



HAL
open science

Commande sous contraintes et incertitudes des réseaux de transport

Mohamad Sleiman

► **To cite this version:**

Mohamad Sleiman. Commande sous contraintes et incertitudes des réseaux de transport. Automatique. Université Bourgogne Franche-Comté, 2018. Français. NNT : 2018UBFCA037 . tel-02077649

HAL Id: tel-02077649

<https://theses.hal.science/tel-02077649>

Submitted on 23 Mar 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

SPIM

Thèse de Doctorat



école doctorale sciences pour l'ingénieur et microtechniques

UNIVERSITÉ DE TECHNOLOGIE BELFORT-MONTBÉLIARD

Commande sous contraintes et incertitudes des réseaux de transport

■ MOHAMAD SLEIMAN

SPIM

Thèse de Doctorat



école doctorale sciences pour l'ingénieur et microtechniques
UNIVERSITÉ DE TECHNOLOGIE BELFORT-MONTBÉLIARD

THÈSE présentée par

MOHAMAD SLEIMAN

pour obtenir le

Grade de Docteur de

l'Université de Technologie de Belfort-Montbéliard

Spécialité : **Automatique**

Commande sous contraintes et incertitudes des réseaux de transport

Unité de Recherche :
Nanomédecine, imagerie, thérapeutique

Soutenue publiquement le 12 décembre 2018 devant le jury composé de :

Rapporteur	ABDELAZIZ HAMZAOUI	Professeur des Universités, IUT Troyes
Rapporteur	MICHEL BASSET	Professeur des Universités, Université de Haute Alsace
Président du jury	ABDELLAH EL MOUDNI	Professeur des Universités, UTBM
Examineur	MUSTAPHA OULADSINE	Professeur des Universités, Aix-Marseille Université
Examineur	OLIVIER GRUNDER	Maître de Conférences HDR, UTBM
Directeur de thèse	RACHID BOUYEKHF	Maître de Conférences HDR, UTBM



THESE DE DOCTORAT DE L'ETABLISSEMENT UNIVERSITE BOURGOGNE FRANCHE-COMTE

PREPAREE A l'Université de Technologie de Belfort-Montbéliard

Ecole doctorale n°37

École Doctorale SPIM (Sciences Pour l'Ingénieur et Microtechniques)

Doctorat en Automatique

Par

M. SLEIMAN Mohamad

Commande sous contraintes et incertitudes des réseaux de transport

Thèse présentée et soutenue à Belfort, le 12 décembre 2018

Composition du jury :

M., HAMZAOUI, Abdelaziz
M., BASSET, Michel
M., EL MOUDNI, Abdellah
M., OULADSINE, Mustapha
M., GRUNDER, Olivier
M., BOUYEKHF, Rachid

Professeur des Universités, IUT Troyes
Professeur des Universités, Université de Haute Alsace
Professeur des Universités, UTBM
Professeur des Universités, Aix-Marseille Université
Maître de Conférences HDR, UTBM
Maître de Conférences HDR, UTBM

Rapporteur
Rapporteur
Président du jury
Examineur
Examineur
Directeur de thèse

Titre : Commande sous contraintes et incertitudes des réseaux de transport

Mots clés : Système de transport, Système thermodynamique, Entropie, Contrôle des feux de circulation, Théorie des systèmes dissipatifs, Stabilisation, Incertitudes

Résumé : Le transport a toujours été l'un des composants déterminants de la vie urbaine et de son développement économique. A partir de la seconde moitié du siècle dernier, l'amélioration du niveau de vie moyen et du taux d'équipement des ménages a permis au plus grand nombre d'accéder au déplacement par véhicule particulier. Nous avons donc assisté à une course entre la croissance du trafic routier et les progrès quantitatifs et qualitatifs de la voirie. Cette quantité d'actions génère des problèmes au niveau de la fluidité du trafic, d'où l'apparition de congestion. La congestion se produit aujourd'hui de façon quasi-quotidienne dans les réseaux routiers. Elle est source de perte de temps, augmentation de la consommation d'énergie, nuisance et détérioration de l'environnement. La solution aux problèmes de congestion routière ne passe pas toujours par l'augmentation de l'investissement dans les infrastructures de transport. En effet, l'offre de terrains est épuisée et le développement de l'infrastructure routière est coûteux. D'où, la tendance actuelle est plutôt à une meilleure utilisation des infrastructures existantes. En particulier, les feux de signalisation jouent un rôle important parmi les approches qui permettent d'éviter la congestion. En effet, la conception d'une meilleure commande des feux de signalisation a fait l'objet de plusieurs recherches afin

d'améliorer la circulation au niveau du réseau à grande échelle.

Dans ce mémoire, nous nous intéressons essentiellement à un travail en amont (action a priori) permettant d'éviter la congestion en forçant le nombre de véhicules à ne pas dépasser les capacités maximales des voies du réseau de transport. Après avoir décrit les réseaux de carrefours des feux, nous présentons d'une manière non exhaustive, les méthodes développées pour la gestion et la régulation des carrefours. Ensuite, nous proposons trois stratégies de contrôle qui traitent le problème de contrôle de manières différentes. La première fait appel à la théorie des systèmes dissipatifs, la deuxième consiste à stabiliser le système au sens de Lyapunov autour de sa situation nominale et la troisième le stabilise en temps fini (pendant les heures de pointe). Ces commandes proposées respectent les contraintes sur l'état et sur la commande et prennent en considération les incertitudes existantes dans le système. Finalement, l'existence des commandes proposées a été caractérisée par la faisabilité de certaines LMI en utilisant l'outil CVX sous MATLAB. De plus, les performances de chaque commande sont évaluées par des simulations.

Title : Control under constraints and uncertainties of transportation networks

Keywords : Transportation system, Thermodynamic system, Entropy, Traffic signal control, Dissipativity theory, Stability, Uncertainties

Abstract: Transport has always been one of the key components of urban life and its economic development. From the second half of the last century, the improvement in the average standard of living and the household equipment rate allowed the greatest number of people to access the journey by private vehicle. We therefore witnessed a race between the growth of road traffic and the quantitative and qualitative progress of roads. This quantity of actions generates problems with the fluidity of the traffic, hence the appearance of congestion. The congestion occurs today almost daily in road networks. It is source of waste of time, increase of the energy consumption, the nuisance and the deterioration of the environment. The solution to the problems of road congestion does not still pass by the increase of the investment in the infrastructures of transport. Indeed, the offer of grounds is exhausted and the development of the road infrastructure is expensive. Hence, the current trend is rather for a better use of the existing infrastructures. In particular, traffic lights play an important role in avoiding congestion. Indeed, the design of a better control of traffic lights has been the subject of several researches in order to improve the network circulation on a large scale.

In this thesis, we are mainly interested in a work that prevents the congestion by forcing the number of vehicles to not exceed the lane capacities. After having described the network of intersections, we have realized a state of the art on the methods developed for the management and regulation of intersections. Next, we propose three control strategies that treat the control problem in different ways. The first one involves the theory of dissipative systems, the second one is to stabilize the system in the sense of Lyapunov around its nominal situation and the third one stabilizes it in finite time (during peak hours). These proposed controls respect the constraints on both state and control. In addition, they take into account the uncertainties in the system. Finally, the result of each strategy developed is presented by LMI in order to be solved by using the CVX tool under MATLAB. Besides, the performance of each control is evaluated by simulations.

Dédicaces

Avec tout mon amour éternel, je dédie ce mémoire :

À l'âme de mon père

À ma mère pour ses sacrifices innombrables

À mes frères pour leur soutien inconditionnel

À ma fiancée pour l'amour et l'affection qui nous unissent

Remerciements

Une thèse est une histoire qui décrit une fraction de vie avec tous ses hauts et ses bas. À l'issue de cette aventure, je souhaite adresser mes remerciements les plus sincères aux personnes qui m'ont apporté leur aide et qui ont contribué à l'aboutissement de ce travail.

Je tiens tout d'abord à exprimer ma sincère gratitude à M. **Rachid BOUYEKHF** pour m'avoir donné l'opportunité de travailler sous sa direction. Je lui témoigne toute ma reconnaissance pour son soutien scientifique et ses encouragements au cours de ces trois années de recherche. Ce travail ne serait pas réussi sans le partage inconditionnel de ses connaissances. Je ne le remercierai jamais assez.

Je remercie également les membres du jury d'avoir accepté de juger ce travail et de m'apporter des remarques constructives qui vont me permettre d'améliorer le manuscrit.

Un grand merci à tous mes collègues du département informatique au sein duquel j'ai passé ces trois années, pour la bonne ambiance de travail et leur aide technique.

J'adresse aussi mes remerciements à tous mes amis qui m'ont apporté leur soutien moral pendant mon travail, en particulier : **Zaher AL CHAMI** qui m'a toujours motivé et m'a aidé à vaincre les obstacles pour atteindre mes objectifs.

Enfin, je remercie tous ceux qui, de près ou de loin ont participé à l'accomplissement de ce travail dont les noms ne figurent pas ici car la liste ne saurait être exhaustive.

TABLE DES MATIÈRES

Liste des figures	viii
Liste des tableaux	ix
Introduction générale	xiii
Chapitre 1 Généralités	1
1.1 Introduction	1
1.2 Description d'un réseau de carrefours	2
1.2.1 Caractéristiques d'un carrefour à feux	2
1.2.2 Caractéristiques des feux d'un carrefour	5
1.2.3 Caractéristiques du mouvement du trafic	7
1.2.4 Infrastructures de mesure	9
1.3 Régulation des feux de signalisation	10
1.3.1 Boucle de régulation d'un réseau de carrefours	10
1.3.2 Modes de régulation d'un réseau de carrefours	11
1.3.3 Stratégies de régulation d'un réseau de carrefours	13
1.3.3.1 Stratégies fixes	14
1.3.3.2 Stratégies adaptatives	16
1.4 Conclusion et objectifs de la thèse	21
Chapitre 2 Commande dissipative des réseaux de transport	23
2.1 Introduction	23

2.2	Rappels mathématiques et résultats préliminaires	24
2.3	Modèle stocker-et-transférer	28
2.4	Introduction au système thermodynamique	30
2.4.1	Formulation de l'entropie	32
2.4.2	Formulation de la disentropie	32
2.5	Correspondances entre les systèmes de transport et les systèmes thermo- dynamiques	33
2.6	Entropie du transport	34
2.6.1	Justification de l'entropie du transport	36
2.7	Définition des systèmes dissipatifs	40
2.7.1	Commande dissipative des systèmes discrets	43
2.7.2	Avantages et inconvénients	44
2.8	Spécialisation aux systèmes de transport	45
2.8.1	Commande dissipative des réseaux de transport	47
2.8.2	Cas d'un système isolé	56
2.9	Exemple d'application	58
2.10	Conclusion	65
Chapitre 3 Stabilisation au sens de Lyapunov des réseaux de transport		67
3.1	Introduction	67
3.2	Sur l'observateur	68
3.3	Modèle linéaire du réseau de transport	69
3.4	L'objectif de la commande et solution proposée	71
3.4.1	Synthèse d'un observateur	74
3.5	Exemple d'application	81
3.6	Conclusion	89
Chapitre 4 Stabilité en temps fini des réseaux de transport		91
4.1	Introduction	91
4.2	Sur la stabilisation en temps fini (FTS)	92
4.3	Objectif de la commande et solution via la stabilisation en temps fini (FTS)	93
4.4	Exemple d'application	101
4.5	Conclusion	107
Conclusion générale		109

Références

119

TABLE DES FIGURES

1.1	Intersection à quatre branches	3
1.2	Courants de flux dans un carrefour élémentaire	4
1.3	Ensemble des éléments d'un tronçon	4
1.4	Le premier feu de signalisation électrique à Cleveland	5
1.5	Exemple de séquence de phases	7
1.6	Boucle de régulation d'une intersection isolée	11
1.7	Bande passante maximale d'une artère [1]	16
1.8	Simplification du modèle " <i>stocker-et-transférer</i> "	19
2.1	Exemples de deux types d'intersections	28
2.2	Les flux de trafic liés à la voie i	29
2.3	Système thermodynamique	30
2.4	Diagramme fondamental des flux de circulation	36
2.5	Dissipation de l'entropie du transport	46
2.6	Réseau de 8 intersections	59
2.7	Résultats de la simulation 1	60
2.8	Résultats de la simulation 2	61
2.9	Résultats de la simulation 3	62
2.10	Évolution d'état x sous la commande proposée	63
2.11	Évolution d'état x sous la commande standard	64
3.1	Observateur du système	68
3.2	Intersection en deux phases de 4 voies	70

3.3	Réseau de transport [2]	82
3.4	Estimation d'état y pour les 48 voies	83
3.5	Estimation des incertitudes \hat{w} pour les 48 voies	83
3.6	Variation de $ y - \hat{y} $ pour les 48 voies	84
3.7	Variation de $ \bar{\omega} - \hat{\omega} $ pour les 48 voies	84
3.8	Évolution de l'état y	85
3.9	Évolution de l'état x	85
3.10	Estimation des incertitudes \hat{w} pour les 48 voies	87
3.11	Variation de $ \bar{\omega} - \hat{\omega} $ pour les 48 voies	87
3.12	Évolution de l'état y	88
3.13	Évolution de l'état x	88
4.1	Stabilisation en temps fini	93
4.2	Réseau de transport [2]	101
4.3	Évolution de l'état z sous la commande proposée	102
4.4	Évolution de l'état x sous la commande proposée	103
4.5	Évolution de l'état z sous la commande de la remarque 4.2	104
4.6	Évolution de l'état x sous la commande de la remarque 4.2	104
4.7	Évolution d'état z sous la commande standard	106
4.8	Évolution d'état x sous la commande standard	106

LISTE DES TABLEAUX

2.1	Correspondances des concepts de base	34
2.2	Variation des temps des feux verts	60
2.3	Capacités des voies	62
3.1	Paramètres utilisés dans l'exemple	82
3.2	Variation des temps des feux verts	86
3.3	Variation des temps des feux verts	89
4.1	Paramètres utilisés dans l'exemple	102
4.2	Variation des temps des feux verts	103
4.3	Variation des temps des feux verts	105

LISTE DES PUBLICATIONS

Journaux

1. Mohamad Sleiman, Rachid Bouyekhf, Abdellah El Moudni. Urban Transportation Network Analysis from a Thermodynamic Perspective. *Journal of the Franklin Institute*, accepté.
2. Mohamad Sleiman, Rachid Bouyekhf, Abdellah El Moudni. Uncertainty observer and stabilization for Transportation Network with constraints. *Control Engineering Practice*, deuxième relecture.

Conférences

1. Mohamad Sleiman, Rachid Bouyekhf, Abdellah EL Moudni. Invariance Principle for Transportation Network. *2016 IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics (SMC2016)*, Budapest, Hongrie, Octobre 2016.
2. Mohamad Sleiman, Rachid Bouyekhf, Abdellah EL Moudni. Congestion Control For Transportation Network Under Constraints. *IFAC 2017 World Congress*, Toulouse, France, Juillet 2017.
3. Mohamad Sleiman, Rachid Bouyekhf, Abdellah EL Moudni. Analyse des réseaux de transport par une approche thermodynamique. *FUTURMOB 2017 Conference*, Montbéliard, France, Septembre 2017.

4. Mohamad Sleiman, Rachid Bouyekhf, Abdellah EL Moudni. Constrained Sliding Mode Control for Urban Transportation Network. *21st International Conference on System Theory, Control and Computing*, Sinaia, Roumanie, Octobre 2017.
5. Mohamad Sleiman, Rachid Bouyekhf, Abdellah EL Moudni. Constrained Control For Urban Transportation Network. *4th IEEE conference on Logistics Operations Management -GOL2018*, Le Havre, France, Avril 2018.

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Le transport routier confronte des problèmes toujours croissants en raison de l'augmentation de la mobilité des personnes et les améliorations significatives des moyens de transport. Le résultat est la congestion non seulement dans les grandes villes mais aussi dans les petites et sur les autoroutes à grande capacité. Cette congestion est source de perte de temps, de l'augmentation de consommation d'énergie, de nuisance et de détérioration de l'environnement.

L'approche traditionnelle pour résoudre le problème de congestion consiste à élargir d'une manière continue les réseaux existants. Cependant, l'élargissement des infrastructures existantes ne peut pas éliminer complètement le problème pour des raisons économiques ou simplement par manque d'espace. D'où, la tendance actuelle d'une meilleure utilisation de ces infrastructures. De point de vue de contrôle, cela peut se traduire par la mise en place des systèmes de contrôle adéquats et efficaces qui répondent automatiquement aux conditions de circulation. En outre, l'évolution rapide des technologies de l'information ainsi que les progrès méthodologiques dans les théories de contrôle et de l'optimisation fournissent une base solide à cette fin.

D'une manière générale, un système de contrôle du trafic dispose des capteurs qui le transmettent des informations sur l'état du trafic et notamment le nombre de véhicules dans les voies. Ces informations passent ensuite vers un calculateur qui a pour mission de donner l'ordre aux feux de circulation de s'allumer d'une manière minimisant ou évitant la congestion dans le réseau.

Cependant, les systèmes de transport sont des systèmes dynamiques soumis à des incertitudes et des limitations d'ordre physique ou dictées par des impératifs de sécurité. Ces limitations se traduisent dans la majorité des cas par des contraintes sur les variables d'état

et/ou la commande. Ainsi, la prise en compte de ces incertitudes et de ces contraintes dans la conception du plan de feux est nécessaire. Notre travail s'inscrit dans ce cadre pour la régulation des réseaux de carrefours.

Nous pouvons distinguer deux objectifs différents pour la régulation du trafic dans un réseau de carrefours à feux. Le premier objectif est la fluidification de congestion en évitant de se retrouver dans une situation de trafic très dense. Dans ce cas, il faut une action **a priori**. Le deuxième objectif est la résorption de congestion lorsque nous sommes confrontés à un trafic congestionné. Donc, il faudra agir **a posteriori**. Dans les deux cas, l'action prend la forme d'un ajustement des durées de feux par rapport à la situation confronté.

Malgré les recherches et les développements à long terme dans le monde entier, le contrôle des carrefours signalisés reste un domaine susceptible d'être amélioré d'une manière significative. Dans ce mémoire, nous nous intéressons essentiellement à un travail en amont (action a priori) permettant d'éviter la congestion. En effet, l'objectif est de forcer le nombre de véhicules dans les voies du réseau de transport à ne pas dépasser le niveau du trafic correspondant à l'optimum opérationnel des lignes.

Plan de la thèse

Ce mémoire est structuré en quatre chapitres.

Dans le premier chapitre, nous décrivons tout d'abord le réseau des carrefours à feux en présentant ses caractéristiques ainsi que ses éléments. Ensuite, les notions fondamentales et le mode de fonctionnement de la régulation du trafic aux abords des carrefours sont présentés. De plus, pour mieux comprendre l'importance et la contribution de notre travail, il est indispensable d'avoir une vision claire sur les problèmes étudiés et sur l'avancement des recherches dans le domaine. À cette fin, une dernière partie est consacrée pour la présentation, non exhaustive, des méthodes développées pour la gestion et la régulation des carrefours. Enfin, nous terminons le chapitre par une conclusion et une formulation du problème de la commande de ce travail.

Le deuxième chapitre est consacré à la proposition d'une commande par retour d'état basée sur l'approche des systèmes dissipatifs avec contraintes sur l'état et la commande. Après avoir exposé quelques définitions et résultats utiles dont nous aurons besoin dans la suite, nous modélisons le réseau de transport en utilisant l'approche "stocker-et-transférer". Ensuite, nous faisons une brève introduction aux systèmes thermodynamiques et nous elucidons le lien étroit existant entre les systèmes de transport et les systèmes thermo-

dynamiques. Suite à cette analogie entre les deux systèmes, nous présentons la notion d'entropie du réseau de transport comme un indice du degré de désordre dans le système. Nous définissons ensuite le problème et nous proposons une solution par l'application de la commande dissipative.

La difficulté de maîtriser l'effet des incertitudes sur le comportement du système en utilisant la commande dissipative, nous a amené à avoir recours à un observateur dans le chapitre 3. Après avoir défini le problème, une commande stabilisant les voies autour de leurs situations nominales tout en respectant les contraintes sur l'état et la commande est établie. Cette commande se base sur la stabilisation au sens de Lyapunov. Ensuite, afin d'estimer les incertitudes susceptibles d'avoir des impacts négatifs sur les performances de la commande, un observateur est proposé.

Cependant, l'incapacité de la commande proposée dans le chapitre 3 à stabiliser le système en temps fini nous a amené à consacrer le quatrième chapitre pour établir une commande stabilisant en temps fini. Dans un premier temps, nous définissons d'une manière générale la stabilité en temps fini (FTS). Ensuite, nous précisons la définition du problème qui nous concerne. Une fois le problème est défini, nous donnons les conditions suffisants pour la stabilisation en temps fini de notre système.

Dans toutes les approches élaborées dans cette thèse, les conditions pour la résolution des problèmes de commande sont présentées en terme des LMIs. Le succès des techniques des Inégalités Matricielles Linéaires (LMI) vient du développement des méthodes dites du point intérieur (interior point methods) qui permettent d'apporter des solutions intéressantes par la manipulation des contraintes de façon systématique. La mise en évidence de l'approche LMI a ouvert des possibilités telles qu'il est devenu possible d'aborder des problèmes d'analyse et/ou de commande jusque là non envisageables. En outre, de nombreux logiciels (solveurs) conviviaux existent dont certains offrent une interface avec MATLAB.

Afin de tester l'efficacité des stratégies proposées, nous consacrons la dernière partie de chaque chapitre pour les simulations. En effet, cette partie se focalise sur la mise en place sous Matlab des stratégies de régulation proposées dans ce travail sur un réseau comprenant un grand nombre des carrefours.

Enfin, nous concluons ce mémoire en résumant les contributions de ce travail et en présentant quelques perspectives de nos travaux.

CHAPITRE 1

GÉNÉRALITÉS SUR LES RÉSEAUX DE CARREFOURS URBAINS

1.1 Introduction

Le transport joue un rôle fondamental dans le développement économique de la vie urbaine. En effet, il influe sur toutes les facettes de l'économie, notamment sur la mobilité des employés. À partir de la seconde moitié du siècle dernier, l'augmentation de la mobilité et la progression accélérée des moyens de transport ont généré des problèmes au niveau de la fluidité du trafic, d'où l'apparition des phénomènes de congestion.

La congestion des carrefours à feux est l'un des problèmes majeurs de la circulation. Elle se produit de façon quasi-quotidienne. Elle est source de perte de temps et de détérioration de l'environnement. La solution aux problèmes de congestion routière ne passe pas toujours par l'augmentation de l'investissement dans les infrastructures, comme cela se faisait dans un passé récent. La tendance actuelle est plutôt à une meilleure utilisation des infrastructures existantes.

La régulation du trafic a vu le jour avec l'augmentation exponentielle du nombre de véhicules circulant dans les zones urbaines. Hormis la congestion issue de cette croissance, l'insécurité routière a fait prendre conscience de la nécessité d'avoir recours à des méthodes de régulation de flux de véhicules. Cette problématique est devenue un grand défi qui encourage de nombreux chercheurs à travailler dans ce domaine.

Dans la suite de ce chapitre, nous décrivons dans une première partie, les caractéristiques et les éléments d'un carrefours à feux. La deuxième partie est consacrée à la présentation de différentes méthodes développées dans la littérature pour la régulation des carrefours. Nous terminons le chapitre par une conclusion et les objectifs de la thèse.

1.2 Description d'un réseau de carrefours

Le terme "réseau" est couramment utilisé pour décrire une structure pouvant être physique ou conceptuel. Un réseau comprend essentiellement deux types d'éléments : un ensemble de nœuds et un ensemble de lignes les connectant entre eux.

Dans le domaine de transport, les nœuds et les lignes correspondent aux carrefours et aux rues respectivement. Un réseau de transport dans un milieu urbain permet la circulation du trafic. Autrement dit, il permet de passer d'un nœud (carrefour) à un autre en suivant une route. Dans ce sens, les carrefours à feux sont les éléments qui gèrent le réseau en laissant écouler ou en stockant les flux de véhicules selon la variation du trafic. Ainsi, la description du réseau de transport urbain se concentre sur les caractéristiques des carrefours et les composantes qui leurs sont liées.

1.2.1 Caractéristiques d'un carrefour à feux

D'après la définition donnée par le livre de référence en matière d'ingénierie du trafic routier [3], **un carrefour** est situé à la rencontre de plusieurs routes déterminant des couloirs d'entrée et de sortie. Plus précisément, un carrefour à feux constitue un terrain sensible pour les conflits de trafic à partir des différentes routes. La mise en place d'un système de feux à un carrefour réalise une séparation dans le temps du passage de différents flux de véhicules. Elle peut revêtir plusieurs schémas relatifs à la géométrie de l'infrastructure et aux règles de franchissement.

Pour étudier une intersection routière, nous nous concentrons tout d'abord sur l'analyse d'une intersection routière à deux phases et à quatre branches que nous pouvons qualifier comme étant un carrefour *élémentaire* (voir Figure 1.1). L'étude des autres types d'intersection sera ramenée à ce type simple de carrefour. Ceci peut être réalisé, soit en décomposant ceux qui sont complexes en plusieurs carrefours *élémentaires*, soit en ajoutant des tronçons fictifs pour les intersections à moins de quatre branches.

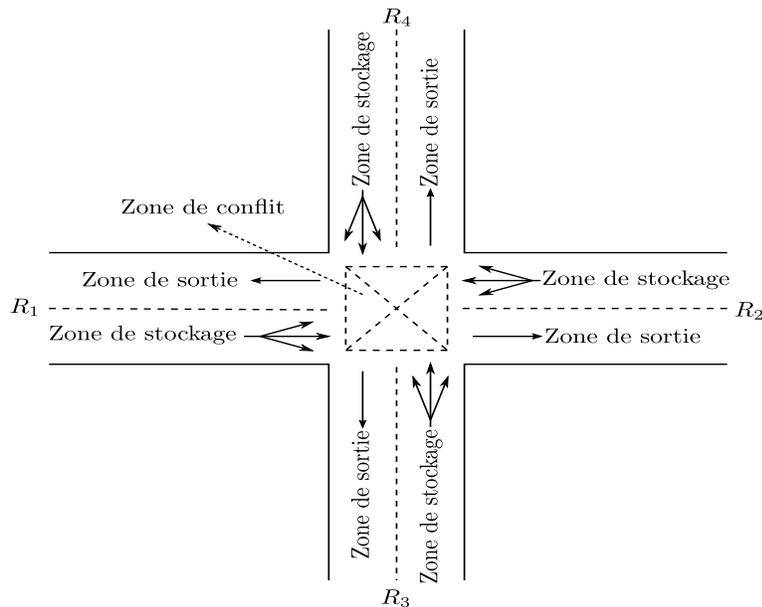


FIGURE 1.1 – Intersection à quatre branches

Dans chaque intersection, nous pouvons identifier trois zones fonctionnelles :

- **Zone de conflit** : il s'agit de l'espace de croisement des routes. Autrement dit, c'est la ressource critique partagée par tous les véhicules qui traversent l'intersection.
- **Zone de stockage** : elle se situe en amont de la zone de conflit, c'est l'entrée empruntée par les véhicules.
- **Zone de sortie** : elle se trouve en aval de la zone de conflit et permet le soulagement de cette zone.

Pour bien comprendre le fonctionnement d'un carrefour, un certain nombre d'éléments doivent être définis :

Couloir et tronçon : Un couloir est caractérisé par sa longueur, son nombre de voies ainsi que par les sens de circulation ; certaines de ces voies peuvent être affectées à un courant particulier appelées *voies spéciales*. Les courants de véhicules sont soit *directs*, soit des courants de *tourne-à-gauche* ou *tourne-à-droite* (voir Figure 1.2). Une voie spéciale pourrait être affectée à un courant *tourne-à-gauche* ou *tourne-à-droite*. Un tronçon d'un carrefour représente chaque couloir d'entrée et de sortie. Ainsi, il peut contenir plusieurs voies. Chaque voie écoule un mouvement de véhicules unidirectionnel et donc correspond à une phase unique. Un tronçon est caractérisé par plusieurs paramètres, entre autres, sa longueur qui représente la mesure en mètres de la distance séparant la ligne géométrique où sont implantés les feux associés au tronçon (cette ligne est considérée comme la sortie

du tronçon) et la ligne géométrique en amont considérée comme l'entrée de ce tronçon (voir Figure 1.3).

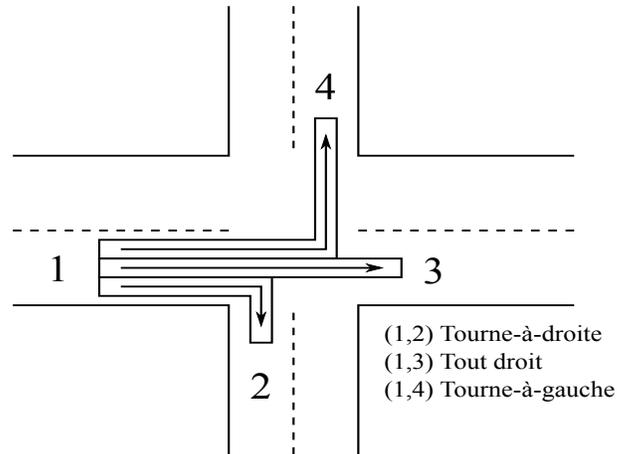


FIGURE 1.2 – Courants de flux dans un carrefour élémentaire

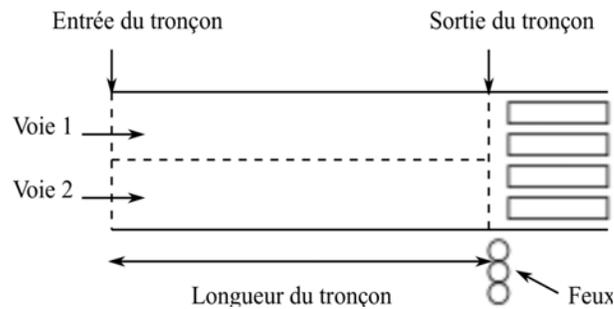


FIGURE 1.3 – Ensemble des éléments d'un tronçon

Concentration maximale et capacité de stockage d'une voie : La concentration ou la densité donne le nombre de véhicules présents sur une section de longueur donnée. La concentration maximale d'une voie est le nombre maximal de véhicules que l'on peut stocker par mètre linéaire dans la voie. La capacité de stockage d'une voie représente le nombre maximal de véhicules que l'on peut stocker sur toute sa longueur. En d'autres termes, la capacité représente la concentration de la voie multipliée par sa longueur. Par exemple, si la concentration maximale d'une voie est de 0.2 véh/m et, sachant que la longueur de la voie est de 100m, alors la capacité de cette voie est de $100 \times 0.2 = 20$ véh.

Longueur des files d'attente : Cette variable correspond au nombre de véhicules arrêtés derrière la ligne d'arrêt à un feu de circulation. La longueur des files d'attente constitue l'une des grandeurs majeures de l'évaluation d'une stratégie de régulation.

1.2.2 Caractéristiques des feux d'un carrefour

La principale fonction des feux de circulation est d'attribuer le droit de passage aux mouvements de circulation contradictoires dans une intersection. En effet, ils assurent le déplacement en toute sécurité des véhicules en évitant leurs conflits avec les autres véhicules et les piétons. Ainsi, ils jouent un rôle crucial dans notre vie quotidienne en rendant non seulement la circulation automobile plus sûre, mais aussi la circulation des piétons.

Petit historique : Le premier feu de signalisation utilisé dans le domaine remonte au sémaphore à commande manuelle implanté à Londres dès 1868 [4]. Le premier feu de signalisation électrique aux Etats-Unis a été développé par James Hoge et installé à Cleveland, Ohio, en 1914 [5] (voir Figure 1.4).



FIGURE 1.4 – Le premier feu de signalisation électrique à Cleveland

Ceci a été suivi par l'introduction de feux inter-connectés en 1917 dans la ville de Salt Lake, Utah [6]. A ce moment, la propriété et l'utilisation de l'automobile étaient en pleine expansion et l'efficacité du contrôle des feux de signalisation a été reconnue. La circulation automobile croissante dans les rues a conduit au développement et à l'implémentation des signaux actionnés en 1928 [7].

Depuis, les technologies liées avec la commande des feux de signalisation ont connu un développement rapide et les feux tricolores sont devenus un élément essentiel des systèmes de contrôle et de gestion du trafic moderne. Du point de vue de l'application, les feux de signalisation sont utilisés pour contrôler l'affectation du droit de passage des véhicules ou des piétons aux endroits où des conflits potentiellement dangereux existent.

Un autre avantage des feux tricolores par rapport aux dispositifs passifs (panneaux, marquages) est sa capacité à soutenir la commande adaptative du trafic.

États des feux : Un feu tricolore est un signal lumineux situé à la frontière de chaque zone de stockage et de la zone de conflit. Il commande le passage libre (*feu vert*), toléré (*feu orange*) ou interdit (*feu rouge*) du trafic des véhicules. Ces différentes couleurs sont nommées *les états de feux*. Le changement de feu d'un état à l'autre est appelé *commutation*. Pour la sécurité des usagers, le temps de passage par état doit au moins durer une période minimale, fixée par les exploitants. Contrairement aux durées du feu vert ou du feu rouge, la durée du feu orange est invariable. Notons que l'implantation des feux de signalisation doit respecter la géométrie d'un carrefour.

Rappelons quelques concepts essentiels de la signalisation à feux :

- **Cycle :** Les indicateurs des feux - vert, orange, rouge - se succèdent à l'intérieur d'un cycle, défini comme étant la durée constante séparant deux passages successifs de l'ensemble des signaux par le même état.
- **Phase :** Le cycle est partagé en phases, temps pendant lequel un ou plusieurs courants sont admis dans le carrefour. Une phase est dite spéciale quand elle a pour seul but de favoriser l'écoulement d'un mouvement tournant. Elle est dite **saturée** lorsqu'un véhicule au moins de cette phase est contraint d'attendre plus d'un cycle pour franchir le carrefour. Le carrefour est lui-même saturé quand au moins une des ses phases est saturée.
- **Vert effectif :** On appelle temps de vert effectif, la somme du temps de vert réel et du temps de l'orange (qui est souvent de 3 à 5 secondes selon la vitesse d'approche dans le cas d'un carrefour urbain ordinaire).
- **Vert utile :** On définit le temps de vert utile, en retranchant du temps de vert effectif le temps perdu (somme des temps perdus au début du vert, c'est-à-dire au démarrage, et du temps perdu en fin de phase). Les temps perdus par phase se situent en moyenne autour de 8 secondes [8].
- **Rouge utile :** On appelle rouge utile la différence entre la durée du cycle et celle du vert utile. Pour des raisons de sécurité, à la fin de chaque phase, l'ensemble des feux du carrefour est maintenu au rouge pendant une certaine durée, appelée **rouge intégral**. Dans le cas d'un carrefour simple à 4 branches par exemple, on adopte une durée de rouge intégral de 2 secondes.

Le plan de feux d'un carrefour signalisé : Considérons l'intersection montrée dans la Figure 1.1. On constate qu'il y a deux paires de courants en conflit, à savoir la paire de courants provenant des rues R_1 et R_2 et la paire de courants provenant des rues R_3 et R_4 . En supposant que les mouvements dominants soient les mouvements directs (aller tout droit) et que les mouvements de tourne-à-gauche soient soumis à la priorité à droite, nous pouvons découper le cycle en 2 phases, i.e. Phase I et Phase II.

Supposons que les durées des phases I et II soient identiques et que la séquence des phases soit fixe. Les feux installés aux rues R_1 et R_2 sont d'abord verts, puis rouges pour que les feux aux rues R_3 et R_4 deviennent à leur tour verts; et ainsi de suite. Les deux phases se succèdent, constituant un cycle. Le plan de feux pour cette intersection est illustré dans la Figure 1.5. Pour des raisons de sécurité, l'ensemble des feux de l'intersection est maintenu au rouge pendant une certaine durée à la fin de chaque phase, appelée **rouge intégral**. Ainsi, l'équation qui décrit le plan de feux dans cet exemple est donnée par :

$$\text{Cycle} = \text{Vert effectif}_{\text{Phase I}} + \text{Vert effectif}_{\text{Phase II}} + 2 \times \text{Rouge intégral} \quad (1.1)$$

Notons que le cycle et le rouge intégral sont fixes en général [9]. Par conséquent, la somme des temps de vert effectifs d'un carrefour dans un cycle reste constante.

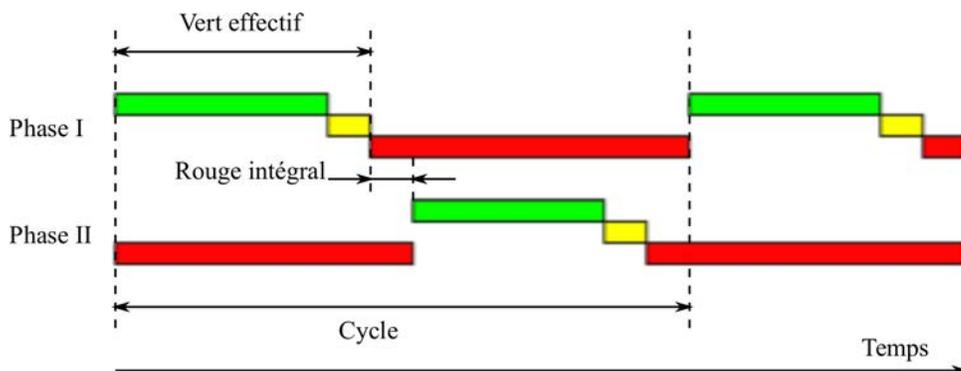


FIGURE 1.5 – Exemple de séquence de phases

La stratégie de régulation des feux dépend de l'état du trafic estimé grâce aux mesures réalisées. Ainsi, la fluidité du trafic est généralement la mission du système de régulation qui décide de la séquence des phases et de la durée de chaque phase.

1.2.3 Caractéristiques du mouvement du trafic

Un mouvement est défini par son origine et sa destination. Un courant de trafic est l'ensemble des mouvements de véhicules qui proviennent de la même branche d'accès,

à savoir la même origine (voir Figure 1.2). Selon les similitudes avec la théorie de l'hydrodynamique, le courant routier peut être considéré comme un flux de trafic au niveau d'un tronçon ou d'une route [10]. L'objectif des **Théories de flux de trafic** est de décrire de façon mathématique précise les interactions entre les véhicules et l'infrastructure. Les études scientifiques de flux de trafic sont nées dans les années 1930. En particulier, Adams a appliqué la théorie des probabilités pour décrire le trafic routier [11]; Bruce D. Greenshields du Bureau du Trafic Routier de Yale a étudié des modèles de volume et de la vitesse [12]. A partir des années 1950, des nouvelles études ont été élaborées dans ce domaine sur la base des approches théoriques diverses, telles que le modèle de suivi du véhicule [13, 14, 15], la théorie de l'onde cinétique (KWT : kinematic Wave Theory) [16, 17, 18, 19] et la théorie des files d'attente (queuing theory) [20, 21], etc.

Dans cette section, on distingue trois grandeurs principales caractérisant les flux de trafic dans le réseau de carrefours.

