



HAL
open science

Uniformisation locale simultanée par monomialisation d'éléments clefs

Julie Decaup

► **To cite this version:**

Julie Decaup. Uniformisation locale simultanée par monomialisation d'éléments clefs. Mathématiques générales [math.GM]. Université Paul Sabatier - Toulouse III, 2018. Français. NNT : 2018TOU30068 . tel-02069188

HAL Id: tel-02069188

<https://theses.hal.science/tel-02069188>

Submitted on 15 Mar 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par : *l'Université Toulouse 3 Paul Sabatier (UT3 Paul Sabatier)*

Présentée et soutenue le *Vendredi 06 Juillet 2018* par :

JULIE DECAUP

**Uniformisation locale simultanée par monomialisation
d'éléments clefs.**

JURY

MONIQUE LEJEUNE-JALABERT
GUILLAUME ROND
MARK SPIVAKOVSKY
BERNARD TEISSIER
MICHAEL TEMKIN
BERTRAND TOËN
MICHEL VAQUIÉ

Directrice de Recherche
Maître de Conférence
Directeur de Recherche
Directeur de Recherche
Associate profesor
Directeur de Recherche
Chargé de Recherche

Examinatrice
Examinateur
Directeur de Thèse
Rapporteur
Rapporteur
Examinateur
Examinateur

École doctorale et spécialité :

MITT : Domaine Mathématiques : Mathématiques fondamentales

Unité de Recherche :

Institut de Mathématiques de Toulouse (UMR 5219)

Directeur de Thèse :

Mark Spivakovsky

Rapporteurs :

Bernard Teissier et Michael Temkin

Je dédie cette thèse à mon papi,
parce que je n'ose imaginer à quel point tu aurais été fier...

Remerciements.

Je commence à peine et j'ai déjà effacé et recommencé plusieurs fois...lançons nous !

Déjà, bien évidemment, je souhaite remercier mon directeur de thèse Mark Spivakovsky. Pour sa gentillesse déjà, ses anecdotes également, et bien sûr pour tout ce que j'ai pu apprendre grâce à lui. Merci d'être resté stoïque alors même que mes questions étaient parfois stupides, merci d'avoir toujours répondu avec patience et bienveillance.

Merci à Bernard Teissier et Michael Temkin d'avoir accepté de rapporter cette thèse, c'est un immense honneur pour moi. Merci à Monique Lejeune-Jalabert, Guillaume Rond, Bertrand Toën et Michel Vaquié de me faire l'honneur et le plaisir de faire partie de ce jury.

Ensuite, je souhaite remercier l'ensemble de l'IMT, son directeur Vincent Guedj, qui a oeuvré à une plus grande convivialité, et qui a toujours répondu présent. Merci à tout le personnel administratif, je pense à Agnès, à Céline et Céline, à Delphine, à Isabelle et Isabelle, à Jocelyne, à Katia, à Tamara...Je ne peux citer tout le monde, mais vous faites un boulot formidable et nous pouvons travailler dans une plus grande sérénité grâce à vous toutes.

Merci également à l'ensemble de l'équipe Picard, merci particulièrement à Arnaud, Emmanuel, Jean, Joan, Marcello, Paolo, Stéphane et bien sûr merci à toi Benoît, l'échappé Tarbais, pour ta gentillesse et ta générosité.

Maintenant qu'on a parlé des grandes personnes, place aux petites ! Merci donc aux doctorants, de toutes les équipes en général, pour la convivialité qui règne entre nous. Merci plus particulièrement aux MIP et ESP : Alexis, Baptiste, Coton, Joachim, JP et Marc. Baptiste, merci pour nos cafés matinaux, merci pour ta constante bonne humeur et ta gentillesse, tu as vraiment été une belle rencontre. Merci également à Antoine pour son implication dans la vie du labo et des doctorants.

Merci à tous les doctorants et post-doctorants Picard, pour la bonne humeur, les soirées animées et arrosées, les fous rires, les coups de gueule, bref, merci pour ces trois ans ! Merci donc à André, Arthur, Jordi et Susanna, merci à Kévin, à Sara la principesa, Jules, Zak, Jorge, Tat, Jinan, les très anciens Guilhem et Fabrizio, les juste anciens Anton, Damien et Maxou (et merci pour cette tartine !), les nouveaux Flo, JM, Massimo, et Vladimiro, merci aux mexicains Daniel et Sergio, et un merci plus particulier à mes anciennes (bien que pas si vieilles) cobureaux Anne et Laura.

Merci à mon frère de thèse Wael. Pour ta gentillesse et ta capacité à répondre de manière simple à des questions que je ne comprenais qu'à

moitié. Merci aux petits Théo et Yulieth, je vous souhaite le meilleur pour la suite.

Merci à Pierre Lairez, pour ses slides instructives et ses logiciels sans lesquels l'intro ne serait pas ce qu'elle est.

Tant de temps passé au Mexique, ça a forcément des conséquences, donc...

¡Ahora, una parte en español!

Quiero agradecer a todo el Instituto de matemáticas de Cuernavaca, a los jefes Jawad y Pepe, a los investigadores Aubin, Chava, David, Fabiola, Fuensanta, Jose Luis, Juan, Lucía, gracias al hombre de la palapa, por haberme dejado llegar primero una vez. Gracias a Magda, por todas las noches que no recuerdo, ¡y por enseñarme a cocinar mexicano! Gracias a Carolina, Edgar, Karina y Nelly por siempre hacer nuestras vidas mucho más simples.

Y por supuesto gracias a todos los estudiantes y postdoc de Cuerna : Adri, Agustin, Alex, Daniel, Diana, mi hermanito El Incesto, Jose, Kernel, Otoniel, Vanessa...

Hum, passons à la partie plus privée...

Merci à mes ami-e-s. Celles et ceux qui me font garder le sourire. Merci à Louane, pour nos délires et notre complicité. Merci à Lourdes, pour ta bonne humeur, et ton humour que j'aime tant. Merci de m'avoir fait découvrir le Pulque (et tant d'autres choses encore...) ! Tu es vraiment une belle personne, et j'ai beaucoup de chance de te connaître et de pouvoir te compter parmi mes amies.

Comment ne pas clore le chapitre de l'amitié par toi, mon p'tit chat? Haha, je sais que tu me détestes là tout de suite, je sais que tu ne voulais pas apparaître dans ces lignes, par pudeur. Sauf que ces lignes ne peuvent exister sans toi (Oh putain c'est beau ! Et c'est venu tout seul!). Tu es ma meilleure amie, ma confidente, l'une des rares personnes à pouvoir (et devoir !) me dire stop quand merde quoi voilà, la seule amie à qui je suis capable de pardonner réellement. Merci d'être toi, merci de m'engueuler quand j'en ai besoin, merci de m'écouter, merci de me supporter (et c'est pas rien !), merci de me faire rire. (Non, c'est pas fini...) Merci pour nos coups de fils interminables (en plus ça me fait faire du sport, d'une pierre deux coups!), merci d'être aussi têtue que moi (si si, j't'assume...), merci, tout simplement !

Un grand merci à toute ma famille présente (ou pas) aujourd'hui, vous savez combien c'est important pour moi. Merci donc à mes cousins pas si éloignés que ça Jean-Pierre, Josée et leurs filles, merci à mon oncle Alain, à Marie-Noëlle, et à leurs enfants, merci à ma mamie, qui a fait ce si long trajet pour être à mes côtés aujourd'hui.

Un giganteste merci à ma grande (haha) soeur Émilie. Merci d'être toujours là, merci d'avoir toujours su être une super grande soeur ! Ton soutien sans faille est essentiel pour moi. Merci à Jérôme, pour ta gentillesse et ton amour pour elle. Et le plus grand des mercis pour cette boule de tendresse et de sourires, ce petit être si parfait que vous avez créé : mon neveu et filleul Raphaël que j'aime tant.

Merci à ma Mala, pour cette confiance inconditionnelle, et pour m'attendre chaque soir indubitablement.

Évidemment, le plus gros des mercis ira à ma maman. Merci de m'avoir portée, de m'avoir aimée, merci d'avoir tout fait pour moi, d'être toujours là, quelles que soient les circonstances. Merci pour ta patience, ta gentillesse, ton amour démesuré pour Émilie et moi. Merci pour tout. Sans toi, rien de tout cela n'aurait été possible.

PS : Ben la voilà, ta ligne ! (Oui, j'ai galéré pour la mettre tout en bas. Et oui, c'est optimal.)

Table des matières

Chapitre 1. Introduction générale et préliminaires.	13
1.1. Introduction générale.	13
1.2. Préliminaires.	29
1.2.1. Généralités sur les valuations et exemples.	29
1.2.2. Anneaux de valuations.	32
1.2.3. Rang d'une valuation.	33
1.2.4. Valuations centrées en un anneau local.	34
1.2.5. Valuations composées et monomiales.	36
1.2.6. Algèbre graduée associée à une valuation.	39
1.2.7. Algèbres saturées.	40
1.2.8. Prolongement d'une valuation à une extension de corps.	41
1.2.9. Prolongement d'une valuation au complété d'un anneau intègre local.	42
Chapitre 2. Polynômes clefs.	49
2.1. Polynômes clefs de Mac Lane-Vaquié.	49
2.1.1. Généralités et premières propriétés.	49
2.1.2. Valuations augmentées.	52
2.2. Polynômes clefs de Spivakovsky et al.	53
2.2.1. Généralités et premières propriétés.	53
2.2.2. Polynômes clefs successeurs immédiats.	72
2.3. Lien entre les polynômes clefs de Vaquié et les polynômes clefs de Spivakovsky et al.	89
2.3.1. Sens Spivakovsky \Rightarrow Vaquié.	89
2.3.2. Sens Vaquié \Rightarrow Spivakovsky.	91
Chapitre 3. Uniformisation locale simultanée dans le cas d'anneaux essentiellement de type fini sur un corps sans restriction sur le rang de la valuation.	97
3.1. Préliminaires.	98
3.1.1. Éléments non dénégérés.	98
3.1.2. Éclatements encadrés et monomiaux.	99
3.1.3. Éléments clefs.	104
3.2. Monomialisation dans le cas non dégénéré.	105

3.2.1. Construction d'un caractère numérique strictement décroissant.	105
3.2.2. Divisibilité et changements de variables.	108
3.2.3. Monomialisation des éléments non dégénérés.	111
3.3. Non dégénérescence et polynômes clefs.	113
3.4. Monomialisation des polynômes clefs.	118
3.4.1. Généralités.	118
3.4.2. Paquets de Puiseux.	120
3.4.3. Généralisation.	129
3.4.4. Divisibilité.	132
3.5. Conclusion.	136
Chapitre 4. Uniformisation locale dans le cas d'anneaux quasi-excellents pour des valuations de rang inférieur ou égal à 2.	141
4.1. Préliminaires.	141
4.1.1. Anneaux quasi-excellents.	141
4.1.2. Entiers associés.	142
4.2. Idéal implicite.	145
4.3. Monomialisation des polynômes clefs.	150
4.4. Réduction au quotient et au localisé.	163
4.5. Conclusion.	169
Index	171
Bibliographie	173

Chapitre 1

Introduction générale et préliminaires.

1.1. Introduction générale.

La théorie des singularités joue un rôle crucial dans de nombreux domaines : l'algèbre commutative, la géométrie algébrique, la théorie des représentations, l'analyse complexe, les systèmes dynamiques, la topologie... Ici, nous nous contenterons de nous intéresser au cadre algébrique.

Dans la langue française, tout comme en mathématiques, le terme « singularité » s'oppose à « banalité » : une singularité est quelque chose d'inhabituel, qui pose problème. C'est une valeur d'exception, comme le lieu où une fonction n'est pas bien définie, où une quantité devient infinie...

En mathématiques, le sens le plus courant (ou non singulier) que l'on donne à une singularité est une « aspérité » ou une « irrégularité ». Nous voyons des singularités tous les jours dans notre vie courante, il suffit de regarder des montagnes : les contours sont généralement des courbes lisses ; mais apparaissent des frondes, ce sont des singularités.



Photo du Nevado de Toluca ou Xinantécatl, État de Mexico, Mexique.

Puisque les singularités sont si exceptionnelles, pourquoi donc les étudier ?

Tout d'abord parce qu'elles apparaissent spontanément, et souvent nous apprennent beaucoup sur les objets étudiés. D'autre part, de nombreuses méthodes et théories relatives aux variétés algébriques s'appliquent sur des objets « lisses », autrement dit qui n'ont pas de singularité. Il est donc naturel de chercher à modifier les variétés qui ont des singularités en des variétés qui n'en ont pas : des variétés lisses. Lorsque l'on modifie une variété singulière en une variété lisse, on dit qu'on « résout » les singularités.

La résolution des singularités.

Le problème de résolution des singularités peut se poser de différentes manières, plus ou moins exigeantes, donnons en une. Soit V une variété singulière. La variété V admet une résolution s'il existe une variété lisse W et un morphisme propre birationnel $W \rightarrow V$. Le problème a été résolu de bien des manières.

En caractéristique nulle tout d'abord. Le cas des surfaces fut résolu tout d'abord par Beppo Levi en 1897 ([3, 4]) et par Jung en 1908 ([18]), mais les premières preuves algébriques furent données par Walker en 1935 ([32]) et par Zariski en 1939 ([34]), qui montra également la résolution des singularités en dimension 3 en 1944 ([36]).

Vingt ans plus tard, en 1956, Abhyankar utilisa des méthodes similaires à celles de Zariski, plus précisément utilisa l'uniformisation locale par des anneaux de valuations, et démontra ainsi la résolution des singularités des surfaces en toute caractéristique ([1]). Dix ans plus tard, il démontra la résolution des singularités en dimension 3 et en caractéristique strictement supérieure à 5 ([2]). Durant la même période, en 1964, mais par des méthodes totalement distinctes, en faisant une récurrence sur la dimension, Hironaka montra la résolution des singularités des variétés en caractéristique nulle et en toute dimension ([15]). En 2008, Temkin montra la résolution des singularités en caractéristique nulle, en toute dimension, mais dans le cadre plus général des schémas quasi-excellents ([26]).

Depuis, l'objectif principal des chercheurs qui s'intéressent à ce thème est de démontrer la résolution des singularités en caractéristique positive, mais les obstacles sont nombreux et difficiles.

Néanmoins, l'avancée la plus marquante du XXI^e siècle fut celle de Cossart et Piltant qui montrèrent en 2008 une version faible de la résolution des singularités en dimension 3 en toute caractéristique ([8]), puis en 2014 ils démontrèrent la résolution des singularités des schémas quasi-excellents en toute caractéristique et en dimension 3 ([9]).

L'uniformisation locale : le match.

La résolution des singularités étant un problème difficile, il était naturel de s'intéresser à une version plus locale de ce problème, à savoir l'uniformisation locale. C'est la méthode utilisée par Zariski et Abhyankar pour démontrer la résolution des singularités.

Prenons une variété V et a un point de V . Considérons le jeu suivant entre Alice et Bob :

- (1) Alice éclate V en un fermé passant par a et lisse en a .
- (2) Bob choisit un ouvert V_1 de l'éclatement dont l'image dans V contient a ainsi qu'un point a_1 au-dessus de a dans V_1 .
- (3) La variété V_1 et le point a_1 remplacent respectivement V et a .

Alice gagne si Bob choisit un ouvert lisse V_1 .

THÉORÈME. *Quels que soient V et a , il existe une stratégie gagnante pour Alice.*

C'est le théorème d'uniformisation locale en caractéristique nulle et une conjecture, appelée Problème d'uniformisation locale, en caractéristique positive.

Donnons un exemple. Prenons la variété $V := \{z^2 = x^2y\}$ appelée parapluie de Whitney, dont le lieu singulier est la droite $\{x = z = 0\}$. Choisissons le point singulier $a := (0, 0, 0)$.

- (1) Premier tour. Alice doit éclater V en un fermé passant par l'origine et lisse en ce point. Elle choisit le fermé $\{y = z = 0\}$.
- (2) Bob regarde dans la carte y . La transformée stricte est alors $x_1^2 = z_1^2y_1$. Bob choisit un point singulier de la transformée stricte, l'origine à nouveau.

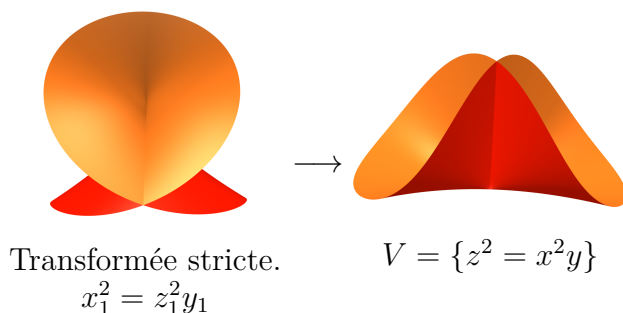


FIGURE 1.1.1. Partie 1, premier tour.

- (3) Deuxième tour. Alice doit éclater $V_1 := \{x_1^2 = z_1^2 y_1\}$ en un fermé passant par l'origine et lisse en ce point. Reconnaisant l'équation du parapluie de Whitney, Alice se lasse et abandonne.

Ici on remarque que si les choix d'Alice sont vraiment mauvais, et les choix de Bob toujours optimaux, elle finit par abandonner et perdre la manche. Elle ne peut d'ailleurs perdre la manche que si de son côté Bob s'arrange pour que la partie soit infinie, et qu'elle finisse ainsi par se lasser. Autrement dit :

Alice 0, Bob 1.

Nous pourrions imaginer qu'Alice est plus maligne que ça, c'est donc l'heure de la revanche.

- (1) Premier tour. Alice doit éclater $V = \{z^2 = x^2 y\}$ en un fermé passant par l'origine et lisse en ce point. Elle choisit cette fois le fermé $\{x = y = z = 0\}$.
- (2) Bob regarde dans la carte x . La transformée stricte est alors $z_1^2 = x_1 y_1$. C'est une variété dont le lieu singulier est

$$\{x_1 = y_1 = z_1 = 0\}.$$

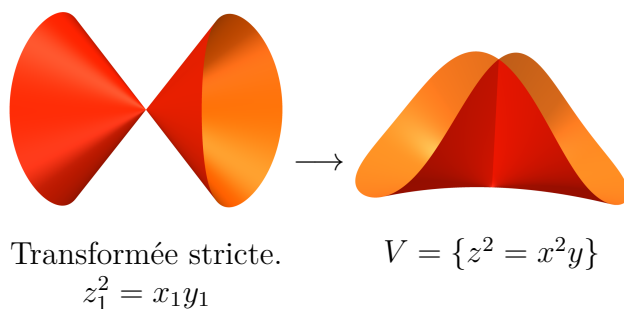


FIGURE 1.1.2. Partie 2, premier tour.

- (3) Bob choisit à nouveau l'origine, qui est encore un point singulier.
- (4) Deuxième tour. Alice doit éclater $V_1 = \{z_1^2 = x_1 y_1\}$ en un fermé passant par l'origine et lisse en ce point. Elle choisit le fermé $\{x_1 = y_1 = z_1 = 0\}$.

- (5) Bob regarde dans la carte x_1 . La transformée stricte est alors $z_2^2 = y_2$, qui est lisse.

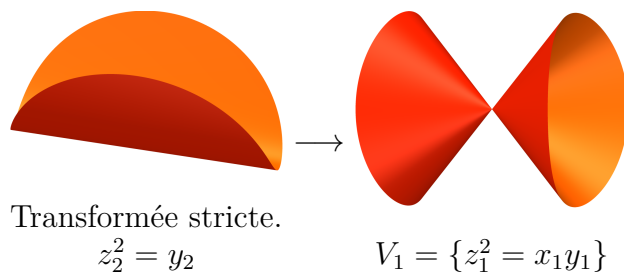


FIGURE 1.1.3. Partie 2, deuxième tour.

- (6) Alice a gagné.

Ici on remarque que malgré un premier choix optimal de Bob (regarder la carte z donnait une transformée stricte lisse), elle finit par remporter cette manche. Autrement dit :

Alice 1, Bob 1.

L'idée est donc la suivante : comment faire pour qu'Alice fasse des choix systématiques pas forcément optimaux mais au moins qui finissent assurément par la faire gagner ?

Une résolution globale donne une stratégie gagnante à Alice, et même une stratégie gagnante indépendamment des choix de Bob.

L'uniformisation locale est ainsi une version locale de la résolution des singularités : elle donne de nombreuses résolutions partielles de V , la difficulté est bien évidemment de les recoller pour obtenir une résolution globale. Zariski a réussi à le faire en caractéristique nulle en dimension 3, et Cossart et Piltant ont étendu ses méthodes à la caractéristique positive, toujours en dimension 3.

Les valuations : un outil crucial.

Un outil naturel pour résoudre le problème de l'uniformisation locale, outil utilisé par exemple par Zariski puis Abhyankar, est une valuation.

Mais donc en quoi les valuations sont-elles un outil naturel dans notre problème ?

Soit V une variété singulière et Z un fermé irréductible réduit de V . Admettons un instant que l'on sache désingulariser V . On a alors une variété lisse Y dans laquelle on considère Z' , un fermé irréductible et réduit de Y dont l'image est Z . Ainsi l'anneau local essentiellement de type fini régulier $\mathcal{O}_{Y,Z'}$ domine l'anneau local essentiellement de type fini non régulier $\mathcal{O}_{V,Z}$. Autrement dit on a l'inclusion $\mathcal{O}_{V,Z} \subseteq \mathcal{O}_{Y,Z'}$ et l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{V,Z}$ est l'intersection de l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{Y,Z'}$ avec $\mathcal{O}_{V,Z}$.

Mais à un éclatement près, le fermé Z' est une hypersurface, et ainsi $\mathcal{O}_{Y,Z'}$ est dominé par un anneau de valuation discrète, valuation donnée par l'ordre d'annulation le long de l'hypersurface.

Si tant est que l'on sache désingulariser, les valuations s'intègrent donc naturellement dans le problème.

Soit une variété singulière V de corps de base k et l'on considère K le corps des fonctions de V . L'espace de Riemann-Zariski de V est l'ensemble des valuations de K triviales sur k . En dimension 1, c'est une variété algébrique non singulière, c'est donc un objet naturel qui fournit une désingularisation de V . Néanmoins cet espace n'est en général pas une variété, on cherche donc à l'approcher par une variété, qui aurait la même propriété de lissité.

Avant de pouvoir énoncer précisément le théorème d'uniformisation locale, nous avons besoin d'une notion classique qui va se révéler essentielle dans notre étude, qui est celle du centre d'une valuation, et détaillée dans le premier chapitre de cette thèse. Pour plus de détails, on pourra lire ([35]) mais également ([28] paragraphes 2 et 3).

Prenons K un corps et ν une valuation définie sur K , d'anneau de valuation l'anneau local $R_\nu := \{x \in K \text{ tel que } \nu(x) \geq 0\}$, d'idéal maximal \mathfrak{m}_ν . On considère A un sous-anneau de K inclus dans R_ν . Alors le centre de ν dans A est l'idéal \mathfrak{p} de A tel que $\mathfrak{p} = A \cap \mathfrak{m}_\nu$.

On considère maintenant V une variété algébrique sur un corps k , et K le corps des fonctions de V . Nous aimerions définir le centre d'une valuation ν de K sur V .

Supposons que V est une variété affine, alors $V = \text{Spec}(A)$ où A est une k -algèbre intègre de type fini, avec $A \subseteq K$. C'est le cas qui nous intéresse dans ce manuscrit.

Si $A \subseteq R_\nu$, alors le centre de ν sur V est le point ζ de V qui correspond à l'idéal premier $A \cap \mathfrak{m}_\nu$ de A . Le sous-schéma fermé irréductible réduit Z de V défini par $A \cap \mathfrak{m}_\nu$ (c'est-à-dire l'image du morphisme $\text{Spec} \left(\frac{A}{A \cap \mathfrak{m}_\nu} \right) \rightarrow \text{Spec}(A)$) a ζ comme son point générique (le point associé à l'idéal nul). On dit également que Z est le centre de ν sur V . Si $A \not\subseteq R_\nu$, alors on dit que la valuation n'a pas de centre sur V .

Le théorème d'uniformisation locale plongée.

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer précisément le théorème d'uniformisation locale. Théorème démontré en caractéristique nulle, conjecture en caractéristique positive.

Dans le cas où V est une variété réduite et irréductible, le théorème d'uniformisation locale dit qu'étant donnée une valuation ν sur le corps des fonctions de V , centrée en une sous-variété irréductible Z de V , il existe un éclatement $\pi: V_1 \rightarrow V$ tel que le centre de ν sur V_1 , c'est-à-dire le fermé irréductible Z_1 tel que \mathcal{O}_{V_1, Z_1} soit dominé par R_ν , définisse un anneau local régulier \mathcal{O}_{V_1, Z_1} .

Revenons un instant à Alice et Bob. Soit V une variété singulière en un point a . On peut remplacer Bob par une valuation ν de la manière suivante. On regarde l'anneau local $\mathcal{O}_{V, a}$, qui est contenu et dominé par un anneau de valuation R_ν .

Premier tour. Alice éclate un fermé lisse passant par a .

Deuxième tour. Bob choisit V_1 et a_1 , où a_1 est le centre de ν dans V_1 . Algébriquement, ce choix revient à produire un anneau local \mathcal{O}_{V_1, a_1} tel que $\mathcal{O}_{V, a} \preceq \mathcal{O}_{V_1, a_1} \preceq R_\nu$, où \preceq est la relation de domination birationnelle. S'il choisit V_1 lisse, alors \mathcal{O}_{V_1, a_1} est régulier et c'est gagné pour Alice.

En réalité, l'existence d'une stratégie gagnante est un peu plus forte que l'uniformisation locale. L'uniformisation locale revient à démontrer l'existence d'une stratégie gagnante connaissant par avance tous les choix de Bob dans toutes les situations possibles.

Algébriquement, nous pouvons reformuler de la manière suivante.

Soit $X = \text{Spec}(A)$ une variété affine de corps des fonctions K sur un corps de base k . On prend ν une valuation sur K , d'anneau de valuation R_ν . Alors A est un sous-anneau de K . Le théorème d'uniformisation locale dit que A s'injecte dans un sous-anneau local régulier A' essentiellement de type fini sur k et dominé par R_ν .

Notre travail ici consiste en fait à monomialiser des éléments d'un anneau local régulier essentiellement de type fini. Mais, quel est donc le rapport avec l'uniformisation locale ?

Soit k un corps de caractéristique nulle et f un polynôme en n variables, irréductible sur k . On sait donc que $f \in k[u_1, \dots, u_n]$. On note $V(f)$ l'hypersurface associée, qui est réduite. On se place maintenant dans un point k -rationnel de $V(f)$, c'est-à-dire un point dont le corps résiduel est k .

Quitte à effectuer une translation, on peut supposer que l'hypersurface admet une singularité en l'origine, et on pose

$$R := k[u_1, \dots, u_n]_{(u_1, \dots, u_n)}.$$

C'est un anneau local régulier essentiellement de type fini, de système régulier de paramètres $u = (u_1, \dots, u_n)$, et l'on considère $A := \frac{R}{(f)}$.

On sait que $R \rightarrow A$, et comme f est irréductible, A est intègre, donc on peut le plonger dans son corps des fractions K . L'anneau A étant un anneau local, d'après le lemme de Zorn, il est dominé birationnellement par un anneau local maximal pour la relation de domination, donc par un anneau de valuation (voir Proposition 1.2.14). On a donc une valuation ν_0 de K centrée dans A . En composant cette valuation avec la valuation f -adique, on obtient une valuation ν centrée en R (dans son idéal maximal). C'est cette valuation, spécifiée d'avance, que nous gardons tout le long de l'uniformisation locale.

On a vu qu'un éclatement était une application entre variétés. Dans le cas des variétés affines de corps des fonctions K , c'est-à-dire dans le cas qui nous intéresse ici, cela revient à avoir une application entre sous-anneaux de K .

Supposons donc que l'on arrive à construire une suite d'éclatements

$$(R, u) \rightarrow (R', u' = (u'_1, \dots, u'_n))$$

telle que f soit un monôme en u' , autrement dit telle que la transformée totale de f soit un monôme en u' . On a alors que la transformée totale de f s'écrit vu'^α , avec v une unité de R' , et $u'^\alpha = \prod_{i=1}^n (u'_i)^{\alpha_i}$.

La transformée stricte d'un élément irréductible étant soit vide soit irréductible, mettons le cas vide de côté pour l'instant, et ainsi la transformée stricte de f est irréductible. Quitte à renuméroter, on peut donc considérer que la transformée stricte de f est u'_n , et le diviseur exceptionnel $\frac{u'^\alpha}{u'_n}$, qui n'est pas divisible par u'_n . Ainsi la transformée stricte de f est lisse, autrement dit le centre de ν_0 dans $A' = \frac{R'}{(u'_n)}$ est lisse. Quitte à localiser, on peut supposer A' local et ainsi on a bien une injection de A dans un anneau local régulier A' dominé par R_ν : on a donc démontré l'uniformisation locale.

On a même ici quelque chose de plus fort. On sait que la transformée totale est, en tout point, donnée par un produit d'éléments d'un système régulier de paramètres en ce point. On dit alors que la transformée totale est à croisements normaux simples. On appelle cela l'uniformisation locale plongée. C'est ce théorème que nous allons redémontrer ici.

Si f n'est plus un polynôme mais un ensemble d'équations, disons (f_1, \dots, f_r) , toujours dans $k[u_1, \dots, u_n]$, alors on regarde tout d'abord une seule équation, disons f_1 , on désingularise sa transformée stricte par $R \rightarrow R'$, puis on se place dans $\frac{R'}{(f'_1)}$ et on recommence avec une équation de moins dans un anneau ambiant qui est maintenant de dimension $n - 1$.

Et dans cette thèse ?

L'uniformisation locale a déjà été démontrée, mais la preuve apportée ici est nouvelle et riche de deux choses : tout d'abord, nous monomialisons tous les éléments de R avec la même suite d'éclatements, et de plus, cette suite est explicite et nous connaissons les coordonnées pas à pas, c'est l'objectif des Théorèmes 3.5.1 et 3.5.2.

En effet, nous allons partir d'un anneau local régulier essentiellement de type fini R , et d'une valuation centrée en R . Grâce à cette valuation, nous créerons ensuite une suite d'éclatements explicites qui monomialisera tous les éléments de R . Un autre avantage de la preuve proposée est que dans le cadre essentiellement de type fini, nous démontrons l'uniformisation locale simultanée et plongée quelle que soit la valuation centrée dans l'anneau, nous n'imposons aucune condition sur le rang, par exemple. Nous expliquerons cela plus en détail dans la suite de cette introduction.

Dans la section 1.2 de ce travail, nous donnons quelques préliminaires, en particulier sur la théorie des valuations, dont nous avons déjà vu l'importance. Ensuite nous passons au deuxième Chapitre, qui traite des polynômes clefs, notion essentielle dans cette thèse et intimement liée à la théorie des valuations, et concerne les sections 2.1, 2.2 et 2.3.

Dans la section 2.1, nous rappelons la notion de polynôme clef de Vaquié, introduite par Mac Lane et Vaquié, et nous donnons quelques propriétés utiles sur ces polynômes.

Les polynômes clefs

La section 2.2 est plus inédite, nous donnons une nouvelle définition des polynômes clefs due à Spivakovsky et introduite pour la première fois dans ([23] et [11]). On prend K un corps, ν une valuation sur K et on note $\partial_b := \frac{1}{b!} \frac{\partial^b}{\partial X^b}$ la dérivée formelle de l'ordre b . Pour tout polynôme $P \in K[X]$, on pose

$$\epsilon_\nu(P) := \max_{b \in \mathbb{N}^*} \left\{ \frac{\nu(P) - \nu(\partial_b P)}{b} \right\}.$$

DÉFINITION. Soit $Q \in K[X]$ unitaire. Le polynôme Q est un *polynôme clef pour ν* si pour tout polynôme $P \in K[X]$, l'on a :

$$\epsilon_\nu(P) \geq \epsilon_\nu(Q) \Rightarrow \deg_X(P) \geq \deg_X(Q).$$

L'intérêt de cette nouvelle définition est surtout la notion de polynômes clefs successeurs immédiats, qui sera essentielle dans notre preuve d'uniformisation locale. Soient Q_1 et Q_2 deux polynômes clefs.

DÉFINITION. On dit que Q_2 est un *successeur immédiat* de Q_1 et l'on note $Q_1 < Q_2$ si $\epsilon(Q_1) < \epsilon(Q_2)$ et si Q_2 est de degré minimal pour cette propriété.

On note M_{Q_1} l'ensemble des polynômes clefs successeurs immédiats de Q_1 , et l'on suppose qu'ils sont tous de même degré que Q_1 .

DÉFINITION. On suppose que $\epsilon(M_{Q_1})$ n'a pas d'élément maximal et qu'il existe un polynôme clef Q' tel que $\epsilon(Q') > \epsilon(M_{Q_1})$. On appelle *polynôme clef successeur immédiat limite* de Q_1 tout polynôme Q_2 de degré minimal vérifiant cette propriété, et l'on note $Q_1 <_{\lim} Q_2$.

Écrivons Q_2 selon les puissances de Q_1 , autrement dit écrivons $Q_2 = \sum_{i=0}^s q_i Q_1^i$, où les q_i sont des polynômes de degrés strictement inférieurs à celui de Q_1 . Nous appelons cela le *Q_1 -développement de Q_2* , et verrons cela en détail dans la définition 2.1.11.

Un résultat essentiel de cette thèse, et le seul qui utilise l'hypothèse de caractéristique nulle, est le Théorème 2.2.35 qui dit que si

$$Q_1 <_{\lim} Q_2,$$

alors :

$$\max \left\{ i \in \{0, \dots, s\} \text{ tels que } \nu(q_i Q_1^i) = \min_{0 \leq j \leq s} \left\{ \nu(q_j Q_1^j) \right\} \right\} = 1.$$

Autrement dit, dans le cadre d'un polynôme clef Q_2 successeur immédiat limite de Q_1 , nous regardons les termes de son Q_1 -développement

qui minimisent la valuation, et ces termes sont exactement les termes de degrés 0 et 1.

Tout ce qui découle de ce résultat utilise donc également l'hypothèse de caractéristique nulle.

Puisque nous avons deux notions distinctes de polynômes clefs, il est naturel de se demander quel est le lien entre ces deux définitions. C'est l'objet de la section 2.3 ainsi que d'un article co-écrit avec Wael Mahboub et Mark Spivakovsky, intitulé *Abstract key polynomials and comparison theorems with the key polynomials of Mac Lane-Vaquié* ([11]) et soumis pour publication.

Nous commençons par prendre un polynôme clef Q de la section 2.2, et nous cherchons à savoir pour quelle-s valuation-s est-il un polynôme clef de Vaquié. La réponse est simple : pour la valuation tronquée ν_Q , que nous définissons dans la section 2.2 également. Puis nous prenons deux polynômes clefs successeurs immédiats $Q_1 < Q_2$ et remarquons qu'alors, Q_2 est un polynôme clef de Vaquié pour la valuation ν_{Q_1} .

Et dans l'autre sens ? Si nous prenons un polynôme clef de Vaquié Q pour une valuation ν , existe-t-il une valuation, ou plusieurs, pour lesquelles Q est un polynôme clef ?

La réponse est oui, il en existe même beaucoup : une infinité. Le polynôme Q sera un polynôme clef pour toutes les valuations augmentées de ν .

Dans la suite du manuscrit, nous nous intéressons en détail à la monomialisation des éléments d'un anneau local régulier essentiellement de type fini : c'est l'objet du Chapitre 3.

Non dégénérescence et monomialisation.

Nous allons ici donner l'idée de la preuve que nous présentons. Commençons par considérer R un anneau local régulier essentiellement de type fini sur un corps k de caractéristique nulle. On choisit $u = (u_1, \dots, u_n)$ un système régulier de paramètres de R .

Tout d'abord, un ingrédient très important est la non dégénérescence. On dit qu'un élément f de R est non dégénéré par rapport à u si l'on peut trouver un idéal N de R , monomial par rapport à u , donc engendré par des monômes en u , tel que f minimise la valuation sur N . Autrement dit, tel que $\nu(f) = \min_{x \in N} \{\nu(x)\}$.

La section 3.2 consiste à monomialiser tous les éléments qui sont non dégénérés par rapport à un système de paramètres de R . Donc si un élément f de R est non dégénéré par rapport à un système de paramètres régulier de R , on construit une suite d'éclatements

$$(R, u) \rightarrow \cdots \rightarrow (R', u')$$

telle que la transformée stricte de f dans R' est un monôme en u' .

Tout élément f de R n'est bien sûr pas non dégénéré par rapport à u , mais serait-il possible de trouver une suite d'éclatements

$$(R, u) \rightarrow \cdots \rightarrow (T, t)$$

telle que f soit non dégénéré par rapport à t ? Si c'était le cas, alors, après une nouvelle suite d'éclatements, nous monomialiserions f .

Faire cela pour chaque élément de R serait très fastidieux. Ainsi, nous aimerions trouver une suite d'éclatements $(R, u) \rightarrow \cdots \rightarrow (R', u')$ telle que tout élément de R est non dégénéré par rapport à u' . C'est un peu ambitieux, donc nous allons faire quelque chose de plus subtil : nous allons trouver une suite d'éclatements infinie

$$(R, u) \rightarrow (R_1, u^{(1)}) \rightarrow \cdots \rightarrow (R_i, u^{(i)}) \rightarrow \cdots$$

telle que pour tout élément f de R , il existe i tel que f est non dégénéré par rapport à $u^{(i)}$.

C'est là qu'interviennent les polynômes clefs.

Nous allons, dans la section 3.3, construire, sous certaines conditions, dont nous reparlerons par la suite, une suite particulière de polynômes clefs $(Q_i)_i$ telle que tout élément f de R est non dégénéré par rapport à un Q_i , autrement dit telle que :

$$\forall f \in R, \exists i \text{ tel que } \nu(f) = \nu_{Q_i}(f).$$

La construction de la suite des $(Q_i)_i$ se fait pas à pas. Cette suite est particulière dans le sens suivant : pour tout indice i , le polynôme Q_{i+1} est un successeur immédiat ou un successeur immédiat limite de Q_i , et

de plus, la suite $(\epsilon(Q_i))_i$ est cofinale dans $\epsilon(\Lambda)$, où Λ désigne l'ensemble des polynômes clefs de l'extension $k(u_1, \dots, u_{n-1})(u_n)$.

Autrement dit, on a :

$$\begin{cases} \forall i, Q_i < Q_{i+1} \text{ ou } Q_i <_{\lim} Q_{i+1}, \\ \forall Q \in \Lambda \exists i \text{ tel que } \epsilon(Q_i) \geq \epsilon(Q). \end{cases}$$

Supposons maintenant que nous arrivions à construire une suite d'éclatements

$$(R, u) \rightarrow \dots \rightarrow (R_j, u^{(j)}) \rightarrow \dots$$

telle que tous nos polynômes clefs Q_i fassent partie d'un système régulier de paramètres. Autrement dit telle que

$$\forall i, \exists j, k \text{ tel que } Q_i^{\text{strict},j} = u_k^{(j)},$$

où $Q_i^{\text{strict},j}$ est la transformée stricte de Q_i dans l'anneau R_j . Alors tout élément f de R qui était non dégénéré par rapport à Q_i serait non dégénéré par rapport au système régulier de paramètres $u^{(j)}$, et donc serait monomialisable.

Il faut donc construire une suite d'éclatements qui monomialise tous les polynômes clefs Q_i . C'est l'objectif de la section 3.4.

Plus précisément, dans cette section, nous verrons qu'il nous faut à nouveau être plus subtil : la notion de polynôme clef ne se transmettant pas par éclatement, la bonne notion à utiliser est celle d'élément clef. Soit (Q_i, Q_{i+1}) un couple de successeurs immédiats (éventuellement limites) de la suite pré-construite.

On écrit $Q_{i+1} = \sum_{j=0}^s q_j Q_i^j$ avec les q_j tous de degré strictement inférieur à celui de Q_i . Alors on associe à Q_{i+1} un élément clef Q'_{i+1} en lui rajoutant des unités :

DÉFINITION. L'élément $Q'_{i+1} = \sum_{j=0}^s a_j q_j Q_i^j$ où a_j est une unité est appelé *élément clef* associé au polynôme clef Q_{i+1} .

De fait, on a une notion d'éléments clefs successeurs immédiats (éventuellement limites).

DÉFINITION. Soient P'_1 et P'_2 deux éléments clefs. On dit que P'_1 et P'_2 sont des *éléments clefs successeurs immédiats (respectivement limites)*, si leurs polynômes clefs associés respectifs P_1 et P_2 sont tels que P_2 est un polynôme clef successeur immédiat (respectivement limite) de P_1 .

Après éclatements, nous verrons que les polynômes clefs successeurs immédiats (respectivement limites) deviennent des éléments clefs successeurs immédiats (respectivement limites), et ce sont ces éléments clefs que nous monomialiserons.

Ainsi nous créerons une suite locale

$$(R, u) \xrightarrow{\pi_0} \cdots \xrightarrow{\pi_{s-1}} (R_s, u^{(s)}) \xrightarrow{\pi_s} \cdots$$

qui monomialise tous les polynômes clefs de la suite. Plus précisément, pour tout indice i , il existera un indice s_i tel que dans R_{s_i} , Q_i est un monôme en $u^{(s_i)}$ multiplié par une unité de R_{s_i} .

Dans la section 3.5, nous montrons que de fait, tout élément de R est monomialisable. Comme nous avons vu au début de cette introduction, cela revient à démontrer l'uniformisation locale plongée.

Donc dans le cas d'anneaux locaux réguliers essentiellement de type fini, quel que soit le rang de la valuation, nous avons démontré l'uniformisation locale plongée en utilisant une seule suite d'éclatements pour tous les éléments de l'anneau, et en explicitant chaque éclatement et donc chaque système de coordonnées.

Cadre plus général

Nous aimerions maintenant nous placer dans un cadre plus général que les anneaux locaux essentiellement de type fini, quitte à donner des restrictions sur le rang de la valuation. Quel serait donc le cadre adéquat? Autrement dit, quel est le cadre « maximal » que l'on peut espérer? Il faut donc trouver les restrictions minimales que nous devons imposer à nos anneaux pour avoir une chance que le théorème soit vrai.

Soit R un anneau local noethérien équicaractéristique. On aimerait pouvoir résoudre les singularités de R . Le théorème de structure de Cohen dit que le complété de R est un quotient d'un anneau de séries formelles. Ainsi nous aimerions pouvoir travailler sur le complété de R plutôt que sur R . Mais pour cela, il faut que l'anneau ait un bon comportement par complétion. Autrement dit, il ne faut pas ajouter de singularité lorsque nous faisons l'opération de complétion, et il faut pouvoir s'assurer que si R est normal, son complété l'est aussi. Imaginons que le lieu régulier de R soit ouvert, donc que son lieu singulier soit fermé. Rien n'indique qu'en complétant, le lieu singulier ne devienne pas dense, et alors cela serait totalement illusoire que de penser pouvoir désingulariser. Les anneaux qui vérifient toutes ces propriétés sont les anneaux quasi-excellents. Ils sont donc la base pour pouvoir espérer avoir une uniformisation locale.

On se place donc dans le cadre des anneaux locaux intègres quasi-excellents. Soit R un tel anneau. Le but du Chapitre 4 est de démontrer l'uniformisation locale plongée (et simultanée dans le sens évoqué ci-dessus) de R . Cette fois, R n'étant pas essentiellement de type fini, la preuve précédente ne fonctionne plus, et il faut donc être plus subtil. La notion essentielle de ce chapitre, et celle qui va nous aider à démontrer l'uniformisation locale dans ce cadre, est la notion d'idéal premier implicite.

On considère ν une valuation du corps des fractions de R centrée en R . On appelle idéal premier implicite de R associé à ν l'idéal de \widehat{R} défini par :

$$H := \bigcap_{\beta \in \nu(R \setminus \{0\})} P_\beta \widehat{R}$$

où $P_\beta := \{f \in R \text{ tel que } \nu(f) \geq \beta\}$. Cet idéal satisfait les propriétés suivantes :

- (1) $H \cap R = \{0\}$,
- (2) $R \hookrightarrow \frac{\widehat{R}}{H}$,
- (3) $H \in \text{Spec}(\widehat{R})$ si la valuation ν est de rang 1,
- (4) La valuation ν s'étend de manière unique en une valuation unique $\tilde{\nu}$ centrée en $\frac{\widehat{R}}{H}$, à nouveau si la valuation ν est de rang 1,
- (5) L'anneau \widehat{R}_H est régulier.

Mais en quoi cela est-il si essentiel ? Puisque l'on a vu que désingulariser R revenait à désingulariser \widehat{R} , il suffit de résoudre les singularités de \widehat{R} . Or dans le quatrième chapitre de cette thèse, nous montrons également que pour désingulariser \widehat{R} , il suffit de désingulariser \widehat{R}_H et (à une suite supplémentaire d'éclatements près) $\frac{\widehat{R}}{H}$, ainsi d'après le point 5 vérifié par H , il suffira de désingulariser $\frac{\widehat{R}}{H}$, et c'est l'objet du Théorème 4.4.2.

Comme nous l'avons fait précédemment, on considère f une hypersurface et on compose notre valuation ν de rang 1 avec la valuation f -adique. On obtient donc l'uniformisation locale plongée simultanée des anneaux locaux intègres quasi-excellents munis de valuations soit de rang 1, soit de rang 2 mais composées d'une valuation discrète.

1.2. Préliminaires.

1.2.1. Généralités sur les valuations et exemples. Soient R un anneau commutatif unitaire intègre, K un corps commutatif et Γ un groupe abélien totalement ordonné. On note $\Gamma_\infty := \Gamma \cup \{+\infty\}$.

DÉFINITION 1.2.1. Une *valuation* de R est une application

$$\nu: R \rightarrow \Gamma_\infty$$

qui vérifie les trois conditions suivantes :

- (1) $\forall x \in R, \nu(x) = +\infty \Leftrightarrow x = 0$,
- (2) $\forall (x, y) \in R^2, \nu(xy) = \nu(x) + \nu(y)$,
- (3) $\forall (x, y) \in R^2, \nu(x + y) \geq \min \{\nu(x), \nu(y)\}$.

REMARQUE 1.2.2. Soit $R = K$ un corps. D'après le deuxième point de la définition, ν est un morphisme de groupes de (K^\times, \times) dans $(\Gamma, +)$. Il vient que $\nu(K^\times)$ est un sous-groupe de Γ , appelé le *groupe des valeurs* de ν .

EXEMPLE 1.2.3. Donnons les premiers exemples classiques de valuations.

- (1) La valuation triviale. Soit $\nu: R \rightarrow \Gamma_\infty$ telle que $\nu(x) = 0$ pour tout $x \in R^*$. C'est bien une valuation de R , appelée la valuation triviale.
- (2) La valuation discrète. Supposons ici $\Gamma = \mathbb{Z}$, muni de l'addition. Alors toute valuation $\nu: R \rightarrow \mathbb{Z}_\infty$ est appelée valuation discrète. La valuation triviale est donc un cas particulier de valuation discrète.
- (3) La valuation p -adique. Soit $\nu_p: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ l'application telle que

$$\nu(n) := \begin{cases} \infty & \text{si } n = 0 \\ \max \{k \in \mathbb{N} \text{ tel que } p^k \mid n\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

C'est une valuation appelée la valuation p -adique sur \mathbb{Z} et elle se prolonge de manière unique sur son corps des fractions \mathbb{Q} .

REMARQUE 1.2.4. À toute valuation $\nu: R \rightarrow \mathbb{R}_\infty$, on peut associer une valeur absolue ultramétrique. En effet, soit $\rho \in]0, 1[$, on définit la valeur absolue ultramétrique $|\cdot|_\nu$ associée à ρ de la manière suivante :

$$\forall x \in R^*, |x|_\nu = \rho^{\nu(x)}.$$

PROPOSITION 1.2.5. *Soit $\nu: R \rightarrow \Gamma_\infty$ une valuation. Nous avons alors les propriétés suivantes :*

- (1) $\nu(1) = \nu(-1) = 0$,
- (2) $\forall x \in R, \nu(x) = \nu(-x)$,
- (3) $\forall (x, y) \in R^2, \nu(x - y) \geq \min \{\nu(x), \nu(y)\}$,
- (4) $\forall (x, y) \in R^2$, on a

$$\nu(x) \neq \nu(y) \Rightarrow \nu(x + y) = \nu(x - y) = \min \{\nu(x), \nu(y)\},$$
- (5) *Il existe une unique valuation $\tilde{\nu}$ sur $\text{Frac}(R)$ qui prolonge ν . Elle vérifie $\tilde{\nu}\left(\frac{x}{y}\right) = \nu(x) - \nu(y)$.*

DÉMONSTRATION. Soit $(x, y) \in R^2$.

- (1) On a $\nu(1) = \nu(1 \times 1) = \nu(1) + \nu(1)$, donc $\nu(1) = 0$. Puis $\nu(-1) = \nu((-1) \times (-1)) = \nu(-1) + \nu(-1)$. Il vient $\nu(-1) = -\nu(-1)$, c'est-à-dire $\nu(-1) = \nu(1) = 0$.
- (2) $\nu(-x) = \nu((-1) \times x) = \nu(-1) + \nu(x) = 0 + \nu(x) = \nu(x)$.
- (3) $\nu(x - y) = \nu(x + (-y)) \geq \min \{\nu(x), \nu(-y)\}$. D'après le point précédent, $\nu(-y) = \nu(y)$ et l'on a le résultat.
- (4) Supposons $\nu(x) < \nu(y)$. On a :

$$\begin{aligned} \nu(x) = \nu((x + y) - y) &\geq \min \{\nu(x + y), \nu(-y)\} \\ &= \min \{\nu(x + y), \nu(y)\}. \end{aligned}$$

Nous avons supposé que $\nu(x) < \nu(y)$, donc

$$\nu(x) \geq \min \{\nu(x + y), \nu(y)\} = \nu(x + y).$$

Or par définition, $\nu(x + y) \geq \min \{\nu(x), \nu(y)\} = \nu(x)$. Il vient $\nu(x) \geq \nu(x + y) \geq \nu(x)$, d'où l'égalité.

- (5) Soit $\tilde{\nu}: \text{Frac}(R) \rightarrow \Gamma_\infty$ telle que $\forall \frac{x}{y} \in \text{Frac}(R)$,

$$\tilde{\nu}\left(\frac{x}{y}\right) = \nu(x) - \nu(y).$$

Nous avons $\tilde{\nu}\left(\frac{x}{y}\right) = +\infty \Leftrightarrow \nu(x) - \nu(y) = +\infty$. Puis

$$\tilde{\nu}\left(\frac{x}{y}\right) = +\infty \Leftrightarrow \nu(x) = +\infty$$

car $y \in R^* := R \setminus \{0\}$. Il vient $\tilde{\nu}\left(\frac{x}{y}\right) = +\infty \Leftrightarrow \frac{x}{y} = 0$.

Soit maintenant $\left(\frac{x}{y}, \frac{a}{b}\right) \in \text{Frac}(R)^2$.

Alors

$$\begin{aligned}\tilde{\nu}\left(\frac{x}{y}\frac{a}{b}\right) &= \tilde{\nu}\left(\frac{xa}{yb}\right) \\ &= \nu(xa) - \nu(yb) \\ &= \tilde{\nu}\left(\frac{x}{y}\right) + \tilde{\nu}\left(\frac{a}{b}\right).\end{aligned}$$

Et enfin

$$\begin{aligned}\tilde{\nu}\left(\frac{x}{y} + \frac{a}{b}\right) &= \tilde{\nu}\left(\frac{xb+ay}{yb}\right) \\ &= \nu(xb+ay) - \nu(yb).\end{aligned}$$

C'est-à-dire que :

$$\begin{aligned}\tilde{\nu}\left(\frac{x}{y} + \frac{a}{b}\right) &\geq \min\{\nu(x) + \nu(b), \nu(a) + \nu(y)\} - \nu(y) - \nu(b) \\ &= \min\{\nu(x) - \nu(y), \nu(a) - \nu(b)\}\end{aligned}$$

comme attendu.

L'application $\tilde{\nu}$ est donc bien une valuation. D'après le premier point de la proposition, on a $\tilde{\nu}|_A = \nu$, la valuation $\tilde{\nu}$ prolonge donc bien ν .

Soit μ une autre valuation sur $\text{Frac}(R)$ qui prolonge ν . On a $\mu(1) = \mu\left(\frac{x}{x}\right) = \mu\left(x\frac{1}{x}\right) = \mu(x) + \mu\left(\frac{1}{x}\right) = 0$. Donc pour tout $x \in R$, $\mu\left(\frac{1}{x}\right) = -\mu(x)$.

Il vient $\mu\left(\frac{x}{y}\right) = \mu(x) + \mu\left(\frac{1}{y}\right) = \mu(x) - \mu(y) = \tilde{\nu}\left(\frac{x}{y}\right)$, et l'on a bien l'unicité. □

EXEMPLE 1.2.6. Nous donnons ici d'autres exemples classiques de valuations.

- (1) L'ordre d'annulation d'un polynôme. On considère l'anneau $K[X]$ des polynômes en une indéterminée X à coefficients dans le corps commutatif K , et on choisit $a \in K$.

On définit $\nu_a: K[X] \rightarrow \mathbb{Z}_\infty$ de la manière suivante : à tout polynôme P , on associe la multiplicité de la racine a dans P , qui est nulle si a n'est pas racine de P et qui est infinie si P est nul. Autrement dit, si P est non nul, on pose

$$\nu_a(P) := \max\{m \in \mathbb{N} \text{ tel que } (X - a)^m \mid P\}.$$

Cette valuation s'étend de façon unique au corps des fractions $K(X)$.

- (2) L'opposé du degré. Les notations sont les mêmes que dans l'exemple précédent. On définit $\nu_\infty: K[X] \rightarrow \mathbb{Z}_\infty$ telle que pour tout polynôme P , $\nu_\infty(P) = -\deg_X(P)$. On peut encore étendre cette valuation de manière unique à $K(X)$.

- (3) **Ordre d'une fonction méromorphe.** Soient U un ouvert connexe non vide de \mathbb{C} et $a \in U$. L'application qui à toute fonction méromorphe associe son ordre au point a est une valuation sur le corps des fonctions méromorphes sur U .

1.2.2. Anneaux de valuations. On considère maintenant K un corps commutatif muni d'une valuation ν , de groupe des valeurs Γ .

DÉFINITION 1.2.7. Les éléments de K de valuation positive ou nulle forment un sous-anneau de K appelé *l'anneau de valuation de ν* . On le note R_ν .

REMARQUE 1.2.8. Le corps des fractions de R_ν est K .

PROPOSITION 1.2.9. *L'anneau R_ν est un anneau local d'idéal maximal*

$$\mathfrak{m}_\nu := \{x \in K \text{ tel que } \nu(x) > 0\}.$$

DÉMONSTRATION. On a vu que pour tout $x \in K^\times$, $\nu\left(\frac{1}{x}\right) = -\nu(x)$, donc $x \in R_\nu^\times$ si et seulement si $\nu(x) = 0$. Autrement dit :

$$\{x \in R_\nu \text{ tel que } x \notin R_\nu^\times\} = \{x \in K \text{ tel que } \nu(x) > 0\}.$$

C'est bien un idéal de R_ν , donc l'anneau R_ν est un anneau local, d'idéal maximal

$$\mathfrak{m}_\nu = \{x \in R_\nu \text{ tel que } x \notin R_\nu^\times\} = \{x \in K \text{ tel que } \nu(x) > 0\}.$$

□

DÉFINITION 1.2.10. Le corps $k_\nu := \frac{R_\nu}{\mathfrak{m}_\nu}$ est appelé le *corps résiduel* de ν .

