



Atténuation vibratoire non-linéaire de structures modales creuses par ajout de matériaux granulaires

Antoine Sternberger

► To cite this version:

Antoine Sternberger. Atténuation vibratoire non-linéaire de structures modales creuses par ajout de matériaux granulaires. Vibrations [physics.class-ph]. Le Mans Université, 2018. Français. NNT : 2018LEMA1018 . tel-02073106

HAL Id: tel-02073106

<https://theses.hal.science/tel-02073106>

Submitted on 19 Mar 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE DE DOCTORAT

LE MANS UNIVERSITE

COMUE UNIVERSITE BRETAGNE LOIRE

ECOLE DOCTORALE N° 602

Sciences pour l'Ingénieur

Discipline : 60

Spécialité : Acoustique

Antoine STERNBERGER

Atténuation vibratoire non-linéaire de structures modales creuses par ajout de matériaux granulaires

Soutenue le vendredi 30 novembre 2018

Unité de recherche : Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Mans (LAUM, UMR CNRS 6613)

Thèse n° : 2018LEMA1018

Rapporteurs : **Axelle AMON**

Manuel COLLET

Examineurs : **Emmanuel FOLTETE**

Guilhem MICHON

Patrick RICHARD

Invité : **Pascal AUDRAIN**

Encadrement : **Jean-Michel GENEVAUX**

Adrien PELAT

Maître de conférences, HDR (IPR) - Rennes

Directeur de recherche CNRS (LTDS) - Lyon

Professeur des universités (FEMTO-ST) - Besançon

Professeur ISAE-SUPAERO (ICA) - Toulouse

Directeur de recherche IFSTTAR (GPEM) - Bouguenais

IRT Jules Verne - Bouguenais

Professeur des universités (LAUM) - Le Mans Université

Maître de conférences (LAUM) - Le Mans Université

Thèse de doctorat - Antoine Sternberger
(version du 1^{er} mars 2019)

*A mes parents, A mon frère,
un travail toujours en équipe.*

Table des matières

Remerciements	vii
Nomenclature & Notations	ix
Introduction générale	1
1 Dynamique d'un matériau granulaire : éléments de bibliographie	5
1.1 Lois de contacts à l'échelle du grain	6
1.1.1 Modèle de contact sec entre deux grains	6
1.1.2 Présence de fluide et contact cohésif	7
1.2 Comportement d'une chaîne 1D de grains suite à un impact	8
1.2.1 Chaîne de grains monodisperse avec matériaux homogènes	8
1.2.2 Chaîne de grains polydisperse avec matériaux homogènes	9
1.3 Dynamique d'un amas de grains et phases thermodynamiques	10
1.4 Analyse de la dissipation liée à un ajout de grains dans une cavité	13
1.4.1 Décroissance temporelle du mouvement d'un système vibrant	13
1.4.2 Mise en évidence des non-linéarités	15
1.4.3 Etude temporelle du mouvement des grains et dissipation associée	16
1.4.4 Estimation numérique de l'énergie dissipée	18
1.5 Contrôle vibratoire de structure utilisant un amortisseur granulaire	19
1.5.1 Excitation forcée harmonique d'une cavité contenant un amas de grains	19
1.5.2 Etudes qualitatives de l'ajout de grains confinés à une structure modale	19
1.5.3 Etude de la dissipation via l'ajustement d'un système 1DDL	20
1.6 Axes de travail	22
2 Matériels et techniques d'acquisitions	23
2.1 Présentation du banc d'acquisition expérimental	24
2.1.1 Description des montages expérimentaux	24
2.1.2 Procédé d'acquisition des signaux	25
2.1.3 Méthodes de post-traitement utilisées	25
2.2 Pré-étude d'une plaque mince traitée par un amas de grains à surface libre	28
2.2.1 Description de l'interaction des grains sur une plaque déformable	28
2.2.2 Observations qualitatives des différents états du milieu granulaire	29
2.2.3 Variation de la masse de grains	31
2.2.4 Variation du niveau d'accélération et non-linéarité associée	32
2.2.5 Variation d'hygrométrie sur les contacts inter-grains	33
2.3 Conclusion partielle	34
3 Dissipation vibratoire d'une cavité sous influence d'un amas de grains	35
3.1 Dispositif expérimental et modèle linéaire équivalent	36
3.1.1 Matériel utilisé pour le confinement du matériau granulaire dans une cavité	36
3.1.2 Modèle d'oscillateur 1DDL du système résonant sans matériau granulaire	36
3.1.3 Validation du modèle 1DDL	39
3.2 Estimation expérimentale de l'énergie vibratoire dissipée	41
3.2.1 Etude modale de l'oscillateur (cavité+grains) autour de sa 1 ^{ère} résonance	41
3.2.2 Etude temporelle et fréquentielle mettant en évidence la dynamique non-linéaire	42
3.2.3 Mesure de la perte d'énergie au moyen des signaux temporels	43
3.3 Modèles analytiques à constantes localisées utilisant le frottement de Coulomb	46
3.3.1 Saut d'une masse secondaire non solidaire (n^2)	48

3.3.2	Ralentissement d'une masse secondaire à l'atterrissage (n°3)	50
3.3.3	Frottement constant d'une masse secondaire (n°4)	53
3.3.4	Association des deux contributions de frottement (n°5)	56
3.4	Confrontation du modèle à l'expérience	60
3.5	Modèles analytiques à constantes localisées utilisant la dissipation viscoélastique	61
3.5.1	Ajout d'une contribution de dissipation par un deuxième oscillateur (n°6)	62
3.5.2	Saut d'une masse secondaire retenue par un oscillateur (n°7)	64
3.5.3	Saut d'une masse secondaire et ralentissement à l'atterrissage (n°8)	69
3.6	Conclusion partielle	72
4	Analyse de la dissipation d'énergie par variations paramétriques du matériau granulaire dans la cavité indéformable	73
4.1	Etude préalable avec masse solidaire indéformable	74
4.2	Réalisation expérimentale avec des contacts élastiques entre les grains	74
4.2.1	Variation du diamètre de grains en verre	74
4.2.2	Variation de la polydispersité dans un échantillon grains en verre	76
4.2.3	Variation de la masse volumique avec des grains en acier	77
4.3	Réalisation expérimentale de contacts inélastiques entre des grains déformables	78
4.3.1	Utilisation de sphères creuses en élastomère	78
4.3.2	Utilisation de granules en caoutchouc	81
4.4	Modification des conditions de contact aux interfaces grains-cavité	82
4.4.1	Revêtement sur la paroi latérale de la cavité	82
4.4.2	Revêtement à la base de la cavité	82
4.5	Conclusion partielle	84
5	Etude de la vibration d'une poutre creuse sous influence d'un matériau granulaire	85
5.1	Dispositif expérimental	86
5.1.1	Réalisation de la poutre creuse sans grain	86
5.1.2	Matériel utilisé et technique de mesure	86
5.1.3	Etude préalable de la poutre creuse sans grain	87
5.2	Variations paramétriques associées à l'ajout de grains localisés	88
5.2.1	Influence du matériau constitutif des grains	88
5.2.2	Influence de la localisation du matériau granulaire dans la poutre creuse	90
5.2.3	Optimisation de la perte d'énergie par l'ajout d'un batteur dissipatif	91
5.3	Conclusion partielle	94
	Conclusion générale	95
	A Définition de paramètres expérimentaux	97
	B Simulation numérique de la dynamique d'un milieu granulaire	101
	Bibliographie	103
	Table des figures	109
	Liste des tableaux	115

Remerciements

Qu'est-ce qu'un doctorat ? Après avoir suivi une formation à l'IUT puis des études d'ingénieur à l'ENSIM, je ne pensais vraiment pas, au début de mes études universitaires, pouvoir répondre à cette question. Le point central d'un doctorat consiste en l'étude d'un sujet qui, selon une problématique particulière, n'a pas encore été traité. Tous les sujets de thèse, innovants par nature, trouvent des racines profondes dans des travaux antérieurs. Dans le cas de ma thèse, la nouveauté est l'association de deux thématiques (vibration & matériau granulaire) à des fins de contrôles antivibratoires. La mise en vibration de grains et l'investigation des mécanismes dissipatifs induits ont initialement nécessité une certaine gymnastique pour trouver des points d'affinités entre ces deux thématiques. Ce sont des allers et retours réguliers entre les différentes échelles d'observation du matériau granulaire alliés aux techniques d'identification vibratoire qui ont permis de développer des dispositifs expérimentaux et une analyse innovante de cette dissipation.

A l'issue de ces trois années de doctorat, je tiens donc en premier lieu à remercier Axelle AMON et Manuel COLLET pour avoir accepté de rapporter ce travail de recherche. Leurs retours et leurs conseils m'ont été d'une grande aide pour permettre à ce document d'être le plus didactique possible. Mes remerciements vont également à Emmanuel FOLTETE, Guilhem MICHON et Patrick RICHARD pour avoir répondu présent en tant qu'examineurs dans ce jury. Enfin, un grand merci à Pascal AUDRAIN pour ses retours avisés durant ces 3 années de thèse.

Une attention particulière est adressée à mes encadrants Jean-Michel GENEVAUX et Adrien PELAT. Merci dans un premier temps de m'avoir proposé ce sujet à l'issue de ma formation à l'ENSIM et d'avoir été présent dans tous les moments, joyeux ou de doute, en France ou à l'étranger. La vitalité de nos nombreux échanges a pu se traduire par le développement de modèles mathématiques "chorégraphiés" mais aussi par des idées de présentations innovantes, qu'elles soient en vedette américaine ou résumées dans des vidéos d'annonce "teaser". Par ailleurs, sur la prévision initiale au premier jour de la thèse de 2000 "test" effectués pendant ces 3 ans, j'ai atteint l'objectif à 117% (2354) !

D'autres rencontres ont été bénéfiques dans ma réflexion sur mon sujet de recherche. Je cite, sans ordre particulier, Stéphane JOB, Guilhem MICHON, Vincent TOURNAT, Devaraj VAN DER MEER. Je n'oublie pas Pamela PASETTO qui m'a permis d'obtenir rapidement des granules de caoutchouc pour mes tests comparatifs. Merci beaucoup aux membres du projet VibroLeg, dans le cadre duquel cette thèse a trouvé son financement. Mes remerciements vont notamment à Charles PEZERAT, Ygaal RENOU, François REYNARD et Christian AUDOLY.

A côté de mon travail de recherche, j'ai pu participer à la vie du Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Mans (LAUM) en tant que représentant des doctorants au sein du conseil de laboratoire et aussi plus largement au sein du conseil du pôle doctoral de Le Mans Université. Mes interventions lors d'événements tels que la fête de la science, la nuit des chercheurs ou les journées portes ouvertes m'ont permis de développer un goût pour la vulgarisation scientifique auprès d'un public de non-initiés.

J'ai pu effectuer cette thèse dans les locaux de l'ENSIM. Je tiens ici à remercier Pascal LEROUX et Jean-François TASSIN, alternativement directeurs de l'ENSIM, pour l'opportunité qu'ils m'ont donnée de pouvoir encadrer des projets de fin d'étude du cursus ingénieur. Merci à Thibault ABILY, Cyril BERNARD, Louis DUTRIAUX, Clément JOST, Alexandre LEBRUN, Mathilde PORCHEREL, Romain TRUCO pour leurs fructueux travaux. La patience dont ils ont fait preuve durant mes diverses explications parfois floues et leurs remarques pertinentes ont permis, je l'espère, qu'ils développent un goût pour la recherche.

Un travail de recherche ne se fait pas sans collègues ! Merci à toutes les personnes croisées au bureau (culture quand tu nous tiens !), au laboratoire, au café, ... : Bertrand, Pascal, Charlie, Paul, Océane,

Thibault W., Omar, Julien, Margaux, Tiphaine, Toréa, Justine, Thibault A., Jules, Romain (j'en oublie...). Merci à l'ENSIM et son personnel : Nathalie, Christine, Khedidja, Safia, Cathy, Léonore, Jessica.

Faire de la recherche c'est aussi avoir une vie en dehors du laboratoire ! La musique m'a permis au tout début de découvrir la thématique de l'acoustique et m'a porté jusqu'au doctorat. Merci à toutes ces rencontres musicales qui m'ont construit au fur et à mesure des années. Une attention particulière est adressée à Lionel LE FOURNIS pour sa passion partagée et les nombreux échanges qui m'ont permis d'être curieux et engagé dans tous les aspects de ma vie. La vie c'est aussi les amis. Que vous soyez ENSIMIens, musiciens, étudiants ERASMUS, animateurs à la colonie de vacances de Perseigne, vous avez participé d'une manière ou d'une autre à la réalisation de ce travail. Une pensée particulière pour la dernière relecture in extremis en direct du Nord.

Enfin, merci à ma famille. Pierre et Régine, mes parents, vous avez été présents dès le début et n'avez jamais douté de moi. Merci pour votre écoute, votre confiance, votre soutien et pour tout ce que vous m'avez apporté depuis le tout début et ce que vous continuez à me transmettre. Julien, brother, toujours présent, bientôt c'est ton tour ! Merci aux tantes, oncles, sœurs, neveux, nièces, grands-parents vous avez tous joué un rôle au long de ces 3 années, et c'est pas fini !

Never give up

Nomenclature & Notations

La liste suivante résume les notations utilisées dans ce manuscrit.

Variable	Description	Unité
g	Accélération de la pesanteur (= 9,81)	[m.s ⁻²]
t	Temps	[s]
u	Déplacement	[m]
v ou $\dot{u}$	Vitesse	[m.s ⁻¹]
γ ou $\ddot{u}$	Accélération	[m.s ⁻²]
Γ	Accélération adimensionnée (γ/g)	[-]
F	Force	[N]
m	Masse	[kg]
c	Coefficient d'amortissement visqueux	[N.s.m ⁻¹]
k	Raideur	[N.m ⁻¹]
ω	Pulsation	[rad.s ⁻¹]
f	Fréquence	[Hz]
f_e	Fréquence d'excitation	[Hz]
ζ	Facteur d'amortissement modal	[-]
E_L	Energie perdue totale (Lissajous)	[J]
E_d	Energie dissipée	[J]
e_n	Coefficient de restitution normal	[-]
e_t	Coefficient de restitution tangentiel ou de friction	[-]
$\varnothing$	Diamètre d'un grain	[m]
E	Module d'Young	[Pa]
ν	Coefficient de Poisson	[-]

Abréviation	Description	Unité
FRF	Fonction de Réponse en Fréquence = $10 \cdot \log_{10} \left(\frac{\gamma}{F} \right)$	[dB, ref. 1 kg ⁻¹]
DEM	Discret Element Method	
1 DDL	Système à un degré de liberté	
2 DDL	Système à deux degrés de liberté	

Introduction générale

Contexte et problématique industrielle

Les impacts écologiques et économiques des moyens de transports (terrestre, aéronautique, naval,...) sont aujourd'hui des éléments primordiaux à prendre en compte dans leur conception industrielle. La réduction de masse ou l'optimisation géométrique sont des mécanismes permettant un allègement des structures et une réponse à ces problématiques (Fig. 1).



FIGURE 1 – Différents procédés d'allègement de structures : (a) concept d'hydroptère DCNS [68] - (b) nouvelle géométrie d'ailes d'avions AIRBUS A350XWB [68] - (c) part de matériaux légers dans un BOIENG B787 [1].

Toutefois, cette réduction de masse génère des niveaux vibratoires plus importants qu'il convient de maîtriser. En effet, en fonction de la localisation de ces niveaux vibratoires, il existe un risque d'usure prématurée voire de rupture de la structure. La connaissance de l'influence de l'allègement sur les vibrations, lors de la phase de conception, permet de dimensionner des dispositifs d'atténuation vibratoire et de conserver la fiabilité du moyen de transport.

L'Institut de Recherche Technologique (IRT) Jules Verne (Fig. 2) est un centre de recherche mutualisé dédié au développement des technologies avancées de production et vise l'amélioration de la compétitivité de filières industrielles stratégiques. Son objectif est d'établir un lien entre des entreprises privées et des laboratoires de recherche académique afin de transposer des concepts techniques émergents dans des processus industriels concrets. Le projet *VibroLeg* (vibroacoustique des structures légères) est orienté sur deux thématiques.



FIGURE 2 – IRT Jules Verne.

La première thématique concerne les méthodes expérimentales pour l'aide à la modélisation et le diagnostic de structures. Des travaux de recherche sur la mesure du champ vibratoire d'une structure par holographie optique numérique ultra-rapide [74, 75], la caractérisation de matériaux composites par problème inverse vibratoire [93] et l'identification de la pression acoustique pariétale d'un écoulement turbulent excitant une structure en vibration [37] ont été menés par 3 doctorants. La deuxième thématique se concentre sur l'étude de dispositifs innovants pour l'atténuation des vibrations. Les travaux de recherche de 3 autres doctorants portent sur l'utilisation de trous noirs acoustiques pour la diminution des niveaux vibratoires [3], l'augmentation de l'isolation de parois par patches piézo-électriques distribués [17] et l'étude des propriétés de réduction des vibrations d'une structure par ajout d'un matériau granulaire. Ce dernier sujet fait l'objet du travail de recherche présenté dans ce manuscrit.

Objectifs du projet de recherche

Le matériau granulaire est l'état sous lequel la matière est présente en plus grande quantité sur la planète (Fig. 3). Il a été largement étudié dans le cas d'écoulement de grains, tant en milieu naturel (avalanches...) qu'industriel (silos à grains...). Majoritairement, ces études définissent les interactions entre des grains et permettent de définir le mouvement des particules en fonction de certaines conditions (nature du matériau, état de surface des grains, nombre de particules,...).

Ces études ont entraîné des recherches sur la prévision de phénomènes d'obstruction ou d'angles limites de stabilité d'un ensemble de grains. L'étude dynamique de la mise en vibration de grains a permis de mettre en évidence des comportements propres au matériau granulaire vibré et constitue un autre axe de recherche. L'effet de l'interaction d'un matériau granulaire sur l'atténuation des vibrations d'une structure constitue l'objet de cette recherche.

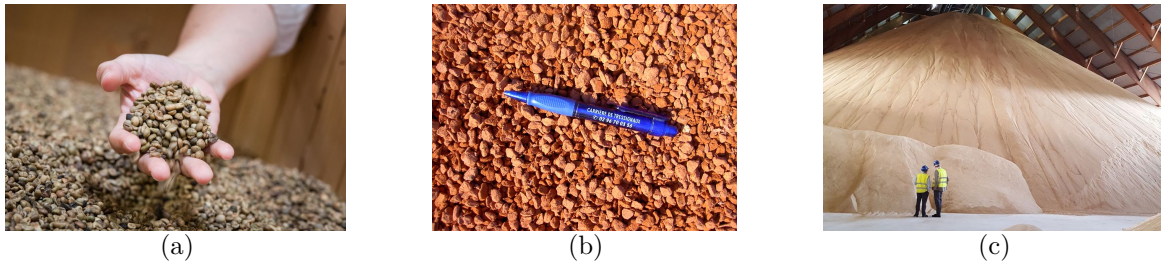


FIGURE 3 – Différentes échelles du matériau granulaire : (a) grains de café - (b) brique pilée - (c) sucre de betterave [68].

L'utilisation d'un matériau granulaire pour l'atténuation des vibrations présente des avantages certains du fait de la dépendance très faible à la température, si celui-ci est constitué de grains en verre. Ceci est en opposition aux systèmes d'amortissement par plots viscoélastiques généralement utilisés dans l'industrie du transport. Disposer une masse de grains en des endroits identifiés de la structure peut s'avérer être une application relativement simple. A contrario, l'ajout d'un matériau granulaire augmente la masse de la structure, ce qui entraîne un alourdissement préjudiciable avec risque de rupture prématurée. Un dimensionnement adéquat doit donc être trouvé.

L'atténuation des vibrations dans une structure utilisant un matériau granulaire peut être réalisée en l'incorporant de différentes manières dans le système (Fig. 4).

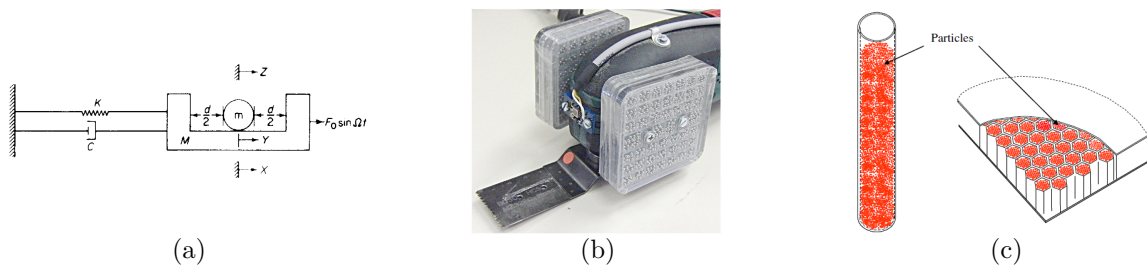


FIGURE 4 – Catégories mettant en jeu un matériau granulaire dans l'atténuation des vibrations : (a) impact damper (ID) [9] - (b) particle damper (PD) [39] - (c) non-obstructive particle damper (NOPD) [72].

Le matériau granulaire peut être incorporé dans une cavité attachée un système vibrant. Cette solution consiste à corriger a posteriori la vibration d'une structure. La position et la quantité de grains doivent alors être judicieusement choisis. Les grains peuvent aussi être incorporés à l'intérieur d'une structure, si celle-ci est initialement creuse. Les problématiques mécaniques de l'ajout d'une cavité supplémentaire ne sont plus présentes. La taille des grains utilisés est alors dépendante de la taille des cavités de la structure creuse.

Ce rapport a pour but de présenter un travail de recherche basé sur la compréhension, l'identification et la quantification des propriétés dissipatives d'un matériau granulaire sur une structure vibrante.

Démarche et organisation de la thèse

Les questions qui guident ce travail de recherche sont les suivantes :

- Quels sont les mécanismes entraînant une perte d'énergie par la mise en vibration d'un matériau granulaire ?
- Quelles sont les caractéristiques du matériau granulaire, du fluide environnant et celles de la structure qui influent sur l'atténuation des vibrations d'un système ?
- Quel est le modèle analytique approché représentant la dissipation induite par la présence des grains dans le cas d'une cavité indéformable ?
- Comment utiliser les caractéristiques dissipatives d'un ensemble de grains dans l'atténuation vibratoire d'une structure modale creuse ?

Ce manuscrit se divise en différents chapitres :

- **Chapitre 1** : Présentation des approches théoriques à différentes échelles du matériau granulaire,
- **Chapitre 2** : Description du matériel et des méthodes de post-traitement & pré-étude d'une structure modale avec gradient de déplacement,
- **Chapitre 3** : Identification des effets dissipatifs d'un amas de grains dans une cavité indéformable vibrante et élaboration d'un modèle analytique à constantes localisées.
- **Chapitre 4** : Variations paramétriques du matériau granulaire et des conditions aux limites aux interfaces dans la cavité.
- **Chapitre 5** : Application des mécanismes dissipatifs induits par le matériau granulaire à une structure modale creuse.

Dynamique d'un matériau granulaire : éléments de bibliographie

Préambule

L'objectif de ce chapitre est de dresser les principes physiques mis en jeu dans l'atténuation des vibrations avec un matériau granulaire aux différentes échelles d'observations. Elles vont de l'interaction simple entre deux grains, au comportement macroscopique d'un amas de matériau granulaire. La complexité augmente avec le nombre de grains pris en compte.

Dans un deuxième temps, la réponse vibratoire d'un oscillateur couplé à un matériau granulaire est étudiée. L'intérêt de l'utilisation de la matière en grains est validé. Par ailleurs, des techniques usuelles de caractérisation de mécanismes dissipatifs vibratoires sont présentées en présence d'un matériau granulaire. Leurs principales limites sont mises en évidence et permettent de définir les axes de travail de ce manuscrit.

Sommaire

1.1	Lois de contacts à l'échelle du grain	6
1.1.1	Modèle de contact sec entre deux grains	6
1.1.2	Présence de fluide et contact cohésif	7
1.2	Comportement d'une chaîne 1D de grains suite à un impact	8
1.2.1	Chaîne de grains monodisperse avec matériaux homogènes	8
1.2.2	Chaîne de grains polydisperse avec matériaux homogènes	9
1.3	Dynamique d'un amas de grains et phases thermodynamiques	10
1.4	Analyse de la dissipation liée à un ajout de grains dans une cavité	13
1.4.1	Décroissance temporelle du mouvement d'un système vibrant	13
1.4.2	Mise en évidence des non-linéarités	15
1.4.3	Etude temporelle du mouvement des grains et dissipation associée	16
1.4.4	Estimation numérique de l'énergie dissipée	18
1.5	Contrôle vibratoire de structure utilisant un amortisseur granulaire	19
1.5.1	Excitation forcée harmonique d'une cavité contenant un amas de grains	19
1.5.2	Etudes qualitatives de l'ajout de grains confinés à une structure modale	19
1.5.3	Etude de la dissipation via l'ajustement d'un système 1DDL	20
1.6	Axes de travail	22

1.1 Lois de contacts à l'échelle du grain

L'objectif de cette partie est de rappeler différentes théories descriptives du contact entre deux grains, dans l'objectif d'introduire l'évolution d'interactions plus complexes d'une chaîne puis d'un amas de grains.

1.1.1 Modèle de contact sec entre deux grains

Prise en compte du mouvement dans la direction de la normale au contact.

La théorie du contact entre deux particules sphériques, valable pour d'assez faibles déformations, a d'abord été étudiée par **Hertz** [41]. La raideur non-linéaire associée à la géométrie du contact est présentée sans composante dissipative. Par exemple, **Machado** [57] associe une dissipation de type visqueuse mais dont le coefficient dépend du niveau d'interpénétration (Fig. 1.1).

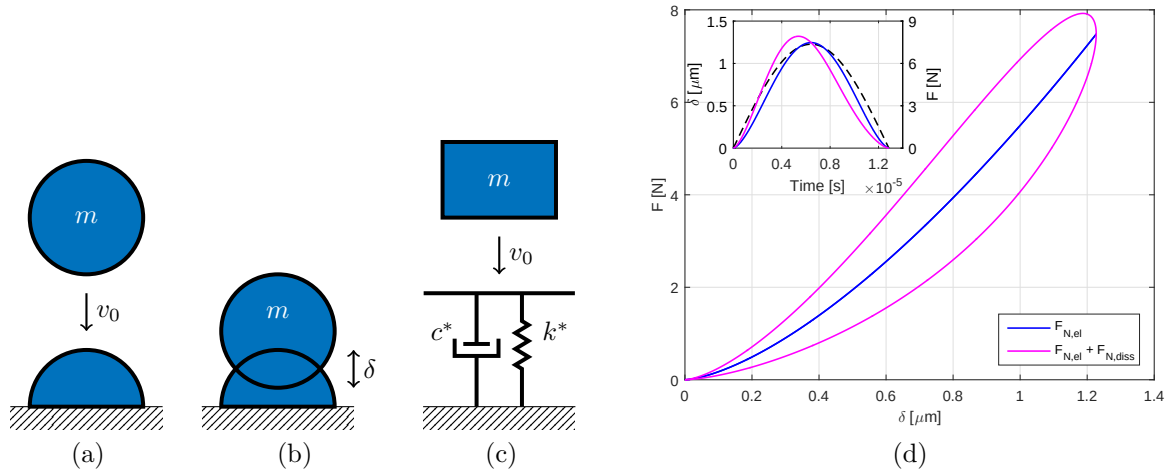


FIGURE 1.1 – Contact entre deux grains : (a) schéma représentatif de la chute d'un grain - (b) interpénétration suivant le modèle de Hertz - (c) modèle d'interaction - (d) application du modèle ($v_0 = 0,30 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ - $E = 6,85 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$ - $\nu = 0,36$ - $\rho = 2707 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ - $R = 20 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ - $c_r = 0,70$).

Dans cette étude, un grain chute et entre en contact avec un grain dont le centre est immobile. A l'impact, le principe fondamental de la dynamique donne :

$$m\ddot{\delta}(t) = F_{N,el}(t) + F_{N,diss}(t), \quad (1.1)$$

avec δ la distance d'interpénétration des deux particules. $F_{N,el}(t)$ représente la partie élastique du contact qui peut être décrite par la loi non-linéaire de Hertz :

$$F_{N,el} = k^* \delta^n, \quad (1.2)$$

avec $k^* = \frac{4}{3} E_{\text{red}} \sqrt{R_{\text{red}}}$ la raideur non-linéaire, $R_{\text{red}} = \frac{R_i R_j}{R_i + R_j}$ le rayon réduit, $E_{\text{red}} = \left(\frac{1 - \nu_i^2}{E_i} + \frac{1 - \nu_j^2}{E_j} \right)^{-1}$

le module d'Young réduit, R_i le rayon, ν_i le coefficient de Poisson, E_i le module d'Young de la sphère i et $n = \frac{3}{2}$ l'exposant non-linéaire, dont la valeur est donnée pour le cas de contacts circulaires ou elliptiques. $F_{N,diss}(t)$ représente la partie in-élastique du contact normal conduisant à de la dissipation d'énergie :

$$F_{N,diss} = c^* \delta^n \dot{\delta}, \quad (1.3)$$

avec $c^* = \frac{3(1 - c_r)}{2} \frac{k^*}{v_0}$ le coefficient d'amortissement visqueux non-linéaire, c_r un coefficient de restitution et v_0 la vitesse initiale juste avant impact. Pour une vitesse v_0 donnée l'évolution temporelle de la distance d'interpénétration dépend du modèle. Si la raideur est constante, l'évolution suit une courbe en sinus (Fig. 1.1d, courbe pointillés). Si la raideur est non linéaire (Hertz), l'évolution reste symétrique mais la décélération est plus faible aux premiers instants. Si les effets dissipatifs sont ajoutés, l'évolution temporelle n'est plus symétrique.

Une utilisation de ces modèles peut permettre d'étudier des combinaisons d'impacts [73]. La présence de rebonds est prise en compte dans ces représentations en fonction du ratio de masse entre les grains.

A l'échelle du grain, l'identification expérimentale de la dissipation peut être mise en œuvre [44]. S'en suivent différentes applications de modèles dissipatifs au contact [28, 43, 46, 48, 49].

Prise en compte du mouvement dans toutes les directions par rapport à la normale au contact.

Les modèles présentés auparavant représentent l'interaction comme un contact uniquement normal. Une étude de **Mishra** [64] permet de représenter une interaction avec deux contributions, normale F_N et tangentielle F_T (Fig. 1.2).

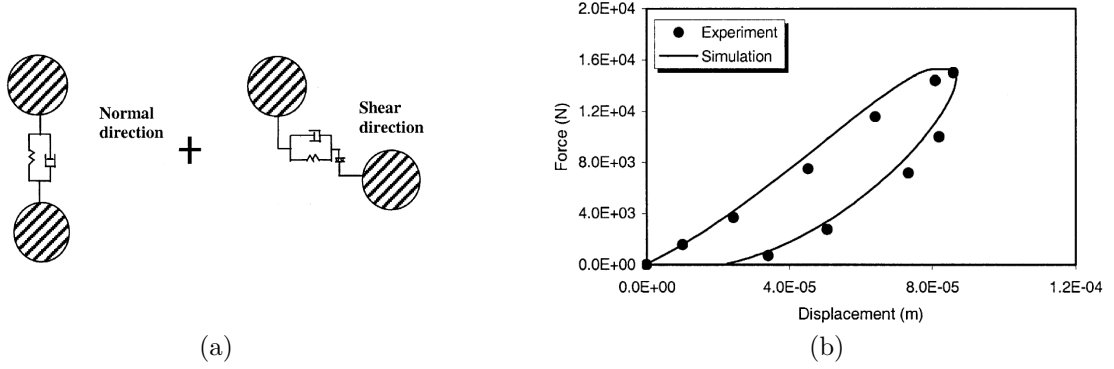


FIGURE 1.2 – Contact entre deux grains avec forces normale et tangentielle : (a) contribution du contact normal F_N et de la friction tangentielle F_T lors d'une collision entre deux grains [46] - (b) Confrontation d'un modèle à l'expérience (bille de masse $m = 0,252$ kg - hauteur de chute $h = 0,3$ m) [64].

Dans cette description, le chevauchement lors du contact est représenté par un modèle dissipatif visco-élastique dans la direction normale. La contribution tangentielle F_T est proportionnelle à la contribution normale F_N du contact :

$$F_T = \mu F_N, \quad (1.4)$$

avec $\mu \in [0, 1]$ le coefficient de friction, F_N la résultante des forces normales lors de l'interaction entre les grains i et j et $\vec{n}$ le vecteur normal unitaire entre les deux centres de masse des grains. Cet effet dissipatif peut être réalisé expérimentalement en modifiant les conditions de contact entre les grains. L'expérience consiste à faire chuter un grain sur une barre d'acier. Au niveau du modèle, le rayon de courbure est alors considéré comme infini. Ce cas est modélisé numériquement en utilisant la DEM (voir **Annexe B**) où le déplacement mesuré est l'interpénétration normale au contact et la force est la résultante des deux directions. La bonne concordance expérience/simulation permet d'observer un effet dissipatif. La complexité du contact est mise en évidence par une hystérésis décrite par un retour non nul du déplacement quand la force est égale à 0. Le calcul de l'aire interne de cette courbe sera utilisé dans cette thèse pour quantifier les dissipations. L'étude du frottement entre deux structures a été étudié de façon macroscopique sur un système vibrant, mais ne permet par une description de l'effet à l'échelle de l'interaction entre deux grains [52, 58].

1.1.2 Présence de fluide et contact cohésif

L'ajout d'un fluide entre deux grains entraîne la formation d'un pont capillaire. Une expérience a été menée par **Gras** [34] pour observer l'évolution de la force capillaire f_{cap} en fonction de la distance entre deux particules présentant une interface fluide (Fig. 1.3).

L'évolution de la distance inter-particule D a une influence sur la force capillaire f_{cap} , calculée à partir de la méthode de gorge :

$$f_{\text{cap}} = 2\pi T_s h + \pi s h^2, \quad (1.5)$$

avec T_s la tension de surface du fluide utilisé, h le rayon de gorge et s la succion :

$$s = \rho g h, \quad (1.6)$$

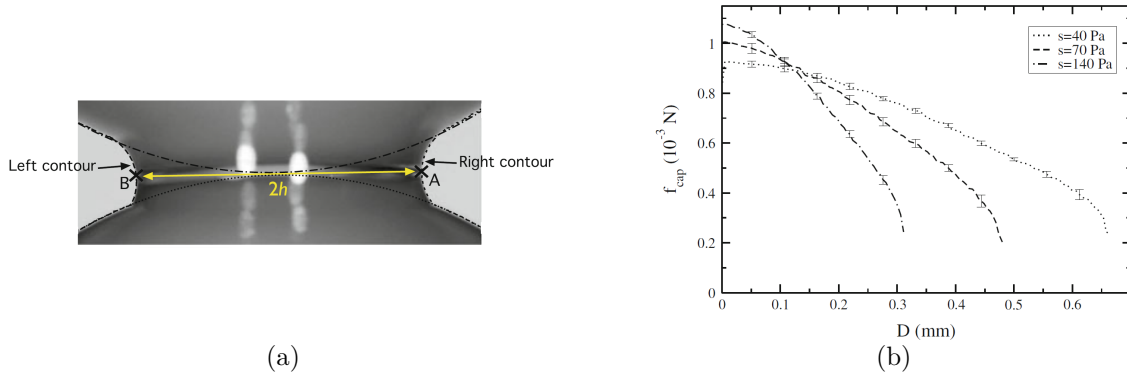


FIGURE 1.3 – Contact cohésif expérimental : (a) photo d'un pont capillaire entre deux grains - (b) variation de la force capillaire f_{cap} en fonction de la distance entre les grains D [34].

avec ρ la masse volumique du fluide et g l'accélération de la pesanteur. Cette valeur de s est considérée comme constante durant un test, la rupture du pont capillaire intervient pour des valeurs de D très faibles. La force capillaire f_{cap} diminue quand la distance inter-grains D augmente quelque soit la valeur de suction s . Plus s est grand, plus la décroissance de la force capillaire est rapide avec D . Plus s est faible, plus le contact est souple et la rupture du pont se fait pour D grand.

Les caractéristiques du liquide peuvent être étudiées [83]. Pour un amas de grains, l'hygrométrie modifie le comportement quasi-statique et dynamique. En quasi-statique, un des moyens de mesure est le déclenchement des avalanches granulaires en inclinant progressivement une cavité à taux d'humidité régulé [33]. L'angle limite augmente avec l'hygrométrie traduisant des contacts cohésifs entre les grains plus forts, le nombre d'avalanches diminue, les grains se décrochent en bloc contrairement aux avalanches de grains secs [11]. En dynamique, pour des amas de granulaires en vibration [91], plus le taux d'hygrométrie augmente, plus la mobilité des grains diminue du fait des ponts hydriques. La dissipation dans le système est augmentée.

1.2 Comportement d'une chaîne 1D de grains suite à un impact

Les contacts unitaires sont exportés le long d'une chaîne de grains. C'est une étape nécessaire dans la compréhension des mécanismes de transmission d'effort au sein d'un matériau granulaire via l'analyse d'un ensemble de grains ordonnés. La propagation d'ondes dans une chaîne 1D de grains permet de décrire la dissipation dans le cas où les billes restent en contact [16, 4, 5]. Cependant, la maximisation de la perte d'énergie réside dans la perte du contact après impact.

1.2.1 Chaîne de grains monodisperse avec matériaux homogènes

L'étude de la conservation de l'énergie cinétique et de la quantité de mouvement le long d'une chaîne de grains ont d'abord été mises en évidence par **Newton** [67]. A titre d'illustration **Gharib** [31] simule la transmission d'un effort dans une chaîne de grains composée de trois billes B_i élastiques, donc sans dissipation, respectivement de masse m_i ($i=1,2,3$) (Fig. 1.4). La bille B_1 , de vitesse initiale v_1^- impacte les deux autres billes en contact et immobiles ($v_2^- = v_3^- = 0$). Suite à la collision, deux impulsions normales $\tau_{1,2}$ et $\tau_{2,3}$ sont obtenues, définies par les relations suivantes :

$$\begin{cases} m_1 \Delta v_1 = -\Delta \tau_{1,2}, & (1.7a) \\ m_2 \Delta v_2 = +\Delta \tau_{1,2} - \Delta \tau_{2,3}, & (1.7b) \\ m_3 \Delta v_3 = +\Delta \tau_{2,3}. & (1.7c) \end{cases}$$

Une première méthode de calcul se base sur les impulsions (conservation de la quantité de mouvement à l'impact de chaque particule) qui est une vision macroscopique. La deuxième méthode décrit le contact de Hertz (interpénétrations) qui est une vision microscopique.

Il apparaît que seule l'évolution temporelle pendant l'impact de la vitesse de la bille intermédiaire B_2 est dépendante du type de modèle. Après l'impact, les vitesses des trois billes sont identiques.

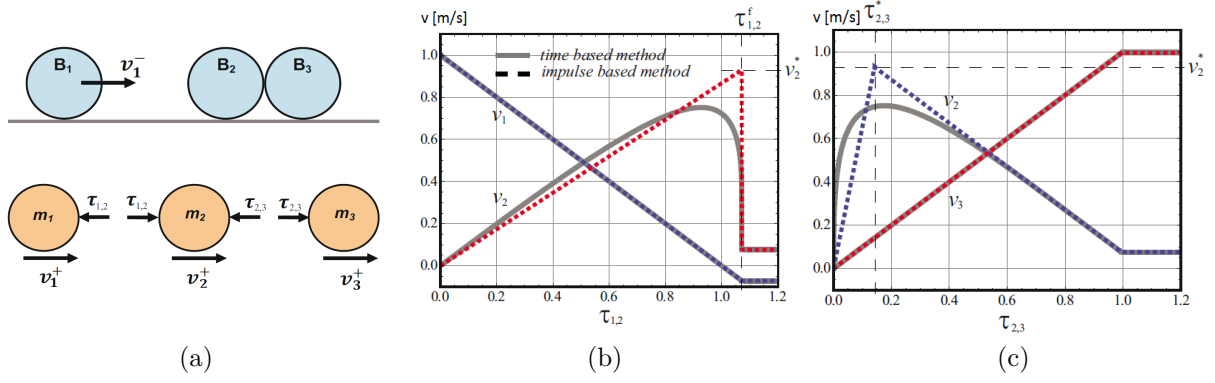


FIGURE 1.4 – Transmission d'un effort le long d'une chaîne 1D : (a) représentation schématique avant et après impact - (b) évolution des vitesses des billes B_1 & B_2 - (c) évolution des vitesses des billes B_2 & B_3 (--- : conservation de la quantité de mouvement - — : contact de Hertz - $m_1 = m_2 = m_3 = 1$ kg, $v_1^- = 1$ m·s⁻¹, $v_2^- = v_3^- = 0$ m·s⁻¹, $e_{1,2} = e_{2,3} = 1$ [31]).

Dans le cadre de ce mémoire, qui s'intéresse aux effets de multiples collisions, il ne sera pas nécessaire de prendre en compte des modèles descriptifs de l'aspect microscopique des collisions, puisque les vitesses finales n'en dépendent pas. Par contre, les effets dissipatifs locaux devraient avoir une influence non négligeable sur les effets macroscopiques.

1.2.2 Chaîne de grains polydisperse avec matériaux homogènes

L'évolution de la vitesse associée à chaque grains, réalisée par Nakagawa [66] (Fig. 1.5), permet de comparer l'effet de la polydispersité par rapport à l'étude précédente.

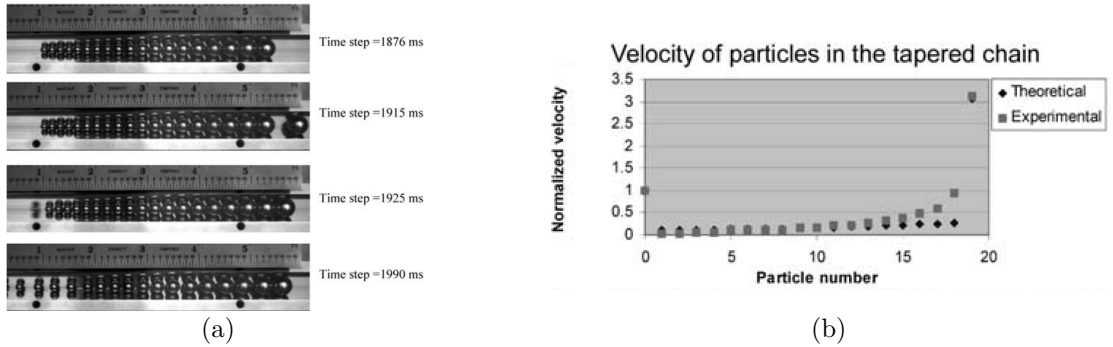


FIGURE 1.5 – Impacts le long d'une chaîne 1D : (a) collisions dans une chaîne de grains à diamètres décroissants de droite à gauche (impact côté droit) - (b) évolution de la vitesse de chaque particule le long d'une chaîne 1D de grains consécutives à un impact [66].

L'impact est réalisé côté droit et s'en suivent des contacts successifs. La décroissance de la droite vers la gauche de la masse des grains entraîne une vitesse non uniforme le long de la chaîne. La particule à l'extrémité gauche (n°19) est celle ayant une vitesse maximale. Une augmentation de vitesse est déjà mesurable pour les particules précédentes. Par ailleurs, un écart entre l'expérience et une simulation numérique du système est associé par les auteurs au fait que la simulation sous-estime la force transmise au contact.

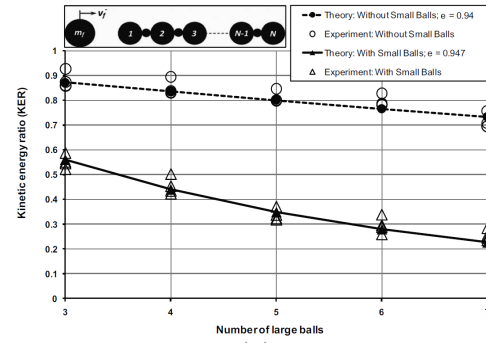
Pour aller plus loin, Gharib [31] ne garde que deux diamètres de grains au sein de la chaîne 1D devenant alors bidisperse. Ces deux tailles sont volontairement éloignées l'une de l'autre (Fig. 1.6). L'impact est effectué par le lâcher d'une bille sur le système 1D, la mesure est réalisée par suivi d'images.

La grande disparité des diamètres influe sur les conditions de contact aux interfaces. La variation d'énergie cinétique E_c avant et après impact est quantifiée via le Kinetic Energy Ratio (KER) :

$$KER = \frac{E_c \text{ de tous les grains après impact}}{E_c \text{ du grain incident avant impact}}, \quad (1.8)$$



(a)



(b)

FIGURE 1.6 – Chaîne 1D de grains avec variation de diamètre : (a) dispositif expérimental - (b) variation de l'énergie cinétique[32].

et plus la valeur du KER est petite, plus l'énergie transmise de grain en grain est faible. Les résultats montrent que pour un même nombre de billes larges, l'ajout de petites billes intermédiaires permet de faire chuter la valeur du KER de près de 0,4. En fonction d'une valeur cible du KER , une optimisation du nombre de grandes billes avec billes intermédiaires peut permettre un allègement de la masse totale du système.

La variation du matériau constitutif des grains entraîne des contacts différents tout au long de la chaîne. Dans son étude **Daraio** [23] alterne des grains d'acier et des grains souples (polytétrafluoroéthylène, PTFE). L'évolution temporelle de la force sur des grains le long de la chaîne 1D permet de déduire le comportement dissipatif du système.

Cette étude sur chaîne 1D de grains a permis de mettre en évidence l'influence des conditions de contacts. Toutefois, l'étude d'un amas de grains ne permet pas de suivre la transmission d'un effort élément par élément. Il est donc nécessaire de recourir à une vision macroscopique du système.

1.3 Dynamique d'un amas de grains et phases thermodynamiques

Dans le cadre de ce travail de thèse, les grains ne vont pas être utilisés de façon dénombrable, mais en amas. Le nombre de contacts inter-grains est ainsi très fortement augmenté. Dans ce manuscrit, la gamme d'étude en accélération se centre autour de $1g$, donc sur la transition entre des grains en mouvement en bloc et en mouvement relatif entre eux.

Le caractère non-linéaire du milieu en fonction de l'amplitude d'accélération imposée est étudié par **Roeller** [77]. Dans cette étude (Fig. 1.7), une cavité rigide excitée verticalement est fixée à un pot vibrant. Une masse de grains y est incorporée et y occupe 5,9% du volume de la cavité. Par ailleurs, le changement de phases est déterminé via une simulation numérique équivalente du dispositif expérimental en mesurant l'évolution de la compressibilité du corps. Quand celle-ci devient négative, le volume augmente avec la pression mesurée numériquement, une instabilité est détectée ce qui caractérise un changement de phase. La vibration forcée est contrôlée en déplacement, valeur convertie en accélération en fonction de la fréquence d'excitation.

Le matériau granulaire vibré a un comportement dépendant de l'amplitude de déplacement normalisée A/d , avec A l'amplitude du déplacement piloté et $d = 610 \mu m$ le diamètre des grains utilisés. Cette valeur est reliée à l'accélération adimensionnée $\Gamma = \frac{A(2\pi f)^2}{g}$, avec $f = 45 \text{ Hz}$ et g l'accélération de la pesanteur ($A/d = 1 \leftrightarrow \Gamma \approx 5$). Dans le cas d'une même quantité de grains, plus l'amplitude d'excitation augmente, plus les grains sont sollicités. Pour des valeurs faibles d'accélération, le comportement associé est une phase liquide alors que pour des valeurs d'accélération plus importantes, une phase gazeuse est associée à l'effet de la vibration du matériau granulaire.

Ces niveaux d'excitation, associés à des phases thermodynamiques équivalentes, sont simulés numériquement par **Saluena** [78]. Une cavité non résonante contenant 500 particules, dont les diamètres sont distribués dans l'intervalle $[1,2-2,8] \text{ cm}$ (Fig. 1.8), utilise un déplacement imposé de la forme $u(t) = A \sin(\omega t)$.

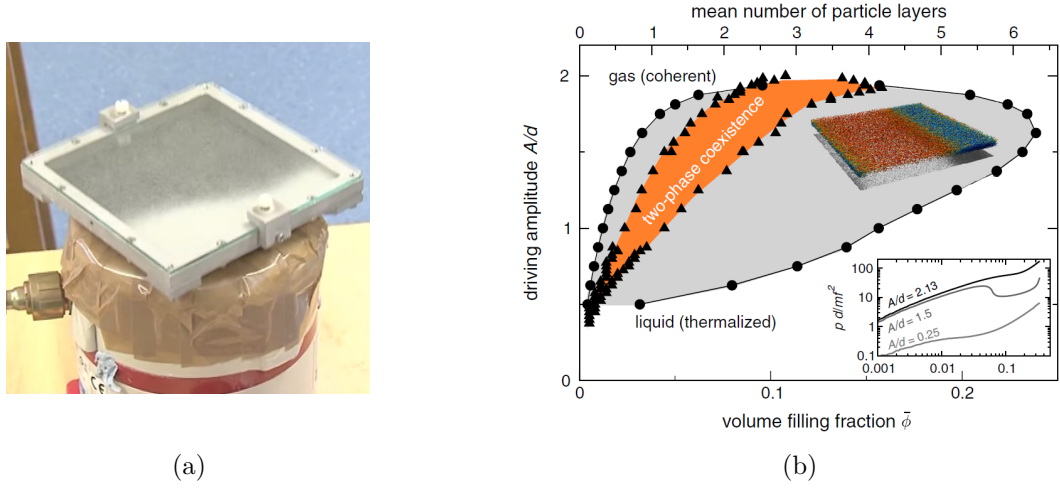


FIGURE 1.7 – Différents régimes d'un ensemble de grains vibrés : (a) dispositif expérimental - (b) diagramme de phases thermodynamiques issus d'une simulation numérique correspondant à l'expérience pour un amas de grains à une fréquence de 45 Hz [77].

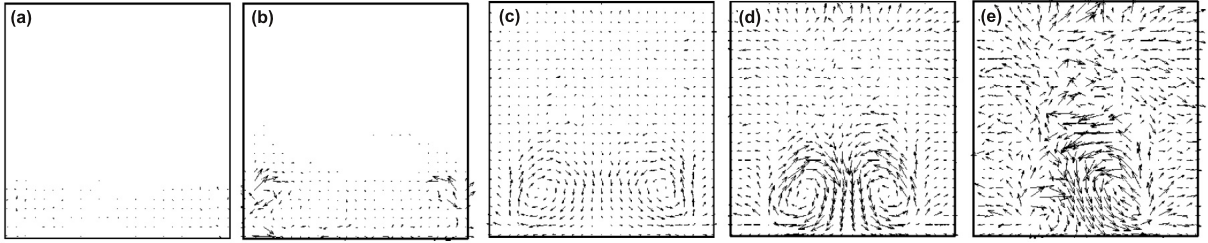


FIGURE 1.8 – Simulation numérique du mouvement des grains dans une cavité à différentes vitesses (accélérations) pour $f = 20$ Hz : (a) $A\omega = 15 \text{ cm.s}^{-1}$ ($\Gamma = 2$) - (b) $A\omega = 100 \text{ cm.s}^{-1}$ ($\Gamma = 13$) - (c) $A\omega = 600 \text{ cm.s}^{-1}$ ($\Gamma = 77$) - (d) $A\omega = 1250 \text{ cm.s}^{-1}$ ($\Gamma = 160$) - (e) $A\omega = 1900 \text{ cm.s}^{-1}$ ($\Gamma = 243$) [78].

D'abord la gamme d'accélération permettant de mettre en évidence les différents états du milieu granulaire est très importante $\Gamma \in [2, 243]$ comparativement à l'étude précédente. Le comportement associé aux phases thermodynamiques en fonction du niveau d'accélération dépend donc du matériau granulaire utilisé et de sa quantité.

- Pour $\Gamma \leq 13$, l'amas de grains dissipe une faible quantité d'énergie, les contacts inter-grains sont peu sollicités,
- Pour $13 \leq \Gamma \leq 77$, les grains suivent un mouvement de convection, qui augmente les interactions,
- Pour $\Gamma \geq 77$, les grains interagissent aléatoirement, favorisant les contacts et donc augmentant significativement l'énergie dissipée.

Les mécanismes de dissipation d'énergie qui peuvent être mis en jeu dépendent des états de contacts entre les grains. L'étude des phases thermodynamiques équivalentes permet d'identifier des zones de travail pour une meilleure compréhension des effets dissipatifs des grains sur la structure vibrante.

Phase solide équivalente sous faible accélération

Une simulation numérique (Fig. 1.9) montre que la transmission d'un effort quasi-statique au sein d'un amas de grains est faite via des chaînes de forces, créées par des contacts successifs entre les grains.

Dans le cas présenté ici, les images successives montrent une augmentation croissante du chargement, induisant une augmentation des chaînes de forces et donc du nombre de contacts. Cette étude est réalisée par simulation numérique (DEM). C'est une méthode temporelle qui permet, à partir de modèles de contacts établis, de résoudre les équations du mouvement de chaque particule au moyen d'un schéma de type différences finies [22] (voir **Annexe B**).

Pour des faibles niveaux d'accélération vibratoire imposés à un amas de grains, ces chaînes de forces doivent évoluer pendant chaque cycle, mais aussi entre les cycles du fait du mouvement de quelques

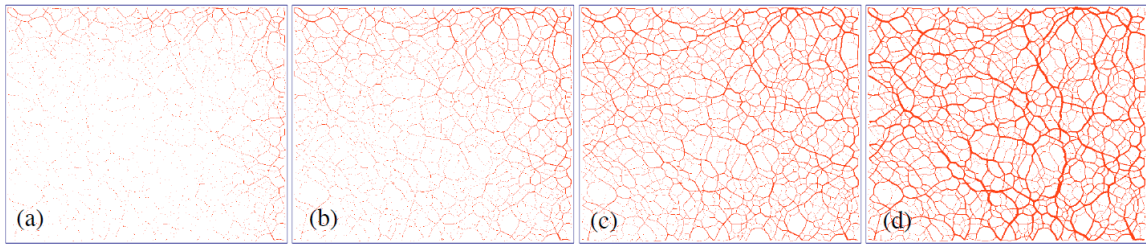


FIGURE 1.9 – Simulation numérique de l'évolution des valeurs de force normale aux interactions inter-grains d'un amas de grains en fonction d'un niveau de chargement externe non uniforme. Les parois de gauche et du bas sont immobiles, tandis que les surfaces supérieure et droite soumettent une contrainte uniforme. [76].

grains. Néanmoins, l'effet de masse des grains reste le phénomène prédominant en dessous de l'amplitude d'accélération de la pesanteur, comme le montre **Masmoudi** [61] (Fig. 1.10).

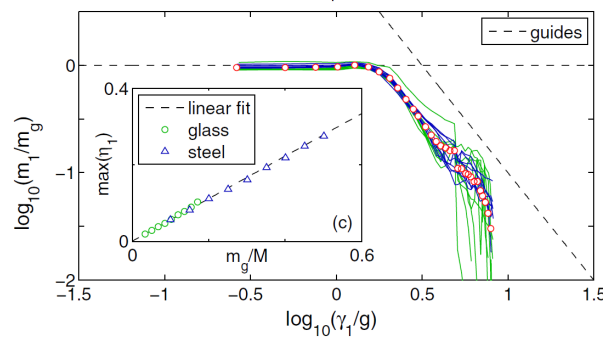


FIGURE 1.10 – Résultats expérimentaux de la mise en évidence du comportement solide de la masse de grains [61].

Une masse dynamique m_1 est calculée à partir de la mesure du ratio $F/\gamma = M + m_1$ avec M la masse de la cavité. Les résultats présentent la variation d'un rapport de masse m_1/m_g avec m_g la masse statique de grains. Il est exprimé en fonction d'un rapport d'accélération $\Gamma = \gamma_1/g$ où γ_1 est l'accélération imposée au système et g l'accélération de la pesanteur. En dessous de la valeur critique $\Gamma = 1$, le comportement de l'amas de grains est assimilable à une masse indéformable. Des ondes de compression peuvent se propager dans le milieu, mais leurs influences restent suffisamment faibles pour conserver le rapport $m_1/m_g = 1$. Par contre, au delà de ce seuil d'accélération, le rapport devient $m_1/m_g < 1$. La masse dynamique est proportionnelle au niveau d'accélération en échelle logarithmique. Les grains sont en mouvements relatifs et pendant une oscillation seule une partie de ceux-ci interagissent avec la cavité. L'amas de grain ne se comporte alors plus comme une masse indéformable.

Phase fluide équivalente sous accélération modérée

Lorsque l'amplitude d'accélération augmente, les grains sont mis en mouvements relatifs les uns par rapport aux autres. Le comportement de l'amas peut être assimilé à un fluide équivalent, induisant une déformation de la surface libre et des mouvements de convection. Dans son étude, **Zhang** [100] montre que ces effets sont dépendants de la fréquence et de l'amplitude d'excitation (Fig. 1.11).

Dans cette étude une excitation sinusoïdale est appliquée à une cavité remplie de grains. Des profils de comportement du matériau granulaire sont alors observés en fonction de la fréquence d'excitation pour une amplitude d'accélération $\Gamma \in [2, 6]$. Ces mouvements de convection dépendent des interactions aux interfaces [42] et de la quantité de grains de l'amas [6].

Phase gazeuse équivalente sous forte accélération

Pour des valeurs de $\Gamma = 4$ atteintes par **Tai** [87] (Fig. 1.12), les grains sont éjectés de manière chaotique à proximité de la surface libre car les grains ne sont pas précontraints par le poids des couches supérieures. Cette étude met en évidence une phase gazeuse équivalente qui se localise.

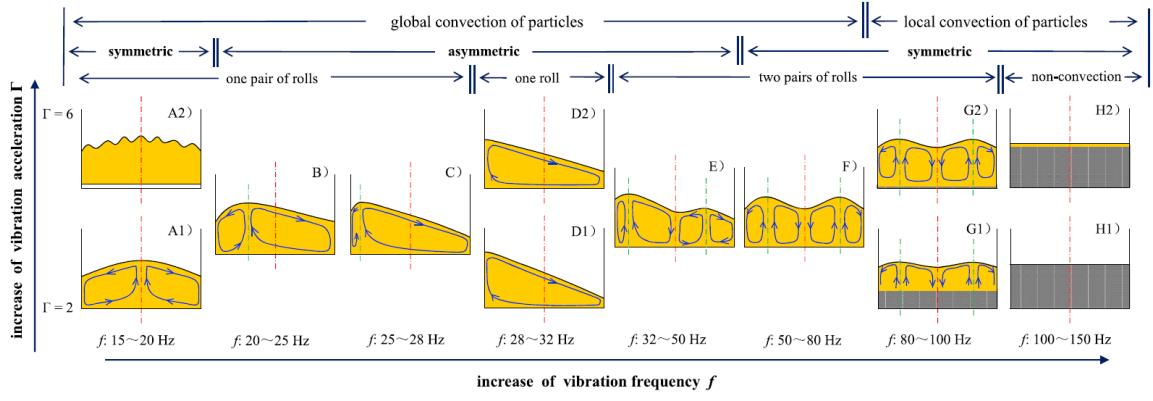


FIGURE 1.11 – Représentation schématique de résultats expérimentaux illustrant des mouvements de convection et ondes de surfaces d'un matériau granulaire mis en vibration dans une cavité [100].

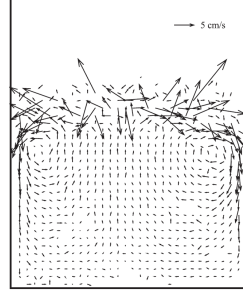


FIGURE 1.12 – Simulation numérique de la localisation du mouvement chaotique des grains à la surface libre de l'amas ($\Gamma = 4$ et $f = 12,5 \text{ Hz}$) [87].

L'étude de ces différentes phases thermodynamiques équivalentes indique une forte dépendance de la réaction du matériau granulaire à l'amplitude d'accélération. A la suite de ces observations, le travail initié tout au long de ce document se concentre sur des niveaux assez faibles d'accélération ($\Gamma \leq 3$) qui sont représentatifs des niveaux majoritairement mesurés dans les systèmes industriels. Dans ce cas, seule la phase fluide est prise en compte.

1.4 Analyse de la dissipation liée à un ajout de grains dans une cavité

Lorsqu'un matériau granulaire est mis en mouvement, les déformations des grains et leurs interactions peuvent occasionner de la dissipation d'énergie. Cela peut se traduire par exemple par l'atténuation des rebonds d'une sphère partiellement remplie de grains et lâchée d'une hauteur définie [70, 96]. Lorsque des grains sont introduits dans un système vibrant, ils sont responsables de l'atténuation des vibrations. Ce traitement anti-vibratoire a donné lieu à différentes études, dans lesquels l'effet du matériau granulaire est analysé.

1.4.1 Décroissance temporelle du mouvement d'un système vibrant

L'atténuation vibratoire induite par un amas de grains peut être mise en évidence en étudiant la réponse libre d'un oscillateur 1DDL associée à un matériau granulaire, comme l'effectue **Shah** [81]. Dans cette expérience, le matériau granulaire est placé dans une cavité fixée immobile. Un piston (de diamètre 9,5 mm) dont l'extrémité est plongée dans l'amas de grains est lâché d'une certaine hauteur par rapport à sa position d'équilibre, la position du piston est mesurée en fonction du temps (Fig. 1.13).

Les oscillations amorties sont de type linéaires décroissantes en fonction du temps (Fig. 1.13a). D'ailleurs le système sans grains présente une dissipation beaucoup plus faible, souvent ayant une allure d'exponentielle décroissante. L'évolution de la variation d'amplitude est quantifiée au moyen de l'énergie dissipée par cycle d'oscillation (Fig. 1.13b) dont l'expression est donnée par :

$$W(t_i^\alpha) = E(t_i) - E(t_{i+1}). \quad (1.9)$$

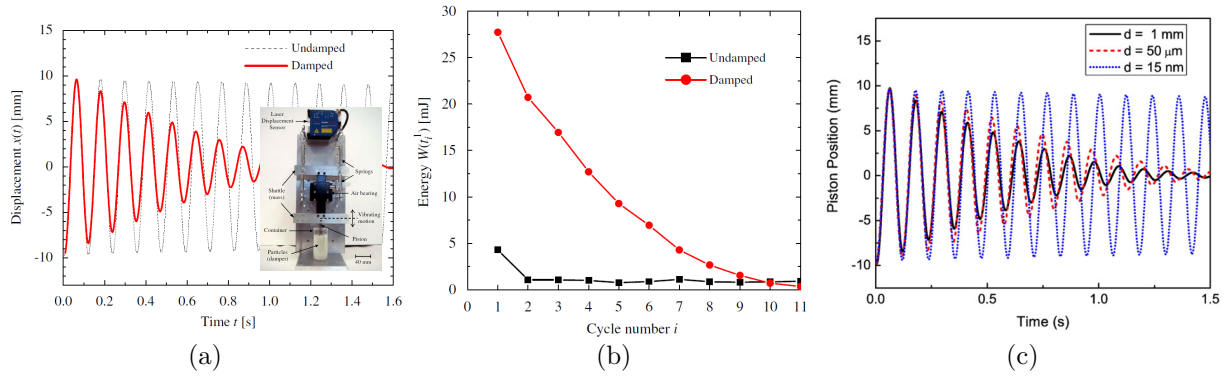


FIGURE 1.13 – Vibration libre d'un piston dans une cavité remplie de grains : (a) influence expérimentale de l'ajout de grains sur la vibration libre du piston (billes de verre, $\varnothing = 1$ mm) [81] - (b) évolution de l'énergie perdue W par le système sans et avec traitement (billes de verre, $\varnothing = 1$ mm) [81] - (c) effet de la taille des grains sur l'atténuation de la vibration dans le cas d'une simulation numérique [8].

Cette quantité est calculée comme la différence entre deux énergies successives $E(t_i) = \frac{1}{2}kx^2(t_i)$, avec k la raideur du dispositif expérimental et x_i la position du piston au $i^{\text{ème}}$ cycle. Cette valeur d'énergie dissipée décroît jusqu'à ce que la différence entre deux oscillations soit nulle, donc pour une absence de mouvement dans le cas avec grains. Pour le cas non amorti, la différence entre les maximums locaux successifs est très faible comparativement au système avec amortissement.

Dans une étude numérique, dont le principe général est détaillé en **Annexe B**, différents diamètres de grains sont comparés à volume constant pour un même piston (Fig. 1.13c). La variation numérique du diamètre des grains montre qu'un nombre minimal de grains est nécessaire pour obtenir une atténuation efficace des vibrations. Dans le cas présenté, plus les grains sont nombreux, plus l'atténuation vibratoire est faible. Diminuer le nombre de contacts (en augmentant la taille des grains) augmente de façon non-linéaire le niveau de force, ce qui amène à un accroissement de la dissipation.

