# Effets relativistes en astrométrie de haute précision

Christophe Le Poncin-Lafitte

▶ **To cite this version:**

Christophe Le Poncin-Lafitte. Effets relativistes en astrométrie de haute précision. Astrophysique [astro-ph]. Observatoire de Paris, 2006. Français. NNT : . tel-02071410

**HAL Id: tel-02071410**
**https://hal.science/tel-02071410**

Submitted on 18 Mar 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

OBSERVATOIRE DE PARIS
DÉPARTEMENT SYSTÈMES DE RÉFÉRENCE TEMPS ET ESPACE, CNRS-UMR 8630

# THESE

POUR OBTENIR LE GRADE DE DOCTEUR
DE L'OBSERVATOIRE DE PARIS.

**spécialité** : Astronomie et Astrophysique

PAR

Christophe Le Poncin-Lafitte

SUJET

## Effets relativistes en astrométrie de haute précision

Soutenue le 13 Juin 2006 devant la commission d'examen :

| | |
|---|---|
| Monsieur Luc Blanchet | Examinateur |
| Monsieur Sergei Klioner | Rapporteur |
| Monsieur Jacques Laskar | Président du jury |
| Monsieur Jesus Martín | Rapporteur |
| Monsieur François Mignard | Examinateur |
| Monsieur Pierre Teyssandier | Directeur de thèse |

2006 OBSP 0128

OBSERVATOIRE DE PARIS
DÉPARTEMENT SYSTÈMES DE RÉFÉRENCE TEMPS ET ESPACE, CNRS-UMR 8630

18 JAN. 2007

# THESE

POUR OBTENIR LE GRADE DE DOCTEUR

DE L'OBSERVATOIRE DE PARIS.

**spécialité** : Astronomie et Astrophysique

PAR

Christophe Le Poncin-Lafitte

SUJET

## Effets relativistes en astrométrie de haute précision

OBSERVATOIRE DE PARIS
8292
BIBLIOTHEQUE

Soutenue le 13 Juin 2006 devant la commission d'examen :

| | |
|---|---|
| Monsieur Luc Blanchet | Examinateur |
| Monsieur Sergei Klioner | Rapporteur |
| Monsieur Jacques Laskar | Président du jury |
| Monsieur Jesus Martín | Rapporteur |
| Monsieur François Mignard | Examinateur |
| Monsieur Pierre Teyssandier | Directeur de thèse |

*A ma mère, un ad continuum dont j'espère elle est fière,*
*A mes grand-parents, pour leur patience et leur soutien,*
*A Kim-Dung, pour ce joli rayon de soleil,*
*A ma restreinte garde prétorienne, qui se reconnaîtra.*

Les propositions mathématiques sont reçues comme vraies
parce que personne n'a intérêt qu'elles soient fausses.

Charles Louis de Secondat, baron de Montesquieu (1689-1755), *Mes pensées*.

# Table des matières


**I Modélisation des distances angulaires. 13**

**1 Distance angulaire du point de vue relativiste 15**
1.1 Introduction . . . 15
1.2 Définition de la direction d'un 4-vecteur . . . 15
1.3 Angle formé par deux vecteurs . . . 16
1.3.1 Cas où $V$ et $W$ sont isotropes . . . 17
1.4 Distance angulaire en champ faible . . . 19

**2 Fonction d'univers et fonctions de transfert de temps 21**
2.1 Introduction . . . 21
2.2 Définition et propriétés de la fonction d'univers de Synge . . . 21
2.2.1 Une conséquence du principe variationnel . . . 21
2.2.2 Propriétés fondamentales de la fonction d'univers . . . 24
2.2.3 Expression de $\Omega$ en champ faible . . . 26
2.3 Les fonctions de transfert de temps . . . 27
2.3.1 Définition . . . 27
2.3.2 Théorème fondamental . . . 27
2.3.3 Détermination des fonctions de transfert de temps . . . 29
2.4 Conclusions . . . 31

**II Développements à l'approximation post-newtonienne. 33**

**3 Fonctions d'univers, de transfert de temps et distance angulaire en formalisme PPN 35**
3.1 Introduction . . . 35
3.2 L'approximation post-newtonienne . . . 35
3.2.1 tenseur métrique PPN . . . 36
3.3 Expression PPN de la fonction d'univers . . . 38
3.4 Expression PPN des fonctions de transfert de temps . . . 39
3.5 Mesure astrométrique en formalisme PPN . . . 41

**4 Déviation de la lumière par un corps à symétrie axiale 43**
4.1 Introduction . . . 43
4.2 Champ de gravitation d'un corps en rotation à symétrie axiale . . . 44
4.2.1 Développements multipolaires des potentiels gravitationnels . . . 44
4.3 Détermination du temps de vol d'un photon . . . 45
4.4 Structure multipolaire de la fonction de transfert de temps . . . 46
4.5 Directions des rayons lumineux au point de réception du photon . . . 49
4.6 Cas où l'étoile observée est à l'infini . . . 51

4.7 Distance angulaire entre deux étoiles situées à l'infini . . . . . 53

**III Développements à l'approximation post-minkowskienne généralisée. 55**

**5 Développement général de la fonction d'univers 57**
5.1 Introduction . . . . . 57
5.2 L'approximation post-minkowskienne . . . . . 58
5.3 Développement post-minkowskien des équations d'Hamilton-Jacobi . . . . . 58
5.4 Résolution des équations d'Hamilton-Jacobi . . . . . 59
5.5 Développement post-minkowskien général de $\Omega$ . . . . . 62
5.6 Détermination de $\Omega^{(2)}$ avec les équations d'Euler-Lagrange . . . . . 63

**6 Développement général des fonctions de transfert de temps 65**
6.1 Introduction . . . . . 65
6.2 Fonctions de transfert de temps via la fonction d'univers . . . . . 66
6.2.1 Relation entre $\mathcal{T}_e$ et $\mathcal{T}_r$ . . . . . 68
6.3 Développement post-minkowskien des équations iconales . . . . . 69
6.3.1 Cas du transfert de temps en réception . . . . . 69
6.3.2 Cas du transfert de temps en émission . . . . . 72
6.3.3 Théorème général . . . . . 73

**7 Application à l'approximation post-post-minkowskienne 75**
7.1 Introduction . . . . . 75
7.2 Distance angulaire à l'approximation 2PM . . . . . 75
7.3 Une simplication sur le terme $\Omega^{(2)}$ . . . . . 77
7.4 Application à un corps à symétrie sphérique et statique . . . . . 78
7.4.1 Détermination de $\Omega$ et de la fonction de transfert de temps . . . . . 79
7.4.2 Détermination de la fonction de déflexion . . . . . 81

**8 Conclusions 83**
8.1 Modélisations des distances angulaires . . . . . 83
8.2 Intérêt des fonctions d'univers et de transfert de temps . . . . . 83
8.3 Apports à l'approximation post-newtonienne . . . . . 84
8.4 Méthodes à l'approximation post-minkowskienne généralisée . . . . . 84
8.5 Perspectives en astronomie fondamentale relativiste . . . . . 85

**A Inventaire des travaux 87**
A.1 Publications dans des revues à comité de lecture . . . . . 87
A.2 Publications en préparation . . . . . 87
A.3 Présentations dans des colloques internationaux . . . . . 87
A.4 Présentations dans des colloques nationaux . . . . . 88
A.5 Réunions du *Relativity and Reference Frames working group* de la mission GAIA . . 88
A.6 Séminaires . . . . . 89
A.7 Divers . . . . . 89

**B article publié dans Classical and quantum gravity 91**

**C article accepté pour publication dans Lecture Notes in Physics 111**

# Notations utilisées

## Conventions

- Indices grecs : $\alpha$, $\beta$, ..., $\mu$, $\nu = 0, 1, 2, 3$
- Indices latins : $a$, ..., $r$, $s = 1, 2, 3$
- $g$ est la métrique d'espace-temps, de signature $(+, -, -, -)$,
- l'espace-temps est supposé muni d'un système de coordonnées quasi galiléen $(x^\mu) = (x^0, \boldsymbol{x})$, où $x^0 = ct$, $t$ étant un temps coordonné, et $\boldsymbol{x} = \left\{x^i\right\}$,
- les coordonnées $x^\alpha$ sont choisies de telle sorte que les courbes d'équations $x^i = \text{const}$ soient de genre temps, ce qui équivaut à $g_{00} > 0$ partout.

## Calcul vectoriel

- la notation $\boldsymbol{a}$ représente les quantités $(a^1, a^2, a^3) = \left\{a^i\right\}$,
- $|\boldsymbol{a}|$ représente la norme euclidienne usuelle de $\boldsymbol{a}$,
- étant donné deux quantités $\boldsymbol{a}$ and $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ représente à la fois les quantités $a^i b^i$, $a_i b^i$, $a^i b_i$ et $a_i b_i$ (la convention d'Einstein sur les indices répétés sera utilisée),
- $f_{,\alpha}$ représente la dérivée partielle de $f$ par rapport à $x^\alpha$.

## Constantes

- $G$ est la constante universelle de la gravitation,
- $c$ la vitesse de la lumière dans le vide.

# Résumé

Cette thèse présente une étude détaillée de la distance angulaire en astrométrie relativiste de haute précision, c'est-à-dire comment définir et calculer dans un espace-temps courbe l'angle, formé par deux sources lumineuses distinctes, tel qu'il est mesuré par un observateur en mouvement arbitraire.

Tout d'abord, dans la première partie de ce travail, nous rappelons la définition d'une distance angulaire puis nous montrons qu'il est seulement nécessaire de connaître explicitement trois quantités au point d'observation : le tenseur métrique, le mouvement de l'observateur et trois rapports $\hat{l}_i$ relatifs à la déviation des rayons lumineux. Nous construisons ensuite les outils permettant de déterminer ces rapports d'une part en utilisant la fonction d'univers de Synge, d'autre part en introduisant deux fonctions de transfert de temps.

Dans la seconde partie de ce travail, nous nous intéressons à l'approximation post-newtonienne. Nous déterminons les expressions explicites de la fonction d'univers et des fonctions de transfert de temps dans le cadre du formalisme post-newtonien paramétré de Will & Nordtvedt. Nous achevons cette partie par une application, où nous déterminons les rapports $\hat{l}_i$ dans le champ gravitationnel d'un corps à symétrie axiale.

Dans la troisième partie, nous construisons la fonction d'univers et les fonctions de transfert de temps dans le cadre de l'approximation post-minkowskienne généralisée, c'est-à-dire en représentant ces fonctions par des séries de termes perturbatifs en puissances ascendantes de la constante universelle de la gravitation $G$. Nous montrons en particulier que les déterminations de ces termes perturbatifs s'obtiennent par un procédé itératif où les seules données nécessaires sont les coordonnées spatio-temporelles des événements d'émission et de réception des rayons lumineux. Nous achevons ce travail par une application dans le champ gravitationnel d'un corps à symétrie sphérique jusqu'en $G^2/c^4$ où nous calculons le transfert de temps et les rapports $\hat{l}_i$.



# Abstract

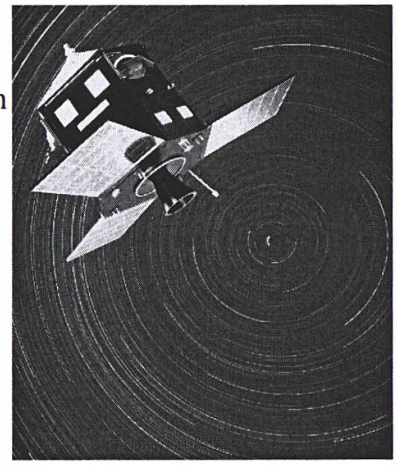
This thesis presents a detailed study of the angular distance in relativistic astrometry of high precision, i.e. how to define and calculate the angle formed by two light sources such as it is measured by a moving observer.

In the first part of this work, we recall the definition of an angular distance, then we show that it is necessary to know only three quantities explicitly at the point of observation : the metric tensor, the motion of the observer and three ratios $\hat{l}_i$. We build the tools allowing to determine these ratios by using the Synge's world function and by introducting two time transfer functions .

In the second part of this work, we determine the expression of the world function and the time transfer functions in the parametrized post-Newtonian approximation. We apply these results to the case of the gravitational field of an axisymmetric body ; in this particular situation, we determine the influence of all mass multipole moments of the body on the deflection of light.

In the third part, we build the world function and the time transfer functions within the generalized post-Minkowskian approximation, i.e. by representing these functions as perturbative series of ascending powers of the Newtonian gravitational constant $G$. We show in particular that the determination of each perturbation term of the series is obtained by an iterative procedure where the only data necessary are the spacetime coordinates of the events of emission and reception of the light ray. we complete this work by the determination of the time transfer function and the ratios $\hat{l}_i$ in a static, spherically symmetric gravitational field up to the order $1/c^4$.

# Introduction



En Août 1989, le lancement d'HIPPARCOS marqua le début de l'astrométrie spatiale. Pendant les cinq années qui suivirent, il fut possible d'observer cent vingt mille étoiles primaires avec une précision de deux millisecondes d'arc et d'obtenir des propriétés photométriques (en deux couleurs) de quatre cent mille étoiles supplémentaires.

A son terme, la mission HIPPARCOS donna lieu à deux catalogues fondamentaux Hipparcos et Tycho, publiés par l'ESA en 1997 [71]. Ces catalogues, encore aujourd'hui utilisés, donnent une carte en 3D du voisinage solaire avec une précision remarquable meilleure que 2-3 millisecondes d'arc. Ces catalogues ont considérablement fait évoluer notre connaissance de la Galaxie en permettant :

- une nouvelle détermination de la distance des Pléiades, ce qui a contraint les astronomes à repenser les théories stellaires,
- la découverte de l'évolution morphologique de la galaxie,
- l'identification sans équivoque d'un groupe d'étoiles qui ne se sont pas formées dans notre galaxie, mais qui l'ont rejoint lorsque cette dernière était jeune,
- le raffinement de l'échelle des distances cosmiques, ce qui a permis de montrer que l'univers était plus vieux qu'on ne le croyait,
- une nouvelle confirmation de la théorie de la relativité générale avec l'analyse de la déviation des rayons lumineux par le Soleil.

Cette réussite conduisit la communauté astrométrique à envisager de nouveaux programmes d'astrométrie spatiale qui sont à l'heure actuelle en cours de développement.

## Projets actuels et futurs d'astrométrie spatiale

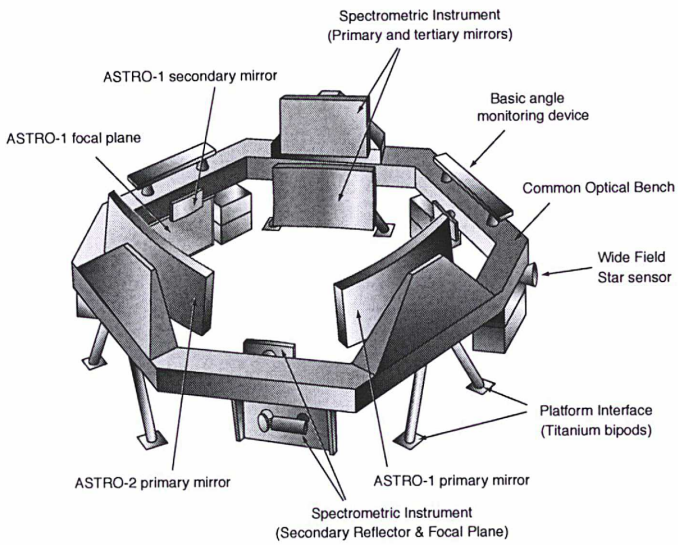
### La mission GAIA

Cette mission, pierre angulaire du programme de l'Agence Spatiale Européenne, observera près d'un milliard d'étoiles de notre galaxie, soit environ 1% de la population stellaire de la Voie Lactée ([70], [69]).
L'observation de chaque astre, une centaine de fois sur la période nominale de la mission (soit cinq ans environ), conduira au recueil d'informations très précises sur leur distance, leurs mouvements et leur luminosité.

La mission GAIA a été pensée pour poursuivre et amplifier les avancées obtenues par HIPPARCOS. Elle doit notamment permettre :

- une nouvelle et plus précise détermination de la luminosité intrinsèque des étoiles.
- une étude complète de la fonction de luminosité stellaire, qui nécessite d'observer les étoiles dans une large gamme de magnitudes, en particulier les objets les plus faibles,
- une étude détaillée du diagramme d'Hertzprung-Russel, notamment les phases rapides d'évolution stellaire,
- une très bonne précision astrométrique et cinématique est nécessaire pour l'étude des différentes populations stellaires, en particulier les plus lointaines, et la reconstitution des orbites stellaires dans les différentes régions de la Galaxie,
- une identification de milliers d'astéroïdes du système solaire, permettant ainsi une véritable "redécouverte" de notre environnement proche.
- une étude des théories de la gravitation, notamment grâce à des tests dans le cadre de l'approximation post-newtonienne de la relativité générale, tenant compte de termes jusqu'en $G/c^3$ pour la description des rayons lumineux. En effet, GAIA permettra de déterminer le paramètre post-newtonien $\gamma$ (égal à 1 en relativité générale) avec une incertitude relative de quelques $5 \times 10^{-7}$. Le paramètre postnewtonien $\beta$ (égal à 1 en relativité générale), grâce à l'étude de la précession du périhélie des astéroïdes, sera déterminé avec une incertitude de $10^{-4}$ à $10^{-5}$. De plus, cette détermination de $\beta$ sera, pour la première fois, indépendante du moment quadrupolaire $J_2$ du Soleil, estimé avec une précision de quelques $10^{-7}$ à $10^{-8}$. Enfin, la variation séculaire relative de la constante universelle de la gravitation $G$ sera évaluée avec une précision de $10^{-13}$ an$^{-1}$.

La charge utile de GAIA repose essentiellement sur trois instruments opérant dans le domaine optique. Deux de ces instruments sont identiques : ce sont les modules ASTRO. Leur rôle est de mesurer les positions et les luminosités stellaires. Chacun d'entre eux est constitué de miroirs rectangulaires, dont le plus grand mesure environ 1.4 mètres de long.
Le troisième instrument, dénommé SPECTRO, renseignera sur les vitesses radiales des astres observés. Il analysera également la luminosité des étoiles dans une grande gamme de couleurs différentes, information capitale pour la détermination des paramètres physiques des étoiles observées.




Les performances attendues sont les suivantes :

- observation systématique de tous les objets (plus d'un milliard) jusqu'à la magnitude V=20,
- une précision meilleure que 10 microsecondes d'arc ($\mu$as) jusqu'à la magnitude V=10, comprise entre 12 et 25 $\mu$as à V=15, comprise entre 100 et 300 $\mu$as à V=20,
- détermination de la parallaxe de vingt millions d'étoiles avec une précision meilleure que 1%.

## Projet LATOR

Le projet LATOR (Laser Astrometric Test Of Relativity, voir figure 1 ci-dessous) a été proposé par le Jet Propulsion Laboratory en s'appuyant sur la technologie développée pour la mission SIM ; cette dernière, équivalente à moindre échelle à la mission GAIA, doit permettre le positionnement angulaire de quelques milliers de quasars avec une précision de quelques $\mu$as [25].

L'objectif du projet LATOR est de déceler si la gravitation est de nature tensorielle-scalaire [8, 29, 18] plutôt que purement tensorielle comme le prévoit la relativité générale. L'approximation aux basses énergies des théories de supercorde et la plupart des scénarios inflationnaires en cosmologie introduisent en effet des champs scalaires (dilatons) susceptibles d'avoir une influence résiduelle dans l'univers actuel. Certains de ces scénarios [19, 20, 66, 61, 60] prévoient que la paramètre $1-\gamma$ pourrait différer de 0 par des termes d'ordre $10^{-5}$ à $10^{-8}$. Une telle violation de la relativité générale pourrait être mise en évidence en mesurant les effets du champ gravitationnel du Soleil sur la propagation de la lumière à l'ordre $G^2/c^4$.

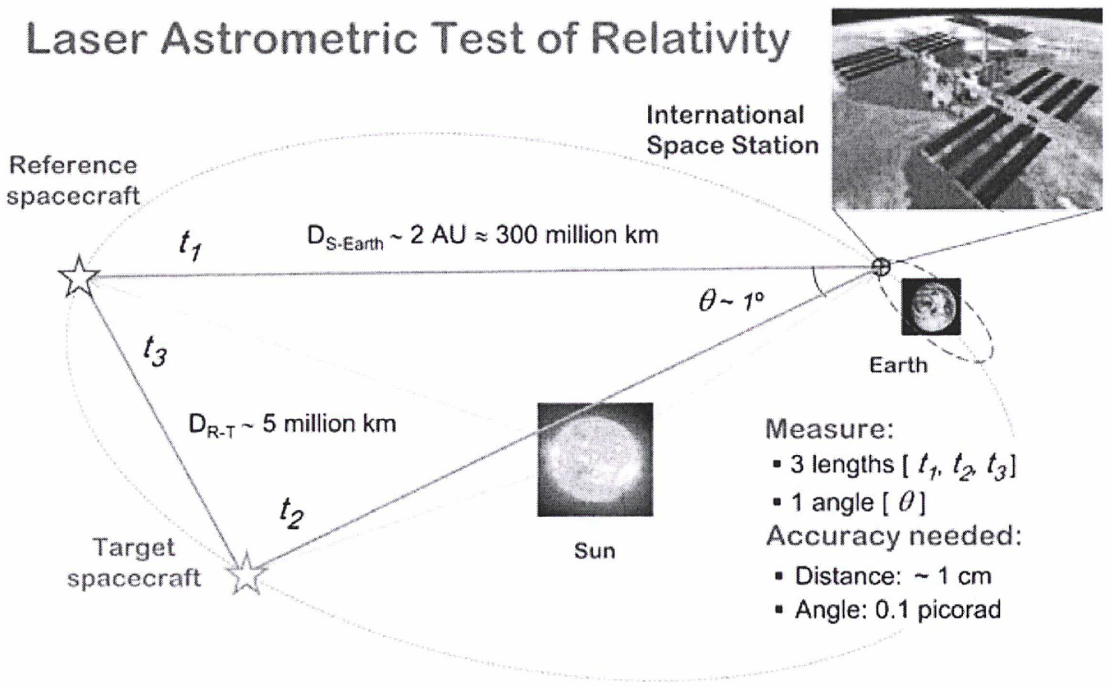



FIG. 1 – Illustration du projet LATOR.

Grâce aux progrès technologiques récents, ce type d'expérience est désormais envisageable : c'est le but du projet LATOR. L'expérience consiste à placer un satellite en orbite héliocentrique ; ce dernier émet un signal électromagnétique, en direction de la Terre, qui rase le Soleil. On espère mesurer la déviation relativiste de ce signal avec une précision de l'ordre de 0.02 microsecondes d'arc [87, 88, 89].

Avec un tel niveau de précision, surpassant nos capacités expérimentales actuelles [3], des tests de relativité à l'ordre $G^2/c^4$ permettront donc de contraindre encore plus précisément qu'aujourd'hui les paramètres post-newtoniens $\gamma$ et $\beta$ (une incertitude sur $\gamma$ de l'ordre de $10^{-8}$, et pour la première fois une estimation du paramètre post-post-newtonien $\delta$).

# Effets relativistes de déviation de la lumière dans le système solaire

Nous avons souligné la nécessité de décrire la propagation des rayons lumineux dans le cadre relativiste pour l'interprétation des données GAIA et LATOR. Ce paragraphe est donc consacré à inventorier les principaux effets de déviation relativiste des rayons lumineux, au niveau de la microseconde d'arc ($\mu$as), dans le système solaire.
Tous les effets de la table 1 ci-dessous, sont calculés pour un rayon lumineux rasant le limbe du corps céleste déflectant. La colonne $\delta_{pN}$ représente la contribution de la forme sphérique des corps massifs sur la déviation du rayon lumineux. Cette contribution diminue en $1/r_d$, où $r_d$ est un paramètre d'impact ; en conséquence, l'effet dû aux corps les plus petits du système solaire (comme les satellites des planètes ou les astéroïdes) s'effondre très rapidement, ce qui n'est absolument pas le cas en ce qui concerne les planètes, notamment les plus massives.

| corps gravitationnel | $\delta_{pN}$ | $\delta_{J_2}$ | $\delta_{J_4}$ | $\delta_{J_6}$ | $\delta_R$ | $\delta_{T^*}$ | $\delta_{ppN}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Soleil | $1.75\ 10^6$ | ~1 | — | — | 0.7 | 0.1 | 11 |
| Mercure | 83 | — | — | — | — | — | — |
| Vénus | 493 | — | — | — | — | — | — |
| Terre | 574 | 0.6 | — | — | — | — | — |
| Lune | 26 | — | — | — | — | — | — |
| Mars | 116 | 0.2 | — | — | — | — | — |
| Jupiter | 16270 | 240 | 10 | ~1 | 0.2 | 0.8 | — |
| Saturne | 5780 | 95 | 6 | — | — | 0.2 | — |
| Uranus | 2080 | 8 | — | — | — | — | — |
| Neptune | 2533 | 10 | — | — | — | — | — |
| Ganymède | 35 | — | — | — | — | — | — |
| Callisto | 28 | — | — | — | — | — | — |
| Europe | 19 | — | — | — | — | — | — |
| Titania | 2.8 | — | — | — | — | — | — |
| Cérès | 1.2 | — | — | — | — | — | — |

TAB. 1 – Table des effets de déviation relativiste de la lumière au voisinage des corps du système solaire (unité : microseconde d'arc $\mu$as).

Par ailleurs, les colonnes $\delta_{J_2}$, $\delta_{J_4}$ et $\delta_{J_6}$ montrent qu'il est nécessaire de prendre en compte des effets supplémentaires en ce qui concerne les planètes du système solaire. En effet, les planètes, dans leur ensemble, ne sont pas stricto sensu sphériques ; pour rendre compte de ces asphéricités, le champ gravitationnel de chaque planète est généralement représenté sous la forme d'un développement multipolaire à l'aide d'harmoniques sphériques, ce développement convergeant à l'extérieur d'une sphère de rayon $r_e$ englobant complètement le corps. Habituellement, ce champ s'écrit pour chaque planète sous la forme

$$U(r,\vartheta) = \frac{GM}{r}\left(1 - \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{r_e}{r}\right)^n J_n P_n(\cos\vartheta)\right), \qquad (1)$$

où les $P_n$ sont des polynômes de Legendre et les coefficients $J_n$ sont les moments multipolaires du

champ gravitationnel. Tout d'abord, notons que l'influence des moments $J_{2n+1}$ sur la lumière est négligeable parce que ces moments sont mal connus et de faibles amplitudes.
Ensuite, la forme aplatie d'une planète est représentée par la deuxième harmonique du champ de gravitation : c'est le moment quadrupolaire $J_2$. La colonne $\delta_{J_2}$ de la table 1 illustre la contribution des coefficients $J_2$ de chacune des planètes sur la déviation de la lumière. L'estimation de cet effet est obtenu en multipliant $\delta_{pN}$ par la valeur actuelle du moment $J_2$ pour chaque planète.

Il faut remarquer que pour les planètes les plus massives (Jupiter et Saturne), les harmoniques d'ordre supérieur contribuent, à la précision d'une $\mu$as, à la déviation des rayons lumineux. Les colonnes $\delta_{J_4}$ et $\delta_{J_6}$ donnent l'ordre de grandeur de la déviation de la lumière due aux moments multipolaires $J_4$ et $J_6$ ; en utilisant les valeurs de ces moments [91], les effets de déviation dus au moment $J_4$ seraient de l'ordre de 10 et 6 $\mu$as respectivement pour Jupiter et Saturne ; enfin la contribution du moment $J_6$ de Jupiter pourrait être de l'ordre d'une $\mu$as, moyennant l'incertitude actuelle sur la valeur de ce moment. Dans tous ces cas de figure, il faut souligner que l'influence des moments multipolaires sur la lumière ont une portée limitée. En effet, la portée de l'influence de chaque moment $J_{2n}$ décroît en $1/r_d^{2n+1}$, où $r_d$ est un paramètre d'impact ; le rayon lumineux sera sensible à ces effets si et seulement si il passe suffisamment près de la planète.

Ensuite, les colonnes $\delta_T$ et $\delta_R$ donnent l'influence des mouvements de translation et de rotation des corps du système solaire sur la propagation de la lumière. Il s'avère qu'il n'est plus envisageable de décrire le champ gravitationnel global du système solaire, lors de la traversée du photon, en négligeant les mouvements de translation et de rotation du Soleil, de Jupiter et de Saturne.

Enfin, la colonne $\delta_{PPN}$ de la table 1 concerne la déflection de la lumière due à un corps sphérique à l'approximation post-post-newtonienne. Dans ce cas, seule l'influence du Soleil pourrait être détectable au niveau de la $\mu$as pour un rayon lumineux rasant le limbe de ce dernier.
Toutefois, le satellite GAIA sera positionné de sorte que le Soleil ne soit jamais dans le champ des instruments embarqués ; les rayons passant très près du Soleil ne seront donc jamais observés et cet effet est de fait complètement négligeable dans le cadre de la mission GAIA. En revanche, pour le projet LATOR, l'objectif est justement de mesurer cet effet.

# Description relativiste des rayons lumineux

## Les équations des géodésiques isotropes

A la lecture des projets spatiaux présentés précédemment , nous avons pu nous apercevoir comment la précision de ces divers projets nécessitait la prise en compte de nombreux effets dus à la relativité générale sur la propagation de la lumière.

Analyser le trajet de lumière entre une étoile distante et un observateur correspond à l'étude de la propagation d'une onde électromagnétique ; dans le cas de la relativité, cette propagation ondulatoire doit se comprendre, qui plus est, dans un espace-temps courbe. Cependant, pour une précision d'une $\mu$as, il est suffisant de décrire cette propragation à l'approximation de l'optique géométrique [53, 65].

Dans le cadre de cette approximation, les rayons lumineux sont des géodésiques isotropes. Considérons donc un rayon lumineux d'équations paramétriques $x^\alpha = x^\alpha(\lambda)$ où $\lambda$ est un paramètre affine. La détermination explicite des $x^\alpha$ nécessitent la résolution des équations des géodésiques isotropes

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\lambda^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0 \quad \text{avec la condition} \quad g_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\lambda}\frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0\,, \tag{2}$$

où $g_{\alpha\beta}$ sont les composantes du tenseur métrique et les symboles $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ sont les symboles de Christoffel définis par

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\mu} \left( \partial_\gamma g_{\mu\beta} + \partial_\beta g_{\mu\gamma} - \partial_\mu g_{\beta\gamma} \right) . \tag{3}$$

En champ fort, peu de solutions exactes des équations (2) sont connues (métrique de Schwarzchild et de Kerr). En revanche en champ faible, comme notre système solaire, la détermination d'un rayon lumineux peut être obtenue soit par des méthodes analytiques perturbatives, soit par une intégration numérique, .

## Modèle analytique de Kopeikin, Schäfer et Mashhoon

Les travaux de [48, 46] sont la base du formalisme le plus général pour décrire la propagation des rayons lumineux à l'ordre $G$, c'est-à-dire à l'approximation post-minkowskienne, dans le champ gravitationnel de $N$ corps ponctuels dotés de spin en mouvement arbitraire.

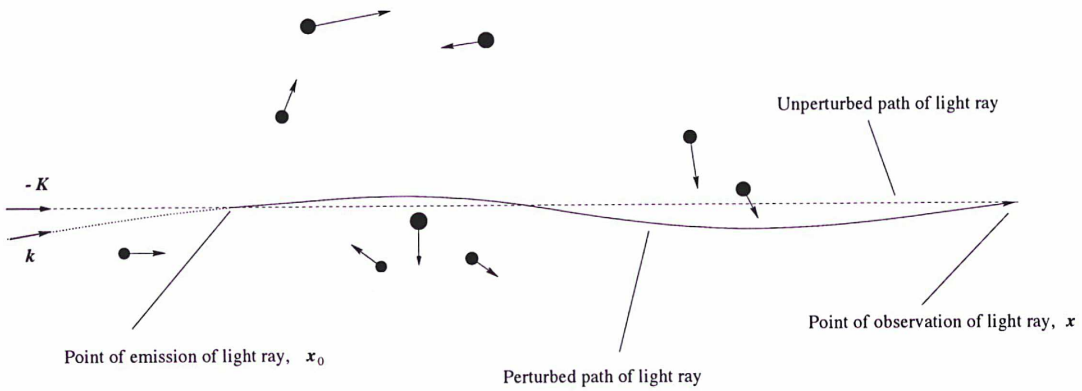



FIG. 2 – Illustration de la propagation d'un rayon lumineux.

Leur modèle d'intégration des équations des gésodésiques isotropes présentent plusieurs caractéristiques importantes :

- le champ gravitationnel est considéré faible. Le tenseur métrique admet comme expression

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + G\, h^{(1)}_{\mu\nu} + O(G^2) , \tag{4}$$

  où $\eta$ est la métrique de l'espace-temps plat de Minkowski et $h$ est une perturbation d'ordre $G$. Les potentiels $h^{(1)}_{\mu\nu}$ sont exprimés à l'aide de potentiels retardés de Liénard-Wiechert [36]. C'est grâce à l'utilisation des potentiels retardés que les auteurs parviennent à une intégration analytique des équations de propagation des rayons lumineux.
- le choix de conditions initiales pour intégrer les équations des géodésiques isotropes (2). En effet, il s'agit d'un système d'équations différentielles de second ordre nécessitant lors de la résolution des conditions initiales ; on suppose donc que le photon est émis lors d'un événement $x_e = (ct_e, \boldsymbol{x}_e)$. De plus, comme l'illustre la figure 2, on suppose que le rayon lumineux possède une direction initiale définie à l'infini spatial lorsque $t \to -\infty$

$$\frac{d\boldsymbol{x}(-\infty)}{dt} = \boldsymbol{k} , \tag{5}$$

  où $\boldsymbol{k}$ est un vecteur unitaire. Ces conditions initiales sont souvent appelées les *past null infinity conditions* [11].

- la définition du rayon lumineux non perturbé $\Gamma_0$. Dans l'espace-temps de Minkowski sous-jacent, le rayon lumineux non perturbé est considéré comme une ligne droite minkowskienne d'équations paramétriques $\boldsymbol{x}(t)$ ($t$ étant un temps coordonné) définies par

$$\boldsymbol{x}_{(0)}(t) = \boldsymbol{x}_e + \boldsymbol{k}(t - t_e)\,. \tag{6}$$

La géodésique isotrope réelle $\Gamma$ s'exprime comme une perturbation de $\Gamma_0$ par l'intermédiaire des équations paramétriques

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_{(0)}(t) + G\,\boldsymbol{X}_{(1)}(t)\,, \tag{7}$$

où $\boldsymbol{X}_{(1)}(t)$ représente la quantité à calculer pour déterminer explicitement les équations de propagation de la lumière.

- le problème des conditions aux limites. Il s'agit de décrire la propagation d'un photon entre un événement d'émission $x_e = (ct_e, \boldsymbol{x}_e)$ et de réception $x_r = (ct_r, \boldsymbol{x}_r)$. Comme l'illustre la figure 2, on peut toujours définir la direction entre ces deux événements par

$$\boldsymbol{K} = -\frac{\boldsymbol{x}_r - \boldsymbol{x}_e}{|\boldsymbol{x}_r - \boldsymbol{x}_e|}\,. \tag{8}$$

La résolution du problème des conditions aux limites consiste donc à transformer l'équation (7) afin d'écrire les équations paramétriques du rayon lumineux reliant $x_e$ et $x_r$ sous la forme

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_e - (t - t_e)\boldsymbol{K} + G\,\tilde{\boldsymbol{X}}_{(1)}(t)\,, \tag{9}$$

où $\tilde{\boldsymbol{X}}_{(1)}(t)$ s'exprime en fonction de $\boldsymbol{X}_{(1)}(t)$.

## Les modèles relativistes dédiés à la mission GAIA

### Modèle analytique de Klioner

A l'heure actuelle, ce modèle est le schéma relativiste le plus élaboré pour rendre compte des futures observations de GAIA [38]. L'auteur fait intervenir dans sa modélisation un certain nombre de vecteurs qui sont utilisés pour définir clairement, en relativité, la plupart des paramètres astrométriques newtoniens usuels tels l'aberration, la parallaxe, le mouvement propre des sources.
Les différentes étapes se déclinent de la manière suivante :

- **étape 1** : il s'agit de prendre en compte l'aberration due au mouvement du satellite par rapport au barycentre du système solaire. La direction $s$, comme l'illustre la figure 3, de l'étoile observée en $x_r$ par GAIA est donc convertie en la direction barycentrique $n$ au point d'observation ;

- **étape 2** : la déviation de la lumière due au champ gravitationnel des différents corps du système solaire est ensuite prise en compte. Essentiellement, les sources de champ gravitationnel sont supposées être en mouvement rectiligne uniforme pendant toute la traversée du système solaire par le photon ; l'effet du moment quadrupolaire des planètes géantes, en particulier Jupiter, est évalué à l'instant où le rayon lumineux non perturbé est le plus proche de la planète [35]. Au final, cette étape se traduit par la transformation du vecteur $n$ de la figure 3 en une direction $\sigma$ ; cette dernière représente la direction du rayon lumineux, arbitrairement prolongé jusqu'à l'infini spatial lorsque $t \to -\infty$.
  Ensuite, comme la source se situe à distance finie de l'observateur, il faut résoudre un problème de conditions aux limites ; il faut ainsi convertir $\sigma$ en une direction coordonnée $k$, désignant la direction entre la source et l'observateur ;

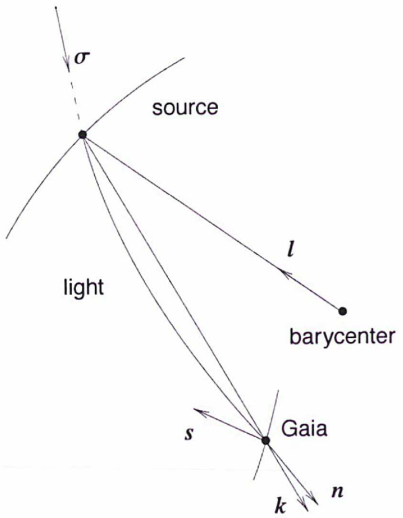
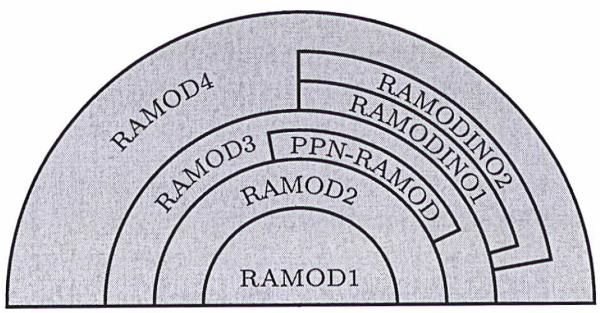



FIG. 3 – Illustration du modèle et de ses variables.

- **étape 3** : il s'agit de prendre en compte maintenant l'effet de parallaxe, justement dû à l'éloignement de la source. Ainsi, le vecteur $k$ est converti en une direction barycentrique $l$, qui correspond à la direction entre la source et le barycentre du système solaire.
- **étape finale** : la mission GAIA se déroulant sur environ 5 ans, l'auteur prend en compte le mouvement propre des sources lumineuses, ce qui entraîne une variation du vecteur $\boldsymbol{l}$ dans le temps.

### Modèle numérique RAMOD

EN 1998, un groupe d'astronomes et physiciens italiens, de l'Observatoire de Turin et de l'Université de Padova, a lancé un projet nommé RAMOD (Relativistic Astrometric MODel). Leur objectif initial était de démontrer la faisabilité d'un schéma de réduction de données astrométriques dans un cadre complètement relativiste, tout en assurant à terme une précision d'une $\mu$as sur la mesure des angles. Ce projet a connu ensuite de nombreuses évolutions, comme l'illustre la figure ci-contre.




La première version, RAMOD1 [28], est une approche non perturbative où le Soleil est considéré comme la seule source de champ gravitationnel. L'espace-temps est décrit par la métrique de Schwarzschild, l'observateur est placé sur une orbite circulaire et les sources lumineuses sont supposées à l'infini spatial.

La première évolution, RAMOD2 [26], est une extension directe de RAMOD1 permettant de prendre en compte le problème des parallaxes et des mouvements propres des étoiles, supposées à distance finie : essentiellement, les auteurs modifient les conditions aux limites de leur modèle.

Les auteurs se sont ensuite intéressés aux tests de la relativité en développant une version post-newtonienne paramétrée PPN-RAMOD [90] où, par inversion des données astrométriques, ils ob-

tiennent une estimation du paramètre $\gamma$ de l'ordre de quelques $10^{-7}$, soit 2 ordres de grandeur meilleure que celle obtenue par la récente expérience réalisée avec la sonde Cassini [3].

Les auteurs présentent dans le courant de l'année 2004 la version RAMOD3 [27] qui est basée sur une approche perturbative d'un espace-temps de Minkowski. Les sources de perturbation sont les différentes planètes du système solaire. Cependant, ce modèle n'est pas suffisamment réaliste puisque durant tout le trajet de la lumière, de son entrée dans le système solaire jusqu'au satellite (i.e. GAIA), les sources de champ gravitationnel sont supposées au repos, l'objectif des auteurs étant de valider le modèle jusqu'à la milliseconde d'arc de précision sur les observations astrométriques.

A l'heure actuelle, ces auteurs terminent la phase de validation de RAMOD4 qui étend les champs d'action de RAMOD3, de RAMODINO1 et 2 [5, 4]. Avec RAMOD4, les auteurs prennent en compte l'influence du mouvement réel des corps du système solaire sur la propagation de la lumière.

## Les connaissances actuelles à l'approximation post-post-newtonienne

Dans le contexte du projet LATOR, la description de la propagation de la lumière à l'approximation post-post-newtonienne est une réelle nécessité. A cette approximation, l'intégration des équations des géodésiques, bien que très compliquée, est encore possible analytiquement dans certains champs gravitationnels particuliers. En effet, supposons un espace-temps plat de Minkowski perturbé, muni de la métrique $g$

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + G\, h^{(1)}_{\mu\nu} + G^2\, h^{(2)}_{\mu\nu} + O(G^3)\,. \tag{10}$$

De plus, supposons deux événements distincts $x_A$ et $x_B$ reliés par une unique géodésique isotrope $\Gamma$. $\Gamma$ peut alors se paramétriser de la façon suivante

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_{(0)}(t) + G\,\boldsymbol{x}_{(1)}(t) + G^2\,\boldsymbol{x}_{(2)}(t) + O(G^3)\,, \tag{11}$$

où $\boldsymbol{x}_{(0)}(t)$ est la géodésique non perturbée dans l'espace-temps de Minkowski, $\boldsymbol{x}_{(1)}(t)$ et $\boldsymbol{x}_{(2)}(t)$ sont des contributions d'ordre respectivement $G$ et $G^2$. La difficulté pour déterminer $\boldsymbol{x}_{(2)}(t)$ vient du fait qu'elle nécessite, au préalable, la connaissance explicite de $\boldsymbol{x}_{(1)}(t)$.

Ainsi, la plupart des travaux ont concerné la propagation d'un rayon lumineux, jusqu'en $G^2/c^4$, dans le champ gravitationnel d'un Soleil sphérique et statique. Dès le début des années 80, certains auteurs ont estimé à quelques $\mu$as l'angle total de déviation de la lumière dans ce champ gravitationnel[30, 32]. Ensuite, les travaux [73, 74] ont résolu les équations des géodésiques isotropes correspondant à ce champ gravitationnel en formalisme PPN. Ultérieurement, [10] a déterminé, en relativité générale, le rayon lumineux dans ce champ gravitationnel avec une approche différente basée sur les équations d'Euler-Lagrange.

Un travail récent [9] traite de la déviation des rayons lumineux à l'approximation post-linéaire dans le champ de deux masses ponctuelles en interaction gravitationnelle. La source de lumière et l'observateur sont supposés situés à l'infini spatial (dans un espace-temps asymptotiquement plat). Les équations de propagation de la lumière sont résolues jusqu'à l'ordre $G^2/c^4$ où l'auteur montre comment calculer certaines intégrales en faisant intervenir des développements en séries par rapport à une grandeur physique reliée au paramètre d'impact du rayon lumineux avec le système binaire ($r_{12}/\xi$). L'auteur retrouve les résultats de [48] à l'ordre $G$. Ce travail s'achève par deux applications du formalisme proposé lorsque le rayon lumineux se propage soit orthogonalement soit parallèlement au plan orbital du système binaire (les masses de deux compagnons du système binaire sont supposées égales) ; une estimation numérique est donnée dans le cas du pulsar double PSR J0737-3039 pour un paramètre d'impact 5 fois plus grand que la séparation relative entre les deux compagnons du

système binaire : les corrections relativistes à la déviation de la lumière d'ordre $G^2/c^4$ sont de l'ordre de $10^{-7} - 10^{-8}$ secondes d'arc.

# Présentation de ce travail

## Partie 1 : modélisation des distances angulaires

Dans le chapitre 1, nous rappelons la définition covariante de la distance angulaire $\phi$ entre deux sources lumineuses telle qu'elle est mesurée par un observateur en mouvement. Tout d'abord, nous définissons ce qu'est en relativité la notion de direction perçue par un observateur en utilisant un outil relativiste classique : le 3-plan orthogonal associé à un observateur quelconque.
Ensuite, nous montrons que le calcul de la distance angulaire $\phi$ au point d'observation $x_o$ nécessite uniquement la connaissance des composantes du tenseur métrique, de la vitesse coordonnée de l'observateur et de trois rapports $\hat{l}_i$, caractérisant la tangente de chaque rayon lumineux arrivant à l'observateur. Enfin, dans la théorie des champs faibles, nous déterminons explicitement une formulation de la distance angulaire $\phi$.

Dans le chapitre 2, nous nous intéressons à la détermination des rapports $\hat{l}_i$, objectif central de ce travail. Cette détermination peut s'obtenir en suivant la méthode habituelle, à savoir résoudre les équations des géodésiques isotropes. Cependant, nous développons dans ce travail une approche différente. Ainsi, nous nous intéressons à la fonction d'univers $\Omega$ introduit en calcul tensoriel par Ruse [75, 76] et en relativité générale par Synge [82]. En supposant deux événements distincts $x_A = (ct_A, \boldsymbol{x}_A)$ et $x_B = (ct_B, \boldsymbol{x}_B)$ reliés par une unique géodésique $\Gamma_{AB}$ et situés à des distances finies de l'origine des coordonnées, la fonction d'univers de Synge $\Omega(x_A, x_B)$ se révèle être un outil particulièrement pertinent pour la détermination des rapports $\hat{l}_i$. A partir du principe variationnel définissant les courbes géodésiques, nous donnons les principales propriétés de $\Omega$ ; pour le cas particulier d'un rayon lumineux, la connaissance de $\Omega$ permet de calculer les tangentes à $\Gamma_{AB}$ à la fois en $x_A$ et en $x_B$. Nous nous intéressons au temps coordonné $t_B - t_A$ de propagation de la lumière entre $x_A$ et $x_B$ ; nous introduisons deux fonctions, dites de transfert de temps $\mathcal{T}_r(t_B, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B)$ et $\mathcal{T}_e(t_A, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B)$. Nous montrons que $\mathcal{T}_r$ et $\mathcal{T}_e$ permettent de calculer les rapports $\hat{l}_i$.
Nous développons deux méthodes pour déterminer les fonctions de transfert de temps. Tout d'abord, nous montrons que si $\Omega$ est explicitement connue, l'inversion de l'équation $\Omega = 0$ permet d'obtenir $\mathcal{T}_r$ et $\mathcal{T}_e$. Ensuite, nous soulignons que les fonctions de transfert de temps satisfont des équations iconales ; ainsi, elles peuvent être déterminées explicitement indépendamment de $\Omega$.
Nous donnons enfin l'expression de ces différentes méthodes de détermination de $\Omega$, $\mathcal{T}_r$ et $\mathcal{T}_e$ dans la théorie des champs gravitationnels faibles.

## Partie 2 : approximation post-newtonienne

Le chapitre 3 est consacré à la détermination de la fonction d'univers $\Omega$ et des deux fonctions de transfert de temps dans le formalisme post-newtonien paramétré (PPN) dû à Will & Nordtvedt [93] ; nous calculons le développement PPN de la distance angulaire à partir des résultats du chapitre 2.

Dans le contexte de la mission GAIA, le chapitre 4 est dédié à l'étude de l'influence des moments multipolaires de masse des corps du système solaire sur la propagation des rayons lumineux. En effet, seule la contribution du moment quadrupolaire $J_2$ est actuellement explicitement déterminée [39, 44] et une méthode [44], basée sur l'intégration des géodésiques isotropes, existe pour déterminer les influences des moments d'ordre supérieur comme les moments $J_4$ et $J_6$ ; cependant, cette méthode n'a pas été utilisée pour calculer ces effets explicitement. Ainsi, dans le champ gravitationnel d'un corps

axisymétrique, nous calculons explicitement l'influence de tous les moments multipolaires de masse sur les fonctions de transfert de temps ; puis, utilisant les relations entre ces dernières et les rapports $\hat{I}_i$, nous déterminons la contribution de tous les moments multipolaires de masse à la déviation du rayon lumineux entre $x_A$ et $x_B$. Enfin, nous analysons l'influence de chaque moment multipolaire sur la distance angulaire formée par les rayons lumineux, issus de deux sources lumineuses supposées à l'infini spatial, reçus simultanément en un événement d'observation $x_B$.

## Partie 3 : approximation post-minkowskienne généralisée

Dans le chapitre 5, nous construisons un développement post-minkowskien général de la fonction d'univers. Nous considérons un espace-temps dans lequel la métrique $g$ admet en tout point le développement en série suivant

$$g_{\mu\nu}(x, G) = \eta_{\mu\nu} + \sum_{n=1}^{\infty} G^n h^{(n)}_{\mu\nu}(x)\,, \tag{12}$$

où $\eta$ représente la métrique plate de Minkowski. Il est alors légitime de supposer que la fonction d'univers $\Omega$ admet le développement post-minkowskien général

$$\Omega(x_A, x_B) = \sum_{n=0}^{\infty} G^n \Omega^{(n)}(x_A, x_B)\,. \tag{13}$$

Notre objectif est de déterminer ce développement ainsi que les développements post-minkowskiens généraux des fonctions de transfert de temps. Pour y parvenir, nous utilisons la propriété de $\Omega$ que nous avons rappelée dans le chapitre 2, à savoir que la fonction d'univers est solution d'équations d'Hamilton-Jacobi en $x_A$ et en $x_B$. En considérant une variable libre $x$, nous montrons que les équations de Hamilton-Jacobi satisfaites par $\Omega(x_A, x)$ en $x$ peuvent être remplacées par un système infini d'équations différentielles ordinaires régissant le terme perturbatif $\Omega^{(n)}(x_A, x)$ lorsque $x$ est astreint à varier le long de la géodésique non perturbée connectant $x_A$ et $x_B$, c'est-à-dire une droite minkowskienne d'équations paramétriques

$$x^\alpha_{(0)}(\lambda) = (x^\alpha_B - x^\alpha_A)\lambda + x^\alpha_A\,, \quad \text{où } \lambda \text{ est un paramètre affine tel que } 0 \leq \lambda \leq 1. \tag{14}$$

Nous montrons que $\Omega^{(1)}(x_A, x_B)$ est aisément déduit de $\Omega^{(1)}(x_A, x)$ et nous retrouvons l'expression de $\Omega^{(1)}(x_A, x_B)$ déjà donnée par Synge [82]. Pour les ordres supérieurs $G^n$ (lorsque $n \geq 2$), nous montrons ensuite qu'un procédé itératif permet d'obtenir chaque $\Omega^{(n)}(x_A, x_B)$ sous la forme d'une intégrale, calculée le long de la droite non perturbée (14), faisant intervenir les quantités $\Omega^{(n-p)}(x_A, x)$ et leurs dérivées ($p = 1, ..., n-1$). Ceci signifie donc que les rapports $\hat{I}_i$ peuvent être déterminés explicitement sans la connaissance de la géodésique isotrope reliant les événements $x_A$ et $x_B$.

Dans le chapitre 6, nous construisons les développements post-minkowskiens généraux des fonctions de transfert de temps $\mathcal{T}_r$ et $\mathcal{T}_e$ s'écrivant sous la forme

$$\mathcal{T}_r(t_B, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B) = \sum_{n=0}^{\infty} G^n \mathcal{T}_r^{(n)}(t_B, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B)\,, \quad \text{et} \quad \mathcal{T}_e(t_A, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B) = \sum_{n=0}^{\infty} G^n \mathcal{T}_e^{(n)}(t_A, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B)\,. \tag{15}$$

Nous étudions les deux méthodes de détermination que nous proposons dans le chapitre 2. Ainsi, nous construisons l'inversion $\Omega = 0$ de la fonction d'univers obtenue dans le chapitre 5, ce qui nous permet de déterminer les fonctions de transfert de temps à n'importe quel ordre d'approximation post-minkowskienne. Ensuite, nous utilisons les équations iconales satisfaites par $\mathcal{T}_e$ et $\mathcal{T}_r$ aussi bien en $x_A$

qu'en $x_B$. En considérant une variable libre $\boldsymbol{x}$, nous montrons que ces équations iconales peuvent être remplacées par un système infini d'équations différentielles ordinaires régissant le terme perturbatif $\mathcal{T}_r^{(n)}(t_B, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_B)$ (respectivement $\mathcal{T}_e^{(n)}(t_A, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x})$) lorsque $\boldsymbol{x}$ est astreint à varier le long d'une droite $\tilde{\Gamma}_{AB}$ reliant $\boldsymbol{x}_A$ et $\boldsymbol{x}_B$. Nous en déduisons que chaque terme perturbatif $\mathcal{T}_r^{(n)}(t_B, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B)$ et $\mathcal{T}_e^{(n)}(t_A, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B)$ sont déterminés par le calcul d'intégrales évaluées le long de la droite $\tilde{\Gamma}_{AB}$.

Le chapitre 7 est consacré à l'approximation post-post-minkowskienne. Nous explicitons les contributions d'ordre $G^2$ dans l'expression de la distance angulaire $\phi$ entre deux sources lumineuses. Puis, nous montrons que l'expression intégrale du terme $\Omega^{(2)}$ obtenue au chapitre 5 peut être notablement simplifiée. Cette simplification nous permet de déterminer à l'ordre $G^2/c^4$ la fonction d'univers $\Omega$ et la fonction de transfert de temps $\mathcal{T}$ dans le champ gravitationnel d'une masse à symétrie sphérique, le champ étant supposé statique. Enfin, nous déduisons de $\mathcal{T}$ les rapports $\hat{l}_i$.

# Première partie

# Modélisation des distances angulaires.

# Chapitre 1

# Distance angulaire du point de vue relativiste

## 1.1 Introduction

Le but de ce chapitre est de montrer comment nous pouvons définir et calculer la distance angulaire entre deux sources lumineuses mesurée par un observateur $O$ de mouvement donné [78, 11]. Dans le paragraphe 1.2, nous rappelons comment nous définissons la direction spatiale relativement à $O$ d'un vecteur quelconque. Dans le paragraphe 1.3, nous déduisons de cette définition l'expression générale de la distance angulaire entre deux vecteurs quelconques en un point d'observation $x_r$ en mouvement arbitraire. Ensuite, nous nous intéressons plus particulièrement au cas des vecteurs isotropes ; en supposant l'existence de deux rayons lumineux $\Gamma$ et $\Gamma'$, émis par deux sources lumineuses distinctes et situées à des distances finies de l'origine du système de coordonnées utilisé, nous montrons que la distance angulaire entre ces deux sources de lumière est déterminée si et seulement si nous connaissons explicitement en $x_r$

- les composantes du tenseur métrique,
- la vitesse coordonnée de l'observateur,
- les tangentes de chaque rayon lumineux, qui interviennent sous la forme de rapports des composantes covariantes de ces vecteurs appelés les rapports $\hat{l} = \{\hat{l}_i\}$.

Enfin, dans le paragraphe 1.4, nous explicitons la formule donnant la distance angulaire dans le cas d'un champ gravitationnel faible.

## 1.2 Définition de la direction d'un 4-vecteur

Soit un espace-temps muni d'une métrique $g$. Nous définissons le produit scalaire entre deux vecteurs $V = \left(V^0, \{V^i\}\right)$ et $W = \left(W^0, \{W^i\}\right)$ par $(V, W) = g_{\mu\nu} V^\mu W^\nu$. Considérons un observateur $O$ de ligne d'univers $C$ et de vecteur vitesse unitaire $u^\mu = dx^\mu/ds$ ; on appelle 3-plan associé (ou relatif) à l'observateur $O$ en $x$ le 3-espace tangent constitué par les vecteurs orthogonaux à $u$ ; ce 3-plan sera noté $\Pi_x^{(3)}(u)$. D'après sa définition, la condition, nécessaire et suffisante pour qu'un vecteur $v = \{v^\alpha\}$ appartienne à $\Pi_x^{(3)}(u)$, s'écrit

$$(u, v) = g_{\alpha\beta} u^\alpha v^\beta = u_\beta v^\beta = 0\,. \tag{1.1}$$

Notons que l'on dit également que $u$ et $\Pi_x^{(3)}(u)$ définissent en $x$ un temps et un espace associés [58, 59]. Un vecteur arbitraire $V$ peut se décomposer de façon unique comme la somme d'un vecteur colinéaire à $u$, noté $V_\parallel$, et d'un vecteur $V_\perp$ orthogonal à $u$. En effet

$$V^\alpha = V_\parallel^\alpha + V_\perp^\alpha\,, \tag{1.2}$$

avec

$$(V_\perp, u) = 0\,, \quad \text{et} \quad V_\parallel = (u, V) \tag{1.3}$$

Tout vecteur $V$ peut donc s'écrire

$$V^\alpha = (u, V)u^\alpha + V_\perp^\alpha\,. \tag{1.4}$$

Cette dernière relation exprime en fait que $V_\perp$ n'est autre que la projection de $V$ sur $\Pi_x^{(3)}(u)$. La quantité $-V_\perp^2 = -g_{\alpha\beta}V_\perp^\alpha V_\perp^\beta$ est dite 'la grandeur d'espace' du vecteur $V$ relativement à la direction de temps définie par $u$. Notons que $-V_\perp^2$ peut encore s'écrire

$$-V_\perp^2 = -\left(g_{\alpha\beta} - u_\alpha u_\beta\right)V^\alpha V^\beta = (u, V)^2 - V^2\,. \tag{1.5}$$

On remarque aisément que $-V_\perp^2$ est toujours positif si $V$ n'est strictement pas colinéaire à $u$. En revanche, si $V^\alpha = V_\parallel^\alpha$, nous avons alors $-V_\perp^2 = 0$. Ainsi, pour tout vecteur $V$ non colinéaire à $u$, nous pouvons toujours lui associer le vecteur $\tilde{V}_\perp$ défini par

$$\tilde{V}_\perp^\alpha = \frac{V_\perp^\alpha}{\sqrt{-V_\perp^2}}\,. \tag{1.6}$$

Le vecteur $\tilde{V}_\perp$ est unitaire de genre espace puisque nous déduisons immédiatement de l'équation (1.6)

$$\tilde{V}_\perp^2 = -1\,. \tag{1.7}$$

En définitive, $\tilde{V}_\perp$ définit la direction d'espace du vecteur $V$ relativement à un observateur de vecteur vitesse unitaire $u$.

Si nous nous donnons maintenant un repère orthonormé $\tilde{e}_i$ dans $\Pi_x^{(3)}(u)$, les composantes du vecteur $\tilde{V}_\perp$ par rapport aux $\tilde{e}_i$ constituent les cosinus directeurs de la direction d'espace de $V$ relativement à $u$ en $x$.

## 1.3 Angle formé par deux vecteurs

Considérons maintenant deux vecteurs quelconques $V$ et $W$ en $x$. Notons $\tilde{V}_\perp$ et $\tilde{W}_\perp$ les directions d'espace de $V$ et $W$ dans $\Pi_x^{(3)}(u)$ L'angle $\phi$ entre les directions spatiales de $V$ et $W$ tel qu'il peut être mesuré en $x$ par l'observateur $O$ est défini par la formule

$$\cos\phi = \cos(\tilde{V}_\perp, \tilde{W}_\perp) = -(\tilde{V}_\perp, \tilde{W}_\perp) \quad \text{avec} \quad 0 \leq \phi < \Pi\,, \tag{1.8}$$

où nous noterons que le signe $-$ est dû à notre choix de signature $(+,-,-,-)$ pour la métrique $g$. Compte tenu de la formule (1.6), l'équation (1.8) s'écrit

$$\cos\phi = \cos(\tilde{V}_\perp, \tilde{W}_\perp) = \frac{(u\,,\,V)(u\,,\,W) - (V\,,\,W)}{\sqrt{(u\,,\,V)^2 - V^2}\,\sqrt{(u\,,\,W)^2 - W^2}} \quad \text{avec} \quad 0 \leq \phi < \Pi\,. \tag{1.9}$$

Il est important de souligner que jusqu'à présent, nous n'avons fait aucune hypothèse sur la nature des vecteurs que nous analysons.

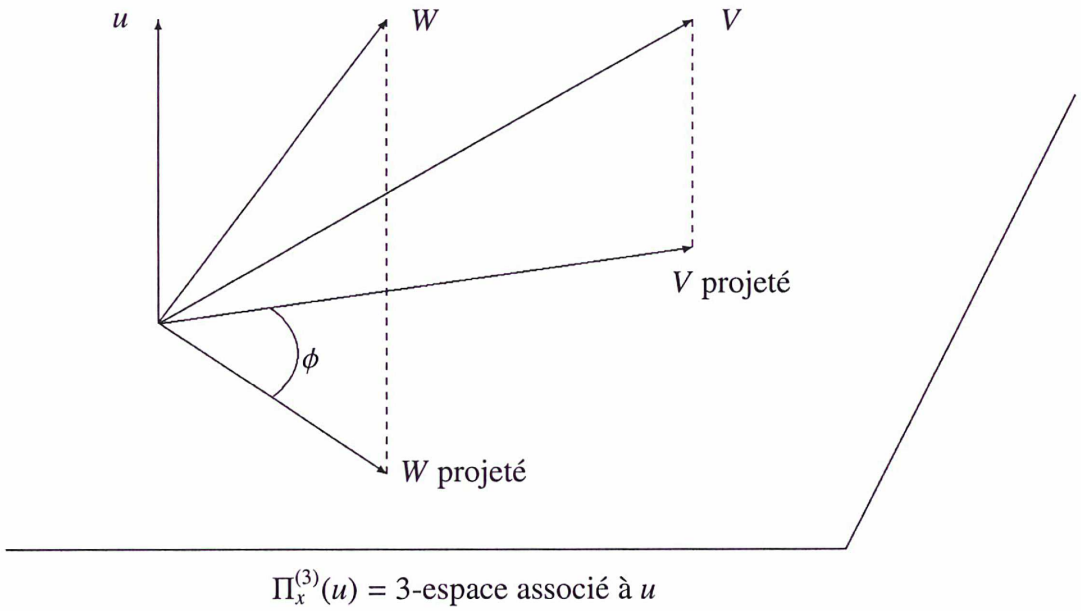



FIG. 1.1 – Angle $\phi$ formé par deux vecteurs dans $\Pi_x^{(3)}(u)$.

