre III, la formule (V.E.2) peut se mettre sous la forme :

$$(V.E.4) \quad n\Omega = \omega_0 J_0 + 2b \omega_0^3 + 3b \omega_0 \cdot \Omega_1^2 + \dots$$

en posant

$$b = -\frac{1}{8\omega_0^2} \sum_{r,s \neq 0} \left(\frac{J_r}{r} \frac{J_s}{s} J_{r+s} + J_0 \frac{J_r^2}{r^2} \right)$$

Les expériences de résonance paramétrique étant effectuées à fréquence Ω fixée, en balayant H_0 , (V.E.4) fournit une détermination implicite de la position de la résonance et peut se résoudre sous forme d'un développement limité en Ω et Ω_1

$$(V.E.5) \quad \omega_0 = \frac{n\Omega}{J_0} - 2b \frac{(n\Omega)^3}{J_0^4} - 3b n \Omega_1^2 \frac{\Omega}{J_0^2} + \dots$$

qui n'est valable que si $J_0(\frac{\omega_1}{\omega})$, est suffisamment grand pour que le terme linéaire en ω_0 soit prépondérant dans le développement (V.E.4) devant le terme $2b \omega_0^3$. Dans ce domaine de validité, nous avons testé comme suit la formule (V.E.5).

α) Extrapolation à $\Omega_1 = 0$ de la position de la résonance

La fréquence de résonance Ω et l'intensité du couplage avec le champ "habillant" ω_1/ω ont des valeurs fixées. Nous mesurons la position de la résonance en fonction de l'intensité Ω_1 de la modulation d'amplitude. L'expérience prouve (voir figure XVIII) que cette position est bien dans un très large domaine de ω_1 , ω_0 , Ω une fonction quadratique de Ω_1 ; extrapolant à intensité nulle de Ω_1 , nous trouvons alors la valeur du champ magnétique $\overline{\omega_0}$ dans lequel la fréquence de Bohr de l'atome "habillé" (ω_1/ω donné) vaut Ω ; nous pouvons ainsi construire point par point un diagramme des fréquences de Bohr de l'atome "habillé". Nous les avons reportées sur les figures XIX-a et b en fonction de l'intensité du champ magnétique statique; chacune des courbes du réseau correspond à une valeur du couplage ω_1/ω inscrite sur la partie droite de la figure. Nous utilisons des unités sans dimension ω_0/ω et Ω/ω . A cette occasion, précisons que nous avons travaillé en général avec un champ de RF "habillant" dont la fréquence est de l'ordre de 300 cps parce que cela présentait certains avantages expérimentaux spécifiques à notre montage; toutefois la théorie est indépendante du domaine de fréquence utilisé; sur ^{199}Hg , S. HAROCHE a effectué les expériences décrites dans la réf. (11) à 770 cps; actuellement il travaille sur les alcalins à des fréquences ω beaucoup plus grandes. Précisons enfin que les points portés sur les diagrammes de la figure XIX-a et b sont expérimentaux et les courbes, théoriques, sont dessinées à partir des résultats du calcul machine (cf. chap. IV). L'accord avec la théorie est excellent (< 1%).

β) Déplacement de la résonance et courbure des niveaux

D'après la formule (V.E.5), la courbure des niveaux mise en évidence sur les diagrammes XIX peut également être mesurée en déterminant la pente en Ω_1^2 du déplacement radiatif de la résonance paramétrique. C'est ce que nous avons fait pour différentes valeurs de l'intensité du champ "habillant"; en la multipliant par $-J_0^2/3n\Omega$, nous en déduisons directement b.

Fig. XVIII

Déplacement de la résonance paramétrique

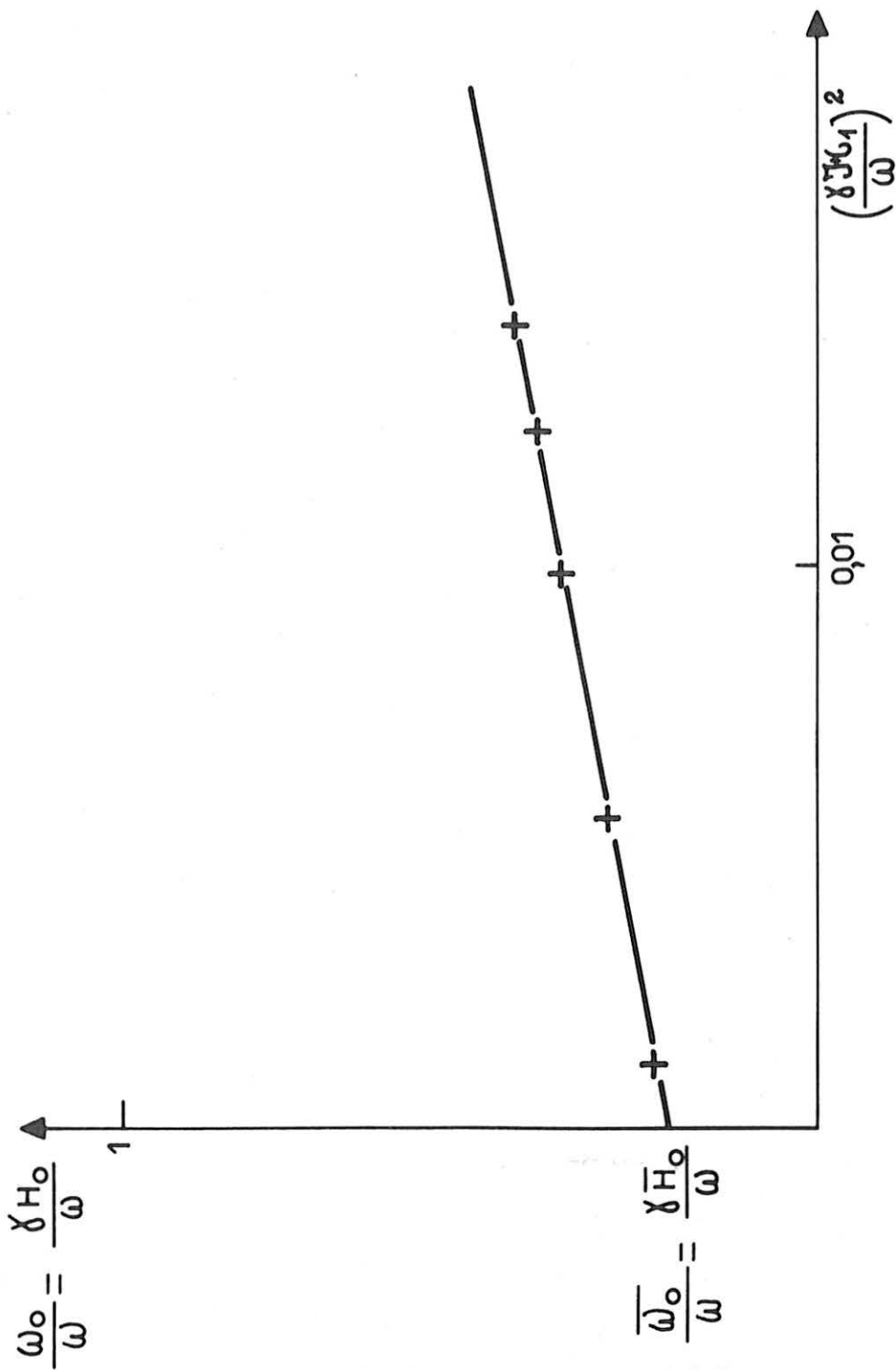
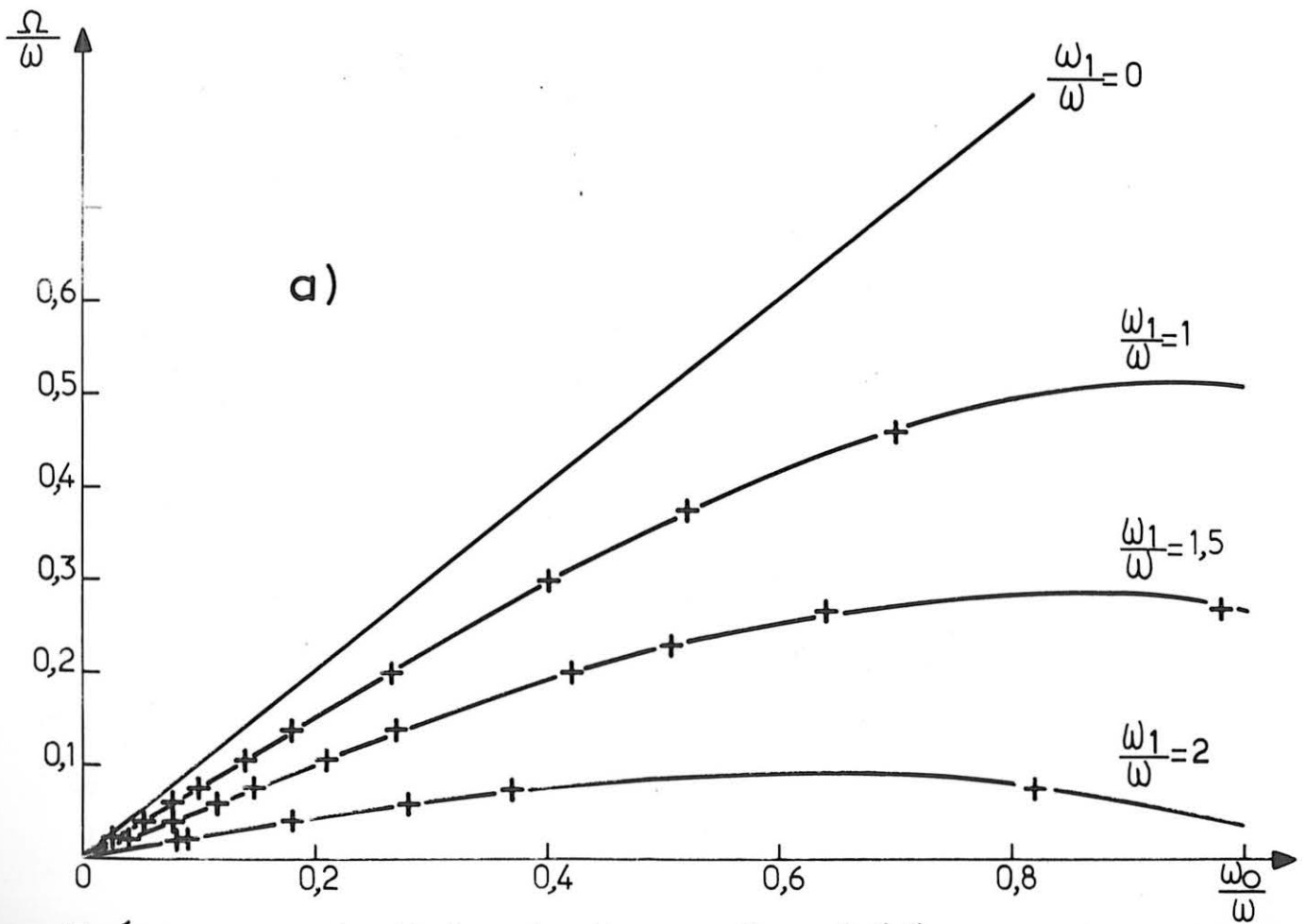
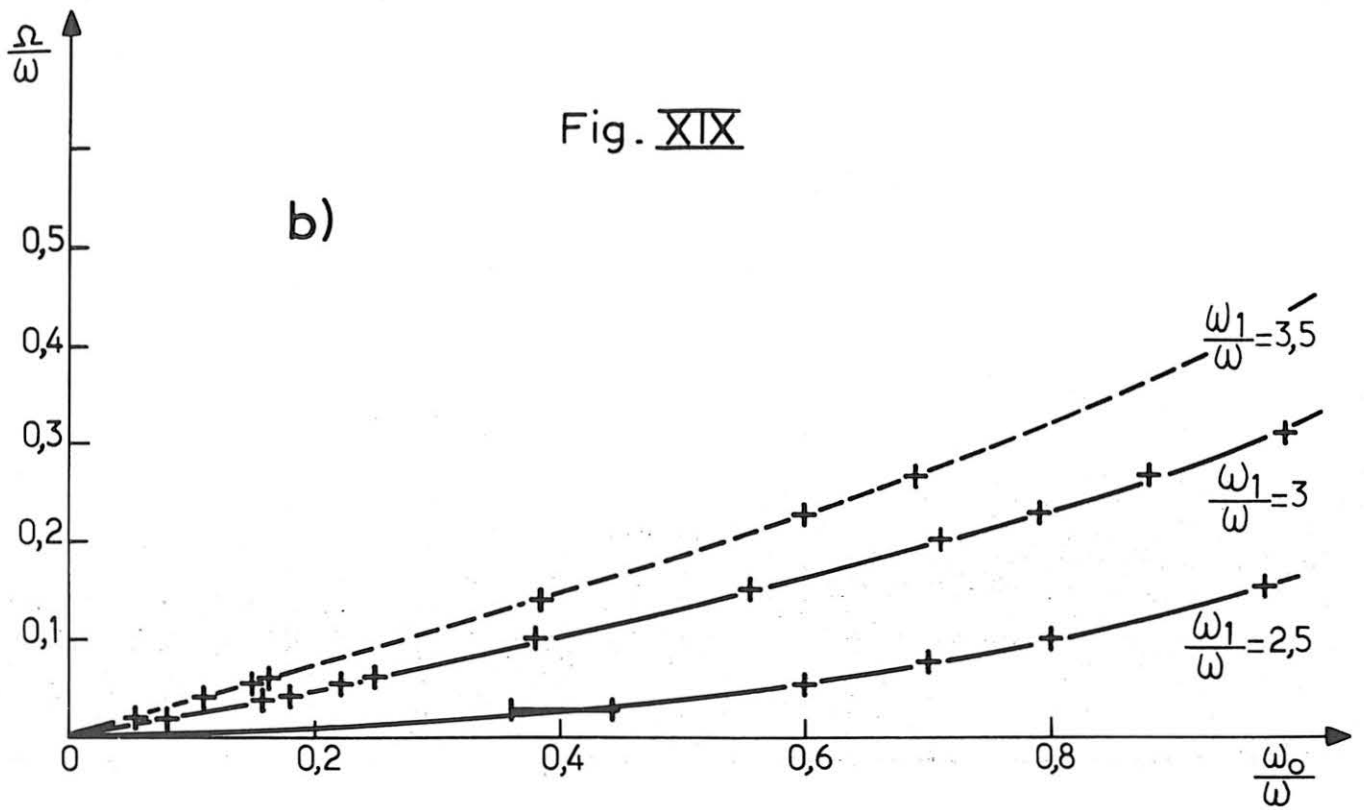


