



**HAL**  
open science

# Calcul des vibrations non linéaires d'une structure composite en contact avec un fluide par la Méthode Asymptotique Numérique : application à la vibroacoustique

Bertille Claude

## ► To cite this version:

Bertille Claude. Calcul des vibrations non linéaires d'une structure composite en contact avec un fluide par la Méthode Asymptotique Numérique : application à la vibroacoustique. *Vibrations [physics.class-ph]*. Université de Bretagne Sud, 2018. Français. NNT : 2018LORIS516 . tel-02076680

**HAL Id: tel-02076680**

**<https://theses.hal.science/tel-02076680v1>**

Submitted on 22 Mar 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THESE DE DOCTORAT DE

L'UNIVERSITE BRETAGNE SUD  
COMUE UNIVERSITE BRETAGNE LOIRE

ECOLE DOCTORALE N° 602  
*Sciences pour l'Ingénieur*  
Spécialité : *Génie Mécanique*

Par

**Bertille CLAUDE**

## **Calcul des vibrations non linéaires d'une structure composite en contact avec un fluide par la Méthode Asymptotique Numérique – Application à la vibroacoustique**

Thèse présentée et soutenue à Lorient, le 11 décembre 2018  
Unité de recherche : Institut de Recherche Dupuy de Lôme UMR CNRS 6027  
N° ordre : 516

### **Rapporteurs avant soutenance :**

El Mostafa DAYA      Professeur, LEM3, Université de Lorraine  
Jean-François DEÜ      Professeur, LMSSC, Conservatoire National des Arts et Métiers

### **Composition du Jury :**

Président :	Jean-Michel GÉNEVAUX	Professeur, LAUM, Université du Mans
Examineurs :	El Mostafa DAYA	Professeur, LEM3, Université de Lorraine
	Jean-François DEÜ	Professeur, LMSSC, Conservatoire National des Arts et Métiers
	Cédric LEBLOND	Docteur - Ingénieur, Naval Group Research
	Christophe VERGEZ	Directeur de Recherche CNRS, LMA, Centrale Marseille

Dir. de thèse : Jean-Marc CADOU  
Co-encadrante : Laëtitia DUIGOU  
Co-encadrant : Grégory GIRAULT

Maître de conférences – HDR, IRDL, Université Bretagne-Sud  
Maître de conférences, IRDL, Université Bretagne-Sud  
Maître de conférences, CREC, Écoles de Saint-Cyr Coëtquidan



*"J'suis bien content[e] d'être venu[e], quelle aventure !"*  
*Les enfants du marais*



# Remerciements

Comme chacun le sait, la thèse est loin d'être un long fleuve tranquille. Les personnes rencontrées tout au long de ces 3 années ont chacune à leur manière contribué à l'aboutissement de ce projet.

Je remercie tout d'abord Jean-Marc Cadou, mon directeur de thèse, Laëtitia Duigou et Grégory Girault, mes encadrants, pour m'avoir proposé ce sujet de thèse. Quand je relis la lettre de motivation envoyée à Jean-Marc à l'époque où je cherchais un stage pour mon Master, je me rends compte à quel point ce sujet était fait pour moi et je suis très heureuse que vous me l'ayez confié.

Je remercie également Jean-Michel Génévaux, qui m'a fait l'honneur de présider mon jury. J'adresse également mes remerciements aux membres du jury : El Mostafa Daya et Jean-François Deü, qui ont accepté d'être rapporteurs de ces travaux, Cédric Leblond et Christophe Vergez. Je crois que tous les thésards rêvent d'un jury intéressé et bienveillant comme celui que vous avez formé.

Je remercie ensuite mes collègues de l'IRDL. L'ambiance dans la salle de pause à l'heure du déjeuner restera parmi les bons souvenirs de ces 3 années. Mention spéciale à Antoine, Delphine, Lydie et Mathieu pour les "repas partagés". Merci aussi à Yann pour ses coups de main en informatique, grâce à toi je sais désormais faire "des trucs de geek" (et j'en suis fière).

Parmi toutes les personnes croisées au bureau 215 (ou 215 bis, avec le déménagement je n'ai jamais vraiment su), je remercie en particulier mes "co-bureau" Antoine et Delphine (encore eux!), qui ont été beaucoup plus que des collègues. J'espère continuer les discussions écolo-cyclo-féministes avec vous encore longtemps!

Je remercie aussi tous les copains, qu'ils soient de la danse, des apéros vélo ou doctorants de Lorient et d'ailleurs. Vous m'avez offert les pauses détente nécessaires pour décompresser et arriver jusqu'au bout de ce projet.

Je remercie ma famille pour ses encouragements. En particulier PopaMoman qui m'ont toujours accompagnée en me faisant confiance. Et mes deux sœurs, parce qu'elles sont mes sœurs et que les sœurs c'est important!

Enfin, un immense merci à David, pour avoir été là pendant ces 3 ans (et pour le gâteau du dimanche, surtout le sandwich avec couche centrale au chocolat). Maintenant que ce projet est terminé pour moi, je serai ravie d'en commencer d'autres avec toi, KLBMGG.



# Table des matières

<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>1 Définition du problème</b>	<b>7</b>
1.1 Introduction	9
1.2 Interaction fluide-structure - Vibroacoustique	9
1.2.1 Un problème couplé	9
1.2.2 Une grande variété de problèmes	9
1.2.3 Description du problème étudié	11
1.3 Amortissement des vibrations	13
1.3.1 Différents types d'amortissement	13
1.3.2 Viscoélasticité	14
1.3.3 Structure sandwich	17
1.4 Choix d'une formulation pour les inconnues du problème	20
1.4.1 Hypothèses et notations	20
1.4.2 Formulation pression/déplacement	22
1.4.3 Formulation déplacement/déplacement	26
1.4.4 Formulation pression, potentiel des déplacements/déplacement	29
1.4.5 Formulation potentiel des vitesses/déplacement	33
1.4.6 Bilan - Problème à résoudre	35
1.5 Implantation de l'élément 2DFS dans le code de laboratoire EVE	36
1.5.1 Présentation	36
1.5.2 Interpolation	37
1.5.3 Matrices élémentaires des domaines solides et fluides	37
1.5.4 Couplage	39
1.5.5 Type d'élément - Construction de la matrice élémentaire de l'élément fini "2DFS"	40
1.5.6 Type de nœud - Réduction du nombre d'inconnues	41
1.6 Conclusion	42
<b>2 Solveurs aux valeurs propres pour les problèmes IFS conservatifs</b>	<b>43</b>
2.1 Introduction	44
2.2 Solveur ARPACK	47
2.2.1 Algorithme d'Arnoldi avec redémarrage implicite	47
2.2.2 Influence du conditionnement sur le solveur ARPACK	47
2.3 Solveur MAN - indicateur (MANi)	49
2.3.1 Introduction de l'indicateur	49
2.3.2 Perturbation	50
2.3.3 Approximants de Padé	51
2.3.4 Valeurs propres	51
2.3.5 Continuation	52
2.4 Solveur MAN - analyse des termes de série (MANa)	53
2.4.1 Problème conservatif forcé	54
2.4.2 Premiers résultats : accumulation de pas au voisinage des pulsations propres	55
2.4.3 Présence d'une suite géométrique	57

2.4.4	Détection d'une suite géométrique et "nettoyage" des séries . . . . .	57
2.4.5	Extraction des valeurs et des modes propres . . . . .	58
2.4.6	Continuation . . . . .	59
2.5	Algorithmes des solveurs proposés . . . . .	59
2.6	Résultats numériques . . . . .	62
2.6.1	Description du cas test . . . . .	62
2.6.2	Validation des algorithmes . . . . .	63
2.6.3	Étude du solveur MAN - indicateur (MANi) . . . . .	67
2.6.4	Etude du solveur MAN - analyse des termes de série (MANa) . . . . .	69
2.6.5	Comparaison des méthodes . . . . .	73
2.7	Conclusion . . . . .	75
<b>3</b>	<b>Résolution de problèmes IFS dissipatifs en régime libre</b>	<b>77</b>
3.1	Introduction . . . . .	78
3.2	Algorithme de Newton . . . . .	79
3.2.1	Théorie . . . . .	80
3.2.2	Limites de l'algorithme . . . . .	81
3.3	Solveur de Newton d'ordre élevé - NOE . . . . .	82
3.3.1	Théorie . . . . .	82
3.3.2	Alternative - Algorithme de Newton modifié . . . . .	87
3.4	Algorithmes des solveurs proposés . . . . .	87
3.5	Résultats numériques . . . . .	90
3.5.1	Problème étudié . . . . .	90
3.5.2	Validation . . . . .	92
3.5.3	Étude de convergence - Choix d'un maillage . . . . .	95
3.5.4	Comparaison des méthodes proposées . . . . .	99
3.5.5	Étude du comportement mécanique . . . . .	108
3.6	Conclusion . . . . .	113
<b>4</b>	<b>Résolution de problèmes IFS dissipatifs en régime forcé</b>	<b>115</b>
4.1	Introduction . . . . .	116
4.2	Méthode directe . . . . .	117
4.3	Méthode Asymptotique Numérique . . . . .	118
4.3.1	Perturbation . . . . .	118
4.3.2	Séparation des parties réelles et imaginaires . . . . .	119
4.3.3	Expression du module d'Young à chaque ordre . . . . .	120
4.3.4	Algorithme de résolution . . . . .	121
4.3.5	Continuation . . . . .	123
4.3.6	Amélioration de la représentation en séries polynomiales . . . . .	123
4.3.7	Algorithmes des solveurs proposés . . . . .	125
4.4	Résultats numériques . . . . .	129
4.4.1	Présentation du cas test . . . . .	129
4.4.2	Validation des codes . . . . .	130
4.4.3	Étude paramétrique . . . . .	135
4.4.4	Comparaison des différentes méthodes . . . . .	141
4.4.5	Comportement mécanique . . . . .	145
4.5	Conclusion . . . . .	153
	<b>Conclusion générale</b>	<b>155</b>

---

<b>A</b>	<b>Modèle de Maxwell généralisé</b>	<b>161</b>
A.1	Paramètres matériaux . . . . .	161
A.2	Obtention des coefficients $E_{pj}^R$ et $E_{pj}^I$ . . . . .	163
<b>B</b>	<b>Lien entre les pulsations <math>\omega</math> et <math>\Omega</math></b>	<b>167</b>
B.1	Lien entre les pulsations $\omega_p$ et $\Omega_p$ dans le cas où $\Omega = \omega^2$ . . . . .	167
B.2	Calcul des pulsations $\omega_p$ dans le cas où $\Omega = -\omega^2$ . . . . .	167
<b>C</b>	<b>Influence de l'amortissement et de la température</b>	<b>171</b>
<b>D</b>	<b>Étude paramétrique</b>	<b>175</b>
D.1	Configurations testées . . . . .	175
D.2	Premiers résultats : épaisseur de la couche viscoélastique . . . . .	177
D.3	Premiers résultats : position de la couche viscoélastique . . . . .	182
	<b>Bibliographie</b>	<b>187</b>



# Liste des symboles et abréviations

## Lettres romaines

$a$	paramètre de perturbation (solveurs MANa, MANp, MANsg)
$\mathbf{B}$	matrice cinématique
$c$	célérité des ondes dans le fluide
$\mathbf{C}$	matrice de couplage
$\mathbb{D}$	tenseur d'élasticité linéaire (tenseur d'ordre 4)
$\mathbb{D}(E(\omega))$	tenseur pour la viscoélasticité linéaire isotrope (tenseur d'ordre 4)
$E(\omega)$	module d'Young complexe du matériau viscoélastique
$E(\omega)\mathbf{K}$	matrice de rigidité globale du domaine solide viscoélastique
$E_0, \eta_c$	paramètres du matériau pour le modèle de viscoélasticité hystérétique
$\mathbf{f}_v$	force volumique
$\mathbf{H}$	matrice d'élasticité ou de viscoélasticité en déformations planes
$k_j, \eta_j$	paramètres du matériau pour le modèle de Maxwell généralisé
$\mathbf{K}_F$	matrice de rigidité du domaine fluide
$\mathbf{K}_S$	matrice de rigidité du domaine solide
$\mathbf{K}_S(\mathbf{0})$	matrice de rigidité élastique du domaine solide
$\mathbf{K}_S(\omega)$	matrice de rigidité viscoélastique du domaine solide
$\mathbf{K}(\mathbf{0})$	matrice de rigidité globale du domaine solide élastique et du domaine fluide
$\mathbf{M}_F$	matrice de masse du domaine fluide
$\mathbf{M}_S$	matrice de masse du domaine solide
$\mathbf{M}$	matrice de masse globale du système
$\mathbf{n}_F$	vecteur normale sortante du domaine fluide
$\mathbf{n}_S$	vecteur normale sortante du domaine solide
$\mathbf{N}_u$	matrice des fonctions d'interpolation pour les déplacements $\mathbf{u}$
$\mathbf{N}_p$	matrice des fonctions d'interpolation pour la pression $p$
$p$	pression
$\mathbf{p}_n$	vecteur des pressions nodales au niveau élémentaire
$\mathbf{P}_n$	vecteur des pressions nodales
$\mathbf{u}$	vecteur déplacement (solide)
$\mathbf{u}_d$	vecteur déplacement imposé
$\mathbf{u}_F$	vecteur déplacement (fluide)
$\mathbf{u}_n$	vecteur des déplacements nodaux au niveau élémentaire
$\mathbf{U}_n$	vecteur des déplacements nodaux
$\mathbf{U}$	vecteur des inconnues nodales (déplacement et pression)
$\mathbf{T}$	effort imposé
$T$	température

## Lettres grecques

$\gamma_1, \gamma_2$	paramètres pour le critère de Cochelin - Médale
$\delta$	paramètre sur le domaine de validité des séries MAN
$\delta_1$	paramètre sur le domaine de validité des approximants de Padé
$\varepsilon$	tenseur linéarisé des déformations
$\varepsilon$	paramètre de perturbation (solveur NOE)
$\zeta$	tolérance pour la détermination des pulsations propres et des pulsations de résonance
$\rho_S$	masse volumique du solide
$\rho_F$	masse volumique du fluide
$\sigma_c$	tenseur des contraintes de Cauchy
$\sigma$	tenseur des contraintes (matériau viscoélastique isotrope linéaire)
$\sigma_F$	tenseur des contraintes pour le domaine fluide
$\tau$	tenseur des contraintes visqueuses
$\phi$	potentiel des déplacements dans le domaine fluide
$\psi$	potentiel des vitesses dans le domaine fluide
$\omega$	pulsation
$\hat{\Omega}$	paramètre de perturbation (solveur MANi)

## Symboles mathématiques

$\nabla(\bullet)$	opérateur gradient
$\text{div}(\bullet)$	opérateur divergence
$\Delta$	opérateur laplacien
$\bullet^t$	transposé
$ \bullet $	déterminant
$\ddot{\bullet}$	dérivée seconde (accélération)
$\langle \bullet, \bullet \rangle$	produit scalaire euclidien

## Acronymes et abréviations

CPU	<i>Central Processing Unit</i>
IRDLD	Institut de Recherche Dupuy de Lôme
MAN	Méthode Asymptotique Numérique
MANi	Solveur MAN - indicateur (problème conservatif)
MANa	Solveur MAN - analyse des séries (problème conservatif)
MANp	Solveur MAN avec ajout des approximants de Padé (problème dissipatif)
MANsg	Solveur MAN avec critère de Cochelin - Médale (problème dissipatif)
NOE	Solveur de Newton d'Ordre Élevé
VAP	Valeur propre
VEP	Vecteur propre

# Introduction générale

Toute structure mécanique en contact avec un fluide fait apparaître, à des degrés divers, des phénomènes de couplages multiphysiques. En effet, l'étude de tels systèmes fait appel à la fois à la mécanique des solides et à la mécanique des fluides et nécessite de prendre en compte les interactions entre les deux milieux.

Divers problèmes, appartenant aux domaines de l'aéroélasticité ou de l'hydroélasticité, peuvent dès lors être étudiés, tels que l'écoulement d'un fluide autour d'une structure [Axisa, 2001][De Langre, 2001][Païdoussis *et al.*, 2011] ou le ballotement d'un fluide contenu dans un réservoir [Ohayon, 2001][Andrianarison et Ohayon, 2006][Kolaei *et al.*, 2017].

Les travaux menés durant la thèse s'intéressent au cas particulier de la vibroacoustique. Il s'agit d'un problème d'interaction fluide-structure dans lequel les vibrations autour d'une position d'équilibre d'une structure couplée à un fluide sont étudiées. La mise en mouvement de la structure provoque la réponse vibratoire du fluide environnant. Réciproquement, par le théorème des actions mutuelles, la réponse dynamique du fluide va influencer le comportement mécanique de la structure. Une des problématiques liées à l'étude de tels systèmes couplés porte sur la maîtrise des vibrations et du bruit rayonné.

## Contexte et enjeux

Ces problématiques de maîtrise du bruit et/ou des vibrations sont des sujets fréquemment rencontrés dans l'industrie. Qu'il s'agisse de questions de confort ou de sécurité, les domaines d'applications sont nombreux et variés.

Dans le secteur des transports (automobile, ferroviaire, aéronautique...), il s'agit principalement d'assurer le confort des passagers, que ce soit au niveau des vibrations ressenties ou du bruit [SFA, 2010]. Outre le respect des normes en vigueur, cela peut devenir un argument commercial permettant de se différencier de la concurrence. Ainsi, le confort acoustique est devenu un critère de sélection pour les acheteurs de véhicules motorisés, au même titre que la sécurité ou la consommation de carburant. Les constructeurs automobiles et les manufacturiers de pneumatiques développent alors de nombreux dispositifs et solutions pour atténuer les bruits générés par le moteur, l'écoulement de l'air sur la carrosserie ou le contact avec la route [Burgade, 2000].

Le domaine du BTP s'intéresse également à la réduction de la gêne engendrée par le bruit (construction, transport...), celui-ci ayant un impact sur la qualité de vie et la santé des populations [Van Eeckhout, 2015]. Des dispositifs sont mis au point pour réduire le bruit rayonné par les grandes infrastructures routières ou ferroviaires (nouveaux revêtements pour les chaussées, écrans absorbants...) [CNRS, b][IFFSTAR, 2014]. Dans les bâtiments, on cherche à améliorer l'isolation phonique, en étudiant notamment les doubles vitrages, emprisonnant une lame d'air entre deux lames de verre, ou les vitrages feuilletés, comportant un film plastique au comportement viscoélastique [ADEME, 2018].

Les questions d'impact des vibrations et des nuisances sonores sont également à l'étude dans le domaine de l'ingénierie civile. Le développement des énergies marines renouvelables amène ainsi les chercheurs à s'interroger sur les conséquences des bruits et vibrations sur la faune marine [EMR, 2012].

Enfin, le domaine militaire s'intéresse à la signature acoustique des bâtiments navals (frégates, sous-marins...)[Marine Nationale, 2015]. Les travaux concernent la discrétion acoustique, notamment pour des questions de furtivité alors que les moyens de détection sont de plus en

plus perfectionnés.

En plus des nuisances sonores, les vibrations peuvent être à l'origine de dégâts matériels dans de nombreux domaines (ingénierie civile, nucléaire, systèmes mécaniques...).

D'une part à cause des problèmes de fatigue, qui génèrent une usure pouvant mener à la ruine du système. L'usure des crayons de combustible dans les centrales nucléaires est un exemple typique : assemblés sur une grille qui les maintient en place, les crayons de combustibles sont placés dans un écoulement d'eau. Les vibrations induites par cet écoulement peuvent être à l'origine de fissures dans les crayons, ce qui met en péril la sûreté de l'installation [ASN, 2001].

D'autre part en raison du phénomène de résonance : excité à certaines fréquences, appelées fréquences de résonance, un système peut se mettre à osciller avec une amplitude de plus en plus grande, qui peut mener à la rupture des composants. C'est notamment ce phénomène qui a conduit à la fermeture temporaire du *Millenium Bridge* à Londres en 2000 : lors de l'inauguration, une foule de piétons marchant tous au même rythme, associée aux effets du vent, a provoqué des mouvements de balancement, obligeant les ingénieurs à ajouter un système d'amortisseurs pour garantir la sécurité des usagers [Fitzpatrick et Ridsdill Smith, 2001].

Divers moyens technologiques pour maîtriser, voire supprimer ces vibrations et leurs impacts ont donc été mis au point.

L'une des techniques les plus simples consiste à ajouter un matériau amortissant ou isolant dans la structure, afin de réduire les vibrations ou d'empêcher leur propagation. Les propriétés de ces matériaux permettent de dissiper une partie de l'énergie mécanique, ce qui a pour effet de réduire l'amplitude des vibrations. On parle alors d'amortissement passif. Les structures multicouches (structure sandwich, tôle recouverte d'un revêtement dissipatif, matériaux composites matrice/fibres) sont un exemple de matériaux pouvant être utilisés.

Des systèmes d'amortissement "actif" sont également développés [CNRS, a]. Il s'agit de structures et/ou matériaux capables d'amortir les vibrations en s'adaptant aux sollicitations reçues. Des matériaux "intelligents", dont les propriétés s'adaptent en fonction de la sollicitation sont étudiés. Les plus répandus sont les alliages à mémoire de forme (AMF), les matériaux piézo-électriques, électrostrictifs et magnétostrictifs [Garnier, 2002]. De plus, le développement de l'électronique et de l'automatique a permis le développement de "structures intelligentes", faisant intervenir des micro-capteurs et micro-actionneurs (*MEMS : MicroElectroMechanical Systems*) [AFM, 2015].

Les premières fréquences de résonance font partie des éléments importants du cahier des charges lors de la conception. Ainsi, le cahier des charges peut spécifier une plage de fréquence dans laquelle aucune fréquence propre ne doit apparaître. Être capable de modéliser et de prédire l'apparition des modes propres par analyse modale d'un système devient alors un enjeu, que ce soit du point de vue de la fiabilité des systèmes ou de la réduction des nuisances sonores. En effet, il est préférable de connaître en début de projet les phénomènes vibratoires susceptibles d'apparaître plutôt que de chercher à les supprimer une fois le système construit car cela peut s'avérer coûteux et les solutions proposées sont souvent moins efficaces que ce qui aurait pu être intégré dès la phase de conception. De plus, pouvoir modéliser correctement le comportement vibratoire des systèmes représente un gain de temps dans les projets en réduisant les essais de prototypage.

La simulation numérique apparaît donc comme une solution incontournable dans l'étape de conception et de dimensionnement des structures. De nombreuses méthodes numériques ont

été mises au point pour dimensionner les structures et choisir une solution d'amortissement adaptée. Ces méthodes doivent prendre en compte les spécificités des problèmes de vibroacoustique, qui sont généralement des problèmes complexes, difficiles à résoudre. En effet, l'étude d'un problème en interaction fluide-structure nécessite la prise en compte du couplage entre des domaines aux propriétés fondamentalement différentes. Ainsi, les longueurs et les temps caractéristiques des domaines fluides et solides sont généralement difficilement compatibles. Cette incompatibilité se traduit alors d'un point de vue numérique par des opérateurs matriciels mal conditionnés, ce qui peut conduire à des problèmes de stabilité numérique et de convergence des procédures numériques de résolution. Dans ce cas, il faut s'assurer que les algorithmes mis au point sont suffisamment efficaces. Enfin, dans un contexte industriel, les modèles numériques impliquent en général un nombre très élevé d'inconnues, de l'ordre de plusieurs millions de degrés de liberté.

L'équipe "Structures, Fluides et Interactions" de l'Institut de Recherche Dupuy de Lôme (IRDL) développe des algorithmes spécifiques pour la résolution de problèmes en mécanique des structures et des fluides. Des solveurs utilisant la Méthode Asymptotique Numérique (MAN) sont développés pour la résolution des problèmes non linéaires de flambement, de vibrations et d'analyse de stabilité.

La MAN est un algorithme qui associe une discrétisation spatiale du problème à des techniques de perturbation et de continuation. Cette méthode présente ainsi l'avantage de transformer un problème non linéaire en une série de problèmes linéaires. De plus, une solution analytique, sous forme d'une série entière, est obtenue. Il est alors possible de tracer des "morceaux" de courbe solution, plutôt que des solutions discrètes.

Jusqu'à présent, la MAN a été appliquée à des problèmes de mécanique du solide et à des problèmes de mécanique des fluides. Dans le domaine des solides, les vibrations de poutres et de plaques sandwich viscoélastiques ont été étudiées [Duigou *et al.*, 2003] [Boumediene *et al.*, 2016], ainsi que les vibrations d'une poutre en rotation [Bekhoucha *et al.*, 2016]. Dans le domaine fluide, les travaux portent sur l'analyse et la détection des bifurcations dans un écoulement [Cadou *et al.*, 2006] [Guevel *et al.*, 2011]. Les solveurs mis au point sont généralement robustes et performants. Ils permettent d'obtenir les courbes de réponse non linéaires et de diminuer les temps de calcul.

Les résultats obtenus, en particulier en ce qui concerne le temps de calcul, sont encourageants. C'est pourquoi l'équipe souhaite à présent étendre cette méthode à des problèmes d'interaction fluide-structure. Une première thèse a permis d'étudier l'écoulement incompressible autour d'un cylindre [Monnier, 2018]. Ces travaux ont permis d'associer les techniques basées sur la MAN à une méthode de frontières immergées adaptée à la description de l'interaction fluide-structure.

Les travaux de thèse actuels constituent une deuxième approche. Ils portent sur l'étude des vibrations d'une cavité acoustique remplie d'un fluide compressible. Il s'agit d'un problème de référence, étudié notamment par [Morand et Ohayon, 1992], [Bermúdez et Rodríguez, 1994] et [Deü *et al.*, 2008b]. L'approche par la MAN constitue l'originalité de ces travaux et contribue à la mise au point de nouveaux algorithmes de résolution. Cette thèse est également une contribution aux activités de recherche identifiées par l'Association Française de Mécanique en lien avec la prédiction et l'optimisation de l'amortissement et la résolution de systèmes algébriques de grandes dimensions [AFM, 2015].

## Objectifs

L'objectif principal de ces travaux est la résolution du problème des vibrations d'une structure en contact avec un fluide acoustique. L'amortissement est introduit par la présence d'une couche viscoélastique au sein d'une structure sandwich. Son influence sur la réponse vibratoire est plus particulièrement étudiée. Par ailleurs, le matériau viscoélastique étant modélisé par une loi de comportement non linéaire, des non linéarités matérielles sont à prendre en compte lors de la résolution du problème.

Un premier objectif consiste donc à choisir une formulation variationnelle adaptée à la résolution du problème par la Méthode des Éléments Finis. La prise en compte du couplage fluide-structure au sein du modèle est également étudiée.

La résolution du problème de vibroacoustique conservatif, c'est-à-dire non amorti, constitue un deuxième objectif. Il s'agit en effet d'un problème à part entière, car la résolution par un solveur classique de type ARPACK n'est pas immédiate. De plus, la solution obtenue doit être utilisée comme point initial pour la résolution du problème dissipatif associé.

Le troisième objectif porte sur la résolution du problème dissipatif. Dans ce cas, le système couplé étudié comporte une couche viscoélastique qui introduit un amortissement. Les paramètres matériaux dépendent non linéairement de la fréquence, ce qui constitue une difficulté pour la résolution. Il s'agit ici de proposer de nouvelles méthodes numériques pour traiter ce problème, en considérant notamment les techniques d'homotopie et de perturbation. Les cas de régimes libre et forcé sont étudiés.

Enfin, les travaux menés durant la thèse doivent contribuer au développement du code de laboratoire EVE. D'une part, en y introduisant la possibilité de modéliser le couplage fluide-structure et, d'autre part, en y implantant de nouvelles méthodes numériques permettant la résolution de problèmes de vibroacoustique.

## Organisation du manuscrit

Dans le premier chapitre, le problème étudié est défini. Les hypothèses retenues pour l'étude sont énoncées, et l'introduction d'un amortissement par un matériau viscoélastique intégré à une structure sandwich est discutée. Une étude bibliographique présente quelques unes des formulations variationnelles les plus utilisées, afin de choisir la plus adaptée à la résolution par la méthode des éléments finis. Enfin, l'élément fini "2DFS", développé dans le code de laboratoire EVE pour les besoins de cette thèse, est détaillé.

Le deuxième chapitre concerne la mise au point de solveurs aux valeurs propres pour le système conservatif. Le solveur ARPACK est présenté, celui-ci étant considéré comme le solveur de référence car largement utilisé dans la littérature. Deux solveurs basés sur la MAN sont proposés. Leurs performances sont comparées sur un cas test issu de la littérature. Il s'agit d'une cavité en acier remplie d'un fluide (air ou eau), notamment étudiée par [Bermúdez et Rodríguez, 1994]. Les solutions obtenues servent, par la suite, de point initial pour le solveur aux valeurs propres du système dissipatif.

Le troisième chapitre s'intéresse au calcul des vibrations libres du système dissipatif. L'ajout d'une couche de matériau viscoélastique dans le domaine solide permet d'introduire de l'amortissement dans le système couplé. Un solveur basé sur les techniques d'homotopie et de perturbation est proposé pour résoudre ce problème des vibrations amorties.

Le quatrième chapitre porte sur le calcul de la réponse en régime forcé du système dissipatif. Un solveur basé sur la MAN est étudié, ainsi que deux variantes. Les résultats obtenus sont comparés à ceux du CHAPITRE 3 pour permettre la validation des solveurs proposés.

En conclusion, les principaux résultats obtenus avec les solveurs MAN sont rappelés et des perspectives de poursuite d'étude sont proposées.



# Définition du problème

---

## Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>9</b>
<b>1.2</b>	<b>Interaction fluide-structure - Vibroacoustique</b>	<b>9</b>
1.2.1	Un problème couplé	9
1.2.2	Une grande variété de problèmes	9
1.2.3	Description du problème étudié	11
<b>1.3</b>	<b>Amortissement des vibrations</b>	<b>13</b>
1.3.1	Différents types d'amortissement	13
1.3.2	Viscoélasticité	14
1.3.2.1	Description par un module d'Young complexe	14
1.3.2.2	Modèles rhéologiques simples	15
1.3.2.3	Modèles rhéologiques complexes	16
1.3.2.4	Modèles à dérivées fractionnaires	17
1.3.3	Structure sandwich	17
1.3.3.1	Description	17
1.3.3.2	Lois de comportement	18
1.3.3.3	Prise en compte dans le modèle éléments finis	19
<b>1.4</b>	<b>Choix d'une formulation pour les inconnues du problème</b>	<b>20</b>
1.4.1	Hypothèses et notations	20
1.4.2	Formulation pression/déplacement	22
1.4.2.1	Équations d'équilibre local	22
1.4.2.2	Formulation variationnelle	23
1.4.2.3	Méthode des éléments finis - Système matriciel couplé	24
1.4.2.4	Avantages et inconvénients	25
1.4.3	Formulation déplacement/déplacement	26
1.4.3.1	Équations d'équilibre local	26
1.4.3.2	Formulation variationnelle	27
1.4.3.3	Méthode des éléments finis - Système matriciel couplé	28
1.4.3.4	Avantages et inconvénients	29
1.4.4	Formulation pression, potentiel des déplacements/déplacement	29
1.4.4.1	Équations d'équilibre local	29
1.4.4.2	Formulation variationnelle	30
1.4.4.3	Méthode des éléments finis - Système matriciel couplé	31
1.4.4.4	Avantages et inconvénients	32
1.4.5	Formulation potentiel des vitesses/déplacement	33
1.4.5.1	Équations d'équilibre local	33
1.4.5.2	Formulation variationnelle	33

1.4.5.3	Méthode des éléments finis - Système matriciel couplé . . . . .	34
1.4.5.4	Avantages et inconvénients . . . . .	35
1.4.6	Bilan - Problème à résoudre . . . . .	35
<b>1.5</b>	<b>Implantation de l'élément 2DFS dans le code de laboratoire EVE . .</b>	<b>36</b>
1.5.1	Présentation . . . . .	36
1.5.2	Interpolation . . . . .	37
1.5.3	Matrices élémentaires des domaines solides et fluides . . . . .	37
1.5.4	Couplage . . . . .	39
1.5.5	Type d'élément - Construction de la matrice élémentaire de l'élément fini "2DFS" . . . . .	40
1.5.6	Type de nœud - Réduction du nombre d'inconnues . . . . .	41
<b>1.6</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>42</b>

---

## 1.1 Introduction

Ce premier chapitre a pour but de définir le problème étudié. Dans un premier temps, des définitions générales sont rappelées. Ainsi, la notion d'interaction fluide-structure et le cas particulier de la vibroacoustique sont précisés. Puis diverses possibilités d'amortissement permettant de maîtriser les vibrations sont évoquées. Ceci permettra de définir le cadre de l'étude. Le choix de la formulation décrivant le problème est discuté. Cette formulation doit permettre de traiter le problème avec la méthode des éléments finis, afin de s'intégrer dans le code de laboratoire EVE. Enfin, l'implantation d'un nouvel élément fini "2DFS" dans le code EVE est détaillée.

## 1.2 Interaction fluide-structure - Vibroacoustique

### 1.2.1 Un problème couplé

L'interaction fluide-structure désigne des problèmes mettant en jeu un domaine fluide en contact avec un domaine solide. Les deux milieux échangent de l'énergie d'origine mécanique, mais il n'y a pas d'échange de masse. Ainsi, le déplacement et la déformation du solide agissent sur le fluide et, réciproquement, les champs de pression et de vitesse du fluide modifient les efforts exercés à l'interface (FIGURE 1.1) [Axisa, 2001] [Sigrist, 2011].

Les domaines solide et fluide sont liés par un ensemble de conditions contraignant leurs mouvements respectifs, il s'agit donc de problèmes couplés. Selon la densité du fluide et sa position par rapport au solide, le comportement de chaque domaine est plus ou moins influencé par le comportement de l'autre. On distingue deux niveaux de couplage, selon la densité du fluide mis en jeu [Gibert, 2005]. D'un côté les problèmes fortement couplés, où le fluide, généralement dense, modifie fortement le comportement vibratoire de la structure. Et de l'autre, les problèmes ayant une interaction faible, pour lequel le comportement vibratoire de la structure s'approche de celui dans le vide. Selon le degré de couplage (faible/fort), différentes méthodes de résolution numérique, plus ou moins complexes, peuvent être mises en œuvre.

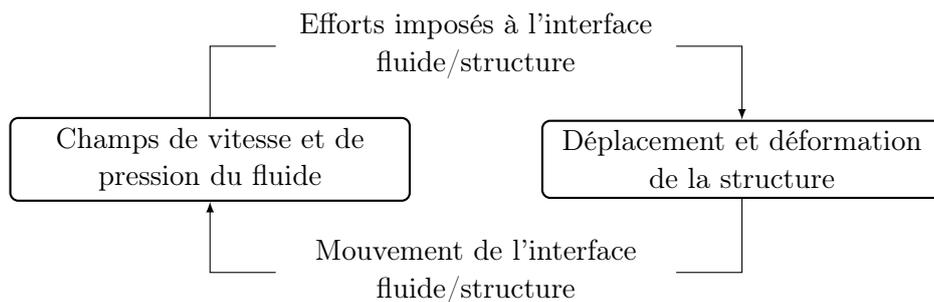


FIGURE 1.1 – Principe général de l'interaction fluide-structure - Mise en évidence du couplage à l'interface.

### 1.2.2 Une grande variété de problèmes

L'interaction fluide-structure recouvre une grande diversité de situations. Nous donnons ici quelques exemples basés sur la classification proposée dans [Sigrist, 2011].

Une première classification, que l'on pourrait qualifier de "géométrique", concerne la position du domaine fluide par rapport au domaine solide. Ainsi, les problèmes où le fluide est contenu dans le domaine solide sont distingués des problèmes où le solide est immergé dans

le fluide, considéré comme infini. Des variantes peuvent être identifiées au sein de ces deux catégories principales, nous listons ici les exemples les plus fréquents :

- Fluide contenu ou interne :
  - Fluide occupant la totalité d'une cavité solide : concerne généralement des fluides légers, tels que l'air, considérés comme non pesants. On a alors affaire à un problème dit "de cavité acoustique" (FIGURE 1.2(d)) [Bermúdez et Rodríguez, 1994] [Mellado et Rodríguez, 2001]. On citera par exemple les recherches pour l'amélioration du confort des passagers dans l'industrie automobile ou ferroviaire [Boily et Charron, 1999] [Rao, 2003], ou l'étude des réacteurs nucléaires de propulsion [Sigrist *et al.*, 2006][Sigrist *et al.*, 2007].
  - Fluide avec une surface libre : parmi ces problèmes se retrouvent notamment les problèmes de ballotement, ou *sloshing* [Ohayon, 2001] [Andrianarison et Ohayon, 2006], mettant en jeu des fluides lourds (FIGURE 1.2(e)). Dans ce cas, l'action de la gravité n'est pas négligée. Un exemple typique est un réservoir contenant un fluide, tels que les camions citernes [Kolaei *et al.*, 2017] ou les réservoirs de carburant pour l'aérospatiale [Schotte, 2001]. En milieu industriel, le cas des réservoirs soumis à des accélérations brutales générées lors de tremblement de terre est plus particulièrement étudié [Ozdemir *et al.*, 2010][Souli et Shahrour, 2012].
- Fluide contenant ou externe :
  - Structure totalement immergée (FIGURE 1.2(a)) : rayonnement acoustique d'un sous-marin [Wei *et al.*, 2012] [Yao *et al.*, 2017], stabilité des ailes d'avion [Kamakoti et Shyy, 2004], comportement d'un parachute [Tezduyar et Osawa, 2001], tenue des ouvrages d'art vis-à-vis des effets du vent [Capsoni *et al.*, 2017], déplacement des poissons [Hovnanian, 2012], instruments de musique [Derveaux *et al.*, 2002], dimensionnement de structures soumises aux courants marins ou d'éoliennes [Lee *et al.*, 2017]...
  - Structure partiellement contenue (FIGURE 1.2(b)) : rayonnement acoustique de la coque d'un navire [Leblond *et al.*, 2009], éolien offshore [Yan *et al.*, 2016] [Calderer *et al.*, 2018]...

On trouve également des problèmes mixtes (cf. FIGURE 1.2(c)), c'est-à-dire ayant à la fois un fluide interne et un fluide externe.

Le second critère, plus "physique", décrit le mouvement du fluide. On distingue les problèmes où le fluide est stagnant de ceux où le fluide est en écoulement. Dans le premier cas, seuls des petits mouvements autour d'un point d'équilibre sont considérés. L'équilibre du système fluide-structure est décrit par les équations de la mécanique des milieux continus, associées aux équations de l'acoustique [Gibert, 1988] [Lesueur, 1988] [Bruneau, 1998]. Plus récemment, on pourra citer les travaux de thèse de [Besset, 2006], [Amdi, 2012] et [Rouleau, 2013]. Dans le second cas, le fluide est décrit par les équations de Navier-Stokes, avec ou sans modèle de turbulence [De Langre, 2001][Païdoussis *et al.*, 2011]. Le solide peut se déformer infinitésimalement ou subir de grandes transformations (réponse dynamique non linéaire en transformation finie). Généralement, la réponse fréquentielle et/ou la réponse transitoire sont recherchées.

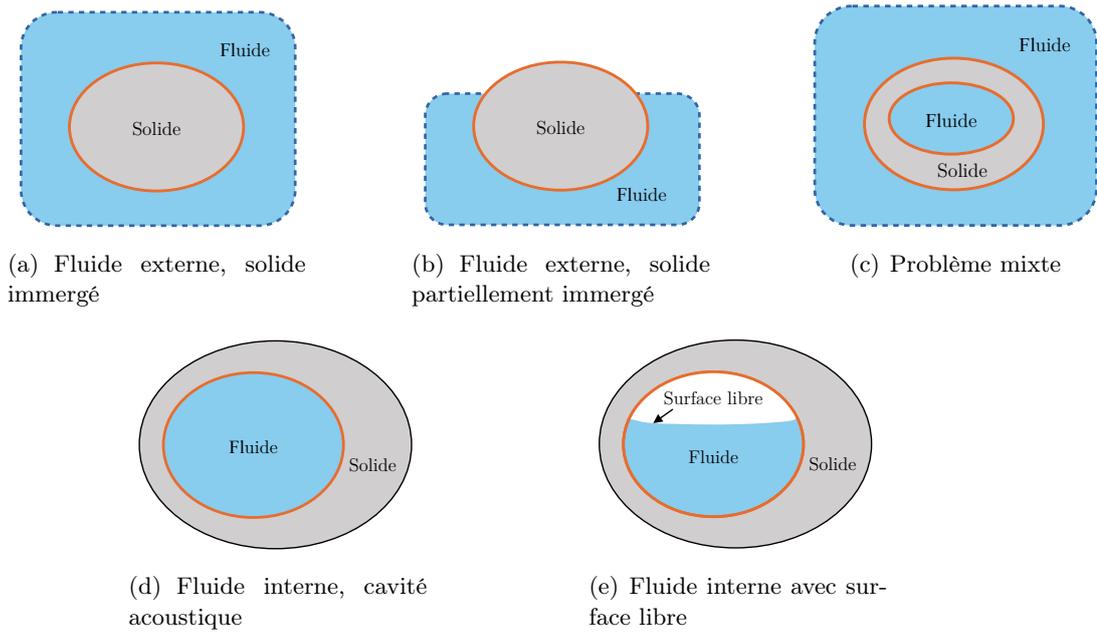


FIGURE 1.2 – Illustration de la variété des problèmes d’interaction fluide-structure selon la géométrie du problème. L’interface est tracée en orange pour chacun des exemples.

### 1.2.3 Description du problème étudié

**Problème de vibroacoustique avec fluide interne** Dans cette thèse, un problème de vibroacoustique interne est étudié (cf. FIGURE 1.2(d)). La vibroacoustique constitue un cas particulier d’interaction fluide-structure, dans lequel les mouvements couplés d’une structure et d’un fluide vibrant autour d’une position d’équilibre statique stable sont étudiés. L’hypothèse des petites perturbations est alors retenue, et la configuration courante est confondue avec la configuration de référence. Ces travaux constituant une première approche des phénomènes vibroacoustiques dans le code de laboratoire EVE, nous nous limitons volontairement à ce cas d’étude simple afin de tester les méthodes numériques développées (cf. CHAPITRE 2, CHAPITRE 3 et CHAPITRE 4).

**Domaine fréquentiel** Trois domaines fréquentiels sont identifiés pour étudier les vibrations de systèmes : basses fréquences, moyennes fréquences et hautes fréquences. En basse fréquence, les pics de résonances sont isolés (faible densité modale), et un nombre restreint de modes de vibration est recherché. Au contraire, en hautes fréquences, la densité modale est très grande, et l’étude porte sur le comportement moyen en espace et en fréquence. Les moyennes fréquences constituent une phase de transition entre le domaine des basses fréquences et celui des hautes fréquences (cf. FIGURE 1.3). Selon le domaine fréquentiel étudié, des méthodes numériques différentes doivent être mises en œuvre :

- Basses fréquences : les modes propres sont peu nombreux et distincts les uns des autres. Les méthodes les plus utilisées sont la méthode des éléments finis (FEM *Finite Element Method*) [Zienkiewicz *et al.*, 2013] [Bathe, 2006] et/ou les éléments de frontière (BEM *Boundary Element Method*) [Banerjee et Butterfield, 1981].
- Hautes fréquences : la réponse vibratoire du système couplé se caractérise par des ondes dont la longueur d’onde est très petite. La solution est alors sensible aux conditions limites, aux paramètres géométriques et matériaux, et à la discrétisation spatiale

retenue. Dans ces conditions, une description précise de la solution n'est pas possible, le comportement moyen en espace et en fréquence est alors étudié. Les méthodes énergétiques, telles que l'Analyse Statistique de l'Energie (SEA) sont privilégiées [Lyon et Maidanik, 1962][Lyon *et al.*, 1995].

- Moyennes fréquences : dans cette bande de fréquence, les méthodes employées pour les basses fréquences deviennent trop coûteuses en mémoire et en temps de calcul, tandis que les méthodes utilisées pour les hautes fréquences sont inadaptées car il est nécessaire de connaître plus que des grandeurs moyennes. Divers travaux ont été menés pour développer des méthodes applicables au cas des moyennes fréquences, notamment la théorie variationnelle des rayons complexes [Ladevèze, 1996] [Ladevèze *et al.*, 2001][Riou, 2004][Kovalevsky, 2011].

Dans cette thèse, le problème de vibroacoustique interne est étudié dans le domaine des basses fréquences. Dans les applications numériques, seuls les dix premiers modes propres seront recherchés.

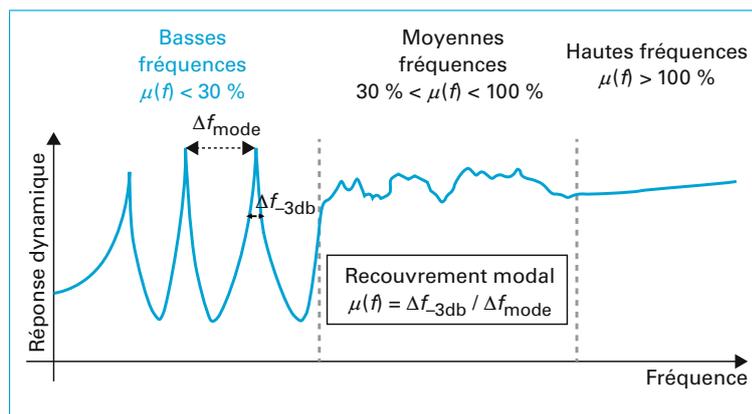


FIGURE 1.3 – Définition des domaines fréquentiels : basses fréquences, moyennes fréquences et hautes fréquences. Figure inspirée de [Sigrist, 2017].

**Discrétisation spatiale** Suivant la configuration du problème, différentes méthodes peuvent être utilisées pour la discrétisation spatiale : méthode des éléments finis, méthode des éléments de frontière, volumes finis... Une synthèse des méthodes numériques pour les problèmes d'interaction fluide-structure en basses fréquences a été proposée par [Sigrist, 2011] (cf. FIGURE 1.4). Dans le cas d'un problème de vibroacoustique interne, il apparaît que la méthode la plus appropriée est la discrétisation par éléments finis de l'ensemble du problème (domaine solide et domaine fluide).

La précision du résultat final dépendant de la discrétisation, cette méthode nécessite des maillages fins pour conduire à une solution acceptable. Une analyse de convergence est donc nécessaire pour s'assurer de la qualité des résultats obtenus. De plus, ces maillages fins contribuent à augmenter le temps de calcul. Il devient alors nécessaire de rechercher des solveurs performants de manière à limiter le temps CPU.

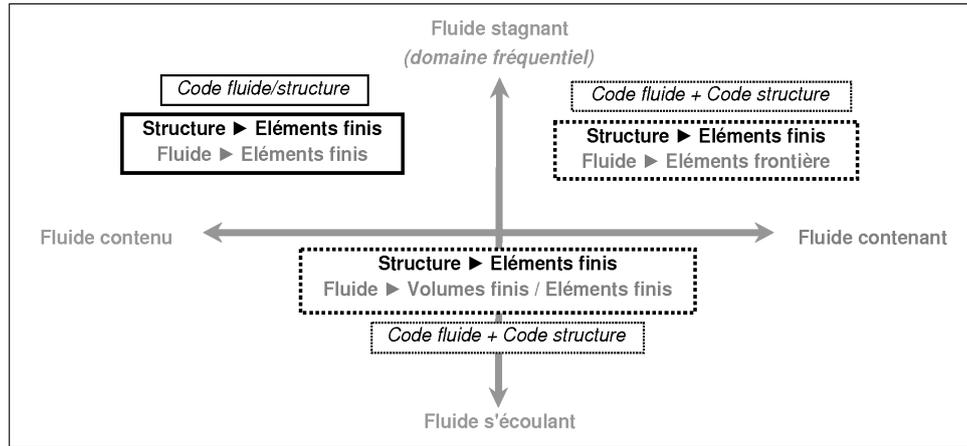


FIGURE 1.4 – "Méthodes générales de simulation numérique en interaction fluide-structure", Figure extraite de [Sigrist, 2011]. La méthode des éléments finis est à privilégier pour les problèmes avec fluide interne et stagnant.

Le cadre de l'étude est posé : il s'agit d'un problème de vibroacoustique. Afin de réduire les vibrations, notamment celles liées à l'interaction fluide-structure, un amortissement est introduit. La section suivante présente différents types d'amortissement, ainsi que les choix effectués pour la modélisation.

## 1.3 Amortissement des vibrations

### 1.3.1 Différents types d'amortissement

Un des enjeux industriels liés à l'étude des problèmes de vibroacoustique est la maîtrise des vibrations. D'une part, pour des raisons de fiabilité et de sécurité, les pics de résonance doivent être évités. De plus, les vibrations peuvent à terme endommager les systèmes mécaniques par le phénomène de fatigue vibratoire [Han *et al.*, 2017][Coulon *et al.*, 2018]. D'autre part, pour des questions de confort, notamment dans le domaine des transports, les compagnies cherchent à améliorer le confort des passagers vis-à-vis du bruit ou des vibrations ressenties [Mallardo *et al.*, 2012][Panda, 2016]. Dans le cas d'applications militaires (navires, sous-marins...), il s'agit d'assurer la discrétion acoustique [Wei *et al.*, 2012] [Yao *et al.*, 2017]. Enfin, ces dernières années, l'impact sur la faune sous-marine des vibrations et de la pollution sonore fait également l'objet d'études [Lurton et Antoine, 2007][EMR, 2012].

Les vibrations doivent alors être atténuées, voire éliminées, afin de réduire leur impact. En dissipant tout ou partie de l'énergie vibratoire, les matériaux ou systèmes amortissants permettent de réduire l'effet des vibrations. Deux types d'amortissement peuvent être distingués : l'amortissement actif et l'amortissement passif.

**Amortissement passif** La solution la plus simple est la solution dite passive. Elle englobe toutes les techniques d'intégration ou d'ajout de matériaux ayant des propriétés amortissantes dans la structure. L'énergie vibratoire de la structure est alors dissipée sous forme de chaleur, sans intervention extérieure. Les polymères, au comportement viscoélastique, sont un bon exemple de matériaux amortissants. Ils sont généralement intégrés dans des structures de type "sandwich" [Rikards *et al.*, 1993] [Duigou-Kersulec, 2002] [Rouleau, 2013] [Larbi *et al.*, 2016b]. Certains matériaux composites peuvent également présenter de bonnes propriétés d'amortissement. En particulier les composites à fibres naturelles, qui possèdent généralement des pro-

propriétés amortissantes plus intéressantes que les matériaux classiques (verre, carbone). On peut citer en particulier des travaux récents au sein de l'IRDL sur des composites à base de fibres de lin, dont les résultats montrent que ces matériaux possèdent des capacités d'amortissement prometteuses [Duigou *et al.*, 2018][Mahmoudi *et al.*, 2018].

**Amortissement actif** L'amortissement actif désigne la présence de capteurs et d'actionneurs qui, intégrés dans la structure, s'adaptent aux vibrations à amortir. L'idée est alors "d'annuler" les vibrations en produisant des vibrations exactement opposées [Garnier, 2002].

On peut citer notamment les matériaux piézoélectriques, dont les propriétés de déformation sous l'effet d'un champ électrique, et réciproquement, de polarisation sous l'action d'une contrainte mécanique, permettent le développement de matériaux dits "intelligents" [Trinidad *et al.*, 2001] [Deü *et al.*, 2008a] [Larbi *et al.*, 2016a]. Les alliages à mémoire de forme, les matériaux électrostrictifs et magnétostrictifs sont d'autres exemples de matériaux utilisés pour l'amortissement actif [Garnier, 2002]. De plus, l'utilisation de micro-capteurs et de micro-actionneurs permet le développement de structures dites intelligentes [AFM, 2015].

### 1.3.2 Viscoélasticité

Un matériau viscoélastique est un matériau ayant un comportement rhéologique intermédiaire entre celui d'un solide élastique et celui d'un fluide visqueux. Le comportement "solide élastique" traduit la capacité du matériau à conserver et restituer l'énergie après déformation, tandis que le comportement "fluide visqueux" traduit la capacité à dissiper de l'énergie. Cette capacité à dissiper de l'énergie en cas de vibration est liée à l'amortissement du matériau. Ainsi, dans le cas où l'amortissement est nul, l'énergie totale du système est conservée, et l'amplitude des oscillations reste constante, tandis qu'en présence d'amortissement, de l'énergie est dissipée, et l'amplitude des oscillations décroît.

#### 1.3.2.1 Description par un module d'Young complexe

Pour un matériau viscoélastique isotrope linéaire non vieillissant en sollicitations harmoniques, on montre que la loi de comportement est analogue à la loi de Hooke généralisée en élasticité, à la différence près que le module d'Young est complexe et dépend de la pulsation :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{D}(E(\omega)) \otimes \boldsymbol{\varepsilon} \quad (1.1)$$

avec  $\boldsymbol{\sigma}$  le tenseur des contraintes viscoélastiques,  $\mathbb{D}(E(\omega))$  le tenseur de viscoélasticité linéaire (tenseur d'ordre 4) et  $\boldsymbol{\varepsilon}$  le tenseur linéarisé des petites déformations défini tel que :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\nabla}(\mathbf{u}) + \boldsymbol{\nabla}^t(\mathbf{u})) \quad (1.2)$$

Pour plus de détails concernant la démonstration de (1.1), le lecteur pourra consulter [Salençon, 2009] et [Duigou-Kersulec, 2002]. Le module d'Young  $E(\omega)$  s'écrit sous forme complexe :

$$E(\omega) = E^R(\omega) + iE^I(\omega) \quad (1.3)$$

Dans (1.3),  $E^R(\omega)$  représente le module de stockage du matériau, traduisant le caractère élastique du matériau, tandis que  $E^I(\omega)$  est le module de perte, traduisant son comportement visqueux.

Différents modèles permettent de décrire ce module complexe, prenant (ou pas) en compte l'influence de la pulsation et de la température, et représentant plus ou moins bien les phénomènes de fluage<sup>1</sup> et de relaxation<sup>2</sup>. Nous présentons ici quelques uns de ces modèles, du plus "simple" au plus "complexe" (en terme de nombre de paramètres et de finesse de modélisation du phénomène de dissipation de l'énergie). Le lecteur intéressé par la modélisation des matériaux viscoélastiques pourra trouver une revue bibliographique plus complète dans [Bert, 1973], [Moreau, 2007], [Rouleau, 2013] et [Akoussan, 2015].

### 1.3.2.2 Modèles rhéologiques simples

Les modèles rhéologiques les plus simples sont construits en assemblant des ressorts, traduisant le comportement élastique, et des amortisseurs, traduisant le comportement visqueux. En combinant ces éléments en série et/ou en parallèle, divers modèles rhéologiques peuvent être obtenus. Du fait de leur simplicité, ils permettent d'obtenir une approximation du comportement viscoélastique d'un matériau à partir d'un très petit nombre de paramètres [Bert, 1973][Lopez-Guerra et Solares, 2014].

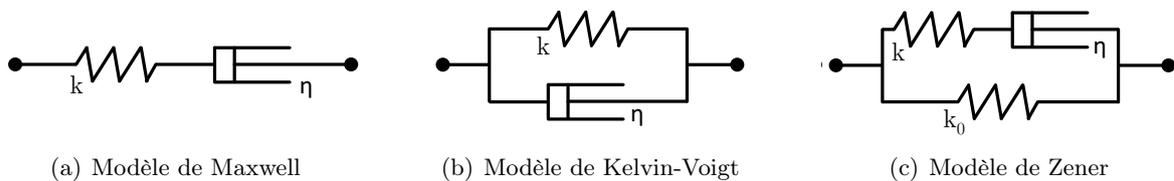


FIGURE 1.5 – Modèles rhéologiques simples pour la viscoélasticité.

Le **modèle de Maxwell** est constitué d'un ressort et d'un amortisseur en série (cf. FIGURE 1.5(a)). Son module d'Young complexe vaut :

$$E(\omega) = \frac{ik\omega\eta}{k + i\omega\eta} \quad (1.4)$$

où  $k$  est la raideur du ressort et  $\eta$  le paramètre de l'amortisseur (coefficient de proportionnalité entre la contrainte et le taux de déformation uniaxiale). Ce modèle représente bien le phénomène de relaxation mais ne permet pas de modéliser le fluage.

Le **modèle de Kelvin-Voigt** est constitué d'un ressort et d'un amortisseur en parallèle (cf. FIGURE 1.5(b)). Son module d'Young complexe vaut :

$$E(\omega) = k + i\omega\eta \quad (1.5)$$

Contrairement au modèle de Maxwell, le modèle de Kelvin-Voigt décrit bien le phénomène de fluage mais pas le phénomène de relaxation.

Le **modèle de Zener**, ou **modèle solide linéaire standard de type Maxwell**, combine les propriétés du modèle de Maxwell et du modèle de Kelvin-Voigt (cf. FIGURE 1.5(c)). Avec seulement 3 paramètres à identifier, il est le modèle rhéologique le plus simple permettant de

1. Fluage : réponse d'un corps à une contrainte constante. La déformation croît au cours du temps.  
2. Relaxation : réponse d'un corps à une déformation constante. La contrainte décroît au cours du temps, on dit que le matériau "s'accommode".

décrire à la fois le phénomène de relaxation et le phénomène de fluage. Son module d'Young complexe vaut :

$$E(\omega) = \frac{k_0(k + i\omega\eta)}{k_0 + k + i\omega\eta} \quad (1.6)$$

Ce modèle peut être utilisé dans le cas de sollicitations simples (essai de relaxation ou de fluage). Cependant, pour des sollicitations plus complexes, tels que des essais en dynamique ou la prise en compte d'un comportement non linéaire, les résultats obtenus ne sont plus satisfaisants. C'est pourquoi des modèles plus complexes, comportant plus de paramètres, ont été développés.

### 1.3.2.3 Modèles rhéologiques complexes

Des comportements plus proches des comportements expérimentaux peuvent être obtenus en assemblant les modèles rhéologiques simples entre eux. Les plus connus sont le **modèle de Maxwell généralisé**, un assemblage de modèles de Maxwell montés en parallèle, et le **modèle de Kelvin-Voigt généralisé**, composé de modèles de Kelvin-Voigt montés en série. Diverses variantes de ces modèles peuvent être construites en omettant un ressort et/ou un amortisseur [Axelrad, 1970]. Les FIGURE 1.6(a) et FIGURE 1.6(c) présentent la variante avec omission d'un amortisseur. On peut citer également le **modèle de Golla-Hughes-Mac Tavish**, qui modélise le comportement viscoélastique par des mini-oscillateurs montés en parallèle d'un ressort (FIGURE 1.6(b)). Les expressions des modules complexes de ces trois modèles et le détail des démonstrations peuvent être trouvés dans [Moreau, 2007] et [Rouleau, 2013].

Bien que ces modèles soient représentatifs du comportement mécanique réel d'un matériau viscoélastique, leur utilisation est limitée par le grand nombre de paramètres à identifier expérimentalement pour représenter correctement le comportement réel du matériau. Ainsi, les modèles de Maxwell et de Kelvin-Voigt généralisés nécessitent l'identification de  $2N+1$  paramètres, et le modèle de Golla-Hughes-Mac Tavish, la détermination de  $3N+1$  paramètres. La qualité de l'approximation dépendant du nombre  $N$  d'éléments assemblés, le nombre de paramètres à identifier peut rapidement devenir un obstacle.

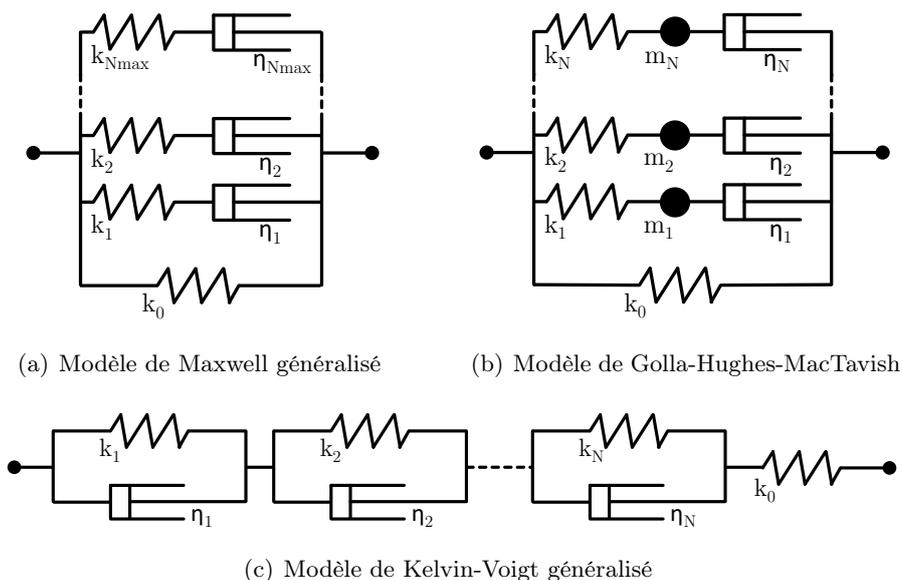


FIGURE 1.6 – Modèles rhéologiques complexes.

### 1.3.2.4 Modèles à dérivées fractionnaires

Les dérivées fractionnaires sont des outils mathématiques qui considèrent la dérivation d'une fonction à un ordre  $\alpha$  non entier, cet ordre  $\alpha$  étant généralement compris entre 0 et 1. Dans le cadre de la viscoélasticité, les modèles à dérivées fractionnaires ont été développés afin de réduire le nombre de paramètres à considérer, tout en gardant une approximation satisfaisante du comportement des matériaux. En faisant varier l'ordre de dérivation  $\alpha$  de la dérivée fractionnaire, différents comportements mécaniques peuvent être modélisés : lorsque  $\alpha$  tend vers 0, le comportement tend vers la réponse élastique, tandis que le comportement visqueux est privilégié lorsque  $\alpha$  tend vers 1.

La dérivée fractionnaire peut être introduite dans le modèle rhéologique au moyen d'un élément dissipatif appelé *spring-spot*. Cet élément représente un assemblage de ressorts (*spring*) et d'amortisseurs (*dashpot*) montés en série et en parallèle (cf. FIGURE 1.7).

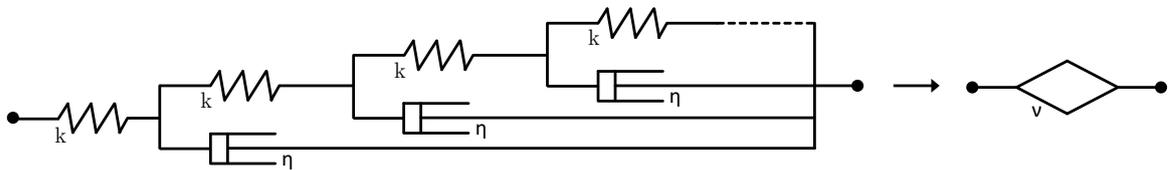


FIGURE 1.7 – Représentation du *spring-spot* dans un modèle rhéologique.

Les modèles à dérivées fractionnaires standards sont obtenus en remplaçant les amortisseurs par des *spring-spot* dans les modèles rhéologiques simples (cf. FIGURE 1.8). Les lois de comportement et modules d'Young complexes associés à ces modèles sont disponibles dans [Rouleau, 2013] et [Krasnobrizha, 2015].

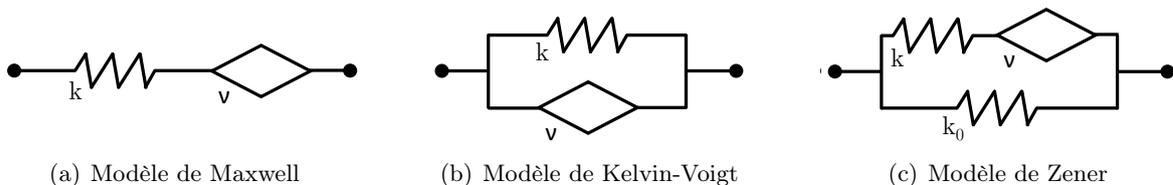


FIGURE 1.8 – Modèles à dérivées fractionnaires standards.

## 1.3.3 Structure sandwich

Dans ces travaux, l'amortissement est introduit au moyen d'un matériau viscoélastique intégré dans une structure sandwich. Ce paragraphe présente les choix effectués pour la modélisation dans le modèle élément fini, ainsi que les lois de comportement considérées pour les matériaux élastiques et viscoélastiques.

### 1.3.3.1 Description

Une structure sandwich est une structure composite composée de différentes couches de matériaux (FIGURE 1.9). La structure sandwich considérée dans cette thèse comporte trois couches. La couche centrale est constituée d'un matériau viscoélastique, un polymère par exemple. Les couches externes, les peaux, sont constituées d'un matériau élastique (acier, aluminium...).

Dans ce type de structure, l'amortissement est dû à la différence de déplacement entre la couche inférieure et la couche supérieure. Le matériau viscoélastique travaille alors en cisaillement, ce qui permet la dissipation d'énergie vibratoire sous forme de chaleur.

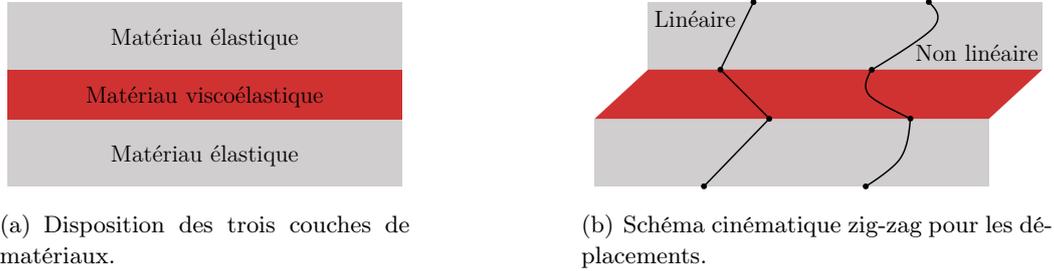


FIGURE 1.9 – Matériau sandwich : répartition des trois couches de matériaux et comportement zig-zag pour la cinématique.

### 1.3.3.2 Lois de comportement

**Matériau élastique** Le comportement élastique linéaire isotrope des couches externes est modélisé par la loi de Hooke généralisée :

$$\boldsymbol{\sigma}_c = \mathbb{D} \otimes \boldsymbol{\varepsilon} \quad (1.7)$$

avec  $\boldsymbol{\sigma}_c$  le tenseur des contraintes de Cauchy,  $\mathbb{D}$  le tenseur d'élasticité linéaire (tenseur d'ordre 4) et  $\boldsymbol{\varepsilon}$  le tenseur linéarisé des petites déformations défini par (1.2).

**Matériau viscoélastique** La loi de comportement du matériau viscoélastique est définie par (1.1). Deux modèles de module d'Young complexe seront étudiés dans les applications numériques :

- Le modèle hystérétique, un cas particulier simple où le module d'Young est constant :

$$E(\omega) = E_0(1 + i\eta_c) \quad (1.8)$$

avec  $E_0$  le module élastique réel et  $\eta_c$  le coefficient d'amortissement hystérétique (facteur de perte). Le comportement du matériau est indépendant de la pulsation et de la température.

- Le modèle de Maxwell généralisé (cf. FIGURE 1.6(a)), fortement non linéaire, dont le module d'Young complexe est défini par :

$$E(\omega) = k_0 + \eta_0 i\omega + \sum_{j=1}^{N_{\max}} \frac{i\omega}{\left(\frac{i\omega}{k_j} + \frac{1}{\eta_j}\right)} \quad (1.9)$$

où la valeur  $N_{\max}$  représente le nombre d'éléments de Maxwell. Les couples  $k_j, \eta_j$  sont des paramètres dépendants du matériau considéré. Ce modèle a été choisi car il permet de réutiliser des données déjà disponibles au sein de l'équipe. En effet, ces travaux de thèse portant sur les méthodes de résolution numériques, il n'est pas prévu de campagne d'essais permettant l'identification de nouveaux paramètres matériaux. Pour nos simulations numériques, les paramètres  $N_{\max}, k_j, \eta_j$  utilisés sont ceux issus des travaux de [Landier, 1993] et [Duigou-Kersulec, 2002] :  $N_{\max}$  vaut 129, et les coefficients  $k_j, \eta_j$  ont été identifiés pour différentes températures (20°C à 70°C) (cf. ANNEXE A.2 et ANNEXE A.1).

### 1.3.3.3 Prise en compte dans le modèle éléments finis

Outre la dépendance à la température et à la pulsation du module d'Young du matériau viscoélastique, une des difficultés pour la modélisation numérique des structures sandwich concerne la discrétisation par éléments finis. En effet, la modélisation choisie doit permettre une bonne représentation du cisaillement de la couche centrale, ce cisaillement étant à l'origine de l'amortissement. Il devient alors important de représenter correctement le comportement "zig-zag" entre les trois couches du matériau sandwich (cf. FIGURE 1.9(b)).

**Éléments finis élastiques et éléments viscoélastiques** La solution la plus simple consiste à discrétiser le solide en considérant des éléments finis élastiques et viscoélastiques. Ainsi, les trois couches de la structure sandwich sont discrétisées séparément (cf. FIGURE 1.10(b)), et les éléments finis choisis doivent être compatibles au niveau des interfaces entre les trois couches de la structure.

L'inconvénient de cette modélisation est que la discrétisation doit être suffisamment fine pour permettre le déplacement longitudinal des couches les unes par rapport aux autres. Ceci implique un grand nombre de degrés de liberté, ce qui constitue une difficulté supplémentaire dans l'utilisation des méthodes numériques (mémoire, temps de calcul).

**Élément fini sandwich** Afin de diminuer le nombre de degrés de liberté tout en garantissant une bonne représentation de la cinématique, des éléments finis "sandwich" ont été développés pour étudier les problèmes de vibrations amorties. Le principe est d'assembler trois éléments dans l'épaisseur de la structure sandwich, puis de déterminer les degrés de liberté de l'élément central en considérant des conditions de raccord aux interfaces entre les couches. Ainsi, l'épaisseur de la structure sandwich n'est pas discrétisée, l'élément fini discrétise seulement les dimensions transversales (cf. FIGURE 1.10(a)). La formulation par éléments finis est alors enrichie afin de tenir compte d'une épaisseur et de prendre en compte le comportement des différentes couches. De nombreux modèles ont été développés sur ce principe : modèle de Kilian (plaque/volume/plaque), modèle de Johnson (plaque/volume/plaque), modèle de Lezza A. Mignery (coque/ressort/coque), etc. (voir [Duigou-Kersulec, 2002] pour plus de détails).

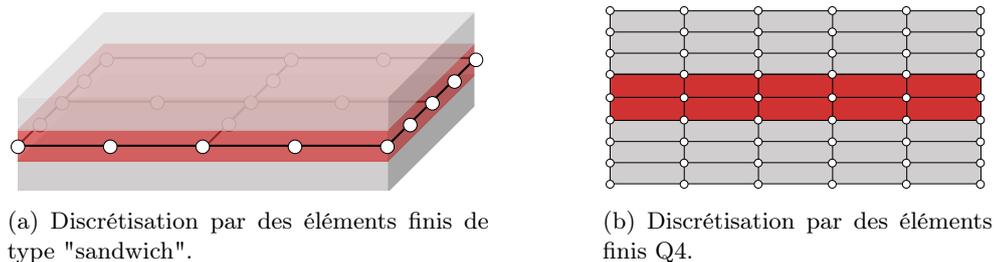


FIGURE 1.10 – Illustration des différentes possibilités pour discrétiser la structure sandwich.

Dans un premier temps, nous nous intéressons à un problème 2D [Bermúdez et Rodríguez, 1994]. La structure est donc discrétisée avec des éléments finis de type Q4, déjà disponibles dans le code EVE, auxquels nous assignerons un matériau élastique ou viscoélastique (cf. FIGURE 1.10(b)). Afin d'éviter la programmation d'un élément d'interface, le domaine fluide est également discrétisé avec des éléments finis Q4. Dans le cadre de l'étude de problèmes en interaction fluide-structure, nécessitant la prise en compte du couplage entre les deux domaines, un élément fini Q4 "2DFS" est implanté dans le code EVE. Basé sur l'élément Q4 solide, il permet

de modéliser à la fois un solide et un fluide acoustique en prenant en compte le couplage. Cet élément est détaillé en SECTION 1.5.

## 1.4 Choix d'une formulation pour les inconnues du problème

Le problème est entièrement discrétisé par la méthode des éléments finis [Zienkiewicz *et al.*, 2013][Bathe, 2006][Dhatt et Touzot, 1984]. Classiquement, la variable utilisée pour décrire le comportement du domaine solide est le déplacement. Pour le domaine fluide en revanche, il existe diverses possibilités [Morand et Ohayon, 1992] : pression, potentiel des vitesses, déplacement, pression et potentiel des déplacements... Les formulations les plus fréquentes sont rappelées afin de déterminer la formulation la plus adéquate pour notre problème.

### 1.4.1 Hypothèses et notations

**Hypothèses** Le problème étudié est une cavité acoustique, dans le domaine des basses fréquences. Le domaine fluide occupe tout l'espace à l'intérieur du solide, il n'y a donc pas de surface libre à prendre en compte. Le fluide est stagnant, compressible et non pesant. Les effets de la gravité ne sont donc pas pris en compte. De plus, on considère un fluide parfait, c'est-à-dire sans viscosité.

Le problème se place dans l'hypothèse des petites perturbations, seuls les petits mouvements autour de la position d'équilibre statique sont considérés.

Enfin, seul le régime permanent est étudié. Les inconnues sont donc cherchées sous forme harmonique.

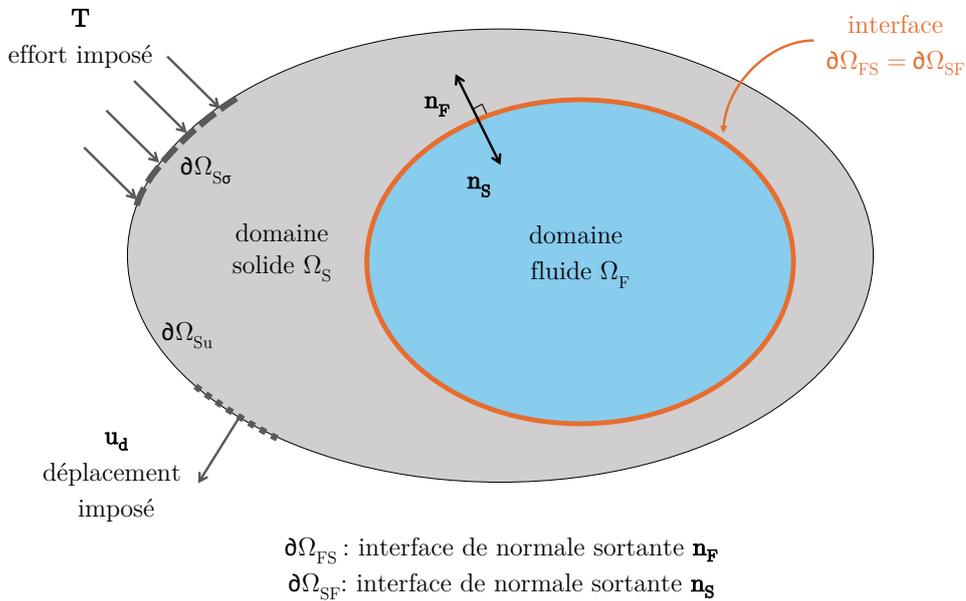


FIGURE 1.11 – Notations utilisées pour l'établissement des différentes formulations.

**Notations** Toutes les notations introduites sont résumées FIGURE 1.11. Les domaines solide et fluide sont notés respectivement  $\Omega_S$  et  $\Omega_F$ . L'interface fluide-structure de normale sortante  $\mathbf{n}_S$  est notée  $\partial\Omega_{SF}$ , tandis que l'interface de normale sortante  $\mathbf{n}_F$  est notée  $\partial\Omega_{FS}$ . Ces deux interfaces sont confondues, et les normales sont opposées ( $\mathbf{n}_F = -\mathbf{n}_S$ ). Un déplacement  $\mathbf{u}_d$  est imposé sur la frontière  $\partial\Omega_{Su}$ , et un effort  $\mathbf{T}$  est imposé sur la frontière  $\partial\Omega_{S\sigma}$ .

**Domaine solide** Le solide est décrit par son déplacement  $\mathbf{u}_S$ . Dans le cadre des petites perturbations, la loi de conservation de la quantité de mouvement mène à l'équation suivante :

$$\mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}_c) - \rho_S \ddot{\mathbf{u}}_S + \mathbf{f}_v = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega_S \quad (1.10)$$

où  $\boldsymbol{\sigma}_c$  est le tenseur des contraintes de Cauchy,  $\ddot{\mathbf{u}}$  le vecteur accélération du domaine solide,  $\mathbf{f}_v$  le vecteur des forces volumiques s'appliquant sur le solide et  $\rho_S$  sa masse volumique.

Si l'on considère un problème harmonique, les variables de temps et d'espace peuvent être séparées. Le déplacement est alors cherché sous la forme :  $\mathbf{u}_S(x, t) = \mathbf{u}(x)e^{i\omega t}$ , et l'équation d'équilibre du domaine solide devient :

$$\mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}_c) + \rho_S \omega^2 \mathbf{u} + \mathbf{f}_v = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega_S \quad (1.11)$$

La loi de comportement dépend du matériau considéré (élastique (1.7), ou viscoélastique (1.1)). Pour simplifier les démonstrations, on notera dans la suite  $\boldsymbol{\sigma}_c = \mathbb{H} \otimes \boldsymbol{\varepsilon}$ , avec  $\mathbb{H} = \mathbb{D}$  pour un matériau solide élastique et  $\mathbb{H} = \mathbb{D}(E(\omega))$  pour un matériau viscoélastique.

Deux types de conditions limites peuvent être appliqués au domaine solide :

- D'une part les conditions de Dirichlet appliquées au déplacement  $\mathbf{u}$ , qui correspondent à un mouvement imposé à la frontière du domaine solide  $\Omega_{Su}$  :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_d \quad \text{sur } \partial\Omega_{Su} \quad (1.12)$$

avec  $\partial\Omega_{Su} \cup \partial\Omega_{S\sigma} = \partial\Omega_S$  et  $\partial\Omega_{Su} \cap \partial\Omega_{S\sigma} = \emptyset$ . On aura éventuellement  $\mathbf{u}_d = \mathbf{0}$  sur une partie de  $\partial\Omega_{Su}$  pour éviter les mouvements de solide rigide.

- D'autre part les conditions de Neumann, traduisant les efforts appliqués sur les frontières du domaine solide :

$$\boldsymbol{\sigma}_c \mathbf{n}_S = \mathbf{T} \quad \text{sur } \partial\Omega_{S\sigma} \quad (1.13)$$

**Domaine fluide** Le domaine fluide est caractérisé par sa masse volumique  $\rho_F$  et la célérité des ondes dans le milieu, notée  $c_F$ . La pression est notée  $p$ , le déplacement  $\mathbf{u}_F$  et la vitesse  $\mathbf{v}_F$ . Pour un fluide visqueux newtonien, l'expression du tenseur des contraintes est :

$$\boldsymbol{\sigma}_F = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau} \quad (1.14)$$

où  $\boldsymbol{\tau}$  est le tenseur des contraintes visqueuses.

Dans le cas d'un fluide parfait, les effets visqueux sont négligés ( $\boldsymbol{\tau} = 0$ ), et le tenseur des contraintes est sphérique :

$$\boldsymbol{\sigma}_F = -p\mathbf{I} \quad (1.15)$$

Les équations d'équilibre et la loi de comportement du fluide sont précisées dans la suite, en fonction de la formulation retenue.

**Couplage** Les termes de couplage sont obtenus en exprimant les conditions de continuité à l'interface fluide-structure. Ces conditions sont de deux types :

- Une condition cinématique, exprimant la continuité des vitesses normales à l'interface.
- Une condition dynamique, traduisant la continuité des contraintes entre le domaine solide et le domaine fluide.

L'objectif est d'étudier le couplage fort entre les domaines solide et fluide. On cherche donc à résoudre simultanément les équations des deux domaines, en les regroupant dans un même système matriciel à travers ces conditions de couplage.

Nous présentons dans la suite quatre formulations, liées au choix des inconnues fluides, menant à quatre systèmes d'équilibre différents. L'inconnue pour le domaine solide est toujours le déplacement  $\mathbf{u}$ .

## 1.4.2 Formulation pression/déplacement

### 1.4.2.1 Équations d'équilibre local

Dans le cas d'une formulation en pression/déplacement, le fluide est décrit par sa pression  $p_F(x, \omega)$  en tout point du domaine  $\Omega_F$ .

Le comportement du domaine fluide est décrit par les équations de Navier-Stokes [Gibert, 1988][Bruneau, 1998][Candel, 2005]. En considérant un fluide parfait, et en se plaçant dans l'hypothèse des petites perturbations, la linéarisation des équations de Navier-Stokes conduit à l'équation de d'Alembert [Sigrist, 2011] [Anselmet et Mattei, 2015] [Morand et Ohayon, 1992] :

$$\Delta p_F - \frac{1}{c^2} \ddot{p}_F = 0 \quad (1.16)$$

où  $\Delta$  est l'opérateur laplacien.

Si l'on considère le régime permanent, le champ de pression peut être cherché sous la forme harmonique suivante :

$$p_F(x, t) = p(x) e^{i\omega t} \quad (1.17)$$

L'équation de Helmholtz, correspondant au modèle de "fluide acoustique" (fluide parfait compressible) est alors déduite de l'équation de d'Alembert :

$$\Delta p + \frac{\omega^2}{c^2} p = 0 \quad (1.18)$$

Pour la formulation en pression/déplacement, en tenant compte des hypothèses posées précédemment, les équations d'équilibre local du problème couplé sont donc :

$$\mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}_c) + \omega^2 \rho_S \mathbf{u} + \mathbf{f}_v = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega_S \quad (1.19a)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_c \mathbf{n}_S = \mathbf{T} \quad \text{sur } \partial\Omega_S \setminus \partial\Omega_{SF} \quad (1.19b)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_c \mathbf{n}_S = p \mathbf{n}_F \quad \text{sur } \partial\Omega_{SF} \quad (1.19c)$$

$$\Delta p + \frac{\omega^2}{c^2} p = 0 \quad \text{dans } \Omega_F \quad (1.19d)$$

$$\nabla(p) \cdot \mathbf{n}_F = \omega^2 \rho_F \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_F \quad \text{sur } \partial\Omega_{SF} \quad (1.19e)$$

Les équations (1.19a) et (1.19d) représentent respectivement l'équilibre du domaine solide et celui du domaine fluide. L'équation (1.19b) prend en compte les conditions limites appliquées sur le pourtour du domaine solide. Le couplage est introduit par deux équations : l'une traduisant la continuité des contraintes à l'interface (1.19c), l'autre la continuité de la vitesse normale à l'interface (1.19e).

## 1.4.2.2 Formulation variationnelle

**Dualisation de l'équation d'équilibre du domaine solide** Soient  $\mathcal{U}_{ad}$  l'espace des déplacements admissibles, et  $\mathcal{U}_0$  l'espace des déplacements admissibles à zéro définis comme suit :

$$\mathcal{U}_{ad} = \{\mathbf{u} \text{ tel que } \mathbf{u}|_{\partial\Omega_{Su}} = \mathbf{u}_d\} \quad (1.20)$$

$$\mathcal{U}_0 = \{\mathbf{u} \text{ tel que } \mathbf{u}|_{\partial\Omega_{Su}} = \mathbf{0}\} \quad (1.21)$$

La multiplication par une fonction test  $\delta\mathbf{u}$  et l'intégration sur le domaine  $\Omega_S$  de l'équation d'équilibre (1.19a) permettent d'écrire :

$$\int_{\Omega_S} \mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}_c) \cdot \delta\mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\Omega_S} \rho_S \omega^2 \mathbf{u} \cdot \delta\mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\Omega_S} \mathbf{f}_v \cdot \delta\mathbf{u} \, d\Omega = 0 \quad \forall \delta\mathbf{u} \in \mathcal{U}_0 \quad (1.22)$$

Après application du théorème de Green, il vient :

$$\int_{\partial\Omega_S} \boldsymbol{\sigma}_c \delta\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_S \, dS - \int_{\Omega_S} \boldsymbol{\sigma}_c : \boldsymbol{\varepsilon}(\delta\mathbf{u}) \, d\Omega + \int_{\Omega_S} \rho_S \omega^2 \mathbf{u} \cdot \delta\mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\Omega_S} \mathbf{f}_v \cdot \delta\mathbf{u} \, d\Omega = 0 \quad \forall \delta\mathbf{u} \in \mathcal{U}_0 \quad (1.23)$$

où  $\bullet : \bullet$  représente le produit tensoriel doublement contracté.

Sachant que  $\partial\Omega_S = \partial\Omega_{Su} + \partial\Omega_{S\sigma}$ , la prise en compte des conditions limites (1.19b) et (1.19c) donne la formulation variationnelle du problème solide :

$$\int_{\partial\Omega_{FS}} p \mathbf{n}_F \cdot \delta\mathbf{u} \, dS + \int_{\partial\Omega_{S\sigma} \setminus \partial\Omega_{FS}} \mathbf{T} \cdot \delta\mathbf{u} \, dS - \int_{\Omega_S} \boldsymbol{\sigma}_c : \boldsymbol{\varepsilon}(\delta\mathbf{u}) \, d\Omega + \int_{\Omega_S} \rho_S \omega^2 \mathbf{u} \cdot \delta\mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\Omega_S} \mathbf{f}_v \cdot \delta\mathbf{u} \, d\Omega = 0 \quad \forall \delta\mathbf{u} \in \mathcal{U}_0 \quad (1.24)$$

**Dualisation de l'équation d'équilibre du domaine fluide** Soit  $\mathcal{P}_{ad}$  l'espace des pressions admissibles tel que  $\mathcal{P}_{ad} = \{x \rightarrow p : \mathbb{R} \rightarrow \Omega_F\}$ . Après multiplication par une fonction test  $\delta p$  et intégration sur le domaine  $\Omega_F$  de l'équation d'équilibre (1.19d), il vient :

$$\int_{\Omega_F} \frac{\omega^2}{c_F^2} p \delta p \, d\Omega + \int_{\Omega_F} \Delta p \delta p \, d\Omega = 0 \quad \forall \delta p \in \mathcal{P}_{ad} \quad (1.25)$$

L'application de la formule de Green sur le deuxième terme de (1.25) fait apparaître l'intégrale de frontière :

$$\int_{\Omega_F} \frac{\omega^2}{c_F^2} p \delta p \, d\Omega - \int_{\Omega_F} \nabla(p) \cdot \nabla(\delta p) \, d\Omega + \int_{\partial\Omega_F} \nabla(p) \cdot \mathbf{n}_F \delta p \, dS = 0 \quad \forall \delta p \in \mathcal{P}_{ad} \quad (1.26)$$

Après prise en compte de la condition de couplage (1.19e) et multiplication par le facteur  $\frac{-1}{\rho_F}$ , la formulation variationnelle du problème fluide s'écrit :

$$-\omega^2 \int_{\Omega_F} \frac{1}{\rho_F c_F^2} p \delta p \, d\Omega + \int_{\Omega_F} \frac{1}{\rho_F} \nabla(p) \cdot \nabla(\delta p) \, d\Omega - \omega^2 \int_{\partial\Omega_F} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_F \delta p \, dS = 0 \quad \forall \delta p \in \mathcal{P}_{ad} \quad (1.27)$$

### 1.4.2.3 Méthode des éléments finis - Système matriciel couplé

**Discrétisation et interpolation** Les formulations intégrales (1.24) et (1.27) sont discrétisées par la méthode des éléments finis. Les champs de pression du fluide et de déplacement du solide sont interpolés comme suit :

$$p = \mathbf{N}_p \cdot \mathbf{p}_n \quad (1.28)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}_u \mathbf{u}_n \quad (1.29)$$

avec  $\mathbf{p}_n$  et  $\mathbf{u}_n$  les inconnues nodales élémentaires, et  $\mathbf{N}_p$  et  $\mathbf{N}_u$  les matrices des fonctions d'interpolation pour les degrés de liberté en pression et en déplacements.

