



Régulation des systèmes à paramètres distribués : application au forage

Alexandre Terrand-Jeanne

► To cite this version:

Alexandre Terrand-Jeanne. Régulation des systèmes à paramètres distribués : application au forage. Automatique. Université de Lyon, 2018. Français. NNT : 2018LYSE1283 . tel-02071861

HAL Id: tel-02071861

<https://theses.hal.science/tel-02071861>

Submitted on 18 Mar 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



N°d'ordre NNT : 2018LYSE1263

THESE de DOCTORAT DE L'UNIVERSITE DE LYON

opérée au sein de
l'Université Claude Bernard Lyon 1

**Ecole Doctorale EEA de Lyon
(ED 160)**

Spécialité de doctorat : Automatique

Soutenue publiquement le 13/12/2018, par :
Alexandre Terrand-Jeanne

Régulation des systèmes à paramètres distribués : Application au forage

Devant le jury composé de :

Mr Prieur Christophe, Directeur de recherche CNRS, GIPSA
Mr Seuret Alexandre, HDR Chargé de recherche CNRS, LAAS
Mr Xu Cheng-Zhong, Professeur des universités, Université Lyon 1
Mme Queinnec Isabelle, Directrice de recherche CNRS, LAAS
Mr Di Meglio Florent, Professeur assistant, MINES ParisTech

Rapporteur
Rapporteur
Examinateur
Examinatrice
Examinateur

Mme Dos Santos Martins Valérie, HDR MCU, Université Lyon 1
Mr Andrieu Vincent, HDR Chargé de recherche CNRS, LAGEP
Mme Tayakout-Fayolle Mélaz, PU, Université Lyon 1

Directrice de thèse
Co-directeur de thèse
Co-directrice de thèse

Résumé de la thèse

Régulation des systèmes à paramètres distribués : application au forage

Ce travail porte sur la régulation de la sortie des systèmes aux paramètres distribués. Pour ce faire, un simple contrôleur proportionnel intégral est utilisé, puis la stabilité du système en boucle fermée est démontrée à l'aide d'une fonction de Lyapunov.

La principale contribution de ce travail est la construction d'un nouveau type de fonction de Lyapunov qui s'inspire d'une méthode bien connue dans le cadre des systèmes non-linéaires : le forwarding.

Dans une première partie, le système est établi avec des opérateurs dont les propriétés sont données dans le cadre des semigroupes, puis la problématique de la régulation par contrôleur P-I est posée. Grâce à cette construction de Lyapunov, on peut répondre à cette problématique sous certaines hypothèses. Le lien est alors fait avec les résultats existants dans ce contexte.

Dans la seconde partie, la problématique de la régulation est posée pour un système composé de $n \times n$ équations hyperboliques linéaires où l'entrée et la sortie se situent sur les conditions aux frontières des EDPs. Sous certaines hypothèses, le résultat permet de réguler n'importe quel vecteur de sortie composé linéairement des conditions aux frontières du système. Cela généralise de nombreux travaux portant sur les systèmes composés d'équations hyperboliques et l'utilisation de contrôleur P-I.

Enfin dans le dernier chapitre, les vibrations mécaniques dans les tiges de forage sont étudiées comme cas d'application. Dans un premier temps, le comportement de solutions issues de différents modèles utilisés pour l'étude de ces déformations est détaillé. Dans un second temps, il est montré que la nouvelle fonctionnelle de Lyapunov permet de prendre en compte des modèles plus complexes et d'obtenir la régulation de la vitesse de la tige au fond du forage en ne mesurant que la vitesse en haut du puits. A la fin du chapitre, de nombreuses simulations numériques viennent illustrer nos résultats théoriques.

Regulation of distributed parameters systems : drilling application

This monograph is devoted to the output regulation of some distributed parameters systems. To reach this objective, a simply proportional integral controller is implemented. Then the stability of the closed loop is proved using a Lyapunov functional that can be built given a Lyapunov functional for the open-loop system.

The main contribution of this work is the method to build the Lyapunov functional, it is inspired by a well-known method in non-linear system theory : the forwarding.

In a first part, the system studied is an abstract Cauchy problem and the problematic is stated using semigroup theory. Thanks to the Lyapunov employed, the regulation can be guaranteed providing some assumption on the systems operators.

The second part detailed how the output regulation can be obtain for all linear outputs when the system is a $n \times n$ systems of linear balance laws in one space dimension. The result is given in the case where inputs and outputs act on the PDE's boundary conditions and for open-loop stabilizable system. It generalize many contribution in the topic of output regulation for systems of linear balance laws.

Last but not least, a part is devoted to the study of mechanicals vibrations in a drill pipe. In a first time, the behavior of the solutions for different kind of models use to model the drill pipe is detailed. Then, it is shown that the new Lyapunov functional allow to take into account complex, infinite dimensional model and to regulate the drill pipe velocity at the bottom of the wellbore by only measuring the surface velocity and with a P-I controller. At the end, some simulations are given that illustrate the result.

Table des matières

Résumé	i
Liste des Figures	iv
Notations	vii
1 Introduction générale	1
1.1 Contexte	1
1.2 Problématique : régulation robuste par contrôleurs P-I	3
1.3 État de l'art	5
Liste de mes publications	9
2 Régulation des systèmes décrits par des opérateurs linéaires	11
2.1 Positionnement du problème	12
2.2 Choix de la partie proportionnelle	14
2.3 Condition sur la partie intégrale pour la régulation : approche semigroupe	15
2.4 Condition sur la partie intégrale pour la régulation : approche Lyapunov	17
2.5 Conclusion et perspectives	24
3 Régulation d'une classe de système 1D issue de loi de conservation	27
3.1 Contexte et motivations	28
3.2 Hypothèses et résultats	36
3.3 Preuve du Théorème 3.3	39
4 Application au forage	47
4.1 Introduction	48
4.2 Modélisation	53

4.3	Dimension finie versus dimension infinie	60
4.4	Régulation de la vitesse en bas du forage pour les modèles de dimension infinie	72
4.5	Simulation	84
4.6	Conclusion	86
5	Conclusion et perspectives	89
5.1	Conclusion	89
5.2	Perspectives	90
A	Définitions des différents types de stabilité utilisés	93
B	Opérateurs et semigroupes	95
B.1	Définitions	95
B.2	Introduction à la théorie des semigroupes	97
C	Démonstration des propositions du chapitre 4	103
C.1	Preuve de la proposition 4.2	103
C.2	Preuve de la proposition 4.3 :	107
C.3	Preuve de la proposition 4.4	108
	Bibliographie	119

Liste des Figures

1.1	Schéma des approches systémiques	4
2.1	Schéma de régulation par retour P-I d'un système abstrait	13
3.1	A droite, propagation des solutions avec c positif, à gauche pour c négatif . . .	31
4.1	Schéma classique d'une plate-forme de forage [ADEME/BRGM]	49
4.2	Image de différents forets et d'un lot de tiges [société Ningbo Zhedong]	50
4.3	Phénomène Stick-Slip	52
4.4	Modèle 2 tables (à gauche) et N tables (à droite) pour le système de forage . .	54
4.5	Contrainte de cisaillement γ créée par une déformation $d\theta$	56
4.6	Bilan de puissance sur un petit bout de tige	57
4.7	Effet Stribeck	59
4.8	C_F en ordonnée et $\theta_t(L, t)$ en abscisse. A droite, zoom sur la zone où les frottements ne sont plus linéaires	59
4.9	Chaîne infinie de masses en rotation reliées par des ressorts	61
4.10	Réponse à une perturbation des différents modèles	67
4.11	Description oscillatoire des N solutions du modèle à N tables	67
4.12	Forme des fonctions $\lambda(x)$ et $G(x)$	85
4.13	Simple contrôleur intégral pour le système linéaire et différents k_i	86
4.14	Modèle linéaire avec un contrôleur P-I et un $k_p = -0.5$ et différents k_i	86
4.15	Modèle non-linéaire avec retour P-I pour différents k_p et $k_i = 0.2$	87

Notations

- Soit $c \in \mathbb{C}$, la notation $\Re_e(c)$ (resp. $\Im_m(c)$) représente la partie réelle (resp. la partie imaginaire) de c ;
- L'opérateur identité associé à l'espace de Hilbert Z est noté I_Z ;
- Soit un réel positif L , et soit la fonction $(t, x) : \mathbb{R}_+ \times [0, L] \rightarrow z(t, x)$ prise suffisamment lisse. La notation z_t (respectivement z_x) est utilisée pour désigner la dérivée partielle de z par rapport à t (respectivement par rapport à x). Similairement, z_{xx} dénote la dérivée seconde de z par rapport à x . Quand la fonction z ne dépend que de t , $\frac{d}{dt}z$ ou $\dot{z}$ sont utilisés pour exprimer la dérivée z par rapport au temps ;
- Soient Z et E des espaces de Hilbert $A : E \rightarrow Z$ un opérateur linéaire. Le terme $rg(A)$ est utilisé pour le rang de l'opérateur ;
- Soit un réel positif non-nul ℓ . L'espace des fonctions continues sur $[0, T]$ est noté $C(0, T)$. Soit $k \in \mathbb{N}_*$, une fonction f est dite de classe $C^k(0, T)$ si toutes les fonctions $\frac{d^\ell}{dt^\ell} f(t)$, avec $\ell \in \{1, \dots, k\}$, restent dans $C(0, T)$;
- Soit H , un espace de Hilbert, la norme associée à l'espace H est notée $\|\cdot\|_H$, le produit scalaire est noté $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$
- Soient deux espaces de Hilbert Z et $\tilde{Z}$, l'espace des opérateurs linéaires et continus de Z dans $\tilde{Z}$ est noté $\mathcal{L}(Z, \tilde{Z})$. Lorsque $\tilde{Z} = Z$, on utilise la notation $\mathcal{L}(Z)$;
- Soient deux espaces de Hilbert Z et $\tilde{Z}$, l'espace des opérateurs bornés de Z dans $\tilde{Z}$ est noté $\mathcal{B}(Z, \tilde{Z})$. Lorsque $\tilde{Z} = Z$, on utilise la notation $\mathcal{B}(Z)$;
- On note I_{d_n} la matrice identité de l'espace $\mathbb{R}^{n \times n}$.

Introduction générale

1.1 Contexte

L'objectif de ce travail est d'améliorer les conditions théoriques permettant d'utiliser des contrôleurs P-I (proportionnel-intégral) sur des systèmes comportant des dynamiques dans plusieurs dimension, décrites par des EDPs (équations aux dérivées partielles). Pour cela, on utilise une nouvelle technique pour construire des fonctions de Lyapunov adaptées aux EDPs.

On appelle **systèmes à paramètres distribués** (ou systèmes de dimension infinie), les systèmes décrits par des EDPs, en association ou non avec des EDOs (équations aux dérivées ordinaires) ou des équations algébriques.

En tant que science, l'automatique s'intéresse à la modélisation, l'analyse, l'identification et la commande des systèmes dynamiques. L'objectif de l'automatique consiste à contrôler – et donc optimiser – le système pour répondre à un cahier des charges, en tirant profit des connexions éventuelles, entrantes et sortantes, entre le système et son environnement.

En optant pour un point de vue systémique, elle diffère des approches qui privilégient la compréhension d'un système à travers celle de chacun de ses composants. Les principes de la systémique s'appliquent à tous les domaines : ingénierie, sciences fondamentales, sciences sociales.

Historiquement, l'automatique a principalement été utilisée pour l'ingénierie (mécanique, robotique, électrotechnique, procédés chimiques, etc.). Dans ce cas, le système est souvent constitué des variables physiques dont les évolutions dans le temps (la dynamique) sont décrites par des EDOs ou des EDPs. Les liens avec l'environnement extérieur peuvent être les variables que nous pouvons imposer au système (les entrées), celles que nous pouvons connaître (les sorties) ainsi qu'un ensemble de perturbations agissant sur le système. Ces perturbations peuvent aussi traduire les incertitudes sur le modèle mathématique utilisé pour décrire le système.

L'objectif de l'automaticien est alors :

1. D'établir un modèle mathématique décrivant le fonctionnement dynamique du système, ses entrées et ses sorties ;
2. De déterminer quelles entrées envoyer au système afin de remplir un cahier des charges (rapidité, précision, robustesse, etc.).

Prenons l'exemple d'une voiture à laquelle nous souhaitons imposer une vitesse. Le système correspond à l'ensemble moteur - boîte de vitesse - essieu. L'entrée correspond à l'ouverture des valves d'injection d'essence dans le moteur, la sortie correspond à la vitesse sur le compteur de la voiture et les perturbations pourraient prendre en compte le vent, la pente, l'erreur entre la vitesse réelle et celle du compteur, etc. En résumé, l'automaticien va contrôler la dynamique de ce système pour lui imposer une certaine vitesse qu'il a choisie. Le succès de l'automatique dans l'industrie motive aujourd'hui les chercheurs à étendre les résultats de leurs approches à des modèles mathématiques utilisant des EDPs. Pour y parvenir, il faut tenir compte des très nombreuses méthodes d'analyse, de commande et du cahier des charges à remplir.

Ce qui suit a pour but de préciser les objectifs et les méthodes suivis dans ce travail consacré aux systèmes décrits par des EDPs, en particulier nos choix concernant le dimensionnement du système et la loi de contrôle.

- **Le dimensionnement du système :** approche directe ou indirecte ?

Les approches indirectes : Les EDPs présentes dans le système sont remplacées par n EDOs. Ce genre de transformation est possible en utilisant une approximation par différences finies. La méthode des éléments finis en mécanique est un bon exemple de ce type d'approches. L'analyse et les objectifs de contrôle sont alors reformulés sur un système de dimension finie et la théorie classique de l'automatique peut être utilisée. Notons que les solveurs numériques utilisent ce type d'approches pour trouver les solutions des EDPs.

Les approches directes : La partie analyse est entièrement réalisée sur le modèle utilisant des EDPs. Les solutions appartiennent alors à des espaces fonctionnels appropriés et sont donc de dimension infinie. Les solutions ne sont approximées que lors d'éventuelles simulations utilisant un solveur numérique.

Notre choix : ce travail utilise une approche directe.

- **Le type de contrôle :** retour de sortie ou retour d'état ?

On appelle **loi de contrôle** l'expression mathématique envoyée au système via ses entrées. On parle de **synthèse de contrôleur** lorsque l'on définit l'ensemble des lois de contrôle respectant un cahier des charges donné. La synthèse de contrôleur pour les systèmes linéaires, temps invariant et de dimension finie est très bien documenté aujourd'hui. Depuis quelques années, la recherche sur les systèmes de dimension infinie est devenue très active.

On peut classer les contrôleurs en deux catégories :

Contrôle par retour de sortie : Dans ce cas, on ne se sert que de la sortie mesurée (en pratique avec un capteur) pour construire le contrôleur.

Contrôle par retour d'état : Dans ce cas, on utilise la connaissance des variables internes du système pour construire la loi de contrôle. Les approches par "backstepping" font notamment partie de cette classe. En dimension infinie, cela suppose de connaître la valeur des variables dans tout l'espace de l'intervalle d'étude. La loi de contrôle ainsi

obtenue est donc également de dimension infinie. Les personnes utilisant ces approches se servent d'observateurs afin de connaître les variables internes du système.

Notre choix : Les contrôleurs choisis dans ce manuscrit se servent uniquement de la sortie du système. La loi de commande utilisée s'écrit avec une partie proportionnelle et une autre intégrale (en abrégé contrôleur P-I).

- **Les objectifs recherchés :**

Stabilité : C'est la capacité qu'ont les variables d'un système de **converger vers une zone autour d'un état d'équilibre**. Les différentes notions de stabilité utilisées sont définies dans l'annexe A.

Performance : Les performances recherchées pour un contrôleur dépendent principalement du problème. En général, on souhaite que la sortie ou les états **convergent rapidement** et **sans importantes variations** vers l'état d'équilibre.

Régulation : C'est la capacité d'imposer au système le comportement que l'on désire. En général, on souhaite que la sortie du système (on parle alors de régulation de sortie) suive le signal (appelé référence) que l'on désire. Sur la figure 1.1, cela consiste à ce que l'erreur $e(t)$ tende vers zéro.

Robustesse : C'est la capacité qu'a le système en boucle fermée de conserver les propriétés précédentes malgré des perturbations extérieures et/ou des erreurs de modélisation du système.

Ce travail porte sur la régulation de la sortie vers une référence constante, malgré des incertitudes sur les paramètres et des perturbations inconnues et constantes agissant sur le système. Les trois principaux objectifs poursuivis sont la stabilité, la régulation et la robustesse. Nous pouvons les atteindre en utilisant des contrôleurs P-I.

1.2 Problématique : régulation robuste par contrôleurs P-I

Le problème consistant à imposer à la sortie d'un système un certain comportement, tout en rejetant un ensemble de perturbations, est connu sous le nom de **problème de la régulation de sortie**. Pour le cas des systèmes avec des équations linéaires en dimension finie, cette problématique a été complètement résolue par les travaux de Francis et Wonham (voir [36]).

Dans l'industrie, lorsqu'on désire réguler la sortie, presque tous les contrôleurs utilisés en pratique sont de type P-I. Avec ce type de contrôleurs, la problématique de régulation de sortie revient à prouver que, mathématiquement, l'erreur $e(t)$ entre la sortie réelle et la référence vers laquelle on souhaite forcer la sortie tend vers 0. On peut alors voir ce problème comme l'analyse de la stabilité d'un nouveau système créé par l'ajout du contrôleur. On l'appelle alors système en boucle fermée, schématisé par la figure 1.1.

Dans ce travail, on s'intéresse à la régulation des systèmes linéaires de dimension infinie en utilisant des contrôleurs P-I. Ce sujet a connu de nombreux développements ces dernières

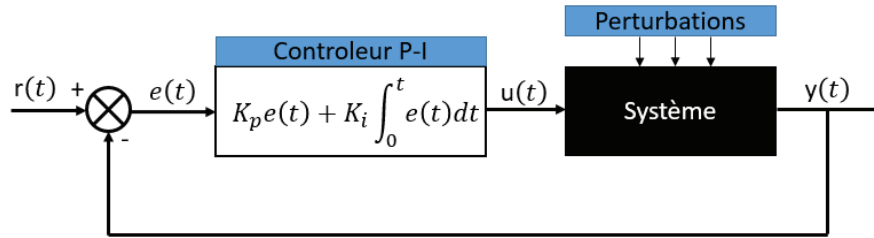


FIGURE 1.1 – Schéma des approches systémiques

années et plusieurs méthodes venant des mathématiques ou de l'analyse des systèmes en dimension finie ont vu le jour.

Les classes de systèmes considérées et les raisons de notre choix :

Si la problématique reste la même tout au long du manuscrit, nos résultats sont donnés pour différents types de systèmes en allant des plus théoriques au plus concrets.

- Chapitre 2 : Le système étudié est adapté à la description de la quasi-totalité des phénomènes physiques faisant intervenir des EDPs. Sa dynamique peut être représentée par tout opérateur appartenant à l'ensemble $\mathcal{L}(Z)$ où Z est un espace de Hilbert. Les résultats théoriques sont satisfaisants mais il ne sont pas toujours exploitables sur le plan pratique car des contraintes sous forme d'hypothèses mathématiques apparaissent.
- Chapitre 3 : Nous complétons le champ des systèmes étudiés avec ceux composés d'EDPs hyperboliques linéaires à 1 dimension spatiale et de relations algébriques entre les valeurs des solutions des EDPs aux bords de leur intervalle d'étude (conditions aux frontières). En supposant que le contrôle agit sur les conditions aux frontières des EDPs, nous sortons du cadre théorique du chapitre 2 et enrichissons donc le cadre applicatif de notre théorie.
- Chapitre 4 : Le système décrit l'évolution de la vitesse angulaire dans les puits de forage. Le modèle simplifié est alors composé d'une équation des ondes amortie et non-homogène, couplée avec la solution d'une EDO à travers la condition aux frontières non contrôlée. Sous cette forme, le système étudié appartient à la même classe que les systèmes du chapitre précédent. Ce chapitre permet une illustration détaillée de notre approche sur un cas concret.

Les démonstrations des théorèmes montrent que les objectifs de robustesse et de régulation peuvent s'obtenir, sous certaines conditions théoriques, en démontrant la stabilité du système en boucle fermée. L'analyse de la stabilité est donc le point clé de nos résultats. De nombreuses approches peuvent être appliquées pour cette analyse, et leur revue nous permet de situer nos résultats parmi ceux existants. Cet état de l'art n'est pas exhaustif, néanmoins la quasi-totalité des articles composant la bibliographie utilise une ou plusieurs de ces approches.

1.3 État de l'art des méthodes pour l'analyse de la stabilité en dimension infinie

1.3.1 Approche par semigroupes

La théorie des semigroupes repose sur l'analyse fonctionnelle en mathématique. Cette théorie permet, entre autre, de traiter les solutions des EDPs comme des objets mathématiques partageant certaines propriétés des fonctions exponentielles. Le chapitre 2 est dédié aux systèmes générant des semigroupes exponentiellement stables en boucle ouverte. Une introduction à cette théorie, ainsi que les définitions mathématiques utiles à la compréhension de ce chapitre, sont données en Annexe B. Lorsque l'on pose le problème sur des systèmes aussi abstraits, l'avantage est de pouvoir donner des résultats très généraux [62], [91], ou d'augmenter la théorie initiale sur la commande interne [36] à la dimension infinie (voir [33]). Néanmoins, les aspects mathématiques de la dimension infinie amènent des contraintes très mathématiques qui rendent l'application de cette théorie complexe.

1.3.2 Approche fréquentielle

Pour les systèmes de dimension infinie strictement linéaires, il est possible d'étendre les approches fréquentielles de la dimension finie. Dans le cas fini, une transformée de Laplace est utilisée afin de transformer les relations différentielles entre l'entrée et la sortie d'un système en une simple équation algébrique sans dérivées impliquant uniquement la variable de Laplace s . La stabilité de ces systèmes est alors obtenue en vérifiant que les pôles de la fonction de transfert (les zéros du dénominateur de la fraction $\frac{U(s)}{Y(s)}$) sont à partie réelle strictement négative. Il suffit alors d'appliquer le critère de Routh à un polynôme de type $P(s) = \sum_{i=0}^n a_i s^i = 0$. Dans le cas de la dimension infinie, on peut parfois suivre le même raisonnement. Pour les systèmes à retards par exemple, le quasi-polynôme obtenu est de la forme $P(s, e^s) = \sum_{i=0}^N (a_i s^i) + \sum_{j=0}^M b_j s^j e^{c_j s} = 0$. Ce type de quasi-polynômes est appelé équation transcendantale et un petit historique de l'étude de ses racines peut-être trouvé dans [7]. Les principaux résultats sont attribués à Pontryagin (voir [63]). Ils sont traduits en anglais par Bellman et Cooke (voir [13]). Enfin une présentation plus moderne de ces résultats peut être trouvée dans [39]. En résumé, le système en boucle fermée est globalement exponentiellement stable si et seulement si les pôles du système (qui sont alors les racines d'un polynômes incluant des exponentielles $P(s, e^s)$) sont à parties réelles strictement négatives et si $N > M$ (voir [50]).

Le livre de 2016 de Bartecki [9] utilise principalement ces approches dans l'étude des systèmes d'équations hyperboliques linéaires à une seule dimension couplées entre elles, . Pour le cas plus particulier du contrôle et de la régulation de 2×2 équations hyperboliques linéaires utilisant un contrôleur P-I et une approche fréquentielle on peut citer [11], [21], [34], [10]. Dans le chapitre 4, on utilise la méthode de Walter et Marshall (voir l'article pionnier [87] ou une version plus détaillée [73]) afin de montrer la stabilité du modèle de forage en l'absence de frottements distribués.

1.3.3 Backstepping

Dans son livre destiné à introduire la méthode appelée backstepping pour les EDP [47], Miroslav Krstic explique que la propriété essentielle de sa méthode est le fait que l'on peut, comme dans le contrôle des systèmes non linéaires (en dimension finie), trouver un changement de variable qui permette de transformer certains systèmes constitués d'EDP instables en systèmes composés d'EDP stables. Dans le cas des systèmes non-linéaires en dimension finie, la commande va dans un premier temps "tuer" la non-linéarité puis dans un second temps stabiliser le système. Ici l'idée est la même et le but est de trouver une commande capable de tuer la composante déstabilisante de notre système (mais en la transformant, non pas en la supprimant par son opposé).

L'idée générale est donc de déterminer un système cible, stable, transformant le modèle instable originel. Notons que l'on peut aussi utiliser le backstepping à partir d'un modèle déjà stable, on cherche alors un système cible possédant de meilleures propriétés (robustesse, performance...). La stabilité du système cible peut ensuite être montrée avec d'autres méthodes (Lyapunov, approche fréquentielle, semigroupes...). Une fois la cible choisie, le plus difficile est de trouver la transformation qui nous permette de passer du système initial au système cible (on doit pour cela résoudre une équation intégrale de type Volterra ou de Fredholm). Le système cible ne peut donc pas être pris au hasard et doit être le plus proche possible du système initial. Une fois cette équation résolue, on obtient la loi de contrôle (dans le système cible) assurant la transformation vers le système cible. Il suffit alors de calculer l'expression de cette loi de contrôle en fonction du système original pour conclure et implémenter le contrôleur sur le système initial.

Cette commande est de dimension infinie au sens où l'on doit connaître tout l'état du système et pas uniquement les mesures aux frontières de la partie EDP. Elle s'oppose alors avec les commandes plus simples par retour de sortie Proportionnel-Intégral utilisées par les autres méthodes. Cette difficulté est généralement surmontée en utilisant la méthode du backstepping combinée à un observateur pour pouvoir synthétiser le contrôleur par retour d'état. Le backstepping est largement utilisé pour stabiliser des systèmes dans la littérature récente. Bien qu'il n'existe pas de résultats génériques sur les systèmes décrits dans le chapitre 1, cette méthode peut s'appliquer à de très nombreux cas concrets.

Dans le cadre de l'étude de la stabilité des systèmes composés d'équations différentielles linéaires hyperboliques (voir Chapitre 3), le backstepping permet la stabilisation de systèmes 2×2 linéaires (voir [85], [65]), ou quasi-linéaires (voir [86], [84]). Pour le cas plus général avec n équations hyperboliques on peut citer [31]. Plus récemment, de nombreux résultats sur les systèmes d'équations hyperboliques couplées (référés en anglais sous l'appellation "system of conservation laws") sont apparus. On peut citer par exemple [32], [6].

Des travaux récents ([1], [2], [48] [28], [29]) utilisent cette méthode pour rejeter différents types de perturbations agissant sur différents types de systèmes linéaires hyperboliques. Dans [5], les auteurs utilisent cette méthode pour construire un contrôleur robuste aux retards

("input delay robustness"), c'est à dire, un contrôleur capable de respecter le cahier des charges initial même lorsque le contrôleur est retardé par l'inconnue τ , (i.e lorsque $\Omega(t) = \Omega(t - \tau)$).

Pour la problématique du forage, de nombreuses approches par backstepping peuvent être trouvées dans la littérature. Pour le cas sans amortissements répartis, on peut citer [16] . Dans le cas avec frottement, [68] utilise une transformation par backstepping et un observateur à partir de la connaissance des vitesses en haut et en bas du forage. Enfin dans [12], la connaissance de la vitesse en bas du forage n'est plus nécessaire.

La différence majeure entre les autres méthodes et le backstepping est que cette dernière utilise un retour d'état dans la loi de contrôle. Forte de cet avantage, cette méthode permet parfois de conclure lorsqu'aucune autre ne fonctionne. En revanche, son principal défaut réside dans le fait qu'il suppose une connaissance parfaite de l'état (et donc d'une infinité de valeurs) sans permettre de quantifier la perte (en terme de performance) lorsque cet état n'est pas parfaitement connu ou observé. Enfin, le backstepping étant une méthode de transformation du système, on peut très bien l'utiliser afin d'étendre un résultat obtenu par des approches Lyapunov, semigroupes ou fréquentielles. Tout système admettant une transformation vers un système cible stable par l'une des autres méthodes devient, grâce au backstepping, stabilisable.

1.3.4 Approches par Lyapunov

L'analyse de la stabilité des systèmes en utilisant des fonctions de Lyapunov est très populaire en dimension finie, en particulier pour les systèmes non-linéaires. La méthode a été introduite il y a plus d'un siècle [53]. La stabilité exponentielle de l'équilibre d'un système est démontrée si l'on peut trouver une fonction candidate, notée généralement $V(x, t)$, où x est l'état du système et t le temps, vérifiant pour tout (x, t) :

$$\frac{1}{k}\|x\|_{\mathbb{X}} \leq V(x, t) \leq k\|x\|_{\mathbb{X}}, \quad (1.1)$$

$$\frac{d}{dt}V(x, t) \leq -\nu V(x, t), \quad (1.2)$$

où k et ν sont deux constantes strictement positives. Il existe d'autre façon de caractériser les fonctions de Lyapunov selon le problème. Concernant les systèmes de dimension infinie, la première utilisation d'une approche par Lyapunov est réalisée sur des systèmes à retards. Les fonctions candidates alors utilisées sont généralement appelées fonctions de Lyapunov-Krasowski en référence aux travaux pionniers du mathématicien russe [46]. Tous nos résultats sont démontrés en utilisant cette approche. Notons alors que, concernant les chapitres 2 et 4, il n'existe pas, à ma connaissance, de référence utilisant une approche par Lyapunov. En revanche, cette méthode est très populaire pour l'étude et l'analyse de la stabilité des systèmes hyperboliques. Les premiers travaux à l'utiliser sont [20] et [22] où l'on l'applique respectivement aux problèmes de la stabilisation d'un corps élastique en rotation et du niveau d'eau de canaux fluviaux. Ils sont les premiers à utiliser des fonctions candidates de la forme :

$$V(t) = \int \varphi^\top(x, t) Q(x) \varphi(x, t) dx, \quad \text{où } Q(x) = \text{diag} \left(e^{\pm \lambda_i x} \right) \quad (1.3)$$

On parle alors plutôt de fonctionnelle de Lyapunov. Lorsque le système est uniquement décrit par des équations hyperboliques découplées entre elles, il existe des résultats donnant des conditions nécessaires et suffisantes (voir [10], [92]). En revanche, si l'on souhaite pouvoir réguler le système en utilisant une commande frontière de type P-I, le système en boucle fermée sera décrit mathématiquement par un couplage entre des EDPs et une ODE traduisant l'action intégrale du contrôleur. Dans ce cas, il n'existe pas de fonctionnelle de Lyapunov pour le cas générique et la littérature concernant cette problématique utilise des fonctionnelles candidates au cas par cas ([34], [83], [35], [18]). L'extension naturelle de la fonctionnelle donnée par (1.3) pour gérer ce couplage mène à des prérequis sur la positivité de certaines matrices (voir [75]).

Les approches utilisant Lyapunov permettent d'obtenir des résultats sur certaines non-linéarités en travaillant sur les équations linéarisées ([82]). En contrepartie, les conditions pour démontrer qu'une fonctionnelle est une bonne candidate sont souvent plus restrictives que nécessaire.

Liste des contributions et des présentations scientifiques

- **Revue scientifique :**

1. [TAC2018] Terrand-jeanne A., Andrieu V., Tayakout-fayolle M., Dos Santos Martins V., "Regulation of inhomogeneous drilling model with a P-I controller", Accepted in regular paper with modification to IEEE Transactions on Automatic Control : (JCR)

- **Conférence internationale :**

1. [CPDE2016] Terrand-Jeanne A., Dos Santos Martins V., *Modeling's approaches for Stick-Slip's phenomena in drilling*, CPDE 2016, invited session "PDE and Applications" organized by V. Dos Santos Martins and F. Di Mèglio, 2nd IFAC Workshop on Control of Systems Modeled by Partial Differential Equations (CPDE 2016), Bertinoro, Italy from June 13-15, 2016.
<https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2016.07.428> IFAC-PapersOnLine Volume 49, Issue 8, 2016, Pages 118-123
2. [ECC2018] Terrand-Jeanne A., Dos Santos Martins V., Andrieu V. *Regulation of the Drill Bit Velocity of a Drilling System with a P-I Controller*, ECC 2018, Cyprus.
3. [CDC2018] Terrand-Jeanne A., Andrieu V., Xu C.-Z., Dos Santos Martins V., *Lyapunov functionals for output regulation of exponentially stable semi-groups via integral action and application to PDE hyperbolic systems*, CDC 2018, Miami.

- **Séminaire national :**

1. Réunion scientifique à l'occasion de la création d'un nouveau groupe de travail CNRS (fusion des groupes EDP et Retard)

Titre :

A Lyapunov design for P-I boundary control of linear PDE : Application to the regulation of drill pipes speed of a 1D drilling model.

Résumé : We investigate the regulation of a class of stable C_0 -semigroup with P-I boundary control. Influence of the integral dynamic on the stability of the closed loop is analyzed with the construction of an extended Lyapunov functional inspired by the forwarding methods in nonlinear system. This method is then apply to the regulation of the angular velocity of a 1D drilling process modeled by a damped wave equation with control and measure located at one boundary meanwhile the other boundary is coupled with an ODE perturbed by an unknown, but constant scalar.

2. Invitation pour un séminaire devant l'équipe MAC du laboratoire LAAS à Toulouse le 05.04.2018.

Titre :

"Regulation of linear PDE's by P-I controller using a Lyapunov approach inspired by forwarding methods. Theory and application to the drilling case"

Résumé :

" Most of the existing results for the regulation of PDE's are based on semi-group and spectral theory. However, these results impose bounds on the control and the measurement operators. For instance, the boundary regulation of hyperbolic PDE employing control at the boundaries, can not be addressed. In order to deals with more general systems, we introduce a novel Lyapunov fonctionnal inspired by non-linear forwarding technics. Our approach is then illustrated in the case of a drilling system. "

3. Séminaire à l'occasion de la journée "Control at Lyon" du 24.05.2018. Titre et Résumé identique au précédent.

- **Diffusion scientifique au Lagep :**

1. 4 présentations de 15 minutes lors des réunions d'équipes DYCOPI entre 2015 et 2018.
2. (*Interdisciplinaire : Nano-toxicologie*) Participation au "Journal Club" du LA-GEP : Présentation et critique de l'article : *Towards understanding mechanisms governing cytotoxicity of metal oxides nanoparticles : Hints from nano-QSAR studies* écrit par "Agnieszka Gajewicz et al." en collaboration avec la doctorante Greta Magnano.

Régulation des systèmes décrits par des opérateurs linéaires

Contents

2.1	Positionnement du problème	12
2.1.1	Modèle dynamique	12
2.1.2	Système en boucle fermée	13
2.1.3	Objectifs de contrôle :	14
2.2	Choix de la partie proportionnelle	14
2.3	Condition sur la partie intégrale pour la régulation : approche semi-groupe	15
2.3.1	Discussion du résultat	16
2.4	Condition sur la partie intégrale pour la régulation : approche Lyapunov	17
2.4.1	Forwarding : exemple en dimension finie	17
2.4.2	Fonctionnelle de Lyapunov inspirée du forwarding pour la régulation	19
2.4.3	Exemple illustratif pour le cas $\mathcal{B}$ -borné	21
2.4.4	Cas $\mathcal{B}$ non-borné	23
2.5	Conclusion et perspectives	24

Dans ce chapitre on s'intéresse aux systèmes décrits par des opérateurs linéaires. De tels objets mathématiques permettent de modéliser un grand nombre de problèmes et en particulier les problèmes de dimension infinie régis par des EDPs. Les opérateurs sont simplement des applications entre des espaces fonctionnels. Les manier requiert des connaissances en analyse fonctionnelle. Des ouvrages usités pour aborder ce domaine des mathématiques sont par exemple [61] ou [17]. L'approche par semigroupe peut être vue comme l'extension naturelle de l'application linéaire e^{At} où A est matrice de dimension finie au cas $e^{\mathcal{A}t}$ où $\mathcal{A}$ est un opérateur. Une introduction à cette approche ainsi que les définitions des outils utilisés dans ce chapitre se trouvent en annexe B.

L'objectif de ce chapitre est de démontrer que, lorsqu'un système de dimension infinie est exponentiellement stable sans contrôleur, alors un simple contrôleur P-I de dimension finie est suffisant, sous certaines conditions, pour assurer la stabilité de la boucle fermée et la régulation en sortie vers une référence constante choisie et ce malgré des perturbations constantes

agissant sur le système.

Dans un premier temps, on donne le modèle du système étudié, la problématique exprimant mathématiquement notre objectif puis le système en boucle fermée avec le contrôleur P-I. La manière dont peut être utilisée la partie proportionnelle du contrôleur est explicitée dans la deuxième partie du chapitre.

On expose ensuite dans la troisième section, la solution basée sur les semigroupes pour cette propriété de régulation qui est bien connue depuis plusieurs décennies (voir [62] en 1982). Nous verrons néanmoins que les hypothèses demandées par ces Théorèmes basés sur la perturbation d'opérateurs linéaires (cette théorie mathématique est développée par T. Kato dans [44]) peuvent être trop restrictives pour certaines applications. De nouveaux résultats ([90], [91]) relâchent certaines des hypothèses utilisées dans l'article [62] et permettent d'appliquer cette approche à un plus grand nombre de systèmes.

Dans la dernière partie, on présente un résultat proche de celui de [90] en utilisant une approche par Lyapunov. Ce résultat a été publié dans [77]. Le Théorème 2.2 est la contribution principale de ce chapitre. Il permet, par une approche Lyapunov, d'obtenir la régulation de la sortie à partir des mêmes hypothèses que [90] mais en modifiant l'expression du gain maximal de la partie intégrale (la variable k_i^*). Le Corollaire 2.1 donne notamment une procédure pour exprimer le gain maximal en fonction des paramètres de stabilité de la boucle ouverte. Ce Corollaire est ensuite illustré par un exemple, celui déjà pris en 1982 dans [62]. A travers cet exemple, on montrera que, contrairement à l'approche semigroupe, nous sommes capables de donner explicitement le gain k_i^* . Enfin, le Corollaire 2.2 donne une méthode pour relâcher l'hypothèse "*L'opérateur de contrôle est borné*" permettant l'application de ce résultat à davantage de systèmes.

Remarquons que les résultats des chapitres 3 et 4 sont établis sans passer par le formalisme des semigroupes mais en suivant la même philosophie dans la construction de la fonctionnelle que celle utilisée dans la démonstration du Théorème 2.2.

2.1 Positionnement du problème

2.1.1 Modèle dynamique

Soit $\mathbb{X}$ un espace de Hilbert équipé d'une norme et d'un produit scalaire noté $\|\cdot\|_{\mathbb{X}}$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{X}}$ respectivement. On considère alors le problème de Cauchy associé au système $\Sigma(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ mis sous la forme de Kalman par les relations suivantes :

$$\varphi_t = \mathcal{A}\varphi + \mathcal{B}u + w, \quad \forall \varphi_0 \in D(\mathcal{A}), \quad (2.1)$$

$$y = \mathcal{C}\varphi, \quad (2.2)$$

où $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \mapsto \mathbb{X}$ est un opérateur linéaire, fermé, densément défini et générateur infinitésimal du semigroupe fortement continu noté $e^{\mathcal{A}t}$. Le domaine de l'opérateur $\mathcal{A}$ est noté $D(\mathcal{A})$. Le vecteur $w \in \mathbb{X}$ est constant et modélise les possibles perturbations. Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, on a $u(t) \in U$ et $y(t) \in Y$ où $u(t)$ et $y(t)$ sont respectivement les vecteurs des entrées et des sorties du système. Ces vecteurs sont réels et de même dimension, i.e $U \subset \mathbb{R}^m$ et $Y \subset \mathbb{R}^m$.

Les opérateurs linéaires $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ gèrent la connexion entre l'entrée, la sortie et le système. On a :

$$\mathcal{B} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{X}, \quad \mathcal{C} : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}^m$$

2.1.2 Système en boucle fermée

On choisit un contrôleur P-I implémenté sur un retour de sortie (voir schéma 2.1). La loi de contrôle est :

$$u(t) = k_p K_p (y(t) - y_{ref}) + k_i K_i \int_0^t (y(t) - y_{ref}) dt \quad (2.3)$$

où $k_p, k_i \in \mathbb{R}$ sont des scalaires et $K_p, K_i \in \mathbb{R}^{m \times m}$ sont des matrices.

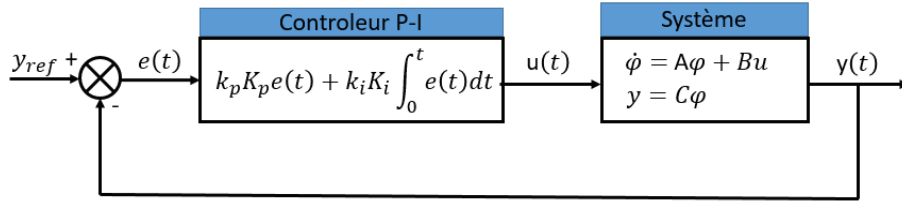


FIGURE 2.1 – Schéma de régulation par retour P-I d'un système abstrait

La partie intégrale du contrôleur augmente le système précédent en faisant apparaître un nouvel état, noté $\xi(t)$, possédant une dynamique. On a alors :

$$u(t) = k_p K_p (y(t) - y_{ref}) + k_i K_i \xi(t) \quad (2.4)$$

$$\dot{\xi}(t) = y(t) - y_{ref} \quad (2.5)$$

En injectant les égalités précédentes dans (2.1)-(2.2), on obtient le système en boucle fermée suivant :

$$\dot{\varphi}_e = \begin{pmatrix} \mathcal{A} + \mathcal{B}k_p K_p \mathcal{C} & \mathcal{B}k_i K_i \\ \mathcal{C} & 0 \end{pmatrix} \varphi_e + \begin{pmatrix} -\mathcal{B}k_p K_p \mathcal{C} y_{ref} + w \\ -y_{ref} \end{pmatrix} = \mathcal{A}_{ep} \varphi_e + w_e \quad (2.6)$$

où $\varphi_e = \begin{pmatrix} \varphi \\ \xi \end{pmatrix}$. La solution φ_e du système $\Sigma(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ en boucle fermée avec la loi de contrôle (2.3) appartient à l'espace de Hilbert augmenté noté $\mathbb{X}_e = \mathbb{X} \times \mathbb{R}^m$, muni du produit scalaire suivant :

$$\langle \varphi_{ea}, \varphi_{eb} \rangle_{\mathbb{X}_e} = \langle \varphi_a, \varphi_b \rangle_{\mathbb{X}} + \xi_a^\top \xi_b.$$

De même, la norme du nouvel espace est notée $\|\cdot\|_{\mathbb{X}_e}$. Selon que l'on utilise ou non la partie proportionnelle du contrôleur, on définit :

$$\mathcal{A}_e : D(\mathcal{A}) \times \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbb{X}_e, \quad \mathcal{A}_e = \begin{pmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B}k_i K_i \\ \mathcal{C} & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

et

$$\mathcal{A}_{ep} : D(\mathcal{A} + \mathcal{B}k_p K_p \mathcal{C}) \times \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbb{X}_e, \quad \mathcal{A}_{ep} = \begin{pmatrix} \mathcal{A} + \mathcal{B}k_p K_p \mathcal{C} & \mathcal{B}k_i K_i \\ \mathcal{C} & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

2.1.3 Objectifs de contrôle :

On appelle **état d'équilibre du système en boucle fermée** et on note φ_∞ la solution à l'équilibre des équations (2.1)-(2.2)-(2.3).