Débit des flux : Il correspond au nombre de véhicules observés en un point donné de l'infrastructure pendant un intervalle de temps d'observation. En fonction de la méthode de mesure utilisée, le débit peut être approximé soit en un point, soit sur un tronçon de la route. Formellement, le débit moyen $q(x, t_1, t_2)$ au point d'abscisse x entre les instants t_1 et t_2 est défini par le rapport :

$$q(x, t_1, t_2) = \frac{N(x, t_1, t_2)}{t_2 - t_1} \quad (1.2)$$

où $N(x, t_1, t_2)$ désigne le nombre de véhicules qui passent par le point x entre les instants t_1 et t_2 . En particulier, deux débits importants sont considérés :

- Le **débit d'entrée d'une voie** est le débit de son flux d'entrée. Notons que les flux d'entrée du milieu extérieur dépendent des activités humaines. Par conséquent, les débits d'entrée sont évolutifs dans le temps et ils ne sont pas commandables par les feux de signalisation. L'évolution des débits d'entrée exprime les incertitudes dans la demande de trafic.
- Le **débit de saturation d'une voie** est le nombre maximum de véhicules pouvant sortir de la voie et accéder à l'intersection en aval sans interruption par unité de temps, le feu étant continuellement au vert. Pour chaque voie, il est exprimé en unités de véhicules particuliers par heure de feu vert. On adopte souvent les valeurs de référence suivantes : $s=1820$ *uvp/h/voie* dans une agglomération importante, $s=1650$ *uvp/h/voie* dans une petite agglomération. Ces valeurs peuvent être ajustées en fonction de divers facteurs liés à la géométrie de l'aménagement du

carrefour et à son environnement (taille de l'agglomération, visibilité,...). Puisque ces facteurs ne changent pas en général, le débit de saturation est considéré fixe et connu dans cette thèse.

Pour un carrefour à feux, nous partageons le débit en deux parties ; le débit d'entrée et le débit de sortie. Notons que, contrairement aux arrivées, les départs sont dépendants des durées de commutation de l'ensemble des feux d'un carrefour.

Charge d'un carrefour : La charge Y d'une entrée est définie comme le rapport entre le débit d'entrée mesuré q et le débit de saturation s . C'est donc le rapport de la demande sur l'offre :

$$Y = \frac{q}{s} \quad (1.3)$$

Cette définition s'étend à l'ensemble du carrefour. La charge globale du carrefour est la somme des charges de chacune des phases :

$$Y = \sum y_p \quad (1.4)$$

La somme étant effectuée sur le nombre n de phases. y_p représente la charge du courant prépondérant de chaque phase définie par $y_p = \text{Max}(y_c)$, où y_c définit la charge des courants admis simultanément dans le carrefour au cours de la phase. Chaque phase se caractérise donc par une charge correspondant à celle de son entrée prédominante.

Remarque 1.1 Si le courant directionnel ayant la plus forte charge est commun à 2 phases, on prend la charge immédiatement inférieure. Toutefois, il convient de s'assurer que la somme de la charge immédiatement inférieure et de la charge prédominante de l'autre phase est supérieure à la charge du courant utilisant les 2 phases. Dans le cas contraire, c'est cette dernière que l'on utilise. ►

1.2.4 Infrastructures de mesure

Il existe de nombreux types de capteurs permettant les mesures directes ou indirectes des variables de circulation. Les deux principaux types de capteurs que l'on peut rencontrer [22, 23] sont :

- **Les capteurs enfouis dans la chaussée :**
 - **Boucles électromagnétiques :** c'est aujourd'hui le dispositif de mesure des paramètres du trafic le plus répandu dans le monde, tant en ville que sur les voies rapides et les autoroutes urbaines. Il permet de mesurer les débits, le taux

d'occupation, la vitesse et l'écart de temps inter-véhiculaire. Le capteur est constitué d'une boucle inductive, noyée dans le revêtement de la chaussée. Le passage de la masse métallique d'un véhicule au-dessus de la boucle provoque une variation du champ électromagnétique. Cette variation se traduit par un créneau de tension dont la longueur est liée à celle du véhicule, du capteur et au temps de passage.

— **Les détecteurs latéraux :**

- **Capteurs à ultrasons et à effet Doppler :** ce capteur est constitué d'une antenne fixée sur un portique, lequel est positionné dans l'axe de la voie de circulation. Cette antenne émet constamment des ondes qui se propagent à une vitesse connue. Lors du passage d'un véhicule, l'onde émise rencontre un obstacle et se réfléchit. A partir de la différence entre les fréquences de l'onde émise et de celle reçue, la vitesse du véhicule peut être estimée.
- **Capteurs optiques (vidéo) :** le principe de ces capteurs consiste à utiliser une caméra vidéo et à traiter de manière automatique les images fournies par cette caméra afin de déduire les paramètres du trafic [24, 25].

1.3 Régulation des feux de signalisation

1.3.1 Boucle de régulation d'un réseau de carrefours

Le système de feux de signalisation associé à un réseau de carrefours urbains est généralement un système complexe qui ne se limite pas aux signalisations verticales et horizontales visibles par les conducteurs. En effet, des instruments de mesure, des postes de contrôle, des liaisons filaires ou GPRS, etc., sont souvent requis pour assurer le fonctionnement de la régulation. Si nous limitons notre étude à une intersection isolée, nous pouvons au moins identifier trois éléments qui composent le système de feux de signalisation (voir figure 1.6). L'intégration de ces trois éléments à une intersection constitue la boucle de régulation du trafic à son niveau. Ces éléments sont :

- **Les dispositifs de signalisation :** Il s'agit de l'ensemble des signaux verticaux et horizontaux transmis aux conducteurs pour assurer la sécurité de passage des véhicules. Ils visent à éviter la rencontre de mouvements conflictuels. Par la suite, nous limiterons notre étude aux feux tricolores

- **Les infrastructures de mesure** : Elles reflètent l'état du trafic à travers ses différentes grandeurs. Ces grandeurs sont mesurées par des capteurs installés au niveau de l'infrastructure.
- **Le régulateur** : Il est le cerveau de la boucle de régulation. Il précise en temps réel les stratégies de régulation, en fonction des données issues de l'infrastructure de mesure, afin d'atteindre des objectifs bien précis, comme par exemple minimiser la longueur des files d'attente, le temps d'attente des véhicules, etc.

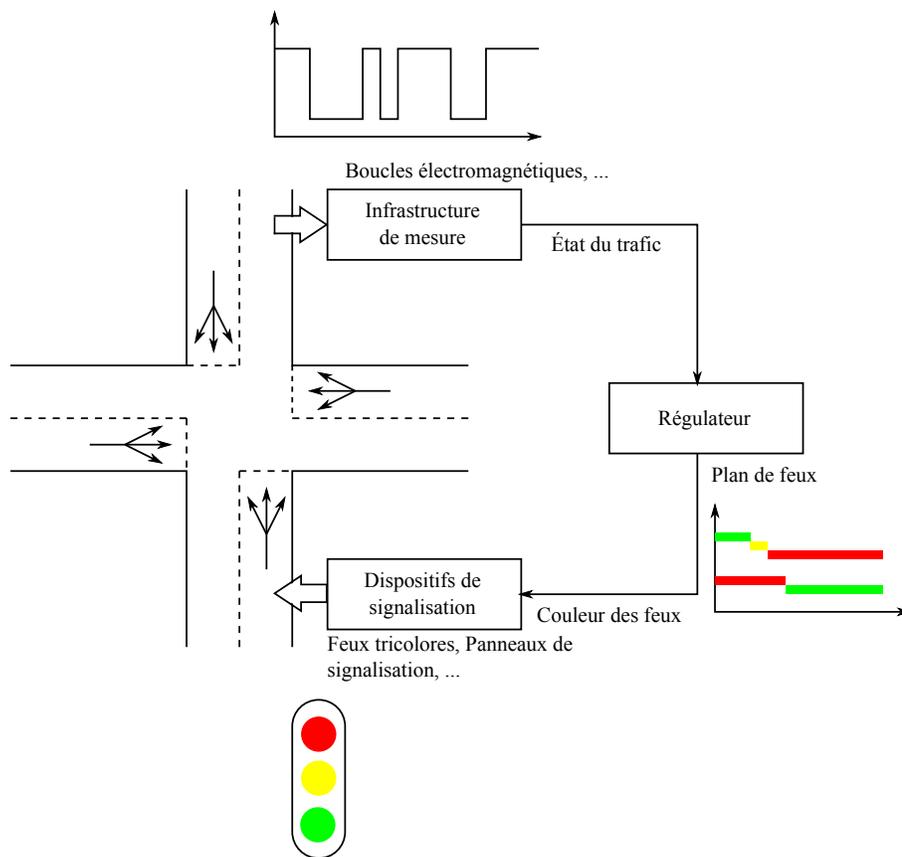


FIGURE 1.6 – Boucle de régulation d'une intersection isolée

1.3.2 Modes de régulation d'un réseau de carrefours

La régulation du réseau de carrefours par les feux de signalisation peut fonctionner sous divers modes. Outre le contrôle manuel, on distingue généralement le contrôle automatique, le contrôle adaptatif et le contrôle coordonné. Ces modes ne sont pas toujours distincts et peuvent se combiner à plusieurs titres, voir se substituer l'un à l'autre.

Mode manuel : dans ce cas, c'est un individu qui actionne le changement d'état du carrefour. C'était le cas des premiers feux de circulation, mais aujourd'hui encore, les feux peuvent fonctionner en mode manuel si la situation l'exige, ou également en mode semi-manuel (ou semi-automatique).

Mode automatique : ce mode n'exige aucune intervention extérieure ; les états successifs d'un cycle se déroulent séquentiellement suivant les plans de feux en place dans le contrôleur. On parle aussi de fonctionnement en cycles fixes.

Mode adaptatif : contrairement au mode automatique, ce mode permet l'adaptation de la durée des intervalles des feux verts, et par conséquent la modulation de l'ensemble des phases d'un cycle en fonction des variations du trafic. Ainsi, un feu vert peut être allongé pour écouler le flux d'une voie où s'écoule un trafic plus important que dans les voies adjacentes. Un autre exemple d'adaptation est la priorité donnée aux véhicules de transport public : leur arrivée dans un carrefour déclenche soit l'allongement de l'état du feu vert, soit la réduction de l'intervalle du feu rouge sur la voie qu'ils empruntent.

Mode coordonné : ce mode signifie que plusieurs contrôleurs, donc plusieurs carrefours, sont soumis à une même stratégie de régulation. Il existe deux grandes applications du mode coordonné. La première est la régulation d'axes de circulation. Elle consiste à coordonner les phases des différents carrefours d'un même axe routier afin de rendre plus confortable et plus fluide la progression des véhicules, c'est-à-dire, d'éliminer leurs arrêts aux carrefours (du moins s'ils respectent une vitesse moyenne, définie par le gestionnaire des feux). La seconde application de la coordination est la régulation des zones. Dans ce cas, ce sont les feux de l'ensemble d'un périmètre géographique déterminé (un quartier urbain par exemple) qui sont coordonnés entre eux, afin d'optimiser les déplacements des usagers, c'est-à-dire, de minimiser le temps qu'ils passent dans cette zone.

Les deux derniers modes (adaptatif, coordonné) évoqués soulèvent chacun des complexités techniques que ne posent pas les deux premiers. Ces modes exigent de disposer de moyens de détection des variations du trafic, c'est-à-dire de recueillir des informations caractérisant la circulation en temps réel. D'où la nécessité d'utiliser des capteurs automatiques. Il en existe de différentes sortes : pneumatiques, hydrauliques, acoustiques, à boucles électromagnétiques, à ultrasons, à infrarouges, radars, caméras, etc... Ces capteurs sont placés à une certaine distance du carrefour concerné, reliés par câble ou par ondes

au contrôleur qui reçoit et interprète l'information codée par le détecteur (un élément électronique qui transforme l'information issue du capteur en signal électrique).

Notons également que les modes adaptatifs et coordonnés, ainsi que leur combinaison, se trouvent aujourd'hui gérés à distance à partir d'un poste de contrôle. Cette télé-gestion repose évidemment sur des transmissions d'informations entre les feux et le poste de contrôle. Les modes manuel et automatique entrent dans le cadre des systèmes de commande en **boucle ouverte**. Ce sont des systèmes qui s'appuient sur des bases de données prédéfinies. Dans ces conditions, le système marche sans prendre en considération les problèmes brusques : la forte congestion, les incidents, etc. L'utilisation de ces systèmes est désormais impossible pour répondre à la demande actuelle. Donc il est nécessaire d'adopter des approches qui nous permettent d'en savoir plus sur l'état en temps réel et qui agissent directement pour fluidifier le trafic. D'où l'utilisation actuelle dans les recherches récentes des systèmes en **boucle fermée** dont nous pouvons inclure les modes adaptatifs et coordonnés.

1.3.3 Stratégies de régulation d'un réseau de carrefours

La régulation des feux de signalisation dans un réseau de carrefours concerne en général deux objectifs distincts : la fluidification ou la résorption de la congestion. Dans le premier cas, on évite de se retrouver dans une situation de trafic très dense en essayant d'ajuster les durées de commutation des feux en fonction de la demande d'affluence aux carrefours : c'est une action *a priori*. Dans le second cas, on est confronté à un trafic saturé (état de congestion). Dans ce cas, il faudra agir *a posteriori*. Notons qu'une stratégie de régulation au niveau d'un réseau est appelée *stratégie globale*. Elle permet la régulation des feux de tous les carrefours. Dans le cas d'un carrefour congestionné sur le réseau étendu englobant ainsi plusieurs carrefours, une stratégie locale ne saurait résorber cette forte densité de trafic. En effet, pour répondre au phénomène d'accumulation de véhicules, une stratégie globale permettant la régulation simultanée de plusieurs carrefours interdépendants pourrait atténuer ce phénomène.

La littérature concernant la régulation du trafic dans un réseau de carrefours est abondante. Bien qu'une quelconque classification soit toujours partiellement arbitraire, il nous semble qu'une classification conduisant à séparer les travaux existants en deux catégories principales est raisonnable.

Une première catégorie de travaux est communément désignée sous le nom de **stratégie fixe ou pré-déterminée**. Dans ce type de stratégie, tous les paramètres sont déterminés

et réglés à partir de données recueillies avant l'installation. Le principal inconvénient de la stratégie fixe est qu'elle n'est pas capable de tenir compte de la demande du trafic en temps réel et nécessite une remise à jour régulière des plans de feux pour tenir compte de l'évolution de trafic moyen.

Une deuxième catégorie de travaux est communément désignée sous le nom de **stratégie adaptative ou temps réel**. Cette stratégie est plus coûteuse, parce qu'elle nécessite l'installation, l'exploitation et la maintenance d'un système de contrôle en temps réel (capteurs, communications, salle de contrôle centrale, contrôleurs locaux). Grâce aux développements des techniques liées, la stratégie adaptative, si bien conçue, est potentiellement plus efficace.

Dans la suite de ce chapitre, certaines stratégies populaires des deux catégories sont présentées.

1.3.3.1 Stratégies fixes

Dans ce mode de régulation, tous les paramètres sont déterminés et réglés à partir de données recueillies avant l'installation. Le rôle principal des plans de feux fixes est de mettre en marche cycliquement une série de phases pendant des durées données. Cette série de phases doit permettre de mieux répondre à la demande moyenne de la capacité estimée du carrefour. Pour calculer le plan de feux, il est nécessaire de définir la notion de phasage. Cette notion est définie comme étant l'ensemble des phases utilisées pour la commande de l'intersection. Une fois le phasage est déterminé, le calcul du plan de feux consiste en la détermination des trois paramètres suivants :

- la durée du cycle ;
- la répartition des verts : la durée du vert attribuée à chaque feu au cours du cycle ;
- les décalages entre les débuts des cycles dans le cas de plusieurs carrefours à coordonner.

Les commutations des feux de signalisation sont constantes d'un cycle à un autre. Ainsi, on retrouve à chaque cycle la même longueur et la même durée des phases. Nous trouvons dans ce mode de régulation les systèmes à base de plans de feux fixes.

Il est à noter que les plans de feux fixes ne sont pas fixés pour toutes les périodes d'une journée ou pour tous les jours. Un choix doit être effectué entre les différents plans disponibles au poste de commande selon la situation du trafic. Un opérateur peut réaliser ce choix manuellement ; c'est généralement le cas lorsqu'il détecte un événement exceptionnel nécessitant une gestion adaptée du réseau.

Nous présentons dans ce qui suit les systèmes de type fixe les plus utilisés dans les grandes villes mondiales :

Méthode de Webster : A partir d'analyses en simulation et de campagnes de mesures sur le terrain, [26] a donné le temps perdu moyen des véhicules dans la voie i pendant leur traversée du carrefour sous la forme suivante :

$$R_i = \frac{c(1 - \frac{g_i}{c})^2}{2(1 - y_i)} + \frac{(\frac{y_i c}{g_i})^2}{2q_i(1 - y_i \frac{c}{g_i})} - 0.65(\frac{c}{q_i^2})^{1/3}(\frac{y_i c}{g_i})^{2+5\frac{g_i}{c}} \quad (1.5)$$

où c est la durée du cycle, g_i , y_i et q_i sont le temps vert, la charge et le débit d'arrivée de la voie i respectivement. De cette expression, Webster déduit alors la durée du cycle comme suit :

$$c = \frac{1.5T_p + 5}{1 - Y} \quad (1.6)$$

où T_p est la somme des temps perdus entre les phases, Y est la charge globale du carrefour. Cette formule reste la formule de référence jusqu'à aujourd'hui. Elle est communément nommée **durée de cycle optimale**.

MAXBAND : En combinant la méthode de Webster et une formule proposée par Morgan [27] et Little [28] pour maximiser la bande passante, Little dans [1] a publié une stratégie nommée MAXBAND. Elle considère une artère à deux voies avec n intersections et spécifie les décalages afin de maximiser le nombre de véhicules qui peuvent voyager avec une vitesse donnée sans s'arrêter. L'inconvénient majeur de MAXBAND est que cette stratégie ne s'applique qu'aux situations sous-saturées.

TRANSYT : C'est l'un des logiciels les plus connus et utilisés qui permettent de préparer les plans de feux fixes. Initialement développé par Transport Research Laboratory [29], TRANSYT est un programme qui permet de fournir un plan optimal du point de vue des durées des feux verts et de leurs décalages. Il sert souvent de stratégie de référence pour évaluer la qualité de la commande des feux dans un réseau urbain. Durant la dernière décennie, TRANSYT a été substantiellement étendu et amélioré en de nombreuses versions. En particulier, TRANSYT-7F développé et maintenu par l'University of Florida est l'une des versions les plus importantes, qui s'appelle aussi la version des États-Unis [30].

TRANSYT utilise un modèle déterministe de trafic tenant compte du phénomène de dispersion des pelotons de véhicules, et minimise un critère qui est en fonction du temps

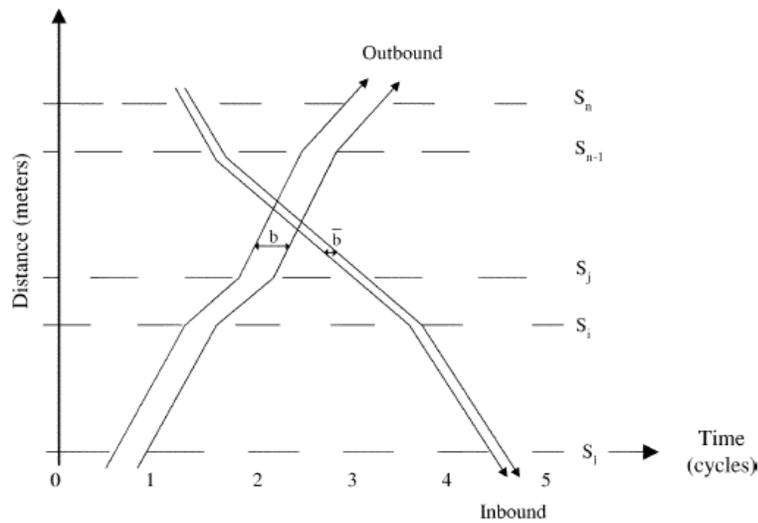


FIGURE 1.7 – Bande passante maximale d'une artère [1]

moyen perdu des véhicules et du nombre moyen d'arrêt (TRANSYT-7F utilise un algorithme génétique).

1.3.3.2 Stratégies adaptatives

Dans ce mode de régulation, la recherche actuelle s'est orientée vers la réalisation des systèmes de régulation qui tiennent compte de l'évolution du trafic au cours du temps et qui réagissent en temps réel. Selon [31], un système de contrôle en temps réel du trafic doit répondre aux exigences suivantes :

- la stratégie doit répondre réellement à la demande actuelle et non pas à une demande prédite ou historique.
- la stratégie ne doit pas être réduite à intervenir sur des périodes de contrôle fixées arbitrairement.

Cette analyse est rendue possible grâce aux différents capteurs mis en place : des boucles noyées dans la chaussée, radar etc. La mise en service d'une régulation aux feux d'un réseau répond le plus souvent aux objectifs suivants : rendre crédible la signalisation tricolore, assurer le confort de l'utilisateur en minimisant son temps d'attente, diminuer le nombre d'arrêts de véhicules et surtout minimiser la longueur des files d'attente.

Du fait de la nécessité de coordination des différents carrefours, la commande en temps réel d'un réseau d'intersections est un problème bien complexe. Les premiers systèmes de commande en boucle fermée d'un réseau sont apparus au début des années 60

et sont directement dérivés des méthodes fixes. Dans ces systèmes, une bibliothèque de plans des feux est calculée hors ligne et appliquée ensuite, non plus sur la base de la période de la journée, mais en fonction des débits et taux d'occupation mesurés par des capteurs. Leur problème majeur est lié au vieillissement des plans. Ils doivent remettre à jour la bibliothèque de manière à contenir des plans correspondants au mieux aux conditions réelles.

Plus tard, on a vu ensuite apparaître une seconde génération de systèmes de commande qui cherchent à recalculer, en ligne et à partir des informations collectées sur le réseau, tous les paramètres des feux de signalisation. C'est dans cet esprit que plusieurs types de systèmes ont été élaborés pour ce mode de régulation. Les plus connus sont :

SCATS : Sydney Coordinated Adaptive Traffic system : Ce système a été développé dans les années 70s [32]. Il est mis en place dans plusieurs villes en Australie. En 1995, plus de 2500 carrefours de Sydney étaient commandés par SCATS. Le rôle essentiel de ce système est la reconstitution en temps réel des plans de feux fixes disponibles dans une base de données. Il comporte une architecture hiérarchisée en trois niveaux :

- Les contrôleurs de carrefours ont pour objectif de mettre en forme les signaux issus des boucles électromagnétiques placées en ligne de feu pour les communiquer à l'ordinateur régional dont ils dépendent.
- Les postes régionaux sont chargés de recalculer périodiquement, à partir des mesures transmises par les contrôleurs de carrefours, le plan de feux à appliquer.
- Le poste central de surveillance a pour but la visualisation en temps réel de l'état du système ainsi que des éventuels problèmes détectés.

L'inconvénient majeur est que SCATS utilise des algorithmes de choix de stratégies parmi une série de plans pré-calculés et non une procédure réelle d'optimisation de la commande basée sur l'emploi d'un modèle de trafic.

SCOOT : Split Cycle and Offset Optimisation Technique : Ce système a été développé en 1981 par le *Traffic and Road Research Laboratory TRRL* en Grande Bretagne. Ce système se base initialement sur un plan de feux fixes issu du système TRANSYT avec un algorithme d'optimisation fourni pour l'application en ligne [33, 34, 35].

Le principe général de SCOOT est d'ajuster par petits incréments successifs les paramètres des plans de feux de manière à répondre au mieux à la situation de trafic actuelle. Le réseau de carrefours commandé par SCOOT est subdivisé en plusieurs zones. Les carrefours d'une même zone opèrent avec la même durée de cycle. Cette méthode ne né-

cessite qu'un capteur par voie pour mesurer le débit et l'occupation de la boucle. A partir de l'enregistrement du profil de la demande, et grâce au modèle de TRANSYT, SCOOT prédit l'évolution de la longueur de file d'attente. Un critère est alors créé pour l'optimisation à partir de la somme des valeurs moyennes des files d'attente ainsi que le nombre total d'arrêts de la région régulée.

L'optimisation de SCOOT considère trois types de réglages :

- **Répartition des temps verts** : Au niveau de chaque carrefour, cette méthode décide, peu avant le changement de phase, si la durée de ce changement doit être maintenue, avancée ou reculée, afin de minimiser le degré de saturation des tronçons entrants.
- **Décalages** : Une fois par cycle et pour chaque carrefour, les décalages entre carrefours sont légèrement modifiés pour améliorer la somme des performances des carrefours adjacents.
- **Durée de cycle** : Périodiquement et pour certains cycles, SCOOT modifie la durée du cycle de quelques secondes, afin que le degré de saturation du chaînon le plus chargé se rapproche de 90%.

SCOOT conduit à une réduction de 12% du temps moyen perdu par rapport à une méthode basée sur des changements de plans de feux fixes [36]. Cependant, à cause du manque de coordination entre les différentes zones gérées par SCOOT, il s'avère souvent difficile de partager un réseau en différentes zones. De plus, les performances de SCOOT se détériorent en situations saturées.

OPAC : Optimization Policies for Adaptive Control : OPAC a été développé par [37]. Il s'agit d'une stratégie de commande des feux en temps réel adaptée à la demande en utilisant l'optimisation par la programmation dynamique (DP). OPAC utilise un niveau de contrôle locale pour minimiser le délai total de chaque intersection et ensuite une synchronisation pour le réseau global.

Bien qu'OPAC fonctionne acycliquement dans le niveau local, il utilise des cycles virtuels pour maintenir la synchronisation du réseau au niveau global. La longueur du cycle virtuel varie selon les besoins d'une intersection ou d'une majorité des intersections.

Il faut noter que OPAC souffre d'une exigence informatique énorme. La mise en œuvre en temps réel de la stratégie OPAC est toujours limitée aux intersections isolées en raison de la complexité de calcul pour un réseau.

Régulation "stocker-et-transférer" : Le principe "*stocker-et-transférer*" ("store and forward" en anglais) a été initialement proposé par Gazis et Potts [38] en 1963. Récemment, ce principe est apparu séduisant car il permet de réguler un réseau d'intersections à l'échelle d'une ville. L'idée principale est d'introduire une simplification du modèle qui permet la description mathématique du processus de flux de trafic avec l'utilisation de variables discrètes. Cette dernière est d'une importance capitale, car elle ouvre la voie à l'application des méthodes d'optimisation et de contrôle très efficaces (tels que la programmation linéaire, la programmation quadratique, etc) avec une complexité polynomiale, ce qui, à son tour, permet la régulation coordonnée du réseau à grande échelle en temps réel, même dans les situations saturées.

Selon le fonctionnement réel des flux de trafic et des feux de signalisation, le flux quittant une voie est positif seulement si cette voie a le feu vert, ce qui signifie que le flux présente des interruptions dans un cycle. Le modèle "*stocker-et-transférer*" ignore ces interruptions et considère le flux comme un processus continu (voir Figure 1.8). Ceci revient théoriquement à supposer que :

$$\eta = \frac{g}{c}s \quad (1.7)$$

où s est le débit de saturation, g est le temps vert, c est le cycle, η est le débit moyen. Les conséquences de la simplification sont [39] :

- la discrétisation temporelle ne peut pas être inférieure à la durée d'un cycle, ce qui limite l'observation de phénomènes locaux ;
- les oscillations des files d'attente en fonction des changements de phases ne peuvent pas être décrites dans ce modèle ;
- la régulation dans cet approche ne peut pas contrôler les décalages entre carrefours adjacents.

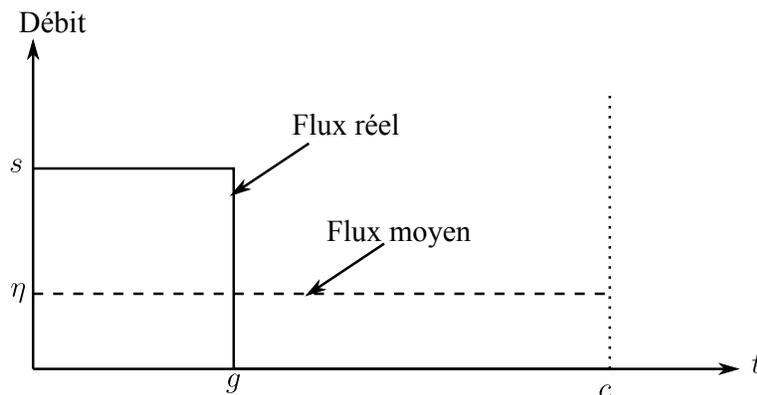


FIGURE 1.8 – Simplification du modèle "*stocker-et-transférer*"

Grâce à cette simplification, quelques stratégies ont été développées ces dernières années [40, 41]. En particulier, TUC (Traffic-responsive Urban Control), initialement développé pour le projet TABASCO d'European Telematics Applications [9], a été appliqué en Angleterre, en Grèce et en Allemagne [42] donnant des résultats satisfaisants quand le trafic est fluide.

D'autre part, de nombreux travaux traitant le problème des perturbations basés sur le modèle "stocker-et-transférer" ont été réalisés [41, 43, 44]. Dans le premier travail, les auteurs ont tenté de concevoir une stratégie de contrôle basée sur la théorie de contrôle optimal quadratique afin de réduire le risque d'embouteillage. Dans le deuxième, une commande par retour d'état a été établie pour empêcher la congestion dans le réseau. L'objectif du troisième article était de développer un algorithme d'optimisation pour déterminer une combinaison des temps des feux verts minimisant le risque de congestion. Cependant, l'inconvénient principal de tous ces travaux est la manière de considération des perturbations. En effet, dans les deux premiers articles, les perturbations ont été supposées constantes [41] ou bornées [43]. Dans le troisième, elles ont été considérées comme des incertitudes et la théorie minimax a été appliquée. En effet, l'objectif était de minimiser les temps des feux verts en tenant compte la valeur maximale des incertitudes. Cependant, cette hypothèse limite l'espace de recherche réel et, par suite, la possibilité de trouver une solution.

Régulation par des algorithmes d'optimisation : Plusieurs algorithmes d'optimisation ont été utilisés afin d'établir un plan pour les feux de circulation permettant de minimiser les temps d'attente des véhicules dans les voies. Nous pouvons citer par exemple les algorithmes génétiques [45, 46] et l'optimisation des colonies de fourmis [47, 48]. Cependant, ces approches ont rencontré quelques difficultés, notamment la faisabilité en temps réel.

Régulation via la thermodynamique : L'utilisation de la thermodynamique statistique pour traiter les systèmes non physiques a attiré l'attention depuis longtemps (publications [49] et [50]). Dans ces deux articles, les auteurs ont tenté de maximiser l'entropie de Shannon pour atteindre l'équilibre dans le réseau de communication [49] ou dans le réseau de transport [50]. En outre, les grandeurs thermodynamiques ont été formulés pour décrire l'état du réseau de transport pendant la période de congestion [51] ou bien pour modéliser certains paramètres tels que les flux de trafic et les vitesses de véhicules [52].

Cependant, dans tous ces articles, la notion de contrôle des feux de circulation n'a pas été introduite.

Plus tard, certains travaux ont établi une analogie entre les systèmes de transport et les systèmes thermodynamiques [53, 43]. En effet, la notion de l'entropie a été introduite comme indice de désordre dans les systèmes de transport. Par contre, l'efficacité de l'entropie thermodynamique dans le domaine de transport n'a pas été prouvée dans ces travaux.

1.4 Conclusion et objectifs de la thèse

Les systèmes de transport sont des systèmes complexes en raison non seulement du nombre élevé d'acteurs qui y participent, mais aussi à cause de leurs structures très maillées sur lesquelles il se déroule le trafic. Compte tenu de cette complexité, il n'existe pas de méthode parfaite pour contrôler le flux dans une intersection routière. L'adéquation d'une méthode est très liée au condition du trafic (fluide, dense et saturé etc...). Les recherches qui ont été menées sur la régulation du trafic ont permis de développer plusieurs stratégies de régulations. Toutefois, la plupart d'entre elles sont destinées, de manière exclusive, aux méthodes d'optimisation en ligne pour minimiser un critère formulé à partir d'un comportement idéal souhaité. La minimisation du critère permet de déterminer la commande à appliquer pour mieux réaliser les objectifs de la commande. Cependant, et indépendamment d'une quelconque comparaison, ces travaux souffrent de trois inconvénients majeurs suivants :

- La faisabilité en temps réel de la commande.
- La robustesse vis-à-vis des perturbations qui sont inhérentes aux systèmes de transport.
- La non prise en compte des changements brusques des flux.

Ce constat milite donc pour une résolution des problèmes de régulation des carrefours, faisant d'avantage appel à des méthodes nouvelles.

Objectifs de la thèse : Dans le cadre de notre travail, nous nous intéressons essentiellement à un travail en amont permettant d'éviter la congestion en forçant les files d'attente à ne pas dépasser le niveau de trafic correspondant à l'optimum opérationnel des lignes. Pour ce faire, trois approches sont utilisées, la théorie des systèmes dissipatifs, la stabilisation au sens du Lyapunov et la stabilisation en temps fini.

L'idée qui a guidé notre choix a été d'appliquer des techniques et des formulations qui ont prouvé une efficacité certaine dans des applications industrielles. Elles mettent en jeu des grandeurs et des caractéristiques concrètes qui s'interprètent clairement comme une interconnexion entre le système et son environnement. En outre, elles se conforment le plus aux objectifs fixés pour notre investigation, à savoir, l'obtention des commandes pour la régulation du réseau des carrefours permettant :

- la faisabilité en temps réel ;
- une flexibilité dans son utilisation ;
- une prise en compte des perturbations instantanées affectant le système.

CHAPITRE 2

COMMANDE DISSIPATIVE DES RÉSEAUX DE TRANSPORT

2.1 Introduction

L'objectif principal de développer une commande pour un système de transport est de maintenir un trafic plus fluide afin d'éviter l'embouteillage et d'assurer une bonne qualité de service pour les usagers du réseau de transport. Dans cette optique, les feux de signalisation sont considérés comme l'outil le plus important pour régler ces réseaux.

L'idée fondamentale de l'approche proposée dans ce chapitre est de faire le lien entre la théorie des systèmes dissipatifs issue de la thermodynamique et les systèmes des carrefours signalisés. En effet, le flux de véhicules peut être vu comme étant l'énergie fournie aux carrefours. Les feux peuvent alors être considérés comme des vannes dissipant cette énergie sur un réseau.

Dans le cas des carrefours congestionnés, ce concept se traduit par le fait que l'énergie stockée (nombre de véhicules dans les voies) est beaucoup plus importante que l'énergie dissipée (véhicules sortants). Ce constat est la raison derrière le recours à des commandes permettant de dissiper cette énergie stockée. C'est précisément là où se situe l'intérêt d'utiliser la théorie des systèmes dissipatifs. En effet, cette théorie offre des outils qui permettent de moduler par rétro-action l'énergie physique de façon à ce que cette énergie soit utilisable comme fonction de Lyapunov à des fins de commande et de stabilisation. Ces développements ont conduit à une stratégie intitulée **commande dissipative** qui

consiste à trouver un contrôleur transformant un système non-dissipatif, comme dans le cas des carrefours congestionnés, en un système dissipatif. De cette manière, le système sera mieux organisé.

Cependant, le réseau de transport est soumis souvent à des incertitudes et des contraintes sur les variables de commande et de l'état du modèle considéré. De ce fait, la commande dissipative pour les systèmes de transport doit prendre en compte ces contraintes ainsi que ces incertitudes.

Notre contribution dans ce chapitre consiste à proposer une commande dissipative améliorant celle proposée dans le travail de Zhou [54]. En effet, la formulation de la fonction d'approvisionnement dans le travail de Zhou est incomplète car les flux sortants du système vers l'extérieur n'ont pas été pris en compte. Cependant, puisque la fonction d'approvisionnement relie le système et l'extérieur, alors les flux sortants doivent être pris en compte. Cette considération rend le système plus complexe et plus proche de la réalité.

Dans un premier temps, nous rappelons quelques définitions et résultats utiles dont nous aurons besoin dans notre travail. Ensuite, nous modélisons le réseau de transport sous forme d'un système discret linéaire en utilisant l'approche "stocker-et-transférer". Une fois le réseau modélisé, nous présentons l'analogie entre les systèmes de transport et les systèmes thermodynamiques en se focalisant sur la notion d'entropie. Nous définissons ensuite le problème et nous appliquons la commande dissipative tout en prenant en compte les incertitudes et les contraintes du modèle. Enfin, un exemple est élaboré pour évaluer les performances de la commande proposée.

2.2 Rappels mathématiques et résultats préliminaires

Sur les vecteurs et les opérateurs positifs

Considérons deux vecteurs x et y de \mathbb{R}^n , alors :

$$— x > y \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\}, x_i > y_i$$

$$— x \geq y \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\}, x_i \geq y_i$$

Il est clair que : $x > y \Rightarrow x \geq y$. Ainsi, nous pouvons définir les vecteurs comme suit :

$$— x \text{ est non-négatif, i.e., } x \geq 0$$

$$— x \text{ est positif, i.e., } x > 0$$

Considérons maintenant deux matrices A et $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$:

$$— A > B \Leftrightarrow \forall (i, j), a_{ij} > b_{ij}$$

$$— A \geq B \Leftrightarrow \forall (i, j), a_{ij} \geq b_{ij}$$

Ainsi, nous pouvons dire :

- A est non-négative, i.e., $A \geq 0$
- A est positif, i.e., $A > 0$

Il est évident que : $A > 0 \Rightarrow A \geq 0$.

Rappelons que l'espace vectoriel \mathbb{R}^n muni de la relation d'ordre partiel \geq est un espace de Riesz [55], c'est-à-dire pour tout couple (x, y) d'éléments de \mathbb{R}^n , il existe :

- $\sup(x, y)$: le plus petit des majorants de $\{x, y\}$
- $\inf(x, y)$: le plus grand des minorants de $\{x, y\}$

Définissons maintenant pour tout $x \in \mathbb{R}^n$:

$$x^+ = \sup(x, 0); \quad x^- = \sup(-x, 0) = (-x)^+ = -\inf(x, 0)$$

Il est clair que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $x^+ > 0$ et $x^- > 0$ et :

$$x = x^+ - x^-; \quad |x| = x^+ + x^- \quad (2.1)$$

De plus, nous avons pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} \sup(x, y) &= x + \sup(y - x, 0) = x + (y - x)^+ = \frac{1}{2}[x + y + |x - y|] \\ x + y &= \sup(x, y) + \inf(x, y) \quad (\text{relation de Dedekind}) \end{aligned}$$

Lemme 2.1 Soient $x \in \mathbb{R}^n$ et $u, v \in \mathbb{R}_+^n$ tels que :

$$x = u - v$$

Nous avons alors :

$$x^+ \leq u, \quad x^- \leq v$$

Autrement dit, la décomposition de x en $x^+ - x^-$ est minimale.

