



Contribution à la commande temps réel des robots marcheurs. Application aux stratégies d'évitement des chutes

Jérémy Gastebois

► To cite this version:

Jérémy Gastebois. Contribution à la commande temps réel des robots marcheurs. Application aux stratégies d'évitement des chutes. Automatique / Robotique. Université de Poitiers, 2017. Français. NNT : 2017POIT2315 . tel-02077091

HAL Id: tel-02077091

<https://theses.hal.science/tel-02077091>

Submitted on 22 Mar 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

Pour l'obtention du grade de
Docteur de l'université de Poitiers
(Faculté des sciences fondamentales et appliquées)
(Diplôme National – Arrêté du 25 mai 2016)

École doctorale : Sciences et ingénierie en matériaux, mécanique, énergétique et
aéronautique

Secteur de recherche : Génie mécanique, productique, transport

Présentée par :

Jeremy GASTEBOIS

**Contribution à la commande temps réel des robots marcheurs
Application aux stratégies d'évitement des chutes**

Directeur de thèse : Saïd ZEGHLOUL

Encadrant : Antoine EON

Soutenue le 20 décembre 2017
Devant la Commission d'examen

Jury

Yannick Aoustin	Professeur, Université de Nantes	Rapporteur
Olivier Bruneau	Professeur, Université Paris Sud (Paris XI)	Rapporteur
Antoine Eon	Maitre de Conférence, Université de Poitiers	Examineur
Gérard Poisson	Professeur, Université d'Orléans	Examineur
Pascal Seguin	Maitre de Conférence, Université de Poitiers	Examineur
Saïd Zeghloul	Professeur, Université de Poitiers	Examineur

Résumé

Contribution à la commande temps réel des robots marcheurs Application aux stratégies d'évitement des chutes

Les grands robots marcheurs sont des systèmes mécatroniques poly-articulés complexes qui cristallisent la volonté humaine de conférer leurs capacités à des artefacts, l'une d'entre elles étant la locomotion bipède, et plus particulièrement la conservation de l'équilibre face à des perturbations extérieures. Cette thèse propose un stabilisateur postural ainsi que sa mise en œuvre sur le système locomoteur BIP 2000.

Ce robot anthropomorphique possède quinze degrés de libertés actionnés par moteurs électriques et a reçu un automate ainsi que des variateurs industriels lors de la mise à jour réalisée dans le cadre de ces travaux. Un contrôleur a été conçu et implémenté en suivant les principes de la programmation orientée objet afin de fournir une modularité qui s'inspire de la symétrie naturelle des humanoïdes. Cet aspect a conduit à l'élaboration d'un ensemble d'outils mathématiques permettant de calculer l'ensemble des modèles d'un robot composé de sous-robots dont on connaîtrait déjà les modèles. Le contrôleur permet notamment à la machine de suivre des trajectoires calculées hors ligne par des algorithmes de génération de marches dynamiques ainsi que de tester le stabilisateur postural.

Ce dernier consiste en un contrôle en position du robot physique par la consigne d'un robot virtuel de modèle dégradé, commandé en effort, soumis à des champs électrostatiques contraignant sa configuration articulaire. Les tests effectués ont permis de montrer la faisabilité de la méthode.

***Mots clés :** modèle dynamique inverse, robot humanoïde, programmation orientée objet, équilibre postural, automatique*

Big walking robots are complex multi-joints mechanical systems which crystallize the human will to confer their capabilities on artefacts, one of them being the bipedal locomotion and more especially the balance keeping against external disturbances. This thesis proposes a balance stabilizer under operating conditions displayed on the locomotor system BIP 2000.

This anthropomorphic robot has got fifteen electrically actuated degree of freedom and an Industrial controller. A new software has been developed with an object-oriented programming approach in order to propose the modularity required by the emulated and natural human symmetry. This consideration leads to the development of a mathematical tool allowing the computation of every modelling of a serial robot which is the sum of multiple sub robots with already known modelling. The implemented software also enables the robot to run offline generated dynamic walking trajectories and to test the balance stabilizer.

We explore in this thesis the feasibility of controlling the center of gravity of a multibody robotic system with electrostatic fields acting on its virtual counterpart in order to guarantee its balance. Experimental results confirm the potential of the proposed approach.

***Key words:** Inverse dynamic model, humanoid robot, object oriented programming, balance, automation*

Remerciements

Mes travaux de thèse ont été réalisés au sein du département Génie Mécanique et Systèmes Complexes de l'institut Pprime de Poitiers. Je tiens particulièrement à remercier Saïd Zeghloul (directeur du département GMSC de l'institut Pprime), mon directeur de thèse pour la liberté la plus totale qu'il a su me donner pour conduire mes travaux.

Je souhaite également remercier Antoine Eon pour son temps, sa patience, la qualité de nos échanges scientifiques et toutes les connaissances qu'il a apporté à ce travail.

Je voudrais exprimer ma gratitude aux deux rapporteurs de cette thèse, Mr Yannick Aoustin, professeur de l'Université de Nantes, et Olivier Bruneau, professeur de l'Université Paris Sud (Paris XI). Je remercie Gérard Poisson, professeur de l'Université d'Orléans et Pascal Seguin, maître de conférences de l'université de Poitiers d'avoir accepté de faire partie de mon jury de thèse.

Je remercie ici l'ensemble des braves de l'équipe ROBIOSS pour une ambiance de travail unique et agréable tout au long de la thèse.

Enfin, ma reconnaissance va à ma famille et en particulier à lilas pour son inestimable et indispensable soutien.

Table des matières

Résumé.....	i
Remerciements	ii
1 Introduction.....	1
1.1 Introduction générale sur le processus de développement des robots	1
1.2 Plateforme robotique.....	4
1.3 Motivations	4
1.4 Eléments de bibliographie.....	5
1.5 Contribution	8
1.6 Organisation du propos.....	8
2 Etude et mise en œuvre d'un stabilisateur postural sur une jambe anthropomorphe à 4 DDL.....	9
2.1 Contexte et objectifs	9
2.2 Convention DENAVIT-HARTENBERG modifiée et placement des repères pour décrire la géométrie des solides.....	10
2.3 Eléments de modélisation du démonstrateur à quatre degrés de liberté.....	12
2.3.1 Convention DHM	12
2.3.2 Modèle géométrique direct, jacobienne et modèle dynamique inverse.....	12
2.3.3 Modèle de transmission	14
2.4 Implémentation du contrôleur.....	19
2.4.1 Contexte et objectifs	19
2.4.2 Choix technologiques	19
2.4.3 Modélisation UML.....	21
2.5 Stratégie d'évitement des chutes : une jambe de robot humanoïde maintenue en équilibre par son image virtuelle dégradée soumise à des champs électrostatiques	24
2.5.1 Considérations sur l'état de l'art	24
2.5.2 Réflexion sur la stabilité posturale.....	25
2.5.3 Modèle virtuel du centre de gravité.....	26
2.5.4 Principe du stabilisateur postural.....	28
2.5.5 Mise en situation et éléments de définition	29
2.5.6 Construction du polygone de sustentation.....	31
2.5.7 Génération des plans supports des champs répulsifs.....	32
2.5.8 Evaluation de la distance entre le centre de gravité et les murs virtuels	35
2.5.9 Modélisation des champs répulsifs exercés par les murs virtuels sur le centre de gravité	36
2.5.10 Modélisation des champs attractifs	38
2.5.11 Schéma de synthèse.....	39

2.5.12	Eléments de simulation	40
2.6	Validations expérimentales	42
2.6.1	Mouvement de squat	42
2.6.2	Mouvement de marche à 360 mètres par heure	45
2.6.3	Réaction de la jambe à l'inclinaison du sol.....	47
2.7	Conclusions et perspectives	48
3	Considérations mathématiques sur le formalisme lagrangien pour la modélisation en robotique humanoïde : application pour la programmation orientée objet et la robotique modulaire	49
3.1	Introduction générale.....	49
3.2	Eléments de bibliographie.....	52
3.3	De l'importance des jacobiennes	53
3.4	Description géométrique des modèles composites.....	54
3.5	Jacobienne des modèles composites	55
3.5.1	Rappel et définitions : Jacobienne naturelle	55
3.5.2	Jacobienne au centre de gravité	56
3.5.3	Jacobienne d'un modèle composite.....	63
3.5.4	Jacobienne au centre de gravité et modèle composite	67
3.6	Matrice d'inertie.....	68
3.6.1	Matrice d'inertie et jacobienne au centre de gravité	69
3.6.2	Matrice d'inertie et jacobienne au centre de gravité et modèle composite	75
3.6.3	Matrice d'inertie et changement de repère base-distal	83
3.7	Matrice de Coriolis	83
3.8	Terme de gravité	84
3.8.1	Terme de gravité et jacobienne au centre de gravité et modèle composite : cas général.....	85
3.8.2	Terme de gravité et jacobienne au centre de gravité et modèle composite : application au 4R plan.....	86
3.9	Conclusions et perspectives	87
4	Conclusion générale et perspectives.....	88
5	Bibliographie.....	91
6	Annexes	98
6.1	Modèles géométriques composites	98
6.1.1	Modèle géométrique direct	98
6.1.2	Modèle géométrique direct et point de contact : exemple du centre de gravité	98
6.1.3	Modèle géométrique direct au centre de gravité et changement de repère base-distal	99
6.2	Jacobienne et modèle cinématique direct	100

6.2.1	Jacobienne de contact : exemple de la jacobienne au centre de gravité	100
6.2.2	Jacobienne d'un modèle composite.....	101
6.2.3	Jacobienne au centre de gravité et modèle composite	102
6.2.4	Jacobienne d'un changement de repère base-distal	104
6.2.5	Jacobienne au centre de gravité d'un changement de repère base-distal	107
6.3	Modèle dynamique inverse - Rappel et notation.....	109
6.4	Matrice d'inertie.....	111
6.4.1	Matrice d'inertie et jacobienne au centre de gravité	112
6.4.2	Matrice d'inertie et jacobienne au centre de gravité et modèle composite	113
6.4.3	Matrice d'inertie et changement de repère base-distal	114
6.5	Coriolis-Centrifuge.....	116
6.5.1	Rappel et notation.....	116
6.5.2	Coriolis-centrifuge : Matrice d'inertie et jacobienne au centre de gravité.....	117
6.5.3	Coriolis-centrifuge : Matrice d'inertie et jacobienne au centre de gravité et modèle composite	125
6.5.4	Coriolis-centrifuge : Matrice d'inertie et jacobienne au centre de gravité et changement de repère base-distal.....	132
6.6	Terme de gravité	135
6.6.1	Terme de gravité et jacobienne au centre de gravité et modèle composite.....	135
6.6.2	Terme de gravité et jacobienne au centre de gravité et changement de repère base-distal.....	135

1 Introduction

1.1 Introduction générale sur le processus de développement des robots

Les robots sont des systèmes mécatroniques complexes qui nécessitent pour leur mise en œuvre une expertise dans de nombreux domaines. En effet, la robotique est une discipline qui rassemble quatre sciences : la mécanique, l'automatique, l'électronique et l'informatique.

En robotique, il existe bien des façons de répondre à une problématique et cela quelle que soit la nature de cette dernière. La finalité sera invariablement la mise en œuvre d'un système robotisé conçu spécifiquement pour réaliser une tâche à même de résoudre la problématique.

Ce robot, avant d'être opérationnel, devra passer par plusieurs étapes lors de sa conception (Figure 1). De manière classique, ce processus commence (en cyan) par la définition d'un ensemble de fonctions principales et secondaires plus ou moins quantifiées, qui constituera, entre autres, le cahier des charges de la machine. C'est pendant cette phase que sont esquissés les grands principes qui régiront le comportement du robot et de manière plus générale la stratégie mise en place pour répondre à la problématique.

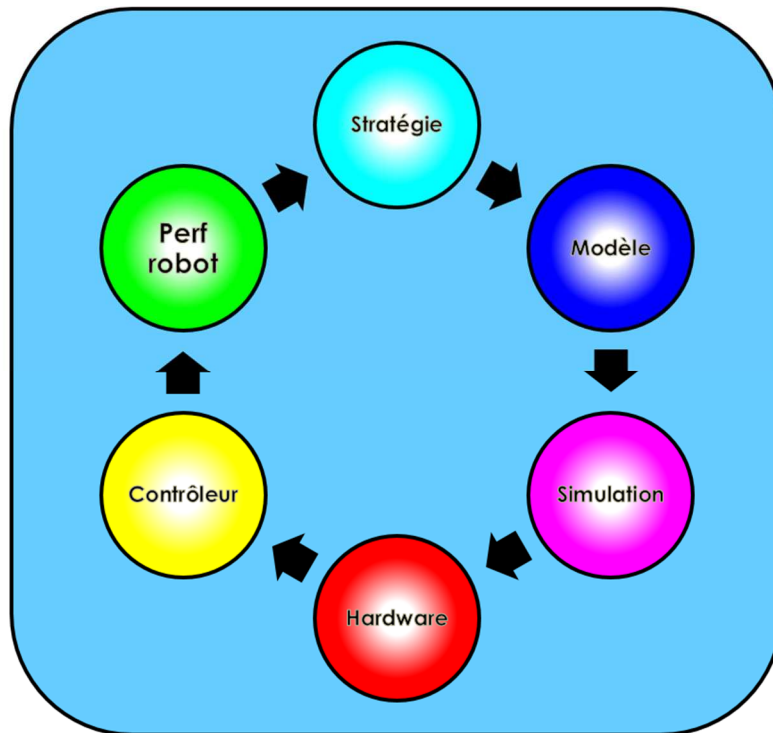


Figure 1: Approche classique de la résolution de problématique en robotique

On trouve ensuite une étape de modélisation qui consiste en une mathématisation du comportement du robot, traditionnellement sa dynamique.

Une fois que les modèles sont connus, on peut trouver une phase de simulation (magenta), souvent utilisée pour faire un prédimensionnement ou prérégler des lois de commande.

Il vient alors une étape de conception qui va concrétiser les considérations théoriques précédentes et ainsi donner au robot, un corps capable de remplir le rôle que l'on attend de lui.

Dès que la machine est assemblée, il faut encore câbler sa motorisation et son instrumentation afin de la raccorder au dispositif de commande et c'est alors que se construit le contrôleur du robot afin de lui conférer l'intelligence nécessaire à l'accomplissement de sa tâche.

L'étape finale consiste en une série de calibrations et de réglages du robot alors que ce dernier est en situation réelle afin de le rendre pleinement opérationnel. C'est durant cette phase qu'on cherchera à savoir si les performances de la machine sont satisfaisantes vis-à-vis de la stratégie établie lors de la première étape tout comme vis-à-vis de la problématique initiale. En effet un robot peut être performant vis-à-vis de son cahier des charges mais également se révéler incapable de donner satisfaction vis-à-vis de la problématique, surtout si cette dernière est complexe.

On a donc six étapes liées les unes aux autres et qui forment le processus de développement des robots. Ce processus est cyclique (Figure 1) et consiste à améliorer tout ou partie des étapes afin que le robot réponde aux besoins de la problématique.

Toutefois on constate que ce processus possède un défaut. En effet, chaque étape du processus de développement est généralement assurée par des spécialistes du métier en question et tendent donc à optimiser le robot dans les règles de l'art de leur discipline sans nécessairement prendre en compte les phases amont ou aval. C'est ce manque de vision globale quant au lien étroit qui existe entre toutes les disciplines de la robotique lorsqu'il est question de concevoir un robot qui nous a fait reconsidérer l'approche classique (Figure 2).

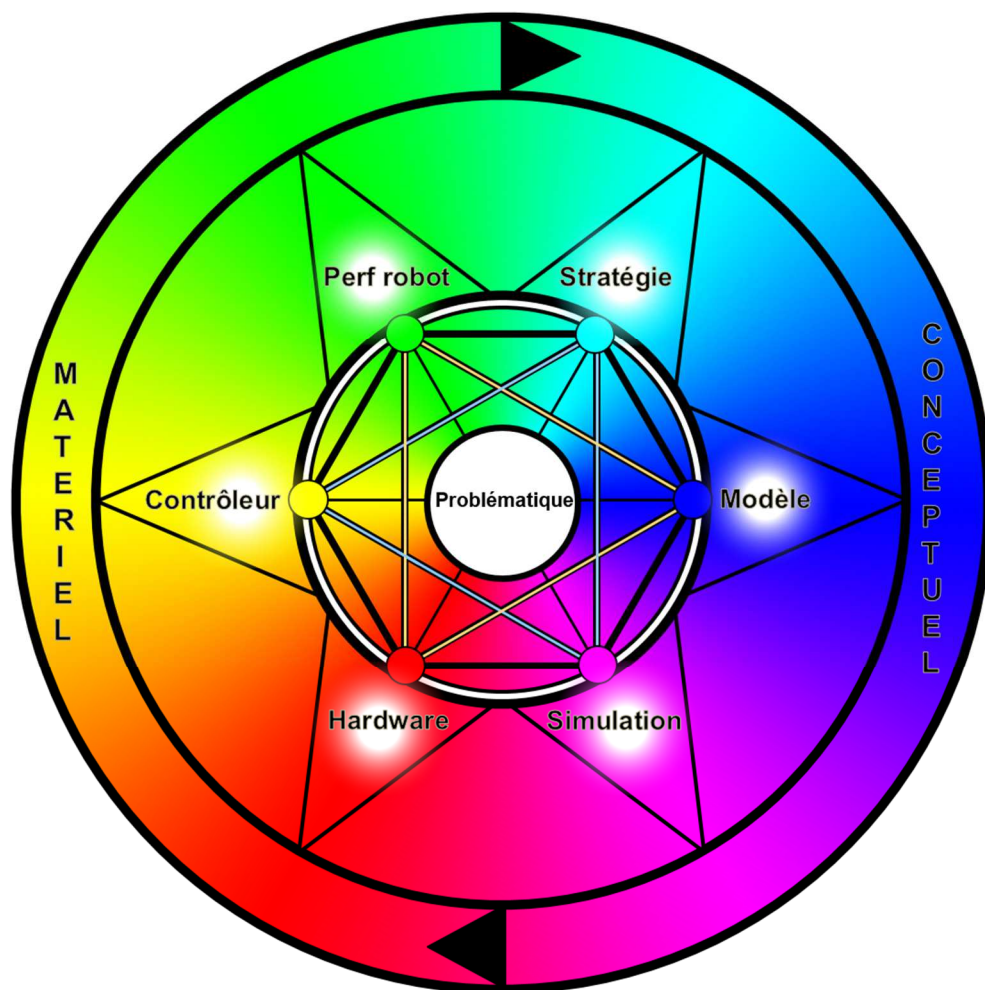


Figure 2: Décomposition d'une problématique par le prisme de la robotique

Avec cette nouvelle approche il n'y a plus de séparation entre les étapes, le processus devient complètement continu (représenté par le cercle chromatique) et sous-entend que l'optimisation d'une phase est faite en considérant l'ensemble des paramètres (représenté par le graphe connexe à sept sommets au milieu de la figure). Ce processus peut se scinder en deux sous-processus complémentaires, chacun d'eux constitué d'un triplet d'étapes consécutives. Les phases Stratégie, Modèle et Simulation forment le sous-processus conceptuel et théorique et les phases Hardware, Contrôleur et Perf robot constituent le sous-processus matériel et physique. Ainsi la faiblesse d'un robot, c'est-à-dire son incapacité à répondre à la problématique, est souvent liée à la faiblesse d'un sous-processus devant l'autre et est donc le résultat d'une phase qui ne s'harmonise pas correctement avec les autres. Et comme tout processus, il est telle une chaîne : elle n'a la solidité que de son maillon le plus faible.

C'est avec cette approche que nous avons abordé la problématique de la thèse qui porte sur la stabilité posturale des grands robots marcheurs anthropomorphes et plus particulièrement sur leurs stratégies d'évitement des chutes.

On entend par « stratégies d'évitement des chutes » tous les protocoles mis en place par une entité susceptible de chuter afin de réagir à une perturbation de son équilibre postural. On différencie ici les stratégies globales, consistant à ne pas se rapprocher d'une situation peu propice au maintien de la stabilité posturale, des stratégies locales mises en œuvre lorsqu'il y a perception de perturbation. Les développements de la présente étude se porteront exclusivement sur des stratégies locales d'évitement des chutes.

Les stratégies d'évitement des chutes (phase cyan, Figure 2) sont donc un ensemble de comportements qui doit se refléter dans les lois de commande des robots marcheurs (phases magenta et jaune, Figure 2). Plus les tâches sont complexes, plus les lois de commande le sont, et le temps de calcul nécessaire pour les réaliser augmente d'autant plus (optimisation du triplet de phase cyan-jaune-vert, Figure 2). C'est dans ces lois que se retrouvent également les considérations d'optimisation de certains critères comme la consommation énergétique, la sollicitation de l'actionneur ou encore les diverses marges de stabilité notamment posturales (typiquement lié à des processus d'optimisation de la phase de simulation, cette dernière étant le reflet virtuel de l'ensemble des autres phases cf. Figure 2).

On voit ici l'importance de considérer le développement d'un système robotisé dans sa globalité étant donné les connexions ainsi que les interdépendances qui existent entre chaque aspect. C'est d'autant plus vrai pour les robots humanoïdes qui doivent émuler la complexité et l'efficacité des humains. Ce sont donc des systèmes poly-articulés anthropomorphes qui présentent toutes les complications liées aux systèmes robotisés munis d'un grand nombre de degrés de liberté actionnés, à savoir une augmentation critique de la charge de calcul nécessaire à leur bon fonctionnement ainsi que des ressources en termes d'actionnement potentiellement limitées par les choix technologiques qui les régissent (optimisation du doublet rouge-vert, Figure 2). On peut se pencher ici sur le lien qui existe entre la qualité et la complexité d'un modèle et le coût en temps de calcul qu'il implique. En effet, on prendra garde ici à ne pas tomber dans l'excès de modélisation car la finalité reste l'efficacité opérationnelle sur un système temps réel. C'est alors que le recours à des modèles dégradés trouve toute son importance car il est le juste milieu entre un temps de calcul raisonnable et un modèle simplifié qui décrit suffisamment bien la réalité (optimisation du doublet bleu-jaune, Figure 2).

1.2 Plateforme robotique

Le robot humanoïde BIP (Figure 3) [1] [2] [3] est la plateforme expérimentale qui donne corps aux développements effectués dans cette thèse. Il s'agit à l'origine d'une collaboration entre l'INRIA Rhône-Alpes et le LMS de Poitiers qui remonte au milieu des années 90. Premier grand robot marcheur français, il était équipé de 15 degrés de liberté actionnés par motoréducteurs électriques pour une masse totale de 105 kilogrammes. Il est également doté de potentiomètres ainsi que de capteurs d'effort uni-axiaux au niveau des pieds. La plateforme expérimentale qui servira de support de validation aux développements présentés par la suite a subi une vaste campagne de mise à jour. En effet, il dispose d'un tout nouveau contrôleur industriel B&R dédié aux moteurs, du même constructeur, qui équipent dorénavant le robot.



Figure 3: BIP 2000

1.3 Motivations

Les grands robots marcheurs représentent l'avant-garde de la robotique ainsi qu'une forme de finalité telle qu'elle fut imaginée à l'origine par Isaac Asimov. Ces machines concentrent un ensemble extrêmement vaste de thématiques qui rend leur étude et leur mise en œuvre d'autant plus complexe. Ce travail se propose de contribuer à l'état de l'art sur la commande de la stabilité posturale des grands robots marcheurs grâce à un ensemble d'algorithmes à même d'être implémentés dans un environnement temps réel.

On se propose de comprendre le fonctionnement des mécanismes à l'œuvre dans le maintien de l'équilibre chez les humains afin d'en extraire les grands principes, avant de les traduire mathématiquement dans un premier temps, puis de les implémenter dans un contrôleur temps réel sur une véritable plateforme robotique dans un second temps. Et cela afin, non seulement de valider les principes fondamentaux à l'œuvre chez les humains, mais aussi de donner vie et mobilité à la machine. En effet, les robots marcheurs se devront d'être en mesure d'évoluer dans des environnements accessibles voire inaccessibles à l'humain et donc de s'adapter à toutes sortes de terrains et de perturbations extérieures requérant un sens aigu de l'équilibre. La mise en œuvre d'un tel sens représente un défi théorique et technique des plus intéressants.

1.4 Éléments de bibliographie

Le problème de la stabilité posturale chez les humanoïdes, qu'ils soient synthétiques ou organiques, nécessite d'être appréhender avec une connaissance approfondie des questions de cinématique, dynamique et de contrôle. On se propose de contextualiser cette présente étude à travers un ensemble de thématiques qui font intervenir cette stabilité posturale.

On commencera par évoquer les travaux concernant les différentes stratégies mises en place par les humanoïdes afin de recouvrer leur équilibre. Hofmann [4] évoque trois de ces stratégies basiques, en avançant que la clé de l'équilibre repose sur le contrôle du mouvement horizontal du centre de gravité. Pour des perturbations de faible amplitude, une simple modification de la position du centre de pression permet de changer les forces tangentielles de la réaction du sol ce qui affecte directement le mouvement du centre de gravité. En raison de la nature du centre de pression qui se trouve localisé dans les limites de la surface des pieds, une seconde stratégie est mise en place. Elle consiste à créer un moment au niveau du centre de gravité ce qui a pour but d'augmenter temporairement l'amplitude des forces tangentielles. Cela conduit à la définition d'un nouveau point de référence au sol, une sorte de centre de pression amélioré appelé « centroidal moment pivot ». La troisième stratégie évoquée est utilisée pour rejeter des perturbations de grandes amplitudes. Elle consiste à faire un pas, ce qui a pour effet d'accroître ou de déplacer la surface accessible au centre de pression et par extension au « centroidal moment pivot ».

A l'instar D'Hofmann, plusieurs chercheurs ont eu recours à des modèles simplifiés pour représenter la dynamique complexe propre aux humanoïdes. Certains se focalisent sur des modèles filaires avec une répartition de masse aux centres de gravité [5] [6] [7]. Le plus célèbre d'entre eux est le désormais classique Linear Inverted Pendulum Model (LIPM), qui est un modèle linéaire dû aux hypothèses qui le caractérisent : l'altitude du centre de gravité est constante et il n'y a pas de moments angulaires. Parfois ces modèles à base de masses ponctuelles sont modifiés pour inclure des termes inertiels qui rendent compte de ces moments angulaires précédemment supprimés ce qui permet d'étendre significativement les capacités du système [8] [9] [10] [11] [12]. Sugihara, quant à lui, détermine des domaines de stabilité au sein d'un stabilisateur plutôt que de considérer les limites de ce dernier [13].

Les pendules inversés et plus particulièrement les doubles pendules inversés ont longtemps été utilisés comme modèle pour l'équilibre postural [14]. Ces modèles sont encastres au sol et chaque articulation est actionnée ce qui rend la dynamique assez immédiate. Une exception notable est l'Acrobot [15] qui maintient son équilibre malgré l'absence d'actionnement au niveau de la cheville. De nombreuses techniques de commande ont été développées au cours des années pour commander l'équilibre des pendules inversés avec notamment le feedback linéaire [16], le contrôle intégral [17] [18] et l'optimisation [19]. Les modèles de pendules inversés ont également été utilisés pour optimiser les mouvements de chute afin de minimiser les impacts [20]. D'autres modèles simples comme les modèles Springs-Loaded Inverted Pendulum (SLIP) ont notamment été utilisés pour modéliser la marche dynamique et la course chez les humains [21] [22].

L'utilisation des pendules inversés se retrouve également dans le domaine de la biomécanique afin d'expliquer l'équilibre [23]. C'est dans cette discipline qu'apparaissent les notions de stratégies dites de la hanche ou de la cheville. Ces stratégies décrites dans [24] sont depuis longtemps une référence dans la description du contrôle de l'équilibre chez les humains. Makai et al. ont étudié le rapport entre ces stratégies avec les pieds continuellement en contact

avec le sol et les stratégies de changement de la surface de support chez les humains [25]. Ils montrent que ces stratégies ne sont pas distinctes et plutôt que l'une succède à l'autre, elles agissent toutes les deux simultanément et que les humains feront un pas avant d'atteindre les limites de stabilité posturale propre à la stratégie de gestion de l'équilibre en phase de double appui. Une des causes de ce constat réside dans la seule considération de la position du centre de gravité comme mesure de la stabilité posturale. La prise en compte de la vitesse du centre de gravité conjointement à sa position permis d'améliorer cette mesure [26] [27].

Les modèles simplifiés ont souvent été utilisés pour étudier les stratégies de maintien de l'équilibre postural [11]. C'est ainsi que plusieurs de ces modèles ont servis à définir des stratégies de maintien de l'équilibre du corps complet ainsi que des stabilisateurs basés sur des points de référence au sol comme le célèbre zero-moment point (ZMP) [28] ou encore [29] [30]. Pratt, et al. [10] ont ainsi utilisés un modèle LIPM pour proposer le « capture point », un lieu qui permet au système d'être théoriquement stable en boucle ouverte. Cette idée avait été évoquée précédemment par Townsend dans [31] et elle revenait à considérer qu'en plaçant le pied sur ce lieu, le système idéal finirait par être stable sans rétroaction. Cela aboutit naturellement à la formulation de « capture region » c'est-à-dire l'ensemble des lieux disponibles permettant au système de recouvrer son équilibre en ne faisant qu'un pas. Bien évidemment, il peut arriver que la « capture region » se trouve au-delà de l'espace de travail du robot ce qui signifie que plus d'un pas est alors nécessaire pour obtenir l'équilibre postural. Ce concept particulier semble, pour les auteurs, être plus représentatif de la réalité que ne le sont le centre de pression ou le ZMP qu'ils jugent trop instantané car le « capture point » repose sur une évolution de la dynamique dans la durée. Cette démarche a été approfondie notamment par Wight, et al. dans [32] où ils utilisent la dynamique d'un pendule inversé pour prédire la localisation du « capture point » en utilisant leur estimateur de placement de pied.

De manière générale, l'équilibre postural implique une manipulation des efforts de contact avec l'environnement (souvent le sol) pour produire le bon mouvement. Raibert envisage dans [33] l'utilisation d'une unique jambe virtuelle qui serait soumise à la somme des forces de réaction. Cette idée a été développée sur des robots à une, deux et quatre jambes [34]. Le principe de connexion virtuelle [35] est un autre modèle simple qui représente les contacts multiples et qui a été utilisé dans le contrôle des robots humanoïdes soumis à de multiples contacts [36]. Le centre de pression dans un cadre de multi-contacts tridimensionnel a également été considéré dans [37]. La commande basée sur des modèles virtuels [38] a également été utilisée pour contrôler la locomotion bipède [39]. On notera aussi que le contrôle en effort avec multiples contacts a été utilisé sur des systèmes locomoteurs à jambes afin de minimiser les forces horizontales [40] tout en respectant des contraintes de frottement [41]. On remarque une forte connivence entre le contrôle en effort de la locomotion à jambe et la commande de la saisie en effort [42].

La problématique du contrôle en effort des humanoïdes dans le cadre de la stabilité posturale est relativement récente. Le contrôle en effort se différencie par une logique d'actionnement généralement différente, d'avantage en prise directe sur l'articulation et le plus souvent de nature hydraulique. Cette approche [43], plus souple, permet un plus grand usage des commandes passives et réactives ainsi qu'une régulation de la dynamique plus aisée. Elle offre également une bonne réactivité vis-à-vis de toutes formes de perturbations résultant d'une interaction imprévue et plus particulièrement des contacts que ce soit avec le sol ou des objets. Il en résulte une difficulté accrue dans la synthèse de lois de commande afin de pallier aux effets de couplage et plus particulièrement dans la gestion de la rigidité des articulations plus ou moins

adaptée aux situations. La performance face à des tâches de précision peut alors s'avérer être difficile en raison de la dynamique complexe du robot. Elle est accompagnée du problème de la qualité du modèle dynamique inverse qui, en première approximation, et cela afin de trouver des solutions générales sera basé sur des modèles de corps « flottants », c'est-à-dire avec un repère monde qui n'est pas attaché au robot [44] [45]. Le modèle dynamique inverse possédant plusieurs solutions, de nombreuses approches ont été développées afin de contourner ce problème. Une des méthodes simples repose sur un principe de compensation passive de la gravité [46] qui présuppose un système quasi-statique ainsi qu'une contrainte sur la répartition des efforts sur la surface du pied. On peut également trouver des solutions à base d'optimisation comme dans [47] [48], basées sur des reformulations du modèle dynamique en un problème d'optimisation multi-objectif sous contraintes notamment de limitation articulaire.

En ce qui concerne les stratégies de recouvrement de l'équilibre pour un robot que l'on aurait poussé, il existe plusieurs méthodes qui permettent d'y parvenir en commençant par des situations où le robot est à l'arrêt. On a par exemple l'apprentissage par renforcement qui peut être utilisé pour apprendre au robot à corriger des « capture points » calculés sur des modèles simples [49]. D'autres études se basent sur la capture de mouvement humain afin d'en extraire des modèles de maintien de l'équilibre ou de placement de pied [50]. Ces considérations ont également donné lieu à des études où le pas de recouvrement d'équilibre est utilisé alors que le robot est en train d'effectuer une autre tâche, comme les phases d'approche pour la manipulation d'objets massifs [51] [52] ou encore lorsque la machine, percutée par un obstacle, modifie sa trajectoire tout en mitigeant l'impact [53].

Ce qui nous conduit directement à un autre pan de la recherche sur la stabilité posturale des robots humanoïdes : la locomotion. La marche bipède est un sujet étudié depuis longtemps [54] [55] et des modèles simplifiés ont été naturellement et massivement utilisés pour contrôler la locomotion des robots humanoïdes. On retrouve donc le pendule inversé LIPM [6] combiné à un modèle de commande prédictive [56]. Cette méthode peut être mise en œuvre efficacement grâce à des techniques de programmation [57] et le cas échéant inclure des algorithmes de placement de pied [58].

Ces approches se focalisent sur le suivi d'une trajectoire idéalisée qui est supposée à même de garantir autant la stabilité posturale que la locomotion. Le contrôle en position des robots marcheurs [59] [60] [61] est une approche très largement répandue au sein de la communauté et a montré des résultats très intéressants sur de nombreux robots [62] [63] [64] [65] [66]. L'architecture mécanique de ces machines est guidée par les besoins d'un suivi de trajectoire précis qui requiert souvent une motorisation électrique, couplée à des réducteurs harmonique drive à rapport élevés. Par construction, les inerties et frottements de ces types d'actionneurs conduisent à des impédances conséquentes qui permettent un rejet efficace des petites perturbations. Il en résulte un contrôle en position précis qui se trouve largement utilisé dans le suivi d'une trajectoire de marche, réduit dans ces conditions au contrôle en position du placement de pied. L'effet négatif de cette rigidité caractéristique est une faiblesse de la réponse en effort dans le rejet de perturbation de plus grande amplitude. On trouve couramment une instrumentation en effort localisée sur le pied, pour gagner en stabilité, grâce à un contrôle en effort localisé.

La marche dynamique n'est bien évidemment pas l'apanage des robots contrôlés en position. En effet, le contrôle en effort a également été largement utilisé en utilisant des méthodes comme le contrôle de modèle virtuel [67], le contrôle d'impédance [68] ou encore le filtrage dynamique [69].

1.5 Contribution

Cette thèse s'appuie bien évidemment sur un grand nombre de travaux dans le domaine de la robotique. Elle se propose de contribuer aux techniques de commande des robots marcheurs et à leurs stratégies d'évitement des chutes. Ainsi l'ensemble des propositions s'articulent autour des problématiques propres à la stabilité posturale des robots marcheurs :

- La remise en cause de la notion de stabilité posturale passant par des points de référence au sol communément utilisés dans la littérature, pour le développement d'un nouveau paradigme ;
- La synthèse d'une loi de commande en position, basée sur un mode dégradé virtuel judicieusement choisi, plongé dans un champ de contraintes, contrôlé en effort ;
- L'implémentation de l'ensemble des développements théoriques évoqués, dans un contrôleur temps réel industriel d'une plateforme robotisée pour la validation expérimentale.
- Un ensemble de démonstrations permettant de calculer le modèle dynamique d'un robot composé de plusieurs robots permettant une implémentation simplifiée dans un environnement de développement orienté objet ;

1.6 Organisation du propos

Ce travail de thèse est composé de trois chapitres, chacun d'entre eux reprenant les éléments de contribution évoqués précédemment. Ainsi, après cette présente introduction, sera-t-il fait mention dans le chapitre deux, des travaux relatifs à la mise en service du robot, la conception du contrôleur et plus particulièrement le stabilisateur postural à travers une présentation des éléments de modélisation dans un premier temps, puis de simulation et enfin de test. Le chapitre trois reprend les principaux résultats concernant la modélisation d'un robot composé de plusieurs robots. Enfin le dernier chapitre se penche sur les travaux en préparation pour le passage au robot complet ainsi que sur des perspectives de développements futurs.

2 Etude et mise en œuvre d'un stabilisateur postural sur une jambe anthropomorphe à 4 DDL

2.1 Contexte et objectifs

Avant d'aborder la problématique de cette thèse, à savoir la stabilité posturale des grands robots marcheurs, faisons l'inventaire des éléments à disposition au commencement de ce travail. L'équipe ROBIOSS a décidé de doter l'ensemble de ses démonstrateurs d'une motorisation et d'automates ou de pc industriels B&R. On dispose également d'un algorithme de génération de marche [70] [71], d'une librairie de commande d'axe compatible B&R développée au sein de l'équipe ROBIOSS [dépôt APP en cours] et du démonstrateur historique de l'équipe : BIP 2000 [1] [2] [3].

Ce robot est resté inutilisé pendant quinze ans et n'a subi aucune modification autant matérielle que logicielle. La machine, datant du milieu des années 90, présente une baie de variateurs obsolète ainsi qu'une puissance de calcul très largement dépassée. Le contrôleur, quant à lui, n'ayant pas été maintenu, est quasiment inutilisable. Le mécanisme originel du robot conserve un potentiel certain aussi a-t-on décidé de ne réaliser que des pièces d'adaptation afin de permettre l'intégration des nouveaux moteurs B&R. Cette solution industrielle s'accompagne d'un environnement de développement dédié. On doit donc développer une baie de variateurs et un contrôleur pour faire fonctionner le robot dans un environnement industriel B&R.



Figure 4: Jambe gauche de BIP 2018

On a donc deux objectifs simultanés : la mise en œuvre d'un robot humanoïde doté d'un actionnement industriel et la conception d'un stabilisateur postural. On choisit alors de faire une étude de faisabilité sur un robot plus restreint qu'un système locomoteur à quinze degrés de liberté. On choisit alors un compromis idéal à savoir une jambe à quatre degrés de liberté actionnés (Figure 4).

Ce chapitre s'articulera donc en quatre sections. La première s'intéressera aux éléments de modélisation du démonstrateur à quatre degrés de liberté. Ensuite on envisagera les caractéristiques du contrôleur. On terminera par une des contributions principales de cette thèse à savoir le développement d'un stabilisateur postural, sa validation théorique en simulation puis expérimentale.

2.2 Convention DENVIT-HARTENBERG modifiée et placement des repères pour décrire la géométrie des solides

Avant toutes choses, il convient de rappeler et de définir le cadre formel qui servira de référence pour la suite des développements. On utilisera la convention de DENVIT-HARTENBERG modifiée [72]. Il s'agit d'une convention d'écriture des repères liés aux solides du mécanisme minimisant le nombre de paramètres nécessaires à la description du passage d'un repère à un autre via des matrices de transformation homogènes (Figure 5).

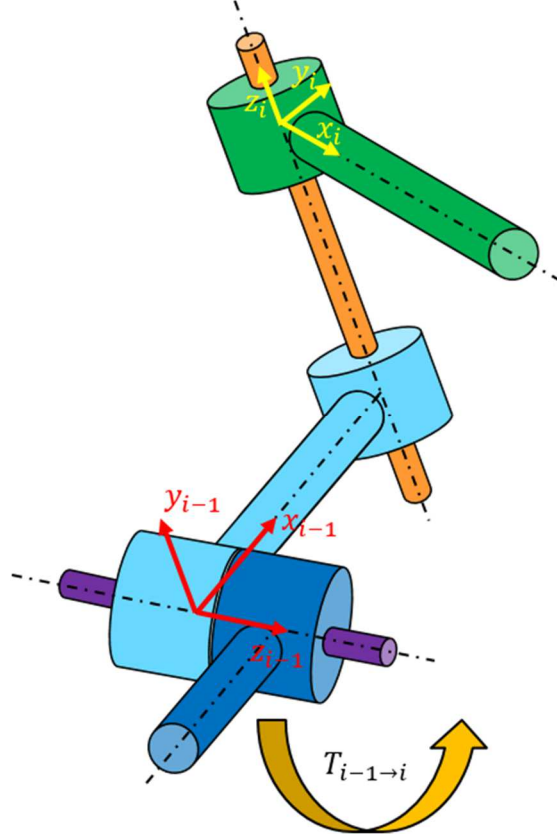


Figure 5: Paramétrage de DENVIT-HARTENBERG modifié

Les paramètres DHM sont au nombre de quatre : a_i , α_i , d_i et q_i . Ils caractérisent chacun une transformation intermédiaire dont le produit décrit la translation du centre du repère $i - 1$ vers le repère i (écrit dans le repère $i - 1$) ainsi que la rotation du repère i par rapport au repère $i - 1$ (Figure 6).

$$T_{i-1 \rightarrow i} = T_{i-1 \rightarrow a} T_{a \rightarrow b} T_{b \rightarrow c} T_{c \rightarrow i} \quad (1)$$

Les deux premiers paramètres, a_i et α_i , reflètent la géométrie du mécanisme et les matrices associées décrivent des transformations rigides. Les deux derniers, d_i et q_i , modélisent les mobilités du mécanisme à savoir une translation et une rotation.

- ➔ α_i est l'angle entre $\vec{z}_{i-1}$ et $\vec{z}_a = \vec{z}_i$ mesuré autour de $\vec{x}_{i-1}$;
- ➔ a_i est la norme de $\vec{O_a O_b} = \vec{O_{i-1} O_b}$ suivant $\vec{x}_{i-1}$;
- ➔ q_i est l'angle entre $\vec{x}_b = \vec{x}_{i-1}$ et $\vec{x}_c = \vec{x}_i$ mesuré autour de $\vec{z}_i$;
- ➔ d_i est la norme de $\vec{O_c O_i} = \vec{O_b O_i}$ suivant $\vec{z}_i$.

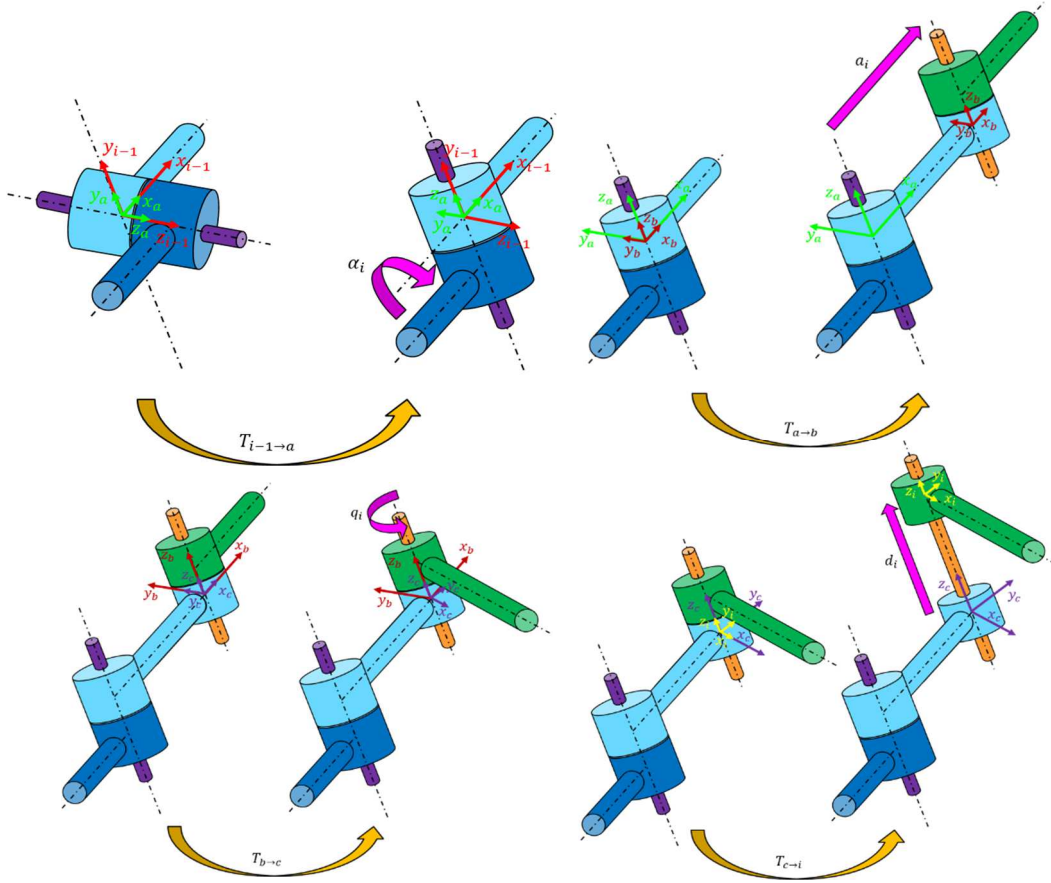


Figure 6: Transformations intermédiaires du paramétrage DHM

Les Matrices de Transformation Homogènes (MTH) intermédiaires, chacune liée à un des paramètres DHM, s'expriment de la manière suivante :

$$T_{i-1 \rightarrow a} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha_i) & -\sin(\alpha_i) & 0 \\ 0 & \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad T_{a \rightarrow b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$T_{b \rightarrow c} = \begin{pmatrix} \cos(q_i) & -\sin(q_i) & 0 & 0 \\ \sin(q_i) & \cos(q_i) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad T_{c \rightarrow i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

D'où :

$$T_{i-1 \rightarrow i} = \begin{pmatrix} \cos(q_i) & -\sin(q_i) & 0 & a_i \\ \cos(\alpha_i) \sin(q_i) & \cos(\alpha_i) \cos(q_i) & -\sin(\alpha_i) & -d_i \sin(\alpha_i) \\ \sin(\alpha_i) \sin(q_i) & \sin(\alpha_i) \cos(q_i) & \cos(\alpha_i) & d_i \cos(\alpha_i) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

On notera également que :

$$T_{i-1 \rightarrow i} = \begin{pmatrix} \cos(q_i) & -\sin(q_i) & 0 & a_i \\ \cos(\alpha_i) \sin(q_i) & \cos(\alpha_i) \cos(q_i) & -\sin(\alpha_i) & -d_i \sin(\alpha_i) \\ \sin(\alpha_i) \sin(q_i) & \sin(\alpha_i) \cos(q_i) & \cos(\alpha_i) & d_i \cos(\alpha_i) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{i-1 \rightarrow i} & t_{i-1 \rightarrow i} \\ \mathbb{O}_{1,3} & 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

2.3 Éléments de modélisation du démonstrateur à quatre degrés de liberté

Cette section reprendra des éléments relatifs à la modélisation du premier démonstrateur à quatre degrés de liberté qui a été mis en service. Il s'inscrit dans un ensemble de sections qui présentera l'intégralité des développements autant logiciels que matériels qui auront permis de répondre à la problématique de cette thèse.

2.3.1 Convention DHM

On commencera tout naturellement par le paramétrage DHM du robot, comme évoqué au 2.2 que l'on illustre sur le schéma cinématique suivant (Figure 7) :

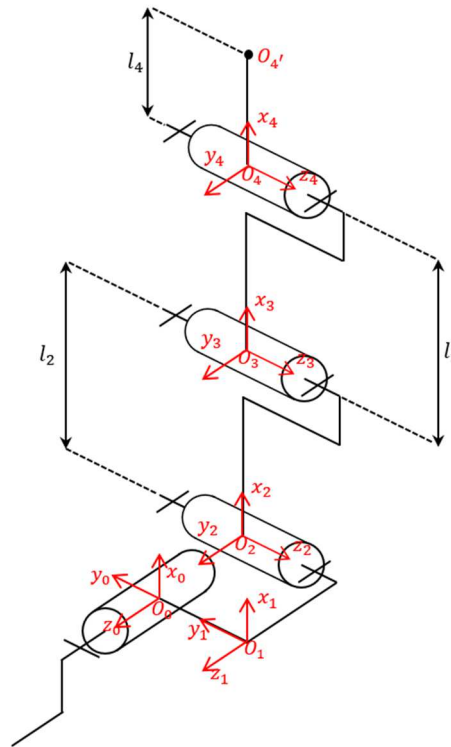


Figure 7: Schéma cinématique du robot à 4 DDL

On précise ici le tableau (Figure 8) des paramètres DH du membre inférieur de BIP :

	q_i	d_i	a_i	α_i
$R_0 \rightarrow R_1$	q_1	0	0	0
$R_1 \rightarrow R_2$	q_2	0	0	$\pi/2$
$R_2 \rightarrow R_3$	q_3	0	l_2	0
$R_3 \rightarrow R_4$	q_4	0	l_3	0

Figure 8: Tableau des paramètres DHM

2.3.2 Modèle géométrique direct, jacobienne et modèle dynamique inverse

C'est en reprenant le paramétrage évoqué au point 2.3.1 que l'on construit le modèle géométrique du robot :

$$T_{0 \rightarrow 4'} = T_{0 \rightarrow 4} T_{4 \rightarrow 4'} = \begin{pmatrix} c_1 c_{234} & -c_1 s_{234} & s_1 & c_1(c_2 l_2 + c_{23} l_3 + c_{234} l_4) \\ s_1 c_{234} & -s_1 s_{234} & -c_1 & s_1(c_2 l_2 + c_{23} l_3 + c_{234} l_4) \\ s_{234} & c_{234} & 0 & s_2 l_2 + s_{23} l_3 + s_{234} l_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

D'où découle immédiatement l'expression de la jacobienne naturelle du robot :

$$J_{04'} = \begin{pmatrix} -s_1(c_2 l_2 + c_{23} l_3 + c_{234} l_4) & -c_1(s_2 l_2 + s_{23} l_3 + s_{234} l_4) & -c_1(s_{23} l_3 + s_{234} l_4) & -c_1(s_{234} l_4) \\ c_1(c_2 l_2 + c_{23} l_3 + c_{234} l_4) & -s_1(s_2 l_2 + s_{23} l_3 + s_{234} l_4) & -s_1(s_{23} l_3 + s_{234} l_4) & -s_1(s_{234} l_4) \\ 0 & c_2 l_2 + c_{23} l_3 + c_{234} l_4 & c_{23} l_3 + c_{234} l_4 & c_{234} l_4 \\ 0 & s_1 & s_1 & s_1 \\ 0 & -c_1 & -c_1 & -c_1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

On calcule ensuite, afin de construire le modèle dynamique inverse, les jacobienes aux centres de gravité afin d'obtenir les énergies cinétiques des différents corps. On notera que la position des centres de gravité est dégradée (Figure 9) et cela dans un souci de simplification dans un premier temps puis d'efficacité d'une telle dégradation dans un second temps, notamment vis-à-vis du gain de temps de calcul par rapport à la précision du modèle.

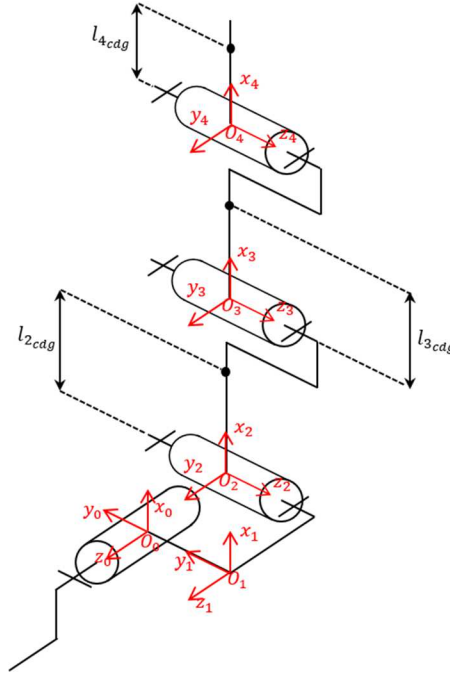


Figure 9: Schéma cinématique du robot à 4 DDL, position des centres de gravité

Voici les expressions des jacobienes aux centres de gravité :

$$J_{01cdg} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$J_{02_{cdg}} = \begin{pmatrix} -s_1(c_2 l_{2_{cdg}}) & -c_1(s_2 l_{2_{cdg}}) & 0 & 0 \\ c_1(c_2 l_{2_{cdg}}) & -s_1(s_2 l_{2_{cdg}}) & 0 & 0 \\ 0 & c_2 l_{2_{cdg}} & 0 & 0 \\ 0 & s_1 & 0 & 0 \\ 0 & -c_1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$J_{03_{cdg}} = \begin{pmatrix} -s_1(c_2 l_2 + c_{23} l_{3_{cdg}}) & -c_1(s_2 l_2 + s_{23} l_{3_{cdg}}) & -c_1(s_{23} l_{3_{cdg}}) & 0 \\ c_1(c_2 l_2 + c_{23} l_{3_{cdg}}) & -s_1(s_2 l_2 + s_{23} l_{3_{cdg}}) & -s_1(s_{23} l_{3_{cdg}}) & 0 \\ 0 & c_2 l_2 + c_{23} l_{3_{cdg}} & c_{23} l_{3_{cdg}} & 0 \\ 0 & s_1 & s_1 & 0 \\ 0 & -c_1 & -c_1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$J_{04_{cdg}} = \begin{pmatrix} -s_1(c_2 l_2 + c_{23} l_3 + c_{234} l_{4_{cdg}}) & -c_1(s_2 l_2 + s_{23} l_3 + s_{234} l_{4_{cdg}}) & -c_1(s_{23} l_3 + s_{234} l_{4_{cdg}}) & -c_1(s_{234} l_{4_{cdg}}) \\ c_1(c_2 l_2 + c_{23} l_3 + c_{234} l_{4_{cdg}}) & -s_1(s_2 l_2 + s_{23} l_3 + s_{234} l_{4_{cdg}}) & -s_1(s_{23} l_3 + s_{234} l_{4_{cdg}}) & -s_1(s_{234} l_{4_{cdg}}) \\ 0 & c_2 l_2 + c_{23} l_3 + c_{234} l_{4_{cdg}} & c_{23} l_3 + c_{234} l_{4_{cdg}} & c_{234} l_{4_{cdg}} \\ 0 & s_1 & s_1 & s_1 \\ 0 & -c_1 & -c_1 & -c_1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

On ne présentera pas ici les éléments du modèle dynamique et cela pour la simple raison qu'il serait long et fastidieux de les expliciter. On notera qu'ils auront été calculés en utilisant la méthode classique rappelée au 6.3.

2.3.3 Modèle de transmission

Cette section reprendra les caractéristiques de la transmission afin de permettre la traduction de consignes articulaires en consignes « moteurs » ainsi que la traduction de couples articulaires en couples moteurs. L'ensemble des développements qui vont suivre se résume à un changement de paramétrage cohérent avec celui qui a été retenu dans ce travail par rapport à celui évoqué dans [1].

2.3.3.1 Ensemble des modèles de la cheville

Le mécanisme de la cheville est un cardan actionné par deux moteurs électriques. Ces derniers déplacent des chariots sur des vis à rouleaux satellites (Figure 10). Ils entraînent des biellettes qui viendront modifier la configuration articulaire du cardan. On obtient la position des chariots en fonction des paramètres du mécanisme en utilisant le fait que les longueurs de ces biellettes soient invariantes :

$$\begin{cases} l_{2'} = -c_1 c_{2\gamma_c} b_c - s_1 c_{2\gamma_c} d_c - s_{2\gamma_c} c_c - \sqrt{|L_c^2 - (s_1 b_c - c_1 d_c + h_c)^2 - (c_1 s_{2\gamma_c} b_c + s_1 s_{2\gamma_c} d_c - c_{2\gamma_c} c_c + e_c)^2|} \\ l_{2''} = -c_1 c_{2\gamma_c} b_c + s_1 c_{2\gamma_c} d_c - s_{2\gamma_c} c_c - \sqrt{|L_c^2 - (s_1 b_c + c_1 d_c - h_c)^2 - (c_1 s_{2\gamma_c} b_c - s_1 s_{2\gamma_c} d_c - c_{2\gamma_c} c_c + e_c)^2|} \end{cases} \quad (12)$$

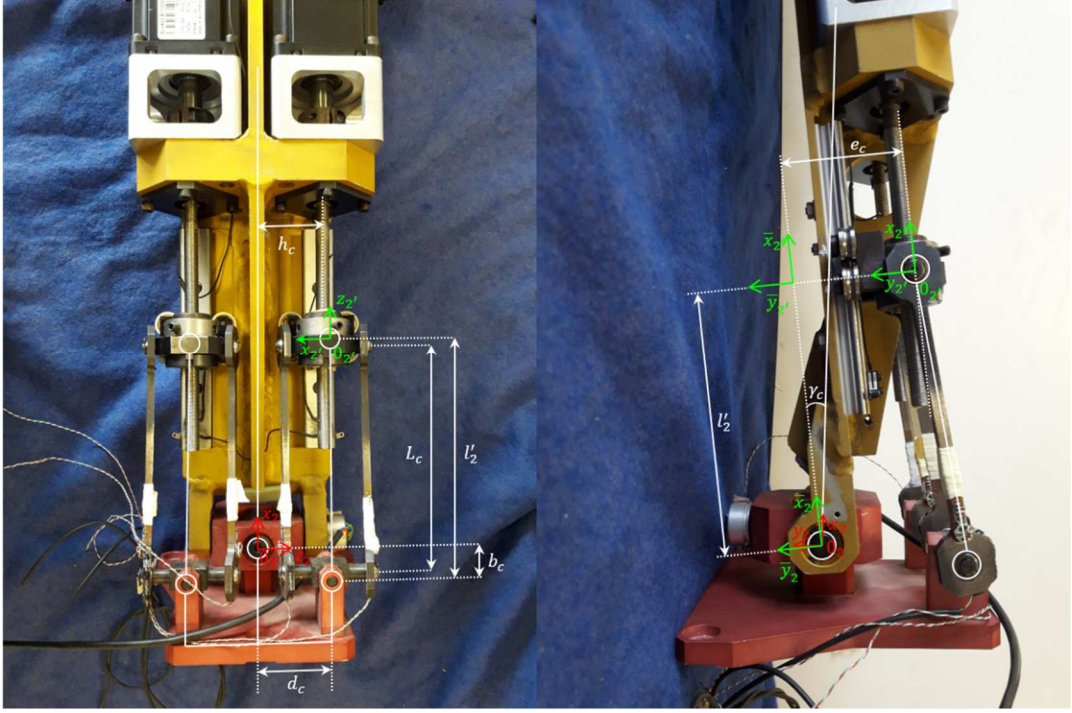


Figure 10: Transmission de la cheville

On dérive (12) pour construire la jacobienne du paramétrage :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial l_{2'}}{\partial q_1} = s_1 c_{2\gamma_c} b_c - c_1 c_{2\gamma_c} d_c + \frac{\alpha_1}{\beta} \\ \frac{\partial l_{2'}}{\partial q_2} = c_1 s_{2\gamma_c} b_c + s_1 s_{2\gamma_c} d_c - c_{2\gamma_c} c_c + \frac{\alpha_2}{\beta} \\ \alpha_1 = (c_1 b_c + s_1 d_c)(s_1 b_c - c_1 d_c + h_c) + (-s_1 s_{2\gamma_c} b_c + c_1 s_{2\gamma_c} d_c)(c_1 s_{2\gamma_c} b_c + s_1 s_{2\gamma_c} d_c - c_{2\gamma_c} c_c + e_c) \\ \alpha_2 = (c_1 c_{2\gamma_c} b_c + s_1 c_{2\gamma_c} d_c + s_{2\gamma_c} c_c)(c_1 s_{2\gamma_c} b_c + s_1 s_{2\gamma_c} d_c - c_{2\gamma_c} c_c + e_c) \\ \beta = \sqrt{|L_c^2 - (s_1 b_c - c_1 d_c + h_c)^2 - (c_1 s_{2\gamma_c} b_c + s_1 s_{2\gamma_c} d_c - c_{2\gamma_c} c_c + e_c)^2|} \end{array} \right. \quad (13)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial l_{2''}}{\partial q_1} = s_1 c_{2\gamma_c} b_c + c_1 c_{2\gamma_c} d_c + \frac{\gamma_1}{\delta} \\ \frac{\partial l_{2''}}{\partial q_2} = c_1 s_{2\gamma_c} b_c - s_1 s_{2\gamma_c} d_c - c_{2\gamma_c} c_c + \frac{\gamma_2}{\delta} \\ \gamma_1 = (c_1 b_c - s_1 d_c)(s_1 b_c + c_1 d_c - h_c) + (-s_1 s_{2\gamma_c} b_c - c_1 s_{2\gamma_c} d_c)(c_1 s_{2\gamma_c} b_c - s_1 s_{2\gamma_c} d_c - c_{2\gamma_c} c_c + e_c) \\ \gamma_2 = (c_1 c_{2\gamma_c} b_c - s_1 c_{2\gamma_c} d_c + s_{2\gamma_c} c_c)(c_1 s_{2\gamma_c} b_c - s_1 s_{2\gamma_c} d_c - c_{2\gamma_c} c_c + e_c) \\ \delta = \sqrt{|L_c^2 - (s_1 b_c + c_1 d_c - h_c)^2 - (c_1 s_{2\gamma_c} b_c - s_1 s_{2\gamma_c} d_c - c_{2\gamma_c} c_c + e_c)^2|} \end{array} \right. \quad (14)$$

On obtient donc :

$$\begin{pmatrix} \dot{l}_{2'} \\ \dot{l}_{2''} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial l_{2'}}{\partial q_1} & \frac{\partial l_{2'}}{\partial q_2} \\ \frac{\partial l_{2''}}{\partial q_1} & \frac{\partial l_{2''}}{\partial q_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix} \quad (15)$$

On a de plus :

$$\begin{cases} \dot{l}_{2'} = \frac{p_c}{2\pi} \dot{q}_{1_mot} \\ \dot{l}_{2''} = \frac{p_c}{2\pi} \dot{q}_{2_mot} \end{cases} \quad (16)$$

Avec p_c le pas de la vis, d'où :

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_{1_mot} \\ \dot{q}_{2_mot} \end{pmatrix} = \frac{2\pi}{p_c} \begin{pmatrix} \frac{\partial l_{2'}}{\partial q_1} & \frac{\partial l_{2'}}{\partial q_2} \\ \frac{\partial l_{2''}}{\partial q_1} & \frac{\partial l_{2''}}{\partial q_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix} \quad (17)$$

2.3.3.2 Ensemble des modèles du genou

Le mécanisme du genou (Figure 11) reprend le même principe de transmission que la cheville mais réduit à un seul degré de liberté. On obtient le modèle de transmission de la même manière :

$$l_{3'} = \cos(q_3 + \gamma_g - \varphi_g) r_g - \sqrt{|L_g^2 - (-\sin(q_3 + \gamma_g - \varphi_g) r_g - e_g)^2|} \quad (18)$$

Et par dérivation :

$$\frac{\partial l_{3'}}{\partial q_3} = -\sin(q_3 + \gamma_g - \varphi_g) r_g - \frac{(\cos(q_3 + \gamma_g - \varphi_g) r_g)(-\sin(q_3 + \gamma_g - \varphi_g) r_g - e_g)}{\sqrt{|L_g^2 - (-\sin(q_3 + \gamma_g - \varphi_g) r_g - e_g)^2|}} \quad (19)$$

On obtient donc :

$$\dot{l}_{3'} = \frac{\partial l_{3'}}{\partial q_3} \dot{q}_3 \quad (20)$$

On a de plus :

$$\dot{l}_{3'} = \frac{p_g}{2\pi} \dot{q}_{3_mot} \quad (21)$$

Avec p_g le pas de la vis, d'où :

$$\dot{q}_{3_mot} = \frac{2\pi}{p_g} \frac{\partial l_{3'}}{\partial q_3} \dot{q}_3 \quad (22)$$

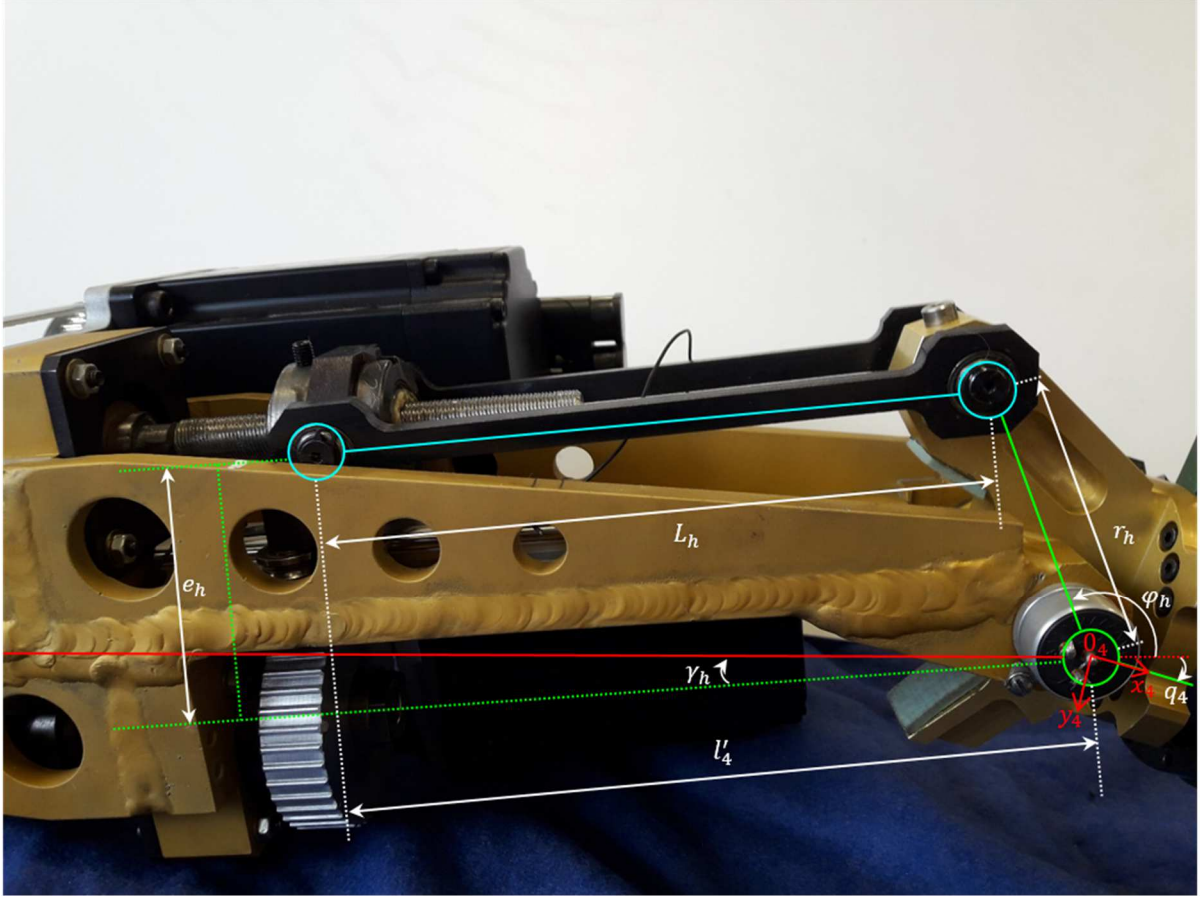


Figure 12: Transmission de la hanche

On a de plus :

$$l_{4'} = \frac{p_h}{2\pi} q_{4_mot} \quad (27)$$

Avec p_h le pas de la vis, d'où :

$$\dot{q}_{4_mot} = \frac{2\pi}{p_h} \frac{\partial l_{4'}}{\partial q_4} \dot{q}_4 \quad (28)$$

Et :

$$\dot{q}_4 = \frac{p_h}{2\pi} \left(\frac{\partial l_{4'}}{\partial q_4} \right)^{-1} \dot{q}_{4_mot} \quad (29)$$

2.3.3.4 Jacobienne de la transmission

Cette matrice est l'outil qui permet de ramener les efforts et notamment les couples depuis l'espace articulaire dans l'espace moteur. On a donc finalement :

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_{1_mot} \\ \dot{q}_{2_mot} \\ \dot{q}_{3_mot} \\ \dot{q}_{4_mot} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2\pi}{p_c} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\pi}{p_c} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\pi}{p_g} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2\pi}{p_h} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial l_{2'}}{\partial q_1} & \frac{\partial l_{2'}}{\partial q_2} & 0 & 0 \\ \frac{\partial l_{2''}}{\partial q_1} & \frac{\partial l_{2''}}{\partial q_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial l_{3'}}{\partial q_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial l_{4'}}{\partial q_4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{pmatrix} \quad (30)$$

Soit

$$\dot{q}_{mot} = J_p \dot{q} \quad (31)$$

Avec J_p , jacobienne de la transmission :

$$J_p = \begin{pmatrix} \frac{2\pi}{p_c} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\pi}{p_c} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\pi}{p_g} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2\pi}{p_h} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial l_{2'}}{\partial q_1} & \frac{\partial l_{2'}}{\partial q_2} & 0 & 0 \\ \frac{\partial l_{2''}}{\partial q_1} & \frac{\partial l_{2''}}{\partial q_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial l_{3'}}{\partial q_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial l_{4'}}{\partial q_4} \end{pmatrix} \quad (32)$$

2.4 Implémentation du contrôleur

2.4.1 Contexte et objectifs

Dans le domaine de la robotique humanoïde, la modélisation devient aussi complexe que vorace en temps de calcul à mesure que le nombre de degrés de liberté augmente. Toutefois, on ne peut ignorer que les robots humanoïdes anthropomorphes présentent les mêmes propriétés de symétrie directement héritées des humains. Une telle symétrie, notamment concernant les jambes qui forment ainsi le système locomoteur, conduit à une chaîne géométrique obtenue en sommant deux autres identiques. Ainsi, la modélisation du système locomoteur d'un robot anthropomorphe peut être réduite à la connaissance du modèle d'une jambe. On en déduit également que la complexité induite par un grand nombre de degrés de liberté peut être mitigée, en considérant une approche modulaire, en manipulant des entités plus petites.

