



**HAL**  
open science

# Modélisation numérique de la propagation des ondes par une méthode éléments finis Galerkin discontinue : prise en compte des rhéologies nonlinéaires des sols

Simon Chabot

## ► To cite this version:

Simon Chabot. Modélisation numérique de la propagation des ondes par une méthode éléments finis Galerkin discontinue : prise en compte des rhéologies nonlinéaires des sols. Mécanique [physics.med-ph]. Université Paris-Est, 2018. Français. NNT : 2018PESC1101 . tel-02084042

**HAL Id: tel-02084042**

**<https://theses.hal.science/tel-02084042v1>**

Submitted on 29 Mar 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



École doctorale N°531 : Sciences, Ingénierie, Environnement

Spécialité : Sciences de l'ingénieur

**Modélisation numérique de la propagation des ondes  
par une méthode éléments finis Galerkin  
discontinue : prise en compte des rhéologies  
nonlinéaires des sols**

Simon CHABOT

Présentée pour obtenir le grade de  
Docteur de l'Université Paris-Est

Thèse dirigée par Fabian-Luis BONILLA, Nathalie GLINSKY et Diego MERCERAT

---

Composition du jury

---

M. Emmanuel Chaljub	Maître de conférences	ISTERRE, Grenoble	Rapporteur
M. Bruno Lombard	Directeur de recherche	CNRS, LMA, Marseille	Rapporteur
Mme. Anne Mangeney	Professeure	IPGP, Paris	Examinatrice
M. Stéphane Lanteri	Directeur de recherche	INRIA, Sophia-Antipolis	Examineur
M. Jean-Pierre Vilotte	Professeur	IPGP, Paris	Examineur
Mme. Céline Gélis	Ingénieure de recherche	IRSN, Fontenay-aux-Roses	Invitée
M. Fabian Bonilla	Directeur de recherche	IFSTTAR, Marne-la-Vallée	Directeur de thèse
Mme. Nathalie Glinsky	Chargée de recherche	CEREMA, Sophia-Antipolis	Co-directrice de thèse
M. Diego Mercerat	Chargé de recherche	CEREMA, Sophia-Antipolis	Encadrant

---

Thèse soutenue le 13 novembre 2018

**Simon CHABOT**

*Modélisation numérique de la propagation des ondes par une méthode éléments finis Galerkin discontinue : prise en compte des rhéologies nonlinéaires des sols*

Sciences de l'ingénieur, 13 novembre 2018

Rapporteurs : Bruno LOMBARD et Emmanuel CHALJUB

Direction : Fabian-Luis BONILLA, Nathalie GLINSKY et Diego MERCERAT

**Université Paris-Est**

5 Boulevard Descartes  
77420 Champs-sur-Marne

**Cerema**

Direction territoriale Méditerranée, agence de Sophia-Antipolis  
500, route des Lucioles CS 80125  
06903 Valbonne Sophia Antipolis cedex

**Ifsttar**

Laboratoire GERS  
14-20 Boulevard Newton  
Cité Descartes, Champs-sur-Marne  
F-77447 Marne-la-Vallée Cedex 2

# Résumé

L'objectif général de la thèse est la simulation numérique des mouvements forts du sol dûs aux séismes. Les déformations importantes du sol engendrent des comportements nonlinéaires dans les couches superficielles. L'apport principal de la thèse est la prise en compte de la nonlinéarité des milieux dans un contexte éléments finis Galerkin discontinus. Différentes lois de comportement sont implémentées et analysées. Le cas particulier du modèle élastoplastique de Masing-Prandtl-Ishlinskii-Iwan (MPII) est approfondi.

Cette étude est divisée en deux parties. Une première qui vise à poser la structure du problème en présentant les équations et modèles utilisés pour décrire les mouvements du sol. Dans cette partie nous présentons également la méthode d'approximation spatiale Galerkin Discontinue ainsi que les différents schémas temporels que nous avons considérés. Une attention particulière est portée sur la complexité algorithmique du modèle nonlinéaire élastoplastique MPII en vue de réduire le temps de calcul des simulations.