Il vient alors la forme discrétisée suivante pour le problème solide (1.30) :

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^n \delta \mathbf{u}_n^t \int_{\Omega_{Se}} \mathbf{B}^t \mathbf{H} \mathbf{B} d\Omega \mathbf{u}_n - \omega^2 \sum_{e=1}^n \delta \mathbf{u}_n^t \int_{\Omega_{Se}} \rho_S \mathbf{N}_u^t \mathbf{N}_u d\Omega \mathbf{u}_n - \sum_{e=1}^n \delta \mathbf{u}_n^t \int_{\partial\Omega_{SF}} \mathbf{N}_u^t \mathbf{N}_p \cdot \mathbf{n}_F dS \mathbf{p}_n \\ = \sum_{e=1}^n \delta \mathbf{u}_n^t \int_{\partial\Omega_{S\sigma e}} \mathbf{N}_u^t \mathbf{T} dS + \sum_{e=1}^n \delta \mathbf{u}_n^t \int_{\Omega_{Se}} \mathbf{N}_u^t \mathbf{f}_v d\Omega \quad \forall \delta \mathbf{u}_n \in \mathcal{U}_0 \end{aligned} \quad (1.30)$$

où  $n$  est le nombre d'éléments finis et  $\mathbf{B}$  est la matrice cinématique, établie pour un système de coordonnées cartésiennes et un problème 2D bidimensionnel et telle que  $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \mathbf{u}_n$ . La matrice  $\mathbf{H}$  est la matrice d'élasticité ou de viscoélasticité. Le symbole  $\sum_{e=1}^n$  représente la procédure d'assemblage classique de la méthode des éléments finis.

De même, pour le problème fluide (1.31), on a :

$$\begin{aligned} -\omega^2 \sum_{n=1}^e \delta \mathbf{p}_n^t \int_{\Omega_{Fe}} \frac{1}{\rho_F C_F^2} \mathbf{N}_p^t \cdot \mathbf{N}_p d\Omega \mathbf{p}_n + \sum_{n=1}^e \delta \mathbf{p}_n^t \int_{\Omega_{Fe}} \frac{1}{\rho_F} \nabla \mathbf{N}_p^t \cdot \nabla \mathbf{N}_p d\Omega \mathbf{p}_n \\ = \omega^2 \sum_{n=1}^e \delta \mathbf{p}_n^t \int_{\partial\Omega_{Fe}} \mathbf{N}_p^t \mathbf{N}_u \mathbf{n}_F dS \mathbf{u}_n \quad \forall \delta P \in \mathcal{P}_{ad} \end{aligned} \quad (1.31)$$

**Identification des matrices élémentaires** Les matrices et vecteurs élémentaires suivants sont alors identifiés à partir des équations discrétisées (1.30) et (1.31) :

- Matrice de rigidité élémentaire du solide :

$$\mathbf{K}_S^e = \int_{\Omega_{Se}} \mathbf{B}^t \mathbf{H} \mathbf{B} d\Omega \quad (1.32)$$

- Matrice de masse élémentaire du solide :

$$\mathbf{M}_S^e = \int_{\Omega_{Se}} \rho_S \mathbf{N}_u^t \mathbf{N}_u d\Omega \quad (1.33)$$

- Vecteur force surfacique élémentaire pour le solide :

$$\mathbf{F}_{S\text{surf}}^e = \int_{\partial\Omega_{S\sigma e}} \mathbf{N}_u^t \mathbf{T} dS \quad (1.34)$$

- Vecteur force volumique élémentaire pour le solide :

$$\mathbf{F}_{\text{Svol}}^e = \int_{\Omega_{\text{Se}}} \mathbf{N}_{\mathbf{u}}^t \mathbf{f}_{\mathbf{v}} d\Omega \quad (1.35)$$

- Matrice "rigidité" élémentaire pour le fluide :

$$\mathbf{K}_{\mathbf{F}}^e = \int_{\Omega_{\text{Fe}}} \frac{1}{\rho_F} \nabla \mathbf{N}_{\mathbf{p}}^t \cdot \nabla \mathbf{N}_{\mathbf{p}} d\Omega \quad (1.36)$$

- Matrice "masse"<sup>1</sup> élémentaire pour le fluide :

$$\mathbf{M}_{\mathbf{F}}^e = \int_{\Omega_{\text{Fe}}} \frac{1}{\rho_F c_F^2} \mathbf{N}_{\mathbf{p}}^t \cdot \mathbf{N}_{\mathbf{p}} d\Omega \quad (1.37)$$

- Matrice de couplage élémentaire :

$$\mathbf{C}^e = \int_{\partial\Omega_{\text{SFe}}} \mathbf{N}_{\mathbf{u}}^t \mathbf{n}_{\text{S}} \cdot \mathbf{N}_{\mathbf{p}} dS = \int_{\partial\Omega_{\text{FSe}}} \mathbf{N}_{\mathbf{u}}^t \mathbf{n}_{\text{F}} \cdot \mathbf{N}_{\mathbf{p}} dS \quad (1.38)$$

**Système matriciel** Après assemblage de tous les éléments, il vient les équations (1.39) pour le solide et (1.40) pour le fluide :

$$\delta \mathbf{U}_{\mathbf{n}}^t \cdot \mathbf{K}_{\text{S}} \cdot \mathbf{U}_{\mathbf{n}} - \omega^2 \delta \mathbf{U}_{\mathbf{n}}^t \cdot \mathbf{M}_{\text{S}} \cdot \mathbf{U}_{\mathbf{n}} - \delta \mathbf{U}_{\mathbf{n}}^t \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{P}_{\mathbf{n}} = \delta \mathbf{U}_{\mathbf{n}}^t \cdot \mathbf{F}_{\text{Ssurf}} + \delta \mathbf{U}_{\mathbf{n}}^t \cdot \mathbf{F}_{\text{Svol}} \quad \forall \delta \mathbf{U}_{\mathbf{n}} \in \mathcal{U}_0 \quad (1.39)$$

$$- \omega^2 \delta \mathbf{P}_{\mathbf{n}}^t \cdot \mathbf{M}_{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{P}_{\mathbf{n}} + \delta \mathbf{P}_{\mathbf{n}}^t \cdot \mathbf{K}_{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{P}_{\mathbf{n}} = \omega^2 \delta \mathbf{P}_{\mathbf{n}}^t \cdot \mathbf{C}^t \cdot \mathbf{U}_{\mathbf{n}} \quad \forall \delta \mathbf{P}_{\mathbf{n}} \in \mathcal{P}_{ad} \quad (1.40)$$

où  $\mathbf{U}_{\mathbf{n}}$  et  $\mathbf{P}_{\mathbf{n}}$  sont les inconnues nodales du système en déplacement et en pression.

L'équation (1.39) est vérifiée  $\forall \delta \mathbf{U}_{\mathbf{n}} \in \mathcal{U}_0$  d'où :

$$\mathbf{K}_{\text{S}} \mathbf{U}_{\mathbf{n}} - \omega^2 \mathbf{M}_{\text{S}} \mathbf{U}_{\mathbf{n}} - \mathbf{C} \mathbf{U}_{\mathbf{n}} = \mathbf{F}_{\text{Ssurf}} + \mathbf{F}_{\text{Svol}} \quad (1.41)$$

L'équation (1.40) est vérifiée  $\forall \delta \mathbf{P}_{\mathbf{n}} \in \mathcal{P}_{ad}$  d'où :

$$- \omega^2 \mathbf{M}_{\mathbf{F}} \mathbf{P}_{\mathbf{n}} + \mathbf{K}_{\mathbf{F}} \mathbf{P}_{\mathbf{n}} - \omega^2 \mathbf{C}^t \mathbf{U}_{\mathbf{n}} = 0 \quad (1.42)$$

Les équations d'équilibre (1.41) et (1.42) sont alors réunies dans un unique système matriciel décrivant le problème de vibroacoustique en formulation pression/déplacement :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\text{S}} & -\mathbf{C} \\ 0 & \mathbf{K}_{\mathbf{F}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_{\mathbf{n}} \\ \mathbf{P}_{\mathbf{n}} \end{Bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{\text{S}} & 0 \\ \mathbf{C}^t & \mathbf{M}_{\mathbf{F}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_{\mathbf{n}} \\ \mathbf{P}_{\mathbf{n}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_{\text{Ssurf}} + \mathbf{F}_{\text{Svol}} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1.43)$$

#### 1.4.2.4 Avantages et inconvénients

Largement utilisée par la communauté des vibroacousticiens [Sigrist et Garreau, 2005] [Besset, 2006] [Hetmaniuk *et al.*, 2012] [Larbi *et al.*, 2016b] [Pirk *et al.*, 2017], cette formulation présente de nombreux avantages. Premièrement, elle introduit un seul degré de liberté par nœud fluide. Sachant que les problèmes de vibroacoustique comportent généralement plus de nœuds fluides que de nœuds solides, cela contribue à limiter le nombre d'inconnues à traiter pour la résolution du problème couplé.

1. A noter que le terme de "matrice de masse" pour le fluide est un abus de langage. En effet, ce terme n'a rien d'une masse car il est défini suivant l'intégrale de la pression. Il en est de même pour la matrice de "rigidité". Ces termes sont utilisés par analogie avec les matrices définies pour le domaine solide [Besset, 2006].

Un deuxième avantage est l'interprétation directe de la variable fluide. Ainsi, la définition de la condition de couplage est immédiate et simple à discrétiser par la méthode des éléments finis.

Enfin, cette formulation n'introduit ni modes non physiques [Davidsson, 2004], ni "bruit numérique" [Gibert, 1988].

Le principal inconvénient de cette formulation réside dans le caractère non symétrique du système matriciel (1.43). Ceci implique l'utilisation d'algorithmes spécifiques, pouvant manipuler des matrices non symétriques. À noter que le système matriciel peut être rendu symétrique par multiplication de (1.43) par des matrices appropriées ou par changement de variable [Felippa, 1985] [Felippa et Ohayon, 1990]. Par ailleurs, ce problème est mal posé dans le cas de la pulsation nulle, puisque la pression  $p$  est alors indéterminée. Cette indétermination s'accompagne de l'existence de la valeur propre nulle, parasite, correspondant à la solution ( $\mathbf{u} = \mathbf{0}, p = \text{cte}$ ). La valeur physique de la pression peut cependant être calculée (voir [Morand et Ohayon, 1992] pour les expressions analytiques).

### 1.4.3 Formulation déplacement/déplacement

#### 1.4.3.1 Équations d'équilibre local

Les champs de pression et de déplacement du fluide sont reliés par la relation suivante [Morand et Ohayon, 1992] :

$$p = -\rho_F c^2 \operatorname{div}(\mathbf{u}_F) \quad (1.44)$$

Un fluide acoustique peut être considéré comme un milieu élastique particulier, dans lequel il n'y a pas de contrainte de cisaillement. L'équation d'équilibre du fluide formulée en déplacement est alors obtenue à partir de l'équation d'équilibre "classique" de la mécanique des milieux continus, en considérant que le fluide est non pesant (cf. (1.11) pour le solide) :

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}_F) + \rho_F \omega^2 \mathbf{u}_F = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega_F \quad (1.45)$$

À noter qu'il n'y a pas de forces volumiques appliquées au domaine fluide (notamment pas de force de gravité). En remplaçant  $\boldsymbol{\sigma}_c$  par son expression (1.15), puis  $p$  par sa définition (1.44), il vient :

$$\rho_F c^2 \operatorname{div}(\operatorname{div}(\mathbf{u}_F) \mathbf{I}) + \rho_F \omega^2 \mathbf{u}_F = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega_F \quad (1.46)$$

La condition de continuité des contraintes est obtenue en remplaçant la pression  $p$  par son expression (1.44) dans la condition limite de la formulation pression/déplacement (1.19c) :

$$\boldsymbol{\sigma}_c \mathbf{n}_F = \rho_F c^2 \operatorname{div}(\mathbf{u}_F) \mathbf{n}_F \quad (1.47)$$

La condition de continuité des déplacements à l'interface fluide-structure est immédiate :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_F = \mathbf{u}_F \cdot \mathbf{n}_F \quad (1.48)$$

Finalement, le problème aux limites en formulation déplacement/déplacement s'écrit :

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}_c) + \omega^2 \rho_S \mathbf{u} + \mathbf{f}_v = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega_S \quad (1.49a)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_c \mathbf{n}_S = \mathbf{T} \quad \text{sur } \partial\Omega_S \setminus \partial\Omega_{SF} \quad (1.49b)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_c \mathbf{n}_S = \rho_F c^2 \operatorname{div}(\mathbf{u}_F) \mathbf{n}_F \quad \text{sur } \partial\Omega_{SF} \quad (1.49c)$$

$$\rho_F c^2 \operatorname{div}(\operatorname{div}(\mathbf{u}_F) \mathbf{I}) + \rho_F \omega^2 \mathbf{u}_F = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega_F \quad (1.49d)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_F = \mathbf{u}_F \cdot \mathbf{n}_F \quad \text{sur } \partial\Omega_{SF} \quad (1.49e)$$

Les équations (1.49a) et (1.49d) traduisent respectivement l'équilibre du domaine solide et du domaine fluide. Le couplage à l'interface fluide-structure est exprimé par (1.49c) (continuité des contraintes) et (1.49e) (continuité des vitesses normales). A noter que les relations (1.49a) et (1.49b) sont communes avec la formulation en pression/déplacement (SECTION 1.4.2).

### 1.4.3.2 Formulation variationnelle

Soit  $\mathcal{U}_{\text{ad}}$  l'espace des déplacements admissibles défini par :

$$\mathcal{U}_{\text{ad}} = \{ \mathbf{u}, \mathbf{u}_{\mathbf{F}} \text{ réguliers, } \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{F}} = \mathbf{u}_{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{F}} \text{ sur } \partial\Omega_{SF}, \mathbf{rot}(\mathbf{u}_{\mathbf{F}}) = \mathbf{0} \text{ dans } \Omega_{\mathbf{F}}, \\ \mathbf{u}_{\mathbf{F}} = \mathbf{0} \text{ sur } \Omega_S \setminus \partial\Omega_{SF}, \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ sur } \Omega_{\mathbf{F}} \} \quad (1.50)$$

Soit  $\delta\mathbf{u}_{\mathbf{m}}$  le vecteur des déplacements virtuels mixte tels que :

$$\delta\mathbf{u}_{\mathbf{m}}^t = \{ \delta\mathbf{u} \quad \delta\mathbf{u}_{\mathbf{F}} \}^t \quad (1.51)$$

**Dualisation de l'équation d'équilibre du domaine solide** L'équation d'équilibre du domaine solide (1.49a) étant identique à celle de la formulation en pression/déplacement (1.19a), la formulation variationnelle est définie par (1.23). La prise en compte de la condition limite (1.49b) et de la condition de couplage (1.49c) donne alors :

$$\int_{\Omega_S} \boldsymbol{\sigma}_c : \boldsymbol{\varepsilon}(\delta\mathbf{u}_{\mathbf{m}}) d\Omega - \int_{\Omega_S} \rho_S \omega^2 \mathbf{u} \cdot \delta\mathbf{u}_{\mathbf{m}} d\Omega \\ = \int_{\partial\Omega_{S\sigma}} \mathbf{T} \cdot \delta\mathbf{u}_{\mathbf{m}} dS - \int_{\partial\Omega_{S\sigma}} \rho_F c^2 \text{div}(\mathbf{u}_{\mathbf{F}}) \mathbf{n}_{\mathbf{F}} \cdot \delta\mathbf{u}_{\mathbf{m}} dS + \int_{\Omega_S} \mathbf{f}_v \cdot \delta\mathbf{u}_{\mathbf{m}} d\Omega \quad \forall \delta\mathbf{u}_{\mathbf{m}} \in \mathcal{U}_{\text{ad}} \quad (1.52)$$

**Dualisation de l'équation d'équilibre du domaine fluide** Après multiplication par la fonction test  $\delta\mathbf{u}_{\mathbf{m}}$  et intégration sur le domaine fluide  $\Omega_{\mathbf{F}}$  de l'équation d'équilibre du fluide (1.49d), on obtient :

$$\int_{\Omega_{\mathbf{F}}} \rho_F c^2 \text{div}(\text{div}(\mathbf{u}_{\mathbf{F}})) \cdot \delta\mathbf{u}_{\mathbf{m}} d\Omega + \int_{\Omega_{\mathbf{F}}} \rho_F \omega^2 \mathbf{u}_{\mathbf{F}} \cdot \delta\mathbf{u}_{\mathbf{m}} d\Omega = 0 \quad \forall \delta\mathbf{u}_{\mathbf{m}} \in \mathcal{U}_{\text{ad}} \quad (1.53)$$

L'application du théorème de Green sur le premier terme de (1.53) fait apparaître l'intégrale de frontière. En considérant la condition de couplage (1.49e), il vient :

$$\int_{\partial\Omega_{SF}} \rho_F c^2 \text{div}(\mathbf{u}_{\mathbf{F}}) \mathbf{n}_{\mathbf{F}} \cdot \delta\mathbf{u}_{\mathbf{m}} dS - \int_{\Omega_{\mathbf{F}}} \rho_F c^2 \text{div}(\mathbf{u}_{\mathbf{F}}) \text{div}(\delta\mathbf{u}_{\mathbf{m}}) d\Omega \\ + \int_{\Omega_{\mathbf{F}}} \rho_F \omega^2 \mathbf{u}_{\mathbf{F}} \cdot \delta\mathbf{u}_{\mathbf{m}} d\Omega = 0 \quad \forall \delta\mathbf{u}_{\mathbf{m}} \in \mathcal{U}_{\text{ad}} \quad (1.54)$$

**Formulation variationnelle du système couplé** Le terme  $\int_{\partial\Omega_{SF}} \rho_F c^2 \text{div}(\mathbf{u}_{\mathbf{F}}) \mathbf{n}_{\mathbf{F}} \cdot \delta\mathbf{u}_{\mathbf{m}} dS$  est commun aux formulations variationnelles du solide (1.52) et du fluide (1.54). En soustrayant (1.54) à (1.52), la formulation variationnelle en déplacement/déplacement se simplifie en :

$$\int_{\Omega_S} \boldsymbol{\sigma}_c : \boldsymbol{\varepsilon}(\delta\mathbf{u}_{\mathbf{m}}) d\Omega - \int_{\Omega_S} \rho_S \omega^2 \mathbf{u} \cdot \delta\mathbf{u}_{\mathbf{m}} d\Omega + \int_{\Omega_{\mathbf{F}}} \rho_F c^2 \text{div}(\mathbf{u}_{\mathbf{F}}) \text{div}(\delta\mathbf{u}_{\mathbf{m}}) d\Omega \\ - \int_{\Omega_{\mathbf{F}}} \rho_F \omega^2 \mathbf{u}_{\mathbf{F}} \cdot \delta\mathbf{u}_{\mathbf{m}} d\Omega = \int_{\partial\Omega_{S\sigma}} \mathbf{T} \cdot \delta\mathbf{u}_{\mathbf{m}} dS + \int_{\Omega_S} \mathbf{f}_v \cdot \mathbf{u} d\Omega \quad \forall \delta\mathbf{u}_{\mathbf{m}} \in \mathcal{U}_{\text{ad}} \quad (1.55)$$

### 1.4.3.3 Méthode des éléments finis - Système matriciel couplé

**Discrétisation et interpolation** La formulation intégrale (1.55) est discrétisée par la méthode des éléments finis. Les champs de déplacement du solide et du fluide sont interpolés comme suit :

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}_u \mathbf{u}_n \quad (1.56)$$

$$\mathbf{u}_F = \mathbf{N}_u \mathbf{u}_{Fn} \quad (1.57)$$

$$\delta \mathbf{u}_m = \mathbf{N}_u \delta \mathbf{u}_{mn} \quad (1.58)$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned} & \sum_{e=1}^n \delta \mathbf{u}_{mn}^t \int_{\Omega_{Se}} \mathbf{B}^t \mathbf{H} \mathbf{B} d\Omega \mathbf{u}_n - \omega^2 \sum_{e=1}^n \delta \mathbf{u}_{mn}^t \int_{\Omega_{Se}} \rho_S \mathbf{N}_u^t \mathbf{N}_u d\Omega \mathbf{u}_n \\ + & \sum_{e=1}^n \delta \mathbf{u}_{mn}^t \int_{\Omega_{Fe}} \rho_F c^2 \mathbf{div}(\mathbf{N}_u)^t \cdot \mathbf{div}(\mathbf{N}_u) d\Omega \mathbf{u}_{Fn} - \omega^2 \sum_{e=1}^n \delta \mathbf{u}_{mn}^t \int_{\Omega_{Fe}} \rho_F \mathbf{N}_u^t \mathbf{N}_u d\Omega \mathbf{u}_{Fn} \quad (1.59) \\ = & \sum_{e=1}^n \delta \mathbf{u}_n^t \int_{\partial \Omega_{S\sigma e}} \mathbf{N}_u^t \mathbf{T} dS + \sum_{e=1}^n \delta \mathbf{u}_n^t \int_{\Omega_{Se}} \mathbf{N}_u^t \mathbf{f}_v d\Omega \quad \forall \delta \mathbf{u}_{Fn}, \delta \mathbf{u} \in \mathcal{U}_{ad} \end{aligned}$$

**Identification des matrices élémentaires** Les matrices élémentaires suivantes sont identifiées dans (1.59) :

- Matrice de raideur élémentaire pour le solide :

$$\mathbf{K}_S^e = \int_{\Omega_{Se}} \mathbf{B}^t \mathbf{H} \mathbf{B} d\Omega \quad (1.60)$$

- Matrice de masse élémentaire pour le solide :

$$\mathbf{M}_S^e = \int_{\Omega_{Se}} \rho_S \mathbf{N}_u^t \mathbf{N}_u d\Omega \quad (1.61)$$

- Vecteur force surfacique élémentaire pour le solide :

$$\mathbf{F}_{S\text{surf}}^e = \int_{\partial \Omega_{S\sigma e}} \mathbf{N}_u^t \mathbf{T} dS \quad (1.62)$$

- Vecteur force volumique élémentaire pour le solide :

$$\mathbf{F}_{S\text{vol}}^e = \int_{\Omega_{Se}} \mathbf{N}_u^t \mathbf{f}_v d\Omega \quad (1.63)$$

- Matrice de raideur élémentaire pour le fluide :

$$\mathbf{K}_F^e = \int_{\Omega_{Fe}} \rho_F c^2 \mathbf{div}(\mathbf{N}_u)^t \cdot \mathbf{div}(\mathbf{N}_u) d\Omega \quad (1.64)$$

- Matrice de masse élémentaire pour le fluide :

$$\mathbf{M}_F^e = \int_{\Omega_{Fe}} \rho_F \mathbf{N}_u^t \mathbf{N}_u d\Omega \quad (1.65)$$

**Système matriciel** Après assemblage de tous les éléments, et en considérant que l'équation (1.59) est vérifiée pour tout  $\delta \mathbf{u}_{mn}$  appartenant à  $\mathcal{U}_{ad}$ , le système matriciel traduisant l'équilibre du système couplé en formulation déplacement/déplacement est obtenu :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_S & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_n \\ \mathbf{U}_{Fn} \end{Bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_S & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_n \\ \mathbf{U}_{Fn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_{Ssurf} + \mathbf{F}_{Svol} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1.66)$$

A noter que, d'après les équations (1.56) et (1.57), les domaines solides et fluides sont discrétisés par les mêmes éléments finis. La condition de couplage (1.49e) est donc automatiquement prise en compte car le maillage est commun aux deux domaines.

#### 1.4.3.4 Avantages et inconvénients

L'avantage majeur de la formulation en déplacement/déplacement est l'homogénéité entre les variables solides et fluides. Ainsi, les domaines fluides et solides peuvent être discrétisés avec le même type d'éléments finis, en considérant le fluide comme un solide ayant une rigidité en cisaillement nulle. Par ailleurs, les matrices du système couplé sont symétriques, ce qui simplifie la résolution numérique.

Cette formulation présente néanmoins de nombreux inconvénients. La principale difficulté concerne l'apparition de modes non physiques. En effet, le fluide n'ayant aucune rigidité en cisaillement, des modes de rotation purs sont introduits [Davidsson, 2004], ce qui perturbe l'analyse modale. Il faut alors ajouter la condition d'irrotationalité de l'écoulement. En pratique, il s'avère compliqué de discrétiser l'opérateur rotationnel. Divers travaux ont été menés afin de supprimer ces problèmes, notamment pour associer à ces modes des pulsations propres nulles [Chen et Taylor, 1990] [Bathe, 2006]. Il existe aussi un certain nombre de solutions singulières, sans intérêt du point de vue de l'interaction fluide-structure, qui peuvent engendrer un "bruit numérique" problématique dans les algorithmes de résolution [Gibert, 1988].

Enfin, le nombre de degrés de liberté du domaine fluide est plus important que celui engendré par la formulation variationnelle en pression présentée précédemment (deux degrés de liberté au lieu d'un seul pour les problèmes en deux dimensions) [Sigrist et Garreau, 2005].

### 1.4.4 Formulation pression, potentiel des déplacements/déplacement

La formulation en pression et potentiel des déplacements/déplacement avec couplage de masse est présentée dans ce paragraphe. Il existe également une seconde variante, avec couplage de raideur (voir [Morand et Ohayon, 1992] pour plus de précisions).

#### 1.4.4.1 Équations d'équilibre local

La pression est reliée au potentiel des déplacements par la relation suivante [Morand et Ohayon, 1992][Gibert, 1988] :

$$p = \rho_F \omega^2 \phi \quad (1.67)$$

En introduisant la relation (1.67) dans les équations d'équilibre (1.19c), (1.19d) et (1.19e), on écrit les équations d'équilibre local en formulation pression et potentiel des déplacements/dé-

placements :

$$\mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}_c) + \omega^2 \rho_S \mathbf{u} + \mathbf{f}_v = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega_S \quad (1.68a)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_c \mathbf{n}_S = \mathbf{T} \quad \text{sur } \partial\Omega_S \setminus \partial\Omega_{SF} \quad (1.68b)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_c \mathbf{n}_S = \rho_F \omega^2 \phi \mathbf{n}_F \quad \text{sur } \partial\Omega_{SF} \quad (1.68c)$$

$$\rho_F \Delta \phi + \frac{1}{c^2} p = 0 \quad \text{dans } \Omega_F \quad (1.68d)$$

$$\nabla \phi \cdot \mathbf{n}_F = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_F \quad \text{sur } \partial\Omega_{SF} \quad (1.68e)$$

$$\frac{1}{\rho_F c^2} p - \frac{\omega^2}{c^2} \phi = 0 \quad (1.68f)$$

L'équilibre des domaines solide et fluide est défini par les relations (1.68a) et (1.68d). La définition de la pression en fonction du potentiel des déplacements (1.68f) constitue une deuxième équation d'équilibre pour le domaine fluide. Les conditions de couplage sont définies par les équations (1.68c) et (1.68e). A noter que si l'on remplace la pression par son expression (1.68f) dans la totalité de la relation (1.68d), on retrouve l'équation d'Helmoltz (1.18), exprimée en potentiel des déplacements.

#### 1.4.4.2 Formulation variationnelle

La formulation variationnelle en pression et potentiel des déplacements/déplacement s'écrit à partir des équations d'équilibre des domaines solide et fluide (1.68a) (1.68d) (1.68f).

**Dualisation de l'équation d'équilibre du domaine solide** La multiplication par la fonction test  $\boldsymbol{\delta u}$  et l'intégration sur le domaine solide de l'équation (1.68a) donnent la formulation variationnelle suivante :

$$\int_{\Omega_S} \boldsymbol{\sigma}_c : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\delta u}) \, d\Omega - \int_{\Omega_S} \rho_S \omega^2 \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\delta u} \, d\Omega = \int_{\partial\Omega_{S\sigma}} \boldsymbol{\sigma}_c \mathbf{n}_S \cdot \boldsymbol{\delta u} \, dS + \int_{\Omega_S} \mathbf{f}_v \cdot \boldsymbol{\delta u} \, d\Omega \quad \forall \boldsymbol{\delta u} \in \mathcal{U}_0 \quad (1.69)$$

Avec la prise en compte de la condition limite (1.68b) et de la condition de couplage (1.68c), il vient :

$$\int_{\Omega_S} \boldsymbol{\sigma}_c : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\delta u}) \, d\Omega - \int_{\Omega_S} \rho_S \omega^2 \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\delta u} \, d\Omega = \int_{\partial\Omega_{S\sigma} \setminus \partial\Omega_{SF}} \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\delta u} \, dS + \int_{\partial\Omega_{SF}} \rho_F \omega^2 \phi \mathbf{n}_F \cdot \boldsymbol{\delta u} \, dS + \int_{\Omega_S} \mathbf{f}_v \cdot \boldsymbol{\delta u} \, d\Omega \quad \forall \boldsymbol{\delta u} \in \mathcal{U}_0 \quad (1.70)$$

**Dualisation des équations d'équilibre du domaine fluide** La multiplication par une fonction test  $\delta\phi$  (respectivement  $\delta p$ ) et l'intégration sur le domaine fluide des équations d'équilibre du fluide (1.68d) (respectivement (1.68f)) nous donnent :

$$\int_{\Omega_F} \rho_F \Delta \phi \, \delta\phi \, d\Omega + \int_{\Omega_F} \frac{1}{c^2} p \, \delta\phi \, d\Omega = 0 \quad \forall \delta\phi \in \phi_0 \quad (1.71)$$

où  $\phi_0$  est l'espace des fonctions régulières  $\phi$  définies sur  $\Omega_F$ .

La formule de Green est appliquée au premier terme de (1.71). Après prise en compte de la condition de couplage (1.68e), il vient :

$$- \int_{\Omega_F} \rho_F \nabla \phi \nabla \delta\phi \, d\Omega + \int_{\partial\Omega_{SF}} \rho_F \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_F \delta\phi \, dS + \int_{\Omega_F} \frac{1}{c^2} p \, \delta\phi \, d\Omega = 0 \quad \forall \delta\phi \in \phi_0 \quad (1.72)$$

La multiplication par une fonction test  $\delta p$  et l'intégration sur le domaine fluide de l'équation d'équilibre du fluide (1.68f) donnent la troisième équation intégrale du problème en formulation pression et potentiel des déplacements/déplacement :

$$\int_{\Omega_F} \frac{1}{\rho_F c^2} p \delta p \, d\Omega - \int_{\Omega_F} \frac{\omega^2}{c^2} \phi \delta p \, d\Omega = 0 \quad \forall \delta p \in \mathcal{P}_0 \quad (1.73)$$

où  $\mathcal{P}_0$  est l'espace des fonctions régulières  $p$  définies dans  $\Omega_F$ .

#### 1.4.4.3 Méthode des éléments finis - Système matriciel couplé

**Discrétisation - Interpolation** Les formulations intégrales (1.71), (1.72) et (1.73) sont discrétisées par la méthode des éléments finis. Les champs de pression et de déplacement, ainsi que le potentiel de déplacement sont interpolés de la façon suivante :

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}_u \mathbf{u}_n \quad (1.74)$$

$$p = \mathbf{N}_f \cdot \mathbf{p}_n \quad (1.75)$$

$$\phi = \mathbf{N}_f \cdot \phi_n \quad (1.76)$$

Il vient alors les trois équations suivantes :

$$\begin{aligned} & \sum_{e=1}^n \delta \mathbf{u}_n^t \int_{\Omega_{Se}} \mathbf{B}^t \mathbf{H} \mathbf{B} \, d\Omega \, \mathbf{u}_n - \omega^2 \sum_{e=1}^n \delta \mathbf{u}_n^t \int_{\Omega_{Se}} \rho_S \mathbf{N}_u^t \mathbf{N}_u \, d\Omega \, \mathbf{u}_n = \\ & \omega^2 \sum_{e=1}^n \delta \mathbf{u}_n^t \int_{\partial\Omega_{SF}} \rho_F \mathbf{N}_u^t \mathbf{n}_F \cdot \mathbf{N}_f \delta \phi_n \, dS + \sum_{e=1}^n \delta \mathbf{u}_n^t \int_{\partial\Omega_{S\sigma e} \setminus \partial\Omega_{SF e}} \mathbf{N}_u^t \mathbf{T} \, dS + \sum_{e=1}^n \delta \mathbf{u}_n^t \int_{\Omega_{Se}} \mathbf{f}_v \, d\Omega \quad \forall \delta \mathbf{u} \in \mathcal{U}_0 \end{aligned} \quad (1.77)$$

$$\begin{aligned} & - \sum_{e=1}^n \delta \phi_n^t \int_{\Omega_{Fe}} \rho_F \nabla \mathbf{N}_f^t \nabla \mathbf{N}_f \, d\Omega \, \phi_n + \sum_{e=1}^n \delta \phi_n^t \int_{\partial\Omega_{SF}} \rho_F \mathbf{N}_f^t \cdot \mathbf{n}_F \mathbf{N}_u \, dS \, \mathbf{u}_n \\ & + \sum_{e=1}^n \delta \phi_n^t \int_{\Omega_F} \frac{1}{c^2} \mathbf{N}_f^t \cdot \mathbf{N}_f \, d\Omega \, \mathbf{p}_n = 0 \quad \forall \delta \phi_n \in \phi_0 \end{aligned} \quad (1.78)$$

$$\sum_{e=1}^n \delta \mathbf{p}_n^t \int_{\Omega_F} \frac{1}{\rho_F c^2} \mathbf{N}_f^t \cdot \mathbf{N}_f \, d\Omega \, \mathbf{p}_n - \omega^2 \sum_{e=1}^n \delta \mathbf{p}_n^t \int_{\Omega_F} \frac{1}{c^2} \mathbf{N}_f^t \cdot \mathbf{N}_f \, d\Omega \, \phi_n = 0 \quad \forall \delta \mathbf{p}_n \in \mathcal{P}_0 \quad (1.79)$$

**Identification des matrices élémentaires** Les matrices élémentaires suivantes sont identifiées dans les équations (1.77), (1.78) et (1.79) :

- Matrice de raideur élémentaire pour le solide :

$$\mathbf{K}_S^e = \int_{\Omega_{Se}} \mathbf{B}^t \mathbf{H} \mathbf{B} \, d\Omega \quad (1.80)$$

- Matrice de masse élémentaire pour le solide :

$$\mathbf{M}_S^e = \int_{\Omega_{Se}} \rho_S \mathbf{N}_u^t \mathbf{N}_u \, d\Omega \quad (1.81)$$

- Vecteur force surfacique élémentaire pour le solide :

$$\mathbf{F}_{S\text{surf}}^e = \int_{\partial\Omega_{S\sigma e}} \mathbf{N}_u^t \mathbf{T} \, dS \quad (1.82)$$

- Vecteur force volumique élémentaire pour le solide :

$$\mathbf{F}_{\text{Svol}}^e = \int_{\Omega_{Se}} \mathbf{N}_u^t \mathbf{f}_v d\Omega \quad (1.83)$$

- Matrice de "raideur" élémentaire pour le fluide :

$$\mathbf{K}_F^e = \int_{\Omega_{Fe}} \rho_F \nabla \mathbf{N}_f^t \nabla \mathbf{N}_f d\Omega \quad (1.84)$$

- Matrice de "masse" élémentaire pour le fluide :

$$\rho_F \mathbf{M}_F^e = \int_{\Omega_{Fe}} \frac{1}{c^2} \mathbf{N}_f^t \cdot \mathbf{N}_f d\Omega \quad (1.85)$$

- Matrice de couplage élémentaire :

$$\rho_F \mathbf{C}^e = \int_{\partial\Omega_{SFe}} \rho_F \mathbf{N}_u^t \mathbf{n}_F \cdot \mathbf{N}_f dS \quad (1.86)$$

**Système matriciel** Après assemblage de tous les éléments des équations (1.77), (1.78) et (1.79), et en considérant que ces équations sont vérifiées pour tous  $\delta \mathbf{u} \in \mathcal{U}_0$ ,  $\delta \phi_n \in \phi_0$ , et  $\delta \mathbf{p}_n \in \mathcal{P}_0$ , il vient :

$$\mathbf{K}_S \mathbf{U}_n - \omega^2 \mathbf{M}_S \mathbf{U}_n = \omega^2 \rho_F \mathbf{C} \Phi_n + \mathbf{F}_{\text{Ssurf}} + \mathbf{F}_{\text{Svol}} \quad (1.87)$$

$$-\omega^2 \mathbf{K}_F \Phi_n + \omega^2 \rho_F \mathbf{C} \mathbf{U}_n + \omega^2 \rho_F \mathbf{M}_F \mathbf{P}_n = 0 \quad (1.88)$$

$$\mathbf{M}_F \mathbf{P}_n - \omega^2 \rho_F \mathbf{M}_F \Phi_n = 0 \quad (1.89)$$

Il est alors possible de réunir les équations (1.87), (1.88) et (1.89) dans un système matriciel traduisant l'équilibre du système couplé en formulation pression et potentiel des déplacements/déplacement :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_S & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_F & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_n \\ \mathbf{P}_n \\ \Phi_n \end{Bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_S & 0 & \rho_F \mathbf{C} \\ 0 & 0 & \rho_F \mathbf{M}_F \\ \rho_F \mathbf{C}^t & \rho_F \mathbf{M}_F^t & -\mathbf{K}_F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_n \\ \mathbf{P}_n \\ \Phi_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_{\text{Ssurf}} + \mathbf{F}_{\text{Svol}} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1.90)$$

#### 1.4.4.4 Avantages et inconvénients

L'inconvénient majeur de cette formulation est l'introduction d'une deuxième inconnue pour décrire le fluide. Ceci a pour conséquence d'augmenter de manière non négligeable la taille du système matriciel couplé.

De plus, il existe des valeurs propres nulles parasites, correspondant à des mouvements de corps rigide. En effet, le potentiel de déplacement n'est pas défini pour la pulsation nulle : une pulsation nulle conduisant à une pression constante, soit, en général, un potentiel de déplacement infini. Cependant, en modifiant la définition du potentiel de déplacement par l'ajout d'une constante, il est possible de supprimer ces valeurs parasites [Morand et Ohayon, 1992].

Un avantage de cette formulation est le caractère symétrique des matrices obtenues, permettant l'utilisation de solveurs classiques.

### 1.4.5 Formulation potentiel des vitesses/déplacement

#### 1.4.5.1 Équations d'équilibre local

La pression  $p$  est liée au potentiel des vitesses  $\psi$  par la relation [Morand et Ohayon, 1992] :

$$p = -i\omega\rho_F\psi \quad (1.91)$$

où  $i$  désigne le nombre complexe tel que  $i^2 = -1$ .

La formulation en potentiel des vitesses/déplacement est une variante de la formulation en déplacement/déplacement. Les équations d'équilibre local sont obtenues en remplaçant  $p$  par son expression (1.91) dans les équations d'équilibre formulées en pression/déplacement (1.49a) (1.49b) (1.49c) (1.49d) et (1.49e) :

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}_c) + \omega^2\rho_S\mathbf{u} + \mathbf{f}_v = 0 \quad \text{dans } \Omega_S \quad (1.92)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_c \mathbf{n}_S = \mathbf{T} \quad \text{sur } \partial\Omega_S \setminus \partial\Omega_{SF} \quad (1.93)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_c \mathbf{n}_S = -i\omega\rho_F\psi \mathbf{n}_F \quad \text{sur } \partial\Omega_{SF} \quad (1.94)$$

$$\rho_F\Delta\psi + \rho_F\frac{\omega^2}{c^2}\psi = 0 \quad \text{dans } \Omega_F \quad (1.95)$$

$$\nabla\psi \cdot \mathbf{n}_F = i\omega\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_F \quad \text{sur } \partial\Omega_{SF} \quad (1.96)$$

L'équilibre des domaines solide et fluide est exprimé par les équations (1.92) et (1.95). La condition aux limites (1.93) est identique à celle des formulations précédentes. Le couplage à l'interface fluide-structure est traduit par (1.94) et (1.96).

#### 1.4.5.2 Formulation variationnelle

**Dualisation de l'équation d'équilibre du domaine solide** La formulation faible de l'équation d'équilibre du domaine solide est identique à (1.23). Avec la prise en compte de la condition limite (1.93) et de la condition de continuité des contraintes (1.94) il vient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_S} \boldsymbol{\sigma}_c : \varepsilon(\boldsymbol{\delta}\mathbf{u}) \, d\Omega - \int_{\Omega_S} \rho_S\omega^2\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\delta}\mathbf{u} \, d\Omega = \int_{\partial\Omega_{S\sigma} \setminus \partial\Omega_{SF}} \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\delta}\mathbf{u} \, dS - \omega \int_{\partial\Omega_{SF}} i\rho_F\psi \mathbf{n}_F \cdot \boldsymbol{\delta}\mathbf{u} \, dS \\ + \int_{\Omega_S} \mathbf{f}_v \cdot \boldsymbol{\delta}\mathbf{u} \, d\Omega \quad \forall \boldsymbol{\delta}\mathbf{u} \in \mathcal{U}_0 \end{aligned} \quad (1.97)$$

**Dualisation de l'équation d'équilibre du domaine fluide** La formulation faible pour le domaine fluide est obtenue par multiplication par la fonction test  $\delta\psi$  et intégration sur le domaine fluide de l'équation d'équilibre (1.95) :

$$\int_{\Omega_F} \rho_F\Delta\psi \, \delta\psi \, d\Omega + \omega^2 \int_{\Omega_F} \frac{\rho_F}{c^2}\psi \, \delta\psi \, d\Omega = 0 \quad \forall \delta\psi \in \psi_{ad} \quad (1.98)$$

où  $\psi_{ad}$  est l'espace des fonctions régulières  $\psi$  définies sur  $\Omega_F$ .

Après application de la formule de Green et prise en compte de la condition de continuité des vitesses normales à l'interface fluide-structure (1.96) dans (1.98), il vient :

$$-\int_{\Omega_F} \rho_F\nabla\psi \cdot \nabla(\delta\psi) \, d\Omega + i\omega \int_{\partial\Omega_{SF}} \rho_F\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_F \, \delta\psi \, dS + \omega^2 \int_{\Omega_F} \frac{\rho_F}{c^2}\psi \, \delta\psi \, d\Omega = 0 \quad \forall \delta\psi \in \psi_{ad} \quad (1.99)$$

### 1.4.5.3 Méthode des éléments finis - Système matriciel couplé

**Discrétisation et interpolation** Les formulations intégrales (1.97) et (1.99) sont discrétisées par la méthode des éléments finis. Le déplacement et le potentiel des vitesses sont interpolés de la façon suivante :

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}_u \mathbf{u}_n \quad (1.100)$$

$$\psi = \mathbf{N}_f \cdot \psi_n \quad (1.101)$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^n \delta \mathbf{u}_n^t \int_{\Omega_{Se}} \mathbf{B}^t \mathbf{H} \mathbf{B} \, d\Omega \, \mathbf{u}_n - \omega^2 \sum_{e=1}^n \delta \mathbf{u}_n^t \int_{\Omega_{Se}} \rho_S \mathbf{N}_u^t \mathbf{N}_u \, d\Omega \, \mathbf{u}_n = \sum_{e=1}^n \delta \mathbf{u}_n^t \int_{\partial\Omega_{S\sigma e} \setminus \partial\Omega_{SF e}} \mathbf{N}_u^t \mathbf{T} \, dS \\ - i\omega \sum_{e=1}^n \delta \mathbf{u}_n^t \int_{\partial\Omega_{SF e}} \rho_F \mathbf{N}_u^t \mathbf{n}_F \cdot \mathbf{N}_f \, dS \, \psi_n + \sum_{e=1}^n \delta \mathbf{u}_n^t \int_{\Omega_{Se}} \mathbf{f}_v \, d\Omega \quad \forall \delta \mathbf{u}_n \in \mathcal{U}_0 \end{aligned} \quad (1.102)$$

$$\begin{aligned} - \sum_{e=1}^n \delta \psi_n^t \int_{\Omega_{Fe}} \rho_F \nabla(\mathbf{N}_f)^t \cdot \nabla(\mathbf{N}_f) \, d\Omega \, \psi_n + i\omega \sum_{e=1}^n \delta \psi_n^t \int_{\partial\Omega_{SF e}} \rho_F \mathbf{N}_f^t \cdot \mathbf{n}_F \mathbf{N}_u \, dS \, \mathbf{u}_n \\ + \omega^2 \sum_{e=1}^n \delta \psi_n^t \int_{\Omega_{Fe}} \frac{\rho_F}{c^2} \mathbf{N}_f^t \cdot \mathbf{N}_f \, d\Omega \, \psi_n = 0 \quad \forall \delta \psi_n \in \psi_{ad} \end{aligned} \quad (1.103)$$

**Identification des matrices élémentaires** Les matrices élémentaires suivantes sont identifiées dans (1.102) et (1.103) :

- Matrice de raideur élémentaire pour le solide :

$$\mathbf{K}_S^e = \int_{\Omega_{Se}} \mathbf{B}^t \mathbf{H} \mathbf{B} \, d\Omega \quad (1.104)$$

- Matrice de masse élémentaire pour le solide :

$$\mathbf{M}_S^e = \int_{\Omega_{Se}} \rho_S \mathbf{N}_u^t \mathbf{N}_u \, d\Omega \quad (1.105)$$

- Vecteur force surfacique élémentaire pour le solide :

$$\mathbf{F}_{S\text{surf}}^e = \int_{\partial\Omega_{S\sigma e}} \mathbf{N}_u^t \mathbf{T} \, dS \quad (1.106)$$

- Vecteur force volumique élémentaire pour le solide :

$$\mathbf{F}_{S\text{vol}}^e = \int_{\Omega_{Se}} \mathbf{N}_u^t \mathbf{f}_v \, d\Omega \quad (1.107)$$

- Matrice de "raideur" élémentaire pour le fluide :

$$\mathbf{K}_F^e = \int_{\Omega_{Fe}} \rho_F \nabla(\mathbf{N}_f)^t \cdot \nabla(\mathbf{N}_f) \, d\Omega \quad (1.108)$$

- Matrice de "masse" élémentaire pour le fluide :

$$\mathbf{M}_F^e = \int_{\Omega_{Fe}} \frac{\rho_F}{c^2} \mathbf{N}_f^t \cdot \mathbf{N}_f \, d\Omega \quad (1.109)$$

- Matrice de couplage élémentaire :

$$\mathbf{C}^e = \int_{\partial\Omega_{SF e}} \rho_F \mathbf{N}_u^t \mathbf{n}_F \cdot \mathbf{N}_f \, dS \quad (1.110)$$

**Système matriciel** Après assemblage de tous les éléments finis, et en considérant que les équations (1.102) et (1.103) sont vérifiées quels que soient  $\delta \mathbf{U}_n \in \mathcal{U}_0$  et  $\delta \boldsymbol{\Psi}_n \in \psi_{ad}$ , il vient :

$$\mathbf{K}_S \mathbf{U}_n - \omega^2 \mathbf{M}_S \mathbf{U}_n = \mathbf{F}_{S\text{surf}} - i\omega \mathbf{C} \boldsymbol{\Psi}_n + \mathbf{F}_{S\text{vol}} \quad (1.111)$$

$$\mathbf{K}_F \boldsymbol{\Psi}_n - i\omega \mathbf{C}^t \mathbf{U}_n - \omega^2 \mathbf{M}_F \boldsymbol{\Psi}_n = 0 \quad (1.112)$$

En réunissant (1.111) et (1.112), le système matriciel couplé du problème formulé en potentiel des vitesses/déplacement est obtenu :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_S & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_n \\ \boldsymbol{\Psi}_n \end{Bmatrix} + i\omega \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{C} \\ -\mathbf{C}^t & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_n \\ \boldsymbol{\Psi}_n \end{Bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_S & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_n \\ \boldsymbol{\Psi}_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_{S\text{surf}} + \mathbf{F}_{S\text{vol}} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1.113)$$

#### 1.4.5.4 Avantages et inconvénients

Le système matriciel (1.113) obtenu avec la formulation en potentiel des vitesses/déplacement présente l'avantage d'introduire un seul degré de liberté par nœud fluide. En revanche, cette formulation n'est pas applicable pour la pulsation nulle. Cela fait apparaître une solution parasite, nécessitant des algorithmes de résolution non standards [Morand et Ohayon, 1992].

#### 1.4.6 Bilan - Problème à résoudre

Les avantages et inconvénients des quatre formulations présentées précédemment sont résumés FIGURE 1.1. La formulation en pression/déplacement est retenue dans la suite de cette étude. Le choix effectué pour la discrétisation de la structure sandwich introduisant un grand nombre de degrés de liberté, ce choix de la formulation  $(\mathbf{u}, p)$  permet de limiter la taille du problème à résoudre en considérant seulement une inconnue par nœud fluide, ce qui ne serait pas le cas avec les autres formulations. De plus, cette formulation est simple à manipuler dans le cadre de la discrétisation par élément fini (pas d'opérateur rotationnel à discrétiser).

En l'absence de forces extérieures, le problème à résoudre s'écrit donc :

$$\left( \begin{bmatrix} \mathbf{K}_S & -\mathbf{C} \\ 0 & \mathbf{K}_F \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_S & 0 \\ \mathbf{C}^t & \mathbf{M}_F \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_n \\ \mathbf{P}_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{avec} \quad \mathbf{K}_S = \mathbf{K}_S(\mathbf{0}) + \mathbf{K}_S(\omega) \quad (1.114)$$

Les matrices  $\mathbf{K}_S$  et  $\mathbf{K}_F$  désignent respectivement les matrices de rigidité des domaines solide et fluide. La matrice de rigidité du solide comporte une partie élastique  $\mathbf{K}_S(\mathbf{0})$ , à coefficients réels et constants et une partie viscoélastique  $\mathbf{K}_S(\omega)$ , à coefficients complexes et dépendants de la pulsation  $\omega$ . Les matrices  $\mathbf{M}_S$  et  $\mathbf{M}_F$  sont les matrices de masse consistantes du solide et du fluide. Ce sont des matrices à coefficients réels et constants. Le couplage à l'interface fluide-structure est représenté par la matrice  $\mathbf{C}$ .

Dans l'étude du problème où aucune force extérieure n'est appliquée, le système matriciel (1.114) peut être réécrit sous la forme du problème aux valeurs propres généralisé suivant :

$$[\mathbf{K}(\mathbf{0}) + E(\omega)\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M}]\mathbf{U} = 0 \quad \text{avec} \quad \mathbf{U} = \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_n \\ \mathbf{P}_n \end{Bmatrix} \quad (1.115)$$

où  $\mathbf{K}(\mathbf{0})$  est la matrice de rigidité globale des domaines solide élastique et fluide,  $E(\omega)\mathbf{K}$  la matrice de rigidité globale du domaine solide viscoélastique<sup>1</sup> et  $\mathbf{M}$  la matrice de masse globale.

1. Par abus de notation, le module d'Young  $E(\omega)$  est sorti en facteur de la matrice de rigidité visqueuse afin de rendre plus explicite la dépendance à la pulsation du domaine viscoélastique.

Les inconnues nodales de déplacement  $\mathbf{U}_n$  et de pression  $\mathbf{P}_n$  sont regroupées dans le vecteur des inconnues  $\mathbf{U}$ .

Formulation	Avantages	Inconvénients
$(\mathbf{u}, p)$	- une seule inconnue par nœud fluide - pas de mode non physique - interprétation directe des variables	- non symétrique - valeur parasite en $\omega = 0$
$(\mathbf{u}, \mathbf{u}_F)$	- homogénéité des variables - symétrique	- modes non physiques - opérateur rotationnel difficile à discrétiser
$(\mathbf{u}, p, \phi)$	- symétrique	- valeur parasite en $\omega = 0$ - nombreux degrés de liberté - variables fluides peu explicites
$(\mathbf{u}, \psi)$	- une seule inconnue par nœud fluide	- valeur parasite en $\omega = 0$ - variable fluide peu explicite

TABLEAU 1.1 – Bilan des avantages et inconvénients des principales formulations pour l'étude du problème en interaction fluide-structure

## 1.5 Implantation de l'élément 2DFS dans le code de laboratoire EVE

Les travaux de thèse ont été réalisés dans le code de laboratoire EVE. Il s'agit d'un code de calcul de laboratoire écrit en FORTRAN 77 basé sur la méthode des éléments finis. Un des objectifs de cette thèse est d'enrichir ce code par l'ajout de méthodes numériques permettant l'étude de problèmes de vibroacoustique. Pour cela, un élément fini "2DFS" prenant en compte le couplage fluide-structure a été implanté dans EVE. Nous présentons ici les hypothèses retenues pour cet élément, ainsi que l'expression des matrices élémentaires.

### 1.5.1 Présentation

L'ensemble du système fluide-structure est discrétisé avec l'élément fini "2DFS". Il s'agit d'un élément fini quadrangle bi-linéaire, isoparamétrique [Dhatt et Touzot, 1984]. Les domaines solide et fluide sont discrétisés avec les mêmes éléments. Ainsi, les maillages des domaines solide et fluide sont parfaitement compatibles au niveau de l'interface et une correspondance nœud pour nœud est assurée. Cette façon de procéder permet de ne pas avoir recours à un élément fini de type "interface" pour prendre en compte le couplage entre les deux domaines. L'élément "2DFS" est basé sur un élément Q4 solide à 2 degrés de liberté par nœud (déplacements  $u_x$  et  $u_y$ ), soit 8 degrés de liberté, déjà existant dans EVE. Cet élément est complété par l'ajout de 4 degrés de liberté supplémentaires, à savoir la pression à chaque nœud, et par l'expression d'une matrice de couplage fluide-structure. Les vecteurs déplacement et pression élémentaires sont définis par :

$$\mathbf{u}_n^t = \{u_{x1} \quad u_{y1} \quad u_{x2} \quad u_{y2} \quad u_{x3} \quad u_{y3} \quad u_{x4} \quad u_{y4}\} \quad (1.116)$$

$$\mathbf{p}_n^t = \{p_1 \quad p_2 \quad p_3 \quad p_4\} \quad (1.117)$$

Ainsi, l'élément "2DFS" possède 12 degrés de libertés (deux déplacements et une pression pour chacun des quatre nœuds) et permet la prise en compte de l'interaction fluide-structure à l'interface. La FIGURE 1.12 présente l'élément de référence.

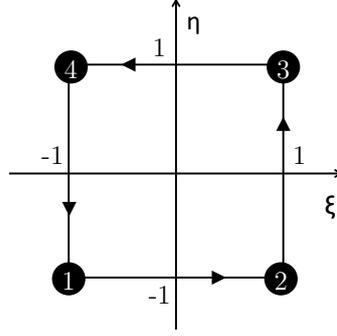


FIGURE 1.12 – Élément de référence

### 1.5.2 Interpolation

Puisque l'élément est isoparamétrique, les fonctions de transformation géométrique et les fonctions d'interpolation des inconnues sont identiques. L'interpolation est linéaire et définie de la manière suivante :

$$\{N(\xi, \eta)\} = \{N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4\} \quad (1.118)$$

où les paramètres  $\xi$  et  $\eta$  sont les coordonnées dans l'élément de référence, et les fonctions  $N_i$  valent :

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) & N_2 &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \\ N_3 &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) & N_4 &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \end{aligned} \quad (1.119)$$

La matrice jacobienne est alors définie par :

$$\mathbf{J}(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} x_1 + \frac{\partial N_2}{\partial \xi} x_2 + \frac{\partial N_3}{\partial \xi} x_3 + \frac{\partial N_4}{\partial \xi} x_4 & \frac{\partial N_1}{\partial \xi} y_1 + \frac{\partial N_2}{\partial \xi} y_2 + \frac{\partial N_3}{\partial \xi} y_3 + \frac{\partial N_4}{\partial \xi} y_4 \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} x_1 + \frac{\partial N_2}{\partial \eta} x_2 + \frac{\partial N_3}{\partial \eta} x_3 + \frac{\partial N_4}{\partial \eta} x_4 & \frac{\partial N_1}{\partial \eta} y_1 + \frac{\partial N_2}{\partial \eta} y_2 + \frac{\partial N_3}{\partial \eta} y_3 + \frac{\partial N_4}{\partial \eta} y_4 \end{bmatrix} \quad (1.120)$$

où les paramètres  $(x_i, y_i)$  sont les coordonnées des nœuds de l'élément fini dans le domaine réel.

### 1.5.3 Matrices élémentaires des domaines solides et fluides

**Matrice de masse élémentaire du domaine solide** La matrice de masse élémentaire des éléments solides est définie par (1.33). En deux dimensions, il vient :

$$\mathbf{M}_S^e = \int_{S_{Se}} \rho_S \mathbf{N}_u^t \mathbf{N}_u h dS \quad (1.121)$$

où  $h$  est l'épaisseur de l'élément et  $\mathbf{N}_u$  la matrice des fonctions d'interpolation pour les déplacements  $\mathbf{u}$  :

$$\mathbf{N}_u = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \quad (1.122)$$

En réécrivant (1.121) dans le repère de référence de l'élément, on obtient :

$$\mathbf{M}_S^e = \int_{\xi=-1}^1 \int_{\eta=-1}^1 \rho_S \mathbf{N}_u^t \mathbf{N}_u h |\mathbf{J}(\xi, \eta)| d\xi d\eta \quad (1.123)$$

Finalement, une intégration numérique de Gauss donne :

$$\mathbf{M}_S^e = \sum_{I=1}^{NPG} \sum_{J=1}^{NPG} \rho_S \mathbf{N}_u^t \mathbf{N}_u h |\mathbf{J}(\xi, \eta)| w_I w_J \quad (1.124)$$

où  $NPG$  est le nombre de points de Gauss et  $w$  leur poids. Dans la pratique, quatre points de Gauss sont considérés.

**Matrice de raideur élémentaire du domaine solide** La matrice de raideur élémentaire des éléments solides est définie par (1.32). En deux dimensions, il vient :

$$\mathbf{K}_S^e = \int_{S_{Se}} \mathbf{B}^t \mathbf{H} \mathbf{B} h dS \quad (1.125)$$

où  $\mathbf{B}$  est la matrice cinématique telle que :

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & N_{2,x} & 0 & N_{3,x} & 0 & N_{4,x} & 0 \\ 0 & N_{1,y} & 0 & N_{2,y} & 0 & N_{3,y} & 0 & N_{4,y} \\ N_{1,y} & N_{1,x} & N_{2,y} & N_{2,x} & N_{3,y} & N_{3,x} & N_{4,y} & N_{4,x} \end{bmatrix} \quad (1.126)$$

où  $N_{i,x}$  et  $N_{i,y}$  sont les dérivées des fonctions d'interpolation  $N_i$  par rapport aux coordonnées cartésiennes  $x$  et  $y$ .

La matrice d'élasticité ou de viscoélasticité en déformations planes  $\mathbf{H}$  est définie telle que :

$$\mathbf{H} = \frac{E(\omega)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (1.127)$$

où  $E(\omega)$  est le module d'Young et  $\nu$  le coefficient de Poisson du matériau. A noter que, suivant le type de matériau solide considéré, le module d'Young pourra être soit constant (matériau élastique ou viscoélastique avec le modèle hystérétique), soit dépendant de la pulsation (matériau viscoélastique avec le modèle de Maxwell généralisé).

En réécrivant (1.125) dans le repère de référence de l'élément, on obtient :

$$\mathbf{K}_S^e = \int_{\xi=-1}^1 \int_{\eta=-1}^1 \mathbf{B}^t \mathbf{H} \mathbf{B} h |\mathbf{J}(\xi, \eta)| d\xi d\eta \quad (1.128)$$

Finalement, une intégration numérique de Gauss donne :

$$\mathbf{K}_S^e = \sum_{I=1}^{NPG} \sum_{J=1}^{NPG} \mathbf{B}^t \mathbf{H} \mathbf{B} h |\mathbf{J}(\xi, \eta)| w_I w_J \quad (1.129)$$

**Matrice de masse élémentaire du domaine fluide** La matrice de masse élémentaire des éléments fluides est définie par (1.37). En deux dimensions, il vient :

$$\mathbf{M}_F^e = \int_{S_{Fe}} \frac{1}{\rho_F c_F^2} \mathbf{N}_p^t \cdot \mathbf{N}_p h dS \quad (1.130)$$

où  $\mathbf{N}_p$  est la matrice des fonctions d'interpolation pour la pression  $p$  :

$$\mathbf{N}_p = \{N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4\} \quad (1.131)$$

En réécrivant (1.130) dans le repère de référence, il vient :

$$\mathbf{M}_F^e = \int_{\xi=-1}^1 \int_{\eta=-1}^1 \frac{1}{\rho_F c_F^2} \mathbf{N}_p^t \cdot \mathbf{N}_p h |\mathbf{J}(\xi, \eta)| d\xi d\eta \quad (1.132)$$

Finalement, une intégration numérique de Gauss donne :

$$\mathbf{M}_F^e = \sum_{I=1}^{\text{NPG}} \sum_{J=1}^{\text{NPG}} \frac{1}{\rho_F c_F^2} \mathbf{N}_p^t \cdot \mathbf{N}_p h |\mathbf{J}(\xi, \eta)| w_I w_J \quad (1.133)$$

**Matrice de raideur élémentaire du domaine fluide** La matrice de raideur élémentaire des éléments fluides est définie par (1.36). En deux dimensions, il vient :

$$\mathbf{K}_F^e = \int_{S_{Fe}} \frac{1}{\rho_F} \nabla \mathbf{N}_p^t \cdot \nabla \mathbf{N}_p h dS \quad (1.134)$$

où  $\nabla \mathbf{N}_p$  est la matrice des gradients des fonctions d'interpolation pour la pression  $p$  :

$$\nabla \mathbf{N}_p = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (1.135)$$

En réécrivant (1.134) dans le repère de référence de l'élément, on obtient :

$$\mathbf{K}_F^e = \int_{\xi=-1}^1 \int_{\eta=-1}^1 \frac{1}{\rho_F} \nabla \mathbf{N}_p^t \cdot \nabla \mathbf{N}_p h |\mathbf{J}(\xi, \eta)| d\xi d\eta \quad (1.136)$$

Finalement, une intégration numérique de Gauss donne :

$$\mathbf{K}_F^e = \sum_{I=1}^{\text{NPG}} \sum_{J=1}^{\text{NPG}} \frac{1}{\rho_F} \nabla \mathbf{N}_p^t \cdot \nabla \mathbf{N}_p h |\mathbf{J}(\xi, \eta)| w_I w_J \quad (1.137)$$

#### 1.5.4 Couplage

L'expression de la matrice de couplage élémentaire (1.38) fait intervenir la notion de normale sortante ( $\mathbf{n}_F$  si le couplage concerne un élément appartenant au domaine fluide,  $\mathbf{n}_S$  pour un élément appartenant au domaine solide). Il existe donc quatre variantes pour le calcul de la matrice couplage élémentaire, selon l'orientation de la normale sortante sur l'élément de référence.

En considérant un élément à deux dimensions, l'équation (1.38) peut être généralisée en :

$$\mathbf{C}^e = \int_{\partial S} \mathbf{N}_u^t \mathbf{n} \cdot \mathbf{N}_p h dl \quad (1.138)$$

où  $h$  est l'épaisseur de l'élément,  $\mathbf{n}$  est la normale sortante à la frontière  $\partial S$  et  $dl$  est un élément de longueur.

Après passage au repère de référence et évaluation des intégrales par une formule de Gauss, il vient les quatre expressions suivantes, définissant la matrice de couplage selon l'orientation de la normale sortante (cf. FIGURE 1.12 et FIGURE 1.13) :

- **Segment 1-2**

$$\mathbf{C}^e = \sum_{I=1}^{\text{NPG}} \mathbf{N}_u^t \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \end{Bmatrix} \cdot \mathbf{N}_p h \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2} w_I \quad \text{évalué en } \eta = -1 \quad (1.139)$$

- Segment 2-3

$$\mathbf{C}^e = \sum_{I=1}^{N_{PG}} \mathbf{N}_{\mathbf{u}}^t \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot \mathbf{N}_{\mathbf{p}} h \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2} w_I \quad \text{évalué en } \xi = +1 \quad (1.140)$$

- Segment 3-4

$$\mathbf{C}^e = \sum_{I=1}^{N_{PG}} \mathbf{N}_{\mathbf{u}}^t \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \cdot \mathbf{N}_{\mathbf{p}} h \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2} w_I \quad \text{évalué en } \eta = +1 \quad (1.141)$$

- Segment 4-1

$$\mathbf{C}^e = \sum_{I=1}^{N_{PG}} \mathbf{N}_{\mathbf{u}}^t \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot \mathbf{N}_{\mathbf{p}} h \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2} w_I \quad \text{évalué en } \xi = -1 \quad (1.142)$$

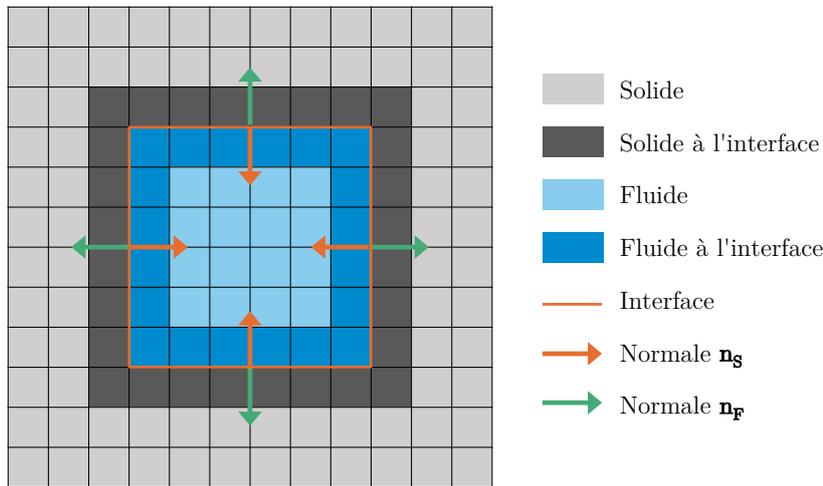


FIGURE 1.13 – Illustration des quatre possibilités pour l'élément "2DFS", conduisant aux quatre configurations de matrices élémentaires détaillées dans le TABLEAU 1.2.

### 1.5.5 Type d'élément - Construction de la matrice élémentaire de l'élément fini "2DFS"

Les éléments finis "2DFS" peuvent être de quatre types, suivant leur matériau (solide ou fluide) et leur position dans le maillage (en contact ou non avec l'interface) (cf. FIGURE 1.13). On distingue ainsi :

- les éléments solides "purs", en contact uniquement avec d'autres éléments solides ;
- les éléments fluides "purs", en contact uniquement avec d'autres éléments fluides ;
- les éléments solides à l'interface, en contact avec des éléments fluides ;
- les éléments fluides à l'interface, en contact avec des éléments solides.

Un test sur le matériau permet de différencier le type d'élément et de construire ainsi les matrices élémentaires de masse et de rigidité appropriées. Ces matrices sont ensuite assemblées au sein de la matrice élémentaire de l'élément "2DFS" (FIGURE 1.14). Les éléments situés à l'interface voient leurs matrices élémentaires enrichies d'un terme de couplage, traduisant l'interaction fluide-structure. Les quatre configurations possibles pour les matrices élémentaires sont résumées dans le TABLEAU 1.2. A noter que les éléments solides peuvent être des éléments solides élastiques ou viscoélastiques (seul le contenu de la matrice de rigidité  $\mathbf{K}_S$  est modifié).

Solide pur	Solide à l'interface	Fluide à l'interface	Fluide pur
$\mathbf{K}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_S^e & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\mathbf{K}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_S^e & -\mathbf{C}^e \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\mathbf{K}^e = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_F^e \end{bmatrix}$	$\mathbf{K}^e = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_F^e \end{bmatrix}$
$\mathbf{M}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_S^e & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\mathbf{M}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_S^e & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\mathbf{M}^e = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{C}^{et} & \mathbf{M}_F^e \end{bmatrix}$	$\mathbf{M}^e = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_F^e \end{bmatrix}$

TABLEAU 1.2 – Détail des quatre configurations possibles pour les matrices élémentaires de l'élément fini "2DFS".

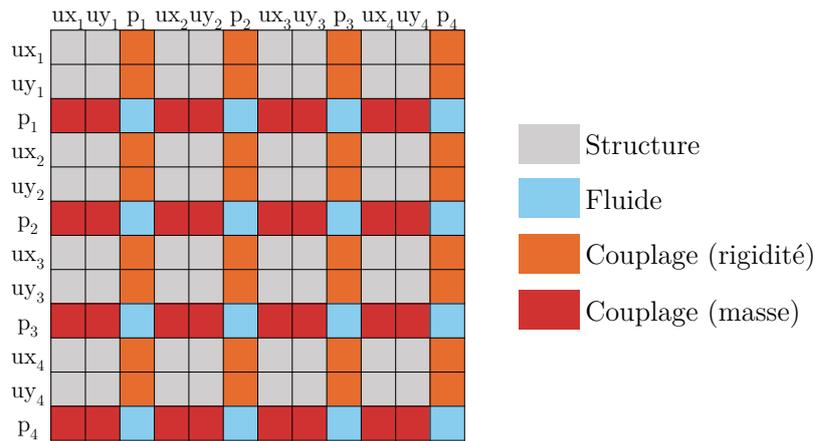


FIGURE 1.14 – Répartition des termes dans la matrice élémentaire de l'élément "2DFS".

### 1.5.6 Type de nœud - Réduction du nombre d'inconnues

Trois types de nœuds peuvent être distingués dans le maillage (cf. FIGURE 1.15) :

- les nœuds solides, appartenant uniquement à des éléments de type solide. Ces nœuds possèdent deux degrés de liberté "utiles", qui sont les déplacements  $u_x$ ,  $u_y$ . Pour ces nœuds, la pression  $p$  est considérée comme nulle.
- les nœuds fluides, appartenant uniquement à des éléments fluides. Ces nœuds sont caractérisés uniquement par la pression  $p$ , les degrés de liberté en déplacement  $u_x$ ,  $u_y$  sont nuls.
- les nœuds placés sur l'interface fluide-structure, qui appartiennent donc à des éléments solides et à des éléments fluides. Ces nœuds sont donc caractérisés par les trois degrés de liberté (pression  $p$  et déplacements  $u_x$ ,  $u_y$ ).

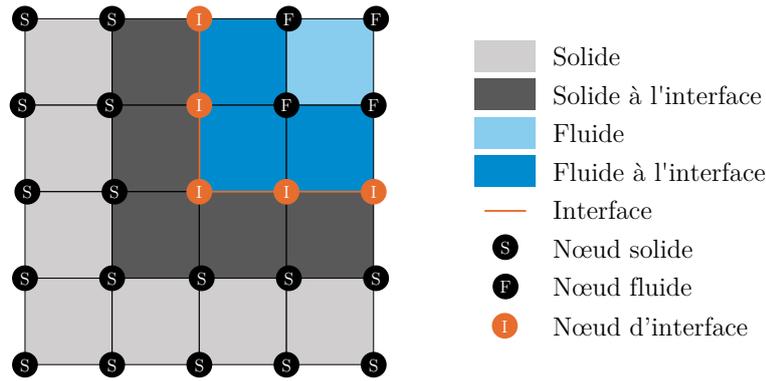


FIGURE 1.15 – Identification des types de nœuds et d'éléments

L'identification du type de nœud permet de diminuer "artificiellement" le nombre d'inconnues à déterminer. En effet, il est possible d'éliminer du système matriciel les degrés de liberté dont on sait qu'ils sont nuls, pour ne garder que les degrés de liberté non nuls. Par exemple, un nœud solide ne conserve que ses degrés de liberté en déplacement, puisque l'on sait que la pression est nulle en ce nœud. Ceci permet de réduire le nombre d'inconnues à manipuler dans les algorithmes de résolution (de l'ordre de 2 à 4 fois moins d'inconnues selon les cas tests).

## 1.6 Conclusion

Le problème à résoudre a été défini. Il s'agit d'un problème de vibroacoustique interne, formulé en pression/déplacement. La formulation choisie conduit à un système matriciel (1.115) non symétrique et susceptible d'être à grand nombre de degrés de liberté. De plus, selon la modélisation choisie pour le matériau viscoélastique, le système (1.115) peut être non linéaire.

Ces difficultés imposent le recours à des solveurs spécifiques, qui doivent être performants et robustes. Une étude bibliographique est proposée dans les chapitres suivants (cf. SECTION 2.1 et SECTION 3.1). Le problème étant difficile à résoudre, ces méthodes sont susceptibles d'être coûteuses en temps de calcul. C'est pourquoi, dans le cadre de cette thèse, il est proposé un solveur itératif associant les techniques de perturbation et d'homotopie, qui sera comparé à l'algorithme de Newton (cf. CHAPITRE 3).

Les solveurs étudiés au CHAPITRE 3 nécessitent un point initial. Ce point initial est choisi comme étant la solution du problème conservatif, non amorti, pour lequel le domaine solide est considéré comme étant élastique. A cet effet, des solveurs aux valeurs propres basés sur les techniques de perturbation et de continuation sont proposés au chapitre suivant.

# Solveurs aux valeurs propres pour les problèmes IFS conservatifs

---

## Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>44</b>
<b>2.2</b>	<b>Solveur ARPACK</b>	<b>47</b>
2.2.1	Algorithme d'Arnoldi avec redémarrage implicite	47
2.2.2	Influence du conditionnement sur le solveur ARPACK	47
<b>2.3</b>	<b>Solveur MAN - indicateur (MANi)</b>	<b>49</b>
2.3.1	Introduction de l'indicateur	49
2.3.2	Perturbation	50
2.3.3	Approximants de Padé	51
2.3.4	Valeurs propres	51
2.3.5	Continuation	52
<b>2.4</b>	<b>Solveur MAN - analyse des termes de série (MANa)</b>	<b>53</b>
2.4.1	Problème conservatif forcé	54
2.4.2	Premiers résultats : accumulation de pas au voisinage des pulsations propres	55
2.4.3	Présence d'une suite géométrique	57
2.4.4	Détection d'une suite géométrique et "nettoyage" des séries	57
2.4.5	Extraction des valeurs et des modes propres	58
2.4.6	Continuation	59
<b>2.5</b>	<b>Algorithmes des solveurs proposés</b>	<b>59</b>
<b>2.6</b>	<b>Résultats numériques</b>	<b>62</b>
2.6.1	Description du cas test	62
2.6.2	Validation des algorithmes	63
2.6.2.1	Convergence	63
2.6.2.2	Valeurs propres et modes propres obtenus	65
2.6.3	Étude du solveur MAN - indicateur (MANi)	67
2.6.3.1	Influence de l'ordre de troncature	67
2.6.3.2	Répartition du temps CPU	68
2.6.4	Etude du solveur MAN - analyse des termes de série (MANa)	69
2.6.4.1	Extraction des modes propres	70
2.6.4.2	Ordre de troncature	72
2.6.5	Comparaison des méthodes	73
2.6.5.1	Temps CPU	73
2.6.5.2	Préconditionnement	74
<b>2.7</b>	<b>Conclusion</b>	<b>75</b>

---

## 2.1 Introduction

L'analyse des valeurs propres est une tâche fondamentale en ingénierie mécanique. Cela concerne notamment l'analyse de stabilité, avec l'étude des phénomènes de flambement, ou l'analyse vibratoire, c'est-à-dire la détermination des modes propres de vibration. Pour mener à bien ces études, il est nécessaire de disposer de solveurs aux valeurs propres efficaces (précis, rapides) et robustes (insensibilités aux paramètres numériques, détermination de l'ensemble des valeurs propres demandées dans un intervalle souhaité).

De plus, l'algorithme proposé pour la résolution du problème de vibrations du système dissipatif au CHAPITRE 3 nécessite des valeurs initiales, qui sont choisies comme étant les valeurs propres du système conservatif associé.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons donc au calcul des valeurs propres et modes propres du système non amorti. Le problème à résoudre est un cas particulier du problème dissipatif (1.115), dans lequel tous les matériaux sont supposés élastiques. La matrice de rigidité visco-élastique étant nulle, le problème (1.114) devient :

$$\left( \begin{bmatrix} \mathbf{K}_S(\mathbf{0}) & -\mathbf{C} \\ 0 & \mathbf{K}_F \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_S & 0 \\ \mathbf{C}^t & \mathbf{M}_F \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_n \\ \mathbf{P}_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.1)$$

En posant  $\Omega_{na} = \omega^2$ , ce problème peut également s'écrire sous la forme d'un problème aux valeurs propres généralisé :

$$[\mathbf{K}(\mathbf{0}) - \Omega_{na}\mathbf{M}]\mathbf{U} = 0 \quad (2.2)$$

où  $\mathbf{K}(\mathbf{0})$  est la matrice de rigidité élastique,  $\mathbf{M}$  la matrice de masse et  $\mathbf{U}$  le vecteur des inconnues nodales. Le couplage fluide-structure impose une interaction entre deux domaines dont les propriétés mécaniques sont différentes, ce qui se traduit, mathématiquement, par des matrices de rigidité et de masse mal conditionnées. Il est à noter que ces matrices sont réelles. Ainsi, résoudre le problème conservatif revient à résoudre un problème aux valeurs propres réelles, à matrices non symétriques.

Il est alors nécessaire d'utiliser un algorithme de calcul adapté, capable de calculer les  $m$  premières valeurs propres d'un système non-symétrique à grand nombre de degrés de liberté.

Les méthodes permettant de calculer les valeurs propres d'un système linéaire sont diverses [Géradin et Rixen, 1997] : développement de l'équation caractéristique, calcul du déterminant, transformations successives permettant d'obtenir une matrice diagonale ou tridiagonale, méthodes itératives, utilisation de sous-espaces... Le choix d'une ou l'autre "famille" de méthode dépend principalement du nombre de degrés de liberté du système, et du nombre de valeurs propres souhaitées. Le domaine fréquentiel étudié et le type de matrices à manipuler (symétrique ou non) sont également des critères à considérer. Le temps de calcul est aussi un élément important.

Le système (2.2) étant un système à grand nombre de degrés de liberté, les méthodes basées sur le développement de l'équation caractéristique et le déterminant ne pourront pas être utilisées. Nous présentons ici quelques méthodes itératives, adaptées à un problème de grande dimension :

- La **méthode de la puissance** permet d'obtenir la valeur propre de plus grand module [Quarteroni *et al.*, 2007]. Il existe des variantes permettant de calculer la valeur propre de plus petit module (**méthode de la puissance inverse**), ou la valeur

propre la plus proche d'une valeur donnée (**méthode de la puissance avec décalage**). Cette méthode et ses variantes calculent une seule valeur propre à la fois. Diverses méthodes permettent de calculer les autres valeurs propres à partir de la première valeur propre obtenue ("λ-différence", déflation, procédé  $\Delta^2$  d'Aitken) [Brezinski et Redivo-Zaglia, 2006].

- **Méthodes basées sur la décomposition de matrices** : ces méthodes sont basées sur des transformations successives. Elles permettent d'obtenir des matrices ou des factorisations de matrices de type particulier, dont les propriétés facilitent l'obtention des valeurs propres.
  - La **méthode de Jacobi** [Jacobi, 1846] consiste à transformer progressivement une matrice réelle symétrique en une matrice diagonale. La **méthode de Greenstadt** est une généralisation de la méthode de Jacobi aux matrices non symétriques [Brezinski et Redivo-Zaglia, 2006].
  - La **méthode de Givens-Householder** est semblable à la précédente. Elle s'appuie sur la transformation d'une matrice symétrique en une matrice tri-diagonale [Gérardin et Rixen, 1997].
  - L'**algorithme LR** [Rutishauser et H., 1955] est un solveur itératif basé sur une décomposition  $\mathbf{LU}^1$  de la matrice. Après factorisation des matrices, le système linéaire obtenu est résolu par la méthode de Gauss, ou la méthode de Cholesky.
  - L'**algorithme QR** [Francis, 1961] [Kublanovskaya, 1962] est un solveur itératif basé sur une décomposition  $\mathbf{QU}^2$  de Householder de la matrice. Dans sa version la plus simple, il est réservé aux matrices réelles, mais il existe des extensions au cas complexe.

Ces méthodes de décomposition fournissent simultanément toutes les valeurs propres d'une matrice et sont donc difficilement applicables à des systèmes de grandes dimensions. De plus, en général, seules les premières valeurs propres sont recherchées. C'est pourquoi ces algorithmes sont généralement associés à des **méthodes de réduction/projection**, telles que la méthode de Ritz ou la méthode de Krylov : la taille de la matrice étudiée est réduite, et les algorithmes présentés ci-dessus permettent alors de calculer une estimation du spectre.

- **Méthodes basées sur la construction de sous-espaces**
  - La **méthode de Rayleigh-Ritz** permet de transformer un problème de grande dimension en un problème de dimension réduite [Brezinski et Redivo-Zaglia, 2006]. Toutes les valeurs propres de ce système réduit sont alors calculées par la méthode de Jacobi.
  - La **méthode des sous-espaces** [Dhatt et Touzot, 1984] consiste à appliquer plusieurs fois la méthode de Ritz en améliorant les vecteurs de Ritz par la méthode d'itération inverse. Ainsi, la méthode de Ritz force les vecteurs

---

1. Décomposition en une matrice triangulaire inférieure  $\mathbf{L}$  (*Lower*) et une matrice triangulaire supérieure  $\mathbf{U}$  (*Upper*).

2. Décomposition en une matrice orthogonale  $\mathbf{Q}$  et une matrice triangulaire supérieure  $\mathbf{U}$ .

à rester orthogonaux, tandis que la méthode de l'itération inverse assure la convergence vers les vecteurs propres correspondants aux plus petites valeurs propres.

- La **méthode de Lanczos** est un des algorithmes les plus efficaces pour extraire la première partie du spectre d'un problème aux valeurs propres symétrique de grande dimension [Gérardin et Rixen, 1997][Bathe, 2013]. Il s'agit d'une adaptation de la méthode de la puissance inverse aux problèmes à grand nombre de degrés de liberté. Contrairement à la méthode des sous-espaces, la construction du sous-espace se fait colonne par colonne, au fur et à mesure des itérations. Cette méthode est aujourd'hui disponible dans la plupart des codes de calcul par éléments finis commerciaux. A noter que la **méthode d'Arnoldi** est une généralisation de cette méthode au cas des problèmes aux valeurs propres à matrice non symétrique. Une variante dans le cas de matrices mal conditionnées a été proposée par [Bouhamidi *et al.*, 2012].

Le lecteur intéressé pourra trouver une description plus détaillée de ces méthodes dans [Dhatt et Touzot, 1984], [Gérardin et Rixen, 1997], [Brezinski et Redivo-Zaglia, 2006] et [Quarteroni *et al.*, 2007].

Dans cette thèse, le solveur ARPACK est utilisé. Il s'agit d'un solveur classique, basé sur l'algorithme d'Arnoldi, et facilement adaptable dans notre environnement de développement numérique<sup>1</sup>. Lors des premiers essais numériques, ce solveur a montré des faiblesses :

- D'une part une très grande sensibilité au conditionnement des matrices, qui conduit dans certains cas à des valeurs propres complètement fausses.
- Et d'autre part des difficultés de convergence : certaines valeurs propres ne sont pas obtenues, même en modifiant les options disponibles (recherche des plus petites ou des plus grandes valeurs propres réelles, valeurs propres de plus petit module...).

Pour espérer déterminer avec succès les valeurs propres souhaitées (les plus petites valeurs propres réelles dans notre cas), l'utilisation de ce solveur s'avère finalement assez délicate.

C'est pourquoi nous proposons dans ce chapitre deux algorithmes originaux, basés sur la Méthode Asymptotique Numérique. Ces deux algorithmes sont assez similaires. Ils résolvent tous les deux un problème de vibrations forcées en utilisant les techniques de perturbation. Le premier algorithme proposé est basé sur l'introduction d'un indicateur ayant la particularité de s'annuler aux valeurs propres du système considéré. L'objectif est alors de déterminer les zéros de cet indicateur. Le second solveur est basé sur l'analyse des termes de série de la méthode de perturbation. En effet, au voisinage d'un point singulier (ici une valeur propre), ces approximations polynomiales voient apparaître une suite géométrique, qu'il est possible d'identifier. L'objectif est alors de vérifier lors de la résolution du problème forcé l'apparition ou non de cette suite géométrique dans les termes de série.

Dans un premier temps, le solveur ARPACK et la technique de préconditionnement qui y a été ajoutée sont rappelés. Puis, les deux solveurs basés sur la Méthode Asymptotique Numérique développés durant la thèse sont présentés : premièrement, le solveur MAN avec indicateur et, deuxièmement, le solveur basé sur l'analyse des termes de série. Enfin, après validation des solveurs proposés sur un cas test issu de la littérature [Bermúdez et Rodríguez, 1994], les performances des différents algorithmes sont comparées.

---

1. Code de laboratoire EVE.

## 2.2 Solveur ARPACK

Développée par [Lehoucq *et al.*, 1998], ARPACK<sup>1</sup> est une librairie en Fortran 77 permettant de résoudre des problèmes aux valeurs propres. Particulièrement adapté aux problèmes de grandes dimensions, ce solveur est actuellement l'un des plus utilisés. Il est notamment intégré à des langages de programmation tels que MATLAB ou GNU OCTAVE.

Le solveur ARPACK se présente sous la forme d'une *reverse communication interface*, une forme de "dialogue" entre le solveur et l'utilisateur. Ainsi, au cours de la procédure, le solveur ARPACK "rend la main" à l'utilisateur, qui lui fournit les produits matrice-vecteur nécessaires au calcul des pulsations et modes propres, ainsi que le calcul des solutions des systèmes linéaires. Ceci présente l'avantage d'autoriser toute forme de stockage de matrice (par exemple, le stockage en ligne de ciel dans le cadre du code EVE). Les valeurs et les modes propres sont obtenus par une méthode d'Arnoldi associée à une procédure de redémarrage<sup>2</sup>, que nous détaillons dans le paragraphe suivant.

### 2.2.1 Algorithme d'Arnoldi avec redémarrage implicite

L'algorithme d'Arnoldi est une méthode de calcul des valeurs propres d'une matrice  $\mathbf{A}$  basée sur la génération de sous-espaces de Krylov [Quarteroni *et al.*, 2007][Philippe et Saad, 2008].

Le sous-espace de Krylov d'ordre  $m$  associé à la matrice  $\mathbf{A}$  est construit à partir d'un vecteur initial  $\mathbf{v}$  :

$$K_m(\mathbf{A}; \mathbf{v}) = \text{vect}\{\mathbf{v}, \mathbf{A}\mathbf{v}, \dots, \mathbf{A}^{m-1}\mathbf{v}\} \quad (2.3)$$

Puis une base orthonormale de ce sous-espace  $K_m(\mathbf{A}; \mathbf{v})$  est obtenue en utilisant l'algorithme d'Arnoldi. Cette méthode utilise le procédé de Gram-Schmidt pour générer une suite de vecteurs orthogonaux  $\mathbf{v}_i$ . Si la matrice  $\mathbf{A}$  est symétrique, l'algorithme d'Arnoldi est remplacé par l'algorithme de Lanczos. En notant  $\mathbf{V}_m$  la matrice dont les colonnes sont les vecteurs  $\mathbf{v}_i$ , une matrice de Hessenberg supérieure peut être calculée par la projection de  $\mathbf{A}$  sur la base orthonormale du sous-espace de Krylov :

$$\mathbf{V}_m^t \mathbf{A} \mathbf{V}_m = \mathbf{H}_m \quad (2.4)$$

Les vecteurs et les valeurs propres peuvent alors être obtenus en appliquant un algorithme QR à cette matrice de Hessenberg.

Ce processus nécessitant un espace mémoire considérable, une méthode de redémarrage implicite, inspirée de l'algorithme QR avec décalage implicite, a été proposée par [Lehoucq *et al.*, 1998]. Ainsi, au bout de quelques itérations, le processus est redémarré afin d'obtenir les valeurs propres suivantes.

### 2.2.2 Influence du conditionnement sur le solveur ARPACK

En l'état, le solveur ARPACK ne permet pas de résoudre le problème aux valeurs propres généralisé (2.2). En effet, la formulation en pression/déplacement choisie SECTION 1.4 conduit à des matrices globales  $\mathbf{K}(\mathbf{0})$  et  $\mathbf{M}$  dont les termes sont d'ordres de grandeurs très différents. A titre d'exemple, pour une cavité en acier remplie d'eau, les termes de rigidité du solide sont de l'ordre de  $10^9$  tandis que ceux du fluide sont de l'ordre de  $10^{-5}$ . En ce qui concerne les

---

1. *ARnoldi PACKage*

2. *IRAM : Implicitly restarted Arnoldi method*

termes des matrices de masse, ils sont de l'ordre de  $10^{-1}$  pour le solide et de  $10^{-14}$  pour le fluide. Cette différence d'ordre de grandeur entraîne des problèmes de convergence, voire des instabilités numériques qui conduisent à des temps de calculs très longs ou à la non convergence des calculs. Pour remédier à ce problème, il a donc été ajouté une étape de préconditionnement avant l'utilisation du solveur ARPACK.