Fig. XIX



Fréquences de Bohr de l'atome "habillé"

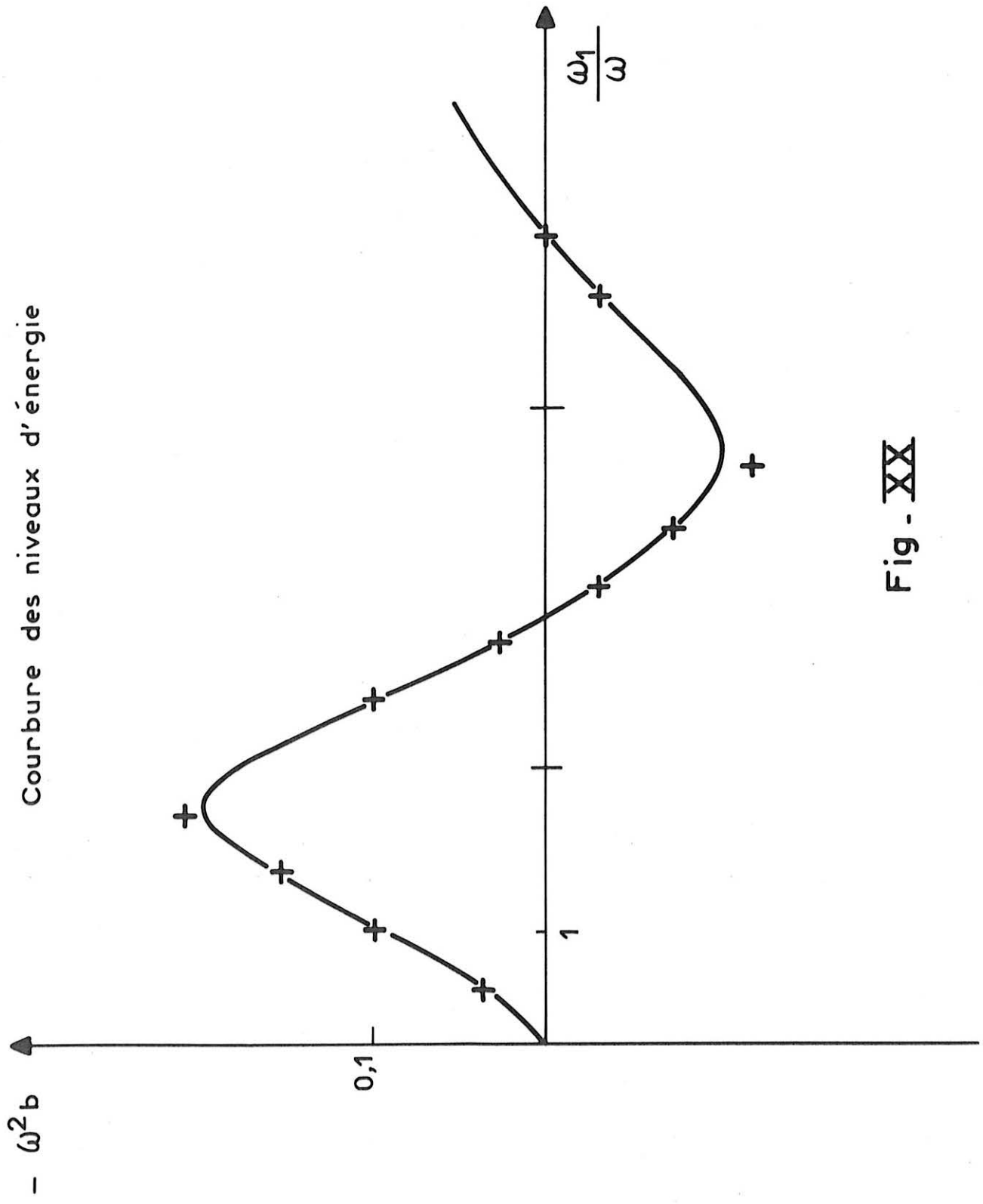


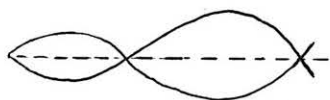
Fig - XX

Remarquons que les expériences sont réalisées dans un champ H_0 de signe donné; il en résulte d'après (V.E.5) que selon le signe de $J_0(\frac{\omega_1}{\omega})$, c'est tantôt la résonance $n = +1$, tantôt la résonance $n = -1$ qui est détectée, ce qui entraîne une inversion de la pente du déplacement radiatif, non seulement lorsque b s'inverse, mais aussi lorsque J_0 change de signe. On tient compte de cet effet en donnant à $n=\pm 1$ le signe de $J_0(\frac{\omega_1}{\omega})$ dans le facteur de pondération de la pente introduit plus haut. Les points sur la figure XX donnent les résultats expérimentaux des mesures de la courbure (reportée en unité sans dimension par l'intermédiaire de la quantité $-\omega^2 b$). La courbe en traits pleins résulte du calcul théorique de b . On voit que l'accord avec les résultats expérimentaux est satisfaisant.

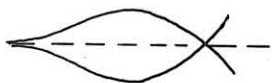
Nous avons repéré en abscisse par une double flèche les valeurs de ω_1/ω correspondant aux annulations de $J_0(\frac{\omega_1}{\omega})$. Nous rappelons qu'au voisinage de ces points le calcul théorique effectué n'a plus de sens.

En conclusion, nous retiendrons de cette expérience les 2 aspects suivants :

- l'effet le plus spectaculaire est l'inversion du sens de déplacement de la résonance correspondant à une inversion de la concavité des niveaux en champ faible pour une série de valeurs de ω_1/ω comprises entre les zéros successifs de J_0 (dans un champ $\omega_0/\omega \sim 0,2$, nous avons observé ce phénomène au voisinage des points $\omega_1/\omega = 3,8; 7,0; \dots$). Cette inversion de courbure se comprend bien sur le schéma suivant :



avant le 1er zéro de J_0
le fuseau est concave à l'origine



juste après le 1er zéro de J_0
il est convexe



juste avant le 2e zéro de $J_0(\frac{\omega_1}{\omega})$
il est redevenu concave

Sa courbure a donc changé de signe entre le 1er et le 2e zéro, ce qui explique (cf. la remarque p. 54 du chap. III) les changements de sens du déplacement effectivement observés.