La deuxième partie est dédiée aux applications numériques. Ces applications sont réparties en trois catégories distinctes. 1) Nous nous intéressons tout d'abord à la configuration unidimensionnelle où une seule onde de cisaillement est propagée. Dans ce contexte, un flux numérique décentré est établi et des applications aux cas nonlinéaire élastique et nonlinéaire élastoplastique sont étudiées. Une solution analytique concernant le cas nonlinéaire élastique est proposée, ce qui permet de réaliser une étude numérique de convergence. 2) Le problème unidimensionnel étendu aux trois composantes du mouvement est étudié et utilisé comme un premier pas vers le 3D compte tenu du couplage entre les ondes de cisaillement et de compression. Nous nous intéressons ici à des signaux synthétiques et réels. L'application d'une méthode permettant de réduire significativement le temps de calcul du modèle élastoplastique est détaillée. 3) Une configuration tridimensionnelle est examinée. Après différentes applications de vérification en milieu linéaire, deux cas d'étude élastoplastique sont analysés. Une première sur un mode propre d'un cube puis une seconde sur un milieu plus réaliste composé d'un bassin hémisphérique à couches sédimentaires ayant un comportement élastoplastique.

**Mots clés** sismologie, mouvements sismiques forts, méthode éléments finis Galerkin Discontinue, propagation d'ondes, loi de comportement nonlinéaire



# Abstract

The general objective of this thesis is the numerical simulation of strong ground motions due to earthquakes. Significant deformations of the soil generate nonlinear behaviors in the superficial layers. The main contribution of this work is to take into account the nonlinearity of the media in a discontinuous Galerkin finite elements context. Different constitutive laws are implemented and analyzed. The particular case of the Masing-Prandtl-Ishlinskii-Iwan (MPII) elastoplastic model is looked at in-depth.

This study is divided into two parts. A first one that aims at defining the framework of the problem by presenting the equations and models used to describe the soil motion. In this part we also present the Galerkin Discontinuous spatial approximation method as well as the different temporal schemes that we considered. Particular attention is paid to the algorithmic complexity of the nonlinear elastoplastic MPII model in order to reduce the computation time of simulations.

The second part is dedicated to numerical applications. These applications are divided into three distinct categories. 1) We are first interested in the one-dimensional configuration where a single shear wave is propagated. In this context, an upwind numerical flux is established and applications to nonlinear elastic and nonlinear elastoplastic cases are studied. An analytical solution concerning the nonlinear elastic case is proposed, which makes it possible to carry out a numerical study of convergence. 2) The one-dimensional problem extended to the three components of the motion is studied and used as a first step towards 3D applications considering the coupling between the shear and compression waves. We are interested here in synthetic and real input signals. The application of a method that significantly reduces the calculation time of the elastoplastic model is detailed. 3) A three-dimensional configuration is examined. After different verification cases in linear medium, two cases of elastoplastic studies are analyzed. A first on the eigenmode of a cube then a second on a more realistic case of a hemispherical basin with sedimentary layers having an elastoplastic behavior.

**Keywords** seismology, strong ground motion, Discontinuous Galerkin finite element methods, waves propagation, nonlinear constitutive law

# Remerciements

Quel voyage qui s'achève !

Un voyage qui, au détour de ce que j'ai pu faire ou étudier auparavant, m'a emmené, non pas au centre de la Terre, mais dans ses couches superficielles. Et, il y a déjà beaucoup à faire, à apprendre et à comprendre, juste là, sous nos pieds. Un voyage qui n'aurait pas été aussi agréable — ou même, tout simplement, possible — sans les nombreuses personnes qui m'ont entouré, appris avec patience et soutenu. Je tiens, dans ces quelques lignes, à les remercier.



Je remercie tout d'abord Fabian Bonilla d'avoir accepté la direction de cette thèse, de m'avoir conseillé, de m'avoir permis de voyager aux différents congrès et de suivre les différentes formations qui m'intéressaient. Merci ! Je souhaite également remercier l'ensemble des collègues de l'agence qui nous permettent de travailler dans la bonne humeur générale. Merci à toute l'équipe RS — Julie, Philippe, Étienne, Michel, Diego, Nathalie, David, Ophélie — de m'avoir accueilli si agréablement. Je remercie tout particulièrement Nathalie Glinsky et Diego Mercerat qui, au quotidien, ont toujours répondu à mes nombreuses questions. Je vous remercie pour tout ce que vous m'avez apporté dans la compréhension de la mécanique des sols, des méthodes numériques ou simplement dans la rédaction. Merci pour toutes ses discussions riches. Je remercie aussi l'INRIA, et plus particulièrement Stéphane Lanteri, pour m'avoir permis d'utiliser le cluster pour mener à bien mes calculs. Merci à Élif pour ses conseils sur le modèle MPII.