La méthode de préconditionnement utilisée ici est celle proposée par [Maess et Gaul, 2006] dans le cadre de l'analyse modale de tubes remplis d'eau. L'introduction dans le système (2.1) de coefficients calculés à partir des normes de Frobenius des matrices de rigidité et de masse des domaines solide et fluide, permet d'obtenir des "blocs" de même ordre de grandeur (voir [Maess et Gaul, 2006] pour plus de détails). Le système mal conditionné (2.1) est alors réécrit sous la forme bien conditionnée suivante :

$$\left( \begin{bmatrix} \mathbf{K}_S(\mathbf{0}) & -\mathbf{C}_K \\ 0 & \widehat{\mathbf{K}}_F \end{bmatrix} - \Omega_{na} \begin{bmatrix} \mathbf{M}_S & 0 \\ \mathbf{C}_M^t & \widehat{\mathbf{M}}_F \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \widehat{\mathbf{U}}_n \\ \widehat{\mathbf{P}}_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.5)$$

avec les définitions suivantes, où  $\|\bullet\|_f$  représente la norme de Frobenius<sup>1</sup> :

$$\widehat{\mathbf{K}}_F = ab\mathbf{K}_F \text{ et } \widehat{\mathbf{M}}_F = ab\mathbf{M}_F \quad (2.6)$$

$$\mathbf{C}_K = a\mathbf{C} \text{ et } \mathbf{C}_M = b\mathbf{C} \quad (2.7)$$

$$\widehat{\mathbf{P}}_n = \frac{1}{a}\mathbf{P}_n \quad (2.8)$$

$$a = \sqrt{\frac{\|\mathbf{K}_S(\mathbf{0})\|_f}{\|\mathbf{M}_F\|_f}} \text{ et } b = \sqrt{\frac{\|\mathbf{M}_S\|_f}{\|\mathbf{K}_F\|_f}} \quad (2.9)$$

- *Start*: Build a length  $m$  Arnoldi factorization  $\mathbf{A}\mathbf{V}_m = \mathbf{V}_m\mathbf{H}_m + \mathbf{f}_m\mathbf{e}_m^T$  with the starting vector  $\mathbf{v}_1$ .
- *Iteration*: Until convergence
  1. Compute the eigenvalues  $\{\lambda_j : j = 1, 2, \dots, m\}$  of  $\mathbf{H}_m$ . Sort these eigenvalues according to the user selection criterion into a wanted set  $\{\lambda_j : j = 1, 2, \dots, k\}$  and an unwanted set  $\{\lambda_j : j = k + 1, k + 2, \dots, m\}$ .
  2. Perform  $m - k = p$  steps of the QR iteration with the unwanted eigenvalues  $\{\lambda_j : j = k + 1, k + 2, \dots, m\}$  as shifts to obtain  $\mathbf{H}_m\mathbf{Q}_m = \mathbf{Q}_m\mathbf{H}_m^+$ .
  3. *Restart*: Postmultiply the length  $m$  Arnoldi factorization with the matrix  $\mathbf{Q}_k$  consisting of the leading  $k$  columns of  $\mathbf{Q}_m$  to obtain the length  $k$  Arnoldi factorization  $\mathbf{A}\mathbf{V}_m\mathbf{Q}_k = \mathbf{V}_m\mathbf{Q}_k\mathbf{H}_k^+ + \mathbf{f}_k^+\mathbf{e}_k^T$ , where  $\mathbf{H}_k^+$  is the leading principal submatrix of order  $k$  for  $\mathbf{H}_m^+$ . Set  $\mathbf{V}_k \leftarrow \mathbf{V}_m\mathbf{Q}_k$ .
  4. Extend the length  $k$  Arnoldi factorization to a length  $m$  factorization.

FIGURE 2.1 – Méthode d'Arnoldi avec redémarrage implicite implantée dans ARPACK. Figure extraite de [Lehoucq et al., 1998].

1. La norme de Frobenius d'une matrice  $\mathbf{A}$  à coefficients réels est définie par :  $\|\mathbf{A}\|_f = (\text{trace}(\mathbf{A}^t\mathbf{A}))^{1/2}$ .

## 2.3 Solveur MAN - indicateur (MANi)

Le solveur aux valeurs propres proposé pour résoudre le problème (2.2) est basé sur l'introduction d'un indicateur  $\mu$  qui a la particularité de s'annuler aux valeurs propres. Le nouveau problème obtenu est ensuite résolu par la Méthode Asymptotique Numérique [Cochelin *et al.*, 2007]. Initialement proposée par [Boutyourn *et al.*, 2004] pour la détermination des points de bifurcation de problèmes non linéaires, puis reprise dans [Boutyourn *et al.*, 2007] pour la résolution de problèmes de vibrations de structures élastiques, cette technique est ici adaptée dans le cas des vibrations d'un problème en interaction fluide-structure. Les développements qui suivent ont fait l'objet d'un article [Claude *et al.*, 2017a] et d'une communication [Claude *et al.*, 2017b].

### 2.3.1 Introduction de l'indicateur

Un second membre  $\mu\mathbf{F}$ , composé d'un scalaire  $\mu$  et d'un vecteur force aléatoire  $\mathbf{F}$  est introduit dans le problème aux valeurs propres généralisé (2.2) :

$$[\mathbf{K}(\mathbf{0}) - \Omega_{na}\mathbf{M}]\mathbf{U} = \mu\mathbf{F} \quad (2.10)$$

Le scalaire  $\mu$  constitue une nouvelle inconnue du problème (2.10). Dans le cas où le scalaire  $\mu$  est nul, les problèmes (2.2) et (2.10) sont équivalents. Déterminer les couples de solution  $(\mathbf{U}, \Omega_{na})$  revient alors à déterminer les valeurs de  $\Omega_{na}$  pour lesquelles le scalaire  $\mu$  est nul (cf. FIGURE 2.2). Le scalaire  $\mu$  est donc un indicateur. Cet indicateur  $\mu$  étant une inconnue supplémentaire, il est nécessaire d'ajouter une équation, que l'on choisit sous la forme de la condition d'orthogonalisation suivante [Boutyourn *et al.*, 2007] :

$$\langle \mathbf{U} - \mathbf{V}, \mathbf{V} \rangle = 0 \quad (2.11)$$

où  $\langle \bullet, \bullet \rangle$  est le produit scalaire euclidien. Le vecteur  $\mathbf{V}$  est choisi comme vérifiant le problème (2.10) dans le cas particulier où la pulsation propre est nulle ( $\Omega_{na} = 0$ ) et l'indicateur  $\mu$  est arbitrairement choisi égal à 1, c'est-à-dire tel que  $\mathbf{K}(\mathbf{0})\mathbf{V} = \mathbf{F}$ .

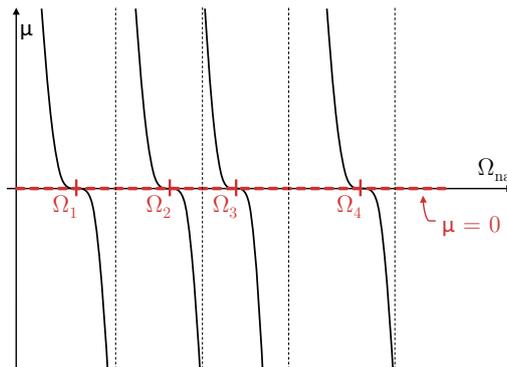


FIGURE 2.2 – Détermination des valeurs propres par la recherche des racines de l'indicateur  $\mu$ .

La méthode la plus simple pour trouver les valeurs de  $\Omega_{na}$  associées à un indicateur  $\mu$  nul serait la méthode "directe", c'est-à-dire calculer les valeurs de  $\mu$  pour des valeurs discrètes de la pulsation  $\Omega_{na}$ . Pour obtenir des valeurs précises de  $\Omega_{na}$  pour lesquelles l'indicateur est nul, il faudrait réaliser un grand nombre de calculs. De plus, comme l'opérateur  $[\mathbf{K}(\mathbf{0}) - \Omega_{na}\mathbf{M}]$  est singulier à la valeur propre, il est très délicat d'obtenir numériquement une valeur précise des pulsations propres.

Nous proposons donc de résoudre le problème conservatif défini par (2.10) et (2.11) par la Méthode Asymptotique Numérique [Cochelin *et al.*, 2007].

### 2.3.2 Perturbation

Afin d'utiliser la méthode de perturbation, la valeur propre  $\Omega_{\text{na}}$  est définie sous la forme d'une somme d'une valeur initiale  $\Omega_0$  et d'un paramètre  $\hat{\Omega}$  :

$$\Omega_{\text{na}} = \Omega_0 + \hat{\Omega} \quad (2.12)$$

La valeur initiale  $\Omega_0$  est supposée connue et est choisie nulle pour le premier pas de calcul. Le problème (2.10) est alors réécrit sous la forme suivante :

$$\left[ \mathbf{K}(\mathbf{0}) - (\Omega_0 + \hat{\Omega})\mathbf{M} \right] \mathbf{U} = \mu \mathbf{F} \quad (2.13)$$

La technique de perturbation est ensuite appliquée sur le problème (2.13). Les inconnues du problème sont cherchées sous la forme d'un développement asymptotique tronqué à l'ordre  $N$ , en fonction d'un paramètre de perturbation  $\hat{\Omega}$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \sum_{i=0}^N \hat{\Omega}^i \mathbf{U}_i \\ \mu &= \sum_{i=0}^N \hat{\Omega}^i \mu_i \end{aligned} \quad (2.14)$$

Les développements (2.14) sont introduits dans (2.13) et (2.11). Après identification des termes selon les puissances du paramètre  $\hat{\Omega}$ , les problèmes linéaires suivants sont obtenus :

**Ordre 0**

$$\begin{cases} [\mathbf{K}(\mathbf{0}) - \Omega_0 \mathbf{M}] \mathbf{U}_0 = \mu_0 \mathbf{F} \\ \langle \mathbf{U}_0, \mathbf{V} \rangle = \langle \mathbf{V}, \mathbf{V} \rangle \end{cases} \quad (2.15)$$

**Ordre  $1 \leq i \leq N$**

$$\begin{cases} [\mathbf{K}(\mathbf{0}) - \Omega_0 \mathbf{M}] \mathbf{U}_i = \mu_i \mathbf{F} + \mathbf{M} \mathbf{U}_{i-1} \\ \langle \mathbf{U}_i, \mathbf{V} \rangle = 0 \end{cases} \quad (2.16)$$

Résoudre le problème (2.13) revient alors à résoudre la suite de problèmes linéaires (2.15) et (2.16). Ces systèmes linéaires ont tous le même opérateur tangent  $[\mathbf{K}(\mathbf{0}) - \Omega_0 \mathbf{M}]$ . Ainsi, une seule triangulation de cet opérateur et  $N + 1$  opérations de descente/remontée<sup>1</sup> de systèmes linéaires sont nécessaires pour obtenir l'ensemble des couples  $(\mathbf{U}_i, \mu_i)$  d'une itération. La solution polynomiale est alors obtenue avec les équations (2.14), où le domaine de validité  $\hat{\Omega}_{\text{max s}}$  est défini par [Cochelin *et al.*, 2007] :

$$\hat{\Omega}_{\text{max s}} = \left( \delta \frac{\|\mathbf{U}_1\|}{\|\mathbf{U}_N\|} \right)^{\frac{1}{N-1}} \quad (2.17)$$

Le paramètre  $\delta$  est à définir par l'utilisateur.

---

1. Cas d'une résolution par la méthode LU.

### 2.3.3 Approximants de Padé

Après obtention de la solution polynomiale, il est possible de calculer la représentation par approximants de Padé [Padé, 1892][Baker et Graves-Morris, 1996]. Il s'agit ici d'améliorer la solution polynomiale en la remplaçant par une représentation rationnelle. Cette technique, largement utilisée en complément de la Méthode Asymptotique Numérique, permet d'augmenter le domaine de validité de la solution polynomiale [Cochelin *et al.*, 2007] [Najah *et al.*, 1998]. En effet, les approximants de Padé sont connus pour avoir, en général, un domaine de validité plus grand que celui des séries polynomiales (cf. FIGURE 2.3(c)).

La représentation de la solution par les approximants de Padé s'écrit :

$$\mathbf{U}_{\text{Padé}}(\hat{\Omega}) = \mathbf{U}_0 + \sum_{k=1}^M \frac{\Delta_{(M-k)}(\hat{\Omega})}{\Delta_{(M)}(\hat{\Omega})} \hat{\Omega}^k \mathbf{U}_k \quad \text{avec } M = N - 1 \quad (2.18)$$

$$\mu_{\text{Padé}}(\hat{\Omega}) = \mu_0 + \sum_{k=1}^M \frac{\Delta_{(M-k)}(\hat{\Omega})}{\Delta_{(M)}(\hat{\Omega})} \hat{\Omega}^k \mu_k \quad (2.19)$$

Les polynômes  $\Delta_k$  sont définis selon les équations suivantes, avec  $\alpha_{ij}$  les coefficients issus du procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt appliqué aux vecteurs  $\mathbf{U}_p$  [Elhage-Hussein *et al.*, 2000] :

$$\Delta_k(\hat{\Omega}) = 1 + \sum_{l=1}^k \hat{\Omega}^l B_l \quad (2.20)$$

$$B_1 = -\frac{\alpha_{M+1,M}}{\alpha_{M,M}} \quad (2.21)$$

$$B_m = -\frac{\alpha_{M+1,M+1-m} + \sum_{l=1}^{m-1} \alpha_{M+1-l,M+1} B_l}{\alpha_{M+1-m,M+1-m}} \quad \text{pour } 2 \leq m \leq M \quad (2.22)$$

Les expressions rationnelles (2.18) et (2.19) ont toutes le même dénominateur  $\Delta_{(M)}$ , ce qui permet de limiter le nombre de pôles. De plus, cet algorithme de calcul des approximants de Padé est robuste puisque les formules (2.20), (2.21) et (2.22) sont explicites et ne nécessitent pas d'inversion de matrices [Cochelin *et al.*, 2007][Elhage-Hussein *et al.*, 2000]. En revanche, la qualité de l'approximation peut être influencée par le choix de l'algorithme pour l'orthogonalisation de Gram-Schmidt, qui est un procédé assez instable numériquement [Damil *et al.*, 2004]. Malgré tout, les approximants de Padé s'avèrent en général plus proches de la solution exacte que la solution polynomiale [Cochelin *et al.*, 2007].

Enfin, le temps de calcul des approximants de Padé est négligeable par rapport au temps de calcul requis pour la factorisation de l'opérateur tangent  $[\mathbf{K}(\mathbf{0}) - \Omega_0 \mathbf{M}]$ . Seul le temps de calcul de l'orthogonalisation de Gram-Schmidt peut être significatif dans le cas de problèmes à grand nombre de degrés de liberté, mais cette opération d'orthogonalisation peut être optimisée en gardant en mémoire certains termes d'un ordre à l'autre au cours d'un même calcul [Cadou *et al.*, 2009].

### 2.3.4 Valeurs propres

Les valeurs propres  $\Omega_{\text{na}}$  correspondent aux valeurs de  $\hat{\Omega}$  pour lesquelles l'indicateur  $\mu$  est nul (cf. FIGURE 2.2). Trouver les valeurs propres revient alors à chercher les racines de (2.19), autrement dit, à déterminer les racines  $\Omega_r$  du numérateur  $\Delta_{(M-k)}$ .

Afin d'être certain d'obtenir toutes les racines de  $\Delta_{(M-k)}$ , deux algorithmes, décrits dans [Press *et al.*, 1992], sont utilisés :

- l'algorithme de Bairstow, dont l'explication peut être trouvée dans [Elhage-Hussein *et al.*, 2000];
- et un algorithme qui reconstruit et résout un problème aux valeurs propres de petites dimensions en se basant sur le fait que les valeurs propres sont les solutions d'un polynôme caractéristique (ici le numérateur des approximants de Padé  $\Delta_{(M-k)}$ ).

Cependant, toutes les racines de  $\Delta_{(M-k)}$  ne sont pas des valeurs propres physiques de (2.2). En effet, pour un polynôme d'ordre suffisamment élevé, on trouvera généralement une ou deux racines réelles "physiques", qui seront associées à une valeur propre, mais également des racines complexes et des racines réelles "non physiques", correspondant à des estimations de valeurs propres trop "lointaines" pour être retenues. De plus, le polynôme  $\Delta_{(M-k)}$  n'est pas une solution exacte, mais une estimation sur laquelle des erreurs numériques se sont accumulées.

Afin de vérifier si une racine  $\Omega_r$  est bien une valeur propre de (2.2), le critère suivant est défini [Boutyour *et al.*, 2007] :

$$\frac{(\mathbf{U}_r^t \mathbf{K}(\mathbf{0}) \mathbf{U}_r - \Omega_r^t \mathbf{U}_r \mathbf{M} \mathbf{U}_r)}{\Omega_r} \leq \zeta \quad (2.23)$$

où  $\mathbf{U}_r$  est le vecteur calculé en introduisant la racine  $\Omega_r$  dans (2.18). Le paramètre  $\zeta$  correspond à la tolérance sur la qualité de la solution et doit être défini par l'utilisateur ( $10^{-6}$  pour les résultats présentés ici).

### 2.3.5 Continuation

Les développements précédents permettent de calculer une partie de la courbe solution (indicateur en fonction de la pulsation, cf. FIGURE 2.3(a)). Dans cette partie de courbe, aucune, une ou plusieurs valeurs propres ont pu être détectées selon les algorithmes mentionnés précédemment (cf. SECTION 2.3.4). Pour déterminer l'ensemble des valeurs propres recherchées, il faut calculer une partie supplémentaire de la courbe solution en utilisant une méthode de continuation (cf. FIGURE 2.3(b)). Cette dernière consiste à appliquer la méthode décrite précédemment (MAN) en changeant le point de départ  $\Omega_0$ . Cette nouvelle valeur  $\Omega_0$  est déterminée soit en fonction du domaine de validité des approximants de Padé soit en fonction de la valeur de la plus grande valeur propre trouvée.

Si une valeur propre  $\Omega_r$  a été trouvée, il est proposé la méthode de redémarrage suivante : pour le pas de continuation suivant, la valeur initiale  $\Omega_0$  est définie telle que :

$$\Omega_0 = d * \Omega_r \quad (2.24)$$

avec  $d$  un paramètre à définir par l'utilisateur. Il permet de décaler le problème afin de trouver les valeurs propres suivantes. Dans les résultats présentés dans cette thèse, ce paramètre est choisi égal à 1,01, ce qui correspond à un décalage de 1%. Cette technique de redémarrage permet de se placer après les valeurs infinies que l'on peut observer sur les courbes pulsation versus indicateur (cf. FIGURE 2.2). Ce comportement de l'indicateur au voisinage d'une singularité (valeur propre ici) avait été démontré dans les travaux de [Boutyour *et al.*, 2004]. Les auteurs avaient notamment montré l'apparition d'un pôle des approximants de Padé tout de suite après un zéro de l'indicateur. Par conséquent, pour éviter des difficultés dans l'application de la MAN pour calculer l'indicateur au voisinage d'une valeur propre, le nouveau point  $\Omega_0$  pour la méthode de continuation est choisi à l'aide de l'expression (2.24).

Si aucune valeur propre n'a été trouvée lors du pas de calcul précédent, le domaine de validité des approximants de Padé  $\hat{\Omega}_{\max}$  est donné par [Elhage-Hussein *et al.*, 2000] :

$$\frac{\| \mathbf{U}_{\text{Padé}, N}(\hat{\Omega}_{\max}) - \mathbf{U}_{\text{Padé}, N-1}(\hat{\Omega}_{\max}) \|}{\| \mathbf{U}_{\text{Padé}, N}(\hat{\Omega}_{\max}) - \mathbf{U}_0 \|} \approx \delta_1 \quad (2.25)$$

où  $\delta_1$  est un paramètre de précision défini par l'utilisateur.

Les représentations rationnelles (2.18) et (2.19) peuvent avoir des pôles dans le domaine de validité de la série. Les racines du dénominateur  $\Delta_{(M)}$  sont donc calculées par l'algorithme de Bairstow (ou autre technique) et on désigne par  $r$  la plus petite racine réelle positive [Cochelin *et al.*, 2007] :

- Si  $r$  appartient à l'intervalle  $[0, \hat{\Omega}_{\max s}]$ , un pôle est présent dans le domaine de validité de la série polynomiale et dans ce cas, c'est cette dernière représentation de la solution qui est retenue. Le nouveau point initial  $\Omega_0$  est alors  $\Omega_0 + \hat{\Omega}_{\max s}$ .
- Sinon, le domaine de validité  $\hat{\Omega}_{\max}$  est recherché dans l'intervalle  $[\hat{\Omega}_{\max s}, r]$  par dichotomie et la représentation par approximants de Padé est utilisée. Pour le pas de continuation suivant, la valeur initiale  $\Omega_0$  vaut alors  $\Omega_0 + \hat{\Omega}_{\max}$ .

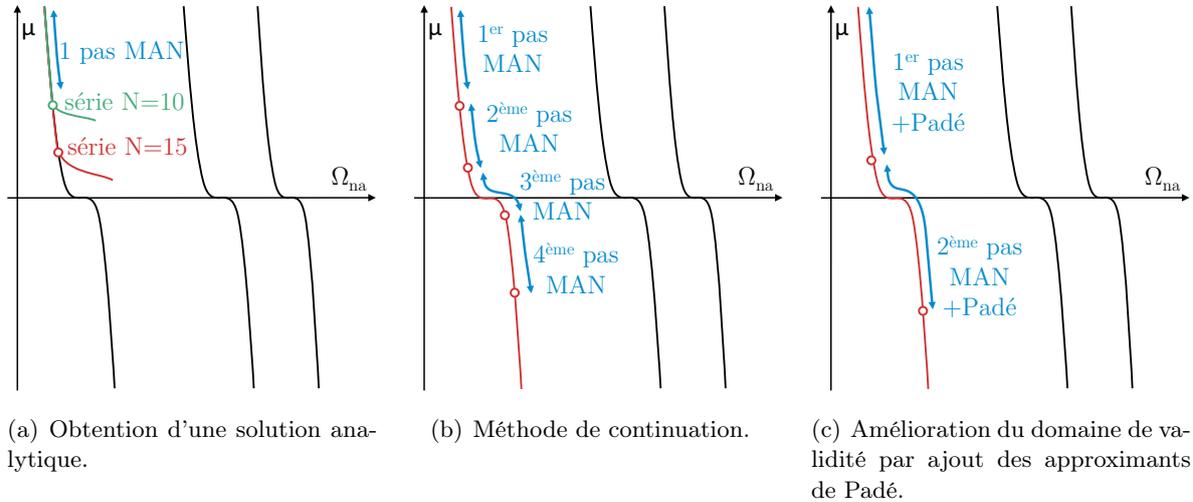


FIGURE 2.3 – Principe de la Méthode Asymptotique Numérique et des approximants de Padé.

## 2.4 Solveur MAN - analyse des termes de série (MANa)

Le deuxième solveur aux valeurs propres proposé est basé sur l'analyse des termes de série MAN pour un problème de vibrations forcées. Le comportement particulier de la série au voisinage des points singuliers est ici exploité pour extraire les valeurs propres et les modes propres du système conservatif. Les développements qui suivent ont fait l'objet d'une publication [Claude *et al.*, 2018b].

### 2.4.1 Problème conservatif forcé

Le problème des vibrations forcées est à présent étudié. La force extérieure appliquée au système fluide-structure est choisie harmonique :

$$\mathbf{F}(t) = \mathbf{F}\cos(\omega t) \quad (2.26)$$

où  $\mathbf{F}$  et  $\omega$  représentent respectivement l'amplitude et la pulsation.

La réponse du système à cette sollicitation harmonique est également harmonique :

$$\mathbf{U}(t) = \mathbf{U}\cos(\omega t) \quad (2.27)$$

Le problème initial (2.2) devient alors :

$$[\mathbf{K}(\mathbf{0}) - \omega^2\mathbf{M}]\mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (2.28)$$

ou, en notant  $\Omega_{\text{na}} = \omega^2$  :

$$[\mathbf{K}(\mathbf{0}) - \Omega_{\text{na}}\mathbf{M}]\mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (2.29)$$

On note symboliquement  $\mathbf{X}$  la nouvelle inconnue vectorielle. Elle est cherchée sous la forme d'un développement en série tronqué à l'ordre  $N$ , en fonction des puissances d'un paramètre de perturbation  $a$  :

$$\mathbf{X} = \begin{Bmatrix} \mathbf{U}(a) \\ \Omega_{\text{na}}(a) \\ \omega(a) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_0 \\ \Omega_0 \\ \omega_0 \end{Bmatrix} + \sum_{i=1}^N a^i \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_i \\ \Omega_i \\ \omega_i \end{Bmatrix} \quad (2.30)$$

Une équation supplémentaire permet de définir le paramètre de perturbation  $a$ , selon un pilotage en "pseudo longueur d'arc" :

$$a = \langle \mathbf{U} - \mathbf{U}_0, \mathbf{U}_1 \rangle + (\Omega_{\text{na}} - \Omega_0)\Omega_1 \quad (2.31)$$

En introduisant les développements asymptotiques (2.30) dans les équations (2.29) et (2.31), et en identifiant suivant les puissances de  $a$ , le problème à résoudre à chaque ordre est :

#### Ordre 0

$$\begin{cases} \mathbf{L}_t^0 \mathbf{U}_0 = \mathbf{F} & \text{avec } \mathbf{L}_t^0 = \mathbf{K}(\mathbf{0}) - \Omega_0 \mathbf{M} \\ \omega_0 = \sqrt{\Omega_0} \end{cases} \quad (2.32)$$

La pulsation  $\Omega_0$  est supposée connue. Au premier pas de calcul, l'algorithme est initialisé en posant  $\Omega_0 = 0$ , ce qui revient à résoudre le problème statique  $\mathbf{K}(\mathbf{0})\mathbf{U}_0 = \mathbf{F}$ .

Afin de faciliter la résolution, une variable intermédiaire  $\mathbf{U}_i^*$  est introduite. Les expressions liant les pulsations  $\Omega_i$  et  $\omega_i$  sont disponibles en ANNEXE B.1.

#### Ordre 1

$$\begin{cases} \mathbf{L}_t^0 \mathbf{U}_1^* = \mathbf{M}\mathbf{U}_0 \\ \Omega_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \langle \mathbf{U}_1^*, \mathbf{U}_1^* \rangle}} \\ \mathbf{U}_1 = \Omega_1 \mathbf{U}_1^* \\ \omega_1 = \frac{\Omega_1}{2\omega_0} \end{cases} \quad (2.33)$$

Ordre  $2 \leq i \leq N$

$$\begin{cases} \mathbf{L}_t^0 \mathbf{U}_i^* = \sum_{r=1}^{i-1} \Omega_r \mathbf{M} \mathbf{U}_{i-r} \\ \Omega_i = -\Omega_1^2 \langle \mathbf{U}_i^*, \mathbf{U}_1^* \rangle \\ \mathbf{U}_i = \Omega_i \mathbf{U}_1^* + \mathbf{U}_i^* \\ \omega_i = \frac{1}{2\omega_0} \left( \Omega_i - \sum_{r=1}^{i-1} \omega_r \omega_{i-r} \right) \end{cases} \quad (2.34)$$

Le domaine de validité des séries est défini par le critère (2.17). La solution obtenue peut être améliorée par l'utilisation des approximants de Padé (cf. SECTION 2.3.3), et l'ensemble de la courbe réponse est obtenue en utilisant la méthode de continuation, telle que décrite en SECTION 2.3.5.

A ce stade de l'étude, le problème des vibrations forcées est résolu. Il reste cependant à montrer comment obtenir les valeurs propres du problème étudié à partir des solutions obtenues. Pour ce faire, on se propose dans un premier temps d'étudier les courbes de réponse du système aux vibrations forcées.

#### 2.4.2 Premiers résultats : accumulation de pas au voisinage des pulsations propres

Un premier test est effectué sur un exemple classique tiré de [Bermúdez et Rodríguez, 1994] (cf. FIGURE 2.9). Il s'agit d'une cavité remplie d'air ou d'eau, sur laquelle une force  $\mathbf{F}$  est appliquée en un point du domaine solide.

Les courbes de réponse obtenues sont présentées FIGURE 2.4. Dans le cas d'une cavité remplie d'air, l'intervalle en pulsation  $[0; 2450]$  rad/s est obtenu avec 99 pas de continuation, tandis que pour une cavité remplie d'eau, 98 pas sont nécessaires pour étudier l'intervalle en pulsation  $[0; 3100]$  rad/s. En comparant les valeurs des pulsations propres présentées TABLEAU 2.2 avec les courbes de réponse de la FIGURE 2.4, une accumulation de pas de calcul peut être remarquée au voisinage des pulsations propres. Ainsi, dans le cas de la cavité remplie d'air (cf. FIGURE 2.4(a)), les pulsations propres  $\omega_1 = 668$  rad/s,  $\omega_2 = 1068$  rad/s ou encore  $\omega_3 = 1510$  rad/s peuvent être identifiées. Dans le cas de la cavité remplie d'eau (cf. FIGURE 2.4(b)), on retrouve  $\omega_1 = 646$  rad/s,  $\omega_2 = 2144$  rad/s...

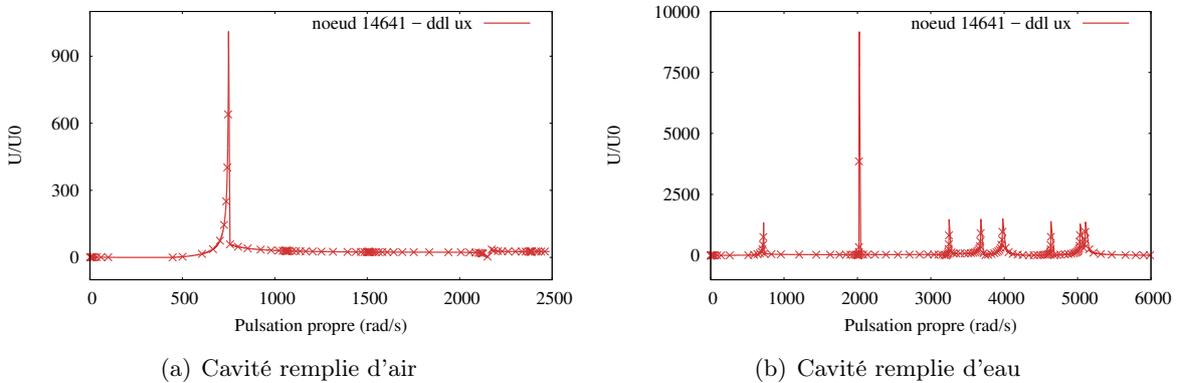
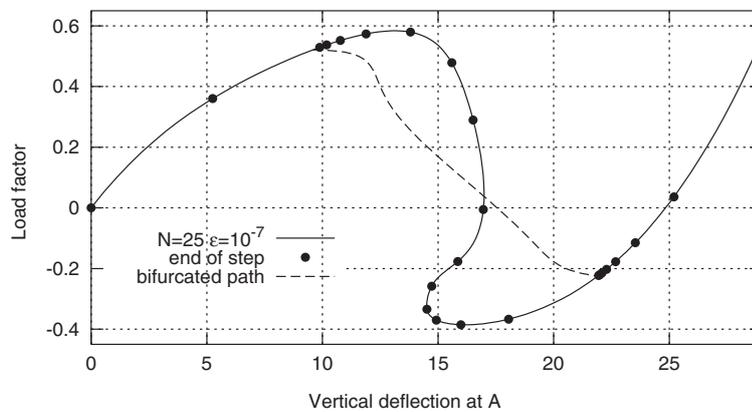
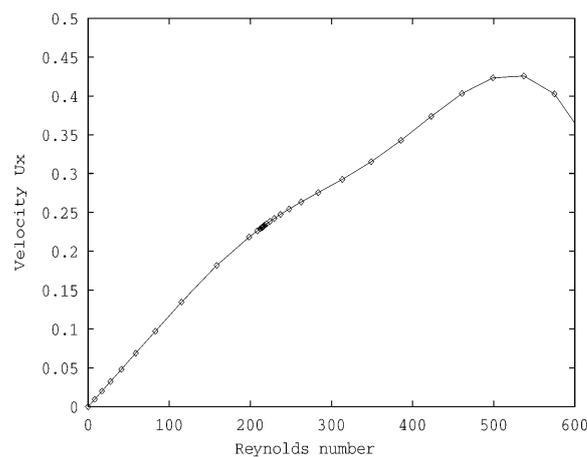


FIGURE 2.4 – Problème conservatif forcé -  $N = 15$  - Courbe de réponse aux vibrations forcées du problème conservatif. Le déplacement est relevé au point d'application de la force (degré de liberté  $u_x$ ). Chaque croix correspond à la fin d'un pas de calcul.

Ces courbes de réponse semblent montrer qu'au voisinage des pulsations propres, la MAN "réagit" en diminuant la longueur des pas de continuation, provoquant ainsi une accumulation de pas. Ceci peut être considéré comme un inconvénient car cela augmente les temps de calculs (chaque pas MAN demandant une triangulation de matrice), mais également comme un avantage car les valeurs propres peuvent être visuellement estimées. Ce comportement des développements asymptotiques est classique au voisinage des points singuliers. La FIGURE 2.5 présente des exemples d'accumulation de pas sur des courbes de réponse extraites de la littérature. Cette particularité peut être mise à profit pour détecter les bifurcations stationnaires dans les écoulements de fluides visqueux newtonniens [Cochelin et Medale, 2013] [Guevel *et al.*, 2018] ou non newtonniens [Jawadi *et al.*, 2013], et les bifurcation de Hopf de poutres en rotation [Bekhoucha *et al.*, 2016]. Nous proposons ici de tirer profit de ce comportement pour détecter et extraire les valeurs propres et modes propres du système en interaction fluide-structure.



(a) Flambage d'une coque cylindrique. Figure extraite de [Baguet et Cochelin, 2003].



(b) Bifurcation dans un écoulement dans une expansion soudaine et une contraction soudaine. Figure extraite de [Cadou *et al.*, 2006].

FIGURE 2.5 – Illustration du phénomène d'accumulation de pas au voisinage d'un point singulier sur des exemples tirés de la littérature.

### 2.4.3 Présence d'une suite géométrique

Dans [Cochelin et Medale, 2013], les auteurs montrent que le développement asymptotique (2.30) peut être décomposé en deux parties, faisant apparaître un terme d'erreur  $\mathbf{X}_{\text{erreur}}$  :

$$\mathbf{X} = \hat{\mathbf{X}} + \mathbf{X}_{\text{erreur}} \quad (2.35)$$

où  $\hat{\mathbf{X}}$  est la solution dite "optimale", c'est-à-dire sans erreur de calcul, et  $\mathbf{X}_{\text{erreur}}$  représente les erreurs dues aux défauts ou aux approximations numériques.

Après analyse de l'influence de défauts ou d'imperfections sur le comportement des développements asymptotiques, [Cochelin et Medale, 2013] ont montré que le terme d'erreur est constitué d'une suite géométrique de raison  $1/a_0$  :

$$\mathbf{X}_{\text{erreur}} = \left[ \frac{a}{a_0} + \dots + \left( \frac{a}{a_0} \right)^N \right] a_0^N \mathbf{X}_N \quad (2.36)$$

où  $a_0^N \mathbf{X}_N$  est le facteur d'échelle de la suite géométrique.

Pour un nombre de termes  $N$  suffisamment grand et en négligeant le terme d'ordre élevé  $(a/a_0)^N$ , l'expression (2.36) devient :

$$\mathbf{X}_{\text{erreur}} = \left[ \frac{\frac{a}{a_0}}{1 - \frac{a}{a_0}} \right] a_0^N \mathbf{X}_N \quad (2.37)$$

Si  $a = a_0$ , l'équation (2.37) est singulière. En identifiant une suite géométrique dans les séries (2.30), la valeur de la singularité  $a_0$  la plus proche de  $X_0$  peut donc être déterminée. Plus précisément, pour une solution  $X_0$  suffisamment proche d'un point singulier,  $a_0$  représente la distance entre ce point solution  $X_0$  et le point singulier le plus proche.

Au voisinage d'une singularité, le domaine de validité de la série MAN ne peut pas être plus grand que cette distance  $a_0$ . En théorie, cette singularité ne devrait donc pas pouvoir être dépassée. En effet, plus la singularité est proche, et plus le terme d'erreur est important par rapport au terme optimal. Ainsi, plus la singularité est proche, et plus le domaine de validité est restreint car la solution est "polluée" par ce terme d'erreur [Guevel, 2016]. La singularité se rapproche, mais de moins en moins vite car cette même singularité limite le domaine de validité, ce qui explique l'accumulation de pas de calcul observée sur la courbe réponse [Jawadi et al., 2013]. Dans la pratique, les erreurs numériques permettent généralement de dépasser la singularité.

### 2.4.4 Détection d'une suite géométrique et "nettoyage" des séries

Déterminer une singularité, ici une valeur propre, revient donc à détecter l'apparition d'une suite géométrique dans les séries polynomiales (2.30). Pour ce faire, [Cochelin et Medale, 2013] proposent le critère suivant :

Pour  $N - 3 \leq n \leq N - 1$  calculer :

$$\beta_n = \frac{\langle \mathbf{X}_n, \mathbf{X}_N \rangle}{\langle \mathbf{X}_N, \mathbf{X}_N \rangle} \quad \text{et} \quad \mathbf{X}_n^\perp = \mathbf{X}_n - \beta_n \mathbf{X}_N \quad (2.38)$$

Si :

$$\sum_{n=N-3}^{N-2} \left( \frac{|\beta_n|^{1/(N-n)}}{|\beta_{N-1}|} - 1 \right)^2 \leq \gamma_1 \quad \text{et} \quad \sum_{n=N-3}^{N-1} \left( \frac{\|\mathbf{X}_n^\perp\|}{\|\mathbf{X}_n\|} \right) \leq \gamma_2 \quad (2.39)$$

alors une suite géométrique de raison  $\beta_{N-1}$  est détectée.

Les valeurs des deux paramètres  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont respectivement choisies égales à  $10^{-3}$  et  $10^{-6}$  selon les résultats présentés dans [Cochelin et Medale, 2013].

Après identification de la distance à la singularité  $a_0 = 1/\beta_{N-1}$ , les termes de la série optimale  $\hat{\mathbf{X}}_n$  peuvent être calculés selon la relation suivante [Cochelin et Medale, 2013] :

$$\hat{\mathbf{X}}_n = \mathbf{X}_n - a_0^{(N-n)} \mathbf{X}_N \quad \text{pour } 1 \leq n \leq N - 1 \quad (2.40)$$

La solution "nettoyée" de la série géométrique est alors calculée à partir des termes de la série optimale (2.40) :

$$\mathbf{X}_c = \mathbf{X}_0 + \sum_{i=1}^{N-1} a_0^i \hat{\mathbf{X}}_i \quad (2.41)$$

A noter que cette solution corrigée a un domaine de validité supérieur à celui de la série polynomiale "polluée", ce qui permet de diminuer le nombre de pas de continuation nécessaires pour passer la singularité.

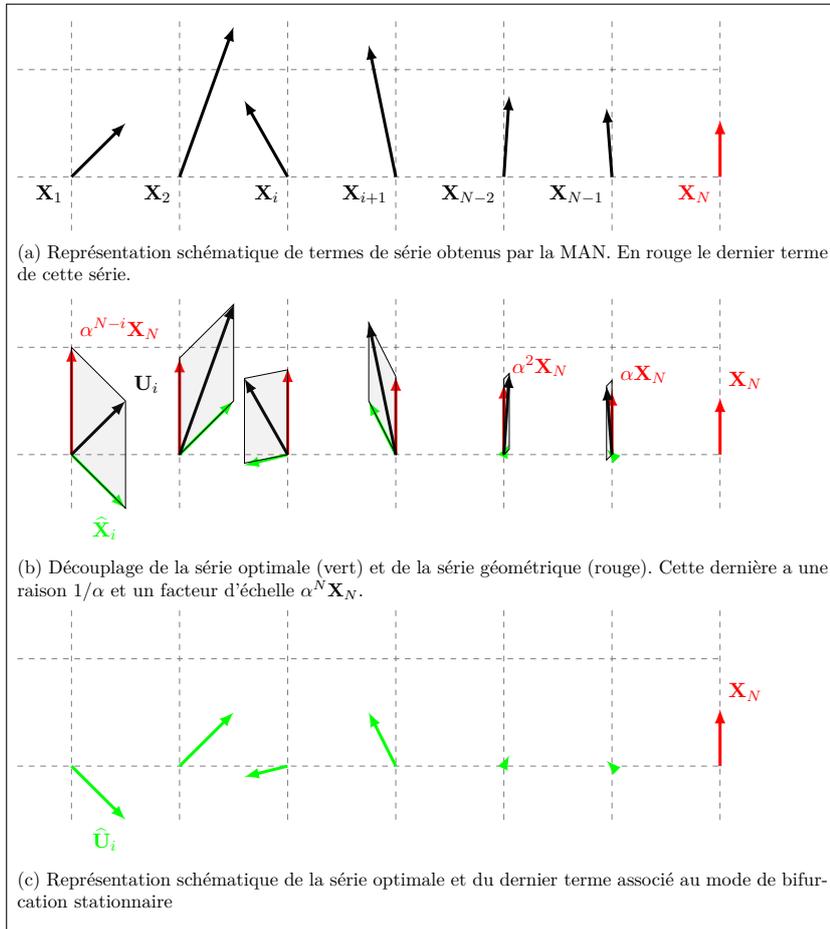


FIGURE 2.6 – Description schématique du découplage des séries optimale et géométrique qui composent les termes des séries MAN au voisinage d'une singularité. Dans notre cas,  $\alpha = a_0$ . Figure extraite de [Guevel, 2016].

### 2.4.5 Extraction des valeurs et des modes propres

Si une suite géométrique est détectée, la valeur  $a_0$  est exactement la distance à la valeur propre recherchée. La valeur propre peut donc être calculée avec (2.30), où  $a$  vaut  $a_0$ . Les modes propres peuvent être déterminés de deux manières différentes :

- En théorie, le mode propre correspond à la solution polynomiale en  $a_0$  (2.41), c'est-à-dire à la solution nettoyée  $\mathbf{X}_c$ .
- Dans la pratique, il apparaît que la solution "nettoyée"  $\mathbf{X}_c$  ne correspond pas forcément au mode propre attendu. Une deuxième méthode, basée sur les résultats présentés dans [Guevel, 2016] et [Guevel et al., 2018], peut alors être utilisée. Dans le cadre de travaux sur les bifurcations dans un écoulement, les auteurs de [Guevel et al., 2018], montrent que le mode de bifurcation émerge dans les termes de la série MAN. L'observation de la série MAN montre que les premiers termes de la série ( $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2 \dots$ ) sont très différents du mode recherché, ce qui n'est pas le cas des derniers termes. Pour un ordre de troncature  $N$  suffisamment élevé, le terme  $\mathbf{U}_N$  est très semblable au mode de bifurcation attendu. Les modes propres peuvent être obtenus de la même manière, en analysant les termes de la série (2.41). La qualité des modes est contrôlée en calculant le résidu, défini par :

$$\mathbf{R}(\mathbf{U}, \Omega) = [\mathbf{K}(\mathbf{0}) - \Omega \mathbf{M}] \mathbf{U} \quad (2.42)$$

Le calcul de ce résidu permet de choisir le terme de série MAN qui correspond au mode propre recherché.

### 2.4.6 Continuation

Le domaine de validité  $a_{\max s}$  de la série MAN est défini de la même façon que  $\hat{\Omega}_{\max s}$  dans la relation (2.17). Dans ce cas, l'équation s'écrit :

$$a_{\max s} = \left( \delta \frac{\|\mathbf{U}_1\|}{\|\mathbf{U}_N\|} \right)^{\frac{1}{N-1}} \quad (2.43)$$

Le morceau de branche solution est alors défini selon (2.30), où  $a$  vaut  $a_{\max s}$ , et le pas de continuation suivant est initialisé par :

$$\Omega_0^{(k+1)} = \Omega_0^{(k)} + \sum_{i=0}^N (a_{\max s})^i \hat{\Omega}_i \quad (2.44)$$

où  $\hat{\Omega}_i$  sont les termes de la série optimale (2.40). Si aucune suite géométrique n'a été trouvée, les termes  $\Omega_i$  de la série MAN sont utilisés à la place des termes optimaux  $\hat{\Omega}_i$ .

## 2.5 Algorithmes des solveurs proposés

Dans cette section, les solveurs aux valeurs propres proposés précédemment sont résumés sous forme d'organigrammes. La FIGURE 2.7 présente le solveur MANi, et la FIGURE 2.8 présente le solveur MANa.

L'ordre de troncature des séries MAN est noté  $N$ . La valeur  $k$  représente le nombre de pas de continuation. Les algorithmes s'arrêtent quand le nombre maximal de pas de continuation autorisés  $k_{\max}$  est atteint, ou lorsque le nombre de valeurs propres demandé est atteint.

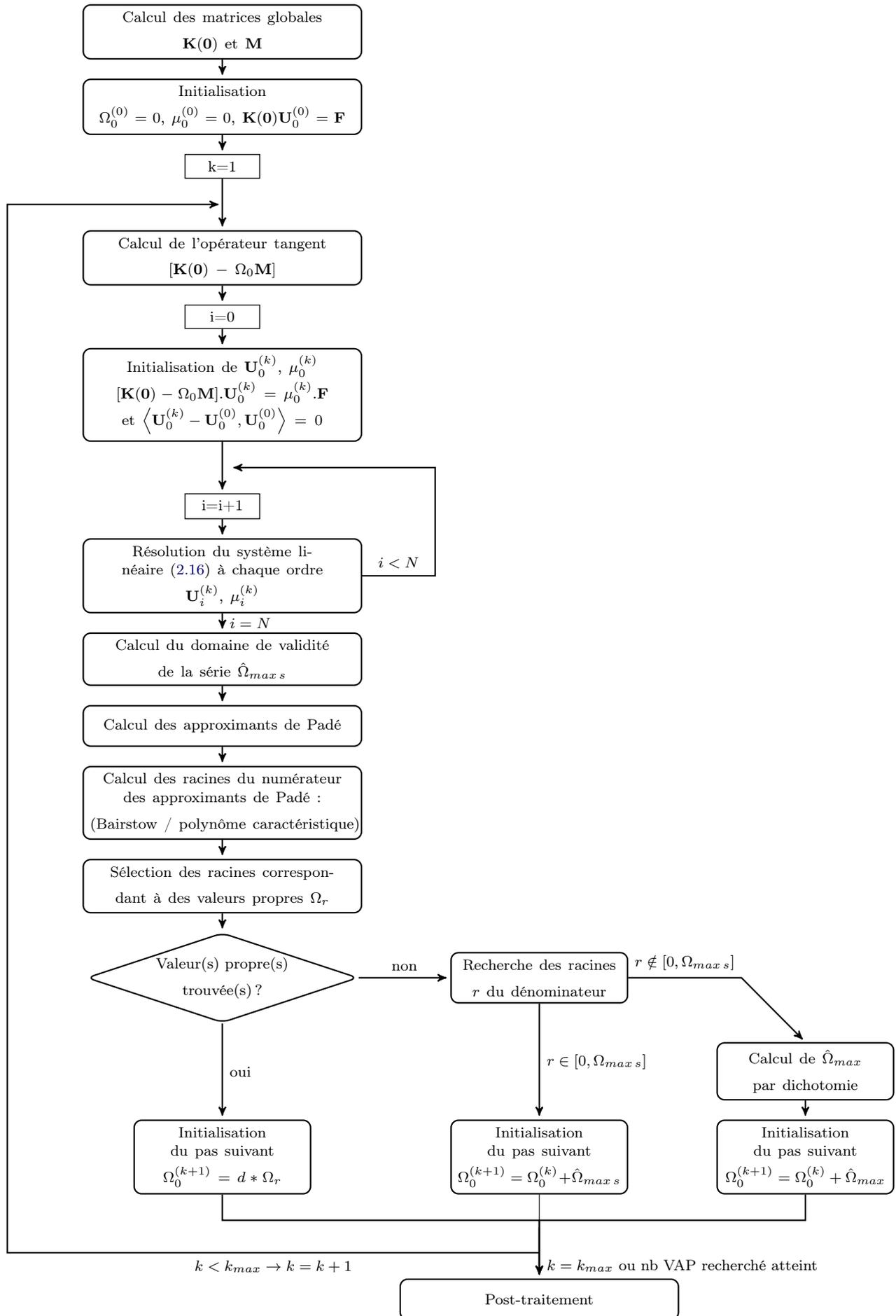


FIGURE 2.7 – Algorithme du solveur MAN - indicateur (MANi).

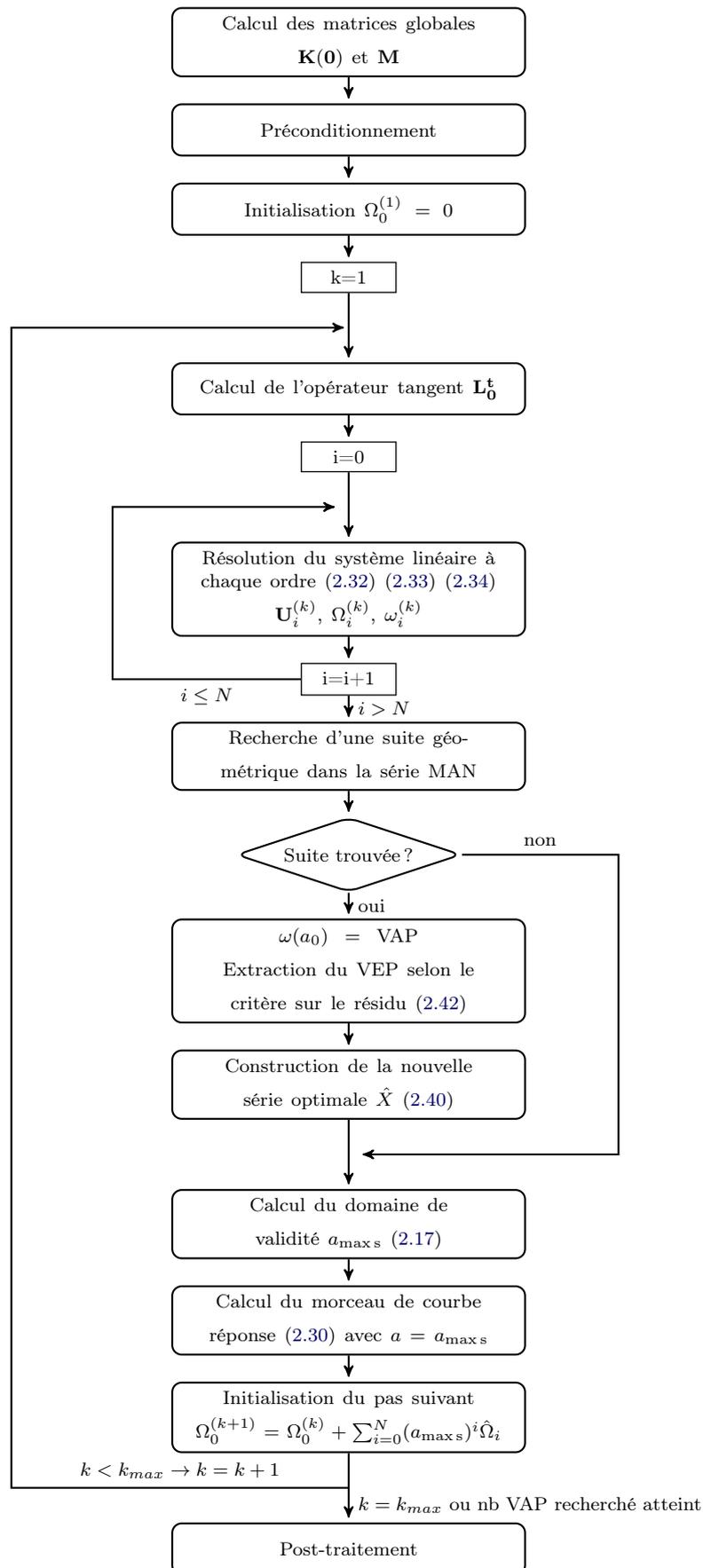


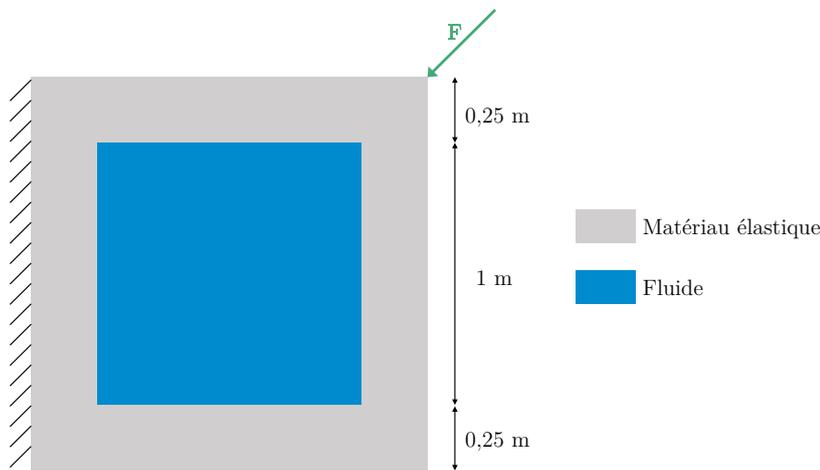
FIGURE 2.8 – Algorithme du solveur MAN - analyse des séries (MANa).

## 2.6 Résultats numériques

Les solveurs aux valeurs propres présentés précédemment sont validés sur un cas test issu de la littérature [Bermúdez et Rodríguez, 1994]. Après étude du comportement des solveurs MANi et MANa, leurs performances sont comparées avec celles du solveur classique ARPACK.

### 2.6.1 Description du cas test

**Géométrie et paramètres matériaux** Les algorithmes proposés sont validés à l'aide du cas test issu de [Bermúdez et Rodríguez, 1994]. Il s'agit d'une cavité en acier remplie d'un fluide parfait compressible (air ou eau). Le domaine solide est considéré élastique et son comportement est modélisé par la loi de Hooke. Les caractéristiques géométriques et les propriétés mécaniques des matériaux sont données FIGURE 2.9. Dans le cas du solveur MANa, une force extérieure  $\mathbf{F}$  orientée à  $45^\circ$  par rapport à l'horizontale et de norme  $\|\mathbf{F}\| = 1414\text{N}$  est appliquée sur le coin supérieur droit de la cavité.



(a) Caractéristiques géométriques et conditions limites.

Domaine solide	Domaine fluide	
<i>Acier</i>	<i>Air</i>	<i>Eau</i>
$E_a = 1,44 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$	$c_F = 340 \text{ m.s}^{-1}$	$c_F = 1430 \text{ m.s}^{-1}$
$\rho_a = 7700 \text{ kg.m}^{-3}$	$\rho_F = 1 \text{ kg.m}^{-3}$	$\rho_F = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$
$\nu_a = 0,35$		

(b) Paramètres matériaux.

FIGURE 2.9 – Problème conservatif étudié. La force extérieure  $\mathbf{F}$  est appliquée uniquement pour le solveur basé sur l'analyse des séries en vibrations forcées.

**Discrétisation - Maillage** Les domaines solide et fluide sont discrétisés avec les éléments finis "2DFS" présenté au CHAPITRE 1. Le choix du maillage est discuté en SECTION 2.6.2.1.

**Paramètres de calcul** Pour le solveur MANi, le paramètre de précision  $\zeta$  vaut  $10^{-6}$ , et l'ordre de troncature  $N$  est de 20. Le nombre de pas de continuation maximum est fixé à 100. Le paramètre  $\delta$  vaut  $10^{-1}$  (calcul du domaine de validité des séries), et  $\delta_1$  vaut  $10^{-1}$  (domaine de validité de la représentation par approximants de Padé).

Pour le solveur MANa, les paramètres  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  valent respectivement  $10^{-3}$  et  $10^{-6}$ , comme proposé dans [Cochelin et Medale, 2013]. L'ordre de troncature  $N$  est de 20.

## 2.6.2 Validation des algorithmes

Une étude de convergence est menée afin de choisir un maillage pour la suite des tests numériques. Les algorithmes proposés sont ensuite validés par comparaison avec les résultats obtenus avec le solveur classique ARPACK et les résultats issus de la littérature [Bermúdez et Rodríguez, 1994].

### 2.6.2.1 Convergence

L'éléments fini "2DFS" utilisé pour discrétiser le problème faisant appel à une interpolation polynomiale linéaire, il convient de vérifier la convergence des résultats. Les résultats présentés ici ont été obtenus avec les solveurs MANi et MANa, sur les maillages présentés TABLEAU 2.1.

Comme le montre la FIGURE 2.10, les résultats convergent rapidement pour les deux solveurs proposés, quels que soient le type de mode (solide/fluide/couplé) et le fluide considéré (air ou eau). Le maillage le plus fin est retenu pour la suite de l'étude afin d'avoir un nombre de degrés de liberté suffisamment élevé et cohérent avec les résultats présentés au CHAPITRE 3. Il s'agit d'un maillage comportant 14 400 éléments, dont 6400 éléments fluides et 8000 éléments solides (cf. FIGURE 2.11). Ce maillage possède 14 641 nœuds dont 6241 nœuds fluides, 8080 nœuds solides et 320 nœuds d'interface, soit au total 23 361 degrés de liberté.

Nb éléments élastiques	2	3	4	5	6	8
Nb éléments fluides	8×8	12×12	16×16	20×20	24×24	32×32
Taille d'un élément (m)	0,125	0,083	0,063	0,050	0,042	0,031
Nb total éléments	144	324	576	900	1296	2304
Nb total nœuds	169	361	625	961	1369	2401
Nb ddls	321	649	1089	1641	2305	3969
Nb éléments élastiques	10	12	14	16	18	20
Nb éléments fluides	40×40	48×48	56×56	64×64	72×72	80×80
Taille d'un élément (m)	0,025	0,021	0,018	0,016	0,014	0,013
Nb total éléments	3600	5184	7056	9216	11664	14400
Nb total nœuds	3721	5329	7225	9409	11881	14641
Nb ddls	6081	8641	11649	15105	19009	23361

TABLEAU 2.1 – Caractéristiques des maillages testés pour étudier la convergence des résultats obtenus par les solveurs MANi et MANa. Le nombre d'éléments élastiques indiqué correspond au nombre d'éléments dans l'épaisseur d'une couche.

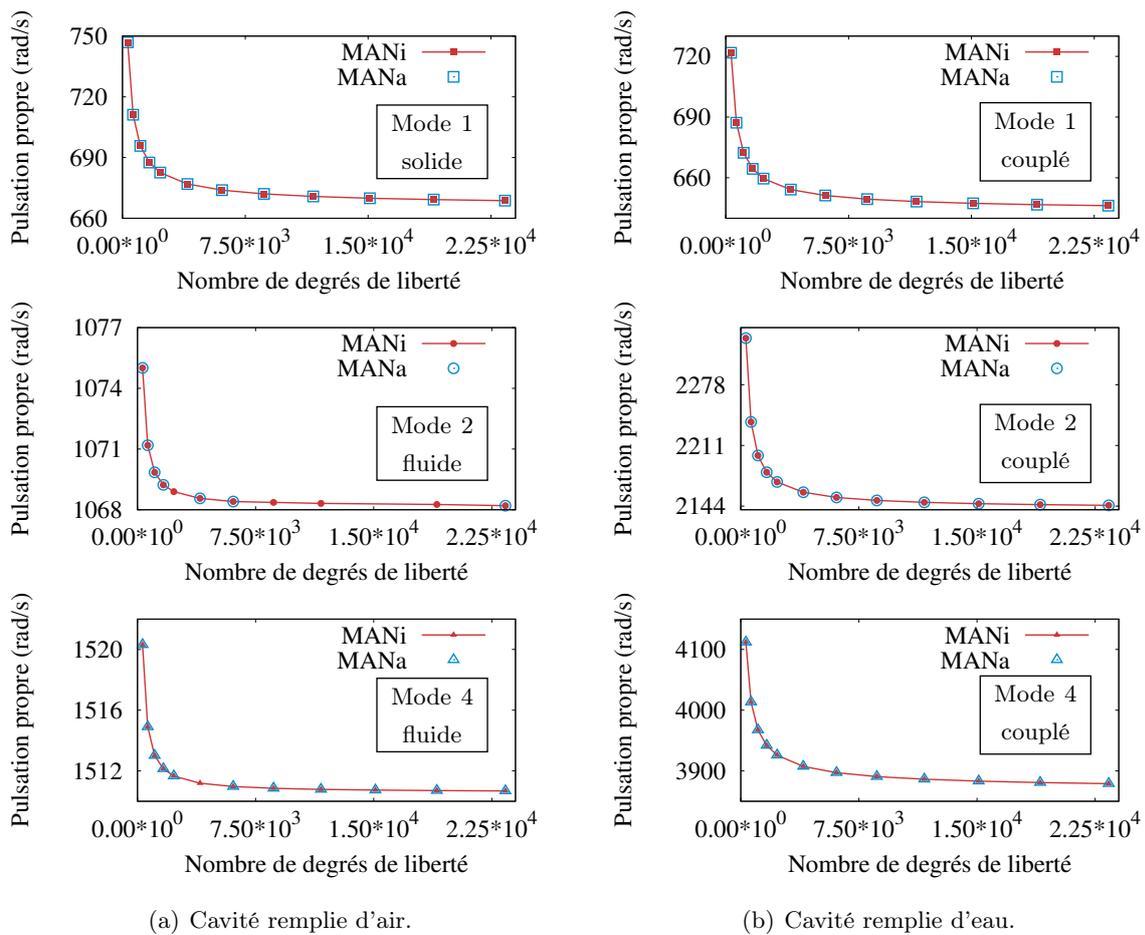


FIGURE 2.10 – Valeurs propres en fonction du nombre de degrés de liberté pour les solveurs aux valeurs propres proposés SECTION 2.3 et SECTION 2.4.  tude de la convergence pour les modes propres 1, 2 et 4.

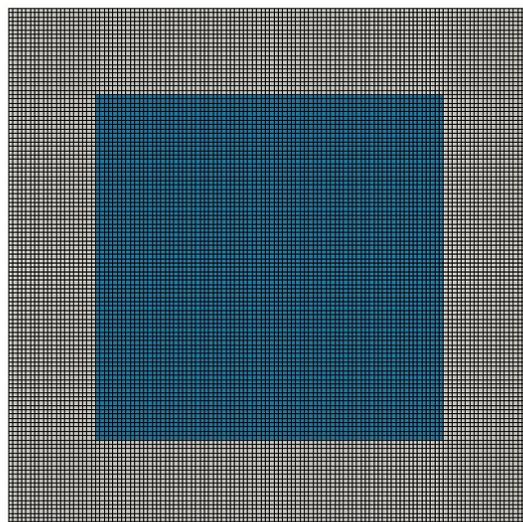


FIGURE 2.11 – Visualisation du maillage utilisé pour les applications numériques du CHAPITRE 2 : 14 400 éléments, 14 641 nœuds, 23 361 degrés de liberté.

## 2.6.2.2 Valeurs propres et modes propres obtenus

Les dix premières valeurs propres obtenues avec les deux solveurs proposés sont présentées dans le TABLEAU 2.2. Elles sont comparées avec les valeurs propres calculées par le solveur ARPACK auquel a été ajoutée une étape de préconditionnement (cf. SECTION 2.2) et aux valeurs de référence de [Bermúdez et Rodríguez, 1994]. Quel que soit le solveur utilisé, les valeurs sont identiques.

A noter que certaines valeurs sont manquantes pour la résolution par le solveur ARPACK et le solveur MANa. Il s'agit généralement de valeurs propres "doubles". Il est possible que ces valeurs soient trop proches les unes des autres pour être détectées systématiquement. En jouant sur la finesse du maillage, il est possible d'obtenir le spectre complet des valeurs propres.

(a) Cavité remplie d'air

Mode	MANi	MANa	ARPACK	Référence
1 (S)	668,691	668,691	668,691	664,121
2 (F)	1068,201	1068,201	1068,201	1068,129
3 (F)	1068,246	1068,246	1068,246	1068,152
4 (F)	1510,681	1510,681	1510,681	1510,589
5 (F)	2136,544	2136,542	2136,542	2136,102
6 (F)	2136,823	-	-	2136,240
7 (S)	2288,784	2288,784	2288,784	2258,686
8 (F)	2388,946	2388,947	-	2388,539
9 (F)	2388,987	2388,987	-	2388,418
10 (F)	3021,924	3021,925	-	-

(b) Cavité remplie d'eau

Mode	MANi	MANa	ARPACK	Référence
1 (C)	646,216	646,216	646,216	641,837
2 (C)	2144,896	2144,896	2144,896	2116,398
3 (C)	3411,832	3411,832	3411,832	3201,475
4 (C)	3879,000	3879,000	3879,000	3804,124
5 (C)	4213,015	4213,015	4213,015	4211,620
6 (C)	4697,873	4697,873	4697,873	4687,927
7 (C)	5157,028	5157,028	5157,028	5155,246
8 (C)	5424,793	5424,794	5424,794	5385,805
9 (C)	6268,598	6268,598	6268,598	6239,332
10 (C)	7542,373	7542,373	7542,373	-

TABLEAU 2.2 – Comparaison des dix premières valeurs propres obtenues avec les solveurs proposés, le solveur ARPACK et les résultats de référence de [Bermúdez et Rodríguez, 1994]. Les "-" indiquent que les valeurs n'ont pas été trouvées par le solveur considéré. Les modes fluides sont repérés par (F), les modes solides par (S) et les modes couplés par (C).

Les modes propres obtenus avec le solveur MANi sont comparés aux modes obtenus par le solveur ARPACK, ainsi qu'aux résultats présentés dans [Bermúdez et Rodríguez, 1994] (cf. FIGURE 2.12 et FIGURE 2.13). L'obtention des modes propres avec le solveur MANa sera discutée en SECTION 2.6.4.1. Les modes propres obtenus avec ces deux solveurs sont identiques et sont en accord avec les résultats de référence.

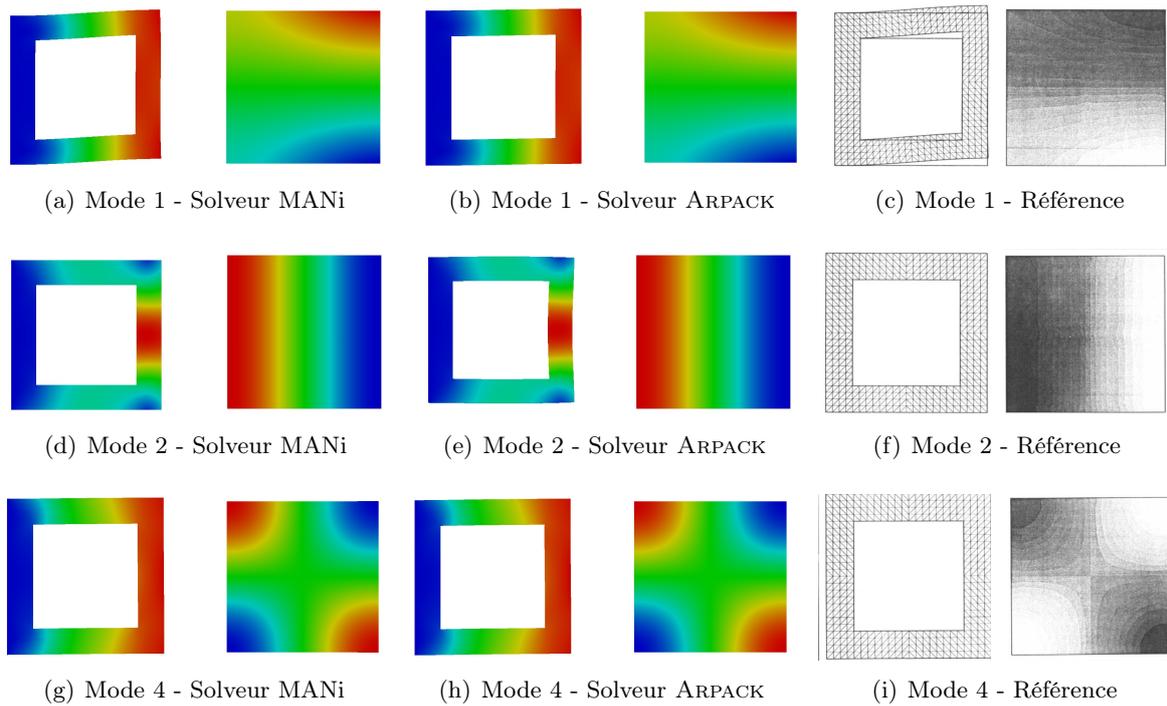


FIGURE 2.12 – Cavité remplie d’air - Allure de trois modes propres en déplacement (  gauche) et en pression (  droite) pour différents solveurs : mode 1 (solide), mode 2 (fluide) et mode 4 (fluide). Les modes de référence sont extraits de [Berm dez et Rodríguez, 1994].

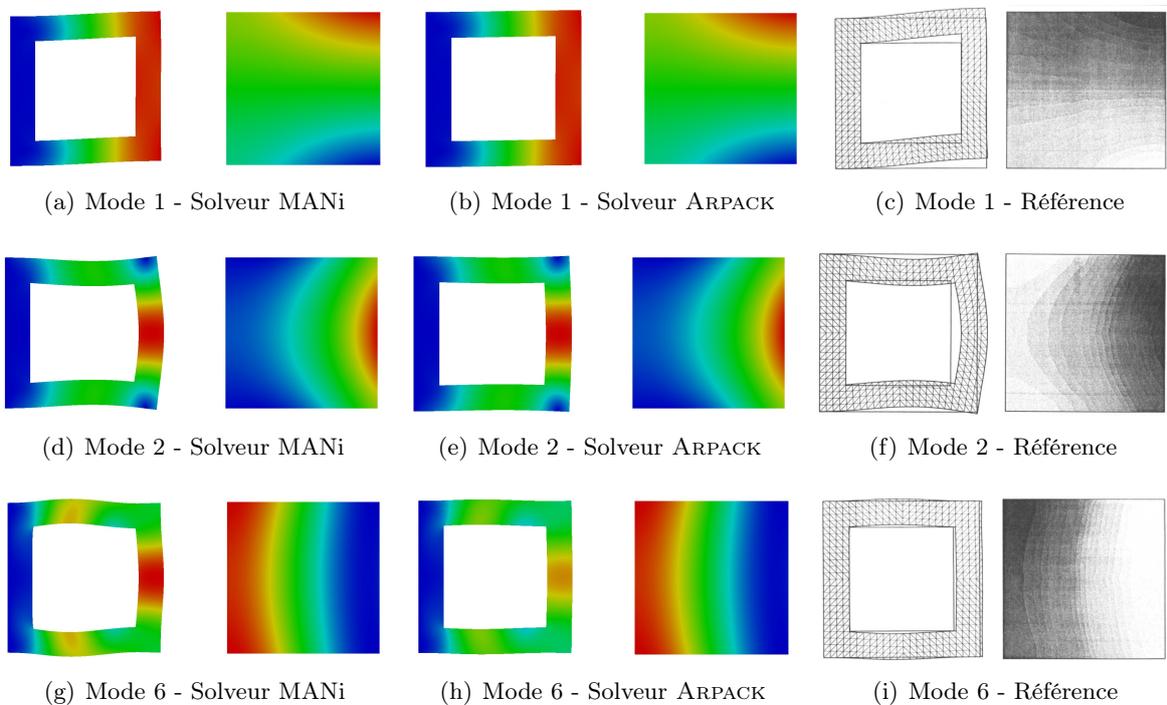


FIGURE 2.13 – Cavité remplie d’eau - Allure de trois modes propres en déplacement (  gauche) et en pression (  droite) pour différents solveurs : mode 1 (couplé), mode 2 (couplé) et mode 6 (couplé). Les modes de référence sont extraits de [Berm dez et Rodríguez, 1994].

### 2.6.3 Étude du solveur MANi - indicateur (MANi)

Le comportement du solveur MANi est à présent analysé sur le cas test à 23 361 degrés de liberté. L'influence de l'ordre de troncature choisi sur le nombre de pas de calcul et le temps CPU est étudié, ainsi que la répartition du temps CPU selon les différentes étapes de l'algorithme.

#### 2.6.3.1 Influence de l'ordre de troncature

L'influence de l'ordre de troncature  $N$  sur le nombre de pas de calcul et sur le temps CPU nécessaires pour calculer les dix premières valeurs propres est étudiée.

La FIGURE 2.14 présente l'évolution du nombre de pas de calcul en fonction de l'ordre de troncature. Quel que soit le fluide, les résultats montrent qu'au-delà de 15 ordres, l'ordre de troncature a très peu d'influence sur le nombre de pas de calculs nécessaires à l'obtention des dix premières valeurs propres. En effet, pour le solveur MANi, les valeurs propres sont trouvées en recherchant les racines du numérateur  $\Delta_{(M-k)}$  des approximants de Padé (2.18) (2.19). Au delà de 10 ordres, les deux algorithmes de recherche des racines (Bairstow et polynôme caractéristique, cf. SECTION 2.3.4) donnent des résultats quel que soit l'ordre de troncature des séries.

En revanche, l'ordre de troncature a un impact sur le temps de calcul. En effet, pour un ordre de troncature  $N$ , il faudra résoudre les  $N + 1$  systèmes linéaires (2.15) et (2.16) à chaque pas de continuation. Selon la FIGURE 2.15, il apparaît que les temps de calcul les plus faibles sont obtenus pour des séries tronquées à l'ordre 15. Ce choix semble être le meilleur compromis entre, d'une part, ne pas avoir suffisamment d'ordres pour trouver efficacement des valeurs propres et, d'autre part, calculer un nombre d'ordres trop élevé, ce qui entraîne beaucoup de manipulations de matrices.

A noter que pour une précision plus fine ( $\zeta = 10^{-8}$ ), le nombre de pas et le temps CPU augmentent légèrement.

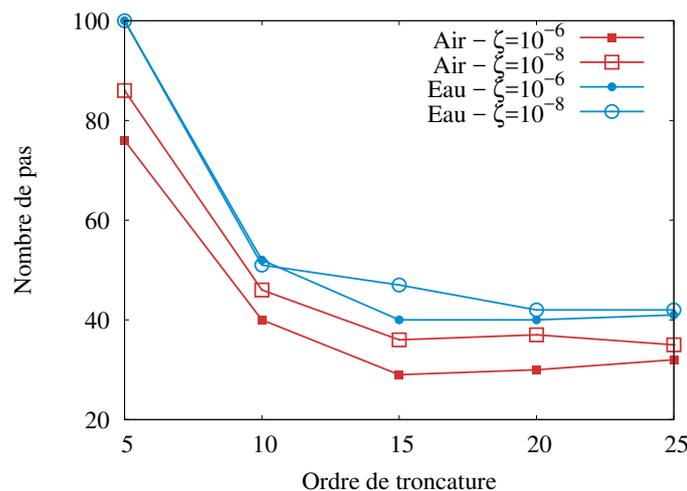


FIGURE 2.14 – Solvateur MANi - Cavité remplie d'air ou d'eau - Nombre de pas de continuation nécessaires pour calculer les dix premières valeurs propres en fonction de l'ordre de troncature, pour différentes valeurs de la précision  $\zeta$ .

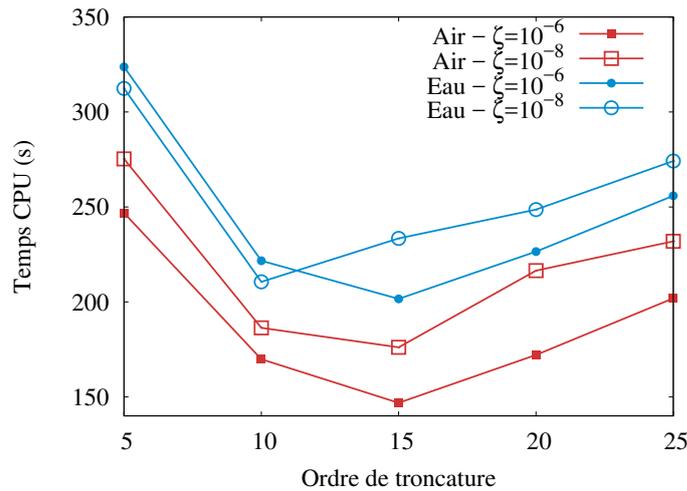


FIGURE 2.15 – Solveur MANi - Cavité remplie d'air ou d'eau - Temps CPU nécessaire pour calculer les dix premières valeurs propres en fonction de l'ordre de troncature, pour différentes valeurs de la précision  $\zeta$ .

### 2.6.3.2 Répartition du temps CPU

La répartition du temps CPU lors du calcul de 10 valeurs propres est étudiée pour le maillage à 23 361 degrés de liberté (cf. FIGURE 2.3). Le type de fluide n'influence ni le temps de construction des matrices (calcul des matrices de masse et de rigidité globales et traitement des degrés de libertés inutiles), ni la durée d'un pas de continuation. Seul le nombre de pas de continuation varie (30 pas pour une cavité remplie d'air, 40 pas pour une cavité remplie d'eau), ce qui explique la différence sur le temps de calcul des valeurs propres et vecteurs propres.

Le temps de calcul correspond principalement au temps nécessaire pour obtenir les 10 modes propres souhaités, la construction des matrices de rigidité et de masse étant négligeable par rapport au temps CPU total.

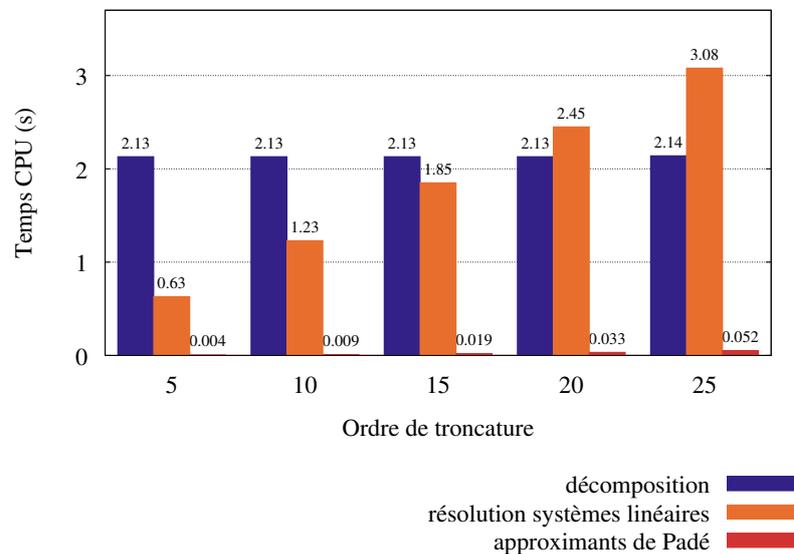
	Air	Eau
Calcul des matrices $\mathbf{K}(\mathbf{0})$ et $\mathbf{M}$	0,604	0,604
Traitement des degrés de liberté "inutiles"	1,812	1,812
Obtention des VAP et VEP	169	223
<i>soit pour un pas de continuation</i>	<i>5,64</i>	<i>5,59</i>
Total	172	226

TABLEAU 2.3 – Solveur MANi - Cavité remplie d'air ou d'eau - Maillage à 23 361 degrés de liberté -  $N = 20$  - Répartition du temps CPU en secondes pour le calcul de 10 valeurs propres.

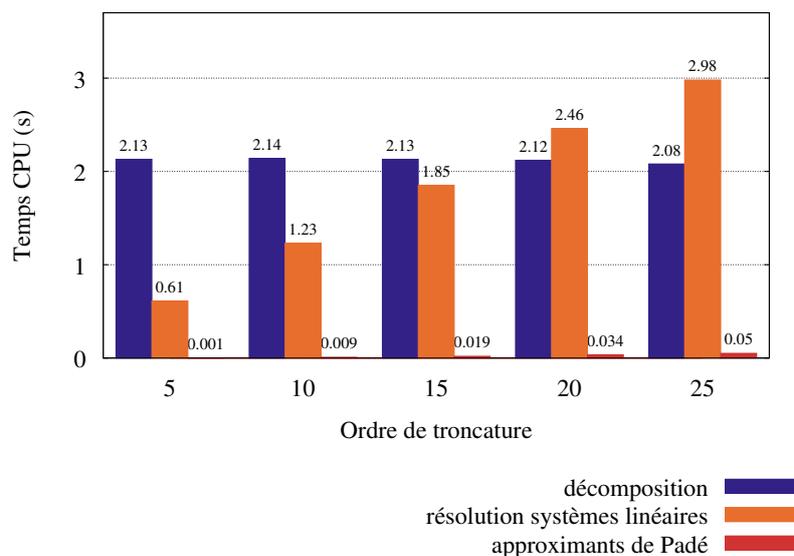
Le temps CPU nécessaire pour décomposer la matrice tangente, obtenir les termes de série MAN par résolution des systèmes linéaires, et construire les approximants de Padé pour un même pas de continuation est à présent étudié. Les résultats obtenus pour différents ordres de troncature sont présentés FIGURE 2.16.

Le temps de décomposition de la matrice tangente est indépendant de l'ordre de troncature choisi. En revanche, l'ordre de troncature influence le temps CPU nécessaire pour la résolution des systèmes linéaires (2.15) et (2.16). Ceci est cohérent avec les résultats observés en

SECTION 2.6.3.1. A noter que le temps de calcul de la représentation par approximation de Padé est négligeable devant le temps nécessaire pour la décomposition de la matrice tangente et le calcul des vecteurs de la série MAN.



(a) Cavité remplie d'air.



(b) Cavité remplie d'eau.

FIGURE 2.16 – Solveur MANi - Cavité remplie d'air ou d'eau - Maillage à 23 361 degrés de liberté - Répartition du temps CPU pour un pas de continuation.

#### 2.6.4 Etude du solveur MAN - analyse des termes de série (MANa)

Dans cette section, le comportement du solveur MANa est étudié sur le cas test à 23 361 degrés de liberté. Dans un premier temps, la technique d'extraction des vecteurs propres est détaillée. L'influence de l'ordre de troncature des séries MAN est ensuite présentée. A noter que l'analyse de répartition des temps CPU n'est pas présentée pour le solveur MANa. En effet, les conclusions sont identiques à celles du solveur MANi (cf. SECTION 2.6.3.2).

## 2.6.4.1 Extraction des modes propres

En théorie, le mode propre est la solution "nettoyée"  $\mathbf{X}_c$  (2.41). La FIGURE 2.17 présente l'allure des modes obtenus par l'équation (2.41) dans le cas d'une cavité remplie d'air. Il apparaît que ces modes sont très différents de l'allure attendue (cf. FIGURE 2.12 et [Bermúdez et Rodríguez, 1994]). Le calcul du résidu (2.42) pour les modes  $\mathbf{X}_c$  obtenus confirme que, bien que la valeur propre obtenue soit correcte, le mode propre  $\mathbf{X}_c$  n'est pas bon. Par exemple, dans le cas d'une cavité remplie d'air, le logarithme de la norme euclidienne du résidu est de 7,83 pour le deuxième mode propre : le mode obtenu par (2.41) n'est donc clairement pas le mode propre solution du problème.

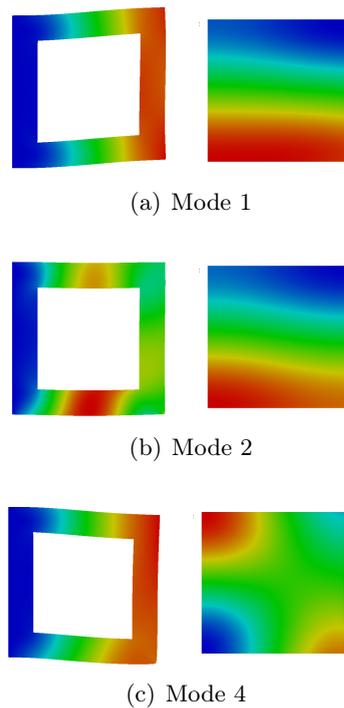


FIGURE 2.17 – Solveur MANa - Cavité remplie d'air - Modes propres pour la cavité remplie d'air, obtenus à partir de l'expression (2.41).

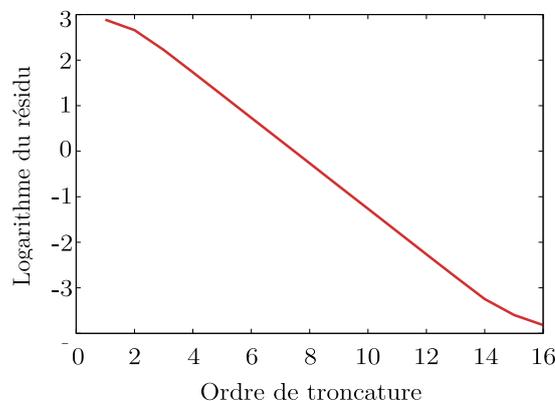


FIGURE 2.18 – Solveur MANa - Cavité remplie d'air -  $N=16$  - Évolution du logarithme de la norme euclidienne du résidu (2.42) en fonction de l'ordre de troncature pour le vecteur  $\mathbf{U}_i$  proche de la deuxième valeur propre.

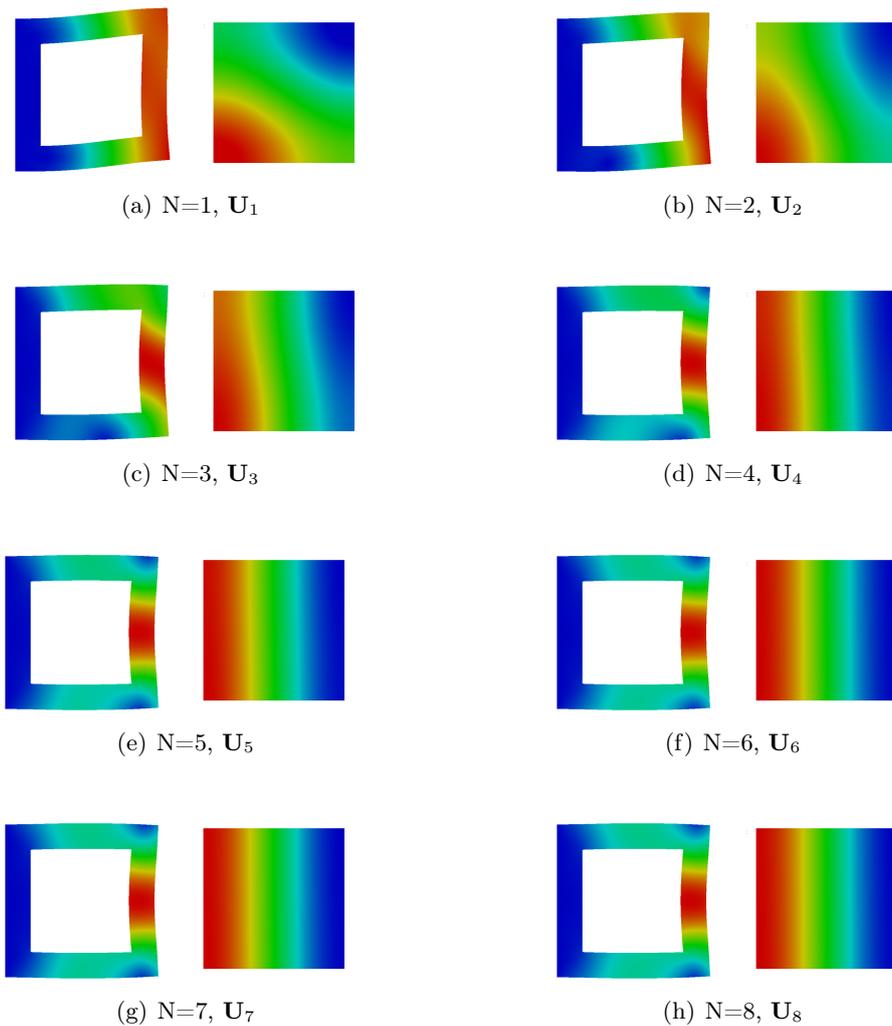


FIGURE 2.19 – Solveur MANa - Cavité remplie d'air - Termes  $\mathbf{U}_i$  du développement asymptotique au voisinage de la deuxième valeur propre pour différents ordres de troncature  $N$ . A partir de  $\mathbf{U}_8$ , les vecteurs sont identiques jusqu'à  $\mathbf{U}_{16}$ .

La méthode propos e dans [Guevel *et al.*, 2018] pour la recherche des modes de bifurcation d'un écoulement est alors envisag e. Dans le cas du problème de vibrations, on s'attend à voir apparaître le mode propre dans les termes de la série MAN à l'approche de la valeur propre.