Preuve: Nous avons :

$$x^+ = (u - v)^+ = \sup(u - v, 0) = \sup(u, v) - v$$

Donc, si $u > v$, il vient :

$$x^+ = u - v \leq u, \quad \text{car } u, v \geq 0$$

et si $u \leq v$, alors :

$$x^+ = v - v = 0 \leq u$$

D'autre part, afin de montrer que $x^- \leq v$, il suffit de remarquer que :

$$x^- = (u - v)^- = -\inf(u - v, 0) = \sup(v - u, 0) = \sup(u, v) - u$$

et d'appliquer le raisonnement précédent. ■

De la même manière, pour toute matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ nous définissons :

$$\begin{aligned} A^+ &= (A_{ij}^+); & \text{où } A_{ij}^+ &= \sup(A_{ij}, 0) \\ A^- &= (A_{ij}^-); & \text{où } A_{ij}^- &= -\inf(A_{ij}, 0) \end{aligned}$$

Il est clair que :

$$A^+ \geq 0; \quad A^- \geq 0; \quad A = A^+ - A^-; \quad |A| = A^+ + A^- \quad (2.2)$$

En se basant sur le lemme 2.1, nous pouvons établir le lemme suivant :

Lemme 2.2 Soient $x \in \mathbb{R}^n$ et $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, alors :

$$(Ax)^+ \leq A^+x^+ + A^-x^-; \quad (Ax)^- \leq A^+x^- + A^-x^+ \quad (2.3)$$

Preuve: Remarquons que :

$$Ax = (A^+ - A^-)(x^+ - x^-) = (A^+x^+ + A^-x^-) - (A^+x^- + A^-x^+)$$

Posons :

$$u = A^+x^+ + A^-x^-, \quad v = A^+x^- + A^-x^+$$

Ainsi, l'application du lemme 2.1 donne immédiatement le résultat. ■

Sur l'inclusion des polyèdres

Soient les deux matrices $Q \in \mathbb{R}^{q \times n}$ et $P \in \mathbb{R}^{p \times n}$. Définissons les ensembles suivants :

$$\begin{aligned} \mathbb{Q} &= \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid Qx \leq \lambda \right\} \\ \mathbb{P} &= \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid Px \leq \beta \right\} \end{aligned}$$

Théorème 2.1 (Hennet [56]) Une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{P}$ est qu'il existe une matrice $K \in \mathbb{R}^{p \times q}$ telle que :

$$\begin{aligned} K_{ij} &\geq 0; \quad \forall i = 1 \cdots p, \quad j = 1 \cdots q \\ KQ &= P \\ K\lambda &\leq \beta \end{aligned}$$

Le théorème 2.1 donne une condition nécessaire et suffisante du problème suivant : les solutions du système des inégalités $Qx \leq \lambda$ sont aussi solutions du polyèdre non vide défini par le système des inégalités $Px \leq \beta$.

Sur les Inégalités Matricielles Linéaires (LMI)

Selon [57], Une inégalité matricielle linéaire (LMI) est une relation de type :

$$F(x) \triangleq F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i \succ 0 \quad (2.4)$$

où $x \in \mathbb{R}^m$ et les matrices symétriques $F_i = F_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i = 0, \dots, m$, sont données. Le signe d'inégalité \succ signifie que $F(x)$ est définie-positive. Les LMI non-strictes peuvent également être définies comme suit :

$$F(x) \succeq 0$$

Une LMI représente une grande variété de contraintes convexes sur x car les inégalités linéaires, quadratiques et des normes matricielles peuvent toutes être exprimées sous la forme d'une LMI.

En particulier, les inégalités non linéaires mais convexes sont représentées sous forme LMI, en utilisant le lemme du complément de Schur suivant (voir [57]) :

Lemme 2.3 Soit S une matrice sous la forme suivante :

$$S = \begin{pmatrix} A & B^T \\ B & C \end{pmatrix}$$

et C est inversible. Ensuite $S \succeq 0$ si et seulement si $C \succ 0$ and $A - B^T C^{-1} B \succeq 0$.

Une propriété remarquable des LMIs est la possibilité de regrouper plusieurs LMIs $F^1(x) \succeq 0, \dots, F^q(x) \succeq 0$ en une seule LMI bloc-diagonale :

$$F(x) = \begin{bmatrix} F^1(x) & & \\ & \ddots & \\ & & F^q(x) \end{bmatrix} \succeq 0$$

Cette propriété découle du fait que les valeurs propres d'une matrice diagonale par bloc sont constituées par les valeurs propres des matrices sur la diagonale.

Sur l'invariance positive

Soit le système discret comme suit :

$$x(k+1) = f(x(k)), \quad x(k_0) = x_0, \quad (2.5)$$

où $x(k) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état du système à l'instant $k \in \mathbb{N}$, k_0 est l'instant initial et x_0 est l'état initial.

Définition 2.1 Soit $S \in \mathbb{R}^n$. S est dit positivement invariant par rapport à la solution du système (2.5) si et seulement si :

$$x_0 \in S \Rightarrow f(x(k)) \in S$$

pour tout $(k_0, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. ▶

Un ensemble invariant piège donc les trajectoires : si une trajectoire commence dans S , elle reste dans S pour tout $k \in \mathbb{N}$. Pour les systèmes dynamiques, une trajectoire est un ensemble invariant, c'est l'exemple le plus simple d'un tel ensemble.

Sur ce, nous terminons les rappels et notations mathématiques pour passer à la modélisation du système.

2.3 Modèle stocker-et-transférer

Dans un système de transport, les rues de circulation connectées forment un réseau pour les véhicules qui peuvent l'utiliser pour se déplacer. De plus, les intersections dans un réseau sont composées des rues connectées et des zones de croisement [39]. Par exemple, les figures 2.1(a) et 2.1(b) illustrent deux types d'intersections qui relient 4 et 3 rues respectivement.

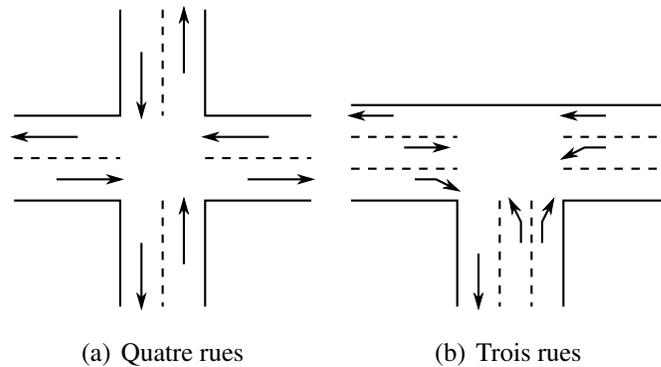


FIGURE 2.1 – Exemples de deux types d'intersections

En outre, une rue peut être séparée en plusieurs voies de circulation en fonction de la direction des véhicules. Par exemple, les 4 rues de l'intersection illustrées dans la figure 2.1(a) sont divisées en deux voies. D'autre part, dans la figure 2.1(b), toutes les rues se composent de trois voies. En effet, elles sont divisées par rapport à la direction des véhicules. D'autre part, une rue peut avoir plus d'un feu de circulation, mais une voie ne

peut avoir qu'un seul. Par conséquent, les voies de circulation sont plus appropriées pour être considérées comme les zones des unités de trafic plutôt que les rues.

Considérons maintenant le réseau d'intersection représenté dans la figure 2.2. Il comprend n voies de circulation, $n > 0$. Soit x_i le nombre de véhicules dans chaque voie i .

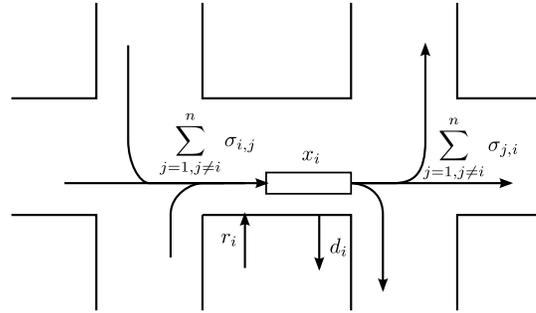


FIGURE 2.2 – Les flux de trafic liés à la voie i

En utilisant le modèle "stocker-et-transférer" où les voies sont considérées comme des réservoirs respectant la loi de conservation de véhicules, le changement de x_i est donné par l'équation suivante (voir [38] et [58]) :

$$x_i(k+1) = x_i(k) + l_i(k) + r_i(k) - d_i(k) \quad (2.6)$$

avec r_i désigne le nombre d'entrée de véhicules de l'extérieur dans la voie i , d_i est le nombre de sortie de véhicules de la voie i vers l'extérieur et l_i est la somme de tous les échanges de véhicules entre la voie i et les voies j , ce qui signifie :

$$l_i(k) = \sum_{j=1, j \neq i}^n (\sigma_{i,j}(k) - \sigma_{j,i}(k)) \quad (2.7)$$

où $\sigma_{i,j}$ (résp, $\sigma_{j,i}$), $j \neq i$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$, représente les flux de véhicules entrants dans la voie i (résp, j) depuis les voies j (résp, i). Il est important de noter que seuls les termes correspondant aux liens entre les voies du réseau sont rendus explicites dans l'équation (2.7). Autrement dit, tous les $\sigma_{i,j}$ pour les liens inexistantes n'apparaissent pas dans les équations.

Ainsi, le système de transport peut se modéliser sous forme vectorielle par l'équation suivante :

$$x(k+1) = x(k) + l(k) + r(k) - d(k), \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (2.8)$$

où $x = [x_1, \dots, x_n]^\top$, $l = [l_1, \dots, l_n]^\top$, $r = [r_1, \dots, r_n]^\top$ et $d = [d_1, \dots, d_n]^\top$.

2.4 Introduction au système thermodynamique

La thermodynamique est une branche de la physique qui étudie la science des échanges d'énergie entre les systèmes, ou entre les systèmes et le milieu extérieur, lors de transformations de la matière. Ses applications sont nombreuses car l'énergie est un concept qui s'applique dans tous les domaines. Nous l'utilisons autant en physique qu'en chimie ou en biologie, en s'appuyant notamment sur des outils mathématiques. Elle nous permet de comprendre et de prévoir les variations d'énergie entre différents systèmes en interaction grâce à des principes fondamentaux.

La représentation mathématique des systèmes thermodynamiques a été largement développée par de nombreuses approches. En 2005 Haddad [59] a proposé une représentation discrète basée sur les systèmes compartimentaux. C'est ce modèle que nous proposons d'exploiter par la suite afin d'introduire la démarche thermodynamique présentée dans ce chapitre.

Dans cette optique, considérons le système thermodynamique représenté dans la figure 2.3. Ce système comprend n sous-systèmes, chacun étant un compartiment du modèle, et un système d'arcs orientés reliant les compartiments.

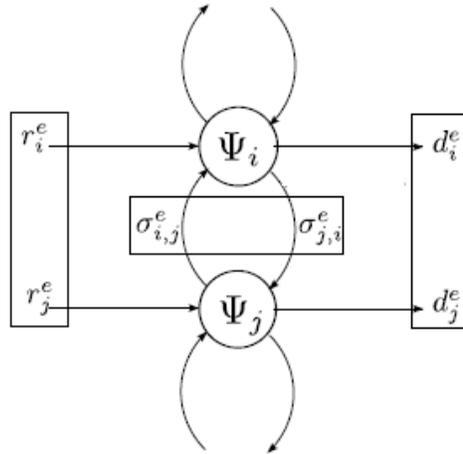


FIGURE 2.3 – Système thermodynamique

Soient E_i l'énergie stockée dans le sous-système Ψ_i , $i \in \{1, \dots, n\}$ et $E_i^* > 0$ sa capacité thermique. Alors la température du compartiment Ψ_i est donnée par :

$$T_i = E_i/E_i^*, \quad i \in \{1, \dots, n\} \quad (2.9)$$

Dans les systèmes thermodynamiques, il y a des échanges ou transferts d'énergie entre les sous-systèmes. Ils peuvent se faire soit par des transports physiques d'une localisation à l'autre, soit par des réactions chimiques. Les échanges d'énergie entre les sous-systèmes sont symbolisées par $\sigma_{i,j}^e$, $i \neq j$ (résp, $\sigma_{j,i}^e$) qui représente le flux d'énergie entrant à l'instant k dans le compartiment i (résp, j) depuis le compartiment j (résp, i). Par ailleurs, des arcs d'entrée et de sortie supplémentaires représentent les interactions du réseau avec son environnement : soit des flux d'entrée notés r_i^e injectés de l'extérieur dans le sous-système i , soit des flux de sortie d_i^e soutirés du sous-système i vers l'extérieur.

Un système thermodynamique est généralement caractérisé par des équations mathématiques qui décrivent l'évolution au cours du temps des variables d'état du modèle que sont les énergie stockées dans chaque sous-système. L'écriture de ces équations repose sur le principe de conservation de la masse. Appliqué au sous-système i à l'instant k , ce principe traduit le fait que pendant l'intervalle de temps $[k, k + 1]$ la variation $\Delta E_i(k) = E_i(k + 1) - E_i(k)$ de la quantité d'énergie présente dans le sous-système i est égale à la différence entre les sommes des flux entrants et sortants.

Plus précisément, si nous considérons le i -ème sous-système Ψ_i , l'équation régissant son évolution au cours du temps s'écrit de la manière suivante :

$$\Delta E_i(k) = E_i(k+1) - E_i(k) = \sum_{j=1, j \neq i}^n \left(\sigma_{i,j}^e(k) - \sigma_{j,i}^e(k) \right) + r_i^e(k) - d_i^e(k), \quad k \in \mathbb{N} \quad (2.10)$$

Notons tout de suite que dans cette équation, seuls sont explicités les termes correspondant à des liens effectifs du système. En d'autres termes, les $\sigma_{i,j}^e$, r_i^e et d_i^e correspondant à des liens inexistantes n'apparaissent pas dans les équations.

Si nous considérons maintenant les n sous-systèmes, l'équation (2.10) peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$E(k+1) = E(k) + l^e(k) + r^e(k) - d^e(k) \quad (2.11)$$

où $E(k) = [E_1(k), \dots, E_n(k)]^T$ est le vecteur d'état du système à l'instant k , $r^e = [r_1^e, \dots, r_n^e]^T$ est le vecteur des flux d'entrée, $d^e = [d_1^e, \dots, d_n^e]^T$ est le vecteur des flux de sortie et $l^e = [l_1^e, \dots, l_n^e]^T$ représente tous les échanges d'énergie entre les sous-système, c'est à dire :

$$l_i^e = \sum_{j=1, j \neq i}^n (\sigma_{i,j}^e - \sigma_{j,i}^e), \quad i \in \{1, \dots, n\} \quad (2.12)$$

2.4.1 Formulation de l'entropie

Pour formuler l'entropie, Haddad [59] a présenté la version discrète suivante de l'inégalité de Clausius pour le système (2.11)

$$\psi(E(k+1)) \geq \psi(E(k)) + \sum_{i=1}^n \frac{Q_i(k)}{T_i^a(k+1)}, \forall k \in \mathbb{N} \quad (2.13)$$

où $\psi(E)$ est l'entropie du système thermodynamique, $T_i^a(k+1)$ est la température absolue du i -ème sous-système à l'instant $k+1$ et $Q_i(k)$ est l'énergie échangée par le i -ème sous-système avec le milieu extérieur :

$$Q_i(k) = r_i^e(k) - d_i^e(k), \quad i \in \{1, \dots, n\}$$

En se basant sur cette inégalité, Haddad a formulé l'entropie du système comme suit :

$$\psi(E) \triangleq E^{*T} \ln(\tau \epsilon + P_e E) - \epsilon^T E^* \ln \tau \quad (2.14)$$

où $\ln(x) = [\ln(x_1), \dots, \ln(x_n)]^T$, $E^* = [E_1^*, \dots, E_n^*]^T$, $\epsilon = [1, 1, \dots, 1]^T$, τ est un scalaire positif tel que $T_i^a = \tau + T_i$, $i \in \{1, \dots, n\}$, T_i est la température du système donnée par l'équation (2.9) et P_e est une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont $1/E_i^*$.

Remarque 2.1 Pour un système isolé, i.e, $Q_i(k) = 0, \forall i \in \{1, \dots, n\}$, l'inégalité (2.13) montre que $\psi(E(k+1)) \geq \psi(E(k))$. Ceci montre que l'entropie définie par (2.14) est une fonction croissante pour un système isolé. Ce qui traduit exactement le deuxième principe de la thermodynamique (l'entropie d'un système isolé ne peut pas diminuer). Néanmoins, la diminution d'entropie d'un système non isolé est possible si l'augmentation de l'entropie du milieu extérieur fait plus que compenser la diminution d'entropie de ce système. Le bilan entropique reste alors conforme à la deuxième loi de la thermodynamique et se traduit par une augmentation globale de l'entropie, assimilée à une création d'entropie qui est donc la caractéristique de toutes les transformations réelles. ►

2.4.2 Formulation de la disentropie

La disentropie a la caractéristique précise d'entraîner un système en désordre vers un niveau d'auto-organisation. Pour formuler cette fonction, Haddad a présenté dans un premier temps l'inégalité inverse de Clausius suivante :

$$\phi(E(k+1)) - \phi(E(k)) \leq \sum_{i=0}^n Q_i(k) T_i(k+1), \forall k \in \mathbb{N} \quad (2.15)$$

où $\phi(E)$ est la disentropie du système thermodynamique, $Q_i(k)$ est l'énergie échangée par le i -ème sous-système avec le milieu extérieur et $T_i(k+1)$ est la température absolue du i -ème sous-système à l'instant $k+1$. Ainsi, en se basant sur cette inégalité, Haddad a formulé la disentropie du système comme suit :

$$\phi(E) \triangleq \frac{1}{2} E^T P_e E \quad (2.16)$$

Remarque 2.2 Pour un système isolé, i.e, $Q_i(k) = 0, \forall i \in \{1, \dots, n\}$, l'inégalité (2.15) montre que $\phi(E(k+1)) \leq \phi(E(k))$. Ceci montre que la disentropie est une fonction décroissante pour un système isolé. Par conséquent, l'entropie augmente si et seulement si la disentropie diminue. Ceci montre la dualité entre l'entropie (mesure du désordre) et la disentropie (mesure de l'ordre). ►

Dans la section suivante, nous allons voir comment des liens se tissent entre les systèmes de transport et les systèmes thermodynamiques. Pour cela, plusieurs paramètres et principes thermodynamique vont trouver leurs parallèles dans le cadre des systèmes de transport.

2.5 Correspondances entre les systèmes de transport et les systèmes thermodynamiques

Nous allons voir à présent comment les phénomènes observés en thermodynamique s'apparentent avec ceux du trafic. En effet, chaque voie de circulation (tronçon) peut contenir une certaine quantité de véhicules. Ces derniers se déplacent entre les voies ou quittent le tronçon vers l'extérieur. Ainsi, si nous effectuons une projection de la figure 2.2 sur la figure 2.3, nous pouvons considérer le tronçon i comme étant un compartiment dont l'énergie stockée est représentée par le nombre des véhicules sur le tronçon. Ainsi, les véhicules sont équivalents à l'énergie et les tronçons à des compartiments dans le contexte thermodynamique .

Ceci fait, nous allons voir dans la suite comment le concept de la température en thermodynamique peut être introduit dans le contexte de transport. Pour ce faire, remarquons d'abord que chaque tronçon a une longueur fixe. Il s'ensuit que chaque tronçon i admet une certaine capacité x_i^* à contenir les véhicules. Par conséquent, la capacité x_i^* s'apparente à la capacité thermique E_i^* . Ainsi, si nous définissons le taux d'occupation d'une voie comme la proportion entre le nombre des véhicules sur le tronçon et sa capacité,

c'est à dire :

$$f_i = \frac{x_i}{x_i^*}, \quad i \in \{1, \dots, n\} \quad (2.17)$$

nous pouvons considérer le taux d'occupation de la voie comme étant la température $T_i = E_i/E_i^*$ dans le contexte thermodynamique. En résumé, le tableau 2.1 montre les correspondances des concepts de base entre les systèmes de transport et les systèmes thermodynamiques.

TABLE 2.1 – Correspondances des concepts de base

Thermodynamique	Transport
Energie	Véhicules
Sous-système	Voie de circulation
Energie stockée dans les sous-systèmes	Nombre de véhicules sur le tronçon
Capacité thermique	Capacité de la voie
Température	Taux d'occupation

2.6 Entropie du transport

Le second principe de la thermodynamique est un principe d'évolution qui introduit la notion d'irréversibilité des phénomènes physiques et la notion d'entropie. Il dit que l'entropie d'un système isolé augmente, ou reste constante. Il est associé à l'impossibilité du passage du désordre à l'ordre sans intervention extérieure.

Le second principe a une origine statistique : à la différence du premier principe, les lois microscopiques qui gouvernent la matière ne le contiennent qu'implicitement et de manière statistique. En revanche, il est assez indépendant des caractéristiques mêmes de ces lois, car il apparaît également si nous supposons des lois simplistes à petite échelle.

Bien que les systèmes thermodynamiques et les réseaux de transport peuvent être similaires comme nous venons de le voir, le second principe de la thermodynamique n'est pas applicable dans le contexte du transport. En effet, une des conséquences directe du deuxième principe de la thermodynamique est que lorsque deux corps dans l'espace mis en contact sont à des températures différentes, il y a systématiquement un transfert de chaleur toujours vers le corps froid. Dans le contexte du transport, ce phénomène n'est pas observable car la propagation des véhicules dans un réseau est déterminée par la volonté des conducteurs et aucune règle n'existe pour obliger les véhicules de se déplacer seulement des voies les plus chargées vers celles les moins chargées. Par conséquent, nous

ne pouvons pas introduire le concept d'entropie dans le cadre du transport en fonction de certains principes tel qu'il est défini dans le cadre de la thermodynamique. Néanmoins, sur la base des similarités des concepts de base, tels que l'énergie et la température, nous pouvons présenter l'entropie de transport comme une mesure du désordre du système.

Pour ce faire, comparons tout d'abord les notions de l'ordre et du désordre entre les systèmes thermodynamiques et les réseaux de transport. En effet, dans le contexte thermodynamique, un ordre élevé signifie une plus grande capacité de réaliser un travail, ce qui se traduit par une grande différence de températures entre les sous-systèmes. Par exemple, dans un système thermodynamique composé de deux sous-systèmes, si la plupart de l'énergie se concentre sur un seul sous-système pour générer un gradient de température, l'énergie du sous-système le plus chaud aura le potentiel de se déplacer vers celui le plus froid. Ainsi, la quantité d'énergie potentielle de la transmission est également déterminée par la différence de température. Ce potentiel correspond à la capacité du système d'effectuer un travail utile. Dans ce cas, le système est dans une organisation élevée. D'autre part, si l'énergie est répartie uniformément dans ces deux sous-systèmes de sorte qu'ils partagent la même température, il n'y aura pas de mouvements d'énergie potentielle. Dans ce cas, le système est considéré comme étant mal organisé.

Par contre, pour les systèmes de transport il en va autrement. En effet, une grande différence entre les taux d'occupation de deux voies de circulation correspond à un désordre élevé. Autrement dit, si la plupart des véhicules se concentrent sur une seule voie, celle-ci sera encombrée et par conséquent susceptible de provoquer une congestion. Dans ce cas, le système de transport est considéré mal organisé. D'autre part, si les véhicules sont dispersés d'une manière uniforme, le problème de congestion disparaît et le système sera mieux organisé. En outre, l'apport d'énergie au système thermodynamique apporte plus de capacité à faire un travail, ce qui augmente l'ordre du système. Cependant, dans le contexte du transport, l'entrée des véhicules par le milieu extérieur apporte plus de chances de générer des congestions, ce qui diminue l'ordre du système. Pour un système thermodynamique isolé sans apport d'énergie, le désordre (entropie) augmente jusqu'à ce que le système atteigne l'équilibre. Au contraire, si, à un moment donné, le système de transport ne possède pas d'entrée de véhicules, le système dissipe les véhicules existants, et par conséquent devient mieux organisé.

En résumé, les notions de l'ordre et du désordre dans les deux systèmes sont opposées. Ceci signifie que l'ordre thermodynamique (mesuré par la disentropie) correspond au désordre dans le contexte du transport. En d'autres termes, **l'entropie du transport**

correspond à la disentropie thermodynamique. Ce qui nous permet d'écrire :

$$\psi(x) \triangleq \frac{1}{2}x^T Px, \quad \text{Entropie du transport} \quad (2.18)$$

$$\phi(x) \triangleq x^{*T} \ln(\tau\epsilon + Px) - \epsilon^T x^* \ln \tau, \quad \text{Disentropie du transport} \quad (2.19)$$

où P est une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont $1/x_i^*$ et $x^* = [x_1^*, \dots, x_n^*]^T$.

2.6.1 Justification de l'entropie du transport

La formule de l'entropie du transport a été introduite principalement à partir des considérations thermodynamiques, mais nous n'avons pas montré sa signification dans le contexte du transport. Pour ce faire, la figure 2.4 montre le diagramme fondamental liant le débit à la concentration. Ce diagramme est le plus couramment utilisé dans l'analyse du transport. Il est déduit à partir d'un modèle pionnier en modélisation du trafic routier. Il s'agit du modèle développé simultanément par [Lighthill et Whitham, 1955] ainsi que [Richards, 1956], s'appuyant sur une analogie avec la dynamique des fluides. Plus communément appelé le modèle LWR.

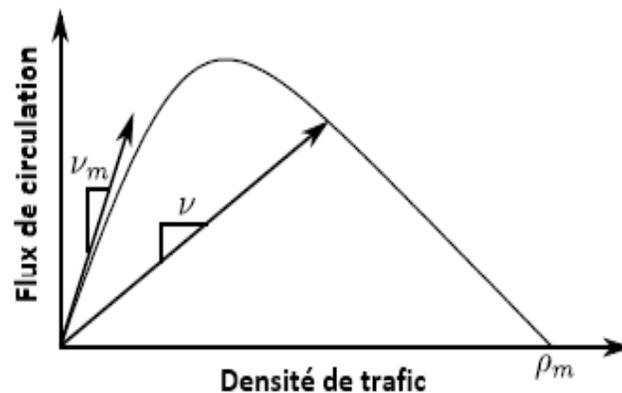


FIGURE 2.4 – Diagramme fondamental des flux de circulation

Nous constatons qu'il existe deux régimes différents :

- Lorsque le nombre de véhicules (concentration) est suffisamment faible sur la section considérée, ces véhicules n'interagissent pas et chacun peut circuler à la vitesse désirée, appelée vitesse libre (prise généralement égale à la vitesse maximale moyenne ν_m);
- En augmentant le nombre de véhicules dans la voie, les interactions deviennent plus importantes et se reflètent par une limitation du débit. Dans ce cas, les vitesses

pratiquées diminuent. La vitesse de flot est donc une fonction décroissante de la concentration ;

- Dans le cas extrême où la voie est saturée et donc la concentration est maximale ρ_m , la vitesse et le débit sont nuls ;

A noter que ces observations conduisent la plupart du temps à considérer un diagramme fondamental décomposé en deux parties distinctes, à savoir le régime fluide et le régime congestionné. En outre, nous pouvons remarquer que le désordre du réseau est intimement relié au nombre de véhicules sur les voies (plus le nombre de véhicules sur les voies est grand plus le système est désordonné) puisque la vitesse du flot est une fonction décroissante de la concentration.

Ceci fait, nous allons voir à présent comment l'entropie (2.18) prend toute sa signification dans le domaine du transport en la rattachant au nombre de véhicules sur les voies. En effet, étant donnés deux états $x(k_1)$ et $x(k_2)$ du réseau avec $k_1 < k_2$, la question fondamentale est : que signifie mathématiquement qu'un état est plus désordonné que l'autre ?

Commençons par un cas intuitive, à savoir $x(k_2) \leq x(k_1)$ (c'est-à-dire, $x_i(k_2) \leq x_i(k_1), i = 1, \dots, n$). Alors le nombre de véhicules de chaque voie diminue entre les instants k_1 et k_2 . Ceci implique une diminution de la densité dans chaque voie et donc une augmentation de la vitesse des véhicules, ce qui conduit à un ordre élevé du système. Ainsi, dans ce cas nous avons $\psi(x(k_2)) = x^T(k_2)Px(k_2) \leq \psi(x(k_1)) = x^T(k_1)Px(k_1)$ car $0 \leq x(k_2) \leq x(k_1)$. Par conséquent, l'entropie peut être considérée comme une mesure de la tendance du système à perdre son désordre.

Dans le cas général, la réponse à la question peut être donnée par la théorie de la majorisation qui a été introduite par Hardy, Littlewood et Polya [60]. C'est une formalisation de la notion de la diversité dans les composantes des vecteurs. Au cours des dernières décennies, cette théorie a trouvé des applications dans plusieurs disciplines comme la statistique, la théorie des probabilités, l'économie, la génétique mathématique, la mécanique quantique, l'algèbre linéaire et la géométrie. Pour plus de détails, les lecteurs peuvent se référer à l'excellent livre sur le sujet de Marshall [61].

En mathématiques, nous désignons par majorisation un certain préordre sur les éléments de l'espace vectoriel \mathbb{R}^n . Pour un vecteur $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$, nous notons $x^\downarrow = (x_{[1]}, \dots, x_{[n]})^T$ le vecteur de \mathbb{R}^n qui a les mêmes composantes, mais ordonnées en ordre décroissant, c'est-à-dire :

$$x_{[1]} \geq x_{[2]} \geq \dots \geq x_{[n]}$$

Cela signifie que $x_{[1]}$ est le plus grand élément de x , $x_{[2]}$ est le deuxième plus grand élément, etc.

Définition 2.2 Soient x et y deux vecteurs de \mathbb{R}^n . Nous disons que x est faiblement majoré par y et nous notons $x \prec y$ si :

$$\sum_1^r x_{[i]}^\downarrow \leq \sum_1^r y_{[i]}^\downarrow, \quad \forall r = 1, \dots, n \quad (2.20)$$

c'est-à-dire,

$$\begin{aligned} x_{[1]} &\leq y_{[1]} \\ x_{[1]} + x_{[2]} &\leq y_{[1]} + y_{[2]} \\ &\vdots \\ \sum_1^n x_{[i]} &\leq \sum_1^n y_{[i]} \end{aligned}$$

Si de plus $\sum_1^n x_{[i]} = \sum_1^n y_{[i]}$, alors nous disons que x est majoré par y et nous notons $x \prec y$. ▶

Il est clair que si $x \leq y$, alors x est faiblement majoré par y . Ainsi, la définition 2.2 inclut le cas mentionné plus haut. En outre, il est clair que si x est un vecteur positif, alors $x \prec (\sum_{i=1}^n x_i, 0, \dots, 0)$.

Le concept de la majorisation fournit une procédure de calcul simple et évidente pour la comparaison de deux vecteurs, mais il offre peu de lumière sur le sens de l'ordre. Une approche plus pratique est donnée par les matrices dites doublement sous-stochastique.

Définition 2.3 Une matrice $\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est dite doublement sous-stochastique si :

$$\Lambda_{ij} \geq 0, \quad \sum_{j=1}^n \Lambda_{ij} \leq 1, \quad \sum_{i=1}^n \Lambda_{ij} \leq 1$$

Si de plus $\sum_{j=1}^n \Lambda_{ij} = \sum_{i=1}^n \Lambda_{ij} = 1$, Λ est dite doublement stochastique. ▶

En utilisant les notions ci-dessus, une caractérisation de la notion de majorisation est donnée dans le lemme suivant (voir [61], A.4 page 14) :

Lemme 2.4 Soient $x \in \mathbb{R}_+^n$ et $y \in \mathbb{R}_+^n$ deux vecteurs positifs. Alors les trois conditions suivantes sont équivalentes :

1. x est faiblement majoré par y

2. *il existe une matrice doublement sous-stochastique Λ telle que $x = \Lambda y$*
3. *quelle que soit la fonction convexe croissante Θ définie dans \mathbb{R} , nous avons*

$$\sum_{i=1}^n \Theta(x_i) \leq \sum_{i=1}^n \Theta(y_i)$$

Il vient immédiatement à partir de ce lemme que l'ordre au sens de la majorisation est maintenant clair. En effet, à partir du point 2 nous pouvons remarquer que chaque composant x_i est une combinaison linéaire de y_1, \dots, y_n . Ceci implique que le vecteur x est le résultat d'une moyennisation du vecteur y à l'aide de poids dont la somme est inférieure à l'unité. En d'autres termes, x est le résultat de la diminution des écarts entre les composantes de y . Cela signifie que toutes les composantes x_i sont beaucoup plus proches que les y_i . Par conséquent, les composantes de x sont plus uniformément distribuées que celles de y .

Le point 3 identifie la classe des fonctions compatibles avec l'ordre au sens de la majorisation. Cela signifie que si x est faiblement majoré par y , alors l'inégalité associée à y sera plus grande que l'inégalité associée à x par une classe de fonctions d'évaluation Θ . Il s'agit de la mesure du degré d'inégalité d'une distribution.

Ceci fait, nous allons montrer maintenant que le concept de la majorisation et l'entropie $\psi(x)$ sont intimement liés, en ce sens que les deux offrent des approches au problème de la quantification de ce qu'un état de réseau est plus désordonné qu'un autre. En effet, si nous supposons que pour $k_2 \geq k_1$ l'état du réseau $x(k_2)$ est faiblement majoré par l'état $x(k_1)$, l'inégalité (2.20) implique que l'état $x(k_2)$ représente un degré de concentration de véhicules plus faible que celui de l'état $x(k_1)$ (moyennisation). En d'autres termes, la distribution des véhicules de l'état $x(k_2)$ est plus uniforme dans le réseau que celle de $x(k_1)$. Par conséquent, le système est plus organisé lorsque l'état $x(k_2)$ est atteint, ce qui conduit à une faible possibilité d'apparition des congestions à l'instant k_2 . Cela dit, soit $\psi_i(x_i) = \frac{x_i^2}{x_i^*}$. Alors $\psi_i(x_i)$ est une fonction convexe croissante dans l'orthant positif. Il vient à partir du point 3 du lemme que :

$$\sum_{i=1}^n \psi_i(x_i(k_2)) \leq \sum_{i=1}^n \psi_i(x_i(k_1))$$

Or,

$$\psi(x) = x^T P x = \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{x_i^*} = \sum_{i=1}^n \psi_i(x_i)$$

ce qui implique que $\psi(x(k_2)) \leq \psi(x(k_1))$. Nous en déduisons qu'une faible entropie correspondant à la distribution la plus uniforme des véhicules dans le réseau.

Inversement, si pour $k_2 \geq k_1$ nous avons $\psi(x(k_2)) \leq \psi(x(k_1))$, alors d'après le lemme $x(k_2)$ est faiblement majoré par $x(k_1)$. Par conséquent, $x(k_2)$ représente une distribution plus uniforme des véhicules dans le réseau que $x(k_1)$. Ainsi, aucune concentration particulière de véhicules existe dans un tronçon du réseau à l'instant k_2 et par suite, l'ordre émanant de la distribution $x(k_2)$ est plus grand que celui de $x(k_1)$.

En conclusion, il devient maintenant clair que l'entropie de transport $\psi(x)$ est une mesure appropriée du désordre du système. En effet, une faible entropie de transport (faible désordre) correspond à une distribution plus uniforme des véhicules dans le réseau. Il s'ensuit alors une faible concentration de la circulation, et par conséquent (diagramme fondamental) une augmentation de la vitesse de circulation des véhicules puisque la vitesse est inversement reliée à la concentration et donc une meilleure organisation du réseau de transport. Ainsi, l'entropie $\psi(x)$ peut donc être considérée non seulement comme un très bon moyen d'évaluer les performances du réseau de transport mais aussi, un outil de régulation. En effet, sa dissipation du système fournit un moyen de réduire le désordre et donc de rendre le système mieux organisé. Ce qui nous amène à réfléchir à l'utilisation de la théorie des systèmes dissipatifs. Ceci est notre objectif dans les sections suivantes.

2.7 Définition des systèmes dissipatifs

Le concept d'énergie est d'une grande utilité dans l'analyse des systèmes physiques. La plus part des systèmes physiques peuvent être étudiés à partir du gain et de la perte d'énergie. Intuitivement, un système dissipatif dissipe de l'énergie et ne peut la produire. Autrement dit, toute augmentation de l'énergie stockée est seulement due à l'environnement extérieur. Cette remarque implique l'existence de trois type de fonctions d'énergies : la fonction **d'approvisionnement** représentant l'énergie injectée au système, la fonction de **stockage** représentant l'énergie stockée dans le système et la fonction de **dissipation** qui représente l'énergie dissipée par le système.

L'interaction entre la théorie des systèmes dissipatifs et les systèmes dynamiques ne remonte pas assez loin dans le passé. La présentation de la chronologie des résultats permet de réaliser à quel point cette théorie est récente. En effet, dans [62], en étudiant les phénomènes de dissipation dans les circuits électriques, Zames semble être le premier à étudier les systèmes dissipatifs sans qu'ils aient été encore nommés. Plus tard, dans [63], Willems, sous une écriture condensée, a repris ce travail en introduisant pour la première fois les notions d'énergies d'approvisionnement et de stockage. L'objectif de l'étude était

de faire l'interconnexion entre les systèmes dissipatifs et la théorie de la commande. Une première application de cette théorie à été mise en évidence par Popov [64] pour la synthèse d'une loi de commande pour les systèmes Lury postnikov. L'objectif de la commande était la stabilisation absolue de ce type de systèmes. Plus récemment, ce principe a été largement exploité d'une manière implicite ou explicite pour de nouveaux développements en matière de la stabilité et de la stabilisation. Nous consulterons avec profit l'ouvrage de Brogliato [65] qui présente une excellente introduction sur ce sujet.

Dans la suite, les définitions et notations utilisées sont présentées de la façon la plus générale, dans le but de montrer le principe de la dissipation. Des spécialisations sont apportées chaque fois que cela est opportun.

Nous nous intéressons aux systèmes discrets non linéaires affines en la commande définis par l'équation suivante :

$$\begin{aligned}x(k+1) &= f(x(k)) + g(x(k))u(k), \\y(k) &= h(x(k), u(k)),\end{aligned}\tag{2.21}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ et $u, y \in \mathbb{R}^m$ sont l'état, l'entrée et la sortie du système respectivement. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ et $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ sont supposées continues avec $f(0) = 0$.

Supposons donnée une fonction $S(\cdot)$ définie sur $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$, S est une fonction de u et de y et $S(0, 0) = 0$. Cette fonction est appelée **taux d'approvisionnement**. Notons que seules l'entrée et la sortie sont utilisées pour formuler la fonction d'approvisionnement. Ceci est cohérent avec la logique physique de cette formulation. En effet, pour la plus part des systèmes physiques, la fonction $S(\cdot)$ représente la quantité d'énergie fournie au système. Par exemple, dans le cas des réseaux électriques, en appliquant un potentiel v aux bornes nous obtenons un courant i . La quantité d'énergie fournie se traduit alors dans ce cas par la puissance électrique donnée par $\mathcal{P} = vi$.

Il va sans dire que cette énergie doit être définie par une limitation pratique, à savoir, elle doit être finie. C'est pourquoi, dans la suite, nous supposons que pour tout $u \in \mathbb{R}^m$ et pour tout $x(0) \in \mathbb{R}^n$, la sortie $y(k)$ du système (2.21) doit être telle que $S(y(k), u(k))$ vérifie :

$$\sum_{i=0}^k S(y(i), u(i)) < \infty, \forall k \geq 0.$$

En termes plus précis, la somme de la fonction $S(y(k), u(k))$ sur un intervalle de temps borné doit être finie.