- Cette méthode de mesure peut se révéler beaucoup plus sensible et pratique que la méthode qui consiste à déterminer point par point le diagramme des fréquences en extrapolant à $\Omega_1 = 0$ pour en déduire ensuite la courbure des niveaux d'énergie. Supposons en effet $\Omega_1 \gg \Omega$; même si H_0 est trop faible pour que la courbure apparaisse directement de façon appréciable (2e terme de (V.E.5), elle peut par contre se manifester d'une façon très nette sur le déplacement radiatif de la résonance paramétrique (3e terme de (V.E.5) dès que Ω_1 est suffisamment grand pour "explorer" une région où la non-linéarité des niveaux de l'atome "habillé" devient importante.

F - POMPAGE OPTIQUE TRANSVERSAL AVEC MODULATION DE LA POLARISATION

1) But et principe de l'expérience

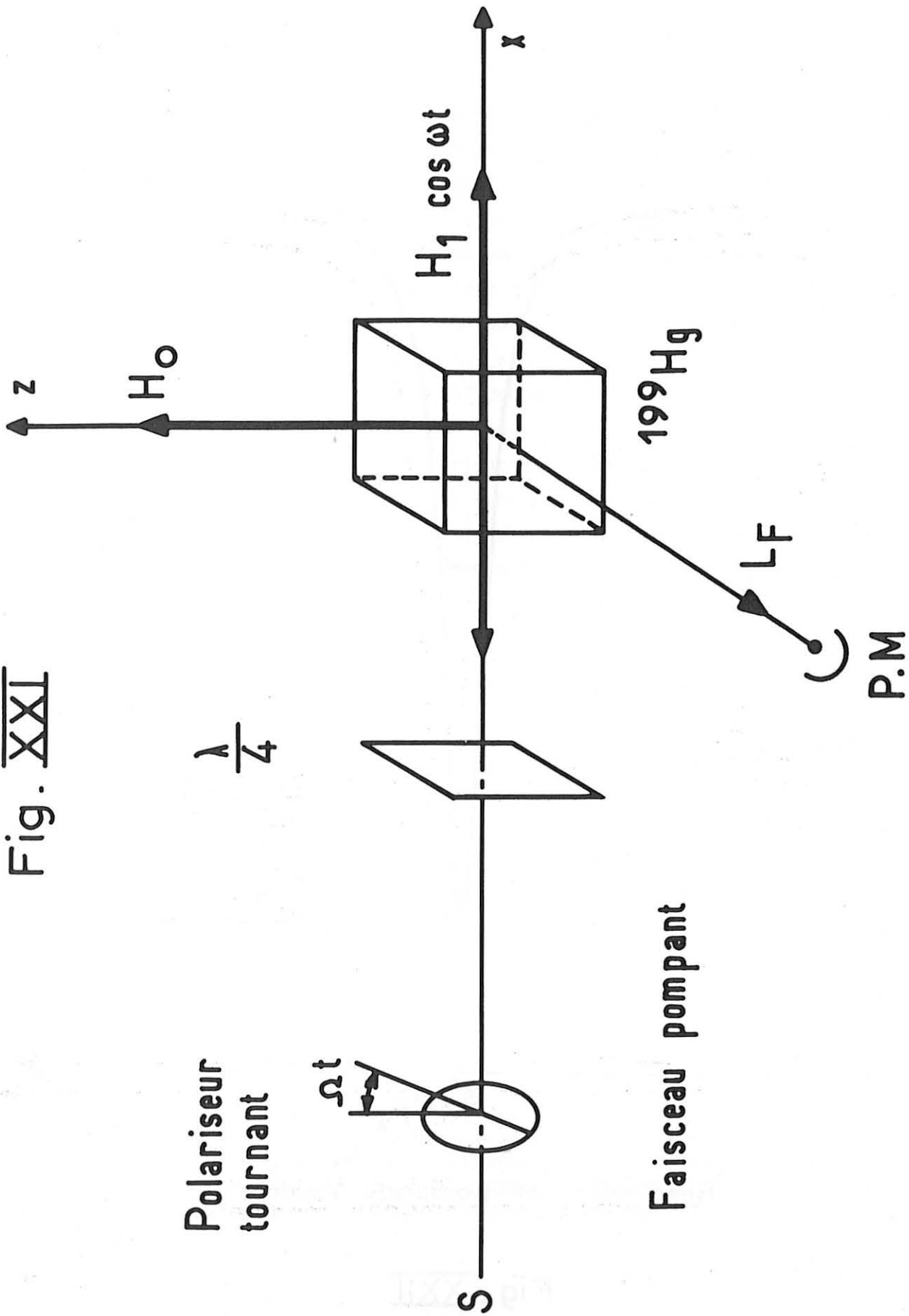
Comme nous l'avons expliqué dans le chapitre IV, le pompage modulé est la technique la plus adéquate et la plus simple pour déterminer expérimentalement les fréquences de Bohr de l'atome "habillé". Le schéma de l'expérience est représenté sur la figure XXI. Les atomes de ^{199}Hg sont pompés optiquement par un faisceau lumineux issu d'une source S, se propageant le long de la direction Ox du champ de RF, et traversant successivement un polariseur tournant à la fréquence $\nu/2 = \Omega/2\pi$ et une lame 1/4 d'onde. La polarisation de ce faisceau oscille donc entre σ^+ et σ^- à la fréquence ν . Il y a variation résonnante de la modulation 2ν de la lumière de fluorescence ^{*)} lorsque ν varie au voisinage d'une fréquence de Bohr de l'atome "habillé". Nous avons expliqué dans la partie théorique (chap. IV) comment nous pouvons déterminer sans ambiguïté le diagramme d'énergie de l'atome "habillé" à partir des fréquences des résonances précédentes.

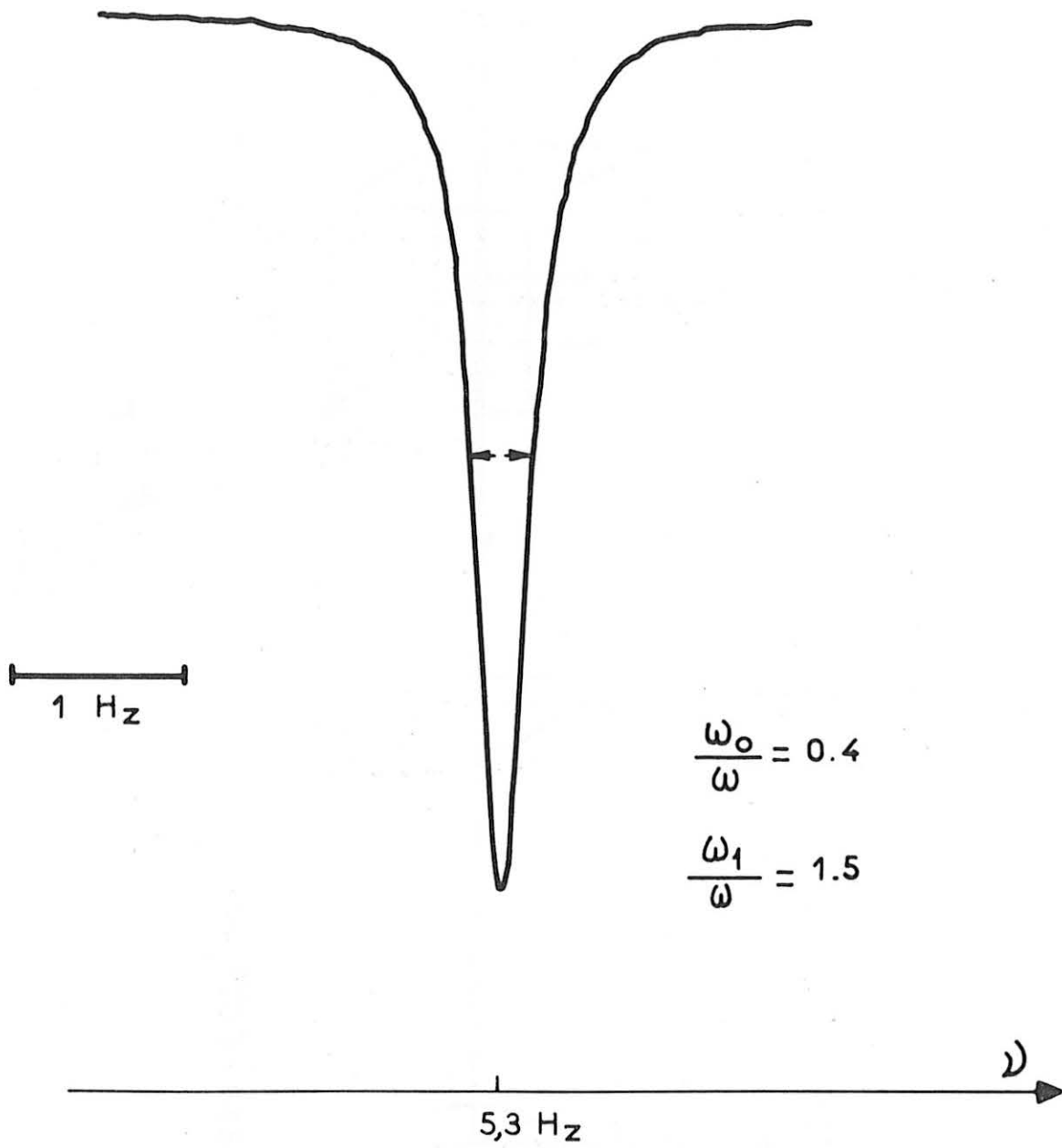
2) Résultats

On procède de la façon suivante : on fixe l'intensité du couplage

^{*)} La résonance apparaît sur un signal modulé à 2ν pour la raison suivante : l'aimantation transversale M_x introduite de façon résonnante dans la vapeur oscille à la fréquence ν . La polarisation du faisceau oscille elle aussi à ν . Le signal de détection qui est proportionnel à M_x et qui dépend du sens de polarisation (σ^+ ou σ^-) du faisceau varie donc comme $(\sin 2\pi\nu t)^2$, d'où l'apparition d'une modulation à 2ν .