Définissons maintenant un anneau de valuation d'un corps.

DÉFINITION 1.2.11. Soit R un sous-anneau de K . On dit que R est un anneau de valuation de K s'il existe une valuation ν de K telle que $R = R_\nu$.

REMARQUE 1.2.12. Si la valuation ν est discrète sans être triviale, on dit que R est un anneau de valuation discrète. De manière équivalente, un anneau de valuation discrète est un anneau local principal qui n'est pas un corps.

DÉFINITION 1.2.13. Soient R_1 et R_2 deux sous-anneaux locaux de K d'idéaux maximaux respectifs \mathfrak{m}_1 et \mathfrak{m}_2 . On dit que R_2 *domine* R_1 si $R_1 \subseteq R_2$ et $\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m}_2 \cap R_1$.

PROPOSITION 1.2.14. *Soit (R, \mathfrak{m}) un sous-anneau local de K . Les assertions suivantes sont équivalentes.*

- (1) Il existe une valuation ν de K telle que $R = R_\nu$.
- (2) $\forall x \in K \setminus R$, on a $x^{-1} \in R$.
- (3) $K = \text{Frac}(R)$ et sur l'ensemble des idéaux de R , l'ordre défini par l'inclusion est total.
- (4) (R, \mathfrak{m}) est un élément maximal pour la relation de domination définie ci-dessus.

DÉMONSTRATION. Voir [6, Chapitre 6, 1.2]. □

DÉFINITION 1.2.15. Deux valuations sur K sont dites *équivalentes* si elles ont le même anneau de valuation.

1.2.3. Rang d'une valuation. On considère toujours K un corps commutatif muni d'une valuation ν , de groupe des valeurs un groupe totalement ordonné Γ .

DÉFINITION 1.2.16. Soient Δ un ensemble inclus dans Γ et H un sous-groupe de Γ .

- (1) L'ensemble Δ est appelé un *segment* si pour tout $(\delta, \gamma) \in \Delta \times \Gamma$ tel que $-\delta \leq \gamma \leq \delta$, on a $\gamma \in \Delta$.
- (2) On dit que H est *isolé* si c'est un segment.

Maintenant que nous savons ce qu'est un sous-groupe isolé, nous nous intéressons dans la définition suivante au nombre de sous-groupes isolés d'un groupe donné.

DÉFINITION 1.2.17. On appelle *rang* de Γ le cardinal de l'ensemble de ses sous-groupe isolés.

Il est maintenant possible de définir une notion cruciale dans notre étude : le rang d'une valuation.

DÉFINITION 1.2.18. On appelle *rang* d'une valuation ν le rang de son groupe des valeurs, et on le note $\text{rg}(\nu)$.

PROPOSITION 1.2.19. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (1) Γ est de rang 1.
- (2) Γ est archimédien, c'est-à-dire que pour tout $(\alpha, \beta) \in \Gamma^2$ tel que $\alpha > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n\alpha > \beta$.
- (3) Γ est isomorphe à un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.

DÉMONSTRATION. Voir [22, Proposition 1.4.1]. □

REMARQUE 1.2.20. Soit H un sous-groupe isolé de Γ . On pose

$$I_H := \{x \in R_\nu \text{ tel que } \nu(x) \notin H\},$$

c'est un idéal premier de R_ν .

On prend

$$\rho: \{\text{sous-groupes isolés de } \Gamma\} \rightarrow \{\text{idéaux premiers de } R_\nu\}$$

l'application telle que $\rho(H) := I_H$ pour tout sous-groupe isolé H de Γ . L'application est une bijection, et de fait $\text{rg}(\nu) = \dim(R_\nu)$.

DÉFINITION 1.2.21. On appelle *rang rationnel* de ν et on note $\text{rg}_\mathbb{Q}(\nu)$ le rang rationnel de son groupe des ordres, c'est-à-dire la dimension du \mathbb{Q} -espace vectoriel $\Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.

REMARQUE 1.2.22.

- (1) ν est triviale $\Leftrightarrow \Gamma = \{0\}$.
- (2) Le rang rationnel de ν est, s'il est fini, le plus grand entier r tel qu'il existe r éléments de Γ linéairement indépendants sur \mathbb{Z} .

PROPOSITION 1.2.23. Soit H un sous-groupe de Γ . Alors on a :

- (1) $\text{rg}_\mathbb{Q}(\Gamma) = \text{rg}_\mathbb{Q}(H) + \text{rg}_\mathbb{Q}\left(\frac{\Gamma}{H}\right)$.
- (2) $\text{rg}(\Gamma) = \text{rg}(H) + \text{rg}\left(\frac{\Gamma}{H}\right)$.

DÉMONSTRATION. Voir [30, Proposition 3.5]. □

COROLLAIRE 1.2.24. On a $\text{rg}(\nu) \leq \text{rg}_\mathbb{Q}(\nu)$.

1.2.4. Valuations centrées en un anneau local. La notion de centre d'une valuation est essentielle dans l'étude que nous faisons ici, et est détaillée par exemple dans [28]. On considère ici ν une valuation sur un corps K , de groupe des valeurs Γ .

DÉFINITION 1.2.25. Soit A un sous-anneau de K inclus dans R_ν . Alors le centre de ν dans A est l'idéal \mathfrak{p} de A tel que $\mathfrak{p} = A \cap \mathfrak{m}_\nu$.

REMARQUE 1.2.26. Le centre de A est donc l'unique idéal premier \mathfrak{p} de A tel que R_ν domine $A_\mathfrak{p}$.

PROPOSITION 1.2.27. Soit A un sous-anneau local de K inclus dans R_ν . Le centre de ν dans A est l'idéal maximal de A si et seulement si R_ν domine A .

DÉFINITION 1.2.28. Soit A un sous-anneau local de K . On dit que ν est centrée en A si R_ν domine A .

REMARQUE 1.2.29. De manière plus générale, nous pouvons définir le centre d'une valuation comme suit. Soit X un schéma irréductible et réduit tel que K est une extension de son corps des fonctions. L'ensemble $Z := \{x \in X \text{ tel que } \mathcal{O}_{X,x} \subseteq R_\nu\}$ est un fermé irréductible (potentiellement vide) du schéma X . On note $Z_X(\nu)$ l'unique point $x \in X$, quand il existe, tel que $\mathcal{O}_{X,x}$ est dominé par R_ν . Ainsi, par centre de la valuation ν , on peut considérer soit le sous-schéma fermé intègre Z , soit le point générique x de ce schéma.

EXEMPLE 1.2.30. Regardons quelques exemples de centres de valuations.

- (1) Le premier exemple est de voir que toute valuation est centrée dans son anneau de valuation.
- (2) On se place dans le cas de la remarque 1.2.29. Eclatons un point x de X et considérons la variété Y obtenue, ainsi qu'une composante irréductible E du diviseur exceptionnel telle que $\mathcal{O}_{Y,E}$ est régulier. L'anneau $\mathcal{O}_{Y,E}$ est un anneau local principal qui n'est pas un corps, c'est donc un anneau de valuation discrète, dont le générateur de l'idéal maximal t est une équation locale de E dans Y . Toute fonction rationnelle f sur Y s'écrit donc dans le corps des fractions de $\mathcal{O}_{Y,E}$ sous la forme at^m , avec $m \in \mathbb{Z}$ et $a \in \mathcal{O}_{Y,E}^\times$. On considère la valuation « ordre d'annulation le long de E », c'est-à-dire la valuation qui à toute fonction rationnelle f sur Y associe le m correspondant. Dans la variété Y , le centre de la valuation est E , et dans X , le centre est le point x .
- (3) Soient k un corps et $K = k(x, y)$ une extension transcendante pure de degré 2 de k . On prend $\Gamma = \mathbb{Z}^2$ muni de l'ordre lexicographique. Soit $\nu: K^\times \rightarrow \Gamma$ la valuation telle que $\nu(x) = (1, 0)$, $\nu(y) = (0, 1)$ et $\nu(a) = 0$ pour tout $a \in k^\times$. Remarquons tout d'abord que cela suffit à déterminer ν : soit $f \in K^\times$, on a $f = \sum_{\alpha, \beta} a_{\alpha, \beta} x^\alpha y^\beta$ avec $a_{\alpha, \beta} \in k$ non tous nuls.

$$\text{Alors } \nu(f) \geq \min_{\substack{\alpha, \beta \\ a_{\alpha, \beta} \neq 0}} \left\{ \nu(a_{\alpha, \beta} x^\alpha y^\beta) \right\} = \min_{\substack{\alpha, \beta \\ a_{\alpha, \beta} \neq 0}} \{(\alpha, \beta)\}.$$

Comme ce minimum est atteint de manière unique, nous avons égalité.

Montrons que ν est centrée sur $k[x, y]_{(x, y)}$.

$$\text{Soit } f \in k[x, y]_{(x, y)}. \text{ Alors } f = \frac{\sum_{\alpha, \beta \geq 0} a_{\alpha, \beta} x^\alpha y^\beta}{\sum_{\delta, \gamma \geq 0} b_{\delta, \gamma} x^\delta y^\gamma}, \text{ avec } b_{0,0} \neq 0.$$

On a :

$$\begin{aligned}
\nu(f) &= \nu\left(\sum_{\alpha,\beta \geq 0} a_{\alpha,\beta} x^\alpha y^\beta\right) - \nu\left(\sum_{\delta,\gamma \geq 0} b_{\delta,\gamma} x^\delta y^\gamma\right) \\
&= \min_{\alpha,\beta \geq 0} \{(\alpha, \beta)\} - (0, 0) \\
&= \min_{\substack{\alpha,\beta \geq 0 \\ a_{\alpha,\beta} \neq 0}} \{(\alpha, \beta)\} \\
&\geq \min_{\substack{\alpha,\beta \geq 0 \\ a_{\alpha,\beta} \neq 0}} (0, 0)
\end{aligned}$$

Comme nous avons également $\nu((x, y)) > (0, 0)$, il vient que la valuation ν est centrée en $k[x, y]_{(x,y)}$.

DÉFINITION 1.2.31. Soit ν une valuation centrée en un anneau local R . On dit que ν est *archimédienne* si $\nu(R \setminus \{0\})$ est un semi-groupe archimédien. Autrement dit, si pour tout $(\alpha, \beta) \in \nu(R \setminus \{0\})^2$ tel que $\alpha > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n\alpha > \beta$.

1.2.5. Valuations composées et monomiales. Soit H un sous-groupe isolé de Γ . On rappelle que $I_H := \{x \in R_\nu \text{ tel que } \nu(x) \notin H\}$ est un idéal premier de R_ν . Alors $(R_\nu)_{I_H}$ est un anneau de valuation de K : en effet, on utilise le point 4 de la Proposition 1.2.14 et le fait que l'ensemble des idéaux de $(R_\nu)_{I_H}$ est totalement ordonné par l'inclusion, puisque celui de R_ν l'est. De même, $\frac{R_\nu}{I_H}$ est un anneau de valuation de $\frac{(R_\nu)_{I_H}}{I_H(R_\nu)_{I_H}}$. On note μ la valuation de $\frac{(R_\nu)_{I_H}}{I_H(R_\nu)_{I_H}}$ de groupe des valeurs H et η la valuation de K de groupe des valeurs $\frac{\Gamma}{H}$ qui a pour anneau de valuation $(R_\nu)_{I_H}$. On a $\text{rg}(\nu) = \text{rg}(\mu) + \text{rg}(\eta)$.

Réciproquement, soient η une valuation de K d'anneau de valuation l'anneau local $(R_\eta, \mathfrak{m}_\eta, k_\eta)$ et μ une valuation de k_η d'anneau de valuation l'anneau local $(R_\mu, \mathfrak{m}_\mu, k_\mu)$. On prend $\varphi: R_\eta \rightarrow k_\eta$ la surjection canonique. Alors $\varphi^{-1}(R_\mu)$ est un anneau de valuation. L'idéal $\varphi^{-1}(\mathfrak{m}_\mu)$ est un idéal premier propre de R_ν contenu strictement dans \mathfrak{m}_ν , qui est donc de la forme I_H avec H un sous-groupe isolé de Γ .

DÉFINITION 1.2.32. La valuation ν telle que $R_\nu = \varphi^{-1}(R_\mu)$ est appelée *valuation composée* de μ et η et se note $\nu = \eta \circ \mu$.

REMARQUE 1.2.33. Soit ν une valuation de K centrée en un anneau intègre local R , de corps des fractions K . On sait que $R < R_\nu$. Donc il existe $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R_\nu) \setminus \{0, \mathfrak{m}_\nu\}$ tel que $\mathfrak{p} \cap R$ est le centre de η dans R . La valuation η est donc une valuation de K centrée dans $R_{\mathfrak{p} \cap R}$, ainsi la restriction de μ à $\text{Frac}\left(\frac{R}{\mathfrak{p} \cap R}\right) \subseteq k_\eta$ est une valuation centrée en $\frac{R}{\mathfrak{p} \cap R}$.

EXEMPLE 1.2.34. On se place à nouveau dans l'exemple 3 de 1.2.30. Comme $\Gamma = \mathbb{Z}^2$, ses sous-groupes isolés sont $(0) \subsetneq (0) \oplus \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Z}^2$, et il est donc de rang 2. Tel est donc le cas également de ν . On prend $H = (0) \oplus \mathbb{Z}$. On a :

$$\begin{aligned} I_H &= \{f \in R_\nu \text{ tel que } \nu(x) \notin H\} \\ &= \{f \in R_\nu \text{ tel que } \nu(f) \notin (0) \oplus \mathbb{Z}\} \\ &= (xy^\beta)_{\beta \in \mathbb{Z}}. \end{aligned}$$

Alors η est la valuation discrète de rang 1 de K d'anneau de valuation

$$(R_\nu)_{(xy^\beta)_{\beta \in \mathbb{Z}}} \simeq k(y)[x]_{(x)},$$

et μ est la valuation discrète de rang 1 de $k(y)$ d'anneau de valuation

$$\frac{R_\nu}{(xy^\beta)_{\beta \in \mathbb{Z}}} = \left\{ \frac{P(y)}{Q(y)} \text{ avec } Q(0) \neq 0 \right\} \simeq k[y]_{(y)}.$$

La notion de valuation monomiale est centrale dans l'étude que nous allons faire. Une valuation monomiale est une valuation « gentille » : pour une valuation quelconque, les seuls éléments dont les valeurs sont difficiles à calculer sont les sommes, puisque nous n'avons pas de formule numérique pour les calculer, ce n'est plus le cas lors de valuations monomiales. En effet, si on est en présence d'une valuation monomiale, la valeur d'une somme de monômes est non pas *supérieure ou égale* au minimum des valeurs mais bien *égale* à ce minimum. Nous allons donner maintenant une définition plus générale du concept de valuation monomiale.

Considérons (R, \mathfrak{m}, u) un anneau local régulier, avec $u = (u_1, \dots, u_n)$ un système régulier de paramètres. Soient Γ un groupe totalement ordonné et $\beta_1 \leq \dots \leq \beta_n$ des éléments positifs de Γ , ils seront par la suite les valeurs des u_i de notre valuation monomiale.

On note $\Gamma_\beta := \mathbb{N}\beta_1 + \dots + \mathbb{N}\beta_n$, et on prend $\sigma \in \Gamma_\beta$. On définit $\Gamma_\beta^{\geq \sigma}$ comme l'ensemble des vecteurs (x_1, \dots, x_n) tels que $\sum_{i=1}^n x_i \beta_i \geq \sigma$.

On pose maintenant I_σ l'idéal de R engendré par tous les monômes $u^\alpha = \prod_{i=1}^n u_i^{\alpha_i}$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ parcourant $\Gamma_\beta^{\geq \sigma}$ (on aura donc que I_σ est engendré par tous les monômes de plus grande valeur que σ , on prend donc également $I_0 = R$, pour que R soit par la suite l'anneau de valuation).

L'ensemble $I := \{I_\sigma\}_{\sigma \in \Gamma_\beta}$ est ainsi totalement ordonné par l'inclusion.

On prend maintenant $f \in R^*$ et on considère

$$\Gamma(f) := \{\sigma \in \Gamma_\beta \text{ tel que } f \in I_\sigma\}.$$

PROPOSITION 1.2.35. *L'ensemble $\Gamma(f) := \{\sigma \in \Gamma_\beta \text{ tel que } f \in I_\sigma\}$ a un élément maximal.*

DÉMONSTRATION. Les idéaux I_σ sont caractérisés par la propriété suivante.

Soient deux monômes u^α et u^γ tels que $u^\alpha \in I_\sigma$ et $\sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i < \sum_{i=1}^n \gamma_i \beta_i$.

Alors $u^\gamma \in I_\sigma$.

En particulier, l'intersection de toute collection d'éléments de I est un élément de I .

De fait, l'intersection des idéaux monomiaux I_{σ_i} qui contiennent f est un élément I_σ de I , où σ est le maximum des σ_i . C'est le plus petit idéal monomial qui contient f , et ainsi $\sigma = \max \Gamma(f)$. \square

THÉORÈME 1.2.36. *Il existe une unique valuation ν centrée sur R telle que*

$$\nu(u_i) = \beta_i$$

pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et telle que $\forall f \in R^*$,

$$\nu(f) = \max \{\sigma \in \Gamma(f)\}.$$

DÉMONSTRATION. Montrons déjà que la formule donnée coïncide bien sur les u_i . On le montre pour u_1 . On a

$$\Gamma(u_1) = \{\sigma \in \Gamma_\beta \text{ tel que } u_1 \in I_\sigma\}.$$

Mais $u_1 \in I_\sigma \Rightarrow \sigma \in \{0, \beta_1\}$. De fait $\Gamma(u_1) = \{0, \beta_1\}$. Comme on a supposé que les β_i étaient positifs, il vient $\nu(u_1) = \beta_1$.

De la même manière, $u_i \in I_{\beta_i}$ mais $u_i \notin I_\sigma$ pour tout $\sigma > \beta_i$. Donc $\nu(u_i) = \beta_i$.

Si la valuation existe, l'unicité découle de sa définition même. Reste à montrer que l'application définie ci-dessus est bien une valuation.

Il faut donc montrer que pour tout $(f, g) \in R^2$, on a

$$\nu(fg) = \nu(f) + \nu(g)$$

et

$$\nu(f + g) \geq \min \{\nu(f), \nu(g)\}.$$

Si l'un des deux est nul, c'est trivial. Nous pouvons donc supposer f et g non nuls. De fait

$$\nu(f) = \max \{\sigma \in \Gamma(f)\} = \max \{\sigma \in \Gamma_\beta \text{ tel que } f \in I_\sigma\}$$

et $\nu(g) = \max \{\delta \in \Gamma_\beta \text{ tel que } g \in I_\delta\}$. Si $f \in I_\sigma$ et $g \in I_\delta$, alors $fg \in I_{\sigma+\delta}$ et comme u est un système régulier de paramètres de R ,

on a bien $\nu(f) + \nu(g) = \nu(fg)$. De même, si $f \in I_\sigma$ et $g \in I_\delta$, on a $f + g \in I_{\min\{\sigma, \delta\}}$. En particulier $f + g \in I_{\min\{\nu(f), \nu(g)\}}$.

Ainsi $\nu(f + g) \geq \min\{\nu(f), \nu(g)\}$. \square

DÉFINITION 1.2.37. La valuation du Théorème 1.2.36 est appelée *valuation monomiale de R associée à u et $(\beta_1, \dots, \beta_n)$* et est notée ν_u .

Donnons maintenant une définition plus générale de valuation monomiale.

DÉFINITION 1.2.38. Une valuation ν centrée en R de groupe des valeurs Γ est dite *monomiale respectivement à u* s'il existe β_1, \dots, β_n des éléments positifs de Γ tels que pour tout $f \in R^*$,

$$\begin{aligned} \nu(f) &= \max\{\sigma \in \Gamma(f)\} \\ &= \max\{\sigma \in \mathbb{N}\beta_1 + \dots + \mathbb{N}\beta_n \text{ tel que } f \in I_\sigma\}. \end{aligned}$$

REMARQUE 1.2.39. Cette définition coïncide bien avec l'explication donnée au préalable : en effet nous avons vu dans la preuve du Théorème 1.2.36 que la valuation d'une somme de monômes à supports disjoints était *égale* au minimum des valuations de ses termes.

EXEMPLE 1.2.40. La valuation donnée dans l'exemple numéro 3 de 1.2.30 est monomiale.

1.2.6. Algèbre graduée associée à une valuation. Soient K un corps muni d'une valuation ν de groupe des valeurs Γ et R un sous-anneau de K tel que pour tout $x \in R$, on ait $\nu(x) \geq 0$. Une notion qui aura une importance capitale dans cette thèse est celle d'algèbre graduée associée à une valuation. On considère ainsi les idéaux de R suivants, pour $\alpha \in \Gamma$:

$$\mathcal{P}_\alpha := \{x \in R \text{ tel que } \nu(x) \geq \alpha\}$$

$$\mathcal{P}_{\alpha^+} := \{x \in R \text{ tel que } \nu(x) > \alpha\}$$

DÉFINITION 1.2.41. L'algèbre

$$\text{gr}_\nu(R) := \bigoplus_{\alpha \in \Gamma} \frac{\mathcal{P}_\alpha}{\mathcal{P}_{\alpha^+}}$$

est appelée *l'algèbre graduée associée à la valuation ν* . C'est un anneau intègre, et pour tout élément $x \in R$, son image naturelle dans le quotient $\frac{\mathcal{P}_{\nu(x)}}{\mathcal{P}_{\nu(x)^+}} \subset \text{gr}_\nu(R)$ est appelée *la forme initiale de x respectivement à ν* . C'est un élément homogène de $\text{gr}_\nu(R)$ de degré $\nu(x)$, que l'on note $\text{in}_\nu(x)$.

Soient maintenant (R, \mathfrak{m}, k) un anneau local de corps des fractions K et ν une valuation de K centrée en R de groupe des valeurs Γ . On dénote par $(R_\nu, \mathfrak{m}_\nu, k_\nu)$ l'anneau de valuation de ν et l'on considère les sous- R_ν -modules de K suivants :

$$\mathcal{P}_\alpha := \{x \in K, \text{ tel que } \nu(x) \geq \alpha\}$$

$$\mathcal{P}_{\alpha^+} := \{x \in K \text{ tel que } \nu(x) > \alpha\}$$

DÉFINITION 1.2.42. On définit ainsi

$$G_\nu := \bigoplus_{\alpha \in \Gamma} \frac{\mathcal{P}_\alpha}{\mathcal{P}_{\alpha^+}}$$

et on considère à nouveau l'image naturelle de $x \in K$ dans G_ν . Nous noterons encore cette image $\text{in}_\nu(x)$ et comme $\text{gr}_\nu(R)$ est une sous-algèbre graduée de G_ν , cela est bien défini.

PROPOSITION 1.2.43. Soient $x = \sum_{i=1}^r x_i \in K$, avec $x_i \in K$ pour tout indice i , et $\alpha = \min_{1 \leq i \leq r} \{\nu(x_i)\}$.

On pose $V := \{i \in \{1, \dots, r\} \text{ tel que } \nu(x_i) = \alpha\}$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- (1) $\nu(x) > \alpha$.
- (2) $\sum_{i \in V} \text{in}_\nu(x_i) = 0$

DÉMONSTRATION. On a :

$$\begin{aligned} \sum_{i \in V} \text{in}_\nu(x_i) = 0 &\Leftrightarrow \sum_{i \in V} x_i \in \mathcal{P}_{\alpha^+} \\ &\Leftrightarrow \nu \left(\sum_{i \in V} x_i \right) > \alpha \\ &\Leftrightarrow \nu \left(\sum_{i=1}^r x_i \right) > \alpha. \end{aligned}$$

Ce qui démontre bien la proposition. \square

1.2.7. Algèbres saturées.

DÉFINITION 1.2.44. Soit G une algèbre graduée sans diviseur de zéro. On appelle la *saturation* de G et on note G^* l'algèbre graduée :

$$G^* := \left\{ \frac{g}{h}, g \in G \text{ et } h \text{ un élément homogène non nul de } G \right\}.$$

L'algèbre G est saturée si elle est égale à sa saturation.

REMARQUE 1.2.45. Une saturation est toujours saturée.

PROPOSITION 1.2.46. *Soit ν une valuation centrée en un anneau local R . Alors $G_\nu = (\text{gr}_\nu R)^*$. Ainsi G_ν est toujours saturée.*

Nous verrons par la suite que la notion de saturation sera avant tout utile dans le cadre d'algèbres saturées. En effet, étant égales à leur saturation, on pourra remplacer tout quotient $\frac{g}{h}$ où g est un élément de G et h un élément homogène non nul de G par un élément f de G . Ainsi nous pourrons regarder certaines équations non pas dans $\text{Frac}(G)$ mais bien dans G elle-même.

1.2.8. Prolongement d'une valuation à une extension de corps. Soit K un corps et L une extension de K . Si μ est une valuation de L , sa restriction ν à K est une valuation de K dont le groupe des ordres Γ_ν est un sous-groupe du groupe des ordres Γ_μ de la valuation μ . De plus on a que l'anneau de valuation R_ν de ν est égal à $R_\mu \cap K$, où R_μ est l'anneau de valuation de μ .

REMARQUE 1.2.47. L'anneau R_μ domine l'anneau R_ν .

LEMME 1.2.48. [30] *Pour toute valuation ν de K il existe une valuation μ de L qui prolonge ν .*

PROPOSITION 1.2.49. [30] *Si L est une extension algébrique de K , le rang de la valuation μ de L est égal au rang de ν , sa restriction à K . De plus, si L est une extension finie de K , alors μ est discrète si et seulement si ν l'est aussi.*

Étudions un peu plus précisément le cas d'une extension transcendante de K .

On considère ainsi ν une valuation de K de groupe des valeurs Γ_ν et un prolongement μ à L , extension transcendante de K , de groupe des valeurs Γ_μ . On note $(R_\nu, \mathfrak{m}_\nu, k_\nu)$ et $(R_\mu, \mathfrak{m}_\mu, k_\mu)$ les anneaux de valuations de ν et μ respectivement.

PROPOSITION 1.2.50. [30] *On a :*

- (1) *Si Γ est un groupe totalement ordonné contenant Γ_ν et si l'on considère $\zeta \in \Gamma$ tel que $n\zeta \in \Gamma_\nu \Rightarrow n = 0$, alors il existe une unique valuation $\tilde{\nu}$ de $L = K(X)$ prolongeant ν , à valeurs dans Γ et telle que $\tilde{\nu}(X) = \zeta$. Dans ce cas le groupe des ordres de $\tilde{\nu}$ est $\tilde{\Gamma} = \Gamma_\nu + \mathbb{Z}\zeta$ et le corps résiduel de $\tilde{\nu}$ est $\tilde{k} = k_\nu$.*
- (2) *Il existe une unique valuation ν' qui prolonge ν à $L = K(X)$ telle que $\nu'(X) = 0$ et telle que l'image t de X dans le corps résiduel k' soit transcendante sur k . Dans ce cas le groupe des ordres de ν' est Γ lui-même et son corps résiduel est $k(t)$.*

1.2.9. Prolongement d'une valuation au complété d'un anneau intègre local. Soient (R, \mathfrak{m}, k) un anneau local noethérien intègre. On pose $K := \text{Frac}(R)$ et on prend $\nu: K \rightarrow \Gamma_{\pm} \cup \{+\infty\}$ une valuation sur K centrée en R . On considère maintenant \widehat{R} la complétion formelle de R . Rappelons brièvement la notion de complétion formelle d'un anneau local.

FAIT 1.2.51. *Soit A un anneau local d'idéal maximal I . Pour tous entiers $n' \geq n$, on a l'inclusion*

$$I^{n'} \subseteq I^n,$$

et ainsi les surjections

$$h_{n',n}: \frac{A}{I^{n'}} \twoheadrightarrow \frac{A}{I^n}.$$

Le complété formel de A (par rapport à I) est la limite projective de ces applications, à savoir un anneau, que l'on note \widehat{A} , muni d'homomorphismes $f_n: \widehat{A} \rightarrow \frac{A}{I^n}$ tels que pour tous entiers $n' \geq n$, on ait

$$f_n = h_{n',n} \circ f_{n'}.$$

L'anneau doit également être universel pour cette propriété. Autrement dit, s'il existe un anneau B muni d'homomorphismes $g_n: B \rightarrow \frac{A}{I^n}$ tels que pour $n' \geq n$, on ait $g_n = h_{n',n} \circ g_{n'}$, alors il existe un unique morphisme $\varphi: B \rightarrow \widehat{A}$ tel que pour tout entier n , on ait $g_n = f_n \circ \varphi$.

Nous cherchons à étendre ν en une valuation centrée en $\frac{\widehat{R}}{H}$, où H est un idéal premier de \widehat{R} qui vérifie : $H \cap R = (0)$. Pour une généralisation, voir [17].

Supposons que la valuation ν est archimédienne. On pose

$$\Phi := \nu(R^*)$$

et

$$H := \bigcap_{\beta \in \Phi} (P_{\beta} \widehat{R}).$$

Pour plus de clarté, regardons un exemple.

EXEMPLE 1.2.52. On prend ici l'anneau local $R = k[u, v]_{(u,v)}$. On a donc $\widehat{R} = k[[u, v]]$, et l'on considère $w := u - \sum_{i \geq 1} c_i v^i \in \widehat{R}$, un élément transcendant sur $k(u, v)$, avec $c_i \in k^*$ pour tout indice i .

Soient

$$\begin{aligned} \eta &: R &\rightarrow k[[t]] \\ u &\mapsto \sum_{i \geq 1} c_i t^i \\ v &\mapsto t \end{aligned}$$

et ν la valuation induite par la valuation t -adique de $k[[t]]$ via η . Autrement dit, $\nu = \mu \circ \eta$ où $\mu: k[[t]] \rightarrow \mathbb{Z}$ vérifie, pour toute série formelle $f \in k[[t]]$,

$$\begin{aligned} \mu(f) &= \mu\left(\sum_{i \in \mathbb{Z}} f_i t^i\right) \\ &= \inf_{i \in \mathbb{Z}} \{i \text{ tel que } f_i \neq 0\}. \end{aligned}$$

La valuation ν a ainsi pour groupe des valeurs \mathbb{Z} , et

$$\Phi = \nu(R^*) = \nu(R \setminus (0)) = \mathbb{N}.$$

Pour tout entier non nul β , on a $P_\beta := \left(v^\beta, u - \sum_{i=1}^{\beta-1} c_i v^i\right)$, et donc

$$\begin{aligned} H &= \bigcap_{\beta \in \Phi} (P_\beta \widehat{R}) \\ &= \bigcap_{\beta \in \Phi} \left(\left(v^\beta, u - \sum_{i=1}^{\beta-1} c_i v^i \right) k[[u, v]] \right) \\ &= \bigcap_{\beta \in \Phi} \left(u - \sum_{i=1}^{\beta-1} c_i v^i \right) k[[u, v]] \\ &= (w) k[[u, v]]. \end{aligned}$$

Comme démontré dans [13], 7.2b, on a l'égalité :

$$(1.2.1) \quad P_\beta \widehat{R} \cap R = P_\beta \text{ pour tout } \beta \in \Phi.$$

En prenant l'intersection sur toutes les valeurs possibles de β on obtient :

$$\begin{aligned} H \cap R &= \left(\bigcap_{\beta \in \Phi} (P_\beta \widehat{R}) \right) \cap R \\ &= \bigcap_{\beta \in \Phi} (P_\beta \widehat{R} \cap R) \\ &= \bigcap_{\beta \in \Phi} P_\beta \\ &= (0). \end{aligned}$$

THÉORÈME 1.2.53. *Soient (R, \mathfrak{m}, k) un anneau local noethérien intègre, ν une valuation archimédienne de son corps des fractions et*

$$H := \bigcap_{\beta \in \nu(R^*)} (P_\beta \widehat{R}).$$

On a :

(1) *L'idéal H est un idéal premier de \widehat{R} .*

(2) La valuation ν s'étend de manière unique en une valuation $\hat{\nu}$ centrée en $\frac{\hat{R}}{H}$.

DÉMONSTRATION. Soient $x \in \frac{\hat{R}}{H} \setminus \{0\}$ et \bar{x} un représentant de x dans \hat{R} . On a donc $x \equiv \bar{x} \pmod{H}$ et $\bar{x} \notin H = \bigcap_{\beta \in \Phi} (P_\beta \hat{R})$. Il vient qu'il existe un $\alpha \in \Phi$ tel que $\bar{x} \notin P_\alpha \hat{R}$.

FAIT 1.2.54. L'ensemble

$$\{\beta \in \Phi \text{ tel que } \beta < \alpha\}$$

est fini.

DÉMONSTRATION. On montre que Φ ne contient pas de suite infinie bornée. Supposons par l'absurde que l'on trouve une suite infinie croissante d'éléments $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \dots$ dans Φ , telle que pour tout indice i , l'on ait $\alpha_i < \alpha$.

On a donc une suite décroissante infinie d'idéaux dans $\frac{R}{P_\alpha}$. On va maintenant montrer qu'en fait $\frac{R}{P_\alpha}$ est de dimension finie.

Soit $\delta := \nu(\mathfrak{m}) = \min \nu(\Phi \setminus \{0\})$. Comme le groupe Φ est archimédien, il existe un entier naturel n tel que $\alpha \leq n\delta$, et ainsi $\mathfrak{m}^n \subseteq P_\alpha$. On a donc une surjection $\frac{R}{\mathfrak{m}^n} \rightarrow \frac{R}{P_\alpha}$, ce qui implique que $\frac{R}{P_\alpha}$ est de dimension finie puisque $\frac{R}{\mathfrak{m}^n}$ l'est. \square

Il existe donc un unique $\beta \in \Phi$ tel que $\bar{x} \in P_\beta \hat{R} \setminus P_{\beta+} \hat{R}$.

On définit maintenant $\hat{\nu}: \frac{\hat{R}}{H} \setminus \{0\} \rightarrow \Phi$ en posant $\hat{\nu}(x) = \beta$. D'après 1.2.1, si $x \in R \setminus \{0\}$, on obtient $\hat{\nu}(x) = \nu(x)$.

Pour tout $x, y \in \frac{\hat{R}}{H} \setminus \{0\}$, on a

$$\hat{\nu}(x+y) \geq \min \{\hat{\nu}(x), \hat{\nu}(y)\}$$

et

$$\hat{\nu}(xy) \geq \hat{\nu}(x) + \hat{\nu}(y).$$

Pour montrer que $\hat{\nu}$ est une valuation, il reste à montrer que cette dernière inégalité est en fait une égalité.

LEMME 1.2.55. Pour tous $x, y \in \left(\frac{\hat{R}}{H}\right)^*$, on a

$$xy \neq 0$$

et

$$\hat{\nu}(xy) = \hat{\nu}(x) + \hat{\nu}(y).$$

DÉMONSTRATION. On pose $\alpha := \widehat{\nu}(x)$ et $\beta := \widehat{\nu}(y)$, et l'on considère \bar{x} et \bar{y} les représentants respectifs de x et y dans \widehat{R} . Comme $\mathfrak{m}P_\alpha \subseteq P_{\alpha+}$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{P_\alpha}{P_{\alpha+}} &\simeq \frac{P_\alpha}{P_{\alpha+} + \mathfrak{m}P_\alpha} \\ &\simeq \frac{P_\alpha}{P_{\alpha+}} \otimes_R k \\ &\simeq \frac{P_\alpha}{P_{\alpha+}} \otimes_R \frac{\widehat{R}}{\mathfrak{m}\widehat{R}} \\ &\simeq \frac{P_\alpha \widehat{R}}{(P_{\alpha+} + \mathfrak{m}P_\alpha) \widehat{R}} \\ &\simeq \frac{P_\alpha \widehat{R}}{P_{\alpha+} \widehat{R}} \end{aligned}$$

et la même chose pour β . Il vient qu'il existe $z \in P_\alpha$ et $w \in P_\beta$ tels que $z \equiv \bar{x} \pmod{P_{\alpha+} \widehat{R}}$ et $w \equiv \bar{y} \pmod{P_{\beta+} \widehat{R}}$.

Ainsi

$$(1.2.2) \quad \overline{xy} \equiv zw \pmod{P_{(\alpha+\beta)+} \widehat{R}}.$$

Comme ν est une valuation, $\nu(zw) = \alpha + \beta$.

Ainsi, $zw \in P_{\alpha+\beta} \setminus P_{(\alpha+\beta)+}$. D'après (1.2.1) et (1.2.2), on sait que

$$\overline{xy} \in P_{\alpha+\beta} \widehat{R} \setminus P_{(\alpha+\beta)+} \widehat{R}.$$

Or $xy \neq 0$ dans $\frac{\widehat{R}}{H}$, donc $\overline{xy} \notin H$ et $\widehat{\nu}(xy) = \alpha + \beta$ comme attendu. \square

On vient de voir que $\frac{\widehat{R}}{H}$ était un anneau intègre, donc que H est bien un idéal premier de \widehat{R} . Le lemme précédent montre aussi comme annoncé que $\widehat{\nu}$ est une valuation, centrée en $\frac{\widehat{R}}{H}$. Reste à montrer que $\widehat{\nu}$ est unique.

Soient donc x, \bar{x}, α et $z \in P_\alpha \setminus P_{\alpha+}$ comme dans la preuve du Lemme 1.2.55. Alors on sait qu'il existe $u_1, \dots, u_n \in P_{\alpha+}$ et $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n \in \widehat{R}$ tels que $\bar{x} = z + \sum_{i=1}^n u_i \bar{v}_i$. On prend $v_i := \bar{v}_i \pmod{H}$, et ainsi on a $x = z + \sum_{i=1}^n u_i v_i$ dans $\frac{\widehat{R}}{H}$.

Ainsi, comme $z \in P_\alpha \setminus P_{\alpha+}$, $u_1, \dots, u_n \in P_{\alpha+}$ et $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n \in \widehat{R}$, pour toute extension $\tilde{\nu}$ de ν , centrée en $\frac{\widehat{R}}{H}$, on a $\tilde{\nu}(x) = \alpha = \widehat{\nu}(x)$, ce qui achève la preuve. \square

DÉFINITION 1.2.56. L'idéal H est appelé *l'idéal premier implicite* de \widehat{R} associé à ν . S'il y a un risque de confusion, nous noterons $H(R, \nu)$ au lieu de H .

Polynômes clefs.

La notion de polynômes clefs a été tout d'abord introduite par l'américain Saunders Mac Lane en 1936, dans le cas de valuations discrètes de rang 1. Soit $K \rightarrow L$ une extension de corps et ν une valuation sur K . La première motivation pour introduire les polynômes clefs était de décrire toutes les extensions de ν au corps L . Soit donc μ une valuation qui étend ν à L . Dans le cas où ν est de rang 1 et où L est une extension algébrique monogène de K , Mac Lane a créé la notion de polynôme clef pour μ ainsi que la notion de valuations augmentées. Il a prouvé entre autres que μ est obtenue comme limite d'une famille de valuations augmentées sur l'anneau $K[x]$. Michel Vaquié a étendu cette définition au cas de corps valués arbitraires K , c'est-à-dire sans supposer que la valuation ν est discrète. Une différence capitale avec le cas traité par Mac Lane est la présence de polynômes clefs limites. L'approche de Mac Lane et Vaquié est axiomatique, dans le sens que les polynômes clefs sont définis en termes de propriétés abstraites liées à la valuation et non par des formules explicites.

Plus récemment, la notion de polynômes clefs a été utilisée par Spivakovsky sur le problème de l'uniformisation locale, problème sur lequel nous reviendrons dans la suite de ce manuscrit. Spivakovsky a ainsi créé une nouvelle définition des polynômes clefs.

Il était donc naturel de s'intéresser au lien entre ces deux notions, et les résultats principaux énoncés et démontrés dans la section 2.3 font l'objet d'un article soumis pour publication.

2.1. Polynômes clefs de Mac Lane-Vaquié.

2.1.1. Généralités et premières propriétés. Nous rappelons tout d'abord la notion de polynôme clef, introduite par Mac Lane dans [21] puis généralisé par Michel Vaquié dans [29]. On prend K un corps muni d'une valuation μ de groupe des valeurs Γ , et on considère

$$K \hookrightarrow K(x)$$

une extension transcendante pure de K munie d'une valuation ν qui prolonge μ à $K(x)$. On note toujours ν la restriction de ν à $K[x]$.

DÉFINITION 2.1.1. Soit $(f, g) \in K[x]^2$. On dit que f et g sont ν -équivalents et on note $f \sim_\nu g$ si $\text{in}_\nu(f) = \text{in}_\nu(g)$.

PROPOSITION 2.1.2. Soit $(f, g) \in K[x]^2$. Alors

$$f \sim_\nu g \Leftrightarrow \nu(f - g) > \nu(f) = \nu(g).$$

DÉMONSTRATION. Découle de 1.2.43. \square

DÉFINITION 2.1.3. Soit $(f, g) \in K[x]^2$. On dit que f ν -divise g et l'on note $f \mid_\nu g$ si $\text{in}_\nu(f) \mid \text{in}_\nu(g)$ dans $\text{gr}_\nu(K[x])$.

REMARQUE 2.1.4. On a $f \mid_\nu g$ si et seulement s'il existe un polynôme $c \in K[x]$ tel que $g \sim_\nu fc$.

DÉFINITION 2.1.5. Soit $f \in K[x]$.

- (1) On dit que f est ν -irréductible si pour tout $(g, h) \in K[x]^2$ tel que $f \mid_\nu gh$, on a $f \mid_\nu g$ ou $f \mid_\nu h$.
- (2) On dit que f est ν -minimal si pour tout $g \in K[x]$ tel que $f \mid_\nu g$, on a $\deg_X(f) \leq \deg_X(g)$.

PROPOSITION 2.1.6. Soit $f \in K[x]$ un polynôme ν -irréductible. Alors $\text{in}_\nu(f)$ est irréductible dans $\text{gr}_\nu(K[x])$.

DÉMONSTRATION. Nous allons raisonner par l'absurde. Supposons donc que $\text{in}_\nu(f)$ est réductible dans $\text{gr}_\nu(K[x])$, c'est-à-dire qu'il existe $(g, h) \in K[x]^2$ tel que $\text{in}_\nu(f) = \text{in}_\nu(g) \text{in}_\nu(h)$ et ni $\text{in}_\nu(g)$ ni $\text{in}_\nu(h)$ n'est dans $\text{gr}_\nu(K[x])^\times$. Autrement dit, g ν -divise f et h ν -divise f . Mais $\text{in}_\nu(g) \text{in}_\nu(h) = \text{in}_\nu(gh)$, donc $f \mid_\nu gh$, ce qui, puisque ni $\text{in}_\nu(g)$ ni $\text{in}_\nu(h)$ n'est dans $\text{gr}_\nu(K[x])^\times$, contredit la ν -irréductibilité de f et conclut la preuve. \square

REMARQUE 2.1.7. La réciproque est vraie si tout élément homogène de $\text{gr}_\nu(K[x])$ admet une décomposition unique en facteurs premiers mais est fautive en général.

Nous sommes maintenant en mesure de définir les polynômes clefs de Vaquié, appelés ainsi afin de les différencier des polynômes clefs que nous introduirons dans la section suivante.

DÉFINITION 2.1.8. Soit $Q \in K[x]$ un polynôme unitaire. Alors Q est un *polynôme clef de Vaquié pour ν* s'il est ν -irréductible et ν -minimal.

REMARQUE 2.1.9. Par définition, la notion de polynôme clef de Vaquié concerne les polynômes f de $K[x]$ à ν -équivalence près, c'est-à-dire est adaptée à l'algèbre graduée $\text{gr}_\nu(K[x])$.

PROPOSITION 2.1.10. Soient $P \in K[x]$ un polynôme ν -minimal et $f \in K[x]^*$.

On pose

$$f = bP + r$$

la division euclidienne de f par P dans l'anneau euclidien $K[x]$, avec donc $\deg_X(r) < \deg_X(P)$. Alors :

- (1) On a $\nu(r) \geq \nu(f)$ et $\nu(bP) \geq \nu(f)$.
- (2) De plus, $\nu(r) > \nu(f)$ si et seulement si f est ν -divisible par le polynôme P .

DÉMONSTRATION.

- (1) Supposons par l'absurde $\nu(r) < \nu(f)$. Alors

$$\nu(r) = \nu(bP) < \nu(f),$$

c'est-à-dire que $\text{in}_\nu(r) + \text{in}_\nu(bP) = 0$, puis $r \sim_\nu (-bP)$. Il vient que $P \mid_\nu r$, et par ν -minimalité de P , on a $\deg_X(P) \leq \deg_X(r)$, ce qui est absurde par hypothèse. Donc on a bien $\nu(r) \geq \nu(f)$. Il vient que $\nu(bP) = \nu(f - r) \geq \min\{\nu(f), \nu(r)\} = \nu(f)$.

- (2) Supposons $\nu(r) > \nu(f)$. Alors comme $r = f - bP$, il vient

$$\text{in}_\nu(f) + \text{in}_\nu(-bP) = 0,$$

c'est-à-dire que $P \mid_\nu f$ comme attendu.

Supposons maintenant que f est ν -divisible par P , c'est-à-dire qu'il existe un polynôme h tel que $\text{in}_\nu(P_h) = \text{in}_\nu(f)$. Autrement dit, il existe un polynôme g tel que $\nu(g) > \nu(f)$ et $f = Ph + g$. On a donc

$$r = f - bP = Ph + g - bP = P(h - b) + g.$$

On suppose par l'absurde que $\nu(r) = \nu(f)$.

Alors $\nu(g) > \nu(f) = \nu(r)$ donc encore $P \mid_\nu r$, ce qui est absurde. On a donc bien $\nu(r) > \nu(f)$.

□

DÉFINITION 2.1.11. Soit $(P, f) \in K[X]^2$, avec P unitaire. On appelle P -développement de f l'écriture de f sous la forme $f = \sum_{i=0}^r f_j P^j$ où $\deg_X(f_j) < \deg_X(P)$ pour tout $j \in \{1, \dots, r\}$.

REMARQUE 2.1.12. Le polynôme P étant unitaire, le P -développement de tout polynôme est unique. En effet, pour n'importe quel polynôme $f \in K[x]$, on effectue la division euclidienne de f par P et on obtient $f = h_1 P + f_0$ avec $\deg(f_0) < \deg(P)$. Le couple (h_1, f_0) est unique par définition de la division euclidienne.

Si $\deg(h_1) < \deg(P)$, on pose $f_1 := h_1$ et c'est terminé.

Sinon, on effectue la division euclidienne de h_1 par P et on obtient $h_1 = h_2P + f_1$ avec $\deg(f_1) < \deg(P)$.

De fait, $f = h_2P^2 + f_1P + f_0$. À nouveau, si $\deg(h_2) < \deg(P)$, c'est terminé, sinon on réitère le procédé jusqu'à obtenir un quotient de degré strictement inférieur à celui de P . On a bien unicité par définition de la division euclidienne.

2.1.2. Valuations augmentées. Soient Q un polynôme clef de Vaquié pour ν , Δ un groupe ordonné contenant Γ comme sous-groupe ordonné, $\delta \in \Delta$ tel que $\delta > \nu(Q)$ et $f \in K[X]$.

On considère $f = \sum_{i=0}^r f_j Q^j$ le Q -développement de f .

Posons $\nu' : K[X] \rightarrow \Delta_\infty$ l'application telle que pour tout $f \in K[X]^*$ on ait

$$\nu'(f) = \min_{0 \leq j \leq r} \{\nu(f_j) + j\delta\}.$$

THÉORÈME 2.1.13. [21, Théorème 4.4]

L'application ν' est une valuation de $K[x]$ ayant pour groupe des valeurs le sous-groupe de Δ engendré par Γ et δ .

DÉFINITION 2.1.14. La valuation ν' est appelée *valuation augmentée de ν* et on la note $\nu' := [\nu, \delta = \nu'(Q)]$.

REMARQUE 2.1.15. On note

$$\tilde{S}_Q(f) := \{j \in \{0, \dots, m\} \text{ tel que } \nu(f_j) + j\delta = \nu'(f)\}$$

et

$$\tilde{\delta}_Q(f) = \max \{\tilde{S}_Q(f)\}.$$

Cet entier $\tilde{\delta}_Q(f)$ ne dépend que de l'image de f dans l'algèbre graduée $\text{gr}_{\nu'} K[X]$. Autrement dit, si $f \sim_{\nu'} g$, alors $\tilde{\delta}_Q(f) = \tilde{\delta}_Q(g)$.

On peut aussi montrer que pour tous polynômes f et g , on a

$$\tilde{\delta}_Q(fg) = \tilde{\delta}_Q(f) + \tilde{\delta}_Q(g).$$

THÉORÈME 2.1.16. [21, Théorème 5.1]

Pour tout polynôme $f \in K[X]$, on a $\nu'(f) \geq \nu(f)$. De plus, l'inégalité est stricte si et seulement si $Q \mid_\nu f$.

Si $\deg_X(f) < \deg_X(Q)$, alors $\nu'(f) = \nu(f)$.

Nous allons maintenant introduire une autre définition des polynômes clefs, due à Spivakovsky, avant de voir l'étroit lien entre ces deux notions. De nombreux résultats énoncés et démontrés dans la partie suivante ont leurs analogues dans la théorie des polynômes clefs de Vaquié. Pour plus de détails, on pourra lire [29].

2.2. Polynômes clefs de Spivakovsky et al.

2.2.1. Généralités et premières propriétés. On garde les mêmes notations que dans la section précédente. Pour tout entier naturel b , on pose $\partial_b := \frac{1}{b!} \frac{\partial^b}{\partial X^b}$, appelé la dérivée formelle de l'ordre b , et pour tout polynôme $P \in K[X]$, on pose

$$\epsilon_\nu(P) := \max_{b \in \mathbb{N}^*} \left\{ \frac{\nu(P) - \nu(\partial_b P)}{b} \right\}.$$

REMARQUE 2.2.1. On a $\partial_0 = \text{id}$.

DÉFINITION 2.2.2. Soit $Q \in K[X]$ unitaire. On dit que Q est un *polynôme clef pour ν* si pour tout polynôme $P \in K[X]$, l'on a :

$$\epsilon_\nu(P) \geq \epsilon_\nu(Q) \Rightarrow \deg_X(P) \geq \deg_X(Q).$$

REMARQUE 2.2.3. S'il n'y a pas de risque de confusion, nous noterons $\epsilon(P) := \epsilon_\nu(P)$.

Pour tout polynôme $P \in K[X]$, on note

$$b_\nu(P) := \min \underbrace{\left\{ b \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } \frac{\nu(P) - \nu(\partial_b P)}{b} = \epsilon_\nu(P) \right\}}_{:=I(P)}$$

et encore une fois, s'il n'y a pas de confusion possible, nous omettrons l'indice ν .

DÉFINITION 2.2.4. Soit $(P, Q) \in K[X]^2$ tel que Q est unitaire, et l'on considère $P = \sum_{j=1}^n p_j Q^j$ le Q -développement du polynôme P . On pose alors $\nu_Q(P) := \min_{0 \leq j \leq n} \nu(p_j Q^j)$. L'application ν_Q est appelée la *Q -troncature de ν* .

On pose également

$$S_Q(P) := \left\{ j \in \{0, \dots, n\} \text{ tel que } \nu(p_j Q^j) = \nu_Q(P) \right\}$$

et

$$\delta_Q(P) := \max \{ S_Q(P) \}.$$

Comme nous allons souvent considérer uniquement les termes de plus basse valeur, nous considérons

$$\tilde{P}_{\nu, Q} := \sum_{j \in S_Q(P)} p_j Q^j.$$

REMARQUE 2.2.5. Nous avons $\nu_Q(P) = \infty \Leftrightarrow P = 0$, et pour tout $(P_1, P_2) \in K[X]^2$, $\nu_Q(P_1 + P_2) \geq \min\{\nu_Q(P_1), \nu_Q(P_2)\}$. Dans le cas général, ν_Q n'est pas pour autant une valuation. Néanmoins, c'est le cas lorsque Q est un polynôme clef. Pour montrer cela, nous avons besoin du Lemme suivant.

LEMME 2.2.6. *Soient $t \in \mathbb{N}_{>1}$ et Q un polynôme clef. On considère P_1, \dots, P_t des polynômes de $K[X]$ tous de degré strictement inférieur à celui de Q et on pose $\prod_{i=1}^t P_i := qQ + r$ la division euclidienne de $\prod_{i=1}^t P_i$ par Q dans $K[X]$. Alors :*

$$\nu(r) = \nu\left(\prod_{i=1}^t P_i\right) < \nu(qQ).$$

DÉMONSTRATION. On fait un raisonnement par récurrence sur l'entier t .

Initialisation : montrons que la propriété est vraie pour $t = 2$. On veut donc montrer que $\nu(P_1P_2) < \nu(qQ)$.

En effet, si $\nu(P_1P_2) < \nu(qQ)$, alors

$$\begin{aligned} \nu(r) &= \nu(P_1P_2 - qQ) \\ &= \nu(P_1P_2) \\ &< \nu(qQ) \end{aligned}$$

et la proposition est vraie.

Supposons par l'absurde que $\nu(P_1P_2) \geq \nu(qQ)$ et donc que l'on a $\nu(r) \geq \nu(qQ)$. Comme Q est un polynôme clef, tout polynôme P de degré strictement inférieur à celui de Q vérifie $\epsilon(P) < \epsilon(Q)$. En particulier, pour tout entier non nul j , on a $\nu(P) - \nu(\partial_j P) < j\epsilon(Q)$. C'est donc le cas pour P_1, P_2 et r . Comme P_1 et P_2 sont tous deux de degré strictement inférieur à celui de Q , il vient

$$\begin{aligned} \deg_X(P_1P_2) &= \deg_X(P_1) + \deg_X(P_2) \\ &< 2\deg_X(Q). \end{aligned}$$

Or $\deg_X(P_1P_2) = \deg_X(qQ) = \deg_X(q) + \deg_X(Q)$. On a donc que q est également de degré strictement inférieur à celui de Q , et ainsi q vérifie aussi, pour tout entier non nul j : $\nu(q) - \nu(\partial_j q) < j\epsilon(Q)$. Nous allons calculer $\nu(\partial_{b(Q)}(qQ))$ de deux manières différentes afin d'obtenir la contradiction.

Tout d'abord,

$$\nu(\partial_{b(Q)}(qQ)) = \nu\left(\sum_{j=0}^{b(Q)} (\partial_{b(Q)-j}(Q) \partial_j(q))\right).$$

Fixons notre attention sur le premier terme de cette somme : $q\partial_{b(Q)}(Q)$, et calculons sa valeur $\nu(q\partial_{b(Q)}(Q))$. Nous allons montrer qu'elle est strictement inférieure aux valeurs de tous les autres termes.