À l'inverse, l'utilisation d'un matériau granulaire sur un système résonant est étudiée afin d'observer son effet sur l'atténuation des vibrations. Le cas le plus simple, présenté par **Bapat** [9], montre l'utilisation d'un unique grain sur un oscillateur à 1DDL (Fig. 1.14). La comparaison d'un modèle associé à l'expérience est effectuée.

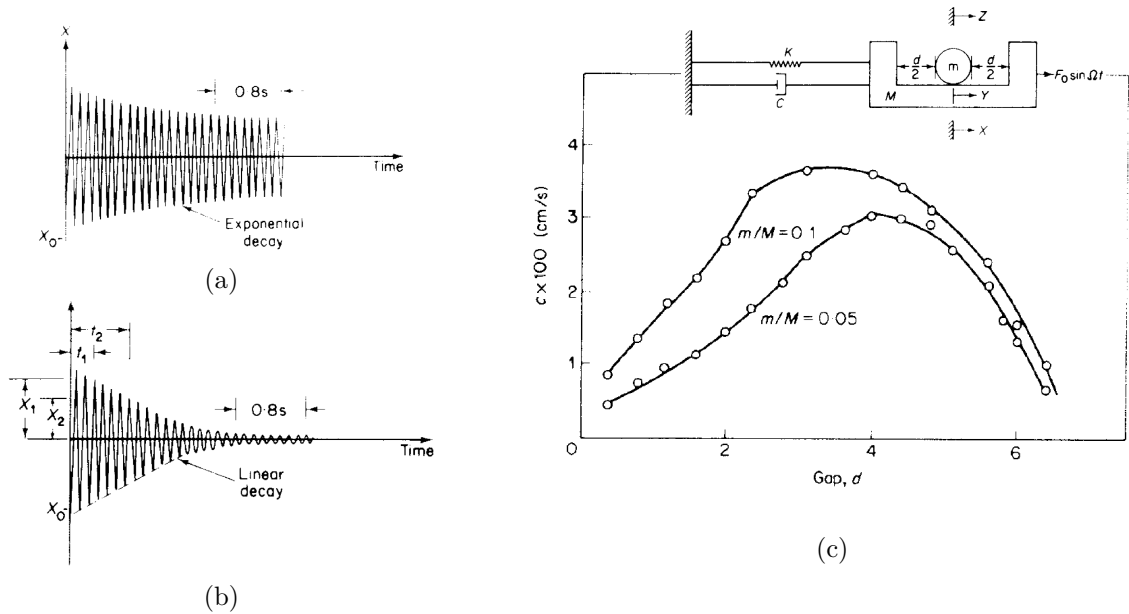


FIGURE 1.14 – Comparaison expérimentale de la décroissance d'amplitude : (a) sans bille - (b) avec bille - (c) comparaison des valeurs de l'amortissement c en fonction de la taille de la cavité. $\bullet$: expérience & — : théorique ($M = 0,73$ kg, $\omega = 1$ rad.s $^{-1}$ et $X_0 = 1,0$ cm) [9].

L'allure de la décroissance de l'amplitude de vibrations en fonction du temps devient linéaire avec la

présence de la bille. Cette décroissance en présence de la bille permet de calculer la valeur d'une "pente d'amortissement", où t_1 et t_2 sont les indices des temps correspondant aux maximums X_1 et X_2 :

$$c = \frac{X_1 - X_2}{t_2 - t_1}. \quad (1.10)$$

Cette valeur d'amortissement équivalent c est étudiée via une variation paramétrique des valeurs de la masse m de la bille présente dans le système, la masse M du système primaire restant inchangée en fonction de d la largeur de la cavité. Plus m augmente, plus la valeur de l'amortissement équivalent est importante. Par ailleurs, ces deux courbes passent par un maximum en fonction de d . En effet, pour des valeurs faibles d'interstice entre la bille et la cavité, la vitesse relative du grain par rapport à la vitesse de la cavité est faible au moment de l'impact et le nombre d'impact pendant un aller-retour de la cavité est élevé. Quand cet écart augmente, la vitesse augmente, le nombre d'impact diminue et la valeur de c augmente dans un premier temps. A l'inverse quand cet écart continue d'augmenter, le temps entre deux impacts augmente, ce qui entraîne une diminution de c .

Lorsque le nombre de grains dans une chaîne augmente tout en restant dénombrable, la décroissance temporelle n'est plus si régulière comme le montre les résultats obtenus avec 3 grains par **Gharib** [32] (Fig. 1.15)

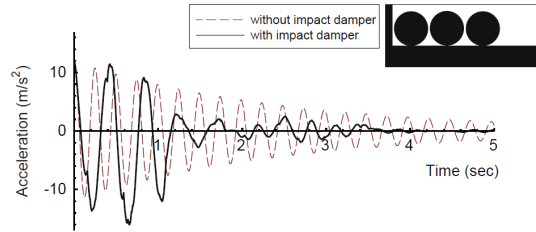


FIGURE 1.15 – Réponse du système résonant avec 3 grains [32].

Cet ensemble de résultats montre dans un premier temps l'influence et l'intérêt de la présence d'un matériau granulaire par rapport à la réponse vibratoire de la cavité vide. L'ajout des petites billes (induisant un faible ajout de masse) diminue fortement la réponse vibratoire libre du système. Les vitesses des particules sont différentes en fonction de leurs masses. Par ailleurs, un contenu spectral paraît plus fourni dans le cas avec ajout d'un grand nombre de grains.

1.4.2 Mise en évidence des non-linéarités

C'est au moyen d'une poutre encastrée/libre de fibre moyenne horizontale que sera réalisée l'expérience de **Trigui** [88]. Un déplacement vertical est appliqué à l'extrémité libre. La décroissance de la vibration permet de la même manière de mesurer l'amortissement de la structure. Deux traitements sont mis en place : l'ajout d'une masse indéformable et l'ajout d'un amas de grains (Fig. 1.16).

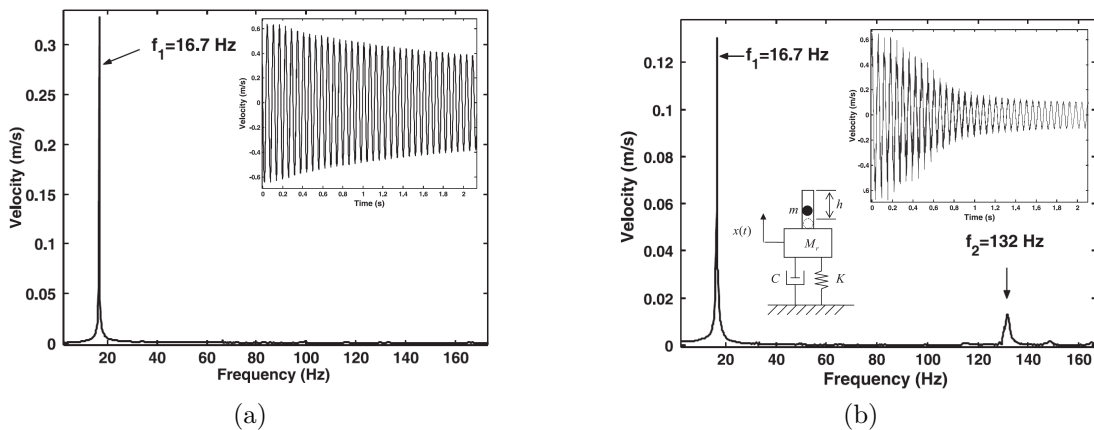


FIGURE 1.16 – Représentation fréquentielle et temporelle d'un système à iso-masse : (a) masse indéformable fixée - (b) matériau granulaire ($\varnothing = 2$ mm) [88].

La vitesse initiale $v_0 = 0,6 \text{ m.s}^{-1}$ est identique pour les deux traitements (masse indéformable fixée & matériau granulaire). Les allures de décroissances de la vitesse sont différentes : exponentielle pour la masse indéformable, linéaire pour l'amas de grains pour des temps $t \in [0-0,8] \text{ s}$. A même masse, la décroissance est plus rapide en présence du matériau granulaire. Le contenu fréquentiel de l'essai avec grains est plus riche que celui avec une masse indéformable du fait des multiples chocs qui transfèrent de l'énergie à plus haute fréquence, ici au voisinage de $f_2 = 132 \text{ Hz}$. L'amplitude de la fréquence fondamentale $f_1 = 16,7 \text{ Hz}$ est réduite d'autant.

Un amas de matériau granulaire est maintenant placé sur un oscillateur. Ses caractéristiques comme traitement anti-vibratoire sont étudiées. Cette simulation numérique a été effectuée par **Sanchez** [79], une excitation forcée à déplacement constant imposé et à fréquence f_e variable (donc à accélération croissante) est appliquée à un système 1DDL (Fig. 1.17). Le résultat de la simulation numérique montre l'évolution du déplacement de la masse de grains vibrés ainsi que la FFT de la trajectoire du centre de masse.

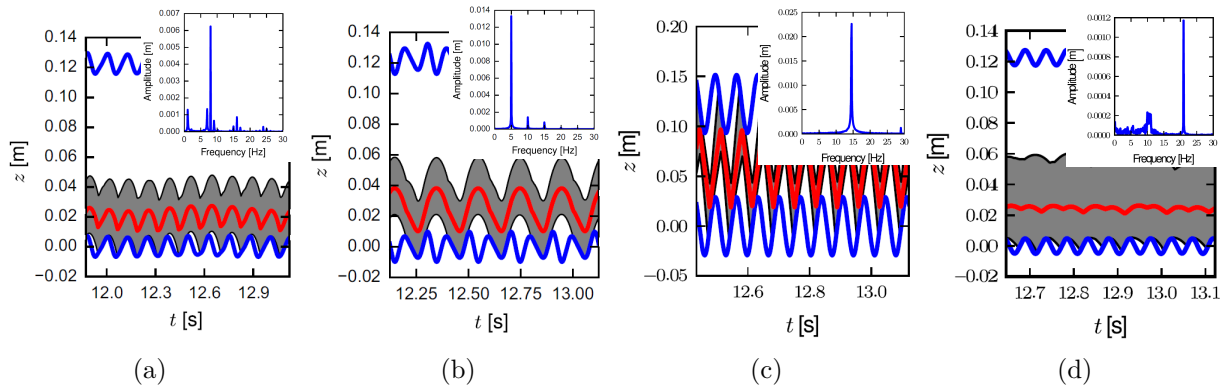


FIGURE 1.17 – Déplacement des particules dans la cavité et FFT de la trajectoire du centre de masse des grains pour différentes fréquences d'excitation : (a) $f_e = 8,0 \text{ Hz}$ - (b) $f_e = 10,0 \text{ Hz}$ - (c) $f_e = 14,5 \text{ Hz}$ - (d) $f_e = 21,0 \text{ Hz}$ [79].

Pour $f_e = 8,0 \text{ Hz}$, le maximum d'amplitude du spectre se situe à la fréquence $f = f_e$. Le mouvement des grains est quasi-périodique, cependant le contenu spectral est très fourni au delà des composantes harmoniques de rang n . Cela traduit les nombreuses interactions au sein du matériau granulaire. Pour $f_e = 10,0 \text{ Hz}$, la fréquence d'amplitude maximum est une sub-harmonique, la période du mouvement du centre de masse étant multipliée par 2 : les grains "sautent" une oscillation de la base de la cavité. La fréquence pour laquelle la dissipation est la plus importante correspond à la fréquence de résonance du système primaire $f_e = 14,5 \text{ Hz}$. A cette fréquence, les grains entrent en contact alternativement avec la base et le haut de la cavité. Les échanges d'énergie sont ainsi 2 fois plus nombreux.

Cette dépendance en fréquence ainsi que le contenu fréquentiel du centre de masse montrent le caractère fortement non-linéaire de l'amas de grains vibrés.

1.4.3 Etude temporelle du mouvement des grains et dissipation associée

La quantification expérimentale de l'énergie dissipée à partir du mouvement temporel des grains vibrés, est effectuée par **Friend** [29]. Une cavité contenant un amas de grains est alors placée à l'extrémité d'une poutre encastrée libre, la vibration est mesurée par un vibromètre laser. La vibration imposée est d'amplitude d'accélération croissante à fréquence constante au niveau de la cavité, le mouvement des grains est mesuré (Fig. 1.18).

La visualisation simultanée de la trajectoire de la masse de grains et de la structure primaire vibrante permet d'observer différents instants d'atterrissage. Lorsque les grains sont soumis à une accélération supérieure à la pesanteur ($\Gamma > 1$), ils décrivent une trajectoire balistique à partir d'une vitesse initiale v_0 . Un seuil d'accélération, $\Gamma_s = 2,86$, permet de définir deux comportements distincts.

Pour $\Gamma < \Gamma_s$, l'amas de grains atterrit sur le cycle courant d'oscillation, pour $\Gamma > \Gamma_s$, l'impact de l'amas de grains se fait sur le cycle suivant. La capacité d'amortissement spécifique Ψ est une grandeur adimensionnée. Elle est définie par :

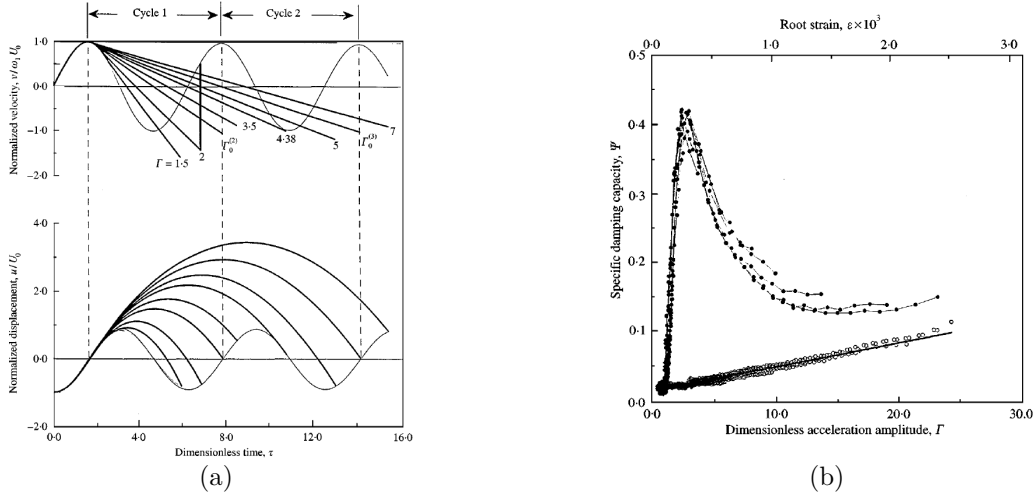


FIGURE 1.18 – Mise en vibration d’une cavité contenant un amas de grains sur un système vibrant : (a) observation temporelle du mouvement des particules éjectées de la base d’une structure vibrante pour différentes valeurs d’accélération normalisées Γ - (b) variations de la capacité d’amortissement spécifique calculées numériquement en fonction de l’accélération normalisée Γ (○ : sans particule, ● : avec particules $\varnothing = 230 \mu\text{m}$) [29].

$$\Psi = \frac{\Delta T}{\frac{1}{2}M(\omega_1 U)^2}, \quad (1.11)$$

avec U l’amplitude maximum de vibration, ω_1 la 1^{ère} pulsation de résonance du système primaire, M la masse totale du système. L’énergie cinétique convertie en chaleur ΔT pendant la durée de l’impact est donnée par :

$$\Delta T = \frac{1}{2}(1 - R^2) \frac{m_p}{1 + \mu} (v_p^- - v_s^-)^2, \quad (1.12)$$

avec le ratio de masse $\mu = \frac{m_p}{m_s}$ (m_s : masse de la structure primaire vibrante, m_p : masse des particules), $v_p^-(v_p^+)$ et $v_s^-(v_s^+)$ les vitesses de la particule et de la structure primaire avant (+) et après (-) l’impact. Le coefficient R est exprimé par :

$$R = -\frac{v_p^+ - v_s^+}{v_p^- - v_s^-}, \quad 0 \leq R \leq 1. \quad (1.13)$$

Tout d’abord, les valeurs de Ψ sont plus importantes dans le cas avec matériau granulaire en fonction de l’accélération normalisée Γ . Le mouvement relatif des grains entraîne un grand nombre d’impacts induisant une dissipation de l’énergie. La capacité d’amortissement spécifique Ψ présente une valeur maximum en présence d’un matériau granulaire. Quand les grains atterrissent sur le cycle courant d’oscillation la dissipation augmente, à l’inverse quand ils atterrissent sur le cycle suivant, la dissipation diminue. L’énergie cinétique est reportée sur la période suivante, l’énergie dissipée globale est donc moins importante. Cet effet est aussi observé par simulation numérique [60].

Ceci est confirmé par **Masmoudi** [61] dont l’expérience consiste à faire osciller une cavité fixée sur un pot vibrant à l’intérieur de laquelle un matériau granulaire est placé. La représentation de Lissajous (force-déplacement) permet de mesurer l’aire interne représentative de l’énergie perdue E_L par le système (Fig. 1.19).

Un facteur de perte η peut alors être relié à des mesures de signaux temporels expérimentaux (Eq. 1.14).

$$\eta_E = \eta(\omega_1) = \frac{E_L(\omega_1)}{2\pi E_k(\omega_1)} = \tan(\phi(\omega_1)), \quad (1.14)$$

avec E_L l’énergie perdue par cycle, E_k l’énergie potentielle maximale emmagasinée pendant un cycle et $\phi(\omega_1) = \phi_1^z - \phi_1^F$ la phase entre les signaux de déplacement et de force. Comme mis en évidence précédemment, une valeur particulière d’accélération $\Gamma = 2,5$ est présente quel que soit le matériau utilisé. Au delà de cette valeur, la dissipation diminue : le fait de sauter une période d’oscillation implique un

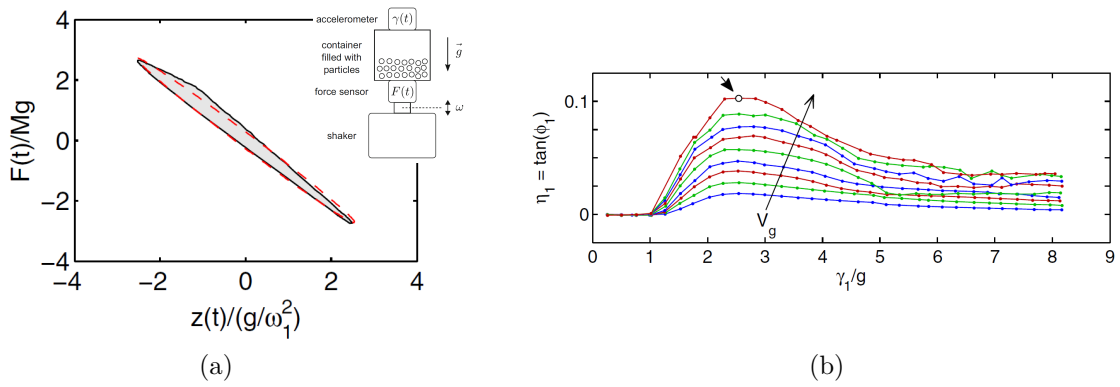


FIGURE 1.19 – Mesure de l'énergie perdue par un amas de grains vibrés : (a) Représentation de Lissajous - (b) Mesure du facteur de perte η à partir des signaux temporels en fonction de l'accélération et du volume V_g de grains en verre [61].

coefficient d'amortissement visqueux apparent décroissant.

Cette conclusion montre que la dissipation ajoutée par les grains n'est pas nécessairement croissante avec la croissance du niveau d'accélération. Seule la mesure globale de l'énergie perdue E_L via la représentation de Lissajous est conservée dans les différentes études présentées dans la suite de cette thèse. Ainsi, aucun a-priori n'est formulé concernant le type de modèle qui dissipe de l'énergie.

1.4.4 Estimation numérique de l'énergie dissipée

L'utilisation de la simulation numérique permet de connaître le bilan des forces en tout point du système et à tout instant pendant une oscillation. Les contributions des différentes sources de dissipation (Fig. 1.20) peuvent alors être quantifiées comme l'a fait Mao [59].

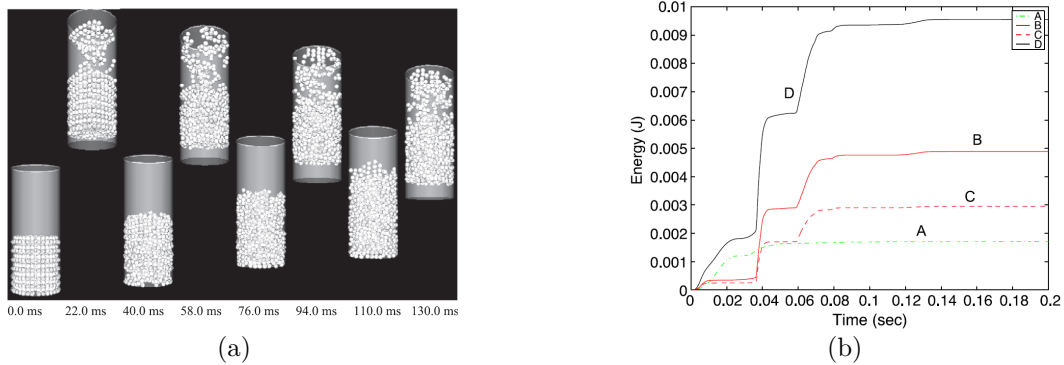


FIGURE 1.20 – Simulation numérique d'une cavité vibrante comportant un matériau granulaire : (a) schéma numérique du système - (b) répartition de l'énergie ($\omega_n = 20$ Hz, A-dissipation visqueuse, B-dissipation par friction, C-dissipation par impact, D-somme de l'énergie dissipée) [59].

Dans cet exemple, une simulation numérique de vibration libre permet d'observer la répartition de l'énergie dissipée par le système issue des informations de forces et déplacements associés à chaque grain. L'énergie totale du système (D) est définie comme la somme de la dissipation par friction (B) et par impact (C). La composante de dissipation visqueuse (A) n'est pas égale à celle de l'impact, cette représentation suggère que l'impact ne contient pas uniquement une composante de dissipation dépendante de la vitesse. Cette étude pourrait être effectuée pour différents types de grains et ainsi quantifier l'influence de certains paramètres. Un amortisseur constitué d'une cavité remplie de matériau granulaire pourrait alors être défini en fonction des paramètres des grains. Par ailleurs, l'évolution de l'énergie dissipée en fonction de la fréquence d'excitation peut être mesurée numériquement [94]. Par exemple, dans le cas d'une roue de transmission, des grains sont placés dans des cavités initialement vides [95].

L'amplitude en vibration libre étant décroissante, une étude en vibration forcée harmonique d'une masse de grains est une étape indispensable pour quantifier correctement la non-linéarité présente dans un matériau granulaire. C'est ce choix qui a été fait dans cette thèse.

1.5 Contrôle vibratoire de structure utilisant un amortisseur granulaire

La vibration forcée d'un amas de grains est nécessaire pour en décrire la complexité, notamment les effets non-linéaires des interactions.

1.5.1 Excitation forcée harmonique d'une cavité contenant un amas de grains

Une comparaison est effectuée entre la simulation numérique et l'expérience avec et sans grains (Fig. 1.21).

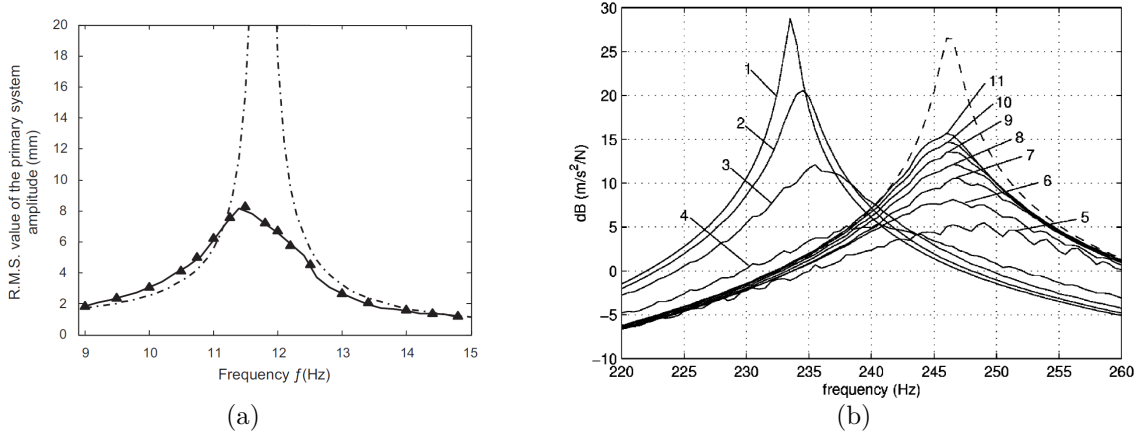


FIGURE 1.21 – Excitation forcée harmonique avec ajout de grains : (a) comparaison simulation numérique et expérience (— · — Résonance du système à vide, — Simulation numérique de l'ajout de grains & ▲ Expérience de l'ajout de grains) [26] - (b) réponse vibratoire du système avec matériau granulaire pour $\Gamma \in [0,1-40]$ [55].

Ces exemples sont contrôlés en force $F(t) = Ka \sin(\omega t)$ pour un paramètre de déplacement a et une raideur K constants quelque soit la pulsation de sollicitation. La simulation numérique et l'expérience ont une très bonne corrélation. Les coefficients de restitution normal et tangent de la DEM sont donc bien optimisés. La présence des grains entraîne une diminution de la valeur de l'amplitude en fonction de la fréquence. A partir de ce résultat, l'identification des origines de l'énergie dissipée par le système est possible.

L'utilisation d'un matériau granulaire pour atténuer les vibrations d'un oscillateur, induit une non-linéarité importante vis à vis de l'amplitude d'excitation. Une vibration forcée à différentes amplitudes d'accélération Γ et pour une gamme de fréquences donnée est appliquée sur un système 1DDL horizontal contenant des billes. Pour une accélération $\Gamma \in [0-12]$ (courbes 1 à 5), l'amortissement augmente avec l'amplitude d'accélération. De plus la fréquence maximum augmente faisant écho à la diminution de masse apparente du système. Quand l'accélération est comprise entre $\Gamma \in [12-40]$ (courbes 6 à 11), l'amortissement se réduit. La fréquence de résonance du système dépend de l'accélération de consigne.

1.5.2 Etudes qualitatives de l'ajout de grains confinés à une structure modale

L'atténuation des vibrations dans les structure déformables est un enjeu industriel de premier plan. La mise en évidence de cet effet se fait d'abord sur une plaque mince, sur laquelle des zones de traitement sont ajoutées (Fig. 1.22). Dans son étude Ott [69] compare la réponse vibratoire de la structure traitée par ajout d'un matériau granulaire ou par une masse fixée indéformable.

Le traitement utilisant la matière en grains est plus efficace sur toute la bande de fréquences par rapport à la masse indéformable. Ici, pour $\Gamma < 1$, c'est la propagation de l'onde vibratoire à travers les contacts de l'amas de grains qui dissipe l'énergie. D'autres études ont été réalisées sur des cas industriels montrant l'intérêt de l'ajout d'un matériau granulaire dans une structure initialement vide [53, 39, 51, 56].

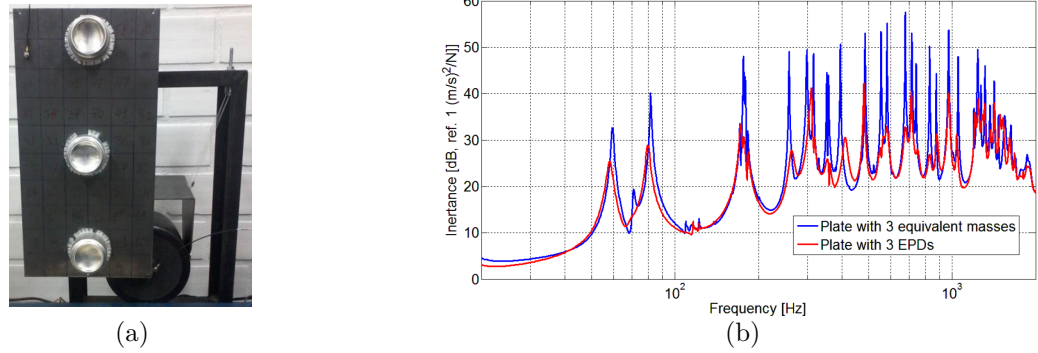


FIGURE 1.22 – Particle damper sur une plaque rectangulaire avec ($\Gamma = 0,25$) : (a) dispositif expérimental - (b) FRF (Inertance) d'une structure modale avec traitement anti-vibratoire à iso-masse (bleu : masse indéformable, rouge : matériau granulaire) [69].

1.5.3 Etude de la dissipation via l'ajustement d'un système 1DDL

La présence d'un matériau granulaire à l'intérieur d'une structure vibrante augmente la dissipation de l'énergie vibratoire. La quantification de cette énergie, proposée par **Ben Romdhane** [12], met en œuvre une cavité contenant des grains attachés à une poutre sollicitée en flexion (Fig. 1.23) via une oscillation forcée.

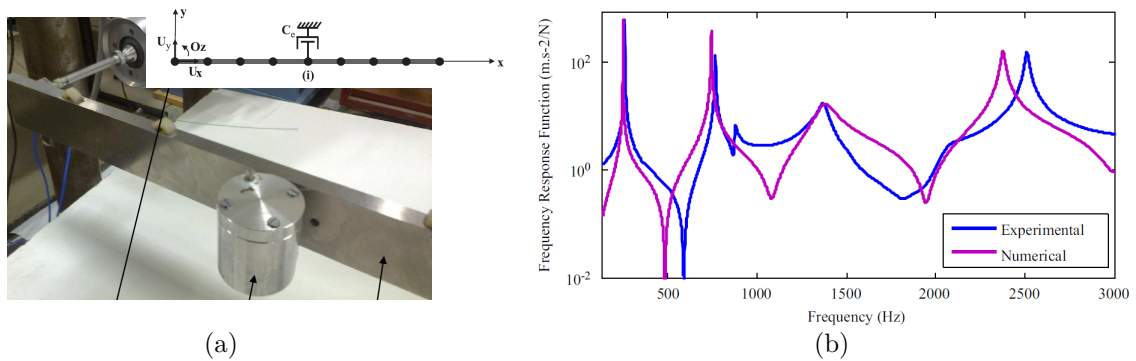


FIGURE 1.23 – Particle damper sur une poutre en flexion : (a) cavité remplie de grains attachée à une poutre sollicitée en flexion et modèle associé pour le calcul numérique - (b) FRF comparant expérience et modèle analytique approché [12].

Une première modélisation de la dissipation induite par la présence des grains consiste à utiliser un amortisseur visqueux équivalent relié à la masse, ce qui ne représente pas fidèlement l'expérience. Cependant, ce composant ajouté permet de donner une première quantification de l'énergie perdue induite par la présence des grains. L'ajustement de l'amortisseur visqueux attaché entre la poutre et la terre permet de calculer une FRF équivalente. Une correspondance entre les atténuations des modes n°1 et n°3 est effectuée. Cependant le reste du contenu fréquentiel du modèle ne correspond pas à l'expérience.

D'autres études présentant des modèles similaires d'ajustement de coefficient d'amortissement visqueux permettent aussi, dans un cas bien particulier de représenter la dissipation des interactions inter-grains par effet visqueux [99, 101]. L'effet dissipatif induit par l'amortisseur visqueux n'est donc pas suffisant pour décrire la perte d'énergie induite par la présence des grains. Une expérience mise en place par **Michon** [63] (Fig. 1.24) permet d'assimiler une poutre encastrée-libre creuse à l'intérieur desquels des grains sont introduits, comme une succession d'oscillateurs.

La succession d'oscillateurs constituant le modèle analytique permet de décrire la poutre. Un oscillateur élémentaire représente quelques cavités remplies de grains du système continu. Les paramètres du modèle analytique de ces oscillateurs équivalents sont alors ajustés en fonction des mesures expérimentales (Fig. 1.25).

Une bonne adéquation entre expérience et théorie est observée en faisant varier le taux de remplissage r des cavités. Cependant, il n'y a pas de lien démontré entre le type de traitement (taux de remplissage r ,

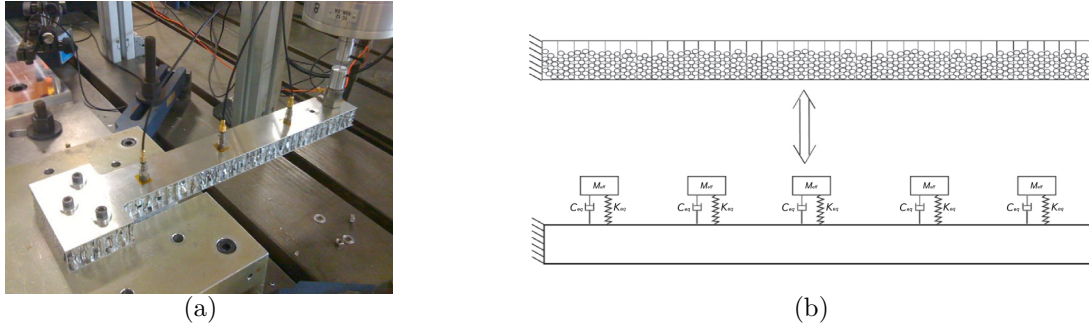


FIGURE 1.24 – Non-obstructive particle damper d’une poutre creuse remplie de grains : (a) dispositif expérimental - (b) modèle analytique approché du système [63].

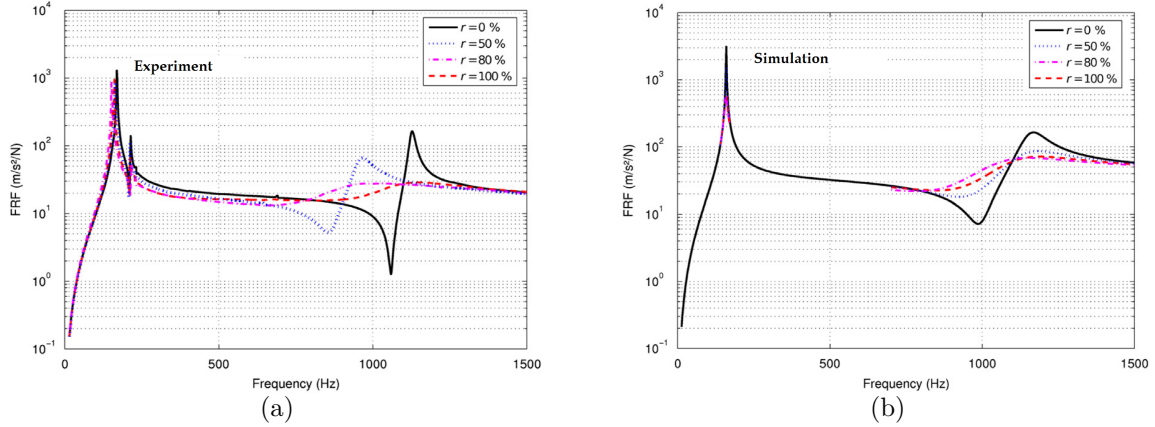


FIGURE 1.25 – FRF de la poutre creuse remplie de grains : (a) expériences pour différents ratios de remplissages - (b) modèle analytique pour les mêmes ratios de remplissages [63].

type de grains) et l’effet dissipatif induit. Si le matériau granulaire est changé, un nouvel ajustement doit être effectué.

L’effet d’un ajout de grains dans une structure vibrante est réalisé au moyen d’autres techniques. L’étude de l’amortissement d’une structure NIDA (type nid d’abeilles) suite à un impact peut être réalisée pour mettre en évidence d’une manière différente l’atténuation vibratoire[71]. Une cavité présente à l’intérieur d’un système résonant permet d’augmenter la dissipation d’énergie et a une influence sur son comportement fréquentiel [91]. L’étude expérimentale de la taille et du matériau des grains utilisés entraîne une variation de la réponse en fréquence de la structure [97]. La comparaison de la réponse vibratoire entre expérience et simulation numérique DEM permet de valider des paramètres de modèles et mettre en œuvre des variations paramétriques nombreuses concernant le matériau granulaire utilisé [2]. L’influence du taux de remplissage et de la localisation d’une structure creuse sur son comportement modal permet d’observer des diminutions d’amplitudes vibratoires [45].

1.6 Axes de travail

Après avoir présenté les différentes échelles d'observation d'un matériau granulaire, l'interaction entre deux grains, le long d'une chaîne de grains jusqu'au comportement macroscopique d'un amas de matériau granulaire, ainsi que le comportement dynamique associé à sa mise en vibration, différents axes de travail sont avancés.

- Un premier axe décrit l'interaction d'un matériau granulaire avec un oscillateur. La variation du nombre de grains pris en compte, implique de nouvelles techniques à mettre en œuvre pour comprendre les interactions entre les grains. Une pré-étude sur une structure déformable avec gradient de déplacement de la surface excitatrice est présentée.
- La réduction des paramètres de contrôle en choisissant un niveau d'excitation spatialement uniforme amène à l'élaboration d'un 2nd dispositif expérimental : une cavité rigide contenant des grains et montée sur un oscillateur. L'élaboration d'un modèle analytique à constantes localisées basé sur les résultats expérimentaux permet d'identifier l'origine de l'énergie dissipée par la mise en vibration des grains.
- Des variations paramétriques des configurations expérimentales sont étudiées dans un troisième axe. Les conditions aux limites dans la cavité ainsi que la variation du type de grains sont examinées afin de quantifier leur degré d'influence dans la dissipation d'énergie.
- Dans un quatrième temps, une poutre creuse compartimentée permet, à partir des conclusions précédentes, d'étudier l'influence de la position des grains sur la réponse vibratoire d'une structure modale de type industrielle.

Chacune de ces lignes directrices fait l'objet d'un chapitre de ce manuscrit.

Matériels et techniques d'acquisitions

Préambule

Ce chapitre permet de présenter la chaîne d'acquisition permettant de mesurer la dissipation induite par la présence d'un matériau granulaire sur une structure vibrante. Ce dispositif sera appliqué à différentes structures résonnantes en conservant un paramètre constant : le contrôle en accélération.

Plusieurs méthodes d'analyse des signaux mesurés seront mises en place afin de quantifier l'atténuation induite par la présence du matériau granulaire.

Une pré-étude expérimentale sur une plaque encastree, permet d'observer l'interaction d'un matériau granulaire à surface libre sur une structure modale présentant un gradient de déplacement.

Sommaire

2.1	Présentation du banc d'acquisition expérimental	24
2.1.1	Description des montages expérimentaux	24
2.1.2	Procédé d'acquisition des signaux	25
2.1.3	Méthodes de post-traitement utilisées	25
2.2	Pré-étude d'une plaque mince traitée par un amas de grains à surface libre	28
2.2.1	Description de l'interaction des grains sur une plaque déformable	28
2.2.2	Observations qualitatives des différents états du milieu granulaire	29
2.2.3	Variation de la masse de grains	31
2.2.4	Variation du niveau d'accélération et non-linéarité associée	32
2.2.5	Variation d'hygrométrie sur les contacts inter-grains	33
2.3	Conclusion partielle	34

2.1 Présentation du banc d'acquisition expérimental

L'ensemble des études expérimentales développées dans ce travail utilisent le même système d'acquisition, mis en œuvre dans trois montages expérimentaux. Les techniques de post-traitement des données mesurées peuvent également différer en fonction des montages et des quantités à extraire pour évaluer l'atténuation vibratoire par ajout d'un matériau granulaire.

2.1.1 Description des montages expérimentaux

Pour chacun des montages, l'excitation vibratoire est réalisée par un pot vibrant (LDS-V406) alimenté en tension par un amplificateur (PA-100). Au point d'excitation, une tête d'impédance (B&K 8001) mesure de façon colocalisée et simultanée l'effort appliqué et l'accélération de la structure. Les orientations des sens positifs des capteurs ainsi que les calibrations sont détaillés en **annexe A**. L'ensemble est relié à un boîtier de contrôle SigLab piloté par des programmes MatLab dédiés (fonctions fournies avec le boîtier).

Le montage n°1 utilise une plaque circulaire encastrée sur ses bords, l'excitation étant appliquée au centre (Fig. 2.1). Ce montage est utilisé pour une pré-étude visant à mettre en évidence l'amortissement vibratoire induit par un amas de grain à surface libre sur une large plage de niveaux d'accélérations imposées ($\Gamma \in [0 - 12]$). Ce montage est utilisé et détaillé dans la **section 2.2**.

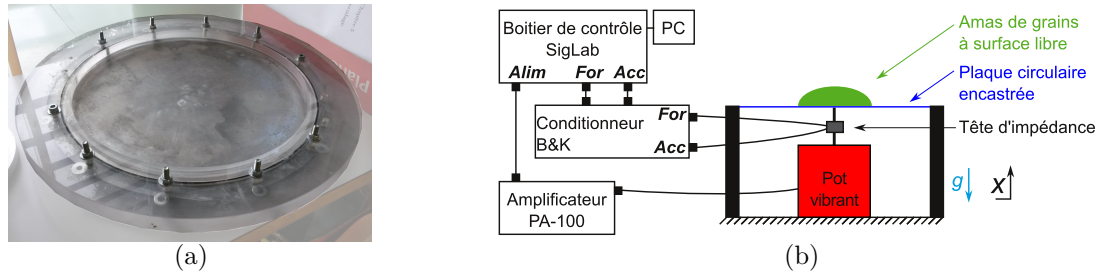


FIGURE 2.1 – Expérience d'une plaque circulaire encastrée ($\Gamma \in [0 - 12]$) : (a) Dispositif expérimental - (b) schéma représentatif.

Le montage n°2 utilise une cavité indéformable en translation, l'excitation étant appliquée à sa base (Fig. 2.2). La réduction des paramètres de contrôles par la translation verticale et le compartimentage latéral permet l'étude d'une gamme plus large de matériaux granulaires. L'atténuation vibratoire est étudiée via des mesures modales et temporelles sur une large plage de niveaux d'accélération imposée ($\Gamma \in [0 - 3]$). Ce montage est utilisé et détaillé dans les **chapitres 3 & 4**.

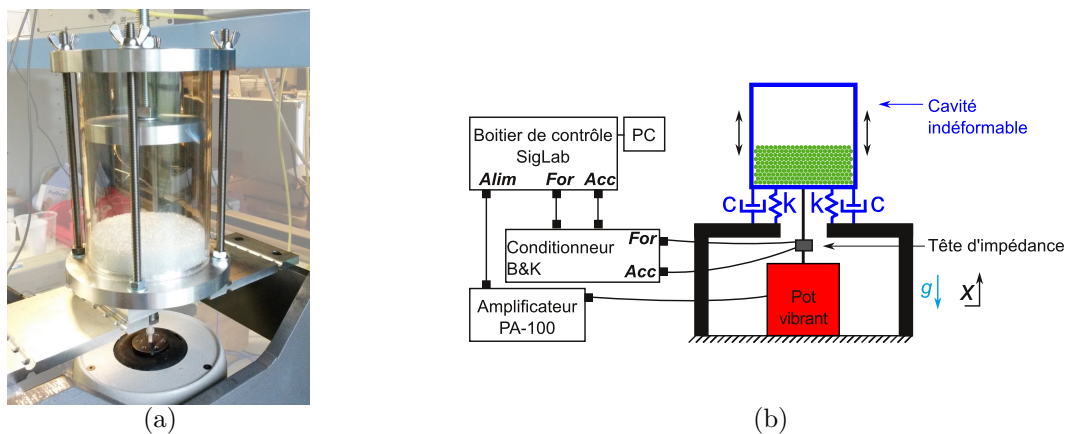


FIGURE 2.2 – Expérience d'une cavité indéformable ($\Gamma \in [0 - 3]$) : (a) Dispositif expérimental - (b) schéma représentatif.

Le montage n°3 utilise une poutre compartimentée suspendue par des élastiques pouvant être assimilés à une condition libre-libre. L'excitation est appliquée à l'une des extrémités (Fig. 2.3). La localisation du matériau granulaire permet d'étudier cet effet sur les modes de vibration de la poutre. Différents matériaux granulaires sont étudiés pour les différentes positions. L'atténuation vibratoire est étudiée via des mesures modales et temporelles sur une large plage de niveaux d'accélérations imposées ($\Gamma \in [0 - 3]$). Ce montage est utilisé et détaillé dans le **chapitre 5**.

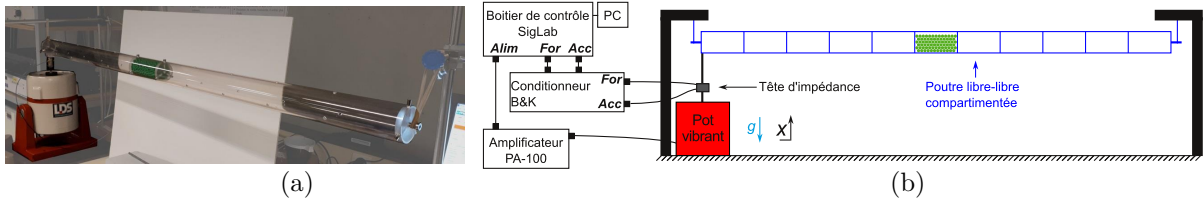


FIGURE 2.3 – Expérience d’une poutre compartimentée ($\Gamma \in [0 - 3]$) : (a) Dispositif expérimental - (b) schéma représentatif.

2.1.2 Procédé d’acquisition des signaux

L’excitation vibratoire peut être effectuée de deux manières différentes :

- balayage fréquentiel pas-à-pas : cette technique est utilisée dans un intervalle de fréquence autour d’une résonance. Pour chaque fréquence, une boucle de rétroaction assure l’asservissement de la tension d’alimentation du pot vibrant afin de maintenir une accélération constante au niveau de la mesure d’accélération (Fig. 2.4). Une durée de l’ordre de 1 seconde est nécessaire pour la stabilisation du niveau et permettre la mesure. Il est considéré que cette durée n’induit pas d’effet mémoire dans le matériau granulaire sur les fréquences successives.
- acquisition temporelle à fréquence fixe : la tension d’alimentation du pot vibrant est ajustée manuellement pour atteindre la consigne d’accélération imposée à une fréquence sélectionnée (typiquement la fréquence de résonance). L’acquisition d’un signal de 5 secondes est déclenchée manuellement quand les oscillations entretenues présentent un régime vibratoire établi.

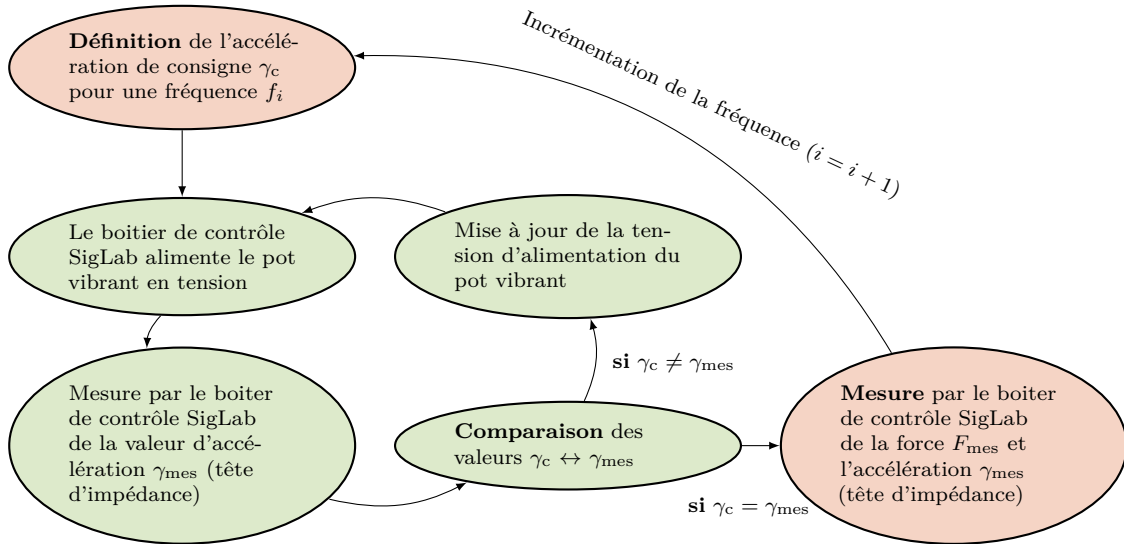


FIGURE 2.4 – Boucle de contrôle en accélération lors d’un balayage en fréquence.

2.1.3 Méthodes de post-traitement utilisées

Identification du facteur d’amortissement modal (ζ) par la méthode du cercle fit

L’objectif de ce post-traitement est d’évaluer la valeur du facteur d’amortissement d’un mode de la structure. Dans le montage 1 par exemple, ce mode correspond au premier mode de la plaque circulaire encastree. Selon l’acquisition "pas à pas" décrite précédemment, la fonction de réponse en fréquence (FRF), dont le module est défini comme le rapport entre l’accélération et la force, est approximée par un modèle d’oscillateur à 1 degré de liberté à dissipation visqueuse. Il est usuel de représenter le module en Décibel :

$$\text{FRF}_{\text{dB}} = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{\gamma_{\text{mes}}}{F_{\text{mes}}} \right), \quad (2.1)$$

et la phase en radian, avec γ_{mes} l’accélération mesurée en m.s^{-2} et F_{mes} la force mesurée en N. Les deux composantes de la FRF peuvent donner lieu à une écriture complexe $\underline{\text{FRF}} = |\text{FRF}| e^{i\varphi}$. Chaque fréquence peut alors être représentée par un point dans le plan complexe, un cercle représentatif du modèle

peut alors être tracé au plus près de chacun des points. Un exemple de réalisation expérimentale et de recalage modal sont présentés (Fig. 2.5).

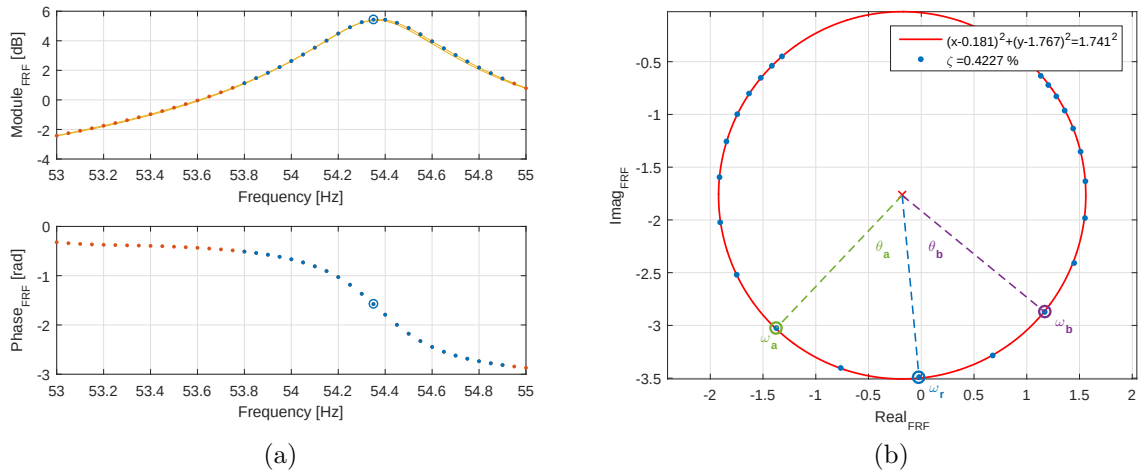


FIGURE 2.5 – Représentation de la Fonction de Réponse en Fréquence (FRF) : (a) module & phase - (b) plan complexe.

Une fois l'équation du cercle connue, le calcul du facteur d'amortissement modal ζ , défini par **Ewins** [25], est donné par :

$$\zeta = \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_a^2 - \omega_b^2}{\omega_r^2} \right) \left(\frac{1}{\tan(\theta_a/2) + \tan(\theta_b/2)} \right), \quad (2.2)$$

avec ω_r la pulsation de résonance, $[\omega_a; \omega_b]$ un couple de pulsations de part et d'autres de la résonance, $[\theta_a; \theta_b]$ un couple d'angle correspondant aux fréquences précédentes. Plusieurs valeurs de ζ sont obtenues en fonction des couples $[\theta_a; \theta_b]$. Une moyenne de ces valeurs permet d'obtenir la valeur du facteur d'amortissement modal pour le mode considéré.

Analyse du contenu spectral des signaux vibratoires (fft)

Dans le cas d'une excitation harmonique mono-fréquentielle, les non-linéarités du système peuvent conduire à des réponses dont le contenu spectral est estimé au moyen d'une transformée de Fourier (algorithme fft de MatLab, voir **Annexe A**). Les acquisitions des signaux sont d'une durée totale $t = 5$ s à une fréquence d'échantillonnage $f_s = 51,2 \cdot 10^3$ Hz, soit une résolution fréquentielle $\Delta f = 0,2$ Hz. Les valeurs de référence des échelles en dB sont respectivement 1 N et 1 g pour les signaux d'effort et d'accélération.

Dans le cas d'un système linéaire, si l'excitation est mono-fréquentielle, le spectre de la réponse ne comportera qu'une fréquence fondamentale (Fig. 2.6). Dans le cas d'un système non-linéaire, l'excitation mono-fréquentielle donnera lieu à un contenu spectral plus riche. Ce deuxième effet sera présenté plus tard dans ce document.

Estimation de l'énergie dissipée par cycle (E_L)

La mesure de l'énergie perdue (appelée aussi énergie "Lissajous") provient d'une mesure temporelle mono-fréquentielle à une accélération de consigne donnée. Cette mesure permet de quantifier la dissipation d'un système alors inconnu. A cette fréquence l'acquisition des signaux sinusoïdaux de force (F) et d'accélération (γ) est effectuée. Le signal de déplacement u est l'intégration du signal d'accélération :

$$\gamma = -\gamma_c \sin(\omega t + \varphi), \quad (2.3)$$

$$u = \frac{\gamma_c}{\omega^2} \sin(\omega t + \varphi). \quad (2.4)$$

Dans la suite de ce manuscrit, ce ne seront que les signaux de force et déplacement qui seront tracés, car nécessaires pour construire la représentation de Lissajous. A fréquence fixe, la représentation des signaux temporels de force et de déplacement permet de calculer une aire représentant l'énergie perdue par le système (Fig. 2.7).

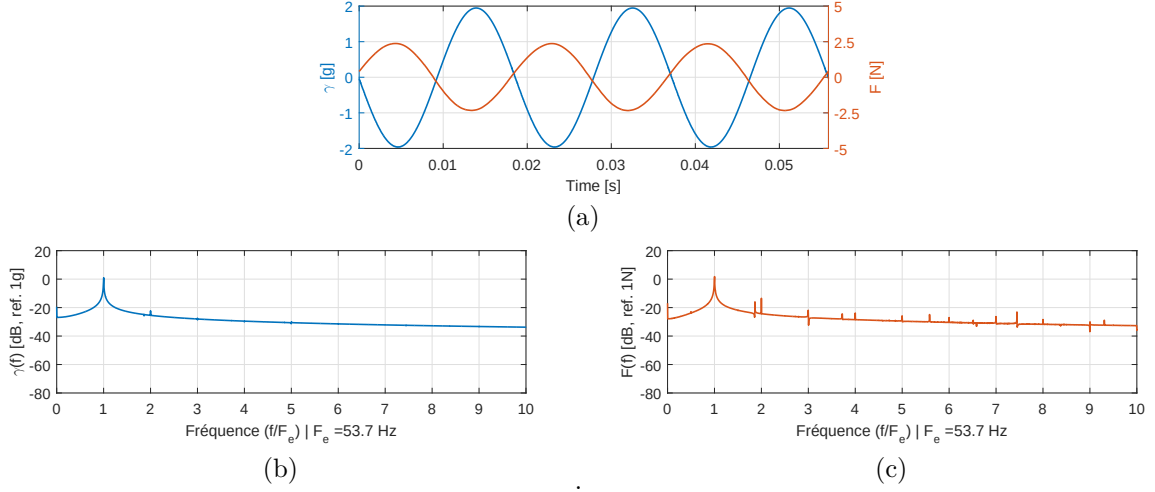


FIGURE 2.6 – Analyse spectrale : (a) signaux temporels d'accélération et force - (b) fft de l'accélération - (c) fft de la force

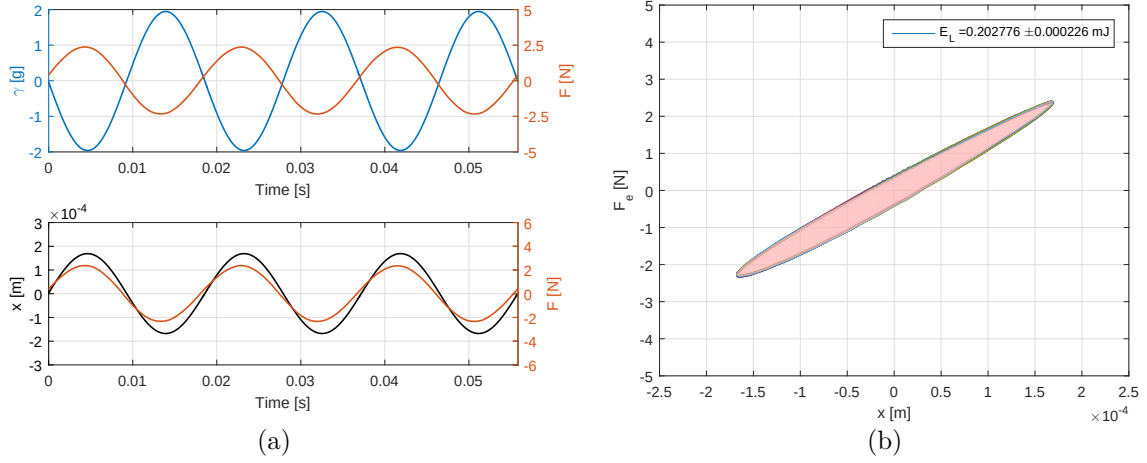


FIGURE 2.7 – Signaux temporels issus de la mesure d'un système résonnant ($m = 3,810 \text{ kg}$ - $k = 4,85 \cdot 10^5 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$) avec une accélération de consigne $\Gamma = 2$: (a) signaux d'accélération et de force & signaux de déplacement et de force - (b) représentation de Lissajous en force & déplacement.

Les mesures sont effectuées pour une durée d'acquisition $t = 5 \text{ s}$ et une fréquence $f = 53 \text{ Hz}$, le nombre de cycles est de 265. La fréquence d'échantillonnage est fixée à $f_s = 51,2 \cdot 10^3 \text{ Hz}$, dans le cas présent chaque cycle comporte environ 966 points. Pour chaque cycle, une intégration par la méthode des trapèzes entre chaque point de mesure est effectuée. Cette intégration d'une force (en N) et d'un déplacement (en m) donne une valeur d'énergie (en J) :

$$E_L = \oint_{\text{cycle}} F(x) dx. \quad (2.5)$$

Ce calcul d'aire correspond à l'énergie perdue totale, appelée Energie Lissajous E_L . Cette valeur par cycle est moyennée et l'incertitude sur la valeur de la moyenne est estimée avec un taux de confiance de 95% (facteur d'élargissement $k = 2$). Cette représentation de la force en fonction du déplacement peut prendre différentes formes (Fig. 2.8). L'interprétation de ces cycles dissipatifs expérimentaux au moyen de modèles mécaniques simples dans le **chapitre 3** permettra d'évaluer les contributions de différents types d'amortissement.

Ces modèles d'amortissement correspondent à des cas théoriques précis où un seul type de dissipation est étudié. Dans le cas d'un matériau granulaire vibré, plusieurs contributions de dissipation sont a priori présentes mais seule la somme est accessible par la mesure.

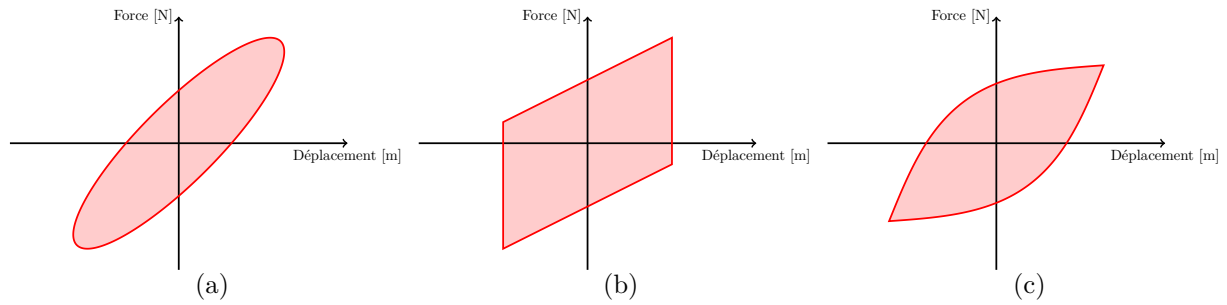


FIGURE 2.8 – Schéma de différents types d'amortissement : (a) amortissement linéaire par effet visqueux - (b) amortissement par frottement sec non-linéaire - (c) amortissement par raideur non-linéaire.

2.2 Pré-étude d'une plaque mince traitée par un amas de grains à surface libre

2.2.1 Description de l'interaction des grains sur une plaque déformable

L'observation de structures modales est l'un des plus anciens domaines d'études de l'acoustique. Les premiers travaux sur la vibration des corps ont été menés par **Chladni** [21]. Son expérience la plus connue consiste à mettre en évidence des formes modales de plaques libres via l'utilisation d'un amas de sable fin qui vient se loger aux nœuds de vibration des modes (Fig. 2.9). La mise en évidence de ces formes particulières fut un élément déterminant dans la compréhension de l'origine des ondes acoustiques.

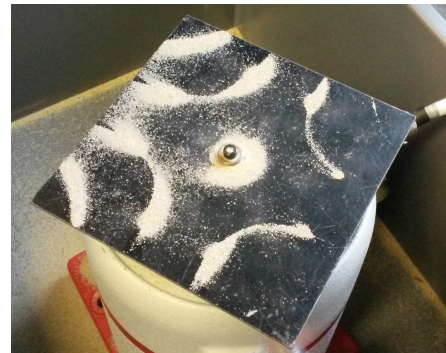


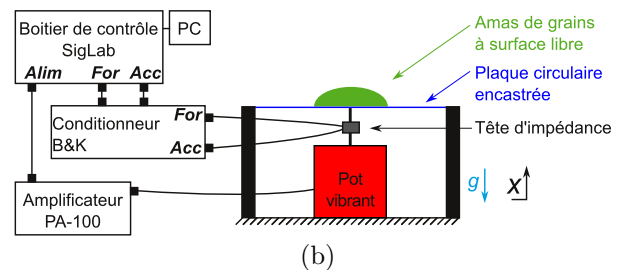
FIGURE 2.9 – Mise en vibration d'une plaque libre & figure de Chladni.

Quelques décennies plus tard **Faraday** [27] prend comme point de départ ces observations. Il note que dans le cas de l'excitation d'une plaque avec un archet de violon, des morceaux de crins ne se regroupent pas aux nœuds de vibrations, mais aux régions ayant un maximum d'amplitude. Ainsi, pour certains types de matériaux, les interactions avec la structure vibrante sont différentes. S'en suit l'étude des ondes de surfaces et des instabilités associées.

Utilisant les mêmes concepts, l'amortissement ajouté par un film fluide sur une plaque mince a été étudié par **Génévaux** [30]. L'analyse de la vibration du système sur le premier mode de la plaque encastree peut être approximée par un oscillateur à 1DDL pour lequel l'amortissement visqueux équivalent ajouté par le fluide peut être extrait. Les caractéristiques de la plaque (Tab. 2.1) permettent de calculer sa masse modale sur son premier mode de vibration. Dans cette pré-étude, un amas de grains est ajouté au centre (Fig. 2.10).



(a)



(b)

FIGURE 2.10 – Expérience d'une plaque circulaire encastree ($\Gamma \in [0 - 12]$) : (a) Dispositif expérimental - (b) schéma représentatif.

Ce dispositif est assimilable à un système à 1 degré de liberté. Cependant la masse mise en jeu lors d'une vibration n'est qu'une proportion de la masse statique m_p car celle-ci n'est pas sollicitée avec une même amplitude sur toute sa surface (Fig. 2.11).

Un calcul de masse modale m_m est alors effectué. Il permet de prendre uniquement en compte la

épaisseur	$e_p =$	1.10^{-3}	m
diamètre	$d_p =$	290.10^{-3}	m
masse volumique	$\rho_p =$	2700	kg.m ⁻³
masse statique	$m_p =$	$178,3 \cdot 10^{-3}$	kg

TABLE 2.1 – Caractéristiques de la place circulaire encastrée.