L'objectif est de choisir k_p, K_p, k_i, K_i tels que :

1. Stabilité : L'état d'équilibre du système (2.1)-(2.2)-(2.3) est globalement exponentiellement stable. Autrement dit, il existe deux scalaires strictement positifs k_e et ν_e tel que $\forall t \in \mathbb{R}^+$ et $\forall \varphi_{e,0} \in D(\mathcal{A})$ on a :

$$\|\varphi_e(t) - \varphi_{e,\infty}\|_{\mathbb{X}} \leq k_e e^{-\nu_e t} \|\varphi_{e,0} - \varphi_{e,\infty}\|_{\mathbb{X}} \quad (2.9)$$

2. Régulation : La sortie du système converge vers une référence arbitraire notée y_{ref} avec $y_{ref} \in \mathbb{R}^m$. Au sens où :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t) - y_{ref}\| \rightarrow 0 \quad (2.10)$$

3. Robustesse : La stabilité (1) et la régulation (2) doivent être garanties pour toutes conditions initiales prises dans le domaine de $\mathcal{A}$ et ce malgré les perturbations constantes w agissant sur l'équation (2.1).

Dans l'analyse du système en boucle fermée, on peut traiter séparément le choix de la partie proportionnelle du contrôleur et celui de la partie intégrale. La partie proportionnelle permet de jouer sur les propriétés de l'opérateur $\mathcal{A}$, notamment l'emplacement de son spectre, tandis que la partie intégrale garantit la régulation et doit être construite de manière à ne pas déstabiliser l'opérateur $\mathcal{A}$ (ou l'opérateur $\mathcal{A} + \mathcal{B}k_p K_p \mathcal{C}$ si l'on utilise la partie proportionnelle)

2.2 Choix de la partie proportionnelle

Dans cette partie, on suppose que $k_i = 0$, de sorte que le système en boucle fermée soit entièrement décrit par :

$$\varphi_t = \mathcal{A} + k_p \mathcal{B} K_p \mathcal{C} \varphi - \mathcal{B} k_p K_p \mathcal{C} y_{ref} + w$$

Hypothèse 1 (Stabilisation exponentielle)

L'opérateur $\mathcal{A} + k_p \mathcal{B} K_p \mathcal{C}$ est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semigroupe exponentiellement stable. C'est à dire qu'il existe deux réels positifs ν et k tels que $\forall \varphi_0 \in \mathbb{X}$ et $\forall t \in \mathbb{R}_+$, l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\|e^{(\mathcal{A} + k_p \mathcal{B} K_p \mathcal{C})t} \varphi_0\|_{\mathbb{X}} \leq k \exp(-\nu t) \|\varphi_0\|_{\mathbb{X}}. \quad (2.11)$$

Dans le cas où $\mathcal{A}$ est déjà le générateur d'un C_0 -semigroupe exponentiellement stable, on

peut également utiliser la partie proportionnelle pour améliorer les performances du système au sens de la vitesse de convergence de la solution.

Dans la pratique, il y a souvent un compromis à faire entre la robustesse et la performance du contrôleur. Ce dilemme est bien explicité dans [5] et les auteurs donnent le meilleur gain proportionnel pour un système composé de 2 équations hyperboliques.

Remarque 2.1

Dans ce qui suit, on va ajouter une action intégrale au système afin de pouvoir réguler sa sortie. Tout les résultats de la prochaine section sont donnés en supposant que le système en boucle ouverte génère un semigroupe exponentiellement stable, autrement dit que l'hypothèse 1 est vérifié pour $k_p = 0$. Dans le cas où l'on utilise la partie proportionnelle, tout ce qui suit reste valable en remplaçant l'opérateur $\mathcal{A}$ par l'opérateur $\mathcal{A} + \mathcal{B}k_p K_p$ et la démonstration du théorème est similaire. Le résultat sur la régulation reste donc valable dans le cas où le système est instable en boucle ouverte mais stabilisable par ajout d'un correcteur proportionnel.

2.3 Condition sur la partie intégrale pour la régulation : approche semigroupe

A partir de cette hypothèse sur la stabilité de $\mathcal{A}$ il est possible d'obtenir la régulation de la sortie sous certaines conditions concernant les opérateurs de contrôle $\mathcal{B}$ et de mesure $\mathcal{C}$, ainsi que sur la relation entrée-sortie à l'équilibre, c'est à dire sur l'opérateur $\mathcal{C}\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}$. Ces conditions sur la structure du système sont rassemblées dans l'hypothèse suivante :

Hypothèse 2 (Hypothèses sur la structure du système)

On pose les hypothèses suivantes sur les opérateurs décrivant le système entrée-sortie.

1. *L'opérateur $\mathcal{B}$ est borné ;*
2. *L'opérateur $\mathcal{C}$ est $\mathcal{A}$ -admissible, i.e.*

$$\begin{aligned} \|\mathcal{C}\varphi\| &\leq c(\|\varphi\|_{\mathbb{X}} + \|\mathcal{A}\|), \quad \forall \varphi \in D(\mathcal{A}), \\ \int_0^T \|\mathcal{C}e^{At}\varphi\|^2 &\leq K_T^2 \|\varphi\|_{\mathbb{X}}^2, \quad \forall \varphi \in D(\mathcal{A}), \end{aligned}$$

avec $c, K_T, T > 0$;

3. *La condition de rang est vérifiée :*

$$\text{rg}\{\mathcal{C}\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}\} = m. \quad (2.12)$$

Grâce à ces hypothèses, on peut formuler un résultat pour la régulation de tels systèmes. On rappelle le Théorème utilisé par exemple dans [90].

Théorème 2.1 ([90])

Sous les hypothèses 1 et 2, il existe une valeur limite k_i^* et une matrice $K_i = (CA^{-1}B)^{-1}$ telles que pour tout $0 < k_i \leq k_i^*$, l'opérateur étendu $\mathcal{A}_e$ donné par l'équation (2.7) est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semigroupe exponentiellement stable dans l'espace d'état augmenté $\mathbb{X}_e$. Donc le système (2.1)-(2.2) en boucle fermée avec (2.3) est bien-posé et son équilibre est exponentiellement stable. De plus, pour toutes perturbations $w \in \mathbb{X}$ et pour chaque référence constante y_{ref} , l'équation (2.10) est vérifiée (i.e la régulation est obtenue). Une valeur analytique possible pour la limite (voir [62]) sur k_i^* est :

$$k_i^* = \min_{\lambda \in \Gamma_0} \left(\left\| \begin{pmatrix} 0 & Bk_p K_p \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\|_{\mathbb{X}_e}^{-1} \left\| R \left(\lambda, \begin{pmatrix} \mathcal{A} & 0 \\ \mathcal{C} & 0 \end{pmatrix} \right) \right\|_{\mathbb{X}_e}^{-1} \right) \quad (2.13)$$

Remarque 2.2

Selon les auteurs, l'expression du k_i^* peut varier mais fera toujours intervenir une résolvante. Dans l'article pionnier ([62]), l'opérateur $\mathcal{A}$ appartient à un espace de Banach. L'hypothèse 1 est insuffisante pour la démonstration du résultat et l'auteur suppose alors que $\mathcal{A}$ génère un C_0 -semigroupe holomorphe (voir la définition dans [62] pour plus de précision). On peut montrer que cette condition sur l'opérateur exclut les systèmes composés d'EDP hyperboliques. Dans [90], les auteurs ont démontré que si la solution appartient à un espace de Hilbert, l'hypothèse 1 devient suffisante pour la démonstration du Théorème 2.1 car on a alors une caractérisation suffisante du spectre de l'opérateur $\begin{bmatrix} \mathcal{A} & 0 \\ \mathcal{C} & 0 \end{bmatrix}$.

La preuve complète du théorème peut être trouvée dans [62]. En résumé, l'auteur se sert de la théorie de la perturbation des opérateurs linéaires (voir [44]) afin d'exprimer la résolvante de l'opérateur $\mathcal{A}_e$ en fonction de celui de $\mathcal{A}$. On obtient alors une somme infinie de termes et l'on peut montrer que pour un k_i plus petit que la limite donnée par l'égalité (2.13) du théorème, le spectre de $\mathcal{A}_e$ est bien à partie réelle strictement négative.

2.3.1 Discussion du résultat

Ces résultats théoriques permettent de répondre à la question : peut-on réguler (vers une référence constante) n'importe quelle sortie d'un système linéaire de dimension infinie dès lors que le système est stabilisable avec un simple correcteur statique (proportionnel) ?

La réponse des semigroupes à cette question est positive mais sous certaines contraintes mathématiques qu'il faut démontrer. Parmi ces contraintes, on a notamment :

- Le contrôle aux frontières d'une EDP (plus généralement, tous les cas où le contrôle agit sur des points isolés de l'intervalle spatial de l'EDP) ne permet pas de montrer facilement le point 1 de l'hypothèse 2, i.e que $\mathcal{B}$ est un opérateur borné.
- La connaissance du gain maximal k_i^* requiert de calculer les normes d'opérateurs et de résolvantes qui peuvent être difficiles à déterminer dans la pratique.

2.4 Condition sur la partie intégrale pour la régulation : approche Lyapunov

L'objectif de cette partie est de montrer que l'on est capable d'obtenir des résultats plus généraux que ceux de l'approche par C_0 -semigroupe en suivant une approche par fonctionnelle de Lyapunov. Nos contributions à cette approche sont séparées en deux parties. En s'inspirant d'une technique, le forwarding, utilisée pour les systèmes non-linéaires en dimension finie, on donne d'abord un théorème pour la régulation sous les mêmes hypothèses que précédemment. Découlant de ce théorème, il est possible de trouver un gain maximal k_i^* à partir de la connaissance de la stabilité en boucle ouverte et ne faisant pas intervenir la résolvante du système. Ensuite, on montrera à l'aide du Corollaire 2.2 qu'il est possible de relâcher l'hypothèse $\mathcal{B}$ est un opérateur borné. Le choix de la partie proportionnelle se fait de la même façon que pour les approches par semigroupes. Plus précisément, cette stabilisation de la boucle ouverte grâce aux gains proportionnels doit permettre d'utiliser la Proposition 2.1.

En dimension infinie sur des espaces de Hilbert, l'hypothèse 1 sur la stabilité du système en boucle ouverte est suffisante pour assurer l'existence d'un opérateur que l'on utilisera par la suite dans nos approches par Lyapunov. On rappelle le Théorème de [24, Théorème 8.1.3], que nous utilisera ultérieurement.

Proposition 2.1

Si l'opérateur $\mathcal{A}$ génère un semigroupe exponentiellement stable alors il existe un opérateur positif (voir définition B.6), borné (voir définition B.2) et auto-adjoint (voir définition B.5) noté $\mathcal{P}$ et à valeur dans $\mathcal{L}(X)$ tel que :

$$\langle \mathcal{A}\varphi, \mathcal{P}\varphi \rangle_{\mathbb{X}} + \langle \mathcal{P}\varphi, \mathcal{A}\varphi \rangle_{\mathbb{X}} \leq -\nu \|\varphi\|_{\mathbb{X}}, \quad \forall \varphi \in D(\mathcal{A}), \quad (2.14)$$

où ν est un réel positif non-nul.

Sachant que l'existence d'un tel opérateur découle de l'hypothèse sur la stabilisation exponentielle de la boucle ouverte, on cherche naturellement à répondre à la question suivante : *Connaissant l'opérateur de Lyapunov $\mathcal{P}$, est-il possible de construire un opérateur étendu $\mathcal{P}_e$ associé à l'opérateur du système en boucle fermée $\mathcal{A}_e$?*

Pour répondre à cette question, nous allons utiliser une méthode de construction des fonctions de Lyapunov bien connue de la communauté des systèmes non-linéaires de dimension finie et appelée *le forwarding* (le lecteur trouvera plus d'informations sur cette méthode dans [57], [71], [14], ou, plus récemment [3]).

2.4.1 Forwarding : exemple en dimension finie

Lorsque le système est linéaire, la dérivée le long des solutions du système d'une fonction de Lyapunov ne fait pas intervenir de terme non-linéaire et on peut dériver de manière classique. En non-linéaire, la dérivée le long des solutions est une dérivée de Lie.

Par exemple si $\dot{z} = f(z)$, alors $\frac{d}{dt}V(z) = L_f V(z) \triangleq \frac{\partial V(z)}{\partial z} f(z)$.

Soit le système suivant :

$$\dot{z}_1 = h(z_2) \quad (2.15)$$

$$\dot{z}_2 = f(z_2) + g(z_2)u \quad (2.16)$$

où p , n_1 et n_2 sont des nombres entiers strictement positifs, $u \in \mathbb{R}^p$, $z_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$, $z_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$, $f, g : \mathbb{R}^{n_2} \rightarrow \mathbb{R}^{n_2}$ et $h : \mathbb{R}^{n_2} \rightarrow \mathbb{R}^{n_1}$. On pose l'hypothèse suivante :

Hypothèse 3

Il existe une fonction $V : \mathbb{R}^{n_2} \rightarrow \mathbb{R}^+$ et des fonctions $\bar{\alpha}, \underline{\alpha} \in \mathcal{K}_\infty$ (voir définition en annexe A.3) telles que :

$$1. \underline{\alpha}(|z_2|) \leq V(z_2) \leq \bar{\alpha}(|z_2|)$$

$$2. \frac{\partial V(z_2)}{\partial z} f(z_2) \leq -V(z_2)$$

La méthode forwarding consiste d'abord à trouver une fonction $M : \mathbb{R}^{n_2} \rightarrow \mathbb{R}^{n_1}$ qui est solution de :

$$L_f M(z_2) = \frac{\partial M(z_2)}{\partial z_2} (f(z_2)) = h(z_2)$$

Puis à construire la fonction de Lyapunov étendue $W(z_1, z_2)$ définie par :

$$W(z_1, z_2) = V(z_2) + (z_1 - M(z_2))^2.$$

On a alors le long de la solution des équations (2.15)-(2.16) :

$$\dot{W}(z_1, z_2) = L_f V(z_2) + u L_g V(z_2) + 2(z_1 - M(z_2)) (h(z_2) - L_{f+gu} M(z_2)),$$

On a ensuite :

$$\begin{aligned} \dot{W}(z_1, z_2) &= L_f V(z_2) + u L_g V(z_2) + 2(z_1 - M(z_2)) u L_g M(z_2) \\ &\leq -V(z_2) + u (L_g V(z_2) + 2(z_1 - M(z_2)) L_g M(z_2)) \\ &\leq -V(z_2) - (L_g V(z_2) + 2(z_1 - M(z_2)) L_g M(z_2))^2 \end{aligned}$$

avec $u(z_1, z_2) = -(L_g V(z_2) + 2(z_1 - M(z_2)) L_g M(z_2))^\top$.

Ainsi, W est une fonction de Lyapunov faible pour le système en boucle fermée. Sous réserve que $L_g M(0)$ soit de rang plein (i.e $\text{rg}\{L_g M(0)\} = n_1$) cette fonction de Lyapunov est stricte.

Il est important de remarquer que cette approche "nominale" du forwarding implique que la loi de commande dépende de l'ensemble de l'état. Dans la suite, en utilisant des propriétés qui dérivent de la stabilité entrée-état (en anglais "ISS", voir définition en annexe A.5), nous montrerons que nous pouvons utiliser une loi de commande qui ne dépend que de la sortie mesurée avec la même fonction de Lyapunov.

2.4.2 Fonctionnelle de Lyapunov inspirée du forwarding pour la régulation

Théorème 2.2 (Fonctionnelle de Lyapunov par forwarding)

Si les hypothèses 1 et 2 sont vérifiées, alors il existe un opérateur borné $\mathcal{M} : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}^m$ et des réels strictement positifs p et k_i^* , tels que pour tout $0 < k_i < k_i^*$, on puisse trouver un réel $\nu_e > 0$ vérifiant :

$$\mathcal{P}_e = \begin{bmatrix} \mathcal{P} + p\mathcal{M}^*\mathcal{M} & -p\mathcal{M}^* \\ -p\mathcal{M} & p\mathbf{I}_d \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

tel que $\forall \varphi_e = (\varphi, \xi)^\top \in D(\mathcal{A}) \times \mathbb{R}^m$

$$\langle \mathcal{A}_e \varphi_e, \mathcal{P}_e \varphi_e \rangle_{\mathbb{X}_e} + \langle \mathcal{P}_e \varphi_e, \mathcal{A}_e \varphi_e \rangle_{\mathbb{X}_e} \leq -\nu_e (\|\varphi\|_{\mathbb{X}}^2 + |\xi|^2). \quad (2.18)$$

où $\mathcal{P}_e$ est un opérateur positif, autoadjoint et borné.

Preuve :

Soit $\mathcal{M} : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}^m$ défini par $\mathcal{M} = \mathcal{C}\mathcal{A}^{-1}$. En utilisant le fait que $\mathcal{C}$ soit $\mathcal{A}$ -borné, on obtient :

$$\|\mathcal{M}\varphi\| = \|\mathcal{C}\mathcal{A}^{-1}\varphi\| \leq c (\|\mathcal{A}^{-1}\varphi\|_{\mathbb{X}} + \|\varphi\|_{\mathbb{X}}),$$

L'hypothèse " $\mathcal{A}$ génère un semigroupe fortement continue exponentiellement stable" implique en particulier que l'inverse de l'opérateur $\mathcal{A}$ noté $\mathcal{A}^{-1}$ est borné¹

$$\|\mathcal{M}\varphi\| = \|\mathcal{C}\mathcal{A}^{-1}\varphi\| \leq \tilde{c}\|\varphi\|_{\mathbb{X}},$$

où $\tilde{c}$ est un nombre réel strictement positif. Donc $\mathcal{M}$ est un opérateur linéaire borné, de plus, il satisfait la relation suivante :

$$\mathcal{M}\mathcal{A}\varphi = \mathcal{C}\varphi, \quad \forall \varphi \in D(\mathcal{A}). \quad (2.19)$$

D'un autre côté, on sait que

$$\langle \varphi_e, \mathcal{P}_e \varphi_e \rangle_{\mathbb{X}_e} = \langle \varphi, \mathcal{P}\varphi \rangle_{\mathbb{X}} + p(\xi - \mathcal{M}\varphi)^\top (\xi - \mathcal{M}\varphi) \quad (2.20)$$

En développant le produit scalaire :

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}_e \varphi_e, \mathcal{P}_e \varphi_e \rangle_{\mathbb{X}_e} + \langle \mathcal{P}_e \varphi_e, \mathcal{A}_e \varphi_e \rangle_{\mathbb{X}_e} &= \langle \mathcal{A}\varphi, \mathcal{P}\varphi \rangle_{\mathbb{X}} + \langle \mathcal{P}\varphi, \mathcal{A}\varphi \rangle_{\mathbb{X}} \\ &\quad + 2p(\xi - \mathcal{M}\varphi)^\top (\mathcal{C}\varphi - \mathcal{M}\mathcal{A}\varphi) + k_i \langle \varphi, \mathcal{P}\mathcal{B}K_i \xi \rangle_{\mathbb{X}} \\ &\quad + k_i \langle \mathcal{P}\mathcal{B}K_i \xi, \varphi \rangle_{\mathbb{X}} - 2p(\xi - \mathcal{M}\varphi)^\top \mathcal{M}\mathcal{B}K_i k_i \xi. \end{aligned}$$

1. Si $\mathcal{A}$ génère un C_0 -semigroupe stable alors son spectre est composé de complexes à parties réelles strictement négatives. La valeur $\lambda = \{0\}$ appartient donc à l'ensemble résolvant (qui est le complémentaire du spectre dans $\mathbb{X}$) défini comme $R(\mathcal{A}, \lambda) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid (\lambda \mathbf{I} - \mathcal{A})^{-1} \text{ est borné}\}$. Il suit, par définition de la résolvante que $\mathcal{A}^{-1}$ existe et est borné.

L'opérateur $\mathcal{B}$ étant borné, $\|\mathcal{P}\mathcal{B}K_i\|_{\mathbb{X}}^2$ est bien définie donc on peut poser $\|\mathcal{P}\mathcal{B}K_i\|_{\mathbb{X}}^2 = \alpha$. En utilisant (2.19) et $\mathcal{M}\mathcal{B}K_i = \mathbf{I}_{dm}$, l'égalité précédente devient :

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}_e \varphi_e, \mathcal{P}_e \varphi_e \rangle_{\mathbb{X}_e} + \langle \mathcal{P}_e \varphi_e, \mathcal{A}_e \varphi_e \rangle_{\mathbb{X}_e} &= \langle \mathcal{A} \varphi, \mathcal{P} \varphi \rangle_{\mathbb{X}} + \langle \mathcal{P} \varphi, \mathcal{A} \varphi \rangle_{\mathbb{X}} + k_i \langle \varphi, \mathcal{P}\mathcal{B}K_i \xi \rangle_{\mathbb{X}} \\ &\quad + k_i \langle \mathcal{P}\mathcal{B}K_i \xi, \varphi \rangle_{\mathbb{X}} - 2p(\xi - \mathcal{M}\varphi)^\top k_i \xi \end{aligned} \quad (2.21)$$

Soient a, b des constantes positives, on trouve :

$$\langle \varphi, \mathcal{P}\mathcal{B}K_i \xi \rangle_{\mathbb{X}} \leq \frac{1}{2a} \|\varphi\|_{\mathbb{X}}^2 + \frac{a\alpha}{2} |\xi|^2, \quad (2.22)$$

$$\xi^\top \mathcal{M}x \leq \frac{1}{2b} \|\varphi\|_{\mathbb{X}}^2 + \frac{b\|\mathcal{M}\|^2}{2} |\xi|^2, \quad (2.23)$$

ce qui mène à :

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}_e \varphi_e, \mathcal{P}_e \varphi_e \rangle_{\mathbb{X}_e} + \langle \mathcal{P}_e \varphi_e, \mathcal{A}_e \varphi_e \rangle_{\mathbb{X}_e} &\leq \left(-\nu + \frac{k_i}{a} + \frac{pk_i}{b} \right) \|\varphi\|_{\mathbb{X}}^2 \\ &\quad + k_i [p(-2 + b\|\mathcal{M}\|^2) + a\alpha] |\xi|^2. \end{aligned} \quad (2.24)$$

où le ν doit vérifier (2.14). Il suffit alors de choisir b suffisamment petit pour vérifier :

$$-2 + b\|\mathcal{M}\|^2 < 0. \quad (2.25)$$

Ensuite, on choisit une constante " a " assez petite et un " p " suffisamment grand pour vérifier :

$$p(-2 + b\|\mathcal{M}\|^2) + a\alpha < 0. \quad (2.26)$$

Finalement, le gain maximal autorisé par cette approche correspond au plus grand k_i^* vérifiant :

$$-\nu + \frac{k_i^*}{a} + \frac{pk_i^*}{b} < 0 \quad (2.27)$$

Le résultat recherché est alors obtenu avec :

$$\nu_e = \min \left\{ \nu - \frac{k_i}{a} - \frac{pk_i}{b}, p(2 - b\|\mathcal{M}\|^2) - a\alpha \right\}.$$

■

Un intérêt direct de cette approche par rapport au semigroupe est la possibilité de calculer explicitement le gain maximal k_i^* à partir de la connaissance de la fonctionnelle de Lyapunov dont l'existence est assurée par la Proposition 2.1. On a le corollaire suivant :

Corollaire 2.1 (Gain intégral explicite)

Soit le système $\Sigma(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ satisfaisant les conditions du Théorème 2.1, alors les points 1), 2), et 3) du Théorème 2.1 sont valables pour $K_i = (\mathcal{C}\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B})^{-1}$ et

$$k_i^* = \frac{\nu}{2\|\mathcal{C}\mathcal{A}^{-1}\| \|\mathcal{P}\mathcal{B}(\mathcal{C}\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B})^{-1}\|_{\mathbb{X}}}. \quad (2.28)$$

Preuve :

Premièrement, notons $d = \frac{p}{a}$. Avec (2.27), on a :

$$k_i^* = \sup_{b, d, p, \text{ satisfaisant (2.25)-(2.26)}} \left\{ \frac{\nu p}{d + \frac{p^2}{b}} \right\}.$$

D'un autre côté, les équations (2.25) et (2.26) peuvent se réécrire comme :

$$d > \frac{L}{2 - b\|\mathcal{M}\|^2}, \quad 2 - b\|\mathcal{M}\|^2 > 0. \quad (2.29)$$

Les deux inégalités précédentes ne dépendant pas de p , on suppose que cette variable peut être "optimisée". On a :

$$\partial_p \left(\frac{\nu p}{d + \frac{p^2}{b}} \right) = \frac{\nu(d + \frac{p^2}{b}) - 2\nu\frac{p^2}{b}}{(d + \frac{p^2}{b})^2} = \nu \frac{d - \frac{p^2}{b}}{(d + \frac{p^2}{b})^2},$$

La dérivée partielle est nulle pour $p = \sqrt{db}$. Cela implique :

$$k_i^* = \frac{\nu}{2} \sup_{b, d \text{ tel que (2.29)}} \sqrt{\frac{b}{d}} = \frac{\nu}{2} \sup_b \sqrt{\frac{(2 - b\|\mathcal{M}\|^2)b}{L}}.$$

La limite est atteinte pour $b = \frac{1}{\|\mathcal{M}\|^2}$ et :

$$k_i^* = \frac{\nu}{2\|\mathcal{M}\|\sqrt{\alpha}} = \frac{\nu}{2\|\mathcal{CA}^{-1}\|\|\mathcal{PB}(\mathcal{CA}^{-1}\mathcal{B})^{-1}\|_{\mathbb{X}}}.$$

Bien sûr, ce gain dépend de la fonctionnelle de Lyapunov $\mathcal{P}$ utilisée à l'équation (2.14). ■

2.4.3 Exemple illustratif pour le cas $\mathcal{B}$ -borné

On reprend l'exemple utilisé dans l'article de Pohjolainen ([62]). On considère une barre de longueur L qui chauffe et dont l'évolution de la température à l'intérieur de la barre suit une équation parabolique du 1^{er} ordre. L'objectif de cet exemple est d'appliquer l'approche par Lyapunov sur un système déjà étudié avec les semigroupes et de donner une valeur analytique pour k_i^* grâce au Corollaire 2.1, ce qui n'a pas été fait dans [62].

La barre est de longueur $l = 10\text{m}$, les températures aux extrémités de la barre sont connues et fixées à zéro. Afin de respecter l'hypothèse : $\mathcal{B}$ est un opérateur borné, on considère que le contrôle agit sur la température dans trois zones autour des points isolés de coordonnées $s = 2, 5$ et 7 . Ces zones mesurent 1 mètre et sont centrées autour des points précédents. On mesure la température en certains points isolés du système (en $s = 3, 6$ et 8). La problématique

est alors la suivante : on veut trouver un contrôleur intégral tel que la valeur de la température aux trois points où l'on mesure converge asymptotiquement vers une référence choisie. Dans cet exemple on cherche à réguler ces trois points vers les valeurs 1, 2 et 3, donc à garantir :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |y(t) - y_{ref}| = 0$$

où la sortie et la référence à suivre sont données par :

$$y(t) = \begin{bmatrix} \phi(t, 3) \\ \phi(t, 6) \\ \phi(t, 8) \end{bmatrix}, \quad y_{ref} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Le système en boucle fermée est alors décrit par l'EDP suivante :

$$\begin{aligned} \phi_t(s, t) = \phi_{ss}(s, t) + \mathbb{1}_{[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}]}(s)u_1(t) + \mathbb{1}_{[\frac{9}{2}, \frac{11}{2}]}(s)u_2(t) \\ + \mathbb{1}_{[\frac{13}{2}, \frac{15}{2}]}(s)u_3(t), \quad (s, t) \in (0, 10) \times (0, \infty) \end{aligned} \quad (2.30)$$

où $\phi : [0, +\infty) \times [0, 10] \mapsto \mathbb{R}$ avec les conditions aux frontières :

$$\begin{aligned} \phi(0, t) = \phi(10, t) = 0 \\ \phi(s, 0) = \phi_0(s), \end{aligned} \quad (2.31)$$

et où la notation $\mathbb{1}_{[a, b]} : [0, 10] \mapsto \mathbb{R}$ est utilisée pour décrire la fonction caractéristique sur l'intervalle $[a, b]$:

$$\mathbb{1}_{[a, b]}(s) = \begin{cases} 1 & \forall s \in [a, b], \\ 0 & \forall s \notin [a, b]. \end{cases}$$

On se place dans l'espace de Hilbert $\mathcal{X} = L^2((0, 10), \mathbb{R})$ équipé de la norme et du produit scalaire usuels. Considérons que l'espace des entrées et celui des sorties du système est l'espace $\mathbb{R}^3$. Alors (2.31), nous permet de définir complètement le problème de Cauchy associé à notre problématique. L'opérateur générant un semigroupe est $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{X}$, l'opérateur d'entrée est $\mathcal{B} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{X}$ et l'opérateur de sortie est $\mathcal{C} : D(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{R}^3$. On a les relations algébriques suivantes :

$$D(\mathcal{A}) = \{\varphi \in H^2(0, 10) \mid \varphi(0) = \varphi(10) = 0\},$$

et

$$\mathcal{A}\varphi = \varphi_{ss} \quad \forall \varphi \in D(\mathcal{A}),$$

$$\mathcal{B}u = \mathbb{1}_{[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}]}u_1 + \mathbb{1}_{[\frac{9}{2}, \frac{11}{2}]}u_2 + \mathbb{1}_{[\frac{13}{2}, \frac{15}{2}]}u_3,$$

et

$$\mathcal{C}\varphi = \begin{bmatrix} \varphi(3) \\ \varphi(6) \\ \varphi(8) \end{bmatrix}.$$

De plus, en utilisant l'injection de Sobolev, une intégration par partie et en complétant les carrés, on peut montrer que pour tout $\varphi \in D(\mathcal{A})$, il existe un réel positif c tel que :

$$\begin{aligned} \sup_{s \in (0,10)} |\varphi(s)| &\leq c \int_0^{10} \varphi(s)^2 ds + c \int_0^{10} \varphi_s(s)^2 ds \\ &\leq c \|\varphi\|_{\mathbb{X}} + c \int_0^{10} |\varphi(s) \varphi_{ss}(s)| ds \\ &\leq \frac{3}{2} c \|\varphi\|_{\mathbb{X}} + \frac{1}{2} c \|\varphi_{ss}\|_{\mathbb{X}} = \frac{3}{2} c \|\varphi\|_{\mathbb{X}} + \frac{1}{2} c \|\mathcal{A}\varphi\|_{\mathbb{X}}. \end{aligned}$$

Ce qui montre bien que $\mathcal{C}$ est $\mathcal{A}$ -borné. En développant les expressions précédentes, on obtient :

$$\mathcal{C}\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B} = \frac{-1}{10} \begin{bmatrix} 14 & 15 & 9 \\ 8 & 20 & 18 \\ 4 & 10 & 14 \end{bmatrix}.$$

Il est facile de vérifier que cette matrice est de rang plein. On a bien vérifié que toutes les hypothèses du Théorème 2.2 sont vérifiées. Grâce au Corollaire 2.1, on peut avoir une idée du gain maximum autorisé par l'approche Lyapunov. Par calcul direct, $\forall \varphi \in \mathbb{X}$:

$$\mathcal{C}\mathcal{A}^{-1}\varphi = \begin{bmatrix} \frac{3}{10} \int_0^{10} (s-10)\varphi(s)ds + \int_0^3 (3-s)\varphi(s)ds \\ \frac{3}{5} \int_0^{10} (s-10)\varphi(s)ds + \int_0^6 (6-s)\varphi(s)ds \\ \frac{4}{5} \int_0^{10} (s-10)\varphi(s)ds + \int_0^8 (8-s)\varphi(s)ds \end{bmatrix},$$

on trouve $\|\mathcal{C}\mathcal{A}^{-1}\| \leq 6.2466$. On a

$$K_i = \begin{bmatrix} -1.250 & 1.500 & -1.125 \\ 0.500 & -2.000 & 2.250 \\ 0 & 1.000 & -2.000 \end{bmatrix}.$$

Pour le système en boucle fermée, on peut choisir tout simplement $\mathcal{P} = \text{Id}$. Le gain de décroissance exponentielle du semigroupe est alors $\nu = \frac{\pi^2}{50}$. Par ailleurs, on a les valeurs numériques suivantes (par calcul direct) : $\|K_i\| = 4.2433$, and $\|\mathcal{B}\| \leq \sqrt{3}$. En utilisant la relation (2.28), on est en mesure de garantir la régulation pour tout gain intégral inférieur au gain limite suivant :

$$k_i^* = \frac{\nu}{2\|\mathcal{B}K_i\| \|\mathcal{C}\mathcal{A}^{-1}\|} \approx 2.1498 * 10^{-3}.$$

En résumé, on a utilisé le Corollaire 2.1, avec le contrôleur intégral donné par (2.3) et respectant la condition : $0 < k_i < 2.1498 * 10^{-3}$ pour démontrer la stabilité exponentielle de l'équilibre le long des solutions du système en boucle fermée (équation (2.30)) ainsi que le fait que l'on puisse imposer le comportement asymptotique de la sortie pour n'importe quelles conditions initiales et en présence de perturbations constantes. Dans ce qui suit, nous discutons le cas où $\mathcal{B}$ n'est pas borné.

2.4.4 Cas $\mathcal{B}$ non-borné

Pour certains systèmes, notamment ceux traités dans les Chapitres 3 et 4, il peut être intéressant de lever la condition sur le caractère borné de l'opérateur $\mathcal{B}$. Grâce aux approches par Lyapunov, on peut modifier l'hypothèse faite sur $\mathcal{B}$ en suivant le corollaire suivant :

Corollaire 2.2 (Régulation avec $\mathcal{B}$ non-bornée)

Supposons que :

1. L'opérateur $\mathcal{CA}^{-1}$ est borné ;
2. La condition de rang est vérifiée (i.e l'opérateur $\mathcal{CA}^{-1}\mathcal{B}$ est de rang plein), on choisit alors :

$$K_i = (\mathcal{CA}^{-1}\mathcal{B})^{-1}$$

3. Supposons que, pour tout $\varphi \in D(A)$ et $u \in U$, le produit scalaire $\langle \varphi, P Bu \rangle$ est bien défini. Supposons de plus qu'il existe des réels strictement positifs L et a tels que

$$\langle \varphi, \mathcal{P}BK_i\xi \rangle \leq \frac{1}{2a}\|\varphi\|_{\mathbb{X}}^2 + \frac{aL}{2}|\xi|^2;$$

4. L'opérateur $\mathcal{A}_e$ donnée par l'équation (2.7) est le générateur d'un C_0 -semigroupe dans $\mathbb{X}_e$,

alors il existe un gain limite strictement positif, noté k_i^* , tel que pour tout $0 < k_i \leq k_i^*$ l'opérateur $\mathcal{A}_e$ est le générateur d'un C_0 -semigroupe exponentiellement stable dans l'espace de Hilbert $\mathbb{X}_e$. Par équivalence, l'équilibre du système imposé par le retour de sortie proportionnel-intégral (avec la loi de contrôle (2.3)) vérifiant $y_\infty = y_{ref}$ est un état équilibre exponentiellement stable.

Preuve :

Dans la démonstration du théorème, la seule fois où l'on utilise le fait que $\mathcal{B}$ est un opérateur borné est au niveau de l'équation (2.22). Il suit que l'on peut directement supposer cette inégalité plutôt que d'assumer le caractère borné de $\mathcal{B}$. ■

2.5 Conclusion et perspectives

Dans ce chapitre, on a répondu à la problématique de la régulation de la sortie vers une référence constante pour les systèmes représentés par des opérateurs linéaires générant des semigroupes exponentiellement stables. Nous avons utilisé une nouvelle manière de construire les fonctionnelles de Lyapunov pour la dimension infinie en nous inspirant du "forwarding" de la dimension finie. Avec cette approche, nous avons fait le lien avec les résultats existants dans la littérature utilisant les semigroupes. La différence avec ces résultats réside dans l'expression du gain maximum k_i^* . En revanche, on retrouve la même structure pour le contrôleur au niveau de la matrice K_i . De plus, on peut lever la contrainte $\mathcal{B}$ doit être borné en vérifiant par un autre moyen l'inégalité (2.22) comme illustré par le Corollaire 2.2.

Des pistes pour étendre les résultats présentés ici pourraient être :

- Considérer des opérateurs $\mathcal{A}$ non-linéaires ; les approches par Lyapunov offrant généralement un bon cadre pour étudier ces systèmes.

-
- Essayer de forcer la sortie à suivre une référence dépendant du temps et à rejeter des perturbations non-constantes comme dans [36].

Régulation d'une classe de système 1D issue de loi de conservation

Contents

3.1	Contexte et motivations	28
3.1.1	Loi de conservation 1-D en coordonnée de Riemann	30
3.1.2	Le problème de régulation aux frontières	30
3.2	Hypothèses et résultats	36
3.2.1	Discussion sur les hypothèses	38
3.2.2	Lien avec les couplages d'équations aux retards neutres	38
3.3	Preuve du Théorème 3.3	39
3.3.1	Existence de l'équilibre	39
3.3.2	Stabilité implique régulation	41
3.3.3	Propriété de stabilité entrée-état	42
3.3.4	Lyapunov complète inspirée du forwarding	43
3.3.5	Conclusion	46

Introduction

Ce chapitre est dédié à la régulation par contrôleurs P-I aux frontières de $n \times n$ équations hyperboliques linéaires couplées entre elles. En ajoutant ainsi une action intégrale, les équations hyperboliques sont couplées via leurs conditions frontières avec des équations différentielle ordinaires du premier ordre. La régulation dans ce contexte a été largement étudié depuis quelques années et notamment en utilisant des contrôleurs P-I et en démontrant la stabilité avec des fonctionnelles de Lyapunov. Parmi eux, [34] propose l'ajout d'un correcteur P-I aux frontières d'une équation de Saint-Venant afin de réguler la hauteur d'eaux dans les canaux fluviaux. Le récent livre de G. Bastin et J.M. Coron propose un chapitre entier à l'analyse de ce système [10, Chap 5.]. L'article [75] donne une condition (sous la forme d'inégalité matricielle) pour garantir la stabilité dans le cas général de $n \times n$ équations hyperboliques linéaires non couplées entre elles mais couplées via leurs conditions aux frontières avec des EDOs. Récemment, N.T. Trinh et al. dans [82], [83] ont montré qu'il était possible d'améliorer ces résultats en recherchant de nouvelles méthodes pour la construction de la fonctionnelle. Enfin, très récemment dans [19], les auteurs utilisent une fonctionnelle Lyapunov de forme similaire à la notre pour une équation de transport non linéaire. En isolant la partie limitante de la fonctionnelle, les auteurs arrivent à conclure sur une condition nécessaire et suffisante de stabilité exponentielle. La contribution de ce chapitre repose sur l'utilisation d'une nouvelle fonctionnelle de Lyapunov qui permet de mieux gérer la connexion EDO/EDP que les fonctionnelles de Lyapunov existantes. Sous réserve de connaître une fonctionnelle de Lyapunov pour le système sans l'action intégrale aux frontières et de vérifier certaines conditions de rang, le Théorème 3.3 permet de réguler m sorties à l'aide de m entrées vers les valeurs constantes que l'on désire. Dans un premier temps, on introduit la classe d'équations aux dérivées partielles sur laquelle nous allons établir le résultat principal : le Théorème 3.3. Cette classe de systèmes rassemble un nombre important de modèles mathématiques construits à partir des équations permettant de décrire les principes physiques de conservation pour les cas où l'on ne prend en considération qu'une dimension spatiale. La deuxième partie présente le Théorème 3.3, les hypothèses nécessaires pour l'appliquer sont discutées. Dans les cas les plus simples, les EDPs composant le système peuvent se ré-écrire comme des équations différentielles aux retards neutres. Le Corollaire 3.1 permet alors de traduire les résultats du Théorème 3.3 dans ce contexte. Enfin, la fin du chapitre est dédiée à la preuve du théorème et en particulier à la construction de la fonctionnelle de Lyapunov.

3.1 Contexte et motivations

On appelle loi de conservation l'écriture mathématique du principe physique qui stipule qu'à l'intérieur d'un domaine fermé la variation dynamique de certaines variables est liée aux flux des variables extensives à travers les frontières du domaine fermé et à la consommation/production à l'intérieur du domaine. De nombreux problèmes issus de la physique respectent ces lois de conservation. En conséquence, de nombreux modèles mathématiques peuvent être utilisés en suivant l'approche générale présentée par Dafermos dans [25, Chap.3,

Chap.7].