Fig. XXI





Résonance en pompage modulé

Fig. XXII

ω_1/ω et le champ statique ω_0/ω à des valeurs connues et on détermine la fréquence de résonance en balayant lentement en fréquence le polariseur tournant; une détection synchrone dont le gain ne varie pas avec la fréquence détecte à chaque instant la modulation 2ν de la lumière de fluorescence. Nous donnons sur la figure XXII un exemple de courbe de résonance type. Les points des figures VI et XXIII ^{*}) donnant $E_{+n}(\frac{\omega_0}{\omega}, \frac{\omega_1}{\omega})$ correspondent aux résultats expérimentaux ainsi obtenus (la courbe est théorique, les points expérimentaux). On voit que l'accord avec les prévisions théoriques est excellent (< 1%), et que nous avons pu explorer dans de grandes limites le diagramme d'énergie de l'atome "habillé" donnant ainsi à ce concept une base très solide.

Notons enfin que des expériences du même type ont été effectuées par NOVIKOV et POKAZANIEV (¹⁹). Ces auteurs se sont néanmoins limités, du point de vue théorique au cas d'un champ de RF tournant; du point de vue expérimental, ils n'ont exploré que le voisinage immédiat du premier anticroisement avec des intensités de RF faibles.

^{*}) Sur les figures XXIII, pour des raisons d'encombrement géométrique, nous avons superposé les différents niveaux d'énergie correspondant aux différentes valeurs de ω_1/ω (et par suite à des valeurs de n extrêmement différentes).

$$E + n \left(\frac{\omega_0}{\omega}, \frac{\omega_1}{\omega} \right)$$

$$\frac{\omega}{2}$$

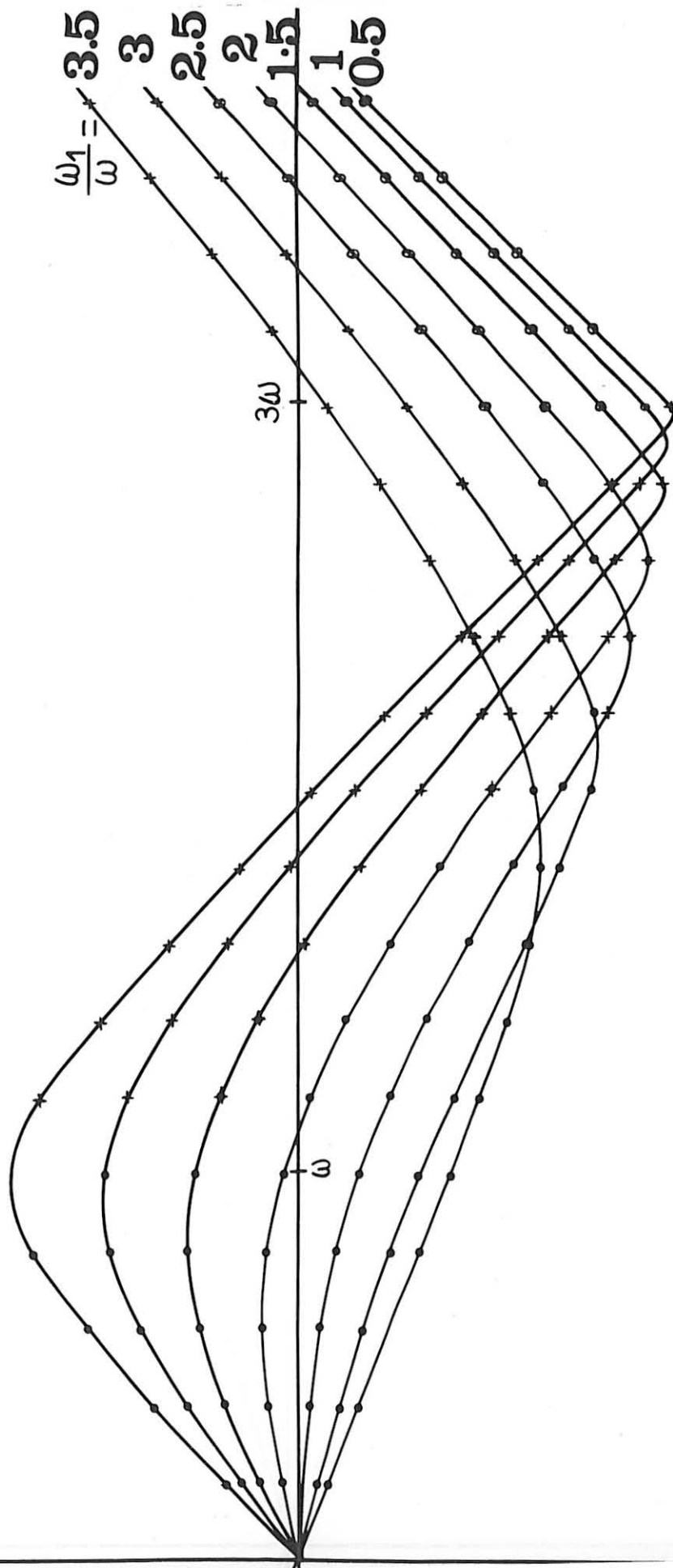
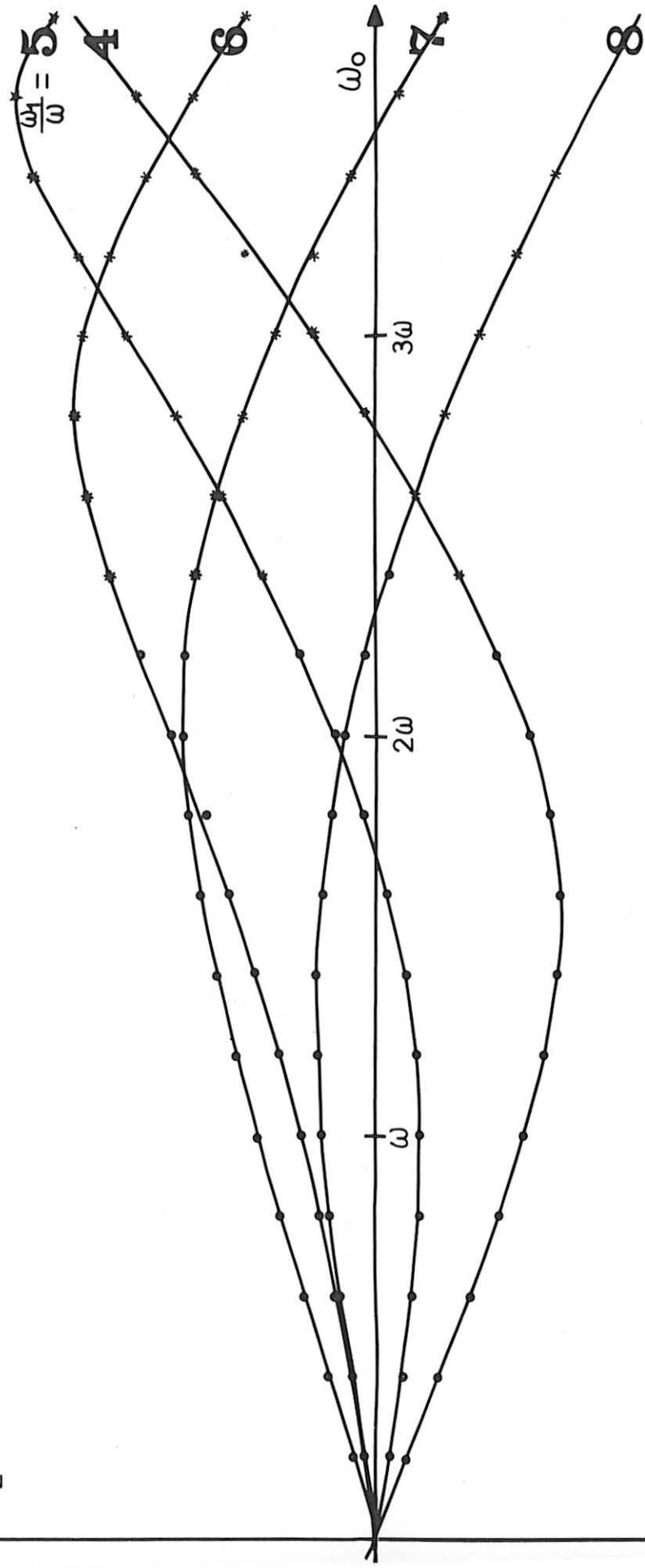


Fig. XXIII a

$E + n \left(\frac{\omega_1}{\omega}, \frac{\omega_0}{\omega} \right)$

$\frac{\omega}{2}$

Fig. XXIII b



CONCLUSION

• Du point de vue théorique, nous avons pu mettre au point un formalisme opératoire très commode pour le calcul des expériences de pompage optique d'atomes "habillés" par un champ de RF linéaire, dans un champ H_0 faible. Son intérêt essentiel réside dans les points suivants :

1) Le formalisme mis au point permet d'étudier séparément l'influence de l' "habillage" sur chacune des 3 étapes du cycle de pompage optique : excitation, évolution propre, détection.

2) Il permet de ramener le problème de l'évolution de l'atome "habillé" dans un champ \vec{H}_0 à celui d'un atome "nu" dans un champ fictif, \vec{H}'_0 , calculable simplement à partir de \vec{H}_0 . Cette propriété simplifie considérablement tous les calculs.

3) L'influence de l'anisotropie introduite par le champ de RF "habillant" apparaît très clairement et très simplement dans les expressions théoriques.

4) Une certaine systématique est introduite dans la façon de mener le calcul quantitatif d'une expérience de pompage optique sur un atome "habillé".

• Du point de vue expérimental, nous avons pu vérifier certains aspects spectaculaires prévus par la théorie : anisotropie du facteur de Landé de l'atome "habillé", précession de Larmor elliptique, ...

L'étude de la résonance paramétrique nous a également montré qu'il était possible de déterminer la courbure des niveaux d'énergie de l'atome "habillé" en mesurant le déplacement radiatif de cette résonance.