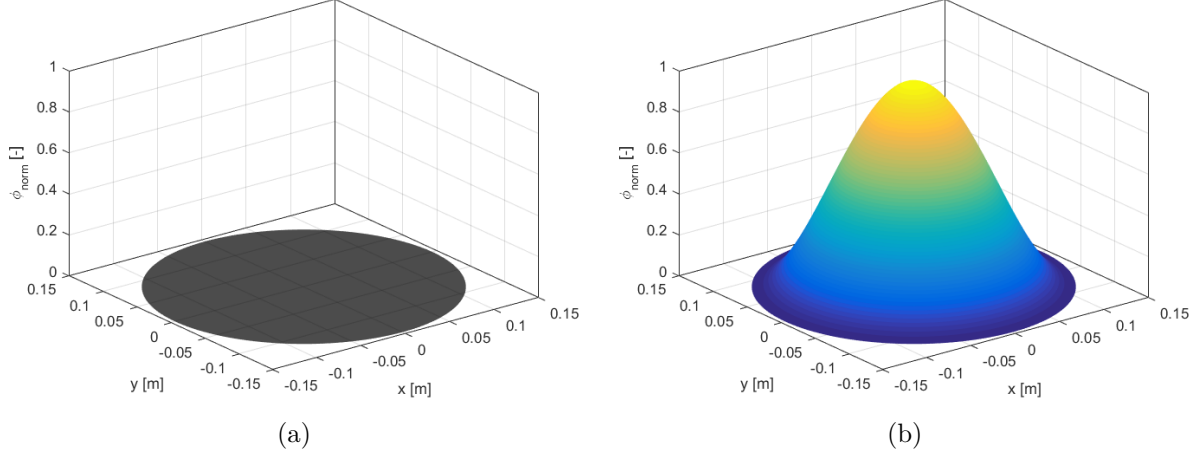


FIGURE 2.11 – Etude analytique de la déformée modale normalisée d'une plaque circulaire encastrée : (a) plaque au repos - (b) plaque vibrant sur son premier mode.

proportion de masse de la plaque mise en jeu dans la vibration. Ce calcul dépend de la déformée modale de la plaque circulaire encastrée sur son premier mode. La déformée modale normalisée s'exprime par :

$$\phi_{\text{norm}}(r, \theta) = \frac{\phi(r, \theta)}{\phi(0, 0)} = \frac{I_0(\beta_{01}d_p/2)J_0(\beta_{01}r) - J_0(\beta_{01}d_p/2)I_0(\beta_{01}r)}{I_0(\beta_{01}d_p/2)J_0(0) - J_0(\beta_{01}d_p/2)I_0(0)}. \quad (2.6)$$

avec I_0 la fonction de Bessel modifiée, J_0 la fonction de Bessel et $\beta_{01} = 1,015 \frac{2\pi}{d_p}$. La masse modale m_m est alors définie comme l'énergie cinétique issue de la déformée modale du système,

$$\frac{1}{2}m_m\dot{\phi}^2(0, 0) = \frac{1}{2} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^R \rho_p e_p \dot{\phi}^2(r, \theta) r dr d\theta. \quad (2.7)$$

Après simplification, la masse modale m_m du système est définie par

$$m_m = \rho_p e \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^R \phi_{\text{norm}}^2(r, \theta) r dr d\theta. \quad (2.8)$$

Sur son premier mode de vibration, le calcul de la masse modale m_m associé à la plaque circulaire encastrée donne :

$$m_m = 32,8 \cdot 10^{-3} \text{ kg}. \quad (2.9)$$

Le calcul itératif utilisant un schéma aux différences finies donne une valeur de masse modale qui représente une contribution de 18,4% de la masse de la plaque m_p .

2.2.2 Observations qualitatives des différents états du milieu granulaire

La dynamique vibratoire d'un amas de grains à surface libre est l'objet de cette pré-étude. Le montage de la plaque circulaire encastrée est utilisé (Fig. 2.10). Les différents états d'instabilité sont liés à la quantité d'énergie injectée dans le système, proportionnelle à l'accélération. L'amas de grains est positionné au centre de la plaque et la fréquence d'excitation correspond au premier mode de résonance (Fig. 2.12).

La vibration est forcée à la fréquence du premier mode de la plaque circulaire encastrée. Les grains, pour un diamètre moyen $\varnothing = 100 \mu\text{m}$, restent au centre de la plaque (déplacement maximum) quelle que soit la valeur de l'accélération γ . Cependant, plus l'accélération augmente, plus le mouvement global du matériau granulaire est important, alors assimilé à une certaine phase thermodynamique. Une faible

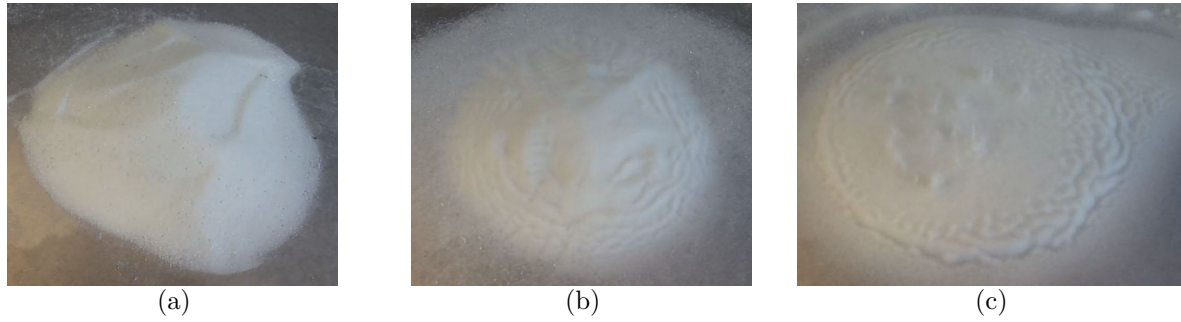


FIGURE 2.12 – Mise en vibration d'une masse de grains ($\varnothing = 100 \mu\text{m}$) sur une plaque à surface libre avec mise en évidence de différents états thermodynamiques associés : (a) comportement "solide" $\Gamma \approx 0,5$ - (b) comportement "fluide" $\Gamma \approx 5$ - (c) comportement "gazeux" $\Gamma \approx 10$ (vidéo d'expérience : [84]).

valeur d'accélération n'entraîne pas de mouvement entre les particules (phase solide). Si celle-ci augmente, un mouvement cohérent s'installe dans le système (phase liquide). Enfin, à partir d'un certain niveau d'accélération, l'énergie transmise par la vibration n'est plus contenue par la masse de grains et des éjections chaotiques sont observées (phase gazeuse).

Dans un mouvement vibratoire modal, la zone de maximum vibratoire (ventre) déplace une plus grande quantité de couche fluide (l'air sur la couche supérieure de la plaque) que les zones aux minimums de vibration (nœud). Une légère dépression est présente entre ces deux zones, ce qui concentre les grains au centre de la plaque. Une interprétation possible de ces observations qualitatives décrivant les différentes étapes de la vibration de la plaque circulaire encastree sont représentées schématiquement en vue de coupe verticale (Fig. 2.13).

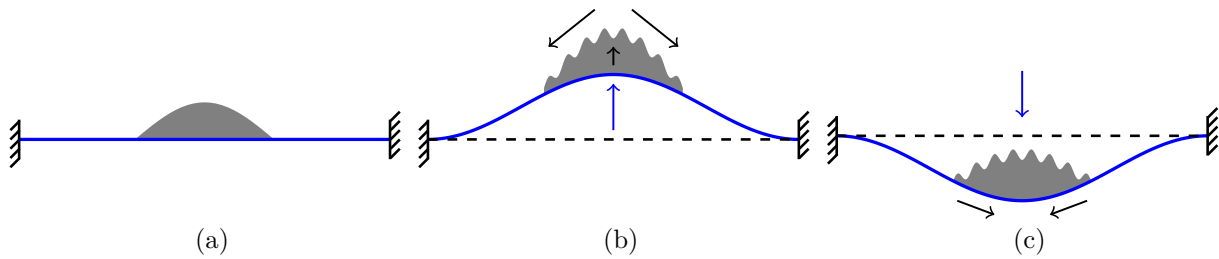


FIGURE 2.13 – Représentation schématique du comportement d'une masse de grains vibrés sur un cycle ($\varnothing = 100 \mu\text{m}$) : (a) système au repos sans vibration - (b) mouvement ascendant de la plaque et éjection des grains au centre - (c) mouvement descendant de la plaque et dépression associée concentrant les grains au centre (vidéo d'expérience : [84]).

Les grains sont d'abord représentés au repos, la vibration est trop faible pour entraîner un mouvement relatif (Fig. 2.13a). Sur une première demi-période, la plaque oscille vers le haut, ce qui induit un mouvement de convection au sein de l'amas de grains depuis le centre vers le bord extérieur (Fig. 2.13b). Sur la deuxième demi-période, la plaque oscille du haut vers le bas, la dépression décrite précédemment entraîne les grains à la base de l'amas au centre de la plaque, permettant de compléter le mouvement de convection (Fig. 2.13c). Ces deux étapes expliquent la concentration des grains au centre de la plaque. Par ailleurs, un mouvement ondulatoire progressant du bord extérieur de l'amas vers le centre s'installe en surface. Ce mouvement est difficile d'interprétation à ce stade qualitatif, des analyses plus approfondies sont nécessaires pour vérifier ces hypothèses. L'objectif de la thèse est centré sur les mécanismes de dissipation d'énergie, des analyses fines sur la propagation d'ondes dans un milieu granulaire n'ont pas été conduites ici.

Dans le cas de grains de plus grand diamètre ($\varnothing = 700 \mu\text{m}$), ceux-ci sont éjectés du centre de la plaque circulaire encastree quand l'accélération devient supérieure à la gravité ($\Gamma > 1$). Il n'y a pas de mouvement de convection (Fig. 2.14).

Dans ce deuxième cas, la dépression induite par la vibration de la plaque n'est pas suffisante pour concentrer les grains au centre de la plaque, ce qui rend difficile l'identification de la dissipation induite par les grains sur le premier mode de vibration de la plaque. L'effet du mouvement d'air associé à la vibration d'une structure non chargée permet de confirmer les mouvements décrits [92]. Des formes particulières



FIGURE 2.14 – Mise en vibration d'une masse de grains ($\varnothing = 700 \mu\text{m}$) sur une plaque à surface libre ($\Gamma \approx 10$) : (a) expérience réalisée - (b) représentation schématique (vidéo d'expérience : [85]).

associées à la mise en vibration d'un amas de grains ont fait l'objet de nombreuses études [90, 62, 80]. La quantification de l'énergie dissipée pour chacun des états est l'objet de la section suivante.

Dans les études qui suivent, le traitement ajouté à la plaque circulaire encastree est appliqué au centre. Différentes variations paramétriques sont mises en place afin de mettre en évidence le comportement d'un matériau granulaire vibré et la réaction de la structure vibrante vis à vis de ce traitement.

2.2.3 Variation de la masse de grains

A partir du montage de la plaque circulaire encastree (Fig. 2.10), une étude paramétrique de la masse de grain utilisée est dans un premier temps réalisée. L'amas de grains est positionné au centre de la plaque (Fig. 2.15a). Cinq valeurs de masse sont testées (Tab. 2.2) et sont comparées à un cas de référence consistant à positionner une masse supposée indéformable au centre de la plaque (Fig. 2.15b).

$m_m =$	$32,8 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$	
$m_1 =$	$10,0 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$	(30%)
$m_2 =$	$20,0 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$	(61%)
$m_3 =$	$30,0 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$	(91%)
$m_4 =$	$40,0 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$	(122%)
$m_5 =$	$50,0 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$	(152%)

TABLE 2.2 – Pourcentage de masse ajoutée sur la plaque circulaire encastree.

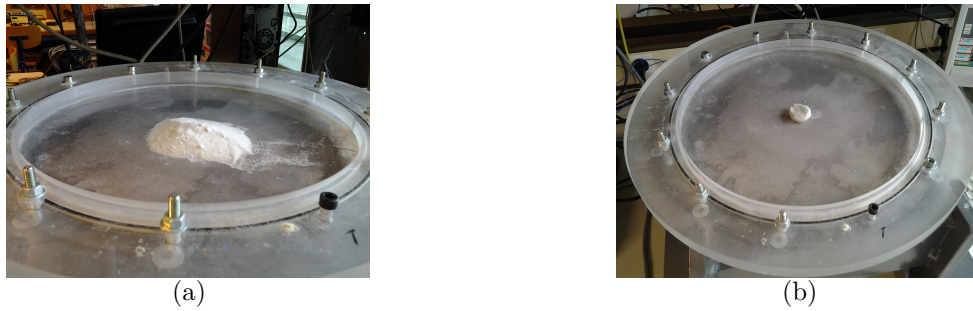


FIGURE 2.15 – Différents types de traitements sur la plaque circulaire encastree : (a) matériau granulaire ($\varnothing = 100 \mu\text{m}$) - (b) masse indéformable collée à la plaque.

La variation de la masse ajoutée à la structure primaire vibrante (masse modale m_m) est étudiée via l'observation de la FRF. Pour chacune des configurations étudiées deux FRF sont représentées : la première sur une large bande fréquentielle permettant d'identifier la fréquence de résonance, la deuxième centrée sur la résonance. Ceci maximisant le nombre de points de la zone permettant le calcul d'un facteur d'amortissement modal (Fig. 2.16).

Les FRF montrent que l'ajout de masse induit une décroissance de la fréquence de résonance du système pour $\Gamma = 1$. Il n'y a dans ce cas pas de variation de l'amortissement modal ζ . De plus, aucun mouvement relatif entre les grains n'est observé. Le matériau granulaire n'ajoute pas de dissipation.

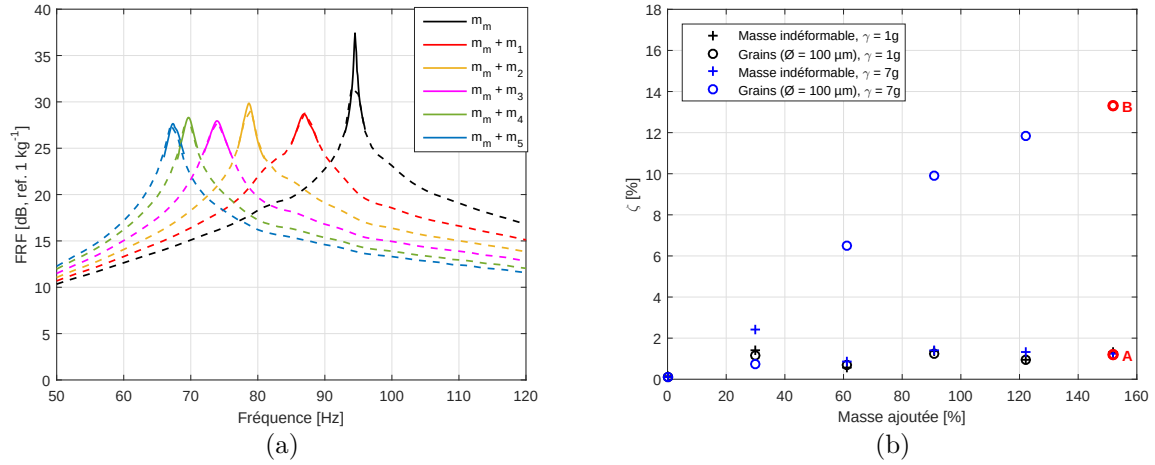


FIGURE 2.16 – Variation de masse ajoutée (Grains de verre - $\varnothing = 100 \mu\text{m}$) : (a) FRF au centre de la plaque ($\Gamma = 1$ - en tiret : grand pas fréquentiel - en ligne continue : petit pas fréquentiel) - (b) facteur d'amortissement modal (ζ) en fonction du ratio de masse ajoutée.

A l'inverse, pour $\Gamma = 7$, des mouvements entre les grains sont présents. Cela se traduit par une augmentation significative du facteur d'amortissement modal ζ . Plus la masse de grains augmente, plus la valeur du ζ augmente, jusqu'à prendre un facteur 10 par rapport à la masse indéformable, à masse identique. L'augmentation du nombre de grains via l'ajout de masses successives entraîne un nombre de contacts plus important et donc une meilleure capacité du système à dissiper l'énergie vibratoire.

2.2.4 Variation du niveau d'accélération et non-linéarité associée

L'influence de l'accélération sur la dissipation engendrée par le matériau granulaire est étudiée dans la partie suivante (passage du point A au point B, Fig. 2.16). L'amplitude d'accélération est étudiée à masse de matériau granulaire constante ($m_5 = 50 \text{ gr}$), pour des billes de verre de diamètre $\varnothing = [100; 700] \mu\text{m}$ (Fig. 2.17). Les grains sont ici, comme dans l'expérience précédente, positionnés au centre de la plaque circulaire encadrée.

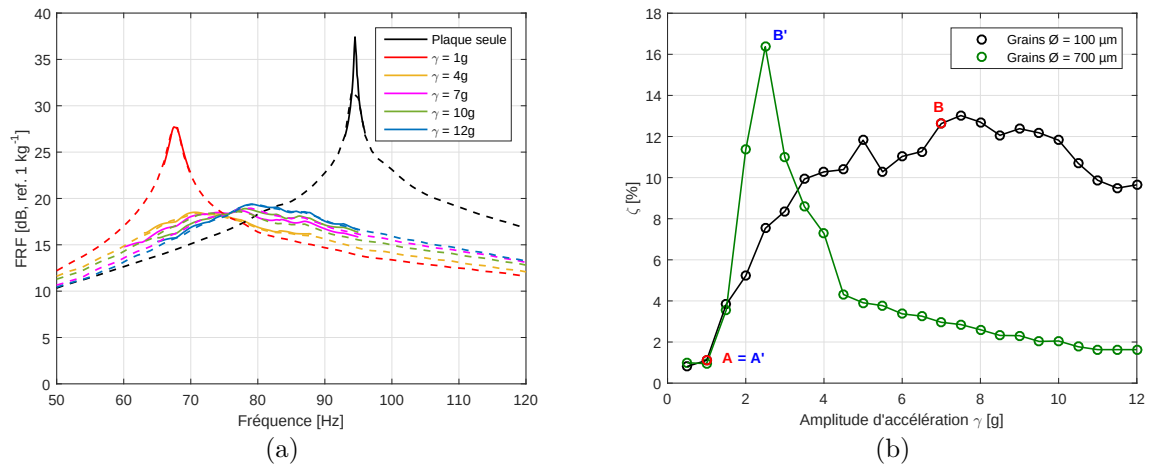


FIGURE 2.17 – Variation de l'amplitude d'accélération (Grains de verre - $m_{\text{grains}} = m_5$) : (a) FRF au centre de la plaque pour des grains $\varnothing = 100 \mu\text{m}$ (en tiret : grand pas fréquentiel, en ligne continue : petit pas fréquentiel) - (b) facteur d'amortissement modal (ζ) en fonction de l'accélération (γ) (vidéos d'expériences : [84, 85]).

A faible niveau d'accélération ($\Gamma < 1$) les billes rassemblées en amas au centre de la plaque n'ont pas de mouvements relatifs les unes par rapport aux autres. L'amortissement modal n'est pas augmenté quelque soit le diamètre des grains (Fig. 2.17b). Seul un effet de masse ajoutée est observé (Fig. 2.17a, courbe rouge). Lorsque Γ augmente, un effet non linéaire induit par la présence des grains se traduit par une augmentation de la fréquence de résonance et une augmentation de l'amortissement modal, comme

déjà observé par Liu [55].

L'utilisation de grains de diamètre $\varnothing = 100 \mu\text{m}$ permet d'associer les observations qualitatives précédentes aux valeurs d'amortissements modaux (ζ). La phase liquide équivalente, caractérisée par des ondes de surfaces convectives, est observable pour $\Gamma > 1$. L'augmentation du facteur d'amortissement modal est liée à l'augmentation de l'amplitude d'accélération. La phase gazeuse équivalente apparaît aux alentours de $\Gamma = 7$. Des instabilités de surface apparaissent via des éjections chaotiques de grains sous forme de geysers. A partir de cette valeur, le facteur d'amortissement modal diminue. Un étalement des grains sur la surface de la plaque est observable, les éjections entraînent une diminution des contacts entre la plaque et les grains.

L'augmentation du diamètre ($\varnothing = 700 \mu\text{m}$), pour $\Gamma > 1$, entraîne une augmentation brutale du facteur d'amortissement modal (ζ), ce qui s'explique par des contacts plus énergétiques. Une chute de la valeur du facteur d'amortissement modal (ζ) à partir de $\Gamma = 2,5$ est associée à l'éjection des grains du centre de la plaque (Fig. 2.14). Le facteur d'amortissement modal (ζ) décroît sans être égal à la valeur de la plaque vide ($\zeta \approx 1\%$). Une ceinture de grains statiques retient les grains au centre de la plaque, du fait de la déformée propre de la plaque au 1^{er} mode.

Le choix du diamètre ($\varnothing$) des grains peut donc significativement influencer sur l'amortissement résultant de la structure modale à surface libre. Dans le cas présenté ci-dessus, une analogie du comportement chaotique du matériau granulaire peut être associée à la technique du lit fluidisé permettant de mettre en évidence l'instabilité d'un amas de grains [10, 47, 54].

2.2.5 Variation d'hygrométrie sur les contacts inter-grains

Après avoir étudié la mise en vibration de grains secs, la condition de contact inter-grains est modifiée par ajout d'un liquide. Le taux d'humidité μ au sein d'une masse de grains ($\varnothing = 100 \mu\text{m}$) est étudié (Fig. 2.18). Ce taux correspond au pourcentage de masse d'eau ajoutée à la masse de grains. La procédure consiste d'abord à ajouter une petite quantité d'eau, à homogénéiser l'amas par brassage avec une spatule et le positionner au centre de la plaque. Les accélérations contrôlées sont volontairement faibles afin de garder la masse de grains humides au centre de la plaque et ainsi avoir des conditions expérimentales comparables.

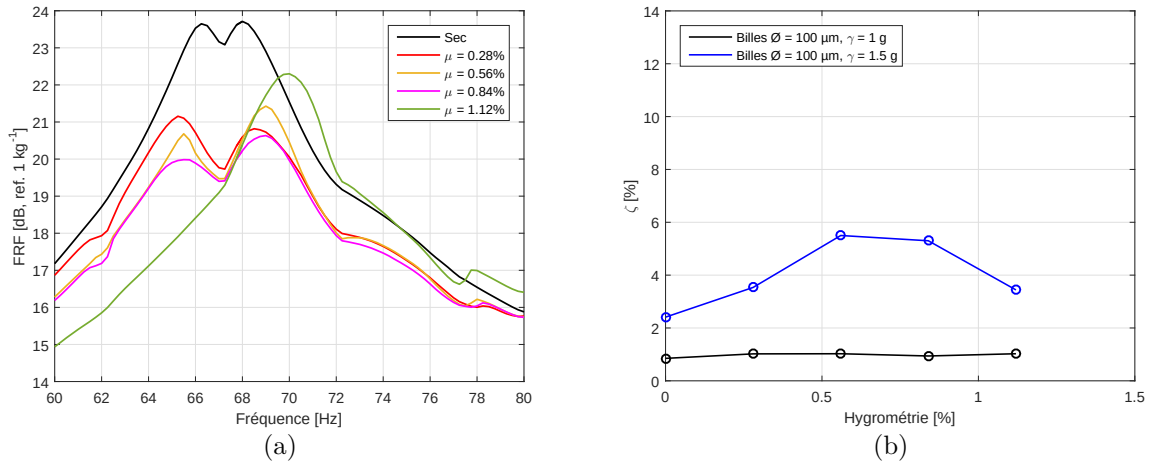


FIGURE 2.18 – Variation d'hygrométrie (Grains de verre - $m_{\text{grains}} = m_5$) : (a) FRF au centre de la plaque pour $\Gamma = 1,5$ - (b) facteur d'amortissement modal en fonction du taux d'hygrométrie.

Pour $\Gamma = 1$, l'absence de dynamique interne du milieu granulaire même humide n'induit qu'un effet de masse ajoutée sans augmenter l'amortissement modal, comme attendu.

Pour une valeur d'accélération supérieure $\Gamma = 1,5$ le facteur d'amortissement modal est sensible à l'hygrométrie. Pour des taux d'humidité compris entre $\mu \in [0-0,56\%]$, une croissance du facteur d'amortissement est observée et peut être expliquée par la création de ponts hydriques entre les grains. Les mouvements relatifs des grains engendrent des pertes visqueuses au sein de micro-volumes de fluide piégés. Si ce taux augmente encore, $\mu \in [0,56-1,12\%]$, le facteur d'amortissement modal de la structure diminue et deux interprétations sont avancées. Soit les ponts hydriques sont tels que la tension superficielle crée des

liaisons inter-grains suffisamment fortes pour bloquer les mouvements, ce qui entraîne une rigidification du système. Ce dernier tend à avoir le comportement d'une masse indéformable. Soit l'humidité devient si importante qu'un phénomène de lubrification apparaît incitant les grains à s'écarter de la zone de plus fort déplacement.

2.3 Conclusion partielle

Les dispositifs expérimentaux et les procédures de post-traitement utilisés tout au long de ce manuscrit sont décrits dans ce chapitre. Une première étude expérimentale présente l'effet de l'interaction d'un matériau granulaire à surface libre sur une structure modale présentant un gradient de déplacement. Il apparaît que pour un matériau granulaire de faible diamètre, son influence est conséquente sur la dissipation vibratoire. A partir d'un certain seuil $\Gamma > 1$, plus la masse ajoutée de grains augmente, plus la dissipation est importante.

Différents régimes de fonctionnements de la matière en grain liés au niveau d'excitation sont observés. La dissipation est quantifiée par la mesure de l'amortissement modal équivalent. L'association de ces observations qualitatives et mesures permet de décrire le comportement du système dans son ensemble. D'autres variations paramétriques impliquant la masse de grains ou l'hygrométrie sont étudiées.

Ces dernières variations montrent une limite des mesures sur une plaque à surface libre. La réalisation mécanique d'une cavité entraîne une réduction des paramètres de contrôle, permettant d'identifier l'origine de la dissipation d'énergie. Le montage de cette cavité sur un système résonnant est nécessaire pour conserver un comportement modal.

Dissipation vibratoire d'une cavité sous influence d'un amas de grains

Préambule

Ce chapitre présente l'étude d'un oscillateur comportant une cavité dans laquelle un amas de grains est introduit. La conception et la caractérisation expérimentale du système permettent de quantifier avec précision les effets dissipatifs induits par la présence d'un matériau granulaire ajouté.

Le comportement dynamique d'un amas de grains confiné est mesuré ainsi que le développement d'une stratégie d'analyse des résultats expérimentaux. Un modèle analytique à constantes localisées est proposé afin de quantifier l'énergie perdue, due à la présence des grains.

Sommaire

3.1	Dispositif expérimental et modèle linéaire équivalent	36
3.1.1	Matériel utilisé pour le confinement du matériau granulaire dans une cavité . .	36
3.1.2	Modèle d'oscillateur 1DDL du système résonant sans matériau granulaire . . .	36
3.1.3	Validation du modèle 1DDL	39
3.2	Estimation expérimentale de l'énergie vibratoire dissipée	41
3.2.1	Etude modale de l'oscillateur (cavité+grains) autour de sa 1 ^{ère} résonance . . .	41
3.2.2	Etude temporelle et fréquentielle mettant en évidence la dynamique non-linéaire	42
3.2.3	Mesure de la perte d'énergie au moyen des signaux temporels	43
3.3	Modèles analytiques à constantes localisées utilisant le frottement de Coulomb	46
3.3.1	Saut d'une masse secondaire non solidaire (n°2)	48
3.3.2	Ralentissement d'une masse secondaire à l'atterrissage (n°3)	50
3.3.3	Frottement constant d'une masse secondaire (n°4)	53
3.3.4	Association des deux contributions de frottement (n°5)	56
3.4	Confrontation du modèle à l'expérience	60
3.5	Modèles analytiques à constantes localisées utilisant la dissipation visco-élastique	61
3.5.1	Ajout d'une contribution de dissipation par un deuxième oscillateur (n°6) . . .	62
3.5.2	Saut d'une masse secondaire retenue par un oscillateur (n°7)	64
3.5.3	Saut d'une masse secondaire et ralentissement à l'atterrissage (n°8)	69
3.6	Conclusion partielle	72

3.1 Dispositif expérimental et modèle linéaire équivalent

3.1.1 Matériel utilisé pour le confinement du matériau granulaire dans une cavité

Une étude plus approfondie des mécanismes d'atténuation des vibrations utilisant un matériau granulaire nécessite une réduction et un meilleur contrôle des paramètres de l'expérience. Une solution de confinement est développée et consiste en une cavité montée sur deux bras métalliques souples jouant le rôle de raideur. L'ensemble est soutenu par un bâti supposé indéformable et est excité par un pot vibrant positionné en dessous de la cavité (Fig. 3.1). Le mouvement vibratoire est une translation verticale. Ce système résonant est assimilé à un oscillateur à 1DDL équivalent dont les constantes mécaniques peuvent être déterminées simplement dans lequel une large gamme de variations paramétriques sont possibles.

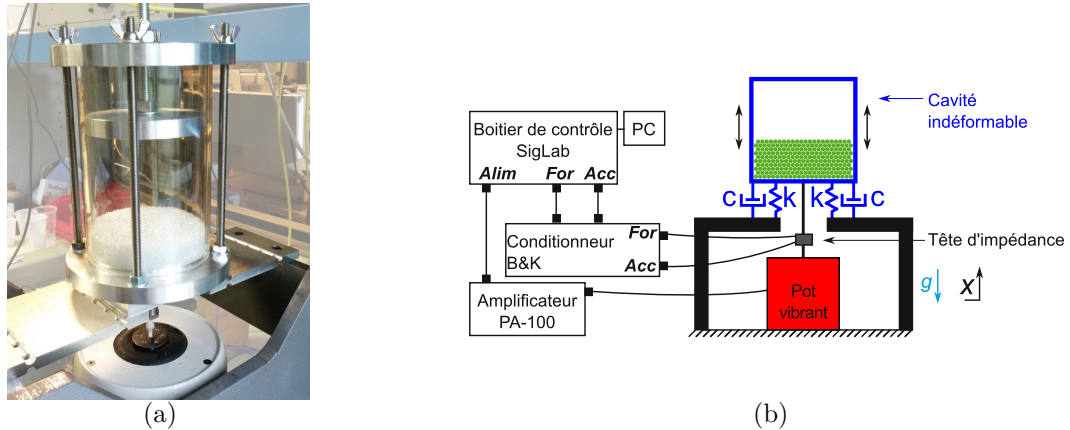


FIGURE 3.1 – Expérience d'une cavité indéformable ($\Gamma \in [0 - 3]$) : (a) Dispositif expérimental - (b) schéma représentatif.

A partir d'une large gamme de variations paramétriques, l'objectif est d'interpréter les résultats au moyen de modèles analytiques BF à constantes localisées de façon à examiner l'importance des différents types de dissipation et leurs liens avec les paramètres géométriques et matériaux des grains. Un oscillateur à 1DDL équivalent peut donc être représentatif de la cavité vide.

3.1.2 Modèle d'oscillateur 1DDL du système résonant sans matériau granulaire

Le système constitué de la cavité vibrante fait intervenir deux éléments ayant chacun des paramètres vibratoires (raideur et amortissement). Le calcul de coefficients d'un oscillateur équivalent prend en compte une raideur totale équivalente k_1 et un amortissement total équivalent c_1 (Fig. 3.2).

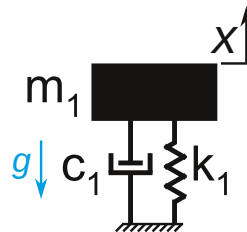


FIGURE 3.2 – Schéma d'un oscillateur à 1DDL

Raideur équivalente (k_1)

La raideur équivalente k_1 peut être déduite de la pulsation de résonance $\omega_r = \sqrt{k_1/m_1}$ sous réserve que la masse m_1 du système étudié soit connue. La mesure de la réponse en fréquence du système permet d'obtenir la valeur de la fréquence de résonance f_r (Fig. 3.3).

Ces résonances présentent quelques harmoniques, montrant que le cas étudié n'est pas idéal. Cependant, l'amplitude associée aux harmoniques est très faible devant l'amplitude de la première résonance. Un

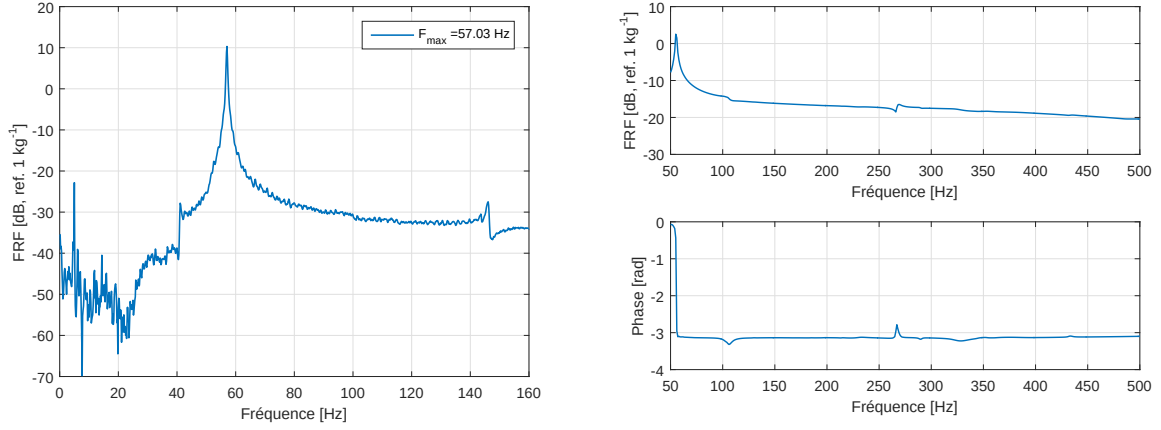


FIGURE 3.3 – FRF du système constitué de la cavité vide.

modèle d'oscillateur à 1DDL peut être assimilé à ce dispositif expérimental. La représentation schématisée du système mis en vibration permet d'identifier la masse mise en jeux (Fig. 3.4).

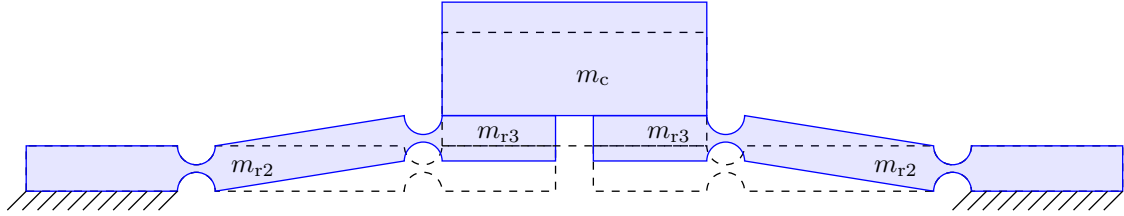


FIGURE 3.4 – Mouvement dynamique du système soumis à une vibration (m_c : masse de la cavité - m_{ri} : masse des différentes sections de la raideur expérimentale) : — — système au repos - ——— mouvement oscillant.

La masse m_1 de la configuration à vide est une combinaison des masses mises en jeu dans l'oscillation du système. Pour le premier mode de translation de la cavité, la masse équivalente du système est déterminée à partir de l'énergie issue du déplacement de chacun des composants. La valeur de la masse de chacun des composants est déterminée à partir de ses dimensions et de la masse volumique du matériau, ici de l'aluminium (Tab. 3.1).

m_c	=	3,552	kg
m_{r2}	=	0,195	kg
m_{r3}	=	0,062	kg
m_2	=	0,476	kg

TABLE 3.1 – Masse unitaire des composants du système primaire constitué de la cavité et des plaques de liaison.

L'énergie cinétique totale $E_{c,Tot}$ met en jeu la translation de m_c et m_{r3} ainsi que le moment d'inertie de m_{r2} ($a = 100$ mm - $b = 10$ mm - $c = 72$ mm) :

$$E_{c,Tot} = E_{c,c} + 2 \cdot E_{c,r3} + 2 \cdot E_{c,r2}, \quad (3.1)$$

$$E_{c,Tot} = \frac{1}{2} m_c \dot{x}^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} m_{r3} \dot{x}^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} m_{r2} \left(\frac{c^2 + b^2}{12} + \left(\frac{c}{2} \right)^2 \right) \dot{\theta}^2, \quad (3.2)$$

$$E_{c,Tot} = \frac{1}{2} m_c \dot{x}^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} m_{r3} \dot{x}^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} m_{r2} \left(\frac{c^2 + b^2}{12c^2} + \frac{c^2}{4c^2} \right) \dot{x}^2, \quad (3.3)$$

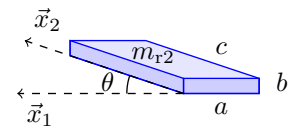


FIGURE 3.5 – Moment d'inertie de la plaque associée à m_{r2} .

$$E_{c,Tot} = \frac{1}{2} \left(m_c + 2m_{r3} + 2m_{r2} \left(\frac{1}{12} + \frac{b^2}{12c^2} + \frac{1}{4} \right) \right) \dot{x}^2, \quad (3.4)$$

$$E_{c,Tot} = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2. \quad (3.5)$$

Pour la cavité vide, le calcul de la masse dynamique donne $m_1 = 3,810$ kg, m_2 désigne la masse statique ajoutée. Deux études sont effectuées, l'une cavité vide (m_1) et l'autre cavité avec masse ajoutée ($m_1 + m_2$). Les fréquences de résonances sont respectivement 57,0 Hz et 54,0 Hz. Deux estimations de la raideur sont données :

- cavité vide (m_1) : $k_{1a} = 4,84.10^5$ N.m⁻¹,
- cavité avec masse ajoutée ($m_1 + m_2$) : $k_{1b} = 4,89.10^5$ N.m⁻¹,

qui diffèrent d'à peine 1,2%, ce qui confirme la validité du modèle. La valeur $k_1 = 4,85.10^5$ N.m⁻¹ est choisie pour le paramètre du système résonant à 1DDL.

Amortissement visqueux équivalent (c_1)

Il est possible, à partir de l'énergie dissipée mesurée sur un système résonant, de déduire le facteur de perte η :

$$\eta = \frac{E_L}{2\pi U_{\max}}, \quad \rightarrow \quad E_L = 2\pi\eta U_{\max}, \quad (3.6)$$

avec E_L l'énergie dissipée par le système, $U_{\max} = \frac{1}{2}k_1 x_{\max}^2$ l'énergie potentielle de raideur, $x_{\max}$ l'amplitude maximum du déplacement, $\eta = \frac{c_1\omega_e}{k_1}$ le facteur de perte du système 1 DDL. Dans le cas d'un mouvement harmonique à la pulsation ω_e avec un amortissement visqueux, l'expression de l'énergie dissipée devient :

$$E_L = 2\pi \frac{c_1\omega_e}{k_1} \frac{1}{2} k_1 x_{\max}^2 = \pi c_1 \omega_e x_{\max}^2, \quad (3.7)$$

soit

$$c_1 = \frac{E_L}{\pi\omega_e x_{\max}^2}. \quad (3.8)$$

Pour une même configuration, les résultats obtenus lorsque la pulsation est fixée à la résonance de l'oscillateur seul (à gauche) et de l'oscillateur chargé d'une masse additionnelle m_2 . Chaque point de mesure correspond à une mesure réalisée pour des valeurs croissantes d'accélération imposée (Fig. 3.6).

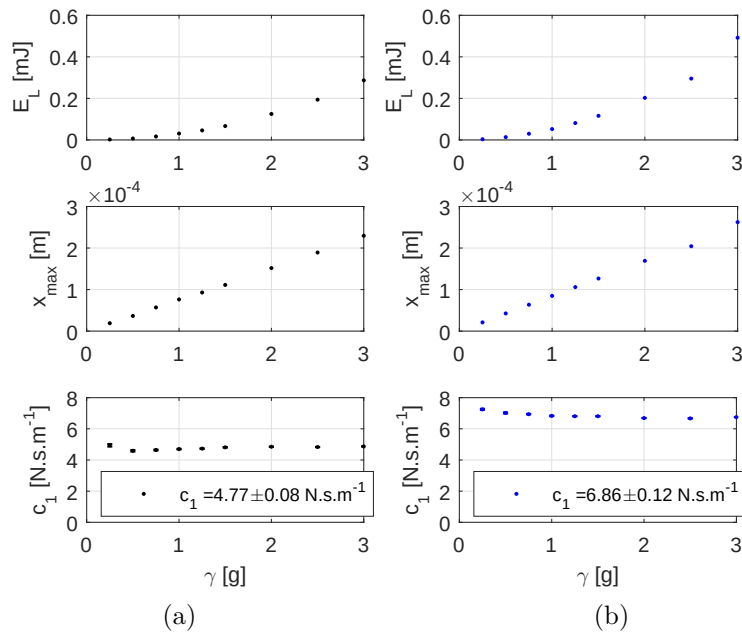


FIGURE 3.6 – Calcul du coefficient d'amortissement visqueux équivalents c_1 du système 1DDL associé à partir de l'énergie dissipée par cycle (E_L) et de l'amplitude maximum du déplacement ($x_{\max}$) : (a) cavité vide (m_1) - (b) cavité avec une masse fixée indéformable ($m_1 + m_2$).

L'incertitude sur la valeur de c_1 pour chaque accélération est l'incertitude composée de l'incertitude sur la valeur de la moyenne de E_L et $x_{\max}$ ainsi que la résolution sur la mesure de ω_e , avec un facteur d'élargissement $k = 2$ (voir **Annexe A**).

Dans le cas d'un modèle analytique, c_1 devrait être constant en fonction de l'accélération. Ce n'est pas le cas dans ces conditions expérimentales. La valeur de c_1 est déterminée en effectuant une moyenne sur les valeurs d'amortissement c pour chaque niveau d'accélération, l'incertitude n'est finalement pas issue des valeurs ponctuelles mais d'un écart par rapport à la valeur de la moyenne de c_1 . Les valeurs $c_1 = 4,77 \pm 0,08 \text{ N}\cdot\text{s}\cdot\text{m}^{-1}$ et $c_1 = 6,86 \pm 0,12 \text{ N}\cdot\text{s}\cdot\text{m}^{-1}$, qui restent faibles, présentent une variation de 35%. Cet écart non négligeable ne peut être expliqué simplement par l'ajout d'une masse. Un autre phénomène inconnu à la date de rédaction de ce manuscrit est à l'origine de cet écart. La plupart des expérimentations étant faites par la suite avec une masse ajoutée $m_2 = 0,476 \text{ kg}$, la valeur $c_1 = 7 \text{ N}\cdot\text{s}\cdot\text{m}^{-1}$ est choisie.

3.1.3 Validation du modèle 1DDL

En guise de vérification, l'évolution temporelle de la force est calculée à l'aide des coefficients du système 1DDL trouvés (Tab. 3.2). Le déplacement est imposé, les représentations temporelles et Lissajous, expérimentales et modélisées sont comparées (Fig. 3.7). L'incertitude sur la valeur moyenne de l'énergie dissipée expérimentale est calculée à l'aide de ≈ 270 cycles et est donnée avec un taux de confiance de 95%.

m_1	$= 3,810$	kg
c_1	$= 7$	$\text{N}\cdot\text{s}\cdot\text{m}^{-1}$
k_1	$= 4,85 \cdot 10^5$	$\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$
m_2	$= 0,476$	kg

TABLE 3.2 – Coefficients du modèle 1DDL associé à l'expérience.

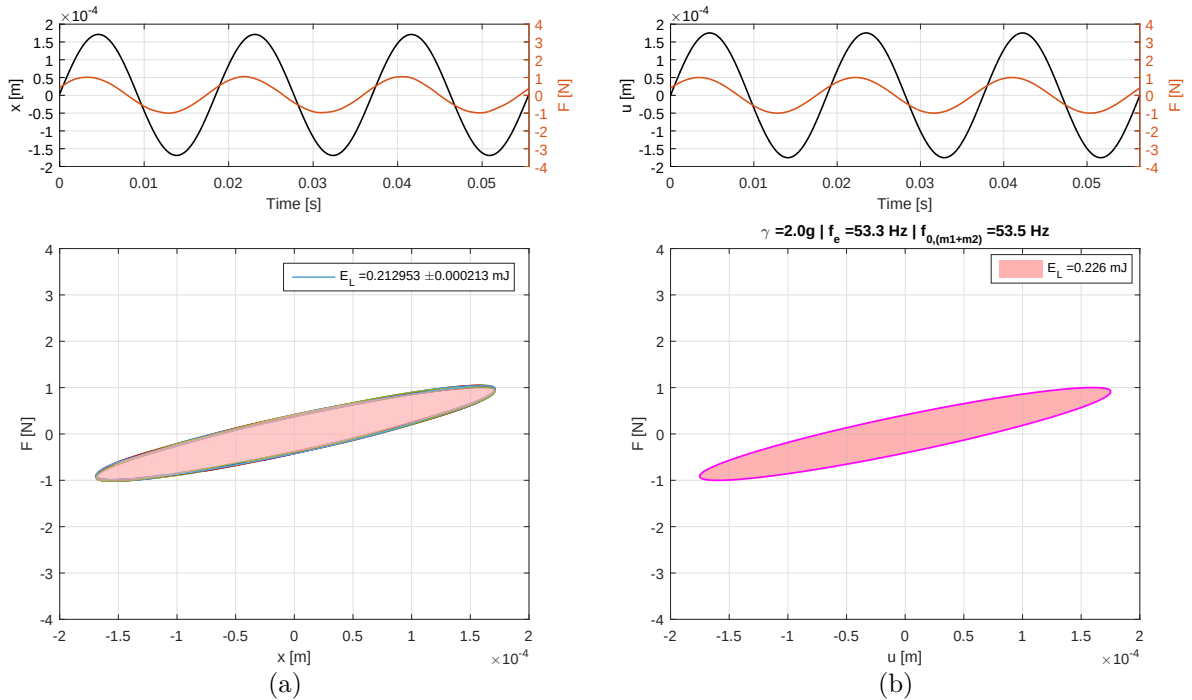


FIGURE 3.7 – Représentations temporelles et de Lissajous d'un système 1DDL ($m = m_1 + m_2$) pour une accélération $\gamma = 2g$: (a) expérience - (b) modèle analytique associé.

Les résultats montrent un très bon accord, en particulier concernant l'estimation de l'énergie perdue E_L , ce qui permet de valider les paramètres du modèle 1DDL équivalent. Ces paramètres seront des données d'entrée des modèles dissipatifs présentés dans la suite de ce chapitre.

D'autres paramètres expérimentaux sont à prendre en compte lors de la mesure de l'énergie perdue E_L . En effet, cette valeur est dépendante de la fréquence d'excitation. Une variation de la masse

$m_1 = [m_A = 2; m_B = 3; m_C = 4]$ kg du système analytique permet d'observer l'influence de la fréquence sur l'énergie Lissajous E_L (Fig. 3.8). Les calculs sont effectués à accélération contrôlée.

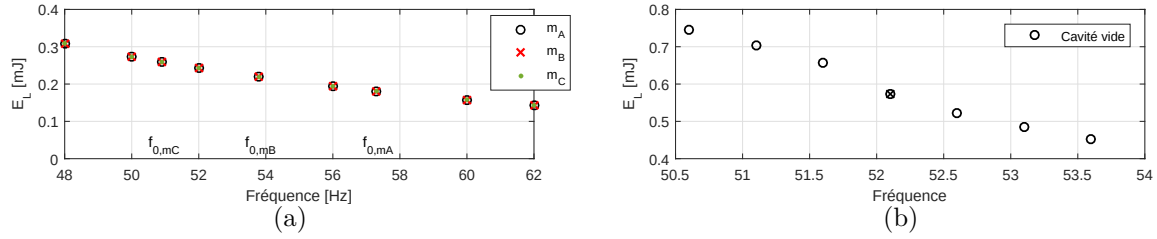


FIGURE 3.8 – Influence de la variation de la fréquence d'excitation sur l'énergie Lissajous E_L ($\gamma = 2g$) : (a) modèle analytique - (b) expérience sur la cavité vide.

D'abord, dans le cas analytique, les valeurs de E_L sont indépendantes de la masse en fonction de la fréquence. Par ailleurs, quand la fréquence augmente la valeur de E_L diminue, due au contrôle en accélération. Il implique une diminution de l'amplitude de déplacement lorsque la fréquence augmente, cette observation est validée expérimentalement dans le cas de la cavité vide, sans traitement par ajout de grains. Cette observation montre que le point de mesure est primordial pour pouvoir comparer des mesures. Dans notre cas, la quadrature de phase, correspondant à la résonance du système est choisie pour effectuer cette mesure.

Par contre, si l'on se place à la fréquence de résonance qui dépend de la masse, pour une accélération donnée, E_L croît avec la masse (Fig. 3.9).

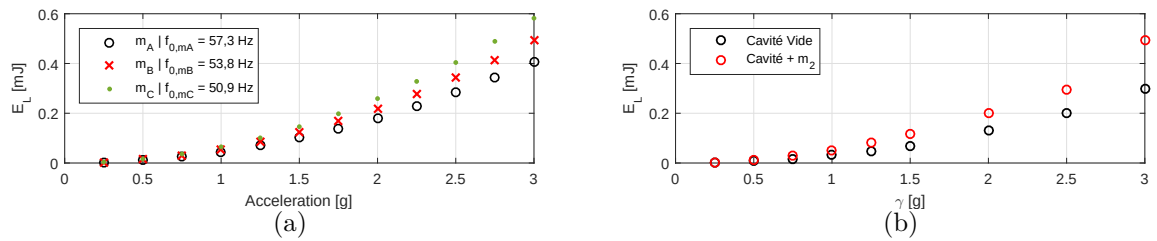


FIGURE 3.9 – Variation paramétrique sur le modèle montrant l'influence de l'amplitude d'accélération γ pour différentes masses : (a) modèle analytique - (b) expérience sur la cavité.

Du fait de la dépendance en fréquence, les mesures de E_L seront faites à la résonance du système. Expérimentalement la fréquence est choisie dans la zone où la force est minimum et où la force et l'accélération mesurées sont en quadrature de phase. Suivant les configurations, la masse mise en jeu peut être différente, la fréquence d'excitation est donc ajustée à chaque fois. L'ajout de grains dans le dispositif expérimental est par la suite étudié.

3.2 Estimation expérimentale de l'énergie vibratoire dissipée

3.2.1 Etude modale de l'oscillateur (cavité+grains) autour de sa 1^{ère} résonance

Différentes configurations expérimentales sont mises en place pour montrer l'intérêt du traitement de l'atténuation des vibrations par ajout d'un matériau granulaire (Fig. 3.10). La comparaison des résultats issus d'une mesure à vide et d'un ajout de matériau granulaire est présentée. Les expériences "cavité vide" correspondent à la réponse du système primaire seul. Le système secondaire considère le traitement avec masse indéformable ou amas de grains.

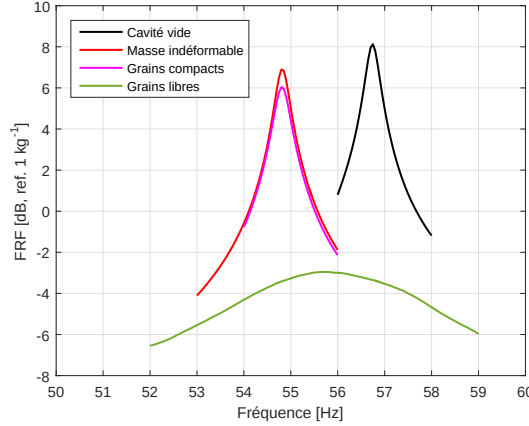


FIGURE 3.10 – FRF pour différents traitements d'atténuation des vibrations d'un oscillateur pour une amplitude d'excitation $\gamma = 3g$.

Le traitement représente $\approx 15\%$ de la masse du système primaire pour les trois configurations testées :

- Masse solidaire indéformable : Cette masse est fixée au moyen d'un adhésif et entraîne un décalage de la résonance du système 1DDL vers les basses fréquences.
- Amas compact de grains en verre de diamètre $\varnothing = 2\text{ mm}$: Cette configuration est réalisée par descente du piston interne dans la cavité. Des résultats similaires à la masse solidaire indéformable sont observés, mais avec une légère décroissance du maximum d'amplitude. La compaction ne pouvant être parfaite, des micro-cavités résiduelles ont permis à des petits groupes de grains d'interagir entre eux et ainsi de dissiper de l'énergie.
- Amas libre des mêmes grains : Pour une même quantité de grains en présence d'une surface libre (piston intérieur remonté) l'absence de compaction du matériau granulaire entraîne une dissipation plus importante des vibrations. Le mouvement relatif des grains est favorisé, la dissipation augmentée.

Pour deux configurations (Masse solidaire indéformable & Amas de grains à surface libre), des FRF sont mesurées pour différentes amplitudes d'accélération dans la gamme $\gamma \in [0, 25 - 3]g$ (Fig. 3.11). La variation du type de traitement influe de façon considérable sur l'allure de la FRF.

Dans le cas de la masse solidaire indéformable, une légère variation de l'amplitude de la FRF est observée. Ceci peut être dû à la difficulté du pot vibrant d'imposer une accélération de consigne au système. Néanmoins les valeurs de fréquence de résonance et les amplitudes associées sont proches. A l'inverse, dans le cas de l'amas de grains libres, la valeur du maximum de la FRF peut chuter jusqu'à 8 dB, ce qui traduit une augmentation de la dissipation du système. La valeur de la fréquence de résonance augmente à partir d'une accélération supérieure à $\gamma = 1g$. Au dessus de cette valeur, les interactions inter-grains augmentent. Le calcul du coefficient d'amortissement modal (ζ) autour d'une résonance permet de quantifier la dissipation (Fig. 3.12).

Dans les cas de la cavité vide, de la masse solidaire indéformable, ou des grains compacts, pour les deux ratios de masse de traitement ajoutés [5%;15%], le coefficient d'amortissement modal (ζ) ne varie pas en fonction de l'accélération. Le système est linéaire et le gain en amortissement de ces types de

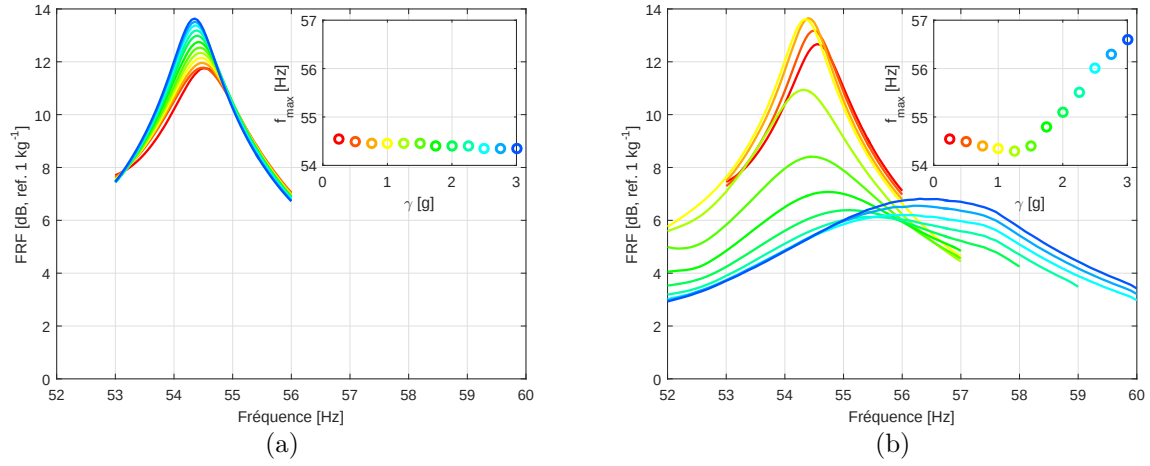


FIGURE 3.11 – Mise en évidence de l'intérêt de l'utilisation de grains dans l'atténuation des vibrations d'un système 1DDL : (a) masse indéformable - (b) amas de grains en verre ($\varnothing = 2$ mm).

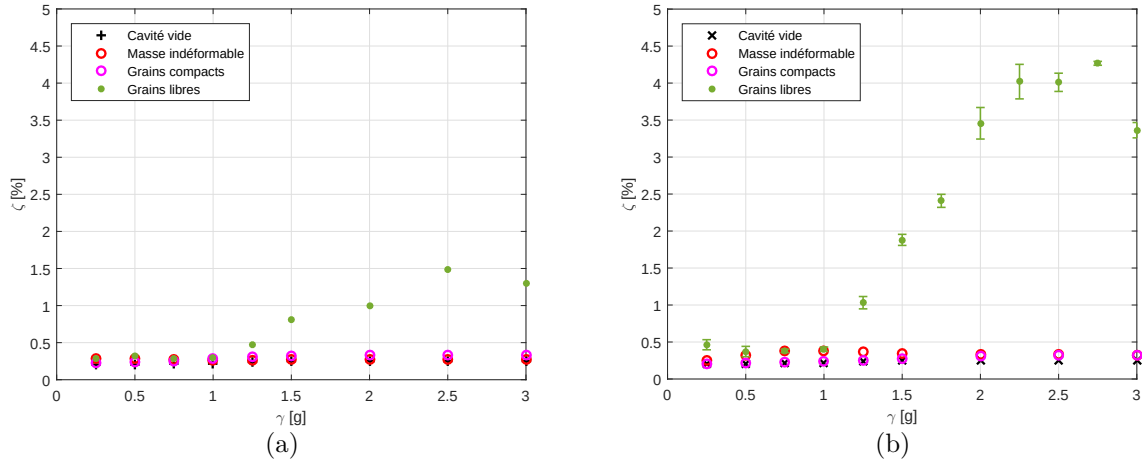


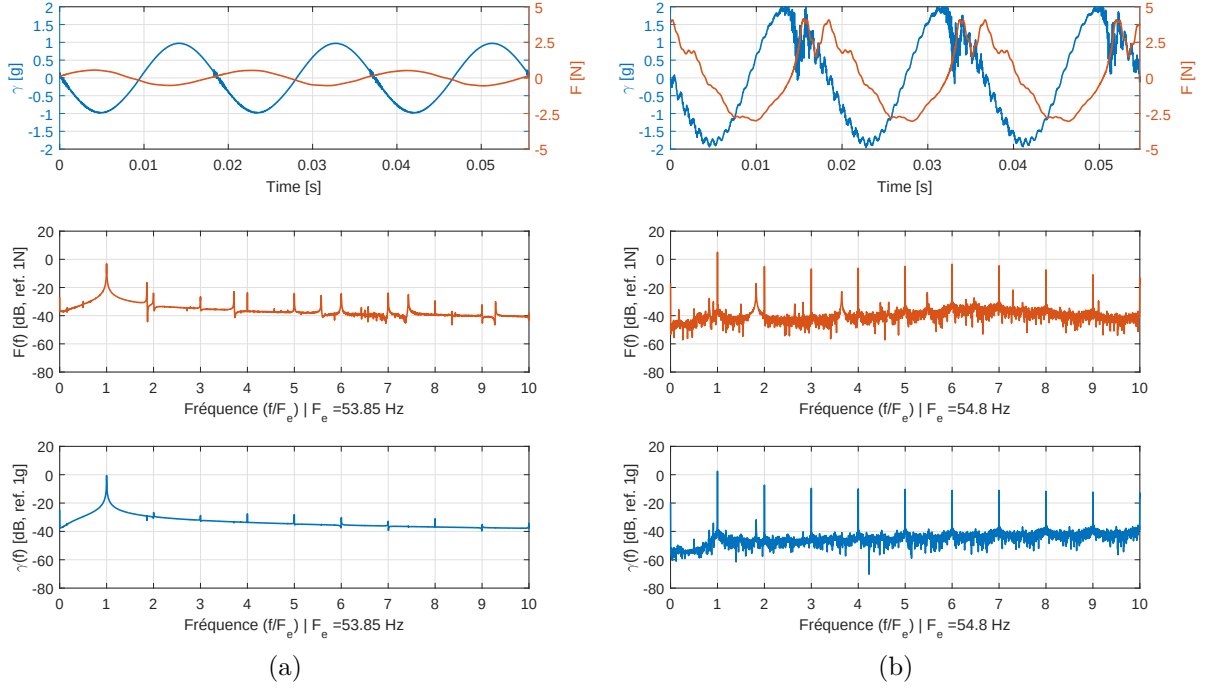
FIGURE 3.12 – Coefficient d'amortissement modal (ζ) pour deux valeurs de masse de grains ($k=2$, intervalle de confiance de 95% sur la valeur de la moyenne) : (a) $m = 150$ gr ($\approx 5\%$ d'ajout) - (b) $m = 500$ gr ($\approx 15\%$ d'ajout).

traitement est négligeable.

Par contre, si les grains sont à surface libre, la dissipation augmente. Cette augmentation est d'autant plus importante que la masse de l'amas de grains est importante, ce qui entraîne une augmentation du nombre de contacts. La valeur du coefficient d'amortissement modal (ζ) augmente fortement $\gamma = 1$ g, jusqu'à prendre un facteur ≈ 15 par rapport à la valeur donnée dans la configuration utilisant une masse indéformable. Dans la configuration étudiée, une zone optimale d'utilisation de matériau granulaire peut être identifiée autour de $\gamma \in [2, 25 - 2, 75]$ g. Cet effet de seuil en fonction de l'amplitude d'accélération sur la mesure d'un coefficient visqueux équivalent est détaillée au **chapitre 1**.

3.2.2 Etude temporelle et fréquentielle mettant en évidence la dynamique non-linéaire

Les mécanismes de perte d'énergie tentent d'être identifiés via l'observation des signaux temporels expérimentaux. En effet, comme conclu précédemment, des mécanismes non linéaires clairement identifiés limitent considérablement la pertinence des analyses basées sur l'identification d'amortissements visqueux linéaires équivalents. Le nombre important de grains en verre ne permet pas d'utiliser les méthodes usuelles de suivi de particules (particle tracking). Le système d'acquisition est ainsi identique à celui utilisé dans les études précédentes. Les signaux temporels de force F et d'accélération γ sont relevés à la fréquence de résonance du système (Fig. 3.13).


 FIGURE 3.13 – Signaux expérimentaux (Grains en verre $\varnothing = 2$ mm) : (a) $\gamma = 1g$ - (b) $\gamma = 2g$.

Expérimentalement, la fréquence d'excitation f est fixée à la résonance du système. L'observation de ces signaux temporels montre d'abord que pour une accélération imposée $\gamma = 1g$, les signaux temporels ont une forme sinusoïdale et ne présentent pas de fluctuation. Les harmoniques supérieures sont dues aux non linéarités du pot vibrant et aux imperfections de montage mais restent à des niveaux inférieurs à 20dB par rapport au niveau de la fréquence d'étude. Un déphasage entre les signaux de force et d'accélération, dû à l'amortissement interne du système primaire est observé.

Passé ce seuil, pour une accélération imposée $\gamma = 2g$, les signaux mesurés F et γ sont beaucoup plus bruités. Ces fluctuations peuvent être associées à un décollement des grains dû à l'accélération injectée au système qui est supérieure à celle de la pesanteur. L'augmentation de l'amplitude des harmoniques de rangs supérieurs sur les signaux de force et d'accélération montrent la présence d'un mécanisme de report d'énergie dû à des non-linéarités. Dans le cas présent, ces non-linéarités sont issues des nombreux contacts inter-grains subissant la vibration, de plus le niveau des harmoniques supérieures est comparable au niveau du fondamental. L'étude d'une masse solidaire indéformable montre un contenu harmonique beaucoup moins riche que celui utilisant le matériau granulaire (voir **Annexe A**).

3.2.3 Mesure de la perte d'énergie au moyen des signaux temporels

On s'intéresse à une représentation des signaux temporels pouvant permettre de décrire le comportement dissipatif du matériau granulaire. La représentation de cette énergie des diagrammes de Lissajous (force-déplacement) est donnée pour deux valeurs discrètes d'accélération $\gamma \in [1;2]g$. Une première étude compare le système vibrant avec une masse indéformable fixée ajoutée (Fig. 3.14).

L'observation de ces résultats montre la faible variation de comportement du système avec masse indéformable ajoutée. Dans cette configuration, l'allure d'ellipse est conservée, la dissipation est principalement équivalente à un système visqueux. Dans le cas de l'ajout d'un matériau granulaire libre dans la cavité ($\varnothing_{\text{grains}} = 2$ mm), les signaux présentent une variation en fonction de cette amplitude d'accélération (Fig. 3.15).