Dans ce chapitre, on se restreint à l'étude des lois de conservation à une seule variable d'espace, et plus spécifiquement aux équations admettant une transformation dans les coordonnées de Riemann définies plus loin. Cette classe de système à une dimension d'espace issue de principe de conservation (masse, énergie, ...) est très présente en physique, comme par exemple les équations d'Euler en mécanique des fluides qui découlent de la conservation de la masse, de l'énergie et de la quantité de mouvement. En conséquence, un grand nombre de phénomènes thermodynamiques, biologiques, économiques... peuvent être modélisés mathématiquement par ce type d'équations (voir [10, chap.1], [25], [9], [47] pour des exemples spécifiques d'applications). En ingénierie, il peut également être nécessaire d'adopter ce genre d'approches pour résoudre certaines problématiques. Quelques exemples illustrant l'intérêt de ce type de modèle pour l'automatique sont listés ci-dessous :

- Dans les forages, écrire les équations mécaniques en supposant que la tige est un solide indéformable permet de travailler avec les outils classiques de l'automatique [89, 41]. Néanmoins une telle approche ne permet pas de prendre en compte l'aspect propagation, régit par ses propres lois dynamiques. On peut ainsi montrer que l'erreur entre les solutions issues d'un modèle de dimension finie et de dimension infinie pour le forage augmentera dans le temps (on peut se référer à [76] ou à la Section 4.3 de ce manuscrit pour plus de détails)
- En ingénierie électrique, une ligne de transmission peut être vue comme une ligne "sans perte" possédant une résistance. Néanmoins la complexité et la taille actuelles des réseaux ou des projets de réseaux (smart-grid) nous impose désormais de prendre en compte la propagation des variables électriques (tension, intensité) le long des lignes pour optimiser les réseaux.
- En ingénierie hydraulique, les équations de Saint-Venant permettent de modéliser mathématiquement l'évolution de la hauteur d'eau et du débit d'eau à n'importe quel endroit d'un canal de section constante. On peut aussi prendre en compte l'inclinaison du canal en ajoutant des termes sources aux équations. Citons notamment [34] qui propose un résultat sur la régulation de la hauteur d'eau de plusieurs canaux en contrôlant l'ouverture des écluses. Ce résultat est obtenu avec un simple retour proportionnel intégral des variables aux conditions frontières du système (i.e. au niveau des écluses). La preuve du résultat repose sur la construction d'une fonctionnelle de Lyapunov à la manière du Théorème 3.3.
- Dans certains cas, un système modélisé à l'aide d'équations aux dérivées partielles paraboliques ou hyperboliques est équivalent à un système à retard (neutre dans le cas hyperbolique). Ainsi, un système linéaire avec $n \times n$ équations hyperboliques 1D sans termes sources peut être vu comme un système composé de n équations à retard. Les motivations pour la prise en compte de retards dans l'étude des systèmes sont nombreuses et la recherche sur ces systèmes a fourni de nombreux résultats. Dans ce cas,

un résultat basé sur les systèmes hyperboliques sans terme source peut s'appliquer aux retards neutres, et inversement !

Le Corollaire 3.1 propose de faire un lien entre notre résultat principal, basé sur les EDPs hyperboliques, et la régulation de n équations aux retards neutres couplées entre elles. Par ailleurs, la Proposition 4.6 du prochain chapitre est démontrée avec une méthode développée initialement pour les systèmes à retard.

3.1.1 Loi de conservation 1-D en coordonnée de Riemann

Lorsqu'une seule variable d'espace est prise en compte, de nombreuses loi de conservations linéaires admettent des invariants de Riemann (voir [25, Sec. 7.3] pour de plus ample détails). La solution physique vérifie alors l'EDP suivante :

$$R_t(x, t) + \Lambda(x)R_x(x, t) + M(x)R(x, t) = 0, \quad t \in [0, +\infty[, \quad x \in [0, 1], \quad (3.1)$$

où

$$\Lambda^+(x) = \text{diag}\{\lambda_1(x), \dots, \lambda_p(x)\}, \quad \text{les } p \text{ valeurs propres positives.}$$

$$\Lambda^-(x) = \text{diag}\{\lambda_{p+1}(x), \dots, \lambda_n(x)\}, \quad \text{les } (n-p) \text{ valeurs propres négatives.}$$

Dans ce cas

$$\Lambda(x) = \frac{1}{L} \begin{pmatrix} \Lambda^+(x) & 0 \\ 0 & -\Lambda^-(x) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M(x) = \begin{pmatrix} M^+(x) \\ M^-(x) \end{pmatrix}$$

où $\Lambda : [0, 1] \rightarrow D_n$, $M : [0, 1] \rightarrow \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ et où Λ , M sont des applications de classe C^1 . Le système précédent est presque identique à celui étudié tout au long du chapitre 5 du récent livre de G. Bastin et J-M Coron [10]. Pour simplifier l'analyse et la construction des fonctionnelles de Lyapunov, on a normalisé les équations en modifiant $\Lambda(x)$ pour que la solution soit définie $\forall x \in [0, 1]$. De très nombreux exemples d'applications utilisant ces équations sont données dans [10, Chap 1], par exemple les réactions chimiques, l'évolution du trafic routier, l'évolution d'une maladie dans une population, etc.

3.1.2 Le problème de régulation aux frontières

Dans le premier chapitre précédent, on a discuté la faisabilité de la régulation pour un problème de Cauchy abstrait sous la forme (2.1)-(2.2)-(2.3). Les résultats existants sur ces systèmes abstraits nécessitent en particulier que $\mathcal{B}$ soit un opérateur borné (ou que l'on puisse appliquer le Corollaire 2.2).

Cette hypothèse n'est pas réalisée lorsque l'on souhaite agir aux frontières des domaines des EDPs. En effet dans ce cas on aura toujours $\mathcal{B}u(t) \approx (aR(0, t) + bR(1, t))u(t)$ où a et b sont des scalaires et dans ce cas on ne pourra pas trouver de réel strictement positif c vérifiant la définition B.2, c'est à dire tel que :

$$\|(R(0, t) + R(1, t))u(t)\|_L^2 = |(R(0, t) + R(1, t))u(t)| \leq c\|R(x, t)\|_L^2$$

L'impossibilité de conclure avec les outils des semigroupes est la principale motivation des contributions de ce chapitre.

De nombreuses applications envisageables pour l'automatique sur des modèles de dimension infinie nécessitent d'exprimer le problème dans un intervalle spatial fermé. La solution du système à l'intérieur du domaine spatial dépend alors nécessairement des conditions aux frontières. Dans ce qui suit on examinera les solutions d'une simple équation de transport, puis on généralisera au cas à n équations de transport avant de prouver le caractère bien posé des solutions à la fin de la section.

3.1.2.1 Cas du transport 1-D linéaire

Les conditions aux frontières sont essentielles au caractère "bien posé" des solutions. Pour s'en convaincre, on va analyser les solutions d'une simple équation de transport analytique, i.e. :

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + c \frac{\partial \mu}{\partial x} = 0 \quad (3.2)$$

La méthode des caractéristiques permet de montrer que les solutions sont constantes le long de droites caractéristiques. Dans ce cas la droite caractéristique est $\xi = x - ct$, on vérifie facilement le fait que la solution se propage le long de l'unique courbe caractéristique en écrivant la dérivée totale de μ par rapport à la ligne caractéristique ξ :

$$\frac{d}{d\xi} \mu = \frac{\partial \mu}{\partial x} \frac{dx}{d\xi} + \frac{\partial \mu}{\partial t} \frac{dt}{d\xi} \quad (3.3)$$

$$= \frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{c \partial t} \quad (3.4)$$

$$= 0 \quad (3.5)$$

En fonction du signe de la constante " c ", on aura deux comportements possibles pour les solutions, résumés sur la Figure 3.1 tirée de [26]. A l'aide de ce graphe, pour connaître une

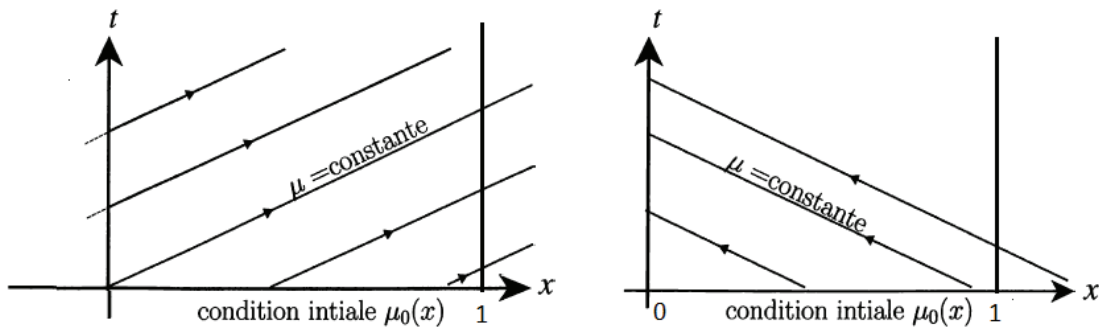


FIGURE 3.1 – A droite, propagation des solutions avec c positif, à gauche pour c négatif

valeur particulière de $\mu(x, t)$, il suffit de regarder la valeur de la droite de pente μ à l'origine de la droite caractéristique qui passe par ce point. Par exemple, si $c = 1$, on a :

$$\mu(1, 1) = \mu(0, 0) = \mu(0.5, 0.5)$$

Mais dans ce cas on a aussi $\mu(1, 2) = \mu(0, 1) = \mu(-1, 0)$. Est puisque l'intervalle d'étude est l'intervalle $x \in [0, 1]$ cela pose un problème pour définir la solution $\mu(1, t)$ pour de grand t . De manière générale, les solutions $\mu(x, t)$, ne sont plus définies dès que $t > 1/c$.

A partir de cette définition locale de la solution, on constate la nécessité de définir $\mu(0, t)$ lorsque $c > 0$ et de définir $\mu(1, t)$ lorsque $c < 0$. De cette façon on garantit la solution locale pour tout $x \in [0, 1]$ pour tout $t > 1/c$.

3.1.2.2 Conditions aux frontières

Revenons à (3.1). On note alors $R_{IN}(t)$ le vecteur contenant les conditions frontières nécessaires à l'existence locale de la solution :

$$R_{IN} = \begin{bmatrix} R_1(0, t) \\ \vdots \\ R_m(0, t) \\ R_{m+1}(1, t) \\ \vdots \\ R_n(1, t) \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

et $R_{OUT}(t)$:

$$R_{OUT} = \begin{bmatrix} R_1(1, t) \\ \vdots \\ R_m(1, t) \\ R_{m+1}(0, t) \\ \vdots \\ R_n(0, t) \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

le vecteur des solutions engendré par R_{IN} après propagation le long des droites caractéristiques. Remarquons qu'en l'absence de termes sources (cas $M(x) = 0$), on peut lier les vecteurs $R_{IN}(t)$ et $R_{OUT}(t)$ par des retards. Chaque composante vectorielle vérifie :

$$R_{OUT}^i(t) = R_{IN}^i \left(t - \frac{1}{\int_0^1 |\lambda_i(x)|} \right).$$

Afin de conserver le maximum de généralité possible, on suppose que chaque composante entrante de R_{IN} dépend d'une combinaison linéaire du vecteur sortant R_{OUT} , on note alors :

$$R_{IN} = K R_{OUT}, \quad K \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (3.8)$$

Dans ce qui suit, on définit l'entrée et la sortie du système, la loi de contrôle par retour proportionnel intégral, l'ensemble des perturbations que l'on souhaite rejeter et les espaces d'existence des différentes solutions.

3.1.2.3 Système en boucle fermée

Considérons le cas où l'on utilise m entrées et m sorties sous forme vectorielle pour garantir la régulation de chacune des m sorties vers autant de références constantes arbitraires. Soient les m sorties aux frontières de (3.1), on note :

$$y(t) = L_1 R_{IN}(t) + L_2 R_{OUT}(t), \quad L_i \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad i = 1, 2, \quad y \in \mathbb{X}^m$$

Soient les m entrées aux frontières de (3.1), on pose :

$$R_{IN}(t) = K R_{OUT}(t) + B u(t), \quad B \in \mathbb{R}^{n \times m}, \quad u \in \mathbb{X}^m \quad (3.9)$$

On souhaite étudier le système en boucle fermée avec un contrôleur P-I et en prenant en compte des perturbations constantes. Les variables d'entrées et de sorties sont alors perturbées respectivement par $D_u w_u$ et $D_y w_y$ avec $D_u, D_y \in \mathcal{M}_{m \times m}$ et $w_u, w_y \in \mathbb{R}^m$. Les équations précédentes deviennent :

- $y(t) = L_1 R_{IN}(t) + L_2 R_{OUT}(t) + D_y w_y, \quad L_i \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad i = 1, 2, \quad y \in \mathbb{X}^m$
- $R_{IN}(t) = K R_{OUT}(t) + B u(t) + D_u w_u, \quad B \in \mathbb{R}^{n \times m}, \quad u \in \mathbb{X}^m$

Mises ensemble, les différentes équations du problème permettent de construire un problème de Cauchy pour lesquelles il existe une seule et unique solution dépendant continûment des conditions initiales. Ce problème de Cauchy se décompose en 4 parties distinctes.

1. Une partie EDP constituée de n équations hyperboliques non-homogènes :

$$R_t(x, t) + \Lambda(x) R_x(x, t) + M(x) R(x, t) = 0, \quad t \in [0, +\infty[, \quad x \in [0, 1], \quad (3.10)$$

2. Une partie EDO, qui décrit les dynamiques du correcteur intégral de dimension m avec une perturbation constante distribuée dans le terme $\tilde{y}_{ref} = y_{ref} - D_y w_y$:

$$\dot{z}(t) = L_1 R_{IN}(t) + L_2 R_{OUT}(t) - \tilde{y}_{ref} \quad (3.11)$$

3. Une équation matricielle donnant les conditions aux frontières de la partie EDP et permettant d'y injecter la loi P-I. Dans le cas le plus général, on a :

$$R_{IN}(t) = K^e R_{OUT}(t) - B k_i K_i^e z(t) + D_u^e w_u \quad (3.12)$$

où $K^e = (I_{dn} + B k_p K_p L_1)^{-1} (K - B k_p K_p L_2)$, $K_i^e = (I_{dm} + B k_p K_p L_1)^{-1} K_i$ et $D_u^e = D_u + (B k_p K_p L_1)^{-1} D_u$.

Remarquons que K_i^e et K^e sont équivalents au changement de variable déjà discuté dans la Section 2.2.

La démonstration de la stabilité de la boucle fermée lorsque l'on utilise la

partie intégrale du contrôleur peut se faire indépendamment de la partie proportionnelle. Afin d'alléger les notations, on utilisera toujours la notation avec K , K_i et D_u dans ce qui suit comme si $k_p = 0$. Dans le cas où le gain k_p est utilisé pour la stabilisation, tout ce qui suit reste valable en remplaçant K , K_i et D_u par K^e , K_i^e et D_u^e respectivement.

4. Les conditions initiales permettant de garantir l'existence de la solution :

$$R(x, 0) = R_0(t) : [0, 1] \mapsto L^2(0, 1) \text{ (resp. } H^1(0, 1)), \quad z(0) = z_0 \in \mathbb{R}^m \quad (3.13)$$

3.1.2.4 Caractère bien-posé de la solution

Le problème est dit bien-posé au sens d'Hadamard si :

1. Une solution existe ;
2. Cette solution est unique ;
3. Cette solution dépend de façon continue des données initiales dans le cadre d'une topologie raisonnable.

La forme spécifique du système composé des équations (3.10),(3.11),(3.12),(3.13) permet d'utiliser les résultats sur l'existence de la solution du livre récent de G. Bastin et J-M. Coron : [10, Annexe A]. Lorsque $y_{ref} = w_u = w_y = 0$, les deux théorèmes qui donnent les espaces d'existences des solutions $\mathbb{X}$ et $\mathbb{X}_\ell$ en fonction des données initiales considérées sont rappelés. Soit :

$$\mathbb{X}_\ell = (H^1[0, 1]; \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^m \quad (3.14)$$

Théorème 3.1 (Théorème A.1 de [10] :)

Soient $v = (R, z)^\top$, pour tout $v_0 \in \mathbb{X}_\ell$ satisfaisant les conditions de compatibilité (3.12) ainsi que la compatibilité C^1 au sens où :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -\Lambda^+(0) \frac{\partial}{\partial x} R_i(0, 0) - M^+(0) R_i(0, 0) \\ -\Lambda^-(1) \frac{\partial}{\partial x} R_j(1, 0) - M^-(1) R_j(1, 0) \end{bmatrix} &= K^e \begin{bmatrix} -\Lambda^+(1) \frac{\partial}{\partial x} R_i(1, 0) - M(1)^+ R_i(1, 0) \\ -\Lambda^-(0) \frac{\partial}{\partial x} R_j(0, 0) - M(0)^- R_j(0, 0) \end{bmatrix} \\ &\quad - Bk_i K_i^e (L_1 R_{IN}(0) + L_2 R_{OUT}(0) - \tilde{y}_{ref}), \\ i &= [1, \dots, p] \quad j = [p + 1, \dots, n] \end{aligned}$$

il existe une seule et unique solution pour la solution $v = (R, z)$ satisfaisant (3.10),(3.11),(3.12) avec $y_{ref} = w_u = w_y = 0$. L'espace d'existence de cette solution vérifie alors :

$$R \in C^1([0, +\infty[; L^2([0, 1]; \mathbb{R}^n)) \cap C^0([0, +\infty[; H^1([0, 1]; \mathbb{R}^n)) \quad (3.15)$$

$$z \in C^1([0, +\infty[, \mathbb{R}^m) \quad (3.16)$$

Remarque 3.1

Le théorème ne prend pas en compte le couplage avec des EDOs aux bords. Néanmoins, lorsque $z(t) = 0$, on sait qu'il existe une seule et unique solution qui vit dans l'espace (3.15), ce qui implique que $\mathbf{R}_{IN} \in C^1([0; \infty[; \mathbb{R}^n)$ et $\mathbf{R}_{OUT} \in C^1([0; \infty[; \mathbb{R}^m)$. En utilisant (3.11), on sait que $z(t) \in C^2([0; \infty[; \mathbb{R}^n)$ puisque $z(t)$ dépend continûment de l'intégrale des vecteurs frontières. L'ajout par addition de m fonctions $z(t)$ dans les conditions aux frontières (3.12) ne modifiera donc pas les espaces d'existences des solutions.

Soit :

$$\mathbb{X} = (L^2[0; 1]; \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^m. \quad (3.17)$$

Théorème 3.2 (Théorème A.6 de [10] :)

Pour tout $v_0 \in \mathbb{X}$ et vérifiant les conditions aux frontières, il existe une seule et unique solution $v = (R, z)^\top \in \mathbb{X}$ qui vérifie les équations (3.10), (3.11), (3.12) avec $y_{ref} = w_u = w_y = 0$. De plus, l'espace d'existence de cette solution est :

$$R \in C^0([0, +\infty[; L^2([0, 1]; \mathbb{R}^n))$$

$$z \in C^0([0, +\infty[, \mathbb{R}^m)$$

3.1.2.5 Problématique

On note v_∞ l'état d'équilibre des équations (3.10)-(3.13). La problématique que l'on souhaite résoudre est la suivante :

L'objectif est de choisir k_p, K_p, k_i, K_i tel que :

1. Stabilité : L'état d'équilibre du système (3.10)-(3.13) est globalement exponentiellement stable. Autrement dit, il existe deux scalaires strictement positifs k_e et ν_e tel que $\forall t \in \mathbb{R}^+$ et $\forall v_0 \in \mathbb{X}$ on a :

$$\|v(t) - v_\infty\|_{\mathbb{X}} \leq k_e e^{-\nu_e t} \|v_0 - v_\infty\|_{\mathbb{X}} \quad (3.18)$$

2. Régulation : Lorsque $v_0 \in \mathbb{X}_\ell$, la sortie du système doit converger vers une référence arbitraire noté y_{ref} . Comme la sortie est perturbée, on pose $\tilde{y}_{ref} = y_{ref} - D_y d_y$ avec $y_{ref} \in \mathbb{R}^m$, et on cherche à garantir :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t) - \tilde{y}_{ref}\|_{\mathbb{R}^m} = 0 \quad (3.19)$$

3. Robustesse : La stabilité (1) et la régulation (2) doivent être garanties malgré les perturbations constantes d_u et d_y distribuées sur les conditions aux frontières et sur les sorties par D_u et D_y .

3.2 Hypothèses et résultats

Les hypothèses suffisantes pour répondre à la problématique sont données ci-dessous avant de donner le résultat principal de ce chapitre sous forme de théorème.

Notons $K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}$, avec $K_{11} \in \mathcal{M}_{p \times p}(\mathbb{R})$; $K_{12} \in \mathcal{M}_{m \times n-p}(\mathbb{R})$; $K_{21} \in \mathcal{M}_{n-p \times p}(\mathbb{R})$; $K_{22} \in \mathcal{M}_{n-p \times n-p}(\mathbb{R})$. On définit également $K_+ = \begin{bmatrix} I_{d,p} & 0 \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}$ et $K_- = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ 0 & I_{d,n-p} \end{bmatrix}$

Hypothèse 4 (Stabilisation exponentielle ISS)

Il existe une fonction de classe C^1 , diagonale, notée $P : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, un nombre réel $\nu > 0$ et une matrice définie positive $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tels que les inégalités suivantes soient vérifiées

$$P_s(s) + (P(s)\Lambda(s))_s - P(s)M(s) - M(s)^\top P(s) \leq -\nu P(s), \quad (3.20)$$

$$\underline{p} I_{dn} \leq P(s) \leq \bar{p} I_{dn}, \quad \forall s \in [0, 1], \quad (3.21)$$

$$K_-^\top P(0)\Lambda(0)K_- - K_+^\top P(1)\Lambda(1)K_+ \leq -S \quad (3.22)$$

Cette hypothèse est équivalente à l'existence d'une fonctionnelle de Lyapunov pour le système en boucle ouverte. On trouve cette condition dans [10] pour le cas où S est semi-définie positive. Ici en revanche le caractère strict de la positivité de S traduit le besoin fondamental d'avoir une propriété de stabilité entrée-état (souvent désignée sous l'acronyme "ISS") par rapport aux perturbations et aux entrées agissant sur les conditions aux frontières. Dans le cas homogène avec M diagonale, on peut toujours trouver une fonctionnelle vérifiant l'hypothèse ci-dessous tant que le système peut être stabilisé avec la partie proportionnelle du contrôleur. Dans le cas plus général on peut se référer à l'article de C. Prieur et al. sur les Lyapunov ISS ([64]).

La seconde hypothèse est liée à la condition du rang dans le Théorème 2.1 du premier chapitre. C'est une condition suffisante pour l'existence d'un état équilibre pour le système en boucle fermée. Soit $\Phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ la matrice solution de l'équation différentielle bien-posée suivante :

$$\Phi_s(s) = \Lambda(s)^{-1} M(s) \Phi(s), \quad \Phi(0) = I_{dn},$$

avec $\Phi(s) = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(s) & \Phi_{12}(s) \\ \Phi_{21}(s) & \Phi_{22}(s) \end{bmatrix}$ et

$$\Phi_+(1) = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(1) & \Phi_{12}(1) \\ 0 & I_{d_{n-\ell}} \end{bmatrix}, \quad \Phi_-(1) = \begin{bmatrix} I_{d_\ell} & 0 \\ \Phi_{21}(1) & \Phi_{22}(1) \end{bmatrix}$$

Hypothèse 5 (Condition du rang 1)

La matrice de $\mathbb{R}^{n \times n}$ définie par $\Phi_-(1) - K_e \Phi_+(1)$ est de rang plein et l'opérateur T_1 défini par

$$T_1 = (L_1 \Phi_-(1) + L_2 \Phi_+(1)) (\Phi_-(1) - K \Phi_+(1))^{-1} B. \quad (3.23)$$

existe et est inversible.

Une dernière condition doit être introduite afin de garantir la solution de la fonctionnelle construite pour la démonstration du Théorème 3.3 de la page 37. Soit $\Psi : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}^{n \times n}$ la matrice solution de l'équation différentielle bien-posée suivante :

$$\Psi_s(s) = \Psi(s) (M(s) - \Lambda_s(s)) \Lambda(s)^{-1}, \quad \Psi(0) = I_{d_n}. \quad (3.24)$$

Hypothèse 6 (Condition de rang 2)

La matrice de $\mathbb{R}^{n \times n}$ définie par :

$$\Psi(1)\Lambda_0(1)K_+ - \Lambda_0(0)K_- \quad (3.25)$$

est de rang plein, donc la matrice T_2 ci-dessous est inversible.

$$T_2 = -L_1 B + F \left(\Lambda(0) \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} - \Psi(1)\Lambda(1) \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix} \right)$$

où

$$F = (L_1 K + L_2) (\Lambda(0)K_- - \Psi(1)\Lambda(1)K_+)^{-1}. \quad (3.26)$$

et où $B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$.

Remarque 3.2

Dans le cas particulier où Λ est une matrice diagonale constante et $M = 0$, les hypothèses 5 et 6 sont équivalentes. Nous avons montré cela dans l'article [77] qui traite de ce cas particulier. Il n'y a alors qu'une seule hypothèse, celle du rang.

Avec ces trois hypothèses, le Théorème suivant peut être formulé :

Théorème 3.3 (Régulation pour $n \times n$ équations hyperboliques non-homogènes avec terme source)

Supposons que les hypothèses 4, 5 et 6 soient satisfaites. Soit $K_i = T_2^{-1}$, il existe un $k_i^* > 0$ tel que pour tout k_i tel que $0 < k_i < k_i^*$, la problématique de régulation est résolue. Plus précisément, pour tout $(w_u, w_y, y_{ref}) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$, on a :

1. Il existe un état d'équilibre exponentiellement stable noté v_∞ dans $\mathbb{X}$ et vérifiant (3.10), (3.11), (3.12) et (3.13). C'est à dire qu'il existe $\nu_e > 0$ et $k_e > 0$ tels que $\forall t \geq 0$:

$$\|v(t) - v_\infty\|_{\mathbb{X}} \leq k_e \exp(-\nu_e t) \|v_0 - v_\infty\|_{\mathbb{X}}. \quad (3.27)$$

2. De plus, si v_0 satisfait la condition de compatibilité C^1 donnée dans le Théorème 3.1 et est à valeur dans $\mathbb{X}_\ell$, alors on peut démontrer que la sortie est régulée, i.e :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|y(t) - \tilde{y}_{ref}\| = 0. \quad (3.28)$$

3.2.1 Discussion sur les hypothèses

Remarque 3.3 (Discussion sur l'hypothèse 4 :)

La régulation que l'on souhaite obtenir nécessite que le système en boucle ouverte admette une fonctionnelle de Lyapunov. C'est la seule hypothèse où l'on peut utiliser la partie proportionnelle du contrôleur afin de choisir K^e (la matrice gérant les conditions aux frontières (3.12)). Cette condition peut donc être vue comme une hypothèse de stabilisabilité de la solution dans le cas où la solution du système en boucle ouverte n'est pas exponentiellement stable ou ne permette pas de trouver une fonction P vérifiant l'hypothèse 4.

Remarque 3.4 (Discussion sur l'hypothèse 5 :)

L'hypothèse 5 traduit simplement l'existence d'une bijection entre le vecteur d'entrée à l'équilibre u_∞ et de sortie à l'équilibre y_∞ .

3.2.2 Lien avec les couplages d'équations aux retards neutres

Dans le cas où la matrice $M(x)$ de l'équation (3.1) est nulle (i.e. pas de terme source ni de couplage), la partie hyperbolique du système Σ_h se réduit à n équations aux retards. En notant le retard $\tau_k = \frac{1}{\int_0^1 |\lambda_k(s)| ds}$, pour les n équations de transport évoluant chacune à la vitesse $\lambda_k(x)$ on a :

$$R_t(x, t) + \Lambda(x)R_x(x, t) = 0 \implies R_{OUT}^k(t) = R_{IN}^k(t - \tau_k), \quad \forall k \in [0, 1, \dots, n] \quad (3.29)$$

En utilisant l'équation (3.9), on a :

$$R_{IN}^k(t) = KR_{IN}^k(t - \tau_i) + Bu(t)$$

Notons $X(t) = R_{IN}(t)$ et $\mathcal{D}_\tau$ l'opérateur de retard $\mathcal{D}_\tau : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ tel que, pour toute fonction continue $f^1(t), \dots, f^k(t)$:

$$\mathcal{D}_\tau f^k(t) = f^k(t - \tau_k)$$

Le problème en boucle fermée est alors de déterminer k_i, K_i tels que la solution $X(t)$ vérifiant :

$$\dot{X}(t) - K\mathcal{D}_\tau \dot{X}(t) = Bk_i K_i [L_1 X(t) + L_2 \mathcal{D}_\tau X(t) - y_{ref} + D_u w_u] \quad (3.30)$$

soit globalement exponentiellement stable. Dans ce cas l'hypothèse du rang, nécessaire à la régulation, est considérablement simplifiée. Il suffit de vérifier que la matrice :

$$T = (L_1 + L_2) (\text{Id}_n - K^e)^{-1} B$$

est de rang plein.

Corollaire 3.1

Il existe k_i^ tel que, pour tout k_i, K_i vérifiant :*

$$0 < k_i < k_i^*, \quad K_i = - \left[(L_1 + L_2) (\text{Id}_n - K^e)^{-1} B \right]^{-1}$$

Alors, on a les deux résultats suivants :

1. *Le point d'équilibre du système (3.30) est unique et globalement exponentiellement stable.*
2. $\lim_{t \rightarrow +\infty} |L_1 X(t) + L_2 \mathcal{D}_\tau X(t) - y_{ref}| = 0.$

La preuve de ce résultat découle de celle du Théorème principal sans terme source (i.e. avec $M = 0$). Les hypothèses sur les espaces fonctionnels où vivent les conditions initiales du Théorème 3.3 disparaissent puisque le système ne dépend plus de la variable d'espace x . Néanmoins, en toute rigueur, je pense qu'elles devraient apparaître dans la définition de la distribution des retards $\mathcal{D}_\tau$. La Section suivante est dédiée à la démonstration du résultat principal (le Théorème 3.3).

3.3 Preuve du Théorème 3.3

Le Théorème 3.3 est démontré en utilisant quatre propositions :

- La Proposition 3.1 montre l'existence et l'unicité de l'équilibre pour le système en boucle fermée perturbée en utilisant l'hypothèse 5.
- La Proposition 3.2 exprime que pour démontrer les points 1 et 2 du Théorème il est suffisant de construire une fonctionnelle de Lyapunov pour la solution du système en boucle fermée autour de l'état d'équilibre donné par la Proposition 3.1.
- La Proposition 3.3 affirme que l'hypothèse 4 implique l'existence d'une fonctionnelle de Lyapunov pour la solution $\tilde{R}(x, t) = R(x, t) - R_\infty(x)$ vérifiant la propriété de stabilité entrée-état suivante :

$$\dot{V}(\tilde{R}(\cdot, t)) = -\mu V(\tilde{R}(\cdot, t)) + c|u(t)|^2$$

- Enfin la Proposition 3.4 résume la construction de la fonctionnelle nécessaire à la Proposition 3.2 en utilisant l'inégalité de la Proposition 3.3, ce qui conclut la démonstration du théorème.

3.3.1 Existence de l'équilibre

Afin de montrer ce point, on commence par donner explicitement l'état d'équilibre donné par (3.10)-(3.13) lorsque la dynamique est nulle. L'hypothèse 5 est alors suffisante pour garantir l'existence de l'équilibre. Enfin, nous montrons que s'il existe une fonctionnelle de Lyapunov candidate pour le système en boucle fermée, il suffit de prendre des conditions initiales vérifiant (3.12) et appartenant $H^1([0, 1]; \mathbb{X}^n)$.

L'état d'équilibre du système est noté v_∞ . Chacune des variables à l'équilibre est désignée en ajoutant l'indice ∞ à la variable, par exemple : $R_{IN, \infty}, z_\infty, \dots$ On démontre le premier point du Théorème avec la proposition suivante :

Proposition 3.1

L'hypothèse 5 est suffisante pour montrer l'existence d'un état d'équilibre pour le système dynamique perturbé vérifiant les équations (3.10)-(3.13).

Preuve :

Tout d'abord, l'état d'équilibre doit vérifier :

$$\Lambda(R(x))_\infty + M(R(x))_\infty = 0$$

pour tout x appartenant à $[0, 1]$. On rappelle que la matrice $\Phi : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}^{n \times n}$ est la solution de :

$$\Phi_s = \Lambda_0(s)^{-1} \Lambda_1(s) \Phi(s), \quad \Psi(0) = I_{dn}$$

donc à l'équilibre, l'état $R_\infty(x)$ est donné par :

$$R_\infty(x) = \Phi(x) R_\infty(0)$$

,

$$R_{IN,\infty} = \Phi_-(1) R_\infty(0) \quad (3.31)$$

$$R_{OUT,\infty} = \Phi_+(1) R_\infty(0) \quad (3.32)$$

puisque $z_t = 0$, on a aussi :

$$(L_1 R_{IN,\infty} + L_2 R_{OUT,\infty}) = y_{ref} - w_y \quad (3.33)$$

En utilisant les équations précédentes, on a :

$$(L_1 \Phi_-(1) + L_2 \Phi_+(1)) R_\infty(0) = y_{ref} - w_y \quad (3.34)$$

D'un autre côté, les conditions frontières imposent :

$$(\Phi_-(1) - K \Phi_+(1)) R_\infty(0) = B k_i K_i z_\infty + D_u w_u; \quad (3.35)$$

A l'équilibre, on la relation entre l'état d'équilibre $(R_\infty(x), z_\infty)$ et les données y_{ref}, w_y, w_u suivantes :

$$z_\infty = \frac{K_i^{-1}}{k_i} T_1^{-1} \left[y_{ref} - w_y - (L_1 \Phi_-(1) + L_2 \Phi_+(1)) (\Phi_-(1) - K \Phi_+(1))^{-1} w_u \right] \quad (3.36)$$

$$R_\infty(x) = \Phi(x) (\Phi_-(1) - K \Phi_+(1))^{-1} (k_i B K_i z_\infty + w_u) \quad (3.37)$$

Pour tout w_y et y_{ref} dans $\mathbb{R}^m$, w_u dans $\mathbb{R}^m$, l'équation précédente et (3.34) admettent une solution puisque l'hypothèse 5 assure que T_1 est inversible et que la matrice K_i est de rang plein. On peut introduire alors écrire la dynamique du système autour de ce point d'équilibre en posant $\tilde{R}(x, t) = R(x, t) - R_\infty$ et $\tilde{z}(t) = z(t) - z_\infty$. Ces nouvelles variables sont solutions du système d'équations :

$$\begin{aligned} \tilde{R}_t &= \Lambda \tilde{R}_x, \quad x \in (0, 1), \\ z_t &= L_1 \begin{bmatrix} \tilde{R}_+(t, 0) \\ \tilde{R}_-(t, 1) \end{bmatrix} + L_2 \begin{bmatrix} \tilde{R}_+(t, 1) \\ \tilde{R}_-(t, 0) \end{bmatrix}, \quad t \in [0, +\infty) \end{aligned} \quad (3.38)$$

avec les conditions aux frontières :

$$\begin{bmatrix} \tilde{R}_+(t, 0) \\ \tilde{R}_-(t, 1) \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} \tilde{R}_+(t, 1) \\ \tilde{R}_-(t, 0) \end{bmatrix} + Bu(t), \quad (3.39)$$

$$u(t) = k_i K_i \tilde{z}(t). \quad (3.40)$$

On peut donc directement appliquer les Théorèmes 3.1 et 3.2 pour démontrer le point 1) du Théorème principal. ■

3.3.2 Stabilité implique régulation

L'objectif de la proposition suivante est de réduire le problème de régulation à un simple problème de stabilisation.

Proposition 3.2

Considérons le système vérifié par $\tilde{R}(x, t)$ et $\tilde{z}(t)$ et supposons qu'il existe une fonctionnelle $W : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}_+$, et des nombres réels positifs ω et L_w tels que :

$$\frac{\|v_\infty - v\|_{\mathbb{X}}^2}{L_w} \leq W(v) \leq L_w \|v_\infty - v\|_{\mathbb{X}}^2. \quad (3.41)$$

Si $\tilde{v}_0$ est dans $\mathbb{X}_\ell$ et vérifie (3.12), que la solution $\tilde{v}(x, t)$ des équations (3.10)-(3.11)-(3.12) sans perturbations constantes est de classe C^1 et que la fonctionnelle W vérifie, le long des solutions :

$$W_t(t) \leq -\nu_e W(t), \quad (3.42)$$

avec l'abus de notation suivant $W(t) = W(v(t))$. Alors les points 1) et 2) du Théorème 3.3 sont démontrés.

Preuve :

La preuve de 1) est standard. Soit v_0 définie dans $\mathbb{X}_\ell$ et satisfaisant les conditions de comptabilité C^0 et C^1 . Il suit que v est de classe C^1 pour tout t . En conséquence, (3.42) est satisfaite pour tout $t \geq 0$. Le lemme de Gronwall's (définition en annexe) implique :

$$W(v(t)) \leq e^{-\nu_e t} W(v_0).$$

En utilisant (3.41), cela implique que (3.27) est vérifié avec $k = L_w$ et $\nu = \frac{\omega}{2}$ pour toutes conditions initiales dans $\mathbb{X}_\ell$. $\mathbb{X}_\ell$ étant dense dans $\mathbb{X}$, le résultat reste valable si les conditions initiales sont dans $\mathbb{X}$ et le point 2) est prouvé.

D'un autre côté, on a :

$$y(t) - y_{ref} = L_1 \begin{bmatrix} R_+(0, t) \\ R_-(1, t) \end{bmatrix} + L_2 \begin{bmatrix} R_+(1, t) \\ R_-(0, t) \end{bmatrix} + w_y - y_{ref}, \quad (3.43)$$

$$= L_1 \begin{bmatrix} \tilde{R}_+(0, t) \\ \tilde{R}_-(1, t) \end{bmatrix} + L_2 \begin{bmatrix} \tilde{R}_+(1, t) \\ \tilde{R}_-(0, t) \end{bmatrix}, \quad (3.44)$$

avec $\tilde{R}(x, t) = R(x, t) - R_\infty$. Pour montrer que l'on a bien la propriété de régulation recherchée, nous devons vérifier que la partie gauche de l'équation précédente tend vers 0. Montrons que c'est possible si les conditions initiales sont dans $\mathbb{X}_\ell$.

Soit v_0 dans $\mathbb{X}_\ell$ tout en vérifiant (3.12). Avec (3.14), on sait que $v_t \in C([0, \infty); \mathbb{X}_\ell)$. De plus, v_t satisfait les équations dynamiques (3.10)-(3.11)-(3.12) avec $d_u = 0$, $d_y = 0$, $y_{ref} = 0$ (il suffit de dériver les équations par rapport au temps). Donc, la norme du vecteur de la dérivée temporelle partielle de la solution notée $\|v_t(t)\|_{\mathbb{X}_\ell}$ converge exponentiellement vers 0 et en particulier :

$$\|\tilde{R}_t(\cdot, t)\|_{(L^2(0,1), \mathbb{R}^n)} \leq k_e e^{-\nu_e t} \|v_t(\cdot, t)\|_{\mathbb{X}_\ell}$$

En utilisant (3.10) :

$$\|\Lambda^{-1} \tilde{R}_x(\cdot, t) + \Lambda^{-1} M \tilde{R}(x, t)\|_{L^2((0,1), \mathbb{R}^n)} = \|\tilde{R}_x(\cdot, t)\|_{L^2((0,1), \mathbb{R}^n)}.$$

Par conséquent $\|\tilde{R}_x(\cdot, t)\|_{L^2((0,1), \mathbb{R}^n)}$ converge aussi vers zéro, tout comme $\|\tilde{R}(\cdot, t)\|_{H^1((0,1), \mathbb{R}^n)}$. On utilise alors l'injection de Sobolev pour conclure que :

$$\sup_{x \in [0,1]} |\tilde{R}(x, t)| \leq C \|\tilde{R}(\cdot, t)\|_{H^1((0,1), \mathbb{R}^n)},$$

où C est un réel positif, ce qui implique :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|L_1 \tilde{R}_{IN}(t)\| + \|L_2 \tilde{R}_{OUT}(t)\| = 0.$$

Enfin, en utilisant l'équation (3.43), l'équation (3.28) a bien été démontrée, et ainsi que le point 2) du Théorème 3.3 . ■

3.3.3 Propriété de stabilité entrée-état

Inspiré par les fonctionnelles de Lyapunov introduites dans [23] (voir aussi [10]), nous savons qu'un choix classique pour la construction de la fonctionnelle est donnée par

$V : L^2((0, 1), \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie comme :

$$V(R) = \int_0^1 \mathbf{R}(s)^\top P(s) \mathbf{R}(s) ds, \quad (3.45)$$

où $P : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ est une fonction de classe C^1 . Typiquement dans [23], ces fonctions sont des exponentielles dont le signe dépend du sens de propagation de l'équation de transport (c'est à dire du signe de la valeur propre associée dans la matrice diagonale Λ). Par abus de notation, on écrit $V(t) = V(\tilde{R}(\cdot, t))$ et on note $\dot{V}(t)$ la dérivée par rapport au temps de la fonctionnelle de Lyapunov le long de la solution de classe C^1 . Dans ce contexte et grâce à l'hypothèse 4, on a la proposition suivante :

Proposition 3.3

Si l'hypothèse 4 est vérifiée, alors il existe un nombre réel positif c tel que pour toute solution $R(x, t)$ de (3.10), (3.11), (3.12) engendrée par $\tilde{\mathbf{R}}_0$ dans $\mathbb{X}$ et satisfaisant (3.39) on ait :

$$\dot{V}(t) \leq -\nu V(t) + c|u(t)|^2. \quad (3.46)$$

Preuve :

On dérive la relation (3.45), le long de la solution du système en utilisant l'équation (3.10) :

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) = & - \int_0^1 2R(t, s)^\top P(s)\Lambda(s)R_s(t, s)ds \\ & - \int_0^1 R(t, s)^\top \left(P(s)M(s) + M(s)^\top P(s) \right) R(t, s)ds.\end{aligned}$$

avec une intégration par partie on a :

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) = & \int_0^1 R(t, s)^\top \left[(\Lambda(s)P(s))_s - P(s)M(s) - M(s)^\top P(s) \right] R(t, s)ds \\ & - R(t, 1)^\top (P(1)\Lambda(1) + \Lambda(1)P(1))R(t, 1) + R(t, 0)^\top (P(0)\Lambda(0) + \Lambda(0)P(0))R(t, 0).\end{aligned}$$

en utilisant (3.20) :

$$\dot{V}(t) \leq -\mu V(t) - R(t, 1)^\top (P(1)\Lambda(1) + \Lambda(1)P(1))R(t, 1) + R(t, 0)^\top (P(0)\Lambda(0) + \Lambda(0)P(0))R(t, 0).$$

Les conditions au frontière (3.12) et l'utilisation de l'inégalité (3.22) impliquent :

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) \leq & -\mu V(t) - [R_+(1)^\top \quad R_-(0)^\top] S \begin{bmatrix} R_+(1) \\ R_-(0) \end{bmatrix} \\ & + [R_+(1)^\top \quad R_-(0)^\top] Qu(t) + u(t)^\top Tu(t), \quad (3.47)\end{aligned}$$

où,

$$T = + [B_1^\top \quad 0] (P(0)\Lambda(0) + \Lambda(0)P(0)) \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} - [0 \quad B_2^\top] (P(1)\Lambda(1) + \Lambda(1)P(1)) \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

et,

$$Q = (P(0)\Lambda(0) + \Lambda(0)P(0)) \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} - (P(1)\Lambda(0) + \Lambda(0)P(1)) \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix}.$$

puisque S est définie positive, en sélectionnant c suffisamment grand, il vient :

$$\begin{bmatrix} -S & Q \\ Q^\top & T - cI_{d_m} \end{bmatrix} \leq 0.$$

En conséquence, (3.47) implique que (3.46) est vérifié. ■

3.3.4 Lyapunov complète inspirée du forwarding

En suivant la même philosophie que dans le chapitre 1, une fonctionnelle de Lyapunov peut être construite à partir de V en ajoutant un terme incluant les solutions $z(t)$ de l'espace d'état du contrôleur intégral. Ce résultat est résumé par la proposition suivante :

Proposition 3.4 (Construction de la fonctionnelle de Lyapunov)

Supposons que les hypothèses 4 et 6 soient vérifiées. Alors il existe une matrice K_i et un scalaire k_i^* tels que pour tout $k_i < k_i^*$, le long des solutions de classe C^1 du système l'on puisse construire une fonctionnelle de Lyapunov vérifiant les inégalités (3.41) et (3.42) de la Proposition 3.2.