Ce constat nous permet de conclure que la symétrie naturelle des robots humanoïdes est particulièrement favorable à une approche de programmation orientée objet étant donnée la répétition d'objets uniques parfaitement définis. Et comme évoqué précédemment, il n'existe qu'un seul et unique élément préexistant au contrôleur du robot, il s'agit d'une librairie de commande d'axe. Il est donc question de le concevoir entièrement à partir de cette dernière et cela avec une approche Programmation Orientée Objet.

2.4.2 Choix technologiques

On s'arrêtera dans cette section sur la baie de variateurs (Figure 14) afin de fournir une vision précise des capacités physiques de la machine. Il s'agit d'un matériel industriel standard produit par la société B&R automation. Le centre de calcul X20CP1586 du système est équipé d'un

processeur ATOM cadencé à 1.6 GHz et muni de 512 MB de RAM DDR2. La communication entre le PLC et les variateurs est assurée par un protocole Ethernet POWERLINK.

Par construction, ce système permet d'ajouter extrêmement facilement un nombre quelconque de modules d'entrées/sorties, ce qui permet d'étendre rapidement l'instrumentation du robot.

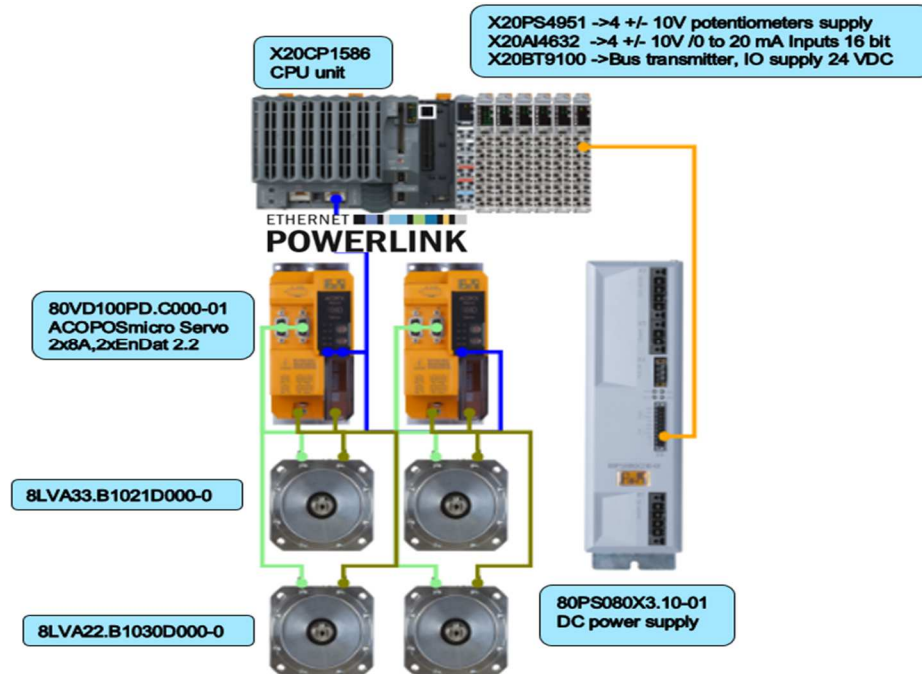


Figure 14: Représentation des choix technologiques

Les variateurs ACOPOSmicro permettent de piloter chacun deux moteurs ce qui en fait une amélioration significative en termes de compacité et de masse par rapport au design originel de la baie de variateurs du robot (anciennement 1.5 kg pour 1 moteur, 700 grammes pour deux moteurs maintenant). Les ACOPOSmicro possèdent une capacité de calcul propre qui permet de déporter de la charge de calcul directement au niveau du contrôleur afin de traiter les boucles de régulation bas niveau. On peut illustrer les éléments de contrôle réalisables au sein du variateur sur la figure suivante (Figure 13) :

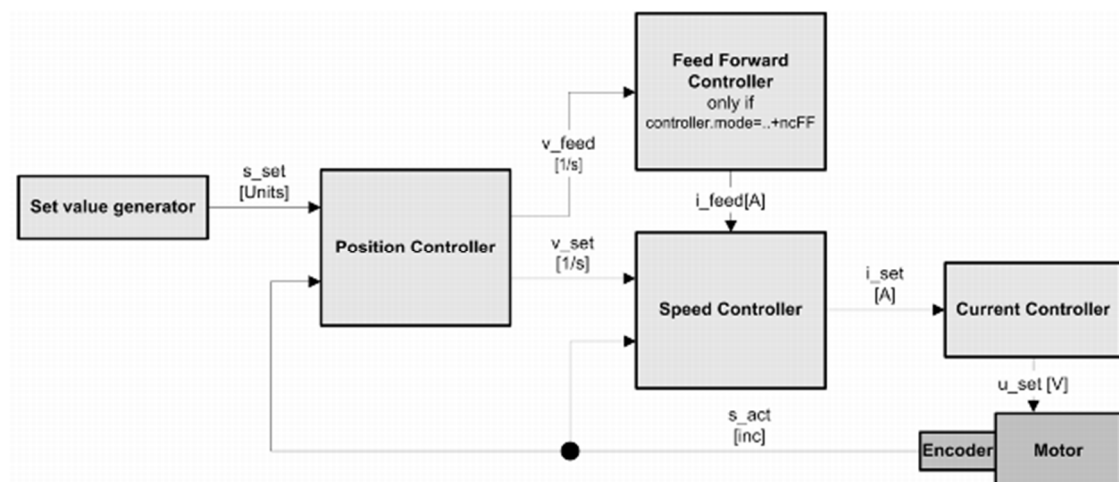


Figure 13: Schéma de la boucle interne du variateur

On notera la présence d'un générateur de trajectoire dans le schéma précédent (« Set value generator »). Il a pour fonction de fournir une interpolation adéquate lorsque le temps de cycle de la tâche principale diffère de la fréquence du variateur qui sera de 400 microsecondes, i.e. celle du bus POWERLINK.

2.4.3 Modélisation UML

Une fois le besoin logiciel spécifié, il peut être modélisé en utilisant la représentation graphique UML. On observera sur le graphe suivant (Figure 15) une image du contrôleur du robot. Un code de couleur renvoie directement aux modules évoqués dans la définition du besoin logiciel.

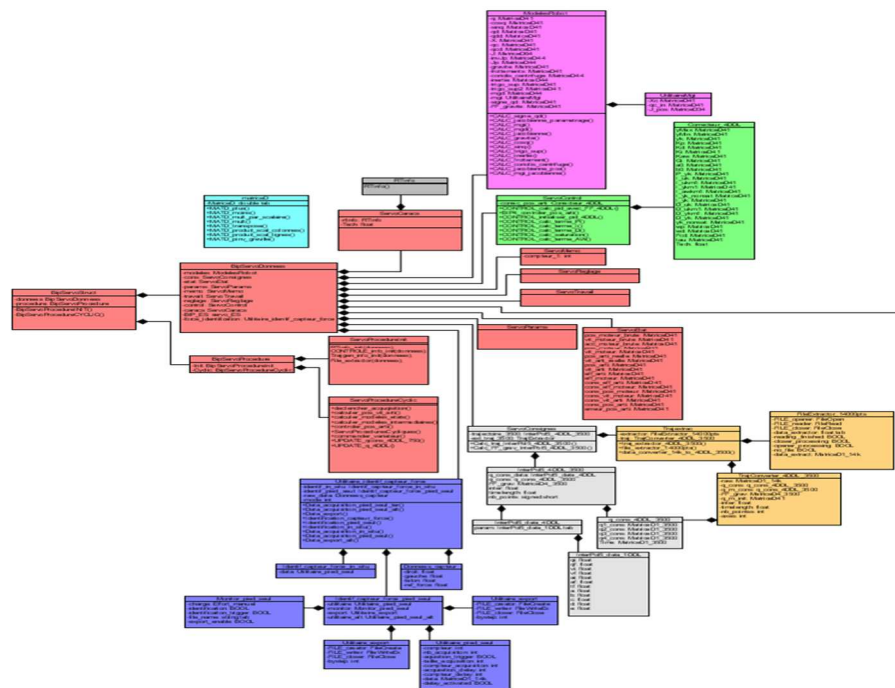


Figure 15: Aperçu du modèle UML

Le module synchrone est représenté en rouge. Il contient la structure de données complète, nécessaire aux asservissements ainsi que les procédures d'initialisation et cyclique. C'est typiquement, du point de vue de la programmation orientée objet, la classe mère, abstraite, qu'il convient d'instancier de manière adéquate à l'initialisation. Ainsi ses méthodes devront être surchargées lors du changement de robot.

Le magenta renvoie au module « mécanisme ». C'est lui qui contient l'ensemble des attributs et des méthodes propres à la reconstitution de l'état du robot. On y retrouvera donc tout le modèle dynamique.

Le bleu clair représente l'utilitaire de calcul matriciel, c'est ici que l'on retrouvera notamment les outils d'inversion.

Le module orange rassemble un ensemble de fonctions permettant de faire de la lecture et de l'extraction de fichiers notamment de points ou de paramètres. C'est grâce à lui que l'on peut générer des trajectoires de marche hors ligne et les faire jouer par le robot.

Le module gris clair est le générateur de trajectoire propre au contrôleur (qui reste actuellement un interpolateur polynomial d'ordre cinq).

Le vert renvoie aux objets de type correcteurs. C'est dans ce module que sont codés les PID et les méthodes qui permettent de les calculer.

Regardons d'un peu plus près deux modules particuliers : celui relatif au calcul des modèles et celui dédié au calcul matriciel.

2.4.3.1 Le module « mécanisme »

Abordons dans cette section quelques caractéristiques du module « mécanisme » propre au robot à quatre degrés de liberté. En effet les modèles du robot sont calculés au cours de l'exécution de la méthode `calculer_modeles_etats` qui est appelée par la procédure cyclique du module synchrone. Il faut lors de l'implémentation de cet objet prendre en considération la minimisation du temps de calcul car on se trouve toujours dans un environnement temps réel. C'est pourquoi on calcul la table des sinus et cosinus une seule fois pour la mettre à disposition des autres méthodes. On aura remarqué sur la Figure 16 la nature des attributs qui sont de type `MatriceDXX`. Ils sont directement liés à l'implémentation de l'utilitaire de calcul matriciel.

ModelesRobot
-q: MatriceD41
-cosq: MatriceD41
-sinq: MatriceD41
-qd: MatriceD41
-qdd: MatriceD41
-X: MatriceD41
-qc: MatriceD41
-qcd: MatriceD41
-J: MatriceD64
-invJp: MatriceD44
-Jp: MatriceD44
-gravite: MatriceD41
-frottements: MatriceD41
-coriolis_centrifuge: MatriceD44
-inertie: MatriceD44
-trigo_sup: MatriceD41
-trigo_sup2: MatriceD41
-mgd: MatriceD44
-mgi: UtilitaireMgi
-signe_qd: MatriceD41
-FF_gravite: MatriceD41
+CALC_signe_qd()
+CALC_jacobienne_parametrage()
+CALC_mgi()
+CALC_mgd()
+CALC_jacobienne()
+CALC_gravite()
+CALC_cosq()
+CALC_sinq()
+CALC_trigo_sup()
+CALC_inertie()
+CALC_frottement()
+CALC_coriolis_centrifuge()
+CALC_jacobienne_pos()
+CALC_mgi_jacobienne()

Figure 16: Module « mécanisme »

2.4.3.2 L'utilitaire de calcul matriciel

Nous discuterons dans cette section des choix qui ont été faits pour utiliser les matrices au sein du contrôleur. On commencera avec le fait qu'il n'est pas possible de faire d'allocation dynamique au sein du contrôleur B&R à moins de pré-allouer une zone de mémoire dans laquelle on pourrait faire une sorte d'allocation dynamique à l'initialisation sans que cela soit possible durant la tâche cyclique. A l'origine, on souhaitait utiliser une structure allouée dynamiquement avec un tableau uni-dimensionnel ainsi que le nombre de lignes et de colonnes. Ainsi, on aurait pu utiliser un objet matrice sans considération de taille dans les fonctions de calcul. On aurait dû également vérifier la compatibilité des matrices à la moindre opération.

En constatant que le nombre de types de matrices est relativement restreint dans le cadre de la robotique, qu'il serait possible d'économiser les opérations de vérification de compatibilité des matrices et devant la gêne présentée par l'allocation dynamique qui bien que pratique ne rentre en ligne de compte qu'à l'initialisation, on a pris la décision d'utiliser une structure distincte par type de matrice. Cela demande en effet un peu plus de recopie de code dans le sens où chaque type de matrice nécessite un set spécifique de fonctions de manipulation mais leur nombre étant finalement restreint cela ne présente pas d'obstacle majeur.

On en vient enfin au point central d'un utilitaire de calcul matriciel, il s'agit bien évidemment du problème de l'inversion qui reste un grand consommateur de calculs. On aura fait le constat au préalable que la plupart du temps, c'est la matrice d'inertie qu'il est nécessaire d'inverser. Ou encore on cherchera à obtenir la pseudo-inverse de la jacobienne ce qui revient à inverser une matrice d'inertie. Or la matrice d'inertie possède la propriété d'être symétrique, définie positive. La méthode du complément de Schur est parfaitement adaptée car elle permet d'utiliser efficacement les propriétés de la matrice d'inertie. Elle permet en outre d'exploiter l'approche orientée objet présentée précédemment. On se propose ici de rappeler l'algorithme d'inversion utilisé dans le cadre qui nous intéresse à savoir l'inversion d'une matrice 4x4, la matrice d'inertie de la jambe.

Soit A une matrice 4x4 symétrique définie positive que l'on représentera sous forme de blocs, avec B et D symétriques définies positives.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & C^T \\ C & D \end{pmatrix} \quad (33)$$

On définit le complément de Schur de la décomposition précédente, qui est également une matrice symétrique définie positive :

$$S = D - CB^{-1}C^T \quad (34)$$

On a alors la définition de l'inverse :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} B^{-1} + (B^{-1}C^T)(S^{-1}CB^{-1}) & -B^{-1}C^TS^{-1} \\ -S^{-1}CB^{-1} & S^{-1} \end{pmatrix} \quad (35)$$

Algorithme d'inversion :

- 1) Découper A en bloc
- 2) Calculer B^{-1}
- 3) Calculer CB^{-1} /on notera que $(CB^{-1})^T = (B^{-1})^TC^T = (B^T)^{-1}C^T = B^{-1}C^T$

- 4) Calculer $(CB^{-1})^T C^T$ puis $S = D - CB^{-1}C^T$
- 5) Calculer S^{-1}
- 6) Calculer $S^{-1}(CB^{-1})$ /on notera que $(S^{-1}(CB^{-1}))^T = (CB^{-1})^T(S^{-1})^T = B^{-1}C^T(S^T)^{-1} = B^{-1}C^TS^{-1}$
- 7) Calculer $B^{-1} + (B^{-1}C^T)(S^{-1}(CB^{-1})) = B^{-1} + (CB^{-1})^T(S^{-1}(CB^{-1}))$

2.5 Stratégie d'évitement des chutes : une jambe de robot humanoïde maintenue en équilibre par son image virtuelle dégradée soumise à des champs électrostatiques

2.5.1 Considérations sur l'état de l'art

On observe qu'en termes de stabilité posturale, on a deux grandes écoles dans le monde. L'approche japonaise popularisée par les HRP [65] [66] et le célèbre pendule inversé de Kajita et al [73] [56]. Et l'approche que nous dirons plus américaine, que l'on retrouvera illustré par le robot CMU Sarcos Primus [74] [75] et plus éloquentement par les Atlas de Boston Dynamics [76] [77]. Il est notable de constater que les premiers sont tenant de la commande en position alors que les seconds auraient tendance à privilégier la commande en couple.

La plupart des stabilisateurs [78] feront usage du célèbre Zero Moment Point [28], notamment les algorithmes de type Kajita et al, en recourant au modèle du pendule inversé voire du kart-table model, ainsi que d'autres points de référence au sol [10] [29]. L'inconvénient d'un point de référence au sol est qu'il suppose une connaissance a priori de ce dernier. Dès lors, il n'est plus un élément de proprioception mais une projection sur un support idéalisé.

Outre le fait que la notion de ZMP puisse trouver des limites dans des conditions autres que les cas parfaits [30], on remarquera que si l'on transposait ces principes à l'humain, qui sont principalement implémentés dans des planificateurs de trajectoire, cela donnerait une forme de marche consciente où l'on saurait à chaque instant chaque action de chaque fibre musculaire en plus de projeter cet état de conscience à des instants futurs les plus probables. Chez l'humain, c'est un mode de fonctionnement possible et qui est principalement utilisé lorsque le sol est extrêmement accidenté, traître et qu'il y a un risque de chute pouvant entraîner des lésions importantes. On entendra par traître l'impossibilité par quelque perception que ce soit de prédire le comportement du sol une fois le corps en appui sur la surface envisagée. Le fonctionnement classique d'un humain sur un sol relativement régulier sera plutôt une forme de mouvement cyclique réflexe dont on monitorerait l'évolution générale pour pallier tout risque de chute.

C'est cette approche que l'on aura souhaitée mettre en œuvre dans cette thèse. Elaborer un principe simple de stabilité, plutôt basé sur la perception du corps placé dans le champ de gravitation que dans le recours au modèle et à sa probable évolution.

Le paradigme choisit se focalise donc sur la proprioception et son utilisation judicieuse pour répondre à la problématique de stabilité posturale. On se propose de s'inspirer des humains, et il se trouve que la proprioception de ces derniers s'accompagne d'une représentation abstraite du corps qui permet de visualiser la position relative des membres même en absence de contact visuel et cela afin d'améliorer le contrôle de ces derniers. On choisit donc de recourir à des modèles virtuels pour traduire cette représentation abstraite dans le contrôleur du robot également à des fins de contrôle [79] [67]. On s'inspirera notamment des stratégies mettant en œuvre des efforts virtuels pour contraindre l'évolution du centre de gravité [80] [81].

2.5.2 Réflexion sur la stabilité posturale

On se propose dans cette section d'aborder la stabilité posturale en dehors des considérations classiquement rencontrées dans la littérature. C'est sur la base de cette réflexion que fut construit l'algorithme présenté par la suite.

La stabilité posturale est une notion extrêmement simple à formuler qui sous-entend un postulat qui n'est que rarement évoqué dans la littérature à savoir que cela ne concerne qu'un humanoïde (dans le cas qui nous intéresse) qui est debout, c'est-à-dire qu'il existe déjà au préalable une contrainte sur la position du centre de gravité par rapport au sol. Ce qui par extension amène à l'idée que le mouvement qu'effectue l'humanoïde est un transfert d'un état d'équilibre postural vers un autre. Cela implique qu'au-delà de la seule condition d'équilibre on envisage un état d'équilibre satisfaisant un ensemble de contraintes, la première étant la consommation énergétique. Elle peut se traduire par quatre questions :

- Qu'est-ce qu'être debout ?
- Qu'est-ce que tomber ?
- Comment est-ce que je sais que je ne tombe pas ?
- Qu'est-ce que je fais quand quelque chose est susceptible de me faire tomber ?

Afin de donner des éléments de réponse à ces interrogations, il convient de faire le constat que, dans le cas qui nous intéresse, tout système poly-articulé mobile à jambes, qu'il soit organique ou non, est une distribution reconfigurable de masse finie soumise à la gravitation, interagissant avec un environnement. Par construction, l'ensemble fermé des configurations possibles d'un tel système est également fini. Pour tout ensemble de critères pertinents pouvant être appliqué sur un tel système on pourra définir un sous-ensemble de configurations admissibles, restriction satisfaisant les dits critères.

Ainsi, « être debout » pourrait intuitivement se traduire pour un humain par la minimisation de la sollicitation musculaire conjointement au placement de la tête le plus haut possible, tout en ne tombant pas. Ce qui peut être équivalent à une minimisation des couples articulaires ainsi qu'au positionnement stable de l'effecteur. On s'aperçoit rapidement qu'une telle configuration est naturellement instable en absence de régulation (pendule inversé), ce qui conduit aux questions deux et trois.

Le fait de tomber est une notion vague puisque techniquement tout corps soumis au champ de pesanteur tombe vers la terre. Aussi faut-il non seulement considérer le référentiel monde dans lequel le système évolue et est susceptible de tomber mais aussi la capacité d'interaction de ce dernier par rapport à ce référentiel. Un système tombe dans un référentiel donné, dans l'acception courante, lorsqu'il n'est plus en mesure de commander tout ou partie de la dynamique résultant de la gravitation, des solides qui le constituent et cela dans le dit référentiel.

Par extension un système bascule au sens de la stabilité posturale lorsqu'il n'est plus en mesure de commander tout ou partie de la dynamique des solides qui le constitue dans le dit référentiel, le faisant ainsi tomber. Ainsi un système soumis à une accélération radiale (normale à la gravité) en plus de la gravité basculera dès l'instant où la résultante de ces actions mécaniques sur sa dynamique sera telle qu'il n'existe aucune action possible permettant au système de

généraliser la résistance nécessaire pour ne pas tomber, c'est-à-dire pour ne plus être en mesure d'agir contre la gravité.

Afin de percevoir un état de basculement ou de chute, il convient au système d'être doté de perceptions adéquates. Ainsi, à l'image des systèmes organiques, une proprioception en effort et en position est nécessaire, couplée à des capteurs d'interaction avec l'environnement, plus particulièrement le sol, complétée par une perception de l'accélération.

De manière générale la seule force que le système doit gérer est la gravitation : Comment se placer par rapport à elle pour arriver à un but quelconque ? il y a l'interaction avec le sol il est vrai mais ce n'est pas le principe actif qui contrarie la mobilité du système dans son environnement.

Se faire pousser revient pour la machine qu'elle soit organique ou synthétique à détecter une perturbation sous forme d'une variation plus ou moins intense d'énergie cinétique. Lorsqu'un système est soumis à une telle perturbation, il s'offre à lui deux possibilités : encaisser ou mitiger le choc. On entendra dans le premier cas un comportement complètement passif d'absorption du choc. La mitigation s'accompagne d'un changement de posture permettant de mieux répartir l'énergie afin de mieux la dissiper. On retrouvera dans cette stratégie toutes les formes de placement des pieds.

2.5.3 Modèle virtuel du centre de gravité

Comme on le verra plus tard dans cet exposé, le principe de base du stabilisateur postural est le contrôle de la position et de la dynamique du centre de gravité de la jambe. Il faut donc calculer la position théorique de ce point particulier à défaut de pouvoir la mesurer. Il vient immédiatement qu'en tant que position théorique issue d'éléments de modélisation, il y aura nécessairement une erreur sur cette position par rapport à la position réelle. C'est d'autant plus vrai que le nombre d'incertitudes potentielles dans le modèle est grand. Il faut donc partir du fait

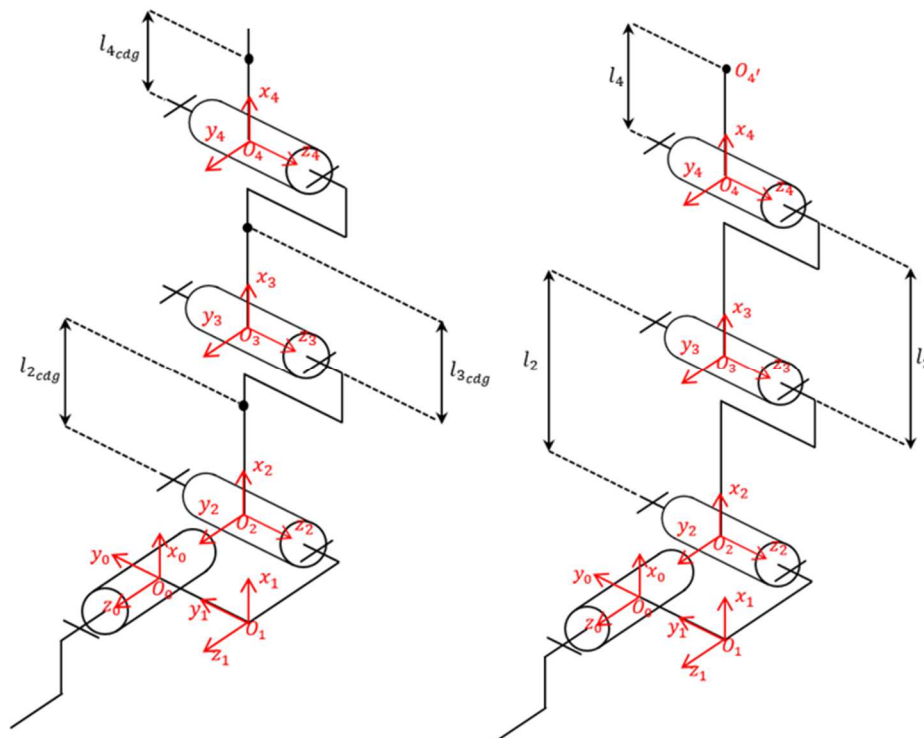


Figure 17: Schémas cinématiques de la jambe

que par construction, calculer un centre de gravité c'est déjà recourir à un modèle dégradé et cela avant toute considération technique propre au robot.

On se rappellera ici que les positions des centres de gravité de chaque corps de la jambe sont déjà une approximation quant à la réalité puisqu'ils sont supposés sur l'axe des segments (Figure 17). Ce qui se traduit par les trois MGD suivant (on néglige m_1 très petite devant les autres) :

$$\overrightarrow{O_0 G_2} = \begin{pmatrix} c_1 c_2 l_{2cdg} \\ s_1 c_2 l_{2cdg} \\ s_2 l_{2cdg} \end{pmatrix}; \overrightarrow{O_0 G_3} = \begin{pmatrix} c_1 c_2 l_2 + c_1 c_{23} l_{3cdg} \\ s_1 c_2 l_2 + s_1 c_{23} l_{3cdg} \\ s_2 l_2 + s_{23} l_{3cdg} \end{pmatrix}; \overrightarrow{O_0 G_4} = \begin{pmatrix} c_1 c_2 l_2 + c_1 c_{23} l_3 + c_1 c_{234} l_{4cdg} \\ s_1 c_2 l_2 + s_1 c_{23} l_3 + s_1 c_{234} l_{4cdg} \\ s_2 l_2 + s_{23} l_3 + s_{234} l_{4cdg} \end{pmatrix} \quad (36)$$

Considérons maintenant le barycentre G_T de la jambe, pondéré des masses des corps tel que :

$$m_2 \overrightarrow{G_T G_2} + m_3 \overrightarrow{G_T G_3} + m_4 \overrightarrow{G_T G_4} = \vec{0} \text{ avec } \overrightarrow{O_0 G_T} = \begin{pmatrix} x_T \\ y_T \\ z_T \end{pmatrix} \quad (37)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m_2 (c_1 c_2 l_{2cdg} - x_T) + m_3 (c_1 c_2 l_2 + c_1 c_{23} l_{3cdg} - x_T) + m_4 (c_1 c_2 l_2 + c_1 c_{23} l_3 + c_1 c_{234} l_{4cdg} - x_T) = 0 \\ m_2 (s_1 c_2 l_{2cdg} - y_T) + m_3 (s_1 c_2 l_2 + s_1 c_{23} l_{3cdg} - y_T) + m_4 (s_1 c_2 l_2 + s_1 c_{23} l_3 + s_1 c_{234} l_{4cdg} - y_T) = 0 \\ m_2 (s_2 l_{2cdg} - z_T) + m_3 (s_2 l_2 + s_{23} l_{3cdg} - z_T) + m_4 (s_2 l_2 + s_{23} l_3 + s_{234} l_{4cdg} - z_T) = 0 \end{cases} \quad (38)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x_T (m_2 + m_3 + m_4) + c_1 c_2 (m_2 l_{2cdg} + m_3 l_2 + m_4 l_2) + c_1 c_{23} (m_3 l_{3cdg} + m_4 l_3) + c_1 c_{234} (m_4 l_{4cdg}) = 0 \\ -y_T (m_2 + m_3 + m_4) + s_1 c_2 (m_2 l_{2cdg} + m_3 l_2 + m_4 l_2) + s_1 c_{23} (m_3 l_{3cdg} + m_4 l_3) + s_1 c_{234} (m_4 l_{4cdg}) = 0 \\ -z_T (m_2 + m_3 + m_4) + s_2 (m_2 l_{2cdg} + m_3 l_2 + m_4 l_2) + s_{23} (m_3 l_{3cdg} + m_4 l_3) + s_{234} (m_4 l_{4cdg}) = 0 \end{cases} \quad (39)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_T = \frac{c_1 c_2 (m_2 l_{2cdg} + m_3 l_2 + m_4 l_2) + c_1 c_{23} (m_3 l_{3cdg} + m_4 l_3) + c_1 c_{234} (m_4 l_{4cdg})}{(m_2 + m_3 + m_4)} \\ y_T = \frac{s_1 c_2 (m_2 l_{2cdg} + m_3 l_2 + m_4 l_2) + s_1 c_{23} (m_3 l_{3cdg} + m_4 l_3) + s_1 c_{234} (m_4 l_{4cdg})}{(m_2 + m_3 + m_4)} \\ z_T = \frac{s_2 (m_2 l_{2cdg} + m_3 l_2 + m_4 l_2) + s_{23} (m_3 l_{3cdg} + m_4 l_3) + s_{234} (m_4 l_{4cdg})}{(m_2 + m_3 + m_4)} \end{cases} \quad (40)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_T = c_1 c_2 l_{2G} + c_1 c_{23} l_{3G} + c_1 c_{234} l_{4G} \\ y_T = s_1 c_2 l_{2G} + s_1 c_{23} l_{3G} + s_1 c_{234} l_{4G} \\ z_T = s_2 l_{2G} + s_{23} l_{3G} + s_{234} l_{4G} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_T = c_1 (c_2 l_{2G} + c_{23} l_{3G} + c_{234} l_{4G}) \\ y_T = s_1 (c_2 l_{2G} + c_{23} l_{3G} + c_{234} l_{4G}) \\ z_T = s_2 l_{2G} + s_{23} l_{3G} + s_{234} l_{4G} \end{cases} \quad (41)$$

$$\text{avec } \begin{cases} l_{2G} = \frac{(m_2 l_{2cdg} + m_3 l_2 + m_4 l_2)}{(m_2 + m_3 + m_4)} \\ l_{3G} = \frac{(m_3 l_{3cdg} + m_4 l_3)}{(m_2 + m_3 + m_4)} \\ l_{4G} = \frac{(m_4 l_{4cdg})}{(m_2 + m_3 + m_4)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} l_{2G} = \frac{(m_2 l_{2cdg} + m_3 l_2 + m_4 l_2)}{m_{234}} \\ l_{3G} = \frac{(m_3 l_{3cdg} + m_4 l_3)}{m_{234}} \\ l_{4G} = \frac{(m_4 l_{4cdg})}{m_{234}} \end{cases} \quad (42)$$

On obtient donc ici un résultat tout à fait intéressant si on regarde attentivement la forme de la position du centre de gravité comparativement au modèle géométrique direct. En effet on obtient les deux expressions suivantes :

$$\begin{cases} x_T = c_1(c_2l_{2G} + c_{23}l_{3G} + c_{234}l_{4G}) \\ y_T = s_1(c_2l_{2G} + c_{23}l_{3G} + c_{234}l_{4G}) \\ z_T = s_2l_{2G} + s_{23}l_{3G} + s_{234}l_{4G} \end{cases} \text{ vs } \begin{cases} x_{04'} = c_1(c_2l_2 + c_{23}l_3 + c_{234}l_4) \\ y_{04'} = s_1(c_2l_2 + c_{23}l_3 + c_{234}l_4) \\ z_{04'} = s_2l_2 + s_{23}l_3 + s_{234}l_4 \end{cases} \quad (43)$$

Il s'agit rigoureusement de la même forme. On en déduit une première chose : il est parfaitement équivalent sous ces conditions de commander l'effecteur de la jambe que de commander le centre de gravité de la jambe, ce dernier étant virtuellement placé sur l'effecteur d'un robot de conception équivalente à la jambe bien qu'ayant des longueurs différentes et des segments de masse nulle. On se retrouve alors devant un problème de commande en position de robot, avec tout un arsenal de techniques permettant de le résoudre à notre disposition.

On aura donc le modèle géométrique suivant pour le robot virtuel du centre de gravité de la jambe :

$$T_{0 \rightarrow T} = \begin{pmatrix} c_1c_{234} & -c_1s_{234} & s_1 & c_1(c_2l_{2G} + c_{23}l_{3G} + c_{234}l_{4G}) \\ s_1c_{234} & -s_1s_{234} & -c_1 & s_1(c_2l_{2G} + c_{23}l_{3G} + c_{234}l_{4G}) \\ s_{234} & c_{234} & 0 & s_2l_{2G} + s_{23}l_{3G} + s_{234}l_{4G} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (44)$$

2.5.4 Principe du stabilisateur postural

Le stabilisateur a été pensé à partir d'observations faites sur l'humain qui ont été modélisées par la suite. Lorsqu'un humain se tient sur un pied il pourra sentir la répartition de pression sur la surface de ce dernier et c'est en déplaçant son centre de gravité et donc par extension son centre de pression notamment vers les bords de cette surface qu'il sentira une action musculaire réflexe d'une intensité dont l'amplitude augmente d'autant plus qu'il est près du bord. On observera également que cette notion de bord dépend de la nature du sol sur lequel est posé le pied et que l'appréciation du risque de chute relativement à l'action musculaire réflexe évoquée en dépend également. Cette action réflexe semble avoir pour but de ramener le centre de pression dans une région plus sûre à savoir le centre du polygone de sustentation comme s'il était soumis à des forces de répulsion.

On considérera donc que le polygone de sustentation évolue avec l'inclinaison du sol et qu'il demeurera la projection de la surface en contact avec le sol sur le plan passant par l'origine du repère monde orthogonal à la gravitation. Le centre de gravité de la jambe sera soumis à des champs de forces qui en tiendront la position aussi écartée que possible des bords du dit polygone de sustentation. Ces forces seront au minimum quatre étant donné que l'on envisage de contraindre la position d'un point dans un plan. Il y a donc deux directions principales et chacune d'elle est équipée d'une répulsion avant et arrière. Ces concepts seront représentés dans la section 2.5.5 avant d'être mathématisés dans la section 2.5.6.

A ce stade, on a donc un centre de gravité qui se trouve être l'organe terminal d'un robot virtuel qui est soumis à des efforts extérieurs. Ces derniers modifient la position du robot virtuel qui ne cherchera pas à y résister, réalisant ainsi la stabilité posturale. Ce déplacement virtuel sera donc appliqué au robot physique. On a donc un robot virtuel commandé en effort en fonction de sa position relative à la gravitation projetée dans un repère monde qui pilote en position un robot physique associé.

Comme évoqué durant les considérations sur l'état de l'art, on ne cherchera pas à utiliser des points de référence au sol pour commander la posture du robot. On choisira conformément à l'approche développée au 2.5.2, d'être en mesure de contrôler tout ou partie de la dynamique

du robot dans le référentiel monde. C'est-à-dire qu'on se demandera dans un premier temps comment commander la position du centre de gravité soumis à un critère de stabilité. On partira d'un critère statique en considérant les effets dynamiques comme des perturbations qu'il conviendra de rejeter. On cherchera alors à garder la projection du centre de gravité de la jambe dans le polyèdre de sustentation de cette dernière.

On se propose d'évaluer le stabilisateur en plaçant la jambe sur un sol soumis à des angles de roulis et de tangage. On utilisera un principe d'équivalence pour déterminer que l'accélération induite par l'inclinaison du sol et la capacité du robot à y réagir peut s'étendre à la capacité du robot à réagir à une accélération extérieure de même amplitude tout en gardant un sol neutre.

2.5.5 Mise en situation et éléments de définition

On commencera par une mise en situation du problème. On considère donc la jambe à quatre degrés de liberté munis d'un pied et d'un repère de base (O_0, x_0, y_0, z_0) au centre du cardan de la cheville (Figure 18). On a également le repère monde (M, x_g, y_g, z_g) qui sera ici attaché au robot au centre du polygone de sustentation. Dans le cadre de cette étude le polygone de sustentation est un parallélogramme, projection de la surface du pied sur le plan orthogonal à

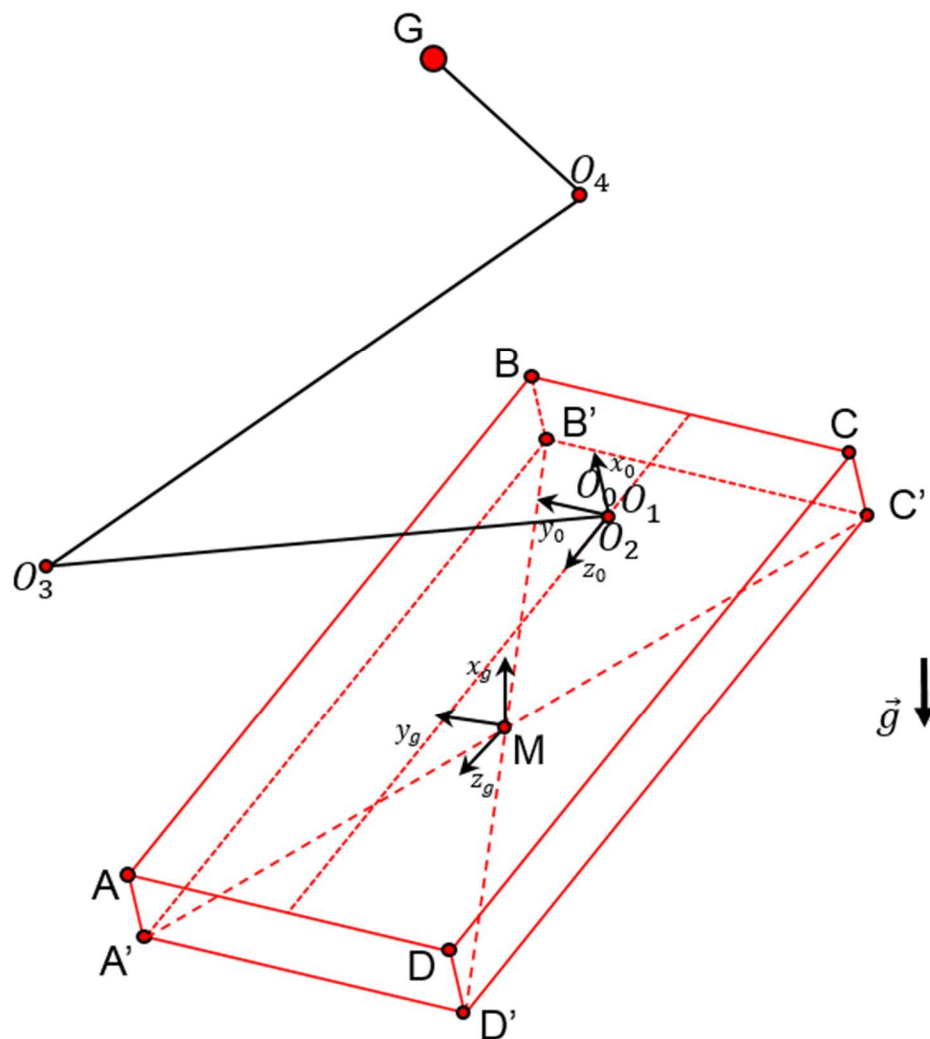


Figure 18: Repère monde et repère de base du robot

$\vec{g}$ passant par M invariant par rotation d'angle α et β respectivement autour des axes z_g et y_g (Figure 21).

Caractérisons la matrice de rotation qui permet d'aller du repère monde au repère de base du robot.

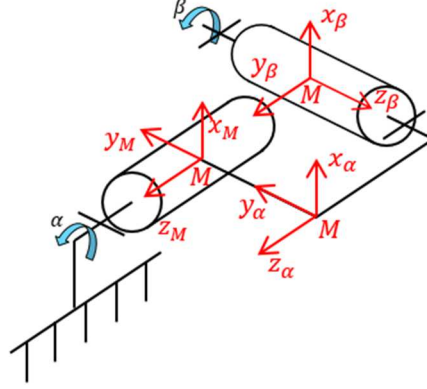


Figure 19: La mobilité du plan inclinable

On envisagera une construction par matrice de transformation homogène d'un enchainement de tangage et de roulis (Figure 19):

$$R_{M \rightarrow \alpha} = \begin{pmatrix} c_\alpha & -s_\alpha & 0 \\ s_\alpha & c_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} R_{\alpha \rightarrow \beta'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} R_{\beta' \rightarrow \beta} = \begin{pmatrix} c_\beta & -s_\beta & 0 \\ s_\beta & c_\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} R_{\beta \rightarrow O_0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (45)$$

On obtient la matrice suivante :

$$R_{M \rightarrow O_0} = \begin{pmatrix} c_\alpha c_\beta & -s_\alpha & -c_\alpha s_\beta \\ s_\alpha c_\beta & c_\alpha & -s_\alpha s_\beta \\ s_\beta & 0 & c_\beta \end{pmatrix} \quad (46)$$

Arrêtons-nous un instant sur la géométrie du pied qui conditionne la forme du polygone de sustentation. Il s'agit dans le cadre de cette étude d'un parallélépipède rectangle ce qui est une restriction de la forme du pied du robot dont la géométrie simplifiée suffira amplement à la description de la méthode employée. Cette dernière étant transposable à toutes formes de pied. On a donc un ensemble de longueurs caractéristiques que l'on peut identifier sur la Figure 20.

On peut maintenant écrire les points particuliers du pied dans le repère monde, à commencer par le centre du repère de base du robot :

$$T_{M \rightarrow O_0} = \begin{pmatrix} c_\alpha c_\beta & -s_\alpha & -c_\alpha s_\beta & c_\alpha (c_\beta \Delta + s_\beta Z) \\ s_\alpha c_\beta & c_\alpha & -s_\alpha s_\beta & s_\alpha (c_\beta \Delta + s_\beta Z) \\ s_\beta & 0 & c_\beta & s_\beta \Delta - c_\beta Z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (47)$$

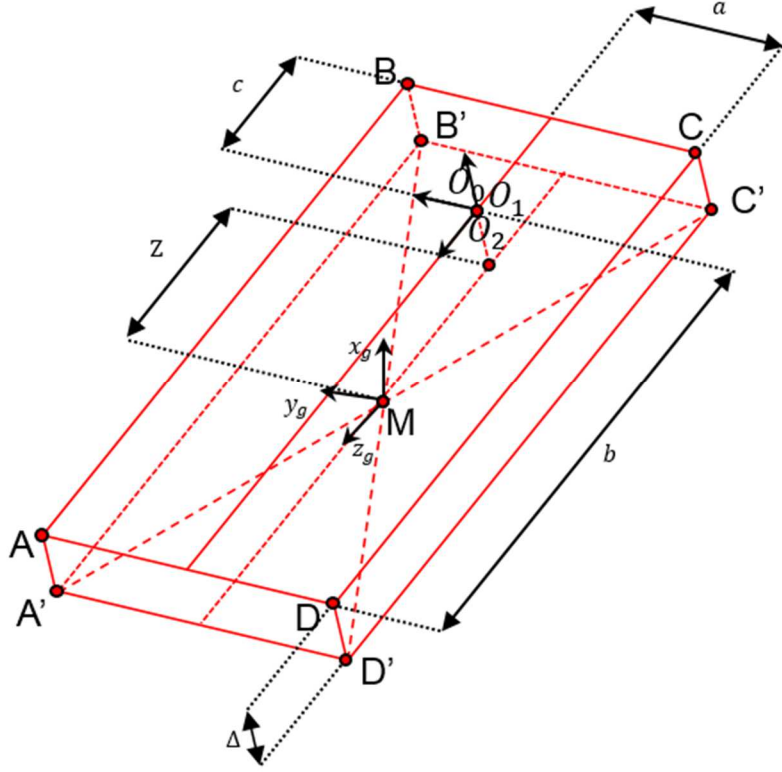


Figure 20: Paramètres géométrique du pied

Comme on souhaite la projection de la surface du pied sur le plan orthogonal à $\vec{g}$ passant par M on aura besoin des coordonnées des points A' , B' , C' et D' toujours dans le repère monde :

$$T_{M \rightarrow A'} = \begin{pmatrix} R_{M \rightarrow O_0} & \begin{pmatrix} -s_\alpha a + c_\alpha s_\beta (Z - b) \\ c_\alpha a + s_\alpha s_\beta (Z - b) \\ -c_\beta (Z - b) \end{pmatrix} \\ \mathbb{O}_{1,3} & 1 \end{pmatrix} T_{M \rightarrow B'} = \begin{pmatrix} R_{M \rightarrow O_0} & \begin{pmatrix} -s_\alpha a + c_\alpha s_\beta (Z + c) \\ c_\alpha a + s_\alpha s_\beta (Z + c) \\ -c_\beta (Z + c) \end{pmatrix} \\ \mathbb{O}_{1,3} & 1 \end{pmatrix} \quad (48)$$

$$T_{M \rightarrow C'} = \begin{pmatrix} R_{M \rightarrow O_0} & \begin{pmatrix} s_\alpha a + c_\alpha s_\beta (Z + c) \\ -c_\alpha a + s_\alpha s_\beta (Z + c) \\ -c_\beta (Z + c) \end{pmatrix} \\ \mathbb{O}_{1,3} & 1 \end{pmatrix} T_{M \rightarrow D'} = \begin{pmatrix} R_{M \rightarrow O_0} & \begin{pmatrix} s_\alpha a + c_\alpha s_\beta (Z - b) \\ -c_\alpha a + s_\alpha s_\beta (Z - b) \\ -c_\beta (Z - b) \end{pmatrix} \\ \mathbb{O}_{1,3} & 1 \end{pmatrix} \quad (49)$$

2.5.6 Construction du polygone de sustentation

Il convient de calculer les coordonnées de ses sommets A^* , B^* , C^* et D^* obtenus par projection sur le plan orthogonal à $\vec{g}$ passant par M des points A' , B' , C' et D' comme représenté sur la Figure 21.

On obtient donc les relations suivantes :

$$T_{M \rightarrow A^*} = \begin{pmatrix} R_{M \rightarrow O_0} & \begin{pmatrix} 0 \\ c_\alpha a + s_\alpha s_\beta (Z - b) \\ -c_\beta (Z - b) \end{pmatrix} \\ \mathbb{O}_{1,3} & 1 \end{pmatrix} T_{M \rightarrow B^*} = \begin{pmatrix} R_{M \rightarrow O_0} & \begin{pmatrix} 0 \\ c_\alpha a + s_\alpha s_\beta (Z + c) \\ -c_\beta (Z + c) \end{pmatrix} \\ \mathbb{O}_{1,3} & 1 \end{pmatrix} \quad (50)$$

$$T_{M \rightarrow C^*} = \begin{pmatrix} R_{M \rightarrow O_0} & \begin{pmatrix} 0 \\ -c_\alpha a + s_\alpha s_\beta (Z + c) \\ -c_\beta (Z + c) \end{pmatrix} \\ \mathbb{O}_{1,3} & 1 \end{pmatrix} T_{M \rightarrow D^*} = \begin{pmatrix} R_{M \rightarrow O_0} & \begin{pmatrix} 0 \\ -c_\alpha a + s_\alpha s_\beta (Z - b) \\ -c_\beta (Z - b) \end{pmatrix} \\ \mathbb{O}_{1,3} & 1 \end{pmatrix} \quad (51)$$

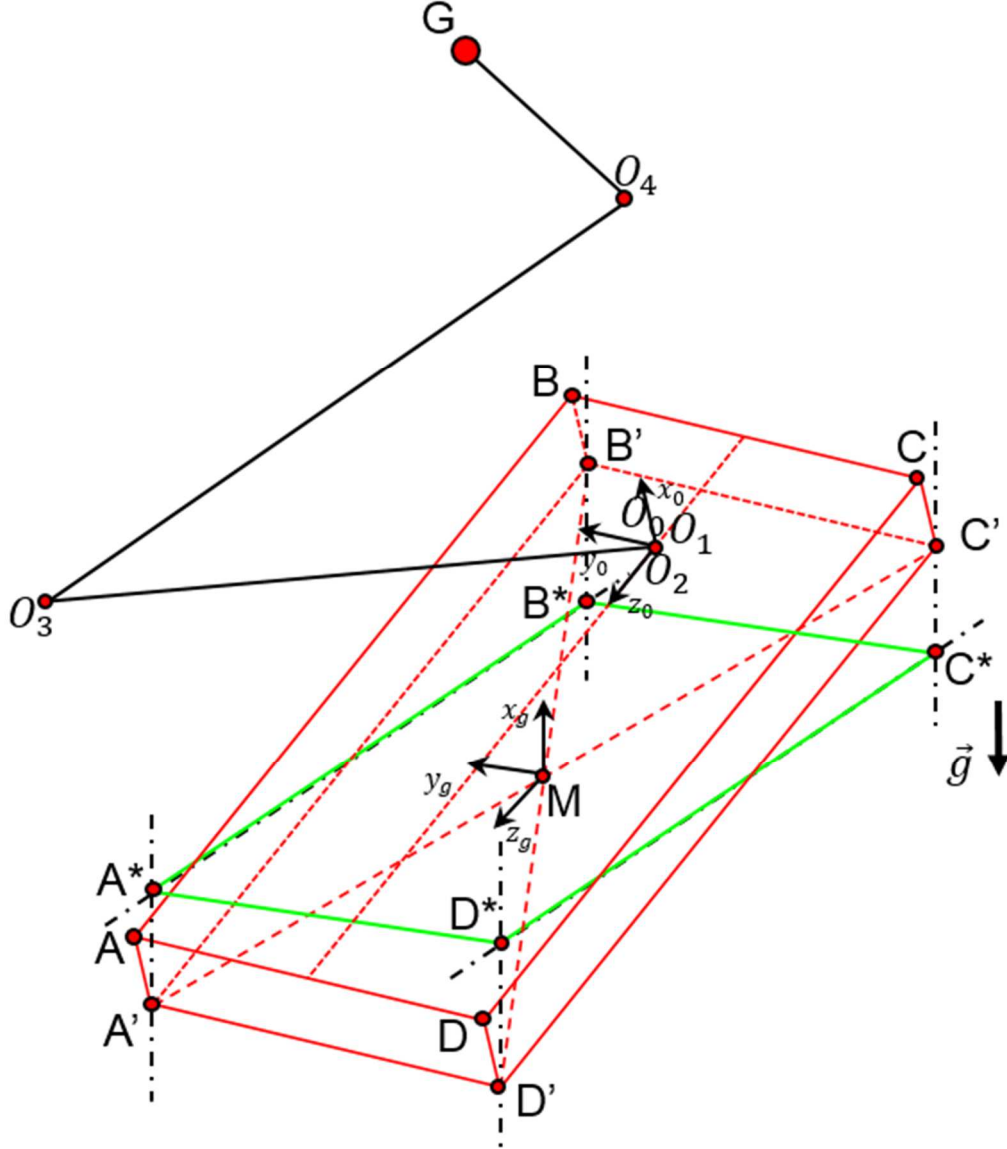


Figure 21: Mise en évidence du polygone de sustentation

2.5.7 Génération des plans supports des champs répulsifs

Ce qui nous intéresse maintenant ce sont les plans passant par les arêtes du polygone de sustentation parallèles à la gravitation. En effet ce sont des « murs virtuels » qui vont contraindre l'évolution du centre de gravité afin de garantir la stabilité posturale.

Avant de traiter le calcul des équations de ces plans particuliers, rappelons une propriété des plans en géométrie vectorielle :

Le plan P passant par $A(a_1, a_2, a_3)$ et de vecteurs générateurs $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$ et $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$ est l'ensemble des points $N(x, y, z)$ tel que :

$$\forall N(x, y, z) \in P, \quad \vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AN} \text{ coplanaires}$$

$$\Leftrightarrow \forall N(x, y, z) \in P, \quad [\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AN}] = 0 \quad (52)$$

$$\Leftrightarrow \forall N(x, y, z) \in P, \quad \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & x - a_1 \\ u_2 & v_2 & y - a_2 \\ u_3 & v_3 & z - a_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (53)$$

$$\Leftrightarrow P \equiv (u_2 v_3 - u_3 v_2)(x - a_1) + (u_3 v_1 - u_1 v_3)(y - a_2) + (u_1 v_2 - u_2 v_1)(z - a_3) = 0 \quad (54)$$

Par construction, un des vecteurs générateurs de chacun des plans qui nous intéresse est colinéaire à la gravitation aussi prendra-t-on x_G . Le second vecteur générateur ne sera autre que celui associé à chaque arête du polygone de sustentation. On a donc, dans le repère monde :

$$\overrightarrow{A^*B^*} = \begin{pmatrix} 0 \\ s_\alpha s_\beta (b + c) \\ -c_\beta (b + c) \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{A^*D^*} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2ac_\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \quad (55)$$

$$\overrightarrow{C^*B^*} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2ac_\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{C^*D^*} = \begin{pmatrix} 0 \\ -s_\alpha s_\beta (b + c) \\ c_\beta (b + c) \end{pmatrix} \quad (56)$$

On définit maintenant quatre plans P_1, P_2, P_3, P_4 que l'on peut observer sur la Figure 22. Ces quatres plans ont pour équations en commençant par P_1 :

$$\forall N(x, y, z) \in P_1 \equiv [\overrightarrow{x_G}, \overrightarrow{A^*D^*}, \overrightarrow{A^*N}] = 0 \quad (57)$$

$$\Leftrightarrow \forall N(x, y, z) \in P_1 \equiv \begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & -2ac_\alpha & y - (c_\alpha a + s_\alpha s_\beta (Z - b)) \\ 0 & 0 & z - (-c_\beta (Z - b)) \end{vmatrix} = 0 \quad (58)$$

$$\Leftrightarrow \forall N(x, y, z) \in P_1 \equiv z + c_\beta (Z - b) = 0 \quad (59)$$

Puis P_2 :

$$\forall N(x, y, z) \in P_2 \equiv [\overrightarrow{x_G}, \overrightarrow{C^*B^*}, \overrightarrow{C^*N}] = 0 \quad (60)$$

$$\Leftrightarrow \forall N(x, y, z) \in P_2 \equiv \begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 2ac_\alpha & y - (-c_\alpha a + s_\alpha s_\beta (Z + c)) \\ 0 & 0 & z - (-c_\beta (Z + c)) \end{vmatrix} = 0 \quad (61)$$

$$\Leftrightarrow \forall N(x, y, z) \in P_2 \equiv z + c_\beta (Z + c) = 0 \quad (62)$$

On a pour P_3 :

$$\forall N(x, y, z) \in P_3 \equiv [\overrightarrow{x_G}, \overrightarrow{C^*D^*}, \overrightarrow{C^*N}] = 0 \quad (63)$$

$$\Leftrightarrow \forall N(x, y, z) \in P_3 \equiv \begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & -s_\alpha s_\beta (b + c) & y - (-c_\alpha a + s_\alpha s_\beta (Z + c)) \\ 0 & c_\beta (b + c) & z - (-c_\beta (Z + c)) \end{vmatrix} = 0 \quad (64)$$

$$\Leftrightarrow \forall N(x, y, z) \in P_3 \equiv s_\alpha s_\beta z + y c_\beta + a c_\alpha c_\beta = 0 \quad (65)$$

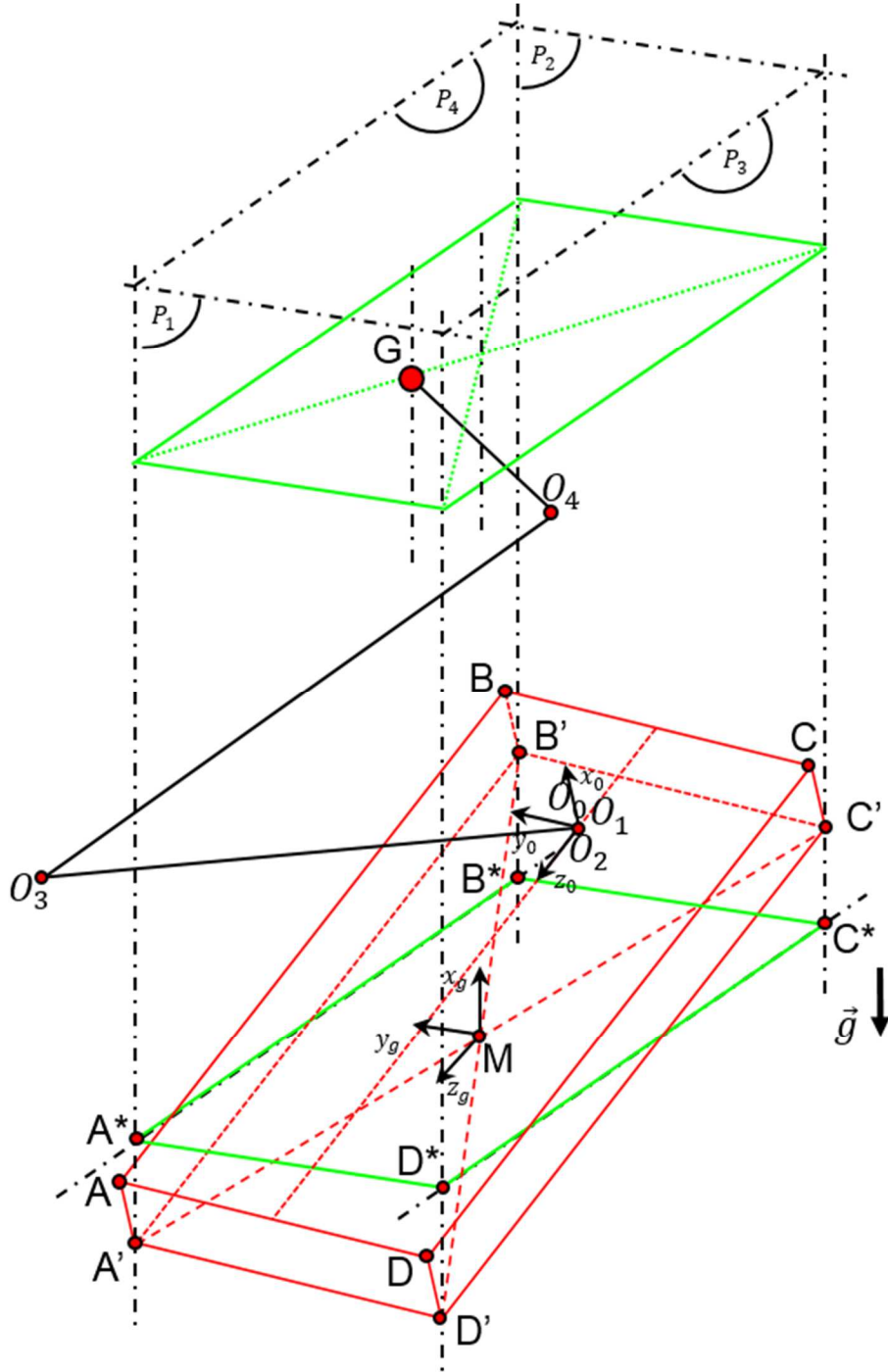


Figure 22: Mise en évidence des plans supports des champs répulsifs

Et enfin P_4 qui s'écrit :

$$\forall N(x, y, z) \in P_4 \equiv [\vec{x}_G, \vec{A^*B^*}, \vec{A^*N}] = 0 \quad (66)$$

$$\Leftrightarrow \forall N(x, y, z) \in P_4 \equiv \begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & s_\alpha s_\beta (b + c) & y - (c_\alpha a + s_\alpha s_\beta (Z - b)) \\ 0 & -c_\beta (b + c) & z - (-c_\beta (Z - b)) \end{vmatrix} = 0 \quad (67)$$

$$\Leftrightarrow \forall N(x, y, z) \in P_4 \equiv s_\alpha s_\beta z + y c_\beta - a c_\alpha c_\beta = 0 \quad (68)$$

On a donc nos quatre équations de plan :

$$\begin{cases} P_1 \equiv z + c_\beta(Z - b) = 0 \\ P_2 \equiv z + c_\beta(Z + c) = 0 \\ P_3 \equiv c_\beta y + s_\alpha s_\beta z + ac_\alpha c_\beta = 0 \\ P_4 \equiv c_\beta y + s_\alpha s_\beta z - ac_\alpha c_\beta = 0 \end{cases} \quad (69)$$

2.5.8 Evaluation de la distance entre le centre de gravité et les murs virtuels

On commencera par rappeler l'expression de la distance Δ d'un point $M(x_m, y_m, z_m)$ à un plan $P \equiv ax + by + cz + d = 0$:

$$\Delta = \frac{|ax_m + by_m + cz_m + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad (70)$$

On souhaite construire les projetés orthogonaux de G sur chaque mur virtuel (Figure 23). Ces points G_1, G_2, G_3, G_4 seront les sources des potentiels répulsifs qui affecteront le centre de gravité comme nous le verrons plus tard.