L'expérience a permis de vérifier les prévisions théoriques, en particulier celles relatives aux termes d'ordre supérieurs en H_0 dans le développement de perturbation des énergies. Cette nouvelle méthode de mesure de la courbure d'un niveau d'énergie s'est révélée par ailleurs très simple et très commode par rapport aux autres.

Enfin, les méthodes de pompage optique transversal avec modulation de la polarisation du faisceau lumineux ont permis d'explorer complètement le diagramme d'énergie de l'atome "habillé". Les résultats obtenus sont en excellent accord avec ceux d'un calcul numérique fait sur ordinateur et permettent de donner une base concrète au concept d'atome "habillé".

APPENDICE I

I - Rappels sur les états cohérents de GLAUBER (6) et l'opérateur de déplacement

Les états "cohérents" du champ de RF sont définis comme vecteurs propres de l'opérateur d'annihilation a

$$(Ap.I.1) \quad a | \alpha \rangle = \alpha | \alpha \rangle$$

leur développement sur la base des états $| n \rangle$ est donné par

$$(Ap.I.2) \quad | \alpha \rangle = e^{-1/2 |\alpha|^2} \sum_p \frac{\alpha^p}{(p!)^{1/2}} | p \rangle$$
$$= \sum_p c_p(\alpha) | p \rangle$$

et leur évolution temporelle par

$$(Ap.I.3) \quad | \alpha(t) \rangle = e^{-1/2 |\alpha|^2} \sum_p \frac{(\alpha e^{-i\omega t})^p}{(p!)^{1/2}} | p \rangle$$

Par un choix convenable de la phase, nous pouvons nous limiter à α réel. Le développement (Ap.I.2) nous donne immédiatement la probabilité de trouver n photons dans le champ sous forme d'une loi de Poisson

$$(Ap.I.4) \quad p(n) = \frac{(\alpha^2)^n e^{-\alpha^2}}{n!}$$

centrée en $N = |\alpha|^2$ (nombre moyen de photons dans le mode) et de dispersion relative $1/\sqrt{N}$.

Nous retiendrons que $\alpha = \sqrt{N}$ est un nombre très grand.

L'état cohérent de Glauber est un état propre déplacé de l'oscillation harmonique; il sera utile d'en retenir une expression équivalente à (Ap.I.2)

$$(Ap.I.5) \quad | \alpha \rangle = D(\alpha) | 0 \rangle$$

$D(\alpha)$ est l'opérateur unitaire de déplacement (déjà introduit en (I.D.2))

$$(Ap.I.6) \quad D(\alpha) = \exp \alpha (a^+ - a) \quad (\text{pour } \alpha \text{ réel})$$

Ses propriétés fondamentales sont :

$$(Ap.I.7) \quad D(\alpha) D(\beta) = D(\alpha + \beta)$$

$$(Ap.I.8) \quad D^{-1}(\alpha) a D(\alpha) = a + \alpha$$

Eléments de matrice de D

Nous retiendrons, pour l'ensemble de cet exposé, la valeur d'un certain nombre d'éléments de matrice de l'opérateur D qui nous seront très utiles.

$$(Ap.I.9) \quad \langle n | D^+ \left(-\frac{\lambda_m x}{\omega} \right) | p \rangle = \langle n | D \left(\frac{\lambda_m x}{\omega} \right) | p \rangle \\ = J_{n-p} \left(m_x \cdot \frac{\omega_1}{\omega} \right)$$

où $J_{n-p}(z)$ représente la valeur de la fonction de Bessel d'ordre $(n-p)$ et d'argument z .

(ce résultat est démontré dans l'appendice I de la réf. (3)).

On en déduit immédiatement

$$(Ap.I.10) \quad \langle \overline{n}_{m_x} | p \rangle = J_{n-p} \left(m_x \cdot \frac{\omega_1}{\omega} \right)$$

$$(Ap.I.11) \quad \langle \overline{n}_{m_x} | \overline{p}_{m'_x} \rangle = J_{n-p} \left((m_x - m'_x) \frac{\omega_1}{\omega} \right)$$

et enfin, compte tenu de (Ap.I.2)

$$\langle \overline{n}_{m_x} | \alpha \rangle = \sum_p c_p(\alpha) \langle \overline{n}_{m_x} | p \rangle \\ (Ap.I.12) \quad = \sum_p c_p(\alpha) J_{n-p} \left(m_x \cdot \frac{\omega_1}{\omega} \right)$$

II - Calcul de la matrice densité d'excitation

Le but de ce paragraphe est le calcul du deuxième membre de (II.F.3).
Utilisant la définition des P_n projecteurs sur les multiplicités n dégénérées en champ nul, l'opérateur densité d'excitation peut se mettre sous la forme d'une somme d'expression du type :

$$P_n T_q^{(k)} \otimes \sigma_{RF} P_{n'} = \sum_{\substack{m_x \\ m'_x}} | \overline{m_x n} \rangle \langle \overline{m_x n} | T_q^{(k)} \otimes \sigma_{RF} | \overline{m'_x n'} \rangle \langle \overline{m'_x n'} |$$

En effectuant la décomposition tensorielle des kets et bras

$| \overline{m_x n} \rangle$, les variables atomiques et de radiofréquence se séparent et il vient, avec les notations du paragraphe I-D :

$$(Ap.I.13) \quad P_n T_q^{(k)} \otimes \sigma_{RF} P_{n'} = \sum_{\substack{m_x \\ m'_x}} | m_x \rangle \langle m_x | T_q^{(k)} | m'_x \rangle \langle m'_x | \otimes | \overline{n_{m_x}} \rangle \langle \overline{n_{m_x}} | \sigma_{RF} | \overline{n'_{m'_x}} \rangle \langle \overline{n'_{m'_x}} |$$

Pour poursuivre le calcul, il nous faut maintenant distinguer 2 cas

α) le champ de RF est incohérent

$$(Ap.I.14) \quad \sigma_{RF} = \sum_{\mu} p(\mu) | \mu \rangle \langle \mu |$$

alors

$$(Ap.I.15) \quad \langle \overline{n_m} | \sigma_{RF} | \overline{n'_{m'}} \rangle = \sum_{\mu} p(\mu) \langle \overline{n_{m_x}} | \mu \rangle \langle \mu | \overline{n'_{m'_x}} \rangle$$

et d'après (Ap.I.10), il vient :

$$(Ap.I.16) \quad \langle \overline{n_m} | \sigma_{RF} | \overline{n'_{m'}} \rangle = \sum_{\mu} p(\mu) J_{n-\mu} \left(m_x \frac{\omega_1}{\omega} \right) J_{n'-\mu} \left(m'_x \frac{\omega_1}{\omega} \right)$$

Or, d'après (II.F.6), nous savons que la distribution de probabilité $p(\mu)$ est une fonction lentement variable de largeur \sqrt{N} ; d'autre part, les fonctions de Bessel tendent rapidement vers 0 lorsque $n-\mu$, $n'-\mu$ est supérieur à quelques fois $m_x \frac{\omega_1}{\omega}$. Sachant que N , nombre moyen de photons dans le mode, est très grand et que ω_1/ω est

de l'ordre de quelques unités (au maximum 10 à 20); il résulte que les seules contributions non négligeables de la sommation sont celles pour lesquelles on a

$$\text{avec } \begin{cases} n \sim n' \sim \mu \sim N \\ n - \mu ; n' - \mu \ll N \end{cases}$$

On peut alors effectuer la sommation en remplaçant $p(\mu)$ par $p(n)$ et en utilisant la règle de somme des fonctions de Bessel. Il vient alors :

$$\langle \overline{n}_m | \sigma_{RF} | \overline{n}'_{m'} \rangle \approx p(n) J_{n-n'} \left((m_x - m'_x) \cdot \frac{\omega_1}{\omega} \right)$$

Compte tenu de la règle de sélection sur les $T_q^{(k)}$: $m_x = m'_x + q$

$$(Ap.I.17) \quad P_n T_q^{(k)} \sigma_{RF} P_{n'} = p(n) \sum_{\substack{m_x \\ m'_x}} | \overline{m}_x, n \rangle \langle \overline{m}'_x, n' | T_q^{(k)} | \overline{m}'_x, n' \rangle \cdot J_{n-n'} \left(q \frac{\omega_1}{\omega} \right) \langle \overline{m}'_x, n' |$$

ce qui s'écrit, en utilisant les définitions des $\mathcal{Z}_q^{nn' (k)}$

$$(Ap.I.18) \quad P_n T_q^{(k)} \sigma_{RF} P_{n'} = p(n) \mathcal{Z}_q^{nn' (k)} \cdot J_{n-n'} \left(q \frac{\omega_1}{\omega} \right)$$

$\beta)$ si le champ est cohérent

alors $\sigma_{RF} = | \alpha \rangle \langle \alpha |$

$$(Ap.I.19) \quad \langle \overline{n}_{m_x} | \sigma_{RF} | \overline{n}'_{m'_x} \rangle = \langle \overline{n}_{m_x} | \alpha \rangle \langle \alpha | \overline{n}'_{m'_x} \rangle$$

Utilisant la formule (Ap.I.2), il vient

$$(Ap.I.20) \quad \langle \overline{n}_{m_x} | \sigma_{RF} | \overline{n}'_{m'_x} \rangle = \sum_{p,p'} c_p(\alpha) c_{p'}^*(\alpha) \langle \overline{n}_{m_x} | p \rangle \langle p' | \overline{n}'_{m'_x} \rangle$$

ce qui, d'après (Ap.I.10), s'écrit

$$(Ap.I.21) \quad \langle \overline{n}_{m_x} | \sigma_{RF} | \overline{n}'_{m'_x} \rangle = \sum_{p,p'} c_p(\alpha) c_{p'}^*(\alpha) J_{n-p} \left(m_x \frac{\omega_1}{\omega} \right) J_{n'-p'} \left(m'_x \frac{\omega_1}{\omega} \right)$$

de même que pour le calcul dans le cas du champ incohérent, nous retrouvons ici le produit d'une fonction à variation très lente $|c_p(\alpha)|$ par une fonction qui tend très rapidement vers 0, $J_{n-p}(m_x \frac{\omega_1}{\omega})$. Nous ferons donc l'approximation :

$$(Ap.I.21) \quad |c_p(\alpha)| J_{n-p}(m_x \frac{\omega_1}{\omega}) \approx |c_n(\alpha)| J_{n-p}(m_x \frac{\omega_1}{\omega})$$

d'où :

$$(Ap.I.22) \quad \langle \overline{n_{m_x}} | \sigma_{RF} | \overline{n'_{m'_x}} \rangle = \sum_{p,p'} |c_n(\alpha) c_{n'}(\alpha)| e^{-i(p-p')\omega t} J_{n-p}(\frac{m_x \omega_1}{\omega}) J_{n'-p'}(\frac{m'_x \omega_1}{\omega})$$