Preuve :

Considérons l'opérateur $\mathcal{F} : L^1((0, 1); \mathbb{R}^n) \mapsto \mathbb{R}^n$ définit par :

$$\mathcal{F}R = \int_0^1 F\Psi(s)R(s)ds \quad (3.48)$$

On rappelle que F est choisit dans l'hypothèse 6 est vaut :

$$F = (L_1K + L_2)(\Lambda(0)K_- - \Psi(1)\Lambda(1)K_+)^{-1}$$

On souhaite montrer que la fonctionnelle de Lyapunov donnée par :

$$W(R(\cdot, t), z(t)) = V(t) + r(z - \mathcal{F}R(\cdot, t))^2 \quad (3.49)$$

soit une bonne fonctionnelle pour notre système.

Le long des solutions de classe C_1 des équations (3.38)-(3.40), on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\tilde{R}_t(t, \cdot) &= \mathcal{F}(-\Lambda(\cdot)\tilde{R}_s(t, \cdot) - M(\cdot)\tilde{R}(t, \cdot)) \\ &= \int_0^1 F\Psi(s)(-\Lambda(s)\tilde{R}_s(t, s) - M(s)\tilde{R}(t, s))ds \end{aligned}$$

en faisant une intégration par partie, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\tilde{R}_t(t, \cdot) &= \int_0^1 F(R(s)\Lambda(s))_s\tilde{R}(t, s)ds - \int_0^1 F\Psi(s)M(s)\tilde{R}(t, s)ds \\ &\quad - F\left(\Psi(1)\Lambda(1)\tilde{R}(t, 1) - \Lambda(0)\tilde{R}(t, 0)\right), \end{aligned}$$

puis,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\tilde{R}_t(t, \cdot) &= \int_0^1 F(\Psi_s(s)\Lambda_0(s) + \Psi(s)(\Lambda_s(s) - M(s)))\tilde{R}(t, s)ds \\ &\quad - F\left(\Psi(1)\Lambda(1)\tilde{R}(t, 1) - \Lambda(0)\tilde{R}(t, 0)\right). \end{aligned}$$

En utilisant la définition de la variable $\Psi(x)$ donné équation (3.24), on a :

$$\mathcal{F}\tilde{R}_t(t, \cdot) = -F\left(\Psi(1)\Lambda(1)\tilde{R}(t, 1) - \Lambda(0)\tilde{R}(t, 0)\right).$$

Avec les conditions aux frontières (3.39), on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\tilde{R}_t(t, \cdot) = & -F(\Psi(1)\Lambda(1)K_+ - \Lambda(0)K_-) \begin{bmatrix} \tilde{R}_+(t, 1) \\ \tilde{R}_-(t, 0) \end{bmatrix} \\ & - F\Psi(1)\Lambda_0(1) \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix} u(t) + F\Lambda_0(0) \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \end{aligned}$$

Alors, en remplaçant par la valeur de F , on obtient

$$\mathcal{F}\tilde{R}_t(t, \cdot) = (L_1K + L_2) \begin{bmatrix} \tilde{R}_+(t, 1) \\ \tilde{R}_-(t, 0) \end{bmatrix} + F \left(\Lambda(0) \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} - \Psi(1)\Lambda(1) \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix} \right) u(t).$$

D'un autre côté

$$z_t(t) = (L_1K + L_2) \begin{bmatrix} \tilde{R}_+(t, 1) \\ \tilde{R}_-(t, 0) \end{bmatrix} + L_1Bu(t).$$

et donc,

$$\mathcal{F}\tilde{R}_t(t, \cdot) = z_t(t) - L_1Bu(t) + F \left(\Lambda(0) \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} - \Psi(1)\Lambda(1) \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix} \right) u(t).$$

Enfin, on obtient :

$$\mathcal{F}\tilde{R}_t(t, \cdot) = z_t(t) + T_2u(t). \quad (3.50)$$

En utilisant l'équation (3.46), on a :

$$\dot{W}(t) \leq -2\mu V(t) + c|u(t)|^2 - 2p(z(t) - \mathcal{F}R(\cdot, t))^\top T_2u(t). \quad (3.51)$$

On pose $K_i = T_2^{-1}$. Puis, en utilisant la loi de contrôle $u = k_i K_i z$:

$$W_t(t) \leq -2\mu V(t) + ck_i^2 |K_i z(t)|^2 \quad (3.52)$$

$$-2p|z(t)|^2 k_i + 2pk_i \mathcal{F}R(\cdot, t)z(t), \quad (3.53)$$

$$\leq -2\mu V(t) + pk_i a |\mathcal{F}R(\cdot, t)|^2 \quad (3.54)$$

$$+ k_i \left(ck_i |K_i|^2 - 2p + \frac{p}{a} \right) |z(t)|^2. \quad (3.55)$$

On reconnaît alors le même type d'inégalité que lors du chapitre précédent (voir l'équation (2.21)). On peut donc conclure avec des arguments similaires, par exemple en sélectionnant $a = 1$, pk_i et k_i petits, on a bien

$$\dot{W}(R(t, \cdot), z(t), t) < 0$$

Les Propositions 3.1, 3.2, 3.3 et 3.4 démontrent le Théorème 3.3, ce qui conclut la preuve. ■

3.3.5 Conclusion

Le Théorème 3.3 généralise l'utilisation de contrôleur P-I aux frontières d'un système de lois de conservation écrites en coordonnées de Riemann (voir [10, Chap 3]). La démonstration du résultat repose sur la construction d'une fonctionnelle de Lyapunov pour le système en boucle fermée à partir de l'existence d'une fonctionnelle de Lyapunov pour le système en boucle ouverte. Nous avons proposé des conditions nécessaires et suffisantes pour pouvoir implémenter un contrôleur P-I et réguler la sortie du système. Le gain maximal k_i^* peut être calculé explicitement dans le développement de la fonctionnelle de Lyapunov. Cette limite sert alors de condition suffisante pour la stabilité de l'équilibre, il est donc possible que le système reste stable même lorsque $k_i > k_i^*$. Dans le prochain chapitre, une application numérique concernant la régulation avec un contrôleur P-I sera détaillé.

Application au forage

Contents

4.1	Introduction	48
4.1.1	Motivation et contexte	48
4.1.2	Description du fonctionnement d'une plate-forme de forage	48
4.1.3	Quelles sont les difficultés à surmonter ?	50
4.1.4	Phénomène Stick-Slip	51
4.1.5	État de l'art	52
4.2	Modélisation	53
4.2.1	Modélisation de la tige	53
4.2.2	Frottements dus au forage : modélisation de l'interface tige/sol	58
4.2.3	Interface table de rotation/tige : que peut-on contrôler ?	59
4.3	Dimension finie versus dimension infinie	60
4.3.1	Analyse du modèle en dimension finie	60
4.3.2	Analyse du modèle en dimension infinie	69
4.3.3	Conclusion sur les différences entre les modèles	71
4.4	Régulation de la vitesse en bas du forage pour les modèles de dimension infinie	72
4.4.1	Modélisation et problématique	72
4.4.2	Résultat principal	76
4.4.3	Démonstration du Théorème 4.1	77
4.4.4	Discussion autour du résultat	83
4.4.5	Étude comparative : régulation pour un modèle au retard neutre (avec $\lambda(x) = 0$ et c constant)	83
4.5	Simulation	84
4.6	Conclusion	86

L'objectif de ce chapitre est de montrer que l'on peut appliquer les approches développées dans les chapitres précédents sur un cas concret : le forage. Ce n'est pas une application immédiate du Théorème 3.3 bien que le modèle soit composé d'une EDP hyperbolique et d'un couplage avec une EDO via l'une des conditions aux frontières de l'EDP. La différence avec le chapitre précédent vient du fait que l'on ne cherche pas à réguler la sortie mesurée et que le modèle du système en boucle ouverte n'est pas uniquement constitué d'équations

hyperboliques. L'automatique s'est largement intéressée aux problèmes de forages ces dernières années, proposant de nombreux modèles différents pour apporter des solutions dynamiques aux ingénieurs et aux scientifiques qui cherchent à atteindre les couches profondes du sol (voir par exemple [89], [56], [30]).

4.1 Introduction

4.1.1 Motivation et contexte

Actuellement, diverses motivations poussent l'homme à chercher des moyens plus fiables et moins coûteux pour creuser la terre. Avec l'épuisement des réserves d'hydrocarbures (gaz, pétrole) peu profondes, l'industrie est particulièrement concernée par cette problématique. Du point de vue de la recherche, le carottage (amas de terre cylindrique extrait d'un trou de forage) a une importance vitale en géologie pour l'étude de la composition de la croûte terrestre. Par exemple, l'analyse de carotte de glace permet de reconstituer les variations de la température et de la composition chimique de l'atmosphère dans le passé, permettant de mieux comprendre les problèmes climatiques actuels.

Maîtriser son espace sous-terrain a toujours été un objectif pour l'homme. Une frontière à faire reculer. En littérature, les auteurs de l'âge d'or de la science-fiction (K. Dick, I. Asimov, R. Bradbury,...) mettent régulièrement en scène une humanité calfeutrée dans son sous-sol pour diverses raisons (Guerres nucléaires, atmosphère irrespirable, couche d'ozone détruite,...). Plus raisonnablement, une meilleure maîtrise de cette technologie permettrait par exemple de mettre en place des zones de dépôt de stockage ou d'enfouissement souterrain. Malgré ces fortes motivations, le record mondial de profondeur est toujours détenu par l'U.R.S.S avec le forage sg3 (aussi appelé forage profond de Kola) d'une profondeur de 12 262 mètres. L'exploitation de ce forage est arrêtée depuis 1989, il avait notamment contribué à de nombreuses avancées scientifiques dans le domaine de la géoscience.

L'automatique peut jouer un rôle pour développer des solutions de contrôle et améliorer la qualité du forage. Pour le chercheur, cela devrait permettre de récupérer des données de meilleure qualité et pour l'industriel, de diminuer les coûts.

4.1.2 Description du fonctionnement d'une plate-forme de forage

Il existe aujourd'hui différents types de plate-forme de forage. En fonction de la profondeur, du terrain (terre ou mer), de la durée de vie souhaitée pour l'installation, on préférera telle sorte d'installation à une autre. Sur la figure 4.1, un forage "classique" est représenté schématiquement.

La plate-forme est constituée de deux parties distinctes. D'un côté, un assemblage mécanique permettant le forage :

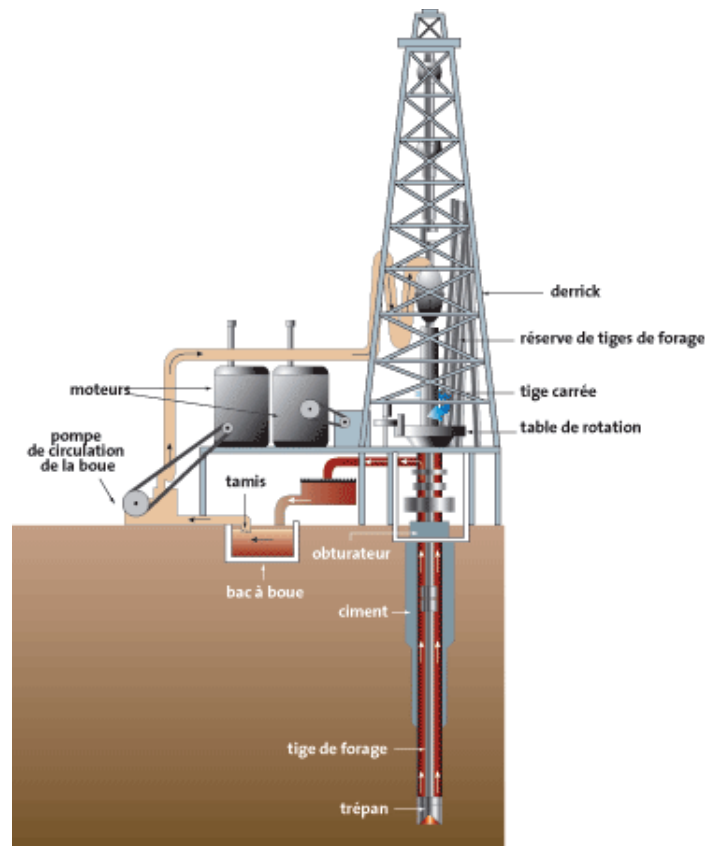


FIGURE 4.1 – Schéma classique d'une plate-forme de forage [ADEME/BRGM]

- La table de rotation qui entraîne toute la tige.
- La tige, qui est en réalité constituée de plusieurs tiges de quelques mètres vissées entres elles comme sur l'image 4.2.
- et le trépan constitué de stabilisateurs et du foret. Les forets peuvent être de différents types, comme illustré par l'image 4.2.

De l'autre, toute la structure pour gérer l'avancée de la tige dans de bonnes conditions. C'est à dire :

- Le derrick, qui est le nom donné à la structure métallique entourant la tige et permettant de visser de nouvelle tige de forage à l'ensemble au fur et à mesure de l'avance du puits.
- Le système de lubrification avec la pompe et le bac à boue qui remplit deux fonctions essentielles. Il permet une bonne lubrification lorsque le foret est en rotation et sera utilisé pour extraire la matière forée s'accumulant en bas du puits.
- L'obturateur pour fermer le trou après utilisation ou gérer la pression dans le puits.



FIGURE 4.2 – Image de différents forets et d'un lot de tiges [société Ningbo Zhedong]

4.1.3 Quelles sont les difficultés à surmonter ?

Il existe au moins trois problématiques fondamentales lorsque l'on veut creuser très profondément :

- Les problèmes géologiques :

Les strates géologiques qu'il faut creuser sont constituées de plusieurs éléments. La croûte continentale est constituée principalement de gneiss¹ et de roches granitiques² tandis que la croûte océanique contient du gabbro³ et des roches basaltiques⁴.

En raison de cette inhomogénéité, le trou de forage ne sera jamais parfaitement vertical, le foret avancera en creusant dans la direction la plus perméable.

L'analyse préalable de la géologie est la spécialité de nombreuses entreprises qui sont très sollicitées par les acteurs du forage. En fonction de cette analyse on pourra établir une stratégie de forage (type de foret, vitesse de rotation idéale, etc...).

- Les problèmes thermodynamiques :

Les conditions de température et de pression peuvent compresser le liquide de lubrification. Dans le cas le plus critique, le liquide va fracturer les roches entourant le foret. Cela peut abîmer le trou de forage et obliger le remplacement du foret. Dans le meilleur des cas, les fissures sont "contrôlées" et permettent un forage plus rapide et moins coûteux. Utilisé pour gagner du temps ou pour atteindre des zones rocheuses, ce procédé est alors

1. Roche composée de feldspath, de quartz, de mica.

2. Le granite est une roche plutonique magmatique à texture grenue, riche en quartz, qui comporte plus de feldspath alcalin que de plagioclase. C'est un matériau résistant très utilisé en construction, dallage, décoration, sculpture.

3. Le gabbro est une roche grenue qui doit sa formation à un refroidissement en profondeur, au niveau des dorsales océaniques, d'un magma produit dans le manteau supérieur à la suite de la fusion partielle de ses péridotites.

4. Le basalte est une roche magmatique volcanique issue d'un magma refroidi rapidement et caractérisée par sa composition minéralogique : plagioclases (50 %), de pyroxènes (25 à 40 %), d'olivine (10 à 25 %), et de 2 à 3 % de magnétite.

appelé fracturation hydraulique. Il a beaucoup servi à l'exploitation du gaz de schiste⁵, avec la réputation qu'on lui connaît. On peut trouver des travaux sur le contrôle des variables thermodynamiques dans les puits de forage, par exemple [1], [30] ou [74].

- Les problèmes mécaniques :

Notons que la tige peut mesurer jusqu'à 2000m pour un diamètre variant entre 0.2m et 1.5m et une épaisseur de quelques centimètres. C'est donc un solide très déformable. Pour l'analogie, le rapport longueur/épaisseur du foret et comparable à celui du cheveu. Ces déformations vont être la cause d'oscillations mécaniques pendant le forage. Ces oscillations peuvent être axiales, radiales ou latérales et sont souvent un mélange des trois. D'après plusieurs études (voir par exemple [56], [89]), ce sont les vibrations radiales conduisant à un phénomène bien connu appelé "Stick-Slip", qui sont les plus destructrices. Il a aussi été montré que ce phénomène en particulier favorisait les autres types d'oscillations (axiales et latérales). Ces vibrations dans la structure de la tige de forage l'abîme. Dans les cas les plus critiques, il arrive que la tige se rompe.

Plus le forage est profond et plus la pression et la température en bas du puits peuvent être élevées, de même il y aura des déformations mécaniques plus importantes à l'intérieur de la tige. Dans ce qui suit on s'intéressera en particulier aux problèmes mécaniques, en se focalisant sur le phénomène Stick-Slip.

4.1.4 Phénomène Stick-Slip

On appelle régime permanent l'intervalle de temps où le foret creuse à vitesse angulaire constante. A un moment donné, en raison d'un brusque changement de la résistance au forage (changement de la matière forée par exemple), le bas de la tige va se bloquer ("Stick" en anglais), incapable de vaincre la nouvelle résistance.

En amont, la table de rotation continue de tourner et, comme le bas est bloqué, cela va créer des torsions mécaniques réparties tout le long de la tige. Ces torsions, sommées sur tout le système, créent un couple important en bas de tige qui augmente avec le temps. Quand le nouveau couple agissant dans le sens du forage devient suffisant pour vaincre les frottements responsables de l'arrêt du processus, le bas du foret se décolle ("Slip" en anglais).

A cause de la force d'adhérence qui est plus forte que les frottements dynamiques, la résistance au forage lors de la phase "Slip" est très inférieure à celle de la phase « Stick ». Le foret, ainsi relâché, peut alors atteindre jusqu'à 10 fois la vitesse de rotation du régime permanent en utilisant les déformations accumulées lorsque le foret était bloqué. Cette soudaine accélération va à nouveau créer des torsions dans la tige, cette fois-ci depuis le bas et dans le sens inverse. Après un certain temps, le bas de la tige n'est plus suffisamment entraîné par les déformations et se bloque à nouveau. La répétition de ce phénomène dans la tige conduit le système à atteindre un cycle-limite indésirable. On voit sur la figure 4.3 l'évolution des vitesses de rotation

5. Gaz naturel composé principalement de méthane, formé dans les schistes. Ne formant pas de grandes poches de gaz directement accessibles par un forage vertical classique.

amont et aval de la tige en fonction du temps dans le cas du phénomène Stick-Slip.

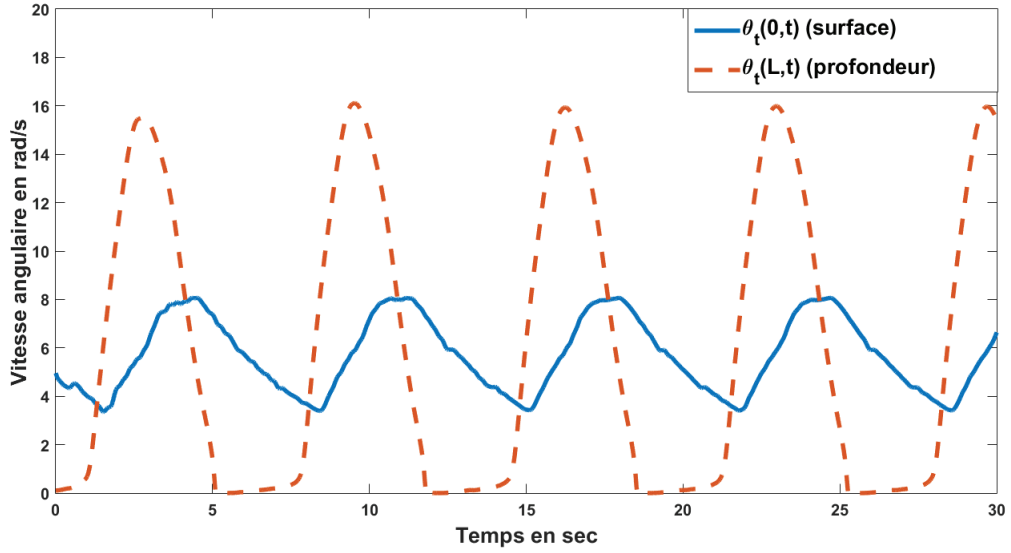


FIGURE 4.3 – Phénomène Stick-Slip

4.1.5 État de l'art

Lorsque l'automatique a commencé à chercher des solutions pour atténuer ces oscillations, les premiers travaux ont modélisés le déplacement des déformations mécaniques dans la tige avec des modèles de dimension finie (voir [89], [58], [59], [80], [66], [54], [55], [43],...). Un résumé de ce type de modèles peut être trouvé dans [93]. Néanmoins, l'augmentation de la profondeur moyenne des puits motive l'utilisation de modèles de dimension infinie afin d'avoir une analyse plus fine du système. Ces types de modèles permettent de traiter toutes les fréquences d'oscillations possibles. Les articles récents traitant de ce phénomène ont ainsi davantage tendance à utiliser des modèles de dimension infinie. La plupart d'entre eux utilise les approches présentées dans l'introduction de ce manuscrit.

Pour le backstepping on peut citer [1], [69], [16], [12]. Dans [15], [37], [56], les auteurs utilisent un modèle composé d'équations aux retards neutres. Notons aussi dans [70], l'utilisation de la platitude, et enfin dans [79] une utilisation des approches par Lyapunov. Un résumé des modèles de dimension infinie utilisés pour le forage peut être trouvé dans [27] et plus récemment par F. Di Meglio et al. dans [30].

Dans la littérature, il n'existe pas de contrôleur pour des systèmes de dimension infinie qui stabilise de manière robuste le phénomène Stick-Slip engendré par des frottements non-linéaires. En pratique, les personnes concernées soulèvent l'ensemble de la tige lorsqu'il advient, pour diminuer la force d'adhérence empêchant la rotation.

Notre contribution principale sera de démontrer que l'on peut réguler la vitesse de rotation en bas du puits avec une certaine robustesse grâce à un contrôleur P-I implémenté sur la

table de rotation. Le contrôleur utilise uniquement la mesure de la vitesse en haut de la tige. Néanmoins, le résultat n'est valable que pour la version linéarisée du modèle.

Dans la prochaine partie, on présente différents types de modélisation pour la tige (dimension finie et dimension infinie), le foret et la connexion entre la tige et la table de rotation.

La deuxième section propose une analyse comparative entre les modèles de dimension infinie et les modèles de dimension finie. Cette comparaison permet de mettre en lumière de façon précise la différence entre les types de modèles.

Après avoir conclu sur les différences entre les modèles, la problématique consistant à réguler la vitesse angulaire en bas du puits en agissant sur la table de rotation située en haut de la tige est adressée. On y répondra pour deux modèles de dimension infinie différents : un modèle homogène sans frottement et un modèle non-homogène avec frottements.

La dernière partie est dédiée aux simulations afin d'illustrer la solution retenue pour obtenir la régulation. On y discutera notamment de l'impact des différents gains du contrôleur sur le comportement du système.

4.2 Modélisation

La modélisation du système de forage est séparée en trois parties :

- On commence par le modèle de la tige, on y opposera les modèles de dimension finie et infinie.
- On choisit ensuite un modèle pour l'interface table de rotation-tige. Autrement dit, on choisit de quelle manière la tige est entraînée par la table.
- Enfin, on s'intéresse à l'interface foret-sol en modélisant les frottements s'exerçant sur le foret.

4.2.1 Modélisation de la tige

Dans cette partie, on va se pencher sur les différentes manières de modéliser mathématiquement la tige de forage afin de représenter le plus fidèlement possible les déformations mécaniques.

La vision la plus simple est de considérer que la tige est un solide déformable en rotation et que ces déformations, lorsqu'elles surviennent, imposent aux deux extrémités de notre tige un mouvement oscillatoire en opposition de phase. Un tel comportement peut donc être décrit par deux solides en rotation, reliés par un ressort et un amortisseur. On choisira ensuite les inerties, la raideur et l'amortissement afin que notre modèle soit le plus réaliste possible par

rapport aux données récoltées sur le terrain. Ces modèles seront donc de dimension finie.

Une seconde approche consiste à écrire physiquement le couple mécanique induit par une déformation dans un morceau infinitésimal de la tige. Une fois ce couple connu, on a toutes les connaissances nécessaires pour appliquer un bilan d'énergie à un petit morceau de tige. Ce bilan nous apprend que les déformations dans la tige suivent une équation des ondes. Il restera ensuite à ajouter des conditions aux frontières de l'EDP pour garantir le caractère bien posé de la solution. Ces conditions représenteront alors les modèles du contact de la tige avec la table en haut et le sol en bas.

Dans ce chapitre on présente ces deux modèles succinctement en détaillant l'obtention des équations du système.

4.2.1.1 Tige : modèle de dimension finie

Les premiers articles sur le sujet considèrent le problème comme étant celui d'un pendule simple soumis à des torsions avec différents degrés de liberté. On peut citer [88] pour les modèles à un degré de liberté, [59] pour ceux à deux degrés de liberté et [43] qui prend également en compte la dynamique de la table de rotation dans son modèle. Sur la figure (4.4) on représente schématiquement ces modèles.

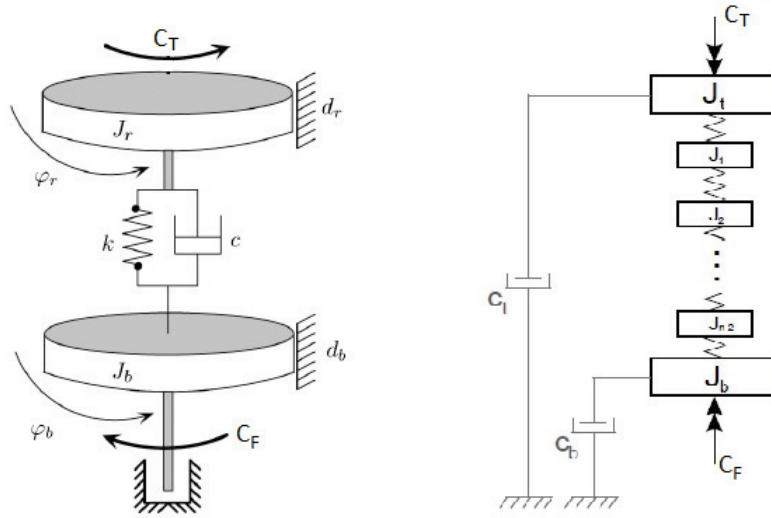


FIGURE 4.4 – Modèle 2 tables (à gauche) et N tables (à droite) pour le système de forage

En appliquant le principe fondamental de la dynamique aux deux solides inertiels en rotation, on peut facilement établir un modèle dynamique :

$$\begin{cases} J_r \ddot{\varphi}_r + c(\dot{\varphi}_r - \dot{\varphi}_b) + k(\varphi_r - \varphi_b) + d_r \dot{\varphi}_r = C_T \\ J_b \ddot{\varphi}_b + c(\dot{\varphi}_b - \dot{\varphi}_r) + k(\varphi_b - \varphi_r) + d_b \dot{\varphi}_b = -C_F \end{cases} \quad (4.1)$$

où J est l'inertie de la table au sens classique, c la constante de viscosité et k celle de raideur.

φ_b et φ_r sont les variables associées aux déplacements angulaires et dépendent exclusivement du temps. Enfin C_T et C_F représentent respectivement le couple créé par la table de rotation et celui créé par les frottements lors du forage.

Ces modèles étant relativement simples, on peut se permettre de les complexifier. Par exemple, en prenant un modèle dynamique à plusieurs variables comme le modèle de LuGre utilisé dans [89]. Si l'on fait de même avec un modèle de dimension infinie, on ne peut plus conclure sur la stabilité du modèle.

Remarque : On peut aussi utiliser un modèle de dimension finie pour tendre vers un modèle de dimension infinie. Il suffit d'ajouter un très grand nombre de composantes "tables intermédiaires + ressorts + frottements" entre la table de rotation et le bout du foret. Navarro-Lopez et al. dans [58] présentent un modèle 4-DOF (i.e avec quatre tables de rotation). D'une certaine manière, c'est cette approche qui est adoptée lorsque l'on utilise la méthode des éléments finie. Dans le cadre du forage, cette méthode est utilisée dans [67] pour approcher au maximum les données des simulations avec les données du terrain. Ainsi les auteurs utilisent un modèle à 165 composantes.

4.2.1.2 Loi de conservation : modèle de dimension infinie

Le modèle en dimension infinie est construit à l'aide des équations de la mécanique des solides déformables. Dans le cas du forage, on pourra s'aider du chapitre 7 de Lubliner [52]. On pose les deux hypothèses classiques usuelles :

1. La tige est circulaire et ne se déforme pas. Elle présente toujours une symétrie axiale.
2. Les déformations de la tige sont dans le régime élastique de la matière et l'on peut utiliser la loi de Hookes.

On note $\theta(x, t)$ la position angulaire de la tige à l'instant t et à la profondeur x . Les variables $\theta_t(x, t)$ et $\theta_x(x, t)$ représentent respectivement la vitesse et la déformation angulaire. Sur la figure 4.5, on représente le lien existant entre une déformation axiale représenté par $d\theta$ et l'apparition d'un angle de déformation infinitésimal γ lorsque le solide à un rayon r et une longueur dx .

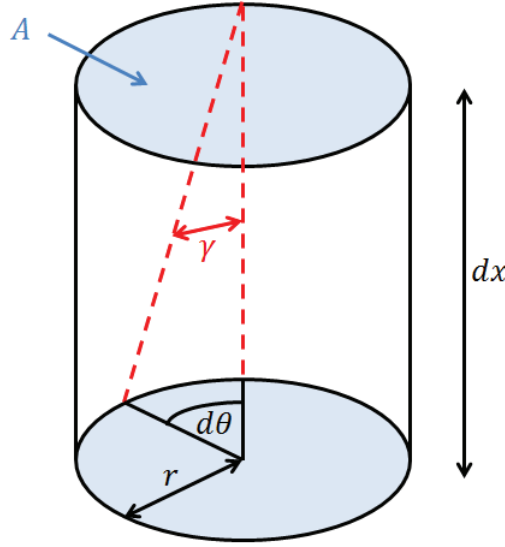
La relation entre eux est :

$$\gamma = r\theta_x(x, t)$$

La loi de Hookes permet de lier le déplacement angulaire γ avec une force τ appelée contrainte de cisaillement.

$$\tau = G(x)\gamma$$

où $G(x)$ est le module de cisaillement (ou module de Coulomb).

FIGURE 4.5 – Contrainte de cisaillement γ créée par une déformation $d\theta$

La contrainte de cisaillement γ va exercer une force dans le plan tangent de la tige. Grâce à l'hypothèse sur la symétrie de la tige autour de son axe, la résultante de cette force sera un couple :

$$C_\tau = \int_A \tau r dA = G(x) \theta_x(x, t) \int_A r^2 dA \quad (4.2)$$

$$= G(x) \theta_x(x) J \quad (4.3)$$

avec J le moment quadratique de la section A .

Maintenant que l'on connaît l'expression du couple créée par une déformation, on peut étudier l'évolution dynamique des déformations. Pour cela, on va écrire un bilan de puissance pour un petit bout de tige. Notre modèle prend en compte des paramètres non-homogènes pour le module de cisaillement $G(x)$ et les frottements le long de la tige $\sigma(x)$. Le module dépend de la pression et de la température, ces variables ne sont pas constantes dans les trous de forage comme le montre les données de [38]. De même les frottements entre la tige et l'extérieur ne sont pas constants. Ces frottements peuvent être dus à plusieurs phénomènes. Le fait que la tige racle contre le trou de forage, les frottements entre la tige et le liquide de frottements,...

Le bilan de puissance mécanique à l'intérieur de la tige de longueur dx représenté par la figure 4.6 . Il s'écrit :

$$\frac{d}{dt} E_c(x, t) = P_{int} + P_{ext}.$$

La variation de l'énergie cinétique ne dépend que de la somme des puissance interne et externe. La puissance interne provient des couples de cisaillement C_τ présent dans la tige. En

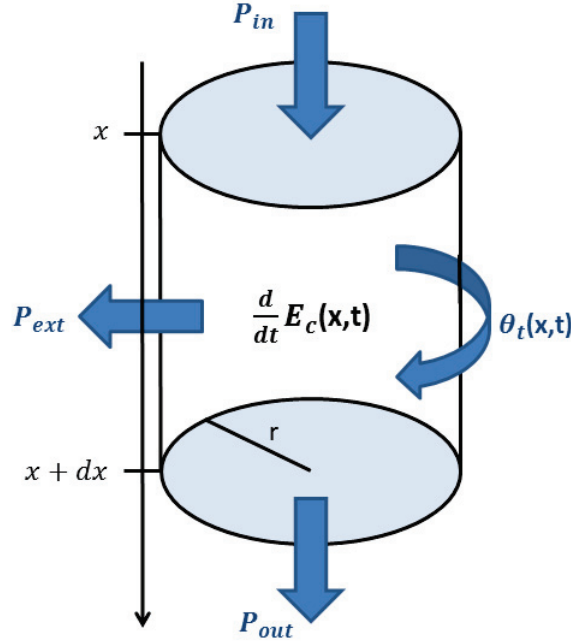


FIGURE 4.6 – Bilan de puissance sur un petit bout de tige

supposant que la tige est suffisamment petite pour avoir une vitesse angulaire uniforme en chaque point de l'intervalle $[x; x + dx]$, on obtient :

$$\begin{aligned} P_{int} &= P_{in} - P_{out} = (C_\tau(x, t) - C_\tau(x + dx, t))\theta_t(x, t) \\ &= (G(x)\theta_x(x, t) - G(x + dx)\theta_x(x + dx, t)) J\theta_t(x, t) \end{aligned}$$

La puissance exprimée en Watts et dissipée par frottement est :

$$P_{ext} = -2\pi r \sigma(x) \theta_t^2(x, t) dx,$$

où $\sigma(x)$ est exprimé en $N.s.m^{-1}$ et est un coefficient de frottement surfacique. Enfin, l'énergie cinétique exprimé en Joules est donnée par :

$$E_c(x, t) = \frac{1}{2} \rho J \theta_t^2(x, t) dx$$

En faisant l'approximation usuelle suivante :

$$\frac{G(x)\theta_x(x, \cdot) - G(x + dx)\theta_x(x + dx, \cdot)}{dx} \approx \partial_x (G(x)J\theta_x(x, \cdot))$$

on récupère une équation des ondes amorties et non-homogènes :

$$\theta_{tt}(x, t) = \frac{\partial_x (G(x)\theta_x(x, t))}{\rho} - \beta(x)\theta_t(x, t)$$

avec $\beta(x) = \frac{2\pi r \sigma(x)}{\rho J}$.

Remarque 4.1

Cette équation est bien une EDP hyperbolique comme prévue par Dafermos dans [25]. C'est donc une illustration du cas général discuté dans la section 3.1.

4.2.2 Frottements dus au forage : modélisation de l'interface tige/sol

L'étude des frottements constitue une partie importante de la mécanique et est appelée tribologie. On présente ici les trois types de frottements que l'on va prendre en compte pour modéliser le couple résistant au forage. Il s'agit des frottements statiques et visqueux, dont la caractérisation est attribuée à Coulomb, de la force d'adhérence et des frottements créés lorsque la lubrification n'est pas parfaitement effective, c'est à dire pour de petites vitesses de rotation.

Les frottements statiques sont dus à la pression que les deux surfaces exercent l'une sur l'autre. Pour une vitesse non-nulle, cette force reste constante et s'oppose au mouvement, on la note $F_{statique}$. Les frottements visqueux dépendent linéairement de la vitesse et s'opposent à la direction du mouvement. On note c_b le coefficient linéaire entre la vitesse et le couple généré, on a :

$$C_F(\theta_t(L, t)) = F_{statique} + c_b \theta_t(L, t)$$

Lorsque la vitesse est nulle, une force supplémentaire due à l'adhérence entre les surfaces apparaît. On note cette adhérence F_{adh} , on a alors :

$$\begin{aligned} C_F(0) &= F_{adh} + F_{statique} \\ C_F(\theta_t(L, t)) &= F_{statique} + c_b \theta_t(L, t), \quad \forall \theta_t(L, t) \neq 0 \end{aligned}$$

Dans le cas du forage, on représente souvent l'effet Stribeck dans le modèle. Il s'agit de prendre en compte le fait que pour de petites vitesses de rotation, la lubrification entre la tige et le sol n'est pas parfaite. Plus précisément, une fois le foret mis en mouvement, les frottements dus à l'adhérence vont diminuer avec l'augmentation de la vitesse jusqu'à atteindre une vitesse limite. Cette limite représente la vitesse pour laquelle la lubrification est effective et où les frottements dynamiques reprennent le dessus. Une illustration est donnée par la Figure 4.7 où la vitesse limite est Z_c .

Afin de tout prendre en compte, on peut représenter l'ensemble de ces frottements à l'aide d'une fonction non-linéaire de la vitesse de rotation. Cette approche est utilisée notamment dans [56], [16] où la relation entre la vitesse et le couple résistant due au frottements est :

$$C_F(\theta_t(L, t)) = c_b \theta_t(L, t) + \frac{2T_0}{\pi} \left(\alpha_1 \theta_t(L, t) e^{|\alpha_2| \theta_t(L, t)} + \arctan(\alpha_3 \theta_t(L, t)) \right),$$

où c_b et T_0 sont des nombres réels. $C_F : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ est une fonction qui décrit bien les trois effets précédents comme on le voit sur la figure 4.8. Elle a aussi la particularité d'être continue en zéro, ce qui permet d'éviter le bruit numérique en simulation lorsque $\theta_t(L, t) \approx 0 \text{ rad.s}^{-1}$ tout en conservant les effets de l'adhérence.

Comme on l'a vu, lorsque le système a une vitesse de rotation suffisante, ce couple devient plus simple à modéliser puisqu'il devient affine par rapport à la vitesse. Dans la partie sur

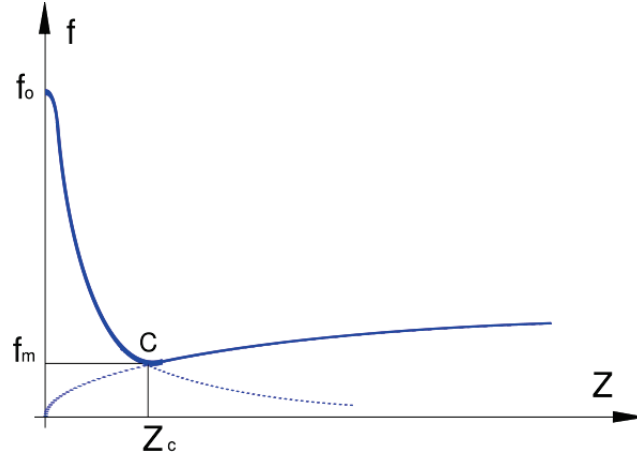
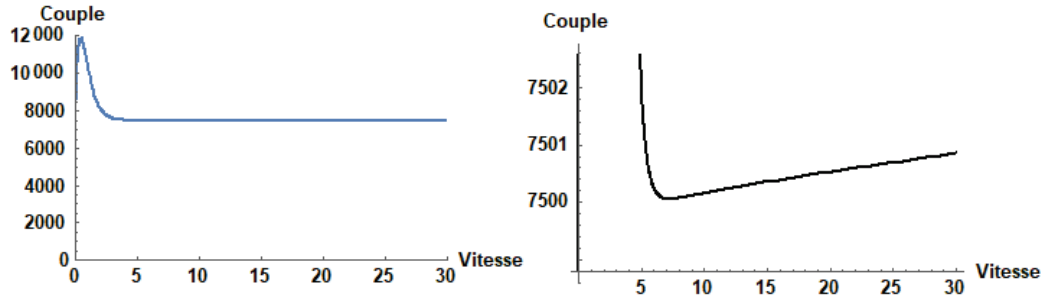


FIGURE 4.7 – Effet Stribeck

FIGURE 4.8 – C_F en ordonnée et $\theta_t(L, t)$ en abscisse. A droite, zoom sur la zone où les frottements ne sont plus linéaires

la régulation qui suivra, on cherchera à réguler la vitesse du foret autour d'une vitesse de rotation correspondant à une bonne lubrification foret/sol. On considérera alors que le couple résistant s'exerçant sur le foret est linéaire et s'écrit :

$$C_F(\theta_t(L, t)) = c_b \theta_t(L, t) + T_0 \quad (4.4)$$

Dans le cas des modèles de dimension finie, le couple s'exerçant sur le foret agira sur la table J_r de la figure 4.4. Dans le cas de la dimension infinie, on rajoute les frottements s'exerçant sur le foret en introduisant des conditions aux frontières. En prenant en compte l'inertie du foret I_b , la condition en bas, pour $x = L$ se note alors :

$$I_b \theta_{tt}(L, t) = G(L) J \theta_x(L, t) - C_F(\theta_t(L, t)).$$

4.2.3 Interface table de rotation/tige : que peut-on contrôler ?

Dans le cas de la dimension finie, on fait l'hypothèse que la table de rotation a une inertie et est entraînée par un couple moteur. Ce couple pouvant être contrôlé, on choisit cette variable

pour modéliser l'entrée $\Omega(t)$ du système de forage. En dimension infinie, la même approche conduirait à une condition à la frontière en $x = 0$ du type :

$$I_T \theta_{tt}(0, t) = G(0) J \theta_x(0, t) + \Omega(t)$$

A ma connaissance, cette relation n'est utilisée dans aucun des travaux proposant un modèle de dimension infinie. De fait, si on lui applique la même fonctionnelle de Lyapunov que dans ce manuscrit, nous ne pourrions pas montrer la stabilité de l'équilibre.