On a

$$\begin{aligned}\nu(q\partial_{b(Q)}(Q)) &= \nu(q) + \nu(\partial_{b(Q)}(Q)) \\ &= \nu(q) + \nu(Q) - b(Q)\epsilon(Q)\end{aligned}$$

par définition de $b(Q)$. Mais nous avons vu que pour tout entier non nul j , on a $\nu(q) < j\epsilon(Q) + \nu(\partial_j q)$, donc il vient

$$\nu(q\partial_{b(Q)}(Q)) < (j - b(Q))\epsilon(Q) + \nu(Q) + \nu(\partial_j q) \leq \nu(\partial_j q) + \nu(\partial_{b(Q)-j}Q).$$

Donc $q\partial_{b(Q)}(Q)$ est de valeur strictement minimale dans cette somme. En particulier,

$$\begin{aligned}(2.2.1) \quad \nu(\partial_{b(Q)}(qQ)) &= \nu(q\partial_{b(Q)}(Q)) \\ &= \nu(q) + \nu(\partial_{b(Q)}(Q)) \\ &= \nu(qQ) - b(Q)\epsilon(Q).\end{aligned}$$

Nous allons maintenant calculer cette même valeur mais en utilisant la division euclidienne donnée dans l'énoncé. On a :

$$\begin{aligned}\nu(\partial_{b(Q)}(qQ)) &= \nu(\partial_{b(Q)}(P_1P_2 - r)) \\ &= \nu(\partial_{b(Q)}(P_1P_2) - \partial_{b(Q)}(r)) \\ &\geq \min\{\nu(\partial_{b(Q)}(P_1P_2)), \nu(\partial_{b(Q)}(r))\}.\end{aligned}$$

Or nous avons aussi :

$$\begin{aligned}\nu(\partial_{b(Q)}(P_1P_2)) &= \nu\left(\sum_{j=0}^{b(Q)} \partial_j(P_1)\partial_{b(Q)-j}(P_2)\right) \\ &\geq \min_{0 \leq j \leq b(Q)} \left\{ \nu(\partial_j P_1) + \nu(\partial_{b(Q)-j}(P_2)) \right\}.\end{aligned}$$

Si $j \neq 0$, on a $\nu(P_1) < j\epsilon(Q) + \nu(\partial_j(P_1))$ et donc

$$\nu(\partial_j(P_1)) > \nu(P_1) - j\epsilon(Q)$$

car $\deg_X(P_1) < \deg_X(Q)$. De même, si $0 \leq j < b(Q)$, on a

$$\nu(\partial_{b(Q)-j}(P_2)) > \nu(P_2) - (b(Q) - j)\epsilon(Q).$$

Donc si $0 < j < b(Q)$, on a

$$\nu(\partial_j P_1) + \nu(\partial_{b(Q)-j}(P_2)) > \nu(P_1P_2) - b(Q)\epsilon(Q).$$

Cette inégalité étant toujours vraie pour $j = 0$ et $j = b(Q)$, on a bien :

$$\nu\left(\partial_{b(Q)}(P_1P_2)\right) > \nu(P_1P_2) - b(Q) \in (Q).$$

Par hypothèse, $\nu(P_1P_2) \geq \nu(qQ)$, donc on a

$$\nu\left(\partial_{b(Q)}(P_1P_2)\right) > \nu(qQ) - b(Q) \in (Q).$$

Or on sait que comme r est de degré strictement inférieur à celui de Q , on a $\nu\left(\partial_{b(Q)}(r)\right) > \nu(r) - b(Q) \in (Q)$, et par hypothèse, on sait que $\nu(r) \geq \nu(qQ)$, il vient $\nu\left(\partial_{b(Q)}(r)\right) > \nu(qQ) - b(Q) \in (Q)$.

Donc on a

$$\begin{aligned} \nu\left(\partial_{b(Q)}(qQ)\right) &\geq \min\left\{\nu\left(\partial_{b(Q)}(P_1P_2)\right), \nu\left(\partial_{b(Q)}(r)\right)\right\} \\ &> \nu(qQ) - b(Q) \in (Q) \end{aligned}$$

ce qui contredit (2.2.1). On a donc bien $\nu(r) = \nu(P_1P_2) < \nu(qQ)$, ce qui conclut la preuve de l'initialisation.

On suppose donc maintenant le résultat vrai au rang $t - 1 \geq 2$ et on va le montrer au rang t . On pose $P := \prod_i^{t-1} P_i$.

Soient

$$P = q_1Q + r_1$$

la division euclidienne de P par Q et

$$r_1P_t = q_2Q + r_2$$

celle de r_1P_t par Q également. Comme $PP_t = qQ + r$, on a $r = r_2$ et $q = q_1P_t + q_2$.

On sait que la propriété est vraie au rang $t - 1$, donc on sait que $\nu(r_1) = \nu(P) < \nu(q_1Q)$. En particulier,

$$\nu(r_1P_t) = \nu\left(\prod_i^t P_i\right) < \nu(q_1P_tQ).$$

Les polynômes r_1 et P_t étant tous deux de degré strictement inférieur à celui de Q , on peut leur appliquer le cas $t = 2$ et il vient

$$\nu(r_1P_t) = \nu(r_2) < \nu(q_2Q).$$

Donc $\nu(r) = \nu(r_2) = \nu(r_1P_t) = \nu\left(\prod_i^t P_i\right)$ et de plus ce nombre est à la fois strictement inférieur à $\nu(q_1P_tQ)$ et à $\nu(q_2Q)$, il est donc strictement inférieur au minimum des deux, qui est inférieur ou égal à $\nu(q_1P_tQ + q_2Q)$ par définition même d'une valuation. Il vient

$$\begin{aligned} \nu(r) &= \nu\left(\prod_i^t P_i\right) \\ &< \nu((q_1P_t + q_2)Q) \\ &= \nu(qQ) \end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve du rang t et ainsi la preuve de la Proposition. \square

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème annoncé plus haut :

THÉORÈME 2.2.7. *Soit Q un polynôme clef. L'application ν_Q est alors une valuation.*

DÉMONSTRATION. Tout d'abord, d'après la remarque 2.2.5, il reste à montrer que pour tout $(P_1, P_2) \in K[X]^2$, nous avons

$$\nu_Q(P_1P_2) = \nu_Q(P_1) + \nu_Q(P_2).$$

Premier cas : P_1 et P_2 sont tous deux de degré strictement inférieur à celui de Q . Alors $\nu_Q(P_1) = \nu(P_1)$ et $\nu_Q(P_2) = \nu(P_2)$. Comme ν est une valuation, on a $\nu(P_1P_2) = \nu(P_1) + \nu(P_2)$.

Ainsi, $\nu(P_1P_2) = \nu_Q(P_1) + \nu_Q(P_2)$. Comme P_1 et P_2 sont tous deux de degré strictement inférieur à celui de Q , d'après le Lemme 2.2.6, on a $\nu_Q(P_1P_2) = \nu(P_1P_2)$ et donc on a le résultat.

Deuxième cas : $P_1 = p_i^{(1)}Q^i$ et $P_2 = p_j^{(2)}Q^j$, avec $p_i^{(1)}$ et $p_j^{(2)}$ tous deux de degré strictement inférieur à celui de Q .

Soit $p_i^{(1)}p_j^{(2)} = qQ + r$ la division euclidienne de $p_i^{(1)}p_j^{(2)}$ par Q . Comme $\deg_X(p_i^{(1)}p_j^{(2)}) < 2\deg_X(Q)$, on sait que $\deg_X(q) < \deg_X(Q)$, et par définition de la division euclidienne, on a $\deg_X(r) < \deg_X(Q)$. Donc $P_1P_2 = qQ^{i+j+1} + rQ^{i+j}$ est le Q -développement de P_1P_2 .

Nous allons montrer que dans ce cas nous avons encore

$$\nu_Q(P_1P_2) = \nu(P_1P_2),$$

et comme ν est une valuation, nous aurons encore le résultat. On a :

$$\begin{aligned} \nu_Q(P_1P_2) &= \nu_Q(qQ^{i+j+1} + rQ^{i+j}) \\ &= \min\{\nu(qQ^{i+j+1}), \nu(rQ^{i+j})\} \\ &= \min\{\nu(qQ) + \nu(Q^{i+j+1}), \nu(r) + \nu(Q^{i+j})\}. \end{aligned}$$

Or nous pouvons appliquer le Lemme 2.2.6 au produit

$$p_i^{(1)}p_j^{(2)} = qQ + r$$

et nous pouvons conclure que $\nu(r) = \nu(p_i^{(1)}p_j^{(2)}) < \nu(qQ)$.

Il vient

$$\begin{aligned} \nu_Q(P_1P_2) &= \nu(r) + \nu(Q^{i+j}) \\ &= \nu(p_i^{(1)}p_j^{(2)}) + \nu(Q^{i+j}) \\ &= \nu(P_1P_2) \end{aligned}$$

et nous avons donc encore le résultat.

Troisième cas : cas général. Comme nous ne regardons que les termes de plus basse valeur, nous pouvons remplacer P_1 par

$$\left(\tilde{P}_1\right)_{\nu, Q} = \sum_{j \in S_Q(P_1)} p_j^{(1)} Q^j$$

et P_2 par

$$\left(\tilde{P}_2\right)_{\nu, Q} = \sum_{i \in S_Q(P_2)} p_i^{(2)} Q^i.$$

On sait que

$$\nu_Q(P_1 + P_2) \geq \min \{ \nu_Q(P_1), \nu_Q(P_2) \}$$

et

$$\nu_Q(p_j^{(1)} Q^j p_i^{(2)} Q^i) = \nu_Q(p_j^{(1)} Q^j) + \nu_Q(p_i^{(2)} Q^i),$$

donc on a

$$\begin{aligned} \nu_Q(P_1 P_2) &= \nu_Q\left(\sum p_j^{(1)} p_i^{(2)} Q^{j+i}\right) \\ &\geq \min \left\{ \nu_Q(p_j^{(1)} Q^j) + \nu_Q(p_i^{(2)} Q^i) \right\}. \end{aligned}$$

Or

$$\nu_Q(p_j^{(1)} Q^j) = \nu(p_j^{(1)} Q^j) = \nu_Q(P_1)$$

et

$$\nu_Q(p_i^{(2)} Q^i) = \nu(p_i^{(2)} Q^i) = \nu_Q(P_2).$$

Donc $\nu_Q(P_1 P_2) \geq \nu_Q(P_1) + \nu_Q(P_2)$, et il reste à montrer que c'est une égalité. Pour cela il suffit de trouver un terme dans le Q -développement de $P_1 P_2$ qui vaut exactement $\nu_Q(P_1) + \nu_Q(P_2)$. Considérons le terme de plus bas degré de chaque Q -développement, à savoir $p_{n_1}^{(1)} Q^{n_1}$ et $p_{m_2}^{(2)} Q^{m_2}$, où $n_1 = \min S_Q(P_1)$ et $m_2 = \min S_Q(P_2)$.

Soit $p_{n_1}^{(1)} p_{m_2}^{(2)} = qQ + r$ la division euclidienne de $p_{n_1}^{(1)} p_{m_2}^{(2)}$ par Q , qui est aussi son Q -développement.

Par le Lemme 2.2.6, on a $\nu(r) = \nu(p_{n_1}^{(1)} p_{m_2}^{(2)})$. De fait, dans le Q -développement de $P_1 P_2$, il y a le terme $rQ^{n_1+m_2}$, et l'on a :

$$\begin{aligned} \nu_Q(rQ^{n_1+m_2}) &= \nu(rQ^{n_1+m_2}) \\ &= \nu(p_{n_1}^{(1)} p_{m_2}^{(2)} Q^{n_1+m_2}) \\ &= \nu_Q(P_1) + \nu_Q(P_2) \end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve. \square

REMARQUE 2.2.8. Pour tout polynôme $P \in K[X]$, on a

$$\nu_Q(P) \leq \nu(P).$$

Il va par la suite être très important de déterminer si et quand cette inégalité est stricte ou au contraire est une égalité. Un polynôme clef P qui vérifie l'inégalité stricte et qui est de degré minimal pour cette

propriété sera appelé un polynôme clef successeur immédiat de Q , nous étudierons ces polynômes clefs dans la section suivante.

DÉFINITION 2.2.9. Soit Q un polynôme clef et P un polynôme tel que $\nu_Q(P) = \nu(P)$. On dit alors que P est non dégénéré par rapport à Q .

Avant toute chose, rappelons que le but de ce chapitre est d'établir des théorèmes de comparaison entre les deux notions de polynômes clefs. Maintenant que nous savons que ν_Q est une valuation dès lors que Q est un polynôme clef, a-t-on facilement un résultat liant Q à ν_Q et qui rapprocherait Q d'un polynôme clef de Vaquié? La réponse est oui, et elle fait l'objet de la proposition suivante.

PROPOSITION 2.2.10. *Soit Q un polynôme clef. Alors Q est ν_Q -irréductible.*

DÉMONSTRATION. On définit

$$G_{<\deg_X(Q)} := \sum_{\deg_X(P) < \deg_X(Q)} \left(\text{in}_{\nu_Q}(P) \right) G_\nu \subset \text{gr}_{\nu_Q}(K[X])$$

avec G_ν l'algèbre des formes initiales des éléments de K .

Soient P_1 et P_2 deux polynômes de degré strictement inférieur à celui de Q , et soit $P_1P_2 = qQ + r$ le Q -développement de P_1P_2 . D'après le Lemme 2.2.6, on sait que $\nu(P_1P_2) = \nu(r) = \nu_Q(P_1P_2)$. Donc on a $\text{in}_{\nu_Q}(P_1P_2) = \text{in}_{\nu_Q}(r)$, autrement dit $G_{<\deg_X(Q)}$ est stable par multiplication, c'est donc un anneau.

Cet anneau s'injecte dans l'anneau intègre $\text{gr}_\nu(K[X])$ par l'application qui envoie $\text{in}_{\nu_Q}(P)$, avec $\deg_X(P) < \deg_X(Q)$, sur $\text{in}_\nu(P)$. Donc $G_{<\deg_X(Q)}$ est un anneau intègre, et l'on peut considérer

$$L := \text{Frac} \left(G_{<\deg_X(Q)} \right).$$

Afin de terminer la preuve de cette proposition, nous avons besoin de la remarque suivante.

REMARQUE 2.2.11. L'élément $\text{in}_{\nu_Q}(Q)$ est transcendant sur $G_{<\deg_X(Q)}$.

DÉMONSTRATION. Supposons par l'absurde que $\text{in}_{\nu_Q}(Q)$ est algébrique sur $G_{<\deg_X(Q)}$. Il existe donc une relation algébrique de la forme

$$S \left(\text{in}_{\nu_Q}(Q) \right) = \sum_{i=0}^n a_i \text{in}_{\nu_Q}(Q)^i = 0$$

avec $a_i \in G_{<\deg_X(Q)}$. L'élément a_i est lui même de la forme

$$\sum_{\deg_x(P) < \deg_x(Q)} \text{in}_{\nu_Q}(P) a_{P,i}$$

avec $a_{P,i} \in \text{gr}_\nu(K)$. On a ainsi que $S(\text{in}_{\nu_Q}(Q))$ est une somme de termes homogènes de $\text{gr}_{\nu_Q}(K[X])$, qui s'annule, donc on peut supposer qu'ils sont tous de même degré. Ainsi on peut supposer que $a_i = \text{in}_{\nu_Q}(b_i)$ avec $b_i \in K[X]$ de degré strictement inférieur à celui de Q . Donc

$$\begin{aligned} S(\text{in}_{\nu_Q}(Q)) &= \sum_{i=0}^n \text{in}_{\nu_Q}(b_i) \text{in}_{\nu_Q}(Q)^i \\ &= 0 \end{aligned}$$

puis

$$\nu_Q\left(\sum_{i=0}^n b_i Q^i\right) > \nu_Q(b_i) + i\nu(Q),$$

cette dernière quantité étant indépendante de i .

Comme les b_i sont tous de degré strictement inférieur à celui de Q , on sait que $\sum_{i=0}^n b_i Q^i$ est un Q -développement, et on obtient que

$$\nu_Q\left(\sum_{i=0}^n b_i Q^i\right) = \nu_Q(b_i) + i\nu(Q),$$

ce qui est absurde.

L'élément $\text{in}_{\nu_Q}(Q)$ est donc bien transcendant sur $G_{<\text{deg}_X(Q)}$. \square

On a donc

$$\text{gr}_{\nu_Q}(K[X]) = G_{<\text{deg}_X(Q)}[\text{in}_{\nu_Q}(Q)].$$

En particulier, $\text{in}_{\nu_Q}(Q)$ est irréductible dans $\text{gr}_{\nu_Q}(K[X])$.

Montrons maintenant que Q est ν_Q -irréductible.

Soit donc $(g, h) \in K[X]$ tel que $Q \mid_{\nu_Q} gh$. Alors il existe un polynôme $c \in K[X]$ tel que

$$\text{in}_{\nu_Q}(Q) \text{in}_{\nu_Q}(c) = \text{in}_{\nu_Q}(g) \text{in}_{\nu_Q}(h).$$

Cette égalité est dans l'anneau

$$\text{gr}_{\nu_Q}(K[X]) = G_{<\text{deg}_X(Q)}[\text{in}_{\nu_Q}(Q)].$$

Regardons la dans $L[\text{in}_{\nu_Q}(Q)]$, où L est l'anneau factoriel $\text{Frac}(G_{<\text{deg}_X(Q)})$.

On a $\text{in}_{\nu_Q}(Q) = \frac{\text{in}_{\nu_Q}(g)\text{in}_{\nu_Q}(h)}{\text{in}_{\nu_Q}(c)}$ dans $L[\text{in}_{\nu_Q}(Q)]$. L'anneau L étant factoriel, et $\text{in}_{\nu_Q}(Q)$ étant irréductible dans $\text{gr}_{\nu_Q}(K[X])$, il vient que $L[\text{in}_{\nu_Q}(Q)]$ est factoriel.

Ainsi $\text{in}_{\nu_Q}(Q)$ divise soit $\text{in}_{\nu_Q}(g)$ soit $\text{in}_{\nu_Q}(h)$ dans cet anneau.

Comme $\text{in}_{\nu_Q}(Q)$, $\text{in}_{\nu_Q}(g)$ et $\text{in}_{\nu_Q}(h)$ sont des éléments homogènes de $\text{gr}_{\nu_Q}(K[X])$, on a la même divisibilité dans $\text{gr}_{\nu_Q}(K[X])$, ce qui conclut la preuve. \square

Au vu de la définition même des polyômes clefs, il est nécessaire d'être capable de « comparer » $\epsilon(P)$ et $\epsilon(Q)$, avec P un polynôme et Q un polynôme clef. Nous allons maintenant établir des résultats qui le permettent.

LEMME 2.2.12. *Pour tout polynôme $P \in K[X]$ et tout entier strictement positif d , on a :*

$$\nu_Q(\partial_d P) \geq \nu_Q(P) - d\epsilon(Q)$$

DÉMONSTRATION. On considère $P = \sum_{i=0}^n p_i Q^i$ le Q -développement de P .

Supposons le résultat démontré pour $p_i Q^i$, c'est-à-dire que

$$\nu_Q(\partial_d(p_i Q^i)) \geq \nu_Q(p_i Q^i) - d\epsilon(Q)$$

pour tout indice i . Alors :

$$\begin{aligned} \nu_Q(\partial_d P) &= \nu_Q\left(\partial_d\left(\sum_{i=0}^n p_i Q^i\right)\right) \\ &= \nu_Q\left(\sum_{i=0}^n \partial_d(p_i Q^i)\right) \\ &\geq \min_{0 \leq i \leq n} \nu_Q(\partial_d(p_i Q^i)) \\ &\geq \min_{0 \leq i \leq n} \{\nu_Q(p_i Q^i) - d\epsilon(Q)\} \\ &\geq \min_{0 \leq i \leq n} \{\nu_Q(p_i Q^i)\} - d\epsilon(Q) \\ &\geq \nu_Q(P) - d\epsilon(Q) \end{aligned}$$

et nous avons donc le résultat.

Il reste ainsi à montrer le résultat pour $P = p_i Q^i$. Tout d'abord, nous savons que $\nu_Q(\partial_d Q) \geq \nu_Q(Q) - d\epsilon(Q)$. Nous allons maintenant montrer le résultat pour $P = p_i$ puis conclure en montrant que si nous avons le résultat pour deux polynômes, nous avons le résultat pour le produit.

Montrons donc que le lemme est vérifié pour $P = p_i$.

Comme $\deg_X(p_i) < \deg_X(Q)$ et que Q est un polynôme clef, nous savons que $\epsilon(p_i) < \epsilon(Q)$, et donc pour tout entier strictement positif d , on a :

$$\begin{aligned}
\nu_Q(\partial_d p_i) &= \nu(\partial_d p_i) \\
&\geq \nu(p_i) - d\epsilon(p_i) \\
&= \nu_Q(p_i) - d\epsilon(p_i) \\
&> \nu_Q(p_i) - d\epsilon(Q).
\end{aligned}$$

Il reste donc à montrer que si le lemme est vérifié par deux polynômes P et S , alors il est vérifié pour le produit PS . Supposons ainsi le résultat démontré pour deux polynômes quelconques P et S . Alors :

$$\begin{aligned}
\nu_Q(\partial_d(PS)) &= \nu_Q\left(\sum_{r=0}^d \partial_r(P) \partial_{d-r}(S)\right) \\
&\geq \min_{0 \leq r \leq d} \{\nu(\partial_r(P)) + \nu(\partial_{d-r}(S))\} \\
&\geq \min_{0 \leq r \leq d} \{\nu_Q(P) - r\epsilon(Q) + \nu_Q(S) - (d-r)\epsilon(Q)\} \\
&\geq \nu_Q(PS) - d\epsilon(Q)
\end{aligned}$$

Ce qui conclut la preuve du lemme. \square

PROPOSITION 2.2.13. *Soient Q un polynôme clef et $P \in K[X]$ un polynôme tel que $S_Q(P) \neq \{0\}$.*

Alors il existe un entier strictement positif b tel que

$$\frac{\nu_Q(P) - \nu_Q(\partial_b P)}{b} = \epsilon(Q).$$

DÉMONSTRATION. Tout d'abord, nous pouvons, d'après le Lemme 2.2.12, sans perte de généralité, remplacer P par $\tilde{P}_{\nu, Q} = \sum_{i \in S_Q(P)} p_i Q^i$.

Nous voulons montrer l'existence d'un entier strictement positif b tel que $\nu_Q(P) - \nu_Q(\partial_b P) = b\epsilon(Q)$.

Comme nous savons que $S_Q(P) \neq \{0\}$, nous pouvons considérer le plus petit entier strictement positif l de $S_Q(P)$, et on écrit $l = p^e u$, avec $p \nmid u$. Nous allons montrer que nous avons bien l'égalité pour l'entier strictement positif $b := p^e b(Q)$. Pour cela, nous avons besoin de calculer $\partial_b(P)$, c'est l'objet du lemme technique suivant.

LEMME 2.2.14. *On a $\partial_b(P) = urQ^{l-p^e} + Q^{l-p^e+1}R + S$, où :*

(1) *Le polynôme r est le reste de la division euclidienne de $p_l(\partial_{b(Q)}Q)^{p^e}$ par Q ,*

(2) *Les polynômes R et S sont des polynômes de $K[X]$, avec*

$$\nu_Q(S) > \nu_Q(P) - b\epsilon(Q).$$

DÉMONSTRATION. Tout d'abord, montrons que le Lemme est vrai pour P remplacé par $p_l Q^l$ et que pour tout $j \in S_Q(P) \setminus \{l\}$, on a

$$\partial_b(p_j Q^j) = Q^{l-p^e+1}R_j + S_j,$$

où R_j et S_j sont deux polynômes, et où $\nu_Q(S_j) > \nu_Q(P) - b\epsilon(Q)$.
Soit donc $j \in S_Q(P)$. On pose

$$M_j := \left\{ B_s = (b_0, \dots, b_s) \in \mathbb{N}^{s+1} \text{ tel que } \sum_{i=0}^s b_i = b \text{ et } s \leq j \right\}.$$

La règle de Leibniz généralisée nous dit que :

$$\partial_b(p_j Q^j) = \sum_{B_s \in M_j} (T(B_s))$$

où

$$\begin{aligned} T(B_s) &= T((b_0, \dots, b_s)) \\ &= C(B_s) \partial_{b_0}(p_j) \left(\prod_{i=1}^s \partial_{b_i}(Q) \right) Q^{j-s} \end{aligned}$$

avec $C(B_s)$ des éléments de K dont la valeur exacte peut-être trouvée dans [16]. Pour plus de lisibilité, on pose

$$\alpha := (0, b(Q), \dots, b(Q)) \in \mathbb{N}^{p^e+1}.$$

On rappelle que $I(Q) = \left\{ d \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } \frac{\nu(Q) - \nu(\partial_d Q)}{d} = \epsilon(Q) \right\}$, et on pose ainsi

$$N_j := \{ B_s = (b_0, \dots, b_s) \in M_j \text{ tel que } b_0 > 0 \text{ ou } \{b_1, \dots, b_s\} \not\subseteq I(Q) \},$$

$$S_j := \sum_{B_s \in N_j} T(B_s)$$

ainsi que

$$Q^{l-p^e+1} R_j := \begin{cases} \sum_{B_s \in M_j \setminus N_j} T(B_s) & \text{si } j \neq l \\ \sum_{B_s \in M_j \setminus (N_j \cup \{\alpha\})} T(B_s) & \text{si } j = l \end{cases}$$

Si $j = l$, le terme $T(\alpha)$ apparaît $\binom{l}{p^e} = u$ fois dans $\partial_b(p_l Q^l)$, autrement dit $C(\alpha) = u$ et donc nous avons

$$\begin{aligned} T(\alpha) &= u p_l \left(\partial_{b(Q)} Q \right)^{p^e} Q^{l-p^e} \\ &= u (qQ + r) Q^{l-p^e} \end{aligned}$$

où $qQ + r$ est la division euclidienne de $p_l \left(\partial_{b(Q)} Q \right)^{p^e}$ par Q .

C'est-à-dire que

$$T(\alpha) = \underbrace{uq}_{:=R_0} Q^{l-p^e+1} + ur Q^{l-p^e}.$$

Donc si $j \neq l$, alors $\partial_b(p_j Q^j) = Q^{l-p^e+1} R_j + S_j$, il reste uniquement à montrer que $\nu_Q(S_j) > \nu_Q(p_j Q^j) - b\epsilon(Q)$.

Or :

$$\begin{aligned} \nu_Q(S_j) &= \nu_Q\left(\sum_{B_s \in N_j} T(B_s)\right) \\ &= \nu_Q\left(\sum_{B_s \in N_j} C(B_s) \partial_{b_0}(p_j) \left(\prod_{i=1}^s \partial_{b_i}(Q)\right) Q^{j-s}\right) \\ &\geq \min_{B_s \in N_j} \left\{ \nu(\partial_{b_0}(p_j)) + \sum_{i=1}^s \nu(\partial_{b_i}(Q)) + (j-s)\nu(Q) \right\}. \end{aligned}$$

Comme $B_s \in N_j$, deux cas s'offrent à nous : soit nous avons $b_0 = 0$ et $\{b_1, \dots, b_s\} \not\subseteq I(Q)$, c'est-à-dire que pour tout $i \in \{1, \dots, s\}$ on a $\nu(\partial_{b_i}(Q)) \geq \nu(Q) - b_i\epsilon(Q)$ et l'inégalité est stricte pour au moins un indice $i \in \{1, \dots, s\}$; soit $b_0 > 0$ et alors

$$\frac{\nu(p_j) - \nu(\partial_{b_0}(p_j))}{b_0} \leq \epsilon(p_j) < \epsilon(Q)$$

car $\deg_X(p_j) < \deg_X(Q)$ et Q polynôme clef, c'est-à-dire que

$$\nu(\partial_{b_0}(p_j)) > \nu(p_j) - b_0\epsilon(Q).$$

Donc si $b_0 = 0$ et $\{b_1, \dots, b_s\} \not\subseteq I(Q)$, on a

$$\begin{aligned} &\nu(\partial_{b_0}(p_j)) + \sum_{i=1}^s \nu(\partial_{b_i}(Q)) + (j-s)\nu(Q) \\ &> \underbrace{\nu(p_j) + s\nu(Q) - b\epsilon(Q) + (j-s)\nu(Q)}_{\parallel} \\ &\qquad\qquad\qquad \nu(p_j Q^j) - b\epsilon(Q) \end{aligned}$$

Et si $b_0 > 0$, alors

$$\begin{aligned} &\nu(\partial_{b_0}(p_j)) + \sum_{i=1}^s \nu(\partial_{b_i}(Q)) + (j-s)\nu(Q) \\ &> \underbrace{\nu(p_j) - b_0\epsilon(Q) + s\nu(Q) - \sum_{i=1}^s b_i\epsilon(Q) + (j-s)\nu(Q)}_{\parallel} \\ &\qquad\qquad\qquad \nu(p_j Q^j) - b\epsilon(Q) \end{aligned}$$

Il vient :

$$\begin{aligned} \nu_Q(S_j) &> \min_{B_s \in N_j} \{ \nu(p_j Q^j) - b\epsilon(Q) \} \\ &> \nu_Q(P) - b\epsilon(Q) \end{aligned}$$

comme attendu.

Si $j = l$, alors

$$\partial_b (p_l Q^l) = (R_0 + R_l) Q^{l-p^e+1} + S_l + urQ^{l-p^e}$$

et de même on a $\nu_Q(S_l) > \nu_Q(P) - b\epsilon(Q)$.

Reste à montrer le cas général. On a :

$$\partial_b(P) = \partial_b \left(\sum_{i \in S_Q(P)} p_i Q^i \right) = \partial_b(p_l Q^l) + \sum_{j \in S_Q(P) \setminus \{l\}} \partial_b(p_j Q^j).$$

Il vient :

$$\begin{aligned} \partial_b(P) &= (R_0 + R_l) Q^{l-p^e+1} + S_l + urQ^{l-p^e} + \sum_{j \in S_Q(P) \setminus \{l\}} (Q^{l-p^e+1} R_j + S_j) \\ &= urQ^{l-p^e} + Q^{l-p^e+1} R + S \end{aligned}$$

où

$$R := R_0 + \sum_{j \in S_Q(P)} R_j$$

et

$$S := \sum_{j \in S_Q(P)} S_j,$$

avec

$$\nu_Q(S) \geq \min_{j \in S_Q(P)} \{\nu_Q(S_j)\} > \nu_Q(P) - b\epsilon(Q),$$

ce qui conclut la preuve du lemme. \square

Nous rappelons que nous voudrions montrer que

$$\nu_Q(\partial_b P) = \nu_Q(P) - b\epsilon(Q).$$

On vient de voir que le Q -développement de $\partial_b P$ contenait le terme urQ^{l-p^e} , des termes qui sont divisibles par Q^{l-p^e+1} et des termes de valeur strictement supérieure à $\nu_Q(P) - b\epsilon(Q)$. Pour conclure, il suffit donc de montrer que

$$\nu_Q(\partial_b P) \geq \nu_Q(P) - b\epsilon(Q)$$

et que

$$\nu_Q(urQ^{l-p^e}) = \nu_Q(P) - b\epsilon(Q).$$

Calculons donc $\nu_Q(urQ^{l-p^e})$.

On rappelle que $p_l(\partial_{b(Q)} Q)^{p^e} = qQ + r$ et d'après le Lemme 2.2.6, on a $\nu(r) = \nu(p_l(\partial_{b(Q)} Q)^{p^e})$, donc :

$$\begin{aligned}
\nu_Q(urQ^{l-p^e}) &= \nu_Q(rQ^{l-p^e}) \\
&= \nu(rQ^{l-p^e}) \\
&= \nu\left(pl\left(\partial_{b(Q)}Q\right)^{p^e}\right) + \nu(Q^{l-p^e}) \\
&= \nu(plQ^l) + p^e\nu\left(\partial_{b(Q)}Q\right) - p^e\nu(Q) \\
&= \nu_Q(P) + p^e\left(\nu\left(\partial_{b(Q)}Q\right) - \nu(Q)\right) \\
&= \nu_Q(P) + p^e(-b(Q)\epsilon(Q)) \\
&= \nu_Q(P) - b\epsilon(Q).
\end{aligned}$$

Pour conclure la preuve, il reste à utiliser le Lemme 2.2.12. \square

REMARQUE 2.2.15. On peut montrer qu'on a également la réciproque de la proposition, c'est-à-dire que s'il existe un entier strictement positif b tel que $\frac{\nu_Q(P) - \nu_Q(\partial_b P)}{b} = \epsilon(Q)$, alors $S_Q(P) \neq \{0\}$.

COROLLAIRE 2.2.16. Soient Q un polynôme clef et P un polynôme tel qu'il existe un entier strictement positif b tel que

$$\nu_Q(P) - \nu_Q(\partial_b P) = b\epsilon(Q)$$

et

$$\nu_Q(\partial_b P) = \nu(\partial_b P).$$

Alors $\epsilon(P) \geq \epsilon(Q)$.

Si de plus $\nu(P) > \nu_Q(P)$, alors $\epsilon(P) > \epsilon(Q)$.

DÉMONSTRATION. On a

$$\begin{aligned}
\epsilon(P) &\geq \frac{\nu(P) - \nu(\partial_b P)}{b} \\
&= \frac{\nu(P) - \nu_Q(\partial_b P)}{b} \\
&= \frac{\nu(P) + b\epsilon(Q) - \nu_Q(P)}{b} \\
&= \epsilon(Q) + \frac{\nu(P) - \nu_Q(P)}{b}.
\end{aligned}$$

On sait que pour tout polynôme P , on a $\nu(P) \geq \nu_Q(P)$, et donc $\epsilon(P) \geq \epsilon(Q)$. Et si $\nu(P) > \nu_Q(P)$, alors on a bien l'inégalité stricte $\epsilon(P) > \epsilon(Q)$. \square

PROPOSITION 2.2.17. Soient Q_1 et Q_2 deux polynômes clefs tels que

$$\epsilon(Q_1) \leq \epsilon(Q_2)$$

et soit $P \in K[X]$ un polynôme.

Alors $\nu_{Q_1}(P) \leq \nu_{Q_2}(P)$.

Si de plus $\nu_{Q_1}(P) = \nu(P)$, alors $\nu_{Q_2}(P) = \nu(P)$.

DÉMONSTRATION. Tout d'abord, montrons que $\nu_{Q_2}(Q_1) = \nu(Q_1)$. Si $\deg_X(Q_1) < \deg_X(Q_2)$, c'est le cas ; sinon, on a $\deg_X(Q_1) = \deg_X(Q_2)$ puisque l'on a $\epsilon(Q_1) \leq \epsilon(Q_2)$ et puisque Q_1 est un polynôme clef.

Supposons par l'absurde que $\nu_{Q_2}(Q_1) < \nu(Q_1)$.

Alors $S_{Q_2}(Q_1) \neq \{0\}$ et d'après la Proposition 2.2.13, il existe un entier strictement positif b tel que $\nu_{Q_2}(Q_1) - \nu_{Q_2}(\partial_b Q_1) = b\epsilon(Q_2)$. Or $\deg_X(\partial_b Q_1) < \deg_X(Q_2)$, donc on a $\nu_{Q_2}(\partial_b Q_1) = \nu(\partial_b Q_1)$ et d'après le Corollaire 2.2.16, on a $\epsilon(Q_1) > \epsilon(Q_2)$, ce qui est absurde par hypothèse. Donc on a bien $\nu_{Q_2}(Q_1) = \nu(Q_1)$.

Soit $P = \sum_{i=0}^n p_i Q_1^i$ le Q_1 -développement de P .

Pour tout entier $i \in \{0, \dots, n\}$, on a :

$$\nu_{Q_2}(p_i Q_1^i) = \nu_{Q_2}(p_i) + i\nu_{Q_2}(Q_1) = \nu_{Q_2}(p_i) + i\nu(Q_1).$$

Or $\deg_X(p_i) < \deg_X(Q_1) \leq \deg_X(Q_2)$, donc $\nu_{Q_2}(p_i) = \nu(p_i)$ et $\nu_{Q_2}(p_i Q_1^i) = \nu(p_i Q_1^i)$.

Il vient

$$\begin{aligned} \nu_{Q_2}(P) &\geq \min_{0 \leq i \leq n} \{\nu_{Q_2}(p_i Q_1^i)\} \\ &= \min_{0 \leq i \leq n} \{\nu(p_i Q_1^i)\} \\ &= \nu_{Q_1}(P) \end{aligned}$$

comme annoncé.

Supposons maintenant en plus que $\nu_{Q_1}(P) = \nu(P)$. Alors on a $\nu(P) \leq \nu_{Q_2}(P)$. Or par définition de ν_{Q_2} , on a $\nu_{Q_2}(P) \leq \nu(P)$, d'où l'égalité. Ce qui conclut la preuve. \square

PROPOSITION 2.2.18. Soient $P_1, \dots, P_n \in K[X]$ des polynômes et posons $d := \max_{1 \leq i \leq n} \{\deg_X(P_i)\}$.

Alors il existe un polynôme clef Q de degré inférieur ou égal à d tel que tous les P_i sont non dégénérés par rapport à Q , c'est-à-dire tel que pour tout i , on a $\nu_Q(P_i) = \nu(P_i)$.

DÉMONSTRATION. Supposons la proposition démontrée dans le cas d'un seul polynôme et supposons $n > 1$. Donc nous avons Q_1, \dots, Q_n des polynômes clefs tous de degré inférieur ou égal à d tels que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on a P_i qui est non dégénéré par rapport à Q_i , c'est-à-dire que $\nu_{Q_i}(P_i) = \nu(P_i)$.

Quitte à renuméroter les Q_i , on peut supposer que

$$\epsilon(Q_n) = \max_{1 \leq i \leq n} \{\epsilon(Q_i)\}.$$

D'après la Proposition 2.2.17, il vient que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on a $\nu_{Q_i}(P_i) = \nu(P_i) = \nu_{Q_n}(P_i)$. Donc tous les polynômes P_i sont non

dégénérés par rapport au même polynôme Q_n , ce qui conclut alors la preuve.

Reste donc à montrer le résultat pour $n = 1$. Nous allons faire une démonstration par l'absurde en supposant qu'il existe un polynôme P tel que pour n'importe quel polynôme clef Q de degré plus petit ou égal à d , l'on ait $\nu_Q(P) < \nu(P)$, et l'on choisit P de degré minimal pour cette propriété.

Montrons tout d'abord qu'il existe un polynôme clef Q , de degré plus petit ou égal à $d = \deg_X(P)$, tel que pour tout entier strictement positif b , l'on ait $\nu_Q(\partial_b P) = \nu(\partial_b P)$.

Déjà, pour tout entier $b > d$, on a $\partial_b P = 0$. Ensuite, par hypothèse de minimalité du degré de P , on sait que pour tout entier $b \in \{1, \dots, d\}$, il existe un polynôme clef Q_b tel que $\nu_{Q_b}(\partial_b P) = \nu(\partial_b P)$. On prend Q parmi les Q_b tel que $\epsilon(Q) = \max_{1 \leq b \leq d} \{\epsilon(Q_b)\}$ et d'après la Proposition 2.2.17, il vient que $\nu_Q(\partial_b P) = \nu(\partial_b P)$, et ce pour tout entier strictement positif b .

Pour ce polynôme clef Q , nous avons donc $\nu_Q(P) < \nu(P)$, en particulier $S_Q(P) \neq \{0\}$, et $\nu_Q(\partial_b P) = \nu(\partial_b P)$ pour tout entier strictement positif b . D'après la Proposition 2.2.13 et le Corollaire 2.2.16, nous pouvons conclure que $\epsilon(P) > \epsilon(Q)$.

Montrons que cette dernière inégalité est en fait vraie pour n'importe quel polynôme clef de degré inférieur ou égal à celui de P . Soit donc Q_0 un tel polynôme clef. On a deux cas.

Premier cas : $\epsilon(Q_0) \leq \epsilon(Q)$. Alors nous avons bien $\epsilon(Q_0) < \epsilon(P)$ puisque $\epsilon(Q) < \epsilon(P)$.

Deuxième cas : $\epsilon(Q_0) > \epsilon(Q)$. D'après la Proposition 2.2.17, on a $\nu(\partial_b P) = \nu_Q(\partial_b P) = \nu_{Q_0}(\partial_b P)$ pour tout entier strictement positif b . Par hypothèse on sait que $\nu_{Q_0}(P) < \nu(P)$, et donc d'après la Proposition 2.2.13 et le Corollaire 2.2.16, on a $\epsilon(P) > \epsilon(Q_0)$ comme annoncé.

Donc on sait que pour tout polynôme clef de degré inférieur ou égal à celui de P , on a $\epsilon(P) > \epsilon(Q)$, mais par définition des polynômes clefs, il existe un polynôme clef \tilde{Q} de degré plus petit ou égal à celui de P et tel que $\epsilon(P) \leq \epsilon(\tilde{Q})$, ce qui fournit la contradiction et conclut la preuve. \square

LEMME 2.2.19. *Soit Q un polynôme clef de degré α . Alors il existe une suite finie de polynômes (T_1, \dots, T_s) de degrés strictement inférieurs à α telle que*

$$G_{<\alpha} = \text{gr}_\nu K [\text{in}_\nu(T_1), \dots, \text{in}_\nu(T_s)].$$

DÉMONSTRATION. On considère T_1, \dots, T_s une suite de polynômes clefs telle que $\deg(T_1) < \deg(T_2) < \dots < \deg(T_s) < \alpha$ et telle que $\{\deg(T_i)\}_{1 \leq i \leq s}$ est l'ensemble des degrés de tous les polynômes clefs de degrés strictement inférieurs à α .

Pour tout indice $q \in \{1, \dots, s\}$, on pose

$$\chi(q) := \{\nu(P), \text{ avec } P \text{ polynôme clef de même degré que } T_q\}.$$

Quitte à changer les T_i , on peut supposer que $\nu(T_i)$ est l'élément maximal de $\chi(i)$, s'il existe.

Montrons maintenant par récurrence sur α que

$$G_{<\alpha} = \text{gr}_\nu K [\text{in}_\nu(T_1), \dots, \text{in}_\nu(T_s)].$$

Si $\alpha = 1$, le résultat est direct. Supposons donc $\alpha > 1$ et supposons le résultat démontré pour tout degré strictement inférieur à α .

On considère f un polynôme de degré strictement inférieur à α . D'après la Proposition 2.2.18, on sait qu'il existe un polynôme clef P de degré plus petit ou égal à celui de f , donc de degré $\tilde{\alpha}$ strictement inférieur à α , tel que $\nu_P(f) = \nu(f)$.

Par définition, il existe un indice $q \in \{1, \dots, s\}$ tel que $\deg(T_q) = \tilde{\alpha}$. Supposons que $\chi(q)$ a un élément maximal, on sait alors que c'est $\nu(T_q)$.

Supposons que $\epsilon(T_q) \leq \epsilon(P)$. Alors d'après la Proposition 2.2.17, on a $\nu_{T_q}(g) \leq \nu_P(g)$ pour tout polynôme g , donc en particulier pour le polynôme T_q . On écrit $T_q = P + h$ le P -développement de T_q .

Ainsi, puisque $\nu(T_q)$ est maximal, on a

$$\begin{aligned} \nu(P) &\leq \nu(T_q) \\ &= \nu_{T_q}(T_q) \\ &\leq \nu_P(T_q) \\ &= \nu_P(P + h) \\ &= \min\{\nu(P), \nu(h)\} \\ &\leq \nu(P). \end{aligned}$$

Ainsi toutes les inégalités sont des égalités, et $\nu(P) = \nu(T_q)$. De fait, on peut changer T_q en P , et alors $\nu_{T_q}(f) = \nu(f)$.

Sinon, on a $\epsilon(T_q) > \epsilon(P)$. Comme on sait que $\nu_P(f) = \nu(f)$, d'après la Proposition 2.2.17, on a $\nu_{T_q}(f) = \nu(f)$.

Donc dans tous les cas, $\nu_{T_q}(f) = \nu(f)$. Ainsi, si $\chi(q)$ a un élément maximal, on peut supposer que $P = T_q$.

On considère maintenant $f = \sum_{j=0}^d f_j P^j$ le P -développement de f .

Comme $\nu_P(f) = \nu(f)$, on a

$$\text{in}_\nu(f) = \sum_{j \in S_P(f)} \text{in}_\nu(f_j) \text{in}_\nu(P)^j.$$

Les f_j étant tous de degrés strictement inférieur à celui de P , ils sont en particulier de degrés strictement inférieurs à α , et par hypothèse de récurrence, on sait qu'il existe une suite (T_1, \dots, T_{q-1}) de polynômes clefs telle que pour tout indice j , on ait :

$$\text{in}_\nu(f_j) \in \text{gr}_\nu K [\text{in}_\nu(T_1), \dots, \text{in}_\nu(T_{q-1})].$$

Donc il reste à montrer que $\text{in}_\nu(P) \in \text{gr}_\nu K [\text{in}_\nu(T_1), \dots, \text{in}_\nu(T_q)]$.

Si $\chi(q)$ a un élément maximal, on sait qu'alors $P = T_q$ et c'est terminé.

Sinon, $\chi(q)$ n'a pas d'élément maximal et ainsi il existe \tilde{P} un polynôme clef de même degré que P tel que $\nu(\tilde{P}) > \nu(P)$. Il vient que $\text{in}_\nu(\tilde{P} - P) = \text{in}_\nu(P)$.

Or $\tilde{P} - P$ est de degré strictement inférieur à celui de P et \tilde{P} , ainsi strictement inférieur à α . Par hypothèse de récurrence,

$$\text{in}_\nu(\tilde{P} - P) \in \text{gr}_\nu K [\text{in}_\nu(T_1), \dots, \text{in}_\nu(T_{q-1})].$$

Ainsi, comme $\text{in}_\nu(\tilde{P} - P) = \text{in}_\nu(P)$, on a bien

$$\text{in}_\nu(P) \in \text{gr}_\nu K [\text{in}_\nu(T_1), \dots, \text{in}_\nu(T_{q-1})]$$

comme attendu, ce qui conclut la preuve. \square

PROPOSITION 2.2.20. *Soient P et S deux polynômes dans $K[X]$. On pose $\epsilon := \max\{\epsilon(P), \epsilon(S)\}$. Alors $\epsilon(PS) \leq \epsilon$.*

Si $\epsilon(P) \neq \epsilon(S)$, on a alors $\epsilon(PS) = \epsilon$.

DÉMONSTRATION. On considère b un entier naturel non nul quelconque. D'après la règle de Leibniz généralisée, on sait que

$$\partial_b(PS) = \sum_{j=0}^b \partial_j(P) \partial_{b-j}(S).$$

Donc

$$\nu(\partial_b(PS)) \geq \min_{0 \leq j \leq b} \{\nu(\partial_j(P) \partial_{b-j}(S))\}.$$

Or pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, et pour tout polynôme M , on a

$$\epsilon(M) \geq \frac{\nu(M) - \nu(\partial_j M)}{j}$$

et ainsi $\nu(\partial_j M) \geq \nu(M) - j\epsilon(M)$. Il vient :

$$\begin{aligned}
\nu(\partial_b(PS)) &\geq \min_{0 \leq j \leq b} \{\nu(P) - j\epsilon(P) + \nu(S) - (b-j)\epsilon(S)\} \\
&\geq \min_{0 \leq j \leq b} \{\nu(P) - j\epsilon + \nu(S) - (b-j)\epsilon\} \\
&\geq \min_{0 \leq j \leq b} \{\nu(P) + \nu(S) - b\epsilon\} \\
&\geq \nu(PS) - b\epsilon.
\end{aligned}$$

C'est-à-dire que pour tout $b \in \mathbb{N}^*$, $\frac{\nu(PS) - \nu(\partial_b(PS))}{b} \leq \epsilon$, puis

$$\epsilon(PS) \leq \epsilon.$$

Supposons de plus que $\epsilon(P) \neq \epsilon(S)$. On peut donc supposer par exemple que $\epsilon(P) < \epsilon(S)$, et l'on considère

$$b := b(S) = \min \left\{ j \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } \frac{\nu(S) - \nu(\partial_j(S))}{j} = \epsilon(S) \right\}.$$

Alors pour tout entier non nul $j < b$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{\nu(S) - \nu(\partial_j S)}{j} &< \epsilon(S) \\
&= \epsilon \\
&= \frac{\nu(S) - \nu(\partial_b S)}{b}.
\end{aligned}$$

Autrement dit pour tout entier non nul $j < b$, on a :

$$\nu(\partial_j S) > \nu(S) - \frac{j}{b}(\nu(S) - \nu(\partial_b S)).$$

De plus, pour tout entier $j < b$, on a $b - j > 0$ et

$$\begin{aligned}
\frac{\nu(P) - \nu(\partial_{b-j} P)}{b-j} &\leq \epsilon(P) \\
&< \epsilon(S) \\
&= \frac{\nu(S) - \nu(\partial_b S)}{b}
\end{aligned}$$

c'est-à-dire que pour tout entier $j < b$, on a :

$$\begin{aligned}
\nu(\partial_{b-j} P) &> \nu(P) - \frac{b-j}{b}(\nu(S) - \nu(\partial_b S)) \\
&= \nu(P) + \left(\frac{j}{b} - 1\right)(\nu(S) - \nu(\partial_b S)).
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout entier non nul $j < b$, on a

$$\begin{aligned}
\nu(\partial_j(S) \partial_{b-j}(P)) &> \nu(SP) - (\nu(S) - \nu(\partial_b S)) \\
&= \nu(SP) - b\epsilon.
\end{aligned}$$

Or pour $j = 0$, on a

$$\begin{aligned}
\nu(\partial_j(S) \partial_{b-j}(P)) &= \nu(S \partial_b P) \\
&= \nu(S) + \nu(\partial_b P) \\
&> \nu(S) + \nu(P) + \left(\frac{0}{b} - 1\right)(\nu(S) - \nu(\partial_b S)).
\end{aligned}$$

Ainsi $\nu(S\partial_b P) > \nu(SP) - (\nu(S) - \nu(\partial_b S)) = \nu(SP) - b\epsilon$.

Il vient que pour tout entier $j < b$, on a

$$\nu(\partial_j(S)\partial_{b-j}(P)) > \nu(SP) - b\epsilon.$$

Pour finir, pour $j = b$, on a

$$\begin{aligned} \nu(\partial_j(S)\partial_{b-j}(P)) &= \nu(P\partial_b S) \\ &= \nu(P) + \nu(S) - b\epsilon(S) \\ &= \nu(SP) - b\epsilon. \end{aligned}$$

Ainsi, $\frac{\nu(PS) - \nu(\partial_b(PS))}{b} = \epsilon$, puis $\epsilon(PS) = \epsilon$ comme annoncé. \square

2.2.2. Polynômes clefs successeurs immédiats. Soient Q_1 et Q_2 deux polynômes clefs.

DÉFINITION 2.2.21. On dit que Q_2 est un *successeur immédiat* de Q_1 et l'on note $Q_1 < Q_2$ si $\epsilon(Q_1) < \epsilon(Q_2)$ et si Q_2 est de degré minimal pour cette propriété.

PROPOSITION 2.2.22. *Les assertions suivantes sont équivalentes.*

- (1) *Les polynômes Q_1 et Q_2 vérifient $Q_1 < Q_2$.*
- (2) *On a $\nu_{Q_1}(Q_2) < \nu(Q_2)$ et Q_2 est de degré minimal pour la propriété.*

DÉMONSTRATION. Montrons tout d'abord que

$$\epsilon(Q_1) < \epsilon(Q_2) \Rightarrow \nu_{Q_1}(Q_2) < \nu(Q_2).$$

Soit $b = b(Q_2) = \min \left\{ b \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } \frac{\nu(Q_2) - \nu(\partial_b Q_2)}{b} = \epsilon(Q_2) \right\}$.

On a

$$\begin{aligned} \epsilon(Q_1) < \epsilon(Q_2) &\Leftrightarrow b\epsilon(Q_1) < \nu(Q_2) - \nu(\partial_b Q_2) \\ &\Rightarrow b\epsilon(Q_1) < \nu(Q_2) - \nu_{Q_1}(\partial_b Q_2) \end{aligned}$$

car pour tout polynôme g , on a $\nu_{Q_1}(g) \leq \nu(g)$.

Or d'après le Lemme 2.2.12, $\nu_{Q_1}(Q_2) - \nu_{Q_1}(\partial_b Q_2) \leq b\epsilon(Q_1)$, donc

$$\nu_{Q_1}(Q_2) - \nu_{Q_1}(\partial_b Q_2) < \nu(Q_2) - \nu_{Q_1}(\partial_b Q_2).$$

Montrons maintenant que $\nu_{Q_1}(Q_2) < \nu(Q_2) \Rightarrow \epsilon(Q_1) < \epsilon(Q_2)$. Supposons par l'absurde que $\epsilon(Q_1) \geq \epsilon(Q_2)$. Alors $\deg(Q_1) \geq \deg(Q_2)$.

Si l'on a $\deg(Q_1) > \deg(Q_2)$, alors $\nu_{Q_1}(Q_2) = \nu(Q_2)$ et c'est absurde. Supposons donc Q_1 et Q_2 de même degré.

Soit $Q_2 = Q_1 + (Q_2 - Q_1)$ le Q_1 -développement de Q_2 .

Si $\nu(Q_1) \neq \nu(Q_2 - Q_1)$, alors

$$\nu(Q_2) = \min \{ \nu(Q_1), \nu(Q_2 - Q_1) \} = \nu_{Q_1}(Q_2)$$

et c'est absurde à nouveau.

Donc $\nu(Q_1) = \nu(Q_2 - Q_1) = \nu_{Q_1}(Q_2) < \nu(Q_2)$.

Or $\nu(Q_2) = \nu_{Q_2}(Q_2) \leq \nu_{Q_1}(Q_2)$ d'après la proposition 2.2.17.

On a là encore une absurdité.

Nous avons donc montré que $\epsilon(Q_1) < \epsilon(Q_2) \Leftrightarrow \nu_{Q_1}(Q_2) < \nu(Q_2)$.

Soit Q_2 de degré minimal pour la première propriété.

Supposons qu'il existe Q_3 de degré strictement inférieur à Q_2 tel que $\nu_{Q_1}(Q_3) < \nu(Q_3)$. Alors nous savons que $\epsilon(Q_1) < \epsilon(Q_3)$, ce qui est absurde par minimalité du degré de Q_2 pour cette propriété.

Donc nous avons montré $Q_1 < Q_2 \Rightarrow \nu_{Q_1}(Q_2) < \nu(Q_2)$ et Q_2 est de degré minimal pour cette propriété.

Soit donc maintenant Q_2 tel que $\nu_{Q_1}(Q_2) < \nu(Q_2)$ et Q_2 est de degré minimal pour cette propriété, et supposons qu'il existe Q_3 de degré strictement inférieur à Q_2 et tel que $\epsilon(Q_1) < \epsilon(Q_3)$. Par cette dernière propriété, il vient que $\nu_{Q_1}(Q_3) < \nu(Q_3)$, ce qui est absurde par minimalité du degré de Q_2 pour cette propriété.

Nous avons donc bien l'équivalence voulue. \square

PROPOSITION 2.2.23. *Soient Q_1 et Q_2 deux polynômes clefs,*

$$Q_2 = \sum_{j \in \Theta} q_j Q_1^j$$

le Q_1 -développement de Q_2 .

Les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) Les polynômes Q_1 et Q_2 vérifient $Q_1 < Q_2$.

(2) On a $\sum_{j \in S_{Q_1}(Q_2)} \text{in}_\nu(q_j Q_1^j) = 0$ avec Q_2 de degré minimal pour la propriété.

DÉMONSTRATION. Montrons tout d'abord que

$$Q_1 < Q_2 \Rightarrow \sum_{j \in S_{Q_1}(Q_2)} \text{in}_\nu(q_j Q_1^j) = 0.$$

Supposons $Q_1 < Q_2$. D'après la proposition 2.2.22, nous savons que $\nu_{Q_1}(Q_2) < \nu(Q_2)$. Donc par définition

$$\sum_{j \in S_{Q_1}(Q_2)} \text{in}_\nu(q_j Q_1^j) = 0.$$

Montrons maintenant que si $\sum_{j \in S_{Q_1}(Q_2)} \text{in}_\nu(q_j Q_1^j) = 0$ avec Q_2 de degré minimal pour la propriété, alors $Q_1 < Q_2$.