Pour une accélération $\gamma = 1g$, l'ellipse correspond à un système à amortissement visqueux équivalent. Cette conclusion permet aussi de montrer que pour cette condition d'excitation, les grains n'ont pas de mouvements relatifs suffisamment importants pour avoir une dissipation d'énergie supérieure à celle d'une masse indéformable. Pour $\gamma = 2g$, la forme ne peut être considérée comme une ellipse, ce qui indique une combinaison de plusieurs contributions. De plus, l'aire interne nettement supérieure augmente la mesure de l'énergie perdue E_L . Des points remarquables du cycle sont identifiables (Fig. 3.16) :

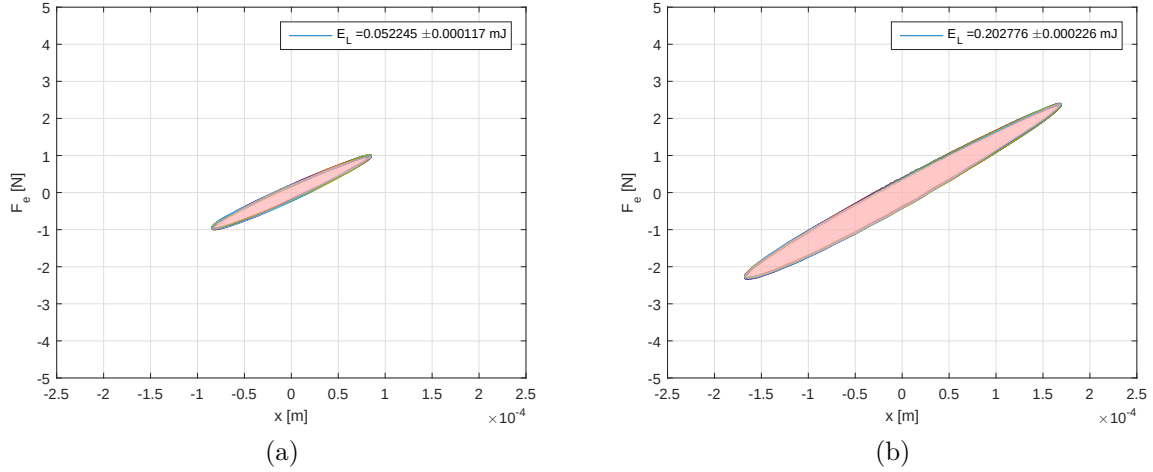


FIGURE 3.14 – Représentation des cycles d'énergie dissipée pour une acquisition temporelle dans le cas d'une masse fixée indéformable ajoutée : (a) $\gamma = 1g$ - (b) $\gamma = 2g$.

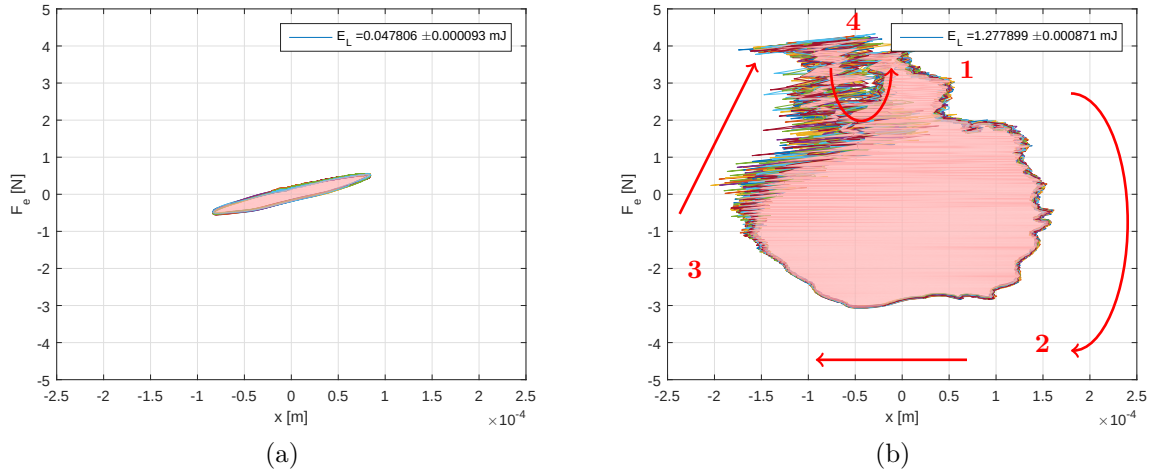


FIGURE 3.15 – Représentation des cycles d'énergie dissipée pour une acquisition temporelle dans le cas d'un amas de grains ajouté : (a) $\gamma = 1g$ - (b) $\gamma = 2g$.

Point 1 : passage de l'accélération instantanée au delà de $\gamma = -1g$ (Fig. 3.16a), les grains décollent de la base de la cavité. La force décroît car l'accélération est contrôlée.

Point 2 : les grains ont un mouvement balistique et sont soumis à la pesanteur. Ils ne sont plus en contact avec la base de la cavité (Fig. 3.16b). L'augmentation de l'aire du diagramme de Lissajous montre une contribution de l'interaction grains-paroi.

Point 3 : atterrissage des grains ayant suivi leur trajectoire balistique (Fig. 3.16c). Cet impact, dû à l'empilement successif des couches de grains, a une très grande influence sur le signal d'accélération (ie. déplacement), qui montre une oscillation secondaire. Le niveau de force mesuré augmente dû à l'augmentation des interactions.

Point 4 : fluctuation de la force pouvant correspondre à un rebond des grains. Cette oscillation peut aussi être due à un mouvement de traction compression de la tige de liaison en nylon entre le pot vibrant et la tête d'impédance.

Une analyse qualitative permet d'identifier deux zones. La première associe, entre les points **1** et **3**, une dissipation issue principalement du contact entre les grains et la paroi de la cavité. La deuxième zone, entre les points **3** et **1**, correspond à une dissipation d'énergie régie par le choc important suite à la retombée des grains à la base de la cavité. Une synthèse des énergies perdues totales E_L pour différentes configurations est présentée. Cette mesure prend en compte la totalité de l'énergie perdue et ne différencie pas les différentes contributions énoncées plus haut (Fig. 3.17).

La mesure de l'énergie perdue via la représentation de Lissajous permet de confirmer l'intérêt de l'utilisation d'un matériau granulaire pour dissiper de l'énergie vibratoire. De plus, plus le matériau est

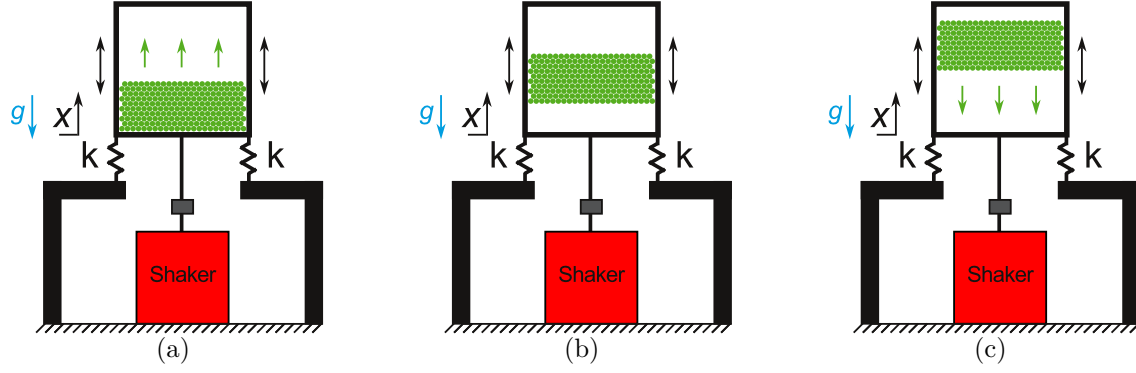


FIGURE 3.16 – Représentation schématique du décolage d'un amas de grains dans une cavité montée sur un oscillateur (voir vidéo [86]).

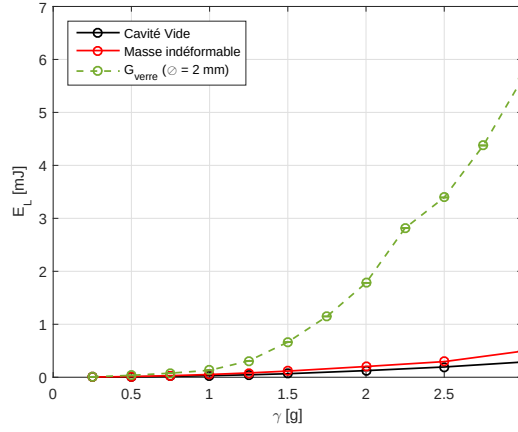


FIGURE 3.17 – Synthèse de la dissipation d'énergie due à la présence d'un matériau granulaire ($\phi = 2$ mm) ($k = 2$, intervalle de confiance de 95% sur la valeur de la moyenne).

sollicité, plus la dissipation augmente dû à la somme des interactions devenant plus énergétiques à mesure de l'amplitude d'accélération augmente. Les incertitudes sur les valeurs moyennes de E_L sont très faibles, du fait du grand nombre de cycles pris en compte ($t = 5$ s pour $f_e \approx 55$ Hz soit ≈ 275 cycles). L'origine de cette dissipation d'énergie est étudiée au moyen de modèles analytiques à constantes localisées utilisant le frottement pouvant décrire le comportement vibratoire des grains vibrés.

3.3 Modèles analytiques à constantes localisées utilisant le frottement de Coulomb

Le choix a été fait dans ce mémoire de développer des modèles analytiques et non d'utiliser une méthode d'intégration type Runge-Kutta pour résoudre ce comportement temporel non-linéaire.

La description de la dissipation induite par la mise en vibration de la masse de grains peut être séparée en plusieurs étapes, représentatives de l'observation temporelle expérimentale (Fig. 3.18). Suite aux différentes observations expérimentales le choix de la combinaison de patins frottants a été choisi. Les effets décrits précédemment sont détaillés dans les itérations de modèles successifs.

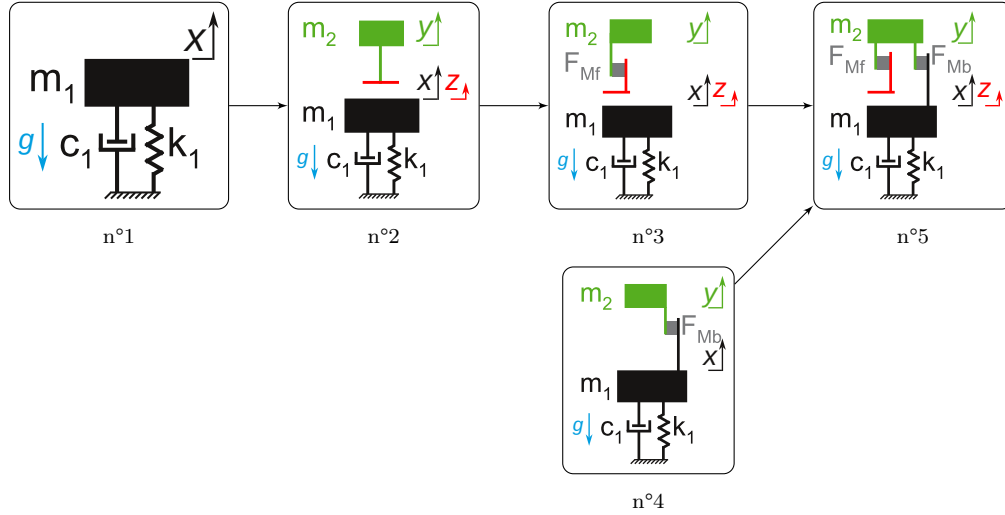


FIGURE 3.18 – Etapes successives de développement d'un modèle analytique représentant la dissipation induite par la mise en vibration d'un amas de grains en utilisant le frottement de Coulomb.

Dans les cas présentés, certains paramètres sont gardés constants (Tab. 3.3). Ils correspondent au modèle équivalent d'oscillateur de la cavité expérimentale utilisée.

m_1	= 3,810	kg
c_1	= 7	N·s·m ⁻¹
k_1	= 4,85·10 ⁵	N·m ⁻¹
m_2	= 0,476	kg

TABLE 3.3 – Paramètres constants du système 1DDL pour les modèles successifs.

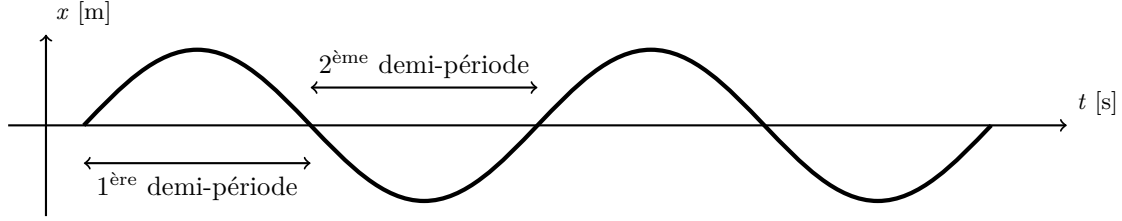
Les forces mises en jeu dans les différentes itérations du modèle sont définies par :

- F_1 : Force d'excitation agissant sur le système 1 (x) permettant de garder une accélération constante,
- $F_{1,2}$: Force agissant du système 1 (x) sur le système 2 (y),
- $F_{1,3}$: Force agissant du système 1 (x) sur le système 3 (z),
- $F_{2,3}$: Force agissant du système 2 (y) sur le système 3 (z),
- F_{Mf} : Force constante du patin frottant situé à l'interface des systèmes 2 (y) et 3 (z),
- F_{Mb} : Force constante du patin frottant situé à l'interface des systèmes 1 (x) et 2 (y),
- P_1 : Poids de la masse m_1 ,
- P_2 : Poids de la masse m_2 .

Dans les différentes itérations des modèles, l'orientation des forces positives et du déplacement positif se font vers le haut. Les oscillations sont prises par rapport aux positions initiales. Le mouvement imposé, de pulsation ω , au système primaire est défini par :

$$\begin{cases} x = \frac{\gamma}{\omega^2} \sin(\omega t) = X \sin(\omega t), & X > 0 \\ \dot{x} = X\omega \cos(\omega t), \\ \ddot{x} = -X\omega^2 \sin(\omega t). \end{cases} \quad \begin{matrix} (3.9a) \\ (3.9b) \\ (3.9c) \end{matrix}$$

Par ailleurs, on définit deux zones distinctes d'étude de la période T d'oscillation de x :



Rappelons que la fréquence a une influence sur la valeur de la force d'un oscillateur, dans le cas où la vibration de celui-ci est contrôlée en accélération. Deux oscillateurs de masses différentes, égaux par ailleurs, sont contrôlés à la même fréquence et amplitude d'accélération (Fig. 3.19).

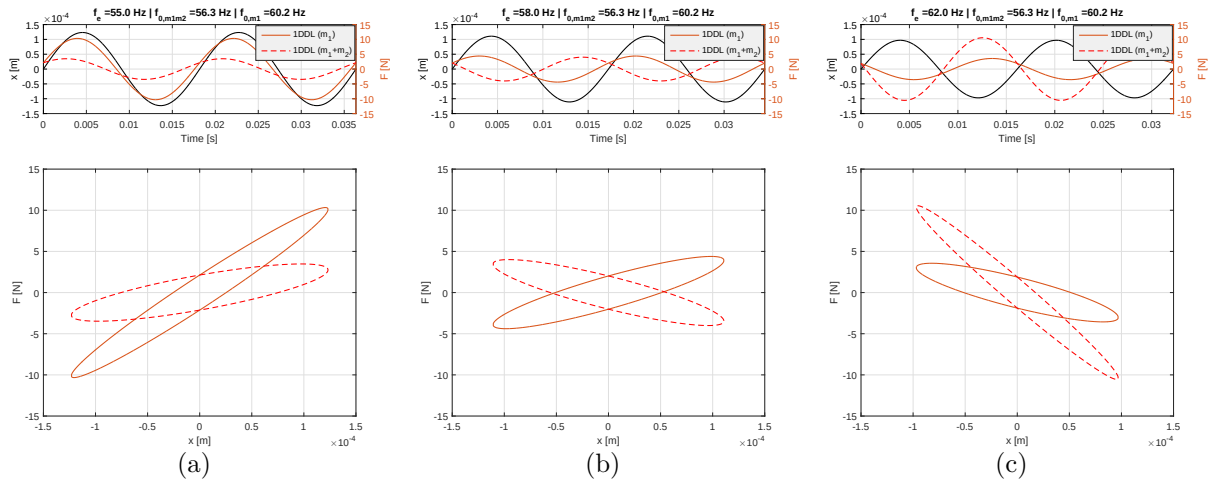


FIGURE 3.19 – Effet de la fréquence d'excitation sur l'orientation des ellipses du diagramme de Lissajous pour deux valeurs de la masse du système : (a) $f = 55$ Hz - (b) $f = 58$ Hz - (c) $f = 62$ Hz.

Les amplitudes des forces et les déphasages sont différents en fonction de la position de la fréquence d'excitation par rapport à la fréquence fondamentale des deux systèmes étudiés :

$$f_{0,m1m2} = 56,3 \text{ Hz},$$

$$f_{0,m1} = 60,2 \text{ Hz}.$$

Différents cas sont présentés :

$f < f_{0,m1m2}$ **ou** $f > f_{0,m1}$: les ellipses sont orientées dans le même sens,

$f_{0,m1m2} < f < f_{0,m1}$: les ellipses sont croisées dû au déphasage.

Les modèles suivants s'intéressent aux sauts entre différentes ellipses, représentatives de la physique de l'expérience à décrire. A $t = 0$, les grains sont en contact avec le fond de la cavité, les conditions initiales en déplacement pour les différents modèles donnent :

$$\text{à } t = 0 \text{ s, } \begin{cases} x = X \sin(\omega t), \\ y = x + y_0, \\ z = x. \end{cases} \quad (3.10)$$

3.3.1 Saut d'une masse secondaire non solidaire (n°2)

Le modèle est constitué d'un système primaire, défini par un oscillateur à 1DDL, qui représente la cavité vide (m_1). Un système secondaire constitué d'un amas de grains ajouté est modélisé par sa masse statique m_2 . Quand l'accélération contrôlée dépasse la valeur seuil de la pesanteur $\gamma < -g$, un décollement est envisagé (Fig. 3.20).



FIGURE 3.20 – Saut d'une masse secondaire non solidaire : (a) mouvement en phase avant décollage - (b) saut de la masse secondaire.

Les conditions initiales en déplacement sont données en début de section. **Sur la 1^{ère} demi-période**, pour $t \in \left[0, \frac{T}{2}\right]$. La phase A décrit la zone où $t \in [0, t_A]$, le mouvement de y est identique à celui de x . Le bilan des forces donne :

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x} = -c_1 \dot{x} - k_1 x + F_1 + F_{3,1} - P_1, \\ m_2 \ddot{y} = F_{3,2} - P_2, \\ 0 \ddot{z} = F_{1,3} + F_{2,3}. \end{cases} \quad (3.11a)$$

$$\begin{cases} m_2 \ddot{y} = F_{3,2} - P_2, \\ 0 \ddot{z} = F_{1,3} + F_{2,3}. \end{cases} \quad (3.11b)$$

$$0 \ddot{z} = F_{1,3} + F_{2,3}. \quad (3.11c)$$

A l'équilibre ($x \rightarrow x + x_0$), ce bilan donne :

$$\begin{cases} 0 = -k_1 x_0 + F_{3,1} - P_1, \\ 0 = F_{3,2} - P_2, \\ 0 = F_{1,3} + F_{2,3}. \end{cases} \quad (3.12a)$$

$$\begin{cases} 0 = F_{3,2} - P_2, \\ 0 = F_{1,3} + F_{2,3}. \end{cases} \quad (3.12b)$$

$$0 = F_{1,3} + F_{2,3}. \quad (3.12c)$$

L'expression statique de la raideur est alors :

$$k_1 x_0 = -P_2 - P_1. \quad (3.13)$$

La force d'excitation F_1 , nécessaire à imposer le déplacement x est écrite en fonction des paramètres du système :

$$F_1 = m_1 \ddot{x} + c_1 \dot{x} + k_1(x + x_0) - F_{3,1} + P_1, \quad (3.14)$$

$$F_1 = m_1 \ddot{x} + c_1 \dot{x} + k_1 x - P_2 - P_1 - F_{2,3} + P_1, \quad (3.15)$$

$$F_1 = m_1 \ddot{x} + c_1 \dot{x} + k_1 x - P_2 - P_1 + F_{3,2} + P_1, \quad (3.16)$$

$$F_1 = m_1 \ddot{x} + c_1 \dot{x} + k_1 x - \cancel{P_2} - \cancel{P_1} + m_2 \ddot{x} + \cancel{P_2} + \cancel{P_1}, \quad (3.17)$$

$$F_1 = (m_1 + m_2) \ddot{x} + c_1 \dot{x} + k_1 x, \quad (3.18)$$

$$F_1 = (-(m_1 + m_2)\omega^2 + k_1)X \sin(\omega t) + c_1 \omega X \cos(\omega t). \quad (3.19)$$

Pour $t \in [0, t_A]$, les masses se suivent, ainsi $\ddot{y} = \ddot{x}$. Cette condition reste vraie tant que $\gamma > -g$.

Pour $t \in [0, t_A]$ (Phase A) : Mouvement en phase, pas de décollage.

La condition de décollage est valable pour une accélération $\gamma < -g$. La phase B décrit la zone où $t \in [t_A, t_B]$, le mouvement de y n'est soumis qu'à son poids propre. Le bilan des forces permet d'écrire :

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x} = -c_1 \dot{x} - k_1 x + F_1, \\ m_2 \ddot{y} = -m_2 g. \end{cases} \quad (3.20a)$$

$$m_2 \ddot{y} = -m_2 g. \quad (3.20b)$$

La force F_1 ne prend en compte que les éléments de l'oscillateur à 1DDL :

$$F_1 = (-m_1 \omega^2 + k_1)X \sin(\omega t) + c_1 \omega X \cos(\omega t). \quad (3.21)$$

La trajectoire de y est calculée via les intégrations successives :

$$\begin{cases} \ddot{y} = -g, \\ \dot{y} = -g \cdot (t - t_A) + \dot{y}(t_A), \\ y = -\frac{1}{2}g \cdot (t - t_A)^2 + \dot{y}(t_A)(t - t_A) + y(t_A). \end{cases} \quad \begin{matrix} (3.22a) \\ (3.22b) \\ (3.22c) \end{matrix}$$

Pour $t \in [t_A, t_B]$ (Phase B) : Décollage de m_2 suivant une trajectoire parabolique.

L'arrêt de ce mouvement particulier est guidé par l'égalité des déplacements $z(t_B) = x(t_B)$. Les deux masses suivent de nouveau la phase A . Cette mise en équation est présentée pour une accélération $\gamma = 2g$ (Fig. 3.21).

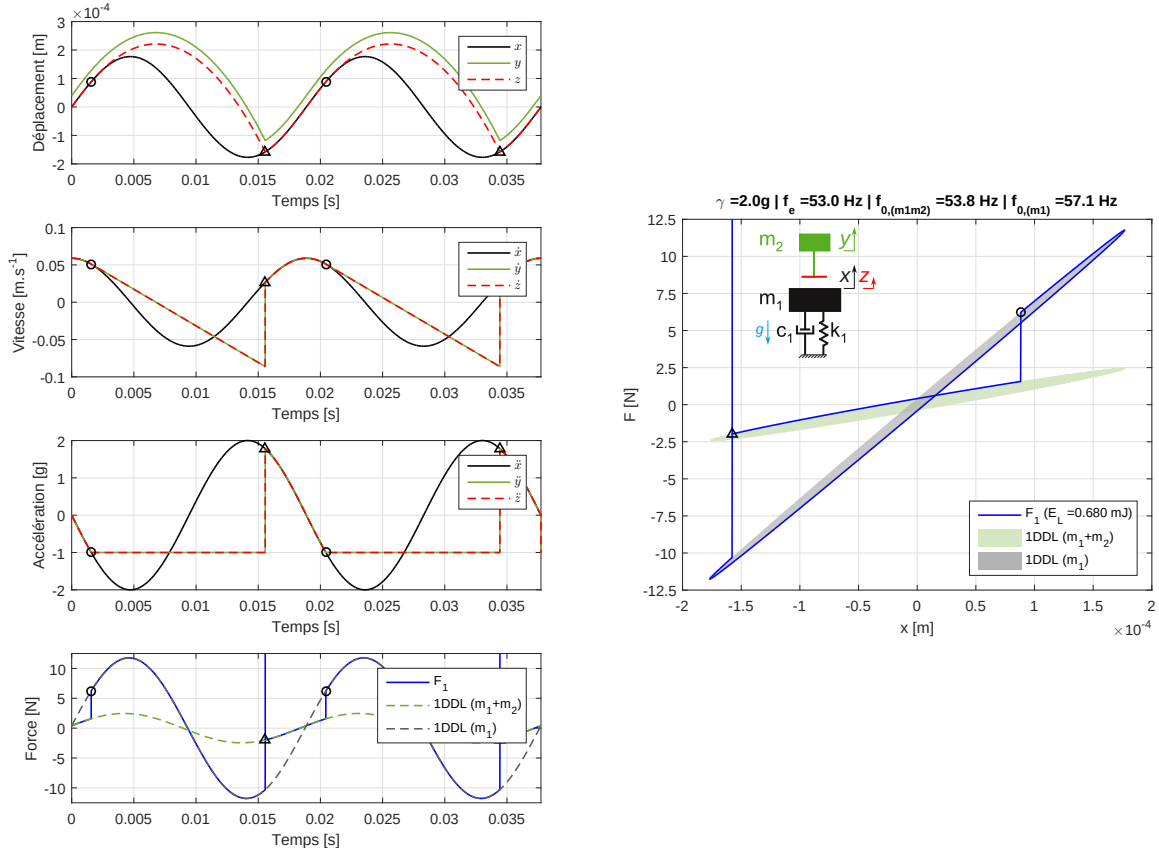


FIGURE 3.21 – Signaux temporels et Lissajous dans le cas du saut d'une masse secondaire non solide ($\gamma > g$, $f = 53$ Hz).

La représentation est effectuée en régime établi. Les passages entre les différentes phases sont représentés par des sauts d'ellipses. La phase A ($\triangle \rightarrow \circ$) suit l'ellipse verte, représentant un oscillateur à 1DDL ($m_1 + m_2$). Quand la condition d'accélération $\gamma = -g$ est atteinte, la masse m_2 décolle. La phase B ($\circ \rightarrow \triangle$) suit l'ellipse grise, représentant un oscillateur à 1DDL (m_1). Le système ne dépend pas de m_2 qui suit une trajectoire balistique. A l'atterrissage, une force infinie provient du changement brusque de vitesse $\dot{y}$. Les déplacements sont alors identiques $y = x$, un retour à la phase A est effectué pour le commencement d'un nouveau cycle.

Différents régimes peuvent être observés suivant la valeur de t_B . En effet, plus la vitesse initiale de décollage est importante, plus la trajectoire de m_2 est importante, ce qui entraîne une augmentation de t_B . Un régime particulier, détaillé dans la **section 1.4.3** du **chapitre 1** peut être obtenu quand t_B d'atterrissage rattrape l'instant t_A de décollage de la période suivante.

Il peut paraître surprenant que la force augmente dans cette simulation : le fait de passer d'une masse ($m_1 + m_2$) à une masse (m_1) décale la fréquence propre du système, qui s'éloigne de la pulsation d'excitation ω . Cela se voit dans l'inclinaison des ellipses vertes et grises et explique l'accroissement des

forces.

Ce modèle nécessite une force infinie au moment de l'impact pour changer instantanément la vitesse $\dot{y}$ de m_2 , ce qui n'est pas réaliste. L'ajout d'un patin frottant à l'atterrissage permet de prendre en compte le ralentissement progressif de m_2 , correspondant à l'empilement des couches de grains au niveau de l'expérience.

3.3.2 Ralentissement d'une masse secondaire à l'atterrissage (n°3)

Les signaux expérimentaux montrent une augmentation progressive de la valeur de la force à partir de l'instant d'atterrissage. Cette augmentation peut être interprétée par l'atterrissage successif des couches de grains. Ce phénomène physique a été modélisé analytiquement par l'ajout d'un troisième corps sans masse et d'un patin frottant à coefficient constant dont le seuil est la force F_{Mf} (Force Max Fond). Ce patin ne glisse que lors de l'atterrissage de la masse secondaire m_2 (Fig. 3.22).

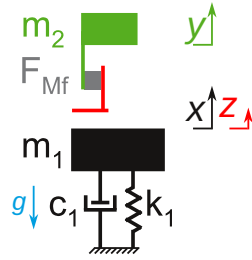


FIGURE 3.22 – Ralentissement d'une masse secondaire à l'atterrissage.

Les conditions initiales en déplacement sont données en début de section. La force entre le corps du solide 3 sur le solide 2, $F_{3,2}$ est telle que :

$$F_{3,2} \in [0, F_{Mf}]. \quad (3.23)$$

Sur la 1^{ère} demi-période, pour $t \in [0, \frac{T}{2}]$. La phase *A* décrit la zone où $t \in [0, t_A]$, le mouvement de y est identique à celui de x . La démonstration précédente peut être reprise pour décrire le système dans cette phase.

Pour $t \in [0, t_A]$ (Phase *A*) : Mouvement en phase, pas de décollage.

La condition de décollage est valable pour une accélération $\gamma < -g$. La phase *B* décrit la zone où $t \in [t_A, t_B]$, le mouvement de y n'est soumis qu'à son poids propre. La démonstration précédente peut être reprise pour décrire le système dans cette phase.

Pour $t \in [t_A, t_B]$ (Phase *B*) : Décollage de m_2 suivant une trajectoire parabolique.

L'arrêt de ce mouvement particulier est guidé par l'égalité des déplacements $z(t_B) = x(t_B)$.

Sur la 2^{ème} demi-période, pour $t \in [\frac{T}{2}, T]$. La phase *C* décrit la zone où $t \in [t_B, t_C]$, le mouvement de y est avec glissement. La masse m_2 est soumise à 2 forces constantes le poids P_2 et F_{Mf} . Le bilan des forces donne :

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x} = -c_1 \dot{x} - k_1 x + F_1 + F_{3,1} - P_1, & (3.24a) \\ m_2 \ddot{y} = F_{3,2} - P_2, & (3.24b) \\ 0 \ddot{z} = F_{1,3} + F_{2,3}. & (3.24c) \end{cases}$$

A l'équilibre ($x \rightarrow x + x_0$), ce bilan donne :

$$\begin{cases} 0 = -k_1 x_0 + F_{3,1} - P_1, & (3.25a) \\ 0 = F_{3,2} - P_2, & (3.25b) \\ 0 = F_{1,3} + F_{2,3}. & (3.25c) \end{cases}$$

L'expression statique de la raideur est alors :

$$k_1 x_0 = -P_2 - P_1. \quad (3.26)$$

La force d'excitation F_1 nécessaire à imposer le déplacement x est écrite en fonction des paramètres du système :

$$m_1 \ddot{x} = -c_1 \dot{x} - k_1(x + x_0) + F_1 + F_{3,1} - P_1, \quad (3.27)$$

$$m_1 \ddot{x} = -c_1 \dot{x} - k_1 x + P_2 + \cancel{P_1} + F_1 + F_{2,3} - \cancel{P_1}, \quad (3.28)$$

$$m_1 \ddot{x} = -c_1 \dot{x} - k_1 x + F_1 + F_{2,3} + P_2, \quad (3.29)$$

$$F_1 = m_1 \ddot{x} + c_1 \dot{x} + k_1 x + F_{3,2} - P_2. \quad (3.30)$$

Le bilan des forces est réécrit :

$$\begin{cases} F_1 = (-m_1 \omega^2 + k_1)X \sin(\omega t) + c_1 \omega X \cos(\omega t) + F_{3,2} - P_2, \\ m_2 \ddot{y} = F_{3,2} - P_2. \end{cases} \quad (3.31a)$$

$$(3.31b)$$

La force $F_{3,2} = +F_{Mf}$ sature, ce qui donne les équations suivantes :

$$\begin{cases} F_1 = (-m_1 \omega^2 + k_1)X \sin(\omega t) + c_1 \omega X \cos(\omega t) + F_{Mf} - P_2, \end{cases} \quad (3.32a)$$

$$m_2 \ddot{y}(t) = +F_{Mf} - P_2, \quad (3.32b)$$

$$m_2 \dot{y}(t) = (+F_{Mf} - P_2)(t - t_B) + m_2 \dot{y}(t_B), \quad (3.32c)$$

$$m_2 y(t) = (+F_{Mf} - P_2) \frac{1}{2} (t - t_B)^2 + m_2 \dot{y}(t_B)(t - t_B) + m_2 y(t_B). \quad (3.32d)$$

Pour $t \in [t_B, t_C]$ (Phase C) : Glissement de m_2 par rapport à m_1 avec F_{Mf} .

L'arrêt du glissement est guidé par $\dot{y}(t_C) = \dot{x}(t_C)$. Pour $t > t_C$, la phase A est de nouveau atteinte. Cette mise en équation est présentée pour un cas analytique, avec les paramètres : $\gamma = 2g - F_{Mf} = 20 \text{ N}$ (Fig. 3.23).

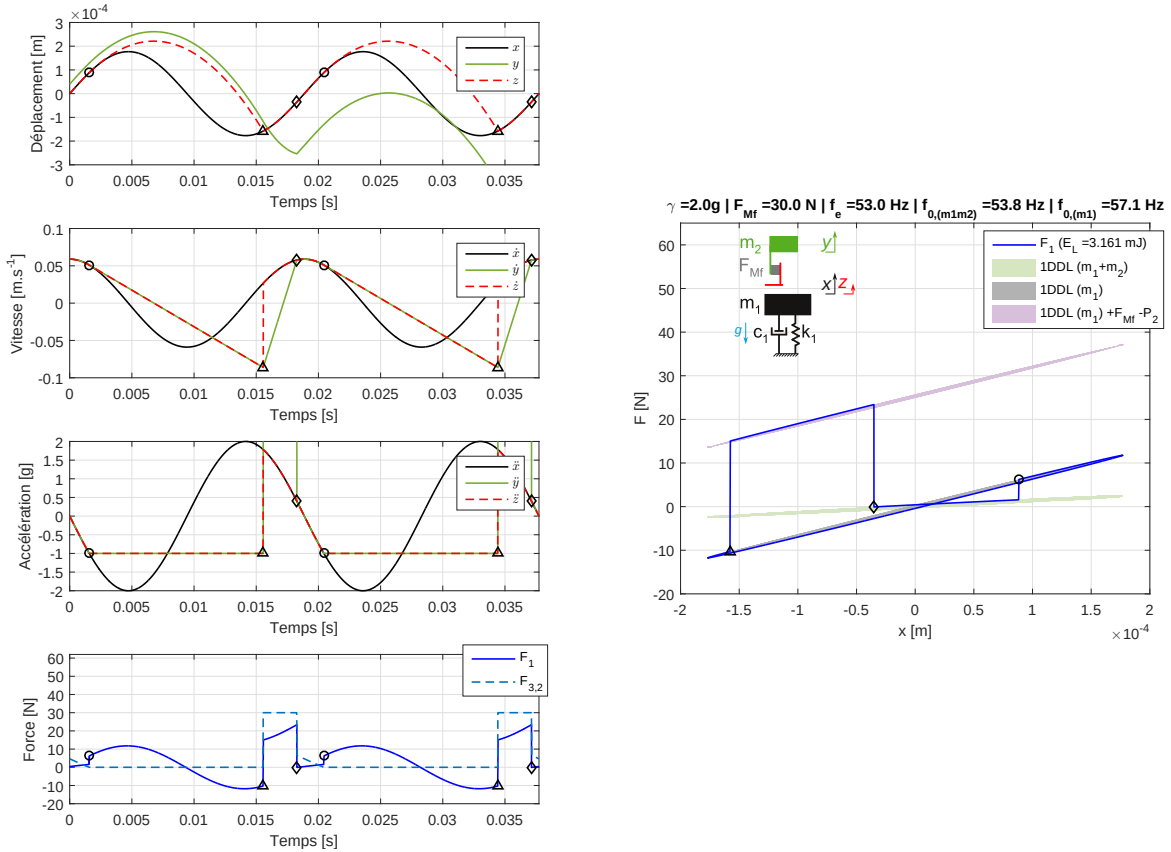


FIGURE 3.23 – Signaux temporels et Lissajous dans le cas du ralentissement d'une masse secondaire à l'atterrissage ($\gamma = 2g$, $F_{Mf} = 30 \text{ N}$).

L'évolution de y décrit le mouvement du centre de gravité de l'amas de grains, représenté ici par la masse m_2 . Or dans l'expérience, le cas $y < x$ n'existe pas. Ce modèle permet cependant d'observer l'ensemble des forces agissant sur m_1 , notamment x et F_1 . Ces deux grandeurs sont mesurées expérimentalement et tracées via la représentation de Lissajous. Ce modèle et ses déclinaisons suivantes, même s'ils mettent en jeu un comportement caduc de y , permettent d'étudier le comportement du matériau granulaire vibré.

La représentation est effectuée en régime établi. Les passages entre les différentes phases sont représentés par les sauts d'ellipses. La phase A ($\diamond \rightarrow \circ$) suit l'ellipse verte, représentant l'oscillateur à 1DDL ($m_1 + m_2$). Les grains sont au fond de la cavité, jusqu'à ce que la condition en accélération soit atteinte. La phase B ($\circ \rightarrow \triangle$) suit l'ellipse grise, représentant l'oscillateur à 1DDL (m_1), la masse m_2 ayant décollé. La condition en déplacement $z = x$ entraîne l'action du patin frottant. La phase C ($\triangle \rightarrow \diamond$) suit l'ellipse violette, représentant l'action ajoutée du patin frottant. Cet ajout de force constante s'arrête à l'égalité $\dot{y} = \dot{x}$ pour un retour à la phase A et le commencement d'un nouveau cycle.

Ce modèle permet de représenter l'atterrissage des grains à la base de la cavité suite à leurs décollages. La durée du ralentissement lié à l'atterrissage est d'autant plus courte que la valeur de F_{Mf} est grande. Pour $t > t_B$, m_2 subit l'influence du patin frottant, elle est ralentie progressivement jusqu'à égalité des vitesses. Au moment où les vitesses sont égales, la force $F_{3,2} \in [-F_{Mf}, F_{Mf}]$, ce qui confirme que la masse m_2 redevient en phase avec le mouvement de la masse m_1 . La variation de la valeur de saturation du patin frottant a un impact sur la quantité d'énergie perdue par le système (Fig. 3.24).

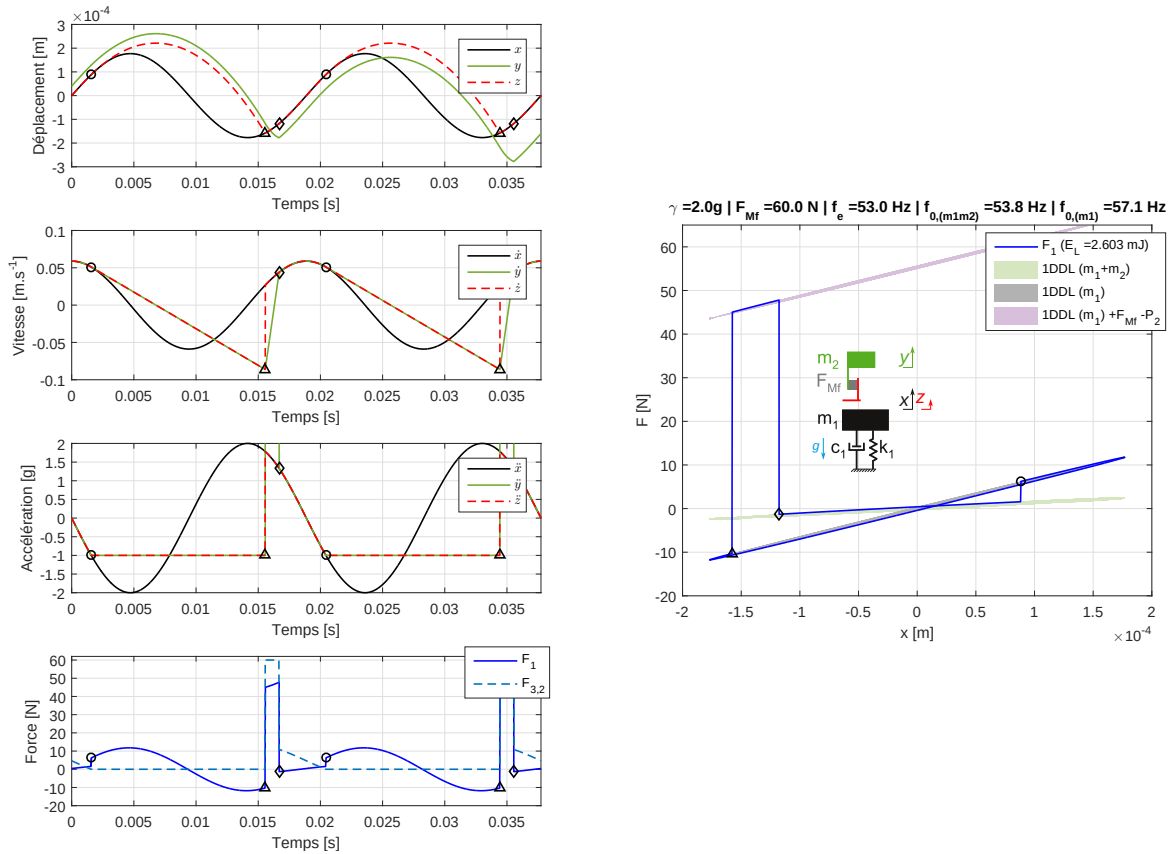


FIGURE 3.24 – Signaux temporels et Lissajous dans le cas du ralentissement d'une masse secondaire à l'atterrissage ($\gamma = 2g$, $F_{Mf} = 60$ N).

L'augmentation de la force de saturation implique une durée de glissement réduite associée à une amplitude de force plus importante. Pour le cas présenté, l'énergie perdue E_L est plus faible. Ce modèle fait abstraction, lorsque les grains ont décollé, des interactions de ceux-ci sur les parois latérales, qui sont prises en compte dans le modèle suivant.

3.3.3 Frottement constant d'une masse secondaire (n°4)

Un frottement constant entre les masses m_1 et m_2 est introduit dans ce modèle (Fig. 3.25). Une liaison par un patin frottant, dont le seuil est la force F_{Mb} (Force Max Bord), permet de représenter le contact entre l'amas de grains et les parois de la cavité indéformable.

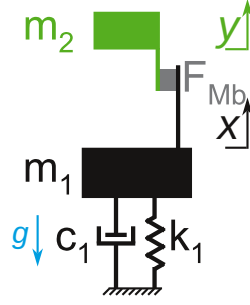


FIGURE 3.25 – Frottement constant d'une masse secondaire.

Les conditions initiales en déplacement sont données en début de section. La force de saturation du patin est donnée par :

$$F_{1,2} \in [-F_{Mb}, F_{Mb}]. \quad (3.33)$$

Sur la 1^{ère} demi-période, pour $t \in [0, \frac{T}{2}]$. La phase A décrit la zone où $t \in [0, t_A]$, le mouvement de y est sans glissement. Le bilan des forces donne :

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x} = -c_1 \dot{x} - k_1 x + F_1 + F_{2,1} - P_1. \\ m_2 \ddot{y} = F_{1,2} - P_2. \end{cases} \quad (3.34a)$$

$$(3.34b)$$

Par le principe d'action réaction, on a $F_{1,2} + F_{2,1} = 0$. En reprenant le développement précédent autour des positions d'équilibre de la raideur k_1 , le bilan des forces permet d'exprimer :

$$F_1 = -(m_1 + m_2)\omega^2 + k_1)X \sin(\omega t) + c_1 \omega X \cos(\omega t). \quad (3.35)$$

Pour $t \in [0, t_A]$, les masses se suivent, ainsi $\ddot{y} = \ddot{x}$. La condition sur les forces donne $F_{1,2} \in [-F_{Mb}, 0]$. Le temps t_A est atteint quand :

$$-F_{Mb} = P_2 + m_2 \ddot{y}, \quad (3.36)$$

$$-F_{Mb} = P_2 + m_2(-\omega^2 X \sin(\omega t_A)), \quad (3.37)$$

$$-F_{Mb} - P_2 = +m_2(-\omega^2 X \sin(\omega t_A)), \quad (3.38)$$

$$\sin(\omega t_A) = \frac{F_{Mb} + P_2}{m_2 \omega^2 X}. \quad (3.39)$$

La condition $0 < \sin(\omega t) < 1$ permet de ne pas avoir de glissement. Or $\exists t_A$ tel que :

$$\sin(\omega t_A) < 1, \quad (3.40)$$

$$\frac{F_{Mb} + P_2}{m_2 \omega^2} < X, \quad (3.41)$$

$$X_A < X. \quad (3.42)$$

Pour $t \in [0, t_A]$ (Phase A) : Mouvement en phase, pas de glissement.

Si la condition n'est pas atteinte, t_A n'existe pas, il n'y a pas de glissement. Si $X > X_A$, m_1 s'éloigne de m_2 et le glissement commence. La phase B décrit la zone où $t \in [t_A, t_B]$. Le bilan des forces permet d'écrire :

$$\begin{cases} F_1 = (-m_1 \omega^2 + k_1)X \sin(\omega t) + c_1 \omega X \cos(\omega t) + F_{1,2} - P_2, \\ m_2 \ddot{y} = F_{1,2} - P_2. \end{cases} \quad (3.43a)$$

$$(3.43b)$$

La force $F_{1,2} = -F_{Mb}$ sature, ce qui donne les équations suivantes :

$$\begin{cases} F_1 = (-m_1 \omega^2 + k_1)X \sin(\omega t) + c_1 \omega X \cos(\omega t) - F_{Mb} - P_2. \\ m_2 \ddot{y} = -F_{Mb} - P_2. \end{cases} \quad (3.44a)$$

$$(3.44b)$$

$$m_2 \dot{y}(t) = (-F_{Mb} - P_2)(t - t_A) + m_2 \dot{y}(t_A). \quad (3.44c)$$

$$m_2 y(t) = (-F_{Mb} - P_2) \frac{1}{2} (t - t_A)^2 + m_2 \dot{y}(t_A)(t - t_A) + m_2 y(t_A). \quad (3.44d)$$

Pour $t \in [t_A, t_B]$ (Phase B) : Glissement de m_2 par rapport à m_1 avec F_{Mb} .

L'arrêt du glissement est guidé par une égalité des vitesses $\dot{y}(t_B) = \dot{x}(t_B)$.

Sur la 2^{ème} demi-période, pour $t \in \left[\frac{T}{2}, T\right]$. La phase C décrit la zone où $t \in [t_B, t_C]$, le mouvement de y est sans glissement. Les déplacements sont ajustés :

$$\text{à } t = t_B, \quad \begin{cases} x = X \sin(\omega t), \\ y = x + y(t_B) - x(t_B). \end{cases} \quad (3.45)$$

Les mouvements sont en phase et la force F_1 est celle associée à un système 1DDL. Pour $t \in [t_B, t_C]$, les masses se suivent, ainsi $\ddot{y} = \ddot{x}$. La condition sur les forces donne $F_{1,2} \in [0, +F_{Mb}]$. Le temps t_C est atteint quand :

$$+F_{Mb} = P_2 + m_2 \ddot{y}, \quad (3.46)$$

$$+F_{Mb} = P_2 + m_2(-\omega^2 X \sin(\omega t_C)), \quad (3.47)$$

$$+F_{Mb} - P_2 = +m_2(-\omega^2 X \sin(\omega t_C)), \quad (3.48)$$

$$\sin(\omega t_C) = \frac{-F_{Mb} + P_2}{m_2 \omega^2 X}. \quad (3.49)$$

Pour que t_C existe, il faut que :

$$\sin(\omega t_C) > -1, \quad (3.50)$$

$$\frac{-F_{Mb} + P_2}{m_2 \omega^2} > -X, \quad (3.51)$$

$$\frac{F_{Mb} - P_2}{m_2 \omega^2} < X, \quad (3.52)$$

$$X_C < X. \quad (3.53)$$

 Pour $t \in [t_B, t_C]$ (Phase C) : Mouvement en phase, pas de glissement.

Si $X > X_C$ (où $-X < -X_C$, dans le cas de la 2^{ème} demi-période), le frottement a lieu dans l'autre sens. La phase D décrit la zone où $t \in [t_C, t_D]$, le mouvement de y est avec glissement. Le bilan des forces permet d'écrire :

$$\begin{cases} F_1 = (-m_1 \omega^2 + k_1)X \sin(\omega t) + c_1 \omega X \cos(\omega t) + F_{1,2} - P_2, \\ m_2 \ddot{y} = F_{1,2} - P_2. \end{cases} \quad (3.54a)$$

$$(3.54b)$$

La force $F_{1,2} = +F_{Mb}$ sature, ce qui donne les équations suivantes :

$$\begin{cases} F_1 = (-m_1 \omega^2 + k_1)X \sin(\omega t) + c_1 \omega X \cos(\omega t) + F_{Mb} - P_2. \end{cases} \quad (3.55a)$$

$$\begin{cases} m_2 \ddot{y} = +F_{Mb} - P_2. \end{cases} \quad (3.55b)$$

$$\begin{cases} m_2 \dot{y}(t) = (+F_{Mb} - P_2)(t - t_C) + m_2 \dot{y}(t_C). \end{cases} \quad (3.55c)$$

$$\begin{cases} m_2 y(t) = (+F_{Mb} - P_2) \frac{1}{2} (t - t_C)^2 + m_2 \dot{y}(t_C)(t - t_C) + m_2 y(t_C). \end{cases} \quad (3.55d)$$

 Pour $t \in [t_C, t_D]$ (Phase D) : Glissement de m_2 par rapport à m_1 avec F_{Mb} .

L'arrêt du glissement est guidé par une égalité des vitesses $\dot{y}(t_D) = \dot{x}(t_D)$. La masse m_2 suit m_1 , jusqu'à ce que la condition de la phase A soit de nouveau atteinte. Cette mise en équation est présentée pour un cas analytique, avec les paramètres : $\gamma = 3g$, $F_{Mb} = 8 \text{ N}$ (Fig. 3.26).

La représentation du diagramme de Lissajous est effectuée en régime stationnaire établi, la première période temporelle est une initialisation du modèle. Les conditions à $t = 0$ ne sont pas retrouvées à $t = T$, car le frottement s'arrête plus tard. Le régime stationnaire établi ne présente donc pas les 4 phases décrites précédemment. Les passages entre les différentes phases sont représentés par les sauts d'ellipses. Dans le cas présenté, deux points sont confondus, une des phases est donc absente. Néanmoins les différentes étapes sont détaillées.

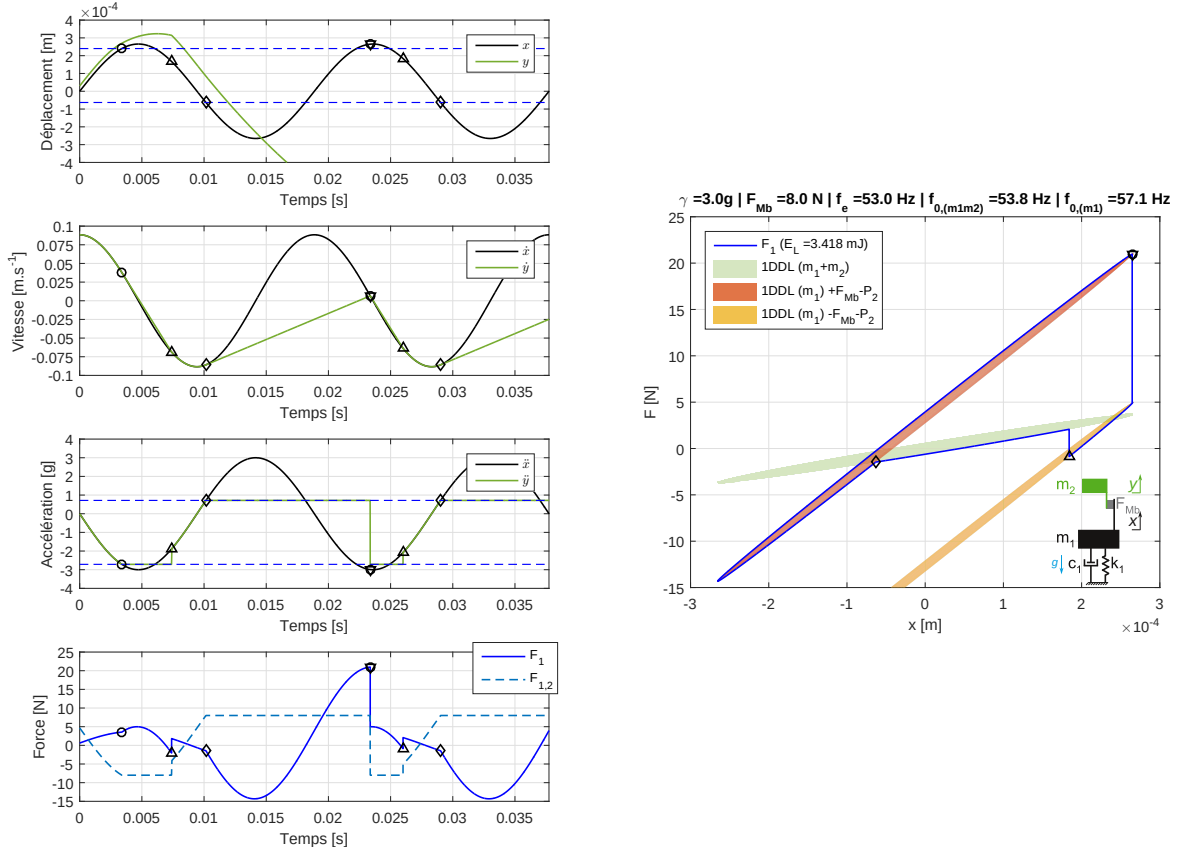


FIGURE 3.26 – Signaux temporels et Lissajous dans le cas du frottement constant d’une masse secondaire ($\gamma = 3g$, $F_{Mb} = 8 \text{ N}$).

La phase A ($\nabla \rightarrow \bigcirc$) devrait suivre l’ellipse verte, représentant l’oscillateur à 1DDL ($m_1 + m_2$). Le mouvement de m_2 correspond au mouvement de m_1 . Les deux points sont confondus en raison des seuils appliqués au modèle. La phase B ($\bigcirc \rightarrow \triangle$) suit l’ellipse jaune, représentant une continuité en force sous l’action ajoutée d’un patin frottant suite au franchissement d’un premier seuil en déplacement. Cette action s’arrête à l’égalité des vitesses $\dot{y} = \dot{x}$. La phase C ($\triangle \rightarrow \diamond$) suit l’ellipse verte, la condition d’arrêt du glissement étant atteinte. La phase D ($\diamond \rightarrow \nabla$) suit l’ellipse rouge, représentant une deuxième continuité en force quand le système a atteint un deuxième seuil en déplacement. Cet ajout de force constant s’arrête à l’égalité $\dot{y} = \dot{x}$ pour un retour à la phase A et le commencement d’un nouveau cycle. Au moment où les vitesses sont égales, la force $F_{1,2} \in [-F_{Mb}, F_{Mb}]$, ce qui confirme que la masse m_2 redevient en phase avec le mouvement de la masse m_1 .

L’influence de l’amplitude d’accélération sur les seuils de frottement, pour une même valeur F_{Mb} , est représenté (Fig. 3.27).

Les seuils ne sont pas symétriques. Dans ce cas particulier avec une accélération réduite, seul le seuil de la 2^{ème} demi-période est atteint, correspondant à la phase D. L’arrêt du frottement est régi par la condition d’égalité des vitesses $\dot{y} = \dot{x}$, correspondant à la phase A. Au moment où les vitesses sont égales, la force $F_{1,2} \in [-F_{Mb}, F_{Mb}]$, ce qui confirme que la masse m_2 redevient en phase avec le mouvement de la masse m_1 . En régime établi, le système oscille entre ces deux états.

La combinaison de ces deux frottements constitue un modèle plus complexe permettant de représenter les deux contributions de la perte d’énergie : saut des grains et frottement latéral.

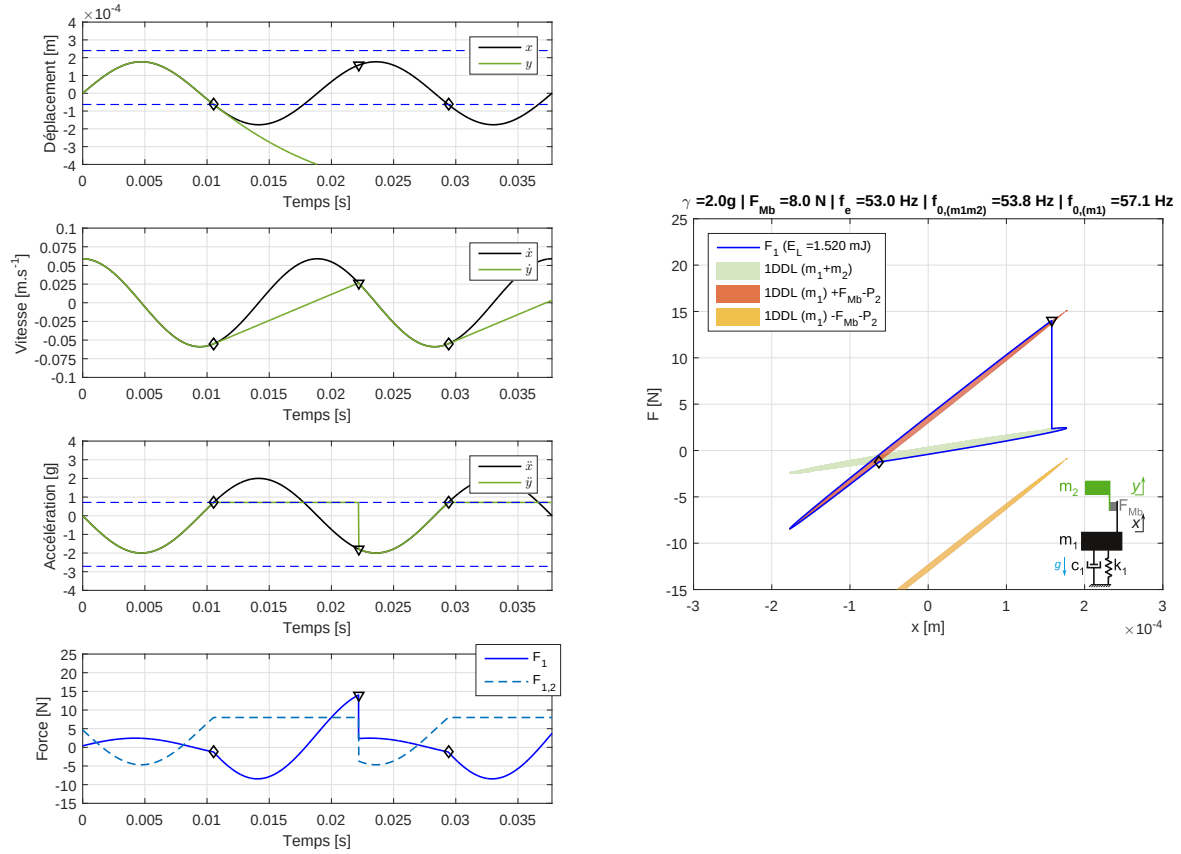


FIGURE 3.27 – Signaux temporels et Lissajous dans le cas du frottement constant d'une masse secondaire ($\gamma = 2g$, $F_{Mb} = 8$ N).

3.3.4 Association des deux contributions de frottement (n°5)

Les deux origines de dissipation décrites précédemment sont combinées dans un modèle unique (Fig. 3.28). La composante F_{Mf} décrit l'atterrissage des grains à la base de la cavité, F_{Mb} représente le frottement des grains sur les bords de la cavité. Analytiquement ces deux éléments sont des patins frottants permettant un glissement sous certaines conditions.

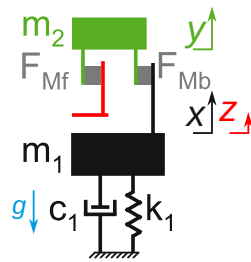


FIGURE 3.28 – Association des deux contributions de frottement.

Les conditions initiales en déplacement sont données en début de section. Les forces de saturation des patins sont données par :

$$\begin{aligned} F_{1,2} &\in [-F_{Mb}, F_{Mb}], \\ F_{3,2} &\in [0, F_{Mf}]. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Sur la 1^{ère} demi-période, pour $t \in [0, \frac{T}{2}]$. La phase A décrit la zone où $t \in [0, t_A]$, le mouvement de y est sans glissement. Le bilan des forces donne :

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x} = -c_1 \dot{x} - k_1 x + F_1 + F_{2,1} + F_{3,1} - P_1, & (3.57a) \\ m_2 \ddot{y} = F_{1,2} + F_{3,2} - P_2, & (3.57b) \\ 0 \ddot{z} = F_{1,3} + F_{2,3}. & (3.57c) \end{cases}$$

A l'équilibre ($x \rightarrow x + x_0$), ce bilan donne :

$$\begin{cases} 0 = -k_1 x_0 + F_{2,1} + F_{3,1} - P_1, \\ 0 = F_{1,2} + F_{3,2} - P_2, \\ 0 = F_{1,3} + F_{2,3}. \end{cases} \quad \begin{matrix} (3.58a) \\ (3.58b) \\ (3.58c) \end{matrix}$$

L'expression statique de la raideur est alors :

$$k_1 x_0 = -P_2 - P_1. \quad (3.59)$$

La force d'excitation F_1 , nécessaire à imposer le déplacement x est écrite en fonction des paramètres du système :

$$F_1 = m_1 \ddot{x} + c_1 \dot{x} + k_1(x + x_0) - F_{2,1} - F_{3,1} + P_1, \quad (3.60)$$

$$F_1 = m_1 \ddot{x} + c_1 \dot{x} + k_1 x - P_2 - P_1 + F_{1,2} - F_{2,3} + P_1, \quad (3.61)$$

$$F_1 = m_1 \ddot{x} + c_1 \dot{x} + k_1 x - P_2 - P_1 + F_{1,2} + F_{3,2} + P_1, \quad (3.62)$$

$$F_1 = m_1 \ddot{x} + c_1 \dot{x} + k_1 x - \cancel{P_2} - \cancel{P_1} + \cancel{P_2} + m_2 \ddot{x} + \cancel{P_1}, \quad (3.63)$$

$$F_1 = (m_1 + m_2) \ddot{x} + c_1 \dot{x} + k_1 x. \quad (3.64)$$

Pour $t \in [0, t_A]$, les masses se suivent, ainsi $\ddot{y} = \ddot{x}$. La condition sur les forces donne $F_{1,2} + F_{3,2} \in [-F_{Mb}, 0]$. Le temps t_A est atteint quand :

$$-F_{Mb} = P_2 + m_2 \ddot{y}, \quad (3.65)$$

$$-F_{Mb} = P_2 + m_2(-\omega^2 X \sin(\omega t_A)), \quad (3.66)$$

$$-F_{Mb} - P_2 = +m_2(-\omega^2 X \sin(\omega t_A)), \quad (3.67)$$

$$\sin(\omega t_A) = \frac{F_{Mb} + P_2}{m_2 \omega^2 X}. \quad (3.68)$$

La condition $0 < \sin(\omega t) < 1$ permet de ne pas avoir de glissement. Or $\exists t_A$ tel que :

$$\sin(\omega t_A) < 1, \quad (3.69)$$

$$\frac{F_{Mb} + P_2}{m_2 \omega^2} < X, \quad (3.70)$$

$$X_A < X. \quad (3.71)$$

Pour $t \in [0, t_A]$ (Phase A) : Mouvement en phase, pas de glissement.

Si $X > X_A$, z décolle et le glissement commence. La phase B décrit la zone où $t \in [t_A, t_B]$, le mouvement de y est avec glissement. Le bilan des forces permet d'écrire :

$$\begin{cases} F_1 = (-m_1 \omega^2 + k_1) X \sin(\omega t) + c_1 \omega X \cos(\omega t) + F_{1,2} - P_2, \\ m_2 \ddot{y} = F_{1,2} - P_2. \end{cases} \quad \begin{matrix} (3.72a) \\ (3.72b) \end{matrix}$$

La force $F_{1,2} = -F_{Mb}$ sature, ce qui donne les équations suivantes :

$$\begin{cases} F_1 = (-m_1 \omega^2 + k_1) X \sin(\omega t) + c_1 \omega X \cos(\omega t) - F_{Mb} - P_2. \end{cases} \quad (3.73a)$$

$$\begin{cases} m_2 \ddot{y} = -F_{Mb} - P_2. \end{cases} \quad (3.73b)$$

$$\begin{cases} m_2 \dot{y}(t) = (-F_{Mb} - P_2)(t - t_A) + m_2 \dot{y}(t_A). \end{cases} \quad (3.73c)$$

$$\begin{cases} m_2 y(t) = (-F_{Mb} - P_2) \frac{1}{2} (t - t_A)^2 + m_2 \dot{y}(t_A)(t - t_A) + m_2 y(t_A). \end{cases} \quad (3.73d)$$

Pour $t \in [t_A, t_B]$ (Phase B) : Glissement de m_2 par rapport à m_1 avec F_{Mb} .