On fait alors l'hypothèse plus raisonnable que l'on peut contrôler la vitesse de la table de rotation. La différence de vitesse entre la tige au point $x = 0$ et la table est alors considérée comme proportionnelle à la déformation $\theta_x(0, t)$ en haut de la tige. On a :

$$\theta_x(0, t) = c_a(\theta_t(0, t) - \Omega(t)) \quad (4.5)$$

où c_a est un coefficient réel positif.

Une manière encore plus simple consiste à agir directement sur la vitesse de la tige, on a alors :

$$\theta_t(0, t) = \Omega(t)$$

Dans la partie concernant la régulation, le modèle utilisé pour cette partie du forage est :

$$\theta_x(0, t) = c_a(\theta_t(0, t) - \Omega(t))$$

4.3 Dimension finie versus dimension infinie

Le but de cette partie est de comparer, en les analysant, les deux types de modélisations existantes, afin de pouvoir répondre à la question suivante :

Quelles sont les différences comportementales entre le modèle de dimension infinie et le modèle de dimension finie ?

On va d'abord observer le comportement des modèles de dimension finie à l'aide d'arguments basés sur la physique des ondes et sur la décomposition en série de Fourier. Ensuite, on analyse le modèle en dimension infinie en donnant sa solution lorsque les conditions frontières sont nulles. Cette mise en lumière des différences entre les solutions des modèles finis et infinis a été présentée lors d'une conférence (voir [76]).

4.3.1 Analyse du modèle en dimension finie

4.3.1.1 Caractéristiques fréquentielles du modèle en dimension finie

Dans cette section, le but est d'analyser le comportement du modèle en dimension finie. On part du postulat qu'une chaîne de masses en rotation liées par des ressorts va propager une onde de cisaillement. Pour analyser notre modèle, on va considérer que les masses sont toutes

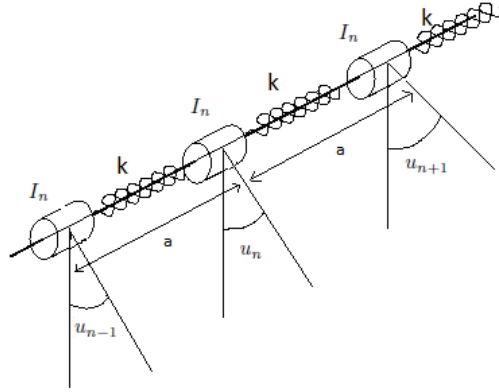


FIGURE 4.9 – Chaîne infinie de masses en rotation reliées par des ressorts

séparées d'une distance a et que les ressorts qui les lient entre elles sont tous de raideur égale à k . La figure (4.9) schématise cette chaîne.

On écrit la somme des forces qui s'appliquent sur la masse n . Le déplacement angulaire θ_{n+1} engendre un couple sur la masse n noté :

$$C_{n+1} = k(\theta_{n+1} - \theta_n). \quad (4.6)$$

De même le déplacement θ_{n-1} engendre un couple sur la masse n noté :

$$C_{n-1} = k(\theta_{n-1} - \theta_n). \quad (4.7)$$

On peut maintenant en déduire l'équation dynamique qui décrit l'évolution du déplacement angulaire θ_n en fonction des paramètres de la chaîne et des déplacements angulaires θ_{n+1} et θ_{n-1} :

$$\frac{\partial^2 \theta_n}{\partial t^2} = \frac{k}{I_n}(\theta_{n-1} - 2\theta_n + \theta_{n+1}) \quad (4.8)$$

La modélisation de la tige est plus réaliste avec un terme d'amortissement. Cependant, afin de pouvoir comparer nos deux modèles, on fait le choix de négliger ce terme dans cette étude. On va maintenant considérer une solution caractéristique des phénomènes oscillatoires. La solution (4.8) impose au modèle la diffusion d'une onde de longueur d'onde λ et de pseudo-pulsation w . Par définition on a la relation $\lambda = \frac{2\pi c}{w}$ où c est la vitesse de propagation de l'onde. Notons qu'il y a également invariance du système par translation et que l'amplitude de vibration est la même pour toutes les tables de la chaîne. On choisit une solution de la forme

$$\theta_n(t) = \theta_0 \exp^{j(wt - \frac{2\pi n a}{\lambda})}$$

afin d'imposer à la chaîne la transmission d'une onde de pseudo-pulsation w et de la longueur d'onde λ . En réinjectant la solution dans l'équation différentielle (4.8), on obtient une relation entre la pseudo-pulsation w et la longueur d'onde λ de l'onde donnée par l'égalité suivante

(lorsque $\theta_0 \neq 0$) :

$$-w^2\theta_n = \frac{k}{I_n}(\exp^{j\frac{2\pi a}{\lambda}} - 2 + \exp^{-j\frac{2\pi a}{\lambda}})\theta_n \quad (4.9)$$

$$= -2\frac{k}{I_n}(1 - \cos \frac{2\pi a}{\lambda})\theta_n \quad (4.10)$$

$$= 4\frac{k}{I_n} \sin^2 \left(\frac{\pi a}{\lambda} \right) \theta_n. \quad (4.11)$$

La relation entre la pseudo-pulsation et la longueur d'onde dans le cas d'une onde propagée par une chaîne de tables inertielles en série s'écrit :

$$w = 2\sqrt{\frac{k}{I_n}} \left| \sin \frac{\pi a}{\lambda} \right| \quad (4.12)$$

On a donc, au lieu d'une relation linéaire entre λ et w , une relation non-linéaire qui traduit une différence de vitesse de propagation en fonction de l'écart de chaque table de rotation d'une part et en fonction du type d'onde à propager d'autre part.

4.3.1.2 Conséquence sur la modélisation du phénomène Stick-Slip

Dans le cas du modèle avec deux tables souvent utilisé dans la littérature pour modéliser le phénomène Stick-Slip (voir l'article de Canudas et al. [89]), la longueur entre les deux tables en rotation est exactement la longueur de la tige. Donc $a = L$. De plus la longueur d'onde du phénomène Stick-Slip est $\lambda = 2L$, car le phénomène Stick-Slip est caractérisé par le fait que les deux extrémités de la tige vont osciller en opposition de phase.

On constate alors, en remplaçant a et λ par leurs valeurs particulières dans l'équation (4.12) que le sinus vaut 1. Donc l'onde la plus courte que peut diffuser le modèle 2D est exactement l'onde caractéristique du phénomène Stick-Slip. On obtient donc une pulsation de $w = 2\sqrt{\frac{k}{I_2}}$ et comme $c = \frac{w\lambda}{2\pi}$, la vitesse de propagation du phénomène sera de $c = \frac{2L}{\pi}\sqrt{\frac{k}{I_2}}$

Cas d'un modèle à N tables de rotation : $a = \frac{L}{N-1}$

Dans ce cas, l'onde la plus rapide que l'on peut propager doit vérifier : $\lambda = \frac{2L}{N-1}$. On constate donc que le fait de diminuer l'espacement entre chaque table de rotation permet de diminuer la longueur d'onde de la plus petite onde transmissible. Il est difficile de bien comprendre quelles changements sont apportés par la modification de l'écart a .

Afin de mieux comprendre ce qui se passe, nous allons calculer les vecteurs propres du modèle avec N tables.

4.3.1.3 Écriture matricielle pour le modèle N-D

On s'intéresse à l'ensemble des solutions existantes. Pour se faire, nous allons mettre les équations dynamiques de chaque table sous la forme matricielle $\ddot{\varphi} = A_N \varphi$. Avec $\theta = [\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_N]$, on obtient :

$$\ddot{\theta} = \frac{-k}{I_n} \begin{pmatrix} 2 & -2 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -2 & 2 \end{pmatrix} \theta \quad (4.13)$$

Il est facile de voir que la matrice A_N est de rang plein et $A_N \in \mathbb{R}^{N \times N}$. Il existe donc une matrice carrée inversible T composée des vecteurs propres de la matrice A , telle que $\theta = T\varphi$ et telle que $T^{-1}AT = \text{diag}(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$ où les λ_i sont les valeurs propres de la matrice A . Or les $\varphi_i(t)$ solutions de l'équation matricielle :

$$\ddot{\varphi} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)\varphi$$

sont de la forme $\varphi_i = A_i \cos\left(\sqrt{\frac{\lambda_i k_N}{I_N}} t\right) + B_i \sin\left(\sqrt{\frac{\lambda_i k_N}{I_N}} t\right)$. Enfin comme T est de rang plein, on obtient θ :

$$\begin{aligned} \theta_k(t) &= T_k \varphi \\ &= \sum_{i=1}^N v_{ik} \left[A_i \cos\left(\sqrt{\frac{\lambda_i k_N}{I_N}} t\right) + B_i \sin\left(\sqrt{\frac{\lambda_i k_N}{I_N}} t\right) \right] \end{aligned}$$

où $T_k = [v_1(k), v_2(k), \dots, v_N(k)]$ est constitué des $k^{\text{ième}}$ composantes de chaque vecteur propre v_i de la matrice A_N .

On a donc montré que toutes les solutions $\theta_k(t)$ représentant les déformations angulaires aux différents points de la tige s'écrivent comme une combinaison linéaire de sinus et de cosinus. De plus ces fonctions sinusoïdales ont des pulsations (et donc une capacité à évoluer rapidement) qui croissent et se diversifient avec le nombre de tables.

4.3.1.4 Notations et relations pour les ondes

Notations :

Avant d'aller plus loin il faut introduire certaines notations utiles pour la compréhension. On a vu, grâce à l'équation (4.12) qu'à chaque modèle, une relation non-linéaire lie la pulsation et la longueur d'onde. La longueur d'onde du phénomène Stick-Slip est constante pour tout les modèles et vaut $\mu_{SS}^6 = 2L$. La pulsation du phénomène Stick-Slip pour un modèle à i tables s'écrit w_{iSS} et la vitesse réelle de la propagation du phénomène est c_{iSS} .

6. ou l'indice SS dénote Stick-Slip

Équivalence avec la raideur et l'inertie totale selon le nombre de tables :

Afin de garder une analyse unifiée des différents modèles que nous étudions, il faut lier la raideur de chaque modèle k_n avec la raideur équivalente de la tige k_{eq} , de même pour l'inertie I_n en fonction de l'inertie totale de la tige I_{tot} .

Comme on a une série de ressorts, nous allons appliquer la relation d'équivalence des ressorts en série. On a, pour un modèle à N dimensions avec $N \geq 2 \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{k_{eq}} = \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{k_N} \quad (4.14)$$

$$k_{eq} = \frac{k_N}{N-1} \quad (4.15)$$

Afin de conserver l'inertie totale de la tige notée I_{tot} , on prend $\forall N \geq 2, I_N = \frac{I_{tot}}{N}$

4.3.1.5 Solution pour le modèle avec 2 tables

La connaissance des n vecteurs propres de la matrice A nous donne les vibrations possibles dans notre modèle. Par exemple pour $N = 2$, les vecteurs propres sont $v_1 = [1; 1]$ et $v_2 = [1; -1]$ respectivement, les valeurs propres sont $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 4$. Le premier vecteur propre amène une solution de type $at + b$ où a et b dépendent des conditions initiales (les deux tables oscillent autour d'une constante b). Le second vecteurs propres $v_2 = [1; -1]$ signifient que la table 1 et la table 2 seront toujours en opposition de phase et leur dynamique aura un comportement ondulatoire de pulsation :

$$w_{2SS} = \sqrt{\lambda_2} \sqrt{\frac{k}{I_2}} \quad (4.16)$$

$$= \sqrt{6} \sqrt{\frac{k}{I_{tot}}} \quad (4.17)$$

On remarquera que c'était déjà la pulsation trouvée à l'équation (4.12) pour une longueur d'onde $\lambda = 2L$.

La vitesse de l'onde est alors :

$$c_{2SS} = \frac{\sqrt{6}L}{\pi} \sqrt{\frac{k_{eq}}{I_{tot}}}$$

4.3.1.6 Solutions pour le modèle à 3 tables

Lorsque l'on prend $N = 3$, les vecteurs propres de la matrices A sont $v_1 = [1, 1, 1]$, $\lambda_1 = 0$, $v_2 = [1, 0, -1]$, $\lambda_2 = 2$ et $v_3 = [-1, 1, -1]$, $\lambda_3 = 4$. Comme dans le cas précédent, les vecteurs propres associés à des valeurs propres nulles vont traduire l'existence de solutions de la forme $at + b$ tandis que les vecteurs propres associés à des valeurs propres non-nulles vont donner lieu à des solutions sous formes ondulatoires. On distingue ici deux cas :

- Le vecteur propre $v_2 = [1, 0, -1]$ indique que le centre de la tige reste fixe tandis que les extrémités vont osciller en opposition de phase. C'est le phénomène Stick-Slip que l'on souhaite décrire.
- Le vecteur propre $v_3 = [-1, 1, -1]$ indique que les deux extrémités oscillent en phase tandis que la table du milieu va osciller en opposition de phase (et avec une amplitude deux fois plus importante)

Le modèle à 3 tables est donc tout à fait apte à représenter le phénomène Stick-Slip, et de plus, la solution de chacune des vitesses des tables sera une solution composée de deux phénomènes oscillatoires différents. On va voir quelle est la vitesse de propagation du phénomène Stick-Slip dans le modèle à 3 tables.

$$w_{3SS} = \sqrt{\lambda_2} \sqrt{\frac{k_3}{I_3}} \quad (4.18)$$

$$= 2\sqrt{3} \sqrt{\frac{k_{eq}}{I_{tot}}} \quad (4.19)$$

Dans le cas où l'on dispose de 3 tables de rotation, la longueur d'onde du phénomène Stick Slip vaut toujours $\mu_{SS} = 2L$, d'où :

$$c_{3SS} = \frac{w_{3SS}\mu_{SS}}{2\pi} \quad (4.20)$$

$$= \frac{2\sqrt{3}L}{\pi} \sqrt{\frac{k_{eq}}{I_{tot}}} \quad (4.21)$$

4.3.1.7 Solution du modèle avec N tables

De manière générale, on note le vecteur propre responsable de la diffusion du phénomène Stick-Slip dans un modèle à N tables v_{NSS} , et λ_{NSS} la valeur propre qui lui est associée. Ces derniers valent, dans le cas général :

$$v_{NSS} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{N-1}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\frac{\pi}{N-1}\right) \\ \vdots \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - (k-1)\frac{\pi}{N-1}\right) \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix} \quad \lambda_{NSS} = 2 \left[1 - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{N-1}\right) \right] \quad (4.22)$$

Si N est très grand, on peut effectuer un développement de Taylor de la fonction $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{N-1}\right)$. On obtient, en développant jusqu'au second ordre :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{N-1}\right) \simeq \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{N-1}\right)\right)^2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \dots \quad (4.23)$$

$$\simeq 1 - \left(\frac{\pi}{N-1}\right)^2 \quad (4.24)$$

ce qui implique $\lambda_{NSS} = 2\left(\frac{\pi}{N-1}\right)^2$. Par ailleurs :

$$w_{NSS} = \sqrt{\lambda_{NSS}} \sqrt{\frac{k_N}{I_N}} \quad (4.25)$$

$$= \frac{\sqrt{2}\pi}{N-1} \sqrt{N-1} \sqrt{N} \sqrt{\frac{k_{eq}}{I_{tot}}} \quad (4.26)$$

$$= \sqrt{2}\pi \sqrt{\frac{N}{N-1}} \sqrt{\frac{k_{eq}}{I_{tot}}}, \quad (4.27)$$

On peut alors obtenir la valeur de la vitesse de propagation pour un N grand :

$$c_{NSS} = \sqrt{2}L \sqrt{\frac{N}{N-1}} \sqrt{\frac{k_{eq}}{I_{tot}}} \quad (4.28)$$

Le résultat ci-dessus nous permet de comprendre que l'ajout de tables de rotation permet d'accélérer la vitesse de propagation du phénomène Stick-Slip jusqu'à une limite.

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} c_{NSS} = \sqrt{2}L \sqrt{\frac{k_{eq}}{I_{tot}}} = c \quad (4.29)$$

Cette valeur limite correspond à la vitesse de l'onde du modèle de dimension infinie pour une tige de raideur k .

4.3.1.8 Conséquence des modèles de dimensions finies sur l'approximation de la solution réelle

Dans cette sous-partie, on va essayer de comprendre les limites du modèle en dimension finie en reliant le nombre de tables au nombre de composantes admissibles pour les N solutions $\theta_i(t)$ avec $i = 1, \dots, N$.

Cela revient à répondre à la question : *Que ce passe-t-il si l'on veut que notre modèle diffuse tous types d'ondes ?*

Supposons que nous sommes en pleine expérimentation et que l'on fasse rapidement varier la vitesse en bas de tige sur un très petit intervalle de temps. Dans le cas d'un modèle en dimension infinie, ces variations de vitesse et de couple de frottements vont se répercuter dans toute la tige à la vitesse de propagation prévue par la théorie. Dans le cas du modèle 2D,

une perturbation en bas de forêt sera immédiatement perçue par le haut de forêt (puisque l'équation dynamique du haut dépend directement de celle du bas) et cette perturbation, quelque soit sa forme, sera transformée en un sinus dont l'amplitude est celle du phénomène Stick-Slip. Ce phénomène est simulé sur la figure 4.10.

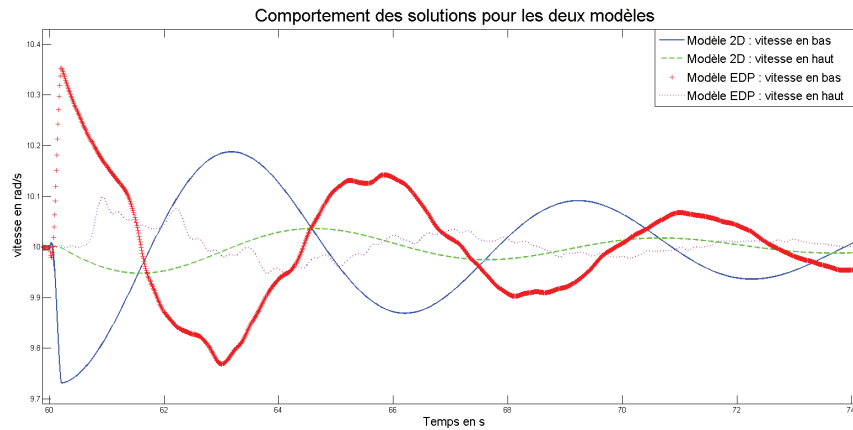


FIGURE 4.10 – Réponse à une perturbation des différents modèles

L'ajout de tables intermédiaires (modèle N-D) permet de limiter cela, d'abord parce que le phénomène sera propagé avec un retard qui dépend du nombre de tables (et qui tend vers la vitesse de propagation de l'onde EDP lorsque N tend vers l'infini) et ensuite parce que cet ajout a pour conséquence d'augmenter l'espace des solutions. Ces nouveaux modes autorisés peuvent se schématiser comme sur le tableau académique présenté figure 4.11. Le problème

	mode 1	mode 2	mode 3	...	mode N
$N = 1$					
$N = 2$				...	
$N = 3$				...	
...	...	...	...	...	...
N				...	

FIGURE 4.11 – Description oscillatoire des N solutions du modèle à N tables

de cette approximation est que l'on n'est pas capable de démontrer avec certitude qu'il existe un nombre N suffisamment grand pour considérer que notre modèle en dimension finie se comporte comme celui en dimension infinie.

Même en admettant qu'il soit possible de trouver un nombre N suffisant dans la pratique (en étudiant des données issues d'expérience sur le terrain par exemple), un autre problème sera que ce nombre N changera pour chaque stratégie de contrôle et pour chaque jeu de paramètres.

4.3.1.9 Cas limite où $N \rightarrow +\infty$

Cette dernière section va nous permettre de faire le lien entre l'approche en dimension finie et l'approche en dimension infinie. En effet $N \rightarrow +\infty \iff a \rightarrow 0$, ce qui traduit le fait que pour une longueur fixe, faire tendre la distance a entre chaque table vers zéro revient à prendre en compte une infinité de tables. On peut alors effectuer un développement de Taylor des fonctions θ_{n+1} et θ_{n-1} jusqu'au second terme pour faire apparaître une équation d'onde décrite par une équation aux dérivées partielles. Afin de passer de la dimension finie à la dimension infinie, on considère que $\theta_n(t) = \theta(x, t)$ et que $\theta_{n+1}(t) = \theta(x + a, t)$, ce qui se justifie par le fait que l'on a pris a comme la distance entre les tables n et $n + 1$. On a alors :

$$\theta_{n+1}(t) = \theta(x + a, t) = \theta(x, t) + a \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_{(x=na, t)} + \frac{a^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right)_{(x=na, t)} + \dots \quad (4.30)$$

$$\theta_{n-1}(t) = \theta(x - a, t) = \theta(x, t) - a \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_{(x=na, t)} + \frac{a^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right)_{(x=na, t)} - \dots \quad (4.31)$$

Donc en réinjectant ces deux nouvelles fonctions dans l'équation (4.8)

$$\frac{\partial^2 \theta_n}{\partial t^2} = 2a^2 \frac{k_N}{I_N} \frac{\partial^2 \theta_n}{\partial x^2} \quad (4.32)$$

Cela correspond à une équation de propagation d'onde de la forme :

$$\frac{\partial^2 \theta_n}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \theta_n}{\partial t^2} = 0 \quad (4.33)$$

avec une vitesse de propagation $c = \sqrt{2a} \sqrt{\frac{k_N}{I_n}}$, puisque a représente la distance entre chaque table, on peut écrire $a = \frac{L}{N-1}$.

Donc en utilisant les équivalences pour k_N et I_N , on retrouve :

$$c = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sqrt{2}L \sqrt{\frac{N}{N-1}} \sqrt{\frac{k_{eq}}{I_{tot}}} \quad (4.34)$$

$$= \lim_{N \rightarrow +\infty} c_{NSS} \quad (4.35)$$

$$= \sqrt{2}L \sqrt{\frac{k_{eq}}{I_{tot}}} \quad (4.36)$$

On vient donc de montrer que l'approche choisie selon laquelle la tige en dimension finie se comporte comme une chaîne infinie de tables en rotation liées par des ressorts en torsion est valable.

4.3.2 Analyse du modèle en dimension infinie

L'objectif de cette sous-section est de calculer la solution du modèle en dimension infinie dans le cas où les conditions aux frontières sont nulles et où l'onde est homogène, sans frottement. La principale différence entre une EDP et une EDO réside dans l'espace d'existence de leurs solutions. Le modèle en dimension infinie est donné par :

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}, \quad \text{avec } (\theta, t) \in [0, L] \times (0, \infty) \quad (4.37)$$

$$\theta(0, t) = 0, \quad \theta(L, t) = 0 \quad (\text{conditions aux bords}) \quad (4.38)$$

$$\theta(x, 0) = \theta_0(x), \quad \frac{\partial \theta}{\partial t}(x, 0) = \theta_1(x) \quad (\text{conditions initiales}) \quad (4.39)$$

Par analogie avec la dimension finie, la stabilité du système (4.37)-(4.39) est déterminée par les valeurs propres de l'opérateur associé à l'équation d'onde. On définit l'opérateur A sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = H_0^1(0, L) \times L^2(0, L)$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.40)$$

Le domaine de A est alors : $D(A) = (H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L)) \times H_0^1(0, L)$. En particulier, l'espace $H_0^1(0, L)$ en 1 dimension spatiale est l'espace des fonctions de $H^1(0, L)$ vérifiant $\theta(0, t) = \theta(L, t) = 0$. Soit le vecteur $\Theta = \begin{bmatrix} \theta \\ \theta_t \end{bmatrix}$ et $\Theta_0 = \begin{bmatrix} \theta(x, 0) \\ \theta_t(x, 0) \end{bmatrix}$, on peut reformuler le système (4.37)-(4.39) comme un problème de Cauchy abstrait. :

$$\begin{aligned} \frac{d\Theta}{dt} &= A\Theta, \quad A : D(A) \rightarrow \mathcal{H} \\ \Theta(x, 0) &= \Theta_0 \end{aligned}$$

Dans le cas simple où les conditions aux frontières données par les relations (4.38) sont nulles, on peut trouver une base de solution pour le problème (4.37)-(4.39). Les détails de ces calculs peuvent être trouvés dans [51]. Avec des conditions aux frontières nulles, les valeurs propres de A sont :

$$\lambda_{+n} = \frac{nc\pi i}{L}, \quad \lambda_{-n} = -\frac{nc\pi i}{L}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.41)$$

et les fonctions propres associées sont :

$$\varphi_{+n} = \begin{bmatrix} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \\ \frac{nc\pi i}{L} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \end{bmatrix}, \quad \varphi_{-n} = \begin{bmatrix} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \\ -\frac{nc\pi i}{L} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \end{bmatrix}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.42)$$

De plus, $\{\varphi_{\pm n}\}$ forment une base orthogonale dans $H_0^1(0, L) \times L^2(0, L)$. Pour le prouver il suffit de calculer le produit scalaire (de cet espace $L^2(0, L)$ comme introduit précédemment)

entre φ_n et φ_m . On obtient :

$$\begin{aligned}\langle \varphi_n, \varphi_m \rangle &= \int_0^L \left[\frac{\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}{\frac{nc\pi i}{L} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)} \right] \cdot \left[\frac{\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)}{\frac{mc\pi i}{L} \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)} \right] dx \\ &= \int_0^L \left[\frac{\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)}{\frac{nmc^2\pi^2}{L^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)} \right] dx\end{aligned}$$

En utilisant la relation de trigonométrie classique :

$$\sin a \sin b = \frac{\cos(a-b) + \cos(a+b)}{2}, \quad (4.43)$$

on a :

$$\langle \varphi_n, \varphi_m \rangle = \frac{1}{2} \int_0^L \left[\frac{\cos\left(\frac{(n-m)\pi x}{L}\right) - \cos\left(\frac{(n+m)\pi x}{L}\right)}{\frac{nmc^2\pi^2}{L^2} \left[\cos\left(\frac{(n-m)\pi x}{L}\right) - \cos\left(\frac{(n+m)\pi x}{L}\right) \right]} \right] dx \quad (4.44)$$

Cas où $n = m$:

$$\begin{aligned}\langle \varphi_n, \varphi_n \rangle &= \frac{1}{2} \int_0^L \left[\frac{1 - \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)}{\frac{n^2c^2\pi^2}{L^2} [1 - \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)]} \right] dx \\ \langle \varphi_n, \varphi_n \rangle &= \left[\frac{\frac{L}{2}}{\frac{n^2c^2\pi^2}{2L}} \right] \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Cas où $n \neq m$: En notant que :

$$\int_0^L \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) dx = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}^*, \quad (4.45)$$

on a donc :

$$(\varphi_n, \varphi_m) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

On conclut donc que la base de solution est orthogonale. Il existe donc deux ensembles de scalaires c_n et d_n tels que toutes fonctions réelles $(\theta, \theta_t) \in H_0^1(0, L) \times L^2(0, L)$ peuvent s'écrire avec la famille de fonction $\{\varphi_n, \varphi_{-n}\}$. Soit :

$$\begin{bmatrix} \theta(x, t) \\ \theta_t(x, t) \end{bmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \begin{bmatrix} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \\ \frac{nc\pi i}{L} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \end{bmatrix} + \sum_{n=1}^{\infty} d_n(t) \begin{bmatrix} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \\ -\frac{nc\pi i}{L} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

et puisque $\{\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\}$ est une base orthogonale de $L^2(0, L)$, on peut développer les fonctions θ et θ_t dans cette base :

$$\theta(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad \theta_t = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (4.48)$$

avec $c_n(t) + d_n(t) = a_n(t)$ et $\frac{nc\pi i}{L}c_n(t) - \frac{nc\pi i}{L}d_n(t) = b_n(t)$.

4.3.3 Conclusion sur les différences entre les modèles

Nous avons pu quantifier certaines différences entre les modèles en dimension finie et en dimension infinie.

La première différence est quantitative. Elle répond à la question :

Existe-t-il un nombre N suffisamment grand pour considérer que notre modèle en dimension finie se comporte comme celui en dimension infinie ?

La condition pour connaître ce nombre N est que toutes les solutions $\theta_i(t)$, $1 \leq i \leq N$ puissent être suffisamment approchées par une décomposition de Fourier au $N^{\text{ième}}$ ordre. Dans la pratique nous ne disposerons jamais de cette garantie. En effet la dynamique de $\theta_1(t)$ (dynamique en bas de tige) suit une fonction non-linéaire dépendant de $\dot{\theta}_1(t)$ et on ne peut pas espérer déterminer exactement une solution en boucle fermée.

La seconde différence est qualitative. Selon le nombre de tables que l'on prend, la relation non-linéaire donnée en (4.12) impose un décalage temporel selon la longueur d'onde que la tige doit diffuser. On rappelle ici cette équation :

$$w = 2\sqrt{\frac{k_N}{I_N}} \left| \sin \frac{\pi a}{\lambda} \right| \quad (4.49)$$

Ainsi même si l'on connaissait un nombre N suffisant pour approximer les signaux des solutions en haut et en bas de tige, les composantes les plus rapides (donc les dernières de la décomposition de Fourier) sont propagées avec une vitesse inférieure à la vitesse de propagation imposée par la physique. En particulier, la $N^{\text{ième}}$ composante spectrale sera diffusée à une vitesse $c = \frac{2}{\pi} c_{NSS}$.

Ces deux différences sont importantes pour deux raisons. Elles permettent tout d'abord de bien comprendre quelles sont les informations perdues entre le modèle à 2 tables, souvent utilisé dans la littérature et les modèles à N tables en fonction de N . Le fait que ces différences soient dépendantes du nombre N va également nous permettre, en plus de savoir pourquoi on utilise un modèle de dimension infinie, de connaître les failles éventuelles des résolutions numériques pour les EDP.

En effet dans la pratique, même si l'on souhaite calculer des lois de commande pour un modèle EDP, les simulations numériques utilisent une approximation qui est exactement celle donnée par le modèle en dimension finie composé de N tables. Ce nombre N est alors lié au pas de discrétisation du calculateur par la relation $pas := a = \frac{L}{N-1}$.

On peut donc conclure, que la différence entre les solutions des modèles en dimension finie et ceux en dimension infinie réside dans une troncature. Plus le modèle de dimension finie est fin (plus il a de composantes), plus les solutions admissibles sont riches (au sens fréquentiel).

4.4 Régulation de la vitesse en bas du forage pour les modèles de dimension infinie

4.4.1 Modélisation et problématique

Dans cette partie, on cherche à réguler la vitesse de rotation de la tige en agissant uniquement sur la table de rotation. L'ensemble de cette sous-section a été soumis et accepté (voir [78]).

Le résultat 4.1 que nous donnons page 76 utilise une équation d'ondes amorties et non-homogènes pour modéliser la dynamiques des déplacements angulaires à l'intérieur d'une tige de forage de longueur L . Le modèle complet avec les conditions aux frontières que nous utilisons est donné par :

$$\theta_{tt}(x, t) = \frac{\frac{\partial}{\partial x} (G(x)\theta_x(x, t))}{\rho} - \beta(x)\theta_t(x, t), \quad x \in]0, L[, \forall t > 0 \quad (4.50)$$

$$G(0)J\theta_x(0, t) = c_a(\theta_t(0, t) - \Omega(t)) \quad (4.51)$$

$$I_b\theta_{tt}(L, t) = -G(L)J\theta_x(L, t) - C_F(\theta_t(L, t)) \quad (4.52)$$

où $\forall x \in [0, L]$, $\theta(x, t)$ est la position angulaire de la tige de forage au point x et à l'instant t dans un référentiel fixe. Les espaces d'existence des paramètres fonctionnels dépendant de la variable x sont :

$$G \in C^1([0, L]; \mathbb{R}_+), \quad \beta \in L^\infty([0, L]; \mathbb{R}_+)$$

Les paramètres mécaniques sont eux tous strictement positifs, donc ρ, J, c_a, L, I_b sont à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. Un exemple de valeurs possibles pour ces paramètres est donné dans la partie simulation à la page 84.

La sortie est la vitesse angulaire mesurée en haut de la tige, c'est à dire :

$$y(t) = \theta_t(0, t).$$

L'objectif est de réguler la vitesse angulaire en bas du système de forage, que l'on note :

$$\underline{y}(t) = \theta_t(L, t),$$

vers une vitesse de référence constante.

La problématique que l'on souhaite résoudre avec le contrôle est la suivante : *On souhaite trouver une loi de contrôle $\Omega(t)$ dépendant uniquement de la sortie mesurée pour n'importe quel coefficient T_0 (voir détail dans la partie sur la modélisation interface tige/sol et l'équation (4.4)) inconnu et constant tel que la variable à réguler $\underline{y}$ est contrainte de tendre vers une valeur de référence choisie notée y_{ref} .*

A nouveau, l'expression du contrôleur est donnée par un simple retour P-I de la sortie. Cependant, notre modèle ne présente qu'une seule entrée et qu'une seule sortie, nous n'aurons

donc pas besoin de construire K_p et K_i comme pour les lois des chapitres précédents. Plus précisément, on a :

$$\Omega(t) = -k_p[y(t) - y_{ref}] - k_i\eta, \quad \dot{\eta} = y(t) - y_{ref} \quad \forall t \geq 0. \quad (4.53)$$

Dans ce qui suit, on montre qu'en bornant la fonction G et pour tout J, ρ, β, c_a et I_b , il existe deux constantes k_p et k_i telle que le long des solutions du système (4.50) avec le retour P-I donné par l'équation (4.53), l'équilibre est exponentiellement stable et :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |y(t) - y_{ref}| = 0. \quad (4.54)$$

Dans un premier temps, le système est réécrit en coordonnées de Riemann. On définit ensuite l'espace des solutions et sa topologie avant de donner le théorème répondant à la problématique de la régulation par retour P-I.

La preuve commence par montrer que la régulation de la vitesse en bas est impliquée par la stabilité exponentielle du système en boucle fermée. Pour montrer la stabilité exponentielle, on utilise à nouveau une fonctionnelle de Lyapunov. Cette dernière suit la construction "forwarding" mais est adaptée aux couplage avec les EDOs dans sa construction. Enfin, on montre que lorsque la partie EDP est une simple équation d'onde (c'est à dire avec $G(x) = G$ et $\lambda(x) = 0$), l'équilibre du système en boucle fermée est exponentiellement stable quelque soit la longueur L et le gain k_i . Ce résultat est démontré en utilisant la procédure de Walton et Marshall (voir [73]).

4.4.1.1 Transformation dans les coordonnées de Riemann :

La partie qui suit est dédiée à une ré-écriture du modèle permettant d'exprimer la partie EDP des équations dans les coordonnées de Riemann. Cette partie de notre modèle est issue d'une loi d'équilibre, on peut donc suivre l'approche générale décrite dans le livre de G. Bastin et J-M. Coron [10]. C'est une application de la transformation présentée à la Section 3.1.1.

Pour tout x dans $[0,1]$ et pour tout $t \geq 0$, soient les nouvelles coordonnées :

$$\phi^-(x, t) = \theta_t(Lx, Lt) - c(Lx)\theta_x(Lx, Lt), \quad (4.55)$$

$$\phi^+(x, t) = \theta_t(Lx, Lt) + c(Lx)\theta_x(Lx, Lt), \quad (4.56)$$

$$z(t) = \theta_t(L, Lt), \quad (4.57)$$

$$\xi(t) = \frac{2}{L}\eta(Lt), \quad (4.58)$$

avec $c^2(Lx) = \frac{G(Lx)}{\rho}$. On peut alors ré-écrire les équations (4.50)-(4.51)-(4.52)-(4.4) du modèle en coordonnées mécaniques avec la loi P-I donnée par l'équation (4.53) sous une forme plus

adéquate pour l'analyse à venir. Le nouveau système qui sera utilisé pour l'analyse est :

$$\phi_t(x, t) = \begin{bmatrix} -c(x) & 0 \\ 0 & c(x) \end{bmatrix} \phi_x(x, t) \quad (4.59)$$

$$- \begin{bmatrix} \lambda(x) + \psi(x) & \lambda(x) - \psi(x) \\ \lambda(x) + \psi(x) & \lambda(x) - \psi(x) \end{bmatrix} \phi(x, t), \forall x \in (0, 1),$$

$$z_t(t) = -(a + b)z(t) + a\phi^-(1, t) + d \quad (4.60)$$

$$\xi_t(t) = \phi^+(0, t) + \phi^-(0, t) - 2y_{ref} \quad (4.61)$$

avec $\phi(x, t) = \begin{pmatrix} \phi^-(x, t) \\ \phi^+(x, t) \end{pmatrix}$. Les coefficients normalisés deviennent

$$\psi(x) = c_x(x) \text{ et } \lambda(x) = L \frac{\beta(Lx)}{2},$$

et

$$a = L \frac{G(L)J}{I_b c(1)}, \quad b = \frac{Lc_b}{I_b}, \quad d = \frac{LT_0}{I_b}$$

Les conditions aux frontières sont :

$$\phi^-(0, t) = \alpha_0 \phi^+(0, t) + K_p(\phi^-(0, t) + \phi^+(0, t) - \tilde{y}_{ref}) + K_i \xi(t), \quad (4.62)$$

$$\phi^+(1, t) = -\phi^-(1, t) + 2z(t), \quad (4.63)$$

où

$$\alpha_0 = \frac{G(0)J - c_a c(0)}{G(0)J + c_a c(0)}, \quad (4.64)$$

Les gains normalisés du contrôleur sont :

$$K_p = \frac{-c_a c(0)}{G(0)J + c_a c(0)} k_p, \quad K_i = \frac{-Lc_a c(0)}{G(0)J + c_a c(0)} k_i. \quad (4.65)$$

La référence à suivre et la nouvelle sortie à réguler sont respectivement :

$$\tilde{y}_{ref} = 2y_{ref}, \quad \underline{\tilde{y}}(t) = \phi^-(1, t) + \phi^+(1, t) = 2z(t) \quad (4.66)$$

Dans les coordonnées de Riemann, l'équation des ondes se réécrit comme deux équations de transport couplées entre elles. Dans le cas où c est constant et $\lambda = 0$, ces deux équations de transport sont les solutions de l'équation de d'Alembert [49].

Remarque 4.2

Dans ce qui suit, on considérera sans perte de généralité que les gains du contrôleur sont $K_p \in \mathbb{R}$ et $K_i \in \mathbb{R}$. Les scalaires K_p , K_i ne doivent pas être confondu avec les chapitres précédents où K_p, K_i étaient des matrices pour régler des contrôleurs multivariables.

Les équations (4.59), (4.60), (4.61) avec les conditions aux frontières (4.62) (4.63) décrivent une EDP hyperbolique non-homogène couplée avec deux EDOs par le biais de ses conditions

aux frontières.

L'espace d'état $\mathbb{X}$ est un espace de Hilbert défini par :

$$\mathbb{X} = (L^2(0, 1))^2 \times \mathbb{R}^2,$$

équipé $\forall v = (\phi^-, \phi^+, z, \xi)$ de la norme usuelle dans $\mathbb{X}$ notée :

$$\|v\|_{\mathbb{X}} = \|\phi^-\|_{L^2(0,1)} + \|\phi^+\|_{L^2(0,1)} + |z| + |\xi|.$$

On introduit aussi l'espace plus régulier suivant :

$$\mathbb{X}_\ell = (H^1(0, 1))^2 \times \mathbb{R}^2.$$

Comme il est démontré dans [10], lorsque $K_p \neq 1$, pour toute condition initiale v_0 dans $\mathbb{X}$ satisfaisant les conditions aux frontières (4.62) et (4.63), il existe une unique solution faible que l'on note v et qui appartient à l'ensemble $C^0([0, +\infty); \mathbb{X})$. De plus, si la condition initiale v_0 vérifie aussi la condition de compatibilité de classe C^1 , c'est à dire que $v_0 = (\varphi_0^-(x), \varphi_0^+(x), \xi_0, z_0) \in \mathbb{X}_\ell$, et telle que :

$$\begin{aligned} & -c(0)\varphi_{x,0}^-(0) - (\lambda(0) + \psi(0))\varphi_0^-(0) - (\lambda(0) - \psi(0))\varphi_0^+(0) \\ & = \alpha_p (c(0)\varphi_{x,0}^+(0) - (\lambda(0) + \psi(0))\varphi_0^-(0) - (\lambda(0) - \psi(0))\varphi_0^+(0)) + \frac{K_i}{1 - K_p}(\varphi_0^-(0) + \varphi_0^+(0) - y_{ref}) \\ & c(1)\varphi_{x,0}^+(1) - (\lambda(1) + \psi(1))\varphi_0^-(1) - (\lambda(1) - \psi(1))\varphi_0^+(1) \\ & = c(1)\varphi_{x,0}^-(1) + (\lambda(1) + \psi(1))\varphi_0^-(1) + (\lambda(1) - \psi(1))\varphi_0^+(1) + 2(a\varphi_0^-(1) - (a+b)z_0) \end{aligned}$$

(voir [23] pour plus de détails), alors la solution appartient à l'espace :

$$C^0([0, +\infty); \mathbb{X}_\ell) \cap C^1([0, +\infty); \mathbb{X}). \quad (4.67)$$

4.4.1.2 Problématique

Soit $v_\infty = (\varphi_\infty^-(x), \varphi_\infty^+(x), z_\infty, \xi_\infty)$ l'état d'équilibre des équations (4.59), (4.60), (4.61), (4.62) et (4.63).