Supposons donc $\sum_{j \in S_{Q_1}(Q_2)} \text{in}_\nu(q_j Q_1^j) = 0$. Ainsi

$$\nu(Q_2) > \min_{j \in \Theta} \nu(q_j Q_1^j) = \nu_{Q_1}(Q_2),$$

puis $Q_2 > Q_1$ d'après la proposition 2.2.22. \square

REMARQUE 2.2.24. Soient $Q_1 < Q_2$ deux polynômes clefs successeurs immédiats et $Q_2 = \sum_{j \in \Theta} q_j Q_1^j$ le Q_1 -développement de Q_2 . On prend

$$\tilde{Q}_2 = \sum_{j \in S_{Q_1}(Q_2)} q_j Q_1^j.$$

Nous allons montrer que \tilde{Q}_2 est un polynôme clef successeur immédiat de Q_1 . Une fois cela fait, nous considérerons toujours des polynômes clefs successeurs immédiats « optimaux », c'est-à-dire que tous leurs termes dans leur développement selon les puissances du polynôme clef précédent sont de même valeur.

PROPOSITION 2.2.25. Soient $Q_1 < Q_2$ deux polynômes clefs successeurs immédiats et $Q_2 = \sum_{j \in \Theta} q_j Q_1^j$ le Q_1 -développement de Q_2 . On prend

$$\tilde{Q}_2 = \sum_{j \in S_{Q_1}(Q_2)} q_j Q_1^j$$

Alors \tilde{Q}_2 est un polynôme clef successeur immédiat de Q_1 .

DÉMONSTRATION. Tout d'abord, par définition, on a l'inégalité $\deg(\tilde{Q}_2) \leq \deg(Q_2)$. Montrons que cette inégalité est en fait une égalité.

On a $\sum_{j \in S_{Q_1}(Q_2)} \text{in}_\nu(q_j Q_1^j) = \sum_{j \in S_{Q_1}(\tilde{Q}_2)} \text{in}_\nu(q_j Q_1^j) = 0$, et comme Q_2 est de degré minimal pour cette propriété, on sait que son terme de plus haut degré fait partie de cette somme.

Il vient que $\deg_X(\tilde{Q}_2) = \deg_X(Q_2)$.

Montrons maintenant que $\epsilon(\tilde{Q}_2) > \epsilon(Q_1)$.

Comme $\sum_{j \in S_{Q_1}(\tilde{Q}_2)} \text{in}_\nu(q_j Q_1^j) = 0$, on a $\nu_{Q_1}(\tilde{Q}_2) < \nu(\tilde{Q}_2)$, et \tilde{Q}_2 est

toujours de degré minimal pour cette propriété. Ainsi $S_{Q_1}(\tilde{Q}_2) \neq \{0\}$ et pour tout entier strictement positif b , on a $\nu_{Q_1}(\partial_b \tilde{Q}_2) = \nu(\partial_b \tilde{Q}_2)$. D'après la proposition 2.2.13 et le corollaire 2.2.16, on a bien

$$\epsilon(\tilde{Q}_2) > \epsilon(Q_1).$$

Supposons acquis le fait que \tilde{Q}_2 soit un polynôme clef. Comme $\deg(\tilde{Q}_2) = \deg(Q_2)$, on sait que \tilde{Q}_2 est de degré minimal pour la propriété $\epsilon(\tilde{Q}_2) > \epsilon(Q_1)$, et ainsi $Q_1 < \tilde{Q}_2$.

Il reste donc à montrer que \tilde{Q}_2 est un polynôme clef.

Supposons par l'absurde que ce n'en est pas un. Alors il existe un polynôme $P \in K[X]$ tel que

$$\epsilon(P) \geq \epsilon(\tilde{Q}_2)$$

et

$$\deg_X(P) < \deg_X(\tilde{Q}_2).$$

On prend P de degré minimal pour cette propriété. On peut bien sûr supposer P unitaire. Montrons qu'alors P est un polynôme clef.

Soit donc $S \in K[X]$ tel que $\epsilon(S) \geq \epsilon(P)$. Alors $\epsilon(S) \geq \epsilon(\tilde{Q}_2)$. Si $\deg_X(S) \geq \deg_X(\tilde{Q}_2)$, alors $\deg_X(S) > \deg_X(P)$ et c'est gagné. Supposons donc que nous sommes dans le deuxième cas et ainsi que $\deg_X(S) < \deg_X(\tilde{Q}_2)$.

On a donc $\epsilon(S) \geq \epsilon(\tilde{Q}_2)$ et $\deg_X(S) < \deg_X(\tilde{Q}_2)$. Par minimalité du degré de P pour cette propriété, on a $\deg_X(S) \geq \deg_X(P)$, et ainsi P est bien un polynôme clef.

Donc il existe un polynôme clef P tel que

$$\epsilon(P) \geq \epsilon(\tilde{Q}_2)$$

et

$$\deg_X(P) < \deg_X(\tilde{Q}_2).$$

Comme $\epsilon(\tilde{Q}_2) > \epsilon(Q_1)$, on a également $\epsilon(P) > \epsilon(Q_1)$. Par minimalité du degré de Q_2 parmi les polynômes clefs vérifiant cette inégalité, on a $\deg_X(Q_2) \leq \deg_X(P) < \deg_X(\tilde{Q}_2)$ ce qui est absurde par égalité des degrés de Q_2 et \tilde{Q}_2 . Le polynôme \tilde{Q}_2 est donc bien un polynôme clef. \square

DÉFINITION 2.2.26. Soient Q_1 et Q_2 deux polynômes clefs tels que $Q_1 < Q_2$. On dit que Q_2 est un *successeur immédiat optimal* de Q_1 si tous les termes de son Q_1 -développement ont même valeur.

REMARQUE 2.2.27. La proposition 2.2.25 montre comment associer à tout successeur immédiat Q_2 de Q_1 un successeur immédiat optimal \tilde{Q}_2 .

Ainsi, si Q_1 n'est pas maximal dans l'ensemble des polynômes clefs Λ , il admet un successeur immédiat optimal.

Soit $Q \in \Lambda$ un polynôme clef quelconque. On note

$$M_Q := \{P \in \Lambda \text{ tel que } Q < P\}.$$

DÉFINITION 2.2.28. On suppose que M_Q n'a pas d'élément maximal et que pour tout élément $P \in M_Q$, on a $\deg_X(P) = \deg_X(Q)$.

On suppose également qu'il existe un polynôme clef $Q' \in \Lambda$ tel que $\epsilon(Q') > \epsilon(M_Q)$.

On appelle *polynôme clef successeur immédiat limite* de Q tout polynôme Q' de degré minimal vérifiant cette propriété, et on note $Q <_{\text{lim}} Q'$.

PROPOSITION 2.2.29. Soient Q et Q' deux polynômes clefs tels que $\epsilon(Q) < \epsilon(Q')$. Alors il existe une suite $Q_1 = Q, \dots, Q_h = Q'$ où pour tout indice i , le polynôme Q_{i+1} est soit un polynôme clef successeur immédiat de Q_i soit un polynôme clef successeur immédiat limite de Q_i .

DÉMONSTRATION. On commence par regarder $M_Q = M_{Q_1}$. Si cet ensemble a un maximum, on note ce maximum Q_2 . Si Q' est un polynôme clef successeur immédiat de Q , c'est terminé. Donc on suppose que le polynôme Q' n'est pas un successeur immédiat de Q , ce que l'on note $Q \not\prec Q'$. En résumé on a :

$$\begin{cases} Q < Q_2 \\ \epsilon(Q) < \epsilon(Q') \\ Q \not\prec Q' \end{cases}$$

et ainsi par minimalité du degré de Q_2 on a $\deg_X(Q_2) < \deg_X(Q')$. Mais Q' étant un polynôme clef, on a $\epsilon(Q_2) < \epsilon(Q')$.

Ainsi, on a

$$\begin{cases} Q = Q_1 < Q_2 \\ \epsilon(Q) < \epsilon(Q_2) < \epsilon(Q') \end{cases}$$

et comme $Q < Q_2$, on sait que $\deg_X(Q) \leq \deg_Q(Q_2)$.

On recommence alors le procédé tant que M_{Q_i} a un maximum. Supposons qu'il existe un indice i tel que M_{Q_i} n'a pas de maximum.

Supposons que $\epsilon(M_{Q_i}) \not\prec \epsilon(Q')$. Donc il existe $g_i \in M_{Q_i}$ tel que $\epsilon(g_i) \geq \epsilon(Q')$.

Comme Q' est un polynôme clef, on sait que $\deg_X(g_i) \geq \deg_X(Q')$.

Donc on a :

$$\begin{cases} \epsilon(Q_{i-1}) < \epsilon(Q') \\ Q_{i-1} < g_i \\ \deg_X(Q') \leq \deg_X(g_i) \end{cases}$$

par définition des successeurs immédiats, on a $Q_{i-1} < Q'$ et on pose $Q_i = Q'$, ce qui conclut la preuve.

Traitons donc le cas $\epsilon(Q') > \epsilon(M_{Q_i})$.

Comme $\deg_X(Q) \leq \deg_X(Q_i) < \deg_Q(Q')$ pour tout indice i , il existe un rang N à partir duquel pour tout indice $j \geq N$, on a

$$\deg_X(Q_j) = \deg_X(Q_{j+1}) < \deg_X(Q').$$

Soit $P \in M_{Q_N}$. Par construction, $\epsilon(P) \leq \epsilon(Q_{N+1}) < \epsilon(Q')$. Si le polynôme Q' n'est pas de degré minimal pour cette propriété, il existe alors un polynôme clef P' successeur immédiat limite de Q_N , de degré strictement inférieur à celui de Q' . Donc on a

$$\deg_X(Q_{N+1}) < \deg_X(P') < \deg_X(Q').$$

On change alors Q_{N+1} en P' et on réitère le processus, qui s'arrête puisque la suite des degrés croît alors strictement.

Sinon, Q' est de degré minimal parmi tous les polynômes clefs tels que $\epsilon(M_{Q_N}) < \epsilon(Q')$, il est alors lui-même un polynôme clef successeur immédiat limite de Q_N et le processus s'arrête à $Q_{N+1} = Q'$.

Dans tous les cas, on construit ainsi une suite finie de polynômes clefs qui commence à Q , finit à Q' et telle que pour tout indice i , le polynôme Q_{i+1} est soit successeur immédiat de Q_i , soit successeur immédiat limite de Q_i , ce qui conclut la preuve. \square

PROPOSITION 2.2.30. *Soient Q et Q' deux polynômes clefs tels que $\epsilon(Q) < \epsilon(Q')$. Alors il existe une suite $Q_1 = Q, \dots, Q_h = Q'$ où pour tout indice i , le polynôme Q_{i+1} est soit un polynôme clef successeur immédiat optimal de Q_i soit un polynôme clef successeur immédiat limite de Q_i .*

DÉMONSTRATION. Soit Q_2 un successeur immédiat optimal de Q . On regarde $M_Q = M_{Q_1}$. Si cet ensemble a un maximum, on note ce maximum P .

Si $\epsilon(Q_2) = \epsilon(P)$, on prend $P = Q_2$. Sinon, $\epsilon(Q_2) < \epsilon(P)$. Comme P et Q_2 sont tous deux des successeurs immédiats de Q , ils sont de même degré.

Ainsi P est un polynôme clef successeur immédiat de Q_2 , de même degré que Q_2 . Le polynôme P est donc un successeur immédiat optimal de Q_2 .

Ainsi on pose $Q_3 = P$.

De fait, on a ainsi une suite finie de polynômes clefs successeurs immédiats optimaux qui commence à Q et finit à $P = \max\{M_Q\}$.

On recommence alors le procédé tant que M_{Q_i} a un maximum. Supposons qu'il existe un indice i tel que M_{Q_i} n'a pas de maximum.

Alors on procède exactement comme dans la preuve de la Proposition 2.2.29 pour conclure. \square

LEMME 2.2.31. *Soient Q et Q' deux polynômes clefs tels que $Q < Q'$ et on note $Q' = \sum_{j=0}^m q_j Q^j$ le Q -développement de Q' . Alors $q_m = 1$.*

DÉMONSTRATION. Comme $\epsilon(Q) < \epsilon(Q')$, on sait d'après la Proposition 2.2.23 que $\sum_{j=0}^m \text{in}_\nu(q_j Q^j) = 0$. De fait on a

$$\text{in}_\nu(q_m) \text{in}_\nu(Q)^m + \cdots + \text{in}_\nu(q_1) \text{in}_\nu(Q) + \text{in}_\nu(q_0) = 0.$$

Ainsi, comme $\text{in}_\nu(q_m) \neq 0$, il vient

$$(2.2.2) \quad \text{in}_\nu(Q)^m + \cdots + \frac{\text{in}_\nu(q_1)}{\text{in}_\nu(q_m)} \text{in}_\nu(Q) + \frac{\text{in}_\nu(q_0)}{\text{in}_\nu(q_m)} = 0.$$

On pose $a := \deg_X(Q)$ et on considère $G_{<a}$ la sous-algèbre de $\text{gr}_\nu(K[X])$ engendrée par les formes initiales de tous les polynômes de degré strictement inférieurs à a .

Ainsi $G_{<a}$ est une algèbre saturée, et ainsi tous les coefficients de la forme $\frac{\text{in}_\nu(q_i)}{\text{in}_\nu(q_m)}$ de l'équation (2.2.2) peuvent être représentés par des polynômes, dont on note h_i des relèvements, de degrés strictement inférieurs à a .

L'élément $\text{in}_\nu(Q)$ est donc solution d'une équation homogène entière à coefficients dans $G_{<a}$ et dont le coefficient du terme de plus haut degré est 1.

On considère le polynôme $\tilde{Q} = Q^m + \sum_{j=0}^{m-1} h_j Q^j$, avec par hypothèse $\deg_X(\tilde{Q}) \leq \deg_X(Q')$. Par construction on a bien

$$\text{in}_\nu(Q)^m + \sum_{j=0}^{m-1} \text{in}_\nu(h_j) \text{in}_\nu(Q)^j = 0$$

et d'après la preuve de la proposition 2.2.23, on a ainsi $\epsilon(\tilde{Q}) > \epsilon(Q)$.

Par minimalité du degré de Q' pour la propriété, si on montre que \tilde{Q} est un polynôme clef, alors on a $\deg_X(Q') = \deg_X(\tilde{Q})$ et ainsi $q_m = 1$.

Montrons donc que \tilde{Q} est un polynôme clef.

Supposons par l'absurde que ça n'en est pas un. Alors il existe un polynôme P tel que $\epsilon(P) \geq \epsilon(\tilde{Q})$ et $\deg_X(P) < \deg_X(\tilde{Q})$. On choisit P unitaire et de degré minimal pour cette propriété. Montrons que P est un polynôme clef.

Soit donc S un polynôme tel que $\epsilon(S) \geq \epsilon(P)$. Ainsi $\epsilon(S) \geq \epsilon(\tilde{Q})$.

Si $\deg_X(S) \geq \deg_X(\tilde{Q})$, alors, comme $\deg_X(P) < \deg_X(\tilde{Q})$, c'est terminé.

Supposons donc que $\deg_X(S) < \deg_X(\tilde{Q})$. Ainsi $\epsilon(S) \geq \epsilon(\tilde{Q})$ et $\deg_X(S) < \deg_X(\tilde{Q})$, puis par minimalité du degré de P pour cette propriété, $\deg_X(S) \geq \deg_X(P)$ et c'est terminé.

Donc il existe un polynôme clef P tel que l'on ait $\epsilon(P) \geq \epsilon(\tilde{Q})$ et $\deg_X(P) < \deg_X(\tilde{Q})$.

Comme $\epsilon(\tilde{Q}) > \epsilon(Q)$, il vient que $\epsilon(P) > \epsilon(Q)$.

On a donc un polynôme clef P tel que $\epsilon(P) > \epsilon(Q)$. Par minimalité du degré de Q' pour cette propriété, on sait que $\deg_X(Q') \leq \deg_X(P)$. Or $\deg_X(P) < \deg_X(\tilde{Q})$, ce qui implique que $\deg_X(Q') < \deg_X(\tilde{Q})$, ce qui est absurde.

Ainsi \tilde{Q} est bien un polynôme clef. \square

PROPOSITION 2.2.32. Soient Q et Q' deux polynômes clefs tels que

$$\epsilon(Q) < \epsilon(Q'),$$

c et c' deux polynômes de degrés strictement inférieurs à $\deg_X Q'$ et j et j' deux entiers tels que :

$$\begin{cases} \nu_Q(c) = \nu(c) \\ \nu_Q(c') = \nu(c') \\ j \leq j' \\ \nu_Q(c(Q')^j) \leq \nu_Q(c'(Q')^{j'}) \end{cases}$$

alors on a :

$$\nu(c(Q')^j) \leq \nu(c'(Q')^{j'})$$

Si de plus $j < j'$ ou $\nu_Q(c(Q')^j) < \nu_Q(c'(Q')^{j'})$, alors

$$\nu(c(Q')^j) < \nu(c'(Q')^{j'}).$$

DÉMONSTRATION. On sait que $\nu_Q(Q') \leq \nu(Q')$, ainsi

$$\nu(Q') - \nu_Q(Q') \geq 0.$$

Comme on a supposé que $j \leq j'$, on a

$$j(\nu(Q') - \nu_Q(Q')) \leq j'(\nu(Q') - \nu_Q(Q')).$$

De plus, on sait que $\nu_Q(c(Q')^j) \leq \nu_Q(c'(Q')^{j'})$, il vient que

$$\nu_Q(c(Q')^j) + j(\nu(Q') - \nu_Q(Q')) \leq \nu_Q(c'(Q')^{j'}) + j'(\nu(Q') - \nu_Q(Q')).$$

D'où l'inégalité

$$\nu_Q(c) + j\nu_Q(Q') + j\nu(Q') - j\nu_Q(Q') \leq \nu_Q(c') + j'\nu_Q(Q') + j'\nu(Q') - j'\nu_Q(Q'),$$

c'est-à-dire $\nu_Q(c) + j\nu(Q') \leq \nu_Q(c') + j'\nu(Q')$.

Or $\nu_Q(c) = \nu(c)$ et $\nu_Q(c') = \nu(c')$, donc $\nu(c(Q')^j) \leq \nu(c'(Q')^{j'})$.

Si de plus $j < j'$ ou $\nu_Q(c(Q')^j) < \nu_Q(c'(Q')^{j'})$, alors on a immédiatement $\nu(c(Q')^j) < \nu(c'(Q')^{j'})$. \square

LEMME 2.2.33. Soient Q et Q' deux polynômes clefs tels que

$$\epsilon(Q) < \epsilon(Q')$$

et soit $f \in K[X]$ dont le Q' -développement est $f = \sum_{j=0}^r f_j(Q')^j$. Alors

$$\nu_Q(f) = \min_{0 \leq j \leq r} \left\{ \nu_Q(f_j(Q')^j) \right\}.$$

Et si l'on pose

$$T_{Q,Q'}(f) := \left\{ j \in \{0, \dots, r\} \text{ tels que } \nu_Q(f_j(Q')^j) = \nu_Q(f) \right\},$$

alors on a :

$$\text{in}_{\nu_Q}(f) = \sum_{j \in T_{Q,Q'}(f)} \text{in}_{\nu_Q}(f_j(Q')^j).$$

DÉMONSTRATION. Uniquement dans cette preuve, nous noterons

$$\nu'(f) := \min_{0 \leq j \leq r} \left\{ \nu_Q(f_j(Q')^j) \right\}$$

et

$$T'(f) := \left\{ j \in \{0, \dots, r\} \text{ tels que } \nu_Q(f_j(Q')^j) = \nu'(f) \right\}.$$

Montrons que $\nu_Q(f) = \nu'(f)$.

Tout d'abord, on a

$$\begin{aligned} \nu_Q \left(\sum_{j \in T'(f)} f_j(Q')^j \right) &\geq \min_{j \in T'(f)} \nu_Q(f_j(Q')^j) \\ &= \min_{j \in T'(f)} \nu'(f) \\ &= \nu'(f). \end{aligned}$$

Posons maintenant $b' = \max T'(f)$ et $b = \delta_Q(f_{b'})$. Autrement dit, $b = \max \{j \in \{0, \dots, n\} \text{ tel que } \nu(a_j Q^j) = \nu_Q(f_{b'})\}$ où $f_{b'} = \sum_{j=0}^n a_j Q^j$.

Ainsi, l'élément $\sum_{j \in T'(f)} f_j(Q')^j$ contient le terme

$$a_b c_{\deg_Q Q'} Q^{b+b' \deg_Q Q'}.$$

Puis pour tout $j \in \{0, \dots, r\}$ tel que $f_j \neq 0$, on a :

$$\begin{aligned}
\nu_Q \left(f_j (Q')^j \right) &\geq \min_{0 \leq j \leq r} \left\{ \nu_Q \left(f_j (Q')^j \right) \right\} \\
&= \nu' (f) \\
&= \nu_Q \left(f_i (Q')^i \right)
\end{aligned}$$

et ce pour tout indice i appartenant à $T' (f)$. Donc en particulier,

$$\begin{aligned}
\nu_Q \left(f_j (Q')^j \right) &\geq \nu_Q \left(f_{b'} (Q')^{b'} \right) \\
&= \nu_Q (f_{b'}) + \nu_Q \left((Q')^{b'} \right) \\
&= \nu \left(a_b Q^b \right) + \nu_Q \left((Q')^{b'} \right) \\
&= \nu \left(a_b Q^b \right) + \nu \left(c_{\deg_Q Q'} Q^{b' \deg_Q Q'} \right) \\
&= \nu \left(a_b c_{\deg_Q Q'} Q^{b+b' \deg_Q Q'} \right)
\end{aligned}$$

avec inégalité stricte si $j \notin T' (f)$.

Donc

$$\nu \left(a_b c_{\deg_Q Q'} Q^{b+b' \deg_Q Q'} \right) = \nu' (f)$$

et

$$\nu_Q \left(\sum_{j \notin T' (f)} f_j (Q')^j \right) > \nu' (f).$$

Par maximalité de b et b' , le terme $a_b c_{\deg_Q Q'} Q^{b+b' \deg_Q Q'}$ ne peut pas être compensé et ainsi $\nu_Q (f) = \nu \left(a_b c_{\deg_Q Q'} Q^{b+b' \deg_Q Q'} \right) = \nu' (f)$, c'est-à-dire que $\nu_Q (f) = \min_{0 \leq j \leq r} \left\{ \nu_Q \left(f_j (Q')^j \right) \right\}$. Ainsi on a aussi

$$T' (f) = T_{Q, Q'} (f).$$

Il vient $\sum_{j \in T' (f)} \text{in}_{\nu_Q} \left(f_j (Q')^j \right)$ est un élément non nul de G_{ν_Q} , égal à $\text{in}_{\nu_Q} (f)$, ce qui conclut la preuve. \square

COROLLAIRE 2.2.34. *Soient Q et Q' deux polynômes clefs tels que*

$$\epsilon (Q) < \epsilon (Q')$$

et soient

$$f = \sum_{j=0}^r f_j (Q')^j = \sum_{j=0}^n a_j Q^j$$

les Q' et Q -développements d'un élément $f \in K[X]$. On pose

$$\theta := \min T_{Q, Q'} (f) = \min \left\{ j \in \{0, \dots, r\} \text{ tels que } \nu_Q \left(f_j (Q')^j \right) = \nu_Q (f) \right\}$$

et l'on suppose que $\nu_Q \left(f_{\delta_{Q'} (f)} \right) = \nu \left(f_{\delta_{Q'} (f)} \right)$ et que $\nu_Q (f_\theta) = \nu (f_\theta)$.

Alors :

$$(1) \delta_{Q'} (f) \deg_Q Q' \leq \delta_Q (f), \text{ et donc en particulier } \delta_{Q'} (f) \leq \delta_Q (f).$$

(2) Si $\delta_Q(f) = \delta_{Q'}(f)$, on pose $\delta := \delta_Q(f)$ et alors

$$\deg_Q Q' = 1,$$

$$T_{Q,Q'}(f) = \{\delta\}$$

et

$$\text{in}_{\nu_Q}(f) = \left(\text{in}_{\nu_Q} a_\delta\right) \left(\text{in}_{\nu_Q} Q'\right)^\delta.$$

DÉMONSTRATION. Montrons tout d'abord le point 1.

D'après la preuve du lemme précédent, on sait que

$$\theta \deg_Q Q' \leq \delta_Q(f).$$

De plus,

$$\nu_Q(f_{\delta_{Q'}(f)}) = \nu(f_{\delta_{Q'}(f)}),$$

$$\nu_Q(f_\theta) = \nu(f_\theta).$$

Par définition de $\delta = \delta_{Q'}(f)$, on a $\nu(f_\delta(Q')^\delta) \leq \nu(f_\theta(Q')^\theta)$. On sait d'après le Lemme 2.2.33 que $\nu_Q(f) = \min_{0 \leq j \leq r} \{\nu_Q(f_j(Q')^j)\}$, et comme $\theta = \min T_{Q,Q'}(f)$, on a

$$\nu_Q(f_\theta(Q')^\theta) = \nu_Q(f) = \min_{0 \leq j \leq r} \{\nu_Q(f_j(Q')^j)\}.$$

Ainsi $\nu_Q(f_\theta(Q')^\theta) \leq \nu_Q(f_\delta(Q')^\delta)$.

Alors, comme $\nu_Q(f_\theta) = \nu(f_\theta)$ et $\nu_Q(f_\delta) = \nu(f_\delta)$:

$$\begin{aligned} \nu_Q(f_\theta(Q')^\theta) &\leq \nu_Q(f_\delta(Q')^\delta) \\ \Leftrightarrow \nu_Q(f_\theta) + \theta \nu_Q(Q') &\leq \nu_Q(f_\delta) + \delta \nu_Q(Q') \\ \Leftrightarrow \nu(f_\theta) + \theta \nu_Q(Q') &\leq \nu(f_\delta) + \delta \nu_Q(Q'). \end{aligned}$$

Supposons que l'on ait égalité sur la valuation ν , c'est-à-dire que $\nu(f_\theta(Q')^\theta) = \nu(f_\delta(Q')^\delta)$. Alors $\nu(f_\theta) = \nu(f_\delta) + \delta \nu_Q(Q') - \theta \nu_Q(Q')$ et

$$\begin{aligned} \nu_Q(f_\theta(Q')^\theta) &\leq \nu_Q(f_\delta(Q')^\delta) \\ \Leftrightarrow \nu(f_\delta) + \delta \nu_Q(Q') - \theta \nu_Q(Q') + \theta \nu_Q(Q') &\leq \nu(f_\delta) + \delta \nu_Q(Q') \\ \Leftrightarrow (\delta - \theta) \nu_Q(Q') &\leq (\delta - \theta) \nu_Q(Q'). \end{aligned}$$

Comme on sait que $\epsilon(Q) < \epsilon(Q')$, d'après la preuve de la proposition 2.2.22 on sait que $\nu_Q(Q') < \nu(Q')$ et ainsi $\delta - \theta \leq 0$, autrement dit $\delta \leq \theta$.

Sinon on a donc inégalité stricte, c'est-à-dire $\nu(f_\delta(Q')^\delta) < \nu(f_\theta(Q')^\theta)$.

On a alors les quatre hypothèses :

$$\begin{cases} \nu_Q(f_\theta) = \nu(f_\theta) \\ \nu_Q(f_\delta) = \nu(f_\delta) \\ \nu_Q(f_\theta(Q')^\theta) \leq \nu_Q(f_\delta(Q')^\delta) \\ \nu(f_\delta(Q')^\delta) < \nu(f_\theta(Q')^\theta) \end{cases}$$

et par contraposée de la Proposition 2.2.32, on en déduit que $\delta < \theta$.

Donc dans tous les cas, on a $\delta \leq \theta$. Ainsi comme $\theta \deg_Q Q' \leq \delta_Q(f)$, on sait que $\delta \deg_Q Q' \leq \delta_Q(f)$ comme attendu, et donc en particulier également que $\delta_{Q'}(f) \leq \delta_Q(f)$.

Montrons maintenant le point 2.

Supposons donc $\delta_{Q'}(f) = \delta_Q(f) = \delta$. Comme on vient de voir que $\delta_{Q'}(f) \deg_Q Q' \leq \delta_Q(f)$, il vient que $\deg_Q Q' = 1$, et ainsi $Q' = Q + b$ avec b un polynôme de degré strictement inférieur à celui de Q .

On sait d'après la preuve du point 1 que $\delta \leq \theta$. De plus, on sait que $\theta \deg_Q Q' \leq \delta_Q(f) = \delta$, autrement dit, $\theta \leq \delta$ puisque $\deg_Q Q' = 1$.

Il vient que $\delta \leq \theta \leq \delta$, c'est-à-dire que $\theta = \delta = \min T_{Q,Q'}(f)$. Reste à montrer que pour tout indice $j > \delta$, on a $j \notin T_{Q,Q'}(f)$, autrement dit on a

$$\nu_Q(f_j(Q')^j) > \nu_Q(f) = \min_{0 \leq i \leq r} \{\nu_Q(f_i(Q')^i)\}.$$

On aura alors bien que $T_{Q,Q'}(f) = \{\delta\}$.

Soit donc $j > \delta$. Par définition de $\delta_Q(f)$ et $\delta_{Q'}(f)$, on sait que $\nu(f_j(Q')^j) > \nu_{Q'}(f)$ et $\nu(a_j Q^j) > \nu_Q(f)$.

De plus, comme $\delta \in T_{Q,Q'}(f)$, on a $\nu_Q(f_\delta(Q')^\delta) = \nu_Q(f)$, ainsi nous voulons montrer que $\nu_Q(f_j(Q')^j) > \nu_Q(f_\delta(Q')^\delta)$ pour tout indice $j \in \{\delta + 1, \dots, r\}$.

On sait que :

$$\begin{cases} \nu(f_\delta(Q')^\delta) = \nu_{Q'}(f) < \nu(f_j(Q')^j) \\ \nu_Q(f_\delta) = \nu(f_\delta) & \text{car } \deg_X(f_\delta) < \deg_X(Q') = \deg_X(Q) \\ \nu_Q(f_j) = \nu(f_j) & \text{car } \deg_X(f_j) < \deg_X(Q') = \deg_X(Q) \\ \delta < j \end{cases}$$

D'après la contraposée de la Proposition 2.2.32, il vient que

$$\nu_Q(f_\delta(Q')^\delta) < \nu_Q(f_j(Q')^j)$$

comme attendu.

Donc on a bien $T_{Q,Q'}(f) = \{\delta\}$.

D'après le Lemme 2.2.33, il vient que

$$\begin{aligned} \text{in}_{\nu_Q}(f) &= \sum_{j \in T_{Q, Q'}(f)} \text{in}_{\nu_Q}(f_j(Q')^j) \\ &= \text{in}_{\nu_Q}(f_\delta(Q')^\delta) \\ &= \text{in}_{\nu_Q}(f_\delta) \left(\text{in}_{\nu_Q}(Q') \right)^\delta. \end{aligned}$$

□

THÉORÈME 2.2.35. *Soient Q et Q' deux polynômes clefs tels que*

$$\epsilon(Q) < \epsilon(Q')$$

On rappelle que $\text{car}(k_\nu) = 0$. Si Q' est un polynôme clef successeur immédiat limite de Q , alors $\delta_Q(Q') = 1$.

DÉMONSTRATION. Nous allons raisonner par l'absurde et supposer que $\delta_Q(Q') > 1$. Parmi tous les couples (Q, Q') tels que Q' soit un successeur immédiat limite de Q et tels que $\delta_Q(Q') > 1$, on choisit Q et Q' de telle sorte que $\deg(Q') - \deg(Q)$ soit minimal.

D'après la définition de successeur immédiat limite, pour toute suite de polynômes clefs successeurs immédiats $(Q_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ avec $Q_1 = Q$, on a $Q_i \neq Q'$ pour tout indice non nul i . Par définition des polynômes clefs limites, et par hypothèse, on sait que $\deg(Q') - \deg(Q)$ est minimal pour cette propriété.

Imaginons que l'on trouve un polynôme \tilde{Q} tel que

$$\epsilon(Q) < \epsilon(\tilde{Q}) < \epsilon(Q')$$

et $\deg(Q) < \deg(\tilde{Q}) < \deg(Q')$.

Alors, par minimalité de $\deg(Q') - \deg(Q)$, on sait qu'il existe une suite finie de polynômes clefs successeurs immédiats entre Q et \tilde{Q} et qu'il existe une suite finie de polynômes clefs successeurs immédiats entre \tilde{Q} et Q' . Ainsi, on a une suite finie de polynômes clefs successeurs immédiats entre Q et Q' , ce qui donne la contradiction.

Ainsi, s'il existe un polynôme clef tel \tilde{Q} tel que

$$\epsilon(Q) < \epsilon(\tilde{Q}) < \epsilon(Q')$$

et $\deg(\tilde{Q}) < \deg(Q')$, alors on a $\deg(Q) = \deg(\tilde{Q})$.

Soit donc \tilde{Q} un tel polynôme clef. On a $\tilde{Q} := Q - a$ où a est un polynôme de degré strictement inférieur à celui de Q .

Comme $\epsilon(Q) < \epsilon(\tilde{Q})$, d'après la Proposition 2.2.23, on sait que $\text{in}_\nu(Q) = \text{in}_\nu(a)$.

On considère également $\sum_{j=0}^n a_j Q^j$ le Q -développement de Q' . On peut supposer que $\delta_Q(Q') = \delta_{\tilde{Q}}(Q')$ et on pose $\delta := \delta_Q(Q')$.

D'après le Corollaire 2.2.34, on sait que $\text{in}_{\nu_Q}(Q') = \text{in}_{\nu_Q}(a_\delta) \text{in}_{\nu_Q}(\tilde{Q})^\delta$. Autrement dit $\text{in}_{\nu_Q}(Q') = \text{in}_{\nu_Q}(a_\delta) \text{in}_{\nu_Q}(Q - a)^\delta$.

De plus, $\partial Q' = \sum_{j=0}^n [\partial(a_j) Q^j + a_j j Q^{j-1} \partial Q]$.

On va tout d'abord montrer que les termes $\partial(a_j) Q^j$ n'interviennent pas dans $\text{in}_\nu(\partial Q')$. Soit donc $j \in \{0, \dots, n\}$ quelconque.

On a

$$\begin{aligned} \nu_Q(\partial a_j) &= \nu(\partial a_j) \\ &\geq \nu(a_j) - \epsilon(a_j). \end{aligned}$$

Or Q est un polynôme clef et a_j est de degré strictement inférieur à celui de Q puisque c'est un coefficient d'un Q -développement. Ainsi $\epsilon(a_j) < \epsilon(Q)$.

Il vient

$$\nu_Q(\partial a_j) > \nu(a_j) - \epsilon(Q) = \nu_Q(a_j) - \epsilon(Q).$$

D'après la preuve de la Proposition 2.2.13, on sait que, comme nous sommes en caractéristique nulle,

$$\nu_Q(Q) - \nu_Q(\partial Q) = \epsilon(Q).$$

Ainsi $\nu_Q(\partial a_j) > \nu_Q(a_j) - \nu_Q(Q) + \nu_Q(\partial Q)$. De fait,

$$\nu_Q(\partial a_j) + \nu_Q(Q) > \nu_Q(a_j) + \nu_Q(\partial Q).$$

Autrement dit, $\nu_Q(Q \partial a_j) > \nu_Q(a_j \partial Q)$, et en ajoutant $\nu_Q(Q^{j-1})$ de chaque côté de l'inégalité, on obtient :

$$\nu_Q(Q^j \partial a_j) > \nu_Q(a_j Q^{j-1} \partial Q) = \nu_Q(j a_j Q^{j-1} \partial Q).$$

On a donc

$$\text{in}_{\nu_Q}(\partial Q') = \text{in}_{\nu_Q} \left(\sum_{j=1}^n [j a_j Q^{j-1} \partial Q] \right).$$

Même si l'expression $\sum_{j=1}^n [j a_j Q^{j-1} \partial Q]$ n'est pas un Q -développement, comme a_j et ∂Q sont de degrés strictement inférieurs à celui de Q en caractéristique nulle, d'après le Lemme 2.2.6 la ν_Q -forme initiale de $a_j \partial Q$ est égale à celle du reste de sa division euclidienne par Q , ainsi nous conservons cette écriture et la considérons comme un Q -développement.

Montrons maintenant que $\delta_Q(\partial Q') = \delta - 1$.

Remplacer Q par \tilde{Q} dans le calcul de la forme initiale de Q' par rapport à Q (respectivement \tilde{Q}) ne change pas le calcul, et on suppose que δ se stabilise à partir de Q . Ainsi, si $\delta_Q(\partial Q') = \delta - 1$, on aura alors également $\delta_{\tilde{Q}}(\partial Q') = \delta - 1$.

Soit $j > \delta$. Montrons donc dans un premier temps que

$$\nu_Q(ja_jQ^{j-1}\partial Q) > \nu_Q(\delta a_\delta Q^{\delta-1}\partial Q).$$

Autrement dit, que

$$\nu_Q(ja_jQ^{j-1}) > \nu_Q(\delta a_\delta Q^{\delta-1}).$$

Or par définition de δ , on a $\nu_Q(a_jQ^j) > \nu_Q(a_\delta Q^\delta)$. Ainsi,

$$\nu_Q(a_jQ^{j-1}) > \nu_Q(a_\delta Q^{\delta-1})$$

puis $\nu_Q(ja_jQ^{j-1}) > \nu_Q(\delta a_\delta Q^{\delta-1})$ comme attendu.

Reste à montrer que la valeur de terme $\delta - 1$ est bien minimale.

Soit $j < \delta$. On sait que $\nu_Q(a_jQ^j) = \nu_Q(a_\delta Q^\delta)$, ainsi

$$\nu_Q(a_jQ^{j-1}\partial Q) = \nu_Q(a_\delta Q^{\delta-1}\partial Q).$$

Il vient $\nu_Q(ja_jQ^{j-1}\partial Q) = \nu_Q(\delta a_\delta Q^{\delta-1}\partial Q)$ puisque nous sommes en caractéristique nulle.

On a donc bien $\delta_Q(\partial Q') = \delta_{\tilde{Q}}(\partial Q') = \delta - 1$. D'après le Corollaire 2.2.34, il vient :

$$\text{in}_{\nu_Q}(\partial Q') = \text{in}_{\nu_Q}(\delta a_\delta \partial Q) \text{in}_{\nu_Q}(\tilde{Q})^{\delta-1}.$$

Autrement dit

$$\text{in}_{\nu_Q}(\partial Q') = \delta \text{in}_{\nu_Q}(a_\delta \partial Q) \text{in}_{\nu_Q}(Q - a)^{\delta-1}.$$

On sait que $\nu_Q(Q - a) < \nu(Q - a)$, ainsi, comme $\delta > 1$,

$$\nu_Q(\delta a_\delta \partial Q (Q - a)^{\delta-1}) < \nu(\delta a_\delta \partial Q (Q - a)^{\delta-1}).$$

C'est-à-dire que l'image par $\varphi: \text{gr}_{\nu_Q}K[x] \rightarrow \text{gr}_\nu K[x]$ de

$$\text{in}_{\nu_Q}(\delta a_\delta \partial Q (Q - a)^{\delta-1})$$

est nulle. Ainsi, l'image par φ de $\text{in}_{\nu_Q}(\partial Q')$ est nulle, et donc

$$\nu_Q(\partial Q') < \nu(\partial Q').$$

D'après la preuve de la Proposition 2.2.22, on a $\epsilon(Q) < \epsilon(\partial Q')$. Mais on sait que $\deg(\partial Q') < \deg(Q')$, et comme Q' est un polynôme clef, il vient $\epsilon(\partial Q') < \epsilon(Q')$.

De façon plus générale, le raisonnement précédent est vrai en remplaçant Q par tout polynôme clef \tilde{Q} de même degré que Q .

Donc pour tout polynôme clef \tilde{Q} de même degré que $\deg(Q)$, on a $\epsilon(\tilde{Q}) < \epsilon(\partial Q')$.

De fait, on a $\epsilon(Q) < \epsilon(\partial Q') < \epsilon(Q')$ et $\deg(\partial Q') < \deg(Q')$. Donc si l'on montre que $\partial Q'$ est un polynôme clef, on aura

$$\deg(Q) = \deg(\partial Q').$$

Montrons donc que $\partial Q'$ est un polynôme clef. Faisons un raisonnement par l'absurde et supposons que $\partial Q'$ n'est pas un polynôme clef. Ainsi il existe un polynôme P tel que l'on ait à la fois $\epsilon(P) \geq \epsilon(\partial Q')$ et $\deg(P) < \deg(\partial Q')$. On choisit P de degré minimal pour cette propriété.

Montrons qu'alors P est un polynôme clef. Soit S un polynôme tel que $\epsilon(S) \geq \epsilon(P)$. Nous voulons montrer que $\deg(S) \geq \deg(P)$.

Comme $\epsilon(P) \geq \epsilon(\partial Q')$, on sait que $\epsilon(S) \geq \epsilon(\partial Q')$.

Deux cas sont possibles : ou

$$\deg(S) \geq \deg(\partial Q'),$$

ou

$$\deg(S) < \deg(\partial Q').$$

Dans le premier cas, on a $\deg(S) \geq \deg(\partial Q')$.

Comme $\deg(P) < \deg(\partial Q')$, il vient $\deg(P) < \deg(S)$ et c'est terminé.

Donc on suppose que $\deg(S) < \deg(\partial Q')$.

Alors on sait que $\epsilon(S) \geq \epsilon(\partial Q')$ et $\deg(S) < \deg(\partial Q')$, mais P a été choisi de degré minimal pour cette propriété, et donc

$$\deg(P) \leq \deg(S)$$

comme voulu.

Le polynôme P est donc bien un polynôme clef.

On a $\deg(P) < \deg(\partial Q')$, ainsi $\deg(P) < \deg(Q')$ et comme Q' est un polynôme clef, il vient $\epsilon(P) < \epsilon(Q')$.

Or comme $\epsilon(P) \geq \epsilon(\partial Q')$, on a aussi $\epsilon(P) > \epsilon(Q)$.

On a donc un polynôme clef P tel que $\epsilon(Q) < \epsilon(P) < \epsilon(Q')$ et $\deg(P) < \deg(Q')$. Ainsi, on sait que $\deg(P) = \deg(Q)$.

Le polynôme P est donc un polynôme clef de même degré que Q , et ainsi $\epsilon(P) < \epsilon(\partial Q')$, ce qui est absurde.

On a donc démontré que $\partial Q'$ était un polynôme clef. Il vient que $\deg(Q) = \deg(\partial Q')$. Mais alors, $\epsilon(Q) < \epsilon(\partial Q')$ et c'est absurde. Le théorème est démontré. \square

Maintenant que nous avons donné les différentes notions de polynômes clefs et vu quelles étaient leurs premières propriétés, il est naturel de s'intéresser au lien que peuvent avoir ces deux notions.

2.3. Lien entre les polynômes clefs de Vaquié et les polynômes clefs de Spivakovsky et al.

Les polynômes clefs de Vaquié et ceux de Spivakovsky et al. sont en effet très « proches ». Nous allons ici voir très précisément à quel point ils le sont.

Nous continuerons à appeler « polynôme clef » un polynôme clef de Spivakovsky et al. et « polynôme clef de Vaquié » un polynôme clef de Vaquié.

2.3.1. Sens Spivakovsky \Rightarrow Vaquié. Commençons par considérer Q un polynôme clef pour la valuation ν . Nous avons vu dans la Proposition 2.2.10 que Q était ν_Q -irréductible. La première question que l'on se pose est donc : est-il un polynôme clef de Vaquié pour la valuation ν_Q ?

THÉORÈME 2.3.1. *Tout polynôme clef Q pour la valuation ν est un polynôme clef de Vaquié pour la valuation ν_Q .*

DÉMONSTRATION. Tout d'abord, les polynômes clefs étant unitaires dans les deux notions, nous n'avons pas à démontrer cela. Ensuite, comme nous venons de le rappeler, nous avons déjà démontré dans la Proposition 2.2.10 que Q était ν_Q -irréductible. Il reste donc uniquement à montrer que Q est ν_Q -minimal.

Soit donc $P \in K[X]$ un polynôme tel que $Q \mid_{\nu_Q} P$. Nous voulons montrer que $\deg_X(Q) \leq \deg_X(P)$.

Par hypothèse nous savons qu'il existe un polynôme $S \in K[X]$ tel que

$$\text{in}_{\nu_Q}(Q) \text{ in}_{\nu_Q}(S) = \text{in}_{\nu_Q}(P) \in \text{gr}_{\nu_Q}(K[X]).$$

Or

$$\text{gr}_{\nu_Q}(K[X]) = G_{<\deg_X(Q)}[\text{in}_{\nu_Q}(Q)] \subseteq L[\text{in}_{\nu_Q}(Q)],$$

avec $L = \text{Frac}(G_{<\deg_X(Q)})$. Comme $\text{in}_{\nu_Q}(Q)$ est transcendant sur L , on sait que

$$\deg_{\text{in}_{\nu_Q}(Q)}(\text{in}_{\nu_Q}(P)) \geq 1.$$

Ainsi, le polynôme Q apparaît dans le Q -développement de P avec exposant plus grand ou égal à 1. Il vient $\deg_X(P) \geq \deg_X(Q)$ comme annoncé. \square

Nous avons déjà vu que l'intérêt des valuations tronquées ν_Q n'était pas en rapport avec le polynôme clef Q mais plutôt avec un polynôme clef Q_0 successeur immédiat de Q pour la valuation ν .

THÉORÈME 2.3.2. *Soient Q_1 et Q_2 deux polynômes clefs pour ν tels que $Q_1 < Q_2$.*

Alors Q_2 est un polynôme clef de Vaquié pour la valuation tronquée ν_{Q_1} .

DÉMONSTRATION. Encore une fois, Q_2 est unitaire par définition. Nous avons donc à montrer deux choses :

- (1) Q_2 est ν_{Q_1} -irréductible.
- (2) Q_2 est ν_{Q_1} -minimal.

Montrons tout d'abord que Q_2 est ν_{Q_1} -irréductible.

D'après la remarque 2.1.7, il suffit de montrer que $\text{in}_{\nu_{Q_1}}(Q_2)$ est irréductible dans

$$G_{<\deg_X(Q_1)}[\text{in}_{\nu_{Q_1}}(Q_1)] = \text{gr}_{\nu_{Q_1}}(K[X]).$$

On considère ϕ l'application $\phi: \text{gr}_{\nu_{Q_1}}(K[X]) \rightarrow \text{gr}_\nu(K[X])$ qui envoie $\text{in}_{\nu_{Q_1}}(P)$ sur $\text{in}_\nu(P)$ pour tout polynôme $P \in K[X]$.

Si $\deg_X(P) < \deg_X(Q_1)$, alors on a $\nu_{Q_1}(P) = \nu(P)$ et de fait $\phi|_{G_{<\deg_X(Q_1)}}$ est injectif.

Donc $\phi|_{G_{<\deg_X(Q_1)}}$ est un isomorphisme de $G_{<\deg_X(Q_1)}$ sur son image par ϕ .

S'il existe un polynôme P tel que $\nu_{Q_1}(P) < \nu(P)$, alors l'application ϕ n'est pas injective. Mais comme $Q_1 < Q_2$, on sait que $\nu_{Q_1}(Q_2) < \nu(Q_2)$ d'après la proposition 2.2.22. Donc d'une part ϕ n'est pas injective, et d'autre part

$$\text{in}_{\nu_{Q_1}}(Q_2) \in \ker(\phi).$$

Montrons que $\ker(\phi)$ est un idéal principal engendré par $\text{in}_{\nu_{Q_1}}(Q_2)$.

Soit donc $P \in K[X]$ tel que $\text{in}_{\nu_{Q_1}}(P) \in \ker(\phi)$ et considérons

$$P = qQ_2 + r$$

la division euclidienne de P par Q_2 dans $K[X]$.

Si $\text{in}_{\nu_{Q_1}}(r) \neq 0$, alors, comme $(\text{in}_{\nu_{Q_1}}(P), \text{in}_{\nu_{Q_1}}(Q_2)) \in \ker(\phi)^2$ on a $\text{in}_{\nu_{Q_1}}(r) \in \ker(\phi)$, c'est-à-dire que l'on a $\nu_{Q_1}(r) < \nu(r)$, ce qui contredit la minimalité du degré de Q_2 pour cette propriété, minimalité donnée par la proposition 2.2.22.

Ainsi $\text{in}_{\nu_{Q_1}}(r) = 0$ et $\text{in}_{\nu_{Q_1}}(P) \in (\text{in}_{\nu_{Q_1}}(Q_2)) \text{gr}_{\nu_{Q_1}}(K[X])$, donc $\ker(\phi) = (\text{in}_{\nu_{Q_1}}(Q_2)) \text{gr}_{\nu_{Q_1}}(K[X])$. Comme l'anneau $\text{gr}_\nu(K[X])$ est intègre, il vient que $(\text{in}_{\nu_{Q_1}}(Q_2)) \text{gr}_{\nu_{Q_1}}(K[X])$ est un idéal premier de $\text{gr}_{\nu_{Q_1}}(K[X])$, c'est à dire que $\text{in}_{\nu_{Q_1}}(Q_2)$ est un élément irréductible de $\text{gr}_{\nu_{Q_1}}(K[X])$, ce qui complète la preuve du premier point.

Montrons donc maintenant que Q_2 est ν_{Q_1} -minimal.

Soit donc $P \in K[X]$ tel que $Q_2 \mid_{\nu_{Q_1}} P$.

Montrons que $\deg_X(Q_2) \leq \deg_X(P)$. On sait que $\text{in}_{\nu_{Q_1}}(Q_2)$ divise $\text{in}_{\nu_{Q_1}}(P)$ dans $\text{gr}_{\nu_{Q_1}}(K[X])$ par hypothèse. Donc

$$\text{in}_{\nu_{Q_1}}(P) \in \ker(\phi) = (\text{in}_{\nu_{Q_1}}(Q_2)) \text{gr}_{\nu_{Q_1}}(K[X]).$$

Autrement dit, $\nu_{Q_1}(P) < \nu(P)$, et par minimalité du degré de Q_2 pour cette propriété, on a $\deg_X(P) \geq \deg_X(Q_2)$ comme annoncé, ce qui conclut la preuve. \square

2.3.2. Sens Vaquié \Rightarrow Spivakovsky. Maintenant que nous avons établi les propriétés des polynômes clefs en terme de polynômes clefs de Vaquié, il serait intéressant de se demander ce que nous avons dans l'autre sens : à savoir, si l'on prend un polynôme clef de Vaquié pour ν , existe-t-il une ou plusieurs valuations telle-s que c'est un polynôme clef pour celle-s ci ?

THÉORÈME 2.3.3. *Soit Q un polynôme clef de Vaquié pour la valuation ν . Alors c'est un polynôme clef pour toutes les valuations ν' qui sont des valuations augmentées de ν .*

DÉMONSTRATION. D'après le Théorème 2.1.16, on sait que toute valuation augmentée ν' vérifie les deux propriétés suivantes :

- (1) $\nu'(Q) > \nu(Q)$.
- (2) Pour tout polynôme $P \in K[X]$ de degré strictement inférieur à celui de Q , on a $\nu'(P) = \nu(P)$.

Soit donc ν' une valuation augmentée de ν . Montrons maintenant que Q est un polynôme clef pour ν' .

Raisonnons par l'absurde et supposons que Q n'est pas un polynôme clef pour ν' . Donc il existe un polynôme unitaire $P \in K[X]$ tel que $\epsilon_{\nu'}(P) \geq \epsilon_{\nu'}(Q)$ et $\deg_X(P) < \deg_X(Q)$. On choisit P de degré minimal pour cette propriété.

Nous allons maintenant voir que P est en fait un polynôme clef pour ν' . En effet, soit $S \in K[X]$ tel que $\epsilon_{\nu'}(S) \geq \epsilon_{\nu'}(P)$. Montrons que $\deg_X(S) \geq \deg_X(P)$.

Puisque $\epsilon_{\nu'}(S) \geq \epsilon_{\nu'}(P)$ et $\epsilon_{\nu'}(P) \geq \epsilon_{\nu'}(Q)$, alors on a

$$\epsilon_{\nu'}(S) \geq \epsilon_{\nu'}(Q).$$

Deux possibilités s'offrent à nous : la première survient lorsque l'on a $\deg_X(S) \geq \deg_X(Q)$. Alors comme $\deg_X(Q) > \deg_X(P)$, on a bien $\deg_X(S) \geq \deg_X(P)$.

La deuxième possibilité, c'est lorsque $\deg_X(S) < \deg_X(Q)$. Dans ce cas, on a donc $\epsilon_{\nu'}(S) \geq \epsilon_{\nu'}(Q)$ et $\deg_X(S) < \deg_X(Q)$. On a choisi

le polynôme P tel qu'il était de degré minimal pour cette propriété, donc on a bien $\deg_X(S) \geq \deg_X(P)$, puis P est un polynôme clef pour la valuation ν' .

On a donc l'existence d'un polynôme clef P pour la valuation ν' de degré strictement inférieur à celui de Q et tel que $\epsilon_{\nu'}(P) \geq \epsilon_{\nu'}(Q)$. Le polynôme P étant de degré strictement inférieur à celui de Q , on a $\deg_X(P) \leq \max_{b \in \mathbb{N}^*} \{\deg_X(\partial_b Q)\}$.

D'après la proposition 2.2.18, on sait qu'il existe un polynôme clef H pour la valuation ν' tel que

$$\deg_X(H) \leq \max_{b \in \mathbb{N}^*} \{\deg_X(\partial_b Q)\}$$

et pour tout entier strictement positif b , on a $\nu'_H(\partial_b Q) = \nu'(\partial_b Q)$.

Premier cas : $\epsilon_{\nu'}(H) \geq \epsilon_{\nu'}(P)$. Donc le polynôme H vérifie dans ce cas les quatre propriétés suivantes :

(2.3.1)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Le polynôme } H \text{ est un polynôme clef pour la valuation } \nu'. \\ \epsilon_{\nu'}(H) \geq \epsilon_{\nu'}(Q). \\ \deg_X(H) < \deg_X(Q). \\ \text{Pour tout entier strictement positif } b, \text{ on a } \nu'_H(\partial_b Q) = \nu'(\partial_b Q). \end{array} \right.$$

Deuxième cas : $\epsilon_{\nu'}(H) \leq \epsilon_{\nu'}(P)$. Alors d'après la proposition 2.2.17, on a, pour tout entier strictement positif b : $\nu'_H(\partial_b Q) \leq \nu'_P(\partial_b Q)$ et comme de plus $\nu'_H(\partial_b Q) = \nu'(\partial_b Q)$, alors $\nu'_P(\partial_b Q) = \nu'(\partial_b Q)$.

De fait, P vérifie également les quatre propriétés (2.3.1).

Donc quitte à remplacer P par un autre polynôme clef H pour la valuation ν' , on peut supposer que P vérifie les quatre propriétés (2.3.1). Autrement dit nous pouvons supposer que pour tout entier strictement positif b , l'on a $\nu'_P(\partial_b Q) = \nu'(\partial_b Q)$.

Montrons maintenant que pour tout polynôme $S \in K[X]$, on a $\nu(S) \geq \nu'_P(S)$. Soit donc $S \in K[X]$ un polynôme et considérons

$$S = \sum_{i=0}^n s_i P^i$$

son P -développement. On a $\nu'_P(S) = \min_{0 \leq i \leq n} \{\nu'(s_i) + i\nu'(P)\}$.

Or $\deg_X(s_i) < \deg_X(P) < \deg_X(Q)$, donc par hypothèse, nous avons $\nu'(s_i) = \nu(s_i)$ pour tout indice i et $\nu'(P) = \nu(P)$.

Il vient $\nu'_P(S) = \min_{0 \leq i \leq n} \{\nu(s_i) + i\nu(P)\}$, puis

$$\nu'_P(S) = \min_{0 \leq i \leq n} \{\nu(s_i P^i)\} \leq \nu(S)$$

comme attendu.

En particulier, on a $\nu'(Q) > \nu(Q) \geq \nu'_P(Q)$.