L'arrêt du glissement est guidé par une égalité des vitesses $\dot{y}(t_B) = \dot{x}(t_B)$. Il n'y a alors plus de glissement.

Sur la 2^{ème} demi-période, pour $t \in \left[\frac{T}{2}, T\right]$. La phase C décrit la zone où $t \in [t_B, t_C]$, le mouvement de y est sans glissement. Les déplacements sont ajustés :

$$\text{à } t = t_B, \quad \begin{cases} x = X \sin(\omega t), \\ y = x + y(t_B) - x(t_B), \\ z = y + z(t_B) - y(t_B). \end{cases} \quad (3.74)$$

Les mouvements sont en phase et la force F_1 est celle associée à un système 1DDL (Eq. 3.64). Pour $t \in [t_B, t_C]$, les masses se suivent, ainsi $\ddot{y} = \ddot{x}$. La condition sur les forces donne $F_{1,2} \in [0, +F_{Mb}]$. Le temps t_C est atteint quand :

$$+F_{Mb} = P_2 + m_2\ddot{y}, \quad (3.75)$$

$$+F_{Mb} = P_2 + m_2(-\omega^2 X \sin(\omega t_C)), \quad (3.76)$$

$$+F_{Mb} - P_2 = +m_2(-\omega^2 X \sin(\omega t_C)), \quad (3.77)$$

$$\sin(\omega t_C) = \frac{-F_{Mb} + P_2}{m_2\omega^2 X}. \quad (3.78)$$

La condition $-1 < \sin(\omega t) < 0$ permet de ne pas avoir de glissement. Or $\exists t_C$ tel que :

$$\sin(\omega t_A) > -1, \quad (3.79)$$

$$\frac{-F_{Mb} + P_2}{m_2\omega^2} > -X, \quad (3.80)$$

$$X_C > -X. \quad (3.81)$$

Pour $t \in [t_B, t_C]$ (Phase C) : Mouvement en phase, pas de glissement.

Si $-X < X_C$, le frottement a lieu dans l'autre sens. La phase D décrit la zone où $t \in [t_C, t_D]$, le mouvement de y est avec glissement. Le bilan des forces permet d'écrire :

$$\begin{cases} F_1 = (-m_1\omega^2 + k_1)X \sin(\omega t) + c_1\omega X \cos(\omega t) + F_{1,2} - P_2, \\ m_2\ddot{y} = F_{1,2} - P_2. \end{cases} \quad (3.82a)$$

$$\quad (3.82b)$$

La force $F_{1,2} = +F_{Mb}$ sature, ce qui donne les équations suivantes :

$$\begin{cases} F_1 = (-m_1\omega^2 + k_1)X \sin(\omega t) + c_1\omega X \cos(\omega t) + F_{Mb} - P_2. \end{cases} \quad (3.83a)$$

$$\begin{cases} m_2\ddot{y} = +F_{Mb} - P_2. \end{cases} \quad (3.83b)$$

$$\begin{cases} m_2\dot{y}(t) = (+F_{Mb} - P_2)(t - t_C) + m_2\dot{y}(t_C). \end{cases} \quad (3.83c)$$

$$\begin{cases} m_2y(t) = (+F_{Mb} - P_2)\frac{1}{2}(t - t_C)^2 + m_2\dot{y}(t_C)(t - t_C) + m_2y(t_C). \end{cases} \quad (3.83d)$$

L'arrêt d'une première phase de glissement est guidé par une égalité des déplacements $z(t_D) = x(t_D)$. Cet effet est associé à l'atterrissage des grains à la base de la cavité.

Pour $t \in [t_C, t_D]$ (Phase D) : Glissement de m_2 par rapport à m_1 avec F_{Mb} .

La phase E décrit la zone où $t \in [t_D, t_E]$, le mouvement de y est avec glissement. Le bilan des forces permet d'écrire. Une deuxième contribution de frottement est ajoutée au bilan des forces :

$$\begin{cases} F_1 = (-m_1\omega^2 + k_1)X \sin(\omega t) + c_1\omega X \cos(\omega t) + F_{1,2} + F_{3,2} - P_2, \\ m_2\ddot{y} = F_{1,2} + F_{3,2} - P_2. \end{cases} \quad (3.84a)$$

$$\quad (3.84b)$$

Les forces $F_{1,2} = +F_{Mb}$ & $F_{3,2} = +F_{Mf}$ saturent, ce qui donne les équations suivantes :

$$\begin{cases} F_1 = (-m_1\omega^2 + k_1)X \sin(\omega t) + c_1\omega X \cos(\omega t) + F_{Mb} + F_{Mf} - P_2. \end{cases} \quad (3.85a)$$

$$\begin{cases} m_2\ddot{y} = +F_{Mb} + F_{Mf} - P_2. \end{cases} \quad (3.85b)$$

$$\begin{cases} m_2\dot{y}(t) = (+F_{Mb} + F_{Mf} - P_2)(t - t_D) + m_2\dot{y}(t_D). \end{cases} \quad (3.85c)$$

$$\begin{cases} m_2y(t) = (+F_{Mb} + F_{Mf} - P_2)\frac{1}{2}(t - t_D)^2 + m_2\dot{y}(t_D)(t - t_D) + m_2y(t_D). \end{cases} \quad (3.85d)$$

Pour $t \in [t_D, t_E]$ (Phase E) : Glissement de m_2 par rapport à m_1 avec F_{Mb} & F_{Mf} .

L'arrêt du glissement est guidé par une égalité des vitesses $\dot{y}(t_E) = \dot{x}(t_E)$. Il n'y a alors plus de glissement, les mouvements x, y, z sont en phase jusqu'à ce que la condition de la phase A soit de nouveau atteinte. Cette mise en équation est présentée pour un cas analytique, avec les paramètres suivants : $\gamma = 3g - F_{Mb} = 7 \text{ N} - F_{Mf} = 10 \text{ N}$ (Fig. 3.29).

La représentation est effectuée en régime établi. Les passages entre les différentes phases sont représentés par les sauts d'ellipses. La phase A ($\square \rightarrow \bigcirc$) suit l'ellipse verte, représentant à l'oscillateur à 1DDL. Une

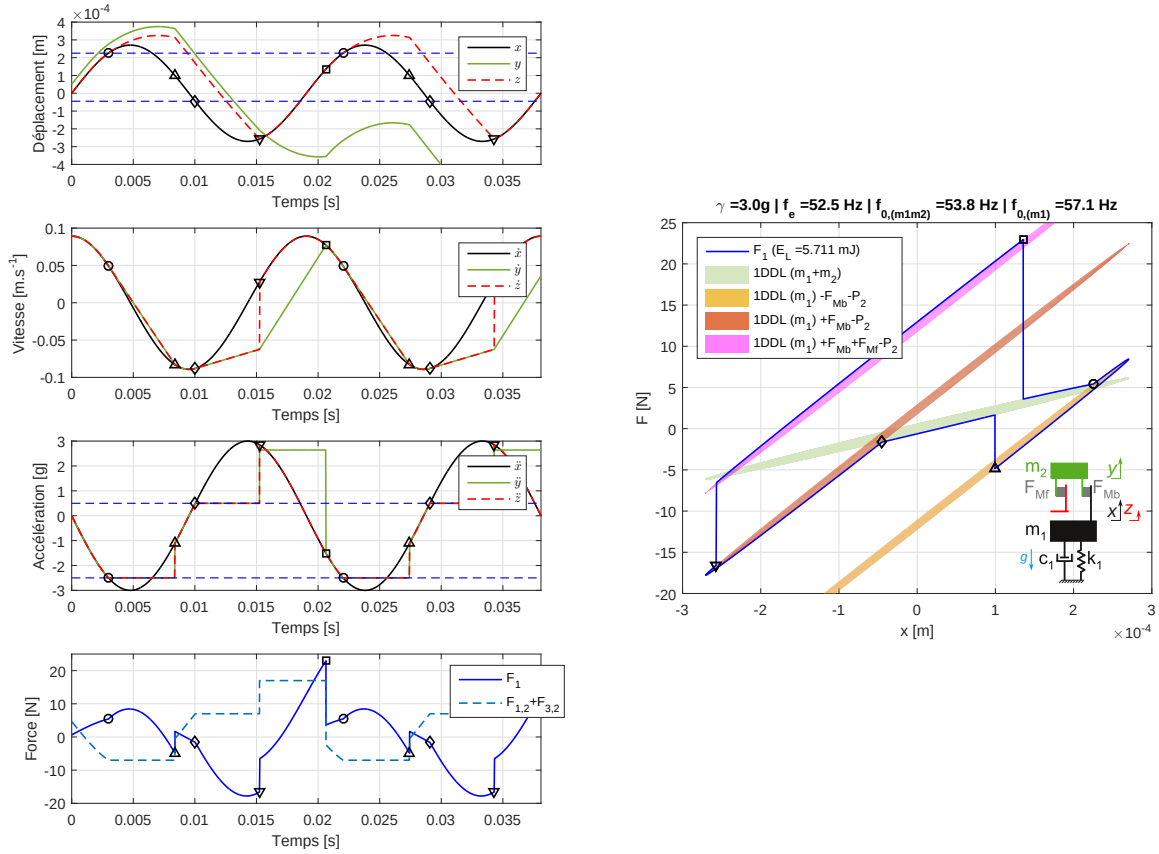


FIGURE 3.29 – Signaux temporels et Lissajous dans le cas de l’association des deux contributions de frottement ($F_{Mb} = 7$ N, $F_{Mf} = 10$ N).

première condition est atteinte sur la valeur du déplacement. La phase B ($\circ \rightarrow \triangle$) suit l’ellipse jaune, représentant une continuité en force sous l’action ajoutée d’un patin frottant suite au franchissement d’un premier seuil en déplacement. Cette action s’arrête à l’égalité des vitesses $\dot{y} = \dot{x}$. La phase C ($\triangle \rightarrow \diamond$) suit l’ellipse verte, la condition d’arrêt du glissement étant atteinte. La phase D ($\diamond \rightarrow \nabla$) suit l’ellipse rouge, représentant une deuxième continuité en force quand le système a atteint un deuxième seuil en déplacement. Une condition en déplacement $z = x$ entraîne l’action d’un 2^{ème} patin frottant. La phase E ($\nabla \rightarrow \square$) suit l’ellipse magenta, représentant l’action ajoutée de deux patins frottants. Cette action s’arrête à l’égalité des vitesses $\dot{y} = \dot{x}$ pour un retour à la phase A et le commencement d’un nouveau cycle.

A chacune des étapes, au moment où les critères de vitesses sont atteintes, la force $F_{1,2} + F_{3,2} \in [-F_{Mb}, F_{Mb} + F_{Mf}]$, ce qui confirme que la masse m_2 redevient en phase avec le mouvement de la masse m_1 .

Ce modèle, mettant en jeu uniquement des effets de frottement ne permet pas de retrouver l’allure des signaux expérimentaux avec grains de verre ($\varnothing = 2$ mm). Notamment la phase où les grains sont en vol, caractérisée par un élargissement de l’ellipse du diagramme de Lissajous. Le frottement des grains sur la paroi n’est donc pas un mécanisme dissipatif prédominant au sein de l’amas de grains.

Néanmoins, des contacts sont présents pendant la phase de vol. La somme des contacts à l’intérieur du matériau granulaire est donc transmise à la cavité via une somme de contacts normaux. Cet effet est modélisé par un couple amortissement-raideur équivalent d’un oscillateur.

Pour l’ensemble des modèles avec patin(s) frottant(s), à chaque cycle, la masse m_2 descend. Un état stationnaire n’est pas atteint. Il est donc nécessaire de mettre au point un modèle avec raideur entre les masses m_1 et m_2 pour empêcher la chute inévitable de y .

3.4 Confrontation du modèle à l'expérience

La confrontation se base sur la mise en vibration d'un amas de grains en verre ($m_2 = 476$ gr, $\varnothing = 2$ mm, $f = 52,5$ Hz, $\gamma = 3g$). Seules les valeurs du couple F_{Mb} , F_{Mf} peuvent être optimisées, il existe donc une infinité de couples solutions. La démarche adoptée est de trouver une valeur d'énergie perdue E_L comparable à l'expérience pour laquelle une forme de courbe de Lissajous est la plus ressemblante à la courbe expérimentale (Fig. 3.30).

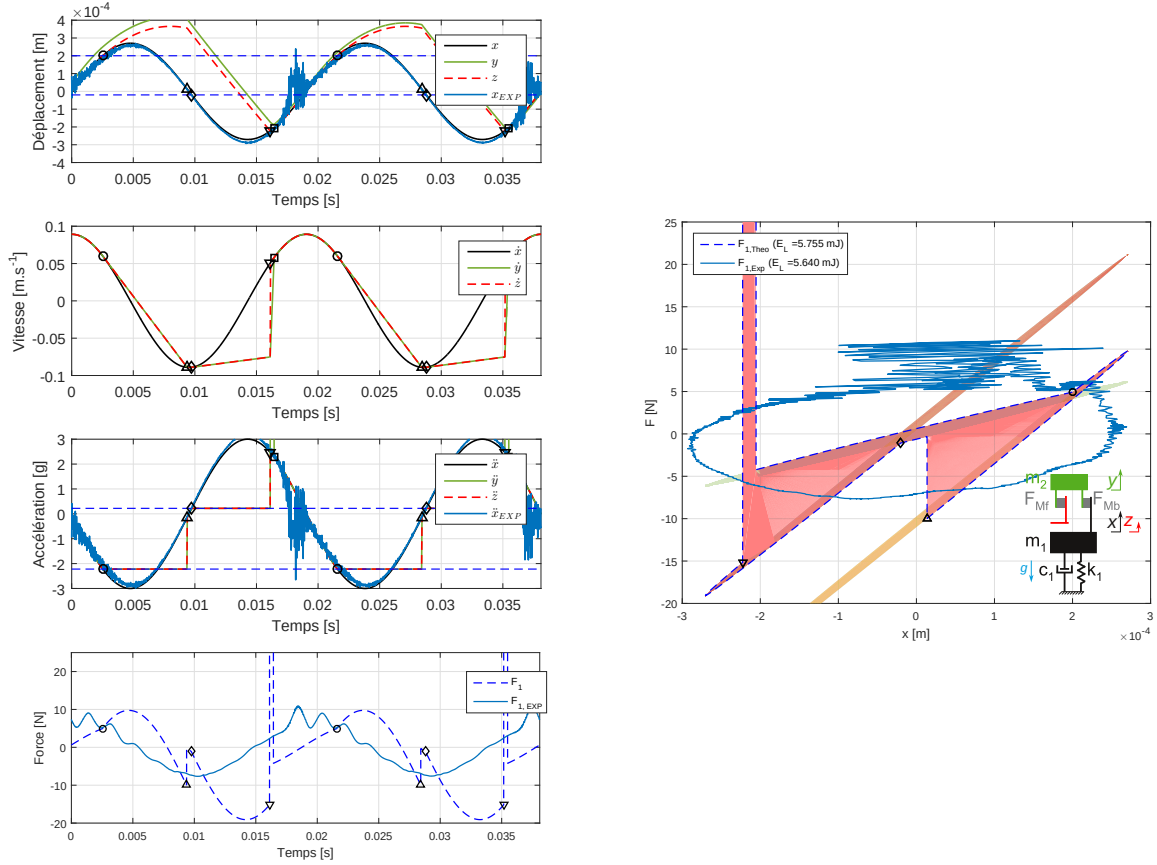


FIGURE 3.30 – Confrontation du modèle avec frottement de Coulomb à l'expérience ($\gamma = 3g$, $F_{Mb} = 5,7$ N, $F_{Mf} = 200$ N).

D'abord, la forme globale de l'ellipse expérimentale n'est pas respectée au niveau du modèle. Les points remarquables décrivant les différentes phases ne sont plus aussi distincts. Le couple de forces F_{Mb} , F_{Mf} entraînent des phases de glissement et est choisi pour un accord le plus précis possible de la valeur de E_L . Dans ce cas, la force à l'atterrissage a une amplitude trop importante pour pouvoir être représentative de l'expérience. Un autre couple de forces est utilisé (Fig. 3.31).

Les amplitudes des forces sont dans ce cas plus restreintes au domaine d'étude, la valeur d'énergie Lissajous E_L est atteinte. Plusieurs remarques sont à noter. D'abord, une zone d'accroche, correspondant à la phase C ($\triangle \rightarrow \diamond$) n'est pas observable expérimentalement. La phénoménologie de l'action brusque des patins frottants n'est pas la méthode optimum pour décrire les interactions avec la surface latérale. De plus, l'atterrissage des grains, correspondant à la phase E ($\nabla \rightarrow \square$) a un temps caractéristique plus long que le réel temps d'atterrissage des couches successives de grains.

Les interactions microscopiques ne sont pas visibles à l'échelle macroscopique, le frottement latéral ne va pas jouer un rôle important. Le modèle associé à la dissipation induite par le contact des grains avec la surface latérale de la cavité doit être modifié. Une allure elliptique de la représentation de Lissajous expérimentale est issue de l'interaction des grains avec la cavité. C'est la résultante de la somme des contacts au sein de l'amas qui est transmise à la paroi. Une raideur en parallèle à un amortissement visqueux constitue la suite du développement analytique engagé. Dans le cas suivant ce n'est pas la physique de l'interface qui cherche à être modélisée, mais la dissipation induite par le matériau granulaire.

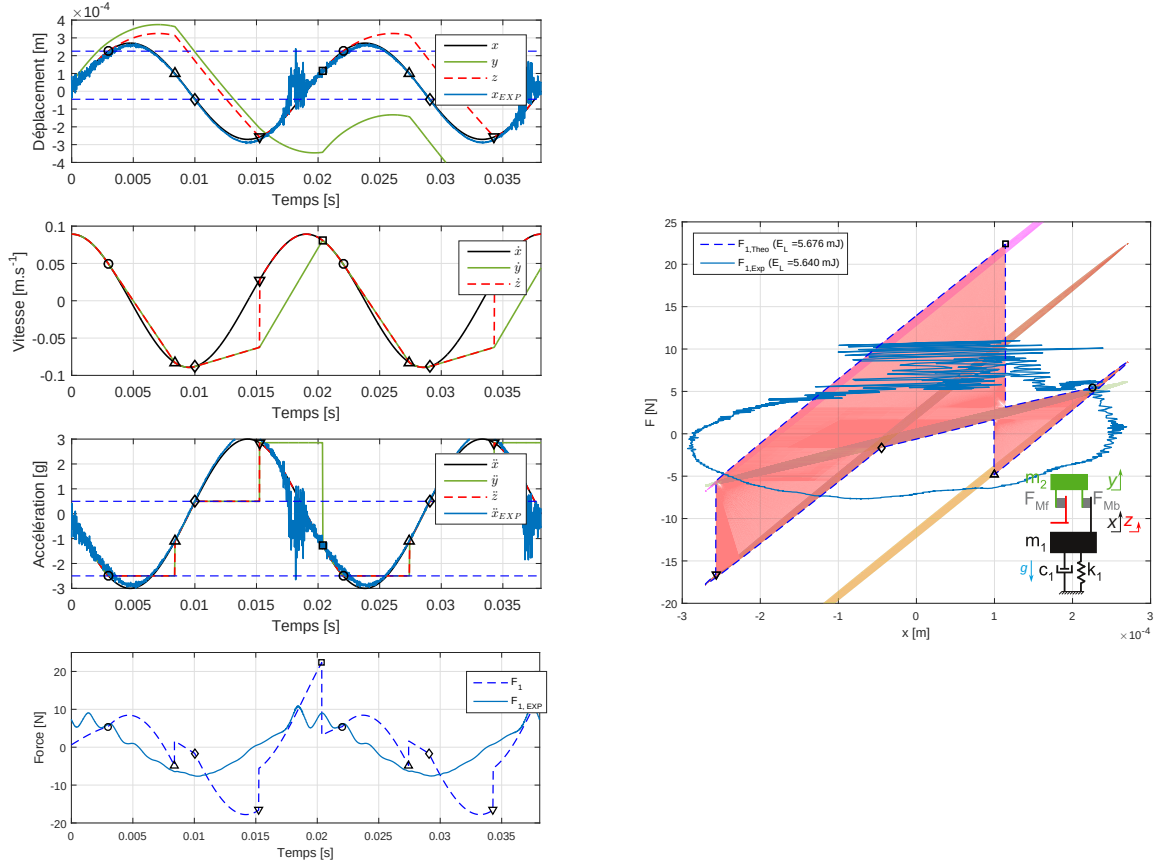


FIGURE 3.31 – Confrontation du modèle avec frottement de Coulomb à l'expérience ($\gamma = 3g$, $F_{Mb} = 7$ N, $F_{Mf} = 11$ N).

3.5 Modèles analytiques à constantes localisées utilisant la dissipation viscoélastique

Lorsque les grains sont éjectés de la base de la cavité, la dissipation observée expérimentalement ne peut pas être décrite analytiquement par des coefficients de frottements constants. C'est le mouvement interne des grains qui entraîne cette perte d'énergie, transmise à la paroi via un effort normal. Par ailleurs la phénoménologie des modèles précédents prend en compte un mouvement y qui n'entre pas en contact avec x ou z . L'ajout d'une raideur k_2 entre m_1 et m_2 représente la compressibilité du matériau granulaire, le coefficient c_2 représente la dissipation dans le nuage de grains. Les itérations de modèles prennent pour point de départ une combinaison de deux oscillateurs (Fig. 3.32).

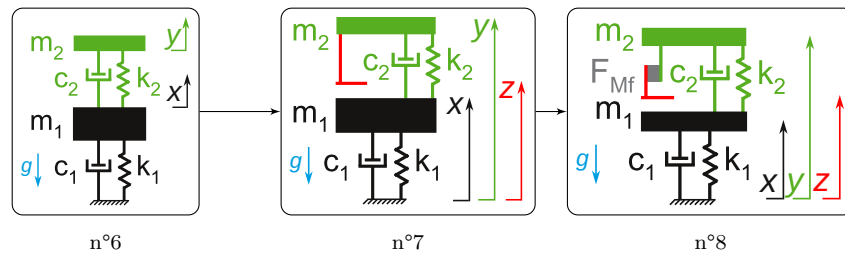


FIGURE 3.32 – Etapes successives de développement d'un modèle analytique représentant la dissipation induite par la mise en vibration d'un amas de grains.

Les conditions d'excitation de l'oscillateur primaire sont identiques aux précédentes.

3.5.1 Ajout d'une contribution de dissipation par un deuxième oscillateur (n°6)

Le modèle suivant est constitué des deux oscillateurs. La masse m_1 représente la cavité vide, la masse m_2 représente la masse statique des grains. Les conditions de raccord c_2 et k_2 décrivent les interactions des grains avec les parois de la cavité (Fig. 3.33). Ce cas tout à fait classique est traité ici pour faciliter la mise en place du modèle suivant.

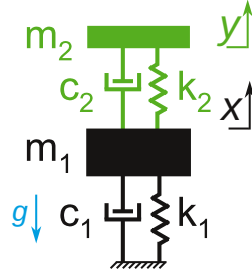


FIGURE 3.33 – Ajout d'une contribution de dissipation par un deuxième oscillateur.

Ce calcul est effectué autour des positions d'équilibre de chacune des masses. L'objectif est de calculer l'évolution de la position y et la force F_1 nécessaires quand l'accélération $\ddot{x}$ est imposée. Le bilan des forces est donné par :

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.86)$$

Les inconnues y et F_1 sont déterminées en réécrivant les bilans sur chaque système, ce qui donne :

$$\begin{cases} F_1 = m_1 \ddot{x} + (c_1 + c_2) \dot{x} - c_2 \dot{y} + (k_1 + k_2)x - k_2 y, \\ 0 = m_2 \ddot{y} - c_2 \dot{x} + c_2 \dot{y} - k_2 x + k_2 y. \end{cases} \quad (3.87a)$$

$$(3.87b)$$

En prenant la 2^{ème} ligne, l'équation différentielle d'ordre 2 avec 2nd membre donne :

$$m_2 \ddot{y} + c_2 \dot{y} + k_2 y = +c_2 \dot{x} + k_2 x. \quad (3.88)$$

Un a priori sur le déplacement y est effectué. Il est sinusoïdal, d'amplitude et de phase différentes par rapport à x :

$$\begin{cases} y = Y \sin(\omega t + \varphi), & \text{avec } Y > 0 \\ \dot{y} = \omega Y \cos(\omega t + \varphi), \\ \ddot{y} = -\omega^2 Y \sin(\omega t + \varphi). \end{cases} \quad (3.89a)$$

$$(3.89b)$$

$$(3.89c)$$

Ainsi :

$$-m_2 \omega^2 Y \sin(\omega t + \varphi) + c_2 \omega Y \cos(\omega t + \varphi) + k_2 Y \sin(\omega t + \varphi) = +c_2 \frac{\gamma}{\omega} \cos(\omega t) + k_2 \frac{\gamma}{\omega^2} \sin(\omega t), \quad \forall t. \quad (3.90)$$

Le bilan des forces sur m_2 est donc réécrit :

$$\begin{aligned} & (-m_2 \omega^2 Y + k_2 Y) [\sin(\omega t) \cos(\varphi) + \sin(\varphi) \cos(\omega t)] \\ & + c_2 \omega Y [\cos(\omega t) \cos(\varphi) - \sin(\varphi) \sin(\omega t)] \\ & = +c_2 \frac{\gamma}{\omega} \cos(\omega t) + k_2 \frac{\gamma}{\omega^2} \sin(\omega t), \quad \forall t. \end{aligned} \quad (3.91)$$

$$\begin{aligned} & + \sin(\omega t) \left[(-m_2 \omega^2 Y + k_2 Y) \cos(\varphi) - (c_2 \omega Y) \sin(\varphi) - k_2 \frac{\gamma}{\omega^2} \right] \\ & + \cos(\omega t) \left[(-m_2 \omega^2 Y + k_2 Y) \sin(\varphi) + (c_2 \omega Y) \cos(\varphi) - c_2 \frac{\gamma}{\omega} \right] \\ & = 0, \quad \forall t. \end{aligned} \quad (3.92)$$

Ainsi $\exists$ un couple (φ, Y) pour $\omega t = [0; \frac{\pi}{2}]$, tel que l'équation précédente soit résolue.

$$\begin{cases} (-m_2 Y \omega^2 + k_2 Y) \cos(\varphi) - (c_2 Y \omega) \sin(\varphi) - k_2 \frac{\gamma}{\omega^2} = 0, & \text{pour } \omega t = 0, \\ (-m_2 Y \omega^2 + k_2 Y) \sin(\varphi) + (c_2 Y \omega) \cos(\varphi) - c_2 \frac{\gamma}{\omega} = 0, & \text{pour } \omega t = \frac{\pi}{2}. \end{cases} \quad (3.93a)$$

$$\begin{cases} (-m_2 Y \omega^2 + k_2 Y) \sin(\varphi) + (c_2 Y \omega) \cos(\varphi) - c_2 \frac{\gamma}{\omega} = 0, & \text{pour } \omega t = \frac{\pi}{2}. \end{cases} \quad (3.93b)$$

La 1^{ère} ligne permet d'écrire l'expression de Y que l'on injecte dans la 2^{ème} ligne :

$$\begin{cases} Y = \frac{k_2 \frac{\gamma}{\omega^2}}{(-m_2 \omega^2 + k_2) \cos(\varphi) - (c_2 \omega) \sin(\varphi)}, \\ (-m_2 \omega^2 + k_2) \sin(\varphi) + (c_2 \omega) \cos(\varphi) = c_2 \frac{\gamma}{\omega} \frac{(-m_2 \omega^2 + k_2) \cos(\varphi) - (c_2 \omega) \sin(\varphi)}{k_2 \frac{\gamma}{\omega^2}}. \end{cases} \quad (3.94a)$$

$$\begin{cases} Y = \frac{k_2 \frac{\gamma}{\omega^2}}{(-m_2 \omega^2 + k_2) \cos(\varphi) - (c_2 \omega) \sin(\varphi)}, \\ (-m_2 \omega^2 + k_2) \sin(\varphi) + (c_2 \omega) \cos(\varphi) = c_2 \frac{\gamma}{\omega} \frac{(-m_2 \omega^2 + k_2) \cos(\varphi) - (c_2 \omega) \sin(\varphi)}{k_2 \frac{\gamma}{\omega^2}}. \end{cases} \quad (3.94b)$$

En travaillant uniquement sur la 2^{ème} ligne précédente :

$$B \sin(\varphi) + C \cos(\varphi) = A[(B \cos(\varphi) - C \sin(\varphi))], \quad A = \frac{c_2 \omega}{k_2}, B = -m_2 \omega^2 + k_2, C = c_2 \omega, \quad (3.95)$$

$$\sin(\varphi)(B + AC) = \cos(\varphi)(-C + AB), \quad (3.96)$$

$$\tan(\varphi) = \frac{-C + AB}{B + AC}, \quad \text{pour } \varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]. \quad (3.97)$$

Le mouvement de y peut être calculé en fonction des paramètres du système et avec lui la force F_1 . Cette mise en équation est présentée pour un cas analytique (Fig. 3.34).

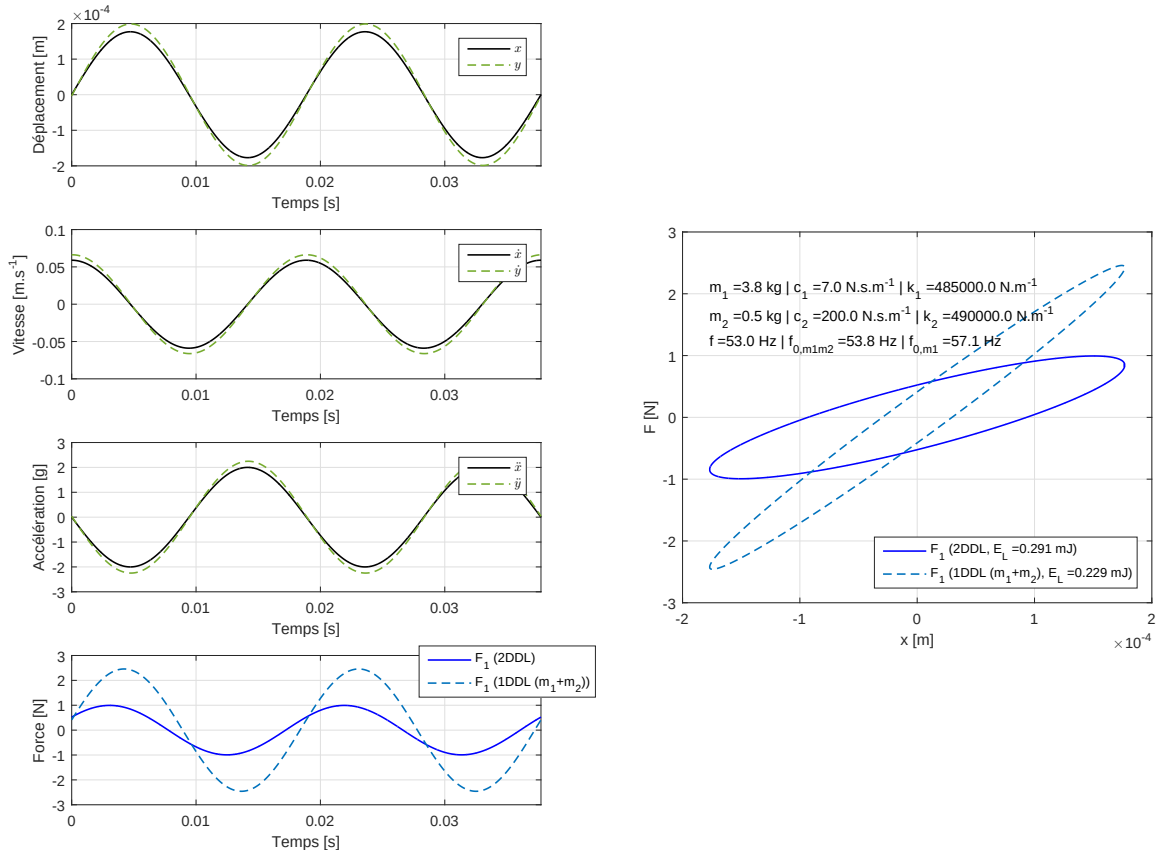


FIGURE 3.34 – Signaux temporels et Lissajous dans le cas de l'ajout d'une contribution de dissipation par un deuxième oscillateur.

En fonction des paramètres du système, y a un retard par rapport à x , une valeur initiale y_0 peut être calculée. La force F_1 calculée pour le système à 2DDL est comparée à celle issue d'un système à 1DDL ($m_1 + m_2$). Des différences d'amplitudes liées aux paramètres pris en compte expliquent cet écart. L'amplitude des oscillations de y est plus importante que celle de x . Si à $t = 0$ $y = x$, $\exists$ un instant à partir duquel les masses entrent en contact, c'est l'objet du modèle suivant.

3.5.2 Saut d'une masse secondaire retenue par un oscillateur (n°7)

Dans les deux modèles suivants, l'origine des 3 repères est prise identique à 0, au niveau de la masse. Ce choix est nécessaire aux développements successifs mettant en jeu les allongements relatifs des ressorts.

A l'instant initial les grains sont à la base de la cavité, $z = x$. Le fait de relier la masse m_2 à m_1 par un couple raideur/amortisseur induit des échanges de force qui permettent un contrôle du vol de la masse m_2 . L'ajout d'une butée permet un contrôle sur l'instant de décollage (et d'atterrissage), relatif à la tension de la raideur k_2 (Fig. 3.35).

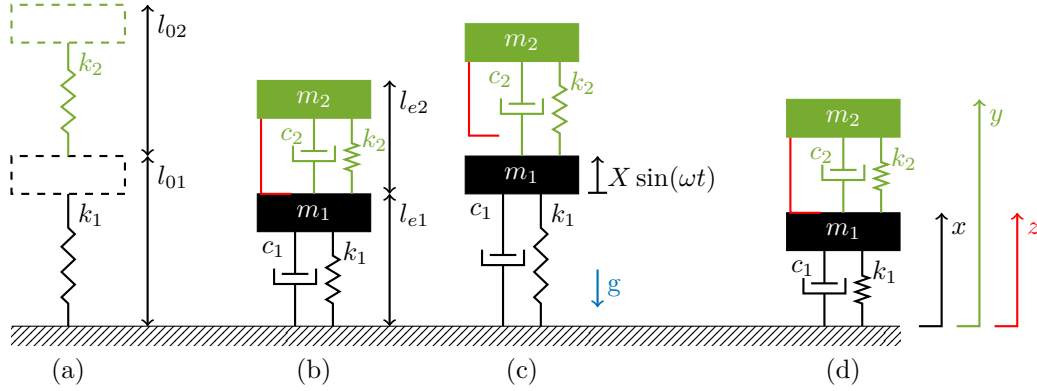


FIGURE 3.35 – Schéma représentatif d'un système à 2DDL avec butée : (a) à vide (sans action de la gravité) - (b) à l'équilibre (sous l'action de la gravité) - (c) le système décolle - (d) atterrissage.

Les épaisseurs des masses sont négligées. Les équations de mouvement peuvent être écrites en prenant en compte un allongement à vide et à l'équilibre :

- l_{01} et l_{02} : longueur des ressorts à vide, respectivement k_1 (entre la masse et m_1) et k_2 (entre m_1 et m_2),
- l_{e1} et l_{e2} : longueur des ressorts à l'équilibre sous action de la gravité, respectivement k_1 (entre la masse et m_1) et k_2 (entre m_1 et m_2),
- Dans ce cas : $(l_{01} - l_{e1}) > 0$ et $(l_{02} - l_{e2}) > 0$.

Phase préliminaire : détermination des longueurs à l'équilibre

L'équation du mouvement dans le cas de ce modèle analytique est donnée par :

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x} = -c_1 \dot{x} - k_1(x + l_{e1} - l_{01}) + c_2(\dot{y} - \dot{x}) + k_2(y + l_{e2} - l_{02} - (x + l_{e1} - l_{01})) \\ \quad + F_1 + F_{3,1} - P_1, \end{cases} \quad (3.98a)$$

$$\begin{cases} m_2 \ddot{y} = -c_2(\dot{y} - \dot{x}) - k_2(y + l_{e2} - l_{02} - (x + l_{e1} - l_{01})) + F_{3,2} - P_2, \end{cases} \quad (3.98b)$$

$$\begin{cases} 0 \ddot{z} = F_{1,3} + F_{2,3}. \end{cases} \quad (3.98c)$$

A l'équilibre, ces relations donnent :

$$\begin{cases} 0 = -k_1(l_{e1} - l_{01}) + k_2(l_{e2} - l_{02} - l_{e1} + l_{01}) + F_{3,10} - P_1, \end{cases} \quad (3.99a)$$

$$\begin{cases} 0 = -k_2(l_{e2} - l_{02} - l_{e1} + l_{01}) + F_{3,20} - P_2, \end{cases} \quad (3.99b)$$

$$\begin{cases} 0 = F_{1,30} + F_{2,30}. \end{cases} \quad (3.99c)$$

$$\begin{cases} 0 = -k_1(l_{e1} - l_{01}) + k_2(l_{e2} - l_{02} - l_{e1} + l_{01}) + F_{3,10} - P_1, \end{cases} \quad (3.100a)$$

$$\begin{cases} +k_2(l_{e2} - l_{02} - l_{e1} + l_{01}) - F_{3,20} = -P_2, \end{cases} \quad (3.100b)$$

$$\begin{cases} F_{3,10} = -F_{3,20}. \end{cases} \quad (3.100c)$$

Ainsi :

$$0 = -k_1(l_{e1} - l_{01}) - P_2 - P_1, \quad (3.101)$$

$$l_{e1} = l_{01} + \frac{-P_2 - P_1}{k_1}. \quad (3.102)$$

Le bilan des forces à l'équilibre donne 3 équations à 4 inconnues : $l_{e1}, l_{e2}, F_{3,10}, F_{3,20}$:

$$\begin{cases} l_{e1} = l_{01} + \frac{-P_2 - P_1}{k_1}, & (3.103a) \\ F_{3,20} = P_2 + k_2(l_{e2} - l_{02} - l_{e1} + l_{01}), & (3.103b) \\ F_{3,10} = -F_{3,20}. & (3.103c) \end{cases}$$

Les valeurs des forces maximums des patins frottants sont définies par $F_{1,3} \in [0, F_{Mf}]$, donc $F_{2,3} \in [-F_{Mf}, 0]$. La variable hyperstatique l_{e2} est alors définie à partir de (Eq. 3.103b) :

$$0 \leq F_{3,20} \leq F_{Mf}, \quad (3.104)$$

$$-P_2 \leq +k_2(l_{e2} - l_{02} - l_{e1} + l_{01}) \leq F_{Mf} - P_2, \quad (3.105)$$

$$\frac{-P_2}{k_2} \leq l_{e2} - l_{02} - l_{e1} + l_{01} \leq \frac{F_{Mf} - P_2}{k_2}, \quad (3.106)$$

$$+l_{02} + l_{e1} - l_{01} + \frac{-P_2}{k_2} \leq l_{e2} \leq \frac{F_{Mf} - P_2}{k_2} + l_{02} + l_{e1} - l_{01}, \quad (3.107)$$

$$+l_{02} + l_{01} + \frac{-P_2 - P_1}{k_1} - l_{01} + \frac{-P_2}{k_2} \leq l_{e2} \leq \frac{F_{Mf} - P_2}{k_2} + l_{02} + l_{01} + \frac{-P_2 - P_1}{k_1} - l_{01}, \quad (3.108)$$

$$+l_{02} + \frac{-P_2 - P_1}{k_1} + \frac{-P_2}{k_2} \leq \boxed{l_{e2}} \leq \frac{F_{Mf} - P_2}{k_2} + l_{02} + \frac{-P_2 - P_1}{k_1}. \quad (3.109)$$

Sur la 1^{ère} demi-période, pour $t \in \left[0, \frac{T}{2}\right]$. La phase A décrit la zone où $t \in [0, t_A]$. Dans cette phase le déplacement relatif initial est donné par : $z_1 = x$ et $y_1 = x + l_{e1} + l_{e2}$. La force qui passe dans la butée diminue au fur et à mesure du temps, jusqu'à ce que toute la force passe dans le k_2 et qu'il y ait décollage. L'équation du mouvement donne :

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x} = -c_1 \dot{x} - k_1[x - l_{01}] + c_2[\dot{y}_1 - \dot{x}] + k_2[y_1 - x - l_{02}] + F_1 + F_{3,1} - P_1, & (3.110a) \\ m_2 \ddot{y}_1 = -c_2[\dot{y}_1 - \dot{x}] - k_2[y_1 - x - l_{02}] + F_{3,2} - P_2, & (3.110b) \\ 0 \ddot{z} = F_{3,1} + F_{3,2}. & (3.110c) \end{cases}$$

On impose le mouvement de la masse m_1 par rapport à la position d'équilibre :

$$\begin{cases} x(t) = X \sin(\omega t) + l_{e1}, & \text{avec } X > 0, & (3.111a) \\ \dot{x}(t) = \omega X \cos(\omega t), & & (3.111b) \\ \ddot{x}(t) = -\omega^2 X \sin(\omega t). & & (3.111c) \end{cases}$$

Pour simuler le comportement observé où les grains sont en contact avec le fond à l'instant $t = 0$ du passage à $x(0) = 0$ et où l'accélération imposée est nulle. Par ailleurs, $z(0) = x(0)$ et $F_{3,1} \in [-F_M, 0]$. À partir du bilan dynamique précédent, on trouve :

$$F_{3,2} = m_2 \ddot{y}_1 + c_2[\dot{y}_1 - \dot{x}] + k_2[y_1 - x - l_{02}] + P_2. \quad (3.112)$$

À cet instant les billes ne sont pas en mouvement relatif par rapport au fond. Il n'y a pas de décollage donc $z(t) = x(t)$. Le mouvement des grains est identique à celui de la cavité.

Posons : $y_1(t) = x(t) + Y_{11}$, à $t = 0$ s on se place dans les conditions d'équilibre ($\ddot{x} = \ddot{y} = 0$), et $Y_{11} = l_{e2}$

$$\begin{cases} y_1(t) = X \sin(\omega t) + l_{e1} + l_{e2}, & (3.113a) \\ \dot{y}_1(t) = \omega X \cos(\omega t), & (3.113b) \\ \ddot{y}_1(t) = -\omega^2 X \sin(\omega t). & (3.113c) \end{cases}$$

On remplace $F_{3,1}$ (Eq. 3.112) dans le bilan du 1^{er} système (Eq. 3.110a) :

$$F_1 = m_1 \ddot{x} + c_1 \dot{x} + k_1[x - l_{01}] - \cancel{c_2[\dot{y}_1 - \dot{x}]} - \cancel{k_2[y_1 - x - l_{02}]} + P_1 + m_2 \ddot{y}_1 + \cancel{c_2[\dot{y}_1 - \dot{x}]} + \cancel{k_2[y_1 - x - l_{02}]} + P_2, \quad (3.114)$$

$$F_1 = -(m_1 + m_2)\omega^2 X \sin(\omega t) + c_1 \omega X \cos(\omega t) + k_1 X \sin(\omega t) + k_1 l_{e1} - k_1 l_{01} + P_2 + P_1, \quad (3.115)$$

$$F_1 = -(m_1 + m_2)\omega^2 X \sin(\omega t) + c_1 \omega X \cos(\omega t) + k_1 X \sin(\omega t) + \cancel{k_1 l_{01}} - \cancel{P_2} - \cancel{P_1} - \cancel{k_1 l_{01}} + \cancel{P_2} + \cancel{P_1}. \quad (3.116)$$

Ainsi depuis le temps $t = t_0$, le système se comporte logiquement comme un système 1DDL ($m_1 + m_2$). Il est nécessaire de déterminer un temps t_A issu du bilan des forces (Eq. 3.110b) à partir duquel un décollement apparaît. Les expressions des déplacements sont données pour x (Eq. 3.111a), y (Eq. 3.113a) et $F_{3,1} = 0$:

$$0 = -m_2 \ddot{y}_1(t_A) - k_2[l_{e2} - l_{02}] - m_2 g, \quad (3.117)$$

$$0 = -m_2(g - \omega^2 X \sin(\omega t_A)) - k_2[l_{e2} - l_{02}], \quad (3.118)$$

$$g - \omega^2 X \sin(\omega t_A) = -\frac{k_2[l_{e2} - l_{02}]}{m_2}, \quad (3.119)$$

$$\sin(\omega t_A) = \frac{1}{\omega^2 X} \left(g + \frac{k_2[l_{e2} - l_{02}]}{m_2} \right). \quad (3.120)$$

Sur la première demi-période, pour que t_A existe, il faut que :

$$0 < \sin(\omega t_A) < 1, \quad (3.121)$$

$$0 < \frac{1}{\omega^2 X} \left(g + \frac{k_2[l_{e2} - l_{02}]}{m_2} \right) < 1, \quad (3.122)$$

$$\infty > \frac{\omega^2 X}{\left(g + \frac{k_2[l_{e2} - l_{02}]}{m_2} \right)} > 1, \quad (3.123)$$

$$\infty > X > \frac{1}{\omega^2} \left(g + \frac{k_2[l_{e2} - l_{02}]}{m_2} \right), \quad (3.124)$$

$$\infty > X > X_A. \quad (3.125)$$

Si $X < X_A$, alors il n'y a pas de décollement dans $t \in \left[0, \frac{T}{2}\right]$. Si $X > X_A$, alors il existe un temps t_A à partir duquel les masses m_1 et m_2 ont des trajectoires différentes (Eq. 3.120).

Pour $t \in [0, t_A]$ (Phase A) : Mouvement en phase, pas de décollement.

Les grains ne sont plus en contact avec le fond de la cavité. La phase B décrit la zone où $t \in [t_A, t_B]$, le mouvement de y , régit par le système à 2DDL est maintenant appelé y_2 . A $t = t_A$, les grains décollent, z suit le déplacement de y à un offset près. La continuité de mouvement en ce point particulier donne d'abord une continuité de déplacement :

$$\begin{aligned} y_2(t_A) &= y_1(t_A), \\ y_2(t_A) &= X \sin(\omega t_A) + l_{e1} + l_{e2}. \end{aligned} \quad (3.126)$$

La continuité de la vitesse donne :

$$\begin{aligned} \dot{y}_2(t_A) &= \dot{y}_1(t_A), \\ \dot{y}_2(t_A) &= \omega X \cos(\omega t_A). \end{aligned} \quad (3.127)$$

La continuité de l'accélération donne :

$$\begin{aligned} \ddot{y}_2(t_A) &= \ddot{y}_1(t_A), \\ \ddot{y}_2(t_A) &= -\omega^2 X \sin(\omega t_A). \end{aligned} \quad (3.128)$$

Pour $t \in [t_A, t_B]$, il n'y a plus d'action des forces $F_{3,1}$ et $F_{3,2}$, l'équilibre de m_2 change :

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x} = -c_1 \dot{x} - k_1(X \sin(\omega t) + l_{e1} - l_{01}) + c_2(\dot{y}_2 - \dot{x}) + k_2(y_2 - X \sin(\omega t) - l_{e1} - l_{02}) \\ \quad + F_1 - P_1, \\ m_2 \ddot{y}_2 = -c_2(\dot{y}_2 - \dot{x}) - k_2(y_2 - X \sin(\omega t) - l_{e1} - l_{02}) - P_2. \end{cases} \quad (3.129a)$$

$$\quad (3.129b)$$

$$\begin{cases} F_1 = -m_1 \omega^2 X \sin(\omega t) + c_1 \omega X \cos(\omega t) + k_1(X \sin(\omega t) + l_{e1} - l_{01}) \\ \quad - c_2(\dot{y}_2 - \omega X \cos(\omega t)) - k_2(y_2 - X \sin(\omega t) - l_{e1} - l_{02}) + P_1, \\ m_2 \ddot{y}_2 + c_2 \dot{y}_2 + k_2 y_2 = +c_2 \omega X \cos(\omega t) - k_2(-X \sin(\omega t) - l_{e1} - l_{02}) - P_2. \end{cases} \quad (3.130a)$$

$$\quad (3.130b)$$

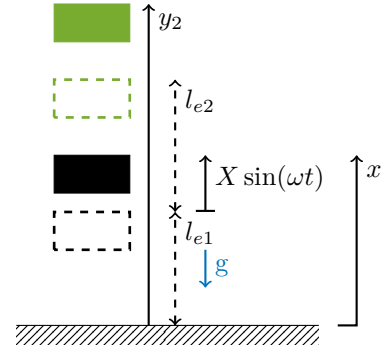


FIGURE 3.36 – Allongement phase 2.

Pour cette deuxième phase, une hypothèse est faite sur le mouvement de $y_2(t)$, il comporte : **une composante transitoire oscillante** (pulsation propre ω_{21} , phase φ_{21} et de constante de temps $\frac{1}{a}$), **une composante oscillante** (pulsation de sollicitation ω et de phase φ_{22}) et **un décalage**.

Posons : $y_2(t) = Y_{21} e^{-a(t-t_A)} \sin(\omega_{21}t + \varphi_{21}) + Y_{22} \sin(\omega t + \varphi_{22}) + Y_{23}$.

$$\left\{ \begin{array}{l} y_2(t) = Y_{21} e^{-a(t-t_A)} [\sin(\omega_{21}t) \cos(\varphi_{21}) + \cos(\omega_{21}t) \sin(\varphi_{21})] \\ \quad + Y_{22} [\sin(\omega t) \cos(\varphi_{22}) + \cos(\omega t) \sin(\varphi_{22})] + Y_{23}. \\ \dot{y}_2(t) = -a Y_{21} e^{-a(t-t_A)} [\sin(\omega_{21}t) \cos(\varphi_{21}) + \cos(\omega_{21}t) \sin(\varphi_{21})] \\ \quad + \omega_{21} Y_{21} e^{-a(t-t_A)} [\cos(\omega_{21}t) \cos(\varphi_{21}) - \sin(\omega_{21}t) \sin(\varphi_{21})] \\ \quad + \omega Y_{22} [\cos(\omega t) \cos(\varphi_{22}) - \sin(\omega t) \sin(\varphi_{22})]. \\ \ddot{y}_2(t) = a^2 Y_{21} e^{-a(t-t_A)} [\sin(\omega_{21}t) \cos(\varphi_{21}) + \cos(\omega_{21}t) \sin(\varphi_{21})] \\ \quad - \omega_{21}^2 Y_{21} e^{-a(t-t_A)} [\sin(\omega_{21}t) \cos(\varphi_{21}) + \cos(\omega_{21}t) \sin(\varphi_{21})] \\ \quad - 2a\omega_{21} Y_{21} e^{-a(t-t_A)} [\cos(\omega_{21}t) \cos(\varphi_{21}) - \sin(\omega_{21}t) \sin(\varphi_{21})] \\ \quad - \omega^2 Y_{22} [\sin(\omega t) \cos(\varphi_{22}) + \cos(\omega t) \sin(\varphi_{22})]. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (3.131a) \\ (3.131b) \\ (3.131c) \end{array}$$

Ces expressions sont injectées dans l'équation du mouvement sur m_2 (Eq. 3.130b) :

$$\begin{aligned} & \sin(\omega t) \cdot \{Y_{22}[-\omega^2 m_2 \cos(\varphi_{22}) - c_2 \omega \sin(\varphi_{22}) + k_2 \cos(\varphi_{22})] - k_2 X\} \\ & + \cos(\omega t) \cdot \{Y_{22}[-\omega^2 m_2 \sin(\varphi_{22}) + c_2 \omega \cos(\varphi_{22}) + k_2 \sin(\varphi_{22})] - c_2 \omega X\} \\ & + \sin(\omega_{21}t) \cdot e^{-a(t-t_A)} Y_{21} [m_2(a^2 - \omega_{21}^2) \cos(\varphi_{21}) + m_2(2a\omega_{21}) \sin(\varphi_{21}) \\ & \quad + c_2(-a \cos(\varphi_{21}) - \omega_{21} \sin(\varphi_{21})) + k_2 \cos(\varphi_{21})] \\ & + \cos(\omega_{21}t) \cdot e^{-a(t-t_A)} Y_{21} [m_2(a^2 - \omega_{21}^2) \sin(\varphi_{21}) - m_2(2a\omega_{21}) \cos(\varphi_{21}) \\ & \quad + c_2(-a \sin(\varphi_{21}) + \omega_{21} \cos(\varphi_{21})) + k_2 \sin(\varphi_{21})] \\ & + 1 \cdot [k_2(-l_{e1} - l_{02}) + P_2 + k_2 Y_{23}] \\ & = 0. \quad \forall t \geq t_A \end{aligned} \quad (3.132)$$

Cette expression conduit à l'écriture de 5 équations quelque soit t . De plus, les continuités de position (Eq. 3.126) et de vitesse (Eq. 3.127) à t_A permettent de présenter 7 équations à 7 inconnues (a , Y_{21} , ω_{21} , φ_{21} , Y_{22} , φ_{22} , Y_{23}) :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = Y_{22}[-\omega^2 m_2 \cos(\varphi_{22}) - c_2 \omega \sin(\varphi_{22}) + k_2 \cos(\varphi_{22})] - k_2 X, \\ 0 = Y_{22}[-\omega^2 m_2 \sin(\varphi_{22}) + c_2 \omega \cos(\varphi_{22}) + k_2 \sin(\varphi_{22})] - c_2 \omega X, \\ 0 = k_2(-l_{e1} - l_{02}) + P_2 + k_2 Y_{23}, \\ 0 = e^{at_A} Y_{21} [m_2(a^2 - \omega_{21}^2) \cos(\varphi_{21}) + m_2(2a\omega_{21}) \sin(\varphi_{21}) \\ \quad + c_2(-a \cos(\varphi_{21}) - \omega_{21} \sin(\varphi_{21})) + k_2 \cos(\varphi_{21})], \\ 0 = e^{at_A} Y_{21} [m_2(a^2 - \omega_{21}^2) \sin(\varphi_{21}) - m_2(2a\omega_{21}) \cos(\varphi_{21}) \\ \quad + c_2(-a \sin(\varphi_{21}) + \omega_{21} \cos(\varphi_{21})) + k_2 \sin(\varphi_{21})], \\ 0 = Y_{21} [\sin(\omega_{21}t_A) \cos(\varphi_{21}) + \cos(\omega_{21}t_A) \sin(\varphi_{21})] \\ \quad + Y_{22} [\sin(\omega t_A) \cos(\varphi_{22}) + \cos(\omega t_A) \sin(\varphi_{22})] + Y_{23} - (X \sin(\omega t_A) + l_{e1} + l_{e2}). \\ 0 = -a Y_{21} [\sin(\omega_{21}t_A) \cos(\varphi_{21}) + \cos(\omega_{21}t_A) \sin(\varphi_{21})] \\ \quad + \omega_{21} Y_{21} [\cos(\omega_{21}t_A) \cos(\varphi_{21}) - \sin(\omega_{21}t_A) \sin(\varphi_{21})] \\ \quad + \omega Y_{22} [\cos(\omega t_A) \cos(\varphi_{22}) - \sin(\omega t_A) \sin(\varphi_{22})] - \omega X \cos(\omega t_A). \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (3.133a) \\ (3.133b) \\ (3.133c) \\ (3.133d) \\ (3.133e) \\ (3.133f) \\ (3.133g) \end{array}$$

Une première série de constantes est déduite (Eq. 3.133a-3.133b-3.133c)

$$\boxed{Y_{23}} = +l_{e1} + l_{02} - \frac{m_2 g}{k_2}. \quad (3.134)$$

$$\boxed{Y_{22}} = \frac{k_2 X}{[-m_2 \omega^2 + k_2] \cos(\varphi_{22}) - [c_2 \omega] \sin(\varphi_{22})}. \quad (3.135)$$

$$Y_{22}[-\omega^2 m_2 \sin(\varphi_{22}) + c_2 \omega \cos(\varphi_{22}) + k_2 \sin(\varphi_{22})] = c_2 \omega X. \quad (3.136)$$

On remplace Y_{22} dans (Eq. 3.136) :

$$\tan(\varphi_{22}) = \frac{-m_2 c_2 \omega^3}{-m_2 k_2 \omega^2 + k_2^2 + c_2^2 \omega^2}. \quad (3.137)$$

Les autres inconnues sont obtenues à partir d'une recherche de minimum sur les 4 dernières équations (Eq. 3.133d-3.133e-3.133f-3.133g). Ces équations sont adimensionnées afin de permettre à l'algorithme d'avoir un poids semblable de chacune des équations et de converger vers une solution. Les coefficients permettent de déterminer la fonction de coût :

$$f_c = \left((\text{Eq. 3.133d}) \times \frac{1}{m_1 g} \right)^2 + \left((\text{Eq. 3.133e}) \times \frac{1}{m_1 g} \right)^2 + \left((\text{Eq. 3.133f}) \times \frac{1}{X} \right)^2 + \left((\text{Eq. 3.133g}) \times \frac{1}{X \omega} \right)^2. \quad (3.138)$$

Cette fonction de coût f_c permet de déterminer l'expression de $y_2(t)$ satisfaisant les équations précédentes.

Pour $t \in [t_A, t_B]$ (Phase B) : Oscillation de m_2 en fonction des paramètres de l'oscillateur à 2DDL.

L'arrêt de ce mouvement particulier est guidé par l'égalité des déplacements $z(t_B) = x(t_B)$. Les deux masses suivent à nouveau la phase A. Cette mise en équation est présentée pour des paramètres fixés du système à 2DDL (Fig. 3.37).

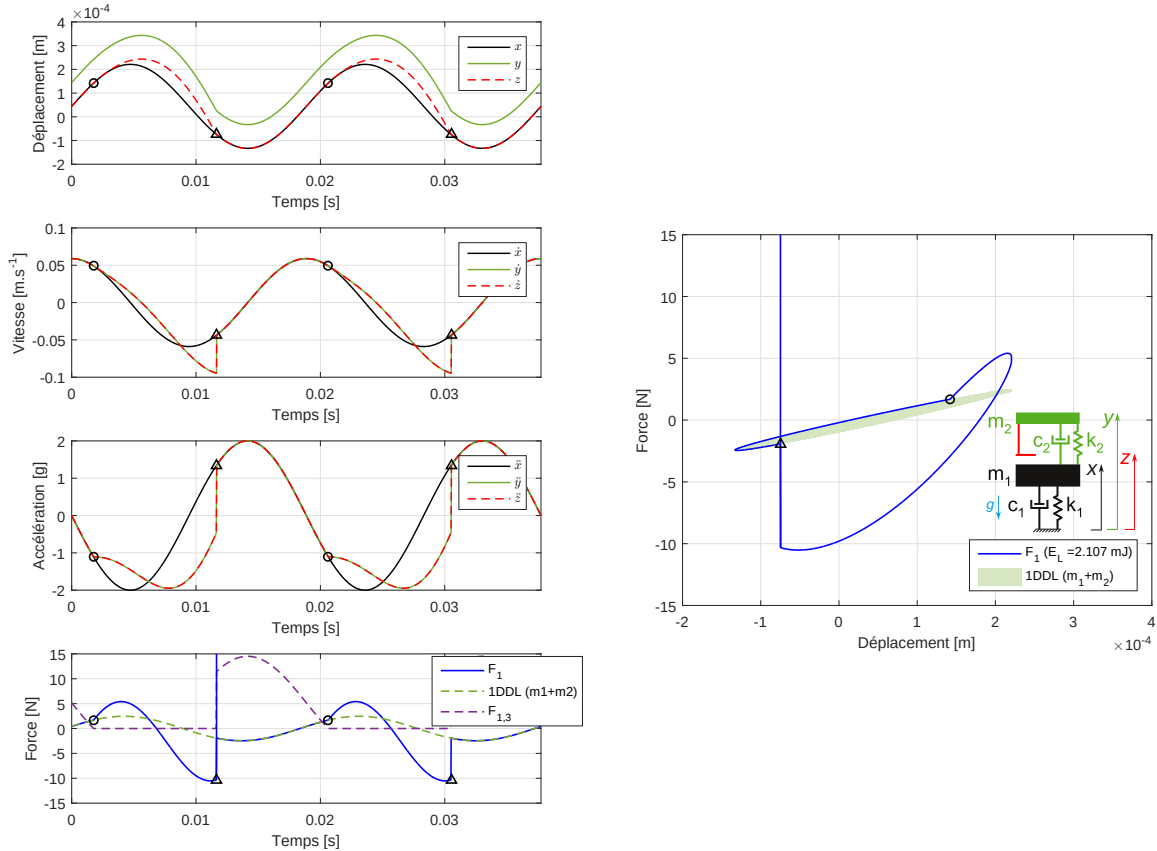


FIGURE 3.37 – Signaux temporels et Lissajous dans le cas d'une masse secondaire liée à un système vibrant par une béquille et des coefficients d'un oscillateur ($\gamma = 2g - c_2 = 60 \text{ N}\cdot\text{s}\cdot\text{m}^{-1} - k_2 = 0,5\cdot 10^5 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$).

La représentation est effectuée en régime établi. Les passages entre les différentes phases sont représentés par les sauts d'ellipses, visibles au niveau de la force F_1 . La phase A ($\triangle \rightarrow \circ$) suit l'ellipse verte, représentant l'oscillateur à 1DDL ($m_1 + m_2$). Les grains sont au fond de la cavité, jusqu'à ce que la condition de décollage t_A soit atteinte. La phase B ($\circ \rightarrow \triangle$) représente l'oscillateur à 2DDL (m_1), la masse m_2 ayant décollée. Cette dernière suit une trajectoire y_2 dont le mouvement comporte plusieurs composantes permettant une continuité du mouvement. La condition en déplacement $z = x$ induit la présence d'un dirac au niveau de la force, la vitesse changeant instantanément. Ceci entraîne un retour à la phase A et le commencement d'un nouveau cycle.

Ce modèle permet de modéliser l'interaction des grains avec la paroi verticale suite à leur éjection de la base de la cavité à la manière d'un amortissement visqueux ajouté. L'atterrissage des grains est ensuite modélisé par un coefficient de frottement qui s'active à la condition $z = x$.

3.5.3 Saut d'une masse secondaire et ralentissement à l'atterrissage (n°8)

Les signaux expérimentaux montrent un élargissement de la taille de l'ellipse quand les grains sont éjectés de la base de la cavité. Cet effet est modélisé par la présence du couple c_2, k_2 . L'effet d'atterrissage des grains est caractérisé par une augmentation brusque de la force mesurée à la base de la cavité. Cette augmentation expérimentale ne peut être représentée par un dirac. L'ajout d'un patin frottant, au sein duquel transite la force F_{Mf} (Force Max Fond), à l'atterrissage de m_2 est mis en place (Fig. 3.38).

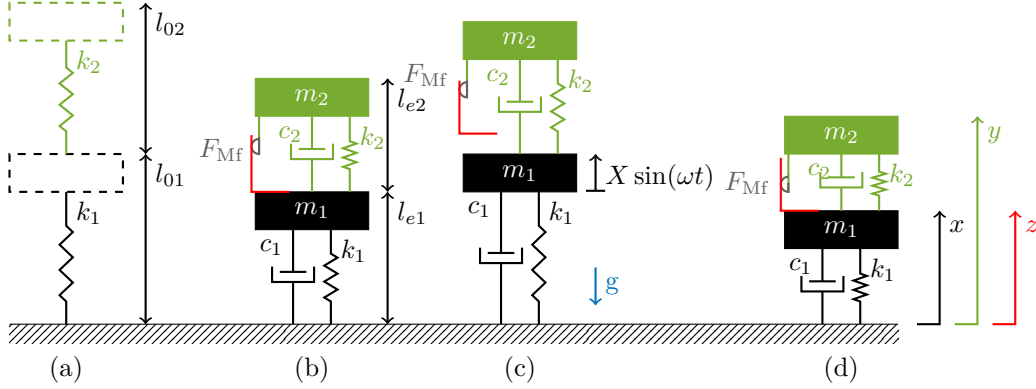


FIGURE 3.38 – Schéma représentatif d'un système à 2DDL avec frottement à l'atterrissage : (a) à vide (sans action de la gravité) - (b) à l'équilibre (sous l'action de la gravité) - (c) le système décolle - (d) atterrissage et action du patin frottant F_{Mf} .