L'objectif est de choisir $K_p, K_i \in \mathbb{R}$ tels que :

1. Stabilité : L'état d'équilibre du système (4.59)-(4.63) est globalement exponentiellement stable. Autrement dit, il existe deux scalaires strictement positifs k_e et ν_e tel que $\forall t \in \mathbb{R}^+$ et $\forall v_0 \in \mathbb{X}$ on a :

$$\|v(t) - v_\infty\|_{\mathbb{X}} \leq k_e e^{-\nu_e t} \|v_0 - v_\infty\|_{\mathbb{X}} \quad (4.68)$$

2. Régulation : Lorsque $v_0 \in \mathbb{X}_\ell$, la variable $\underline{\tilde{y}}(t)$ doit converger vers une référence arbitraire noté $\tilde{y}_{ref}$. C'est à dire :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\underline{\tilde{y}}(t) - \tilde{y}_{ref}| = 0 \quad (4.69)$$

3. Robustesse : La stabilité (1) et la régulation (2) doivent être garanties malgré l'inconnue $d = \frac{L t_0}{I_b}$. Cette inconnue traduit la mauvaise connaissance des forces s'exerçant sur le foret.

4.4.2 Résultat principal

Établissement du résultat :

La réponse à la problématique est donnée par le théorème suivant :

Théorème 4.1 (Régulation et stabilisation)

Soient $0 < \underline{a} \leq \bar{a}$, $0 < \underline{b}$, $0 < \underline{c} \leq \bar{c}$, $0 \leq \bar{\lambda}$, des nombres réels. Il existe des réels $K_p \neq 1$, K_i et $\bar{\psi} \geq 0$ tels que pour tous a, b positifs et pour toutes fonctions c , ψ et λ vérifiant :

$$\underline{a} \leq a \leq \bar{a}, \quad 0 \leq b \leq \bar{b}, \quad (4.70)$$

$$\underline{c} \leq c(x) \leq \bar{c}, \quad |\psi(x)| \leq \bar{\psi}, \quad 0 \leq \lambda(x) \leq \bar{\lambda}, \quad \forall x \in [0, 1] \quad (4.71)$$

pour toutes références $\tilde{y}_{ref}$, n'importe quelle constante d et toutes conditions initiales dans $\mathbb{X}$, on a les affirmations suivantes :

1. Il existe un état d'équilibre noté v_∞ qui est globalement exponentiellement stable dans $\mathbb{X}$ pour le système généré par les relations (4.59)-(4.63). Il existe $k_e > 0$ et $\nu_e > 0$ tels que :

$$\|v(t) - v_\infty\|_{\mathbb{X}} \leq k_e \exp(-\nu_e t) \|v_0 - v_\infty\|_{\mathbb{X}}, \quad (4.72)$$

2. Si en plus v_0 satisfait la condition de compatibilité C_1 et est dans $\mathbb{X}_\ell$, la régulation est obtenue au sens où :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |\tilde{y}(t) - \tilde{y}_{ref}| = 0. \quad (4.73)$$

□

Discussion autour du résultat :

Mathématiquement la problématique est celle de la régulation robuste d'une variable frontière d'un système 2×2 hyperbolique en agissant à la frontière opposée. De plus, le contrôleur proposé est également robuste à certaines incertitudes sur les paramètres a , b , c et λ . En effet, toute la démonstration du théorème peut être faite en prenant les valeurs les plus critiques des paramètres mécaniques. Ce qui revient à dire que K_p et K_i dépendent seulement des valeurs extrêmes de ces paramètres (qui peuvent être pris dans un ensemble arbitrairement grand). Remarquons toutefois que la borne supérieure de la fonction ψ doit, elle, toujours être prise suffisamment petite.

L'analyse de la stabilité de modèle composé à la fois d'une EDP hyperbolique et d'EDOs a été abordée dans [75] et [10].

La dynamique responsable de l'EDO couplée à la condition frontière en haut du foret est due à l'action intégrale du contrôleur. Celle agissant en bas du foret provient des frottements agissant sur le foret.

On peut prendre en compte n'importe quelle fonction positive $\lambda(x)$ tant qu'elle est bornée. On montre que même lorsque la vitesse de propagation c n'est pas constante le long de la tige, le théorème reste valable.

4.4.2.1 Contrôleur uniquement intégral

D'un point de vue applicatif, ce n'est pas forcément efficace d'utiliser la partie proportionnelle du contrôleur. Dans notre cas, la stabilité du système en boucle ouverte est assurée par $|\alpha_0| < 1$, diminuer ou annuler la réflexion α_0 est possible en choisissant un bon K_p . Néanmoins, comme cela est remarqué dans l'article de J. Auriol et al. [5], diminuer trop fortement ce terme conduit à un manque de robustesse vis à vis de possibles retards sur le contrôle (c'est à dire, lorsque $\tilde{\Omega}(t) = \Omega(t - d_\tau)$)

Dans le corollaire qui suit, on souhaite montrer que seule la partie intégrale est nécessaire pour obtenir la régulation dès lors que $|\alpha_0| < 1$ et que $\bar{\psi}$ est suffisamment petit.

Corollaire 4.1 (Contrôleur intégral pour système stable)

Supposons que $|\alpha_0| < 1$. Soient $0 < \underline{a} \leq \bar{a}$, $0 < \underline{b}$, $0 < \underline{c} \leq \bar{c}$, $0 \leq \bar{\lambda}$, des nombres réels. Alors il existe un gain réel positif K_i et $\bar{\psi} \geq 0$ tels que pour toutes paires de réels positifs a, b , pour toutes fonctions c, ψ et λ vérifiant (4.70) et (4.71), pour toutes constantes de référence $\tilde{y}_{ref}$, toute inconnue d et toutes conditions initiales dans $\mathbb{X}$, les points 1), 2), 3) du Théorème 4.1 sont vérifiés pour $K_p = 0$.

Preuve :

La démonstration du Corollaire 4.1 suit le même processus que celle du Théorème 4.1. Seules les étapes S1, S2 et S3 dans la procédure donnée un peu plus loin à la page 81 pour le choix des paramètres de la fonctionnelle de Lyapunov sont affectés par le choix $K_p = 0$.

C'est pourquoi, si l'on sélectionne μ suffisamment petit pour vérifier l'inégalité :

$$e^{-2\mu} > \max \left\{ \left(\mu 10 \frac{\bar{\lambda}}{\underline{c}} \right)^2, \alpha_0^2 \right\}$$

alors μ respecte S1) et on pourra toujours trouver p vérifiant à la fois les points S2) et S3) de la procédure. ■

Les paramètres mécaniques du système sont tous positifs par définition. L'équation (4.50), dans ce cas, conduit toujours à des α_0 (calculé avec la relation (4.64)) tels que $\alpha_0 < 1$ et (a, b) vérifient toujours $a > 0$, $b \geq 0$. Par conséquent, si on connaît les cas les plus critiques, on peut encore utiliser le Corollaire 4.1. Enfin remarquons que le fait d'utiliser la partie proportionnelle (i.e. K_p) nous autorise à prendre une valeur limite $\bar{\psi}$ plus importante.

4.4.3 Démonstration du Théorème 4.1

Afin de démontrer le Théorème 4.1, nous montrons que sous certaines hypothèses, il est suffisant de trouver une fonctionnelle de Lyapunov pour les solutions du système (4.59)-(4.63)

afin d'obtenir la régulation souhaitée. Il reste ensuite à construire explicitement cette fonctionnelle de Lyapunov pour conclure la démonstration.

4.4.3.1 Stabilisation implique régulation

Dans cette première partie, on calcul explicitement l'équilibre unique du système d'équation différentielle (4.59), (4.60), (4.61) vérifiant les conditions aux frontières. Dans un second temps, on montre que si l'on connaît un K_p et un K_i tels que le point d'équilibre du système en boucle fermée soit exponentiellement stable, alors cela implique la propriété de régulation recherchée.

Calcul du point d'équilibre :

Soit ϕ_∞ défini comme suit :

$$\phi_\infty^-(1) = \frac{a+b}{2a} \tilde{y}_{ref} - \frac{d}{a}, \quad (4.74)$$

$$\phi_\infty^+(1) = y_{ref} - \phi_\infty^-(1), \quad (4.75)$$

et

$$\phi_\infty(x) = \mathcal{R}(x)\phi_\infty(1), \quad x \in [0, 1],$$

où $\mathcal{R}$ est la matrice 2×2 vérifiant la relation différentielle matricielle suivante :

$$\mathcal{R}_x(x) = \frac{1}{c(x)} \begin{bmatrix} \lambda(x) + \psi(x) & \lambda(x) - \psi(x) \\ -\lambda(x) - \psi(x) & -\lambda(x) + \psi(x) \end{bmatrix} \mathcal{R}(x),$$

et $\mathcal{R}(1) = I_d$ comme condition frontière pour choisir une des solutions possibles. Alors $\mathcal{R}(x)$ est bien définie $\forall x \in [0, 1]$ car $c(x) \geq \underline{c} > 0$ et, λ et ψ sont des fonctions bornées.

On définit aussi :

$$z_\infty = \frac{a\phi_\infty^-(1) + d}{a+b},$$

et

$$\xi_\infty = \frac{\phi_\infty^-(0) - \alpha_0 \phi_\infty^+(0)}{K_i}.$$

On peut facilement voir que $v_\infty = (\phi_\infty^-, \phi_\infty^+, z_\infty, \xi_\infty)$ est un état d'équilibre pour le système en boucle fermée (4.59), (4.60), (4.61) avec les conditions aux frontières (4.62) - (4.63).

Condition suffisante pour la régulation :

Dans ce qui suit, on montre que le problème de régulation peut être vu comme un problème de stabilisation autour d'un état d'équilibre.

Proposition 4.1

Soient des nombres réels positifs ω et k_L et une fonctionnelle $W : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}_+$, tels que

$$\frac{\|v_\infty - v\|_{\mathbb{X}}^2}{k_L} \leq W(v) \leq k_L \|v_\infty - v\|_{\mathbb{X}}^2. \quad (4.76)$$

Supposons en plus que pour tout $v_0 \in \mathbb{X}$ (les espaces $\mathbb{X}$ et $\mathbb{X}_\ell$ sont identiques à ceux présenté dans le Chapitre 3 pour le cas ou $n = 2$) et pour tout $t_0 \in \mathbb{R}_+$, la solution v de (4.59)-(4.63) initialisée avec v_0 dans C^1 et à l'instant $t = t_0$ vérifie :

$$\dot{W}(v(t)) \leq -\omega W(v(t)). \quad (4.77)$$

Alors les points 1) et 2) du Théorème 4.1 sont démontrés.

Preuve :

La preuve du point 1) est standard. Soit v_0 dans $\mathbb{X}_\ell$ et satisfaisant les conditions de compatibilités C^0 et C^1 . Cela implique que v est lisse pour tout t . Par conséquent, (4.77) est satisfaite pour tout $t \geq 0$. Ce qui implique, avec le lemme de Grönwall :

$$W(v(t)) \leq e^{-\omega t} W(v_0) .$$

Par conséquent, avec (4.76), cela implique que l'inégalité (4.72) est vérifiée pour $k = L$ et $\nu = \frac{\omega}{2}$, et ce, pour toutes conditions initiales prises dans $\mathbb{X}_\ell$. L'espace $\mathbb{X}_\ell$ étant dense dans $\mathbb{X}$, le résultat reste valable pour tout $v_0 \in \mathbb{X}$ et le point 1) est démontré. Montrons le point 2). Le long de la solution des équations (4.59)-(4.63), on a :

$$(\phi^-(x, t) - \phi^+(x, t))_t = c(x)(\phi^-(x, t) + \phi^+(x, t))_x.$$

puisque, à l'équilibre, $(\phi^-(x, t) - \phi^+(x, t))_t = 0$, et à cause du fait que $c(x) \neq 0$ pour tout $x \in [0, 1]$, on a :

$$(\phi_\infty^-(x) + \phi_\infty^+(x))_x = 0.$$

et que la quantité $\phi_\infty^-(x) + \phi_\infty^+(x)$ est constante et ne dépend pas de x .

Avec la définition de $\tilde{y}(t)$ à l'équation (4.66) et la définition de l'équilibre, on a :

$$\tilde{y}(t) - \tilde{y}_{ref} = \phi^-(1, t) + \phi^+(1, t) - \phi_\infty^-(1) - \phi_\infty^+(1). \quad (4.78)$$

Pour démontrer le point 2), on doit montrer que la partie droite de l'équation ci-dessus tend vers zéro. La condition le permettant est que la condition initiale soit prise dans $\mathbb{X}_\ell$. Soit v_0 dans $\mathbb{X}_\ell$ et satisfaisant la condition de compatibilité C_1 . Grâce à la relation (4.67), on sait que $v_t \in C([0, \infty); \mathbb{X})$. De plus, v_t vérifie les équations (4.59)-(4.63) avec $d = 0$ et $y_{ref} = 0$ (en prenant simplement la dérivée par rapport au temps des équations). De fait, $\|v_t(t)\|_{\mathbb{X}}$ converge exponentiellement vers 0 et on a en particulier :

$$\|\phi_t^+(\cdot, t)\|_{L^2(0,1)} + \|\phi_t^-(\cdot, t)\|_{L^2(0,1)} \leq k e^{-\nu t} \|\ell_0\|.$$

D'un autre côté, en notant $\tilde{\phi}(x, t) = \phi(x, t) - \phi_\infty(x)$, et en utilisant l'équation (4.59), on a :

$$\|\phi_t^+(\cdot, t)\|_{L^2(0,1)} \geq \bar{c} \|\tilde{\phi}_x^+(\cdot, t)\|_{L^2(0,1)} - 2(\bar{\lambda} + \bar{\psi}) \left(\|\tilde{\phi}^-(\cdot, t)\|_{L^2(0,1)} + \|\tilde{\phi}^+(\cdot, t)\|_{L^2(0,1)} \right),$$

et,

$$\|\phi_t^-(\cdot, t)\|_{L^2(0,1)} \geq \bar{c} \|\tilde{\phi}_x^-(\cdot, t)\|_{L^2(0,1)} - 2(\bar{\lambda} + \bar{\psi}) \left(\|\tilde{\phi}^-(\cdot, t)\|_{L^2(0,1)} + \|\tilde{\phi}^+(\cdot, t)\|_{L^2(0,1)} \right).$$

Par conséquent, $\|\tilde{\phi}_x^-(\cdot, t)\|_{L^2(0,1)}$ et $\|\tilde{\phi}_x^+(\cdot, t)\|_{L^2(0,1)}$ converge aussi vers zéro. En utilisant l'injection de Sobolev :

$$\sup_{x \in [0,1]} |\phi(x, t) - \phi_\infty(x)| \leq C \|\phi(\cdot, t) - \phi_\infty(\cdot)\|_{H^1(0,1)},$$

où C est un nombre réel positif. Cela implique que :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |\phi^-(1, t) + \phi^+(1, t) - \phi_\infty^-(1) - \phi_\infty^+(1)| = 0,$$

et donc avec (4.78), on a bien démontré la relation (4.73) et le point 2) est satisfait. $\blacksquare$

Avec cette proposition et la linéarité du système, il s'avère que pour démontrer entièrement le théorème 4.1, il est suffisant d'exhiber une fonctionnelle de Lyapunov. Cet état de fait est indépendant de la valeur y_{ref} et des inconnues d . Dans ce qui suit, on supposera donc que $y_{ref} = 0$, $d = 0$ et on construira la fonctionnelle.

4.4.3.2 Construction de la fonctionnelle de Lyapunov

Dans cette partie, on construit la fonctionnelle de Lyapunov associée à la solution des équations (4.59)-(4.63). A cause de la complexité des équations considérés, la construction est séparée en trois parties.

Dans un premier temps, on donne une fonctionnelle $V(\Phi(x, t), z(t))$ pour la solution des équations (4.59)-(4.63) lorsque la dynamique de la variable ξ est négligée.

Ensuite, une fonctionnelle $W(\Phi(x, t), z(t), \xi(t))$ est construite par extension de $V(\Phi(x, t), z(t))$ et en suivant à nouveau l'idée du forwarding. Ce n'est en revanche pas une application immédiate des fonctionnelles déjà construites ainsi dans les précédents chapitres à cause notamment de l'EDO agissant en bas du forage. La proposition 4.4 montre alors que W est bien une fonctionnelle pour le système en boucle fermée lorsque $\psi(x) = 0$.

Enfin, le cas où $\psi(x) \neq 0$ est inclus dans la fonctionnelle de Lyapunov précédente en utilisant la robustesse des méthodes de Lyapunov. Plus précisément on utilisera la marge de stabilité du cas $\psi(x) = 0$ et on donnera la valeur maximale assurant la stricte négativité de $\dot{W}(t)$.

Étape 1 : On néglige la dynamique de ξ et on pose $\psi(x) = 0$

Dans cette partie, le système EDP suivant est utilisé :

$$\begin{aligned} \phi_t(x, t) = & \begin{bmatrix} -c(x) & 0 \\ 0 & c(x) \end{bmatrix} \phi_x(x, t) \\ & - \lambda(x) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \phi(x, t), \forall x \in (0, 1), \end{aligned} \quad (4.79)$$

$$z_t(t) = -(a + b)z(t) + a\phi^-(1, t), \quad (4.80)$$

avec les conditions aux frontières :

$$\begin{aligned}\phi^-(0, t) &= \alpha_p \phi^+(0, t) + \frac{K_i}{1 - K_p} \xi(t), \\ \phi^+(1, t) &= -\phi^-(1, t) + 2z(t),\end{aligned}\tag{4.81}$$

et $K_p \neq 1$,

$$\alpha_p = \frac{\alpha_0 + K_p}{1 - K_p}.\tag{4.82}$$

Inspiré par [10], [75], on utilise la fonctionnelle $V : L^2(0, 1)^2 \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_+$ qui est définie par :

$$V(\phi, z) = qz^2 + \int_0^1 \frac{\phi^-(x)^2}{c(x)} e^{-\mu x} dx + p \int_0^1 \frac{\phi^+(x)^2}{c(x)} e^{\mu x} dx.\tag{4.83}$$

C'est bien une fonctionnelle de Lyapunov car $0 < \underline{c} \leq c(x)$. Afin de simplifier la lecture, on fait l'abus de notation suivant : $V(t) = V(\phi(\cdot, t), z(t))$. On note $\dot{V}(t)$ la dérivée en temps de la fonctionnelle le long de la solution du système qui est C^1 en temps.

Proposition 4.2

Pour tout $(\lambda, a, b, \alpha_0)$ avec $\lambda > 0$, $a > 0$ et $b \geq 0$ il existe des nombres réels positifs K_p , p , μ , q , ν et δ tels que le long de la solution C^1 du système EDP donné par les équations (4.79)-(4.81) on a :

$$\dot{V}(t) \leq -\nu V(t) + \delta |\xi(t)|^2, \forall t \in \mathbb{R}_+.\tag{4.84}$$

La preuve de cette proposition est mise en Annexe C.1 pour garder un chapitre assez aéré. En résumé, les paramètres de la fonctionnelle et le gain K_p doivent être sélectionnés en suivant la procédure suivante.

- S1) μ est pris suffisamment petit afin de respecter l'inégalité (C.10). Remarquons que lorsque $\lambda = 0$, μ peut être sélectionné arbitrairement et que plus la quantité $\frac{\bar{\lambda}}{\underline{c}}$ est grande, plus le μ devra être pris petit.
- S2) p est choisi proche de $e^{-2\mu}$ et de façon à respecter l'inégalité (C.11).
- S3) Le gain K_p doit être suffisamment proche de $-\alpha_0$ de façon à ce que en utilisant (4.82), l'inégalité (C.1) soit respectée.
- S4) q est exactement choisi par l'équation (C.9).
- S5) Enfin, ν est pris assez petit pour vérifier l'inégalité (C.3).

Étape 2 : Ajouter la partie intégrale

Dans cette partie, on construit fonctionnelle de Lyapunov pour la solution des équations (4.79)-(4.81) en y ajoutant la dynamique du contrôleur. On ajoute l'équation (4.61) pour le cas où $y_{ref} = 0$, on obtient :

$$\xi_t(t) = \phi^+(0, t) + \phi^-(0, t).\tag{4.85}$$

On montre ici que le gain K_i peut être choisi de manière à garantir la négativité de la dérivée de la Lyapunov en boucle fermée. Soit $W : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{R}_+$ la fonctionnelle définie par :

$$W(\phi, z, \xi) = V(\phi, z) + rU(\xi, \phi, z)^2,$$

où :

$$U(\xi, \phi, z) = \xi + m^\top M(\phi) + nz,$$

et $r > 0$, $m = (m_1, m_2)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^2$, n un nombre réel sélectionné plus tard et où $M : L^1(0, 1) \mapsto \mathbb{R}^2$ est un opérateur défini par :

$$M(\phi) = \int_0^1 \frac{I - R(x)}{c(x)} \phi(x) dx, \quad (4.86)$$

avec :

$$R(x) = \int_0^x \frac{\lambda(s)}{c(s)} ds \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

La fonctionnelle W est une fonctionnelle de Lyapunov adéquate pour le système en boucle fermée car elle vérifie la proposition suivante.

Proposition 4.3

Il existe $L > 0$ tel que pour tout (ϕ, z, ξ) de $\mathbb{X}$ on a :

$$\frac{\|(\phi, z, \xi)\|_{\mathbb{X}}^2}{L} \leq W(\phi, z, \xi) \leq L \|(\phi, z, \xi)\|_{\mathbb{X}}^2. \quad (4.87)$$

La preuve de la proposition 4.3 se trouve en Annexe C.2. Le même abus de notation est fait pour $\dot{W}(t) = \dot{W}(\phi(\cdot, t), z(t), \xi(t))$. On note de même $\dot{W}(t)$ la dérivée de la fonctionnelle par rapport au temps le long de la solution qui est bien de classe C^1 .

Proposition 4.4

Supposons que K_p , λ , a , b , α_0 , p , μ , q et ν sont choisis de sorte que l'inégalité (4.84) soit satisfaite, alors il existe r , m_1 , m_2 , n , ν_e et K_i tel que si $\psi(x) = 0$ et le long de la solution de classe C^1 des équations (4.79), (4.80), (4.81) et (4.85), la fonctionnelle vérifie :

$$\dot{W}(t) \leq -\nu_e W(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}_+. \quad (4.88)$$

La preuve de la proposition 4.4 se trouve en Annexe C.3. En résumé, les paramètres de la fonctionnelle de Lyapunov seront sélectionnés en suivant la procédure suivante :

S6) Les paramètres m_1 , m_2 et n sont choisis par l'équation (C.15).

S7) K_i et r sont pris assez petits pour vérifier les relations (C.17) et (C.18).

En suivant cette procédure, on peut trouver une valeur pour ν_e .

Avec ces propositions, on a totalement démontré le théorème 4.1 pour le cas particulier où $\psi = 0$. Le paragraphe suivant propose une approche par robustesse permettant de déterminer pour quelles valeurs de ψ le résultat reste valable.

Étape 3 : On ajoute $\psi(x)$

Dans la dernière partie de la preuve du théorème, on montre qu'on peut trouver une valeur $\bar{\psi}$ tel que si ψ vérifie $|\psi(x)| \leq \bar{\psi}$, alors la Lyapunov $W(t)$ obtenue à la proposition 4.4 est encore une fonctionnelle de Lyapunov pour le système en boucle fermée.

Proposition 4.5

Supposons que $K_p, K_i, \lambda, a, b, \alpha_0, p, \mu, q$ et ν_e sont sélectionnés afin de vérifier l'équation (4.88) lorsque $\psi = 0$, alors il existe $\bar{\psi}$ tel que si $|\psi(x)| \leq \bar{\psi}$ l'inégalité qui suit soit vérifiée :

$$\dot{W}(t) \leq -\frac{\nu_e}{4} W(t). \quad (4.89)$$

A nouveau la preuve de cette proposition est laissée en Annexe C.3. La procédure se termine avec :

- S8) La sélection de $\bar{\psi}$ est alors la dernière étape de la procédure et on choisit cette valeur de façon à respecter l'inégalité (C.19).

Avec cette proposition en plus, la démonstration du théorème 4.1 est achevée.

4.4.4 Discussion autour du résultat**4.4.4.1 Sélection numérique de K_p et K_i avec la même fonctionnelle de Lyapunov**

On teste la procédure précédente pour de nombreuses valeurs de μ, p et K_p respectant S1), S2) et S3).

Le plus grand gain trouvé pour K_i est $K_i^* = 1,13$ avec $K_p = 0.47$ ($\alpha_p = -0.5$), $\mu = 0.0375$, $q = 10^{-3}$, $w_1 = 0.099$, $p = 0.76$. Cependant, cette valeur K_i^* conduit à la valeur limite suivante pour le gain initial non-normalisé k_i donné par la relation (4.65) :

$$k_i^* = 5.7437 \times 10^{-4}$$

A partir de ce k_i^* , on peut toujours prendre des k_i plus petit afin d'inclure $\psi(x)$ dans l'analyse de la stabilité. Le $\bar{\psi}(x)$ résultant est alors calculé en utilisant S8). On peut remarquer que ces valeurs numériques de gains sont très éloignées des gains maximums que l'on pourrait utiliser. Les approches par Lyapunov ont en effet ce type de limite bien qu'elles soient très pratiques pour inclure ψ par ailleurs.

4.4.5 Étude comparative : régulation pour un modèle au retard neutre (avec $\lambda(x) = 0$ et c constant)

Supposons que $\lambda(x) = 0$ et $c(x) = c$ constant. Le système d'équations (4.59)-(4.63) devient un pur système de lois de conservation couplées avec des EDOs à ses bords. Dans ce cas

particulier, on peut le transformer en un système à retard et donc utiliser les outils et méthodes déjà développés pour ces systèmes.

Proposition 4.6

Si $\lambda(x) = 0$, $c(x) = c$ est constant, et tant que $K_p \in (-\infty; \frac{1-\alpha_0}{2})$ et $\text{sgn}(K_i) = \text{sgn}(K_p - 1)$, alors il existe des nombres réels k_0, ν_0 tels que

$$\|v(x, t)\|_{L^\infty} \leq k_0 e^{-\nu_0 t} \|v(x, 0)\|_{L^\infty}$$

La démonstration se fait en trois étapes :

1. On montre que les pôles du système d'équations (4.59)-(4.63) avec $\lambda(x) = 0$, $c(x) = c$ sont solutions de l'équation (dite caractéristique) suivante :

$$(s + a + b)(s + K) + (s + b - a)(s\alpha_p - K)e^{-2cs} = 0,$$

avec $K = \frac{K_i}{K_p - 1}$;

2. On applique la procédure de Walton et Marshall comme dans [10, Sec 3.4.3] pour conclure sur le fait que les pôles sont à parties réelles négatives ;
3. L'équivalence entre la stabilité exponentielle du système pour la norme L^∞ et le fait que les pôles soient à parties réelles négatives est donnée par [10, Theorem 3.14].

Les deux premières étapes de la démonstration sont données dans l'Annexe C.3. Une explication détaillée de la procédure de Walton et Marshall peut être trouvée dans le livre [73].

4.5 Simulation

Le schéma numérique utilisé pour la simulation est une semi-discrétisation en espace de l'équation d'onde. On prend 100 variables discrètes pour simuler l'évolution dans la tige, c'est à dire que l'on considère un modèle de dimension finie composé de 100 tables (voir section 4.3). Les valeurs des différents paramètres que l'on a utilisés pour la simulation proviennent de l'article de Jansen [41] et sont rappelés dans la table suivante :

Symbole	Nom	Valeurs numérique
G	Module de Coulomb	$79.6 \times 10^9 \text{ N.m}^{-2}$
ρ	Densité massique	7850 kg.m^{-3}
J	Moment d'inertie	$1.19 \times 10^{-5} \text{ m}^4$
β	Flottements linéique	0.05 kg.m.s^{-1}
c_a	Coefficient de transmission de couple	$2000 \text{ N.m.s.rad}^{-1}$
L	Longueur de la tige	2000 m
I_b	Inertie du foret	311 kg.m^{-2}
c	vitesse de propagation	3184.3 m.s^{-1}
c_b	Frottement visqueux	$0.03 \text{ kg.s}^{-1}\text{m}^{-1}$
T_0	Frottement statiques	7500 N.m^{-1}

Les frottements $\lambda(x)$ modélisent les différents frottements possible agissant sur la tige. Sur la figure 4.12 on a considéré des frottements constants sauf pour certaines zones spatiales où l'on fait l'hypothèse que la tige racle le bord du puits. La fonction $G(x)$ est égale à la valeur G de la table de Jansen en $x = 0$ puis est supposée légèrement décroissante à cause de l'augmentation de la température et de la pression à mesure que l'on est plus profond. La figure 4.12 donne la forme de ces fonctions pour la simulation.

Sur les figures 4.13 et 4.14, on compare l'efficacité de la régulation pour différents k_i dans le cadre du modèle linéaire étudié plus haut, c'est à dire que en $x = L$, l'impact des frottements est donné par la loi $C_F(\theta_t(L, t)) = c_b\theta_t(L, t) + T_0$. Notons que sur la figure 4.13 on n'utilise pas la partie proportionnelle du contrôleur à l'inverse de la figure 4.14 où l'on choisit $k_p = -0.5$.

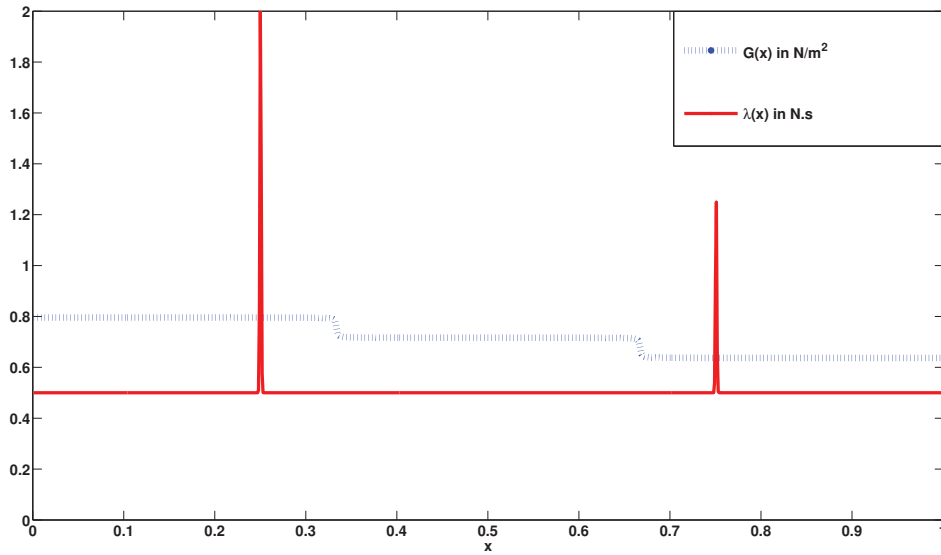
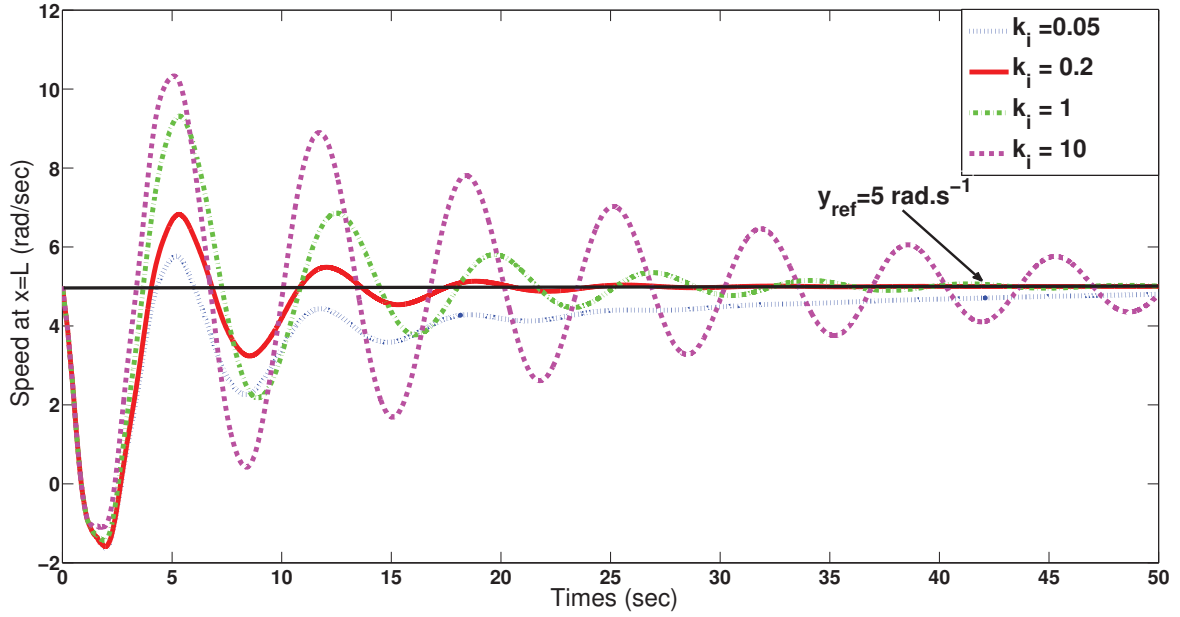
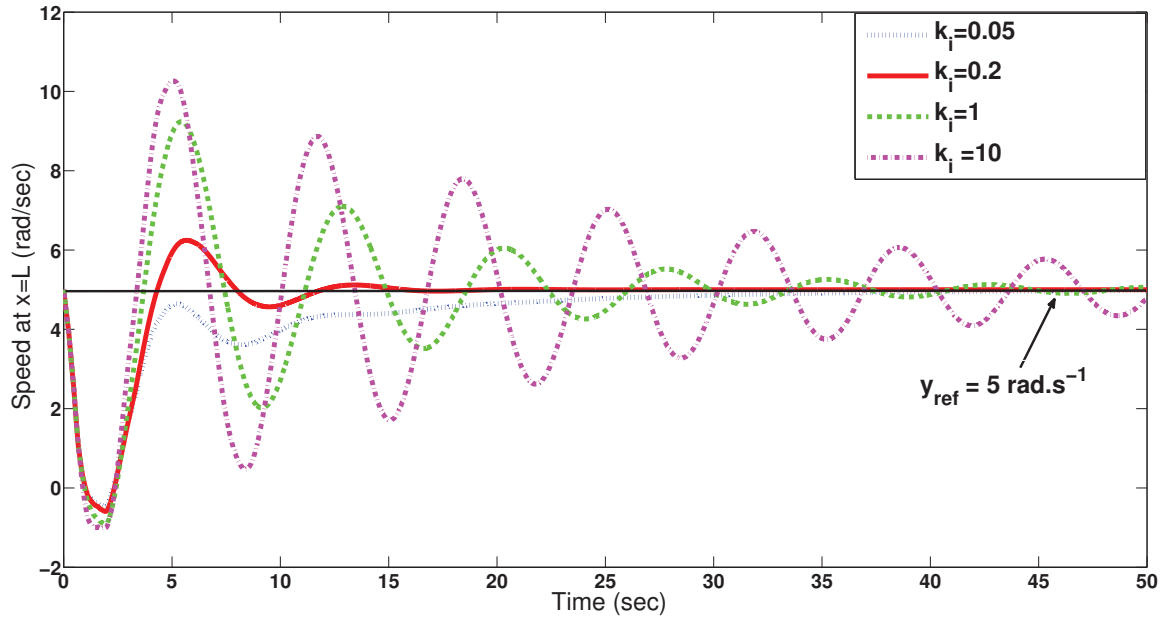


FIGURE 4.12 – Forme des fonctions $\lambda(x)$ et $G(x)$

On peut remarquer que dans certains cas, la partie proportionnelle du contrôleur permet la stabilisation du phénomène Stick-Slip même pour un modèle non-linéaire. La figure 4.15 illustre le comportement du modèle non-linéaire en boucle fermée avec un contrôleur P-I et différents gains. On appelle modèle non-linéaire, le modèle où la fonction de frottement agissant sur le foret est :

$$C_F(\theta_t(L, t)) = c_b\theta_t(L, t) + \frac{2T_0}{\pi} \left(\alpha_1\theta_t(L, t)e^{|\alpha_2\theta_t(L, t)|} + \arctan(\alpha_3\theta_t(L, t)) \right).$$

avec $\alpha_1 = 5.5$, $\alpha_2 = 2.2$ et $\alpha_3 = 3500$. Dans certains cas, la régulation est toujours effective lors de la simulation. Lorsque le contrôleur est uniquement intégral, la non-linéarité empêche la régulation et les oscillations mécaniques à l'intérieur de la tige continuent.

FIGURE 4.13 – Simple contrôleur intégral pour le système linéaire et différents k_i FIGURE 4.14 – Modèle linéaire avec un contrôleur P-I et un $k_p = -0.5$ et différents k_i

4.6 Conclusion

Dans ce chapitre, on a introduit différents types de modélisation pour le système de forage. On a ensuite analysé les solutions des différents types de modèles. Il en ressort que la solution de la dimension finie tend vers celle de la dimension infinie à mesure que la dimension N du

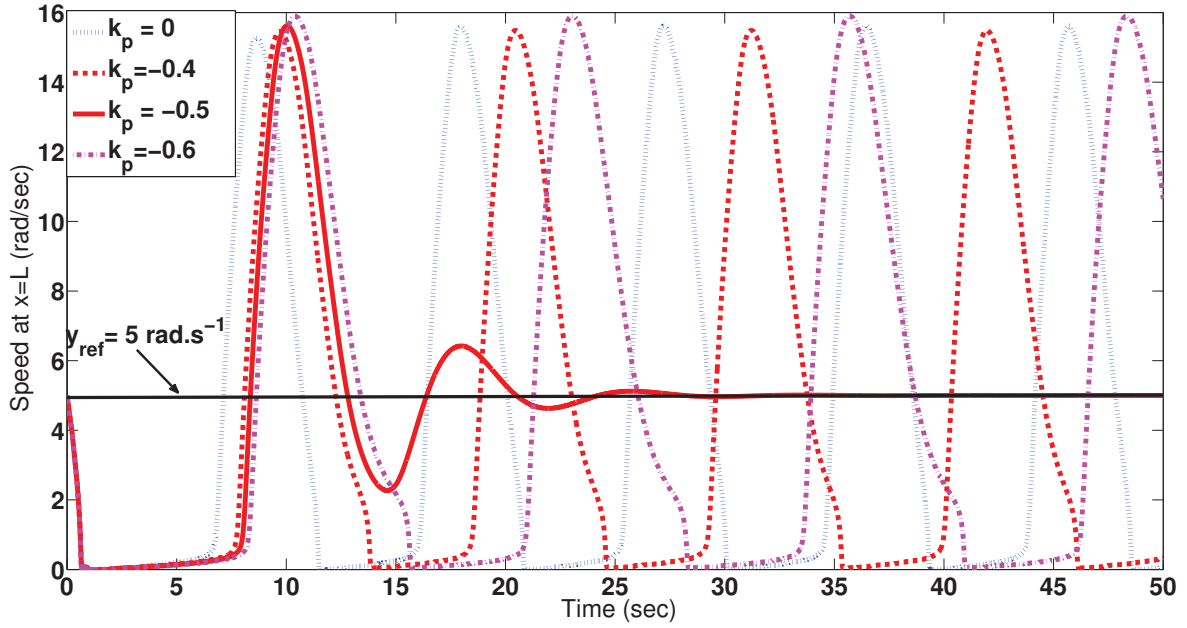


FIGURE 4.15 – Modèle non-linéaire avec retour P-I pour différents k_p et $k_i = 0.2$

modèle fini augmente.

Dans la dernière partie, on a utilisé un modèle de dimension infinie et montré sous quelles conditions on pouvait réguler la vitesse en bas du forage à partir d'un simple contrôleur P-I implémenté en haut du forage. Notamment, on arrive à faire aussi bien que les auteurs utilisant le backstepping (comme par exemple [68] ou [56]). Par rapport à ces derniers, on peut garantir la régulation, néanmoins on doit linéariser la fonction de frottement dans la zone "stable", c'est à dire que nous avons besoin de $b \geq 0$. Le backstepping peut être utilisé pour stabiliser le système même lorsque $b < 0$.

La proposition 4.6 permet de voir que quelque soit la longueur, le système est exponentiellement stable en boucle fermée pour tout k_i , à condition de bien choisir le signe du gain. Il est donc clair que le k_i^* donné par l'approche Lyapunov est très restrictif.

On retrouve les avantages et les inconvénients classiques des approches par Lyapunov. A savoir :

- Permet de prendre en compte des modèles plus compliqués (frottement réparti, non-homogénéité, ...)
- Ne permet pas de donner des conditions de stabilité nécessaire et suffisante. Dans le cas du forage, l'approche Lyapunov limitera les choix de K_i possible.

Enfin, les simulations à partir de paramètres expérimentaux permettent de constater que $k_i \approx 0.2$ semble être le meilleur choix en terme de rapidité pour la régulation (voir fig 4.13).

Conclusion et perspectives

5.1 Conclusion

Dans ce manuscrit, on s'est principalement intéressé à la régulation des systèmes linéaires de dimension infinie. Pour mettre en avant la généralité de notre approche, chaque chapitre a sa propre problématique liée au type de systèmes considérés. Cette problématique est toujours formulée de la manière suivante :

- Il existe un seul et unique état d'équilibre pour le système en boucle fermée et ce dernier doit être exponentiellement stable.
- On cherche à imposer le comportement d'une variable lorsque t tend vers l'infini. Dans les Chapitres 2 et 3, cette variable est la sortie et on parle alors de régulation de sortie. Dans le Chapitre 4, on régule la vitesse en bas du forage en mesurant et en contrôlant la tige du côté opposé.
- Les deux premiers résultats doivent rester valables pour certaines perturbations constantes bien définies. Dans le Chapitre 2, les perturbations sont distribuées sur la dynamique du système. Au chapitre 3, on prend le cas où les perturbations sont distribués sur les entrées et les sorties. Dans le cas du forage, on montre que le théorème donnant la régulation reste valable quelque soient les frottements statiques T_0 et malgré des incertitudes sur la valeurs exactes des paramètres du système.