Afin d'utiliser la proposition 2.2.13, montrons que

$$S'_P(Q) := \left\{ i \in \{0, \dots, d\} \text{ tel que } \nu'(q_i P^i) = \nu'_P(Q) \right\} \neq \{0\}$$

où $Q = \sum_{i=0}^d q_i P^i$ est le P -développement de Q . Supposons par l'absurde que $S'_P(Q) = \{0\}$. Alors $\nu'(Q) > \nu'_P(Q) = \nu'_P(q_0)$.

Il vient $\nu'(q_0) = \nu'\left(\sum_{i=1}^d q_i P^i\right)$: en effet, s'ils étaient distincts alors $\nu'(Q)$ serait égal au minimum des deux valeurs, qui est $\nu'(q_0)$ puisque $S'_P(Q) = \{0\}$, ce qui est absurde puisque l'on sait que $\nu'(Q) > \nu'_P(Q)$.

Donc

$$\begin{aligned} \nu'(q_0) &= \nu'\left(\sum_{i=1}^d q_i P^i\right) \\ &\geq \min_{1 \leq i \leq d} \{\nu'(q_i P^i)\} \\ &> \nu'(q_0) \end{aligned}$$

puisque $S'_P(Q) = \{0\}$, ce qui est absurde.

On a ainsi montré que $S'_P(Q) \neq \{0\}$, et d'après la Proposition 2.2.13, on en déduit l'existence d'un entier strictement positif c tel que

$$\nu'_P(Q) - \nu'_P(\partial_c Q) = c\epsilon_{\nu'}(P).$$

Or on rappelle que pour tout entier strictement positif b , on a

$$\nu'_P(\partial_b Q) = \nu'(\partial_b Q).$$

Par suite,

$$\epsilon_{\nu'}(P) = \frac{\nu'_P(Q) - \nu'(\partial_c Q)}{c}.$$

Comme on a montré que $\nu'_P(Q) < \nu'(Q)$, il vient

$$\epsilon_{\nu'}(P) < \frac{\nu'(Q) - \nu'(\partial_c Q)}{c} \leq \epsilon_{\nu'}(Q),$$

ce qui contredit le fait que $\epsilon_{\nu'}(P) \geq \epsilon_{\nu'}(Q)$.

Nous avons donc une absurdité, et le polynôme Q est donc bien un polynôme clef pour la valuation ν' . \square

Uniformisation locale simultanée dans le cas d’anneaux essentiellement de type fini sur un corps sans restriction sur le rang de la valuation.

Le but de cette partie est de donner une preuve de l’uniformisation locale en se plaçant dans le cas d’anneaux locaux essentiellement de type fini sur un corps de caractéristique nulle, sans aucune restriction sur le rang de la valuation. La preuve de l’uniformisation locale est bien connue en caractéristique nulle. Ce résultat a été démontré pour la première fois par Zariski en 1940 ([35]) en toute dimension et en caractéristique nulle. L’intérêt de cette nouvelle preuve est de présenter une construction universelle qui fonctionne pour tous les éléments de l’anneau régulier ambiant de départ, et dans laquelle nous connaissons par avance les coordonnées pas à pas. Ainsi nous aurons une suite infinie d’éclatements donnée explicitement, dans laquelle toutes les coordonnées sont décrites, et qui monomialise n’importe quel élément de notre algèbre essentiellement de type fini, ce quel que soit le rang de la valuation.

Pour ce faire, nous allons procéder par étapes. L’idée est la suivante.

Soient k un corps de caractéristique nulle, R une k -algèbre locale régulière essentiellement de type fini sur k , de corps résiduel k . On prend $u = (u_1, \dots, u_n)$ un système régulier de paramètres de R , ν une valuation centrée en R de groupe des valeurs Γ et $K = k(u_1, \dots, u_{n-1})$. On suppose que $k = k_\nu$. Cette propriété se conserve par éclatement. Ainsi tous les anneaux obtenus par éclatements locaux le long de la valuation ν auront le même corps résiduel : k .

Nous allons construire une seule suite d’éclatements qui monomialise tous éléments de R pourvu qu’on regarde assez loin dans cette suite. Pour cela, nous allons construire une suite de polynômes clefs successeurs immédiats (ou éventuellement successeurs immédiats limites) particulière. En effet, tout élément f de R sera non dégénéré par rapport à un polynôme clef Q de cette suite, c’est-à-dire vérifiera $\nu_Q(f) = \nu(f)$. De plus, tous les polynômes clefs de cette suite seront monomialisables. On aura alors démontré que tout élément de R est non dégénéré par rapport à un système de paramètres régulier d’un anneau

régulier éclaté. Il suffira alors de voir que tout élément non dégénéré par rapport à un système de paramètres est lui-même monomialisable par notre suite d'éclatements.

Nous commencerons cette partie par quelques préliminaires dans la section 3.1, où nous définirons entre autres la non dégénérescence citée plus haut ainsi que les éclatements encadrés et monomiaux.

Ensuite, dans la section 3.2, nous verrons que tout élément non dégénéré par rapport à un système de paramètres est monomialisable. Restera à montrer que c'est le cas de tous les éléments f qui nous intéressent.

Ainsi, dans la section 3.3, nous construirons une suite de polynômes clefs successeurs immédiats ou éventuellement successeurs immédiats limites qui vérifie que tout élément f de R est non dégénéré par rapport à l'un de ces polynômes clefs.

Dans les sections 3.4 et 3.5, nous finirons par voir la preuve que tous les polynômes clefs de cette suite sont monomialisables, et qu'ainsi nous démontrons l'uniformisation locale simultanée. Pour se faire nous aurons besoin de la notion d'élément clef : en effet, modifiés par les éclatements, les polynômes clefs de la suite sus-citée n'ont plus de raison d'être des polynômes. Nous donnons donc une nouvelle définition, celle d'élément clef. Elle a l'avantage de se conserver par éclatement. Ce sont donc les éléments clefs que nous allons monomialiser, et nous concluons par récurrence.

3.1. Préliminaires.

Soient k un corps de caractéristique nulle et R une k -algèbre locale régulière essentiellement de type fini sur k . On prend $u = (u_1, \dots, u_n)$ un système régulier de paramètres de R et ν une valuation centrée en R de groupe des valeurs Γ . On pose $\beta_i = \nu(u_i)$ pour tout entier $i \in \{1, \dots, n\}$, et $K = k(u_1, \dots, u_{n-1})$.

3.1.1. Éléments non dénégérés.

DÉFINITION 3.1.1. Soit $f \in R$. On dit que f est non dénégéré par rapport à ν et u si l'on a $\nu_u(f) = \nu(f)$, où ν_u est la valuation définie en 1.2.37

PROPOSITION 3.1.2. Soit $f \in R$. L'élément f est non dénégéré par rapport à ν et u si et seulement s'il existe un idéal N de R contenant f , monomial par rapport à u et tel que

$$\nu(f) = \nu(N) = \min_{x \in N} \{\nu(x)\}.$$

DÉMONSTRATION.

Montrons que s'il existe un idéal N de R contenant f , monomial par rapport à u et tel que

$$\nu(f) = \nu(N) = \min_{x \in N} \{\nu(x)\},$$

alors $\nu_u(f) = \nu(f)$. Soit donc N un idéal de R monomial par rapport à u tel que $\nu(f) = \nu(N) = \min_{x \in N} \{\nu(x)\}$ et tel que N contient f . L'idéal N étant monomial par rapport à u , on a $\nu_u(N) = \nu(N)$. Comme $f \in N$, on a $\nu_u(N) \leq \nu_u(f)$.

Il vient $\nu(f) = \nu(N) \leq \nu_u(f)$, ce qui nous donne l'égalité, l'inégalité opposée étant toujours vraie.

Montrons maintenant que si $\nu_u(f) = \nu(f)$, alors il existe un idéal N de R contenant f , monomial par rapport à u et tel que $\nu(f) = \nu(N) = \min_{x \in N} \{\nu(x)\}$. Supposons donc que $\nu_u(f) = \nu(f)$. Soit N le plus petit idéal de R engendré par des monômes en u contenant f .

On a donc $\nu(N) = \nu_u(N) = \nu_u(f)$.

D'après l'hypothèse, $\nu_u(f) = \nu(f)$, donc $\nu(N) = \nu(f)$. \square

Soient $J_1 \subset \{1, \dots, n\}$, $A_1 = \{1, \dots, n\} \setminus J_1$ et $j_1 \in J_1$.

On pose

$$u'_q = \begin{cases} \frac{u_q}{u_{j_1}} & \text{si } q \in J_1 \setminus \{j_1\} \\ u_q & \text{sinon} \end{cases}$$

et on prend R_1 un localisé de $R' = R[u'_{J_1 \setminus \{j_1\}}]$ par un idéal premier, disons $R_1 = R'_{\mathfrak{m}'}$ d'idéal maximal $\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m}' R_1$. Comme R est régulier, il en est de même de R' et donc de R_1 . Soit $u^{(1)} = (u_1^{(1)}, \dots, u_{n_1}^{(1)})$ un système régulier de paramètres de \mathfrak{m}_1 .

On note maintenant

$$B_1 := \{q \in J_1 \setminus \{j_1\} \text{ tel que } u'_q \notin R_1^\times\}$$

et

$$C_1 := J_1 \setminus (B_1 \cup \{j_1\}).$$

Comme u est un système régulier de paramètres de R , on a l'union disjointe

$$u' = u'_{A_1} \sqcup u'_{B_1} \sqcup u'_{C_1} \sqcup \{u'_{j_1}\}.$$

3.1.2. Éclatements encadrés et monomiaux. Soit $\pi: R \rightarrow R_1$ l'application naturelle. Quitte à renuméroter, on suppose que

$$J_1 = \{1, \dots, h\}.$$

DÉFINITION 3.1.3. On dit que $\pi: (R, u) \rightarrow (R_1, u^{(1)})$ est un éclatement encadré de (R, u) le long de (u_{J_1}) respectivement à ν s'il existe $D_1 \subset \{1, \dots, n_1\}$ tel que

$$u'_{A_1 \cup B_1 \cup \{j_1\}} = u_{D_1}^{(1)}$$

et si $\mathfrak{m}' = \{x \in R' \text{ tel que } \nu(x) > 0\}$.

REMARQUE 3.1.4. Autrement dit, un éclatement π est encadré si dans les générateurs de l'idéal maximal \mathfrak{m}_1 de R_1 , nous avons tous les éléments de u' , sauf éventuellement ceux qui appartiennent à u'_{C_1} , autrement dit sauf éventuellement ceux qui sont inversibles dans R_1 .

Il est encadré respectivement à ν si l'on a localisé dans le centre de la valuation.

EXEMPLE 3.1.5. On se replace dans le jeu entre Alice et Bob de l'introduction. On rappelle qu'Alice éclate tout d'abord $V = \{z^2 - x^2y = 0\}$ en $\{y = z = 0\}$ et que Bob choisit de regarder dans la carte y . En terme d'éclatement et de coordonnées, on considère donc

$$R = k[x, y, z]_{(x, y, z)}$$

et $u = (x, y, z)$. L'application π envoie x et y sur eux-mêmes et z sur $z' = \frac{z}{y}$. On localise en $(x', y', z' - 1)$ et on a ainsi $R_1 = k[x, y, z']_{(x, y, z' - 1)}$ et $u^{(1)} = (x, y, z' - 1) = (x_1, y_1, z_1)$. On a ici $A_1 = \{1\}$, $J_1 = \{2, 3\}$ et $j_1 = 2$. De plus, $B_1 = \{2\}$ et $C_1 = \{3\}$. L'éclatement est donc encadré.

Soit π un tel éclatement.

DÉFINITION 3.1.6. On dit que π est monomial si $B_1 = J_1 \setminus \{j_1\}$.

REMARQUE 3.1.7. Soit π un éclatement monomial.

Alors $n_1 = n$ et $D_1 = \{1, \dots, n\}$.

DÉFINITION 3.1.8. Soient $\pi: (R, u) \rightarrow (R_1, u^{(1)})$ un éclatement encadré et $T \subset \{1, \dots, n\}$.

On dit que π est indépendant de u_T si $T \cap J_1 = \emptyset$, autrement dit si $T \subset A_1$.

REMARQUE 3.1.9. Puisque l'on considère des éclatements respectivement à la valuation ν , nous considérons des éclatements tels que $\nu(R_1) \geq 0$, et de fait, comme $u'_q \in R_1$ pour tout $q \in J_1$, il est naturel de vouloir que $\nu\left(\frac{u_q}{u_{j_1}}\right) \geq 0$ c'est-à-dire que $\nu(u_q) \geq \nu(u_{j_1})$ pour tout $q \in J_1 \setminus \{j_1\}$. Il est donc raisonnable de poser j_1 comme étant un élément de J_1 tel que $\beta_{j_1} = \min_{q \in J_1} \{\beta_q\}$.

On a :

$$\begin{aligned}
B_1 &:= \left\{ q \in J_1 \setminus \{j_1\} \text{ tel que } u'_q \notin R_1^\times \right\} \\
&= \left\{ q \in J_1 \setminus \{j_1\} \text{ tel que } \frac{u_q}{u_{j_1}} \notin R_1^\times \right\} \\
&= \left\{ q \in J_1 \setminus \{j_1\} \text{ tel que } \nu\left(\frac{u_q}{u_{j_1}}\right) > 0 \right\} \\
&= \left\{ q \in J_1 \setminus \{j_1\} \text{ tel que } \beta_q > \beta_{j_1} \right\}.
\end{aligned}$$

Et de même $C_1 = \{q \in J_1 \setminus \{j_1\} \text{ tel que } \beta_q = \beta_{j_1}\}$.

Soit k_1 le corps résiduel de R_1 et t_{k_1} le degré de transcendance de l'extension $k \hookrightarrow k_1$, c'est-à-dire le cardinal de toute base de transcendance. Montrons que $t_{k_1} \leq \#C$.

Soient $\bar{R} = \frac{R'}{\mathfrak{m}R'}$ et \bar{u}_q l'image de u'_q dans \bar{R} pour tout $q \in J_1 \setminus \{j_1\}$. Alors $\bar{R} = k[\bar{u}_{B_1}, \bar{u}_{C_1}^{\pm 1}]$. Nous avons $R \rightarrow R' \rightarrow R_1 \rightarrow k_1$, donc en réduisant modulo \mathfrak{m} , nous obtenons $k \rightarrow \bar{R} \rightarrow \frac{R_1}{\mathfrak{m}R_1} \rightarrow k_1$.

On a $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 \cap R = \mathfrak{m}'R_1 \cap R = \mathfrak{m}' \cap R$. Soit $\bar{\mathfrak{m}} = \frac{\mathfrak{m}'}{\mathfrak{m}R'}$.

On a

$$\begin{aligned}
\frac{R_1}{\mathfrak{m}R_1} &= \frac{R'_{\mathfrak{m}'}}{\mathfrak{m}'R'_{\mathfrak{m}'}} \\
&= \left(\frac{R'}{\mathfrak{m}R'}\right)_{\frac{\mathfrak{m}'}{\mathfrak{m}R'}} \\
&= \bar{R}_{\bar{\mathfrak{m}}}
\end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$(3.1.1) \quad k \rightarrow \bar{R} \rightarrow \bar{R}_{\bar{\mathfrak{m}}} \rightarrow k_1.$$

On a également $u'_{A_1 \cup B_1 \cup \{j_1\}} \subset \mathfrak{m}'$ donc pour tout $q \in A_1 \cup B_1 \cup \{j_1\}$, l'image de u'_q dans k_1 est nulle. Donc k_1 est engendré sur k par les images des u'_q , avec $q \in C_1$. En particulier, $t_{k_1} \leq \#C_1$.

Or $C_1 := J_1 \setminus (B_1 \cup \{j_1\})$ donc $\#C_1 + \#B_1 + 1 = \#J_1 = h$, c'est-à-dire :

$$(3.1.2) \quad \#B_1 + 1 \leq t_{k_1} + \#B_1 + 1 \leq \#C_1 + \#B_1 + 1 = h \leq n.$$

Dans la pratique, nous prendrons souvent $J_1 \subset \{1, \dots, r, n\}$ où r est la dimension de $\sum_{i=1}^n \nu(u_i)\mathbb{Q}$ dans $\Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Si $J_1 \subset \{1, \dots, r\}$, la famille β_{J_1} est une famille d'éléments \mathbb{Q} -linéairement indépendants, et de fait $B_1 = J_1 \setminus \{j_1\}$. Sinon $n \in J_1$. Alors il ne peut y avoir qu'une relation de dépendance linéaire entre les β_{J_1} car β_1, \dots, β_r sont \mathbb{Q} -linéairement indépendants. De fait nous aurons alors $B_1 = J_1 \setminus \{j_1\}$ ou $B_1 = J_1 \setminus \{j_1, q_1\}$ où $q_1 \in J_1 \setminus \{j_1\}$. Les cas intéressants sont donc ici les cas où $h - 2 \leq \#B_1$, c'est-à-dire $h - 1 \leq \#B_1 + 1$.

D'après (3.1.2), cela nous donne $h - 1 + t_{k_1} \leq \#B_1 + 1 + t_{k_1} \leq h$.

Nous avons alors trois cas.

Le premier cas, $\sharp B_1 + 1 = h$ et $t_{k_1} = 0$, correspond au cas où l'éclatement est monomial.

Le deuxième cas, $\sharp B_1 + 1 = h - 1$ et $t_{k_1} = 1$.

Le troisième et dernier cas, $\sharp B_1 + 1 = h - 1$ et $t_{k_1} = 0$.

FAIT 3.1.10. *Dans les cas 1 et 3, nous avons $n_1 = n$ et dans le cas 2 nous avons $n_1 = n - 1$.*

En effet, regardons sur un exemple, le cas général étant identique. On sait que (u_1, u_2) fait partie d'un système régulier de paramètres de R et supposons que $J_1 = \{1, 2\}$.

Si $\nu(u_1) < \nu(u_2)$ alors on pose $j_1 = 1$ et on a $B_1 = J_1 \setminus \{j_1\}$, c'est-à-dire que nous sommes dans le premier cas, l'éclatement est monomial, et donc $n_1 = n$. Le cas $\nu(u_2) < \nu(u_1)$ se traite de la même manière.

Sinon nous avons donc $\nu(u_1) = \nu(u_2)$, et on pose toujours $j_1 = 1$. Cette fois nous avons $B_1 = \emptyset$, soit $\sharp B_1 + 1 = h - 1$, nous sommes dans le cas 2 ou le cas 3. Nous avons $u'_1 = u_1 \in \mathfrak{m}'$ et $u'_2 = \frac{u_2}{u_1}$. Soient z_1 et z_2 les images respectives de u'_1 et u'_2 dans k_1 par $R \rightarrow R' \rightarrow R_1 \rightarrow k_1$. On a tout d'abord $z_1 = 0$. Ensuite, deux cas se présentent. Soit z_2 est algébrique sur k et alors $t_{k_1} = 0$ et nous sommes dans le cas 3, soit z_2 est transcendant sur k , ainsi $t_{k_1} = 1$ et nous sommes dans le cas 2.

Mettons nous dans le cas 3, où z_2 est algébrique sur k , de polynôme minimal $\lambda(Z) = \sum_i \lambda_i Z^i$ avec $\lambda_i \in k$ pour tout i .

On a alors $k_1 \simeq \frac{k[Z]}{(\lambda(Z))}$.

Soit $\bar{\lambda}(Z) := \sum_i a_i \bar{\lambda}_i Z^i$ où $a_i \in R^\times$ quelconque, et $\bar{\lambda}_i$ est un relèvement de λ_i dans R , c'est-à-dire un antécédant de λ_i par la surjection canonique $R \rightarrow \frac{R}{\mathfrak{m}} = k$. De fait $\lambda_i \equiv \bar{\lambda}_i$ modulo $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 \cap R$, et donc aussi modulo \mathfrak{m}_1 . Comme $\lambda(z_2) = 0$ dans $k_1 = \frac{R_1}{\mathfrak{m}_1}$ et que z_2 est l'image de u'_2 dans k_1 , on a $\bar{\lambda}(u'_2) \in \mathfrak{m}_1$.

On pose

$$u_1^{(1)} = u'_1 = u_1 \in \mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 \cap R \subset \mathfrak{m}_1$$

et

$$u_2^{(1)} = \bar{\lambda}(u'_2) \in \mathfrak{m}_1.$$

Reste à montrer que $u_1^{(1)}$ et $u_2^{(1)}$ engendrent l'idéal \mathfrak{m}_1 , on aura alors que $n_1 = 2 = n$ comme annoncé.

Soit $\tilde{\mathfrak{m}}_1 := (u_1^{(1)}, u_2^{(1)}) R_1$. Montrons donc que $\mathfrak{m}_1 = \tilde{\mathfrak{m}}_1 R_1$.

Tout d'abord montrons que $\mathfrak{m}R' = u'_1 R' = u_1 R'$. Nous savons que $u'_2 \in R_1^\times$ puisque $B_1 = \emptyset$ et donc $C_1 = \{2\}$.

De fait $u'_2 \in R' \cap R_1^\times = R' \cap (R_{\mathfrak{m}'})^\times = R'^\times$, puis $u_2 = \frac{u_2}{u_1} u_1 = u'_2 u'_1$. Ainsi $u_2 \in u'_1 R'$. Il vient que $\mathfrak{m}R' = (u_1, u_2)R' = u'_1 R'$.

Donc $\mathfrak{m}R_1 = \mathfrak{m}R'_{\mathfrak{m}'} = u'_1 R'_{\mathfrak{m}'} = u'_1 R_1 = u_1^{(1)} R_1 \subset \tilde{\mathfrak{m}}_1$.

On a vu que $\bar{R} = k[\bar{u}_{B_1}, \bar{u}_{C_1}^{\pm 1}]$, donc ici $\bar{R} = k[\bar{u}_2^{\pm 1}]$, puis (3.1.1) devient $k \rightarrow k[\bar{u}_2^{\pm 1}] \rightarrow k[\bar{u}_2^{\pm 1}]_{\bar{\mathfrak{m}}} \rightarrow k_1$. Par définition, $\bar{u}_2 \notin \bar{\mathfrak{m}}$, donc $\bar{R}_{\bar{\mathfrak{m}}} = k[\bar{u}_2]_{\bar{\mathfrak{m}}}$.

On note $\bar{\lambda}(\bar{u}_2)$ l'image de $\bar{\lambda}(u'_2)$ dans $k[\bar{u}_2]$. Il vient

$$\frac{k[\bar{u}_2]}{(\bar{\lambda}(\bar{u}_2))} \simeq \frac{k[Z]}{(\lambda(Z))} \simeq k_1.$$

De fait $(\bar{\lambda}(\bar{u}_2))$ est un idéal maximal de $k[\bar{u}_2]$, et comme $\bar{\lambda}(\bar{u}_2)$ est l'image naturelle de $\bar{\lambda}(u'_2) = u_2^{(1)}$ dans $k[\bar{u}_2]$, c'est un élément de $\bar{\mathfrak{m}}\bar{R}_{\bar{\mathfrak{m}}} = \bar{\mathfrak{m}}k[\bar{u}_2]_{\bar{\mathfrak{m}}}$. Donc l'image de $u_2^{(1)}$ dans $\bar{R}_{\bar{\mathfrak{m}}}$ engendre

$$\bar{\mathfrak{m}}\bar{R}_{\bar{\mathfrak{m}}} = \frac{\mathfrak{m}'}{\mathfrak{m}R'} \left(\frac{R'}{\mathfrak{m}R'} \right)_{\frac{\mathfrak{m}'}{\mathfrak{m}R'}}.$$

Comme $\mathfrak{m}R_1 = \mathfrak{m}R'_{\mathfrak{m}'} = u'_1 R'_{\mathfrak{m}'} = u'_1 R_1 = u_1^{(1)} R_1$, nous avons que $u_1^{(1)}$ et $u_2^{(1)}$ engendrent $\mathfrak{m}'R'_{\mathfrak{m}'}$ dans $R'_{\mathfrak{m}'} = R_1$. Autrement dit $u_1^{(1)}, u_2^{(1)}$ engendrent \mathfrak{m}_1 dans R_1 , c'est-à-dire $\mathfrak{m}_1 = \tilde{\mathfrak{m}}_1 R_1$.

On a donc bien $n_1 = 2 = n$.

Regardons maintenant le cas 2, où z_2 est transcendant sur k . On a alors $k_1 \simeq k(z_2)$. On pose encore $u_1^{(1)} = u'_1 = u_1 \in \mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 \cap R \subset \mathfrak{m}_1$ et on va montrer que $u_1^{(1)}$ engendre \mathfrak{m}_1 . Nous avons encore que

$$\mathfrak{m}R_1 = \mathfrak{m}R'_{\mathfrak{m}'} = u'_1 R'_{\mathfrak{m}'} = u'_1 R_1 = u_1^{(1)} R_1,$$

ainsi que

$$k \rightarrow k[\bar{u}_2^{\pm 1}] \rightarrow k[\bar{u}_2]_{\bar{\mathfrak{m}}} \rightarrow k_1.$$

Comme z_2 est supposé ici transcendant sur k , l'application $k \rightarrow k[\bar{u}_2]_{\bar{\mathfrak{m}}}$ s'étend en l'application $k_1 = k(z_2) \hookrightarrow k[\bar{u}_2]_{\bar{\mathfrak{m}}}$, qui envoie z_2 sur \bar{u}_2 .

Donc

$$\bar{R}_{\bar{\mathfrak{m}}} = k[\bar{u}_2]_{\bar{\mathfrak{m}}} \simeq k(z_2)[\bar{u}_2]_{\bar{\mathfrak{m}}k(z_2)[\bar{u}_2]} \simeq k(z_2).$$

Donc $\bar{\mathfrak{m}} = (0)$ et $\mathfrak{m}' = \mathfrak{m}R'$. Il vient que

$$\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m}'R'_{\mathfrak{m}'} = \mathfrak{m}R'_{\mathfrak{m}'} = u_1^{(1)} R_1,$$

puis $n_1 = 1 = n - 1$ comme annoncé.

REMARQUE 3.1.11. Dans le reste du Chapitre 3, on supposera que l'anneau de valuation a pour corps résiduel le corps de base k . Ainsi $k_1 = k$ et $t_{k_1} = 0$. De fait, on aura toujours $n_1 = n$.

Comme $k_1 \simeq \frac{k[Z]}{(\lambda(Z))}$, on sait que $\lambda(Z)$ est un polynôme de degré 1 sur k .

3.1.3. Éléments clefs. Nous aurons besoin par la suite d'une notion un peu plus générale que celle de polynôme clef. En effet, après éclatements, un polynôme clef n'est plus assuré ne serait-ce que d'être toujours un polynôme.

DÉFINITION 3.1.12. Soient $P_1 < P_2$ deux polynômes clefs de l'extension $k(u_1^{(l)}, \dots, u_{n-1}^{(l)})(u_n^{(l)})$ successeurs immédiats et l'on considère $P_2 = \sum_{j \in S_{P_1}(P_2)} a_j P_1^j$ le P_1 -développement de P_2 .

On appelle *élément clef* tout élément P'_2 de la forme

$$P'_2 = \sum_{j \in S_{P_1}(P_2)} a_j b_j P_1^j$$

où b_j sont des unités de $R_l = k(u_1^{(l)}, \dots, u_n^{(l)})(u_1^{(l)}, \dots, u_n^{(l)})$. Le polynôme P_2 est le polynôme clef associé à l'élément clef P'_2 .

REMARQUE 3.1.13. Un élément clef n'est pas nécessairement un polynôme. En effet, on a par exemple $\frac{1}{1+u_{n_l}^{(l)}}$ qui est une unité de R_l .

DÉFINITION 3.1.14. Soient P'_1 et P'_2 deux éléments clefs. On dit que P'_1 et P'_2 sont des *éléments clefs successeurs immédiats*, et l'on note $P'_1 \ll P'_2$ si leurs polynômes clefs associés respectifs sont successeurs immédiats, autrement dit si $P_1 < P_2$.

De même, définissons maintenant les éléments clefs successeurs immédiats limites.

DÉFINITION 3.1.15. Soient P'_1 et P'_2 deux éléments clefs. On dit que P'_1 et P'_2 sont des *éléments clefs successeurs immédiats limites*, et l'on note $P'_1 \ll_{\text{lim}} P'_2$ si leurs polynômes clefs associés respectifs P_1 et P_2 sont tels que P_2 est un polynôme clef successeur immédiat limite de P_1 .

3.2. Monomialisation dans le cas non dégénéré.

Comme annoncé, dans cette section nous allons monomialiser tous les éléments qui sont non dégénérés par rapport à un système de paramètres.

Soient α et γ deux éléments de \mathbb{Z}^n , et $\delta = (\min \{\alpha_j, \gamma_j\})_{1 \leq j \leq n}$. On dit que $u^\alpha \mid u^\gamma$ si pour tout entier i , α_i est plus petit ou égal à γ_i , c'est-à-dire si α est plus petit ou égal à β composante par composante. On note également cela $\alpha \leq \beta$.

On pose

$$\tilde{\alpha} = \alpha - \delta = (\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_a, 0, \dots, 0) \in \mathbb{N}^n.$$

Le but étant de construire une suite d'éclatements telle que dans le dernier anneau, l'on ait $u^\alpha \mid u^\gamma$, on suppose que α n'est pas supérieur ou égal à γ composante par composante et que γ n'est pas supérieur ou égal à α composante par composante. Donc on peut supposer $|\tilde{\alpha}| \neq 0$, et $\tilde{\alpha}_i > 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, a\}$.

On pose de même

$$\tilde{\gamma} = \gamma - \delta = (0, \dots, 0, \tilde{\gamma}_{a+1}, \dots, \tilde{\gamma}_n) \in \mathbb{N}^n.$$

Quitte à échanger α et γ , on suppose $0 < |\tilde{\alpha}| \leq |\tilde{\gamma}|$.

3.2.1. Construction d'un caractère numérique strictement décroissant.

DÉFINITION 3.2.1. Soit l'application $\tau: \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{N}^2$ telle que

$$\tau(\alpha, \gamma) = (|\tilde{\alpha}|, |\tilde{\gamma}|).$$

Soit J un sous-ensemble minimal de $\{1, \dots, n\}$ tel que $\{1, \dots, a\} \subset J$ et $\sum_{q \in J} \tilde{\gamma}_q \geq |\tilde{\alpha}|$.

Soient $\pi: (R, u) \rightarrow (R_1, u^{(1)})$ un éclatement encadré le long de (u_J) , et $j \in J$ tel que R_1 est un localisé de $R \left[\frac{u_j}{u_j} \right]$.

Si $q \in J \setminus \{j\}$, on rappelle que $u'_q = \frac{u_q}{u_j}$, et $u'_q = u_q$ sinon.

On définit maintenant $\tilde{\alpha}'_q = \tilde{\alpha}_q$ pour $q \neq j$, et $\tilde{\alpha}'_q = 0$ sinon; ainsi que $\tilde{\gamma}'_q = \tilde{\gamma}_q$ si $q \neq j$, $\tilde{\gamma}'_q = \sum_{q \in J} \tilde{\gamma}_q - |\tilde{\alpha}|$ sinon, et

$$\delta' = (\delta_1, \dots, \delta_{j-1}, \sum_{q \in J} \delta_q + |\tilde{\alpha}|, \delta_{j+1}, \dots, \delta_n).$$

On a donc :

$$u^\alpha = \prod_{l=1}^n u_l^{\alpha_l}$$

c'est-à-dire, en séparant le produit en deux :

$$u^\alpha = \prod_{\substack{l=1 \\ l \in J \setminus \{j\}}}^n u_l^{\alpha_l} \times \prod_{\substack{l=1 \\ l \notin J \setminus \{j\}}}^n u_l^{\alpha_l}.$$

Or pour $l \in J \setminus \{j\}$, on a $u_l = u'_l \times u_j$ et pour $l \notin J \setminus \{j\}$, on a $u_l = u'_l$. Ainsi

$$u^\alpha = \prod_{\substack{l=1 \\ l \in J \setminus \{j\}}}^n (u'_l \times u_j)^{\alpha_l} \times \prod_{\substack{l=1 \\ l \notin J \setminus \{j\}}}^n (u'_l)^{\alpha_l}.$$

Isolons le terme u_j , nous obtenons :

$$u^\alpha = u_j^{\sum_{l \in J \setminus \{j\}} \alpha_l} \times \prod_{l=1}^n (u'_l)^{\alpha_l}$$

et comme $\tilde{\alpha} = \alpha - \delta$, il vient $\alpha = \tilde{\alpha} + \delta$ puis

$$u^\alpha = u_j^{\sum_{l \in J \setminus \{j\}} \alpha_l} \times \prod_{l=1}^n (u'_l)^{\tilde{\alpha}_l + \delta_l}$$

c'est-à-dire

$$u^\alpha = u_j^{\sum_{l \in J \setminus \{j\}} \alpha_l} \times \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^n (u'_l)^{\tilde{\alpha}_l + \delta_l} \times (u'_j)^{\tilde{\alpha}_j + \delta_j}.$$

Or $\tilde{\alpha}'_q = \tilde{\alpha}_q$ pour $q \neq j$ et $\delta' = (\delta_1, \dots, \delta_{j-1}, \sum_{q \in J} \delta_q + |\tilde{\alpha}|, \delta_{j+1}, \dots, \delta_n)$,

d'où

$$u^\alpha = u_j^{\sum_{l \in J \setminus \{j\}} \alpha_l} \times \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^n (u'_l)^{\tilde{\alpha}'_l + \delta'_l} \times (u'_j)^{\tilde{\alpha}_j + \delta_j}$$

puis

$$u^\alpha = u_j^{\sum_{l \in J \setminus \{j\}} \alpha_l + \tilde{\alpha}_j + \delta_j} \times \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^n (u'_l)^{\tilde{\alpha}'_l + \delta'_l}.$$

On inclus à nouveau le terme $l = j$ dans le produit, alors :

$$u^\alpha = u_j^{\sum_{l \in J \setminus \{j\}} \alpha_l + \tilde{\alpha}_j + \delta_j - \tilde{\alpha}'_j - \delta'_j} \times \prod_{l=1}^n (u'_l)^{\tilde{\alpha}'_l + \delta'_l}$$

c'est-à-dire

$$u^\alpha = u_j^{\sum_{l \in J \setminus \{j\}} \alpha_l + \tilde{\alpha}_j + \delta_j - \tilde{\alpha}'_j - \delta'_j} \times (u')^{\tilde{\alpha}' + \delta'}.$$

Or nous avons :

$$\begin{aligned} \sum_{l \in J \setminus \{j\}} \alpha_l + \tilde{\alpha}_j + \delta_j - \tilde{\alpha}'_j - \delta'_j &= \sum_{l \in J \setminus \{j\}} \alpha_l + \tilde{\alpha}_j + \delta_j - \delta'_j \\ &= \sum_{l \in J \setminus \{j\}} \alpha_l + \tilde{\alpha}_j + \delta_j - \sum_{q \in J} \delta_q - |\tilde{\alpha}| \\ &= \sum_{l \in J \setminus \{j\}} (\tilde{\alpha}_l + \delta_l) + \tilde{\alpha}_j - \sum_{q \in J \setminus \{j\}} \delta_q - |\tilde{\alpha}| \\ &= \sum_{l \in J} \tilde{\alpha}_l - |\tilde{\alpha}| \\ &= 0. \end{aligned}$$

Il vient donc $u^\alpha = (u')^{\tilde{\alpha}' + \delta'}$, et de même $u^\gamma = (u')^{\tilde{\gamma}' + \delta'}$.

On pose $\alpha' = \delta' + \tilde{\alpha}'$ et $\gamma' = \delta' + \tilde{\gamma}'$.

PROPOSITION 3.2.2. *On a $\tau(\alpha', \gamma') < \tau(\alpha, \gamma)$.*

DÉMONSTRATION. Premier cas : $j \in \{1, \dots, a\}$. Alors

$$|\tilde{\alpha}'| = |\tilde{\alpha}| - \tilde{\alpha}_j < |\tilde{\alpha}|.$$

Deuxième cas : $j \in \{a+1, \dots, n\}$. Alors $|\tilde{\alpha}'| = |\tilde{\alpha}|$. Montrons que $|\tilde{\gamma}'| < |\tilde{\gamma}|$.

Or

$$\begin{aligned} |\tilde{\gamma}'| &= \sum_{\substack{q=a+1 \\ q \neq j}}^n \tilde{\gamma}_q + \sum_{q \in J} \tilde{\gamma}_q - |\tilde{\alpha}| \\ &= \sum_{q=a+1}^n \tilde{\gamma}_q + \sum_{q \in J \setminus \{j\}} \tilde{\gamma}_q - |\tilde{\alpha}|. \end{aligned}$$

Par minimalité de J , l'on a $\sum_{q \in J \setminus \{j\}} \tilde{\gamma}_q - |\tilde{\alpha}| < 0$, et donc

$$|\tilde{\gamma}'| < \sum_{q=a+1}^n \tilde{\gamma}_q = |\tilde{\gamma}|.$$

Dans tous les cas, il vient $(|\tilde{\alpha}'|, |\tilde{\gamma}'|) < (|\tilde{\alpha}|, |\tilde{\gamma}|) = \tau(\alpha, \gamma)$.

Si $|\tilde{\alpha}'| \leq |\tilde{\gamma}'|$, alors $\tau(\alpha', \gamma') = (|\tilde{\alpha}'|, |\tilde{\gamma}'|)$ et l'on a bien le résultat annoncé.

Sinon, $|\tilde{\alpha}'| > |\tilde{\gamma}'|$, alors

$$\tau(\alpha', \gamma') = (|\tilde{\gamma}'|, |\tilde{\alpha}'|) < (|\tilde{\alpha}'|, |\tilde{\gamma}'|),$$

et l'on a encore le résultat. \square

Quitte à renuméroter les u'_q , on peut supposer que $u'_q \notin R_1^\times$ pour tout $q \in \{1, \dots, s\}$ et $u'_q \in R_1^\times$ sinon. Comme π est un éclatement encadré, l'on a $\{u'_1, \dots, u'_s\} \subset u^{(1)}$, donc quitte à renuméroter encore une fois, nous pouvons supposer $u'_q = u_q^{(1)}$ pour tout $q \in \{1, \dots, s\}$. On pose

$$\alpha^{(1)} = (\alpha'_1, \dots, \alpha'_s, 0, \dots, 0) \in \mathbb{Z}^{n_1}$$

et

$$\gamma^{(1)} = (\gamma'_1, \dots, \gamma'_s, 0, \dots, 0) \in \mathbb{Z}^{n_1}.$$

On a $\tau(\alpha^{(1)}, \gamma^{(1)}) \leq \tau(\alpha', \gamma')$, et donc d'après la proposition 3.2.2,

$$\tau(\alpha^{(1)}, \gamma^{(1)}) < \tau(\alpha, \gamma).$$

3.2.2. Divisibilité et changements de variables. Soit $s \in \{1, \dots, n\}$ quelconque.

On écrit $u = (w, v)$ où

$$w = (w_1, \dots, w_s) = (u_1, \dots, u_s)$$

et

$$v = (v_1, \dots, v_{n-s}).$$

On prend α et γ deux éléments de \mathbb{Z}^s .

PROPOSITION 3.2.3. *Il existe une suite locale encadrée*

$$(R, u) \rightarrow (R_l, u^{(l)}),$$

respectivement à ν , indépendante de v , telle que dans R_l , on ait $w^\alpha \mid w^\gamma$ ou $w^\gamma \mid w^\alpha$.

DÉMONSTRATION. À moins que α soit plus grand ou égal à γ composante par composante, ou que γ soit plus grand ou égal à α composante par composante, nous pouvons itérer la construction précédente, en choisissant des éclatements respectivement à ν et indépendants de v . Comme τ est à valeurs dans \mathbb{N}^2 et décroît strictement, le processus s'arrête après un nombre fini d'étapes. Après ces étapes, nous avons $w^\alpha = U \times (u^{(l)})^{\alpha^{(l)}}$, $w^\gamma = U \times (u^{(l)})^{\gamma^{(l)}}$, avec $U \in R_l^\times$ et avec ou $\alpha^{(l)}$ plus grand ou égal à $\gamma^{(l)}$ composante par composante, ou $\gamma^{(l)}$ plus grand

ou égal à $\alpha^{(l)}$ composante par composante. On a donc bien $w^\alpha \mid w^\gamma$ ou $w^\gamma \mid w^\alpha$ dans R_l . \square

Etudions maintenant les changements de variables que nous faisons lors de chaque éclatement. On considère i et i' des indices de la suite locale encadrée, autrement dit on regarde

$$(R, u) \rightarrow \cdots \rightarrow (R_i, u^{(i)}) \rightarrow \cdots \rightarrow (R_{i'}, u^{(i')}) \rightarrow \cdots \rightarrow (R_l, u^{(l)}).$$

PROPOSITION 3.2.4. *Soient donc $0 \leq i < i' \leq l$. On prend m un élément de $\{1, \dots, n_i\}$ et m' un élément de $\{1, \dots, n_{i'}\}$. Alors :*

- (1) *Il existe un vecteur $\delta_m^{(i',i)}$ de $\mathbb{N}^{\#D_i}$ tel que*

$$u_m^{(i)} \in \left(u_{D_{i'}}^{(i')} \right)^{\delta_m^{(i',i)}} R_{i'}^\times.$$

- (2) *Si de plus la suite locale (3.4.1) est indépendante de u_T , avec $T \subset \{1, \dots, n\}$ et que l'on suppose que $u_m^{(i)} \notin u_T$, alors $\left(u_{D_{i'}}^{(i')} \right)^{\delta_m^{(i',i)}}$ est un monôme en $u_{D_{i'}}^{(i')} \setminus u_T$.*

- (3) *On suppose que pour tout $i'' > 0$ tel que $i \leq i'' < i'$, on a $D_{i''} = \{1, \dots, n_{i''}\}$, et on suppose que $m' \in D_{i'}$. Alors il existe un vecteur $\gamma_{m'}^{(i,i')}$ de \mathbb{Z}^{n_i} tel que*

$$u_{m'}^{(i')} = \left(u^{(i)} \right)^{\gamma_{m'}^{(i,i')}}.$$

- (4) *Si de plus la suite locale (3.4.1) est indépendante de u_T et que l'on suppose que $u_{m'}^{(i')} \notin u_T$, alors $u_{m'}^{(i')}$ est un monôme en $u^{(i)} \setminus u_T$.*

DÉMONSTRATION. Nous considérons le cas $i' = i + 1$, le cas général se faisant par récurrence. Nous pouvons aussi supposer $i = 0$.

Montrons (1). D'après la définition 3.1.3, on a $u'_{A_1 \cup B_1 \cup \{j_1\}} = u_{D_1}^{(1)}$.

On note par ailleurs $D_1 = D_1^{A_1} \cup D_1^{B_1}$ où

$$u'_{A_1} = u_{D_1^{A_1}}^{(1)}$$

et

$$u'_{B_1 \cup \{j_1\}} = u_{D_1^{B_1}}^{(1)}.$$

Si $m \in A_1 \cup \{j_1\}$, alors $u_m = u'_m$ et l'on a ce que l'on voulait. Si $m \in B_1$ alors $u_m = u_{j_1} u'_m = u'_{j_1} u'_m$ et l'on a encore le résultat.

Si $m \in C_1$, alors $u_m = u'_{j_1} u'_m$ et par définition, $u'_m \in R_1^\times$, ce qui nous donne le résultat.

Montrons (3). On a $m' \in D_1 = D_1^{A_1} \cup D_1^{B_1}$ et $u'_{A_1 \cup B_1 \cup \{j_1\}} = u_{D_1}^{(1)}$. Si $m' \in D_1^{A_1}$ alors par définition $u_{m'}^{(1)} \in u'_{A_1} = u_{A_1}$ et nous avons le résultat. Sinon $m' \in D_1^{B_1}$. Alors

$$u_{m'}^{(1)} \in u'_{B_1 \cup \{j_1\}} = \left\{ u_{j_1}, \frac{u_q}{u_{j_1}} \mid q \in B_1 \right\}.$$

Ce qui conclut la preuve de (3).

Supposons maintenant que la suite est indépendante de u_T . Par définition nous avons $u_{J_1} \cap u_T = \emptyset$ et donc aussi en particulier

$$u_{D_1^{B_1}}^{(1)} \cap u_T = \emptyset.$$

Montrons (2) et supposons donc que $u_m \notin u_T$.

Si $m \in A_1$, alors $u_m = u'_m \in u_{D_1^{A_1}}^{(1)}$ et $u_m \notin u_T$ ce qui conclut la preuve. Sinon $m \in J_1$. Alors nous avons vu dans la preuve du point (1) que m était un monôme en $u_{D_1^{B_1}}^{(1)}$ uniquement, et comme $u_{D_1^{B_1}}^{(1)} \cap u_T = \emptyset$, cela conclut la preuve du point (2).

Reste à montrer le point (4). On suppose alors que $u_{m'}^{(1)} \notin u_T$, avec $m' \in D_1 = D_1^{A_1} \cup D_1^{B_1}$.

Si $m' \in D_1^{A_1}$, alors $u_{m'}^{(1)} \in u'_{A_1} = u_{A_1}$. Comme $u_{m'}^{(1)} \notin u_T$, on a $u_{m'}^{(1)} \in u \setminus u_T$.

Sinon $m' \in D_1^{B_1}$ et on a vu que $u_{m'}^{(1)}$ est un monôme en $u_{B_1 \cup \{j_1\}} \subset u_J$. Comme $u_J \cap u_T = \emptyset$, on a le résultat. \square

REMARQUE 3.2.5. Soient $T \subset A$, un ensemble de cardinal t , et $s := n - t$. On pose

$$v = (v_1, \dots, v_t) = u_T$$

et

$$w = (w_1, \dots, w_s) = u_{\{1, \dots, n\} \setminus T}.$$

On suppose ici que les éclatements que l'on fait sont monomiaux.

On a $u' = (v, w')$ où $w' = (w'_1, \dots, w'_s) = (w^{\gamma(1)}, \dots, w^{\gamma(s)})$ avec $\gamma(i) \in \mathbb{Z}^s$, ce d'après la proposition 3.2.4. D'après la preuve de cette même proposition, la matrice $F_s = [\gamma(1) \dots \gamma(s)]$ est une matrice unimodulaire. Pour tout $\delta \in \mathbb{Z}^s$, on a $w'^{\delta} = w^{\delta F_s}$. De même $w_i = w'^{\delta(i)}$ et les s -vecteurs $\delta(1), \dots, \delta(s)$ forment une matrice unimodulaire égale à l'inverse de F_s . On a donc $w'^{\gamma} = w^{\gamma F_s^{-1}}$, et ce pour tout $\gamma \in \mathbb{Z}^s$.

PROPOSITION 3.2.6. *On a l'équivalence :*

$$w^\alpha | w^\gamma \text{ dans } R_i \Leftrightarrow \nu(w^\alpha) \leq \nu(w^\gamma).$$

DÉMONSTRATION. On a $u^{(l)} = (w_1^{(l)}, \dots, w_{r_l}^{(l)}, v)$.

D'après la Proposition 3.2.4, il existe $\alpha^{(l)}, \gamma^{(l)} \in \mathbb{N}^{r_l}$ et il existe $y, z \in R_l^\times$ tels que $w^\alpha = y (w^{(l)})^{\alpha^{(l)}}$ et $w^\gamma = z (w^{(l)})^{\gamma^{(l)}}$.

Pour tout $i \in \{1, \dots, r_l\}$, on a $\nu(w_i^{(l)}) \geq 0$ puisque l'éclatement est supposé respectivement à ν , donc centré dans R_l .

Par construction de R_l , on a $\alpha^{(l)}$ plus grand que $\gamma^{(l)}$ composante par composante, ou l'inverse.

Donc

$$(w^{(l)})^{\alpha^{(l)}} \mid (w^{(l)})^{\gamma^{(l)}} \Leftrightarrow \nu\left((w^{(l)})^{\alpha^{(l)}}\right) \leq \nu\left((w^{(l)})^{\gamma^{(l)}}\right),$$

c'est-à-dire que

$$w^\alpha \mid w^\gamma \Leftrightarrow \nu(w^\alpha) \leq \nu(w^\gamma).$$

□

3.2.3. Monomialisation des éléments non dégénérés. Soit N un idéal de R engendré par des monômes en w . Choisissons $w^{\epsilon_0}, \dots, w^{\epsilon_b}$ des générateurs minimaux de N , avec $\nu(w^{\epsilon_0}) \leq \nu(w^{\epsilon_i})$ pour tout i .

PROPOSITION 3.2.7. *Il existe une suite locale encadrée*

$$\phi: (R, u) \rightarrow (R_l, u^{(l)})$$

respectivement à ν , indépendante de v et telle que $NR_l = (w^{\epsilon_0})R_l$.

DÉMONSTRATION. Soit

$$\tau(N, w) := \begin{cases} \left(b, \min_{0 \leq i < j \leq b} \tau(w^{\epsilon_i}, w^{\epsilon_j})\right) & \text{si } b \neq 0 \\ (0, 1) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Supposons $b \neq 0$.

On prend $(w^{\epsilon_{i_0}}, w^{\epsilon_{j_0}})$ un couple qui atteint le minimum

$$\min_{0 \leq i < j \leq b} \tau(w^{\epsilon_i}, w^{\epsilon_j}).$$

D'après la proposition 3.2.2, $\tau(N, w)$ décroît strictement lors de chaque éclatement.

Le processus s'arrêtant, NR_l est engendré par un seul élément en tant qu'idéal de R_l . D'après la proposition 3.2.6, c'est w^{ϵ_0} , qui a la valeur minimale, qui divise les autres. Il vient que $NR_l = (w^{\epsilon_0})R_l$. □

THÉORÈME 3.2.8. *Soient f non-dégénéré par rapport à $u = (w, v)$, et N l'idéal qui vérifie la conclusion de la proposition 3.1.2, engendré par des monômes en w .*

Alors il existe une suite locale encadrée, indépendante de v ,

$$(R, u) \rightarrow (R', u')$$

telle que f est un monôme en u' multiplié par une unité de R' .

DÉMONSTRATION. Soit $(R, u) \rightarrow (R', u')$ la suite locale encadrée de la proposition 3.2.7. On a $NR' = w^{\epsilon_0}R'$. Comme N contient f d'après la preuve de la proposition 3.1.2, il vient qu'il existe un élément $z \in R'$ tel que $f = w^{\epsilon_0}z$. Comme ν est centrée en R' , pour montrer que z est une unité de R' , on va montrer que $\nu(z) = 0$.

Or $\nu(z) = \nu(f) - \nu(w^{\epsilon_0}) = \nu(N) - \nu(w^{\epsilon_0})$ d'après la proposition 3.1.2.

Comme $NR' = w^{\epsilon_0}R'$, on a $\nu(N) = \nu(w^{\epsilon_0})$, et donc $\nu(z) = 0$, ce qui conclut la preuve. \square

3.3. Non dégénérescence et polynômes clefs.

Maintenant que nous avons réussi à monomialiser tous les éléments non dégénérés par rapport aux générateurs de l'anneau local, nous allons montrer que tous les éléments sont non dégénérés par rapport à une suite particulière de polynômes clefs successeurs immédiats. Soient Λ l'ensemble des polynômes clefs et

$$M_\alpha := \{Q \in \Lambda \text{ tel que } \deg(Q) = \alpha\}.$$

REMARQUE 3.3.1. On rappelle qu'une valuation ν centrée en un anneau local R est *archimédienne* si $\nu(R \setminus \{0\})$ est un semi-groupe archimédien.

C'est-à-dire si pour tout $(\alpha, \beta) \in \nu(R \setminus \{0\})^2$ tel que $\alpha > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n\alpha > \beta$.

PROPOSITION 3.3.2. *On considère ν une valuation archimédienne centrée en un anneau intègre local noethérien (R, \mathfrak{m}, k) . On note Γ le groupe des valeurs de ν et l'on pose $\Phi := \nu(R \setminus (0))$.*

L'ensemble Φ ne contient pas de suite infinie bornée.

DÉMONSTRATION. Supposons par l'absurde que l'on a une suite

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \dots$$

infinie d'éléments de Φ bornée par un élément $\beta \in \Phi$.

Ainsi on a une suite infinie décroissante $\dots \subseteq P_{\alpha_2} \subseteq P_{\alpha_1}$ telle que pour tout indice i , on a $P_\beta \subseteq P_{\alpha_i}$; et donc une suite infinie décroissante d'idéaux de $\frac{R}{P_\beta}$.

On pose

$$\delta = \nu(\mathfrak{m}) = \min_{x \in \Phi \setminus \{0\}} \{\nu(x)\}.$$

Comme ν est archimédienne, on sait qu'il existe un entier non nul n tel que $\beta \leq n\delta$, et donc tel que $\mathfrak{m}^n \subseteq P_\beta$. On construit ainsi un épimorphisme d'anneaux $\frac{R}{\mathfrak{m}^n} \twoheadrightarrow \frac{R}{P_\beta}$. L'anneau R étant noethérien, $\frac{R}{\mathfrak{m}^n}$ est artinien, et $\frac{R}{P_\beta}$ l'est donc aussi, ce qui contredit l'existence de la suite infinie décroissante d'idéaux de $\frac{R}{P_\beta}$. \square

DÉFINITION 3.3.3. Supposons que l'ensemble M_α est non vide et n'a pas de maximum et qu'il existe un polynôme clef $Q \in \Lambda$ tel que $\epsilon(Q) > \epsilon(M_\alpha)$. On appelle *polynôme clef limite* tout polynôme de degré minimal vérifiant cette propriété.

DÉFINITION 3.3.4. Soit $(Q_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de polynômes clefs. On dit que c'est une suite de polynômes clefs successeurs immédiats si pour tout entier naturel i , on a $Q_i < Q_{i+1}$.

PROPOSITION 3.3.5. *S'il n'y a pas de polynôme clef limite, alors il existe une suite finie ou infinie de polynômes clefs successeurs immédiats $Q_1 < \dots < Q_i < \dots$ telle que la suite $\{\epsilon(Q_i)\}$ est cofinale dans $\epsilon(\Lambda)$, c'est-à-dire telle que*

$$\forall Q \in \Lambda \exists i \text{ tel que } \epsilon(Q_i) \geq \epsilon(Q).$$

DÉMONSTRATION. Nous allons raisonner par l'absurde.

Supposons que pour toute suite finie ou infinie de polynômes clefs successeurs immédiats (Q_i) , la suite $\{\epsilon(Q_i)\}$ n'est pas cofinale dans $\epsilon(\Lambda)$. Montrons donc qu'il existe un polynôme clef limite.

Supposons tout d'abord que pour tout $\alpha \in \Omega = \{\beta \text{ tq } M_\beta \neq \emptyset\}$, M_α a un élément maximal, autrement dit

$$\forall \alpha \in \Omega \exists R_\alpha \in M_\alpha \text{ tel que } \forall Q \in M_\alpha, \epsilon(R_\alpha) \geq \epsilon(Q).$$

On pose $M := \{R_\alpha\}_{\alpha \in \Omega}$. Tous les éléments dans M sont de degrés distincts, ils sont donc classés strictement par leurs degrés, c'est-à-dire que si $\alpha < \alpha'$, alors $\deg(R_\alpha) < \deg(R_{\alpha'})$. Comme $R_{\alpha'}$ est un polynôme clef, par définition il vient que $\epsilon(R_\alpha) < \epsilon(R_{\alpha'})$ dès que $\alpha < \alpha'$. Dans M les éléments sont donc classés strictement par leurs valeurs de ϵ .