### 1.3.1 Cas où $V$ et $W$ sont isotropes

Supposons que $V$ soit un vecteur isotrope. Nous avons donc par définition

$$V^2 = (V\,,\,V) = 0\,. \tag{1.10}$$

Supposons en outre que $V$ est orienté vers le futur, comme le traduit la figure ci-avant. Cette condition est exprimée par

$$(u\,,\,V) > 0\,.$$

Le vecteur $\tilde{V}_\perp$ défini par la formule (1.6) se réduit alors à

$$\tilde{V}_\perp = \frac{V}{(u,V)} - u\,. \tag{1.11}$$

Considérons maintenant deux rayons lumineux émis par deux sources lumineuses distinctes, et matérialisés dans l'espace-temps par deux géodésiques isotropes $\Gamma$ et $\Gamma'$ qui coupent en un même événement $x_r$ la ligne d'univers $C$ d'un observateur $O$ de vecteur vitesse unitaire $u$.
Soient $V$ et $W$ les vecteurs respectivement tangent à $\Gamma$ et $\Gamma'$ en $x_r$. En tenant compte des formules (1.9) et (1.11), nous voyons que la distance angulaire $\phi$ formée par les deux sources lumineuses en $x_r$ s'écrit

$$\cos\phi = \cos(\tilde{V}_\perp, \tilde{W}_\perp) = 1 - \frac{(V,W)}{(u,V)(u,W)} \quad \text{avec} \quad 0 \le \phi < \Pi\,, \tag{1.12}$$

ou encore

$$\sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{(V,W)}{(u,V)(u,W)} \quad \text{avec} \quad 0 \le \phi < \Pi\,. \tag{1.13}$$

Soient $x^\alpha(\lambda)$ et $x'^\alpha(\lambda)$ les équations paramétriques de $\Gamma$ et $\Gamma'$ respectivement, $\lambda$ étant un paramètre. Les composantes des vecteurs $V$ et $W$ s'écrivent $V^\alpha = l^\alpha = dx^\alpha/d\lambda$ et $W^\alpha = l'^\alpha = dx'^\alpha/d\lambda$. Explicitons maintenant dans l'équation (1.13) les produits scalaires $(V,W)$, $(u,V)$ et $(u,W)$ en fonction

des coefficients du tenseur métrique, des composantes contravariantes de la 4-vitesse unitaire $u$ et des composantes covariantes $l_\alpha$ et $l'_\alpha$. Nous obtenons

$$\sin^2\frac{\phi}{2} = \frac{1}{2}\left[\frac{g^{\alpha\beta}l_\alpha\, l'_\beta}{(u^0\, l_0 + u^i\, l_i)(u^0\, l'_0 + u^i\, l'_i)}\right]_{x_r} . \tag{1.14}$$

Les composantes contravariantes de la 4-vitesse unitaire $u$ s'écrivent [65]

$$u^0 = \frac{dx^0}{ds}, \quad \text{et } u^i = u^0\frac{dx^i}{dx^0} = u^0\frac{v^i}{c} = u^0\beta^i , \tag{1.15}$$

où les $v^i$ sont les composantes du vecteur vitesse coordonné de l'observateur (l'introduction de la notation $\beta^i$ est purement formelle).
En substituant la définition (1.15) dans l'équation (1.14), nous obtenons

$$\sin^2\frac{\phi}{2} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(u^0)^2}\frac{g^{00} + g^{0i}(\hat{l}_i + \hat{l}'_i) + g^{ij}\hat{l}_i\hat{l}'_j}{(1+\beta^m\hat{l}_m)(1+\beta^r\hat{l}'_r)}\right]_{x_r} , \tag{1.16}$$

où les $\hat{l}_i$ et $\hat{l}'_i$ sont des rapports de composantes covariantes des vecteurs respectivement tangent au rayon lumineux porté par les géodésiques $\Gamma$ et $\Gamma'$

$$\hat{l}_i = \left(\frac{l_i}{l_0}\right)_{x_r} , \quad \hat{l}'_i = \left(\frac{l'_i}{l'_0}\right)_{x_r} . \tag{1.17}$$

Par ailleurs, le caractère unitaire de la vitesse $u$ permet d'exprimer le rapport $1/(u^0)^2$ de l'équation (1.17) en fonction des composantes covariantes $g_{\alpha\beta}$ du tenseur métrique et des quantités $\beta^i$. En effet, nous déduisons immédiatement de

$$u^\alpha u_\alpha = g_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta = 1 \tag{1.18}$$

la relation

$$\left(\frac{1}{u^0}\right)^2 = g_{00} + 2\beta^i g_{0i} + \beta^i\beta^j g_{ij} . \tag{1.19}$$

Enfin, exploitons le caractère isotrope des vecteurs $V$ et $W$. Les équations (1.10) se développent en fonction des composantes $l_i$ et $l'_i$ sous la forme

$$g^{\mu\nu}l_\mu l_\nu = 0 \quad \text{et} \quad g^{\mu\nu}l'_\mu l'_\nu = 0 . \tag{1.20}$$

ce qui entraîne

$$\frac{1}{2}g^{00} + g^{0i}\hat{l}_i = -\frac{1}{2}g^{ij}\hat{l}_i\hat{l}_j \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}g^{00} + g^{0i}\hat{l}'_i = -\frac{1}{2}g^{ij}\hat{l}'_i\hat{l}'_j . \tag{1.21}$$

En substituant les équations (1.19) et (1.21) dans la formule (1.16), il vient

$$\sin^2\frac{\phi}{2} = \frac{1}{4}\left[\frac{(g_{00} + 2g_{0k}\beta^k + g_{kl}\beta^k\beta^l)(-g^{ij})(\hat{l}_i - \hat{l}'_i)(\hat{l}_j - \hat{l}'_j)}{(1+\beta^m\hat{l}_m)(1+\beta^r\hat{l}'_r)}\right]_{x_r} . \tag{1.22}$$

## 1.4 Distance angulaire en champ faible

Ce paragraphe est consacré à une théorie de la distance angulaire entre deux sources de lumière, telle qu'elle est mesurée par un observateur $x_r = (ct_r, \boldsymbol{x}_r)$, en champ faible. Ici, le tenseur métrique peut donc se décomposer de la manière suivante

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}\,, \tag{1.23}$$

où $\eta$ est la métrique plate de Minkowski et $h$ une perturbation. Considérons deux sources lumineuses distinctes $x_e = (ct_e, \boldsymbol{x}_e)$ et $x'_e = (ct'_e, \boldsymbol{x}'_e)$, situées à une distance finie de l'origine des coodonnées. Dans l'espace-temps plat de Minkowski, la direction entre $x_e$ et l'observateur $x_r$ est notée $\boldsymbol{N}$, respectivement la direction entre $x'_e$ et l'observateur $x_r$ est notée $\boldsymbol{N}'$. Les rapports $\hat{\boldsymbol{l}} = \left\{\hat{l}_i\right\}$ peuvent se développer de la manière suivante

$$\hat{\boldsymbol{l}}_{x_r} = \{\hat{l}_i\}_{x_r} = -\boldsymbol{N} + \boldsymbol{\lambda}\,, \qquad \boldsymbol{N} = \{N^i\} = \frac{\boldsymbol{x}_r - \boldsymbol{x}_e}{|\boldsymbol{x}_r - \boldsymbol{x}_e|}\,, \qquad \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{x}_e, t_r, \boldsymbol{x}_r)\,, \tag{1.24}$$

$$\hat{\boldsymbol{l}}'_{x_r} = \{\hat{l}'_i\}_{x_r} = -\boldsymbol{N}' + \boldsymbol{\lambda}'\,, \quad \boldsymbol{N}' = \{N'^i\} = \frac{\boldsymbol{x}_r - \boldsymbol{x}'_e}{|\boldsymbol{x}_r - \boldsymbol{x}'_e|}\,, \qquad \boldsymbol{\lambda}' = \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{x}'_e, t_r, \boldsymbol{x}_r)\,, \tag{1.25}$$

où les vecteurs $\boldsymbol{\lambda}$ et $\boldsymbol{\lambda}'$ représentent les effets de la courbure de l'espace-temps, autrement dit les effets de $h$ sur le trajet des rayons lumineux : nous appelerons $\boldsymbol{\lambda}$ et $\boldsymbol{\lambda}'$ les fonctions de déflexion. La détermination des rapports $\hat{\boldsymbol{l}}$ revient donc à calculer ces fonctions. Substituons les équations (1.23)-(1.25) dans la formule (1.22) et introduisons les notations

$$\boldsymbol{q} = \frac{\boldsymbol{N}' - \boldsymbol{N}}{|\boldsymbol{N}' - \boldsymbol{N}|} \equiv \frac{\boldsymbol{N}' - \boldsymbol{N}}{\sqrt{2(1 - \boldsymbol{N}.\boldsymbol{N}')}}\,, \qquad \boldsymbol{\beta} = \{\beta^i\} = \{\frac{dx^i}{dx^0}\}\,;$$

nous obtenons la formule suivante

$$\begin{aligned}
\sin^2\frac{\phi}{2} \;=\; & \frac{1}{2}\,\frac{1-\boldsymbol{\beta}^2}{(1-\boldsymbol{\beta}.\boldsymbol{N})(1-\boldsymbol{\beta}.\boldsymbol{N}')}\left(1 + \frac{h_{00} + 2h_{0k}\beta^k + h_{kl}\beta^k\beta^l}{1-\boldsymbol{\beta}^2}\right) \\
& \times\left(1 + \frac{\boldsymbol{\beta}.\boldsymbol{\lambda}}{1-\boldsymbol{\beta}.\boldsymbol{N}}\right)^{-1}\left(1 + \frac{\boldsymbol{\beta}.\boldsymbol{\lambda}'}{1-\boldsymbol{\beta}.\boldsymbol{N}'}\right)^{-1} \\
& \times\Big\{(1-\boldsymbol{N}.\boldsymbol{N}')\left(1 - k^{ij}q^iq^j\right) - \sqrt{2(1-\boldsymbol{N}.\boldsymbol{N}')}\left[(\boldsymbol{\lambda}'-\boldsymbol{\lambda}).\boldsymbol{q} - k^{ij}(\lambda'_i - \lambda_i)q^j\right] \\
& \qquad + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\lambda}'-\boldsymbol{\lambda})^2 - \frac{1}{2}k^{ij}(\lambda'_i - \lambda_i)(\lambda'_j - \lambda_j)\Big\}\,,
\end{aligned} \tag{1.26}$$

où les quantités $k^{\mu\nu}$ sont définies par

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + k^{\mu\nu}\,.$$

Dans l'équation (1.26), nous pouvons noter la présence de quantités facteurs de $\boldsymbol{\beta}$ : ce sont des termes d'aberration. De plus, d'autres termes sont facteurs à la fois de $\boldsymbol{\beta}$ et de quantités d'origine gravitationnelle, c'est-à-dire soit des potentiels gravitationnels $h_{\mu\nu}$ soit des termes $\boldsymbol{\lambda}$ ou $\boldsymbol{\lambda}'$ : ce sont des termes d'aberration couplés aux influences relativistes.

Les formules (1.22) et (1.26) montrent que le problème central est la détermination des rapports $\hat{l}_i$, et donc des fonctions de déflexion $\boldsymbol{\lambda}$. Pour ce faire, nous allons présenter au chapitre suivant un outil particulièrement bien adapté à la description de géodésique isotrope connectant un événement d'émission $x_e$ et un événement de réception $x_r$ : la fonction d'univers de Synge $\Omega(x_e, x_r)$. Nous montrerons que les propriétés de $\Omega$, lorsque cette dernière est connue, conduisent à la détermination explicite des rapports $\hat{l}_i$.

# Chapitre 2

# Fonction d'univers et fonctions de transfert de temps

## 2.1 Introduction

Le but de ce chapitre est de construire les outils permettant de calculer les rapports $\hat{l}$. Dans le paragraphe 2.2, nous présentons la fonction d'univers $\Omega$ ; cette dernière fut introduite en calcul tensoriel par Ruse [75, 76] et en relativité générale par Synge [81, 82]. Dans la section 2.2.1, nous introduisons $\Omega$ à partir du principe variationnel définissant les courbes géodésiques. Nous construisons les propriétés de $\Omega$, utiles pour ce travail, dans la section 2.2.2.
En effet, nous démontrons que les propriétés de la fonction d'univers permettent d'une part de calculer le temps coordonné $t_B - t_A$ de propagation de la lumière entre $x_A = (ct_A, \boldsymbol{x}_A)$ et $x_B = (ct_B, \boldsymbol{x}_B)$, d'autre part de déterminer directement les rapports $\hat{l}$. Dans la section 2.2.3, nous construisons les formules permettant de déterminer $\Omega$ dans le cas d'un champ gravitationnel faible.

Dans le paragraphe 2.3, nous construisons deux fonctions de transfert de temps, $\mathcal{T}_e$ et $\mathcal{T}_r$, qui permettent de décrire le temps de vol du photon $t_B - t_A$ entre deux événements distincts $x_A$ et $x_B$. En utilisant les propriétés de la fonction d'univers, nous établissons une propriété remarquable de ces deux fonctions : nous montrons en effet que leur connaissance permet de calculer directement les rapports $\hat{l}$. Dans la section 2.3.3, nous montrons l'existence de deux méthodes différentes permettant de déterminer les fonctions de transfert de temps.

## 2.2 Définition et propriétés de la fonction d'univers de Synge

### 2.2.1 Une conséquence du principe variationnel

Soient $x_A$ et $x_B$ deux événements d'espace-temps connectés par une courbe différentiable $C_{AB}$ définie par les équations paramétriques $x^\alpha = x^\alpha(\zeta)$, avec $\zeta_A \leq \zeta \leq \zeta_B$. A partir de la fonction de Lagrange $L(x^\alpha, \dot{x}^\beta)$ avec $\dot{x}^\beta(\zeta) = dx^\beta(\zeta)/d\zeta$, la fonctionnelle $\widetilde{S}$ se définit telle que

$$\widetilde{S}[C_{AB}] = \int_{\zeta_A}^{\zeta_B} L(x^\alpha(\zeta), \dot{x}^\beta(\zeta)) d\zeta \,, \tag{2.1}$$

l'intégrale étant prise le long de la courbe $C_{AB}$. Prenons en compte une courbe arbitraire $C'_{A'B'}$ voisine de $C_{AB}$, reliant le point $x_{A'}$ et le point $x_{B'}$, définie par les équations paramétriques $x'^\alpha = x'^\alpha(\zeta')$ avec $\zeta_{A'} \leq \zeta' \leq \zeta_{B'}$.
Soient $x_A^\alpha + \delta x_A^\alpha = x_{A'}^\alpha$ les coordonnées de $x_{A'}$ et $x_B^\alpha + \delta x_B^\alpha = x_{B'}^\alpha$ les coordonnées de $x_{B'}$. En posant

$\bar{\delta}x^\alpha(\zeta) = x'^\alpha(\zeta) - x^\alpha(\zeta)$, une correspondance univoque entre $C_{AB}$ and $C_{A'B'}$ se définit par le biais de la transformation infinitésimale

$$x^\alpha(\zeta) \to x'^\alpha(\zeta + \delta\zeta) = x^\alpha(\zeta) + \delta x^\alpha(\zeta)\,, \tag{2.2}$$

où

$$\delta x^\alpha(\zeta) = \bar{\delta}x^\alpha(\zeta) + \dot{x}^\alpha(\zeta)\delta\zeta\,, \tag{2.3}$$

avec comme conditions de bord

$$\delta x^\alpha(\zeta_A) = \delta x^\alpha_A\,, \quad \delta x^\alpha(\zeta_B) = \delta x^\alpha_B\,. \tag{2.4}$$

En intégrant par parties, nous obtenons l'expression suivante pour la quantité $\delta\widetilde{S} = \widetilde{S}[C_{A'B'}] - \widetilde{S}[C_{AB}]$ [33]

$$\delta\widetilde{S} = \int_{\zeta_A}^{\zeta_B}\left[\frac{\partial L}{\partial x^\alpha} - \frac{d}{d\zeta}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha}\right)\right]\bar{\delta}x^\alpha(\zeta)d\zeta + \left[p_\alpha\delta x^\alpha - H\delta\zeta\right]_A^B\,, \tag{2.5}$$

où

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha}\,, \quad H = p_\alpha\dot{x}^\alpha - L\,, \tag{2.6}$$

$p_\alpha$ étant le moment conjugué de $x^\alpha$ et $H$ la fonction de Hamilton.

Quels que soient $x_A$ and $x_B$, supposons maintenant qu'il existe une et une seule courbe $\Gamma_{AB}$ pour laquelle la fonctionnelle $\widetilde{S}$ présente un extremum ; cette hypothèse conduit en fait à supposer que $x_B$ appartient à un voisinage convexe normal de $x_A$ [72] (et réciproquement $x_A$ appartient à un voisinage convexe normal de $x_B$). Les équations paramétriques de $\Gamma_{AB}$ étant $x^\alpha = x^\alpha(\zeta)$, nous pouvons définir une fonction de $x_A, x_B, \zeta_A, \zeta_B$ en posant

$$S(x_A, x_B, \zeta_A, \zeta_B) = \int_{\Gamma_{AB}} L\Big(x^\alpha(\zeta), \dot{x}^\beta(\zeta)\Big)\,d\zeta\,. \tag{2.7}$$

$S$ est souvent appelée la fonction caractéristique de la fonction de Lagrange $L$. De plus, les fonctions $x^\alpha(\zeta)$ satisfont les équations d'Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial x^\alpha} - \frac{d}{d\zeta}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha}\right) = 0\,. \tag{2.8}$$

En tenant compte de (2.8) dans la variation totale (2.5) de $S(x_A, x_B, \zeta_A, \zeta_B)$, nous concluons que cette dernière est uniquement proportionnelle aux termes de bord de l'équation (2.5). Nous arrivons in fine aux relations suivantes

$$\frac{\partial S}{\partial x^\alpha_A} = -(p_\alpha)_A\,, \quad \frac{\partial S}{\partial x^\alpha_B} = (p_\alpha)_B\,, \tag{2.9}$$

$$\frac{\partial S}{\partial \zeta_A} = H_A\,, \quad \frac{\partial S}{\partial \zeta_B} = -H_B\,. \tag{2.10}$$

En considérant que $H$ est une fonction de $x^\alpha$ et $p_\alpha$, et en substituant les expressions de $(p_\alpha)_A$ et $(p_\alpha)_B$ fournies par les équations (2.9) dans les équations (2.10) , nous voyons que $S(x_A, x_B, \zeta_A, \zeta_B)$ satisfait des équations d'Hamilton-Jacobi

$$\frac{\partial S}{\partial \zeta_A} = H\left(x^\alpha_A, -\frac{\partial S}{\partial x^\alpha_A}\right)\,, \quad \frac{\partial S}{\partial \zeta_B} = -H\left(x^\alpha_B, \frac{\partial S}{\partial x^\alpha_B}\right)\,. \tag{2.11}$$

Ainsi, la courbe $\Gamma_{AB}$ est un chemin géodésique connectant $x_A$ et $x_B$. Soit un espace-temps muni d'une métrique $g$, la fonction de Lagrange s'écrit

$$L = \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta\,, \tag{2.12}$$

et en substituant l'équation (2.12) à $L$ dans l'équation (2.6), nous obtenons les relations

$$p_\alpha = g_{\alpha\beta}\dot{x}^\beta\,, \quad H = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}p_\alpha p_\beta\,. \tag{2.13}$$

Nous déduisons de l'équation (2.13) que $H = L$ pour tout chemin géodésique. De plus, $L$ ne contient pas explicitement la variable $\zeta$ ; $L$ est donc une constante du mouvement.

Introduisons maintenant la fonction caractéristique $\widehat{\Omega}$ de la fonction de Lagrange (2.12). En accord avec l'équation (2.7), cette fonction s'écrit

$$\widehat{\Omega}(x_A, x_B, \zeta_A, \zeta_B) = \frac{1}{2}\int_{\zeta_A}^{\zeta_B} g_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta d\zeta\,, \tag{2.14}$$

l'intégrale étant prise le long de $\Gamma_{AB}$. Comme $L = H$ est une constante du mouvement, nous avons $L = H_A = H_B$ sur $\Gamma_{AB}$. En substituant ces dernières relations dans l'équation (2.14), nous arrivons à

$$H_A = H_B = \frac{\widehat{\Omega}(x_A, x_B, \zeta_A, \zeta_B)}{\zeta_B - \zeta_A}\,. \tag{2.15}$$

La substitution des expressions obtenues pour $H_A$ et $H_B$ dans l'équation (2.10) nous conduit à

$$\frac{\partial\widehat{\Omega}}{\partial\zeta_A} = \frac{\widehat{\Omega}}{\zeta_B - \zeta_A}\,, \quad \frac{\partial\widehat{\Omega}}{\partial\zeta_B} = -\frac{\widehat{\Omega}}{\zeta_B - \zeta_A}\,. \tag{2.16}$$

En intégrant ces équations, nous obtenons $\widehat{\Omega}$ sous la forme

$$\widehat{\Omega}(x_A, x_B, \zeta_A, \zeta_B) = \frac{\Omega(x_A, x_B)}{\zeta_B - \zeta_A}\,, \tag{2.17}$$

où $\Omega(x_A, x_B)$ est une fonction de $x_A$ et de $x_B$. Cette bi-fonction, symétrique en $x_A$ et $x_B$, est appelée la fonction d'univers. En notant $\lambda$ le seul paramètre affine tel que $\lambda_A = 0$ et $\lambda_B = 1$, nous pouvons conclure qu'à partir des équations (2.14) et (2.17), $\Omega(x_A, x_B)$ peut être écrit

$$\Omega(x_A, x_B) = \frac{1}{2}\int_0^1 g_{\mu\nu}(x^\alpha(\lambda))\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}d\lambda\,, \tag{2.18}$$

l'intégrale étant prise le long de $\Gamma_{AB}$.
En remarquant que la distance géodésique entre $x_A$ et $x_B$ s'écrit

$$s_{AB} = \int_{\Gamma_{AB}} \sqrt{g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu}\,, \tag{2.19}$$

les équations (2.18) et (2.19) peuvent conduire à une seconde définition de la fonction d'univers telle que

$$\Omega(x_A, x_B) = \frac{1}{2}\epsilon_{AB}[s_{AB}]^2\,, \tag{2.20}$$

où $\epsilon_{AB} = 1, 0, -1$ suivant que $\Gamma_{AB}$ soit une géodésique de type temps, isotrope ou spatiale. [1]

[1] **Remarque :** Une construction légèrement différente concernant les fonctions caractéristiques $\sqrt{2\,|\Omega|}$ est décrite dans [14, 15, 16].

### 2.2.2 Propriétés fondamentales de la fonction d'univers

La propriété la plus intéressante de la fonction d'univers est de donner immédiatement, une fois la fonction d'univers déterminée, accès aux vecteurs respectivement tangent à la géodésique $\Gamma_{AB}$ en $x_A$ et $x_B$ . Cette propriété fondamentale découle des équations (2.9) et (2.13). Il vient

**Propriété 1**. *Les composantes covariantes des vecteurs tangent à la géodésique $\Gamma_{AB}$ en $x_A$ et $x_B$ sont respectivement donnés par les relations suivantes :*

$$\left(g_{\mu\nu}\frac{dx^\nu}{d\lambda}\right)_A = -\frac{\partial\Omega}{\partial x_A^\mu}(x_A, x_B)\,, \tag{2.21}$$

$$\left(g_{\mu\nu}\frac{dx^\nu}{d\lambda}\right)_B = \frac{\partial\Omega}{\partial x_B^\mu}(x_A, x_B)\,. \tag{2.22}$$

Ensuite, l'utilisation de la propriété 1 nous amène à établir le système d'équations donnant les chemins géodésiques issus de l'événement $x_A$. Pour ce faire, considérons d'abord tout autre paramètre affine $\zeta$ le long de $\Gamma_{AB}$ tel que

$$\zeta = (\zeta_B - \zeta_A)\lambda + \zeta_A\,, \tag{2.23}$$

où $\zeta_A$ et $\zeta_B$ sont les valeurs correspondantes à $x_A$ et $x_B$ respectivement. Nous déduisons aisément que la formule générale pour le vecteur tangent $dx^\mu/d\zeta$ est donnée par

$$\left(g_{\mu\nu}\frac{dx^\nu}{d\zeta}\right)_A = -\frac{1}{\zeta_B - \zeta_A}\frac{\partial\Omega}{\partial x_A^\mu}(x_A, x_B)\,, \tag{2.24}$$

$$\left(g_{\mu\nu}\frac{dx^\nu}{d\zeta}\right)_B = \frac{1}{\zeta_B - \zeta_A}\frac{\partial\Omega}{\partial x_B^\mu}(x_A, x_B)\,. \tag{2.25}$$

Il est certain que l'événement $x_B$ peut être remplacé dans l'équation (2.25) par tout point $x(\zeta)$ de $\Gamma_{AB}$ qui diffère de $x_A$. Pour des raisons de simplicité, reprenons le paramètre $\lambda$, nous pouvons écrire que les composantes covariantes du vecteur tangent à $\Gamma_{AB}$ au point $x(\lambda)$ sont donnés par

$$\left(g_{\mu\nu}\frac{dx^\nu}{d\lambda}\right)_{x(\lambda)} = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial\Omega}{\partial x^\mu}(x_A, x(\lambda))\,, \tag{2.26}$$

où $\partial\Omega/\partial x^\mu$ désignent la dérivée partielle de $\Omega(x_A, x)$ par rapport à $x^\mu$ au point $x$.
Il découle immédiatement de l'équation (2.26) que tout au long de chaque courbe géodésique passant par $x_A$ nous avons

$$\left(\frac{dx^\mu}{d\lambda}\right)_{x(\lambda)} = \frac{1}{\lambda}\,g^{\mu\rho}(x(\lambda))\frac{\partial\Omega}{\partial x^\rho}(x_A, x(\lambda))\,. \tag{2.27}$$

Ces dernières équations peuvent être vues comme le système d'équations régissant les chemins géodésiques passant par $x_A$. La régularité en $x_A$ est la conséquence directe de la propriété qui suit [82].

**Propriété 2**. *En tout point $x$ appartenant à un voisinage local de $x_A$, les dérivés partielles de premier ordre de $\Omega(x_A, x)$ admettent le développement*

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x^\mu}(x_A, x) = g_{\mu\nu}(x_A)(x^\nu - x_A^\nu) + C_{\mu\alpha\beta}(x_A, x)(x^\alpha - x_A^\alpha)(x^\beta - x_A^\beta)\,, \tag{2.28}$$

*où les fonctions $C_{\mu\alpha\beta}(x_A, x)$ restent bornées lorsque $x$ appartient à un voisinage infiniment proche de $x_A$ .*

**Remarque 1 :** soulignons que la propriété 2 montre en particulier que $\partial\Omega/\partial x^{\mu}(x_A, x) \to 0$ lorsque $x \to x_A$. Il en résulte que les membres de droite des équations (2.26) et (2.27) sont bornés lorsque $\lambda \to 0$.

Ensuite, en s'intéressant aux équations (2.11), (2.13) et (2.15), nous montrons que la fonction d'univers satisfait un système d'équations de type Hamilton-Jacobi.

**Propriété 3.** *La fonction d'univers $\Omega(x_A, x_B)$ satisfait les équations d'Hamilton-Jacobi suivantes*

$$\frac{1}{2}\, g^{\alpha\beta}(x_A)\frac{\partial\Omega}{\partial x_A^{\alpha}}(x_A, x_B)\frac{\partial\Omega}{\partial x_A^{\beta}}(x_A, x_B) = \Omega(x_A, x_B)\,, \tag{2.29}$$

$$\frac{1}{2}\, g^{\alpha\beta}(x_B)\frac{\partial\Omega}{\partial x_B^{\alpha}}(x_A, x_B)\frac{\partial\Omega}{\partial x_B^{\beta}}(x_A, x_B) = \Omega(x_A, x_B)\,. \tag{2.30}$$

Nous verrons dans la troisième partie de ce manuscrit l'intérêt de la propriété 3.

**Remarque 2** : Soulignons que les propriétés 1, 2 et 3 sont valides quelle que soit la nature de la courbe géodésique connectant $x_A$ et $x_B$.

Dans le cas de la propagation d'un rayon lumineux reliant $x_A$ et $x_B$, donc d'une géodésique isotrope, nous déduisons de l'équation (2.18) et de $L = H_A = H_B = 0$ la proposition suivante

**Propriété 4.** *Deux points $x_A$ et $x_B$ sont connectés par un rayon lumineux si et seulement si la condition*

$$\Omega(ct_A, \boldsymbol{x}_A, ct_B, \boldsymbol{x}_B) = 0 \tag{2.31}$$

*est satisfaite.*

**Remarque 3** : La propriété 4 montre que $\Omega(x_A, x) = 0$ est l'équation du cône de lumière en $x_A$.

**Remarque 4** : En posant la notation $l_{\mu} = g_{\mu\nu}dx^{\nu}/d\lambda$, nous pouvons, à partir de l'équation (2.22), exprimer un rapport algébrique entre les composantes covariantes du vecteur tangent à $\Gamma_{AB}$ en $x_B$. En tenant compte de la propriété 4, nous arrivons finalement à

$$\left(\hat{l}_i\right)_A = \left(\frac{l_i}{l_0}\right)_A = \frac{\partial\Omega/\partial x_A^i}{\partial\Omega/\partial x_A^0}\,, \qquad \left(\hat{l}_i\right)_B = \left(\frac{l_i}{l_0}\right)_B = \frac{\partial\Omega/\partial x_B^i}{\partial\Omega/\partial x_B^0} \quad \text{avec la contrainte} \quad \Omega(ct_A, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B) = 0 \tag{2.32}$$

Ainsi, à partir d'un espace-temps muni d'une métrique $g$ a priori connue, la connaissance de la fonction d'univers permet de calculer la distance angulaire formée par deux sources lumineuses telle qu'elle est mesurée par un observateur localisé en $x_B$.

### 2.2.3 Expression de $\Omega$ en champ faible

Considérons maintenant la théorie des champs gravitationnels faibles. Dans le cas du systèle solaire, ce cadre de travail est d'ailleurs raisonnable. On parle de champ faible lorsque l'espace-temps se comporte comme une pertubation de Minkowski. Il est alors possible de représenter le tenseur métrique $g$ sous la forme suivante

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}\,, \tag{2.33}$$

où $\eta$ représente la métrique plate de Minkowski et $h$ est une perturbation faible.

En champ faible, le rayon lumineux peut donc se décrire comme une perturbation de sa trajectoire dans Minkowski. Or, dans un espace-temps plat, la géodésique isotrope reliant deux événements $x_A$ et $x_B$ est une ligne droite, notée $\Gamma^{(0)}_{AB}$, que nous représentons par les équations paramétriques $x^\alpha_{(0)}(\lambda)$ suivantes

$$x^\alpha_{(0)}(\lambda) = (x^\alpha_B - x^\alpha_A)\lambda + x^\alpha_A\,, \quad 0 \leq \lambda \leq 1\,, \tag{2.34}$$

$\lambda$ étant un paramètre affine.
La fonction d'univers de l'espace-temps de Minkowski s'obtient donc en remplaçant dans l'équation (2.18), $g$ par $\eta$ et $x^\alpha$ par (2.34). Il vient

$$\Omega^{(0)}(x_A, x_B) = \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}(x^\mu_B - x^\mu_A)(x^\nu_B - x^\nu_A)\,. \tag{2.35}$$

Dans l'espace-temps réel, décrit par la métrique (2.33), la lumière suit donc une courbe géodésique $\Gamma_{AB}$ voisine de $\Gamma^{(0)}_{AB}$ à une perturbation $X^\alpha$ près. $\Gamma_{AB}$ peut se paramétrer donc de la façon suivante

$$x^\alpha(\lambda) = (x^\alpha_B - x^\alpha_A)\lambda + x^\alpha_A + X^\alpha(\lambda)\,, \quad 0 \leq \lambda \leq 1\,, \tag{2.36}$$

où les fonctions $X^\alpha$ satisfont les conditions de bord

$$X^\alpha(0) = 0\,, \quad X^\alpha(1) = 0\,. \tag{2.37}$$

Ensuite, la fonction d'univers $\Omega$ se conçoît, elle aussi, comme une perturbation de $\Omega^{(0)}(x_A, x_B)$ ; nous pouvons donc poser le développement suivant

$$\Omega(x_A, x_B) = \Omega^{(0)}(x_A, x_B) + \Omega^{(h)}(x_A, x_B)\,. \tag{2.38}$$

En introduisant la métrique de l'équation (2.33) et la paramétrisation (2.36) dans la formulation intégrale (2.18) de la fonction d'univers, nous obtenons donc

$$\begin{aligned}\Omega(x_A, x_B) \;=\; & \Omega^{(0)}(x_A, x_B) + \frac{1}{2}(x^\mu_B - x^\mu_A)(x^\nu_B - x^\nu_A)\int_0^1 h_{\mu\nu}(x(\lambda))d\lambda \\ & + \frac{1}{2}\int_0^1 \Big[\eta_{\mu\nu}\dot{X}^\mu(\lambda)\dot{X}^\nu(\lambda) + 2(x^\mu_B - x^\mu_A)h_{\mu\nu}(x(\lambda))\dot{X}^\nu(\lambda) \\ & \qquad + h_{\mu\nu}(x(\lambda))\dot{X}^\mu(\lambda)\dot{X}^\nu(\lambda)\Big]d\lambda\,.\end{aligned} \tag{2.39}$$

où nous avons posé la notation $\dot{x}^\mu(\lambda) = x^\mu_B - x^\mu_A + \dot{X}^\mu(\lambda)$ et pris en compte l'égalité

$$\int_0^1 \eta_{\mu\nu}(x^\mu_B - x^\mu_A)\dot{X}^\nu(\lambda)d\lambda = 0\,.$$

Il faut souligner que toutes les intégrales intervenant dans l'équation (2.39) sont calculées le long du chemin géodésique $\Gamma_{AB}$, qui est généralement a priori inconnu. Cependant, nous montrerons dans les parties 2 et 3 qu'il est possible d'obtenir un développement perturbatif de $\Omega(x_A, x_B)$ ne nécessitant pas de calculer les intégrales le long de $\Gamma_{AB}$ mais le long de la ligne droite $\Gamma^{(0)}_{AB}$.

## 2.3 Les fonctions de transfert de temps

### 2.3.1 Définition

Considérons un photon se propageant dans le vide le long d'une unique géodésique $\Gamma_{AB}$ entre un événement d'émission $x_A = (ct_A, \boldsymbol{x}_A)$ et un événement de réception $x_B = (ct_B, \boldsymbol{x}_B)$.

La différence $t_B - t_A$ est le temps de vol du photon exprimée en temps coordonné. En utilisant la propriété 4, nous pouvons introduire deux fonctions $\mathcal{T}_e(t_A, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B)$ et $\mathcal{T}_e(t_B, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B)$, la première étant une fonction du temps d'émission $t_A$ et de $\boldsymbol{x}_A$ et $\boldsymbol{x}_B$ et la seconde une fonction du temps de réception $t_B$ et de $\boldsymbol{x}_A$ et $\boldsymbol{x}_B$, telles que

$$\Omega(ct_A, \boldsymbol{x}_A, ct_A + c\mathcal{T}_e(t_A, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B), \boldsymbol{x}_B) = 0\,, \tag{2.40}$$

et

$$\Omega(ct_B - c\mathcal{T}_r(t_B, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B), \boldsymbol{x}_A, ct_B, \boldsymbol{x}_B) = 0\,. \tag{2.41}$$

Ainsi, le temps de vol coordonné du photon $t_B - t_A$ peut se paramétrer de la manière suivante

$$t_B - t_A = \mathcal{T}_e(t_A, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B) = \mathcal{T}_r(t_B, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B)\,, \tag{2.42}$$

où $\mathcal{T}_e$ sera appelée la fonction de transfert de temps d'émission, et $\mathcal{T}_r$ la fonction de transfert de temps de réception.

**Remarque 5** : Pour des applications astrométriques, nous n'avons pas, en général, d'information a priori sur l'instant d'émission $t_A$ d'un rayon lumineux. En conséquence, la fonction de transfert de temps la plus pertinente est la fonction de réception $\mathcal{T}_r$.

### 2.3.2 Théorème fondamental

En différentiant les membres de gauche et de droite de l'équation (2.41) par rapport à $ct_B$, $x^i_B$ et $x^i_A$ respectivement, nous obtenons les relations suivantes

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x^0_B} + \frac{\partial\Omega}{\partial x^0_A}\frac{\partial}{\partial x^0_B}(x^0_B - c\mathcal{T}_r(t_B, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B)) = \frac{\partial\Omega}{\partial x^0_B} + \frac{\partial\Omega}{\partial x^0_A}\left(1 - c\frac{\partial\mathcal{T}_r}{\partial t_B}\right) = 0\,, \tag{2.43}$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x^i_B} + \frac{\partial\Omega}{\partial x^0_A}\frac{\partial}{\partial x^i_B}(x^0_B - c\mathcal{T}_r(t_B, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B)) = \frac{\partial\Omega}{\partial x^i_B} - c\frac{\partial\Omega}{\partial x^0_A}\frac{\partial\mathcal{T}_r}{\partial x^i_B} = 0 \tag{2.44}$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x^i_A} + \frac{\partial\Omega}{\partial x^0_A}\frac{\partial}{\partial x^i_A}(x^0_B - c\mathcal{T}_r(t_B, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B)) = \frac{\partial\Omega}{\partial x^i_A} - c\frac{\partial\Omega}{\partial x^0_A}\frac{\partial\mathcal{T}_r}{\partial x^i_A} = 0 \tag{2.45}$$

De l'équation (2.43), nous déduisons l'égalité suivante

$$-\frac{\partial\Omega/\partial x^0_B}{\partial\Omega/\partial x^0_A} = 1 - c\frac{\partial\mathcal{T}_r}{\partial t_B}\,, \tag{2.46}$$

en considérant par ailleurs l'équation (2.45) nous arrivons à

$$\frac{\partial\Omega/\partial x^i_A}{\partial\Omega/\partial x^0_A} = c\frac{\partial\mathcal{T}_r}{\partial x^i_A}\,, \tag{2.47}$$

et enfin en divisant l'équation (2.44) par (2.43) nous obtenons

$$\frac{\partial\Omega/\partial x^i_B}{\partial\Omega/\partial x^0_B} = c\frac{\partial\mathcal{T}_r}{\partial x^i_B}\left[1 - c\frac{\partial\mathcal{T}_r}{\partial t_B}\right]^{-1}\,. \tag{2.48}$$

Or, grâce à la propriété 1, nous pouvons relier les gradients $\partial\Omega/\partial x^{\mu}_{A/B}$ aux composantes covariantes du vecteur tangent à la géodésique, respectivement en $x_A$ et $x_B$. Nous arrivons finalement à

$$\boxed{\left(\frac{k_i}{k_0}\right)_B = -c\,\frac{\partial \mathcal{T}_r}{\partial x^i_B}\left[1-\frac{\partial \mathcal{T}_r}{\partial t_B}\right]^{-1}, \quad \left(\frac{k_i}{k_0}\right)_A = c\,\frac{\partial \mathcal{T}_r}{\partial x^i_A}, \quad \frac{(k_0)_B}{(k_0)_A} = 1-\frac{\partial \mathcal{T}_r}{\partial t_B}.} \tag{2.49}$$

A partir de l'équation (2.40), un raisonnement similaire existe pour la fonction de transfert de temps d'émission $\mathcal{T}_e$. Nous obtenons les relations suivantes

$$\boxed{\left(\frac{l_i}{l_0}\right)_{x_B} = -c\,\frac{\partial \mathcal{T}_e}{\partial x^i_B}, \quad \left(\frac{l_i}{l_0}\right)_{x_A} = c\,\frac{\partial \mathcal{T}_e}{\partial x^i_A}\left[1+\frac{\partial \mathcal{T}_e}{\partial t_A}\right]^{-1}, \quad \frac{(l_0)_B}{(l_0)_A} = \left[1+\frac{\partial \mathcal{T}_e}{\partial t_A}\right]^{-1}.} \tag{2.50}$$

Ainsi, grâce aux équations (2.50) et (2.49), nous pouvons formuler le théorème suivant, qui relie les fonctions de transfert de temps aux $\hat{l}_i$ en $x_A$ et en $x_B$.

**Théorème 1**. *Considérons un photon émis au point $x_A = (ct_A, \boldsymbol{x}_A)$ et reçu au point $x_B = (ct_B, \boldsymbol{x}_B)$, et appelons $l^{\mu}$ le quadri-vecteur $dx^{\mu}/d\xi$, $\xi$ étant un paramètre arbitraire, tangent à la trajectoire de la lumière. Les rapports astrométriques en $x_A$ et en $x_B$ sont donnés par*

$$\left(\hat{l}_i\right)_{x_B} = \left(\frac{l_i}{l_0}\right)_{x_B} = -c\,\frac{\partial \mathcal{T}_e}{\partial x^i_B} = -c\,\frac{\partial \mathcal{T}_r}{\partial x^i_B}\left[1-\frac{\partial \mathcal{T}_r}{\partial t_B}\right]^{-1}, \tag{2.51}$$

$$\left(\hat{l}_i\right)_{x_A} = \left(\frac{l_i}{l_0}\right)_{x_A} = c\,\frac{\partial \mathcal{T}_e}{\partial x^i_A}\left[1+\frac{\partial \mathcal{T}_e}{\partial t_A}\right]^{-1} = c\,\frac{\partial \mathcal{T}_r}{\partial x^i_A}, \tag{2.52}$$

*En outre, le rapport $(l_0)_{x_B}/(l_0)_{x_A}$ a pour expression*

$$\frac{(l_0)_{x_B}}{(l_0)_{x_A}} = \left[1+\frac{\partial \mathcal{T}_e}{\partial t_A}\right]^{-1} = 1-\frac{\partial \mathcal{T}_r}{\partial t_B}, \tag{2.53}$$

*où $\mathcal{T}_e$ and $\mathcal{T}_r$ sont prises en $(t_A, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B)$ et $(t_B, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B)$, respectivement.*

**Remarque 6** : Ce théorème nous montre donc qu'il est donc possible de résoudre tous les problèmes théoriques concernant la direction des rayons lumineux lorsque nous déterminons explicitement au moins l'une des deux fonctions de transfert de temps.

**Remarque 7** : Le rapport (2.53) est important dans les problèmes de décalage de fréquence. En effet, considérons deux horloges idéales, $O_A$ et $O_B$, délivrant des fréquences propres $\nu_A$ et $\nu_B$ respectivement en $x_A$ et en $x_B$ ; supposons ensuite que $O_A$ émette un photon vers $O_B$. Le décalage gravitationnel des fréquences $\delta\nu/\nu$ entre $O_A$ et $O_B$ se calcule en déterminant le rapport $\nu_A/\nu_B$ donné par la formule [82]

$$\frac{\nu_A}{\nu_B} = \frac{u^{\mu}_A (l_{\mu})_A}{u^{\mu}_B (l_{\mu})_B}, \tag{2.54}$$

ce que nous pouvons encore écrire

$$\frac{\nu_A}{\nu_B} = \frac{u^0_A}{u^0_B}\,\frac{(l_0)_A}{(l_0)_B}\,\frac{q_A}{q_B}, \quad q_A = 1+\frac{1}{c}\hat{\boldsymbol{l}}_A\cdot\boldsymbol{v}_A, \quad q_B = 1+\frac{1}{c}\hat{\boldsymbol{l}}_B\cdot\boldsymbol{v}_B, \tag{2.55}$$

**Cas d'un espace-temps stationnaire**

Considérons un espace-temps stationnaire (voire statique) ; nous pouvons toujours choisir des coordonnées $(x^\mu)$ telles que la métrique ne dépende pas explicitement de $x^0 = ct$, nous constatons alors aisément que la fonction d'univers est une fonction de $ct_B - ct_A$, $\boldsymbol{x}_A$ et $\boldsymbol{x}_B$, et les deux fonctions de transfert de temps, $\mathcal{T}_e$ et $\mathcal{T}_r$ introduites précédemment, sont identiques. Les définitions (2.42) se réduisent donc à une seule expression de la forme

$$t_B - t_A = \mathcal{T}(\boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B)\,. \tag{2.56}$$

Comme $\mathcal{T}$ dépend seulement de $\boldsymbol{x}_A$ and $\boldsymbol{x}_B$, nous déduisons immédiatement des équations (2.51)-(2.53) que les rapports $(\widetilde{l_\mu})_A$ et $(\widetilde{l_\mu})_B$ sont définis par

$$(\widetilde{l_0})_A = 1, \quad (\widetilde{l_i})_A = c\,\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial x_A^i}(\boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B)\,, \tag{2.57}$$

et

$$(\widetilde{l_0})_B = 1, \quad (\widetilde{l_i})_B = -\,c\,\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial x_B^i}(\boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B)\,. \tag{2.58}$$

Ces rapports correspondent à un choix de paramètre affine, tel que $\widetilde{l_0} = 1$ le long du rayon lumineux ; soulignons le fait qu'un tel paramètre ne coïncide pas en général avec le paramètre affine $\lambda$ introduit en début de chapitre.

### 2.3.3 Détermination des fonctions de transfert de temps

**Equations iconales satisfaites par $\mathcal{T}_r$ et $\mathcal{T}_e$**

Lorsque les événements $x_A$ et $x_B$ sont reliés par un rayon lumineux, le caractère isotrope de la courbe géodésique se traduit par les relations suivantes

$$g^{\alpha\beta}(x_A)(l_\alpha)_{x_A}(l_\beta)_{x_A} = 0\,, \tag{2.59}$$

et

$$g^{\alpha\beta}(x_B)(l_\alpha)_{x_B}(l_\beta)_{x_B} = 0\,, \tag{2.60}$$

où les quantités $l_\mu$ représentent les composantes du vecteur tangent à la courbe géodésique respectivement en $x_A$ et $x_B$.

En développant ces relations et en factorisant par la composante $l_0$, nous obtenons les égalités suivantes

$$g^{00}(x_A) + 2g^{0i}(x_A)\left(\frac{l_i}{l_0}\right)_{x_A} + g^{ij}(x_A)\left(\frac{l_i}{l_0}\right)_{x_A}\left(\frac{l_j}{l_0}\right)_{x_A} = 0\,, \tag{2.61}$$

et

$$g^{00}(x_B) + 2g^{0i}(x_B)\left(\frac{l_i}{l_0}\right)_{x_B} + g^{ij}(x_B)\left(\frac{l_i}{l_0}\right)_{x_B}\left(\frac{l_j}{l_0}\right)_{x_B} = 0\,. \tag{2.62}$$

En utilisant les résultats du théorème 1, nous pouvons remplacer les rapports de composantes covariantes des vecteurs $l$ par les fonctions de transfert de temps dans les équations (2.61) et (2.62).

Ainsi, les équations satisfaites par $\mathcal{T}_e(t_A, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B)$ s'obtiennent sous la forme suivante

$$g^{00}(x_A) + 2cg^{0i}(x_A)\frac{\partial \mathcal{T}_e}{\partial x_A^i}\left(1 + \frac{\partial \mathcal{T}_e}{\partial t_A}\right)^{-1} + c^2 g^{ij}(x_A)\frac{\partial \mathcal{T}_e}{\partial x_A^i}\frac{\partial \mathcal{T}_e}{\partial x_A^j}\left(1 + \frac{\partial \mathcal{T}_e}{\partial t_A}\right)^{-2} = 0\,, \tag{2.63}$$

et

$$g^{00}(x_B) - 2cg^{0i}(x_B)\frac{\partial \mathcal{T}_e}{\partial x_B^i} + c^2 g^{ij}(x_B)\frac{\partial \mathcal{T}_e}{\partial x_B^i}\frac{\partial \mathcal{T}_e}{\partial x_B^j} = 0\,. \tag{2.64}$$

Soulignons que l'équation (2.64) a été obtenue antérieurement [2] dans des travaux prouvant la validité du principe de Fermat en relativité [92, 57, 52, 67, 68, 2].

D'une manière strictement équivalente, nous déduisons les équations satisfaites par la fonction de transfert de temps en réception $\mathcal{T}_r(t_B, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B)$ telle que

$$g^{00}(x_A) + 2cg^{0i}(x_A)\frac{\partial \mathcal{T}_r}{\partial x_A^i} + c^2 g^{ij}(x_A)\frac{\partial \mathcal{T}_r}{\partial x_A^i}\frac{\partial \mathcal{T}_r}{\partial x_A^j} = 0\,, \tag{2.65}$$

et

$$g^{00}(x_B) - 2cg^{0i}(x_B)\frac{\partial \mathcal{T}_r}{\partial x_B^i}\left(1 - \frac{\partial \mathcal{T}_r}{\partial t_B}\right)^{-1} + c^2 g^{ij}(x_B)\frac{\partial \mathcal{T}_r}{\partial x_B^i}\frac{\partial \mathcal{T}_r}{\partial x_B^j}\left(1 - \frac{\partial \mathcal{T}_r}{\partial t_B}\right)^{-2} = 0\,. \tag{2.66}$$

Nous verrons dans la partie 3 que les équations (2.64) et (2.65) sont à la base d'un développement post-minkowskien généralisé des fonctions de transfert de temps.

**Inversion de la fonction d'univers en champ faible**

Il est en principe possible de déterminer les fonctions de transfert de temps $\mathcal{T}_e$ et $\mathcal{T}_r$ à partir de la connaissance de la fonction d'univers $\Omega(x_A, x_B)$ ; à cet effet, il faut inverser l'équation

$$\Omega(ct_A, \boldsymbol{x}_A, ct_B, \boldsymbol{x}_B) = 0\,. \tag{2.67}$$

Il est cependant important de remarquer, que résoudre l'équation (2.67), pour $t_B$ par exemple, conduit à deux solutions distinctes $t_B^+$ et $t_B^-$ puisque la courbe de genre temps $x^i = x_B^i$ intersecte le cône de lumière $C(x_A)$ en deux points $x_B^+$ et $x_B^-$, $x_B^+$ étant dans le futur de $x_B^-$. Mais si $x_A$ est considéré comme l'événement d'émission du signal et $x_B$ comme un événement de réception, nous sommes contraints de nous intéresser exclusivement à la détermination de $t_B^+ - t_A$ ; de plus, il est clair que la détermination de $t_B^- - t_A$ suit la même méthodologie. Ainsi, dans un souci de brièveté d'écriture, nous noterons $t_B$ en lieu et place de $t_B^+$.

Ainsi, nous avons vu au paragraphe précédent que la fonction d'univers pouvait s'écrire dans l'approximation des champs faibles

$$\Omega = \Omega^{(0)} + \Omega^{(h)}\,. \tag{2.68}$$

Or, il est clair qu'en étudiant $\Omega^{(0)}$, il découle que

$$\Omega^{(0)} = \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}(x_B^\mu - x_A^\mu)(x_B^\nu - x_A^\nu) = c^2(t_B - t_A)^2 - R_{AB}^2\,, \tag{2.69}$$

où $R_{AB} = |\boldsymbol{x}_B - \boldsymbol{x}_A|$.
Ainsi, l'inversion des fonctions d'univers (2.67) nous conduit à l'égalité suivante

$$c^2(t_B - t_A)^2 = R_{AB}^2 - 2\Omega^{(h)}\,. \tag{2.70}$$

Il est maintenant aisé d'introduire dans l'équation (2.70) les deux fonctions de transfert de temps. Il vient

$$c^2\mathcal{T}_e^2 = R_{AB}^2 - 2\Omega^{(h)}(x_A^0, \boldsymbol{x}_A, x_A^0 + c\mathcal{T}_e, \boldsymbol{x}_B)\,, \tag{2.71}$$

et

$$c^2\mathcal{T}_r^2 = R_{AB}^2 - 2\Omega^{(h)}(x_B^0 - c\mathcal{T}_r, \boldsymbol{x}_A, x_B^0, \boldsymbol{x}_B)\,. \tag{2.72}$$

Il est donc évident que tout le problème consiste à trouver une solution pour les équations (2.71) et (2.72) de la forme

$$\mathcal{T}_e(t_A, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B) = \frac{R_{AB}}{c} + O(h) \quad \text{et} \quad \mathcal{T}_r(t_B, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B) = \frac{R_{AB}}{c} + O(h)\,. \tag{2.73}$$

## 2.4 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons présenté un objet introduit par Synge en relativité, la fonction d'univers. A partir du principe variationnel définissant les géodésiques, nous avons démontré des propriétés de $\Omega$ utiles pour l'astrométrie ; en effet, nous avons établi que la fonction d'univers permet de décrire la propagation de la lumière entre deux événements distincts $x_A$ et $x_B$, en donnant accès à deux quantités fondamentales :

- au temps coordonné de propagation du photon $t_B - t_A$ entre $x_A$ et $x_B$, par l'intermédiaire de la propriété 4,
- aux vecteurs, respectivement tangent à la géodésique isotrope $\Gamma_{AB}$ en $x_A$ et $x_B$, par l'intermédiaire de la propriété 1 si et seulement si la propriété 4 est satisfaite ; ceci permet donc de déterminer les rapports $\hat{l}_i$, utiles aux calculs de distance angulaire.

Ensuite, nous avons proposé d'introduire deux fonctions rendant compte du temps coordonné de propagation de la lumière entre un événement d'émission $x_A$ et de réception $x_B$ : les fonctions de transfert de temps d'émission $\mathcal{T}_e$ et de réception $\mathcal{T}_r$.
Nous avons établi une propriété importante de ces fonctions. En effet, nous avons montré que la connaissance des fonctions de transfert de temps permet de calculer trois rapports de composantes covariantes des vecteurs respectivement tangent à la géodésique $\Gamma_{AB}$ en $x_A$ et en $x_B$. Ici encore, le théorème 1, qui en découle, permet de calculer les rapports $\hat{l}_i$.

Enfin, nous avons donné les méthodes permettant de déterminer $\Omega$, $\mathcal{T}_e$ et $\mathcal{T}_r$ dans le cadre des champs gravitationnels faibles. Ainsi, nous avons souligné l'existence de deux méthodes différentes concernant la détermination des fonctions de transfert de temps. Tout d'abord, la connaissance de la fonction d'univers $\Omega$ permet de calculer les deux fonctions de transfert de temps en inversant $\Omega(ct_A, \boldsymbol{x}_A, ct_B, \boldsymbol{x}_B) = 0$, issue de la propriété 4. Ensuite, nous avons montré que l'utilisation du théorème 1 et des équations iconales (2.59-2.60) permet de construire quatre équations aux dérivées partielles : deux pour la fonction de transfert de temps d'émission $\mathcal{T}_e$ et également deux pour la fonction de transfert de temps de réception $\mathcal{T}_r$.

Cependant, lors de la présentation de ces méthodes de détermination de $\Omega$, $\mathcal{T}_e$ et $\mathcal{T}_r$, il est apparu qu'il fallait connaître le chemin géodésique $\Gamma_{AB}$ entre $x_A$ et $x_B$. Les parties 2 et 3 de ce travail seront consacrées aux différentes approximations de la théorie des champs faibles :

- la partie 2 sera dédiée à l'approximation post-newtonienne, où l'on montrera qu'en réalité il n'est pas nécessaire de connaître la courbe géodésique $\Gamma_{AB}$ pour déterminer à la fois $\Omega$, $\mathcal{T}_e$ et $\mathcal{T}_r$.
- la partie 3 détaillera des résultats à l'approximation post-minkowskienne généralisée [54], où là encore la connaissance explicite de $\Gamma_{AB}$ est inutile ; on montrera que seule la droite minkowskienne $\Gamma_{AB}^{(0)}$ a de l'importance dans le calcul de $\Omega$, $\mathcal{T}_e$ et $\mathcal{T}_r$.

# Deuxième partie

# Développements à l'approximation post-newtonienne.

# Chapitre 3

# Fonctions d'univers, de transfert de temps et distance angulaire en formalisme PPN

## 3.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'expression de la fonction d'univers $\Omega$, des fonctions de transfert de temps ainsi qu'à la détermination de la distance angulaire dans le cadre de l'approximation post-newtonienne paramétrée (PPN). En premier lieu, dans le paragraphe 3.2, nous rappelons les hypothèses de l'approximation post-newtonienne ; en particulier, dans la section 3.2.1, nous donnons l'expression des composantes du tenseur métrique que nous utiliserons tout au long de la partie 2 de ce travail. Dans le paragraphe 3.3, nous donnons l'expression de la fonction d'univers $\Omega$ en formalisme PPN ; nous montrons que cette détermination est possible sans avoir besoin de la connaissance explicite de la géodésique reliant $x_A$ et $x_B$, la droite minkowskienne reliant ces deux événements étant la seule donnée utile. Dans le paragraphe 3.4, nous inversons l'équation $\Omega = 0$ afin de construire l'expression PPN des deux fonctions de transfert de temps $\mathcal{T}_r$ et $\mathcal{T}_e$. Enfin, le paragraphe 3.5 est dédié à la détermination PPN de la distance angulaire entre deux sources lumineuses, telle qu'elle est mesurée par un observateur en mouvement.

## 3.2 L'approximation post-newtonienne

Le système solaire est un champ gravitationnel faible. La métrique d'espace-temps s'écrit alors

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}\,, \tag{3.1}$$

où $\eta$ est la métrique plate de Minkowski et $h$ une perturbation. De plus, on suppose que les planètes ont des mouvements lents ($v^2 << c^2$) et sont des *corps autogravitants*, c'est-à-dire que leurs orbites sont maintenues dans un état de liaison gravitationnelle. Les équations de la dynamique newtonienne montrent que le carré de la vitesse d'un corps autogravitant satisfait la relation

$$v^2 \approx U \equiv \frac{GM}{r}\,, \tag{3.2}$$

ce qui entraîne

$$\frac{v^2}{c^2} \approx \frac{GM}{c^2 r}\,. \tag{3.3}$$

Ensuite, le Soleil et les planètes sont des objets étendus, dont la physique est décrite par des paramètres comme leur pression interne $p$ ou leur densité d'énergie spécifique $\Pi$. Ces paramètres sont supposés

du même ordre de grandeur que le potentiel gravitationnel, ce qui nous conduit aux approximations suivantes

$$\frac{p}{\rho} \approx \Pi \approx U\,, \tag{3.4}$$

où $\rho$ est la densité de masse des corps.

En tenant compte des approximations (3.2-3.4), les potentiels $h_{\mu\nu}$ de la métrique (3.1) peuvent se développer en puissance de $1/c$ de la manière suivante

$$\begin{aligned} h_{00} &= \frac{1}{c^2}h_{00}^{(2)} + \frac{1}{c^4}h_{00}^{(4)} + O\left(\frac{1}{c^6}\right), \\ h_{0i} &= \frac{1}{c^3}h_{0i}^{(3)} + O\left(\frac{1}{c^5}\right), \\ h_{ij} &= \frac{1}{c^2}h_{ij}^{(2)} + O\left(\frac{1}{c^4}\right). \end{aligned} \tag{3.5}$$

### 3.2.1 tenseur métrique PPN

La relativité n'est pas la seule théorie possible de la gravitation. Cependant, même si ces théories sont de nature très différente, leur limite post-newtonienne est très similaire. L'introduction de paramètres post-newtoniens est alors une solution pour distinguer ces théories. Il en résulte un formalisme : l'approximation post-newtonienne paramétrée PPN [93] qui fait intervenir une dizaine de paramètres, dont $\gamma$ et $\beta$ égaux à 1 en relativité générale. Ces paramètres interviennent en particulier dans l'expression des potentiels $h_{\mu\nu}$.

Le but de cette section est de présenter ces potentiels [62, 85], que nous utiliserons dans la suite de ce travail. En grande partie, nous suivons le formalisme originel [93] avec la prise en compte de récentes extensions [40][1].