Dans tous les cas, la méthode employée est une approche par Lyapunov inspirée de la technique du forwarding développée pour analyser la stabilité des systèmes non-linéaires de dimension finie. Les avantages et les contributions de cette approche diffèrent en fonction du système étudié :

- Dans le chapitre 2 utilisant la théorie des semigroupes, notre approche permet de retrouver les résultats existants pour ce type de système. Néanmoins, le gain maximum k_i^* peut-être déterminé à partir des paramètres de la fonctionnelle de Lyapunov utilisée, contrairement aux approches par semigroupe qui demandent le calcul de la norme de la résolvante du système. On a montré qu'il était possible de donner le k_i^* d'un exemple applicatif (régulation de la température dans une barre), ce qui n'a pas été fait avec l'approche par semigroupe. Enfin, on n'a pas a priori réellement besoin que l'opérateur distribuant le contrôle soit borné.

- Dans le chapitre 3, le système est composé d'EDPs hyperboliques et l'entrée et la sortie du système se situent au niveau des conditions aux frontières de l'EDP. Dans ce cas, l'opérateur distribuant le contrôle n'est pas borné. On va alors construire une fonctionnelle de Lyapunov en suivant la même idée qu'au chapitre 2. On démontre alors que l'on peut réguler n'importe quelles sorties vers n'importe quelles références avec un simple contrôleur P-I à condition d'avoir autant d'entrées que de sorties et de pouvoir garantir l'existence de l'état d'équilibre imposé par la régulation de sortie.
- Dans le chapitre 4, on a montré que l'on pouvait résoudre une problématique sur un cas concret : les déformations dans les tiges de forage. La robustesse des approches par Lyapunov est mise en avant par la prise en compte d'un modèle complexe. Les déformations dans la tige suivent en effet une équation des ondes non-homogènes avec un terme source. On construit alors la fonctionnelle pour l'équation des ondes amorties, non-homogènes, puis on rajoute le terme sources $\psi(x)$ à la fin de la démonstration en utilisant la marge de stabilité de la fonctionnelle (voir proposition 4.5). Enfin, le fait que les approches par Lyapunov donnent souvent des conditions restrictives est illustré par la proposition 4.6 qui montre que, sans termes sources, on pourrait choisir k_i aussi grand que l'on veut sans déstabiliser le système. De plus, les valeurs numériques données par la procédure sont très petites comme on le montre dans la partie simulation de ce chapitre.

5.2 Perspectives

5.2.1 Rejet de perturbation non-constante et/ou régulation vers une référence non-constante

Soient la perturbation $d(t)$ et la référence $y_{ref}(t)$, les théorèmes principaux de chaque chapitre devraient pouvoir être étendus pour rejeter ou suivre ce type de signal. On se restreindrait alors au cas où $d(t)$ et $y_{ref}(t)$ sont générées par des exo-systèmes, i.e :

$$\dot{d}(t) = Q_1 d(t), \quad \dot{y}_{ref}(t) = Q_2 y_{ref}(t)$$

. Dans le cas des systèmes de dimension finie linéaires, ce résultat existe et présente des conditions nécessaires et suffisantes (voir l'article sur la commande par modèle interne de Francis et Wonham [36]). Dans le cas des systèmes non-linéaires de dimension finie, D. Astolfi et al. ont montré dans [4] qu'une fonctionnelle de Lyapunov construite par forwarding pouvait être utilisée pour répondre à cette problématique. Enfin en dimension infinie, plusieurs articles récents sur les semigroupes présentent ce genre de résultat. On peut citer par exemple Paunonen et al. dans [60] qui cherchent à étendre les résultats sur la commande interne à la dimension infinie. D'un point de vue applicatif, savoir rejeter ce type de perturbations serait très utile dans les forages. En effet, les vibrations transversales ont des fréquences constantes et pourraient alors être incluses dans le modèle comme étant des perturbations générées par un exo-système.

5.2.2 Régulation des systèmes de dimension infinie quasi-linéaires ou non-linéaires

Cette perspective concerne principalement le chapitre 2. Pour les systèmes hyperboliques, il est maintenant bien connu pour le cas non-linéaire ([82], [19]) où quasi-linéaire (voir chapitre 6 du livre de Coron et Bastin [10]) que la connaissance de la fonctionnelle de Lyapunov pour le modèle linéaire permet la construction d'une fonctionnelle de Lyapunov pour le cas quasi-linéaire où non-linéaire. Le prix à payer porte en général sur les conditions initiales possibles pour la validité du théorème. Autrement dit, le système en boucle fermée avec le contrôle P-I possède alors un état d'équilibre **localement** exponentiellement stable. Il serait intéressant de vérifier que la fonctionnelle de Lyapunov proposé dans ce manuscrit présente également ce genre d'extension naturelle vers le non-linéaire.

5.2.3 Condition nécessaire et suffisante pour la stabilité des systèmes hyperboliques couplés avec des EDOs aux conditions frontières

L'idée est de s'inspirer de la construction de fonctionnelle de Lyapunov par forwarding pour analyser la stabilité de modèles du type :

$$R_t(x, t) = \Lambda_0 R_x(x, t) \quad (5.1)$$

$$R_{IN}(t) = K R_{OUT}(t) + C X(t) \quad (5.2)$$

$$\dot{X}(t) = A X(t) + B R_{OUT}(t) \quad (5.3)$$

où A, K, B, C sont des matrices bien dimensionnées et où $\Lambda_0 = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Dans le meilleur des cas, on pourrait trouver des conditions nécessaires et suffisantes sur les matrices A, B, C, K, Λ_0 . Ce problème a été discuté par Tang et Mazenti dans [75]. Néanmoins, leur fonctionnelle de Lyapunov ne permet pas de conclure dans le cas du forage, ce qui nous motive à penser que ce type de fonctionnelle de Lyapunov gère bien les couplages avec des EDOs.

D'un autre côté, il a été montré récemment par Hayat et Coron dans [19] que l'on peut trouver la limite de stabilité pour le cas où $\Lambda_0 \in \mathbb{R}$ et où A est un scalaire. Les auteurs utilisent une fonctionnelle très proche de la notre.

Enfin, une autre source de motivation pour cette problématique est amenée par les fonctions de Lyapunov hiérarchiques (Lyapunov composé d'une somme de fonction de Lyapunov) récemment développées au LAAS par A. Seuret et al. (voir [72] pour la méthode). Récemment, cette technique a été appliquée à un modèle pouvant être utilisé pour le forage [8]. L'idée derrière leurs résultats est l'utilisation d'une inégalité de Bessel-Legendre pour construire la fonctionnelle de Lyapunov. Plus le degré du polynôme de Legendre est grand, plus on approche de la limite de stabilité, et donc d'une condition nécessaire et suffisante. Enfin, bien que l'on n'utilise pas de polynômes ni de fonctionnelle de Lyapunov hiérarchique dans la construction par forwarding, il y a de très forte ressemblances entre notre fonctionnelle de Lyapunov et les premiers termes de la fonctionnelle de Lyapunov utilisée dans [72], [8].

5.2.4 Prendre en considération l'inertie de la table de rotation dans le modèle du forage

On remplace la condition frontière en $x = 0$ donnée par l'équation (4.5) par celle donnée dans [56], i.e :

$$I_T \theta_{tt}(0, t) = GJ \theta_x(0, t) + \beta \theta_t(0, t) + C_T(t)$$

où I_T est l'inertie de la table de rotation, β un coefficient de frottement et $C_T(t)$ le nouveau contrôle décrivant un couple entraînant la tige en rotation. Je pense que l'on peut obtenir un résultat équivalent au notre pour le forage pour ce modèle plus fin. Néanmoins, il faudra certainement supposer que l'on mesure la valeur $\theta_x(0, t)$ où qu'on peut la connaître avec un observateur.

5.2.5 Modifier la loi de contrôle P-I pour le forage afin de stabiliser le modèle constitué des frottements non-linéaires

Supposons que l'EDO en bas du forage soit donnée par :

$$\dot{z}(t) = f(z(t)) + a\varphi^-(1, t)$$

Supposons ensuite que pour $\forall z(t) > z_s$, $f(z(t)) \approx -(a+b)z(t)$ Je pense que si l'on choisit un contrôleur vérifiant :

$$u(t) = \begin{cases} k_p(y(t) - y_{ref}) + k_i(y(t) - y_{ref}) & \text{si } \varphi^-(0, t) > \varphi_{min} \\ -\alpha_0 \varphi^+(0, t) + \varphi_{min} & \text{si } k_p(y(t) - y_{ref}) + k_i(y(t) - y_{ref}) \leq \varphi_{min} \end{cases}$$

Alors il est possible de stabiliser le système tant que $f(z_s) + a\varphi_{min} > 0$ En effet dans ce cas, il suffit de montrer qu'il existe T tel que $z(T) > z_s$ pour que le système avec le nouveau contrôle vérifie $z(t) > z_s, \forall t > T$. Dans ce cas, $f(z(t)) \approx -(a+b)z(t)$ et l'on se retrouve dans le cas du chapitre 4.

Définitions des différents types de stabilité utilisés

Soit le système non-autonome :

$$\dot{x} = f(x), \text{ et } f(0) = 0 \quad (\text{A.1})$$

Definition A.1 ([45] Stabilité au sens de Lyapunov)

On suppose que le domaine de f est défini par $\Omega : \|x\| < A, A \in \mathcal{R}$. Le point d'équilibre $x = 0$ de l'équation (A.1) est

- Stable si, $\forall R < A$, il existe $0 < \varepsilon \leq R$ tel que :

$$\|x(t_0)\| < \varepsilon \Rightarrow \|x(t)\| < R, \quad \forall t \geq t_0$$

- Instable s'il n'est pas stable.
- Asymptotiquement stable s'il est stable et que l'on peut choisir un $\delta > 0$ tel que $\forall t_0 > 0$ tel que $x(t_0) \in \Omega$ et :

$$\|x(t_0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

Definition A.2 ([45] Stabilité exponentielle)

Le point d'équilibre $x = 0$ de l'équation (A.1) est exponentiellement stable s'il existe des constantes positives c, k et λ telles que :

$$\|x(t)\| \leq k\|x(t_0)\|e^{-\lambda(t-t_0)}, \quad \forall \|x(t_0)\| < c \text{ et } \forall t > t_0$$

Il est globalement exponentiellement stable si l'inégalité précédente reste vrai pour tout état initial $x(t_0)$.

Definition A.3 ([45] Fonction de classe $\mathcal{K}$)

Une fonction continue $\alpha : [0; a[\rightarrow [0; \infty[$ est dite de classe $\mathcal{K}$ si elle est strictement croissante et si $\alpha(0) = 0$. Elle est dite de classe $\mathcal{K}_\infty$ si $a = \infty$ et si $\alpha(r) \rightarrow \infty$ quand $r \rightarrow \infty$.

Definition A.4 ([45] Fonction de classe $\mathcal{KL}$)

Une fonction continue $\beta : [0; a[\times [0; \infty[\rightarrow [0; \infty[$ est dite de classe $\mathcal{KL}$ si, pour chaque s fixé, l'application $\beta(r, s)$ est de classe $\mathcal{K}$ par rapport à la variable r et, pour tout r fixé, l'application $\beta(r, s)$ est décroissante par rapport à la variable s et que l'on a $\beta(r, s) \rightarrow 0$ lorsque $s \rightarrow \infty$.

Soit le système non-autonome contrôlé suivant :

$$\dot{x} = f(t, x, u) \quad (\text{A.2})$$

Definition A.5 ([45] Stabilité entrée-état)

Le système (A.2) est dit "Entrée-état stable (ISS)" si il existe une fonction β de classe $\mathcal{KL}$ et une fonction γ de classe $\mathcal{K}$ tel que pour n'importe quel état initial du système $x(t_0)$ et n'importe quel entrée bornée $u(t)$, la solution $x(t)$ existe pour tout $t \geq t_0$ et vérifie :

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x(t_0)\|, t - t_0) + \gamma\left(\sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \|u(\tau)\|\right)$$

Opérateurs et semigroupes

B.1 Définitions

Definition B.1 (Espace de Hilbert)

[17] Un espace de Hilbert $\mathbb{X}$ est un espace vectoriel réel ou complexe muni d'un produit scalaire et qui est complet pour la norme associée. Complet signifie que toute suite de Cauchy converge dans $\mathbb{X}$.

Definition B.2 (Opérateur linéaire borné)

[17] Soit E et $\mathbb{X}$ deux espaces de Hilbert. On appelle opérateur linéaire non-borné toute application linéaire de E dans $\mathbb{X}$ avec $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset E \rightarrow \mathbb{X}$. $D(\mathcal{A})$ est le domaine de $\mathcal{A}$.

On dit que $\mathcal{A}$ est **borné** (ou continue) si $D(\mathcal{A}) = E$ et si il existe une constante $c \geq 0$ telle que :

$$\|\mathcal{A}\varphi\| \leq c\|\varphi\|, \quad \forall \varphi \in E,$$

La norme d'un opérateur linéaire est alors donné par :

$$\|\mathcal{A}\|_{\mathcal{L}(E, \mathbb{X})} = \sup_{\varphi \neq 0} \frac{\|\mathcal{A}\varphi\|}{\|\varphi\|}.$$

Definition B.3 (Dual topologique)

[17] On désigne par $\mathbb{X}'$ le dual topologique le dual de $\mathbb{X}$. Par définition, c'est l'espace des formes linéaires et continue sur $\mathbb{X}$ que l'on note $\mathcal{L}(\mathbb{X})$ dans ce manuscrit. Lorsque $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathbb{X})$ et $\varphi \in \mathbb{X}$, on note $\langle \mathcal{A}, \varphi \rangle_{\mathcal{L}(\mathbb{X}), \mathbb{X}}$ le produit scalaire dans la dualité $\mathcal{L}(\mathbb{X}), \mathbb{X}$

Definition B.4 (Opérateur adjoint)

[17] Soit $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset E \rightarrow \mathbb{X}$ un opérateur non-borné à domaine dense. On va définir un opérateur non-borné $\mathcal{A}^* : D(\mathcal{A}^*) \subset \mathbb{X}' \rightarrow E'$ comme suit. On pose

$$D(\mathcal{A}^*) = \{v \in \mathbb{X}; \exists c \geq 0 \text{ tel que } \langle v, \mathcal{A}\varphi \rangle \leq c\|\varphi\|, \quad \forall \varphi \in D(\mathcal{A})\}$$

Soit l'application $f \in E'$. L'opérateur adjoint de $\mathcal{A}$ vérifie alors :

$$\mathcal{A}^*v = f, \quad \forall f \in D(\mathcal{A}^*)$$

et on a la relation fondamentale suivante dans l'espace dual :

$$\langle v, \mathcal{A}\varphi \rangle_{\mathcal{L}(\mathbb{X}), \mathbb{X}} = \langle \mathcal{A}^*v, \varphi \rangle_{\mathcal{L}(E'), E} \quad \forall \varphi \in D(\mathcal{A}), \quad \forall v \in D(\mathcal{A}^*)$$

Definition B.5 (Opérateur auto-adjoint)

[17] On dit d'un opérateur $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathbb{X})$ qu'il est auto-adjoint si $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$, c'est à dire :

$$\langle \mathcal{A}\varphi, v \rangle = \langle \varphi, \mathcal{A}v \rangle, \quad \forall \varphi, v \in \mathbb{X}$$

Definition B.6 (Opérateur positif)

[17] Soit $\mathcal{A}$ un opérateur linéaire défini sur un espace de Hilbert $\mathbb{X}$ dans lui-même, on dit que $\mathcal{A}$ est un opérateur positif si pour tout $\varphi \in \mathbb{X}$, on a :

$$\langle \mathcal{A}\varphi, \varphi \rangle \geq 0$$

Definition B.7 (Semigroupe fortement continu)

[24] Soit $\mathbb{X}$ un espace de Hilbert. $(T(t))_{t \geq 0}$ est un semigroupe fortement continu (on peut aussi le trouver sous l'appellation C_0 -semigroupe) si les point suivants sont vérifiés :

1. $\forall t \geq 0$, $T(t)$ est un opérateur linéaire borné dans $\mathbb{X}$, i.e $T(t) \in \mathcal{L}(\mathbb{X})$;
2. $T(0) = I_d$
3. $T(t + \tau) = T(t)T(\tau), \forall t, \tau \geq 0$
4. $\forall \varphi_0 \in \mathbb{X}$, on a $\|T(t)\varphi_0 - \varphi_0\|_{\mathbb{X}}$ qui converge vers 0 lorsque $t \rightarrow 0$, i.e, $t \mapsto T(t)$ est fortement continu en zéro.

Definition B.8 (Générateur infinitésimal de C_0 -semigroupe)

[24] Soit $(T(t))_{t \geq 0}$ un semigroupe fortement continu sur l'espace $\mathbb{X}$. Si la limite suivante existe :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(t)\varphi_0 - \varphi_0}{t} \quad (\text{B.1})$$

alors on dit que φ_0 est un élément du **domaine** de $\mathcal{A}$, on note $\varphi_0 \in D(\mathcal{A})$ et on définit $\mathcal{A}\varphi_0$ comme :

$$\mathcal{A}\varphi_0 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(t)\varphi_0 - \varphi_0}{t} \quad (\text{B.2})$$

On dit alors que $\mathcal{A}$ est le **générateur infinitésimal** du semigroupe fortement continu $(T(t))_{t \geq 0}$.

Definition B.9 (Semigroupe de contraction [24])

$T(t)$ est un semigroupe de contraction si c'est un C_0 -semigroupe qui satisfait l'inégalité suivante :

$$\|T(t)\|_{\mathbb{X}} \leq 1, \quad \text{pour tout } t \geq 0$$

.

Definition B.10 (Opérateur dissipatif)

[24] : Un opérateur linéaire $A : D(A) \subset \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ est dissipatif, si $\forall \varphi \in D(A)$:

$$\operatorname{Re} \langle A\varphi, \varphi \rangle \leq 0$$

Definition B.11 (Ordre du système)

[24] : Pour un générateur A d'un semigroupe $T_A(t)$, on appelle ordre du système ou type du système, la valeur ω_0 définie par :

$$\omega_0 = \omega_0(A) = \inf_{t>0} \frac{\ln \|T_A(t)\|}{t}$$

Definition B.12 (Propriété de croissance spectrale)

[42] : Un opérateur A générateur d'un C_0 -semigroupe $T_A(t)$, satisfait la propriété de croissance spectrale si :

$$\sup \operatorname{Re}(\lambda); \lambda \in \sigma(A) = \omega_0(A)$$

De plus, R. Triggiani [81] montre qu'elle est vérifiée pour les systèmes dont :

- L'opérateur A est borné,
- Le semigroupe engendré par A est holomorphe,
- Le semigroupe engendré par A est compact.

Definition B.13 (Résolvante)

[44] : Soit ξ un nombre complexe. Si $T - \xi$ est inversible avec $R(\xi) = R(\xi, T) = (T - \xi)^{-1}$, où R est borné dans $\mathbb{X}$, alors ξ appartient à l'ensemble résolvant de T . La fonction de l'opérateur ξ , $R(\xi)$, ainsi définie sur l'ensemble résolvant $\rho(T)$ (ou $P(T)$ selon les notations) est appelée résolvante de T . De plus, $R(\xi)$ définie de X dans $D(T)$ pour tout $\xi \in \rho(T)$, est borné à domaine dense.

Definition B.14 (Spectre)

[44] : Le complémentaire $\sigma(T)$ de $\rho(T)$ dans le plan complexe est appelé le spectre de T . D'où :

- l'ensemble des valeurs ξ pour lesquelles $R(\xi, T)$ n'existe pas est appelé le spectre discret de T . Il est noté $\sigma_d(T)$. Les éléments de $\sigma_d(T)$ sont appelés valeurs propres de T .
- L'ensemble des valeurs ξ pour lesquelles $R(\xi, T)$ existe et est à domaine dense mais n'est pas borné, est appelé le spectre continu de T . Il est noté $\sigma_c(T)$.
- L'ensemble des valeurs ξ pour lesquelles $R(\xi, T)$ existe mais n'est pas à domaine dense, est appelé le spectre résiduel de T . Il est noté $\sigma_r(T)$.

Le spectre de T est alors défini par :

$$\sigma(T) = \sigma_d(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T)$$

B.2 Introduction à la théorie des semigroupes

L'approche par C_0 -semigroupe est une manière naturelle d'étendre les résultats des systèmes linéaires de dimension finie aux systèmes de dimension infinie. L'objectif n'étant pas de

faire une présentation complète des semigroupes, on ne présentera que l'essentiel de la théorie utile à la compréhension des travaux réalisés. L'introduction proposée est en grande partie inspiré du livre [40], en particulier du chapitre 5. En dimension finie, lorsque l'on utilise le formalisme d'état, on peut représenter un système entrée-sortie sous la forme de Kalman :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = Cx(t), \quad t \in [0; \infty[\quad (\text{B.3})$$

avec $x \in \mathbb{R}^n$ l'espace d'état, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $u \in \mathbb{R}^m$ le vecteur contenant les m entrées du système, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $y \in \mathbb{R}^p$ le vecteurs contenant les p sorties du système, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ et $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$.

A partir de ce formalisme, la solution $x(t)$ peut être obtenue formellement avec la connaissance des conditions initiales. Notons $x_0 = x(0)$, on a :

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds \quad (\text{B.4})$$

En dimension infinie, on peut représenter un système linéaire avec ses entrées et ses sorties par la même structure en modifiant uniquement les objets mathématiques A, B et C ainsi que l'état x . Soit un espace de Hilbert $\mathbb{X}$, les matrices précédentes deviennent alors des opérateurs tandis que l'état sera noté $\varphi(x, t)$ et appartiendra à l'espace fonctionnel $\mathbb{X}$. Un grand nombre de modèles composés d'EDPs peuvent s'écrire :

$$\varphi_t(x, t) = \mathcal{A}\varphi(x, t) + \mathcal{B}u(t), \quad t \in [0; \infty[, \quad (\text{B.5})$$

$$y(t) = \mathcal{C}\varphi(x, t), \quad t \in [0; \infty[, \quad (\text{B.6})$$

$$\varphi(x, 0) = \varphi_0(x) \in D(\mathcal{A}) \quad (\text{B.7})$$

où U, Y sont deux espaces de Hilbert tel que $u \in U$ et $y \in Y$, $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathbb{X})$ est un opérateur linéaire de $\mathbb{X}$ dans lui-même, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont des opérateurs linéaires bornés respectivement de U dans $\mathbb{X}$ et de $\mathbb{X}$ dans Y .

L'exemple académique de l'évolution de la température dans une barre en métal permet de bien comprendre les différences fondamentales avec la dimension finie. En particulier, pour introduire les semigroupes. Nous allons voir que la structure de la solution d'une équation aux dérivées partielles peut également être composée d'exponentielles.

Considérons la barre de métal de longueur $L = 1$ isolée thermiquement à ses extrémités. Notons $T(x, t)$ la température à l'intérieur de la barre au point x et à l'instant t . L'évolution de la température est mathématiquement exprimée par l'ensemble des équations suivantes :

$$T_t(x, t) = T_{xx}(x, t) \quad (\text{B.8})$$

$$T(0, t) = T(1, t) = 0 \quad (\text{B.9})$$

$$T(x, 0) = T_0(x) \quad (\text{B.10})$$

Les équations (B.8)-(B.10) dénotent respectivement la relation avec les dérivées partielles existants dans le domaine, les conditions aux frontières et les conditions initiales nécessaires à ce qu'il n'existe mathématiquement qu'une seule et unique solution décrivant l'évolution de la température dans la barre.

En cherchant des solutions sous la forme :

$$T(x, t) = f(t)g(x) \quad (\text{B.11})$$

on obtient la solution en résolvant les équations aux dérivées ordinaires vérifiées par $f(t)$ et $g(x)$. La solution finale s'écrit sous la forme d'une somme infinie :

$$T(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n e^{-n^2 \pi^2 t} \cos(n\pi x) \quad (\text{B.12})$$

avec :

$$\alpha_n = 2 \int_0^1 T_0(x) \cos(n\pi x) dx, \quad n \geq 1 \quad (\text{B.13})$$

$$\alpha_0 = \int_0^1 T_0(x) dx, \quad n = 0 \quad (\text{B.14})$$

L'objectif de la théorie des semigroupes est de généraliser la notion d'exponentielle de matrice e^{At} lorsque A est un opérateur $\mathcal{A}$ agissant sur un espace de Hilbert.

D'un point de vue système, l'espace de Hilbert $\mathbb{X}$ est l'espace dans lequel vit la solution du vecteur d'état du système.

Le théorème suivant donne les propriétés de l'application e^{At} .

Théorème B.1

[40, pp 55] : Un semigroupe fortement continu $(T(t))_{t \geq 0}$ sur un espace de Hilbert $\mathbb{X}$ possède les propriétés suivantes :

1. $\|T(t)\|$ est borné sur tout sous-intervalle finie de $[0; \infty[$
2. L'application $t \mapsto T(t)$ est fortement continue sur $[0; \infty[$
3. $\forall \varphi \in \mathbb{X}$ on a :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t T(s) \varphi ds = \varphi \quad (\text{B.15})$$

4. Si $w_0 = \inf_{t \geq 0} \left(\frac{1}{t} \log \|T(t)\| \right)$, alors w_0 est borné et l'on a

$$w_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{t} \log \|T(t)\| \right) \quad (\text{B.16})$$

5. $\forall w > w_0$, il existe une constante M_w tel que $\forall t \geq 0$ on a :

$$\|T(t)\| \leq M_w e^{wt} \quad (\text{B.17})$$

Pour le moment, nous nous intéressons à la solution de la partie homogène du problème en négligeant l'entrée et la sortie, c'est à dire :

$$\varphi_t(x, t) = \mathcal{A}\varphi(x, t), \quad \varphi(0) = \varphi_0 \quad (\text{B.18})$$

Lorsque $\mathcal{A}$ est une matrice carrée appartenant à l'ensemble $\mathbb{R}^{n \times n}$, le problème peut être vu comme n équations aux dérivées ordinaires. Puisque nous souhaitons élargir le problème à des opérateurs abstraits, on appelle l'équation (B.18) une **équation différentielle abstraite**

Le lien entre l'opérateur $\mathcal{A}$ et le semigroupe qu'il génère (voir définition B.8) est résumé par le théorème suivant :

Théorème B.2

[40, pp 57] Soit $(T(t))_{t \geq 0}$ un semigroupe fortement continu sur un espace de Hilbert $\mathbb{X}$ et son générateur infinitésimal $\mathcal{A}$. Alors les propriétés suivantes sont vraies :

1. $\forall \varphi_0 \in D(\mathcal{A})$ et $t \geq 0$, on a $T(t)\varphi_0 \in D(\mathcal{A})$;
2. $\frac{d}{dt}(T(t)\varphi_0) = \mathcal{A}T(t)\varphi_0 = T(t)\mathcal{A}\varphi_0$, $\forall \varphi_0 \in D(\mathcal{A})$, $t \geq 0$;
3. $\frac{d^n}{dt^n}(T(t)\varphi_0) = \mathcal{A}^n T(t)\varphi_0 = T(t)\mathcal{A}^n \varphi_0$, $\forall \varphi_0 \in D(\mathcal{A})$, $t \geq 0$;
4. $T(t)\varphi_0 - \varphi_0 = \int_0^t T(s)\mathcal{A}\varphi_0 ds$, $\forall \varphi_0 \in D(\mathcal{A})$;
5. $\int_0^t T(s)\varphi ds \in D(\mathcal{A})$ et $\mathcal{A} \int_0^t T(s)\varphi ds = T(t)\varphi - \varphi$, $\forall \varphi \in \mathbb{X}$, et $D(\mathcal{A})$ est dense dans $\mathbb{X}$;
6. $\mathcal{A}$ est un opérateur linéaire fermé.

Ces propriétés nous apprennent qu'une solution classique de (B.18) peut être caractérisée à l'aide des semigroupes. On a en particulier la proposition suivante :

Proposition B.1

[40, pp 61] : Soit $\mathcal{A}$ le générateur infinitésimal du semigroupe fortement continu $(T(t))_{t \geq 0}$. Alors pour tout $\varphi_0 \in D(\mathcal{A})$, l'application $t \mapsto T(t)\varphi_0$ est l'unique solution classique de (B.18)

Pour plus de détails sur les différentes solutions et leurs définitions, on peut se référer à [44]. Avec ces premiers résultats, on comprend que l'étude du comportement des solutions de problèmes abstraits peut se faire en analysant les propriétés du semigroupe associé à l'opérateur du problème considéré. Avant de rappeler les principaux outils existants permettant une telle analyse, on reprend l'exemple de la barre afin d'illustrer les résultats précédents.

Soit $\mathbb{X} = L^2[0; 1]$, alors la température $T(x, t)$ vérifie l'équation différentielle abstraite suivant :

$$\frac{\partial T}{\partial t}(x, t) = \mathcal{A}T(x, t), \quad \varphi_0 \in D(\mathcal{A})$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}T &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} T \\ D(\mathcal{A}) &= \{T \in L^2[0; 1] \text{ tel que } T, \frac{\partial T}{\partial x} \text{ sont absolument continues, } \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \in L^2[0; 1] \\ &\quad \text{et } \frac{\partial T}{\partial x}(0) = 0 = \frac{\partial T}{\partial x}(1)\} \end{aligned}$$

Afin de pouvoir définir les cas où la solution converge vers zéro, on va se servir du théorème B.1. En effet, on sait que pour tout semigroupe, il existe des constantes M et w satisfaisant :

$$\|T(t)\| \geq me^{wt}$$

Les semigroupes sont également très utilisés pour déterminer l'existence et l'unicité des solutions pour les équations. Dans ce qui suit on présente deux théorèmes célèbres notamment pour analyser la stabilité et le caractère bien-posé de la solution. Le théorème de Hille-Yoshida (théorème B.3) donne un critère utilisant la résolvante de l'opérateur (voir définition B.13), le théorème de Lumer-Philips utilise la notion de dissipativité (voir définition B.10).

Théorème B.3 (Théorème de Hille-Yoshida)

Une condition nécessaire et suffisante pour un opérateur linéaire, fermé, densément défini sur un espace de Hilbert $\mathbb{X}$ d'être le générateur infinitésimal d'un semigroupe fortement continu de contraction (voir définition B.9) est que $[0; \infty[\subset \rho(\mathcal{A})$ où $\rho(\mathcal{A})$ est l'ensemble résolvant comme donné par la définition B.13 :

$$\forall, \alpha > 0, \quad \|(\alpha I - \mathcal{A})^{-1}\| \leq \frac{1}{\alpha} \quad (\text{B.19})$$

Théorème B.4 (Théorème de Lumer-Philips)

Soit $\mathcal{A}$ un opérateur linéaire avec un domaine $D(\mathcal{A})$ sur un espace de Hilbert $\mathbb{X}$. Alors $\mathcal{A}$ est le générateur d'un semigroupe fortement continu de contraction $(T(t))_{t \geq 0}$ sur $\mathbb{X}$ si et seulement si $\mathcal{A}$ est dissipatif et que le rang de l'opérateur $(I - \mathcal{A})$ est égal à $\mathbb{X}$.

Dans ce qui suit on va utiliser le théorème de Lumer-Philips pour démontrer que le semigroupe engendré par l'opérateur $\mathcal{A}$ dans le cas de la barre chauffée génère un semigroupe de contraction. Rappelons que l'équation différentielle abstraite dans le cas de l'exemple de la barre qui chauffe peut s'écrire sous forme d'opérateur avec

$$\begin{aligned} \mathcal{A}T &= \frac{d^2}{dx^2}T \\ D(\mathcal{A}) &= \{T \in L^2[0; 1] \text{ tel que } T, \frac{dT}{dx} \text{ sont absolument continues, } \frac{d^2T}{dx^2} \in L^2[0; 1] \\ &\quad \text{et } \frac{dT}{dx}(0) = 0 = \frac{dT}{dx}(1)\} \end{aligned}$$

Montrons que $\mathcal{A}$ est dissipatif :

$$\begin{aligned} \langle T, \mathcal{A}T \rangle + \langle \mathcal{A}T, T \rangle &= \int_0^1 T(s) \frac{d^2 \bar{T}}{ds^2}(s) + \frac{d^2 T}{ds^2}(s) T(\bar{s}) ds \\ &= \left[T(x) \frac{dT}{dx}(x) + \frac{dT}{dx}(x) T(\bar{x}) \right]_0^1 - 2 \int_0^1 \frac{dT}{ds}(s) \frac{dT}{ds}(\bar{s}) ds \\ &= -2 \int_0^1 \left\| \frac{dT}{ds}(s) \right\|^2 ds \leq 0 \end{aligned}$$

Montrons que $\text{ran}(I - \mathcal{A}) = L^2[0; 1]$:

Montrer cette propriété revient à trouver une fonction h appartenant à $D(\mathcal{A})$ tel que pour tout $f \in L^2[0; 1]$ on ait :

$$(I - \mathcal{A})h = f \quad (\text{B.20})$$

Si l'on prend :

$$h(x) = \alpha \cosh(x) - \int_0^x \sinh(x - \tau) f(\tau) d\tau, \quad \alpha = \frac{1}{\sinh(1)} \int_0^1 \cosh(1 - \tau) f(\tau) d\tau$$

alors il est facile de vérifier par le calcul que :

1. $h(x)$ est absolument continue
2. $\frac{dh}{dx}(x)$ est absolument continue et satisfait les conditions frontières
3. $\frac{d^2h}{dx^2}(x) \in f \in L^2[0; 1]$

Donc pour tout $f \in L^2[0; 1]$ on peut trouver un $h \in D(\mathcal{A})$ vérifiant (B.20), on peut donc conclure que $\mathcal{A}$ est le générateur infinitésimal d'un semigroupe de contraction et que la solution classique associée au problème est unique.

Démonstration des propositions du chapitre 4

C.1 Preuve de la proposition 4.2

La dérivée de V le long de la solution satisfait :

$$\dot{V}(t) = -w_0(t)^T \mathcal{P} w_0(t) - w_1(t)^T \mathcal{M} w_1(t) - \int_0^1 \phi(x, t)^T \mathcal{N} \phi(x, t) dx,$$

où

$$w_0(t) = (\phi^+(0, t) \quad K_i \xi(t))^T, w_1(t) = (\phi^-(1, t) \quad z(t))^T,$$

et :

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \begin{bmatrix} e^{-\mu} - pe^\mu & 2pe^\mu - aq \\ 2pe^\mu - aq & 2(a+b)q - 4pe^\mu \end{bmatrix}, \\ \mathcal{N} &= \begin{bmatrix} (2\frac{\lambda(x)}{c(x)} + \mu)e^{-\mu x} & \frac{\lambda(x)}{c(x)}(e^{-\mu x} + pe^{\mu x}) \\ \frac{\lambda(x)}{c(x)}(e^{-\mu x} + pe^{\mu x}) & p\left(2\frac{\lambda(x)}{c(x)} + \mu\right)e^{\mu x} \end{bmatrix}, \\ \mathcal{P} &= \begin{bmatrix} p - \alpha_p^2 & -\frac{\alpha_p}{(1-K_p)} \\ -\frac{\alpha_p}{(1-K_p)} & -\frac{1}{(1-K_p)^2} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

Avant toutes choses, remarquons que si

$$p - \alpha_p^2 > 0, \tag{C.1}$$

alors on peut trouver un nombre réel positif δ tel que

$$-w_0(t)^T \mathcal{P} w_0(t) \leq \delta |K_i \xi(t)|^2.$$

De plus, si :

$$\mathcal{M} > 0, \mathcal{N}(x) > 0, \forall x \in [0, 1], \tag{C.2}$$

alors, en utilisant le fait que $\mathcal{N}$ est continue et que c est bornée supérieurement, il existe $\nu \in \mathbb{R}_+$ tel que les inégalités matricielle suivantes

$$\mathcal{M} \geq \nu q I, \mathcal{N}(x) \geq \frac{\nu}{c(x)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix}, \tag{C.3}$$

soient vérifiées.

Cela implique que l'on satisfait l'équation (4.84). Par conséquent, le reste de la preuve est dédiée à la recherche des paramètres positifs p et μ permettant d'assurer la relation (C.2).

Notons que :

$$\begin{aligned} \det(\mathcal{N}(x)) &= p \left(2 \frac{\lambda(x)}{c(x)} + \mu \right)^2 - \left(\frac{\lambda(x)}{c(x)} (e^{-\mu x} + pe^{\mu x}) \right)^2, \\ &> F(p, \mu, x) \left[\sqrt{p} \left(2 \frac{\lambda(x)}{c(x)} + \mu \right) + \frac{\lambda(x)}{c(x)} (e^{-\mu x} + pe^{\mu x}) \right]. \end{aligned}$$

où

$$F(p, \mu, x) = \sqrt{p} \left(2 \frac{\lambda(x)}{c(x)} + \mu \right) - \frac{\lambda(x)}{c(x)} (e^{-\mu x} + pe^{\mu x}).$$

Par ailleurs, en utilisant le lemme C.1 donné à la fin de cette preuve, il existe p et μ tel que :

$$0 < p < e^{-2\mu}, \quad (\text{C.4})$$

et $F(p, \mu, x) > 0$. Alors, $\mathcal{N} > 0$.

Pour ce qui est des autres termes à définir positivement, on peut montrer avec (C.4), que $\mathcal{M} > 0$ si et seulement :

$$f(q) > 0, \quad (\text{C.5})$$

où :

$$\begin{aligned} f(q) &= (e^{-\mu} - pe^{\mu})q(2(a+b) - 4pe^{\mu}), \\ &\quad - (2pe^{\mu} - aq)^2 \\ &= -a'q^2 + b'q - c', \end{aligned}$$

et où a' , b' et c' sont des nombres réels positifs données par

$$\begin{aligned} a' &= a^2 \\ b' &= (e^{-\mu} - pe^{\mu})2(a+b) + 4pae^{\mu} \\ c' &= (e^{-\mu} - pe^{\mu})4pe^{\mu} + 4p^2e^{2\mu} = 4p \end{aligned}$$

Cette fonction $f(q)$ est une fonction polynomiale du second ordre, dont le maximum est atteint $q = \frac{b'}{2a'}$. Remarquons que $f(\frac{2b'}{2a'})$ est strictement positif si et seulement si :

$$b'^2 - 4a'c' = (b' - 2\sqrt{a'c'})(b' + 2\sqrt{a'c'}) > 0. \quad (\text{C.6})$$

puisque a' , b' et c' sont positifs, il reste uniquement à vérifier que $b' - 2\sqrt{a'c'}$ est lui aussi positif. En utilisant notamment l'équation (C.4) et l'inégalité : $(e^{-\mu} - pe^{\mu}) > 0$, on trouve :

$$\frac{b' - 2\sqrt{a'c'}}{(e^{-\mu} - pe^{\mu})} = 2(a+b) - \frac{4a(\sqrt{p} - pe^{\mu})}{e^{-\mu} - pe^{\mu}}, \quad (\text{C.7})$$

$$= 2a \left(1 - \frac{2\sqrt{p}}{e^{-\mu} + \sqrt{p}} \right) + 2b. \quad (\text{C.8})$$

puisque $\frac{2\sqrt{p}}{e^{-\mu} + \sqrt{p}} < 1$, cela amène $f(\frac{2b'}{2a'}) > 0$, en conséquence, on choisit de prendre :

$$q = \frac{2b'}{2a'} = \frac{(e^{-\mu} - pe^{\mu})2(a+b) + 4pae^{\mu}}{2a^2}, \quad (\text{C.9})$$

car pour ce choix particulier du paramètre q on a l'assurance que $\mathcal{M} > 0$.