La FIGURE 2.19 présente l'allure des vecteurs de la série MAN "nettoy e" de la suite géométrique au voisinage de la deuxième valeur propre, pour une cavité remplie d'air. Les résultats montrent que plus l'ordre de troncature augmente, plus l'allure du vecteur MAN obtenu par (2.40) tend vers l'allure du mode propre de référence. Ainsi, dans le cas du mode 2 de la cavité remplie d'air, à partir de l'ordre  $N = 6$ , l'allure du terme  $\mathbf{U}_6$  est semblable au mode propre obtenu avec les autres solveurs (cf. FIGURE 2.19(f)). Cette observation est confirm e par le calcul du résidu (2.42) pour chaque vecteur (2.40). La FIGURE 2.18 présente le logarithme du résidu (2.42) pour chacun des termes de la série MAN. On constate que plus l'ordre de troncature est grand, meilleur est le résidu (cf. FIGURE 2.18). Ainsi, pour le vecteur du premier ordre, le résidu est d'environ  $10^3$ , tandis que pour les derniers ordres de troncature, il est de l'ordre de  $10^{-3}$ . Pour un ordre de troncature suffisamment grand, le vecteur  $\mathbf{U}_N$  peut donc être assimil e au mode propre, en contrôlant la qualité du mode obtenu à l'aide du résidu (2.42).

## 2.6.4.2 Ordre de troncature

L'influence de l'ordre de troncature sur le nombre de pas de calcul et le temps CPU nécessaire au calcul des 10 premières valeurs propres est étudiée.

La FIGURE 2.20 montre que, pour un ordre de troncature compris entre 5 et 20, le nombre de pas de calcul diminue lorsque l'ordre de troncature augmente. En effet, dans le cas des problèmes de bifurcation, plus l'ordre est élevé, et plus le critère de [Cochelin et Medale, 2013] est efficace. Pour le problème de vibrations étudié ici, les solutions aux ordres élevés sont très petites en normes. Au-delà de l'ordre 20, les normes des vecteurs sont quasiment de l'ordre de la précision machine, ce qui rend difficile l'analyse de la suite géométrique. Ceci explique le résultat obtenu à l'ordre 25, contraire à ce qui est habituellement observé.

Le temps de calcul évolue de manière similaire au nombre de pas de continuation. Entre 10 et 20 ordres, le temps de calcul est peu influencé par l'ordre de troncature. Il existe en effet une sorte "d'optimum" entre le nombre de valeurs propres trouvées et le nombre de pas de continuation nécessaires.

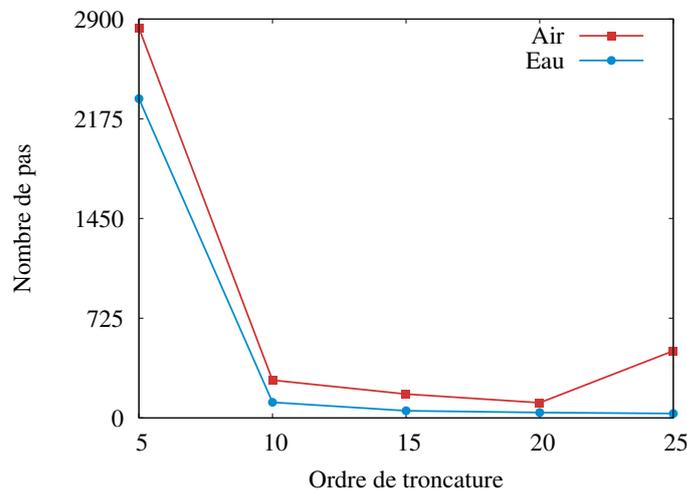


FIGURE 2.20 – Solvateur MANa - Cavité remplie d'air ou d'eau - Nombre de pas de continuation nécessaires pour calculer les dix premières valeurs propres en fonction de l'ordre de troncature.

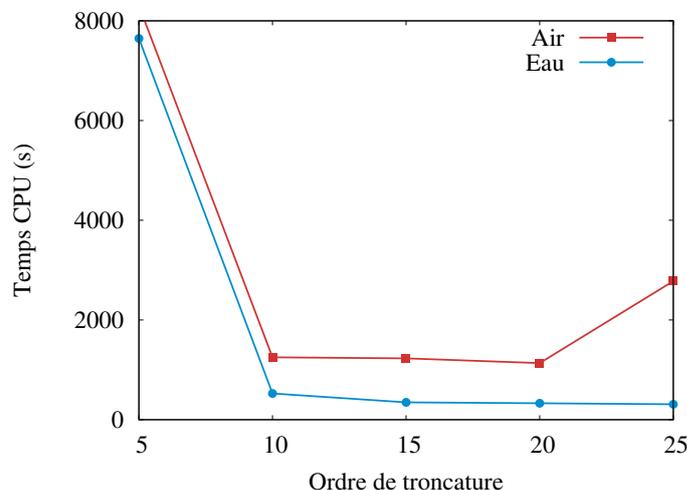


FIGURE 2.21 – Solvateur MANa - Cavité remplie d'air ou d'eau - Temps CPU nécessaire pour calculer les dix premières valeurs propres en fonction de l'ordre de troncature.

### 2.6.5 Comparaison des méthodes

Les deux solveurs développés durant la thèse permettent le calcul des valeurs propres et des modes propres de la cavité remplie de fluide. Les résultats obtenus sont semblables à ceux du solveur classique ARPACK, et cohérents avec les résultats de référence de [Bermúdez et Rodríguez, 1994]. Les performances des trois solveurs sont à présent comparées sur le cas test présenté SECTION 2.6.1, avec le maillage à 23 361 degrés de liberté.

#### 2.6.5.1 Temps CPU

Le temps CPU nécessaire pour obtenir les dix premières valeurs propres en fonction du nombre de degrés de liberté du maillage est étudié pour les trois solveurs présentés précédemment. Les résultats sont tracés FIGURE 2.22.

Quels que soient le fluide (air ou eau) et la finesse du maillage considéré, les deux solveurs proposés sont plus rapides que le solveur classique ARPACK. Le solveur MANi (cf. SECTION 2.3) apparaît comme le plus performant des trois solveurs comparés. Ainsi, sur l'ensemble des tests réalisés, le solveur MANi est en moyenne 5 fois plus rapide que le solveur ARPACK pour une cavité remplie d'air, et 13 fois plus rapide pour une cavité remplie d'eau.

Le solveur MANa est quant à lui 1,5 fois plus rapide qu'ARPACK pour une cavité remplie d'air, et 3 fois plus rapide pour une cavité remplie d'eau.

De plus, les valeurs propres de la cavité remplie d'eau sont obtenues plus rapidement que celles de la cavité remplie d'air, sauf pour le solveur MANi où le fluide semble avoir peu d'importance sur le temps de calcul. Une première explication à cette observation est la difficulté qu'ont les solveurs MANi et MANa pour trouver les valeurs propres doubles, comme c'est le cas pour l'air. La sensibilité au préconditionnement constitue une deuxième piste pour expliquer les différences de comportement (cf. SECTION 2.6.5.2).

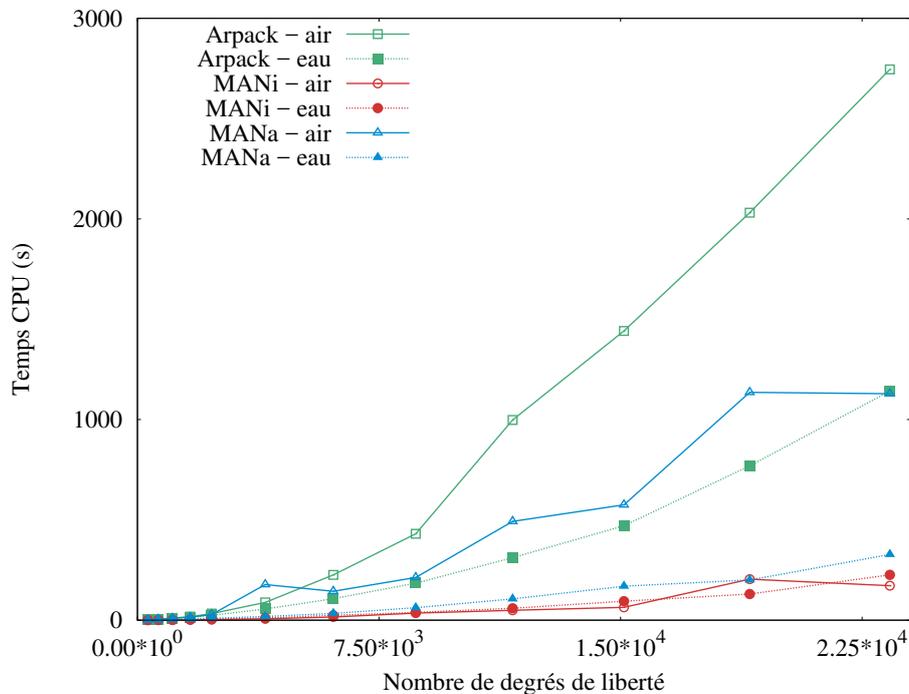


FIGURE 2.22 – Comparaison des temps CPU pour le calcul des dix premières valeurs propres par les différents algorithmes proposés.

## 2.6.5.2 Préconditionnement

Les choix faits au CHAPITRE 1 pour la formulation du problème impliquent un mauvais conditionnement des matrices de rigidité et de masse. L'influence de ce mauvais conditionnement sur les résultats obtenus par les solveurs ARPACK, MANi et MANa est à présent étudiée. Le preconditionnement est réalisé de la même manière que pour le solveur ARPACK (cf. SECTION 2.2.2). Pour chaque solveur, le nombre de valeurs propres trouvées sur les 10 valeurs demandées, le nombre de pas et le temps CPU nécessaires sont relevés, pour un calcul avec ou sans preconditionnement des matrices (cf. FIGURE 2.4).

(a) Cavité remplie d'air.			
	Nb. VAP trouvées	Nb. pas de calcul	Temps CPU (s)
ARPACK	<i>Calcul stoppé à la suite d'une erreur</i>		> 3000
ARPACK + preconditionnement	7	500	2745
MANi	10	33	181
MANi + preconditionnement	1	100	478
MANa	7	500	2333
MANa + preconditionnement	10	111	1106

(b) Cavité remplie d'eau.			
	Nb. VAP trouvées	Nb. pas de calcul	Temps CPU (s)
ARPACK	0	500	1635
ARPACK + preconditionnement	11	500	1142
MANi	11	32	182
MANi + preconditionnement	11	32	181
MANa	0	500	5385
MANa + preconditionnement	10	39	325

TABLEAU 2.4 – Influence du preconditionnement sur les résultats obtenus par les solveurs ARPACK, MANi et MANa. Le nombre de pas de calcul maximum est fixé à 100 pour le solveur MANi et à 500 pour ARPACK et le solveur MANa.

Tout comme le solveur ARPACK, le solveur MANa nécessite l'ajout d'une étape de preconditionnement pour obtenir des résultats acceptables. Ainsi, sans preconditionnement, le solveur ARPACK ne trouve aucune valeur propre satisfaisante (voire même s'arrête suite à une erreur de calcul). Au bout des 500 pas de continuation autorisés, le solveur MANa ne trouve aucune valeur propre dans le cas d'une cavité remplie d'eau, et seulement 7 valeurs propres sur les 10 demandées dans le cas d'une cavité remplie d'air.

En revanche, le solveur MANi n'est pas sensible au mauvais preconditionnement des matrices. Ceci est particulièrement vrai dans le cas d'une cavité remplie d'eau où les 10 valeurs propres demandées sont obtenues avec un nombre de pas et un temps de calcul similaire (FIGURE 2.3(b)).

A noter que, pour le maillage testé ici, le solveur MANi avec preconditionnement ne trouve qu'une seule valeur propre dans le cas d'une cavité remplie d'air. En effet, dans certains cas, le solveur MANi présente des difficultés pour trouver les racines du polynôme  $\Delta_{(M-k)}$  (cf. SECTION 2.3.4), notamment les racines doubles. De plus, l'étape de preconditionnement a été développée dans le cas d'un second membre nul (cf. (2.5)), ce qui n'est pas le cas pour

les solveurs MANi et MANa. Les différences d'ordre de grandeur entre le second membre et le système matriciel couplé peuvent alors engendrer des erreurs numériques.

Ces résultats montrent que les solveurs MANi et MANa sont perfectibles. Il faut notamment fiabiliser les algorithmes du point de vue numérique, en ce qui concerne la recherche des zéros d'un polynôme et la distinction des valeurs propres doubles. Enfin, le préconditionnement du second membre peut être amélioré. Les seconds membres des solveurs MANi et MANa étant aléatoires, il conviendrait d'ajuster l'ordre de grandeur des termes du second membre à celui du système couplé préconditionné.

## 2.7 Conclusion

La résolution du problème dissipatif au CHAPITRE 3 nécessite la connaissance d'un point initial. Ce point initial est choisi comme étant la solution du problème conservatif associé. Compte-tenu des choix faits pour la modélisation du problème (formulation pression/déplacement, éléments finis), le système matriciel à résoudre pour le cas particulier conservatif est non symétrique, mal conditionné, et possède un grand nombre de degrés de liberté.

Dans un premier temps, la résolution par le solveur classique ARPACK a été envisagée. Il apparaît que ce solveur nécessite l'ajout d'une étape de préconditionnement pour donner des résultats satisfaisants. De plus, l'utilisation de ce solveur s'avère délicate pour obtenir les valeurs propres souhaitées (choix des options). C'est pourquoi deux solveurs aux valeurs propres basés sur la MAN ont été proposés. Le premier, le solveur MANi, utilise un indicateur ayant la particularité de s'annuler aux valeurs propres. Le second, le solveur MANa, est basé sur l'analyse des termes des séries MAN à l'aide du critère énoncé par [Cochelin et Medale, 2013].

Ces deux solveurs permettent le calcul des valeurs et modes propres de la cavité remplie de fluide. Les résultats obtenus par les deux solveurs proposés ont été comparés à ceux issus de la littérature [Bermúdez et Rodríguez, 1994]. Cette comparaison a permis de valider ces deux solveurs basés sur la MAN.

Les performances des deux algorithmes proposés ont été évaluées en les comparant à celles du solveur classique ARPACK, auquel une étape de préconditionnement a du être ajoutée. Il apparaît que, quel que soit le fluide considéré (air ou eau), les solveurs basés sur la MAN sont plus performants que le solveur ARPACK.

Le solveur MANi semble être le solveur le plus performant parmi les trois solveurs comparés. En effet, pour les cas testés, le solveur MANi est jusqu'à 13 fois plus rapide que le solveur ARPACK. De plus, contrairement aux deux autres solveurs étudiés, le solveur MANi ne nécessite pas l'ajout d'une étape de préconditionnement. Cependant, les algorithmes utilisés pour le calcul des racines des approximants de Padé "ratent" parfois un zéro. Le solveur MANi pourrait donc être amélioré en étudiant notamment les suites de Sturm [Quarteroni *et al.*, 2007]. Cette technique permet de connaître le nombre de racines d'un polynôme, et ainsi de vérifier qu'aucune valeur propre n'a été oubliée. Elle a notamment été développée dans [Avery *et al.*, 2009] pour identifier les valeurs propres manquantes par un solveur aux valeurs propres dans le cas d'un problème symétrique. Enfin, la détection des valeurs propres doubles peut être améliorée. Actuellement, les tests portent uniquement sur la valeur de la pulsation propre trouvée. L'ajout d'un test comparant l'allure des modes propres permettrait de mieux distinguer les valeurs propres doubles (même valeur propre, mais allure des modes différents).

Compte-tenu de ses bonnes performances, le solveur MANi est choisi pour le calcul du point initial nécessaire aux solveurs développés au CHAPITRE 3.

Le solveur MANa est quant à lui 1,5 à 3 fois plus rapide qu'ARPACK. Il nécessite le préconditionnement des matrices, ce qui n'est, à ce jour, pas expliqué. De plus, les résultats obtenus montrent que l'analyse des termes de la série MAN permet d'obtenir les valeurs propres et les vecteurs propres, mais il reste à expliquer pourquoi.

Une explication peut être avancée par analogie avec le phénomène de flambage. En effet, le problème de flambage d'une poutre sous l'effet d'une force de compression est similaire au problème de vibrations :

$$[\mathbf{K} - P\mathbf{K}_\sigma]\mathbf{U} = \mathbf{0} \quad (2.45)$$

où  $P$  est la charge critique de flambage (valeur cherchée),  $\mathbf{U}$  le mode de flambage,  $\mathbf{K}$  la matrice de rigidité élastique et  $\mathbf{K}_\sigma$  la matrice de rigidité géométrique. En flambage comme en vibrations, un problème aux valeurs propres doit être résolu pour déterminer la force critique et le mode de flambage (ou la pulsation propre et le mode propre dans le cas des vibrations). Si un défaut de type force extérieure est introduit, le problème à résoudre devient :

$$[\mathbf{K} - P\mathbf{K}_\sigma]\mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (2.46)$$

Dans le cas du flambage, ce défaut fait "passer" la solution à côté de la solution parfaite. Il peut être détecté grâce à l'apparition d'une suite géométrique dans les séries MAN. Dans le cas d'un problème de vibrations forcées, la force imposée pourrait donc jouer le rôle du défaut, et permettre ainsi la détection des valeurs propres. Cette force imposée introduit le terme d'erreur (2.36), qui peut être enlevé en "nettoyant" les séries (2.40).

Le solveur MANa a donc été construit en reprenant les développements faits pour l'analyse de bifurcation stationnaire. Cependant, l'expression (2.41) ne semble pas donner les vecteurs propres attendus, alors même que l'observation des termes de la série montre que le vecteur propre apparaît dans ces termes. Il reste donc à démontrer que le mode propre est mathématiquement équivalent au mode de bifurcation.

Enfin, il est à noter qu'il existe d'autres techniques pour détecter les singularités. Ces techniques s'appuient notamment sur l'étude des séries divergentes [Razafindralandy et Hamdouni, 2013], et constituent un domaine de recherche à part entière.

# Résolution de problèmes IFS dissipatifs en régime libre

---

## Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>78</b>
<b>3.2</b>	<b>Algorithme de Newton</b>	<b>79</b>
3.2.1	Théorie	80
3.2.2	Limites de l'algorithme	81
<b>3.3</b>	<b>Solveur de Newton d'ordre élevé - NOE</b>	<b>82</b>
3.3.1	Théorie	82
3.3.1.1	Réécriture du problème sous forme quadratique	82
3.3.1.2	Homotopie	83
3.3.1.3	Perturbation	84
3.3.1.4	Condition d'orthogonalisation	84
3.3.1.5	Identification d'une séquence de problèmes linéaires	84
3.3.1.6	Séparation des parties réelles et imaginaires	85
3.3.1.7	Système matriciel à résoudre	86
3.3.1.8	Approximants de Padé	86
3.3.1.9	Obtention de la solution	86
3.3.2	Alternative - Algorithme de Newton modifié	87
<b>3.4</b>	<b>Algorithmes des solveurs proposés</b>	<b>87</b>
<b>3.5</b>	<b>Résultats numériques</b>	<b>90</b>
3.5.1	Problème étudié	90
3.5.2	Validation	92
3.5.3	Étude de convergence - Choix d'un maillage	95
3.5.3.1	Choix de la discrétisation de la couche viscoélastique	95
3.5.3.2	Convergence selon le nombre total de degrés de liberté	96
3.5.4	Comparaison des méthodes proposées	99
3.5.4.1	Nombre d'itérations	99
3.5.4.2	Ordre de troncature à la convergence	103
3.5.4.3	Étude des temps CPU	106
3.5.5	Étude du comportement mécanique	108
<b>3.6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>113</b>

---

### 3.1 Introduction

Le problème conservatif étant résolu, le problème dissipatif suivant est étudié :

$$[\mathbf{K}(\mathbf{0}) + E(\omega)\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M}]\mathbf{U} = \mathbf{0} \quad (3.1)$$

Afin de simplifier l'équation (3.1), la valeur propre est cherchée sous la forme  $\Omega = -\omega^2$ . Le problème dissipatif (3.1) est alors réécrit sous la forme suivante :

$$[\mathbf{K}(\mathbf{0}) + E(\omega)\mathbf{K} + \Omega\mathbf{M}]\mathbf{U} = \mathbf{0} \quad (3.2)$$

Le problème (3.2) est non linéaire car le module d'Young du matériau viscoélastique dépend de la pulsation. La viscoélasticité étant modélisée par un module d'Young complexe  $E(\omega)$ , les inconnues  $\mathbf{U}$  et  $\Omega$ , ainsi que la matrice de rigidité viscoélastique  $E(\omega)\mathbf{K}$  sont également des grandeurs complexes. Les matrices de rigidité élastique  $\mathbf{K}(\mathbf{0})$  et de masse  $\mathbf{M}$  restent des matrices à coefficients réels et constants (idem CHAPITRE 2). De plus, les matrices globales  $\mathbf{K}(\mathbf{0})$ ,  $E(\omega)\mathbf{K}$  et  $\mathbf{M}$  sont non symétriques compte-tenu de la présence du terme de couplage (cf. SECTION 1.5.5). Enfin, ce problème est susceptible de comporter un grand nombre de degrés de liberté. D'une part car l'élément "2DFS" développé durant la thèse est un élément fini Q4 avec une interpolation linéaire (cf. SECTION 1.5), ce qui implique une discrétisation fine des domaines étudiés. D'autre part car la manipulation de grandeurs complexes double automatiquement le nombre de degrés de liberté puisqu'à chaque inconnue correspond une valeur réelle et une valeur imaginaire.

Diverses méthodes permettent de calculer de façon approchée les pulsations amorties d'un problème non linéaire. Nous listons ici quelques unes de ces méthodes :

- Une des méthodes les plus simples est la **méthode de réponse directe en fréquence**, qui consiste à estimer les valeurs propres par lecture graphique, en traçant la courbe de réponse du système aux vibrations forcées. La résolution du problème des vibrations forcées fera l'objet du CHAPITRE 4 et n'est donc pas détaillée ici.
- La **méthode des itérations inverses**, basée sur la méthode de Newton, permet de calculer la plus petite valeur propre d'un système et le vecteur propre correspondant. Son principal inconvénient est qu'elle nécessite une inversion de matrice à chaque pas, ce qui implique un temps de calcul long. De plus, elle est sensible au choix du point initial.

Les valeurs propres suivantes peuvent être obtenues par une méthode de décalage ou *shifting*, mais il est alors difficile de prévoir le rang de la valeur propre vers lequel le décalage conduit. Elles peuvent aussi être calculées par une technique d'orthogonalisation, nécessitant une grande précision car le calcul des différentes valeurs propres se fait alors de manière successive.

- La **méthode des itérations inverses avec décalage spectral** est basée sur la méthode du point fixe, associée à un solveur aux valeurs propres "classique", tel que l'algorithme QR ou le solveur ARPACK (cf. CHAPITRE 2). La convergence de cette méthode est souvent lente et n'est pas garantie [Hamdaoui *et al.*, 2016].
- La **méthode d'énergie de déformation modale** (*MSE : Modal Strain Energy*) est basée sur l'idée que les modes conservatifs sont représentatifs des modes amortis, ce qui est vrai pour des modes faiblement amortis. La pulsation amortie  $\Omega_a$  et

l'amortissement  $\eta_m$  sont approximés à partir des modes réels non amortis ou d'une approximation du mode complexe. La méthode utilisant le mode réel est valable uniquement dans le cas de structures faiblement amorties [Daya et Potier-Ferry, 2002]. Celle utilisant le mode complexe donne une meilleure approximation mais reste difficile à mettre en œuvre lorsque  $E(\omega)\mathbf{K}$  dépend de la pulsation [Rikards et al., 1993]. La **méthode d'énergie de déformation modale itérative** (*IMSE : Iterative Modal Strain Energy*) est une variante pour tenir compte de la dépendance en pulsation de la matrice de rigidité [Vasques et al., 2010].

- Les **méthodes basées sur des sous-espaces** sont actuellement les méthodes privilégiées pour la résolution des systèmes aux valeurs propres non linéaires de grande taille. Des approximations des valeurs propres et des vecteurs propres sont obtenues par projection du problème aux valeurs propres dans des sous-espaces de plus petites dimensions.
  - L'**algorithme d'Arnoldi non linéaire** est basé sur la projection du problème dans un sous-espace de Krylov [Voss, 2004]. Le problème aux valeurs propres de taille réduite est ensuite résolu par la méthode des itérations inverses.
  - La **méthode de Jacobi-Davidson non linéaire**, proposée par [Voss, 2007] utilise la procédure de Rayleigh-Ritz. Les valeurs propres du système réduit sont ensuite calculées par une méthode de Newton ou par la méthode des itérations inverses.
- La méthode basée sur une **technique d'homotopie associée à la Méthode Asymptotique Numérique** introduite par [Mallil et al., 2000] permet de transformer le problème non linéaire en une suite de problèmes linéaires. La résolution de problèmes de vibrations de structures sandwich viscoélastiques par des variantes de cette méthode a été étudiée par [Daya et Potier-Ferry, 2001] et [Duigou et al., 2003].

Il est à noter que ces méthodes ne sont pas toutes applicables dans le cas de matrices dépendant de la pulsation, ni pour des matrices non symétriques. Des auteurs tels que [Bobillot et Balmes, 2002], [Duigou-Kersulec, 2002], [Schreiber, 2008] et [Hamdaoui et al., 2016] proposent une revue bibliographique plus détaillée de ces méthodes numériques de résolution de problèmes aux valeurs propres non linéaires.

Du fait de la complexité du problème (non linéaire et non symétrique) et de sa discrétisation fine, ces méthodes sont susceptibles d'être coûteuses en temps de calcul. Afin de réduire ce temps de calcul tout en obtenant des solutions avec une précision acceptable, nous proposons dans ce chapitre un solveur d'ordre élevé, basé sur les techniques d'homotopie et de perturbation, en s'inspirant des travaux de [Mallil et al., 2000], [Daya et Potier-Ferry, 2001] et [Duigou et al., 2003].

Dans un premier temps, l'algorithme de Newton "classique" est rappelé. Puis le solveur de Newton d'ordre élevé développé durant la thèse est présenté. Les performances et les résultats obtenus avec ce solveur sont comparés à ceux obtenus avec le solveur de Newton. Enfin, le problème de la cavité acoustique avec une structure sandwich viscoélastique est étudié.

## 3.2 Algorithme de Newton

Le problème aux valeurs propres (3.2) peut être résolu par utilisation de l'algorithme de Newton (FIGURE 3.1). Il s'agit d'un solveur itératif qui permet, partant d'un point solution

$(\mathbf{U}^{(0)}, \Omega^{(0)})$  choisi par l'utilisateur, de construire une suite d'itérés  $(\mathbf{U}^{(k)}, \Omega^{(k)})$  censée converger vers la solution du problème. Ce solveur est très performant si le point initial est proche de la solution. En revanche, il nécessite l'évaluation d'une matrice tangente à chaque itération, ce qui peut s'avérer coûteux dans le cas de systèmes à grand nombre de degrés de liberté.

Ce solveur étant bien connu [Quarteroni *et al.*, 2007] [Deuffhard, 2011] et relativement simple à mettre en œuvre, il sert de point de comparaison pour valider le solveur de Newton d'ordre élevé développé en SECTION 3.3.

### 3.2.1 Théorie

**Choix du point initial** Ce solveur ne comporte pas de phase de prédiction : le point initial est choisi arbitrairement par l'utilisateur. Il faut donc veiller à choisir judicieusement un point initial  $(\mathbf{U}^{(0)}, \Omega^{(0)})$  pour maximiser les chances de converger vers une solution. C'est la raison pour laquelle nous utilisons comme point initial la solution du problème conservatif traité précédemment (cf. CHAPITRE 2), tel que proposé dans [Duigou *et al.*, 2003] :

$$(\mathbf{U}^{(0)}, \Omega^{(0)}) = (\mathbf{U}_{\text{na}}, \Omega_{\text{na}}) \quad (3.3)$$

où  $\mathbf{U}_{\text{na}}$  et  $\Omega_{\text{na}}$  désignent respectivement le vecteur des inconnues nodales et la pulsation, solution du problème conservatif (non amorti).

**Procédé itératif** Les inconnues du problème sont cherchées sous la forme incrémentale suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^{(k+1)} &= \mathbf{U}^{(k)} + \Delta\mathbf{U}^{(k)} \\ \Omega^{(k+1)} &= \Omega^{(k)} + \Delta\Omega^{(k)} \end{aligned} \quad (3.4)$$

où  $(\Delta\mathbf{U}^{(k)}, \Delta\Omega^{(k)})$  représente l'incrément à l'itération  $k$  et  $(\mathbf{U}^{(k)}, \Omega^{(k)})$  désigne la solution obtenue à l'itération  $k$ .

Il est à noter que le module d'Young peut être calculé à partir de la pulsation  $\omega$  suivant la relation (1.9).

Après insertion de (3.4) dans (3.2), et en conservant seulement les termes du premier ordre en inconnue  $(\Delta\mathbf{U}^{(k)}, \Delta\Omega^{(k)})$ , il vient à l'itération  $k$  :

$$[\mathbf{K}(\mathbf{0}) + E(\omega)^{(k)}\mathbf{K} + \Omega^{(k)}\mathbf{M}]\Delta\mathbf{U}^{(k)} + \Delta\Omega^{(k)}\mathbf{M}\mathbf{U}^{(k)} = -[\mathbf{K}(\mathbf{0}) + E(\omega)^{(k)}\mathbf{K} + \Omega^{(k)}\mathbf{M}]\mathbf{U}^{(k)} \quad (3.5)$$

Afin d'avoir autant d'équations que d'inconnues, la condition d'orthogonalisation suivante est ajoutée :

$$\Delta\mathbf{U}^{(k)} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{U}_{\text{na}} = 0 \quad (3.6)$$

Chaque vecteur  $\mathbf{U}^{(k)}$  est ainsi orthogonalisé par rapport à la solution du problème conservatif et à la matrice de masse globale. Ce choix, déjà retenu dans une précédente étude [Duigou *et al.*, 2003], a conduit à des résultats satisfaisants pour l'étude vibratoire des structures viscoélastiques.

Les inconnues sont des grandeurs complexes :

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^{(k)} &= \mathbf{U}^{R(k)} + i\mathbf{U}^{I(k)} \\ \Omega^{(k)} &= \Omega^{R(k)} + i\Omega^{I(k)} \\ E(\omega)^{(k)} &= E^R(\omega)^{(k)} + iE^I(\omega)^{(k)} \end{aligned} \quad (3.7)$$

*Remarque : dans la suite, on notera les parties réelles avec un exposant  $R$  et les parties imaginaires avec un exposant  $I$ .*

En séparant les parties réelles des parties imaginaires, il est possible de réunir les équations (3.5) et (3.6) en un système matriciel :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{G} & \mathbf{M}\mathbf{U}^{R(k)} & -\mathbf{M}\mathbf{U}^{I(k)} \\ \mathbf{G} & \mathbf{A} & \mathbf{M}\mathbf{U}^{I(k)} & \mathbf{M}\mathbf{U}^{R(k)} \\ \mathbf{U}_{\text{na}}^t \mathbf{M} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{U}_{\text{na}}^t \mathbf{M} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{U}^{R(k)} \\ \Delta \mathbf{U}^{I(k)} \\ \Delta \Omega^{R(k)} \\ \Delta \Omega^{I(k)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\mathbf{A}\mathbf{U}^{R(k)} + \mathbf{G}\mathbf{U}^{I(k)} \\ -\mathbf{A}\mathbf{U}^{I(k)} - \mathbf{G}\mathbf{U}^{R(k)} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.8)$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{K}(\mathbf{0}) + E^{R(\omega)^{(k)}} \mathbf{K} + \Omega^{R(k)} \mathbf{M} \\ \mathbf{G} &= E^{I(\omega)^{(k)}} \mathbf{K} + \Omega^{I(k)} \mathbf{M} \end{aligned} \quad (3.9)$$

La résolution du système (3.8) permet d'obtenir les incréments  $\Delta \mathbf{U}^{R(k)}$ ,  $\Delta \mathbf{U}^{I(k)}$ ,  $\Delta \Omega^{R(k)}$  et  $\Delta \Omega^{I(k)}$ , d'où la solution  $(\mathbf{U}^{(k+1)}, \Omega^{(k+1)})$  obtenue selon (3.4). Le module d'Young  $E(\omega)^{(k)}$  est calculé à partir de  $\Omega^{(k)}$ .

**Critère d'arrêt** Le résidu complexe  $\mathbf{R}^{(k)}$  est évalué à la fin de chaque itération :

$$\mathbf{R}^{(k)} = [\mathbf{K}(\mathbf{0}) + E(\omega)^{(k)} \mathbf{K} + \Omega^{(k)} \mathbf{M}] \mathbf{U}^{(k)} \quad (3.10)$$

On considère que le processus itératif a convergé lorsque la norme du résidu complexe est inférieure au seuil de tolérance fixé :

$$\sqrt{\mathbf{R}^{(k)} \cdot \mathbf{R}^{(k)}} \leq \text{tolérance} \quad (3.11)$$

### 3.2.2 Limites de l'algorithme

La matrice tangente est une première limite de l'algorithme proposé. En effet, cette matrice peut être mal conditionnée, ce qui nuit à la précision de la solution obtenue par le processus itératif. Pour prévenir ce problème, l'étape de préconditionnement des matrices de rigidité et de masse présentée au chapitre précédent est ici réutilisée avant de faire appel à l'algorithme de Newton (cf. SECTION 2.2.2 [Maess et Gaul, 2006]).

De plus, la méthode de Newton ne converge pas inconditionnellement, ou peut converger vers un mode qui s'avère ne pas être le mode attendu. En effet, le point initial choisi par l'utilisateur influence beaucoup la convergence (ou non) du processus itératif. Différents points initiaux peuvent ainsi converger vers le même mode du spectre dissipatif et certains points initiaux, trop éloignés de la solution, ne permettent pas la convergence vers le mode recherché.

Enfin, la résolution du système linéaire (3.8), en particulier la factorisation de la matrice tangente, peut s'avérer extrêmement coûteuse en temps de calcul lorsque le nombre de degrés de liberté devient grand. Cette matrice étant modifiée à chaque itération, l'augmentation du nombre d'itérations peut conduire à des temps de calculs très importants.

Toutes ces limites nous ont incité à mettre au point un algorithme d'ordre élevé afin de résoudre le problème aux valeurs propres complexe et non linéaire (3.2) en un temps de calcul raisonnable.

### 3.3 Solveur de Newton d'ordre élevé - NOE

#### 3.3.1 Théorie

Le solveur de Newton présenté précédemment se base sur un développement limité au premier ordre des inconnues au voisinage de la solution initiale. Une alternative à cet algorithme consiste à chercher une correction d'ordre supérieur à un, autrement dit, à déterminer l'incrément de correction sous la forme d'une expansion polynomiale d'ordre  $N$ . Pour ce faire, les techniques de perturbation et d'homotopie sont associées au sein d'un solveur itératif de type Newton d'Ordre Élevé (NOE). Cette méthode a alors l'avantage de calculer une correction d'ordre élevé sans nécessiter la factorisation de matrices tangentes supplémentaires.

Initialement proposée par [Mallil *et al.*, 2000], cette technique a été utilisée pour l'étude des vibrations de poutre sandwich [Duigou *et al.*, 2003], ou plus récemment par [Sliva *et al.*, 2010] pour l'étude de défauts des matériaux ou de la géométrie dans des poutres. L'homotopie est également utilisée pour la résolution de problèmes dépendants du temps. Ainsi, les auteurs de [Boutmir *et al.*, 2004] étudient des problèmes de dynamique non linéaire des structures. En mécanique des fluides, les auteurs de [Guevel *et al.*, 2015] utilisent cette technique dans des solveurs non linéaires transitoires pour la résolution des équations de Navier-Stokes.

Nous adaptions ici la technique proposée par [Mallil *et al.*, 2000] pour le cas des problèmes de vibroacoustique. A noter que le solveur NOE présenté dans cette section a fait l'objet de communications dans deux conférences internationales [Claude *et al.*, 2018a][Cadou *et al.*, 2018].

##### 3.3.1.1 Réécriture du problème sous forme quadratique

Le solveur NOE est basé sur la méthode proposée par Mallil *et al.* [Mallil *et al.*, 2000]. Il s'agit dans un premier temps de réécrire le problème (3.2) sous la forme d'une équation quadratique. Pour ce faire, les inconnues du problème sont cherchées sous forme incrémentale avec  $(\mathbf{U}_0, \Omega_0, E_0)$  un point initial :

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \mathbf{U}_0 + \Delta\mathbf{U} \\ \Omega &= \Omega_0 + \Delta\Omega \\ E(\omega) &= E_0 + \Delta E \quad \text{avec } E_0 = E(\omega_0) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Le point initial  $(\mathbf{U}_0, \Omega_0, E_0)$  est choisi comme étant la solution du problème conservatif étudié au CHAPITRE 2, tel que proposé dans [Duigou *et al.*, 2003].

Après insertion de (3.12) dans (3.2), il vient :

$$[\mathbf{K}(\mathbf{0}) + (E_0 + \Delta E)\mathbf{K} + (\Omega_0 + \Delta\Omega)\mathbf{M}](\mathbf{U}_0 + \Delta\mathbf{U}) = 0 \quad (3.13)$$

On identifie alors :

- $\Delta\mathbf{X}$  le vecteur des inconnues :

$$\Delta\mathbf{X} = \{\Delta\mathbf{U} \quad \Delta\Omega \quad \Delta E\}^t \quad (3.14)$$

- $\mathbf{X}_0$  le vecteur des inconnues à l'état initial :

$$\mathbf{X}_0 = \{\mathbf{U}_0 \quad \Omega_0 \quad E_0\}^t \quad (3.15)$$

- $\mathbf{R}_0$  le résidu initial, dépendant uniquement du vecteur des inconnues à l'état initial et des matrices de rigidité élastique, de rigidité viscoélastique et de masse globales :

$$\mathbf{R}_0 = [\mathbf{K}(\mathbf{0}) + E_0\mathbf{K} + \Omega_0\mathbf{M}] \mathbf{U}_0 \quad (3.16)$$

- $\mathbf{L}_t$  et  $\mathbf{L}$  deux opérateurs linéaires, regroupant les termes comportant une seule inconnue. L'opérateur  $\mathbf{L}$  est identifié de façon à simplifier la programmation, comme nous l'expliquons par la suite (cf. SECTION 3.3.1.2) :

$$\mathbf{L}_t(\mathbf{X}_0)\Delta\mathbf{X} = \Delta\Omega\mathbf{M}\mathbf{U}_0 + [\mathbf{K}(\mathbf{0}) + E_0\mathbf{K} + \Omega_0\mathbf{M}] \Delta\mathbf{U} \quad (3.17)$$

$$\mathbf{L}(\mathbf{X}_0)\Delta\mathbf{X} = \Delta E\mathbf{K}\mathbf{U}_0 \quad (3.18)$$

- $\mathbf{Q}$  un opérateur quadratique, regroupant les produits de deux inconnues :

$$\mathbf{Q}(\Delta\mathbf{X}, \Delta\mathbf{X}) = \Delta E\mathbf{K}\Delta\mathbf{U} + \Delta\Omega\mathbf{M}\Delta\mathbf{U} \quad (3.19)$$

Grâce à l'écriture sous forme incrémentale (3.12), le problème initial (3.2) se présente sous la forme suivante [Mallil *et al.*, 2000] :

$$\mathbf{L}_t(\mathbf{X}_0)\Delta\mathbf{X} + \mathbf{L}(\mathbf{X}_0)\Delta\mathbf{X} + \mathbf{Q}(\Delta\mathbf{X}, \Delta\mathbf{X}) = -\mathbf{R}_0 \quad (3.20)$$

Comme expliqué dans [Zahrouni, 1998], cette formulation quadratique (3.20) présente l'avantage de faire intervenir une seule sommation dans le second membre, noté  $\mathbf{F}_p$  (3.27), au lieu d'une double sommation comme c'est le cas naturellement avec la méthode de perturbation qui conduit à une formulation cubique. Ainsi, le temps de calcul du second membre à chaque ordre reste faible par rapport au temps de calcul de l'opérateur tangent  $\mathbf{L}_t$ , ce qui contribue à maîtriser le temps CPU nécessaire pour un pas de calcul (cf. FIGURE 3.15).

### 3.3.1.2 Homotopie

En mathématiques, l'homotopie est une notion topologique formalisant la déformation continue d'un objet à l'autre. Appliquée au contexte de la thèse, la technique d'homotopie consiste à déformer continûment le problème non-linéaire (3.20) en un problème plus simple à résoudre. Pour cela, on introduit un paramètre d'homotopie  $\varepsilon$ , qui varie de manière continue entre 0 et 1. Quand  $\varepsilon$  est nul, on résout un problème "simple", et lorsque  $\varepsilon$  vaut "1", on retrouve le problème initial (3.20), correspondant à l'étude des vibrations du système dissipatif. Ce paramètre  $\varepsilon$  doit être introduit de façon judicieuse afin d'obtenir un algorithme robuste et rapide [Cochelin *et al.*, 2007].

Pour cette étude, le paramètre d'homotopie  $\varepsilon$  est introduit suivant la proposition de [Mallil *et al.*, 2000] :

$$\mathbf{L}_t(\mathbf{X}_0)\Delta\mathbf{X} + \varepsilon\mathbf{L}(\mathbf{X}_0)\Delta\mathbf{X} + \mathbf{Q}(\Delta\mathbf{X}, \Delta\mathbf{X}) = -\varepsilon\mathbf{R}_0 \quad (3.21)$$

Le premier paramètre  $\varepsilon$  placé devant le terme  $\mathbf{L}(\mathbf{X}_0)\Delta\mathbf{X}$  permet de décaler la résolution en module d'Young d'un ordre. Ceci simplifie la résolution en faisant du module d'Young une inconnue "secondaire", qu'il est possible de calculer à partir des valeurs des pulsations à chaque ordre (cf. SECTION 3.3.1.7). A noter que l'écriture de la matrice de rigidité viscoélastique de manière symbolique en  $E(\omega)\mathbf{K}$  permet de considérer les deux modèles de viscoélasticité étudiés (modèle hystérétique ou modèle de Maxwell généralisé). De plus, la théorie étant développée pour un module d'Young  $E(\omega)$  quelconque, d'autres modèles de module d'Young complexe peuvent être envisagés (cf. SECTION 1.3.2). Le second paramètre  $\varepsilon$ , introduit devant le résidu initial  $\mathbf{R}_0$ , permet quant à lui d'avoir un second membre non nul lors de la résolution du problème au premier ordre.

### 3.3.1.3 Perturbation

Les inconnues du problème sont cherchées sous la forme d'un développement en série en fonction des puissances d'un paramètre de perturbation  $\varepsilon$  jusqu'à un ordre de troncature  $N$ . Le paramètre de perturbation est le paramètre d'homotopie :

$$\Delta \mathbf{X} = \sum_{p=1}^N \varepsilon^p \mathbf{X}_p \quad (3.22)$$

soit :

$$\Delta \mathbf{U} = \sum_{p=1}^N \varepsilon^p \mathbf{U}_p \quad \Delta \Omega = \sum_{p=1}^N \varepsilon^p \Omega_p \quad \Delta E = \sum_{p=1}^N \varepsilon^p E_p \quad (3.23)$$

Ces développements asymptotiques sont introduits dans l'équation à résoudre (3.21), qui s'écrit alors :

$$\mathbf{L}_t(\mathbf{X}_0) \sum_{p=1}^N \varepsilon^p \mathbf{X}_p + \varepsilon \mathbf{L}(\mathbf{X}_0) \sum_{p=1}^N \varepsilon^p \mathbf{X}_p + \mathbf{Q} \left( \sum_{p=1}^N \varepsilon^p \mathbf{X}_p, \sum_{p=1}^N \varepsilon^p \mathbf{X}_p \right) = -\varepsilon \mathbf{R}_0 \quad (3.24)$$

### 3.3.1.4 Condition d'orthogonalisation

Pour avoir un problème bien posé (c'est-à-dire autant d'équations que d'inconnues), il est nécessaire d'ajouter une condition supplémentaire. Cette dernière est une condition d'orthogonalisation, semblable à celle utilisée pour l'algorithme de Newton (3.6) :

$$\mathbf{U}^t \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{U}_{\text{na}} = 0 \quad (3.25)$$

### 3.3.1.5 Identification d'une séquence de problèmes linéaires

L'identification suivant les puissances du paramètre  $\varepsilon$  permet de transformer le problème non linéaire (3.24) en une séquence de problèmes linéaires. En réunissant les équations (3.24) et (3.25), le système à résoudre à chaque ordre  $p$  peut s'écrire :

$$\begin{cases} \mathbf{L}_t(\mathbf{X}_0) \cdot \mathbf{X}_p = \mathbf{F}_p \\ \mathbf{U}_p^t \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{U}_{\text{na}} = 0 \end{cases} \quad (3.26)$$

Le second membre  $\mathbf{F}_p$  est défini comme suit :

$$\mathbf{F}_p = \begin{cases} -\mathbf{R}_0 & p = 1 \\ \mathbf{L}(\mathbf{X}_0) \mathbf{X}_{p-1} - \sum_{r=1}^{p-1} \mathbf{Q}(\mathbf{X}_r, \mathbf{X}_{p-r}) & p \geq 2 \end{cases} \quad (3.27)$$

Ainsi, résoudre le problème non linéaire initial (3.2) revient à résoudre une suite de problèmes linéaires (3.26).

Le point initial  $(\mathbf{U}_0, \Omega_0)$  de la première itération est choisi comme étant la solution du problème conservatif  $(\mathbf{U}_{\text{na}}, \Omega_{\text{na}})$ , présenté au CHAPITRE 2 [Duigou *et al.*, 2003]. Le second membre  $\mathbf{F}_p$  dépend donc uniquement de la solution du problème non amorti et des solutions obtenues aux ordres précédents.

De plus, ces problèmes possèdent tous le même opérateur tangent  $\mathbf{L}_t$ . Ce dernier est donc calculé une seule fois par itération et réutilisé pour chaque ordre  $p$ . Ainsi, on compte sur cette utilisation récurrente de l'opérateur tangent dans le calcul d'une perturbation d'ordre élevé pour diminuer le temps de calcul (cf. SECTION 3.5.4.3).

### 3.3.1.6 Séparation des parties réelles et imaginaires

**Système général** Le vecteur des inconnues  $\mathbf{X}$  étant complexe, le système (3.26) est réécrit en faisant apparaître les parties réelles et imaginaires des opérateurs :

$$\begin{cases} (\mathbf{L}_t^R + i\mathbf{L}_t^I) \cdot (\mathbf{X}_p^R + i\mathbf{X}_p^I) = (\mathbf{F}_p^R + i\mathbf{F}_p^I) \\ (\mathbf{U}_p^R + i\mathbf{U}_p^I)^t \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{U}_{na} = 0 \end{cases} \quad (3.28)$$

Pour alléger les notations, l'écriture des opérateurs  $\mathbf{L}_t(\mathbf{X}_0)$  et  $\mathbf{L}(\mathbf{X}_0)$  est simplifiée en  $\mathbf{L}_t$  et  $\mathbf{L}$ .

En séparant les parties réelles des parties imaginaires, on obtient :

$$\begin{cases} \mathbf{L}_t^R \cdot \mathbf{X}_p^R - \mathbf{L}_t^I \cdot \mathbf{X}_p^I = \mathbf{F}_p^R \\ \mathbf{L}_t^I \cdot \mathbf{X}_p^R + \mathbf{L}_t^R \cdot \mathbf{X}_p^I = \mathbf{F}_p^I \\ \mathbf{U}_p^{Rt} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{U}_{na} = 0 \\ \mathbf{U}_p^{It} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{U}_{na} = 0 \end{cases} \quad (3.29)$$

**Opérateur tangent** L'opérateur tangent  $\mathbf{L}_t$  est défini dans l'équation (3.17). En introduisant la perturbation (3.23) dans (3.17), on obtient, quel que soit l'ordre  $p$  :

$$\mathbf{L}_t \mathbf{X}_p = \Omega_p \mathbf{M} \mathbf{U}_0 + [\mathbf{K}(\mathbf{0}) + E_0 \mathbf{K} + \Omega_0 \mathbf{M}] \mathbf{U}_p \quad (3.30)$$

En introduisant les notations complexes, les facteurs  $\mathbf{L}_t^R \mathbf{X}_p^R$ ,  $\mathbf{L}_t^I \mathbf{X}_p^I$ ,  $\mathbf{L}_t^R \mathbf{X}_p^I$  et  $\mathbf{L}_t^I \mathbf{X}_p^R$  sont identifiés :

$$\mathbf{L}_t^R \mathbf{X}_p^R = \Omega_p^R \mathbf{M} \mathbf{U}_0^R + [\mathbf{K}(\mathbf{0}) + E_0^R \mathbf{K} + \Omega_0^R \mathbf{M}] \mathbf{U}_p^R \quad (3.31)$$

$$\mathbf{L}_t^I \mathbf{X}_p^I = \Omega_p^I \mathbf{M} \mathbf{U}_0^I + [E_0^I \mathbf{K} + \Omega_0^I \mathbf{M}] \mathbf{U}_p^I \quad (3.32)$$

$$\mathbf{L}_t^R \mathbf{X}_p^I = \Omega_p^I \mathbf{M} \mathbf{U}_0^R + [\mathbf{K}(\mathbf{0}) + E_0^R \mathbf{K} + \Omega_0^R \mathbf{M}] \mathbf{U}_p^I \quad (3.33)$$

$$\mathbf{L}_t^I \mathbf{X}_p^R = \Omega_p^R \mathbf{M} \mathbf{U}_0^I + [E_0^I \mathbf{K} + \Omega_0^I \mathbf{M}] \mathbf{U}_p^R \quad (3.34)$$

Par la suite, on notera :

$$\mathbf{L}_t^R \mathbf{U} = \mathbf{K}(\mathbf{0}) + E_0^R \mathbf{K} + \Omega_0^R \mathbf{M} \quad (3.35)$$

$$\mathbf{L}_t^R \Omega = \mathbf{M} \mathbf{U}_0^R \quad (3.36)$$

$$\mathbf{L}_t^I \mathbf{U} = E_0^I \mathbf{K} + \Omega_0^I \mathbf{M} \quad (3.37)$$

$$\mathbf{L}_t^I \Omega = \mathbf{M} \mathbf{U}_0^I \quad (3.38)$$

$$(3.39)$$

**Second membre** Le second membre est défini par (3.27). En introduisant la perturbation (3.23) et en séparant les parties réelles des parties imaginaires, on identifie :

$$\mathbf{F}_p^R = \begin{cases} - [\mathbf{K}(\mathbf{0}) + E_0^R \mathbf{K} + \Omega_0^R \mathbf{M}] \mathbf{U}_0^R + [E_0^I \mathbf{K} + \Omega_0^I \mathbf{M}] \mathbf{U}_0^I = -\mathbf{R}_0^R & p = 1 \\ - E_{p-1}^R \mathbf{K} \mathbf{U}_0^R + E_{p-1}^I \mathbf{K} \mathbf{U}_0^I - \sum_{r=1}^{p-r} \{ [E_r^R \mathbf{K} + \Omega_r^R \mathbf{M}] \mathbf{U}_{p-r}^R - [E_r^I \mathbf{K} + \Omega_r^I \mathbf{M}] \mathbf{U}_{p-r}^I \} & p \geq 2 \end{cases} \quad (3.40)$$

$$\mathbf{F}_p^I = \begin{cases} - [\mathbf{K}(\mathbf{0}) + E_0^R \mathbf{K} + \Omega_0^R \mathbf{M}] \mathbf{U}_0^I - [E_0^I \mathbf{K} + \Omega_0^I \mathbf{M}] \mathbf{U}_0^R = -\mathbf{R}_0^I & p = 1 \\ - E_{p-1}^R \mathbf{K} \mathbf{U}_0^I - E_{p-1}^I \mathbf{K} \mathbf{U}_0^R - \sum_{r=1}^{p-r} \{ [E_r^R \mathbf{K} + \Omega_r^R \mathbf{M}] \mathbf{U}_{p-r}^I + [E_r^I \mathbf{K} + \Omega_r^I \mathbf{M}] \mathbf{U}_{p-r}^R \} & p \geq 2 \end{cases} \quad (3.41)$$

### 3.3.1.7 Système matriciel à résoudre

En tenant compte des notations précédentes, le système (3.26) peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{L}_t^R \mathbf{U} & -\mathbf{L}_t^I \mathbf{U} & \mathbf{L}_t^R \Omega & -\mathbf{L}_t^I \Omega \\ \mathbf{L}_t^I \mathbf{U} & \mathbf{L}_t^R \mathbf{U} & \mathbf{L}_t^I \Omega & \mathbf{L}_t^R \Omega \\ \mathbf{U}_{\text{na}}^t \cdot \mathbf{M} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{U}_{\text{na}}^t \cdot \mathbf{M} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_p^R \\ \mathbf{U}_p^I \\ \Omega_p^R \\ \Omega_p^I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_p^R \\ \mathbf{F}_p^I \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.42)$$

La résolution de ce système permet d'obtenir les valeurs des inconnues principales  $\mathbf{U}_p^R$ ,  $\mathbf{U}_p^I$ ,  $\Omega_p^R$  et  $\Omega_p^I$  à chaque ordre. Les modules d'Young  $E_p^R$  et  $E_p^I$  sont calculés à partir des pulsations  $\omega_p^R$  et  $\omega_p^I$  (cf. ANNEXE B.2), suivant les développements établis par [Landier, 1993] et [Duigou-Kersulec, 2002].

Enfin, la solution polynomiale est obtenue en posant  $\varepsilon = 1$ , selon (3.21) :

$$\mathbf{X}_{\text{poly}}(\varepsilon = 1) = \mathbf{X}_0 + \sum_{p=1}^N \mathbf{X}_p \quad (3.43)$$

### 3.3.1.8 Approximants de Padé

De la même manière qu'en SECTION 2.3.3, l'utilisation des approximants de Padé permet d'augmenter le domaine de validité de la solution polynomiale (3.43). La représentation de la solution par les approximants de Padé s'écrit alors :

$$\mathbf{X}_{\text{Padé}}(\varepsilon = 1) = \mathbf{X}_0 + \sum_{p=1}^M \frac{\Delta_{M-p}(\varepsilon)}{\Delta_M(\varepsilon)} \mathbf{X}_p \quad \text{avec } M = N - 1 \quad (3.44)$$

où les coefficients  $\Delta_k$  sont définis par les relations (2.20), (2.21) et (2.22).

### 3.3.1.9 Obtention de la solution

En pratique, pour chaque itération, un choix doit s'opérer entre l'approximation polynomiale  $\mathbf{X}_{\text{poly}}$  ou la représentation par approximants de Padé  $\mathbf{X}_{\text{Padé}}$ . On garde comme solution la représentation ayant le résidu le plus faible, en considérant le "meilleur" ordre, c'est-à-dire celui dont le résidu est le plus faible parmi les  $N$  ordres testés [Mallil *et al.*, 2000].

Le critère d'arrêt du processus itératif est identique à celui de l'algorithme de Newton (3.11). Lorsque le critère de convergence (3.11) est vérifié, le processus itératif est stoppé. La pulsation amortie  $\Omega_a$  et l'amortissement structurel  $\eta_m$  sont alors déterminés par :

$$\Omega_a = \sqrt{\omega^{R2} - \omega^{I2}} \quad (3.45)$$

$$\eta_m = \frac{2\omega^R \omega^I}{\omega^{R2} - \omega^{I2}} \quad (3.46)$$

Si la convergence n'est pas atteinte, une nouvelle itération est réalisée, en prenant comme point initial la solution à l'itération précédente :

$$\mathbf{X}_0^{(k+1)} = \mathbf{X}^{(k)} \quad (3.47)$$

### 3.3.2 Alternative - Algorithme de Newton modifié

Le solveur NOE fait partie de la famille des algorithmes itératifs d'ordre élevé dont il existe plusieurs variantes, notamment pour le choix de l'opérateur tangent [Mallil *et al.*, 2000].

Dans le cas de l'algorithme NOE, tel que présenté précédemment, l'opérateur tangent  $\mathbf{L}_t$  est mis à jour à chaque itération (FIGURE 3.2). Ceci permet de corriger la direction au fur et à mesure des itérations et ainsi d'assurer la convergence du calcul.

Dans le but de diminuer le temps de calcul, un solveur de Newton modifié d'ordre élevé pourrait également être étudié [Duigou *et al.*, 2003]. Dans ce cas, l'opérateur tangent calculé à la première itération est réel et conservé pour les itérations suivantes. L'étape de décomposition de la matrice tangente étant exigeante en temps de calcul, ce choix peut permettre de réduire le temps de calcul. En revanche, si la direction donnée pour la première itération n'est pas la bonne, il y a un risque de divergence du calcul.

## 3.4 Algorithmes des solveurs proposés

Dans cette section, le solveur de Newton et le solveur de Newton d'ordre élevé (NOE) étudiés dans ce chapitre sont résumés sous forme d'organigrammes. La FIGURE 3.1 rappelle le solveur de Newton classique, tandis que la FIGURE 3.2 présente le solveur d'ordre élevé.

Pour ces deux solveurs, les solutions non amorties servant de point initial sont calculées avec le solveur MANi présenté au CHAPITRE 2. Le nombre d'itérations est noté  $k$ . Les algorithmes s'arrêtent lorsque le résidu est inférieur à un seuil de tolérance ou lorsque le nombre d'itérations dépasse une valeur maximale, ces deux paramètres étant fixés par l'utilisateur.

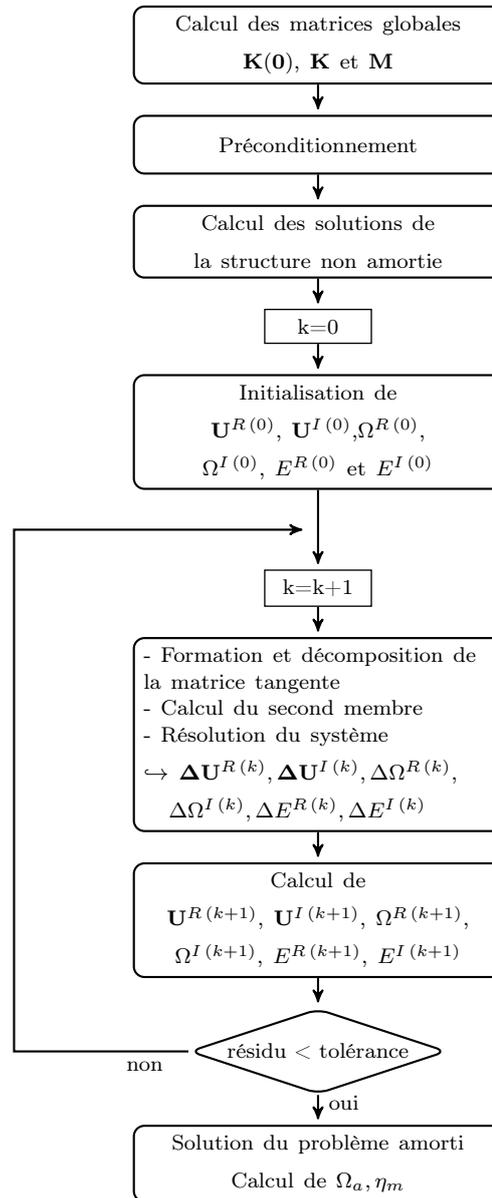


FIGURE 3.1 – Algorithme du solveur de Newton.

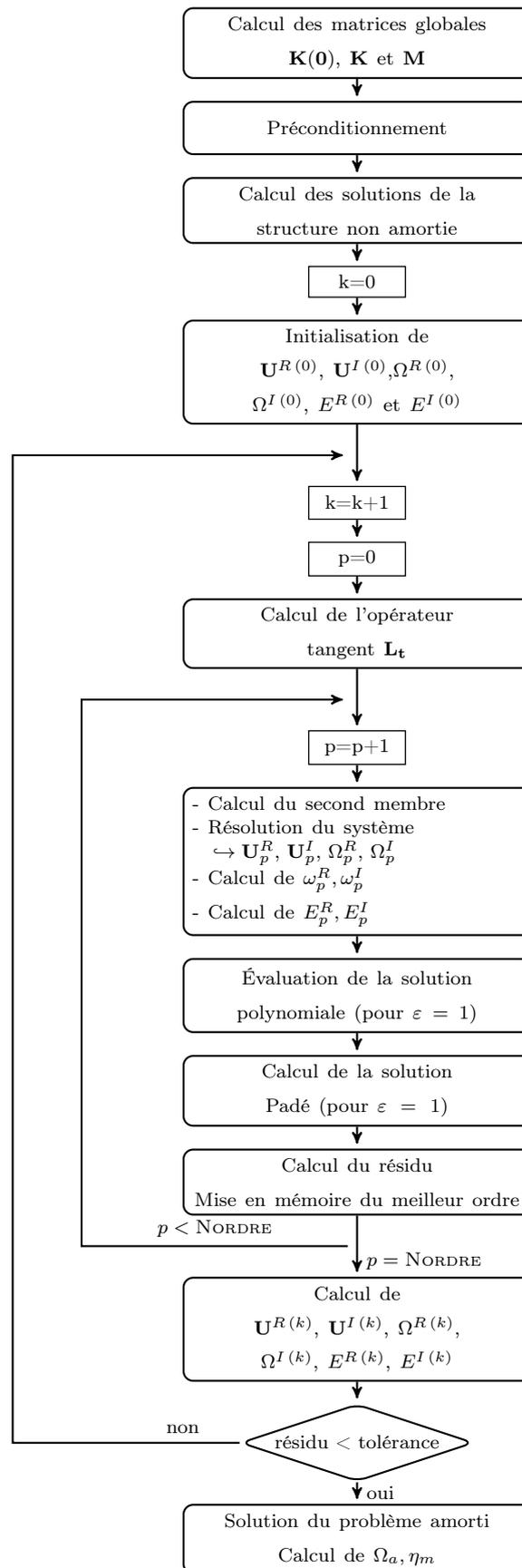


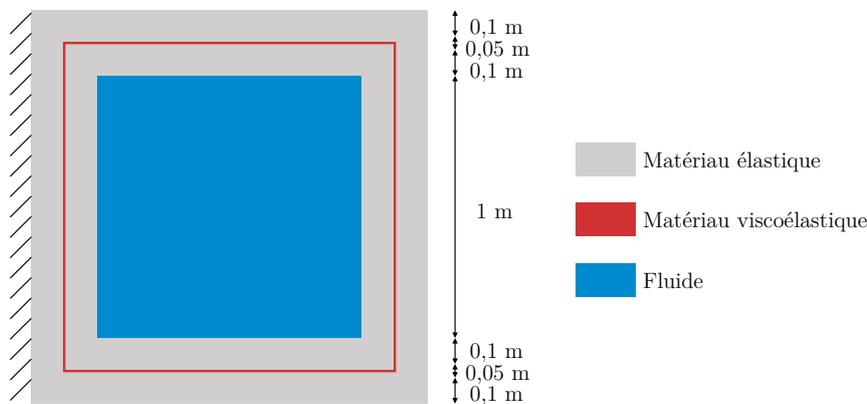
FIGURE 3.2 – Algorithme du solveur de Newton d'ordre élevé (NOE).

### 3.5 Résultats numériques

Après validation des résultats obtenus avec l'algorithme de Newton d'ordre élevé (NOE) proposé en SECTION 3.3, les capacités des solveurs présentés précédemment sont évaluées pour le problème d'une cavité viscoélastique contenant un fluide acoustique. Enfin, le comportement mécanique de la cavité viscoélastique est également étudié.

#### 3.5.1 Problème étudié

Une cavité remplie de fluide (air ou eau), dont les parois sont constituées d'une structure sandwich, est considérée. Les paramètres matériaux ainsi que la géométrie de la structure sont présentés dans la FIGURE 3.3. Il s'agit d'un problème similaire à celui étudié au CHAPITRE 2 [Bermúdez et Rodríguez, 1994], seul le domaine solide est modifié par l'ajout d'une couche de matériau viscoélastique, ceci afin d'introduire de l'amortissement.



(a) Caractéristiques géométriques et conditions limites.

Couches élastiques	Couche viscoélastique	Domaine fluide	
<i>Aluminium</i>	<i>Polymère</i>	<i>Air</i>	<i>Eau</i>
$E_a = 6,9 \cdot 10^{10}$ Pa	$E_0 = 1,794 \cdot 10^6$ Pa	$c_F = 340$ m.s <sup>-1</sup>	$c_F = 1430$ m.s <sup>-1</sup>
$\rho_a = 2766$ kg.m <sup>-3</sup>	$\rho_v = 968,1$ kg.m <sup>-3</sup>	$\rho_F = 1$ kg.m <sup>-3</sup>	$\rho_F = 1000$ kg.m <sup>-3</sup>
$\nu_a = 0,3$	$\nu_v = 0,3$		
épaisseur : 0,1m	épaisseur : 0,05m		

(b) Paramètres matériaux.

FIGURE 3.3 – Problème dissipatif étudié.

**Lois de comportement** Les matériaux élastiques sont modélisés par la loi de comportement de Hooke. Chacun des ces matériaux est décrit par trois paramètres : le module d'Young  $E_a$ , le coefficient de poisson  $\nu_a$  et la masse volumique  $\rho_a$ .

Le comportement du fluide est défini avec par sa masse volumique  $\rho_F$  et la célérité  $c_F$  des ondes acoustiques.

Deux lois de comportement sont testées pour le matériau viscoélastique :

- le modèle hystérétique :

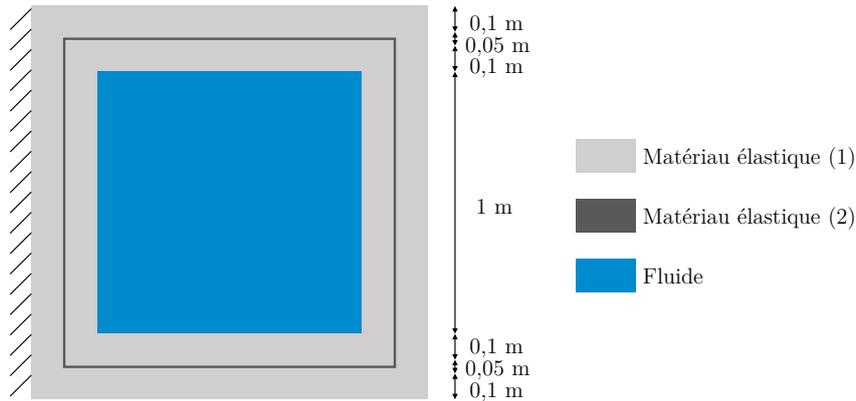
$$E = E_0(1 + i\eta_c) \quad (3.48)$$

- et le modèle de Maxwell généralisé :

$$E(\omega) = k_0 + \eta_0 i\omega + \sum_{j=1}^{N_{\max}} \frac{i\omega}{\left(\frac{i\omega}{k_j} + \frac{1}{\eta_j}\right)} \quad (3.49)$$

Dans le cas du modèle de Maxwell généralisé, les coefficients  $(k_j, \eta_j)$  sont ceux utilisés par [Duigou *et al.*, 2003], obtenus par le groupe Arcelor qui a réalisé des essais en vibrations sur un polymère [Landier, 1993].

**Point initial** Les deux algorithmes utilisés pour le calcul des solutions du problème dissipatif nécessitent le calcul d'un point initial. Ce point initial correspond à la solution du problème sans amortissement, dont les caractéristiques sont données sur la FIGURE 3.4. Il s'agit d'un problème identique à celui de la FIGURE 3.3, à une différence près : la couche viscoélastique est ici remplacée par une couche élastique, dont les paramètres matériaux sont identiques à ceux du matériau viscoélastique (seule la loi de comportement est modifiée). La solution de ce problème non amorti est calculée à l'aide du solveur MANi présenté au CHAPITRE 2 (cf. SECTION 2.3).



(a) Caractéristiques géométriques et conditions limites.

Couches élastiques (1)	Couche élastique (2)	Domaine fluide	
<i>Aluminium</i>	<i>Polymère</i>	<i>Air</i>	<i>Eau</i>
$E_a = 6,9 \cdot 10^{10}$ Pa	$E_0 = 1,794 \cdot 10^6$ Pa	$c_F = 340$ m.s <sup>-1</sup>	$c_F = 1430$ m.s <sup>-1</sup>
$\rho_a = 2766$ kg.m <sup>-3</sup>	$\rho_v = 968,1$ kg.m <sup>-3</sup>	$\rho_F = 1$ kg.m <sup>-3</sup>	$\rho_F = 1000$ kg.m <sup>-3</sup>
$\nu_a = 0,3$	$\nu_v = 0,3$		
épaisseur : 0,1m	épaisseur : 0,05m		

(b) Paramètres matériaux.

FIGURE 3.4 – Caractéristiques du point initial pour le problème dissipatif étudié. La couche de matériau viscoélastique est remplacée par la couche de matériau élastique (2) ayant les mêmes paramètres matériaux (module d'Young, coefficient de Poisson et masse volumique) que le matériau viscoélastique du problème dissipatif.

**Discrétisation - Maillage** L'ensemble du domaine de calcul est discrétisé par les éléments finis quadrangles linéaires "2DFS", décrits dans les chapitres précédents (cf. SECTION 1.5).

**Paramètres de calcul** La tolérance utilisée dans le critère d'arrêt est fixée à  $10^{-3}$ . L'ordre de troncature maximal est fixé à  $N = 20$ . Dans la pratique, tous les ordres sont calculés, puis seul l'ordre ( $\leq 20$ ) permettant le résidu le plus faible est retenu.

### 3.5.2 Validation

Tous les résultats obtenus avec le solveur de Newton d'ordre élevé (représentation polynomiale et approximations de Padé) sont comparés aux résultats obtenus avec le solveur de Newton, ce dernier étant considéré comme le solveur de référence. Les pulsations amorties ainsi que les amortissements obtenus avec le solveur NOE sont comparés avec ceux trouvés avec le solveur de Newton, pour différents jeux de paramètres. Des calculs ont été lancés pour les deux modèles de viscoélasticité (modèle hystérétique et modèle de Maxwell généralisé), avec une cavité remplie d'air ou d'eau. Les tests ont été effectués avec le maillage à 8100 éléments finis (28722 degrés de liberté complexes<sup>1</sup>). Le choix de ce maillage est justifié dans la SECTION 3.5.3.

Le TABLEAU 3.1 présente les résultats obtenus pour le modèle d'amortissement hystérétique, avec un paramètre d'amortissement  $\eta_c$  de 0,5, tandis que le TABLEAU 3.2 présente les résultats obtenus avec le modèle de Maxwell généralisé, pour une température de 30°C. D'autres valeurs d'amortissement  $\eta_c$  et de température ont été testées, les conclusions étant les mêmes que pour les paramètres présentés ici, nous n'avons pas jugé utile de présenter tous les résultats.

Quelle que soit la méthode employée, les valeurs des pulsations amorties et des amortissements structurels sont extrêmement proches. Ceci est particulièrement vrai pour le matériau amortissant de type hystérétique (cf. TABLEAU 3.1) pour lequel les similitudes sont conservées que le fluide soit léger (air) ou lourd (eau). On note cependant des écarts plus "significatifs" dans le cas d'un matériau amortissant de type Maxwell (cf. TABLEAU 3.2), notamment pour les valeurs d'amortissement structurel. De plus, pour les deux modèles d'amortissement testés, les résultats obtenus avec les approximations de Padé sont extrêmement proches de ceux obtenus avec le solveur de Newton. Par exemple, pour le modèle hystérétique, quels que soient le fluide et le mode propre considérés, les valeurs de pulsation et d'amortissement structurel sont identiques jusqu'à la quatrième décimale. Enfin, les résultats obtenus sont en accord avec la réponse du système calculée dans le cas des vibrations forcées (cf. CHAPITRE 4). Le comportement du solveur NOE est satisfaisant et peut être considéré comme valide.

---

1. 14361 degrés de liberté réels et 14361 degrés de liberté imaginaires

(a) Cavité remplie d'air -  $\eta_c = 0,5$ 

Mode	Newton (référence)		NOE		NOE+ Padé	
	$\Omega_a$ (rad/s)	$\eta_m$	$\Omega_a$ (rad/s)	$\eta_m$	$\Omega_a$ (rad/s)	$\eta_m$
1	204,15	$1,46.10^{-1}$	204,15	$1,46.10^{-1}$	204,15	$1,46.10^{-1}$
2	323,61	$4,93.10^{-1}$	323,61	$4,93.10^{-1}$	323,61	$4,93.10^{-1}$
3	338,47	$4,70.10^{-1}$	338,47	$4,70.10^{-1}$	338,47	$4,70.10^{-1}$
4	461,06	$4,05.10^{-1}$	461,06	$4,05.10^{-1}$	461,06	$4,05.10^{-1}$
5	792,79	$8,46.10^{-2}$	792,79	$8,46.10^{-2}$	792,79	$8,46.10^{-2}$
6	1016,69	$5,39.10^{-2}$	1016,69	$5,39.10^{-2}$	1016,69	$5,39.10^{-2}$
7	1068,65	$4,32.10^{-5}$	1068,65	$4,32.10^{-5}$	1068,65	$4,32.10^{-5}$
8	1068,65	$6,51.10^{-5}$	1068,65	$6,51.10^{-5}$	1068,65	$6,51.10^{-5}$
9	1276,60	$7,18.10^{-2}$	1276,60	$7,18.10^{-2}$	1276,60	$7,18.10^{-2}$
10	1511,21	$2,28.10^{-5}$	1511,21	$2,28.10^{-5}$	1511,21	$2,28.10^{-5}$

(b) Cavité remplie d'eau -  $\eta_c = 0,5$ 

Mode	Newton (référence)		NOE		NOE + Padé	
	$\Omega_a$ (rad/s)	$\eta_m$	$\Omega_a$ (rad/s)	$\eta_m$	$\Omega_a$ (rad/s)	$\eta_m$
1	174,70	$1,87.10^{-1}$	174,70	$1,87.10^{-1}$	174,70	$1,87.10^{-1}$
2	253,61	$4,73.10^{-1}$	253,61	$4,73.10^{-1}$	253,61	$4,73.10^{-1}$
3	301,40	$4,81.10^{-1}$	301,40	$4,81.10^{-1}$	301,40	$4,81.10^{-1}$
4	424,55	$3,66.10^{-1}$	424,55	$3,66.10^{-1}$	424,55	$3,66.10^{-1}$
5	652,57	$8,83.10^{-2}$	652,57	$8,83.10^{-2}$	652,57	$8,83.10^{-2}$
6	934,13	$1,75.10^{-2}$	934,13	$1,75.10^{-2}$	934,13	$1,75.10^{-2}$
7	1061,59	$1,06.10^{-1}$	1061,59	$1,06.10^{-1}$	1061,59	$1,06.10^{-1}$
8	1595,88	$3,33.10^{-2}$	1595,88	$3,33.10^{-2}$	1595,88	$3,33.10^{-2}$
9	1743,68	$3,08.10^{-2}$	1743,68	$3,08.10^{-2}$	1743,68	$3,08.10^{-2}$
10	1990,79	$3,85.10^{-2}$	1990,79	$3,85.10^{-2}$	1990,79	$3,85.10^{-2}$

TABLEAU 3.1 – Modèle hystérétique,  $\eta_c = 0,5$  - Pulsations amorties et amortissements structuraux calculés par le solveur de Newton et le solveur de Newton d'ordre élevé (NOE) avec ou sans approximaants de Padé. Les deux versions du solveur NOE sont validées par comparaison avec les résultats obtenus par l'algorithme de Newton, utilisé comme référence.

(a) Cavité remplie d'air -  $T=30^{\circ}\text{C}$ 

Mode	Newton (référence)		NOE		NOE + Padé	
	$\Omega_a$ (rad/s)	$\eta_m$	$\Omega_a$ (rad/s)	$\eta_m$	$\Omega_a$ (rad/s)	$\eta_m$
1	218,54	$8,24 \cdot 10^{-2}$	218,54	$8,20 \cdot 10^{-2}$	218,54	$8,20 \cdot 10^{-2}$
2	425,07	$4,74 \cdot 10^{-1}$	428,87	$4,43 \cdot 10^{-1}$	428,98	$4,41 \cdot 10^{-1}$
3	441,81	$4,36 \cdot 10^{-1}$	444,81	$4,08 \cdot 10^{-1}$	444,81	$4,08 \cdot 10^{-1}$
4	598,06	$4,76 \cdot 10^{-1}$	603,27	$4,42 \cdot 10^{-1}$	603,65	$4,42 \cdot 10^{-1}$
5	859,98	$1,78 \cdot 10^{-1}$	860,49	$1,77 \cdot 10^{-1}$	860,49	$1,77 \cdot 10^{-1}$
6	1074,29	$8,64 \cdot 10^{-2}$	1074,36	$8,62 \cdot 10^{-2}$	1074,36	$8,62 \cdot 10^{-2}$
7	1068,70	$1,49 \cdot 10^{-4}$	1068,70	$1,49 \cdot 10^{-4}$	1068,70	$1,49 \cdot 10^{-4}$
8	1068,61	$1,69 \cdot 10^{-4}$	1068,61	$1,69 \cdot 10^{-4}$	1068,61	$1,69 \cdot 10^{-4}$
9	1394,33	$2,16 \cdot 10^{-1}$	1394,33	$2,16 \cdot 10^{-1}$	1395,92	$2,15 \cdot 10^{-1}$
10	1511,25	$5,92 \cdot 10^{-5}$	1511,25	$5,92 \cdot 10^{-5}$	1511,25	$5,92 \cdot 10^{-5}$

(b) Cavité remplie d'eau -  $T=30^{\circ}\text{C}$ 

Mode	Newton (référence)		NOE		NOE + Padé	
	$\Omega_a$ (rad/s)	$\eta_m$	$\Omega_a$ (rad/s)	$\eta_m$	$\Omega_a$ (rad/s)	$\eta_m$
1	189,39	$9,34 \cdot 10^{-2}$	189,39	$9,29 \cdot 10^{-2}$	189,39	$9,29 \cdot 10^{-2}$
2	326,00	$3,71 \cdot 10^{-1}$	327,43	$3,52 \cdot 10^{-1}$	327,43	$3,52 \cdot 10^{-1}$
3	392,45	$4,37 \cdot 10^{-1}$	395,00	$4,09 \cdot 10^{-1}$	395,52	$4,08 \cdot 10^{-1}$
4	539,02	$4,04 \cdot 10^{-1}$	544,29	$3,77 \cdot 10^{-1}$	542,64	$3,81 \cdot 10^{-1}$
5	705,56	$1,80 \cdot 10^{-1}$	705,98	$1,79 \cdot 10^{-1}$	705,98	$1,79 \cdot 10^{-1}$
6	952,00	$3,82 \cdot 10^{-2}$	952,01	$3,82 \cdot 10^{-2}$	952,01	$3,82 \cdot 10^{-2}$
7	1188,55	$2,43 \cdot 10^{-1}$	1190,69	$2,41 \cdot 10^{-1}$	1190,41	$2,41 \cdot 10^{-1}$
8	1663,80	$8,22 \cdot 10^{-2}$	1663,89	$8,21 \cdot 10^{-2}$	1663,89	$8,21 \cdot 10^{-2}$
9	1818,86	$8,80 \cdot 10^{-2}$	1818,99	$8,78 \cdot 10^{-2}$	1818,99	$8,78 \cdot 10^{-2}$
10	2028,73	$4,74 \cdot 10^{-2}$	2028,92	$4,66 \cdot 10^{-2}$	2028,81	$4,70 \cdot 10^{-2}$

TABLEAU 3.2 – Modèle de Maxwell généralisé,  $T=30^{\circ}\text{C}$  - Pulsations amorties et amortissements structurels calculés par le solveur de Newton et le solveur de Newton d'ordre élevé (NOE) avec ou sans approximatants de Padé. Les deux versions du solveur NOE sont validées par comparaison avec les résultats obtenus par l'algorithme de Newton, utilisé comme référence.

### 3.5.3 Étude de convergence - Choix d'un maillage

Afin de réaliser les tests de comparaison des différentes méthodes proposées, ainsi que les tests de comportement mécanique, il est nécessaire de choisir un maillage commun pour tous les tests. Il s'agit ici de faire un compromis entre la précision du résultat obtenu et les possibilités techniques dont nous disposons (machines, compilateur, outils de post-traitement et de visualisation). La convergence des résultats sur différents maillages est étudiée afin de choisir un maillage qui réponde aux critères énoncés précédemment.

Le matériau viscoélastique est modélisé par le modèle d'amortissement hystérétique. Les courbes présentées sont obtenues pour une seule valeur du coefficient d'amortissement hystérétique ( $\eta_c = 1,5$ ), mais les conclusions sont les mêmes avec les autres valeurs testées ( $0 \leq \eta_c \leq 1,5$ ).

#### 3.5.3.1 Choix de la discrétisation de la couche viscoélastique

Dans un premier temps, l'influence de la discrétisation par éléments finis de la couche viscoélastique est étudiée. En effet, compte-tenu du choix fait pour la modélisation de la structure sandwich, il est nécessaire de prévoir suffisamment d'éléments dans la couche viscoélastique pour permettre le comportement "zig-zag" évoqué au CHAPITRE 1. Dans le cadre de l'amortissement des vibrations, la couche viscoélastique est généralement fine, ce qui induit une réponse mécanique de la couche en cisaillement. Une discrétisation par des éléments finis linéaires impose alors un nombre d'éléments finis dans l'épaisseur suffisamment élevé afin de décrire précisément ce type de réponse.

Tous les maillages testés ont le même nombre d'éléments dans les couches élastiques et dans la cavité fluide, seul le nombre d'éléments dans la couche viscoélastique est modifié. On fixe à quatre le nombre d'éléments dans chaque couche élastique. La cavité fluide est discrétisée par  $40 \times 40$  éléments afin d'obtenir des éléments solides élastiques et des éléments fluides de même dimension caractéristique<sup>1</sup>, à savoir  $2,50 \cdot 10^{-2}$  m. Le détail des discrétisations testées pour la couche viscoélastique est donné dans le TABLEAU 3.3.

Nb éléments visco.	1	2	3	4	6	8
Dim. caractéristique	$5,00 \cdot 10^{-2}$	$2,50 \cdot 10^{-2}$	$1,67 \cdot 10^{-2}$	$1,25 \cdot 10^{-2}$	$8,33 \cdot 10^{-3}$	$6,25 \cdot 10^{-3}$
Nb éléments total	3364	3600	3844	4096	4624	5184
Nb nœuds	3481	3721	3969	4225	4761	5329
Nb ddl complexes	11202	12162	13154	14178	16322	18594
Nb éléments visco.	10	12	14	16	18	20
Dim. caractéristique	$5,00 \cdot 10^{-3}$	$4,17 \cdot 10^{-3}$	$3,57 \cdot 10^{-3}$	$3,13 \cdot 10^{-3}$	$2,78 \cdot 10^{-3}$	$2,50 \cdot 10^{-3}$
Nb éléments total	5776	6400	7056	7744	8464	9216
Nb nœuds	5929	6561	7225	7921	8649	9409
Nb ddl complexes	20994	23522	26178	28962	31874	34914

TABLEAU 3.3 – Caractéristiques des maillages testés pour déterminer le nombre d'éléments finis nécessaires dans l'épaisseur de la couche viscoélastique.

Les résultats convergent rapidement lorsque la discrétisation de la couche visqueuse est

1. La dimension caractéristique désigne le rapport entre l'épaisseur du domaine et le nombre d'éléments utilisés pour le discrétiser  $nbe$ . Ainsi,  $dimension\ caractéristique = épaisseur/nbe$ .

affinée (FIGURE 3.5). En l'absence d'un élément fini dédié à la modélisation de la structure sandwich, la couche viscoélastique doit être discrétisée par au moins six éléments. L'objectif étant d'étudier l'influence de l'amortissement sur le comportement du système couplé, il nous semble nécessaire d'avoir une bonne représentation du comportement de la structure sandwich. Pour la suite, nous choisissons donc de discrétiser la couche viscoélastique avec dix éléments finis.

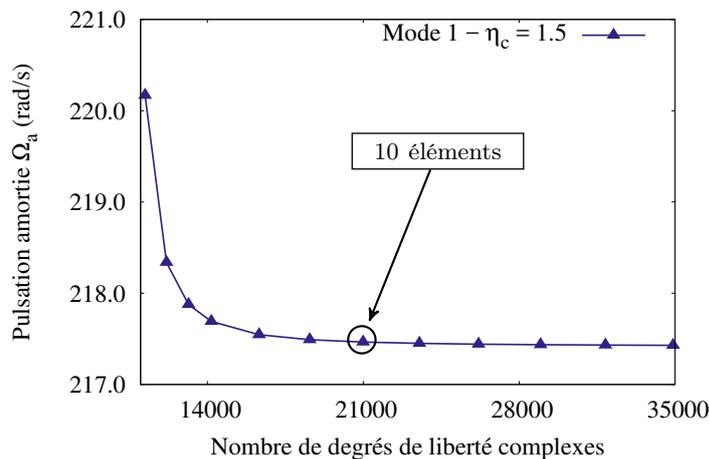
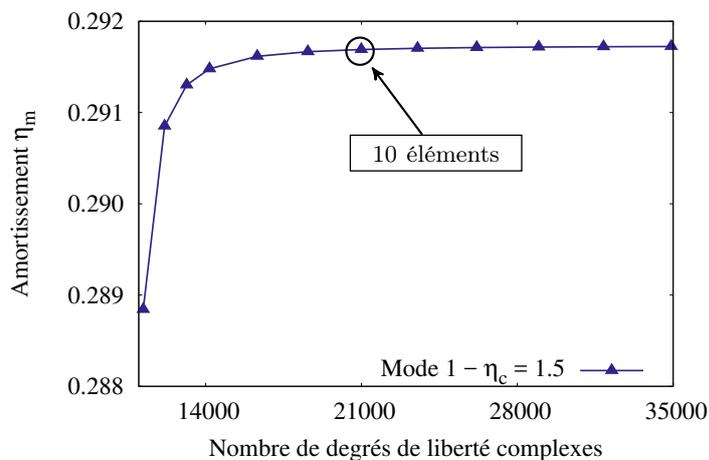
(a) Pulsation amortie  $\Omega_a$ .(b) Amortissement  $\eta_m$ .

FIGURE 3.5 – Modèle hystérétique,  $\eta_c = 1,5$  - Cavité remplie d'air - Mode propre n°1 - Recherche du nombre d'éléments pour la couche viscoélastique : pulsation amortie  $\Omega_a$  et amortissement  $\eta_m$  en fonction du nombre de degrés de liberté.

### 3.5.3.2 Convergence selon le nombre total de degrés de liberté

Dans un deuxième temps, nous cherchons à déterminer le nombre d'éléments à placer dans les couches élastiques et le domaine fluide.

Une solution aurait été de garder une taille d'élément identique dans tous les domaines (élastique, viscoélastique et fluide). Un tel maillage comporterait 90 000 éléments, soit 90 601 nœuds. Or, en l'état actuel, la capacité de mémoire disponible au laboratoire ne permet pas d'effectuer des calculs sur ce maillage. Il va donc falloir déterminer un maillage qui permette

de respecter la convergence des résultats (précision acceptable), tout en étant compatible avec les outils numériques à disposition (compilateur, outil de post-traitement et de visualisation). Par ailleurs, le temps de calcul doit être acceptable, notamment pour l'étude des vibrations forcées (cf. CHAPITRE 4).

Trois séries de maillages sont étudiées. Pour chacune des séries, la couche viscoélastique est discrétisée avec dix éléments finis (cf. SECTION 3.5.3.1) et on fait varier le nombre d'éléments dans les couches élastiques ou le nombre d'éléments dans le domaine fluide. Le détail des maillages testés est donné dans le TABLEAU 3.4.

(a) "10v 40f x elast" : 10 éléments dans la couche viscoélastique, 40×40 éléments dans la cavité fluide, nombre variable d'éléments dans les couches élastiques.

Nb éléments élastiques	2	3	4	5	6	7	8
Nb éléments fluides	40×40	40×40	40×40	40×40	40×40	40×40	40×40
Nb éléments total	4624	5184	5776	6400	7056	7744	8464
Nb nœuds	4761	5329	5929	6561	7225	7921	8649
Nb ddls complexes	16322	18594	20994	23522	26178	28962	31874
Nb éléments élastiques	9	10	11	12	13	14	15
Nb éléments fluides	40×40	40×40	40×40	40×40	40×40	40×40	40×40
Nb éléments total	9216	10000	10816	11664	12544	13456	14400
Nb nœuds	9409	10201	11025	11881	12769	13689	14641
Nb ddls complexes	34914	38082	41378	44802	48354	52034	55842

(b) "10v 50f x elast" : 10 éléments dans la couche viscoélastique, 50×50 éléments dans la cavité fluide, nombre variable d'éléments dans les couches élastiques.