Définition 2.4 Le système (2.21) est dit **dissipatif** par rapport au taux d'approvisionnement $S(y, u)$, s'il existe une fonction non-négative $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, avec $V(0) = 0$,

appelée fonction de stockage, telle que pour tout $u \in \mathbb{R}^m$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$V(x(k+1)) - V(x(k)) \leq S(y(k), u(k)). \quad (2.22)$$

Si l'inégalité (2.22) est stricte, le système est dit **strictement dissipatif**. ►

Notons tout de suite que l'inégalité (2.22) est satisfaite si et seulement si l'inégalité suivante est satisfaite :

$$V(x(k)) - V(x(0)) \leq \sum_{i=0}^k S(y(i), u(i)); \quad \forall k, u, x(0). \quad (2.23)$$

L'inégalité (2.23) est appelée **inégalité de dissipation**. Elle signifie que la quantité d'énergie stockée dans un intervalle de temps n'est jamais supérieure à l'énergie totale fournie durant cette période. Autrement dit, un système dissipatif ne peut stocker plus d'énergie que l'environnement extérieur lui fournit.

Remarque 2.3 Il est important de noter que, malgré qu'initialement, le concept de la dissipation a été motivé par l'étude de l'énergie, les définitions et les résultats qui en découlent restent valables même si aucune interprétation de l'énergie n'est donnée. ►

Une autre définition des systèmes dissipatifs peut être formulée en changeant l'inégalité (2.22) par une égalité. Ce qui conduit à la définition suivante :

Définition 2.5 Le système (2.21) est dit dissipatif (resp. strictement dissipatif) par rapport au taux d'approvisionnement $S(y, u)$ s'il existe une fonction non-négative $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, avec $V(0) = 0$, appelée fonction de stockage et une fonction non-négative (resp. positive) $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, appelée fonction de dissipation, telles que pour tout $u \in \mathbb{R}^m$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$V(x(k+1)) - V(x(k)) = S(y, u) - \phi(x(k)). \quad (2.24)$$

Si $\phi = 0$, alors le système est dit **conservatif**. ►

L'intérêt d'adopter la Définition 2.5 au lieu de la Définition 2.4 peut être vu de deux manières :

1. **Intérêt physique** : si l'interprétation physique de u et y est telle que la quantité $S(y, u)$ représente l'énergie fournie au système, l'équation (2.24) peut être interprétée comme l'équation de conservation de l'énergie. La quantité non-négative $V(x)$ apparaît alors comme étant l'énergie stockée dans le système, tandis que la quantité $\phi(x)$ correspond à l'énergie dissipée par le système.

2. **Intérêt technique :** la démonstration des résultats qui peuvent être tirés de l'équation (2.24) semble plus simple que celle que nécessite la preuve des mêmes résultats en utilisant l'inégalité (2.22). La raison de cette différence réside dans la formulation que nous avons adoptée et qui consiste à prendre en compte l'aspect de la dissipation de l'énergie. Le manque de cet aspect est à l'origine d'une grande partie des difficultés techniques des démonstrations.

2.7.1 Commande dissipative des systèmes discrets

La théorie des systèmes dissipatifs a connu un regain d'intérêt très important ces dix dernières années. Cet aspect de la théorie des systèmes a été motivé essentiellement par les applications dans le domaine de la commande des systèmes physiques, car ces outils permettent de moduler par rétro-action l'énergie physique de façon à ce que cette énergie soit utilisable comme fonction de Lyapunov à des fins de commande et de stabilisation. Ces développements ont conduit à ce que nous appelons parfois **dissipativity-based control**, ou **commandes dissipatives**.

Principe de la commande dissipative : La stratégie de la commande dissipative consiste à trouver un contrôleur qui transforme un système non-dissipatif en un système dissipatif. Ceci passe, tout d'abord, par le choix d'une fonction de stockage d'énergie désirée ayant un minimum à l'équilibre souhaité et par l'injection de l'amortissement (énergie de dissipation) dans le système. Dans ce cadre, la classe de systèmes qui peuvent être rendus dissipatifs est dite **feedback dissipative**. Ainsi, le problème de la commande dissipative peut être formulé comme suit :

Problème de la commande dissipative : Soient $S(y, u)$ le taux d'approvisionnement, $V(x)$ une fonction de stockage et $\phi(x)$ une fonction de dissipation. Alors, pour le système $x(k+1) = f(x(k)) + g(x(k))u(k)$, trouver, si c'est possible, un retour de commande $u = \alpha(x, v)$, avec $\alpha(x, 0) = 0$ et v la nouvelle commande, tel que le système transformé

$$x(k+1) = f(x(k)) + g(x(k))\alpha(x(k), v(k)), \quad (2.25)$$

soit dissipatif (resp. strictement dissipatif). Autrement dit, le système transformé (2.25) vérifie l'équation de dissipation (2.24) par rapport à la nouvelle commande v , i.e.,

$$V(f(x) + g(x)\alpha(x, v)) - V(x) = S(\alpha(x, v), y) - \phi(x). \quad (2.26)$$

Il est clair que l'existence d'un retour de commande sous la forme $\alpha(x, v)$ permettant de rendre le système dissipatif est liée à l'existence de la solution, par rapport à u , de l'équation suivante :

$$V(f(x) + g(x)u) - V(x) = S(u, y) - \phi(x). \quad (2.27)$$

2.7.2 Avantages et inconvénients

Plusieurs atouts majeurs de cette stratégie peuvent être soulignés. En effet :

1. il s'agit d'une commande permettant de stabiliser le système. En effet, l'équation (2.26) implique pour $v = 0$:

$$V(f(x) + g(x)\alpha(x, 0)) - V(x) = -\phi(x) \leq 0.$$

En en déduit que la fonction $V(x)$ est décroissante. Ainsi, si la fonction de stockage $V(x)$ est définie positive, le système est stabilisable au sens de Lyapunov.

2. l'action de la commande s'interprète clairement comme une interconnexion entre le système et son environnement. En particulier, la stabilisation peut être interprétée en termes d'équilibre d'énergie, i.e., l'énergie stockée est égale à l'énergie dissipée.
3. il est possible, comme nous allons le voir avec les systèmes de transport, de donner aux énergies une interprétation cohérente avec la réalité physique du système. Cette propriété peut être d'une grande importance dans des applications industrielles.
4. la stratégie de commande présente une faible sensibilité vis-à-vis de la structure du modèle. En effet, les systèmes dissipatifs sont robuste vis-à-vis des incertitudes paramétriques et des dynamiques non modélisées [66].
5. la stratégie de commande est une approche systématique pouvant fonctionner sans connaissance préalable de la solution du système.

Cependant, si la commande dissipative est calculée à partir d'une information très riche, à savoir, la connaissance du modèle du système, ce dernier peut être des fois de grande dimension et sa recherche peut s'avérer difficile à accomplir sur le plan pratique, et très coûteuse en temps de calcul. Ainsi, les inconvénients de la méthode se résument dans certains cas par la difficulté de calcul.

En dépit de cet handicap sérieux, les avantages de cette approche, le succès industrielle qu'elle a rencontré ainsi que l'efficacité que peuvent apporter les techniques du calcul numérique, sont des arguments suffisants pour justifier l'intérêt porté à cette approche.

Dans la suite, nous montrerons comment la commande dissipative est également importante dans une optique de régulation des carrefours à feux.

2.8 Spécialisation aux systèmes de transport

La présentation de la formulation générale de la commande dissipative est donnée dans la section précédente. Dans cette partie, nous précisons la définition du problème qui nous concerne. Cette définition est faite par spécialisation de la commande dissipative au problème de la régulation d'un réseau de carrefours à feux.

Pour introduire ce que nous allons faire dans la suite, rappelons d'abord le modèle de transport (2.8) établi au début de ce chapitre :

$$x(k+1) = x(k) + l(k) + r(k) - d(k), \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (2.28)$$

L'utilisation de la commande dissipative pour les systèmes de transport n'est pas systématique. Elle nécessite donc un travail d'adaptation afin de pouvoir l'appliquer à notre système. En effet, la théorie des systèmes dissipatifs nécessite de définir clairement les deux points suivants :

- Les énergies d'approvisionnement et de stockage.
- Le domaine de commande admissible.

Les énergies d'approvisionnement et de stockage précisent les objectifs par rapport auxquels la commande est définie.

Energie de stockage : Dans la section 2.6, nous avons vu que l'entropie $\psi(x) = x^T P x$ est une mesure du désordre dans le réseau transport. Ce désordre est provoqué par l'accumulation des véhicules dans les voies. Ces dernières stockent une partie de véhicules en files d'attente et en dissipent d'autres par les feux de signalisation. Ainsi, l'entropie est un représentant idéal pour la fonction de stockage.

Energie d'approvisionnement : Le taux d'approvisionnement S reflète des facteurs extérieurs au système. Dans le contexte de transport, toute augmentation du nombre de véhicules dans le réseau provoque un désordre dans le système. Ce désordre dépend non seulement de véhicules échangés entre le système et l'extérieur ($r(k) - d(k)$), mais aussi de la répartition de ces derniers. En effet, une même quantité de véhicules apporte plus de désordre aux voies les plus occupées qu'aux celles les moins fréquentées. Ainsi, puisque les taux d'occupation représentent la manière dont les voies sont occupées, il est naturel de considérer la fonction d'approvisionnement S en fonction de la quantité $(r(k) - d(k))$ et le vecteur d'occupation $f(k)$. Cependant, puisque $f(k+1)$ correspond à la fin du cycle k , il est clair que la quantité de désordre fournie par le milieu extérieur pendant le cycle

k est donnée par :

$$S(k) = f^T(k+1)(r(k) - d(k))$$

Puisque $f = Px$ (voir équations (2.17) et (2.18)), nous avons alors :

$$S(k) = x^T(k+1)P(r(k) - d(k)) \quad (2.29)$$

D'où la définition suivante.

Définition 2.6 Le système de transport (2.8) est dissipatif par rapport au taux d'approvisionnement $S(k)$ et à la fonction de stockage $\psi(x)$ si et seulement si (voir figure 2.5) :

$$\psi(x(k+1)) - \psi(x(k)) \leq S(k), \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (2.30)$$

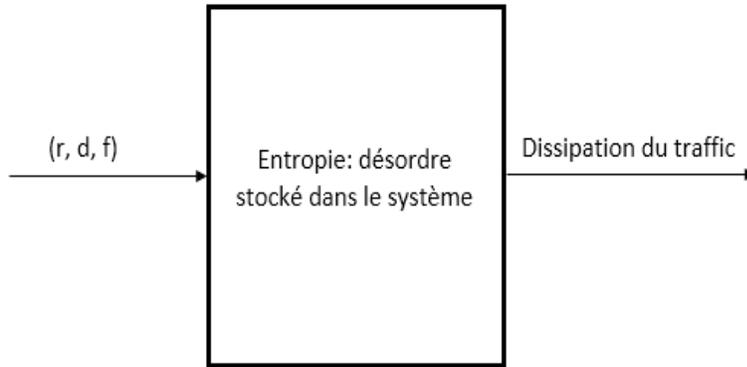


FIGURE 2.5 – Dissipation de l'entropie du transport

Ainsi, la dissipativité par rapport au taux d'approvisionnement $S(k)$ implique que la quantité du désordre stockée pendant un cycle n'est jamais supérieure au désordre fourni par le milieu extérieur durant ce cycle. Autrement dit, un système de transport dissipatif a une tendance à diminuer son désordre et par conséquent, devient mieux organisé.

Soulignons tout de suite que le système de transport (2.8) n'est pas dissipatif par rapport au taux d'approvisionnement $S(k)$. En effet, observons d'abord que la différence totale de l'entropie $\psi(x)$ le long de la trajectoire du système est donnée par :

$$\begin{aligned} \Delta\psi(x(k)) &= \frac{1}{2}x^T(k+1)Px(k+1) - \frac{1}{2}x^T(k)Px(k) \\ &= x^T(k+1)P(x(k+1) - x(k) - l(k)) \\ &\quad - \frac{1}{2}(x(k+1) - x(k))^T P(x(k+1) - x(k)) + x^T(k+1)Pl(k) \end{aligned}$$

Or, $x(k+1) - x(k) - l(k) = r(k) - d(k)$ et $S(k) = x^T(k+1)P(r(k) - d(k))$, il vient :

$$\Delta\psi(x(k)) = S(k) + x^T(k+1)Pl(k) - \frac{1}{2}\left(x(k+1) - x(k)\right)^T P\left(x(k+1) - x(k)\right)$$

Comme la matrice P est définie positive, il s'ensuit :

$$-\frac{1}{2}\left(x(k+1) - x(k)\right)^T P\left(x(k+1) - x(k)\right) \leq 0$$

Nous en déduisons alors :

$$\Delta\psi(x(k)) \leq S(k) + x^T(k+1)Pl(k) \quad (2.31)$$

Pour simplifier les équations, posons $g(x(k)) = x^T(k+1)Pl(k)$. Puisque :

$$l_i(k) = \sum_{j=1, j \neq i}^n (\sigma_{i,j}(k) - \sigma_{j,i}(k))$$

il vient :

$$\begin{aligned} g(x(k)) &= \sum_{i=1}^n \frac{x_i(k+1)l_i(k)}{x_i^*} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{x_i(k+1)(\sigma_{i,j}(k) - \sigma_{j,i}(k))}{x_i^*} \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \left(\frac{x_i(k+1)}{x_i^*} - \frac{x_j(k+1)}{x_j^*} \right) (\sigma_{i,j}(k) - \sigma_{j,i}(k)) \end{aligned}$$

Si nous supposons que $\left(\frac{x_i(k+1)}{x_i^*} - \frac{x_j(k+1)}{x_j^*}\right)(\sigma_{i,j}(k) - \sigma_{j,i}(k)) \leq 0$ pour tout $i \neq j$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, alors $\Delta\psi(x(k)) \leq S(k)$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Par conséquent, le système de transport serait dissipatif. Malheureusement, cette hypothèse n'existe pas dans la réalité, car elle implique que les voies les plus chargées fournissent plus de véhicules aux voies les moins chargées; ce qui n'est pas réaliste dans les systèmes de transport. Même la situation où $\sigma_{i,j}(k) = \sigma_{j,i}(k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ (les voies i et j échangent la même quantité de véhicules) n'est pas réaliste car les directions des véhicules sont déterminées par les conducteurs. Ainsi, contrairement aux systèmes thermodynamiques, la dissipativité des systèmes de transport n'est pas naturelle, d'où la nécessité de faire appel à la notion de la commande dissipative.

2.8.1 Commande dissipative des réseaux de transport

Comme il est souligné dans la section précédente, le phénomène de dissipativité n'existe pas naturellement dans les systèmes de transport. Pour remédier à cette situation, il est possible que sous certains régimes de contrôle, les feux de circulation peuvent satisfaire l'inégalité de dissipation (2.23).

Commençons par introduire la notion de contrôle du signal au système. À cette fin, nous utilisons l'idée de base du modèle "stocker-et-transférer" où le débit total d'une voie est considéré comme sa valeur moyenne, ce qui conduit à [38] :

$$\sum_{j=1, j \neq i}^n \sigma_{j,i} = s_i g_{e_i}(k), \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (2.32)$$

où g_{e_i} est le temps de vert effectif de la voie i et s_i est son débit de saturation. Par conséquent, en utilisant $\lambda_{i,j} \in [0, 1]$, qui est défini comme la proportion du flux de sortie de la voie j vers la voie i , les flux de véhicules entrants $\sigma_{i,j}$ dans la voie i depuis les voies j sont donnés par :

$$\sigma_{i,j} = s_j g_{e_j}(k) \lambda_{i,j} \quad (2.33)$$

Notons que l'équation (2.32) implique que les sorties de toutes les voies sont considérées comme saturées. Ainsi, les situations sous-saturées et sur-saturées ne sont pas concernées par le modèle.

En remplaçant (2.32) et (2.33) dans l'équation (2.7), $l_i(k)$ peut être réécrite sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} l_i(k) &= \sum_{j=1, j \neq i}^n \sigma_{i,j}(k) - \sum_{j=1, j \neq i}^n \sigma_{j,i}(k) = \sum_{j=1, j \neq i}^n s_j g_{e_j}(k) \lambda_{i,j} - \sum_{j=1, j \neq i}^n s_i g_{e_i}(k) \lambda_{j,i} \\ &= \sum_{j=1, j \neq i}^n s_j g_{e_j}(k) \lambda_{i,j} - s_i g_{e_i}(k) \sum_{j=1, j \neq i}^n \lambda_{j,i} \end{aligned}$$

De plus, puisque $\sum_{j=1}^n \lambda_{j,i} = 1$, il vient :

$$l_i(k) = \sum_{j=1, j \neq i}^n s_j g_{e_j}(k) \lambda_{i,j} - s_i g_{e_i}(k) (1 - \lambda_{i,i}) \quad (2.34)$$

Définissons le vecteur $L_i = [L_{i,1}, \dots, L_{i,n}]^T$ comme suit :

$$L_{i,j} = \begin{cases} -s_i(1 - \lambda_{i,i}) & : \text{ pour } i = j \\ s_j \lambda_{i,j} & : \text{ pour } i \neq j \end{cases}$$

L'équation (2.34) prend alors la forme suivante :

$$l_i(k) = \sum_{j=1, j \neq i}^n L_{i,j} g_{e_j}(k) + L_{i,i} g_{e_i}(k) = \sum_{j=1}^n L_{i,j} g_{e_j}(k) = L_i^T g_e(k) \quad (2.35)$$

Dans ces conditions, l'équation d'état du réseau de transport est présentée sous la forme linéaire suivante :

$$x(k+1) = x(k) + L g_e(k) + r(k) - d(k) \quad (2.36)$$

où $g_e = [g_{e_1}, \dots, g_{e_n}]^T$, et L est une matrice $n \times n$ dont ses i -ème lignes sont L_i^T .

Il est important de noter que les flux r_i et d_i ne sont pas toujours mesurables et contrôlables. En effet, ils représentent les incertitudes du modèle et sont généralement considérés comme des valeurs nominales constantes (voir [41] et [58]). Cependant, contrairement aux travaux existants, nous les considérons dans ce travail comme inconnues et bornées. Ce qui implique :

$$\begin{aligned}\mathcal{R} &= \{r \in \mathbb{R}^n / \|r(k)\|_2 \leq r_m, \quad r_m > 0\} \\ \mathcal{D} &= \{d \in \mathbb{R}^n / \|d(k)\|_2 \leq d_m, \quad d_m > 0\}\end{aligned}\tag{2.37}$$

où $\|\cdot\|_2$ est la norme euclidienne. Il faut bien noter encore que dans ce modèle, l'état x et la commande g_e doivent respecter des limitations physiques. Premièrement, le temps du vert effectif doit être borné entre une valeur maximale $g_{e_{max}}$ et une valeur minimale $g_{e_{min}}$, ce qui se traduit par :

$$\mathbb{U} = \{g_e \in \mathbb{R}^n / g_{e_{min}} \leq g_e \leq g_{e_{max}}\}\tag{2.38}$$

De plus, puisque x_i représente le nombre de véhicules dans la voie i , alors l'état $x(k) \geq 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$. D'un autre côté, puisque l'objectif dans cette thèse est d'éviter la congestion, le modèle n'est donc valable que si le nombre de véhicules ne dépasse pas la capacité de chaque voie x_i^* . Ainsi, le système (2.36) n'est valide que si x se trouve dans la région suivante :

$$\mathbb{E}_x = \{x \in \mathbb{R}^n / 0 \leq x \leq x^*\}\tag{2.39}$$

où $x^* = [x_1^*, \dots, x_n^*]^T$.

Nous allons passer maintenant à la résolution du problème de dissipation. En effet, notre objectif peut être formulé comme suit : trouver une commande par retour d'état telle que pour tout $r \in \mathcal{R}$ et $d \in \mathcal{D}$, le système en boucle fermée est dissipatif. En d'autres termes, en vertu (2.31), trouver $g_e(x)$ telle que :

$$\begin{aligned}g(x(k)) &= x^\top(k+1)Pl(k) = \left(x(k) + Lg_e(k) + r(k) - d(k)\right)^\top Pl(k) \\ &= g_e^\top(k)L^T PLg_e(k) + g_e^\top(k)L^T P\left(x(k) + (r(k) - d(k))\right) \leq 0, \quad \forall r \in \mathcal{R}, d \in \mathcal{D}\end{aligned}\tag{2.40}$$

Posons $M = L^T PL$, $y = \frac{1}{2}L^T Px$ et $w = \frac{T}{2}L^T P(r(k) - d(k))$. Il s'ensuit :

$$g(g_e) = g_e^\top M g_e + 2g_e^\top y + 2g_e^\top w\tag{2.41}$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz [67], nous avons $g_e^\top w \leq |g_e^\top w| \leq \|g_e\|_2 \|w\|_2$. D'autre part, les inégalités (2.37) impliquent :

$$\begin{aligned} \|w\|_2 &= \left\| \frac{1}{2} L^\top P (r(k) - d(k)) \right\|_2 \leq \frac{1}{2} \|L^\top P\|_2 \|r(k) - d(k)\|_2 \\ &\leq \frac{1}{2} \|L^\top P\|_2 (\|r(k)\|_2 + \|d(k)\|_2) \\ &\leq \frac{1}{2} \|L^\top P\|_2 (r_m + d_m) \triangleq w_m \end{aligned}$$

Ceci avec $g_e^\top w \leq |g_e^\top w| \leq \|g_e\|_2 \|w\|_2$ donnent $g_e^\top w \leq \|g_e\|_2 w_m$. Puisque $\|g_e\|_2 \leq \|g_e\|_1$, où $\|g_e\|_1$ est la norme 1 et $\|g_e\|_1 = \epsilon^\top g_e$ car $g_e > 0$, où $\epsilon^\top = (1, \dots, 1)$, alors nous avons $g_e^\top w \leq \epsilon^\top g_e w_m$. Ainsi l'équation (2.41) implique :

$$g(g_e) \leq g_e^\top M g_e + 2g_e^\top (y + \epsilon w_m) \triangleq g_m(g_e) \quad (2.42)$$

Par conséquent, si $g_m(g_e) \leq 0$ alors $g(g_e) \leq 0$ et le système serait dissipatif. Le problème maintenant est de trouver g_e telle que $g_m(g_e) \leq 0, \forall r \in \mathcal{R}, d \in \mathcal{D}$. En effet, puisque $\sum_{i=1}^n l_i(k) = \epsilon^\top l = \epsilon^\top L g_e = 0$ pour tout g_e , alors $\epsilon^\top L = 0$. Ceci implique que les lignes de L sont linéairement dépendantes. Donc, L est une matrice singulière et la matrice M est symétrique semi-définie positive dont toutes ses valeurs propres sont non-négatives. Ainsi, il existe une matrice orthogonale K ($K^\top = K^{-1}$) telle que $M = K C K^\top$, avec C une matrice diagonale sous la forme :

$$C = \text{diag}(\xi_1; \dots, \xi_r, 0, \dots, 0)$$

où $\xi_i > 0$ sont les valeurs propres positives de M et r est son rang. Les colonnes orthogonales de K sont les vecteurs propres de la matrice M . Posons $D = \text{diag}(\xi_1; \dots, \xi_r)$, D est donc inversible et M peut s'écrire sous la forme suivante :

$$M = K \begin{pmatrix} D^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix} K^\top$$

Si nous définissons la matrice J par :

$$J = K \begin{pmatrix} D^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}$$

Ainsi J^{-1} est bien définie car la matrice K est orthogonale. Il en résulte alors :

$$M = J \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} J^\top$$

Dans ce cas, $g_m(g_e)$ se transforme en :

$$g_m(g_e) = g_e^\top J \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} J^\top g_e + 2c g_e^\top (y + \epsilon w_m)$$

Posons $z = J^\top g_e$ et $\theta = J^{-1}(y + \epsilon w_m)$. Puisque $-z^\top \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix} z \leq 0$, il vient alors :

$$\begin{aligned} g(g_e) = g_m(z) &= z^\top \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} z + 2z^\top \theta = z^\top z + 2z^\top \theta - z^\top \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix} z \\ &\leq z^\top z + 2z^\top \theta = (z + \theta)^\top (z + \theta) - \theta^\top \theta \triangleq f(\theta) \end{aligned} \quad (2.43)$$

Soit $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice telle que $z = R\theta$. Il s'ensuit que :

$$f(\theta) = (z + \theta)^\top (z + \theta) - \theta^\top \theta = \theta^\top \left[(R + I)^\top (R + I) - I \right] \theta \quad (2.44)$$

Donc, $f(\theta) \leq 0$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}^n$ si et seulement si $(R + I)^\top (R + I) - I$ est semi-définie négative, ce qui équivaut à la LMI suivante :

$$\begin{pmatrix} I & (R + I)^\top \\ (R + I) & I \end{pmatrix} \succeq 0$$

En résumé, puisque $z = R\theta$, $z = J^\top g_e$, $\theta = J^{-1}(y + \epsilon w_m)$ et $y = \frac{1}{2} B^\top P x$, la commande par retour d'état qui rend le système dissipatif est donc la suivante :

$$g_e = \frac{1}{2} (J^\top)^{-1} R J^{-1} L^\top P x + (J^\top)^{-1} R J^{-1} \epsilon w_m$$

Ce qui conduit au théorème suivant :

Théorème 2.2 Soit R la solution de la LMI suivante :

$$\begin{pmatrix} I & (R + I)^\top \\ (R + I) & I \end{pmatrix} \succeq 0$$

et posons $G = \frac{1}{2} (J^\top)^{-1} R J^{-1} L^\top P$, $\Gamma = (J^\top)^{-1} R J^{-1} \epsilon w_m$. Ainsi, la commande

$$g_e = Gx + \Gamma \quad (2.45)$$

rend le système (2.36) dissipatif par rapport à la fonction de stockage (2.18) et au taux d'approvisionnement (2.29) pour tout $r \in \mathcal{R}$ et $d \in \mathcal{D}$.

Remarquons que si la matrice R est symétrique (c'est à dire, $R^\top = R$), alors $f(\theta) \leq 0$ si et seulement si $-2 \leq \lambda_i \leq 0$, pour toute valeur propre λ_i de R . En effet, il suffit de noter que R est toujours diagonalisable parce qu'il est symétrique. Ainsi, il existe une matrice F telle que $R = FLF^\top$, où $F^\top = F^{-1}$ et L est une matrice diagonale dont ses éléments sont les valeurs propres de R . Par conséquent :

$$(R + I)^\top(R + I) - I = R^2 + 2R = F(L^2 + 2L)F^\top$$

Il est clair que $f(\theta) \leq 0$ si et seulement si $(L^2 + 2L)$ est semi-définie négative. Or, $L^2 + 2L = \text{diag}(\lambda_1^2 + 2\lambda_1, \dots, \lambda_n^2 + 2\lambda_n)$, alors $(L^2 + 2L)$ est semi-définie négative si et seulement si $\lambda_i^2 + 2\lambda_i \leq 0, \forall i = 1, \dots, n$. Ceci implique que $-2 \leq \lambda_i \leq 0, \forall i = 1, \dots, n$. D'où le théorème suivant :

Théorème 2.3 Soient R une matrice symétrique telle que $-2 \leq \lambda_i \leq 0, \forall i = 1, \dots, n$, où λ_i sont ses valeurs propres et $G = \frac{1}{2}(J^\top)^{-1}RJ^{-1}L^\top P$, $\Gamma = (J^\top)^{-1}RJ^{-1}\epsilon w_m$. Alors, la commande par retour d'état

$$g_e = Gx + \Gamma \quad (2.46)$$

rend le système (2.36) dissipatif par rapport à la fonction de stockage (2.18) et au taux d'approvisionnement (2.29) pour tout $r \in \mathcal{R}$ et pour tout $d \in \mathcal{D}$.

Remarque 2.4 À partir du théorème ci-dessus, il vient immédiatement que pour un choix arbitraire de la matrice R satisfaisant $-2 \leq \lambda_i \leq 0, \forall i = 1, \dots, n$, la commande par retour d'état fournit la classe des commandes qui rend le système dissipatif. Donc, le théorème 2.3 donne une solution explicite mais pas unique au problème de la commande dissipative. Cette liberté de choix de la matrice R confère à la commande dissipative dans le cadre de la régulation des carrefours à feux une flexibilité permettant de l'adapter à plusieurs situation possibles. Ceci est, à notre sens, un avantage certain, car elle nous offre un ensemble de choix possibles pour améliorer les performances de la commande de notre système. ►

Dans la suite, le problème des contraintes sur le système sera résolu en se basant sur le lemme de Hennet élaboré dans [56]. En effet, une fois que la matrice de gain G et le vecteur Γ sont donnés, la commande par retour d'état $g_e = Gx + \Gamma$ doit respecter la contrainte (2.38). Ceci implique que toute trajectoire $x(k; x_o)$ commençant à l'intérieur de l'ensemble admissible \mathbb{X} ne quitte pas la région suivante pour n'importe quel instant $k \in \mathbb{N}$ malgré les perturbations :

$$\mathbb{U}_x = \{x \in \mathbb{R}^n / -\pi_2 \leq Gx \leq \pi_1\} \quad (2.47)$$

où $\pi_1 = u_{\max} - \Gamma$ et $\pi_2 = \Gamma - u_{\min}$. Autrement dit, si la commande par retour d'état garantit $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{U}_x$, alors les contraintes sur la commande g_e sont vérifiées. Dans ce sens, nous avons besoin du lemme suivant.

Lemme 2.5 ([56]) *Soient $U \in \mathbb{R}^{q \times n}$ et $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ deux matrices. Le système des inégalités $Ux \leq a$ est satisfait par tout vecteur de la polyèdre convexe non vide défini par le système $Cx \leq b$ si et seulement s'il existe une matrice non-négative $Q \in \mathbb{R}^{p \times q}$ avec des coefficients non négatifs satisfaisant aux conditions suivantes :*

$$QC = U$$

$$Qb \leq a$$

Observons d'abord que les contraintes sur l'état (2.39) et sur la commande (2.47) peuvent s'écrire sous les formes suivantes :

$$\mathbb{X} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n / \begin{pmatrix} I_n \\ -I_n \end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix} x^* \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathbb{U}_x = \left\{ x \in \mathbb{R}^n / \begin{pmatrix} G \\ -G \end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{pmatrix} \right\}$$

Considérons maintenant $U = \begin{pmatrix} G \\ -G \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} I_n \\ -I_n \end{pmatrix}$. Ainsi, en vertu du lemme 2.5, la condition $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{U}_x$ est équivalent à l'existence d'une matrice non-négative $\mathbb{K} \in \mathbb{R}_+^{2n \times 2n}$ telle que :

$$\mathbb{K} \begin{pmatrix} I_n \\ -I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G \\ -G \end{pmatrix} \quad (2.48)$$

$$\mathbb{K} \begin{pmatrix} x^* \\ 0 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{pmatrix} \quad (2.49)$$

Posons :

$$\mathbb{K} = \begin{pmatrix} \mathbb{K}_{11} & \mathbb{K}_{12} \\ \mathbb{K}_{21} & \mathbb{K}_{22} \end{pmatrix}$$

Il en résulte à partir des (2.48) et (2.49) que :

$$\mathbb{K}_{11} - \mathbb{K}_{12} = G \quad (2.50)$$

$$\mathbb{K}_{22} - \mathbb{K}_{21} = G \quad (2.51)$$

$$\mathbb{K}_{11}x^* \leq \pi_1 \quad (2.52)$$

$$\mathbb{K}_{21}x^* \leq \pi_2 \quad (2.53)$$

Ce qui implique que :

$$G = \mathbb{K}_{11} - \mathbb{K}_{12} = \mathbb{K}_{22} - \mathbb{K}_{21} \quad (2.54)$$

Pour simplifier les conditions linéaires et réduire le nombre des variables, définissons les matrices G^+ et G^- comme suit :

$$\begin{aligned} G^+ &= (G_{ij}^+), \text{ où } G_{ij}^+ = \sup(G_{ij}, 0) \\ G^- &= (G_{ij}^-), \text{ où } G_{ij}^- = -\inf(G_{ij}, 0) = \sup(-G_{ij}, 0) \end{aligned}$$

Il est clair que :

$$G^+ \geq 0; \quad G^- \geq 0; \quad G = G^+ - G^- \quad (2.55)$$

Ainsi, d'après (2.54) et (2.55), nous obtenons :

$$G = G^+ - G^- = \mathbb{K}_{11} - \mathbb{K}_{12} = \mathbb{K}_{22} - \mathbb{K}_{21}$$

Puisque la décomposition $G = G^+ - G^-$ est minimale (voir lemme 2.1), il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} G^+ &\leq \mathbb{K}_{11} \quad \text{et} \quad G^+ \leq \mathbb{K}_{22} \\ G^- &\leq \mathbb{K}_{12} \quad \text{et} \quad G^- \leq \mathbb{K}_{21} \end{aligned}$$

Il résulte de ces conditions et les inégalités (2.52) et (2.53) que :

$$\begin{pmatrix} G^+ & O \\ O & G^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^* \\ x^* \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \mathbb{K}_{11} & O \\ O & \mathbb{K}_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^* \\ x^* \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{pmatrix} \quad (2.56)$$

Finalement, en réunissant les conditions citées plus haut, nous avons la proposition suivante.

Proposition 2.1 *Supposons que $\pi_1 > 0$ et $\pi_2 > 0$. Alors, $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{U}_x$ s'il existe deux matrices non-négatives \mathbb{P} et \mathbb{Q} telles que :*

$$\mathbb{P} - \mathbb{Q} = G \quad (2.57)$$

$$\mathbb{P}x^* \leq \pi_1 \quad (2.58)$$

$$\mathbb{Q}x^* \leq \pi_2 \quad (2.59)$$

Preuve: Supposons que toutes les conditions du théorème sont satisfaites et considérons $x \in \mathbb{X}$, c'est à dire :

$$0 \leq x \leq x^*$$

Pré-multiplions cette inégalité par \mathbb{P} et $-\mathbb{Q}$ respectivement, il vient :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \mathbb{P}x \leq \mathbb{P}x^* \\ -\mathbb{Q}x^* &\leq -\mathbb{Q}x \leq 0 \end{aligned}$$

L'addition de ces inégalités implique :

$$-Qx^* \leq (P - Q)x \leq Px^* \quad (2.60)$$

D'autre part, en vertu des conditions (2.58) et (2.59), il vient :

$$-\pi_2 \leq Gx \leq \pi_1$$

Donc, $x \in \mathbb{U}_x$. Ceci complète la preuve ■

Cela posé, nous allons maintenant représenter les contraintes sous forme LMI. À cette fin, commençons à réécrire les inégalités (2.58) et (2.59) comme suit :

$$\pi_{1i} - \mathbb{P}_i x^* \geq 0, \quad \pi_{2i} - \mathbb{Q}_i x^* \geq 0, \quad \forall i = 1 \dots, n$$

où \mathbb{P}_i et \mathbb{Q}_i sont les i -ème lignes des matrices \mathbb{P} et \mathbb{Q} respectivement. Puisque $\mathbb{P} \geq 0$, $\mathbb{Q} \geq 0$ et $x^* \geq 0$, alors l'application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$$\pi_{1i} - \mathbb{P}_i x^* \geq \pi_{1i} - \|\mathbb{P}_i\|_2 \|x^*\|_2 \geq \pi_{1i} - \|\mathbb{P}_i\|_2^2 \|x^*\|_2, \quad \forall i = 1 \dots, n$$

Ainsi, $\pi_{1i} - \|\mathbb{P}_i\|_2^2 \|x^*\|_2 \geq 0$ implique $\pi_{1i} - \mathbb{P}_i x^* \geq 0$. De plus, l'inégalité $\pi_{1i} - \|\mathbb{P}_i\|_2^2 \|x^*\|_2 \geq 0$ est équivalente à $\frac{\pi_{1i}}{\|x^*\|_2} - \mathbb{P}_i \mathbb{P}_i^\top \geq 0$. Ce dernier équivaut à son tour à la LMI suivante :

$$\begin{pmatrix} \frac{\pi_{1i}}{\|x^*\|_2} & \mathbb{P}_i \\ \mathbb{P}_i^\top & I_n \end{pmatrix} \succ 0, \quad \forall i = 1 \dots, n \quad (2.61)$$

De même pour l'inégalité (2.59), nous avons :

$$\begin{pmatrix} \frac{\pi_{2i}}{\|x^*\|_2} & \mathbb{Q}_i \\ \mathbb{Q}_i^\top & I_n \end{pmatrix} \succ 0 \implies \pi_{2i} - \mathbb{Q}_i x^* \geq 0, \quad \forall i = 1 \dots, n$$

À ce stade de la présentation, nous sommes maintenant prêts à énoncer notre théorème sous sa forme finale.

Théorème 2.4 Soient R une matrice symétrique telle que : $-2 \leq \lambda_i \leq 0, \forall i = 1, \dots, n$, où λ_i sont ses valeurs propres et $G = \frac{1}{2}(J^\top)^{-1} R J^{-1} B^\top P$, $\Gamma = (J^\top)^{-1} R J^{-1} \epsilon w_m$. S'il

existe deux matrices non-négatives \mathbb{P} et \mathbb{Q} solutions de la LMI suivante :

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\pi_{1i}}{\|x^*\|_2} & \mathbb{P}_i \\ \mathbb{P}_i^\top & I_n \end{pmatrix} & & \mathbb{O} \\ & & \begin{pmatrix} \frac{\pi_{2i}}{\|x^*\|_2} & \mathbb{Q}_i \\ \mathbb{P}_i^\top & I_n \end{pmatrix} \end{pmatrix} \succeq 0, \quad \text{tel que } \mathbb{P}_i - \mathbb{Q}_i = G_i; \quad i = 1, \dots, n \quad (2.62)$$

où G_i est la i -ème ligne de la matrice G et \mathbb{O} est une matrice nulle, alors la commande par retour d'état :

$$u = Gx + \Gamma \quad (2.63)$$

1. rend le système (2.36) dissipatif par rapport à la fonction de stockage (2.18) et au taux d'approvisionnement (2.29) pour tout $r \in \mathcal{R}$ et $d \in \mathcal{D}$.

2. vérifie l'inclusion $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{U}_x$.

Remarque 2.5 Il va sans dire que la condition $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{U}_x$ nécessite l'hypothèse $\pi_1 > 0$ et $\pi_2 > 0$. Si cette condition n'est pas vérifiée, nous pouvons envisager pour éviter la violation des contraintes sur la commande g_e de prendre la fonction de saturation suivante :

$$\text{sat}(g_{e_i}) = \begin{cases} g_{e_i, \min} & : & g_{e_i} \leq g_{e_i, \min} \\ g_{e_i} & : & g_{e_i, \min} \leq g_{e_i} \leq g_{e_i, \max} \\ g_{e_i, \max} & : & g_{e_i} \geq g_{e_i, \max} \end{cases}$$

où g_{e_i} est la valeur obtenue à partir de la commande par retour d'état (2.46) et $\text{sat}(g_{e_i})$ est la commande actuelle appliquée au système réel. ▶

2.8.2 Cas d'un système isolé

Dans un système thermodynamique isolé, au début de l'expérience, l'agitation des molécules peut-être élevée, l'énergie est intense, mais sans apport extérieur, au bout d'un certain temps tout finit par se calmer, il n'y a plus d'échanges d'énergie ou de chaleur et les molécules reviennent au repos. Le système qui tout d'abord était en déséquilibre finit par s'équilibrer, la chaleur s'est dissipée et le désordre est total. Le système ne peut plus entraîner aucun échange d'énergie et ne peut plus engendrer le moindre ordre. Ainsi,

l'entropie (réps, disentropie) d'un système thermodynamique isolé est maximale (réps, minimale) quand le système est en équilibre thermique.