Nous supposons que la matière se décrit comme un fluide parfait, le tenseur énergie-impulsion s'écrit sous la forme suivante

$$T^{\mu\nu} = \rho c^2\left[1 + \frac{1}{c^2}\left(\Pi + \frac{p}{\rho}\right)\right]u^\mu u^\nu - p g^{\mu\nu}\,,$$

où $\rho$ est la densité de masse, $\Pi$ l'énergie spécifique de densité, $p$ est la pression du fluide et $u^\mu$ est la quadri-vitesse unitaire du fluide. En introduisant la notation $\boldsymbol{v}$ pour décrire la vitesse coordonnée d'un élément de fluide $d\boldsymbol{x}/dt$, nous pouvons écrire la densité conservative de masse $\rho^*$ sous la forme suivante

$$\rho^* = \rho\sqrt{-g}u^0 = \rho\left[1 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}v^2 + 3\gamma U\right) + O\left(\frac{1}{c^4}\right)\right], \tag{3.6}$$

où $g = \det(g_{\mu\nu})$ et $U$ est l'équivalent du potentiel newtonien

$$U(x^0, \boldsymbol{x}) = G\int \frac{\rho^*(x^0, \boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|}d^3\boldsymbol{x}'\,. \tag{3.7}$$

Ensuite, nous introduisons une deuxième différence avec le formalisme PPN habituel au niveau du système de coordonnées utilisé. En effet, nous recherchons une représentation plus légère des termes

[1] Nous utilisons la notation $\boldsymbol{v}_r$ pour la vitesse du centre de masse O par rapport au reste de l'univers. Cette vitesse est notée $\boldsymbol{w}$ dans la référence [93]

gravitomagnétiques des potentiels $h_{0i}$ ; pour ce faire, notre système de coordonnées diffère de la jauge post-newtonienne standard de Will & Nordtvedt par la transformation suivante

$$x^0 = \overline{x}^0 + \frac{1}{c^3}\left[(1 + 2\xi + \alpha_2 - \zeta_1)\partial_t\chi - 2\alpha_2 \boldsymbol{v}_r \cdot \boldsymbol{\nabla}\chi\right], \quad x^i = \overline{x}^i, \tag{3.8}$$

où $\chi$ est le superpotentiel défini par

$$\chi(x^0, \boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}G \int \rho^*(x^0, \boldsymbol{x}')\, |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|\, d^3\boldsymbol{x}'. \tag{3.9}$$

Par ailleurs, nous définissons la densité $\widehat{\rho}$ par

$$\begin{aligned}\widehat{\rho} \;=\; \rho^*\Bigg[1 + \frac{1}{2}(2\gamma + 1 - 2\xi + \alpha_3 + \zeta_1)\frac{v^2}{c^2} + (1 - 2\beta + \xi + \zeta_2)\frac{U}{c^2} + (1 + \zeta_3)\frac{\Pi}{c^2} + (3\gamma - 2\xi + 3\zeta_4)\frac{p}{\rho^* c^2} \\ - \frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_3)\frac{v_r^2}{c^2} - \frac{1}{2}(\alpha_1 - 2\alpha_3)\frac{\boldsymbol{v}_r \cdot \boldsymbol{v}}{c^2} + O\left(\frac{1}{c^4}\right)\Bigg].\end{aligned} \tag{3.10}$$

Sous ces hypothèses, nos potentiels post-newtoniens s'écrivent de la façon suivante

$$h_{00} = -\frac{2}{c^2}w + \frac{2\beta}{c^4}w^2 + \frac{2\xi}{c^4}\phi_W + \frac{1}{c^4}(\zeta_1 - 2\xi)\phi_v - \frac{2\alpha_2}{c^4}v_r^i v_r^j \partial_{ij}\chi + O\left(\frac{1}{c^6}\right), \tag{3.11}$$

$$\boldsymbol{h} \equiv \{h_{0i}\} = \frac{2}{c^3}\left[\left(\gamma + 1 + \frac{1}{4}\alpha_1\right)\boldsymbol{w} + \frac{1}{4}\alpha_1 w \boldsymbol{v}_r\right] + O\left(\frac{1}{c^5}\right), \tag{3.12}$$

$$h_{ij} = -\frac{2\gamma}{c^2}w\delta_{ij} + O\left(\frac{1}{c^4}\right), \tag{3.13}$$

où

$$w(x^0, \boldsymbol{x}) = G\int \frac{\widehat{\rho}(x^0, \boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} d^3\boldsymbol{x}' + \frac{1}{c^2}\left[(1 + 2\xi + \alpha_2 - \zeta_1)\partial_{tt}\chi - 2\alpha_2 \boldsymbol{v}_r \cdot \boldsymbol{\nabla}(\partial_t\chi)\right], \tag{3.14}$$

$$\phi_W(x^0, \boldsymbol{x}) = G^2 \int \frac{\rho^*(x^0, \boldsymbol{x}')\rho^*(x^0, \boldsymbol{x}'')(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|^3} \cdot \left(\frac{\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}''}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}''|} - \frac{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}''}{|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}''|}\right) d^3\boldsymbol{x}' d^3\boldsymbol{x}'', \tag{3.15}$$

$$\phi_v(x^0, \boldsymbol{x}) = G\int \frac{\rho^*(x^0, \boldsymbol{x}')[\boldsymbol{v}(x^0, \boldsymbol{x}') \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')]^2}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|^3} d^3\boldsymbol{x}', \tag{3.16}$$

$$\boldsymbol{w}(x^0, \boldsymbol{x}) = G\int \frac{\rho^*(x^0, \boldsymbol{x}')\boldsymbol{v}(x^0, \boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} d^3\boldsymbol{x}'. \tag{3.17}$$

## 3.3 Expression PPN de la fonction d'univers

Au paragraphe 3.4 du chapitre précédent, nous avons donné la forme intégrale (2.39) de la fonction d'univers en champ faible. Nous pouvons donc ici utiliser ce résultat en l'appliquant au cas particulier du formalisme PPN. Tout d'abord, nous avions remarqué que la connaissance de la géodésique $\Gamma_{AB}$ était a priori nécessaire à la détermination de $\Omega$ dans l'équation (2.39). Cependant, en considérant les équations d'Euler-Lagrange satisfaites par toute courbe géodésique

$$\frac{d}{d\lambda}\left(g_{\alpha\beta}\frac{dx^\beta}{d\lambda}\right) = \frac{1}{2}\partial_\alpha h_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}\,, \tag{3.18}$$

et en prenant en compte la paramétrisation (2.36) de $\Gamma_{AB}$, nous remarquons que $X^\mu(\lambda) = O(1/c^2)$ et que $dx^\mu/d\lambda = x_B^\mu - x_A^\mu + O(1/c^2)$. En conséquence, les potentiels gravitationnels s'écrivent dès lors

$$h_{\mu\nu}(x^\alpha(\lambda)) = h_{\mu\nu}(x^\alpha_{(0)}(\lambda)) + O\left(\frac{1}{c^4}\right), \tag{3.19}$$

où $x^\alpha_{(0)}(\lambda)$ est la paramétrisation de la ligne droite $\Gamma^{(0)}_{AB}$.

Nous en déduisons que les troisième et quatrième termes du membre de droite de l'équation (2.39) donnant $\Omega$ sont d'ordre $O(1/c^4)$. Nous arrivons donc au développement suivant

$$\Omega(x_A, x_B) = \Omega^{(0)}(x_A, x_B) + \Omega^{(PN)}(x_A, x_B) + O\left(\frac{1}{c^4}\right), \tag{3.20}$$

avec $\Omega^{(0)}(x_A, x_B)$ la fonction d'univers minkowskienne définie par (2.35) et

$$\begin{aligned}\Omega^{(PN)}(x_A, x_B) = {} & \frac{1}{2c^2}(x_B^0 - x_A^0)^2 \int_0^1 h^{(2)}_{00}(x^\alpha_{(0)}(\lambda))d\lambda \\ & + \frac{1}{2c^2}(x_B^i - x_A^i)(x_B^j - x_A^j)\int_0^1 h^{(2)}_{ij}(x^\alpha_{(0)}(\lambda))d\lambda \\ & + \frac{1}{c^3}(x_B^0 - x_A^0)(x_B^i - x_A^i)\int_0^1 h^{(3)}_{0i}(x^\alpha_{(0)}(\lambda))d\lambda\,,\end{aligned} \tag{3.21}$$

les intégrales étant calculées le long de la ligne "droite" $\Gamma^{(0)}_{AB}$ définie par l'équation (2.34).

Les formules (3.20) et (3.21) constituent l'expression générale de la fonction d'univers jusqu'à l'ordre $1/c^3$ dans le cadre le l'approximation post-newtonienne. Soulignons que cette formulation de la fonction d'univers correspond à un calcul antérieur de Synge dans le cadre de l'approximation linéaire des champs faibles [82].
Concernant le cas du formalisme PPN, en substituant les expressions (3.11)-(3.17) aux potentiels $h_{\mu\nu}$ dans l'équation (3.21) nous obtenons l'expression de la fonction d'univers $\Omega(x_A, x_B)$ sous la forme suivante [62, 85]

$$\Omega^{(PN)}(x_A, x_B) = \Omega^{(PN)}_w(x_A, x_B) + \Omega^{(PN)}_{\boldsymbol{w}}(x_A, x_B) + \Omega^{(PN)}_{\boldsymbol{v}_r}(x_A, x_B)\,, \tag{3.22}$$

où

$$\Omega^{(PN)}_w(x_A, x_B) = -\frac{1}{c^2}\left[(x_B^0 - x_A^0)^2 + \gamma R_{AB}^2\right]\int_0^1 w(x^\alpha_{(0)}(\lambda))d\lambda\,, \tag{3.23}$$

$$\Omega^{(PN)}_{\boldsymbol{w}}(x_A, x_B) = \frac{2}{c^3}\left(\gamma + 1 + \frac{1}{4}\alpha_1\right)(x_B^0 - x_A^0)\boldsymbol{R}_{AB}\cdot\int_0^1 \boldsymbol{w}(x^\alpha_{(0)}(\lambda))d\lambda\,, \tag{3.24}$$

$$\Omega^{(PN)}_{\boldsymbol{v}_r}(x_A, x_B) = \frac{1}{2c^3}\alpha_1(x_B^0 - x_A^0)(\boldsymbol{R}_{AB}\cdot\boldsymbol{v}_r)\int_0^1 w(x^\alpha_{(0)}(\lambda))d\lambda\,, \tag{3.25}$$

avec $\boldsymbol{R}_{AB} = \boldsymbol{x}_B - \boldsymbol{x}_A$ et toutes les intégrales calculées le long de la ligne droite (2.34).

## 3.4 Expression PPN des fonctions de transfert de temps

Pour déterminer les fonctions de transfert de temps, nous allons utiliser l'une des deux méthodes évoquées au chapitre précédent : l'inversion de la fonction d'univers. Ainsi, en appliquant la condition (2.67) sur $\Omega$, l'équation (3.20) peut se développer telle que

$$\Omega^{(0)}(x_A, x_B) + \Omega^{(PN)}(x_A, x_B) = O\left(\frac{1}{c^4}\right).$$

La forme explicite de $\Omega^{(0)}(x_A, x_B)$ nous conduit à écrire que

$$\Omega^{(0)} = \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}(x_B^\mu - x_A^\mu)(x_B^\nu - x_A^\nu) = c^2(t_B - t_A)^2 - R_{AB}^2 . \tag{3.26}$$

Nous pouvons donc en déduire la relation suivante

$$t_B - t_A = \frac{1}{c}R_{AB} - \frac{\Omega^{(PN)}(ct_A, \boldsymbol{x}_A, ct_B, \boldsymbol{x}_B)}{cR_{AB}} + O\left(\frac{1}{c^5}\right). \tag{3.27}$$

En remplaçant $t_B - t_A$ par les fonctions de transfert de temps, il est maintenant possible de construire les équations qui permettent de les déterminer. Ainsi, le transfert de temps en émission se calcule suivant

$$\mathcal{T}_e(t_A, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B) = \frac{1}{c}R_{AB} - \frac{\Omega^{(PN)}(ct_A, \boldsymbol{x}_A, ct_A + R_{AB}, \boldsymbol{x}_B)}{cR_{AB}} + O\left(\frac{1}{c^5}\right). \tag{3.28}$$

et pour le transfert en réception, nous arrivons à

$$\mathcal{T}_r(t_B, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B) = \frac{1}{c}R_{AB} - \frac{\Omega^{(PN)}(ct_B - R_{AB}, \boldsymbol{x}_A, ct_B, \boldsymbol{x}_B)}{cR_{AB}} + O\left(\frac{1}{c^5}\right). \tag{3.29}$$

Ces dernières formules nous montrent que les deux fonctions de transfert de temps peuvent donc être calculées explicitement jusqu'à l'ordre $1/c^4$ lorsque $\Omega^{(PN)}(x_A, x_B)$ est connue. Par ailleurs, les équations (3.28) et (3.29) permettent d'établir des relations entre $\mathcal{T}_e$ et $\mathcal{T}_r$ telles que

$$\mathcal{T}_r(t_B, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B) = \mathcal{T}_e\left(t_B - \frac{R_{AB}}{c}, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B\right) + O\left(\frac{1}{c^5}\right) \tag{3.30}$$

et réciproquement,

$$\mathcal{T}_e(t_A, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B) = \mathcal{T}_r\left(t_A + \frac{R_{AB}}{c}, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B\right) + O\left(\frac{1}{c^5}\right). \tag{3.31}$$

Les quantités $\Omega^{(PN)}(ct_A, \boldsymbol{x}_A, ct_A + R_{AB}, \boldsymbol{x}_B)$ intervenant dans l'expression (3.28) peuvent être écrites explicitement en substituant $R_{AB}$ et $R_{AB}\lambda + ct_A$ à $x_B^0 - x_A^0$ et $x_{(0)}^0(\lambda)$ respectivement dans l'équation (3.21). En conséquence, nous obtenons

$$\mathcal{T}_e(t_A, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B) = \frac{R_{AB}}{c} - \frac{R_{AB}}{2c^3}\int_0^1 \left[h_{00}^{(2)}(z_+^\alpha(\lambda)) + h_{ij}^{(2)}(z_+^\alpha(\lambda))N^iN^j + \frac{2}{c}h_{0i}^{(3)}(z_+^\alpha(\lambda))N^i\right]d\lambda + O\left(\frac{1}{c^5}\right), \tag{3.32}$$

l'intégrale étant calculée le long de la courbe $\Gamma_{AB}^{(0)+}$ définie par les équations paramétriques $x^\alpha = z_+^\alpha(\lambda)$ où

$$z_+^0(\lambda) = R_{AB}\lambda + ct_A\,, \quad z_+^i(\lambda) = R_{AB}N^i\lambda + x_A^i\,, \quad 0 \le \lambda \le 1\,, \tag{3.33}$$

avec les notations

$$R_{AB} = |\boldsymbol{R}_{AB}|\,, \qquad N^i = \frac{x_B^i - x_A^i}{R_{AB}}\,. \tag{3.34}$$

Remarquons encore une fois que $\Gamma_{AB}^{(0)+}$ est une géodésique isotrope de Minkowski issue de $x_A$, et que les quantités $N^i$ correspondent à la direction unitaire entre $\boldsymbol{x}_A$ et $\boldsymbol{x}_B$.

En raisonnant de manière analogue sur la quantité $\Omega^{(PN)}(ct_B - R_{AB}, \boldsymbol{x}_A, ct_B, \boldsymbol{x}_B)$ de (3.29), le transfert de temps en réception admet l'expression de $\mathcal{T}_r$ suivante

$$\mathcal{T}_r(t_B, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B) = \frac{R_{AB}}{c} - \frac{R_{AB}}{2c^3}\int_0^1 \left[h_{00}^{(2)}(z_-^\alpha(\lambda)) + h_{ij}^{(2)}(z_-^\alpha(\lambda))N^iN^j + \frac{2}{c}h_{0i}^{(3)}(z_-^\alpha(\lambda))N^i\right]d\lambda + O\left(\frac{1}{c^5}\right)\,, \tag{3.35}$$

l'intégrale étant calculée le long de la courbe $\Gamma_{AB}^{(0)-}$ définie par les équations paramétriques $x^\alpha = z_-^\alpha(\lambda)$ où

$$z_-^0(\lambda) = -R_{AB}\lambda + ct_B\,, \quad z_-^i(\lambda) = -R_{AB}N^i\lambda + x_B^i\,, \quad 0 \le \lambda \le 1\,. \tag{3.36}$$

Notons enfin que la courbe $\Gamma_{AB}^{(0)-}$ est une géodésique isotrope de la métrique de Minkowski issue de $x_B$ et que les quantités $N^i$ correspondent à la direction unitaire entre $\boldsymbol{x}_A$ et $\boldsymbol{x}_B$.

Dans le cadre du formalisme PPN, la fonction de transfert de temps d'émission s'obtient en substituant les expressions (3.11)-(3.17) aux potentiels $h_{\mu\nu}$ dans l'équation (3.32). Il vient assez aisément que $\mathcal{T}_e$ s'écrit [85]

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_e(t_A, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B) = {}& \frac{1}{c}R_{AB} + \frac{1}{c^3}(\gamma+1)R_{AB}\int_0^1 w(z_+^\alpha(\lambda))d\lambda \\ & -\frac{2}{c^4}\boldsymbol{R}_{AB}\cdot\left[(\gamma+1+\frac{1}{4}\alpha_1)\int_0^1 \boldsymbol{w}(z_+^\alpha(\lambda))d\lambda + \frac{1}{4}\alpha_1\boldsymbol{v}_r\int_0^1 w(z_+^\alpha(\lambda))d\lambda\right] + O\left(\frac{1}{c^5}\right)\,,\end{aligned} \tag{3.37}$$

les intégrales étant calculées le long de $\Gamma_{AB}^{(0)+}$ définie par l'équation (3.33).
Le cas de la fonction de transfert de temps de réception est analogue. En utilisant les potentiels $h_{\mu\nu}$ du formalime PPN, nous obtenons [85]

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_r(t_B, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B) = {}& \frac{1}{c}R_{AB} + \frac{1}{c^3}(\gamma+1)R_{AB}\int_0^1 w(z_-^\alpha(\lambda))d\lambda \\ & -\frac{2}{c^4}\boldsymbol{R}_{AB}\cdot\left[(\gamma+1+\frac{1}{4}\alpha_1)\int_0^1 \boldsymbol{w}(z_-^\alpha(\lambda))d\lambda + \frac{1}{4}\alpha_1\boldsymbol{v}_r\int_0^1 w(z_-^\alpha(\lambda))d\lambda\right] + O\left(\frac{1}{c^5}\right)\,,\end{aligned} \tag{3.38}$$

les intégrales étant calculées le long de $\Gamma_{AB}^{(0)-}$ définie par l'équation (3.36).

Les expressions (3.37) et (3.38) montrent qu'il est possible de calculer les fonctions de transfert de temps sans avoir besoin de connaître explicitement la géodésique isotrope reliant $x_A$ et $x_B$ ; les intégrales, nécessaires aux déterminations de $\mathcal{T}_r$ et $\mathcal{T}_e$, sont en effet calculées le long de la ligne droite $\Gamma_{AB}^{(0)}$ reliant $x_A$ à $x_B$.

## 3.5 Mesure astrométrique en formalisme PPN

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à la détermination de la distance angulaire PPN entre deux étoiles distinctes, telle qu'elle est mesurée en $x_r = (ct_r, \boldsymbol{x}_r)$ par un observateur en mouvement. Pour ce faire, reprenons les formules générales d'angle (1.22) établies au chapitre 2. Supposons l'existence de deux sources lumineuses distinctes $x_e = (ct_e, \boldsymbol{x}_e)$ et $x'_e = (ct'_e, \boldsymbol{x}'_e)$, situées à une distance finie de l'origine des coodonnées. Dans l'espace-temps plat de Minkowski, la direction entre $x_e$ et l'observateur $x_r$ est notée $\boldsymbol{N}$, respectivement la direction entre $x'_e$ et l'observateur $x_r$ est notée $\boldsymbol{N}'$. Les rapports astrométriques admettent les développements post-newtoniens suivants,

$$\hat{\boldsymbol{l}}_{x_r} = \{\hat{l}_i\}_{x_r} = -\boldsymbol{N} + \boldsymbol{\lambda}\,, \qquad \boldsymbol{N} = \{N^i\} = \frac{\boldsymbol{x}_r - \boldsymbol{x}_e}{|\boldsymbol{x}_r - \boldsymbol{x}_e|}\,, \qquad \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{x}_e, t_r, \boldsymbol{x}_r)\,, \tag{3.39}$$

et

$$\hat{\boldsymbol{l}}'_{x_r} = \{\hat{l}'_i\}_{x_r} = -\boldsymbol{N}' + \boldsymbol{\lambda}'\,, \quad \boldsymbol{N}' = \{N'^i\} = \frac{\boldsymbol{x}_r - \boldsymbol{x}'_e}{|\boldsymbol{x}_r - \boldsymbol{x}'_e|}\,, \qquad \boldsymbol{\lambda}' = \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{x}'_e, t_r, \boldsymbol{x}_r)\,, \tag{3.40}$$

où les quantités $\boldsymbol{\lambda}$ et $\boldsymbol{\lambda}'$ représentent les contributions gravitationnelles sur la déviation de la lumière à l'approximation post-newtonienne, c'est-à-dire les fonctions de déflexion. Ces dernières se déterminent partir de la connaissance de la fonction d'univers et /ou des fonctions de transfert de temps (propriétés 1 et 4, théorème 1) ; en particulier, les fonctions de déflexion se déduisent de la fonction de transfert de temps de réception $\mathcal{T}_r$ par la formule suivante

$$\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{x}_e, t_r, \boldsymbol{x}_r) = -\,\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}_r}\left[c\,\mathcal{T}(\boldsymbol{x}_e, t_r, \boldsymbol{x}_r) - R_{er}\right] \qquad \text{où} \quad \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}_r} = \left\{\frac{\partial}{\partial x^i_r}\right\}. \tag{3.41}$$

Afin d'obtenir l'expression PPN de la distance angulaire, nous devons substituer les équations (3.39-3.40) et les potentiels (3.11)-(3.17) dans la formule de l'angle (1.22). Ainsi, nous avons

$$g^{ij}(\hat{l}_i - \hat{l}'_i)(\hat{l}_j - \hat{l}'_j) = 2\left(1 - 2\gamma\frac{w}{c^2}\right)\{1 - \boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{N}' - [\boldsymbol{N}' - \boldsymbol{N}]\,[\boldsymbol{\lambda}' - \boldsymbol{\lambda}]\} + O\left(\frac{1}{c^4}\right). \tag{3.42}$$

Par ailleurs, nous obtenons

$$g_{00} + 2g_{0k}\beta^k + g_{kl}\beta^k\beta^l = \left(1 - \boldsymbol{\beta}^2\right)\left(1 - \frac{2W}{c^2}\right) + O\left(\frac{1}{c^4}\right). \tag{3.43}$$

Ensuite, nous arrivons à

$$(1 + \beta^m\hat{l}_m)(1 + \beta^r\hat{l}'_r) = [1 - \boldsymbol{\beta}\cdot(\boldsymbol{N} + \boldsymbol{N}') + (\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{N})\,(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{N}')]\,[1 + \boldsymbol{\beta}.(\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\lambda}')] + O\left(\frac{1}{c^4}\right), \tag{3.44}$$

où $\boldsymbol{\beta}$ est une notation représentant un vecteur dont les composantes sont les quantités $\beta_i$ introduites au chapitre 2. Cette dernière expression doit cependant être inversée ; nous trouvons la relation suivante

$$\frac{1}{(1 + \beta^m\hat{l}_m)(1 + \beta^r\hat{l}'_r)} = \frac{1 - \boldsymbol{\beta}.(\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\lambda}')}{1 - \boldsymbol{\beta}.(\boldsymbol{N} + \boldsymbol{N}') + (\boldsymbol{\beta}.\boldsymbol{N})\,(\boldsymbol{\beta}.\boldsymbol{N}')} + O\left(\frac{1}{c^4}\right) \tag{3.45}$$

Finalement, il suffit d'utiliser les équations (3.42-3.45) dans la formule (1.22) pour obtenir l'expression PPN de la distance angulaire, valide jusqu'en $1/c^4$, sous la forme suivante

$$\sin^2\frac{\phi}{2} = \frac{1}{2}\frac{1 - \boldsymbol{\beta}^2}{(1 - \boldsymbol{\beta}.\boldsymbol{N})\,(1 - \boldsymbol{\beta}.\boldsymbol{N}')}\left\{(1 - \boldsymbol{N}.\boldsymbol{N}')\left[1 - 2(1 + \gamma)\frac{w}{c^2} - \boldsymbol{\beta}.(\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\lambda}')\right]\right.$$
$$\left. - (\boldsymbol{\lambda}' - \boldsymbol{\lambda})\,.\,(\boldsymbol{N}' - \boldsymbol{N}) + O\left(\frac{1}{c^4}\right)\right\}. \tag{3.46}$$

Par ailleurs, nous pouvons introduire l'angle $\phi^{(0)}$, compris dans un intervalle entre 0 et $\pi$ ; cet angle représente la distance angulaire entre deux étoiles dans l'espace-temps plat de Minkowski. L'angle, tel qu'il sera mesuré par l'observateur, admet un développement post-newtonien de la forme

$$\phi = \phi^{(0)} + \phi^{(PN)} + O\left(\frac{1}{c^4}\right), \tag{3.47}$$

où $\phi^{(PN)}$ représente les contributions gravitationnelles post-newtoniennes à la distance angulaire. D'ailleurs, en analysant l'équation (3.46), nous pouvons écrire

$$\sin^2\left(\frac{\phi^{(0)}}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{1-\beta^2}{(1-\boldsymbol{\beta}.\boldsymbol{N})(1-\boldsymbol{\beta}.\boldsymbol{N}')}(1-\boldsymbol{N}.\boldsymbol{N}') \,. \tag{3.48}$$

Nous pouvons déduire des équations (3.46) et (3.48) l'expression suivante

$$\begin{aligned}\sin\frac{\phi}{2} &= \sin\left(\frac{\phi^{(0)}}{2}\right)\sqrt{1-2(1+\gamma)\frac{w}{c^2}-\boldsymbol{\beta}.(\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\lambda}')-\frac{(\boldsymbol{\lambda}'-\boldsymbol{\lambda}).(\boldsymbol{N}'-\boldsymbol{N})}{1-\boldsymbol{N}.\boldsymbol{N}'}} \\ &= \sin\left(\frac{\phi^{(0)}}{2}\right)\left[1-(1+\gamma)\frac{w}{c^2}-\frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}.(\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\lambda}')-\frac{(\boldsymbol{\lambda}'-\boldsymbol{\lambda}).(\boldsymbol{N}'-\boldsymbol{N})}{2(1-\boldsymbol{N}.\boldsymbol{N}')}\right]+O\left(\frac{1}{c^4}\right).\end{aligned} \tag{3.49}$$

Ensuite, il faut noter que les contributions post-newtoniennes $\phi^{(PN)}$ sont petites par rapport à $\phi^{(0)}$. Nous pouvons donc utiliser un développement de Taylor de $\sin(\phi/2)$ au voisinage de $\phi^{(0)}$. Nous avons donc

$$\sin\left(\frac{\phi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\phi^{(0)}}{2}+\frac{\phi^{(PN)}}{2}\right) = \sin\left(\frac{\phi^{(0)}}{2}\right)+\frac{\phi^{(PN)}}{2}\cos\left(\frac{\phi^{(0)}}{2}\right)+O\left(\frac{1}{c^4}\right). \tag{3.50}$$

Il ne reste plus qu'à identifier les termes des équations (3.49) et (3.50). Ce raisonnement nous conduit à l'obtention de la contribution post-newtonienne à la distance angulaire $\phi^{(PN)}$ sous la forme suivante

$$\begin{aligned}\phi^{(PN)} = -\left[1+\frac{\boldsymbol{\beta}.(\boldsymbol{N}+\boldsymbol{N}')}{1+\boldsymbol{N}.\boldsymbol{N}'}\right]\Bigg\{&\sqrt{\frac{1-\boldsymbol{N}.\boldsymbol{N}'}{1+\boldsymbol{N}.\boldsymbol{N}'}}\left[2(1+\gamma)\frac{w}{c^2}+\boldsymbol{\beta}.(\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\lambda}')\right] \\ &+\frac{1}{\sqrt{1-(\boldsymbol{N}.\boldsymbol{N}')^2}}\left[(\boldsymbol{\lambda}'-\boldsymbol{\lambda}).(\boldsymbol{N}'-\boldsymbol{N})\right]\Bigg\}.\end{aligned} \tag{3.51}$$

Nous voyons que l'essentiel du problème est donc de déterminer les fonctions de déflexion qui sont calculables à partir de la connaissance de la fonction de transfert de temps $\mathcal{T}_r$. La formule (3.51) sera utilisée au chapitre suivant lorsque nous étudierons la déviation des rayons lumineux dans le champ gravitationnel d'un corps à symétrie axiale. Elle nous permettra, en particulier, d'obtenir une formule de l'influence de tous les moments multipolaires de masse sur la distance angulaire.

# Chapitre 4

# Déviation de la lumière par un corps à symétrie axiale

## 4.1 Introduction

Ces deux dernières décennies, de nombreux travaux ont été menés pour étudier les propriétés de l'espace-temps engendré par le champ gravitationnel d'un corps à symétrie axiale [83, 84, 86, 64, 63, 7, 6]. Toutefois, l'analyse de la déviation des rayons lumineux au voisinage d'un corps axisymétrique est récente [44, 62, 45]. Or, l'influence des moments multipolaires de masse des planètes géantes du système solaire doit être prise en compte dans la mission GAIA. En particulier, pour un rayon lumineux rasant Jupiter, les déviations induites par les moments $J_2$ et $J_4$ sont de l'ordre de 240 et 10 $\mu$as respectivement. Ainsi a-t-on proposé la mesure de la déflexion de la lumière par le moment quadrupolaire de Jupiter comme un nouveau test local de la relativité générale [55, 56, 17].

L'objet de ce chapitre est de proposer une méthode de calcul explicite des effets de chaque moment multipolaire de masse sur la déviation des rayons lumineux. Dans le paragraphe 4.2, nous présentons le champ gravitationnel d'un corps à symétrie axiale dans le formalisme PPN ; nous donnons notamment dans la section 4.2.1 les développements multipolaires de ce champ de gravitation que nous utiliserons par la suite. Dans le paragraphe 4.3, nous calculons l'expression du temps de vol d'un photon entre un point d'émission $x_e$ et un point de réception $x_r$ ; nous montrons que la fonction de transfert de temps présente une structure multipolaire où interviennent des dérivées successives d'une fonction génératrice, appelée le noyau de Shapiro. Dans le paragraphe 4.4, nous calculons explicitement ces dérivées grâce à l'utilisation de fonctions ultrasphériques, les polynômes de Gegenbauer. Le paragraphe 4.5 est dédié à la détermination explicite de la contribution de chaque moment multipolaire sur la déviation de la lumière en $x_r$ ; nous calculons donc en $x_r$ les fonctions de déflexion. Dans le paragraphe 4.6, nous simplifions cette détermination en supposant que les sources lumineuses sont situées à l'infini spatial. Enfin, dans le paragraphe 4.7, en négligeant tous les effets inférieurs à 1 $\mu$as, nous déterminons la distance angulaire, formée par deux sources lumineuses situées à l'infini spatial, telle qu'elle est mesurée en $x_r$.

## 4.2 Champ de gravitation d'un corps en rotation à symétrie axiale

Considérons un corps isolé à symétrie axiale en rotation lente. Le champ gravitationnel est supposé stationnaire. Nous choisissons le centre de masse O du corps comme origine des coordonnées quasi-cartésiennes et nous supposons que l'axe de symétrie coïncide avec l'axe $x^3$, c'est-à-dire l'axe Oz de vecteur unitaire $\boldsymbol{k}$. Nous allons négliger la rotation du corps dont les effets sur la déviation des rayons lumineux sont inférieurs à 1 $\mu$as pour Jupiter ; les composantes $g_{0i}$ du tenseur métrique ne sont donc pas utilisées dans ce travail. Avec ces hypothèses, les composantes $g_{\mu\nu}$ s'écrivent

$$g_{00} = 1 - \frac{2w}{c^2} + O\left(\frac{1}{c^4}\right), \tag{4.1}$$

$$g_{0i} = O\left(\frac{1}{c^3}\right), \tag{4.2}$$

$$g_{ij} = \left(1 + 2\gamma\frac{w}{c^2}\right)\eta_{ij} + O\left(\frac{1}{c^4}\right), \tag{4.3}$$

où $w$ est le potentiel gravitationnel du corps à symétrie axiale. Nous utiliserons les notations suivantes

$$r = |\boldsymbol{x}|, \quad r_e = |\boldsymbol{x}_e|, \quad r_r = |\boldsymbol{x}_r| \quad \boldsymbol{n}_e = \boldsymbol{x}_e/r_e, \quad \boldsymbol{n}_r = \boldsymbol{x}_r/r_r, \tag{4.4}$$

et

$$\boldsymbol{R}_{er} = \boldsymbol{x}_r - \boldsymbol{x}_e, \quad R_{er} = |\boldsymbol{x}_r - \boldsymbol{x}_e|, \quad \boldsymbol{N}_{er} = \frac{\boldsymbol{R}_{er}}{R_{er}}. \tag{4.5}$$

### 4.2.1 Développements multipolaires des potentiels gravitationnels

A partir des équations post-newtoniennes (3.14)-(3.17), le potentiel gravitationnel $w$ obéit à l'équation de Poisson [62]

$$\nabla^2 w = -4\pi G\hat{\rho}. \tag{4.6}$$

Dans le vide, $w$ admet donc un développement multipolaire

$$w(\boldsymbol{x}) = \frac{GM}{r}\left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left(\frac{\tilde{r}}{r}\right)^n P_n(\cos\theta)\right], \tag{4.7}$$

où $P_n$ sont les polynômes de Legendre, les quantités $M$, $J_2 \ldots J_n \ldots$ correspondent aux moments multipolaires de masse [7] et $\tilde{r}$ est le rayon de la plus petite sphère centrée en O contenant l'ensemble du corps, appelé rayon équatorial. La convergence du développement multipolaire de ce corps est assurée si $r > \tilde{r}$. En prenant en compte l'identité mathématique suivante

$$\frac{\partial^n}{\partial z^n}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{(-1)^n n!}{r^{1+n}} P_n(z/r), \quad z = x^3,$$

nous arrivons à

$$w(\boldsymbol{x}) = GM\left[\frac{1}{r} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} J_n \tilde{r}^n \frac{\partial^n}{\partial z^n}\left(\frac{1}{r}\right)\right]. \tag{4.8}$$

La comparaison de l'équation (4.8) avec l'équation de Poisson (4.6) nous conduit à exprimer la densité $\hat{\rho}$ comme une série multipolaire de la forme

$$\hat{\rho}(\boldsymbol{x}) = M\left[\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}) - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} J_n \tilde{r}^n \frac{\partial^n}{\partial z^n}\delta^{(3)}(\boldsymbol{x})\right], \tag{4.9}$$

$\delta^{(3)}(\boldsymbol{x})$ étant la distribution de Dirac rapporté à l'origine O.

## 4.3 Détermination du temps de vol d'un photon

Considérons un rayon lumineux reliant un point d'émission $x_e = (ct_e, \boldsymbol{x}_e)$ et un point de réception $x_r = (ct_r, \boldsymbol{x}_r)$. Dans un espace-temps stationnaire, le temps de vol $t_r - t_e$ dépend uniquement de $\boldsymbol{x}_e$ et $\boldsymbol{x}_r$. Il existe donc une et une seule fonction de transfert de temps $\mathcal{T}(\boldsymbol{x}_e, \boldsymbol{x}_r)$ telle que

$$t_r - t_e = \mathcal{T}(\boldsymbol{x}_e, \boldsymbol{x}_r)\,. \tag{4.10}$$

La détermination de $\mathcal{T}(\boldsymbol{x}_e, \boldsymbol{x}_r)$ est obtenue en utilisant les équations (3.37) et (3.38) qui, dans le cas stationnaire, se réduisent à

$$\mathcal{T}(\boldsymbol{x}_e, \boldsymbol{x}_r) = \frac{1}{c}R_{er} + \frac{1}{c^3}(\gamma+1)R_{er}\int_0^1 w(\boldsymbol{x}_{(0)}(\lambda))d\lambda + O\left(\frac{1}{c^4}\right), \tag{4.11}$$

où l'intégrale est calculée le long de la géodésique non perturbée d'équations paramétriques $x^\alpha_{(0)} = (x^\alpha_r - x^\alpha_e)\lambda + x^\alpha_e$.

Il faut donc calculer l'intégrale du membre de droite de l'équation (4.11). Les équations (4.8) et (4.9) permettent d'exprimer cette intégrale sous la forme suivante [62]

$$\int_0^1 w\left(\boldsymbol{x}_{(0)}(\lambda)\right) d\lambda = GM\left[1 - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}J_n\tilde{r}^n\frac{\partial^n}{(\partial x^3)^n}\right]F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_e, \boldsymbol{x}_r)\Big|_{\boldsymbol{x}=0} \tag{4.12}$$

où $F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_e, \boldsymbol{x}_r)$ est une fonction, appelée noyau de Shapiro, définie telle que

$$F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_e, \boldsymbol{x}_r) = \frac{1}{R_{er}}\ln\left(\frac{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_e| + |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_r| + R_{er}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_e| + |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_r| - R_{er}}\right). \tag{4.13}$$

En substituant l'équation (4.12) dans le membre de droite de (4.11), nous voyons que la fonction de transfert de temps $\mathcal{T}$ admet le développement multipolaire

$$\mathcal{T}(\boldsymbol{x}_e, \boldsymbol{x}_r) = \frac{1}{c}R_{er} + \mathcal{T}_M(\boldsymbol{x}_e, \boldsymbol{x}_r) + \sum_{n=2}^{\infty}\mathcal{T}_{J_n}(\boldsymbol{x}_e, \boldsymbol{x}_r) \tag{4.14}$$

où $\mathcal{T}_M$ est le retard de temps de Shapiro [77]

$$\mathcal{T}_M(\boldsymbol{x}_e, \boldsymbol{x}_r) = (\gamma+1)\frac{GM}{c^3}\ln\left(\frac{r_r + r_e + R_{er}}{r_r + r_e - R_{er}}\right)$$

et les fonctions $\mathcal{T}_{J_n}$ sont données par

$$\mathcal{T}_{J_n}(\boldsymbol{x}_e, \boldsymbol{x}_r) = -(\gamma+1)\frac{GM}{c^3}\frac{1}{n!}J_n\tilde{r}^n R_{er}\frac{\partial^n}{(\partial x^3)^n}F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_e, \boldsymbol{x}_r)|_{\boldsymbol{x}=0}\,. \tag{4.15}$$

Jusqu'ici seul $\mathcal{T}_{J_2}$ a fait l'objet d'une détermination explicite [44, 62]. Dans ce travail, nous allons déterminer explicitement la contribution de tous les moments multipolaires $J_n$ sur la fonction de transfert de temps [55, 56].

## 4.4 Structure multipolaire de la fonction de transfert de temps

L'obtention de l'expression explicite de chaque terme $\mathcal{T}_{J_n}(\boldsymbol{x}_e, \boldsymbol{x}_r)$ est conditionnée par le calcul des dérivées successives du noyau de Shapiro. Ces dérivées peuvent être calculées en utilisant les travaux de Faà di Bruno [1, 34] qui a trouvé une formule permettant d'obtenir la dérivée $n$ième d'une fonction composée du type $f(x) = \Phi(u)$, $u = u(x)$ sous la forme suivante

$$\frac{d^n}{dx^n} f(x) = \sum_{m=1}^{n} \frac{d^{n+1-m}}{du^{n+1-m}} \Phi(u) \sum_{n,m}{}' \frac{n!}{i_1! i_2! \ldots i_m!} \left(\frac{1}{1!}\frac{du}{dx}\right)^{i_1} \left(\frac{1}{2!}\frac{d^2u}{dx^2}\right)^{i_2} \cdots \left(\frac{1}{m!}\frac{d^m u}{dx^m}\right)^{i_m}, \tag{4.16}$$

où $\sum'_{n,m}$ représente la sommation sur tous les ensembles d'entiers positifs $i_1$, $i_2$, ..., $i_m$ satisfaisant le système d'équations

$$\begin{cases} i_1 + 2i_2 + 3i_3 + \ldots + mi_m = n\,, \\ i_1 + i_2 + \ldots + i_m = n + 1 - m\,, \end{cases} \tag{4.17}$$

avec $1 \leq m \leq n$.

Notons que $F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_e, \boldsymbol{x}_r)$ peut s'écrire

$$F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_e, \boldsymbol{x}_r) = \frac{1}{R_{er}} \left[\ln(X + R_{er}) - \ln(X - R_{er})\right], \tag{4.18}$$

avec

$$X = X_e + X_r\,, \tag{4.19}$$

$$X_e = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_e|\,, \quad X_r = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_r|\,, \tag{4.20}$$

Appliquons la formule (4.16) ; il vient

$$\frac{\partial^n}{(\partial x^j)^n} F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_e, \boldsymbol{x}_r)\Big|_{\boldsymbol{x}=0} = -\frac{1}{R_{er}} \sum_{m=1}^{n} (-1)^{n-m} \frac{(n-m)!}{2^{n+1-m}} \frac{(r_r + r_e + R_{er})^{n+1-m} - (r_r + r_e - R_{er})^{n+1-m}}{(r_r r_e + \boldsymbol{x}_e.\boldsymbol{x}_r)^{n+1-m}}$$
$$\times \left[ \sum_{n,m}{}' \frac{n!}{i_1! i_2! \ldots i_m!} \left(\frac{1}{1!}\frac{\partial X}{\partial x^j}\right)^{i_1} \left(\frac{1}{2!}\frac{\partial^2 X}{(\partial x^j)^2}\right)^{i_2} \cdots \left(\frac{1}{m!}\frac{\partial^m X}{(\partial x^j)^m}\right)^{i_m} \right]_{\boldsymbol{x}=0} . \tag{4.21}$$

Il faut ensuite déterminer la $k$ième dérivée de la fonction $X$ par rapport à $z$, en $\boldsymbol{x} = 0$. Or, la relation

$$\left[\frac{\partial^k}{\partial z'^k} |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|\right]_{\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{x}_e} = (-1)^k \frac{\partial^k}{\partial z^k} |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_e|$$

montre que si nous définissons un vecteur perturbateur tel que $\delta\boldsymbol{x} = (z' - z_e)\boldsymbol{k}$, alors la norme euclidienne $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_e - \delta\boldsymbol{x}|$ peut être développée en série de Taylor de la manière suivante

$$|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_e - \delta\boldsymbol{x}| = X_e + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} (\boldsymbol{k}.\delta\boldsymbol{x})^k \frac{\partial^k X_e}{\partial z^k}\,. \tag{4.22}$$

Par ailleurs, nous pouvons également écrire que

$$|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_e - \delta\boldsymbol{x}| = X_e \left[1 - 2\frac{\boldsymbol{k}.\delta\boldsymbol{x}}{X_e} \frac{\boldsymbol{k}.(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_e)}{X_e} + \left(\frac{\boldsymbol{k}.\delta\boldsymbol{x}}{X_e}\right)^2\right]^{1/2}.$$

Comme nous supposons $\delta \boldsymbol{x}$ petit par rapport à $x_e$, cette dernière expression est une distance que nous pouvons développer en série polynômiale

$$|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_e - \delta \boldsymbol{x}| = X_e \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{\boldsymbol{k}.\delta \boldsymbol{x}}{X_e} \right)^k C_k^{(-1/2)} \left( \frac{\boldsymbol{k}.(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_e)}{X_e} \right), \tag{4.23}$$

où les $C_k^{(-1/2)}(\boldsymbol{k}.(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_e)/X_e)$ sont des polynômes de Gegenbauer de degré $k$ et de paramètre $-1/2$ [1]. La comparaison des équations (4.22) et (4.23) nous permet ainsi de déterminer ipso facto la dérivée $k$ième de la fonction $x_e$

$$\frac{1}{k!} \frac{\partial^k X_e}{\partial z^k} = \frac{(-1)^k}{X_e^{k-1}} C_k^{(-1/2)} \left( \frac{\boldsymbol{k}.(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_e)}{X_e} \right). \tag{4.24}$$

Un raisonnement analogue donne pour les dérivées successives de $x_r$

$$\frac{1}{k!} \frac{\partial^k X_r}{\partial z^k} = \frac{(-1)^k}{X_r^{k-1}} C_k^{(-1/2)} \left( \frac{\boldsymbol{k}.(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_r)}{X_r} \right). \tag{4.25}$$

Nous obtenons donc la dérivée $k$ième de la fonction $X$ sous la forme

$$\frac{1}{k!} \frac{\partial^k X}{\partial z^k} = \frac{(-1)^k}{X_e^{k-1}} C_k^{(-1/2)} \left( \frac{\boldsymbol{k}.(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_e)}{X_e} + \right) + \frac{(-1)^k}{X_r^{k-1}} C_k^{(-1/2)} \left( \frac{\boldsymbol{k}.(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_r)}{X_r} \right). \tag{4.26}$$

En substituant l'expression (4.26) dans la formule (4.21), nous obtenons donc

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{J_n}(\boldsymbol{x}_e, \boldsymbol{x}_r) \;=\; & (\gamma + 1) \frac{GM}{c^3} J_n \tilde{r}^n \sum_{m=1}^{n} (-1)^{n-m} \frac{(n-m)!}{2^{n+1-m}} \times \frac{(r_r + r_e + R_{er})^{n+1-m} - (r_r + r_e - R_{er})^{n+1-m}}{(r_r r_e + \boldsymbol{x}_e.\boldsymbol{x}_r)^{n+1-m}} \\ & \times \sum_{n,m}{}' \frac{1}{i_1! i_2! \ldots i_m!} \prod_{l=1}^{m} \left[ \frac{1}{r_r^{l-1}} C_l^{(-1/2)} \left( \frac{\boldsymbol{k}.\boldsymbol{x}_e}{r_r} \right) + \frac{1}{r_e^{l-1}} C_l^{(-1/2)} \left( \frac{\boldsymbol{k}.\boldsymbol{x}_r}{r_e} \right) \right]^{i_l}, \end{aligned} \tag{4.27}$$

La formule (4.27) fournit un procédé algorithmique permettant de calculer systématiquement et explicitement les contributions de tous les moments multipolaires de masse $J_n$ sur la fonction de transfert de temps. Pour les besoins de la mission GAIA, nous pouvons expliciter les contributions

des moments $J_2$, $J_3$ et $J_4$ :

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{J_2}(\boldsymbol{x}_e,\boldsymbol{x}_r) &= (\gamma+1)\frac{GM}{2c^3}J_2\,\frac{\tilde{r}^2}{r_r r_e}\,\frac{R_{er}}{1+\boldsymbol{n}_e.\boldsymbol{n}_r}\left[\frac{1-(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{n}_e)^2}{r_e}+\frac{1-(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{n}_r)^2}{r_r}\right.\\ &\left.-\left(\frac{1}{r_e}+\frac{1}{r_r}\right)\frac{(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{n}_e+\boldsymbol{k}.\boldsymbol{n}_r)^2}{1+\boldsymbol{n}_e.\boldsymbol{n}_r}\right],\end{aligned} \tag{4.28}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{J_3}(\boldsymbol{x}_e,\boldsymbol{x}_r) &= (\gamma+1)\frac{GM}{2c^3}J_3\,\frac{\tilde{r}^3}{r_r r_e}\,\frac{R_{er}}{1+\boldsymbol{n}_e.\boldsymbol{n}_r}\left\{\frac{(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{n}_e)[1-(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{n}_e)^2]}{r_e^2}+\frac{(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{n}_r)[1-(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{n}_r)^2]}{r_r^2}\right.\\ &+\left(\frac{1}{r_r}+\frac{1}{r_e}\right)\frac{\boldsymbol{k}.\boldsymbol{n}_e+\boldsymbol{k}.\boldsymbol{n}_r}{1+\boldsymbol{n}_e.\boldsymbol{n}_r}\left[\frac{1-(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{x}_e)^2}{r_e}+\frac{1-(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{x}_r)^2}{r_r}\right]\\ &\left.-\frac{2}{3}\left[\frac{1}{r_e^2}+\frac{1}{r_r^2}+\frac{3-\boldsymbol{n}_e.\boldsymbol{n}_r}{2r_r r_e}\right]\frac{(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{n}_e+\boldsymbol{k}.\boldsymbol{n}_r)^3}{(1+\boldsymbol{n}_e.\boldsymbol{n}_r)^2}\right\},\end{aligned} \tag{4.29}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{J_4}(\boldsymbol{x}_e,\boldsymbol{x}_r) &= -(\gamma+1)\frac{GM}{8c^3}\,\frac{J_4\tilde{r}^4}{r_r r_e}\,\frac{R_{er}}{1+\boldsymbol{n}_e.\boldsymbol{n}_r}\left\{\frac{1-6(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{n}_e)^2+5(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{n}_e)^4}{r_e^3}+\frac{1-6(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{n}_r)^2+5(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{n}_r)^4}{r_r^3}\right.\\ &+\left(\frac{1}{r_r}+\frac{1}{r_e}\right)\frac{1}{1+\boldsymbol{n}_e.\boldsymbol{n}_r}\left[\left[\frac{1-(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{n}_e)^2}{r_r}+\frac{1-(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{n}_r)^2}{r_e}\right]^2\right.\\ &\left.\left.-4\boldsymbol{k}.(\boldsymbol{n}_e+\boldsymbol{n}_r)\left[\frac{(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{n}_e)[1-(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{n}_e)^2]}{r_r^2}+\frac{(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{n}_r)[1-(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{n}_r)^2]}{r_e^2}\right]\right]\right.\\ &-2\left(\frac{2}{r_e^2}+\frac{2}{r_r^2}+\frac{3-\boldsymbol{n}_e\cdot\boldsymbol{n}_r}{r_r r_e}\right)\frac{(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{n}_e+\boldsymbol{k}.\boldsymbol{n}_r)^2}{(1+\boldsymbol{n}_e.\boldsymbol{n}_r)^2}\left[\frac{1-(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{n}_e)^2}{r_e}+\frac{1-(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{n}_r)^2}{r_r}\right]\\ &\left.+2\left(\frac{1}{r_r}+\frac{1}{r_e}\right)\left(\frac{1}{r_e^2}+\frac{1}{r_r^2}+\frac{1-\boldsymbol{n}_e\cdot\boldsymbol{n}_r}{r_r r_e}\right)\frac{(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{n}_e+\boldsymbol{k}.\boldsymbol{n}_r)^4}{(1+\boldsymbol{n}_e.\boldsymbol{n}_r)^3}\right\}.\end{aligned} \tag{4.30}$$

Nous allons introduire de nouvelles notations, qui seront utiles dans la suite pour discuter des approximations à nos formules. Ainsi, nous définissons $P$ comme étant le point où la distance entre le rayon lumineux non perturbé et l'origine O est minimale et nous introduisons le vecteur unitaire $\boldsymbol{q}$ défini par

$$\boldsymbol{q}=\frac{\boldsymbol{n}_e+\boldsymbol{n}_r}{|\boldsymbol{n}_e+\boldsymbol{n}_r|}. \tag{4.31}$$

et

$$r_c=|\boldsymbol{OP}|=\frac{1}{2}|N_{er}\times[(\boldsymbol{x}_e+\boldsymbol{x}_r)\times N_{er}]|. \tag{4.32}$$

Appelons $\psi$ l'angle entre $\boldsymbol{x}_e$ et $\boldsymbol{x}_r$, il vient naturellement

$$\cos\psi=\boldsymbol{n}_e.\boldsymbol{n}_r, \qquad 0\le\psi<\pi \tag{4.33}$$

D'où

$$|\boldsymbol{n}_e+\boldsymbol{n}_r|=\sqrt{2(1+\boldsymbol{n}_e.\boldsymbol{n}_r)}=2\cos\frac{\psi}{2}, \tag{4.34}$$

et

$$\boldsymbol{k}.\boldsymbol{n}_e+\boldsymbol{k}.\boldsymbol{n}_r=\boldsymbol{k}.\boldsymbol{q}\,\cos\frac{\psi}{2}. \tag{4.35}$$

De plus, nous pouvons déduire de l'équation (4.32)

$$\frac{1}{\sqrt{2(1+\boldsymbol{n}_e.\boldsymbol{n}_r)}}\equiv\frac{1}{2\cos\psi/2}=\frac{1}{r_c}\,\frac{r_r\,r_e}{R_{er}}\,\sin\frac{\psi}{2}. \tag{4.36}$$

En substituant les équations (4.35) et (4.36) dans les expressions (4.28-4.30), nous obtenons

$$\mathcal{T}_{J_2}(\boldsymbol{x}_e,\boldsymbol{x}_r) = (\gamma+1)\frac{GM}{c^3}J_2\left(\frac{\tilde{r}}{r_c}\right)^2\sin^2\frac{\psi}{2}\left\{\frac{r_r}{R_{er}}\left[1-(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{n}_r)^2\right]+\frac{r_e}{R_{er}}\left[1-(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{n}_e)^2\right]-2\frac{r_r+r_e}{R_{er}}(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{q})^2\right\}, \tag{4.37}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{J_3}(\boldsymbol{x}_e,\boldsymbol{x}_r) = (\gamma+1)\frac{2GM}{c^3}J_3\left(\frac{\tilde{r}}{r_c}\right)^3\sin^3\frac{\psi}{2}\Bigg\{&\frac{r_r+r_e}{R_{er}}\frac{r_r\left[1-(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{n}_r)^2\right]+r_e\left[1-(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{n}_e)^2\right]}{R_{er}}(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{q})\\&+\cos\frac{\psi}{2}\frac{r_r^2(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{n}_r)\left[1-(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{n}_r)^2\right]+r_e^2(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{n}_e)\left[1-(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{n}_e)^2\right]}{R_{er}^2}\\&-\left[\left(\frac{r_r+r_e}{R_{er}}\right)^2+\frac{1}{3}\right](\boldsymbol{k}.\boldsymbol{q})^3\Bigg\},\end{aligned} \tag{4.38}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{J_4}(\boldsymbol{x}_e,\boldsymbol{x}_r) = -(\gamma+1)\frac{GM}{2c^3}J_4\left(\frac{\tilde{r}}{r_c}\right)^4\sin^4\frac{\psi}{2}\frac{r_r+r_e}{R_{er}}\Bigg\{&\left[\frac{r_r\left[1-(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{n}_r)^2\right]+r_e\left[1-(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{n}_e)^2\right]}{R_{er}}\right]^2\\&-2\left(3\frac{r_r+r_e}{R_{er}}+\frac{R_{er}}{r_r+r_e}\right)\frac{r_r\left[1-(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{n}_r)^2\right]+r_e\left[1-(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{n}_e)^2\right]}{R_{er}}(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{q})^2\\&+4\left[\left(\frac{r_r+r_e}{R_{er}}\right)^2+1\right](\boldsymbol{k}.\boldsymbol{q})^4\\&-8\cos\frac{\psi}{2}\frac{r_r^2(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{n}_r)\left[1-(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{n}_r)^2\right]+r_e^2(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{n}_e)\left[1-(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{n}_e)^2\right]}{R_{er}^2}(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{q})\\&+2\cos^2\frac{\psi}{2}\frac{r_r^3\left[1-6(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{n}_r)^2+5(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{n}_r)^4\right]+r_e^3\left[1-6(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{n}_e)^2+5(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{n}_e)^4\right]}{(r_r+r_e)R_{er}^2}\Bigg\}.\end{aligned} \tag{4.39}$$

## 4.5 Directions des rayons lumineux au point de réception du photon

Les rapports $\{(\hat{l}_i)_r\}$, décrivant la tangente à la géodésique en $x_r$, s'écrivent

$$\hat{\boldsymbol{l}}_r = \{(\hat{l}_i)_r\} = -\boldsymbol{N}_{er} + \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{x}_e,\boldsymbol{x}_r) \tag{4.40}$$

où le vecteur déflexion $\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{x}_e,\boldsymbol{x}_r)$ est donné par

$$\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{x}_e,\boldsymbol{x}_r) = -\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}_r}\left[c\,\mathcal{T}(\boldsymbol{x}_e,\boldsymbol{x}_r) - R_{er}\right]. \tag{4.41}$$

En substitutant les formules (2.57)-(2.58) dans l'expression (4.14), nous obtenons le développement multipolaire de $\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{x}_e,\boldsymbol{x}_r)$

$$\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{x}_e,\boldsymbol{x}_r) = \boldsymbol{\lambda}_M(\boldsymbol{x}_e,\boldsymbol{x}_r) + \sum_{n=2}^{\infty}\boldsymbol{\lambda}_{J_n}(\boldsymbol{x}_e,\boldsymbol{x}_r), \tag{4.42}$$

avec

$$\boldsymbol{\lambda}_M(\boldsymbol{x}_e,\boldsymbol{x}_r) = -c\,\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}_e}\mathcal{T}_M(\boldsymbol{x}_e,\boldsymbol{x}_r), \qquad \boldsymbol{\lambda}_{J_n}(\boldsymbol{x}_e,\boldsymbol{x}_r) = -c\,\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}_e}\mathcal{T}_{J_n}(\boldsymbol{x}_e,\boldsymbol{x}_r). \tag{4.43}$$

L'équation (4.15) donne

$$\boldsymbol{\lambda}_M(\boldsymbol{x}_e, \boldsymbol{x}_r) = -(\gamma+1)\frac{GM}{c^2}\frac{(r_e+r_r)\boldsymbol{N}_{er} - R_{er}\boldsymbol{n}_r}{r_e r_r(1+\boldsymbol{n}_e.\boldsymbol{n}_r)}\,. \tag{4.44}$$

Déterminer la dérivée de l'équation (4.27) ne pose que des difficultés calculatoires. Nous introduisons la notation

$$\Lambda_{(k)}(\boldsymbol{x}_e, \boldsymbol{x}_r) = \frac{1}{r_e^{k-1}} C_k^{(-1/2)}\left(\frac{\boldsymbol{k}.\boldsymbol{x}_e}{r_e}\right) + \frac{1}{r_r^{k-1}} C_k^{(-1/2)}\left(\frac{\boldsymbol{k}.\boldsymbol{x}_r}{r_r}\right). \tag{4.45}$$

En utilisant les propriétés des polynômes de Gegenbauer [1], nous obtenons

$$\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}_r}\Lambda_{(k)}(\boldsymbol{x}_e, \boldsymbol{x}_r) = \boldsymbol{E}_{(k)}(\boldsymbol{x}_r)\,, \tag{4.46}$$

où $\boldsymbol{E}_{(k)}(\boldsymbol{x}_r)$ est définie comme

$$\boldsymbol{E}_{(k)}(\boldsymbol{x}_r) = \frac{1}{r_r^k}\left[P_k\left(\frac{\boldsymbol{k}.\boldsymbol{x}_r}{r_r}\right)\boldsymbol{n}_r - P_{k-1}\left(\frac{\boldsymbol{k}.\boldsymbol{x}_r}{r_r}\right)\boldsymbol{k}\right]. \tag{4.47}$$

En utilisant l'équation (4.46), nous obtenons

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\lambda}_{J_n}(\boldsymbol{x}_e, \boldsymbol{x}_r) &= (-1)^n(\gamma+1)\frac{GM}{c^2}J_n\tilde{r}^n \\
&\times \sum_{m=1}^{n}(-1)^m \sum_{n,m}{}' \frac{(n-m)!}{i_1!i_2!\ldots i_m!}\Lambda_{(1)}^{i_1}(\boldsymbol{x}_e, \boldsymbol{x}_r)\,\Lambda_{(2)}^{i_2}(\boldsymbol{x}_e, \boldsymbol{x}_r)\ldots\Lambda_{(m)}^{i_m}(\boldsymbol{x}_e, \boldsymbol{x}_r) \\
&\times\left\{(n+1-m)\left[\frac{\boldsymbol{n}_r - \boldsymbol{N}_{er}}{(r_r+r_e-R_{er})^{n+2-m}} - \frac{\boldsymbol{n}_r + \boldsymbol{N}_{er}}{(r_r+r_e+R_{er})^{n+2-m}}\right]\right. \\
&-\left[\frac{1}{(r_r+r_e-R_{er})^{n+1-m}} - \frac{1}{(r_r+r_e+R_{er})^{n+1-m}}\right] \\
&\left.\times\left[i_1\frac{\boldsymbol{E}_{(1)}(\boldsymbol{x}_r)}{\Lambda_{(1)}(\boldsymbol{x}_e, \boldsymbol{x}_r)} + i_2\frac{\boldsymbol{E}_{(2)}(\boldsymbol{x}_r)}{\Lambda_{(2)}(\boldsymbol{x}_e, \boldsymbol{x}_r)} + \ldots + i_m\frac{\boldsymbol{E}_{(m)}(\boldsymbol{x}_r)}{\Lambda_{(m)}(\boldsymbol{x}_e, \boldsymbol{x}_r)}\right]\right\}.
\end{aligned} \tag{4.48}$$

Pour $n = 2$, la formule (4.48) donne

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\lambda}_{J_2}(\boldsymbol{x}_e, \boldsymbol{x}_r) \;=\; & (\gamma+1)\frac{GMJ_2\tilde{r}^2}{c^2}\frac{r_r+r_e}{4r_r^2r_e^2(1+\boldsymbol{n}_e.\boldsymbol{n}_r)^2}\left\{\boldsymbol{N}_{er}\left[\frac{(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{n}_e+\boldsymbol{k}.\boldsymbol{n}_r)^2}{1+\boldsymbol{n}_e.\boldsymbol{n}_r}\frac{(r_r+r_e)^2+3R_{er}^2}{r_r r_e}\right.\right. \\
& -\left(\frac{1-(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{n}_e)^2}{r_r} + \frac{1-(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{n}_r)^2}{r_e}\right)\frac{(r_r+r_e)^2+R_{er}^2}{r_r+r_e}\Big] \\
& -\boldsymbol{n}_r\frac{R_{er}}{r_r+r_e}\left[\frac{(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{n}_e+\boldsymbol{k}.\boldsymbol{n}_r)^2}{1+\boldsymbol{n}_e.\boldsymbol{n}_r}\frac{3(r_r+r_e)^2+R_{er}^2}{r_r r_e}\right. \\
& \qquad -\left[1-3(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{n}_r)^2\right]\frac{(r_r+3r_e)(r_r+r_e)-R_{er}^2}{r_e^2} \\
& \qquad \left.-2(r_r+r_e)\left(\frac{1-(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{n}_e)^2}{r_r} - \frac{2(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{n}_e)(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{n}_r)}{r_e}\right)\right] \\
& \left.+4\boldsymbol{k}\frac{R_{er}}{r_e}\left[(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{n}_e) + (\boldsymbol{k}.\boldsymbol{n}_r)\frac{(r_r+3r_e)(r_r+r_e)-R_{er}^2}{2r_e(r_r+r_e)}\right]\right\}.
\end{aligned} \tag{4.49}$$

## 4.6 Cas où l'étoile observée est à l'infini

Supposons maintenant que le rayon lumineux reçu en $\boldsymbol{x}_r$ a été émis par une étoile située à l'infini. Soit $N$ la direction dans laquelle le rayon a été émis. Nous pouvons poser

$$N = -\boldsymbol{n}_e\,, \quad \text{et} \quad N_{er} = N\,. \tag{4.50}$$

Sous ces hypothèses, le vecteur $\lambda(\boldsymbol{x}_e, \boldsymbol{x}_r)$ tend vers une limite finie qui peut être considérée comme une fonction de $N$ and $\boldsymbol{x}_r$. Nous posons donc

$$\lim_{\substack{\boldsymbol{x}_e / r_e \to -N \\ r_e \to \infty}} \lambda(\boldsymbol{x}_e, \boldsymbol{x}_r) = \lambda(N, \boldsymbol{x}_r)\,. \tag{4.51}$$

En prenant en compte les équations (4.50) et (4.51), la quantité $\lambda(N, \boldsymbol{x}_r)$ peut être exprimée sous la forme du développement suivant

$$\lambda(N, \boldsymbol{x}_r) = \lambda_M(N, \boldsymbol{x}_r) + \sum_{n=2}^{\infty} \lambda_{J_n}(N, \boldsymbol{x}_r) \tag{4.52}$$

où

$$\begin{aligned} \lambda_M(N, \boldsymbol{x}_r) &= \lim_{\substack{\boldsymbol{x}_e / r_e \to -N \\ r_e \to \infty}} \lambda_M(\boldsymbol{x}_e, \boldsymbol{x}_r)\,, \\ \lambda_{J_n}(N, \boldsymbol{x}_r) &= \lim_{\substack{\boldsymbol{x}_e / r_e \to -N \\ r_e \to \infty}} \lambda_{J_n}(\boldsymbol{x}_e, \boldsymbol{x}_r)\,. \end{aligned}$$

La limite de $\lambda_M(\boldsymbol{x}_e, \boldsymbol{x}_r)$ se déduit aisément de l'équation (4.44). Compte tenu de (4.50) et (4.51), il vient

$$\lambda_M(N, \boldsymbol{x}_r) = (\gamma + 1)\,\frac{GM}{c^2 r_e}\,\frac{\boldsymbol{n}_r - N}{1 - N.\boldsymbol{n}_r}\,. \tag{4.53}$$

Soit $\Delta$ la droite parallèle à $N$ passant par $\boldsymbol{x}_r$. La quantité $r_c$ est maintenant la distance euclidienne entre $\Delta$ et O. L'angle $\alpha$, figurant dans les équations (4.33)-(4.39), désigne maintenant l'angle entre $N$ et $\boldsymbol{n}_r$. Nous posons $\alpha = \pi - \psi$ avec $0 \leq \psi \leq \pi$ ; nous avons donc

$$\cos\alpha = N.\boldsymbol{n}_r \quad 0 \leq \alpha < \pi\,. \tag{4.54}$$

Avec ces notations, nous pouvons écrire

$$\frac{1}{r_e} = \frac{2}{r_c}\cos\frac{\alpha}{2}\,\sin\frac{\alpha}{2}\,. \tag{4.55}$$

Le vecteur unitaire $\boldsymbol{q}$, défini par l'équation (4.31), doit être remplacé par $\boldsymbol{q}_N$ défini par

$$\boldsymbol{q}_N = \frac{\boldsymbol{n}_r - N}{\sqrt{2(1 - N.\boldsymbol{n}_r)}} = \left(2\sin\frac{\alpha}{2}\right)^{-1}(\boldsymbol{n}_r - N)\,, \tag{4.56}$$