Montrons que ce sont des successeurs immédiats. Soient R_α et $R_{\alpha'}$ deux éléments consécutifs de M . On sait que

$$\alpha = \deg(R_\alpha) < \deg(R_{\alpha'}) = \alpha'$$

et que $\epsilon(R_\alpha) < \epsilon(R_{\alpha'})$. On cherche à montrer que $R_{\alpha'}$ est de degré minimal pour la propriété. Soit donc $R \in \Lambda$ tel que $\epsilon(R_\alpha) < \epsilon(R)$ et $\deg(R) \leq \deg(R_{\alpha'})$. Montrons que $\deg(R) = \deg(R_{\alpha'}) = \alpha'$. Puisque $\epsilon(R_\alpha) < \epsilon(R)$ et puisque R_α est un polynôme clef, par définition,

$$\deg(R_\alpha) = \alpha \leq \deg(R) \leq \alpha'.$$

Le polynôme R étant un polynôme clef, si on avait $\deg(R) = \deg(R_\alpha)$, alors on aurait $\epsilon(R_\alpha) \geq \epsilon(R)$, ce qui est absurde. En posant

$$\lambda := \deg(R),$$

on a donc $\alpha < \lambda \leq \alpha'$, $R \in M_\lambda$ et $R_\lambda \in M$. Comme les polynômes dans M sont classés strictement par leurs degrés et que R_α et $R_{\alpha'}$ sont consécutifs, il vient $\lambda = \alpha'$, et donc $R_\alpha < R_{\alpha'}$.

L'ensemble M est donc une suite de polynômes successeurs immédiats. Par hypothèse, la suite $\epsilon(M)$ n'est pas cofinale, donc il existe $R \in \Lambda$ tel que $\epsilon(R) > \epsilon(M)$, mais alors il existe α tel que $R \in M_\alpha$ et ainsi $\epsilon(R_\alpha) \geq \epsilon(R) > \epsilon(R_\alpha)$. C'est absurde.

Donc il existe un $\alpha \in \Omega$ tel que M_α n'a pas d'élément maximal. On a donc une suite :

$$\epsilon(Q_1) < \epsilon(Q_2) < \dots < \epsilon(Q_i) < \dots$$

où les Q_i sont des éléments de M_α .

Montrons que les Q_i sont des successeurs immédiats. Soit $R \in \Lambda$ tel que $\epsilon(Q_i) < \epsilon(R)$ et $\deg(R) \leq \deg(Q_{i+1}) = \alpha$. Comme Q_i est un polynôme clef, par définition, $\deg(R) \geq \deg(Q_i) = \alpha$. On a donc $\deg(R) = \deg(Q_{i+1}) = \alpha$, et Q_{i+1} est donc bien de degré minimal pour la propriété. Il vient que pour tout i , on a $Q_i < Q_{i+1}$.

Par hypothèse, la suite des Q_i étant une suite de polynômes clefs successeurs immédiats, la suite $(\epsilon(Q_i))_i$ n'est pas cofinale, c'est-à-dire qu'il existe un polynôme clef $Q \in \Lambda$ tel que $\epsilon(Q) > \epsilon(Q_i)$ et ce pour tout i . Soit $R \in M_\alpha$, comme M_α n'a pas d'élément maximal, il existe i tel que $\epsilon(R) < \epsilon(Q_i) < \epsilon(Q)$. Donc il existe un polynôme clef $Q \in \Lambda$ tel que $\epsilon(Q) > \epsilon(M_\alpha)$. Le polynôme Q est donc un polynôme clef limite. \square

THÉORÈME 3.3.6. *Il existe une suite finie ou infinie de polynômes clefs successeurs immédiats optimaux (éventuellement successeurs immédiats limites) $(Q_i)_{i \geq 1}$ telle que la suite $\{\epsilon(Q_i)\}$ est cofinale dans $\epsilon(\Lambda)$ où Λ désigne l'ensemble des polynômes clefs.*

DÉMONSTRATION. On sait que x est un polynôme clef. Si pour tout polynôme clef $Q \in \Lambda$, on a $\epsilon(x) \geq \epsilon(Q)$, alors la suite $\{\epsilon(x)\}$ est cofinale dans $\epsilon(\Lambda)$ et c'est terminé. Sinon il existe un polynôme clef $Q \in \Lambda$ tel que $\epsilon(x) < \epsilon(Q)$. S'il existe un élément maximal parmi les polynômes clefs de même degré que Q , alors on remplace Q par cet élément. D'après la Proposition 2.2.30, il existe une suite finie $Q_1 = x < \dots < Q_p = Q$ de polynômes clefs successeurs immédiats optimaux (éventuellement successeurs immédiats limites) qui commence à x , et finit à Q .

Si pour tout polynôme clef $Q' \in \Lambda$, il existe un polynôme clef de cette suite Q_i tel que $\epsilon(Q_i) \geq \epsilon(Q')$, alors la suite $\{\epsilon(Q_i)\}$ est cofinale dans $\epsilon(\Lambda)$ et c'est terminé.

Sinon, il existe un polynôme $Q' \in \Lambda$ tel que pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, $\epsilon(Q_i) < \epsilon(Q')$. Donc en particulier, $\epsilon(Q_p) < \epsilon(Q')$ et à nouveau nous utilisons la Proposition 2.2.30 pour construire une suite de polynômes clefs successeurs immédiats optimaux (éventuellement successeurs immédiats limites) qui commence à Q_p et finit à Q' . On a ainsi une suite $Q_1 = x, \dots, Q_r = Q'$ de polynômes clefs successeurs immédiats optimaux (éventuellement successeurs immédiats limites) qui commence à x et finit à Q' .

Nous réitérons le procédé jusqu'à ce que la suite $\{\epsilon(Q_i)\}$ soit cofinale dans $\epsilon(\Lambda)$. Si Q_i est maximal parmi l'ensemble des polynômes clefs de degré $\deg_X(Q_i)$, alors $\deg_X(Q_i) < \deg_X(Q_{i+1})$. Si $Q_i < \lim Q_{i+1}$, nous avons encore $\deg_X(Q_i) < \deg_X(Q_{i+1})$. De fait, le degré des polynômes de la suite augmente strictement au moins tous les deux pas, donc le processus s'arrête. \square

PROPOSITION 3.3.7. *Supposons que $k = k_\nu$. Il existe une suite finie ou infinie de polynômes clefs successeurs immédiats optimaux (éventuellement successeurs immédiats limites) $(Q_i)_i$ telle que la suite $\{\epsilon(Q_i)\}$ est cofinale dans $\epsilon(\Lambda)$ où Λ désigne l'ensemble des polynômes clefs.*

Et cette suite vérifie : si $Q_i < Q_{i+1}$, alors le Q_i -développement de Q_{i+1} contient exactement deux termes.

DÉMONSTRATION. On a $Q_1 = x$, et on suppose Q_1, Q_2, \dots, Q_i construits. On note $a := \deg_x(Q_i)$ et on rappelle que

$$G_{<a} = \sum_{\deg_x(P) < a} \text{in}_{\nu_{Q_i}}(P) G_\nu.$$

Si Q_i est maximal dans Λ , on s'arrête. Sinon, Q_i n'est pas maximal et il a donc un successeur immédiat.

On pose $\alpha := \min \{h \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } h\nu(Q_i) \in \Delta_{<a}\}$ où $\Delta_{<a}$ est le sous-groupe de Γ engendré par les valeurs des éléments de $G_{<a}$.

REMARQUE 3.3.8. Si l'ensemble sur lequel on prend le minimum est vide, alors Q_i n'a pas de successeur immédiat, c'est-à-dire $\epsilon(Q_i) = \max \epsilon(\Lambda)$.

De fait, il existe donc un polynôme f de degré strictement inférieur à a tel que $\alpha\nu(Q_i) = \nu(Q_i^\alpha) = \nu(f) \neq 0$.

Ainsi, comme $k_\nu = k$, il existe une constante non nulle $c \in k$ telle que $\text{in}_\nu(Q_i^\alpha) = \text{in}_\nu(cf)$.

On pose $Q = Q_i^\alpha - cf$. D'après la preuve de la proposition 2.2.23, on a $\epsilon(Q_i) < \epsilon(Q)$.

Montrons que $Q_i < Q$. Il suffit de montrer que Q est de degré minimal. Soit donc P un polynôme clef tel que $\epsilon(Q_i) < \epsilon(P)$.

Supposons par l'absurde que $\deg(P) < a\alpha$. On pose $P = \sum_{j=0}^{\alpha-1} p_j Q_i^j$ le Q_i -développement de P . Alors d'après la preuve de la proposition 2.2.23, on sait que $\sum_{j=0}^{\alpha-1} \text{in}_\nu(p_j) \text{in}_\nu(Q_i)^j = 0$, ce qui contredit la minimalité de α .

Ainsi Q est de degré minimal et $Q_i < Q$. N'ayant que deux termes dans son Q_i -développement, c'est un successeur immédiat optimal de Q_i .

Premier cas : $\alpha > 1$. Alors on pose $Q_{i+1} := Q$ et on itère la démarche.

Deuxième cas : $\alpha = 1$. Alors tous les éléments de M_{Q_i} ont même degré que Q_i .

Si M_{Q_i} n'a pas d'élément maximal, alors on procède comme dans la preuve de la Proposition 2.2.30 et l'on pose Q_{i+1} un successeur immédiat limite de Q_i .

Sinon, M_{Q_i} a un élément maximal Q_{i+1} . Cet élément maximal a même degré que Q_i , ainsi il s'écrit $Q_{i+1} = Q_i - h$ avec h de degré strictement inférieur à celui de Q_i . Alors c'est un successeur immédiat de Q_i dont le Q_i -développement admet uniquement deux termes. C'est donc un successeur immédiat optimal de Q_i dont le Q_i -développement admet uniquement deux termes. Ce qui conclut la preuve. \square

On suppose maintenant $k = k_\nu$ et l'on considère $\mathcal{Q} := (Q_i)_i$ une suite de polynômes clefs successeurs immédiats optimaux (éventuellement successeurs immédiats limites) telle que $(\epsilon(Q_i))_i$ est cofinale dans $\epsilon(\Lambda)$ et telle que si $Q_i < Q_{i+1}$, alors le Q_i -développement de Q_{i+1} admet exactement deux termes.

COROLLAIRE 3.3.9. *Pour tout polynôme f , il existe un indice i tel que $\nu_{Q_i}(f) = \nu(f)$.*

DÉMONSTRATION. D'après la Proposition 2.2.18, il existe un polynôme clef Q tel que $\nu_Q(f) = \nu(f)$.

La suite $\{\epsilon(Q_i)\}$ étant cofinale, il existe un indice i tel que

$$\epsilon(Q_i) \geq \epsilon(Q).$$

D'après la proposition 2.2.17, $\nu_Q(f) \leq \nu_{Q_i}(f)$ et comme $\nu_Q(f) = \nu(f)$, on a bien $\nu_{Q_i}(f) = \nu(f)$. \square

REMARQUE 3.3.10. Pour tout polynôme f , il existe donc un polynôme clef Q_i de la suite \mathcal{Q} tel que f est non dégénéré par rapport à Q_i .

REMARQUE 3.3.11. Soit $Q_i \in \mathcal{Q}$. On ne suppose pas ici $k = k_\nu$.

On pose $a_i := \deg_x(Q_i)$ et $\Gamma_{<a_i}$ le groupe $\nu(G_{<a_i} \setminus \{0\})$.

Si $\nu(Q_i) \notin \Gamma_{<a_i} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, alors $\epsilon(Q_i)$ est maximal dans $\epsilon(\Lambda)$ et la suite \mathcal{Q} s'arrête à Q_i .

3.4. Monomialisation des polynômes clefs.

On rappelle que $K = k(u_1, \dots, u_{n-1})$ et on se place dans l'extension $K(u_n)$, et l'on considère une suite de polynômes clefs \mathcal{Q} comme dans la section 3.3.

Autrement dit, $\mathcal{Q} = (Q_i)_i$ est une suite de polynômes clefs successeurs immédiats optimaux ou successeurs immédiats limites telle que $(\epsilon(Q_i))_i$ est cofinale dans $\epsilon(\Lambda)$.

Soit f un élément de R . Nous savons que tout élément de ce type est non dégénéré par rapport à un polynôme clef de \mathcal{Q} . Nous savons également que tout élément non dégénéré par rapport à un système de paramètres réguliers est monomialisable.

Ainsi, pour monomialiser f , il suffit de monomialiser l'ensemble des polynômes clefs de cette suite. On suppose dans cette partie que le corps résiduel de la valuation est le corps de base.

3.4.1. Généralités. Soit $r := r(R, u, \nu)$ la dimension de

$$\sum_{i=1}^n \nu(u_i)\mathbb{Q}$$

dans $\Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Quitte à renuméroter, on peut supposer que $\nu(u_1), \dots, \nu(u_r)$ sont rationnellement indépendants et l'on considère Δ le sous-groupe de Γ engendré par $\nu(u_1), \dots, \nu(u_r)$.

REMARQUE 3.4.1. Soit $(R, u) \rightarrow (R_1, u^{(1)})$ un éclatement encadré. Alors $r \leq r_1 := r(R_1, u^{(1)}, \nu)$.

REMARQUE 3.4.2. Nous allons considérer des suites locales encadrées

$$(R, u) \rightarrow \dots \rightarrow (R_i, u^{(i)}) \rightarrow \dots$$

On note alors $r_i := r(R_i, u^{(i)}, \nu)$.

On pose $E := \{1, \dots, r, n\}$.

Soit

$$\overline{\alpha^{(0)}} := \min_{h \in \mathbb{N}^*} \{h \text{ tel que } h\nu(u_n) \in \Delta\}.$$

Donc $\overline{\alpha^{(0)}}\nu(u_n) = \sum_{j=1}^r \alpha_j^{(0)}\nu(u_j)$ avec, quitte à renuméroter les $\alpha_i^{(0)}$,

$$\alpha_1^{(0)}, \dots, \alpha_s^{(0)} \geq 0$$

et

$$\alpha_{s+1}^{(0)}, \dots, \alpha_r^{(0)} < 0.$$

On pose

$$w = (w_1, \dots, w_r, w_n) = (u_1, \dots, u_r, u_n)$$

et

$$v = (v_1, \dots, v_t) = (u_{r+1}, \dots, u_{n-1}),$$

avec $t = n - r - 1$.

En notant $x_i = \text{in}_\nu u_i$, on a x_1, \dots, x_r algébriquement indépendants sur k dans G_ν . Soit λ_0 le polynôme minimal de x_n sur $k(x_1, \dots, x_r)$, de degré α .

On pose :

$$y = \prod_{j=1}^r x_j^{\alpha_j^{(0)}},$$

$$\bar{y} = \prod_{j=1}^r w_j^{\alpha_j^{(0)}},$$

$$z = \frac{\overline{x_n^{\alpha^{(0)}}}}{y}$$

et

$$\bar{z} = \frac{\overline{w_n^{\alpha^{(0)}}}}{\bar{y}}.$$

On a

$$\lambda_0 = X^\alpha + c_0 y$$

où $c_0 \in k$, et $Z + c_0$ est le polynôme minimal λ_z de z sur $\text{gr}_\nu k(x_1, \dots, x_r)$.

En effet, $k_\nu \simeq k \simeq \frac{k[Z]}{(\lambda_z)}$ donc λ_z est de degré 1 en Z . Ainsi λ_0 est de degré $\overline{\alpha^{(0)}}$, et donc $\alpha = \overline{\alpha^{(0)}}$.

DÉFINITION 3.4.3. On dit que Q_i est *monomialisable* s'il existe une suite d'éclatements $(R, u) \rightarrow (R_l, u^{(l)})$ telle que dans R_l , Q_i s'écrit $u_n^{(l)}$ multiplié par un monôme en $(u_1^{(l)}, \dots, u_r^{(l)})$ fois une unité de R_l où $r_l := r(R_l, u^{(l)}, \nu)$.

On va montrer qu'il existe une suite locale encadrée qui monomialise tous les Q_i .

On a $Q_1 = u_n$, c'est un monôme. Par les éclatements, Q_1 reste un monôme. Il faut donc commencer par monomialiser Q_2 .

Puisque on veut monomialiser les polynômes clefs Q_i de la suite \mathcal{Q} construite auparavant par récurrence sur i , on se place ici dans un cadre plus général : on prend Q_2 un élément clef successeur immédiat (éventuellement limite) de Q_1 au lieu de polynôme clef successeur immédiat (éventuellement limite) de Q_1 .

Dans un premier temps, considérons

$$Q = w_n^\alpha + a_0 b_0 \bar{y}$$

où $b_0 \in R$ tels que $b_0 \equiv c_0$ modulo \mathfrak{m} et $a_0 \in R^\times$.

À priori, Q n'est pas un polynôme clef, mais nous verrons par la suite que l'on peut se ramener au cas $Q_2 = Q$ par une suite locale encadrée indépendante de u_n .

3.4.2. Paquets de Puiseux.

Soient

$$\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_r, \gamma_n) = (\alpha_1^{(0)}, \dots, \alpha_s^{(0)}, 0, \dots, 0)$$

et

$$\delta = (\delta_1, \dots, \delta_r, \delta_n) = (0, \dots, 0, -\alpha_{s+1}^{(0)}, \dots, -\alpha_r^{(0)}, \alpha).$$

On a

$$w^\delta = w_n^{\delta_n} \prod_{j=1}^r w_j^{\delta_j} = \frac{w_n^\alpha}{\prod_{j=s+1}^r w_j^{\alpha_j^{(0)}}}$$

et

$$w^\gamma = \prod_{j=1}^s w_j^{\alpha_j^{(0)}}.$$

Donc $\frac{w^\delta}{w^\gamma} = \frac{w_n^\alpha}{\prod_{j=1}^r w_j^{\alpha_j^{(0)}}} = \bar{z}$.

Calculons la valeur de w^δ .

$$\begin{aligned} \nu(w^\delta) &= \alpha \nu(w_n) - \sum_{j=s+1}^r \alpha_j^{(0)} \nu(w_j) \\ &= \alpha \nu(u_n) - \sum_{j=s+1}^r \alpha_j^{(0)} \nu(u_j) \\ &= \sum_{j=1}^r \alpha_j^{(0)} \nu(u_j) - \sum_{j=s+1}^r \alpha_j^{(0)} \nu(u_j) \\ &= \sum_{j=1}^s \alpha_j^{(0)} \nu(u_j) \\ &= \sum_{j=1}^s \alpha_j^{(0)} \nu(w_j) \\ &= \nu\left(\prod_{j=1}^s w_j^{\alpha_j^{(0)}}\right) \\ &= \nu(w^\gamma). \end{aligned}$$

THÉORÈME 3.4.4. *Il existe une suite locale encadrée*

$$(3.4.1) \quad (R, u) \xrightarrow{\pi_0} (R_1, u^{(1)}) \xrightarrow{\pi_1} \dots \xrightarrow{\pi_{l-1}} (R_l, u^{(l)})$$

respectivement à ν , indépendante de v , et qui satisfait les propriétés suivantes :

Pour tout entier $i \in \{1, \dots, l\}$, on note $u^{(i)} := (u_1^{(i)}, \dots, u_n^{(i)})$ et on rappelle que k est le corps résiduel de R_i .

(1) Les éclatements π_0, \dots, π_{l-2} sont monomiaux.

(2) On a $\bar{z} \in R_l^\times$.

(3) On pose $u^{(l)} = (w_1^{(l)}, \dots, w_r^{(l)}, v, w_n^{(l)})$. Alors pour tout entier $j \in \{1, \dots, r, n\}$, w_j est un monôme en $w_1^{(l)}, \dots, w_r^{(l)}$ multiplié par un élément de R_l^\times , et pour tout entier $j \in \{1, \dots, r\}$, $w_j^{(l)} = w^\eta$ où $\eta \in \mathbb{Z}^{r+1}$.

(4) On a $Q = w_n^{(l)} \times \bar{y}$.

DÉMONSTRATION. On applique la proposition 3.2.3 à (w^δ, w^γ) et on obtient ainsi une suite locale encadrée pour ν , indépendante de v et telle que $w^\gamma \mid w^\delta$ dans R_l .

D'après la proposition 3.2.6 et le fait que w^δ et w^γ aient même valeur, il vient que $w^\delta \mid w^\gamma$ dans R_l . De fait $\bar{z}, \bar{z}^{-1} \in R_l^\times$. Ce qui montre (2).

On choisit la suite locale minimale, c'est-à-dire telle que la suite composée de π_0, \dots, π_{l-2} ne satisfait pas la conclusion de la proposition 3.2.3 pour (w^δ, w^γ) . On va maintenant démontrer que cette suite vérifie les cinq propriétés du Théorème 3.4.4. Soit $i \in \{0, \dots, l\}$. On écrit $w^{(i)} = (w_1^{(i)}, \dots, w_r^{(i)}, w_n^{(i)})$, avec $r = n - t - 1$. On définit J_i, A_i, B_i, j_i et D_i de la même manière que nous avons défini J, A, B, j et D_1 , en considérant le i -ème éclatement.

Comme $D_i \subset \{1, \dots, n\}$, on a $\#D_i \leq n$. Autrement dit, on a $\#(A_i \cup (B_i \cup \{j_i\})) \leq n$, donc $\#A_i + \#B_i + 1 \leq n$. La suite étant indépendante de v , cela implique que $T \subset A_i$, et donc que $\#T \leq \#A_i$. Il vient $\#T + 1 + \#B_i \leq n$, puis $t + 1 \leq n$, donc $r \geq 0$. Par minimalité de la suite, on sait que si $i < l$, $w^\delta \nmid w^\gamma$ dans R_i , et donc $\#B_i \neq 0$, il vient $r > 0$.

Pour tout entier $i \in \{1, \dots, l\}$ et tout entier $j \in \{1, \dots, n\}$, on pose $\beta_j^{(i)} = \nu(u_j^{(i)})$. Pour tout $i < l$, π_i est un éclatement le long d'un idéal de la forme $(u_{J_i}^{(i)})$. Quitte à renuméroter, on peut supposer que

$1 \in J_i$ et que R_{i+1} est une localisation de $R_i \left[\frac{u_{J_i}^{(i)}}{u_1^{(i)}} \right]$. En particulier,

$$\beta_1^{(i)} = \min_{j \in J_i} \{ \beta_j^{(i)} \}.$$

FAIT 3.4.5. Soit $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$ un vecteur dont les éléments sont premiers entre eux dans leur ensemble. Alors il existe une matrice $A \in \text{SL}_n(\mathbb{Z})$ de déterminant 1 telle que X soit la première ligne de A .

DÉMONSTRATION. On fait un raisonnement par récurrence. Cas $n = 2$. D'après le théorème de Bezout, il existe des entiers relatifs a et b tels que $ax_1 - bx_2 = 1$. On prend alors $A = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ b & a \end{bmatrix}$ et nous avons le résultat.

Supposons la propriété vraie au rang $n \geq 2$. Montrons qu'elle l'est au rang $n+1$. Soit $d = \text{pgcd}(x_1, \dots, x_n)$. Par hypothèse, $\text{pgcd}(d, x_{n+1}) = 1$, donc d'après Bezout il existe des entiers a et b tels que $ad - bx_{n+1} = 1$ et pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on a $x_i = dx'_i$, avec les x'_i premiers entre eux. D'après l'hypothèse de récurrence il existe une matrice $B \in \text{SL}_n(\mathbb{Z})$, de déterminant 1, dont la première ligne est composée de (x'_1, \dots, x'_n) . On pose \tilde{B} la matrice obtenue en remplaçant la première ligne de B par le vecteur (x_1, \dots, x_n) . Elle est de déterminant d . On pose C la matrice obtenue en remplaçant la première ligne de B par (bx'_1, \dots, bx'_n) . La matrice C est de déterminant b .

Soit maintenant A la matrice carrée de taille $n + 1$ dont les n premières lignes et n premières colonnes sont composées de la matrice \tilde{B} , la dernière ligne est composée du vecteur (bx'_1, \dots, bx'_n, a) et la dernière colonne du vecteur $(x_{n+1}, 0, \dots, 0, a)$, autrement dit :

$$A = \begin{bmatrix} & & & & x_{n+1} \\ & & & & 0 \\ & & \tilde{B} & & \vdots \\ & & & & 0 \\ bx'_1 & \cdots & bx'_n & & a \end{bmatrix}.$$

On a bien le fait que la première ligne de A est composée du vecteur X , et nous avons, en développant par rapport à la dernière colonne :

$$\begin{aligned} \det(A) &= (-1)^n x_{n+1} (-1)^{n-1} \det(C) + a \det(\tilde{B}) \\ &= -x_{n+1} \det(C) + ad \\ &= -bx_{n+1} + ad \\ &= 1. \end{aligned}$$

La propriété est donc vraie au rang $n + 1$. □

LEMME 3.4.6. Soit $i \in \{0, \dots, l-1\}$. On suppose que la suite π_0, \dots, π_{i-1} de 3.4.1 est monomiale.

On pose $w^\gamma = (w^{(i)})^{\gamma^{(i)}}$ et $w^\delta = (w^{(i)})^{\delta^{(i)}}$. Alors :

- (1)
- (3.4.2)
$$\sum_{q \in E} (\gamma_q^{(i)} - \delta_q^{(i)}) \beta_q^{(i)} = 0,$$
- (2) $\text{pgcd}(\gamma_1^{(i)} - \delta_1^{(i)}, \dots, \gamma_r^{(i)} - \delta_r^{(i)}, \gamma_n^{(i)} - \delta_n^{(i)}) = 1,$
- (3) Toute relation de dépendance \mathbb{Z} -linéaire entre $\beta_1^{(i)}, \dots, \beta_r^{(i)}, \beta_n^{(i)}$ est un multiple entier de (3.4.2).

DÉMONSTRATION.

- (1) On a $\nu(w^\gamma) = \nu(w^\delta)$, ie $\nu\left(\left(w^{(i)}\right)^{\gamma^{(i)}}\right) = \nu\left(\left(w^{(i)}\right)^{\delta^{(i)}}\right)$. On a donc, comme $w^{(i)} = (w_1^{(i)}, \dots, w_r^{(i)}, w_n^{(i)})$:

$$\nu\left(\prod_{j=1}^r (w_j^{(i)})^{\gamma_j^{(i)}} \times (w_n^{(i)})^{\gamma_n^{(i)}}\right) = \nu\left(\prod_{j=1}^r (w_j^{(i)})^{\delta_j^{(i)}} \times (w_n^{(i)})^{\delta_n^{(i)}}\right)$$

c'est-à-dire

$$\sum_{j=1}^r \gamma_j^{(i)} \nu(w_j^{(i)}) + \gamma_n^{(i)} \nu(w_n^{(i)}) = \sum_{j=1}^r \delta_j^{(i)} \nu(w_j^{(i)}) + \delta_n^{(i)} \nu(w_n^{(i)}).$$

D'après la définition de $w^{(i)}$, pour tout entier $j \in \{1, \dots, r, n\}$, on a $w_j^{(i)} = u_j^{(i)}$, donc $\nu(w_j^{(i)}) = \beta_j^{(i)}$. Il vient :

$$\sum_{j=1}^r \gamma_j^{(i)} \beta_j^{(i)} + \gamma_n^{(i)} \beta_n^{(i)} = \sum_{j=1}^r \delta_j^{(i)} \beta_j^{(i)} + \delta_n^{(i)} \beta_n^{(i)}.$$

Puis $\sum_{j \in \{1, \dots, r, n\}} (\gamma_j^{(i)} - \delta_j^{(i)}) \beta_j^{(i)} = 0$.

- (2) On fait un raisonnement par récurrence. Cas $i = 0$.
On a

$$\begin{aligned} & \text{pgcd}(\gamma_1^{(i)} - \delta_1^{(i)}, \dots, \gamma_r^{(i)} - \delta_r^{(i)}, \gamma_n^{(i)} - \delta_n^{(i)}) \\ &= \text{pgcd}(\gamma_1^{(0)} - \delta_1^{(0)}, \dots, \gamma_r^{(0)} - \delta_r^{(0)}, \gamma_n^{(0)} - \delta_n^{(0)}) \\ &= \text{pgcd}(\alpha_1^{(0)}, \dots, \alpha_s^{(0)}, \alpha_{s+1}^{(0)}, \dots, \alpha_r^{(0)}, -\overline{\alpha^{(0)}}). \end{aligned}$$

Par définition,

$$\alpha = \overline{\alpha^{(0)}} = \min_{h \in \mathbb{N}^*} \{h \text{ tel que } h\beta_n \in \Delta\}$$

et

$$\alpha\beta_n = \sum_{j=1}^r \alpha_j^{(0)} \beta_j.$$

Donc $\text{pgcd}(\alpha_1^{(0)}, \dots, \alpha_s^{(0)}, \alpha_{s+1}^{(0)}, \dots, \alpha_r^{(0)}, -\alpha) = 1$.

Cas $i > 0$. On suppose le résultat démontré au rang précédent.

On a $\gamma^{(i)} = \gamma^{(i-1)}G^{(i)}$, $\delta^{(i)} = \delta^{(i-1)}G^{(i)}$ et $\beta^{(i)} = \beta^{(i-1)}F^{(i)}$ où $F^{(i)} = (G^{(i)})^{-1}$ et $G^{(i)} \in \text{SL}_{r+1}(\mathbb{Z})$ telle que

$$G_{sq}^{(i)} = \begin{cases} 1 & \text{si } s = q \\ 1 & \text{si } q = j \text{ et } s \in J \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Donc $(\gamma^{(i)} - \delta^{(i)}) = (\gamma^{(i-1)} - \delta^{(i-1)})G^{(i)} = (\gamma - \delta)G$ où G est un produit de matrices unimodulaires, est donc elle-même unimodulaire.

D'après le cas $i = 0$, $(\gamma - \delta)$ est un vecteur dont les éléments sont premiers entre eux dans leur ensemble. D'après le fait 3.4.5 ce vecteur est complétable en une base de \mathbb{Z}^{r+1} , qui, par une matrice unimodulaire, reste une base de \mathbb{Z}^{r+1} . Le vecteur $(\gamma^{(i)} - \delta^{(i)})$ est donc un vecteur de cette base, ses éléments sont alors premiers entre eux dans leur ensemble.

- (3) Cas $i = 0$ découle du fait que $\beta_1, \dots, \beta_r, \beta_n$ engendrent un espace vectoriel de dimension r .

Soit

$$Z := \left\{ (x_1, \dots, x_{r+1}) \in \mathbb{Z}^{r+1} \text{ tel que } \sum_{j=1}^r x_j \beta_j + x_{r+1} \beta_n = 0 \right\}.$$

Or $\alpha \beta_n = \sum_{j=1}^r \alpha_j^{(0)} \beta_j$, donc nous avons :

$$Z = \left\{ (x_1, \dots, x_{r+1}) \in \mathbb{Z}^{r+1} \text{ tel que } \sum_{j=1}^r (\alpha x_j + x_{r+1} \alpha_j^{(0)}) \beta_j = 0 \right\}.$$

Comme β_1, \dots, β_r sont \mathbb{Q} -linéairement indépendants, il vient que Z est un \mathbb{Z} -module libre de rang 1, il est donc engendré par un unique vecteur. D'après le point (1), le vecteur $(\gamma - \delta)$ est dans Z , et d'après le point (2), il est composé d'éléments premiers entre eux dans leur ensemble. Ce vecteur engendre donc le \mathbb{Z} -module libre de rang 1.

Soit $i > 0$. Nous avons vu que $\beta^{(i)} = \beta^{(i-1)}F^{(i)} = \beta F$ où F est une matrice unimodulaire, donc un automorphisme de \mathbb{Z}^r .

Soit

$$Z^{(i)} := \left\{ (x_1, \dots, x_{r+1}) \in \mathbb{Z}^{r+1} \text{ tel que } \sum_{j=1}^r x_j \beta_j^{(i)} + x_{r+1} \beta_n^{(i)} = 0 \right\}.$$

On a donc

$$Z^{(i)} = \left\{ (x_1, \dots, x_{r+1}) \in \mathbb{Z}^{r+1} \text{ tel que } \sum_{j=1}^r x_j \beta_j F + x_{r+1} \beta_n F = 0 \right\},$$

puis

$$Z^{(i)} = \left\{ (x_1, \dots, x_{r+1}) \in \mathbb{Z}^{r+1} \text{ tel que } \sum_{j=1}^r x_j \beta_j + x_{r+1} \beta_n = 0 \right\}.$$

L'ensemble $Z^{(i)}$ est donc un \mathbb{Z} -module libre de rang 1 d'après le cas $i = 0$. Nous avons vu au point (3) que le vecteur $(\gamma^{(i)} - \delta^{(i)})$ était un vecteur de $Z^{(i)}$ composé d'éléments premiers entre eux dans leur ensemble, il engendre donc $Z^{(i)}$, ce qui conclut la preuve. □

LEMME 3.4.7. *La suite (3.4.1) n'est pas monomiale.*

DÉMONSTRATION. Supposons par l'absurde qu'elle l'est. Par récurrence sur i , on a $r_i = r$ pour tout $i \in \{0, \dots, l\}$. On sait que $w^{(l)}$ est un système régulier de paramètres de R_l et que w^δ et w^γ se divisent l'un l'autre dans R_l .

Nous avons vu que

$$\begin{aligned} \gamma^{(l)} &= \gamma^{(l-1)} G^{(l)} \\ &= \gamma \prod_{j \in \{1, \dots, l\}} G^{(j)} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \delta^{(l)} &= \delta^{(l-1)} G^{(l)} \\ &= \delta \prod_{j \in \{1, \dots, l\}} G^{(j)} \end{aligned}$$

donc $\delta^{(l)} = \gamma^{(l)}$.

Or $(\gamma^{(l)} - \delta^{(l)}) = (\gamma - \delta) G$ où G est une matrice unimodulaire, ie $\gamma = \delta$, absurde par définition de γ et δ . □

LEMME 3.4.8. *Soit $i \in \{0, \dots, l-1\}$ et l'on suppose que π_0, \dots, π_{i-1} sont tous monomiaux. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (1) *L'éclatement π_i n'est pas monomial.*
- (2) *Il existe un unique indice $q \in J_i \setminus \{1\}$ tel que $\beta_q^{(i)} = \beta_1^{(i)}$.*
- (3) *On a $i = l - 1$.*

DÉMONSTRATION. (3) \Rightarrow (1) d'après le Lemme 3.4.7.

(1) \Rightarrow (2) L'existence tout d'abord. Nous avons $\beta_1^{(i)} = \min_{j \in J_i} \{\beta_j^{(i)}\}$.

Donc π_i monomial $\Leftrightarrow B_i = J_i \setminus \{1\} \Leftrightarrow \beta_q^{(i)} > \beta_1^{(i)}$ pour tout $q \in J_i \setminus \{1\}$.

Puisque l'éclatement n'est pas monomial par hypothèse, il vient qu'il existe $q \in J_i \setminus \{1\}$ tel que $\beta_q^{(i)} = \beta_1^{(i)}$.

Nous allons montrer l'unicité en procédant par l'absurde. Supposons donc qu'il existe deux indices distincts q et q' dans $J_i \setminus \{1\}$ tels que $\beta_q^{(i)} - \beta_1^{(i)} = 0$ et $\beta_{q'}^{(i)} - \beta_1^{(i)} = 0$.

Nous avons donc deux relations de dépendances linéaires entre les éléments $\beta_1^{(i)}, \dots, \beta_r^{(i)}$ et l'élément $\beta_n^{(i)}$, qui ne sont pas linéairement dépendantes, ce qui est absurde d'après la partie (4) du Lemme 3.4.6.

(2) \Rightarrow (3)

D'après la remarque 3.2.5, nous pouvons écrire $w_1^{(i)} = w^\epsilon$ ainsi que $w_q^{(i)} = w^\mu$ où ϵ et μ sont deux colonnes d'une matrice unimodulaire, il vient que la différence $\epsilon - \mu$ est unimodulaire, soit de pgcd total égal à un.

Nous avons donc

$$\nu(w^\mu) = \sum_{s \in E} \mu_s \beta_s = \nu(w_q^{(i)}) = \beta_q^{(i)}$$

et

$$\nu(w^\epsilon) = \sum_{s \in E} \epsilon_s \beta_s = \nu(w_1^{(i)}) = \beta_1^{(i)}.$$

Mais par hypothèse, $\beta_q^{(i)} = \beta_1^{(i)}$. Il vient $\sum_{s \in E} (\mu_s - \epsilon_s) \beta_s = 0$ et d'après les parties (3) et (4) du Lemme 3.4.6, ainsi que le fait que le pgcd total de $\mu - \epsilon$ soit un, nous avons $\mu - \epsilon = \pm(\gamma - \delta)$.

Donc $\frac{w_q^{(i)}}{w_1^{(i)}} = w^{\epsilon - \mu} = w^{\pm(\gamma - \delta)} = \bar{z}^{\pm 1}$, puis $\bar{z} \in R_{i+1}$ ou $\bar{z}^{-1} \in R_{i+1}$.

Pour montrer que $i = l - 1$, nous allons montrer que $i + 1 = l$ et pour cela utiliser le fait que l a été choisi minimal tel que $\bar{z} \in R_l^\times$. Nous allons donc montrer que $\bar{z} \in R_{i+1}^\times$.

Comme $\bar{z} \in R_{i+1}$ ou $\bar{z}^{-1} \in R_{i+1}$, nous savons que $w^\delta \mid w^\gamma$ dans R_{i+1} ou l'inverse. Mais d'après la proposition 3.2.6 et le fait que w^δ et w^γ aient même valeur, il vient que $w^\delta \mid w^\gamma$ dans R_{i+1} si et seulement si l'inverse est également vrai. Donc nous avons bien $\bar{z} \in R_{i+1}^\times$, ce qui conclut la preuve. \square

En faisant une récurrence sur i et en utilisant le Lemme 3.4.8, on conclut que π_0, \dots, π_{l-2} sont monomiaux. Nous avons donc bien (1) du Théorème 3.4.4.

Reste à montrer les points (3) et (4).

D'après le Lemme 3.4.8 nous savons qu'il existe un unique élément $q \in J_{l-1} \setminus \{j_{l-1}\}$ tel que $\beta_q^{(l-1)} = \beta_1^{(l-1)}$, et donc nous sommes dans le cas $\#B_{l-1} + 1 = \#J_{l-1} - 1$. Reste à savoir si $t_{k_{l-1}} = 0$ ou 1.

On rappelle que $w_1^{(l-1)} = w^\epsilon$ et $w_q^{(l-1)} = w^\mu$ où ϵ et μ sont deux colonnes d'une matrice unimodulaire telles que $\mu - \epsilon = \pm(\gamma - \delta)$. Donc nous avons $x_1^{(l-1)} = x^\epsilon$ et $x_q^{(l-1)} = x^\mu$, puis

$$\frac{x_q^{(l-1)}}{x_1^{(l-1)}} = x^{\mu-\epsilon} = x^{\pm(\gamma-\delta)} = x^{\pm(\alpha_1^{(0)}, \dots, \alpha_r^{(0)}, -\alpha)}.$$

C'est-à-dire que

$$\frac{x_q^{(l-1)}}{x_1^{(l-1)}} = \left(\frac{\prod_{j=1}^r x_j^{\alpha_j^{(0)}}}{x_n^\alpha} \right)^{\pm 1} = (z^{-1})^{\pm 1} = z^{\pm 1}.$$

Quitte à échanger $x_1^{(l-1)}$ et $x_q^{(l-1)}$, on peut supposer $\frac{x_q^{(l-1)}}{x_1^{(l-1)}} = z$.

Comme $\beta_1^{(l-1)}, \dots, \beta_r^{(l-1)}$ sont linéairement indépendants, il vient que $q = n$.

On rappelle que

$$\lambda_0 = X^\alpha + c_0 y$$

où $c_0 \in k$, et $Z + c_0$ est le polynôme minimal λ_z de z sur $\text{gr}_\nu k(x_1, \dots, x_r)$. D'après la Note 3.1.10, nous avons

$$w_n^{(l)} = u_n^{(l)} = \overline{\lambda_0}(u_n') = \overline{\lambda_0} \left(\frac{u_n^{(l-1)}}{u_1^{(l-1)}} \right) = \overline{\lambda_0} \left(\frac{w_n^{(l-1)}}{w_1^{(l-1)}} \right) = \overline{\lambda_0}(\overline{z}) = \overline{z} + a_0 b_0.$$

REMARQUE 3.4.9. On sait en fait que $\overline{\lambda_0}(\overline{z}) = \overline{z} + b_0 g_0$ où g_0 est une unité et $b_0 \in R$ tels que $b_0 \equiv c_0$ modulo \mathfrak{m} . Ainsi, nous choisissons de prendre $g_0 = a_0$.

Or on a $\overline{z} = \frac{w_n^\alpha}{\overline{y}}$, donc

$$w_n^{(l)} = \frac{w_n^\alpha}{\overline{y}} + a_0 b_0 = \frac{w_n^\alpha + a_0 b_0 \overline{y}}{\overline{y}} = \frac{Q}{\overline{y}}$$

comme attendu dans le point (4).

Il reste donc à montrer le point (3).

On applique la proposition 3.2.4 à $i = 0$ et $i' = l$. Par monomialité de π_0, \dots, π_{l-2} , on sait que $D_i = \{1, \dots, n\}$ pour tout $i \in \{1, \dots, l-1\}$, et on sait que $D_l = \{1, \dots, n\}$. Ici on prend également $u_T = v$.

Pour tout $j \in \{1, \dots, r, n\}$, le fait que $w_j = u_j$ soit un monôme en $w_1^{(l)}, \dots, w_r^{(l)}$, c'est-à-dire en $u_1^{(l)}, \dots, u_r^{(l)}$, multiplié par un élément de R_l^\times découle des deux premiers points de la proposition 3.2.4.

Et le fait que pour tout entier $j \in \{1, \dots, r\}$, nous ayons $w_j^{(l)} = w^\eta$ découle des deux derniers points de cette même proposition. Ce qui conclut la preuve. \square

REMARQUE 3.4.10. Dans le cas particulier où $Q_2 = Q$, alors on a monomialisé Q_2 comme attendu. Nous allons nous ramener à ce cas par la suite.

DÉFINITION 3.4.11. [10] Une suite locale encadrée qui vérifie le théorème 3.4.4 est appelée un n -paquet de *Puiseux*.

Soit $j \in \{r+1, \dots, n\}$. Un j -paquet de *Puiseux* est un n -Paquet de *Puiseux* en changeant n par j dans le théorème 3.4.4.

LEMME 3.4.12. Soit $P = u_n^\alpha + c_0$ le u_n -développement d'un élément clef successeur immédiat de u_n .

Il existe une suite locale encadrée, indépendante de u_n , $(R, u) \rightarrow (R_l, u^{(l)})$ qui transforme c_0 en un monôme en $(u_1^{(l)}, \dots, u_r^{(l)})$, multiplié par une unité de R_l .

En particulier, après cette suite locale encadrée, l'élément P est bien de la forme $w_n^\alpha + a_0 b_0 \bar{y}$.

DÉMONSTRATION. Nous démontrerons ce Lemme dans un cadre plus général par la suite : c'est l'objet du Lemme 3.4.16. \square

COROLLAIRE 3.4.13. Soit P un élément clef successeur immédiat de u_n . Alors P est monomialisable.

DÉMONSTRATION. Si $u_n \ll P$, on utilise le Lemme 3.4.12 pour se ramener au cas où $P = w_n^\alpha + a_0 b_0 \bar{y}$. Ainsi, d'après le Théorème 3.4.4, on peut monomialiser P . \square

Soit G un anneau local essentiellement de type fini sur k de dimension strictement inférieure à n muni d'une valuation centrée en G .

THÉORÈME 3.4.14. On suppose que pour tout anneau G comme ci-dessus, tout élément de G est monomialisable.

On rappelle que $\text{car}(k_\nu) = 0$. Si $u_n \ll_{\lim} P$, alors, P est monomialisable.

DÉMONSTRATION. On note $P = \sum_{j=0}^N b_j a_j u_n^j$ le u_n -développement de P , avec $a_j \in R^\times$ et $Q = \sum_{j=0}^N b_j u_n^j$ polynôme clef successeur immédiat limite de u_n .

D'après le Théorème 2.2.35 (qui utilise la caractéristique nulle), on sait que $\delta_{u_n}(Q) = 1$. Ainsi, on a :

$$\nu(b_0) = \nu(b_1 u_n) < \nu(b_j u_n^j),$$

ce pour tout $j > 1$.

Les éléments a_i étant des unités de R , on a également pour tout $j > 1$:

$$\nu(a_0 b_0) = \nu(a_1 b_1 u_n) < \nu(a_j b_j u_n^j).$$

De fait, $\nu(a_1 b_1) < \nu(a_0 b_0)$ et donc d'après l'hypothèse, après une suite d'éclatements indépendante de u_n , on peut monomialiser $a_j b_j$ pour tout indice j , et supposer que $a_1 b_1 \mid a_0 b_0$ d'après la Proposition 3.2.6.

Ainsi

$$\nu(b_0) = \nu(b_1 u_n) < \nu(b_j) + j\nu(u_n) = \nu(b_j) + j(\nu(b_0) - \nu(b_1)).$$

$$\text{Donc } \nu(b_0) < \nu(b_j) + j(\nu(b_0) - \nu(b_1)).$$

De fait, $\nu(b_1^j) < \nu(b_j b_0^{j-1})$ donc après une suite d'éclatements indépendante de u_n , on a $b_1^j \mid b_j b_0^{j-1}$. Après un n -paquet de Puiseux (*) $(R, u) \rightarrow \cdots \rightarrow (R', u')$ dans le cas particulier $\alpha = 1$, on obtient donc $P = \sum_{j=0}^N b'_j (u'_n)^j$ avec $b'_1 \mid b'_j$ pour tout indice j avec $u'_n = \frac{b_1 u_n}{b_0} + 1$.

$$\text{De fait, } \frac{P}{b'_1} = u'_n + \varphi \text{ avec } \varphi \in (u'_1, \dots, u'_{n-1}).$$

Donc $u'' := (u'_1, \dots, u'_{n-1}, \frac{P}{b'_1})$ est un système régulier de paramètres de R' . Ainsi, la suite $(R, u) \rightarrow \cdots \rightarrow (R', u'')$ obtenue à partir de (*) en modifiant uniquement le dernier paramètre régulier u'_n après le dernier éclatement est toujours une suite locale encadrée. Ainsi l'élément P est monomialisable. \square

REMARQUE 3.4.15. Comme Q_2 est un polynôme clef successeur immédiat (éventuellement limite) de u_n , c'est en particulier un élément clef successeur immédiat (éventuellement limite) de u_n . D'après le Corollaire 3.4.13, ou le Théorème 3.4.14 (qui utilise la caractéristique nulle), il est monomialisable modulo le Lemme 3.4.12.

3.4.3. Généralisation. Nous avons maintenant monomialisé Q_2 , mais nous aimerions monomialiser tous les polynômes clefs suivants dans la suite \mathcal{Q} . C'est là que les éléments clefs vont être utiles. En effet, modifié par les éclatements ayant servis à monomialiser Q_2 , nous ne pouvons savoir si Q_3 est toujours un polynôme clef.

Pour plus de généralité, on va montrer que si $Q_i \in \mathcal{Q}$ est monomialisable, alors Q_{i+1} l'est également.

Supposons que le polynôme Q_i est monomialisable après une suite d'éclatements $(R, u) \rightarrow (R_l, u^{(l)})$.

Soit Δ_l le groupe $\nu(k(u_1^{(l)}, \dots, u_{n-1}^{(l)}) \setminus \{0\})$. On pose

$$\alpha_l := \min \{h \text{ tel que } h\beta_n^{(l)} \in \Delta_l\}.$$

On pose $X_j = \text{in}_\nu(u_j^{(l)})$, $W_j = w_j^{(l)}$ et λ_l le polynôme minimal de X_n sur $\text{gr}_\nu k(u_1^{(l)}, \dots, u_{n-1}^{(l)})$ de degré α_l .

Comme $k = k_\nu$, il existe $c_0 \in \text{gr}_\nu k(u_1^{(l)}, \dots, u_{n-1}^{(l)})$ tel que

$$\lambda_l(X) = X^{\alpha_l} + c_0.$$

De plus, on sait que $Q_i = \bar{w}w_n^{(l)}$ avec \bar{w} un monôme en W_1, \dots, W_{r_l} multiplié par une unité. On pose $\omega := \text{in}_\nu(\bar{w})$.

On sait que Q_{i+1} est un successeur immédiat optimal de Q_i , donc on note

$$Q_{i+1} = Q_i^{\alpha_l} + b_0$$

le Q_i -développement de Q_{i+1} dans $k(u_1, \dots, u_{n-1})[u_n]$ d'après la Proposition 3.3.7 avec $c_0 = \text{in}_\nu(b_0)$.

Comme $Q_i = \bar{w}W_n$ et $Q_{i+1} = Q_i^{\alpha_l} + b_0$, on a

$$\frac{Q_{i+1}}{\bar{w}^{\alpha_l}} = \left(u_n^{(l)}\right)^{\alpha_l} + \frac{b_0}{\bar{w}^{\alpha_l}}.$$

Nous savons que tous les termes du Q_i -développement de Q_{i+1} ont même valeur. Ainsi, ces deux termes sont divisibles par la même puissance de \bar{w} après une suite d'éclatements convenable $(*_i)$ indépendante de $u_n^{(l)}$.

On note \tilde{Q}_{i+1} la transformée stricte de Q_{i+1} par la composition de $(*_i)$ et de la suite d'éclatements $(*_i')$ qui monomialise Q_i . On note cette composition (c_i) . Pour éviter le surplus de notation, on prend $(R, u) \xrightarrow{(c_i)} (R_l, u^{(l)})$.

On sait que \tilde{Q}_i , la transformée stricte de Q_i par la suite d'éclatements (c_i) , est un paramètre régulier de l'idéal maximal de R_l : en effet, d'après la Proposition 3.2.4, on sait que chaque u_j de R s'écrit comme monôme en $w_1^{(l)}, \dots, w_{r_l}^{(l)}$. De fait, le diviseur exceptionnel réduit de cette suite d'éclatements est exactement $V(\bar{w})_{\text{red}}$. Ainsi, comme on sait que $Q_i = W_n \bar{w}$, on a bien que la transformée stricte de Q_i est $\tilde{Q}_i = W_n = w_n^{(l)} = u_n^{(l)}$. C'est donc un polynôme clef dans l'extension $k(u_1^{(l)}, \dots, u_{n-1}^{(l)})(u_n^{(l)})$.

Montrons que $\tilde{Q}_{i+1} = \frac{Q_{i+1}}{\bar{w}^{\alpha_l}}$.

On a

$$Q_i^{\alpha_i} = \bar{\omega}^{\alpha_i} \left(u_n^{(l)} \right)^{\alpha_i}$$

ainsi que $u_n^{(l)} \nmid \bar{\omega}$, donc $\bar{\omega}^{\alpha_i}$ divise le terme $Q_i^{\alpha_i}$ et divise donc tous les termes non nuls du Q_i -développement de Q_{i+1} . De plus, c'est la plus grande puissance de $\bar{\omega}$ qui divise chaque terme, il vient que $\frac{Q_{i+1}}{\bar{\omega}^{\alpha_i}}$ est \tilde{Q}_{i+1} la transformée stricte de Q_{i+1} par la suite d'éclatements.

Soit G un anneau local essentiellement de type fini sur k de dimension strictement inférieure à n muni d'une valuation centrée en G dont le corps résiduel est k .

LEMME 3.4.16. *On suppose que pour tout anneau G comme ci-dessus, tout élément de G est monomialisable.*

Supposons que $Q_i < Q_{i+1}$ dans \mathcal{Q} .

Il existe une suite locale encadrée $(R_l, u^{(l)}) \rightarrow (R_e, u^{(e)})$ telle que dans R_e , la transformée stricte de Q_{i+1} est de la forme $(u_n^{(e)})^{\alpha_i} + \tau_0 \eta$, où $\tau_0 \in R_e^\times$ et η est un monôme en $u_1^{(e)}, \dots, u_{r_e}^{(e)}$.

DÉMONSTRATION. D'après l'hypothèse, après une suite d'éclatements indépendante de $u_n^{(l)}$, on peut monomialiser b_0 et supposer que c'est un monôme en $(u_1^{(l)}, \dots, u_{n-1}^{(l)})$ multiplié par une unité de R_l .

Pour tout $g \in \{r_l + 1, \dots, n - 1\}$, on effectue un g -paquet de Pui-seux, ainsi on obtient une suite

$$(R_l, u^{(l)}) \rightarrow (R_t, u^{(t)})$$

telle que chaque $u_g^{(l)}$ est un monôme en $(u_1^{(t)}, \dots, u_{r_t}^{(t)})$.

De fait, on peut supposer que b_0 est monôme en $(u_1^{(l)}, \dots, u_{r_l}^{(l)})$ multiplié par une unité de R_l .

La transformée stricte $\tilde{Q}_{i+1} = (u_n^{(l)})^{\alpha_i} + \frac{b_0}{\bar{\omega}^{\alpha_i}}$ étant un élément clef successeur immédiat de \tilde{Q}_i , cela conclut la preuve. \square

REMARQUE 3.4.17. Le Lemme 3.4.12 est un cas particulier du Lemme 3.4.16.

Soit G un anneau local essentiellement de type fini sur k de dimension strictement inférieure à n muni d'une valuation centrée en G dont le corps résiduel est k .

THÉORÈME 3.4.18. *On suppose que pour tout G comme ci-dessus, tout élément de G est monomialisable.*

On rappelle que $\text{car}(k_\nu) = 0$. Si Q_i est monomialisable, il existe une suite locale encadrée

$$(3.4.3) \quad (R, u) \xrightarrow{\pi_0} (R_1, u^{(1)}) \xrightarrow{\pi_1} \cdots \xrightarrow{\pi_{l-1}} (R_l, u^{(l)}) \xrightarrow{\pi_l} \cdots \xrightarrow{\pi_{m-1}} (R_m, u^{(m)})$$

qui monomialise Q_{i+1} .

DÉMONSTRATION. Deux options s'offrent à nous.

La première : $Q_i < Q_{i+1}$.

Alors on vient de voir que la transformée stricte \tilde{Q}_{i+1} de Q_{i+1} par la suite d'éclatements $(R, u) \rightarrow (R_l, u^{(l)})$ qui monomialise Q_i est un élément clef successeur immédiat de $\tilde{Q}_i = u_n^{(l)}$, et que l'on pouvait se ramener exactement aux hypothèses du Théorème 3.4.4 d'après le Lemme 3.4.16. Donc on utilise le Théorème 3.4.4 en remplaçant Q_1 par \tilde{Q}_i et Q_2 par \tilde{Q}_{i+1} .

Ainsi l'on a construit une suite locale (3.4.3) qui monomialise \tilde{Q}_{i+1} .

La deuxième : $Q_i <_{\lim} Q_{i+1}$.

Alors on a vu que la transformée stricte \tilde{Q}_{i+1} de Q_{i+1} par la suite d'éclatements $(R, u) \rightarrow (R_l, u^{(l)})$ qui monomialise Q_i est un élément clef successeur immédiat limite de $\tilde{Q}_i = u_n^{(l)}$. On applique ensuite le Théorème 3.4.14 (qui utilise la caractéristique nulle) en remplaçant Q_1 par \tilde{Q}_i et Q_2 par \tilde{Q}_{i+1} .

Ainsi l'on a construit une suite locale (3.4.3) qui monomialise \tilde{Q}_{i+1} . \square

THÉORÈME 3.4.19. *Il existe une suite locale*

$$(3.4.4) \quad (R, u) \xrightarrow{\pi_0} \cdots \xrightarrow{\pi_{s-1}} (R_s, u^{(s)}) \xrightarrow{\pi_s} \cdots$$

qui monomialise tous les polynômes clefs de \mathcal{Q} .

Plus précisément, pour tout indice i , il existe un indice s_i tel que dans R_{s_i} , Q_i est un monôme en $u^{(s_i)}$ multiplié par une unité de R_{s_i} .