Puisque la température s'apparente au taux d'occupation des voies d'un réseau de carrefours, ce concept d'équilibre thermique peut être facilement introduit dans le contexte du transport pour désigner l'état lorsque les taux d'occupation de toutes les voies de circulation sont les mêmes. Cet état, noté \bar{x} , est appelé **l'équilibre du taux d'occupation** dans ce chapitre. Il est désigné par l'expression suivante :

$$\frac{\bar{x}_1}{x_1^*} = \dots = \frac{\bar{x}_n}{x_n^*} = \bar{f}_i = \text{constante} \quad (2.64)$$

L'équilibre du taux d'occupation implique qu'aucune concentration particulière de véhicules existe dans un tronçon du réseau et, par conséquent, la possibilité d'apparition d'une congestion est extrêmement faible. En d'autres termes, pour un certain vecteur \bar{x} , l'équilibre du taux d'occupation correspond à la meilleure organisation du système. Ainsi, pour un réseau de transport isolé, l'entropie ψ qui exprime le désordre (résp, disentropie ϕ qui exprime l'ordre) est minimale (réps, maximale) quand le système est en équilibre du taux d'occupation. Cette observation est démontrée dans le théorème suivant.

Théorème 2.5 *Supposons que le réseau de transport est isolé (c'est à dire $r \equiv 0$ et $d \equiv 0$ alors $S(k) = 0$ et $\Gamma = 0$). Soit alors N le nombre total des véhicules dans le réseau. De plus, soient ψ et ϕ l'entropie et la disentropie du système respectivement. Définissons l'ensemble D par $D = \{x \in \mathbb{R}^+ / \epsilon^T x = N\}$ où $\epsilon^T = (1, 1, \dots, 1)$. Alors :*

$$\arg \min_{x \in D} \psi(x) = \arg \max_{x \in D} \phi(x) = \bar{x} = \frac{N}{\epsilon^T x^*} x^*$$

Preuve: La preuve est identique à celle de la proposition 3.17 de [59] pour les systèmes thermodynamiques. Par conséquent, elle est omise ici. ■

Nous allons essayer dans la suite de montrer la capacité de notre commande proposée à stabiliser le système autour de son état d'équilibre \bar{x} . En effet, pour un système isolé nous avons $r = 0$ et $d = 0$, il s'ensuit $\Gamma = 0$. Dans ce cas, le système sous la commande (2.46) devient :

$$x(k+1) = x(k) + l(k) = x(k) + LGx(k)$$

D'autre part, puisque l'équilibre d'occupation $\bar{x} = \bar{f}x^* = \bar{f}P^{-1}\epsilon$ où $\bar{f} = \frac{\epsilon^T x(0)}{\epsilon^T x^*}$ pour tout état initial donné tel que $x(0) < x^*$, est un état d'équilibre, nous devons seulement montrer que $LG\bar{x} = 0$. Pour ce faire, remarquons que :

$$G\bar{x} = \frac{\bar{f}}{2}(J^T)^{-1}RJ^{-1}L^T P P^{-1}\epsilon = \frac{\bar{f}}{2}(J^T)^{-1}RJ^{-1}L^T \epsilon$$

Cette équation et $\epsilon^\top L = 0$ conduisent à :

$$G\bar{x} = 0$$

Donc, \bar{x} est un état d'équilibre pour les systèmes de transport isolés. Pour démontrer la stabilité de Lyapunov de l'état d'équilibre \bar{x} , considérons $V(x) = \frac{1}{2}(x - \bar{x})^\top P(x - \bar{x})$ une fonction de Lyapunov. À partir de l'équation $\bar{x} = \bar{f}x^* = \bar{f}P^{-1}\epsilon$, nous avons :

$$\begin{aligned} V(x) &= \frac{1}{2}(x - \bar{f}P^{-1}\epsilon)^\top P(x - \bar{f}P^{-1}\epsilon) = \frac{1}{2}x^\top Px + \frac{1}{2}\bar{f}^2\epsilon^\top P^{-1}PP^{-1}\epsilon - \bar{f}\epsilon^\top P^{-1}Px \\ &= \psi(x) + \frac{1}{2}\bar{f}\epsilon^\top \bar{x} - \bar{f}\epsilon^\top x \end{aligned}$$

En vertu du principe de conservation de véhicules, le nombre total de véhicules $\epsilon^\top x = N$ reste constant dans un système de transport isolé. Ainsi, il résulte que $V(x) = \psi(x) - \frac{1}{2}\bar{f}N$ et $\Delta V(x) = \Delta\psi(x)$. Puisque $S(k) = 0$, $\Delta V(x(k))$ peut être écrite comme suit :

$$\Delta V(x(k)) = \Delta\psi(x(k)) \leq 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

D'où, la stabilité de Lyapunov de l'état d'équilibre \bar{x} . En outre, si la matrice R est choisie telle que $-2 < \lambda_i < 0, \forall i = 1, \dots, n$, où λ_i sont ses valeurs propres, alors $f(\theta) < 0$ et donc $\Delta\psi(x(k)) < 0$. Ceci implique que l'état d'équilibre \bar{x} est asymptotiquement stable. En conclusion, nous avons la proposition suivante :

Proposition 2.2 *Considérons le système de transport isolé (c'est à dire, $r \equiv 0, d \equiv 0$)*

$$x(k+1) = x(k) + l(k) = x(k) + Lg_e$$

Soient R une matrice symétrique telle que $-2 < \lambda_i < 0, \forall i = 1, \dots, n$, où λ_i sont ses valeurs propres et $G = \frac{1}{2}(J^\top)^{-1}RJ^{-1}B^\top P$. Ainsi, sous la commande $g_e = Gx$, l'état d'équilibre $\bar{x} = \bar{f}x^ = \bar{f}P^{-1}\epsilon$ est asymptotiquement stable, où $\bar{f} = \frac{\epsilon^\top x(0)}{\epsilon^\top x^*}$ pour tout état initial tel que $x(0) < x^*$.*

2.9 Exemple d'application

Dans cette section, nous exposons quelques simulations afin d'évaluer la commande proposée. Pour ce faire, considérons un réseau de transport comprenant 8 intersections comme le montre la figure 2.6.

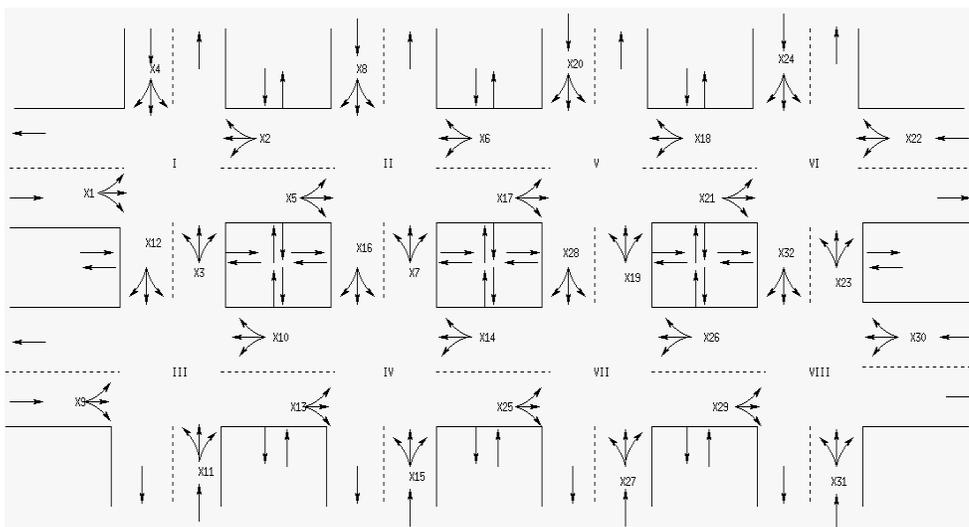


FIGURE 2.6 – Réseau de 8 intersections

Les paramètres utilisés dans cet exemple sont les suivants : le cycle $c = 90s$; le temps maximal et minimal du feu vert sont $50s$ et $15s$ respectivement ; les débits de saturation verticaux et horizontaux sont 0.4 véh/s ; les proportions d'échange entre les voies sont $\lambda_{i,i} = 0.3$ et $\lambda_{i,j} = 0.7$ respectivement ; les capacités des voies $x^* = [40, 35, 40, 37, 30, 40, 40, 30, 35, 42, 32, 42, 40, 40, 35, 40, 40, 35, 40, 37, 44, 30, 40, 30, 35, 40, 40, 40, 40, 30, 30, 42]^T$; les états initiaux dans les voies $x(0) = [30, 20, 22, 19, 15, 26, 39, 20, 30, 35, 22, 19, 12, 26, 28, 39, 30, 30, 22, 19, 25, 15, 39, 20, 30, 35, 22, 19, 18, 10, 28, 39]^T$. De plus, afin d'illustrer les comportements de notre stratégie en présence des incertitudes, le taux d'approvisionnement $S(k) = T f^T(k+1)(r(k) - d(k))$ est donné aléatoirement par une fonction Matlab en respectant les capacités des voies x^* .

Pour montrer que notre système est dissipatif, la différence entre $\Delta\psi$ et le taux d'approvisionnement S est d'abord considérée. À cette fin, deux simulations pour 100 cycles sont réalisées.

En vertu du théorème 2.4, la matrice R dans la première simulation (figure 2.7) est choisie telle que tous ses éléments diagonaux sont égaux à -1 . Dans ce cas, nous avons $\pi_1 \geq 0$ et $\pi_2 \geq 0$, la stratégie du théorème 2.4 est donc implémentée.

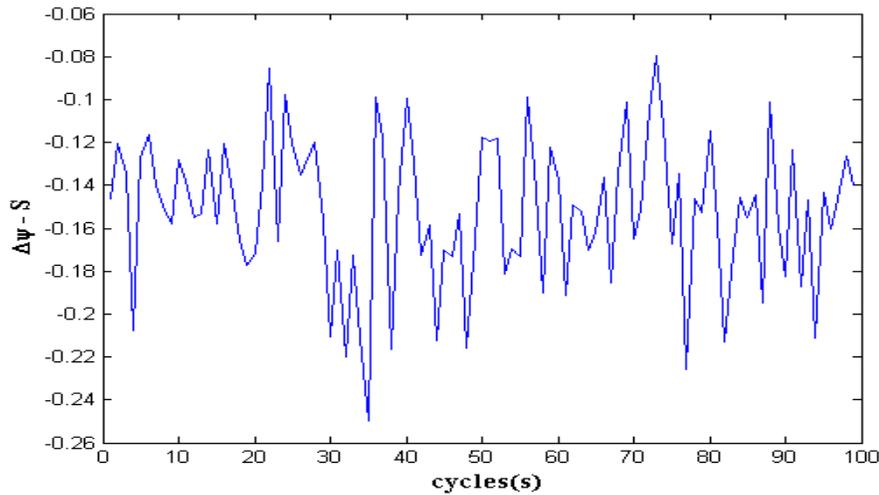


FIGURE 2.7 – Résultats de la simulation 1

Nous pouvons immédiatement observer que la différence $\Delta\psi - S$ est toujours négative. Ceci montre que notre commande par retour d'état (2.46) rend le système dissipatif et donc plus organisé.

TABLE 2.2 – Variation des temps des feux verts

cycle	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	18.1	17.6	17.8	19.5	17.8	17.6	17.6	17.4	17.8	18
	24.4	24.5	24.5	24.5	24.6	24.4	24.5	24.6	24.8	24.8
	22.7	22.4	22.4	22.5	22.7	22.4	22.8	23	23	22.8
	29.1	24.1	29.1	29	29	29.2	29	29.1	29.1	29
	24.2	24.5	24.5	24.3	24.6	24.2	24.5	24.7	25	24.8
	29.9	29.9	30.2	29.2	28	30.1	30.1	30.3	30.3	30.4
	29.1	29.2	29.2	27	28	29.3	29	29	29.2	29
	39	39.1	29.2	28.2	39	38.8	38.9	39	38.9	38.8
	29	29.3	29.4	29	29.4	29.5	29.4	29.5	29.2	29.1
	39	39	37.8	38.7	38.9	38.1	39.2	39	38.9	38.8
	29.3	29.4	25.1	29	29.4	29.3	29.2	29	29.2	29
	25.2	25.3	26.4	25.1	25	25.2	25.4	25.5	25.5	25.2
	39	39	38.8	39.1	38.7	38.9	39	39.1	38.7	39
	29.2	29.1	29.3	29.1	29.3	29.4	29.4	29.5	29	29
	30	29.1	29.5	29.1	29.5	29.5	29.3	29	29.2	29.4
	35.8	32.2	31.8	29.9	38.1	39.1	39	39	38.9	39

D'autre part, le tableau ci-dessus 2.2 regroupe quelques valeurs de la commande g_e pour 16 lignes pendant les dix premiers cycles. Il est clair que la commande g_e respecte les contraintes (2.38). En effet, les temps des feux verts sont toujours entre le temps minimal du feu vert $15s$ et le temps maximal $50s$.

Dans la deuxième simulation, nous avons modifié la matrice R pour avoir $\pi_1 < 0$ et $\pi_2 < 0$. Ainsi, la commande établie dans la remarque 2.5 est appliquée. La figure 2.8 montre les résultats de cette simulation.

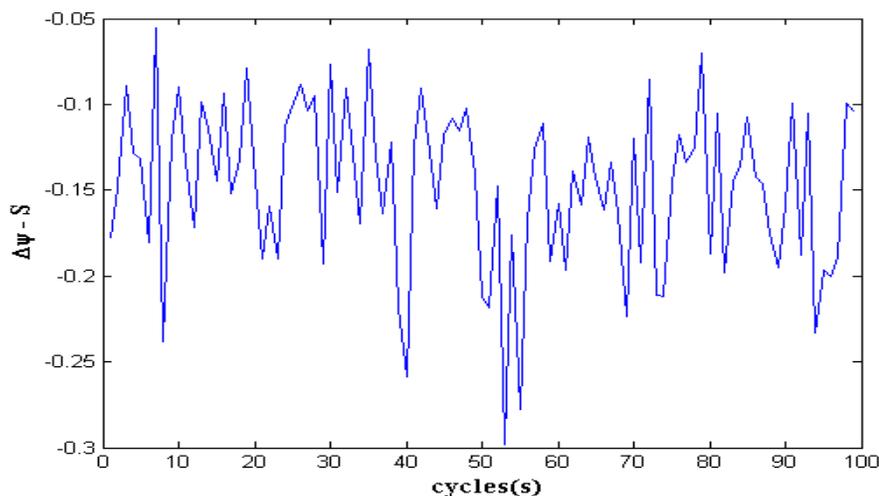


FIGURE 2.8 – Résultats de la simulation 2

Comme dans la figure 2.7, la différence $\Delta\psi - S$ est toujours négative. Par conséquent, les mêmes remarques restent valables pour cette simulation.

Ensuite, nous avons considéré le cas où le réseau de transport est isolé. L'objectif est de montrer la capacité de notre commande proposée à stabiliser le système autour de l'équilibre d'occupation. Pour ce faire, la commande par retour d'état élaborée dans la proposition 2.2 est appliquée au système isolé. La figure 2.9 montre l'évolution des états sous la commande proposée. Nous pouvons remarquer que chaque voie atteint son équilibre d'occupation après quelque cycles. Ce qui prouve l'efficacité de la stratégie proposée.

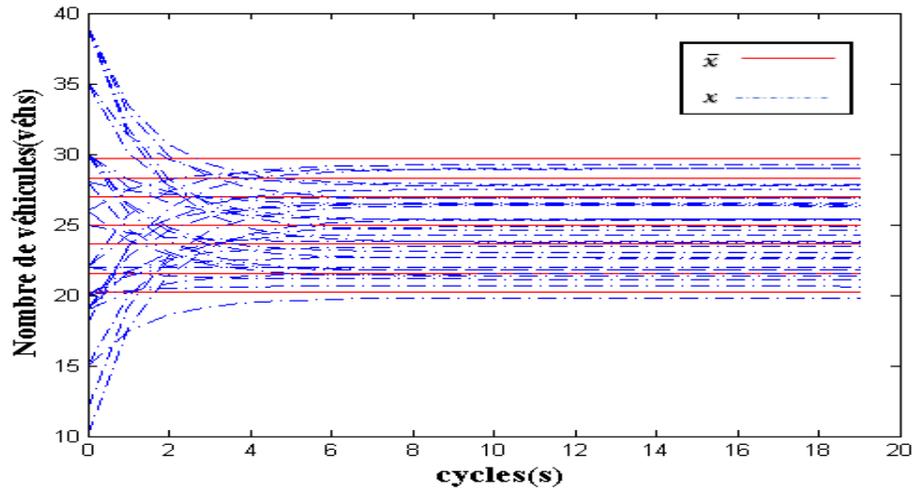


FIGURE 2.9 – Résultats de la simulation 3

Nous allons maintenant souligner les avantages de notre commande proposée par rapport aux autres méthodes existantes. Dans cette optique, nous avons choisi de comparer notre commande et la commande fixe utilisée dans la majorité des réseaux de transport. En effet, le temps du feu vert est considéré fixe entre 30 et 40 secondes. Cette durée est une généralité et peut subir quelques variations limitées. La figure 2.10 montre l'application de notre commande au système (2.36).

Chaque sous-figure représente la variation du nombre de véhicules dans les voies qui ont la même capacité. Puisque nous avons choisi 7 valeurs différentes pour la capacité des voies x^* dans les paramètres de l'exemple, alors nous avons 7 sous-figures. Dans le tableau suivant, nous regroupons les différentes voies avec leurs capacités correspondantes.

Numéro de voie	capacité (<i>veh</i>)
21	44
10,12,32	42
1,3,6,7,13,14,16,17,19,23,26,27,28,29	40
4,20	37
2,9,15,18,25	35
11	32
5,8,22,24,30,31	30

TABLE 2.3 – Capacités des voies

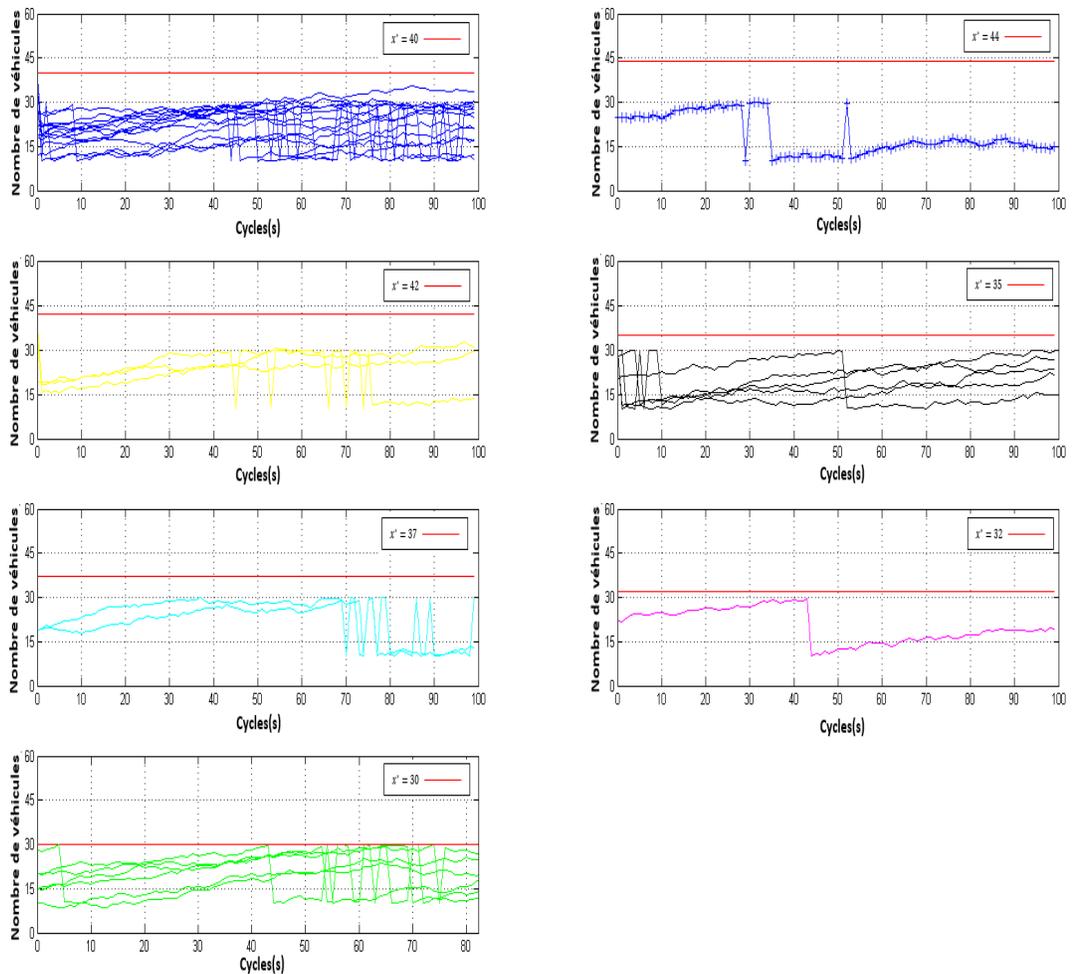


FIGURE 2.10 – Évolution d'état x sous la commande proposée

Revenons maintenant au résultat des simulations, nous pouvons voir que chaque courbe d'état varie tout en restant sous la capacité de sa voie. Ainsi, les contraintes sur l'état (2.39) sont respectées.

D'autre part, en appliquant la commande standard $40s$ au système (2.36), le résultat suivant est obtenu.

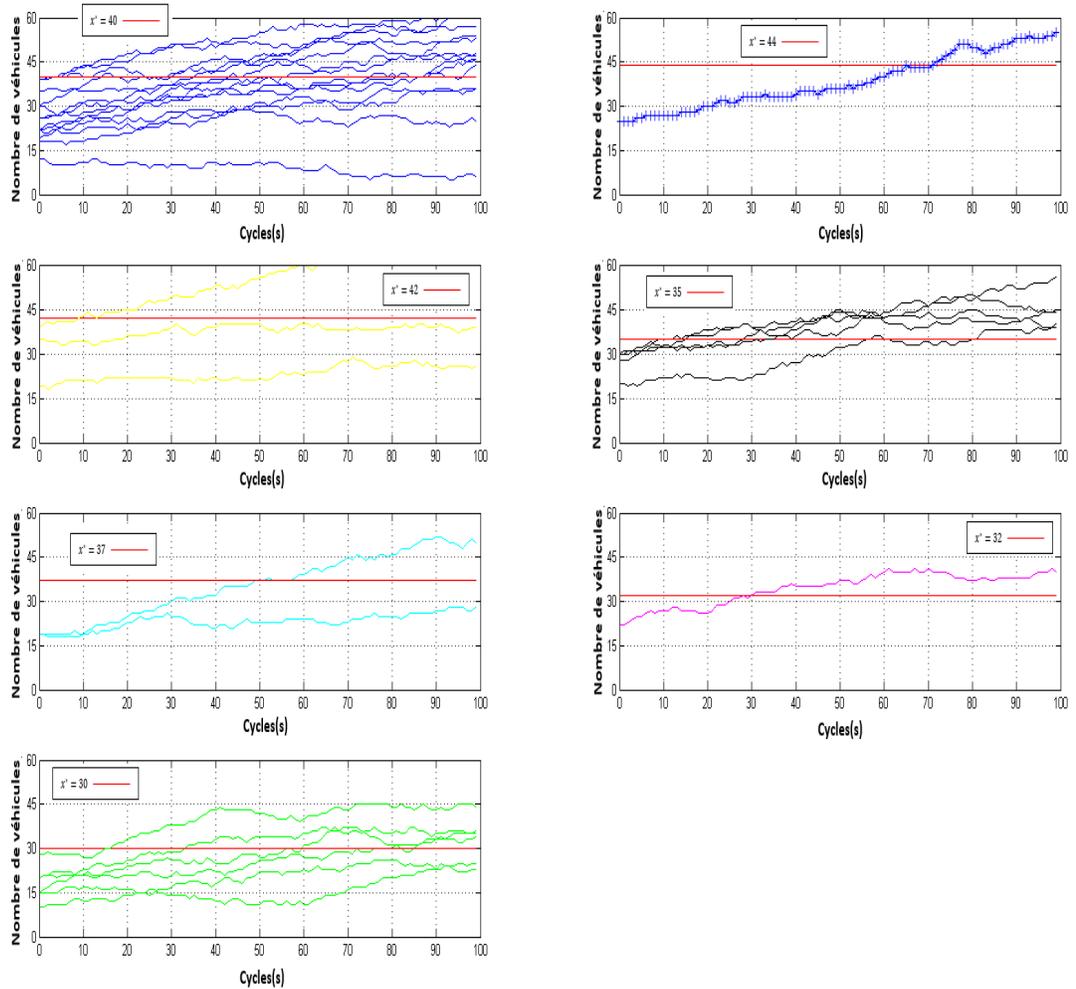


FIGURE 2.11 – Évolution d'état x sous la commande standard

Nous pouvons remarquer que plusieurs courbes dépassent les capacités des voies. Ainsi, la stratégie des feux fixes n'est pas capable d'empêcher la congestion dans le réseau.

En conclusion, ces simulations montrent l'efficacité de notre stratégie de contrôle par rapport à la stratégie des feux fixes. En effet, non seulement elle rend le système dissipatif mais aussi respecte les contraintes sur l'état et la commande.

2.10 Conclusion

Dans ce chapitre, une approche basée sur la commande dissipative a été adaptée avec succès et appliquée aux réseaux de carrefours à feux. L'idée était de proposer une commande dissipative améliorant celle proposée dans le travail de Zhou [54] et aller plus loin dans son application. En effet, nous avons exprimé dans ce travail la fonction d'approvisionnement qui relie le système et l'extérieur en tenant compte des flux entrants et sortants. De plus, nous avons adapté la commande développée pour un système isolé afin de stabiliser le système autour de son état d'équilibre.

Dans un premier temps, une approche entre le système de transport et celui de thermodynamique a été présentée. L'objectif était de souligner que la signification de l'ordre est opposée entre les deux systèmes. Autrement dit, la disentropie thermodynamique (mesure de l'ordre) correspond à l'entropie de transport (mesure de désordre). Dans un deuxième temps, le principe de la commande dissipative a été donné dans sa formulation la plus générale, puis un examen a été fait afin de mettre en évidence ses avantages. Ensuite, une spécialisation du problème de la commande dissipative aux systèmes des carrefours à feux a été réalisée. En considérant l'entropie comme étant l'énergie stockée dans le système, nous avons élaboré une loi de commande rendant le système dissipatif, c'est à dire permettant de rendre le système mieux organisé. Cette étude est faite dans une formulation qui prend en compte explicitement les contraintes aussi bien sur la commande que sur l'état.

Enfin, les résultats des simulations ont démontré l'efficacité de la commande à dissiper en temps réel les véhicules ainsi que la flexibilité de son application. Cependant, il faut noter que l'effet des perturbations sur le comportement du système est difficile à maîtriser, et en particulier la stabilité peut ne pas être garantie.

Ce dernier point est un handicap qui est, à notre sens, sérieux. En effet, il enlève à l'approche des systèmes dissipatifs l'un de ses principaux avantages, à savoir la possibilité de réaliser un compromis entre un comportement souhaité et le coût de la commande nécessaire pour l'obtenir. D'où, la nécessité de développer un observateur estimant ces incertitudes. C'est le sujet du chapitre suivant.

CHAPITRE 3

STABILISATION AU SENS DE LYAPUNOV DES RÉSEAUX DE TRANSPORT

3.1 Introduction

Les réseaux de transport sont des systèmes complexes à grande échelle soumis à des contraintes physiques et à des exigences de sécurité. Ces limitations sont représentées dans la majorité des cas par des contraintes sur l'état et la commande. De plus, un réseau de transport urbain est toujours soumis à des incertitudes inconnues en raison de la présence d'entrées non mesurables. Afin de garantir l'efficacité des stratégies de contrôle proposées, la prise en compte de ces contraintes dans la conception de la commande des feux de circulation et l'estimation de ces incertitudes sont inévitables.

Comme dans le chapitre précédent, notre objectif dans ce chapitre est d'établir une stratégie de commande afin d'éviter la congestion dans le réseau de transport soumis à des incertitudes additives. Cet objectif peut être atteint en stabilisant les voies autour de leurs situations nominales où le risque de la génération de congestion est très faible. Par ailleurs, la présence des incertitudes dans le système peut avoir des impacts négatifs sur les performances de la commande. C'est la raison pour laquelle un observateur doit être établi pour estimer les incertitudes dans chaque cycle et ensuite améliorer la robustesse de la commande proposée.

Dans un premier temps, nous faisons une brève introduction sur l'observateur des systèmes discrets linéaires. Ensuite, afin d'obtenir un modèle linéaire commandé par les feux, nous définissons les flux entrants et sortants par leurs expressions dans le modèle proposé dans le chapitre précédent. Une fois le réseau modélisé, une commande par retour d'état stabilisant les voies tout en respectant les contraintes sur l'état et la commande est établie. En outre, afin d'estimer les incertitudes susceptibles d'avoir des impacts négatifs sur les performances de la commande, un observateur est proposé pour atteindre cet objectif. Finalement, plusieurs simulations sont réalisées pour montrer l'efficacité de l'observateur et de la commande proposés avec différents niveaux d'incertitudes.

3.2 Sur l'observateur

Les modèles mathématiques décrivant les phénomènes physiques sont souvent mal connus à cause de la présence des incertitudes. Ces derniers peuvent dégrader les performances des commandes découlant d'un choix impropre des valeurs des paramètres.

Afin de remédier à ces inconvénients, un observateur estimant les incertitudes à partir des mesures des entrées et des sorties, doit alors être utilisé (voir figure 3.1). Notons bien qu'un observateur peut être réalisé si le système est observable, c'est-à-dire qu'il est possible de reconstruire l'état initial à partir de l'information sur ses entrées et ses sorties pendant un intervalle de temps fini.

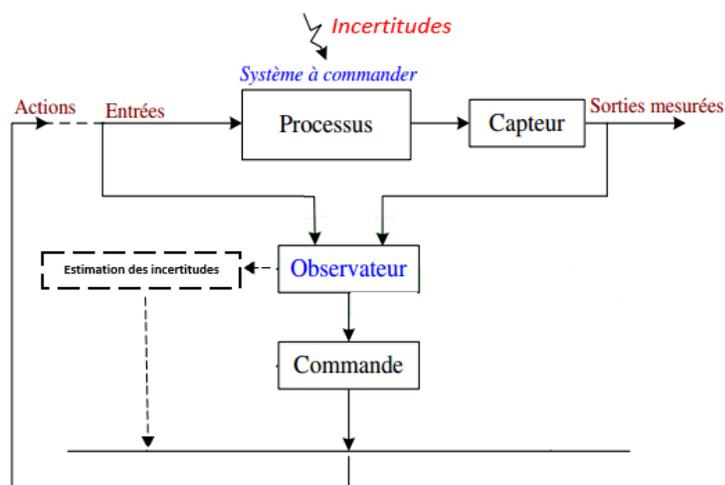


FIGURE 3.1 – Observateur du système

Soit le système suivant :

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) \end{cases} \quad (3.1)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^d$ et les matrices A , B et C sont des matrices constantes de dimension appropriée.

Considérons la matrice d'observabilité pour ce système comme suit :

$$O_{(A,C)} = [C^T, CA^T, \dots, (CA^{n-1})^T]^T$$

Le résultat classique d'observabilité du système (3.1) établi par Kalman est le suivant :

Théorème 3.1 *Le système (3.1) est dit observable si et seulement si [68] :*

$$\text{rang} O_{(A,C)} = n$$

Pour ce type de système, l'observateur a été introduit pour la première fois par Luenberger [69] conduisant à l'estimation de l'état.

Théorème 3.2 *Si le système (3.1) est observable et si les valeurs propres de la matrice $A-LC$ sont dans le cercle unité avec L une matrice de gain, alors il existe un observateur asymptotique pour (3.1) sous la forme suivante :*

$$\hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + Bu(k) + L(y(k) - C\hat{x}(k))$$

Soit $e(k) = x(k) - \hat{x}(k)$ l'erreur entre la valeur réelle et la valeur estimée du système. Il s'ensuit :

$$e(k+1) = (A - LC)e(k)$$

Il est clair qu'il faut choisir judicieusement les valeurs propres de la matrice $A - LC$ car elles influent sur la vitesse de convergence asymptotique.

3.3 Modèle linéaire du réseau de transport

Dans le chapitre précédent, nous avons obtenu l'équation d'état du réseau de transport sous la forme suivante :

$$x(k+1) = x(k) + Lg_e(k) + r(k) - d(k) \quad (3.2)$$

Rappelons que ce modèle n'est valable que dans la situation saturée (voir chapitre 2). Dans le modèle "stocker-et-transférer", les flux entrants $r_i(k)$ et les flux sortants $d_i(k)$ sont donnés par (voir [70]) :

$$r_i(k) = q_i(k)c \quad (3.3)$$

$$d_i(k) = s_i \lambda_{i,i} g_{e_i}(k) \quad (3.4)$$

où c est le temps du cycle des feux et $q(k)$ est le débit d'entrée de la i -ème voie. Ainsi, le système de transport est représenté par l'équation suivante :

$$x(k+1) = x(k) + Lg_e(k) + q(k)c - Dg_e(k) = x(k) + q(k)c + (L - D)g_e(k) \quad (3.5)$$

où D est une matrice diagonale $n \times n$ dont les éléments diagonaux sont $s_i \lambda_{i,i}$. De plus, nous savons que le cycle est divisé en plusieurs phases. Chaque phase comprend un temps perdu l_o et un temps de vert effectif g_e . Considérons l'intersection à deux phases représentée dans la figure 3.2. Puisque le cycle est divisé en deux phases, il y a deux temps des

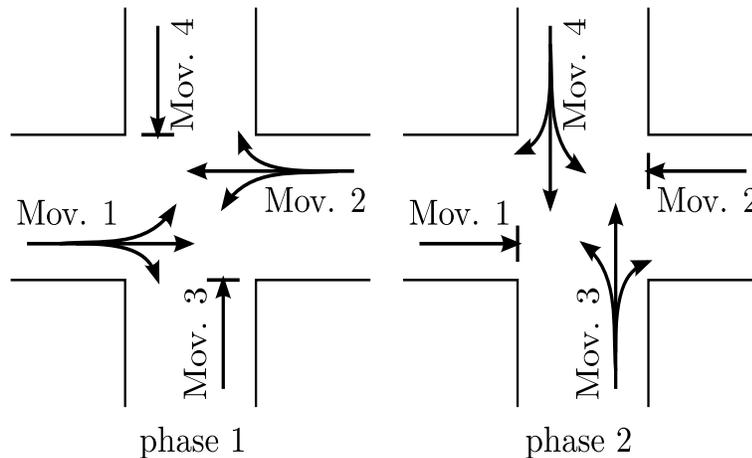


FIGURE 3.2 – Intersection en deux phases de 4 voies

verts effectifs (g_{e_1}, g_{e_2}) et deux temps perdus (l_{o_1}, l_{o_2}). Généralement, la somme de tous les temps des verts effectifs dans une intersection est constant car le temps perdu et le cycle sont considérés fixes [9]. Mathématiquement, cela signifie que $g_{e_1} + g_{e_2} = c - (l_{o_1} + l_{o_2})$ pour les deux phases. Il s'ensuit que g_{e_1} et g_{e_2} ne sont pas indépendants. Ainsi, si g_{e_1} est choisi comme la variable de commande, les temps des verts effectifs de quatre mouve-

ments peuvent être présentés par la relation linéaire suivante :

$$\begin{pmatrix} g_{e_1} \\ g_{e_1} \\ g_{e_2} \\ g_{e_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} g_{e_1} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c - (l_{o_1} + l_{o_2}) \\ c - (l_{o_1} + l_{o_2}) \end{pmatrix}$$

Cette dernière équation est formulée pour chaque intersection. Ainsi, pour un réseau de transport, nous pouvons écrire :

$$g_e = \mathcal{G}u + \xi \quad (3.6)$$

où $u \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur des temps des verts effectifs indépendants, $\mathcal{G} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ et $\xi \in \mathbb{R}^n$ sont respectivement une matrice fixe et un vecteur fixe.

En remplaçant l'équation (3.6) dans (3.5), nous obtenons :

$$\begin{aligned} x(k+1) &= x(k) + q(k)c + (L - D)(\mathcal{G}u(k) + \xi) \\ &= x(k) + q(k)c + (L - D)\mathcal{G}u(k) + (L - D)\xi \\ &= x(k) + Bu(k) + h + q(k)c \end{aligned} \quad (3.7)$$

où $B = (L - D)\mathcal{G} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ et $h = (L - D)\xi$. Ainsi, le système se trouve modéliser par un modèle linéaire à temps discret avec des incertitudes additives, dues à la présence des entrées non mesurables $q(k)$.

Rappelons que ce système doit respecter les contraintes sur l'état et sur la commande comme dans le chapitre précédent, c'est à dire x et u doivent appartenir respectivement aux ensembles suivants :

$$\mathbb{E}_x = \{x \in \mathbb{R}^n / 0 \leq x \leq x^*\} \quad (3.8)$$

$$\mathbb{U}_u = \{u \in \mathbb{R}^m / u_{min} \leq u \leq u_{max}\} \quad (3.9)$$

3.4 L'objectif de la commande et solution proposée

Dans le domaine de transport, la situation nominale x_N se produit lorsque l'entrée de chaque voie est égale à sa sortie [9]. Ainsi, le risque de génération de la congestion dans le réseau lors de cette situation est très faible. Mathématiquement, cette situation se traduit par :

$$x(k+1) = x(k) = x_N$$

Cela implique à son tour, d'après l'équation (3.7) que :

$$q_N c + B u_N + h = 0$$

où q_N est le débit nominal d'entrée et u_N est la variable de commande nominale. Ainsi, l'objectif est de trouver une commande par retour d'état des feux de circulation capable de stabiliser l'état $x(k)$ autour de x_N , tout en respectant les contraintes sur l'état et la commande.

A cet égard, définissons le nouveau vecteur de commande $v(k) = u(k) - u_N$, le nouveau vecteur d'état $y(k) = x(k) - x_N$ et le nouveau vecteur d'incertitudes $\omega(k) = (q(k) - q_N)c$. Avec ces changements de variables et avec $q_N c + B u_N + h = 0$, l'équation (3.7) se réécrit comme suit :

$$y(k+1) = y(k) + B v(k) + \omega(k) \quad (3.10)$$

D'autre part, les ensembles des contraintes \mathbb{U}_u et \mathbb{E}_x deviennent respectivement :

$$\mathbb{U}_v = \{v \in \mathbb{R}^m / -v_2 \leq v \leq v_1\} \quad (3.11)$$

$$\mathbb{E}_y = \{y \in \mathbb{R}^n / -y_2 \leq y(k) \leq y_1\} \quad (3.12)$$

où $v_2 = u_N - u_{min}$, $v_1 = u_{max} - u_N$, $y_2 = x_N$ et $y_1 = x^* - x_N$.