Le développement de ce modèle utilise les deux premières phases décrites dans la section précédente. Les deux premières phases sont rappelées.

Pour $t \in [0, t_A]$ (Phase A) : Mouvement en phase, pas de décollage.

Pour $t \in [t_A, t_B]$ (Phase B) : Oscillation de m_2 en fonction des paramètres de l'oscillateur à 2DDL.

Sur la deuxième demi-période, pour $t \in \left[\frac{T}{2}, T\right]$. La phase C décrit la zone où $t \in [t_B, t_C]$, un frottement à l'atterrissage est présent quand $z = x$. La continuité du déplacement en ce point particulier donne :

$$y_3(t_B) = y_2(t_B). \quad (3.139)$$

De plus, la continuité de la vitesse donne :

$$\dot{y}_3(t_B) = \dot{y}_2(t_B). \quad (3.140)$$

Pour $t \in [t_B, t_C]$, l'action ajoutée du patin frottant F_{Mf} induit une variation dans le bilan des forces ($F_{3,1} = -F_{Mf}$ & $F_{3,2} = +F_{Mf}$), ainsi :

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x} = -c_1 \dot{x} - k_1(X \sin(\omega t) + l_{e1} - l_{01}) + c_2(\dot{y}_3 - \dot{x}) + k_2(y_3 - X \sin(\omega t) - l_{e1} - l_{02}) + F_1 - F_{Mf} - P_1, \\ m_2 \ddot{y}_3 = -c_2(\dot{y}_3 - \dot{x}) - k_2(y_3 - X \sin(\omega t) - l_{e1} - l_{02}) + F_{Mf} - P_2, \\ 0 \ddot{z} = F_{1,3} + F_{2,3}. \end{cases} \quad (3.141a)$$

$$m_2 \ddot{y}_3 = -c_2(\dot{y}_3 - \dot{x}) - k_2(y_3 - X \sin(\omega t) - l_{e1} - l_{02}) + F_{Mf} - P_2, \quad (3.141b)$$

$$0 \ddot{z} = F_{1,3} + F_{2,3}. \quad (3.141c)$$

$$\begin{cases} F_1 = -m_1 \omega^2 X \sin(\omega t) + c_1 \omega X \cos(\omega t) + k_1(X \sin(\omega t) + l_{e1} - l_{01}) - c_2(\dot{y}_2 - \omega X \cos(\omega t)) - k_2(y_2 - X \sin(\omega t) - l_{e1} - l_{02}) + F_{Mf} + P_1, \\ m_2 \ddot{y}_3 + c_2 \dot{y}_3 + k_2 y_3 = +c_2 \omega X \cos(\omega t) - k_2(-X \sin(\omega t) - l_{e1} - l_{02}) + F_{Mf} - P_2. \end{cases} \quad (3.142a)$$

$$\begin{cases} F_1 = -m_1 \omega^2 X \sin(\omega t) + c_1 \omega X \cos(\omega t) + k_1(X \sin(\omega t) + l_{e1} - l_{01}) - c_2(\dot{y}_2 - \omega X \cos(\omega t)) - k_2(y_2 - X \sin(\omega t) - l_{e1} - l_{02}) + F_{Mf} + P_1, \\ m_2 \ddot{y}_3 + c_2 \dot{y}_3 + k_2 y_3 = +c_2 \omega X \cos(\omega t) - k_2(-X \sin(\omega t) - l_{e1} - l_{02}) + F_{Mf} - P_2. \end{cases} \quad (3.142b)$$

Pour cette troisième phase, une hypothèse est faite sur le mouvement de $y_3(t)$, il comporte : une **composante transitoire oscillante** (pulsation propre ω_{31} , phase φ_{31} et de constante de temps $\frac{1}{b}$), une

composante oscillante (pulsation de sollicitation ω et de phase φ_{32}) et un décalage.

Posons : $y_3(t) = Y_{31} e^{-b(t-t_B)} \sin(\omega_{31}t + \varphi_{31}) + Y_{32} \sin(\omega t + \varphi_{32}) + Y_{33}$.

$$\left\{ \begin{array}{l} y_3(t) = Y_{31} e^{-b(t-t_B)} [\sin(\omega_{31}t) \cos(\varphi_{31}) + \cos(\omega_{31}t) \sin(\varphi_{31})] \\ \quad + Y_{32} [\sin(\omega t) \cos(\varphi_{32}) + \cos(\omega t) \sin(\varphi_{32})] + Y_{33}. \end{array} \right. \quad (3.143a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{y}_3(t) = -b Y_{31} e^{-b(t-t_B)} [\sin(\omega_{31}t) \cos(\varphi_{31}) + \cos(\omega_{31}t) \sin(\varphi_{31})] \\ \quad + \omega_{31} Y_{31} e^{-b(t-t_B)} [\cos(\omega_{31}t) \cos(\varphi_{31}) - \sin(\omega_{31}t) \sin(\varphi_{31})] \\ \quad + \omega Y_{32} [\cos(\omega t) \cos(\varphi_{32}) - \sin(\omega t) \sin(\varphi_{32})]. \end{array} \right. \quad (3.143b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{y}_3(t) = b^2 Y_{31} e^{-b(t-t_B)} [\sin(\omega_{31}t) \cos(\varphi_{31}) + \cos(\omega_{31}t) \sin(\varphi_{31})] \\ \quad - \omega_{31}^2 Y_{31} e^{-b(t-t_B)} [\sin(\omega_{31}t) \cos(\varphi_{31}) + \cos(\omega_{31}t) \sin(\varphi_{31})] \\ \quad - 2b\omega_{31} Y_{31} e^{-b(t-t_B)} [\cos(\omega_{31}t) \cos(\varphi_{31}) - \sin(\omega_{31}t) \sin(\varphi_{31})] \\ \quad - \omega^2 Y_{32} [\sin(\omega t) \cos(\varphi_{32}) + \cos(\omega t) \sin(\varphi_{32})]. \end{array} \right. \quad (3.143c)$$

Ces expressions sont injectées dans l'équation du mouvement (Eq. 3.142b) :

$$\begin{aligned} & \sin(\omega t) \cdot \{Y_{32}[-\omega^2 m_2 \cos(\varphi_{32}) - c_2 \omega \sin(\varphi_{32}) + k_2 \cos(\varphi_{32})] - k_2 X\} \\ & + \cos(\omega t) \cdot \{Y_{32}[-\omega^2 m_2 \sin(\varphi_{32}) + c_2 \omega \cos(\varphi_{32}) + k_2 \sin(\varphi_{32})] - c_2 \omega X\} \\ & + \sin(\omega_{31}t) \cdot e^{-b(t-t_B)} Y_{31} [m_2(b^2 - \omega_{31}^2) \cos(\varphi_{31}) + m_2(2b\omega_{31}) \sin(\varphi_{31}) \\ & \quad + c_2(-b \cos(\varphi_{31}) - \omega_{31} \sin(\varphi_{31})) + k_2 \cos(\varphi_{31})] \\ & + \cos(\omega_{31}t) \cdot e^{-b(t-t_B)} Y_{31} [m_2(b^2 - \omega_{31}^2) \sin(\varphi_{31}) - m_2(2b\omega_{31}) \cos(\varphi_{31}) \\ & \quad + c_2(-b \sin(\varphi_{31}) + \omega_{31} \cos(\varphi_{31})) + k_2 \sin(\varphi_{31})] \\ & + 1 \cdot [k_2(-l_{e1} - l_{02}) - F_{Mf} + P_2 + k_2 Y_{33}] \\ & = 0. \quad \forall t \geq t_B \end{aligned} \quad (3.144)$$

Cette équation donne 5 équations quelque soit t . La position à t_B (Eq. 3.139) et la vitesse à t_B (Eq. 3.140) permet de présenter 7 équations à 7 inconnues ($a, \omega_3, Y_{31}, \varphi_{31}, Y_{32}, \varphi_{32}, Y_{33}$) :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = Y_{32}[-\omega^2 m_2 \cos(\varphi_{32}) - c_2 \omega \sin(\varphi_{32}) + k_2 \cos(\varphi_{32})] - X k_2, \end{array} \right. \quad (3.145a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = Y_{32}[-\omega^2 m_2 \sin(\varphi_{32}) + c_2 \omega \cos(\varphi_{32}) + k_2 \sin(\varphi_{32})] - X c_2 \omega, \end{array} \right. \quad (3.145b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = k_2(-l_{e1} - l_{02}) - F_{Mf} + P_2 + k_2 Y_{33}, \end{array} \right. \quad (3.145c)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = e^{bt_B} Y_{31} [m_2(b^2 - \omega_{31}^2) \cos(\varphi_{31}) + m_2(2b\omega_{31}) \sin(\varphi_{31}) \right. \\ \quad \left. + c_2(-b \cos(\varphi_{31}) - \omega_{31} \sin(\varphi_{31})) + k_2 \cos(\varphi_{31})], \end{array} \right. \quad (3.145d)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = e^{bt_B} Y_{31} [m_2(b^2 - \omega_{31}^2) \sin(\varphi_{31}) - m_2(2b\omega_{31}) \cos(\varphi_{31}) \right. \\ \quad \left. + c_2(-b \sin(\varphi_{31}) + \omega_{31} \cos(\varphi_{31})) + k_2 \sin(\varphi_{31})], \end{array} \right. \quad (3.145e)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = Y_{31} [\sin(\omega_{31}t_B) \cos(\varphi_{31}) + \cos(\omega_{31}t_B) \sin(\varphi_{31})] \right. \\ \quad \left. + Y_{32} [\sin(\omega t_B) \cos(\varphi_{32}) + \cos(\omega t_B) \sin(\varphi_{32})] \right. \\ \quad \left. + Y_{33} - (Y_{21} e^{-a(t_B-t_A)} \sin(\omega_{21}t_B + \varphi_{21}) + Y_{22} \sin(\omega t_B + \varphi_{22}) + Y_{23}). \right. \end{array} \quad (3.145f)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = -b Y_{31} [\sin(\omega_{31}t_B) \cos(\varphi_{31}) + \cos(\omega_{31}t_B) \sin(\varphi_{31})] \right. \\ \quad \left. + \omega_{31} Y_{31} [\cos(\omega_{31}t_B) \cos(\varphi_{31}) - \sin(\omega_{31}t_B) \sin(\varphi_{31})] \right. \\ \quad \left. + \omega Y_{32} [\cos(\omega t_B) \cos(\varphi_{32}) - \sin(\omega t_B) \sin(\varphi_{32})] \right. \\ \quad \left. - \{-a Y_{21} e^{-a(t_B-t_A)} [\sin(\omega_{21}t_B) \cos(\varphi_{21}) + \cos(\omega_{21}t_B) \sin(\varphi_{21})] \right. \\ \quad \left. + \omega_{21} Y_{21} e^{-a(t_B-t_A)} [\cos(\omega_{21}t_B) \cos(\varphi_{21}) - \sin(\omega_{21}t_B) \sin(\varphi_{21})] \right. \\ \quad \left. + \omega Y_{22} [\cos(\omega t_B) \cos(\varphi_{22}) - \sin(\omega t_B) \sin(\varphi_{22})]\}. \end{array} \right. \quad (3.145g)$$

La méthode de calcul des coefficients permettant d'obtenir le déplacement $y_3(t)$ est identique à celle présentée à la section précédente. Cette phase s'arrête quand la condition permettant l'arrêt du frottement est atteinte, c'est à dire $\dot{y}(t_C) = \dot{x}(t_C)$.

Pour $t \in [t_B, t_C]$ (Phase C) : Glissement de m_2 par rapport à m_1 dû à l'action de F_{Mf} .

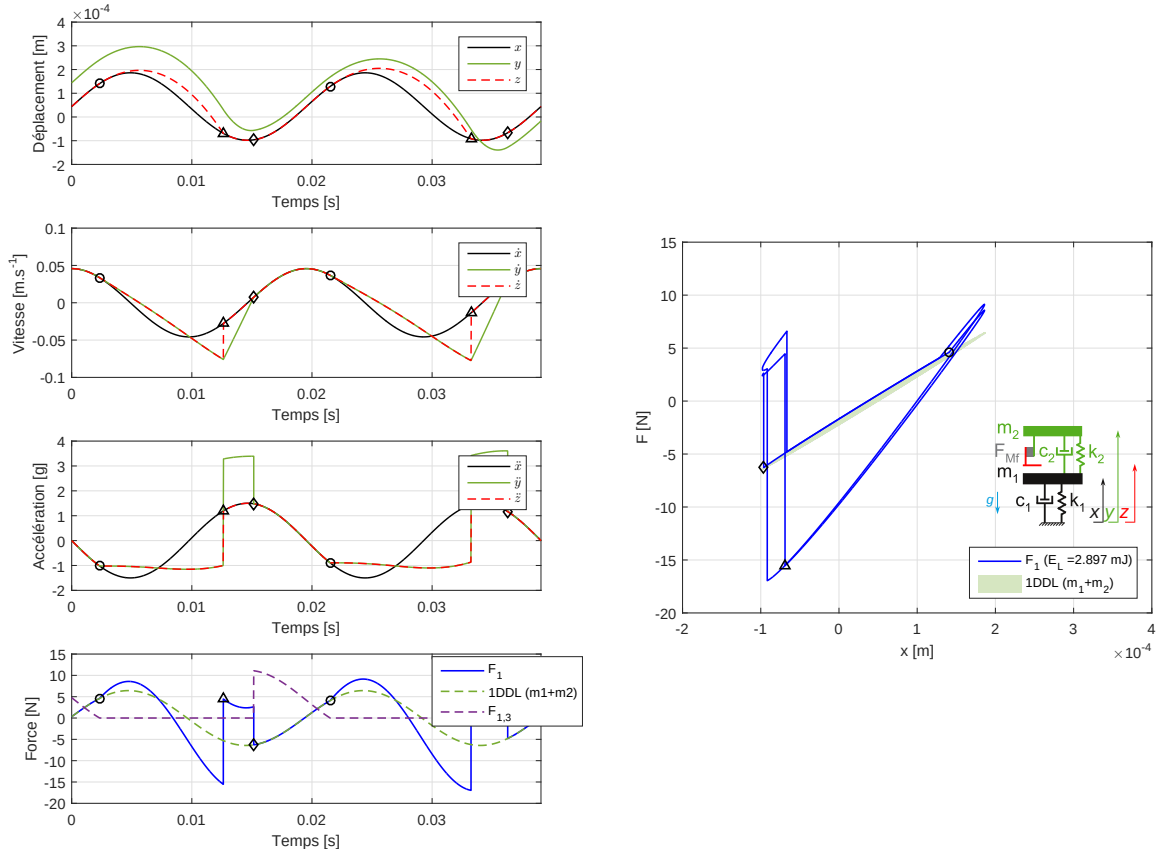


FIGURE 3.39 – Signaux temporels et Lissajous dans le cas d’une masse secondaire liée à un système vibrant par des coefficients d’un oscillateur et un patin frottant ($\gamma = 1,5g$ - $c_2 = 2 \text{ N}\cdot\text{s}\cdot\text{m}^{-1}$ - $k_2 = 0,1\cdot 10^5 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$ - $F_{Mf} = 20 \text{ N}$).

Dans ce cas il n’est choisi de représenter que deux périodes d’oscillation. Les passages entre les différentes phases sont représentés par les sauts d’ellipses. La phase A ($\diamond \rightarrow \circ$) suit l’ellipse verte, représentant l’oscillateur à 1DDL ($m_1 + m_2$). Les grains sont au fond de la cavité, jusqu’à ce que la condition de décollage à $t = t_A$ soit atteinte. La phase B ($\circ \rightarrow \triangle$) représente l’oscillateur à 2DDL, la masse m_2 ayant décollée. Les actions des éléments k_2 et c_2 permettent à la masse m_2 de décrire une trajectoire pseudo-balistique. A l’atterrissage, la condition en déplacement $z(t_B) = x(t_B)$ entraîne l’action du patin frottant. La phase C ($\triangle \rightarrow \diamond$) représente l’action ajoutée du patin frottant. Un nouveau calcul est effectué pour trouver le mouvement y_3 de la masse m_2 . Cet ajout de force constante s’arrête à l’égalité des vitesses $\dot{y}_3 = \dot{x}$ pour un retour à la phase A et le commencement d’un nouveau cycle.

Il est à noter que la représentation successive des cycles ne permet pas une superposition des courbes dans le diagramme de Lissajous. Ce modèle est non-stationnaire. En effet, l’évolution des longueurs des ressorts l_{e1} et l_{e2} entraîne une variation de la force résultante F_1 . Il n’y a pas de convergence si le nombre de cycles augmente. Néanmoins l’objectif d’augmentation de l’aire interne du diagramme de Lissajous par la présence des coefficients k_2 et c_2 est atteint, ce qui est appuyé par la confrontation du modèle à une expérience (Fig. 3.40).

Cet ajustement montre les 3 phases distinctes induites par la mise en vibration du matériau granulaire. Les paramètres de l’oscillateur (c_2 et k_2) permettent de retrouver le temps caractéristique d’atterrissage des grains au niveau de l’expérience. De plus, elles permettent une augmentation de l’aire interne du diagramme de Lissajous traduisant la dissipation lors de la phase de vol des grains. La force F_{Mf} illustre la phase d’écrasement des couches successives de l’amas. Sa valeur est choisie pour faire correspondre le temps d’écrasement entre modèle et expérience.

Le calcul des énergies perdues présente quant à lui une grande variation entre le modèle et l’expérience. Le modèle étant non-stationnaire, peu de conclusions sur la répartition des mécanismes dissipatifs peuvent être tirées de cette comparaison. Un approfondissement du modèle est nécessaire pour qu’il puisse permettre d’identifier les origines de la dissipation induite par un matériau granulaire.

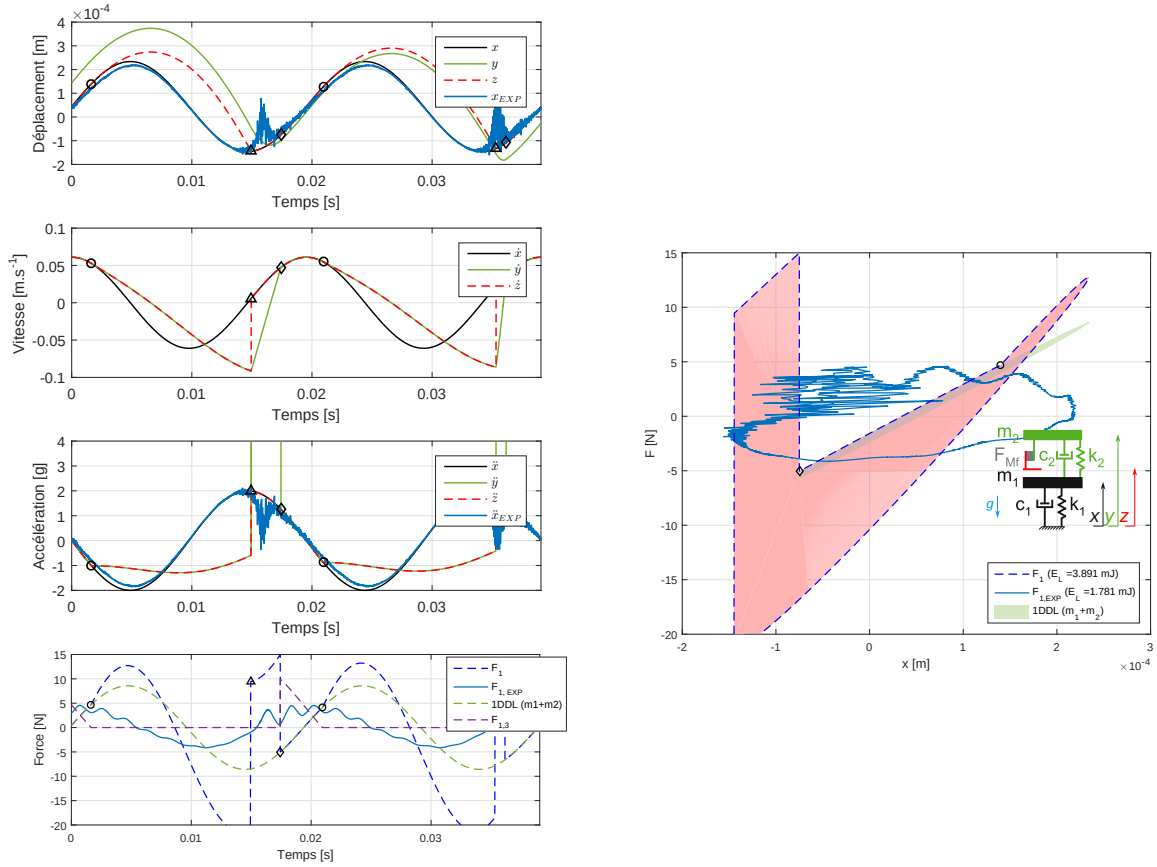


FIGURE 3.40 – Signaux temporels et Lissajous dans le cas d'une masse secondaire liée à un système vibrant par des coefficients d'un oscillateur et un patin frottant ($\gamma = 2g$ - $c_2 = 20 \text{ N}\cdot\text{s}\cdot\text{m}^{-1}$ - $k_2 = 5\cdot 10^3 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$ - $F_{Mf} = 30 \text{ N}$).

3.6 Conclusion partielle

L'étude de la vibration d'un oscillateur ne présentant pas de gradient de déplacement a permis de s'affranchir de la condition de taille de grains, par rapport à l'étude sur la plaque. Le calcul d'un coefficient d'amortissement modal ζ et le développement d'un nouvel indicateur E_L , montrent l'influence de l'amplitude d'accélération sur la dissipation d'énergie induite par la présence des grains.

L'observation temporelle des signaux expérimentaux (force et accélération) met en évidence des mouvements caractéristiques liés à la mise en vibration des grains. La représentation de Lissajous permet d'identifier des phases distinctes correspondant à des mécanismes de dissipations spécifiques.

L'élaboration d'un modèle analytique, dont les constantes localisées utilisent le frottement de Coulomb, est développé. L'ajustement des coefficients de frottements permet une correspondance des niveaux d'énergie dissipée. Cependant, la phénoménologie n'est pas entièrement respectée, les courbes expérimentales et analytiques ne se superposent pas. D'autres mécanismes analytiques utilisant la dissipation visqueuse équivalente sont présentés et détaillés.

Analyse de la dissipation d'énergie par variations paramétriques du matériau granulaire dans la cavité indéformable

Préambule

Dans ce chapitre, des variations paramétriques du matériau granulaire utilisé sont présentées afin d'explorer et analyser des configurations favorisant l'atténuation des vibrations de la cavité indéformable vibrante. La variation porte sur le type de matériau et les dimensions des grains mais aussi sur les états de surface de la cavité. De nouveaux mécanismes dissipatifs peuvent ainsi être mis en évidence.

Les analyses se concentrent sur l'observation temporelle des signaux expérimentaux et le calcul de la perte d'énergie via la représentation de Lissajous. Cette quantification de l'énergie perdue par le système oscillant permet aussi d'identifier l'origine de la dissipation.

Sommaire

4.1	Etude préalable avec masse solidaire indéformable	74
4.2	Réalisation expérimentale avec des contacts élastiques entre les grains . .	74
4.2.1	Variation du diamètre de grains en verre	74
4.2.2	Variation de la polydispersité dans un échantillon grains en verre	76
4.2.3	Variation de la masse volumique avec des grains en acier	77
4.3	Réalisation expérimentale de contacts inélastiques entre des grains déformables	78
4.3.1	Utilisation de sphères creuses en élastomère	78
4.3.2	Utilisation de granules en caoutchouc	81
4.4	Modification des conditions de contact aux interfaces grains-cavité	82
4.4.1	Revêtement sur la paroi latérale de la cavité	82
4.4.2	Revêtement à la base de la cavité	82
4.5	Conclusion partielle	84

4.1 Etude préalable avec masse solide indéformable

La première configuration étudiée est l'ajout d'une masse ($m_2 = 476$ gr) solide indéformable à la cavité oscillante (Fig. 4.1). Elle sert de référence pour les variations paramétriques qui suivront car les masses statiques ajoutées des différents traitements seront les mêmes. Les paramètres du système primaire (cavité vide) restent inchangés. L'accélération de contrôle est gardée à la base de la cavité ainsi que les deux points de mesure co-localisés (force & accélération).

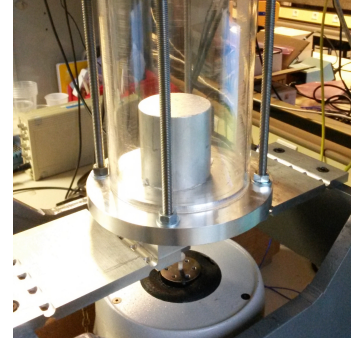


FIGURE 4.1 – Dispositif expérimental pour une masse solide indéformable.

Dans ce cas, l'oscillateur est uniquement alourdi. Cette augmentation de masse, largement utilisée en industrie, peut produire à certaines fréquences une augmentation de la force à injecter pour des amplitudes de vibrations identiques, et donc une augmentation de la dissipation par cycle.

Cette méthode est inadaptée au contexte de l'allégement de structures. Dans ces différentes études, cette configuration constitue un cas de référence pour lequel les évolutions temporelles des signaux de force et d'accélération permettent d'associer une énergie perdue par le système (Fig. 4.2).

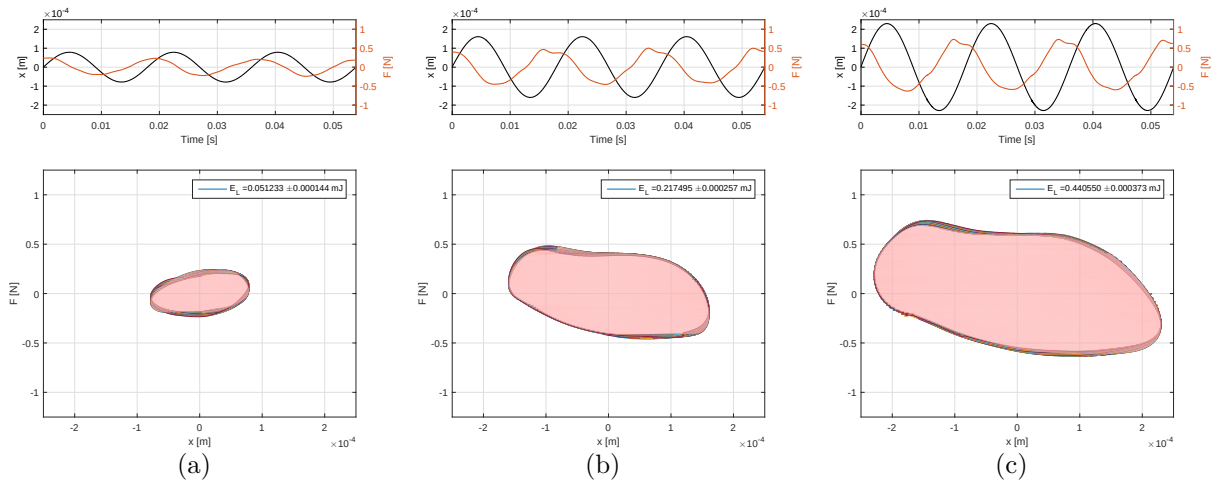


FIGURE 4.2 – Signaux de déplacement de la cavité et de la force nécessaire pour une masse solide indéformable $m_2 = 476$ gr : accélération (a) 1g - (b) 2g - (c) 3g.

La fréquence d'excitation est ajustée à la fréquence de résonance, ce qui donne lieu à une quadrature de phase entre les signaux déplacement et force mesurés. La forme elliptique du diagramme de Lissajous est donc d'axe horizontal (aux aléas de réglage près). L'atténuation vibratoire induite apparaît comme une dissipation purement visqueuse. Le mécanisme dissipatif du système primaire sans traitement est retrouvé, il n'y a pas d'autres mécanismes dissipatifs. L'énergie mesurée augmente en fonction du niveau d'accélération, car les oscillations sont de plus grandes amplitudes.

4.2 Réalisation expérimentale avec des contacts élastiques entre les grains

Des grains sphériques en verre, de masse volumique $\rho_{\text{verre}} = 2530 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, sont utilisés.

4.2.1 Variation du diamètre de grains en verre

La variation du diamètre des grains utilisés entraîne une modification du nombre d'interactions au sein du matériau granulaire vibré. Pour une masse statique ajoutée constante $m_2 = 476$ gr de grains sphériques

en verre, le nombre de grains peut varier fortement (Tab. 4.1).

$\varnothing = 2 \text{ mm}$	$N_{\text{grains}} \approx 45\,000$
$\varnothing = 1 \text{ mm}$	$N_{\text{grains}} \approx 360\,000$
$\varnothing = 0,2 \text{ mm}$	$N_{\text{grains}} \approx 45\,000\,000$

TABLE 4.1 – Variation du diamètre et du nombre de grains associé pour des échantillons de masse $m_2 = 476 \text{ gr}$.

Pour chacun des diamètres de grains, la quantité d'énergie E_L perdue par le système est mesurée. Une synthèse de cette énergie totale moyenne par cycle (Fig. 4.3) en fonction de l'amplitude d'accélération est donnée.

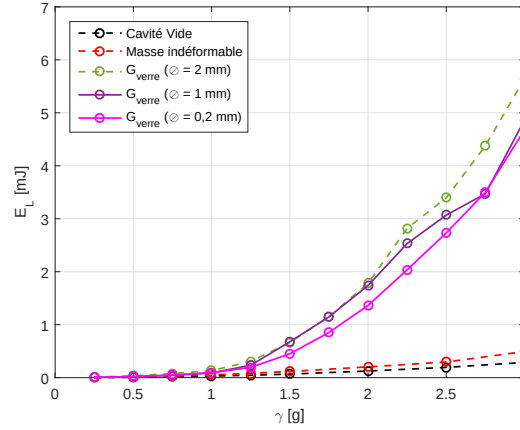


FIGURE 4.3 – Energie dissipée totale moyenne par cycle pour différentes tailles de grains d'un échantillon monodisperse.

Quel que soit le diamètre des grains utilisés, l'ajout d'un matériau granulaire à la place d'une masse solidaire indéformable augmente considérablement la valeur de l'énergie perdue E_L par le système ($\times 8$ en moyenne). Un seuil particulier, détaillé dans le chapitre précédent, pour une accélération $\gamma = 1g$ met en mouvement relatif les grains et induit des pertes par contact. Ce seuil n'est pas influencé par le diamètre des grains.

Pour une même valeur d'accélération, plus le diamètre des grains est important, plus la valeur de E_L augmente. En effet, bien que moins nombreux, les contacts unitaires sont plus énergétiques quand ils mobilisent des grains de masses plus importantes. La diminution du nombre de contacts est plus que compensée par l'énergie de chaque choc par rapport aux essais faits avec des grains plus petits. Afin d'observer les mécanismes, les courbes de Lissajous sont représentées pour une même valeur d'accélération $\gamma = 2g$ (Fig. 4.4).

Le mécanisme d'atterrissage périodique est observé sur le signal de déplacement (courbe temporelle noire) par l'augmentation brutale de sa valeur. Cette singularité périodique a une amplitude qui est d'autant plus importante, que le diamètre des grains est grand : chaque impact mobilise une énergie plus importante. Dans le cas des diamètres réduits, la singularité est moins présente. La diminution de l'énergie associée aux impacts est due à un plus grand frottement des grains avec l'air, ce qui entraîne un contact atténué quand les grains atterrissent à la base de la cavité.

L'amplitude du signal de force mesurée (courbe temporelle rouge), décroît quand le diamètre des grains diminue. Par ailleurs, une oscillation à une période de 1,6 ms est présente sur le signal pour le grand diamètre $\varnothing = 2 \text{ mm}$, et a tendance à s'estomper pour les diamètres de grains plus petits. Cet effet est dû à la liaison entre le pot vibrant et la cavité : elle est réalisée par une tige en nylon, permettant le guidage de la cavité par les deux plaques de liaison et non le guidage interne au pot vibrant. L'impact de l'atterrissage des grains avec la base de la cavité provoque des vibrations de traction-compression au sein même de la tige faisant le lien entre deux masses : la cavité et la pièce mobile du pot vibrant.

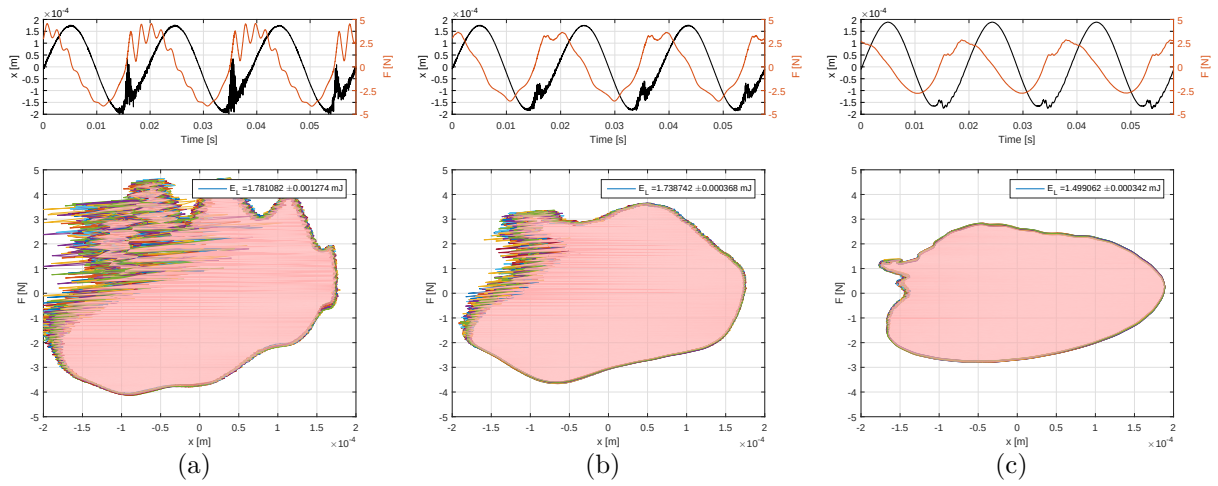


FIGURE 4.4 – Signaux temporels pour différents diamètres de grains en verre ($\gamma = 2g$) : (a) $\varnothing = 2$ mm - (b) $\varnothing = 1$ mm - (c) $\varnothing = 0,2$ mm.

L'observation des FRF pour ces différentes tailles de grains permet de valider leurs influences sur la réponse fréquentielle du système (Fig. 4.5). Pour ces représentations, les raideurs du dispositif expérimental ont subi une légère usure, ce qui explique un décalage de la fréquence de résonance pour les valeurs faibles d'accélération par rapport aux séries de mesures effectuées dans le chapitre précédent. L'effet physique observé est cependant conservé.

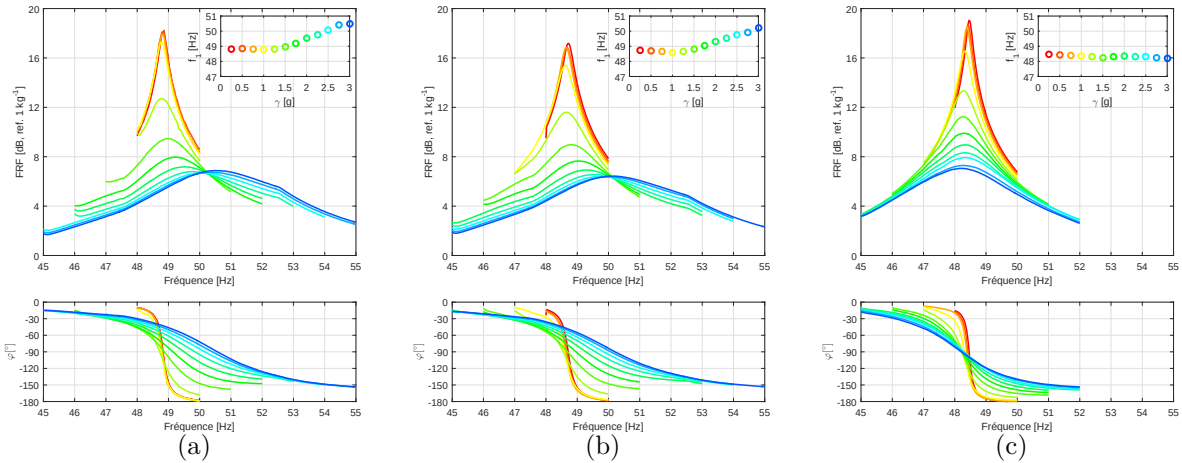


FIGURE 4.5 – FRF pour différents diamètres de grains en verre et différents niveaux d'accélération : (a) $\varnothing = 2$ mm - (b) $\varnothing = 1$ mm - (c) $\varnothing = 0,2$ mm.

L'utilisation d'un matériau granulaire, quelle que soit sa taille entraîne une diminution de l'amplitude de la FRF en fonction de l'accélération, ce qui fait écho à l'augmentation de la perte d'énergie. La dissipation induite par les nombreux contacts entre les grains au sein de l'amas présente un effet non linéaire ajouté. Il se traduit aussi par un glissement de la fréquence de résonance en fonction du niveau d'accélération d'autant plus visible que les grains sont gros.

4.2.2 Variation de la polydispersité dans un échantillon grains en verre

La plupart des matériaux granulaires utilisés ne présentent pas une unique taille de grains. Le caractère polydisperse du diamètre des grains induit des nombres de contacts plus importants et des chocs non équilibrés. L'influence de la polydispersité sur l'énergie perdue par le système est tracée (Fig. 4.6).

L'utilisation d'une répartition de grains de diamètre réduit ($\varnothing \in [0,6-1]$ mm) augmente la valeur de E_L par rapport aux cas monodisperses à $\varnothing 2$ mm. Cette optimisation permet de s'opposer à la décroissance de l'énergie perdue avec un amas de grains monodisperse de taille réduite. Par contre, cet effet n'est pas observé en cas de polydispersité avec les plus grands grains testés ($\varnothing \in [1-2]$ mm). L'influence de la taille des grains sur la dissipation a été montrée précédemment, la distribution du diamètre des grains admet

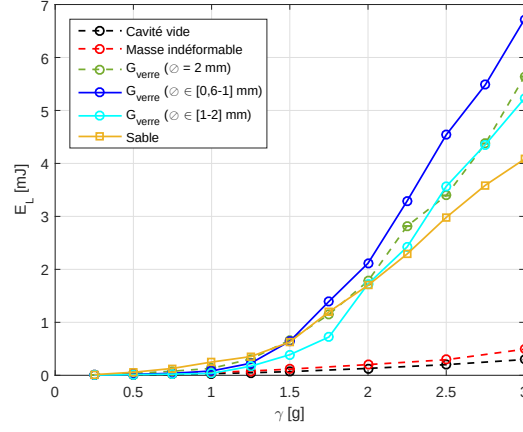


FIGURE 4.6 – Energie dissipée totale moyenne par cycle pour différentes tailles de grains au sein d'un échantillon polydisperse.

une efficacité optimum.

L'étude d'un amas de sable, permet de comparer des échantillons théoriques à un matériau granulaire qui se trouve en quantité majoritaire dans la nature. La polydispersité est multi-paramètres (taille, matériau et géométrie des grains). Les contacts n'étant pas uniquement ponctuels, l'énergie n'est pas transmise de manière optimisée. Pour des fortes valeurs d'accélération, de faibles valeurs de perte d'énergie sont mesurées en utilisant ce matériau brut.

4.2.3 Variation de la masse volumique avec des grains en acier

L'utilisation de grains en acier ($\varnothing = 2 \text{ mm}$) au lieu de billes en verre permet de mesurer l'influence du nombre et des conditions de contacts pour une même masse mise en mouvement (Fig. 4.7). Pour que la masse ajoutée reste constante, le nombre de grains est réduit ($N_{\text{grains}} \approx 15\,000$).

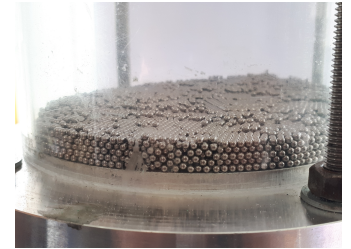


FIGURE 4.7 – Grains d'acier ($\varnothing = 2 \text{ mm}$).

Dans le cas des grains en acier, la propriété élastique de restitution d'un effort incident devient plus importante que pour les grains en verre. Expérimentalement (Fig. 4.8), l'atterrissage des grains est très visible sur les signaux temporels mesurés à la base de la cavité oscillante (zone très bruyée).

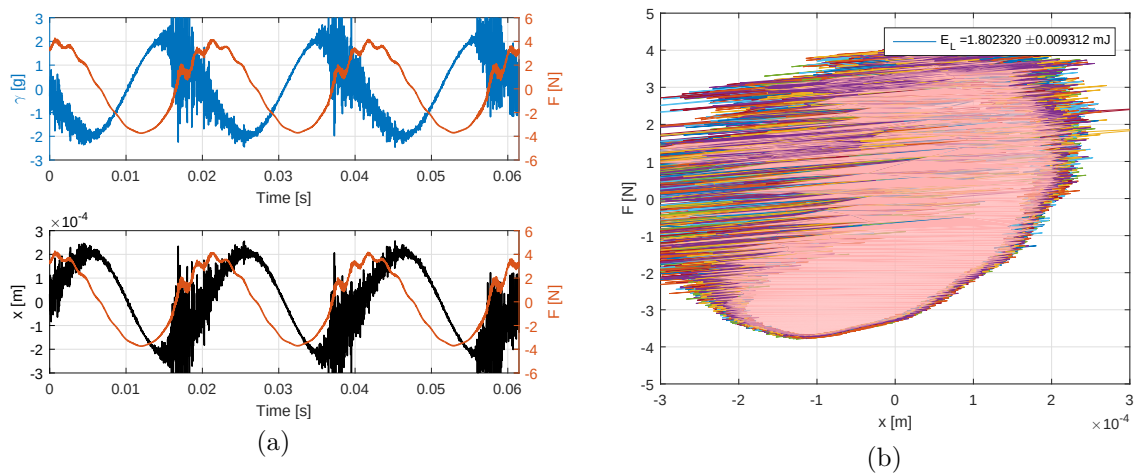


FIGURE 4.8 – Utilisation des grains en acier ($\gamma = 3\text{g}$) : (a) signaux temporels - (b) diagramme de Lissajous.

Les signaux expérimentaux montrent qu'à l'impact de l'amas de grains, une grande quantité d'énergie est transmise. La quantité de mouvement associée à chaque grain est plus importante qu'avec les billes en verre. Ces perturbations très importantes ne permettent pas un contrôle optimal du niveau d'accélération, dont la consigne est fixée à $\gamma = 3g$. Une limite du système pour certaines variations paramétriques est atteinte. Cette configuration avec grains en acier n'est pas approfondie car elle ne permet pas un contrôle adéquat du paramètre d'accélération.

4.3 Réalisation expérimentale de contacts inélastiques entre des grains déformables

4.3.1 Utilisation de sphères creuses en élastomère

Lorsque les grains sont déformables en matériau viscoélastique, un mécanisme dissipatif est ajouté. Si ces grains sont creux (Fig. 4.9), la présence d'une cavité interne permet d'en faire un isolant acoustique [36]. Utilisés dans le domaine de l'aérospatial [20] pour remplacer les fluides cryotechniques dans les expériences, l'élasticité non linéaire du matériau équivalent permet en réglant la précharge de s'approcher du comportement des fluides. Néanmoins, comme ils réduisent aussi les niveaux vibratoires, les effets de dissipation ajoutés sont à quantifier.



FIGURE 4.9 – Coupe de grains creux en élastomère : (a) grains non étuvés (pleins) - (b) grains étuvés (creux).

La méthode de fabrication de ces sphères fournies par la société ATECA consiste à entourer une bille de polystyrène d'un mélange permettant d'obtenir une structure de type élastomère. Après une phase de séchage, permettant à la couche d'élastomère de former une sphère, cet ensemble est chauffé de nouveau. Le polystyrène se rétracte, réduisant ainsi son volume, ce qui crée une sphère creuse. La mise en vibration de l'amas de grains creux est effectuée dans différentes configurations. La masse et le type de matériau restent alors identiques (Fig. 4.10).

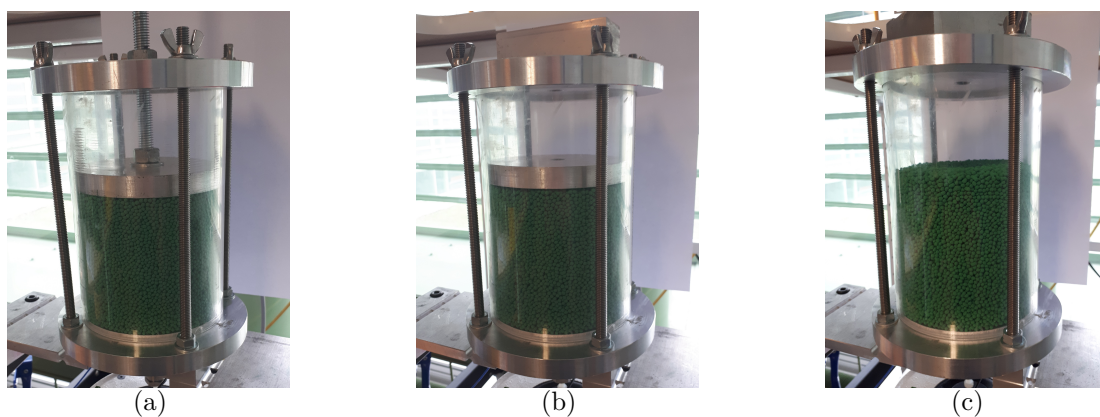


FIGURE 4.10 – Matériau granulaire vibré pour différentes configurations (Grains creux - $\varnothing \approx 2$ mm) : (a) piston abaissé (V_{constant}) - (b) piston posé (P_{constant}) - (c) surface libre.

L'énergie dissipée E_L mesurée pour chacune des configurations permet de comparer leur efficacité (Fig. 4.11).

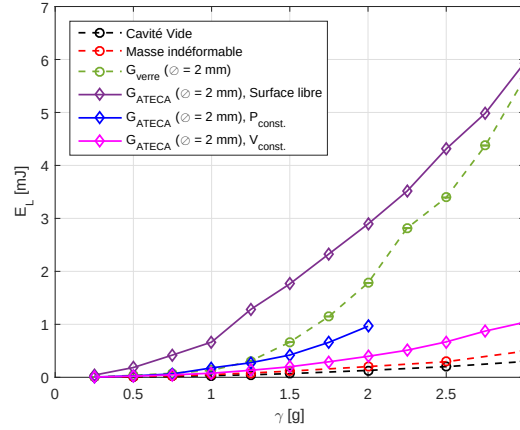


FIGURE 4.11 – Synthèse de la dissipation d'énergie due à la présence d'un matériau granulaire déformable, $\varnothing \approx 2$ mm.

Le cas avec volume constant ($V_{\text{const.}}$) présente la plus faible dissipation d'énergie. Le piston est positionné sur les grains sous son poids propre, puis fixé avant la mise en vibration. Dès que cette vibration est activée, les interactions ont lieu, mais la déformation et le mouvement des grains ne sont pas favorisés, ce qui limite la dissipation. Le mouvement relatif des grains est bloqué au sein d'un volume contraint. Cette configuration est cependant la plus aisée à analyser car il s'agit ici uniquement d'un amortissement visqueux ajouté.

Pour la configuration pression constante ($P_{\text{const.}}$) la dissipation est plus élevée. Les éventuels réarrangements sont compensés par la descente libre du piston, conservant alors la précharge des grains donc des niveaux d'interactions importants. Le piston est donc libre de pouvoir comprimer les grains, mais le mouvement des particules reste faible dû à la condition aux limites à la surface. Cette série de mesures n'a pas pu être effectuée sur la totalité de la gamme de mesures : pour une accélération au delà de 2g, le mouvement libre du piston à l'intérieur de la cavité induit de nombreux contacts avec la paroi et la mesure n'est plus uniquement représentative de la dissipation induite par les grains.

Le dernier cas avec surface libre reste le plus efficace dans la perte d'énergie vibratoire du fait de la grande mobilité des grains à proximité de la surface libre. Pour $\gamma < g$, la propagation d'ondes est favorisée au sein du matériau granulaire et l'énergie perdue est ainsi augmentée. Les FRF pour différentes valeurs d'accéléérations autour de la première fréquence de résonance du système sont comparées à celles obtenues avec l'ajout d'une masse solide indéformable (Fig. 4.12).

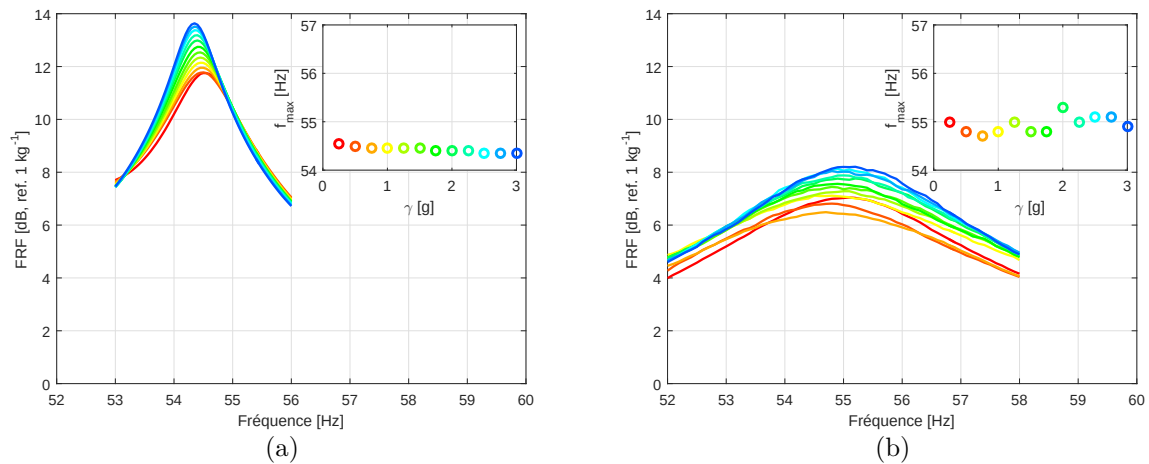


FIGURE 4.12 – Comparaison des FRF : (a) masse solide indéformable - (b) grains creux en élastomère étuvés à surface libre (Grains creux - $\varnothing \approx 2$ mm).

Les grains déformables ont un amortissement induit plus important par rapport à la masse continue indéformable (réduction de l'amplitude d'environ 6 dB). La non-linéarité (décalage de la fréquence de réso-

nance) est moins importante que dans le cas des sphères en verre. Cela semble indiquer que la dissipation est principalement due aux déformations viscoélastiques des grains creux par rapport aux contacts inter-grains.

L'observation temporelle des signaux issue de la mesure avec grains à surface libre dans la cavité (Fig. 4.13) met en évidence de nouveaux mécanismes dissipatifs.

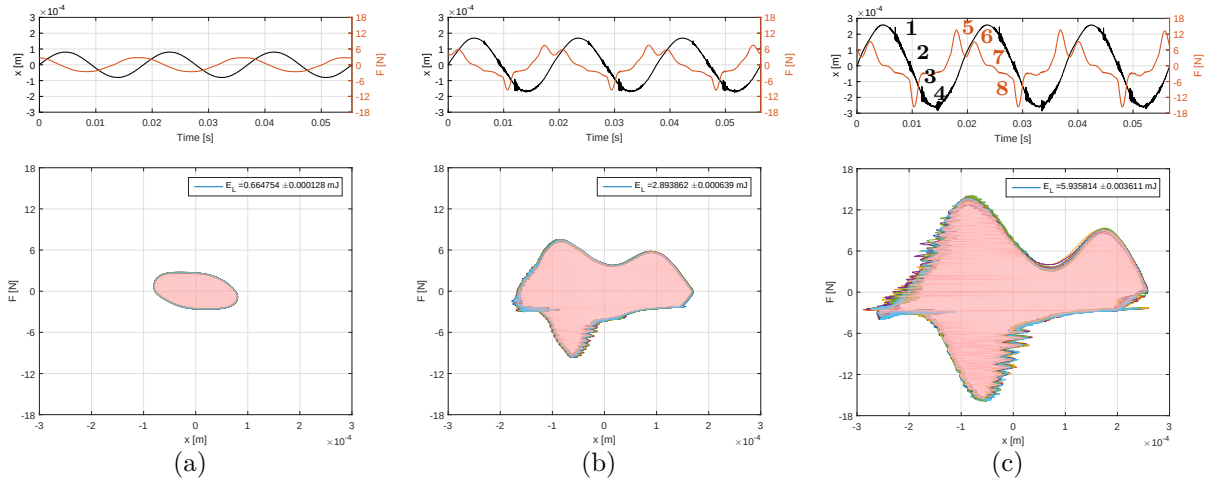


FIGURE 4.13 – Signaux temporels expérimentaux avec grains déformables creux à surface libre (Grains creux - $\varnothing \approx 2$ mm) : (a) $\gamma = g$ - (b) $\gamma = 2g$ - (c) $\gamma = 3g$.

Dans le cas des grains à surface libre dans la cavité, au delà de $\gamma > g$) la force n'est plus sinusoïdale en fonction du temps. Passé le seuil de décollage, les grains creux en élastomère reçoivent une énergie suffisante pour pouvoir être éjectés de la base de la cavité. Pendant la phase de "vol", il semblerait que des frottements latéraux retiennent l'amas de grains, jusqu'à un décrochage pendant la phase de descente de la cavité (Fig. 4.13c, points 1, 2, 3, 4). Les grains doivent atterrir après l'instant repéré par le point 4. Le signal de force présente alors des oscillations amorties (Fig. 4.13c, points 5, 6, 7, 8). Celles-ci sont sans doute dues à des propagations d'ondes au sein du matériau granulaire suite à l'impact d'atterrissage.

Les spectres de ces signaux expérimentaux peuvent informer sur un report éventuel d'énergie du système (Fig. 4.14).

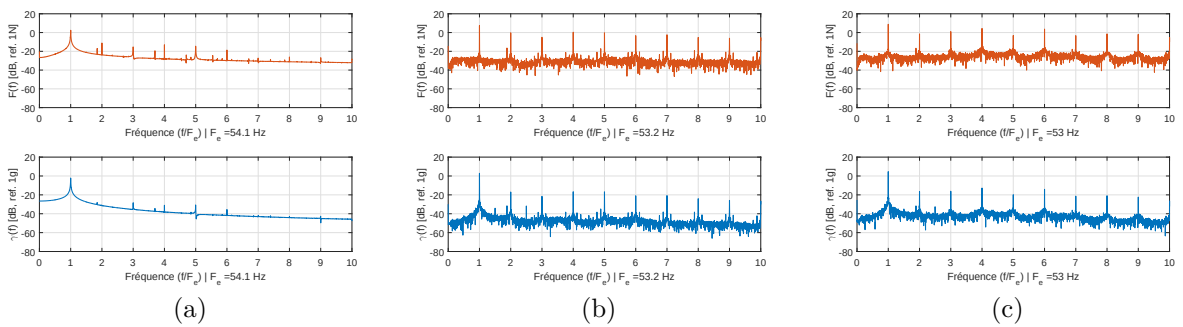


FIGURE 4.14 – Spectre des signaux temporels expérimentaux avec grains déformables creux à surface libre (Grains creux - $\varnothing \approx 2$ mm) : (a) $\gamma = 1g$ - (b) $\gamma = 2g$ - (c) $\gamma = 3g$.

Le spectre pour $\gamma = g$ ne présente pas d'amplitude importante sur les harmoniques : la dissipation est principalement visqueuse au sein de l'amas de matériau granulaire. Pour des amplitudes $\gamma > g$, le spectre est beaucoup plus fourni et présente des harmoniques d'amplitudes très élevées. De l'énergie vibratoire est reportée dans les harmoniques de rangs supérieurs indiquant une augmentation de la perte d'énergie par le système.

4.3.2 Utilisation de granules en caoutchouc

La configuration précédente utilisant des sphères creuses déformables est comparée à l'utilisation de granules de caoutchouc (Fig. 4.15) pleines et polydisperses en géométrie et matériau car issus de pneus usagés.



FIGURE 4.15 – Granules de caoutchouc : (a) $\varnothing \approx 1$ mm - (b) $\varnothing \approx 5$ mm.

Pour les deux tailles moyennes de granules de caoutchouc utilisées, l'énergie perdue E_L est quantifiée (Fig. 4.16).

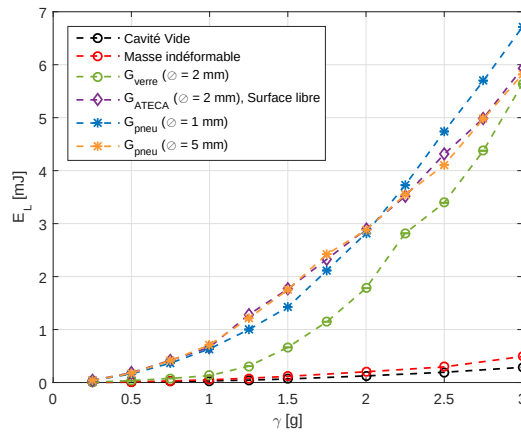


FIGURE 4.16 – Synthèse de la dissipation d'énergie due à la présence de granules de caoutchouc.

Dans les deux cas de granules de caoutchouc, l'énergie perdue E_L est au moins aussi efficace que l'utilisation des grains creux déformables. La forme des granules de caoutchouc a une importance sur le nombre de contacts. Pour le cas $\varnothing \approx 1$ mm, l'énergie perdue est maximum à partir de $\gamma > 2g$.

L'optimisation du type de traitement par ajout d'un matériau granulaire déformable dépend de l'amplitude d'accélération. De plus, l'utilisation de granules de caoutchouc (ayant une masse volumique plus importante) diminue le volume nécessaire occupé par les grains, ce qui permet une localisation plus précise.

4.4 Modification des conditions de contact aux interfaces grains-cavité

4.4.1 Revêtement sur la paroi latérale de la cavité

Afin de modifier l'état de surface de la paroi latérale, une couche de papier abrasif est collée à l'intérieur du tube cylindrique constituant la cavité indéformable (Fig. 4.17a). La hauteur de revêtement est telle que les grains mis en vibration ne sont pas en contact direct avec le plexiglass. La base de la cavité est sans traitement.

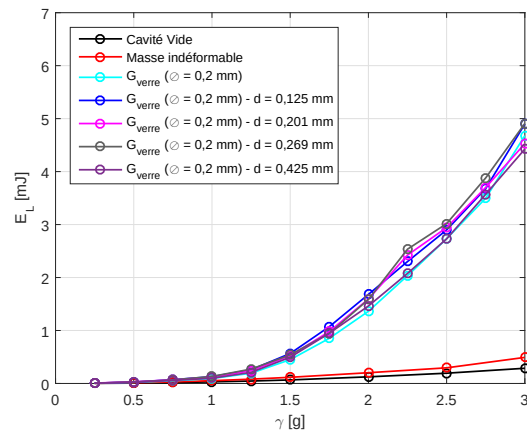
Quand les grains sont éjectés de la base de la cavité, pour $\gamma > g$, leurs mouvements propres peuvent engendrer un frottement sur la paroi. Le signal temporel peut alors présenter une signature de ce frottement pendant la lévitation, permettant de valider cet effet dans la dissipation d'énergie du système. Dans le cas présent, le diamètre des grains de verre utilisés est $\varnothing = 0,2$ mm. La granulométrie d du papier abrasif (Tab. 4.2) varie autour de cette valeur et permet d'observer l'influence en terme d'énergie perdue (Fig. 4.17b).

P120	$d \approx 125 \mu\text{m}$
P80	$d \approx 201 \mu\text{m}$
P60	$d \approx 269 \mu\text{m}$
P40	$d \approx 425 \mu\text{m}$

TABLE 4.2 – Correspondance pour un papier abrasif entre la nomenclature ISO et la taille moyenne des grains du papier.



(a)



(b)

FIGURE 4.17 – Condition de frottement latérale : (a) Photo du revêtement - (b) Energie dissipée par un matériau granulaire ($\varnothing = 0,2$ mm), et modification du frottement sur la paroi.

Pour chacun des papiers abrasifs utilisés, les résultats sur la perte d'énergie ne sont pas significativement différents quelque soit l'amplitude d'accélération. L'observation des signaux temporels de déplacement et de force permet de mieux identifier la modification éventuelle des propriétés de contact grains-paroi. La valeur d'accélération $\gamma = 2g$ est choisie afin d'induire un mouvement relatif entre les grains ou/et un contact grain-paroi (Fig. 4.18).

La variation des conditions de frottement n'entraîne pas d'influence significative sur les signaux temporels, donc sur les courbes de Lissajous. L'énergie perdue par le système lorsque les grains sont éjectés de la base de la cavité est donc due aux contacts à l'intérieur de l'amas de grain en lévitation qui est transmise ensuite à la paroi. Pour les configurations testées, les conditions de paroi ne modifient pas le volume de grains en mouvement.

4.4.2 Revêtement à la base de la cavité

L'état de surface de la base de la cavité est modifié en y appliquant une feutrine (Fig. 4.19a), la paroi en plexiglass n'est pas recouverte. L'objectif est d'avoir un effet sur l'atterrissage des grains, suite à leur

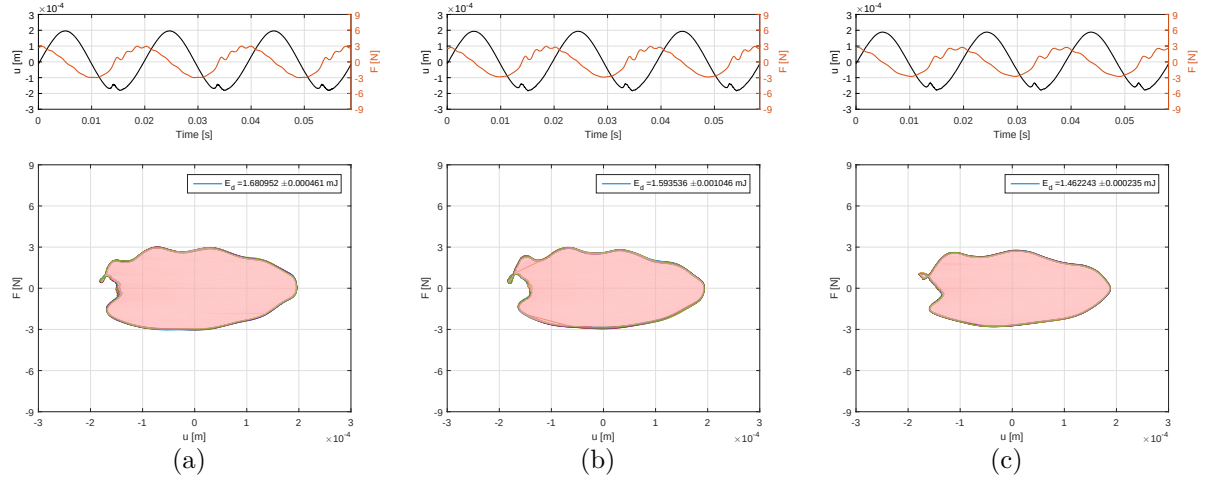
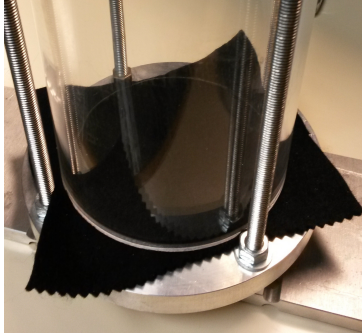


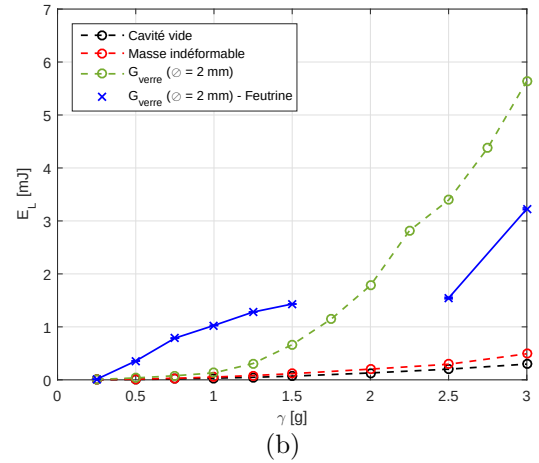
FIGURE 4.18 – Représentation temporelle de l'accélération et de la force sur la cavité en fonction de la rugosité de la paroi latérale pour une accélération $\gamma = 2g$: (a) $d \approx 125 \mu\text{m}$ - (b) $d \approx 201 \mu\text{m}$ - (c) $d \approx 425 \mu\text{m}$.

mise en mouvement pour une excitation $\gamma > g$.