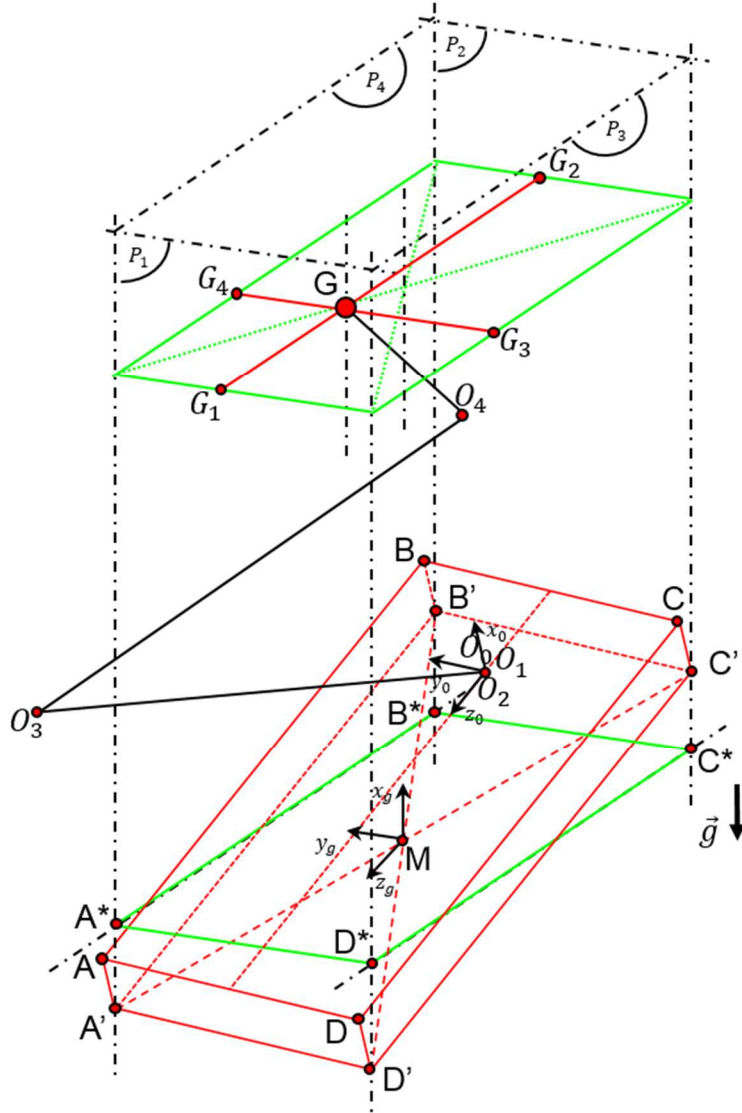


Figure 23: Evaluation de la distance entre le centre de gravité et les murs virtuels

On définit alors 4 distances $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ du point $G(x_g, y_g, z_g)$ aux plans respectifs P_1, P_2, P_3, P_4 :

$$\Leftrightarrow \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4 / \begin{cases} \Delta_1 = |z_g + c_\beta(Z - b)| \\ \Delta_2 = |z_g + c_\beta(Z + c)| \\ \Delta_3 = |c_\beta y_g + s_\alpha s_\beta z_g + a c_\alpha c_\beta| / \sqrt{c_\beta^2 + s_\alpha^2 s_\beta^2} \\ \Delta_4 = |c_\beta y_g + s_\alpha s_\beta z_g - a c_\alpha c_\beta| / \sqrt{c_\beta^2 + s_\alpha^2 s_\beta^2} \end{cases} \quad (71)$$

Ce qui se traduit graphiquement (Figure 24) comme suit :

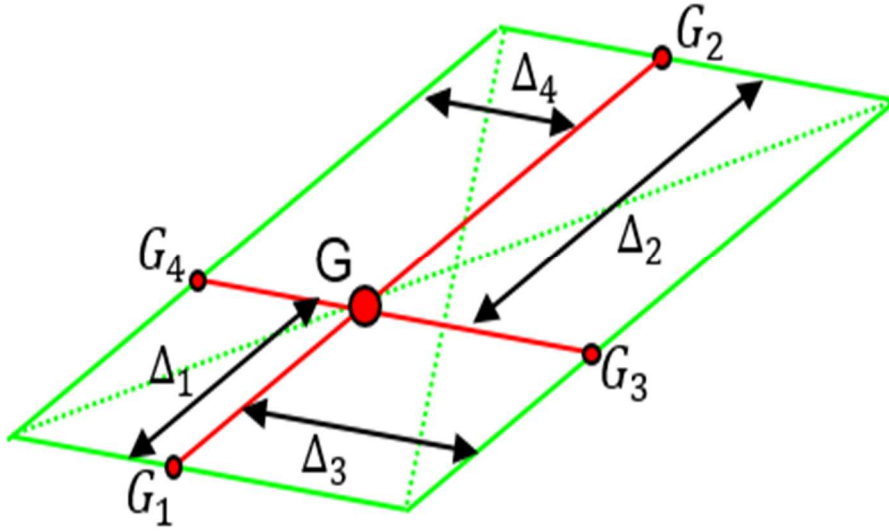


Figure 24: Mise en évidence des distances entre les plans du polyèdre de sustentation et le centre de gravité

2.5.9 Modélisation des champs répulsifs exercés par les murs virtuels sur le centre de gravité

On a choisi un modèle de Coulomb (électrostatique) pour représenter une augmentation de l'intensité de la force de répulsion à mesure que le centre de gravité s'approche des murs virtuels. En effet, le choix d'un système ressort-amortisseur, plus immédiat, ne permet qu'une intensification linéaire de la répulsion, ce qui n'est pas le comportement que l'on recherche. Il s'agit d'une force fictive normale au plan, appliquée du projeté orthogonal vers le centre de gravité :

$$\vec{F}_{Gi} = k_i * \frac{1}{\Delta_i^2} \frac{\vec{n}_i}{\|\vec{n}_i\|} \text{ tel que } \vec{n}_i = \begin{pmatrix} n_{ix} \\ n_{iy} \\ n_{iz} \end{pmatrix} \quad (72)$$

$$\Leftrightarrow \vec{F}_{Gi} = \frac{k_i}{\Delta_i^2 \|\vec{n}_i\|} \begin{pmatrix} n_{ix} \\ n_{iy} \\ n_{iz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_{ix} \frac{k_i}{\Delta_i^2 \|\vec{n}_i\|} \\ n_{iy} \frac{k_i}{\Delta_i^2 \|\vec{n}_i\|} \\ n_{iz} \frac{k_i}{\Delta_i^2 \|\vec{n}_i\|} \end{pmatrix} \quad (73)$$

On rappelle avec $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3, \vec{n}_4$ les normales intérieures aux plans :

$$\left\{ \begin{array}{l} P_1 \equiv z + c_\beta(Z - b) = 0 \Rightarrow \vec{n}_1 = \begin{pmatrix} n_{1x} \\ n_{1y} \\ n_{1z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ tel que } \|\vec{n}_1\| = 1 \\ P_2 \equiv z + c_\beta(Z + c) = 0 \Rightarrow \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} n_{2x} \\ n_{2y} \\ n_{2z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ tel que } \|\vec{n}_2\| = 1 \\ P_3 \equiv c_\beta y + s_\alpha s_\beta z + a c_\alpha c_\beta = 0 \Rightarrow \vec{n}_3 = \begin{pmatrix} n_{3x} \\ n_{3y} \\ n_{3z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ c_\beta \\ s_\alpha s_\beta \end{pmatrix} \text{ tel que } \|\vec{n}_3\| = \sqrt{c_\beta^2 + s_\alpha^2 s_\beta^2} \\ P_4 \equiv c_\beta y + s_\alpha s_\beta z - a c_\alpha c_\beta = 0 \Rightarrow \vec{n}_4 = \begin{pmatrix} n_{4x} \\ n_{4y} \\ n_{4z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -c_\beta \\ -s_\alpha s_\beta \end{pmatrix} \text{ tel que } \|\vec{n}_4\| = \sqrt{c_\beta^2 + s_\alpha^2 s_\beta^2} \end{array} \right. \quad (74)$$

On définit alors les quatres forces fictives suivantes :

$$\vec{F}_{G1}, \vec{F}_{G2}, \vec{F}_{G3}, \vec{F}_{G4} / \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{G1} = k_1 * \frac{1}{\Delta_1^2} \frac{\vec{n}_1}{\|\vec{n}_1\|} \\ \vec{F}_{G2} = k_2 * \frac{1}{\Delta_2^2} \frac{\vec{n}_2}{\|\vec{n}_2\|} \\ \vec{F}_{G3} = k_3 * \frac{1}{\Delta_3^2} \frac{\vec{n}_3}{\|\vec{n}_3\|} \\ \vec{F}_{G4} = k_4 * \frac{1}{\Delta_4^2} \frac{\vec{n}_4}{\|\vec{n}_4\|} \end{array} \right. \quad (75)$$

$$\Leftrightarrow \vec{F}_{G1}, \vec{F}_{G2}, \vec{F}_{G3}, \vec{F}_{G4} / \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{G1} = k_1 * \frac{1}{\Delta_1^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{k_1}{\Delta_1^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{k_1}{\Delta_1^2} \end{pmatrix} \\ \vec{F}_{G2} = k_2 * \frac{1}{\Delta_2^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{k_2}{\Delta_2^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{k_2}{\Delta_2^2} \end{pmatrix} \\ \vec{F}_{G3} = k_3 * \frac{1}{\Delta_3^2} \frac{1}{\sqrt{c_\beta^2 + s_\alpha^2 s_\beta^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ c_\beta \\ s_\alpha s_\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{k_3 c_\beta}{\Delta_3^2 \sqrt{c_\beta^2 + s_\alpha^2 s_\beta^2}} \\ \frac{k_3 s_\alpha s_\beta}{\Delta_3^2 \sqrt{c_\beta^2 + s_\alpha^2 s_\beta^2}} \end{pmatrix} \\ \vec{F}_{G4} = k_4 * \frac{1}{\Delta_4^2} \frac{1}{\sqrt{c_\beta^2 + s_\alpha^2 s_\beta^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -c_\beta \\ -s_\alpha s_\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{k_4 c_\beta}{\Delta_4^2 \sqrt{c_\beta^2 + s_\alpha^2 s_\beta^2}} \\ -\frac{k_4 s_\alpha s_\beta}{\Delta_4^2 \sqrt{c_\beta^2 + s_\alpha^2 s_\beta^2}} \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (76)$$

On peut voir ces forces matérialisées sur la Figure 25:

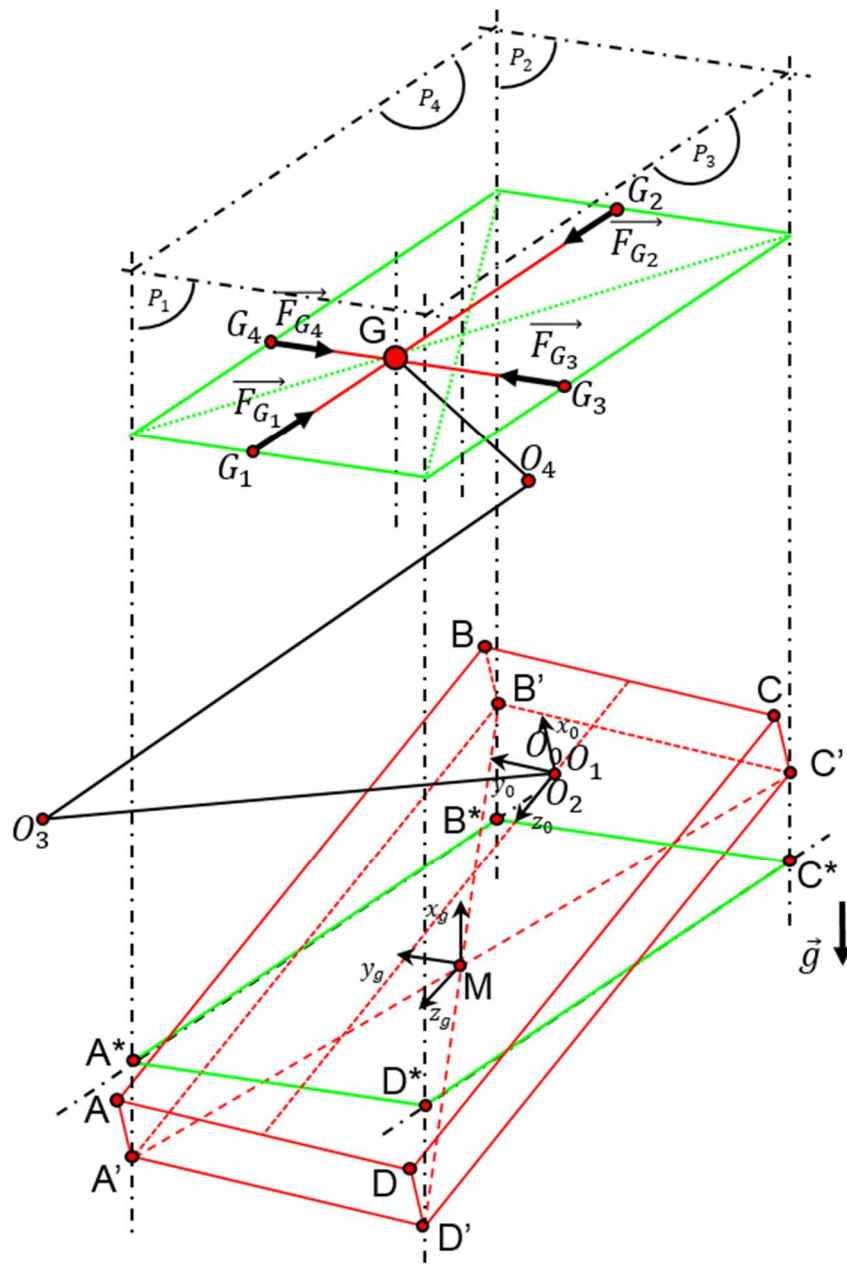


Figure 25: Mise en évidence des forces de répulsion

2.5.10 Modélisation des champs attractifs

Afin d'obtenir un comportement naturel par analogie avec le corps humain, au sens où le corps cherchera à minimiser sa consommation énergétique, on a décidé d'ajouter un potentiel attractif à l'intérieur du polyèdre de sustentation. A cause de la nature des champs répulsifs ils auront tendance à perdre en intensité à mesure que le centre de gravité se tient éloigné des murs virtuels. C'est alors que l'on règlera judicieusement la portée de l'intensité du champ attractif pour que ce dernier place le centre de gravité à un endroit optimal. Il pourra s'agir du lieu qui minimise la sollicitation des actionneurs ou encore celui qui garantit les plus grandes marges de stabilité. On utilisera également une loi de Coulomb pour modéliser cette force.

On a donc pour un potentiel attractif localisé en G^+ :

$$\overrightarrow{GG^+} = \begin{pmatrix} x_{GG^+} \\ y_{GG^+} \\ z_{GG^+} \end{pmatrix} = \|\overrightarrow{GG^+}\| \frac{\overrightarrow{GG^+}}{\|\overrightarrow{GG^+}\|} = \|\overrightarrow{GG^+}\| \vec{u} \text{ avec } \begin{cases} \|\overrightarrow{GG^+}\| = \sqrt{x_{GG^+}^2 + y_{GG^+}^2 + z_{GG^+}^2} = \Delta \\ \vec{u} = \begin{pmatrix} x_{GG^+}/\Delta \\ y_{GG^+}/\Delta \\ z_{GG^+}/\Delta \end{pmatrix} \end{cases} \quad (77)$$

Et on définit alors la force attractive :

$$\vec{\Gamma}_G = \frac{k}{\Delta^2} \vec{u} = \frac{k}{\Delta^2} \begin{pmatrix} x_{GG^+}/\Delta \\ y_{GG^+}/\Delta \\ z_{GG^+}/\Delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{k x_{GG^+}}{\Delta^3} \\ \frac{k y_{GG^+}}{\Delta^3} \\ \frac{k z_{GG^+}}{\Delta^3} \end{pmatrix} \quad (78)$$

2.5.11 Schéma de synthèse

On peut voir sur la Figure 26, l'ensemble des étapes précédemment évoquées mises en situation avec les efforts virtuels appliqués sur le centre de gravité mis en évidence pour garantir la stabilité posturale du robot.

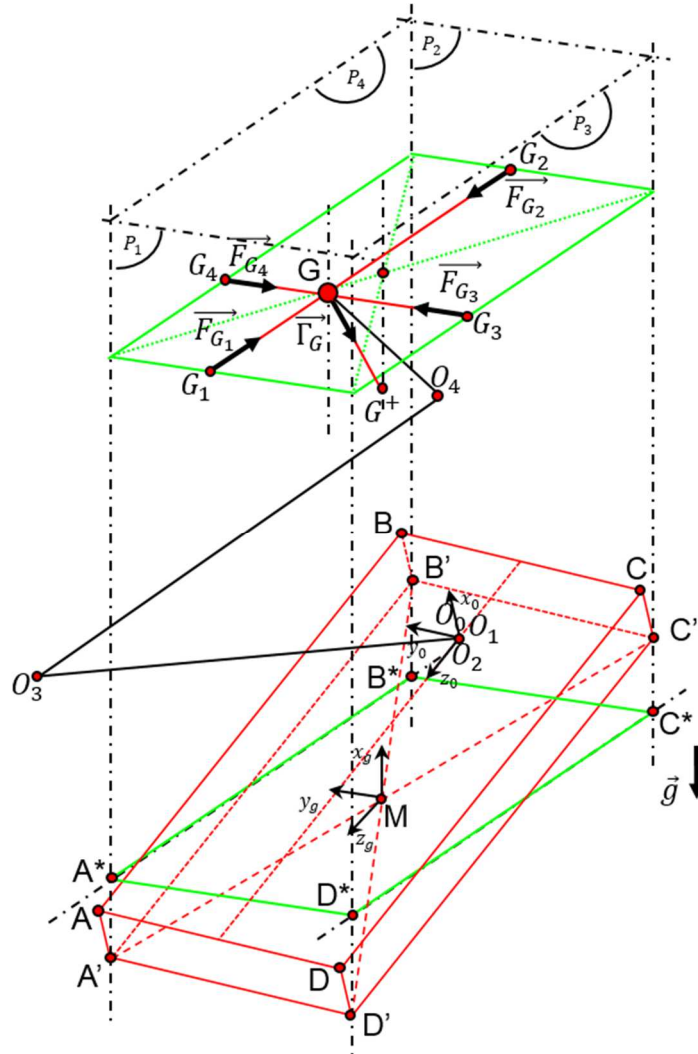


Figure 26: Schéma de synthèse du stabilisateur postural

Abordons maintenant le point de vue de l'automaticien à travers un schéma bloc du principe de commande mis en œuvre (Figure 27) :

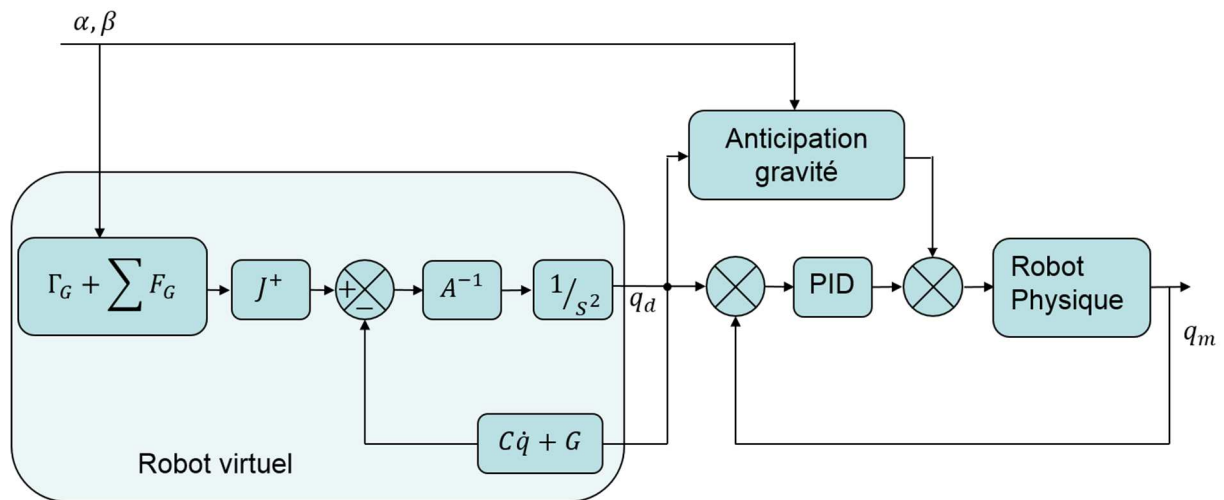


Figure 27: Schéma bloc du principe de commande

On a donc un robot virtuel soumis à des efforts extérieurs qui viendront modifier sa posture en fonction d'un ensemble de contraintes. Cette posture sera celle spécifiée au robot physique.

2.5.12 Éléments de simulation

Le schéma de commande évoqué dans la section précédente a été traduit dans le logiciel de simulation Matlab/Simulink. Le simulateur comprend donc un modèle du robot physique, un modèle du robot virtuel associé soumis aux champs de forces ainsi qu'un générateur d'inclinaison du sol.

Ce dernier consiste en un double interpolateur polynomial d'ordre cinq qui pour les éléments qui seront présentés par la suite correspond à un angle alpha de dix degrés et un angle beta de vingt degrés. Le scénario est composé de deux mouvements de sept secondes chacun. Le premier part d'une inclinaison du sol nulle $(\alpha, \beta) = (0, 0)$ pour aller à la position $(\alpha, \beta) = (10, 20)$ et le second en est le retour de la position $(\alpha, \beta) = (10, 20)$ vers la position $(\alpha, \beta) = (0, 0)$. Le graphe suivant (Figure 28) est composé de quatre lignes et trois colonnes. Chaque ligne correspond à un instant t choisi afin de montrer l'évolution du système au cours du temps et de gauche à droite on peut respectivement observer une vue de gauche, une vue de dessus ainsi qu'une vue de face.

On remarquera sur la dernière ligne de ce chronogramme que la position finale du robot n'est pas la même que la position initiale. Ceci est uniquement dû aux efforts virtuels qui sont appliqués sur le centre de gravité. En effet, dans cette simulation il n'y a aucun potentiel attractif et seuls les champs répulsifs sont à l'œuvre, aussi, lorsque le système est stabilisé, le centre de gravité se retrouve au lieu d'équilibre des champs à savoir dans ce cadre précis au milieu du polyèdre de sustentation. Quant à son altitude, elle n'est pas contrainte aussi résulte-t-elle de la pseudo-inverse uniquement.

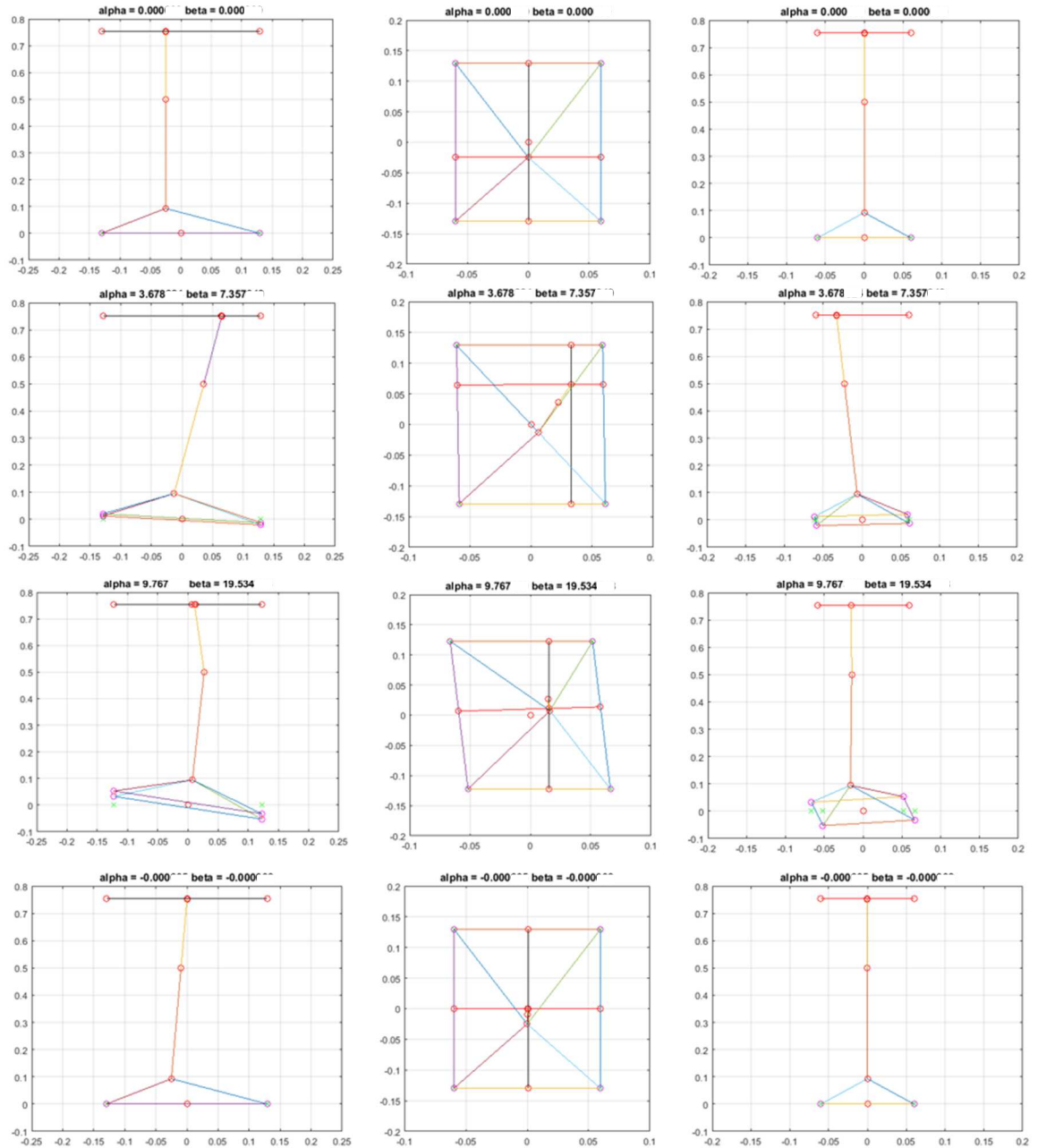


Figure 28: Evolution du pied sur un sol incliné (unité en m)

Les paramètres des champs qui sont en œuvre sur cet exemple ont été réglés afin de garder le centre de gravité à l'intérieur du polygone de sustentation, quelle que soit l'inclinaison du sol et cela dans les limites articulaires du robot. Aucune procédure d'optimisation n'a été utilisée afin de garantir un comportement plutôt qu'un autre car le but premier de ce simulateur était de déterminer la faisabilité de la méthode et la validité du raisonnement. Les champs sont conçus pour stabiliser la position du centre de gravité au centre du polyèdre de sustentation.

On remarquera ici que l'algorithme tel qu'il est implémenté réalise une stratégie dite « de la cheville » ce qui est directement lié à la l'utilisation de la pseudo-inverse qui permet d'obtenir une solution optimale au problème de l'inverse. Cela peut poser un problème si l'on considère les capacités des actionneurs en termes de couple. On a mis en place une pondération pour homogénéiser la répartition des couples en utilisant une matrice de pondération sur la jacobienne

du robot virtuel. Encore une fois la pondération sera réglée à la main pour traiter un cas particulier que l'on ne généralisera pas. On peut toutefois y voir une piste pour la qualification de la robustesse du stabilisateur.

2.6 Validations expérimentales

Nous présenterons dans cette section quelques résultats expérimentaux concernant trois cas, un mouvement de squat classique, un mouvement de marche à 360 mètres par heure généré hors ligne grâce à un générateur de trajectoire de marche développé au sein de l'équipe [82] (appliqué au robot complet) et pour finir la mise en œuvre du stabilisateur postural devant une inclinaison du sol de vingt degrés.

2.6.1 Mouvement de squat

Ce mouvement est généré à l'initialisation du contrôleur mais pourrait être calculé en ligne par le générateur de trajectoire embarqué. Il s'agit d'une interpolation polynomiale d'ordre cinq entre une position initiale et une position finale pour chaque articulation. On a un débattement de seize degrés pour la cheville, quatre-vingt-cinq degrés pour le genou et soixante-dix degrés pour la hanche. La descente et la montée durent chacune sept secondes. On peut observer le mouvement sur la Figure 29:

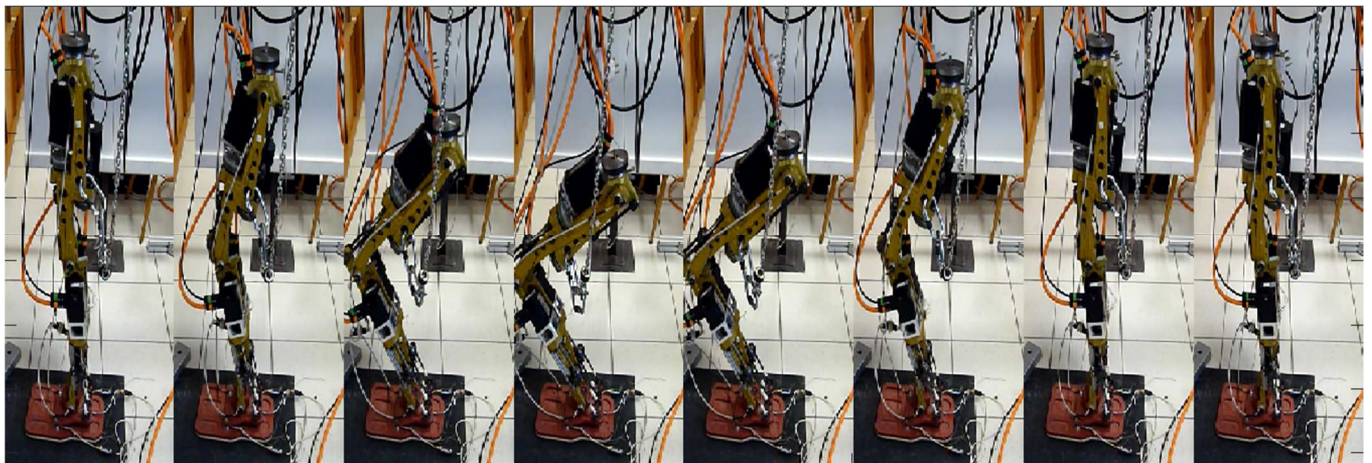


Figure 29: Chronogramme d'un squat (une image toutes les 2 secondes)

Le pied ayant été équipé de capteur d'effort, on a pu récupérer la position du ZMP à l'intérieur du polygone de sustentation et la comparer à l'évolution du centre de gravité lors du mouvement. On remarquera la grande répétabilité du mouvement, en effet le robot a subi des tests d'endurance et malgré les heures de fonctionnement il est resté répétable. La Figure 30 montre l'évolution de la position du ZMP dans le plan du pied. Quant à la Figure 31, elle reprend l'évolution temporelle du ZMP respectivement dans les plans sagittal et transversal.

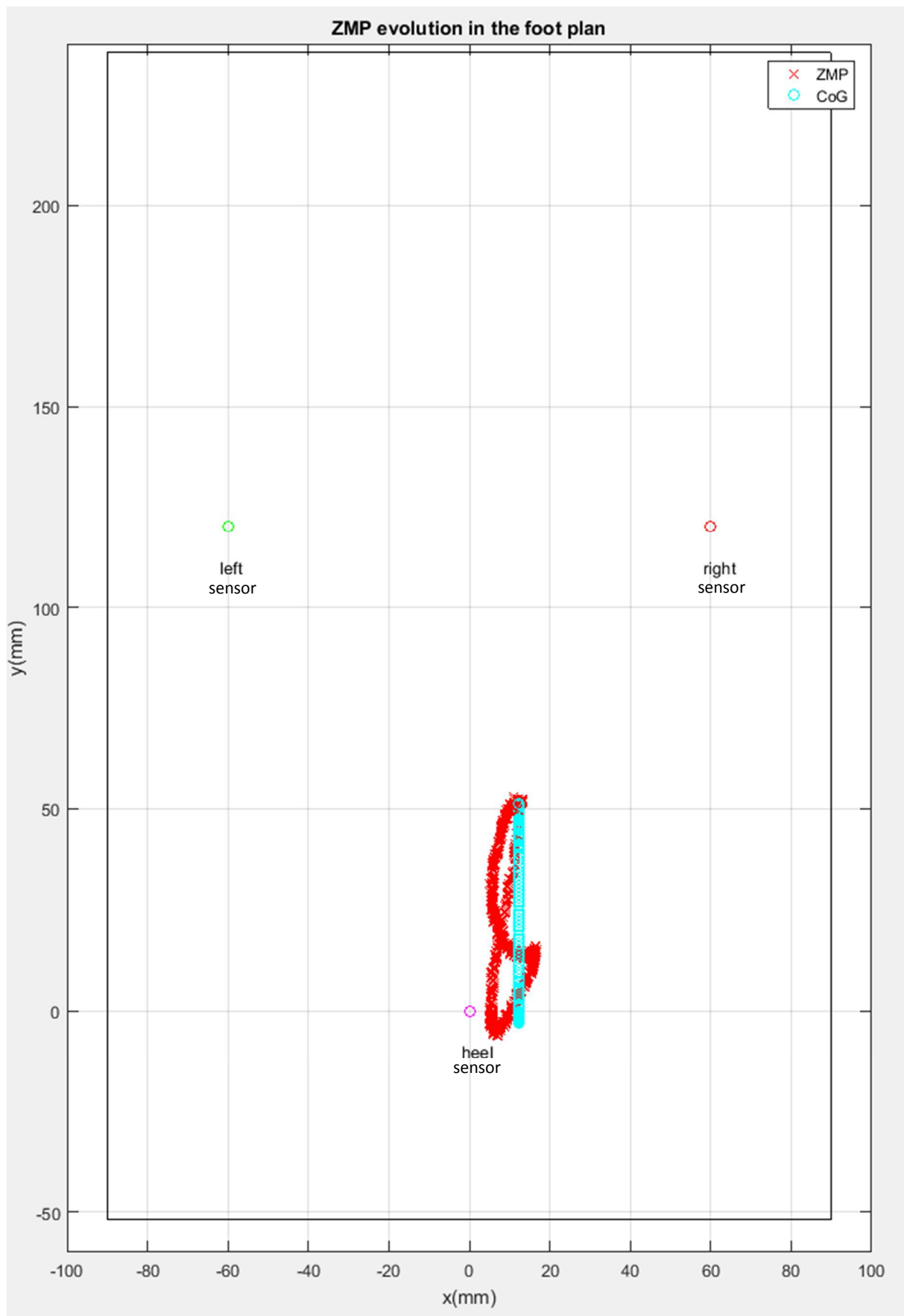


Figure 30: Trajectoires comparées du ZMP et du centre de gravité dans le plan du pied

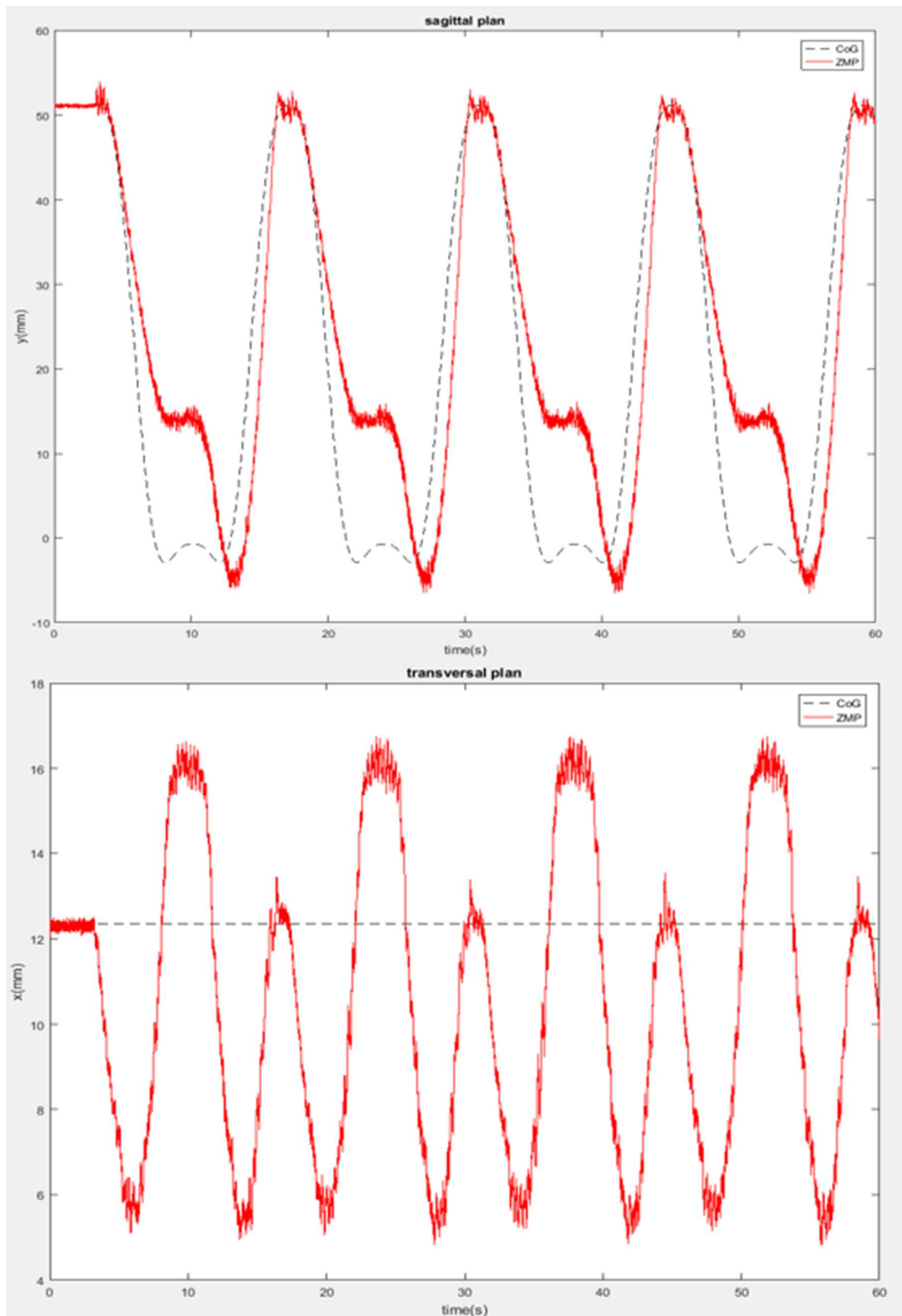


Figure 31: Evolution temporelle de la position du ZMP respectivement dans les plans sagittal et transversal

On précisera que le signal capteur n'aura subi aucun traitement pour limiter les bruits et on observera une erreur moyenne de l'ordre du millimètre ce qui reste satisfaisant.

2.6.2 Mouvement de marche à 360 mètres par heure

Le chronogramme (Figure 32) montre deux pas successifs réalisés à une vitesse de 360 mètres par heure. Ces deux pas sont précédés par un mouvement de mise en position car le générateur de marche impose une position initiale légèrement fléchie. Dans cette expérience, le robot est accroché à un portique par la hanche.

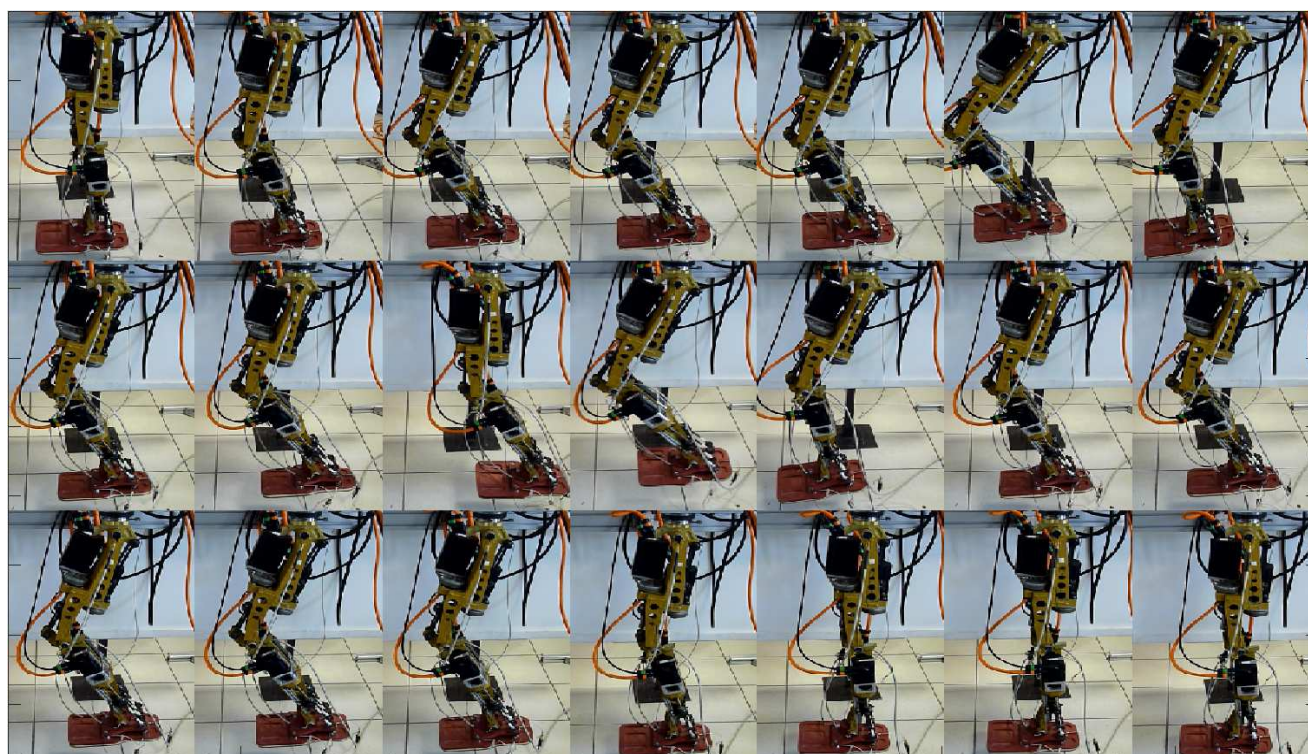


Figure 32: Chronogramme du mouvement de marche (13,8 secondes)

La Figure 33 représente en vert la trajectoire de consigne du genou et en rouge l'erreur par rapport à la mesure issue des potentiomètres. Il faut noter ici que le seul asservissement en position a lieu au niveau du variateur ce qui permet de mettre en évidence l'influence de la dynamique et de la transmission sur la précision angulaire. Le but est de minimiser cette dernière en agissant sur le robot avant toute implémentation de loi de commande. L'erreur maximale est de 1.3 degré et on peut l'observer tant sur des mouvements à dynamique faible ce qui traduit notamment l'influence des jeux dans le mécanisme, la qualité de la mesure ainsi que l'absence de compensation de gravité, que sur des mouvements à dynamique élevée qui donc ne seraient pas compensés.

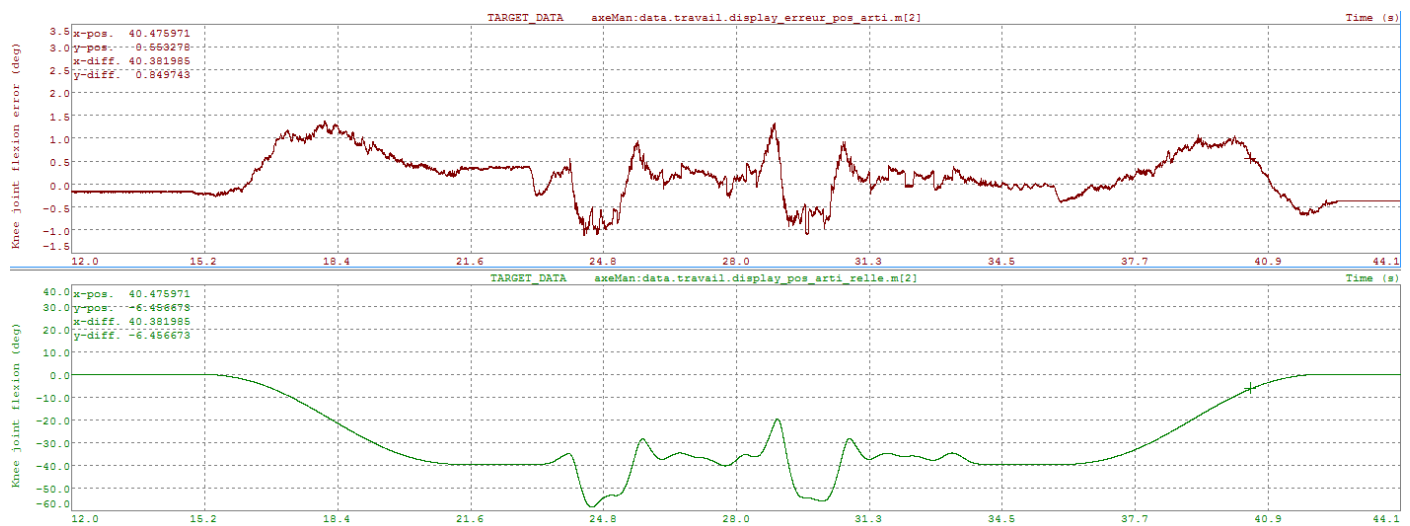


Figure 33: Trajectoire articulaire du genou et son erreur

On peut voir sur le graphe (Figure 34), l'évolution de l'erreur au niveau du variateur qui atteint au maximum 0.3 degré de tour moteur ce qui est négligeable une fois retranscrit dans l'espace articulaire.

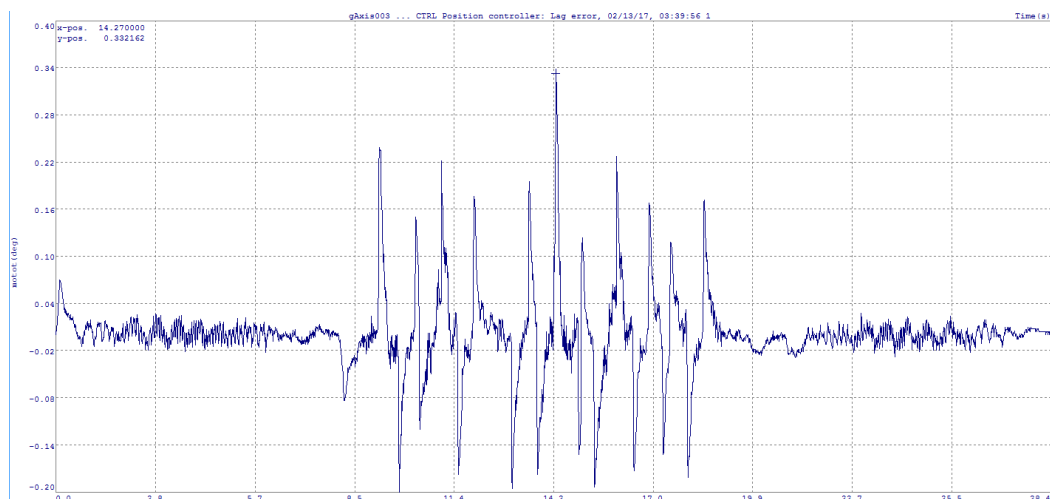


Figure 34: Erreur articulaire du point de vue du variateur

La Figure 35 montre la performance temps réel du contrôleur lors de la trajectoire de marche. On aura comme charge de calcul les modèles géométriques direct et dynamique inverse exécutés en une moyenne de 161 microsecondes pour une tâche cadencée à deux millisecondes.

Calculated Times - Profiler Run Time :2122168.792 [µs]							
Name	CPU Usage [%]	Tolerance Count	Object Priority	Call Count	Minimal Net Time [µs]	Average Net Time [µs]	Maximal Net Time [µs]
Cyclic #1	8.204		230		155.258	161.616	219.003
Cyclic #3	0.056		200		23.313	25.045	27.363
System Tasks	6.550						
Interrupt Ha...	2.019						
Library Functions							
Idle Tasks	83.171						

Figure 35: Performance temps réel

2.6.3 Réaction de la jambe à l'inclinaison du sol

Enfin voici un chronogramme (Figure 36) du robot avec le stabilisateur postural calculé en ligne rejetant une perturbation d'inclinaison du sol de vingt degrés, réalisée à l'aide d'une plateforme inclinable, fabriquée pour cette démonstration, pilotée grâce à deux moteurs synchronisés. Les champs ont été réglés afin de valider le concept de commande et non pour optimiser un comportement par rapport à un autre.

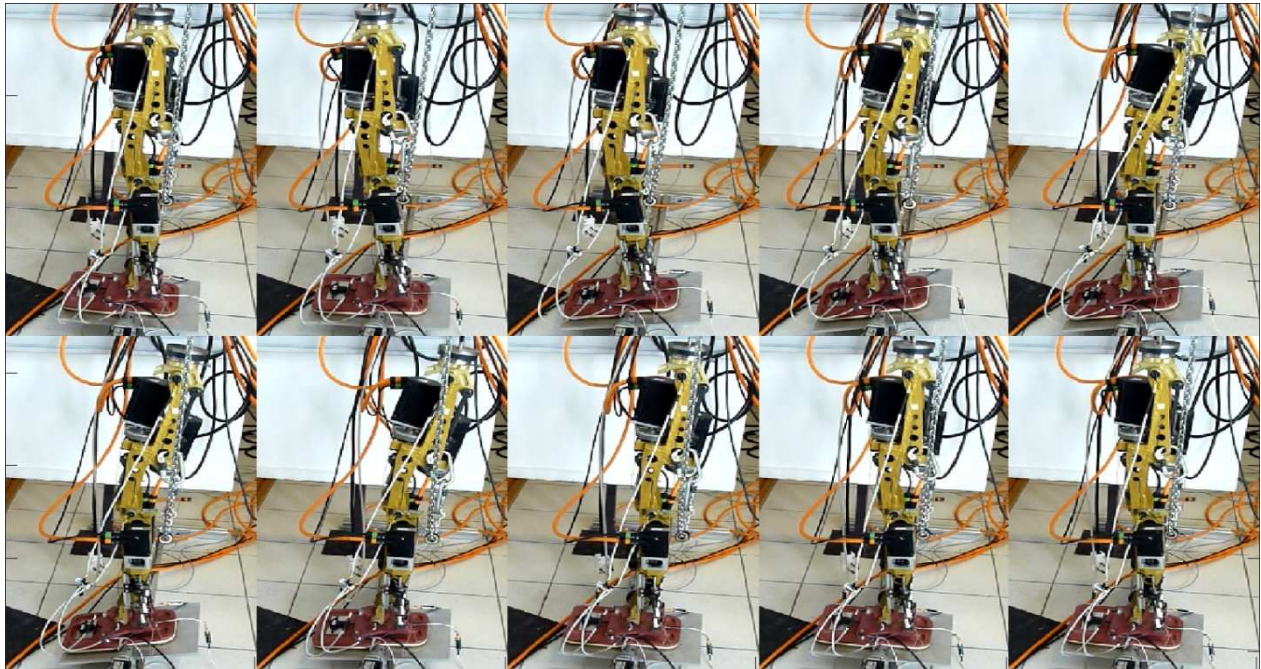


Figure 36: Chronogramme de la réaction à l'inclinaison du sol (une image toutes les deux secondes)

La performance temps réel est présentée sur la Figure 37:

Calculated Times - Profiler Run Time :1274976.942 [μs]							
Name	CPU Usage [%]	Tolerance Count	Object Priority	Call Count	Minimal Net Time [μs]	Average Net Time [μs]	Maximal Net Time [μs]
⊕ Cyclic #1	13.761		230		262.506	272.788	338.992
⊕ Cyclic #3	0.025		200		8.591	8.934	9.248
⊕ System Tasks	7.309						
⊕ Interrupt Ha...	2.080						
⊕ Library Functions							
⊕ Idle Tasks	76.805						
⊕ Other Syste...	0.021						

Figure 37: Performance temps réel

La charge de calcul est composée de deux modèles géométriques directs et dynamiques inverses, le modèle virtuel étant entièrement matriciel et donc susceptible de consommer davantage de temps de calcul. Il faut ajouter à cette charge le stabilisateur postural qui contient une inversion de matrice 4x4 ainsi que le contrôle de l'inclinaison de la plateforme. On observe que le temps de cycle moyen se calcule en moins de 300 microsecondes, ce qui très satisfaisant vis-à-vis de la cadence de la tâche qui est à deux millisecondes.

2.7 Conclusions et perspectives

On a donc montré à travers ce chapitre, la faisabilité d'un nouveau type de stabilisateur postural implémenté sur un robot à architecture industrielle. La stratégie employée consistant à manipuler l'avatar du centre de gravité du robot pour commander sa position vis-à-vis de la gravitation présente un certain potentiel et semble relativement peu coûteuse en temps de calcul.

La prochaine étape des développements du stabilisateur consistera à explorer l'influence des différents paramètres qui régissent les champs électrostatiques sur les capacités de recouvrement d'équilibre du robot afin d'obtenir un réglage optimal permettant un bon rejet des perturbations extérieures. On prendra également en considération d'autres types de champs ainsi que des combinaisons plus sophistiquées.

Un travail en cours concerne l'évolution de l'algorithme de stabilisation pour être en mesure de gérer le robot complet et ses quinze degrés de liberté avec notamment la gestion de plusieurs centres de gravités régis par des champs électrostatiques cohérents.

Le stabilisateur repose actuellement sur le contrôleur orienté objet qui a été conçu pour exploiter au maximum les éléments de symétrie des humanoïdes comme évoqué au 2.4.1. On est donc en mesure d'instancier deux objets jambes dans le contrôleur, ce qui est suffisant pour bouger l'une ou l'autre indépendamment mais pour le moment il n'existe cependant aucun élément permettant de rendre compte des couplages dynamiques entre les deux objets afin de, par exemple, modéliser une phase de simple appui lors d'une trajectoire de marche. On a donc besoin d'un outil mathématique de manipulation des chaînes séries.

3 Considérations mathématiques sur le formalisme lagrangien pour la modélisation en robotique humanoïde : application pour la programmation orientée objet et la robotique modulaire

3.1 Introduction générale

Derrière l'idée d'exploiter la symétrie naturelle des robots humanoïdes, il y a une vision modulaire de la robotique. En effet, le futur devrait voir apparaître des entreprises spécialisées dans la construction de certains organes robotisés complexes comme des têtes et des mains tout comme il existe aujourd'hui des entreprises spécialisées dans la conception de bras de manipulation.

Et à l'image des industries automobile ou aéronautique qui sollicitent énormément de sous-traitants spécialisés afin d'assembler des machines encore plus complexes, on devrait voir apparaître des entreprises susceptibles d'assembler des robots modulaires très complexes à partir d'éléments spécifiques conçus et optimisés par des spécialistes. Cette évolution a déjà commencé puisqu'on voit apparaître des robots constitués d'un gros 6 axes porteur d'un 6 axes plus léger et spécialisé afin de combiner leurs espaces de travail respectifs.

Cette réalité se constate également dans les laboratoires où les problématiques de vision et de traitement d'images pour la manipulation sont à des années lumières des problématiques de motricité en environnement dynamique. Il en résulte l'existence de deux équipes de spécialistes qui collaborent pour donner un résultat encore plus complexe.

Dans le cadre de la robotique humanoïde de grande taille, on pourrait tout à fait envisager de vouloir concevoir un robot composé de quatre têtes toutes de conceptions et de constructeurs différents ainsi que de deux paires de bras et d'un système locomoteur. Chacun de ces éléments posséderait déjà sa propre unité de calcul permettant un contrôle dynamique fin préréglé et optimisé pour une application standard. C'est l'assembleur du robot complet qui avec son centre de calcul superviseur devra faire collaborer tous les modules ensemble afin de répondre à une problématique spécifique qui surpasse les champs d'application de tous ses constituants.

La fonction première du superviseur est donc de rendre compte des couplages qu'il peut exister entre chacun des composants du robot. Seulement, les robots humanoïdes sont décrits par une théorie conçue pour modéliser les robots manipulateurs industriels, un contexte opérationnel très éloigné des conditions normales de fonctionnement des robots anthropomorphes. Cette théorie ne possède pas les outils nécessaires au calcul d'un modèle de robot constitué de sous-robots dont on connaîtrait les modèles. Toutefois, on peut se demander si en manipulant les équations classiques de la robotique, il ne serait pas possible de faire apparaître des relations voire des objets mathématiques qui seraient l'expression des couplages.

On se propose donc d'illustrer cette intuition sur un exemple. À l'instar d'un 6 axes porteur d'un 6 axes plus léger, on va prendre deux robots simples, des 2R plans que l'on va chaîner comme on peut l'observer sur la Figure 38 afin de former un 4R plan. On utilisera la convention Denavit-Hartenberg [72] modifiée dans l'ensemble des développements qui suivront.

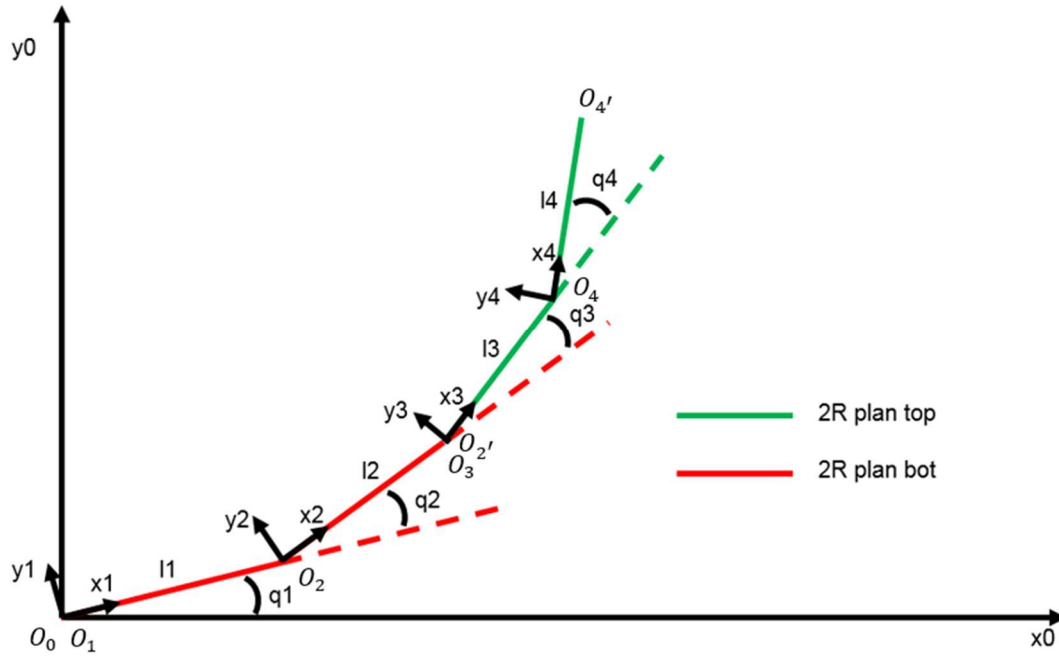


Figure 38: Schéma cinématique 4R plan

On commence tout naturellement par exprimer les quatre matrices de transformation homogènes élémentaires du système.

$$T_{0 \rightarrow 1} = \begin{pmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} T_{1 \rightarrow 2} = \begin{pmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & l_1 \\ s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} T_{2 \rightarrow 2'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & l_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (79)$$

$$T_{2' \rightarrow 3} = \begin{pmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & 0 \\ s_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} T_{3 \rightarrow 4} = \begin{pmatrix} c_4 & -s_4 & 0 & l_3 \\ s_4 & c_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} T_{4 \rightarrow 4'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & l_4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (80)$$

Equations que l'on regroupe judicieusement pour faire apparaître le 2R bot et le 2R top.

$$T_{0 \rightarrow 2'} = \begin{pmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & c_1 l_1 + c_{12} l_2 \\ s_{12} & c_{12} & 0 & s_1 l_1 + s_{12} l_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} T_{2' \rightarrow 4'} = \begin{pmatrix} c_{34} & -s_{34} & 0 & c_3 l_3 + c_{34} l_4 \\ s_{34} & c_{34} & 0 & s_3 l_3 + s_{34} l_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (81)$$

Pour enfin aboutir au modèle géométrique du robot complet.

$$T_{0 \rightarrow 4'} = \begin{pmatrix} c_{1234} & -s_{1234} & 0 & c_1 l_1 + c_{12} l_2 + c_{123} l_3 + c_{1234} l_4 \\ s_{1234} & c_{1234} & 0 & s_1 l_1 + s_{12} l_2 + s_{123} l_3 + s_{1234} l_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (82)$$

Pour le moment, on n'observe rien d'inhabituel, à savoir que le couplage géométrique s'obtient par la définition même du calcul du MGD, c'est-à-dire par la matrice de rotation $R_{0 \rightarrow 2'}$.

$$T_{0 \rightarrow 4'} = T_{0 \rightarrow 2'} T_{2' \rightarrow 4'} = \begin{pmatrix} R_{0 \rightarrow 4'} & t_{0 \rightarrow 4'} \\ \mathbb{O}_{1,3} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{0 \rightarrow 2'} & t_{0 \rightarrow 2'} \\ \mathbb{O}_{1,3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{2' \rightarrow 4'} & t_{2' \rightarrow 4'} \\ \mathbb{O}_{1,3} & 1 \end{pmatrix} \quad (83)$$

$$\Leftrightarrow T_{0 \rightarrow 4'} = \begin{pmatrix} R_{0 \rightarrow 2'} R_{2' \rightarrow 4'} & R_{0 \rightarrow 2'} t_{2' \rightarrow 4'} + t_{0 \rightarrow 2'} \\ \mathbb{O}_{1,3} & 1 \end{pmatrix} \quad (84)$$

Passons maintenant à l'expression des diverses jacobiennes naturelles des robots que nous avons évoquées. On retrouve bien évidemment les deux 2R plans.

$$J_{02'} = \begin{pmatrix} -(s_1 l_1 + s_{12} l_2) & -(s_{12} l_2) \\ (c_1 l_1 + c_{12} l_2) & (c_{12} l_2) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad J_{2'4'} = \begin{pmatrix} -(s_3 l_3 + s_{34} l_4) & -(s_{34} l_4) \\ (c_3 l_3 + c_{34} l_4) & (c_{34} l_4) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (85)$$

$$\Leftrightarrow J_{02'} = \begin{pmatrix} J_{v_{02'}} \\ J_{\omega_{02'}} \end{pmatrix} \quad J_{2'4'} = \begin{pmatrix} J_{v_{2'4'}} \\ J_{\omega_{2'4'}} \end{pmatrix} \quad (86)$$

Et bien sur celle du 4R plan.

$$J_{04'} = \begin{pmatrix} -(s_1 l_1 + s_{12} l_2 + s_{123} l_3 + s_{1234} l_4) & -(s_{12} l_2 + s_{123} l_3 + s_{1234} l_4) & -(s_{123} l_3 + s_{1234} l_4) & -(s_{1234} l_4) \\ (c_1 l_1 + c_{12} l_2 + c_{123} l_3 + c_{1234} l_4) & (c_{12} l_2 + c_{123} l_3 + c_{1234} l_4) & (c_{123} l_3 + c_{1234} l_4) & (c_{1234} l_4) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (87)$$

Maintenant, si on cherche à isoler les contributions de $J_{02'}$ et $J_{2'4'}$ dans l'expression de $J_{04'}$, on obtient une somme plutôt intéressante qui reprend un premier terme directement identifiable au 2R top. Le troisième terme est très proche de l'expression correspondant au 2R bot et on trouve rapidement qu'il s'agit pour partie du produit de $R_{0 \rightarrow 2'}$ par $J_{v_{2'4'}}$. Le second terme quant à lui mérite un examen plus attentif.

$$\begin{aligned} J_{04'} &= \begin{pmatrix} -(s_1 l_1 + s_{12} l_2) & -(s_{12} l_2) & 0 & 0 \\ (c_1 l_1 + c_{12} l_2) & (c_{12} l_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} -(s_{123} l_3 + s_{1234} l_4) & -(s_{123} l_3 + s_{1234} l_4) & 0 & 0 \\ (c_{123} l_3 + c_{1234} l_4) & (c_{123} l_3 + c_{1234} l_4) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & -(s_{123} l_3 + s_{1234} l_4) & -(s_{1234} l_4) \\ 0 & 0 & (c_{123} l_3 + c_{1234} l_4) & (c_{1234} l_4) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (88)$$

En regroupant les termes déjà identifiés, on obtient l'expression suivante.

$$J_{04'} = \begin{pmatrix} J_{v_{02'}} & \mathbb{O}_{3,2} \\ J_{\omega_{02'}} & \mathbb{O}_{3,2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -(s_{123}l_3 + s_{1234}l_4) & -(s_{123}l_3 + s_{1234}l_4) & \\ (c_{123}l_3 + c_{1234}l_4) & (c_{123}l_3 + c_{1234}l_4) & \mathbb{O}_{3,2} \\ 0 & 0 & \mathbb{O}_{3,2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbb{O}_{3,2} & R_{02'}J_{v_{2'4'}} \\ \mathbb{O}_{3,2} & R_{02'}J_{\omega_{2'4'}} \end{pmatrix} \quad (89)$$

A ce stade, le raisonnement se fait par analogie avec le troisième terme. La symétrie et la forme de ce second terme évoquait le produit d'une sorte de matrice de rotation dépendant du 2R bot avec le modèle géométrique du 2R top. Ce qui par identification permet de trouver la relation suivante.

$$\begin{pmatrix} -(s_{123}l_3 + s_{1234}l_4) \\ (c_{123}l_3 + c_{1234}l_4) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s_{12} & -c_{12} & 0 \\ c_{12} & -s_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_3l_3 + c_{34}l_4 \\ s_3l_3 + s_{34}l_4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (90)$$

Il se trouve que cette sorte de matrice de rotation est en réalité la dérivée partielle de la matrice de rotation $R_{02'}$ par rapport à q_1 ou q_2 . Un début de solution au problème posé résidait alors dans la capacité à traiter la dérivation des matrices de rotation et à inclure de tels objets dans le formalisme classique de la robotique. Il s'avère que ces objets sont des tenseurs dit d'ordre 3 et que la reformulation du problème initial devra s'accompagner d'une évolution de l'écriture des équations conventionnelles.