Nb éléments élastiques	3	4	5	6	7	8	10	11
Nb éléments fluides	50×50	50×50	50×50	50×50	50×50	50×50	50×50	50×50
Nb éléments total	6724	7396	8100	8836	9604	10404	12100	12996
Nb nœuds	6889	7569	8281	9025	9801	10609	12321	13225
Nb ddls complexes	23154	25874	28722	31698	34802	38034	44882	48498

(c) "10v xf 5elast" : 10 éléments dans la couche viscoélastique, nombre variable d'éléments dans la cavité fluide, 5 éléments dans les couches élastiques.

Nb éléments élastiques	5	5	5	5	5	5	5	5	5
Nb éléments fluides	10×10	20×20	30×30	40×40	50×50	60×60	70×70	80×80	90×90
Nb éléments total	2500	3600	4900	6400	8100	10000	12100	14400	16900
Nb nœuds	2601	3721	5041	6561	8281	10201	12321	14641	17161
Nb ddls complexes	10322	14322	18722	23522	28722	34322	40322	46722	53522

TABLEAU 3.4 – Caractéristiques des maillages testés dans l'étude de convergence.

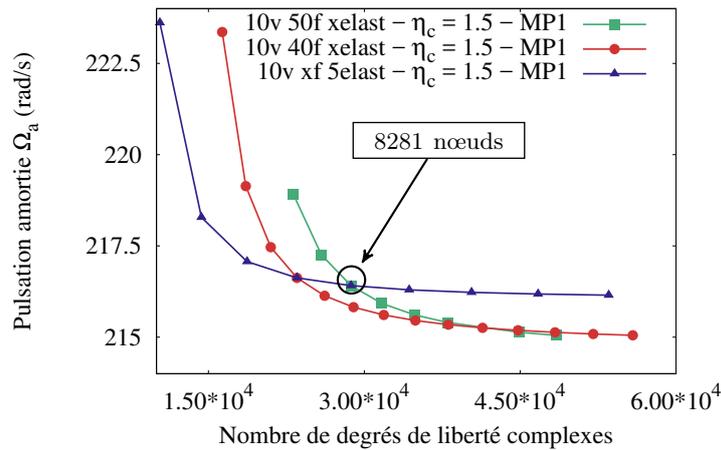
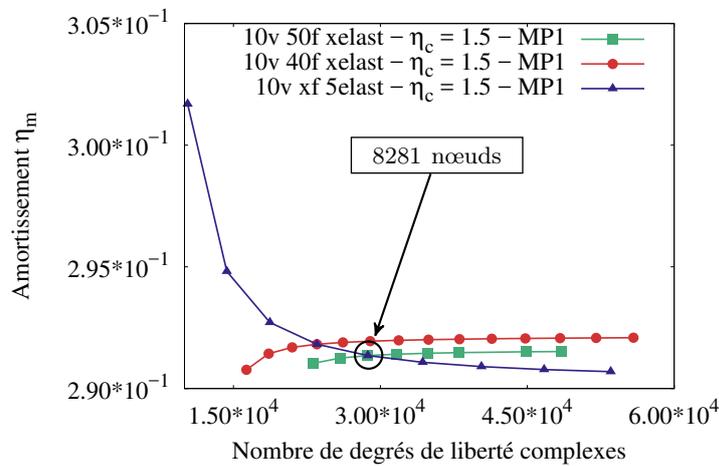
(a) Pulsation amortie  $\Omega_a$ .(b) Amortissement  $\eta_m$ .

FIGURE 3.6 – Modèle hystérétique,  $\eta_c = 1,5$  - Cavité remplie d'air - Mode propre n 1 - Recherche du nombre d'éléments pour les couches élastiques et la cavité fluide : pulsation amortie  $\Omega_a$  et amortissement  $\eta_m$  en fonction du nombre de degrés de liberté.

Dans le cas d'une cavité remplie d'air, pour l'étude du mode n 1 (mode solide), il apparaît que la discrétisation du domaine solide a plus d'influence que celle du domaine fluide. En effet, sur la FIGURE 3.6, la convergence de la série "10v xf 5elast" (en bleu) semble guid e par le nombre d'éléments discrétisant une couche élastique (5 éléments pour cette série de maillages). De plus, les séries "10v 50f xelast" et "10v 40f xelast" (respectivement en vert et rouge) convergent rapidement vers un même résultat, bien que la discrétisation du domaine fluide soit différente.

Pour cette étude, le maillage à 8 281 nœuds, soit 28 722 degrés de liberté est retenu (cf. FIGURE 3.7). La couche viscoélastique est discr tis e par 10 éléments finis, chacune des couches élastiques par 5 éléments, et le domaine fluide est discrétisé par 2 500 éléments ( $50 \times 50$ ).

Bien que n'apparaissant pas comme le "meilleur", ce maillage offre un compromis acceptable entre la performance (en terme de temps de calcul, notamment pour l'étude du régime forcé au CHAPITRE 4) et la précision. Ainsi, l'écart relatif entre les valeurs des pulsations amorties du maillage choisi et celles du maillage le plus finement discrétisé ne dépasse pas 1%.

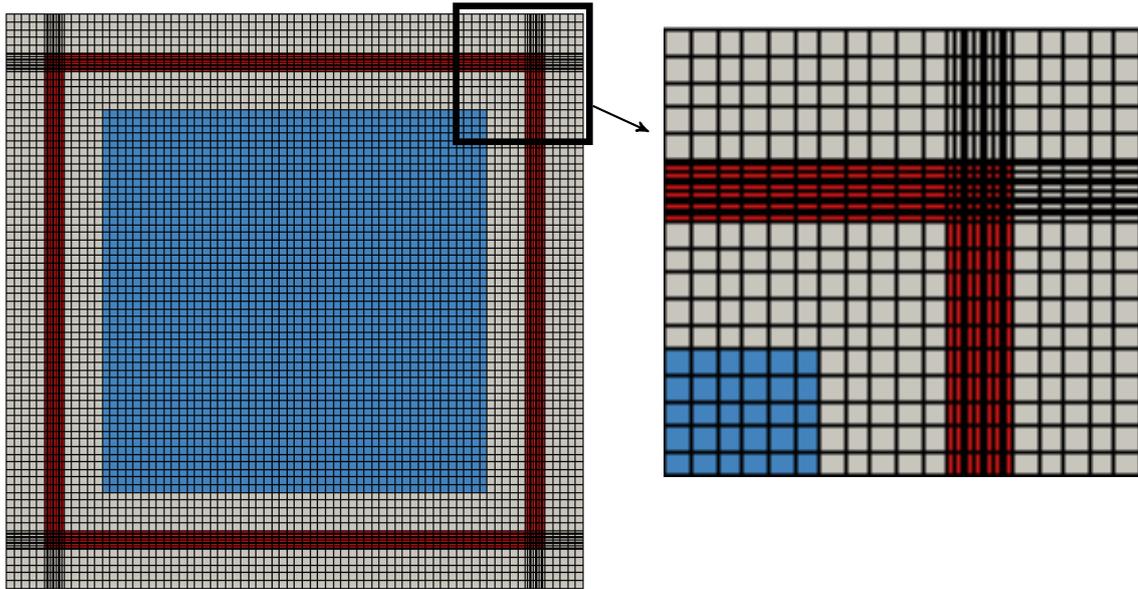


FIGURE 3.7 – Visualisation du maillage utilisé pour les applications numériques (8 100 éléments, 8 281 nœuds, soit 28 722 degrés de liberté).

### 3.5.4 Comparaison des méthodes proposées

Les performances du solveur NOE proposé en SECTION 3.3 sont à présent comparées à celles de l'algorithme de Newton rappelé en SECTION 3.2.

L'ensemble des tests est réalisé sur la cavité remplie d'un fluide léger (air) ou lourd (eau) dont les caractéristiques sont données FIGURE 3.3, avec le maillage déterminé en SECTION 3.5.3. Seuls les résultats relatifs à deux modes propres particuliers sont présentés dans la suite : le mode n°2, qualifié de mode "solide" , et le mode n°7, identifié comme un mode "fluide" dans le cas de la cavité remplie d'air. Dans le cas d'une cavité remplie d'eau, tous les modes sont de type "couplé". En effet, l'eau étant un fluide lourd, le couplage fluide-structure par effet de masse ajoutée est dans ce cas beaucoup plus fort que dans le cas d'un fluide léger tel que l'air.

#### 3.5.4.1 Nombre d'itérations

**Modèle hystérétique** Le nombre d'itérations nécessaires pour atteindre la convergence est étudié pour cinq valeurs du coefficient d'amortissement hystérétique  $\eta_c$ , les résultats étant présentés FIGURE 3.8 et FIGURE 3.9.

Avec le modèle hystérétique, quel que soit l'algorithme utilisé, la solution est obtenue en quelques itérations seulement. L'utilisation du solveur NOE permet d'obtenir la convergence en deux itérations maximum. L'utilisation des approximants de Padé permet de converger dès la première itération pour les faibles valeurs d'amortissement. La FIGURE 3.12 met en évidence la vitesse de convergence des différents algorithmes testés. Pour une même qualité de solution demandée, le solveur NOE, avec ou sans approximants de Padé, est plus rapide que le solveur de Newton.

Par ailleurs, la vitesse de convergence dépend de l'amortissement introduit : plus l'amortissement est important et plus la convergence est lente.

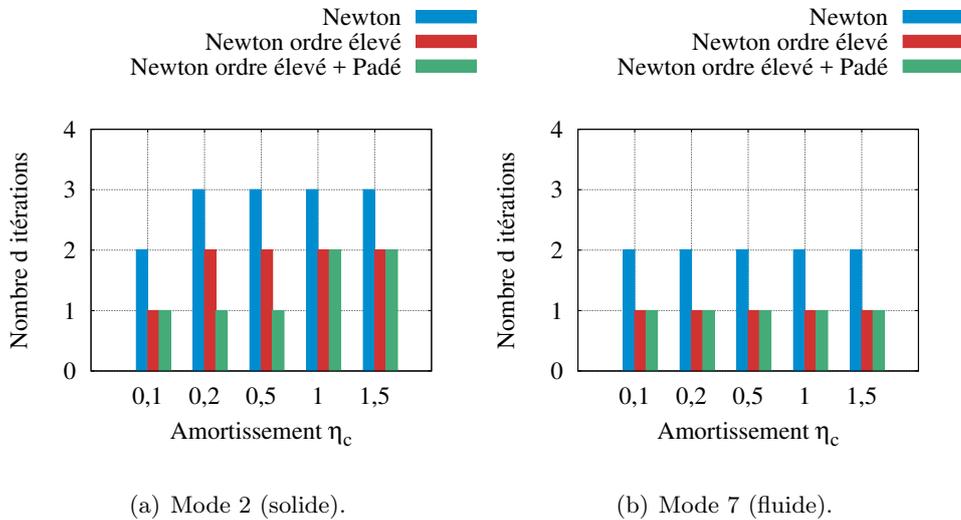


FIGURE 3.8 – Modèle hystérétique - Cavité remplie d'air - Comparaison du nombre d'itérations nécessaires pour obtenir la convergence suivant l'algorithme utilisé, pour différentes valeurs d'amortissement.

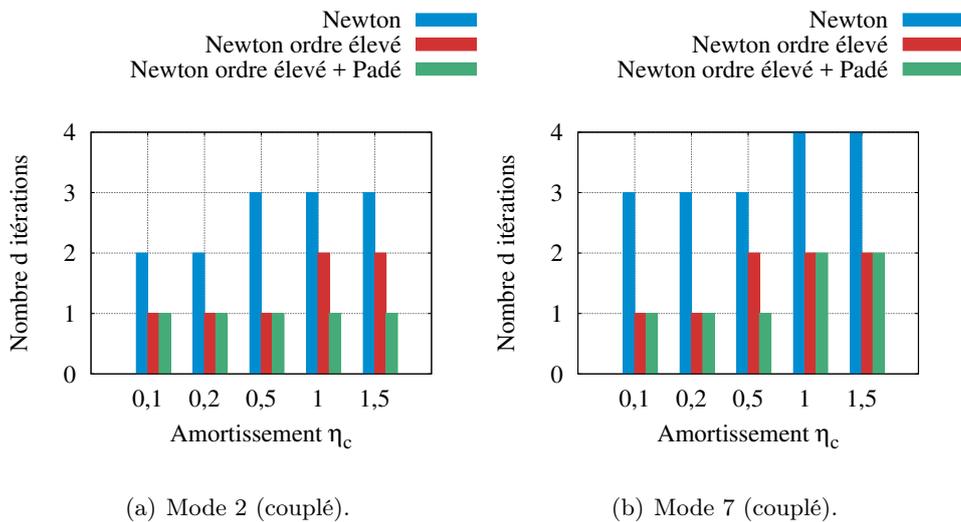


FIGURE 3.9 – Modèle hystérétique - Cavité remplie d'eau - Comparaison du nombre d'itérations nécessaires pour obtenir la convergence suivant l'algorithme utilisé, pour différentes valeurs d'amortissement.

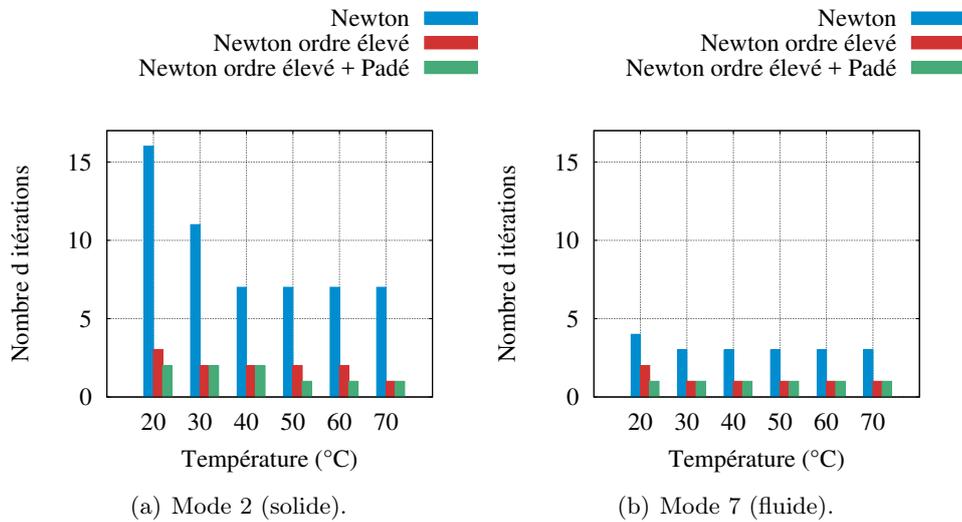


FIGURE 3.10 – Modèle de Maxwell généralisé - Cavité remplie d'air - Comparaison du nombre d'itérations nécessaires pour obtenir la convergence suivant l'algorithme utilis e, pour différentes températures.

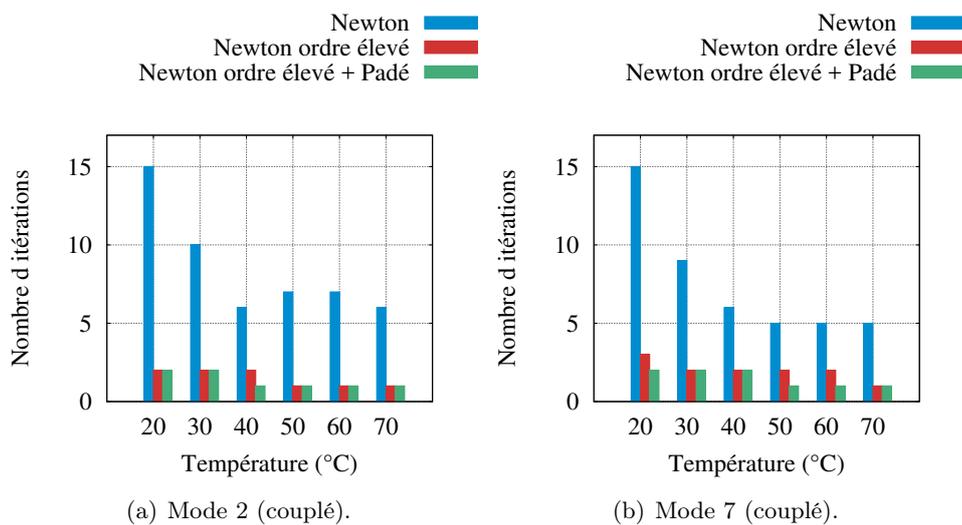


FIGURE 3.11 – Modèle de Maxwell g en eralis e - Cavité remplie d'eau - Comparaison du nombre d'itérations nécessaires pour obtenir la convergence suivant l'algorithme utilis e, pour différentes températures.

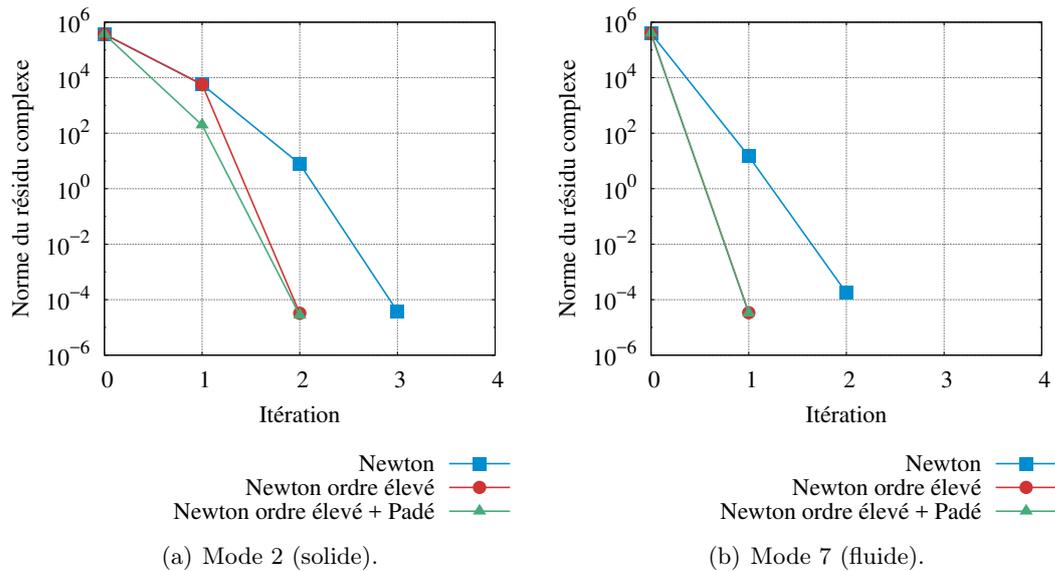


FIGURE 3.12 – Modèle hystérétique avec un coefficient d’amortissement  $\eta_c = 1,0$  - Cavité remplie d’air - Évolution de la norme euclidienne du résidu complexe (3.11) à la fin de chaque itération suivant l’algorithme utilisé.

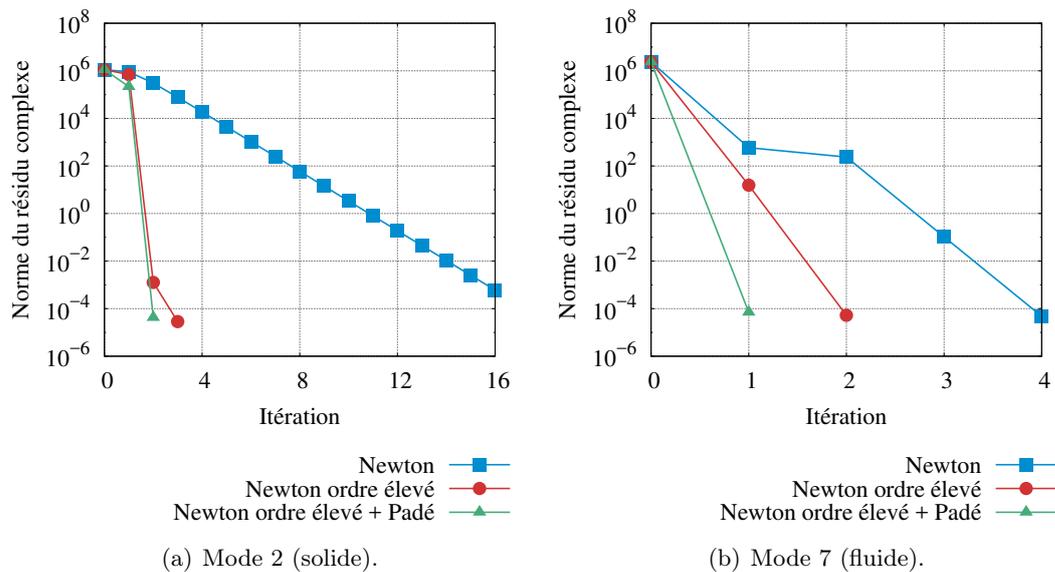


FIGURE 3.13 – Module de Maxwell généralisé avec une température de  $20^\circ\text{C}$  - Cavité remplie d’air - Évolution de la norme euclidienne du résidu complexe (3.11) à la fin de chaque itération suivant l’algorithme utilisé.

**Modèle de Maxwell généralisé** L’intérêt du solveur NOE est pleinement mis en évidence dans le cas d’une modélisation plus complexe de la viscoélasticité, comme le montrent les FIGURE 3.10 et FIGURE 3.11. La complexité du modèle de Maxwell généralisé rend la convergence lente avec un algorithme de Newton (une quinzaine d’itérations pour les modes présentés ici) alors que le solveur NOE permet d’obtenir la convergence au bout de quelques itérations (trois itérations au maximum pour les résultats présentés). Par ailleurs, l’amélioration de la solution

par utilisation des approximants de Padé permet la convergence en une ou deux itérations seulement. La FIGURE 3.13 montre la différence de vitesse de convergence pour les différents algorithmes testés et met en évidence la supériorité du solveur NOE, ainsi que l'intérêt des approximants de Padé.

La vitesse de convergence dépend également du type de mode considéré et de l'amortissement introduit. Ainsi, pour les modes fluides, peu amortis, la convergence est rapide et peu influencée par les variations de température (FIGURE 3.10(b)). Au contraire, pour les modes solides et les modes couplés, la convergence est plus rapide quand la température augmente (FIGURE 3.10(a) et FIGURE 3.11). En effet, plus la température est élevée, plus l'amortissement introduit est faible (cf. SECTION 3.5.5).

### 3.5.4.2 Ordre de troncature à la convergence

L'influence de l'ordre de troncature à la convergence est à présent étudiée. Cet ordre de troncature à la convergence correspond à l'ordre des séries à partir duquel le critère (3.11) est vérifié. A noter que l'ordre de convergence peut être différent du "meilleur ordre" choisi pour le calcul de la solution. En effet, la solution retenue correspond à la représentation ayant le résidu le plus faible parmi les  $N$  ordres testés (cf. SECTION 3.3.1.9).

Afin d'améliorer le processus itératif, un algorithme de Newton d'ordre élevé "adaptatif" a été proposé. Piloté par rapport à la qualité du résidu, cet algorithme consiste à retenir la meilleure représentation de la solution (polynomiale ou rationnelle) et à adapter l'ordre de troncature (celui-ci ne pouvant dépasser une valeur seuil définie par l'utilisateur, ici  $N = 20$ ) de manière à conserver la solution ayant le résidu le plus faible.

Le nombre d'itérations, l'ordre de troncature à la convergence et le choix de représentation pour les calculs présentés en SECTION 3.5.4.1 sont présentés TABLEAU 3.5, TABLEAU 3.6, TABLEAU 3.7 et TABLEAU 3.8.

Lorsque l'amortissement augmente, la convergence est plus lente. On observe tout d'abord une augmentation du nombre d'ordres nécessaires. Puis, lorsque les  $N$  ordres ne suffisent pas à atteindre la convergence, une nouvelle itération est calculée. Par exemple, pour le mode n°2 de la cavité remplie d'air avec prise en compte de la viscoélasticité par le modèle hystérétique (cf. TABLEAU 3.5) : pour un faible amortissement ( $\eta_c = 0,2$ ), il suffit d'une itération et de 10 ordres pour obtenir la convergence. Lorsque l'amortissement augmente ( $\eta_c = 0,5$ ), une seule itération est nécessaire, mais avec une solution polynomiale comportant 20 ordres. Pour un fort amortissement ( $\eta_c = 1,5$ ), deux itérations deviennent nécessaires, avec une solution polynomiale comportant seulement 3 ordres.

Il est ainsi judicieux de choisir un ordre de troncature  $N$  suffisamment grand pour réduire, éventuellement, le nombre d'itérations nécessaires. Dans certains cas cependant, des itérations supplémentaires ne peuvent pas être évitées : la première évaluation de l'opérateur tangent donne une direction qui n'est pas la bonne et le calcul diverge. Une réévaluation de l'opérateur tangent est alors nécessaire pour faire converger le calcul (cf. FIGURE 3.14(b)).

De plus, les résultats obtenus confirment l'intérêt des approximants de Padé. En effet, cette représentation est le plus souvent celle qui conduit à la solution de meilleure qualité. De façon générale, l'utilisation des approximants de Padé permet de diminuer à la fois le nombre d'itérations et l'ordre de convergence (cf. FIGURE 3.14(a)).

(a) Mode 2 (solide).						
	$\eta_c$	0,1	0,2	0,5	1	1,5
NOE	Nb. d'itérations	1	2	2	2	2
	Ordre de convergence	20	1	1	3	4
NOE + Padé	Nb. d'itérations	1	1	1	2	2
	Ordre de convergence	9	10	20	3	3
Choix Padé Padé Padé Série Padé						
(b) Mode 7 (fluide).						
	$\eta_c$	0,1	0,2	0,5	1	1,5
NOE	Nb. d'itérations	1	1	1	1	1
	Ordre de convergence	3	3	4	6	7
NOE + Padé	Nb. d'itérations	1	1	1	1	1
	Ordre de convergence	3	4	5	6	8
Choix Série Série Padé Padé Padé						

TABLEAU 3.5 – Modèle hystérétique - Cavité remplie d'air - Nombre d'itérations, ordre de convergence et représentation choisie pour le solveur NOE avec ou sans ajout des approximants de Padé, pour deux types de modes.

(a) Mode 2 (coupl�e).						
	$\eta_c$	0,1	0,2	0,5	1	1,5
NOE	Nb. d'itérations	1	1	1	2	2
	Ordre de convergence	4	4	20	1	1
NOE + Padé	Nb. d'itérations	1	1	1	1	1
	Ordre de convergence	4	6	9	13	12
Choix Série Série Padé Padé Padé						
(b) Mode 7 (coupl�e).						
	$\eta_c$	0,1	0,2	0,5	1	1,5
NOE	Nb. d'itérations	1	1	2	2	2
	Ordre de convergence	7	10	1	5	7
NOE + Padé	Nb. d'itérations	1	1	1	2	2
	Ordre de convergence	5	7	3	3	3
Choix Padé Padé Padé Série Série						

TABLEAU 3.6 – Modèle hyst eritique - Cavité remplie d'eau - Nombre d'itérations, ordre de convergence et représentation choisie pour le solveur NOE avec ou sans ajout des approximants de Padé, pour deux types de modes.

(a) Mode 2 (solide).							
	Température	20	30	40	50	60	70
NOE	Nb. d'itérations	3	2	2	2	2	1
	Ordre conv.	1	8	4	1	1	20
NOE + Padé	Nb. d'itérations	2	2	2	1	1	1
	Ordre conv.	14	4	3	20	14	11
	Choix Padé	Padé	Padé	Série	Padé	Padé	Padé

(b) Mode 7 (fluide).							
	Température	20	30	40	50	60	70
NOE	Nb. d'itérations	2	1	1	1	1	1
	Ordre conv.	3	9	5	5	4	4
NOE + Padé	Nb. d'itérations	1	1	1	1	1	1
	Ordre conv.	8	6	6	5	5	5
	Choix Padé	Padé	Padé	Série	Série	Padé	Série

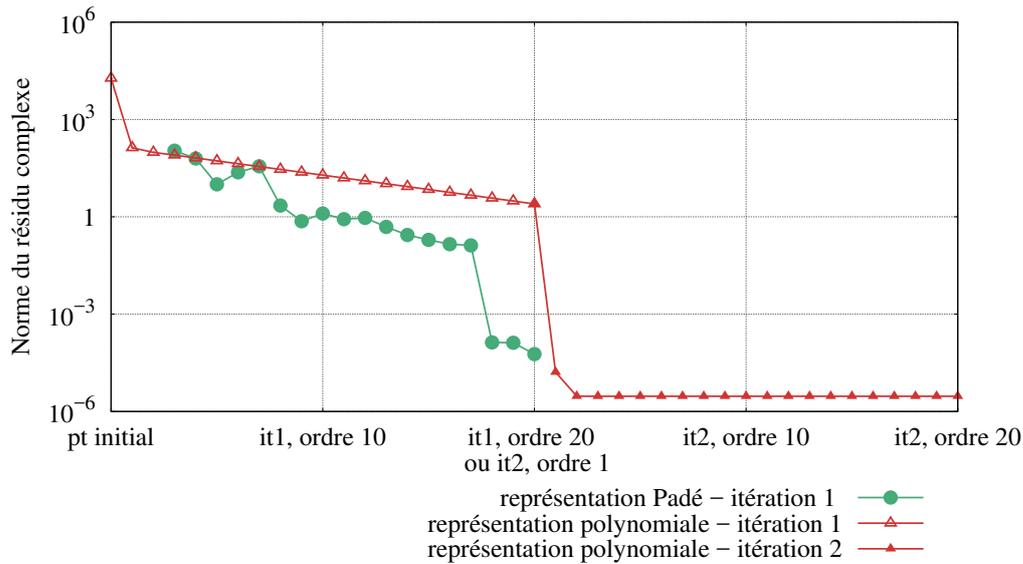
TABLEAU 3.7 – Modèle de Maxwell généralisé - Cavité remplie d'air - Nombre d'itérations, ordre de convergence et représentation choisie pour le solveur NOE avec ou sans ajout des approximatifs de Padé, pour deux types de modes.

(a) Mode 2 (coupl�e).							
	Température	20	30	40	50	60	70
NOE	Nb. d'itérations	2	2	2	1	1	1
	Ordre conv.	11	4	1	15	9	7
NOE + Padé	Nb. d'itérations	2	2	1	1	1	1
	Ordre conv.	7	3	14	14	9	8
	Choix Padé	Padé	Padé	Padé	Padé	Série	Padé

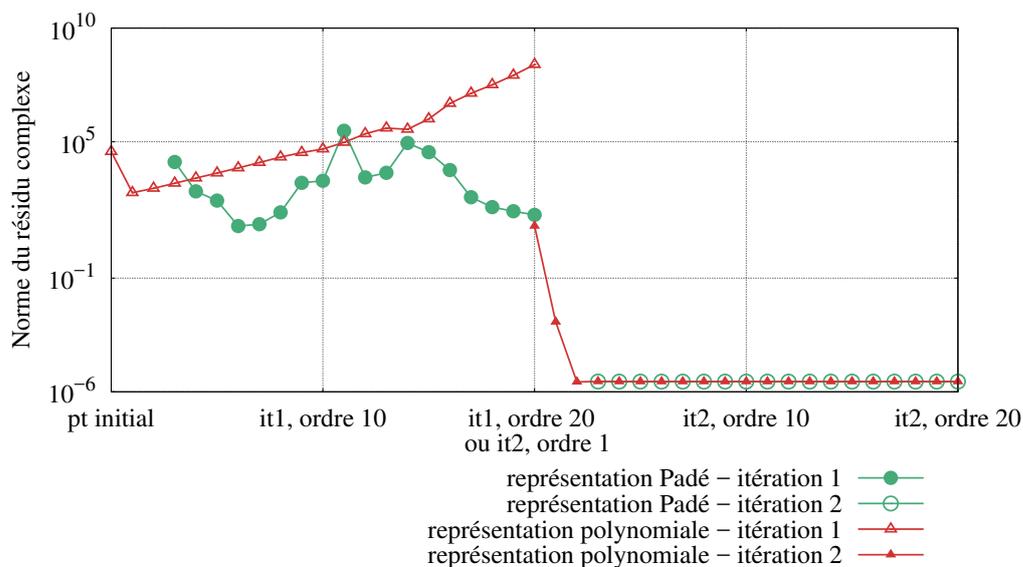
  

(b) Mode 7 (coupl�e).							
	Température	20	30	40	50	60	70
NOE	Nb. d'itérations	3	2	2	2	2	1
	Ordre conv.	2	9	5	2	1	15
NOE + Padé	Nb. d'itérations	2	2	2	1	1	1
	Ordre conv.	5	4	3	13	12	10
	Choix Padé	Padé	Padé	Série	Padé	Padé	Padé

TABLEAU 3.8 – Modèle de Maxwell g en eralis e - Cavité remplie d'eau - Nombre d'itérations, ordre de convergence et représentation choisie pour le solveur NOE avec ou sans ajout des approximatifs de Padé, pour deux types de modes.



(a)  $\eta_c = 0,5$  : Exemple de convergence de la représentation Padé dès la première itération, tandis que la représentation polynomiale converge en deux itérations.



(b)  $\eta_c = 1,0$  : Exemple de divergence de la première itération. Le recalcul de l'opérateur tangent permet de réorienter le calcul dans la bonne direction et d'obtenir la convergence à la deuxième itération.

FIGURE 3.14 – Modèle hystérétique ( $\eta_c = 0,5$  et  $\eta_c = 1,0$ ) - Cavité remplie d'air - Mode propre n°2 (solide) - Évolution de la norme du résidu complexe (3.11) en fonction de l'itération et de l'ordre.

### 3.5.4.3 Étude des temps CPU

La répartition du temps CPU lors de la résolution par le solveur NOE est à présent étudiée.

Il est connu que la mesure du temps écoulé pour la réalisation d'un processus informatique est complexe et surtout variable. Par conséquent, dans cette étude, les temps CPU nécessaires à la résolution du problème sont évalués en faisant une moyenne sur plusieurs itérations, tous types de modes confondus. Le fluide utilisé (air ou eau) et l'amortissement introduit par la

couche viscoélastique n'ont pas d'influence sur les temps CPU si on considère les temps moyens pour une itération.

Les résultats présentés FIGURE 3.15 correspondent à la moyenne des itérations nécessaires pour calculer les 10 premiers modes propres d'une cavité remplie d'air ( $\eta_c = 0,1$  dans le cas du modèle hystérétique,  $T=20^\circ\text{C}$  pour le modèle de Maxwell généralisé).

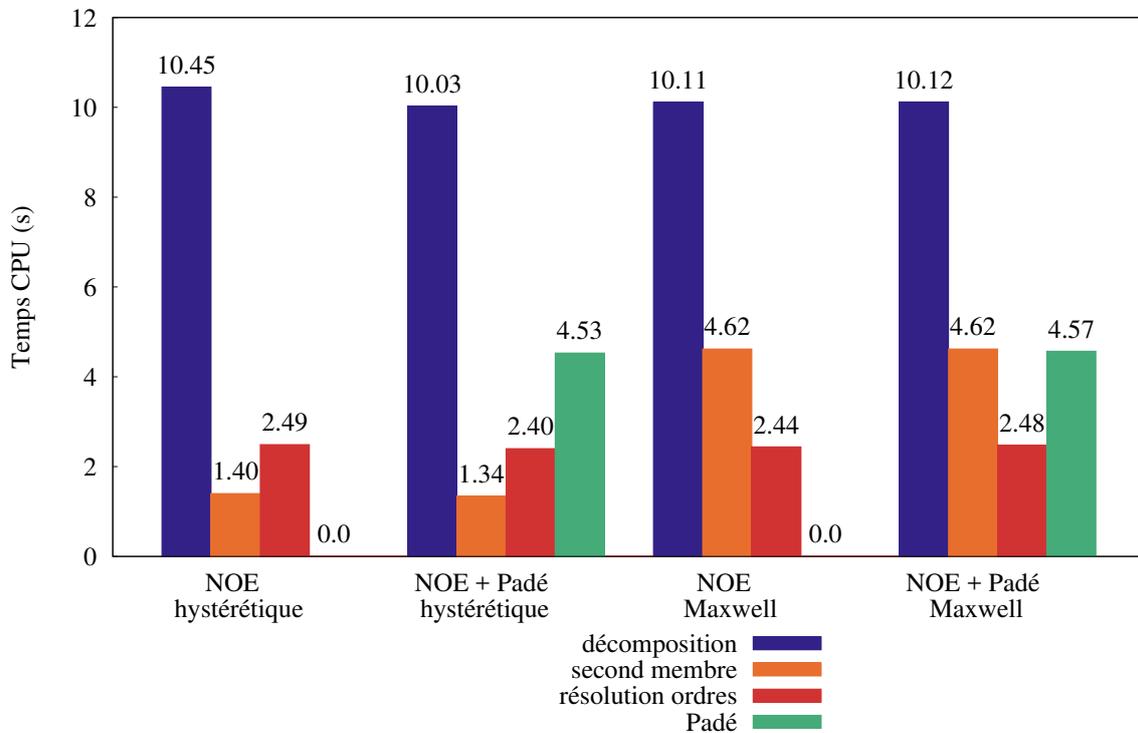


FIGURE 3.15 – Répartition moyenne du temps CPU dans une itération pour différentes versions du solveur de Newton d'ordre élevé (NOE).

Il apparaît que le temps de décomposition<sup>1</sup> de la matrice tangente est prépondérant dans le temps total d'une itération. Ceci confirme l'intérêt d'utiliser une même matrice tangente pour le calcul de tous les ordres afin de limiter le temps de calcul total.

Le calcul du second membre est peu coûteux en temps CPU et varie en fonction du modèle de viscoélasticité choisi. En effet, le modèle hystérétique est un cas particulier pour lequel on ne recherche pas de termes  $E_p^R$  et  $E_p^I$  puisque le module d'Young reste constant. Dans ce cas, le second membre est donc simplifié. A noter également que le temps de construction du second membre est du même ordre de grandeur que le temps requis pour la construction des approximations de Padé dans le cas du modèle de Maxwell.

A première vue, le temps de calcul des approximations de Padé peut sembler important. Cependant, il pourrait être optimisé en gardant en mémoire une partie du procédé d'un ordre à l'autre (en l'état actuel, l'orthogonalisation de Gram-Schmidt est effectuée à chaque ordre) [Cadou *et al.*, 2009].

De plus, le temps de calcul des approximations de Padé semble non négligeable par rapport au temps de décomposition de l'opérateur tangent car le maillage utilisé pour les tests est relativement grossier, ce qui ne serait pas le cas pour des applications industrielles. En effet, plus le nombre de degrés de liberté est important, et plus le temps de décomposition est important

1. Décomposition LU de l'opérateur tangent  $\mathbf{L}_t$  en prévision de la résolution des systèmes linéaires (3.26).

en proportion du temps total d'une itération. On estime que le temps de décomposition d'une matrice "creuse", comme c'est le cas avec la méthode des éléments finis, varie de façon proportionnelle à  $2 * (\text{nb ddl}) * b^2$ , où  $2b + 1$  est la largeur de bande de la matrice [L'Excellent et Uçar, 2011]. Le temps de construction des approximants de Padé varie quant à lui proportionnellement au nombre de degrés de liberté. Ainsi, plus le nombre de degrés de liberté augmente, et plus le temps CPU de décomposition de la matrice tangente est significatif par rapport au temps de calcul des approximants de Padé. Enfin, l'ajout des approximants de Padé permet de diminuer le nombre d'itérations, et donc le nombre de décomposition de l'opérateur tangent, et contribue ainsi à réduire le temps CPU global pour un calcul.

### 3.5.5 Étude du comportement mécanique

**Modèle hystérétique : influence du coefficient d'amortissement  $\eta_c$**  L'amortissement structurel  $\eta_m$  et la pulsation amortie  $\Omega_a$  du système en interaction fluide-structure sont étudiés en fonction de l'amortissement hystérétique  $\eta_c$ . Les résultats obtenus pour les dix premiers modes propres sont disponibles en ANNEXE C.1 et ANNEXE C.2.

Dans le cas d'un fluide léger tel que l'air, le faible couplage se traduit par une faible influence de l'amortissement sur les modes fluides (cf. ANNEXE C.1). Ceci semble cohérent puisque l'amortissement viscoélastique est introduit dans le domaine solide. Dans le cas d'un fluide lourd (ici l'eau), le couplage entre les deux domaines est plus fort et l'amortissement impacte tous les modes (cf. ANNEXE C.2). Ainsi, l'amortissement  $\eta_m$  est de l'ordre de  $10^{-6}$  à  $10^{-4}$  pour les modes fluides, alors qu'il est plutôt de l'ordre de  $10^{-3}$  à  $10^{-1}$  pour les modes solides et les modes couplés.

L'évolution de la pulsation amortie  $\Omega_a$  et celle du coefficient d'amortissement  $\eta_m$  sont tracées pour deux modes représentatifs (mode 2, solide et mode 7, fluide) dans le cas d'une cavité remplie d'air (cf. FIGURE 3.18) ou d'eau (cf. FIGURE 3.19). L'amortissement structurel  $\eta_m$  augmente en même temps que le coefficient d'amortissement hystérétique  $\eta_c$ , ce qui semble cohérent. Les pulsations amorties  $\Omega_a$  augmentent également quand l'amortissement est élevé. Cette tendance se retrouve dans les résultats de [Duigou-Kersulec, 2002], et dans les résultats obtenus pour le problème des vibrations forcées (cf. SECTION 4.4).

L'allure des modes propres est ensuite étudiée et les résultats obtenus sont présentés FIGURE 3.16 et FIGURE 3.17. Il apparaît que l'allure des modes propres est modifiée lorsqu'un amortissement est introduit. Ainsi, l'allure du mode conservatif FIGURE 3.16(a) est différente de l'allure des modes dissipatifs (FIGURE 3.16(c) et FIGURE 3.16(e)). En revanche, quelle que soit la valeur de l'amortissement  $\eta_c$ , l'allure des modes propres dissipatifs reste identique pour un même fluide considéré.

De plus, la visualisation des modes propres permet de vérifier que le couplage entre les domaines solide et fluide est bien pris en compte. En effet, l'influence de l'amortissement est visible y compris sur le domaine fluide, alors que la pulsation propre est identique (cf. FIGURE 3.16(b), FIGURE 3.16(d) et FIGURE 3.16(f)).

Enfin, les allures des modes propres montrent que le solveur NOE est capable de converger vers des modes différents des modes initiaux et que le choix du mode conservatif comme mode initial est pertinent.

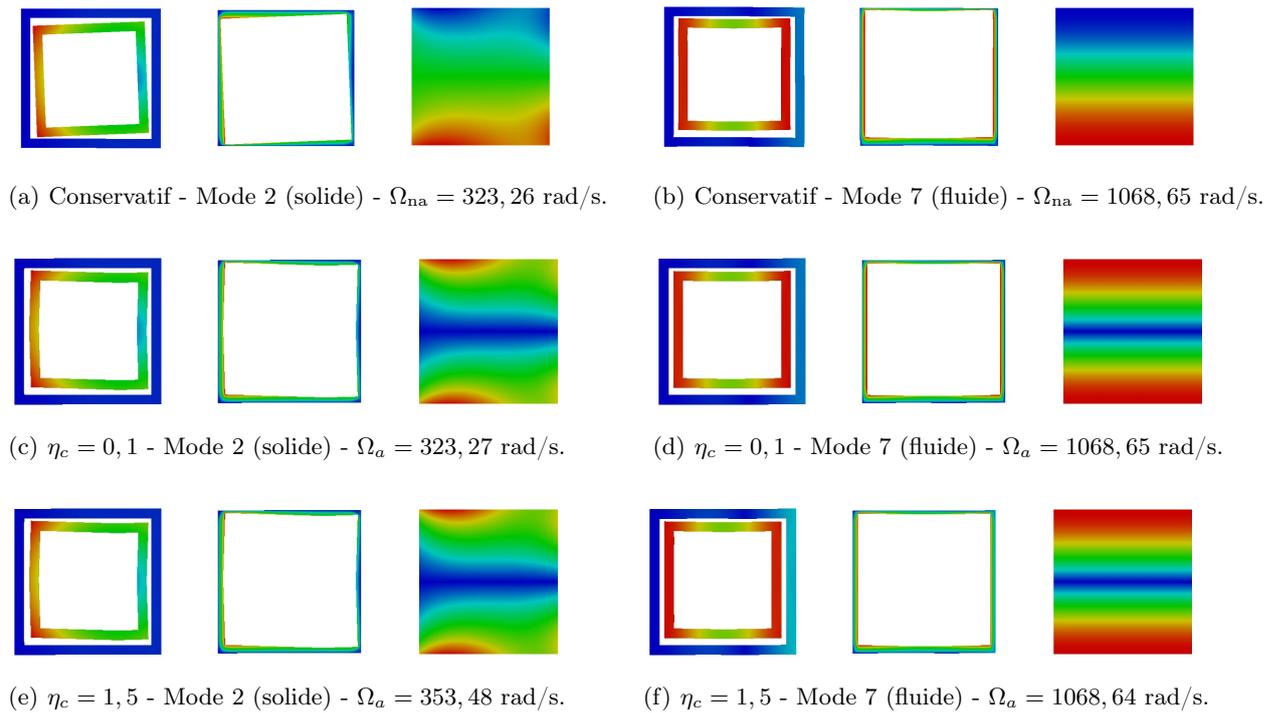


FIGURE 3.16 – Modèle hystérétique - Cavité remplie d'air - Allure des modes propres 2 et 7 dans le cas conservatif (a) (b) et dans le cas dissipatif pour différentes valeurs d'amortissement  $\eta_c$  (c) (d) (e) (f).

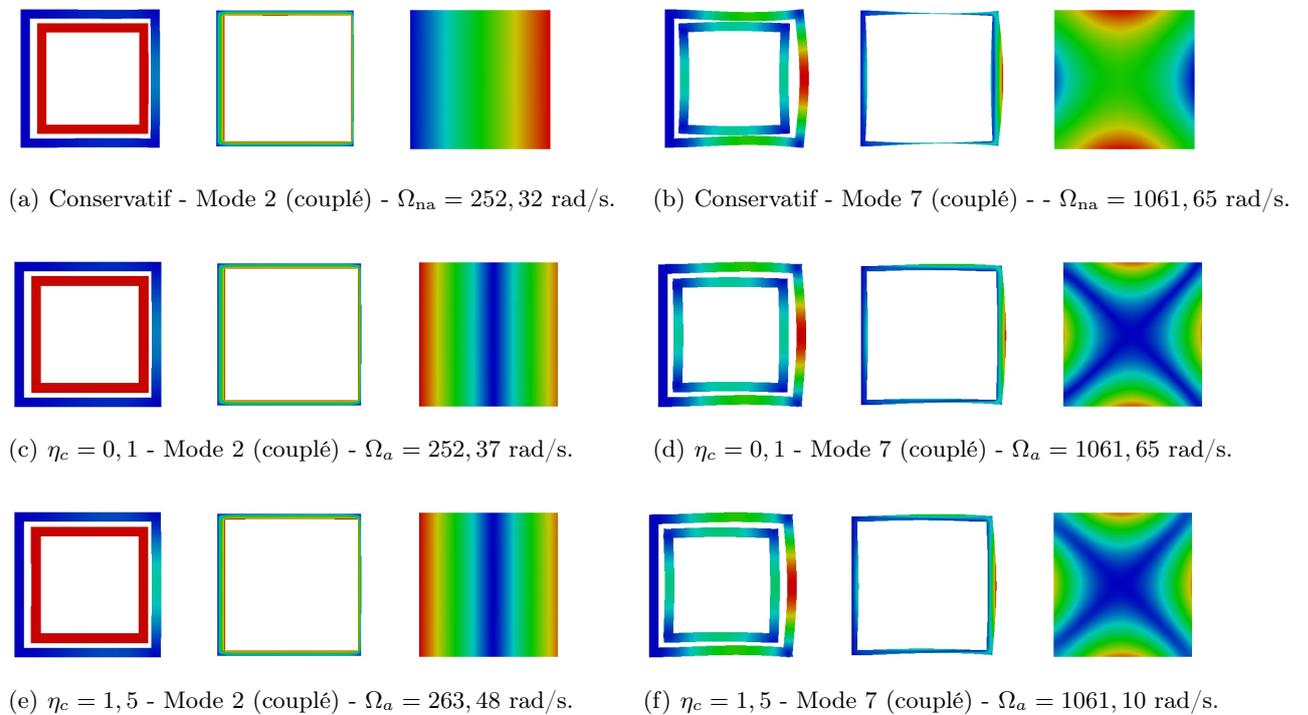


FIGURE 3.17 – Modèle hystérétique - Cavité remplie d'eau - Allure des modes propres 2 et 7 dans le cas conservatif (a) (b) et dans le cas dissipatif pour différentes valeurs d'amortissement  $\eta_c$  (c) (d) (e) (f).

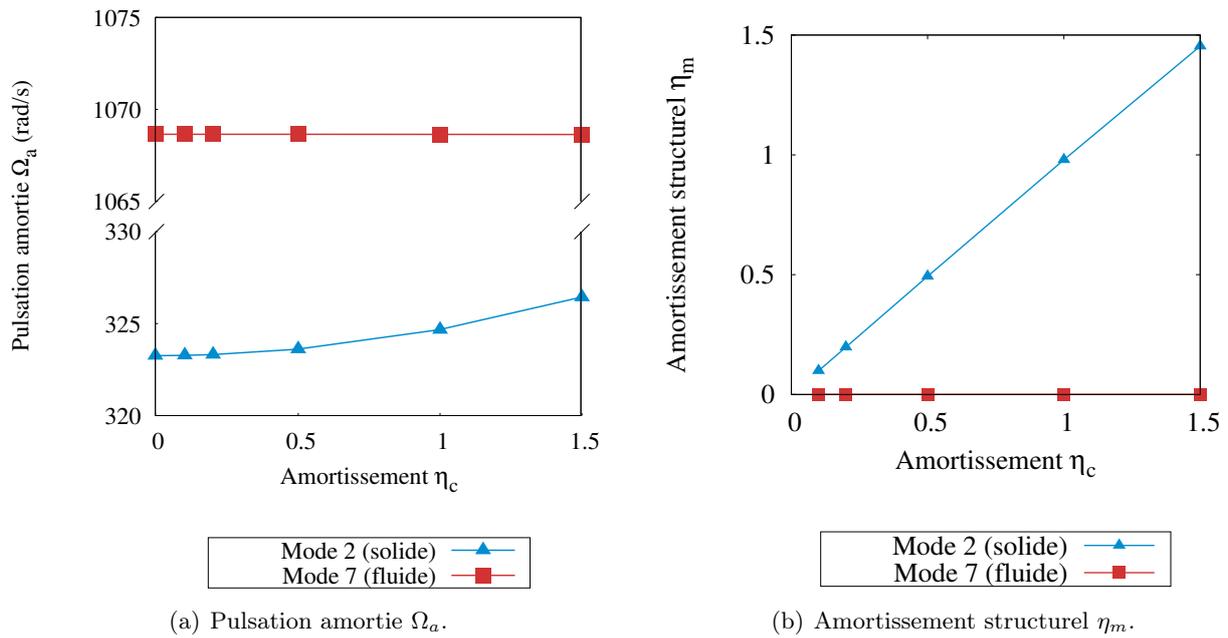


FIGURE 3.18 – Modèle hystérétique - Cavité remplie d'air - évolution de la pulsation amortie  $\Omega_a$  et de l'amortissement structurel  $\eta_m$  en fonction du coefficient d'amortissement hystérétique.

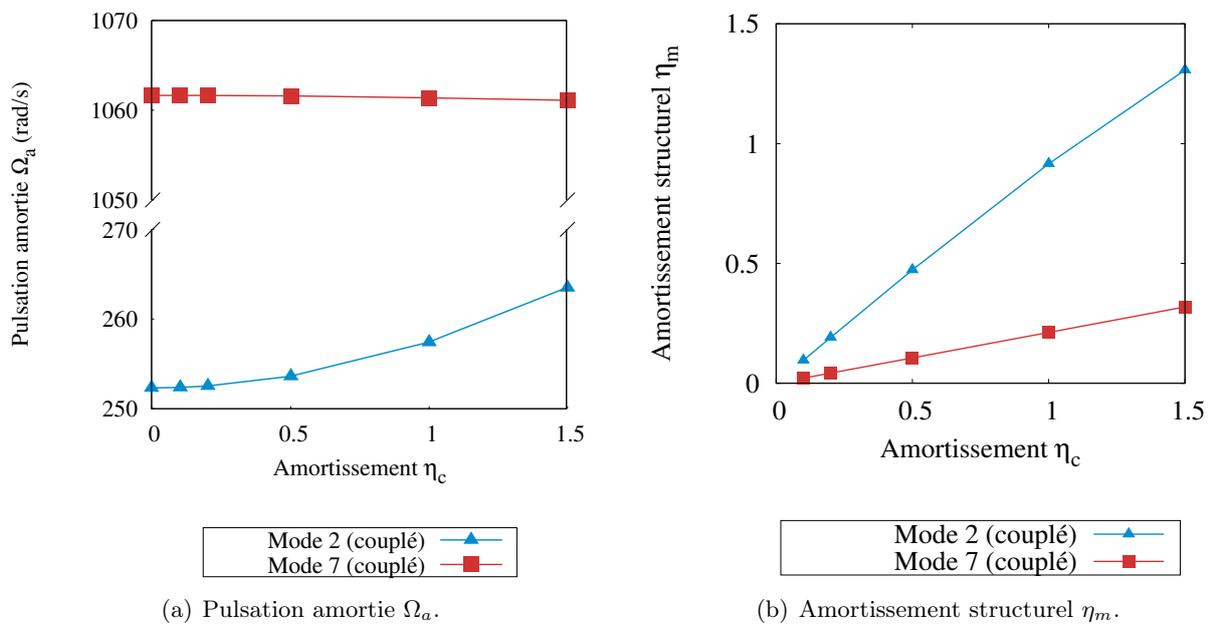


FIGURE 3.19 – Modèle hystérétique - Cavité remplie d'eau - évolution de la pulsation amortie  $\Omega_a$  et de l'amortissement structurel  $\eta_m$  en fonction du coefficient d'amortissement hystérétique.

**Modèle de Maxwell généralisé : influence de la température** L'influence de la température sur l'amortissement structural est étudiée pour des températures entre 20°C et 70°C. Les résultats obtenus pour les dix premiers modes propres sont disponibles en ANNEXE C.3 et ANNEXE C.4. L'amortissement  $\eta_m$  est de l'ordre de  $10^{-4}$  à  $10^{-5}$  pour les modes fluides, alors qu'il est de l'ordre de  $10^{-3}$  à  $10^{-1}$  pour les modes solides et les modes couplés. Ceci rejoint les observations faites dans le cas du modèle hystérétique.

Plus la température augmente et plus l'amortissement structural est faible. Les pulsations amorties diminuent également avec l'augmentation de la température (cf. FIGURE 3.22 et FIGURE 3.23). Le comportement observé est similaire à celui du modèle hystérétique : quand l'amortissement structural décroît, les pulsations amorties diminuent également. De plus, ces résultats sont en accord avec [Duigou-Kersulec, 2002], [Duigou *et al.*, 2003] et les résultats obtenus pour les vibrations forcées (cf. SECTION 4.4).

Les modes propres obtenus avec le modèle de Maxwell (cf. FIGURE 3.20 et FIGURE 3.21) sont semblables à ceux obtenus avec le modèle hystérétique (cf. FIGURE 3.16 et FIGURE 3.17). Dans le cas d'un fluide lourd (eau), l'allure des modes propres met en évidence le rôle de la couche visqueuse, qui permet de transmettre plus ou moins l'énergie vibratoire d'un milieu à un autre selon la température (et donc selon la viscosité).

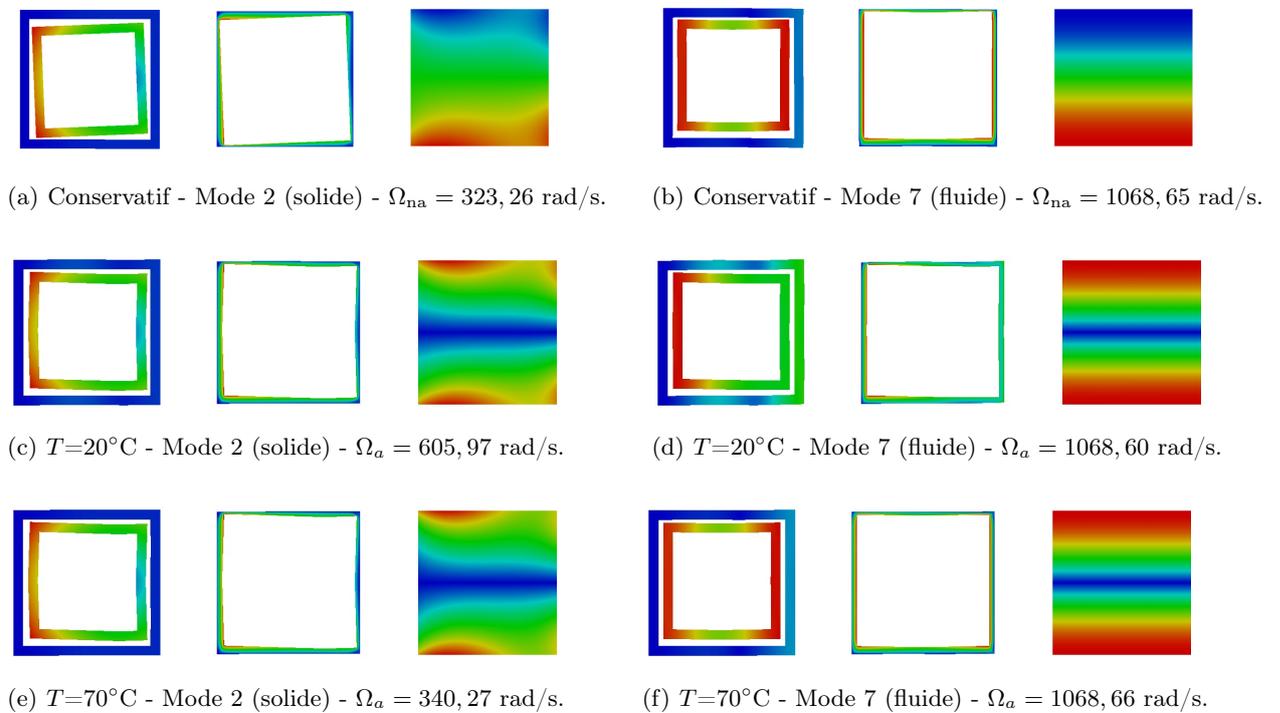


FIGURE 3.20 – Modèle de Maxwell généralisé - Cavité remplie d'air - Allure des modes propres 2 et 7 dans le cas conservatif (a) (b) et dans le cas dissipatif pour différentes valeurs de température (c) (d) (e) (f).

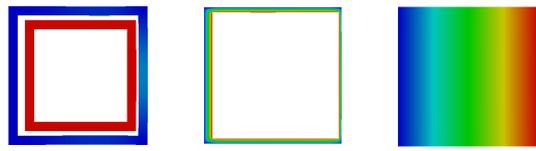
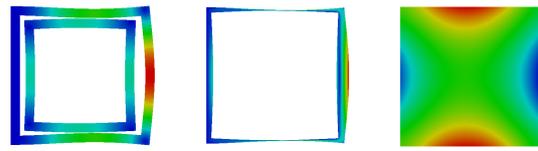
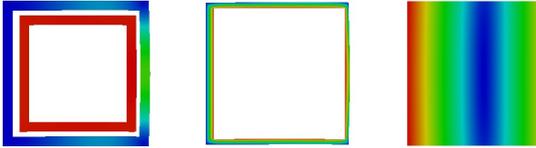
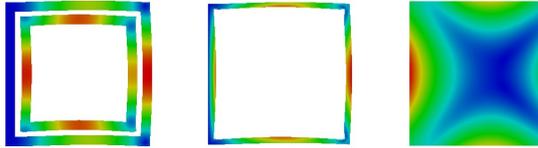
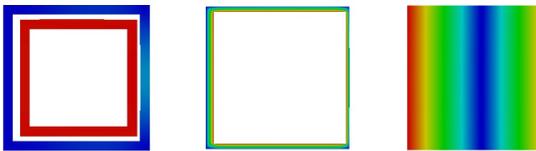
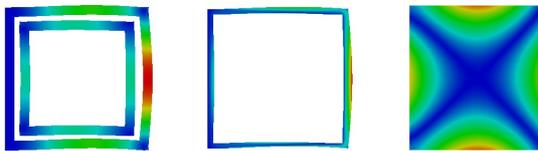
(a) Conservatif - Mode 2 (couplé) -  $\Omega_{na} = 252,32$  rad/s.(b) Conservatif - Mode 7 (couplé) -  $\Omega_{na} = 1061,65$  rad/s.(c)  $T=20^\circ\text{C}$  - Mode 2 (couplé) -  $\Omega_a = 452,38$  rad/s.(d)  $T=20^\circ\text{C}$  - Mode 7 (couplé) -  $\Omega_a = 1389,22$  rad/s.(e)  $T=70^\circ\text{C}$  - Mode 2 (couplé) -  $\Omega_a = 262,75$  rad/s.(f)  $T=70^\circ\text{C}$  - Mode 7 (couplé) -  $\Omega_a = 1090,59$  rad/s.

FIGURE 3.21 – Modèle de Maxwell généralisé - Cavity remplie d'eau - Allure des modes propres 2 et 7 dans le cas conservatif (a) (b) et dans le cas dissipatif pour différentes valeurs de température (e) (f) (c) (d).

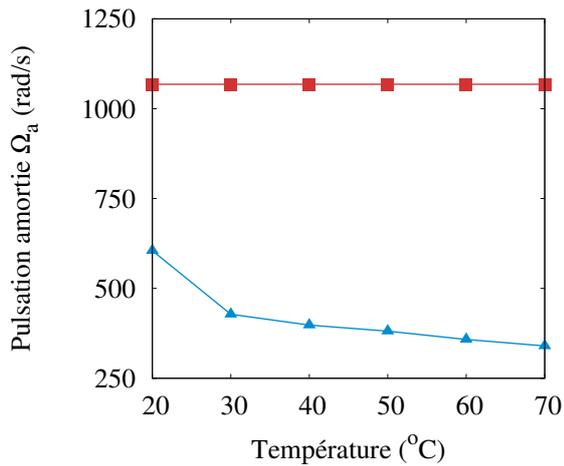
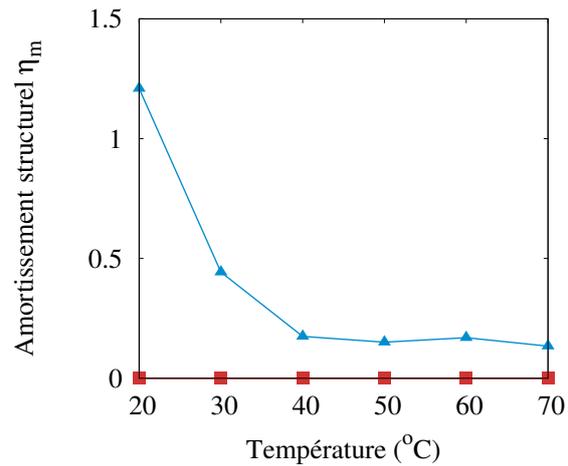
(a) Pulsation amortie  $\Omega_a$ .(b) Amortissement structurel  $\eta_m$ .

FIGURE 3.22 – Modèle de Maxwell généralisé - Cavity remplie d'air - Évolution de la pulsation amortie  $\Omega_a$  et de l'amortissement structurel  $\eta_m$  en fonction de la température.

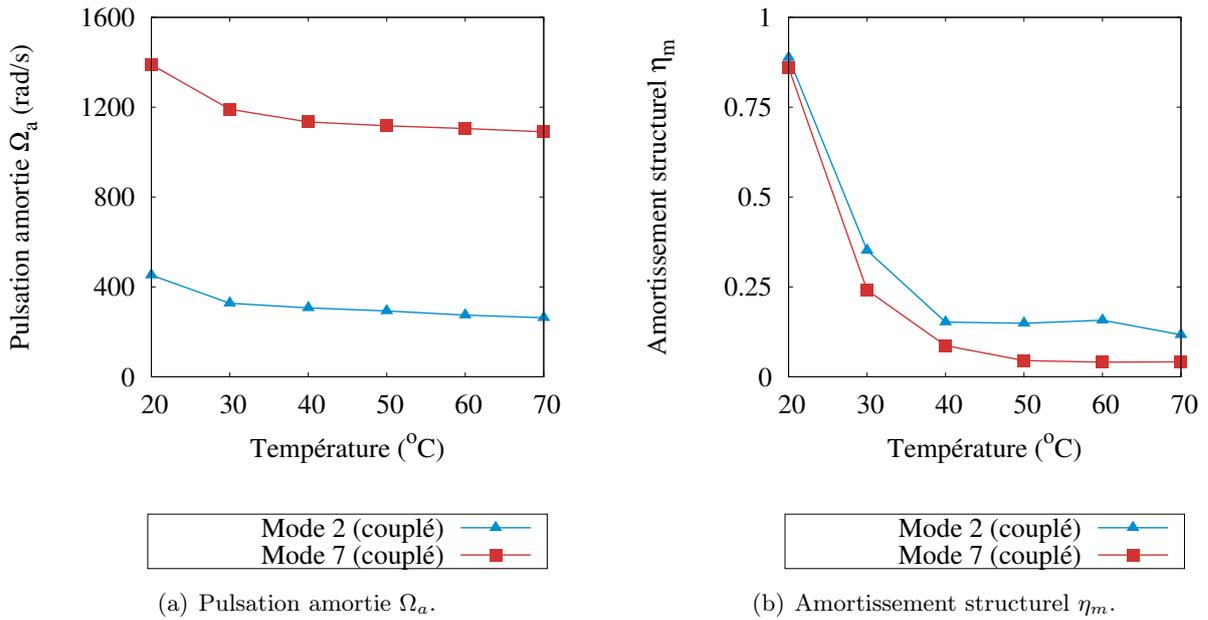


FIGURE 3.23 – Modèle de Maxwell généralisé - Cavity remplie d'eau - Évolution de la pulsation amortie  $\Omega_a$  et de l'amortissement structurel  $\eta_m$  en fonction de la température.

### 3.6 Conclusion

Un solveur de Newton d'ordre élevé (NOE) a été proposé pour la résolution de problèmes de vibroacoustique dans le cas d'un système dissipatif. Ce solveur est basé sur les techniques d'homotopie et de perturbation.

Les performances du solveur NOE ont été mises en évidence par comparaison avec l'algorithme de Newton, un solveur itératif robuste. Pour une configuration donnée, il apparaît que le solveur NOE est plus efficace que le solveur de Newton. En effet, le principe du solveur NOE repose sur une utilisation judicieuse de la matrice tangente afin de calculer une perturbation de type polynomial jusqu'à un ordre arbitrairement élevé. Cette utilisation "récurrente" de la matrice tangente permet un gain de temps en limitant son nombre de factorisation. De plus, l'ajout des approximants de Padé permet d'améliorer la solution et d'accélérer la convergence.

Enfin, le comportement mécanique d'une cavité acoustique dissipative a pu être étudié. L'influence du modèle de viscoélasticité et des paramètres d'amortissement associés a pu être évaluée. Il apparaît que plus l'amortissement est important, plus les pulsations amorties  $\Omega_a$  augmentent, de même que l'amortissement structurel  $\eta_m$ . Les tendances observées sont cohérentes avec les résultats obtenus par [Duigou *et al.*, 2003] pour une structure sandwich seule et sont en accord avec les courbes de réponse du système forcé (cf. SECTION 4.4).



# Résolution de problèmes IFS dissipatifs en régime forcé

---

## Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>116</b>
<b>4.2</b>	<b>Méthode directe</b>	<b>117</b>
<b>4.3</b>	<b>Méthode Asymptotique Numérique</b>	<b>118</b>
4.3.1	Perturbation	118
4.3.2	Séparation des parties réelles et imaginaires	119
4.3.3	Expression du module d'Young à chaque ordre	120
4.3.4	Algorithme de résolution	121
4.3.4.1	Résolution à l'ordre 0	121
4.3.4.2	Résolution à l'ordre 1	121
4.3.4.3	Résolution à l'ordre $p \geq 2$	122
4.3.5	Continuation	123
4.3.6	Amélioration de la représentation en séries polynomiales	123
4.3.6.1	Solveur MANp : approximants de Padé	124
4.3.6.2	Solveur MANsg : analyse des termes de série	124
4.3.7	Algorithmes des solveurs proposés	125
<b>4.4</b>	<b>Résultats numériques</b>	<b>129</b>
4.4.1	Présentation du cas test	129
4.4.2	Validation des codes	130
4.4.3	Étude paramétrique	135
4.4.3.1	Tolérance $\delta$	135
4.4.3.2	Ordre de troncature	138
4.4.4	Comparaison des différentes méthodes	141
4.4.4.1	Nombre de pas	141
4.4.4.2	Temps CPU	143
4.4.5	Comportement mécanique	145
4.4.5.1	Influence de l'amortissement introduit par la couche viscoélastique	145
4.4.5.2	Pression acoustique	150
<b>4.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>153</b>

---

## 4.1 Introduction

Dans la réalité, les structures sont soumises à des efforts extérieurs. Il est donc important de prévoir la réponse vibratoire du système couplé à ce type de sollicitation. L'étude du régime forcé fait écho aux campagnes expérimentales d'analyse modale. Dans ces tests expérimentaux, la structure est soumise en différents points à des forces sinusoïdales (par pot vibrant) ou à des chocs (par marteau d'impact) [Dupuis, 2000]. Les relevés d'accélération, de vitesse ou de position en différents points de la structure permettent alors d'établir la réponse vibratoire et de tracer les spectres de réponse en fréquence. De façon générale, la réponse à une sollicitation multi-harmonique est étudiée. Dans cette thèse, dans un souci de progression, une sollicitation harmonique est choisie.

Dans ce chapitre, la réponse aux vibrations forcées du problème de vibroacoustique dissipatif est étudiée. Une force extérieure  $\mathbf{F}_{\text{ext}} \cos(\omega t)$  est appliquée sur le système, le problème à résoudre est alors :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + [\mathbf{K}(\mathbf{0}) + E(\omega)\mathbf{K}] \mathbf{X} = \mathbf{F}_{\text{ext}} \cos(\omega t) \quad (4.1)$$

où  $\omega$  est la pulsation.

La solution est recherchée sous la même forme que la force extérieure, c'est-à-dire :

$$\mathbf{X} = \mathbf{U} \cos(\omega t) \quad (4.2)$$

où  $\mathbf{U}$  est l'amplitude de la réponse forcée.

En remplaçant  $\mathbf{X}$  par son expression (4.2) dans (4.1), et en posant  $\Omega = \omega^2$ , il vient :

$$[\mathbf{K}(\mathbf{0}) + E(\omega)\mathbf{K} - \Omega\mathbf{M}] \mathbf{U} = \mathbf{F}_{\text{ext}} \quad (4.3)$$

Comme au chapitre précédent, le problème à résoudre (4.3) est non linéaire et à grand nombre de degrés de liberté. Les matrices de rigidité et de masse sont non symétriques et les matrices de rigidité sont à coefficients complexes.

La méthode "directe", qui consiste à résoudre l'équation (4.3) pour une succession de valeurs de pulsation fixées, est la façon la plus simple d'obtenir les courbes de réponse du système aux vibrations forcées. Cependant, cette technique est coûteuse en temps de calcul. De ce fait, elle est généralement associée à des techniques de réduction de modèle, qui consistent à projeter le problème étudié sur un espace de dimension plus petite que l'espace initial. Il reste alors à choisir la base de l'espace réduit parmi les nombreuses possibilités disponibles. On citera par exemple :

- l'utilisation des **bases modales** du système découplé fluide-structure, associée à diverses techniques d'**enrichissement de base** ou de **superposition modale** [Ohayon, 2001] [Bobillot et Balmes, 2002] [Larbi *et al.*, 2016a].
- la **décomposition orthogonale aux valeurs propres** : aussi connue sous le nom de **POD** (*Proper Orthogonal Decomposition*), cette méthode permet de déterminer une base de modes propres orthogonaux les plus représentatifs du comportement du système (au sens énergétique). Elle est actuellement l'une des techniques les plus utilisées, en particulier dans le domaine de la mécanique des fluides [Bergmann, 2004] [Liberge, 2008] [Tallet *et al.*, 2016].
- la **Proper Generalized Decomposition** (PGD) : basée sur la recherche des inconnues du problème sous forme de fonctions à variables séparées [Chinesta *et al.*, 2011], cette technique permet de réduire la dimension des problèmes multidimensionnels considérés en découplant la résolution.

Le lecteur intéressé trouvera dans [Lülf *et al.*, 2013] une revue bibliographique et une comparaison des méthodes de réduction de modèle pour les problèmes non linéaires. Dans ses travaux de thèse, [Gerges, 2013] propose une adaptation de certaines de ces méthodes dans le cas de problèmes de vibroacoustique.

Dans ce chapitre, un algorithme basé sur les méthodes de perturbation et de continuation est proposé pour résoudre le problème (4.3). La procédure retenue s'inspire de travaux précédents, relatifs à l'étude des vibrations de plaques élastiques [Boumediene *et al.*, 2009], de poutres et coques sandwich [Boumediene *et al.*, 2014] ou encore de plaques sandwich [Abdoun *et al.*, 2009]. L'avantage de la MAN dans ce cas est que les courbes de réponse sont déterminées analytiquement et non discrètement comme avec la méthode directe. Le nombre de matrices triangulées nécessaires pour déterminer les courbes de réponse est donc moins important.

Dans le but d'améliorer les performances de l'algorithme proposé, deux variantes sont développées : la première fait intervenir les approximants de Padé pour étendre le domaine de validité de chaque pas de calcul et la seconde fait appel à l'analyse des termes de série par le critère de [Cochelin et Medale, 2013] afin de détecter les pics de résonance.

Deux procédures de validation sont menées. La première consiste à comparer les courbes de réponse du système couplé dissipatif obtenues avec la méthode directe avec celles obtenues par les solveurs proposés. En effectuant un balayage en pulsation de la force extérieure, les pics de résonance doivent naturellement apparaître sur la courbe de réponse. Ainsi, la deuxième procédure de validation consiste à comparer les pics de résonance de la courbe réponse du système dissipatif en régime forcé aux valeurs propres amorties obtenues pour le même système en régime libre (cf. CHAPITRE 3).

## 4.2 Méthode directe

La méthode de résolution la plus simple est la méthode dite "directe" (cf. FIGURE 4.1). Elle consiste à considérer des pas de calcul  $\Delta\Omega$ , et à calculer les valeurs du module d'Young  $E(\omega)^{(k)}$  et du vecteur des inconnues nodales  $\mathbf{U}^{(k)}$  correspondantes à chaque itération  $k$ .

En fixant l'incrément  $\Delta\Omega$ , la pulsation à chaque pas est donnée par :

$$\Omega^{(k+1)} = \Omega^{(k)} + \Delta\Omega \quad (4.4)$$

Le module d'Young  $E(\omega)^{(k)}$  est calculé par son expression en fonction de la pulsation imposée (3.48) ou (3.49).

Le vecteur des inconnues nodales est calculé à partir de (4.3), où  $E(\omega)^{(k)}$  et  $\Omega^{(k)}$  sont des grandeurs connues :

$$\left[ \mathbf{K}(\mathbf{0}) + E(\omega)^{(k)}\mathbf{K} - \Omega^{(k)}\mathbf{M} \right] \mathbf{U}^{(k)} = \mathbf{F}_{\text{ext}} \quad (4.5)$$

Cette méthode nécessite des pas de calcul  $\Delta\Omega$  suffisamment petits pour détecter les pics de résonance. En effet, ces pics sont localisés, et un pas de calcul trop grand risquerait de ne pas permettre la visualisation de tous les pics. L'obtention d'une courbe de réponse de qualité acceptable nécessite, en général, un nombre élevé de pas de calcul. Dans ce cas, la méthode directe se révèle alors très coûteuse en terme de temps de calcul. Afin de réduire ce temps de calcul, deux algorithmes basés sur les méthodes de perturbation et de continuation sont proposés.

### 4.3 Méthode Asymptotique Numérique

Les méthodes de perturbation et de continuation étudiées dans les chapitres précédents sont à nouveau utilisées, afin de déterminer les courbes de réponse du système dissipatif aux vibrations forcées. Dans un premier temps, l'algorithme général, basé sur la Méthode Asymptotique Numérique, est présenté. Deux variantes sont ensuite développées : le solveur MAN<sub>p</sub>, basé sur les approximants de Padé, et le solveur MAN<sub>sg</sub>, basé sur le critère d'analyse des termes de série de [Cochelin et Medale, 2013].

#### 4.3.1 Perturbation

La méthode de perturbation est appliquée au problème dissipatif forcé (4.3). Comme précédemment (cf. SECTION 2.3.2 et SECTION 3.3.1.3), les inconnues sont écrites sous la forme d'un développement en série tronqué à l'ordre  $N$ , en fonction des puissances du paramètre de chemin  $a$  :

$$\mathbf{U}(a) = \mathbf{U}_0 + \sum_{p=1}^N a^p \mathbf{U}_p \quad (4.6)$$

$$\Omega(a) = \Omega_0 + \sum_{p=1}^N a^p \Omega_p \quad (4.7)$$

$$\omega(a) = \omega_0 + \sum_{p=1}^N a^p \omega_p \quad (4.8)$$

$$E(a) = E_0 + \sum_{p=1}^N a^p E_p \quad (4.9)$$

Le paramètre de chemin  $a$  est défini comme étant la projection de l'incrément de déplacement  $(\mathbf{U} - \mathbf{U}_0)$  et de l'incrément de pulsation  $(\omega - \omega_0)$  sur le vecteur tangent  $(\mathbf{U}_1, \omega_1)$  [Azrar *et al.*, 1993] [Boumediene *et al.*, 2009] :

$$a = \langle \mathbf{U} - \mathbf{U}_0, \mathbf{U}_1 \rangle + (\omega - \omega_0)\omega_1 \quad (4.10)$$

où  $\langle \bullet, \bullet \rangle$  désigne le produit scalaire euclidien.

Après introduction des développements asymptotiques (4.6), (4.7) et (4.9) dans (4.3) et identification suivant les puissances du paramètre  $a$ , les problèmes linéaires suivants sont obtenus :

**Ordre 0**

$$[\mathbf{K}(\mathbf{0}) + E_0 \mathbf{K} - \Omega_0 \mathbf{M}] \mathbf{U}_0 = \mathbf{F}_{\text{ext}} \quad (4.11)$$

**Ordre 1**

$$\begin{cases} [\mathbf{K}(\mathbf{0}) + E_0 \mathbf{K} - \Omega_0 \mathbf{M}] \mathbf{U}_1 = [\Omega_1 \mathbf{M} - E_1 \mathbf{K}] \mathbf{U}_0 \\ \langle \mathbf{U}_1, \mathbf{U}_1 \rangle + \Omega_1^2 = 1 \end{cases} \quad (4.12)$$

**Ordre  $p \geq 2$**

$$\begin{cases} [\mathbf{K}(\mathbf{0}) + E_0 \mathbf{K} - \Omega_0 \mathbf{M}] \mathbf{U}_p = \sum_{r=1}^p [\Omega_r \mathbf{M} - E_r \mathbf{K}] \mathbf{U}_{p-r} \\ \langle \mathbf{U}_p, \mathbf{U}_1 \rangle + \Omega_p \Omega_1 = 0 \end{cases} \quad (4.13)$$

### 4.3.2 Séparation des parties réelles et imaginaires

Le problème étudié étant un problème dissipatif, les inconnues  $\mathbf{U}$  et  $E(\omega)$  sont des grandeurs complexes :

$$\mathbf{U}_p = \mathbf{U}_p^R + i\mathbf{U}_p^I \quad (4.14)$$

$$E_p = E_p^R + iE_p^I \quad (4.15)$$

La pulsation est imposée comme étant purement réelle :

$$\Omega_p = \Omega_p^R \quad (4.16)$$

Les notations complexes (4.14) et (4.15) sont introduites dans les systèmes (4.11), (4.12) et (4.13). En séparant les parties réelles des parties imaginaires et en notant  $[\mathbf{B}]$  la matrice tangente définie par :

$$[\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} \mathbf{K}(\mathbf{0}) + E_0^R \mathbf{K} - \Omega_0 \mathbf{M} & -E_0^I \mathbf{K} \\ E_0^I \mathbf{K} & \mathbf{K}(\mathbf{0}) + E_0^R \mathbf{K} - \Omega_0 \mathbf{M} \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

il vient à chaque ordre  $p$  :

**Ordre 0**

$$[\mathbf{B}] \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_0^R \\ \mathbf{U}_0^I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_{\text{ext}} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.18)$$

**Ordre 1**

$$[\mathbf{B}] \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_1^R \\ \mathbf{U}_1^I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_1^R \\ \mathbf{F}_1^I \end{Bmatrix} \quad (4.19)$$

où le second membre  $\mathbf{F}_1$  vaut :

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{F}_1^R \\ \mathbf{F}_1^I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [\Omega_1 \mathbf{M} - E_1^R \mathbf{K}] \mathbf{U}_0^R + E_1^I \mathbf{K} \mathbf{U}_0^I \\ [\Omega_1 \mathbf{M} - E_1^R \mathbf{K}] \mathbf{U}_0^I - E_1^I \mathbf{K} \mathbf{U}_0^R \end{Bmatrix} \quad (4.20)$$

**Ordre  $p \geq 2$**

$$[\mathbf{B}] \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_p^R \\ \mathbf{U}_p^I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_p^R \\ \mathbf{F}_p^I \end{Bmatrix} \quad (4.21)$$

où le second membre  $\mathbf{F}_p$ , vaut :

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{F}_p^R \\ \mathbf{F}_p^I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{r=1}^p ([\Omega_r \mathbf{M} - E_r^R \mathbf{K}] \mathbf{U}_{p-r}^R + E_r^I \mathbf{K} \mathbf{U}_{p-r}^I) \\ \sum_{r=1}^p ([\Omega_r \mathbf{M} - E_r^R \mathbf{K}] \mathbf{U}_{p-r}^I - E_r^I \mathbf{K} \mathbf{U}_{p-r}^R) \end{Bmatrix} \quad (4.22)$$

La matrice  $[\mathbf{B}]$  dépend uniquement de l'ordre 0. Elle est commune à tous les ordres, ce qui présente un intérêt en terme de réduction du temps de calcul. En effet, une seule opération de factorisation est nécessaire à chaque pas de calcul.

### 4.3.3 Expression du module d'Young à chaque ordre

**Modèle de Maxwell généralisé** Un des points délicats de la résolution est l'identification des termes  $E_p^R$  et  $E_p^I$  pour le modèle de Maxwell généralisé (3.49).

En notant  $E_j$  le terme de la somme dans (3.49), il vient :

$$E(\omega) = k_0 + i\eta_0\omega + \sum_{j=1}^{N_{\max}} E_j \quad (4.23)$$

Après séparation des parties réelles et imaginaires dans (4.23) et introduction du développement asymptotique (4.9) dans les équations obtenues, les expressions suivantes peuvent être identifiées :

#### Ordre 0

$$E_0^R = k_0 + \sum_{j=1}^{N_{\max}} E_{0j}^R \quad \text{et} \quad E_0^I = \eta_0\omega_0 + \sum_{j=1}^{N_{\max}} E_{0j}^I \quad (4.24)$$

#### Ordre $p \geq 1$

$$E_p^R = \sum_{j=1}^{N_{\max}} E_{pj}^R \quad \text{et} \quad E_p^I = \eta_0\omega_p + \sum_{j=1}^{N_{\max}} E_{pj}^I \quad (4.25)$$

où les expressions des coefficients  $E_{pj}^R$  et  $E_{pj}^I$  sont démontrées en ANNEXE A.2 et rappelées dans le TABLEAU 4.1.

Ordre	$E_{pj}^R$	$E_{pj}^I$
0	$\frac{\omega_0^2 k_j}{\left(\frac{k_j}{\eta_j}\right)^2 + \Omega_0}$	$\frac{\omega_0^2 k_j}{\left(\frac{k_j}{\eta_j}\right)^2 + \Omega_0}$
1	$2\omega_0\omega_1 \frac{k_j - E_{0j}^R}{\left(\frac{k_j}{\eta_j}\right)^2 + \Omega_0}$	$\omega_1 \frac{\left(\frac{k_j^2}{\eta_j}\right) - 2\omega_0 E_{0j}^R}{\left(\frac{k_j}{\eta_j}\right)^2 + \Omega_0}$
$p$	$\frac{\Omega_p(k_j - E_{0j}^R) - \sum_{r=1}^{p-1} E_{rj}^R \Omega_{p-r}}{\left(\frac{k_j}{\eta_j}\right)^2 + \Omega_0}$	$\frac{\omega_p \frac{k_j^2}{\eta_j^2} - \sum_{r=0}^{p-1} E_{rj}^I \Omega_{p-r}}{\left(\frac{k_j}{\eta_j}\right)^2 + \Omega_0}$

TABLEAU 4.1 – Valeur des modules d'Young  $E_{pj}^R$  et  $E_{pj}^I$  selon l'ordre  $p$ . Les démonstrations sont données en ANNEXE A.2.

*Remarque :* les pulsations  $\Omega_p$  et  $\omega_p$  sont liées par les équations (B.3) et (B.4), développées en ANNEXE B.1. Dans la suite, une pulsation intermédiaire  $\Omega_p^*$  est introduite pour simplifier les expressions :

$$\Omega_p = 2\omega_0\omega_p + \Omega_p^* \quad \text{où} \quad \Omega_p^* = \sum_{r=1}^{p-1} \omega_r\omega_{p-r} \quad (4.26)$$

**Modèle hystérétique** Dans le cas du modèle hystérétique, les expressions des parties réelles et imaginaires du module d'Young sont immédiates. Ainsi, en introduisant le développement asymptotique (4.9) dans la définition (3.48) et en séparant les parties réelles des parties imaginaires, il vient, à chaque ordre :

$$E_0^R = E_0 \quad \text{et} \quad E_0^I = E_0 \eta_c \quad (4.27)$$

$$E_p^R = 0 \quad \text{et} \quad E_p^I = 0 \quad \text{pour } p \geq 1 \quad (4.28)$$

Le modèle hystérétique constituant un cas particulier simple, sa résolution n'est pas détaillée.

#### 4.3.4 Algorithme de résolution

La résolution des systèmes (4.19) et (4.21) n'est pas immédiate. En effet, le second membre  $\mathbf{F}_p$  dépend des inconnues de pulsation  $\Omega_p$  et de module d'Young  $E_p$ . L'introduction de variables intermédiaires telle que proposée dans [Boumediene *et al.*, 2009] et [Boumediene *et al.*, 2016] permet de contourner cette difficulté. Ce qui suit est un récapitulatif des différentes étapes de calcul nécessaires à la détermination de la courbe de réponse d'un système couplé dissipatif en régime forcé. L'algorithme de résolution, avec introduction des variables intermédiaires, est détaillé pour chacun des ordres  $p$ .

##### 4.3.4.1 Résolution à l'ordre 0

La pulsation  $\omega_0 = \sqrt{\Omega_0}$  étant connue, la résolution à l'ordre 0 est immédiate :

- (1) Le module d'Young à l'ordre 0 est obtenu selon (4.24).
- (2) La matrice tangente peut alors être calculée selon (4.17).
- (3) Les vecteurs des inconnues nodales  $\mathbf{U}_0^R$  et  $\mathbf{U}_0^I$  sont donnés par (4.18).

##### 4.3.4.2 Résolution à l'ordre 1

- (1) Les variables intermédiaires  $E_1^{R*}$  et  $E_1^{I*}$  sont définies telles que :

$$\begin{Bmatrix} E_1^{R*} \\ E_1^{I*} \end{Bmatrix} = \omega_1 \begin{Bmatrix} E_1^{R*} \\ E_1^{I*} \end{Bmatrix} \quad (4.29)$$

Par identification entre (4.25) et (4.29), il vient :

$$E_1^{R*} = 2\omega_0 \sum_{j=1}^{Nmax} \frac{k_j - E_{0j}^R}{\left(\frac{k_j}{\eta_j}\right)^2 + \Omega_0} \quad (4.30)$$

$$E_1^{I*} = \eta_0 + \sum_{j=1}^{Nmax} \frac{\left(\frac{k_j^2}{\eta_j}\right) - 2\omega_0 E_{0j}^R}{\left(\frac{k_j}{\eta_j}\right)^2 + \Omega_0} \quad (4.31)$$

A noter que les variables intermédiaires  $E_1^{R*}$  et  $E_1^{I*}$  dépendent uniquement de l'ordre 0.