Je remercie Émanuel Chaljub et Bruno Lombard pour avoir accepté d'examiner les travaux de cette thèse. Merci également à Anne Mangeney, Stéphane Lanteri, Jean-Pierre Vilotte et Céline Gélis pour avoir accepté de partie du jury.

Merci également à Marie-France et Ophélie pour vos succulentes pâtisseries et conseils culinaires, à Jean-Baptiste pour toutes les discussions et les *test-driven peer-reviewed developments* que nous avons pu partager, à Florent pour ses photos qui font voyager loin tout en restant bien assis sur sa chaise (merci aussi pour tes conseils !). Merci à tout le *comité de pilotage des brasseur·e·s de houblon* — n'oubliez pas de vous réunir aussi souvent que nécessaire pour faire avancer le projet ! Je pense également à Ulysse, pour toutes les discussions passionnantes partagées à la cantine et les lectures qui cela m'a inspiré.

Je pense à mes parents et mes frères, qui m'ont permis d'arriver jusque là et toujours soutenu ; merci. Enfin, merci à toi, Anaïs d'être depuis si longtemps à mes côtés, d'apporter ton rayon de lumière à chacune de mes journées. Merci de m'avoir encouragé jusqu'au bout. Sois prête ; cela va bientôt être ton tour =)



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
1.1	Introduction générale . . . . .	1
1.2	Introduction scientifique . . . . .	5
1.3	État de l'art des méthodes numériques pour la propagations des ondes sismiques . . . . .	6
1.4	Objectif et contribution . . . . .	9
<b>I</b>	<b>Modélisation numérique de la propagation des ondes</b>	<b>11</b>
<b>2</b>	<b>Équations du mouvement et modèles nonlinéaires</b>	<b>13</b>
2.1	Dérivations et hypothèses générales . . . . .	14
2.1.1	Déformations . . . . .	14
2.1.2	Contraintes . . . . .	15
2.2	Différentes lois de comportement . . . . .	16
2.2.1	Modèle linéaire élastique . . . . .	16
2.2.2	Modèle nonlinéaire élastique . . . . .	18
2.2.3	Modèle nonlinéaire élastoplastique . . . . .	19
2.2.4	Complexité algorithmique des modèles nonlinéaires étudiés . . . . .	26
2.3	Équation du mouvement . . . . .	30
2.4	Source ponctuelle . . . . .	31
2.5	Réduction des équations du mouvement au cas 1D . . . . .	34
<b>3</b>	<b>Méthodes numériques</b>	<b>37</b>
3.1	Approximation spatiale . . . . .	37
3.2	Conditions aux limites . . . . .	41
3.2.1	Surface libre . . . . .	42
3.2.2	Base rigide (Dirichlet) . . . . .	42
3.2.3	Bords absorbants et onde incidente au rocher . . . . .	43
3.3	Implémentation de la source ponctuelle . . . . .	45
3.4	Approximations temporelles . . . . .	46
3.4.1	Schéma Saute-Mouton . . . . .	46