Il est clair que stabiliser l'état $x(k)$ autour de sa situation nominale x_N revient à trouver une commande par retour d'état qui stabilise l'état $y(k)$ autour de zéro tout en respectant les contraintes (3.11) et (3.12). À cette fin, définissons la commande par retour d'état suivante :

$$v(k) = G y(k) + \alpha \quad (3.13)$$

où $G \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $\alpha \in \mathbb{R}^m$. Le rôle du vecteur α sera expliqué plus tard. En utilisant cette commande, le système (3.10) prend la forme suivante :

$$y(k+1) = A y(k) + \beta \quad (3.14)$$

où $A = I + B G$ et $\beta = B \alpha + \omega(k)$. Soit $\mathcal{V}(y) = y^T P y$ la fonction de Lyapunov associée au système (3.14), où P est une matrice symétrique définie positive. Ainsi, la variation de $\Delta \mathcal{V}(y)$ le long de la trajectoire du système (3.14) est donnée par :

$$\Delta \mathcal{V}(y) = \mathcal{V}(y(k+1)) - \mathcal{V}(y(k)) = y^T [A^T P A - P] y + f(\beta) \quad (3.15)$$

où

$$f(\beta) = 2y^T A^T P \beta + \beta^T P \beta \quad (3.16)$$

Il est clair que $\Delta\mathcal{V}(y) < 0$ si $y^T[A^T P A - P]y < 0$ et $f(\beta) < 0$. Tout d'abord, nous allons trouver les conditions sur G pour que la matrice $A^T P A - P = (I + BG)^T P (I + BG) - P$ soit définie négative. En effet, observons que $(I + BG)^T P (I + BG) - P \prec 0$ est équivalente à :

$$P - (I + BG)^T P (I + BG) \succ 0 \quad (3.17)$$

où le symbole \succ signifie que la matrice de gauche est définie positive. En multipliant à droite et à gauche l'expression $P - (I + BG)^T P (I + BG)$ par P^{-1} , nous trouvons :

$$P^{-1} - (P^{-1} + BGP^{-1})^T P (P^{-1} + BGP^{-1}) \succ 0$$

Posons $Q = P^{-1}$ et $Y = GQ$, la dernière inégalité devient :

$$Q - (Q + BY)^T Q^{-1} (Q + BY) \succ 0$$

D'après le lemme de Shur [57], les conditions sur G pour que $Q - (Q + BY)^T Q^{-1} (Q + BY)$ soit définie positive sont représentées par la LMI suivante :

$$\begin{pmatrix} Q & Q + Y^T B^T \\ Q + BY & Q \end{pmatrix} \succ 0, \quad Q = P^{-1}, Y = GQ \quad (3.18)$$

Ceci fait, regardons maintenant les conditions sur β pour que $f(\beta)$ soit définie négative. En effet, considérons $\theta = -2Ay$, nous avons alors :

$$2y^T A^T P \beta = -\theta^T P \beta$$

Ainsi, en introduisant θ dans l'équation (3.16), nous obtenons :

$$f(\beta) = -2\theta^T P \beta + \beta^T P \beta = (\beta - \theta)^T P (\beta - \theta) - \theta^T P \theta$$

Donc, si $\beta = \theta$, alors :

$$f(\beta) = -\theta^T P \theta < 0 \quad (3.19)$$

car P est définie positive. Ainsi, nous obtenons le théorème suivant :

Théorème 3.3 *Pour que le système (3.14) soit asymptotiquement stable par la commande $v = Gy + \alpha$, il est suffisant que $\beta = -2Ay$ et que la LMI suivante soit faisable :*

$$\begin{pmatrix} Q & Q + Y^T B^T \\ Q + BY & Q \end{pmatrix} \succ 0, \quad Q = P^{-1}, Y = GQ$$

Pour présenter la forme finale de la commande par retour d'état capable d'assurer la stabilisation, nous devons déterminer α . En effet, à partir de $\beta = B\alpha + \omega(k)$, il s'ensuit :

$$B\alpha = \beta - \omega(k) = -2Ay(k) - \omega(k) \quad (3.20)$$

Puisque B est une matrice rectangulaire et son rang est égal au nombre de ses colonnes m , nous allons faire appel à la pseudo-inverse de la matrice B , à savoir $B^+ = (B^T B)^{-1} B^T$. Ainsi, en utilisant le fait que $B^+ B = I$ et en pré-multipliant l'équation (3.20) par B^+ , nous obtenons :

$$\alpha = B^+(-2Ay(k) - \omega(k)) \quad (3.21)$$

Ainsi, la commande par retour d'état (3.13) peut être présentée par la forme suivante :

$$v = Gy(k) + B^+(-2Ay(k) - \omega(k)) \quad (3.22)$$

À ce stade de la présentation, le problème maintenant est la présence des incertitudes $\omega(k)$ dans la formulation de la commande. Ces incertitudes peuvent avoir des impacts négatifs sur les performances de la commande. C'est la raison pour laquelle un observateur estimant ces incertitudes sera développé dans la suite.

3.4.1 Synthèse d'un observateur

Cette sous-section est consacrée à l'estimation des incertitudes $\omega(k)$ dans le système. Dans ce contexte, le système est présenté par la forme entrée-sortie suivante :

$$\begin{cases} y(k+1) = y(k) + Bv(k) + \omega(k) \\ z(k) = y(k) \end{cases} \quad (3.23)$$

où $z \in \mathbb{R}^n$ est la sortie mesurée. En utilisant la commande (3.22) dans (3.23), le système devient :

$$\begin{aligned} y(k+1) &= y(k) + BGy(k) - 2BB^+Ay(k) - BB^+\omega(k) + \omega(k) \\ &= Fy(k) + M\omega(k) \end{aligned}$$

où $F = I + BG - 2BB^+A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $M = I - BB^+ \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Ainsi, le système peut se réécrire comme :

$$\begin{cases} y(k+1) = Fy(k) + M\omega(k) \\ z(k) = y(k) \end{cases} \quad (3.24)$$

Nous sommes maintenant prêts à introduire l'observateur estimant les incertitudes du système (3.24). Pour ce faire, soit $\text{rang}(M) = r$, deux cas sont à considérer (pour plus de détails voir [71] et [72]) :

Cas 1 : Si $r = n$, l'observateur est de la forme :

$$\begin{cases} \hat{y}(k+1) = F\hat{y}(k) + L_1(z(k) - \hat{z}(k)) + M\hat{\omega}(k) \\ \hat{\omega}(k+1) = \hat{\omega}(k) + N_1(z(k) - \hat{z}(k)) \\ \hat{z}(k) = \hat{y}(k) \end{cases} \quad (3.25)$$

où \hat{y} , \hat{z} et $\hat{\omega}$ sont respectivement les estimations de l'état, de la sortie et des incertitudes. En outre, $L_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $N_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Définissons l'erreur d'estimation d'état et l'erreur d'estimation des incertitudes respectivement par :

$$\vartheta_k = y(k) - \hat{y}(k), \quad \varepsilon_k = \omega(k) - \hat{\omega}(k)$$

Il s'ensuit :

$$\begin{aligned} \vartheta_{k+1} &= y(k+1) - \hat{y}(k+1) = (F - L_1)\Delta_k + M\varepsilon_k \\ \varepsilon_{k+1} &= \omega(k+1) - \hat{\omega}(k+1) = -N_1\Delta_k + \varepsilon_k + \Delta\omega(k) \end{aligned}$$

où $\Delta\omega(k) = \omega(k+1) - \omega(k)$. Ainsi, le vecteur d'erreur $e(k) = \begin{pmatrix} \vartheta_k \\ \varepsilon_k \end{pmatrix}$ peut être présenté par l'équation suivante :

$$e(k+1) = A_1 e(k) + \beta_1(k) \quad (3.26)$$

où $A_1 = \begin{pmatrix} F - L_1 & M \\ -N_1 & I \end{pmatrix}$ et $\beta_1(k) = \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta\omega(k) \end{pmatrix}$.

Nous allons maintenant trouver les conditions sous lesquelles l'erreur $e(k)$ est asymptotiquement stable autour de zéro afin que l'estimation soit la plus proche possible de la mesure réelle. Pour ce faire, soit $\mathcal{V}(e) = e^T e$ la fonction de Lyapunov associée au système (3.26). Ainsi, le long de la trajectoire du système (3.26) nous avons :

$$\Delta\mathcal{V}(e) = e^T(k+1)e(k+1) - e^T(k)e(k) = e^T[A_1^T A_1 - I]e + f(\beta_1) \quad (3.27)$$

où

$$f(\beta_1) = 2e^T A_1^T \beta_1 + \beta_1^T \beta_1 \quad (3.28)$$

Observons que l'équation (3.27) est similaire à l'équation (3.15) avec P remplacé par I , y par e et β par β_1 . D'où, en suivant les mêmes arguments précédents de la section 3.4, nous obtenons le résultat suivant :

Proposition 3.1 *Pour que l'équilibre $e = 0$ soit asymptotiquement stable, il est suffisant que $\beta_1 = -2A_1 e$ et que la LMI suivante soit faisable :*

$$\begin{pmatrix} I & A_1^T \\ A_1 & I \end{pmatrix} \succ 0 \quad (3.29)$$

Avant de présenter le résultat final du premier cas, remarquons qu'après l'estimation des incertitudes dans le système, la valeur estimée de α est donnée par :

$$\alpha = B^+(-2A\hat{y}(k) - \hat{\omega}(k))$$

En outre, une propriété remarquable des LMIs est la possibilité de regrouper plusieurs LMIs en une seule LMI bloc-diagonale. Ainsi, à la lumière de ces deux observations, nous pouvons formuler le résultat suivant :

Théorème 3.4 *Pour que le système (3.14) soit asymptotiquement stable par la commande $v = Gy + B^+(-2A\hat{y}(k) - \hat{\omega}(k))$, il est suffisant que la LMI suivante soit faisable.*

$$\left(\begin{array}{cc} \left(\begin{array}{cc} Q & Q + Y^T B^T \\ Q + BY & Q \end{array} \right) & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \left(\begin{array}{cc} I & A_1^T \\ A_1 & I \end{array} \right) \end{array} \right) \succeq 0, \quad Q = P^{-1}, Y = GQ;$$

où \mathbb{O} est une matrice nulle de dimension appropriée.

Cas 2 : Si $r < n$, alors il est bien connu qu'il existe deux matrices $M_1 \in \mathbb{R}^{n \times r}$ et $M_2 \in \mathbb{R}^{r \times n}$ dont leur rang est r et tel que $M = M_1 M_2$ (voir [73]). Ainsi, le système (3.24) peut se réécrire sous la forme suivante :

$$\begin{cases} y(k+1) = Fy(k) + M_1 \bar{\omega}(k) \\ z(k) = y(k) \end{cases}$$

où $\bar{\omega}(k) = M_2 \omega(k)$. Ainsi, $\bar{\omega}(k)$ sera estimée par l'observateur suivant :

$$\begin{cases} \hat{y}(k+1) = F\hat{y}(k) + L_1(z(k) - \hat{z}(k)) + M_1 \hat{\omega}(k) \\ \hat{\omega}(k+1) = \hat{\omega}(k) + N_1(z(k) - \hat{z}(k)) \\ \hat{z}(k) = \hat{y}(k) \end{cases} \quad (3.30)$$

Il est clair que le système (3.30) est aussi similaire au système (3.25) avec M remplacée par M_1 et $\hat{\omega}(k+1)$ par $\hat{\omega}(k+1)$. De même, le vecteur d'erreur dynamique sera également similaire à l'équation (3.26) avec $A_2 = \begin{pmatrix} F - L_1 & M_1 \\ -N_1 & I \end{pmatrix}$ et $\beta_2(k) = \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta \bar{\omega}(k) \end{pmatrix}$. Ainsi, en suivant les mêmes lignes de raisonnement que dans la proposition 3.1, nous avons le résultat suivant :

Proposition 3.2 *Pour que l'équilibre $e = 0$ soit asymptotiquement stable, il est suffisant que $\beta_2 = -2A_2e$ et que la LMI suivante soit faisable :*

$$\begin{pmatrix} I & A_2^T \\ A_2 & I \end{pmatrix} \succ 0 \quad (3.31)$$

Par ailleurs, $M_2\omega(k) = \bar{\omega}(k) = \hat{\omega}(k)$ et la matrice M_2 est non-carrée et son rang est égal au nombre de ses lignes r , alors il est bien connu que la solution $\omega(k)$ est donnée par [74] :

$$\omega(k) = M_2^+\hat{\omega}(k) + (I - M_2^+M_2)\Phi \quad (3.32)$$

où $\Phi \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur libre et $M_2^+ = M_2^T(M_2M_2^T)^{-1}$ est la pseudo-inverse de la matrice M_2 . En résumé, comme dans le cas 1, le résultat final du cas 2 est donné par théorème suivant :

Théorème 3.5 *Pour que le système (3.14) soit asymptotiquement stable par la commande $v = Gy + B^+(-2A\hat{y}(k) - M_2^+\hat{\omega}(k) - (I - M_2^+M_2)\Phi)$, il est suffisant que la LMI suivante soit faisable.*

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & Q + Y^T B^T \\ Q + BY & Q \end{pmatrix} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \begin{pmatrix} I & A_2^T \\ A_2 & I \end{pmatrix} \end{pmatrix} \succeq 0, \quad Q = P^{-1}, Y = GQ;$$

Remarque 3.1 Puisque Φ est un vecteur libre, le théorème 3.5 donne une commande par retour d'état v explicite mais non unique. Ce degré de liberté dans le choix du vecteur Φ est certainement un avantage qui peut être exploité pour améliorer les performances de la commande. ▶

Remarque 3.2 Considérons que les temps des verts effectifs des voies sont indépendants. En d'autres termes, chaque voie dans une intersection est gérée par son propre feu de circulation. Dans ce cas, la matrice B est une matrice $n \times n$ inversible. Ainsi, la commande (3.22) devient $v = Gy(k) + B^{-1}(-2Ay(k) - \omega(k))$. En utilisant cette commande dans (3.23), le système s'écrit comme suit :

$$y(k+1) = Sy(k)$$

où $S = I + BG - 2A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Remarquons tout de suite que les incertitudes n'apparaissent plus dans le système. Par conséquent, la commande proposée non seulement stabilise le système, mais joue également le rôle de compensateur de ses incertitudes. Dans ce cas, il suffit d'estimer les incertitudes du système en suivant les mêmes lignes de raisonnement que pour le système (3.24) avec $F = M = I$.

$$\begin{cases} y(k+1) = y(k) + \omega(k) \\ z(k) = y(k) \end{cases} \quad (3.33)$$

Une fois les incertitudes du système estimées, nous remplaçons leurs valeurs dans la commande (3.22) et nous imposons cette commande proposée au système original (3.23). ▶

Passons maintenant au problème des contraintes du système. En effet, comme déjà mentionné, l'état y et la commande v doivent respecter les contraintes (3.11) et (3.12) respectivement. En outre, nous avons démontré dans le chapitre précédent que cela peut être atteint si la commande assure l'inclusion :

$$\mathbb{E}_y \subseteq \mathbb{U}_y$$

avec $\mathbb{U}_y = \{y \in \mathbb{R}^n / -\mu \leq Gy \leq \varphi\}$, où $\varphi = v_1 - \alpha$ et $\mu = \alpha + v_2$. Observons que les contraintes (3.11) et (3.12) peuvent s'écrire sous les formes polyédriques suivantes :

$$\mathbb{E}_y = \left\{ y \in \mathbb{R}^n / \begin{pmatrix} I \\ -I \end{pmatrix} y \leq \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathbb{U}_y = \left\{ y \in \mathbb{R}^n / \begin{pmatrix} G \\ -G \end{pmatrix} y \leq \begin{pmatrix} \varphi \\ \mu \end{pmatrix} \right\}$$

Ainsi, en appliquant le lemme de Hennet 2.1 et en posant $U = \begin{pmatrix} G \\ -G \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} I \\ -I \end{pmatrix}$, la condition $\mathbb{E}_y \subseteq \mathbb{U}_y$ est équivalente à l'existence d'une matrice $\mathbb{K} \in \mathbb{R}_+^{2m \times 2n}$ telle que

$$\mathbb{K} \begin{pmatrix} I \\ -I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G \\ -G \end{pmatrix} \quad (3.34)$$

$$\mathbb{K} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \varphi \\ \mu \end{pmatrix} \quad (3.35)$$

Définissons $\mathbb{K} = \begin{pmatrix} \mathbb{K}_{11} & \mathbb{K}_{12} \\ \mathbb{K}_{21} & \mathbb{K}_{22} \end{pmatrix}$. Il s'ensuit des équations (3.34) et (3.35) que :

$$\mathbb{K}_{11} - \mathbb{K}_{12} = G \quad (3.36)$$

$$\mathbb{K}_{22} - \mathbb{K}_{21} = G \quad (3.37)$$

$$\mathbb{K}_{11}y_1 + \mathbb{K}_{12}y_2 \leq \varphi \quad (3.38)$$

$$\mathbb{K}_{21}y_1 + \mathbb{K}_{22}y_2 \leq \mu \quad (3.39)$$

Ainsi, nous avons :

$$G = \mathbb{K}_{11} - \mathbb{K}_{12} = \mathbb{K}_{22} - \mathbb{K}_{21} \quad (3.40)$$

En suivant les mêmes lignes de raisonnement que dans le chapitre précédent, nous avons la proposition suivante :

Proposition 3.3 *Pour que $\mathbb{E}_y \subseteq \mathbb{U}_y$, il suffit qu'il existe deux matrices non-négatives \mathbb{P} et \mathbb{Q} telles que :*

$$\mathbb{P} - \mathbb{Q} = G \quad (3.41)$$

$$\mathbb{P}y_1 + \mathbb{Q}y_2 \leq \varphi \quad (3.42)$$

$$\mathbb{Q}y_1 + \mathbb{P}y_2 \leq \mu \quad (3.43)$$

Preuve: Supposons que toutes les conditions sont satisfaites et considérons $y \in \mathbb{E}_y$, c'est à dire,

$$-y_2 \leq y \leq y_1$$

Puisque $\mathbb{P} \geq 0$ et $\mathbb{Q} \geq 0$, alors en pré-multipliant la dernière inégalité par \mathbb{P} et $-\mathbb{Q}$, nous obtenons :

$$-\mathbb{P}y_2 \leq \mathbb{P}y \leq \mathbb{P}y_1$$

$$-\mathbb{Q}y_1 \leq -\mathbb{Q}y \leq \mathbb{Q}y_2$$

La somme de ces inégalités avec les conditions (3.42) et (3.43) conduisent à :

$$-\mu \leq -\mathbb{P}y_2 - \mathbb{Q}y_1 \leq (\mathbb{P} - \mathbb{Q})y \leq \mathbb{P}y_1 + \mathbb{Q}y_2 \leq \varphi$$

ce qui implique que $y \in \mathbb{U}_y$ et complète la preuve. ■

Notre objectif maintenant est de présenter les inégalités (3.42) et (3.43) sous forme LMI. En effet, (3.42) et (3.43) peuvent être présentées comme suit :

$$\varphi_i - \mathbb{P}_i y_1 - \mathbb{Q}_i y_2 \geq 0, \quad (3.44)$$

$$\mu_i - \mathbb{Q}_i y_1 - \mathbb{P}_i y_2 \geq 0, \quad \forall i = 1 \dots, m \quad (3.45)$$

où \mathbb{P}_i et \mathbb{Q}_i sont les i -ème lignes de \mathbb{P} et \mathbb{Q} respectivement. Puisque $\mathbb{P} \geq 0$, $\mathbb{Q} \geq 0$ et $y_1 \geq 0$, l'application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz nous conduit à $-\mathbb{P}_i y_1 \geq -\|\mathbb{P}_i\| \|y_1\| \geq -\|\mathbb{P}_i\|^2 \|y_1\|$. En suivant le même raisonnement du chapitre 2 et en considérant $J_1 = \frac{\varphi_i}{\|y_1\|} - \frac{\mathbb{Q}_i y_2}{\|y_1\|}$, l'inégalité $\frac{\varphi_i}{\|y_1\|} - \frac{\mathbb{Q}_i y_2}{\|y_1\|} - \mathbb{P}_i \mathbb{P}_i^\top \geq 0$ devient équivalente à la LMI suivante :

$$\begin{pmatrix} J_1 & \mathbb{P}_i \\ \mathbb{P}_i^\top & I \end{pmatrix} \succeq 0, \quad \forall i = 1 \dots, m \quad (3.46)$$

De même, pour l'inégalité (3.45), nous obtenons :

$$\begin{pmatrix} J_2 & Q_i \\ Q_i^\top & I \end{pmatrix} \succeq 0, \quad \forall i = 1 \cdots, m \quad (3.47)$$

où $J_2 = \frac{\mu_i}{\|y_1\|} - \frac{\mathbb{P}_i y_2}{\|y_1\|}$. Ceci conduit donc au théorème suivant :

Théorème 3.6 *L'inclusion $\mathbb{E}_y \subseteq \mathbb{U}_y$ est assurée s'il existe deux matrices non-négatives \mathbb{P} et \mathbb{Q} solutions de la LMI suivante :*

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} J_1 & \mathbb{P}_i \\ \mathbb{P}_i^\top & I \end{pmatrix} & & \mathbb{O} \\ & \begin{pmatrix} J_2 & Q_i \\ Q_i^\top & I \end{pmatrix} & \\ \mathbb{O} & & \end{pmatrix} \succeq 0, \quad \mathbb{P}_i - Q_i = G_i; i = 1, \cdots, m$$

Nous sommes maintenant prêts à présenter le résultat final de chaque cas étudié. Pour ce faire, rappelons d'abord que $r = \text{rang}(M)$.

Cas 1 : Si $r = n$, nous avons le résultat suivant :

Théorème 3.7 *Pour que la commande $v(k) = Gy(k) + B^+(-2A\hat{y}(k) - \hat{\omega}(k))$ stabilise le système autour de sa situation nominale en respectant les contraintes sur l'état et la commande, il suffit que les LMIs suivantes soient faisables.*

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & Q + Y^T B^T \\ Q + BY & Q \end{pmatrix} & & \mathbb{O} \\ & \begin{pmatrix} I & A_1^T \\ A_1 & I \end{pmatrix} & \\ \mathbb{O} & & \end{pmatrix} \succeq 0, \quad Q = P^{-1}, Y = GQ;$$

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} J_1 & \mathbb{P}_i \\ \mathbb{P}_i^\top & I \end{pmatrix} & & \mathbb{O} \\ & \begin{pmatrix} J_2 & Q_i \\ Q_i^\top & I \end{pmatrix} & \\ \mathbb{O} & & \end{pmatrix} \succeq 0, \quad \mathbb{P}_i - Q_i = G_i; i = 1, \cdots, m$$

Cas 2 : Si $r < n$, nous avons le théorème suivant :

Théorème 3.8 *Pour que la commande $v(k) = Gy(k) + B^+(-2A\hat{y}(k) - M_2^+\hat{\omega}(k) - (I - M_2^+M_2)\Phi)$ stabilise le système autour de sa situation nominale en respectant les contraintes sur l'état et sur la commande, il suffit que les LMIs suivantes soient faisables.*

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & Q + Y^T B^T \\ Q + BY & Q \end{pmatrix} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \begin{pmatrix} I & A_2^T \\ A_2 & I \end{pmatrix} \end{pmatrix} \succeq 0, \quad Q = P^{-1}, Y = GQ;$$

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} J_1 & \mathbb{P}_i \\ \mathbb{P}_i^T & I \end{pmatrix} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \begin{pmatrix} J_2 & Q_i \\ Q_i^T & I \end{pmatrix} \end{pmatrix} \succeq 0, \quad \mathbb{P}_i - Q_i = G_i; i = 1, \dots, m$$

3.5 Exemple d'application

Considérons l'exemple du réseau de transport montré dans la figure 3.3. Ce réseau comprend 12 intersections représentées par les blocs blancs numérotés 12, 21, 22, 23, 24, 31, 32, 33, 34, 42, 43 et 54. Les blocs gris représentent l'extérieur du réseau, qui sont les sources des incertitudes du système. Pour ce réseau, nous avons 48 voies et 12 variables de contrôle indépendantes.

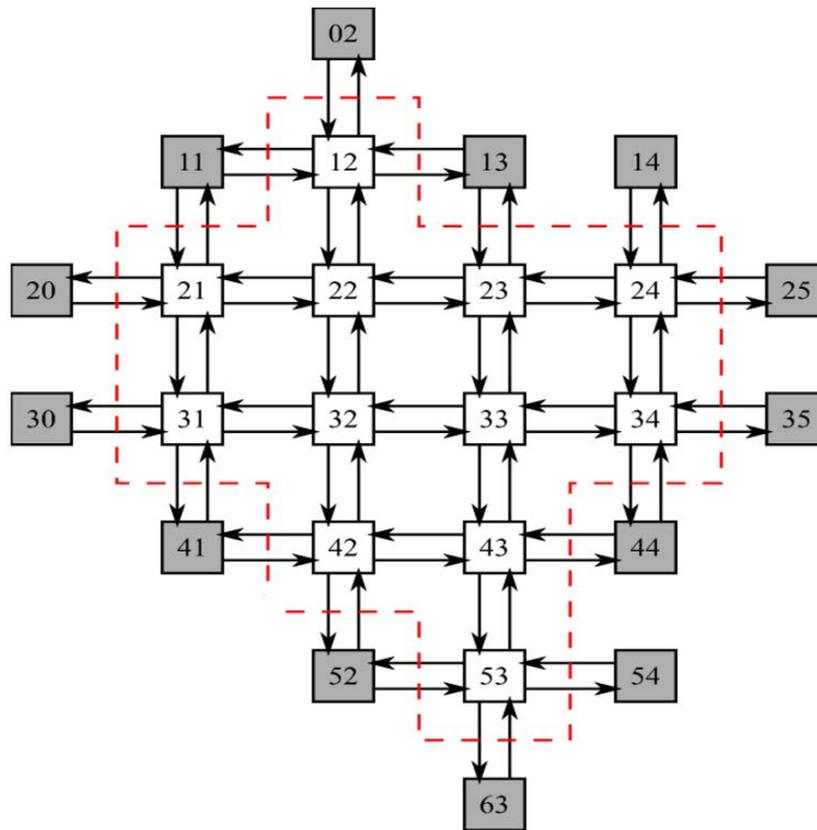


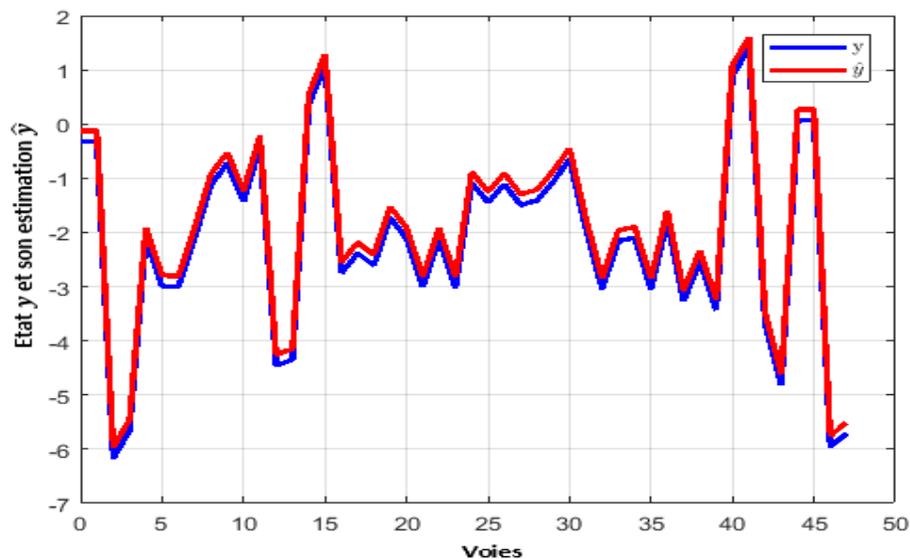
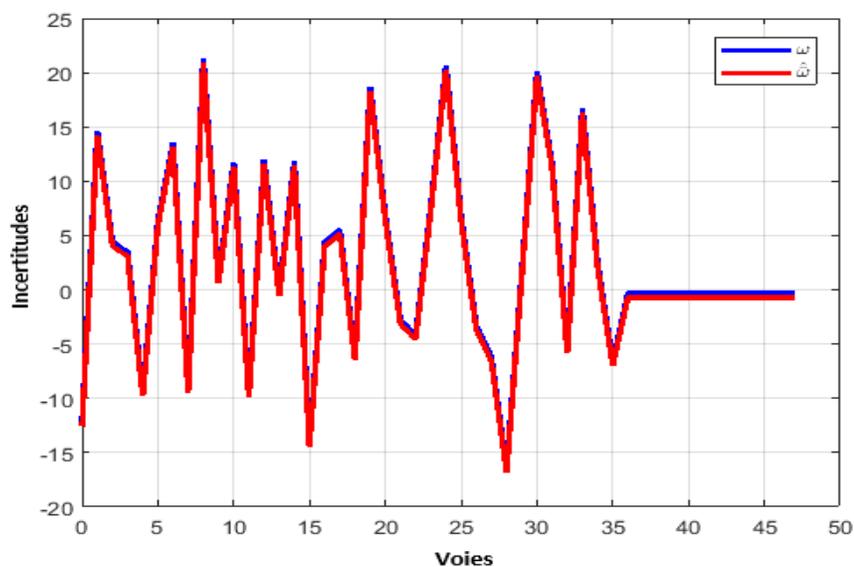
FIGURE 3.3 – Réseau de transport [2]

Les paramètres utilisés dans cet exemple sont regroupés dans le tableau suivant :

TABLE 3.1 – Paramètres utilisés dans l'exemple

Cycle $c = 80s$	Proportion d'échange $\lambda_{i,i} = 0.4$
Temps minimal du feu vert $u_{min} = 15s$	Capacité des voies $x^* = 50véh$
Temps maximal du feu vert $u_{max} = 55s$	État nominal $x_N = 10véh$
Débit de saturation vertical $s_i = 0.5véh/s$	Contrôle nominal $u_N = 35s$
Débit de saturation horizontal $s_j = 0.5véh/s$	
Proportion d'échange $\lambda_{i,j} = 0.2$	

Tout d'abord, afin de montrer l'efficacité de l'observateur, deux simulations sont réalisées. Dans ces simulations, le rang de la matrice M est égal à $r = 36 < n = 48$ (voir le cas 2). D'où, en implémentant la stratégie du théorème 3.5 et en utilisant l'outil Matlab CVX [75], les matrices G , N_1 et L_1 sont déterminées. Les résultats de ces simulations sont présentés dans les deux figures 3.4 et 3.5 respectivement.

FIGURE 3.4 – Estimation d'état y pour les 48 voiesFIGURE 3.5 – Estimation des incertitudes \hat{w} pour les 48 voies

Nous pouvons immédiatement constater que les estimations des états et des incertitudes suivent les états et les incertitudes réels correspondants pour les 48 voies du réseau. De plus, les figures 3.6 et 3.7 montrent la valeur absolue de la différence $y - \hat{y}$ et $\bar{w} - \hat{w}$ respectivement. Nous pouvons remarquer que la différence entre les valeurs réelles et les valeurs estimées est au maximum de 0,6 véhicule dans le cas de l'estimation des incer-

titudes. Cette différence est acceptable dans le domaine de transport, car il n'est pas très gênant pour un système de transport de faire entrer quelques véhicules de plus dans le réseau. Par conséquent, ces résultats confirment les bonnes performances de l'observateur proposé.

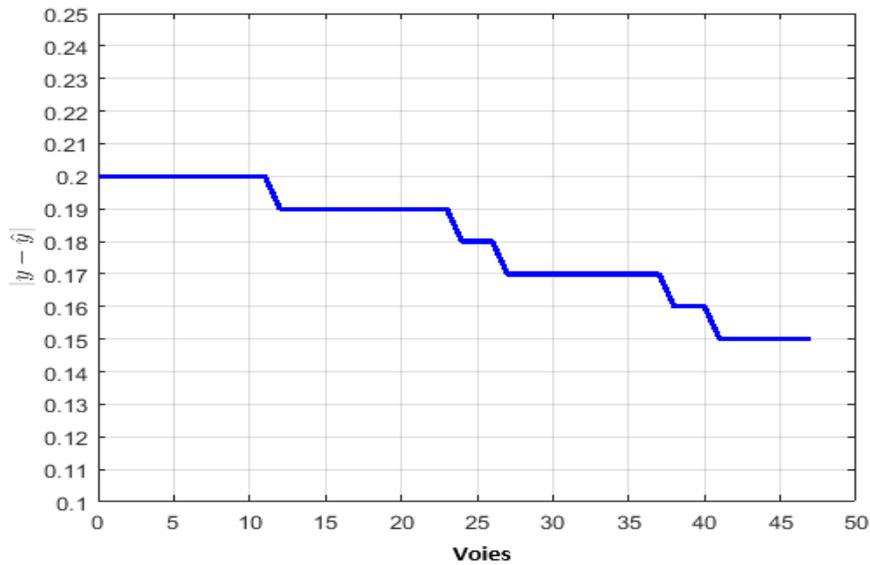


FIGURE 3.6 – Variation de $|y - \hat{y}|$ pour les 48 voies

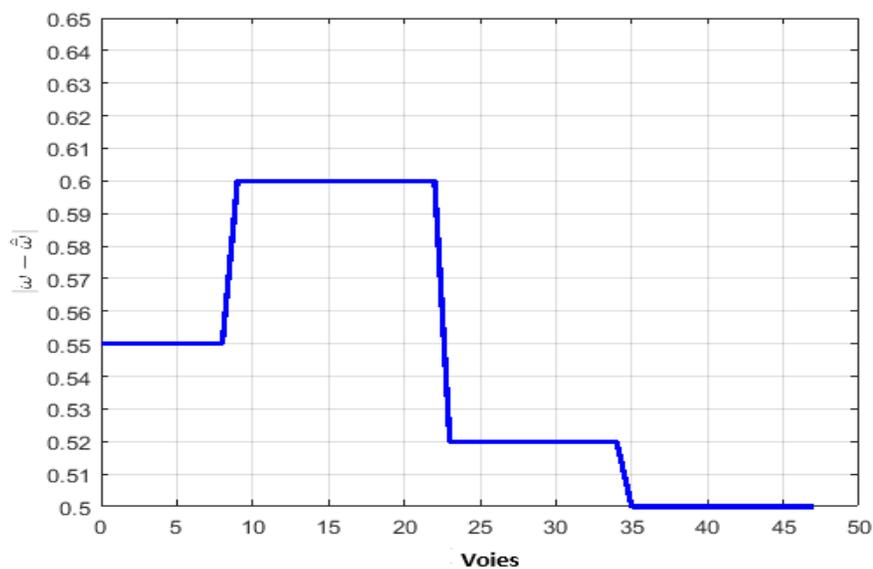
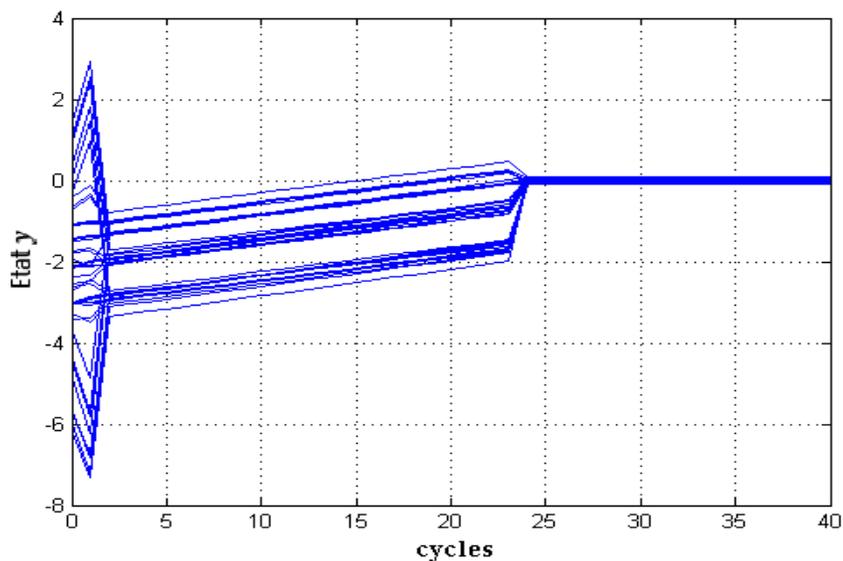
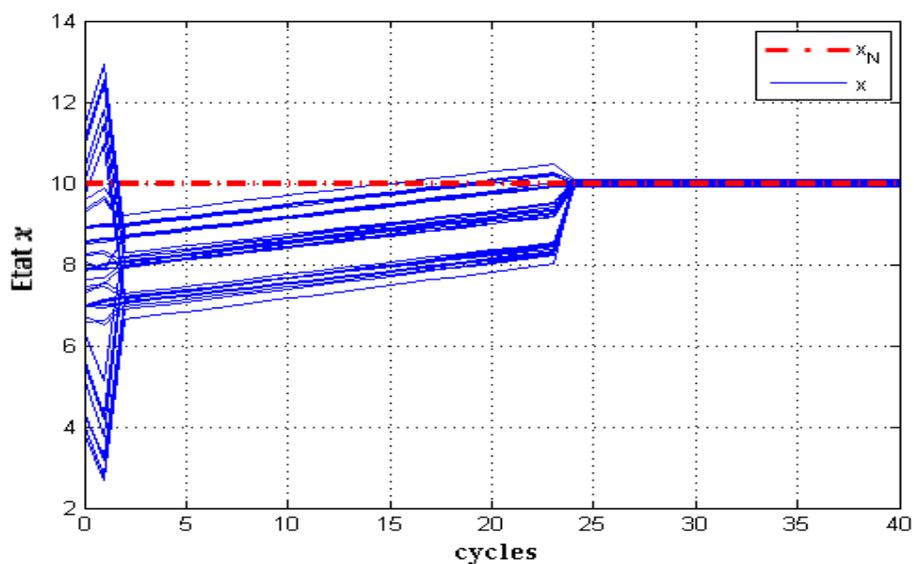


FIGURE 3.7 – Variation de $|\tilde{\omega} - \hat{\tilde{\omega}}|$ pour les 48 voies

Ensuite, pour le problème de la stabilisation, la commande par retour d'état élaborée dans le théorème 3.8 est considérée. Les figures 3.8 et 3.9 montrent l'évolution des vecteurs d'état y et x sous la commande proposée.