La condition de contact à l'atterrissage des grains n'est plus rigide [89, 24]. Ce changement d'interface entraîne une modification de l'interaction grains-structure à la base de la cavité. Une synthèse des énergies dissipées par ces modifications est observée (Fig. 4.19b).



(a)



(b)

FIGURE 4.19 – Condition de contact souple à l'atterrissage : (a) Photo du revêtement - (b) Energie dissipée sans et avec feutrine à la base de la cavité et billes en verre ($\phi = 2 \text{ mm}$).

Trois zones distinctes sont visibles.

- Pour $\gamma < 1,5g$, la feutrine favorise la perte d'énergie. Des ondes doivent être présente dans l'épaisseur de la feutrine chargée par les grains. Des frottements internes à ce revêtement s'expriment en plus des dissipations dues aux phases de décollage-atterrissage des grains pour $\gamma > g$.
- Pour $\gamma \in [1,5 - 2,5]g$, les grains se mettent à osciller très fortement et les chocs saturent les capteurs : une limite de la configuration d'essai est atteinte. Les deux sous-systèmes (feutrine et amas de grains) sont couplés fortement et induisent une résonance de forte amplitude.
- Pour $\gamma > 2,5g$, la dissipation est moindre que sans revêtement. L'amplitude du vol des grains est telle qu'ils atterrissent avec une période correspondant à la moitié des oscillations de la cavité et l'énergie associée au cycle est ainsi réduite par 2. Ceci est confirmé par l'observation temporelle des signaux et de Lissajous ci-dessous (Fig. 4.20).

Pour les 3 valeurs d'accélérations représentées, le mécanisme de décollage-atterrissage est moins visible sur les signaux car moins violent grâce à la feutrine. Pour $\gamma < 1,5g$, les deux signaux mesurés sont périodiques. Pour $\gamma > 2,5g$ les signaux temporels deviennent bi-périodiques. Un faible bruit sur la courbe

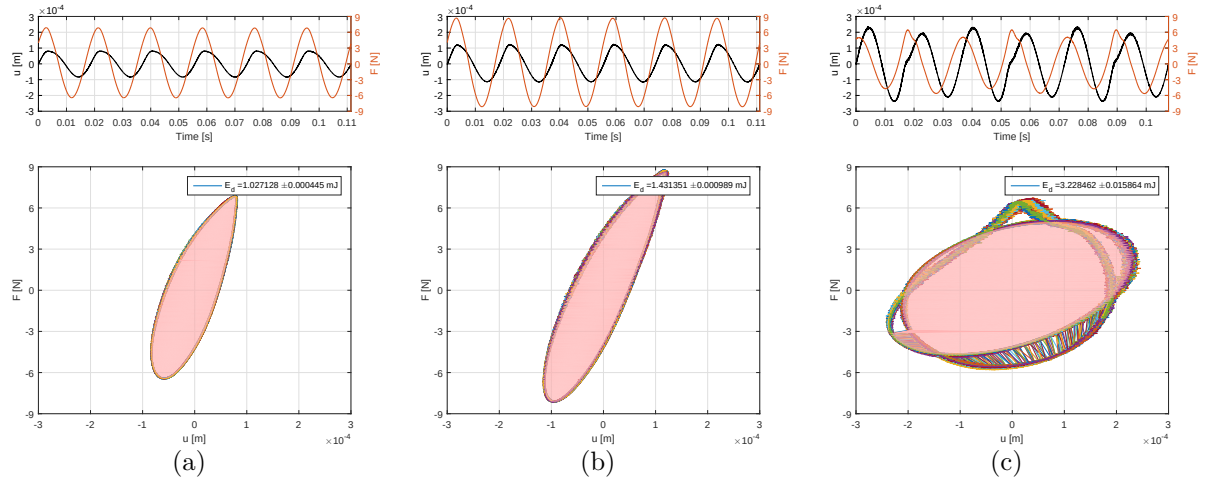


FIGURE 4.20 – Signaux temporels avec feutrine à la base de la cavité et billes en verre ($\varnothing = 2$ mm) : (a) $\gamma = 1g$ - (b) $\gamma = 1,5g$ - (c) $\gamma = 3g$.

de déplacement apparaît tous les deux cycles lors de la remontée de la base de la cavité. L'amas de grains atterri à cet instant. Les composantes fréquentielles des signaux temporels mesurés permettent de confirmer cette observation (Fig. 4.21).

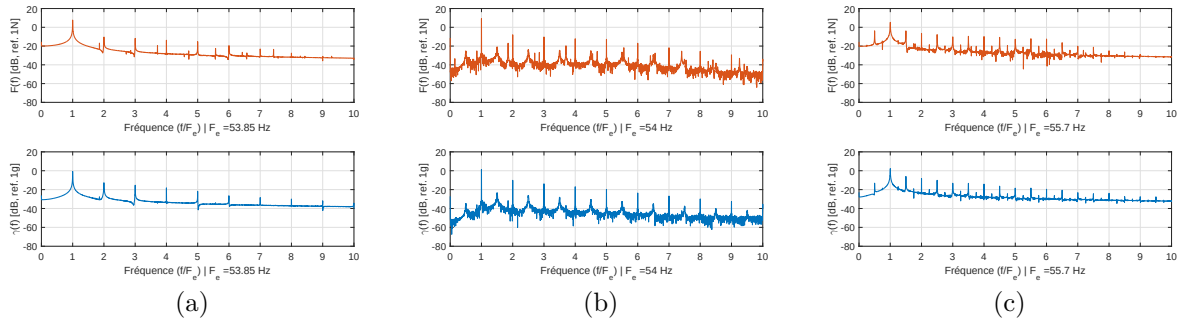


FIGURE 4.21 – Réponse fréquentielle avec feutrine à la base de la cavité et billes en verre ($\varnothing = 2$ mm) : (a) $\gamma = 1g$ - (b) $\gamma = 1,5g$ - (c) $\gamma = 3g$.

Les composantes fréquentielles des signaux temporels mesurés permettent de confirmer cette observation par l'apparition d'un pic à $f_e/2$ (Fig. 4.21c). Ce pic de moindre amplitude est aussi visible pour $\gamma = 1,5g$. Le report d'énergie, dû à la non-linéarité de la vibration des grains, est dans ce cas favorisé.

4.5 Conclusion partielle

Dans tout ce chapitre, la masse ajoutée est identique excepté pour le cas de la cavité vide tracée en référence, la gamme d'accélération explorée est la même $\gamma \in [0, 3]g$.

La variation du type de grains dans une configuration avec surface libre montre que si ces grains sont en verre ou en acier, des mécanismes de vol et d'atterrissage sont visibles. Ces phases sont les sources principales de la dissipation, sous réserve que les capteurs ne soient pas saturés. Avec des grains déformables la dissipation apparaît aussi au sein du matériau en dessous de $1g$. Pour augmenter la valeur d'énergie perdue, la configuration à surface libre est préférable à la configuration à pression constante. La configuration à volume constant est à éviter.

La variation des revêtements à l'intérieur de la cavité ont, dans le cas de la paroi latérale, une importance négligeable. La couche latérale de grains, qui peut éventuellement frotter, a une influence très faible sur le volume de grains en mouvement. A l'inverse un revêtement souple permet une augmentation des valeurs de dissipation d'énergie même pour des valeurs faibles d'accélération. Ces enseignements étant tirés, l'étude de la vibration d'une structure déformable avec ajout localisé d'un matériau granulaire peut être abordée dans le chapitre suivant.

Etude de la vibration d'une poutre creuse sous influence d'un matériau granulaire

Préambule

L'étude d'une poutre creuse à l'intérieur de laquelle un amas de grains peut être incorporé est faite avec deux objectifs : quantifier si d'autres mécanismes dissipatifs liés à la déformation de la structure émergent de façon significative, notamment pour des valeurs d'accélération inférieures à 1 g. Ensuite, définir les zones optimales sur la structure où positionner les amas de granulaires.

Différents types de grains sont utilisés. L'influence de la localisation du matériau granulaire est abordée, dans le cas d'une poutre avec conditions libre-libre. Enfin, un batteur dissipatif est dimensionné afin de maximiser la dissipation induite par son interaction avec le matériau granulaire.

Sommaire

5.1	Dispositif expérimental	86
5.1.1	Réalisation de la poutre creuse sans grain	86
5.1.2	Matériel utilisé et technique de mesure	86
5.1.3	Etude préalable de la poutre creuse sans grain	87
5.2	Variations paramétriques associées à l'ajout de grains localisés	88
5.2.1	Influence du matériau constitutif des grains	88
5.2.2	Influence de la localisation du matériau granulaire dans la poutre creuse	90
5.2.3	Optimisation de la perte d'énergie par l'ajout d'un batteur dissipatif	91
5.3	Conclusion partielle	94

5.1 Dispositif expérimental

5.1.1 Réalisation de la poutre creuse sans grain

La vibration d'une structure modale de type poutre entraîne des amplitudes de déplacement non uniformes le long de la structure par rapport à l'étude de la cavité indéformable. Cette caractéristique associée à l'incorporation locale d'un matériau granulaire à l'intérieur de la poutre creuse est étudiée (Fig. 5.1). La poutre creuse est compartimentée, permettant d'étudier la localisation des grains sur la perte d'énergie pour certains modes de déformation.

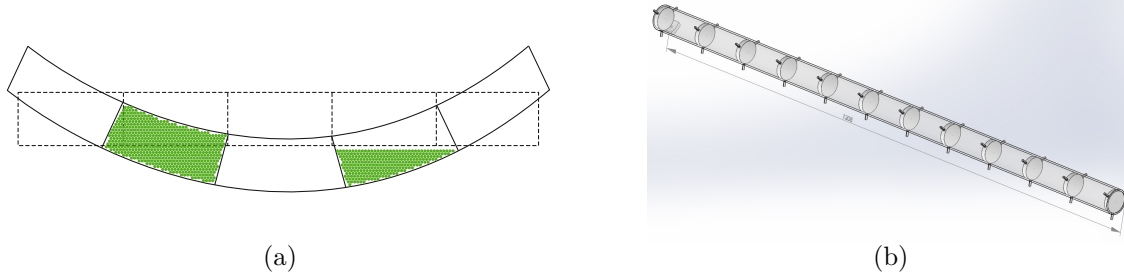


FIGURE 5.1 – Poutre creuse compartimentée : (a) dessin de la déformée du premier mode d'une poutre creuse libre-libre contenant partiellement un matériau granulaire - (b) CAO de la poutre creuse réalisée.

Le choix d'un cylindre creux en Plexiglas a été la solution retenue pour pouvoir observer le mouvement des grains pendant la mesure vibratoire. Les compartiments sont numérotés de 1 à 11. Ils sont de longueur égales $L_c = 0,1$ m et peuvent être remplis indépendamment. Ils sont fixés via des trous taraudés et espacés d'un angle $\theta = 120^\circ$. Un modèle de poutre est utilisé pour approximer le système. Cette étude se concentre dans le domaine des basses fréquences $f \lesssim 400$ Hz. L'étude de la déformée modale d'une poutre libre-libre permet de positionner les compartiments numérotés afin que la localisation des grains ait un impact sur les premiers modes de vibrations. La déformée opérationnelle est donnée par [38] :

$$\phi = \cosh(\beta_n x) + \cos(\beta_n x) - \sigma_n [\sinh(\beta_n x) + \sin(\beta_n x)]. \quad (5.1)$$

avec $x \in [0, L]$, L la longueur de la poutre, σ_n & β_n des coefficients relatifs au numéro du mode considéré (Fig. 5.2).

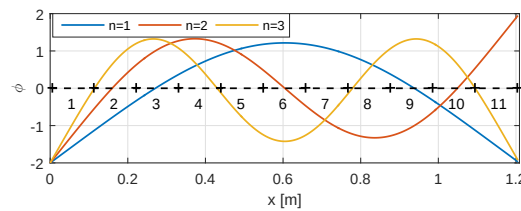


FIGURE 5.2 – Déformée modale d'une poutre libre-libre pour les 3 premiers modes ($n = [1, 2, 3]$) et numérotation des compartiments internes (de 1 à 11).

5.1.2 Matériel utilisé et technique de mesure

La poutre est excitée par un pot vibrant à l'une de ses extrémités (Fig. 5.3). Les conditions aux limites de la poutre sont libre-libre via une suspension avec des élastiques. Le point d'excitation est ajusté en hauteur pour, au repos, ne pas faire varier la tension de la suspension.

A partir des déformées modales, l'amplitude d'accélération contrôlée $\gamma_{\text{contrôle}}$ à l'extrémité de la poutre n'est pas identique à celle correspondant aux maximums d'amplitude des ventres de vibration γ_{max} . Dans l'hypothèse que la déformée modale est constante, avec et sans traitement par ajout de grains, une équivalence permet de calculer le niveau d'accélération aux ventres de vibrations (Tab. 5.1).

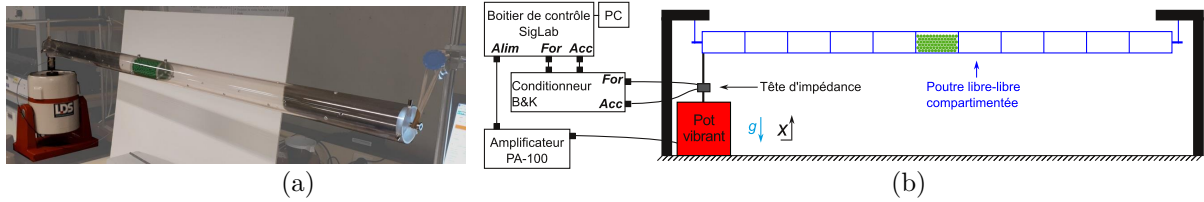


FIGURE 5.3 – Expérience d’une poutre compartimentée ($\Gamma \in [0 - 3]$) : (a) Dispositif expérimental - (b) schéma représentatif.

$\gamma_{\text{contrôle, PotVib}}$	$\gamma_{\text{max, Mode 1}}$	$\gamma_{\text{max, Mode 2}}$
1,00	0,61	0,66
2,00	1,22	1,33
3,00	1,82	1,99

TABLE 5.1 – Relation de proportionnalité du niveau d’accélération entre l’extrémité et le maximum d’amplitude de vibration de la poutre libre-libre.

5.1.3 Étude préalable de la poutre creuse sans grain

Une première étude fréquentielle permet de valider la linéarité de la poutre creuse sans ajout d’un matériau granulaire (Fig. 5.4).

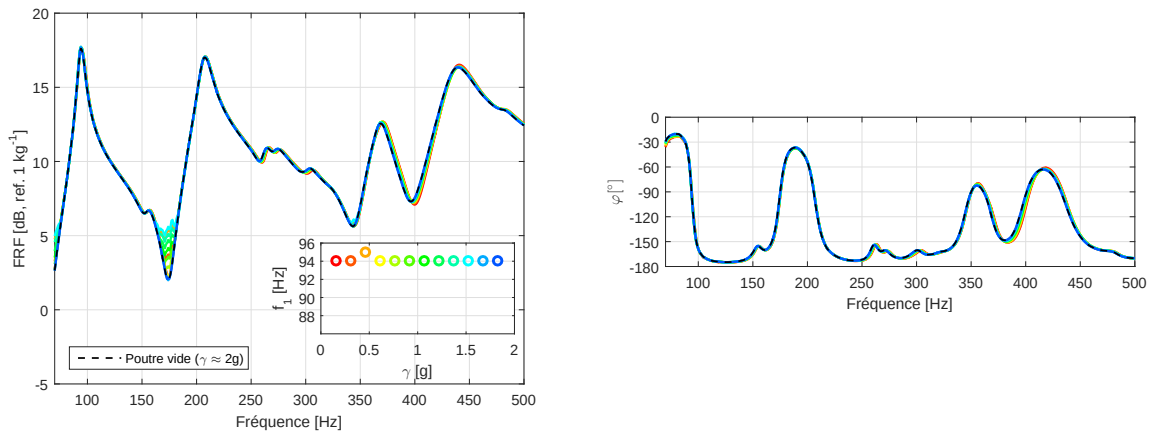


FIGURE 5.4 – FRF de la poutre creuse avec compartiment central (n°6), sans traitement.

En effet les courbes sont superposées pour des niveaux d’accélération $\gamma \in [0, 2]g$, la poutre a donc un comportement linéaire. Deux résonances peuvent être clairement identifiées, elles correspondent aux deux premiers modes de vibration de la poutre (Fig. 5.5). Les pics aux fréquences plus élevées semblent présenter des caractéristiques plus complexes et ne sont pas étudiés par la suite.



FIGURE 5.5 – Déformées modales expérimentales de la poutre vide : (a) 1^{er} mode - (b) 2^{ème} mode.

Les variations paramétriques qui suivent sont effectuées aux fréquences des deux premiers modes de vibration. La mesure de l’énergie perdue E_L du diagramme de Lissajous quantifie les mécanismes dissipatifs associés aux différentes configurations.

5.2 Variations paramétriques associées à l'ajout de grains localisés

5.2.1 Influence du matériau constitutif des grains

C'est au centre de la poutre qu'est étudiée l'influence de la nature des grains. La masse ajoutée ($m_{aj} = 43$ gr) est identique dans les différentes configurations, elle représente 5% de la masse statique totale de la poutre (Fig. 5.6).

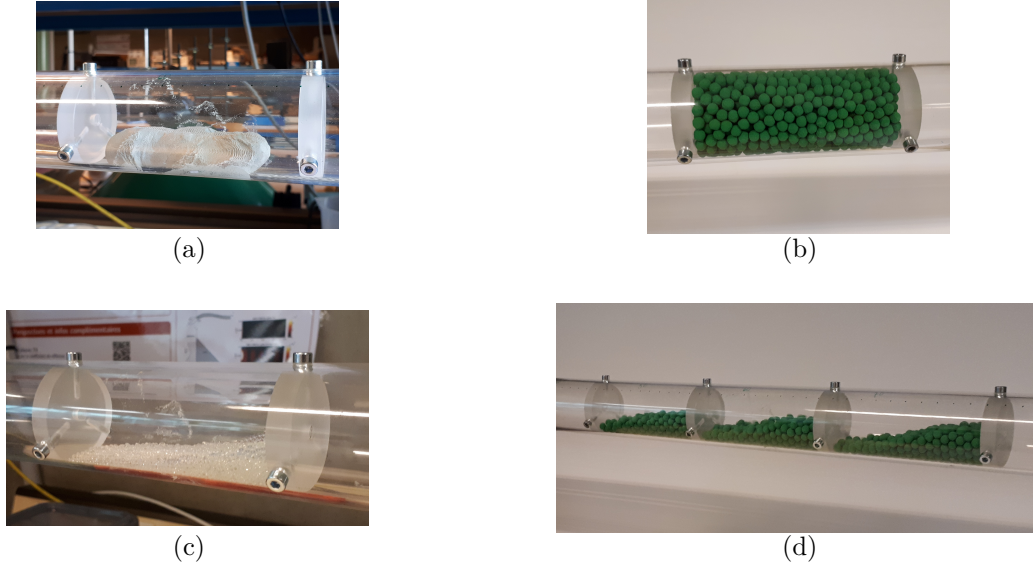


FIGURE 5.6 – Positionnement des grains au centre de la poutre (compartiment n°6) à masse ajoutée identique : (a) masse adhésive indéformable - (b) grains déformables remplissant la cavité - (c) grains en verre - (d) grains déformables réparti.

L'énergie perdue E_L est mesurée pour les deux premiers modes de vibrations de la poutre. Les différents types de traitements sont comparés à l'ajout d'une masse continue viscoélastique au centre de la poutre (Fig. 5.7).

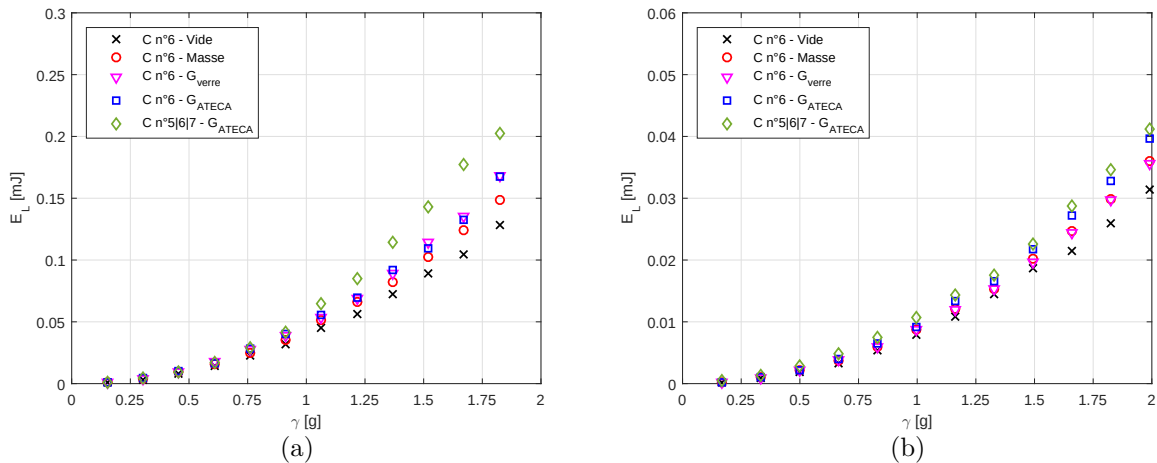


FIGURE 5.7 – Synthèse des énergies perdues E_L pour différents traitements au centre de la poutre : (a) 1^{er} mode - (b) 2^{ème} mode.

Pour le 1^{er} mode, le type de traitement le plus efficace consiste à avoir les grains déformables à surface libre. La combinaison du contact allée à la déformation du matériau granulaire permet une perte d'énergie plus importante. Les dissipations sur le 2^{ème} mode sont 5 fois plus faibles que sur le premier mode car à cette fréquence, la zone de traitement n'est que très peu sollicitée. Les effets des différents traitements

sont peu différents car les grains ne sont pas mis en mouvement relatifs et l'énergie dissipée ajoutée par ceux-ci est donc faible.

Une masse de matériau viscoélastique indéformable adhérente à la paroi est localisée dans la cavité centrale. Les FRF (Fig. 5.8) montrent que le comportement est identique au cas où les grains remplissent la cavité et entraînent l'absence de mouvements relatifs pour les modes 1 et 2.

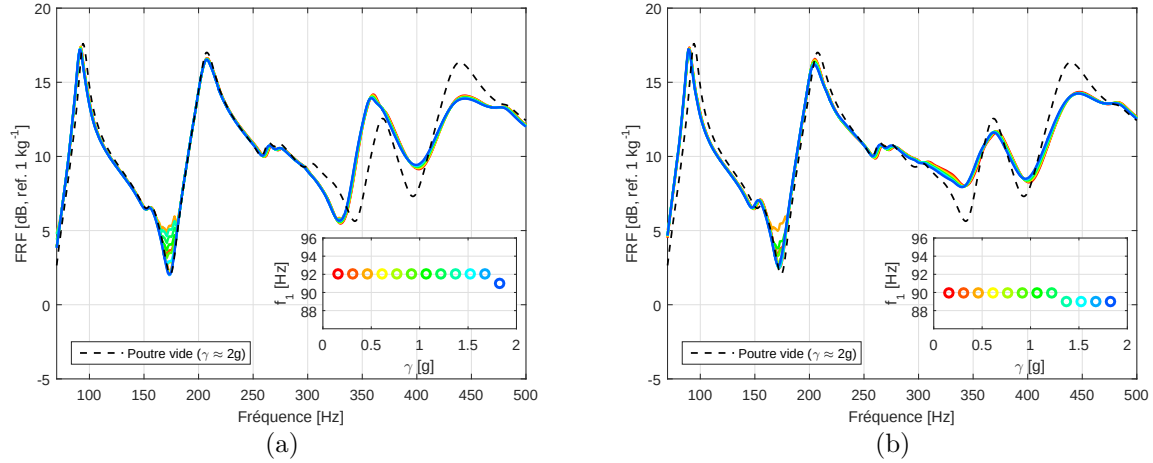


FIGURE 5.8 – FRF de la poutre creuse avec compartiment central (n°6) avec traitement : (a) masse adhésive localisée - (b) matériau granulaire déformable remplissant la cavité centrale.

L'ajout de masse induit logiquement une légère diminution de la fréquence du 1^{er} mode de vibration. Par ailleurs, pour le cas avec matériau granulaire remplissant la cavité, la viscoélasticité du matériau granulaire entraîne une diminution de l'amplitude des pics n°3 et n°4 : pour ces modes plus élevés, la courbure locale deviendrait suffisante pour que la géométrie de la cavité change et sollicite les grains. Pour des courbures plus faibles, un remplissage partiel de la cavité est donc nécessaire pour favoriser les contacts et la dissipation associée.

L'utilisation de grains en verre pour une masse ajoutée identique, induit nécessairement l'apparition d'une surface libre (masse volumique plus importante). Pour isoler l'effet de la présence d'une surface libre, les grains déformables sont répartis dans les 3 cavités centrales de la poutre creuse et les dissipations augmentent par rapport à celles où les grains sont confinés dans la cavité centrale n°6 (Fig. 5.9).

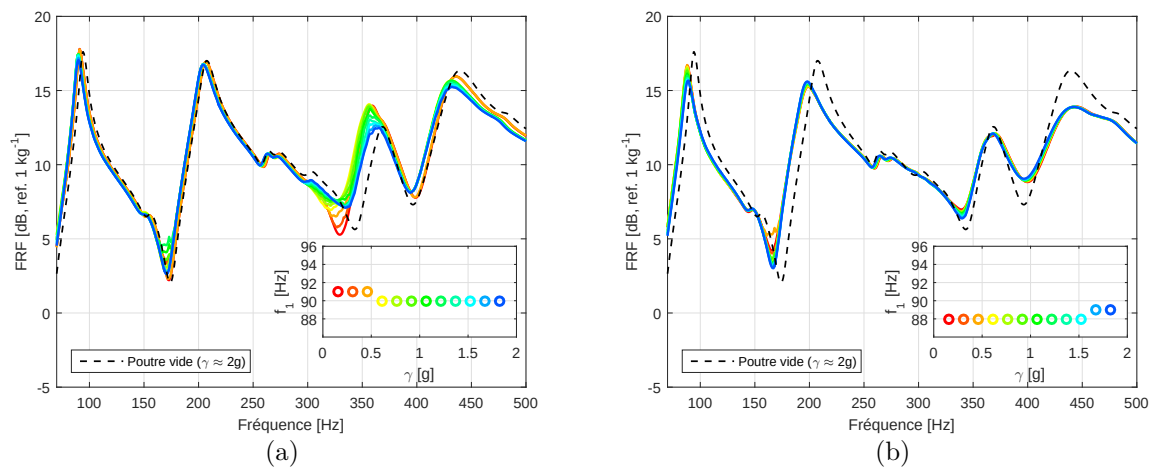


FIGURE 5.9 – FRF de la poutre creuse avec compartiment central avec traitement : (a) Grains en verre ($\varnothing = 2$ mm) - (b) grains déformables répartis dans les 3 cavités centrales.

La matière en grains à surface libre a une plus grande influence sur la FRF. L'utilisation de grains en verre montre un décalage d'amplitude en fonction de l'accélération au delà des deux premiers modes.

Enfin, l'efficacité des grains déformables à surface libre, préalablement observée sur la mesure des E_L , permet de réduire l'amplitude de la FRF sur toute la gamme fréquentielle étudiée.

5.2.2 Influence de la localisation du matériau granulaire dans la poutre creuse

Les 11 compartiments présents tout au long de la poutre creuse permettent de localiser les grains à des endroits spécifiques, les cavités 1, 4, 8 et 11 sont retenues. Une action ciblée sur le 2^{ème} mode de vibration de la poutre consiste à ne remplir que les compartiments n°4 et n°8. Les extrémités de la poutre, compartiments n°1 et n°11, présentent toujours le maximum d'accélération. Ces zones sont propices au mouvement des grains (Fig. 5.10).

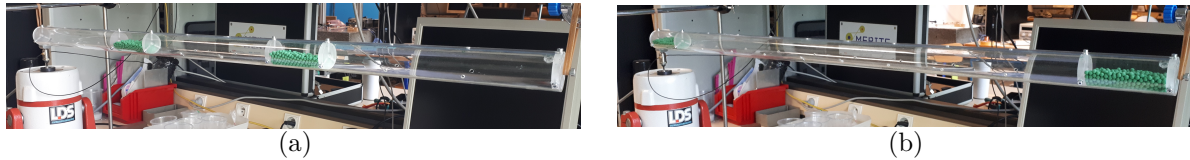


FIGURE 5.10 – Variation de la localisation des grains dans la poutre creuse : (a) compartiments n°4 et n°8 - (b) compartiments n°1 et n°11.

Il est à noter que seuls les compartiments correspondant aux cavités contenant des grains sont placés. Les autres compartiments ne sont pas insérés afin de ne pas augmenter la masse totale de la structure. Par ailleurs, le comportement modal sans grains avec et sans compartiments n'a qu'un léger effet d'augmentation de masse sur les fréquences et formes propres du système. Une synthèse des énergies perdues E_L est représentée afin de quantifier l'influence de la localisation du traitement (Fig. 5.11).

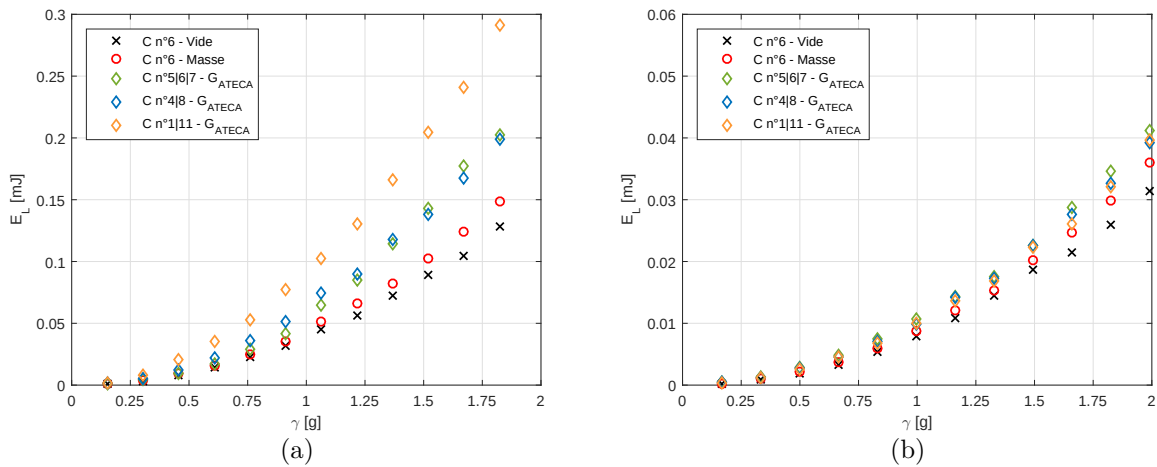


FIGURE 5.11 – Synthèse des énergies perdues E_L pour différentes positions du traitement : (a) 1^{er} mode - (b) 2^{ème} mode.

Pour le 1^{er} mode (Fig. 5.11a), l'effet de localisation est le plus important dans le cas où les cavités traitées sont aux extrémités de la poutre. Les compartiments n°1 et n°11 subissent alors une amplitude de vibration maximum, induisant pour $\gamma < g$ une transmission d'onde à travers les grains déformables. Pour $\gamma > g$ des mouvements relatifs induisent une forte perte d'énergie. Les deux autres configurations n'ont pas d'effet sur l'énergie dissipée associée au premier mode.

Pour le 2^{ème} mode (Fig. 5.11b), les localisations du traitement dans les compartiments n°4 et n°8 ou dans les compartiments n°1 et n°11 induisent une dissipation équivalente qui importe peu sur la valeur de l'énergie perdue. La déformée modale du 2^{ème} mode montre que l'accélération à l'extrémité est 25% plus grande par rapport à l'amplitude au ventre de vibration. Cependant, les cavités sont de dimensions longitudinales relativement étendues les valeurs moyennes dans les cavités n°1 et n°4 (ou n°8 et n°11) sont équivalentes.

L'observation des FRF pour les localisations dans les compartiments n°4 et n°8 et les compartiments n°1 et n°11 permet d'observer l'influence de la zone de traitement sur la réponse fréquentielle (Fig. 5.12).

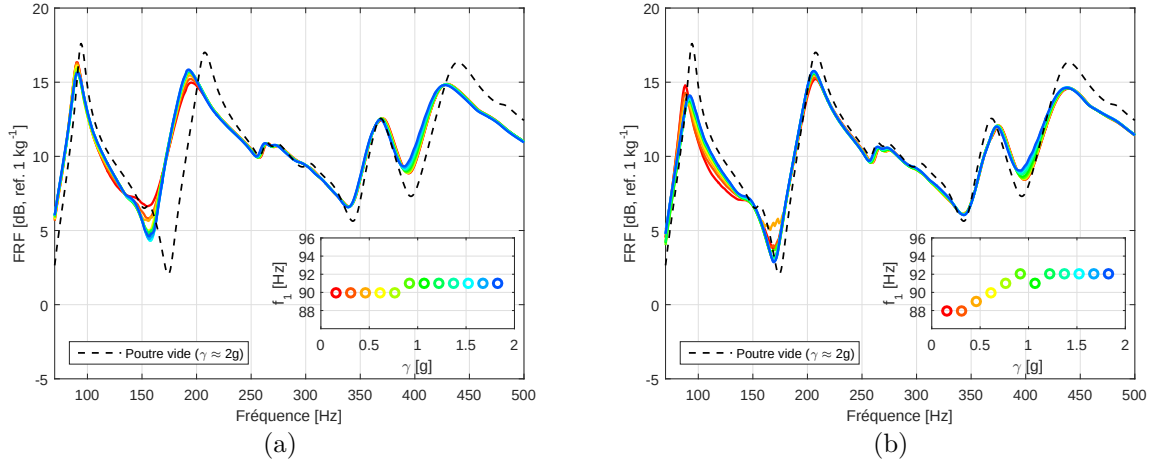


FIGURE 5.12 – FRF de la poutre creuse avec variation de la localisation des grains : (a) compartiments n°4 et n°8 - (b) compartiments n°1 et n°11.

La localisation des grains creux dans les compartiments n°4 et n°8 a une influence sur la fréquence du 2^{ème} mode de vibration. Cette dernière diminue logiquement suite à l'augmentation locale de la masse. Dans le cas où les grains sont dans les compartiments n°1 et n°11, un décalage de la fréquence du premier mode en fonction de l'amplitude d'accélération est observé. Cet effet non-linéaire a été préalablement mis en évidence dans le cas de la cavité indéformable. Par ailleurs, c'est dans cette configuration que l'amplitude des FRF est minimum.

Ce sont les grains mis en mouvement relatifs au sein de la structure qui induisent un effet dissipatif important. Ce mouvement peut être favorisé via l'introduction d'un batteur dissipatif permettant de brasser davantage le matériau granulaire.

5.2.3 Optimisation de la perte d'énergie par l'ajout d'un batteur dissipatif

La perte d'énergie E_L mesurée dans le cas de l'ajout d'un matériau granulaire est fortement dépendante du mouvement induit par le mouvement de la poutre creuse. Cependant, dans certains cas, ce mouvement n'est pas assez important pour mettre les grains en mouvement. L'introduction d'un batteur dissipatif (Fig. 5.13), à l'intérieur d'une cavité est un moyen d'influer sur le contact entre les grains.

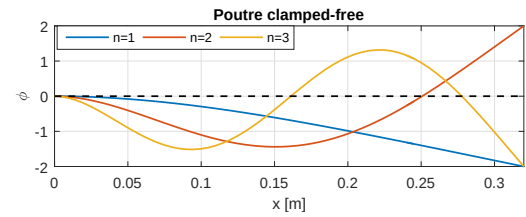
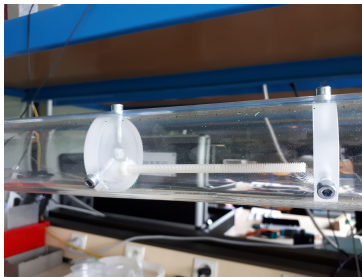


FIGURE 5.13 – Batteur dissipatif constitué d'une tige encastrée-libre : (a) réalisation expérimentale - (b) déformée modale d'une poutre encastrée-libre pour les 3 premiers modes ($n = [1,2,3]$).

Les modes de flexion du batteur assimilé à une poutre encastrée-libre en nylon ($\rho = 1240 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ - $E = 2 \text{ GPa}$) de forme cylindrique ($d = 4 \text{ mm}$ - $L = 93 \text{ mm}$) correspondent à des fréquences spécifiques. La pulsation propre du premier mode de vibration est donnée par :

$$\omega_1 = (\lambda_1 L)^2 \cdot \sqrt{\frac{EI}{\rho S L^4}}, \quad \text{et} \quad I = \pi \frac{d^4}{64}. \quad (5.2)$$

avec $\lambda_1 L = 1,87510$ une constante correspondant aux conditions aux limites pour le premier mode de flexion. La fréquence associée est $f_1 = 82,17 \text{ Hz}$. Cette fréquence correspond à la fréquence du premier

mode de la poutre creuse compartimentée. Ces deux systèmes peuvent donc être couplés. Différentes configurations sont étudiées dans la cavité centrale n°6. Les configurations avec et sans batteur sont effectuées pour différents taux de remplissage de grains souples. L'énergie perdue E_L est mesurée en fonction de l'accélération (Fig. 5.14).

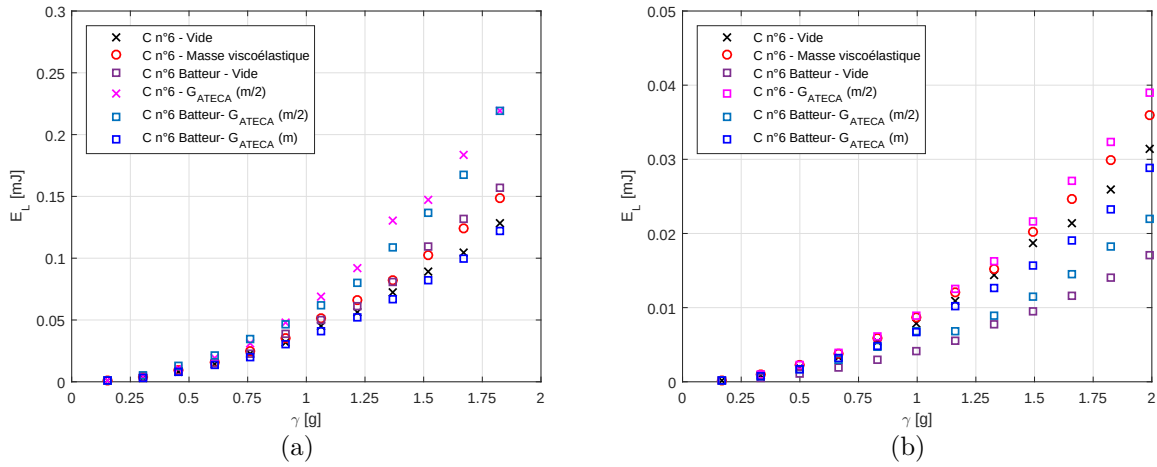


FIGURE 5.14 – Synthèse des énergies perdues E_L mettant en jeu l'utilisation du batteur dissipatif : (a) 1^{er} mode - (b) 2^{ème} mode.

Dans le cas du 1^{er} mode sans grain, ajouter le batteur augmente la dissipation car le matériau nylon est viscoélastique. Le remplissage partiel de la cavité avec des grains augmente la valeur de la dissipation, la présence du batteur n'a alors plus d'influence. Une fois noyé dans le milieu granulaire, le batteur semble n'influer que très peu sur les couches supérieures de grains, qui sont eux en mouvement important car proches de la surface libre, ils apportent la dissipation. Si la cavité est remplie totalement, le batteur est figé comme le sont les grains, la dissipation est à nouveau celle de la cavité vide.

On note ici que les dimensions du batteur ont été choisies pour accorder sa fréquence propre à celle du premier mode de la poutre creuse vide. Il aurait été plus judicieux d'accorder la fréquence propre du batteur immergé dans des grains à celle de la poutre vide pour augmenter les interactions.

Pour le 2^{ème} mode les valeurs d'énergie perdue avec batteur sont même inférieures à celles du compartiment vide, effet contraire à celui souhaité. Une forte non-linéarité visible sur les FRF peut expliquer ce résultat. La mesure de FRF dans le cas du remplissage partiel de la cavité est effectuée (Fig. 5.15).

L'effet non-linéaire est très présent sur les FRF dans le cas avec batteur dissipatif. La dépendance de la FRF à l'amplitude d'accélération est très importante, notamment au niveau du décalage fréquentiel vers les basses fréquences des deux premiers modes. Ceux-ci ont un comportement non-linéaire d'assouplissement, qui est différent de l'effet précédemment observé. Le couplage des fréquences des deux structures ajoute donc un autre comportement non-linéaire au système.

Le batteur dissipatif est ensuite étudié comme un objet non-résonant, afin de limiter l'effet non-linéaire associé à la correspondance des fréquences des deux systèmes. Pour cela, l'alourdissement de l'extrémité du batteur dissipatif entraîne une réduction de la fréquence associée au 1^{er} mode de flexion. Cette nouvelle géométrie permet au batteur d'être considéré comme un corps solide lorsque la fréquence correspond aux modes de flexion de la poutre creuse (Fig. 5.16).

La fréquence de résonance du premier mode de flexion du batteur est mesurée ($f_1 = 21$ Hz). L'étude de l'énergie perdue E_L permet de comparer l'efficacité de cet alourdissement (Fig. 5.17).

L'énergie perdue sur le 1^{er} mode n'augmente plus que légèrement entre les configurations vides sans et avec batteur, car le mouvement du batteur est plus faible du fait du désaccordage. Plongé dans les grains à surface libre, comme lorsqu'il n'était pas alourdi, le batteur n'apporte pas de dissipation supplémentaire car trop loin de la surface libre.

A l'inverse, dans le cas du 2^{ème} mode, la présence du batteur alourdi augmente l'énergie dissipée par

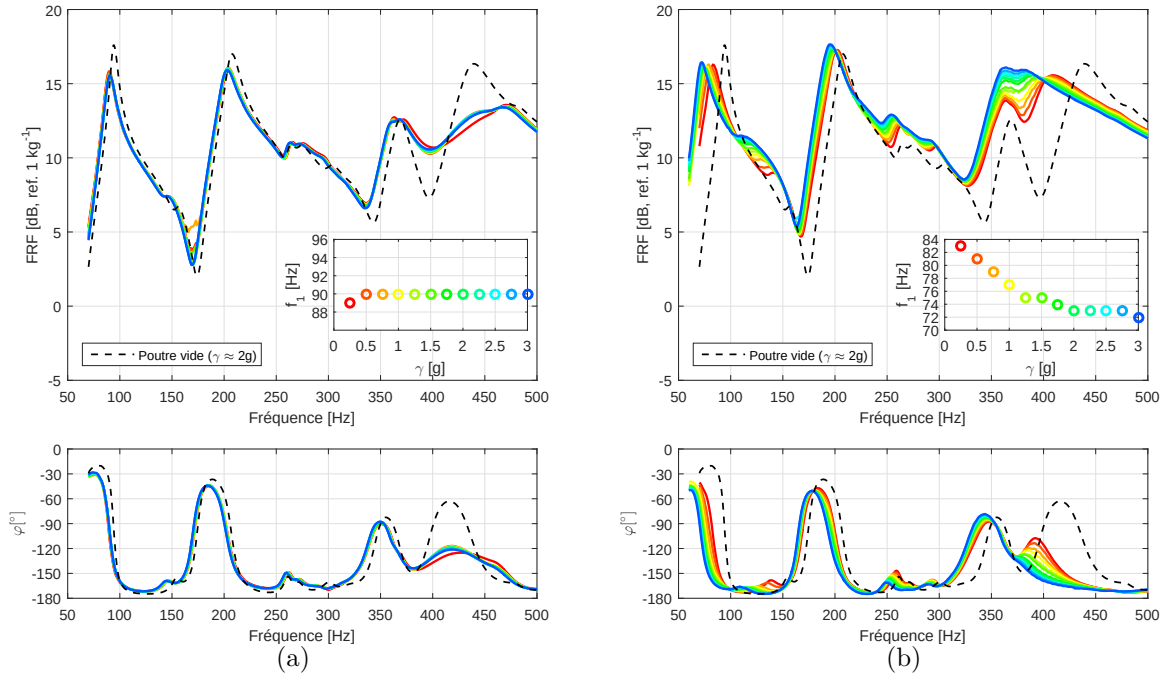


FIGURE 5.15 – Réponse fréquentielle du système pour une cavité centrale n°6 partiellement remplie de grains souples - (a) sans batteur dissipatif - (b) avec batteur dissipatif.



FIGURE 5.16 – Batteur dissipatif alourdi.

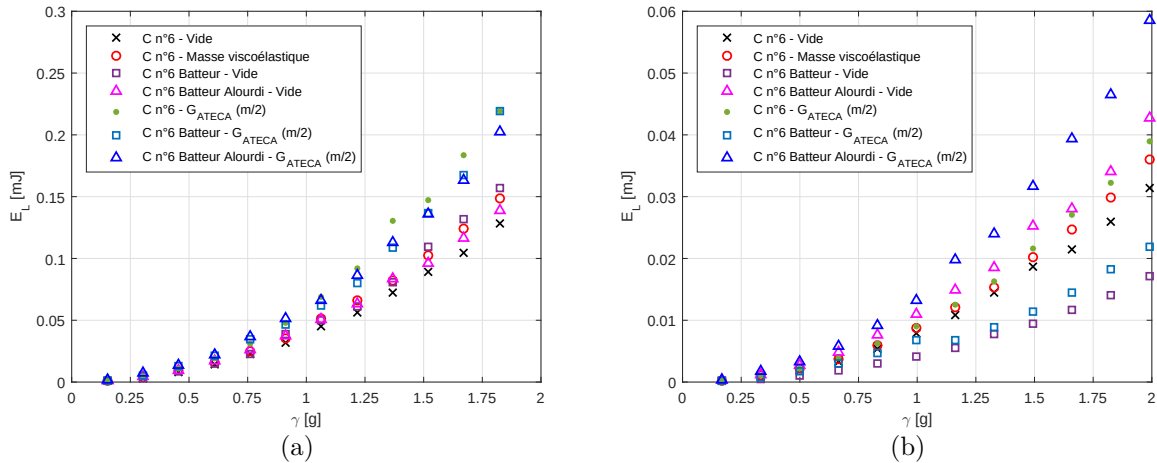


FIGURE 5.17 – Synthèse des énergies perdues E_L mettant en jeu l'utilisation du batteur dissipatif alourdi à son extrémité : (a) 1^{er} mode - (b) 2^{ème} mode.

le système. L'éloignement de la fréquence du batteur de la seconde fréquence propre de la poutre, doit faire que l'extrémité du batteur est maintenant quasi-immobile par rapport au référentiel galiléen. La cavité oscille autour de celui-ci, entraînant les grains qui percutent alors une surface immobile et qui par les actions de contact et de déformation des grains augmentent la dissipation de façon importante. Une absence de non-linéarité ajoutée est observable sur les FRF des mesures avec batteur alourdi (Fig. 5.18).

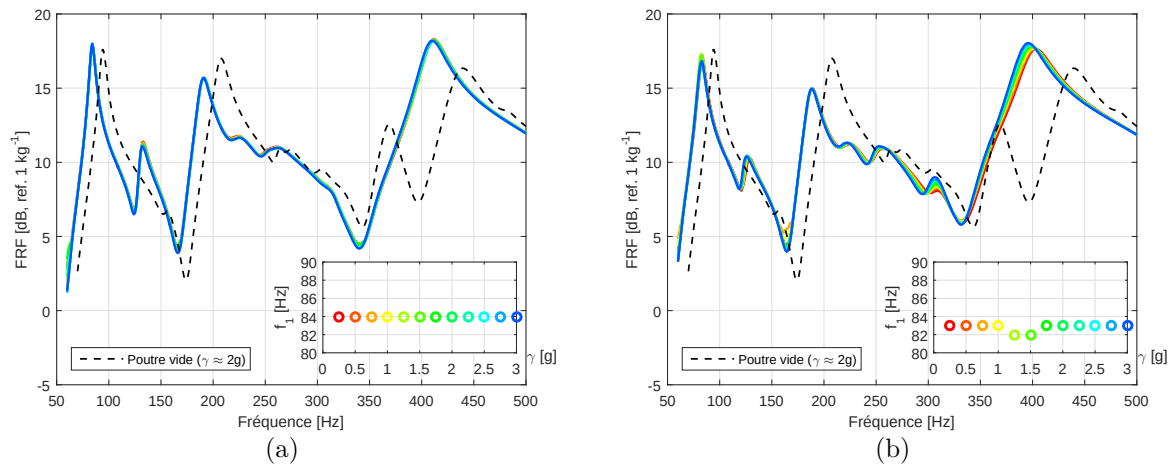


FIGURE 5.18 – Réponse fréquentielle du système pour une cavité centrale n°6 partiellement avec batteur dissipatif alourdi - (a) cavité vide - (b) cavité remplie à moitié de grains ATECA .

On note que dans les deux cas les FRF sont indépendantes de l'accélération de contrôle. L'ajout de grains déformables n'entraîne pas d'effet non-linéaire. Cependant, l'ajout de grains par rapport au cas vide, entraîne une diminution de l'amplitude de la FRF. L'absence de non-linéarités sur la FRF indique que la dissipation est plus due aux déformations des grains creux gênés dans leur mouvement par la surface immobile du batteur alourdi, qu'aux contacts entre les grains. Celle-ci est donc assimilable à un amortissement purement visqueux entre la cavité et un point fixe du repère galiléen.

5.3 Conclusion partielle

Le dimensionnement de la structure modale ainsi que la géométrie des compartiments ont permis de se placer dans l'approximation d'une poutre. La présence de compartiments amovibles permet de positionner un amas de grains à des endroits spécifiques pour étudier son influence sur la réponse vibratoire de la structure.

L'utilisation de grains déformables à surface libre est retenue comme la solution la plus efficace dans la dissipation d'énergie vibratoire. De plus, une variation de position des grains le long de la poutre pour une masse ajoutée identique montre que la perte d'énergie engendrée est d'autant plus importante que l'amplitude vibratoire est grande.

De plus l'ajout d'un batteur dissipatif, initialement prévu pour favoriser le mouvement des grains, présente un couplage non-linéaire qui peut diminuer la dissipation. La fréquence propre du batteur immergée dans les grains et son contact avec ceux-ci, doivent permettre un couplage plus efficace. L'alourdissement de la tige permet de rendre ce batteur fixe par rapport au référentiel galiléen, ce qui entraîne une bonne efficacité du traitement sur certains modes de vibrations de la poutre creuse.

Conclusion générale

Rappel du contexte et des objectifs

L'allégement des structures industrielles est un enjeu majeur dans le développement de projets innovants dans l'industrie des transports. Le principal objectif est de réduire la consommation énergétique, qu'il s'agisse de combustibles fossiles indispensables en aéronautique ou de combustibles nucléaires permettant de produire l'électricité nécessaire à la propulsion des moyens de transports maritimes. La puissance mécanique ne devant pas être dégradée, la réduction locale de masse peut entraîner des niveaux vibratoires importants. Une usure prématurée est alors observée pouvant générer une rupture précoce. Pour limiter les niveaux vibratoires, l'utilisation d'un matériau granulaire au sein de la structure vibrante est l'objet de cette thèse. La quantification de l'énergie perdue en présence d'un matériau granulaire et l'identification des mécanismes dissipatifs sont réalisées pour différentes configurations à des niveaux de sollicitation définis.

Synthèse des résultats

Pour cibler les mécanismes actifs, des éléments bibliographiques sur la dynamique d'un matériau granulaire sont tout d'abord rappelés. Au niveau de deux grains, les principes d'interactions quasi-statiques lors d'un contact sont exposés ainsi que l'influence de l'humidité par la présence d'un ménisque. La mise en réseau de grains sous forme d'une chaîne 1D puis d'un amas fait apparaître des variations de régimes, spécifiques au très grand nombre de contacts présents. Néanmoins, si à l'échelle locale de 2 grains les dissipations sont représentées par des contacts élémentaires, les mécanismes dissipatifs liés à l'interaction d'un amas de grains avec une structure vibrante ne prennent pas en compte la somme formelle des interactions. Dans la littérature, la mise en vibration libre ou forcée d'un matériau granulaire sur un oscillateur, entraîne une quantification de la dissipation principalement par un amortissement visqueux équivalent.

Une pré-étude est réalisée expérimentalement à l'aide de la mise en vibration d'un amas de grains à surface libre sur une structure modale avec gradient de déplacement : une plaque circulaire encastrée sur sa périphérie. La mise en vibration de cette structure déformable sur son premier mode entraîne une concentration des grains au centre de la plaque quand ceux-ci sont suffisamment petits. Différents régimes associés à la non-linéarité du matériau granulaire sont observés. La correspondance de ces régimes avec des mécanismes équivalents d'instabilité au sein d'un matériau granulaire de type lit fluidisé conduit à des identifications qualitatives. Les ordres de grandeur d'amortissement mesurés montrent l'intérêt de l'ajout d'un amas de grains pour atténuer les vibrations. L'utilisation de grains de taille supérieure à 0,1 mm implique l'éjection de ceux-ci de la zone la plus sollicitée. Il a donc été nécessaire, pour pouvoir mener une étude plus complète, de confiner les grains, objet d'une seconde expérience.

La réduction des paramètres de contrôle par la vibration d'une cavité indéformable sans gradient de déplacement est effectuée. Monté sur des lames élastiques, le système est alors modélisable par un oscillateur à 1 degré de liberté. Sa mise en vibration forcée autour de son premier mode permet de quantifier la dissipation d'énergie quelle que soit la taille des grains. Deux approches sont confrontées : fréquentielle à l'aide de l'amortissement modal et temporelle à partir des courbes de Lissajous. Ces dernières ne donnent pas d'a priori sur le comportement dissipatif du système, contrairement à l'étude de l'amortissement modal. De plus, la visualisation temporelle des signaux permet de séparer différentes phases pendant une période d'oscillation. Des mécanismes de dissipation sous-jacents peuvent alors être séparés qualitativement : décollage des grains, vol libre ou avec frottement latéral, atterrissage dissipatif des grains. Ces phases sont confirmées expérimentalement à l'aide d'une caméra rapide. Des modèles analytiques phénoménologiques à constantes localisées sont alors progressivement développés. La confrontation régulière des résultats des calculs permet de confirmer ou infirmer des hypothèses initiales sur les mécanismes dissipatifs

présents au sein du matériau granulaire vibré. L'itération la plus aboutie du modèle est alors soumise à différentes configurations expérimentales afin d'analyser son caractère prédictif sur le niveau d'énergie dissipée.

Les influences de paramètres contrôlés de l'expérience sont quantifiées, tout en gardant constante la masse de traitement pendant les différents essais. Deux objectifs sont poursuivis dans l'ensemble des expériences menées : décrire avec précision les différents mécanismes qui régissent la perte d'énergie, et maximiser la valeur d'énergie dissipée. Une étude préalable avec masse indéformable solidaire permet d'avoir un cas de référence afin de pouvoir comparer les résultats de mesure. La variation de la taille des grains a une influence sur la dissipation vibratoire car les contacts ont des énergies transmises différentes. Dans un cas monodisperse, les grains de grande taille ($\varnothing = 2$ mm) sont les plus efficaces. La polydispersité, par un mélange de grains plus petits compris entre $[0,6-1]$ mm, implique une dissipation plus importante que pour la configuration monodisperse à 2 mm. Un cas non académique utilisant du sable est moins dissipatif. Les rugosités des parois latérales, parallèles au mouvement vibratoire de la cavité indéformable, n'influent pas sur la dissipation. L'effort de frottement sur la première couche de grains n'est pas transmis au sein de l'amas. Par contre, l'insertion d'une couche viscoélastique en fond de cavité, perpendiculaire au mouvement vibratoire, influe sur les conditions de décollement et atterrissage des billes. La perte d'énergie est augmentée pour des valeurs d'accélération inférieures à la pesanteur. A l'inverse, des mouvements granulaires extrêmement importants pour des accélérations supérieures à la gravité entraînent une diminution de l'énergie perdue. Enfin, la matière des grains est modifiée, utilisant des grains souples en élastomère. Les grains en élastomère creux ont la faculté de se déformer très facilement, la propagation d'ondes à travers le matériau est favorisée, ce type de grains présente la dissipation la plus efficace. Cependant le mécanisme dissipatif est dans ce cas principalement dû aux déformations des grains avec une adhérence particulière à la paroi.

L'étude d'une structure déformable (poutre creuse compartimentée) permet de localiser de façon optimale le traitement par ajout d'un matériau granulaire. D'autres mécanismes cherchent à être favorisés dans ce cas, tel que le frottement entre les grains. Les grains en élastomères creux sont utilisés, ils ont montré une des dissipations les plus fortes au chapitre précédent. La présence nécessaire d'une surface libre, grâce à un taux de remplissage inférieur à 1 entraîne une dissipation plus importante. Le fait de positionner les grains à un ventre de vibration de l'un des modes en décale la fréquence en fonction de son niveau d'accélération. Par contre, l'énergie dissipée n'est pas proportionnelle à l'accélération locale du lieu de traitement. Le couplage d'un second système vibrant est réalisé par un batteur dissipatif accordé ou non à la première fréquence propre de la structure. Ce batteur dissipatif est une petite poutre en flexion qui est sensible à la rotation du point de liaison. Lorsque les fréquences des deux systèmes sont accordées, la non-linéarité du système est accrue mais ne permet pas une maximisation de l'énergie perdue. Lorsqu'elles sont désaccordées, le batteur dissipatif ne résonne plus, il suit la rotation du point d'encastrement. Une forte dissipation est observée pour le 2^{ème} mode, dont la forme propre sollicite fortement le point d'encastrement ; les non-linéarités disparaissent.

Perspectives

Les perspectives concernent des mises en évidence expérimentales de mécanismes dissipatifs dans les différentes configurations explorées ainsi que des études numériques.

1. La variation des conditions de contacts par ajout d'un fluide environnant, dans le cas de la cavité indéformable, influe fortement sur la perte d'énergie par le système. A hygrométries contrôlées, des expériences peuvent être menées afin d'optimiser la quantité de fluide à insérer. Par ailleurs, la rhéologie du fluide pourrait être modifiée afin d'allier ses caractéristiques aux contacts inter-grains pour maximiser la dissipation.
2. Des pistes telles que l'ajout d'un batteur dissipatif ou une géométrie optimale du contenant des grains restent à étudier.
3. Les mécanismes régissant la dissipation peuvent être affinés par l'instrumentation des parois de la cavité pour mesurer localement les signaux temporels de pression. Des capteurs résistifs ou piézo-électriques, permettront l'identification des zones les plus sollicitées.
4. Dans le cas de l'expérience avec la poutre déformable, une variation du ratio de masse de traitement serait à mettre en œuvre afin d'extraire un seuil de fonctionnement pour $\gamma < g$.
5. L'analyse modale de la poutre creuse avec ce type de traitement doit être faite pour chaque niveau d'accélération du fait des non-linéarités du comportement de l'amas granulaire.
6. L'identification de la répartition de l'énergie au sein du matériau granulaire pourrait être comparée à des résultats de simulations numériques (de type éléments discrets). La connaissance des états de contact dans le matériau entraînerait une optimisation du dimensionnement.

Définition de paramètres expérimentaux

Le dispositif expérimental est constitué d'une cavité vibrante, contrôlée en accélération via un capteur à sa base.

Orientation positive des signaux expérimentaux

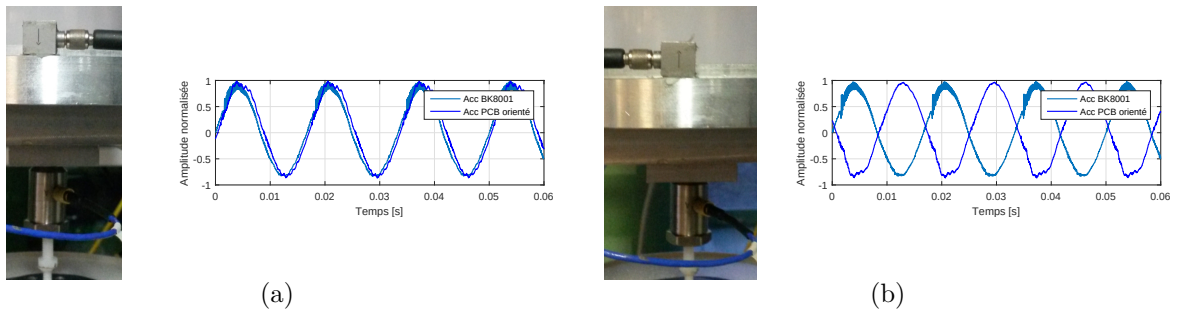


FIGURE A.1 – Signaux expérimentaux d'accélération B&K 8001 | (a) Orientation PCB 317A01 SN 110 ↓ | (b) Orientation PCB 317A01 SN 110 ↑.

L'accélération définie positive est vers le bas. Sa sensibilité après calibration est donnée par $s_\gamma = 36,2 \text{ pC/g}$.

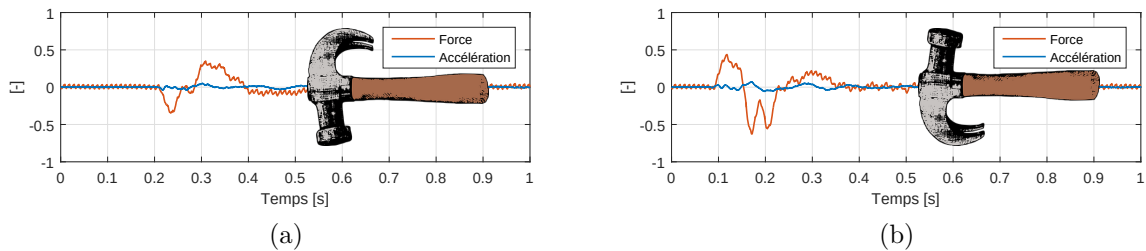


FIGURE A.2 – Signaux expérimentaux de force B&K 8001 : (a) impact vers le bas | (b) impact vers le haut.

La force définie positive est vers le haut. Sa sensibilité après calibration est donnée par $s_F = 370 \text{ pC/N}$.

Observation du déphasage expérimental

L'influence de la fréquence d'excitation est observée expérimentalement sur l'allure des signaux temporels (Fig. A.3-A.4).

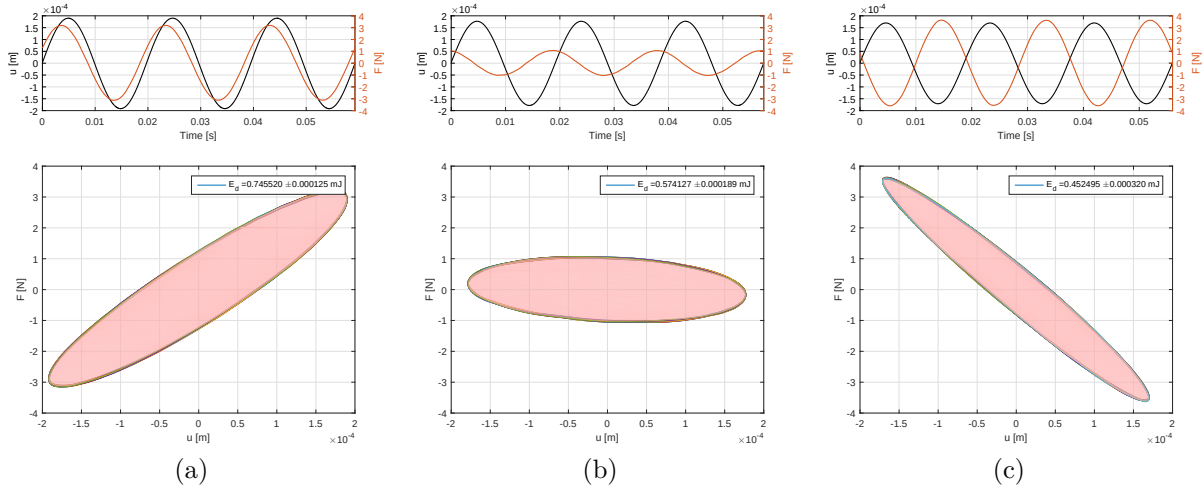


FIGURE A.3 – Lissajous pour différentes fréquences - Masse solide ajoutée indéformable : (a) $f = 50,6$ Hz - (b) $f_0 = 52,1$ Hz - (c) $f = 53,6$ Hz.