Avec ces notations, l'équation (4.53) s'écrit

$$\lambda_M(N, \boldsymbol{x}_r) = (\gamma + 1)\,\frac{2GM}{c^2 r_c}\cos\frac{\alpha}{2}\;\boldsymbol{q}_N\,. \tag{4.57}$$

Il est facile de voir que, quel que soit l'entier positif $p$,

$$\lim_{r_e \to \infty} \frac{1}{(r_r + r_e + R_{er})^p} = 0 \tag{4.58}$$

et

$$\lim_{r_e\to\infty}\frac{1}{(r_r+r_e-R_{er})^p}=\frac{1}{r_e^p\,(1-\boldsymbol{N}.\boldsymbol{n}_r)^p}=\left(\frac{1}{r_c}\right)^p\cos^p\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin^{-p}\left(\frac{\alpha}{2}\right). \tag{4.59}$$

De plus, nous avons

$$\lim_{\substack{\boldsymbol{x}_e/r_e\to-N\\ r_e\to\infty}}\Lambda_{(1)}(\boldsymbol{x}_e,\boldsymbol{x}_r)=-2\sin\frac{\alpha}{2}(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{q}_N) \tag{4.60}$$

et

$$\lim_{\substack{\boldsymbol{x}_e/r_e\to-N\\ r_e\to\infty}}\Lambda_{(l)}(\boldsymbol{x}_e,\boldsymbol{x}_r)=\frac{1}{r_e^{l-1}}C_l^{-1/2}(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{n}_r)\quad\text{pour } l>1\,. \tag{4.61}$$

En substituant les équations (4.50)-(4.51) et (4.56)-(4.61) dans l'équation (4.48), nous obtenons l'expression suivante pour $\lambda_{J_n}(\boldsymbol{N},\boldsymbol{x}_r)$

$$\begin{aligned}\lambda_{J_n}(\boldsymbol{N},\boldsymbol{x}_r)&=(\gamma+1)\frac{GM}{c^2r_c}J_n\left(\frac{\tilde{r}}{r_c}\right)^n 2^{n+2}\cos^{n+1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\\
&\times\sum_{m=1}^{n}(-1)^m\frac{(n-m)!}{2^{2m}}{\sum_{n,m}}'(-1)^{r_m}\frac{2^{r_m}}{i_1!i_2!\ldots i_m!}\sin^{r_m}\left(\frac{\alpha}{2}\right)(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{q}_N)^{n-2m+2+r_m}\left[C_2^{-1/2}(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{n}_r)\right]^{i_2}\\
&\times\left[C_3^{-1/2}(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{n}_r)\right]^{i_3}\ldots\left[C_m^{-1/2}(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{n}_r)\right]^{i_m}\left\{(n-m+1)\boldsymbol{q}_N+\frac{1}{2}(n-2m+2+r_m)\frac{(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{n}_r)\boldsymbol{n}_r-\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{k}.\boldsymbol{q}_N}\right.\\
&-\sin\frac{\alpha}{2}\left[i_2\frac{P_2(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{n}_r)\boldsymbol{n}_r-P_1(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{n}_r)\boldsymbol{k}}{C_2^{(-1/2)}(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{n}_r)}+i_3\frac{P_3(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{n}_r)\boldsymbol{n}_r-P_2(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{n}_r)\boldsymbol{k}}{C_3^{(-1/2)}(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{n}_r)}\right.\\
&\left.\left.+\ldots+i_m\frac{P_m(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{n}_r)\boldsymbol{n}_r-P_{m-1}(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{n}_r)\boldsymbol{k}}{C_m^{(-1/2)}(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{n}_r)}\right]\right\},\end{aligned} \tag{4.62}$$

où $r_m$ est défini par

$$r_m=i_3+2i_4+\ldots+(m-2)i_m\,. \tag{4.63}$$

Notons que l'effet des moments multipolaires sur la déviation des rayons lumineux est maximal si le rayon rase le corps déflectant ; ceci signifie que l'angle $\alpha$ doit être petit : pour une précision d'une $\mu$as, les termes proportionnels à $\sin^l\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ sont donc négligeables lorsque $l\geq 1$, ce qui amène de notables simplifications de l'équation (4.62). Quelques manipulations algébriques élémentaires donnent pour $n=2l$

$$\begin{aligned}\lambda_{J_{2l}}(\boldsymbol{N},\boldsymbol{x}_r)&\approx(-1)^{l+1}(\gamma+1)\frac{2GM}{c^2r_c}J_{2l}\left(\frac{\tilde{r}}{r_c}\right)^{2l}\cos^{2l+1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\\
&\times\left\{\left[1-(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{n}_r)^2\right]^l\boldsymbol{q}_N-2\sum_{k=0}^{l-1}(-1)^k\frac{2^k}{(l-k-1)!}\frac{(k+1)(k+2)\ldots(k+l)}{1.3.5\ldots(2k+1)}\left[1-(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{n}_r)^2\right]^{l-k-1}\right.\\
&\left.\times(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{q}_N)^{2k+1}\left[\frac{l+k+1}{k+1}(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{q}_N)\boldsymbol{q}_N+(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{n}_r)\boldsymbol{n}_r-\boldsymbol{k}\right]\right\};\end{aligned} \tag{4.64}$$

et pour $n=2l+1$

$$\lambda_{J_{2l+1}}(\boldsymbol{N},\boldsymbol{x}_r) \approx (-1)^{l+1}(\gamma+1)\frac{2GM}{c^2 r_c} J_{2l+1}\left(\frac{\tilde{r}}{r_c}\right)^{2l+1} \cos^{2(l+1)}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \tag{4.65}$$
$$\times\left\{\left[1-(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{n}_r)^2\right]^l \left[2(k+1)(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{q}_N)\boldsymbol{q}_N + (\boldsymbol{k}.\boldsymbol{n}_r)\boldsymbol{n}_r - \boldsymbol{k}\right]\right.$$
$$-2\sum_{k=0}^{l-1}(-1)^k \frac{2^k}{(l-k-1)!}\frac{(k+2)(k+3)...(k+l+1)}{1.3.5...(2k+1)}\left[1-(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{n}_r)^2\right]^{l-k-1}$$
$$\left.\times(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{q}_N)^{2(k+1)}\left[\frac{2(l+k+2)}{2k+3}(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{q}_N)\boldsymbol{q}_N + (\boldsymbol{k}.\boldsymbol{n}_r)\boldsymbol{n}_r - \boldsymbol{k}\right]\right\}.$$

Nous déduisons immédiatement des équations (4.64) et (4.65) les expressions des contributions des moments multipolaires $J_2$, $J_3$ et $J_4$ sous la forme

$$\lambda_{J_2}(\boldsymbol{N},\boldsymbol{x}_r) \approx (\gamma+1)\frac{2GM}{c^2 r_c} J_2\left(\frac{\tilde{r}}{r_c}\right)^2 \cos^3\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$
$$\times\left\{\left[1-(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{n}_r)^2 - 4(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{q}_N)^2\right]\boldsymbol{q}_N - 2(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{q}_N)\left[(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{n}_r)\boldsymbol{n}_r - \boldsymbol{k}\right]\right\}, \tag{4.66}$$
$$\lambda_{J_3}(\boldsymbol{N},\boldsymbol{x}_r) \approx (\gamma+1)\frac{2GM}{c^2 r_c} J_3\left(\frac{\tilde{r}}{r_c}\right)^3 \cos^4\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$
$$\times\left\{\left[1-(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{n}_r)^2\right]\left[4(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{q}_N)\boldsymbol{q}_N + (\boldsymbol{k}.\boldsymbol{n}_r)\boldsymbol{n}_r - \boldsymbol{k}\right] - 4(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{q}_N)^2\left[2(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{q}_N)\boldsymbol{q}_N + (\boldsymbol{k}.\boldsymbol{n}_r)\boldsymbol{n}_r - \boldsymbol{k}\right]\right\}, \tag{4.67}$$
$$\lambda_{J_4}(\boldsymbol{N},\boldsymbol{x}_r) \approx -(\gamma+1)\frac{2GM}{c^2 r_c} J_4\left(\frac{\tilde{r}}{r_c}\right)^4 \cos^5\left(\frac{\alpha}{2}\right)\left\{\left[1-(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{n}_r)^2\right]^2 \boldsymbol{q}_N\right.$$
$$-4\left[1-(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{n}_r)^2\right](\boldsymbol{k}.\boldsymbol{q}_N)\left[3(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{q}_N)\boldsymbol{q}_N + (\boldsymbol{k}.\boldsymbol{n}_r)\boldsymbol{n}_r - \boldsymbol{k}\right]$$
$$\left.+8(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{q}_N)^3\left[2(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{q}_N)\boldsymbol{q}_N + (\boldsymbol{k}.\boldsymbol{n}_r)\boldsymbol{n}_r - \boldsymbol{k}\right]\right\}. \tag{4.68}$$

## 4.7 Distance angulaire entre deux étoiles situées à l'infini

Considérons deux sources lumineuses distinctes $S$ et $S'$ situées à l'infini, de direction d'émission $\boldsymbol{N}$ et $\boldsymbol{N}'$ respectivement. Les rapports $\{\hat{l}_i\}_{x_r}$ et $\{\hat{l}'_i\}_{x_r}$, décrivant les tangentes des rayons lumineux issus de $S$ et $S'$, s'écrivent au point de réception $\boldsymbol{x}_r$

$$\hat{\boldsymbol{l}}_{x_r} = \{\hat{l}_i\}_{x_r} = -\boldsymbol{N} + \boldsymbol{\lambda}, \qquad \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{N},\boldsymbol{x}_r) = \boldsymbol{\lambda}_M(\boldsymbol{N},\boldsymbol{x}_r) + \sum_{n=2}^{\infty}\boldsymbol{\lambda}_{J_n}(\boldsymbol{N},\boldsymbol{x}_r), \tag{4.69}$$

et

$$\hat{\boldsymbol{l}}'_{x_r} = \{\hat{l}'_i\}_{x_r} = -\boldsymbol{N}' + \boldsymbol{\lambda}', \qquad \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{N}',\boldsymbol{x}_r) = \boldsymbol{\lambda}_M(\boldsymbol{N}',\boldsymbol{x}_r) + \sum_{n=2}^{\infty}\boldsymbol{\lambda}_{J_n}(\boldsymbol{N}',\boldsymbol{x}_r), \tag{4.70}$$

La distance angulaire entre $S$ et $S'$ mesurée en $\boldsymbol{x}_r$ admet le développement

$$\phi = \phi^{(0)} + \phi^{(PN)} \tag{4.71}$$

où $\phi^{(0)}$ est l'angle formé dans un espace-temps plat défini par la formule (3.48) et $\phi^{(PN)}$ est la contribution relativiste donnée par (3.51).

En utilisant (4.52), nous déduisons l'expression de $\phi^{(PN)}$

$$\begin{aligned}\phi^{(PN)} &= -\left[1+\frac{\boldsymbol{\beta}.(\boldsymbol{N}+\boldsymbol{N}')}{1+\boldsymbol{N}.\boldsymbol{N}'}\right]\left\{\sqrt{\frac{1-\boldsymbol{N}.\boldsymbol{N}'}{1+\boldsymbol{N}.\boldsymbol{N}'}}\left[2(1+\gamma)\frac{w}{c^2}\right.\right.\\ &\left.+\boldsymbol{\beta}.\left(\boldsymbol{\lambda}_M(\boldsymbol{N}',\boldsymbol{x}_r)+\boldsymbol{\lambda}_M(\boldsymbol{N},\boldsymbol{x}_r)+\sum_{n=2}^{\infty}[\boldsymbol{\lambda}_{J_n}(\boldsymbol{N}',\boldsymbol{x}_r)+\boldsymbol{\lambda}_{J_n}(\boldsymbol{N},\boldsymbol{x}_r)]\right)\right]\\ &\left.+\frac{\boldsymbol{N}'-\boldsymbol{N}}{\sqrt{1-(\boldsymbol{N}.\boldsymbol{N}')^2}}\cdot\left[\left(\boldsymbol{\lambda}_M(\boldsymbol{N}',\boldsymbol{x}_r)-\boldsymbol{\lambda}_M(\boldsymbol{N},\boldsymbol{x}_r)+\sum_{n=2}^{\infty}[\boldsymbol{\lambda}_{J_n}(\boldsymbol{N}',\boldsymbol{x}_r)-\boldsymbol{\lambda}_{J_n}(\boldsymbol{N},\boldsymbol{x}_r)]\right)\right]\right\}. \end{aligned} \tag{4.72}$$

Pour une modélisation de GAIA valide à la précision d'une $\mu$as, la formule (4.72) peut être simplifiée ; en effet, le satellite GAIA sera très éloigné des planètes géantes, ce qui signifie que le terme $w/c^2$ de l'équation (4.72) se réduit au terme de masse $GM/r_e c^2$. Ensuite, $\boldsymbol{\beta}$ et $\boldsymbol{l}_{J_n}$ sont des termes de petite amplitude, ce qui signifie que les termes croisés $(\boldsymbol{\beta}.\boldsymbol{\lambda}_{j_n})$ peuvent être négligés. Sous ces hypothèses, la contribution relativiste $\phi^{(PN)}$ peut s'écrire sous la forme

$$\phi^{(PN)} = \phi_M^{(PN)} + \sum_{n=2}^{\infty}\phi_{J_n}^{(PN)} + O(1/c^4) \tag{4.73}$$

où

$$\begin{aligned}\phi_M^{(PN)} &= -\left[1+\frac{\boldsymbol{\beta}.(\boldsymbol{N}+\boldsymbol{N}')}{1+\boldsymbol{N}.\boldsymbol{N}'}\right]\left\{\sqrt{\frac{1-\boldsymbol{N}.\boldsymbol{N}'}{1+\boldsymbol{N}.\boldsymbol{N}'}}\left[2(1+\gamma)\frac{GM}{r_e c^2}+\boldsymbol{\beta}.\left(\boldsymbol{\lambda}_M(\boldsymbol{N}',\boldsymbol{x}_r)+\boldsymbol{\lambda}_M(\boldsymbol{N},\boldsymbol{x}_r)\right)\right]\right.\\ &\left.+\frac{\boldsymbol{\lambda}_M(\boldsymbol{N}',\boldsymbol{x}_r)-\boldsymbol{\lambda}_M(\boldsymbol{N},\boldsymbol{x}_r)}{\sqrt{1-(\boldsymbol{N}.\boldsymbol{N}')^2}}.(\boldsymbol{N}'-\boldsymbol{N})\right\}, \end{aligned} \tag{4.74}$$

et

$$\phi_{J_n}^{(PN)} = -\frac{(\boldsymbol{N}'-\boldsymbol{N}).[\boldsymbol{\lambda}_{J_n}(\boldsymbol{N}',\boldsymbol{x}_r)-\boldsymbol{\lambda}_{J_n}(\boldsymbol{N},\boldsymbol{x}_r)]}{\sqrt{1-(\boldsymbol{N}'.\boldsymbol{N})^2}}. \tag{4.75}$$

Notons que l'équation (4.75) est obtenue en négligeant un terme facteur de l'aberration $[\boldsymbol{\beta}.(\boldsymbol{N}+\boldsymbol{N}')]\,/\,[(1+\boldsymbol{N}.\boldsymbol{N}']$ qui est $10^{-4}$ fois plus petit que le second membre de (4.75). Ensuite, en substituant l'équation (4.76) dans l'équation (4.75), nous obtenons explicitement pour $\phi_{J_2}^{(PN)}$

$$\begin{aligned}\phi_{J_2}^{(PN)} = -(\gamma+1)\frac{2GMJ_2}{c^2}\frac{(\boldsymbol{N}'-\boldsymbol{N})}{\sqrt{1-(\boldsymbol{N}'.\boldsymbol{N})^2}}\cdot\left[\left(\frac{\tilde{r}^2}{r_c'^3}\right)\cos^3\left(\frac{\alpha'}{2}\right)\right.\\ \times\left\{\left[1-(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{n}_r)^2-4(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{q}_N')^2\right]\boldsymbol{q}_N'-2(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{q}_N')\left[(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{n}_r)\boldsymbol{n}_r-\boldsymbol{k}\right]\right\}\\ \left.-\left(\frac{\tilde{r}^2}{r_c^3}\right)\cos^3\left(\frac{\alpha}{2}\right)\times\left\{\left[1-(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{n}_r)^2-4(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{q}_N)^2\right]\boldsymbol{q}_N-2(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{q}_N)\left[(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{n}_r)\boldsymbol{n}_r-\boldsymbol{k}\right]\right\}\right], \end{aligned} \tag{4.76}$$

où $\alpha$, $\alpha'$, $\boldsymbol{q}_N$, $\boldsymbol{q}_N'$, $r_c$ et $r_c'$ sont définis par

$$\cos\alpha = \boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{n}_r\,,\quad \cos\alpha' = \boldsymbol{N}'\cdot\boldsymbol{n}_r\,, \tag{4.77}$$

$$\boldsymbol{q}_N = \left(2\sin\frac{\alpha}{2}\right)^{-1}(\boldsymbol{n}_r-\boldsymbol{N})\,,\quad \boldsymbol{q}_N' = \left(2\sin\frac{\alpha'}{2}\right)^{-1}(\boldsymbol{n}_r-\boldsymbol{N}')\,, \tag{4.78}$$

$$r_c = 2r_r\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\,,\quad r_c' = 2r_r\cos\frac{\alpha'}{2}\sin\frac{\alpha'}{2}\,. \tag{4.79}$$

# Troisième partie

# Développements à l'approximation post-minkowskienne généralisée.

# Chapitre 5

# Développement général de la fonction d'univers

## 5.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à la détermination de la fonction d'univers à l'approximation post-minkowskienne généralisée, c'est-à-dire à la représentation de $\Omega(x_A, x_B)$ sous la forme d'une série en puissances successives de la constante universelle de la gravitation $G$

$$\Omega(x_A, x_B) = \Omega^{(0)}(x_A, x_B) + \sum_{n=1}^{\infty} G^n \Omega^{(n)}(x_A, x_B)\,, \tag{5.1}$$

où $\Omega^{(0)}(x_A, x_B)$ est la fonction d'univers de l'espace-temps de Minkowski définie par

$$\Omega^{(0)}(x_A, x_B) = \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}(x_B^\mu - x_A^\mu)(x_B^\nu - x_A^\nu) \equiv \eta_{\mu\nu} q^\mu q^\nu\,. \tag{5.2}$$

Dans le paragraphe 5.2, nous présentons l'approximation post-minkowskienne généralisée en soulignant les différences avec l'approximation post-newtonienne ; nous introduisons les composantes covariantes du tenseur métrique sous la forme de la série

$$g^{\mu\nu}(x) = \eta^{\mu\nu} + \sum_{n=1}^{\infty} G^n\, g_{(n)}^{\mu\nu}(x) \tag{5.3}$$

et nous donnons les relations utiles entre les composantes covariantes et contravariantes du tenseur métrique. Ensuite, le paragraphe 5.3 est dédié à la construction d'un développement perturbatif des équations d'Hamilton-Jacobi satisfaites au point $x$ par la fonction d'univers $\Omega(x_A, x)$, $x$ étant considéré comme une variable libre. Dans le paragraphe 5.4, nous résolvons ces équations à tous les ordres d'approximation post-minkowskienne en supposant que $x$ varie le long de la géodésique non perturbée $\Gamma_{AB}^{(0)}$ reliant $x_A$ et $x_B$. Nous en déduisons dans le paragraphe 5.5 un théorème donnant la fonction d'univers $\Omega(x_A, x_B)$ sous la forme d'une série en puissances successives de $G$, où chaque terme perturbatif $\Omega^{(n)}(x_A, x_B)$ est déterminé par le calcul d'intégrales évaluées le long de $\Gamma_{AB}^{(0)}$ ; nous formulons un corollaire donnant le terme perturbatif $\Omega^{(2)}$. Enfin, le paragraphe 5.6 est consacré à une détermination de $\Omega^{(2)}$ en utilisant les corrections d'ordre $G$ de la géodésique non perturbée, calculées par les équations d'Euler-Lagrange. Nous retrouvons le résultat du corollaire, ce qui nous permet de valider le théorème obtenu dans le paragraphe 5.5.

## 5.2 L'approximation post-minkowskienne

Dans le cadre de l'approximation post-minkowskienne, l'espace-temps est une perturbation de Minkowski ; les composantes covariantes du tenseur métrique s'écrivent

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}\,, \tag{5.4}$$

où $\eta$ représente la métrique plate de Minkowski et $h$ est considérée comme une perturbation. L'approximation post-minkowskienne consiste à supposer que les potentiels $h$ se développent par rapport à la constante universelle de la gravitation $G$. Nous parlons d'approximation post-minkowskienne généralisée lorsque la perturbation $h$ admet un développement en série infinie en puissances successives de $G$. Dans ce cas, les composantes covariantes de la métrique s'écrivent

$$g^{\mu\nu}(x,G) = \eta^{\mu\nu} + \sum_{n=1}^{\infty} G^n\, g^{\mu\nu}_{(n)}(x)\,, \tag{5.5}$$

où les composantes contravariantes $g^{\mu\nu}_{(n)}$ sont déterminées par

$$g^{\mu\nu}_{(1)} = -\eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma} g^{(1)}_{\rho\sigma}\,, \tag{5.6}$$

$$g^{\mu\nu}_{(n)} = -\eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma} g^{(n)}_{\rho\sigma} - \sum_{p=1}^{n-1} \eta^{\mu\rho}\, g^{(p)}_{\rho\sigma}\, g^{\nu\sigma}_{(n-p)}\,. \tag{5.7}$$

Soulignons qu'à la différence de l'approximation post-newtonienne, aucune hypothèse restrictive n'est introduite sur la physique interne et le mouvement des corps, sources du champ gravitationnel.

## 5.3 Développement post-minkowskien des équations d'Hamilton-Jacobi

Considérons $x_A = (ct_A, \boldsymbol{x}_A)$ et $x_B = (ct_B, \boldsymbol{x}_B)$ deux évéments fixés. Supposons que l'événement $x = (ct, \boldsymbol{x})$ est une variable libre et intéressons nous à la fonction d'univers $\Omega(x_A, x) = \overline{\Omega}(x)$. Nous voulons obtenir un développement post-minkowskien général pour $\overline{\Omega}(x)$ de la forme

$$\overline{\Omega}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} G^n \overline{\Omega}^{(n)}(x) \quad \text{avec} \quad \overline{\Omega}(x_A) = 0\,. \tag{5.8}$$

$\overline{\Omega}(x)$ satisfait des équations de Hamilton-Jacobi en $x$. Nous avons donc

$$g^{\alpha\beta}(x)\frac{\partial\overline{\Omega}(x)}{\partial x^\alpha}\frac{\partial\overline{\Omega}(x)}{\partial x^\beta} = g^{\alpha\beta}(x)\partial_\mu\overline{\Omega}(x)\partial_\nu\overline{\Omega}(x) = 2\overline{\Omega}(x)\,. \tag{5.9}$$

Construisons le développement en série de $\partial_\mu\overline{\Omega}(x)\partial_\nu\overline{\Omega}(x)$ en utilisant (5.8). Nous obtenons

$$\begin{aligned}\partial_\mu\overline{\Omega}(x)\partial_\nu\overline{\Omega}(x) &= \partial_\mu\overline{\Omega}^{(0)}\partial_\nu\overline{\Omega}^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} G^n\left(\sum_{p=0}^{n}\partial_\mu\overline{\Omega}^{(p)}\partial_\nu\overline{\Omega}^{(n-p)}\right)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} G^n\left(\sum_{p=0}^{n}\partial_\mu\overline{\Omega}^{(p)}\partial_\nu\overline{\Omega}^{(n-p)}\right).\end{aligned} \tag{5.10}$$

En multipliant la série (5.10) avec l'équation (5.5), nous obtenons le développement en série du membre de gauche des équations d'Hamilton-Jacobi (5.9). Nous arrivons à

$$g^{\mu\nu}(x)\partial_\mu\overline{\Omega}(x)\partial_\nu\overline{\Omega}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} G^n \left( \sum_{p=0}^{n} g^{(p)\mu\nu} \sum_{q=0}^{n-p} \partial_\mu \overline{\Omega}^{(q)} \partial_\nu \overline{\Omega}^{(n-p-q)} \right). \tag{5.11}$$

La construction complète du développement en série des équations (5.9) est obtenue en substituant l'équation (5.8) à $\overline{\Omega}(x)$ dans le membre de droite de (5.9). Nous obtenons

$$\begin{aligned} & G\left[2(x^\nu - x_A^\nu)\partial_\nu\overline{\Omega}^{(1)} + \eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma}(x^\rho - x_A^\rho)g^{(1)\mu\nu}\right] \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} 2G^n \left[ (x^\nu - x_A^\nu)\partial_\nu\overline{\Omega}^{(n)} + \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n-1} \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\overline{\Omega}^{(p)}\partial_\nu\overline{\Omega}^{(n-p)} + \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n} g^{(p)\mu\nu}\sum_{q=1}^{n-p}\partial_\mu\overline{\Omega}^{(q)}\partial_\nu\overline{\Omega}^{(n-p-q)} \right] \\ & = 2G\overline{\Omega}^{(1)} + \sum_{n=2}^{\infty} 2G^n\overline{\Omega}^{(n)}. \end{aligned} \tag{5.12}$$

Enfin, en isolant chaque ordre de perturbation en $O(G^n)$, nous pouvons remplacer le développement en série (5.12) par un système infini d'équations aux dérivées partielles

$$\overline{q}^\mu \frac{\partial\overline{\Omega}^{(n)}}{\partial x^\mu} - \overline{\Omega}^{(n)} = \Phi^{(n)}, \tag{5.13}$$

où

$$\overline{q}_\mu = \frac{\partial\Omega^{(0)}}{\partial x^\mu}(x_A, x) \equiv \eta_{\mu\rho}(x^\rho - x_A^\rho), \tag{5.14}$$

$$\overline{q}^\mu = \eta^{\mu\nu}\overline{q}_\nu = x^\mu - x_A^\mu, \tag{5.15}$$

et

$$\Phi^{(1)}(x) = -\frac{1}{2}\,\overline{q}_\mu\,\overline{q}_\nu\,g^{\mu\nu}_{(1)}(x), \tag{5.16}$$

$$\begin{aligned} \Phi^{(n)}(x) = & -\frac{1}{2}\,\overline{q}_\mu\,\overline{q}_\nu\,g^{\mu\nu}_{(n)}(x) \\ & -\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n-1}\left\{ g^{\mu\nu}_{(p)}(x)\left[\overline{q}_\mu\frac{\partial\overline{\Omega}^{(n-p)}}{\partial x^\nu} + \sum_{q=1}^{n-p}\frac{\partial\overline{\Omega}^{(q)}}{\partial x^\mu}\frac{\partial\overline{\Omega}^{(n-p-q)}}{\partial x^\nu}\right] + \eta^{\mu\nu}\frac{\partial\overline{\Omega}^{(p)}}{\partial x^\mu}\frac{\partial\overline{\Omega}^{(n-p)}}{\partial x^\nu}\right\} \end{aligned} \tag{5.17}$$

quel que soit $n \geq 2$.

## 5.4 Résolution des équations d'Hamilton-Jacobi

La détermination de $\overline{\Omega}(x)$ consiste donc à intégrer les équations (5.13). Or, ces équations sont valides en tout point $x \neq x_A$. Nous allons supposer que $x$ varie le long de la géodésique non perturbée $\Gamma^{(0)}_{AB}$, reliant les deux événements fixés $x_A$ et $x_B$, d'équations paramétriques $x_{(0)}(\lambda)$

$$x_{(0)\alpha}(\lambda) = q^\alpha\lambda + x_A^\alpha, \quad \text{où} \quad 0 \leq \lambda \leq 1. \tag{5.18}$$

En substituant l'équation (5.18) et $x_{(0)\nu}(\lambda) - x_A^\nu = q^\nu\lambda$ respectivement à $x$ et $\bar{q}^\nu$ dans les équations (5.13), nous obtenons

$$\lambda q^\nu \partial_\nu \overline{\Omega}^{(n)}(x_{(0)}(\lambda)) - \overline{\Omega}^{(n)}(x_{(0)}(\lambda)) = \Phi^{(n)}((x_{(0)}(\lambda)). \tag{5.19}$$

Calculons maintenant la dérivée totale du terme perturbatif $\overline{\Omega}^{(n)}$ le long de la géodésique $\Gamma^{(0)}_{AB}$ ; nous obtenons

$$\frac{d\overline{\Omega}^{(n)}(x_{(0)}(\lambda))}{d\lambda} = q^{\mu}\frac{\partial\overline{\Omega}^{(n)}}{\partial x^{\mu}}(x_{(0)}(\lambda))\,. \tag{5.20}$$

En substituant le membre de gauche de l'équation (5.20) à $q^{\mu}\frac{\partial\overline{\Omega}^{(n)}}{\partial x^{\mu}}(x_{(0)}(\lambda))$ dans l'équation (5.19), nous remplaçons le système d'équations aux dérivées partielles par un système d'équations différentielles ordinaires de premier ordre du type

$$\lambda\frac{d\overline{\Omega}^{(n)}(x_{(0)}(\lambda))}{d\lambda} - \overline{\Omega}^{(n)}(x_{(0)}(\lambda)) = \Phi^{(n)}(x_{(0)}(\lambda))\,. \tag{5.21}$$

En introduisant la transformation

$$\overline{\Omega}(x_{(0)}(\lambda)) = \lambda\,\mathcal{S}^{(n)}(x_{(0)}(\lambda)) \tag{5.22}$$

et en calculant la dérivée totale de $\overline{\Omega}(x^{(0)}(\lambda))$ dans l'équation (5.22), nous obtenons

$$\frac{d\,\overline{\Omega}(x_{(0)}(\lambda))}{d\lambda} = \mathcal{S}^{(n)}(x_{(0)}(\lambda)) + \lambda\frac{d\,\mathcal{S}^{(n)}(x_{(0)}(\lambda))}{d\lambda}\,. \tag{5.23}$$

En substituant les équations (5.22) et (5.23) dans l'équation (5.21), nous arrivons à une nouvelle équation différentielle

$$\lambda^2\frac{d\,\mathcal{S}^{(n)}(x_{(0)}(\lambda))}{d\lambda} = \Phi^{(n)}(x_{(0)}(\lambda)\,. \tag{5.24}$$

Or, la solution générale de cette dernière équation s'écrit

$$\mathcal{S}^{(n)}(x_{(0)}(\lambda)) = \int_1^{\lambda}\frac{1}{\lambda'^2}\Phi^{(n)}(x_{(0)}(\lambda')\,d\lambda' + C^{(n)}\,, \tag{5.25}$$

où les $C^{(n)}$ sont des constantes arbitraires. En utilisant l'équation (5.22), nous obtenons maintenant la solution pour chaque terme perturbatif $\overline{\Omega}^{(n)}$ sous la forme

$$\overline{\Omega}(x_{(0)}(\lambda)) = \lambda\int_1^{\lambda}\frac{1}{\lambda'^2}\Phi^{(n)}(x_{(0)}(\lambda')\,d\lambda' + C^{(n)}\lambda\,. \tag{5.26}$$

Toutes les solutions (5.26) sont compatibles avec la condition initiale $\overline{\Omega}(x_A) = 0$, mais il reste le problème de la détermination des constantes d'intégration $C^{(n)}$. Cependant, les dérivées de la fonction d'univers $\Omega(x_A, x_B)$ par rapport à $x^{\mu}_B$ admettent une limite finie lorsque $x_B$ tend vers $x_A$ [82]

$$\lim_{x_B\to x_A}\left[\frac{\partial\Omega}{\partial x^{\mu}_B}(x_A, x_B)\right] = 0\,. \tag{5.27}$$

Cette propriété permet d'écrire que les dérivées de chaque terme perturbatif $\overline{\Omega}^{(n)}(x_{(0)}(\lambda))$ par rapport à $x^{\mu}$ admettent une limite finie lorsque $\lambda \to 0$

$$\forall n\,,\qquad \lim_{\lambda\to 0}\left[\frac{\partial\overline{\Omega}^{(n)}}{\partial x^{\mu}}(x_{(0)}(\lambda))\right] = 0\,. \tag{5.28}$$

Enfin, la condition (5.28) permet de calculer la limite de l'équation (5.20) lorsque $\lambda \to 0$

$$\forall n\,,\qquad \lim_{\lambda\to 0}\left[\frac{d}{d\lambda}\overline{\Omega}^{(n)}(x_{(0)}(\lambda))\right] = 0\,. \tag{5.29}$$

Calculons maintenant la dérivée de l'équation (5.26) par rapport à $\lambda$ et déterminons sa limite lorsque $\lambda \to 0$. Nous déduisons alors aisément l'expression des constantes d'intégration $C^{(n)}$

$$\forall n\,, \quad C^{(n)} = \int_0^1 \frac{1}{\lambda'^2}\Phi^{(n)}(x_{(0)}(\lambda'))d\lambda'\,. \tag{5.30}$$

En substituant les expressions (5.30) dans (5.26), nous obtenons pour chaque terme perturbatif $\overline{\Omega}^{(n)}$

$$\overline{\Omega}^{(n)}(x_{(0)}(\lambda)) = \lambda \int_0^\lambda \frac{1}{\lambda'^2}\Phi^{(n)}(x_{(0)}(\lambda'))d\lambda'\,. \tag{5.31}$$

Toutefois, il faut prouver la continuité de l'intégrande $\lambda'^{-2}\Phi(x_{(0)}(\lambda')$ sur l'ensemble de l'intervalle $0 \leq \lambda' \leq 1$. Celle-ci est aisément vérifiée pour $n = 1$, car nous déduisons de (5.16)

$$\frac{1}{\lambda^2}\,\Phi^{(1)}(x_{(0)}(\lambda)) = -\frac{1}{2}(x_B^\mu - x_A^\mu)(x_B^\nu - x_A^\nu)\eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma}g_{(1)}^{\rho\sigma}(x_{(0)}(\lambda))\,. \tag{5.32}$$

En conséquence, $\overline{\Omega}^{(1)}(x_{(0)}(\lambda))$ est donnée par l'équation (5.31) lorsque $n = 1$. Ainsi, la détermination de la fonction d'univers à l'approximation post-Minkowskienne linéaire, c'est-à-dire les termes d'ordre $G$, est obtenue quand nous calculons $\Omega^{(1)}(x_A, x_B) = \overline{\Omega}^{(1)}(x_{(0)}(1))$. Il vient

$$\Omega^{(1)}(x_A, x_B) = -\frac{1}{2}\eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma}(x_B^\rho - x_A^\rho)(x_B^\sigma - x_A^\sigma)\int_0^1 g_{(1)}^{\mu\nu}(x_{(0)}(\lambda))d\lambda\,. \tag{5.33}$$

En substituant maintenant $x$ à $x_B$ dans le membre de gauche de l'équation (5.33) et en dérivant par rapport à $x$, nous arrivons à

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Omega^{(1)}}{\partial x^\nu}(x_A, x) = &-\overline{q}_\rho \int_0^1 \eta_{\nu\sigma}g_{(1)}^{\rho\sigma}(\overline{x}_{(0)}(\bar{\lambda}))d\bar{\lambda} \\ &-\frac{1}{2}\overline{q}_\rho\overline{q}_\sigma \int_0^1 g_{(1)\,,\nu}^{\rho\sigma}(\overline{x}_{(0)}(\bar{\lambda}))\bar{\lambda}d\bar{\lambda}\,,\end{aligned} \tag{5.34}$$

où $\overline{x}_{(0)}(\bar{\lambda})$ est définie par

$$\overline{x}_{(0)}^\alpha(\bar{\lambda}) = (x^\alpha - x_A^\alpha)\bar{\lambda} + x_A^\alpha\,. \tag{5.35}$$

En posant $x = x_{(0)}(\lambda)$ dans le membre de gauche de l'équation (5.34), nous déduisons

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Omega^{(1)}}{\partial x^\nu}(x_A, x_{(0)}(\lambda)) = &-\lambda(x_B^\alpha - x_A^\alpha)\int_0^1 \eta_{\alpha\rho}\eta_{\nu\sigma}g_{(1)}^{\rho\sigma}(\overline{x}_{(0)}(\bar{\lambda}))d\bar{\lambda} \\ &-\frac{1}{2}\lambda^2(x_B^\alpha - x_A^\alpha)(x_B^\beta - x_A^\beta)\int_0^1 \eta_{\alpha\rho}\eta_{\beta\sigma}g_{(1)\,,\nu}^{\rho\sigma}(\overline{x}_{(0)}(\bar{\lambda}))\bar{\lambda}d\bar{\lambda}\,.\end{aligned} \tag{5.36}$$

Enfin, en substituant (5.36) dans l'équation (5.17) considérée lorsque $n = 2$, nous voyons que $\lambda^{-2}\Phi^{(2)}$ est une fonction continue de $\lambda$. Un long raisonnement par récurrence montre que $\lambda^{-2}\Phi^{(n)}$ est une fonction continue quel que soit $n \geq 2$. Nous pouvons donc déterminer les perturbations $\Omega^{(n)}(x_A, x_B)$ en considérant les équations (5.31) lorsque $\lambda$ tend vers 1.

## 5.5 Développement post-minkowskien général de Ω

**Théorème 2.** *En supposant que la métrique d'espace-temps admette le développement post-Minkowskien généralisé* (5.5)*, la fonction d'univers de deux événements distincts $x_A$ et $x_B$ est donnée par*

$$\Omega(x_A, x_B) = \Omega^{(0)}(x_A, x_B) + \sum_{n=1}^{\infty} G^n \Omega^{(n)}(x_A, x_B)\,,$$

*où*

$$\Omega^{(1)}(x_A, x_B) = -\frac{1}{2}\eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma}(x_B^\rho - x_A^\rho)(x_B^\sigma - x_A^\sigma)\int_0^1 g_{(1)}^{\mu\nu}(x_{(0)}(\lambda))d\lambda\,, \tag{5.37}$$

$$\begin{aligned}\Omega^{(n)}(x_A, x_B) = {} & -\frac{1}{2}\eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma}(x_B^\rho - x_A^\rho)(x_B^\sigma - x_A^\sigma)\int_0^1 g_{(n)}^{\mu\nu}(x_{(0)}(\lambda))d\lambda \\ & -\frac{1}{2}\int_0^1 \sum_{p=1}^{n-1} g_{(p)}^{\mu\nu}(x_{(0)}(\lambda))\Bigg[\eta_{\mu\rho}\,(x_B^\rho - x_A^\rho)\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\Omega^{(n-p)}}{\partial x^\nu}(x_A, x_{(0)}(\lambda)) \\ & \qquad + \sum_{q=1}^{n-p}\frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial\Omega^{(q)}}{\partial x^\mu}(x_A, x_{(0)}(\lambda))\frac{\partial\Omega^{(n-p-q)}}{\partial x^\nu}(x_A, x_{(0)}(\lambda))\Bigg]d\lambda \\ & -\frac{1}{2}\int_0^1 \sum_{p=1}^{n-1}\frac{1}{\lambda^2}\eta^{\mu\nu}\frac{\partial\Omega^{(p)}}{\partial x^\mu}(x_A, x_{(0)}(\lambda))\,\frac{\partial\Omega^{(n-p)}}{\partial x^\nu}(x_A, x_{(0)}(\lambda))d\lambda\,,\end{aligned} \tag{5.38}$$

*quel que soit $n \geq 2$, toutes les intégrales étant calculées le long de la droite minkowskienne $\Gamma_{AB}^{(0)}$ définie par l'équation* (2.34).

Ensuite, à partir des équations (5.37) et (5.38) du théorème 2 et des composantes contravariantes (5.6)-(5.7) du tenseur métrique, nous déduisons aisément l'expression explicite du terme perturbatif $\Omega^{(2)}(x_A, x_B)$ dans le corollaire suivant.

**Corollaire.** *En prenant en compte les composantes covariantes du tenseur métrique, les termes $\Omega^{(1)}(x_A, x_B)$ et $\Omega^{(2)}(x_A, x_B)$ peuvent être écrits sous la forme*

$$\Omega^{(1)}(x_A, x_B) = \frac{1}{2}(x_B^\mu - x_A^\mu)(x_B^\nu - x_A^\nu)\int_0^1 g_{\mu\nu}^{(1)}(x_{(0)}(\lambda))d\lambda\,, \tag{5.39}$$

$$\begin{aligned}\Omega^{(2)}(x_A, x_B) = {} & \frac{1}{2}(x_B^\mu - x_A^\mu)(x_B^\nu - x_A^\nu)\int_0^1 \Big[g_{\mu\nu}^{(2)}(x_{(0)}(\lambda)) \\ & \qquad - \eta^{\rho\sigma}\, g_{\mu\rho}^{(1)}(x_{(0)}(\lambda))\, g_{\nu\sigma}^{(1)}(x_{(0)}(\lambda))\Big]d\lambda \\ & + (x_B^\mu - x_A^\mu)\int_0^1 \frac{1}{\lambda}\eta^{\nu\rho}\frac{\partial\Omega^{(1)}}{\partial x^\nu}(x_A, x_{(0)}(\lambda))\, g_{\mu\rho}^{(1)}(x_{(0)}(\lambda))d\lambda \\ & - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{\lambda^2}\eta^{\mu\nu}\frac{\partial\Omega^{(1)}}{\partial x^\mu}(x_A, x_{(0)}(\lambda))\,\frac{\partial\Omega^{(1)}}{\partial x^\nu}(x_A, x_{(0)}(\lambda))d\lambda\,.\end{aligned} \tag{5.40}$$

En conclusion, nous avons utilisé les équations d'Hamilton-Jacobi satisfaites par $\Omega(x_A, x)$ au point $x$ considéré comme une variable libre. Nous avons montré que cette équation pouvait facilement être remplacée par un système infini d'équations différentielles ordinaires régissant le terme perturbatif

$\Omega^{(n)}(x_A, x)$ lorsque $x$ est contraint à varier sur la géodésique non perturbée $\Gamma^{(0)}_{AB}$ reliant $x_A$ et $x_B$. Nous en avons déduit que chaque terme $\Omega^{(n)}(x_A, x_B)$ est obtenu sous la forme d'une intégrale calculée le long de cette droite. Dans le cadre de l'approximation post-minkowskienne d'ordre $G$, nous retrouvons l'expression de $\Omega^{(1)}$ déjà donnée par Synge [82]. Cependant, soulignons la difficulté pour déterminer les termes perturbatifs $\Omega^{(n)}$ pour $n \geq 2$, qui nécessitent de prendre en compte des intégrandes comportant des dérivées des termes $\Omega^{(n-p)}$, $p = 1, ..., n-1$. La présence de ces quantités peut conduire à des calculs compliqués, comme l'illustre le cas $n = 2$ où un produit des dérivées d'$\Omega^{(1)}$ intervient dans la détermination du terme $\Omega^{(2)}$.

## 5.6 Détermination de $\Omega^{(2)}$ avec les équations d'Euler-Lagrange

Le but de ce paragraphe est de déterminer le terme perturbatif $\Omega^{(2)}(x_A, x_B)$ d'une manière différente. Pour ce faire, nous allons en effet utiliser l'expression (2.39). Nous avons donc besoin de calculer explicitement les corrections d'ordre $G$ à la géodésique non perturbée $\Gamma^{(0)}_{AB}$. Nous pouvons écrire ces corrections sous la forme suivante

$$X^\mu(\lambda) = GX^\mu_{(1)}(\lambda) + G^2 X^\mu_{(2)}(\lambda)\,, \tag{5.41}$$

où les fonctions $X^\mu_{(1)}$ et $X^\mu_{(2)}$satisfont les conditions de bord

$$X^\mu_{(1)}(0) = X^\mu_{(2)} = 0\,, \quad X^\mu_{(1)}(1) = X^\mu_{(2)} = 0\,. \tag{5.42}$$

La substitution des équations (5.5-5.7) et (5.41) à respectivement $g_{\mu\nu}$ et $X^\mu$ dans l'équation (2.39) permet d'obtenir

$$\begin{aligned}\Omega(x_A, x_B) \;=\; & \Omega^{(0)}(x_A, x_B) + \frac{1}{2}G(x^\mu_B - x^\mu_A)(x^\nu_B - x^\nu_A)\int_0^1 g^{(1)}_{\mu\nu}(x(\lambda))d\lambda \\ & +\frac{1}{2}G^2\int_0^1 \Big[(x^\mu_B - x^\mu_A)(x^\nu_B - x^\nu_A)g^{(2)}_{\mu\nu}(x_{(0)}(\lambda)) \\ & +2(x^\mu_B - x^\mu_A)\dot{X}^\nu_{(1)}(\lambda)g^{(1)}_{\mu\nu}(x_{(0)}(\lambda)) + \eta_{\mu\nu}\dot{X}^\mu_{(1)}(\lambda)\dot{X}^\nu_{(1)}(\lambda)\Big]\,d\lambda + O(G^3)\,.\end{aligned} \tag{5.43}$$

En remarquant que

$$g^{(1)}_{\mu\nu}(x(\lambda)) = g^{(1)}_{\mu\nu}(x_{(0)}(\lambda)) + GX^\rho_{(1)}g^{(1)}_{\mu\nu,\rho}(x_{(0)}(\lambda)) + O(G^2) \tag{5.44}$$

nous obtenons les expressions de $\Omega^{(1)}$ et $\Omega^{(2)}$ sous la forme

$$\Omega^{(1)}(x_A, x_B) = \frac{1}{2}(x^\mu_B - x^\mu_A)(x^\nu_B - x^\nu_A)\int_0^1 g^{(1)}_{\mu\nu}(x_{(0)}(\lambda))d\lambda\,, \tag{5.45}$$

$$\begin{aligned}\Omega^{(2)}(x_A, x_B) = \frac{1}{2}\int_0^1 \Big\{&(x^\mu_B - x^\mu_A)(x^\nu_B - x^\nu_A)\Big[g^{(2)}_{\mu\nu}(x_{(0)}(\lambda)) + X^\rho_{(1)}(\lambda)g^{(1)}_{\mu\nu,\rho}(x_{(0)}(\lambda))\Big] \\ &+2(x^\mu_B - x^\mu_A)\dot{X}^\nu_{(1)}(\lambda)g^{(1)}_{\mu\nu}(x_{(0)}(\lambda)) + \eta_{\mu\nu}\dot{X}^\mu_{(1)}(\lambda)\dot{X}^\nu_{(1)}(\lambda)\Big\}\,d\lambda\,,\end{aligned} \tag{5.46}$$

où les intégrales sont calculées le long de la géodésique non perturbée $\Gamma^{(0)}_{AB}$.

L'équation (5.45) coïncide avec la formule (5.39). il faut maintenant transformer le membre de droite de l'équation (5.46) de façon à faire disparaitre les termes en $X^\mu_{(1)}$ ou $\dot{X}^\mu_{(1)}$, ce qui revient à calculer leur expression. Or, en utilisant les équations d'Euler-Lagrange

$$\frac{d}{d\lambda}\left(g_{\rho\sigma}\frac{dx^\sigma}{d\lambda}\right) = \frac{1}{2}h_{\mu\nu,\rho}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}\,, \tag{5.47}$$

nous arrivons à

$$\frac{1}{2}(x_B^\mu - x_A^\mu)(x_B^\nu - x_A^\nu) g^{(1)}_{\mu\nu,\rho}(x_{(0)}(\lambda)) = \frac{d}{d\lambda}\left[\eta_{\rho\sigma}\dot{X}^\sigma_{(1)}(\lambda) + (x_B^\sigma - x_A^\sigma) g^{(1)}_{\rho\sigma}(x_{(0)}(\lambda))\right].$$

En substituant le membre de droite de cette dernière équation dans la formule (5.46) et en intégrant par parties, nous trouvons

$$\Omega^{(2)}(x_A, x_B) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[(x_B^\mu - x_A^\mu)(x_B^\nu - x_A^\nu) g^{(2)}_{\mu\nu}(x_{(0)}(\lambda)) - \eta_{\mu\nu}\dot{X}^\mu_{(1)}(\lambda)\dot{X}^\nu_{(1)}(\lambda)\right] d\lambda . \tag{5.48}$$

Il faut maintenant intégrer le terme faisant intervenir le produit de $\eta_{\mu\nu}\dot{X}^\mu_{(1)}(\lambda)\dot{X}^\nu_{(1)}(\lambda)$. Ainsi, pour transformer l'intégrale

$$\Xi_{(2)} = \frac{1}{2}\int_0^1 \eta_{\mu\nu}\dot{X}^\mu_{(1)}(\lambda)\dot{X}^\nu_{(1)}(\lambda) d\lambda , \tag{5.49}$$

il faut substituer les développements (5.41) et (5.46) dans l'équation (2.27). Nous montrons ainsi que $X^\mu_{(1)}$ satisfait l'équation différentielle

$$\dot{X}^\mu_{(1)} - \frac{1}{\lambda}X^\mu_{(1)} = \frac{1}{\lambda}\eta^{\mu\rho}\frac{\partial\Omega^{(1)}}{\partial x^\rho}(x_A, x_{(0)}(\lambda)) - \eta^{\mu\rho}(x_B^\sigma - x_A^\sigma) g^{(1)}_{\rho\sigma}(x_{(0)}(\lambda)) . \tag{5.50}$$

Or, la seule solution, acceptable au regard de condition de bord $X^\mu_{(1)}(1) = 0$, est donnée par

$$X^\mu_{(1)}(\lambda) = \lambda Y^\mu_{(1)}(\lambda) , \tag{5.51}$$

où

$$Y^\mu_{(1)}(\lambda) = \eta^{\mu\rho}\int_\lambda^1 \left[\frac{1}{\lambda'}(x_B^\sigma - x_A^\sigma) g^{(1)}_{\rho\sigma}(x_{(0)}(\lambda')) - \frac{1}{\lambda'^2}\frac{\partial\Omega^{(1)}}{\partial x^\rho}(x_A, x_{(0)}(\lambda'))\right] d\lambda' . \tag{5.52}$$

En utilisant maintenant la propriété 2 du chapitre 2, nous constatons que cette solution satisfait également la seconde condition de bord $X^\mu_{(1)}(0) = 0$. En substituant $\dot{X}^\mu_{(1)}(\lambda)$ de $\dot{X}^\mu_{(1)}(\lambda) = \lambda\dot{Y}^\mu_{(1)}(\lambda) + Y^\mu_{(1)}(\lambda)$ dans l'expression (5.49) et par la suite en intégrant par partie, nous arrivons à

$$\Xi_{(2)} = \frac{1}{2}\int_0^1 \lambda^2\eta_{\mu\nu}\dot{Y}^\mu_{(1)}(\lambda)\dot{Y}^\nu_{(1)}(\lambda) d\lambda , \tag{5.53}$$

avec $Y^\mu_{(1)}(1) = 0$. La dérivation (5.52) par rapport à $\lambda$ et ensuite la substitution de cette quantité dans l'expression (5.53) nous conduit finalement à

$$\begin{aligned}\Xi_{(2)} \;=\; & \frac{1}{2}(x_B^\mu - x_A^\mu)(x_B^\nu - x_A^\nu)\int_0^1 \eta^{\rho\sigma} g^{(1)}_{\mu\rho}(x_{(0)}(\lambda)) g^{(1)}_{\nu\sigma}(x_{(0)}(\lambda)) d\lambda \\ & - (x_B^\mu - x_A^\mu)\int_0^1 \frac{1}{\lambda}\eta^{\nu\rho}\frac{\partial\Omega^{(1)}}{\partial x^\nu}(x_A, x_{(0)}(\lambda)) g^{(1)}_{\mu\rho}(x_{(0)}(\lambda)) d\lambda \\ & + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{\lambda^2}\eta^{\mu\nu}\frac{\partial\Omega^{(1)}}{\partial x^\mu}(x_A, x_{(0)}(\lambda))\frac{\partial\Omega^{(1)}}{\partial x^\nu}(x_A, x_{(0)}(\lambda)) d\lambda .\end{aligned}$$

Enfin, il convient de substituer $\Xi_{(2)}$ de cette dernière équation dans (5.48) pour retrouver l'expression de $\Omega^{(2)}(x_A, x_B)$ donnée par la formule (5.40).

**Remarque** : Notons que les équations (5.51) et (5.52) permettent de calculer le terme perturbatif de premier ordre en $G$ de la géodésique connectant les deux événements $x_A$ and $x_B$ comme une intégrale prise le long de la ligne droite minkowskienne reliant ces deux événements.

# Chapitre 6

# Développement général des fonctions de transfert de temps

## 6.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à la construction des fonctions de transfert de temps à l'approximation post-minkowskienne généralisée. En considérant deux événements distincts $x_A = (ct_A, \boldsymbol{x}_A)$ et $x_B = (ct_B, \boldsymbol{x}_B)$, nous recherchons à exprimer les fonctions $\mathcal{T}_e(t_A, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B)$ et $\mathcal{T}_r(t_B, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B)$ sous la forme de séries en puissances successives de $G$

$$\mathcal{T}_r(t_B, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B) = \frac{R_{AB}}{c} + \sum_{n=1}^{\infty} G^n \mathcal{T}_r^{(n)}(t_B, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B) \tag{6.1}$$

et

$$\mathcal{T}_e(t_A, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B) = \frac{R_{AB}}{c} + \sum_{n=1}^{\infty} G^n \mathcal{T}_e^{(n)}(t_A, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B)\,, \tag{6.2}$$

où $R_{AB} = |\boldsymbol{x}_B - \boldsymbol{x}_A|$.
Au chapitre 2, nous avons souligné que deux méthodes différentes permettent de déterminer le transfert de temps : d'une part l'inversion de la fonction d'univers une fois cette dernière connue, d'autre part la résolution des équations iconales satisfaites par les fonctions de transfert de temps. Le but de ce chapitre est donc de construire ces deux méthodes dans le cadre de l'approximation post-minkowskienne généralisée.

Dans le paragraphe 6.2, nous nous intéressons à l'inversion de la fonction d'univers, c'est-à-dire la résolution de $\Omega(x_A, x_B) = 0$. En utilisant l'inversion de Lagrange des séries, nous construisons le procédé algorithmique permettant de déterminer $\mathcal{T}_e$ et $\mathcal{T}_r$ à n'importe quel ordre d'approximation post-minkowskienne généralisée. Nous illustrons la méthode en les calculant jusqu'en $O(G^4)$, c'est-à-dire à l'approximation 3-post-minkowskienne (3PM).

Dans le paragraphe 6.3, nous nous intéressons à la deuxième méthode permettant de déterminer $\mathcal{T}_r$ et $\mathcal{T}_e$. En supposant les événements $x_A$ et $x_B$ fixés, nous considérons les équations iconales satisfaites par $\mathcal{T}_e(t_A, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x})$ et $\mathcal{T}_r(t_B, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_B)$ où $\boldsymbol{x}$ est une variable libre. En admettant que $\mathcal{T}_e(t_A, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x})$ et $\mathcal{T}_r(t_B, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_B)$ s'écrivent sous la forme de développements post-minkowskiens généraux, nous montrons que leurs équations iconales en $\boldsymbol{x}$ peuvent être facilement remplacées par un système infini d'équations aux dérivées partielles régissant les termes perturbatifs $\mathcal{T}_e^{(n)}(t_A, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x})$ et $\mathcal{T}_r^{(n)}(t_B, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_B)$. Ensuite, nous montrons que chaque terme perturbatif $\mathcal{T}_r^{(n)}(t_B, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_B)$ est obtenu sous la forme d'une intégrale calculée le long de la courbe $\Gamma_{AB}^{(0)-}$ d'équations paramétriques $x^i_{(0)-}(\lambda) = -(x^i_B - x^i_A)\lambda + x^i_B$ avec $0 \leq \lambda \leq 1$. Enfin, de manière analogue, nous montrons que chaque terme perturbatif $\mathcal{T}_e^{(n)}(t_A, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x})$

est obtenu sous la forme d'une intégrale calculée le long de la courbe $\Gamma_{AB}^{(0)+}$ d'équations paramétriques $x^i_{(0)+}(\lambda) = (x^i_B - x^i_A)\lambda + x^i_A$ avec $0 \leq \lambda \leq 1$.