Finalement on sélectionne K_p tel que l'inégalité (C.1) soit vérifiée, ce qui conclut cette preuve. ■

Lemme C.1

Soit l'application $(p, \mu, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par :

$$F(p, \mu, x) = \sqrt{p} \left(2 \frac{\lambda(x)}{c(x)} + \mu \right) - \frac{\lambda(x)}{c(x)} (e^{-\mu x} + pe^{\mu x}),$$

où

$$0 \leq \lambda(x) \leq \bar{\lambda}, \quad 0 < \underline{c} \leq c(x).$$

Alors, $\forall (\mu, p)$ tel que :

$$\mu > 0, \quad \frac{e^{-\mu}}{\mu} > 10 \frac{\bar{\lambda}}{\underline{c}}, \quad (\text{C.10})$$

et

$$e^{-2\mu} > p > \max \{C_1(\mu), C_2(\mu), C_3(\mu)\}, \quad (\text{C.11})$$

où C_i , $i = 1, 2, 3$ sont données par :

$$\begin{aligned} C_1(\mu) &= \left(\frac{4}{5} \right)^2 e^{-2\mu}, \\ C_2(\mu) &= \max \left\{ e^{-\mu} - \frac{\underline{c}}{\bar{\lambda}} \frac{e^{-\mu}}{10} \mu, 0 \right\}^2, \\ C_3(\mu) &= e^{-2\mu} \max \left\{ 1 - \frac{\underline{c}}{5\bar{\lambda}} \mu, 0 \right\}. \end{aligned}$$

Alors, $\forall x \in [0, 1]$, on a :

$$F(p, \mu, x) > \frac{e^{-\mu} \mu}{5}. \quad (\text{C.12})$$

Preuve :

Soit l'application $G : \mathbb{R}_+ \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{aligned} G(\mu, x) &= e^{\mu} F(e^{-2\mu}, \mu, x) - \mu, \\ &= 2 \frac{\lambda(x)}{c(x)} - \frac{\lambda(x)}{c(x)} (e^{\mu(1-x)} + e^{\mu(x-1)}), \\ &= \frac{\lambda(x)}{c(x)} (2 - e^{\mu(1-x)} - e^{\mu(x-1)}). \end{aligned}$$

Remarquons que $G(0, x) = 0$ et que :

$$G_\mu(\mu, x) = \frac{\lambda(x)}{c(x)} \left(-(1-x)e^{\mu(1-x)} - (x-1)e^{\mu(x-1)} \right),$$

Ce qui nous donne $G_\mu(0, x) = 0$. De plus,

$$G_{\mu\mu}(\mu, x) = -(1-x)^2 \frac{\lambda(x)}{c(x)} \left(e^{\mu(1-x)} + e^{\mu(x-1)} \right).$$

Ce qui implique que $\forall \mu \geq 0$ et $\forall x \in [0, 1]$, on a :

$$|G_{\mu\mu}(\mu, x)| \leq 2 \frac{\bar{\lambda}}{\underline{c}} e^\mu.$$

Donc, on a bien $\mu \geq 0$ et

$$|G(\mu, x)| \leq 2 \frac{\bar{\lambda}}{\underline{c}} e^\mu \mu^2. \quad (\text{C.13})$$

D'un autre côté on a :

$$\begin{aligned} F(p, \mu, x) &= (\sqrt{p} - e^{-\mu}) \left(2 \frac{\lambda(x)}{c(x)} + \mu \right) - e^{-\mu} \frac{\lambda(x)}{c(x)} \left(e^{\mu(1-x)} + e^{\mu(x-1)} \right) \\ &\quad + e^{-\mu} \left(2 \frac{\lambda(x)}{c(x)} + \mu \right) - \frac{\lambda(x)}{c(x)} (p - e^{-2\mu}) e^{\mu x}, \\ &= (\sqrt{p} - e^{-\mu}) \left(2 \frac{\lambda(x)}{c(x)} + \mu \right) - \frac{\lambda(x)}{c(x)} (p - e^{-2\mu}) e^{\mu x} e^{-\mu} G(\mu, x) + e^{-\mu} \mu. \end{aligned}$$

Donc, avec (C.13), on a l'implication suivante :

$$\begin{aligned} F(p, \mu, x) &\geq e^{-\mu} \mu - |\sqrt{p} - e^{-\mu}| \left(2 \frac{\bar{\lambda}}{\underline{c}} + \mu \right) - \frac{\bar{\lambda}}{\underline{c}} |p - e^{-2\mu}| e^\mu - 2\mu^2 \frac{\bar{\lambda}}{\underline{c}}, \\ &\geq e^{-\mu} \mu - |\sqrt{p} - e^{-\mu}| \mu - \frac{\bar{\lambda}}{\underline{c}} (2|\sqrt{p} - e^{-\mu}| + |p - e^{-2\mu}| e^\mu + 2\mu^2). \end{aligned}$$

la condition (C.10) amène :

$$2 \frac{\bar{\lambda}}{\underline{c}} \mu^2 < \frac{e^{-\mu} \mu}{5}. \quad (\text{C.14})$$

De plus si $e^{-2\mu} \geq p \geq C_1(\mu)$, alors :

$$|e^{-\mu} - \sqrt{p}| = e^{-\mu} - \sqrt{p} \leq \frac{e^{-\mu}}{5}.$$

et si $e^{-2\mu} \geq p \geq C_2(\mu)$, alors :

$$2 \frac{\bar{\lambda}}{\underline{c}} |e^{-\mu} - \sqrt{p}| = 2 \frac{\bar{\lambda}}{\underline{c}} (e^{-\mu} - \sqrt{p}) \leq \frac{e^{-\mu} \mu}{5}.$$

Enfin, si $e^{-2\mu} \geq p \geq C_3(\mu)$, on a :

$$\frac{\bar{\lambda}}{\underline{c}} |e^{-2\mu} - p| e^\mu = \frac{\bar{\lambda}}{\underline{c}} (e^{-2\mu} - p) e^\mu \leq \frac{e^{-\mu} \mu}{5}.$$

On conclut donc que la relation (C.12) est vérifiée. ■

C.2 Preuve de la proposition 4.3 :

Avant de pouvoir démontrer la proposition 4.4, Il faut montrer que l'on sait trouver un réel positif L vérifiant l'équation (4.87). Avant tout, remarquons que l'on a l'inégalité suivante à partir de l'expression (4.83), et comme $p < 1$, on a :

$$\begin{aligned} V(\phi, z) &\leq q|z|^2 + \frac{1}{\underline{c}} \|\phi^-\|_{L^2(0,1)}^2 + \frac{p}{\underline{c}} \|\phi^-\|_{L^2(0,1)}^2 \\ &\leq L_1 (|z| + \|\phi^-\|_{L^2(0,1)} + \|\phi^-\|_{L^2(0,1)})^2, \end{aligned}$$

où $L_1 = \max \left\{ q, \frac{1}{\underline{c}} \right\}$. puis,

$$\begin{aligned} V(\phi, z) &\geq q|z|^2 + \frac{1}{\underline{c}} \|\phi^+\|_{L^2(0,1)}^2 + \frac{p}{\underline{c}} \|\phi^-\|_{L^2(0,1)}^2 \\ &\geq L_2 (|z| + \|\phi^-\|_{L^2(0,1)} + \|\phi^+\|_{L^2(0,1)})^2, \end{aligned}$$

où $L_2 = \min \left\{ \frac{q}{3}, \frac{p}{3\underline{c}} \right\}$. De plus :

$$\begin{aligned} U(\xi, \phi, z) &\leq |\xi| + |n||z| \\ &\quad + |m| \frac{\underline{c} + 2\bar{\lambda}}{\underline{c}^2} (\|\phi^-\|_{L^2(0,1)} + \|\phi^+\|_{L^2(0,1)}) \\ &\leq L_3 \|(\xi, \phi, z)\|_{\mathbb{X}}. \end{aligned}$$

où $L_3 = \max \left\{ 1, |m| \frac{\underline{c} + 2\bar{\lambda}}{\underline{c}^2}, |n| \right\}$. Enfin on obtient :

$$U(\xi, \phi, z) = \xi + Z(\phi, z),$$

avec :

$$Z(\phi, z) = m^T M(\phi) + nz \leq \sqrt{L_3 V(\phi, z)}.$$

où L_3 est un nombre réel positif. Enfin, on a :

$$U(\xi, \phi, z)^2 \geq |\xi|^2 + Z(\phi, z)^2 - 2|\xi||Z(\phi, z)|.$$

En complétant les carrés et en utilisant une inégalité triangulaire, on a l'implication suivante pour tout $0 < \ell < 1$:

$$\begin{aligned} U(\xi, \phi, z)^2 &\geq |\xi|^2(1 - \ell) - \left(\frac{1}{\ell} - 1 \right) |Z(\phi, z)|^2, \\ &\geq |\xi|^2(1 - \ell) - \left(\frac{1}{\ell} - 1 \right) L_3 V(\phi, z). \end{aligned}$$

Enfin, il nous reste à prendre un ℓ suffisamment proche de 1 et un nombre positif L_4 tel que,

$$r|\xi|^2(1 - \ell) + \left(1 - r \left(\frac{1}{\ell} - 1 \right) \right) L_3 V(\phi, z) \leq W(\xi, \phi, z) \leq \frac{1}{L_4} \|(\xi, \phi, z)\|_{\mathbb{X}}^2.$$

Puis on prend $L \geq \max\{L_2, L_3, L_4\}$, afin d'obtenir le résultat final recherché.

C.3 Preuve de la proposition 4.4

Notons que l'on a

$$R(x) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 0.$$

On peut utiliser cette propriété pour avoir :

$$\begin{aligned} \dot{M}(t) &= \int_0^1 \frac{I - R(x)}{c(x)} \phi_t(x, t) dx, \\ &= \int_0^1 (I - R(x)) \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \phi_x(x, t) - \frac{\lambda(x)}{c(x)} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \phi(x, t) dx. \end{aligned}$$

avec

$$R_x(x) \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{\lambda(x)}{c(x)} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Par conséquent, en utilisant une intégration par partie, on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{M}(t) &= (I - R(1)) \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \phi(1, t) - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \phi(0, t), \\ &= \begin{bmatrix} -1 - \zeta & -\zeta \\ -\zeta & 1 - \zeta \end{bmatrix} \phi(1, t) - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \phi(0, t), \end{aligned}$$

où

$$\zeta = \int_0^1 \frac{\lambda(x)}{c(x)} dx.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \dot{U}(t) &= \phi^-(0, t) + \phi^+(0, t) - n(a + b)z(t) + na\phi^-(1, t) \\ &\quad + m_1 (\phi^-(0, t) - (1 + \zeta)\phi^-(1, t) - \zeta\phi^+(1, t)) \\ &\quad + m_2 \left(-\frac{\lambda}{2}\phi^-(1, t) + (1 - \zeta)\phi^+(1, t) - \phi^+(0, t) \right) \end{aligned}$$

En injectant les relations des conditions aux frontières (4.81) et avec α_p définie par la relation (4.82), on a :

$$\begin{aligned} \dot{U}(t) &= \phi^-(1, t) \left(an - m_1(1 + \zeta) - m_2\zeta - \frac{n(a + b)}{2} \right) + \phi^+(1, t) \left(m_2(1 - \zeta) - m_1\zeta - \frac{n(a + b)}{2} \right) \\ &\quad + \phi^+(0, t)(\alpha_p + 1 + m_1\alpha_p - m_2) + \xi(t) \frac{K_i}{1 - K_p} (1 + m_1). \end{aligned}$$

Notre objectif est de trouver des solutions pour les valeurs de m_1 , m_2 et n vérifiant l'égalité matricielle suivante

$$\begin{bmatrix} -1 - \zeta & -\zeta & \frac{a-b}{2} \\ -\zeta & 1 - \zeta & -\frac{a+b}{2} \\ \alpha_p & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\alpha_p - 1 \end{bmatrix}$$

Ce qui est toujours possible puisque la matrice est inversible. On obtient les solutions suivantes pour les paramètres recherchés :

$$\begin{aligned} n &= \frac{2(\alpha_p + 1)}{a(1 - \alpha_p + 2\zeta(1 + \alpha_p)) + (\alpha_p + 1)b}, \\ m_2 &= \frac{+2a\alpha_p}{a(1 - \alpha_p + 2\zeta(1 + \alpha_p)) + (\alpha_p + 1)b} + 1, \\ m_1 &= \frac{2a}{a(1 - \alpha_p + 2\zeta(1 + \alpha_p)) + (\alpha_p + 1)b} - 1. \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

En fait, ζ, a, b sont toujours positifs, $|\alpha_p| < 1$ est toujours vérifiée (à cause de (C.1) et (C.4)). La dérivée temporelle de la seconde partie de la fonctionnelle de Lyapunov s'écrit alors :

$$\dot{U}(t) = \xi(t) \frac{K_i}{1 - K_p} (1 + m_1)$$

Il suffit donc de choisir le signe de K_i de façon à ce que $\frac{K_i}{1 - K_p} (1 + m_1) < 0$. Alors, en regardant la dérivée de la fonctionnelle W :

$$\begin{aligned} \frac{2U(t)\dot{U}(t)}{|K_i|} &\leq -\xi(t)^2 \left| \frac{1 + m_1}{1 - K_p} \right| + \xi(t)m^\top M(t) + \xi(t)nz, \\ &\leq -c_1\xi(t)^2 + c_2V(t), \end{aligned}$$

où c_1 et c_2 sont obtenues après avoir appliqué l'inégalité de Cauchy Schartz et en complétant les carrés. Pour finir, la relation (4.84) permet d'obtenir :

$$\dot{W}(t) \leq (c_2r|K_i| - \nu)V(t) + (\delta - rc_1)|K_i|\xi(t)^2. \quad (\text{C.16})$$

On choisit alors la norme maximum du gain intégral de façon à avoir :

$$0 < |K_i| < \frac{\nu c_1}{\delta c_2}. \quad (\text{C.17})$$

Enfin, on prend r tel que :

$$\frac{\delta}{c_1} < r < \frac{\nu}{c_2|K_i|}. \quad (\text{C.18})$$

Cela revient à démontrer l'existence d'un nombre réel strictement positif noté ν_e tel que l'inégalité (4.88) soit vérifiée. ■

Preuve de la proposition 4.5 :

Repartons de la proposition 4.4.

$$\begin{aligned} \dot{W}(t) &\leq -\nu_e W(t) + 2 \int_0^1 \frac{\psi(x)}{c(x)} \phi(x, t)^\top \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -p & p \end{bmatrix} \phi(x, t) dx \\ &\quad + 2rU(t)(m_1 + m_2) \int_0^1 \frac{\psi(x)}{c(x)} (\phi^+(x, t) - \phi^-(x, t)) dx, \\ &\leq -\nu_e W(t) + \mathfrak{r}_1 \bar{\psi} \int_0^1 \frac{1}{c(x)} \phi(x, t)^\top \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix} \phi(x, t) dx \\ &\quad + 2rU(t)(m_1 + m_2) \frac{\bar{\psi}}{c} \int_0^1 |\phi^+(x, t)| + |\phi^-(x, t)| dx \end{aligned}$$

où

$$\mathbf{r}_1 = 2p^{-1} \left\| \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -p & p \end{bmatrix} \right\|.$$

En notant que :

$$\int_0^1 \frac{1}{c(x)} \phi(x, t)^\top \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix} \phi(x, t) dx \leq W(t)$$

puis, en utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient :

$$\begin{aligned} \left(\int_0^1 |\phi^+(x, t)| dx \right)^2 &\leq \int_0^1 \phi^+(x, t)^2 dx, \\ \left(\int_0^1 |\phi^-(x, t)| dx \right)^2 &\leq \int_0^1 \phi^-(x, t)^2 dx. \end{aligned}$$

et donc :

$$\begin{aligned} \dot{W}(t) &\leq -\nu_e W(t) + \mathbf{r}_1 \bar{\psi} W(t) + \frac{\nu_e}{2} r U(t)^2 + \mathbf{r}_2 W(t), \\ &\leq \left(-\frac{\nu_e}{2} + (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2) \bar{\psi} \right) W(t), \end{aligned}$$

avec

$$\mathbf{r}_2 = \frac{4(m_1 + m_2)^2 \bar{\psi}^2}{\nu_e \underline{c}^2}.$$

puis, avec :

$$\bar{\psi} = \frac{\nu_e}{4(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)}, \quad (\text{C.19})$$

l'équation (4.89) est vérifiée. ■

Preuve de la proposition 4.6 :

Considérons le système d'équations (4.59)-(4.63) avec $\lambda(x) = \psi(x) = 0$ et $c(x) = c$ constant. On se trouve alors typiquement dans un cas où notre problème peut se ré-écrire sous forme de retard comme dans le livre [56]. En utilisant une simple transformée de Laplace on va pouvoir obtenir des équations sous formes algébriques :

$$\begin{aligned} s\xi(s) &= \phi^-(0, s) + \phi^+(0, s) \\ z(s) &= \frac{a}{s + a + b} \phi^-(1, s) \\ \phi^-(1, s) &= \phi^-(0, s) e^{-cs}, \quad \phi^+(0, s) = \phi^-(1, s) e^{-cs} \end{aligned}$$

En $x = 0$ la condition frontière (4.62) impose :

$$\begin{aligned} s(1 - K_p) \phi^-(0, s) &= s\alpha_p(1 - K_p) \phi^+(0, s) + K_i(\phi^-(0, s) + \phi^+(0, s)) \\ \phi^-(0, s) &= \frac{s\alpha_p(1 - K_p) + K_i}{s(1 - K_p) - K_i} \phi^+(0, s) \end{aligned}$$

Pendant ce temps en $x = 1$, la condition (4.63) devient :

$$\phi^+(1, s) = -\phi^-(1, s) + \frac{2a}{s+a+b}\phi^-(1, s)$$

$$\begin{aligned}\phi^+(1, s) &= \frac{a-s-b}{s+a+b}\phi^-(1, s) \\ &= \frac{(a-s-b)}{(s+a+b)} \frac{(s\alpha_p(1-K_p) + K_i)}{(s(1-K_p) - K_i)} e^{-2cs} \phi^+(1, s)\end{aligned}$$

on obtient alors une simple équation généralement appelée équation caractéristique par la communauté des systèmes à retards.

$$(s+a+b)\left(s - \frac{K_i}{(1-K_p)}\right) + (s+b-a)\left(s\alpha_p + \frac{K_i}{(1-K_p)}\right)e^{-2cs} = 0$$

Posons $K = -\frac{K_i}{1-K_p}$ afin de simplifier l'équation caractéristique précédente

$$(s+a+b)(s+K) + (s+b-a)(s\alpha_p - K)e^{-2cs} = 0 \quad (\text{C.20})$$

Afin de démontrer la stabilité exponentielle du système en fonction du gain k_i , nous allons utiliser la méthode dite "procédure de Walton and Marshall". Un exemple de l'application de cette méthode pour des systèmes hyperboliques peut être trouvée dans [10] tandis qu'une explication plus détaillée de la méthode est fournie dans [73].

Pour mener à bien cette procédure, on procède à trois vérifications.

Première étape : les racines de (C.20) sont calculées avec $c = 0$

Dans ce cas, on regarde les zéros de l'équation :

$$(1+\alpha_p)s^2 + (a+b+\alpha_p(b-a))s + 2aK = 0$$

qui sont :

$$\begin{aligned}s_1 &= -\frac{a(1-\alpha_p) + b(1+\alpha_p)}{2(1+\alpha_p)} \\ &\quad + \frac{\sqrt{(a(1-\alpha_p) + b(1+\alpha_p))^2 - 8aK(1+\alpha_p)}}{2(1+\alpha_p)} \\ s_2 &= -\frac{a(1-\alpha_p) + b(1+\alpha_p)}{2(1+\alpha_p)} \\ &\quad - \frac{\sqrt{(a(1-\alpha_p) + b(1+\alpha_p))^2 - 8aK(1+\alpha_p)}}{2(1+\alpha_p)}\end{aligned}$$

Il suffit donc de vérifier que

$$\text{sign}(K_i) = \text{sign}(K_p - 1), \quad K_i \neq 0$$

pour que les zéros de l'équation précédente soient à partie réels strictement négatives.

Deuxième étape : Racine du polynôme $P(w^2)$:

$$P(w^2) \triangleq d(jw)d(-jw) - n(jw)n(-jw)$$

avec $d(x) = (x + a + b)(x + K)$ et $n(x) = (x + b - a)(x\alpha_p - K)$ puis :

$$\begin{aligned} P(X) &= (X + (a + b)^2)(X + K^2) - (X + (b - a)^2)(\alpha_p^2 X + K^2) \\ &= (1 - \alpha_p^2)X^2 + ((a + b)^2 - \alpha_p^2(b - a)^2)X + K^2((a + b)^2 - (b - a)^2) \\ &= (1 - \alpha_p^2)X^2 + ((a + b)^2 - \alpha_p^2(b - a)^2)X + 4abK^2 \end{aligned}$$

où $X = w^2$. Remarquons que $K_p \in]-\infty; \frac{1-\alpha_0}{2}[\Rightarrow |\alpha_p| < 1$. Cela implique que le signe du polynôme W est positif pour de grande valeurs de X . On peut alors en déduire que les pôles de notre système de base sont bien à partie réelles strictement négative pour de petite valeurs de c .

Troisième étape, calcul des racines $P(X)$

Nous allons montrer que le polynômes $P(x)$ ne change pas de signe

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{-((a^2 + b^2)(1 - \alpha_p^2) + 2ab(1 + \alpha_p^2))}{2(1 - \alpha_p^2)} + \\ &\quad \frac{\sqrt{((a^2 + b^2)(1 - \alpha_p^2) + 2ab(1 + \alpha_p^2))^2 - 16abK^2(1 - \alpha_p^2)}}{2(1 - \alpha_p^2)} \\ X_2 &= \frac{-((a^2 + b^2)(1 - \alpha_p^2) + 2ab(1 + \alpha_p^2))}{2(1 - \alpha_p^2)} - \\ &\quad \frac{\sqrt{((a^2 + b^2)(1 - \alpha_p^2) + 2ab(1 + \alpha_p^2))^2 - 16abK^2(1 - \alpha_p^2)}}{2(1 - \alpha_p^2)} \end{aligned}$$

Comme

$$((a^2 + b^2)(1 - \alpha_p^2) + 2ab(1 + \alpha_p^2)) > 0, \quad abK^2(1 - \alpha_p^2) > 0$$

On montre donc bien que les zéros du polynôme $P(X)$ sont également à partie réelles négatives, ce qui signifie que

$$P(X) > 0, \forall X < 0.$$

Après ces trois étapes, nous pouvons donc conclure que pour tout choix de K_i négatif, les pôles du système gouverné par les équations (4.59)-(4.63) dans le cas spécial où $\lambda(x) = \psi(x) = 0$ et $c(x) = c$ sont à partie réel négatives quelque soit la longueur de foret L ou la vitesse des ondes c , ce qui conclut cette démonstration.

Bibliographie

- [1] O.M. AAMO. “Disturbance rejection in 2×2 linear hyperbolic systems”. In : *IEEE Transactions on Automatic Control* 58.5 (2013), p. 1095–1106 (cf. p. 6, 51, 52).
- [2] H. ANFINSEN et O.M. AAMO. “Disturbance Rejection in the Interior Domain of Linear 2×2 Hyperbolic Systems”. In : *IEEE Transactions on Automatic Control* 60.1 (2015), p. 186–191 (cf. p. 6).
- [3] D. ASTOLFI et L. PRALY. “Integral Action in Output Feedback for multi-input multi-output nonlinear systems”. In : *IEEE Transactions on Automatic Control* 62.4 (2017), p. 1559–1574 (cf. p. 17).
- [4] D. ASTOLFI, L. PRALY et L. MARCONI. “Approximate regulation for nonlinear systems in presence of periodic disturbances”. In : *Decision and Control (CDC), 2015 IEEE 54th Annual Conference on*. 2015 (cf. p. 90).
- [5] J. AURIOL, J. ULF, P. MARTIN et F. DI MEGLIO. “Delay-robust control design for heterodirectional linear coupled hyperbolic PDEs”. In : *IEEE Transactions on Automatic Control* (early access) (2018) (cf. p. 6, 15, 77).
- [6] J. AURIOL, F. BRIBIESCA-ARGOMEDO, D. BOU SABA et M. DI LORETO. “Delay-robust stabilization of a hyperbolic PDE–ODE system”. In : *Automatica* 95 (2018), p. 494–502 (cf. p. 6).
- [7] M. BAPTISTINI et P. TABOAS. “On the Stability of Some Exponential Polynomials”. In : *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 205 (1997), p. 259–272 (cf. p. 5).
- [8] M BARREAU, A SEURET, F GOUAISBAUT et L. BAUDOUIN. “Lyapunov stability analysis of a string equation coupled with an ordinary differential system”. In : *IEEE Transaction on Automatic Control* early access (2018) (cf. p. 91).
- [9] K. BARTECKI. *Modeling and Analysis of Linear Hyperbolic Systems of Balance Laws*. Springer, 2016 (cf. p. 5, 29).
- [10] G. BASTIN et J.-M. CORON. *Stability and boundary stabilization of 1-d hyperbolic systems*. Springer, 2016 (cf. p. 5, 8, 28–30, 34–36, 42, 46, 73, 75, 76, 81, 84, 91, 111).
- [11] G BASTIN, J.-M. CORON et S.O. TAMASOIU. “Stability of linear density-flow hyperbolic systems under PI boundary control”. In : *Automatica* 139 (2015), p. 37–42 (cf. p. 5).
- [12] H.I. BASTURK. “Observer-Based Boundary Control Design for the Suppression of Stick–Slip Oscillations in Drilling Systems With Only Surface Measurements”. In : *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* 139.10 (2017) (cf. p. 7, 52).
- [13] R. BELLMAN et K. COOKE. *Differential-Difference Equations*. Academic Press, New York, 1963 (cf. p. 5).
- [14] S. BENACHOUR, V. ANDRIEU, L. PRALY et H. HAMMOURI. “Forwarding design with prescribed local behavior”. In : *IEEE Transactions on Automatic Control* 58.12 (2013), p. 3011–3023 (cf. p. 17).

- [15] I. BOUSSAADA, A. CELA, H. MOUNIER et S.-I. NICULESCU. “Control of Drilling Vibrations : A time-delay system-based approach”. In : *IFAC Proceedings Volumes* 46.3 (2013), p. 226–231 (cf. p. 52).
- [16] D. BRESCH-PIETRI et M. KRSTIC. “Adaptive Output-Feedback for Wave PDE with Anti-damping : Application to Surface-based control of Oil Drilling Stick-Slip Instability”. In : *53rd IEEE Conference on Decision and Control*. Proceedings of IEEE. 2014 (cf. p. 7, 52, 58).
- [17] H. BREZIS. *Analyse Fonctionnelle*. Dunod, 1999 (cf. p. 11, 95, 96).
- [18] F. CASTILLO, E. WITRANT, C. PRIEUR et L. DUGARD. “Dynamic boundary stabilization of linear and quasi-linear hyperbolic systems”. In : *Proceeding of IEEE 51st annual Conference on Decision and Control*. 2012, p. 2952–2957 (cf. p. 8).
- [19] J.-M. CORON et A. HAYAT. “PI controllers for 1-D nonlinear transport equation”. In : (2018) (cf. p. 28, 91).
- [20] J.-M. CORON et B. d’Andréa NOVEL. “Stabilization of a rotating body beam without damping”. In : *Transactions on Automatic Control* 43(5) (1998), p. 608–618 (cf. p. 7).
- [21] J.-M. CORON et O. TAMASOIU. “Feedback Stabilization for a scalar conservation law with PID boundary control”. In : *Chinese Annals of Mathematics* Series B 36.5 (2015), p. 763–776 (cf. p. 5).
- [22] J.-M. CORON, B. d’Andrea NOVEL et G. BASTIN. “A Lyapunov approach to control irrigation canals modeled by Saint Venant equations”. In : *Proceeding of European Control Conference (ECC 99), Karlsruhe, Germany*. 1999 (cf. p. 7).
- [23] J.-M. CORON, G. BASTIN et B. d’Andréa NOVEL. “Dissipative boundary conditions for one-dimensional nonlinear hyperbolic systems”. In : *SIAM Journal on Control and Optimization* 47.3 (2008), p. 1460–1498 (cf. p. 42, 75).
- [24] R.F. CURTAIN et H. ZWART. *An introduction to infinite-dimensional linear systems theory*. T. 21. Springer Science & Business Media, 2012 (cf. p. 17, 96, 97).
- [25] C. DAFERMOS. *Hyperbolic Conservation Laws in Continuum Physics*. Springer, 2016 (cf. p. 28–30, 57).
- [26] C. DAVID et P. GOSSELET. *Equations aux dérivées partielles : Cours et exercices corrigés*. Dunod, 2015 (cf. p. 31).
- [27] M.S. DE QUEIROZ et C.D. RAHN. “Boundary control of vibration and noise in distributed parameter system : An overview”. In : *Mechanical Systems and Signal Processing* (2002), p. 19–38 (cf. p. 52).
- [28] J. DEUTSCHER. “Backstepping Design of Robust State Feedback Regulators for Linear 2×2 Hyperbolic Systems”. In : *IEEE Transactions on Automatic Control* 62.10 (2016), p. 5240–5247 (cf. p. 6).
- [29] J. DEUTSCHER. “Finite-time output regulation for linear 2×2 hyperbolic systems using backstepping”. In : *Automatica* 75.C (2017), p. 54–62 (cf. p. 6).
- [30] F. DI MEGLIO et U.J.F. AARSNES. “A distributed parameter systems view of control problems in drilling”. In : *to appear in IFAC Oil and Gas Workshop, Florianopolis, Brazil, 2015*. IFAC. 2015 (cf. p. 48, 51, 52).

- [31] F. DI MEGLIO, R. VASQUEZ et M. KRSTIC. “Stabilization of a System of $n + 1$ Coupled First-Order Hyperbolic Linear PDEs With a Single Boundary Input”. In : *IEEE Transactions on automatic and control* 58.10 (2013), p. 3097–3111 (cf. p. 6).
- [32] F. DI MEGLIO, F. BRIBIESCA ARGOMEDO, L. HU et M. KRSTIC. “Stabilization of coupled linear heterodirectional hyperbolic PDE–ODE systems”. In : *Automatica* 87 (2018), p. 281–289 (cf. p. 6).
- [33] V. DOS SANTOS, Y. TOURÉ, E. MENDES et E. COURTIAL. “Multivariable boundary control approach by internal model, applied to irrigation canals regulation”. In : *IFAC Proceedings Volumes* 38.1 (2005), p. 63–68 (cf. p. 5).
- [34] V. DOS SANTOS MARTINS et C. PRIEUR. “Boundary control of open channels with numerical and experimental validations”. In : *IEEE Transactions on Automatic Control* 16.6 (2008), p. 1252–1264 (cf. p. 5, 8, 28, 29).
- [35] V. DOS SANTOS MARTINS et M. RODRIGUEZ. “A proportional integral feedback for open channels trough LMI design”. In : *Proceeding of the 18th IFAC World Congress*. 2011, p. 4107–4112 (cf. p. 8).
- [36] B.A. FRANCIS et W.M. WONHAM. “The internal model principle of control theory”. In : *Automatica* 12 (1976), p. 457–465 (cf. p. 3, 5, 25, 90).
- [37] E. FRIDMAN, S. MONDIÉ et B. SALDIVAR. “Bounds on the response of a drilling pipe model”. In : *Journal of Mathematical Control and Information (IMA)* (2010), p. 513–526 (cf. p. 52).
- [38] M.W. GUINAN et D.J. STEINBERG. “Pressure and temperature derivatives of the isotropic polycrystalline shear modulus for 65 elements”. In : *Physics and Chemical Solids* 35 (1974), p. 1501–1512 (cf. p. 56).
- [39] J. HALE et S. LUNEL. *Introduction to Functional Differential Equations*. Springer, 1993 (cf. p. 5).
- [40] B. JACOB et H. ZWART. *Linear port-hamiltonian systems on infinite-dimensional spaces*. Birkhäuser, 2011 (cf. p. 98–100).
- [41] J.D. JANSEN et L. Van den STEEN. “Active damping of self-excited torsional vibrations in oil well drillstrings”. In : *Journal of sound and vibration* 179.4 (1995), p. 647–668 (cf. p. 29, 84).
- [42] L. JOSSERAND. “Commande frontière par modèle interne de systèmes à paramètres distribués. Application à un double échangeur de chaleur”. In : (1996) (cf. p. 97).
- [43] J.M. KAMEL et A.S. YIGIT. “Modeling and analysis of stick-slip and bit bounce in oil well drillstrings equipped with drag bits.” In : *Journal of Sound and Vibration* (2014), p. 6885–6899 (cf. p. 52, 54).
- [44] T. KATO. *Perturbation theory for linear operators*. Springer, 1966 (cf. p. 12, 16, 97, 100).
- [45] H.K. KHALIL. *Nonlinear Systems Second Edition*. Sous la dir. de Simon & SCHUSTER. Prentice Hall, Inc., 1996 (cf. p. 93, 94).
- [46] N.N. KRASOWSKI. *Problems of the theory of stability of motion*. Stanford University Press (translated from the Russian), 1963 (cf. p. 7).

- [47] M. KRSTIC et A. SMYSHLYAEV. *Boundary Control of PDEs : A Course on Backstepping Designs*. SIAM, 2008 (cf. p. 6, 29).
- [48] P.-O. LAMARE, N. BEKIARIS-LIBERIS et A. M. BAYEN. “Control of 2×2 Linear Hyperbolic Systems : Backstepping-Based Trajectory Generation and PI-Based Tracking”. In : *European Control Conference 2015*. IEEE. 2015, p. 549–554 (cf. p. 6).
- [49] J. LE ROND D’ALEMBERT. *Recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration*. T. 3. Histoire de l’académie royale des sciences et des belles lettres. Berlin, 1749 (cf. p. 74).
- [50] M. LICHTNER. “Spectral mapping theorem for linear hyperbolic systems”. In : *Proceeding of American Mathematical Society*. T. 136(6). American Mathematical Society. 2008, p. 2091–2101 (cf. p. 5).
- [51] W. LIU. *Elementary feedback stabilization of the linear reaction-convection-diffusion equation and the wave equation*. Springer Science & Business Media, 2010 (cf. p. 69).
- [52] J. LUBLINER et P. PAPADOPOULOS. *Introduction to Solid Mechanics : An Integrated Approach*. Springer, 2014 (cf. p. 55).
- [53] A.M. LYAPUNOV. *The general problem of the stability of motion, PhD Thesis*. Moscow University, Russia, 1892 (cf. p. 7).
- [54] B.R. MACE. “Active control of flexural vibrations”. In : *Journal of Sound and Vibration* (1987), p. 253–270 (cf. p. 52).
- [55] C. MAKKAR, W.E. DIXON, W.G. SAWYER et G. HU. “A new continuously differentiable friction model for control systems design”. In : *International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics*. IEEE/ASME. 2005, p. 600–605 (cf. p. 52).
- [56] M.B.S. MÁRQUEZ, I. BOUSSAADA, H. MOUNIER et S.-I. NICULESCU. *Analysis and Control of Oilwell Drilling Vibrations : A Time-Delay Systems Approach*. Springer, 2015 (cf. p. 48, 51, 52, 58, 87, 92, 110).
- [57] F. MAZENC et L. PRALY. “Adding integrations, saturated controls, and stabilization for feedforward systems”. In : *IEEE Transactions on Automatic Control* 41.11 (1996), p. 1559–1578 (cf. p. 17).
- [58] E.M. NAVARRO-LOPEZ et D. CORTES. “Sliding-mode control of a multi-DOF oilwell drillstring with stick-slip oscillations”. In : *American Control Conference*. IFAC. 2007, p. 3837–3842 (cf. p. 52, 55).
- [59] E.M. NAVARRO-LOPEZ et R. SUAREZ. “Practical approach to modelling and controlling stick-slip oscillations in oilwell drillstrings”. In : *International Conference on Control Applications*. IEEE. 2004, p. 1454–1460 (cf. p. 52, 54).
- [60] L. PAUNONEN et S. POHJOLAINEN. “Internal model theory for distributed parameter systems”. In : *SIAM Journal on Control and Optimization* 48 (2010), p. 4753–4775 (cf. p. 90).
- [61] A. PAZY. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. Springer, 1993 (cf. p. 11).

- [62] S. POHJOLAINEN. “Robust multivariable PI-controller for infinite dimensional systems”. In : *IEEE Transactions on Automatic Control* 27.1 (1982), p. 17–30 (cf. p. 5, 12, 16, 21).
- [63] L.S. PONTRYAGIN. “On the zeros of some elementary transcendental functions”. In : *American Mathematical Society Translation Math. Soc. Transl.* 1 (1955), p. 95–110 (cf. p. 5).
- [64] C. PRIEUR et F. MAZENC. “ISS-Lyapunov functions for time-varying hyperbolic systems of balance laws”. In : *Mathematics of Control, Signals, and Systems* 24.1-2 (2012), p. 111–134 (cf. p. 36).
- [65] C. PRIEUR et J. WINKIN. “Boundary feedback control of linear hyperbolic systems : Application to the Saint-Venant–Exner equations”. In : *Automatica* 89 (2017), p. 44–51 (cf. p. 6).
- [66] H. PUEBLA et J. ALVAREZ-RAMIREZ. “Suppression of stick-slip in drillstrings : A control approach based on modeling error compensation”. In : *Journal of Sound and Vibration* (2008), p. 881–901 (cf. p. 52).
- [67] T.G. RITTO, C. SOIZE et R. SAMPAIO. “Non-linear dynamics of a drill-string with uncertain model of the bit–rock interaction”. In : *International Journal of Non-Linear Mechanics* 44 (2009), p. 865–876 (cf. p. 55).
- [68] C. ROMAN, D. BRESCH-PIETRI, E. CERPA, C. PRIEUR et O. SENAME. “Backstepping observer based-control for an anti-damped boundary wave PDE in presence of in-domain viscous damping”. In : *Decision and Control (CDC), 2016 IEEE 55th Conference on.* IEEE. 2016, p. 549–554 (cf. p. 7, 87).
- [69] C. ROMAN, D. BRESCH-PIETRI, E. CERPA, C. PRIEUR et O. SENAME. “Backstepping observer based-control for an anti-damped boundary wave PDE in presence of in-domain viscous damping”. In : *Decision and Control (CDC), 2016 IEEE 55th Conference on.* IEEE. 2016, p. 549–554 (cf. p. 52).
- [70] C. SAGERT, F. DI MEGLIO, M. KRSTIC et P. ROUCHON. “Backstepping and flatness approaches for stabilization of the stick-slip phenomenon for drilling”. In : *IFAC Proceedings Volumes* 46.2 (2013), p. 779–784 (cf. p. 52).
- [71] R. SEPULCHRE, M. JANKOVIC et P.V. KOKOTOVIC. “Integrator forwarding : a new recursive nonlinear robust design”. In : *Automatica* 33.5 (1997), p. 979–984 (cf. p. 17).
- [72] A. SEURET et F. GOUAISBAUT. “Stability of linear systems with time-varying delays using Bessel-Legendre inequalities”. In : *IEEE Transaction on Automatic Control* 63 (2018), p. 225–232 (cf. p. 91).
- [73] G.J. SILVA, A. DATTA et S. P BHATTACHARYA. *PID controllers for time-delay systems.* Control Engineering. Birkhäuser Boston, 2004 (cf. p. 5, 73, 84, 111).
- [74] T. STRECKER et M. AAMO. “Rejecting pressure fluctuations induced by string movement in drilling”. In : *IFAC-PapersOnLine : Volume 49, Issue 8.* Elsevier. 2016, p. 124–129 (cf. p. 51).

- [75] Y. TANG et G. MAZANTI. “Stability analysis of coupled linear ODE-hyperbolic PDE systems with two time scales”. In : *Automatica* 85.Supplement C (2017), p. 386–396 (cf. p. 8, 28, 76, 81, 91).
- [76] A. TERRAND-JEANNE et V. DOS-SANTOS MARTINS. “Modeling’s approaches for Stick-Slip phenomena in drilling”. In : 2nd IFAC Workshop on Control of Systems Governed by Partial Differential Equations, 2016, p. 118–123 (cf. p. 29, 60).
- [77] A. TERRAND-JEANNE, A. ANDRIEU, C.-Z. XU et V. DOS SANTOS MARTINS. “Lyapunov functionals for output regulation of exponentially stable semi-groups via integral action and application to PDE hyperbolic systems”. In : *IEEE Conference on Decision and Control, Miami, 2018*. 2014 (cf. p. 12, 37).
- [78] A. TERRAND-JEANNE, V. ANDRIEU, M. TAYAKOUT-FAYOLLE et V. DOS SANTOS MARTINS. “Regulation of inhomogeneous drilling model with a P-I controller”. In : *accepté sous réserve par IEEE Transactions on Automatic Control* (2018) (cf. p. 72).
- [79] A. TERRAND-JEANNE, V. DOS-SANTOS MARTINS et V. ANDRIEU. “Regulation of the downside angular velocity of a drilling string with a P-I controller”. In : *European Control Conference, IFAC*. 2018 (cf. p. 52).
- [80] D. THULL, D. WILD et A. KUGI. “Application of a combined flatness- and passivity-based control concept to a crane with heavy chains and payload”. In : *International Conference on Control Applications International Symposium on Intelligent Control*. IEEE. 2006, p. 656–661 (cf. p. 52).
- [81] R. TRIGGIANI. “On the stability problem in banach space”. In : (1975), 383–403 (cf. p. 97).
- [82] N.-T. TRINH, V. ANDRIEU et C.-Z. XU. “Design of integral controllers for nonlinear systems governed by scalar hyperbolic partial differential equations”. In : *IEEE Transactions on Automatic Control* (2017) (cf. p. 8, 28, 91).
- [83] N.-T. TRINH, V. ANDRIEU et C.-Z. XU. “Stability and output regulation for a cascaded network of 2x2 hyperbolic systems with PI control.” In : *Automatica* (2018) (cf. p. 8, 28).
- [84] R. VASQUEZ, M. KRSTIC et J.-M. CORON. “Local exponential H^2 stabilization of a 2×2 quasilinear hyperbolic system using backstepping”. In : *SIAM J. CONTROL OPTIMIZATION* 51.3 (2013), 2005–2035 (cf. p. 6).
- [85] R. VASQUEZ, M. KRSTIC et J.-M. CORON. “Backstepping boundary stabilization and state estimation of a 2×2 linear hyperbolic system”. In : *50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC)*. Proceedings of IEEE. 2011, p. 4937–4942 (cf. p. 6).
- [86] R. VASQUEZ, J.-M. CORON, M. KRSTIC et G. BASTIN. “Collocated outputfeedback stabilization of a 2×2 quasilinear hyperbolic system using backstepping”. In : *American Control Conference (ACC)*. Proceedings of IEEE. 2012, p. 2202–2207 (cf. p. 6).
- [87] K. WALTON et J.E. MARSHALL. “Direct method for TDS stability analysis”. In : *Control Theory and Applications*. T. 134(2). Proceedings of IEEE. 1987, p. 101–107 (cf. p. 5).

- [88] Y. WANG et R.W. LONGMAN. “Limit cycle behavior and convergence to zero error in learning control with stick-slip friction”. In : *International Conference on Systems, Man, and Cybernetics. Humans, Information and Technology*. IEEE. 1994, p. 2774–2779 (cf. p. 54).
- [89] C. Canudas-de WIT, F. R RUBIO et M. A. CORCHERO. “D-OSKIL : A new mechanism for controlling stick-slip oscillations in oil well drillstrings”. In : *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 16.6 (2008), p. 1177–1191 (cf. p. 29, 48, 51, 52, 55, 62).
- [90] C.-Z. XU et H. JERBI. “A robust PI-controller for infinite-dimensional systems”. In : *International Journal of Control* 61.1 (1995), p. 33–45 (cf. p. 12, 15, 16).
- [91] C.-Z. XU et G. SALLET. “Multivariable boundary PI control and regulation of a fluid flow system”. In : *Mathematical Control and Related Fields* 4.4 (2014), p. 501–520 (cf. p. 5, 12).
- [92] L. ZHANG et C. PRIEUR. “Necessary and Sufficient Conditions on the Exponential Stability of Positive Hyperbolic Systems”. In : *Transactions on Automatic Control* 62(7) (2017), 3610–3617 (cf. p. 8).
- [93] X. ZHU, L. TANG et Q. YANG. “A literature review of approaches for stick-slip vibration suppression in oilwell drillstring”. In : *Advances in Mechanical Engineering* (1994) (cf. p. 52).