Effectuons le changement de variable $p' = p+r$; il vient :

$$(Ap.I.23) \quad \langle \overline{n_{m_x}} | \sigma_{RF} | \overline{n'_{m'_x}} \rangle = |c_n(\alpha) c'_{n'}(\alpha)| \sum_{p,r} e^{+ir\omega t} J_{n-p}(\frac{m_x \omega_1}{\omega}) J_{n'-p-r}(\frac{m'_x \omega_1}{\omega})$$

Effectuons la sommation sur p , il vient :

$$(Ap.I.24) \quad \langle \overline{n_{m_x}} | \sigma_{RF} | \overline{n'_{m'_x}} \rangle = |c_n(\alpha) c_{n'}(\alpha)| \sum_r J_{n-n'+r}((m_x - m'_x) \frac{\omega_1}{\omega}) e^{+ir\omega t}$$

l'on voit alors apparaître le développement de

$$e^{+iq \frac{\omega_1}{\omega} \sin \omega t} = \sum_s J_s(q \frac{\omega_1}{\omega}) e^{+is\omega t}$$

(en effet, compte tenu de la règle de sélection sur les $T_q^{(k)}$, $m_x = m'_x + q$).

Il vient, par suite :

$$(Ap.I.25) \quad \langle \overline{n_{m_x}} | \sigma_{RF} | \overline{n'_{m'_x}} \rangle = |c_n(\alpha) c_{n'}(\alpha)| e^{-i(n-n')\omega t} e^{+iq \frac{\omega_1}{\omega} \sin \omega t}$$

Lorsque $n-n' \ll \sqrt{N}$, ce qui est en général réalisé,

$$|c_n(\alpha)| \approx |c_{n'}(\alpha)|$$

et nous prendrons $|c_n(\alpha) c_{n'}(\alpha)| = p(n)$

On en déduit, dans ce cas, la forme de :

$$(Ap.I.26) \quad P_n T_q^{(k)} \sigma_{RF} P_{n'} = p(n) e^{-i(n-n')\omega t} e^{+iq \frac{\omega_1}{\omega} \sin \omega t} n' \mathcal{L}_q^{(k)}$$

ce qui nous permet d'aborder enfin le calcul du taux d'excitation des diverses grandeurs de l'état excité.

III - Taux d'excitation des ${}^{nn'}\mathcal{E}_Q^{(k)}$

Compte tenu de (II.F.3), le terme $\frac{d^{(1)}}{dt} \langle {}^{nn'}\mathcal{E}_Q^{(k)} \rangle$ s'écrit dans la base des ${}^{nn'}\mathcal{E}_q^{(k)}$ sous la forme :

$$(Ap.I.27) \quad \frac{d^{(1)}}{dt} \langle {}^{nn'}\mathcal{E}_Q^{(k)} \rangle = \frac{1}{T_p} \sum_{\substack{k,q \\ n'',n'''}} \text{Tr} (c_q^{*(k)} \cdot {}^{nn'}\mathcal{E}_Q^{(k)} P_{n''} T_q^{(k)} \otimes \sigma_{RF} P_{n'''})$$

Compte tenu de la définition (II.C.5) des ${}^{nn'}\mathcal{E}_Q^{(k)}$ et de la propriété de trace, il vient :

$$\text{Tr} (c_q^{*(k)} \cdot {}^{nn'}\mathcal{E}_Q^{(k)} P_{n''} T_q^{(k)} \otimes \sigma_{RF} P_{n'''}) = \delta_{n',n''} \delta_{nn'''} \text{Tr} (c_q^{*(k)} \cdot {}^{nn'}\mathcal{E}_Q^{(k)} P_{n'} T_q^{(k)} \otimes \sigma_{RF} P_n)$$

Utilisant ensuite la relation d'orthogonalité (II.C.6)

$$\mathcal{E}_r ({}^{nn'}\mathcal{E}_q^{(k)} \cdot {}^{nn'}\mathcal{E}_{q'}^{(k)'} +) = \delta_{kk'} \delta_{qq'}$$

et la relation de conjugaison (II.C.7)

$${}^{nn'}\mathcal{E}_q^{(k)'} = (-1)^q \cdot {}^{n'n}\mathcal{E}_{-q}^{(k)}$$

l'égalité (Ap.I.27) s'écrit, pour un champ incohérent :

$$\begin{aligned} (Ap.I.28) \quad \frac{d^{(1)}}{dt} \langle {}^{nn'}\mathcal{E}_Q^{(k)} \rangle &= \\ &= \frac{1}{T_p} \sum_{\substack{k,q \\ n'',n'''}} (-1)^q \delta_{(n,n''')} \delta_{(n',n''')} \delta_{(k,k)} \delta_{(Q,-q)} c_q^{*(k)} \text{Tr} ({}^{nn'}\mathcal{E}_Q^{(k)} P_{n''} T_q^{(k)} \otimes \sigma_{RF} P_{n'''}) \\ &= \frac{1}{T_p} (c_{-Q}^{*(k)} \times (-1)^Q \times p(n) J_{n,-n} (-Q \frac{\omega_1}{\omega})) \end{aligned}$$

ce qui, compte tenu de la relation d'hermiticité (§ II-F)

$$c_q^{*(k)} = (-1)^q c_{-q}^{(k)}$$

nous donne

$$(Ap.I.29) \quad \frac{d^{(1)}}{dt} \langle nn' \mathcal{L}_Q^{(K)} \rangle = \frac{c_Q^{(K)}}{T_p} p(n) \cdot J_{n-n'} \left(Q \frac{\omega_1}{\omega} \right)$$

Pour un champ cohérent, on trouve de même :

$$(Ap.I.30) \quad \frac{d^{(1)}}{dt} \langle nn' \mathcal{L}_Q^{(K)} \rangle = \frac{c_Q^{(K)}}{T_p} p(n) e^{+i(n-n')\omega t} e^{-iQ \frac{\omega_1}{\omega} \sin \omega t}$$

APPENDICE I I

CALCUL DU DEPLACEMENT DE LA RESONANCE PARAMETRIQUE

Nous allons développer ici le calcul dont nous avons donné le principe dans le chapitre III.

1. Dans une première partie, nous étudions la forme du hamiltonien de couplage $\mathcal{H}_{S,C_2}^{int}$ entre S et le champ de modulation d'amplitude C_2 .
2. Nous en déduisons la forme de l'opérateur de déplacement \mathcal{R}_b dans une approximation d'ordre le plus bas en Ω_1 et en ω_0 .
3. Le calcul des éléments de matrice de \mathcal{R}_b nécessite la connaissance de $\langle \overline{\epsilon, n+p}^{(1)} | S_z | \overline{+, n}^{(1)} \rangle$; c'est ce que nous calculons dans la troisième partie.
4. Nous pouvons alors donner la valeur des éléments de matrice de \mathcal{R}_b et du déplacement de la résonance.
5. La dernière partie est enfin consacrée à la démonstration de la proportionnalité du déplacement au terme d'ordre 3 du développement de l'énergie.

1) Structure du hamiltonien de couplage entre l'atome "habillé" S et le champ de modulation d'amplitude de H_0 (C_2)

$$\mathcal{H}_{S C_2}^{int} = \mu S_z (b^+ + b)$$

α) Ayant choisi pour base des états de radiofréquence du champ C_2 l'ensemble des vecteurs $| p \rangle$ à nombre déterminé (p) de photons, l'opérateur $(b^+ + b)$ est strictement non diagonal sur cette base; les seuls éléments de matrice non nuls de $\mathcal{H}_{S C_2}^{int}$ obéissent à la règle de sélection

$$(Ap.II.1) \quad \Delta p = \pm 1$$

et il vient

$$(Ap.II.2) \quad \langle p | \mu(b^+ + b) | p \pm 1 \rangle = \sqrt{\text{sup}(p, p \pm 1)} \mu \neq \Omega_1/2$$

On en déduit que le déplacement des niveaux est au moins du second ordre en Ω_1 .

β) L'étude faite au paragraphe III-B-2 a permis de faire une partition dans l'espace des états de l'atome "habillé". S_z n'établit aucun couplage entre ces deux sous-espaces :

On en déduit le deuxième résultat, fort important :

$$(Ap.II.3) \quad \langle \overline{\varepsilon, n} | S_z | \overline{\varepsilon', n'} \rangle = 0 \quad \text{si} \quad \varepsilon\varepsilon' = -(-1)^{n-n'}$$

γ) La troisième remarque utilisée pour le calcul de $\langle \alpha | \mathcal{R}_b | \alpha \rangle$ est la suivante : il suffit, pour avoir l'expression exacte du terme d'ordre le plus bas de \mathcal{R}_b , de limiter le développement des états propres $\langle \overline{\varepsilon, p} |$ à l'ordre 1 en ω_0 . Nous verrons en effet à la fin des calculs que le déplacement de la résonance paramétrique est du 1er ordre en ω_0 , ce qui justifie a posteriori cette limitation.

2) Calcul de $\langle \alpha | \mathcal{R}_b | \alpha \rangle$

Avec les mêmes notations que dans le chapitre III, nous noterons P_0 le projecteur donné par $P_0 = | \alpha \rangle \langle \alpha | + | \beta \rangle \langle \beta |$; Q_0 le projecteur sur le sous-espace complémentaire.