## 6.2 Fonctions de transfert de temps via la fonction d'univers

Ce paragraphe est consacré à la détermination des fonctions de transfert de temps par l'inversion de la fonction d'univers. Soient $x_A = (ct_A, \boldsymbol{x}_A)$ et $x_B = (ct_B, \boldsymbol{x}_B)$ deux événements distincts de l'espace-temps. Supposons que la métrique $g$ admet le développement post-minkowskien général (5.5). Il est alors légitime de chercher pour la fonction d'univers $\Omega(x_A, x_B)$ un développement post-minkowskien général de la forme

$$\Omega(x_A, x_B) = \Omega^{(0)}(x_A, x_B) + \Omega^{(PM)}(x_A, x_B), \quad \text{où } \Omega^{(PM)}(x_A, x_B) = \sum_{n=1}^{\infty} G^n \Omega^{(n)}(x_A, x_B), \tag{6.3}$$

où $\Omega^{(0)}(x_A, x_B)$ est la fonction d'univers dans Minkowski définie par l'équation (5.2). Nous déduisons aisément de (5.2)

$$\Omega^{(0)}(x_A, x_B) = \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}(x^\mu_B - x^\mu_A)(x^\nu_B - x^\nu_A) = c^2(t_B - t_A)^2 - R^2_{AB}, \tag{6.4}$$

ce qui entraîne

$$\begin{aligned} c^2(t_B - t_A)^2 &= R^2_{AB} - 2\Omega^{(PM)}(ct_A, \boldsymbol{x}_A, ct_A + c\mathcal{T}_e(t_A, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B), \boldsymbol{x}_B) &(6.5)\\ &= R^2_{AB} - 2\Omega^{(PM)}(ct_B - c\mathcal{T}_r(t_B, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B), \boldsymbol{x}_A, ct_B, \boldsymbol{x}_B). &(6.6)\end{aligned}$$

En substituant $\mathcal{T}_e$ et $\mathcal{T}_r$ à $t_B - t_A$ respectivement dans (6.5) et (6.6), il vient

$$c^2\mathcal{T}_e^2 = R^2_{AB} - 2\sum_{n=1}^{\infty} G^n \Omega^{(n)}(ct_A, \boldsymbol{x}_A, ct_A + c\mathcal{T}_e, \boldsymbol{x}_B), \tag{6.7}$$

et

$$c^2\mathcal{T}_r^2 = R^2_{AB} - 2\sum_{n=1}^{\infty} G^n \Omega^{(n)}(ct_B - c\mathcal{T}_r, \boldsymbol{x}_A, ct_B, \boldsymbol{x}_B). \tag{6.8}$$

Mathématiquement, il faut inverser les quantités $\Omega^{(n)}$ qui dépendent elles-mêmes des fonctions $\mathcal{T}_e$ et $\mathcal{T}_r$ recherchées. Ce type de problème est souvent rencontré en mécanique céleste comme par exemple lors de la résolution de l'équation de Kepler. Cependant, Lagrange a construit une méthode permettant de déterminer une fonction $u(x, \varepsilon)$ régie par une équation du type

$$u^2 = x^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n h_n(u) \tag{6.9}$$

satisfaisant la solution

$$u(x, \varepsilon)|_{\varepsilon=0} = x, \tag{6.10}$$

$\varepsilon$ étant un paramètre suffisamment petit (ce qui est le cas de la constante de gravitation universelle $G$) pour garantir une convergence de la série que nous souhaitons construire. En utilisant un développement de Maclaurin de la fonction $u$ au voisinage de $\varepsilon = 0$, la solution de l'équation (6.9) s'écrit sous la forme

$$u(x, \varepsilon) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n u_n(x),$$

où

$$u_n(x) = \frac{1}{n!}\frac{\partial^n u(x,\varepsilon)}{\partial \varepsilon^n}\bigg|_{\varepsilon=0}.$$

Il faut ensuite calculer les dérivées successives de l'équation (6.9) par rapport à $\varepsilon$ et en tenant compte de l'équation (6.10), un calcul sans difficulté donne les $u_n(x)$ quel que soit $n$. Il vient pour les premiers termes

$$\begin{aligned}
u_1(x) &= \frac{h_1(x)}{2x}, \\
u_2(x) &= \frac{1}{2x}\left[h_2(x) + h_1'(x)u_1(x) - u_1^2(x)\right], \\
u_3(x) &= \frac{1}{2x}\left[h_3(x) + h_2'(x)u_1(x) + \frac{1}{2}h_1''(x)u_1^2(x) + h_1'(x)u_2(x) - 2u_1(x)u_2(x)\right].
\end{aligned} \tag{6.11}$$

En appliquant cette procédure à l'équation (6.7), il est possible de déterminer explicitement $\mathcal{T}_e$ à n'importe quel ordre de perturbation post-minkowskienne. Introduisons maintenant des fonctions de $t_A, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B$, utiles pour la suite du calcul :

$$\widetilde{\Omega}_e^{(n)}(t_A, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B) = \Omega^{(n)}(ct_A, \boldsymbol{x}_A, ct_A + R_{AB}, \boldsymbol{x}_B) \tag{6.12}$$

et

$$\widetilde{\Omega}_{e|k}^{(n)}(t_A, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B) = \frac{\partial^k \Omega^{(n)}}{(\partial ct_B)^k}(ct_A, \boldsymbol{x}_A, ct_A + R_{AB}, \boldsymbol{x}_B) \tag{6.13}$$

pour $k = 1, 2, 3, \ldots$ et en remarquant que $\widetilde{\Omega}_{e|k}^{(n)}$ n'est pas une dérivée partielle de $\widetilde{\Omega}_e^{(n)}$. En prenant en compte les équations (6.11)-(6.13) et en substituant $\mathcal{T}_e$ à $u$, $R_{AB}$ à $x$ et $\Omega^{(n)}$ à $h_n$ dans l'équation (6.9), nous obtenons le théorème suivant

**Théorème 3a**. *A l'approximation 3-post-minkowskienne, la fonction de transfert de temps, déterminant le temps de vol coordonné d'un photon entre un instant d'émission $x_A$ et son instant de réception $x_B$, est donnée par*

$$\mathcal{T}_e(t_A, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B) = \frac{1}{c}R_{AB} + \sum_{n=1}^{3} G^n \mathcal{T}_e^{(n)}(t_A, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B) + O(G^4), \tag{6.14}$$

*où*

$$\mathcal{T}_e^{(1)} = -\frac{\widetilde{\Omega}_e^{(1)}}{cR_{AB}}, \tag{6.15}$$

$$\mathcal{T}_e^{(2)} = -\frac{1}{cR_{AB}}\left[\widetilde{\Omega}_e^{(2)} + c\mathcal{T}_e^{(1)}\widetilde{\Omega}_{e|1}^{(1)} + \frac{1}{2}c^2(\mathcal{T}_e^{(1)})^2\right], \tag{6.16}$$

$$\mathcal{T}_e^{(3)} = -\frac{1}{cR_{AB}}\left[\widetilde{\Omega}_e^{(3)} + c\mathcal{T}_e^{(1)}\widetilde{\Omega}_{e|1}^{(2)} + \frac{1}{2}c^2(\mathcal{T}_e^{(1)})^2\widetilde{\Omega}_{e|2}^{(1)} + c\mathcal{T}_e^{(2)}\widetilde{\Omega}_{e|1}^{(1)} + c^2\mathcal{T}_e^{(1)}\mathcal{T}_e^{(2)}\right], \tag{6.17}$$

*les quantités $\widetilde{\Omega}_e^{(n)}$ et $\widetilde{\Omega}_{e|k}^{(n)}$ étant définies par* (6.12) *et* (6.13), *respectivement.*

Un raisonnement similaire est conduit pour $\mathcal{T}_r$. En introduisant les notations

$$\widetilde{\Omega}_r^{(n)}(t_B, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B) = \Omega^{(n)}(ct_B - R_{AB}, \boldsymbol{x}_A, ct_B, \boldsymbol{x}_B) \tag{6.18}$$

et

$$\widetilde{\Omega}^{(n)}_{r|k}(t_B, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B) = \frac{\partial^k \Omega^{(n)}}{(\partial c t_A)^k}(ct_B - R_{AB}, \boldsymbol{x}_A, ct_B, \boldsymbol{x}_B)\,, \tag{6.19}$$

ainsi qu'en substituant $\mathcal{T}_r$ à $u$ et $\Omega^{(n)}$ à $h_n$ dans l'équation (6.9), nous obtenons le théorème suivant

**Théorème 3b**. *A l'approximation 3-post-Minkowskienne, la fonction de transfert de temps, déterminant le temps de vol coordonné d'un photon entre un instant d'émission $x_A$ et son instant de réception $x_B$, est donnée par*

$$\mathcal{T}_r(t_B, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B) = \frac{1}{c}R_{AB} + \sum_{n=1}^{3} G^n \mathcal{T}_r^{(n)}(t_B, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B) + O(G^4)\,, \tag{6.20}$$

*où*

$$\mathcal{T}_r^{(1)} = -\frac{\widetilde{\Omega}_r^{(1)}}{cR_{AB}}\,, \tag{6.21}$$

$$\mathcal{T}_r^{(2)} = -\frac{1}{cR_{AB}}\left[\widetilde{\Omega}_r^{(2)} - c\mathcal{T}_r^{(1)}\widetilde{\Omega}_{r|1}^{(1)} + \frac{1}{2}c^2(\mathcal{T}_r^{(1)})^2\right], \tag{6.22}$$

$$\mathcal{T}_r^{(3)} = -\frac{1}{cR_{AB}}\left[\widetilde{\Omega}_r^{(3)} - c\mathcal{T}_r^{(1)}\widetilde{\Omega}_{r|1}^{(2)} + \frac{1}{2}c^2(\mathcal{T}_r^{(1)})^2\widetilde{\Omega}_{r|2}^{(1)} - c\mathcal{T}_r^{(2)}\widetilde{\Omega}_{r|1}^{(1)} + c^2\mathcal{T}_r^{(1)}\mathcal{T}_r^{(2)}\right]. \tag{6.23}$$

### 6.2.1 Relation entre $\mathcal{T}_e$ et $\mathcal{T}_r$

Il est légitime de se demander si la connaissance de l'une des deux fonctions de transfert de temps suffit à déterminer la seconde. Considérons les cas $n = 1$ et $n = 2$. En comparant les expressions (6.15) et (6.21), nous obtenons immédiatement

$$\mathcal{T}_r^{(1)}(t, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B) = \mathcal{T}_e^{(1)}\left(t - \frac{R_{AB}}{c}, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B\right) \tag{6.24}$$

et réciproquement

$$\mathcal{T}_e^{(1)}(t, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B) = \mathcal{T}_r^{(1)}\left(t + \frac{R_{AB}}{c}, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B\right). \tag{6.25}$$

Intéressons-nous aux expressions (6.16) et (6.22). En remarquant que l'équation (6.15) implique l'identité

$$\frac{\partial \mathcal{T}^{(1)}}{\partial t}(t, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B) = -\frac{1}{R_{AB}}\left[\frac{\partial \Omega^{(1)}}{\partial c t_A}(ct, \boldsymbol{x}_A, ct + R_{AB}, \boldsymbol{x}_B) + \frac{\partial \Omega^{(1)}}{\partial c t_B}(ct, \boldsymbol{x}_A, ct + R_{AB}, \boldsymbol{x}_B)\right], \tag{6.26}$$

nous obtenons

$$\mathcal{T}_r^{(2)}(t_B, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B) = \mathcal{T}_e^{(2)}\left(t_B - \frac{R_{AB}}{c}, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B\right) - \mathcal{T}_e^{(1)}\left(t_B - \frac{R_{AB}}{c}, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B\right)\frac{\partial \mathcal{T}_e^{(1)}}{\partial t}\left(t_B - \frac{R_{AB}}{c}, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B\right). \tag{6.27}$$

Réciproquement, nous avons

$$\mathcal{T}_e^{(2)}(t_A, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B) = \mathcal{T}_r^{(2)}\left(t_A + \frac{R_{AB}}{c}, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B\right) + \mathcal{T}_r^{(1)}\left(t_A + \frac{R_{AB}}{c}, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B\right)\frac{\partial \mathcal{T}_r^{(1)}}{\partial t}\left(t_A + \frac{R_{AB}}{c}, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B\right). \tag{6.28}$$

## 6.3 Développement post-minkowskien des équations iconales

Ce paragraphe est consacré à la deuxième méthode permettant de déterminer les fonctions de transfert de temps, à savoir la résolution des équations iconales satisfaites par $\mathcal{T}_r$ et $\mathcal{T}_e$.
Supposons maintenant $x_A$, un événement d'émission d'un photon, et $x_B$, un événement de réception de la lumière, comme fixés. En considérant le point $\boldsymbol{x}$ comme une variable libre, nous pouvons nous intéresser aux deux fonctions de transfert de temps suivantes

$$\Delta^e(\boldsymbol{x}) = c\mathcal{T}_e(t_A, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}), \quad \text{et} \quad \Delta^r(\boldsymbol{x}) = c\mathcal{T}_r(t_B, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_B). \tag{6.29}$$

Notre but est donc de rechercher des développements post-Minkowskiens généraux pour les fonctions $\Delta_e(\boldsymbol{x})$ et $\Delta_r(\boldsymbol{x})$ de la forme

$$\Delta^e(\boldsymbol{x}) = \sum_{G=0}^{\infty} G^n \Delta^r_{(n)}(\boldsymbol{x}), \quad \text{où} \quad \Delta_{(n)}(\boldsymbol{x}) = c\mathcal{T}_e^{(n)}(t_A, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}), \tag{6.30}$$

et

$$\Delta^r(\boldsymbol{x}) = \sum_{G=0}^{\infty} G^n \Delta^r_{(n)}(\boldsymbol{x}), \quad \text{où} \quad \Delta_{(n)}(\boldsymbol{x}) = c\mathcal{T}_r^{(n)}(t_B, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_B), \tag{6.31}$$

Dans la suite de notre raisonnement, pour des raisons d'écritures surchargées, nous écrirons $\Delta^r$ ou $\Delta_r$ pour $\Delta^r(\boldsymbol{x})$ (il en sera de même en ce qui concerne $\Delta^e(\boldsymbol{x})$).

### 6.3.1 Cas du transfert de temps en réception

Les équations iconales satisfaites par $\Delta^r$ s'écrivent

$$g^{00}(x) + 2g^{0i}(x)\Delta^r{}_{,i} + g^{ij}(x)\Delta^r_{,i}\Delta^r_{,j} = 0, \tag{6.32}$$

où

$$x = (x^0_B - \Delta^r(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x}), \quad \text{et} \quad \Delta^r_{,i} = c\frac{\partial \mathcal{T}_r}{\partial x^i}(t_B, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_B). \tag{6.33}$$

Il est très important de remarquer que les composantes du tenseur métrique, évaluées en $x$, dépendent elles-même de la fonction $\Delta^r$ recherchée. Ainsi, pour faire clairement apparaître $\Delta^r$ là où elle intervient, les équations (6.32) doivent être écrites sous la forme suivante

$$g^{00}(x^0_B - \Delta^r, \boldsymbol{x}) + 2g^{0i}(x^0_B - \Delta^r, \boldsymbol{x})\Delta^r_{,i} + g^{ij}(x^0_B - \Delta^r, \boldsymbol{x})\Delta^r_{,i}\Delta^r_{,j} = 0. \tag{6.34}$$

Pour commencer, il faut développer en série de Taylor les composantes du tenseur métrique. Ainsi, en développant $g^{\mu\nu}$ au voisinage de $x^0_B - \Delta^r_{(0)}(\boldsymbol{x})$, nous arrivons à

$$g^{\mu\nu}(x^0_B - \Delta^r, \boldsymbol{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}(\Delta^r - \Delta^r_{(0)})^k \partial_0^k g^{\mu\nu}(x^0_B - \Delta^r_{(0)}, \boldsymbol{x}) \tag{6.35}$$

où

$$\partial_0^k g^{\mu\nu} = \begin{cases} g^{\mu\nu} & \text{si } k = 0 \\ \frac{\partial^k}{\partial (x^0)^k} g^{\mu\nu}, & \forall k \geq 1 \end{cases} \tag{6.36}$$

Comme la série (6.35) fait intervenir des puissances de $(\Delta^r - \Delta^r_{(0)})^k$, et que cette quantité est elle même une série en puissance de $G$, nous allons devoir introduire une nouvelle notation $\Lambda_r^{(k,n)}$ qui exprimera cette puissance.

Nous avons donc

$$\forall k \geq 0, \qquad \frac{(-1)^k}{k!}(\Delta^r - \Delta^r_{(0)})^k = G^k \sum_{n=0}^{\infty} G^n \Lambda_r^{(k,n)}\,, \tag{6.37}$$

où

$$\Lambda_r^{(0,0)} = 1\,, \tag{6.38}$$

$$\forall n \geq 1 \quad \Lambda_r^{(0,n)} = 0\,, \tag{6.39}$$

$$\forall n \geq 1 \quad \Lambda_r^{(1,n)} = -\Delta^r_{(n+1)}\,, \tag{6.40}$$

$$\forall k \geq 2\,,\ \forall n \geq 1 \quad \Lambda_r^{(k,n)} = \frac{(-1)^k}{k!}\left[\sum_{\substack{p_1+p_2+\ldots+p_{k-1}\leq n \\ p_1,p_2,\ldots,p_{k-1}\geq 0}} \left(\left(\prod_{i=1}^{k-1} \Delta^r_{p_i+1}\right).\Delta^r_{(n+1-(p_1+\ldots+p_{(k-1)}))}\right)\right]. \tag{6.41}$$

Nous pouvons donc écrire le développement de Taylor de $g^{\mu\nu}(x^0_B - \Delta^r, \boldsymbol{x})$ au voisinage de $x^0_B - \Delta^r_{(0)}(\boldsymbol{x})$ sous la forme suivante

$$g^{\mu\nu}(x^0_B - \Delta^r, \boldsymbol{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} G^n \left[\sum_{q=0}^{n} \Lambda_r^{(q,n-q)} \partial_0^q g^{\mu\nu}(x^0_B - \Delta_{(0)}, \boldsymbol{x})\right] = \sum_{n=0}^{\infty} G^n \left[\sum_{q=0}^{n} \left(\sum_{p=0}^{q} \Lambda_r^{(p,q-p)} \partial_0^p g^{\mu\nu}_{(n-q)}\right)\right]. \tag{6.42}$$

Ensuite, le produit des dérivées $\Delta^r_{,i}\Delta^r_{,j}$ se développe tel que

$$\Delta^r_{,i}\Delta^r_{,j} = \sum_{n=0}^{\infty} G^n \sum_{p=0}^{n} \Delta^r_{(p),i}\Delta^r_{(n-p),j}\,. \tag{6.43}$$

Grâce aux équations (6.42) et (6.43), nous sommes donc en mesure de calculer les quantités $g^{ij}(x^0_B - \Delta^r, \boldsymbol{x})\Delta^r_{,i}\Delta^r_{,j}$ sous la forme des séries suivantes

$$g^{ij}(x^0_B - \Delta^r, \boldsymbol{x})\Delta^r_{,i}\Delta^r_{,j} = \sum_{n=0}^{\infty} G^n \left\{\sum_{r=0}^{n} \left[\left(\sum_{q=0}^{r}\sum_{p=0}^{q} \Lambda_r^{(p,q-p)} \partial_0^p g^{ij}_{(r-q)}\right) \sum_{p=0}^{p=n-r} \Delta^r_{(p),i}\Delta^r_{(n-r-p),j}\right]\right\}. \tag{6.44}$$

Enfin, il faut expliciter le développement en série du terme $g^{0i}(x^0_B - \Delta^r, \boldsymbol{x})\Delta^r_{,i}$. Nous arrivons à

$$g^{0i}(x^0_B - \Delta^r, \boldsymbol{x})\Delta^r_{,i} = \sum_{n=0}^{\infty} G^n \left\{\sum_{r=1}^{n} \left[\sum_{q=0}^{r-1}\sum_{p=0}^{q} \Lambda_r^{(p,q-p)} \partial_0^p g^{0i}_{(r-q)}\right] \Delta^r_{(n-r),i}\right\}, \tag{6.45}$$

Il est désormais possible de former les développements des équations iconales (6.32) satisfaites par $\Delta^r$. Ainsi, en substituant les équations (6.42), (6.44) et (6.45) dans (6.32), nous obtenons le développement en série

$$\sum_{n=0}^{\infty} G^n \sum_{r=0}^{n} \left\{\sum_{q=0}^{r} \Lambda_r^{(q,r-q)} \partial_0^q g^{00}_{(n-r)} + 2\sum_{q=0}^{r}\left(\sum_{p=0}^{q} \Lambda_r^{(p,q-p)} \partial_0^p g^{0i}_{(r-q)}\right)\Delta^r_{(n-r),i} + \sum_{q=0}^{r}\left[\left(\sum_{p=0}^{q} \Lambda_r^{(p,q-p)} \partial_0^p g^{ij}_{(r-q)}\right)\left(\sum_{s=0}^{n-r} \Delta^r_{(s),i}\Delta^r_{(n-r-s),j}\right)\right]\right\} = 0\,. \tag{6.46}$$

De manière complètement analogue à la section consacrée à la détermination de la fonction d'univers, nous pouvons remplacer les équations (6.46) par un système infini d'équations aux dérivées partielles en isolant chaque ordre de perturbation en puissance de $G$. Nous obtenons

$$2\delta^{ij}\Delta^r_{(0),i}\Delta^r_{(n),j} = \Phi^r_{(n)}(\boldsymbol{x})\,, \tag{6.47}$$

où

$$\Phi^r_{(1)}(\boldsymbol{x}) = g^{00}_{(1)} + 2g^{0i}_{(1)}\Delta^r_{(0),i} + g^{ij}_{(1)}\Delta^r_{(0),i}\Delta^r_{(0),j}\,, \tag{6.48}$$

$$\begin{aligned}\Phi^r_{(n)}(\boldsymbol{x}) = {} & g^{00}_{(n)} + \eta^{ij}\sum_{s=1}^{n-1}\Delta^r_{(s),i}\Delta^r_{(n-s),j} \\ & + \sum_{r=1}^{n}\left[\sum_{q=0}^{r}\Lambda^{(q,r-q)}_r\partial_0^q g^{00}_{(n-r)} + 2\sum_{q=0}^{r}\left(\sum_{p=0}^{q}\Lambda^{(p,q-p)}_r\partial_0^p g^{0i}_{(r-q)}\right)\Delta^r_{(n-r),i}\right. \\ & \left. + \sum_{q=0}^{r}\left(\sum_{p=0}^{q}\Lambda^{(p,q-p)}_r\partial_0^p g^{ij}_{(r-q)}\right)\cdot\left(\sum_{s=0}^{n-r}\Delta^r_{(s),i}\Delta^r_{(n-r-s),j}\right)\right]\,.\end{aligned} \tag{6.49}$$

Il faut désormais résoudre ce système d'équations aux dérivées partielles. Supposons que la variable $\boldsymbol{x}$ est astreinte à varier le long de la courbe $\Gamma^{(0)-}_{AB}$ d'équations paramétriques

$$\boldsymbol{x}_{(0)-}(\lambda) = -(\boldsymbol{x}_B - \boldsymbol{x}_A)\lambda + \boldsymbol{x}_B\,, \quad \text{avec } 0 \leq \lambda \leq 1\,. \tag{6.50}$$

Ceci signifie que $\boldsymbol{x}$ est une fonction de $\lambda$. Nous pouvons donc calculer la dérivée totale de $\Delta^r_{(n)}$ le long de $\Gamma^{(0)-}_{AB}$

$$\frac{d\Delta^r_{(n)}(\boldsymbol{x}_{(0)-}(\lambda))}{d\lambda} = R_{AB}\delta^{ij}(x^i_B - x^i_A)\Delta^r_{(n),j}\,. \tag{6.51}$$

Ensuite, nous avons les relations suivantes

$$\Delta^r_{(0),i}(\boldsymbol{x}_{(0)-}(\lambda)) = \frac{x^i_B - x^i_A}{R_{AB}}\,, \tag{6.52}$$

qui sont indépendantes de $\lambda$. En substituant la relation (6.52) dans (6.51), nous obtenons

$$\frac{d\Delta^r_{(n)}(\boldsymbol{x}_{(0)-}(\lambda))}{d\lambda} = R_{AB}\delta^{ij}\Delta^r_{(0),i}\Delta^r_{(n),j}\,. \tag{6.53}$$

En conclusion, en substituant (6.53) dans (6.47), il est donc possible de remplacer le système infini d'équations aux dérivées partielles (6.47) régissant $\Delta^r$ par un système d'équations différentielles ordinaires linéaires le long de $\Gamma^{(0)-}_{AB}$ de la forme

$$\frac{d\Delta^r_{(n)}(\boldsymbol{x}_{(0)-}(\lambda))}{d\lambda} = \frac{R_{AB}}{2}\Phi^r_{(n)}(\boldsymbol{x}_{(0)-}(\lambda)) \tag{6.54}$$

Or, la solution de ce genre d'équations différentielles s'obtient très simplement. Nous obtenons

$$\Delta^r_{(n)}(\boldsymbol{x}_{(0)-}(\lambda)) = \frac{R_{AB}}{2}\int_0^\lambda \Phi^r_{(n)}(\boldsymbol{x}_{(0)-}(\lambda'))d\lambda'\,. \tag{6.55}$$

En faisant tendre $\lambda$ vers 1 (c'est-à-dire vers $\boldsymbol{x}_A$) dans ces dernières équations, nous pouvons déterminer explicitement la fonction de transfert de temps de réception $\mathcal{T}_r(t_B, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B)$.

### 6.3.2 Cas du transfert de temps en émission

Un raisonnement analogue peut être mené pour la fonction de transfert de temps en émission. Ainsi, les équations iconales satisfaites par $\Delta^e$ s'écrivent

$$g^{00}(x_A^0 + \Delta^e, \boldsymbol{x}) - 2g^{0i}(x_A^0 + \Delta^e, \boldsymbol{x})\Delta^e_{,i} + g^{ij}(x_A^0 + \Delta^e, \boldsymbol{x})\Delta^e_{,i}\Delta^e_{,j} = 0\,, \tag{6.56}$$

où

$$x = (x_A^0 + \Delta^e(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x})\,, \quad \text{et} \quad \Delta^e_{,i} = c\frac{\partial \mathcal{T}_e}{\partial x^i}(t_A, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x})\,. \tag{6.57}$$

Définissons ensuite la notation $\Lambda_e^{(n,p)}$

$$\Lambda_e^{(0,0)} = 1\,, \tag{6.58}$$

$$\forall n \geq 1 \quad \Lambda_e^{(0,n)} = 0\,, \tag{6.59}$$

$$\forall n \geq 1 \quad \Lambda_e^{(1,n)} = \Delta^e_{(n+1)}\,, \tag{6.60}$$

$$\forall k \geq 2\,,\ \forall n \geq 1 \quad \Lambda_e^{(k,n)} = \frac{1}{k!}\left[\sum_{\substack{p_1+p_2+\ldots+p_{k-1}\leq n \\ p_1,p_2,\ldots,p_{k-1}\geq 0}} \left(\left(\prod_{i=1}^{k-1}\Delta^e_{p_i+1}\right).\Delta^e_{(n+1-(p_1+\ldots+p_{(k-1)}))}\right)\right]. \tag{6.61}$$

En isolant chaque ordre de perturbation de $G$, il est possible de remplacer les équations iconales (6.56) par un système infini d'équations aux dérivées partielles de la forme

$$2\delta^{ij}\Delta^e_{(0),i}\Delta^e_{(n),j} = \Phi^e_{(n)}(\boldsymbol{x})\,, \tag{6.62}$$

où

$$\Phi^e_{(1)}(\boldsymbol{x}) = 1 - 2g^{0i}_{(1)}\Delta^e_{(0),i} + g^{ij}_{(1)}\Delta^e_{(0),i}\Delta^e_{(0),j}\,, \tag{6.63}$$

$$\begin{aligned}\Phi^e_{(n)}(\boldsymbol{x}) = {} & g^{00}_{(n)} + \eta^{ij}\sum_{s=1}^{n-1}\Delta^e_{(s),i}\Delta^e_{(n-s),j} \\ & + \sum_{r=1}^{n}\left\{\sum_{q=0}^{r}\Lambda_e^{(q,r-q)}\partial_0^q g^{00}_{(n-r)} - 2\sum_{q=0}^{r}\left(\sum_{p=0}^{q}\Lambda_e^{(p,q-p)}\partial_0^p g^{0i}_{(r-q)}\right)\Delta^e_{(n-r),i}\right. \\ & \left. + \sum_{q=0}^{r}\left[\left(\sum_{p=0}^{q}\Lambda_e^{(p,q-p)}\partial_0^p g^{ij}_{(r-q)}\right)\left(\sum_{s=0}^{n-r}\Delta^e_{(s),i}\Delta^e_{(n-r-s),j}\right)\right]\right\}.\end{aligned} \tag{6.64}$$

Pour résoudre ce système d'équations, supposons que $\boldsymbol{x}$ varie le long de la courbe $\Gamma^{(0)+}_{AB}$ d'équations paramétriques

$$\boldsymbol{x}_{(0)+}(\lambda) = (\boldsymbol{x}_B - \boldsymbol{x}_A)\lambda + \boldsymbol{x}_A\,, \quad \text{avec } 0 \leq \lambda \leq 1\,. \tag{6.65}$$

Nous pouvons alors montrer que (6.62) se réduit à un système d'équations différentielles ordinaires où la solution de chaque terme perturbatif $\Delta^e_{(n)}(\boldsymbol{x}_{(0)+}(\lambda))$ est obtenue sous la forme

$$\Delta^e_{(n)}(\boldsymbol{x}_{(0)+}(\lambda)) = \frac{R_{AB}}{2}\int_0^\lambda \Phi^e_{(n)}(\boldsymbol{x}_{(0)+}(\lambda'))d\lambda'\,. \tag{6.66}$$

En faisant tendre $\lambda$ vers 1 (c'est-à-dire vers $\boldsymbol{x}_B$) dans ces dernières équations, nous pouvons déterminer explicitement les fonctions de transfert de temps $\mathcal{T}_e(t_A, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B)$.

### 6.3.3 Théorème général

**Théorème 4**. *En supposant que le tenseur métrique admet un développement post-Minkowskien général (5.5), la fonction de transfert de temps de réception $\mathcal{T}_r(t_B, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B)$, représentant le temps de vol d'un photon entre un événement d'émission $x_A$ et un événement de réception $x_B$, peut s'écrire sous la forme suivante*

$$\mathcal{T}_r(t_B, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B) = \frac{1}{c} R_{AB} + \sum_{n=1}^{\infty} G^n \mathcal{T}_r^{(n)}(t_B, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B)\,,$$

*où quel que soit $n \geq 1$*

$$\begin{aligned} c\mathcal{T}_r^{(n)}(t_B, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B) \;=\; & \frac{1}{2} R_{AB} \int_0^1 \Bigg\{ g_{(n)}^{00}(ct_B - R_{AB}, \boldsymbol{x}_-(\lambda)) + \eta_{ij} \sum_{s=1}^{n-1} \Delta_{(s),i} \Delta_{(n-s),j} \\ & + \sum_{r=1}^{n} \Bigg[ \sum_{q=0}^{r} \Lambda_r^{(q,r-q)} \partial_0^q g_{(n-r)}^{00}(ct_B - R_{AB}, \boldsymbol{x}_-(\lambda)) \\ & \quad + 2 \sum_{q=0}^{r} \Bigg( \sum_{p=0}^{q} \Lambda_r^{(p,q-p)} \partial_0^p g_{(r-q)}^{0i}(ct_B - R_{AB}, \boldsymbol{x}_-(\lambda)) \Bigg) \Delta_{(n-r),i} \\ & \quad + \sum_{q=0}^{r} \Bigg\{ \Bigg( \sum_{p=0}^{q} \Lambda_r^{(p,q-p)} \partial_0^p g_{(r-q)}^{ij}(ct_B - R_{AB}, \boldsymbol{x}_-(\lambda)) \Bigg) \Bigg( \sum_{s=0}^{n-r} \Delta_{(s),i} \Delta_{(n-r-s),j} \Bigg) \Bigg\} \Bigg] \Bigg\}\, d\lambda\,, \end{aligned} \tag{6.67}$$

*où les fonctions $\Lambda_r$ sont définies par les relations (6.38-6.41) et toutes les intégrales sont calculées le long de la courbe $\Gamma_{AB}^{(0)-}$ d'équations paramétriques $\boldsymbol{x}_-(\lambda) = -(\boldsymbol{x}_B - \boldsymbol{x}_A)\lambda + \boldsymbol{x}_B$ avec $0 \leq \lambda \leq 1$.*

*De manière analogue, la fonction de transfert de temps d'émission peut s'écrire sous la forme*

$$\mathcal{T}_e(t_A, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B) = \frac{1}{c} R_{AB} + \sum_{n=1}^{\infty} G^n \mathcal{T}_e^{(n)}(t_A, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B)\,,$$

*où quel que soit $n \geq 1$*

$$\begin{aligned} c\mathcal{T}_e^{(n)}(t_A, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B) \;=\; & \frac{1}{2} R_{AB} \int_0^1 \Bigg\{ g_{(n)}^{00}(ct_A + R_{AB}, \boldsymbol{x}_+(\lambda)) + \eta_{ij} \sum_{s=1}^{n-1} \Delta_{(s),i} \Delta_{(n-s),j} \\ & + \sum_{r=1}^{n} \Bigg[ \sum_{q=0}^{r} \Lambda_e^{(q,r-q)} \partial_0^q g_{(n-r)}^{00}(ct_A + R_{AB}, \boldsymbol{x}_+(\lambda)) \\ & \quad - 2 \sum_{q=0}^{r} \Bigg( \sum_{p=0}^{q} \Lambda_e^{(p,q-p)} \partial_0^p g_{(r-q)}^{0i}(ct_A + R_{AB}, \boldsymbol{x}_+(\lambda)) \Bigg) \Delta_{(n-r),i} \\ & \quad + \sum_{q=0}^{r} \Bigg\{ \Bigg( \sum_{p=0}^{q} \Lambda_e^{(p,q-p)} \partial_0^p g_{(r-q)}^{ij}(ct_A + R_{AB}, \boldsymbol{x}_+(\lambda)) \Bigg) \Bigg( \sum_{s=0}^{n-r} \Delta_{(s),i} \Delta_{(n-r-s),j} \Bigg) \Bigg\} \Bigg] \Bigg\}\, d\lambda\,, \end{aligned} \tag{6.68}$$

*où les fonctions $\Lambda_e$ sont définies par les relations (6.58-6.61) et toutes les intégrales sont calculées le long de la courbe $\Gamma_{AB}^{(0)+}$ d'équations paramétriques $\boldsymbol{x}_+(\lambda) = (\boldsymbol{x}_B - \boldsymbol{x}_A)\lambda + \boldsymbol{x}_A$ avec $0 \leq \lambda \leq 1$.*

# Chapitre 7

# Application à l'approximation post-post-minkowskienne

## 7.1 Introduction

Ce chapitre est motivé par le projet LATOR, qui nécessite de décrire les distances angulaires jusqu'en $G^2/c^4$. Nous allons donc utiliser les résultats obtenus jusqu'ici dans le cadre de l'approximation post-post-minkowskienne (2PM).

Dans le paragraphe 7.2, nous calculons le développement 2PM de la distance angulaire formée par deux sources lumineuses, telle qu'elle est mesurée en $x_r$ par un observateur de mouvement arbitraire donné. Dans le paragraphe 7.3, nous considérons le développement 2PM de la fonction d'univers. Nous obtenons une simplification notable du terme perturbatif $\Omega^{(2)}$ de l'équation (5.40). Le paragraphe 7.4 est dédié à la déviation des rayons lumineux dans le champ gravitationnel faible d'un corps à symétrie sphérique et statique jusqu'à l'ordre $G^2/c^4$. Dans la section 7.4.1, nous montrons que la détermination de fonction d'univers $\Omega$ nécessite seulement le calcul de deux intégrales élémentaires. Puis, nous déduisons aisément de $\Omega$ la fonction de transfert de temps $\mathcal{T}$. Enfin, dans la section 7.4.2, en appliquant le théorème 1, nous calculons explicitement les fonctions de déflexion à partir de $\mathcal{T}$.

## 7.2 Distance angulaire à l'approximation 2PM

Dans ce paragraphe, nous proposons de développer la formule générale (1.26) de la distance angulaire à l'approximation post-post-minkowskienne. Dans ce cas, le tenseur métrique admet le développement

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h^{(1)}_{\mu\nu} + h^{(2)}_{\mu\nu} + O\left(G^3\right), \tag{7.1}$$

où $h^{(1)}_{\mu\nu}$ et $h^{(2)}_{\mu\nu}$ sont des perturbations de Minkowski respectivement d'ordre $G$ et $G^2$. Les fonctions de déflexion (1.24) et (1.25) se développent sous la forme

$$\lambda = \lambda^{(1)} + \lambda^{(2)} + O\left(G^3\right) \quad \text{et} \quad \lambda' = \lambda'^{(1)} + \lambda'^{(2)} + O\left(G^3\right), \tag{7.2}$$

où $\lambda^{(1)}$ et $\lambda'^{(1)}$ sont les déflexions d'ordre $G$ alors que $\lambda^{(2)}$ et $\lambda'^{(2)}$ sont les déflexions d'ordre $G^2$.

En substituant les développements (7.1) et (7.2) dans l'équation (1.26), nous obtenons

$$\begin{aligned}\sin^2\frac{\phi}{2} = \frac{1}{2}\frac{1-\boldsymbol{\beta}^2}{(1-\boldsymbol{\beta}.\boldsymbol{N})(1-\boldsymbol{\beta}.\boldsymbol{N}')}\Big\{&(1-\boldsymbol{N}.\boldsymbol{N}')\left[1+\mathcal{A}^{(1)}+\mathcal{A}^{(2)}\right]\\ &-\sqrt{2\,(1-\boldsymbol{N}.\boldsymbol{N}')}\left[\mathcal{B}^{(1)}+\mathcal{B}^{(2)}\right]+\frac{1}{2}\left(\lambda'^{(1)}-\lambda^{(1)}\right)^2\Big\}+O(G^3),\end{aligned} \tag{7.3}$$

où

$$\mathcal{A}^{(1)} = \frac{h_{00}^{(1)} + 2h_{0i}^{(1)}\beta^i + h_{ij}^{(1)}\beta^i\beta^j}{1-\beta^2} + h_{ij}^{(1)}q^iq^j - \frac{\beta.\lambda^{(1)}}{1-\beta.N} - \frac{\beta.\lambda'^{(1)}}{1-\beta.N'}, \tag{7.4}$$

$$\mathcal{B}^{(1)} = \left(\lambda'^{(1)} - \lambda^{(1)}\right).q, \tag{7.5}$$

et

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^{(2)} = {} & \frac{h_{00}^{(2)} + 2h_{0i}^{(2)}\beta^i + h_{ij}^{(2)}\beta^i\beta^j}{1-\beta^2} - \frac{h_{00}^{(1)} + 2h_{0i}^{(1)}\beta^i + h_{ij}^{(1)}\beta^i\beta^j}{1-\beta^2}\left(\frac{\beta.\lambda^{(1)}}{1-\beta.N} + \frac{\beta.\lambda'^{(1)}}{1-\beta.N'}\right) \\ & + \left[h_{ij}^{(2)} + \left(\frac{h_{00}^{(1)} + 2h_{0k}^{(1)}\beta^k + h_{kl}^{(1)}\beta^k\beta^l}{1-\beta^2} - \frac{\beta.\lambda^{(1)}}{1-\beta.N} - \frac{\beta.\lambda'^{(1)}}{1-\beta.N'}\right)h_{ij}^{(1)} - \eta^{\gamma\delta}h_{i\gamma}^{(1)}h_{j\delta}^{(1)}\right]q^iq^j \\ & - \frac{\beta.\lambda^{(2)}}{1-\beta.N} - \frac{\beta.\lambda'^{(2)}}{1-\beta.N'} + \left(\frac{\beta.\lambda^{(1)}}{1-\beta.N}\right)^2 + \frac{\beta.\lambda^{(1)}}{1-\beta.N}\cdot\frac{\beta.\lambda'^{(1)}}{1-\beta.N'} + \left(\frac{\beta.\lambda'^{(1)}}{1-\beta.N'}\right)^2,\end{aligned} \tag{7.6}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{B}^{(2)} = {} & \left(\lambda'^{(2)} - \lambda^{(2)}\right).q \\ & + \left(\frac{h_{00}^{(1)} + 2h_{0k}^{(1)}\beta^k + h_{kl}^{(1)}\beta^k\beta^l}{1-\beta^2} - \frac{\beta.\lambda^{(1)}}{1-\beta.N} - \frac{\beta.\lambda'^{(1)}}{1-\beta.N'}\right)\left[\left(\lambda'^{(1)} - \lambda^{(1)}\right).q\right] \\ & + h_{ij}^{(1)}\left(\lambda_i'^{(1)} - \lambda_i^{(1)}\right)q^j.\end{aligned} \tag{7.7}$$

La distance angulaire $\phi$, telle qu'elle sera mesurée par l'observateur en $x_r$, admet un développement 2PM de la forme

$$\phi = \phi^{(0)} + \phi^{(1)} + \phi^{(2)} + O(G^3), \tag{7.8}$$

où $\phi^{(0)}$, déjà définie par l'équation (3.48), est la distance angulaire entre deux sources lumineuses dans Minkowski, $\phi^{(1)}$ et $\phi^{(2)}$ étant les contributions d'ordre $G$ et $G^2$ respectivement.

En utilisant l'équation (3.48), la racine carrée de la formule (7.3) est donnée par

$$\begin{aligned}\sin\frac{\phi}{2} &= \sin\frac{\phi^{(0)}}{2}\sqrt{\left[1 + \mathcal{A}^{(1)} + \mathcal{A}^{(2)}\right] - \sqrt{\frac{2}{(1-N.N')}}\left[\mathcal{B}^{(1)} + \mathcal{B}^{(2)}\right] + \frac{\left(\lambda'^{(1)} - \lambda^{(1)}\right)^2}{2\,(1-N.N')}} \\ &= \sin\frac{\phi^{(0)}}{2}\left\{1 + \frac{1}{2}\mathcal{A}^{(1)} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{(1-N.N')}}\mathcal{B}^{(1)} + \frac{1}{2}\mathcal{A}^{(2)} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{(1-N.N')}}\mathcal{B}^{(2)}\right. \\ &\qquad \left. + \frac{\left(\lambda'^{(1)} - \lambda^{(1)}\right)^2}{4\,(1-N.N')} - \frac{1}{8}\left[\mathcal{A}^{(1)} - \sqrt{\frac{2}{(1-N.N')}}\mathcal{B}^{(1)}\right]^2\right\} + O\left(G^3\right).\end{aligned} \tag{7.9}$$

En substituant (7.8) dans le membre de gauche de (7.9), le développement 2PM de la fonction sinus s'écrit

$$\sin\left(\frac{\phi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\phi^{(0)}}{2}\right) + \frac{1}{2}\phi^{(1)}\cos\left(\frac{\phi^{(0)}}{2}\right) + \frac{1}{2}\phi^{(2)}\cos\left(\frac{\phi^{(0)}}{2}\right) - \frac{1}{8}\left[\phi^{(1)}\right]^2\sin\left(\frac{\phi^{(0)}}{2}\right) + O\left(G^3\right). \tag{7.10}$$

En identifiant les membres de droite des équations (7.9) et (7.10), nous obtenons pour $\phi^{(1)}$

$$\phi^{(1)} = \tan\frac{\phi^{(0)}}{2}\left[\frac{h_{00}^{(1)}+2h_{0i}^{(1)}\beta^i+h_{ij}^{(1)}\beta^i\beta^j}{1-\boldsymbol{\beta}^2}+h_{ij}^{(1)}q^iq^j-\frac{\boldsymbol{\beta}.\boldsymbol{\lambda}^{(1)}}{1-\boldsymbol{\beta}.\boldsymbol{N}}-\frac{\boldsymbol{\beta}.\boldsymbol{\lambda}'^{(1)}}{1-\boldsymbol{\beta}.\boldsymbol{N}'}\right.$$
$$\left.-\sqrt{\frac{2}{1-\boldsymbol{N}.\boldsymbol{N}'}}\left(\boldsymbol{\lambda}'^{(1)}-\boldsymbol{\lambda}^{(1)}\right).\boldsymbol{q}\right]. \tag{7.11}$$

et pour $\phi^{(2)}$

$$\phi^{(2)} = \tan\frac{\phi^{(0)}}{2}\left\{\mathcal{A}^{(2)}-\frac{1}{4}\left(1-\tan^2\frac{\phi^{(0)}}{2}\right)\left(\mathcal{A}^{(1)}\right)^2\right.$$
$$-\sqrt{\frac{2}{1-\boldsymbol{N}.\boldsymbol{N}'}}\left[\mathcal{B}^{(2)}-\frac{1}{2}\left(1-\tan^2\frac{\phi^{(0)}}{2}\right)\mathcal{A}^{(1)}\mathcal{B}^{(1)}\right]$$
$$\left.+\frac{1}{2}\frac{1}{1-\boldsymbol{N}.\boldsymbol{N}'}\left[\left(\boldsymbol{\lambda}'^{(1)}-\boldsymbol{\lambda}^{(1)}\right)^2-\left(1-\tan^2\frac{\phi^{(0)}}{2}\right)\left[\left(\boldsymbol{\lambda}'^{(1)}-\boldsymbol{\lambda}^{(1)}\right).\boldsymbol{q}\right]^2\right]\right\}. \tag{7.12}$$

**Remarque :** Pour le projet LATOR, il faut décrire la distance angulaire jusqu'en $G^2/c^4$. Ici, nous avons obtenu $\phi$ à l'ordre $G^2$. Les fonctions de déflexion $\boldsymbol{\lambda}^{(1)}$, $\boldsymbol{\lambda}'^{(1)}$, $\boldsymbol{\lambda}'^{(2)}$ et $\boldsymbol{\lambda}'^{(2)}$ admettent des développements en $1/c$ sous la forme

$$\boldsymbol{\lambda}^{(n)} = \sum_{p=0}^{4}\frac{1}{c^n}\boldsymbol{\lambda}^{(n,p)} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\lambda}'^{(n)} = \sum_{p=0}^{4}\frac{1}{c^n}\boldsymbol{\lambda}'^{(n,p)}. \tag{7.13}$$

Les quantités $\boldsymbol{\beta}$ sont des termes d'ordre $1/c$. En substituant les développements (7.13) dans les équations (7.11) et (7.12), il faut donc prendre garde à l'ordre des termes croisés $\boldsymbol{\beta}.\boldsymbol{\lambda}$ en tronquant en $G^2/c^4$.

## 7.3 Une simplication sur le terme $\Omega^{(2)}$

La détermination du terme perturbatif $\Omega^{(2)}(x_A, x_B)$ de la formule (5.40) obtenue au chapitre 5 nécessite le calcul d'intégrales où interviennent des termes quadratiques de dérivées partielles de $\Omega^{(1)}$. Le but de ce paragraphe est de montrer qu'une simplification notable de l'équation (5.40) existe.

De l'équation (5.36), nous pouvons déduire

$$\lim_{\lambda\to 0}\left[\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\Omega^{(1)}}{\partial x^\mu}(x_A, x_{(0)}(\lambda))\frac{\partial\Omega^{(1)}}{\partial x^\nu}(x_A, x_{(0)}(\lambda))\right] = 0. \tag{7.14}$$

En tenant compte de cette dernière expression, une intégration par parties de la formule (5.40) nous conduit à

$$-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{1}{\lambda^2}\eta^{\mu\nu}\frac{\partial\Omega^{(1)}}{\partial x^\mu}(x_A, x_{(0)}(\lambda))\frac{\partial\Omega^{(1)}}{\partial x^\nu}(x_A, x_{(0)}(\lambda))d\lambda$$
$$=\frac{1}{2}\frac{\partial\Omega^{(1)}}{\partial x_B^\mu}(x_A, x_B)\frac{\partial\Omega^{(1)}}{\partial x_B^\nu}(x_A, x_B)$$
$$-\eta_{\mu\nu}\int_0^1\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\Omega^{(1)}}{\partial x^\mu}(x_A, x_{(0)}(\lambda))\frac{d}{d\lambda}\left[\frac{\partial\Omega^{(1)}}{\partial x^\nu}(x_A, x_{(0)}(\lambda))\right]d\lambda. \tag{7.15}$$

Nous transformons le membre de droite de la formule (7.15) en appliquant le changement de variable $\lambda' = \lambda\bar{\lambda}$ dans l'équation (5.36) ; il vient

$$\frac{\partial\Omega^{(1)}}{\partial x^\nu}(x_A, x_{(0)}(\lambda)) = (x_B^\rho - x_A^\rho)\int_0^\lambda g^{(1)}_{\rho\nu}(x_{(0)}(\lambda'))d\lambda' + \frac{1}{2}(x_B^\rho - x_A^\rho)(x_B^\sigma - x_A^\sigma)\int_0^\lambda g^{(1)}_{\rho\sigma,\nu}(x_{(0)}(\lambda'))\lambda' d\lambda' . \tag{7.16}$$

En dérivant l'équation (7.16) par rapport à $\lambda$, nous obtenons

$$\frac{d}{d\lambda}\left[\frac{\partial\Omega^{(1)}}{\partial x^\nu}(x_A, x_{(0)}(\lambda))\right] = (x_B^\rho - x_A^\rho)\, g^{(1)}_{\rho\nu}(x_{(0)}(\lambda)) + \frac{1}{2}(x_B^\rho - x_A^\rho)(x_B^\sigma - x_A^\sigma)\lambda\, g^{(1)}_{\rho\sigma,\nu}(x_{(0)}(\lambda)) . \tag{7.17}$$

En substituant l'équation (7.17) dans (7.15) nous obtenons une nouvelle formule que nous substituons dans (5.38) ; nous arrivons ainsi à une forme simplifiée du terme perturbateur $\Omega^{(2)}(x_A, x_B)$.

**Théorème 5.** *Le terme $\Omega^{(2)}(x_A, x_B)$ de second ordre en $G$ peut être écrit sous la forme*

$$\Omega^{(2)}(x_A, x_B) = \frac{1}{2}(x_B^\mu - x_A^\mu)(x_B^\nu - x_A^\nu) \times \int_0^1 \left[ g^{(2)}_{\mu\nu}(x_{(0)}(\lambda)) - \eta^{\rho\sigma}\, g^{(1)}_{\mu\rho}(x_{(0)}(\lambda))\, g^{(1)}_{\nu\sigma}(x_{(0)}(\lambda)) - \eta^{\rho\sigma}\frac{\partial\Omega^{(1)}}{\partial x^\rho}(x_A, x_{(0)}(\lambda))\, g^{(1)}_{\mu\nu,\sigma}(x_{(0)}(\lambda))\right] d\lambda + \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\frac{\partial\Omega^{(1)}}{\partial x_B^\mu}(x_A, x_B)\frac{\partial\Omega^{(1)}}{\partial x_B^\nu}(x_A, x_B), \tag{7.18}$$

*les intégrales étant calculées le long de la courbe $\Gamma^{(0)}_{AB}$ d'équations paramétriques $x^\alpha_{(0)}(\lambda) = (x_B^\alpha - x_A^\alpha)\lambda + x_A^\alpha$ avec $0 \le \lambda \le 1$.*

## 7.4 Application à un corps à symétrie sphérique et statique

Considérons le champ gravitationnel d'un corps à symétrie sphérique et statique jusqu'en $G^2/c^4$. Les composantes du tenseur métrique s'écrivent

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + G g^{(1)}_{\mu\nu} + G^2 g^{(2)}_{\mu\nu} + O\left(G^3\right), \tag{7.19}$$

où

$$g^{(1)}_{00} = -\frac{2M}{c^2 r}, \quad g^{(1)}_{0i} = 0, \quad g^{(1)}_{ij} = -2\gamma\frac{M}{c^2 r}\delta_{ij}, \qquad g^{(2)}_{00} = 2\beta\frac{M^2}{c^4 r^2}, \quad g^{(2)}_{0i} = 0, \quad g^{(2)}_{ij} = -\frac{3}{2}\delta\frac{M^2}{c^4 r^2}\delta_{ij}, \tag{7.20}$$

avec $\beta$ et $\gamma$ les paramètres post-newtoniens usuels, et $\delta$ un paramètre post-post-newtonien (en relativité générale $\beta = \gamma = \delta = 1$).

Soit un rayon lumineux émis en $x_A = (x_A^0 = ct_A, \boldsymbol{x}_A)$ et reçu en $x_B = (x_B^0 = ct_B, \boldsymbol{x}_B)$. Nous supposons que $x_A$ et $x_B$ sont situés à l'extérieur du corps, source du champ gravitationnel. Nous introduisons des notations utiles pour la suite

$$\begin{aligned} &r = |\boldsymbol{x}|\,, \quad r_A = |\boldsymbol{x}_A|\,, \quad r_B = |\boldsymbol{x}_B|\,, \qquad R_{AB} = |\boldsymbol{x}_B - \boldsymbol{x}_A|\,, \\ &\boldsymbol{n}_A = \boldsymbol{x}_A/r_A\,, \qquad \boldsymbol{n}_B = \boldsymbol{x}_B/r_B\,, \qquad \boldsymbol{N}_{AB} = \frac{\boldsymbol{x}_B - \boldsymbol{x}_A}{R_{AB}}\,. \end{aligned} \tag{7.21}$$

### 7.4.1 Détermination de Ω et de la fonction de transfert de temps

Nous recherchons un développement de la fonction d'univers $\Omega(x_A, x_B)$ sous la forme

$$\Omega(x_A, x_B) = \Omega^{(0)}(x_A, x_B) + G\Omega^{(1)}(x_A, x_B) + G^2\Omega^{(2)}(x_A, x_B) + O\left(G^3\right)\,, \tag{7.22}$$

où $\Omega^{(0)}(x_A, x_B)$ est la fonction d'univers dans Minkowski définie par l'équation (2.35). Nous voyons aisément que $G\Omega^{(1)}(x_A, x_B)$ est le terme dû à la masse dans le développement multipolaire de l'équation (56) de la référence [62] (voir également [37, 16])

$$\Omega^{(1)}(x_A^0, \boldsymbol{x}_A, x_B^0, \boldsymbol{x}_B) = -\frac{M}{c^2}\left[(x_B^0 - x_A^0)^2 + \gamma R_{AB}^2\right] F(\boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B)\,, \tag{7.23}$$

où

$$F(\boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B) = \int_0^1 \frac{d\lambda}{|\boldsymbol{x}_{(0)}(\lambda)|} = \frac{1}{R_{AB}} \ln\left(\frac{r_A + r_B + R_{AB}}{r_A + r_B - R_{AB}}\right)\,. \tag{7.24}$$

Pour $G^2\Omega^{(2)}(x_A, x_B)$, calculons tout d'abord les intégrales de l'équation (7.18) faisant intervenir $g_{\mu\nu}^{(2)}$ et les termes quadratiques en $g_{\mu\nu}^{(1)}$ ; nous obtenons

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}(x_B^\mu - x_A^\mu)(x_B^\nu - x_A^\nu) \int_0^1 \left[g_{\mu\nu}^{(2)}(x_{(0)}(\lambda)) - \eta^{\rho\sigma}\, g_{\mu\rho}^{(1)}(x_{(0)}(\lambda))\, g_{\nu\sigma}^{(1)}(x_{(0)}(\lambda))\right] d\lambda \\ &\qquad = \frac{M^2}{c^4}\left[(\beta - 2)(x_B^0 - x_A^0)^2 + \left(2\gamma^2 - \frac{3\delta}{4}\right) R_{AB}^2\right] E(\boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B)\,, \end{aligned} \tag{7.25}$$

où $E(\boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B)$ est définie par

$$E(\boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B) = \int_0^1 \frac{d\lambda}{|\boldsymbol{x}_{(0)}(\lambda)|^2}\,.$$

Une intégration élémentaire donne

$$\begin{aligned} E(\boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B) &= \frac{1}{\sqrt{r_A^2\, r_B^2 - (\boldsymbol{x}_A \cdot \boldsymbol{x}_B)^2}} \left\{ \arctan\left[\frac{(\boldsymbol{x}_B - \boldsymbol{x}_A)\cdot \boldsymbol{x}_B}{\sqrt{r_A^2\, r_B^2 - (\boldsymbol{x}_A \cdot \boldsymbol{x}_B)^2}}\right] \right. \\ &\qquad \left. - \arctan\left[\frac{(\boldsymbol{x}_B - \boldsymbol{x}_A)\cdot \boldsymbol{x}_A}{\sqrt{r_A^2\, r_B^2 - (\boldsymbol{x}_A \cdot \boldsymbol{x}_B)^2}}\right] \right\} \\ &= \frac{\arccos(\boldsymbol{n}_A \cdot \boldsymbol{n}_B)}{r_A r_B \sqrt{1 - (\boldsymbol{n}_A \cdot \boldsymbol{n}_B)^2}}\,. \end{aligned} \tag{7.26}$$

Pour les intégrales où interviennent les dérivées de $\Omega^{(1)}$ dans la formule (7.18), nous obtenons

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{2}(x_B^\mu - x_A^\mu)(x_B^\nu - x_A^\nu) \int_0^1 \eta^{\rho\sigma} \frac{\partial \Omega^{(1)}}{\partial x^\rho}(x_A, x_{(0)}(\lambda))\, g^{(1)}_{\mu\nu,\sigma}(x_{(0)}(\lambda)) d\lambda \\
= \frac{M^2}{c^4}\left[(x_B^0 - x_A^0)^2 + \gamma R_{AB}^2\right]\left[\left(1 + \frac{r_A}{r_B}\right)\frac{1}{R_{AB}^2}\frac{(x_B^0 - x_A^0)^2 + \gamma R_{AB}^2}{r_A r_B + (\boldsymbol{x}_A \cdot \boldsymbol{x}_B)}\right. \\
\left. -2\gamma E(\boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B) - \frac{(x_B^0 - x_A^0)^2 - \gamma R_{AB}^2}{R_{AB}^2}\frac{F(\boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B)}{r_B}\right].
\end{aligned}
\tag{7.27}
$$

En substituant les équations (7.25)-(7.27) dans la formule (7.18) et en calculant le terme quadratique des dérivées de $\Omega^{(1)}(x_A, x_B)$ par rapport à $x_B$, nous obtenons

$$
\begin{aligned}
\Omega(x_A, x_B) = \frac{1}{2}(x_B^0 - x_A^0)^2 - \frac{1}{2}R_{AB}^2 - \frac{GM}{c^2}\left[(x_B^0 - x_A^0)^2 + \gamma R_{AB}^2\right] F(\boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B) \\
+\frac{G^2M^2}{c^4}\left\{\frac{(x_B^0 - x_A^0)^4}{R_{AB}^2}\left[\frac{1}{r_A r_B + (\boldsymbol{x}_A \cdot \boldsymbol{x}_B)} - \frac{1}{2}F^2(\boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B)\right]\right. \\
+(x_B^0 - x_A^0)^2\left[\frac{2\gamma}{r_A r_B + (\boldsymbol{x}_A \cdot \boldsymbol{x}_B)} - (2 - \beta + 2\gamma)E(\boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B)\right. \\
\left. + (2 + \gamma)F^2(\boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B)\right] \\
\left. +R_{AB}^2\left[\frac{\gamma^2}{r_A r_B + (\boldsymbol{x}_A \cdot \boldsymbol{x}_B)} - \frac{3\delta}{4}E(\boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B) - \frac{\gamma^2}{2}F^2(\boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B)\right]\right\} + O(G^3).
\end{aligned}
\tag{7.28}
$$

La fonction de transfert de temps $\mathcal{T}(x_A, x_B)$ est déterminée en résolvant $\Omega(x_A, x_B) = 0$. En substituant l'équation (7.28) dans les formules (6.15)-(6.16) ou (6.21)-(6.22), un calcul sans difficulté donne l'expression du transfert de temps sous la forme

$$
\begin{aligned}
\mathcal{T}(\boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B) = \frac{R_{AB}}{c} + \frac{(\gamma + 1)GM}{c^3}\ln\left(\frac{r_A + r_B + R_{AB}}{r_A + r_B - R_{AB}}\right) \\
+\frac{G^2M^2R_{AB}}{c^5}\left[\frac{(8 - 4\beta + 8\gamma + 3\delta)\arccos(\boldsymbol{n}_A \cdot \boldsymbol{n}_B)}{4\sqrt{r_A^2 r_B^2 - (\boldsymbol{x}_A \cdot \boldsymbol{x}_B)^2}} - \frac{(1 + \gamma)^2}{r_A r_B + (\boldsymbol{x}_A \cdot \boldsymbol{x}_B)}\right] + O(G^3).
\end{aligned}
\tag{7.29}
$$

Le terme d'ordre $G$ dans le membre de droite de (7.29) est le retard de temps de Shapiro [77]. Le terme de second ordre en $G^2$ généralise le résultat obtenu par Brumberg dans le cas de la relativité générale [10]. Afin d'obtenir une écriture plus légère de l'équation (7.29), nous introduisons l'angle $\psi_{AB}$ formé par les vecteurs $\boldsymbol{n}_A$ and $\boldsymbol{n}_B$ ; $E(\boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B)$ peut maintenant s'écrire

$$
E(\boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B) = \frac{\arccos(\boldsymbol{n}_A \cdot \boldsymbol{n}_B)}{\sqrt{r_A^2 r_B^2 - (\boldsymbol{x}_A \cdot \boldsymbol{x}_B)^2}} = \frac{\psi_{AB}}{r_A r_B \sin\psi_{AB}}, \quad 0 \le \psi_{AB} < \pi, \tag{7.30}
$$

ce qui donne pour $\mathcal{T}(\boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B)$ l'expression suivante

$$
\begin{aligned}
\mathcal{T}(\boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B) = \frac{R_{AB}}{c}\left\{1 + \frac{(\gamma + 1)GM}{c^2 R_{AB}}\ln\left(\frac{r_A + r_B + R_{AB}}{r_A + r_B - R_{AB}}\right)\right. \\
\left. +\frac{G^2M^2}{c^4 r_A r_B}\left[(2 - \beta + 2\gamma + \frac{3}{4}\delta)\frac{\psi_{AB}}{\sin\psi_{AB}} - \frac{(1 + \gamma)^2}{1 + \cos\psi_{AB}}\right]\right\} + O(G^3).
\end{aligned}
\tag{7.31}
$$

### 7.4.2 Détermination de la fonction de déflexion

En utilisant les résultats du théorème 1, nous pouvons donc maintenant exprimer le vecteur tangent au rayon lumineux en $x_B$. Les rapports $\hat{l}_B = \{(\hat{l}_i)_B\}$, représentant ce vecteur, s'écrivent

$$\hat{l}_B(\boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B) = -N_{AB} + \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B)\,, \tag{7.32}$$

où la fonction de déflexion $\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B)$ est donnée par

$$\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B) = -\,\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}_B}\left[c\,\mathcal{T}(\boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B) - R_{AB}\right]\,. \tag{7.33}$$

En substituant (7.29) dans l'équation (7.33), nous obtenons le développement suivant

$$\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B) = \boldsymbol{\lambda}^{(1)}(\boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B) + \boldsymbol{\lambda}^{(2)}(\boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B) + O\left(G^3\right) \tag{7.34}$$

avec

$$\boldsymbol{\lambda}^{(1)}(\boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B) = -(\gamma+1)\frac{GM}{c^2}\frac{(r_A + r_B)N_{AB} - R_{AB}\boldsymbol{n}_B}{r_A r_B(1 + \boldsymbol{n}_A.\boldsymbol{n}_B)}\,, \tag{7.35}$$

et

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\lambda}^{(2)}(\boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B) = N_{AB}\frac{G^2M^2}{c^4}\Bigg[&2(1+\gamma)^2\frac{(r_A+r_B)^2 + R_{AB}^2}{\left[(r_A+r_B)^2 - R_{AB}^2\right]^2} + \frac{8 - 4\beta + 8\gamma + 3\delta}{4r_A r_B\sqrt{1 - (\boldsymbol{n}_A\cdot\boldsymbol{n}_B)^2}} \\
&\times \arctan\left(\frac{\sqrt{1-(\boldsymbol{n}_A\cdot\boldsymbol{n}_B)^2}}{\boldsymbol{n}_A\cdot\boldsymbol{n}_B}\right)\Bigg] \\
+\boldsymbol{n}_B\frac{G^2M^2}{c^4}\Bigg\{&\frac{4R_{AB}(r_A+r_B)(1+\gamma^2)}{\left[(r_A+r_B)^2 - R_{AB}^2\right]^2} + \frac{R_{AB}(8-4\beta+8\gamma+3\delta)}{4r_A r_B^2\sqrt{1-(\boldsymbol{n}_A\cdot\boldsymbol{n}_B)^2}}\left[\boldsymbol{n}_A\cdot\boldsymbol{n}_B - \frac{\arctan\left(\frac{\sqrt{1-(\boldsymbol{n}_A\cdot\boldsymbol{n}_B)^2}}{\boldsymbol{n}_A\cdot\boldsymbol{n}_B}\right)}{\sqrt{1-(\boldsymbol{n}_A\cdot\boldsymbol{n}_B)^2}}\right]\Bigg\} \\
\boldsymbol{n}_A\frac{G^2M^2}{c^4}&\frac{R_{AB}(8-4\beta+8\gamma+3\delta)}{4r_A r_B^2\left[1-(\boldsymbol{n}_A\cdot\boldsymbol{n}_B)^2\right]}\left[\frac{\boldsymbol{n}_A\cdot\boldsymbol{n}_B}{\sqrt{1-(\boldsymbol{n}_A\cdot\boldsymbol{n}_B)^2}}\arctan\left(\frac{\sqrt{1-(\boldsymbol{n}_A\cdot\boldsymbol{n}_B)^2}}{\boldsymbol{n}_A\cdot\boldsymbol{n}_B}\right) - 1\right]
\end{aligned} \tag{7.36}$$

# Chapitre 8

# Conclusions

## 8.1 Modélisations des distances angulaires

Dans le chapitre 1, nous avons rappelé la définition covariante de la distance angulaire $\phi$ entre deux sources lumineuses, telle qu'elle est mesurée par un observateur en mouvement. Nous avons montré que le calcul de $\phi$ nécessite, au point d'observation, la connaissance des composantes du tenseur métrique, de la vitesse coordonnée de l'observateur et de trois rapports caractérisant la tangente de chaque rayon lumineux arrivant à l'observateur, notés $\hat{l}_i$.
Ensuite, nous nous sommes intéressés à la détermination de $\phi$ dans les champs gravitationnels faibles. Dans la deuxième partie de ce travail, nous avons obtenu l'expression explicite de cet angle dans le cas du formalisme PPN. Puis, dans la troisième partie, nous avons explicité les contributions post-post-minkowskienne de $\phi$.
Ainsi, en supposant la métrique $g$ et le mouvement de l'observateur $O$ connus, il faut donc seulement calculer les rapports $\hat{l}_i$ au point d'observation afin de caractériser la distance angulaire, entre deux sources lumineuses, telle qu'elle est mesurée par $O$.

## 8.2 Intérêt des fonctions d'univers et de transfert de temps

Nous avons présenté un objet introduit par Synge en relativité, la fonction d'univers. A partir du principe variationnel définissant les courbes géodésiques, nous avons démontré des propriétés essentielles pour l'astrométrie ; en effet, nous avons établi que la fonction d'univers permet de décrire la propagation de la lumière entre deux événements distincts $x_A$ et $x_B$ en donnant accès à deux quantités fondamentales :

- au temps coordonné de propagation du photon $t_B - t_A$ entre $x_A$ et $x_B$, par l'intermédiaire de la propriété 4 : $\Omega = 0$,
- aux rapports $\hat{l}_i$, par l'intermédiaire de la propriété 1 si et seulement si la propriété 4 est satisfaite.

Ensuite, nous avons proposé de représenter le temps coordonné de propagation de la lumière entre un événement d'émission $x_A$ et de réception $x_B$ par la définition de deux fonctions, dites de transfert de temps $\mathcal{T}_e$ et $\mathcal{T}_r$. Nous avons de plus établi une propriété importante de ces fonctions. En effet, nous avons montré que la connaissance des fonctions de transfert de temps permet de calculer trois rapports de composantes covariantes des vecteurs respectivement tangent à la géodésique en $x_A$ et en $x_B$. Ici encore, le théorème 1, qui en découle, permet de calculer les rapports $\hat{l}_i$.

Enfin, nous avons montré comment construire ces fonctions. En particulier, nous avons montré qu'il existait deux approches différentes pour construire les fonctions de transfert de temps ; en effet, d'une part nous pouvons inverser la fonction d'univers en résolvant $\Omega = 0$, d'autre part déterminer les fonctions de transfert de temps par la résolution d'équations iconales.

Nous avons donc montré que $\Omega$ et les fonctions de transfert de temps sont des outils particulièrement bien adaptés à la détermination des rapports $\hat{l}_i$. Il était, de fait, intéressant de construire les méthodes permettant de déterminer $\Omega$, $\mathcal{T}_r$ et $\mathcal{T}_e$ dans le cadre des approximations post-newtonienne et post-minkowskienne généralisée.

## 8.3 Apports à l'approximation post-newtonienne

Dans le cadre de l'approximation post-newtonienne paramétrée, nous avons construit les développements nécessaires au calcul explicite des fonctions $\Omega$, $\mathcal{T}_r$ et $\mathcal{T}_e$.

Ensuite, nous avons appliqué ces méthodes au cas d'un champ gravitationnel engendré par un corps à symétrie axiale. Nous avons pu déterminer explicitement l'influence de tous les moments multipolaires de masse $J_n$ sur les fonctions de transfert de temps. En utilisant ces résultats, nous avons ensuite déterminé explicitement l'influence de tous les moments $J_n$ sur la distance angulaire entre deux étoiles distinctes telle qu'elle est mesurée par un observateur en mouvement. Ces travaux sont complémentaires de l'analyse de Crosta & Mignard [17], où l'influence du moment quadrupolaire de Jupiter sur la propagation d'un rayon lumineux est étudiée dans la perspective d'un test local de la relativité avec la mission GAIA.