- (2) Les inconnues nodales intermédiaires  $\mathbf{U}_1^*$  et le second membre intermédiaire  $\mathbf{F}_1^*$  sont définis par :

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{U}_1^{R*} \\ \mathbf{U}_1^{I*} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\omega_1} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_1^R \\ \mathbf{U}_1^I \end{Bmatrix} \quad (4.32)$$

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{F}_1^{R*} \\ \mathbf{F}_1^{I*} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\omega_1} \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_1^R \\ \mathbf{F}_1^I \end{Bmatrix} \quad (4.33)$$

En introduisant (4.32) et (4.33) dans (4.19), il vient :

$$[\mathbf{B}] \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_1^{R*} \\ \mathbf{U}_1^{I*} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_1^{R*} \\ \mathbf{F}_1^{I*} \end{Bmatrix} \quad (4.34)$$

où le second membre intermédiaire  $\mathbf{F}_1^*$  vaut :

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{F}_1^{R*} \\ \mathbf{F}_1^{I*} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [2\omega_0\mathbf{M} - E_1^{R*}\mathbf{K}]\mathbf{U}_0^R + E_1^{I*}\mathbf{K}\mathbf{U}_0^I \\ -E_1^{I*}\mathbf{K}\mathbf{U}_0^R + [2\omega_0\mathbf{M} - E_1^{R*}\mathbf{K}]\mathbf{U}_0^I \end{Bmatrix} \quad (4.35)$$

(3) Les inconnues nodales intermédiaires  $\mathbf{U}_1^{R*}$  et  $\mathbf{U}_1^{I*}$  sont ensuite obtenues avec (4.34).

(4) L'équation du paramètre de chemin (4.10) donne la pulsation à l'ordre 1 :

$$\omega_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{\langle \mathbf{U}_1^*, \mathbf{U}_1^* \rangle + 1}} \quad (4.36)$$

Dans la pratique, comme la solution du problème est cherchée pour une valeur croissante de la pulsation, le signe de  $\omega_1$  est fixé et est positif.

(5) Les inconnues nodales  $\mathbf{U}_1$  s'obtiennent alors par l'équation (4.32) et les parties réelle et imaginaire du module d'Young  $E_1$  avec l'équation (4.29).

#### 4.3.4.3 Résolution à l'ordre $p \geq 2$

(1) Les variables intermédiaires  $E_p^{R*}$  et  $E_p^{I*}$  sont définies telles que :

$$\begin{Bmatrix} E_p^R \\ E_p^I \end{Bmatrix} = \omega_p \begin{Bmatrix} E_1^{R*} \\ E_1^{I*} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} E_p^{R*} \\ E_p^{I*} \end{Bmatrix} \quad (4.37)$$

Par identification entre (4.25) et (4.37), il vient :

$$E_p^{R*} = \sum_{j=1}^{Nmax} \frac{\left( \sum_{r=1}^{p-1} \omega_r \omega_{p-r} \right) \left( k_j - E_{0j}^R \right) - \sum_{r=1}^{p-1} \left[ E_{(p-r)j}^R \left( \sum_{s=0}^r \omega_s \omega_{r-s} \right) \right]}{\left( \frac{k_j}{\eta_j} \right)^2 + \Omega_0} \quad (4.38)$$

$$E_p^{I*} = \sum_{j=1}^{Nmax} \frac{-\Omega_p^* E_{0j}^I - \sum_{r=1}^{p-1} \Omega_r E_{(p-r)j}^I}{\left( \frac{k_j}{\eta_j} \right)^2 + \Omega_0} \quad (4.39)$$

A noter que les variables intermédiaires  $E_p^{R*}$  et  $E_p^{I*}$  dépendent uniquement des ordres précédents.

(2) Les inconnues nodales intermédiaires  $\mathbf{U}_p^*$  et le second membre intermédiaire  $\mathbf{F}_p^*$  sont définis par :

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{U}_p^R \\ \mathbf{U}_p^I \end{Bmatrix} = \frac{\omega_p}{\omega_1} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_1^R \\ \mathbf{U}_1^I \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_p^{R*} \\ \mathbf{U}_p^{I*} \end{Bmatrix} \quad (4.40)$$

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{F}_p^R \\ \mathbf{F}_p^I \end{Bmatrix} = \omega_p \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_1^{R*} \\ \mathbf{F}_1^{I*} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_p^{R*} \\ \mathbf{F}_p^{I*} \end{Bmatrix} \quad (4.41)$$

En introduisant (4.40) et (4.41) dans (4.21) et en simplifiant avec (4.32) et (4.34), il vient :

$$[\mathbf{B}] \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_p^{R*} \\ \mathbf{U}_p^{I*} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_p^{R*} \\ \mathbf{F}_p^{I*} \end{Bmatrix} \quad (4.42)$$

En introduisant (4.37) et (4.26) dans (4.22), le second membre intermédiaire peut être identifié :

$$\mathbf{F}_p^{R*} = \Omega_p^* \mathbf{M} \mathbf{U}_0^R - E_p^{R*} \mathbf{K} \mathbf{U}_0^R + E_p^{I*} \mathbf{K} \mathbf{U}_0^I + \sum_{r=1}^{p-1} \{ [\Omega_r \mathbf{M} - E_r^R \mathbf{K}] \mathbf{U}_{p-r}^R + E_r^I \mathbf{K} \mathbf{U}_{p-r}^I \} \quad (4.43)$$

$$\mathbf{F}_p^{I*} = \Omega_p^* \mathbf{M} \mathbf{U}_0^I - E_p^{R*} \mathbf{K} \mathbf{U}_0^I - E_p^{I*} \mathbf{K} \mathbf{U}_0^R + \sum_{r=1}^{p-1} \{ [\Omega_r \mathbf{M} - E_r^R \mathbf{K}] \mathbf{U}_{p-r}^I - E_r^I \mathbf{K} \mathbf{U}_{p-r}^R \} \quad (4.44)$$

- (3) Les inconnues nodales intermédiaires  $\mathbf{U}_p^{R*}$  et  $\mathbf{U}_p^{I*}$  sont ensuite obtenues avec (4.42).
- (4) L'équation du paramètre de chemin (4.10) dans laquelle est introduite la variable intermédiaire  $\mathbf{U}_p^*$  donne la pulsation à l'ordre  $p$  :

$$\omega_p = - \frac{\omega_1 \langle \mathbf{U}_p^*, \mathbf{U}_1 \rangle}{\langle \mathbf{U}_1, \mathbf{U}_1 \rangle + \omega_1^2} \quad (4.45)$$

- (5) Les inconnues nodales  $\mathbf{U}_p$  s'obtiennent alors par l'équation (4.40) et les parties réelle et imaginaire du module d'Young  $E_p$  avec l'équation (4.37).

### 4.3.5 Continuation

L'intégralité de la courbe de réponse est obtenue par la méthode de continuation (cf. FIGURE 2.3(b)). Le domaine de validité des séries polynomiales  $a_{\max s}$  est défini par [Cochelin *et al.*, 2007] :

$$a_{\max s} = \left( \delta \frac{\| \mathbf{U}_1 \|}{\| \mathbf{U}_N \|} \right)^{\frac{1}{N-1}} \quad (4.46)$$

où  $\delta$  est un paramètre de tolérance à définir par l'utilisateur. Le morceau de courbe de réponse solution du pas de calcul en cours est alors obtenu avec les développements asymptotiques (4.6) et (4.8), où  $a = a_{\max s}$ .

Afin d'obtenir une bonne représentation graphique de la courbe de réponse du système, des points intermédiaires sont calculés dans l'intervalle  $[0, a_{\max s}]$ . Dans la pratique, 50 à 100 points intermédiaires sont considérés.

### 4.3.6 Amélioration de la représentation en séries polynomiales

Dans le but de réduire le temps de calcul, le solveur MAN proposé précédemment peut être amélioré. Nous présentons ici deux variantes appelées, respectivement, solveurs MAN<sub>p</sub> et MAN<sub>sg</sub>. Le premier solveur utilise l'augmentation du domaine de validité par les approximants de Padé [Padé, 1892] [Baker et Graves-Morris, 1996]. Le second solveur s'appuie sur la détection d'un pic de résonance par le critère de [Cochelin et Medale, 2013] .

#### 4.3.6.1 Solveur MANp : approximants de Padé

La première amélioration proposée est l'utilisation des approximants de Padé afin d'accroître le domaine de validité des séries à chaque pas de continuation. Ainsi, moins de pas de continuation sont nécessaires pour construire la courbe de réponse sur un intervalle de pulsation fixé.

Après obtention des séries polynomiales, la représentation par approximants de Padé est calculée selon les équations présentées en SECTION 2.3.3, et son domaine de validité est évalué selon la relation (2.25). Un choix de la représentation s'effectue alors entre la représentation polynomiale et la représentation par approximants de Padé, afin de conserver celle ayant le domaine de validité le plus grand possible.

#### 4.3.6.2 Solveur MANsg : analyse des termes de série

Le critère de [Cochelin et Medale, 2013], évoqué en SECTION 2.4.4, est utilisé dans le solveur MANsg pour détecter les pics de résonance sur la courbe de réponse. En effet, dans le cas de vibrations peu amorties, l'amplitude de certains pics de résonance risque d'être très élevée. Il est alors difficile de parcourir l'ensemble de l'intervalle de pulsation fixé : comme expliqué en SECTION 2.4.2, lors du processus de continuation, la présence d'un mode de résonance peut engendrer une accumulation de pas MAN, ce qui dégrade la performance de l'algorithme.

Afin d'éviter ce type de comportement, à la fin de chaque pas de continuation, le critère de [Cochelin et Medale, 2013] est appliqué pour détecter la présence d'une éventuelle suite géométrique dans les séries polynomiales (2.38) (2.39). Si une suite géométrique est détectée, alors la pulsation de résonance associée est calculée (cf. SECTION 2.4.5).

Le calcul de l'écart relatif entre la pulsation courante  $\omega$  et la pulsation de résonance  $\omega_r$ , déterminée par le critère de [Cochelin et Medale, 2013] permet de déterminer si la pulsation courante peut être identifiée comme pulsation de résonance :

$$\frac{|\omega_r - \omega|}{\omega_r} \leq \zeta \quad (4.47)$$

Le paramètre  $\zeta$  est un seuil de tolérance, dont la valeur est à choisir par l'utilisateur. Dans la thèse, ce seuil a été fixé à  $10^{-2}$ .

Si la pulsation courante est identifiée comme étant une pulsation de résonance, il est possible que le calcul ne progresse plus sur la courbe de réponse et reste "bloqué" sur le pic de résonance. Afin d'éviter ce "blocage", le pas de continuation suivant est initialisé en décalant la pulsation artificiellement pour forcer le passage du pic de résonance. La procédure de redémarrage est identique à celle employée pour l'analyse aux valeurs propres (cf. SECTION 2.3.5). Dans la pratique, le décalage introduit représente 1% de la pulsation de résonance :

$$\omega^{(k+1)} = 1,01 * \omega^{(k)} \quad (4.48)$$

### 4.3.7 Algorithmes des solveurs proposés

Dans cette section, le solveur MAN et les améliorations proposées sont résumés sous forme d'organigrammes. La FIGURE 4.2 présente l'algorithme général MAN et les FIGURE 4.3 et FIGURE 4.4 précisent les améliorations apportées par les solveurs MANp et MANsg. La méthode directe est également rappelée (cf. FIGURE 4.1).

Le paramètre  $k_{\max}$  désigne le nombre maximal de pas de continuation autorisés (fixé par l'utilisateur) et  $\Omega_{\max}$  définit l'intervalle de pulsation sur lequel la courbe de réponse doit être étudiée. La pulsation initiale  $\Omega^{(0)}$  ou  $\Omega_0^{(0)}$  est à choisir par l'utilisateur.

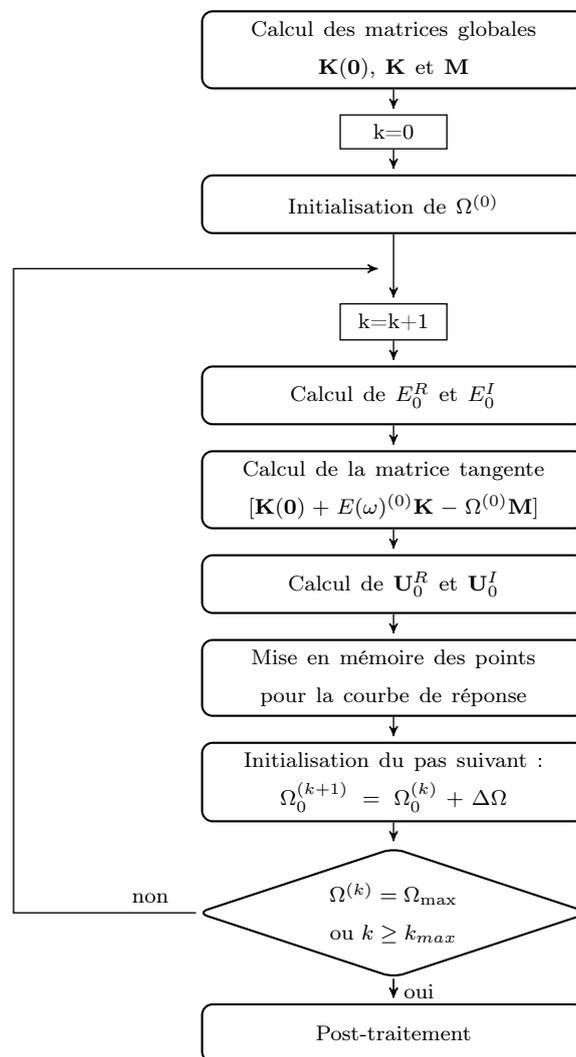


FIGURE 4.1 – Algorithme pour la résolution du problème dissipatif forcé par la méthode directe.

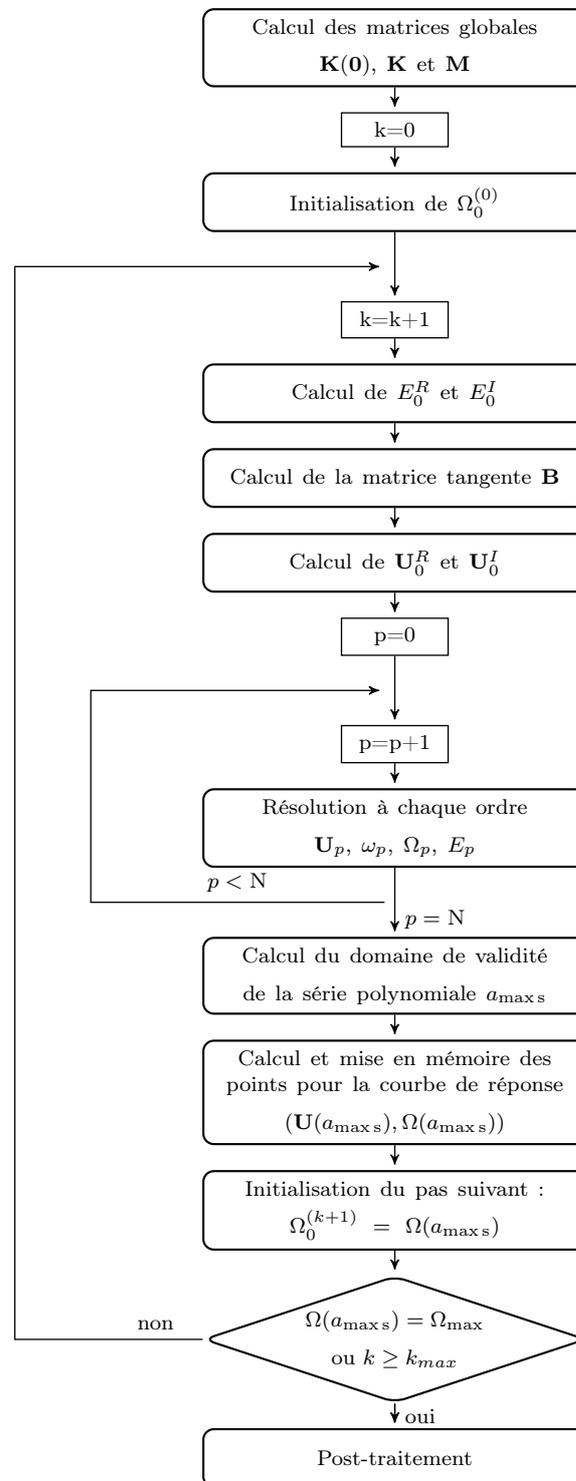


FIGURE 4.2 – Algorithme du solveur MAN dans le cas général.

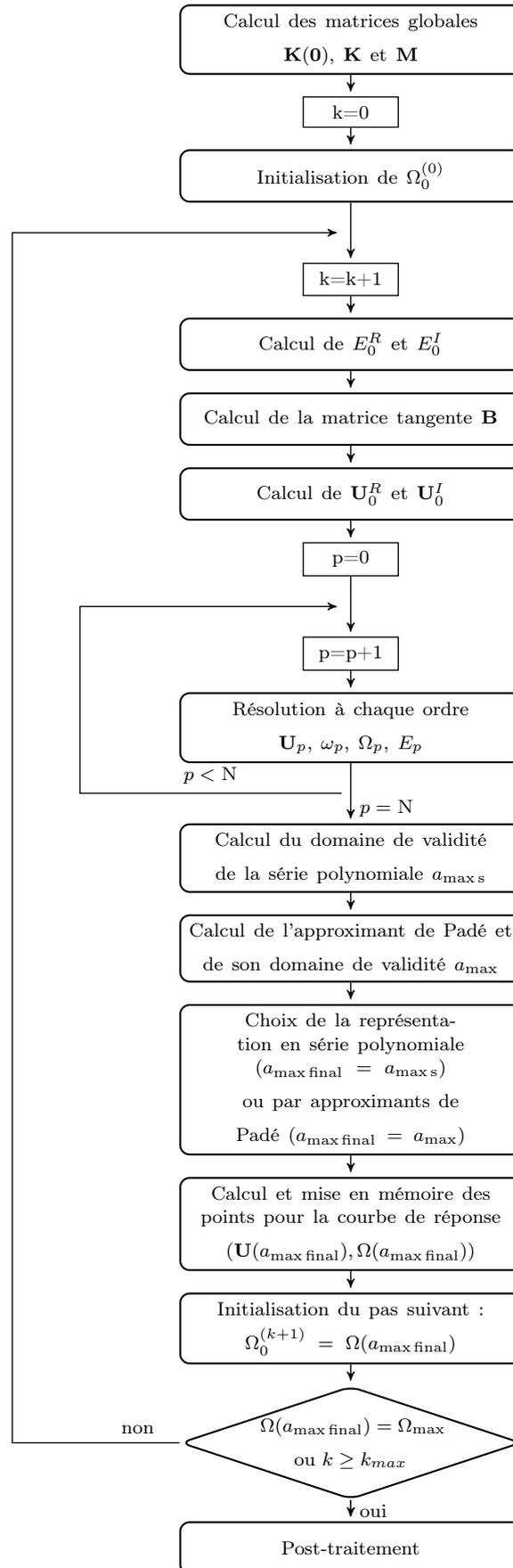


FIGURE 4.3 – Algorithme du solveur MANp : amélioration du domaine de validité par les approximants de Padé.

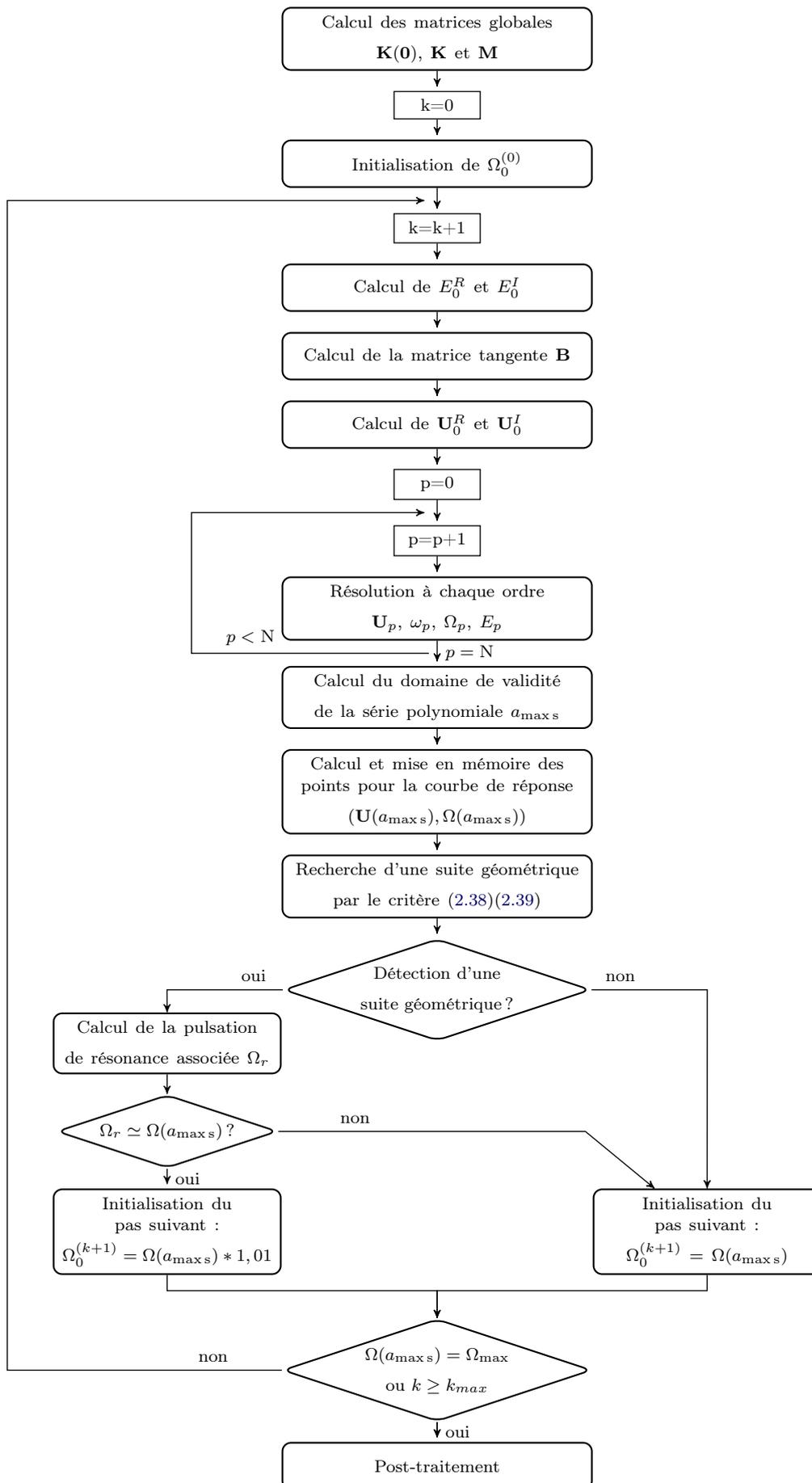


FIGURE 4.4 – Algorithme du solveur MANsg : ajout du critère d'analyse des séries de [Cochelin et Medale, 2013].

## 4.4 Résultats numériques

Les solveurs développés en SECTION 4.3 sont appliqués au cas test étudié au CHAPITRE 3, et validés par comparaison avec la courbe de réponse obtenue par la méthode directe (cf. SECTION 4.2). Les performances des variantes proposées sont ensuite évaluées et comparées.

### 4.4.1 Présentation du cas test

**Géométrie et paramètres matériaux** Le cas test étudié est celui de la SECTION 3.5.1, à savoir une cavité en aluminium remplie d'air ou d'eau. Une force extérieure orientée à  $45^\circ$  par rapport à l'horizontale et d'une amplitude de 14 142 N est appliquée au coin supérieur droit de la cavité (cf. FIGURE 4.5). Les paramètres matériaux sont identiques à ceux utilisés précédemment (cf. TABLEAU 3.3). Comme au CHAPITRE 3, deux lois de comportement sont considérées pour le matériau viscoélastique : le modèle hystérétique et le modèle de Maxwell généralisé.

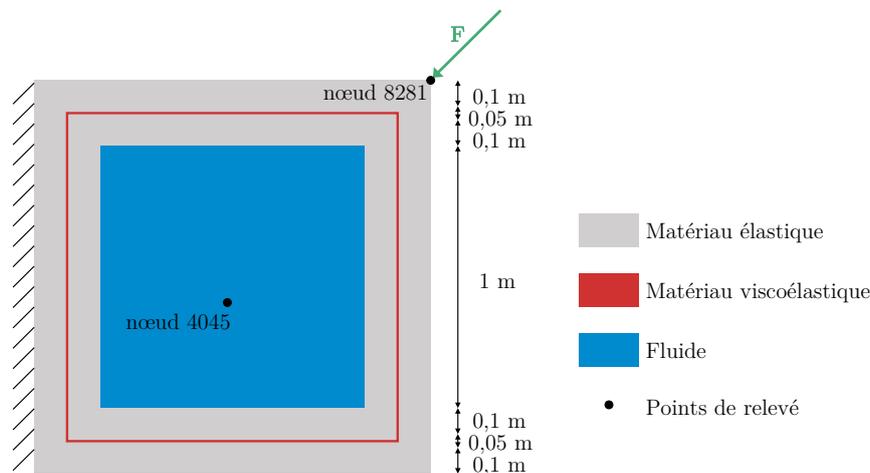


FIGURE 4.5 – Problème dissipatif forcé étudié.

**Discrétisation - Maillage** L'ensemble du problème est discrétisé par les éléments "2DFS" développés en SECTION 1.5. Les tests sont tous réalisés sur le maillage à 8281 nœuds et 28 722 degrés de liberté défini à la SECTION 3.5.3.

**Paramètres de calcul** Les courbes de réponse du système en régime forcé<sup>1</sup> sont tracées sur l'intervalle de pulsation allant de 0 à 2000 rad/s. Deux points de relevé sont considérés : le premier est le point d'application de la force extérieure, situé dans le domaine solide (nœud n°8281), et le second est un point situé proche du centre du domaine fluide (nœud n°4045) (cf. FIGURE 4.5 pour l'emplacement des points).

Pour le solveur MAN et ses variantes, la pulsation initiale ne peut pas être un zéro strict. En effet, la pulsation nulle est un pôle et cela occasionne des erreurs numériques. La pulsation initiale choisie est donc de 2 rad/s. Les courbes de réponse sont tracées en considérant 50 points intermédiaires. Le nombre de pas de continuation maximum est fixé à 500.

Le paramètre  $\delta$ , définissant le domaine de validité des séries MAN, vaut  $10^{-7}$ . Pour le solveur MAN<sub>p</sub>, le paramètre  $\delta_1$ , définissant le domaine de validité des approximants de Padé, vaut  $10^{-7}$ . Pour le solveur MAN<sub>sg</sub>, les paramètres  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont choisis égaux à  $10^{-3}$  et  $10^{-5}$ .

1. Amplitude  $\mathbf{U}$  pour un nœud et un degré de liberté fixé ( $u_x$ ,  $u_y$  ou  $p$ ), en fonction de la pulsation  $\omega$ .

Pour la méthode directe, permettant d'obtenir les résultats dits "de référence", le pas de calcul  $\Delta\Omega$  est fixé à 1 rad/s afin d'obtenir une courbe suffisamment précise et ainsi déterminer l'ensemble des pulsations de résonance.

#### 4.4.2 Validation des codes

Les résultats obtenus par le solveur MAN et ses deux variantes sont comparés avec ceux obtenus avec la méthode directe. Les résultats obtenus pour le modèle hystérétique sont présentés sur les FIGURE 4.6 et FIGURE 4.7 et ceux obtenus pour le modèle de Maxwell généralisé sur les FIGURE 4.8 et FIGURE 4.9. Bien que les solutions obtenues avec les solveurs MAN, MANsg et MANp soient continues, elles sont représentées par des points pour une question de lisibilité. La solution calculée par la méthode directe est quant à elle discrète, mais est ici représentée en trait continu pour servir de référence. Les conclusions étant identiques quelles que soient les valeurs du coefficient d'amortissement hystérétique  $\eta_c$  ou la température, seul un exemple pour chaque modèle est présenté ici, à savoir un coefficient d'amortissement  $\eta_c$  de 0,5 pour le modèle hystérétique, et une température de 30°C pour le modèle de Maxwell généralisé.

Quels que soient le modèle utilisé pour le module d'Young et le fluide testé (air ou eau), les résultats obtenus avec les solveurs MAN, MANp et MANsg sont identiques. En effet, les points correspondants aux pas de continuation de chacun des solveurs d'ordre élevé sont parfaitement coïncidents avec la courbe de réponse de référence.

Cependant, il apparaît que le solveur MAN dans sa version initiale ne permet parfois pas d'obtenir l'intégralité de la courbe réponse. C'est le cas notamment pour la cavité remplie d'air, où le calcul semble "bloqué" à une pulsation correspondant à une pulsation propre identifiée comme "fluide" dans le chapitre précédent (cf. CHAPITRE 3). Ainsi, au bout des 500 pas de continuation maximum autorisés, le calcul s'arrête à 1510 rad/s pour le modèle de Maxwell généralisé (cf. FIGURE 4.8). Observés également pour d'autres valeurs d'amortissement  $\eta_c$  ou de température, ces "blocages" apparaissent aux pulsations propres correspondant à des modes fluides de la cavité remplie d'air, peu amortis, conduisant à des pics de résonance peu ou pas fermés. Pour ces cas test, une accumulation de pas au voisinage de la pulsation propre empêche l'obtention d'une courbe de réponse complète.

Enfin, les résultats obtenus avec les solveurs MAN, MANp et MANsg sont cohérents avec les résultats obtenus lors de l'étude du même système en régime libre (analyse aux valeurs propres, cf. CHAPITRE 3). Ainsi, les pics d'amplitude maximale observés sur les FIGURE 4.6, FIGURE 4.7, FIGURE 4.8 et FIGURE 4.9 sont observés pour des valeurs de pulsation identiques à celles des pulsations propres calculées au chapitre précédent (cf. TABLEAU 3.1 et TABLEAU 3.2).

Pour une cavité remplie d'air, les pulsations "fluides" à 1068 rad/s et 1511 rad/s apparaissent clairement sur les graphes, en particulier pour le point de relevé situé dans le domaine fluide (cf. FIGURE 4.6(b) et FIGURE 4.8(b)). La première pulsation "solide", aux alentours de 200rad/s est également bien visible sur les courbes de réponse relevées au point d'application de la force (cf. FIGURE 4.6(a) : 204 rad/s, et FIGURE 4.8(a) : 218 rad/s).

Dans le cas d'une cavité remplie d'eau, avec le modèle de Maxwell généralisé, toutes les pulsations amorties du TABLEAU 3.1(b) sont visibles sur la courbe de réponse FIGURE 4.9. Dans le cas du modèle hystérétique (cf. FIGURE 4.7), certaines pulsations propres n'apparaissent pas clairement sur la courbe de réponse (253 rad/s, 301 rad/s et 652 rad/s par exemple). Les pics étant très localisés, il faudrait considérer plus de points intermédiaires pour les visualiser. En revanche, les pics de résonance à 174 rad/s, 934 rad/s et 1595 rad/s sont nettement visibles.

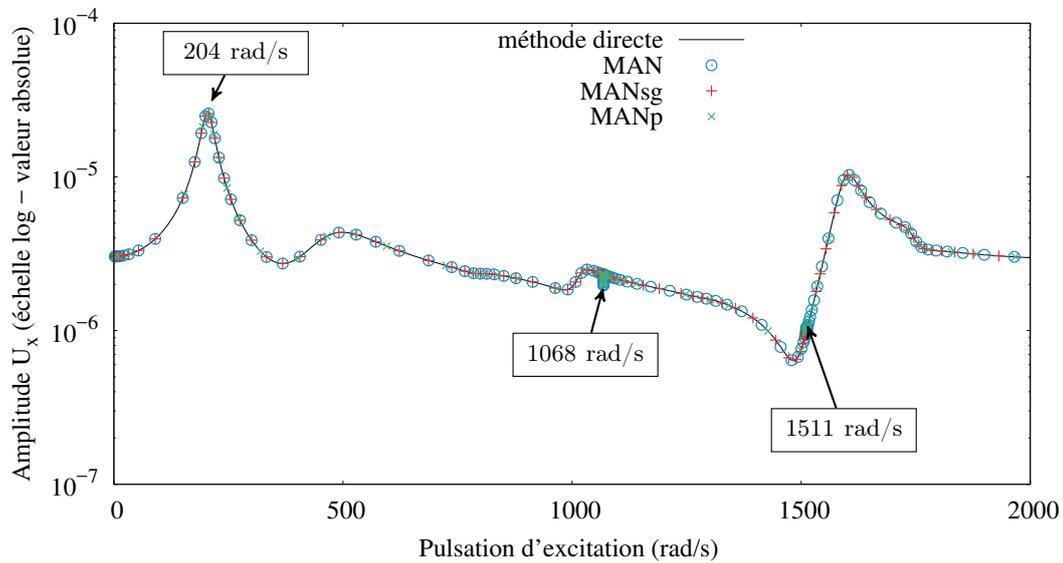
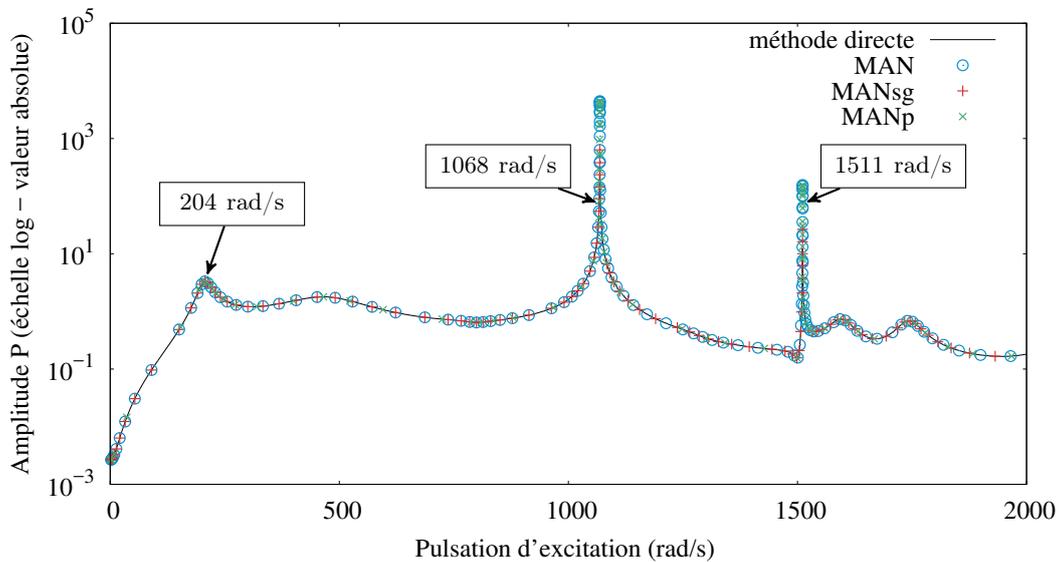
(a) Nœud n°8281 (solide) - Degré de liberté  $u_x$ .(b) Nœud n°4045 (fluide) - Degré de liberté  $p$ .

FIGURE 4.6 – Modèle hystérétique - Cavité remplie d'air,  $\eta_c = 0,5$  - Ordre de troncature  $N = 20$ , tolérance  $\delta = 10^{-7}$  - Validation des algorithmes proposés par comparaison avec la courbe réponse obtenue avec la méthode directe aux nœuds n 4045 et n 8281 - Mise en évidence de quelques pics de résonance.

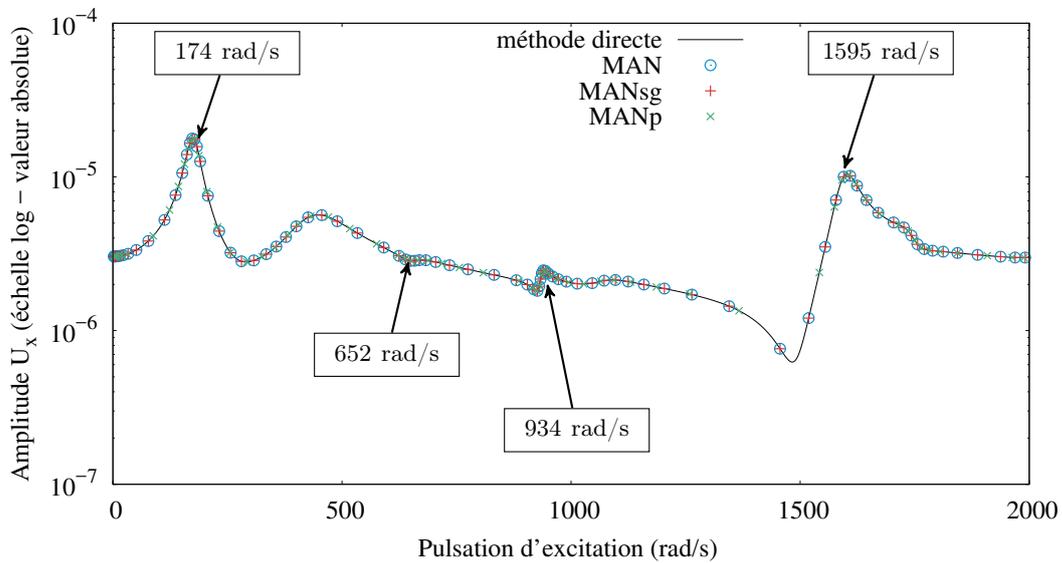
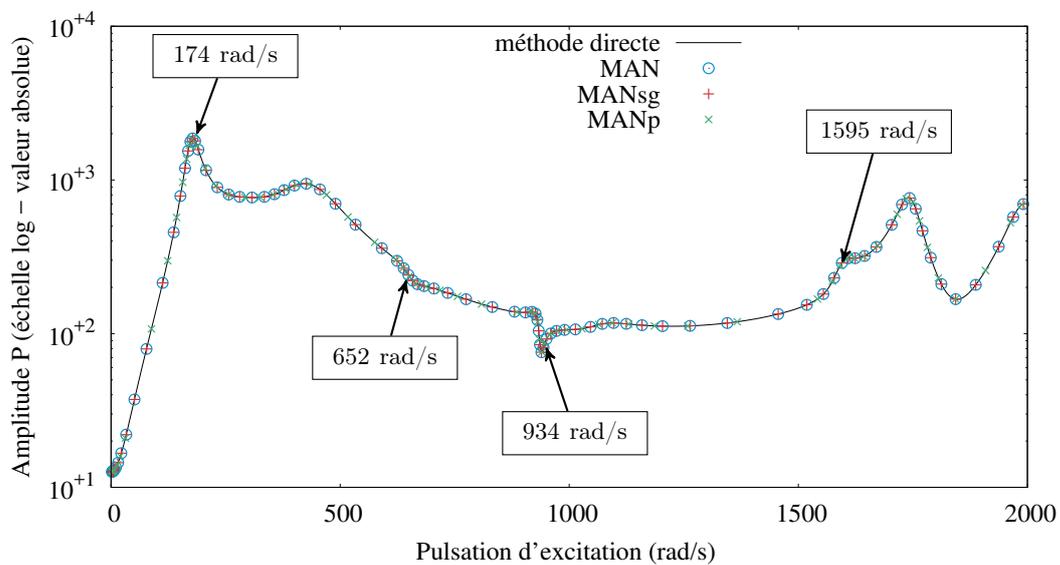
(a) Nœud n°8281 (solide) - Degré de liberté  $u_x$ .(b) Nœud n°4045 (fluide) - Degré de liberté  $p$ .

FIGURE 4.7 – Modèle hystérique - Cavité remplie d'eau,  $\eta_c = 0,5$  - Ordre de troncature  $N = 20$ , tolérance  $\delta = 10^{-7}$  - Validation des algorithmes proposés par comparaison avec la courbe réponse obtenue avec la méthode directe aux nœuds n 4045 et n 8281 - Mise en évidence de quelques pics de résonance.

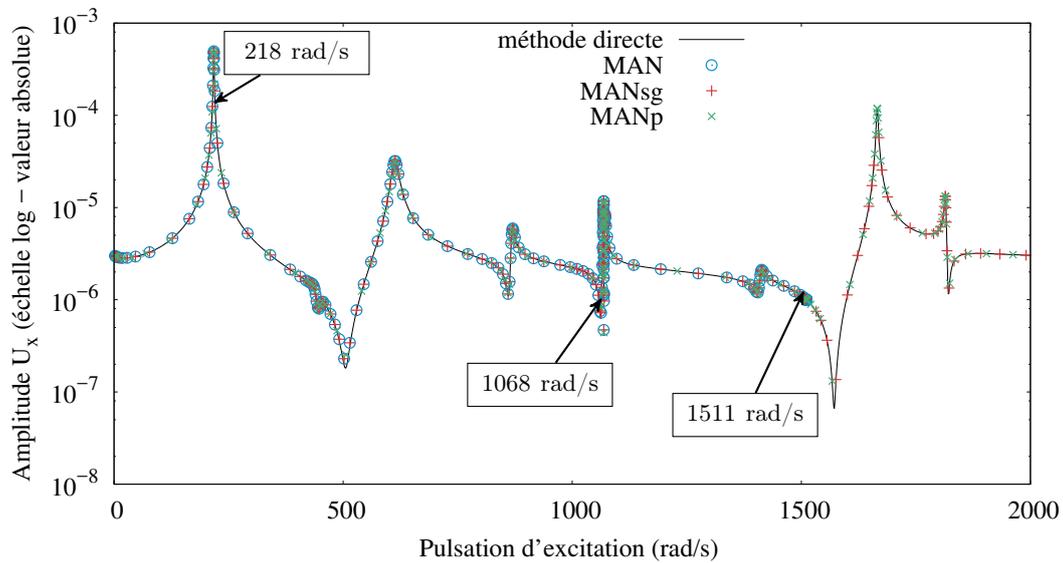
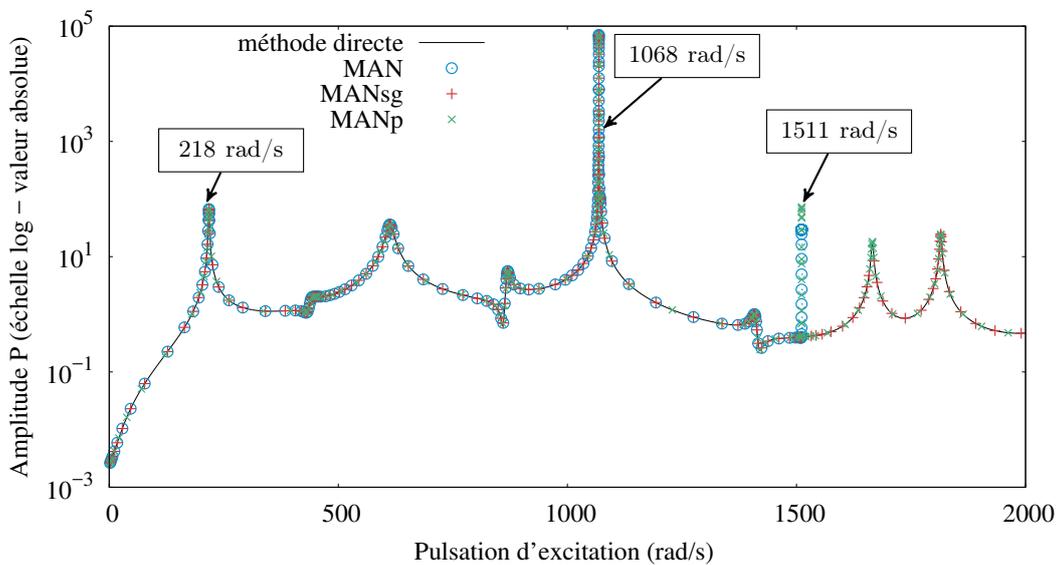
(a) Nœud n°8281 (solide) - Degré de liberté  $u_x$ .(b) Nœud n°4045 (fluide) - Degré de liberté  $p$ .

FIGURE 4.8 – Modèle de Maxwell - Cavité remplie d'air,  $T=30^\circ\text{C}$  - Ordre de troncature  $N = 20$ , tolérance  $\delta = 10^{-7}$  - Validation des algorithmes proposés par comparaison avec la courbe réponse obtenue avec la méthode directe aux nœuds n°4045 et n°8281 - Mise en évidence de quelques pics de résonance.

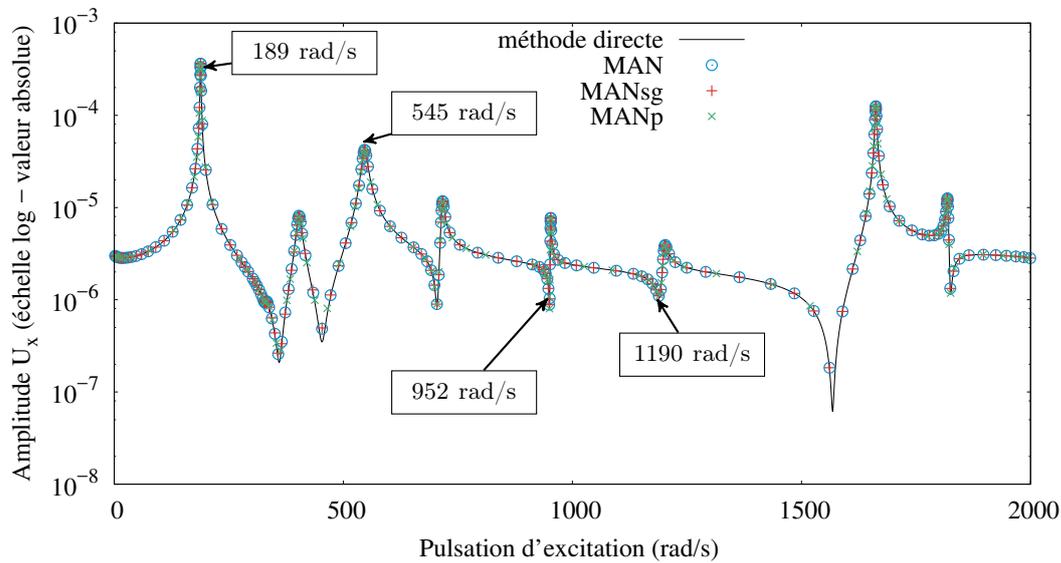
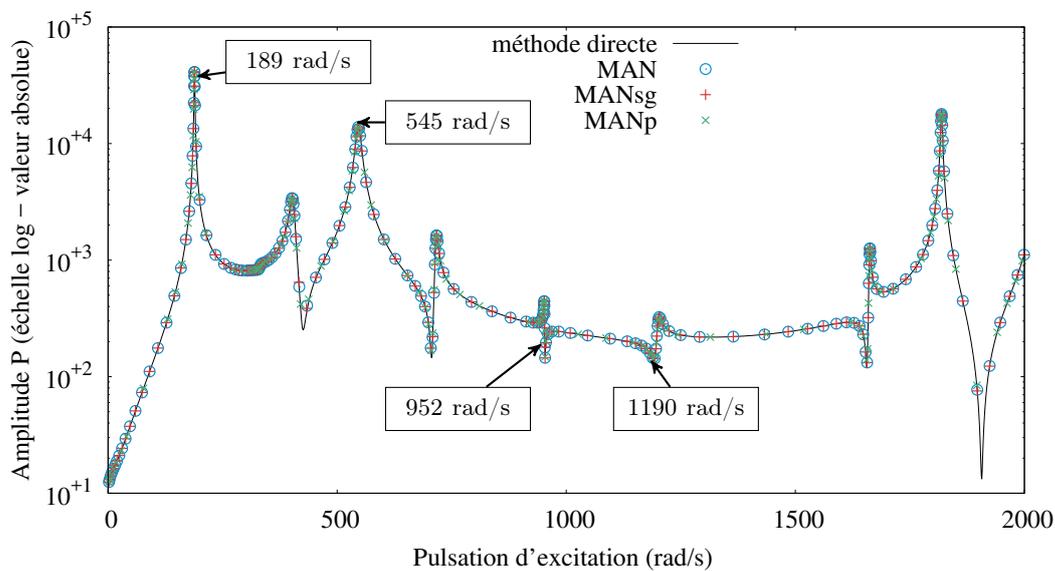
(a) Nœud n°8281 (solide) - Degré de liberté  $u_x$ .(b) Nœud n°4045 (fluide) - Degré de liberté  $p$ .

FIGURE 4.9 – Modèle de Maxwell - Cavité remplie d’eau,  $T=30^\circ\text{C}$  - Ordre de troncature  $N = 20$ , tolérance  $\delta = 10^{-7}$  - Validation des algorithmes propos es par comparaison avec la courbe réponse obtenue avec la méthode directe aux n œuds n°4045 et n°8281 - Mise en évidence de quelques pics de résonance.

### 4.4.3 Étude paramétrique

#### 4.4.3.1 Tolérance $\delta$

L'influence du paramètre  $\delta$  sur la qualité des courbes de réponse obtenues est étudiée. Ce paramètre est une tolérance fixée par l'utilisateur pour déterminer le domaine de validité des séries MAN (4.46).

**Nombre de pas de continuation** Les TABLEAU 4.2 et TABLEAU 4.3 présentent le nombre de pas de continuation nécessaires pour parcourir l'intervalle de pulsation  $[0 : 2000]$  rad/s pour différentes valeurs du paramètre  $\delta$ . Plus la tolérance  $\delta$  est petite, et plus le nombre de pas de continuation nécessaires augmente, quels que soient le fluide, le modèle de module d'Young et le solveur testés. Ces résultats sont cohérents : en effet, plus la tolérance  $\delta$  est grande, plus le domaine de validité des séries augmente et plus le nombre de pas de continuation diminue.

(a) Cavité remplie d'air							
Tolérance $\delta$	$10^{-1}$	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-6}$	$10^{-7}$
MAN	58	79	73	117	139	174	209
MANsg	54	72	86	101	126	147	172
MANp	15	14	32	40	66	91	109

(b) Cavité remplie d'eau							
Tolérance $\delta$	$10^{-1}$	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-6}$	$10^{-7}$
MAN	36	55	73	89	108	128	152
MANsg	36	55	73	89	108	128	152
MANp	33	36	49	69	78	92	105

TABLEAU 4.2 – Modèle hystérétique - Cavité remplie d'air ou d'eau,  $\eta_c = 0, 2$  -  $N = 15$  - Nombre de pas de continuation nécessaires pour parcourir l'intervalle de pulsation  $[0 : 2000]$  rad/s en fonction du paramètre de tolérance  $\delta$  (4.46).

(a) Cavité remplie d'air							
Tolérance $\delta$	$10^{-1}$	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-6}$	$10^{-7}$
MAN	10	62	128	171	214	267	320
MANsg	19	29	104	157	195	259	294
MANp	6	22	85	122	153	192	245

(b) Cavité remplie d'eau							
Tolérance $\delta$	$10^{-1}$	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-6}$	$10^{-7}$
MAN	31	52	96	138	171	205	246
MANsg	15	41	91	127	165	204	247
MANp	2 (NC)	34	70	96	145	150	182

TABLEAU 4.3 – Modèle de Maxwell généralisé - Cavité remplie d'air ou d'eau,  $T=20^\circ\text{C}$  -  $N = 15$  - Nombre de pas de continuation nécessaires pour parcourir l'intervalle de pulsation  $[0 : 2000]$  rad/s en fonction du paramètre de tolérance  $\delta$  (4.46). La mention (NC) désigne les calculs n'ayant pas convergé.

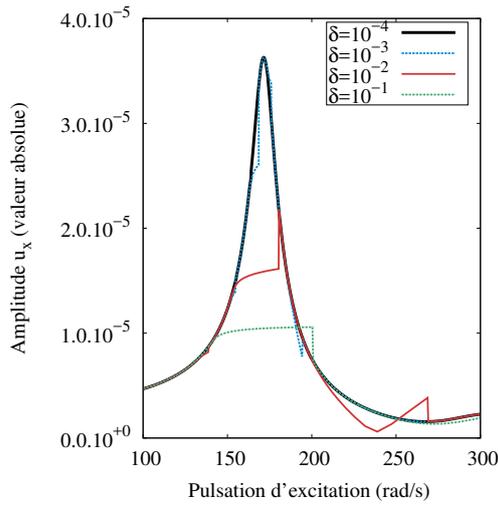
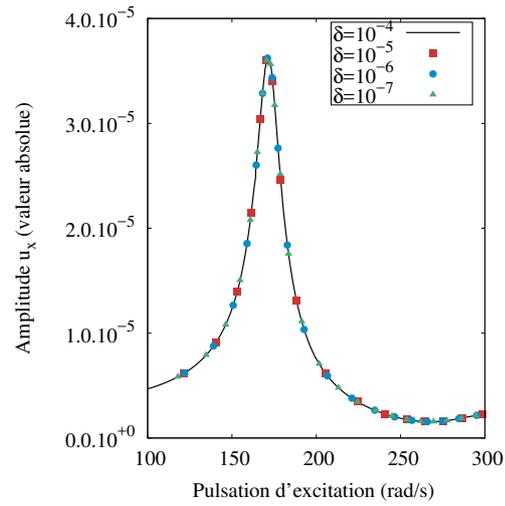
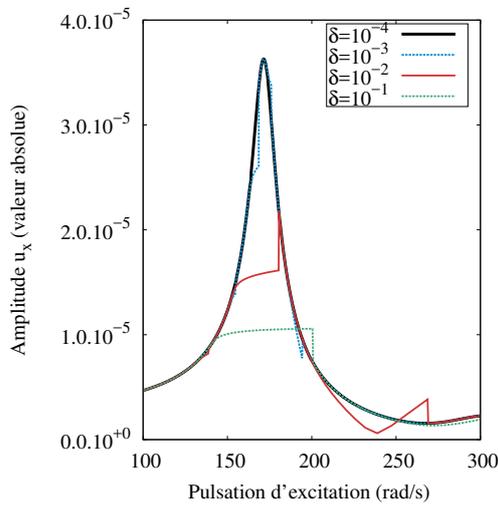
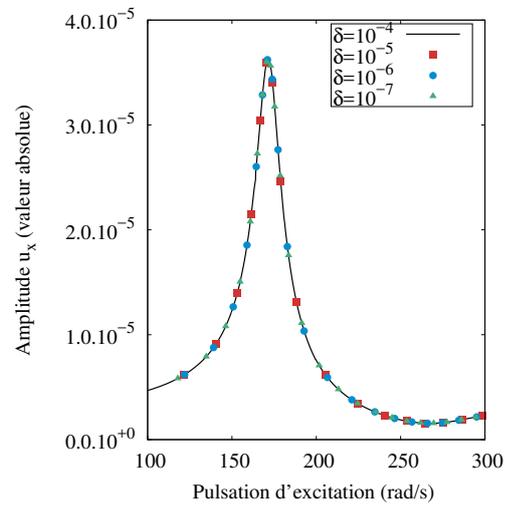
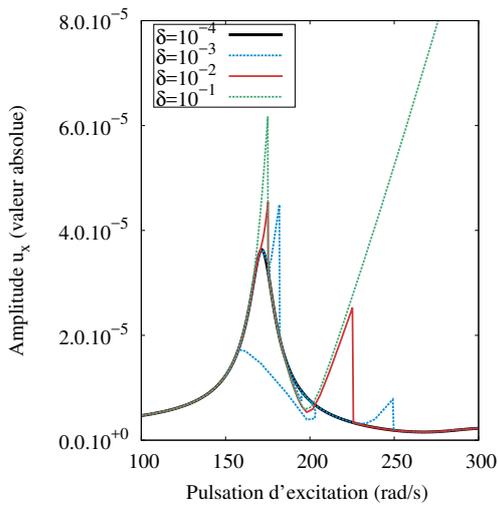
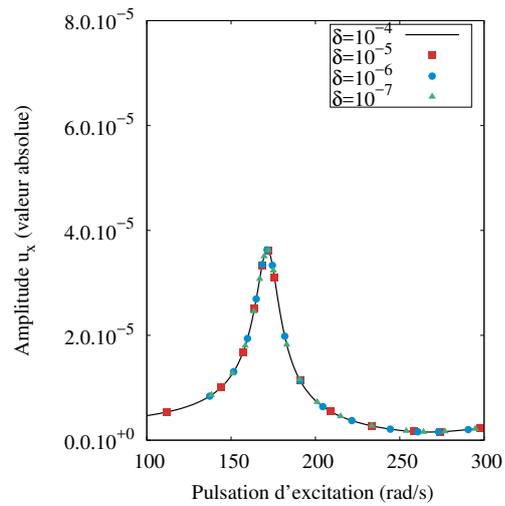
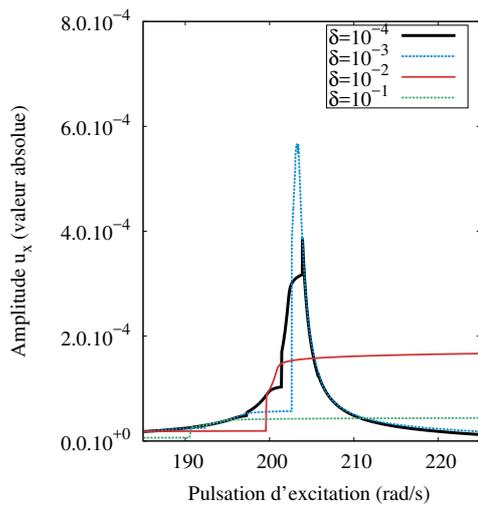
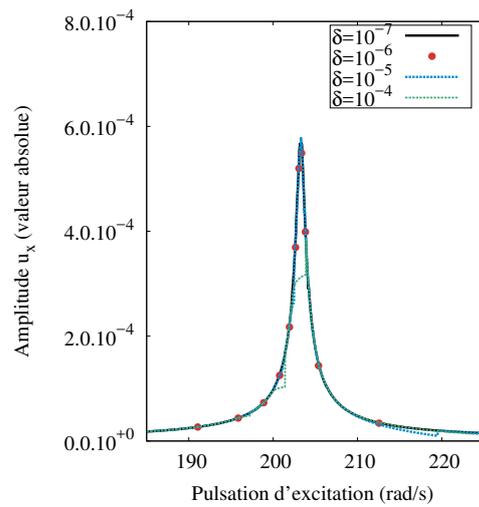
(a) Solveur MAN -  $10^{-1} \geq \delta \geq 10^{-4}$ (b) Solveur MAN -  $10^{-4} \geq \delta \geq 10^{-7}$ (c) Solveur MANsg -  $10^{-1} \geq \delta \geq 10^{-4}$ (d) Solveur MANsg -  $10^{-4} \geq \delta \geq 10^{-7}$ (e) Solveur MANp -  $10^{-1} \geq \delta \geq 10^{-4}$ (f) Solveur MANp -  $10^{-4} \geq \delta \geq 10^{-7}$ 

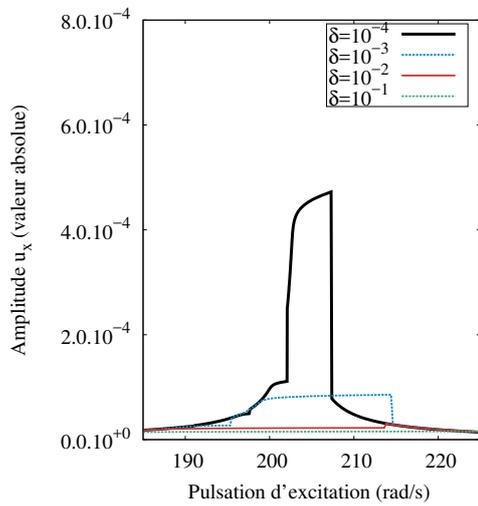
FIGURE 4.10 – Modèle hystérétique - Cavité remplie d'eau ,  $\eta_c = 0,2$  -  $N = 15$  - Allure du premier pic de résonance en fonction du paramètre  $\delta$ .



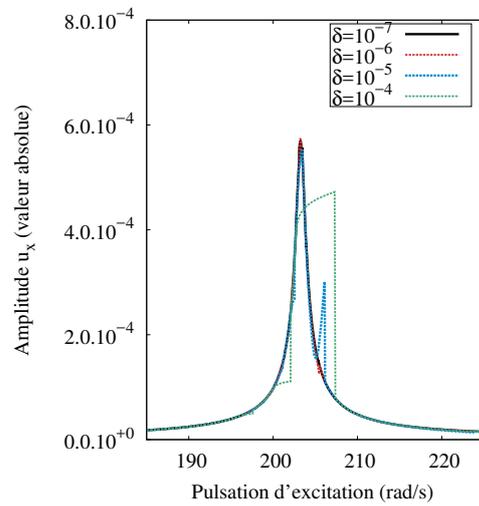
(a) Solveur MAN -  $10^{-1} \geq \delta \geq 10^{-4}$



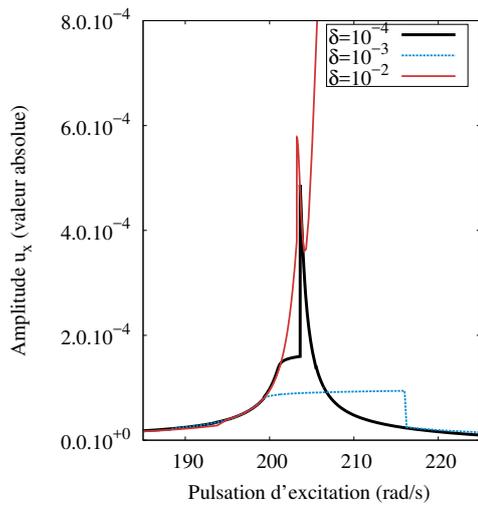
(b) Solveur MAN -  $10^{-4} \geq \delta \geq 10^{-7}$



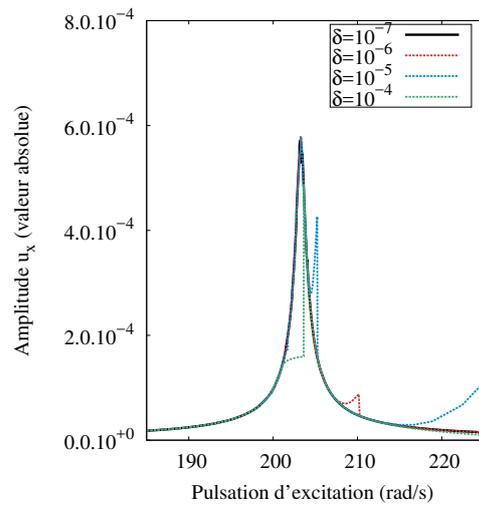
(c) Solveur MANsg -  $10^{-1} \geq \delta \geq 10^{-4}$



(d) Solveur MANsg -  $10^{-4} \geq \delta \geq 10^{-7}$



(e) Solveur MANp -  $10^{-1} \geq \delta \geq 10^{-4}$



(f) Solveur MANp -  $10^{-4} \geq \delta \geq 10^{-7}$

FIGURE 4.11 – Modèle de Maxwell généralisé - Cavité remplie d'eau ,  $T=20^\circ\text{C}$  -  $N = 15$  - Allure du premier pic de résonance en fonction du paramètre  $\delta$ .

**Allure des courbes de réponse** L'allure des courbes de réponse permet de déterminer la valeur de tolérance  $\delta$  à choisir. Les FIGURE 4.10 et FIGURE 4.11 présentent l'allure du premier pic de résonance pour les différentes valeurs de tolérance testées. Les résultats obtenus étant semblables quel que soit le fluide testé, seuls les résultats obtenus avec une cavité remplie d'eau sont présentés.

Il apparaît qu'une valeur du paramètre de tolérance trop grande ne permet pas de tracer la courbe de réponse de manière satisfaisante. Ainsi, pour une tolérance  $\delta$  de  $10^{-1}$ , le premier pic de résonance n'est pas détecté dans le cas du modèle de Maxwell généralisé (cf. FIGURE 4.11). Dans le meilleur des cas, lorsque le domaine de validité  $a_{\max s}$  devient trop grand, les solutions MAN s'éloignent de la courbe de référence. Au pas suivant, les valeurs initiales  $\mathbf{U}_0$  étant recalculées de manière exactes par la relation (4.11), la solution MAN "revient" sur la courbe de référence. Il arrive également qu'un domaine de validité trop grand mène à des erreurs numériques, impliquant la non convergence du calcul (cf. TABLEAU 4.3).

D'après les courbes de réponse obtenues, une tolérance d'au moins  $10^{-4}$  est nécessaire pour le modèle hystérétique. Le modèle de Maxwell généralisé, fortement non linéaire, requiert quant à lui une tolérance d'au moins  $10^{-7}$ . Dans la suite des calculs, une tolérance de  $10^{-7}$  est appliquée quel que soit le modèle considéré.

#### 4.4.3.2 Ordre de troncature

**Nombre de pas de continuation** L'influence de l'ordre de troncature des séries MAN sur le nombre de pas de continuation nécessaires pour obtenir la courbe de réponse sur l'intervalle  $[0 : 2000]$  rad/s est étudiée. Le TABLEAU 4.4 présente les résultats obtenus dans le cas du modèle hystérétique et le TABLEAU 4.5 ceux obtenus pour le modèle de Maxwell généralisé.

De façon générale, le nombre de pas de calcul nécessaires diminue lorsque l'ordre de troncature augmente. En effet, le domaine de validité des séries MAN augmente avec l'ordre de troncature. Cependant, pour certaines valeurs de pulsation, un ordre de troncature trop grand conduit à un problème numérique. En effet, le calcul du domaine de validité des séries MAN conduit à une valeur n'ayant aucune signification, à savoir *Nan* ou *Infinity*, ce qui implique des erreurs numériques, et un blocage du calcul. Ces problèmes de "non convergence", notés (NC) dans les TABLEAU 4.4 et TABLEAU 4.5, apparaissent généralement au voisinage des pics de résonance. Au niveau de ces pics, la pulsation est constante, et la réponse est, dans le cas d'un faible amortissement, infinie. La solution s'approche donc d'une droite quasi-verticale. Le problème étant linéaire, le terme  $\mathbf{U}_1$  contient toute l'information et les normes des termes  $\mathbf{U}_i$  suivants diminuent très rapidement. Si l'ordre de troncature  $N$  est trop grand, la norme de  $\mathbf{U}_N$  devient numériquement tellement petite qu'une valeur *Infinity* peut apparaître lors du calcul du domaine de validité  $a_{\max s}$  (4.46). Une solution serait de considérer un ordre de troncature  $N$  adaptatif [Medale et Cochelin, 2015]. En effet, puisque aller en-deçà ou au-delà de la précision machine ne sert à rien, l'ajout d'un test sur les normes des vecteurs MAN permettrait localement de stopper les calculs à un ordre adaptatif, avant d'obtenir des erreurs numériques.

A l'opposé, un ordre de troncature trop petit conduit à un nombre de pas de continuation très élevé, ce qui est cohérent avec les résultats observés aux chapitres précédents.

(a) Cavité remplie d'air							
Ordre $N$	5	10	15	20	25	30	
MAN							
Nb. pas	3182	399	209	70 (B)	3130	60 (NC)	
Pulsation atteinte	2000	2000	2000	1068	2000	1068	
MANsg							
Nb. pas	3182	312	172	132	114	72 (NC)	
Pulsation atteinte	2000	2000	2000	2000	2000	1407	
MANp							
Nb. pas	1928	180	109	80	75	42 (NC)	
Pulsation atteinte	2000	2000	2000	2000	2000	1068	

(b) Cavité remplie d'eau							
Ordre $N$	5	10	15	20	25	30	
MAN							
Nb. pas	1872	271	152	122	104	16 (NC)	
Pulsation atteinte	2000	2000	2000	2000	2000	164	
MANsg							
Nb. pas	1872	271	152	122	104	16 (NC)	
Pulsation atteinte	2000	2000	2000	2000	2000	164	
MANp							
Nb. pas	1267	160	105	94	83	9 (NC)	
Pulsation atteinte	2000	2000	2000	2000	2000	163	

TABLEAU 4.4 – Modèle hystérétique - Cavité remplie d'air ou d'eau,  $\eta_c = 0,2$  - Nombre de pas de continuation nécessaires pour parcourir l'intervalle de pulsation  $[0 : 2000]$  rad/s en fonction de l'ordre de troncature  $N$  des séries. La mention (NC) désigne les calculs où l'évaluation du domaine de validité des séries  $a_{\max s}$  conduit à un chiffre n'ayant aucune signification ( $NaN$  ou *Infinity*). La mention (B) indique les calculs qui sont restés bloqués sur un pic de résonance.

(a) Cavité remplie d'air							
Ordre $N$	5	10	15	20	25	30	
MAN							
Nb. pas	2704	446 (B)	320	213 (B)	116 (NC)	107 (NC)	
Pulsation atteinte	2000	1511	2000	1511	1068	1068	
MANsg							
Nb. pas	2669	583	294	259	116 (NC)	107 (NC)	
Pulsation atteinte	2000	2000	2000	2000	1068	1068	
MANp							
Nb. pas	1724	374	245	284	92 (NC)	83 (NC)	
Pulsation atteinte	2000	2000	2000	2000	1068	1068	

(b) Cavité remplie d'eau							
Ordre $N$	5	10	15	20	25	30	
MAN							
Nb. pas	2018	475	246	223	24 (NC)	18 (NC)	
Pulsation atteinte	2000	2000	2000	2000	202	188	
MANsg							
Nb. pas	2018	475	247	223	191	18 (NC)	
Pulsation atteinte	2000	2000	2000	2000	2000	188	
MANp							
Nb. pas	1299	288	182	178	16 (NC)	14 (NC)	
Pulsation atteinte	2000	2000	2000	2000	202	14	

TABLEAU 4.5 – Modèle de Maxwell généralisé - Cavité remplie d'air ou d'eau,  $T=20^\circ\text{C}$  - Nombre de pas de continuation nécessaires pour parcourir l'intervalle de pulsation  $[0 : 2000]$  rad/s en fonction de l'ordre de troncature  $N$  des séries. La mention (NC) désigne les calculs où l'évaluation du domaine de validité des séries  $a_{\max s}$  conduit à un chiffre n'ayant aucune signification ( $NaN$  ou *Infinity*). La mention (B) indique les calculs qui sont restés bloqués sur un pic de résonance.

**Temps CPU** L'influence de l'ordre de troncature sur le temps CPU est à présent étudié. Les graphes de la FIGURE 4.12 présentent l'évolution du temps CPU nécessaire pour construire la courbe de réponse jusqu'à 2000 rad/s en fonction de l'ordre de troncature des séries MAN.

Du point de vue du temps CPU, les séries tronquées à l'ordre 15 semblent être le choix optimal pour les trois versions du solveur d'ordre élevé (MAN, MANsg et MANp), quel que soit le fluide. En effet, quand l'ordre de troncature augmente, le nombre de pas de calcul nécessaires diminue, tandis que le temps CPU nécessaire pour un pas de calcul augmente. Il faut alors trouver un compromis entre la diminution du temps CPU due à la diminution du nombre de pas de calcul, et l'augmentation du temps CPU due à l'augmentation du nombre de termes à calculer dans les séries MAN.

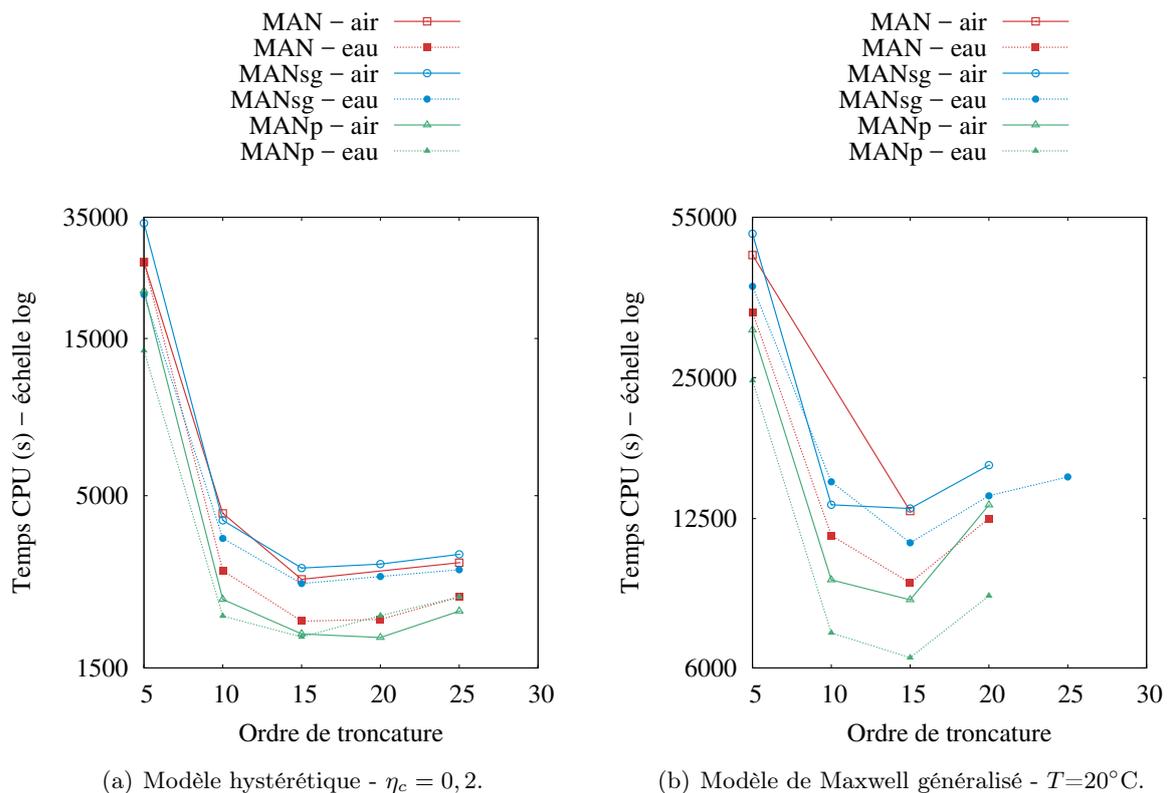


FIGURE 4.12 – Modèle hystérétique ou modèle de Maxwell généralisé - Cavité remplie d'air ou d'eau - Influence de l'ordre de troncature sur le temps CPU nécessaire pour étudier l'intervalle de pulsation  $[0 : 2000]$  rad/s.

#### 4.4.4 Comparaison des différentes méthodes

##### 4.4.4.1 Nombre de pas

Le nombre de pas nécessaires pour tracer la courbe de réponse jusqu'à 2000 rad/s est comparé pour chacune des variantes du solveur d'ordre élevé : séries polynomiales seules (MAN), ajout des approximants de Padé (MANp) et détection des pics de résonance par le critère de [Cochelin et Medale, 2013] (MANsg). Les paramètres sont ceux déterminés précédemment, à savoir : des séries MAN tronquées à l'ordre 15 et une tolérance  $\delta$  qui vaut  $10^{-7}$ .

Les résultats obtenus sont reportés dans le TABLEAU 4.6 (modèle hystérétique) et le TABLEAU 4.7 (modèle de Maxwell généralisé). Comme précédemment, le pas de calcul pour la

méthode directe est de 1 rad/s. L'obtention de la courbe de réponse avec cette méthode nécessite donc 2000 pas de calcul.

(a) Cavité remplie d'air.					
Coefficient d'amortissement $\eta_c$	0,1	0,2	0,5	1,0	1,5
MAN	249	209	169	145	133
MANsg	199	172	134	127	133
MANp	156	109	89	77	75

(b) Cavité remplie d'eau.					
Coefficient d'amortissement $\eta_c$	0,1	0,2	0,5	1,0	1,5
MAN	177	152	110	83	72
MANsg	177	152	110	83	72
MANp	130	105	74	59	50

TABLEAU 4.6 – Modèle hystérétique - Ordre de troncature  $N = 15$  - Nombre de pas de continuation nécessaires pour atteindre  $\Omega_a = 2000$  rad/s.

(a) Cavité remplie d'air.							
Température	10°C	20°C	30°C	40°C	50°C	60°C	70°C
MAN	258	320	259	273	280	277	273
MANsg	235	294	233	259	264	252	221
MANp	172	245	184	195	203	199	194

(b) Cavité remplie d'eau.							
Température	10°C	20°C	30°C	40°C	50°C	60°C	70°C
MAN	178	246	225	243	263	259	259
MANsg	175	247	223	243	263	259	256
MANp	127	182	157	168	181	185	177

TABLEAU 4.7 – Modèle de Maxwell - Ordre de troncature  $N = 15$  - Nombre de pas de continuation nécessaires pour atteindre  $\Omega_a = 2000$  rad/s.

**Apports des approximants de Padé** Il apparaît que le solveur MANp est la méthode nécessitant le moins de pas, quels que soient le modèle de module d'Young, le fluide et l'amortissement considérés. En effet, les courbes de réponses sont des fonctions non linéaires, qui sont mieux représentées par des fonctions rationnelles telles que les approximants de Padé. En augmentant le domaine de validité des séries, l'ajout des approximants de Padé permet donc d'accélérer la convergence du calcul, comme déjà observé précédemment (cf. SECTION 3.5.4). Dans le cas des vibrations forcées, cela permet de réduire le nombre de pas de continuation nécessaires pour obtenir l'intégralité de la courbe de réponse.

En revanche, un problème de blocage au niveau de pics de résonance peut apparaître. Dans la pratique, des erreurs d'arrondis numériques permettent généralement de passer les pics, en introduisant petit à petit un décalage sur la pulsation.

**Apports du critère de Cochelin et Médale** L'ajout du critère de [Cochelin et Medale, 2013] permet de détecter les pics de résonances peu ou pas amortis. En effet, ces pics sont très

proches des valeurs propres du système conservatif, qui peuvent être calculées grâce au critère (cf. SECTION 2.4). Le passage des pics de résonance, susceptibles de "bloquer" le calcul, peut alors être effectué en décalant la pulsation lors de l'initialisation du pas de continuation suivant. Ainsi, dans le cas d'une cavité remplie d'air, pour le modèle hystérétique avec un coefficient d'amortissement de 0,1 (cf. FIGURE 4.5(a)), il faut 199 pas de continuation avec le solveur MANsg, contre 249 avec le solveur MAN.

A noter que le critère détecte uniquement les pulsations pas ou très peu amorties. Ceci explique le peu de différence entre le solveur MAN et le solveur MANsg pour les cas tests présentant beaucoup d'amortissement, tels que les cavités remplies d'eau (cf. FIGURE 4.5(b) et FIGURE 4.6(b)). Dans ces tests, toutes les pulsations sont amorties, il n'y a donc pas de pic de résonance "infini" susceptible de bloquer la progression du calcul. En effet, dans le cas de systèmes à fort amortissement, ce dernier joue le rôle d'une viscosité qui a tendance à régulariser le système et donc à enlever les singularités.

Il n'est donc pas possible d'envisager un solveur aux valeurs propres pour le système dissipatif basé sur l'analyse des séries dans le cas des vibrations forcées, comme cela a été fait pour le système conservatif (cf. SECTION 2.4). L'introduction d'un amortissement tend à faire "disparaître" ou tout du moins à diminuer l'amplitude des pics de résonance. Dans ce cas, ces derniers n'apparaissent plus comme des singularités et le critère d'analyse perd son efficacité.

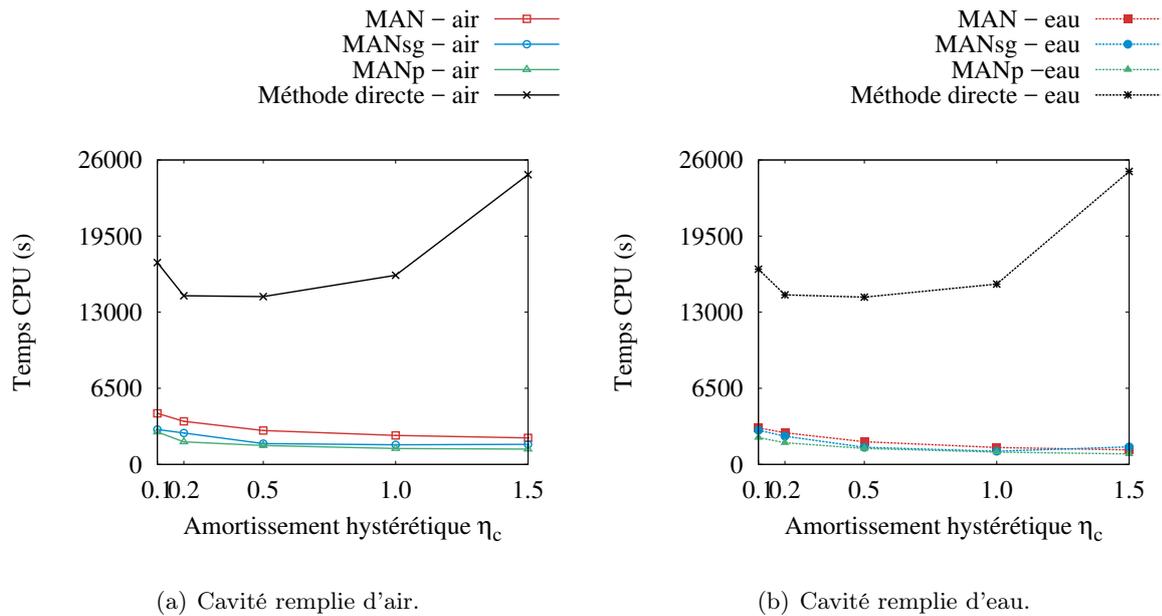
#### 4.4.4.2 Temps CPU

Le temps de calcul nécessaire pour construire la courbe de réponse sur l'intervalle de pulsation  $[0 : 2000]$  rad/s est étudié pour les trois solveurs proposés et pour la méthode directe. Les temps CPU sont comparés pour différentes valeurs du coefficient d'amortissement hystérétique  $\eta_c$  (cf. FIGURE 4.13) et différentes températures (cf. FIGURE 4.14).

Quels que soient le modèle de module d'Young, l'amortissement introduit ou le fluide considéré, le temps CPU des trois solveurs proposés est inférieur à celui de la méthode directe. Ceci est en accord avec les résultats présentés dans la littérature [Abdoun *et al.*, 2009]. Ainsi, pour le modèle hystérétique, l'utilisation d'un des solveurs proposés permet d'économiser de 74% à 96% de temps CPU par rapport à la méthode directe. Dans le cas du modèle de Maxwell généralisé, l'économie réalisée est de 15% à 69%.

Parmi les trois solveurs proposés, le solveur MANp apparaît comme étant le plus performant. En effet, quel que soit le cas test considéré, le temps CPU le plus bas est obtenu avec ce solveur. Les approximants de Padé étant utilisés pour augmenter le domaine de validité des approximations polynomiales, ce résultat est classique et a déjà été observé au chapitre précédent (cf. SECTION 3.5.4).

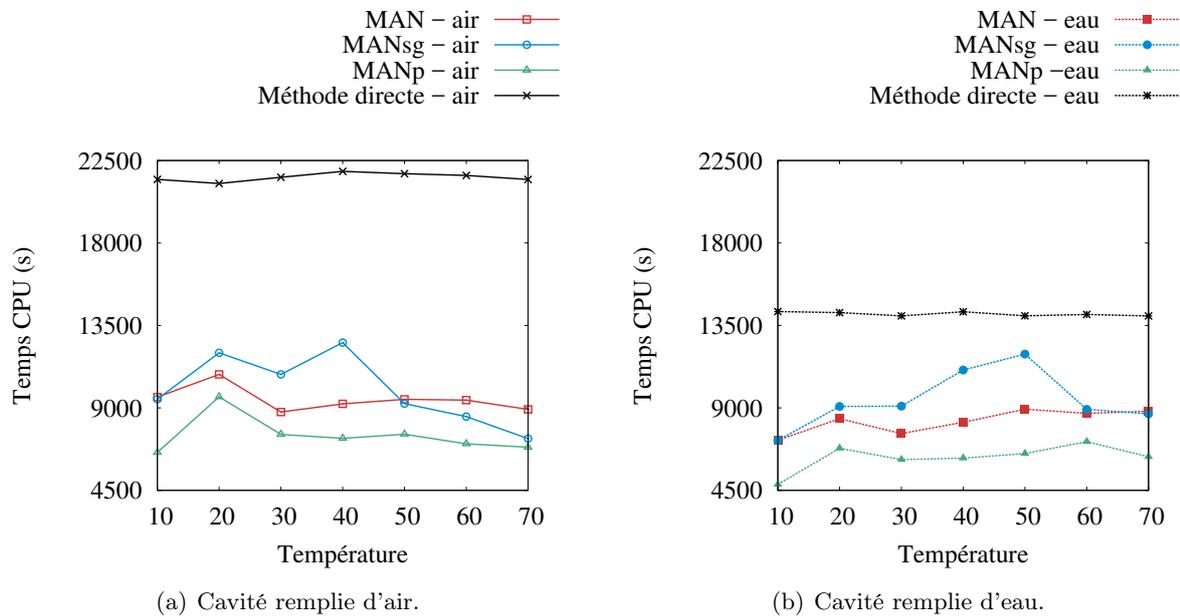
En revanche, les temps CPU obtenus avec le solveur MANsg sont très proches de ceux obtenus avec le solveur MAN classique. Comme expliqué précédemment, ce solveur a peu d'intérêt, comparé au solveur MAN, lorsque le problème à résoudre contient de l'amortissement et un fluide lourd. La conclusion n'est pas la même dans le cas d'un fluide léger, tel que l'air, où les modes fluides sont découplés des modes solides. La réponse des modes fluides n'étant pas influencée par l'amortissement introduit dans la couche viscoélastique, il peut être intéressant d'utiliser le solveur MANsg pour nettoyer les séries au voisinage des pics de résonance correspondants aux modes fluides, afin de diminuer le temps de simulation.



(a) Cavité remplie d'air.

(b) Cavité remplie d'eau.

FIGURE 4.13 – Modèle hystérétique - Cavité remplie d'air ou d'eau - Ordre de troncature  $N = 15$  - Évolution du temps CPU nécessaire pour parcourir l'intervalle de pulsation  $[0 : 2000]$  rad/s en fonction du coefficient d'amortissement hystérétique  $\eta_c$ .



(a) Cavité remplie d'air.

(b) Cavité remplie d'eau.

FIGURE 4.14 – Modèle de Maxwell généralisé - Cavité remplie d'air ou d'eau - Ordre de troncature  $N = 15$  - Évolution du temps CPU nécessaire pour parcourir l'intervalle de pulsation  $[0 : 2000]$  rad/s en fonction de la température.

### 4.4.5 Comportement mécanique

Dans cette section, tous les calculs sont réalisés avec le solveur MANp, considéré comme le plus performant d'après l'étude précédente. Les cas testés sont identiques à ceux étudiés au CHAPITRE 3. Dans un premier temps, l'influence de l'amortissement introduit par la couche viscoélastique est étudié. Puis, dans un second temps, la pression acoustique est évaluée pour différentes configurations.

#### 4.4.5.1 Influence de l'amortissement introduit par la couche viscoélastique

**Modèle hystérétique : influence du coefficient d'amortissement** Les courbes de réponse du système aux vibrations forcées sont tracées pour différentes valeurs du coefficient d'amortissement hystérétique  $\eta_c$ . Les courbes obtenues pour une cavité remplie d'air sont présentées FIGURE 4.15, et celles obtenues pour une cavité remplie d'eau en FIGURE 4.16.

Les effets de la dissipation d'énergie dans le matériau viscoélastique apparaissent clairement sur les courbes de réponse du système. En effet, pour les pics correspondants à des pulsations propres fortement amorties, telles que les pulsations "couplées" d'une cavité remplie d'eau, ou les pulsations "solides" d'une cavité remplie d'air, on observe une fermeture des courbes, typique des problèmes dissipatifs.