3.2 Éléments de bibliographie

Ces objets mathématiques que sont les tenseurs nous amènent tout naturellement à chercher dans la littérature s'il existe des formulations tensorielles des équations de Lagrange, ou de manière générale du formalisme utilisé en robotique, et si quelques résultats pourraient être utiles pour répondre à la problématique de la modélisation d'un robot composé lui-même de plusieurs robots.

Il est rare et difficile de trouver des exemples de cours de mécanique qui reprennent le formalisme tensoriel et cela même s'il s'agit de mécanique analytique. Cependant le recours aux tenseurs apparaît notamment dans les cours de mécanique des milieux continus [83]. Cette discipline étant trop éloignée de notre champ d'intérêt, on cherche alors dans la littérature traitant spécifiquement de l'optimisation du temps de calcul des modèles dynamiques de robot qui fut foisonnante dans les années 90 étant donnés les besoins toujours plus grands en termes de complexité de modélisation par rapport aux capacités de calcul de l'époque. Les principaux résultats de cette branche de la robotique et notamment le fameux algorithme récursif de Newton-Euler sont proposés dans cet article de synthèse [84]. On trouve un seul travail significatif traitant de l'utilisation des tenseurs dans le cadre de la robotique et il s'agit de ceux de Constantinos A. Balafoutis qu'il propose dans sa thèse [85]. Il utilise la théorie des tenseurs cartésiens afin de produire des algorithmes extrêmement rapides notamment pour le calcul du modèle dynamique [86].

Devant l'impossibilité de trouver un support théorique propice à l'écriture d'un modèle de robot en fonction des modèles des robots le constituant, on a décidé de développer les outils mathématiques permettant de le faire.

3.3 De l'importance des jacobiennes

Dans l'ensemble des développements qui vont suivre, on fait référence à la modélisation d'un robot obtenue par couplage des modèles des sous-robots qui le constituent comme étant un modèle composite. On utilise également un système locomoteur d'un robot humanoïde pour illustrer notre propos même si le principe peut être étendu à n'importe quel robot modulaire. On peut voir sur la Figure 39 un tel robot marcheur en configuration de simple appui. Il est muni de deux jambes parfaitement symétriques (l'une en rouge et l'autre en vert). La chaîne cinématique résultante qui part du pied gauche pour aller jusqu'au pied droit est constituée de $2 * i$ articulations et dans le cas qui nous intéresse la jonction entre les deux jambes est un unique solide.

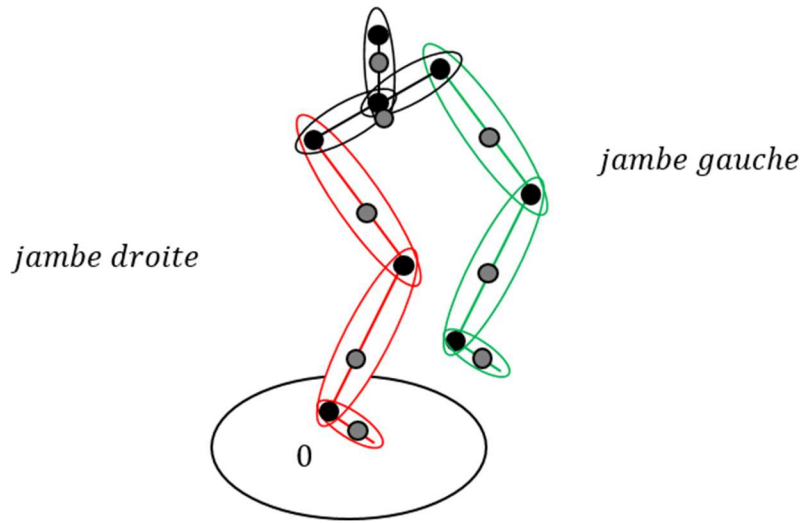


Figure 39: Schéma d'un système locomoteur anthropomorphe muni de deux jambes identiques (les points gris sont les CdG des segments)

On propose ici de déterminer le modèle dynamique inverse de cette chaîne cinématique. Et pour se faire on va prendre en compte la symétrie du système et supposer qu'il soit judicieux de considérer cette chaîne cinématique d'un point de vue modulaire. Le but de cette démarche est de construire le modèle dynamique inverse composite du robot.

Considérons le MDI d'un robot écrit avec le formalisme Lagrangien, avec A la matrice d'inertie, C la matrice de Coriolis et G la gravité, τ est le vecteur des couples généralisés du système et q le vecteur d'état généralisé.

$$A(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau \quad (91)$$

Pour le calcul de A (voir 6.3), on a besoin d'une famille de matrices jacobiennes, une pour chaque segment, exprimées au centre de gravité conformément à la définition de la composante de l'énergie cinétique du lagrangien du système. On appelle ces matrices des jacobiennes au centre de gravité. On en déduit que la matrice d'inertie composite est construite sur une famille de matrices jacobiennes composites. Le même constat peut être fait concernant la matrice de gravité puisqu'elle peut être exprimée comme une fonction des jacobiennes et des forces gravitationnelles. La matrice de Coriolis étant construite à partir de la dérivation des termes de la matrice d'inertie on en conclut donc que non seulement la matrice de Coriolis composite est issue des diverses dérivations des matrices jacobiennes composites mais aussi que le MDI composite repose intégralement sur la connaissance d'une famille de matrices jacobiennes et de leurs dérivées.

L'élaboration d'un tel modèle commence donc par une description géométrique adéquate de la chaîne cinématique présentée sur la Figure 40.

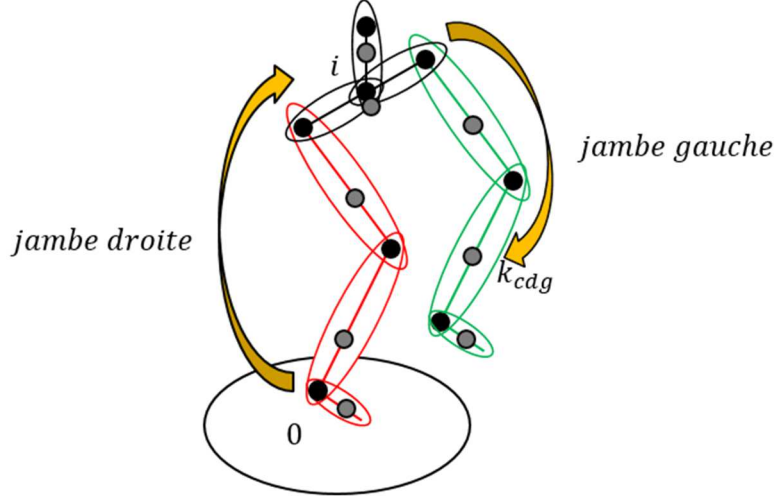


Figure 40: Description du chemin depuis le pied droit jusqu'au centre de gravité d'un segment k de la jambe gauche

3.4 Description géométrique des modèles composites

En observant la Figure 40, on peut écrire le MGD permettant d'aller du pied droit vers le centre de gravité du k ième segment de la jambe gauche en utilisant l'approche classique :

$$T_{0 \rightarrow k_{cdg}}(q) = \begin{pmatrix} R_{0 \rightarrow k} & t_{0 \rightarrow k_{cdg}} \\ \mathbb{O}_{1,3} & 1 \end{pmatrix} / q = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_j \end{pmatrix} \quad (92)$$

Procédons maintenant à une décomposition de cette expression afin de faire ressortir des éléments propres à chaque jambe. On peut écrire en s'arrêtant à la jonction qui distingue chaque jambe :

$$T_{0 \rightarrow k_{cdg}}(q) = T_{0 \rightarrow i}(q_\alpha) T_{i \rightarrow k_{cdg}}(q_\omega) / q_\alpha = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_i \end{pmatrix}, q_\omega = \begin{pmatrix} q_{i+1} \\ \vdots \\ q_j \end{pmatrix}, q = \begin{pmatrix} q_\alpha \\ q_\omega \end{pmatrix} \quad (93)$$

A ce stade du raisonnement on a déjà une décomposition en produit avec le premier terme $T_{0 \rightarrow i}$ qui ne dépend que de la jambe droite et de son vecteur d'état q_α et un second $T_{i \rightarrow k_{cdg}}$ qui lui ne dépend que de la jambe gauche et de son vecteur d'état q_ω . Poussons le raisonnement encore un peu plus loin en décrivant $T_{i \rightarrow k_{cdg}}$ avec les mêmes expressions qui permettent de décrire $T_{0 \rightarrow i}$ et cela afin de minimiser les objets élémentaires nécessaires à la description du modèle géométrique d'une jambe conformément aux contraintes que l'on s'impose dans le cadre de la programmation orientée objet.

En utilisant les propriétés de transport et de l'inverse du MGD on peut écrire en repassant par le pied gauche :

$$T_{i \rightarrow k_{cdg}} = T_{i \rightarrow j} T_{j \rightarrow k_{cdg}} \quad (94)$$

$$\Leftrightarrow T_{i \rightarrow k_{cdg}} = \begin{pmatrix} (R_{j \rightarrow i})^T & -(R_{j \rightarrow i})^T t_{j \rightarrow i} \\ \mathbb{O}_{1,3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{j \rightarrow k} & t_{j \rightarrow k_{cdg}} \\ \mathbb{O}_{1,3} & 1 \end{pmatrix} \quad (95)$$

On peut donc décrire la géométrie d'une jambe suspendue (ici la jambe gauche) avec des éléments propres à la description de la jambe en appui (ici la jambe droite) en effectuant un changement de point. On appelle par la suite une telle opération un changement de repère base-distal. Elle permet de passer du cas où une jambe est en phase d'appui à celui où elle est suspendue.

Si on essaie de mettre en évidence le terme de couplage qui relie les deux jambes dans le modèle géométrique, il suffit d'écrire la composante relative à la translation :

$$t_{0 \rightarrow k_{cdg}} = t_{0 \rightarrow i} + R_{0 \rightarrow i} t_{i \rightarrow k_{cdg}} \quad (96)$$

Il s'agit de la matrice de rotation $R_{0 \rightarrow i}$ qui en effet permet de ramener la description de la jambe gauche dans le repère d'écriture de la jambe droite et ainsi obtenir une formulation cohérente de l'ensemble du système locomoteur. Une fois que la description géométrique est faite, il faut passer au traitement des jacobiennes afin de construire le MDI.

3.5 Jacobienne des modèles composites

3.5.1 Rappel et définitions : Jacobienne naturelle

Commençons par rappeler l'expression de ce que l'on appelle la jacobienne naturelle d'un robot. Cette matrice est issue de la dérivée temporelle du modèle géométrique direct. On construira cette matrice par concaténation de la contribution linéaire et angulaire de la vitesse.

Commençons par la contribution linéaire :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t_{0 \rightarrow n} \quad (97)$$

D'où :

$$\dot{X} = \frac{d}{dt}(X) = \frac{\partial}{\partial q}(X) \frac{\partial}{\partial t} q = J_v \dot{q} \quad (98)$$

On construit la contribution angulaire d'après les matrices de rotation des changements de repères successifs en concaténant les z_i exprimés dans le repère de base du robot.

$$\begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = J_\omega \dot{q} \quad (99)$$

$$J_\omega = (o_{\zeta_1} \quad \cdots \quad o_{\zeta_n}) \text{ tel que } o_{\zeta_i} = R_{0 \rightarrow i} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow J_\omega = \left(R_{0 \rightarrow 1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \cdots \quad R_{0 \rightarrow n} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad (100)$$

On introduit ici un premier élément de notation concernant les contributions en vitesse linéaire ou angulaire d'un élément en plaçant un indice, respectivement v ou ω après le symbole considéré et lorsque cela fait sens. Ainsi, J_v se lit comme étant la contribution de la vitesse linéaire de J , la matrice jacobienne. De la même manière, A_ω se lit comme étant la contribution de la vitesse angulaire de la matrice d'inertie. Et dans la mesure où q_ω est un vecteur d'état il ne fait pas sens de considérer l'indice ω dans cette situation comme étant une référence à une contribution angulaire.

3.5.2 Jacobienne au centre de gravité

3.5.2.1 Cas général

Dans cette section, nous allons aborder le cas où l'on cherche à calculer la jacobienne d'un robot en un point particulier de sa structure, les cas les plus courants étant notamment les lieux de contact avec l'environnement et le centre de gravité de chaque corps. Et dans un premier temps on va chercher à calculer la jacobienne au centre de gravité d'un des segments de la jambe droite (Figure 41).

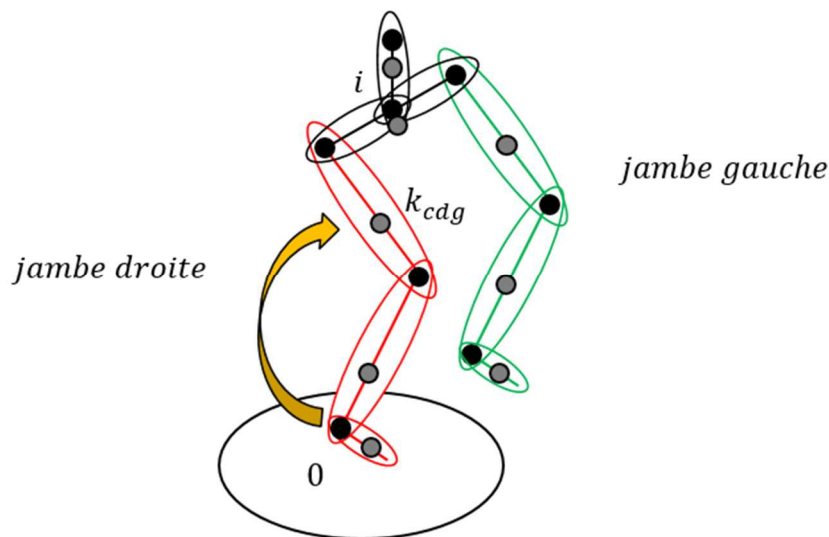


Figure 41: Jacobienne au centre de gravité d'un segment de la jambe droite

Considérons donc un corps k d'un robot à i articulations, de vecteur d'état q_α et k_{cdg} le centre de gravité associé, on a :

$$t_{0 \rightarrow k_{cdg}} = t_{0 \rightarrow k} + R_{0 \rightarrow k} t_{k \rightarrow k_{cdg}} \text{ tel que } t_{k \rightarrow k_{cdg}} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad (101)$$

Le calcul de la jacobienne s'écrit donc alors :

$$\frac{d}{dt}(t_{0 \rightarrow k_{cdg}}) = \frac{\partial}{\partial q_\alpha}(t_{0 \rightarrow k_{cdg}}) \dot{q}_\alpha = J_{v_{0k_{cdg}}, q_\alpha} \dot{q}_\alpha \quad (102)$$

On introduit ici une nouvelle notation qui s'avère nécessaire pour mettre en œuvre les modèles composites sans ambiguïté et qu'il convient d'expliquer. De manière générale l'arborescence d'indices reprend une description allant de l'élément le plus général au plus particulier. On a vu précédemment que J_v renvoie à la contribution de la vitesse linéaire de la jacobienne (Figure 42).

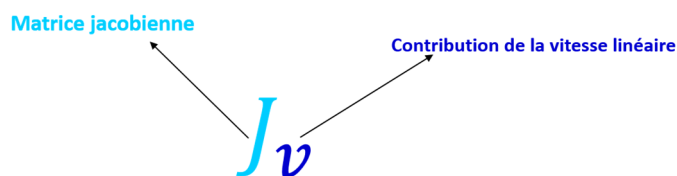


Figure 42: Ecriture de la contribution de la vitesse linéaire de la jacobienne

L'écriture $J_{v_{0k}}$ renvoie également à la contribution de la vitesse linéaire d'une jacobienne mais pas n'importe laquelle. Les indices $0k$ précisent qu'il s'agit de la jacobienne du corps k , évaluée au centre du repère k , dans son mouvement par rapport à 0 et écrite dans le repère 0 (Figure 43).

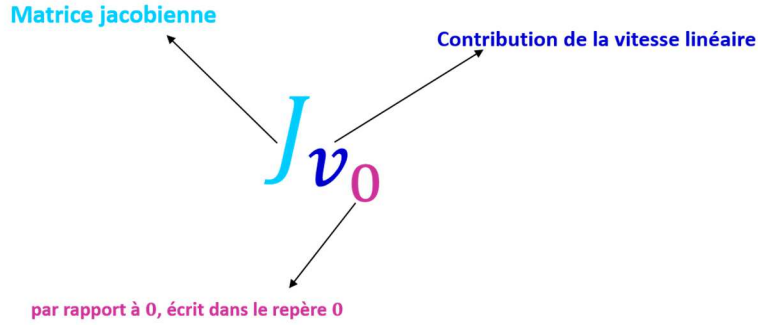


Figure 43: Ecriture de la contribution de la vitesse linéaire de la jacobienne d'un corps par rapport à 0, écrite dans le repère 0

On affine la description en précisant en indice le point d'évaluation de la jacobienne. S'il n'est pas spécifié comme dans la notation $J_{v_{0k}}$, alors c'est au centre du repère par défaut. Si on a besoin d'exprimer la jacobienne au centre de gravité du corps k , on écrit alors $J_{v_{0k_{cdg}}}$ (Figure 44).

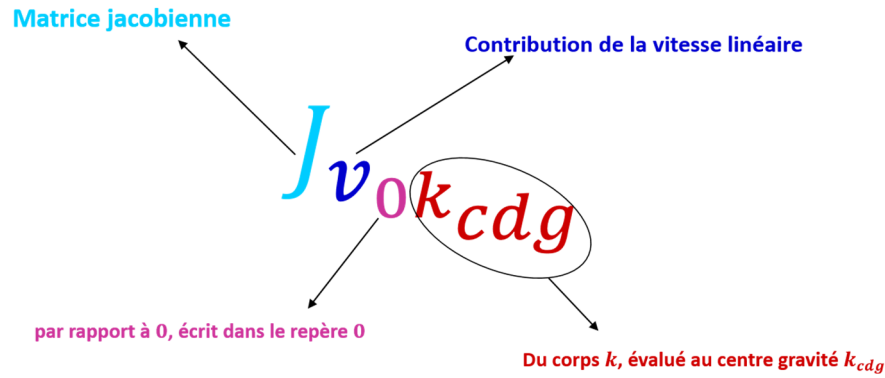


Figure 44: Ecriture de la contribution de la vitesse de la jacobienne du corps k évaluée au centre de gravité k_{cdg} , par rapport à 0, écrite dans le repère 0.

Il reste un dernier élément à expliquer dans la notation complète $J_{v_{0k_{cdg}, q_\alpha}}$. La présence de la virgule précise que la description de l'objet s'arrête et que l'élément qui suit ne fait que préciser le vecteur d'état associé à la dérivation et par extension fournit la dimension de la matrice (Figure 45).

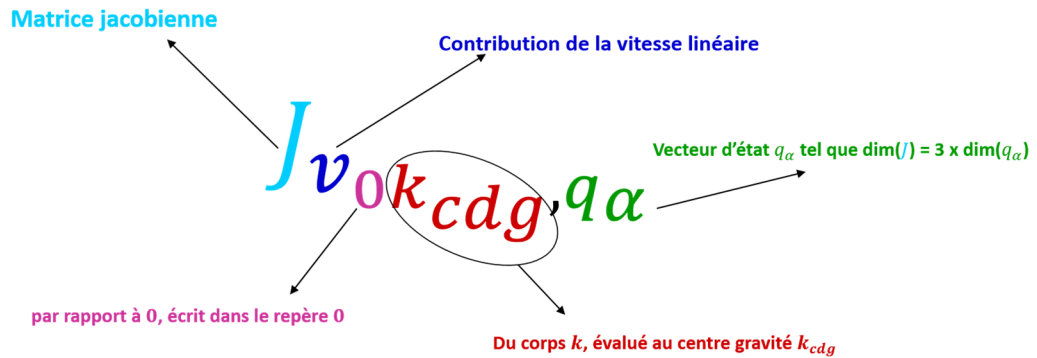


Figure 45: Ecriture de la contribution de la vitesse linéaire de la jacobienne du corps k , évaluée au centre de gravité k_{cdg} , par rapport à 0, écrite dans le repère 0, de vecteur d'état q_α et donc de dimension $3 \times \dim(q_\alpha)$

Détaillons le calcul de $J_{v_{0k_{cdg},q_\alpha}}$:

$$J_{v_{0k_{cdg},q_\alpha}} = \frac{\partial}{\partial q_\alpha} (t_{0 \rightarrow k_{cdg}}) = \frac{\partial}{\partial q_\alpha} (t_{0 \rightarrow k} + R_{0 \rightarrow k} t_{k \rightarrow k_{cdg}}) \quad (103)$$

$$\Leftrightarrow J_{v_{0k_{cdg},q_\alpha}} = \frac{\partial}{\partial q_\alpha} (t_{0 \rightarrow k}) + \frac{\partial}{\partial q_\alpha} (R_{0 \rightarrow k} t_{k \rightarrow k_{cdg}}) \quad (104)$$

$$\Leftrightarrow J_{v_{0k_{cdg},q_\alpha}} = \frac{\partial}{\partial q_\alpha} (t_{0 \rightarrow k}) + \frac{\partial}{\partial q_\alpha} (R_{0 \rightarrow k}) t_{k \rightarrow k_{cdg}} + R_{0 \rightarrow k} \frac{\partial}{\partial q_\alpha} (t_{k \rightarrow k_{cdg}}) \quad (105)$$

Par ailleurs et sachant que non seulement $t_{0 \rightarrow k}$ est uniquement fonction des k premières variables d'état mais aussi que $t_{k \rightarrow k_{cdg}}$ est une longueur invariante, on a :

$$\frac{\partial}{\partial q_\alpha} (t_{0 \rightarrow k}) = J_{v_{0k},q_\alpha} = (J_{v_{0k},q_{\alpha_k}} \quad \mathbb{O}_{3,i-k}) \text{ et } \frac{\partial}{\partial q_\alpha} (t_{k \rightarrow k_{cdg}}) = \mathbb{O}_{3,i} \quad (106)$$

On introduit ici une nouvelle notation $\underline{q}_{\alpha_k}$. Il s'agit du vecteur d'état contenant les k premiers éléments de q_α . La barre située sous le q signifie qu'il s'agit d'un vecteur et non pas d'un scalaire. En effet, q_{α_k} existe et il s'agit du k ième élément de q_α .

D'où :

$$J_{v_{0k_{cdg},q_\alpha}} = (J_{v_{0k},\underline{q}_{\alpha_k}} \quad \mathbb{O}_{3,i-k}) + \frac{\partial}{\partial q_\alpha} (R_{0 \rightarrow k}) t_{k \rightarrow k_{cdg}} \quad (107)$$

C'est ici que les tenseurs interviennent, et qu'il nous faut introduire de nouvelles notations. **Le but n'est pas d'obtenir une écriture mathématique des plus rigoureuses mais une efficacité opérationnelle pour le roboticien.**

On commencera par identifier l'ordre d'un tenseur par autant de barrettes placées sous le nom de ce dernier. Par définition, un vecteur est un tenseur d'ordre 1 et une matrice un tenseur d'ordre 2. On notera donc $\underline{t}_{k \rightarrow k_{cdg}}$ et $\underline{R}_{0 \rightarrow k}$ lorsque cela fera sens de se référer à ces éléments en tant que tenseurs.

On doit également spécifier que le produit matriciel que l'on connaît est un cas particulier du produit tensoriel. En effet, le produit tensoriel de deux tenseurs respectivement d'ordre i et j est également un tenseur à ceci près qu'il est d'ordre $i + j$. C'est ainsi que le produit matriciel qui est produit de deux tenseurs d'ordre 2 est dit contracté. Dans le cas contraire le produit de deux matrices serait un tenseur d'ordre 4. C'est pourquoi le produit tensoriel contracté ou simplement contracté de deux tenseurs respectivement d'ordre i et j est un tenseur d'ordre $i + j - 2$. Ainsi, dans le cas de deux matrices, on obtient donc par produit tensoriel contracté un tenseur d'ordre $2+2-2$, soit 2, soit une matrice. On retombe donc bien sur le produit matriciel. On notera $\odot$ le produit tensoriel contracté non pas qu'il soit usuellement noté ainsi mais on préférera cette écriture pour l'identifier facilement dans le texte. Pour illustrer simplement ce paragraphe et ainsi donner l'intuition de ce que l'on entend par produit tensoriel contracté ou non, on se donne deux vecteurs. Un vecteur ligne et un vecteur colonne tels que $\underline{a} = (a_1 \quad a_2)$ et $\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ et on a :

$$(a_1 \quad a_2) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 \quad (108)$$

On passe ici de deux tenseurs d'ordre 1 à un tenseur d'ordre 0, le produit tensoriel est contracté et on retrouve le produit scalaire.

$$\underline{a} \odot \underline{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 = c \quad (109)$$

A contrario :

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} (a_1 \quad a_2) = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_2 b_1 \\ a_1 b_2 & a_2 b_2 \end{pmatrix} \quad (110)$$

On observe ici que le tenseur produit est d'ordre 2, le produit n'est pas contracté et on a :

$$\underline{ba} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_2 b_1 \\ a_1 b_2 & a_2 b_2 \end{pmatrix} = \underline{c} \quad (111)$$

La dernière propriété qui nous intéresse concerne la dérivation. Le tenseur dérivé d'un tenseur d'ordre i est un tenseur d'ordre $i + 1$. C'est ainsi que lorsque l'on dérive le modèle géométrique direct qui est un vecteur et donc un tenseur d'ordre 1, on obtient la jacobienne qui est une matrice soit un tenseur d'ordre 2. Dans le cas présent, il est question de la dérivée d'une matrice de rotation $\underline{R}_{0 \rightarrow k}$ par rapport au vecteur d'état q . On a donc le tenseur dérivé $\underline{\dot{R}}_{0 \rightarrow k}$ qui est d'ordre 3 (symbolisé par les trois barres). On notera qu'usuellement le point au dessus d'une lettre en physique signifie la dérivée par rapport au temps. L'objet que l'on considère étant lié à une dérivation temporelle, on gardera la notation afin de bien spécifier qu'il s'agit d'un objet dérivé d'un autre.

Il s'agit d'une matrice cube qui est une concaténation des dérivées partielles de la matrice $\underline{R}_{0 \rightarrow k}$ que l'on peut représenter graphiquement comme ceci [Figure 46] :

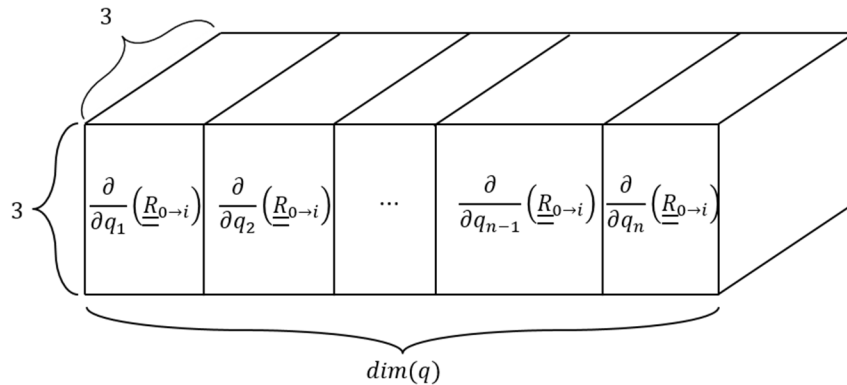


Figure 46: Représentation graphique de la matrice cube $\underline{\dot{R}}_{0 \rightarrow k}$ un tenseur d'ordre 3

Dans la suite du propos, on utilisera une juxtaposition des dérivées partielles d'une matrice de rotation séparées par des virgules afin de les représenter sur une page. Ainsi, sachant que $\underline{R}_{0 \rightarrow k}$ ne dépend que des k premières variables, la matrice $\underline{\dot{R}}_{0 \rightarrow k}$ s'écrit :

$$\underline{\dot{R}}_{0 \rightarrow k} = \frac{\partial}{\partial q_{\alpha_1}}(R_{0 \rightarrow k}), \dots, \frac{\partial}{\partial q_{\alpha_k}}(R_{0 \rightarrow k}), \mathbb{O}_{3,3}, \dots, \mathbb{O}_{3,3} \quad (112)$$

On remarquera ici que la notation $\underline{\dot{R}}_{0 \rightarrow k}$ n'indique pas directement le vecteur d'état qui lui est associé aussi lorsque le contexte ne prête pas à confusion on conservera cette écriture.

Dans le cas où la mention du vecteur d'état est nécessaire on notera alors $\underline{\underline{\dot{R}}}_{0 \rightarrow k, q_\alpha}$ comme représenté sur la Figure 45.

Il ne reste plus qu'une subtilité et elle concerne le produit contracté. En effet, il convient de réécrire la dérivée du produit avec la notation tensorielle :

$$\frac{\partial}{\partial q_\alpha} (R_{0 \rightarrow k} t_{k \rightarrow k_{cdg}}) = \frac{\partial}{\partial q_\alpha} (\underline{\underline{R}}_{0 \rightarrow k} \odot \underline{\underline{t}}_{k \rightarrow k_{cdg}}) = \frac{\partial}{\partial q_\alpha} (\underline{\underline{R}}_{0 \rightarrow k}) \odot \underline{\underline{t}}_{k \rightarrow k_{cdg}} + \underline{\underline{R}}_{0 \rightarrow k} \odot \frac{\partial}{\partial q_\alpha} (\underline{\underline{t}}_{k \rightarrow k_{cdg}}) \quad (113)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial q_\alpha} (\underline{\underline{R}}_{0 \rightarrow k} \odot \underline{\underline{t}}_{k \rightarrow k_{cdg}}) = \frac{\partial}{\partial q_\alpha} (\underline{\underline{R}}_{0 \rightarrow k}) \odot \underline{\underline{t}}_{k \rightarrow k_{cdg}} \quad (114)$$

Ce produit tensoriel contracté aura comme résultat un tenseur d'ordre $3 + 1 - 2 = 2$, ce qui peut se représenter graphiquement par les Figure 47 et Figure 48 :

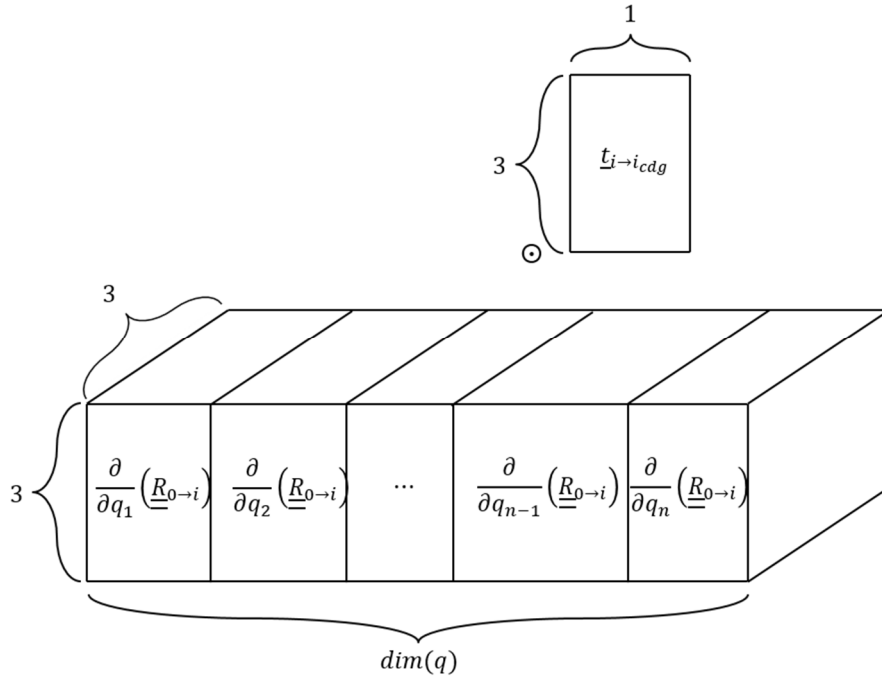


Figure 47: Représentation graphique d'un produit tensoriel contracté entre le tenseur dérivé de $\underline{\underline{R}}_{0 \rightarrow k}$ et $\underline{\underline{t}}_{k \rightarrow k_{cdg}}$

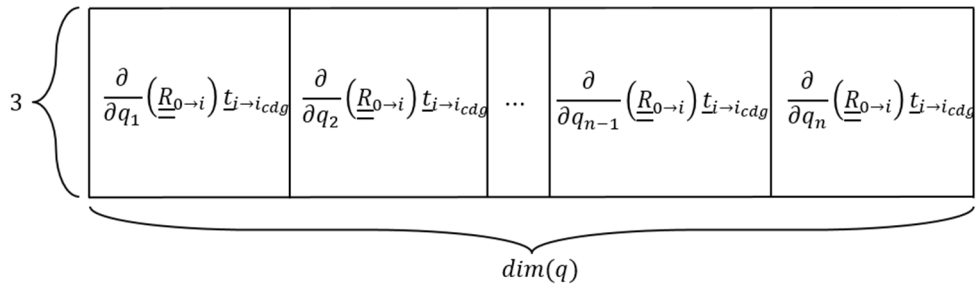


Figure 48: Représentation graphique du résultat du produit (114)

Donc reprenons maintenant le calcul de la jacobienne au centre de gravité (107):

$$J_{v_{0k_{cdg}, q_\alpha}} = (J_{v_{0k, q_\alpha}} \odot_{3, i-k}) + \frac{\partial}{\partial q_\alpha} (R_{0 \rightarrow k}) t_{k \rightarrow k_{cdg}} \quad (115)$$

Ici aussi et comme on l'a évoqué précédemment, $R_{0 \rightarrow k}$ ne dépend que des k premières variables d'état, on a donc :

$$\frac{\partial}{\partial q_\alpha}(R_{0 \rightarrow k}) = \underline{\underline{\dot{R}}}_{0 \rightarrow k, q_\alpha} = \underline{\underline{\dot{R}}}_{0 \rightarrow k, \underline{q}_\alpha_k} \odot \underline{t}_{3, i-k} \quad (116)$$

D'où :

$$J_{v_{0k_{cdg}, q_\alpha}} = \left(J_{v_{0k, \underline{q}_\alpha_k}} + \underline{\underline{\dot{R}}}_{0 \rightarrow k, \underline{q}_\alpha_k} \odot \underline{t}_{k \rightarrow k_{cdg}} \odot \underline{t}_{3, i-k} \right) \quad (117)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} J_{v_{0k_{cdg}, q_\alpha}} = (J_{v_{0k_{cdg}, \underline{q}_\alpha_k}} \odot \underline{t}_{3, i-k}) \\ J_{v_{0k_{cdg}, \underline{q}_\alpha_k}} = J_{v_{0k, \underline{q}_\alpha_k}} + \underline{\underline{\dot{R}}}_{0 \rightarrow k, \underline{q}_\alpha_k} \odot \underline{t}_{k \rightarrow k_{cdg}} \end{cases} \quad (118)$$

On obtient donc une expression mathématique de la jacobienne qui manifeste le changement de point comme somme de deux jacobienues (voir Annexe : théorème 1, 6.2.1). On observe également un fait particulièrement important, la somme que l'on obtient relève d'un découplage entre la première contribution qui ne rend compte que de la géométrie du corps et la seconde qui est uniquement relative à la distribution de la masse du corps. On prendra la mesure qu'implique cette décomposition dans la section traitant du modèle dynamique et plus particulièrement celle relative à la matrice d'inertie.

3.5.2.2 Application au 4R plan

Reprenons le cas du 4R plan et appliquons le résultat (118) afin de construire $J_{04_{cdg}, q}$ et plus particulièrement $J_{v_{04_{cdg}, q}}$.

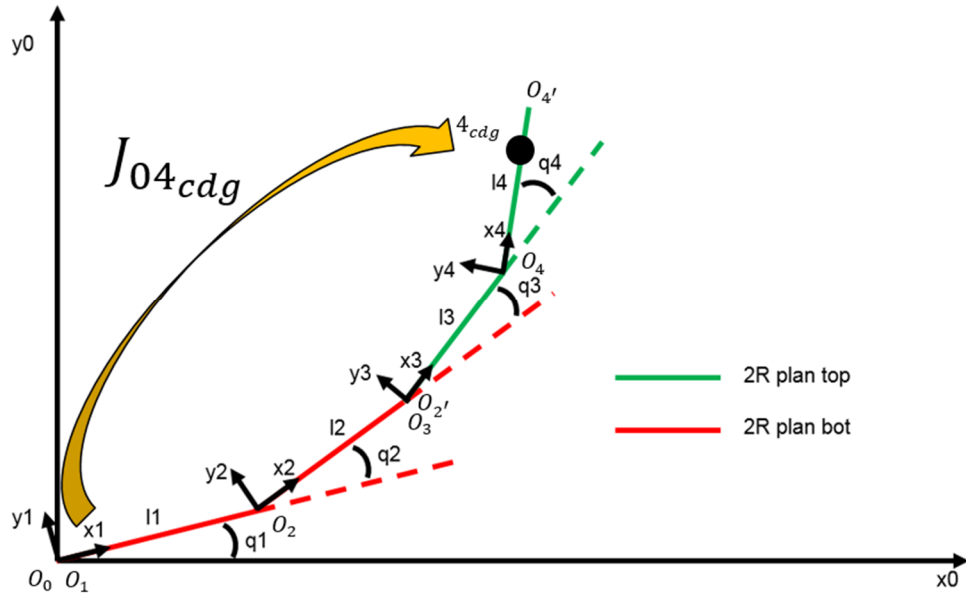


Figure 49: Calcul de la jacobienne du centre de gravité du segment 4 dans son mouvement par rapport à 0

On a donc :

$$J_{v_{04_{cdg}, q}} = J_{v_{04, q}} + \underline{\underline{\dot{R}}}_{0 \rightarrow 4, q} \odot \underline{t}_{4 \rightarrow 4_{cdg}} \quad (119)$$

$J_{v_{04,q}}$ nous viens directement de (87) en prenant $l_4 = 0$ et en supposant que le centre de gravité du corps 4 est sur son axe :

$$\underline{t}_{4 \rightarrow 4cdg} = \begin{pmatrix} l_{4cdg} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (120)$$

Calculons donc $\underline{\dot{R}}_{0 \rightarrow 4,q}$ sachant que $R_{0 \rightarrow 4} = \begin{pmatrix} c_{1234} & -s_{1234} & 0 \\ s_{1234} & c_{1234} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$:

$$\underline{\dot{R}}_{0 \rightarrow 4,q} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial q_1}(R_{0 \rightarrow 4}) & \frac{\partial}{\partial q_2}(R_{0 \rightarrow 4}) & \frac{\partial}{\partial q_3}(R_{0 \rightarrow 4}) & \frac{\partial}{\partial q_4}(R_{0 \rightarrow 4}) \end{pmatrix} \quad (121)$$

$$\Leftrightarrow \underline{\dot{R}}_{0 \rightarrow 4,q} = \begin{pmatrix} -s_{1234} & -c_{1234} & 0 \\ c_{1234} & -s_{1234} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -s_{1234} & -c_{1234} & 0 \\ c_{1234} & -s_{1234} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -s_{1234} & -c_{1234} & 0 \\ c_{1234} & -s_{1234} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -s_{1234} & -c_{1234} & 0 \\ c_{1234} & -s_{1234} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (122)$$

D'où :

$$\underline{\dot{R}}_{0 \rightarrow 4,q} \odot \underline{t}_{4 \rightarrow 4cdg} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial q_1}(R_{0 \rightarrow 4})\underline{t}_{4 \rightarrow 4cdg} & \frac{\partial}{\partial q_2}(R_{0 \rightarrow 4})\underline{t}_{4 \rightarrow 4cdg} & \frac{\partial}{\partial q_3}(R_{0 \rightarrow 4})\underline{t}_{4 \rightarrow 4cdg} & \frac{\partial}{\partial q_4}(R_{0 \rightarrow 4})\underline{t}_{4 \rightarrow 4cdg} \end{pmatrix} \quad (123)$$

$$\Leftrightarrow \underline{\dot{R}}_{0 \rightarrow 4,q} \odot \underline{t}_{4 \rightarrow 4cdg} = \begin{pmatrix} -s_{1234}l_{4cdg} & -s_{1234}l_{4cdg} & -s_{1234}l_{4cdg} & -s_{1234}l_{4cdg} \\ c_{1234}l_{4cdg} & c_{1234}l_{4cdg} & c_{1234}l_{4cdg} & c_{1234}l_{4cdg} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (124)$$

On a donc :

$$J_{v_{04cdg,q}} = \begin{pmatrix} -(s_1l_1 + s_{12}l_2 + s_{123}l_3 + s_{1234}l_{4cdg}) & -(s_{12}l_2 + s_{123}l_3 + s_{1234}l_{4cdg}) & -(s_{123}l_3 + s_{1234}l_{4cdg}) & -(s_{1234}l_{4cdg}) \\ (c_1l_1 + c_{12}l_2 + c_{123}l_3 + c_{1234}l_{4cdg}) & (c_{12}l_2 + c_{123}l_3 + c_{1234}l_{4cdg}) & (c_{123}l_3 + c_{1234}l_{4cdg}) & (c_{1234}l_{4cdg}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (125)$$

Voyons maintenant le calcul de la jacobienne au centre de gravité par la méthode classique :

$$J_{v_{04cdg,q}} = \frac{\partial}{\partial q}(\underline{t}_{0 \rightarrow 4cdg}) \text{ tel que } \underline{t}_{0 \rightarrow 4cdg} = \begin{pmatrix} c_1l_1 + c_{12}l_2 + c_{123}l_3 + c_{1234}l_{4cdg} \\ s_1l_1 + s_{12}l_2 + s_{123}l_3 + s_{1234}l_{4cdg} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (126)$$

$$\frac{\partial}{\partial q}(\underline{t}_{0 \rightarrow 4cdg}) = \begin{pmatrix} -(s_1l_1 + s_{12}l_2 + s_{123}l_3 + s_{1234}l_{4cdg}) & -(s_{12}l_2 + s_{123}l_3 + s_{1234}l_{4cdg}) & -(s_{123}l_3 + s_{1234}l_{4cdg}) & -(s_{1234}l_{4cdg}) \\ (c_1l_1 + c_{12}l_2 + c_{123}l_3 + c_{1234}l_{4cdg}) & (c_{12}l_2 + c_{123}l_3 + c_{1234}l_{4cdg}) & (c_{123}l_3 + c_{1234}l_{4cdg}) & (c_{1234}l_{4cdg}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (127)$$

Ce qui est exactement (125).

3.5.3 Jacobienne d'un modèle composite

3.5.3.1 Cas général

Maintenant que nous sommes en mesure de calculer la jacobienne du robot en un point particulier de sa structure, penchons-nous sur le cœur de la problématique à savoir le calcul de la jacobienne d'un modèle composite. Reprenons donc notre système locomoteur symétrique avec ses $2 * i$ articulations (Figure 50). Les raisonnements peuvent être portés sur le chaînage plus général de robots sériels possédant un nombre d'articulations i, j quelconques, c'est ce que l'on supposera dans la suite du texte (en effet le cas qui nous intéresse étant une restriction du cas général envisagé).

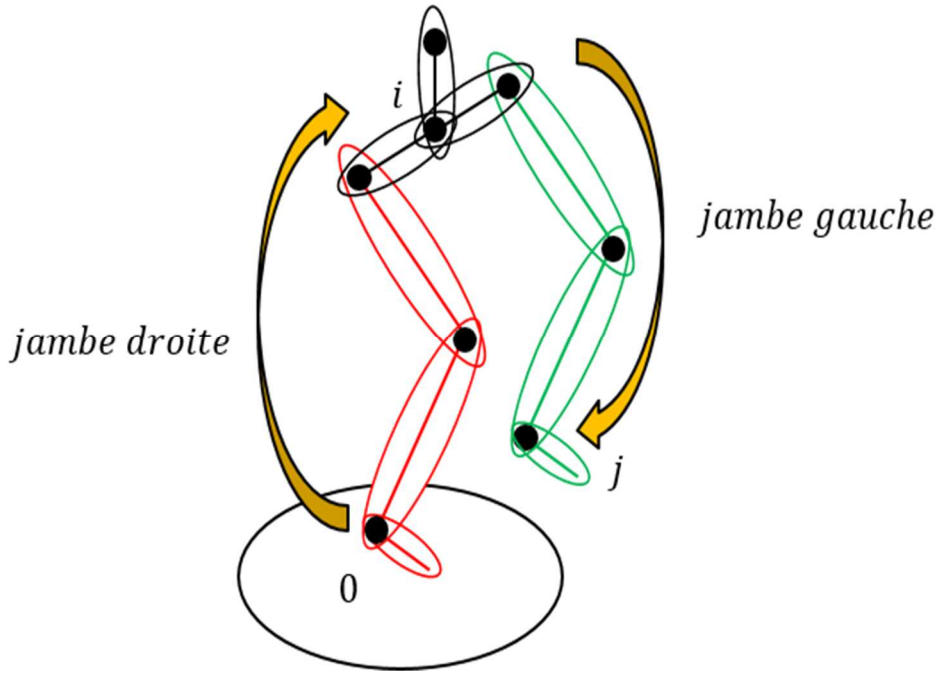


Figure 50: Calcul de la jacobienne d'un modèle composite

On a donc par construction le modèle géométrique du robot complet :

$$T_{0 \rightarrow j} = T_{0 \rightarrow i} T_{i \rightarrow j} = \begin{pmatrix} R_{0 \rightarrow j} & t_{0 \rightarrow j} \\ \mathbb{O}_{1,3} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{0 \rightarrow i} & t_{0 \rightarrow i} \\ \mathbb{O}_{1,3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{i \rightarrow j} & t_{i \rightarrow j} \\ \mathbb{O}_{1,3} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{0 \rightarrow i} R_{i \rightarrow j} & t_{0 \rightarrow i} + R_{0 \rightarrow i} t_{i \rightarrow j} \\ \mathbb{O}_{1,3} & 1 \end{pmatrix} \quad (128)$$

Avec dans leurs repères de base respectifs :

$$T_{0 \rightarrow i} = f(q_\alpha) \text{ tel que } q_\alpha = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{\alpha_1} \\ \vdots \\ q_{\alpha_i} \end{pmatrix}, T_{i \rightarrow j} = f(q_\omega) \text{ tel que } q_\omega = \begin{pmatrix} q_{i+1} \\ \vdots \\ q_{i+j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{\omega_1} \\ \vdots \\ q_{\omega_j} \end{pmatrix}$$

$$\dot{X}_i = J_{0i} \dot{q}_\alpha, \quad \dot{X}_j = J_{ij} \dot{q}_\omega \quad (129)$$

On a donc en explicitant les différents vecteurs d'états :

$$X_T = \begin{pmatrix} x_T \\ y_T \\ z_T \end{pmatrix} = t_{0 \rightarrow j}(q) = t_{0 \rightarrow i}(q_\alpha) + R_{0 \rightarrow i}(q_\alpha) t_{i \rightarrow j}(q_\omega) = MGD \begin{pmatrix} q_\alpha \\ q_\omega \end{pmatrix} = MGD(q) / q = \begin{pmatrix} q_\alpha \\ q_\omega \end{pmatrix} \quad (130)$$

Puis par dérivation :

$$\dot{X}_T = J_{v_{0j}} \dot{q} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \dot{x}_T \\ \dot{y}_T \\ \dot{z}_T \end{pmatrix} = J_{v_{0j}} \begin{pmatrix} \dot{q}_{\alpha_1} \\ \vdots \\ \dot{q}_{\alpha_i} \\ \dot{q}_{\omega_1} \\ \vdots \\ \dot{q}_{\omega_j} \end{pmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_T \\ y_T \\ z_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_T}{\partial q_{\alpha_1}} & \dots & \frac{\partial x_T}{\partial q_{\alpha_i}} & \frac{\partial x_T}{\partial q_{\omega_1}} & \dots & \frac{\partial x_T}{\partial q_{\omega_j}} \\ \frac{\partial y_T}{\partial q_{\alpha_1}} & \dots & \frac{\partial y_T}{\partial q_{\alpha_i}} & \frac{\partial y_T}{\partial q_{\omega_1}} & \dots & \frac{\partial y_T}{\partial q_{\omega_j}} \\ \frac{\partial z_T}{\partial q_{\alpha_1}} & \dots & \frac{\partial z_T}{\partial q_{\alpha_i}} & \frac{\partial z_T}{\partial q_{\omega_1}} & \dots & \frac{\partial z_T}{\partial q_{\omega_j}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_{\alpha_1} \\ \vdots \\ \dot{q}_{\alpha_i} \\ \dot{q}_{\omega_1} \\ \vdots \\ \dot{q}_{\omega_j} \end{pmatrix} \quad (131)$$

$$\Leftrightarrow \dot{X}_T = \frac{d}{dt}(X_T) = \frac{\partial}{\partial q}(X_T) \dot{q} \quad (132)$$

Cherchons maintenant à déterminer $\frac{\partial}{\partial q}(X_T)$:

$$\frac{\partial}{\partial q}(X_T) = \frac{\partial}{\partial q}(t_{0 \rightarrow i}(q_\alpha) + R_{0 \rightarrow i}(q_\alpha) t_{i \rightarrow j}(q_\omega)) \quad (133)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial q}(X_T) = \frac{\partial}{\partial q}(t_{0 \rightarrow i}(q_\alpha)) + \frac{\partial}{\partial q}(R_{0 \rightarrow i}(q_\alpha) t_{i \rightarrow j}(q_\omega)) \quad (134)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial q}(X_T) = \frac{\partial}{\partial q}(t_{0 \rightarrow i}(q_\alpha)) + R_{0 \rightarrow i}(q_\alpha) \frac{\partial}{\partial q}(t_{i \rightarrow j}(q_\omega)) + \frac{\partial}{\partial q}(R_{0 \rightarrow i}(q_\alpha)) \odot t_{i \rightarrow j}(q_\omega) \quad (135)$$

Explicitons ici $\frac{\partial}{\partial q}(R_{0 \rightarrow i}(q_\alpha))$:

$$\frac{\partial}{\partial q}(R_{0 \rightarrow i}(q_\alpha)) = \underline{\underline{\dot{R}_{0 \rightarrow i, q}}} = \underline{\underline{\dot{R}_{0 \rightarrow i, q_\alpha}}} \underline{\underline{\dot{R}_{0 \rightarrow i, q_\omega}}} \quad (136)$$

Où $\underline{\underline{\dot{R}_{0 \rightarrow i, q_\alpha}}}, \underline{\underline{\dot{R}_{0 \rightarrow i, q_\omega}}}$ est la concaténation des tenseurs dérivés de $R_{0 \rightarrow i}$ respectivement par rapport à q_α et q_ω suivant la dimension relative au vecteur d'état q .

On se rend compte qu'étant donnée la construction de $q = \begin{pmatrix} q_\alpha \\ q_\omega \end{pmatrix}$, les i premières dérivées partielles de $t_{i \rightarrow j}(q_\omega)$ sont nulles au même titre que les j dernières de $t_{0 \rightarrow i}(q_\alpha)$. Cela nous permet d'écrire :

$$\frac{\partial}{\partial q}(X_T) = (J_{v_{0i}} \quad \mathbb{O}_{3,j}) + R_{0 \rightarrow i}(q_\alpha) (\mathbb{O}_{3,i} \quad J_{v_{ij}}) + \frac{\partial}{\partial q}(R_{0 \rightarrow i}(q_\alpha)) \odot t_{i \rightarrow j}(q_\omega) \quad (137)$$

Par le même raisonnement les j dernières dérivées partielles de $R_{0 \rightarrow i}(q_\alpha)$ sont nulles ce qui donne en introduisant la notation tensorielle l'expression suivante :

$$\underline{\underline{\dot{R}_{0 \rightarrow i, q}}} = \underline{\underline{\dot{R}_{0 \rightarrow i, q_\alpha}}} \underline{\underline{\dot{R}_{0 \rightarrow i, q_\omega}}} = \underline{\underline{\dot{R}_{0 \rightarrow i, q_\alpha}}} \mathbb{O}_{3,3,j} \quad (138)$$

Et par conséquent :

$$\frac{\partial}{\partial q}(X_T) = (J_{v_{0i}} \quad \mathbb{O}_{3,j}) + R_{0 \rightarrow i}(q_\alpha) (\mathbb{O}_{3,i} \quad J_{v_{ij}}) + \underline{\underline{\dot{R}_{0 \rightarrow i, q}}} \odot t_{i \rightarrow j}(q_\omega) \quad (139)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial q}(X_T) = (J_{v_{0i}} \quad \mathbb{O}_{3,j}) + R_{0 \rightarrow i}(q_\alpha) (\mathbb{O}_{3,i} \quad J_{v_{ij}}) + (\underline{\underline{\dot{R}_{0 \rightarrow i, q_\alpha}}} \odot t_{i \rightarrow j}(q_\omega) \quad \mathbb{O}_{3,j}) \quad (140)$$

$$\Leftrightarrow J_{v_{0j}} = \left(J_{v_{0i}} + \underline{\underline{\dot{R}_{0 \rightarrow i, q_\alpha}}} \odot t_{i \rightarrow j}(q_\omega) \quad R_{0 \rightarrow i}(q_\alpha) J_{v_{ij}} \right) \quad (141)$$

Penchons-nous un instant sur cette écriture. Le premier terme reprend ici la cinématique du robot porteur ainsi que le couplage cinématique des deux robots. Le second terme quant à lui représente la cinématique du second robot dans le repère de base du premier. Bien évidemment cette conclusion est relative à la construction de q .

Traisons maintenant la contribution angulaire, par construction on a pour $T_{0 \rightarrow j}$:

$$J_{\omega_{0j}} = (o_{\zeta_1} \quad \cdots \quad o_{\zeta_j}) \text{ tel que } o_{\zeta_k} = R_{0 \rightarrow k} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (142)$$

$$\Leftrightarrow J_{\omega_{0j}} = \left(R_{0 \rightarrow 1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \cdots \quad R_{0 \rightarrow j} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad (143)$$

On a donc respectivement pour $T_{0 \rightarrow i}$ et $T_{i \rightarrow j}$:

$$\begin{cases} J_{\omega_{0i}} = (o_{\zeta_1} \quad \cdots \quad o_{\zeta_i}) \text{ tel que } o_{\zeta_k} = R_{0 \rightarrow k} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ J_{\omega_{ij}} = (i_{\zeta_{i+1}} \quad \cdots \quad i_{\zeta_{i+j}}) \text{ tel que } i_{\zeta_{i+k}} = R_{i \rightarrow i+k} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (144)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} J_{\omega_{0i}} = \left(R_{0 \rightarrow 1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \cdots \quad R_{0 \rightarrow i} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ J_{\omega_{ij}} = \left(R_{i \rightarrow i+1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \cdots \quad R_{i \rightarrow j} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \end{cases} \quad (145)$$

On a donc en faisant apparaître $J_{\omega_{0i}}$ et $J_{\omega_{ij}}$ dans la première expression (143) :

$$J_{\omega_{0j}} = \left(R_{0 \rightarrow 1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \cdots \quad R_{0 \rightarrow i} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad R_{0 \rightarrow i} R_{i \rightarrow i+1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \cdots \quad R_{0 \rightarrow i} R_{i \rightarrow j} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad (146)$$

$$\Leftrightarrow J_{\omega_{0j}} = \left(\left(R_{0 \rightarrow 1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \cdots \quad R_{0 \rightarrow i} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \left(R_{0 \rightarrow i} R_{i \rightarrow i+1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \cdots \quad R_{0 \rightarrow i} R_{i \rightarrow j} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right) \quad (147)$$

$$\Leftrightarrow J_{\omega_{0j}} = (J_{\omega_{0i}} \quad R_{0 \rightarrow i} J_{\omega_{ij}}) \quad (148)$$

En regroupant les deux contributions, on obtient le résultat suivant :

$$J_{oj} = \begin{pmatrix} J_{v_{0j}} \\ J_{\omega_{0j}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{v_{0i}} + \underline{\underline{\dot{R}_{0 \rightarrow i, q_\alpha}}} \odot t_{i \rightarrow j} & R_{0 \rightarrow i} J_{v_{ij}} \\ J_{\omega_{0i}} & R_{0 \rightarrow i} J_{\omega_{ij}} \end{pmatrix} \quad (149)$$

Il s'agit du premier résultat concernant l'élaboration des modèles composites que l'on retrouve dans le théorème 2 (voir Annexes : 6.2.2).

3.5.3.2 Application au 4R plan

Mettons en œuvre (149) pour construire J_{04} la jacobienne du 4R plan à partir des éléments des deux 2R plans qui le constituent (Figure 51).

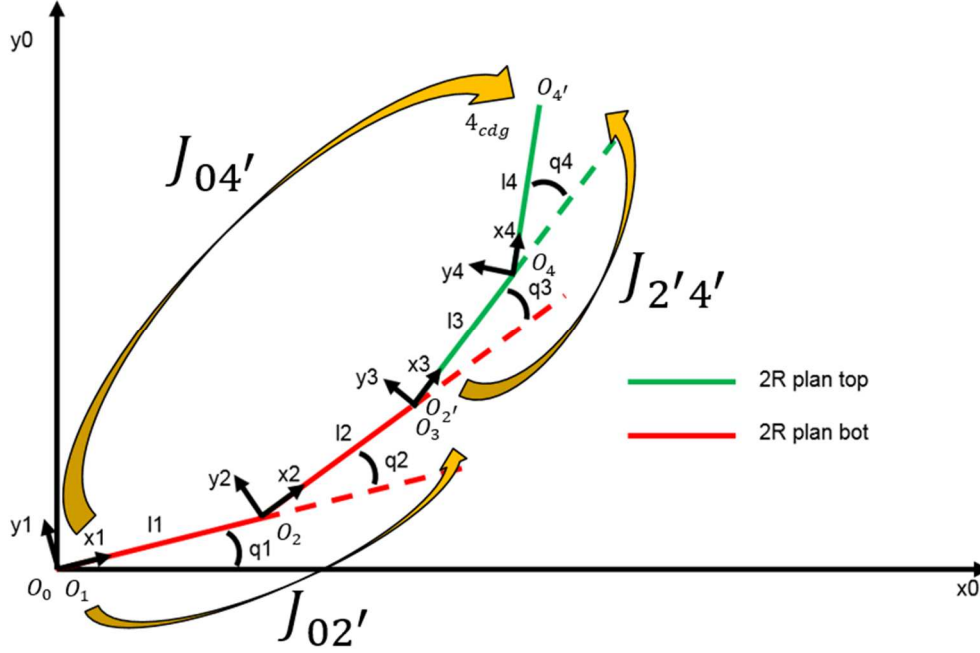


Figure 51: Mise en application du théorème de manipulation des modèles composites pour obtenir la jacobienne d'un 4R plan à partir des jacobienes des deux 2R plans qui le constituent

L'équation (81) fournit $R_{0 \rightarrow 2'}$ et $\underline{t}_{2' \rightarrow 4'}$ et pour $\begin{pmatrix} J_{v_{02'}} \\ J_{\omega_{02'}} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} J_{v_{2'4'}} \\ J_{\omega_{2'4'}} \end{pmatrix}$ on prendra l'équation (85). En appliquant le théorème 2, on obtient :

$$J_{04'} = \begin{pmatrix} J_{v_{04'}} \\ J_{\omega_{04'}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\dot{R}}_{0 \rightarrow 2', q_\alpha} \odot \underline{t}_{2' \rightarrow 4'} + J_{v_{02'}} & R_{0 \rightarrow 2'} J_{v_{2'4'}} \\ J_{\omega_{02'}} & R_{0 \rightarrow 2'} J_{\omega_{2'4'}} \end{pmatrix} \text{ avec } q_\alpha = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \quad (150)$$

$$\text{Calculons } \underline{\dot{R}}_{0 \rightarrow 2', q_\alpha} \text{ sachant que } R_{0 \rightarrow 2'} = \begin{pmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 \\ s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\dot{R}}_{0 \rightarrow 2', q_\alpha} = \frac{\partial}{\partial q_1} (R_{0 \rightarrow 2'}), \frac{\partial}{\partial q_2} (R_{0 \rightarrow 2'}) \quad (151)$$

$$\Leftrightarrow \underline{\dot{R}}_{0 \rightarrow 2', q_\alpha} = \begin{pmatrix} -s_{12} & -c_{12} & 0 \\ c_{12} & -s_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -s_{12} & -c_{12} & 0 \\ c_{12} & -s_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (152)$$

Construisons maintenant la jacobienne du robot complet terme à terme, en commençant par le premier :

$$\underline{\dot{R}}_{0 \rightarrow 2', q_\alpha} \odot \underline{t}_{2' \rightarrow 4'} = \left(\frac{\partial}{\partial q_1} (R_{0 \rightarrow 2'}) \underline{t}_{2' \rightarrow 4'}, \frac{\partial}{\partial q_2} (R_{0 \rightarrow 2'}) \underline{t}_{2' \rightarrow 4'} \right) \quad (153)$$

$$\Leftrightarrow \underline{\dot{R}}_{0 \rightarrow 2', q_\alpha} \odot \underline{t}_{2' \rightarrow 4'} = \left(\begin{pmatrix} -s_{12} & -c_{12} & 0 \\ c_{12} & -s_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_3 l_3 + c_{34} l_4 \\ s_3 l_3 + s_{34} l_4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -s_{12} & -c_{12} & 0 \\ c_{12} & -s_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_3 l_3 + c_{34} l_4 \\ s_3 l_3 + s_{34} l_4 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \quad (154)$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{\dot{R}}}_{0 \rightarrow 2', q_\alpha} \odot \underline{t}_{2' \rightarrow 4'} = \begin{pmatrix} -(s_{123}l_3 + s_{1234}l_4) & -(s_{123}l_3 + s_{1234}l_4) \\ (c_{123}l_3 + c_{1234}l_4) & (c_{123}l_3 + c_{1234}l_4) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (155)$$

D'où :

$$\underline{\underline{\dot{R}}}_{0 \rightarrow 2', q_\alpha} \odot \underline{t}_{2' \rightarrow 4'} + J_{v_{02'}} = \begin{pmatrix} -(s_{123}l_3 + s_{1234}l_4) & -(s_{123}l_3 + s_{1234}l_4) \\ (c_{123}l_3 + c_{1234}l_4) & (c_{123}l_3 + c_{1234}l_4) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -(s_1l_1 + s_{12}l_2) & -(s_{12}l_2) \\ (c_1l_1 + c_{12}l_2) & (c_{12}l_2) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (156)$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{\dot{R}}}_{0 \rightarrow 2', q_\alpha} \odot \underline{t}_{2' \rightarrow 4'} + J_{v_{02'}} = \begin{pmatrix} -(s_1l_1 + s_{12}l_2 + s_{123}l_3 + s_{1234}l_4) & -(s_{12}l_2 + s_{123}l_3 + s_{1234}l_4) \\ (c_1l_1 + c_{12}l_2 + c_{123}l_3 + c_{1234}l_4) & (c_{12}l_2 + c_{123}l_3 + c_{1234}l_4) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (157)$$

Calculons maintenant $R_{0 \rightarrow 2'} J_{v_{2'4'}}$:

$$R_{0 \rightarrow 2'} J_{v_{2'4'}} = \begin{pmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 \\ s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -(s_3l_3 + s_{34}l_4) & -(s_{34}l_4) \\ (c_3l_3 + c_{34}l_4) & (c_{34}l_4) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (158)$$

$$\Leftrightarrow R_{0 \rightarrow 2'} J_{v_{2'4'}} = \begin{pmatrix} -(s_{123}l_3 + s_{1234}l_4) & -(s_{1234}l_4) \\ (c_{123}l_3 + c_{1234}l_4) & (c_{1234}l_4) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (159)$$

Calculons maintenant $R_{0 \rightarrow 2'} J_{\omega_{2'4'}}$:

$$R_{0 \rightarrow 2'} J_{\omega_{2'4'}} = \begin{pmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 \\ s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (160)$$

En regroupant tous les termes de (150) à partir de (85), (157), (159) et (160) on obtient :

$$J_{04'} = \begin{pmatrix} -(s_1l_1 + s_{12}l_2 + s_{123}l_3 + s_{1234}l_4) & -(s_{12}l_2 + s_{123}l_3 + s_{1234}l_4) & -(s_{123}l_3 + s_{1234}l_4) & -(s_{1234}l_4) \\ (c_1l_1 + c_{12}l_2 + c_{123}l_3 + c_{1234}l_4) & (c_{12}l_2 + c_{123}l_3 + c_{1234}l_4) & (c_{123}l_3 + c_{1234}l_4) & (c_{1234}l_4) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (161)$$

Ce qui est exactement (87).