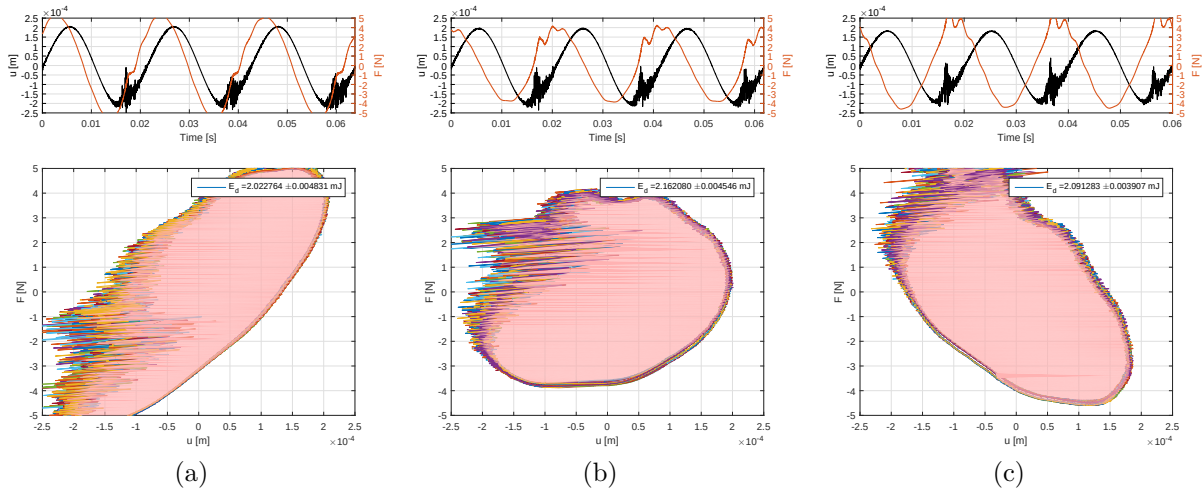


FIGURE A.4 – Lissajous pour différentes fréquences - amas de grains : (a) $f = 47$ Hz - (b) $f_0 = 48,5$ Hz - (c) $f = 50$ Hz.

Un déphasage lié à la fréquence d'excitation du système 1DDL est observé. Cet effet est augmenté par la présence du matériau granulaire.

Incertitude sur la valeur du c_1 pour chaque valeur d'accélération

γ

Le coefficient d'amortissement visqueux équivalent c_1 est calculé à partir d'une relation entre différentes mesures expérimentales (Eq. 3.8). Pour chaque valeur d'accélération, l'écart-type est donné par :

$$\sigma_{c_1}^2 = \left[\frac{\partial c_1}{\partial E_L} \cdot \sigma_{E_L} \right]^2 + \left[\frac{\partial c_1}{\partial \omega_e} \cdot \sigma_{\omega_e} \right]^2 + \left[\frac{\partial c_1}{\partial x_{\max}} \cdot \sigma_{x_{\max}} \right]^2, \quad (\text{A.1})$$

$$\sigma_{c_1}^2 = \left[\frac{1}{\pi \omega_e x_{\max}^2} \cdot \sigma_{E_L} \right]^2 + \left[\frac{-E_L}{\pi \omega_e^2 x_{\max}^2} \cdot \sigma_{\omega_e} \right]^2 + \left[\frac{-2E_L}{\pi \omega_e x_{\max}^3} \cdot \sigma_{x_{\max}} \right]^2. \quad (\text{A.2})$$

Cet écart-type est ensuite multiplié par un coefficient d'élargissement k , $k = 2$ dans notre cas.

Méthode de calcul de la fft discrète

Le calcul de la fft est le suivant :

$$\vec{Y} = \text{fft}(\vec{s}), \quad (\text{A.3a})$$

$$\vec{A}_2 = \text{abs}\left(\frac{\vec{Y}}{L}\right), \quad (\text{A.3b})$$

$$A_1 = A_2(1 : L/2 + 1), \quad (\text{A.3c})$$

$$A_1(2 : \text{end} - 1) = 2 \times A_1(2 : \text{end} - 1), \quad (\text{A.3d})$$

avec $\vec{s}$ le vecteur des amplitudes du signal mesuré en fonction du temps, L le nombre de points de mesure. La représentation du contenu fréquentiel nécessite plusieurs étapes de calcul. D'abord un calcul brut de la transformée de Fourier rapide (Eq. A.3a). Cette valeur est ensuite normalisée par la longueur du signal (Eq. A.3b) pour obtenir un spectre sur le domaine $[-\frac{F_s}{2}, \frac{F_s}{2}]$ avec une résolution $\Delta f = \frac{F_s}{L} = \frac{F_s}{F_s t} = 0,2 \text{ Hz}$, avec $t = 5 \text{ s}$ la durée d'acquisition, $F_s = 51,2 \cdot 10^3 \text{ Hz}$ la fréquence d'échantillonnage de l'acquisition. Cette série de données est alors tronquée (Eq. A.3c) pour ne garder que les valeurs de fréquences positives. Chacune des amplitudes ayant perdue la moitié de son énergie, les amplitudes de la série sont multipliées par 2 (Eq. A.3d). Enfin, le niveau L en dB est donné par :

$$L = 10 \log_{10} \left(\frac{A_1}{A_0} \right), \quad (\text{A.4})$$

avec A_0 une valeur de référence : 1 N pour F et 1g pour γ .

Mesure de la fft dans le cas d'une masse solidaire indéformable

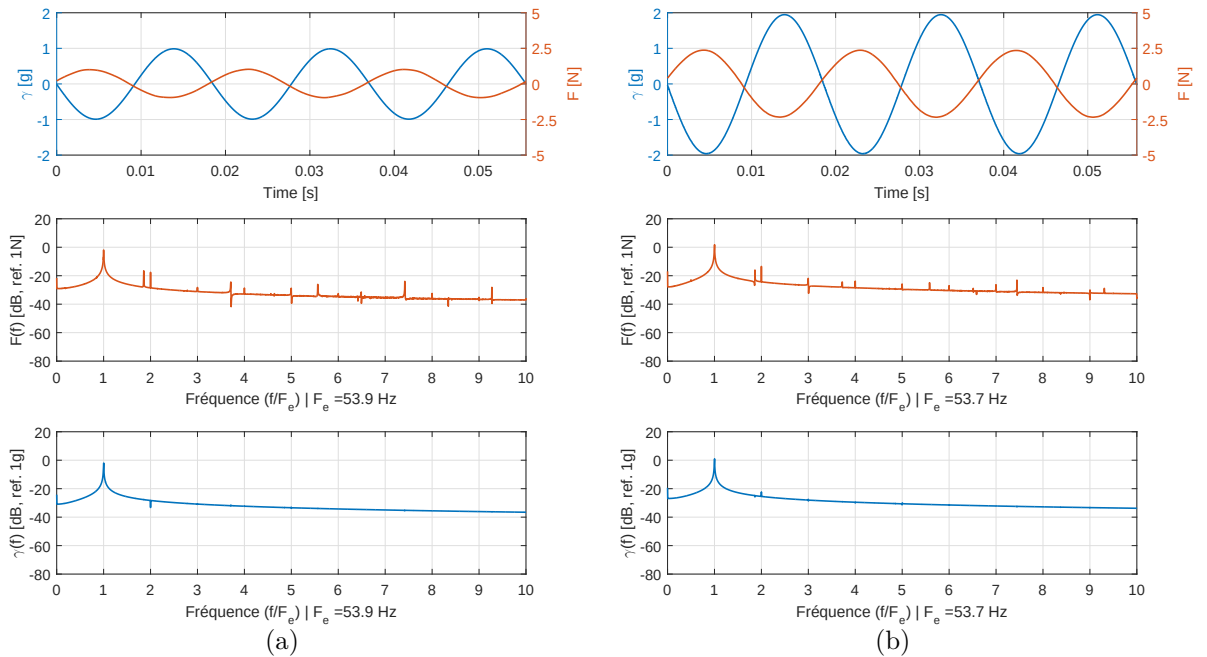


FIGURE A.5 – Signaux expérimentaux (masse solidaire indéformable) : (a) $\gamma = 1\text{g}$ - (b) $\gamma = 2\text{g}$.

Simulation numérique de la dynamique d'un milieu granulaire

La simulation numérique d'un amas de grains doit utiliser des éléments discrets. La tribologie du système ne permet pas de mailler un système continu équivalent. Un amas de grains est un système désordonné dont les contacts varient au cours du temps. Les domaines principaux d'application de cette méthode sont le génie civil via l'assemblage de structures [65, 98, 40], les écoulements granulaires [19, 13, 50] et la répartition de particules en fonction de leurs tailles [7, 35, 15]. L'utilisation de la simulation numérique pour des problèmes d'atténuation de vibrations est plus marginale.

La Discret Element Method (DEM) est une méthode temporelle qui permet, à partir de modèles de contacts établis, de résoudre les équations du mouvement de chaque particule au moyen d'un schéma de type différences finies. Cette méthode a d'abord été appelée DPM, dans le cas restrictif de disques ou de sphères. La DEM prend en compte des grains de forme aléatoire. Aujourd'hui, cette méthode est connue uniquement sous le nom général de DEM.

Dynamique de contact élastique

Lorsque les grains sont supposés indéformables, un modèle de contact élastique est utilisé. Les grains ne s'interpénètrent pas, la loi de Signorini s'applique [82, 14]. Une formulation de cette loi est donnée par **Radjai** [76], elle entraîne l'impossibilité de l'apparition d'efforts de traction sur la zone de contact (Fig. B.1).



FIGURE B.1 – Loi de contact de Signorini : (a) contact entre deux particules - (b) caractéristiques des relations complémentaires entre la force normale f_n et la distance entre les deux particules δ_n [76].

Cette loi peut être résumée par les expressions :

$$\begin{cases} \delta_n > 0 & \rightarrow f_n = 0, \\ \delta_n \leq 0 & \rightarrow v_n \geq 0, \\ v_n > 0 & \rightarrow f_n = 0. \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

avec v_n la résultante de la vitesse au contact. Les durées de contact sont infiniment courtes et ne sont pas maillées en temps, seule la conservation de la quantité de mouvement est considérée ici. D'abord, un algorithme de détection de contact permet de définir le nombre d'interactions au sein du matériau granulaire. Ensuite, un calcul des contraintes prenant en compte la vitesse avant contact et les propriétés des matériaux permettent d'établir la répartition des forces dans le système. La perte d'énergie du système est représentée par l'introduction de coefficients de restitution lors du contact. Certaines configurations ont besoin d'insérer une caractéristique de déformation des grains. La physique des interactions est alors plus fidèle à la réalité.

Dynamique moléculaire inélastique

Lors d'un contact, la déformation des grains et leurs chevauchements peuvent être non négligeables, la déformation locale est donc à modéliser (Fig. B.2). Cette forme de contact, appelée dynamique moléculaire, est développée pour la première fois par **Cundall** [22]. Les grains s'interpénètrent et dissipent de l'énergie. Le modèle de Hertz est utilisé pour calculer la distance, la force de réaction et la durée du contact.

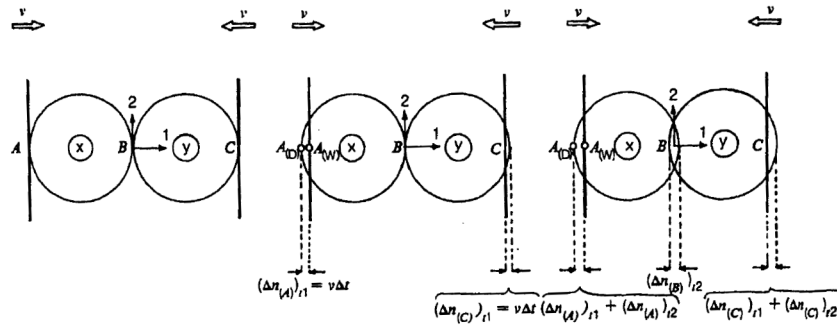


FIGURE B.2 – Interaction de deux particules entre deux murs rigides [22].

Le mouvement résultant suite à l'application des forces est calculé. Une approximation aux différences finies est utilisée à partir du principe fondamental de la dynamique. Le pas de temps utilisé doit être suffisamment petit pour considérer les forces constantes pendant cet incrément :

$$\begin{cases} m_{(x)} \ddot{x}_i &= \sum F_{(x)i}, \\ I_{(x)} \ddot{\theta}_{(x)} &= \sum M_{(x)}. \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

Les valeurs d'accélération $\ddot{x}_i$ et d'accélération angulaire $\ddot{\theta}_{(x)}$ sont constantes sur un pas de temps $\Delta t = [t_{N-\frac{1}{2}}, t_{N+\frac{1}{2}}]$. Les valeurs des vitesses $\dot{x}_i$ et $\dot{\theta}_{(x)}$ sont obtenues à partir de l'expression temporelle d'ordre 2 (Eq. B.2). Le schéma aux différences finies donne :

$$\begin{cases} (\dot{x}_i)_{N+\frac{1}{2}} &= (\dot{x}_i)_{N-\frac{1}{2}} + [\sum F_{(x)i}/m_{(x)}]_N \Delta t, \\ (\dot{\theta}_{(x)})_{N+\frac{1}{2}} &= (\dot{\theta}_{(x)})_{N-\frac{1}{2}} + [\sum M_{(x)}/I_{(x)}]_N \Delta t. \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

En intégrant une nouvelle fois, les informations de déplacements sont obtenues :

$$\begin{cases} (x_i)_{N+1} &= (x_i)_N + (\dot{x}_i)_{N+\frac{1}{2}} \Delta t, \\ (\theta_{(x)})_{N+1} &= (\theta_{(x)})_N + (\dot{\theta}_{(x)})_{N+\frac{1}{2}} \Delta t. \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

Les vitesses sont constantes entre deux pas de temps. Au pas de temps suivant, les grains ont changé de position et leurs conditions d'interaction sont modifiées et recalculées. La simulation numérique s'arrête lorsque le calcul atteint une valeur seuil minimum de déplacement ou de force transmise.

La simulation numérique de cette dynamique induit un maillage temporel très fin pour correctement décrire les durées de contact très courtes. En pratique, il est raisonnable d'utiliser la dynamique moléculaire pour modéliser l'interaction de grains dont les déformations sont importantes et jouent un rôle majeur dans la dissipation d'énergie. L'étude plus approfondie des mouvements de grains permet d'identifier différents types de collisions (doux, réfléchissant ou adhésif) en fonction de la vitesse d'impact et l'état de surface du grain en utilisant la même procédure numérique [18].

Bibliographie

- [1] 1001Crash. <https://www.1001crash.com/index-page-composite-lg-2.html>.
- [2] N. Ahmad, R. Ranganath, and A. Ghosal. Modeling and experimental study of a honeycomb beam filled with damping particles. *Journal of Sound and Vibration*, 391 :20 – 34, 2017.
- [3] O. Aklouche. *Réduction des niveaux vibratoires d'un panneau au moyen de trous noirs acoustiques structurés en réseau périodique : conception d'une méta-plaque*. PhD thesis, Le Mans Université, 2017. <NNT : 2017LEMA1030> <tel-01717745v2>.
- [4] F. Allein, V. Tournat, V. E. Gusev, and G. Theocharis. Tunable magneto-granular phononic crystals. *Applied Physics Letters*, 108(16) :161903, 2016.
- [5] F. Allein, V. Tournat, V. E. Gusev, and G. Theocharis. Transversal-rotational and zero group velocity modes in tunable magneto-granular phononic crystals. *Extreme Mechanics Letters*, 12 :65 – 70, 2017.
- [6] K. M. Aoki, T. Akiyama, Y. Maki, and T. Watanabe. Convective roll patterns in vertically vibrated beds of granules. *Phys. Rev. E*, 54 :874 – 883, 1996.
- [7] M. M. H. D. Arntz, W. K. den Otter, H. H. Beeftink, R. M. Boom, and W. J. Briels. Repeated segregation and energy dissipation in an axially segregated granular bed. *EPL (Europhysics Letters)*, 92(5) :54004, 2010.
- [8] X.-M. Bai, B. Shah, L. M. Keer, Q. J. Wang, and R. Q. Snurr. Particle dynamics simulations of a piston-based particle damper. *Powder Technology*, 189(1) :115 – 125, 2009.
- [9] C. N. Bapat and S. Sankar. Single unit impact damper in free and forced vibration. *Journal of Sound and Vibration*, 99(1) :85 – 94, 1985.
- [10] D. Barletta, P. Russo, and M. Poletto. Dynamic response of a vibrated fluidized bed of fine and cohesive powders. *Powder Technology*, 237 :276 – 285, 2013.
- [11] H. M. Beakawi Al-Hashemi and O. S. Baghabra Al-Amoudi. A review on the angle of repose of granular materials. *Powder Technology*, 330 :397 – 417, 2018.
- [12] M. Ben Romdhane, N. Bouhaddi, M. Trigui, E. Foltete, and M. Haddar. The loss factor experimental characterisation of the non-obstructive particles damping approach. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 38(2) :585 – 600, 2013.
- [13] C. Bierwisch, T. Kraft, H. Riedel, and M. Moseler. Three-dimensional discrete element models for the granular statics and dynamics of powders in cavity filling. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 57(1) :10 – 31, 2009.
- [14] P. Bisegna, F. Lebon, and F. Maceri. D-pana : a convergent block-relaxation solution method for the discretized dual formulation of the signorini-coulomb contact problem. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series I - Mathematics*, 333(11) :1053 – 1058, 2001.
- [15] P. Biswas, P. Sánchez, M. R. Swift, and P. J. King. Numerical simulations of air-driven granular separation. *Phys. Rev. E*, 68 :050301, 2003.
- [16] N. Boechler, J. Yang, G. Theocharis, P. G. Kevrekidis, and C. Daraio. Tunable vibrational band gaps in one-dimensional diatomic granular crystals with three-particle unit cells. *Journal of Applied Physics*, 109(7) :074906, 2011.
- [17] C. Bricault. *Diminution des vibrations et du bruit rayonné d'une paroi par contrôle distribué*. PhD thesis, Le Mans Université, 2017. <NNT : 2017LEMA1009> <tel-01648349>.
- [18] N. V. Brilliantov, F. Spahn, J.-M. Hertzsch, and T. Poschel. Model for collisions in granular gases. *Phys. Rev. E*, 53 :5382 – 5392, May 1996.
- [19] V. Buchholtz and T. Pöschel. Numerical investigations of the evolution of sandpiles. *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, 202(3) :390 – 401, 1994.

- [20] P.-L. Chiambaretto. *Modèle vibratoire de réservoir cryotechnique de lanceur : définition d'un méta-matériau équivalent*. PhD thesis, Institut Clément Ader, UMR CNRS 5312, 2017.
- [21] E. Chladni. *Die Akustik*. Breitkopf und Haertel, 1802.
- [22] P. A. Cundall and O. D. L. Strack. A discrete numerical model for granular assemblies. *Géotechnique*, 29(1) :47–65, March 1979.
- [23] C. Daraio, V. F. Nesterenko, E. B. Herbold, and S. Jin. Energy trapping and shock disintegration in a composite granular medium. *Phys. Rev. Lett.*, 96 :058002, 2006.
- [24] J. I. Dunlop. Felt pad vibration properties and design criteria. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 91(5) :2696–2702, 1992.
- [25] D. Ewins. *Modal testing : theory, practice and application - Second Edition*. Mechanical engineering research studies : Engineering dynamics series. Research Studies Press Ltd., 2000.
- [26] X. Fang, J. Tang, and H. Luo. Granular damping analysis using an improved discrete element approach. *Journal of Sound and Vibration*, 308(1 - 2) :112 – 131, 2007.
- [27] M. Faraday. On a peculiar class of acoustical figures; and on certain forms assumed by groups of particles upon vibrating elastic surfaces. *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, 121 :299 – 340, 1831.
- [28] P. Flores and H. M. Lankarani. *Pure Elastic Contact Force Models*, pages 15–25. Springer International Publishing, 2016.
- [29] R. D. Friend and V. K. Kinra. Particle impact damping. *Journal of Sound and Vibration*, 233(1) :93 – 118, 2000.
- [30] J.-M. Génevaux, N. Dauchez, and O. Doutres. Nonlinear damping of a plate using faraday instability of a fluid film. *Journal of Sound and Vibration*, 326(1 - 2) :150 – 160, 2009.
- [31] M. Gharib, A. Celik, and Y. Hurmuzlu. Shock absorption using linear particle chains with multiple impacts. *Journal of Applied Mechanics*, 78 :031005, 2011.
- [32] M. Gharib and S. Ghani. Free vibration analysis of linear particle chain impact damper. *Journal of Sound and Vibration*, 332(24) :6254 – 6264, 2013.
- [33] I. Gómez-Arriaran, I. Ippolito, R. Chertcoff, M. Odriozola-Maritorena, and R. De Schant. Characterization of wet granular avalanches in controlled relative humidity conditions. *Powder Technology*, 279 :24 – 32, 2015.
- [34] J.-P. Gras, J.-Y. Delenne, and M. S. El Youssoufi. Study of capillary interaction between two grains : a new experimental device with suction control. *Granular Matter*, 15(1) :49 – 56, 2013.
- [35] J. M. N. T. Gray, P. Gajjar, and P. Kokelaar. Particle-size segregation in dense granular avalanches. *Comptes Rendus Physique*, 16(1) :73 – 85, 2015.
- [36] S. Griffiths, B. Nennig, and S. Job. Porogranular materials composed of elastic helmholtz resonators for acoustic wave absorption. *Journal of the Acoustical Society of America*, 141(1) :254–264, 2017.
- [37] O. Grosset. *Identification de la pression pariétale turbulente par problème inverse vibratoire dans les domaines aéronautique et naval*. PhD thesis, Le Mans Université, 2017. <NNT : 2017LEMA1036> <tel-01654481>.
- [38] J.-L. Guyader. *Vibrations des milieux continus*. Hermes Science publications, 2002.
- [39] M. Heckel, A. Sack, J. E. Kollmer, and T. Pöschel. Granular dampers for the reduction of vibrations of an oscillatory saw. *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, 391(19) :4442 – 4447, 2012.
- [40] L. Hedjazi, C. L. Martin, S. Guessasma, G. Della Valle, and R. Dendievel. Application of the discrete element method to crack propagation and crack branching in a vitreous dense biopolymer material. *International Journal of Solids and Structures*, 49(13) :1893 – 1899, 2012.
- [41] H. Hertz. Über die berührung fester elastischer körper. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 92 :156 – 171, 1882.
- [42] S. S. Hsiau and C. H. Chen. Granular convection cells in a vertical shaker. *Powder Technology*, 111(3) :210 – 217, September 2000.
- [43] K. Hunt and E. Crossley. Coefficient of restitution interpreted as damping in vibroimpact. *Journal of Applied Mechanics*, 42(2) :440–445, 1975.
- [44] K. L. Johnson. Energy dissipation at spherical surfaces in contact transmitting oscillating forces. *Journal of Mechanical Engineering Science*, 3(4) :362–368, 1961.
- [45] S. Koch, F. Duvigneau, R. Orszulik, U. Gabbert, and E. Woschke. Partial filling of a honeycomb structure by granular materials for vibration and noise reduction. *Journal of Sound and Vibration*, 393 :30 – 40, 2017.

- [46] H. Kruggel-Emden, E. Simsek, S. Rickelt, S. Wirtz, and V. Scherer. Review and extension of normal force models for the discrete element method. *Powder Technology*, 171(3) :157 – 173, 2007.
- [47] D. Kunii and O. Levenspiel. *Fluidization Engineering (2nd edition)*. Butterworth - Heinemann, 1991.
- [48] G. Kuwabara and K. Kono. Restitution coefficient in a collision between two spheres. *Japanese Journal of Applied Physics*, 26(8) :1230 – 1233, 1987.
- [49] H. M. Lankarani and P. E. Nikravesh. A contact force model with hysteresis damping for impact analysis of multibody systems. *Journal of Mechanical Design*, 112(3) :369 – 376, 1990.
- [50] C. Li, T. Honeyands, D. O’Dea, and R. Moreno-Atanasio. The angle of repose and size segregation of iron ore granules : Dem analysis and experimental investigation. *Powder Technology*, 320 :257 – 272, 2017.
- [51] K. Li and A. P. Darby. Experiments on the effect of an impact damper on a multiple-degree-of-freedom system. *Journal of Vibration and Control*, 12(5) :445 – 464, 2006.
- [52] J.-W. Liang and B. F. Feeny. Identifying coulomb and viscous friction in forced dual-damped oscillators. *Journal of Vibration and Acoustics*, 126(1) :118 – 125, 2004.
- [53] P. Lieber and D. P. Jensen. An acceleration damper : Development, design and some applications. *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers*, 67 :523 – 530, 1945.
- [54] S. Limtrakul, W. Rotjanavijit, and T. Vatanatham. Lagrangian modeling and simulation of effect of vibration on cohesive particle movement in a fluidized bed. *Chemical Engineering Science*, 62(1-2) :232 – 245, January 2007. Fluidized Bed Applications.
- [55] W. Liu, G. R. Tomlinson, and J. A. Rongong. The dynamic characterisation of disk geometry particle dampers. *Journal of Sound and Vibration*, 280(3-5) :849 – 861, 2005.
- [56] Z. Lu, X. Lu, W. Lu, and W. Yan. An experimental investigation into the use of buffered particle dampers. Lisboa, PORTUGAL, 2012. World Conference on Earthquake Engineering.
- [57] M. Machado, P. Moreira, P. Flores, and H. M. Lankarani. Compliant contact force models in multibody dynamics : Evolution of the hertz contact theory. *Mechanism and Machine Theory*, 53 :99 – 121, 2012.
- [58] W. M. Mansour and D. R. Teixeira Filho. Impact dampers with coulomb friction. *Journal of Sound and Vibration*, 33(3) :247 – 265, 1974.
- [59] K. Mao, M. Yu Wang, Z. Xu, and T. Chen. Dem simulation of particle damping. *Powder Technology*, 142(2 - 3) :154 – 165, 2004.
- [60] K. Mao, M. Yu Wang, Z. Xu, and T. Chen. Simulation and characterization of particle damping in transient vibrations. *Journal of Vibration and Acoustics - Transactions of the ASME*, 126(2) :202 – 211, 2004.
- [61] M. Masmoudi, S. Job, M. S. Abbes, I. Tawfiq, and M. Haddar. Experimental and numerical investigations of dissipation mechanisms in particle dampers. *Granular Matter*, 18(3) :71, 2016.
- [62] F. Melo, P. B. Umbanhowar, and H. L. Swinney. Hexagons, kinks, and disorder in oscillated granular layers. *Phys. Rev. Lett.*, 75 :3838 – 3841, Nov 1995.
- [63] G. Michon, A. Almajid, and G. Aridon. Soft hollow particle damping identification in honeycomb structures. *Journal of Sound and Vibration*, 332(3) :536 – 544, February 2013.
- [64] B. K. Mishra and C. V. R. Murty. On the determination of contact parameters for realistic dem simulations of ball mills. *Powder Technology*, 115(3) :290 – 297, April 2001.
- [65] A. Munjiza, D. R. J. Owen, and N. Bicanic. A combined finite-discrete element method in transient dynamics of fracturing solids. *Engineering Computations*, 12(2) :145 – 174, 1995.
- [66] M. Nakagawa, J. H. Agui, D. T. Wu, and D. V. Extramiana. Impulse dispersion in a tapered granular chain. *Granular Matter*, 4(4) :167 – 174, 2003.
- [67] I. Newton. *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*. London Royal Society, 1687.
- [68] U. Nouvelle. <https://www.usinenouvelle.com/>.
- [69] M. Ott, J. Weisbeck, S. N. Y. Gerges, and M. Bustamante. The effectiveness of particle damping for use on vertical surfaces. Campus Universitario, Trindade, Florianopolis, 88040-900, Santa Catarina, BRAZIL, 2014. 43rd International Congress on Noise Control Engineering.
- [70] F. Pacheco-Vazquez and S. Dorbolo. Rebound of a confined granular material : combination of a bouncing ball and a granular damper. *Nature - Scientific Reports*, (3), 2013.

- [71] H. Panossian. Optimized non-obstructive particle damping (nopd) treatment for composite honeycomb structures. Number AIAA 2006-2210, Newport, Rhode Island, May 2006. 47th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics & Materials Conference.
- [72] J. Park and D. L. Palumbo. Damping of structural vibration using lightweight granular materials. *Experimental Mechanics*, 49(5) :697–705, October 2009.
- [73] P. Patricio. The hertz contact in chain elastic collisions. *American Journal of Physics*, 72(12) :1488 – 1491, 2004.
- [74] J. Poittevin, P. Picart, C. Faure, F. Gautier, and C. Pézerat. Multi-point vibrometer based on high-speed digital in-line holography. *Appl. Opt.*, 54(11) :3185 – 3196, 2015.
- [75] J. Poittevin, P. Picart, F. Gautier, and C. Pézerat. Quality assessment of combined quantization-shot-noise-induced decorrelation noise in high-speed digital holographic metrology. *Opt. Express*, 23(24) :30917 – 30932, 2015.
- [76] F. Radjai and V. Richefeu. Contact dynamics as a nonsmooth discrete element method. *Mechanics of Materials*, 41(6) :715 – 728, 2009.
- [77] K. Roeller, J. P. D. Clewett, R. M. Bowley, S. Herminghaus, and M. R. Swift. Liquid-gas phase separation in confined vibrated dry granular matter. *Physical Review Letters*, 107 :048002, July 2011.
- [78] C. Saluena, T. Pöschel, and S. E. Esipov. Dissipative properties of vibrated granular materials. *Phys. Rev. E*, 59(4) :4422 – 4425, April 1999.
- [79] M. Sanchez and C. M. Carlevaro. Nonlinear dynamic analysis of an optimal particle damper. *Journal of Sound and Vibration*, 332(8) :2070 – 2080, 2013.
- [80] O. Sano, A. Ugawa, and K. Suzuki. Pattern formation on the vertically vibrated granular layer. *Forma*, 14(4) :321–329, 1999.
- [81] B. M. Shah, D. Pillet, X.-M. Bai, L. M. Keer, Q. J. Wang, and R. Q. Snurr. Construction and characterization of a particle-based thrust damping system. *Journal of Sound and Vibration*, 326(3 - 5) :489 – 502, 2009.
- [82] A. Signorini. Sopra alcune questioni di statica dei sistemi continui. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa - Classe di Scienze*, 2(2) :231 – 251, 1933.
- [83] F. Soulié, F. Cherblanc, M. S. El Youssefi, and C. Saix. Influence of liquid bridges on the mechanical behaviour of polydisperse granular materials. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 30(3) :213 – 228, 2006.
- [84] A. Sternberger. Experimental video of deformable plate (glass beads - $\varnothing = 100 \mu\text{m}$ - <http://umotion.univ-lemans.fr/video/0139-mise-en-vibration-dun-volume-de-granulaires-sur-une-plaque/>).
- [85] A. Sternberger. Experimental video of deformable plate (glass beads - $\varnothing = 700 \mu\text{m}$ - <http://umotion.univ-lemans.fr/video/0238-mise-en-vibration-dun-volume-de-granulaires-sur-une-plaque/>).
- [86] A. Sternberger. Experimental video of non-deformable cavity (glass beads - diameter = 2 mm - high-speed camera - <http://umotion.univ-lemans.fr/video/3358-mise-en-vibration-dun-volume-de-granulaires-indeformables-dans-une-cavite>).
- [87] C. H. Tai and S. S. Hsiau. Dynamic behaviors of powders in a vibrating bed. *Powder Technology*, 139(3) :221 – 232, January 2004.
- [88] M. Trigui, E. Foltete, M. Abbes, T. Fakhfakh, N. Bouhaddi, and M. Haddar. An experimental study of a multi-particle impact damper. *Journal of Mechanical Engineering Science*, 223(9) :2029–2038, September 2009.
- [89] F. G. Tyzzer and H. C. Hardy. The properties of felt in the reduction of noise and vibration. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 19(5) :872–878, 1947.
- [90] P. B. Umbanhowar and H. L. Melo, Francisco & Swinney. Localized excitations in a vertically vibrated granular layer. *Nature*, 382 :793 – 796, 1996.
- [91] J. J. Valenza, C.-J. Hsu, R. Ingale, N. Gland, H. A. Makse, and D. L. Johnson. Dynamic effective mass of granular media and the attenuation of structure-borne sound. *Physical Review E : Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, 80 :051304, November 2009.
- [92] M. D. Waller. Air circulations about a vibrating plate. *British Journal of Applied Physics*, 6(10) :347, 1955.

-
- [93] T. Wassereau. *Caractérisation de matériaux composites par problème inverse vibratoire*. PhD thesis, Le Mans Université, 2016. <NNT : 2016LEMA1041> <tel-01578127v2>.
- [94] C. X. Wong, M. C. Daniel, and J. A. Rongong. Energy dissipation prediction of particle dampers. *Journal of Sound and Vibration*, 319(1-2) :91 – 118, 2009.
- [95] W. Xiao, J. Li, S. Wang, and X. Fang. Study on vibration suppression based on particle damping in centrifugal field of gear transmission. *Journal of Sound and Vibration*, 366 :62 – 80, March 2016.
- [96] C. Xu, N. Zheng, L. sheng Li, and Q. fan Shi. Bouncing behavior and dissipative characterization of a chain-filled granular damper. *Powder Technology*, 297 :367 – 373, 2016.
- [97] Z. Xu, M. Y. Wang, and T. Chen. An experimental study of particle damping for beams and plates. *Journal of Vibration and Acoustics - Transactions of the ASME*, 126(1) :141 – 148, February 2004.
- [98] C. Yan, H. Zheng, G. Sun, and X. Ge. Combined finite-discrete element method for simulation of hydraulic fracturing. *Rock Mechanics and Rock Engineering*, 49(4) :1389 – 1410, 2016.
- [99] B. Yao, Q. Chen, H. Xiang, and X. Gao. Experimental and theoretical investigation on dynamic properties of tuned particle damper. *International Journal of Mechanical Sciences*, 80 :122 – 130, 2014.
- [100] F. Zhang, L. Wang, C. Liu, P. Wu, and S. Zhan. Patterns of convective flow in a vertically vibrated granular bed. *Physics Letters A*, 378 :1303 – 1308, 2014.
- [101] K. Zhang, T. Chen, X. Wang, and J. Fang. A model of tuned particle damper. Florence, ITALY, 2015. Intertational Congress on Sound and Vibration (22nd).

Table des figures

1	Différents procédés d'allégement de structures : (a) concept d'hydroptère DCNS [68] - (b) nouvelle géométrie d'ailes d'avions AIRBUS A350XWB [68] - (c) part de matériaux légers dans un BOIENG B787 [1].	1
2	IRT Jules Verne.	1
3	Différentes échelles du matériau granulaire : (a) grains de café - (b) brique pilée - (c) sucre de betterave [68].	2
4	Catégories mettant en jeu un matériau granulaire dans l'atténuation des vibrations : (a) impact damper (ID) [9] - (b) particle damper (PD) [39] - (c) non-obstructive particle damper (NOPD) [72].	2
1.1	Contact entre deux grains : (a) schéma représentatif de la chute d'un grain - (b) interpénétration suivant le modèle de Hertz - (c) modèle d'interaction - (d) application du modèle ($v_0 = 0,30 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ - $E = 6,85\cdot 10^{10} \text{ Pa}$ - $\nu = 0,36$ - $\rho = 2707 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ - $R = 20\cdot 10^{-3} \text{ m}$ - $c_r = 0,70$).	6
1.2	Contact entre deux grains avec forces normale et tangentielle : (a) contribution du contact normal F_N et de la friction tangentielle F_T lors d'une collision entre deux grains [46] - (b) Confrontation d'un modèle à l'expérience (bille de masse $m = 0,252 \text{ kg}$ - hauteur de chute $h = 0,3 \text{ m}$) [64].	7
1.3	Contact cohésif expérimental : (a) photo d'un pont capillaire entre deux grains - (b) variation de la force capillaire f_{cap} en fonction de la distance entre les grains D [34].	8
1.4	Transmission d'un effort le long d'une chaîne 1D : (a) représentation schématique avant et après impact - (b) évolution des vitesses des billes B_1 & B_2 - (c) évolution des vitesses des billes B_2 & B_3 (--- : conservation de la quantité de mouvement - — : contact de Hertz - $m_1 = m_2 = m_3 = 1 \text{ kg}$, $v_1^- = 1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, $v_2^- = v_3^- = 0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, $e_{1,2} = e_{2,3} = 1$ [31].	9
1.5	Impacts le long d'une chaîne 1D : (a) collisions dans une chaîne de grains à diamètres décroissants de droite à gauche (impact côté droit) - (b) évolution de la vitesse de chaque particule le long d'une chaîne 1D de grains consécutives à un impact [66].	9
1.6	Chaîne 1D de grains avec variation de diamètre : (a) dispositif expérimental - (b) variation de l'énergie cinétique [32].	10
1.7	Différents régimes d'un ensemble de grains vibrés : (a) dispositif expérimental - (b) diagramme de phases thermodynamiques issus d'une simulation numérique correspondant à l'expérience pour un amas de grains à une fréquence de 45 Hz [77].	11
1.8	Simulation numérique du mouvement des grains dans une cavité à différentes vitesses (accélérations) pour $f = 20 \text{ Hz}$: (a) $A\omega = 15 \text{ cm}\cdot\text{s}^{-1}$ ($\Gamma = 2$) - (b) $A\omega = 100 \text{ cm}\cdot\text{s}^{-1}$ ($\Gamma = 13$) - (c) $A\omega = 600 \text{ cm}\cdot\text{s}^{-1}$ ($\Gamma = 77$) - (d) $A\omega = 1250 \text{ cm}\cdot\text{s}^{-1}$ ($\Gamma = 160$) - (e) $A\omega = 1900 \text{ cm}\cdot\text{s}^{-1}$ ($\Gamma = 243$) [78].	11
1.9	Simulation numérique de l'évolution des valeurs de force normale aux interactions inter-grains d'un amas de grains en fonction d'un niveau de chargement externe non uniforme. Les parois de gauche et du bas sont immobiles, tandis que les surfaces supérieure et droite soumettent une contrainte uniforme. [76].	12
1.10	Résultats expérimentaux de la mise en évidence du comportement solide de la masse de grains [61].	12
1.11	Représentation schématique de résultats expérimentaux illustrant des mouvements de convection et ondes de surfaces d'un matériau granulaire mis en vibration dans une cavité [100].	13
1.12	Simulation numérique de la localisation du mouvement chaotique des grains à la surface libre de l'amas ($\Gamma = 4$ et $f = 12,5 \text{ Hz}$) [87].	13

1.13	Vibration libre d'un piston dans une cavité remplie de grains : (a) influence expérimentale de l'ajout de grains sur la vibration libre du piston (billes de verre, $\varnothing = 1$ mm) [81] - (b) évolution de l'énergie perdue W par le système sans et avec traitement (billes de verre, $\varnothing = 1$ mm) [81] - (c) effet de la taille des grains sur l'atténuation de la vibration dans le cas d'une simulation numérique [8].	14
1.14	Comparaison expérimentale de la décroissance d'amplitude : (a) sans bille - (b) avec bille - (c) comparaison des valeurs de l'amortissement c en fonction de la taille de la cavité. • : expérience & — : théorique ($M = 0,73$ kg, $\omega = 1$ rad.s ⁻¹ et $X_0 = 1,0$ cm) [9].	14
1.15	Réponse du système résonant avec 3 grains [32].	15
1.16	Représentation fréquentielle et temporelle d'un système à iso-masse : (a) masse indéformable fixée - (b) matériau granulaire ($\varnothing = 2$ mm) [88].	15
1.17	Déplacement des particules dans la cavité et FFT de la trajectoire du centre de masse des grains pour différentes fréquences d'excitation : (a) $f_e = 8,0$ Hz - (b) $f_e = 10,0$ Hz - (c) $f_e = 14,5$ Hz - (d) $f_e = 21,0$ Hz [79].	16
1.18	Mise en vibration d'une cavité contenant un amas de grains sur un système vibrant : (a) observation temporelle du mouvement des particules éjectées de la base d'une structure vibrante pour différentes valeurs d'accéléérations normalisées Γ - (b) variations de la capacité d'amortissement spécifique calculées numériquement en fonction de l'accélération normalisée Γ (o : sans particule, • : avec particules $\varnothing = 230$ μ m) [29].	17
1.19	Mesure de l'énergie perdue par un amas de grains vibrés : (a) Représentation de Lissajous - (b) Mesure du facteur de perte η à partir des signaux temporels en fonction de l'accélération et du volume V_g de grains en verre [61].	18
1.20	Simulation numérique d'une cavité vibrante comportant un matériau granulaire : (a) schéma numérique du système - (b) répartition de l'énergie ($\omega_n = 20$ Hz, A-dissipation visqueuse, B-dissipation par friction, C-dissipation par impact, D-somme de l'énergie dissipée) [59].	18
1.21	Excitation forcée harmonique avec ajout de grains : (a) comparaison simulation numérique et expérience (— · — Résonance du système à vide, — Simulation numérique de l'ajout de grains & ▲ Expérience de l'ajout de grains) [26] - (b) réponse vibratoire du système avec matériau granulaire pour $\Gamma \in [0,1-40]$ [55].	19
1.22	Particle damper sur une plaque rectangulaire avec ($\Gamma = 0,25$) : (a) dispositif expérimental - (b) FRF (Inertance) d'une structure modale avec traitement anti-vibratoire à iso-masse (bleu : masse indéformable, rouge : matériau granulaire) [69].	20
1.23	Particle damper sur une poutre en flexion : (a) cavité remplie de grains attachée à une poutre sollicitée en flexion et modèle associé pour le calcul numérique - (b) FRF comparant expérience et modèle analytique approché [12].	20
1.24	Non-obstructive particle damper d'une poutre creuse remplie de grains : (a) dispositif expérimental - (b) modèle analytique approché du système [63].	21
1.25	FRF de la poutre creuse remplie de grains : (a) expériences pour différents ratios de remplissages - (b) modèle analytique pour les mêmes ratios de remplissages [63].	21
2.1	Expérience d'une plaque circulaire encastrée ($\Gamma \in [0 - 12]$) : (a) Dispositif expérimental - (b) schéma représentatif.	24
2.2	Expérience d'une cavité indéformable ($\Gamma \in [0 - 3]$) : (a) Dispositif expérimental - (b) schéma représentatif.	24
2.3	Expérience d'une poutre compartimentée ($\Gamma \in [0 - 3]$) : (a) Dispositif expérimental - (b) schéma représentatif.	25
2.4	Boucle de contrôle en accélération lors d'un balayage en fréquence.	25
2.5	Représentation de la Fonction de Réponse en Fréquence (FRF) : (a) module & phase - (b) plan complexe.	26
2.6	Analyse spectrale : (a) signaux temporels d'accélération et force - (b) fft de l'accélération - (c) fft de la force	27
2.7	Signaux temporels issus de la mesure d'un système résonnant ($m = 3,810$ kg - $k = 4,85 \cdot 10^5$ N.m ⁻¹) avec une accélération de consigne $\Gamma = 2$: (a) signaux d'accélération et de force & signaux de déplacement et de force - (b) représentation de Lissajous en force & déplacement.	27
2.8	Schéma de différents types d'amortissement : (a) amortissement linéaire par effet visqueux - (b) amortissement par frottement sec non-linéaire - (c) amortissement par raideur non-linéaire.	28
2.9	Mise en vibration d'une plaque libre & figure de Chladni.	28
2.10	Expérience d'une plaque circulaire encastrée ($\Gamma \in [0 - 12]$) : (a) Dispositif expérimental - (b) schéma représentatif.	28

2.11	Etude analytique de la déformée modale normalisée d'une plaque circulaire encastree : (a) plaque au repos - (b) plaque vibrant sur son premier mode.	29
2.12	Mise en vibration d'une masse de grains ($\varnothing = 100 \mu\text{m}$) sur une plaque à surface libre avec mise en évidence de différents états thermodynamiques associés : (a) comportement "solide" $\Gamma \approx 0,5$ - (b) comportement "fluide" $\Gamma \approx 5$ - (c) comportement "gazeux" $\Gamma \approx 10$ (vidéo d'expérience : [84]).	30
2.13	Représentation schématique du comportement d'une masse de grains vibrés sur un cycle ($\varnothing = 100 \mu\text{m}$) : (a) système au repos sans vibration - (b) mouvement ascendant de la plaque et éjection des grains au centre - (c) mouvement descendant de la plaque et dépression associée concentrant les grains au centre (vidéo d'expérience : [84]).	30
2.14	Mise en vibration d'une masse de grains ($\varnothing = 700 \mu\text{m}$) sur une plaque à surface libre ($\Gamma \approx 10$) : (a) expérience réalisée - (b) représentation schématique (vidéo d'expérience : [85]).	31
2.15	Différents types de traitements sur la plaque circulaire encastree : (a) matériau granulaire ($\varnothing = 100 \mu\text{m}$) - (b) masse indéformable collée à la plaque.	31
2.16	Variation de masse ajoutée (Grains de verre - $\varnothing = 100 \mu\text{m}$) : (a) FRF au centre de la plaque ($\Gamma = 1$ - en tiret : grand pas fréquentiel - en ligne continue : petit pas fréquentiel) - (b) facteur d'amortissement modal (ζ) en fonction du ratio de masse ajoutée.	32
2.17	Variation de l'amplitude d'accélération (Grains de verre - $m_{\text{grains}} = m_5$) : (a) FRF au centre de la plaque pour des grains $\varnothing = 100 \mu\text{m}$ (en tiret : grand pas fréquentiel, en ligne continue : petit pas fréquentiel) - (b) facteur d'amortissement modal (ζ) en fonction de l'accélération (γ) (vidéos d'expériences : [84, 85]).	32
2.18	Variation d'hygrométrie (Grains de verre - $m_{\text{grains}} = m_5$) : (a) FRF au centre de la plaque pour $\Gamma = 1, 5$ - (b) facteur d'amortissement modal en fonction du taux d'hygrométrie.	33
3.1	Expérience d'une cavité indéformable ($\Gamma \in [0-3]$) : (a) Dispositif expérimental - (b) schéma représentatif.	36
3.2	Schéma d'un oscillateur à 1DDL	36
3.3	FRF du système constitué de la cavité vide.	37
3.4	Mouvement dynamique du système soumis à une vibration (m_c : masse de la cavité - m_{ri} : masse des différentes sections de la raideur expérimentale) : — — — système au repos - — — mouvement oscillant.	37
3.5	Moment d'inertie de la plaque associée à m_{r2}	37
3.6	Calcul du coefficient d'amortissement visqueux équivalents c_1 du système 1DDL associé à partir de l'énergie dissipée par cycle (E_L) et de l'amplitude maximum du déplacement (x_{max}) : (a) cavité vide (m_1) - (b) cavité avec une masse fixée indéformable ($m_1 + m_2$).	38
3.7	Représentations temporelles et de Lissajous d'un système 1DDL ($m = m_1 + m_2$) pour une accélération $\gamma = 2g$: (a) expérience - (b) modèle analytique associé.	39
3.8	Influence de la variation de la fréquence d'excitation sur l'énergie Lissajous E_L ($\gamma = 2g$) : (a) modèle analytique - (b) expérience sur la cavité vide.	40
3.9	Variation paramétrique sur le modèle montrant l'influence de l'amplitude d'accélération γ pour différentes masses : (a) modèle analytique - (b) expérience sur la cavité.	40
3.10	FRF pour différents traitements d'atténuation des vibrations d'un oscillateur pour une amplitude d'excitation $\gamma = 3g$	41
3.11	Mise en évidence de l'intérêt de l'utilisation de grains dans l'atténuation des vibrations d'un système 1DDL : (a) masse indéformable - (b) amas de grains en verre ($\varnothing = 2 \text{ mm}$).	42
3.12	Coefficient d'amortissement modal (ζ) pour deux valeurs de masse de grains ($k=2$, intervalle de confiance de 95% sur la valeur de la moyenne) : (a) $m = 150 \text{ gr}$ ($\approx 5\%$ d'ajout) - (b) $m = 500 \text{ gr}$ ($\approx 15\%$ d'ajout).	42
3.13	Signaux expérimentaux (Grains en verre $\varnothing = 2 \text{ mm}$) : (a) $\gamma = 1g$ - (b) $\gamma = 2g$	43
3.14	Représentation des cycles d'énergie dissipée pour une acquisition temporelle dans le cas d'une masse fixée indéformable ajoutée : (a) $\gamma = 1g$ - (b) $\gamma = 2g$	44
3.15	Représentation des cycles d'énergie dissipée pour une acquisition temporelle dans le cas d'un amas de grains ajouté : (a) $\gamma = 1g$ - (b) $\gamma = 2g$	44
3.16	Représentation schématique du décolage d'un amas de grains dans une cavité montée sur un oscillateur (voir vidéo [86]).	45
3.17	Synthèse de la dissipation d'énergie due à la présence d'un matériau granulaire ($\varnothing = 2 \text{ mm}$) ($k = 2$, intervalle de confiance de 95% sur la valeur de la moyenne).	45
3.18	Etapes successives de développement d'un modèle analytique représentant la dissipation induite par la mise en vibration d'un amas de grains en utilisant le frottement de Coulomb.	46
3.19	Effet de la fréquence d'excitation sur l'orientation des ellipses du diagramme de Lissajous pour deux valeurs de la masse du système : (a) $f = 55 \text{ Hz}$ - (b) $f = 58 \text{ Hz}$ - (c) $f = 62 \text{ Hz}$	47

3.20	Saut d'une masse secondaire non solidaire : (a) mouvement en phase avant décollage - (b) saut de la masse secondaire.	48
3.21	Signaux temporels et Lissajous dans le cas du saut d'une masse secondaire non solidaire ($\gamma > g$, $f = 53$ Hz).	49
3.22	Ralentissement d'une masse secondaire à l'atterrissage.	50
3.23	Signaux temporels et Lissajous dans le cas du ralentissement d'une masse secondaire à l'atterrissage ($\gamma = 2g$, $F_{Mf} = 30$ N).	51
3.24	Signaux temporels et Lissajous dans le cas du ralentissement d'une masse secondaire à l'atterrissage ($\gamma = 2g$, $F_{Mf} = 60$ N).	52
3.25	Frottement constant d'une masse secondaire.	53
3.26	Signaux temporels et Lissajous dans le cas du frottement constant d'une masse secondaire ($\gamma = 3g$, $F_{Mb} = 8$ N).	55
3.27	Signaux temporels et Lissajous dans le cas du frottement constant d'une masse secondaire ($\gamma = 2g$, $F_{Mb} = 8$ N).	56
3.28	Association des deux contributions de frottement.	56
3.29	Signaux temporels et Lissajous dans le cas de l'association des deux contributions de frottement ($F_{Mb} = 7$ N, $F_{Mf} = 10$ N).	59
3.30	Confrontation du modèle avec frottement de Coulomb à l'expérience ($\gamma = 3g$, $F_{Mb} = 5,7$ N, $F_{Mf} = 200$ N).	60
3.31	Confrontation du modèle avec frottement de Coulomb à l'expérience ($\gamma = 3g$, $F_{Mb} = 7$ N, $F_{Mf} = 11$ N).	61
3.32	Etapes successives de développement d'un modèle analytique représentant la dissipation induite par la mise en vibration d'un amas de grains.	61
3.33	Ajout d'une contribution de dissipation par un deuxième oscillateur.	62
3.34	Signaux temporels et Lissajous dans le cas de l'ajout d'une contribution de dissipation par un deuxième oscillateur.	63
3.35	Schéma représentatif d'un système à 2DDL avec butée : (a) à vide (sans action de la gravité) - (b) à l'équilibre (sous l'action de la gravité) - (c) le système décolle - (d) atterrissage. . .	64
3.36	Allongement phase 2.	66
3.37	Signaux temporels et Lissajous dans le cas d'une masse secondaire liée à un système vibrant par une béquille et des coefficients d'un oscillateur ($\gamma = 2g$ - $c_2 = 60$ N·s·m ⁻¹ - $k_2 = 0,5 \cdot 10^5$ N·m ⁻¹).	68
3.38	Schéma représentatif d'un système à 2DDL avec frottement à l'atterrissage : (a) à vide (sans action de la gravité) - (b) à l'équilibre (sous l'action de la gravité) - (c) le système décolle - (d) atterrissage et action du patin frottant F_{Mf}	69
3.39	Signaux temporels et Lissajous dans le cas d'une masse secondaire liée à un système vibrant par des coefficients d'un oscillateur et un patin frottant ($\gamma = 1,5g$ - $c_2 = 2$ N·s·m ⁻¹ - $k_2 = 0,1 \cdot 10^5$ N·m ⁻¹ - $F_{Mf} = 20$ N).	71
3.40	Signaux temporels et Lissajous dans le cas d'une masse secondaire liée à un système vibrant par des coefficients d'un oscillateur et un patin frottant ($\gamma = 2g$ - $c_2 = 20$ N·s·m ⁻¹ - $k_2 = 5 \cdot 10^3$ N·m ⁻¹ - $F_{Mf} = 30$ N).	72
4.1	Dispositif expérimental pour une masse solidaire indéformable.	74
4.2	Signaux de déplacement de la cavité et de la force nécessaire pour une masse solidaire indéformable $m_2 = 476$ gr : accélération (a) 1g - (b) 2g - (c) 3g.	74
4.3	Energie dissipée totale moyenne par cycle pour différentes tailles de grains d'un échantillon monodisperse.	75
4.4	Signaux temporels pour différents diamètres de grains en verre ($\gamma = 2g$) : (a) $\varnothing = 2$ mm - (b) $\varnothing = 1$ mm - (c) $\varnothing = 0,2$ mm.	76
4.5	FRF pour différents diamètres de grains en verre et différents niveaux d'accélération : (a) $\varnothing = 2$ mm - (b) $\varnothing = 1$ mm - (c) $\varnothing = 0,2$ mm.	76
4.6	Energie dissipée totale moyenne par cycle pour différentes tailles de grains au sein d'un échantillon polydisperse.	77
4.7	Grains d'acier ($\varnothing = 2$ mm).	77
4.8	Utilisation des grains en acier ($\gamma = 3g$) : (a) signaux temporels - (b) diagramme de Lissajous. . .	77
4.9	Coupe de grains creux en élastomère : (a) grains non étuvés (pleins) - (b) grains étuvés (creux).	78
4.10	Matériau granulaire vibré pour différentes configurations (Grains creux - $\varnothing \approx 2$ mm) : (a) piston abaissé ($V_{constant}$) - (b) piston posé ($P_{constant}$) - (c) surface libre.	78
4.11	Synthèse de la dissipation d'énergie due à la présence d'un matériau granulaire déformable, $\varnothing \approx 2$ mm.	79

4.12	Comparaison des FRF : (a) masse solidaire indéformable - (b) grains creux en élastomère étuvés à surface libre (Grains creux - $\varnothing \approx 2$ mm).	79
4.13	Signaux temporels expérimentaux avec grains déformables creux à surface libre (Grains creux - $\varnothing \approx 2$ mm) : (a) $\gamma = g$ - (b) $\gamma = 2g$ - (c) $\gamma = 3g$.	80
4.14	Spectre des signaux temporels expérimentaux avec grains déformables creux à surface libre (Grains creux - $\varnothing \approx 2$ mm) : (a) $\gamma = 1g$ - (b) $\gamma = 2g$ - (c) $\gamma = 3g$.	80
4.15	Granules de caoutchouc : (a) $\varnothing \approx 1$ mm - (b) $\varnothing \approx 5$ mm.	81
4.16	Synthèse de la dissipation d'énergie due à la présence de granules de caoutchouc.	81
4.17	Condition de frottement latérale : (a) Photo du revêtement - (b) Energie dissipée par un matériau granulaire ($\varnothing = 0,2$ mm), et modification du frottement sur la paroi.	82
4.18	Représentation temporelle de l'accélération et de la force sur la cavité en fonction de la rugosité de la paroi latérale pour une accélération $\gamma = 2g$: (a) $d \approx 125$ μm - (b) $d \approx 201$ μm - (c) $d \approx 425$ μm .	83
4.19	Condition de contact souple à l'atterrissage : (a) Photo du revêtement - (b) Energie dissipée sans et avec feutrine à la base de la cavité et billes en verre ($\varnothing = 2$ mm).	83
4.20	Signaux temporels avec feutrine à la base de la cavité et billes en verre ($\varnothing = 2$ mm) : (a) $\gamma = 1g$ - (b) $\gamma = 1,5g$ - (c) $\gamma = 3g$.	84
4.21	Réponse fréquentielle avec feutrine à la base de la cavité et billes en verre ($\varnothing = 2$ mm) : (a) $\gamma = 1g$ - (b) $\gamma = 1,5g$ - (c) $\gamma = 3g$.	84
5.1	Poutre creuse compartimentée : (a) dessin de la déformée du premier mode d'une poutre creuse libre-libre contenant partiellement un matériau granulaire - (b) CAO de la poutre creuse réalisée.	86
5.2	Déformée modale d'une poutre libre-libre pour les 3 premiers modes ($n = [1,2,3]$) et numérotation des compartiments internes (de 1 à 11).	86
5.3	Expérience d'une poutre compartimentée ($\Gamma \in [0 - 3]$) : (a) Dispositif expérimental - (b) schéma représentatif.	87
5.4	FRF de la poutre creuse avec compartiment central ($n^\circ 6$), sans traitement.	87
5.5	Déformées modales expérimentales de la poutre vide : (a) 1 ^{er} mode - (b) 2 ^{ème} mode.	87
5.6	Positionnement des grains au centre de la poutre (compartiment $n^\circ 6$) à masse ajoutée identique : (a) masse adhésive indéformable - (b) grains déformables remplissant la cavité - (c) grains en verre - (d) grains déformables réparti.	88
5.7	Synthèse des énergies perdues E_L pour différents traitements au centre de la poutre : (a) 1 ^{er} mode - (b) 2 ^{ème} mode.	88
5.8	FRF de la poutre creuse avec compartiment central ($n^\circ 6$) avec traitement : (a) masse adhésive localisée - (b) matériau granulaire déformable remplissant la cavité centrale.	89
5.9	FRF de la poutre creuse avec compartiment central avec traitement : (a) Grains en verre ($\varnothing = 2$ mm) - (b) grains déformables répartis dans les 3 cavités centrales.	89
5.10	Variation de la localisation des grains dans la poutre creuse : (a) compartiments $n^\circ 4$ et $n^\circ 8$ - (b) compartiments $n^\circ 1$ et $n^\circ 11$.	90
5.11	Synthèse des énergies perdues E_L pour différentes positions du traitement : (a) 1 ^{er} mode - (b) 2 ^{ème} mode.	90
5.12	FRF de la poutre creuse avec variation de la localisation des grains : (a) compartiments $n^\circ 4$ et $n^\circ 8$ - (b) compartiments $n^\circ 1$ et $n^\circ 11$.	91
5.13	Batteur dissipatif constitué d'une tige encastree-libre : (a) réalisation expérimentale - (b) déformée modale d'une poutre encastree-libre pour les 3 premiers modes ($n = [1,2,3]$).	91
5.14	Synthèse des énergies perdues E_L mettant en jeu l'utilisation du batteur dissipatif : (a) 1 ^{er} mode - (b) 2 ^{ème} mode.	92
5.15	Réponse fréquentielle du système pour une cavité centrale $n^\circ 6$ partiellement remplie de grains souples - (a) sans batteur dissipatif - (b) avec batteur dissipatif.	93
5.16	Batteur dissipatif alourdi.	93
5.17	Synthèse des énergies perdues E_L mettant en jeu l'utilisation du batteur dissipatif alourdi à son extrémité : (a) 1 ^{er} mode - (b) 2 ^{ème} mode.	93
5.18	Réponse fréquentielle du système pour une cavité centrale $n^\circ 6$ partiellement avec batteur dissipatif alourdi - (a) cavité vide - (b) cavité remplie à moitié de grains ATECA.	94
A.1	Signaux expérimentaux d'accélération B&K 8001 (a) Orientation PCB 317A01 SN 110 $\downarrow$ (b) Orientation PCB 317A01 SN 110 $\uparrow$.	97
A.2	Signaux expérimentaux de force B&K 8001 : (a) impact vers le bas (b) impact vers le haut.	97
A.3	Lissajous pour différentes fréquences - Masse solidaire ajoutée indéformable : (a) $f = 50,6$ Hz - (b) $f_0 = 52,1$ Hz - (c) $f = 53,6$ Hz.	98

A.4	Lissajous pour différentes fréquences - amas de grains : (a) $f = 47$ Hz - (b) $f_0 = 48,5$ Hz - (c) $f = 50$ Hz.	98
A.5	Signaux expérimentaux (masse solidaire indéformable) : (a) $\gamma = 1g$ - (b) $\gamma = 2g$	99
B.1	Loi de contact de Signorini : (a) contact entre deux particules - (b) caractéristiques des relations complémentaires entre la force normale f_n et la distance entre les deux particules δ_n [76].	101
B.2	Interaction de deux particules entre deux murs rigides [22].	102

Liste des tableaux

2.1	Caractéristiques de la place circulaire encastrée.	29
2.2	Pourcentage de masse ajoutée sur la plaque circulaire encastrée.	31
3.1	Masse unitaire des composants du système primaire constitué de la cavité et des plaques de liaison.	37
3.2	Coefficients du modèle 1DDL associé à l'expérience.	39
3.3	Paramètres constants du système 1DDL pour les modèles successifs.	46
4.1	Variation du diamètre et du nombre de grains associé pour des échantillons de masse $m_2 = 476$ gr.	75
4.2	Correspondance pour un papier abrasif entre la nomenclature ISO et la taille moyenne des grains du papier.	82
5.1	Relation de proportionnalité du niveau d'accélération entre l'extrémité et le maximum d'amplitude de vibration de la poutre libre-libre.	87

Titre : Atténuation vibratoire non-linéaire de structures modales creuses par l'ajout de matériaux granulaires.

Mots-clés : Vibrations, Matériau granulaire, Dynamique non-linéaire, Dissipation, Structure modale, Expérience, Modèle.

Résumé : L'utilisation d'un matériau granulaire au sein de structures industrielles afin de diminuer les niveaux vibratoires est une solution alternative aux revêtements viscoélastiques, qui ont une dépendance forte aux conditions de température. Pour l'industrie navale et aéronautique l'enjeu est ainsi d'améliorer la fiabilité et le confort. Les niveaux d'interaction entre les grains dépendent des paramètres de contrôle (niveau d'accélération), mais aussi des caractéristiques des matériaux constitutifs des grains, du taux d'humidité du fluide environnant, de la géométrie et des dimensions des grains, ainsi que des conditions de confinement.

Pour une accélération donnée, indépendante du point de la structure, la pertinence du choix d'un matériau granulaire par rapport à une même masse indéformable est mise en évidence par l'étude de la vibration d'une cavité rigide montée sur un oscillateur partiellement remplie. Les variations paramétriques des types de confinements dans la cavité ainsi que le matériau constitutif des grains permettent d'extraire les paramètres influents dans la dissipation d'énergie. Le développement d'un modèle analytique à constantes localisées permet de simuler l'énergie dissipée par le système via un nombre réduit de coefficients représentant la dynamique vibratoire de la matière en grains. La confrontation de ce modèle avec différentes expérimentations permet de valider son efficacité et son caractère prédictif dans la dissipation de l'énergie vibratoire d'un système dynamique.

Pour une structure modale en vibration, où le niveau d'accélération est dépendant du point de la structure, l'optimisation du positionnement des amas de grains est montrée. Ceci est fait à l'aide d'une structure modale d'un gabarit industriel.

Title : Non-linear vibration attenuation of hollow modal structures by the addition of granular materials.

Key-words : Vibration, Granular material, Nonlinear dynamics, Dissipation, Modal structure, Experiment, Model.

Abstract : The use of granular material in industrial structures to reduce vibration levels is an alternative to viscoelastic surfacing, which is highly dependent on temperature conditions. For the naval and aeronautical industry, the challenge is to improve reliability and comfort. The levels of interaction between the grains depend on the control parameters (acceleration level), but also on the characteristics of the constituent materials of the grains, the moisture content of the surrounding fluid, the geometry and dimensions of the grains, as well as their containment conditions.

For a given acceleration, independent of the point of structure, the relevance of the choice of a granular material with respect to the same non-deformable mass is demonstrated by the study of the vibration of a rigid cavity mounted on an oscillator partially filled. The parametric variations of the types of confinement in the cavity as well as the constituent material of the grains make it possible to extract the influent parameters in the energy dissipation. The development of an analytical model with localized constants allows to simulate the energy dissipated by the system via a reduced number of coefficients representing the vibratory dynamics of the granular matter. The comparison of this model with experiments makes it possible to validate its effectiveness and its predictive character in the dissipation of the vibratory energy of a dynamic system.

For a modal structure, where the acceleration level is dependent on the point of the structure, the optimization of the grain cluster positioning is shown. This is done using an industrial design modal structure.