FIGURE 3.8 – Évolution de l'état y FIGURE 3.9 – Évolution de l'état x

Nous pouvons voir dans la figure 3.8 que l'état $y(k)$, qui prend différentes valeurs au début, est stabilisé autour de zéro après 25 cycles. Il convient de noter que y peut être

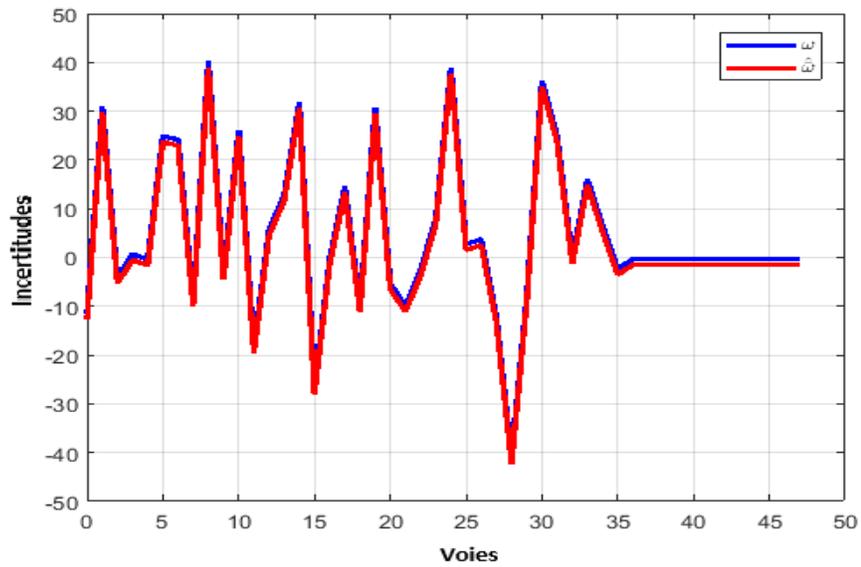
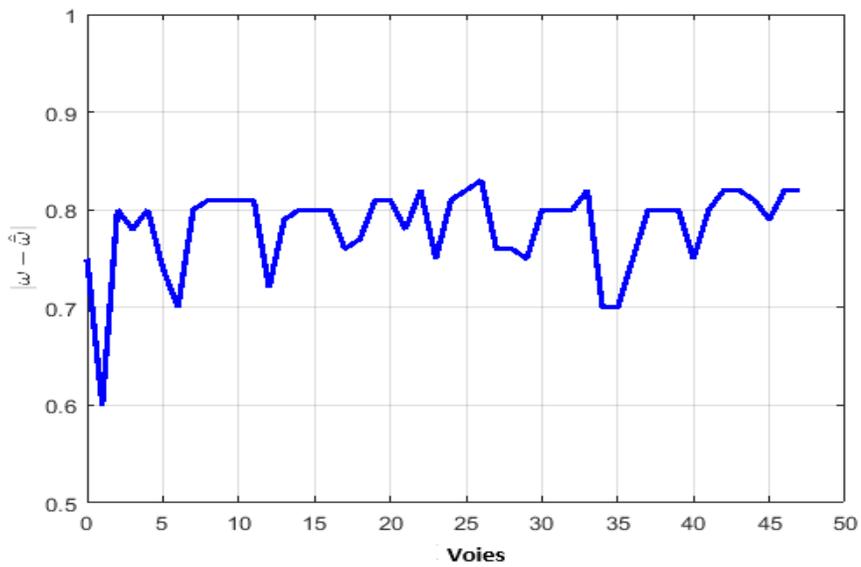
négatif selon la contrainte (3.12). Nous pouvons également remarquer dans la figure 3.9 que le nombre de véhicules est toujours inférieur à la capacité des voies $x^* = 50$ véh, ce qui prouve l'efficacité de la stratégie à éviter la congestion dans le réseau.

De plus, le tableau 3.2 montre plusieurs valeurs de la commande u pendant les dix premiers cycles. Nous pouvons remarquer que la commande u se situe non seulement entre sa valeur minimale $15s$ et maximale $55s$, mais aussi il est très proche de la valeur nominale $u_N = 35s$. Ces résultats prouvent à nouveau l'efficacité de la commande tout en respectant ses conditions aux limites.

TABLE 3.2 – Variation des temps des feux verts

cycle	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	32.5	42.8	35	35.1	35.3	35.2	35	35	35.4	35.1
	34.8	35	34.9	34.9	35.1	35	34.9	34.9	35	34.8
	35.1	35.1	34.9	34.9	35.1	35	35	34.9	35.1	35.1
	37.8	27.2	34.9	35	35	34.9	35.1	35	34.8	34.9
	34.9	34.3	24.5	34.9	34.9	35	35.1	35	35	35.2
	34.8	35	34.9	35.1	35	34.9	35.1	34.9	35	35.1
	34.9	34.8	34.9	35.1	34.9	35.1	34.8	35	35	34.9
	34.9	34.8	35	35.1	35.1	34.8	34.9	34.8	35	35
	34.8	34.9	35	35	34.9	35.1	35.2	34.8	35.1	35
	35	35.7	35.1	35.1	35	34.9	35	34.8	35	35
	32.1	43.5	35.1	34.9	34.8	35.1	34.9	34.9	35.1	34.9
	32.4	43.6	35	35.1	35.2	35.2	34.9	35.1	35.1	34.9

Finalement, afin de montrer les performances de notre observateur et de notre commande proposés quel que soit le niveau des incertitudes, nous réalisons les mêmes simulations avec un niveau d'incertitudes plus élevé. En effet, comme le montre la figure 3.10, la valeur des incertitudes dans chaque cycle est presque le double de celle prise dans les simulations précédentes.

FIGURE 3.10 – Estimation des incertitudes \hat{w} pour les 48 voiesFIGURE 3.11 – Variation de $|\bar{w} - \hat{w}|$ pour les 48 voies

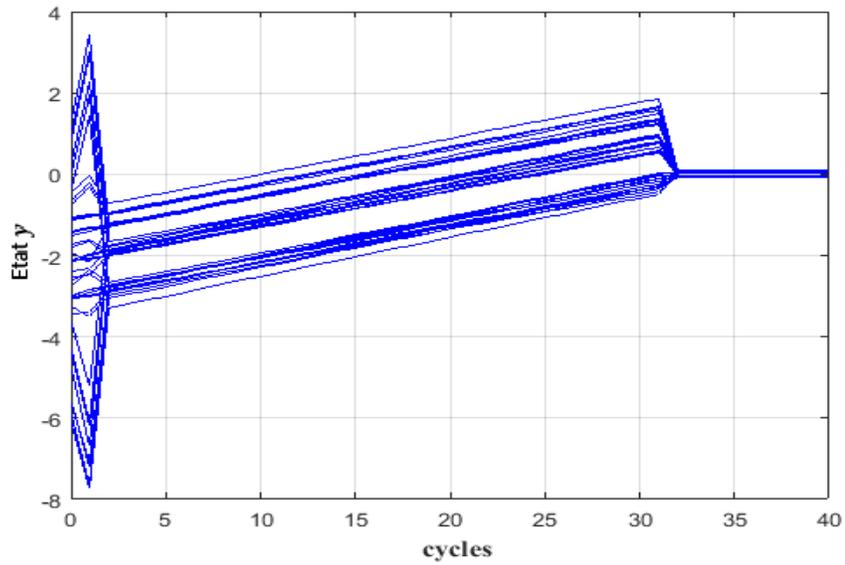
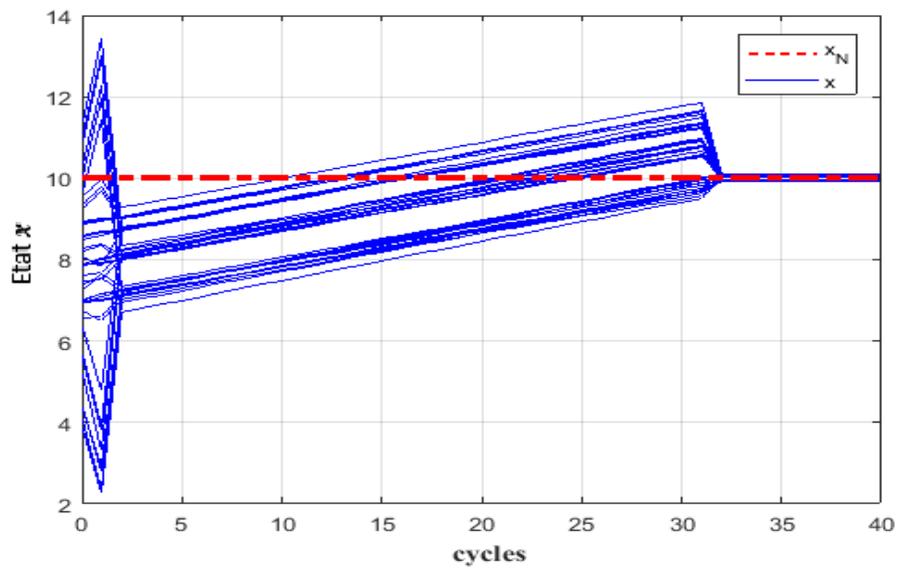
FIGURE 3.12 – Évolution de l'état y FIGURE 3.13 – Évolution de l'état x

TABLE 3.3 – Variation des temps des feux verts

cycle	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	31.6	39.2	35	35.5	35.1	35.2	35.1	35.2	34.9	35
	34.9	35	34.7	34.9	35.1	35	34.9	35.9	34.8	35.8
	35	35.3	34.9	34.9	35.2	35.1	36.5	35	35.1	35.1
	35.8	35.2	34.9	35.8	35	34.9	35.3	35	34.8	34.6
	38.1	34.3	35.3	35.9	34.9	35	35.1	35	34.9	35.3
	37.8	35	34.9	35.1	34.5	34.9	35.1	31.9	35	35.2
	31.9	34.8	38.2	35.1	34.8	35	34.8	35.3	35.4	35.2
	34.9	34.8	35.2	35	35.1	34.8	34.9	34.8	35	35.3
	34.8	34.9	35	35	34.9	35.1	35.2	34.8	35.1	34.8
	35.1	35.7	35.1	35.1	35	34.9	35.2	34.8	35	35
	32.1	38.5	35.1	35.2	34.8	35.1	34.9	34.9	35.3	34.5
	32.3	43.7	35	35.1	35.2	35.4	34.9	34.9	35	35.2

Nous remarquons que les résultats sont légèrement modifiés mais toutes les remarques formulées pour les simulations précédentes restent valables pour celles-ci. Ainsi, malgré le niveau élevé d’incertitude, notre stratégie de contrôle proposée reste efficace.

3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, une stratégie de commande des feux de circulation stabilisant le réseau de transport autour de sa situation nominale a été proposée. Cette commande respecte les contraintes sur l’état et sur la commande. De plus, en raison de la présence des incertitudes qui peuvent nuire aux performances de la commande proposée, un observateur a été conçu pour les estimer. Les conditions de la stabilisation ont été présentées en terme des LMIs et résolues en utilisant l’outil CVX sous MATLAB. Enfin, les simulations ont démontré l’efficacité et les avantages de l’approche proposée. En effet, l’un des avantages les plus importants de notre stratégie est la mise en œuvre de la commande et de l’observateur dans le réseau en temps réel. Cela peut être une bonne indication de la capacité de déploiement de notre stratégie de contrôle dans les applications du monde réel.

Finalement, malgré tous les avantages de cette commande, il souffre d’un inconvénient principal, à savoir, stabiliser le système en temps fini. Pour remédier à cet inconvénient,

nous allons essayer de développer dans le chapitre suivant une commande basée sur la stabilité en temps fini. En effet, contrairement à la stabilité classique au sens de Lyapunov, la stabilité en temps fini est définie par rapport à un intervalle de temps bien déterminé. Ce concept est très bien adapté aux systèmes de transport car, par exemple, la situation de congestion doit atteindre l'état d'équilibre dans un délai prescrit.

CHAPITRE 4

STABILITÉ EN TEMPS FINI DES RÉSEAUX DE TRANSPORT

4.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est d'utiliser le concept de la stabilisation en temps fini (FTS) pour la régulation a priori des carrefours signalisés. En effet, l'idée consiste à forcer les états du système de transport à rester dans une bande spécifiée pendant un intervalle de temps bien défini. Ce type de stabilisation est considéré important surtout dans les applications pratiques qui cherchent à garantir de bonnes performances.

Comme il est souligné dans la conclusion du chapitre précédent, l'inconvénient de la stabilité au sens de Lyapunov est son incapacité à stabiliser le système pendant une période finie. Pour remédier à cet inconvénient, nous développons dans ce chapitre une commande basée sur le concept de stabilité en temps fini (FTS). L'objectif est de garder le nombre de véhicules en dessous des capacités des voies pendant un intervalle de temps bien défini.

Pour avoir une commande performante, nous allons utiliser un système libre d'incertitudes considéré comme un système de comparaison de l'original. Le travail sur le système de comparaison présente deux avantages importants. Tout d'abord, la commande proposée est plus efficace en raison de l'absence des paramètres inconnus dans le système. Le deuxième avantage réside dans le fait qu'une commande par retour d'état mesure la sortie du système à chaque cycle afin de manipuler l'entrée du cycle suivant. Ces mesures sont

effectuées généralement à l'aide des capteurs qui sont assujettis à leur tour à des perturbations diverses et, par conséquent, les informations issues de ces outils de mesure sont souvent approximatives. Ceci est considéré comme l'un des inconvénients de la commande par retour d'état. Cependant, l'utilisation des systèmes de comparaison évite ce problème puisqu'aucune mesure de la sortie n'est demandée.

Le chapitre est organisé selon le schéma suivant : La section 4.2 présente une brève introduction à la théorie de la stabilité en temps fini. Dans la section 4.3, nous précisons la définition du problème de commande qui nous concerne. Une fois le problème est bien défini, nous donnons sous forme des relations matricielles linéaires les conditions suffisantes pour la stabilisation en temps fini de notre système. Dans une dernière partie, nous réalisons des simulations prouvant l'efficacité de notre stratégie proposée.

4.2 Sur la stabilisation en temps fini (FTS)

La stabilisation en temps fini (FTS) est un concept qui a été introduit pour la première fois dans les années 1950 ([76], [77]). Le concept "FTS" diffère de la stabilité classique de Lyapunov par deux notions importantes. Tout d'abord, il traite les systèmes dont l'opération est limitée à un intervalle de temps fixe. Deuxièmement, il exige des limites prescrites sur les variables du système. Plus tard, dans [78] et [79], la stabilisation en temps fini est utilisée dans les applications industrielles pour contrôler les réseaux de communication.

Dans cette partie, nous allons définir le concept de la stabilisation en temps fini en tenant compte des limites imposées sur l'état initial. Rappelons que $[0, N]$ tel que $N \neq 0 \in \mathbb{N}^*$ est défini comme étant l'intervalle dans lequel le système doit être stable.

Définition 4.1 Soient $\epsilon > 0$, $0 \leq \delta \leq \epsilon$, $N \neq 0 \in \mathbb{N}^*$ et R une matrice définie positive. Considérons le système suivant :

$$x(k+1) = Ax(k), \quad k \in \mathbb{N}_0 \quad (4.1)$$



Le système (4.1) est stable en temps fini par rapport à (δ, ϵ, R, N) si et seulement si (voir figure 4.1) :

$$x(0)^T R x(0) \leq \delta^2 \Rightarrow x(k)^T R x(k) \leq \epsilon^2, \quad \forall k \in \{1, \dots, N\}$$

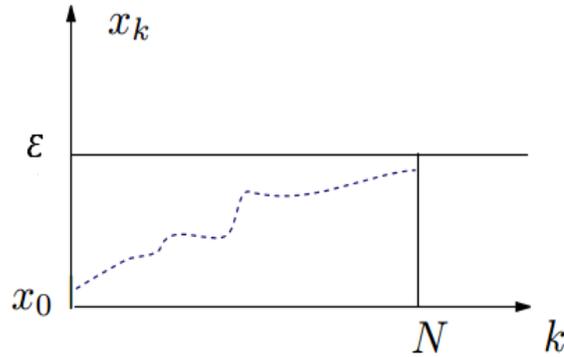


FIGURE 4.1 – Stabilisation en temps fini

Sur ce, nous terminons notre aperçu général du sujet pour passer à l'élaboration de la commande par retour d'état permettant d'atteindre nos objectifs .

4.3 Objectif de la commande et solution via la stabilisation en temps fini (FTS)

Dans le domaine de transport, l'heure de pointe est une partie de la journée qui se produit lorsque la demande de trafic est la plus élevée. Cette situation se produit au moins deux fois par jour. Dans ce contexte, notre objectif est de développer une commande afin de forcer le nombre de véhicules à ne pas dépasser les capacités des voies pendant les heures de pointe et empêcher donc la congestion dans le réseau. Cette commande doit prendre en compte les contraintes sur l'état et la commande ainsi que les incertitudes.

Avant de passer à l'exposition des résultats, nous allons reprendre le système de transport linéaire (3.7) établi dans le chapitre 3 :

$$x(k+1) = x(k) + Bu(k) + h + q(k)c$$

où $B = (L-D)\mathcal{G} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ et $h = (L-D)\xi$. Nous rappelons que ce système est modélisé par un modèle linéaire à temps discret avec des incertitudes additives dues à la présence des entrées non mesurables $q(k)$. Les contraintes sur l'état et la commande sont définies par les deux ensembles suivants :

$$\mathbb{E}_x = \{x \in \mathbb{R}^n / 0 \leq x \leq x^*\} \quad (4.2)$$

$$\mathbb{U}_u = \{u \in \mathbb{R}^m / u_{min} \leq u \leq u_{max}\} \quad (4.3)$$

Introduisons la situation nominale x_N au système, ce qui se traduit mathématiquement par $x(k+1) = x(k) = x_N$. Ensuite, effectuons les changements de variables : $\omega(k) = (q(k) - q_N)c$ et $v(k) = u(k) - u_N$ où q_N et u_N sont le débit nominal d'entrée et la commande nominale respectivement (voir chapitre 3). Ainsi, l'équation (3.7) devient :

$$x(k+1) = x(k) + Bv(k) + \omega(k) \quad (4.4)$$

De plus, l'ensemble des contraintes \mathbb{U}_u se transforme en :

$$\mathbb{U}_v = \{v \in \mathbb{R}^m / -v_2 \leq v \leq v_1\} \quad (4.5)$$

où $v_2 = u_N - u_{min}$, $v_1 = u_{max} - u_N$.

Nous allons passer maintenant à la résolution de notre problème. En effet, conformément à l'objectif annoncé plus haut, le problème de la commande pour notre système nous conduit à la définition de la stabilité en temps fini adaptée aux systèmes de transport.

Définition 4.2 Considérons $N \neq 0 \in \mathbb{N}$, $0 \leq \delta \leq \|x^*\|$ et $R = I$. Le système de transport (4.4) est dit stable en temps fini par rapport à N si et seulement si $\|x(0)\|^2 \leq \delta^2$ implique $\|x\|^2 < \|x^*\|^2 \equiv \epsilon^2$ pour tout $k = 1, 2, \dots, N$. ▶

Observons que $q_i c$ représente le flux d'entrée dans le système depuis l'extérieur. Il est donc évident que le nombre maximal de véhicules pouvant entrer dans une voie depuis l'extérieur à chaque cycle est limité par la capacité disponible dans cette voie. En d'autres termes, il est limité par la différence entre la capacité de voie x^* et le nombre de véhicules $x(k)$ dans la voie. Nous en déduisons que :

$$q(k)c \leq x^* - x(k) \quad (4.6)$$

Si nous ajoutons $x(k) + Bv(k) - q_N c$ de part et d'autre le signe \leq , nous obtenons :

$$x(k) + Bv(k) + \omega(k) \leq Bv(k) + \omega_N \quad (4.7)$$

où $\omega_N = x^* - q_N c$ est le vecteur des perturbations constantes. Définissons maintenant le système de comparaison pour le système (4.4) comme suit :

$$z(k+1) = Bv(k) + \omega_N \quad (4.8)$$

Il s'ensuit, d'après les équations (4.4) et (4.7) que :

$$x(k+1) \leq z(k+1)$$

Ce qui implique :

$$x(k) \leq z(k), \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Il est clair que si $\|z\|^2 < \|x^*\|^2$ alors $\|x\|^2 < \|x^*\|^2$. Par conséquent, la stabilisation en temps fini du système (4.8) implique celle du système (4.4).

À ce stade de la présentation, l'objectif maintenant est de trouver une loi de commande par retour d'état capable d'assurer la stabilisation en temps fini du système majorant (4.8). Pour ce faire, posons la commande par retour d'état suivante :

$$v(k) = Gz(k) - G(BG)^{-1}\omega_N \quad (4.9)$$

où le rang de la matrice $G \in \mathbb{R}^{m \times n}$ est égal à m et le rang de la matrice $BG \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est n . La nécessité que le rang de la matrice G soit égal à m sera expliquée plus tard. Appliquons la commande par retour d'état (4.9) au système (4.8). Ce dernier peut s'écrire sous la forme :

$$z(k+1) = Az(k) \quad (4.10)$$

où $A = BG \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice positive. En effet, l'état $z(k)$ est un majorant de $x(k)$, il doit donc être positif.

Nous sommes maintenant prêts à énoncer les conditions suffisantes de la stabilité en temps fini du système (4.10).

Théorème 4.1 *Pour que le système (4.10) soit stable en temps fini sous la commande $v = Gz(k) - G(BG)^{-1}\omega_N$, il est suffisant que le rang de la matrice G soit m , le rang de BG soit n et les conditions suivantes soient satisfaites :*

$$BG > 0 \quad (4.11)$$

$$A^T P A - \zeta P < 0 \quad (4.12)$$

$$\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)} < \frac{1 - \epsilon^2}{\zeta^N \delta^2} \quad (4.13)$$

où ζ est un scalaire tel que $\zeta \geq 1$.

Preuve: La preuve est similaire à celle de [80] pour le système $x(k+1) = Ax(k) + Gw(k)$. En effet, soient $z(0)^T z(0) \leq \delta^2$ et $V(z(k)) = z^T P z$. L'équation (4.12) implique que :

$$V(z(k+1)) < \zeta V(z(k)) \quad (4.14)$$

Il vient alors :

$$V(z(k)) < \zeta^k V(z(0)), \quad \forall k \in \{1 \cdots, N\} \quad (4.15)$$

Utilisons le fait que $\zeta \geq 1$. Ainsi, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \zeta^k V(z(0)) &= \zeta^k [z(0)^T P z(0)] \\ &\leq \zeta^k [\lambda_{\max}(P) z(0)^T z(0)] \\ &\leq \zeta^N [\lambda_{\max}(P) \delta^2] \end{aligned} \quad (4.16)$$

D'où, d'après (4.15)

$$V(z(k)) < \zeta^N [\lambda_{\max}(P) \delta^2] \quad (4.17)$$

D'autre part,

$$V(z(k)) = z(k)^T P z(k) \geq \lambda_{\min}(P) z(k)^T z(k) \quad (4.18)$$

Ainsi, les deux inégalités (4.17) et (4.18) impliquent :

$$z(k)^T z(k) < \frac{1}{\lambda_{\min}(P)} \zeta^N [\lambda_{\max}(P) \delta^2] \quad (4.19)$$

Il en résulte à partir des inégalités (4.13) et (4.19) que $z(k)^T z(k) < \epsilon^2$. Ce qui implique que le système (4.10) est stable en temps fini et complète la preuve. ■

Cela posé, nous allons présenter la condition (4.12) sous forme LMI. En effet, l'inégalité (4.12) peut être réécrite sous la forme suivante :

$$P - (F)^T P (F) \succ 0 \quad (4.20)$$

où $F = \frac{1}{\sqrt{\zeta}} A$. Si nous considérons $Q = P^{-1}$, la dernière inégalité devient :

$$Q^{-1} - (F)^T Q^{-1} (F) \succ 0$$

D'après le lemme de Shur [57], les conditions sur G pour que $Q^{-1} - (F)^T Q^{-1} (F)$ soit définie positive sont représentées par la LMI suivante :

$$\begin{pmatrix} Q^{-1} & F^T \\ F & Q \end{pmatrix} \succ 0 \quad (4.21)$$

Une fois que la matrice F est déterminée suite à la résolution de la LMI et puisque le rang de la matrice $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ est égal au nombre de ses colonnes m , nous sommes en mesure de déterminer la matrice G . En effet, utilisons le fait que $B^+ B = I$ et pré-multiplions l'équation $F = \frac{1}{\sqrt{\zeta}} B G$ par B^+ , nous obtenons alors :

$$G = \frac{1}{\sqrt{\zeta}} B^+ F \quad (4.22)$$

où $B^+ = (B^T B)^{-1} B^T$ est le pseudo inverse de la matrice B . Ainsi, le théorème 4.1 se transforme en le théorème suivant :

Théorème 4.2 *Pour que le système (4.10) soit stable en temps fini sous la commande $v = Gz(k) - G(BG)^{-1}\omega_N$, il est suffisant que le rang de la matrice G soit m , le rang de BG soit n et les conditions suivantes soient satisfaites :*

$$\begin{aligned} BG &> 0 \\ \begin{pmatrix} Q^{-1} & F^T \\ F & Q \end{pmatrix} &\succ 0 \\ \frac{\lambda_{max}(P)}{\lambda_{min}(P)} &< \frac{1}{\zeta^N} \frac{\epsilon^2}{\delta^2} \end{aligned}$$

Remarque 4.1 Puisque $\frac{\lambda_{max}(P)}{\lambda_{min}(P)} > 1$, alors :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta^N} \frac{\epsilon^2}{\delta^2} &> 1 \\ \frac{1}{\zeta^N} &> \frac{\epsilon^2}{\delta^2} \\ \zeta^N &< \frac{\epsilon^2}{\delta^2} \end{aligned}$$

Donc, ζ doit être choisi dans l'intervalle $]1, (\frac{\epsilon}{\delta})^{(\frac{2}{N})}[$. Ceci confère au paramètre ζ un degré de liberté dont nous pouvons se servir pour augmenter la possibilité de trouver une solution pour la LMI du théorème 4.2 . ▶

Remarque 4.2 Le fait que la commande v privée des incertitudes est, à notre sens, un avantage certain, car il permet de garantir de bonnes performances pour notre stratégie de contrôle proposée. ▶

Remarque 4.3 Si nous considérons que les temps des verts effectifs des voies sont indépendants, B devient une matrice inversible $n \times n$. Dans ce cas, il suffit de considérer la commande sous la forme suivante :

$$v = Gz(k) - B^{-1}\omega_N$$

Appliquons cette commande au système (4.8), nous obtenons :

$$z(k+1) = Az(k)$$

où $A = BG \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Ainsi, nous obtenons le même système de comparaison (4.10). Donc, les conditions de stabilisation établies dans le théorème 4.2 restent valides pour ce cas. ▶

Après avoir élaboré une commande stabilisant en temps fini le système de transport, nous allons passer maintenant au problème des contraintes. Il est bien connu que la commande $v = Gz(k) - G(BG)^{-1}\omega_N$ doit respecter les contraintes sur la commande (4.5). Cela signifie que l'ensemble \mathbb{U}_v devrait être positivement invariant, à savoir, si $v(k)$ est dans l'ensemble :

$$\mathbb{U}_z = \{z \in \mathbb{R}^n / -\varrho \leq Gz \leq \varsigma\} \quad (4.23)$$

où $\varsigma = v_1 + G(BG)^{-1}\omega_N$, $\varrho = v_2 - G(BG)^{-1}\omega_N$. Alors, $v(k+1)$ doit rester dans l'ensemble ci-dessous :

$$\mathbb{U}_z = \{z \in \mathbb{R}^n / -\varrho \leq Mz \leq \varsigma\} \quad (4.24)$$

où $M = GA = GBG$. Représentons maintenant les contraintes (4.23) et (4.24) sous les formes suivantes :

$$\mathbb{U}_z = \left\{ z \in \mathbb{R}^n / \begin{pmatrix} G \\ -G \end{pmatrix} z \leq \begin{pmatrix} \varsigma \\ \varrho \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathbb{U}_z = \left\{ z \in \mathbb{R}^n / \begin{pmatrix} M \\ -M \end{pmatrix} z \leq \begin{pmatrix} \varsigma \\ \varrho \end{pmatrix} \right\}$$

Appliquons le lemme de Hennet 2.1 en posant $C = \begin{pmatrix} G \\ -G \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} M \\ -M \end{pmatrix}$. Nous pouvons dire que l'ensemble \mathbb{U}_z est positivement invariant, s'il existe une matrice non négative $\mathbb{K} \in \mathbb{R}_+^{2m \times 2m}$ telle que :

$$\mathbb{K} \begin{pmatrix} G \\ -G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M \\ -M \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

$$\mathbb{K} \begin{pmatrix} \varsigma \\ \varrho \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \varsigma \\ \varrho \end{pmatrix} \quad (4.26)$$

Considérons $\mathbb{K} = \begin{pmatrix} \mathbb{K}_{11} & \mathbb{K}_{12} \\ \mathbb{K}_{21} & \mathbb{K}_{22} \end{pmatrix}$. Il s'ensuit d'après les équations (4.25) et (4.26) que :

$$(\mathbb{K}_{11} - \mathbb{K}_{12})G = M \quad (4.27)$$

$$(\mathbb{K}_{22} - \mathbb{K}_{21})G = M \quad (4.28)$$

$$\mathbb{K}_{11}\varsigma + \mathbb{K}_{12}\varrho \leq \varsigma \quad (4.29)$$

$$\mathbb{K}_{21}\varsigma + \mathbb{K}_{22}\varrho \leq \varrho \quad (4.30)$$

Si le rang de la matrice G est égal à m , alors il existe une matrice $G^\dagger = G^T(GG^T)^{-1}$ pseudo-inverse de la matrice G telle que $GG^\dagger = I$. Ceci explique la nécessité mentionnée précédemment que le rang de la matrice G doit être égal à m . Donc, nous obtenons l'équation suivante :

$$MG^\dagger = \mathbb{K}_{11} - \mathbb{K}_{12} = \mathbb{K}_{22} - \mathbb{K}_{21} \quad (4.31)$$

Il est clair que les équations des contraintes obtenues sont similaires à celles de deux chapitres précédents avec G remplacé par MG^\dagger . Ainsi, nous avons la proposition suivante :

Proposition 4.1 *L'ensemble \mathbb{U}_z est positivement invariant s'il existe deux matrices non-négatives $\mathbb{P}, \mathbb{Q} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ telles que :*

$$(\mathbb{P} - \mathbb{Q})G = M \quad (4.32)$$

$$\mathbb{P}\varsigma + \mathbb{Q}\varrho \leq \varsigma \quad (4.33)$$

$$\mathbb{Q}\varsigma + \mathbb{P}\varrho \leq \varrho \quad (4.34)$$

Preuve: Considérons que toutes les conditions sont remplies et $v \in \mathbb{U}_z$, c'est à dire :

$$-\varrho \leq Gz \leq \varsigma$$

Puisque $\mathbb{P} \geq 0$ et $\mathbb{Q} \geq 0$, alors en pré-multipliant la dernière inégalité par \mathbb{P} et $-\mathbb{Q}$ respectivement, nous obtenons :

$$-\mathbb{P}\varrho \leq \mathbb{P}Gz \leq \mathbb{P}\varsigma$$

$$-\mathbb{Q}\varsigma \leq -\mathbb{Q}Gz \leq \mathbb{Q}\varrho$$

La somme de ces deux inégalités avec (4.33) et (4.34) conduisent à :

$$-\varrho \leq -\mathbb{P}\varrho - \mathbb{Q}\varsigma \leq Mz \leq \mathbb{P}\varsigma + \mathbb{Q}\varrho \leq \varsigma$$

Ceci implique que \mathbb{U}_z est positivement invariant et complète la preuve. ■

Cela posé, nous allons maintenant transformer les inégalités (4.33) et (4.34) sous forme LMI. En effet, (4.33) et (4.34) peuvent être présentées sous les formes suivantes :

$$\varsigma_i - \mathbb{P}_i\varsigma - \mathbb{Q}_i\varrho \geq 0, \quad (4.35)$$

$$\varrho_i - \mathbb{Q}_i\varsigma - \mathbb{P}_i\varrho \geq 0, \quad \forall i = 1 \dots, m \quad (4.36)$$

où \mathbb{P}_i et \mathbb{Q}_i sont les i -ème lignes de la matrice \mathbb{P} et \mathbb{Q} respectivement. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et en définissant $J_1 = \frac{\varsigma_i}{\|\varsigma\|} - \frac{\mathbb{Q}_i\varrho}{\|\varsigma\|}$, l'inégalité $J_1 - \mathbb{P}_i\mathbb{P}_i^T \geq 0$

peut s'écrire comme suit :

$$\begin{pmatrix} J_1 & \mathbb{P}_i \\ \mathbb{P}_i^\top & I_m \end{pmatrix} \succeq 0, \quad \forall i = 1 \dots, m \quad (4.37)$$

De même pour l'inégalité (4.36), nous avons :

$$\begin{pmatrix} J_2 & \mathbb{Q}_i \\ \mathbb{Q}_i^\top & I_m \end{pmatrix} \succeq 0, \quad \forall i = 1 \dots, m \quad (4.38)$$

où $J_2 = \frac{\rho_i}{\|\zeta\|} - \frac{\mathbb{P}_i \rho}{\|\zeta\|}$. Ainsi, la proposition 4.1 se transforme en la proposition suivante :

Proposition 4.2 *L'ensemble \mathbb{U}_v est positivement invariant si le rang de la matrice G est égal au nombre de ses lignes m et s'il existe deux matrices non-négatives \mathbb{P} et \mathbb{Q} solutions de la LMI suivante :*

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} J_1 & \mathbb{P}_i \\ \mathbb{P}_i^\top & I_m \end{pmatrix} & & \mathbb{O} \\ & & \begin{pmatrix} J_2 & \mathbb{Q}_i \\ \mathbb{Q}_i^\top & I_m \end{pmatrix} \end{pmatrix} \succeq 0, \quad i = 1, \dots, m$$

Finalement, en combinant le théorème 4.2 et la proposition 4.2, nous sommes prêts à présenter le résultat final de notre travail dans ce chapitre.

Théorème 4.3 *Pour que le système (4.10) soit stable en temps fini sous la commande $v = Gz(k) - G(BG)^{-1}\omega_N$ il suffit que le rang de la matrice G soit égal à m , le rang de la matrice BG soit égal à n et les conditions suivantes soient satisfaites :*

$$\begin{aligned} BG &> 0 \\ \begin{pmatrix} Q^{-1} & F^T \\ F & Q \end{pmatrix} &\succ 0 \\ \frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)} &< \frac{1}{\zeta^N} \frac{\epsilon^2}{\delta^2} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} J_1 & \mathbb{P}_i \\ \mathbb{P}_i^\top & I_m \end{pmatrix} & & \mathbb{O} \\ & & \begin{pmatrix} J_2 & \mathbb{Q}_i \\ \mathbb{Q}_i^\top & I_m \end{pmatrix} \end{pmatrix} \succeq 0, \quad i = 1, \dots, m$$

Sur ce, nous terminons notre exposé de la stabilité en temps fini du système de transport pour passer à la section suivante dans laquelle nous traitons un exemple d'un réseau de transport urbain.

4.4 Exemple d'application

Dans les simulations de ce chapitre, nous allons reprendre l'exemple du chapitre 3 avec les mêmes paramètres. Ainsi, considérons le réseau de transport et le tableau des paramètres suivants :

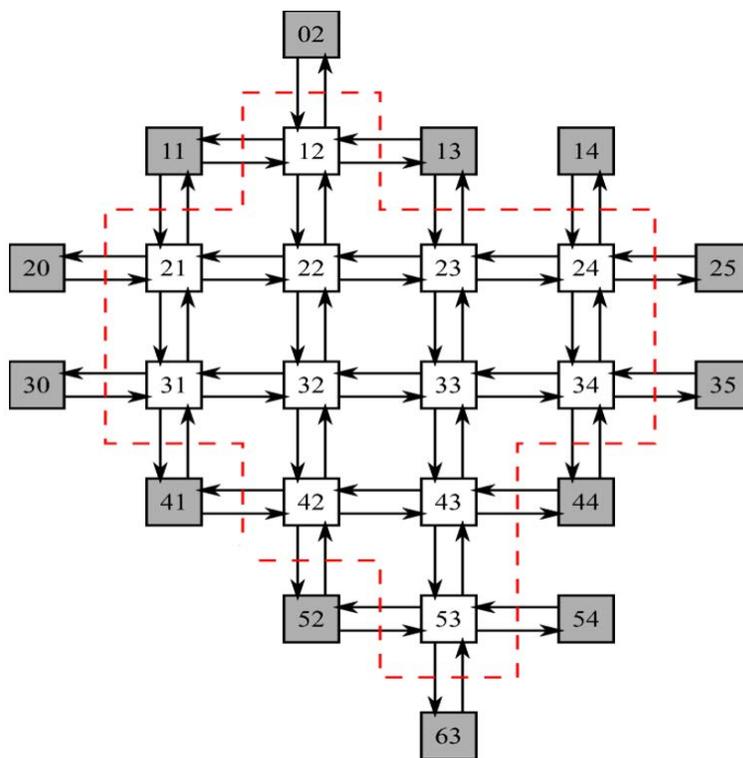
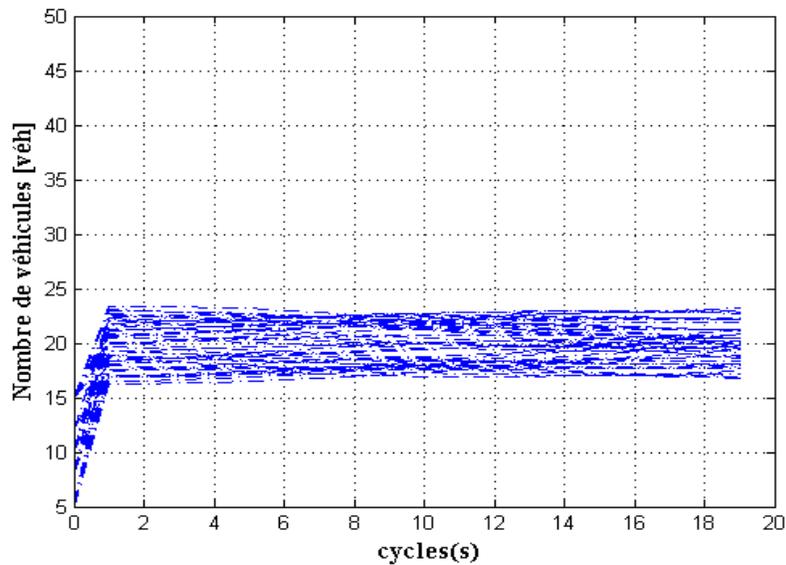


FIGURE 4.2 – Réseau de transport [2]

TABLE 4.1 – Paramètres utilisés dans l'exemple

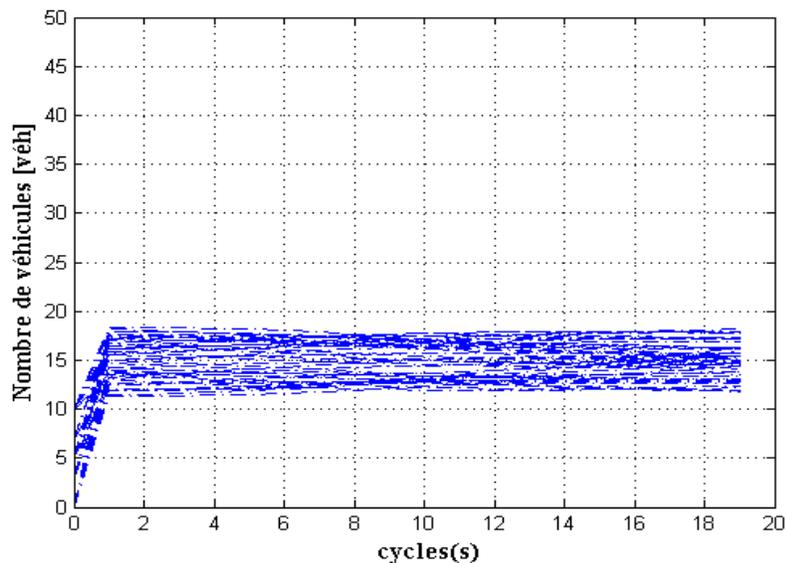
Cycle $c = 80s$	Proportion d'échange $\lambda_{i,i} = 0.4$
Temps minimal du feu vert $u_{min} = 15s$	Capacité des voies $x^* = 50véh$
Temps maximal du feu vert $u_{max} = 55s$	État nominal $x_N = 10véh$
Débit de saturation vertical $s_i = 0.5véh/s$	Contrôle nominal $u_N = 35s$
Débit de saturation horizontal $s_j = 0.5véh/s$	
Proportion d'échange $\lambda_{i,j} = 0.2$	

Tout d'abord, afin de montrer l'efficacité de notre commande proposée à stabiliser le système en temps fini, nous avons appliqué la commande du théorème 4.3 au système 4.8. La figure 4.3 représente le résultat obtenu.