3.5.4 Jacobienne au centre de gravité et modèle composite

Une fois les deux résultats précédents (118) et (149) obtenus, on possède les outils de bases pour traiter le cas réel évoqué au 3.3 que l'on représente graphiquement sur la Figure 52.

La question est donc de calculer $J_{0k_{cdg}, q}$ à partir d'éléments propres à chacune des jambes tout en minimisant le nombre d'objets nécessaires au calcul. En utilisant (118) et (149) conjointement on peut montrer que :

$$J_{0k_{cdg}, q} = \begin{cases} (J_{0k_{cdg}, q_\alpha} \oplus_{6,j}), & \forall k \in \llbracket 1, \dots, i \rrbracket \\ \begin{pmatrix} J_{v_{0i}, q_\alpha} + \underline{\underline{\dot{R}}}_{0 \rightarrow i, q_\alpha} \odot (t_{i \rightarrow k_{cdg}}) & R_{0 \rightarrow i} J_{v_{ik_{cdg}}, q_\omega} \\ J_{\omega_{0i}, q_\alpha} & R_{0 \rightarrow i} J_{\omega_{ik_{cdg}}, q_\omega} \end{pmatrix}, & \forall k \in \llbracket i+1, \dots, i+j \rrbracket \end{cases} \quad (162)$$

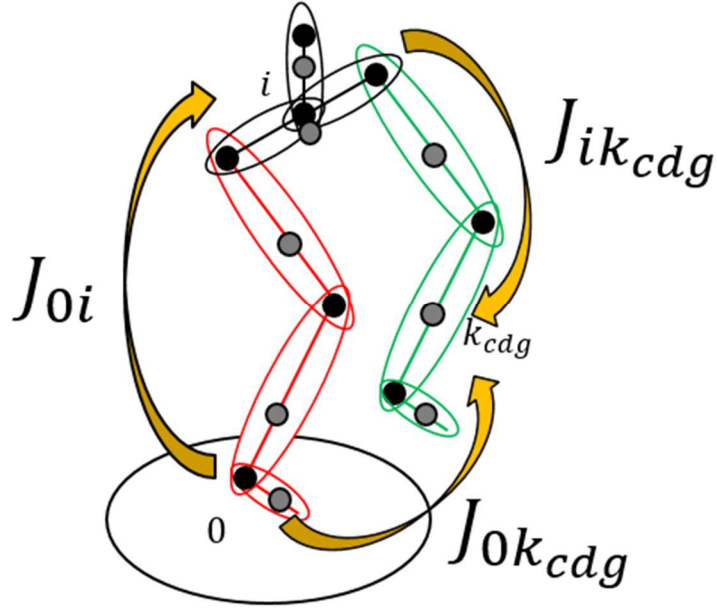


Figure 52: Représentation des méthodes permettant de calculer la jacobienne au centre de gravité d'un des segments de la jambe portée dans le référentiel de la jambe d'appui

Ce résultat (théorème 3 voir Annexes : 6.2.3.2) permet d'exprimer $J_{0k_{cdg},q}$ à partir d'éléments propres à chaque jambe. Toutefois, il fait intervenir les J_{ik_{cdg},q_ω} qui ne reprennent pas la même forme que les J_{0k_{cdg},q_α} . C'est ici qu'intervient le changement de repère base-distal évoqué au 3.4, notamment au (95). On peut montrer deux autres résultats : le premier (163) permet d'obtenir la jacobienne du changement de repère base-distal (théorème 4 voir 6.2.4.2) et le second (164) reprend le premier et l'étend pour prendre en compte un déplacement vers le centre de gravité (théorème 5 voir 6.2.5.2).

$$J_{io} = \begin{pmatrix} -R_{i \rightarrow 0} J_{v_{oi}} - \dot{R}_{i \rightarrow 0} \odot t_{0 \rightarrow i} \\ R_{i \rightarrow 0} J_{\omega_{oi}} \end{pmatrix} \quad (163)$$

$$J_{ik_{cdg}} = \begin{pmatrix} J_{v_{i0}} + R_{i \rightarrow 0} J_{v_{0k_{cdg}}} + \dot{R}_{i \rightarrow 0} \odot t_{0 \rightarrow k_{cdg}} \\ R_{i \rightarrow 0} J_{\omega_{0k}} \end{pmatrix} \quad (164)$$

3.6 Matrice d'inertie

Maintenant que l'on possède la famille de matrices jacobiniennes composées évoquée au 3.3, on peut calculer la matrice d'inertie du robot et plus particulièrement sa matrice d'inertie composite. On peut montrer en manipulant le lagrangien du système que la matrice d'inertie d'un robot sériel quelconque (dans le cas qui nous intéresse il s'agit du robot porteur) peut s'écrire (voir Annexe 6.4) de la manière suivante :

$$A_{oi} = \sum_{k=1}^i J_{0k_{cdg}}^T \begin{pmatrix} m_k \mathbb{I}_3 & \mathbb{O}_3 \\ \mathbb{O}_3 & I_{0k} \end{pmatrix} J_{0k_{cdg}} = \sum_{k=1}^i \begin{pmatrix} J_{v_{0k_{cdg}}}^T & J_{\omega_{0k_{cdg}}}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_k \mathbb{I}_3 & \mathbb{O}_3 \\ \mathbb{O}_3 & I_{0k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{v_{0k_{cdg}}} \\ J_{\omega_{0k_{cdg}}} \end{pmatrix} \quad (165)$$

On introduit ici deux nouvelles notations liées à la distribution spatiale de la masse de chaque corps : m_k et I_{0k} qui sont respectivement la masse du corps k et la matrice d'inertie du corps k évaluée au centre de gravité du corps k , exprimée dans le repère de base 0. La matrice d'inertie d'un corps est généralement obtenue dans le repère lié à ce corps. On notera I_k , la

matrice d'inertie du corps k exprimée dans un repère lié au corps k , évaluée au centre de gravité du corps k . La relation (166) permet de lier I_k à I_{0k} .

$$I_{0k} = R_{0 \rightarrow k} I_k R_{0 \rightarrow k}^T \quad (166)$$

Déterminons maintenant la forme de la matrice d'inertie de notre système locomoteur à partir des différents résultats sur les jacobienes obtenues au 3.5.

3.6.1 Matrice d'inertie et jacobienne au centre de gravité

3.6.1.1 Cas général

Dans cette section, on va s'intéresser aux conséquences (en utilisant l'approche évoquée au 1.1 Figure 2) autant mathématiques que physiques de l'introduction de l'écriture des matrices jacobienes proposée dans cette thèse dans la forme générale de la matrice d'inertie.

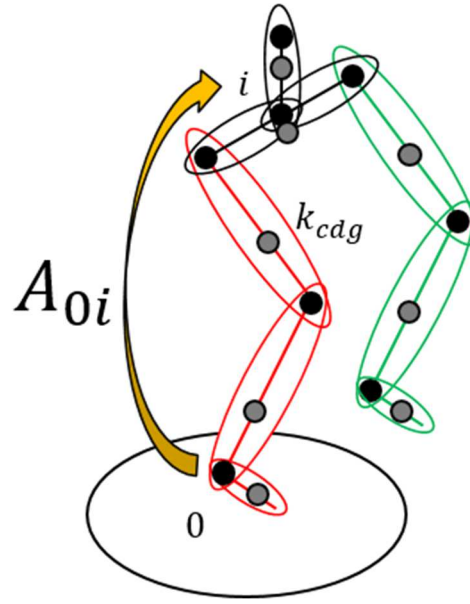


Figure 53: Représentation graphique de la matrice d'inertie de la jambe droite

En reprenant les notations utilisées précédemment, on partira donc tout naturellement de (118) et (165) :

$$\left\{ \begin{array}{l} J_{0k_{cdg}, q_\alpha} = \begin{pmatrix} J_{v_{0k_{cdg}, q_\alpha}} \\ J_{\omega_{0k_{cdg}, q_\alpha}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{v_{0k_{cdg}, q_\alpha}} & \mathbb{O}_{3, i-k} \\ J_{\omega_{0k_{cdg}, q_\alpha}} & \mathbb{O}_{3, i-k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{v_{0k_{cdg}, q_\alpha}} + \frac{\dot{R}_{0 \rightarrow k, q_\alpha}}{R_{0 \rightarrow k, q_\alpha}} \odot \underline{t}_{k \rightarrow k_{cdg}} & \mathbb{O}_{3, i-k} \\ J_{\omega_{0k_{cdg}, q_\alpha}} & \mathbb{O}_{3, i-k} \end{pmatrix} \\ A_{0i} = \sum_{k=1}^i J_{0k_{cdg}, q_\alpha}^T \begin{pmatrix} m_k \mathbb{I}_3 & \mathbb{O}_3 \\ \mathbb{O}_3 & I_{0k} \end{pmatrix} J_{0k_{cdg}, q_\alpha} = \sum_{k=1}^i \begin{pmatrix} J_{v_{0k_{cdg}, q_\alpha}}^T & J_{\omega_{0k_{cdg}, q_\alpha}}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_k \mathbb{I}_3 & \mathbb{O}_3 \\ \mathbb{O}_3 & I_{0k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{v_{0k_{cdg}, q_\alpha}} \\ J_{\omega_{0k_{cdg}, q_\alpha}} \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (167)$$

En observant la forme des équations, on se limitera à la contribution linéaire de l'énergie cinétique, que l'on notera $A_{v_{0i}}$, la contribution angulaire n'étant pas différente du cas classique. On notera également par la suite afin d'alléger l'écriture $M_k = M_k^T = m_k \mathbb{I}_3$. On a donc en remplaçant :

$$A_{v_{0i}} = \sum_{k=1}^i \begin{pmatrix} J_{v_{0k_{cdg}, q_\alpha}} & \mathbb{O}_{3, i-k} \end{pmatrix}^T M_k \begin{pmatrix} J_{v_{0k_{cdg}, q_\alpha}} & \mathbb{O}_{3, i-k} \end{pmatrix} \quad (168)$$

Et en faisant la distribution du produit, on obtient la somme suivante :

$$A_{v_{oi}} = \sum_{k=1}^i \begin{pmatrix} J_{v_{0k}cdg, \underline{q}_{\alpha_k}}^T M_k J_{v_{0k}cdg, \underline{q}_{\alpha_k}} & \mathbb{O}_{k,i-k} \\ \mathbb{O}_{i-k,k} & \mathbb{O}_{i-k,i-k} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^i \begin{pmatrix} \alpha_{v_{0k}, \underline{q}_{\alpha_k}} & \mathbb{O}_{k,i-k} \\ \mathbb{O}_{i-k,k} & \mathbb{O}_{i-k,i-k} \end{pmatrix} \quad (169)$$

Considérons $\alpha_{v_{0k}}$:

$$\alpha_{v_{0k}, \underline{q}_{\alpha_k}} = J_{v_{0k}cdg, \underline{q}_{\alpha_k}}^T M_k J_{v_{0k}cdg, \underline{q}_{\alpha_k}} \quad (170)$$

$$\Leftrightarrow \alpha_{v_{0k}, \underline{q}_{\alpha_k}} = \left(J_{v_{0k}, \underline{q}_{\alpha_k}} + \underline{\underline{\dot{R}}}_{0 \rightarrow k, \underline{q}_{\alpha_k}} \odot \underline{\underline{t}}_{k \rightarrow kcdg} \right)^T M_k \left(J_{v_{0k}, \underline{q}_{\alpha_k}} + \underline{\underline{\dot{R}}}_{0 \rightarrow k, \underline{q}_{\alpha_k}} \odot \underline{\underline{t}}_{k \rightarrow kcdg} \right) \quad (171)$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \alpha_{v_{0k}, \underline{q}_{\alpha_k}} &= J_{v_{0k}, \underline{q}_{\alpha_k}}^T M_k J_{v_{0k}, \underline{q}_{\alpha_k}} + \left(\underline{\underline{\dot{R}}}_{0 \rightarrow k, \underline{q}_{\alpha_k}} \odot \underline{\underline{t}}_{k \rightarrow kcdg} \right)^T M_k \underline{\underline{\dot{R}}}_{0 \rightarrow k, \underline{q}_{\alpha_k}} \odot \underline{\underline{t}}_{k \rightarrow kcdg} \\ &+ J_{v_{0k}, \underline{q}_{\alpha_k}}^T M_k \underline{\underline{\dot{R}}}_{0 \rightarrow k, \underline{q}_{\alpha_k}} \odot \underline{\underline{t}}_{k \rightarrow kcdg} + \left(\underline{\underline{\dot{R}}}_{0 \rightarrow k, \underline{q}_{\alpha_k}} \odot \underline{\underline{t}}_{k \rightarrow kcdg} \right)^T M_k J_{v_{0k}, \underline{q}_{\alpha_k}} \end{aligned} \quad (172)$$

Cette somme fait apparaître trois termes homogènes à des matrices d'inerties, elles sont donc symétriques, définies positives. On réécrit donc l'équation en ce sens pour obtenir le résultat (voir Annexes théorème 6, 6.4.1) suivant :

$$\left\{ \begin{aligned} A_{v_{oi}} &= \sum_{k=1}^i \alpha_{v_{0k}, \underline{q}_{\alpha_k}} = \sum_{k=1}^i \begin{pmatrix} \alpha_{v_{0k}, \underline{q}_{\alpha_k}}/masse + \alpha_{v_{0k}, \underline{q}_{\alpha_k}}/couplage + \alpha_{v_{0k}, \underline{q}_{\alpha_k}}/géométrie & \mathbb{O}_{k,i-k} \\ \mathbb{O}_{i-k,k} & \mathbb{O}_{i-k,i-k} \end{pmatrix} \\ \alpha_{v_{0k}, \underline{q}_{\alpha_k}}/masse &= \left(\underline{\underline{\dot{R}}}_{0 \rightarrow k, \underline{q}_{\alpha_k}} \odot \underline{\underline{t}}_{k \rightarrow kcdg} \right)^T M_k \underline{\underline{\dot{R}}}_{0 \rightarrow k, \underline{q}_{\alpha_k}} \odot \underline{\underline{t}}_{k \rightarrow kcdg} \\ \alpha_{v_{0k}, \underline{q}_{\alpha_k}}/couplage &= J_{v_{0k}, \underline{q}_{\alpha_k}}^T M_k \underline{\underline{\dot{R}}}_{0 \rightarrow k, \underline{q}_{\alpha_k}} \odot \underline{\underline{t}}_{k \rightarrow kcdg} + \left(\underline{\underline{\dot{R}}}_{0 \rightarrow k, \underline{q}_{\alpha_k}} \odot \underline{\underline{t}}_{k \rightarrow kcdg} \right)^T M_k J_{v_{0k}, \underline{q}_{\alpha_k}} \\ \alpha_{v_{0k}, \underline{q}_{\alpha_k}}/géométrie &= J_{v_{0k}, \underline{q}_{\alpha_k}}^T M_k J_{v_{0k}, \underline{q}_{\alpha_k}} \end{aligned} \right. \quad (173)$$

Avant toute considération physique, on remarquera utilement que :

$$\left(\underline{\underline{\dot{R}}}_{0 \rightarrow k, \underline{q}_{\alpha_k}} \odot \underline{\underline{t}}_{k \rightarrow kcdg} \right)^T M_k J_{v_{0k}, \underline{q}_{\alpha_k}} = \left(J_{v_{0k}, \underline{q}_{\alpha_k}}^T M_k \underline{\underline{\dot{R}}}_{0 \rightarrow k, \underline{q}_{\alpha_k}} \odot \underline{\underline{t}}_{k \rightarrow kcdg} \right)^T \quad (174)$$

Penchons nous maintenant sur les implications de la décomposition que l'on obtient. Le premier terme de la somme $\alpha_{v_{0k}, \underline{q}_{\alpha_k}}/masse$ dépend bien évidemment de l'agencement des articulations (tenseur dérivé des matrices de rotation) mais plus particulièrement, et c'est là tout l'intérêt, de la position du centre de gravité. On peut y voir une possibilité d'optimiser la distribution de masse afin d'obtenir un comportement dynamique particulier. Le plus évident serait de tenter de diagonaliser $\alpha_{v_{0k}, \underline{q}_{\alpha_k}}/masse$ autant que possible afin de supprimer les couplages.

La beauté de l'approche, c'est qu'avec cette écriture on pourrait envisager deux choses : la première serait de concevoir les pièces du robot en plaçant les centres de gravité judicieusement ce qui doit déjà être plus ou moins le cas dans le cas classique. La seconde quant à elle, consisterait à placer des masses sur un robot déjà existant afin d'obtenir le comportement dynamique voulu. Ce dernier point est d'autant plus critique que dans le cas présent, on utilise un robot qui a été développé il y a vingt ans et le fait de placer des masses afin de modifier la distribution de masse plutôt que de refaire usiner des grandes pièces semble donc tout à fait intéressant dans le cadre d'une réduction des coûts et du temps de fabrication.

On y verra une autre utilisation : la possible rétroaction sur le système physique dans le cadre de la commande. En effet, il est tout à fait envisageable de découpler physiquement le système pour le commander plus efficacement plutôt que de rechercher une solution purement automatique qui risquerait de coûter d'autant plus de ressources de calcul, impactant directement la performance temps réel du système.

Le terme $\alpha_{v_{0k}, q_{\alpha_k}} / \text{géométrie}$ peut s'interpréter de la même manière qu' $\alpha_{v_{0k}, q_{\alpha_k}} / \text{masse}$ à ceci près que cela ne concernera pour le coup que la géométrie du robot. On remarquera qu'à la différence du terme de masse où l'on conserve la possibilité de modifier la dynamique du robot après conception, il devient impossible de modifier ultérieurement le terme de géométrie. Il conviendrait donc d'inclure dans l'étape de conception une passe visant à optimiser ce terme.

Enfin le terme $\alpha_{v_{0k}, q_{\alpha_k}} / \text{couplage}$ représente le couplage inertiel entre la distribution de masse d'un segment du robot et sa géométrie. Sa forme est directement liée à la forme des deux termes précédents et chercher à l'optimiser pourrait entrer en conflit avec l'optimisation propre aux deux autres.

3.6.1.2 Application au 4R plan

On ne présentera ici que le calcul du quatrième terme de la somme $\alpha_{v_{04}}$ qui illustrera parfaitement l'utilisation de (174) observable sur la Figure 54.

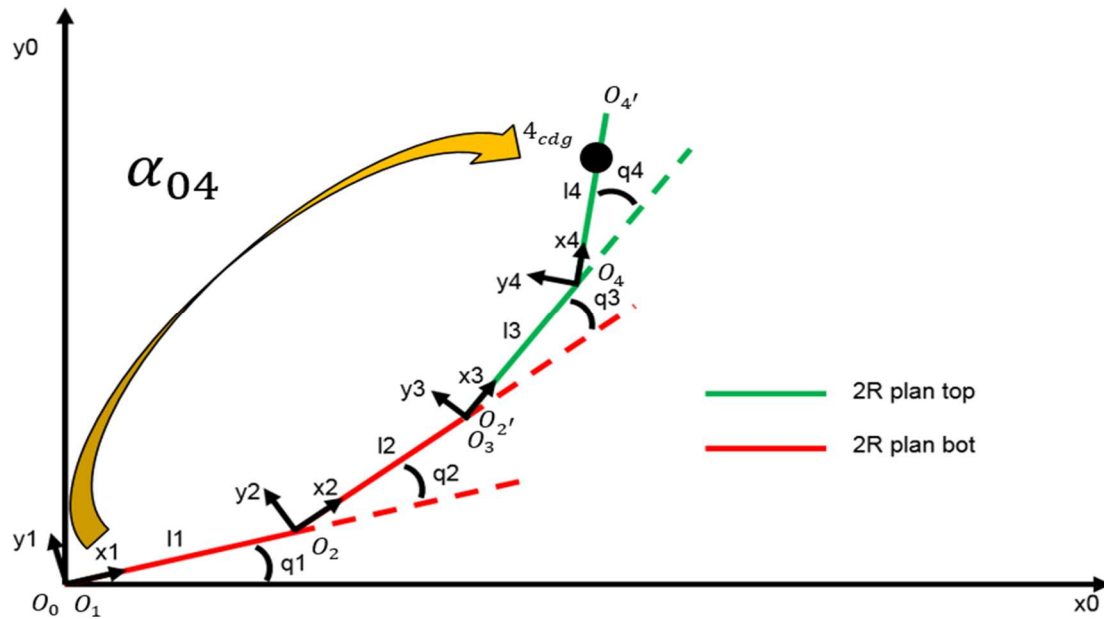


Figure 54: Représentation de la matrice d'inertie du mouvement du centre de gravité du solide 4 par rapport à 0

On obtient en utilisant (125) et (170) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{v_{04},q} = m_4 \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{43} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \\ a_{11} = l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 + l_{4cdg}^2 + 2l_1(c_2l_2 + c_{23}l_3 + c_{234}l_{4cdg}) + 2l_2(c_3l_3 + c_{34}l_{4cdg}) + 2l_3(c_4l_{4cdg}) \\ a_{21} = l_2^2 + l_3^2 + l_{4cdg}^2 + l_1(c_2l_2 + c_{23}l_3 + c_{234}l_{4cdg}) + 2l_2(c_3l_3 + c_{34}l_{4cdg}) + 2l_3(c_4l_{4cdg}) \\ a_{31} = l_3^2 + l_{4cdg}^2 + l_1(c_{23}l_3 + c_{234}l_{4cdg}) + l_2(c_3l_3 + c_{34}l_{4cdg}) + 2l_3(c_4l_{4cdg}) \\ a_{41} = l_{4cdg}^2 + l_1(c_{234}l_{4cdg}) + l_2(c_{34}l_{4cdg}) + l_3(c_4l_{4cdg}) \\ a_{22} = l_2^2 + l_3^2 + l_{4cdg}^2 + 2l_2(c_3l_3 + c_{34}l_{4cdg}) + 2l_3(c_4l_{4cdg}) \\ a_{32} = l_3^2 + l_{4cdg}^2 + l_2(c_3l_3 + c_{34}l_{4cdg}) + 2l_3(c_4l_{4cdg}) \\ a_{42} = l_{4cdg}^2 + l_2(c_{34}l_{4cdg}) + l_3(c_4l_{4cdg}) \\ a_{33} = l_3^2 + l_{4cdg}^2 + 2l_3(c_4l_{4cdg}) \\ a_{34} = l_{4cdg}^2 + l_3(c_4l_{4cdg}) \\ a_{44} = l_{4cdg}^2 \end{array} \right. \quad (175)$$

Calculons donc $\alpha_{v_{04},masse}$ à partir de (124) :

$$\alpha_{v_{04},q/masse} = \left(\underline{\underline{\dot{R}_{0 \rightarrow 4,q}}} \odot \underline{\underline{t_{4 \rightarrow 4cdg}}} \right)^T M_4 \underline{\underline{\dot{R}_{0 \rightarrow 4,q}}} \odot \underline{\underline{t_{4 \rightarrow 4cdg}}} \quad (176)$$

$$\Leftrightarrow \alpha_{v_{04},q/masse} = \begin{pmatrix} m_4(l_{4cdg})^2 & m_4(l_{4cdg})^2 & m_4(l_{4cdg})^2 & m_4(l_{4cdg})^2 \\ m_4(l_{4cdg})^2 & m_4(l_{4cdg})^2 & m_4(l_{4cdg})^2 & m_4(l_{4cdg})^2 \\ m_4(l_{4cdg})^2 & m_4(l_{4cdg})^2 & m_4(l_{4cdg})^2 & m_4(l_{4cdg})^2 \\ m_4(l_{4cdg})^2 & m_4(l_{4cdg})^2 & m_4(l_{4cdg})^2 & m_4(l_{4cdg})^2 \end{pmatrix} \quad (177)$$

Traisons maintenant $\alpha_{v_{0k},q/couplage}$ qui est la somme de $J_{v_{04},q}^T M_4 \underline{\underline{\dot{R}_{0 \rightarrow 4,q}}} \odot \underline{\underline{t_{4 \rightarrow 4cdg}}}$ et de sa transposée. En utilisant (87) en prenant $l_4 = 0$ et (124) on obtient :

$$\left(J_{v_{04},q}^T M_4 \underline{\underline{\dot{R}_{0 \rightarrow 4,q}}} \odot \underline{\underline{t_{4 \rightarrow 4cdg}}} \right)^T = m_4 l_{4cdg} \begin{pmatrix} (c_{234}l_1 + c_{34}l_2 + c_4l_3) & (c_{34}l_2 + c_4l_3) & (c_4l_3) & 0 \\ (c_{234}l_1 + c_{34}l_2 + c_4l_3) & (c_{34}l_2 + c_4l_3) & (c_4l_3) & 0 \\ (c_{234}l_1 + c_{34}l_2 + c_4l_3) & (c_{34}l_2 + c_4l_3) & (c_4l_3) & 0 \\ (c_{234}l_1 + c_{34}l_2 + c_4l_3) & (c_{34}l_2 + c_4l_3) & (c_4l_3) & 0 \end{pmatrix} \quad (178)$$

D'où :

$$\alpha_{v_{0k},q/couplage} = m_4 l_{4cdg} \begin{pmatrix} 2(c_{234}l_1 + c_{34}l_2 + c_4l_3) & X & X & X \\ (c_{234}l_1 + 2c_{34}l_2 + 2c_4l_3) & 2(c_{34}l_2 + c_4l_3) & X & X \\ (c_{234}l_1 + c_{34}l_2 + 2c_4l_3) & (c_{34}l_2 + 2c_4l_3) & 2(c_4l_3) & X \\ (c_{234}l_1 + c_{34}l_2 + c_4l_3) & (c_{34}l_2 + c_4l_3) & (c_4l_3) & 0 \end{pmatrix} \quad (179)$$

Finissons par $\alpha_{v_{0k},géométrie}$:

$$\alpha_{v_{04},q/géométrie} = J_{v_{04},q}^T M_k J_{v_{04},q} \quad (180)$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{v04,q/géométrie} = m_4 \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{43} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \\ a_{11} = l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 + 2l_1(c_2l_2 + c_{23}l_3) + 2l_2(c_3l_3) \\ a_{21} = l_2^2 + l_3^2 + l_1(c_2l_2 + c_{23}l_3) + 2l_2(c_3l_3) \\ a_{31} = l_3^2 + l_1(c_{23}l_3) + l_2(c_3l_3) \\ a_{41} = 0 \\ a_{22} = l_2^2 + l_3^2 + 2l_2(c_3l_3) \\ a_{32} = l_3^2 + l_2(c_3l_3) \\ a_{42} = 0 \\ a_{33} = l_3^2 \\ a_{34} = 0 \\ a_{44} = 0 \end{array} \right. \quad (181)$$

En additionnant (177), (179) et (181) on retrouve (175).

Par le même procédé on peut montrer que $A_{v_{04}}$ est tel que :

$$\begin{aligned}
 A_{v_{04}} &= \alpha_{v_{01,q}} + \alpha_{v_{02,q}} + \alpha_{v_{03,q}} + \alpha_{v_{04,q}} \\
 \alpha_{v_{01,q}} &= m_1 \begin{pmatrix} a_{11}^{*1} & X & X & X \\ 0 & 0 & X & X \\ 0 & 0 & 0 & X \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 a_{11}^{*1} &= l_{1cdg}^2 \\
 \alpha_{v_{02,q}} &= m_2 \begin{pmatrix} a_{11}^{*2} & X & X & X \\ a_{21}^{*2} & a_{22}^{*2} & X & X \\ 0 & 0 & 0 & X \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 a_{11}^{*2} &= l_1^2 + l_{2cdg}^2 + 2l_1(c_2l_{2cdg}) \\
 a_{21}^{*2} &= l_{2cdg}^2 + l_1(c_2l_{2cdg}) \\
 a_{22}^{*2} &= l_{2cdg}^2 \\
 \alpha_{v_{03,q}} &= m_3 \begin{pmatrix} a_{11}^{*3} & X & X & X \\ a_{21}^{*3} & a_{22}^{*3} & X & X \\ a_{31}^{*3} & a_{32}^{*3} & a_{33}^{*3} & X \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 a_{11}^{*3} &= l_1^2 + l_2^2 + l_{3cdg}^2 + 2l_1(c_2l_2 + c_{23}l_{3cdg}) + 2l_2(c_3l_{3cdg}) \\
 a_{21}^{*3} &= l_2^2 + l_{3cdg}^2 + l_1(c_2l_2 + c_{23}l_{3cdg}) + 2l_2(c_3l_{3cdg}) \\
 a_{31}^{*3} &= l_{3cdg}^2 + l_1(c_{23}l_{3cdg}) + l_2(c_3l_{3cdg}) \\
 a_{22}^{*3} &= l_2^2 + l_{3cdg}^2 + 2l_2(c_3l_{3cdg}) \\
 a_{32}^{*3} &= l_{3cdg}^2 + l_2(c_3l_{3cdg}) \\
 a_{33}^{*3} &= l_{3cdg}^2 \\
 \alpha_{v_{04,q}} &= m_4 \begin{pmatrix} a_{11}^{*4} & X & X & X \\ a_{21}^{*4} & a_{22}^{*4} & X & X \\ a_{31}^{*4} & a_{32}^{*4} & a_{33}^{*4} & X \\ a_{41}^{*4} & a_{42}^{*4} & a_{34}^{*4} & a_{44}^{*4} \end{pmatrix} \\
 a_{11}^{*4} &= l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 + l_{4cdg}^2 + 2l_1(c_2l_2 + c_{23}l_3 + c_{234}l_{4cdg}) + 2l_2(c_3l_3 + c_{34}l_{4cdg}) + 2l_3(c_4l_{4cdg}) \\
 a_{21}^{*4} &= l_2^2 + l_3^2 + l_{4cdg}^2 + l_1(c_2l_2 + c_{23}l_3 + c_{234}l_{4cdg}) + 2l_2(c_3l_3 + c_{34}l_{4cdg}) + 2l_3(c_4l_{4cdg}) \\
 a_{31}^{*4} &= l_3^2 + l_{4cdg}^2 + l_1(c_{23}l_3 + c_{234}l_{4cdg}) + l_2(c_3l_3 + c_{34}l_{4cdg}) + 2l_3(c_4l_{4cdg}) \\
 a_{41}^{*4} &= l_{4cdg}^2 + l_1(c_{234}l_{4cdg}) + l_2(c_{34}l_{4cdg}) + l_3(c_4l_{4cdg}) \\
 a_{22}^{*4} &= l_2^2 + l_3^2 + l_{4cdg}^2 + 2l_2(c_3l_3 + c_{34}l_{4cdg}) + 2l_3(c_4l_{4cdg}) \\
 a_{32}^{*4} &= l_3^2 + l_{4cdg}^2 + l_2(c_3l_3 + c_{34}l_{4cdg}) + 2l_3(c_4l_{4cdg}) \\
 a_{42}^{*4} &= l_{4cdg}^2 + l_2(c_{34}l_{4cdg}) + l_3(c_4l_{4cdg}) \\
 a_{33}^{*4} &= l_3^2 + l_{4cdg}^2 + 2l_3(c_4l_{4cdg}) \\
 a_{34}^{*4} &= l_{4cdg}^2 + l_3(c_4l_{4cdg}) \\
 a_{44}^{*4} &= l_{4cdg}^2
 \end{aligned} \tag{182}$$

3.6.2 Matrice d'inertie et jacobienne au centre de gravité et modèle composite

3.6.2.1 Cas général : introduction

Cette section abordera, dans la continuité des développements effectués précédemment, l'écriture de la matrice d'inertie d'un robot constitué de plusieurs robots. C'est ici que l'on établit le couplage inertiel entre les deux jambes du système locomoteur indépendamment du calcul de la dynamique de chaque jambe (Figure 55).

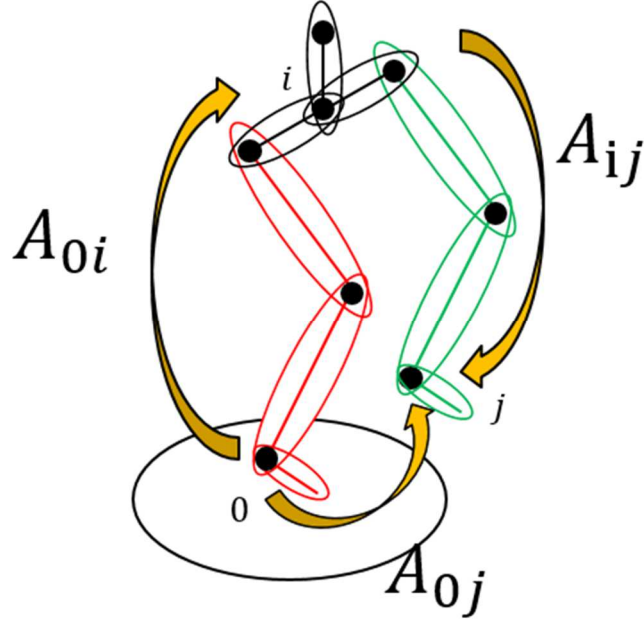


Figure 55: Représentation graphique de la matrice d'inertie composite du système locomoteur

C'est donc sous les hypothèses et notations précédentes que l'on définit A_{0j} , la matrice d'inertie du robot complet telle que :

$$A_{0j} = \sum_{k=1}^{i+j} J_{0k_{cdg},q}^T \begin{pmatrix} M_k & \mathbb{O}_3 \\ \mathbb{O}_3 & I_{0k} \end{pmatrix} J_{0k_{cdg},q} = \sum_{k=1}^{i+j} \begin{pmatrix} J_{v_{0k_{cdg},q}}^T & J_{\omega_{0k_{cdg},q}}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_k & \mathbb{O}_3 \\ \mathbb{O}_3 & I_{0k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{v_{0k_{cdg},q}} \\ J_{\omega_{0k_{cdg},q}} \end{pmatrix} \quad (183)$$

On dissocie immédiatement les contributions linéaires des contributions angulaires pour alléger l'écriture :

$$A_{0j} = A_{v_{0j}} + A_{\omega_{0j}} = \sum_{k=1}^{i+j} J_{v_{0k_{cdg},q}}^T M_k J_{v_{0k_{cdg},q}} + \sum_{k=1}^{i+j} J_{\omega_{0k_{cdg},q}}^T I_{0k} J_{\omega_{0k_{cdg},q}} \quad (184)$$

3.6.2.2 Cas général : contribution linéaire

Traisons le cas de $A_{v_{0j}}$ plus en détail dans un premier temps en commençant par scinder la somme en deux termes, le premier concernant le premier robot (la jambe droite) et le second terme le second robot (la jambe gauche) :

$$A_{v_{0j}} = A_{v_{0j/1}} + A_{v_{0j/2}} = \sum_{k=1}^i J_{v_{0k_{cdg},q}}^T M_k J_{v_{0k_{cdg},q}} + \sum_{k=i+1}^{i+j} J_{v_{0k_{cdg},q}}^T M_k J_{v_{0k_{cdg},q}} \quad (185)$$

Penchons-nous sur $A_{v_{0j/1}}$:

$$A_{v_{0j/1}} = \sum_{k=1}^i J_{v_{0k_{cdg},q}}^T M_k J_{v_{0k_{cdg},q}} \quad (186)$$

(162) nous permet d'écrire :

$$A_{v_{0j/1}} = \sum_{k=1}^i \begin{pmatrix} J_{v_{0k_{cdg},q\alpha}} & \mathbb{O}_{3,j} \end{pmatrix}^T M_k \begin{pmatrix} J_{v_{0k_{cdg},q\alpha}} & \mathbb{O}_{3,j} \end{pmatrix} \quad (187)$$

$$\Leftrightarrow A_{v_{0j/1}} = \sum_{k=1}^i \begin{pmatrix} J_{v_{0k_{cdg},q\alpha}}^T M_k J_{v_{0k_{cdg},q\alpha}} & J_{v_{0k_{cdg},q\alpha}}^T M_k \mathbb{O}_{3,j} \\ \mathbb{O}_{j,3} M_k J_{v_{0k_{cdg},q\alpha}} & \mathbb{O}_{j,3} M_k \mathbb{O}_{3,j} \end{pmatrix} \quad (188)$$

On rappellera utilement que la dimension de $J_{v_{0k_{cdg},q\alpha}}$ est $(3, i)$, ce qui donne :

$$A_{v_{0j/1}} = \sum_{k=1}^i \begin{pmatrix} J_{v_{0k_{cdg},q\alpha}}^T M_k J_{v_{0k_{cdg},q\alpha}} & \mathbb{O}_{i,j} \\ \mathbb{O}_{j,i} & \mathbb{O}_{j,j} \end{pmatrix} \quad (189)$$

$$\Leftrightarrow A_{v_{0j/1}} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^i J_{v_{0k_{cdg},q\alpha}}^T M_k J_{v_{0k_{cdg},q\alpha}} & \mathbb{O}_{i,j} \\ \mathbb{O}_{j,i} & \mathbb{O}_{j,j} \end{pmatrix} \quad (190)$$

On reconnaît ici la définition de la contribution inertielle linéaire du premier robot, d'où :

$$A_{v_{0j/1}} = \begin{pmatrix} A_{v_{0i}} & \mathbb{O}_{i,j} \\ \mathbb{O}_{j,i} & \mathbb{O}_{j,j} \end{pmatrix} \quad (191)$$

Considérons maintenant $A_{v_{0j/2}}$:

$$A_{v_{0j/2}} = \sum_{k=i+1}^{i+j} J_{v_{0k_{cdg},q}}^T M_k J_{v_{0k_{cdg},q}} \quad (192)$$

(162) nous permet d'écrire :

$$A_{v_{0j/2}} = \sum_{k=i+1}^{i+j} \begin{pmatrix} \left(J_{v_{0i,q\alpha}} + \underline{\underline{\dot{R}_{0 \rightarrow i,q\alpha}}} \odot (t_{i \rightarrow k_{cdg}}) \right)^T \\ \left(R_{0 \rightarrow i} J_{v_{ik_{cdg},q\omega}} \right)^T \end{pmatrix} M_k \begin{pmatrix} J_{v_{0i,q\alpha}} + \underline{\underline{\dot{R}_{0 \rightarrow i,q\alpha}}} \odot (t_{i \rightarrow k_{cdg}}) & R_{0 \rightarrow i} J_{v_{ik_{cdg},q\omega}} \end{pmatrix} \quad (193)$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A_{v_{0j/2}} = \sum_{k=i+1}^{i+j} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ a = \left(J_{v_{oi,q\alpha}} + \underline{\underline{\dot{R}_{0 \rightarrow i,q\alpha}}} \odot (t_{i \rightarrow k_{cdg}}) \right)^T M_k \left(J_{v_{oi,q\alpha}} + \underline{\underline{\dot{R}_{0 \rightarrow i,q\alpha}}} \odot (t_{i \rightarrow k_{cdg}}) \right) \\ b = \left(J_{v_{oi,q\alpha}} + \underline{\underline{\dot{R}_{0 \rightarrow i,q\alpha}}} \odot (t_{i \rightarrow k_{cdg}}) \right)^T M_k \left(R_{0 \rightarrow i} J_{v_{ik_{cdg},q\omega}} \right) \\ c = b^T = \left(R_{0 \rightarrow i} J_{v_{ik_{cdg},q\omega}} \right)^T M_k \left(J_{v_{oi,q\alpha}} + \underline{\underline{\dot{R}_{0 \rightarrow i,q\alpha}}} \odot (t_{i \rightarrow k_{cdg}}) \right) \\ d = \left(R_{0 \rightarrow i} J_{v_{ik_{cdg},q\omega}} \right)^T M_k \left(R_{0 \rightarrow i} J_{v_{ik_{cdg},q\omega}} \right) \end{array} \right. \quad (194)$$

En redéployant les sommes dans chaque bloc on obtient le nouveau système :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{v_{0j/2}} = \begin{pmatrix} \alpha_v & \beta_v \\ \gamma_v & \delta_v \end{pmatrix} \\ \alpha_v = \sum_{k=i+1}^{i+j} \left(J_{v_{oi,q\alpha}} + \underline{\underline{\dot{R}_{0 \rightarrow i,q\alpha}}} \odot (t_{i \rightarrow k_{cdg}}) \right)^T M_k \left(J_{v_{oi,q\alpha}} + \underline{\underline{\dot{R}_{0 \rightarrow i,q\alpha}}} \odot (t_{i \rightarrow k_{cdg}}) \right) \\ \beta_v = \sum_{k=i+1}^{i+j} \left(J_{v_{oi,q\alpha}} + \underline{\underline{\dot{R}_{0 \rightarrow i,q\alpha}}} \odot (t_{i \rightarrow k_{cdg}}) \right)^T M_k \left(R_{0 \rightarrow i} J_{v_{ik_{cdg},q\omega}} \right) \\ \gamma_v = \beta_v^T \\ \delta_v = \sum_{k=i+1}^{i+j} \left(R_{0 \rightarrow i} J_{v_{ik_{cdg},q\omega}} \right)^T M_k \left(R_{0 \rightarrow i} J_{v_{ik_{cdg},q\omega}} \right) \end{array} \right. \quad (195)$$

Traisons le cas de δ_v :

$$\delta_v = \sum_{k=i+1}^{i+j} \left(R_{0 \rightarrow i} J_{v_{ik_{cdg},q\omega}} \right)^T M_k \left(R_{0 \rightarrow i} J_{v_{ik_{cdg},q\omega}} \right) \quad (196)$$

$$\Leftrightarrow \delta_v = \sum_{k=i+1}^{i+j} J_{v_{ik_{cdg},q\omega}}^T R_{0 \rightarrow i}^T M_k R_{0 \rightarrow i} J_{v_{ik_{cdg},q\omega}} \quad (197)$$

$$\Leftrightarrow \delta_v = \sum_{k=i+1}^{i+j} J_{v_{ik_{cdg},q\omega}}^T M_k J_{v_{ik_{cdg},q\omega}} \quad (198)$$

On reconnaît ici en δ_v la définition de la contribution inertielle linéaire du second robot, d'où :

$$\delta_v = A_{v_{ij}} \quad (199)$$

En regroupant les contributions linéaires (191), (195) et (199), on obtient la relation suivante :

$$A_{v_{0j}} = A_{v_{0j/1}} + A_{v_{0j/2}} = \begin{pmatrix} A_{v_{0i}} & \mathbb{O}_{i,j} \\ \mathbb{O}_{j,i} & \mathbb{O}_{j,j} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_v & \beta_v \\ \beta_v^T & A_{v_{ij}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{v_{0i}} + \alpha_v & \beta_v \\ \beta_v^T & A_{v_{ij}} \end{pmatrix} \quad (200)$$

On voit déjà apparaître la forme finale de la matrice d'inertie du robot complet qui se construit à partir des matrices d'inerties des robots qui le composent ainsi que les matrices α_v et β_v dont on discutera la signification à la fin de cette section.

3.6.2.3 Cas général : contribution angulaire

Reprenons la contribution inertielle angulaire que nous avons laissée de côté mais dont le traitement sera beaucoup plus immédiat :

$$A_{\omega_{0j}} = \sum_{k=1}^{i+j} J_{\omega_{0k}cdg,q}^T I_{0k} J_{\omega_{0k}cdg,q} \quad (201)$$

Scindons la somme en deux termes :

$$A_{\omega_{0j}} = A_{\omega_{0j/1}} + A_{\omega_{0j/2}} = \sum_{k=1}^i J_{\omega_{0k}cdg,q}^T I_{0k} J_{\omega_{0k}cdg,q} + \sum_{k=i+1}^{i+j} J_{\omega_{0k}cdg,q}^T I_{0k} J_{\omega_{0k}cdg,q} \quad (202)$$

(162) nous permet d'écrire :

$$A_{\omega_{0j}} = \sum_{k=1}^i \begin{pmatrix} J_{\omega_{0k}cdg,q\alpha}^T \\ \mathbb{O}_{3,j}^T \end{pmatrix} I_{0k} \begin{pmatrix} J_{\omega_{0k}cdg,q\alpha} & \mathbb{O}_{3,j} \end{pmatrix} + \sum_{k=i+1}^{i+j} \begin{pmatrix} J_{\omega_{0i,q\alpha}}^T \\ (R_{0 \rightarrow i} J_{\omega_{ik}cdg,q\omega})^T \end{pmatrix} I_{0k} \begin{pmatrix} J_{\omega_{0i,q\alpha}} & R_{0 \rightarrow i} J_{\omega_{ik}cdg,q\omega} \end{pmatrix} \quad (203)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A_{\omega_{0j}} = A_{\omega_{0j/1}} + A_{\omega_{0j/2}} \\ A_{\omega_{0j/1}} = \sum_{k=1}^i \begin{pmatrix} J_{\omega_{0k}cdg,q\alpha}^T I_{0k} J_{\omega_{0k}cdg,q\alpha} & \mathbb{O}_{i,j} \\ \mathbb{O}_{j,i} & \mathbb{O}_{j,j} \end{pmatrix} \\ A_{\omega_{0j/2}} = \sum_{k=i+1}^{i+j} \begin{pmatrix} J_{\omega_{0i,q\alpha}}^T I_{0k} J_{\omega_{0i,q\alpha}} & J_{\omega_{0i,q\alpha}}^T I_{0k} R_{0 \rightarrow i} J_{\omega_{ik}cdg,q\omega} \\ (R_{0 \rightarrow i} J_{\omega_{ik}cdg,q\omega})^T I_{0k} J_{\omega_{0i,q\alpha}} & (R_{0 \rightarrow i} J_{\omega_{ik}cdg,q\omega})^T I_{0k} R_{0 \rightarrow i} J_{\omega_{ik}cdg,q\omega} \end{pmatrix} \end{cases} \quad (204)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A_{\omega_{0j}} = A_{\omega_{0j/1}} + A_{\omega_{0j/2}} \\ A_{\omega_{0j/1}} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^i J_{\omega_{0k}cdg,q\alpha}^T I_{0k} J_{\omega_{0k}cdg,q\alpha} & \mathbb{O}_{i,j} \\ \mathbb{O}_{j,i} & \mathbb{O}_{j,j} \end{pmatrix} \\ A_{\omega_{0j/2}} = \begin{pmatrix} \sum_{k=i+1}^{i+j} J_{\omega_{0i,q\alpha}}^T I_{0k} J_{\omega_{0i,q\alpha}} & \sum_{k=i+1}^{i+j} J_{\omega_{0i,q\alpha}}^T I_{0k} R_{0 \rightarrow i} J_{\omega_{ik}cdg,q\omega} \\ \sum_{k=i+1}^{i+j} (R_{0 \rightarrow i} J_{\omega_{ik}cdg,q\omega})^T I_{0k} J_{\omega_{0i,q\alpha}} & \sum_{k=i+1}^{i+j} (R_{0 \rightarrow i} J_{\omega_{ik}cdg,q\omega})^T I_{0k} R_{0 \rightarrow i} J_{\omega_{ik}cdg,q\omega} \end{pmatrix} \end{cases} \quad (205)$$

On reconnaît dans $A_{\omega_{0j/1}}$ la contribution inertielle angulaire propre au robot inférieur, ce qui nous permet d'obtenir la relation suivante :

$$A_{\omega_{0j/1}} = \begin{pmatrix} A_{\omega_{0i}} & \mathbb{O}_{i,j} \\ \mathbb{O}_{j,i} & \mathbb{O}_{j,j} \end{pmatrix} \quad (206)$$

En réécrivant $A_{\omega_{0j/2}}$, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{\omega_{0j/2}} = \begin{pmatrix} \alpha_\omega & \beta_\omega \\ \gamma_\omega & \delta_\omega \end{pmatrix} \\ \alpha_\omega = \sum_{k=i+1}^{i+j} J_{\omega_{oi,q_\alpha}}^T I_{0k} J_{\omega_{oi,q_\alpha}} \\ \beta_\omega = \sum_{k=i+1}^{i+j} J_{\omega_{oi,q_\alpha}}^T I_{0k} R_{0 \rightarrow i} J_{\omega_{ik_{cdg},q_\omega}} \\ \gamma_\omega = \beta_\omega^T = \sum_{k=i+1}^{i+j} \left(R_{0 \rightarrow i} J_{\omega_{ik_{cdg},q_\omega}} \right)^T I_{0k} J_{\omega_{oi,q_\alpha}} \\ \delta_\omega = \sum_{k=i+1}^{i+j} \left(R_{0 \rightarrow i} J_{\omega_{ik_{cdg},q_\omega}} \right)^T I_{0k} R_{0 \rightarrow i} J_{\omega_{ik_{cdg},q_\omega}} \end{array} \right. \quad (207)$$

Penchons-nous sur l'expression de δ_ω qui se trouve être la contribution angulaire du robot supérieur :

$$\delta_\omega = \sum_{k=i+1}^{i+j} \left(R_{0 \rightarrow i} J_{\omega_{ik_{cdg},q_\omega}} \right)^T I_{0k} R_{0 \rightarrow i} J_{\omega_{ik_{cdg},q_\omega}} \quad (208)$$

$$\Leftrightarrow \delta_\omega = \sum_{k=i+1}^{i+j} J_{\omega_{ik_{cdg},q_\omega}}^T R_{0 \rightarrow i}^T I_{0k} R_{0 \rightarrow i} J_{\omega_{ik_{cdg},q_\omega}} \quad (209)$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} I_{ik} = R_{0 \rightarrow i}^T I_{0k} R_{0 \rightarrow i} \\ \delta_\omega = \sum_{k=i+1}^{i+j} J_{\omega_{ik_{cdg},q_\omega}}^T I_{ik} J_{\omega_{ik_{cdg},q_\omega}} = A_{\omega_{ij}} \end{array} \right. \quad (210)$$

On a donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{\omega_{0j/2}} = \begin{pmatrix} \alpha_\omega & \beta_\omega \\ \gamma_\omega & A_{\omega_{ij}} \end{pmatrix} \\ \alpha_\omega = \sum_{k=i+1}^{i+j} J_{\omega_{oi,q_\alpha}}^T I_{0k} J_{\omega_{oi,q_\alpha}} \\ \beta_\omega = \sum_{k=i+1}^{i+j} J_{\omega_{oi,q_\alpha}}^T I_{0k} R_{0 \rightarrow i} J_{\omega_{ik_{cdg},q_\omega}} \\ \gamma_\omega = \beta_\omega^T = \sum_{k=i+1}^{i+j} \left(R_{0 \rightarrow i} J_{\omega_{ik_{cdg},q_\omega}} \right)^T I_{0k} J_{\omega_{oi,q_\alpha}} \end{array} \right. \quad (211)$$

Ce qui nous permet de conclure en regroupant (206) et (211) :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{\omega_{0j}} = \begin{pmatrix} A_{\omega_{0i}} + \alpha_{\omega} & \beta_{\omega} \\ \gamma_{\omega} & A_{\omega_{ij}} \end{pmatrix} \\ \alpha_{\omega} = \sum_{k=i+1}^{i+j} J_{\omega_{0i,q\alpha}}^T I_{0k} J_{\omega_{0i,q\alpha}} \\ \beta_{\omega} = \sum_{k=i+1}^{i+j} J_{\omega_{0i,q\alpha}}^T I_{0k} R_{0 \rightarrow i} J_{\omega_{ik_{cdg},q\omega}} \\ \gamma_{\omega} = \beta_{\omega}^T = \sum_{k=i+1}^{i+j} \left(R_{0 \rightarrow i} J_{\omega_{ik_{cdg},q\omega}} \right)^T I_{0k} J_{\omega_{0i,q\alpha}} \end{array} \right. \quad (212)$$

3.6.2.4 Cas général : conclusion

C'est maintenant que l'on peut rassembler tous les termes (200) et (212) afin de construire le premier élément du modèle dynamique (voir Annexes théorème 7, 6.4.2) (183) et (184). On a donc sous les notations précédentes :

$$A_{0j} = A_{v_{0j}} + A_{\omega_{0j}} = \sum_{k=1}^{i+j} \begin{pmatrix} J_{v_{0k_{cdg},q}}^T & J_{\omega_{0k_{cdg},q}}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_k & \mathbb{O}_3 \\ \mathbb{O}_3 & I_{0k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{v_{0k_{cdg},q}} \\ J_{\omega_{0k_{cdg},q}} \end{pmatrix} \quad (213)$$

$$\Leftrightarrow A_{0j} = \begin{pmatrix} A_{v_{0i}} + \alpha_v & \beta_v \\ \beta_v^T & A_{v_{ij}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_{\omega_{0i}} + \alpha_{\omega} & \beta_{\omega} \\ \gamma_{\omega} & A_{\omega_{ij}} \end{pmatrix} \quad (214)$$

$$\Leftrightarrow A_{0j} = \begin{pmatrix} (A_{v_{0i}} + A_{\omega_{0i}}) + (\alpha_v + \alpha_{\omega}) & (\beta_v + \beta_{\omega}) \\ (\beta_v + \beta_{\omega})^T & (A_{v_{ij}} + A_{\omega_{ij}}) \end{pmatrix} \quad (215)$$

$$\Leftrightarrow A_{0j} = \begin{pmatrix} A_{0i} + \alpha & \beta \\ \beta^T & A_{ij} \end{pmatrix} \text{ tel que } \begin{cases} \alpha = \alpha_v + \alpha_{\omega} \\ \beta = \beta_v + \beta_{\omega} \end{cases} \quad (216)$$

Penchons-nous sur la signification des termes α et β . On a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = \alpha_v + \alpha_{\omega} = \sum_{k=i+1}^{i+j} \left(J_{v_{0i,q\alpha}} + \dot{R}_{0 \rightarrow i,q\alpha} \odot (t_{i \rightarrow k_{cdg}}) \right)^T M_k \left(J_{v_{0i,q\alpha}} + \dot{R}_{0 \rightarrow i,q\alpha} \odot (t_{i \rightarrow k_{cdg}}) \right) + \sum_{k=i+1}^{i+j} J_{\omega_{0i,q\alpha}}^T I_{0k} J_{\omega_{0i,q\alpha}} \\ \beta = \beta_v + \beta_{\omega} = \sum_{k=i+1}^{i+j} \left(J_{v_{0i,q\alpha}} + \dot{R}_{0 \rightarrow i,q\alpha} \odot (t_{i \rightarrow k_{cdg}}) \right)^T M_k \left(R_{0 \rightarrow i} J_{v_{ik_{cdg},q\omega}} \right) + \sum_{k=i+1}^{i+j} J_{\omega_{0i,q\alpha}}^T I_{0k} R_{0 \rightarrow i} J_{\omega_{ik_{cdg},q\omega}} \end{array} \right. \quad (217)$$

Le terme α s'interprète, du point de vue du robot porteur, comme étant une inertie additionnelle propagée sur tous ses actionneurs dont la source pourrait s'assimiler à un outil présentant la même distribution de masse que le second robot, attaché à l'organe terminal du robot porteur. C'est d'autant plus flagrant si on immobilise le second robot.

Le terme β traduit directement le couplage inertiel entre le premier et le second robot.

On remarquera également qu'il est possible avec la même démarche que celle qui est présentée ici de calculer la matrice d'inertie d'un changement de repère base-distal.

3.6.2.5 Application au 4R plan

On ne cherche ici à illustrer que la contribution linéaire. On a donc avec (216) et (217):

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{04} = \begin{pmatrix} A_{v_{02}} + \alpha_v & \beta_v \\ \beta_v^T & A_{v_{24}} \end{pmatrix} \\ \alpha_v = \sum_{k=3}^4 \left(J_{v_{02'}, q_\alpha} + \underline{\underline{\dot{R}}}_{0 \rightarrow 2', q_\alpha} \odot (t_{2' \rightarrow k_{cdg}}) \right)^T M_k \left(J_{v_{02'}, q_\alpha} + \underline{\underline{\dot{R}}}_{0 \rightarrow 2', q_\alpha} \odot (t_{2' \rightarrow k_{cdg}}) \right) \\ \beta_v = \sum_{k=3}^4 \left(J_{v_{02'}, q_\alpha} + \underline{\underline{\dot{R}}}_{0 \rightarrow 2', q_\alpha} \odot (t_{2' \rightarrow k_{cdg}}) \right)^T M_k \left(R_{0 \rightarrow 2'} J_{v_{2'}, k_{cdg}, q_\omega} \right) \end{array} \right. \quad (218)$$

On construira $A_{v_{02}}$ et $A_{v_{24}}$ à partir de (175) :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{v_{02}} = \alpha_{v_{01}, q_\alpha} + \alpha_{v_{02}, q_\alpha} \\ \alpha_{v_{01}, q_\alpha} = m_1 \begin{pmatrix} a_{11}^{*1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ a_{11}^{*1} = l_{1_{cdg}}^2 \\ \alpha_{v_{02}, q_\alpha} = m_2 \begin{pmatrix} a_{11}^{*2} & a_{21}^{*2} \\ a_{21}^{*2} & a_{22}^{*2} \end{pmatrix} \\ a_{11}^{*2} = l_1^2 + l_{2_{cdg}}^2 + 2l_1 (c_2 l_{2_{cdg}}) \\ a_{21}^{*2} = l_{2_{cdg}}^2 + l_1 (c_2 l_{2_{cdg}}) \\ a_{22}^{*2} = l_{2_{cdg}}^2 \end{array} \right. , \left\{ \begin{array}{l} A_{v_{24}} = \alpha_{v_{23}, q_\omega} + \alpha_{v_{24}, q_\omega} \\ \alpha_{v_{23}, q_\omega} = m_3 \begin{pmatrix} a_{33}^{*3} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ a_{33}^{*3} = l_{3_{cdg}}^2 \\ \alpha_{v_{24}, q_\omega} = m_4 \begin{pmatrix} a_{33}^{*4} & a_{34}^{*4} \\ a_{34}^{*4} & a_{44}^{*4} \end{pmatrix} \\ a_{33}^{*4} = l_3^2 + l_{4_{cdg}}^2 + 2l_3 (c_3 l_{4_{cdg}}) \\ a_{34}^{*4} = l_{4_{cdg}}^2 + l_3 (c_3 l_{4_{cdg}}) \\ a_{44}^{*4} = l_{4_{cdg}}^2 \end{array} \right. \quad (219)$$

Traisons maintenant α_v et plus particulièrement $\underline{\underline{\dot{R}}}_{0 \rightarrow 2', q_\alpha} \odot (t_{2' \rightarrow 3_{cdg}})$ et $\underline{\underline{\dot{R}}}_{0 \rightarrow 2', q_\alpha} \odot (t_{2' \rightarrow 4_{cdg}})$:

$$\underline{\underline{\dot{R}}}_{0 \rightarrow 2', q_\alpha} \odot (t_{2' \rightarrow 3_{cdg}}) = \begin{pmatrix} -(s_{123} l_{3_{cdg}}) & -(s_{123} l_{3_{cdg}}) \\ (c_{123} l_{3_{cdg}}) & (c_{123} l_{3_{cdg}}) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (220)$$

$$\underline{\underline{\dot{R}}}_{0 \rightarrow 2', q_\alpha} \odot (t_{2' \rightarrow 4_{cdg}}) = \begin{pmatrix} -(s_{123} l_3 + s_{1234} l_{4_{cdg}}) & -(s_{123} l_3 + s_{1234} l_{4_{cdg}}) \\ (c_{123} l_3 + c_{1234} l_{4_{cdg}}) & (c_{123} l_3 + c_{1234} l_{4_{cdg}}) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (221)$$

C'est donc en combinant (85) avec (220) et (221) que l'on construit :

$$\left\{ \begin{array}{l} J_{v_{02'}, q_\alpha} + \underline{\underline{\dot{R}}}_{0 \rightarrow 2', q_\alpha} \odot (t_{2 \rightarrow 3_{cdg}}) = \begin{pmatrix} -(s_1 l_1 + s_{12} l_2 + s_{123} l_{3_{cdg}}) & -(s_{12} l_2 + s_{123} l_{3_{cdg}}) \\ (c_1 l_1 + c_{12} l_2 + c_{123} l_{3_{cdg}}) & (c_{12} l_2 + c_{123} l_{3_{cdg}}) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ J_{v_{02'}, q_\alpha} + \underline{\underline{\dot{R}}}_{0 \rightarrow 2', q_\alpha} \odot (t_{2 \rightarrow 4_{cdg}}) = \begin{pmatrix} -(s_1 l_1 + s_{12} l_2 + s_{123} l_3 + s_{1234} l_{4_{cdg}}) & -(s_{12} l_2 + s_{123} l_3 + s_{1234} l_{4_{cdg}}) \\ (c_1 l_1 + c_{12} l_2 + c_{123} l_3 + c_{1234} l_{4_{cdg}}) & (c_{12} l_2 + c_{123} l_3 + c_{1234} l_{4_{cdg}}) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (222)$$

Ce qui nous permet finalement de calculer α_v :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_v = \alpha_{v_1} + \alpha_{v_2} \\ \alpha_{v_1} = m_3 \begin{pmatrix} a_{11}^{v_1} & a_{21}^{v_1} \\ a_{21}^{v_1} & a_{22}^{v_1} \end{pmatrix} \\ a_{11}^{v_1} = l_1^2 + l_2^2 + l_{3cdg}^2 + 2l_1(c_2l_2 + c_{23}l_{3cdg}) + 2l_2(c_3l_{3cdg}) \\ a_{21}^{v_1} = l_2^2 + l_{3cdg}^2 + l_1(c_2l_2 + c_{23}l_{3cdg}) + 2l_2(c_3l_{3cdg}) \\ a_{22}^{v_1} = l_2^2 + l_{3cdg}^2 + 2l_2(c_3l_{3cdg}) \\ \alpha_{v_2} = m_4 \begin{pmatrix} a_{11}^{v_2} & a_{21}^{v_2} \\ a_{21}^{v_2} & a_{22}^{v_2} \end{pmatrix} \\ a_{11}^{v_2} = l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 + l_{4cdg}^2 + 2l_1(c_2l_2 + c_{23}l_3 + c_{234}l_{4cdg}) + 2l_2(c_3l_3 + c_{34}l_{4cdg}) + 2l_3(c_4l_{4cdg}) \\ a_{21}^{v_2} = l_2^2 + l_3^2 + l_{4cdg}^2 + l_1(c_2l_2 + c_{23}l_3 + c_{234}l_{4cdg}) + 2l_2(c_3l_3 + c_{34}l_{4cdg}) + 2l_3(c_4l_{4cdg}) \\ a_{22}^{v_2} = l_2^2 + l_3^2 + l_{4cdg}^2 + 2l_2(c_3l_3 + c_{34}l_{4cdg}) + 2l_3(c_4l_{4cdg}) \end{array} \right. \quad (223)$$

Traitons maintenant β_v et plus particulièrement $R_{0 \rightarrow 2'} J_{v_2' 3cdg, q\omega}$ et $R_{0 \rightarrow 2'} J_{v_2' 4cdg, q\omega}$:

$$R_{0 \rightarrow 2'} J_{v_2' 3cdg, q\omega} = \begin{pmatrix} -(s_{123}l_{3cdg}) & 0 \\ (c_{123}l_{3cdg}) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (224)$$

$$R_{0 \rightarrow 2'} J_{v_2' 4cdg, q\omega} = \begin{pmatrix} -(s_{123}l_3 + s_{1234}l_{4cdg}) & -(s_{1234}l_{4cdg}) \\ (c_{123}l_3 + c_{1234}l_{4cdg}) & (c_{1234}l_{4cdg}) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (225)$$

C'est donc en combinant (85) avec (220) et (225) que l'on construit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_v = \beta_{v_1} + \beta_{v_2} \\ \beta_{v_1} = m_3 \begin{pmatrix} b_{11}^{v_1} & 0 \\ b_{21}^{v_1} & 0 \end{pmatrix} \\ b_{11}^{v_1} = l_{3cdg}^2 + l_1(c_{23}l_{3cdg}) + l_2(c_3l_{3cdg}) \\ b_{21}^{v_1} = l_{3cdg}^2 + l_2(c_3l_{3cdg}) \\ \beta_{v_2} = m_4 \begin{pmatrix} b_{11}^{v_2} & b_{12}^{v_2} \\ b_{21}^{v_2} & b_{22}^{v_2} \end{pmatrix} \\ b_{11}^{v_2} = l_3^2 + l_{4cdg}^2 + l_1(c_{23}l_3 + c_{234}l_{4cdg}) + l_2(c_3l_3 + c_{34}l_{4cdg}) + 2l_3(c_4l_{4cdg}) \\ b_{21}^{v_2} = l_3^2 + l_{4cdg}^2 + l_2(c_3l_3 + c_{34}l_{4cdg}) + 2l_3(c_4l_{4cdg}) \\ b_{12}^{v_2} = l_{4cdg}^2 + l_1(c_{234}l_{4cdg}) + l_2(c_{34}l_{4cdg}) + l_3(c_4l_{4cdg}) \\ b_{22}^{v_2} = l_{4cdg}^2 + l_2(c_{34}l_{4cdg}) + l_3(c_4l_{4cdg}) \end{array} \right. \quad (226)$$

C'est en rassemblant (219), (223) et (226) que l'on retrouve (182).