DÉMONSTRATION. On fait une récurrence sur la dimension n et sur l'indice i et on itère le processus précédent. \square

3.4.4. Divisibilité. On considère, pour tout entier naturel j , les ensembles dénombrables

$$\mathcal{S}_j := \left\{ \prod_{i=1}^n (u_i^{(j)})^{\alpha_i^{(j)}}, \text{ avec } \alpha_i^{(j)} \in \mathbb{Z} \right\}$$

et

$$\tilde{\mathcal{S}}_j := \{(s_1, s_2) \in \mathcal{S}_j \times \mathcal{S}_j, \text{ avec } \nu(s_1) \leq \nu(s_2)\}$$

avec la convention que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $u_i^{(0)} = u_i$.

L'ensemble $\tilde{\mathcal{S}}_j$ étant dénombrable pour tout entier j , nous pouvons numéroter ses éléments, et ainsi, on pose $\tilde{\mathcal{S}}_j := \{s_m^{(j)}\}_{m \in \mathbb{N}}$. Considérons maintenant l'ensemble fini

$$\mathcal{S}'_j := \{s_m^{(j)}, m \leq j\} \cup \{s_j^{(m)}, m \leq j\}.$$

Ainsi $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} (\mathcal{S}_j \times \mathcal{S}_j) = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \tilde{\mathcal{S}}_j = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \mathcal{S}'_j$ est une union dénombrable d'ensembles finis.

On fixe maintenant une suite locale encadrée

$$(R, u) \rightarrow \cdots \rightarrow (R_i, u^{(i)}).$$

THÉORÈME 3.4.20. *Il existe une suite locale encadrée finie*

$$p_i: (R_i, u^{(i)}) \rightarrow \cdots \rightarrow (R_{i+q_i}, u^{(i+q_i)})$$

telle que pour tout entier $j \leq i$ et pour tout élément s de \mathcal{S}'_j , la première coordonnée de s divise sa seconde coordonnée dans R_{i+q_i} .

DÉMONSTRATION. On considère un entier $j \leq i$ et un élément $s = (s_1, s_2) \in \mathcal{S}'_j$. On veut construire une suite d'éclatements telle qu'à la fin l'on ait $s_1 \mid s_2$.

On sait que $s \in \tilde{\mathcal{S}}_m$ avec $m \leq j$. Tous les cas étant similaires, on peut supposer $s \in \tilde{\mathcal{S}}_j$ et l'on a ainsi

$$s_1 = \prod_{i=1}^n (u_i^{(j)})^{\alpha_{i,1}^{(j)}}$$

et

$$s_2 = \prod_{i=1}^n (u_i^{(j)})^{\alpha_{i,2}^{(j)}}.$$

D'après la proposition 3.2.3 appliquée à R_i au lieu de R , on a l'existence d'une suite $(R_i, u^{(i)}) \rightarrow \cdots \rightarrow (R_{i+l}, u^{(i+l)})$ telle que dans R_{i+l} , $s_1 \mid s_2$ ou $s_2 \mid s_1$. Comme par définition $\nu(s_1) \leq \nu(s_2)$, c'est bien $s_1 \mid s_2$ d'après la Proposition 3.2.6.

D'après le point 4 du théorème 3.4.4, on sait que $\mathcal{S}_j \subseteq R_{i+l}^\times \mathcal{S}_{i+l}$, c'est-à-dire que tout élément de \mathcal{S}_j s'écrit $z_{i+l} s_{i+l}$ avec $z_{i+l} \in R_{i+l}^\times$ et $s_{i+l} \in \mathcal{S}_{i+l}$.

Soit maintenant $(s_3, s_4) \in \mathcal{S}'_j$, un autre couple quelconque de \mathcal{S}'_j , disons qu'il est encore dans $\tilde{\mathcal{S}}_j$. On vient de voir que $s_3, s_4 \in R_{i+l}^\times \mathcal{S}_{i+l}$. Les unités ne rentrant pas en compte dans la divisibilité, nous pouvons considérer uniquement la partie de s_3 et s_4 qui est dans \mathcal{S}_{i+l} .

On peut ainsi réitérer la proposition 3.2.3 en l'appliquant cette fois à $(R_{i+l}, u^{(i+l)})$. On construit ainsi une autre suite d'éclatements

$$(R_{i+l}, u^{(i+l)}) \rightarrow \cdots \rightarrow (R_{i+h}, u^{(i+h)})$$

telle que dans R_{i+h} l'on ait $s_3 \mid s_4$ ou $s_4 \mid s_3$. Une fois de plus, puisque $\nu(s_3) \leq \nu(s_4)$, on sait que c'est bien s_3 qui divise s_4 .

On réitère ce processus pour tous les couples de \mathcal{S}'_j , et ce pour tout $j \leq i$. Etant en nombre fini puisque \mathcal{S}'_j est de cardinal fini pour tout entier j et que l'on considère un nombre fini de tels ensembles, nous obtenons une suite finie d'éclatements

$$(R_i, u^{(i)}) \rightarrow \cdots \rightarrow (R_{i+q_i}, u^{(i+q_i)})$$

telle que pour tout entier $j \leq i$ et pour tout élément s de \mathcal{S}'_j , la première coordonnée de s divise sa seconde coordonnée dans R_{i+q_i} . \square

Comme l'on considère tous les éléments clefs selon la seule variable u_n , et plus généralement lors de la suite d'éclatements selon la variable $u_n^{(i)}$, et que nous faisons une récurrence sur la dimension ambiante, il faut savoir monomialiser les éléments de $B_i := k[u_1^{(i)}, \dots, u_{n-1}^{(i)}]$.

THÉORÈME 3.4.21. *On rappelle que $\text{car}(k_\nu) = 0$. Il existe une suite infinie d'éclatements*

$$(3.4.5) \quad (R, u) \rightarrow \cdots \rightarrow (R_m, u^{(m)}) \rightarrow \cdots$$

qui monomialise tous les polynômes clefs, tous les éléments de B_i pour tout indice i et qui vérifie la propriété suivante :

$$\forall j \in \mathbb{N} \forall s = (s_1, s_2) \in \mathcal{S}'_j \exists i \in \mathbb{N}_{\geq j} \text{ tel que dans } R_i \text{ l'on ait } s_1 \mid s_2.$$

DÉMONSTRATION. Nous allons monomialiser les éléments des B_i pas à pas, d'abord les éléments de B_0 , puis ceux de B_1 et ainsi de suite. En restreignant la valuation ν à B_i , on sait que les ν -idéaux de B_i sont dénombrables et engendrés chacun par un nombre fini de générateurs. Notons $(P_j^{(i)})_{j \in \mathbb{N}}$ la suite de tous les générateurs de tous les ν -idéaux de B_i . Il suffira donc de monomialiser chacun de ces générateurs pour monomialiser tous les éléments de B_i .

Dans la suite infinie (3.4.4) qui monomialise tous les polynômes clefs dans le théorème 3.4.19, on appelle $\pi^{(i)}$ la partie qui monomialise le i -ème polynôme clef, qui assure la divisibilité des termes du suivant et qui monomialise l'ensemble des $P_j^{(l)}$, où $l, j \leq i-1$, qui ne sont pas déjà monomiaux. Autrement dit, $\pi^{(1)}$ est le morphisme identité puisque le premier polynôme clef est un monôme dans R , composé

avec le morphisme qui monomialise $P_0^{(0)}$. Le morphisme $\pi^{(2)}$ est donné par (3.4.1) dans le théorème 3.4.4 composé avec $(*_2')$ et composé avec le morphisme qui monomialise $P_0^{(1)}$, $P_1^{(0)}$ et $P_1^{(1)}$. Le morphisme $\pi^{(3)}$ est la partie $(R_l, u^{(l)}) \rightarrow \cdots (R_m, u^{(m)})$ de (3.4.3) donnée dans le théorème 3.4.18 (qui utilise la caractéristique nulle) composée avec $(*_3')$ et composée avec le morphisme qui monomialise $P_0^{(2)}$, $P_1^{(2)}$, $P_2^{(0)}$, $P_2^{(1)}$ et $P_2^{(2)}$ et ainsi de suite.

Tout d'abord, faisons en sorte que les monômes en les générateurs de R se divisent. On applique donc le théorème 3.4.20 à $i = 0$. On construit ainsi une suite p_0 . Nous allons maintenant monomialiser le deuxième polynôme clef. Notre suite $\pi^{(2)}$ construite précédemment commence à R et non à R_{q_0} , mais cela n'importe pas. En effet, nous pouvons appliquer exactement le même raisonnement que dans le théorème 3.4.4 en commençant à R_{q_0} . Nous appelons toujours $\pi^{(2)}$ la suite qui monomialise Q_2 et qui commence à R_{q_0} . Nous avons donc une suite

$$\pi^{(2)} \circ p_0: (R, u) \rightarrow (R_l, u^{(l)})$$

qui monomialise les deux premiers polynômes clefs et telle que les coordonnées des couples de monômes dans \mathcal{S}'_1 se divisent l'une l'autre dans R_l . Cette suite permet également la monomialisation de tous les $P_j^{(i)}$ pour $i, j \leq 1$.

Appliquons donc maintenant le théorème 3.4.20 à $i = l$. On construit ainsi une suite $p_l: (R_l, u^{(l)}) \rightarrow (R_{q_l}, u^{(q_l)})$ telle que dans R_{q_l} on a la divisibilité pour tout élément de \mathcal{S}'_j , et ce pour tout $j \leq l$.

Nous avons maintenant une suite $p_l \circ \pi^{(2)} \circ p_0$ et l'on réitère le processus en considérant la suite $\pi^{(3)}$ qui monomialise Q_3 et qui part de R_{q_l} . Cette suite permet également la monomialisation de tous les $P_j^{(i)}$ pour $i, j \leq 2$.

On réitère ce processus un nombre infini mais dénombrable de fois jusqu'à monomialiser l'ensemble des polynômes clefs. On obtient donc une suite infinie $(R, u) \rightarrow \cdots \rightarrow (R_m, u^{(m)}) \rightarrow \cdots$ qui monomialise tous les polynômes clefs et qui vérifie la propriété voulue. \square

3.5. Conclusion.

Nous sommes donc maintenant en mesure de démontrer les résultats principaux de ce chapitre, et donc de démontrer l'uniformisation locale plongée simultanée pour les anneaux locaux essentiellement de type fini sur un corps de caractéristique nulle.

Une algèbre locale K essentiellement de type fini sur un corps k et ayant k pour corps résiduel est une extension étale de

$$K' = k[u_1, \dots, u_n]_{(u_1, \dots, u_n)}.$$

Soient $f \in K$ irréductible sur k et

$$I := (f) \cap k[u_1, \dots, u_n].$$

L'idéal I est un idéal premier de hauteur 1, il est donc principal. On considère \tilde{f} un générateur de I . Ainsi $\frac{K'}{(\tilde{f})} \hookrightarrow \frac{K}{(f)}$ et toute suite locale dans $\frac{K'}{(\tilde{f})}$ induit donc une suite locale dans $\frac{K}{(f)}$.

Il suffit donc de démontrer l'uniformisation locale dans le cadre des anneaux $k[u_1, \dots, u_n]_{(u_1, \dots, u_n)}$ pour l'avoir dans le cadre des algèbres essentiellement de type fini sur un corps k .

THÉORÈME 3.5.1. *Considérons la suite (3.4.5) du théorème 3.4.21 (qui utilise la caractéristique nulle).*

Alors pour tout élément f de R , il existe i tel que dans R_i , f s'écrit comme un monôme multiplié par une unité.

DÉMONSTRATION. Soit $f \in R$. D'après le théorème 3.3.6, il existe une suite finie ou infinie $(Q_i)_i$ de polynômes clefs de l'extension $K(u_n)$, successeurs immédiats optimaux (éventuellement successeurs immédiats limites), telle que $(\epsilon(Q_i))_i$ soit cofinale dans $\epsilon(\Lambda)$ où Λ désigne l'ensemble des polynômes clefs.

Puis d'après la remarque 3.3.10, f est non dégénéré par rapport à l'un de ces polynômes clefs Q_i , mais l'on a vu dans le théorème 3.4.21 qu'il existe un indice l tel que dans R_l , tous les polynômes Q_j avec $j \leq i$ sont des monômes, ainsi f est non dégénéré par rapport à un système régulier de paramètres de R_l .

Soit donc $N = (w_1, \dots, w_s)$ un idéal monomial en $u^{(l)}$ tel que $\nu(N) = \nu(f)$ avec w_j monômes en $u^{(l)}$ tels que $\nu(w_1) = \min\{\nu(w_j)\}$. Par construction de la suite locale encadrée, il existe $l' \geq l$ tel que dans $R_{l'}$, $w_1 \mid w_j$ pour tout j . Ainsi dans $R_{l'}$, f est égal à w_1 multiplié par une unité de $R_{l'}$. \square

THÉORÈME 3.5.2 (Uniformisation locale plongée). *Soient k un corps de caractéristique nulle et $f = (f_1, \dots, f_l) \in k[u_1, \dots, u_n]^l$ un ensemble de l polynômes en n variables, irréductibles sur k . On pose $R := k[u_1, \dots, u_n]_{(u_1, \dots, u_n)}$ et ν une valuation centrée dans R telle que $k = k_\nu$.*

On considère la suite (3.4.5) du Théorème 3.4.21 (qui utilise la caractéristique nulle).

Alors il existe un indice j tel que le sous-schéma de $\text{Spec}(R_j)$ défini par l'idéal (f_1, \dots, f_l) est un diviseur à croisements normaux simples.

DÉMONSTRATION. Quitte à renuméroter, on suppose

$$\nu(f_1) = \min \{ \nu(f_j) \}.$$

D'après le théorème 3.4.21 il existe un indice j_1 telle que dans R_{j_1} , la transformée totale de f_1 soit un monôme en $u^{(j_1)}$, et donc soit à croisements normaux simples.

On regarde maintenant l'équation f_2 dans R_{j_1} . D'après le théorème 3.4.21, il existe un indice j_2 tel que dans R_{j_2} , la transformée totale de f_2 soit à croisements normaux simples.

Dans R_2 , les transformées totales de f_1 et f_2 sont à croisements normaux simples.

On réitère le procédé jusqu'à ce que les transformées totales de f_1, \dots, f_l soient à croisements normaux simples dans R_{j_i} .

Par construction de la suite locale encadrée (3.4.5), il existe $j \geq j_i$ tel que dans R_j , on a $f_1 \mid f_i$ pour tout indice i . \square

COROLLAIRE 3.5.3. *On garde les mêmes notations et hypothèses que dans le théorème précédent.*

Alors on a $R_\nu = \varinjlim R_i$.

Uniformisation locale dans le cas d'anneaux quasi-excellents pour des valuations de rang inférieur ou égal à 2.

4.1. Préliminaires.

Soit R un anneau intègre local noethérien équicaractéristique de caractéristique nulle et ν une valuation de rang 1 son corps des fractions, centrée en R et de groupe des valeurs Γ_1 . L'idéal premier implicite H de R pour la valuation ν , défini en 1.2.56, est un des objets centraux de l'uniformisation locale. En effet, cet idéal va être l'idéal à désingulariser. Nous savons que c'est un idéal de \widehat{R} qui décrit les éléments de valuation infinie. Nous allons voir dans ce chapitre que pour rendre R régulier, donc pour résoudre l'uniformisation locale, il suffit de rendre \widehat{R}_H et $\frac{\widehat{R}}{H}$ réguliers. C'est là que l'hypothèse de quasi-excellence que nous allons définir est cruciale : si R est quasi-excellent, l'anneau \widehat{R}_H est régulier. Restera donc à monomialiser les éléments de $\frac{\widehat{R}}{H}$.

4.1.1. Anneaux quasi-excellents.

DÉFINITION 4.1.1. Soit R un anneau intègre. On dit que R est un *G-anneau* si pour tout idéal premier \mathfrak{p} de R , le morphisme de complétion $R_{\mathfrak{p}} \rightarrow \widehat{R}_{\mathfrak{p}}$ est un homomorphisme régulier.

Le terme G-anneau a été inventé en l'honneur de Grothendieck, qui a été le premier à dégager l'importance de cette notion.

DÉFINITION 4.1.2. Soit R un anneau local. Alors R est un anneau local quasi-excellent si c'est un G-anneau.

De manière plus générale, si A est un anneau quelconque, alors il est quasi-excellent si c'est un G-anneau local dont le lieu régulier est ouvert.

PROPOSITION 4.1.3. [20] *Un anneau local noethérien R est quasi-excellent si le morphisme de complétion $R \rightarrow \widehat{R}$ est régulier.*

REMARQUE 4.1.4. Soit R un anneau local. Si c'est un G-anneau, alors son lieu régulier est ouvert.

PROPOSITION 4.1.5. *Soit R un anneau local quasi-excellent. Alors l'anneau \widehat{R}_H est régulier.*

DÉMONSTRATION. L'anneau R est un G -anneau. Alors pour tout idéal premier \mathfrak{p} de R , on a l'injection $\kappa(\mathfrak{p}) \hookrightarrow \kappa(\mathfrak{p}) \otimes_R \widehat{R}$ telle que la fibre $\kappa(\mathfrak{p}) \otimes_R \widehat{R}$ est géométriquement régulière sur $\kappa(\mathfrak{p})$, où $\kappa(\mathfrak{p}) := \frac{R_{\mathfrak{p}}}{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}$. On sait que (0) est un idéal premier de R puisque R est intègre.

Ainsi on a une injection $\text{Frac}(R) \hookrightarrow \text{Frac}(R) \otimes_R \widehat{R}$ telle que la fibre $\text{Frac}(R) \otimes_R \widehat{R}$ est géométriquement régulière sur $K := \text{Frac}(R)$. Autrement dit, le morphisme $K \hookrightarrow K \otimes_R \widehat{R}$ est régulier.

Or $R \setminus \{0\}$ et $\widehat{R} \setminus H$ sont deux parties multiplicatives de \widehat{R} telles que $R \setminus \{0\} \subseteq \widehat{R} \setminus H$, puisque $R \cap H = \{0\}$. Ainsi, \widehat{R}_H est un localisé de $\widehat{R}_{R \setminus \{0\}}$. Si nous montrons que $\widehat{R}_{R \setminus \{0\}}$ est régulier, alors \widehat{R}_H le sera en tant que localisé d'un anneau régulier. Or, par la propriété universelle du produit tensoriel, l'anneau $\widehat{R}_{R \setminus \{0\}}$ est isomorphe à l'anneau $K \otimes_R \widehat{R}$, qui est bien régulier par hypothèse. Ce qui conclut la preuve. \square

4.1.2. Entiers associés. Soit (S, \mathfrak{q}, L) un anneau local noethérien et μ une valuation centrée en S . On écrit μ comme la composition de deux valuations $\mu = \mu_2 \circ \mu_1$ avec μ_1 de rang 1. On remarque que la valuation μ_2 est triviale si et seulement si μ est également de rang 1. On note G le groupe des valeurs de μ et G_1 celui de μ_1 . On a en fait que G_1 est le plus petit sous-groupe isolé non trivial de G . Posons maintenant $I := \{x \in S \text{ tel que } \mu(x) \notin G_1\}$, et ainsi μ_1 induit une valuation de rang 1 sur $\frac{S}{I}$. Soient \overline{J} l'idéal implicite de $\frac{\widehat{S}}{I\widehat{S}}$ pour la valuation μ_1 et J sa préimage dans \widehat{S} .

DÉFINITION 4.1.6. On pose

$$e(S, \mu) := \text{emb.dim} \left(\frac{\widehat{S}}{J} \right).$$

On suppose que $I \subseteq \mathfrak{q}^2$. Soit maintenant $v = (v_1, \dots, v_n)$ un ensemble minimal de générateurs de \mathfrak{q} . On a $\mu(v_j) \in G_1$ pour tout indice j .

DÉFINITION 4.1.7. On a $\sum_{j=1}^n \mathbb{Q}\mu(v_j) \subseteq G_1 \otimes \mathbb{Q}$ et on pose

$$r(S, v, \mu) := \dim_{\mathbb{Q}} \left(\sum_{j=1}^n \mathbb{Q}\mu(v_j) \right).$$

REMARQUE 4.1.8. On a $r(S, v, \mu) \leq e(S, \mu)$.

EXEMPLE 4.1.9. Afin de mieux comprendre l'inégalité ci-dessus, regardons la sur un exemple. On prend ainsi $S = k[[v_1, \dots, v_4]]$, avec $\mu(v_1) = 1$, $\mu(v_2) = \sqrt{2}$, $\mu(v_3) = 1 + 5\sqrt{2}$ et $\mu(v_4) = 2 - \sqrt{2}$.

Alors il vient que

$$\begin{aligned} r(S, v, \mu) &= \dim_{\mathbb{Q}} \left(\mathbb{Q} + \sqrt{2}\mathbb{Q} + (1 + 5\sqrt{2})\mathbb{Q} + (2 - \sqrt{2})\mathbb{Q} \right) \\ &= \dim_{\mathbb{Q}} \left(\mathbb{Q} + \sqrt{2}\mathbb{Q} \right) \\ &= 2. \end{aligned}$$

Dans notre cas, $G = G_1 = \mathbb{R}$, et ainsi $I = J = (0)$.

Il vient

$$\begin{aligned} e(S, \mu) &= \text{emb.dim} \left(\widehat{S} \right) \\ &= \text{emb.dim} (S) \\ &= \dim_L \frac{\mathfrak{q}}{\mathfrak{q}^2} \\ &= \dim_L \frac{(v_1, v_2, v_3, v_4)}{(v_1, v_2, v_3, v_4)^2} \\ &= 4. \end{aligned}$$

On considère maintenant $M \subset \{1, \dots, n\}$ et

$$(S, v) \rightarrow \left(S_1, v^{(1)} = (v_1^{(1)}, \dots, v_{n_1}^{(1)}) \right)$$

un éclatement encadré le long de (v_M) . On pose $C' = \{1, \dots, n_1\} \setminus D_1$, où D_1 est comme dans 3.1.3.

Si les éléments de v_M sont L -linéairement indépendants dans $\frac{\mathfrak{q}\widehat{S}}{J+\mathfrak{q}^2\widehat{S}}$, alors il existe une partition de A que l'on note $A' \sqcup A''$ telle que $v_M \cup v_{A'}$ sont L -linéairement indépendants modulo $J+\mathfrak{q}^2\widehat{S}$ et $v_{A''}$ est inclus dans l'espace engendré par $v_J \cup v_{A'}$ sur L modulo $J+\mathfrak{q}^2\widehat{S}$. Comme on sait que $v'_{A \cup B \cup \{j\}} = v_{D_1}^{(1)}$, on peut identifier $A' \cup B \cup \{j\}$ avec un sous-ensemble de D_1 .

On pose maintenant $I_1 := \{x \in S_1 \text{ tel que } \mu(x) \notin G_1\}$ et l'on considère \overline{J}_1 l'idéal premier implicite de $\frac{\widehat{S}_1}{I_1\widehat{S}_1}$ respectivement à μ_1 et J_1 sa préimage dans \widehat{S}_1 . On appelle \mathfrak{q}_1 l'idéal maximal de S_1 et L_1 son corps résiduel.

REMARQUE 4.1.10. On a $e(S, \mu) = n$ si et seulement si les éléments de v sont L -linéairement indépendants dans $\frac{\mathfrak{q}\widehat{S}}{J+\mathfrak{q}^2\widehat{S}}$.

THÉORÈME 4.1.11. *Si $e(S, \mu) = n$, alors :*

$$e(S_1, \mu) \leq e(S, \mu).$$

Cette inégalité est stricte dès lors que les éléments de $v_{A' \cup B \cup \{j\} \cup C'}$ sont L_1 -linéairement dépendants dans $\frac{\mathfrak{q}_1\widehat{S}_1}{J_1+\mathfrak{q}_1^2\widehat{S}_1}$.

DÉMONSTRATION. Par définition, $v^{(1)}$ engendre l'idéal maximal \mathfrak{q}_1 de S_1 , et donc induit un ensemble de générateurs de $\mathfrak{q}_1 \frac{\widehat{S}_1}{J_1}$. Comme $n_1 \leq n$, par définition même d'un éclatement encadré, on sait que $\#C' \leq \#C$.

De plus, on a $e(S, \mu) = \#M + \#A'$, et l'on sait également que $v_{D_1 \setminus (A' \cup B \cup \{j\})}^{(1)}$ est dans le L -espace vectoriel de $v_{A' \cup B \cup \{j\} \cup C'}^{(1)}$ modulo $J_1 + \mathfrak{q}_1^2 \widehat{S}_1$.

Donc :

$$\begin{aligned} e(S_1, \mu) &\leq \#A' + \#B + \#\{j\} + \#C' \\ &\leq \#A' + \#B + 1 + \#C \\ &= \#A' + \#M \\ &= e(S, \mu). \end{aligned}$$

Si de plus les éléments de $v_{A' \cup B \cup \{j\} \cup C'}^{(1)}$ sont L_1 -linéairement dépendants dans $\frac{\mathfrak{q}_1 \widehat{S}_1}{J_1 + \mathfrak{q}_1^2 \widehat{S}_1}$, alors on a $e(S_1, \mu) < \#A' + \#B + \#\{j\} + \#C'$ et ainsi $e(S_1, \mu) < e(S, \mu)$ comme attendu. \square

THÉORÈME 4.1.12. *On a $r(S_1, v^{(1)}, \mu) \geq r(S, v, \mu)$.*

DÉMONSTRATION. Ceci découle des deux derniers points de la proposition 3.2.4. \square

COROLLAIRE 4.1.13. *Dès lors que $e(S, \mu) = n$, on a*

$$\left(e(S_1, \mu), e(S_1, \mu) - r(S_1, v^{(1)}, \mu) \right) \leq \left(e(S, \mu), e(S, \mu) - r(S, v, \mu) \right).$$

L'inégalité est stricte si $e(S_1, \mu) < n$.

REMARQUE 4.1.14. Nous allons faire une récurrence sur la dimension de plongement n . Comme nous venons de voir, cette dimension décroît par les suites d'éclatements.

Si elle décroît strictement, alors ça n'arrivera qu'un nombre fini de fois et la preuve sera terminée.

Ainsi, à partir de maintenant, on suppose que cette dimension est constante au fil des éclatements. Autrement dit, pour toute suite encadrée $S \rightarrow S_1$, on suppose que $e(S, \mu) = e(S_1, \mu) = n$.

De la même manière, on peut supposer $r(S, v, \mu) = r(S_1, v^{(1)}, \mu)$.

4.2. Idéal implicite.

Soit (R, \mathfrak{m}, k) un anneau local quasi-excellent équicaractéristique et ν une valuation de rang 1 de son corps des fractions, centrée en R et de groupe des valeurs Γ_1 . On rappelle que l'idéal premier implicite H de R pour la valuation ν est donné par $H = \bigcap_{\beta \in \nu(R \setminus \{0\})} P_\beta \widehat{R}$. L'idéal H représente les éléments de \widehat{R} qui sont de valuation infinie. On sait d'après 1.2.53 que ν s'étend de manière unique en une valuation $\tilde{\nu}$ centrée en $\frac{\widehat{R}}{H}$.

D'après le théorème de structure de Cohen, il existe un épimorphisme Φ d'un anneau local régulier complet $A \simeq k[[u_1, \dots, u_n]]$ de corps des fractions K dans $\frac{\widehat{R}}{H}$. Son noyau I est un idéal premier de A .

On considère μ une valuation monomiale par rapport à un système régulier de paramètres de A_I . C'est une valuation de A centrée en I telle que $k_\mu = \kappa(I)$ le corps résiduel de I . On pose alors $\widehat{\nu} := \tilde{\nu} \circ \mu$, et ainsi on définit une valuation centrée en A . Soit Γ le groupe des valeurs de $\widehat{\nu}$.

Ainsi, Γ_1 est le plus petit sous-groupe isolé non trivial de Γ et l'on a :

$$I = \{f \in A \text{ tel que } \widehat{\nu}(f) \notin \Gamma_1\}.$$

DÉFINITION 4.2.1. Soient $\pi: (A, u) \rightarrow (A', u')$ un éclatement encadré et $\sigma: A' \rightarrow \widehat{A'}$ la complétion formelle de A' . La composition $\sigma \circ \pi$ est appelée *éclatement formel encadré*.

Une composition d'éclatements formels encadrés est appelée une *suite formelle encadrée*.

Soit $(A, u) \rightarrow (A_1, u^{(1)}) \rightarrow \dots \rightarrow (A_l, u^{(l)})$ une suite formelle, que l'on note $(*)$.

DÉFINITION 4.2.2. La suite formelle $(*)$ est dite *définie sur* Γ_1 si pour tout entier $i \in \{0, \dots, l-1\}$ et pour tout entier $q \in J_i$, on a $\nu(u_q^{(i)}) \in \Gamma_1$.

On regarde maintenant $A_i \simeq k_i[[u_1^{(i)}, \dots, u_n^{(i)}]]$ et on note I_i^{strict} la transformée stricte de I dans A_i .

DÉFINITION 4.2.3. On appelle *transformée formelle* de I dans A_i , que l'on note I_i , la préimage dans A_i de l'idéal implicite de $\frac{A_i}{I_i^{\text{strict}}}$.

Soit v_i le plus grand entier de $\{r, \dots, n\}$ tel que

$$I_i \cap k_i[[u_1^{(i)}, \dots, u_{v_i}^{(i)}]] = (0)$$

et l'on pose

$$B_i := k_i \left[\left[u_1^{(i)}, \dots, u_{v_i}^{(i)} \right] \right].$$

DÉFINITION 4.2.4. Soit P un idéal premier de A . On appelle ℓ -ième puissance symbolique de P l'idéal $P^{(\ell)} := (P^\ell A_P) \cap A$.

Autrement dit, $P^{(\ell)} = \{x \in A \text{ tel que } \exists y \in A \setminus P \text{ tel que } xy \in P^\ell\}$.

C'est l'ensemble des éléments qui s'annulent avec ordre au moins ℓ dans le point générique de $V(P)$.

Soient G un anneau complet de dimension strictement inférieure à n et θ une valuation centrée dans G , de groupe des valeurs $\tilde{\Gamma}$.

On considère $\tilde{\Gamma}_1$ le premier sous-groupe isolé non trivial de $\tilde{\Gamma}$ et $\mathfrak{g} := \{g \in G \text{ tel que } \theta(g) \notin \tilde{\Gamma}_1\}$.

Afin de démontrer l'uniformisation locale simultanée par récurrence, nous allons avoir besoin de la Proposition intermédiaire suivante.

PROPOSITION 4.2.5. *Supposons que :*

(1) *Dans (*), il existe une suite formelle encadrée*

$$\pi: (A, u) \rightarrow (A_i, u^{(i)})$$

telle que $v_i < n - 1$.

(2) *Pour tout anneau G comme ci-dessus, tout élément dans $G \setminus \mathfrak{g}^{(2)}$ est monomialisable par une suite formelle encadrée définie sur $\tilde{\Gamma}_1$.*

Alors pour tout élément f de $A \setminus I^{(2)}$, il existe une suite formelle

$$(A, u) \rightarrow \dots \rightarrow (A_l, u^{(l)})$$

définie sur Γ_1 telle que f s'écrit comme un monôme en $u_1^{(l)}, \dots, u_n^{(l)}$ multiplié par un élément de A_l^\times .

DÉMONSTRATION. On suppose donc qu'il existe une suite formelle encadrée

$$\pi: (A, u) \rightarrow (A_i, u^{(i)})$$

telle que $v_i < n - 1$, c'est-à-dire telle que $v_i + 1 < n$. Par définition de v_i , on sait que $\mathfrak{g}_i := I_i \cap k_i \left[\left[u_1^{(i)}, \dots, u_{v_i+1}^{(i)} \right] \right] \neq (0)$. On prend donc un élément g dans $\mathfrak{g}_i \setminus \mathfrak{g}_i^{(2)} \subseteq C_i \setminus \mathfrak{g}_i^{(2)}$, où $C_i := k_i \left[\left[u_1^{(i)}, \dots, u_{v_i+1}^{(i)} \right] \right]$. Comme $v_i + 1 < n$, l'anneau C_i est de dimension strictement inférieure à n et ainsi on peut utiliser la deuxième hypothèse du théorème à l'élément g dans l'anneau C_i .

Ainsi il existe une suite formelle définie sur Γ_1

$$(C_i, (u_1^{(i)}, \dots, u_{v_i+1}^{(i)})) \rightarrow \dots \rightarrow (S', (u'_1, \dots, u'_{v'}))$$

où $v' \leq v_i + 1$, et telle que g s'écrit comme un monôme en $u'_1, \dots, u'_{v'}$ multiplié par un élément de S'^{\times} .

Comme $g \in \mathfrak{g}_i$, il existe un paramètre régulier de S' , disons $u'_{v'}$, tel que $\nu(u'_{v'}) \notin \Gamma_1$. En effet, $g \in \mathfrak{g}_i = I_i \cap C_i$, donc $g \in I_i$ et ainsi il vérifie les hypothèses de I , c'est à dire que $\hat{\nu}(g) \notin \Gamma_1$. Comme g s'écrit comme un monôme en les générateurs de l'idéal maximal de S' , l'un de ces générateurs qui apparaît dans la décomposition de g doit appartenir à I . Ainsi $e(S', \hat{\nu}|_{S'}) < v_i + 1$.

En remplaçant tout anneau O qui apparaît dans

$$(C_i, (u_1^{(i)}, \dots, u_{v_i+1}^{(i)})) \rightarrow \dots \rightarrow (S', (u'_1, \dots, u'_{v'}))$$

par $O[[u_{v_i+2}^{(i)}, \dots, u_n^{(i)}]]$, on obtient une suite formelle

$$\pi': (A_i, u^{(i)}) \rightarrow \dots \rightarrow (A_l, u^{(l)})$$

indépendante de $u_{v_i+2}^{(i)}, \dots, u_n^{(i)}$, avec $A_l = S'[[u_{v_i+2}^{(i)}, \dots, u_n^{(i)}]]$. Or on rappelle que $e(S', \hat{\nu}|_{S'}) < v_i + 1$, et donc $e(A_l, \hat{\nu}) < n$.

Soit f un élément de $A \setminus I^{(2)}$. Son image par $\pi' \circ \pi$ est un élément de A_l , qui est de dimension strictement inférieure à n . Comme tous les A_i sont quasi-excellents, on a $f \notin A_i \setminus I_i^{(2)}$ et nous pouvons donc appliquer la deuxième hypothèse de la proposition. Ainsi on a construit une suite formelle $\pi' \circ \pi$ telle que f s'écrit comme un monôme en les générateurs de A_l multiplié par une unité de A_l , ce qui conclut la preuve. \square

Maintenant, on suppose que pour toute suite formelle (*) et pour tout indice i , on a $v_i \in \{n-1, n\}$; ainsi pour tout indice i , on a $I_i \cap k_i[[u_1^{(i)}, \dots, u_{n-1}^{(i)}]] = (0)$.

On considère G un anneau local complet de dimension strictement inférieure à n muni d'une valuation θ de rang 1 centrée en G .

LEMME 4.2.6. *Supposons que pour tout anneau G comme ci-dessus, il existe une suite formelle encadrée qui monomialise tous les éléments de G .*

Alors l'idéal I est au plus de hauteur 1.

DÉMONSTRATION. Si $I = (0)$, le résultat est démontré. On suppose donc $I \neq (0)$ et on prend $f \in I \setminus \{0\}$. On écrit

$$f = \sum_{j=0}^{\infty} a_j u_n^j$$

avec $a_j \in k[[u_1, \dots, u_{n-1}]]$, et on prend un entier N suffisamment grand pour que tout a_j avec $j > N$ appartienne à l'idéal engendré

par (a_0, \dots, a_N) . On considère maintenant

$$\delta := \min \left\{ j \in \{0, \dots, N\} \text{ tel que } \nu(a_j) = \min_{0 \leq s \leq N} \{\nu(a_s)\} \right\}.$$

Pour plus de lisibilité, on pose $\bar{u} := (u_1, \dots, u_{n-1})$ et $B := k[[\bar{u}]]$. Comme B est complet de dimension strictement inférieure à n , par hypothèse on peut construire une suite formelle $(B, \bar{u}) \rightarrow (B', \bar{u}')$ telle que pour tout $j \in \{0, \dots, N\}$, l'élément a_j soit un monôme en \bar{u}' . D'après les propositions 3.2.3 et 3.2.6, on peut construire une suite locale encadrée $(B', \bar{u}') \rightarrow (B'', \bar{u}'')$ telle que dans B'' l'on ait $a_\delta \mid a_j$ pour tout $j \in \{0, \dots, N\}$, a_δ ayant valeur minimale par définition. On a donc une suite

$$(B, \bar{u}) \rightarrow (B', \bar{u}') \rightarrow (B'', \bar{u}'').$$

En composant avec la complétion formelle, on obtient la suite

$$(B, \bar{u}) \rightarrow (\widehat{B''}, \bar{u}'')$$

dans laquelle on a toujours $a_\delta \mid a_j$ pour tout $j \in \{0, \dots, N\}$.

On remplace maintenant tout anneau O apparaissant dans la suite $(B, \bar{u}) \rightarrow (\widehat{B''}, \bar{u}'')$ par $O[[u_n]]$, et on obtient une suite $(A, u) \rightarrow (A', u')$ indépendante de u_n et dans laquelle on a toujours $a_\delta \mid a_j$ pour tout $j \in \{0, \dots, N\}$.

On rappelle que pour tout indice i , on a

$$I_i \cap k_i \left[[u_1^{(i)}, \dots, u_{n-1}^{(i)}] \right] = (0)$$

donc en notant I' le transformé formel de I dans A' , on obtient que $I' \cap \widehat{B''} = (0)$. On sait que $\frac{f}{a_\delta} \in I'$, et par le théorème de préparation de Weierstrass, on sait que $\frac{f}{a_\delta} = xy$ où x est une série formelle inversible dans $k[[u_1, \dots, u_{n-1}]][[u_n]]$, autrement dit une unité de A' , et y un polynôme unitaire en u_n de degré δ . Ainsi le morphisme $\widehat{B''} \rightarrow \frac{A'}{I'}$ est injectif et fini.

On a donc $\dim\left(\frac{A'}{I'}\right) = \dim(\widehat{B''}) = n - 1$. Comme $\dim(A') = n$, on a $\text{ht}(I) \leq \text{ht}(I') = \dim(A') - \dim\left(\frac{A'}{I'}\right) = n - (n - 1) = 1$, ce qui conclut la preuve. \square

COROLLAIRE 4.2.7 (de la preuve du Lemme 4.2.6.). *On se place dans les mêmes hypothèses que le Lemme 4.2.6. Soit $I = (h)$.*

Il existe une suite formelle encadrée $(A, u) \rightarrow (A', u')$ telle que dans A' , la transformée stricte de h est un polynôme unitaire de degré δ .

À partir de maintenant, on peut donc supposer que h est un polynôme unitaire de degré δ .

PROPOSITION 4.2.8. *On se place dans les mêmes hypothèses que le Lemme 4.2.6. Soit $I = (h)$. Le polynôme h est alors un polynôme clef.*

DÉMONSTRATION. Par définition, $I = \{f \in A \text{ tel que } \widehat{\nu}(f) \notin \Gamma_1\}$, donc en particulier $\widehat{\nu}(h) \notin \Gamma_1$ et pour tout entier non nul b , on a $\widehat{\nu}(\partial_b h) \in \Gamma_1$ puisque h est de degré minimal pour engendrer I et ainsi $\partial_b h \notin I$.

Il vient que $\epsilon(h) \notin \Gamma_1$.

Soit P un polynôme tel que $\deg(P) < \deg(h)$. Pour montrer que h est un polynôme clef, il suffit maintenant de montrer que $\epsilon(P) < \epsilon(h)$.

Par minimalité du degré de h , on a encore $P \notin I$ et ainsi $\widehat{\nu}(P) \in \Gamma_1$, de même pour tout entier non nul b , on a $\widehat{\nu}(\partial_b P) \in \Gamma_1$. Il vient que $\epsilon(P) \in \Gamma_1$.

Supposons par l'absurde que $\epsilon(P) \geq \epsilon(h)$.

Alors on a $-\epsilon(P) \leq \epsilon(h) \leq \epsilon(P)$ et comme Γ_1 est un sous-groupe isolé, c'est en particulier un segment et ainsi $\epsilon(h) \in \Gamma_1$, ce qui est absurde.

De fait, $\epsilon(P) < \epsilon(h)$ et h est bien un polynôme clef. \square

Nous allons maintenant monomialiser h .

Comme dans le Chapitre 3, on construit une suite de polynômes clefs successeurs immédiats optimaux (éventuellement limites) qui commence à x et finit à h . Donc comme $\epsilon(h)$ est maximal dans $\epsilon(\Lambda)$, on s'arrête. On obtient une suite finie $\mathcal{Q} = (Q_i)_i$ de polynômes clefs successeurs immédiats optimaux (éventuellement limites) telle que \mathcal{Q} finit en h .

Dans le cas $I = (0)$, on construit de même une suite $\mathcal{Q} = (Q_i)$ de polynômes successeurs immédiats optimaux (éventuellement limites) telle que $\epsilon(\mathcal{Q})$ est cofinale dans $\epsilon(\Lambda)$.

Nous avons donc maintenant besoin d'une généralisation des théorèmes de monomialisation du chapitre 3, n'étant plus dans le cas $k = k_\nu$.

4.3. Monomialisation des polynômes clefs.

On se place ici dans un anneau $A \simeq k[[u_1, \dots, u_n]]$ muni d'une valuation ν centrée en A de groupe des valeurs Γ .

Soit r la dimension de $\sum_{i=1}^n \nu(u_i)\mathbb{Q}$ dans $\Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Quitte à renuméroter, on peut supposer que $\nu(u_1), \dots, \nu(u_r)$ sont rationnellement indépendants et l'on considère Δ le sous-groupe de Γ engendré par $\nu(u_1), \dots, \nu(u_r)$.

On pose $E := \{1, \dots, r, n\}$.

Soit

$$\overline{\alpha^{(0)}} := \min_{\alpha \in \mathbb{N}^*} \{\alpha \text{ tel que } \alpha \nu(u_n) \in \Delta\}.$$

Donc $\overline{\alpha^{(0)}}\nu(u_n) = \sum_{j=1}^r \alpha_j^{(0)}\nu(u_j)$ avec, quitte à renuméroter les $\alpha_i^{(0)}$,

$$\alpha_1^{(0)}, \dots, \alpha_s^{(0)} \geq 0$$

et

$$\alpha_{s+1}^{(0)}, \dots, \alpha_r^{(0)} < 0.$$

On pose

$$w = (w_1, \dots, w_r, w_n) = (u_1, \dots, u_r, u_n)$$

et

$$v = (v_1, \dots, v_t) = (u_{r+1}, \dots, u_{n-1}),$$

avec $t = n - r - 1$.

En notant $x_i = \text{in}_\nu u_i$, on a x_1, \dots, x_r algébriquement indépendants sur k dans G_ν . Soit λ_0 le polynôme minimal de x_n sur $k[x_1, \dots, x_r]$, de degré α . (On pose $\lambda_0 := 0$ si x_n est transcendant.)

On pose :

$$y = \prod_{j=1}^r x_j^{\alpha_j^{(0)}},$$

$$\bar{y} = \prod_{j=1}^r w_j^{\alpha_j^{(0)}},$$

$$z = \frac{\overline{x_n^{\alpha^{(0)}}}}{y}$$

et

$$\bar{z} = \frac{\overline{w_n^{\alpha^{(0)}}}}{\bar{y}}.$$

Soit $d_0 := \frac{\alpha}{\alpha^{(0)}} \in \mathbb{N}$.

Si $\lambda_0 \neq 0$, on a

$$\lambda_0 = \sum_{q=0}^{d_0} c_q y^{d_0-q} X^{q\alpha^{(0)}}$$

où $c_q \in k$, $c_d = 1$ et $\sum_{q=0}^{d_0} c_q Z^q$ est le polynôme minimal de z sur G_ν .

On va montrer qu'il existe une suite formelle encadrée qui monomialise tous les Q_i . On a $Q_1 = u_n$ qui est monomial, il faut donc commencer par monomialiser Q_2 .

Dans un premier temps, considérons

$$Q = \sum_{q=0}^{d_0} a_q b_q \bar{y}^{d_0-q} w_n^{q\alpha^{(0)}}$$

où $b_q \in R$ tels que $b_q \equiv c_q$ modulo \mathfrak{m} et $a_q \in A^\times$.

Nous verrons par la suite que nous pouvons nous ramener à ce cas. Soient

$$\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_r, \gamma_n) = (\alpha_1^{(0)}, \dots, \alpha_s^{(0)}, 0, \dots, 0)$$

et

$$\delta = (\delta_1, \dots, \delta_r, \delta_n) = (0, \dots, 0, -\alpha_{s+1}^{(0)}, \dots, -\alpha_r^{(0)}, \overline{\alpha^{(0)}}).$$

On a

$$w^\delta = w_n^{\delta_n} \prod_{j=1}^r w_j^{\delta_j} = \frac{w_n^{\overline{\alpha^{(0)}}}}{\prod_{j=s+1}^r w_j^{\alpha_j^{(0)}}}$$

et

$$w^\gamma = \prod_{j=1}^s w_j^{\alpha_j^{(0)}}.$$

Donc $\frac{w^\delta}{w^\gamma} = \frac{w_n^{\overline{\alpha^{(0)}}}}{\prod_{j=1}^r w_j^{\alpha_j^{(0)}}} = \bar{z}$.

Calculons la valeur de w^δ .

$$\begin{aligned}
\nu(w^\delta) &= \overline{\alpha^{(0)}}\nu(w_n) - \sum_{j=s+1}^r \alpha_j^{(0)}\nu(w_j) \\
&= \overline{\alpha^{(0)}}\nu(u_n) - \sum_{j=s+1}^r \alpha_j^{(0)}\nu(u_j) \\
&= \sum_{j=1}^r \alpha_j^{(0)}\nu(u_j) - \sum_{j=s+1}^r \alpha_j^{(0)}\nu(u_j) \\
&= \sum_{j=1}^s \alpha_j^{(0)}\nu(u_j) \\
&= \sum_{j=1}^s \alpha_j^{(0)}\nu(w_j) \\
&= \nu\left(\prod_{j=1}^s w_j^{\alpha_j^{(0)}}\right) \\
&= \nu(w^\gamma).
\end{aligned}$$

THÉORÈME 4.3.1. *Il existe une suite locale encadrée*

$$(4.3.1) \quad (A, u) \xrightarrow{\pi_0} (A_1, u^{(1)}) \xrightarrow{\pi_1} \dots \xrightarrow{\pi_{l-1}} (A_l, u^{(l)})$$

respectivement à ν , indépendante de v , et qui satisfait les propriétés suivantes :

Pour tout entier $i \in \{1, \dots, l\}$, on note $u^{(i)} = (u_1^{(i)}, \dots, u_{n_i}^{(i)})$ et k_i le corps résiduel de A_i .

(1) Les éclatements π_0, \dots, π_{l-2} sont monomiaux.

(2) On a $\bar{z} \in A_i^\times$.

(3) On a

$$n_l = \begin{cases} n & \text{si } \lambda \neq 0 \\ n - 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(4) On pose

$$u^{(l)} = \begin{cases} (w_1^{(l)}, \dots, w_r^{(l)}, v, w_n^{(l)}) & \text{si } \lambda \neq 0 \\ (w_1^{(l)}, \dots, w_r^{(l)}, v) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour tout entier $j \in \{1, \dots, r, n\}$, w_j est un monôme en $w_1^{(l)}, \dots, w_r^{(l)}$ multiplié par un élément de A_l^\times , et pour tout entier $j \in \{1, \dots, r\}$, $w_j^{(l)} = w^\eta$ où $\eta \in \mathbb{Z}^{r+1}$.

(5) Si $\lambda_0 \neq 0$, alors $Q = w_n^{(l)} \times \bar{y}^{d_0}$.

DÉMONSTRATION. On applique la proposition 3.2.3 à (w^δ, w^γ) et on obtient ainsi une suite locale encadrée pour ν , indépendante de v et telle que $w^\gamma \mid w^\delta$ dans A_l .

D'après la proposition 3.2.6 et le fait que w^δ et w^γ aient même valeur, il vient que $w^\delta \mid w^\gamma$ dans R_l . De fait $\bar{z}, \bar{z}^{-1} \in A_l^\times$. Ce qui montre (2).

On choisit la suite locale minimale, c'est-à-dire telle que la suite composée de π_0, \dots, π_{l-2} ne satisfait pas la conclusion de la proposition 3.2.3 pour (w^δ, w^γ) . On va maintenant démontrer que cette suite vérifie les cinq propriétés du Théorème 4.3.1. Soit $i \in \{0, \dots, l\}$. On écrit $w^{(i)} = (w_1^{(i)}, \dots, w_{r_i}^{(i)}, w_{n_i}^{(i)})$, avec $r_i = n_i - t - 1 > 0$. Pour tout entier $i \in \{1, \dots, l\}$ et tout entier $j \in \{1, \dots, n_i\}$, on pose $\beta_j^{(i)} = \nu(u_j^{(i)})$. Pour tout $i < l$, π_i est un éclatement le long d'un idéal de la forme $(u_{J_i}^{(i)})$. Quitte à renuméroter, on peut supposer que $1 \in J_i$ et que A_{i+1} est une localisation de $A_i \left[\frac{u_{J_i}^{(i)}}{u_1^{(i)}} \right]$. En particulier, $\beta_1^{(i)} = \min_{j \in J_i} \{\beta_j^{(i)}\}$.

LEMME 4.3.2. *Soit $i \in \{0, \dots, l-1\}$. On suppose que la suite π_0, \dots, π_{i-1} de 3.4.1 est monomiale.*

On pose $w^\gamma = (w^{(i)})^{\gamma^{(i)}}$ et $w^\delta = (w^{(i)})^{\delta^{(i)}}$. Alors :

$$(1) \quad r_i = r,$$

$$(2)$$

$$(4.3.2) \quad \sum_{q \in E} (\gamma_q^{(i)} - \delta_q^{(i)}) \beta_q^{(i)} = 0,$$

$$(3) \quad \text{pgcd}(\gamma_1^{(i)} - \delta_1^{(i)}, \dots, \gamma_r^{(i)} - \delta_r^{(i)}, \gamma_n^{(i)} - \delta_n^{(i)}) = 1,$$

(4) Toute relation de dépendance \mathbb{Z} -linéaire entre $\beta_1^{(i)}, \dots, \beta_r^{(i)}, \beta_n^{(i)}$ est un multiple entier de (4.3.2).

DÉMONSTRATION.

(1) Il suffit de faire une récurrence sur i et d'utiliser la remarque 3.1.7.

(2) On a $\nu(w^\gamma) = \nu(w^\delta)$, ie $\nu\left((w^{(i)})^{\gamma^{(i)}}\right) = \nu\left((w^{(i)})^{\delta^{(i)}}\right)$. On a donc, comme $w^{(i)} = (w_1^{(i)}, \dots, w_{r_i}^{(i)}, w_{n_i}^{(i)})$:

$$\nu\left(\prod_{j=1}^{r_i} (w_j^{(i)})^{\gamma_j^{(i)}} \times (w_{n_i}^{(i)})^{\gamma_{n_i}^{(i)}}\right) = \nu\left(\prod_{j=1}^{r_i} (w_j^{(i)})^{\delta_j^{(i)}} \times (w_{n_i}^{(i)})^{\delta_{n_i}^{(i)}}\right)$$

c'est-à-dire

$$\sum_{j=1}^{r_i} \gamma_j^{(i)} \nu(w_j^{(i)}) + \gamma_{n_i}^{(i)} \nu(w_{n_i}^{(i)}) = \sum_{j=1}^{r_i} \delta_j^{(i)} \nu(w_j^{(i)}) + \delta_{n_i}^{(i)} \nu(w_{n_i}^{(i)}).$$

D'après la définition de $w^{(i)}$, pour tout entier $j \in \{1, \dots, r_i, n_i\}$, on a $w_j^{(i)} = u_j^{(i)}$, donc $\nu(w_j^{(i)}) = \beta_j^{(i)}$. Il vient :

$$\sum_{j=1}^{r_i} \gamma_j^{(i)} \beta_j^{(i)} + \gamma_{n_i}^{(i)} \beta_{n_i}^{(i)} = \sum_{j=1}^{r_i} \delta_j^{(i)} \beta_j^{(i)} + \delta_{n_i}^{(i)} \beta_{n_i}^{(i)}.$$

$$\text{Puis } \sum_{j \in \{1, \dots, r_i, n_i\}} (\gamma_j^{(i)} - \delta_j^{(i)}) \beta_j^{(i)} = 0.$$

Or $r_i = n_i - t - 1 = r$, donc $n_i = r + t + 1 = n$, et :

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \{1, \dots, r_i, n_i\}} (\gamma_j^{(i)} - \delta_j^{(i)}) \beta_j^{(i)} &= \sum_{j \in \{1, \dots, r, n\}} (\gamma_j^{(i)} - \delta_j^{(i)}) \beta_j^{(i)} \\ &= \sum_{j \in E} (\gamma_j^{(i)} - \delta_j^{(i)}) \beta_j^{(i)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

(3) On fait un raisonnement par récurrence. Cas $i = 0$.

On a

$$\begin{aligned} &\text{pgcd}(\gamma_1^{(i)} - \delta_1^{(i)}, \dots, \gamma_r^{(i)} - \delta_r^{(i)}, \gamma_n^{(i)} - \delta_n^{(i)}) \\ &= \text{pgcd}(\gamma_1^{(0)} - \delta_1^{(0)}, \dots, \gamma_r^{(0)} - \delta_r^{(0)}, \gamma_n^{(0)} - \delta_n^{(0)}) \\ &= \text{pgcd}(\alpha_1^{(0)}, \dots, \alpha_s^{(0)}, \alpha_{s+1}^{(0)}, \dots, \alpha_r^{(0)}, -\overline{\alpha^{(0)}}). \end{aligned}$$

Par définition,

$$\overline{\alpha^{(0)}} = \min_{\alpha \in \mathbb{N}^*} \{\alpha \text{ tq } \alpha \beta_n \in \Delta\}$$

et

$$\overline{\alpha^{(0)}} \beta_n = \sum_{j=1}^r \alpha_j^{(0)} \beta_j.$$

$$\text{Donc } \text{pgcd}(\alpha_1^{(0)}, \dots, \alpha_s^{(0)}, \alpha_{s+1}^{(0)}, \dots, \alpha_r^{(0)}, -\overline{\alpha^{(0)}}) = 1.$$

Cas $i > 0$. On suppose le résultat démontré au rang précédent.

On a $\gamma^{(i)} = \gamma^{(i-1)} G^{(i)}$, $\delta^{(i)} = \delta^{(i-1)} G^{(i)}$ et $\beta^{(i)} = \beta^{(i-1)} F^{(i)}$ où $F^{(i)} = (G^{(i)})^{-1}$ et $G^{(i)} \in \text{SL}_{r+1}(\mathbb{Z})$ telle que

$$G_{sq}^{(i)} = \begin{cases} 1 & \text{si } s = q \\ 1 & \text{si } q = j \text{ et } s \in J \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Donc $(\gamma^{(i)} - \delta^{(i)}) = (\gamma^{(i-1)} - \delta^{(i-1)}) G^{(i)} = (\gamma - \delta) G$ où G est un produit de matrices unimodulaires, est donc elle même unimodulaire.

D'après le cas $i = 0$, $(\gamma - \delta)$ est un vecteur dont les éléments sont premiers entre eux dans leur ensemble. D'après le fait 3.4.5 ce vecteur est complétable en une base de \mathbb{Z}^{r+1} , qui, par

une matrice unimodulaire, reste une base de \mathbb{Z}^{r+1} . Le vecteur $(\gamma^{(i)} - \delta^{(i)})$ est donc un vecteur de cette base, ses éléments sont alors premiers entre eux dans leur ensemble.