FIGURE 4.3 – Évolution de l'état z sous la commande proposée

Nous pouvons remarquer à travers ce résultat que le nombre de véhicules varie tout en restant en dessous de la capacité des voies (50véh).

Ensuite, nous avons implémenté la même commande dans le système original (4.4). Le résultat obtenu est représenté dans la figure 4.4.

FIGURE 4.4 – Évolution de l'état x sous la commande proposée

Les remarques formulées pour la figure 4.3 restent valables pour cette figure. Ce qui prouve que la commande est capable de stabiliser le système original (4.4).

D'autre part, le tableau 4.2 montre que la commande u respecte les contraintes (4.3). En effet, les valeurs sont toujours entre $u_{min} = 15s$ et $u_{max} = 55s$.

TABLE 4.2 – Variation des temps des feux verts

cycle	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	32.5	42.8	35	35.1	35.3	35.2	35	35	35.4	35.1
	34.8	35	34.9	34.9	35.1	35	34.9	34.9	35	34.8
	35.1	35.1	34.9	34.9	35.1	35	35	34.9	35.1	35.1
	37.8	27.2	34.9	35	35	34.9	35.1	35	34.8	34.9
	34.9	34.3	24.5	34.9	34.9	35	35.1	35	35	35.2
	34.8	35	34.9	35.1	35	34.9	35.1	34.9	35	35.1
	34.9	34.8	34.9	35.1	34.9	35.1	34.8	35	35	34.9
	34.9	34.8	35	35.1	35.1	34.8	34.9	34.8	35	35
	34.8	34.9	35	35	34.9	35.1	35.2	34.8	35.1	35
	35	35.7	35.1	35.1	35	34.9	35	34.8	35	35
	32.1	43.5	35.1	34.9	34.8	35.1	34.9	34.9	35.1	34.9
	32.4	43.6	35	35.1	35.2	35.2	34.9	35.1	35.1	34.9

Supposons maintenant que les temps des feux verts sont indépendants. Ainsi, les feux de toutes les voies peuvent être contrôlés. Puisqu'il y a 48 voies dans le réseau, alors nous avons 48 feux contrôlables. Pour illustrer les performances de la commande proposée dans cette situation, nous avons appliqué la commande établie dans la remarque 4.3 aux systèmes (4.8) et (4.4) respectivement. Les résultats suivants sont obtenus.

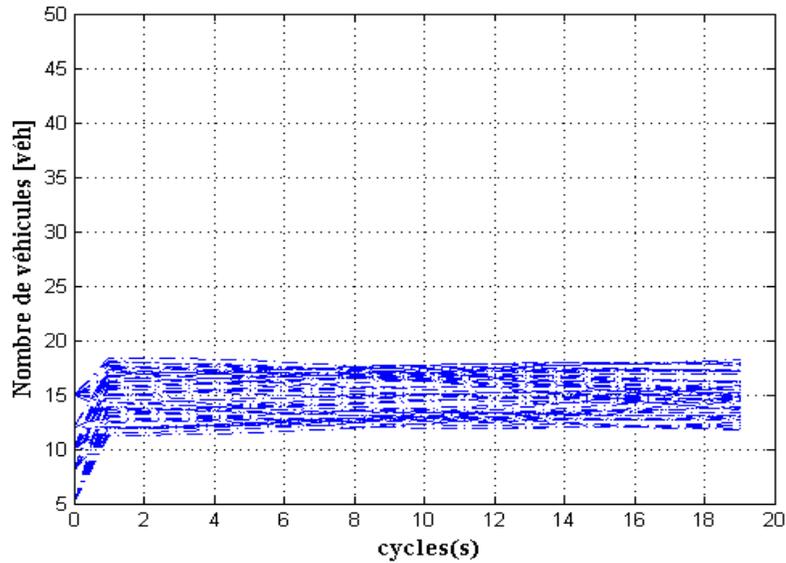


FIGURE 4.5 – Évolution de l'état z sous la commande de la remarque 4.2

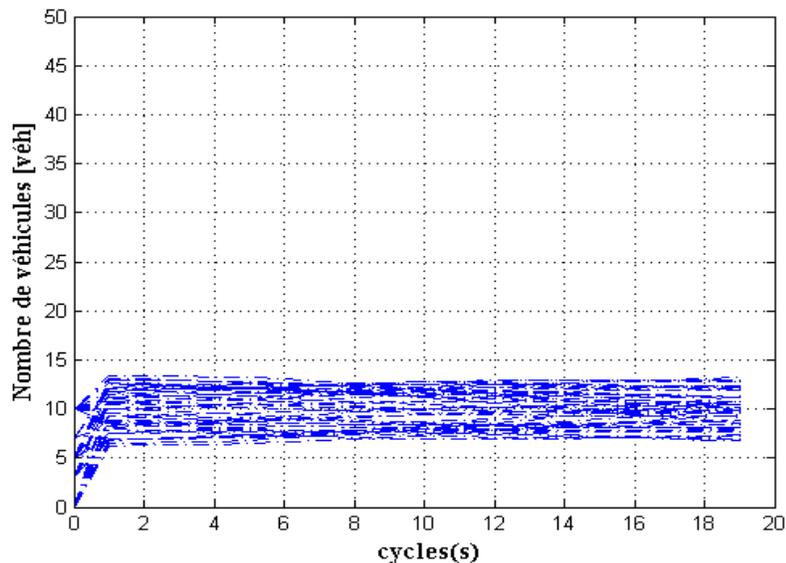


FIGURE 4.6 – Évolution de l'état x sous la commande de la remarque 4.2

TABLE 4.3 – Variation des temps des feux verts

cycle	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	31.5	32.5	34.5	36.2	40.1	39.2	36.5	35.2	35.6	34.8
	33.8	35.3	35.2	42.3	36.1	35.8	35.6	36	34.2	34.6
	33.1	34	34	36.2	37.2	34.2	35.2	33.2	39.4	40.1
	35.8	30.1	28.5	25.3	37	36	36	35.9	27.8	26.9
	35.9	32.1	25.8	30.6	39.2	34.1	36.2	28.2	29.3	30.8
	31.8	33.2	35.8	32.3	33.4	35.2	28.7	25.3	36	37.2
	31.9	35.2	31.2	31.3	29.5	28.4	28.2	40.1	40.2	26.2
	36.9	33.5	37.5	36.3	32.3	32	32	33.2	37	37
	41.8	38.7	34.2	36.2	30	32.1	30	29.7	35.3	35
	32.8	36.2	34.1	35	35	34.2	37.2	28.9	29.5	36.2
	35.1	41.2	40.1	43.2	41.8	36.5	36.7	35.8	38.9	33.4
	33.4	39.5	39.6	34.9	36.2	30	30	29.5	36.2	40.2
	31.5	43.2	35.3	36.2	42	41.8	42.7	28.2	31.5	36.2
	38.1	41.2	34.8	34.7	33	32.5	38.6	39.5	34.2	33.2
	37	36.3	35.2	33.2	36.2	37.2	35.5	35.2	33.2	35.6
	36.5	39.6	28.5	27.6	26.8	35.6	35.2	34.5	33.2	28.9
	35.4	33.2	26.5	26.8	35.9	36.2	40.8	39.2	33.8	36.2
	33.7	28.6	37.5	36.2	35.2	29.6	31.5	36.8	37	36
	32.6	33.5	36.2	34.8	35.2	29	28.5	33.2	32.1	35.7
	35.3	35.2	36.1	37.1	38.2	35.2	36.5	35.2	37.4	38.2
	33.9	36.5	28.2	30.2	29.5	36.8	40.2	38.7	40.2	36.2
	36	40.1	39.8	39.7	38	38	35.2	36.2	35.8	36.1
	32	42.5	35.3	33.5	33.2	35.6	34.5	35.4	34.8	37.2
	33.7	41.5	36.2	38.2	36.2	34.8	35.1	36.3	35.4	36.8

Si nous comparons l'évolution des états entre les figures 4.5 et 4.6 d'une part et les figures 4.3 et 4.3 d'autre part, nous pouvons observer que le nombre de véhicules dans les voies est plus petit lorsque les feux sont indépendants. Ceci est, à notre sens, un avantage par rapport au cas d'un cycle fixe. En outre, toutes les autres remarques formulées pour les simulations précédentes restent valables pour celles-ci.

Les simulations précédentes montrent la portée de la commande basée sur la stabilisation en temps fini pour la régulation des carrefours à feux . Il s'ensuit que toute discussion

sur ses avantages ne peut se faire que par rapport aux autres méthodes de régulation des carrefours à feux. Dans cette optique, nous avons choisi de comparer notre commande et la commande fixe comme nous avons fait dans le chapitre 2. En effet, nous avons appliqué la commande fixe de 40s aux systèmes (4.4) et (4.8) respectivement. Les résultats de ces simulation sont représentés dans les figures 4.7 et 4.8.

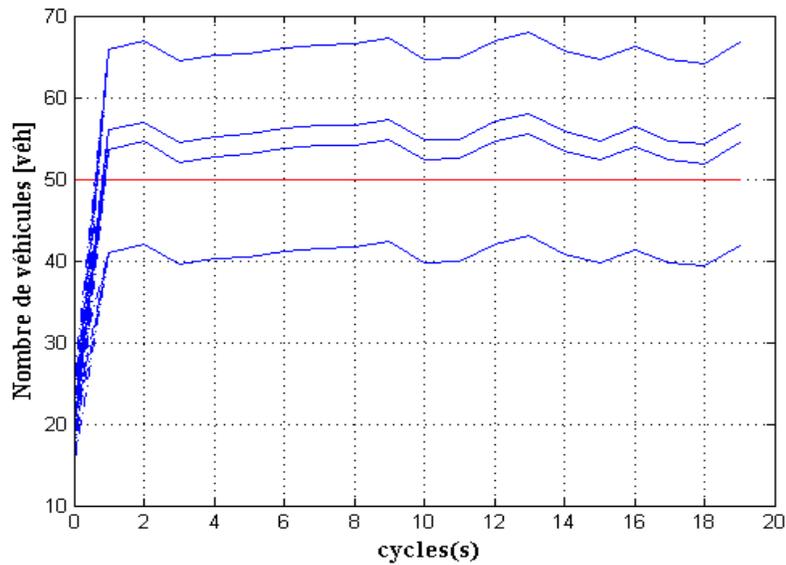


FIGURE 4.7 – Évolution d'état z sous la commande standard

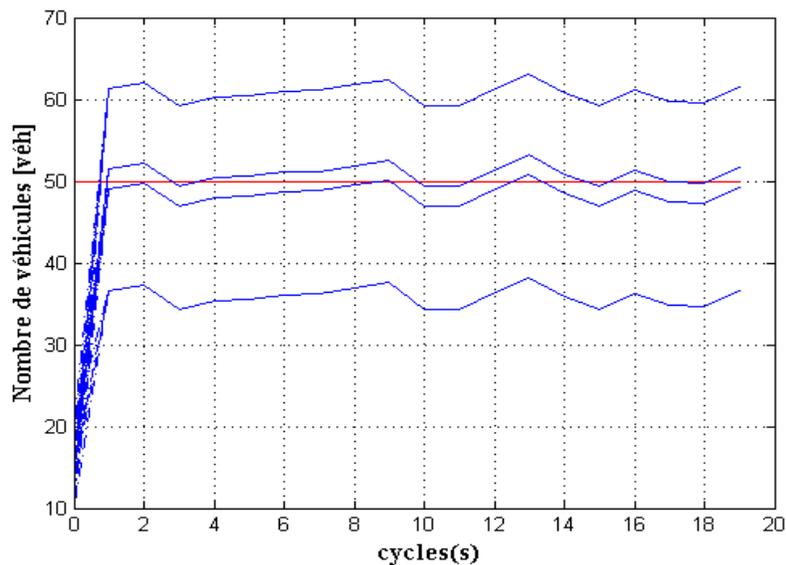


FIGURE 4.8 – Évolution d'état x sous la commande standard

Nous pouvons remarquer que plusieurs courbes dépassent la capacité des voies. Ainsi, les contraintes sur l'état (4.2) ne sont pas respectées et donc la commande fixe n'est pas efficace pour empêcher la congestion dans le réseau de transport.

Un autre atout majeur de notre stratégie de commande peut être souligné. En effet, il s'agit d'une commande qui représente une flexibilité dans son utilisation, car elle opère sur le paramètre ζ . Le choix de ce paramètre représente un degré de liberté pour l'ingénieur. Ceci est, à notre sens, un avantage certain, car elle nous offre un ensemble de choix possibles pour améliorer les performances de la commande de notre système.

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, une commande basée sur la théorie de stabilisation en temps fini (FTS) a été établie avec succès et appliquée aux carrefours signalisés. L'idée a été de forcer le nombre de véhicules à ne pas dépasser les capacités des voies pendant les heures de pointe.

Dans un premier temps, le problème de la commande a été défini et les objectifs ont été fixés. Par ailleurs, le principe de la stabilisation en temps fini dans sa formulation générale a été donné. Ensuite, un système de comparaison libre des incertitudes par rapport au système original a été proposé. Le travail sur le système de comparaison présente certainement un avantage en raison de l'absence des paramètres inconnus. Grâce au système de comparaison, une commande par retour d'état a été élaborée permettant d'atteindre nos objectifs. Cette commande prend en compte explicitement les contraintes sur la commande.

Enfin, les simulations réalisées ont démontré l'efficacité de notre stratégie proposée. De plus, pour montrer l'avantage de notre méthode, une comparaison avec la commande fixe a été réalisée. Les résultats obtenus montrent que notre stratégie de contrôle est plus avantageuse dans le sens où, d'une part elle permet en temps réel d'éviter la congestion dans le réseau et d'autre part, nous donne une flexibilité au niveau de son application.

CONCLUSION GÉNÉRALE

Cette thèse est le fruit de trois années de travail de recherche. Pendant cette période, nous nous sommes concentrés sur le contrôle a priori de congestion des réseaux de carrefours signalisés. Ces systèmes dynamiques sont sujets à des incertitudes et des limitations d'ordre physique ou dictées par des impératifs de sécurité. Ces limitations se traduisent dans la majorité des cas par des contraintes sur les variables d'état et la commande. Dans cette optique, nous avons proposé plusieurs stratégies de contrôle permettant d'apporter des améliorations appréciables pour la fluidification du trafic dans un réseau de transport tout en tenant compte à la fois des incertitudes et des contraintes du système.

De point de vue de la modélisation, nous avons utilisé l'approche "stocker-et-transférer" pour modéliser le réseau de transport. L'avantage de cette approche est de simplifier le modèle en ignorant les interruptions dans le réseau en considérant le flux comme un processus continu. Comme résultat, le système est représenté par un modèle linéaire à temps discret avec des incertitudes additives dues à la présence des entrées non mesurables.

De point de vue du contrôle, la contribution principale du travail est l'introduction des concepts de la dissipativité et de la stabilisation du système dans le domaine de la commande du trafic. Ces approches nous ont permis d'établir trois stratégies de contrôle différentes.

La première fait appel à la théorie des systèmes dissipatifs. En effet, après avoir établi une analogie entre les systèmes de transport et les systèmes thermodynamiques, nous avons introduit la notion de l'entropie comme une mesure de désordre dans les réseaux de transport. Nous avons montré que cette dernière est liée à la densité de la circulation, ce qui lui confère une légitimité de son utilisation. Ensuite, en considérant l'entropie comme étant l'énergie stockée dans le système, nous avons pu adapter et appliquer avec succès

l'approche des systèmes dissipatifs aux carrefours à feux. Nous avons ainsi élaboré une stratégie de commande rendant le système dissipatif. Par contre, nous avons pu constater à travers les résultats des simulations que l'effet des perturbations sur le comportement du système est difficile à maîtriser. C'est un handicap qui est, à notre sens, sérieux.

Pour remédier à cet inconvénient, nous avons développé une deuxième commande basée sur la stabilisation au sens de Lyapunov avec un observateur estimant les incertitudes du système. L'idée a été de stabiliser le nombre de véhicules autour de la situation nominale. Dans de telle situation, l'entrée de chaque voie est égale à sa sortie, ainsi le risque de congestion est faible. De plus, l'estimation des incertitudes grâce à l'observateur aide à améliorer les performances de la commande proposée.

Étant donné l'incapacité de la deuxième commande à stabiliser le système pendant un intervalle de temps bien défini, nous avons proposé une troisième commande basée sur la théorie de stabilité en temps fini (FTS). L'objectif a été de forcer le nombre de véhicules à ne pas dépasser les capacités des voies pendant les heures de pointe. Pour établir une commande performante, nous avons travaillé sur un système libre des incertitudes considéré comme un système de comparaison de l'original. Ce qui présente certainement un avantage en raison de l'absence des paramètres inconnus dans le système majorant. Ensuite, nous avons déduit les conditions de stabilisation du système original.

Finalement, l'existence des commandes proposées a été caractérisée par la faisabilité de certaines LMI en utilisant l'outil CVX sous MATLAB. De plus, les simulations ont permis de mettre en lumière la capacité de nos stratégies à atteindre les objectifs de départ, à savoir :

- Éviter la congestion en forçant le nombre de véhicules à ne pas dépasser le niveau du trafic correspondant à l'optimum opérationnel des lignes.
- Le calcul de la commande en temps réel.
- Le respect des contraintes sur la commande et l'état.
- La prise en compte des incertitudes dans la conception de la commande.

Perspectives

Plusieurs perspectives et voies de recherche peuvent être dégagées. En effet, il serait intéressant de poursuivre ce travail sur les points suivants :

1. La perspective la plus directe consiste à valider nos stratégies de commandes sur un réseau de transport réel.
2. Dans ce travail, nous avons vu l'analogie établie entre les systèmes de transport et les systèmes thermodynamiques en considérant les véhicules comme étant l'énergie fournie au réseau de transport. Il est alors intéressant d'aborder le problème de la modélisation des réseaux de transport par d'autres approches comme le physique-statistique par exemple. En effet, en considérant les véhicules comme étant les particules de gaz qui se meuvent dans le réseau, nous pouvons essayer de modéliser le système.
3. Il est aussi intéressant de développer des stratégies de contrôle agissant **a posteriori** afin de résoudre le problème de congestion s'il y a lieu dans le réseau.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. D. C. Little, M. D. Kelson, and N. H. Gartner, "MAXBAND : A Program for Setting Signals on Arteries and Triangular Networks," in *Transportation Research Record* 795. Washington, DC : U.S. Dept. Transp., 1981.
- [2] T.-H. Chang and G.-Y. Sun, "Modeling and optimization of an oversaturated signalized network," *Transportation Research Part B : Methodological*, vol. 38, no. 8, pp. 687–707, 2004.
- [3] W. H. Kraft, W. S. HOMBURGER, and J. L. Pline, *Traffic engineering handbook*. Institute of Transportation Engineers, 2009.
- [4] F. V. Webster and B. M. Cobbe, *Traffic signals*, ser. Road research technical paper. London : Great Britain Road Research Laboratory, 1966, no. 56.
- [5] A. Benesch, "Regulating Street Traffic in Cleveland," *The American City*, pp. 182–184, 1915.
- [6] B. Marsh, "Traffic control," *Annals of the American Academy of Political and Social Science*, vol. 133, pp. 90–113, 1927.
- [7] M. Bell, "Future directions in traffic signal control," *Transportation Research Part A : Policy and Practice*, vol. 26A, pp. 303–313, 1992.
- [8] R. Hall, Ed., *Handbook of Transportation Science*. Kluwer Academic Publishers, 1999.
- [9] C. Diakaki, M. Papageorgiou, and K. Aboudolas, "A multivariable regulator approach to traffic-responsive network-wide signal control," *Control Engineering Practice*, vol. 10, no. 2, pp. 183–195, Feb. 2002.

- [10] N. H. Gartner, C. J. Messer, and A. K. Rathi, Eds., *Revised Monograph on Traffic Flow Theory*. Federal Highway Administration, USA, 2005.
- [11] W. Adams, "Road Traffic Considered as a Random Series," *J. Inst. Civil Engineers*, vol. 4, pp. 121–130, 1936.
- [12] B. D. Greenshields, "A Study in Highway Capacity," *Highway Research Board, Proceedings*, vol. 14, p. 458, 1935.
- [13] L. Pipes, "An Operational Analysis of Traffic Dynamics," *Journal of Applied Physics*, vol. 24, no. 3, pp. 274–281, 1953.
- [14] P. Gipps, "A behavioural car-following model for computer simulation," *Transportation Research Part B : Methodological*, vol. 15, no. 2, pp. 105–111, 1981.
- [15] X. Zhao and Z. Gao, "A new car-following model : full velocity and acceleration difference model," *The European Physical Journal B*, vol. 47, no. 1, pp. 145–150, Sep. 2005.
- [16] M. Lighthill and G. Whitham, "On kinematic waves II : a theory of traffic flow on long crowded roads," in *Proceedings of the Royal Society, London Series A*, vol. 229, 1955, pp. 317–345.
- [17] P. Richards, "Shockwaves on the highway," *Operations Research*, vol. 4, no. 1, pp. 42–51, 1956.
- [18] C. F. Daganzo, "The cell transmission model, part II : Network traffic," *Transportation Research Part B : Methodological*, vol. 29, no. 2, pp. 79–93, Apr. 1995.
- [19] H. Zhang and W. Jin, "Kinematic Wave Traffic Flow Model for Mixed Traffic," *Transportation Research Record*, vol. 1802, no. 1, pp. 197–204, Jan. 2002.
- [20] J. Wardrop, "Some Theoretical Aspects of Road Traffic Research," in *Proceedings of the Institution of Civil Engineers, Part II*, vol. 1, no. 2, 1952, pp. 325–362.
- [21] N. Vandaele, T. V. Woensel, and A. Verbruggen, "A queueing based traffic flow model," *Transportation Research Part D : Transport and Environment*, vol. 5, no. 2, pp. 121–135, 2000.
- [22] J. Kamata and T. Oda, "Detectors for road traffic," *Concise encyclopedia of traffic and transportation systems*, 1991.
- [23] L. A. Klein, M. K. Mills, and D. R. P. Gibson, *Traffic Detector Handbook*. U.S. Department of Transportation Federal Highway Administration, 2006.

- [24] S. Avner, R. Glachet, M. Pintado, and F. Boillot, "L'image au service de la gestion du trafic urbain," *TRANSPORT ENVIRONNEMENT CIRCULATION*, vol. 160, pp. 9–13, 2000.
- [25] C. Chaudy, J. Delaigle, and M. Macq, "Analyse du trafic routier par caméra intelligente : MvTraffic," UCL, Tech. Rep., 2004.
- [26] F. Webster, *Traffic signal settings*, ser. Road research technical paper. London : Great Britain Road Research Laboratory, 1958, no. 39.
- [27] J. T. Morgan and J. D. C. Little, "Synchronizing Traffic Signals for Maximal Bandwidth," *Operations Research*, vol. 12, pp. 896–912, 1964.
- [28] J. D. C. Little, "The Synchronization of Traffic Signals by Mixed-Integer Linear Programming," *Operations Research*, vol. 14, no. 4, pp. 568–594, Jul. 1966.
- [29] D. I. Robertson, "TANSYT method for area traffic control," *Traffic Engineering & Control*, vol. 10, pp. 276–281, 1969.
- [30] D. Hale, *Traffic Network Study Tool : TRANSYT-7F, United States Version*. Mc-Trans Center in the University of Florida, Gainesville, Jan. 2005.
- [31] M. Bielli, G. Ambrosino, and M. Boero, *Artificial intelligence applications to traffic engineering*. VSP International Science Publishers, 1994.
- [32] P. Lowrie, "The Sydney coordinated adaptive traffic system - principles, methodology, algorithms," in *International Conference on Road Traffic Signalling*, London, United Kingdom, 1982, pp. 67–70.
- [33] P. Hunt, D. Robertson, R. Bretherton, and R. Winton, "SCOOT-a traffic responsive method of coordinating signals," Transport and Road Research Laboratory, Tech. Rep. LR 1014 Monograph, 1981.
- [34] R. D. Bretherton, P. Hunt, D. Robertson, and M. Royle, "The SCOOT on-line traffic signal optimisation technique," *Traffic Engineering and Control*, vol. 23, no. 4, pp. 190–192, 1982.
- [35] D. Bretherton, "Current Developments in SCOOT : Version 3," *Transportation Research Record : Journal of the Transportation Research Board*, vol. 1554, pp. 48–52, 1996.
- [36] R. Bretherton, "The use of SCOOT for traffic management," in *INTERNATIONAL CONFERENCE ON ROAD TRAFFIC CONTROL*, 1986, pp. 81–85.

- [37] N. H. Gartner, "OPAC : A DEMAND-RESPONSIVE STRATEGY FOR TRAFFIC SIGNAL CONTROL," in *Transportation Research Record 906*. Washington, DC : U.S. Dept. Transp., 1983.
- [38] D. Gazis and R. Potts, "The Oversaturated Intersection," in *Proceedings of the Second International Symposium on the Theory of Road Traffic Flow*, 1963, pp. 221–237.
- [39] M. Papageorgiou, C. Diakaki, V. Dinopoulou, A. Kotsialos, and Y. Wang, "Review of road traffic control strategies," *Proceedings of the IEEE*, vol. 91, no. 12, pp. 2043–2067, 2003.
- [40] Christina Diakaki, "Integrated control of traffic flow in corridor networks," Ph.D. Thesis, Department of Production Engineering and Management, Technical University of Crete, Chania, Greece, 1999.
- [41] K. Aboudolas, M. Papageorgiou, and E. Kosmatopoulos, "Store-and-forward based methods for the signal control problem in large-scale congested urban road networks," *Transportation Research Part C : Emerging Technologies*, vol. 17, no. 2, pp. 163–174, Apr. 2009.
- [42] E. Kosmatopoulos, M. Papageorgiou, C. Bielefeldt, V. Dinopoulou, R. Morris, J. Mueck, A. Richards, and F. Weichenmeier, "International comparative field evaluation of a traffic-responsive signal control strategy in three cities," *Transportation Research Part A : Policy and Practice*, vol. 40, no. 5, pp. 399–413, Jun. 2006.
- [43] H. Zhou, R. Bouyekhf, and A. El Moudni, "Modeling and entropy based control of urban transportation network," *Control Engineering Practice*, vol. 21, no. 10, pp. 1369–1376, 2013.
- [44] T. Tettamanti, T. Luspay, B. Kulcsár, T. Péni, and I. Varga, "Robust control for urban road traffic networks," *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, vol. 15, no. 1, pp. 385–398, 2014.
- [45] H. K. Lo, E. Chang, and Y. C. Chan, "Dynamic network traffic control," *Transportation Research Part A : Policy and Practice*, vol. 35, no. 8, pp. 721–744, 2001.
- [46] B. Park, C. Messer, and T. Urbanik, "Traffic signal optimization program for oversaturated conditions : genetic algorithm approach," *Transportation Research Record : Journal of the Transportation Research Board*, no. 1683, pp. 133–142, 1999.
- [47] R. Putha, L. Quadrioglio, and E. Zechman, "Comparing ant colony optimization and genetic algorithm approaches for solving traffic signal coordination under

- oversaturation conditions,” *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*, vol. 27, no. 1, pp. 14–28, 2012.
- [48] J. He and Z. Hou, “Ant colony algorithm for traffic signal timing optimization,” *Advances in Engineering Software*, vol. 43, no. 1, pp. 14–18, 2012.
- [49] V. Benes, “A thermodynamic theory of traffic in connecting networks,” *The Bell System Technical Journal*, vol. 42, no. 3, pp. 567–607, 1963.
- [50] H. Reiss, A. D. Hammerich, and E. Montroll, “Thermodynamic treatment of non-physical systems : Formalism and an example (single-lane traffic),” *Journal of Statistical Physics*, vol. 42, no. 3-4, pp. 647–687, 1986.
- [51] T. Nagatani, “Thermodynamic theory for the jamming transition in traffic flow,” *Physical Review E*, vol. 58, no. 4, p. 4271, 1998.
- [52] W.-L. Hsu, H.-Y. Liao, B.-S. Jeng, and K.-C. Fan, “Real-time traffic parameter extraction using entropy,” *IEE Proceedings-Vision, Image and Signal Processing*, vol. 151, no. 3, pp. 194–202, 2004.
- [53] H. Zhou, R. Bouyekhf, and A. E. Moudni, “Concept of transportation entropy and its application in traffic signal control,” *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 46, no. 25, pp. 37–42, 2013.
- [54] H. Zhou, “Thermodynamic and entropy concepts for modelling and control of transportation networks,” Theses, Université de Technologie de Belfort-Montbéliard, Mar. 2014. [Online]. Available : <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01499515>
- [55] F. Robert, *Matrices nonnégatives et normes vectorielles*, ser. Cours de DEA. Grenoble : Institut IMAG, 1973.
- [56] J. C. Hennet, “Une extension du lemme de Farkas et son application au problème de régulation linéaire sous contrainte,” *Comptes rendus de l’Académie des sciences. Série 1, Mathématique*, vol. 308, no. 13, pp. 415–419, 1989.
- [57] S. Boyd, L. E. Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, *Linear matrix inequalities in system and control theory*. SIAM, 1994.
- [58] M. Sleiman, R. Bouyekhf, and A. E. Moudni, “Invariance principle for transportation network,” in *Systems, Man, and Cybernetics (SMC), 2016 IEEE International Conference on*. IEEE, 2016, pp. 003 567–003 572.
- [59] W. M. Haddad, Q. Hui, S. G. Nersesov, and V. Chellaboina, “Thermodynamic modeling, energy equipartition, and nonconservation of entropy for discrete-time dy-

- namical systems,” *Advances in Difference Equations*, vol. 2005, no. 3, pp. 275–318, 2005.
- [60] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, and G. Pólya, *Inequalities*, 1st ed. London : Cambridge University Press, 1934.
- [61] A. W. Marshall, I. Olkin, and B. C. Arnold, *Inequalities : Theory of Majorization and Its Applications*, 2nd ed., ser. Springer Series in Statistics. New York, USA : Springer, 2011.
- [62] G. Zames, “On the input-output stability of time-varying nonlinear feedback systems part one : Conditions derived using concepts of loop gain, conicity, and positivity,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 11, no. 2, pp. 228–238, 1966.
- [63] J. C. Willems, “Dissipative dynamical systems Part II : Linear systems with quadratic supply rates,” *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, vol. 45, no. 5, pp. 352–393, 1972.
- [64] V. M. Popov, *Hyperstability of Control Systems*. New York : Springer-Verlag, 1973.
- [65] B. Brogliato, R. Lozano, B. Maschke, O. Egeland *et al.*, *Dissipative systems analysis and control : theory and applications*, 2nd ed. London : Springer Verlag, 2007.
- [66] A. J. van der Schaft and A. Van Der Schaft, *L2-gain and passivity techniques in nonlinear control*. Springer, 2000, vol. 2.
- [67] R. Bhatia and C. Davis, “A cauchy-schwarz inequality for operators with applications,” *Linear algebra and its applications*, vol. 223, pp. 119–129, 1995.
- [68] R. E. Kalman, “A new approach to linear filtering and prediction problems,” *Journal of basic Engineering*, vol. 82, no. 1, pp. 35–45, 1960.
- [69] D. Luenberger, “Observers for multivariable systems,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 11, no. 2, pp. 190–197, 1966.
- [70] M. Papageorgiou, C. Diakaki, V. Dinopoulou, A. Kotsialos, and Y. Wang, “Review of road traffic control strategies,” *Proceedings of the IEEE*, vol. 91, no. 12, pp. 2043–2067, 2003.
- [71] M. E. Valcher, “State observers for discrete-time linear systems with unknown inputs,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 44, no. 2, pp. 397–401, 1999.
- [72] D. Kang, “Design of a disturbance observer for discrete-time linear systems,” in *Control, Automation and Systems (ICCAS), 2014 14th International Conference on*. IEEE, 2014, pp. 1381–1383.

- [73] R. Piziak and P. L. Odell, "Full rank factorization of matrices," *Mathematics Magazine*, vol. 72, no. 3, pp. 193–201, 1999.
- [74] M. James, "The generalised inverse," *The Mathematical Gazette*, vol. 62, no. 420, pp. 109–114, 1978.
- [75] M. Grant and S. Boyd, "CVX : Matlab Software for Disciplined Convex Programming, version 1.21," Apr. 2011.
- [76] G. Kamenkov, "On stability of motion over a finite interval of time," *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, vol. 17, no. 2, pp. 529–540, 1953.
- [77] G. Kamenkov and A. Lebedev, "Remarks on the paper on stability in finite time interval," *Journal of Applied Math. and Mechanics (PMM)*, vol. 18, p. 512, 1954.
- [78] F. Amato, M. Ariola, C. Abdallah, and C. Cosentino, "Application of finite-time stability concepts to the control of atm networks," in *PROCEEDINGS OF THE ANNUAL ALLERTON CONFERENCE ON COMMUNICATION CONTROL AND COMPUTING*, vol. 40, no. 2. Citeseer, 2002, pp. 1071–1079.
- [79] S. Mastellone, P. Dorato, and C. T. Abdallah, "Finite-time stability for nonlinear networked control systems," in *Current Trends in Nonlinear Systems and Control*. Springer, 2006, pp. 535–553.
- [80] F. Amato and M. Ariola, "Finite-time control of discrete-time linear systems," *IEEE Transactions on Automatic control*, vol. 50, no. 5, pp. 724–729, 2005.

Résumé :

Le transport a toujours été l'un des composants déterminants de la vie urbaine et de son développement économique. A partir de la seconde moitié du siècle dernier, l'amélioration du niveau de vie moyen et du taux d'équipement des ménages a permis au plus grand nombre d'accéder au déplacement par véhicule particulier. Nous avons donc assisté à une course entre la croissance du trafic routier et les progrès quantitatifs et qualitatifs de la voirie. Cette quantité d'actions génère des problèmes au niveau de la fluidité du trafic, d'où l'apparition de congestion. La congestion se produit aujourd'hui de façon quasi-quotidienne dans les réseaux routiers. Elle est source de perte de temps, augmentation de la consommation d'énergie, nuisance et détérioration de l'environnement. La solution aux problèmes de congestion routière ne passe pas toujours par l'augmentation de l'investissement dans les infrastructures de transport. En effet, l'offre de terrains est épuisée et le développement de l'infrastructure routière est coûteux. D'où, la tendance actuelle est plutôt à une meilleure utilisation des infrastructures existantes. En particulier, les feux de signalisation jouent un rôle important parmi les approches qui permettent d'éviter la congestion. En effet, la conception d'une meilleure commande des feux de signalisation a fait l'objet de plusieurs recherches afin d'améliorer la circulation au niveau du réseau à grande échelle.

Dans ce mémoire, nous nous intéressons essentiellement à un travail en amont (action a priori) permettant d'éviter la congestion en forçant le nombre de véhicules à ne pas dépasser les capacités maximales des voies du réseau de transport. Après avoir décrit les réseaux de carrefours des feux, nous présentons d'une manière non exhaustive, les méthodes développées pour la gestion et la régulation des carrefours. Ensuite, nous proposons trois stratégies de contrôle qui traitent le problème de contrôle de manières différentes. La première fait appel à la théorie des systèmes dissipatifs, la deuxième consiste à stabiliser le système au sens de Lyapunov autour de sa situation nominale et la troisième le stabilise en temps fini (pendant les heures de pointe). Ces commandes proposées respectent les contraintes sur l'état et sur la commande et prennent en considération les incertitudes existantes dans le système. Finalement, l'existence des commandes proposées a été caractérisée par la faisabilité de certaines LMI en utilisant l'outil CVX sous MATLAB. De plus, les performances de chaque commande sont évaluées par des simulations.

Mots-clés : Système de transport, Système thermodynamique, Entropie, Contrôle des feux de circulation, Théorie des systèmes dissipatifs, Stabilisation, Incertitudes

Abstract:

Transport has always been one of the key components of urban life and its economic development. From the second half of the last century, the improvement in the average standard of living and the household equipment rate allowed the greatest number of people to access the journey by private vehicle. We therefore witnessed a race between the growth of road traffic and the quantitative and qualitative progress of roads. This quantity of actions generates problems with the fluidity of the traffic, hence the appearance of congestion. The congestion occurs today almost daily in road networks. It is source of waste of time, increase of the energy consumption, the nuisance and the deterioration of the environment. The solution to the problems of road congestion does not still pass by the increase of the investment in the infrastructures of transport. Indeed, the offer of grounds is exhausted and the development of the road infrastructure is expensive. Hence, the current trend is rather for a better use of the existing infrastructures. In particular, traffic lights play an important role in avoiding congestion. Indeed, the design of a better control of traffic lights has been the subject of several researches in order to improve the network circulation on a large scale.

In this thesis, we are mainly interested in a work that prevents the congestion by forcing the number of vehicles to not exceed the lane capacities. After having described the network of intersections, we have realized a state of the art on the methods developed for the management and regulation of intersections. Next, we propose three control strategies that treat the control problem in different ways. The first one involves the theory of dissipative systems, the second one is to stabilize the system in the sense of Lyapunov around its nominal situation and the third one stabilizes it in finite time (during peak hours). These proposed controls respect the constraints on both state and control. In addition, they take into account the uncertainties in the system. Finally, the result of each strategy developed is presented by LMI in order to be solved by using the CVX tool under MATLAB. Besides, the performance of each control is evaluated by simulations.

Keywords: Transportation system, Thermodynamic system, Entropy, Traffic signal control, Dissipativity theory, Stability, Uncertainties

The logo for SPIM (École doctorale SPIM) features the letters 'S', 'P', 'I', and 'M' in a large, white, sans-serif font. A blue horizontal bar is positioned to the left of the 'S'.

■ École doctorale SPIM - Université de Technologie Belfort-Montbéliard

F - 90010 Belfort Cedex ■ tél. +33 (0)3 84 58 31 39

■ ed-spim@univ-fcomte.fr ■ www.ed-spim.univ-fcomte.fr