3.6.3 Matrice d'inertie et changement de repère base-distal

Tout comme on l'a évoqué au 3.4 et au 3.5.4 on a besoin de minimiser le nombre d'objets différents à calculer. On peut montrer (voir 6.4.3.2, théorème 8) que la matrice d'inertie d'un changement de repère base-distal s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{cases} A_{i0} = A_{0i} + \alpha + \beta + \beta^T \\ \alpha = \sum_{k=1}^i \left(\underline{\dot{R}}_{i \rightarrow 0} \odot t_{0 \rightarrow k_{cdg}} + J_{v_{i0}} \right)^T M_k \left(\underline{\dot{R}}_{i \rightarrow 0} \odot t_{0 \rightarrow k_{cdg}} + J_{v_{i0}} \right) \\ \beta = \sum_{k=1}^i \left(R_{i \rightarrow 0} J_{v_{0k_{cdg}}} \right)^T M_k \left(\underline{\dot{R}}_{i \rightarrow 0} \odot t_{0 \rightarrow k_{cdg}} + J_{v_{i0}} \right) \end{cases} \quad (227)$$

3.7 Matrice de Coriolis

On a montré qu'il était possible de calculer la matrice d'inertie composite d'un robot (possédant notamment des symétries) ce qui est le premier pas pour obtenir le MDI composite que l'on recherche. Pour obtenir la matrice de Coriolis composite, il faut revenir à la définition de la matrice de Coriolis classique et y intégrer les nuances du modèle composite comme évoqué au 3.3. On peut montrer (voir Annexe 6.5.1) que :

$$C(q, \dot{q})\dot{q} = \frac{d}{dt}(A(q))\dot{q} - \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{1}{2} \dot{q}^T A(q) \dot{q} \right) \quad (228)$$

Ce qui après manipulation permet de retrouver les symboles de Christoffel de première espèce :

$$C_{ijk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial a_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k} \right) \quad (229)$$

On remarque immédiatement que la triple indexation ijk renvoi à une matrice cube soit un tenseur d'ordre 3. En effet par définition, les C_{ijk} sont construit (228) à partir de la dérivation terme à terme des éléments de A , ce qui revient à la dérivation de A si on observe (229).

Comme la matrice d'inertie est un produit de jacobiennes (167), la dérivée de A est donc la dérivée d'un produit de jacobiennes. Ce qui nous conduit à deux constats : le premier concerne l'introduction d'un nouvel objet, le tenseur d'ordre 3 « dérivée de jacobienne » ou « Hessienne du MGD » ($\underline{\dot{J}}_{0k_{cdg}}$ dans l'équation (230)). Le second constat découle du premier lorsque l'on envisage une expression des modèles composites comme (162) qui fait déjà intervenir d'autres tenseurs d'ordre 3 « dérivée de matrice de rotation » où « jacobienne de matrice de rotation » (tel que $\underline{\dot{R}}_{0 \rightarrow k, q}$). Une nouvelle dérivation augmente de 1 l'ordre d'un tenseur, ce qui nous donne alors dans ce cas, un tenseur d'ordre 4 « dérivée seconde de matrice de rotation » ou encore « Hessienne de matrice de rotation » (tel que $\underline{\ddot{R}}_{0 \rightarrow k, q, q}$).

En reprenant les raisonnements présentés précédemment, on peut montrer (voir 6.5.2.2 théorème 9) :

$$\left\{ \begin{array}{l} J_{0k_{cdg}} = \begin{pmatrix} J_{v_{0k_{cdg}}} \\ J_{\omega_{0k_{cdg}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\dot{R}}_{0 \rightarrow k} \odot \underline{t}_{k \rightarrow k_{cdg}} + J_{v_{0k}} \\ J_{\omega_{0k_{cdg}}} \end{pmatrix} \\ A_{0i} = \sum_{k=1}^i \begin{pmatrix} J_{v_{0k_{cdg}}}^T & J_{\omega_{0k_{cdg}}}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_k & \mathbb{O}_3 \\ \mathbb{O}_3 & I_{0k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{v_{0k_{cdg}}} \\ J_{\omega_{0k_{cdg}}} \end{pmatrix} \\ C_{ijk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial a_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k} \right) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial A_{0i}}{\partial q} = \Gamma_{0i} + \Gamma_{0i}^T + \Gamma_{0i}^* \\ \Gamma_{0i} = \sum_{k=1}^i J_{0k_{cdg}}^T \begin{pmatrix} M_k & \mathbb{O}_3 \\ \mathbb{O}_3 & I_{0k} \end{pmatrix} \odot \underline{\dot{J}}_{0k_{cdg}} \\ \Gamma_{0i}^* = \sum_{k=1}^i J_{\omega_{0k_{cdg}}}^T \odot \underline{\dot{J}}_{0k} \odot J_{\omega_{0k_{cdg}}} \\ \underline{\dot{J}}_{0k_{cdg}} = \begin{pmatrix} \underline{\dot{J}}_{v_{0k_{cdg}}} \\ \underline{\dot{J}}_{\omega_{0k_{cdg}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\dot{R}}_{0 \rightarrow k, q, q} \odot \underline{t}_{k \rightarrow k_{cdg}} + \underline{\dot{J}}_{v_{0k}} \\ \underline{\dot{J}}_{\omega_{0k, q, q, \alpha_k}}', (\mathbb{O}_{3, i-k, j}) \end{pmatrix} \\ \underline{\dot{J}}_{0k} = \underline{\dot{R}}_{0 \rightarrow k, q} \odot I_k^* R_{0 \rightarrow k}^T + R_{0 \rightarrow k} I_k^* \odot \underline{\dot{R}}_{k \rightarrow 0, q} \end{array} \right. \quad (230)$$

Il est donc possible de calculer les symboles de Christoffel à partir d'objets plus élémentaires dont la plupart sont déjà connus car utilisés pour calculer la matrice d'inertie. Et à l'instar du calcul de la matrice d'inertie composite on peut obtenir la matrice de Coriolis composite d'un robot constitué de plusieurs sous-robots par combinaison de leurs termes de Coriolis-centrifuge (voir 6.5.3.2 théorème 10) ainsi que le modèle résultant d'un changement de repère base-distal (voir 6.5.4.2 théorème 11).

3.8 Terme de gravité

Cette section abordera le calcul du terme de gravité qui s'obtient par dérivation de l'énergie potentielle du Lagrangien et qui se formule dans le cas classique :

$$G(q) = \frac{\partial}{\partial q} (V(q)) \quad (231)$$

On remarquera immédiatement que l'énergie potentielle du système se limitera dans le cas classique au seul potentiel de gravité. On construit donc l'énergie potentielle du système en sommant les contributions de chaque corps, ce qui nous permet d'écrire la relation suivante :

$$V = \sum_{k=1}^i -m_k g^T t_{0 \rightarrow k_{cdg}} \quad (232)$$

En reprenant les notations employées tout au long de ce développement, on peut réécrire (231) avec une jacobienne :

$$G_{0i} = \sum_{k=1}^i - \left(J_{v_{0k_{cdg}}} \right)^T m_k g \quad (233)$$

Cette expression nous renvoie par ailleurs au principe de dualité cinémato-statique :

$$\tau = J^T F \quad (234)$$

Et on remarque la présence d'un signe moins qui est due au passage du second membre de l'équation suivante dans le premier :

$$m \vec{a} = \sum \vec{F} \Leftrightarrow m \vec{a} - \sum \vec{F} = \vec{0} \quad (235)$$

3.8.1 Terme de gravité et jacobienne au centre de gravité et modèle composite : cas général

Cette section abordera l'évolution du terme de gravité dans le cadre d'un modèle composite. On part de (162), on a également les expressions des couples de gravité des deux robots :

$$\begin{cases} G_{0i} = \sum_{k=1}^i - \left(J_{v_{0k_{cdg}, q_\alpha} \right)^T m_k g_0 \\ G_{ij} = \sum_{k=1}^j - \left(J_{v_{ik_{cdg}, q_\omega} \right)^T m_k g_i \end{cases} \quad (236)$$

On a donc le couple de gravité du robot complet que l'on écrit comme suit :

$$G_{0j} = \sum_{k=1}^j - \left(J_{v_{0k_{cdg}, q} \right)^T m_k g_0 \quad (237)$$

$$\Leftrightarrow G_{0j} = \sum_{k=1}^i - \left(J_{v_{0k_{cdg}, q} \right)^T m_k g_0 + \sum_{k=i+1}^{i+j} - \left(J_{v_{0k_{cdg}, q} \right)^T m_k g_0 \quad (238)$$

$$\Leftrightarrow G_{0j} = \sum_{k=1}^i - \left(J_{v_{0k_{cdg}, q_\alpha} \quad \mathbb{O}_{3,j} \right)^T m_k g_0 + \sum_{k=i+1}^{i+j} - \left(J_{v_{0i, q_\alpha} + \underline{\underline{\dot{R}_{0 \rightarrow i, q_\alpha} \odot (t_{i \rightarrow k_{cdg})}}} \quad R_{0 \rightarrow i} J_{v_{ik_{cdg}, q_\omega} \right)^T m_k g_0 \quad (239)$$

$$\Leftrightarrow G_{0j} = \sum_{k=1}^i - \left(\begin{pmatrix} J_{v_{0k_{cdg}, q_\alpha} \\ \mathbb{O}_{j,3} \end{pmatrix} \right)^T m_k g_0 + \sum_{k=i+1}^{i+j} - \left(\begin{pmatrix} J_{v_{0i, q_\alpha} + \underline{\underline{\dot{R}_{0 \rightarrow i, q_\alpha} \odot (t_{i \rightarrow k_{cdg})}}} \\ (R_{0 \rightarrow i} J_{v_{ik_{cdg}, q_\omega})^T} \end{pmatrix} \right)^T m_k g_0 \quad (240)$$

$$\Leftrightarrow G_{0j} = \begin{pmatrix} G_{0i} \\ \mathbb{O}_{j,1} \end{pmatrix} + \sum_{k=i+1}^{i+j} - \left(\begin{pmatrix} J_{v_{0i, q_\alpha} + \underline{\underline{\dot{R}_{0 \rightarrow i, q_\alpha} \odot (t_{i \rightarrow k_{cdg})}}} \\ (R_{0 \rightarrow i} J_{v_{ik_{cdg}, q_\omega})^T} \end{pmatrix} \right)^T m_k g_0 \quad (241)$$

Penchons-nous sur le second terme de la somme :

$$\sum_{k=i+1}^{i+j} - \left(\begin{pmatrix} J_{v_{0i, q_\alpha} + \underline{\underline{\dot{R}_{0 \rightarrow i, q_\alpha} \odot (t_{i \rightarrow k_{cdg})}}} \\ (R_{0 \rightarrow i} J_{v_{ik_{cdg}, q_\omega})^T} \end{pmatrix} \right)^T m_k g_0 = \begin{pmatrix} \sum_{k=i+1}^{i+j} - \left(J_{v_{0i, q_\alpha} + \underline{\underline{\dot{R}_{0 \rightarrow i, q_\alpha} \odot (t_{i \rightarrow k_{cdg})}}} \right)^T m_k g_0 \\ \sum_{k=i+1}^{i+j} - (R_{0 \rightarrow i} J_{v_{ik_{cdg}, q_\omega})^T m_k g_0 \end{pmatrix} \quad (242)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=i+1}^{i+j} - \left(\begin{pmatrix} J_{v_{0i, q_\alpha} + \underline{\underline{\dot{R}_{0 \rightarrow i, q_\alpha} \odot (t_{i \rightarrow k_{cdg})}}} \\ (R_{0 \rightarrow i} J_{v_{ik_{cdg}, q_\omega})^T} \end{pmatrix} \right)^T m_k g_0 = \begin{pmatrix} \sum_{k=i+1}^{i+j} - \left(J_{v_{0i, q_\alpha} + \underline{\underline{\dot{R}_{0 \rightarrow i, q_\alpha} \odot (t_{i \rightarrow k_{cdg})}}} \right)^T m_k g_0 \\ \sum_{k=i+1}^{i+j} - J_{v_{ik_{cdg}, q_\omega}^T R_{0 \rightarrow i}^T m_k g_0 \end{pmatrix} \quad (243)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=i+1}^{i+j} - \left(\begin{pmatrix} J_{v_{0i,q\alpha}} + \underline{\underline{\dot{R}_{0 \rightarrow i,q\alpha}}} \odot (t_{i \rightarrow k_{cdg}}) \\ (R_{0 \rightarrow i} J_{v_{ik_{cdg},q\omega}})^T \end{pmatrix}^T \right) m_k g_0 = \left(\sum_{k=i+1}^{i+j} - \begin{pmatrix} J_{v_{0i,q\alpha}} + \underline{\underline{\dot{R}_{0 \rightarrow i,q\alpha}}} \odot (t_{i \rightarrow k_{cdg}}) \\ G_{ij} \end{pmatrix}^T m_k g_0 \right) \quad (244)$$

On en déduit donc que le modèle de gravité composite (voir 6.6.1 théorème 12) s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{cases} G_{0i} = \begin{pmatrix} G_{0i} \\ \mathbb{O}_{j,1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G_{0i}^* \\ G_{ij} \end{pmatrix} \\ G_{0i}^* = \sum_{k=i+1}^{i+j} - \begin{pmatrix} J_{v_{0i,q\alpha}} + \underline{\underline{\dot{R}_{0 \rightarrow i,q\alpha}}} \odot (t_{i \rightarrow k_{cdg}}) \\ \end{pmatrix}^T m_k g_0 \end{cases} \quad (245)$$

On peut également montrer que sur le même principe on calcule le terme de gravité d'un changement de repère base distale (voir 6.6.2.2 théorème 13).

3.8.2 Terme de gravité et jacobienne au centre de gravité et modèle composite : application au 4R plan

En reprenant (125) on peut calculer G_{04} :

$$G_{04} = g \begin{pmatrix} m_1 (c_1 l_{1_{cdg}}) + m_2 (c_1 l_1 + c_{12} l_{2_{cdg}}) + m_3 (c_1 l_1 + c_{12} l_2 + c_{123} l_{3_{cdg}}) + m_4 (c_1 l_1 + c_{12} l_2 + c_{123} l_3 + c_{1234} l_{4_{cdg}}) \\ m_2 (c_{12} l_{2_{cdg}}) + m_3 (c_{12} l_2 + c_{123} l_{3_{cdg}}) + m_4 (c_{12} l_2 + c_{123} l_3 + c_{1234} l_{4_{cdg}}) \\ m_3 (c_{123} l_{3_{cdg}}) + m_4 (c_{123} l_3 + c_{1234} l_{4_{cdg}}) \\ m_4 (c_{1234} l_{4_{cdg}}) \end{pmatrix} \quad (246)$$

Utilisons (245) pour construire G_{04} à partir de G_{02} et G_{24} en rappelant qu'ici $g_i = R_{2 \rightarrow 0} g_0$:

$$\begin{cases} G_{02} = g \begin{pmatrix} m_1 (c_1 l_{1_{cdg}}) + m_2 (c_1 l_1 + c_{12} l_{2_{cdg}}) \\ m_2 (c_{12} l_{2_{cdg}}) \end{pmatrix} \\ G_{24} = g \begin{pmatrix} m_3 (c_{123} l_{3_{cdg}}) + m_4 (c_{123} l_3 + c_{1234} l_{4_{cdg}}) \\ m_4 (c_{1234} l_{4_{cdg}}) \end{pmatrix} \end{cases} \quad (247)$$

On construit donc G_{02}^* à partir de (125) :

$$G_{02}^* = g \begin{pmatrix} m_3 (c_1 l_1 + c_{12} l_2 + c_{123} l_{3_{cdg}}) + m_4 (c_1 l_1 + c_{12} l_2 + c_{123} l_3 + c_{1234} l_{4_{cdg}}) \\ m_3 (c_{12} l_2 + c_{123} l_{3_{cdg}}) + m_4 (c_{12} l_2 + c_{123} l_3 + c_{1234} l_{4_{cdg}}) \end{pmatrix} \quad (248)$$

C'est donc en rassemblant (247) et (248) que l'on obtient (246).

3.9 Conclusions et perspectives

Ce chapitre nous a permis de mettre en évidence la possibilité de calculer l'ensemble des modèles d'un robot constitué de sous-robots dont on connaîtrait les modèles. Ce résultat permet de proposer une procédure systématique permettant de gérer le chaînage de plusieurs robots dans le cadre de la robotique modulaire sous réserve de calculer au préalable quelques nouveaux objets élémentaires (Figure 56).

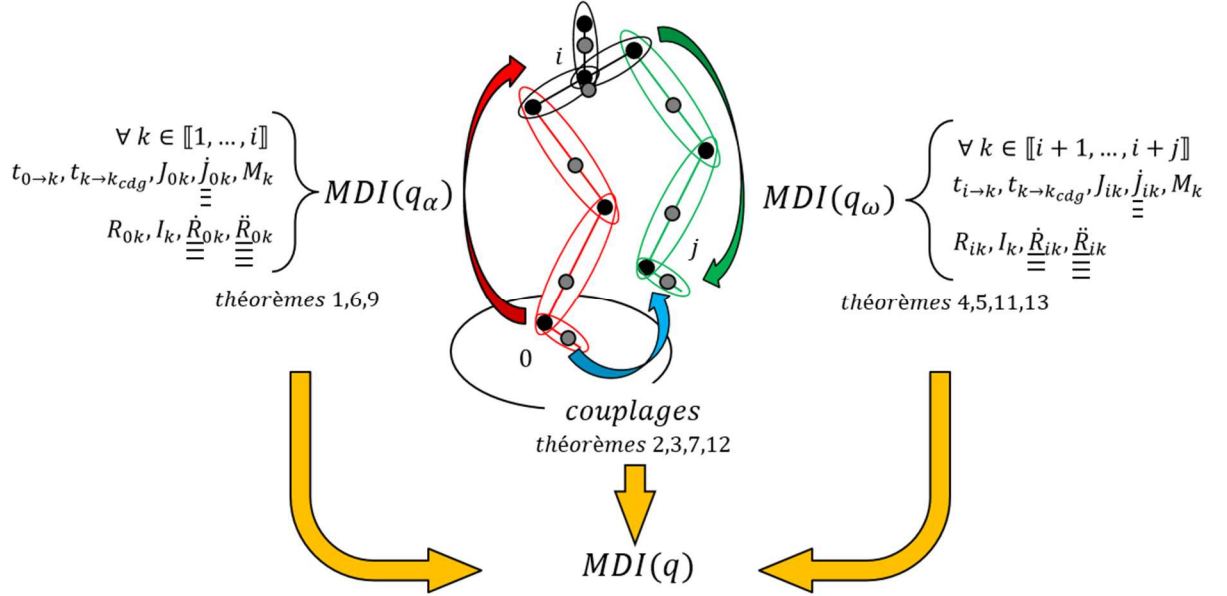


Figure 56: Mise en évidence des objets élémentaires nécessaires au calcul du MDI composite ainsi que des théorèmes mis en œuvre pour y parvenir

Les exemples proposés dans cette thèse se concentrent sur le chaînage de deux 2R plans. Il aurait été plus intéressant de traiter les 6 axes et notamment le chaînage de deux 6 axes mais pour des raisons évidentes de longueur de développement, ce choix a été écarté. Il n'en demeure pas moins que le calcul du modèle dynamique d'un 6 axes reste la base du savoir du roboticien. À des fins de pédagogie, il est tout à fait envisageable de calculer à la main le MDI d'un 6 axes en le divisant comme on le fait de manière classique en deux 3 axes : un porteur et un poignet. Ce raisonnement s'étend au calcul du chaînage d'un double 6 axes, chacun d'eux calculé à partir de leurs doubles 3 axes respectifs.

Les développements effectués ne traitent pas le cas des arborescences, le sujet est actuellement à l'étude. Un autre travail en cours consiste à implémenter cette approche de modélisation dans l'environnement de simulation afin de modéliser le robot complet et ses quinze degrés de liberté. On tâchera également de qualifier l'impact d'un tel couplage sur le temps de calcul nécessaire à l'établissement des modèles afin de rendre compte de l'implication temps réel d'une telle approche. On s'intéressera particulièrement au coût d'une implémentation complètement récursive mettant en œuvre les résultats de ce chapitre ainsi qu'au compromis idéal du couplage d'un ensemble de modèles générés de manière formelle.

4 Conclusion générale et perspectives

Cette thèse a permis de mettre en évidence deux résultats : la possibilité de commander le centre de gravité d'une jambe à l'aide de champs électrostatiques agissant sur un avatar dégradé ainsi qu'un ensemble de théorèmes de manipulation des chaînes séries permettant le couplage logiciel de plusieurs robots modules afin qu'ils agissent de concert. Ces résultats constituent les briques élémentaires qui serviront de base à la mise en service du système locomoteur BIP 2000. Ils constituent également une réponse à la problématique de la commande temps réel des robots marcheurs et aux stratégies d'évitement des chutes.

Avant d'être porté dans le contrôleur industriel, l'algorithme de stabilisation a été testé dans un simulateur et cela afin de ne pas abîmer le dispositif expérimental. En effet, il est arrivé qu'il tombe de sa hauteur relativement lentement et cela a été suffisant pour voiler deux pièces. Le fait de passer au système à quinze degrés de liberté demande donc une évolution du simulateur car il serait encore plus destructeur de faire tomber le robot complet en testant le stabilisateur.

Cette évolution nous amène au problème de définition du repère monde et de la capacité à rendre compte en simulation de l'interaction entre le robot bipède et le sol. Une des fonctionnalités du simulateur que l'on souhaiterait mettre en œuvre est justement la capacité du robot à tomber dans son environnement afin d'évaluer sa capacité à ne pas le faire. On partira sur les modèles flottants, c'est-à-dire que l'on supposera qu'un corps du robot est virtuellement attaché à un robot complètement passif encastré dans le repère monde et qui permettra d'évaluer la dynamique du robot dans son mouvement par rapport à son environnement et non pas par rapport à lui-même (c'est ce qui est supposé lorsque l'on considère un encastrement au niveau du pied d'appui). La dynamique de ce robot virtuel sera calculée de manière classique et le couplage avec le robot sera assuré par le théorème de manipulation des chaînes séries.

Le modèle flottant ne rend pas compte des interactions avec le sol ou l'environnement de manière générale. Ce dernier point doit être pris en considération dans la problématique de la locomotion bipède. C'est pourquoi on trouvera toujours une limitation à l'approche japonaise qui consiste à gérer la locomotion comme une succession de placements des pieds faisant l'hypothèse d'un encastrement au sol d'au moins l'un d'entre eux tout en asservissant l'autre en position comme on le ferait pour un robot série industriel. En effet rien ne permet de valider cette hypothèse dans un environnement ouvert si bien que le recours au ZMP, ou à tout autre point de référence au sol qui en supposerait quelques propriétés que ce soit, nous apparaît comme absolument non pertinent dans ce contexte. En faisant ici écho aux considérations évoquées lors des discussions préliminaires sur le stabilisateur postural, le seul invariant qui puisse faire référence dans le cas qui nous intéresse est le champ de gravitation. Et il se trouve que c'est cet invariant qui est le moteur de la chute. C'est donc par rapport à lui qu'il convient d'élaborer une stratégie de déplacement. C'est à ce niveau-là que l'on fait la différence entre émuler un mouvement de marche humaine et se déplacer dans un champ de gravitation.

Aussi l'approche, en cours de développement pour le stabilisateur du robot complet ne présuppose aucune propriété du sol et il revient donc au robot d'en retirer les caractéristiques afin de s'y adapter. Le paradigme retenu considère que le robot tombe vers le sol (d'où le modèle flottant) en toute circonstance et qu'il interagit avec ce dernier principalement avec ses pieds comme une main aveugle le ferait avec un objet.

Le robot devra être en mesure de connaître l'orientation de tout ou partie de ses solides par rapport au champ de gravitation et une instrumentation adaptée devra lui permettre d'apprécier quantitativement l'effet de la pesanteur sur sa configuration actuelle. Une grande importance est

accordée aux interfaces avec le sol que sont les pieds. Cet organe de perception qui nous semble absolument fondamental est pratiquement systématiquement occulté dans la littérature sur les robots humanoïdes.

En effet, un ensemble de simulation ont été réalisées en considérant que le pied possédait une articulation avec le sol. Cette dernière est bio-inspirée et correspond à l'articulation entre les métatarses et les premières phalanges du pied. Le but est de récupérer dans un cadre de stabilisation posturale le couple au niveau de cette articulation que tout un chacun peut ressentir lorsqu'il se penche vers l'avant. On peut récupérer le couple de basculement qui correspondra dans les cas idoines à une position particulière du CdG. On peut surtout se poser la question de l'actionnement d'une telle articulation que l'on peut constater sur un humain mais qui reste absent de l'ensemble des meilleurs marcheurs robotiques actuels.

On posera l'hypothèse de comportement suivante : lorsque le pied entre en contact avec le sol un asservissement probablement en effort, ou en tout cas lié à la perception de la pression sur la voute plantaire, cherchera à maximiser la surface du pied en contact avec la surface d'appui afin de maximiser la surface du polygone de sustentation. On recherche alors à minimiser le risque de chute mais aussi à avoir la plus grande surface possible pour transmettre des efforts plus importants et ainsi être en mesure de réagir aux perturbations. Il s'ensuit alors un ajustement de la posture afin que la répartition de la charge soit la plus homogène possible sur l'ensemble des surfaces d'appui tout en garantissant une position du centre de gravité la plus stable possible. Cette dernière assertion étant prioritaire sur la première. C'est donc lorsque le pied est stabilisé en position sur une surface quelconque que l'on peut, par proprioception, récupérer a posteriori l'orientation du pied par rapport à celle-ci (c'est vrai ici parce que la stabilité posturale ne passe pas uniquement par l'appréciation du contact au sol, l'utilisation d'une centrale inertielle permet de garantir une forme de stabilité le temps que la proprioception se fasse).

Aussi est-il préférable de ne pas supposer que le contact soit de nature plane lors de la génération de l'algorithme de marche sinon il devient impossible de prévoir l'orientation réelle du pied lorsque ce dernier rencontre un obstacle. En effet ce dernier, asservi en position cherchera à maintenir le pied parallèle au sol plutôt que de s'adapter à celui-ci, de ce fait, il devient impossible de mettre à jour la topologie du polygone de sustentation.

On envisage dans le futur de coupler le stabilisateur postural avec une banque de trajectoires générées hors ligne. En effet la marche humaine est l'aboutissement d'un processus d'optimisation en perpétuelle évolution. Lorsqu'un humain marche sur un sol standard, il ne se pose pas la question de placer ses pieds à telle vitesse ni exactement à tel endroit comme le ferait un robot actuel. Il a juste en tête une trajectoire optimale qu'il exécute sans même y réfléchir. Ce n'est qu'à la faveur d'un obstacle inhabituel ou de l'appréciation d'un sol particulièrement glissant que la démarche consciente de placement des pieds entre en ligne de compte. Dans le cas général, les perturbations sont rejetées à la volée alors que la trajectoire optimale de marche est exécutée. Nous transposerons ces principes dans le contrôleur afin d'émuler ce comportement.

Enfin, nous terminerons par une considération sur le principe d'équivalence. Le but de ce travail et de ses suites est à terme d'envisager une gestion dynamique du placement des solides du robot pour placer judicieusement son centre de gravité par rapport au champ de gravitation lorsque la machine subit une perturbation. Cette gestion peut conduire la machine à faire un pas dans une direction adaptée pour être en mesure de continuer à satisfaire les conditions requises de stabilité posturale. Ne pourrait-on pas envisager alors de virtuellement pousser le robot dans

une direction pour voir émerger un pas après l'autre une marche ? Car, qu'est-ce que la marche humaine si ce n'est la gestion optimale d'un déséquilibre généré à dessein.

5 Bibliographie

- [1] P. Sardain, M. Rostami et G. Bessonnet, «An anthropomorphic biped robot: dynamic concepts and technological design,» *IEEE Transaction on Systems Man and Cybernetics*, vol. 28, n° 16, pp. 823-838, 1998.
- [2] P. Sardain et G. Bessonnet, «Force Acting on a Biped Robot. Center of Pressure-Zero Moment Point,» *IEEE Transaction on Systems Man and Cybernetics*, vol. 34, n° 15, pp. 630-637, 2004.
- [3] P. Sardain et G. Bessonnet, «Zero Moment Point - Measurements From a Human Walker Wearing Robot Feet as Shoes,» *IEEE Transaction on Systems Man and Cybernetics*, vol. 34, n° 15, pp. 630-637, 2004.
- [4] A. Hofmann, Robust Execution of Bipedal Walking Tasks From Biomechanical Principles, PhD thesis, MIT, 2006.
- [5] S. Kajita, F. Kanehiro, K. Kaneko, K. Yokoi et H. Hirukawa, «The 3D linear inverted pendulum mode: a simple modeling for a biped walking pattern generation.,» *In Intelligent Robot and Systems, Proceedings*, vol. 1, n° 1 IEEE/RSJ International Conference on, pp. 239-246, 2001.
- [6] S. Kajita et K. Tani, «Study of dynamic biped locomotion on rugged terrain-derivation and application of the linear inverted pendulum mode,» *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, vol. 2, pp. 1405-1411, 1991.
- [7] J. Pratt et R. Tedrake, «Velocity-based Stability Margins for Fast Bipedal Walking,» *Fast Motions in Biomechanics and Robotics*, Vols. 1 sur 2 Springer Berlin / Heidelberg, Heidelberg Germany, pp. 299-324, September 2006.
- [8] A. Goswami et V. Kallem, «Rate of change of angular momentum and balance maintenance of biped robots,» *Proceedings of the 2004 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, vol. 4, Hoda Res. Inst., Mountain View, CA, USA, pp. 3785-3790, 2004.
- [9] T. Komura, A. Nagano, H. Leung et Y. Shinagawa, «Simulating pathological gait using enhanced linear inverted pendulum model,» *IEEE Transaction on Biomedical Engineering*, pp. 52(9):1502-1513, 2005.
- [10] J. Pratt, J. Carff, S. Drakunov et A. Goswami, «Capture Point: A Step toward Humanoid Push Recovery».
- [11] B. Stephens, «Humanoid Push Recovery,» *Proceedings of the IEEE-RAS International Conference on Humanoid Robots*, 2007.
- [12] S.-H. Lee et A. Goswami, «Reaction Mass Pendulum (RMP): An explicit model for centroidal angular momentum of humanoid robots,» *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 4667-5672, 2007.
- [13] T. Sugihara, «Standing stabilizability and stepping maneuver in planar bipedalism based on the best COM-ZMP regulator,» *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 1966-1971, 2009.

- [14] H. Hemami, F. Weimer et S. Koozekanani, «Some aspects of the inverted pendulum problem for modelings of locomotion systems,» *IEEE Transactions on Automatic Control*, pp. 18:658-661, 1973.
- [15] M. Spong, «Swing up control of the Acrobot,» *Proceedings of the 1994 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, vol. 46, IEEE Comput. Soc. Press, pp. 2356-2361, 1994.
- [16] C. Golliday et H. Hemami, «Postural stability of the two-degree-of-freedom biped by general linear feedback,» *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1976.
- [17] K. Kondak et G. Hommel, «Control and online computation of stable movement for biped robots,» *Proceedings 2003 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS 2003)*, vol. 1, pp. 874-879, 2003.
- [18] B. Stephens, «Integral Control of Humanoid Balance,» *Proceedings of the International Conference on Intelligent Robots and systems*, 2007.
- [19] C. Atkeson et B. Stephens, «Multiple balance Strategies from One Optimisation Criterion,» *The IEEE-RAS 2007 international conference on Humanoid Robots*, 2007.
- [20] K. Fujiwara, S. Kajita, K. Harada, K. Kaneko, M. Morisawa, S. Kanehiro, S. Nakaoka et H. Hirukawa, «An optimal planning of falling motions of a humanoid robot,» *2007 IEEE/RSJ international Conference on Intelligent Robots and Systems*, pp. 456-462, 2007.
- [21] R. J. Full et D. E. Koditschek, «templates and anchors: neuromechanical hypotheses of legged locomotion on land,» *The Journal of experimental biology*, pp. 3325-3332, 1999.
- [22] H. Geyer, A. Seyfarth et R. Blickhan, «Compliant leg behavior explains basic dynamics of walking and running,» *Proceedings. Biological sciences / The Royal Society*, pp. 2861-2867, 2006.
- [23] D. A. Winter, «Human balance and posture control during standing and walking,» *Gait and Posture*, pp. 193-214, 1995.
- [24] F. B. Horak et L. M. Nashner, «Central programming of postural movements: adaptation to altered support-surface configuration,» *Journal of Neurophysiology*, pp. 1369-1381, 1986.
- [25] B. E. Makai et W. E. McIlroy, «The role of limb movements in maintaining upright stance: the "change in support" strategy,» *Physical Therapy*, p. 1997, 488-507.
- [26] M. L. Mille, M. W. Rogers, K. Martinez, L. D. Hedman, M. E. Johnson, S. R. Lord et R. C. Fitzpatrick, «Thresholds for inducing Protective Stepping Responses to External Perturbation of Human Standing,» *Journal of Neurophysiology*, pp. 666-274, 2003.
- [27] Y. C. Pai et J. L. Patton, «Center of mass velocity-position predictions for balance control,» *Journal of Biomechanics*, pp. 347-354, 1997.
- [28] M. Vukobratovic et B. Borovac, «Zero-moment point - Thirty five years of its life,» *International Journal of Humanoid Robotics*, vol. 1, pp. 157-173, 2004.

- [29] A. Goswami, «Postural stability of biped robots and the foot rotation indicator (FRI) point,» *International Journal of Robotics Research*, 1999.
- [30] M. B. Popovic, A. Goswami et H. Herr, «Ground Reference Points in Legged Locomotion: Definitions, Biological Trajectories and Control Implications,» *The International Journal of Robotics Research*, 2005.
- [31] M. A. Townsend, «Biped fait stabilization via foot placement,» *Journal of Biomechanics*, pp. 21-38, 1985.
- [32] D. L. Wight, E. G. Kubica et W. D. W. L., «Introduction of the Foot Placement Estimator: A Dynamic Measure of Balance for Bipedal Robotics,» *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 2008.
- [33] M. H. Raibert, *Legged robots that balance*, MIT, Cambridge, MA, USA, 1986.
- [34] M. Raibert, M. Chepponis et H. Brown Jr., «Running on four legs as though they were one,» *IEEE Journal of Robotics and Automation*, pp. 70-82, 1986.
- [35] D. Williams et O. Khatib, «The virtual linkage: a model for internal forces in multi-grasp manipulation,» *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 1993.
- [36] L. Sentis, J. Park et O. Khatib, «Modeling and Control of Multi-Contact Centers of Pressure and Internal Forces in Humanoid Robots,» *IEEE International Conference on intelligent Robots and Systems*, 2009.
- [37] K. Harada, S. Kajita, K. Kaneko et H. Hirukawa, «Zmp analysis for arm/leg coordination,» *Proceedings 2003 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, vol. 1, pp. 75-81, 2003.
- [38] J. Pratt, A. Torres, P. Dilworth et G. Pratt, «Virtual Actuator Control,» *Proceedings of the 1996 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pp. 1219-1226, Osaka, Japan, 1996.
- [39] J. Pratt et G. Pratt, «Intuitive control of a planar bipedal walking robot,» chez *IEEE International Conference on Robotics and Automation, pages 2014-2021*, Leuven, Belgium, 1998.
- [40] K. Waldron, «Force and motion management in legged locomotion,» *IEEE Journal of Robotics and Automation*, pp. 214-220, 1986.
- [41] C. Klein et S. Kittivatcharapong, «Optimal force ditribution for the legs of a walking machine with friction cone constraints,» *IEEE transactions on Robotics and Automation*, pp. 73-85, 1990.
- [42] V. Kumar et K. Waldron, «Force distribution in closed kinematic chains,» *IEEE Journal of Robotics and Automation*, pp. 657-664, 1988.
- [43] J. Pratt, B. Krupp et C. Morse, «Series elastic actuators for high fidelity force control,» *Industrial Robot: An International Journal*, pp. 234-241, 2002.

- [44] M. Mistry, J. Buchli et S. Schaal, «Inverse Dynamics Control of Floating Base Systems using Orhtogonal Decomposition,» *Proceedings of the IEEE International Conference on robotics and Automation*, 2010.
- [45] M. Mistry, J. Nakanishi, G. Cheng et S. Schaal, «Inverse Kinematics with floating base and constraints for full body humanoid robot control,» *Proceedings of the IEEE-RAS International Conference on Humanoid Robots*, 2008.
- [46] S.-H. Hyon, J. G. Hale et G. Cheng, «Full-Body Compliant Human-Humanoid Interaction: Blancing in the Presence of Unknown External Forces,» *IEEE Transactions on robotics*, pp. 884-898, 2007.
- [47] S. Kudoh, T. Komura et K. ikeuchi, «The dynamic postural adjustment with the quadratic programming method,» *Proceedings of the 2002 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pp. 2563-2568, 2002.
- [48] Y. Abe, M. da Silva et J. Popovic, «Multiobjective control with frictional contacts,» *Proceedings of the 2007 ACM SIGGRAPH/Eurographics symposium on Computer animation*, pp. 249-258, 2007.
- [49] J. Rebula, F. Canas, J. Pratt et A. Goswami, «Learning Capture Points for Bipedal Push Recovery,» *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, p. 1774, 2008.
- [50] S. Kudoh, T. Komura et K. Ikeuchi, «Stepping motion for human-like character to maintain balance against large perturbations,» *Proceedings 2006 IEEE International Conference on Robotics and automation* , pp. 2661-2666, 2006.
- [51] E. Yoshida, O. Kanoun, C. Esteves et J.-P. Laumond, «Task-driven Support Polygone Reshaping for Humanoids,» *IEEE-RAS International Conference on Humanoid Robots*, pp. 208-2013, 2006.
- [52] S. Dalidard, A. Nakhaei, F. Lamiraux et J.-P. Laumond, «Manipulation of Documented Objects by a walking Humanoid Robot,» *IEEE-RAS International Conference on Humanoid Robots*, pp. 518-523, 2010.
- [53] S.-k. Yun, Goswami, A. et Y. Sakagami, «Safe Fall: Humanoid robot fall direction change through intelligent stepping and inertia shaping,» *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 781-787, 2009.
- [54] M. Vukabratovic, A. A. Frank et D. Juricic, «On the stability of biped locomotion,» *IEEE Transaction on Biomedical engineering*, pp. 25-36, 1970.
- [55] H. Hemami et P. Camana, «Nonlinear feedback in simple locomotion systems,» *IEEE Transactions on automation Control*, pp. 855-860, 1976.
- [56] S. Kajita et e. al, «Biped walking pattern generation by using preview control of zero-moment point,» *chez Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation ICRA2003, Taipei*, 2003.

- [57] P.-B. Wieber, «Trajectory Free Linear Model predictive Control for Stable Walking in the Presence of Strong Perturbations,» *IEEE-RAS International Conference on Humanoid Robots*, pp. 137-142, 2006.
- [58] H. Diedam, D. Dimitrov, P.-B. Wieber, K. Mombaur et M. Diehl, «Online Walking Gait generation with Adaptative Foot positionin Through linear Model Predictive Control,» *Proceedings of the Internationl Conference on Intelligent Robots and Systems*, pp. 1121-1126, 2008.
- [59] T. Sugihara et Y. Nakamura, «Whole-body cooperative balancing of humanoid robot using COG Jacobian,» *Proceedings of the International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pp. 0-5, 2002.
- [60] K. Yokoi, S. Kajita, K. Kaneko, H. Arai, N. Koyachi et K. Tanie, «Planning walking patterns for a biped robot,» *IEEE transactions on Robotics and Automation*, pp. 280-289, 2001.
- [61] K. Nishiwaki, S. Kagami, Y. Kuniyoshi, M. Inaba et H. Inoue, «Online generation of humanoid walking motion based on a fast generation method of motion pattern that follows desired ZMP,» *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and System*, vol. 3, pp. 2684-2689, 2002.
- [62] K. Akachi, K. kaneko, N. O. S. M. G. H. M. Kanehira, S. kajita et F. Kanehiro, «Development of humanoid robot HRP-3P,» *IEEE-RAS International Conference on Humanoid Robots*, pp. 50-55, 2005.
- [63] K. Hirai, M. Hirose, Y. Haikawa et T. Takenaka, «The development of honda humanoid robot,» *Proceedings of the IEEE international Conference on Robotics and Automation*, vol. 2, pp. 1321-1326, 1998.
- [64] P. Ill-Woo, K. Jung-Yup, L. Jungho et O. Jun-Ho, «Mechanical design of humanoid robot platform KHR-3 (KAIST Humanoid Robot - 3: HUBO),» *IEEE-RAS International Conference on Humanoid Robots*, vol. 12, pp. 321-326, 2005.
- [65] K. KANEKO, F. KANEJIRO, S. KAJITA, K. YOKOYAMA, K. AKACHI, T. KAWASAKI, S. OTA et T. ISOZUMI, «Design of Prototype Humanoid Robotics Platform for HRP,» chez *Intl. Conference on intelligent Robots and Systems*, EPFL, Lausanne, Switzerland, 2002.
- [66] K. KANEKO, F. KANEIHIRO, S. KAJITA, H. HIRUKAWA, T. KAWASAKI, M. HIRATA, K. AKACHI et T. ISOZUMI, «Humanoid Robot HRP-2,» chez *Proceeding of 2004 IEEE International Conference on Robotics & Automation*, New Orleans, LA, 2004.
- [67] J. Pratt, P. Dilworth et G. Pratt, «virtual Model Control of a Bipedal Walking Robot,» chez *Proceedings of the 1997 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Albuquerque, New Mexico, 1997.
- [68] J. H. Park., «Impedance Control for Biped Robot Locomotion,» *IEEE transaction on robotics and Automation*, pp. 871-881, 2001.

- [69] K. Yamane et Y. Nakamura, «Dynamics Filter- concept and implementation of online motion Generator for human Figures,» *IEEE Transaction on Rbotics and Automation*, pp. 421-432, 2003.
- [70] G. Bessonnet, J. Marot, P. Seguin et P. Sardain, «Parametric-Based Dynamic Synthesis of 3D-Gait,» *Robotica*, vol. 28, n° 14, pp. 563-581, 2010.
- [71] G. Bessonnet, P. Seguin et P. Sardain, «A Parametric Optimization Approach to Walking Pattern Synthesis,» *International Journal of Robotics research (IJRR)* , vol. 24, pp. 523-536, 2005.
- [72] W. Khalil et J. Kleinfinger, «A New Geometric Notation for Open and Closed Loop Robots.,» *In Proceeding IEEE International Conference of Robot and Automation*, vol. 3, pp. 1174-1179, 1986.
- [73] S. Kajita, O. Matsumoto et M. Saigo, «Real-time 3D walking pattern generation for a biped robot with telescopic legs,» chez *Proceedings of the 2001 IEEE International Conference on Robotics & Automation*, Seoul, Korea, 2001.
- [74] E. C. Whitman et C. G. Atkeson, «Control of Instantaneously Coupled Systems Applied to Humanoid Walking,» chez *IEEE-RAS International Conference on Humanoid Robots*, Nashville, TN, 2010.
- [75] D. C. Benteveña, C. G. Atkeson et J.-Y. Kim, «Compliant Control of a Hydraulic Humanoid Joint».
- [76] G. Wiedebach, S. Bertrand, T. Wu, L. Fiorio, S. McCrory, R. Griffin, F. Nori et J. Pratt, «Walking on Partial Footbolds Inclundings Line Contacts with the Humanoid Robot Atlas».
- [77] S. Kuidersma, R. Deits, M. Fallon, A. Valenzuela, H. Dai, F. Permenter, T. Koolen, P. Marion et R. Tedrake, «Optimization-based Locomotion Planning, Estimation, and Control Design for the Atlas Humanoid Robot».
- [78] H. F. N. Al-Shukai, F. Allmendinger, B. Corves et W.-H. Zhu, «Modeling, stability and walking pattern generators of biped robots: a review,» *robotica*, vol. 32, pp. 907-934, 2014.
- [79] J. E. Pratt, *Virtual Model Control of a Biped Walking Robot*, 1995.
- [80] K. Yamamoto, «Resolved COG Viscoelasticity Control of a Humanoid,» chez *2016 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*, Daejeon, Korea, 2016.
- [81] B. J. Stephens et C. G. Atkeson, «Dynamics Balance Force Control dor Complaint Humanoid Robots».
- [82] A. EOn, *Contribution à la génération de mouvement dynamiques pour les robots humanoïdes et au dimensionnement de leurs actionneurs*, 2009.
- [83] P. Pernès, *Introduction à la mécanique des milieux déformables - ELEMENTS DE CALCUL TENSORIEL*, Cemagref et Engees, 2003.

- [84] R. Featherstone and D. Orin, "Robot Dynamics: Equations and algorithms," in *Proc. IEEE Int. Conf. Robotics & Automation*, San Fransisco, CA, 2000.
- [85] C. A. Balafoutis, *Dynamic Analysis of Rigid-Link Open-Chain Robot Manipulators Using Cartesian Tensor Methods*, 1989.
- [86] C. A. Balafoutis, R. V. Patel and P. Misra, "Efficient Modeling and Computation of Manipulator Dynamics using Orthogonal Cartesian tensors," *IEEE Journal of Robotics and Automation*, vol. 4, no. 6, December 1988.

6 Annexes

6.1 Modèles géométriques composites

6.1.1 Modèle géométrique direct

On construit le modèle géométrique direct par produit de matrices de transformation homogènes qui permettent le passage du repère initial vers le repère final, ce qui en robotique classique correspond au passage du bâti vers l'organe terminal souvent porteur d'un outil ou d'un effecteur.

$$T_{0 \rightarrow i}(q) = \prod_{k=1}^i T_{k-1 \rightarrow k}(q_k) \text{ tel que } MGD(q) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}, \quad \text{avec } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t_{0 \rightarrow i} \text{ et } q = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} \quad (249)$$

Usuellement, on ne cherchera pas à expliciter les angles α , β et γ car il faudrait alors les extraire de la matrice de rotation préalablement ramenée dans la convention roulis, tangage, lacet.

Rappelons également quelques résultats qui auront de l'importance par la suite, à savoir la propriété d'inversion du MGD ainsi que les considérations sur le centre de gravité. En effet, le cas particulier du robot marcheur impose de considérer deux cas lorsque le robot est en phase de simple appui et donc avec un seul pied au sol. Pour une des jambes la modélisation est pertinente lorsque l'on considère que le pied est encastré au sol et sert donc de base. Dans ce cas de figure on est dans le cadre d'application de la théorie classique des robots. Le second cas concerne l'autre jambe qui est alors suspendue mais toujours libre de ses mouvements.

$$\text{Si } T_{0 \rightarrow i} = \begin{pmatrix} R_{0 \rightarrow i} & t_{0 \rightarrow i} \\ \mathbb{O}_{1,3} & 1 \end{pmatrix} \text{ alors, } T_{i \rightarrow 0} = \begin{pmatrix} (R_{0 \rightarrow i})^T & -(R_{0 \rightarrow i})^T t_{0 \rightarrow i} \\ \mathbb{O}_{1,3} & 1 \end{pmatrix} \quad (250)$$

6.1.2 Modèle géométrique direct et point de contact : exemple du centre de gravité

Considérons un segment $k \in \llbracket 1, \dots, i \rrbracket$ décrit par rapport à un corps de base 0 par la relation suivante.

$$T_{0 \rightarrow i} = \begin{pmatrix} R_{0 \rightarrow i} & t_{0 \rightarrow i} \\ \mathbb{O}_{1,3} & 1 \end{pmatrix} \quad (251)$$

Soit X_{cdg} , le centre de gravité du segment k de coordonnées $X_{cdg} = \begin{pmatrix} x_{cdg} \\ y_{cdg} \\ z_{cdg} \end{pmatrix} = t_{k \rightarrow k_{cdg}}$ dans le repère de k . On a donc la matrice de transformation homogène suivante.

$$T_{k \rightarrow k_{cdg}} = \begin{pmatrix} I_3 & t_{k \rightarrow k_{cdg}} \\ \mathbb{O}_{1,3} & 1 \end{pmatrix} \quad (252)$$

D'où :

$$T_{0 \rightarrow k_{cdg}} = \begin{pmatrix} R_{0 \rightarrow k} & t_{0 \rightarrow k_{cdg}} \\ \mathbb{O}_{1,3} & 1 \end{pmatrix} = T_{0 \rightarrow k} T_{k \rightarrow k_{cdg}} = \begin{pmatrix} R_{0 \rightarrow k} & t_{0 \rightarrow k} \\ \mathbb{O}_{1,3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_3 & t_{k \rightarrow k_{cdg}} \\ \mathbb{O}_{1,3} & 1 \end{pmatrix} \quad (253)$$

$$\Leftrightarrow T_{0 \rightarrow k_{cdg}} = \begin{pmatrix} R_{0 \rightarrow k} & R_{0 \rightarrow k} t_{k \rightarrow k_{cdg}} + t_{0 \rightarrow k} \\ \mathbb{O}_{1,3} & 1 \end{pmatrix} \quad (254)$$

On retiendra plus particulièrement :

$$t_{0 \rightarrow k_{cdg}} = t_{0 \rightarrow k} + R_{0 \rightarrow k} t_{k \rightarrow k_{cdg}} \quad (255)$$

6.1.3 Modèle géométrique direct au centre de gravité et changement de repère base-distal

Maintenant considérons le cas de figure de la jambe suspendue évoqué précédemment. En effet, si on garde en mémoire que l'implémentation se fera avec une vision orientée objet, on souhaitera dans la mesure du possible réutiliser un maximum d'éléments déjà calculés ainsi la classe « jambe » aura donc un MGD de type pied encastré pour traiter le premier cas. La propriété d'inversion du modèle géométrique permet d'obtenir le MGD de type pied suspendu pour traiter le second cas en fonction du MGD de type pied encastré. Il ne reste plus qu'à envisager le cas des centres de gravité dans la même optique.

On a donc :

$$T_{i \rightarrow k_{cdg}} = T_{i \rightarrow 0} T_{0 \rightarrow k_{cdg}} = \begin{pmatrix} (R_{0 \rightarrow i})^T & -(R_{0 \rightarrow i})^T t_{0 \rightarrow i} \\ \mathbb{O}_{1,3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{0 \rightarrow k} & t_{0 \rightarrow k_{cdg}} \\ \mathbb{O}_{1,3} & 1 \end{pmatrix} \quad (256)$$

$$\Leftrightarrow T_{i \rightarrow k_{cdg}} = \begin{pmatrix} (R_{0 \rightarrow i})^T R_{0 \rightarrow k} & (R_{0 \rightarrow i})^T t_{0 \rightarrow k_{cdg}} - (R_{0 \rightarrow i})^T t_{0 \rightarrow i} \\ \mathbb{O}_{1,3} & 1 \end{pmatrix} \quad (257)$$

$$\Leftrightarrow T_{i \rightarrow k_{cdg}} = \begin{pmatrix} (R_{0 \rightarrow i})^T R_{0 \rightarrow k} & (R_{0 \rightarrow i})^T (t_{0 \rightarrow k_{cdg}} - t_{0 \rightarrow i}) \\ \mathbb{O}_{1,3} & 1 \end{pmatrix} \quad (258)$$

Et en explicitant $t_{0 \rightarrow i_{cdg}}$, on obtient pour information :

$$T_{i \rightarrow k_{cdg}} = \begin{pmatrix} (R_{0 \rightarrow i})^T R_{0 \rightarrow k} & (R_{0 \rightarrow i})^T (R_{0 \rightarrow k} t_{k \rightarrow k_{cdg}} + t_{0 \rightarrow k} - t_{0 \rightarrow i}) \\ \mathbb{O}_{1,3} & 1 \end{pmatrix} \quad (259)$$

Avec quelques réarrangements on peut également obtenir la relation suivante :

$$T_{i \rightarrow k_{cdg}} = \begin{pmatrix} R_{i \rightarrow 0} R_{0 \rightarrow k} & R_{i \rightarrow 0} t_{0 \rightarrow k_{cdg}} + t_{i \rightarrow 0} \\ \mathbb{O}_{1,3} & 1 \end{pmatrix} \quad (260)$$

$$\Leftrightarrow T_{i \rightarrow k_{cdg}} = \begin{pmatrix} R_{i \rightarrow k} & R_{i \rightarrow 0} t_{0 \rightarrow k_{cdg}} + t_{i \rightarrow 0} \\ \mathbb{O}_{1,3} & 1 \end{pmatrix} \quad (261)$$

6.2 Jacobienne et modèle cinématique direct

6.2.1 Jacobienne de contact : exemple de la jacobienne au centre de gravité

Théorème 1

Soit un robot sériel possédant i articulations tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{0 \rightarrow i} = \begin{pmatrix} R_{0 \rightarrow i} & t_{0 \rightarrow i} \\ \mathbb{O}_{1,3} & 1 \end{pmatrix} = f(q) \text{ tel que } q = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_i \end{pmatrix} \\ \dot{X}_i = \begin{pmatrix} J_{v_{oi}} \\ J_{\omega_{oi}} \end{pmatrix} \dot{q} \\ J_{v_{oi}} = \frac{\partial}{\partial q} (t_{0 \rightarrow i}) \\ J_{\omega_{oi}} = \begin{pmatrix} R_{0 \rightarrow 1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \cdots & R_{0 \rightarrow i} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

Si $\forall k \in \llbracket 1, \dots, i \rrbracket$

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{0 \rightarrow k_{cdg}} = T_{0 \rightarrow k} T_{k \rightarrow k_{cdg}} = \begin{pmatrix} R_{0 \rightarrow k} & t_{0 \rightarrow k} + R_{0 \rightarrow k} t_{k \rightarrow k_{cdg}} \\ \mathbb{O}_{1,3} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{0 \rightarrow k} & t_{0 \rightarrow k_{cdg}} \\ \mathbb{O}_{1,3} & 1 \end{pmatrix} = f(q) \text{ tel que} \\ \dot{X} = J_{0k_{cdg}} \dot{q} = \begin{pmatrix} J_{v_{0k_{cdg}}} \\ J_{\omega_{0k_{cdg}}} \end{pmatrix} \dot{q} \\ J_{v_{0k}, \underline{q}_k} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial q_1} (t_{0 \rightarrow k}) & \cdots & \frac{\partial}{\partial q_k} (t_{0 \rightarrow k}) \end{pmatrix} \\ J_{\omega_{0k}, \underline{q}_k} = \begin{pmatrix} R_{0 \rightarrow 1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \cdots & R_{0 \rightarrow k} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ \frac{\partial}{\partial q} (R_{0 \rightarrow k}) = \underline{\underline{\dot{R}}}_{0 \rightarrow k, q} = \underline{\underline{\dot{R}}}_{0 \rightarrow k, \underline{q}_k}, \mathbb{O}_{3,3,i-k} \end{array} \right.$$

Alors

$$J_{0k_{cdg}, q} = \begin{pmatrix} J_{v_{0k}, \underline{q}_k} + \underline{\underline{\dot{R}}}_{0 \rightarrow k, \underline{q}_k} \odot t_{k \rightarrow k_{cdg}} & \mathbb{O}_{3, i-k} \\ J_{\omega_{0k}, \underline{q}_k} & \mathbb{O}_{3, i-k} \end{pmatrix}$$

6.2.2 Jacobienne d'un modèle composite

Théorème 2

Soient deux robots sériels possédant respectivement i et j articulations tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{0 \rightarrow i} = \begin{pmatrix} R_{0 \rightarrow i} & t_{0 \rightarrow i} \\ \mathbb{O}_{1,3} & 1 \end{pmatrix} = f(q_\alpha) \text{ tel que } q_\alpha = \begin{pmatrix} q_{\alpha_1} \\ \vdots \\ q_{\alpha_i} \end{pmatrix} \\ \dot{X}_i = \begin{pmatrix} J_{v_{oi}} \\ J_{\omega_{oi}} \end{pmatrix} \dot{q}_\alpha \\ J_{v_{oi}} = \frac{\partial}{\partial q_\alpha} (t_{0 \rightarrow i}) \\ J_{\omega_{oi}} = \begin{pmatrix} R_{0 \rightarrow 1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \cdots & R_{0 \rightarrow i} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} T_{i \rightarrow j} = \begin{pmatrix} R_{i \rightarrow j} & t_{i \rightarrow j} \\ \mathbb{O}_{1,3} & 1 \end{pmatrix} = f(q_\omega) \text{ tel que } q_\omega = \begin{pmatrix} q_{\omega_1} \\ \vdots \\ q_{\omega_j} \end{pmatrix} \\ \dot{X}_j = \begin{pmatrix} J_{v_{ij}} \\ J_{\omega_{ij}} \end{pmatrix} \dot{q}_\omega \\ J_{v_{ij}} = \frac{\partial}{\partial q_\omega} (t_{i \rightarrow j}) \\ J_{\omega_{ij}} = \begin{pmatrix} R_{i \rightarrow i+1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \cdots & R_{i \rightarrow j} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{array} \right\}$$

Si

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{0 \rightarrow j} = T_{0 \rightarrow i} T_{i \rightarrow j} = \begin{pmatrix} R_{0 \rightarrow i} R_{i \rightarrow j} & R_{0 \rightarrow i} t_{i \rightarrow j} + t_{0 \rightarrow i} \\ \mathbb{O}_{1,3} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{0 \rightarrow j} & t_{0 \rightarrow j} \\ \mathbb{O}_{1,3} & 1 \end{pmatrix} = f(q) \text{ tel que } q = \begin{pmatrix} q_\alpha \\ q_\omega \end{pmatrix} \\ \dot{X} = \begin{pmatrix} J_{v_{oj}} \\ J_{\omega_{oj}} \end{pmatrix} \dot{q} \\ J_{v_{oj}} = \frac{\partial}{\partial q} (t_{0 \rightarrow j}) \\ J_{\omega_{oj}} = \begin{pmatrix} R_{0 \rightarrow 1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \cdots & R_{0 \rightarrow i} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & R_{0 \rightarrow i+1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \cdots & R_{0 \rightarrow j} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ \frac{\partial}{\partial q} (R_{0 \rightarrow i}) = \underline{\underline{\dot{R}_{0 \rightarrow i, q}}} = \underline{\underline{\dot{R}_{0 \rightarrow i, q_\alpha}}} \underline{\underline{\dot{R}_{0 \rightarrow i, q_\omega}}} \end{array} \right.$$

Alors

$$J_{oj} = \begin{pmatrix} J_{v_{oj}} \\ J_{\omega_{oj}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{\dot{R}_{0 \rightarrow i, q_\alpha}}} \underline{\underline{\odot}} t_{i \rightarrow j} + J_{v_{oi}} & R_{0 \rightarrow i} J_{v_{ij}} \\ J_{\omega_{oi}} & R_{0 \rightarrow i} J_{\omega_{ij}} \end{pmatrix}$$

6.2.3 Jacobienne au centre de gravité et modèle composite

6.2.3.1 Cas général

Envisageons dans cette section l'écriture de la jacobienne au centre de gravité dans le cadre d'un modèle composite. On se replace dans les mêmes conditions que celles prises 6.1. On se limitera à la contribution linéaire étant donné que l'autre contribution n'est pas concernée. Enfin, on présentera les développements sur un des corps du robot porté pour faire apparaître les éléments de couplage.