Enfin, il serait intéressant de compléter notre étude en considérant le champ gravitationnel d'un corps à symétrie axiale en rotation lente. Le but serait de déterminer l'influence des multipoles de spin sur la propagation d'un rayon lumineux.

## 8.4 Méthodes à l'approximation post-minkowskienne généralisée

Nous avons construit la fonction d'univers à tout ordre de perturbation post-minkowskienne, c'est-à-dire que nous avons déterminé $\Omega$ sous la forme d'une série en puissances successives de la constante de la gravitation $G$. Nous avons démontré qu'il n'était pas nécessaire de calculer explicitement la géodésique reliant $x_A$ et $x_B$. En effet, nous avons montré qu'en réalité la seule connaissance de la ligne droite minkowskienne reliant ces événements était nécessaire au calcul des termes perturbatifs $\Omega^{(n)}(x_A, x_B)$.

Puis, nous avons construit les deux méthodes de détermination des fonctions de transfert de temps à n'importe quel ordre d'approximation post-minkowskienne, c'est-à-dire

- l'inversion de la série post-minkowskienne générale de $\Omega$,
- la résolution des équations iconales.

Il serait maintenant utile de confronter formellement ces deux approches de détermination. Une perspective, intéressante d'un point de vue théorique, est donc d'étudier l'équivalence formelle entre ces deux méthodes.

Dans le chapitre 7, nous nous sommes intéressés au champ gravitationnel d'une masse à symétrie sphérique jusqu'à l'ordre $G^2/c^4$, le champ étant supposé statique. Nous avons déterminé la fonction d'univers ainsi que la fonction de transfert de temps $\mathcal{T}$. Enfin, nous avons déduit de la connaissance de $\mathcal{T}$ les rapports $\hat{l}_i$. Nous espérons que ces travaux seront utiles dans le cadre du projet LATOR.

## 8.5 Perspectives en astronomie fondamentale relativiste

Dans ce dernier paragraphe, nous nous intéressons plus particulièrement à la construction des systèmes de référence relativistes actuels. L'Union Astronomique Internationale a décidé d'adopter en 2000 deux systèmes de référence conventionnels relativistes : le système barycentrique BCRS et le système géocentrique GCRS [79]. Cependant, ces systèmes sont bâtis pour la seule relativité générale [50, 13, 42, 43, 21, 22, 23, 24]. Le début de cette décennie a été marquée par quelques extensions de ces systèmes aux théories alternatives [40, 45]. Toutefois, le BCRS actuel est construit avec l'hypothèse d'un espace-temps plat à l'infini spatial, ce qui revient à dire que le système solaire est d'une part un système isolé, d'autre part la seule source de champ gravitationnel. Or, le projet GAIA permettra d'observer des milliers de quasars avec une précision de l'ordre de quelques $\mu$as. Les quasars étant des objets relevant de la cosmologie, il semble pertinent de construire dans un futur proche [49, 47, 41] un raccordement de la métrique du BCRS avec une métrique cosmologique.

Ensuite, la récente adoption de ces deux nouveaux systèmes de référence n'est pas sans conséquence sur les échelles de temps astronomiques. En effet dans la pratique, la plupart des éphémérides utilisent le temps barycentrique dynamique TDB [80]. Or, le TDB diffère du temps barycentrique coordonné, échelle de temps du BCRS, par des termes périodiques [51, 12]. De plus, les modèles relativistes de réduction des futures données GAIA sont construits en utilisant le TCB. Dans cette perspective et pour des raisons de consistance, il est donc nécessaire de disposer d'éphémérides en TCB. Pour ce faire, il serait souhaitable d'utiliser TCB comme échelle de temps des nouvelles éphémérides INPOP [31], à l'heure actuelle en développement à l'Observatoire de Paris.

# Annexe A

# Inventaire des travaux

## A.1 Publications dans des revues à comité de lecture

**articles publiés :**

- C. Le Poncin-Lafitte, B. Linet & P. Teyssandier, *World function and time transfer : general post-Minkowskian expansions*, Classical and Quantum Gravity, volume 21, Issue 18, p 4463-4483, 2004.

**articles acceptés :**

- P. Teyssandier & C. Le Poncin-Lafitte, *A universal tool for treating time/frequency transfers, quantum phase shifts and light deflection : Synge's world function*, Lectures Notes in Physics.

## A.2 Publications en préparation

- C. Le Poncin-Lafitte & P. Teyssandier, *Mass multipole moments influence on time delay and light deflection in the stationary field of an axisymmetric rotating body.*
- C. Le Poncin-Lafitte & P. Teyssandier, *General post-Minkowskian expansions of time delays.*
- P. Teyssandier & C. Le Poncin-Lafitte, *Angular distances in Lorentzian space-time.*

## A.3 Présentations dans des colloques internationaux

**Communications invitées**

- P. Teyssandier & C. Le Poncin-Lafitte, *A universal tool for treting time/frequency transfers, quantum phase shifts and light deflection : Synge's world function*, Brême, 30 Mai - 1er Juin 2005
- C. Le Poncin-Lafitte & P. Teyssandier, *General post-Minkowskian expansions of time delays and frequency shifts*, Second International ASTROD Symposium, Brême, 2-3 Juin 2005

**Communications orales**

- C. Le Poncin-Lafitte & P. Teyssandier, *Relativistic theory of light deflection and time transfer up to the order $G^2/c^4$ using the Synge's world function*, Journées Systèmes de référence spatio temporels, Saint Petersbourg, Russie, 22-25 Septembre 2003.

- C. Le Poncin-Lafitte & P. Teyssandier, *General post-Minkowskian expansion of the world function and of the time transfer functions*, 17th International Conference on General Relativity and Gravitation, Dublin, Irlande, 22-25 Juillet 2004.
- C. Le Poncin-Lafitte & P. Teyssandier, *Influence of the multipole moment moments of a giant planet on the propagation of light : Application to GAIA*, Journées Systèmes de référence spatio temporels, Paris, France, 20-22 Septembre 2004.

**Communication poster**

- C. Le Poncin-Lafitte & P. Teyssandier, *Time transfer functions and light deflection : general post-Minkowskian expansions*, The three Dimensional Universe with GAIA, Meudon, France, 4-7 Octobre 2004

## A.4 Présentations dans des colloques nationaux

**Communications orales**

- C. Le Poncin-Lafitte, B. Linet & P. Teyssandier, *General post-Minkowskian expansions of Synge's world function, time transfer and gravitational deflection of light ray. Applications to GAIA and GALILEO*, Semaine de l'Astrophysique Française, Paris, France, 14-18 Juin 2004

**Communication poster**

- C. Le Poncin-Lafitte, B. Linet & P. Teyssandier, *Relativistic theory of light deflection and time transfer up to the order $G^2/c^4$*, Semaine de l'Astrophysique Française, Bordeaux, France, 16-20 Juin 2003
- C. Le Poncin-Lafitte & P. Teyssandier, *Influence of the multipole moments of a giant planet on the propagation of light*, Semaine de l'Astrophysique Française, Paris, France, 14-18 Juin 2004
- S. Mathis & C. Le Poncin-Lafitte, *Effects of internal structure of gravitating bodies on light deflection for accurate space missions*, Semaine de l'Astrophysique Française, Strasbourg, France, 27 Juin-1er Juillet 2005

## A.5 Réunions du *Relativity and Reference Frames working group* de la mission GAIA

- C. Le Poncin-Lafitte & P. Teyssandier, *The world function for μas astrometry*, Vendredi 28 Novembre 2003, Nice, France
- C. Le Poncin-Lafitte & P. Teyssandier, Contributions of the mass-multipole moments to the propagation of light in the vicinity of a giant planet, Vendredi 18 Juin, ESTEC, Hollande
- C. Le Poncin-Lafitte & P. Teyssandier, Mass-multipole moments and light deflection, 14 Janvier 2005, Paris, France
- C. Le Poncin-Lafitte & P. Teyssandier & C. Le Poncin-Lafitte, *Angular distances in metric theories : contributions of the mass-multipole moments*, 15 Septembe 2005, Dresde, Allemagne

## A.6 Séminaires

- C. Le Poncin-Lafitte, *Développements post-minkowskiens de la fonction d'univers et astrométrie relativiste*, séminaire ASD, Observatoire de Paris, 6 Mai 2004
- C. Le Poncin-Lafitte & P. Teyssandier, *General post-Minkowskian expansions of time delays and frequency shifts*, Dresde, Lohrman Observatory, 15 Mars 2005
- C. Le Poncin-Lafitte, *Avancées théoriques et nouvelles perspectives en astrométrie relativiste*, séminaire Temps & Espace, Observatoire de Paris, 24 Avril 2006

## A.7 Divers

- C. Le Poncin-Lafitte, *A universal tool for treting time/frequency transfers, quantum phase shifts and light deflection : Synge's world function*, Cours à l'école d'été du GRGS, Fortcalquet, Aout/Septembre 2004
- C. Le Poncin-Lafitte, *100 ans après, mais que font les enfants d'Albert ?*, Conférence grand public Star party, Aout 2005

# Annexe B

# article publié dans Classical and quantum gravity

INSTITUTE OF PHYSICS PUBLISHING CLASSICAL AND QUANTUM GRAVITY

Class. Quantum Grav. **21** (2004) 4463–4483 PII: S0264-9381(04)78139-3

# World function and time transfer: general post-Minkowskian expansions

**Christophe Le Poncin-Lafitte[1], Bernard Linet[2] and Pierre Teyssandier[1]**

[1] Département Systèmes de Référence Temps et Espace, CNRS/UMR 8630, Observatoire de Paris, 61 avenue de l'Observatoire, F-75014 Paris, France
[2] Laboratoire de Mathématiques et Physique Théorique, CNRS/UMR 6083, Université François Rabelais, F-37200 Tours, France

E-mail: leponcin@danof.obspm.fr

Received 23 March 2004
Published 3 September 2004
Online at stacks.iop.org/CQG/21/4463
doi:10.1088/0264-9381/21/18/012

**Abstract**

In suitably chosen domains of spacetime, the world function may be a powerful tool for modelling the deflection of light and the time/frequency transfer. In this paper, we work out a recursive procedure for expanding the world function into a perturbative series of ascending powers of the Newtonian gravitational constant $G$. We show rigorously that each perturbation term is given by a line integral taken along the unperturbed geodesic between two points. Once the world function is known, it becomes possible to determine the time transfer functions giving the propagation time of a photon between its emission and its reception. We establish that the direction of a light ray as measured in the 3-space relative to an observer can be derived from these time transfer functions, even if the metric is not stationary. We show how to derive these functions up to any given order in $G$ from the perturbative expansion of the world function. To illustrate the method, we carry out the calculation of the world function and of the time transfer function outside a static, spherically symmetric body up to the order $G^2$, the metric containing three arbitrary parameters $\beta$, $\gamma$, $\delta$.

PACS numbers: 04.20.Cv, 04.25.−g, 04.80.−y

## 1. Introduction

With advances in technology, it will become indispensable to determine some of the relativistic effects in the propagation of light beyond the first order in the Newtonian gravitational constant $G$, in particular in the area of space astrometry. The Global Astrometric Interferometer for Astrophysics (GAIA) [1] and the Space Interferometric Mission (SIM) [2] have already planned to measure the positions and/or the parallaxes of celestial objects with typical

uncertainties in the range 1–10 $\mu$arcs ($\mu$as). The Laser Astrometric Test Of Relativity (LATOR) mission is an even more ambitious programme since its primary objective is to measure the bending of light near the sun to an accuracy of 0.02 $\mu$as [3]. With such requirements in experimental precision, it is clear that the effects of the second order in $G$ must be taken into account in the near future since they result in several $\mu$as deflection for a light ray grazing the sun [4–7].

In order to obtain a convenient modelling of the above-mentioned projects, it is necessary to determine the deflection of light rays between two points $x_A$ and $x_B$ of spacetime. In almost all of the theoretical studies devoted to this problem, the properties of light rays are determined by integrating the differential equations of the null geodesics. This procedure is workable as long as one contents oneself with analysing the effects of first order in $G$, as it is proved by the generality of the results obtained in [8–15]. Unfortunately, analytical solution of the geodesic equations requires cumbersome calculations when terms of second order in $G$ are taken into account, even in the case of a static, spherically symmetric spacetime [4–6, 16]. The goal of the present paper is to develop a procedure which allows us to determine the deflection of light and the travel time of photons without integrating the geodesic equations.

We assume that spacetime is globally regular with the topology $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$, i.e. without event horizon. According to these assumptions, we admit that the Lorentzian metric is represented at any point $x$ by a series in ascending powers of $G$

$$g_{\mu\nu}(x,G)=g^{(0)}_{\mu\nu}+\sum_{n=1}^{\infty}G^n g^{(n)}_{\mu\nu}(x), \tag{1}$$

where

$$g^{(0)}_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}=\mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$$

in any quasi-Cartesian coordinates. Neglecting all terms involving $g^{(n+1)}_{\mu\nu}$, $g^{(n+2)}_{\mu\nu}\ldots$, defines the so-called $n$th post-Minkowskian approximation.

Essentially, our method uses the notion of world function as developed by Ruse [17] and Synge [18, 19]. The world function $\Omega(x_A,x_B)$ is defined as half the squared geodesic distance between two points $x_A$ and $x_B$. Before entering into the presentation of the method, it must be noted that this definition raises a serious problem, since there could exist points $x_A$ and $x_B$ connected by several geodesics. Given a point $x_A$, it is usual to define the normal convex neighbourhood of $x_A$, say $\mathcal{N}_{x_A}$, as the set of all points $x$ joined to $x_A$ by a unique geodesic path [20]. The world function $\Omega(x_A,x)$ is then well defined for $x\in\mathcal{N}_{x_A}$. In agreement with the assumptions mentioned in the previous paragraph, we suppose that if $x_B$ is joined to $x_A$ by a null geodesic, then this geodesic is unique. Denoting the light cone at $x_A$ by $\mathcal{C}_{x_A}$, this means that $\mathcal{C}_{x_A}\subset\mathcal{N}_{x_A}$. Thus we can use the world function to study the deflection of the light and the travel time of photons between $x_A$ and $x_B$. Let us point out that our assumptions are compatible with the existence of multiple-image effects involving different travel times for the photons (see, e.g., [21] and references therein).

We shall see in section 2 that the invariant two-point function $\Omega(x_A,x_B)$ has very interesting properties. First of all, considering the geodesic path connecting $x_A$ and $x_B$, it may be shown that the tangent vectors at $x_A$ and $x_B$ are provided by the gradients of the world function. Second, it is clear that $x_A$ and $x_B$ are joined by a null geodesic if and only if $\Omega(x_A,x_B)=0$. As a consequence, the deflection of a light ray emitted at a finite distance may be easily determined when the world function of a given spacetime is known, just as the travel time of a photon between two points. This means that the world function allows us to calculate the time/frequency transfer functions and can be extremely useful in situations involving a comparison between two distant clocks, as has been shown by two of us in a recent

work [22] extending the results obtained in [23] and [24]. Other possible applications deserve to be emphasized. For example, the quantum phase accumulated by a freely falling particle is proportional to the geodesic distance covered through spacetime [25]. So, the world function can be relevant for modelling situations such as neutrino oscillations [26].

Taking equation (1) into account, it is possible to assume that $\Omega(x_A, x_B)$ admits an expansion as follows:

$$\Omega(x_A, x_B) = \Omega^{(0)}(x_A, x_B) + \sum_{n=1}^{\infty} G^n \Omega^{(n)}(x_A, x_B). \tag{2}$$

The primary objective of the paper is to yield a recursive procedure for determining each term $\Omega^{(n)}(x_A, x_B)$ within the $n$th post-Minkowskian approximation without calculating the geodesic joining $x_A$ and $x_B$.

Our method is inspired by a procedure found by Buchdahl [27] for obtaining the perturbative expansion of the characteristic function defined as $V = \sqrt{2|\Omega|}$. However, the gradients of $V(x_A, x_B)$ are not defined when $x_A$ and $x_B$ are linked by a null geodesic. So we prefer developing a new procedure involving $\Omega$ itself. Considering that $x_A$ and $x_B$ are fixed points, we use the Hamilton–Jacobi equation satisfied by $\Omega(x_A, x)$ at point $x$. It is easily seen that this equation may be replaced by an infinite set of ordinary differential equations for the perturbation terms $\Omega^{(n)}(x_A, x)$ when $x$ is constrained to move along the zeroth-order geodesic connecting $x_A$ and $x_B$. As a consequence, each term $\Omega^{(n)}(x_A, x_B)$ is obtained in the form of a line integral along a straight line in the background Minkowski metric. Thus, we obtain a recursive procedure which completely avoids the calculation of the perturbation of the geodesic joining the given end points.

Within the first post-Minkowskian approximation, we recover a simple integral expression of $\Omega^{(1)}$ already given by Synge [28]. In contrast, the fact that one has to calculate line integrals with integrands containing products of the first-order derivatives of terms $\Omega^{(n-p)}$, $p = 1, \ldots, n-1$ proves to be awkward in attempts at getting explicit expressions of $\Omega^{(n)}$ for $n \geqslant 2$. Fortunately, at least in the case where $n = 2$, we obtain a simplified formula for $\Omega^{(2)}$ where the quadratic terms in the first derivatives of $\Omega^{(1)}$ appear only as boundary terms. Then, we develop an iterative procedure which allows us to deduce the propagation time of a photon correct to within $(n+1)$th-order terms from the expressions of $\Omega^{(n)}, \Omega^{(n-1)}, \ldots, \Omega^{(0)}$.

Finally, we derive the world function and the propagation time of light in a static, spherically symmetric spacetime within the second post-Minkowskian approximation. In order to get expressions valid for a wide class of gravitational theories, we assume that the metric involves three arbitrary parameters: the usual post-Newtonian parameters $\beta$ and $\gamma$ [29], and a supplementary parameter $\delta$, introduced to take into account the term of order $G^2$ in spatial components $g_{ij}$ (see, e.g., [30] and references therein). Complete results were obtained by John [31] involving quite cumbersome calculations. Without any reference to this earlier paper, a complicated integration of the geodesic equations was performed by Richter and Matzner [16] in order to calculate the time delay for a special coordinate system adapted to the direction of the light ray at the emission point. More recently, Brumberg [32] has used the Euler–Lagrange equations of null geodesics to find the propagation time of light as a function of the boundary conditions in the second post-Minkowskian approximation of the Schwarzschild metric. For our part, we do not need to determine the null geodesics to get the world function and the propagation time of light and we use only elementary quadratures to perform the calculations.

The paper is organized as follows. In section 2, the general definition of the world function and its fundamental properties are recalled. In section 3, we introduce two distinct time transfer functions and we give their general relations with the world function. We

establish that all the calculations relative to the direction of a light ray or to the frequency transfers can be performed when one of the two time transfer functions is explicitly known. In section 4, we set out the recursive method which allows us to determine the world function in the $n$th post-Minkowskian approximation for any $n \geqslant 2$. In section 5, we show how to deduce the time transfer functions from the world function at any post-Minkowskian order of approximation. In section 6, we determine explicitly the world function and the time transfer outside a static, spherically symmetric body within the second post-Minkowskian approximation. Some concluding remarks are given in section 7. In the appendix, we give an alternative derivation of the integral expression for $\Omega^{(2)}(x_A, x_B)$, based on an integration of the Euler–Lagrange equations of geodesics.

In this paper, $c$ is the speed of light in a vacuum. The Lorentzian metric of spacetime $V_4$ is denoted by $g$. The signature adopted for $g$ is $(+---)$. We suppose that spacetime is covered by some global quasi-Galilean coordinate system $(x^\mu) = (x^0, \boldsymbol{x})$, where $x^0 = ct$, $t$ being a time coordinate, and $\boldsymbol{x} = (x^i)$. We assume that the curves of equations $x^i = \text{const}$ are timelike, which means that $g_{00} > 0$ anywhere. We employ the vector notation $\boldsymbol{a}$ in order to denote $(a^1, a^2, a^3) = (a^i)$. Considering two such quantities $\boldsymbol{a}$ and $\boldsymbol{b}$ we use $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ to denote $a^i b^i$ (the Einstein convention on repeated indices is used). The quantity $|\boldsymbol{a}|$ stands for the ordinary Euclidean norm of $\boldsymbol{a}$. For any quantity $f(x^\lambda)$, $f_{,\alpha}$ denotes the partial derivative of $f$ with respect to $x^\alpha$. The indices in parentheses characterize the order of perturbation. They are set up or down, depending on the convenience.

## 2. Definition and fundamental properties of Synge's world function

Since Synge's world function is not widely employed, we briefly recall how its fundamental properties can be straightforwardly derived from the variational principle defining the geodesic curves (for the characteristic function $V = \sqrt{2|\Omega|}$, see e.g. Buchdahl [33–35]). We begin with recalling some useful results concerning the general variation of a functional defined as an action in classical mechanics.

Let $x_A$ and $x_B$ be two points of spacetime connected by a differentiable curve $C_{AB}$ defined by the parametric equations $x^\alpha = x^\alpha(\zeta)$, with $\zeta_A \leqslant \zeta \leqslant \zeta_B$. Given a Lagrangian function $L(x^\alpha, \dot{x}^\beta)$ with $\dot{x}^\beta(\zeta) = \mathrm{d}x^\beta(\zeta)/\mathrm{d}\zeta$, one can define the functional $\widetilde{S}$ by

$$\widetilde{S}[C_{AB}] = \int_{\zeta_A}^{\zeta_B} L(x^\alpha(\zeta), \dot{x}^\beta(\zeta))\, \mathrm{d}\zeta, \tag{3}$$

the integral being taken along $C_{AB}$. Let us consider now an arbitrarily neighbouring curve $C'_{A'B'}$ connecting points $x_{A'}$ and $x_{B'}$, represented by parametric equations $x'^\alpha = x'^\alpha(\zeta')$, with $\zeta_{A'} \leqslant \zeta' \leqslant \zeta_{B'}$. Let $x^\alpha_A + \delta x^\alpha_A = x^\alpha_{A'}$ and $x^\alpha_B + \delta x^\alpha_B = x^\alpha_{B'}$ be the coordinates of $x_{A'}$ and $x_{B'}$ respectively. Putting $\bar{\delta} x^\alpha(\zeta) = x'^\alpha(\zeta) - x^\alpha(\zeta)$, one can define a one-to-one correspondence between $C_{AB}$ and $C_{A'B'}$ by the infinitesimal transformation

$$x^\alpha(\zeta) \to x'^\alpha(\zeta + \delta\zeta) = x^\alpha(\zeta) + \delta x^\alpha(\zeta), \tag{4}$$

where

$$\delta x^\alpha(\zeta) = \bar{\delta} x^\alpha(\zeta) + \dot{x}^\alpha(\zeta)\delta\zeta \tag{5}$$

with the boundary conditions

$$\delta x^\alpha(\zeta_A) = \delta x^\alpha_A, \qquad \delta x^\alpha(\zeta_B) = \delta x^\alpha_B. \tag{6}$$

Performing an integration by parts leads directly to the following expression for the quantity $\delta\widetilde{S} = \widetilde{S}[C_{A'B'}] - \widetilde{S}[C_{AB}]$ (see, e.g., [36])

$$\delta\widetilde{S} = \int_{\zeta_A}^{\zeta_B} \left[ \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\zeta}\left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} \right) \right] \bar{\delta} x^\alpha(\zeta)\, \mathrm{d}\zeta + [p_\alpha \delta x^\alpha - H\delta\zeta]^B_A, \tag{7}$$

where $p_\alpha$ is the 4-momentum belonging to $x^\alpha$ and $H$ is the Hamiltonian:

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha}, \qquad H = p_\alpha \dot{x}^\alpha - L. \tag{8}$$

In the following, we assume that there exist domains $\mathcal{D}$ of spacetime such that whatever $x_A \in \mathcal{D}$ and $x_B \in \mathcal{D}$, $x_A$ and $x_B$ are linked by a unique curve $\Gamma_{AB}$ realizing an extremum of the functional $\widetilde{S}$. Then, describing $\Gamma_{AB}$ by parametric equations $x^\alpha = x^\alpha(\zeta)$, we can associate with any domain $\mathcal{D}$ a function $S$ of $x_A, x_B, \zeta_A, \zeta_B$ defined as

$$S(x_A, x_B, \zeta_A, \zeta_B) = \int_{\Gamma_{AB}} L(x^\alpha(\zeta), \dot{x}^\beta(\zeta))\, \mathrm{d}\zeta. \tag{9}$$

Extending a terminology currently used in mechanics, we shall call $S$ the characteristic (or principal) function belonging to the Lagrangian $L$ adapted to the domain $\mathcal{D}$. Since the functions $x^\alpha(\zeta)$ satisfy the Euler–Lagrange equations

$$\frac{\partial L}{\partial x^\alpha} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\zeta}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha}\right) = 0, \tag{10}$$

the total variation of $S(x_A, x_B, \zeta_A, \zeta_B)$ reduces to the boundary terms in equation (7). Consequently, one has the relations

$$\frac{\partial S}{\partial x_A^\alpha} = -(p_\alpha)_A, \qquad \frac{\partial S}{\partial x_B^\alpha} = (p_\alpha)_B, \tag{11}$$

$$\frac{\partial S}{\partial \zeta_A} = H_A, \qquad \frac{\partial S}{\partial \zeta_B} = -H_B. \tag{12}$$

Considering that $H$ is a function of $x^\alpha$ and $p_\alpha$, then substituting for $(p_\alpha)_A$ and $(p_\alpha)_B$ from equations (11) into equations (12), it is easily seen that $S(x_A, x_B, \zeta_A, \zeta_B)$ satisfies a Hamilton–Jacobi equation both at $x_A^\alpha$ and at $x_B^\alpha$

$$\frac{\partial S}{\partial \zeta_A} = H\left(x_A^\alpha, -\frac{\partial S}{\partial x_A^\alpha}\right), \qquad \frac{\partial S}{\partial \zeta_B} = -H\left(x_B^\alpha, \frac{\partial S}{\partial x_B^\alpha}\right). \tag{13}$$

Let us apply these results to spacetime $V_4$ endowed with a Lorentzian metric $g_{\mu\nu}$ and insert in equation (3) the Lagrangian defined by

$$L = \tfrac{1}{2} g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta. \tag{14}$$

Each curve $\Gamma_{AB}$ parametrized by $\zeta$ for which $\widetilde{S}$ has an extremum is a geodesic path joining $x_A$ and $x_B$. Parameter $\zeta$ is said to be affine. According to (8), we have now

$$p_\alpha = g_{\alpha\beta} \dot{x}^\beta, \qquad H = \tfrac{1}{2} g^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta, \tag{15}$$

from which it is easily deduced that $H = L$ on any geodesic path. Owing to the fact that $L$ does not contain $\zeta$ as an explicit variable, this last equality implies that the Lagrangian $L$ defined by (14) is a constant of the motion.

We are only concerned here with a weak-field metric represented by equation (1) throughout spacetime. So we henceforth restrict our attention to the domains $\mathcal{D} = \mathcal{N}_{x_A}, \mathcal{N}_{x_A}$ being defined in the introduction. Then whatever $x_B \in \mathcal{N}_{x_A}$, there exists a unique geodesic path $\Gamma_{AB}$ connecting $x_A$ and $x_B$. Let us denote by $\widehat{\Omega}$ the characteristic function belonging to the Lagrangian (14) adapted to $\mathcal{N}_{x_A}$. According to (9) we have

$$\widehat{\Omega}(x_A, x_B, \zeta_A, \zeta_B) = \frac{1}{2} \int_{\zeta_A}^{\zeta_B} g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta\, \mathrm{d}\zeta, \tag{16}$$

the integral being taken along $\Gamma_{AB}$. Since $L = H$ is a constant of the motion, we have $L = H_A = H_B$ on $\Gamma_{AB}$. Inserting these relations into equation (16) yields

$$H_A = H_B = \frac{\widehat{\Omega}(x_A, x_B, \zeta_A, \zeta_B)}{\zeta_B - \zeta_A}. \tag{17}$$

Substituting these expressions of $H_A$ and $H_B$ into equations (12), we get

$$\frac{\partial \widehat{\Omega}}{\partial \zeta_A} = \frac{\widehat{\Omega}}{\zeta_B - \zeta_A}, \qquad \frac{\partial \widehat{\Omega}}{\partial \zeta_B} = -\frac{\widehat{\Omega}}{\zeta_B - \zeta_A}. \tag{18}$$

Integrating these equations, we find that $\widehat{\Omega}$ may be written as

$$\widehat{\Omega}(x_A, x_B, \zeta_A, \zeta_B) = \frac{\Omega(x_A, x_B)}{\zeta_B - \zeta_A}, \tag{19}$$

where $\Omega(x_A, x_B)$ is a function of $x_A$ and of $x_B$. This two-point function, which is symmetric in $x_A$ and $x_B$, is called the world function. Denoting by $\lambda$ the unique affine parameter such that $\lambda_A = 0$ and $\lambda_B = 1$, we infer from equations (16) and (19) that $\Omega(x_A, x_B)$ may be written as

$$\Omega(x_A, x_B) = \frac{1}{2}\int_0^1 g_{\mu\nu}(x^\alpha(\lambda))\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\lambda}\,\mathrm{d}\lambda, \tag{20}$$

the integral being taken along $\Gamma_{AB}$. It can be easily seen that

$$\Omega(x_A, x_B) = \tfrac{1}{2}\epsilon_{AB}[s_{AB}]^2, \tag{21}$$

where $\epsilon_{AB} = 1, 0, -1$ when $\Gamma_{AB}$ is a timelike, null or spacelike geodesic, respectively, and $s_{AB}$ is the geodesic distance between $x_A$ and $x_B$, i.e.

$$s_{AB} = \int_{\Gamma_{AB}} \sqrt{|g_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu|}.$$

The relevance of the world function in the problems related to the light deflection, time delay or gravitational frequency shift is justified by the following properties, which are easily deduced from the above-mentioned theory.

**Property 1.** *The covariant components of the vectors tangent to the geodesic path $\Gamma_{AB}$ at $x_A$ and $x_B$ respectively, are given by*

$$\left(g_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\lambda}\right)_A = -\frac{\partial \Omega}{\partial x_A^\mu}(x_A, x_B), \tag{22}$$

$$\left(g_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\lambda}\right)_B = \frac{\partial \Omega}{\partial x_B^\mu}(x_A, x_B). \tag{23}$$

These fundamental formulae are immediately deduced from equations (11) and (15). They show that the vectors tangent to the geodesic path $\Gamma_{AB}$ at $x_A$ and $x_B$ can be explicitly determined when the world function $\Omega(x_A, x_B)$ is known.

Any other affine parameter $\zeta$ along $\Gamma_{AB}$ is such that

$$\zeta = (\zeta_B - \zeta_A)\lambda + \zeta_A, \tag{24}$$

where $\zeta_A$ and $\zeta_B$ are the values corresponding to $x_A$ and $x_B$, respectively. As a consequence, we have for the tangent vector $\mathrm{d}x^\mu/\mathrm{d}\zeta$ the general formulae

$$\left(g_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\zeta}\right)_A = -\frac{1}{\zeta_B - \zeta_A}\frac{\partial \Omega}{\partial x_A^\mu}(x_A, x_B), \tag{25}$$

$$\left(g_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^{\nu}}{\mathrm{d}\zeta}\right)_{B} = \frac{1}{\zeta_B - \zeta_A}\frac{\partial\Omega}{\partial x_B^{\mu}}(x_A, x_B). \tag{26}$$

It is clear that point $x_B$ may be replaced in (26) by any point $x(\zeta)$ on $\Gamma_{AB}$ which differs from $x_A$. Returning to $\lambda$ for the sake of simplicity, we find that the covariant components of the vector tangent to $\Gamma_{AB}$ at point $x(\lambda)$ are given by

$$\left(g_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^{\nu}}{\mathrm{d}\lambda}\right)_{x(\lambda)} = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial\Omega}{\partial x^{\mu}}(x_A, x(\lambda)), \tag{27}$$

where $\partial\Omega/\partial x^{\mu}$ denotes the partial derivative of $\Omega(x_A, x)$ with respect to $x^{\mu}$ at point $x$. It immediately follows from equations (27) that the system of equations

$$\left(\frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}\lambda}\right)_{x(\lambda)} = \frac{1}{\lambda}g^{\mu\rho}(x(\lambda))\frac{\partial\Omega}{\partial x^{\rho}}(x_A, x(\lambda)), \tag{28}$$

can be regarded as the first-order differential system governing the geodesic paths passing through a given point $x_A$. The regularity of this system at $x_A$ is a direct consequence of the following property [19].

**Property 2.** *The first-order partial derivatives of* $\Omega(x_A, x)$ *may be expanded as*

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x^{\mu}}(x_A, x) = g_{\mu\nu}(x_A)\left(x^{\nu} - x_A^{\nu}\right) + C_{\mu\alpha\beta}(x_A, x)\left(x^{\alpha} - x_A^{\alpha}\right)\left(x^{\beta} - x_A^{\beta}\right), \tag{29}$$

*where the functions* $C_{\mu\alpha\beta}(x_A, x)$ *remain bounded in the neighbourhood of* $x_A$.

It results from this property that $\partial\Omega/\partial x^{\mu}(x_A, x) \to 0$ as $x \to x_A$ and that the rhs of equations (27) and (28) remains bounded as $\lambda \to 0$.

Now, the following statement can be straightforwardly derived from equations (13), (15) and (17).

**Property 3.** *The world function* $\Omega(x_A, x_B)$ *satisfies the Hamilton–Jacobi equations*

$$\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}(x_A)\frac{\partial\Omega}{\partial x_A^{\alpha}}(x_A, x_B)\frac{\partial\Omega}{\partial x_A^{\beta}}(x_A, x_B) = \Omega(x_A, x_B), \tag{30}$$

$$\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}(x_B)\frac{\partial\Omega}{\partial x_B^{\alpha}}(x_A, x_B)\frac{\partial\Omega}{\partial x_B^{\beta}}(x_A, x_B) = \Omega(x_A, x_B). \tag{31}$$

As we shall see below, these equations and property 2 enable us to construct the world function in any post-Minkowskian approximation.

Properties 1, 2 and 3 are valid whatever the nature of the geodesic curve joining $x_A$ ant $x_B$. In the case of null geodesics, (20) and $L = H_A = H_B = 0$ immediately lead to the following statement.

**Property 4.** *Two points* $x_A$ *and* $x_B$ *are joined by a light ray if and only if the condition*

$$\Omega(x_A, x_B) = 0 \tag{32}$$

*is fulfilled.*

Thus, $\Omega(x_A, x) = 0$ is the equation of the light cone $C_{x_A}$.

## 3. Time transfer functions

It follows from property 4 that if $\Omega(x_A, x_B)$ is known in $\mathcal{N}_{x_A}$, it is possible to determine the travel time $t_B - t_A$ of a photon connecting two points $x_A$ and $x_B$ as a function of $t_A$, $\boldsymbol{x}_A$ and $\boldsymbol{x}_B$ or as a function of $t_B$, $\boldsymbol{x}_A$ and $\boldsymbol{x}_B$. It must be pointed out, however, that solving the equation $\Omega(ct_A, \boldsymbol{x}_A, ct_B, \boldsymbol{x}_B) = 0$ for $t_B$ yields two distinct solutions $t_B^+$ and $t_B^-$ since the timelike curve $x^i = x_B^i$ cuts the light cone $\mathcal{C}_{x_A}$ at two points $x_B^+$ and $x_B^-$, $x_B^+$ being in the future of $x_B^-$. In the present paper, we always consider $x_A$ as the point of emission of the photon and $x_B$ as the point of reception, and we focus our attention on the determination of $t_B^+ - t_A$ (clearly, the determination of $t_B^- - t_A$ comes within the same methodology). For the sake of brevity, we shall henceforth write $t_B$ instead of $t_B^+$.

In general, $t_B - t_A$ may be considered either as a function of the instant of emission $t_A$, and of $\boldsymbol{x}_A$, $\boldsymbol{x}_B$, or as a function of the instant of reception $t_B$ and of $\boldsymbol{x}_A$, $\boldsymbol{x}_B$. So we are led to introduce two distinct (coordinate) time transfer functions $\mathcal{T}_e$ and $\mathcal{T}_r$ respectively defined by

$$t_B - t_A = \mathcal{T}_e(t_A, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B), \tag{33}$$

and

$$t_B - t_A = \mathcal{T}_r(t_B, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B). \tag{34}$$

We shall call $\mathcal{T}_e(t_A, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B)$ the emission time transfer function and $\mathcal{T}_r(t_B, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B)$ the reception time transfer function.

There exist direct relations between the time transfer functions and the components of the vector tangent to a null geodesic. Indeed, it results from equations (32) and (33) that whatever $\boldsymbol{x}_B$, $x_A^0$ and $\boldsymbol{x}_A$, one has the relation

$$\Omega\left(x_A^0, \boldsymbol{x}_A, x_A^0 + c\mathcal{T}_e(t_A, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B), \boldsymbol{x}_B\right) \equiv 0. \tag{35}$$

Differentiating this identity with respect to $x_A^0$, $x_A^i$ and $x_B^i$, respectively, it is easily seen that the relations

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x_A^0}(x_A, x_B) + \frac{\partial\Omega}{\partial x_B^0}(x_A, x_B)\left[1 + \frac{\partial\mathcal{T}_e}{\partial t_A}(t_A, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B)\right] = 0, \tag{36}$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x_A^i}(x_A, x_B) + c\frac{\partial\Omega}{\partial x_B^0}(x_A, x_B)\frac{\partial\mathcal{T}_e}{\partial x_A^i}(t_A, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B) = 0, \tag{37}$$

$$c\frac{\partial\Omega}{\partial x_B^0}(x_A, x_B)\frac{\partial\mathcal{T}_e}{\partial x_B^i}(t_A, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B) + \frac{\partial\Omega}{\partial x_B^i}(x_A, x_B) = 0, \tag{38}$$

hold for any couple of points $(x_A, x_B)$ connected by a null geodesic. Of course, analogous relations may be derived from the identity

$$\Omega\left(x_B^0 - c\mathcal{T}_r(t_B, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B), \boldsymbol{x}_A, x_B^0, \boldsymbol{x}_B\right) \equiv 0. \tag{39}$$

Comparing these relations with equations (22) and (23), we get the following theorem for the components of the vectors tangent to a light ray.

**Theorem 1.** *Consider a photon emitted at point $x_A = (ct_A, \boldsymbol{x}_A)$ and received at point $x_B = (ct_B, \boldsymbol{x}_B)$. Denote by $k^\mu$ the vector $\mathrm{d}x^\mu/\mathrm{d}\zeta$ tangent to the photon path, $\zeta$ being any affine parameter. Then, one has relations as follow for the covariant components of the vector tangent at $x_A$ and $x_B$*

$$\left(\frac{k_i}{k_0}\right)_B = -c\frac{\partial\mathcal{T}_e}{\partial x_B^i} = -c\frac{\partial\mathcal{T}_r}{\partial x_B^i}\left[1 - \frac{\partial\mathcal{T}_r}{\partial t_B}\right]^{-1}, \tag{40}$$



OBSERVATOIRE DE PARIS

$$\left(\frac{k_i}{k_0}\right)_A = c\frac{\partial \mathcal{T}_e}{\partial x_A^i}\left[1+\frac{\partial \mathcal{T}_e}{\partial t_A}\right]^{-1} = c\frac{\partial \mathcal{T}_r}{\partial x_A^i}, \tag{41}$$

$$\frac{(k_0)_B}{(k_0)_A} = \left[1+\frac{\partial \mathcal{T}_e}{\partial t_A}\right]^{-1} = 1-\frac{\partial \mathcal{T}_r}{\partial t_B}, \tag{42}$$

*where $\mathcal{T}_e$ and $\mathcal{T}_r$ are taken at $(t_A, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B)$ and $(t_B, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B)$, respectively.*

These fundamental formulae show that all the theoretical problems related to the directions of light rays or to the frequency shifts may be solved as soon as at least one of the time transfer functions is explicitly determined. This property will be very useful in practice since extracting the time transfer formulae (33) and (34) from equation (32), next using equations (40)–(42) will be more straightforward than deriving the vectors tangent at $x_A$ and $x_B$ from equations (22) and (23), next imposing constraint (32).

*Case of a stationary spacetime.* If spacetime is stationary, we can choose coordinates $(x^\mu)$ such that the metric does not depend on $x^0$. Then, the world function is a function of $x_B^0 - x_A^0$, $\boldsymbol{x}_A$ and $\boldsymbol{x}_B$, and the two time transfer functions previously introduced are identical. So equations (33) and (34) reduce to a single relation of the form

$$t_B - t_A = \mathcal{T}(\boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B). \tag{43}$$

Since $\mathcal{T}$ only depends on $\boldsymbol{x}_A$ and $\boldsymbol{x}_B$, it is immediately deduced from equations (40)–(42) that the vectors $(\widetilde{k}^\mu)_A$ and $(\widetilde{k}^\mu)_B$ defined by their covariant components

$$(\widetilde{k}_0)_A = 1, \qquad (\widetilde{k}_i)_A = c\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial x_A^i}(\boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B), \tag{44}$$

$$(\widetilde{k}_0)_B = 1, \qquad (\widetilde{k}_i)_B = -c\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial x_B^i}(\boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B), \tag{45}$$

are tangent to any light ray connecting $\boldsymbol{x}_A$ and $\boldsymbol{x}_B$, respectively. It must be pointed out that these tangent vectors correspond to an affine parameter such that $\widetilde{k}_0 = 1$ along the ray (note that such a parameter does not coincide with $\lambda$).

## 4. Determination of $\Omega(\boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B)$ in the $n$th post-Minkowskian approximation

Equations (31) and (30) are the basic formulae enabling us to determine the perturbative expansion (2). One might also directly use the integral form of the world function given by (20), but the calculations would be very tedious (a brief outline of this method is given in the appendix for the second post-Minkowskian approximation).

First of all, let us briefly consider Minkowski spacetime. The geodesic path connecting $x_A$ and $x_B$ is the curve $\Gamma_{AB}^{(0)}$ having parametric equations $x^\alpha = x_{(0)}^\alpha(\lambda)$, with

$$x_{(0)}^\alpha(\lambda) = \left(x_B^\alpha - x_A^\alpha\right)\lambda + x_A^\alpha, \qquad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1. \tag{46}$$

According to (46), equation (20) gives immediately for the world function in Minkowski spacetime

$$\Omega^{(0)}(x_A, x_B) = \tfrac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\left(x_B^\mu - x_A^\mu\right)\left(x_B^\nu - x_A^\nu\right). \tag{47}$$

In what follows we suppose that spacetime is a perturbation of Minkowski spacetime. Let us assume for a moment that metric (1) is written in the form

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}. \tag{48}$$

We suppose that $x_B \in \mathcal{N}_{x_A}$. The geodesic curve $\Gamma_{AB}$ connecting $x_A$ and $x_B$ is then a perturbation of the straight line $\Gamma^{(0)}_{AB}$. So, the parametric equations of $\Gamma_{AB}$ may be written in the form

$$x^\alpha(\lambda) = \left(x_B^\alpha - x_A^\alpha\right)\lambda + x_A^\alpha + X^\alpha(\lambda), \qquad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1, \tag{49}$$

where functions $X^\alpha$ satisfy the boundary conditions

$$X^\alpha(0) = 0, \qquad X^\alpha(1) = 0. \tag{50}$$

Noting that $\dot{x}^\mu(\lambda) = x_B^\mu - x_A^\mu + \dot{X}^\mu(\lambda)$ and that

$$\int_0^1 \eta_{\mu\nu}\left(x_B^\mu - x_A^\mu\right)\dot{X}^\nu(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda = 0$$

by virtue of equations (50), it may be seen that equation (20) transforms into

$$\begin{aligned}\Omega(x_A, x_B) = \Omega^{(0)}(x_A, x_B) &+ \frac{1}{2}\left(x_B^\mu - x_A^\mu\right)\left(x_B^\nu - x_A^\nu\right)\int_0^1 h_{\mu\nu}(x(\lambda))\,\mathrm{d}\lambda \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\eta_{\mu\nu}\dot{X}^\mu(\lambda)\dot{X}^\nu(\lambda) + 2\left(x_B^\mu - x_A^\mu\right)h_{\mu\nu}(x(\lambda))\dot{X}^\nu(\lambda)\right. \\ &\left. + h_{\mu\nu}(x(\lambda))\dot{X}^\mu(\lambda)\dot{X}^\nu(\lambda)\right]\mathrm{d}\lambda.\end{aligned} \tag{51}$$

All the integrals in (51) are taken over geodesic path $\Gamma_{AB}$, which is generally unknown. However, it is possible to obtain a perturbative expansion of $\Omega(x_A, x_B)$ involving only line integrals taken over the straight line $\Gamma^{(0)}_{AB}$ when the metric is given by expansion (1). Indeed, noting that the concomitant expansion of the contravariant components $g^{\mu\nu}$ is given by

$$g^{\mu\nu}(x, G) = \eta^{\mu\nu} + \sum_{n=1}^{\infty} G^n g^{\mu\nu}_{(n)}(x), \tag{52}$$

where the set of quantities $g^{\mu\nu}_{(n)}$ is determined by

$$g^{\mu\nu}_{(1)} = -\eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma}g^{(1)}_{\rho\sigma}, \tag{53}$$

$$g^{\mu\nu}_{(n)} = -\eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma}g^{(n)}_{\rho\sigma} - \sum_{p=1}^{n-1}\eta^{\mu\rho}g^{(p)}_{\rho\sigma}g^{\nu\sigma}_{(n-p)}, \tag{54}$$

we can state the theorem below.

**Theorem 2.** *Assuming that the metric is represented by expansion (1) and that $x_B \in \mathcal{N}_{x_A}$, the world function is given by equation (2), namely*

$$\Omega(x_A, x_B) = \Omega^{(0)}(x_A, x_B) + \sum_{n=1}^{\infty} G^n \Omega^{(n)}(x_A, x_B),$$

*where*

$$\Omega^{(1)}(x_A, x_B) = -\frac{1}{2}\eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma}\left(x_B^\rho - x_A^\rho\right)\left(x_B^\sigma - x_A^\sigma\right)\int_0^1 g^{\mu\nu}_{(1)}(x_{(0)}(\lambda))\,\mathrm{d}\lambda, \tag{55}$$

$$\begin{aligned}\Omega^{(n)}(x_A, x_B) = &-\frac{1}{2}\eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma}\left(x_B^\rho - x_A^\rho\right)\left(x_B^\sigma - x_A^\sigma\right)\int_0^1 g^{\mu\nu}_{(n)}(x_{(0)}(\lambda))\,\mathrm{d}\lambda \\ &- \frac{1}{2}\int_0^1 \sum_{p=1}^{n-1} g^{\mu\nu}_{(p)}(x_{(0)}(\lambda))\left[\eta_{\mu\rho}\left(x_B^\rho - x_A^\rho\right)\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\Omega^{(n-p)}}{\partial x^\nu}(x_A, x_{(0)}(\lambda))\right.\end{aligned}$$

$$+\sum_{q=1}^{n-p}\frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial\Omega^{(q)}}{\partial x^\mu}(x_A,x_{(0)}(\lambda))\frac{\partial\Omega^{(n-p-q)}}{\partial x^\nu}(x_A,x_{(0)}(\lambda))\Bigg]\,\mathrm{d}\lambda$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^1\sum_{p=1}^{n-1}\frac{1}{\lambda^2}\eta^{\mu\nu}\frac{\partial\Omega^{(p)}}{\partial x^\mu}(x_A,x_{(0)}(\lambda))\frac{\partial\Omega^{(n-p)}}{\partial x^\nu}(x_A,x_{(0)}(\lambda))\,\mathrm{d}\lambda, \tag{56}$$

*whatever $n \geqslant 2$. All integrals are calculated along straight line $\Gamma_{AB}^{(0)}$ defined by equation (46).*

Before we prove this theorem, we can enunciate a corollary as follows.

**Corollary.** *In terms of covariant components of the metric tensor, $\Omega^{(1)}(x_A,x_B)$ and $\Omega^{(2)}(x_A,x_B)$ may be written in the form*

$$\Omega^{(1)}(x_A,x_B)=\frac{1}{2}\big(x_B^\mu-x_A^\mu\big)\big(x_B^\nu-x_A^\nu\big)\int_0^1 g_{\mu\nu}^{(1)}(x_{(0)}(\lambda))\,\mathrm{d}\lambda, \tag{57}$$

$$\begin{aligned}\Omega^{(2)}(x_A,x_B)=&\frac{1}{2}\big(x_B^\mu-x_A^\mu\big)\big(x_B^\nu-x_A^\nu\big)\int_0^1\big[g_{\mu\nu}^{(2)}(x_{(0)}(\lambda))-\eta^{\rho\sigma}g_{\mu\rho}^{(1)}(x_{(0)}(\lambda))g_{\nu\sigma}^{(1)}(x_{(0)}(\lambda))\big]\,\mathrm{d}\lambda\\&+\big(x_B^\mu-x_A^\mu\big)\int_0^1\frac{1}{\lambda}\eta^{\nu\rho}\frac{\partial\Omega^{(1)}}{\partial x^\nu}(x_A,x_{(0)}(\lambda))g_{\mu\rho}^{(1)}(x_{(0)}(\lambda))\,\mathrm{d}\lambda\\&-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{1}{\lambda^2}\eta^{\mu\nu}\frac{\partial\Omega^{(1)}}{\partial x^\mu}(x_A,x_{(0)}(\lambda))\frac{\partial\Omega^{(1)}}{\partial x^\nu}(x_A,x_{(0)}(\lambda))\,\mathrm{d}\lambda.\end{aligned} \tag{58}$$

This corollary is an immediate consequence of equations (55) and (56) for $n=2$ when equations (53) and (54) are taken into account.

**Proof of theorem 2.** Points $x_A$ and $x_B$ being given, we may consider $\Omega(x_A,x)$ as a function of $x$ denoted by $\overline{\Omega}(x)$. This function satisfies the Hamilton–Jacobi equation (see equation (31))

$$\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}(x)\frac{\partial\overline{\Omega}}{\partial x^\alpha}(x)\frac{\partial\overline{\Omega}}{\partial x^\beta}(x)=\overline{\Omega}(x). \tag{59}$$

Function $\overline{\Omega}(x)$ may be represented by a series

$$\overline{\Omega}(x)=\Omega^{(0)}(x_A,x)+\sum_{n=1}^{\infty}G^n\overline{\Omega}^{(n)}(x), \tag{60}$$

where each term $\overline{\Omega}^{(n)}$ satisfies the boundary condition

$$\overline{\Omega}^{(n)}(x_A)=0. \tag{61}$$

Moreover, it follows from property 2 that the first-order derivatives of each $\overline{\Omega}^{(n)}$ must satisfy the boundary condition

$$\lim_{x\to x_A}\left[\frac{\partial\overline{\Omega}^{(n)}}{\partial x^\mu}(x)\right]=0. \tag{62}$$

Inserting developments (52) and (60) into equation (59), and then putting

$$\overline{q}_\mu=\frac{\partial\Omega^{(0)}}{\partial x^\mu}(x_A,x)\equiv\eta_{\mu\rho}\big(x^\rho-x_A^\rho\big), \tag{63}$$

$$\overline{q}^{\mu} = \eta^{\mu\nu}\overline{q}_{\nu} = x^{\mu} - x_A^{\mu}, \tag{64}$$

it is easily seen that equation (59) splits up into an infinite set of partial differential equations as follows:

$$\overline{q}^{\mu}\frac{\partial\overline{\Omega}^{(n)}}{\partial x^{\mu}} - \overline{\Omega}^{(n)} = \Phi^{(n)}, \tag{65}$$

where

$$\Phi^{(1)}(x) = -\frac{1}{2}\overline{q}_{\mu}\overline{q}_{\nu}g_{(1)}^{\mu\nu}(x), \tag{66}$$

$$\Phi^{(n)}(x) = -\frac{1}{2}\overline{q}_{\mu}\overline{q}_{\nu}g_{(n)}^{\mu\nu}(x) - \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n-1}\left\{g_{(p)}^{\mu\nu}(x)\left[\overline{q}_{\mu}\frac{\partial\overline{\Omega}^{(n-p)}}{\partial x^{\nu}} + \sum_{q=1}^{n-p}\frac{\partial\overline{\Omega}^{(q)}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial\overline{\Omega}^{(n-p-q)}}{\partial x^{\nu}}\right] + \eta^{\mu\nu}\frac{\partial\overline{\Omega}^{(p)}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial\overline{\Omega}^{(n-p)}}{\partial x^{\nu}}\right\} \tag{67}$$

whatever $n \geqslant 2$.

Assume now that $x$ moves along $\Gamma_{AB}^{(0)}$. This means that $x$ varies as a function of $\lambda$ according to equation (46). As a consequence the total derivative of $\overline{\Omega}^{(n)}$ along $\Gamma_{AB}^{(0)}$ is given by

$$\frac{\mathrm{d}\overline{\Omega}^{(n)}(x_{(0)}(\lambda))}{\mathrm{d}\lambda} = \left(x_B^{\mu} - x_A^{\mu}\right)\frac{\partial\overline{\Omega}^{(n)}}{\partial x^{\mu}}(x_{(0)}(\lambda)), \tag{68}$$

which implies that equation (65) may be written in the form of an ordinary differential equation

$$\lambda\frac{\mathrm{d}\overline{\Omega}^{(n)}(x_{(0)}(\lambda))}{\mathrm{d}\lambda} - \overline{\Omega}^{(n)}(x_{(0)}(\lambda)) = \Phi^{(n)}(x_{(0)}(\lambda)). \tag{69}$$

It is easy to show that equation (69) admits one and only one solution satisfying boundary conditions (61) and (62), namely

$$\overline{\Omega}^{(n)}(x_{(0)}(\lambda)) = \lambda\int_0^{\lambda}\frac{1}{\lambda'^2}\Phi^{(n)}(x_{(0)}(\lambda'))\,\mathrm{d}\lambda', \tag{70}$$

from which one can deduce formulae (55) and (56). The only difficulty is to prove that $\lambda^{-2}\Phi^{(n)}(x_{(0)}(\lambda))$ is a continuous function of $\lambda$ in the range $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. The property is obviously true for $n = 1$, since it follows from equation (66) that

$$\frac{1}{\lambda^2}\Phi^{(1)}(x_{(0)}(\lambda)) = -\frac{1}{2}\left(x_B^{\mu} - x_A^{\mu}\right)\left(x_B^{\nu} - x_A^{\nu}\right)\eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma}g_{(1)}^{\rho\sigma}(x_{(0)}(\lambda)). \tag{71}$$

As a consequence, $\overline{\Omega}^{(1)}(x_{(0)}(\lambda))$ is given by (70) for $n = 1$. Therefore, formula (55) holds. Replacing $x_B$ by $x$ in (55) and then differentiating with respect to $x$ gives

$$\frac{\partial\Omega^{(1)}}{\partial x^{\nu}}(x_A, x) = -\overline{q}_{\rho}\int_0^1\eta_{\nu\sigma}g_{(1)}^{\rho\sigma}(\overline{x}_{(0)}(\bar{\lambda}))\,\mathrm{d}\bar{\lambda} - \frac{1}{2}\overline{q}_{\rho}\overline{q}_{\sigma}\int_0^1 g_{(1),\nu}^{\rho\sigma}(\overline{x}_{(0)}(\bar{\lambda}))\bar{\lambda}\,\mathrm{d}\bar{\lambda}, \tag{72}$$

where $\overline{x}_{(0)}(\bar{\lambda})$ is defined by

$$\overline{x}_{(0)}^{\alpha}(\bar{\lambda}) = \left(x^{\alpha} - x_A^{\alpha}\right)\bar{\lambda} + x_A^{\alpha}. \tag{73}$$

Setting $x = x_{(0)}(\lambda)$ in (72) yields

$$\frac{\partial\Omega^{(1)}}{\partial x^{\nu}}(x_A, x_{(0)}(\lambda)) = -\lambda\left(x_B^{\alpha} - x_A^{\alpha}\right)\int_0^1\eta_{\alpha\rho}\eta_{\nu\sigma}g_{(1)}^{\rho\sigma}(\overline{x}_{(0)}(\bar{\lambda}))\,\mathrm{d}\bar{\lambda} - \frac{1}{2}\lambda^2\left(x_B^{\alpha} - x_A^{\alpha}\right)\left(x_B^{\beta} - x_A^{\beta}\right)\int_0^1\eta_{\alpha\rho}\eta_{\beta\sigma}g_{(1),\nu}^{\rho\sigma}(\overline{x}_{(0)}(\bar{\lambda}))\bar{\lambda}\,\mathrm{d}\bar{\lambda}. \tag{74}$$

Inserting this expression into equation (67) written for $n = 2$, it is easily seen that $\lambda^{-2}\Phi^{(2)}$ is a continuous function of $\lambda$. As a consequence, $\overline{\Omega}^{(2)}$ is given by (70) for $n = 2$, which proves that formula (56) is valid for $n = 2$. The above reasoning may be used to prove that $\lambda^{-2}\Phi^{(n)}$ is continuous whatever $n$. □

The expression of $\Omega^{(2)}(x_A, x_B)$ given by formula (58) leads to heavy calculations owing to the presence of quadratic terms with respect to the derivatives of $\Omega^{(1)}$ in one of the integrals. Fortunately, a drastic simplification is possible.

**Theorem 3.** *The second-order term $\Omega^{(2)}(x_A, x_B)$ may be written in the form*

$$\begin{aligned}\Omega^{(2)}(x_A, x_B) = {} & \frac{1}{2}\left(x_B^\mu - x_A^\mu\right)\left(x_B^\nu - x_A^\nu\right) \\ & \times \int_0^1 \left[ g^{(2)}_{\mu\nu}(x_{(0)}(\lambda)) - \eta^{\rho\sigma} g^{(1)}_{\mu\rho}(x_{(0)}(\lambda)) g^{(1)}_{\nu\sigma}(x_{(0)}(\lambda)) \right. \\ & \left. - \eta^{\rho\sigma} \frac{\partial \Omega^{(1)}}{\partial x^\rho}(x_A, x_{(0)}(\lambda)) g^{(1)}_{\mu\nu,\sigma}(x_{(0)}(\lambda)) \right] \mathrm{d}\lambda \\ & + \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu} \frac{\partial \Omega^{(1)}}{\partial x_B^\mu}(x_A, x_B) \frac{\partial \Omega^{(1)}}{\partial x_B^\nu}(x_A, x_B), \end{aligned} \tag{75}$$

*the integral being taken along $\Gamma^{(0)}_{AB}$.*

**Proof of theorem 3.** It follows from equation (74) that

$$\lim_{\lambda \to 0} \left[ \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \Omega^{(1)}}{\partial x^\mu}(x_A, x_{(0)}(\lambda)) \frac{\partial \Omega^{(1)}}{\partial x^\nu}(x_A, x_{(0)}(\lambda)) \right] = 0. \tag{76}$$

Taking this equation into account, an integration by parts gives

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{\lambda^2} \eta^{\mu\nu} & \frac{\partial \Omega^{(1)}}{\partial x^\mu}(x_A, x_{(0)}(\lambda)) \frac{\partial \Omega^{(1)}}{\partial x^\nu}(x_A, x_{(0)}(\lambda)) \, \mathrm{d}\lambda \\ & = \frac{1}{2} \frac{\partial \Omega^{(1)}}{\partial x_B^\mu}(x_A, x_B) \frac{\partial \Omega^{(1)}}{\partial x_B^\nu}(x_A, x_B) \\ & \quad - \eta_{\mu\nu} \int_0^1 \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \Omega^{(1)}}{\partial x^\mu}(x_A, x_{(0)}(\lambda)) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} \left[ \frac{\partial \Omega^{(1)}}{\partial x^\nu}(x_A, x_{(0)}(\lambda)) \right] \mathrm{d}\lambda. \end{aligned} \tag{77}$$

In order to transform the rhs of equation (77), let us perform the change of variable $\lambda' = \lambda\bar{\lambda}$ in equation (74). We obtain

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega^{(1)}}{\partial x^\nu}(x_A, x_{(0)}(\lambda)) = {} & \left(x_B^\rho - x_A^\rho\right) \int_0^\lambda g^{(1)}_{\rho\nu}(x_{(0)}(\lambda')) \, \mathrm{d}\lambda' \\ & + \frac{1}{2}\left(x_B^\rho - x_A^\rho\right)\left(x_B^\sigma - x_A^\sigma\right) \int_0^\lambda g^{(1)}_{\rho\sigma,\nu}(x_{(0)}(\lambda'))\lambda' \, \mathrm{d}\lambda'. \end{aligned} \tag{78}$$

Differentiating (78) with respect to $\lambda$ yields

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left[ \frac{\partial \Omega^{(1)}}{\partial x^\nu}(x_A, x_{(0)}(\lambda)) \right] = \left(x_B^\rho - x_A^\rho\right) g^{(1)}_{\rho\nu}(x_{(0)}(\lambda)) + \frac{1}{2}\left(x_B^\rho - x_A^\rho\right)\left(x_B^\sigma - x_A^\sigma\right)\lambda g^{(1)}_{\rho\sigma,\nu}(x_{(0)}(\lambda)). \tag{79}$$

Substituting this expression into (77), and then inserting the result of this substitution into (56), we finally get formula (75). □

## 5. Time transfer functions in the *n*th post-Minkowskian approximation

It follows from equations (2), (35) and (47) that function $\mathcal{T}_e(t_A, \boldsymbol{x}_a, \boldsymbol{x}_B)$ satisfies the equation

$$c^2\mathcal{T}_e^2 = R_{AB}^2 - 2\sum_{n=1}^{\infty} G^n \Omega^{(n)}\left(x_A^0, \boldsymbol{x}_A, x_A^0 + c\mathcal{T}_e, \boldsymbol{x}_B\right), \tag{80}$$

where

$$R_{AB} = |\boldsymbol{x}_B - \boldsymbol{x}_A|.$$

Since $x_A$ is the point of emission and $x_B$ the point of reception, we are looking for the solution to equation (80) such that $c\mathcal{T}_e(t_A, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B) = R_{AB} + O(G)$. Mathematically, our problem consists in finding a function $u(x, \varepsilon)$ governed by the equation

$$u^2 = x^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n h_n(u) \tag{81}$$

and satisfying the condition

$$u(x, \varepsilon)|_{\varepsilon=0} = x, \tag{82}$$

$\varepsilon$ being a parameter sufficiently small to warrant the convergence of the series which are handled. Using Maclaurin's expansion of $u$ about $\varepsilon = 0$, the solution to equation (81) may be written in the form

$$u(x, \varepsilon) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n u_n(x),$$

where

$$u_n(x) = \frac{1}{n!} \left.\frac{\partial^n u(x, \varepsilon)}{\partial \varepsilon^n}\right|_{\varepsilon=0}.$$

Performing successive differentiations of (81) with respect to $\varepsilon$ and then taking (82) into account, a straightforward calculation yields $u_n(x)$ for any $n$. The first terms are given by

$$\begin{aligned} u_1(x) &= \frac{h_1(x)}{2x}, \qquad u_2(x) = \frac{1}{2x}\left[h_2(x) + h_1'(x)u_1(x) - u_1^2(x)\right], \\ u_3(x) &= \frac{1}{2x}\left[h_3(x) + h_2'(x)u_1(x) + \frac{1}{2}h_1''(x)u_1^2(x) + h_1'(x)u_2(x) - 2u_1(x)u_2(x)\right]. \end{aligned} \tag{83}$$

Applying this procedure to equation (80), it would be possible to get $\mathcal{T}_e$ at any post-Minkowskian order. For the sake of brevity, let us define the following functions of $t_A, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B$:

$$\widetilde{\Omega}_e^{(n)}(t_A, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B) = \Omega^{(n)}\left(x_A^0, \boldsymbol{x}_A, x_A^0 + R_{AB}, \boldsymbol{x}_B\right) \tag{84}$$

and

$$\widetilde{\Omega}_{e|k}^{(n)}(t_A, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B) = \frac{\partial^k \Omega^{(n)}}{\left(\partial x_B^0\right)^k}\left(x_A^0, \boldsymbol{x}_A, x_A^0 + R_{AB}, \boldsymbol{x}_B\right) \tag{85}$$

for $k = 1, 2, 3, \ldots$ (be careful that $\widetilde{\Omega}_{e|k}^{(n)}$ is not a partial derivative of $\widetilde{\Omega}_e^{(n)}$). Applying equations (83), we can state the following theorem.