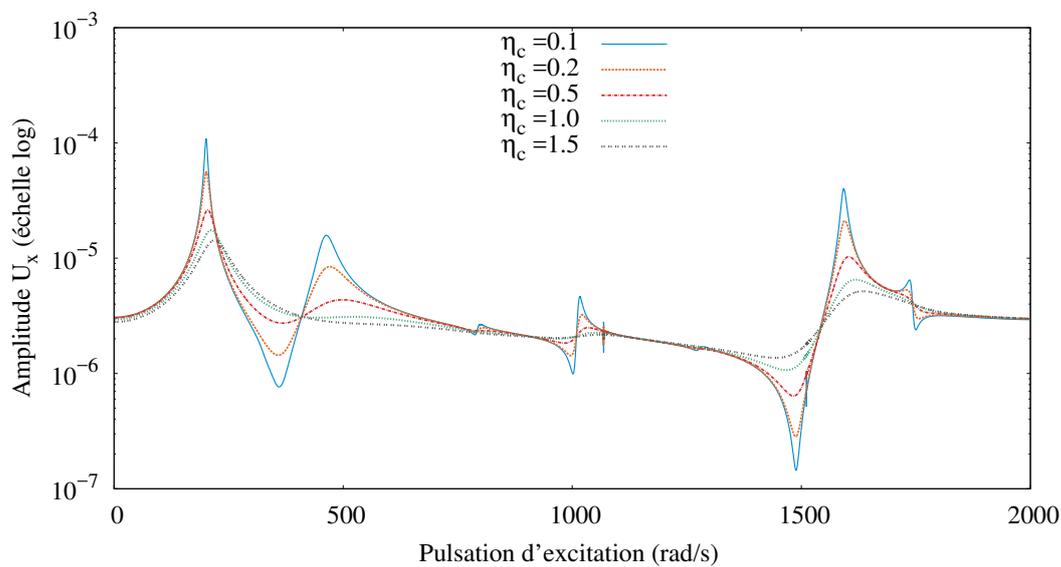
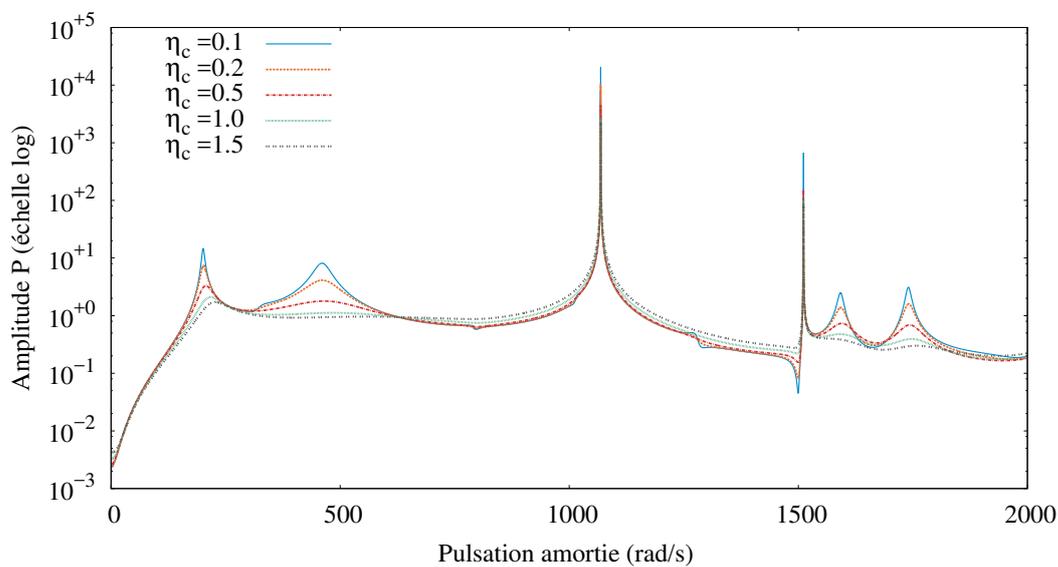
L'amplitude de ces pics diminue quand le coefficient d'amortissement  $\eta_c$  augmente. Ceci met en évidence la dissipation d'énergie permise par la couche viscoélastique, en cohérence avec les courbes de réponse tracées par [Abdoun *et al.*, 2009]. De plus, lorsque l'amortissement  $\eta_c$  augmente, un décalage du spectre des pulsations propres est observé. Cette tendance s'observe particulièrement bien sur le premier pic : lorsque le coefficient d'amortissement  $\eta_c$  augmente, le premier pic se décale vers la droite, c'est-à-dire vers une pulsation plus élevée. Ceci est en accord avec les observations faites au CHAPITRE 3 (les pulsations amorties augmentent lorsque l'amortissement est élevé) et les tendances relevées dans la bibliographie [Abdoun *et al.*, 2009][Boumediene *et al.*, 2014].

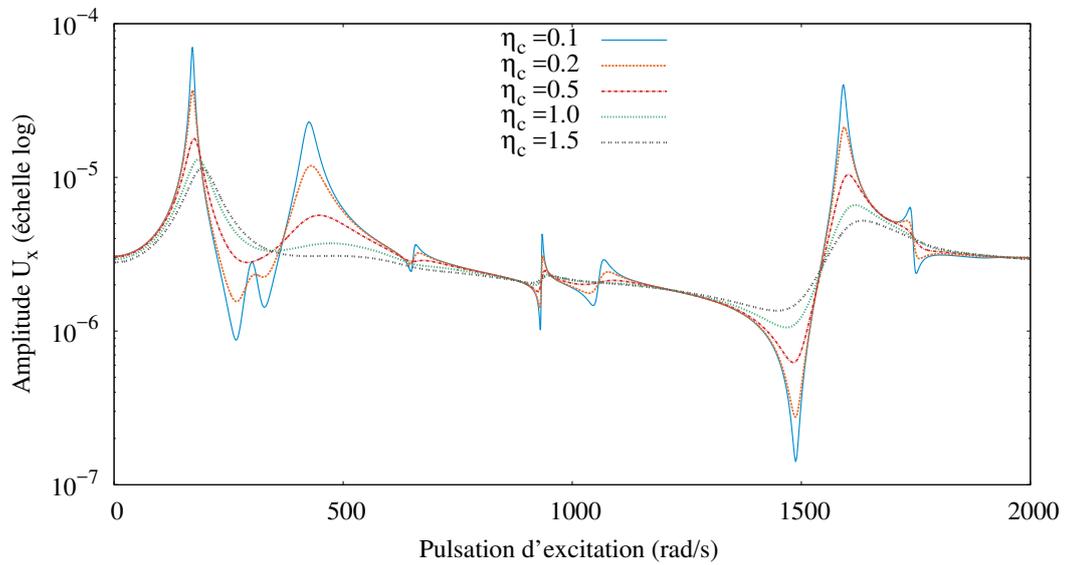
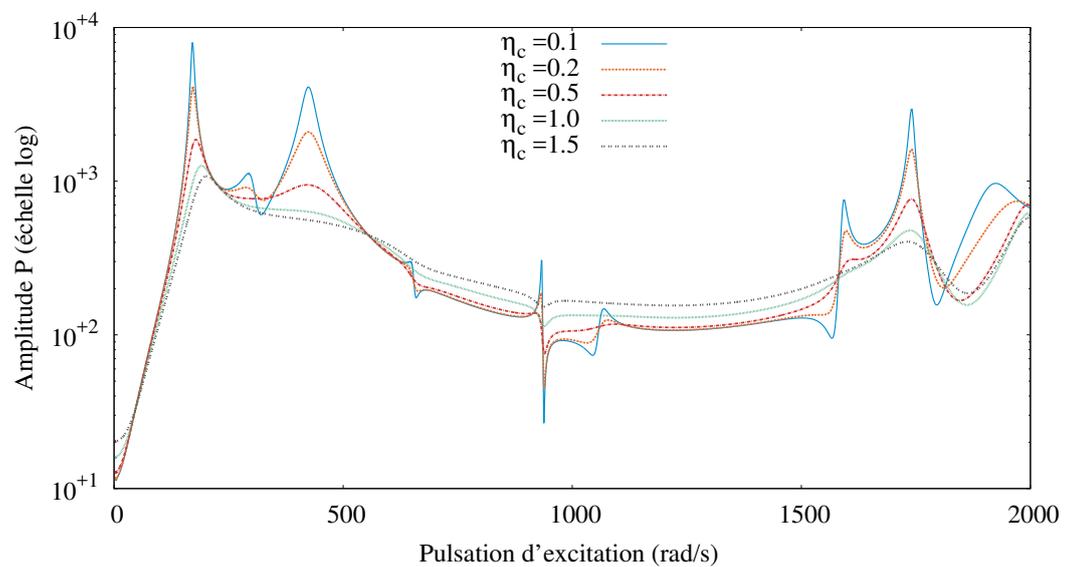
En revanche, pour les modes peu amortis, tels que les modes "fluides" de la cavité remplie d'air, le pic correspondant sur les courbes de réponse aux vibrations forcées est un pic de résonance, semblable aux pics observables dans le cas d'un système conservatif (cf. FIGURE 2.4). Ainsi, sur la FIGURE 4.15(b), les pics correspondants aux modes fluides 1068 rad/s et 1511 rad/s sont particulièrement visibles.

**Modèle de Maxwell : influence de la température** Les courbes de réponse du système aux vibrations forcées sont tracées pour différentes valeurs de température. Les courbes obtenues sont présentées FIGURE 4.17 (cavité remplie d'air) et FIGURE 4.18 (cavité remplie d'eau).

L'étude du premier pic de résonance montre que plus la température augmente, plus le pic d'amplitude se décale vers une pulsation plus faible. Cette observation rejoint la conclusion faite lors de l'étude du système conservatif au chapitre précédent (cf. SECTION 3.5.5) : les pulsations amorties diminuent avec l'augmentation de la température.

Les pics correspondants aux modes "solides" (cavité remplie d'air) ou "couplés" (cavité remplie d'eau) sont fortement impactés par la température. Ainsi, au-delà de la première pulsation de résonance, les pics sont très décalés les uns des autres. En revanche, les modes correspondants aux modes propres "fluides", peu amortis, sont peu impactés par la température et les valeurs propres de pulsation restent identiques. C'est le cas notamment FIGURE 4.17(b), où les pics correspondants aux valeurs propres fluides 1068 rad/s et 1511 rad/s sont tous superposés, quelle que soit la température.

(a) Nœud n°8281 (solide) - Degré de liberté  $u_x$ .(b) Nœud n°4045 (fluide) - Degré de liberté  $p$ .FIGURE 4.15 – Modèle hystérétique - Cavité remplie d'air - Algorithme MANp - Influence du coefficient d'amortissement  $\eta_c$  sur les courbes de réponse pour différents points de relevé.

(a) Nœud n°8281 (solide) - Degré de liberté  $u_x$ .(b) Nœud n°4045 (fluide) - Degré de liberté  $p$ .FIGURE 4.16 – Modèle hystérique - Cavité remplie d’eau - Algorithme MANp - Influence du coefficient d’amortissement  $\eta_c$  sur les courbes de réponse pour différents points de relevé.

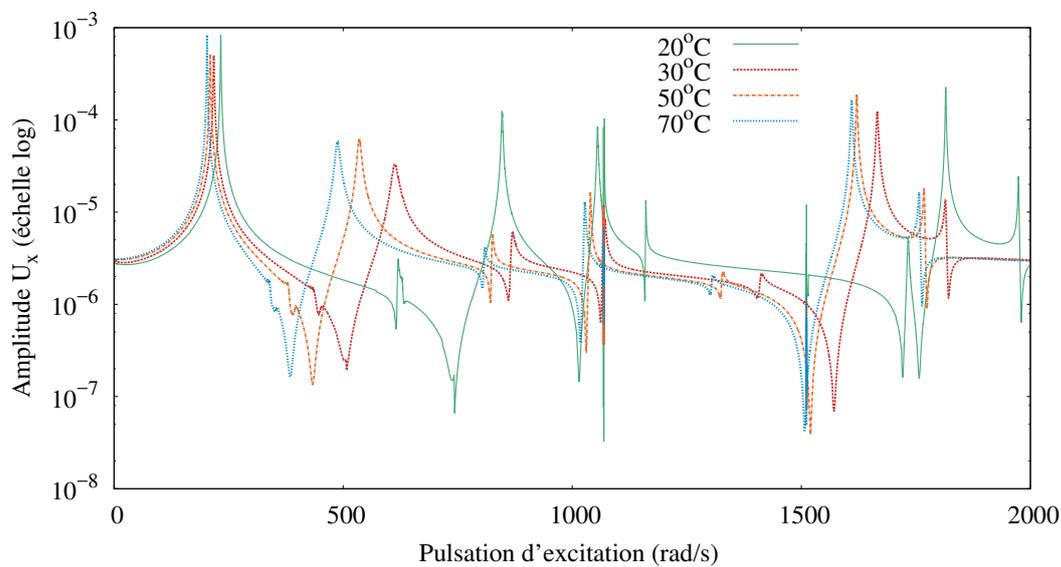
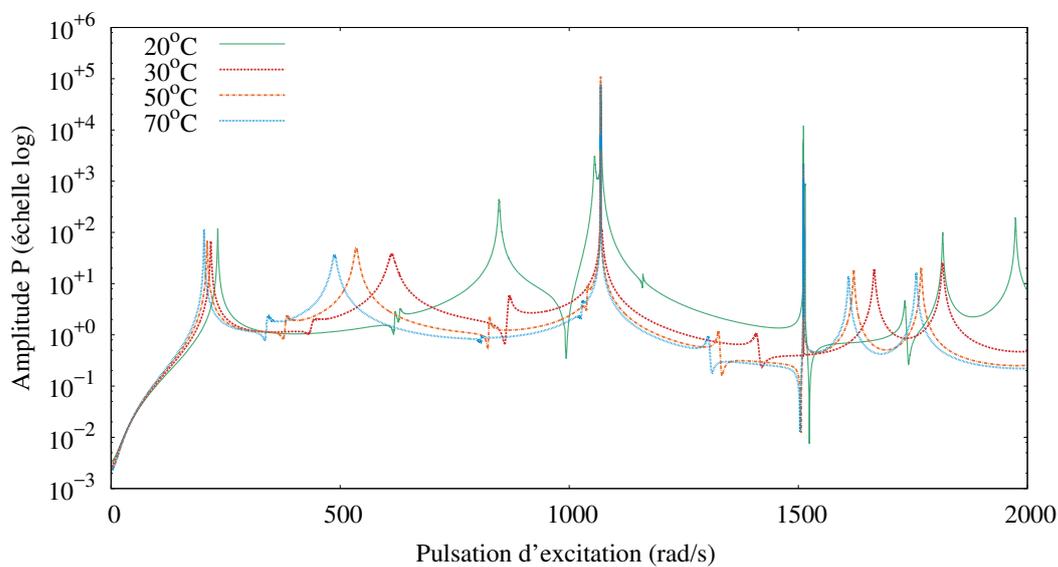
(a) Nœud n°8281 (solide) - Degré de liberté  $u_x$ .(b) Nœud n°4045 (fluide) - Degré de liberté  $p$ .

FIGURE 4.17 – Modèle de Maxwell - Cavité remplie d'air - Algorithme MANp - Influence de la température sur les courbes de réponse pour différents points de relev e.

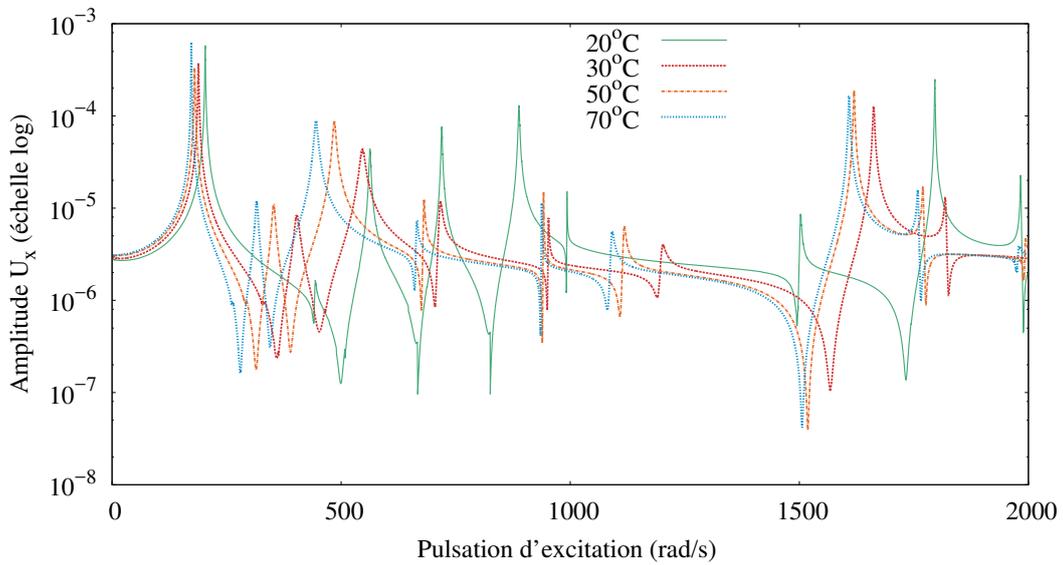
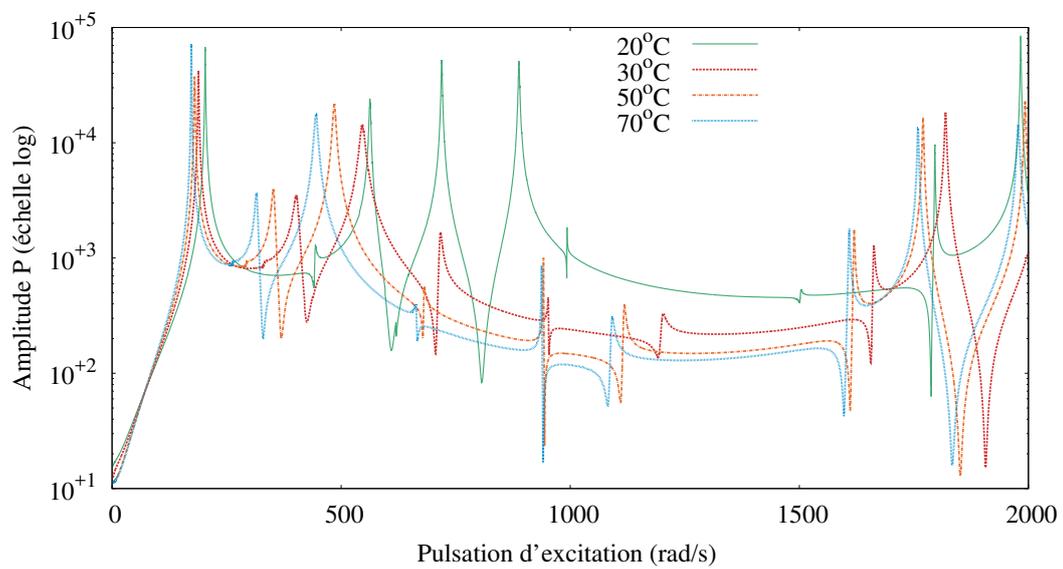
(a) Nœud n°8281 (solide) - Degré de liberté  $u_x$ .(b) Nœud n°4045 (fluide) - Degré de liberté  $p$ .

FIGURE 4.18 – Modèle de Maxwell - Cavité remplie d'eau - Algorithme MANp - Influence de la température sur les courbes de réponse pour différents points de relevé.

#### 4.4.5.2 Pression acoustique

L'étude de la pression acoustique est particulièrement adaptée dans le cas d'applications industrielles. Des exemples tirés de la littérature montrent l'utilité de cette grandeur pour l'étude du confort des passagers d'un avion [Mallardo *et al.*, 2012], du rayonnement acoustique d'un sous-marin [Yao *et al.*, 2017] ou encore de l'impact des activités humaines sur la faune sous-marine [Lurton et Antoine, 2007]. Contrairement aux courbes de réponse présentées précédemment, la pression acoustique est une grandeur scalaire globale, représentative de l'ensemble du domaine fluide et non d'un seul point de relevé.

Le niveau de pression acoustique  $L_p$  (SPL : *Sound Pressure Level*) est défini par [Bruneau, 1998] :

$$L_p = 10 \log \left( \frac{\langle p^2 \rangle}{p_0^2} \right) \quad [\text{en dB}] \quad (4.49)$$

où  $p_0$  est la pression sonore de référence et vaut  $20 \mu\text{Pa}$ . La pression quadratique  $\langle p^2 \rangle$  est donnée par [Deü *et al.*, 2008b] :

$$\langle p^2 \rangle = \frac{1}{2N_a} \sum_{i=1}^{N_a} p_i^2 \quad (4.50)$$

où  $N_a$  est le nombre de nœuds du domaine fluide et  $p_i$  la pression nodale.

Les FIGURE 4.19 et FIGURE 4.20 montrent l'évolution du niveau de pression acoustique en fonction de la pulsation d'excitation extérieure. Comme pour les courbes de réponse, des pics apparaissent aux pulsations de résonance. Ces pics correspondent aux pulsations amorties déterminées au CHAPITRE 3. Le niveau de pression acoustique est également influencé par l'amortissement introduit dans la couche viscoélastique [Deü *et al.*, 2008b]. Un décalage du spectre et une diminution des amplitudes sont observés sur les courbes d'évolution de la pression acoustique en fonction de la pulsation d'excitation extérieure.

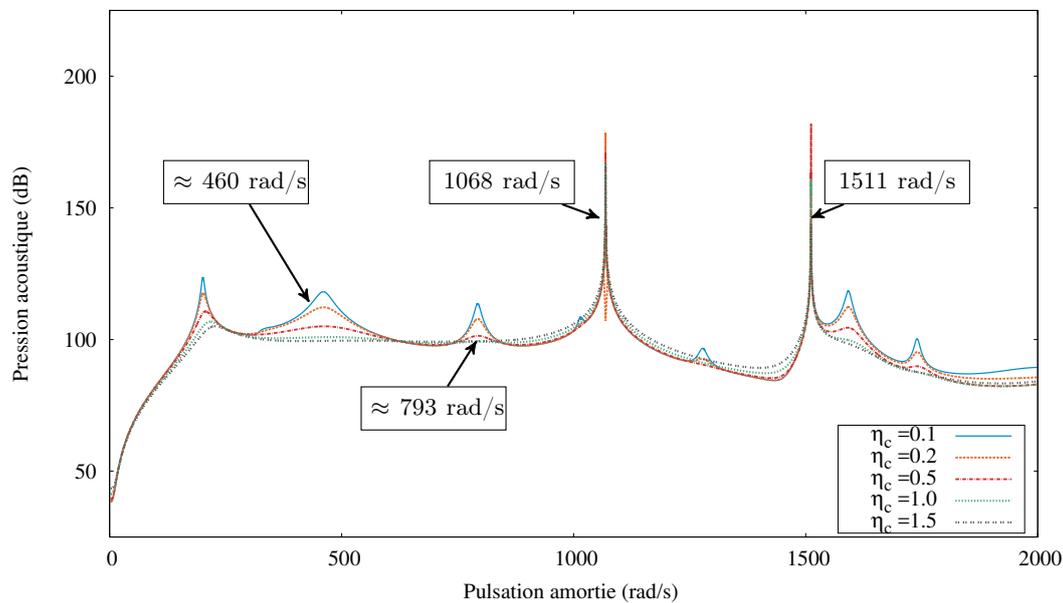
Dans le cas du modèle hystérétique, les pics correspondants aux modes solides et aux modes couplés sont lissés lorsque le coefficient d'amortissement  $\eta_c$  augmente et certains pics ne sont visibles que pour de faibles valeurs d'amortissement. C'est le cas des pics situés aux alentours de  $460 \text{ rad/s}$  et  $793 \text{ rad/s}$  (cavité remplie d'air, cf. FIGURE 4.19(a)) ou proches de  $424 \text{ rad/s}$  et  $653 \text{ rad/s}$  (cavité remplie d'eau, cf. FIGURE 4.19(b)), qui sont visibles pour un amortissement  $\eta_c$  inférieur ou égal à  $0,5$  mais disparaissent pour des amortissements plus forts.

Dans le cas du modèle de Maxwell, les modes sont plus difficiles à identifier, mais la tendance observée est identique à celle du modèle hystérétique. Une étude approfondie, avec calcul de la matrice de MAC<sup>1</sup> [Allemang, 2003], serait nécessaire pour quantifier précisément le glissement dans le spectre des pulsations.

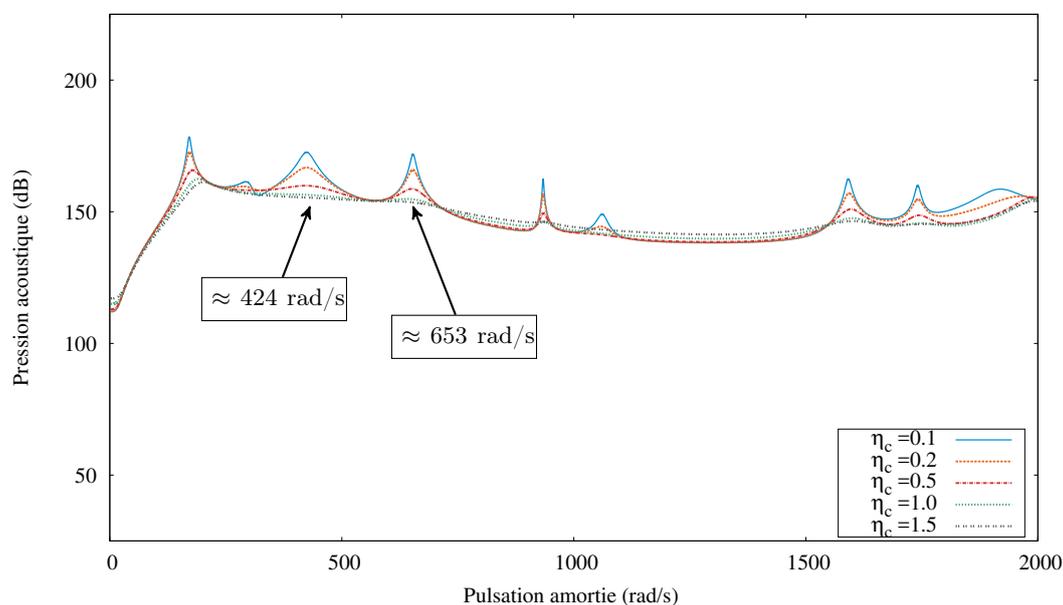
Comme déjà mentionné dans l'étude des courbes de réponse en amplitude, une différence de comportement est observée selon que le fluide est léger (air) ou lourd (eau). Pour notre cas test, quel que soit le modèle de module d'Young considéré, le niveau de pression est en moyenne plus élevé pour une cavité remplie d'eau (de l'ordre de  $150$  à  $200 \text{ dB}$ ) que pour une cavité remplie d'air (de l'ordre de  $100$  à  $150 \text{ dB}$ ). De plus, dans le cas d'un fluide léger, les pics correspondants aux modes "fluides" ne sont pas impactés par l'amortissement, et apparaissent nettement sur les graphes, quelle que soit la valeur du coefficient  $\eta_c$  (cf. FIGURE 4.19(a) et FIGURE 4.20(a)). Dans le cas d'un fluide lourd, tous les modes sont couplés et l'amortissement impacte l'ensemble des modes (cf. FIGURE 4.19(b) et FIGURE 4.20(b)).

---

1. MAC : *Modal Assurance Criterion*

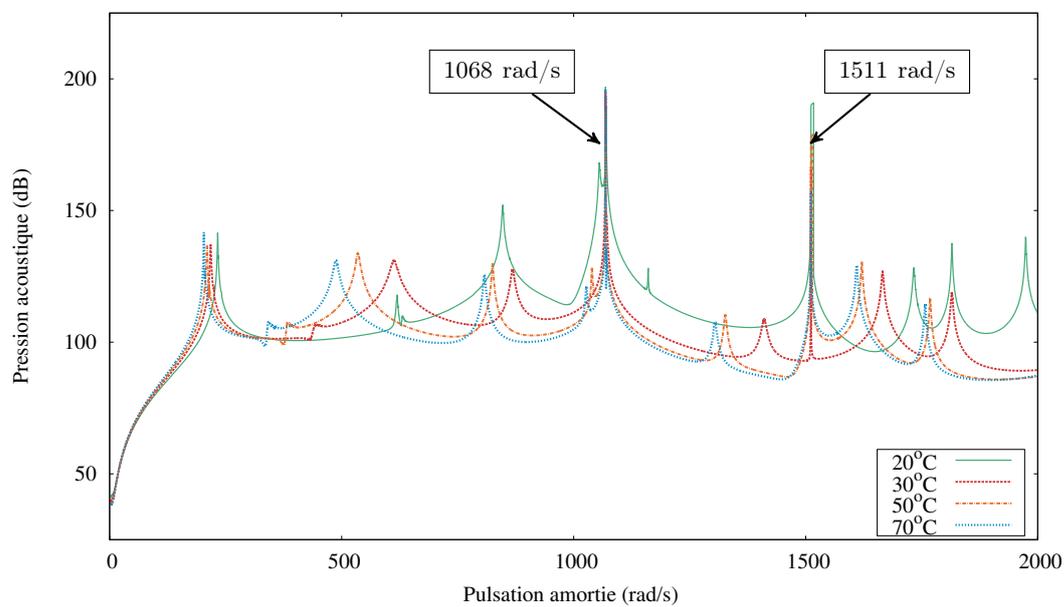


(a) Cavité remplie d'air

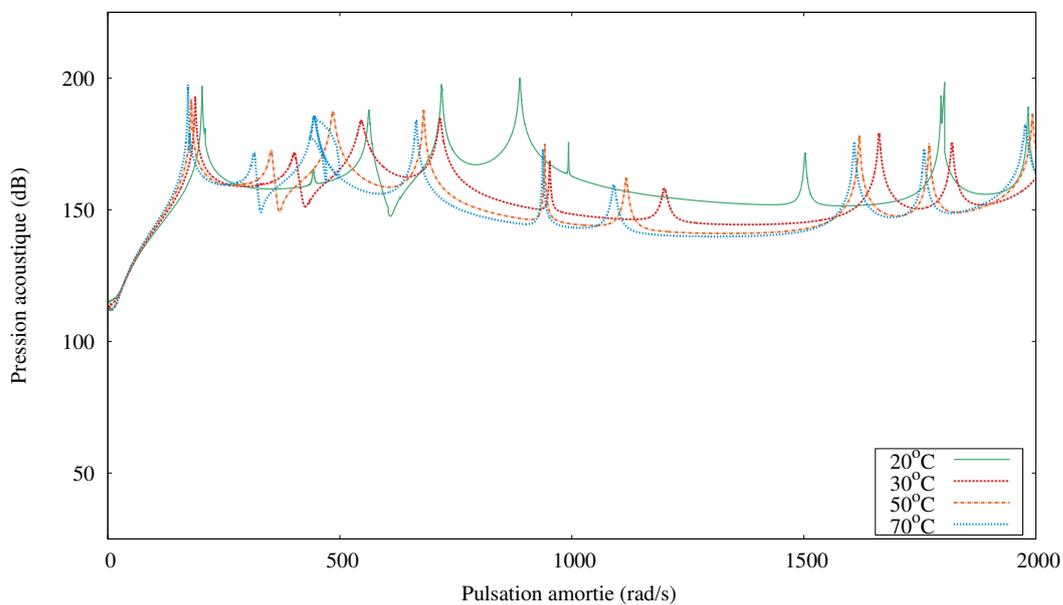


(b) Cavité remplie d'eau

FIGURE 4.19 – Modèle hystérétique - Cavité remplie d'air ou d'eau - Pression acoustique pour différentes valeurs du coefficient  $\eta_c$ .



(a) Cavité remplie d'air



(b) Cavité remplie d'eau

FIGURE 4.20 – Modèle de Maxwell généralisé - Cavité remplie d'air ou d'eau - Pression acoustique pour différentes températures.

## 4.5 Conclusion

Le problème de vibroacoustique dissipatif a été étudié dans le cas du régime forcé. Afin de réduire le temps de calcul nécessaire à l'étude d'un tel problème, trois solveurs basés sur la MAN ont été proposés.

Les solveurs MANp et MANsg sont des variantes du solveur MAN, étudiées dans le but d'améliorer les performances de ce dernier. Le solveur MANp s'appuie sur l'ajout des approximations de Padé pour augmenter le domaine de validité des séries MAN et, ainsi, diminuer le temps de calcul. Le solveur MANsg reprend le critère de [Cochelin et Medale, 2013] pour détecter les pics de résonance et forcer leur passage, en décalant artificiellement la pulsation lors de l'initialisation du pas de continuation suivant.

Les courbes de réponse obtenues avec les trois solveurs sont cohérentes avec celles construites avec la méthode directe. Une atténuation des pics de résonance et un décalage du spectre peuvent être observés sur les courbes tracées. Ce comportement est typique des problèmes dissipatifs et fait apparaître l'influence de l'amortissement sur le système couplé.

Les performances des solveurs MAN, MANsg et MANp ont été comparées à celles de la méthode directe, considérée comme la méthode de référence. Il apparaît que les solveurs basés sur la MAN sont plus performants que la méthode de référence lorsque les non linéarités s'intensifient (augmentation de l'amortissement, dépendance non linéaire du matériau viscoélastique à la pulsation).

A ce jour, le solveur MANp est le plus performant des solveurs testés en terme de nombre de pas de continuation et de temps de calcul. Le solveur MANsg montre quant à lui son intérêt dans le cas de problèmes mettant en jeu des fluides légers, pour lesquels les modes fluides ne sont pas influencés par l'amortissement. Dans ce cas, l'utilisation du critère de [Cochelin et Medale, 2013] apporte une solution aux blocages numériques sur les pics de résonance correspondants aux modes fluides.

Enfin, le comportement mécanique du système en régime forcé a été étudié. Les courbes de réponse en amplitude obtenues permettent de visualiser les pics de résonance. Ces courbes mettent en évidence l'influence de l'amortissement sur le comportement du système couplé. De plus, la position des pics de résonance est cohérente avec les pulsations amorties déterminées au CHAPITRE 3 et les tendances observées sont en accord avec la littérature [Abdoun *et al.*, 2009] [Boumediene *et al.*, 2014].



# Conclusion générale

Les travaux menés durant cette thèse concernent l'étude d'une cavité acoustique constituée d'une structure sandwich amortissante en interaction avec un fluide. Ces travaux sont en lien avec les problématiques de maîtrise du bruit et des vibrations, rencontrées dans de nombreux secteurs industriels. Ils viennent appuyer le développement du thème de recherche "interaction fluide-structure" au sein de l'IRDL.

L'objectif de la thèse porte sur la résolution d'un problème de vibroacoustique par la Méthode Asymptotique Numérique.

## Résultats obtenus

Une étude bibliographique a permis de définir le problème à étudier. Le domaine de l'interaction fluide-structure étant vaste, des hypothèses ont été posées afin de restreindre l'étude. Un problème de vibroacoustique avec fluide interne a donc été considéré. L'amortissement a été introduit par le biais d'une structure sandwich, comportant une couche de matériau viscoélastique. Les difficultés liées à la résolution d'un tel problème sont multiples. D'un point de vue physique, l'introduction d'un amortissement dépendant de la fréquence constitue une source de non linéarité. D'un point de vue algébrique et numérique, l'interaction entre deux domaines physiques différents (ici solide et fluide) engendre des complications numériques car les longueurs et les temps caractéristiques sont très différents. Cela mène notamment à des opérateurs matriciels mal conditionnés. De plus, la formulation variationnelle adoptée conduit à des opérateurs matriciels non symétriques. Enfin, dans le cas de discrétisations spatiales fines, ces derniers peuvent être de grande dimension. Toutes ces difficultés sont présentes dans le problème étudié et nécessitent des méthodes de résolution spécifiques.

La résolution numérique du problème dissipatif considéré, à savoir une structure sandwich viscoélastique contenant un fluide, nécessite une solution initiale qui, dans cette étude, a été choisie comme la solution du problème conservatif. A cet effet, deux solveurs aux valeurs propres basés sur la MAN ont été proposés. Le premier solveur, MANi, repose sur la transformation du problème aux valeurs propres généralisé en un problème avec second membre non nul par l'introduction d'un indicateur [Bouty *et al.*, 2004]. Déterminer les fréquences et les modes propres consiste alors à déterminer les valeurs des inconnues pour lesquelles l'indicateur est nul. Le recours aux approximants de Padé permet d'améliorer ce solveur en accélérant la vitesse de convergence, ce qui contribue à la réduction du temps de calcul.

Le second solveur, MANa, s'intéresse à la réponse vibratoire en régime forcé. L'analyse des séries MAN par le critère de [Cochelin et Medale, 2013] permet alors d'extraire les valeurs propres du système. Ce solveur a été construit en s'inspirant des travaux réalisés pour l'analyse de bifurcation [Jawadi *et al.*, 2013] [Bekhoucha *et al.*, 2016] [Guevel *et al.*, 2018]. Les premiers résultats montrent que les valeurs et les vecteurs propres peuvent être extraits des séries MAN en détectant l'apparition d'une suite géométrique dans les séries.

Les deux solveurs proposés permettent d'obtenir des résultats identiques à ceux issus de la littérature [Bermúdez et Rodríguez, 1994]. De plus, les performances des solveurs MANi et MANa ont été comparées à celles du solveur ARPACK, classiquement utilisé pour l'analyse modale. Il apparaît que, pour l'étude de problèmes de vibroacoustique, mal conditionnés, ces deux solveurs sont plus performants que le solveur ARPACK. Les résultats obtenus ont fait l'objet

de deux publications [Claude *et al.*, 2017a] [Claude *et al.*, 2018b] et d'une communication dans une conférence nationale [Claude *et al.*, 2017b].

Dans un deuxième temps, un amortissement a été introduit dans la structure, en considérant une structure sandwich dont la couche centrale est constituée d'un matériau viscoélastique. Le problème des vibrations libres amorties a été résolu par un solveur d'ordre élevé, associant les techniques d'homotopie et de perturbation. Les performances du solveur proposé ont été comparées à celles de l'algorithme de Newton, ce qui a mis en évidence l'intérêt du solveur d'ordre élevé, notamment en terme de temps de calcul. Ces travaux ont fait l'objet de deux communications orales dans des conférences internationales [Claude *et al.*, 2018a] [Cadou *et al.*, 2018].

Enfin, les vibrations forcées du système dissipatif ont été étudiées. Un algorithme de résolution basé sur la MAN, ainsi que deux variantes utilisant pour l'une les approximants de Padé (MANp), et pour l'autre l'analyse des termes de séries par le critère [Cochelin et Medale, 2013] (MANsg), ont été proposées. Les courbes de réponse en régime forcé ont fait apparaître des pics de résonance cohérents avec les pulsations propres établies lors de l'analyse aux valeurs propres du système amorti. De plus, l'influence de l'amortissement a pu être mise en évidence par l'observation d'une fermeture et d'une atténuation des pics au voisinage des fréquences de résonance ainsi qu'un décalage du spectre.

L'ensemble des méthodes numériques proposées ont été implantées dans le code EVE développé au laboratoire, contribuant ainsi à son développement. Un nouvel élément fini "2DFS" a également été ajouté. Il s'agit d'un élément quadrangle bi-linéaire isoparamétrique, auquel on assigne un matériau (solide élastique, solide viscoélastique ou fluide), ce qui permet de discrétiser l'ensemble du problème avec le même type d'élément fini. Cet élément prend en compte le couplage entre le domaine fluide et le domaine solide élastique. L'interpolation étant seulement linéaire, il est nécessaire d'utiliser une discrétisation fine.

## Perspectives

Les perspectives offertes par ces travaux de thèse sont nombreuses : amélioration des méthodes numériques développées, prise en compte d'hypothèses moins restrictives... Les perspectives proposées permettraient la résolution de problèmes plus réalistes, avec un spectre d'applications plus large que les cas traités actuellement.

### Perspectives à court terme

**Améliorations des solveurs aux valeurs propres** Développés au cours de la thèse car les solutions du problème conservatif n'étaient pas aisées à déterminer avec le solveur classique ARPACK, les solveurs aux valeurs propres MANi et MANa sont perfectibles. En l'état actuel, il arrive que les valeurs propres ne soient pas toutes trouvées, notamment les valeurs propres doubles.

Dans le cas du solveur MANi, le calcul des racines des approximants de Padé est sensible aux normes des vecteurs MAN. Des tests pourraient être ajoutés pour éliminer les vecteurs dont la norme devient trop petite, ce qui engendre des problèmes numériques. De plus, l'étude des suites de Sturm [Quarteroni *et al.*, 2007][Avery *et al.*, 2009] permettrait de vérifier qu'aucune valeur propre n'a été "oubliée" par le solveur.

Dans le cas du solveur MANa, l'apparition d'une suite géométrique à proximité d'une

valeur propre reste à démontrer mathématiquement, comme c'est le cas pour le phénomène de bifurcation [Cochelin et Medale, 2013].

Le préconditionnement de ces solveurs peut également être amélioré. La procédure utilisée actuellement est identique à celle utilisée pour le solveur ARPACK. Cependant, cette procédure ne prend pas en compte le second membre non nul, comme c'est le cas pour les solveurs MANi et MANa. Un ajustement de l'ordre de grandeur du second membre doit donc être considéré.

Enfin, les tests de vérification actuels ne sont appliqués que sur les valeurs propres. La comparaison des modes propres obtenus permettrait de mieux détecter les "vraies" valeurs propres doubles, c'est-à-dire les cas où la valeur propre est identique, mais avec un mode propre différent, certaines de ces valeurs propres doubles étant actuellement "oubliées".

**Étude paramétrique** Dans l'optique d'une éventuelle application industrielle qui consisterait à déterminer la meilleure configuration en terme d'amortissement structural, l'influence de l'épaisseur et de la position de la couche viscoélastique sur le comportement du système couplé est étudiée. Les premiers résultats sont disponibles en ANNEXE D. Ils montrent que l'apparition de la première pulsation propre peut être décalée suivant la configuration testée. Une étude approfondie, avec calcul des matrices de MAC [Allemang, 2003], serait nécessaire pour déterminer précisément les migrations des modes dans le spectre suite aux modifications sur l'épaisseur et la position de la couche viscoélastique.

## Perspectives à moyen terme

**Réduction de modèle** Le problème forcé a, dans un premier temps, été étudié dans son intégralité. Afin de réduire le temps de calcul, l'ajout d'une étape de réduction de modèle avant l'utilisation du solveur MAN est envisageable.

La difficulté réside dans le choix de la base réduite, qui doit permettre une bonne approximation du comportement du modèle complet. Dans le cas du problème de vibroacoustique étudié, deux difficultés sont à considérer : d'une part, la prise en compte du couplage fluide-structure et, d'autre part, la bonne représentation du caractère non linéaire du matériau viscoélastique.

Dans le cas de problèmes d'interaction fluide-structure, la base peut être formée à partir des vecteurs propres du système fluide-structure découplé, auxquels s'ajoutent des techniques d'enrichissement pour prendre en compte le couplage [Ohayon, 2001] [Bobillot et Balmes, 2002] [Larbi *et al.*, 2016a].

Cependant, divers travaux menés sur la réduction de modèle pour des poutres sandwich viscoélastiques montrent que de telles bases ne représentent pas correctement le comportement non linéaire du matériau viscoélastique. Des bases enrichies ont donc été proposées [De Lima *et al.*, 2010] [Boumediene *et al.*, 2014]. Plus récemment, les auteurs de [Boumediene *et al.*, 2016] ont proposé la formation d'une base réduite à partir des vecteurs MAN. Qu'il s'agisse de la précision ou du gain en temps de calcul, cette dernière technique donne de bons résultats et est donc envisagée pour le problème étudié. Elle consiste à calculer un premier pas MAN sur le problème complet et à utiliser les  $N$  vecteurs MAN obtenus pour former la base réduite. Le pas de continuation suivant est alors calculé sur un problème réduit de dimension  $N$ . La qualité de la solution devenant de moins en moins bonne, un pas de calcul sur le problème complet sera à nouveau effectué pour générer une nouvelle base, qui servira pour quelques pas sur un problème réduit et ainsi de suite. L'avantage de cette technique est que les vecteurs MAN contiennent à la fois les informations sur le domaine fluide et le domaine solide, ce qui évite les procédures d'enrichissement de base pour prendre en compte le couplage fluide-structure.

A noter que la réduction de modèle pourrait également être envisagée pour les solveurs aux valeurs propres MANi et MANa.

**Prise en compte d'un fluide externe** Lors de cette thèse, seul le problème d'une cavité contenant un fluide interne a été étudié. Il conviendrait d'élargir le champ des problèmes en ajoutant la possibilité d'un domaine fluide situé à l'extérieur du solide. Une des difficultés réside dans la formulation de la condition limite à l'infini. En effet, cette condition doit garantir la non réflexion des ondes sur la zone délimitant le calcul (condition de non-réflexion, condition de Sommerfeld).

La discrétisation spatiale du problème devra alors être reconsidérée. En effet, la méthode des éléments finis est bien adaptée aux problèmes avec fluide interne, mais montre ses limites dans le cas d'un fluide externe. Il faudra alors soit changer de technique, et s'intéresser par exemple à des éléments finis de frontières, soit adapter la méthode des éléments finis pour la rendre compatible avec l'étude d'un fluide externe. Une des méthodes envisageables est la technique de *Perfectly Matched Layer* [Berenger, 1994], qui consiste à ajouter autour du domaine fluide une couche d'éléments permettant d'absorber les ondes, ce qui empêche les phénomènes de réflexion.

Cet ajout permettrait à terme de traiter des problèmes mixtes, comportant à la fois un fluide interne et un fluide externe.

**Extension au 3D** Dans cette thèse, l'étude a été limitée aux problèmes en deux dimensions. L'extension à des problèmes tridimensionnels permettrait de traiter des cas plus réalistes, ou à la géométrie plus complexe [Larbi *et al.*, 2012] [Larbi *et al.*, 2016b]. Dans un premier temps, l'utilisation de l'élément sandwich coque développé dans [Duigou *et al.*, 2003] est envisagé. Cet élément, prenant en compte la théorie zig-zag, a 8 nœuds et 8 degrés de liberté par nœud (déplacements longitudinaux, flèche et rotations). Il sera alors nécessaire de coder un élément fluide acoustique en 3D, qui devra être compatible avec ce nouvel élément solide.

## Perspectives à long terme

**Contact direct entre le matériau viscoélastique et le fluide** Dans les travaux menés durant la thèse, seul le contact entre la couche élastique et le domaine fluide a été considéré. L'étude d'un matériau viscoélastique en contact direct avec le fluide impliquerait la définition des conditions cinématiques à l'interface entre ces deux milieux. La condition de couplage doit notamment être réécrite, car l'expression des contraintes est modifiée [Deü *et al.*, 2008b].

**Lois de comportement pour le matériau viscoélastique** Dans le cadre des applications numériques, deux modèles d'amortissement ont été testés : le modèle hystérétique (module d'Young constant) et le modèle de Maxwell généralisé, fortement non linéaire. Le solveur NOE pourrait cependant être utilisé avec d'autres modèles de module d'Young complexe.

Pour des modèles "simples", tels que le modèle de Zener ou le modèle de Kelvin-Voigt généralisé, l'application est immédiate. Les parties réelles et imaginaires du module d'Young pouvant aisément être identifiées, il suffit de remplacer les expressions des grandeurs  $E_p^R$  et  $E_p^I$  dans les développements théoriques.

Pour des modèles plus complexes, comme les modèles à dérivées fractionnaires, un travail de développement analytique sera nécessaire avant de pouvoir appliquer la MAN. En effet, les équations à résoudre devront être réécrites en introduisant des variables intermédiaires afin de

ne traiter que des équations quadratiques. Des paramètres de régularisation devront également être introduits pour gérer les discontinuités et rendre le problème régulier.

Enfin, de nouveaux matériaux composites à fibres naturelles sont à l'étude [El-Hafidi *et al.*, 2017] [Duc *et al.*, 2014]. Des travaux expérimentaux en cours de réalisation au sein de l'IRDL montrent que certains de ces matériaux présentent des propriétés amortissantes plus intéressantes que les matériaux classiques (verre, carbone) [Duigou *et al.*, 2018][Mahmoudi *et al.*, 2018]. La modélisation de tels matériaux et l'étude de leur comportement constituent une perspective envisageable. En effet, l'étude des performances de ces bioproduits dans des problèmes d'interaction fluide-structure contribuerait aux recherches dans le domaine du développement durable.



# Modèle de Maxwell généralisé

---

## A.1 Paramètres matériaux

Température	Coefficient $AT$
20°C	$7,808400.10^{-4}$
30°C	$8,755900.10^{-5}$
40°C	$1,597527.10^{-5}$
50°C	$4,097000.10^{-6}$
60°C	$1,346000.10^{-6}$
70°C	$5,320000.10^{-7}$

TABLEAU A.1 – Valeurs du coefficient  $AT$  pour le modèle de Maxwell généralisé identifiées par [Landier, 1993]. La température est prise en compte en considérant  $E(\omega * AT)$  dans le modèle de Maxwell généralisé.

j	$k_j$	$\eta_j$	j	$k_j$	$\eta_j$
1	5,00000000.10 <sup>3</sup>	1,17100135.10 <sup>8</sup>	66	2,05300000.10 <sup>6</sup>	3,55633998.10 <sup>5</sup>
2	1,05000000.10 <sup>5</sup>	1,55158900.10 <sup>9</sup>	67	2,60000000.10 <sup>4</sup>	4,11597815.10 <sup>3</sup>
3	1,50000000.10 <sup>4</sup>	1,39855211.10 <sup>8</sup>	68	3,40600000.10 <sup>6</sup>	4,65853391.10 <sup>5</sup>
4	5,90000000.10 <sup>4</sup>	3,47087845.10 <sup>8</sup>	69	2,65000000.10 <sup>6</sup>	2,89641106.10 <sup>5</sup>
5	1,00000000.10 <sup>3</sup>	4,66481296.10 <sup>6</sup>	70	3,40000000.10 <sup>4</sup>	3,39608561.10 <sup>3</sup>
6	3,90000000.10 <sup>4</sup>	1,41647641.10 <sup>8</sup>	71	4,36600000.10 <sup>6</sup>	3,76780440.10 <sup>5</sup>
7	2,90000000.10 <sup>4</sup>	8,53556419.10 <sup>7</sup>	72	3,37200000.10 <sup>6</sup>	2,32542260.10 <sup>5</sup>
8	1,93000000.10 <sup>5</sup>	4,42284836.10 <sup>8</sup>	73	4,40000000.10 <sup>4</sup>	2,77301608.10 <sup>3</sup>
9	2,40000000.10 <sup>4</sup>	4,45702917.10 <sup>7</sup>	74	9,73500000.10 <sup>6</sup>	4,74827881.10 <sup>5</sup>
10	1,46000000.10 <sup>5</sup>	2,11104551.10 <sup>8</sup>	75	5,40000000.10 <sup>4</sup>	2,14730370.10 <sup>3</sup>
11	1,70000000.10 <sup>4</sup>	1,99197166.10 <sup>7</sup>	76	1,20220000.10 <sup>7</sup>	3,69978920.10 <sup>5</sup>
12	1,02000000.10 <sup>5</sup>	9,30561139.10 <sup>7</sup>	77	6,70000000.10 <sup>4</sup>	1,68102633.10 <sup>3</sup>
13	6,00000000.10 <sup>3</sup>	4,50418712.10 <sup>6</sup>	78	6,98100000.10 <sup>6</sup>	1,54897976.10 <sup>5</sup>
14	6,00000000.10 <sup>3</sup>	4,38129615.10 <sup>6</sup>	79	7,55500000.10 <sup>6</sup>	1,33327459.10 <sup>5</sup>
15	6,80000000.10 <sup>4</sup>	3,91429590.10 <sup>7</sup>	80	8,00000000.10 <sup>4</sup>	1,26645481.10 <sup>3</sup>
16	3,00000000.10 <sup>3</sup>	1,42097497.10 <sup>6</sup>	81	8,29800000.10 <sup>6</sup>	1,16172018.10 <sup>5</sup>
17	5,00000000.10 <sup>3</sup>	2,30367582.10 <sup>6</sup>	82	8,87000000.10 <sup>6</sup>	9,87662926.10 <sup>4</sup>
18	4,80000000.10 <sup>4</sup>	1,74335559.10 <sup>7</sup>	83	9,30000000.10 <sup>4</sup>	9,28929298.10 <sup>2</sup>
19	3,00000000.10 <sup>3</sup>	8,96574596.10 <sup>5</sup>	84	9,61700000.10 <sup>6</sup>	8,49508484.10 <sup>4</sup>
20	3,00000000.10 <sup>3</sup>	8,72112707.10 <sup>5</sup>	85	1,02480000.10 <sup>7</sup>	7,19063462.10 <sup>4</sup>
21	1,90000000.10 <sup>4</sup>	4,96698961.10 <sup>6</sup>	86	1,08420000.10 <sup>7</sup>	6,04279008.10 <sup>4</sup>
22	2,70000000.10 <sup>4</sup>	5,66665935.10 <sup>6</sup>	87	1,13860000.10 <sup>7</sup>	5,04079788.10 <sup>4</sup>
23	4,00000000.10 <sup>3</sup>	7,33687890.10 <sup>5</sup>	88	1,18660000.10 <sup>7</sup>	4,17284688.10 <sup>4</sup>
24	5,10000000.10 <sup>4</sup>	7,37420007.10 <sup>6</sup>	89	1,22690000.10 <sup>7</sup>	3,42718281.10 <sup>4</sup>
25	4,00000000.10 <sup>3</sup>	4,75910367.10 <sup>5</sup>	90	1,25850000.10 <sup>7</sup>	2,79242376.10 <sup>4</sup>
26	4,00000000.10 <sup>3</sup>	4,62925763.10 <sup>5</sup>	91	1,27990000.10 <sup>7</sup>	2,25581845.10 <sup>4</sup>
27	7,20000000.10 <sup>4</sup>	6,56866686.10 <sup>6</sup>	92	1,29090000.10 <sup>7</sup>	1,80726029.10 <sup>4</sup>
28	5,00000000.10 <sup>3</sup>	3,75348927.10 <sup>5</sup>	93	1,29030000.10 <sup>7</sup>	1,43489064.10 <sup>4</sup>
29	7,00000000.10 <sup>3</sup>	5,11151218.10 <sup>5</sup>	94	5,26300000.10 <sup>6</sup>	5,00322137.10 <sup>3</sup>
30	1,03000000.10 <sup>5</sup>	5,92900702.10 <sup>6</sup>	95	7,52100000.10 <sup>6</sup>	6,36464882.10 <sup>3</sup>
31	8,00000000.10 <sup>3</sup>	3,78926660.10 <sup>5</sup>	96	1,25490000.10 <sup>7</sup>	8,80515943.10 <sup>3</sup>
32	9,00000000.10 <sup>3</sup>	4,14661648.10 <sup>5</sup>	97	5,05100000.10 <sup>6</sup>	3,02965877.10 <sup>3</sup>
33	1,47000000.10 <sup>5</sup>	5,33902648.10 <sup>6</sup>	98	7,15200000.10 <sup>6</sup>	3,81879516.10 <sup>3</sup>
34	1,10000000.10 <sup>4</sup>	3,28744018.10 <sup>5</sup>	99	1,17520000.10 <sup>7</sup>	5,20283301.10 <sup>3</sup>
35	1,30000000.10 <sup>4</sup>	3,77915506.10 <sup>5</sup>	100	4,66500000.10 <sup>6</sup>	1,76550112.10 <sup>3</sup>
36	2,05000000.10 <sup>5</sup>	4,69784411.10 <sup>6</sup>	101	6,54100000.10 <sup>6</sup>	2,20365197.10 <sup>3</sup>
37	1,50000000.10 <sup>4</sup>	2,82850163.10 <sup>5</sup>	102	1,47140000.10 <sup>7</sup>	3,89523350.10 <sup>3</sup>
38	1,80000000.10 <sup>4</sup>	3,30159551.10 <sup>5</sup>	103	5,74100000.10 <sup>6</sup>	1,22035562.10 <sup>3</sup>
39	2,81000000.10 <sup>5</sup>	4,06303965.10 <sup>6</sup>	104	1,26430000.10 <sup>7</sup>	2,11180047.10 <sup>3</sup>
40	2,00000000.10 <sup>4</sup>	2,37955184.10 <sup>5</sup>	105	4,82400000.10 <sup>6</sup>	6,47002794.10 <sup>2</sup>
41	2,50000000.10 <sup>4</sup>	2,89328602.10 <sup>5</sup>	106	1,03870000.10 <sup>7</sup>	1,09469435.10 <sup>3</sup>
42	3,81000000.10 <sup>5</sup>	3,47591955.10 <sup>6</sup>	107	3,87000000.10 <sup>6</sup>	3,27498882.10 <sup>2</sup>
43	2,70000000.10 <sup>4</sup>	2,02688421.10 <sup>5</sup>	108	8,13600000.10 <sup>6</sup>	5,41020454.10 <sup>2</sup>
44	3,30000000.10 <sup>4</sup>	2,40971288.10 <sup>5</sup>	109	2,95600000.10 <sup>6</sup>	1,57834990.10 <sup>2</sup>
45	5,13000000.10 <sup>5</sup>	2,95299088.10 <sup>6</sup>	110	6,06600000.10 <sup>6</sup>	2,54510176.10 <sup>2</sup>
46	3,70000000.10 <sup>4</sup>	1,75253580.10 <sup>5</sup>	111	2,15000000.10 <sup>6</sup>	7,24331408.10 <sup>1</sup>
47	7,31000000.10 <sup>5</sup>	2,68668140.10 <sup>6</sup>	112	4,31700000.10 <sup>6</sup>	1,14283832.10 <sup>2</sup>
48	4,90000000.10 <sup>4</sup>	1,46440517.10 <sup>5</sup>	113	1,50000000.10 <sup>6</sup>	3,18852713.10 <sup>1</sup>
49	3,32000000.10 <sup>5</sup>	9,01009301.10 <sup>5</sup>	114	2,98600000.10 <sup>6</sup>	4,98761070.10 <sup>1</sup>
50	6,46000000.10 <sup>5</sup>	1,40174605.10 <sup>6</sup>	115	3,16300000.10 <sup>6</sup>	1,52116669.10 <sup>1</sup>
51	6,60000000.10 <sup>4</sup>	1,24454072.10 <sup>5</sup>	116	2,52000000.10 <sup>6</sup>	1,77005978.10 <sup>1</sup>
52	4,43000000.10 <sup>5</sup>	7,58568696.10 <sup>5</sup>	117	2,52700000.10 <sup>6</sup>	1,11993453.10 <sup>1</sup>
53	8,63000000.10 <sup>5</sup>	1,18153780.10 <sup>6</sup>	118	3,11700000.10 <sup>6</sup>	8,71613996
54	8,80000000.10 <sup>4</sup>	1,04700281.10 <sup>5</sup>	119	4,18200000.10 <sup>6</sup>	7,37855674
55	5,90000000.10 <sup>5</sup>	6,37445709.10 <sup>5</sup>	120	1,41100000.10 <sup>6</sup>	1,89943757
56	1,15000000.10 <sup>6</sup>	9,93424037.10 <sup>5</sup>	121	4,17200000.10 <sup>6</sup>	4,40964005
57	1,17000000.10 <sup>5</sup>	8,78316489.10 <sup>4</sup>	122	1,84100000.10 <sup>6</sup>	1,56369411
58	1,06500000.10 <sup>6</sup>	7,26006984.10 <sup>5</sup>	123	7,57300000.10 <sup>6</sup>	4,67579379
59	1,24700000.10 <sup>6</sup>	6,79678101.10 <sup>5</sup>	124	8,96900000.10 <sup>6</sup>	3,49406852
60	1,19500000.10 <sup>6</sup>	5,19974718.10 <sup>5</sup>	125	9,85400000.10 <sup>6</sup>	2,42214395
61	1,60000000.10 <sup>4</sup>	6,36238133.10 <sup>3</sup>	126	9,77400000.10 <sup>6</sup>	1,51586221
62	2,00100000.10 <sup>6</sup>	6,87466763.10 <sup>5</sup>	127	8,16200000.10 <sup>6</sup>	7,98700550.10 <sup>-1</sup>
63	1,57300000.10 <sup>6</sup>	4,31860065.10 <sup>5</sup>	128	4,37100000.10 <sup>6</sup>	2,69878445.10 <sup>-1</sup>
64	2,00000000.10 <sup>4</sup>	5,01798903.10 <sup>3</sup>	129	7,92000000.10 <sup>5</sup>	3,08540781.10 <sup>-2</sup>
65	2,62400000.10 <sup>6</sup>	5,68811605.10 <sup>5</sup>			

TABLEAU A.2 – Paramètres  $k_j$  et  $\eta_j$  pour le modèle de Maxwell généralisé identifiés par [Lan-dier, 1993].

## A.2 Obtention des coefficients $E_{pj}^R$ et $E_{pj}^I$

Le module d'Young du modèle de Maxwell généralisé est défini par :

$$E(\omega) = k_0 + \eta_0 i\omega + \sum_{j=1}^{N_{\max}} \frac{i\omega}{\left(\frac{i\omega}{k_j} + \frac{1}{\eta_j}\right)} \quad (\text{A.1})$$

En notant  $E_j$  le terme de la somme, il vient :

$$E(\omega) = k_0 + i\eta_0\omega + \sum_{j=1}^{N_{\max}} E_j \quad (\text{A.2})$$

où le terme  $E_j$  vaut :

$$E_j = \frac{i\omega}{\frac{i\omega}{k_j} + \frac{1}{\eta_j}} \quad (\text{A.3})$$

### Séparation des parties réelles et imaginaires

Après multiplication du numérateur et du dénominateur par le complexe conjugué dans (A.3), il vient :

$$E_j = \frac{\frac{\omega^2}{k_j} + \frac{i\omega}{\eta_j}}{\frac{\omega^2}{k_j^2} + \frac{1}{\eta_j^2}} \quad (\text{A.4})$$

Le module d'Young est une grandeur complexe :

$$(E_j^R + iE_j^I) \left( \frac{\omega^2}{k_j^2} + \frac{1}{\eta_j^2} \right) = \frac{\omega^2}{k_j} + \frac{i\omega}{\eta_j} \quad (\text{A.5})$$

En séparant les parties réelles et imaginaires, et en notant  $\Omega = \omega^2$ , il vient :

$$E_j^R \left( \frac{\Omega}{k_j^2} + \frac{1}{\eta_j^2} \right) = \frac{\Omega}{k_j} \quad (\text{A.6})$$

$$E_j^I \left( \frac{\Omega}{k_j^2} + \frac{1}{\eta_j^2} \right) = \frac{\omega}{\eta_j} \quad (\text{A.7})$$

### Identification des expressions à chaque ordre $p$

Les développements asymptotiques (4.9), (4.7) et (4.8) sont introduits dans (A.6) et (A.7) :

$$\left( E_{0j}^R + \sum_{p=1}^N a^p E_{pj}^R \right) \left( \frac{\Omega_0 + \sum_{p=1}^N a^p \Omega_p}{k_j^2} + \frac{1}{\eta_j^2} \right) = \frac{\Omega_0 + \sum_{p=1}^N a^p \Omega_p}{k_j} \quad (\text{A.8})$$

$$\left( E_{0j}^I + \sum_{p=1}^N a^p E_{pj}^I \right) \left( \frac{\Omega_0 + \sum_{p=1}^N a^p \Omega_p}{k_j^2} + \frac{1}{\eta_j^2} \right) = \frac{\omega_0 + \sum_{p=1}^N a^p \omega_p}{\eta_j} \quad (\text{A.9})$$

L'identification selon les puissances de  $a$  donne l'expression des coefficients  $E_{pj}^R$  et  $E_{pj}^I$  à chaque ordre  $p$  :

### Ordre 0

Partie réelle :

$$E_{0j}^R \left( \frac{\Omega_0}{k_j^2} + \frac{1}{\eta_j^2} \right) = \frac{\Omega_0}{k_j} \quad \text{soit} \quad E_{0j}^R = \frac{\Omega_0 k_j}{\Omega_0 + \frac{k_j^2}{\eta_j^2}} \quad (\text{A.10})$$

Partie imaginaire :

$$E_{0j}^I \left( \frac{\Omega_0}{k_j^2} + \frac{1}{\eta_j^2} \right) = \frac{\omega_0}{\eta_j} \quad \text{soit} \quad E_{0j}^I = \frac{\omega_0 \frac{k_j^2}{\eta_j}}{\Omega_0 + \frac{k_j^2}{\eta_j^2}} \quad (\text{A.11})$$

### Ordre 1

Partie réelle :

$$E_{0j}^R \frac{\Omega_1}{k_j^2} + E_{1j}^R \left( \frac{\Omega_0}{k_j^2} + \frac{1}{\eta_j^2} \right) = \frac{\Omega_1}{k_j} \quad \text{soit} \quad E_{1j}^R = \Omega_1 \frac{k_j - E_{0j}^R}{\left( \frac{k_j}{\eta_j} \right)^2 + \Omega_0} \quad (\text{A.12})$$

Partie imaginaire :

$$E_{0j}^I \frac{\Omega_1}{k_j^2} + E_{1j}^I \left( \frac{\Omega_0}{k_j^2} + \frac{1}{\eta_j^2} \right) = \frac{\omega_1}{\eta_j} \quad \text{soit} \quad E_{1j}^I = \frac{\omega_1 \frac{k_j^2}{\eta_j} - \Omega_1 E_{0j}^R}{\left( \frac{k_j}{\eta_j} \right)^2 + \Omega_0} \quad (\text{A.13})$$

### Ordre $p \geq 2$

A l'ordre  $p$ , les termes réels sont :

$$E_{0j}^R \frac{\Omega_p}{k_j^2} + \sum_{r=1}^{p-1} \left( \frac{E_{rj}^R \Omega_{p-r}}{k_j^2} \right) + E_{pj}^R \left( \frac{\Omega_0}{k_j^2} + \frac{1}{\eta_j^2} \right) = \frac{\Omega_p}{k_j} \quad (\text{A.14})$$

Soit,

$$E_{pj}^R \left( \Omega_0 + \frac{k_j^2}{\eta_j^2} \right) \frac{1}{k_j^2} = \Omega_p \left( \frac{1}{k_j} - \frac{E_{0j}^R}{k_j^2} \right) - \sum_{r=1}^{p-1} \frac{E_{rj}^R \Omega_{p-r}}{k_j^2} \quad (\text{A.15})$$

Finalement, en isolant le coefficient  $E_{pj}^R$ , il vient :

$$E_{pj}^R = \frac{\Omega_p \left( k_j - E_{0j}^R \right) - \sum_{r=1}^{p-1} E_{rj}^R \Omega_{p-r}}{\Omega_0 + \frac{k_j^2}{\eta_j^2}} \quad (\text{A.16})$$

A l'ordre  $p$ , les termes imaginaires sont :

$$E_{0j}^I \frac{\Omega_p}{k_j^2} + E_{pj}^I \left( \frac{\Omega_0}{k_j^2} + \frac{1}{\eta_j^2} \right) + \sum_{r=1}^{p-1} E_{rj}^I \frac{\Omega_{p-r}}{k_j^2} = \frac{\omega_p}{\eta_j} \quad (\text{A.17})$$

Soit,

$$E_{pj}^I \left( \frac{\Omega_0}{k_j^2} + \frac{1}{\eta_j^2} \right) = \frac{\omega_p}{\eta_j} - E_{0j}^I \frac{\Omega_p}{k_j^2} - \sum_{r=1}^{p-1} E_{rj}^I \frac{\Omega_{p-r}}{k_j^2} \quad (\text{A.18})$$

Finalement, en isolant le coefficient  $E_{pj}^I$ , il vient :

$$E_{pj}^I = \frac{\omega_p \frac{k_j^2}{\eta_j^2} - \sum_{r=0}^{p-1} E_{rj}^I \Omega_{p-r}}{\Omega_0 + \frac{k_j^2}{\eta_j^2}} \quad (\text{A.19})$$



# Lien entre les pulsations $\omega$ et $\Omega$

---

## B.1 Lien entre les pulsations $\omega_p$ et $\Omega_p$ dans le cas où $\Omega = \omega^2$

Les pulsations  $\Omega$  et  $\omega$  sont reliées par la relation :

$$\Omega = \omega^2 \quad (\text{B.1})$$

Les développements asymptotiques (4.7) et (4.8) sont introduits dans (B.1) :

$$\Omega_0 + \sum_{p=1}^N a^p \Omega_p = \left( \omega_0 + \sum_{p=1}^N a^p \omega_p \right)^2 \quad (\text{B.2})$$

Par identification selon les puissances de  $a$ , les relations suivantes sont obtenues :

$$\Omega_0 = \omega_0 \omega_0 \quad (\text{B.3})$$

$$\Omega_p = \sum_{r=0}^p \omega_r \omega_{p-r} \quad 1 \leq p \leq N \quad (\text{B.4})$$

Inversement :

$$\omega_0 = \sqrt{\Omega_0} \quad (\text{B.5})$$

$$\omega_p = \frac{1}{2\omega_0} \left( \Omega_p - \sum_{r=1}^{p-1} \omega_r \omega_{p-r} \right) \quad (\text{B.6})$$

## B.2 Calcul des pulsations $\omega_p$ dans le cas où $\Omega = -\omega^2$

La pulsation propre  $\omega$  est liée à la variable  $\Omega$  par la relation suivante :

$$\Omega = -\omega^2 \quad (\text{B.7})$$

En introduisant la perturbation, il vient :

$$\sum_{p=1}^N \varepsilon^p \Omega^p = - \left( \sum_{p=1}^N \varepsilon^p \omega^p \right) \left( \sum_{p=1}^N \varepsilon^p \omega^p \right) \quad (\text{B.8})$$

Par identification suivant les puissances de  $\varepsilon$ , on identifie l'expression des pulsations  $\omega_p$  à chaque ordre :

**Ordre 0**

$$\omega_0 = \sqrt{\Omega_0} \quad (\text{B.9})$$

En introduisant la notation complexe, il vient :

$$\omega_0^R + i\omega_0^I = \sqrt{\Omega_0^R + i\Omega_0^I} \quad (\text{B.10})$$

d'où :

$$-\omega_0^{R2} + \omega_0^{I2} = \Omega_0^R \quad (\text{B.11})$$

$$-2\omega_0^R\omega_0^I = \Omega_0^I \quad (\text{B.12})$$

Le système formé par les équations (B.11) et (B.12) est ensuite résolu par une méthode de Newton-Raphson. La pulsation du système non amorti  $\omega_{na}$  est utilisée comme valeur d'initialisation pour  $\omega_0^R$  et  $\omega_0^I$ .

**Ordre 1** En isolant les termes d'ordre 1 de (B.8), on obtient :

$$\omega_1 = -\frac{\Omega_1}{2\omega_0} \quad (\text{B.13})$$

Les pulsations  $\Omega$  et  $\omega$  sont des grandeurs complexes, d'où :

$$\omega_1^R + i\omega_1^I = -\frac{(\Omega_1^R + i\Omega_1^I)}{2(\omega_0^R + i\omega_0^I)} = -\frac{\Omega_1^R\omega_0^R - i\Omega_1^R\omega_0^I + i\Omega_1^I\omega_0^R + \Omega_1^I\omega_0^I}{2(\omega_0^{R2} + \omega_0^{I2})} \quad (\text{B.14})$$

En séparant les parties réelles et imaginaires, il vient :

$$\omega_1^R = -\frac{\Omega_1^R\omega_0^R + \Omega_1^I\omega_0^I}{2(\omega_0^{R2} + \omega_0^{I2})} \quad (\text{B.15})$$

$$\omega_1^I = \frac{\Omega_1^R\omega_0^I - \Omega_1^I\omega_0^R}{2(\omega_0^{R2} + \omega_0^{I2})} \quad (\text{B.16})$$

**Ordre  $p \geq 2$**  En isolant les termes d'ordre  $p$  dans (B.8), on obtient :

$$\omega_p = -\frac{1}{2\omega_0} \left( \Omega_p + \sum_{r=1}^{p-1} \omega_r \omega_{p-r} \right) \quad (\text{B.17})$$

Les pulsations  $\Omega$  et  $\omega$  sont des grandeurs complexes, d'où :

$$\omega_p^R + i\omega_p^I = -\frac{\Omega_p^R + i\Omega_p^I + \sum_{r=1}^{p-1} (\omega_r^R + i\omega_r^I) (\omega_{p-r}^R + i\omega_{p-r}^I)}{2(\omega_0^R + i\omega_0^I)} \quad (\text{B.18})$$

Le numérateur et le dénominateur sont multipliés par le conjugué du dénominateur :

$$\omega_p^R + i\omega_p^I = -\frac{\left[ \Omega_p^R + i\Omega_p^I + \sum_{r=1}^{p-1} (\omega_r^R + i\omega_r^I) (\omega_{p-r}^R + i\omega_{p-r}^I) \right] (\omega_0^R + i\omega_0^I)}{2(\omega_0^R + i\omega_0^I)(\omega_0^R - i\omega_0^I)} \quad (\text{B.19})$$

En développant le numérateur et en séparant les parties réelles et imaginaires, il vient :

$$\omega_p^R = - \frac{\left[ \Omega_p^R + \sum_{r=1}^{p-1} (\omega_r^R \omega_{p-r}^R - \omega_r^I \omega_{p-r}^I) \right] \omega_0^R + \left[ \Omega_p^I + \sum_{r=1}^{p-1} (\omega_r^R \omega_{p-r}^I + \omega_r^I \omega_{p-r}^R) \right] \omega_0^I}{2(\omega_0^{R2} + \omega_0^{I2})} \quad (\text{B.20})$$

$$\omega_p^I = - \frac{\left[ \Omega_p^R + \sum_{r=1}^{p-1} (\omega_r^R \omega_{p-r}^R - \omega_r^I \omega_{p-r}^I) \right] \omega_0^I - \left[ \Omega_p^I + \sum_{r=1}^{p-1} (\omega_r^R \omega_{p-r}^I + \omega_r^I \omega_{p-r}^R) \right] \omega_0^R}{2(\omega_0^{R2} + \omega_0^{I2})} \quad (\text{B.21})$$



# Influence de l'amortissement et de la température

(a) Pulsation amortie  $\Omega_a$  (rad/s)

Mode	$\omega_{na}$	$\eta_c = 0,1$	$\eta_c = 0,2$	$\eta_c = 0,5$	$\eta_c = 1,0$	$\eta_c = 1,5$
1 (S)	200,70	200,86	201,33	204,15	210,43	216,41
2 (S)	323,26	323,27	323,31	323,61	324,67	326,43
3 (S)	336,53	336,61	336,84	338,47	344,21	353,48
4 (S)	460,48	460,50	460,54	461,06	464,43	471,66
5 (S)	793,13	793,12	793,08	792,79	791,45	789,02
6 (S)	1014,12	1014,23	1014,54	1016,69	1023,89	1034,93
7 (F)	1068,65	1068,65	1068,65	1068,65	1068,64	1068,64
8 (F)	1068,66	1068,66	1068,66	1068,65	1068,63	1068,62
9 (S)	1278,05	1278,00	1277,85	1276,60	1271,30	1262,10
10 (F)	1511,20	1511,21	1511,21	1511,21	1511,21	1511,21

(b) Amortissement  $\eta_m$ 

Mode	$\eta_c = 0,1$	$\eta_c = 0,2$	$\eta_c = 0,5$	$\eta_c = 1,0$	$\eta_c = 1,5$
1 (S)	$3,28 \cdot 10^{-2}$	$6,46 \cdot 10^{-2}$	$1,47 \cdot 10^{-1}$	$2,35 \cdot 10^{-1}$	$2,91 \cdot 10^{-1}$
2 (S)	$9,88 \cdot 10^{-2}$	$1,98 \cdot 10^{-1}$	$4,93 \cdot 10^{-1}$	$9,80 \cdot 10^{-1}$	1,45
3 (S)	$9,51 \cdot 10^{-2}$	$1,90 \cdot 10^{-1}$	$4,70 \cdot 10^{-1}$	$9,08 \cdot 10^{-1}$	1,29
4 (S)	$8,06 \cdot 10^{-2}$	$1,61 \cdot 10^{-1}$	$4,05 \cdot 10^{-1}$	$8,07 \cdot 10^{-1}$	1,19
5 (S)	$1,70 \cdot 10^{-2}$	$3,40 \cdot 10^{-2}$	$8,45 \cdot 10^{-2}$	$1,68 \cdot 10^{-1}$	$2,52 \cdot 10^{-1}$
6 (S)	$1,10 \cdot 10^{-2}$	$2,18 \cdot 10^{-2}$	$5,40 \cdot 10^{-2}$	$1,03 \cdot 10^{-1}$	$1,42 \cdot 10^{-1}$
7 (F)	$8,90 \cdot 10^{-6}$	$1,77 \cdot 10^{-5}$	$4,33 \cdot 10^{-5}$	$8,27 \cdot 10^{-5}$	$1,19 \cdot 10^{-4}$
8 (F)	$1,48 \cdot 10^{-5}$	$2,90 \cdot 10^{-5}$	$6,50 \cdot 10^{-5}$	$9,90 \cdot 10^{-5}$	$1,13 \cdot 10^{-4}$
9 (S)	$1,44 \cdot 10^{-2}$	$2,88 \cdot 10^{-2}$	$7,20 \cdot 10^{-2}$	$1,46 \cdot 10^{-1}$	$2,27 \cdot 10^{-1}$
10 (F)	$6,22 \cdot 10^{-6}$	$1,16 \cdot 10^{-5}$	$2,28 \cdot 10^{-5}$	$3,62 \cdot 10^{-5}$	$4,97 \cdot 10^{-5}$

TABLEAU C.1 – Modèle hystérétique - Cavité remplie d'air - Évolution de la pulsation amortie  $\Omega_a$  et de l'amortissement structural  $\eta_m$  pour différentes valeurs du coefficient d'amortissement hystérétique  $\eta_c$ . Les modes fluides sont repérés par (F) et les modes solides par (S).

(a) Pulsation amortie  $\Omega_a$  (rad/s)

Mode	$\omega_{na}$	$\eta_c = 0,1$	$\eta_c = 0,2$	$\eta_c = 0,5$	$\eta_c = 1,0$	$\eta_c = 1,5$
1 (C)	170,89	171,06	171,57	174,70	182,12	189,13
2 (C)	252,32	252,37	252,53	253,61	257,40	263,48
3 (C)	300,70	300,73	300,81	301,40	303,33	306,32
4 (C)	424,04	424,06	424,10	424,55	427,54	434,14
5 (C)	653,51	653,47	653,36	652,57	649,74	645,26
6 (C)	933,81	933,83	933,87	934,13	934,56	934,70
7 (C)	1061,65	1061,65	1061,64	1061,59	1061,38	1061,10
8 (C)	1590,93	1591,35	1592,39	1595,88	1599,16	1601,10
9 (C)	1740,82	1741,11	1741,74	1743,68	1745,98	1747,31
10 (C)	1894,09	1906,33	1953,17	1990,79	1993,60	1994,28

(b) Amortissement  $\eta_m$

Mode	$\eta_c = 0,1$	$\eta_c = 0,2$	$\eta_c = 0,5$	$\eta_c = 1,0$	$\eta_c = 1,5$
1 (C)	$4,19 \cdot 10^{-2}$	$8,24 \cdot 10^{-2}$	$1,87 \cdot 10^{-1}$	$2,92 \cdot 10^{-1}$	$3,48 \cdot 10^{-1}$
2 (C)	$9,55 \cdot 10^{-2}$	$1,91 \cdot 10^{-1}$	$4,73 \cdot 10^{-1}$	$9,16 \cdot 10^{-1}$	1,31
3 (C)	$9,67 \cdot 10^{-2}$	$1,93 \cdot 10^{-1}$	$4,81 \cdot 10^{-1}$	$9,49 \cdot 10^{-1}$	1,40
4 (C)	$7,27 \cdot 10^{-2}$	$1,46 \cdot 10^{-1}$	$3,66 \cdot 10^{-1}$	$7,35 \cdot 10^{-1}$	1,09
5 (C)	$1,77 \cdot 10^{-2}$	$3,54 \cdot 10^{-2}$	$8,85 \cdot 10^{-2}$	$1,76 \cdot 10^{-1}$	$2,63 \cdot 10^{-1}$
6 (C)	$3,57 \cdot 10^{-3}$	$7,10 \cdot 10^{-3}$	$1,75 \cdot 10^{-2}$	$3,37 \cdot 10^{-2}$	$4,92 \cdot 10^{-2}$
7 (C)	$2,12 \cdot 10^{-2}$	$4,24 \cdot 10^{-2}$	$1,06 \cdot 10^{-1}$	$2,12 \cdot 10^{-1}$	$3,18 \cdot 10^{-1}$
8 (C)	$7,91 \cdot 10^{-3}$	$1,52 \cdot 10^{-2}$	$3,34 \cdot 10^{-2}$	$5,97 \cdot 10^{-2}$	$8,60 \cdot 10^{-2}$
9 (C)	$6,83 \cdot 10^{-3}$	$1,33 \cdot 10^{-2}$	$3,08 \cdot 10^{-2}$	$5,77 \cdot 10^{-2}$	$8,42 \cdot 10^{-2}$
10 (C)	$4,95 \cdot 10^{-2}$	$8,16 \cdot 10^{-2}$	$3,85 \cdot 10^{-2}$	$3,71 \cdot 10^{-2}$	$4,40 \cdot 10^{-2}$

TABLEAU C.2 – Modèle hystérétique - Cavité remplie d'eau - évolution de la pulsation amortie  $\Omega_a$  et de l'amortissement structural  $\eta_m$  pour différentes valeurs du coefficient d'amortissement hystérétique  $\eta_c$ . Les modes couplés sont notés (C).

(a) Pulsation amortie  $\Omega_a$  (rad/s)

Mode	$\omega_{na}$	20°C	30°C	40°C	50°C	60°C	70°C
1 (S)	200,70	238,48	218,54	213,72	210,13	205,80	203,15
2 (S)	323,26	605,97	428,87	398,89	381,92	358,33	340,27
3 (S)	336,53	677,07	444,81	411,97	395,40	372,56	354,25
4 (S)	460,48	875,21	603,27	554,77	535,32	511,04	486,98
5 (S)	793,13	906,58	860,49	834,28	825,03	816,82	807,52
6 (S)	1014,12	1141,68	1074,36	1047,75	1039,75	1034,36	1027,80
7 (F)	1068,65	1068,60	1068,70	1068,68	1068,67	1068,67	1068,66
8 (F)	1068,66	1068,64	1068,61	1068,70	1068,71	1068,69	1068,68
9 (S)	1278,05	1161,80	1394,33	1342,40	1326,30	1316,30	1304,49
10 (F)	1511,20	1511,26	1511,25	1511,23	1511,22	1511,22	1511,22

(b) Amortissement  $\eta_m$ 

Mode	20°C	30°C	40°C	50°C	60°C	70°C
1 (S)	$1,78 \cdot 10^{-1}$	$8,20 \cdot 10^{-2}$	$4,41 \cdot 10^{-2}$	$4,87 \cdot 10^{-2}$	$4,70 \cdot 10^{-2}$	$3,46 \cdot 10^{-2}$
2 (S)	1,21	$4,43 \cdot 10^{-1}$	$1,75 \cdot 10^{-1}$	$1,51 \cdot 10^{-1}$	$1,69 \cdot 10^{-1}$	$1,34 \cdot 10^{-1}$
3 (S)	$7,66 \cdot 10^{-1}$	$4,08 \cdot 10^{-1}$	$1,66 \cdot 10^{-1}$	$1,42 \cdot 10^{-1}$	$1,61 \cdot 10^{-1}$	$1,30 \cdot 10^{-1}$
4 (S)	$7,35 \cdot 10^{-1}$	$4,42 \cdot 10^{-1}$	$1,72 \cdot 10^{-1}$	$1,24 \cdot 10^{-1}$	$1,41 \cdot 10^{-1}$	$1,25 \cdot 10^{-1}$
5 (S)	$5,45 \cdot 10^{-1}$	$1,77 \cdot 10^{-1}$	$6,15 \cdot 10^{-2}$	$3,51 \cdot 10^{-2}$	$3,42 \cdot 10^{-2}$	$3,24 \cdot 10^{-2}$
6 (S)	$2,39 \cdot 10^{-1}$	$8,62 \cdot 10^{-2}$	$3,63 \cdot 10^{-2}$	$2,02 \cdot 10^{-2}$	$1,91 \cdot 10^{-2}$	$1,99 \cdot 10^{-2}$
7 (F)	$5,26 \cdot 10^{-4}$	$1,49 \cdot 10^{-4}$	$4,57 \cdot 10^{-5}$	$2,27 \cdot 10^{-5}$	$1,97 \cdot 10^{-5}$	$1,88 \cdot 10^{-5}$
8 (F)	$1,97 \cdot 10^{-4}$	$1,69 \cdot 10^{-4}$	$1,62 \cdot 10^{-4}$	$7,53 \cdot 10^{-5}$	$5,37 \cdot 10^{-5}$	$4,18 \cdot 10^{-5}$
9 (S)	$2,61 \cdot 10^{-1}$	$2,16 \cdot 10^{-1}$	$7,26 \cdot 10^{-2}$	$3,52 \cdot 10^{-2}$	$2,94 \cdot 10^{-2}$	$2,98 \cdot 10^{-2}$
10 (F)	$2,68 \cdot 10^{-4}$	$5,92 \cdot 10^{-5}$	$2,06 \cdot 10^{-5}$	$1,02 \cdot 10^{-5}$	$8,37 \cdot 10^{-6}$	$8,90 \cdot 10^{-6}$

TABLEAU C.3 – Modèle de Maxwell généralisé - Cavité remplie d'air - Évolution de la pulsation amortie  $\Omega_a$  et de l'amortissement structural  $\eta_m$  pour différentes températures. Les modes fluides sont repérés par (F) et les modes solides par (S).

(a) Pulsation amortie $\Omega_a$ (rad/s)							
Mode	$\omega_{na}$	20°C	30°C	40°C	50°C	60°C	70°C
1 (C)	170,89	208,85	189,39	184,61	180,51	175,84	173,17
2 (C)	252,32	452,38	327,43	306,80	293,03	274,49	262,75
3 (C)	300,70	479,74	395,00	368,72	352,93	331,07	315,30
4 (C)	424,04	689,71	544,29	501,81	485,26	464,15	444,67
5 (C)	653,51	726,47	705,98	687,96	680,30	672,44	664,29
6 (C)	933,81	982,85	952,01	944,19	941,75	939,89	937,73
7 (C)	1061,65	1389,22	1190,69	1134,38	1117,15	1105,13	1090,59
8 (C)	1590,93	1822,20	1663,89	1629,85	1619,74	1614,64	1609,02
9 (C)	1740,82	1998,71	1818,99	1781,32	1770,23	1764,91	1759,23
10 (C)	1894,09	2100,63	2028,92	2003,44	1990,39	1983,39	1977,07

(b) Amortissement $\eta_m$						
Mode	20°C	30°C	40°C	50°C	60°C	70°C
1 (C)	$1,96 \cdot 10^{-1}$	$9,29 \cdot 10^{-2}$	$5,35 \cdot 10^{-2}$	$6,20 \cdot 10^{-2}$	$5,74 \cdot 10^{-2}$	$4,12 \cdot 10^{-2}$
2 (C)	$8,88 \cdot 10^{-1}$	$3,52 \cdot 10^{-1}$	$1,52 \cdot 10^{-1}$	$1,49 \cdot 10^{-1}$	$1,57 \cdot 10^{-1}$	$1,17 \cdot 10^{-1}$
3 (C)	1,94	$4,09 \cdot 10^{-1}$	$1,66 \cdot 10^{-1}$	$1,49 \cdot 10^{-1}$	$1,65 \cdot 10^{-1}$	$1,28 \cdot 10^{-1}$
4 (C)	$6,44 \cdot 10^{-1}$	$3,77 \cdot 10^{-1}$	$1,50 \cdot 10^{-1}$	$1,15 \cdot 10^{-1}$	$1,29 \cdot 10^{-1}$	$1,10 \cdot 10^{-1}$
5 (C)	$5,16 \cdot 10^{-1}$	$1,79 \cdot 10^{-1}$	$6,06 \cdot 10^{-2}$	$3,70 \cdot 10^{-2}$	$3,69 \cdot 10^{-2}$	$3,28 \cdot 10^{-2}$
6 (C)	$1,45 \cdot 10^{-1}$	$3,82 \cdot 10^{-2}$	$1,36 \cdot 10^{-2}$	$7,44 \cdot 10^{-3}$	$6,99 \cdot 10^{-3}$	$6,84 \cdot 10^{-3}$
7 (C)	$8,60 \cdot 10^{-1}$	$2,41 \cdot 10^{-1}$	$8,67 \cdot 10^{-2}$	$4,50 \cdot 10^{-2}$	$4,07 \cdot 10^{-2}$	$4,15 \cdot 10^{-2}$
8 (C)	$2,06 \cdot 10^{-1}$	$8,21 \cdot 10^{-2}$	$3,14 \cdot 10^{-2}$	$1,54 \cdot 10^{-2}$	$1,23 \cdot 10^{-2}$	$1,29 \cdot 10^{-2}$
9 (C)	$2,60 \cdot 10^{-1}$	$8,78 \cdot 10^{-2}$	$3,26 \cdot 10^{-2}$	$1,55 \cdot 10^{-2}$	$1,18 \cdot 10^{-2}$	$1,21 \cdot 10^{-2}$
10 (C)	$1,56 \cdot 10^{-1}$	$4,66 \cdot 10^{-2}$	$2,25 \cdot 10^{-2}$	$1,49 \cdot 10^{-2}$	$1,35 \cdot 10^{-2}$	$1,73 \cdot 10^{-2}$

TABLEAU C.4 – Modèle de Maxwell généralisé - Cavité remplie d'eau - Évolution de la pulsation amortie  $\Omega_a$  et de l'amortissement structural  $\eta_m$  pour différentes températures. Les modes couplés sont notés (C).