Considérons le k -ième corps du robot porté à j articulations et plus particulièrement son centre de gravité. On a donc du point de vue géométrique trois déplacements. Le passage du repère de base du robot porteur vers la base du robot porté, puis le trajet vers le k -ième corps et enfin vers le centre de gravité. Ce qui se traduit par l'expression suivante :

$$t_{0 \rightarrow k_{cdg}} = t_{0 \rightarrow i} + R_{0 \rightarrow i} t_{i \rightarrow k} + R_{0 \rightarrow i} R_{i \rightarrow k} t_{k \rightarrow k_{cdg}} \quad (262)$$

$$\Leftrightarrow t_{0 \rightarrow k_{cdg}} = t_{0 \rightarrow i} + R_{0 \rightarrow i} (t_{i \rightarrow k} + R_{i \rightarrow k} t_{k \rightarrow k_{cdg}}) \quad (263)$$

On peut observer ici la mise en œuvre des deux concepts évoqués précédemment, car en effet il s'agit de la définition conjointe du modèle composite et du déplacement vers le centre de gravité. On peut donc finalement écrire :

$$t_{0 \rightarrow k_{cdg}} = t_{0 \rightarrow i} + R_{0 \rightarrow i} t_{i \rightarrow k_{cdg}} \quad (264)$$

On a donc en remplaçant :

$$J_{v_{0k_{cdg}}} = \frac{\partial}{\partial q} (t_{0 \rightarrow k_{cdg}}) \quad (265)$$

$$\Leftrightarrow J_{v_{0k_{cdg}}} = \frac{\partial}{\partial q} (t_{0 \rightarrow i} + R_{0 \rightarrow i} t_{i \rightarrow k_{cdg}}) \quad (266)$$

En séparant la contribution du robot porteur du reste on obtient :

$$J_{v_{0k_{cdg}}} = \frac{\partial}{\partial q} (t_{0 \rightarrow i}) + \frac{\partial}{\partial q} (R_{0 \rightarrow i} t_{i \rightarrow k_{cdg}}) \quad (267)$$

$t_{0 \rightarrow i}$ ne dépendant que du premier robot, les j dernières dérivées partielles sont nulles. En réalisant la dérivée du produit on obtient :

$$J_{v_{0k_{cdg}}} = (J_{v_{0i,q\alpha}} \quad \mathbb{O}_{3,j}) + R_{0 \rightarrow i} \frac{\partial}{\partial q} (t_{i \rightarrow k_{cdg}}) + \frac{\partial}{\partial q} (R_{0 \rightarrow i}) t_{i \rightarrow k_{cdg}} \quad (268)$$

On construira $\frac{\partial}{\partial q} (t_{i \rightarrow k_{cdg}})$ en utilisant le théorème 1 et en remarquant que $t_{i \rightarrow k_{cdg}}$ ne dépend que du second robot aussi les i premières dérivées partielles sont nulles, ce qui nous donne les relations suivantes :

$$J_{v_{ik_{cdg},q\omega}} = \frac{\partial}{\partial q_\omega} (t_{i \rightarrow k_{cdg}}) = (J_{v_{ik}} + \underline{\underline{\dot{R}_{i \rightarrow k, q_\omega}}} \odot t_{k \rightarrow k_{cdg}} \quad \mathbb{O}_{3,j-k}) \quad (269)$$

Et

$$\frac{\partial}{\partial q} (t_{i \rightarrow k_{cdg}}) = \left(\frac{\partial}{\partial q_\alpha} (t_{i \rightarrow k_{cdg}}) \quad \frac{\partial}{\partial q_\omega} (t_{i \rightarrow k_{cdg}}) \right) = (\mathbb{O}_{3,i} \quad J_{v_{ik_{cdg},q\omega}}) \quad (270)$$

$R_{0 \rightarrow i}$ est fonction du premier robot on a donc $\underline{\underline{\dot{R}_{0 \rightarrow i, q_\omega}}}$ qui est nul (138). On obtient donc en injectant (270) dans (268) :

$$J_{v_{0k_{cdg}}} = (J_{v_{0i,q\alpha}} \quad \mathbb{O}_{3,j}) + R_{0 \rightarrow i} (\mathbb{O}_{3,i} \quad J_{v_{ik_{cdg},q\omega}}) + \underline{\underline{\dot{R}_{0 \rightarrow i}}} \odot t_{i \rightarrow k_{cdg}} \quad (271)$$

$$\Leftrightarrow J_{v_{0k_{cdg}}} = (J_{v_{0i,q_\alpha}} \quad R_{0 \rightarrow i} J_{v_{ik_{cdg},q_\omega}}) + (\underline{\dot{R}}_{0 \rightarrow i,q_\alpha} \odot t_{i \rightarrow k_{cdg}} \quad \mathbb{O}_{3,j}) \quad (272)$$

$$\Leftrightarrow J_{v_{0k_{cdg}}} = (J_{v_{0i,q_\alpha}} + \underline{\dot{R}}_{0 \rightarrow i,q_\alpha} \odot t_{i \rightarrow k_{cdg}} \quad R_{0 \rightarrow i} J_{v_{ik_{cdg},q_\omega}}) \quad (273)$$

6.2.3.2 Théorème Jacobienne au centre de gravité et modèle composite

Théorème 3

Soient deux robots sériels possédant respectivement i et j articulations tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{0 \rightarrow i} = \begin{pmatrix} R_{0 \rightarrow i} & t_{0 \rightarrow i} \\ \mathbb{O}_{1,3} & 1 \end{pmatrix} = f(q_\alpha) \text{ tel que } q_\alpha = \begin{pmatrix} q_{\alpha_1} \\ \vdots \\ q_{\alpha_i} \end{pmatrix} \\ \dot{X}_i = \begin{pmatrix} J_{v_{0i}} \\ J_{\omega_{0i}} \end{pmatrix} \dot{q}_\alpha \\ J_{v_{0i}} = \frac{\partial}{\partial q_\alpha} (t_{0 \rightarrow i}) \\ J_{\omega_{0i}} = \begin{pmatrix} R_{0 \rightarrow 1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \cdots & R_{0 \rightarrow i} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ T_{0 \rightarrow k_{cdg}} = \begin{pmatrix} R_{0 \rightarrow k} & t_{0 \rightarrow k_{cdg}} \\ \mathbb{O}_{1,3} & 1 \end{pmatrix} \\ J_{0k_{cdg}} = \begin{pmatrix} J_{v_{0k,q_\alpha}} + \underline{\dot{R}}_{0 \rightarrow k,q_\alpha} \odot t_{k \rightarrow k_{cdg}} & \mathbb{O}_{3,i-k} \\ J_{\omega_{0k,q_\alpha}} & \mathbb{O}_{3,i-k} \end{pmatrix} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} T_{i \rightarrow j} = \begin{pmatrix} R_{i \rightarrow j} & t_{i \rightarrow j} \\ \mathbb{O}_{1,3} & 1 \end{pmatrix} = f(q_\omega) \text{ tel que } q_\omega = \begin{pmatrix} q_{\omega_1} \\ \vdots \\ q_{\omega_j} \end{pmatrix} \\ \dot{X}_j = \begin{pmatrix} J_{v_{ij}} \\ J_{\omega_{ij}} \end{pmatrix} \dot{q}_\omega \\ J_{v_{ij}} = \frac{\partial}{\partial q_\omega} (t_{i \rightarrow j}) \\ J_{\omega_{ij}} = \begin{pmatrix} R_{i \rightarrow i+1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \cdots & R_{i \rightarrow j} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ T_{i \rightarrow k_{cdg}} = \begin{pmatrix} R_{i \rightarrow k} & t_{i \rightarrow k_{cdg}} \\ \mathbb{O}_{1,3} & 1 \end{pmatrix} \\ J_{ik_{cdg}} = \begin{pmatrix} J_{v_{ik,q_\omega}} \\ J_{\omega_{ik,q_\omega}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{v_{ik,q_\omega}} + \underline{\dot{R}}_{i \rightarrow k,q_\omega} \odot t_{k \rightarrow k_{cdg}} & \mathbb{O}_{3,j-k} \\ J_{\omega_{ik,q_\omega}} & \mathbb{O}_{3,j-k} \end{pmatrix} \end{array} \right\}$$

Soit un corps k d'un des robots et k_{cdg} le centre de gravité associé.

Si

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{0 \rightarrow k_{cdg}} = \begin{pmatrix} R_{0 \rightarrow k} & t_{0 \rightarrow k_{cdg}} \\ \mathbb{O}_{1,3} & 1 \end{pmatrix} = f(q) \text{ tel que } q = \begin{pmatrix} q_\alpha \\ q_\omega \end{pmatrix} \forall k \in \llbracket 1, \dots, i \rrbracket \\ T_{0 \rightarrow k_{cdg}} = \begin{pmatrix} R_{0 \rightarrow k} & t_{0 \rightarrow i} + R_{0 \rightarrow i} t_{i \rightarrow k_{cdg}} \\ \mathbb{O}_{1,3} & 1 \end{pmatrix} = f(q) \text{ tel que } q = \begin{pmatrix} q_\alpha \\ q_\omega \end{pmatrix} \forall k \in \llbracket i+1, \dots, i+j \rrbracket \end{array} \right.$$

$$\forall k \in \llbracket 1, \dots, i+j \rrbracket, \quad J_{0k_{cdg},q} = \frac{\partial}{\partial q} (t_{0 \rightarrow k_{cdg}})$$

Alors

$$J_{0k_{cdg},q} = \begin{cases} (J_{0k_{cdg},q_\alpha} \quad \mathbb{O}_{6,j}), & \forall k \in \llbracket 1, \dots, i \rrbracket \\ \begin{pmatrix} J_{v_{0i,q_\alpha}} + \underline{\dot{R}}_{0 \rightarrow i,q_\alpha} \odot (t_{i \rightarrow k_{cdg}}) & R_{0 \rightarrow i} J_{v_{ik_{cdg},q_\omega}} \\ J_{\omega_{0i,q_\alpha}} & R_{0 \rightarrow i} J_{\omega_{ik_{cdg},q_\omega}} \end{pmatrix}, & \forall k \in \llbracket i+1, \dots, i+j \rrbracket \end{cases}$$

6.2.3.3 Application au 4R plan

On cherchera à calculer J_{v_{04cdg},q_α} comme au 3.5.2.2 mais ici en y incluant le principe du modèle composite. On a donc d'après le théorème 3 :

$$J_{v_{04cdg},q} = \left(J_{v_{02'}} + \underline{\underline{\dot{R}}}_{0 \rightarrow 2, q_\alpha} \odot (t_{2' \rightarrow 4cdg}) \quad R_{0 \rightarrow 2} J_{v_{2'4cdg}} \right) \quad (274)$$

Avec :

$$t_{2' \rightarrow 4cdg} = \begin{pmatrix} c_3 l_3 + c_{34} l_{4cdg} \\ s_3 l_3 + s_{34} l_{4cdg} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } J_{v_{2'4cdg}} = \begin{pmatrix} -(s_3 l_3 + s_{34} l_{4cdg}) & -(s_{34} l_{4cdg}) \\ c_3 l_3 + c_{34} l_{4cdg} & c_{34} l_{4cdg} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (275)$$

On construit donc le premier élément à partir de (85) et (152) :

$$\underline{\underline{\dot{R}}}_{0 \rightarrow 2, q_\alpha} \odot (t_{2' \rightarrow 4cdg}) = \begin{pmatrix} -s_{12} & -c_{12} & 0 \\ c_{12} & -s_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_3 l_3 + c_{34} l_{4cdg} \\ s_3 l_3 + s_{34} l_{4cdg} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -s_{12} & -c_{12} & 0 \\ c_{12} & -s_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_3 l_3 + c_{34} l_{4cdg} \\ s_3 l_3 + s_{34} l_{4cdg} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (276)$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{\dot{R}}}_{0 \rightarrow 2, q_\alpha} \odot (t_{2' \rightarrow 4cdg}) = \begin{pmatrix} -(s_{123} l_3 + s_{1234} l_{4cdg}) & -(s_{123} l_3 + s_{1234} l_{4cdg}) \\ (c_{123} l_3 + c_{1234} l_{4cdg}) & (c_{123} l_3 + c_{1234} l_{4cdg}) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (277)$$

Quant au second élément, il vient :

$$R_{0 \rightarrow 2'} J_{v_{2'4cdg}} = \begin{pmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 \\ s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -(s_3 l_3 + s_{34} l_{4cdg}) & -(s_{34} l_{4cdg}) \\ c_3 l_3 + c_{34} l_{4cdg} & c_{34} l_{4cdg} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (278)$$

$$\Leftrightarrow R_{0 \rightarrow 2'} J_{v_{2'4cdg}} = \begin{pmatrix} -(s_{123} l_3 + s_{1234} l_{4cdg}) & -(s_{1234} l_{4cdg}) \\ (c_{123} l_3 + c_{1234} l_{4cdg}) & (c_{1234} l_{4cdg}) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (279)$$

On obtient donc en rassemblant (85), (277) et (279).

$$J_{v_{04cdg},q} = \begin{pmatrix} -(s_{11} l_1 + s_{12} l_2 + s_{123} l_3 + s_{1234} l_{4cdg}) & -(s_{12} l_2 + s_{123} l_3 + s_{1234} l_{4cdg}) & -(s_{123} l_3 + s_{1234} l_{4cdg}) & -(s_{1234} l_{4cdg}) \\ (c_{11} l_1 + c_{12} l_2 + c_{123} l_3 + c_{1234} l_{4cdg}) & (c_{12} l_2 + c_{123} l_3 + c_{1234} l_{4cdg}) & (c_{123} l_3 + c_{1234} l_{4cdg}) & (c_{1234} l_{4cdg}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (280)$$

Ce qui est exactement (125).

6.2.4 Jacobienne d'un changement de repère base-distal

6.2.4.1 Cas général

Considérons un robot à i articulations, de vecteur d'état $q_\alpha = \begin{pmatrix} q_{\alpha_1} \\ \vdots \\ q_{\alpha_i} \end{pmatrix}$ dont on prend le

MGD du changement de repère base-distal (250) :

$$t_{i \rightarrow 0} = -R_{i \rightarrow 0} t_{0 \rightarrow i} \quad (281)$$

Calculons la contribution linéaire de la vitesse :

$$J_{v_{i0}} = \frac{\partial}{\partial q_\alpha} (t_{i \rightarrow 0}) = \frac{\partial}{\partial q_\alpha} (-R_{i \rightarrow 0} t_{0 \rightarrow i}) = -R_{i \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial q_\alpha} (t_{0 \rightarrow i}) - \frac{\partial}{\partial q_\alpha} (R_{i \rightarrow 0}) t_{0 \rightarrow i} \quad (282)$$

$$\Leftrightarrow J_{v_{i0}} = -R_{i \rightarrow 0} J_{v_{0i}} - \underline{\underline{\dot{R}}}_{i \rightarrow 0} \odot t_{0 \rightarrow i} \quad (283)$$

Arrêtons-nous un instant et considérons le calcul de $\underline{\underline{\dot{R}_{i \rightarrow 0}}}$ en fonction de $\underline{\underline{\dot{R}_{0 \rightarrow i}}}$. On partira de l'identité :

$$R_{0 \rightarrow i} R_{i \rightarrow 0} = I_{3,3} \quad (284)$$

On a donc par dérivation :

$$\frac{\partial}{\partial q_\alpha} (R_{0 \rightarrow i} R_{i \rightarrow 0}) = \mathbb{O}_{3,3,i} \quad (285)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial q_\alpha} (R_{0 \rightarrow i}) R_{i \rightarrow 0} + R_{0 \rightarrow i} \frac{\partial}{\partial q_\alpha} (R_{i \rightarrow 0}) = \mathbb{O}_{3,3,i} \quad (286)$$

$$\Leftrightarrow R_{0 \rightarrow i} \frac{\partial}{\partial q_\alpha} (R_{i \rightarrow 0}) = - \frac{\partial}{\partial q_\alpha} (R_{0 \rightarrow i}) R_{i \rightarrow 0} \quad (287)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial q_\alpha} (R_{i \rightarrow 0}) = - (R_{0 \rightarrow i})^T \frac{\partial}{\partial q_\alpha} (R_{0 \rightarrow i}) R_{i \rightarrow 0} \quad (288)$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{\dot{R}_{i \rightarrow 0}}} = - (R_{0 \rightarrow i})^T \odot \underline{\underline{\dot{R}_{0 \rightarrow i}}} \odot (R_{0 \rightarrow i})^T \quad (289)$$

Propriété

Si

$R_{0 \rightarrow i}$ est une matrice de rotation de $\mathbb{R}^3$

Alors :

$$\underline{\underline{\dot{R}_{i \rightarrow 0}}} = - (R_{0 \rightarrow i})^T \odot \underline{\underline{\dot{R}_{0 \rightarrow i}}} \odot (R_{0 \rightarrow i})^T$$

Déterminons maintenant la contribution angulaire :

$$J_{\omega_{i0}} = \begin{pmatrix} R_{i \rightarrow 1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \cdots & R_{i \rightarrow i} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (290)$$

$$\Leftrightarrow J_{\omega_{i0}} = \begin{pmatrix} R_{i \rightarrow 0} R_{0 \rightarrow 1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \cdots & R_{i \rightarrow 0} R_{0 \rightarrow i} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (291)$$

$$\Leftrightarrow J_{\omega_{i0}} = R_{i \rightarrow 0} \begin{pmatrix} R_{0 \rightarrow 1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \cdots & R_{0 \rightarrow i} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (292)$$

$$\Leftrightarrow J_{\omega_{i0}} = R_{i \rightarrow 0} J_{\omega_{0i}} \quad (293)$$

On obtient donc le résultat suivant :

$$J_{i0} = \begin{pmatrix} -R_{i \rightarrow 0} J_{v_{0i}} - \underline{\underline{\dot{R}_{i \rightarrow 0}}} \odot t_{0 \rightarrow i} \\ R_{i \rightarrow 0} J_{\omega_{0i}} \end{pmatrix} \quad (294)$$

6.2.4.2 Théorème Jacobienne d'un changement de repère base-distal

Théorème 4

Soit un robot sériel possédant i articulations tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{0 \rightarrow i} = \begin{pmatrix} R_{0 \rightarrow i} & t_{0 \rightarrow i} \\ \mathbb{O}_{1,3} & 1 \end{pmatrix} = f(q_\alpha) \text{ tel que } q_\alpha = \begin{pmatrix} q_{\alpha_1} \\ \vdots \\ q_{\alpha_i} \end{pmatrix} \\ \dot{X}_i = \begin{pmatrix} J_{v_{0i}} \\ J_{\omega_{0i}} \end{pmatrix} \dot{q}_\alpha \\ J_{v_{0i}} = \frac{\partial}{\partial q_\alpha} (t_{0 \rightarrow i}) \\ J_{\omega_{0i}} = \begin{pmatrix} R_{0 \rightarrow 1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \cdots & R_{0 \rightarrow i} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

Si

$$t_{i \rightarrow 0} = -R_{i \rightarrow 0} t_{0 \rightarrow i}$$

Alors

$$J_{i0} = \begin{pmatrix} -R_{i \rightarrow 0} J_{v_{0i}} - \underline{\underline{\dot{R}_{i \rightarrow 0}}} \odot t_{0 \rightarrow i} \\ R_{i \rightarrow 0} J_{\omega_{0i}} \end{pmatrix}$$

6.2.4.3 Application au 4R plan

On va donc construire la jacobienne correspondant au modèle géométrique de $T_{4' \rightarrow 0}$:

$$T_{4' \rightarrow 0} = \begin{pmatrix} c_{1234} & s_{1234} & 0 & -(c_{234}l_1 + c_{34}l_2 + c_4l_3 + l_4) \\ -s_{1234} & c_{1234} & 0 & s_{234}l_1 + s_{34}l_2 + s_4l_3 + l_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (295)$$

D'où :

$$J_{4'0} = \begin{pmatrix} 0 & s_{234}l_1 & s_{234}l_1 + s_{34}l_2 & s_{234}l_1 + s_{34}l_2 + s_4l_3 \\ 0 & c_{234}l_1 & c_{234}l_1 + c_{34}l_2 & c_{234}l_1 + c_{34}l_2 + c_4l_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (296)$$

Pour mettre en œuvre le théorème il faut construire $\underline{\underline{\dot{R}_{4 \rightarrow 0}}}$ en s'appuyant sur (122) et

(289) :

$$\underline{\underline{\dot{R}_{4 \rightarrow 0}}} = -(R_{0 \rightarrow 4'})^T \odot \underline{\underline{\dot{R}_{0 \rightarrow 4}}} \odot (R_{0 \rightarrow 4'})^T \quad (297)$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{\dot{R}_{4 \rightarrow 0}}} = \begin{pmatrix} -s_{1234} & c_{1234} & 0 \\ -c_{1234} & -s_{1234} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -s_{1234} & c_{1234} & 0 \\ -c_{1234} & -s_{1234} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -s_{1234} & c_{1234} & 0 \\ -c_{1234} & -s_{1234} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -s_{1234} & c_{1234} & 0 \\ -c_{1234} & -s_{1234} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (298)$$

Ce que nous permet de construire $\underline{\dot{R}}_{4 \rightarrow 0} \odot t_{0 \rightarrow 4'}$ dont on explicitera qu'un terme puisqu'ils sont identiques :

$$\frac{\partial}{\partial q_{\alpha_1}} R_{4' \rightarrow 0} t_{0 \rightarrow 4'} = \begin{pmatrix} -s_{1234} & c_{1234} & 0 \\ -c_{1234} & -s_{1234} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 l_1 + c_{12} l_2 + c_{123} l_3 + c_{1234} l_4 \\ s_1 l_1 + s_{12} l_2 + s_{123} l_3 + s_{1234} l_4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (299)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial q_{\alpha_1}} R_{4' \rightarrow 0} t_{0 \rightarrow 4'} = \begin{pmatrix} -(s_{234} l_1 + s_{34} l_2 + s_4 l_3) \\ -(c_{234} l_1 + c_{34} l_2 + c_4 l_3 + l_4) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (300)$$

Calculons maintenant $R_{4' \rightarrow 0} J_{v_{04'}}$ d'après (125) :

$$R_{4' \rightarrow 0} J_{v_{04'}} = \begin{pmatrix} c_{1234} & s_{1234} & 0 \\ -s_{1234} & c_{1234} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (301)$$

$$\begin{pmatrix} -(s_1 l_1 + s_{12} l_2 + s_{123} l_3 + s_{1234} l_4) & -(s_{12} l_2 + s_{123} l_3 + s_{1234} l_4) & -(s_{123} l_3 + s_{1234} l_4) & -(s_{1234} l_4) \\ (c_1 l_1 + c_{12} l_2 + c_{123} l_3 + c_{1234} l_4) & (c_{12} l_2 + c_{123} l_3 + c_{1234} l_4) & (c_{123} l_3 + c_{1234} l_4) & (c_{1234} l_4) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{234} l_1 + s_{34} l_2 + s_4 l_3 & s_{34} l_2 + s_4 l_3 & s_4 l_3 & 0 \\ c_{234} l_1 + c_{34} l_2 + c_4 l_3 + l_4 & c_{34} l_2 + c_4 l_3 + l_4 & c_4 l_3 + l_4 & l_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (302)$$

D'où :

$$-R_{4' \rightarrow 0} J_{v_{04'}} - \underline{\dot{R}}_{4 \rightarrow 0} \odot t_{0 \rightarrow 4'} = \begin{pmatrix} 0 & s_{234} l_1 & s_{234} l_1 + s_{34} l_2 & s_{234} l_1 + s_{34} l_2 + s_4 l_3 \\ 0 & c_{234} l_1 & c_{234} l_1 + c_{34} l_2 & c_{234} l_1 + c_{34} l_2 + c_4 l_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (303)$$

Et pour finir calculons la contribution angulaire :

$$R_{4' \rightarrow 0} J_{\omega_{04}} = \begin{pmatrix} c_{1234} & s_{1234} & 0 \\ -s_{1234} & c_{1234} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (304)$$

Ce qui en rassemblant (303) et (304) est exactement (296).

6.2.5 Jacobienne au centre de gravité d'un changement de repère base-distal

6.2.5.1 Cas général

On reprendra ici la situation évoquée précédemment concernant le changement de repère du modèle géométrique, le but étant toujours de pouvoir calculer cette nouvelle jacobienne à partir d'éléments déjà connus. Considérons un robot sériel possédant i articulations et plus particulièrement le k -ième corps ainsi que son centre de gravité. On a vu précédemment (260) que l'on avait le résultat suivant :

$$T_{i \rightarrow k_{cdg}} = \begin{pmatrix} R_{i \rightarrow 0} R_{0 \rightarrow k} & R_{i \rightarrow 0} t_{0 \rightarrow k_{cdg}} + t_{i \rightarrow 0} \\ \mathbb{O}_{1,3} & 1 \end{pmatrix} \quad (305)$$

Calculons la contribution linéaire de la vitesse :

$$J_{v_{ik_{cdg}}} = \frac{\partial}{\partial q} (R_{i \rightarrow 0} t_{0 \rightarrow k_{cdg}} + t_{i \rightarrow 0}) \quad (306)$$

$$\Leftrightarrow J_{v_{ik_{cdg}}} = R_{i \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial q} (t_{0 \rightarrow k_{cdg}}) + \frac{\partial}{\partial q} (R_{i \rightarrow 0}) t_{0 \rightarrow k_{cdg}} + \frac{\partial}{\partial q} (t_{i \rightarrow 0}) \quad (307)$$

$$\Leftrightarrow J_{v_{ik_{cdg}}} = R_{i \rightarrow 0} J_{v_{ok_{cdg}}} + \underline{\dot{R}}_{i \rightarrow 0} \odot t_{0 \rightarrow k_{cdg}} + J_{v_{i0}} \quad (308)$$

$$J_{ik_{cdg}} = \begin{pmatrix} R_{i \rightarrow 0} J_{v_{ok_{cdg}}} + \underline{\dot{R}}_{i \rightarrow 0} \odot t_{0 \rightarrow k_{cdg}} + J_{v_{i0}} \\ R_{i \rightarrow 0} J_{\omega_{ok}} \end{pmatrix} \quad (309)$$

Théorème 5

Soit un robot sériel possédant i articulations tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{0 \rightarrow i} = \begin{pmatrix} R_{0 \rightarrow i} & t_{0 \rightarrow i} \\ \mathbb{O}_{1,3} & 1 \end{pmatrix} = f(q) \text{ tel que } q = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_i \end{pmatrix} \\ \dot{X}_i = \begin{pmatrix} J_{v_{oi}} \\ J_{\omega_{oi}} \end{pmatrix} \dot{q} \\ J_{v_{oi}} = \frac{\partial}{\partial q} (t_{0 \rightarrow i}) \\ J_{\omega_{oi}} = \begin{pmatrix} R_{0 \rightarrow 1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \cdots & R_{0 \rightarrow i} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

Si

$$T_{i \rightarrow k_{cdg}} = \begin{pmatrix} R_{i \rightarrow 0} R_{0 \rightarrow k} & R_{i \rightarrow 0} t_{0 \rightarrow k_{cdg}} + t_{i \rightarrow 0} \\ \mathbb{O}_{1,3} & 1 \end{pmatrix}$$

Alors

$$J_{ik_{cdg}} = \begin{pmatrix} R_{i \rightarrow 0} J_{v_{ok_{cdg}}} + \dot{R}_{i \rightarrow 0} \odot t_{0 \rightarrow k_{cdg}} + J_{v_{i0}} \\ R_{i \rightarrow 0} J_{\omega_{ok}} \end{pmatrix}$$

6.2.5.3 Application au 4R plan

On va donc construire la jacobienne correspondant au modèle géométrique de $T_{4' \rightarrow 1_{cdg}}$:

$$T_{4' \rightarrow 1_{cdg}} = \begin{pmatrix} c_{234} & s_{234} & 0 & -(c_{234}(l_1 - l_{1_{cdg}}) + c_{34}l_2 + c_4l_3 + l_4) \\ -s_{234} & c_{234} & 0 & s_{234}(l_1 - l_{1_{cdg}}) + s_{34}l_2 + s_4l_3 + l_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (310)$$

D'où :

$$J_{v_{4'1_{cdg}}} = \begin{pmatrix} 0 & s_{234}(l_1 - l_{1_{cdg}}) & s_{234}(l_1 - l_{1_{cdg}}) + s_{34}l_2 & s_{234}(l_1 - l_{1_{cdg}}) + s_{34}l_2 + s_4l_3 \\ 0 & c_{234}(l_1 - l_{1_{cdg}}) & c_{234}(l_1 - l_{1_{cdg}}) + c_{34}l_2 & c_{234}(l_1 - l_{1_{cdg}}) + c_{34}l_2 + c_4l_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (311)$$

Afin de mettre en œuvre ce théorème on va calculer la contribution linéaire de $J_{41_{cdg}}$ telle que :

$$J_{v_{41_{cdg}}} = \begin{pmatrix} R_{4 \rightarrow 0} J_{v_{o1_{cdg},q}} + \dot{R}_{4 \rightarrow 0} \odot t_{0 \rightarrow 1_{cdg}} + J_{v_{4'0}} \end{pmatrix} \quad (312)$$

Calculons le premier terme de la somme :

$$R_{4 \rightarrow 0} J_{v_{01cdg}, q} = \begin{pmatrix} c_{1234} & s_{1234} & 0 \\ -s_{1234} & c_{1234} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -s_1 l_{1cdg} & 0 & 0 & 0 \\ c_1 l_{1cdg} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{234} l_{1cdg} & 0 & 0 & 0 \\ c_{234} l_{1cdg} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (313)$$

Traitons maintenant $\underline{\underline{\dot{R}_{4 \rightarrow 0}}} \odot t_{0 \rightarrow 1cdg}$ en utilisant (298) :

$$\underline{\underline{\dot{R}_{4 \rightarrow 0}}} \odot t_{0 \rightarrow 1cdg} = \begin{pmatrix} -s_{234} l_{1cdg} & -s_{234} l_{1cdg} & -s_{234} l_{1cdg} & -s_{234} l_{1cdg} \\ -c_{234} l_{1cdg} & -c_{234} l_{1cdg} & -c_{234} l_{1cdg} & -c_{234} l_{1cdg} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (314)$$

On construit donc en assemblant (296), (313) et (314) :

$$J_{v_{4'1cdg}} = \begin{pmatrix} 0 & s_{234} (l_1 - l_{1cdg}) & s_{234} (l_1 - l_{1cdg}) + s_{34} l_2 & s_{234} (l_1 - l_{1cdg}) + s_{34} l_2 + s_4 l_3 \\ 0 & c_{234} (l_1 - l_{1cdg}) & c_{234} (l_1 - l_{1cdg}) + c_{34} l_2 & c_{234} (l_1 - l_{1cdg}) + c_{34} l_2 + c_4 l_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (315)$$

Ce qui est exactement (311).

6.3 Modèle dynamique inverse - Rappel et notation

On utilisera les équations d'Euler-Lagrange pour obtenir le modèle dynamique inverse.

Soit K , l'énergie cinétique du système.

Soit V , l'énergie potentielle du système.

Soit L , le Lagrangien du système tel que $L = K - V$.

Soit q_i , la $i^{\text{ème}}$ coordonnée généralisée du système.

Soit τ_i , la force généralisée appliquée au $i^{\text{ème}}$ élément du système telle que :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \tau_i \quad (316)$$

On devra donc chercher à calculer l'énergie cinétique du système autant que son énergie potentielle afin d'en construire le lagrangien. C'est pourquoi il nous faut introduire les notations suivantes :

- Soit I_i , la matrice d'inertie du corps i exprimée dans un repère lié au corps i , évaluée au centre de gravité du corps i ;
- Soit I_{0i} , la matrice d'inertie du corps i évaluée au centre de gravité du corps i , exprimée dans le repère de base et telle que :

$$I_{0i} = R_{0 \rightarrow i} I_i R_{0 \rightarrow i}^T \quad (317)$$

- Soit ω_i , la vitesse angulaire du corps i par rapport au repère de base et exprimée dans ce dernier ;
- Soit v_i , vitesse linéaire du centre de gravité du corps i par rapport au repère de base et exprimée dans ce dernier ;
- Soit m_i , la masse du corps i .

La forme générale de l'énergie cinétique d'un corps s'écrit de la manière suivante :

$$K_i = \frac{1}{2} m_i v_i^T v_i + \frac{1}{2} \omega_i^T I_{0i} \omega_i \quad (318)$$

D'où l'expression pour le système complet, avec n corps :

$$K = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^T v_i + \frac{1}{2} \omega_i^T I_{0i} \omega_i \quad (319)$$

On a l'expression de v_i et ω_i en fonction de la jacobienne associée au centre de gravité du corps i , on a :

$$\begin{pmatrix} v_i \\ \omega_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{y}_i \\ \dot{z}_i \\ \omega_{x_i} \\ \omega_{y_i} \\ \omega_{z_i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{v_{0i}cdg} \\ J_{\omega_{0i}cdg} \end{pmatrix} \dot{q} \Leftrightarrow \dot{X}_i = J_{0i} \dot{q} \quad (320)$$

Avec $J_{v_{0i}cdg}$ la matrice jacobienne associée à la matrice de transformation homogène $T_{0 \rightarrow i_{cdg}}$, on en déduit :

$$K = \frac{1}{2} \dot{q}^T \sum_{i=1}^n \left(m_i J_{v_{0i}cdg}^T J_{v_{0i}cdg} + J_{\omega_{0i}cdg}^T I_{0i} J_{\omega_{0i}cdg} \right) \dot{q} \quad (321)$$

$$\Leftrightarrow K = \frac{1}{2} \dot{q}^T \sum_{i=1}^n \begin{pmatrix} J_{v_{0i}cdg}^T & J_{\omega_{0i}cdg}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_i \mathbb{I}_3 & \mathbb{O}_{3,3} \\ \mathbb{O}_{3,3} & I_{0i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{v_{0i}cdg} \\ J_{\omega_{0i}cdg} \end{pmatrix} \dot{q} \quad (322)$$

$$\Leftrightarrow K = \frac{1}{2} \dot{q}^T A \dot{q} \text{ tel que } A = \sum_{i=1}^n \begin{pmatrix} J_{v_{0i}cdg}^T & J_{\omega_{0i}cdg}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_i \mathbb{I}_3 & \mathbb{O}_{3,3} \\ \mathbb{O}_{3,3} & I_{0i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{v_{0i}cdg} \\ J_{\omega_{0i}cdg} \end{pmatrix} \quad (323)$$

En reprenant la formulation matricielle

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = \tau \quad (324)$$

On a donc :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left(\frac{1}{2} \dot{q}^T A(q) \dot{q} - V(q) \right) \quad (325)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{q}} (\dot{q}^T A(q) \dot{q}) - \frac{\partial}{\partial \dot{q}} (V(q)) \quad (326)$$

Comme $\frac{\partial}{\partial \dot{q}} (V(q))$ est nul :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{q}} (\dot{q}^T A(q) \dot{q}) \quad (327)$$

A étant symétrique, on obtient :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{1}{2} 2A(q) \dot{q} = A(q) \dot{q} \quad (328)$$

D'où :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{d}{dt} (A(q) \dot{q}) \quad (329)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = A(q) \frac{d}{dt} (\dot{q}) + \frac{d}{dt} (A(q)) \dot{q} \quad (330)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = A(q)\ddot{q} + \frac{d}{dt}(A(q))\dot{q} \quad (331)$$

De même :

$$\frac{\partial L}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{1}{2} \dot{q}^T A(q) \dot{q} - V(q) \right) \quad (332)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial L}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{1}{2} \dot{q}^T A(q) \dot{q} \right) - \frac{\partial}{\partial q} (V(q)) \quad (333)$$

On a donc :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = A(q)\ddot{q} + \frac{d}{dt}(A(q))\dot{q} - \left(\frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{1}{2} \dot{q}^T A(q) \dot{q} \right) - \frac{\partial}{\partial q} (V(q)) \right) = \tau \quad (334)$$

$$\Leftrightarrow A(q)\ddot{q} + \frac{d}{dt}(A(q))\dot{q} - \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{1}{2} \dot{q}^T A(q) \dot{q} \right) + \frac{\partial}{\partial q} (V(q)) = \tau \quad (335)$$

$$\Leftrightarrow A(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau \quad (336)$$

Avec :

$$C(q, \dot{q})\dot{q} = \frac{d}{dt}(A(q))\dot{q} - \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{1}{2} \dot{q}^T A(q) \dot{q} \right) \text{ et } G(q) = \frac{\partial}{\partial q} (V(q)) \quad (337)$$

On reconnaîtra ici les termes de Coriolis-centrifuge ainsi que l'influence de la gravité sur le système puisque l'on réduira systématiquement le terme V relatif aux énergies potentielles au seul potentiel de gravité.

6.4 Matrice d'inertie

Reprenons l'expression de l'énergie cinétique qui fait apparaître cet objet qu'est la matrice d'inertie du système qui traduit physiquement la résistance du système à une variation de quantité de mouvement. On a en effet constaté que (323) :

$$A_{oi} = \sum_{k=1}^i J_{0k_{cdg}}^T \begin{pmatrix} m_k \mathbb{I}_3 & \mathbb{O}_3 \\ \mathbb{O}_3 & I_{0k} \end{pmatrix} J_{0k_{cdg}} = \sum_{k=1}^i \begin{pmatrix} J_{v_{0k_{cdg}}}^T & J_{\omega_{0k_{cdg}}}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_k \mathbb{I}_3 & \mathbb{O}_3 \\ \mathbb{O}_3 & I_{0k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{v_{0k_{cdg}}} \\ J_{\omega_{0k_{cdg}}} \end{pmatrix} \quad (338)$$

Cette écriture fait apparaître naturellement les matrices jacobienues des différents corps du robot. On en déduit donc que l'ensemble des résultats obtenus précédemment sur ces dernières vont permettre d'obtenir par les mêmes raisonnements un ensemble de propriétés permettant d'exprimer notamment la matrice d'inertie d'un robot constitué de plusieurs robots dont on connaîtrait les matrices d'inertie et cela toujours afin d'optimiser les besoins en calculs dans un environnement de programmation orientée objet.

6.4.1 Matrice d'inertie et jacobienne au centre de gravité

Théorème 6

Soit un robot série possédant i articulations.

Soit un corps k de ce robot et k_{cdg} le centre de gravité associé.

Si $\forall k \in \llbracket 1, \dots, i \rrbracket$

$$\left\{ \begin{aligned} J_{0k_{cdg},q} &= \begin{pmatrix} J_{v_{0k_{cdg},q}} \\ J_{\omega_{0k_{cdg},q}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{v_{0k_{cdg},q_k} \quad \mathbb{O}_{3,i-k}} \\ J_{\omega_{0k_{cdg},q_k} \quad \mathbb{O}_{3,i-k}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{v_{0k,q_k} + \underline{\dot{R}}_{0 \rightarrow k, q_k} \odot \underline{t}_{k \rightarrow k_{cdg}} \quad \mathbb{O}_{3,i-k}} \\ J_{\omega_{0k,q_k} \quad \mathbb{O}_{3,i-k}} \end{pmatrix} \\ A_{0i} &= \sum_{k=1}^i J_{0k_{cdg},q}^T \begin{pmatrix} M_k & \mathbb{O}_3 \\ \mathbb{O}_3 & I_{0k} \end{pmatrix} J_{0k_{cdg},q} = \sum_{k=1}^i \begin{pmatrix} J_{v_{0k_{cdg},q}}^T & J_{\omega_{0k_{cdg},q}}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_k & \mathbb{O}_3 \\ \mathbb{O}_3 & I_{0k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{v_{0k_{cdg},q}} \\ J_{\omega_{0k_{cdg},q}} \end{pmatrix} \end{aligned} \right.$$

Alors

$$\left\{ \begin{aligned} A_{v_{0i}} &= \sum_{k=1}^i \begin{pmatrix} \alpha_{v_{0k}} & \mathbb{O}_{k,i-k} \\ \mathbb{O}_{i-k,k} & \mathbb{O}_{i-k,i-k} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^i \begin{pmatrix} \alpha_{v_{0k}/masse} + \alpha_{v_{0k}/couplage} + \alpha_{v_{0k}/géométrie} & \mathbb{O}_{k,i-k} \\ \mathbb{O}_{i-k,k} & \mathbb{O}_{i-k,i-k} \end{pmatrix} \\ \alpha_{v_{0k}/masse} &= \left(\underline{\dot{R}}_{0 \rightarrow k, q_k} \odot \underline{t}_{k \rightarrow k_{cdg}} \right)^T M_k \underline{\dot{R}}_{0 \rightarrow k, q_k} \odot \underline{t}_{k \rightarrow k_{cdg}} \\ \alpha_{v_{0k}/couplage} &= J_{v_{0k,q_k}}^T M_k \underline{\dot{R}}_{0 \rightarrow k, q_k} \odot \underline{t}_{k \rightarrow k_{cdg}} + \left(\underline{\dot{R}}_{0 \rightarrow k, q_k} \odot \underline{t}_{k \rightarrow k_{cdg}} \right)^T M_k J_{v_{0k,q_k}} \\ \alpha_{v_{0k}/géométrie} &= J_{v_{0k,q_k}}^T M_k J_{v_{0k,q_k}} \end{aligned} \right.$$

Théorème 7

Soient deux robots sériels possédant respectivement i et j articulations tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{0 \rightarrow i} = \begin{pmatrix} R_{0 \rightarrow i} & t_{0 \rightarrow i} \\ \mathbb{O}_{1,3} & 1 \end{pmatrix} = f(q_\alpha) \text{ tel que } q_\alpha = \begin{pmatrix} q_{\alpha_1} \\ \vdots \\ q_{\alpha_i} \end{pmatrix} \\ \dot{X}_i = \begin{pmatrix} J_{v_{oi}} \\ J_{\omega_{oi}} \end{pmatrix} \dot{q}_\alpha \\ J_{v_{oi}} = \frac{\partial}{\partial q_\alpha} (t_{0 \rightarrow i}) \\ J_{\omega_{oi}} = \begin{pmatrix} R_{0 \rightarrow 1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \cdots & R_{0 \rightarrow i} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ T_{0 \rightarrow k_{cdg}} = \begin{pmatrix} R_{0 \rightarrow k} & t_{0 \rightarrow k_{cdg}} \\ \mathbb{O}_{1,3} & 1 \end{pmatrix} \\ J_{0k_{cdg}} = \begin{pmatrix} J_{v_{0k,q\alpha_k}} + \frac{\dot{R}_{0 \rightarrow k,q\alpha_k}}{\omega_{0k,q\alpha_k}} \odot t_{k \rightarrow k_{cdg}} & \mathbb{O}_{3,i-k} \\ J_{\omega_{0k,q\alpha_k}} & \mathbb{O}_{3,i-k} \end{pmatrix} \\ A_{oi} = \sum_{k=1}^i J_{0k_{cdg}}^T \begin{pmatrix} M_k & \mathbb{O}_3 \\ \mathbb{O}_3 & I_{0k} \end{pmatrix} J_{0k_{cdg}} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} T_{i \rightarrow j} = \begin{pmatrix} R_{i \rightarrow j} & t_{i \rightarrow j} \\ \mathbb{O}_{1,3} & 1 \end{pmatrix} = f(q_\omega) \text{ tel que } q = \begin{pmatrix} q_{\omega_1} \\ \vdots \\ q_{\omega_j} \end{pmatrix} \\ \dot{X}_j = \begin{pmatrix} J_{v_{ij}} \\ J_{\omega_{ij}} \end{pmatrix} \dot{q}_\omega \\ J_{v_{ij}} = \frac{\partial}{\partial q_\omega} (t_{i \rightarrow j}) \\ J_{\omega_{ij}} = \begin{pmatrix} R_{i \rightarrow i+1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \cdots & R_{i \rightarrow j} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ T_{i \rightarrow k_{cdg}} = \begin{pmatrix} R_{i \rightarrow k} & t_{i \rightarrow k_{cdg}} \\ \mathbb{O}_{1,3} & 1 \end{pmatrix} \\ J_{ik_{cdg}} = \begin{pmatrix} J_{v_{ik,q\omega_k}} + \frac{\dot{R}_{j \rightarrow k,q\omega_k}}{\omega_{ik,q\omega_k}} \odot t_{k \rightarrow k_{cdg}} & \mathbb{O}_{3,j-k} \\ J_{\omega_{ik,q\omega_k}} & \mathbb{O}_{3,j-k} \end{pmatrix} \\ A_{ij} = \sum_{k=1}^j J_{ik_{cdg}}^T \begin{pmatrix} M_k & \mathbb{O}_3 \\ \mathbb{O}_3 & I_{0k} \end{pmatrix} J_{ik_{cdg}} \end{array} \right\}$$

Si

$$\left\{ \begin{array}{l} J_{0k_{cdg},q} = \begin{pmatrix} J_{0k_{cdg}} & \mathbb{O}_{6,j} \\ J_{v_{oi,q\alpha}} + \frac{\dot{R}_{0 \rightarrow i,q\alpha}}{\omega_{oi}} \odot (t_{i \rightarrow k_{cdg}}) & R_{0 \rightarrow i} J_{v_{ik_{cdg}}} \\ J_{\omega_{oi}} & R_{0 \rightarrow i} J_{\omega_{ik_{cdg}}} \end{pmatrix}, \forall k \in \llbracket 1, \dots, i \rrbracket \\ A_{oj} = \sum_{k=1}^{i+j} J_{0k_{cdg},q}^T \begin{pmatrix} M_k & \mathbb{O}_3 \\ \mathbb{O}_3 & I_k \end{pmatrix} J_{0k_{cdg},q} \end{array} \right.$$

Alors

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{0j} = \begin{pmatrix} A_{oi} + \alpha & \beta \\ \beta^T & A_{ij} \end{pmatrix} \\ \alpha = \sum_{k=i+1}^{i+j} \left(J_{v_{oi,q\alpha}} + \frac{\dot{R}_{0 \rightarrow i,q\alpha}}{\omega_{oi}} \odot (t_{i \rightarrow k_{cdg}}) \right)^T M_k \left(J_{v_{oi,q\alpha}} + \frac{\dot{R}_{0 \rightarrow i,q\alpha}}{\omega_{oi}} \odot (t_{i \rightarrow k_{cdg}}) \right) + \sum_{k=i+1}^{i+j} J_{\omega_{oi}}^T I_{0k} J_{\omega_{oi}} \\ \beta = \sum_{k=i+1}^{i+j} \left(J_{v_{oi,q\alpha}} + \frac{\dot{R}_{0 \rightarrow i,q\alpha}}{\omega_{oi}} \odot (t_{i \rightarrow k_{cdg}}) \right)^T M_k (R_{0 \rightarrow i} J_{v_{ik_{cdg},q\omega}}) + \sum_{k=i+1}^{i+j} J_{\omega_{oi}}^T I_{0k} R_{0 \rightarrow i} J_{\omega_{ik_{cdg},q\omega}} \end{array} \right.$$

6.4.3 Matrice d'inertie et changement de repère base-distal

6.4.3.1 Cas général

Cette section cherche à élaborer le premier élément du modèle dynamique d'une jambe portée lors d'une phase de simple appui en reprenant (309) et la définition de A_{i0} tel que :

$$A_{i0} = \sum_{k=1}^i J_{ik_{cdg}}^T \begin{pmatrix} M_k & \mathbb{O}_3 \\ \mathbb{O}_3 & I_{ik} \end{pmatrix} J_{ik_{cdg}} \quad (339)$$

On a donc :

$$A_{i0} = \sum_{k=1}^i J_{v_{ik_{cdg}}}^T M_k J_{v_{ik_{cdg}}} + J_{\omega_{ik_{cdg}}}^T I_{ik} J_{\omega_{ik_{cdg}}} \quad (340)$$

$$\Leftrightarrow A_{i0} = \sum_{k=1}^i J_{v_{ik_{cdg}}}^T M_k J_{v_{ik_{cdg}}} + \sum_{k=1}^i J_{\omega_{ik_{cdg}}}^T I_{ik} J_{\omega_{ik_{cdg}}} \quad (341)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A_{i0} = A_{v_{i0}} + A_{\omega_{i0}} \\ A_{v_{i0}} = \sum_{k=1}^i J_{v_{ik_{cdg}}}^T M_k J_{v_{ik_{cdg}}} \\ A_{\omega_{i0}} = \sum_{k=1}^i J_{\omega_{ik_{cdg}}}^T I_{ik} J_{\omega_{ik_{cdg}}} \end{cases} \quad (342)$$

D'où :

$$A_{v_{i0}} = \sum_{k=1}^i \left(R_{i \rightarrow 0} J_{v_{ok_{cdg}}} + \underline{\underline{\dot{R}_{i \rightarrow 0}}} \odot t_{0 \rightarrow k_{cdg}} + J_{v_{i0}} \right)^T M_k \left(R_{i \rightarrow 0} J_{v_{ok_{cdg}}} + \underline{\underline{\dot{R}_{i \rightarrow 0}}} \odot t_{0 \rightarrow k_{cdg}} + J_{v_{i0}} \right) \quad (343)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A_{v_{i0}} = \sum_{k=1}^i \left(R_{i \rightarrow 0} J_{v_{ok_{cdg}}} \right)^T M_k \left(R_{i \rightarrow 0} J_{v_{ok_{cdg}}} \right) + b + a + c \\ b = \left(R_{i \rightarrow 0} J_{v_{ok_{cdg}}} \right)^T M_k \left(\underline{\underline{\dot{R}_{i \rightarrow 0}}} \odot t_{0 \rightarrow k_{cdg}} + J_{v_{i0}} \right) \\ a = \left(\underline{\underline{\dot{R}_{i \rightarrow 0}}} \odot t_{0 \rightarrow k_{cdg}} + J_{v_{i0}} \right)^T M_k \left(\underline{\underline{\dot{R}_{i \rightarrow 0}}} \odot t_{0 \rightarrow k_{cdg}} + J_{v_{i0}} \right) \\ c = b^T = \left(\underline{\underline{\dot{R}_{i \rightarrow 0}}} \odot t_{0 \rightarrow k_{cdg}} + J_{v_{i0}} \right)^T M_k \left(R_{i \rightarrow 0} J_{v_{ok_{cdg}}} \right) \end{cases} \quad (344)$$

Le premier terme de la somme contient la contribution linéaire du modèle dynamique $A_{v_{0i}}$ et cela vient comme suit :

$$\left(R_{i \rightarrow 0} J_{v_{ok_{cdg}}} \right)^T M_k \left(R_{i \rightarrow 0} J_{v_{ok_{cdg}}} \right) = \left(J_{v_{ok_{cdg}}} \right)^T M_k \left(J_{v_{ok_{cdg}}} \right) \quad (345)$$

D'où :

$$\sum_{k=1}^i \left(R_{i \rightarrow 0} J_{v_{ok_{cdg}}} \right)^T M_k \left(R_{i \rightarrow 0} J_{v_{ok_{cdg}}} \right) = A_{v_{0i}} \quad (346)$$

Et c'est en reprenant la contribution angulaire (309) et (342) que l'on complète l'expression du modèle dynamique :

$$A_{\omega_{i0}} = \sum_{k=1}^i J_{\omega_{ik_{cdg}}}^T I_{ik} J_{\omega_{ik_{cdg}}} \quad (347)$$

$$\Leftrightarrow A_{\omega_{i0}} = \sum_{k=1}^i (R_{i \rightarrow 0} J_{\omega_{ok}})^T I_{ik} R_{i \rightarrow 0} J_{\omega_{ok}} \quad (348)$$

$$\Leftrightarrow A_{\omega_{i0}} = \sum_{k=1}^i (J_{\omega_{ok}})^T I_{0k} J_{\omega_{ok}} \quad (349)$$

$$\Leftrightarrow A_{\omega_{i0}} = A_{\omega_{0i}} \quad (350)$$

On obtient donc en regroupant les deux termes (344) et (350) ainsi qu'en distribuant les opérateurs de sommation la relation suivante :

$$\begin{cases} A_{i0} = A_{v_{i0}} + A_{\omega_{i0}} + \alpha + \beta + \beta^T = A_{0i} + \alpha + \beta + \beta^T \\ \alpha = \sum_{k=1}^i \left(\underline{\dot{R}}_{i \rightarrow 0} \odot t_{0 \rightarrow k_{cdg}} + J_{v_{i0}} \right)^T M_k \left(\underline{\dot{R}}_{i \rightarrow 0} \odot t_{0 \rightarrow k_{cdg}} + J_{v_{i0}} \right) \\ \beta = \sum_{k=1}^i \left(R_{i \rightarrow 0} J_{v_{0k_{cdg}}} \right)^T M_k \left(\underline{\dot{R}}_{i \rightarrow 0} \odot t_{0 \rightarrow k_{cdg}} + J_{v_{i0}} \right) \end{cases} \quad (351)$$

On remarquera que ce résultat ne permet pas d'inclure la dynamique du pied qui est dans le cas usuel assimilé au bâti, il faudra donc rajouter la dynamique de ce dernier grâce au théorème 7.

6.4.3.2 Théorème Matrice d'inertie et changement de repère base-distal

Théorème 8

Soit un robot série possédant i articulations.

Soit un corps k de ce robot et k_{cdg} le centre de gravité associé.

Si $\forall k \in \llbracket 1, \dots, i \rrbracket$

$$\begin{cases} J_{ik_{cdg}} = \begin{pmatrix} J_{v_{ik_{cdg}}} \\ J_{\omega_{ik_{cdg}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{i \rightarrow 0} J_{v_{0k_{cdg}}} + \underline{\dot{R}}_{i \rightarrow 0} \odot t_{0 \rightarrow k_{cdg}} + J_{v_{i0}} \\ R_{i \rightarrow 0} J_{\omega_{0k}} \end{pmatrix} \\ A_{i0} = \sum_{k=1}^i \begin{pmatrix} J_{v_{ik_{cdg}}}^T & J_{\omega_{ik_{cdg}}}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_k & \mathbb{O}_3 \\ \mathbb{O}_3 & I_{ik} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{v_{ik_{cdg}}} \\ J_{\omega_{ik_{cdg}}} \end{pmatrix} \\ A_{0i} = \begin{pmatrix} J_{v_{0k_{cdg}}}^T & J_{\omega_{0k_{cdg}}}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_k & \mathbb{O}_3 \\ \mathbb{O}_3 & I_{0k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{v_{0k_{cdg}}} \\ J_{\omega_{0k_{cdg}}} \end{pmatrix} \end{cases}$$

Alors

$$\begin{cases} A_{i0} = A_{0i} + \alpha + \beta + \beta^T \\ \alpha = \sum_{k=1}^i \left(\underline{\dot{R}}_{i \rightarrow 0} \odot t_{0 \rightarrow k_{cdg}} + J_{v_{i0}} \right)^T M_k \left(\underline{\dot{R}}_{i \rightarrow 0} \odot t_{0 \rightarrow k_{cdg}} + J_{v_{i0}} \right) \\ \beta = \sum_{k=1}^i \left(R_{i \rightarrow 0} J_{v_{0k_{cdg}}} \right)^T M_k \left(\underline{\dot{R}}_{i \rightarrow 0} \odot t_{0 \rightarrow k_{cdg}} + J_{v_{i0}} \right) \end{cases}$$

6.5 Coriolis-Centrifuge

6.5.1 Rappel et notation

Etant donné qu'il n'est pas toujours facile de trouver la démonstration de ce terme, on se propose ici d'en redonner une et cela toujours dans l'optique de construire un cadre de référence consistant. On constatera par ailleurs que cette dernière occulte le fait qu'il est effectivement question d'un tenseur d'ordre 3 et que la poursuite du raisonnement sur une coordonnée est effectivement une réduction du problème à un cas plus classique de calcul matriciel et donc de tenseur d'ordre 2.

En repartant de l'expression de C établie précédemment (337) :

$$C(q, \dot{q})\dot{q} = \frac{d}{dt}(A(q))\dot{q} - \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{1}{2}\dot{q}^T A(q)\dot{q}\right) \quad (352)$$

Dont on explicite plus particulièrement la $k^{\text{ème}}$ coordonnée :

$$C_k = \sum_{j=1}^n \frac{d}{dt} a_{kj} \dot{q}_j - \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \right) \quad (353)$$

$$\Leftrightarrow C_k = \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_{kj}}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial t} \dot{q}_j - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k} \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (354)$$

$$\Leftrightarrow C_k = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial a_{kj}}{\partial q_i} \dot{q}_i \dot{q}_j - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k} \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (355)$$

$$\Leftrightarrow C_k = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial a_{kj}}{\partial q_i} - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k} \right) \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (356)$$

Comme on a, par indifférence du changement d'indice :

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial a_{kj}}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial a_{ki}}{\partial q_j} \quad (357)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial a_{kj}}{\partial q_i} = \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial a_{kj}}{\partial q_i} + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial a_{ki}}{\partial q_j} \right) \quad (358)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial a_{kj}}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial a_{ki}}{\partial q_j} \right) \quad (359)$$

On obtient :

$$C_k = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial a_{ki}}{\partial q_j} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k} \right) \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (360)$$

$$\Leftrightarrow C_k = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial a_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k} \right) \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (361)$$

$$\Leftrightarrow C_k = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n c_{ijk} \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (362)$$

Tel que $c_{ijk} = c_{jik}$, les symboles de Christoffel :

$$c_{ijk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial a_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k} \right) \quad (363)$$

Les trois coordonnées i, j, k traduisent ici implicitement la présence d'un objet de type matrice 3D qui n'est autre qu'un tenseur d'ordre 3.

6.5.2 Coriolis-centrifuge : Matrice d'inertie et jacobienne au centre de gravité

6.5.2.1 Cas général

Si on reprend la formulation standard, on obtient les symboles de cristoffel de première espèce (363) :

$$C_{ijk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial a_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k} \right) \quad (364)$$

On observe que ces symboles reposent sur la connaissance de la différentielle de A par rapport au vecteur d'état du robot. Ainsi calculer les C_{ijk} revient en réalité à calculer les $\frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k}$.

On a de manière générale pour un robot série à i degrés de liberté (165) :

$$A_{0i} = \sum_{k=1}^i J_{0kcdg}^T \begin{pmatrix} M_k & \mathbb{O}_3 \\ \mathbb{O}_3 & I_{0k} \end{pmatrix} J_{0kcdg} = \sum_{k=1}^i \begin{pmatrix} J_{v_{0kcdg}}^T & J_{\omega_{0kcdg}}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_k & \mathbb{O}_3 \\ \mathbb{O}_3 & I_{0k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{v_{0kcdg}} \\ J_{\omega_{0kcdg}} \end{pmatrix} \quad (365)$$

C'est donc maintenant que l'on différencie par rapport au vecteur d'état du robot q_α :

$$\frac{\partial A_{0i}}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial q} \left(\sum_{k=1}^i \begin{pmatrix} J_{v_{0kcdg}}^T & J_{\omega_{0kcdg}}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_k & \mathbb{O}_3 \\ \mathbb{O}_3 & I_{0k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{v_{0kcdg}} \\ J_{\omega_{0kcdg}} \end{pmatrix} \right) \quad (366)$$

En réalisant la distribution de la dérivation on obtient l'expression suivante :

$$\frac{\partial A_{0i}}{\partial q} = \frac{\partial A_{v_{0i}}}{\partial q} + \frac{\partial A_{\omega_{0i}}}{\partial q} = \sum_{k=1}^i \left(\frac{\partial}{\partial q} \left(J_{v_{0kcdg}}^T M_k J_{v_{0kcdg}} \right) + \frac{\partial}{\partial q} \left(J_{\omega_{0kcdg}}^T I_{0k} J_{\omega_{0kcdg}} \right) \right) \quad (367)$$

Intéressons-nous dans un premier temps à la contribution linéaire :

$$\frac{\partial A_{v_{0i}}}{\partial q} = \sum_{k=1}^i \frac{\partial}{\partial q} \left(J_{v_{0kcdg}}^T M_k J_{v_{0kcdg}} \right) \quad (368)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial A_{v_{0i}}}{\partial q} = \sum_{k=1}^i \frac{\partial}{\partial q} \left(J_{v_{0kcdg}}^T \right) \odot M_k J_{v_{0kcdg}} + J_{v_{0kcdg}}^T M_k \odot \frac{\partial}{\partial q} \left(J_{v_{0kcdg}} \right) \quad (369)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial A_{v_{0i}}}{\partial q} = \sum_{k=1}^i \left(J_{v_{0kcdg}}^T M_k \odot \frac{\partial}{\partial q} \left(J_{v_{0kcdg}} \right) \right)^T + J_{v_{0kcdg}}^T M_k \odot \frac{\partial}{\partial q} \left(J_{v_{0kcdg}} \right) \quad (370)$$

Penchons-nous sur le passage de (369) à (370) et plus particulièrement sur l'utilisation abusive ici du symbole de transposition qui n'a pas de sens pour un tenseur d'ordre trois. On extrait de (369) le premier terme de la somme que l'on découpe comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial q} \left(J_{v_{0kcdg}}^T \right) \odot M_k J_{v_{0kcdg}} = \frac{\partial}{\partial q_1} \left(J_{v_{0kcdg}}^T \right) M_k J_{v_{0kcdg}}, \dots, \frac{\partial}{\partial q_i} \left(J_{v_{0kcdg}}^T \right) M_k J_{v_{0kcdg}} \quad (371)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C = C_1, \dots, C_i \\ C = \frac{\partial}{\partial q} (J_{v_{0k_{cdg}}}^T) \odot M_k J_{v_{0k_{cdg}}} \\ C_p = \frac{\partial}{\partial q_p} (J_{v_{0k_{cdg}}}^T) M_k J_{v_{0k_{cdg}}} \end{cases} \quad (372)$$

Prenons C_p afin de déterminer l'expression de C_{lqp} en commençant par simplifier l'écriture pour ne faire apparaître que les éléments des matrices prise en compte :

$$\begin{cases} C_p = J_p^T J \\ J_p^T = \frac{\partial}{\partial q_p} (J_{v_{0k_{cdg}}}^T) \\ J = J_{v_{0k_{cdg}}} \end{cases} \quad (373)$$

On constate l'absence de M_k quel'on ignore pour cette démonstration car il ne s'agit que de la matrice identité multipliée par un scalaire qui n'apporte rien au propos. Explicitons donc C_{lqp} :

$$C_{lqp} = \sum_{k=1}^i J_{lkp}^T J_{kq} \quad (374)$$

$$\Leftrightarrow C_{lqp} = \sum_{k=1}^i J_{klp} J_{kq} \quad (375)$$

Par le même raisonnement on montre que :

$$\begin{cases} D_p = J^T J_p \\ J_p = \frac{\partial}{\partial q_p} (J_{v_{0k_{cdg}}}) \Rightarrow D_{lqp} = \sum_{k=1}^i J_{kl} J_{kqp} \\ J^T = J_{v_{0k_{cdg}}}^T \end{cases} \quad (376)$$

Ce qui nous permet de conclure que :

$$\forall (l, q, p) \in \llbracket 1, \dots, i \rrbracket^3, \quad C_{lqp} = D_{qlp} = D_{lqp}^T \quad (377)$$

$$\Leftrightarrow \forall p \in \llbracket 1, \dots, i \rrbracket, \quad C_p = D_p^T \quad (378)$$

En reprenant (369) cela nous permet d'écrire :

$$\forall p \in \llbracket 1, \dots, i \rrbracket, \quad \frac{\partial}{\partial q_p} (J_{v_{0k_{cdg}}}^T) M_k J_{v_{0k_{cdg}}} = \left(J_{v_{0k_{cdg}}}^T M_k \frac{\partial}{\partial q_p} (J_{v_{0k_{cdg}}}) \right)^T \quad (379)$$

Par la suite on utilise abusivement le symbole de transposition sur un tenseur d'ordre trois pour traduire la propriété (377).