**Theorem 4.** *In the third post-Minkowskian approximation the emission time, transfer function is given by*

$$\mathcal{T}_e(t_A, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B) = \frac{1}{c} R_{AB} + \sum_{n=1}^{3} G^n \mathcal{T}_e^{(n)}(t_A, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B) + O(G^4), \tag{86}$$

*where*

$$\mathcal{T}_e^{(1)} = -\frac{\widetilde{\Omega}_e^{(1)}}{cR_{AB}}, \tag{87}$$

$$\mathcal{T}_e^{(2)} = -\frac{1}{cR_{AB}}\left[\widetilde{\Omega}_e^{(2)} + c\mathcal{T}_e^{(1)}\widetilde{\Omega}_{e|1}^{(1)} + \frac{1}{2}c^2\big(\mathcal{T}_e^{(1)}\big)^2\right], \tag{88}$$

$$\mathcal{T}_e^{(3)} = -\frac{1}{cR_{AB}}\left[\widetilde{\Omega}_e^{(3)} + c\mathcal{T}_e^{(1)}\widetilde{\Omega}_{e|1}^{(2)} + \frac{1}{2}c^2\big(\mathcal{T}_e^{(1)}\big)^2\widetilde{\Omega}_{e|2}^{(1)} + c\mathcal{T}_e^{(2)}\widetilde{\Omega}_{e|1}^{(1)} + c^2\mathcal{T}_e^{(1)}\mathcal{T}_e^{(2)}\right], \tag{89}$$

*the functions* $\widetilde{\Omega}_e^{(n)}$ *and* $\widetilde{\Omega}_{e|k}^{(n)}$ *being defined by (84) and (85), respectively.*

Of course, defining

$$\widetilde{\Omega}_r^{(n)}(t_B, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B) = \Omega^{(n)}\big(x_B^0 - R_{AB}, \boldsymbol{x}_A, x_B^0, \boldsymbol{x}_B\big) \tag{90}$$

and

$$\widetilde{\Omega}_{r|k}^{(n)}(t_B, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B) = \frac{\partial^k \Omega^{(n)}}{\big(\partial x_A^0\big)^k}\big(x_B^0 - R_{AB}, \boldsymbol{x}_A, x_B^0, \boldsymbol{x}_B\big), \tag{91}$$

a similar theorem can be stated for $\mathcal{T}_r(t_B, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B)$.

**Theorem 4a.** *In the third post-Minkowskian approximation, the reception time transfer function is given by*

$$\mathcal{T}_r(t_B, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B) = \frac{1}{c}R_{AB} + \sum_{n=1}^{3} G^n \mathcal{T}_r^{(n)}(t_B, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B) + O(G^4), \tag{92}$$

*where*

$$\mathcal{T}_r^{(1)} = -\frac{\widetilde{\Omega}_r^{(1)}}{cR_{AB}}, \tag{93}$$

$$\mathcal{T}_r^{(2)} = -\frac{1}{cR_{AB}}\left[\widetilde{\Omega}_r^{(2)} - c\mathcal{T}_r^{(1)}\widetilde{\Omega}_{r|1}^{(1)} + \frac{1}{2}c^2\big(\mathcal{T}_r^{(1)}\big)^2\right], \tag{94}$$

$$\mathcal{T}_r^{(3)} = -\frac{1}{cR_{AB}}\left[\widetilde{\Omega}_r^{(3)} - c\mathcal{T}_r^{(1)}\widetilde{\Omega}_{r|1}^{(2)} + \frac{1}{2}c^2\big(\mathcal{T}_r^{(1)}\big)^2\widetilde{\Omega}_{r|2}^{(1)} - c\mathcal{T}_r^{(2)}\widetilde{\Omega}_{r|1}^{(1)} + c^2\mathcal{T}_r^{(1)}\mathcal{T}_r^{(2)}\right]. \tag{95}$$

It may be seen that $\mathcal{T}_r^{(1)}, \ldots, \mathcal{T}_r^{(n)}$ can be determined once $\mathcal{T}_e^{(1)}, \ldots, \mathcal{T}_e^{(n)}$ are known and conversely. Let us examine in detail the cases where $n = 1$ and $n = 2$.

Comparing expressions (87) and (93), we get immediately

$$\mathcal{T}_r^{(1)}(t, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B) = \mathcal{T}_e^{(1)}\left(t - \frac{R_{AB}}{c}, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B\right) \tag{96}$$

and conversely

$$\mathcal{T}_e^{(1)}(t, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B) = \mathcal{T}_r^{(1)}\left(t + \frac{R_{AB}}{c}, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B\right). \tag{97}$$

Now comparing expressions (88) and (94), and then noting that (87) implies the identity

$$\frac{\partial \mathcal{T}_e^{(1)}}{\partial t}(t, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B) = -\frac{1}{R_{AB}}\left[\frac{\partial \Omega^{(1)}}{\partial x_A^0}(x^0, \boldsymbol{x}_A, x^0 + R_{AB}, \boldsymbol{x}_B) + \frac{\partial \Omega^{(1)}}{\partial x_B^0}(x^0, \boldsymbol{x}_A, x^0 + R_{AB}, \boldsymbol{x}_B)\right], \tag{98}$$

we get

$$\mathcal{T}_r^{(2)}(t_B, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B) = \mathcal{T}_e^{(2)}\left(t_B - \frac{R_{AB}}{c}, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B\right) - \mathcal{T}_e^{(1)}\left(t_B - \frac{R_{AB}}{c}, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B\right)\frac{\partial \mathcal{T}_e^{(1)}}{\partial t}\left(t_B - \frac{R_{AB}}{c}, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B\right). \tag{99}$$

Conversely, we have

$$\mathcal{T}_e^{(2)}(t_A, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B) = \mathcal{T}_r^{(2)}\left(t_A + \frac{R_{AB}}{c}, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B\right) + \mathcal{T}_r^{(1)}\left(t_A + \frac{R_{AB}}{c}, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B\right)\frac{\partial \mathcal{T}_r^{(1)}}{\partial t}\left(t_A + \frac{R_{AB}}{c}, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B\right). \tag{100}$$

## 6. Application to a static, spherically symmetric body

In order to apply the general results obtained in sections 4 and 5, let us determine the world function and the time transfer function in the second post-Minkowskian approximation. Choosing spatial isotropic coordinates, we suppose that the metric components may be written as

$$\begin{aligned} g_{00}^{(1)} &= -\frac{2M}{c^2 r}, & g_{0i}^{(1)} &= 0, & g_{ij}^{(1)} &= -2\gamma\frac{M}{c^2 r}\delta_{ij}, \\ g_{00}^{(2)} &= 2\beta\frac{M^2}{c^4 r^2}, & g_{0i}^{(2)} &= 0, & g_{ij}^{(2)} &= -\tfrac{3}{2}\delta\frac{M^2}{c^4 r^2}\delta_{ij}, \end{aligned} \tag{101}$$

where $\beta$ and $\gamma$ are the usual post-Newtonian parameters, and $\delta$ is a post-post-Newtonian parameter (in general relativity, $\beta = \gamma = \delta = 1$). Furthermore, we suppose that $x_A$ and $x_B$ are such that the connecting geodesic path is both entirely outside the body and in the weak-field region. We use the notation

$$r = |\boldsymbol{x}|, \quad r_A = |\boldsymbol{x}_A|, \quad r_B = |\boldsymbol{x}_B|.$$

It is easily seen that $G\Omega^{(1)}(x_A, x_B)$ is the term due to the mass in the multipole expansion of the world function given by equation (56) in [22] (see also [31])

$$\Omega^{(1)}\left(x_A^0, \boldsymbol{x}_A, x_B^0, \boldsymbol{x}_B\right) = -\frac{M}{c^2}\left[\left(x_B^0 - x_A^0\right)^2 + \gamma R_{AB}^2\right]F(\boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B), \tag{102}$$

where

$$F(\boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}\lambda}{|\boldsymbol{x}_{(0)}(\lambda)|} = \frac{1}{R_{AB}}\ln\left(\frac{r_A + r_B + R_{AB}}{r_A + r_B - R_{AB}}\right). \tag{103}$$

For the integrals involving $g_{\mu\nu}^{(2)}$ and terms quadratic in $g_{\mu\nu}^{(1)}$ in the expression of $\Omega^{(2)}(x_A, x_B)$, we find

$$\frac{1}{2}\left(x_B^\mu - x_A^\mu\right)\left(x_B^\nu - x_A^\nu\right)\int_0^1 \left[g_{\mu\nu}^{(2)}(x_{(0)}(\lambda)) - \eta^{\rho\sigma}g_{\mu\rho}^{(1)}(x_{(0)}(\lambda))g_{\nu\sigma}^{(1)}(x_{(0)}(\lambda))\right]\mathrm{d}\lambda = \frac{M^2}{c^4}\left[(\beta - 2)\left(x_B^0 - x_A^0\right)^2 + \left(2\gamma^2 - \frac{3\delta}{4}\right)R_{AB}^2\right]E(\boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B), \tag{104}$$

where $E(\boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B)$ is defined as

$$E(\boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}\lambda}{|\boldsymbol{x}_{(0)}(\lambda)|^2}.$$

An elementary quadrature yields

$$E(\boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B) = \frac{1}{\sqrt{r_A^2 r_B^2 - (\boldsymbol{x}_A \cdot \boldsymbol{x}_B)^2}} \left\{ \arctan \left[ \frac{(\boldsymbol{x}_B - \boldsymbol{x}_A) \cdot \boldsymbol{x}_B}{\sqrt{r_A^2 r_B^2 - (\boldsymbol{x}_A \cdot \boldsymbol{x}_B)^2}} \right] - \arctan \left[ \frac{(\boldsymbol{x}_B - \boldsymbol{x}_A) \cdot \boldsymbol{x}_A}{\sqrt{r_A^2 r_B^2 - (\boldsymbol{x}_A \cdot \boldsymbol{x}_B)^2}} \right] \right\}$$
$$= \frac{\arccos(\boldsymbol{n}_A \cdot \boldsymbol{n}_B)}{r_A r_B \sqrt{1 - (\boldsymbol{n}_A \cdot \boldsymbol{n}_B)^2}}, \tag{105}$$

$\boldsymbol{n}_A$ and $\boldsymbol{n}_B$ being defined as

$$\boldsymbol{n}_A = \boldsymbol{x}_A / r_A, \qquad \boldsymbol{n}_B = \boldsymbol{x}_B / r_B.$$

For the integral involving the gradient of $\Omega^{(1)}$ in formula (75), we obtain

$$-\frac{1}{2}\left(x_B^\mu - x_A^\mu\right)\left(x_B^\nu - x_A^\nu\right) \int_0^1 \eta^{\rho\sigma} \frac{\partial \Omega^{(1)}}{\partial x^\rho}(x_A, x_{(0)}(\lambda)) g^{(1)}_{\mu\nu,\sigma}(x_{(0)}(\lambda))\, \mathrm{d}\lambda$$
$$= \frac{M^2}{c^4}\left[\left(x_B^0 - x_A^0\right)^2 + \gamma R_{AB}^2\right] \left[ \left(1 + \frac{r_A}{r_B}\right) \frac{1}{R_{AB}^2} \frac{\left(x_B^0 - x_A^0\right)^2 + \gamma R_{AB}^2}{r_A r_B + (\boldsymbol{x}_A \cdot \boldsymbol{x}_B)} - 2\gamma E(\boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B) - \frac{\left(x_B^0 - x_A^0\right)^2 - \gamma R_{AB}^2}{R_{AB}^2} \frac{F(\boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B)}{r_B} \right]. \tag{106}$$

Substituting (104) and (106) into (75), and then carrying out the calculation of the square of the gradient of $\Omega^{(1)}(x_A, x_B)$ at $x_B$, we obtain an expression for the world function as follows:

$$\Omega(x_A, x_B) = \frac{1}{2}\left(x_B^0 - x_A^0\right)^2 - \frac{1}{2} R_{AB}^2 - \frac{GM}{c^2}\left[\left(x_B^0 - x_A^0\right)^2 + \gamma R_{AB}^2\right] F(\boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B)$$
$$+ \frac{G^2 M^2}{c^4} \left\{ \frac{\left(x_B^0 - x_A^0\right)^4}{R_{AB}^2} \left[ \frac{1}{r_A r_B + (\boldsymbol{x}_A \cdot \boldsymbol{x}_B)} - \frac{1}{2} F^2(\boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B) \right] \right.$$
$$+ \left(x_B^0 - x_A^0\right)^2 \left[ \frac{2\gamma}{r_A r_B + (\boldsymbol{x}_A \cdot \boldsymbol{x}_B)} - (2 - \beta + 2\gamma) E(\boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B) \right.$$
$$\left. + (2 + \gamma) F^2(\boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B) \right]$$
$$\left. + R_{AB}^2 \left[ \frac{\gamma^2}{r_A r_B + (\boldsymbol{x}_A \cdot \boldsymbol{x}_B)} - \frac{3\delta}{4} E(\boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B) - \frac{\gamma^2}{2} F^2(\boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B) \right] \right\} + O(G^3). \tag{107}$$

Now, using formulae (87) and (88), a straightforward calculation gives for the time transfer function

$$\mathcal{T}(\boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B) = \frac{R_{AB}}{c} + \frac{(\gamma + 1) GM}{c^3} \ln\left( \frac{r_A + r_B + R_{AB}}{r_A + r_B - R_{AB}} \right) + \frac{G^2 M^2 R_{AB}}{c^5}$$
$$\times \left[ \frac{(8 - 4\beta + 8\gamma + 3\delta) \arccos(\boldsymbol{n}_A \cdot \boldsymbol{n}_B)}{4\sqrt{r_A^2 r_B^2 - (\boldsymbol{x}_A \cdot \boldsymbol{x}_B)^2}} - \frac{(1 + \gamma)^2}{r_A r_B + (\boldsymbol{x}_A \cdot \boldsymbol{x}_B)} \right] + O(G^3). \tag{108}$$

The first-order term is the Shapiro time delay [37]. The second-order terms in (108) generalize the result found by Brumberg in the case of general relativity [32].

Denoting by $\psi_{AB}$ the angle formed by vectors $\boldsymbol{n}_A$ and $\boldsymbol{n}_B$ and noting that $E(\boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B)$ reads

$$\frac{\arccos(\boldsymbol{n}_A \cdot \boldsymbol{n}_B)}{\sqrt{r_A^2 r_B^2 - (\boldsymbol{x}_A \cdot \boldsymbol{x}_B)^2}} = \frac{\psi_{AB}}{r_A r_B \sin\psi_{AB}}, \qquad 0 \leqslant \psi_{AB} < \pi, \tag{109}$$

we find an expression for $\mathcal{T}(\boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B)$ as follows:

$$\mathcal{T}(\boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B) = \frac{R_{AB}}{c}\left\{1 + \frac{(\gamma+1)GM}{c^2 R_{AB}} \ln\left(\frac{r_A + r_B + R_{AB}}{r_A + r_B - R_{AB}}\right) + \frac{G^2M^2}{c^4 r_A r_B}\left[\left(2 - \beta + 2\gamma + \frac{3}{4}\delta\right)\frac{\psi_{AB}}{\sin\psi_{AB}} - \frac{(1+\gamma)^2}{1+\cos\psi_{AB}}\right]\right\} + O(G^3), \tag{110}$$

which may be very helpful for numerical estimates.

## 7. Conclusion

The central result of this paper is given by theorem 2. Assuming that $x_B$ is in the normal convex neighbourhood of $x_A$, we have shown that $\Omega(x_A, x_B)$ can be obtained in the $n$th post-Minkowskian approximation by a recursive procedure which spares one the trouble of solving the geodesic equations. Any $n$th-order perturbation $\Omega^{(n)}(x_A, x_B)$ is an integral taken along the zeroth-order straight line joining $x_A$ and $x_B$. Moreover, in theorem 3 we have found a remarkable simplification of the integral giving $\Omega^{(2)}(x_A, x_B)$. In theorems 4 and 4a we have outlined a recursive procedure which enables us to obtain the perturbations of the time transfer functions when the perturbations of $\Omega(x_A, x_B)$ are known, assuming that the null cone at $x_A$ is included in the normal convex neighbourhood of $x_A$. Since the time transfer functions are sufficient to determine the direction of a light ray in the 3-space relative to a given observer (see theorem 1), the systematic methods explored here seem very promising to tackle the relativistic problems raised by highly accurate astrometry in space.

Using the simplification found in the second post-Minkowskian approximation, we have shown that the calculation of $\Omega^{(2)}(x_A, x_B)$ and $\mathcal{T}^{(2)}(\boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B)$ reduces to elementary integrations in the case of a static, spherically symmetric spacetime. The simplification within the second order works out so well that the question of whether it works also for the higher order terms naturally arises. We hope to return to this problem later. For the time being, we are applying the results obtained in the static, spherically symmetric case to the description of the light deflection between two points located at a finite distance.

## Appendix. Another determination of $\Omega^{(2)}(\boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B)$

It is possible to derive $\Omega^{(2)}(x_A, x_B)$ directly from the Euler–Lagrange equations of geodesics, namely

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left((\eta_{\rho\sigma} + h_{\rho\sigma})\frac{\mathrm{d}x^\sigma}{\mathrm{d}\lambda}\right) = \frac{1}{2}h_{\mu\nu,\rho}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\lambda}. \tag{A.1}$$

It is clear that the functions $X^\mu$ defined by equations (49) admit the following expansions:

$$X^\mu(\lambda, G) = \sum_{n=1}^{\infty} G^n X^\mu_{(n)}(\lambda), \tag{A.2}$$

# Annexe C

# article accepté pour publication dans Lecture Notes in Physics

# A universal tool for determining the time delay and the frequency shift of light: Synge's world function

Pierre Teyssandier* and Christophe Le Poncin-Lafitte†
*Département Systèmes de Référence Temps et Espace, CNRS/UMR 8630, Observatoire de Paris, 61 avenue de l'Observatoire, F-75014 Paris, France*

Bernard Linet‡
*Laboratoire de Mathématiques et Physique Théorique, CNRS/UMR 6083, Université François Rabelais, F-37200 Tours, France*
(Dated: November 9, 2005)

In almost all of the studies devoted to the time delay and the frequency shift of light, the calculations are based on the integration of the null geodesic equations. However, the above-mentioned effects can be calculated without integrating the geodesic equations if one is able to determine the bifunction $\Omega(x_A, x_B)$ giving half the squared geodesic distance between two points $x_A$ and $x_B$ (this bifunction may be called Synge's world function). In this lecture, $\Omega(x_A, x_B)$ is determined up to the order $1/c^3$ within the framework of the PPN formalism. The case of a stationary gravitational field generated by an isolated, slowly rotating axisymmetric body is studied in detail. The calculation of the time delay and the frequency shift is carried out up to the order $1/c^4$. Explicit formulae are obtained for the contributions of the mass, of the quadrupole moment and of the internal angular momentum when the only post-Newtonian parameters different from zero are $\beta$ and $\gamma$. It is shown that the frequency shift induced by the mass quadrupole moment of the Earth at the order $1/c^3$ will amount to $10^{-16}$ in spatial experiments like the ESA's Atomic Clock Ensemble in Space mission. Other contributions are briefly discussed.

## I. INTRODUCTION

A lot of fundamental tests of gravitational theories rest on highly precise measurements of the travel time and/or the frequency shift of electromagnetic signals propagating through the gravitational field of the Solar System. In practically all of the previous studies, the explicit expressions of such travel times and frequency shifts as predicted by various metric theories of gravity are derived from an integration of the null geodesic differential equations. This method works quite well within the first post-Minkowskian approximation, as it is shown by the results obtained, e.g., in [1–5]. Of course, it works also within the post-Newtonian approximation, especially in the case of a static, spherically symmetric space-time treated up to order $1/c^3$ [6, 7]. However, the solution of the geodesic equations requires heavy calculations when one has to take into account the presence of mass multipoles in the field or the tidal effects due to the planetary motions, and the calculations become quite complicated in the post-post-Minkowskian approximation [8], especially in the dynamical case [9].

The aim of this lecture is to present a quite different procedure recently developed by two of us. Based on Synge's world function [10], this procedure avoids the integration of the null geodesic equations and is particularly convenient for determining the light rays which connect an emitter and a receiver having specified spatial locations at a finite distance. Thus, we are able to extend the previous calculations of the time delay and of the frequency shift up to the order $1/c^4$. As a consequence, it is now possible to predict the time/frequency transfers in the vicinity of the Earth at a level of accuracy which amounts to $10^{-18}$ in fractional frequency. This level of accuracy is expected to be reached in the foreseeable future with optical atomic clocks [11].

The plan of the lecture is as follows. First, in Sect. II, the definition of the time transfer functions are given and the invariant expression of the frequency shift is recalled. It is shown that explicit expressions of the frequency shift can be derived when the time transfer functions are known. In Sect. III, the relevant properties of Synge's world function are recalled. In Sect. IV, the general expressions of the world function and of the time transfer functions are obtained within the Nordtvedt-Will parametrized post-Newtonian (PPN) formalism. In Sect. V, the case of a stationary field generated by an isolated, slowly rotating axisymmetric body is analyzed in detail. It is shown that the contributions

*Electronic address: Pierre.Teyssandier@obspm.fr
†Electronic address: leponcin@danof.obspm.fr
‡Electronic address: linet@celfi.phys.univ-tours.fr

of the mass and spin multipoles can be obtained by straightforward derivations of a single function. Retaining only the terms due to the mass $M$, to the quadrupole moment $J_2$ and to the intrinsic angular momentum $\boldsymbol{S}$ of the rotating body, explicit expansions of the world function and of the time transfer function are derived up to the order $1/c^3$ and $1/c^4$, respectively. The same formalism yields the vectors tangent to the light ray at the emitter and at the receiver up to the order $1/c^3$. In Sect. VI, the frequency shift is developed up to the order $1/c^4$ on the assumption that $\beta$ and $\gamma$ are the only non vanishing post-Newtonian parameters. Explicit expressions are obtained for the contributions of $J_2$ and $\boldsymbol{S}$. Numerical estimates are given for the ESA's Atomic Clock Ensemble in Space (ACES) mission [12, 13]. Concluding remarks are given in Sect. VII.

Equivalent results formulated with slightly different notations may be found in [14] and an extension of the method to the general post-Minkowskian approximation is given in [15].

*Notations.* – In this work, $G$ is the Newtonian gravitational constant and $c$ is the speed of light in a vacuum. The Lorentzian metric of space-time is denoted by $g$. The signature adopted for $g$ is $(+---)$. We suppose that the space-time is covered by one global coordinate system $(x^\mu) = (x^0, \boldsymbol{x})$, where $x^0 = ct$, $t$ being a time coordinate, and $\boldsymbol{x} = (x^i)$, the $x^i$ being quasi Cartesian coordinates. We choose coordinates $x^i$ so that the curves of equations $x^i =$ const are timelike. This choice means that $g_{00} > 0$ everywhere. We employ the vector notation $\boldsymbol{a}$ in order to denote either $\{a^1, a^2, a^3\} = \{a^i\}$ or $\{a_1, a_2, a_3\} = \{a_i\}$. Considering two such quantities $\boldsymbol{a}$ and $\boldsymbol{b}$ with for instance $\boldsymbol{a} = \{a^i\}$, we use $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ to denote $a^i b^i$ if $\boldsymbol{b} = \{b^i\}$ or $a^i b_i$ if $\boldsymbol{b} = \{b_i\}$ (the Einstein convention on the repeated indices is used). The quantity $|\boldsymbol{a}|$ stands for the ordinary Euclidean norm of $\boldsymbol{a}$.

## II. TIME TRANSFER FUNCTIONS, TIME DELAY AND FREQUENCY SHIFT

We consider here electromagnetic signals propagating through a vacuum between an emitter $A$ and a receiver $B$. We suppose that these signals may be assimilated to light rays travelling along null geodesics of the metric (geometic optics approximation). We call $x_A$ the point of emission by $A$ and $x_B$ the point of reception by $B$. We put $x_A = (ct_A, \boldsymbol{x}_A)$ and $x_B = (ct_B, \boldsymbol{x}_B)$. We assume that there do not exist two distinct null geodesics starting from $x_A$ and intersecting the world line of $B$. These assumptions are clearly satisfied in all experiments currently envisaged in the Solar System.

1. *Time transfer functions and time delay.*– The quantity $t_B - t_A$ is the (coordinate) travel time of the signal. Upon the above mentioned assumptions, $t_B - t_A$ may be considered either as a function of the instant of emission $t_A$ and of $\boldsymbol{x}_A$, $\boldsymbol{x}_B$, or as a function of the instant of reception $t_B$ and of $\boldsymbol{x}_A$ and $\boldsymbol{x}_B$. So, we can in general define two distinct (coordinate) time transfer functions, $\mathcal{T}_e$ and $\mathcal{T}_r$ by putting :

$$t_B - t_A = \mathcal{T}_e(t_A, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B) = \mathcal{T}_r(t_B, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B)\,. \tag{1}$$

We call $\mathcal{T}_e$ the emission time transfer function and $\mathcal{T}_r$ the reception time transfer function. As we shall see below, the main problem will consist in determining explicitly these functions when the metric is given. Of course, it is in principle sufficient to determine one of these functions.

We shall put

$$R_{AB} = |\boldsymbol{x}_B - \boldsymbol{x}_A|\ . \tag{2}$$

throughout this work. The time delay is then defined as $t_B - t_A - R_{AB}/c$. It is well known that this quantity is $> 0$ in Schwarzschild space-time, which explains its designation [16].

2. *Frequency shift.*– Denote by $u_A^\alpha$ and $u_B^\alpha$ the unit 4-velocity vectors of the emitter at $x_A$ and of the receiver at $x_B$, respectively. Let $\Gamma_{AB}$ be the null geodesic path connecting $x_A$ and $x_B$, described by parametric equations $x^\alpha = x^\alpha(\zeta)$, $\zeta$ being an affine parameter. Denote by $l^\mu$ the vector tangent to $\Gamma_{AB}$ defined as

$$l^\mu = \frac{dx^\mu}{d\zeta}\,. \tag{3}$$

Let $\nu_A$ be the frequency of the signal emitted at $x_A$ as measured by a clock comoving with $A$ and $\nu_B$ be the frequency of the same signal received at $x_B$ as measured by a clock comoving with $B$. The ratio $\nu_A/\nu_B$ is given by the well-known formula [10]

$$\frac{\nu_A}{\nu_B} = \frac{u_A^\mu (l_\mu)_A}{u_B^\mu (l_\mu)_B}\,. \tag{4}$$

Since it is assumed that the emission and reception points are connected by a single null geodesic, it is clear that $(l_\mu)_A$ and $(l_\mu)_B$ may be considered either as functions of the instant of emission $t_A$ and of $\boldsymbol{x}_A$, $\boldsymbol{x}_B$, or as functions of the instant of reception $t_B$ and of $\boldsymbol{x}_A$ and $\boldsymbol{x}_B$. Therefore, we may write

$$\frac{\nu_A}{\nu_B} = \mathcal{N}_e(u_A, u_B; t_A, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B) = \mathcal{N}_r(u_A, u_B; t_B, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B)\,. \tag{5}$$

Denote by $\boldsymbol{v}_A = (d\boldsymbol{x}/dt)_A$ and $\boldsymbol{v}_B = (d\boldsymbol{x}/dt)_B$ the coordinate velocities of the observers at $x_A$ and $x_B$, respectively:

$$\boldsymbol{v}_A = \left(\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}\right)_A , \quad \boldsymbol{v}_B = \left(\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}\right)_B . \tag{6}$$

It is easy to see that the formula (4) may be written as

$$\frac{\nu_A}{\nu_B} = \frac{u_A^0}{u_B^0}\frac{(l_0)_A}{(l_0)_B}\frac{q_A}{q_B} , \quad q_A = 1 + \frac{1}{c}\widehat{l}_A \cdot \boldsymbol{v}_A , \quad q_B = 1 + \frac{1}{c}\widehat{l}_B \cdot \boldsymbol{v}_B , \tag{7}$$

where $\widehat{l}_A$ and $\widehat{l}_B$ are the quantities defined as

$$\widehat{l}_A = \left\{\left(\frac{l_i}{l_0}\right)_A\right\} , \qquad \widehat{l}_B = \left\{\left(\frac{l_i}{l_0}\right)_B\right\} . \tag{8}$$

It is immediately deduced from Eq. (7) that an explicit expression of $\mathcal{N}_e$ (resp. $\mathcal{N}_r$) can be derived when the time transfer function $\mathcal{T}_e$ (resp. $\mathcal{T}_r$) is known. Indeed, one has the following theorem [15].

**Theorem**. *Consider a signal emitted at point $x_A = (ct_A, \boldsymbol{x}_A)$ and received at point $x_B = (ct_B, \boldsymbol{x}_B)$. Denote by $l^\mu$ the vector $dx^\mu/d\zeta$ tangent to the null geodesic at point $x(\zeta)$, $\zeta$ being any affine parameter, and put*

$$\widehat{l}_i = \left(\frac{l_i}{l_0}\right) . \tag{9}$$

*Then, one has relations as follow at $x_A$ and at $x_B$*

$$\left(\widehat{l}_i\right)_A = c\frac{\partial \mathcal{T}_e}{\partial x_A^i}\left[1 + \frac{\partial \mathcal{T}_e}{\partial t_A}\right]^{-1} = c\frac{\partial \mathcal{T}_r}{\partial x_A^i} , \tag{10}$$

$$\left(\widehat{l}_i\right)_B = -c\frac{\partial \mathcal{T}_e}{\partial x_B^i} = -c\frac{\partial \mathcal{T}_r}{\partial x_B^i}\left[1 - \frac{\partial \mathcal{T}_r}{\partial t_B}\right]^{-1} , \tag{11}$$

$$\frac{(l_0)_A}{(l_0)_B} = 1 + \frac{\partial \mathcal{T}_e}{\partial t_A} = \left[1 - \frac{\partial \mathcal{T}_r}{\partial t_B}\right]^{-1} , \tag{12}$$

*where $\mathcal{T}_e$ and $\mathcal{T}_r$ are taken at $(t_A, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B)$ and $(t_B, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B)$, respectively.*

This theorem may be straightforwardly deduced from a fundamental property of the world function that we introduce in the following section.

*Case of a stationary space-time.* In a stationary space-time, we can choose coordinates $(x^\mu)$ such that the metric does not depend on $x^0$. Then, the travel time of the signal only depends on $\boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B$. This means that Eq. (1) reduces to a single relation of the form

$$t_B - t_A = \mathcal{T}(\boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B) . \tag{13}$$

It immediately follows from Eqs. (10) and (11) that

$$(\widehat{l}_i)_A = c\frac{\partial}{\partial x_A^i}\mathcal{T}(\boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B) , \tag{14}$$

$$(\widehat{l}_i)_B = -c\frac{\partial}{\partial x_B^i}\mathcal{T}(\boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B) , \tag{15}$$

$$\frac{(l_0)_A}{(l_0)_B} = 1 . \tag{16}$$

As a consequence, the formula (7) reduces now to

$$\frac{\nu_A}{\nu_B} = \frac{u_A^0}{u_B^0}\frac{1 + \boldsymbol{v}_A \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}_A}\mathcal{T}}{1 - \boldsymbol{v}_B \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}_B}\mathcal{T}} , \tag{17}$$

where $\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}} f$ denotes the usual gradient operator acting on $f(\boldsymbol{x})$.

It is worthy of note that $(1, \{(\widehat{l}_i)_A\})$ and $(1, \{(\widehat{l}_i)_B\})$ constitute a set of covariant components of the vector tangent to the light ray at $\boldsymbol{x}_A$ and $\boldsymbol{x}_B$, respectively. This tangent vector corresponds to the affine parameter chosen so that $(l_0)_A = (l_0)_B = 1$.

## III. THE WORLD FUNCTION AND ITS POST-NEWTONIAN LIMIT

### A. Definition and fundamental properties

For a moment, consider $x_A$ and $x_B$ as arbitrary points. We assume that there exists one and only one geodesic path, say $\Gamma_{AB}$, which links these two points. This assumption means that point $x_B$ belongs to the normal convex neighbourhood [17] of point $x_A$ (and conversely that $x_A$ belongs to the normal convex neighbourhood of point $x_B$). The world function is the two-point function $\Omega(x_A, x_B)$ defined by

$$\Omega(x_A, x_B) = \frac{1}{2}\epsilon_{AB}[s_{AB}]^2 , \tag{18}$$

where $s_{AB}$ is the geodesic distance between $x_A$ and $x_B$, namely

$$s_{AB} = \int_{\Gamma_{AB}} \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} \tag{19}$$

and $\epsilon_{AB} = 1, 0, -1$ according as $\Gamma_{AB}$ is a timelike, a null or a spacelike geodesic. An elementary calculation shows that $\Omega(x_A, x_B)$ may be written in any case as [10]

$$\Omega(x_A, x_B) = \frac{1}{2}\int_0^1 g_{\mu\nu}(x^\alpha(\lambda))\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} d\lambda , \tag{20}$$

where the integral is taken along $\Gamma_{AB}$, $\lambda$ denoting the unique affine parameter along $\Gamma_{AB}$ which fulfills the boundary conditions $\lambda_A = 0$ and $\lambda_B = 1$.

It follows from Eqs. (18) or (20) that the world function $\Omega(x_A, x_B)$ is unchanged if we perform any admissible coordinate transformation.

The utility of the world function for our purpose comes from the following properties [10, 15].

*i*) The vectors $(dx^\alpha/d\lambda)_A$ and $(dx^\alpha/d\lambda)_B$ tangent to the geodesic $\Gamma_{AB}$ respectively at $x_A$ and $x_B$ are given by

$$\left(g_{\alpha\beta}\frac{dx^\beta}{d\lambda}\right)_A = -\frac{\partial\Omega}{\partial x_A^\alpha} , \quad \left(g_{\alpha\beta}\frac{dx^\beta}{d\lambda}\right)_B = \frac{\partial\Omega}{\partial x_B^\alpha} . \tag{21}$$

As a consequence, if $\Omega(x_A, x_B)$ is explicitly known, the determination of these vectors does not require the integration of the differential equations of the geodesic.

*ii*) Two points $x_A$ and $x_B$ are linked by a null geodesic if and only if the condition

$$\Omega(x_A, x_B) = 0 \tag{22}$$

is fulfilled. Thus, $\Omega(x_A, x) = 0$ is the equation of the null cone $\mathcal{C}(x_A)$ at $x_A$.

Consequently, if the bifunction $\Omega(x_A, x_B)$ is explicitly known, it is in principle possible to determine the emission time transfer function $\mathcal{T}_e$ by solving the equation

$$\Omega(ct_A, \boldsymbol{x}_A, ct_B, \boldsymbol{x}_B) = 0 \tag{23}$$

for $t_B$. It must be pointed out, however, that solving Eq. (23) for $t_B$ yields two distinct solutions $t_B^+$ and $t_B^-$ since the timelike curve $x^i = x_B^i$ cuts the light cone $\mathcal{C}(x_A)$ at two points $x_B^+$ and $x_B^-$, $x_B^+$ being in the future of $x_B^-$. Since we regard $x_A$ as the point of emission of the signal and $x_B$ as the point of reception, we shall exclusively focus our attention on the determination of $t_B^+ - t_A$ (clearly, the determination of $t_B^- - t_A$ comes within the same methodology). For the sake of brevity, we shall henceforth write $t_B$ instead of $t_B^+$.

Of course, solving Eq. (23) for $t_A$ yields the reception time transfer function $\mathcal{T}_r$.

Generally, extracting the time transfer fonctions from Eq. (23), next using Eqs. (10) or (11) will be more straightforward than deriving the vectors tangent at $x_A$ and $x_B$ from (21), next imposing the constraint (22).

To finish, note that the theorem stated in Sect. II is easily deduced from the identities

$$\Omega(ct_A, \boldsymbol{x}_A, ct_A + c\mathcal{T}_e(t_A, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B), \boldsymbol{x}_B) \equiv 0 \tag{24}$$

and

$$\Omega(ct_B - c\mathcal{T}_r(t_B, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B), \boldsymbol{x}_A, ct_B, \boldsymbol{x}_B) \equiv 0 . \tag{25}$$

### B. General expression of the world function in the post-Newtonian limit

We assume that the metric may be written as

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \tag{26}$$

throughout space-time, with $\eta_{\mu\nu}$ =diag$(1,-1,-1,-1)$. Let $\Gamma^{(0)}_{AB}$ be the straight line defined by the parametric equations $x^\alpha = x^\alpha_{(0)}(\lambda)$, with

$$x^\alpha_{(0)}(\lambda) = (x^\alpha_B - x^\alpha_A)\lambda + x^\alpha_A\,, \quad 0 \leq \lambda \leq 1\,. \tag{27}$$

With this definition, the parametric equations of the geodesic $\Gamma_{AB}$ connecting $x_A$ and $x_B$ may be written in the form

$$x^\alpha(\lambda) = x^\alpha_{(0)}(\lambda) + X^\alpha(\lambda)\,, \quad 0 \leq \lambda \leq 1\,, \tag{28}$$

where the quantities $X^\alpha(\lambda)$ satisfy the boundary conditions

$$X^\alpha(0) = 0\,, \quad X^\alpha(1) = 0\,. \tag{29}$$

Inserting Eq. (26) and $dx^\mu(\lambda)/d\lambda = x^\mu_B - x^\mu_A + dX^\mu(\lambda)/d\lambda$ in Eq. (20), then developing and noting that

$$\int_0^1 \eta_{\mu\nu}(x^\mu_B - x^\mu_A)\frac{dX^\nu}{d\lambda}d\lambda = 0 \tag{30}$$

by virtue of Eq. (29), we find the rigorous formula

$$\begin{aligned}\Omega(x_A, x_B) \;=\; & \Omega^{(0)}(x_A, x_B) + \frac{1}{2}(x^\mu_B - x^\mu_A)(x^\nu_B - x^\nu_A)\int_0^1 h_{\mu\nu}(x^\alpha(\lambda))d\lambda \\ & + \frac{1}{2}\int_0^1 \left[g_{\mu\nu}(x^\alpha(\lambda))\frac{dX^\mu}{d\lambda}\frac{dX^\nu}{d\lambda} + 2(x^\mu_B - x^\mu_A)h_{\mu\nu}(x^\alpha(\lambda))\frac{dX^\nu}{d\lambda}\right]d\lambda\,,\end{aligned} \tag{31}$$

where the integrals are taken over $\Gamma_{AB}$ and $\Omega^{(0)}(x_A, x_B)$ is the world function in Minkowski space-time

$$\Omega^{(0)}(x_A, x_B) = \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}(x^\mu_B - x^\mu_A)(x^\nu_B - x^\nu_A)\,. \tag{32}$$

Henceforth, we shall only consider weak gravitational fields generated by self-gravitating extended bodies within the slow-motion, post-Newtonian approximation. So, we assume that the potentials $h_{\mu\nu}$ may be expanded as follows

$$\begin{aligned} h_{00} &= \frac{1}{c^2}h^{(2)}_{00} + \frac{1}{c^4}h^{(4)}_{00} + O(6)\,, \\ h_{0i} &= \frac{1}{c^3}h^{(3)}_{0i} + O(5)\,, \\ h_{ij} &= \frac{1}{c^2}h^{(2)}_{ij} + O(4)\,. \end{aligned} \tag{33}$$

From these expansions and from the Euler-Lagrange equations satisfied by any geodesic curve, namely

$$\frac{d}{d\lambda}\left(g_{\alpha\beta}\frac{dx^\beta}{d\lambda}\right) = \frac{1}{2}\partial_\alpha h_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}\,, \tag{34}$$

it results that $X^\mu(\lambda) = O(2)$ and that $dx^\mu/d\lambda = x^\mu_B - x^\mu_A + O(2)$. As a consequence, $h_{\mu\nu}(x^\alpha(\lambda)) = h_{\mu\nu}(x^\alpha_{(0)}(\lambda)) + O(4)$ and the third and fourth terms in the r.h.s. of Eq. (31) are of order $1/c^4$. These features result in an expression for $\Omega(x_A, x_B)$ as follows

$$\Omega(x_A, x_B) = \Omega^{(0)}(x_A, x_B) + \Omega^{(PN)}(x_A, x_B) + O(4)\,, \tag{35}$$

where

$$\begin{aligned}\Omega^{(PN)}(x_A, x_B) = & \frac{1}{2c^2}(x^0_B - x^0_A)^2\int_0^1 h^{(2)}_{00}(x^\alpha_{(0)}(\lambda))d\lambda \\ & + \frac{1}{2c^2}(x^i_B - x^i_A)(x^j_B - x^j_A)\int_0^1 h^{(2)}_{ij}(x^\alpha_{(0)}(\lambda))d\lambda \\ & + \frac{1}{c^3}(x^0_B - x^0_A)(x^i_B - x^i_A)\int_0^1 h^{(3)}_{0i}(x^\alpha_{(0)}(\lambda))d\lambda\,,\end{aligned} \tag{36}$$

the integral being now taken over the line $\Gamma_{AB}^{(0)}$ defined by Eq. (27).

The formulae (35) and (36) yield the general expression of the world function up to the order $1/c^3$ within the framework of the 1 PN approximation. We shall see in the next subsection that this approximation is sufficient to determine the time transfer functions up to the order $1/c^4$. It is worthy of note that the method used above would as well lead to the expression of the world function in the linearized weak-field limit previously found by Synge [10].

### C. Time transfer functions at the order $1/c^4$

Suppose that $x_B$ is the point of reception of a signal emitted at $x_A$. Taking Eq. (35) into account, Eq. (22) may be written in the form

$$\Omega^{(0)}(x_A, x_B) + \Omega^{(PN)}(x_A, x_B) = O(4)\,,$$

which implies the relation

$$t_B - t_A = \frac{1}{c} R_{AB} - \frac{\Omega^{(PN)}(ct_A, \boldsymbol{x}_A, ct_B, \boldsymbol{x}_B)}{cR_{AB}} + O(4)\,. \tag{37}$$

Using iteratively this relation, we find for the emission time transfer function

$$\mathcal{T}_e(t_A, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B) = \frac{1}{c} R_{AB} - \frac{\Omega^{(PN)}(ct_A, \boldsymbol{x}_A, ct_A + R_{AB}, \boldsymbol{x}_B)}{cR_{AB}} + O(5)\,. \tag{38}$$

and for the reception time transfer function

$$\mathcal{T}_r(t_B, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B) = \frac{1}{c} R_{AB} - \frac{\Omega^{(PN)}(ct_B - R_{AB}, \boldsymbol{x}_A, ct_B, \boldsymbol{x}_B)}{cR_{AB}} + O(5)\,. \tag{39}$$

These last formulae show that the time transfer functions can be explicitly calculated up to the order $1/c^4$ when $\Omega^{(PN)}(x_A, x_B)$ is known. This fundamental result will be exploited in the following sections.

It is worthy of note that a comparison of Eqs. (38) and (39) immediately gives the following relations :

$$\mathcal{T}_r(t_B, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B) = \mathcal{T}_e\left(t_B - \frac{R_{AB}}{c}, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B\right) + O(5) \tag{40}$$

and conversely

$$\mathcal{T}_e(t_A, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B) = \mathcal{T}_r\left(t_A + \frac{R_{AB}}{c}, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B\right) + O(5)\,. \tag{41}$$

The quantity $\Omega^{(PN)}(ct_A, \boldsymbol{x}_A, ct_A + R_{AB}, \boldsymbol{x}_B)$ in (38) may be written in an integral form by using Eq. (36), in which $R_{AB}$ and $R_{AB}\lambda + ct_A$ are substituted for $x_B^0 - x_A^0$ and for $x_{(0)}^0(\lambda)$, respectively. As a consequence

$$\mathcal{T}_e(t_A, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B) = \frac{1}{c} R_{AB} \left\{ 1 - \frac{1}{2c^2} \int_0^1 \left[ h_{00}^{(2)}(z_+^\alpha(\lambda)) + h_{ij}^{(2)}(z_+^\alpha(\lambda)) N^i N^j + \frac{2}{c} h_{0i}^{(3)}(z_+^\alpha(\lambda)) N^i \right] d\lambda \right\} + O(5)\,, \tag{42}$$

the integral being taken over curve $\Gamma_{AB}^{(0)+}$ defined by the parametric equations $x^\alpha = z_+^\alpha(\lambda)$, where

$$z_+^0(\lambda) = R_{AB}\lambda + ct_A\,, \quad z_+^i(\lambda) = R_{AB} N^i \lambda + x_A^i\,, \quad 0 \leq \lambda \leq 1\,, \tag{43}$$

with

$$R_{AB} = |\,\boldsymbol{R}_{AB}\,|\,, \qquad N^i = \frac{x_B^i - x_A^i}{R_{AB}}\,. \tag{44}$$

We note that $\Gamma_{AB}^{(0)+}$ is a null geodesic path of Minkowski metric from $x_A$, having the above-defined quantities $N^i$ as direction cosines.

A similar reasoning leads to an expression as follows for $\mathcal{T}_r$

$$\mathcal{T}_r(t_B, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B) = \frac{1}{c} R_{AB} \left\{ 1 - \frac{1}{2c^2} \int_0^1 \left[ h_{00}^{(2)}(z_-^\alpha(\lambda)) + h_{ij}^{(2)}(z_-^\alpha(\lambda)) N^i N^j + \frac{2}{c} h_{0i}^{(3)}(z_-^\alpha(\lambda)) N^i \right] d\lambda \right\} + O(5)\,, \tag{45}$$

the integral being now taken over curve $\Gamma_{AB}^{(0)-}$ defined by the parametric equations $x^\alpha = z_-^\alpha(\lambda)$, where

$$z_-^0(\lambda) = -R_{AB}\lambda + ct_B\,, \quad z_-^i(\lambda) = -R_{AB} N^i \lambda + x_B^i\,, \quad 0 \leq \lambda \leq 1\,. \tag{46}$$

Curve $\Gamma_{AB}^{(0)-}$ is a null geodesic path of Minkowski metric arriving at $x_B$ and having $N^i$ as direction cosines.

## IV. WORLD FUNCTION AND TIME TRANSFER FUNCTIONS WITHIN THE NORDTVEDT-WILL PPN FORMALISM

### A. Metric in the 1 PN approximation

In this section, we use the Nordvedt-Will post-Newtonian formalism involving ten parameters $\beta$, $\gamma$, $\xi$, $\alpha_1$, ..., $\zeta_4$ [18]. We introduce slightly modified notations in order to be closed of the formalism recently proposed by Klioner and Soffel [20] as an extension of the post-Newtonian framework elaborated by Damour, Soffel and Xu [21] for general relativity. In particular, we denote by $\boldsymbol{v}_r$ the velocity of the center of mass O relative to the universe rest frame [27].

Although our method is not confined to any particular assumption on the matter, we suppose here that each source of the field is described by the energy-momentum tensor of a perfect fluid

$$T^{\mu\nu} = \rho c^2 \left[1 + \frac{1}{c^2}\left(\Pi + \frac{p}{\rho}\right)\right] u^\mu u^\nu - p g^{\mu\nu} ,$$

where $\rho$ is the rest mass density, $\Pi$ is the specific energy density (ratio of internal energy density to rest mass density), $p$ is the pressure and $u^\mu$ is the unit 4-velocity of the fluid. In this section and in the following one, $\boldsymbol{v}$ is the coordinate velocity $d\boldsymbol{x}/dt$ of an element of the fluid. We introduce the conserved mass density $\rho^*$ given by

$$\rho^* = \rho\sqrt{-g}u^0 = \rho\left[1 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}v^2 + 3\gamma U\right) + O(4)\right] , \tag{47}$$

where $g = \det(g_{\mu\nu})$ and $U$ is the Newtonian-like potential

$$U(x^0, \boldsymbol{x}) = G\int \frac{\rho^*(x^0, \boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} d^3\boldsymbol{x}' . \tag{48}$$

In order to obtain a more simple form than the usual one for the potentials $h_{0i}$, we suppose that the chosen $(x^\mu)$ are related to a standard post-Newtonian gauge $(\overline{x}^\mu)$ by the transformation

$$x^0 = \overline{x}^0 + \frac{1}{c^3}\left[(1 + 2\xi + \alpha_2 - \zeta_1)\partial_t\chi - 2\alpha_2 \boldsymbol{v}_r \cdot \boldsymbol{\nabla}\chi\right] , \quad x^i = \overline{x}^i , \tag{49}$$

where $\chi$ is the superpotential defined by

$$\chi(x^0, \boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}G\int \rho^*(x^0, \boldsymbol{x}')\,|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|\,d^3\boldsymbol{x}' . \tag{50}$$

Moreover, we define $\widehat{\rho}$ by

$$\begin{aligned}\widehat{\rho} \;=\; \rho^*\Bigg[1 &+ \frac{1}{2}(2\gamma + 1 - 2\xi + \alpha_3 + \zeta_1)\frac{v^2}{c^2} + (1 - 2\beta + \xi + \zeta_2)\frac{U}{c^2} + (1 + \zeta_3)\frac{\Pi}{c^2} + (3\gamma - 2\xi + 3\zeta_4)\frac{p}{\rho^* c^2} \\ &- \frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_3)\frac{v_r^2}{c^2} - \frac{1}{2}(\alpha_1 - 2\alpha_3)\frac{\boldsymbol{v}_r \cdot \boldsymbol{v}}{c^2} + O(4)\Bigg] .\end{aligned} \tag{51}$$

Then, the post-Newtonian potentials read

$$h_{00} = -\frac{2}{c^2}w + \frac{2\beta}{c^4}w^2 + \frac{2\xi}{c^4}\phi_W + \frac{1}{c^4}(\zeta_1 - 2\xi)\phi_v - \frac{2\alpha_2}{c^4}v_r^i v_r^j \partial_{ij}\chi + O(6), \tag{52}$$

$$\boldsymbol{h} \equiv \{h_{0i}\} = \frac{2}{c^3}\left[\left(\gamma + 1 + \frac{1}{4}\alpha_1\right)\boldsymbol{w} + \frac{1}{4}\alpha_1 w\,\boldsymbol{v}_r\right] + O(5), \tag{53}$$

$$h_{ij} = -\frac{2\gamma}{c^2}w\delta_{ij} + O(4) , \tag{54}$$

where

$$w(x^0, \boldsymbol{x}) = G\int \frac{\widehat{\rho}(x^0, \boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} d^3\boldsymbol{x}' + \frac{1}{c^2}\left[(1 + 2\xi + \alpha_2 - \zeta_1)\partial_{tt}\chi - 2\alpha_2 \boldsymbol{v}_r \cdot \boldsymbol{\nabla}(\partial_t\chi)\right] , \tag{55}$$

$$\phi_W(x^0, \boldsymbol{x}) = G^2\int \frac{\rho^*(x^0, \boldsymbol{x}')\rho^*(x^0, \boldsymbol{x}'')(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|^3} \cdot \left(\frac{\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}''}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}''|} - \frac{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}''}{|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}''|}\right) d^3\boldsymbol{x}' d^3\boldsymbol{x}'', \tag{56}$$

$$\phi_v(x^0, \boldsymbol{x}) = G\int \frac{\rho^*(x^0, \boldsymbol{x}')[\boldsymbol{v}(x^0, \boldsymbol{x}') \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')]^2}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|^3} d^3\boldsymbol{x}', \tag{57}$$

$$\boldsymbol{w}(x^0, \boldsymbol{x}) = G\int \frac{\rho^*(x^0, \boldsymbol{x}')\boldsymbol{v}(x^0, \boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} d^3\boldsymbol{x}' . \tag{58}$$

### B. Determination of the world function and of the time transfer functions

For the post-Newtonian metric given by Eqs. (52)-(58), it follows from Eq. (36) that $\Omega(x_A, x_B)$ may be written up to the order $1/c^3$ in the form given by Eq. (35) with

$$\Omega^{(PN)}(x_A, x_B) = \Omega_w^{(PN)}(x_A, x_B) + \Omega_{\boldsymbol{w}}^{(PN)}(x_A, x_B) + \Omega_{\boldsymbol{v}_r}^{(PN)}(x_A, x_B)\,, \tag{59}$$

where

$$\Omega_w^{(PN)}(x_A, x_B) = -\frac{1}{c^2}\left[(x_B^0 - x_A^0)^2 + \gamma R_{AB}^2\right]\int_0^1 w(x_{(0)}^\alpha(\lambda))d\lambda\,, \tag{60}$$

$$\Omega_{\boldsymbol{w}}^{(PN)}(x_A, x_B) = \frac{2}{c^3}\left(\gamma + 1 + \frac{1}{4}\alpha_1\right)(x_B^0 - x_A^0)\boldsymbol{R}_{AB}\cdot\int_0^1 \boldsymbol{w}(x_{(0)}^\alpha(\lambda))d\lambda\,, \tag{61}$$

$$\Omega_{\boldsymbol{v}_r}^{(PN)}(x_A, x_B) = \frac{1}{2c^3}\alpha_1(x_B^0 - x_A^0)(\boldsymbol{R}_{AB}\cdot\boldsymbol{v}_r)\int_0^1 w(x_{(0)}^\alpha(\lambda))d\lambda\,, \tag{62}$$

the integrals being calculated along the curve defined by Eq. (27).

The emission time transfer function is easily obtained by using Eqs. (38) or (42). We get

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_e(t_A, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B) &= \frac{1}{c}R_{AB} + \frac{1}{c^3}(\gamma+1)R_{AB}\int_0^1 w(z_+^\alpha(\lambda))d\lambda \\ &- \frac{2}{c^4}\boldsymbol{R}_{AB}\cdot\left[(\gamma+1+\frac{1}{4}\alpha_1)\int_0^1 \boldsymbol{w}(z_+^\alpha(\lambda))d\lambda + \frac{1}{4}\alpha_1\boldsymbol{v}_r\int_0^1 w(z_+^\alpha(\lambda))d\lambda\right] + O(5)\,,\end{aligned} \tag{63}$$

the integral being evaluated along the curve $\Gamma_{AB}^{(0)+}$ defined by Eq. (43).

The reception time transfer function is given by

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_r(t_B, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B) &= \frac{1}{c}R_{AB} + \frac{1}{c^3}(\gamma+1)R_{AB}\int_0^1 w(z_-^\alpha(\lambda))d\lambda \\ &- \frac{2}{c^4}\boldsymbol{R}_{AB}\cdot\left[(\gamma+1+\frac{1}{4}\alpha_1)\int_0^1 \boldsymbol{w}(z_-^\alpha(\lambda))d\lambda + \frac{1}{4}\alpha_1\boldsymbol{v}_r\int_0^1 w(z_-^\alpha(\lambda))d\lambda\right] + O(5)\,,\end{aligned} \tag{64}$$

the integral being evaluated along the curve $\Gamma_{AB}^{(0)-}$ defined by Eq. (46).

Let us emphasize that, since $w = U + O(2)$, $w$ may be replaced by the Newtonian-like potential $U$ in Eqs. (60)-(63).

### C. Case of an stationary source

In what follows, we suppose that the gravitational field is generated by a single stationary source. Then, $\partial_t\chi = 0$ and the potentials $w$ and $\boldsymbol{w}$ do not depend on time. In this case, the integration involved in Eqs. (60)-(62) can be performed by a method due to Buchdahl [19]. Introducing the auxiliary variables $\boldsymbol{y}_A = \boldsymbol{x}_A - \boldsymbol{x}'$ and $\boldsymbol{y}_B = \boldsymbol{x}_B - \boldsymbol{x}'$, and replacing in Eq. (27) the parameter $\lambda$ by $u = \lambda - 1/2$, a straightforward calculation yields

$$\int_0^1 w(\boldsymbol{x}_{(0)}(\lambda))d\lambda = G\int\widehat{\rho}(\boldsymbol{x}')F(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B)d^3\boldsymbol{x}', \tag{65}$$

$$\int_0^1 \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}_{(0)}(\lambda))d\lambda = G\int\rho^*(\boldsymbol{x}')\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}')F(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B)d^3\boldsymbol{x}'\,, \tag{66}$$

where the kernel function $F(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B)$ has the expression

$$F(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B) = \int_{-1/2}^{1/2}\frac{du}{|(\boldsymbol{y}_B - \boldsymbol{y}_A)u + \frac{1}{2}(\boldsymbol{y}_B + \boldsymbol{y}_A)|}\,. \tag{67}$$

Noting that $\boldsymbol{y}_B - \boldsymbol{y}_A = \boldsymbol{R}_{AB}$, which implies that $|\boldsymbol{y}_B - \boldsymbol{y}_A| = R_{AB}$, we find

$$F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B) = \frac{1}{R_{AB}}\ln\left(\frac{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_A| + |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_B| + R_{AB}}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_A| + |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_B| - R_{AB}}\right)\,. \tag{68}$$

Inserting Eqs. (65), (66) and (68) in Eqs. (60)-(62) and in Eq. (63) will enable one to obtain quite elegant expressions for $\Omega^{(PN)}(x_A, x_B)$ and for $\mathcal{T}(\boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B)$, respectively.

## V. ISOLATED, SLOWLY ROTATING AXISYMMETRIC BODY

Henceforth, we suppose that the light is propagating in the gravitational field of an isolated, slowly rotating axisymmetric body. The gravitational field is assumed to be stationary. The main purpose of this section is to determine the influence of the mass and spin multipole moments of the rotating body on the coordinate time transfer and on the direction of light rays. From these results, it will be possible to obtain a relativistic modelling of the one-way time transfers and frequency shifts up to the order $1/c^4$ in a geocentric non rotating frame.

Since we treat the case of a body located very far from the other bodies of the universe, the global coordinate system $(x^\mu)$ used until now can be considered as a local (i.e. geocentric) one. So, in agreement with the UAI/UGG Resolution B1 (2000) [22], we shall henceforth denote by $W$ and $\boldsymbol{W}$ the quantities $w$ and $\boldsymbol{w}$ respectively defined by Eqs. (55) and (58) and we shall denote by $G_{\mu\nu}$ the components of the metric. However, we shall continue here with using lower case letters for the geocentric coordinates in order to avoid too heavy notations.

The center of mass O of the rotating body being taken as the origin of the quasi Cartesian coordinates $(\boldsymbol{x})$, we choose the axis of symmetry as the $x^3$-axis. We assume that the body is rotating about $Ox^3$ with a constant angular velocity $\boldsymbol{\omega}$, so that

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{x}\,. \tag{69}$$

In what follows, we put $r = |\,\boldsymbol{x}\,|$, $r_A = |\,\boldsymbol{x}_A\,|$ and $r_B = |\,\boldsymbol{x}_A\,|$. We call $\theta$ the angle between $\boldsymbol{x}$ and $Ox^3$. We consider only the case where all points of the segment joining $\boldsymbol{x}_A$ and $\boldsymbol{x}_B$ are outside the body. We denote by $r_e$ the radius of the smallest sphere centered on O and containing the body (for celestial bodies, $r_e$ is the equatorial radius). In this section, we assume the convergence of the multipole expansions formally derived below at any point outside the body, even if $r < r_e$.

### A. Multipole expansions of $W$ and $\boldsymbol{W}$

According to Eqs. (55), (58) and (69), the gravitational potentials $W$ and $\boldsymbol{W}$ obey the equations

$$\boldsymbol{\nabla}^2 W = -4\pi G\widehat{\rho}\,, \quad \boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{W} = -4\pi G\rho^*\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{x}\,. \tag{70}$$

It follows from Eq. (70) that the potential $W$ is a harmonic function outside the rotating body. As a consequence, $W$ may be expanded in a multipole series of the form

$$W(\boldsymbol{x}) = \frac{GM}{r}\left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left(\frac{r_e}{r}\right)^n P_n(\cos\theta)\right]\,. \tag{71}$$

In this expansion, $P_n$ is the Legendre polynomial of degree $n$ and the quantities $M$, $J_2, \ldots, J_n, \ldots$ correspond to the generalized Blanchet-Damour mass multipole moments in general relativity [23].

For the sake of simplicity, put

$$z = x^3\,.$$

Taking into account the identity

$$\frac{\partial^n}{\partial z^n}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{(-1)^n n!}{r^{1+n}} P_n(z/r)\,, \quad z = x^3\,,$$

it may be seen that

$$W(\boldsymbol{x}) = GM\left[\frac{1}{r} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} J_n r_e^n \frac{\partial^n}{\partial z^n}\left(\frac{1}{r}\right)\right]\,. \tag{72}$$

Substituting for $W$ from Eq. (72) into Eq. (70) yields an expansion for $\widehat{\rho}$ as follows

$$\widehat{\rho}(\boldsymbol{x}) = M\left[\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}) - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} J_n r_e^n \frac{\partial^n}{\partial z^n}\delta^{(3)}(\boldsymbol{x})\right]\,, \tag{73}$$

where $\delta^{(3)}(\boldsymbol{x})$ is the Dirac distribution supported by the origin O. This expansion of $\widehat{\rho}$ in a multipole series will be exploited in the next subsection.

Now, substituting Eq. (69) into Eq. (58) yields for the vector potential $\boldsymbol{W}$

$$\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x}) = G \int \frac{\rho^*(\boldsymbol{x}')\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{x}'}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} d^3\boldsymbol{x}' . \tag{74}$$

It is possible to show that this vector may be written as

$$\boldsymbol{W} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\nabla}\mathcal{V} , \tag{75}$$

where $\mathcal{V}$ is an axisymmetric function satisfying the Laplace equation $\boldsymbol{\nabla}^2\mathcal{V} = 0$ outside the body. Consequently, we can expand $\mathcal{V}$ in a series of the form

$$\mathcal{V}(\boldsymbol{x}) = \frac{GI}{r}\left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} K_n \left(\frac{r_e}{r}\right)^n P_n(\cos\theta)\right] , \tag{76}$$

where $I$ and each $K_n$ are constants. Substituting for $\mathcal{V}$ from Eq. (76) into Eq. (75), and then using the identity

$$(n+1)P_n(z/r) + (z/r)P_n'(z/r) = P_{n+1}'(z/r) ,$$

we find an expansion for $\boldsymbol{W}$ as follows

$$\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x}) = \frac{GI\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{x}}{2r^3}\left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} K_n \left(\frac{r_e}{r}\right)^n P_{n+1}'(\cos\theta)\right] , \tag{77}$$

which coincides with a result previously obtained by one of us [24]. This coincidence shows that $I$ is the moment of inertia of the body about the $z$-axis. Thus, the quantity $\boldsymbol{S} = I\boldsymbol{\omega}$ is the intrinsic angular momentum of the rotating body. The coefficients $K_n$ are completely determined by the density distribution $\rho^*$ and by the shape of the body [24, 25]. The quantities $I, K_1, K_2, ...K_n, ...$ correspond to the Blanchet-Damour spin multipoles in the special case of a stationary axisymmetric gravitational field.