- (4) Cas $i = 0$ découle du fait que $\beta_1, \dots, \beta_r, \beta_n$ engendrent un espace vectoriel de dimension r .

Soit

$$Z := \left\{ (x_1, \dots, x_{r+1}) \in \mathbb{Z}^{r+1} \text{ tel que } \sum_{j=1}^r x_j \beta_j + x_{r+1} \beta_n = 0 \right\}.$$

Or $\overline{\alpha^{(0)}} \beta_n = \sum_{j=1}^r \alpha_j^{(0)} \beta_j$, donc nous avons :

$$Z = \left\{ (x_1, \dots, x_{r+1}) \in \mathbb{Z}^{r+1} \text{ tel que } \sum_{j=1}^r (\overline{\alpha^{(0)}} x_j + x_{r+1} \alpha_j^{(0)}) \beta_j = 0 \right\}.$$

Comme β_1, \dots, β_r sont \mathbb{Q} -linéairement indépendants, il vient que Z est un \mathbb{Z} -module libre de rang 1, il est donc engendré par un unique vecteur. D'après le point (2), le vecteur $(\gamma - \delta)$ est dans Z , et d'après le point (3), il est composé d'éléments premiers entre eux dans leur ensemble. Ce vecteur engendre donc le \mathbb{Z} -module libre de rang 1.

Soit $i > 0$. Nous avons vu que $\beta^{(i)} = \beta^{(i-1)} F^{(i)} = \beta F$ où F est une matrice unimodulaire, donc un automorphisme de \mathbb{Z}^r .

Soit

$$Z^{(i)} := \left\{ (x_1, \dots, x_{r+1}) \in \mathbb{Z}^{r+1} \text{ tel que } \sum_{j=1}^r x_j \beta_j^{(i)} + x_{r+1} \beta_n^{(i)} = 0 \right\}.$$

On a donc

$$Z^{(i)} = \left\{ (x_1, \dots, x_{r+1}) \in \mathbb{Z}^{r+1} \text{ tel que } \sum_{j=1}^r x_j \beta_j F + x_{r+1} \beta_n F = 0 \right\},$$

puis

$$Z^{(i)} = \left\{ (x_1, \dots, x_{r+1}) \in \mathbb{Z}^{r+1} \text{ tel que } \sum_{j=1}^r x_j \beta_j + x_{r+1} \beta_n = 0 \right\}.$$

L'ensemble $Z^{(i)}$ est donc un \mathbb{Z} -module libre de rang 1 d'après le cas $i = 0$. Nous avons vu au point (3) que le vecteur $(\gamma^{(i)} - \delta^{(i)})$ était un vecteur de $Z^{(i)}$ composé d'éléments premiers entre eux dans leur ensemble, il engendre donc $Z^{(i)}$, ce qui conclut la preuve.

□

LEMME 4.3.3. *La suite (3.4.1) n'est pas monomiale.*

DÉMONSTRATION. La preuve est identique à celle du Lemme 3.4.7. \square

LEMME 4.3.4. *Soit $i \in \{0, \dots, l-1\}$ et l'on suppose que π_0, \dots, π_{i-1} sont tous monomiaux. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (1) *L'éclatement π_i n'est pas monomial.*
- (2) *Il existe un unique indice $q \in J_i \setminus \{1\}$ tel que $\beta_q^{(i)} = \beta_1^{(i)}$.*
- (3) *On a $i = l - 1$.*

DÉMONSTRATION. La preuve est identique à celle du Lemme 3.4.8. \square

En faisant une récurrence sur i et en utilisant le Lemme 4.3.4, on conclut que π_0, \dots, π_{l-2} sont monomiaux. Nous avons donc bien (1) du Théorème 4.3.1.

Reste à montrer les points (3), (4) et (5).

D'après le Lemme 4.3.4 nous savons qu'il existe un unique élément $q \in J_{l-1} \setminus \{j_{l-1}\}$ tel que $\beta_q^{(l-1)} = \beta_1^{(l-1)}$, et donc nous sommes dans le cas $\#B_{l-1} + 1 = \#J_{l-1} - 1$. Reste à savoir si $t_{k_{l-1}} = 0$ ou 1.

On rappelle que $w_1^{(l-1)} = w^\epsilon$ et $w_q^{(l-1)} = w^\mu$ où ϵ et μ sont deux colonnes d'une matrice unimodulaire telles que $\mu - \epsilon = \pm(\gamma - \delta)$. Donc nous avons $x_1^{(l-1)} = x^\epsilon$ et $x_q^{(l-1)} = x^\mu$, puis

$$\frac{x_q^{(l-1)}}{x_1^{(l-1)}} = x^{\mu - \epsilon} = x^{\pm(\gamma - \delta)} = x^{\pm(\alpha_1^{(0)}, \dots, \alpha_r^{(0)}, -\overline{\alpha^{(0)}})}.$$

C'est-à-dire que

$$\frac{x_q^{(l-1)}}{x_1^{(l-1)}} = \left(\frac{\prod_{j=1}^r x_j^{\alpha_j^{(0)}}}{x_n^{\alpha_n^{(0)}}} \right)^{\pm 1} = (z^{-1})^{\pm 1} = z^{\pm 1}.$$

Quitte à échanger $x_1^{(l-1)}$ et $x_q^{(l-1)}$, on peut supposer $\frac{x_q^{(l-1)}}{x_1^{(l-1)}} = z$.

Le cas $t_{k_{l-1}} = 1$ arrive dès lors que z est transcendant sur k , soit dès lors que $\lambda = 0$; et le cas $t_{k_{l-1}} = 0$ dès lors que z est algébrique sur k , et donc dès lors que $\lambda_0 \neq 0$. Le point (3) du Théorème est alors une conséquence de la Note 3.1.10.

Comme $\beta_1^{(l-1)}, \dots, \beta_r^{(l-1)}$ sont linéairement indépendants, il vient que $q = n$. D'après la Note 3.1.10, si $\lambda_0 \neq 0$, nous avons

$$w_n^{(l)} = u_n^{(l)} = \overline{\lambda_0}(u'_n) = \overline{\lambda_0} \left(\frac{u_n^{(l-1)}}{u_1^{(l-1)}} \right) = \overline{\lambda_0} \left(\frac{w_n^{(l-1)}}{w_1^{(l-1)}} \right) = \overline{\lambda_0}(\bar{z}) = \sum_{i=0}^d a_i b_i \bar{z}^i.$$

REMARQUE 4.3.5. On sait en fait que $\overline{\lambda_0}(\bar{z}) = \sum_{i=0}^d c_i b_i \bar{z}^i$ où c_i sont des unités quelconques. Ainsi, nous choisissons de prendre $c_i = a_i$ pour tout indice i .

Or on a $\bar{z} = \frac{\overline{w_n^{\alpha(0)}}}{\bar{y}}$, donc

$$w_n^{(l)} = \sum_{i=0}^{d_0} a_i b_i \left(\frac{\overline{w_n^{\alpha(0)}}}{\bar{y}} \right)^i = \frac{\sum_{i=0}^{d_0} a_i b_i \bar{y}^{d_0-i} \left(\overline{w_n^{\alpha(0)}} \right)^i}{\bar{y}^{d_0}} = \frac{Q}{\bar{y}^{d_0}}$$

comme attendu dans le point (5).

Il reste donc à montrer le point (4).

On applique la proposition 3.2.4 à $i = 0$ et $i' = l$. Par monomialité de π_0, \dots, π_{l-2} , on sait que $D_i = \{1, \dots, n\}$ pour tout $i \in \{1, \dots, l-1\}$, et on sait que $D_l = \{1, \dots, n\}$ si $\lambda \neq 0$ et $D_l = \{1, \dots, n-1\}$ si $\lambda = 0$. Ici on prend également $u_T = v$.

Pour tout $j \in \{1, \dots, r, n\}$, le fait que $w_j = u_j$ soit un monôme en $w_1^{(l)}, \dots, w_r^{(l)}$, c'est-à-dire en $u_1^{(l)}, \dots, u_r^{(l)}$, multiplié par un élément de A_l^\times découle des deux premiers points de la proposition 3.2.4.

Et le fait que pour tout entier $j \in \{1, \dots, r\}$, nous ayons $w_j^{(l)} = w^\eta$ découle des deux derniers points de cette même proposition. Ce qui conclut la preuve. \square

REMARQUE 4.3.6. Dans le cas particulier où $Q_2 = Q$, alors on a construit une suite locale encadrée telle que la transformée totale de Q_2 soit un monôme. Nous allons nous ramener à ce cas par la suite.

DÉFINITION 4.3.7. [10] Une suite locale encadrée qui vérifie le théorème 3.4.4 est appelée un *n-paquet de Puiseux généralisé*.

Soit $j \in \{r+1, \dots, n\}$. Un *j-paquet de Puiseux généralisé* est un *n-paquet de Puiseux généralisé* en changeant n par j dans le théorème 3.4.4.

REMARQUE 4.3.8. On considère $(A, u) \rightarrow \dots \rightarrow (A_i, u^{(i)}) \rightarrow \dots$ un *j-paquet de Puiseux généralisé*, avec $j \in \{r+1, \dots, n\}$. On remplace chaque anneau de cette suite par son complété formel, et on obtient

ainsi une suite formelle encadrée que l'on appelle un j -paquet de Puiseux formel. Le Théorème 4.3.1 induit donc un n -paquet de Puiseux formel qui vérifie la même conclusion que dans le Théorème 4.3.1.

Dans l'optique de faire un raisonnement par récurrence, nous supposons dorénavant, et ce jusqu'à la fin du Théorème 4.3.14, que nous savons monomialiser tout anneau G local complet équicaractéristique quasi-excellent de dimension strictement inférieure à n muni d'une valuation centrée en G et de rang 1 par une suite formelle encadrée. Cette hypothèse sera appelée hypothèse H_n .

LEMME 4.3.9. *Soit $P = \sum_{j \in S_{u_n}(P)} c_j u_n^j$ le u_n -développement d'un élément clef successeur immédiat optimal de u_n .*

Il existe une suite formelle encadrée $(A, u) \rightarrow (A_l, u^{(l)})$ qui transforme chaque coefficient c_j en un monôme en $(u_1^{(l)}, \dots, u_r^{(l)})$, multiplié par une unité de A_l .

En particulier, après cette suite formelle encadrée, l'élément P est bien de la forme $\sum_{i=0}^{d_0} a_i b_i \bar{y}^{d_0-i} \left(\overline{w_n^{\alpha(0)}} \right)^i$.

DÉMONSTRATION. Nous démontrerons ce Lemme dans le cadre plus général du Lemme 4.3.12. \square

THÉORÈME 4.3.10. *On rappelle que $\text{car}(k_\nu) = 0$. Si $u_n \ll_{\lim} P$, alors P est monomialisable.*

DÉMONSTRATION. La démonstration est similaire à celle du Théorème 3.4.14 (qui utilise la caractéristique nulle). \square

LEMME 4.3.11. *On rappelle que $\text{car}(k_\nu) = 0$. Il existe une suite formelle encadrée*

$$(A, u) \rightarrow (A_l, u^{(l)})$$

telle que dans A_l , la transformée stricte du polynôme Q_2 soit un monôme.

DÉMONSTRATION. Si $u_n < Q_2$, on utilise le Lemme 4.3.9 et le Théorème 4.3.1 pour conclure. Sinon, $u_n <_{\lim} Q_2$ et alors on utilise 3.4.14 (qui utilise la caractéristique nulle) pour conclure. \square

Nous avons maintenant construit une suite formelle encadrée qui monomialise Q_2 , mais nous aimerions en construire une qui monomialise tous les polynômes clefs suivants dans la suite \mathcal{Q} .

On va montrer que si l'on a construit une suite formelle encadrée $(A, u) \rightarrow (A_l, u^{(l)})$ qui monomialise Q_i , alors on peut en adjoindre une

$(A_l, u^{(l)}) \rightarrow (A_s, u^{(s)})$ telle que dans A_s , la transformée stricte de Q_{i+1} est également un monôme.

Soit Δ_l le groupe $\nu(k_l(u_1^{(l)}, \dots, u_{n-1}^{(l)}) \setminus \{0\})$. On pose

$$\alpha_l := \min \{h \text{ tel que } h\beta_n^{(l)} \in \Delta_l\}.$$

On pose $X_j = \text{in}_\nu(u_j^{(l)})$, $W_j = w_j^{(l)}$ et λ_l le polynôme minimal de X_n sur $\text{gr}_\nu k_l(u_1^{(l)}, \dots, u_{n-1}^{(l)})$ de degré α_l .

On sait que $Q_i = \bar{w}w_n^{(l)}$ avec \bar{w} un monôme en W_1, \dots, W_r multiplié par une unité. On pose $\omega := \text{in}_\nu(\bar{w})$.

Si $Q_i <_{\lim} Q_{i+1}$, on utilise le Théorème 4.3.10 (qui utilise la caractéristique nulle) et c'est gagné, on suppose donc que Q_{i+1} est un polynôme clef successeur immédiat optimal de Q_i .

On note $Q_{i+1} = \sum_{j \in \mathcal{S}_{Q_i}(Q_{i+1})} a_j Q_i^j = \sum_{j=0}^s a_j Q_i^j$ le Q_i -développement de Q_{i+1} dans $k_l(u_1^{(l)}, \dots, u_{n-1}^{(l)})(u_n^{(l)})$.

On a $Q_{i+1} = Q_i^s + a_{s-1}Q_i^{s-1} + \dots + a_0$ et comme $Q_i = \bar{w}w_n^{(l)}$, on a

$$\frac{Q_{i+1}}{\bar{w}^s} = (u_n^{(l)})^s + \frac{a_{s-1}}{\bar{w}} (u_n^{(l)})^{s-1} + \dots + \frac{a_0}{\bar{w}^s}.$$

Nous savons que pour tout indice j tel que $a_j \neq 0$, on a

$$\nu(a_j Q_i^j) = \nu_{Q_i}(Q_{i+1}),$$

donc tous les termes non nuls du Q_i -développement de Q_{i+1} ont même valeur. Ainsi, par l'hypothèse H_n , tous ces termes sont divisibles par la même puissance de \bar{w} après une suite d'éclatements convenables $(*_i)$ indépendante de $u_n^{(l)}$.

On note \tilde{Q}_{i+1} la transformée stricte de Q_{i+1} par la composition de $(*_i)$ et de la suite d'éclatements $(*_i')$ qui monomialise Q_i . On note cette composition (c_i) .

On sait que \tilde{Q}_i , la transformée stricte de Q_i par la suite d'éclatements (c_i) , est un paramètre régulier de l'idéal maximal de A_l : en effet, d'après la Proposition 3.2.4, on sait que chaque u_j de A s'écrit comme monôme en $w_1^{(l)}, \dots, w_r^{(l)}$. De fait, le diviseur exceptionnel réduit de cette suite d'éclatement est exactement $V(\bar{w})_{\text{red}}$. Ainsi, comme on sait que $Q_i = w_n^{(l)}\bar{w}$, on a bien que la transformée stricte de Q_i est $\tilde{Q}_i = w_n^{(l)} = u_n^{(l)}$. C'est donc un polynôme clef dans l'extension $k_l(u_1^{(l)}, \dots, u_{n-1}^{(l)})(u_n^{(l)})$.

Montrons que $\tilde{Q}_{i+1} = \frac{Q_{i+1}}{\bar{w}^s}$.

On a $a_s = 1$ et $Q_i^s = \bar{\omega}^s \left(u_n^{(l)}\right)^s$ ainsi que $u_n^{(l)} \nmid \bar{\omega}$, donc $\bar{\omega}^s$ divise le terme $a_s Q_i^s$ et divise donc tous les termes non nuls du Q_i -développement de Q_{i+1} . De plus, c'est la plus grande puissance de $\bar{\omega}$ qui divise chaque terme, il vient que $\frac{Q_{i+1}}{\bar{\omega}^s} \left(u_n^{(l)}\right)^s + \frac{a_{s-1}}{\bar{\omega}} \left(u_n^{(l)}\right)^{s-1} + \cdots + \frac{a_0}{\bar{\omega}^s}$ est \tilde{Q}_{i+1} la transformée stricte de Q_{i+1} par la suite d'éclatements, qui vérifie $\tilde{Q}_i \ll \tilde{Q}_{i+1}$ par hypothèse.

Soit G un anneau local complet équicaractéristique de dimension strictement inférieure à n muni d'une valuation centrée en G .

LEMME 4.3.12. *On suppose que pour tout anneau G comme ci-dessus, tout élément de G est monomialisable.*

Supposons que $Q_i < Q_{i+1}$ dans \mathcal{Q} .

Alors il existe une suite locale encadrée $(A_l, u^{(l)}) \rightarrow (A_e, u^{(e)})$ telle que dans A_e , la transformée stricte de Q_{i+1} est de la forme $\sum_{q=0}^s \tau_q \eta_q X_n^q$

où $\tau_q \in R_e^\times$ et η_q sont des monômes en $u_1^{(e)}, \dots, u_r^{(e)}$.

DÉMONSTRATION. D'après l'hypothèse, après une suite d'éclatements indépendante de $u_n^{(l)}$, on peut monomialiser les a_j et supposer que ce sont des monômes en $(u_1^{(l)}, \dots, u_{n-1}^{(l)})$ multiplié par une unité de A_l .

Pour tout $g \in \{r+1, \dots, n-1\}$, on effectue un g -paquet de Pui-seux généralisé comme dans le Théorème 4.3.1, ainsi on obtient une suite

$$(A_l, u^{(l)}) \rightarrow (A_t, u^{(t)})$$

telle que chaque $u_g^{(t)}$ est un monôme en $(u_1^{(t)}, \dots, u_r^{(t)})$.

De fait, on peut supposer que les a_j sont des monômes en $(u_1^{(l)}, \dots, u_r^{(l)})$ multipliés par des unités de A_l .

La transformée stricte

$$\tilde{Q}_{i+1} = \frac{Q_{i+1}}{\bar{\omega}^s} = \left(u_n^{(l)}\right)^s + \frac{a_{s-1}}{\bar{\omega}} \left(u_n^{(l)}\right)^{s-1} + \cdots + \frac{a_0}{\bar{\omega}^s}$$

étant un élément clef successeur immédiat de \tilde{Q}_i , cela conclut la preuve. \square

REMARQUE 4.3.13. Le Lemme 4.3.9 est un cas particulier du Lemme 4.3.12.

THÉORÈME 4.3.14. *On suppose toujours H_n .*

On rappelle quecar $(k_\nu) = 0$. Si Q_i est monomialisable, alors il existe une suite formelle encadrée

(4.3.3)

$$(A, u) \xrightarrow{\pi_0} (A_1, u^{(1)}) \xrightarrow{\pi_1} \dots \xrightarrow{\pi_{l-1}} (A_l, u^{(l)}) \xrightarrow{\pi_l} \dots \xrightarrow{\pi_{m-1}} (A_m, u^{(m)})$$

qui monomialise Q_{i+1} .

DÉMONSTRATION. Deux options s'offrent à nous.

La première : $Q_i < Q_{i+1}$.

Alors on sait que la transformée stricte \tilde{Q}_{i+1} de Q_{i+1} par la suite d'éclatements formels $(A, u) \rightarrow (A_l, u^{(l)})$ qui monomialise Q_i est un élément clef successeur immédiat de $\tilde{Q}_i = u_{n_i}^{(l)}$, et on vient de voir que l'on pouvait se ramener exactement aux hypothèses du Théorème 4.3.1 d'après le Lemme 4.3.12. Donc on utilise le Théorème 4.3.1 en remplaçant Q_1 par \tilde{Q}_i et Q_2 par \tilde{Q}_{i+1} .

La deuxième : $Q_i <_{\text{lim}} Q_{i+1}$.

Alors on applique le Théorème 4.3.10 (qui utilise la caractéristique nulle) en remplaçant u_n par \tilde{Q}_i et P par \tilde{Q}_{i+1} . \square

On considère, comme dans le chapitre 3, pour tout entier naturel j , les ensembles dénombrables

$$\mathcal{S}_j := \left\{ \prod_{i=1}^n (u_i^{(j)})^{\alpha_i^{(j)}}, \text{ avec } \alpha_i^{(j)} \in \mathbb{Z} \right\}$$

et

$$\tilde{\mathcal{S}}_j := \{(s_1, s_2) \in \mathcal{S}_j \times \mathcal{S}_j, \text{ avec } \nu(s_1) \leq \nu(s_2)\}$$

avec la convention que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $u_i^{(0)} = u_i$.

L'ensemble $\tilde{\mathcal{S}}_j$ étant dénombrable pour tout entier j , nous pouvons numéroter ses éléments, et ainsi, on pose $\tilde{\mathcal{S}}_j := \{s_m^{(j)}\}_{m \in \mathbb{N}}$. Considérons maintenant l'ensemble fini

$$\mathcal{S}'_j := \{s_m^{(j)}, m \leq j\} \cup \{s_j^{(m)}, m \leq j\}.$$

Ainsi $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} (\mathcal{S}_j \times \mathcal{S}_j) = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \tilde{\mathcal{S}}_j = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \mathcal{S}'_j$ est une union dénombrable d'ensembles finis.

Comme l'on considère tous les éléments selon la seule variable u_n , et plus généralement lors de la suite d'éclatements selon la variable $u_n^{(i)}$, et que nous faisons une récurrence sur la dimension ambiante, il faut savoir monomialiser les éléments de $B_i := k[u_1^{(i)}, \dots, u_{n-1}^{(i)}]$.

THÉORÈME 4.3.15. Soit $A \simeq k[[u_1, \dots, u_n]]$ muni d'une valuation ν centrée en A .

On rappelle que $\text{car}(k_\nu) = 0$. Il existe une suite formelle

$$(4.3.4) \quad (A, u) \xrightarrow{\pi_0} \cdots \xrightarrow{\pi_{s-1}} (A_s, u^{(s)}) \xrightarrow{\pi_s} \cdots$$

qui monomialise tous les polynômes clefs de \mathcal{Q} ainsi que tous les éléments des B_i pour tout i et qui vérifie la propriété suivante :

$$\forall j \in \mathbb{N} \forall s = (s_1, s_2) \in \mathcal{S}'_j \exists i \in \mathbb{N}_{\geq j} \text{ tel que dans } A_i \text{ l'on ait } s_1 \mid s_2.$$

Plus précisément, pour tout indice l , il existe un indice p_l tel que dans A_{p_l} , Q_l est un monôme en $u^{(p_l)}$ multiplié par une unité de A_{p_l} .

DÉMONSTRATION. Pour montrer que l'on peut choisir la suite (4.3.4) de telle sorte que

$$\forall j \in \mathbb{N} \forall s = (s_1, s_2) \in \mathcal{S}'_j \exists i \in \mathbb{N}_{\geq j} \text{ tel que dans } A_i \text{ l'on ait } s_1 \mid s_2,$$

et que tous les éléments des B_i soient monomialisés, on procède de la même manière que dans la preuve du Théorème 3.4.21 (qui utilise la caractéristique nulle).

On fait donc ensuite une récurrence sur la dimension de l'anneau n et sur l'indice i et on itère le processus précédent. \square

COROLLAIRE 4.3.16. Soit $A \simeq k[[u_1, \dots, u_n]]$ muni d'une valuation $\hat{\nu}$ centrée en A , de groupe des valeurs Γ . On suppose

$$I = \{a \in A \text{ tel que } \hat{\nu}(a) \notin \Gamma_1\} = (h) \neq (0),$$

où Γ_1 est le plus petit sous-groupe isolé de Γ . On rappelle que $\text{car}(k_\nu) = 0$.

Il existe une suite formelle encadrée

$$(A, u) \rightarrow \cdots \rightarrow (A_l, u^{(l)}) \rightarrow \cdots$$

telle que dans A_l , le polynôme h s'écrit comme un monôme multiplié par une unité.

DÉMONSTRATION. La suite \mathcal{Q} a été construite pour contenir h , il suffit donc d'utiliser le Théorème 4.3.15 (qui utilise la caractéristique nulle). \square

4.4. Réduction au quotient et au localisé.

Soit (R, \mathfrak{m}, k) un anneau local quasi-excellent équicaractéristique et ν une valuation de son corps des fractions, de rang 1, centrée en R et de groupe des valeurs Γ_1 . On note \overline{H} l'idéal implicite de R .

Nous avons dit plus haut que dans le cadre des anneaux quasi-excellents, il suffisait de régulariser $\frac{\widehat{R}}{\overline{H}}$, nous allons maintenant le montrer.

On considère $\mathcal{F} := \{f_1, \dots, f_s\} \subseteq \mathfrak{m}$, et l'on suppose que f_1 est de valeur minimale.

REMARQUE 4.4.1. On considère $R \rightarrow \widehat{R} \rightarrow R_1 \rightarrow \widehat{R}_1$ un éclatement formel encadré. On note H' la transformée stricte de \overline{H} dans R_1 .

Alors on définit \overline{H}_1 , comme la préimage naturelle dans \widehat{R}_1 de l'idéal implicite de $\frac{\widehat{R}_1}{H'R_1}$.

On réitère la construction pour toute suite formelle encadrée.

THÉORÈME 4.4.2. *On rappelle que $\text{car}(k_\nu) = 0$. Il existe une suite formelle encadrée*

$$(R, u, k) = (R_0, u^{(0)}, k_0) \rightarrow \dots \rightarrow (R_i, u^{(i)} = (u_1^{(i)}, \dots, u_n^{(i)}), k_i)$$

telle que :

- (1) L'anneau $\frac{\widehat{R}_i}{\overline{H}_i}$ est régulier,
- (2) Pour tout indice j , on a $f_j \pmod{(\overline{H}_i)}$ qui est un monôme en $u^{(i)}$ multiplié par une unité de $\frac{\widehat{R}_i}{\overline{H}_i}$,
- (3) Pour tout indice j , on a $f_1 \pmod{(\overline{H}_i)} \mid f_j \pmod{(\overline{H}_i)}$ dans $\frac{\widehat{R}_i}{\overline{H}_i}$.

DÉMONSTRATION. Posons $n := e(R, \nu)$ et $u := (y, x)$ avec

$$y := (y_1, \dots, y_{n-n})$$

et

$$x := (x_1, \dots, x_n)$$

tel que les images des x_j dans $\frac{\widehat{R}}{\overline{H}}$ induisent un ensemble minimal de générateurs de $\frac{\mathfrak{m}}{\overline{H}}$ et tel que y engendre \overline{H} .

On fait ici une récurrence sur $(n_i, n_i - r_i, v_i)$.

On a vu qu'il existait une surjection Φ de $A \simeq k[[x_1, \dots, x_n]]$ dans $\frac{\widehat{R}}{\overline{H}}$, de noyau $I = \{f \in A \text{ tel que } \widehat{\nu}(f) \notin \Gamma_1\} \in \text{Spec}(A)$ où $\widehat{\nu}$ est définie comme dans la section 4.2. On note L le corps des fractions de A .

Si $v_0 < n - 1$, alors on adopte la démarche de la Proposition 4.2.5 et on fait décroître strictement $e(A, \widehat{\nu})$.

Ainsi, on peut supposer $v_0 \in \{n-1, n\}$. Supposons $v_0 = n-1$.

Alors on sait que $I = (h)$ et qu'il existe une suite formelle encadrée $(A, x) \rightarrow (A_\ell, x^{(\ell)})$ qui monomialise h d'après le Corollaire 4.3.16 (qui utilise la caractéristique nulle). Donc l'un des générateurs qui apparaît dans sa décomposition doit appartenir à I_ℓ . Donc il existe un $x_p^{(\ell)}$ tel que $\hat{\nu}(x_p^{(\ell)}) \notin \Gamma_1$. Ainsi d'après les théorèmes 4.2.5, 4.1.11, il existe une suite locale encadrée qui fait baisser strictement $e(A, \hat{\nu})$, et ainsi ce cas ne peut arriver qu'un nombre fini de fois, et on tombe au cas où $I = (0)$, c'est-à-dire où $\frac{\hat{A}}{I}$ est régulier.

Cas : $I = (0)$. Donc pour tout f_j , on a $\hat{\nu}(f_j) \in \Gamma_1$. L'élément f_j est donc une série formelle non nulle et par le théorème de préparation de Weierstrass, on sait qu'on peut la voir comme un polynôme en x_l à coefficients dans $k[[x_1, \dots, x_{n-1}]]$. On construit une suite de polynômes clefs dans l'extension $k((x_1, \dots, x_{n-1}))(x_n)$ comme dans la section précédente. Autrement dit cette suite est une suite de polynômes clefs successeurs immédiats optimaux (éventuellement limites) cofinale dans $\epsilon(\Lambda)$ où Λ est l'ensemble des polynômes clefs. L'élément f_j est alors non dégénéré par rapport à l'un de ces polynômes, qui sont tous monomialisables d'après la section précédente. Ainsi il existe une suite locale encadrée $(A, x) \rightarrow (A_i, x^{(i)})$ telle que dans A_i , la transformée stricte de f_j est un monôme en $x^{(i)}$ multiplié par une unité de A_i .

S'il existe une suite formelle encadrée telle que $v_i < n-1$, alors d'après la Proposition 4.2.5, la preuve se termine par récurrence.

En itérant la procédure du premier cas où $I = (0)$, on s'assure ainsi de l'existence d'une suite locale encadrée telle que toutes les transformées strictes des f_j soient des monômes multipliés par des unités. Quitte à effectuer un autre éclatement, on peut supposer qu'il existe une suite locale encadrée $(A, x) \rightarrow (A', x')$ telle que les transformées strictes des f_j soient toutes des monômes en x'_1, \dots, x'_r uniquement.

D'après la Proposition 3.2.3, on peut même supposer que pour tout j et pour tout p , on a f_j qui divise f_p ou l'inverse.

On a donc une suite locale encadrée

$$(A, x, k) \xrightarrow{\rho_0} (A_1, x^{(1)}, k_1) \xrightarrow{\rho_1} \dots \xrightarrow{\rho_i} (A_i, x^{(i)}, k_i)$$

qui monomialise les f_j et telle que pour tous j et q , on a $f_j \mid f_q$ ou l'inverse.

Par minimalité de $\nu(f_1)$, on sait que dans A_i , $f_1 \mid f_j$ pour tout j .

Nous avons également deux applications

$$(R, u, k) \rightarrow \left(\frac{\widehat{R}}{\widehat{H}}, x, k \right) \leftarrow (A, x, k),$$

et nous savons que $\frac{A}{I} \simeq \frac{\widehat{R}}{\widehat{H}}$ puisque $I = \text{Ker}(\Phi)$. Ainsi en regardant la transformée stricte de $\frac{A}{I}$ à chaque étape de la suite $\{\rho_j\}_{0 \leq j \leq i}$, on obtient une suite locale encadrée

$$\left(\frac{\widehat{R}}{\widehat{H}}, x, k \right) \xrightarrow{\tilde{\rho}_0} \left(\tilde{R}_1, x^{(1)}, k_1 \right) \xrightarrow{\tilde{\rho}_1} \dots \xrightarrow{\tilde{\rho}_i} \left(\tilde{R}_i, x^{(i)}, k_i \right).$$

On a donc le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} \left(\frac{\widehat{R}}{\widehat{H}}, x, k \right) & \xrightarrow{\tilde{\rho}_0} & \left(\tilde{R}_1, x^{(1)}, k_1 \right) & \xrightarrow{\tilde{\rho}_1} & \dots & \xrightarrow{\tilde{\rho}_i} & \left(\tilde{R}_i, x^{(i)}, k_i \right) \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ (A, x, k) & \xrightarrow{\rho_0} & (A_1, x^{(1)}, k_1) & \xrightarrow{\rho_1} & \dots & \xrightarrow{\rho_i} & (A_i, x^{(i)}, k_i) \end{array}$$

De la même manière que nous avons vu précédemment, ou $\frac{A}{I}$ est régulier, ou la suite $\{\rho_j\}$ peut être choisie de telle manière que $e(R, \mu)$ décroît strictement.

Après donc un suite finie d'éclatements, on arrive au cas où $\frac{\widehat{R}_i}{\widehat{H}_i}$ est régulier. On peut donc supposer que $\frac{\widehat{R}_i}{\widehat{H}_i}$ est régulier et l'on considère f_1, \dots, f_s des éléments de $R \setminus \{0\}$ tels que $\nu(f_1) = \min_{1 \leq j \leq s} \{\nu(f_j)\}$. D'après ce qui précède, on sait que les f_j sont tous des monômes en les $u^{(i)}$ et que $f_1 \text{ mod } (\widehat{H}_i) \mid f_j \text{ mod } (\widehat{H}_i)$, ce qui conclut la preuve. \square

THÉORÈME 4.4.3. *Soit R un anneau intègre local quasi-excellent et H son idéal premier implicite. On suppose que $\frac{\widehat{R}}{\widehat{H}}$ est régulier.*

On rappelle que $\text{car}(k_\nu) = 0$. Il existe alors une suite d'éclatements définie sur R qui résout les singularités de R .

DÉMONSTRATION. L'anneau \widehat{R}_H étant régulier d'après la proposition 4.1.5, on sait qu'il existe des éléments $(\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_g)$ de $H\widehat{R}_H$ qui forment un système régulier de paramètres de \widehat{R}_H .

Par définition de $H\widehat{R}_H$, cela veut dire qu'il existe y_1, \dots, y_g des éléments de H et b_1, \dots, b_g des éléments de $\widehat{R} \setminus H$ tels que pour tout indice i , on ait $\tilde{y}_i = \frac{y_i}{b_i}$.

Mais les b_i étant des éléments de \widehat{R}_H^\times , il vient que

$$(\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_g) \widehat{R}_H = \left(\frac{y_1}{b_1}, \dots, \frac{y_g}{b_g} \right) \widehat{R}_H = (y_1, \dots, y_g) \widehat{R}_H.$$

Ainsi nous avons (y_1, \dots, y_g) des éléments de H qui forment un système régulier de paramètres de \widehat{R}_H .

On considère maintenant (x_1, \dots, x_t) des éléments de $\widehat{R} \setminus H$ dont les images $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_t)$ modulo H forment un système régulier de paramètres de $\frac{\widehat{R}}{H}$.

Si (y_1, \dots, y_g) engendrent H , alors \widehat{R} est régulier. En effet, dans ce cas $(y_1, \dots, y_g, x_1, \dots, x_t)$ engendrent $\widehat{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m} \otimes_R \widehat{R}$, qui est l'idéal maximal de \widehat{R} .

Ainsi

$$\dim(\widehat{R}) \leq g + t.$$

Mais on sait que

$$g = \dim(\widehat{R}_H) = \text{ht}(H)$$

et

$$t = \dim\left(\frac{\widehat{R}}{H}\right) = \text{ht}\left(\frac{\widehat{\mathfrak{m}}}{H}\right).$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \dim(\widehat{R}) &= \text{ht}(\widehat{\mathfrak{m}}) \\ &\geq \text{ht}(H) + \text{ht}\left(\frac{\widehat{\mathfrak{m}}}{H}\right) \\ &= g + t \\ &\geq \dim(\widehat{R}). \end{aligned}$$

Puis $\dim(\widehat{R}) = g + t$ et $(y_1, \dots, y_g, x_1, \dots, x_t)$ est un ensemble minimal de générateurs de $\widehat{\mathfrak{m}}$, et il vient que \widehat{R} est régulier.

Supposons donc maintenant que (y_1, \dots, y_g) n'engendrent pas H dans \widehat{R} . On prend donc $(y_1, \dots, y_g, y_{g+1}, \dots, y_{g+s})$ des éléments qui engendrent H dans \widehat{R} .

On considère $V := \frac{H\widehat{R}_H}{H^2\widehat{R}_H}$ qui est un espace vectoriel de dimension $g = \text{ht}(H)$ sur le corps résiduel de H puisque \widehat{R}_H est régulier.

On sait que y_1, \dots, y_{g+s} engendrent V et que

$$g + s > \dim(V) = g,$$

ainsi il existe des éléments a_1, \dots, a_{g+s} de \widehat{R} tels que

$$a_1 y_1 + \dots + a_{g+s} y_{g+s} \in H^2 \widehat{R}_H.$$

Autrement dit, il existe a_1, \dots, a_{g+s} dans \widehat{R} et $(b_{i,j})_{1 \leq i, j \leq g+s}$ dans \widehat{R}_H tels que

$$a_1 y_1 + \dots + a_{g+s} y_{g+s} = \sum_{1 \leq i, j \leq g+s} b_{i,j} y_i y_j.$$

Quitte à renuméroter, on peut supposer que

$$\nu(a_1) = \min_{1 \leq i \leq s} \{\nu(a_i)\}$$

et on suppose également que pour tout i , l'élément a_i n'est pas dans l'idéal H ou est nul.

Comme les a_i sont dans \widehat{R} , on les regarde modulo H et d'après le théorème 3.4.21 (qui utilise la caractéristique nulle), on sait que les $\overline{a_i}$, c'est-à-dire les classes des a_i modulo H , sont monomialisables dans $\frac{\widehat{R}}{H}$ et également que pour tout i , on a $\overline{a_1} \mid \overline{a_i}$.

Après une suite d'éclatements, on a donc $\overline{a_1}$ qui est un monôme $w = \prod_{i=1}^t x_i^{c_i}$ en x multiplié par une unité.

Si nous arrivions à montrer que a_1 divise également tous les coefficients $b_{i,j}$, alors nous pourrions engendrer H dans \widehat{R} par (y_2, \dots, y_{g+s}) .

En itérant le procédé, nous arriverions au cas où nous pourrions engendrer H dans \widehat{R} par g éléments, et ainsi la preuve serait terminée.

Montrons donc que nous pouvons faire une suite d'éclatements au bout de laquelle a_1 divise tous les coefficients $b_{i,j}$.

Pour tout indice $i \in \{1, \dots, g+s\}$, il existe $n_i \in \mathbb{N}_{>1}$ tel que $y_i \in \widehat{\mathfrak{m}}^{n_i-1} \setminus \widehat{\mathfrak{m}}^{n_i}$. On pose $N := \max_{i \in \{1, \dots, g+s\}} \{n_i\}$, et ainsi on a, pour tout $i \in \{1, \dots, g+s\}$, $y_i \notin \widehat{\mathfrak{m}}^N$.

On a une application $R \rightarrow \widehat{R}$ et l'on sait que pour tout entier c , on a $\widehat{\mathfrak{m}}^c \cap R = \mathfrak{m}^c$, ainsi on a une application $\frac{R}{\mathfrak{m}^c} \rightarrow \frac{\widehat{R}}{\widehat{\mathfrak{m}}^c}$, et cette application est un isomorphisme.

Donc pour tout $i \in \{1, \dots, g+s\}$, il existe $z_i \in R$ dont la classe modulo \mathfrak{m}^{N+2} s'envoie sur y_i par cette application. Et l'on a ainsi $z_i \bmod (\mathfrak{m}^{N+2}) = y_i$. Quitte à augmenter N , on peut supposer que $\nu(\widehat{\mathfrak{m}}^N) > \nu(a_1)$.

On a plus précisément $y_i = z_i + h_i + \zeta_i$ où $h_i \in (z_1, \dots, z_{g+s})^2$ et $\zeta_i \in (x_1, \dots, x_t)^N$.

Après une suite d'éclatements indépendante de (z_1, \dots, z_{g+s}) , on peut supposer que w , et donc a_1 , divise tous les ζ_i .

Faisons maintenant c_1 éclatements de $(z_1, \dots, z_{g+s}, x_1)$. Chaque z_i est transformé en un z'_i qui est de la forme $\frac{z_i}{x_1^{c_1}}$.

De manière plus précise, on fait tout d'abord un éclatement de $(z_1, \dots, z_{g+s}, x_1)$.

Chaque z_i est transformé en un $z_{i,1}$ qui est de la forme $\frac{z_i}{x_1}$.

Puis on fait un éclatement de $(z_{1,1}, \dots, z_{g+s,1}, x_1)$. Chaque $z_{i,1}$ est transformé en un $z_{i,2}$ qui est de la forme $\frac{z_{i,1}}{x_1} = \frac{z_i}{x_1^2}$.

On réitère jusqu'à éclater $(z_{1,c_1-1}, \dots, z_{g+s,c_1-1}, x_1)$. Chaque z_{i,c_1-1} est transformé en un $z_{i,c_1} = z'_i$ qui est de la forme $\frac{z_{i,c_1-1}}{x_1}$. C'est-à-dire de la forme $\frac{z_i}{x_1^{c_1}}$.

On fait maintenant c_2 éclatements de $(z'_1, \dots, z'_{g+s}, x_2)$. Chaque z'_i est transformé en un z''_i qui est de la forme $\frac{z'_i}{x_2^{c_2}} = \frac{z_i}{x_1^{c_1} x_2^{c_2}}$.

On réitère ce procédé jusqu'à effectuer c_t éclatements de

$$(z_1^{(t-1)}, \dots, z_{g+s}^{(t-1)}, x_t).$$

On a donc transformé les z_i en des $z_i^{(t)}$ qui sont de la forme $\frac{z_i}{a_1}$.

Ainsi a_1 divise tous les $z_i^{(t)}$, et donc tous les $h_i^{(t)}$ et tous les $y_i^{(t)}$. Les $b_{i,j}$ étant des éléments de \widehat{R}_H , après cette suite d'éclatements, la transformée stricte de H étant engendrée par les $y_i^{(t)}$, il vient que a_1 divise tous les $b_{i,j}$, ce qui conclut la preuve. \square

4.5. Conclusion.

Résumons maintenant les principaux résultats de ce chapitre. Tout d'abord, rappelons un résultat fondamental, démontré par Novacoski et Spivakovsky dans [24].

THÉORÈME 4.5.1. *Soit S un anneau local noethérien. Si le théorème d'uniformisation locale est vrai pour toute valuation de rang 1 centrée en S , alors il est vrai pour toute valuation quelconque centrée en S .*

Ainsi il suffit de considérer une valuation de rang 1.

THÉORÈME 4.5.2. *Soit S un anneau local noethérien intègre équicaractéristique de caractéristique nulle, quasi-excellent et singulier. On prend μ une valuation de rang 1 centrée en S .*

Il existe une suite formelle encadrée

$$(S, u) \rightarrow \cdots \rightarrow (S_i, u^{(i)}) \rightarrow \cdots$$

telle que pour j suffisamment grand, S_j est régulier et pour tout élément s de S , il existe i tel que dans S_i , s est un monôme.

DÉMONSTRATION. On considère \widehat{S} le complété formel de S et H son idéal implicite. Par le théorème de structure de Cohen il existe un épimorphisme Φ d'un anneau local complet régulier R dans \widehat{S} . On pose \overline{H} la préimage de H dans R . On étend μ à une valuation ν centrée en R par composition avec une valuation centrée en \overline{H} .

D'après la proposition 4.1.5 on sait que \widehat{S}_H est régulier, et d'après le théorème 4.4.3 (qui utilise la caractéristique nulle) il suffit de montrer que $\frac{\widehat{S}}{\overline{H}}$ l'est aussi pour régulariser S .

On sait que $\frac{\widehat{S}}{\overline{H}} \simeq \frac{R}{\overline{H}}$, il suffit donc de régulariser $\frac{R}{\overline{H}}$. On conclut la preuve grâce au théorème 4.3.15, qui utilise la caractéristique nulle. \square

Démontrons maintenant le principal résultat de ce Chapitre, à savoir l'uniformisation locale plongée et simultanée pour les anneaux locaux noethériens quasi-excellents équicaractéristiques.

THÉORÈME 4.5.3. *Soit R un anneau local noethérien quasi-excellent complet régulier. Soit ν une valuation centrée en R .*

Supposons que ν est de rang 1 ou de rang 2 mais composée d'une valuation (f) -adique où f est un élément irréductible de R . On suppose que $\text{car}(k_\nu) = 0$.

Il existe une suite formelle encadrée

$$(R, u) \rightarrow \cdots \rightarrow (R_i, u^{(i)}) \rightarrow \cdots$$

telle que pour tout élément g de R , il existe i tel que dans R_i , g est un monôme.

DÉMONSTRATION. On considère l'anneau $A = \frac{R}{(f)}$. La valuation ν étant de rang 2 composée d'une valuation (f) -adique, la valuation ν s'écrit $\mu \circ \theta$ où θ est la valuation (f) -adique.

Ainsi on a une valuation μ centrée en A et de rang 1. D'après le théorème 4.5.2, qui utilise la caractéristique nulle, on peut régulariser A , et donc il existe une suite locale encadrée $(R, u) \rightarrow \cdots \rightarrow (R_i, u^{(i)})$ telle que dans R_i , f est un monôme. Par cette suite, tout élément g de R s'écrit ainsi $g = (u_n^{(i)})^a h$ où $u_n^{(i)}$ est la transformée stricte de f et où h n'est pas divisible par $u_n^{(i)}$. On réapplique le Théorème 4.5.2 (qui utilise la caractéristique nulle) pour construire une suite encadrée qui monomialise h , ce qui conclut la preuve. \square

COROLLAIRE 4.5.4. *On garde les mêmes notations et hypothèses que dans le théorème précédent.*

Alors $\lim_{\rightarrow} R_i$ est un anneau de valuation.

REMARQUE 4.5.5. La restriction sur le rang de la valuation a été imposée afin de pouvoir donner une preuve auto-suffisante. Sinon il existe une suite dénombrable de polynômes χ_i tels que tout ν -idéal P_β est engendré par un sous-ensemble des χ_i . Admettons le théorème d'uniformisation locale plongée.

Alors il existe une suite locale (respectivement formelle) encadrée $(R, u) \rightarrow \cdots \rightarrow (R_i, u^{(i)}) \rightarrow \dots$ ayant les propriétés suivantes :

- (1) Pour i assez grand, R_i est régulier.
- (2) Pour tout ensemble fini $\{f_1, \dots, f_s\} \subseteq \mathfrak{m}$ il existe i tel que dans R_i , tout f_j est un monôme et $f_1 \mid f_j$.

Alors pour tout élément g dans R , il existe i tel que dans R_i , g est un monôme.

Index

- Algèbre graduée associée à une valuation, 39
- Anneau de valuation, 32
- Centre d'une valuation, 34
- Complété formel, 42
- Corps résiduel, 32
- Domination birationnelle, 32
- Eclatement encadré, 100
- Eclatement encadré indépendant, 100
- Eclatement encadré monomial, 100
- Élément clef, 104
- Élément non dégénéré, 98
- Éléments clefs successeurs immédiats, 104
- Éléments clefs successeurs immédiats limites, 104
- $\epsilon_\nu(P)$, 53
- Forme initiale, 39
- G-anneau, 141
- Groupe des valeurs, 29
- Idéal premier implicite, 45
- Monomialisable, 119
- Paquet de Puiseux, 128
- Paquet de Puiseux généralisé, 157
- Polynôme clef, 53
- Polynôme clef de Vaquié, 50
- Polynôme clef limite, 113
- Polynôme clef successeur immédiat, 72
- Polynôme clef successeur immédiat limite, 76
- Polynôme clef successeur immédiat optimal, 75
- Q-développement, 51
- Rang d'une valuation, 33
- Saturation, 40
- Valuation, 29
- Valuation archimédienne, 36
- Valuation augmentée, 52
- Valuation centrée, 34
- Valuation composée, 36
- Valuation discrète, 29
- Valuation monomiale, 39
- Valuation tronquée, 53

Bibliographie

1. Shreeram Abhyankar, *Local uniformization on algebraic surfaces over ground fields of characteristic $p \neq 0$* Annals of Mathematics, Second Series, 63 (3) : 491-526
2. Shreeram Abhyankar, *Resolution of Singularities of Embedded Algebraic Surfaces* Academic Press, New York and London, 1966.
3. Beppo Levi, *Sulla risoluzione delle singolarità puntuali delle super curve algebriche dello spazio ordinario per trasformazioni quadratiche* Ann. Mat.pura appl. II. s.26, 1897.
4. Beppo Levi, *Risoluzione delle singolarità puntuali delle super curve algebriche* Atti Accad. Sci. Torino33, pages 66-86, 1897
5. Edward Bierstone et Pierre D. Milman, *Local resolution of singularities*. In Real analytic and algebraic geometry (Trento, 1988), volume 1420 of Lecture Notes in Math., pages 42-64. Springer, Berlin, 1990.
6. Nicolas Bourbaki, *Éléments de mathématiques : Algèbre commutative*, Masson, 1985.
7. Vincent Cossart et Olivier Piltant, *Resolution of singularities of threefolds in positive characteristic. I. Reduction to local uniformization on Artin-Schreier and purely inseparable coverings*. Journal of Algebra, 320 (3) : 1051-1082
8. Vincent Cossart et Olivier Piltant, *Resolution of singularities of threefolds in positive characteristic. II* Journal of Algebra, 321 (7) : 1836-1976
9. Vincent Cossart et Olivier Piltant, *Resolution of Singularities of Arithmetical Threefolds II*. arXiv :1412.0868.
10. Felipe Cano, Claude Roche et Mark Spivakovsky, *Reduction of singularities of three-dimensional line foliations* Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas108, Issue 1(2014),pages 221-258.
11. Julie Decaup, Wael Mahboub et Mark Spivakovsky, *Abstract key polynomials and comparison theorems with the key polynomials of Mac Lane-Vaquité* arXiv :611.06392.
12. Santiago Encinas et Herwig Hauser, *Strong resolution of singularities in characteristic zero*. Comment. Math. Helv., 77(4) :821-845, 2002.
13. David Eisenbud, *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry*, Springer, 1995.
14. Santiago Encinas et Orlando Villamayor, *A new proof of desingularization over fields of characteristic zero*. In Proceedings of the International Conference on Algebraic Geometry and Singularities (Sevilla, 2001), volume 19, pages 339-353, 2003.

15. Heisuke Hironaka, *Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero. I, II.* Ann. of Math. (2) 79 (1964), 109-203; *ibid.* (2), 79 :205-326, 1964
16. Herrera Govantes, Mahboub, Olalla Acosta et Spivakovsky, *Key polynomials for simple extensions of valued fields*, arXiv :1406.0657v3
17. Herrera Govantes, Olalla Acosta, Spivakovsky et Teissier, *Extending a valuation centered in a local domain to the formal completion* Proc. LMS105, Issue 3, 571-621, 2012.
18. Jung, *Darstellung der Funktionen eines algebraischen Körpers zweier unabhängigen Veränderlichen x, y in der Umgebung einer Stelle $x-a, y-b$* J. Reine Angew. Math 133 pages 289-314, 1908.
19. Lejeune-Jalabert, *Contributions à l'étude des singularités du point devue du polygone de Newton*, These d'Etat, Universite Paris 7 (1973).
20. Matsumura, *Commutative Algebra* Benjamin/Cummings Publishing Co., Reading, Mass., 1970.
21. Saunders Mac Lane, *A construction for absolute values in polynomial rings*, Transactions of the AMS, vol 40 (1936), pages 363-395.
22. Wael Mahboub, *Une construction explicite de polynômes-clefs pour des valuations de rang fini*, Thèse, Université Toulouse 3, 2013.
23. Novacoski et Spivakovsky, *Key polynomials and pseudo-convergent sequences* Journal of Algebra 495 pages 199-219, 2018.
24. Novacoski et Spivakovsky, *Reduction of local uniformization to the case of rank one valuations for rings with zero divisors.* Valuation Theory in Interaction, EMS Series of Congress Reports, European Mathematical Society, 2014, pp. 404-431.
25. Teissier, *Valuations, deformations and toric geometry*, Proceedings of the Saskatoon Conference and Workshop on valuation theory, Vol II, F-V. Kuhlmann, S. Kuhlmann, M. Marshall, editors, Fields Institute Communications, 33(2003), 361-459.
26. Michael Temkin, *Desingularization of quasi-excellent schemes in characteristic zero.* Adv. Math., 219(2) :488-522, 2008.
27. Michael Temkin, *Inseparable local uniformization*, J. Algebra 373(2013), 65-119.
28. Michel Vaquié, *Valuations and local uniformization* Advanced Studies in Pure Mathematics 43, 2006. Singularity Theory and Its Applications, p477-527
29. Michel Vaquié, *Extension d'une valuation*, Trans. Amer. Math. Soc. 359 (2007), no.7, 3439-3481.
30. Michel Vaquié, *Valuations*, dans *Resolution of Singularities*, Progr. in math. 181, 2000. MR1748635 (2001i :13005).
31. Orlando Villamayor, *Constructiveness of Hironaka's resolution.* Ann. Sci. École Norm. Sup. (4), 22(1) :1-32, 1989.
32. Robert J. Walker, *Reduction of the Singularities of an Algebraic Surface.* Annals of Mathematics, Second Series, 36 (2) : 336-365
33. Jaroslaw Wlodarczyk, *Simple Hironaka resolution in characteristic zero.* J. Amer. Math. Soc., 18(4) :779-822, 2005.

34. Oscar Zariski, *The reduction of the singularities of an algebraic surface*. Ann. of Math. (2), 40 :639-689, 1939.
35. Oscar Zariski, *Local uniformization theorem on algebraic varieties*. Ann. of Math. 41 :852-896, 1940.
36. Oscar Zariski, *Reduction of singularities of algebraic three dimensional varieties* Ann. of Math.45, 472-542, 1944.
37. Oscar Zariski et Pierre Samuel, *Commutative Algebra, Volume 2*, Graduate Texts in Mathematics, 1960.

Résumé français.

Le théorème d'uniformisation locale est un résultat important en théorie des singularités. Connue en caractéristique nulle, il reste ouvert en caractéristique positive.

Dans cette thèse, nous donnons une version simultanée de ce théorème en caractéristique nulle. On considère R un anneau local régulier muni d'une valuation centrée en son idéal maximal. Nous démontrons l'uniformisation locale par monomialisation simultanée des éléments de R . La preuve apportée ici est nouvelle et riche de trois choses : tout d'abord, nous monomialisons tous les éléments avec la même suite d'éclatements. De plus, cette suite est explicite et nous connaissons les coordonnées pas à pas. Pour finir, nous ne faisons aucune supposition sur le rang de la valuation. Afin de faire cela, nous utilisons une théorie intimement liée à la théorie des valuations : celle des éléments clefs, une généralisation des polynômes clefs, qui est détaillée dans le deuxième chapitre du manuscrit. On y donne une nouvelle définition des polynômes clefs et on étudie leur rapport précis avec les polynômes clefs de MacLane et Vaquié.

Enfin, le dernier chapitre est dédié à un cadre plus général : celui des anneaux locaux d'équicaractéristique nulle quasi-excellents intègres. Dans ce cas, la théorie des éléments clefs, bien que nécessaire, n'est plus suffisante. Il nous faudra utiliser l'idéal premier implicite H d'un tel anneau R et montrer que l'on peut réduire l'étude à la régularisation du quotient du complété de R par H .

Résumé anglais.

The local uniformization theorem is an important result in theory of singularities. Known in characteristic zero, it is an open problem in positive characteristic.

In this thesis, we give a simultaneous version of this theorem in zero characteristic. We consider a regular local ring R with a valuation centered in its maximal ideal. We prove the local uniformization theorem by monomializing simultaneously the elements of R . The proof given is new and rich in three respects : first, we monomialize every element with the same sequence of blow-ups. Furthermore, this sequence is explicit and we know the coordinates at each step. In addition, the construction is independent of any hypothesis on the rank of the valuation. To this end, we use a theory intimately linked to that of valuations based on the notion of key elements, a generalization of key polynomials, which is explained in detail in the second chapter of this manuscript. We give a new definition of key polynomials and we study their precise relation with key polynomials of Mac Lane and Vaquié.

The last chapter is devoted to the more general framework of local quasi-excellent domains of equicharacteristic zero. In this case, although still necessary, the theory of key elements is no longer sufficient. We need to use the implicit prime ideal H of such a ring R and show that the problem can be reduced to the desingularisation of the quotient of the completion of R by H .