Nous rappelons que

$$(Ap.II.4) \quad \begin{cases} | \alpha \rangle = | \overline{+, n} \rangle | p \rangle \\ | \beta \rangle = | \overline{-, n} \rangle | p + 1 \rangle \end{cases}$$

D'après (III.C.8), l'opérateur \mathcal{R}_b à l'ordre le plus bas en Ω_1 a pour éléments de matrice

$$(Ap.II.5) \quad \langle \alpha | \mathcal{R}_b | \alpha \rangle = \langle \alpha | \mathcal{H}_{S.C_2}^{int} \frac{Q_0}{E - \mathcal{H}_{S+C_2}^0} \mathcal{H}_{S.C_2}^{int} | \alpha \rangle$$

Compte tenu de (Ap.II.1) et (Ap.II.3), les seuls états de Q_0 dont la contribution à (Ap.II.5) est non nulle sont de la forme $| \overline{\varepsilon', n+q} \rangle | p' \rangle$

avec

$$(Ap.II.6) \quad \begin{cases} p' = p \pm 1 = p \pm \nu \\ \varepsilon' = (-1)^q \end{cases}$$

En évaluant les éléments de matrice relatifs aux photons Ω de C_2 , il vient :

$$(Ap.II.7) \quad \langle \alpha | \mathcal{R}_b | \alpha \rangle = \sum_{\substack{\nu=\pm 1 \\ q \neq 0}} \left(\frac{\Omega_1}{2}\right)^2 \langle \overline{+, n} | S_z \frac{P_{n+q}}{E_{+n} - E_{\overline{+, n+q}} - \nu\Omega} S_z | \overline{+, n} \rangle$$

où P_{n+q} est le projecteur sur la multiplicité $n+q$ de l'atome "habillé" S (cf. chap. II).

En utilisant (Ap.II.6), (Ap.II.7) devient :

$$(Ap.II.8) \quad \langle \alpha | \mathcal{R}_b | \alpha \rangle = \sum_{\substack{\nu=\pm 1 \\ q \neq 0}} \left(\frac{\Omega_1}{2}\right)^2 \frac{|\langle \overline{+, n} | S_z | \overline{(-1)^q, n+q} \rangle|^2}{E_{+n} - E_{\overline{(-1)^q, n+q}} - \nu\Omega}$$

Le déplacement étant, comme nous le verrons à la fin des calculs, du 1er ordre en ω_0 , il suffit de remplacer, dans (Ap.II.8), l'énergie E_{+n} et les vecteurs propres $|\overline{\pm n}\rangle$ de l'atome "habillé" par leur développement au 1er ordre.

3) Il nous faut donc évaluer $\langle \overline{\varepsilon, n+q}^{(1)} | S_z | \overline{+, n}^{(1)} \rangle$ pour $\varepsilon = (-1)^q$

D'après (III.B.19), nous avons :

$$(Ap.II.9) \quad | \overline{+, n}^{(1)} \rangle = | \overline{+, n}^{(0)} \rangle - \frac{1}{2} \frac{\omega_0}{\omega} \sum_r \frac{J_r}{r} | \overline{\varepsilon_1, n+r}^{(0)} \rangle$$

$$\text{avec } \varepsilon_1 = (-1)^r$$

$$(Ap.II.10) \quad | \overline{\varepsilon, n+q}^{(1)} \rangle = | \overline{\varepsilon, n+q}^{(0)} \rangle - \frac{\varepsilon}{2} \frac{\omega_0}{\omega} \sum_r \frac{J_r}{r} | \overline{\varepsilon_2, n+q+r}^{(0)} \rangle$$

$$\text{avec } \varepsilon_2 = (-1)^{r+q} \quad \varepsilon = (-1)^q$$

D'autre part, on déduit immédiatement de (III.B.10) la forme générale suivante des éléments de matrice de S_z

$$(Ap.II.11) \quad \langle \overline{\varepsilon, n+q}^{(0)} | S_z | \overline{\varepsilon', n}^{(0)} \rangle = \frac{\varepsilon' + (-1)^q \varepsilon}{4} J_q \left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)$$

Utilisant les relations (Ap.II.9, 10, 11) et les relations de parité des fonctions de Bessel, on trouve alors :

$$(Ap.II.12) \quad \langle \overline{\varepsilon, n+q}^{(1)} | S_z | \overline{+, n}^{(1)} \rangle = \delta_{\varepsilon, (-1)^q} \left\{ \frac{1}{2} J_q + \frac{(-1)^{q+1}}{4} \frac{\omega_0}{\omega} \sum_r \frac{J_r (J_{r+q} + J_{r-q})}{r} \right\}$$

On démontrerait de même

$$\langle \overline{-\varepsilon, n+q}^{(1)} | S_z | \overline{-, n}^{(1)} \rangle = \delta_{\varepsilon, (-1)^q} \left\{ -\frac{1}{2} J_q + \frac{(-1)^{q+1}}{4} \frac{\omega_0}{\omega} \sum_r \frac{J_r (J_{r+q} + J_{r-q})}{r} \right\}$$

(dans cette formule, comme dans toutes celles qui suivent, nous omettons systématiquement d'explicitier l'argument ω_1/ω des fonctions de Bessel).

4) Utilisant (Ap.II.12), nous pouvons maintenant expliciter (Ap.II.8). Remarquons que si p est pair, les contributions à la sommation des 2 états $|\overline{n+q, +}\rangle$ et $|\overline{n-q, +}\rangle$ s'annulent exactement; par suite, au 1er ordre en ω_0 :

$$(Ap.II.13) \langle \alpha | \mathcal{R}_b | \alpha \rangle = \sum_{\substack{v=\pm 1 \\ q=2s+1}} \left(\frac{\Omega_1}{4} \right)^2 \frac{J_q^2 + \frac{\omega_0}{\omega} J_q \sum_{r \neq 0} \frac{J_r (J_{r+q} + J_{r-q})}{r}}{-q\omega + \omega_0 J_0 \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right) - v\Omega}$$

A l'aide de cette expression, nous voulons étudier le premier croisement du diagramme (page 63). Il est donc justifié d'introduire au dénominateur la condition de résonance; soit à l'ordre le plus bas $\omega_0 J_0 \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right) - \Omega = 0$. L'expression (Ap.II.13) se met alors sous la forme

$$(Ap.II.14) \langle \alpha | \mathcal{R}_b | \alpha \rangle = \sum_{\substack{v=\pm 1 \\ q=2s+1}} \left(\frac{\Omega_1}{4} \right)^2 \cdot \frac{J_q^2 + \frac{\omega_0}{\omega} J_q \sum_{r \neq 0} \frac{J_r (J_{r+q} + J_{r-q})}{r}}{-q\omega + (1-v)\omega_0 J_0}$$

En tenant compte d'autre part du domaine de validité des calculs précédents relatifs à l'atome "habillé", on a $\omega_0 < \omega$, donc a fortiori $\omega_0 J_0 \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right) < \omega$.

La formule (Ap.II.14) peut donc se réécrire sous la forme :

$$(Ap.II.15) \langle \alpha | \mathcal{R}_b | \alpha \rangle = \sum_{\substack{v=\pm 1 \\ q=2s+1}} \left(\frac{\Omega_1}{4} \right)^2 \cdot \frac{J_q^2 + \frac{\omega_0}{\omega} J_q \sum_{r \neq 0} \frac{J_r (J_{r+q} + J_{r-q})}{r}}{-q\omega} \left(1 + \frac{(1-v)\omega_0 J_0}{q\omega} \right)$$

ou encore

$$(Ap.II.16) \langle \alpha | \mathcal{R}_b | \alpha \rangle = -\frac{\Omega_1^2}{8} \frac{\omega_0}{\omega^2} \sum_{q=2s+1} \left\{ J_0 \frac{J_q^2}{q^2} + \frac{J_q}{q} \sum_{\substack{r \neq 0 \\ r \in \mathbb{Z}}} \frac{J_r (J_{r+q} + J_{r-q})}{r} \right\}$$

En développant des calculs analogues, on voit que

$$\langle \alpha | \mathcal{R}_b | \alpha \rangle = - \langle \beta | \mathcal{R}_b | \beta \rangle$$

D'où l'on déduit l'expression du déplacement de la résonance

$$(Ap.II.17) \quad \Delta E = -\Omega_1^2 \cdot \frac{\omega_0}{\omega^2} \mathcal{A}$$

où \mathcal{A} est l'expression numérique sans dimension

$$(Ap.II.18) \quad \mathcal{A} = \frac{1}{4} \sum_{q=2s+1} \left\{ J_0 \frac{J_q^2}{q^2} + \frac{J_q}{q} \sum_{r \neq 0} \frac{J_r (J_{r+q} + J_{r-q})}{r} \right\}$$

Il ne nous reste plus alors qu'à montrer que cette expression est proportionnelle au terme d'ordre 3 de l'énergie donné par (III.B.18)

que nous écrivons sous la forme $-\mathcal{E}^{(3)} \frac{\omega_0^3}{\omega^2}$

avec $-\mathcal{E}^{(3)}/\omega^2 = b$ (coefficient défini au § III-A)

$$(Ap.II.19) \quad \mathcal{E}^{(3)} = \frac{1}{8} \sum_{r,s \neq 0} \frac{J_r}{r} \frac{J_s}{s} J_{r+s} + J_0 \frac{J_r^2}{r^2}$$

5) La démonstration de cette propriété repose sur l'égalité suivante :

$$(Ap.II.20) \quad \sum_{\substack{r,s \neq 0 \\ r+s \neq 0}} \frac{J_r}{r} \frac{J_s}{s} J_{r+s} = -2 \sum_{\substack{r,s \neq 0 \\ r+s \neq 0}} (-1)^r \frac{J_r}{r} \frac{J_s}{s} J_{r+s}$$

Celle-ci se démontre aisément en remarquant que

$$\frac{1}{r \cdot s} = \frac{1}{r+s} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{s} \right)$$

En effet, le premier membre de (Ap.II.20) peut alors se mettre sous la forme :

$$(Ap.II.21) \quad \sum_{\substack{r,s \neq 0 \\ r+s \neq 0}} \frac{J_r}{r} \frac{J_s}{s} J_{r+s} = 2 \sum_{\substack{r,s \neq 0 \\ r+s \neq 0}} \frac{J_r \cdot J_s \cdot J_{r+s}}{r(r+s)}$$

et en posant $r + s = u$

$$r = -v$$

$$(Ap.II.22) \quad \sum_{\substack{r,s \neq 0 \\ r+s \neq 0}} \frac{J_r}{r} \frac{J_s}{s} J_{r+s} = 2 \sum_{\substack{u,v \neq 0 \\ u+v \neq 0}} \frac{J_{-v}}{-v} \frac{J_u}{u} J_{u+v}$$

ce qui, compte tenu de la parité des fonctions de Bessel nous donne le résultat annoncé (Ap.II.20).