Equation (77) may also be written as

$$\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{2}G\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{\nabla}\left[\frac{1}{r} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} K_n r_e^n \frac{\partial^n}{\partial z^n}\left(\frac{1}{r}\right)\right] . \tag{78}$$

Consequently, the density of mass current can be expanded in the multipole series

$$\rho^*(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{x}) = -\frac{1}{2}\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{\nabla}\left[\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} K_n r_e^n \frac{\partial^n}{\partial z^n}\delta^{(3)}(\boldsymbol{x})\right] , \tag{79}$$

This expansion may be compared with the expansion of $\widehat{\rho}$ given by Eq. (73).

### B. Multipole structure of the world function

The function $\Omega^{(PN)}(x_A, x_B)$ is determined by Eqs. (59)-(62) where $w$ and $\boldsymbol{w}$ are respectively replaced by $W$ and $\boldsymbol{W}$. The integrals involved in the r.h.s. of Eqs. (59)-(62) are given by Eqs. (65) and (66). Substituting Eq. (73) into Eq. (65) and using the properties of the Dirac distribution, we obtain

$$\int_0^1 W\left(\boldsymbol{x}_{(0)}(\lambda)\right) d\lambda = GM\left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} J_n r_e^n \frac{\partial^n}{\partial z^n}\right] F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B)\Big|_{\boldsymbol{x}=0} . \tag{80}$$

Similarly, substituting Eq. (79) into Eq. (66), we get [28]

$$\int_0^1 \boldsymbol{W}\left(\boldsymbol{x}_{(0)}(\lambda)\right) d\lambda = \frac{1}{2}G\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{\nabla}\left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} K_n r_e^n \frac{\partial^n}{\partial z^n}\right] F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B)\Big|_{\boldsymbol{x}=0} . \tag{81}$$

These formulae show that the multipole expansion of $\Omega^{(PN)}(x_A, x_B)$ can be thoroughly calculated by straightforward differentiations of the kernel function $F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B)$ given by Eq. (68). They constitute an essential result, since they

give an algorithmic procedure for determining the multipole expansions of the time transfer function and of the frequency shift in a stationary axisymmetric field (see also Ref. [2]).

In order to obtain explicit formulae, we shall only retain the contributions due to $M$, $J_2$ and $\boldsymbol{S}$ in the expansion yielding $\Omega_W^{(PN)}$ and $\Omega_{\boldsymbol{W}}^{(PN)}$. Then, denoting the unit vector along the $z$-axis by $\boldsymbol{k}$ and noting that $\boldsymbol{S} = S\boldsymbol{k}$, we get for $\Omega_W^{(1)}(x_A, x_B)$

$$\begin{aligned}\Omega_W^{(PN)}(x_A,x_B) &= -\frac{GM}{c^2}\frac{(x_B^0-x_A^0)^2+\gamma R_{AB}^2}{R_{AB}}\ln\left(\frac{r_A+r_B+R_{AB}}{r_A+r_B-R_{AB}}\right)\\ &+\frac{2GM}{c^2}J_2r_e^2\frac{(x_B^0-x_A^0)^2+\gamma R_{AB}^2}{[(r_A+r_B)^2-R_{AB}^2]^2}(r_A+r_B)\left(\frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}_A}{r_A}+\frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}_B}{r_B}\right)^2\\ &-\frac{GM}{c^2}J_2r_e^2\frac{(x_B^0-x_A^0)^2+\gamma R_{AB}^2}{(r_A+r_B)^2-R_{AB}^2}\left[\frac{(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{x}_A)^2}{r_A^3}+\frac{(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{x}_B)^2}{r_B^3}\right]+\cdots\end{aligned} \tag{82}$$

and for $\Omega_{\boldsymbol{W}}^{(PN)}(x_A, x_B)$

$$\Omega_{\boldsymbol{W}}^{(PN)}(x_A,x_B)=\left(\gamma+1+\frac{1}{4}\alpha_1\right)\frac{2GS}{c^3}(x_B^0-x_A^0)\frac{r_A+r_B}{r_Ar_B}\frac{\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}_A\times\boldsymbol{x}_B)}{(r_A+r_B)^2-R_{AB}^2}+\cdots. \tag{83}$$

Finally, owing to the limit $|\alpha_1| < 4\times10^{-4}$ furnished in [18], we shall henceforth neglect all the multipole contributions in $\Omega_{v_r}^{(PN)}(x_A, x_B)$. Thus, we get

$$\Omega_{v_r}^{(PN)}(x_A,x_B)=\alpha_1\frac{GM}{2c^3}(x_B^0-x_A^0)\frac{\boldsymbol{R}_{AB}\cdot\boldsymbol{v}_r}{R_{AB}}\ln\left(\frac{r_A+r_B+R_{AB}}{r_A+r_B-R_{AB}}\right)+\cdots. \tag{84}$$

In this section and in the following one, the symbol $+\cdots$ stands for the contributions of higher multipole moments which are neglected. For the sake of brevity, when $+\cdots$ is used, we systematically omit to mention the symbol $O(n)$ which stands for the neglected post-Newtonian terms.

### C. Time transfer function up to the order $1/c^4$

In what follows, we put

$$\boldsymbol{n}_A=\frac{\boldsymbol{x}_A}{r_A},\qquad \boldsymbol{n}_B=\frac{\boldsymbol{x}_B}{r_B}, \tag{85}$$

and

$$\boldsymbol{N}_{AB}=\{N^i\}=\frac{\boldsymbol{x}_B-\boldsymbol{x}_A}{R_{AB}}. \tag{86}$$

Furthermore, we use systematically the identity

$$(r_A+r_B)^2-R_{AB}^2=2r_Ar_B(1+\boldsymbol{n}_A\cdot\boldsymbol{n}_B). \tag{87}$$

By substituting $R_{AB}$ for $x_B^0-x_A^0$ into Eqs. (82)-(84) and inserting the corresponding expression of $\Omega^{(PN)}$ into Eq. (38), we get an expression for the time transfer function as follows

$$\mathcal{T}(\boldsymbol{x}_A,\boldsymbol{x}_B)=\frac{1}{c}R_{AB}+\mathcal{T}_M(\boldsymbol{x}_A,\boldsymbol{x}_B)+\mathcal{T}_{J_2}(\boldsymbol{x}_A,\boldsymbol{x}_B)+\mathcal{T}_{\boldsymbol{S}}(\boldsymbol{x}_A,\boldsymbol{x}_B)+\mathcal{T}_{v_r}(\boldsymbol{x}_A,\boldsymbol{x}_B)+\cdots, \tag{88}$$

where

$$\mathcal{T}_M(\boldsymbol{x}_A,\boldsymbol{x}_B)=(\gamma+1)\frac{GM}{c^3}\ln\left(\frac{r_A+r_B+R_{AB}}{r_A+r_B-R_{AB}}\right), \tag{89}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{J_2}(\boldsymbol{x}_A,\boldsymbol{x}_B) &= -\frac{\gamma+1}{2}\frac{GM}{c^3}J_2\frac{r_e^2}{r_Ar_B}\frac{R_{AB}}{1+\boldsymbol{n}_A\cdot\boldsymbol{n}_B}\left[\left(\frac{1}{r_A}+\frac{1}{r_B}\right)\frac{(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n}_A+\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n}_B)^2}{1+\boldsymbol{n}_A\cdot\boldsymbol{n}_B}\right.\\ &\left.-\frac{1-(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n}_A)^2}{r_A}-\frac{1-(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n}_B)^2}{r_B}\right],\end{aligned} \tag{90}$$

$$\mathcal{T}_{\boldsymbol{S}}(\boldsymbol{x}_A,\boldsymbol{x}_B) = -\left(\gamma+1+\frac{1}{4}\alpha_1\right)\frac{GS}{c^4}\left(\frac{1}{r_A}+\frac{1}{r_B}\right)\frac{\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{n}_A\times\boldsymbol{n}_B)}{1+\boldsymbol{n}_A\cdot\boldsymbol{n}_B}, \tag{91}$$

$$\mathcal{T}_{\boldsymbol{v}_r}(\boldsymbol{x}_A,\boldsymbol{x}_B) = -\alpha_1\frac{GM}{2c^4}(\boldsymbol{N}_{AB}\cdot\boldsymbol{v}_r)\ln\left(\frac{r_A+r_B+R_{AB}}{r_A+r_B-R_{AB}}\right). \tag{92}$$

The time transfer is thus explicitly determined up to the order $1/c^4$. The term of order $1/c^3$ given by Eq. (89) is the well-known Shapiro time delay [16]. Equations (90) and (91) extend results previously found for $\gamma=1$ and $\alpha_1=0$ [1]. However, our derivation is more straightforward and yields formulae which are more convenient to calculate the frequency shifts. As a final remark, it is worthy of note that $\mathcal{T}_M$ and $\mathcal{T}_{J_2}$ are symmetric in $(\boldsymbol{x}_A,\boldsymbol{x}_B)$, while $\mathcal{T}_{\boldsymbol{S}}$ and $\mathcal{T}_{\boldsymbol{v}_r}$ are antisymmetric in $(\boldsymbol{x}_A,\boldsymbol{x}_B)$.

### D. Directions of light rays at $x_A$ and $x_B$ up to the order $1/c^3$

In order to determine the vectors tangent to the ray path at $x_A$ and $x_B$, we use Eqs. (14) and (15) where $\mathcal{T}$ is replaced by the expression given by Eqs. (88)-(92). It is clear that $\widehat{\boldsymbol{l}}_A$ and $\widehat{\boldsymbol{l}}_B$ may be written as

$$\widehat{\boldsymbol{l}}_A = -\boldsymbol{N}_{AB}+\boldsymbol{\lambda}_e(\boldsymbol{x}_A,\boldsymbol{x}_B), \tag{93}$$

$$\widehat{\boldsymbol{l}}_B = -\boldsymbol{N}_{AB}+\boldsymbol{\lambda}_r(\boldsymbol{x}_A,\boldsymbol{x}_B), \tag{94}$$

where $\boldsymbol{\lambda}_e$ and $\boldsymbol{\lambda}_r$ are perturbation terms due to $\mathcal{T}_M$, $\mathcal{T}_{J_n}$, $\mathcal{T}_{\boldsymbol{S}}$, $\mathcal{T}_{K_n}$, ... For the expansion of $\mathcal{T}$ given by Eqs. (88)-(92), we find

$$\boldsymbol{\lambda}_e(\boldsymbol{x}_A,\boldsymbol{x}_B) = -\boldsymbol{\lambda}_M(\boldsymbol{x}_B,\boldsymbol{x}_A)-\boldsymbol{\lambda}_{J_2}(\boldsymbol{x}_B,\boldsymbol{x}_A)+\boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{S}}(\boldsymbol{x}_B,\boldsymbol{x}_A)+\boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{v}_r}(\boldsymbol{x}_B,\boldsymbol{x}_A)+\cdots, \tag{95}$$

$$\boldsymbol{\lambda}_r(\boldsymbol{x}_A,\boldsymbol{x}_B) = \boldsymbol{\lambda}_M(\boldsymbol{x}_A,\boldsymbol{x}_B)+\boldsymbol{\lambda}_{J_2}(\boldsymbol{x}_A,\boldsymbol{x}_B)+\boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{S}}(\boldsymbol{x}_A,\boldsymbol{x}_B)+\boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{v}_r}(\boldsymbol{x}_A,\boldsymbol{x}_B)+\cdots, \tag{96}$$

where $\boldsymbol{\lambda}_M$, $\boldsymbol{\lambda}_{J_2}$, $\boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{S}}$ and $\boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{v}_r}$ stand for the contributions of $\mathcal{T}_M$, $\mathcal{T}_{J_2}$, $\mathcal{T}_{\boldsymbol{S}}$ and $\mathcal{T}_{\boldsymbol{v}_r}$, respectively. We get from Eq. (89)

$$\boldsymbol{\lambda}_M(\boldsymbol{x}_A,\boldsymbol{x}_B) = -(\gamma+1)\frac{GM}{c^2}\left(\frac{1}{r_A}+\frac{1}{r_B}\right)\frac{1}{1+\boldsymbol{n}_A\cdot\boldsymbol{n}_B}\left(\boldsymbol{N}_{AB}-\frac{R_{AB}}{r_A+r_B}\boldsymbol{n}_B\right). \tag{97}$$

From Eq. (90), we get

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\lambda}_{J_2}(\boldsymbol{x}_A,\boldsymbol{x}_B) = (\gamma+1)\frac{GM}{c^2}\left(\frac{1}{r_A}+\frac{1}{r_B}\right)J_2\frac{r_e^2}{r_Ar_B}\frac{1}{(1+\boldsymbol{n}_A\cdot\boldsymbol{n}_B)^2}\\
\times\Bigg\{\boldsymbol{N}_{AB}\Bigg[\frac{(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n}_A+\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n}_B)^2}{1+\boldsymbol{n}_A\cdot\boldsymbol{n}_B}\left(\frac{r_A}{r_B}+\frac{r_B}{r_A}+\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\boldsymbol{n}_A\cdot\boldsymbol{n}_B\right)\\
-\frac{1}{2}\frac{r_Ar_B}{r_A+r_B}\left(\frac{1-(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n}_A)^2}{r_A}+\frac{1-(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n}_B)^2}{r_B}\right)\left(\frac{r_A}{r_B}+\frac{r_B}{r_A}+1-\boldsymbol{n}_A\cdot\boldsymbol{n}_B\right)\Bigg]\\
-\boldsymbol{n}_B\frac{R_{AB}}{r_A+r_B}\Bigg[\frac{(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n}_A+\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n}_B)^2}{1+\boldsymbol{n}_A\cdot\boldsymbol{n}_B}\left(\frac{r_A}{r_B}+\frac{r_B}{r_A}+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\boldsymbol{n}_A\cdot\boldsymbol{n}_B\right)\\
-\frac{1}{2}\left[1-3(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n}_B)^2\right]\frac{r_A(2+\boldsymbol{n}_A\cdot\boldsymbol{n}_B)+r_B}{r_B}\\
-\frac{1}{2}(r_A+r_B)\left(\frac{1-(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n}_A)^2}{r_A}-\frac{2(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n}_A)(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n}_B)}{r_B}\right)\Bigg]\\
+\boldsymbol{k}\frac{R_{AB}}{r_B}\left[(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n}_A)+(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n}_B)\frac{r_A(2+\boldsymbol{n}_A\cdot\boldsymbol{n}_B)+r_B}{r_A+r_B}\right]\Bigg\}.
\end{aligned} \tag{98}$$

From Eqs. (91) and (92), we derive the other contributions that are not neglected here :

$$\boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{S}}(\boldsymbol{x}_A,\boldsymbol{x}_B)=\left(\gamma+1+\frac{1}{4}\alpha_1\right)\frac{GS}{c^3 r_B}\left(\frac{1}{r_A}+\frac{1}{r_B}\right)\frac{1}{1+\boldsymbol{n}_A\cdot\boldsymbol{n}_B}$$
$$\times\left\{\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{n}_A-\frac{\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{n}_A\times\boldsymbol{n}_B)}{1+\boldsymbol{n}_A\cdot\boldsymbol{n}_B}\left[\boldsymbol{n}_A+\frac{r_A(2+\boldsymbol{n}_A\cdot\boldsymbol{n}_B)+r_B}{r_A+r_B}\boldsymbol{n}_B\right]\right\}, \tag{99}$$

$$\boldsymbol{\lambda}_{v_r}(\boldsymbol{x}_A,\boldsymbol{x}_B)=\alpha_1\frac{GM}{2c^3}\left[\frac{\boldsymbol{v}_r-(\boldsymbol{v}_r\cdot\boldsymbol{N}_{AB})\boldsymbol{N}_{AB}}{R_{AB}}\ln\left(\frac{r_A+r_B+R_{AB}}{r_A+r_B-R_{AB}}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{(\boldsymbol{v}_r\cdot\boldsymbol{N}_{AB})}{1+\boldsymbol{n}_A\cdot\boldsymbol{n}_B}\left(\frac{1}{r_A}+\frac{1}{r_B}\right)\left(\boldsymbol{N}_{AB}-\frac{R_{AB}}{r_A+r_B}\boldsymbol{n}_B\right)\right]. \tag{100}$$

We note that the mass and the quadrupole moment yield contributions of order $1/c^2$, while the intrinsic angular momentum and the velocity relative to the universe rest frame yield contributions of order $1/c^3$.

### E. Sagnac terms in the time transfer function

In experiments like ACES Mission, recording the time of emission $t_A$ will be more practical than recording the time of reception $t_B$. So, it will be very convenient to form the expression of the time transfer $\mathcal{T}(\boldsymbol{x}_A,\boldsymbol{x}_B)$ from $\boldsymbol{x}_A(t_A)$ to $\boldsymbol{x}_B(t_B)$ in terms of the position of the receiver B at the time of emission $t_A$. For any quantity $Q_B(t)$ defined along the world line of the station B, let us put $\widetilde{Q}_B=Q(t_A)$. Thus we may write $\widetilde{\boldsymbol{x}}_B(t_A)$, $\widetilde{r}_B(t_A)$, $\widetilde{\boldsymbol{v}}_B(t_A)$, $\widetilde{v}_B=|\widetilde{\boldsymbol{v}}_B|$, etc.

Now, let us introduce the instantaneous coordinate distance $\boldsymbol{D}_{AB}=\widetilde{\boldsymbol{x}}_B-\boldsymbol{x}_A$ and its norm $D_{AB}$. Since we want to know $t_B-t_A$ up to the order $1/c^4$, we can use the Taylor expansion of $\boldsymbol{R}_{AB}$

$$\boldsymbol{R}_{AB}=\boldsymbol{D}_{AB}+(t_B-t_A)\widetilde{\boldsymbol{v}}_B+\frac{1}{2}(t_B-t_A)^2\widetilde{\boldsymbol{a}}_B+\frac{1}{6}(t_B-t_A)^3\widetilde{\boldsymbol{b}}_B+\cdots,$$

where $\boldsymbol{a}_B$ is the acceleration of B and $\boldsymbol{b}_B=d\boldsymbol{a}_B/dt$. Using iteratively this expansion together with Eq. (88), we get

$$\mathcal{T}(\boldsymbol{x}_A,\boldsymbol{x}_B)=\mathcal{T}(\boldsymbol{x}_A,\widetilde{\boldsymbol{x}}_B)+\frac{1}{c^2}\boldsymbol{D}_{AB}\cdot\widetilde{\boldsymbol{v}}_B+\frac{1}{2c^3}D_{AB}\left[\frac{(\boldsymbol{D}_{AB}\cdot\widetilde{\boldsymbol{v}}_B)^2}{D_{AB}^2}+\widetilde{v}_B^2+\boldsymbol{D}_{AB}\cdot\widetilde{\boldsymbol{a}}_B\right]$$
$$+\frac{1}{c^4}\left[(\boldsymbol{D}_{AB}\cdot\widetilde{\boldsymbol{v}}_B)\left(\widetilde{v}_B^2+\boldsymbol{D}_{AB}\cdot\widetilde{\boldsymbol{a}}_B\right)+\frac{1}{2}D_{AB}^2\left(\widetilde{\boldsymbol{v}}_B\cdot\widetilde{\boldsymbol{a}}_B+\frac{1}{3}\boldsymbol{D}_{AB}\cdot\widetilde{\boldsymbol{b}}_B\right)\right]$$
$$+\frac{1}{c}\frac{\boldsymbol{D}_{AB}}{D_{AB}}\cdot\widetilde{\boldsymbol{v}}_B\left[\mathcal{T}_M(\boldsymbol{x}_A,\widetilde{\boldsymbol{x}}_B)+\mathcal{T}_{J_2}(\boldsymbol{x}_A,\widetilde{\boldsymbol{x}}_B)\right]$$
$$-\frac{1}{c^2}D_{AB}\widetilde{\boldsymbol{v}}_B\cdot\left[\boldsymbol{\lambda}_M(\boldsymbol{x}_A,\widetilde{\boldsymbol{x}}_B)+\boldsymbol{\lambda}_{J_2}(\boldsymbol{x}_A,\widetilde{\boldsymbol{x}}_B)\right]+\cdots, \tag{101}$$

where $\mathcal{T}(\boldsymbol{x}_A,\widetilde{\boldsymbol{x}}_B)$ is obtained by substituting $\widetilde{\boldsymbol{x}}_B$, $\widetilde{r}_B$ and $\boldsymbol{D}_{AB}$ respectively for $\boldsymbol{x}_B$, $r_B$ and $\boldsymbol{R}_{AB}$ into the time transfer function defined by Eqs. (88)-(92). This expression extends the previous formula [6] to the next order $1/c^4$. The second, the third and the fourth terms in Eq. (101) represent pure Sagnac terms of order $1/c^2$, $1/c^3$ and $1/c^4$, respectively. The fifth and the sixth terms are contributions of the gravitational field mixed with the coordinate velocity of the receiving station. Since these last two terms are of order $1/c^4$, they might be calculated for the arguments $(\boldsymbol{x}_A,\boldsymbol{x}_B)$.

## VI. FREQUENCY SHIFT IN THE FIELD OF A ROTATING AXISYMMETRIC BODY

### A. General formulae up to the fourth order

It is possible to derive the ratio $q_A/q_B$ up to the order $1/c^4$ from our results in Sec. IV since $\widehat{\boldsymbol{l}}_A$ and $\widehat{\boldsymbol{l}}_B$ are given up to the order $1/c^3$ by Eqs. (93)-(96). Denoting by $\widehat{\boldsymbol{l}}^{(n)}/c^n$ the $O(n)$ terms in $\widehat{\boldsymbol{l}}$, $q_A/q_B$ may be expanded as

$$\frac{q_A}{q_B}=1-\frac{1}{c}\frac{\boldsymbol{N}_{AB}\cdot(\boldsymbol{v}_A-\boldsymbol{v}_B)}{1-\boldsymbol{N}_{AB}\cdot\dfrac{\boldsymbol{v}_B}{c}}+\frac{1}{c^3}\left[\widehat{\boldsymbol{l}}_A^{(2)}\cdot\boldsymbol{v}_A-\widehat{\boldsymbol{l}}_B^{(2)}\cdot\boldsymbol{v}_B\right]+\frac{1}{c^4}\left[\widehat{\boldsymbol{l}}_A^{(3)}\cdot\boldsymbol{v}_A-\widehat{\boldsymbol{l}}_B^{(3)}\cdot\boldsymbol{v}_B\right]$$
$$+\frac{1}{c^4}\boldsymbol{N}_{AB}\cdot\left[\left(\widehat{\boldsymbol{l}}_B^{(2)}\cdot\boldsymbol{v}_B\right)(\boldsymbol{v}_A-2\boldsymbol{v}_B)+\left(\widehat{\boldsymbol{l}}_A^{(2)}\cdot\boldsymbol{v}_A\right)\boldsymbol{v}_B\right]+O(5). \tag{102}$$

[scale=0.8]sUn14.pdf

It must be emphasized that the formulae Eqs. (105) and (106) are valid within the PPN framework without adding special assumption, provided that $\beta$ and $\gamma$ are the only non-vanishing post-Newtonian parameters. On the other hand, Eq. (109) is valid only for stationary gravitational fields. In the case of an axisymmetric rotating body, we shall obtain an approximate expression of the frequency shift by inserting the following developments in Eq. (109), yielded by Eqs. (95)-(100):

$$\widehat{l}_A^{(2)}/c^2 = -\boldsymbol{\lambda}_M(\boldsymbol{x}_B,\boldsymbol{x}_A) - \boldsymbol{\lambda}_{J_2}(\boldsymbol{x}_B,\boldsymbol{x}_A) + \cdots\,, \quad \widehat{l}_A^{(3)}/c^3 = \boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{S}}(\boldsymbol{x}_B,\boldsymbol{x}_A) + \cdots\,,$$
$$\widehat{l}_B^{(2)}/c^2 = \boldsymbol{\lambda}_M(\boldsymbol{x}_A,\boldsymbol{x}_B) + \boldsymbol{\lambda}_{J_2}(\boldsymbol{x}_A,\boldsymbol{x}_B) + \cdots\,, \quad \widehat{l}_B^{(3)}/c^3 = \boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{S}}(\boldsymbol{x}_A,\boldsymbol{x}_B) + \cdots\,,$$

the function $\boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{S}}$ being now given by Eq. (99) written with $\alpha_1 = 0$. Let us recall that the symbol $+\cdots$ stands for the contributions of the higher multipole moments which are neglected.

### B. Application in the vicinity of the Earth

In order to perform numerical estimates of the frequency shifts in the vicinity of the Earth, we suppose now that A is on board the International Space Station (ISS) orbiting at the altitude $H = 400$ km and that B is a terrestrial station. It will be the case for the ACES mission. We use $r_B = 6.37 \times 10^6$ m and $r_A - r_B = 400$ km. For the velocity of ISS, we take $v_A = 7.7 \times 10^3$ m/s and for the terrestrial station, we have $v_B \leq 465$ m/s. The other useful parameters concerning the Earth are: $GM = 3.986 \times 10^{14}$ m$^3$/s$^2$, $r_e = 6.378 \times 10^6$ m, $J_2 = 1.083 \times 10^{-3}$; for $n \geq 3$, the multipole moments $J_n$ are in the order of $10^{-6}$. With these values, we get $W_B/c^2 \approx GM/c^2 r_B = 6.95 \times 10^{-10}$ and $W_A/c^2 \approx GM/c^2 r_A = 6.54 \times 10^{-10}$. From these data, it is easy to deduce the following upper bounds: $|\,\boldsymbol{N}_{AB}\cdot\boldsymbol{v}_A/c\,| \leq 2.6 \times 10^{-5}$ for the satellite, $|\,\boldsymbol{N}_{AB}\cdot\boldsymbol{v}_B/c\,| \leq 1.6 \times 10^{-6}$ for the ground station and $|\,\boldsymbol{N}_{AB}\cdot(\boldsymbol{v}_A - \boldsymbol{v}_B)/c\,| \leq 2.76 \times 10^{-5}$ for the first-order Doppler term.

Our purpose is to obtain correct estimates of the effects in Eq. (109) with are greater than or equal to $10^{-18}$ for an axisymmetric model of the Earth. At this level of approximation, it is not sufficient to take into account the $J_2$-terms in $(W_A - W_B)/c^2$. First, the higher-multipole moments $J_3$, $J_4$, ... yield contribution of order $10^{-15}$ in $W_A/c^2$. Second, owing to the irregularities in the distribution of masses, the expansion of the geopotential in a series of spherical harmonics is probably not convergent at the surface of the Earth. For these reasons, we do not expand $(W_A - W_B)/c^2$ in Eq. (109).

However, for the higher-order terms in Eq. (109), we can apply the explicit formulae obtained in the previous section. Indeed, since the difference between the geoid and the reference ellipsoid is less than 100 m, $W_B/c^2$ may be written as [26]

$$\frac{1}{c^2}W_B = \frac{GM}{c^2 r_B} + \frac{GMr_e^2 J_2}{2c^2 r_B^3}(1 - 3\cos^2\theta) + \frac{1}{c^2}\triangle W_B\,,$$

where the residual term $\triangle W_B/c^2$ is such that $|\triangle W_B/c^2| \leq 10^{-14}$. At a level of experimental uncertainty about $10^{-18}$, this inequality allows to retain only the contributions due to $M$, $J_2$ and $\boldsymbol{S}$ in the terms of orders $1/c^3$ and $1/c^4$. As a consequence, the formula (109) reduces to

$$\left(\frac{\delta\nu}{\nu}\right)_g = \frac{1}{c^2}(W_A - W_B) + \frac{1}{c^3}\left(\frac{\delta\nu}{\nu}\right)_M^{(3)} + \frac{1}{c^3}\left(\frac{\delta\nu}{\nu}\right)_{J_2}^{(3)} + \cdots$$
$$+\frac{1}{c^4}\left(\frac{\delta\nu}{\nu}\right)_M^{(4)} + \frac{1}{c^4}\left(\frac{\delta\nu}{\nu}\right)_{\boldsymbol{S}}^{(4)} + \cdots\,, \tag{110}$$

where the different terms involved in the r.h.s. are separately explicited and discussed in what follows.

By using Eq. (87), it is easy to see that $(\delta\nu/\nu)_M^{(3)}$ is given by

$$\left(\frac{\delta\nu}{\nu}\right)_M^{(3)} = -\frac{GM(r_A + r_B)}{r_A r_B}\left[\left(\frac{\gamma+1}{1+\boldsymbol{n}_A\cdot\boldsymbol{n}_B} - \frac{r_A - r_B}{r_A + r_B}\right)[\boldsymbol{N}_{AB}\cdot(\boldsymbol{v}_A - \boldsymbol{v}_B)]\right.$$
$$\left.+(\gamma+1)\frac{R_{AB}}{r_A + r_B}\frac{\boldsymbol{n}_A\cdot\boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{n}_B\cdot\boldsymbol{v}_B}{1+\boldsymbol{n}_A\cdot\boldsymbol{n}_B}\right]. \tag{111}$$

The contribution of this term is bounded by $5 \times 10^{-14}$ for $\gamma = 1$, in accordance with a previous analysis [6].

### C. Influence of the quadrupole moment at the order $1/c^3$

It follows from Eqs. (98) and (109) that the term $(\delta\nu/\nu)^{(3)}_{J_2}$ in Eq. (110) is given by

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\delta\nu}{\nu}\right)^{(3)}_{J_2} &= \frac{GM}{2r_e}J_2\left(\boldsymbol{N}_{AB}\cdot(\boldsymbol{v}_A-\boldsymbol{v}_B)\right)\left[\left(\frac{r_e}{r_A}\right)^3\left[3(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n}_A)^2-1\right]-\left(\frac{r_e}{r_B}\right)^3\left[3(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n}_B)^2-1\right]\right]\\
&+(\gamma+1)GM\left(\frac{1}{r_A}+\frac{1}{r_B}\right)J_2\frac{r_e^2}{r_Ar_B}\frac{1}{(1+\boldsymbol{n}_A\cdot\boldsymbol{n}_B)^2}\\
&\times\left\{[\boldsymbol{N}_{AB}\cdot(\boldsymbol{v}_A-\boldsymbol{v}_B)]\left[\frac{(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n}_A+\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n}_B)^2}{1+\boldsymbol{n}_A.\boldsymbol{n}_B}\left(\frac{r_A}{r_B}+\frac{r_B}{r_A}+\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\boldsymbol{n}_A\cdot\boldsymbol{n}_B\right)\right.\right.\\
&\left.-\frac{1}{2}\left(1-\frac{r_A(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n}_B)^2+r_B(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n}_A)^2}{r_A+r_B}\right)\left(\frac{r_A}{r_B}+\frac{r_B}{r_A}+1-\boldsymbol{n}_A\cdot\boldsymbol{n}_B\right)\right]\\
&+\frac{R_{AB}}{r_A+r_B}(\boldsymbol{n}_A\cdot\boldsymbol{v}_A+\boldsymbol{n}_B\cdot\boldsymbol{v}_B)\frac{(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n}_A+\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n}_B)^2}{1+\boldsymbol{n}_A\cdot\boldsymbol{n}_B}\left(\frac{r_A}{r_B}+\frac{r_B}{r_A}+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\boldsymbol{n}_A\cdot\boldsymbol{n}_B\right)\\
&-\frac{1}{2}\frac{R_{AB}}{r_A}(\boldsymbol{n}_A\cdot\boldsymbol{v}_A)\left[1-3(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n}_A)^2\right]\frac{r_A+r_B(2+\boldsymbol{n}_A\cdot\boldsymbol{n}_B)}{r_A+r_B}\\
&-\frac{1}{2}\frac{R_{AB}}{r_B}(\boldsymbol{n}_B\cdot\boldsymbol{v}_B)\left[1-3(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n}_B)^2\right]\frac{r_A(2+\boldsymbol{n}_A\cdot\boldsymbol{n}_B)+r_B}{r_A+r_B}\\
&+R_{AB}\left[\left(\frac{\boldsymbol{n}_A\cdot\boldsymbol{v}_A}{r_A}+\frac{\boldsymbol{n}_B\cdot\boldsymbol{v}_B}{r_B}\right)(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n}_A)(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n}_B)\right.\\
&\left.-\frac{1}{2}(\boldsymbol{n}_A\cdot\boldsymbol{v}_A)\frac{1-(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n}_B)^2}{r_B}-\frac{1}{2}(\boldsymbol{n}_B\cdot\boldsymbol{v}_B)\frac{1-(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n}_A)^2}{r_A}\right]\\
&-\frac{R_{AB}}{r_A}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}_A)\left[\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n}_A\frac{r_A+r_B(2+\boldsymbol{n}_A\cdot\boldsymbol{n}_B)}{r_A+r_B}+\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n}_B\right]\\
&\left.-\frac{R_{AB}}{r_B}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}_B)\left[\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n}_A+\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n}_B\frac{r_A(2+\boldsymbol{n}_A\cdot\boldsymbol{n}_B)+r_B}{r_A+r_B}\right]\right\}. \qquad (112)
\end{aligned}$$

One has $|\,\boldsymbol{v}_A/c\,|=2.6\times10^{-5}$, $|\,\boldsymbol{v}_B/c\,|\leq 1.6\times10^{-6}$ and $K_{AB}=3.77\times10^{-3}$. A crude estimate can be obtained by neglecting in (112) the terms involving the scalar products $\boldsymbol{n}_B\cdot\boldsymbol{v}_B$ and $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}_B$. Since the orbit of ISS is almost circular, the scalar product $\boldsymbol{n}_A\cdot\boldsymbol{v}_A$ can also be neglected. On these assumptions, we find for $\gamma=1$

$$\left|\frac{1}{c^3}\left(\frac{\delta\nu}{\nu}\right)^{(3)}_{J_2}\right|\leq 1.3\times10^{-16}. \qquad (113)$$

As a consequence, it will probably be necessary to take into account the $O(3)$ contributions of $J_2$ in the ACES mission. This conclusion is to be compared with the order of magnitude given in [6] without a detailed calculation. Of course, a better estimate might be found if the inclination $i=51.6\,\mathrm{deg}$ of the orbit with respect to the terrestrial equatorial plane and the latitude $\pi/2-\theta_B$ of the ground station were taken into account.

### D. Frequency shifts of order $1/c^4$

The term $(\delta\nu/\nu)^{(4)}_M$ in Eq. (110) is given by

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\delta\nu}{\nu}\right)^{(4)}_M &= (\gamma+1)\left(\frac{GM}{r_A}v_A^2-\frac{GM}{r_B}v_B^2\right)-\frac{GM(r_A-r_B)}{2\,r_Ar_B}(v_A^2-v_B^2)\\
&+\frac{1}{2}\left(\frac{GM}{r_Ar_B}\right)^2\left[(r_A-r_B)^2+2(\beta-1)(r_A^2-r_B^2)\right]\\
&-\frac{GM(r_A+r_B)}{r_Ar_B}\left[\left(\frac{2(\gamma+1)}{1+\boldsymbol{n}_A\cdot\boldsymbol{n}_B}-\frac{r_A-r_B}{r_A+r_B}\right)[\boldsymbol{N}_{AB}\cdot(\boldsymbol{v}_A-\boldsymbol{v}_B)]\,(\boldsymbol{N}_{AB}\cdot\boldsymbol{v}_B)\right.\\
&\left.+\frac{\gamma+1}{1+\boldsymbol{n}_A\cdot\boldsymbol{n}_B}\frac{R_{AB}}{r_A+r_B}\{(\boldsymbol{n}_A\cdot\boldsymbol{v}_A)\,(\boldsymbol{N}_{AB}\cdot\boldsymbol{v}_B)-[\boldsymbol{N}_{AB}\cdot(\boldsymbol{v}_A-2\boldsymbol{v}_B)](\boldsymbol{n}_B\cdot\boldsymbol{v}_B)\}\right]. \qquad (114)
\end{aligned}$$

The dominant term $(\gamma+1)GMv_A^2/r_A$ in Eq. (114) induces a correction to the frequency shift which amounts to $10^{-18}$. So, it will certainly be necessary to take this correction into account in experiments performed in the foreseeable future.

The terms $(\delta\nu/\nu)_{\boldsymbol{S}}^{(4)}$ is the contribution of the intrinsic angular momentum to the frequency shift. Substituting Eqs. (77) and (99) into Eq. (109), it may be seen that

$$\left(\frac{\delta\nu}{\nu}\right)_{\boldsymbol{S}}^{(4)} = (\mathcal{F}_{\boldsymbol{S}})_A - (\mathcal{F}_{\boldsymbol{S}})_B \,, \tag{115}$$

where

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}_{\boldsymbol{S}})_A \;=\; & (\gamma+1)\,\frac{GS}{r_A^2}\left(1+\frac{r_A}{r_B}\right)\boldsymbol{v}_A\cdot\left\{\frac{\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{n}_B}{1+\boldsymbol{n}_A\cdot\boldsymbol{n}_B}-\frac{r_B}{r_A+r_B}\,\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{n}_A\right.\\ & \left.+\,\frac{\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{n}_A\times\boldsymbol{n}_B)}{(1+\boldsymbol{n}_A\cdot\boldsymbol{n}_B)^2}\left[\frac{r_A+r_B(2+\boldsymbol{n}_A\cdot\boldsymbol{n}_B)}{r_A+r_B}\boldsymbol{n}_A+\boldsymbol{n}_B\right]\right\}\,,\end{aligned} \tag{116}$$

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}_{\boldsymbol{S}})_B \;=\; & (\gamma+1)\,\frac{GS}{r_B^2}\left(1+\frac{r_B}{r_A}\right)\boldsymbol{v}_B\cdot\left\{\frac{\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{n}_A}{1+\boldsymbol{n}_A\cdot\boldsymbol{n}_B}-\frac{r_A}{r_A+r_B}\,\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{n}_B\right.\\ & \left.-\,\frac{\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{n}_A\times\boldsymbol{n}_B)}{(1+\boldsymbol{n}_A\cdot\boldsymbol{n}_B)^2}\left[\boldsymbol{n}_A+\frac{r_A(2+\boldsymbol{n}_A\cdot\boldsymbol{n}_B)+r_B}{r_A+r_B}\boldsymbol{n}_B\right]\right\}\,.\end{aligned} \tag{117}$$

In order to make easier the discussion, it is useful to introduce the angle $\psi$ between $\boldsymbol{x}_A$ and $\boldsymbol{x}_B$ and the angle $i_p$ between the plane of the photon path and the equatorial plane. These angles are defined by

$$\cos\psi = \boldsymbol{n}_A\cdot\boldsymbol{n}_B\,,\quad 0\le\psi<\pi\,,\quad \boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{n}_A\times\boldsymbol{n}_B)=\sin\psi\cos i_p\,,\quad 0\le i_p<\pi\,.$$

With these definitions, it is easily seen that

$$\frac{\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{n}_A\times\boldsymbol{n}_B)}{1+\boldsymbol{n}_A\cdot\boldsymbol{n}_B}=\cos i_p\tan\frac{\psi}{2}\,.$$

Let us apply our formulas to ISS. Due to the inequality $v_B/v_A\le 6\times10^{-2}$, the term $(\mathcal{F}_{\boldsymbol{S}})_B$ in Eq. (115) may be neglected. From Eq. (116), it is easily deduced that

$$|\,(\mathcal{F}_{\boldsymbol{S}})_A\,|\le\,(\gamma+1)\,\frac{GS}{r_A^2}\left(1+\frac{r_A}{r_B}\right)\frac{2+3\,|\tan\psi/2|}{|1+\cos\psi|}\,v_A\,.$$

Assuming $0\le\psi\le\pi/2$, we have $(2+3\,|\tan\psi/2\,|)/\,|1+\cos\psi\,|\le 5$. Inserting this inequality in the previous one and taking for the Earth $GS/c^3r_A^2=3.15\times10^{-16}$, we find

$$\left|\frac{1}{c^4}\left(\frac{\delta\nu}{\nu}\right)_{\boldsymbol{S}}^{(4)}\right|\le\,(\gamma+1)\times10^{-19}\,. \tag{118}$$

Thus, we get an upper bound which is slightly greater than the one estimated by retaining only the term $h_{0i}v^i/c$ in Eq. (106). However, our formula confirms that the intrinsic angular momentum of the Earth will not affect the ACES experiment.

## VII. CONCLUSION

It is clear that the world function $\Omega(x_A,x_B)$ constitutes a powerful tool for determining the time delay and the frequency shift of electromagnetic signals in a weak gravitational field. The analytical derivations given here are obtained within the Nordtvedt-Will PPN formalism. We have found the general expression of $\Omega(x_A,x_B)$ up to the order $1/c^3$. This result yields the expression of the time transfer functions $\mathcal{T}_e(t_A,\boldsymbol{x}_A,\boldsymbol{x}_B)$ and $\mathcal{T}_r(t_B,\boldsymbol{x}_A,\boldsymbol{x}_B)$ up to the order $1/c^4$. We point out that $\gamma$ and $\alpha_1$ are the only post-Newtonian parameters involved in the expressions of the world-function and of the time transfer functions within the limit of the considered approximation.

We have treated in detail the case of an isolated, axisymmetric rotating body, assuming that the gravitational field is stationary and that the body is moving with a constant velocity $\boldsymbol{v}_r$ relative to the universe rest frame. We have given a systematic procedure for calculating the terms due to the multipole moments in the world function $\Omega(x_A,x_B)$

and in the single time transfer function $\mathcal{T}(\boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B)$. These terms are obtained by straightforward differentiations of a kernel function. We have explicitly derived the contributions due to the mass $M$, to the quadrupole moment $J_2$ and to the intrinsic angular momentum $\boldsymbol{S}$ of the rotating body.

Assuming for the sake of simplicity that only $\beta$ and $\gamma$ are different from zero, we have determined the general expression of the frequency shift up to the order $1/c^4$. We have derived an explicit formula for the contributions of $J_2$ at the order $1/c^3$. Our method would give as well the quadrupole contribution at the order $1/c^4$ in case of necessity. Furthermore, we have obtained a thorough expression for the contribution of the mass monopole at the fourth order, as well as the contribution of the intrinsic angular momentum $\boldsymbol{S}$, which is also of order $1/c^4$. It must be pointed out that our calculations give also the vectors tangent to the light ray at the emission and reception points. So, our results could be used for determining the contributions of $J_2$ and $\boldsymbol{S}$ to the deflection of light.

On the assumption that the gravitational field is stationary, our formulae yield all the gravitational corrections to the frequency shifts up to $10^{-18}$ in the vicinity of the Earth. Numerically, the influence of the Earth quadrupole moment at the order $1/c^3$ is in the region of $10^{-16}$ for a clock installed on board ISS and compared with a ground-clock. As a consequence, this effect will probably be observable during the ACES mission. We also note that the leading term in the fourth-order frequency shift due to the mass monopole is equal to $10^{-18}$ for a clock installed on board ISS and compared with a ground-clock. As a consequence, this effect could be observable in the foreseeable future with atomic clocks using optical transitions.

---


[1] S. A. Klioner, Sov. Astron. **35**, 523 (1991); S. A. Klioner, and S. M. Kopeikin, Astron. J. **104**, 897 (1992); see references therein.
[2] S. M. Kopeikin, J. Math. Phys. **38**, 2587 (1997).
[3] S. M. Kopeikin, and G. Schäfer, Phys. Rev. D **60**, 124002 (1999).
[4] S. A. Klioner, *preprint* astro-ph/0107457.
[5] S. M. Kopeikin, and B. Mashhoon, Phys. Rev. D **65**, 064025 (2002).
[6] L. Blanchet, C. Salomon, P. Teyssandier, and P. Wolf, Astron. Astrophys. **370**, 320 (2001).
[7] N. Ashby, IEEE International Frequency Control Symposium, 320 (1998).
[8] G. W. Richter and R. A. Matzner, Phys. Rev. D **28**, 3007 (1983).
[9] M. H. Brügmann, Phys. Rev. D **72**, 024012 (2005).
[10] J. L. Synge, *Relativity: The General Theory* (North-Holland, 1964); see also H. A. Buchdahl, Int. J. Theor. Phys. **24**, 457 (1985); *ibid.* **29**, 209 (1990).
[11] R. Holzwarth *et al.*, Phys. Rev. Lett. **85**, 2264 (2000). Th. Udem *et al.*, *ibid.* **86**, 4996 (2001).
[12] C. Salomon, and C. Veillet, in Proc. Symp. on Space Station Utilisation, ESA-SP 385, 295 (1996).
[13] A. Spallicci *et al.*, Class. Quant. Grav. **14**, 2971 (1997).
[14] B. Linet and P. Teyssandier, Phys. Rev. D **66**, 024045 (2002).
[15] C. Le Poncin-Lafitte, B. Linet and P. Teyssandier, Class. Quantum Grav. **21**, 4463 (2004).
[16] I. I. Shapiro, Phys. Rev. Lett. **13**, 789 (1964).
[17] E. Poisson, Class. Quantum Grav. **21** R 153 (2004).
[18] C. M. Will, *Theory and Experiment in Gravitational Physics* (Cambridge University Press, revised edition, 1993).
[19] H. A. Buchdahl, Austral. J. Phys. **32**, 405 (1979).
[20] S. A. Klioner, and M. H. Soffel, Phys. Rev. D **62**, 024019 (2000).
[21] T. Damour, M. Soffel, and C. Xu, Phys. Rev. D **43**, 3273 (1991); *ibid.* **45**, 1017 (1992); *ibid.* **47**, 3124 (1993).
[22] UAI Resolutions Adopted at the 24th General Assembly (Manchester, August 2000), to be published in Transactions of the UAI **24** B.
[23] L. Blanchet, and T. Damour, Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A **320**, 379 (1986), Annales Poincaré Phys. Theor. **50**, 377 (1989).
[24] P. Teyssandier, Phys. Rev. D **16**, 946 (1977); *ibid.* **18**, 1037 (1978).
[25] R. J. Adler, and A. S. Silbergleit, Int. J. Theor. Phys. **39**, 1291 (2000).
[26] P. Wolf, and G. Petit, Astron. Astrophys. **304**, 653 (1995); G. Petit, and P. Wolf, IEEE Trans. Instrum. Measur. **46**, 201 (1997).
[27] This velocity is noted $\boldsymbol{w}$ in Ref. [18].
[28] Note that the sign of Eq. (55) in Ref. [14] is erroneous.

# Bibliographie


[1] M. Abramowitz and I. Stegun. *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables*. Dover, 1964.

[2] L. Bel and J. Martín. Fermat's principle in general relativity. *General Relativity and Gravitation*, 26 :567–585, 1994.

[3] B. Bertotti, L. Iess, and P. Tortora. A test of general relativity using radio links with the cassini spacecraft. *Nature*, 425(6956) :374–376, 2003.

[4] D. Bini, M. T. Crosta, and F. de Felice. Orbiting frames and satellite attitudes in relativistic astrometry. *Classical and Quantum Gravity*, 20(21) :4695–4706, 2003.

[5] D. Bini and F. de Felice. Ray tracing in relativistic astrometry : the boundary value problem. *Classical and Quantum Gravity*, 20(11) :2251–2259, 2003.

[6] L. Blanchet. On the multipole expansion of the gravitational field. *Class. Quant. Grav.*, 15 :1971–1999, 1998.

[7] L. Blanchet and T. Damour. Radiative gravitational fields in general relativity. i - general structure of the field outside the source. *Royal Society, Philosophical Transactions, Series A*, 320(1555) :379–430, 1986.

[8] C. H. Brans and R. H. Dicke. Mach's principle and a relativistic theory of gravitation. *Physical Review*, 124 :925–935, 1961.

[9] M. H. Brügmann. Light deflection in the postlinear gravitational field of bounded pointlike masses. *Physical Review D*, 72(2) :024012, 2005.

[10] V. A. Brumberg. Light propagation in the schwarzschild field based in the post-post-newtonian approximation. *Kinematika i Fizika Nebesnykh*, 3 :8–13, 1987.

[11] V. A. Brumberg. *Essential Relativistic Celestial Mechanics*. Adam Hilger, Bristol, 1991.

[12] V. A. Brumberg and E. Groten. Iau resolutions on reference systems and time scales in practice. *Astronomy and Astrophysics*, 367 :1070–1077, March 2001.

[13] V. A. Brumberg and S. M. Kopeikin. *Reference frames in astronomy and geophysics*. Dordrecht, Kluwer, 1989.

[14] H. A. Buchdahl. Point characteristics of some static spherically symmetric space-times. *Journal of Modern Optics*, 17(9) :707–713, 1970.

[15] H. A. Buchdahl. Perturbed characteristic functions : application to the linearized gravitational field. *Austral. J. Phys.*, 32 :405–410, 1979.

[16] H. A. Buchdahl. Perturbed characteristic functions, ii second-order perturbation. *International Journal of Theoretical Physics*, 24 :457, 1985.

[17] M. T. Crosta and F. Mignard. Micro-arcsecond light bending by jupiter. *astro-ph/0512359*, 2005.

[18] T. Damour and G. Esposito-Farese. Tensor-multi-scalar theories of gravitation. *Classical and Quantum Gravity*, 9 :2093–2176, September 1992.

[19] T. Damour and K. Nordtvedt. General relativity as a cosmological attractor of tensor scalar theories. *Phys. Rev. Lett.*, 70 :2217–2219, 1993.

[20] T. Damour and K. Nordtvedt. Tensor - scalar cosmological models and their relaxation toward general relativity. *Phys. Rev.*, D48 :3436–3450, 1993.

[21] T. Damour, M. Soffel, and C. Xu. General-relativistic celestial mechanics. i. method and definition of reference systems. *Physical Review D*, 43(10) :3273–3307, 1991.

[22] T. Damour, M. Soffel, and C. Xu. General-relativistic celestial mechanics. ii. translational equations of motion. *Physical Review D*, 45(4) :1017–1044, 1992.

[23] T. Damour, M. Soffel, and C. Xu. General-relativistic celestial mechanics. iii. rotational equations of motion. *Physical Review D*, 47(8) :3124–3135, 1993.

[24] T. Damour, M. Soffel, and C. Xu. General-relativistic celestial mechanics. iv. theory of satellite motion. *Physical Review D*, 49(2) :618–635, 1994.

[25] R. Danner and S. Unwin. Space interferometry mission. *JPL 400-811, 3/99*, page 70, 1999.

[26] F. de Felice, B. Bucciarelli, M. G. Lattanzi, and A. Vecchiato. General relativistic satellite astrometry. ii. modeling parallax and proper motion. *Astronomy and Astrophysics*, 373 :336–344, 2001.

[27] F. de Felice, M. T. Crosta, A. Vecchiato, M. G. Lattanzi, and B. Bucciarelli. A general relativistic model of light propagation in the gravitational field of the solar system : The static case. *The Astrophysical Journal*, 607(1) :580–595, 2004.

[28] F. de Felice, M. G. Lattanzi, A. Vecchiato, and P. L. Bernacca. General relativistic satellite astrometry. i. a non-perturbative approach to data reduction. *Astronomy and Astrophysics*, 332(1133-1141), 1998.

[29] R. H. Dicke. Mach's principle and invariance under transformation of units. *Physical Review*, 125 :2163–2167, 1962.

[30] R. Epstein and I. I. Shapiro. Post postnewtonian deflectionof light by the sun. *Physical Review D*, 22 :2947–2949, 1980.

[31] A. Fienga, J. Laskar, J. L. Simon, H. Manche, and M. Gastineau. Imcce planetary ephemerides : Present and future. In *ESA SP-576 : The Three-Dimensional Universe with Gaia*, pages 293–+, January 2005.

[32] Ephraim Fischbach and Belvin S. Freeman. Second order contribution to the gravitational deflection of light. *Phys. Rev.*, D22 :2950, 1980.

[33] I. M. Gelfand and S. V. Fomin. *Calculus of Variations*. Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1963.

[34] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik. *Table of integrals, series and products*. Alan Jeffery and Daniel Zwillinger, Sixth edition, 2000.

[35] R. W. Hellings. Relativistic effects in astronomical timing measurements. *The Astronomical Journal*, 91 :650–659, 1986.

[36] J. D. Jackson. *Electrodynamique classique*. Wiley, New York, 1974.

[37] R. W. John. *Exp. Tech. Phys.*, 23 :127, 1975.

[38] S. A. Klioner. A practical relativistic model for microarcsecond astrometry in space. *The Astronomical Journal*, 125 :1580–1597, 2003.

[39] S. A. Klioner and S. M. Kopeikin. Microarcsecond astrometry in space - relativistic effects and reduction of observations. *The Astronomical Journal*, 104(2) :897–914, 1992.

[40] S. A. Klioner and M. Soffel. Relativistic celestial mechanics with ppn parameters. *Physical Review D*, 62(2) :024019, 2000.

[41] S. A. Klioner and M. Soffel. Refining the relativistic model for gaia : Cosmological effects in the bcrs. In M.A.C. Perryman. C. Turon, K.S. O'Flaherty, editor, *Proceedings of the Gaia Symposium "The Three-Dimensional Universe with Gaia" (ESA SP-576)*, page 305, 2004.

[42] S. M. Kopeikin. Relativistic frames of reference in the solar system. *Soviet Astronomy*, 33 :550–, October 1989.

[43] S. M. Kopeikin. Theory of relativity in observational radio astronomy. *Soviet Astronomy*, 34 :5, February 1990.

[44] S. M. Kopeikin. Propagation of light in the stationary field of multipole gravitational lens. *Journal of Mathematical Physics*, 38(5) :2587–2601, 1997.

[45] S. M. Kopeikin and P. Korobkov. General relativistic theory of light propagation in the field of radiative gravitational multipoles. *gr-qc/0510084*, 2005.

[46] S. M. Kopeikin and B. Mashhoon. Gravitomagnetic effects in the propagation of electromagnetic waves in variable gravitational fields of arbitrary-moving and spinning bodies. *Physical Review D*, 65(6) :064025, 2002.

[47] S. M. Kopeikin, J. Ramirez, B. Mashhoon, and M. V. Sazhin. Cosmological perturbations : a new gauge-invariant approach. *Phys. Lett.*, A292 :173–180, 2001.

[48] S. M. Kopeikin and G. Schäfer. Lorentz covariant theory of light propagation in gravitational fields of arbitrary-moving bodies. *Physical Review D*, 60(12) :124002, 1999.

[49] Sergei M. Kopeikin. Theory of relativistic reference frames for high-precision astrometric space missions. In *Proceedings of the Spanish Relativity Meeting, ERE2000*, 2000.

[50] S. M. Kopejkin. Celestial coordinate reference systems in curved spacetime. *Celestial Mechanics*, 44 :87, 1988.

[51] J. Kovalevsky. Time for the ephemerides and the observations. In *Journées 2000 - systèmes de référence spatio-temporels. J2000, a fundamental epoch for origins of reference systems and astronomical models, Paris, 18 - 20 septembre 2000, edited by N. Capitaine, Paris : Observatoire de Paris, ISBN 2-901057-45-4, 2001, p. 218 - 224*, pages 218–224, 2001.

[52] I. Kovner. Fermat principle in arbitrary gravitational fields. *The Astrophysical Journal*, 351 :114, 1990.

[53] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *Théorie du champs*. Edition MIR, 1971.

[54] C. Le Poncin-Lafitte, B. Linet, and P. Teyssandier. World function and time transfer : general post-minkowskian expansions world function and time transfer : general post-minkowskian expansions. *Classical and Quantum Gravity*, 21(18) :4463–4483, 2004.

[55] C. Le Poncin-Lafitte and P. Teyssandier. Influence of the multipole moments of a giant planet on the propagation of light. In D. F. Combes, T. Barret, F. Contini, Meynadier, and L. Pagani, editors, *SF2A-2004 : Semaine de l'Astrophysique Francaise*, page 55, 2004.

[56] C. Le Poncin-Lafitte and P. Teyssandier. Influence of the multipole moments of a giant planet on the propagation of light : application to gaia. In N. Capitaine, editor, *Journées 2004 - systèmes de référence spatio-temporels. Fundamental astronomy : new concepts and models for high accuracy observations*, page 204, 2005.

[57] T. Levi-Cività. *Nuovo Cimento*, 16 :105, 1918.

[58] A. Lichnerowicz. *Eléments de calcul tensoriel*. Armand Collin, Paris, 1946.

[59] A. Lichnerowicz. *Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme*. Masson, 1955.

[60] A. Liddle. *An Introduction to modern cosmology*. Wiley, 2003.

[61] A. Liddle and D. Lyth. *Cosmological Inflation and Large-Scale Structure*. Cambridge University Press, 2000.

[62] B. Linet and P. Teyssandier. Time transfer and frequency shift to the order $1/c^4$ in the field of an axisymmetric rotating body. *Physical Review D*, 66(2) :024045, 2002.

[63] J. Martín and E. Ruiz. Stationary axisymmetric post-minkowskian metrics. *Physical Review D*, 32 :2550–2556, November 1985.

[64] J. Martín, E. Ruiz, and M. J. Senosiain. Multipoles particles in general relativity : the weyl and kerr metrics. *LNP Vol. 212 : Gravitation, Geometry and Relativistic Physics*, 212 :29, 1984.

[65] C. W. Misner, K. S. Thorne, and A. Wheeler. *Gravitation*. Freeman, New York, 1973.

[66] P. Peebles. *Principles of Physical Cosmology*. Princeton University Press, 1993.

[67] V. Perlick. On fermat's principle in general relativity. i. the general case. *Classical and Quantum Gravity*, 7 :1319–1331, August 1990.

[68] V. Perlick. On fermat's principle in general relativity. ii. the conformally stationary case. *Classical and Quantum Gravity*, 7 :1849–1867, October 1990.

[69] M. A. C. Perryman. Overview of the gaia mission. In *ESA SP-576 : The Three-Dimensional Universe with Gaia*, page 15, January 2005.

[70] M. A. C. Perryman, K. S. de Boer, G. Gilmore, E. Hog, M. G. Lattanzi, L. Lindegren, X. Luri, F. Mignard, O. Pace, and P. T. de Zeeuw. Gaia : Composition, formation and evolution of the galaxy. *Astronomy and Astrophysics*, 369 :339–363, 2001.

[71] M. A. C. Perryman and ESA. *The HIPPARCOS and TYCHO catalogues. Astrometric and photometric star catalogues derived from the ESA HIPPARCOS Space Astrometry Mission*. The Hipparcos and Tycho catalogues. Astrometric and photometric star catalogues derived from the ESA Hipparcos Space Astrometry Mission, Publisher : Noordwijk, Netherlands : ESA Publications Division, 1997, Series : ESA SP Series vol no : 1200, ISBN : 9290923997 (set), 1997.

[72] E. Poisson. Topical review : Radiation reaction of point particles in curved spacetime. *Classical and Quantum Gravity*, 21(16) :R153–R232, 2004.

[73] G. W. Richter and R. A. Matzner. Second-order contributions to gravitational deflection of light in the parametrized post-newtonian formalism. ii. photon orbits and deflections in three dimensions. *Physical Review D*, 26(10) :2549–2556, 1982.

[74] G. W. Richter and R. A. Matzner. Second-order contributions to relativistic time delay in the parametrized post-newtonian formalism. *Physical Review D*, 28(12) :3007–3012, 1983.

[75] H. S. Ruse. *Proc. London Math. Soc.*, 31 :225, 1930.

[76] H. S. Ruse. *Proc. London Math. Soc.*, 32 :87, 1931.

[77] I. I. Shapiro. Fourth test of general relativity. *Physical Review Letters*, 13 :789–791, December 1964.

[78] M. Soffel. *Relativity in Astrometry, Celestial Mechanics and Geodesy*. Springer-Verlag, 1989.

[79] M. Soffel, S. A. Klioner, G. Petit, P. Wolf, S. M. Kopeikin, P. Bretagnon, V. A. Brumberg, N. Capitaine, T. Damour, T. Fukushima, B. Guinot, T.-Y. Huang, L. Lindegren, C. Ma, K. Nordtvedt, J. C. Ries, P. K. Seidelmann, D. Vokrouhlický, C. M. Will, and C. Xu. The iau 2000 resolutions for astrometry, celestial mechanics, and metrology in the relativistic framework : Explanatory supplement. *The Astronomical Journal*, 126 :2687–2706, 2003.

[80] E. M. Standish. Time scales in the jpl and cfa ephemerides. *Bulletin of the American Astronomical Society*, 30 :1146, September 1998.

[81] J. L. Synge. *Proc. London Math. Soc.*, 32 :241, 1931.

[82] J. L. Synge. *Relativity : The general theory*. Series in Physics. Amsterdam : North-Holland Publication Co., 1964.

[83] P. Teyssandier. Rotating nonspherical masses and their effects on the precession of a gyroscope. *Physical Review D*, 16 :946–952, 1977.

[84] P. Teyssandier. Rotating stratified ellipsoids of revolution and their effects on the dragging of inertial frames. *Physical Review D*, 18 :1037–1046, 1978.

[85] P. Teyssandier, C. Le Poncin-Lafitte, and B. Linet. A universal tool for determining the time delay and frequency shift of light : Synge world function. *à paraitre dans Lecture Notes in Physics*, à paraître 2006.

[86] K. S. Thorne. Multipole expansions of gravitationel radiation. *Rev. Mod. Phys.*, 52 :299–339, 1980.

[87] S. Turyshev, M. Shao, and K. Nordtvedt. The laser astrometric test of relativity mission. *Classical and Quantum Gravity*, 21(12) :2773–2799, 2004.

[88] S. Turyshev, M. Shao, and K. Nordtvedt. New concept for testing general relativity : the laser astrometric test of relativity (lator) mission. *Astronomische Nachrichten*, 325(4) :267–277, 2004.

[89] S. Turyshev, M. Shao, and K. Nordvedt. The laser astrometric test of relativity mission. *Nuclear Physics B Proceedings Supplements*, 134 :171–178, 2004.

[90] A. Vecchiato, M. G. Lattanzi, B. Bucciarelli, M. T. Crosta, and M. de Felice, F. Gai. Testing general relativity by micro-arcsecond global astrometry. *Astronomy and Astrophysics*, 399 :337–342, 2003.

[91] P. R. Weissman, L.-A. McFadden, and T. V. Johnson. *Encyclopedia of the Solar System*. San Diego Academic, 1999.

[92] H. Weyl. *Ann. Phys.*, 54 :117, 1917.

[93] C. M. Will. *Theory and experiment in gravitational physics*. Cambridge University Press, second edition edition, 1993.

OBSERVATOIRE DE PARIS