On constate donc que tout se réduit au seul calcul de $\frac{\partial}{\partial q} (J_{v_{0k_{cdg}}})$. Ce qui nous permet d'écrire d'après le théorème 1 :

$$\frac{\partial}{\partial q} (J_{v_{0k_{cdg}}}) = \frac{\partial}{\partial q} (J_{v_{0k}} + \underline{\underline{\dot{R}_{0 \rightarrow k}}} \odot \underline{\underline{t_{k \rightarrow k_{cdg}}}}) \quad (380)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial q} (J_{v_{0k_{cdg}}}) = \frac{\partial}{\partial q} (J_{v_{0k}}) + \frac{\partial}{\partial q} (\underline{\underline{\dot{R}_{0 \rightarrow k}}} \odot \underline{\underline{t_{k \rightarrow k_{cdg}}}}) \quad (381)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial q} (J_{v_{0k_{cdg}}}) = \frac{\partial}{\partial q} (J_{v_{0k}}) + \frac{\partial}{\partial q} (\underline{\underline{\dot{R}_{0 \rightarrow k}}}) \odot \underline{\underline{t_{k \rightarrow k_{cdg}}}} \quad (382)$$

On fait apparaître ici deux nouveaux objets du bestiaire de la modélisation en robotique. Il s'agit de la Hessienne du modèle géométrique direct, tenseur d'ordre trois, ainsi que la hessienne de la matrice de rotation, tenseur d'ordre quatre. On introduit donc à cet effet deux nouvelles notations :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial q}(J_{0i}) = \underline{\underline{j}}_{oi} \\ \frac{\partial}{\partial q}(\underline{\underline{\dot{R}}}_{0 \rightarrow i}) = \underline{\underline{\ddot{R}}}_{0 \rightarrow i} \end{cases} \quad (383)$$

On obtient donc l'expression suivante :

$$\underline{\underline{j}}_{v_{0k}cdg} = \underline{\underline{j}}_{v_{0k}} + \underline{\underline{\ddot{R}}}_{0 \rightarrow k} \odot \underline{\underline{t}}_{k \rightarrow kcdg} \quad (384)$$

Ce qui nous permet d'écrire :

$$\frac{\partial A_{v_{0i}}}{\partial q} = \sum_{k=1}^i \left(J_{v_{0k}cdg}^T M_k \odot \underline{\underline{j}}_{v_{0k}cdg} \right)^T + J_{v_{0k}cdg}^T M_k \odot \underline{\underline{j}}_{v_{0k}cdg} \quad (385)$$

Quant à la contibution angulaire, elle prendra une forme légèrement différente car I_{0k} est fonction du vecteur d'état contrairement à M_k , d'où :

$$\frac{\partial A_{\omega_{0i}}}{\partial q} = \sum_{k=1}^i \frac{\partial}{\partial q} \left(J_{\omega_{0k}cdg}^T I_{0k} J_{\omega_{0k}cdg} \right) \quad (386)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial A_{\omega_{0i}}}{\partial q} = \sum_{k=1}^i \frac{\partial}{\partial q} \left(J_{\omega_{0k}cdg}^T \right) \odot I_{0k} J_{\omega_{0k}cdg} + J_{\omega_{0k}cdg}^T \odot \frac{\partial}{\partial q} (I_{0k}) \odot J_{\omega_{0k}cdg} + J_{\omega_{0k}cdg}^T I_{0k} \odot \frac{\partial}{\partial q} (J_{\omega_{0k}cdg}) \quad (387)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial A_{\omega_{0i}}}{\partial q} = \sum_{k=1}^i \left(J_{\omega_{0k}cdg}^T I_{0k} \odot \frac{\partial}{\partial q} (J_{\omega_{0k}cdg}) \right)^T + J_{\omega_{0k}cdg}^T I_{0k} \odot \frac{\partial}{\partial q} (J_{\omega_{0k}cdg}) + J_{\omega_{0k}cdg}^T \odot \frac{\partial}{\partial q} (I_{0k}) \odot J_{\omega_{0k}cdg} \quad (388)$$

Penchons nous dans un premier temps sur le calcul de la différentielle de $J_{\omega_{0k}cdg}$ car en effet on a par construction :

$$J_{\omega_{0k}cdg} = \begin{pmatrix} R_{0 \rightarrow 1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \cdots & R_{0 \rightarrow k} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \mathbb{O}_{3,i-k} \end{pmatrix} \quad (389)$$

D'où :

$$\frac{\partial}{\partial q} (J_{\omega_{0k}cdg}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial q} (R_{0 \rightarrow 1}) \odot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \cdots & \frac{\partial}{\partial q} (R_{0 \rightarrow k}) \odot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \mathbb{O}_{3,i-k,i} \end{pmatrix} \quad (390)$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{j}}_{\omega_{0k}cdg} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{\dot{R}}}_{0 \rightarrow 1} \odot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \cdots & \underline{\underline{\dot{R}}}_{0 \rightarrow k} \odot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \mathbb{O}_{3,i-k,i} \end{pmatrix} \quad (391)$$

Ce que l'on synthétise comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial q} (J_{\omega_{0k}cdg}) = \underline{\underline{j}}_{\omega_{0k},q,q} = \underline{\underline{j}}_{\omega_{0k},q,\underline{\underline{q}}_k}, (\mathbb{O}_{3,i-k,j}) \quad (392)$$

Abordons maintenant le calcul de $\frac{\partial}{\partial q} (I_{0k}) = \underline{\underline{j}}_{0k}$, en utilisant (317):

$$\underline{\underline{\dot{I}}}_{0k} = \frac{\partial}{\partial q} (I_{0k}) = \frac{\partial}{\partial q} (R_{0 \rightarrow k} I_k^* R_{0 \rightarrow k}^T) = \frac{\partial}{\partial q} (R_{0 \rightarrow k} I_k^* R_{k \rightarrow 0}) \quad (393)$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{\dot{I}}}_{0k} = \frac{\partial}{\partial q} (R_{0 \rightarrow k}) \odot I_k^* R_{k \rightarrow 0} + R_{0 \rightarrow k} I_k^* \odot \frac{\partial}{\partial q} (R_{k \rightarrow 0}) \quad (394)$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{\dot{I}}}_{0k} = \underline{\underline{\dot{R}}}_{0 \rightarrow k, q} \odot I_k^* R_{0 \rightarrow k}^T + R_{0 \rightarrow k} I_k^* \odot \underline{\underline{\dot{R}}}_{k \rightarrow 0, q} \quad (395)$$

Cela nous permet d'écrire :

$$\frac{\partial A_{\omega 0i}}{\partial q} = \sum_{k=1}^i \left(J_{\omega_{0k}cdg}^T I_{0k} \odot \underline{\underline{\dot{J}}}_{\omega_{0k}cdg} \right)^T + J_{\omega_{0k}cdg}^T I_{0k} \odot \underline{\underline{\dot{J}}}_{\omega_{0k}cdg} + J_{\omega_{0k}cdg}^T \odot \underline{\underline{\dot{I}}}_{0k} \odot J_{\omega_{0k}cdg} \quad (396)$$

On peut donc conclure en rassemblant (385) et (396) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial A_{0i}}{\partial q} = \frac{\partial A_{v0i}}{\partial q} + \frac{\partial A_{\omega 0i}}{\partial q} \\ \frac{\partial A_{v0i}}{\partial q} = \sum_{k=1}^i \left(J_{v_{0k}cdg}^T M_k \odot \underline{\underline{\dot{J}}}_{v_{0k}cdg} \right)^T + J_{v_{0k}cdg}^T M_k \odot \underline{\underline{\dot{J}}}_{v_{0k}cdg} \\ \frac{\partial A_{\omega 0i}}{\partial q} = \sum_{k=1}^i \left(J_{\omega_{0k}cdg}^T I_{0k} \odot \underline{\underline{\dot{J}}}_{\omega_{0k}cdg} \right)^T + J_{\omega_{0k}cdg}^T I_{0k} \odot \underline{\underline{\dot{J}}}_{\omega_{0k}cdg} + J_{\omega_{0k}cdg}^T \odot \underline{\underline{\dot{I}}}_{0k} \odot J_{\omega_{0k}cdg} \end{array} \right. \quad (397)$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial A_{0i}}{\partial q} = \Gamma_{0i} + \Gamma_{0i}^T + \Gamma_{0i}^* \\ \Gamma_{0i} = \sum_{k=1}^i J_{0kcdg}^T \begin{pmatrix} M_k & \mathbb{O}_3 \\ \mathbb{O}_3 & I_{0k} \end{pmatrix} \odot \underline{\underline{\dot{J}}}_{0kcdg} \\ \Gamma_{0i}^* = \sum_{k=1}^i J_{\omega_{0k}cdg}^T \odot \underline{\underline{\dot{I}}}_{0k} \odot J_{\omega_{0k}cdg} \end{array} \right. \quad (398)$$

Théorème 9

Soit un robot série possédant i articulations.

Soit un corps k de ce robot et k_{cdg} le centre de gravité associé.

Si $\forall k \in \llbracket 1, \dots, i \rrbracket$

$$\left\{ \begin{array}{l} J_{0k_{cdg}} = \begin{pmatrix} J_{v_{0k_{cdg}}} \\ J_{\omega_{0k_{cdg}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{R}_{0 \rightarrow k} \odot \underline{t}_{k \rightarrow k_{cdg}} + J_{v_{0k}} \\ J_{\omega_{0k_{cdg}}} \end{pmatrix} \\ A_{0i} = \sum_{k=1}^i \begin{pmatrix} J_{v_{0k_{cdg}}}^T & J_{\omega_{0k_{cdg}}}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_k & \mathbb{O}_3 \\ \mathbb{O}_3 & I_{0k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{v_{0k_{cdg}}} \\ J_{\omega_{0k_{cdg}}} \end{pmatrix} \\ C_{ijk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial a_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k} \right) \end{array} \right.$$

Alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial A_{0i}}{\partial q} = \Gamma_{oi} + \Gamma_{oi}^T + \Gamma_{oi}^* \\ \Gamma_{oi} = \sum_{k=1}^i J_{0k_{cdg}}^T \begin{pmatrix} M_k & \mathbb{O}_3 \\ \mathbb{O}_3 & I_{0k} \end{pmatrix} \odot \underline{j}_{0k_{cdg}} \\ \Gamma_{oi}^* = \sum_{k=1}^i J_{\omega_{0k_{cdg}}}^T \odot \underline{j}_{0k} \odot J_{\omega_{0k_{cdg}}} \\ \underline{j}_{0k_{cdg}} = \begin{pmatrix} \underline{j}_{v_{0k_{cdg}}} \\ \underline{j}_{\omega_{0k_{cdg}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{R}_{0 \rightarrow k} \odot \underline{t}_{k \rightarrow k_{cdg}} + \underline{j}_{v_{0k}} \\ \underline{j}_{\omega_{0k,q,q_k}}, (\mathbb{O}_{3,i-k,j}) \end{pmatrix} \\ \underline{j}_{0k} = \dot{R}_{0 \rightarrow k,q} \odot I_k^* R_{0 \rightarrow k}^T + R_{0 \rightarrow k} I_k^* \odot \dot{R}_{k \rightarrow 0,q} \end{array} \right.$$

6.5.2.3 Application au 4R plan

Comme pour les autres exemples, on se limitera à la contribution linéaire de la vitesse :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \frac{\partial A_{v_{o4}}}{\partial q_1} = \mathbb{O}_{4,4} \\
 \frac{\partial A_{v_{o4}}}{\partial q_2} = \begin{pmatrix} a'_{11} & X & X & X \\ a'_{21} & 0 & X & X \\ a'_{31} & 0 & 0 & X \\ a'_{41} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 a'_{11} = -\left(2l_1m_2(s_2l_{2cdg}) + 2l_1m_3(s_2l_2 + s_{23}l_{3cdg}) + 2l_1m_4(s_2l_2 + s_{23}l_3 + s_{234}l_{4cdg})\right) \\
 a'_{21} = -\left(l_1m_2(s_2l_{2cdg}) + l_1m_3(s_2l_2 + s_{23}l_{3cdg}) + l_1m_4(s_2l_2 + s_{23}l_3 + s_{234}l_{4cdg})\right) \\
 a'_{31} = -\left(l_1m_3(s_{23}l_{3cdg}) + l_1m_4(s_{23}l_3 + s_{234}l_{4cdg})\right), a'_{41} = -\left(l_1m_4(s_{234}l_{4cdg})\right) \\
 \frac{\partial A_{v_{o4}}}{\partial q_3} = \begin{pmatrix} a'_{11} & X & X & X \\ a'_{21} & a'_{22} & X & X \\ a'_{31} & a'_{32} & 0 & X \\ a'_{41} & a'_{42} & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 a'_{11} = -\left(2l_1m_3(s_{23}l_{3cdg}) + 2l_2m_3(s_3l_{3cdg}) + 2l_1m_4(s_{23}l_3 + s_{234}l_{4cdg}) + 2l_2m_4(s_3l_3 + s_{34}l_{4cdg})\right) \\
 a'_{21} = -\left(l_1m_3(s_{23}l_{3cdg}) + 2l_2m_3(s_3l_{3cdg}) + l_1m_4(s_{23}l_3 + s_{234}l_{4cdg}) + 2l_2m_4(s_3l_3 + s_{34}l_{4cdg})\right) \\
 a'_{31} = -\left(l_1m_3(s_{23}l_{3cdg}) + l_2m_3(s_3l_{3cdg}) + l_1m_4(s_{23}l_3 + s_{234}l_{4cdg}) + l_2m_4(s_3l_3 + s_{34}l_{4cdg})\right) \\
 a'_{41} = -\left(l_1m_4(s_{234}l_{4cdg}) + l_2m_4(s_{34}l_{4cdg})\right), a'_{22} = -\left(2l_2m_3(s_3l_{3cdg}) + 2l_2m_4(s_3l_3 + s_{34}l_{4cdg})\right) \\
 a'_{32} = -\left(l_2m_3(s_3l_{3cdg}) + l_2m_4(s_3l_3 + s_{34}l_{4cdg})\right), a'_{42} = -\left(l_2m_4(s_{34}l_{4cdg})\right) \\
 \frac{\partial A_{v_{o4}}}{\partial q_4} = \begin{pmatrix} a'_{11} & X & X & X \\ a'_{21} & a'_{22} & X & X \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} & X \\ a'_{41} & a'_{42} & a'_{43} & 0 \end{pmatrix} \\
 a'_{11} = -\left(2l_1m_4(s_{234}l_{4cdg}) + 2l_2m_4(s_{34}l_{4cdg}) + 2l_3m_4(s_4l_{4cdg})\right) \\
 a'_{21} = -\left(l_1m_4(s_{234}l_{4cdg}) + 2l_2m_4(s_{34}l_{4cdg}) + 2l_3m_4(s_4l_{4cdg})\right) \\
 a'_{31} = -\left(l_1m_4(s_{234}l_{4cdg}) + l_2m_4(s_{34}l_{4cdg}) + 2l_3m_4(s_4l_{4cdg})\right) \\
 a'_{41} = -\left(l_1m_4(s_{234}l_{4cdg}) + l_2m_4(s_{34}l_{4cdg}) + l_3m_4(s_4l_{4cdg})\right) \\
 a'_{22} = -\left(2l_2m_4(s_{34}l_{4cdg}) + 2l_3m_4(s_4l_{4cdg})\right) \\
 a'_{32} = -\left(l_2m_4(s_{34}l_{4cdg}) + 2l_3m_4(s_4l_{4cdg})\right), a'_{42} = -\left(l_2m_4(s_{34}l_{4cdg}) + l_3m_4(s_4l_{4cdg})\right) \\
 a'_{33} = -\left(2l_3m_4(s_4l_{4cdg})\right), a'_{43} = -\left(l_3m_4(s_4l_{4cdg})\right)
 \end{array} \right. \quad (399)$$

Dans le cadre d'application du théorème 9, il nous faut calculer les $\underline{\underline{j}}_{v_{okcdg}}$ en commençant par les $\underline{\underline{j}}_{v_{ok}}$ à partir de (125), on illustrera avec le développement de $\underline{\underline{j}}_{v_{o4}}$:

Calculons maintenant $\Gamma_{v_{04}}$:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \Gamma_{v_{04}} = \sum_{k=1}^4 J_{v_{0k}cdg} {}^T M_k \odot j_{v_{0k}cdg} \\
 \Gamma_{v_{04}} = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 \\
 \gamma_1 = \mathbb{O}_{4,4,4} \\
 \gamma_2 = \mathbb{O}_{4,4,1}, \begin{pmatrix} -l_1 m_2 (s_2 l_{2cdg}) & -l_1 m_2 (s_2 l_{2cdg}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbb{O}_{4,4,2} \\
 \gamma_3 = \mathbb{O}_{4,4,1}, \begin{pmatrix} \gamma_{112}^{*3} & \gamma_{122}^{*3} & \gamma_{132}^{*3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma_{113}^{*3} & \gamma_{123}^{*3} & \gamma_{133}^{*3} & 0 \\ \gamma_{213}^{*3} & \gamma_{223}^{*3} & \gamma_{233}^{*3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbb{O}_{4,4,1} \\
 \gamma_{112}^{*3} = \gamma_{122}^{*3} = l_1 m_3 (s_2 l_2 + s_{23} l_{3cdg}) \\
 \gamma_{132}^{*3} = l_1 m_3 (s_{23} l_{3cdg}) \\
 \gamma_{113}^{*3} = \gamma_{123}^{*3} = \gamma_{133}^{*3} = l_1 m_3 (s_{23} l_{3cdg}) + l_2 m_3 (s_3 l_{3cdg}) \\
 \gamma_{213}^{*3} = \gamma_{223}^{*3} = \gamma_{233}^{*3} = l_2 m_3 (s_3 l_{3cdg}) \\
 \gamma_4 = \mathbb{O}_{4,4,1}, \begin{pmatrix} \gamma_{112}^{*4} & \gamma_{122}^{*4} & \gamma_{132}^{*4} & \gamma_{142}^{*4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma_{113}^{*4} & \gamma_{123}^{*4} & \gamma_{133}^{*4} & \gamma_{143}^{*4} \\ \gamma_{213}^{*4} & \gamma_{223}^{*4} & \gamma_{233}^{*4} & \gamma_{243}^{*4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma_{114}^{*4} & \gamma_{124}^{*4} & \gamma_{134}^{*4} & \gamma_{144}^{*4} \\ \gamma_{214}^{*4} & \gamma_{224}^{*4} & \gamma_{234}^{*4} & \gamma_{244}^{*4} \\ \gamma_{314}^{*4} & \gamma_{324}^{*4} & \gamma_{334}^{*4} & \gamma_{344}^{*4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 \gamma_{112}^{*4} = \gamma_{122}^{*4} = l_1 m_4 (s_2 l_2 + s_{23} l_3 + s_{234} l_{4cdg}) \\
 \gamma_{132}^{*4} = l_1 m_4 (s_{23} l_3 + s_{234} l_{4cdg}) \\
 \gamma_{142}^{*4} = l_1 m_4 (s_{234} l_{4cdg}) \\
 \gamma_{113}^{*4} = \gamma_{123}^{*4} = \gamma_{133}^{*4} = l_1 m_4 (s_{23} l_3 + s_{234} l_{4cdg}) + l_2 m_4 (s_3 l_3 + s_{34} l_{4cdg}) \\
 \gamma_{143}^{*4} = l_1 m_4 (s_{234} l_{4cdg}) + l_2 m_4 (s_{34} l_{4cdg}) \\
 \gamma_{213}^{*4} = \gamma_{223}^{*4} = \gamma_{233}^{*4} = l_2 m_4 (s_3 l_3 + s_{34} l_{4cdg}) \\
 \gamma_{243}^{*4} = l_2 m_4 (s_{34} l_{4cdg}) \\
 \gamma_{114}^{*4} = \gamma_{124}^{*4} = \gamma_{134}^{*4} = \gamma_{144}^{*4} = l_1 m_4 (s_{234} l_{4cdg}) + l_2 m_4 (s_{34} l_{4cdg}) + l_3 m_4 (s_4 l_{4cdg}) \\
 \gamma_{214}^{*4} = \gamma_{224}^{*4} = \gamma_{234}^{*4} = \gamma_{244}^{*4} = l_2 m_4 (s_{34} l_{4cdg}) + l_3 m_4 (s_4 l_{4cdg}) \\
 \gamma_{314}^{*4} = \gamma_{324}^{*4} = \gamma_{334}^{*4} = \gamma_{344}^{*4} = l_3 m_4 (s_4 l_{4cdg})
 \end{array} \right. \quad (403)$$

On obtient $\frac{\partial A_{v_{04}}}{\partial q}$ en calculant la somme $\Gamma_{v_{04}} + \Gamma_{v_{04}}^T$.

6.5.3 Coriolis-centrifuge : Matrice d'inertie et jacobienne au centre de gravité et modèle composite

6.5.3.1 Cas général

C'est dans cette section que nous allons aborder la possibilité de calculer les termes centrifuge et Coriolis dans le cadre d'un modèle composite et cela dans la continuité des développements effectués précédemment. Envisageons donc la différentielle de A dans le cadre des notations du théorème 7 :

$$\frac{\partial A}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial q} \begin{pmatrix} A_{oi} + \alpha & \beta \\ \beta^T & A_{ij} \end{pmatrix} \quad (404)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial A}{\partial q} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial q} A_{oi} + \frac{\partial}{\partial q} \alpha & \frac{\partial}{\partial q} \beta \\ \frac{\partial}{\partial q} \beta^T & \frac{\partial}{\partial q} A_{ij} \end{pmatrix} \quad (405)$$

On rappelle ici que q est de taille $i + j$ et que par conséquent la différentielle de A est une matrice cube de taille $i + j$. Explicitons maintenant comment évoluent les différentielles de A_{oi} et A_{ij} . En commençant par $\frac{\partial}{\partial q} A_{oi}$, on remarque immédiatement que les j dernières dérivées partielles seront nulles car A_{oi} ne dépend pas de q_α . Aussi obtient-on la relation suivante :

$$\frac{\partial}{\partial q} A_{oi} = \left(\frac{\partial A_{oi}}{\partial q_\alpha} \right), (\mathbb{O}_{i,i,j}) \quad (406)$$

Par le même raisonnement on obtient le même type d'écriture pour $\frac{\partial}{\partial q} A_{ij}$ et cela donne :

$$\frac{\partial}{\partial q} A_{ij} = (\mathbb{O}_{j,j,i}), \left(\frac{\partial A_{ij}}{\partial q_\omega} \right) \quad (407)$$

Il ne reste donc qu'à traiter la différentielle de α et β et cela en commençant par la première :

$$\frac{\partial}{\partial q} \alpha = \frac{\partial}{\partial q} \left(\sum_{k=i+1}^{i+j} \left(J_{v_{oi,q\alpha}} + \underline{\underline{\dot{R}_{0 \rightarrow i,q\alpha}}} \odot (t_{i \rightarrow k_{cdg}}) \right)^T M_k \left(J_{v_{oi,q\alpha}} + \underline{\underline{\dot{R}_{0 \rightarrow i,q\alpha}}} \odot (t_{i \rightarrow k_{cdg}}) \right) + \sum_{k=i+1}^{i+j} J_{\omega_{oi,q\alpha}}^T I_{0k} J_{\omega_{oi,q\alpha}} \right) \quad (408)$$

En séparant cette somme en ses deux contributions linéaire α_v et angulaire α_ω puis en distribuant l'opérateur de dérivation, on obtient pour la première contribution :

$$\frac{\partial}{\partial q} \alpha_v = \sum_{k=i+1}^{i+j} \frac{\partial}{\partial q} \left(\left(J_{v_{oi,q\alpha}} + \underline{\underline{\dot{R}_{0 \rightarrow i,q\alpha}}} \odot (t_{i \rightarrow k_{cdg}}) \right)^T M_k \left(J_{v_{oi,q\alpha}} + \underline{\underline{\dot{R}_{0 \rightarrow i,q\alpha}}} \odot (t_{i \rightarrow k_{cdg}}) \right) \right) \quad (409)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial}{\partial q} \alpha_v = \sum_{k=i+1}^{i+j} a_v^T + a_v \\ a_v = \left(J_{v_{oi,q\alpha}} + \underline{\underline{\dot{R}_{0 \rightarrow i,q\alpha}}} \odot (t_{i \rightarrow k_{cdg}}) \right)^T M_k \frac{\partial}{\partial q} \left(J_{v_{oi,q\alpha}} + \underline{\underline{\dot{R}_{0 \rightarrow i,q\alpha}}} \odot (t_{i \rightarrow k_{cdg}}) \right) \end{cases} \quad (410)$$

Calculons $\frac{\partial}{\partial q} \left(J_{v_{oi,q\alpha}} + \underline{\underline{\dot{R}}}_{0 \rightarrow i,q\alpha} \odot (t_{i \rightarrow k_{cdg}}) \right)$:

$$\frac{\partial}{\partial q} \left(J_{v_{oi,q\alpha}} + \underline{\underline{\dot{R}}}_{0 \rightarrow i,q\alpha} \odot (t_{i \rightarrow k_{cdg}}) \right) = \frac{\partial}{\partial q} (J_{v_{oi,q\alpha}}) + \frac{\partial}{\partial q} (\underline{\underline{\dot{R}}}_{0 \rightarrow i,q\alpha}) \odot t_{i \rightarrow k_{cdg}} + \underline{\underline{\dot{R}}}_{0 \rightarrow i,q\alpha} \odot \frac{\partial}{\partial q} (t_{i \rightarrow k_{cdg}}) \quad (411)$$

Comme $J_{v_{oi,\Omega}}$ est uniquement fonction de q , les j dernières dérivées sont nulles d'où :

$$\frac{\partial}{\partial q} (J_{v_{oi,q\alpha}}) = \underline{\underline{j}}_{v_{oi,q\alpha,q}} = \underline{\underline{j}}_{v_{oi,q\alpha,q\alpha}}, (\mathbb{O}_{3,i,j}) \quad (412)$$

Il en est de même pour $\underline{\underline{\dot{R}}}_{0 \rightarrow i,q\alpha}$ ce qui nous donne :

$$\frac{\partial}{\partial q} (\underline{\underline{\dot{R}}}_{0 \rightarrow i,q\alpha}) = \underline{\underline{\ddot{R}}}_{0 \rightarrow i,q\alpha,q} = \underline{\underline{\ddot{R}}}_{0 \rightarrow i,q\alpha,q\alpha}, (\mathbb{O}_{3,3,i,j}) \quad (413)$$

Quant au terme $t_{i \rightarrow k_{cdg}}$, il dépend du vecteur d'état q du second robot. On a donc :

$$\frac{\partial}{\partial q} (t_{i \rightarrow k_{cdg}}) = J_{v_{ik_{cdg},q}} = (\mathbb{O}_{3,i} \quad J_{v_{ik_{cdg},q\omega}}) \quad (414)$$

Ce qui nous permet d'écrire la relation suivante :

$$\underline{\underline{\dot{R}}}_{0 \rightarrow i,q\alpha} \odot \frac{\partial}{\partial q} (t_{i \rightarrow k_{cdg}}) = (\mathbb{O}_{3,i,i}), \underline{\underline{\dot{R}}}_{0 \rightarrow i,q\alpha} \odot J_{v_{ik_{cdg},q\omega}} \quad (415)$$

D'où finalement :

$$\frac{\partial}{\partial q} \left(J_{v_{oi,q\alpha}} + \underline{\underline{\dot{R}}}_{0 \rightarrow i,q\alpha} \odot (t_{i \rightarrow k_{cdg}}) \right) = \left(\underline{\underline{j}}_{v_{oi,q\alpha,q\alpha}} + \underline{\underline{\ddot{R}}}_{0 \rightarrow i,q\alpha,q\alpha} \odot t_{i \rightarrow k_{cdg}} \right), \left(\underline{\underline{\dot{R}}}_{0 \rightarrow i,q\alpha} \odot J_{v_{ik_{cdg},q\omega}} \right) \quad (416)$$

Traitons maintenant la contribution angulaire on a :

$$\frac{\partial}{\partial q} \alpha_\omega = \frac{\partial}{\partial q} \sum_{k=i+1}^{i+j} J_{\omega_{oi,q\alpha}}^T I_{0k} J_{\omega_{oi,q\alpha}} \quad (417)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial q} \alpha_\omega = \sum_{k=i+1}^{i+j} \frac{\partial}{\partial q} (J_{\omega_{oi,q\alpha}}^T) \odot I_{0k} J_{\omega_{oi,q\alpha}} + J_{\omega_{oi,q\alpha}}^T I_{0k} \odot \frac{\partial}{\partial q} (J_{\omega_{oi,q\alpha}}) + J_{\omega_{oi,q\alpha}}^T \odot \frac{\partial}{\partial q} (I_{0k}) \odot J_{\omega_{oi,q\alpha}} \quad (418)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial}{\partial q} \alpha_\omega = \sum_{k=i+1}^{i+j} a_\omega^T + a_\omega + a_\omega^* \\ a_\omega = J_{\omega_{oi,q\alpha}}^T I_{0k} \odot \frac{\partial}{\partial q} (J_{\omega_{oi,q\alpha}}) \\ a_\omega^* = J_{\omega_{oi,q\alpha}}^T \odot \frac{\partial}{\partial q} (I_{0k}) \odot J_{\omega_{oi,q\alpha}} \end{cases} \quad (419)$$

Calculons d'abord $\frac{\partial}{\partial q} (J_{\omega_{oi,q\alpha}})$ sachant que les j dernières dérivées partielles de $J_{\omega_{oi,q\alpha}}$ sont nulles :

$$\frac{\partial}{\partial q} (J_{\omega_{oi,q\alpha}}) = \underline{\underline{j}}_{\omega_{oi,q\alpha,q}} = \underline{\underline{j}}_{\omega_{oi,q\alpha,q\alpha}}, (\mathbb{O}_{3,i,j}) \quad (420)$$

Avec :

$$\underline{\underline{j}}_{\omega_{oi,q\alpha,q\alpha}} = \frac{\partial}{\partial q} (J_{\omega_{oi,q\alpha}}) = \left(\underline{\underline{\dot{R}}}_{0 \rightarrow 1,q\alpha} \odot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \cdots \quad \underline{\underline{\dot{R}}}_{0 \rightarrow i,q\alpha} \odot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad (421)$$

Pour finir, il nous faut calculer $\frac{\partial}{\partial q}(I_{0k})$ mais le résultat est tout à fait analogue à celui obtenu dans l'équation (395), ce qui nous donne :

$$\underline{\underline{I}}_{0k,q} = \underline{\underline{R}}_{0 \rightarrow k,q} \odot I_k R_{0 \rightarrow k}^T + R_{0 \rightarrow k} I_k \odot \underline{\underline{R}}_{k \rightarrow 0,q} \quad (422)$$

D'où :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial q} \alpha_\omega = \sum_{k=i+1}^{i+j} a_\omega^T + a_\omega + a_\omega^* \\ a_\omega = J_{\omega oi, q\alpha}^T I_{0k} \odot \underline{\underline{J}}_{\omega oi, q\alpha, q} \\ a_\omega^* = J_{\omega oi, q\alpha}^T \odot \underline{\underline{I}}_{0k,q} \odot J_{\omega oi, q\alpha} \end{cases} \quad (423)$$

Traisons maintenant de la différentielle de β :

$$\frac{\partial}{\partial q} \beta = \frac{\partial}{\partial q} \left(\sum_{k=i+1}^{i+j} \left(J_{v oi, q\alpha} + \underline{\underline{R}}_{0 \rightarrow i, q\alpha} \odot (t_{i \rightarrow k_{cdg}}) \right)^T M_k (R_{0 \rightarrow i} J_{v ik_{cdg}, q\omega}) + \sum_{k=i+1}^{i+j} J_{\omega oi}^T I_{0k} R_{0 \rightarrow i} J_{\omega ik_{cdg}, q\omega} \right) \quad (424)$$

En séparant cette somme en ses deux contributions linéaire β_v et angulaire β_ω puis en distribuant l'opérateur de dérivation, on obtient pour la première contribution :

$$\frac{\partial}{\partial q} \beta_v = \frac{\partial}{\partial q} \left(\sum_{k=i+1}^{i+j} \left(J_{v oi, q\alpha} + \underline{\underline{R}}_{0 \rightarrow i, q\alpha} \odot (t_{i \rightarrow k_{cdg}}) \right)^T M_k (R_{0 \rightarrow i} J_{v ik_{cdg}, q\omega}) \right) \quad (425)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial}{\partial q} \beta_v = \sum_{k=i+1}^{i+j} b_{v1} + b_{v2} \\ b_{v1} = \frac{\partial}{\partial q} \left(J_{v oi, q\alpha} + \underline{\underline{R}}_{0 \rightarrow i, q\alpha} \odot (t_{i \rightarrow k_{cdg}}) \right)^T \odot M_k (R_{0 \rightarrow i} J_{v ik_{cdg}, q\omega}) \\ b_{v2} = \left(J_{v oi, q\alpha} + \underline{\underline{R}}_{0 \rightarrow i, q\alpha} \odot (t_{i \rightarrow k_{cdg}}) \right)^T M_k \odot \frac{\partial}{\partial q} (R_{0 \rightarrow i} J_{v ik_{cdg}, q\omega}) \end{cases} \quad (426)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial q} \left(J_{v oi, q\alpha} + \underline{\underline{R}}_{0 \rightarrow i, q\alpha} \odot (t_{i \rightarrow k_{cdg}}) \right)^T = \left(\left(\underline{\underline{J}}_{v oi, q\alpha, q\alpha} + \underline{\underline{R}}_{0 \rightarrow i, q\alpha, q\alpha} \odot \underline{\underline{t}}_{i \rightarrow k_{cdg}} \right), \left(\underline{\underline{R}}_{0 \rightarrow i, q\alpha} \odot J_{v ik_{cdg}, q\omega} \right) \right)^T \\ \frac{\partial}{\partial q} (R_{0 \rightarrow i} J_{v ik_{cdg}, q\omega}) = \underline{\underline{R}}_{0 \rightarrow i, q\alpha} \odot J_{v ik_{cdg}, q\omega}, (\mathbb{O}_{3,j,i}) + (\mathbb{O}_{3,j,i}), R_{0 \rightarrow i} \odot \underline{\underline{J}}_{v ik_{cdg}, q\omega, q\omega} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial}{\partial q} \beta_v = \sum_{k=i+1}^{i+j} b_{v1} + b_{v2} \\ b_{v1} = \left(\left(\underline{\underline{J}}_{v oi, q\alpha, q\alpha} + \underline{\underline{R}}_{0 \rightarrow i, q\alpha, q\alpha} \odot \underline{\underline{t}}_{i \rightarrow k_{cdg}} \right), \left(\underline{\underline{R}}_{0 \rightarrow i, q\alpha} \odot J_{v ik_{cdg}, q\omega} \right) \right)^T \odot M_k (R_{0 \rightarrow i} J_{v ik_{cdg}, q\omega}) \\ b_{v2} = \left(J_{v oi, q\alpha} + \underline{\underline{R}}_{0 \rightarrow i, q\alpha} \odot (t_{i \rightarrow k_{cdg}}) \right)^T M_k \odot \left(\underline{\underline{R}}_{0 \rightarrow i, q\alpha} \odot J_{v ik_{cdg}, q\omega}, R_{0 \rightarrow i} \odot \underline{\underline{J}}_{v ik_{cdg}, q\omega, q\omega} \right) \end{cases} \quad (427)$$

Penchons-nous enfin de la contribution angulaire β_ω :

$$\frac{\partial}{\partial q} \beta_\omega = \frac{\partial}{\partial q} \left(\sum_{k=i+1}^{i+j} J_{\omega oi, q\omega}^T I_{0k} R_{0 \rightarrow i} J_{\omega ik_{cdg}, q\omega} \right) \quad (428)$$

$$\begin{aligned}
& \Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial q} \beta_\omega = \sum_{k=i+1}^{i+j} b_{\omega 1} + b_{\omega 2} + b_{\omega 3} \\
& b_{\omega 1} = \frac{\partial}{\partial q} (J_{\omega_{oi}, q_\omega}^T) \odot I_{0k} R_{0 \rightarrow i} J_{\omega_{ik} cdg, q_\omega} \\
& b_{\omega 2} = J_{\omega_{oi}, q_\omega}^T \odot \frac{\partial}{\partial q} (I_{0k}) \odot R_{0 \rightarrow i} J_{\omega_{ik} cdg, q_\omega} \\
& b_{\omega 3} = J_{\omega_{oi}, q_\omega}^T I_{0k} \odot \frac{\partial}{\partial q} (R_{0 \rightarrow i} J_{\omega_{ik} cdg, q_\omega}) \\
& \frac{\partial}{\partial q} (J_{\omega_{oi}, q_\omega}^T) = \underline{\underline{J}}_{\omega_{oi}, q_\alpha, q_\alpha}^T, (\mathbb{O}_{i,3,j}) \\
& \underline{\underline{I}}_{0k,q} = \underline{\underline{R}}_{0 \rightarrow k,q} \odot I_k^* R_{0 \rightarrow k}^T + R_{0 \rightarrow k} I_k^* \odot \underline{\underline{R}}_{k \rightarrow 0,q} \\
& \frac{\partial}{\partial q} (R_{0 \rightarrow i} J_{\omega_{ik} cdg, q_\omega}) = \underline{\underline{R}}_{0 \rightarrow i,q_\alpha} \odot J_{\omega_{ik} cdg, q_\omega}, (\mathbb{O}_{3,j,j}) + (\mathbb{O}_{3,j,i}), R_{0 \rightarrow i} \odot \underline{\underline{J}}_{\omega_{ik} cdg, q_\omega, q_\omega}
\end{aligned} \right. \quad (429)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial q} \beta_\omega = \sum_{k=i+1}^{i+j} b_{\omega 1} + b_{\omega 2} + b_{\omega 3} \\
& b_{\omega 1} = \underline{\underline{J}}_{\omega_{oi}, q_\alpha, q_\alpha}^T \odot I_{0k} R_{0 \rightarrow i} J_{\omega_{ik} cdg, q_\omega}, (\mathbb{O}_{i,3,j}) \\
& b_{\omega 2} = J_{\omega_{oi}, q_\omega}^T \odot \underline{\underline{I}}_{0k,q} \odot R_{0 \rightarrow i} J_{\omega_{ik} cdg, q_\omega} \\
& b_{\omega 3} = J_{\omega_{oi}, q_\omega}^T I_{0k} \odot \left(\underline{\underline{R}}_{0 \rightarrow i,q_\alpha} \odot J_{\omega_{ik} cdg, q_\omega}, R_{0 \rightarrow i} \odot \underline{\underline{J}}_{\omega_{ik} cdg, q_\omega, q_\omega} \right)
\end{aligned} \right. \quad (430)
\end{aligned}$$

6.5.3.2 Théorème Coriolis-centrifuge : Matrice d'inertie et jacobienne au centre de gravité et modèle composite

Théorème 10

Soient deux robots sériels possédant respectivement i et j articulations tels que :

Soit un corps k de l'un de ces robots et k_{cdg} le centre de gravité associé.

Si

$$\begin{cases} A_{0j} = \begin{pmatrix} A_{oi} + \alpha & \beta \\ \beta^T & A_{ij} \end{pmatrix} \\ \alpha = \sum_{k=i+1}^{i+j} \left(J_{v_{oi}, q_\alpha} + \underline{\underline{\dot{R}}}_{0 \rightarrow i, q_\alpha} \odot (t_{i \rightarrow k_{cdg}}) \right)^T M_k \left(J_{v_{oi}, q_\alpha} + \underline{\underline{\dot{R}}}_{0 \rightarrow i, q_\alpha} \odot (t_{i \rightarrow k_{cdg}}) \right) + \sum_{k=i+1}^{i+j} J_{\omega_{oi}}^T I_{0k} J_{\omega_{oi}} \\ \beta = \sum_{k=i+1}^{i+j} \left(J_{v_{oi}, q_\alpha} + \underline{\underline{\dot{R}}}_{0 \rightarrow i, q_\alpha} \odot (t_{i \rightarrow k_{cdg}}) \right)^T M_k (R_{0 \rightarrow i} J_{v_{ik_{cdg}}, q_\omega}) + \sum_{k=i+1}^{i+j} J_{\omega_{oi}}^T I_{0k} R_{0 \rightarrow i} J_{\omega_{ik_{cdg}}, q_\omega} \end{cases}$$

Et

$$\begin{cases} \frac{\partial A_{0i}}{\partial q_\alpha} = \Gamma_{oi} + \Gamma_{oi}^T + \Gamma_{oi}^* \\ \Gamma_{oi} = \sum_{k=1}^i J_{0k_{cdg}}^T \begin{pmatrix} M_k & \mathbb{O}_3 \\ \mathbb{O}_3 & I_{0k} \end{pmatrix} \odot \underline{\underline{j}}_{0k_{cdg}} \\ \Gamma_{oi}^* = \sum_{k=1}^i J_{\omega_{0k_{cdg}}}^T \odot \underline{\underline{j}}_{0k} \odot J_{\omega_{0k_{cdg}}} \\ \underline{\underline{j}}_{0k_{cdg}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{\dot{R}}}_{0 \rightarrow k} \odot \underline{\underline{t}}_{k \rightarrow k_{cdg}} + \underline{\underline{j}}_{v_{0k}} \\ \underline{\underline{j}}_{\omega_{0k}, q_\alpha, q_\alpha}^*, (\mathbb{O}_{3, i-k, j}) \end{pmatrix} \\ \underline{\underline{j}}_{0k, q_\alpha} = \underline{\underline{\dot{R}}}_{0 \rightarrow k, q_\alpha} \odot I_k^* R_{0 \rightarrow k}^T + R_{0 \rightarrow k} I_k^* \odot \underline{\underline{\dot{R}}}_{k \rightarrow 0, q_\alpha} \end{cases}, \begin{cases} \frac{\partial A_{ij}}{\partial q_\omega} = \Gamma_{ij} + \Gamma_{ij}^T + \Gamma_{ij}^* \\ \Gamma_{ij} = \sum_{k=1}^j J_{ik_{cdg}}^T \begin{pmatrix} M_k & \mathbb{O}_3 \\ \mathbb{O}_3 & I_{ik} \end{pmatrix} \odot \underline{\underline{j}}_{ik_{cdg}} \\ \Gamma_{ij}^* = \sum_{k=1}^j J_{\omega_{ik_{cdg}}}^T \odot \underline{\underline{j}}_{ik} \odot J_{\omega_{ik_{cdg}}} \\ \underline{\underline{j}}_{ik_{cdg}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{\dot{R}}}_{i \rightarrow k} \odot \underline{\underline{t}}_{k \rightarrow k_{cdg}} + \underline{\underline{j}}_{v_{ik}} \\ \underline{\underline{j}}_{\omega_{ik}, q_\omega, q_\omega}^*, (\mathbb{O}_{3, i-k, j}) \end{pmatrix} \\ \underline{\underline{j}}_{jk, q_\omega} = \underline{\underline{\dot{R}}}_{j \rightarrow k, q_\omega} \odot I_k^* R_{i \rightarrow k}^T + R_{i \rightarrow k} I_k^* \odot \underline{\underline{\dot{R}}}_{k \rightarrow i, q_\omega} \end{cases}$$

Alors

$$\frac{\partial A}{\partial q} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial q} A_{oi} + \frac{\partial}{\partial q} \alpha & \frac{\partial}{\partial q} \beta \\ \frac{\partial}{\partial q} \beta^T & \frac{\partial}{\partial q} A_{ij} \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial q} A_{oi} = \left(\frac{\partial A_{oi}}{\partial q_\alpha} \right), (\mathbb{O}_{i,i,j}) \quad \frac{\partial}{\partial q} A_{ij} = (\mathbb{O}_{j,j,i}), \left(\frac{\partial A_{ij}}{\partial q_\omega} \right) \\ \frac{\partial}{\partial q} \alpha = \sum_{k=i+1}^{i+j} a_v^T + a_v + a_\omega^T + a_\omega + a_\omega^* \\ a_v = \left(J_{v_{oi,q_\alpha}} + \underline{\underline{\dot{R}_{0 \rightarrow i,q_\alpha}}} \odot (t_{i \rightarrow k_{cdg}}) \right)^T M_k \odot \left(\left(\underline{\underline{j_{v_{oi,q_\alpha,q_\alpha}}}} + \underline{\underline{\dot{R}_{0 \rightarrow i,q_\alpha,q_\alpha}}} \odot \underline{\underline{t_{i \rightarrow k_{cdg}}}} \right), \left(\underline{\underline{\dot{R}_{0 \rightarrow i,q_\alpha}}} \odot J_{v_{ik_{cdg},q_\omega}} \right) \right) \\ a_\omega = J_{\omega_{oi,q_\alpha}}^T I_{0k} \odot \underline{\underline{j_{\omega_{oi,q_\alpha,q}}}} \\ a_\omega^* = J_{\omega_{oi,q_\alpha}}^T \odot \underline{\underline{j_{0k,q}}} \odot J_{\omega_{oi,q_\alpha}} \\ \frac{\partial}{\partial q} \beta = \sum_{k=i+1}^{i+j} b_{v1} + b_{v2} + b_{\omega1} + b_{\omega2} + b_{\omega3} \\ b_{v1} = \left(\left(\underline{\underline{j_{v_{oi,q_\alpha,q_\alpha}}}} + \underline{\underline{\dot{R}_{0 \rightarrow i,q_\alpha,q_\alpha}}} \odot \underline{\underline{t_{i \rightarrow k_{cdg}}}} \right), \left(\underline{\underline{\dot{R}_{0 \rightarrow i,q_\alpha}}} \odot J_{v_{ik_{cdg},q_\omega}} \right) \right)^T \odot M_k (R_{0 \rightarrow i} J_{v_{ik_{cdg},q_\omega}}) \\ b_{v2} = \left(J_{v_{oi,q_\alpha}} + \underline{\underline{\dot{R}_{0 \rightarrow i,q_\alpha}}} \odot (t_{i \rightarrow k_{cdg}}) \right)^T M_k \odot \left(\underline{\underline{\dot{R}_{0 \rightarrow i,q_\alpha}}} \odot J_{v_{ik_{cdg},q_\omega}}, R_{0 \rightarrow i} \odot \underline{\underline{j_{v_{ik_{cdg},q_\omega,q_\omega}}}} \right) \\ b_{\omega1} = \underline{\underline{j_{\omega_{oi,q_\alpha,q_\alpha}}}}^T \odot I_{0k} R_{0 \rightarrow i} J_{\omega_{ik_{cdg},q_\omega}}, (\mathbb{O}_{i,3,j}) \\ b_{\omega2} = J_{\omega_{oi,q_\omega}}^T \odot \underline{\underline{j_{0k,q}}} \odot R_{0 \rightarrow i} J_{\omega_{ik_{cdg},q_\omega}} \\ b_{\omega3} = J_{\omega_{oi,q_\omega}}^T I_{0k} \odot \left(\underline{\underline{\dot{R}_{0 \rightarrow i,q_\alpha}}} \odot J_{\omega_{ik_{cdg},q_\omega}}, R_{0 \rightarrow i} \odot \underline{\underline{j_{\omega_{ik_{cdg},q_\omega,q_\omega}}}} \right) \end{array} \right.$$

6.5.3.3 Application au 4R plan

Pour cet exemple on se focalisera sur $\frac{\partial}{\partial q} A_{o2} + \frac{\partial}{\partial q} \alpha$ et plus particulièrement la partie concernant la contribution linéaire de la vitesse. Construisons donc dans un premier temps $\frac{\partial}{\partial q} A_{v_{o2}}$:

$$\frac{\partial}{\partial q} A_{v_{o2}} = \mathbb{O}_{2,2}, \begin{pmatrix} -\left(2l_1 m_2 (s_2 l_{2_{cdg}}) \right) & X \\ -\left(l_1 m_2 (s_2 l_{2_{cdg}}) \right) & 0 \end{pmatrix}, \mathbb{O}_{2,2,2} \quad (431)$$

Construisons maintenant $\frac{\partial}{\partial q} \alpha$ en commençant par les $J_{v_{oi}, q_\alpha} + \underline{\underline{\dot{R}}}_{0 \rightarrow i, q_\alpha} \odot (t_{i \rightarrow k_{cdg}})$:

$$\left\{ \begin{array}{l} J_{v_{02'}, q_\alpha} + \underline{\underline{\dot{R}}}_{0 \rightarrow 2, q_\alpha} \odot (t_{2' \rightarrow 3_{cdg}}) = \begin{pmatrix} -(s_{11}l_1 + s_{12}l_2 + s_{123}l_{3_{cdg}}) & -(s_{12}l_2 + s_{123}l_{3_{cdg}}) \\ (c_{11}l_1 + c_{12}l_2 + c_{123}l_{3_{cdg}}) & (c_{12}l_2 + c_{123}l_{3_{cdg}}) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ J_{v_{02'}, q_\alpha} + \underline{\underline{\dot{R}}}_{0 \rightarrow 2, q_\alpha} \odot (t_{2' \rightarrow 4_{cdg}}) = \begin{pmatrix} -(s_{11}l_1 + s_{12}l_2 + s_{123}l_3 + s_{1234}l_{4_{cdg}}) & -(s_{12}l_2 + s_{123}l_3 + s_{1234}l_{4_{cdg}}) \\ (c_{11}l_1 + c_{12}l_2 + c_{123}l_3 + c_{1234}l_{4_{cdg}}) & (c_{12}l_2 + c_{123}l_3 + c_{1234}l_{4_{cdg}}) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (432)$$

Il nous faut maintenant calculer les

$$\left(\left(\underline{\underline{\dot{J}}}_{v_{02}, q_\alpha, q_\alpha} + \underline{\underline{\dot{R}}}_{0 \rightarrow 2, q_\alpha, q_\alpha} \odot t_{2' \rightarrow 3_{cdg}} \right), \left(\underline{\underline{\dot{R}}}_{0 \rightarrow 2, q_\alpha} \odot J_{v_{23}, q_\alpha, q_\omega} \right) \right) \text{ en commençant par le premier } \\ \text{élément avec } \underline{\underline{\dot{J}}}_{v_{02}, q_\alpha, q_\alpha} \text{ et } \underline{\underline{\dot{R}}}_{0 \rightarrow 2, q_\alpha, q_\alpha} :$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial J_{v_{02'}, q_\alpha}}{\partial q_1} = \begin{pmatrix} -(c_{11}l_1 + c_{12}l_2) & -(c_{12}l_2) \\ -(s_{11}l_1 + s_{12}l_2) & -(s_{12}l_2) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \left(\frac{\partial \underline{\underline{\dot{R}}}_{0 \rightarrow 2, q_\alpha, q_\alpha}}{\partial q_1} = \begin{pmatrix} -c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & -c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & -c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \\ \frac{\partial J_{v_{02'}, q_\alpha}}{\partial q_2} = \begin{pmatrix} -(c_{12}l_2) & -(c_{12}l_2) \\ -(s_{12}l_2) & -(s_{12}l_2) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \left(\frac{\partial \underline{\underline{\dot{R}}}_{0 \rightarrow 2, q_\alpha, q_\alpha}}{\partial q_2} = \begin{pmatrix} -c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & -c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & -c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \end{array} \right. \quad (433)$$

D'où l'expression de $\underline{\underline{\dot{R}}}_{0 \rightarrow 2, q_\alpha, q_\alpha} \odot t_{2' \rightarrow 3_{cdg}}$ et $\underline{\underline{\dot{R}}}_{0 \rightarrow 2, q_\alpha, q_\alpha} \odot t_{2' \rightarrow 4_{cdg}}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \underline{\underline{\dot{R}}}_{0 \rightarrow 2, q_\alpha, q_\alpha}}{\partial q_1} \odot t_{2' \rightarrow 3_{cdg}} = \frac{\partial \underline{\underline{\dot{R}}}_{0 \rightarrow 2, q_\alpha, q_\alpha}}{\partial q_2} \odot t_{2' \rightarrow 3_{cdg}} = \begin{pmatrix} -c_{123}l_{3_{cdg}} & -c_{123}l_{3_{cdg}} \\ -s_{123}l_{3_{cdg}} & -s_{123}l_{3_{cdg}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \frac{\partial \underline{\underline{\dot{R}}}_{0 \rightarrow 2, q_\alpha, q_\alpha}}{\partial q_1} \odot t_{2' \rightarrow 4_{cdg}} = \frac{\partial \underline{\underline{\dot{R}}}_{0 \rightarrow 2, q_\alpha, q_\alpha}}{\partial q_2} \odot t_{2' \rightarrow 4_{cdg}} = \begin{pmatrix} -(c_{123}l_3 + c_{1234}l_{4_{cdg}}) & -(c_{123}l_3 + c_{1234}l_{4_{cdg}}) \\ -(s_{123}l_3 + s_{1234}l_{4_{cdg}}) & -(s_{123}l_3 + s_{1234}l_{4_{cdg}}) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (434)$$

Et finalement les derniers éléments $\underline{\underline{\dot{R}}}_{0 \rightarrow 2, q_\alpha} \odot J_{v_{2'3}, q_\alpha}$ et $\underline{\underline{\dot{R}}}_{0 \rightarrow 2, q_\alpha} \odot J_{v_{2'4}, q_\alpha}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{\dot{R}}}_{0 \rightarrow 2, q_\alpha} \odot J_{v_{2'3}, q_\alpha} = \begin{pmatrix} -c_{123}l_{3_{cdg}} & 0 \\ -s_{123}l_{3_{cdg}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -c_{123}l_{3_{cdg}} & 0 \\ -s_{123}l_{3_{cdg}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \underline{\underline{\dot{R}}}_{0 \rightarrow 2, q_\alpha} \odot J_{v_{2'4}, q_\alpha} = \begin{pmatrix} -(c_{123}l_3 + c_{1234}l_{4_{cdg}}) & -c_{1234}l_{4_{cdg}} \\ -(s_{123}l_3 + s_{1234}l_{4_{cdg}}) & -c_{1234}l_{4_{cdg}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -(c_{123}l_3 + c_{1234}l_{4_{cdg}}) & -c_{1234}l_{4_{cdg}} \\ -(s_{123}l_3 + s_{1234}l_{4_{cdg}}) & -c_{1234}l_{4_{cdg}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (435)$$

Ce qui nous permet de calculer :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{v_1} + a_{v_1}^T = \mathbb{O}_{2,2,4} \\ \alpha_{v_2} + a_{v_2}^T = \begin{pmatrix} a'_{11} & X \\ a'_{21} & 0 \end{pmatrix} \\ a'_{11} = -\left(2l_1m_3(s_2l_2 + s_{23}l_{3cdg}) + 2l_1m_4(s_2l_2 + s_{23}l_3 + s_{234}l_{4cdg})\right) \\ a'_{21} = -\left(m_3(s_2l_2 + s_{23}l_{3cdg}) + l_1m_4(s_2l_2 + s_{23}l_3 + s_{234}l_{4cdg})\right) \\ \alpha_{v_3} + a_{v_3}^T = \begin{pmatrix} a'_{11} & X \\ a'_{21} & a'_{22} \end{pmatrix} \\ a'_{11} = -\left(2l_1m_3(s_{23}l_{3cdg}) + 2l_2m_3(s_3l_{3cdg}) + 2l_1m_4(s_{23}l_3 + s_{234}l_{4cdg}) + 2l_2m_4(s_3l_3 + s_{34}l_{4cdg})\right) \\ a'_{21} = -\left(l_1m_3(s_{23}l_{3cdg}) + 2l_2m_3(s_3l_{3cdg}) + l_1m_4(s_{23}l_3 + s_{234}l_{4cdg}) + 2l_2m_4(s_3l_3 + s_{34}l_{4cdg})\right) \\ a'_{22} = -\left(2l_2m_3(s_3l_{3cdg}) + 2l_2m_4(s_3l_3 + s_{34}l_{4cdg})\right) \\ \alpha_{v_4} + a_{v_4}^T = \begin{pmatrix} a'_{11} & X \\ a'_{21} & a'_{22} \end{pmatrix} \\ a'_{11} = -\left(2l_1m_4(s_{234}l_{4cdg}) + 2l_2m_4(s_{34}l_{4cdg}) + 2l_3m_4(s_4l_{4cdg})\right) \\ a'_{21} = -\left(l_1m_4(s_{234}l_{4cdg}) + 2l_2m_4(s_{34}l_{4cdg}) + 2l_3m_4(s_4l_{4cdg})\right) \\ a'_{22} = -\left(2l_2m_4(s_{34}l_{4cdg}) + 2l_3m_4(s_4l_{4cdg})\right) \end{array} \right. \quad (436)$$

Ce qui nous permet en additionnant (431) et (436) de retrouver (399).

6.5.4 Coriolis-centrifuge : Matrice d'inertie et jacobienne au centre de gravité et changement de repère base-distal

6.5.4.1 Cas général

On reprendra le résultat du théorème 8 afin de calculer $\frac{\partial}{\partial q} A_{i0}$:

$$\frac{\partial}{\partial q} A_{i0} = \frac{\partial}{\partial q} (A_{0i} + \alpha + \beta + \beta^T) \quad (437)$$

On observe immédiatement qu'il suffit de calculer la différentielle de α et β pour obtenir la contribution de Coriolis et centrifuge du changement de repère base-distal.

$$\frac{\partial}{\partial q} \alpha = \frac{\partial}{\partial q} \sum_{k=1}^i \left(\underline{\dot{R}}_{i \rightarrow 0} \odot t_{0 \rightarrow kcdg} + J_{v_{i0}} \right)^T M_k \left(\underline{\dot{R}}_{i \rightarrow 0} \odot t_{0 \rightarrow kcdg} + J_{v_{i0}} \right) \quad (438)$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial q} \alpha = \dot{\alpha} = \dot{\alpha}_1 + \dot{\alpha}_2 \\ \dot{\alpha}_1 = \sum_{k=1}^i \frac{\partial}{\partial q} \left(\underline{\dot{R}}_{i \rightarrow 0} \odot t_{0 \rightarrow kcdg} + J_{v_{i0}} \right)^T M_k \left(\underline{\dot{R}}_{i \rightarrow 0} \odot t_{0 \rightarrow kcdg} + J_{v_{i0}} \right) \\ \dot{\alpha}_2 = \dot{\alpha}_1^T = \sum_{k=1}^i \left(\underline{\dot{R}}_{i \rightarrow 0} \odot t_{0 \rightarrow kcdg} + J_{v_{i0}} \right)^T M_k \frac{\partial}{\partial q} \left(\underline{\dot{R}}_{i \rightarrow 0} \odot t_{0 \rightarrow kcdg} + J_{v_{i0}} \right) \end{array} \right. \quad (439)$$

On obtient donc la différentielle de α en utilisant l'expression suivante :

$$\frac{\partial}{\partial q} \left(\underline{\underline{\dot{R}}}_{i \rightarrow 0} \odot t_{0 \rightarrow k_{cdg}} + J_{v_{io}} \right) = \underline{\underline{\dot{R}}}_{i \rightarrow 0} \odot \underline{\underline{t}}_{0 \rightarrow k_{cdg}} + \underline{\underline{\dot{R}}}_{i \rightarrow 0} \odot J_{v_{ok_{cdg}}} + \underline{\underline{\dot{J}}}_{v_{io}} \quad (440)$$

Traisons enfin le cas de β :

$$\frac{\partial}{\partial q} \beta = \frac{\partial}{\partial q} \sum_{k=1}^i \left(R_{i \rightarrow 0} J_{v_{ok_{cdg}}} \right)^T M_k \left(\underline{\underline{\dot{R}}}_{i \rightarrow 0} \odot t_{0 \rightarrow k_{cdg}} + J_{v_{io}} \right) \quad (441)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial}{\partial q} \beta = \dot{\beta} = \dot{\beta}_1 + \dot{\beta}_2 \\ \dot{\beta}_1 = \sum_{k=1}^i \frac{\partial}{\partial q} \left(R_{i \rightarrow 0} J_{v_{ok_{cdg}}} \right)^T M_k \left(\underline{\underline{\dot{R}}}_{i \rightarrow 0} \odot t_{0 \rightarrow k_{cdg}} + J_{v_{io}} \right) \\ \dot{\beta}_2 = \sum_{k=1}^i \left(R_{i \rightarrow 0} J_{v_{ok_{cdg}}} \right)^T M_k \frac{\partial}{\partial q} \left(\underline{\underline{\dot{R}}}_{i \rightarrow 0} \odot t_{0 \rightarrow k_{cdg}} + J_{v_{io}} \right) \end{cases} \quad (442)$$

Le calcul de $\dot{\beta}_2$ ne présente aucune difficulté particulière puisqu'il reprend des éléments déjà connus. Quant à $\dot{\beta}_1$, il suffit de calculer comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial q} \left(R_{i \rightarrow 0} J_{v_{ok_{cdg}}} \right) = \underline{\underline{\dot{R}}}_{i \rightarrow 0} \odot J_{v_{ok_{cdg}}} + R_{i \rightarrow 0} \odot \underline{\underline{\dot{J}}}_{v_{ok_{cdg}}} \quad (443)$$

6.5.4.2 Théorème Coriolis-centrifuge : Matrice d'inertie et jacobienne au centre de gravité et changement de repère base-distal

Théorème 11

Soit un robot série possédant i articulations.

Soit un corps k de ce robot et k_{cdg} le centre de gravité associé.

Si

$$\begin{cases} A_{i0} = A_{0i_v} + A_{0i_\omega} + \alpha + \beta + \beta^T = A_{0i} + \alpha + \beta + \beta^T \\ \alpha = \sum_{k=1}^i \left(\underline{\dot{R}}_{i \rightarrow 0} \odot \underline{t}_{0 \rightarrow k_{cdg}} + J_{v_{i0}} \right)^T M_k \left(\underline{\dot{R}}_{i \rightarrow 0} \odot \underline{t}_{0 \rightarrow k_{cdg}} + J_{v_{i0}} \right) \\ \beta = \sum_{k=1}^i \left(R_{i \rightarrow 0} J_{v_{0k_{cdg}}} \right)^T M_k \left(\underline{\dot{R}}_{i \rightarrow 0} \odot \underline{t}_{0 \rightarrow k_{cdg}} + J_{v_{i0}} \right) \end{cases}$$

Alors

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial q} A_{i0} = \frac{\partial}{\partial q} A_{0i} + \dot{\alpha} + \dot{\beta} + \dot{\beta}^T \\ \dot{\alpha} = \dot{\alpha}_1 + \dot{\alpha}_1^T \\ \dot{\alpha}_1 = \sum_{k=1}^i \left(\underline{\dot{R}}_{i \rightarrow 0} \odot \underline{t}_{0 \rightarrow k_{cdg}} + \underline{\dot{R}}_{i \rightarrow 0} \odot J_{v_{0k_{cdg}}} + J_{v_{i0}} \right)^T \odot M_k \left(\underline{\dot{R}}_{i \rightarrow 0} \odot \underline{t}_{0 \rightarrow k_{cdg}} + J_{v_{i0}} \right) \\ \dot{\beta} = \dot{\beta}_1 + \dot{\beta}_2 \\ \dot{\beta}_1 = \sum_{k=1}^i \left(\underline{\dot{R}}_{i \rightarrow 0} \odot J_{v_{0k_{cdg}}} + R_{i \rightarrow 0} \odot J_{v_{0k_{cdg}}} \right)^T \odot M_k \left(\underline{\dot{R}}_{i \rightarrow 0} \odot \underline{t}_{0 \rightarrow k_{cdg}} + J_{v_{i0}} \right) \\ \dot{\beta}_2 = \sum_{k=1}^i \left(R_{i \rightarrow 0} J_{v_{0k_{cdg}}} \right)^T M_k \odot \left(\underline{\dot{R}}_{i \rightarrow 0} \odot \underline{t}_{0 \rightarrow k_{cdg}} + \underline{\dot{R}}_{i \rightarrow 0} \odot J_{v_{0k_{cdg}}} + J_{v_{i0}} \right) \end{cases}$$

6.6 Terme de gravité

6.6.1 Terme de gravité et jacobienne au centre de gravité et modèle composite

Théorème 12

Soit deux robots séries possédant respectivement i et j articulations tels que :

$$\begin{cases} G_{0i} = \sum_{k=1}^i - \left(J_{v_{0k_{cdg}}, q_\alpha} \right)^T m_k g_0 \\ G_{ij} = \sum_{k=1}^j - \left(J_{v_{ik_{cdg}}, q_\omega} \right)^T m_k g_i \end{cases}$$

Si

$$\begin{cases} J_{0k_{cdg}, q} = \begin{cases} (J_{0k_{cdg}, q_\alpha} \quad \mathbb{O}_{6,j}), & \forall k \in \llbracket 1, \dots, i \rrbracket \\ \left(\begin{array}{cc} J_{v_{0i}, q_\alpha} + \underline{\underline{\dot{R}_{0 \rightarrow i, q_\alpha} \odot (t_{i \rightarrow k_{cdg}})}} & R_{0 \rightarrow i} J_{v_{ik_{cdg}}} \\ J_{\omega_{0i}} & R_{0 \rightarrow i} J_{\omega_{ik_{cdg}}} \end{array} \right), & \forall k \in \llbracket i+1, \dots, i+j \rrbracket \end{cases} \\ G_{0j} = \sum_{k=1}^{i+j} - \left(J_{v_{0k_{cdg}}, q} \right)^T m_k g_0 \end{cases}$$

Alors

$$\begin{cases} G_{0i} = \begin{pmatrix} G_{0i} \\ \mathbb{O}_{j,1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G_{0i}^* \\ G_{ij} \end{pmatrix} \\ G_{0i}^* = \sum_{k=i+1}^{i+j} - \left(J_{v_{0i}, q_\alpha} + \underline{\underline{\dot{R}_{0 \rightarrow i, q_\alpha} \odot (t_{i \rightarrow k_{cdg}})}} \right)^T m_k g_0 \end{cases}$$

6.6.2 Terme de gravité et jacobienne au centre de gravité et changement de repère base-distal

6.6.2.1 Cas général

Ce cas est typiquement utile pour évaluer l'impact de la gravité sur le couple actionneur lorsque l'on passe d'une phase d'appui à une phase de levée de pied. On reprend donc l'expression de la jacobienne du 6.2.5 et envisageons donc :

$$G_{i0} = \sum_{k=1}^i - \left(J_{v_{ik_{cdg}}} \right)^T m_k g_i \quad (444)$$

$$\Leftrightarrow G_{i0} = \sum_{k=1}^i - \left(R_{i \rightarrow 0} J_{v_{0k_{cdg}}} + \underline{\underline{\dot{R}_{i \rightarrow 0} \odot t_{0 \rightarrow k_{cdg}}}} + J_{v_{i0}} \right)^T m_k g_i \quad (445)$$

$$\Leftrightarrow G_{i0} = \sum_{k=1}^i - \left(\underline{\underline{\dot{R}_{i \rightarrow 0}}} \odot t_{0 \rightarrow k_{cdg}} + J_{v_{i0}} \right)^T m_k g_i + \sum_{k=1}^i - \left(R_{i \rightarrow 0} J_{v_{0k_{cdg}}} \right)^T m_k g_i \quad (446)$$

$$\Leftrightarrow G_{i0} = \sum_{k=1}^i - \left(\underline{\underline{\dot{R}_{i \rightarrow 0}}} \odot t_{0 \rightarrow k_{cdg}} + J_{v_{i0}} \right)^T m_k g_i + \sum_{k=1}^i - \left(J_{v_{0k_{cdg}}} \right)^T (R_{i \rightarrow 0})^T m_k g_i \quad (447)$$

$$\Leftrightarrow G_{i0} = \sum_{k=1}^i - \left(\underline{\underline{\dot{R}_{i \rightarrow 0}}} \odot t_{0 \rightarrow k_{cdg}} + J_{v_{i0}} \right)^T m_k g_i + G_{0i} \quad (448)$$

6.6.2.2 *Théorème terme de gravité et jacobienne au centre de gravité et changement de repère base-distale*

Théorème 13

Si

$$\left\{ \begin{array}{l} J_{ik_{cdg}} = \begin{pmatrix} R_{i \rightarrow 0} J_{v_{0k_{cdg}}} + \underline{\underline{\dot{R}_{i \rightarrow 0}}} \odot t_{0 \rightarrow k_{cdg}} + J_{v_{i0}} \\ R_{i \rightarrow 0} J_{\omega_{ok}} \end{pmatrix} \\ G_{0i} = \sum_{k=1}^i - \left(J_{v_{0k_{cdg}}} \right)^T m_k g_0 \end{array} \right.$$

Alors

$$G_{i0} = \sum_{k=1}^i - \left(\underline{\underline{\dot{R}_{i \rightarrow 0}}} \odot t_{0 \rightarrow k_{cdg}} + J_{v_{i0}} \right)^T m_k g_i + G_{0i}$$