Or, nous pouvons écrire l'expression (Ap.II.19)

$$\zeta(3) = \frac{1}{8} \left\{ \sum_{r,s \neq 0} \frac{J_r}{r} \frac{J_s}{s} J_{r+s} + J \frac{J_r^2}{r^2} \right\}$$

sous la forme

$$(Ap.II.23) \quad \zeta(3) = \frac{1}{8} \left\{ \sum_{\substack{r,s \neq 0 \\ r+s \neq 0}} \frac{J_r}{r} \frac{J_s}{s} J_{r+s} + \sum_r 2 \cdot J_0 \frac{J_r^2}{r^2} \right\}$$

impair

(en imposant $r+s \neq 0$ sur la première sommation).

Compte tenu de (Ap.II.20), il vient d'autre part

$$(Ap.II.24) \quad 3 \sum_{\substack{r \neq 0 \\ s \neq 0 \\ r+s \neq 0}} \frac{J_r}{r} \frac{J_s}{s} J_{r+s} = 2 \sum_{\substack{r \neq 0 \\ s \neq 0 \\ r+s \neq 0}} (1 - (-1)^r) \frac{J_r}{r} \frac{J_s}{s} J_{r+s}$$

(Ap.II.23) se réécrit alors sous la forme

$$\zeta(3) = \frac{1}{8} \left\{ \sum_{\substack{r \neq 0 \\ s \neq 0 \\ r+s \neq 0 \\ r \text{ impair}}} \frac{4}{3} \cdot \frac{J_r}{r} \frac{J_s}{s} J_{r+s} + \sum_{r \neq 0} 2 \cdot J \frac{J_r^2}{r^2} \right\}$$

impair

en s'affranchissant de la condition $r+s \neq 0$ dans la première sommation

$$\zeta(3) = \frac{1}{8} \left\{ \sum_{\substack{r \neq 0 \\ s \neq 0 \\ r \text{ impair}}} \frac{4}{3} \frac{J_r}{r} \frac{J_s}{s} J_{r+s} + \sum_{r \neq 0} (2 - \frac{4}{3}) J \frac{J_r^2}{r^2} \right\}$$

Utilisant enfin la parité de r , on démontre aisément que

$$\sum_{\substack{r,s \neq 0 \\ r \text{ impair}}} \frac{J_r}{r} \frac{J_s}{s} J_{r+s} = \sum_{\substack{r,s \neq 0 \\ r \text{ impair}}} \frac{J_r}{r} \frac{J_s}{s} J_{-r+s}$$

d'où

$$\zeta^{(3)} = \frac{1}{8} \times \frac{2}{3} \sum_{\substack{r, s \neq 0 \\ r \text{ impair}}} \left\{ \frac{J_r}{r} \frac{J_s}{s} (J_{s+r} + J_{s-r}) + J_0 \frac{J_r^2}{r^2} \right\}$$

On trouve ainsi, d'après (Ap.II.18) , que

$$\boxed{\mathcal{A} = 3 \zeta^{(3)}}$$

ce qui est bien le résultat trouvé par l'approche classique du paragraphe A, chapitre III.

APPENDICE III

PROGRAMME DE CALCUL DES NIVEAUX D'ENERGIE

(UNIVAC 1108 - FORTRAN V)

```
DIMENSION F(25)
PRINT 14
14  FORMAT (1H1,/,50X'ATOME HABILLE')
    PRINT 30
30  FORMAT (///15X,'H',16X,'C'23X,'D',23X,'FC'/)
    READ 50,N,M
50  FORMAT ( )
    DO 6 K=N,M
        RF=K/80.
        HRF=K/2.
        PRINT 40,HRF
40  FORMAT(//6X,'HRF='F4.2)
    EPSI=1.E-15
    W=0.
    DO 7 J=1,25
        W=W+0.01
        H=20.*W
        A=0.
        B=0.10
        CALL DET(A,W,RF,ZJ)
        FA=ZJ
        CALL DET(B,W,RF,ZJ)
        FB=ZJ
101 IF(FA-FB)100,6,100
100 C=-FB+(B-A)/(FB-FA)+B
    CALL DET(C,W,RF,ZJ)
    FC=ZJ
10  IF(ABS(FC)-EPSI)4,13,13
13  IF(ABS(FA)+ABS(FC)-ABS(FA+FC))8,3,2
    2  B=C
        FB=FC
        GOTO 101
    3  A=C
        FA=FC
        GOTO 101
    4  D=0.05-C
        E(J)=D
        PRINT 15,H,C,D,FC
15  FORMAT (10X,F4.1,8X,E15.8,8X,E15.8,8X,F15.8)
```



```
7  CONTINUE
   CALL GRILLE (-0.05,0.05,+0.05)
   DO 9 I=1,25
     IC=0.
     IF(MOD(I,5).EQ.0) IC=1.
     Y=F(I)
9    CALL COURBE (IC,Y,1H*)
6    CONTINUE
8    PRINT 60,FA,FC
60   FORMAT(25X,E15.8,15X,E15.8)
     STOP
     END
```

```
SUBROUTINE DET(Y,W,RF,ZJ)
Z1=(-1.25+W-Y)*(-1.35-W-Y)-RF*RF
Z2=(-1.15-W-Y)*Z1-RF*RF*(-1.35-W-Y)
Z3=(-1.05+W-Y)*Z2-RF*RF*Z1
Z4=(-0.95-W-Y)*Z3-RF*RF*Z2
Z5=(-0.85+W-Y)*Z4-RF*RF*Z3
Z6=(-0.75-W-Y)*Z5-RF*RF*Z4
Z7=(-0.65+W-Y)*Z6-RF*RF*Z5
Z8=(-0.55-W-Y)*Z7-RF*RF*Z6
Z9=(-0.45+W-Y)*Z8-RF*RF*Z7
Z10=(-0.35-W-Y)*Z9-RF*RF*Z8
Z11=(-0.25+W-Y)*Z10-RF*RF*Z9
Z13=(-0.05+W-Y)*Z12-RF*RF*Z11
Z14=(+0.05-W-Y)*Z13-RF*RF*Z12
Z15=(+0.15+W-Y)*Z14-RF*RF*Z13
Z16=(+0.25-W-Y)*Z15-RF*RF*Z14
Z17=(+0.35+W-Y)*Z16-RF*RF*Z15
Z18=(+0.45-W-Y)*Z17-RF*RF*Z16
Z19=(+0.55+W-Y)*Z18-RF*RF*Z17
Z20=(+0.65-W-Y)*Z19-RF*RF*Z18
Z21=(+0.75+W-Y)*Z20-RF*RF*Z19
Z22=(0.85-W-Y)*Z21-RF*RF*Z20
Z23=(+0.95+W-Y)*Z22-RF*RF*Z21
Z24=(+1.05-W-Y)*Z23-RF*RF*Z22
Z25=(+1.15+W-Y)*Z24-RF*RF*Z23
Z26=(+1.25-W-Y)*Z25-RF*RF*Z24
Z27=(+1.35+W-Y)*Z26-RF*RF*Z25
ZJ=Z27
RETURN
END
```

R E F E R E N C E S

- (¹) C. COHEN-TANNOUDJI et S. HAROCHE - J. Phys. 30, 1969, p. 125 et 153
- (²) C. COHEN-TANNOUDJI - Thèse, Paris, 1962 (Ann. de Phys. 7, 1962, p. 423 et 469)
- (³) N. POLONSKY - Thèse de 3e cycle, Paris, 1966
- (⁴) C. COHEN-TANNOUDJI - "Compléments de Mécanique quantique", cours de 3e cycle polycopié, Paris, 1966
- (⁵) C. COHEN-TANNOUDJI - "Optical Pumping and Interaction of Atoms with the Electromagnetic Field", Cours de Cargèse, 1967
- (⁶) R.J. GLAUBER - Phys. Rev. 131, 1963, p. 2766
- (⁷) U. FANO - Rev. Mod. Phys. 29, 1957, p. 74
- (⁸) A. BEN REUWEN - Phys. Rev. 141, 1966, p. 34 et 145, 1966, p. 7
- (⁹) A. OMONT - C.R. 260, 1965, p. 3331; J. de Phys. 26, 1965, p. 26
- (¹⁰) A. MESSIAH - "Mécanique Quantique", Dunod, Tome II, p. 924-925
- (¹¹) C. COHEN-TANNOUDJI et S. HAROCHE - C.R. 262, 1966, p. 268
- (¹²) C.J. FAVRE et E. GENEUX - Phys. Letters, 8, n°3, 1964, p. 190
- (¹³) E.B. ALEXANDROV, O.B. CONSTANTINOV, B.I. PEREL' et B.A. KHODOVOY - J.E.T.P. USSR, 45, 1963, p. 503
- (¹⁴) M.L. GOLDBERGER et K.M. WATSON - "Collision Theory", chap. 8 (J. Wiley, N.Y. 1964)
- (¹⁵) J.H. SHIRLEY - Phys. Rev. 138, 4B, 1965, p. 979
- (¹⁶) S. HAROCHE - C.R. 262, 1966, p. 37
- (¹⁷) W.E. BELL et A.L. BLOOM - Phys. Rev. Lett. 6, 1961, p. 280
E.B. ALEXANDROV - Opt. a. Spectr. USA, 19, 1965, p. 252
- (¹⁸) J. DUPONT-ROC - Thèse de 3e cycle, Paris, 1968
- (¹⁹) L.N. NOVIKOV et V.G. POKAZANIEV - Soviet Physics JETP, 26, N°2, 1968, p. 438
- (²⁰) L.N. NOVIKOV, V.G. POKAZANIEV, L.I. YAKUB - Soviet Phys. JETP, 26, N°4, 1968, p.752
- (²¹) S.H. AUTLER, C.H. TOWNES - Phys. Rev. 100, 1955, p. 703
- (²²) B. CAGNAC - Thèse, Paris, 1960 (Ann. de Phys. 6, 1961, p. 467)
- (²³) S. HAROCHE - Thèse de 3e cycle, Paris, 1967
- (²⁴) M.H.L. PRYCE - Phys. Rev. 77, 1950, p. 136
- (²⁵) J.N. DODD, G.W. SERIES - Proc. Roy. Soc. A263, 1961, p. 353