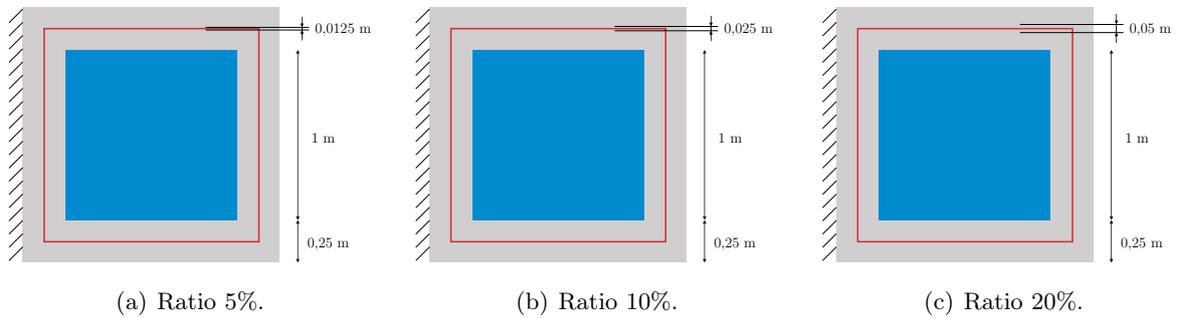
# Étude paramétrique

## D.1 Configurations testées

Les configurations étudiées sont semblables aux tests réalisés aux CHAPITRE 3 et CHAPITRE 4 (cf. FIGURE 3.3).

Pour l'étude de l'influence de la couche viscoélastique, la structure sandwich a une épaisseur totale de 0,25m, seule l'épaisseur respective des différentes couches est modifiée. Le ratio  $R = h_v / (2 * h_e + h_v)$  est introduit. Celui-ci est défini comme le rapport de l'épaisseur de la couche viscoélastique  $h_v$  par rapport à l'épaisseur totale de la paroi de la cavité. Trois valeurs de ratio de couche viscoélastique sont testés : 5%, 10% et 20% (à noter que ce dernier ratio correspond au cas test étudié SECTION 3.5.5). La couche viscoélastique est au centre de la structure sandwich, et les couches élastiques ont la même épaisseur.

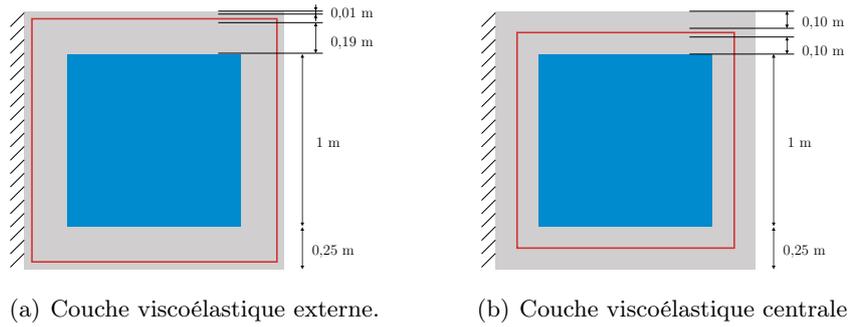
En ce qui concerne la position de la couche viscoélastique, deux configurations sont considérées (cf. FIGURE D.2). L'épaisseur de la couche viscoélastique représente 20% de l'épaisseur totale de la structure sandwich.



Ratio de couche viscoélastique	$R = 5\%$	$R = 10\%$	$R = 20\%$
Épaisseur de couche viscoélastique $h_v$	0,0125m	0,025m	0,05m
Épaisseur de couche élastique $h_e$	0,11875m	0,1125m	0,1m
Nb total de nœuds	9025	9604	8281
Nb total éléments	8836	9409	8100
<i>dont</i> épaisseur couche élastique	6	6	5
épaisseur couche viscoélastique	10	10	10
cavité fluide	50×50	53×53	50×50
Nb ddls complexes total	31698	33432	28722

(d) Détail de la discrétisation par éléments finis pour les trois maillages testés.

FIGURE D.1 – Caractéristiques géométriques et détail des maillages pour les trois ratios de couche viscoélastique testés - La couche viscoélastique est au centre de la structure sandwich, et les deux couches élastiques sont de la même épaisseur.



Position de la couche viscoélastique	Externe	Centrale
Épaisseur couche élastique externe	0,01m	0,10m
Épaisseur couche viscoélastique	0,05m	0,05m
Épaisseur couche élastique interne	0,19m	0,10m
Nb total de nœuds	8649	8649
Nb total éléments	8464	8464
<i>dont</i> épaisseur couche élast. externe	1	8
épaisseur couche viscoélastique	10	10
épaisseur couche élast. interne	15	8
cavité fluide	40×40	40×40
Nb ddl complexes total	31874	31874

(c) Détail de la discrétisation par éléments finis pour les deux maillages testés.

FIGURE D.2 – Caractéristiques géométriques et détail des maillages pour les deux configurations testées - L'épaisseur et la discrétisation de la couche viscoélastique sont identiques dans les deux cas.

## D.2 Premiers résultats : épaisseur de la couche viscoélastique

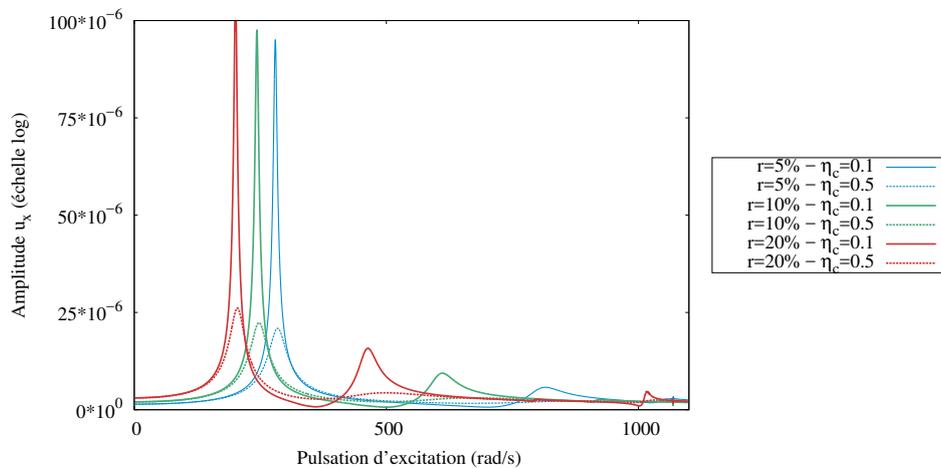
(a)  $\eta_c = 0,1$ 

Mode	R=5 %			R=10 %			R=20 %		
	$\omega_{na}$	$\Omega_a$	$\eta_m$	$\omega_{na}$	$\Omega_a$	$\eta_m$	$\omega_{na}$	$\Omega_a$	$\eta_m$
1	280	280	$2,70.10^{-2}$	243	243	$2,99.10^{-2}$	201	201	$3,28.10^{-2}$
2	605	605	$9,76.10^{-2}$	438	438	$9,85.10^{-2}$	323	323	$9,88.10^{-2}$
3	609	610	$8,88.10^{-2}$	450	450	$9,33.10^{-2}$	337	337	$9,51.10^{-2}$
4	805	805	$8,31.10^{-2}$	605	605	$8,38.10^{-2}$	460	460	$8,06.10^{-2}$
5	1044	1044	$3,78.10^{-2}$	916	915	$2,34.10^{-2}$	793	793	$1,70.10^{-2}$
6	1069	1069	$2,60.10^{-5}$	1069	1069	$9,98.10^{-6}$	1014	1014	$1,10.10^{-2}$
7	1069	1069	$1,45.10^{-4}$	1069	1069	$1,88.10^{-5}$	1069	1069	$8,90.10^{-6}$
8	1300	1300	$1,36.10^{-2}$	1183	1184	$1,15.10^{-2}$	1069	1069	$1,48.10^{-5}$
9	1511	1511	$1,75.10^{-5}$	1463	1463	$2,13.10^{-2}$	1278	1278	$1,44.10^{-2}$
10	1656	1656	$3,47.10^{-2}$	1511	1511	$6,70.10^{-6}$	1511	1511	$6,22.10^{-6}$

(b)  $\eta_c = 0,5$ 

Mode	R=5 %			R=10 %			R=20 %		
	$\omega_{na}$	$\Omega_a$	$\eta_m$	$\omega_{na}$	$\Omega_a$	$\eta_m$	$\omega_{na}$	$\Omega_a$	$\eta_m$
1	280	283	$1,24.10^{-1}$	243	247	$1,36.10^{-1}$	201	204	$1,46.10^{-1}$
2	605	606	$4,86.10^{-1}$	438	439	$4,91.10^{-1}$	323	324	$4,93.10^{-1}$
3	609	617	$4,33.10^{-1}$	450	454	$4,59.10^{-1}$	337	338	$4,70.10^{-1}$
4	805	817	$4,07.10^{-1}$	605	608	$4,17.10^{-1}$	460	461	$4,05.10^{-1}$
5	1044	1038	$1,90.10^{-1}$	916	914	$1,17.10^{-1}$	793	793	$8,46.10^{-2}$
6	1069	1069	$1,28.10^{-4}$	1069	1069	$4,97.10^{-5}$	1014	1017	$5,39.10^{-2}$
7	1069	1069	$2,78.10^{-4}$	1069	1069	$9,01.10^{-5}$	1069	1069	$4,32.10^{-5}$
8	1300	1304	$6,51.10^{-2}$	1183	1187	$5,57.10^{-2}$	1069	1069	$6,51.10^{-5}$
9	1511	1511	$8,50.10^{-5}$	1463	1460	$1,08.10^{-1}$	1278	1277	$7,18.10^{-2}$
10	1656	1653	$1,76.10^{-1}$	1511	1511	$3,32.10^{-5}$	1511	1511	$2,28.10^{-5}$

TABLEAU D.1 – Modèle hystérétique - Cavité remplie d'air - Influence de l'épaisseur de la couche viscoélastique.

FIGURE D.3 – Modèle hystérétique - Cavité remplie d'air - Solveur MANp - Nœud n°8281 - Degré de liberté  $u_x$  - Influence de l'épaisseur de la couche viscoélastique sur les courbes de réponse du système aux vibrations forcées.

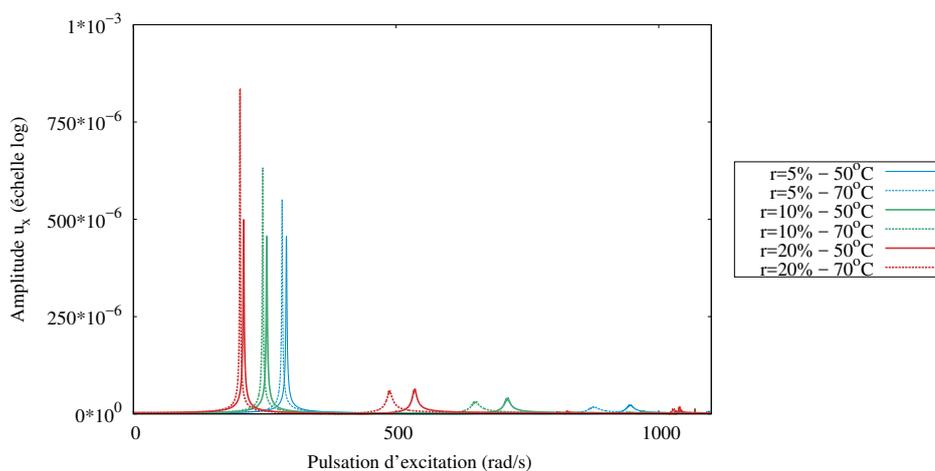
(a) T=50°C

Mode	R=5 %			R=10 %			R=20 %		
	$\omega_{na}$	$\Omega_a$	$\eta_m$	$\omega_{na}$	$\Omega_a$	$\eta_m$	$\omega_{na}$	$\Omega_a$	$\eta_m$
1	280	292	$3,88.10^{-2}$	243	254	$4,41.10^{-2}$	201	210	$4,87.10^{-2}$
2	605	729	$1,44.10^{-1}$	438	523	$1,46.10^{-1}$	323	382	$1,51.10^{-1}$
3	609	720	$1,24.10^{-1}$	450	533	$1,34.10^{-1}$	337	395	$1,42.10^{-1}$
4	805	947	$1,16.10^{-1}$	605	712	$1,25.10^{-1}$	460	535	$1,24.10^{-1}$
5	1044	1145	$8,64.10^{-2}$	916	968	$5,05.10^{-2}$	793	825	$3,51.10^{-2}$
6	1069	1069	$7,90.10^{-5}$	1069	1069	$2,51.10^{-5}$	1014	1040	$2,02.10^{-2}$
7	1069	1069	$3,75.10^{-4}$	1069	1069	$6,79.10^{-5}$	1069	1069	$2,27.10^{-5}$
8	1300	1344	$2,91.10^{-2}$	1183	1215	$2,16.10^{-2}$	1069	1069	$7,53.10^{-5}$
9	1511	1511	$6,77.10^{-5}$	1463	1547	$5,40.10^{-2}$	1278	1326	$3,52.10^{-2}$
10	1656	1810	$8,50.10^{-2}$	1511	1511	$2,01.10^{-5}$	1511	1511	$1,02.10^{-5}$

(b) T=70°C

Mode	R=5 %			R=10 %			R=20 %		
	$\omega_{na}$	$\Omega_a$	$\eta_m$	$\omega_{na}$	$\Omega_a$	$\eta_m$	$\omega_{na}$	$\Omega_a$	$\eta_m$
1	280	283	$3,25.10^{-2}$	243	246	$3,41.10^{-2}$	201	203	$3,46.10^{-2}$
2	605	657	$1,60.10^{-1}$	438	467	$1,49.10^{-1}$	323	340	$1,34.10^{-1}$
3	609	658	$1,42.10^{-1}$	450	480	$1,41.10^{-1}$	337	354	$1,30.10^{-1}$
4	805	877	$1,35.10^{-1}$	605	650	$1,38.10^{-1}$	460	487	$1,25.10^{-1}$
5	1044	1095	$7,75.10^{-2}$	916	941	$4,64.10^{-2}$	793	808	$3,24.10^{-2}$
6	1069	1069	$6,05.10^{-5}$	1069	1069	$2,12.10^{-5}$	1014	1028	$1,99.10^{-2}$
7	1069	1069	$2,52.10^{-4}$	1069	1069	$4,69.10^{-5}$	1069	1069	$1,88.10^{-5}$
8	1300	1325	$2,55.10^{-2}$	1183	1201	$2,06.10^{-2}$	1069	1069	$4,18.10^{-5}$
9	1511	1511	$4,53.10^{-5}$	1463	1512	$4,41.10^{-2}$	1278	1304	$2,98.10^{-2}$
10	1656	1750	$6,76.10^{-2}$	1511	1511	$1,51.10^{-5}$	1511	1511	$8,90.10^{-6}$

TABLEAU D.2 – Modèle de Maxwell généralisé - Cavité remplie d'air - Influence de l'épaisseur de la couche viscoélastique.

FIGURE D.4 – Modèle de Maxwell généralisé - Cavité remplie d'air - Solveur MANp - Nœud n 8281 - Degré de liberté  $u_x$  - Influence de l'épaisseur de la couche viscoélastique sur les courbes de réponse du système aux vibrations forcées.

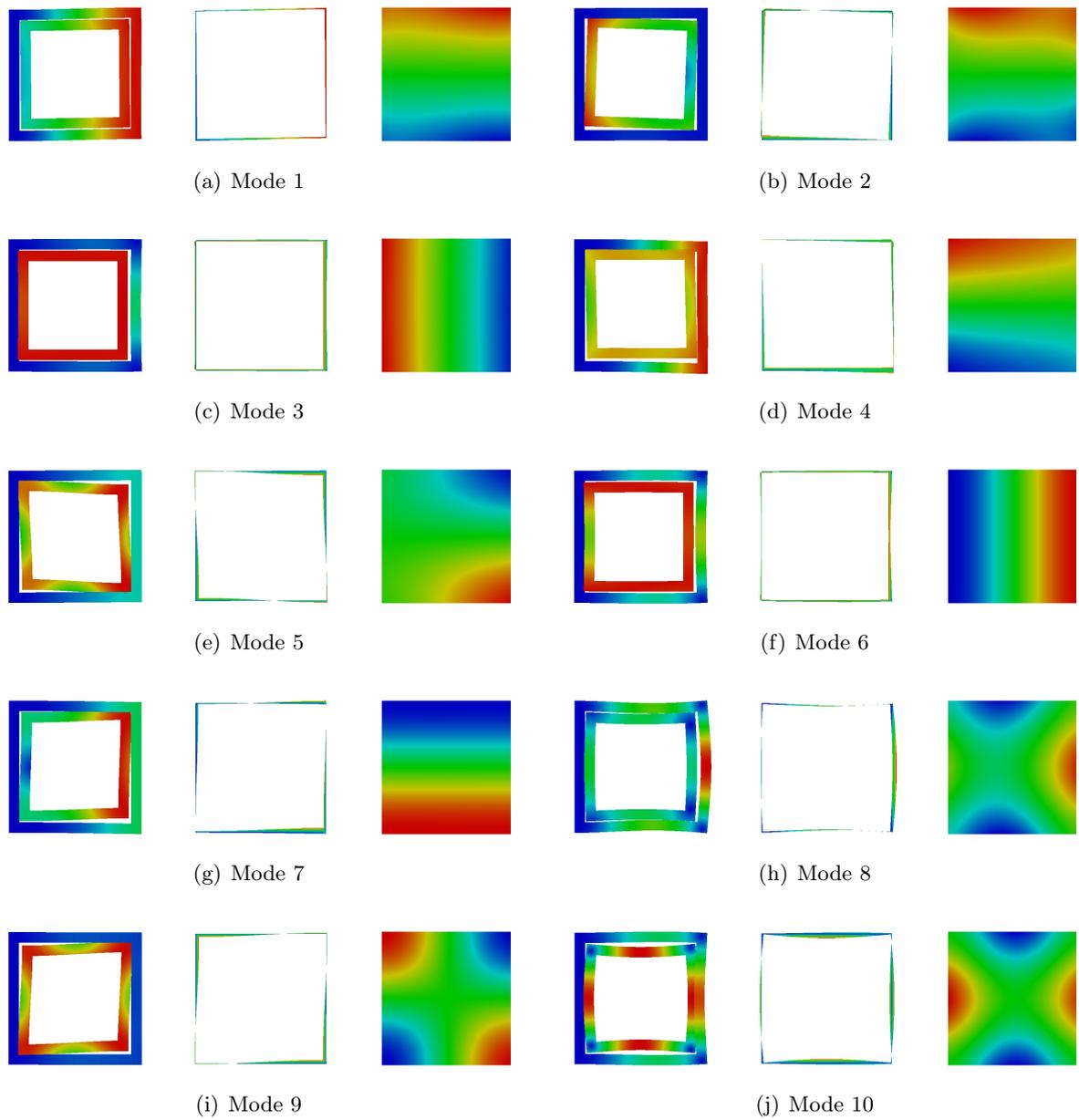


FIGURE D.5 – Cavité remplie d'air -  $R = 5\%$  - Allure des modes propres dans le cas conservatif (point initial).

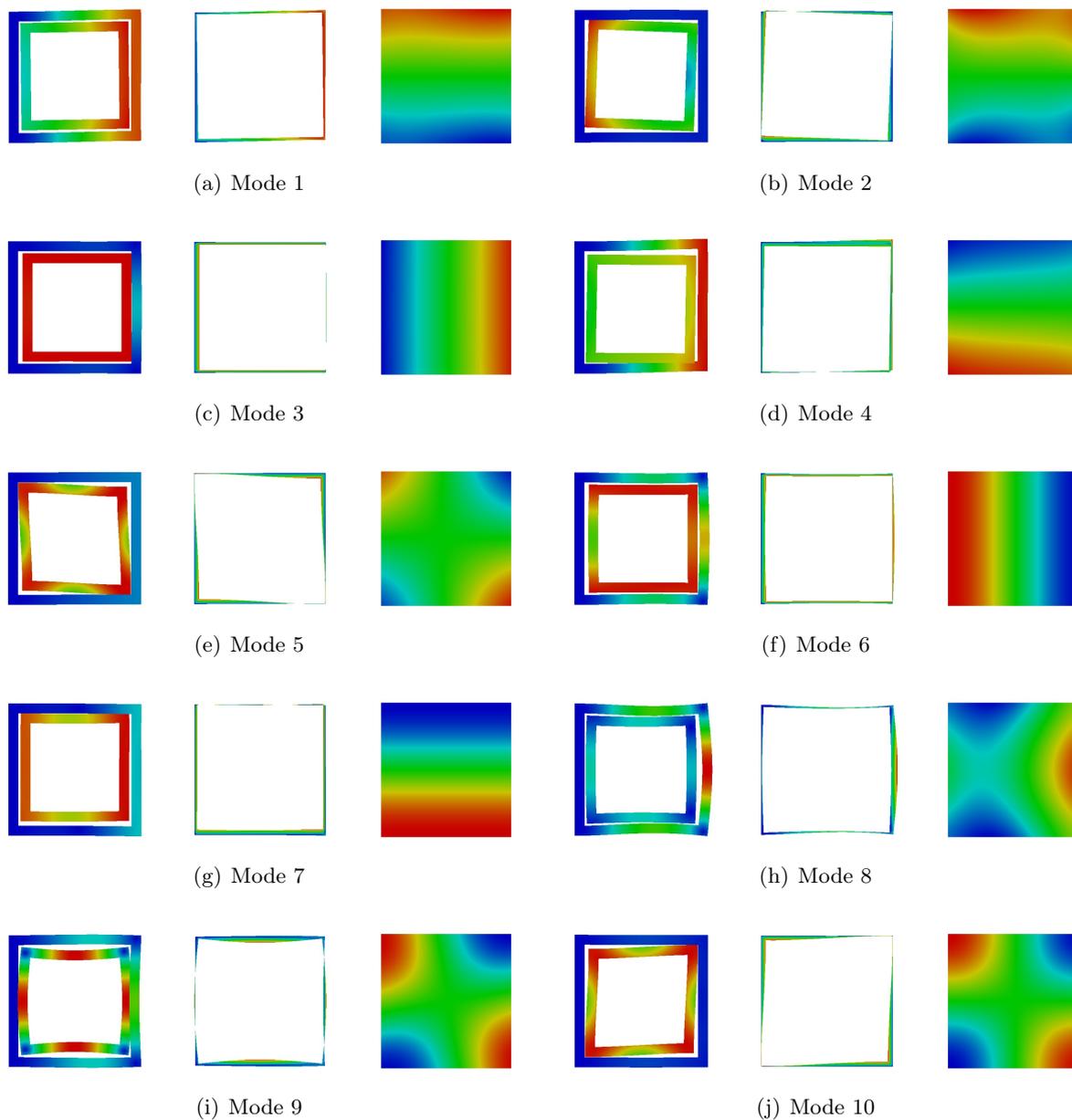


FIGURE D.6 – Cavité remplie d’air -  $R = 10\%$  - Allure des modes propres dans le cas conservatif (point initial).

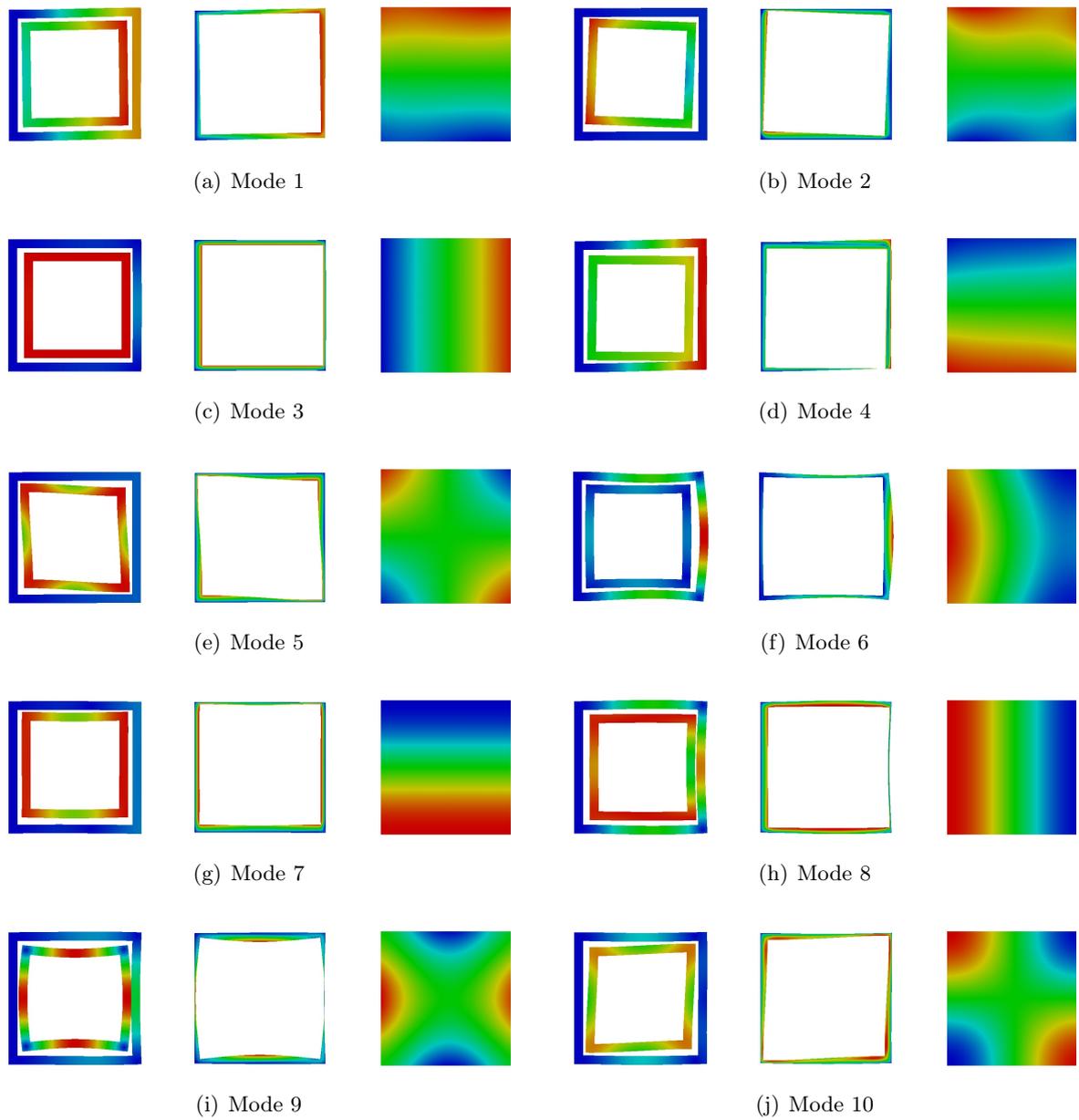


FIGURE D.7 – Cavité remplie d'air -  $R = 20\%$  - Allure des modes propres dans le cas conservatif (point initial).

## D.3 Premiers résultats : position de la couche viscoélastique

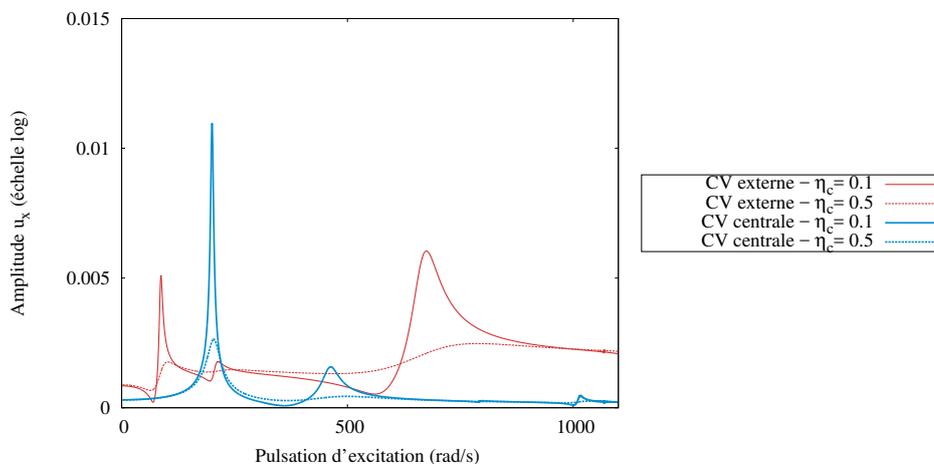
(a)  $\eta_c = 0,1$ 

Mode	Couche externe			Couche centrale		
	$\omega_{na}$	$\Omega_a$	$\eta_m$	$\omega_{na}$	$\Omega_a$	$\eta_m$
1	86	86	$8,73 \cdot 10^{-2}$	200	200	$3,27 \cdot 10^{-2}$
2	206	206	$9,12 \cdot 10^{-2}$	323	323	$9,88 \cdot 10^{-2}$
3	209	209	$9,60 \cdot 10^{-2}$	336	337	$9,51 \cdot 10^{-2}$
4	665	665	$9,07 \cdot 10^{-2}$	460	460	$8,08 \cdot 10^{-2}$
5	1069	1069	$5,09 \cdot 10^{-5}$	793	793	$1,70 \cdot 10^{-2}$
6	1069	1069	$4,23 \cdot 10^{-5}$	1013	1013	$1,10 \cdot 10^{-2}$
7	1090	1091	$9,37 \cdot 10^{-2}$	1069	1069	$8,89 \cdot 10^{-6}$
8	1118	1118	$9,69 \cdot 10^{-2}$	1279	1279	$1,43 \cdot 10^{-2}$
9	1131	1131	$9,75 \cdot 10^{-2}$	1511	1511	$6,23 \cdot 10^{-6}$
10	1146	1150	$3,16 \cdot 10^{-2}$	1587	1588	$7,97 \cdot 10^{-3}$

(b)  $\eta_c = 0,5$ 

Mode	Couche externe			Couche centrale		
	$\omega_{na}$	$\Omega_a$	$\eta_m$	$\omega_{na}$	$\Omega_a$	$\eta_m$
1	86	87	$4,29 \cdot 10^{-1}$	200	203	$1,46 \cdot 10^{-1}$
2	206	207	$4,51 \cdot 10^{-1}$	323	323	$4,93 \cdot 10^{-1}$
3	209	209	$4,77 \cdot 10^{-1}$	336	338	$4,70 \cdot 10^{-1}$
4	665	669	$4,48 \cdot 10^{-1}$	460	461	$4,05 \cdot 10^{-1}$
5	1069	1069	$2,74 \cdot 10^{-5}$	793	792	$8,46 \cdot 10^{-2}$
6	1069	1069	$1,92 \cdot 10^{-5}$	1013	1016	$5,42 \cdot 10^{-2}$
7	1090	1099	$4,64 \cdot 10^{-1}$	1069	1069	$4,32 \cdot 10^{-5}$
8	1118	1119	$4,84 \cdot 10^{-1}$	1279	1278	$7,15 \cdot 10^{-2}$
9	1131	1132	$4,87 \cdot 10^{-1}$	1511	1511	$2,27 \cdot 10^{-5}$
10	1146	1191	$5,32 \cdot 10^{-2}$	1587	1592	$3,40 \cdot 10^{-2}$

TABLEAU D.3 – Modèle hystérétique - Cavité remplie d'air - Influence de la position de la couche viscoélastique.

FIGURE D.8 – Modèle hystérétique - Cavité remplie d'air - Solveur MANp - Nœud n°8281 - Degré de liberté  $u_x$  - Influence de la position de la couche viscoélastique sur les courbes de réponse du système aux vibrations forcées.

(a) T=50°C

Mode	Couche externe			Couche centrale		
	$\omega_{na}$	$\Omega_a$	$\eta_m$	$\omega_{na}$	$\Omega_a$	$\eta_m$
1	86	93	$1,45.10^{-1}$	200	209	$4,87.10^{-2}$
2	206	236	$1,49.10^{-1}$	323	382	$1,51.10^{-1}$
3	209	240	$1,57.10^{-1}$	336	395	$1,42.10^{-1}$
4	665	794	$1,35.10^{-1}$	460	535	$1,25.10^{-1}$
5	1069	1069	$1,05.10^{-5}$	793	825	$3,51.10^{-2}$
6	1069	1069	$6,76.10^{-6}$	1013	1039	$2,03.10^{-2}$
7	1090	1322	$1,46.10^{-1}$	1069	1069	$2,27.10^{-5}$
8	1118	1370	$1,64.10^{-1}$	1279	1327	$3,51.10^{-2}$
9	1131	1390	$1,69.10^{-1}$	1511	1511	$1,02.10^{-5}$
10	1146	1193	$1,71.10^{-2}$	1587	1617	$1,60.10^{-2}$

(b) T=70°C

Mode	Couche externe			Couche centrale		
	$\omega_{na}$	$\Omega_a$	$\eta_m$	$\omega_{na}$	$\Omega_a$	$\eta_m$
1	86	87	$6,10.10^{-2}$	200	202	$3,45.10^{-2}$
2	206	213	$1,03.10^{-1}$	323	340	$1,34.10^{-1}$
3	209	216	$1,09.10^{-1}$	336	354	$1,30.10^{-1}$
4	665	723	$1,51.10^{-1}$	460	487	$1,25.10^{-1}$
5	1069	1069	$1,59.10^{-5}$	793	807	$3,24.10^{-2}$
6	1069	1069	$1,12.10^{-5}$	1013	1027	$2,00.10^{-2}$
7	1090	1224	$1,55.10^{-1}$	1069	1069	$1,88.10^{-5}$
8	1118	1262	$1,66.10^{-1}$	1279	1306	$2,97.10^{-2}$
9	1131	1279	$1,67.10^{-1}$	1511	1511	$8,89.10^{-6}$
10	1146	1181	$2,29.10^{-2}$	1587	1606	$1,33.10^{-2}$

TABLEAU D.4 – Modèle de Maxwell généralisé - Cavité remplie d'air - Influence de la position de la couche viscoélastique.

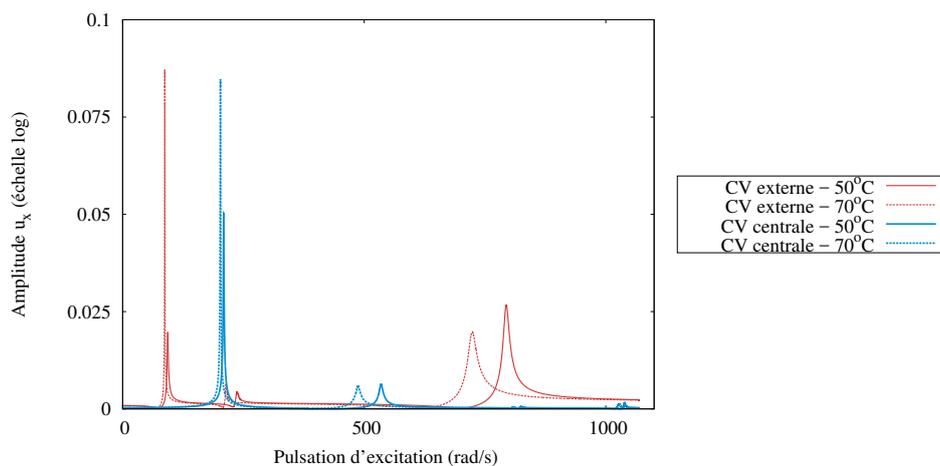


FIGURE D.9 – Modèle de Maxwell généralisé - Cavité remplie d'air - Solveur MANp - Nœud n°8281 - Degré de liberté  $u_x$  - Influence de la position de la couche viscoélastique sur les courbes de réponse du système aux vibrations forcées.

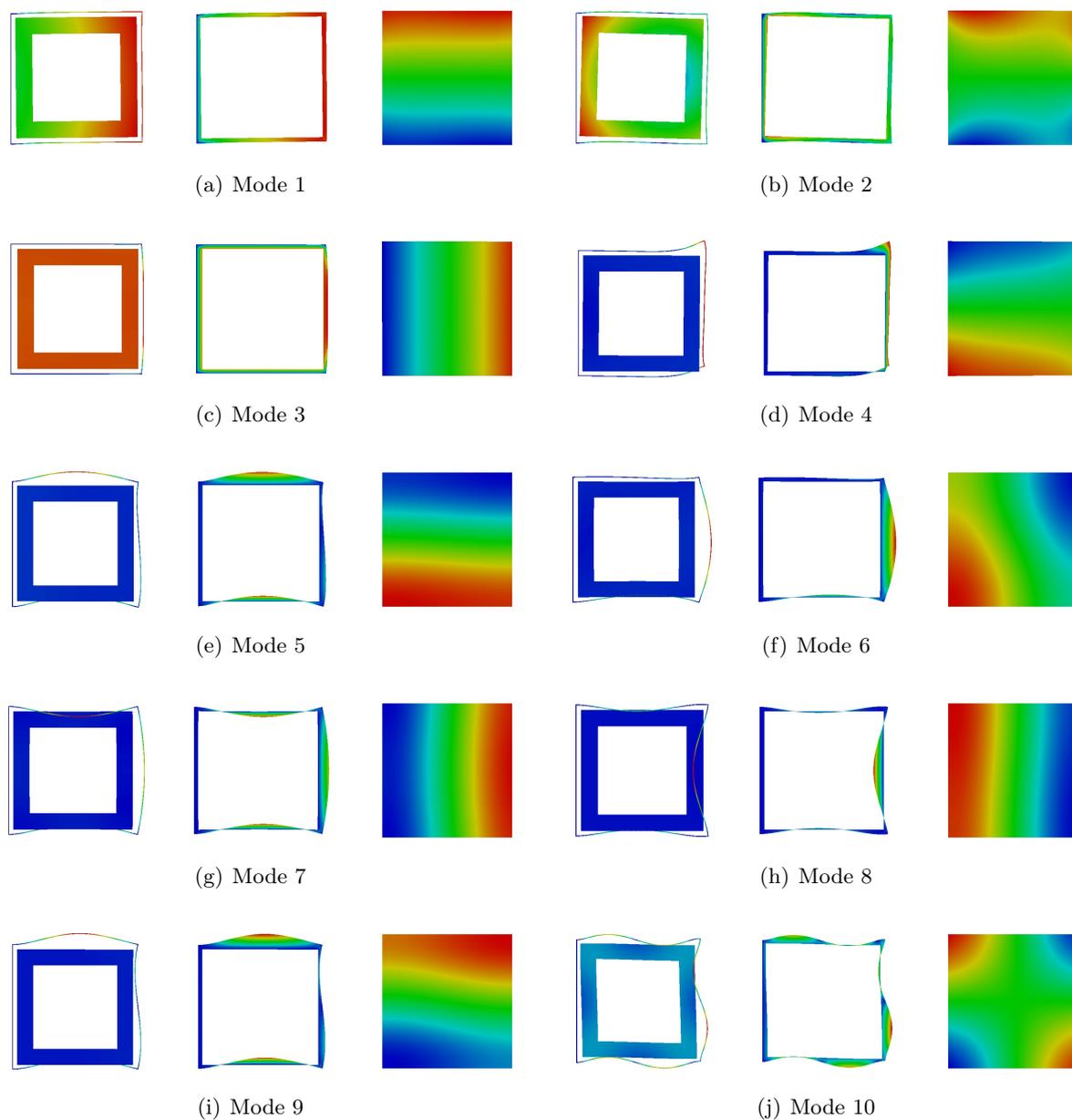


FIGURE D.10 – Cavité remplie d'air - Couche viscoélastique externe - Allure des modes propres dans le cas conservatif (point initial).

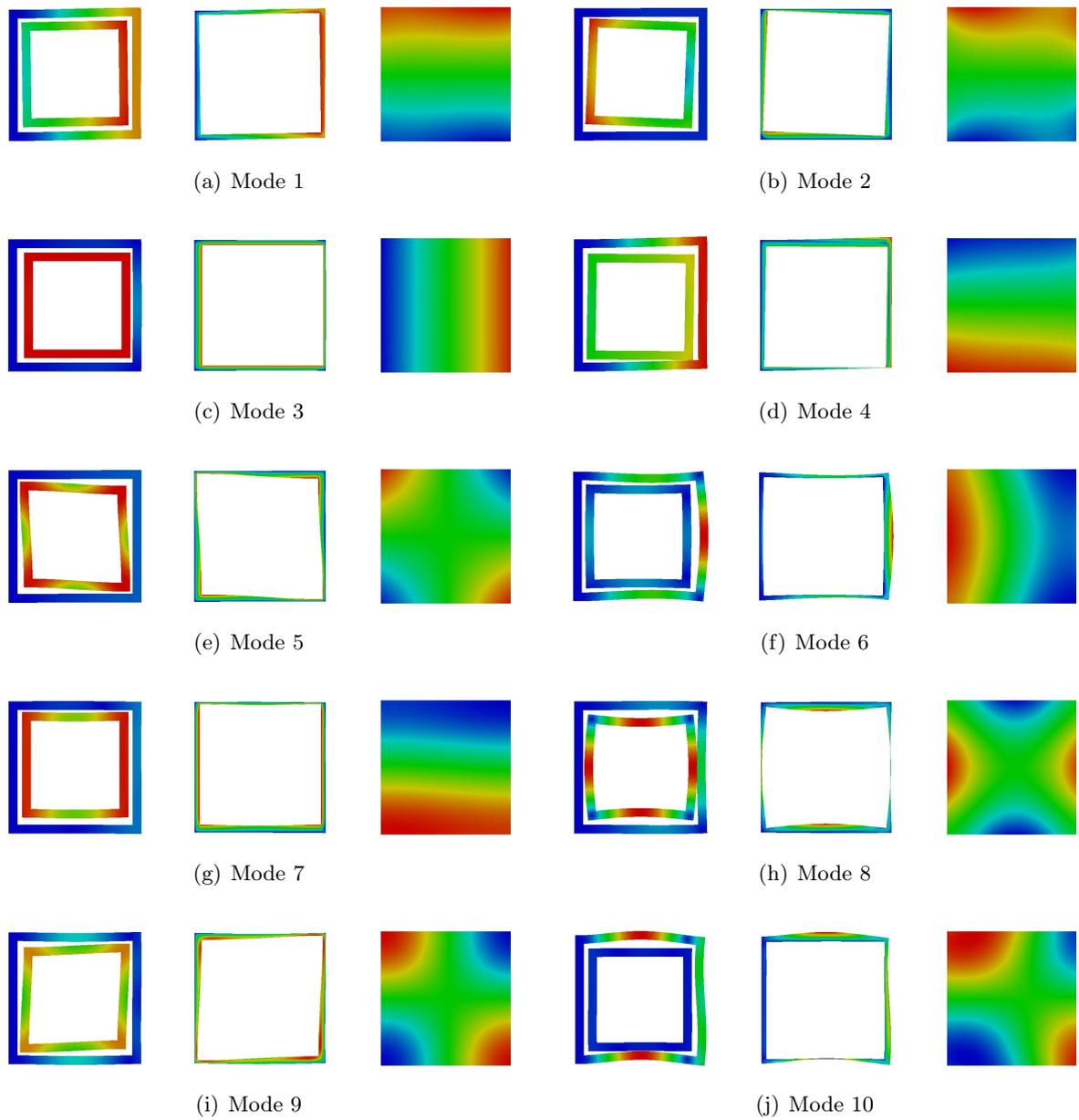


FIGURE D.11 – Cavité remplie d'air - Couche viscoélastique centrale - Allure des modes propres dans le cas conservatif (point initial).



# Bibliographie

- [SFA, 2010] (2010). Livre blanc de l'acoustique. Rapport technique, Société Française Acoustique. (Cité en page 1.)
- [EMR, 2012] (2012). Étude méthodologique des impacts environnementaux et socio-économiques des énergies marines renouvelables. Rapport technique, Ministère de l'Ecologie, du Développement Durable et de l'Energie. (Cité en pages 1 et 13.)
- [AFM, 2015] (2015). Livre Blanc de la Recherche en Mécanique - Enjeux industriels et sociétaux. Recherche, innovation, formation. Rapport technique, Association Française de Mécanique - EDP Sciences. (Cité en pages 2, 3 et 14.)
- [Abdoun *et al.*, 2009] ABDOUN, F., AZRAR, L., DAYA, E. M. et POTIER-FERRY, M. (2009). Forced harmonic response of viscoelastic structures by an asymptotic numerical method. *Computers and Structures*, 87(1-2):91–100. (Cité en pages 117, 143, 145 et 153.)
- [ADEME, 2018] ADEME (2018). S'isoler des bruits extérieurs. <https://www.ademe.fr/particuliers-eco-citoyens/habitation/renover/isolation/dossier/isolation-contre-bruit/sisoler-bruits-exterieurs>. Consulté le 12 septembre 2018. (Cité en page 1.)
- [Akoussan, 2015] AKOUSSAN, K. (2015). *Modélisation et conception de structures composites viscoélastiques à haut pouvoir amortissant*. Thèse de doctorat, Université de Lorraine. (Cité en page 15.)
- [Allemang, 2003] ALLEMANG, R. J. (2003). The modal assurance criterion - Twenty years of use and abuse. *Sound and Vibration*, 37(8):14–21. (Cité en pages 150 et 157.)
- [Amdî, 2012] AMDI, M. (2012). *Simulation numérique en interaction fluide structure : application aux problèmes vibroacoustiques*. Thèse de doctorat. (Cité en page 10.)
- [Andrianarison et Ohayon, 2006] ANDRIANARISON, O. et OHAYON, R. (2006). Compressibility and gravity effects in internal fluid-structure vibrations : Basic equations and appropriate variational formulations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(17-18):1958–1972. (Cité en pages 1 et 10.)
- [Anselmet et Mattei, 2015] ANSELMET, F. et MATTEI, P.-O. (2015). *Acoustique, aéroacoustique et vibrations*. ISTE Editions. (Cité en page 22.)
- [ASN, 2001] ASN (2001). Comportement du combustible dans les réacteurs à eau sous pression. <https://www.asn.fr/Informer/Actualites/Centrales-nucleaires-EDF-Combustible>. Consulté le 12 septembre 2018. (Cité en page 2.)
- [Avery *et al.*, 2009] AVERY, P., FARHAT, C. et HETMANIUK, U. (2009). A Padé-based factorization-free algorithm for identifying the eigenvalues missed by a generalized symmetric eigensolver. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 79(2):239–252. (Cité en pages 75 et 156.)
- [Axelrad, 1970] AXELRAD, D. (1970). Mechanical models of relaxation phenomena. *Advances in Molecular Relaxation Processes*, 2(1):41–68. (Cité en page 16.)

- [Axisa, 2001] AXISA, F. (2001). *Modélisation des systèmes mécaniques Vol. 3 : interactions fluide structure*. Hermès. (Cité en pages 1 et 9.)
- [Azrar et al., 1993] AZRAR, L., COCHELIN, B., DAMIL, N. et POTIER-FERRY, M. (1993). An asymptotic-numerical method to compute the postbuckling behaviour of elastic plates and shells. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 36(8):1251–1277. (Cité en page 118.)
- [Baguet et Cochelin, 2003] BAGUET, S. et COCHELIN, B. (2003). On the behaviour of the ANM continuation in the presence of bifurcations. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 19(6):459–471. (Cité en page 56.)
- [Baker et Graves-Morris, 1996] BAKER, G. A. et GRAVES-MORRIS, P. R. (1996). *Padé approximants*. Cambridge University Press, Cambridge, UK. (Cité en pages 51 et 123.)
- [Banerjee et Butterfield, 1981] BANERJEE, P. K. P. K. et BUTTERFIELD, R. R. (1981). *Boundary element methods in engineering science*. McGraw-Hill Book Co. (UK). (Cité en page 11.)
- [Bathe, 2006] BATHE, K.-J. (2006). *Finite element procedures*. Prentice Hall. (Cité en pages 11, 20 et 29.)
- [Bathe, 2013] BATHE, K. J. (2013). The subspace iteration method - Revisited. *Computers and Structures*, 126(1):177–183. (Cité en page 46.)
- [Bekhoucha et al., 2016] BEKHOUCHA, F., RECHAK, S. et CADOU, J. M. (2016). Eigensensitivity analysis of rotating clamped uniform beams with the asymptotic numerical method. *Journal of Sound and Vibration*, 385:310–329. (Cité en pages 3, 56 et 155.)
- [Berenger, 1994] BERENGER, J.-P. (1994). A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *Journal of Computational Physics*, 114(2):185–200. (Cité en page 158.)
- [Bergmann, 2004] BERGMANN, M. (2004). *Optimisation aérodynamique par réduction de modèle POD et contrôle optimal - application au sillage laminaire d’un cylindre circulaire*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine. (Cité en page 116.)
- [Bermúdez et Rodríguez, 1994] BERMÚDEZ, A. et RODRÍGUEZ, R. (1994). Finite element computation of the vibration modes of a fluid-solid system. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 119(3-4):355–370. (Cité en pages 3, 4, 10, 19, 46, 55, 62, 63, 65, 66, 70, 73, 75, 90 et 155.)
- [Bert, 1973] BERT, C. (1973). Material damping : An introductory review of mathematic measures and experimental technique. *Journal of Sound and Vibration*, 29(2):129–153. (Cité en page 15.)
- [Besset, 2006] BESSET, S. (2006). *Optimisation du comportement vibro-acoustique des structures à l’aide d’une synth se modale g n ralis e*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon. (Cité en pages 10 et 25.)
- [Bobillot et Balmes, 2002] BOBILLOT, A. et BALMES, E. (2002). Iterative Techniques for Eigenvalue Solutions of Damped Structures Coupled with Fluids. *In 43rd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*, Reston, Virginia. American Institute of Aeronautics and Astronautics. (Cité en pages 79, 116 et 157.)

- [Boily et Charron, 1999] BOILY, S. et CHARRON, F. (1999). The vibroacoustic response of a cylindrical shell structure with viscoelastic and poroelastic materials. *Applied Acoustics*, 58(2):131–152. (Cité en page 10.)
- [Bouhamidi *et al.*, 2012] BOUHAMIDI, A., JBILOU, K., REICHEL, L. et SADOK, H. (2012). A generalized global Arnoldi method for ill-posed matrix equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 236(8):2078–2089. (Cité en page 46.)
- [Boumediene *et al.*, 2014] BOUMEDIENE, F., CADOU, J. M., DUIGOU, L. et DAYA, E. M. (2014). A reduction model for eigensolutions of damped viscoelastic sandwich structures. *Mechanics Research Communications*, 57:74–81. (Cité en pages 117, 145, 153 et 157.)
- [Boumediene *et al.*, 2016] BOUMEDIENE, F., DAYA, E. M., CADOU, J. M. et DUIGOU, L. (2016). Forced harmonic response of viscoelastic sandwich beams by a reduction method. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 23(11):1290–1299. (Cité en pages 3, 121 et 157.)
- [Boumediene *et al.*, 2009] BOUMEDIENE, F., MILOUDI, A., CADOU, J. M., DUIGOU, L. et BOUTYOUR, E. (2009). Nonlinear forced vibration of damped plates by an asymptotic numerical method. *Computers and Structures*, 87(23-24):1508–1515. (Cité en pages 117, 118 et 121.)
- [Boutmir *et al.*, 2004] BOUTMIR, S., BRAIKAT, B., JAMAL, M., DAMIL, N., COCHELIN, B. et POTIER-FERRY, M. (2004). Des solveurs implicites d’ordre supérieur pour les problèmes de dynamique non linéaire des structures. *Revue Européenne des éléments Finis*, 13(5-7):449–460. (Cité en page 82.)
- [Boutyour *et al.*, 2007] BOUTYOUR, E.-H., CADOU, J. M., COCHELIN, B. et POTIER-FERRY, M. (2007). Etude des vibrations linéaires de plaques par une méthode asymptotique numérique et les approximants de Padé. In *8 me Colloque National en Calcul des Structures CSMA*, Giens. (Cité en pages 49 et 52.)
- [Boutyour *et al.*, 2004] BOUTYOUR, E. H., ZAHROUNI, H., POTIER-FERRY, M. et BOUDI, M. (2004). Bifurcation points and bifurcated branches by an asymptotic numerical method and Padé approximants. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 60(12):1987–2012. (Cité en pages 49, 52 et 155.)
- [Brezinski et Redivo-Zaglia, 2006] BREZINSKI, C. et REDIVO-ZAGLIA, M. (2006). *Méthodes numériques itératives*. Ellipses. (Cité en pages 45 et 46.)
- [Bruneau, 1998] BRUNEAU, M. (1998). *Manuel d’acoustique fondamentale*. Hermes. (Cité en pages 10, 22 et 150.)
- [Burgade, 2000] BURGAD, L. (2000). Mise au point aéroacoustique des véhicules chez PSA. *La houille blanche*, 6:16–21. (Cité en page 1.)
- [Cadou *et al.*, 2018] CADOU, J. M., CLAUDE, B., DUIGOU, L. et GIRAULT, G. (2018). Study of a Vibroacoustic Interior Problem with Viscoelastic Sandwich Structure Using the Asymptotic Numerical Method. In *WCCM XIII - PANACM II*, New York. (Cité en pages 82 et 156.)
- [Cadou *et al.*, 2009] CADOU, J. M., DUIGOU, L., DAMIL, N. et POTIER-FERRY, M. (2009). Convergence acceleration of iterative algorithms. Applications to thin shell analysis and Navier-Stokes equations. *Computational Mechanics*, 43(2):253–264. (Cité en pages 51 et 107.)

- [Cadou *et al.*, 2006] CADOU, J. M., POTIER-FERRY, M. et COCHELIN, B. (2006). A numerical method for the computation of bifurcation points in fluid mechanics. *European Journal of Mechanics - B/Fluids*, 25(2):234–254. (Cité en pages 3 et 56.)
- [Calderer *et al.*, 2018] CALDERER, A., GUO, X., SHEN, L. et SOTIROPOULOS, F. (2018). Fluid-structure interaction simulation of floating structures interacting with complex, large-scale ocean waves and atmospheric turbulence with application to floating offshore wind turbines. *Journal of Computational Physics*, 355:144–175. (Cité en page 10.)
- [Candel, 2005] CANDEL, S. (2005). *Mécanique des fluides*. Dunod. (Cité en page 22.)
- [Capsoni *et al.*, 2017] CAPSONI, A., ARDITO, R. et GUERRIERI, A. (2017). Stability of dynamic response of suspension bridges. *Journal of Sound and Vibration*, 393:285–307. (Cité en page 10.)
- [Chen et Taylor, 1990] CHEN, H. C. et TAYLOR, R. L. (1990). Vibration analysis of fluid-solid systems using a finite element displacement formulation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 29(4):683–698. (Cité en page 29.)
- [Chinesta *et al.*, 2011] CHINESTA, F., AMMAR, A., LEYGUE, A. et KEUNINGS, R. (2011). An overview of the proper generalized decomposition with applications in computational rheology. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 166(11):578–592. (Cité en page 116.)
- [Claude *et al.*, 2017a] CLAUDE, B., DUIGOU, L., GIRAULT, G. et CADOU, J. M. (2017a). Eigen-solutions to a vibroacoustic interior coupled problem with a perturbation method. *Comptes Rendus - Mécanique*, 345(2):130–136. (Cité en pages 49 et 156.)
- [Claude *et al.*, 2017b] CLAUDE, B., DUIGOU, L., GIRAULT, G. et CADOU, J. M. (2017b). Étude numérique des vibrations d’un fluide contenu dans une cavité visco-élastique par une méthode d’homotopie et de perturbation. In *13ème Colloque National en Calcul de Structures*, Giens. (Cité en pages 49 et 156.)
- [Claude *et al.*, 2018a] CLAUDE, B., DUIGOU, L., GIRAULT, G. et CADOU, J. M. (2018a). Study of a vibroacoustic interior problem with viscoelastic sandwich structure using the Asymptotic Numerical Method. In *ECCM 6 - ECFD 7*, page 2018, Glasgow. (Cité en pages 82 et 156.)
- [Claude *et al.*, 2018b] CLAUDE, B., DUIGOU, L., GIRAULT, G., GUEVEL, Y. et CADOU, J. M. (2018b). Numerical comparison of eigenvalue algorithms for vibroacoustic problems. *Mechanics Research Communications*, 91:39–45. (Cité en pages 53 et 156.)
- [CNRS, a] CNRS. Contre le bruit : l’anti-bruit. <http://www2.cnrs.fr/presse/thema/382.htm>. Consulté le 12 septembre 2018. (Cité en page 2.)
- [CNRS, b] CNRS. Lutter contre les bruits des transports. <http://www2.cnrs.fr/presse/thema/381.htm>. Consulté le 12 septembre 2018. (Cité en page 1.)
- [Cochelin *et al.*, 2007] COCHELIN, B., DAMIL, N. et POTIER-FERRY, M. (2007). *Méthode asymptotique numérique*. Hermès Science publications. (Cité en pages 49, 50, 51, 53, 83 et 123.)
- [Cochelin et Medale, 2013] COCHELIN, B. et MEDALE, M. (2013). Power series analysis as a major breakthrough to improve the efficiency of Asymptotic Numerical Method in the vicinity of bifurcations. *Journal of Computational Physics*, 236:594–607. (Cité en pages 56, 57, 58, 63, 72, 75, 117, 118, 123, 124, 128, 141, 142, 153, 155, 156 et 157.)

- [Coulon *et al.*, 2018] COULON, A., SALANON, R. et ANCIAN, L. (2018). Innovative numerical fatigue methodology for piping systems : qualifying Acoustic Induced Vibration in the Oil and Gas industry. *Procedia Engineering*, 213:762–775. (Cité en page 13.)
- [Damil *et al.*, 2004] DAMIL, N., JAMAI, R. et LAHMAM, H. (2004). Vectorial Padé approximants in the Asymptotic Numerical Method. *Revue Européenne des Éléments Finis*, 13(1-2):33–56. (Cité en page 51.)
- [Davidsson, 2004] DAVIDSSON, P. (2004). *Structure-acoustic analysis : finite element modelling and reduction methods*. Thèse de doctorat, Lund University. (Cité en pages 26 et 29.)
- [Daya et Potier-Ferry, 2001] DAYA, E. M. et POTIER-FERRY, M. (2001). A numerical method for nonlinear eigenvalue problems application to vibrations of viscoelastic structures. *Computers and Structures*, 79(5):533–541. (Cité en page 79.)
- [Daya et Potier-Ferry, 2002] DAYA, E. M. et POTIER-FERRY, M. (2002). A shell finite element for viscoelastically damped sandwich structures. *Revue Européenne des Éléments Finis*, 11(1):39–56. (Cité en page 79.)
- [De Langre, 2001] DE LANGRE, E. (2001). *Fluides et solides*. Editions de l'Ecole Polytechnique. (Cité en pages 1 et 10.)
- [De Lima *et al.*, 2010] DE LIMA, A. M., da SILVA, A. R., RADE, D. A. et BOUHADDI, N. (2010). Component mode synthesis combining robust enriched Ritz approach for viscoelastically damped structures. *Engineering Structures*, 32(5):1479–1488. (Cité en page 157.)
- [Derveaux *et al.*, 2002] DERVEAUX, G., CHAIGNE, A., JOLY, P. et BECACHE, E. (2002). Time-domain simulation of a guitar. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 112(5):2409–2409. (Cité en page 10.)
- [Deü *et al.*, 2008a] DEÜ, J. F., LARBI, W. et OHAYON, R. (2008a). Piezoelectric structural acoustic problems : Symmetric variational formulations and finite element results. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(19-20):1715–1724. (Cité en page 14.)
- [Deü *et al.*, 2008b] DEÜ, J. F., LARBI, W. et OHAYON, R. (2008b). Vibration and transient response of structural-acoustic interior coupled systems with dissipative interface. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(51-52):4894–4905. (Cité en pages 3, 150 et 158.)
- [Deuffhard, 2011] DEUFLHARD, P. (2011). *Newton Methods for Nonlinear Problems*, volume 35 de *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg. (Cité en page 80.)
- [Dhatt et Touzot, 1984] DHATT, G. et TOUZOT, G. (1984). *Une présentation de la méthode des éléments finis*. Presses de l'Université Laval Québec - Paris Maloine, presses de l'université laval québec - paris maloine édition. (Cité en pages 20, 36, 45 et 46.)
- [Duc *et al.*, 2014] DUC, F., BOURBAN, P.-E. et MÅNSON, J.-A. E. (2014). Dynamic mechanical properties of epoxy/flax fibre composites. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 33(17):1625–1633. (Cité en page 159.)
- [Duigou *et al.*, 2003] DUIGOU, L., DAYA, E. M. et POTIER-FERRY, M. (2003). Iterative algorithms for non-linear eigenvalue problems. Application to vibrations of viscoelastic shells.

- Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192(11-12):1323–1335. (Cité en pages 3, 79, 80, 82, 84, 87, 91, 111, 113 et 158.)
- [Duigou *et al.*, 2018] DUIGOU, L., MAHMOUDI, S., KERVOELEN, A., CADOU, J. M. et DAYA, E. M. (2018). Numerical and experimental investigations of damping of flax-epoxy laminated composite. *In 4th international conference on Mechanics of Composites*, Madrid. (Cité en pages 14 et 159.)
- [Duigou-Kersulec, 2002] DUIGOU-KERSULEC, L. (2002). *Modélisation numérique de l'amortissement passif et actif des tôles sandwich comportant des couches viscoélastiques ou piézo-électriques*. Thèse de doctorat, Université de Metz. (Cité en pages 13, 14, 18, 19, 79, 86, 108 et 111.)
- [Dupuis, 2000] DUPUIS, P. (2000). Essais de vibrations - Mesures et exploitation des résultats. *Techniques de l'Ingénieur*. (Cité en page 116.)
- [El-Hafidi *et al.*, 2017] EL-HAFIDI, A., GNING, P., PIEZEL, B., BELAÏD, M. et FONTAINE, S. (2017). Determination of dynamic properties of flax fibres reinforced laminate using vibration measurements. *Polymer Testing*, 57:219–225. (Cité en page 159.)
- [Elhage-Hussein *et al.*, 2000] ELHAGE-HUSSEIN, A., POTIER-FERRY, M. et DAMIL, N. (2000). A numerical continuation method based on Padé approximants. *International Journal of Solids and Structures*, 37(46-47):6981–7001. (Cité en pages 51, 52 et 53.)
- [Felippa et Ohayon, 1990] FELIPPA, C. et OHAYON, R. (1990). Mixed variational formulation of finite element analysis of acoustoelastic/slosh fluid-structure interaction. *Journal of Fluids and Structures*, 4(1):35–57. (Cité en page 26.)
- [Felippa, 1985] FELIPPA, C. A. (1985). Symmetrization of the contained compressible-fluid vibration eigenproblem. *Communications in Applied Numerical Methods*, 1(5):241–247. (Cité en page 26.)
- [Fitzpatrick et Ridsdill Smith, 2001] FITZPATRICK, T. et RIDSDILL SMITH, R. (2001). Stabilising the London Millennium Bridge. *Ingenia*, (9). (Cité en page 2.)
- [Francis, 1961] FRANCIS, J. G. F. (1961). The QR Transformation A Unitary Analogue to the LR Transformation—Part 1. *The Computer Journal*, 4(3):265–271. (Cité en page 45.)
- [Garnier, 2002] GARNIER, B. (2002). Contrôle actif des vibrations. *Techniques de l'ingénieur Vibrations en milieu industriel, mesures, surveillance et contrôle*, (ref. article : r6200). (Cité en pages 2 et 14.)
- [Géradin et Rixen, 1997] GÉRADIN, M. et RIXEN, D. (1997). *Mechanical vibrations : theory and application to structural dynamics*. John Wiley and Sons Ltd, second édition. (Cité en pages 44, 45 et 46.)
- [Gerges, 2013] GERGES, Y. (2013). *Méthodes de réduction de modèles en vibroacoustique non-linéaire*. Thèse de doctorat, Université de Franche-Comté. (Cité en page 117.)
- [Gibert, 1988] GIBERT, R.-J. (1988). *Vibrations des structures : interactions avec les fluides, sources d'excitation aléatoires*. Eyrolles, Paris. (Cité en pages 10, 22, 26 et 29.)
- [Gibert, 2005] GIBERT, R.-J. (2005). Interaction fluide-structure vibrante. *Techniques de l'ingénieur - Applications en mécanique physique*, (ref. article : af5250). (Cité en page 9.)

- [Guevel, 2016] GUEVEL, Y. (2016). *Méthodes numériques adaptées à la résolution des équations de Navier-Stokes*. Thèse de doctorat, Université Bretagne-Sud, Lorient. (Cité en pages 57, 58 et 59.)
- [Guevel et al., 2018] GUEVEL, Y., ALLAIN, T., GIRAULT, G. et CADOU, J. M. (2018). Numerical bifurcation analysis for 3-dimensional sudden expansion fluid dynamic problem. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 87(1):1–26. (Cité en pages 56, 59, 71 et 155.)
- [Guevel et al., 2011] GUEVEL, Y., BOUTYOUR, H. et CADOU, J. M. (2011). Automatic detection and branch switching methods for steady bifurcation in fluid mechanics. *Journal of Computational Physics*, 230(9):3614–3629. (Cité en page 3.)
- [Guevel et al., 2015] GUEVEL, Y., GIRAULT, G. et CADOU, J. M. (2015). Numerical comparisons of high-order nonlinear solvers for the transient Navier-Stokes equations based on homotopy and perturbation techniques. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 289:356–370. (Cité en page 82.)
- [Hamdaoui et al., 2016] HAMDAOUI, M., AKOUSSAN, K. et DAYA, E. M. (2016). Comparison of non-linear eigensolvers for modal analysis of frequency dependent laminated visco-elastic sandwich plates. *Finite Elements in Analysis and Design*, 121:75–85. (Cité en pages 78 et 79.)
- [Han et al., 2017] HAN, F., WANG, C. et HU, A. (2017). Numerical investigation of wave-induced vibrations and their effect on the fatigue damage of container ships. *Ocean Engineering*, 142:245–258. (Cité en page 13.)
- [Hetmaniuk et al., 2012] HETMANIUK, U., TEZAUER, R. et FARHAT, C. (2012). Review and assessment of interpolatory model order reduction methods for frequency response structural dynamics and acoustic problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, (90):1636–1662. (Cité en page 25.)
- [Hovnanian, 2012] HOVNANIAN, J. (2012). *Méthode de frontières immergées pour la mécanique des fluides : application à la simulation de la nage*. Thèse de doctorat, Université de Bordeaux 1. (Cité en page 10.)
- [IFFSTAR, 2014] IFFSTAR (2014). Quelles Solutions face au bruit en milieu urbain? (Cité en page 1.)
- [Jacobi, 1846] JACOBI, C. (1846). Ueber ein leichtes Verfahren, die in der Theorie der Sacularstörungen vorkommenden Gleichungen numerisch aufzulösen. *J. Reine Angew. Math.*, pages 51–94. (Cité en page 45.)
- [Jawadi et al., 2013] JAWADI, A., BOUTYOUR, H. et CADOU, J. M. (2013). Asymptotic numerical method for steady flow of power-law fluids. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 202:22–31. (Cité en pages 56, 57 et 155.)
- [Kamakoti et Shyy, 2004] KAMAKOTI, R. et SHYY, W. (2004). Fluid-structure interaction for aeroelastic applications. *Progress in Aerospace Sciences*, 40(8):535–558. (Cité en page 10.)
- [Kolaei et al., 2017] KOLAEI, A., RAKHEJA, S. et RICHARD, M. J. (2017). Coupled multimodal fluid-vehicle model for analysis of anti-slosh effectiveness of longitudinal baffles in a partially-filled tank vehicle. *Journal of Fluids and Structures*, 70:519–536. (Cité en pages 1 et 10.)

- [Kovalevsky, 2011] KOVALEVSKY, L. (2011). *La théorie variationnelle des rayons complexes version Fourier : application aux problèmes tridimensionnels de vibro-acoustique*. Thèse de doctorat, Cachan, Ecole normale supérieure. (Cité en page 12.)
- [Krasnobrizha, 2015] KRASNOBRIZHA, A. (2015). *Modélisation des mécanismes d'hystérésis des composites tissés à l'aide d'un modèle collaboratif élasto-plastique endommageable à dérivées fractionnaires*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale Nantes. (Cité en page 17.)
- [Kublanovskaya, 1962] KUBLANOVSKAYA, V. (1962). On some algorithms for the solution of the complete eigenvalue problem. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1(3):637–657. (Cité en page 45.)
- [Ladevèze, 1996] LADEVÈZE, P. (1996). A new computational approach for structure vibrations in the medium frequency range. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences Paris*, 322(12): 849–856. (Cité en page 12.)
- [Ladevèze et al., 2001] LADEVÈZE, P., ARNAUD, L., ROUCH, P. et BLANZÉ, C. (2001). The variational theory of complex rays for the calculation of medium-frequency vibrations. *Engineering Computations*, 18(12):193–214. (Cité en page 12.)
- [Landier, 1993] LANDIER, J. (1993). *Modélisation et étude expérimentale des propriétés amortissantes des tôles sandwich*. Thèse de doctorat, Université de Metz. (Cité en pages 18, 86, 91, 161 et 162.)
- [Larbi et al., 2012] LARBI, W., DEÛ, J. F. et OHAYON, R. (2012). Finite element formulation of smart piezoelectric composite plates coupled with acoustic fluid. *Composite Structures*, 94(2):501–509. (Cité en page 158.)
- [Larbi et al., 2016a] LARBI, W., DEÛ, J. F. et OHAYON, R. (2016a). Finite element reduced order model for noise and vibration reduction of double sandwich panels using shunted piezoelectric patches. *Applied Acoustics*, 108:40–49. (Cité en pages 14, 116 et 157.)
- [Larbi et al., 2016b] LARBI, W., DEÛ, J. F. et OHAYON, R. (2016b). Vibroacoustic analysis of double-wall sandwich panels with viscoelastic core. *Computers and Structures*, 174:92–103. (Cité en pages 13, 25 et 158.)
- [Leblond et al., 2009] LEBLOND, C., IAKOVLEV, S. et SIGRIST, J.-F. (2009). A fully elastic model for studying submerged circular cylindrical shells subjected to a weak shock wave. *Mécanique and Industries*, 10(3-4):275–284. (Cité en page 10.)
- [Lee et al., 2017] LEE, K., HUQUE, Z., KOMMALAPATI, R. et HAN, S.-E. (2017). Fluid-structure interaction analysis of NREL phase VI wind turbine : Aerodynamic force evaluation and structural analysis using FSI analysis. *Renewable Energy*, 113:512–531. (Cité en page 10.)
- [Lehoucq et al., 1998] LEHOUCQ, R. B. R. B., SORENSEN, D. C. D. C., YANG, C. C. et SOCIETY FOR INDUSTRIAL AND APPLIED MATHEMATICS. (1998). *ARPACK users' guide : solution of large-scale eigenvalue problems with implicitly restarted Arnoldi methods*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM, 3600 Market Street, Floor 6, Philadelphia, PA 19104). (Cité en pages 47 et 48.)
- [Lesueur, 1988] LESUEUR, C. (1988). *Rayonnement acoustique des structures*. Eyrolles. (Cité en page 10.)

- [L'Excellent et Uçar, 2011] L'EXCELLENT, J. et UÇAR, B. (2011). CR07 - Sparse Matrix Computations - Cours de Matrices Creuses. <https://graal.ens-lyon.fr/~bucar/CR07/linear-algebra-basics.pdf>. Consulté le 18 septembre 2018. (Cité en page 108.)
- [Liberge, 2008] LIBERGE, E. (2008). *Modèles réduits obtenus par la méthode de POD-Galerkin pour les problèmes d'interaction fluide-structure*. Thèse de doctorat, Université de La Rochelle. (Cité en page 116.)
- [Lopez-Guerra et Solares, 2014] LOPEZ-GUERRA, E. A. et SOLARES, S. D. (2014). Modeling viscoelasticity through spring-dashpot models in intermittent-contact atomic force microscopy. *Beilstein Journal of Nanotechnology*, 5(1):2149–2163. (Cité en page 15.)
- [Lülf et al., 2013] LÜLF, F. A., TRAN, D. M. et OHAYON, R. (2013). Reduced bases for non-linear structural dynamic systems : A comparative study. *Journal of Sound and Vibration*, 332(15):3897–3921. (Cité en page 117.)
- [Lurton et Antoine, 2007] LURTON, X. et ANTOINE, L. (2007). Analyse des risques pour les mammifères marins liés à l'emploi des méthodes acoustiques en océanographie. Rapport technique, IFREMER. (Cité en pages 13 et 150.)
- [Lyon et al., 1995] LYON, R. H., DEJONG, R. G. et HECKL, M. (1995). Theory and Application of Statistical Energy Analysis, Seconde Édition. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 98(6):3021–3021. (Cité en page 12.)
- [Lyon et Maidanik, 1962] LYON, R. H. et MAIDANIK, G. (1962). Power Flow between Linearly Coupled Oscillators. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 34(5):623–639. (Cité en page 12.)
- [Maess et Gaul, 2006] MAESS, M. et GAUL, L. (2006). Substructuring and model reduction of pipe components interacting with acoustic fluids. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 20(1):45–64. (Cité en pages 48 et 81.)
- [Mahmoudi et al., 2018] MAHMOUDI, S., KERVOELEN, A., ROBIN, G., DUIGOU, L., DAYA, E. M. et CADOU, J. M. (accepté en 2018). Experimental and numerical investigation of the damping of flax-epoxy composite plates. *Composite Structures*. (Cité en pages 14 et 159.)
- [Mallardo et al., 2012] MALLARDO, V., ALIABADI, M., BRANCATI, A. et MARANT, V. (2012). An accelerated BEM for simulation of noise control in the aircraft cabin. *Aerospace Science and Technology*, 23(1):418–428. (Cité en pages 13 et 150.)
- [Mallil et al., 2000] MALLIL, E., LAHMAM, H., DAMIL, N. et POTIER-FERRY, M. (2000). An iterative process based on homotopy and perturbation techniques. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190(13):1845–1858. (Cité en pages 79, 82, 83, 86 et 87.)
- [Marine Nationale, 2015] Marine Nationale (2015). Furtivité : les sous-marins. <https://www.defense.gouv.fr/marine/actu-marine/furtivite-les-sous-marins>. Consulté le 15 septembre 2018. (Cité en page 1.)
- [Medale et Cochelin, 2015] MEDALE, M. et COCHELIN, B. (2015). High performance computations of steady-state bifurcations in 3D incompressible fluid flows by Asymptotic Numerical Method. *Journal of Computational Physics*, 299:581–596. (Cité en page 138.)

- [Mellado et Rodríguez, 2001] MELLADO, M. et RODRÍGUEZ, R. (2001). Efficient solution of fluid-structure vibration problems. *Applied Numerical Mathematics*, 36(4):389–400. (Cité en page 10.)
- [Monnier, 2018] MONNIER, A. (2018). *Calcul par la Méthode Asymptotique Numérique des instabilités en interaction fluide-structure*. Thèse de doctorat, Université de Bretagne-Sud. (Cité en page 3.)
- [Morand et Ohayon, 1992] MORAND, H. J.-P. et OHAYON, R. (1992). *Interactions fluides-structures*. Masson. (Cité en pages 3, 20, 22, 26, 29, 32, 33 et 35.)
- [Moreau, 2007] MOREAU, A. (2007). *Identification de propriétés viscoélastiques de matériaux polymères par mesures de champs de réponses en fréquence de structures*. Thèse de doctorat, INSA Rouen. (Cité en pages 15 et 16.)
- [Najah et al., 1998] NAJAH, A., COCHELIN, B., DAMIL, N. et POTIER-FERRY, M. (1998). A critical review of asymptotic numerical methods. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 5(1):31–50. (Cité en page 51.)
- [Ohayon, 2001] OHAYON, R. (2001). Reduced symmetric models for modal analysis of internal structural-acoustic and hydroelastic-sloshing systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190(24-25):3009–3019. (Cité en pages 1, 10, 116 et 157.)
- [Ozdemir et al., 2010] OZDEMIR, Z., SOULI, M. et FAHJAN, Y. M. (2010). Application of nonlinear fluid-structure interaction methods to seismic analysis of anchored and unanchored tanks. *Engineering Structures*, 32(2):409–423. (Cité en page 10.)
- [Padé, 1892] PADÉ, H. (1892). Sur la représentation approchée d’une fonction par des fractions rationnelles. *Annales scientifiques de l’École normale supérieure*, 9:3–93. (Cité en pages 51 et 123.)
- [Païdoussis et al., 2011] PAÏDOUSSIS, M. P., PRICE, S. J. et DE LANGRE, E. (2011). *Fluid-Structure Interactions*. University Press, Cambridge, New York. (Cité en pages 1 et 10.)
- [Panda, 2016] PANDA, K. C. (2016). Dealing with Noise and Vibration in Automotive Industry. *Procedia Engineering*, 144:1167–1174. (Cité en page 13.)
- [Philippe et Saad, 2008] PHILIPPE, B. et SAAD, Y. (2008). Calcul des valeurs propres. *Techniques de l’ingénieur Méthodes numériques*, (ref. article : af1224). (Cité en page 47.)
- [Pirk et al., 2017] PIRK, R., JONCKHEERE, S., PLUYMERS, B. et DESMET, W. (2017). Vibro-acoustic modeling and validation using viscoelastic material. *Comptes Rendus Mécanique*, 345(3):208–220. (Cité en page 25.)
- [Press et al., 1992] PRESS, W. H., TEUKOLSKY, S., VETTERLING, W. et FLANNERY, B. (1992). *Numerical recipes in Fortran 77 : the art of scientific computing, second edition*. Cambridge University Press. (Cité en page 51.)
- [Quarteroni et al., 2007] QUARTERONI, A., CACCO, R. et SALERI, F. (2007). *Méthodes Numériques - Algorithmes, analyse et applications*. Springer Milan, Milano. (Cité en pages 44, 46, 47, 75, 80 et 156.)

- [Rao, 2003] RAO, M. D. (2003). Recent applications of viscoelastic damping for noise control in automobiles and commercial airplanes. *Journal of Sound and Vibration*, 262(3):457–474. (Cité en page 10.)
- [Razafindralandy et Hamdouni, 2013] RAZAFINDRALANDY, D. et HAMDOUNI, A. (2013). Time integration algorithm based on divergent series resummation, for ordinary and partial differential equations. *Journal of Computational Physics*, 236(1):56–73. (Cité en page 76.)
- [Rikards *et al.*, 1993] RIKARDS, R., CHATE, A. et BARKANOV, E. (1993). Finite element analysis of damping the vibrations of laminated composites. *Computers and Structures*, 47(6):1005–1015. (Cité en pages 13 et 79.)
- [Riou, 2004] RIOU, H. (2004). *Sur le calcul des vibrations moyennes et hautes fréquences par la Théorie Variationnelle des Rayons Complexes*. Thèse de doctorat, Ecole Normale Supérieure de Cachan. (Cité en page 12.)
- [Rouleau, 2013] ROULEAU, L. (2013). *Modélisation vibro-acoustique de structures sandwich munies de matériaux visco-élastiques*. Thèse de doctorat, Conservatoire national des arts et métiers - CNAM. (Cité en pages 10, 13, 15, 16 et 17.)
- [Rutishauser et H., 1955] RUTISHAUSER et H. (1955). Une méthode pour la détermination des valeurs propres d'une matrice. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 240:34–36. (Cité en page 45.)
- [Salençon, 2009] SALENÇON, J. (2009). *Viscoélasticité pour le calcul des structures*. Éd. de l'École polytechnique. (Cité en page 14.)
- [Schotte, 2001] SCHOTTE, J.-S. (2001). *Influence de la gravité sur les vibrations linéaires d'une structure élastique partiellement remplie par un liquide incompressible*. Thèse de doctorat, Conservatoire National des Arts et Métiers - CNAM. (Cité en page 10.)
- [Schreiber, 2008] SCHREIBER, K. (2008). *Nonlinear Eigenvalue Problems : Newton-type methods and monlinear Rayleigh functionals*. Thèse de doctorat, Technischen Universität Berlin. (Cité en page 79.)
- [Sigrist, 2011] SIGRIST, J.-F. (2011). *Interaction fluide-structure : analyse vibratoire par éléments finis*. Ellipses. (Cité en pages 9, 12, 13 et 22.)
- [Sigrist, 2017] SIGRIST, J. F. (2017). Calculs couplés fluide-structure Méthodes en vibroacoustique de structures immergées. *Techniques de l'ingénieur Calcul et modélisation en mécanique*. (Cité en page 12.)
- [Sigrist *et al.*, 2006] SIGRIST, J. F., BROU, D. et LAINÉ, C. (2006). Dynamic analysis of a nuclear reactor with fluid-structure interaction. Part I : Seismic loading, fluid added mass and added stiffness effects. *Nuclear Engineering and Design*, 236(23):2431–2443. (Cité en page 10.)
- [Sigrist *et al.*, 2007] SIGRIST, J. F., BROU, D. et LAINÉ, C. (2007). Dynamic analysis of a nuclear reactor with fluid-structure interaction. Part II : Shock loading, influence of fluid compressibility. *Nuclear Engineering and Design*, 237(3):289–299. (Cité en page 10.)
- [Sigrist et Garreau, 2005] SIGRIST, J. F. et GARREAU, S. (2005). Calculs couplés fluide/structure en formulation pression/déplacement axisymétrique harmonique. *Revue Européenne des Éléments Finis*, 14(8):1015–1032. (Cité en pages 25 et 29.)

- [Sliva *et al.*, 2010] SLIVA, G., BREZILLON, A., CADOU, J. M. et DUIGOU, L. (2010). A study of the eigenvalue sensitivity by homotopy and perturbation methods. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 234(7):2297–2302. (Cité en page 82.)
- [Souli et Shahrour, 2012] SOULI, M. et SHAHROUR, I. (2012). Arbitrary Lagrangian Eulerian formulation for soil structure interaction problems. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 35:72–79. (Cité en page 10.)
- [Tallet *et al.*, 2016] TALLET, A., ALLERY, C. et LEBLOND, C. (2016). Optimal flow control using a POD-based reduced-order model. *Numerical Heat Transfer, Part B : Fundamentals*, 70(1):1–24. (Cité en page 116.)
- [Tezduyar et Osawa, 2001] TEZDUYAR, T. et OSAWA, Y. (2001). Fluid-structure interactions of a parachute crossing the far wake of an aircraft. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191(6-7):717–726. (Cité en page 10.)
- [Trindade *et al.*, 2001] TRINDADE, M. A., BENJEDDOU, A. et OHAYON, R. (2001). Finite element modelling of hybrid active-passive vibration damping of multilayer piezoelectric sandwich beams-part I : Formulation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 51(7):835–854. (Cité en page 14.)
- [Van Eeckhout, 2015] VAN EECKHOUT, L. (2015). Paris part en guerre contre le bruit. *Le Monde*. (Cité en page 1.)
- [Vasques *et al.*, 2010] VASQUES, C. M. a., MOREIRA, R. a. S. et DIAS RODRIGUES, J. (2010). Viscoelastic Damping Technologies-Part I : Modeling and Finite Element Implementation. *Journal of advanced Research in Mechanical Engineering*, 1(2):76–95. (Cité en page 79.)
- [Voss, 2004] VOSS, H. (2004). An Arnoldi Method for Nonlinear Eigenvalue Problems. *BIT Numerical Mathematics*, 44(2):387–401. (Cité en page 79.)
- [Voss, 2007] VOSS, H. (2007). A Jacobi-Davidson method for nonlinear and nonsymmetric eigenproblems. *Computers and Structures*, 85(17-18):1284–1292. (Cité en page 79.)
- [Wei *et al.*, 2012] WEI, Y.-s., WANG, Y.-s., CHANG, S.-p. et FU, J. (2012). Numerical prediction of propeller excited acoustic response of submarine structure based on CFD, FEM and BEM. *Journal of Hydrodynamics, Ser. B*, 24(2):207–216. (Cité en pages 10 et 13.)
- [Yan *et al.*, 2016] YAN, J., KOROBENKO, A., DENG, X. et BAZILEVS, Y. (2016). Computational free-surface fluid-structure interaction with application to floating offshore wind turbines. *Computers and Fluids*, 141:155–174. (Cité en page 10.)
- [Yao *et al.*, 2017] YAO, H., ZHANG, H., LIU, H. et JIANG, W. (2017). Numerical study of flow-excited noise of a submarine with full appendages considering fluid structure interaction using the boundary element method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 77:1–9. (Cité en pages 10, 13 et 150.)
- [Zahrouni, 1998] ZAHROUNI, H. (1998). *Méthode asymptotique numérique pour les coques en grandes rotations*. Thèse de doctorat, Université de Metz. (Cité en page 83.)
- [Zienkiewicz *et al.*, 2013] ZIENKIEWICZ, O. C., TAYLOR, R. L. R. L. et ZHU, J. Z. (2013). *Finite element method : its basis and fundamentals*. Butterworth-Heinemann. (Cité en pages 11 et 20.)



**Titre :** Calcul des vibrations non linéaires d'une structure composite en contact avec un fluide par la Méthode Asymptotique Numérique - Application à la vibroacoustique.

**Mots clés :** Vibroacoustique - Couplage fluide/structure - Viscoélasticité - Méthode Asymptotique Numérique - Méthodes numériques de perturbation et de continuation - Analyse aux valeurs propres

**Résumé :** La maîtrise du bruit et des vibrations est un objectif fréquemment rencontré dans le domaine industriel. Qu'il s'agisse de questions de confort ou de sécurité, les domaines d'applications sont nombreux et variés : transport, BTP, ingénierie civile et militaire...

Dans cette thèse, un problème de vibroacoustique interne avec couplage fluide-structure est étudié. Il s'agit d'une cavité remplie de fluide dont les parois sont constituées d'une structure sandwich viscoélastique. Les difficultés numériques associées à ce modèle portent sur la non linéarité du matériau et sur les propriétés des opérateurs matriciels manipulés (conditionnement, non symétrie).

Le calcul des vibrations du système dissipatif couplé nécessite une valeur initiale, choisie comme la solution du problème conservatif. Cette solution n'étant pas aisée à déterminer, deux solveurs aux valeurs propres basés sur la Méthode Asymptotique

Numérique (MAN) sont proposés pour résoudre le problème des vibrations libres du système conservatif. Associant des techniques de perturbation d'ordre élevé et de continuation, la MAN permet de transformer le problème non linéaire de départ en une suite de problèmes linéaires, plus simples à résoudre.

Les solutions obtenues sont ensuite utilisées comme point initial pour déterminer la réponse libre du système dissipatif. Un solveur de Newton d'ordre élevé, basé sur les techniques d'homotopie et de perturbation est développé pour résoudre ce problème. Enfin, le régime forcé est étudié.

Pour toutes les configurations envisagées, les résultats obtenus mettent en évidence des performances numériques améliorées par rapport aux méthodes classiquement utilisées (Arpack, Newton...).

**Title :** Calculation of non-linear vibrations of a composite structure in contact with a fluid by the Asymptotic Numerical Method - Application to vibroacoustics.

**Keywords :** Vibroacoustics - Fluid-structure interaction - Viscoelasticity - Asymptotic Numerical Method - Numerical perturbation and continuation methods - Eigenproblem and eigenvalue solvers

**Abstract:** Noises and vibrations control is a common objective in the industrial field. Whether it is a question of comfort or safety, the fields of application are numerous and varied: transport, building, civil and military engineering...

In this thesis, a vibroacoustics interior problem with fluid-structure coupling is studied. A cavity filled of fluid whose walls are made of a sandwich viscoelastic structure is considered. The numerical difficulties associated with this model relate to the non-linearity of the viscoelastic material and the properties of the matrix operators used (conditioning, non-symmetry).

The calculation of the vibrations of the coupled dissipative system requires an initial value, chosen as the solution to the conservative problem.

Since this solution is difficult to determine, two eigenvalue algorithms based on the Asymptotic

Numerical Method (ANM) are proposed to solve the problem of free vibrations of the conservative system. Combining high order perturbation and continuation techniques, ANM transforms the initial non-linear problem into a set of linear problems that are easier to solve.

The solutions obtained are then used as the initial point to determine the free vibrations of the dissipative problem. A high order Newton solver, based on homotopy and perturbation techniques, is developed to solve this problem. Finally, the forced harmonic response of the damped system is computed.

For all the configurations tested, the results obtained show improved numerical performance compared to the methods conventionally used (Arpack solver, Newton algorithm...).