3.4.2	Schéma Runge-Kutta d'ordre 3 conservant la stabilité . . . . .	47
3.4.3	Runge-Kutta à faible stockage . . . . .	49
3.5	Précision et stabilité . . . . .	50
3.5.1	Taille des éléments de maillage . . . . .	50
3.5.2	Condition de type Courant–Friedrichs–Lewy . . . . .	53
<b>II</b>	<b>Applications</b>	<b>57</b>
<b>4</b>	<b>Propagation dans un milieu unidimensionnel nonlinéaire</b>	<b>59</b>
4.1	Dérivation du flux décentré . . . . .	60
4.2	Vérification dans le cas linéaire, en milieu hétérogène . . . . .	63
4.3	Comparaison dans le cas nonlinéaire élastique, en milieu homogène . . . . .	65
4.3.1	Établissement d'une solution analytique . . . . .	66
4.3.2	Description du cas test et analyses . . . . .	69
4.3.3	Étude de convergence . . . . .	73
4.4	Étude numérique dans le cas nonlinéaire élastoplastique, en milieu hétérogène	76
4.5	Quelques mots sur le code de calcul . . . . .	85
<b>5</b>	<b>Propagation d'une onde couplée dans un milieu unidimensionnel élastoplastique</b>	<b>89</b>
5.1	Vérification du flux pour le système couplé 1D à trois composantes . . . . .	90
5.2	Comparaison des cas avec et sans couplage pour un mouvement synthétique	96
5.3	Comparaison du cas avec couplage et d'un mouvement enregistré . . . . .	100
5.4	Influence de l'échantillonnage de la courbe de réduction de module de cisaillement . . . . .	103
<b>6</b>	<b>Propagation d'une onde dans un milieu tridimensionnel élastoplastique</b>	<b>109</b>
6.1	Vérification de la source (cas linéaire élastique) . . . . .	110
6.1.1	Vérification d'une source explosive . . . . .	110
6.1.2	Comparaison cas test E2VP . . . . .	113
6.2	Mode propre d'un cube . . . . .	118
6.2.1	Comparaison linéaire élastique et élastoplastique . . . . .	118
6.2.2	Influence de l'amplitude sur le temps de calcul, en fonction de la méthode d'échantillonnage de la courbe de réduction du module de cisaillement . . . . .	122
6.3	Analyse des effets nonlinéaires couplés aux effets 3D d'un bassin hémisphérique hétérogène . . . . .	124
6.3.1	Description du cas test . . . . .	124
6.3.2	Analyse des résultats . . . . .	127

<b>7 Conclusion générale et perspectives</b>	<b>139</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>143</b>
<b>A Vitesses calculées dans le cas test 6.3</b>	<b>155</b>
A.1 Cas linéaire, source $s_1(t)$ . . . . .	155
A.2 Cas élastoplastique, source $s_1(t)$ . . . . .	157
A.3 Cas linéaire, source $s_2(t)$ . . . . .	159
A.4 Cas élastoplastique, source $s_2(t)$ . . . . .	161



# Introduction

” Nous allons raisonner juste sur des figures fausses ;  
c'est ça, la géométrie.

— David N.

Professeur de mathématiques, 2<sup>nd</sup>, 2007

## 1.1 Introduction générale

Jeudi 19 septembre 1985, 7h19. Un séisme de magnitude 8.2 sur l'échelle de Richter frappe la ville de Mexico. Le bilan est aujourd'hui porté à trente mille vies humaines et cinquante mille immeubles détruits.

L'épicentre du séisme se situe alors approximativement à 400 km de la ville. Plusieurs stations sismiques enregistrent le séisme. Une première, CAMPOS, est à proximité de l'épicentre et enregistre une accélération maximale — PGA<sup>1</sup> — d'environ 1.50 m/s<sup>2</sup>. L'onde sismique se propage et s'atténue avec la distance ; de sorte qu'une station située en périphérie de la ville, UNAM, enregistre une accélération maximale de 0.35 m/s<sup>2</sup> seulement. Une autre station, située au centre de la ville de Mexico, SCT, enregistre quant à elle une accélération de 1.70 m/s<sup>2</sup> ; soit un mouvement plus fort que celui enregistré par la station proche de l'épicentre. La Figure 1.1 illustre le positionnement de ces stations ainsi que les accélérogrammes qui y ont été enregistrés.

Pour comprendre pourquoi les ondes sismiques ont été amplifiées, il faut s'intéresser à la structure du sol sur lequel la ville est installée. Elle a été construite sur d'anciens lacs, asséchés au cours des siècles et repose sur une masse de boue de plusieurs mètres de hauteur, dont la raideur mécanique est relativement faible. Le contraste entre la raideur de ce bassin de boue et le rocher, dur, dans lequel il est installé, piège et amplifie les ondes sismiques. Les sismologues appellent ce phénomène les *effets de site*.

---

1. *Peak Ground Accerelation.*



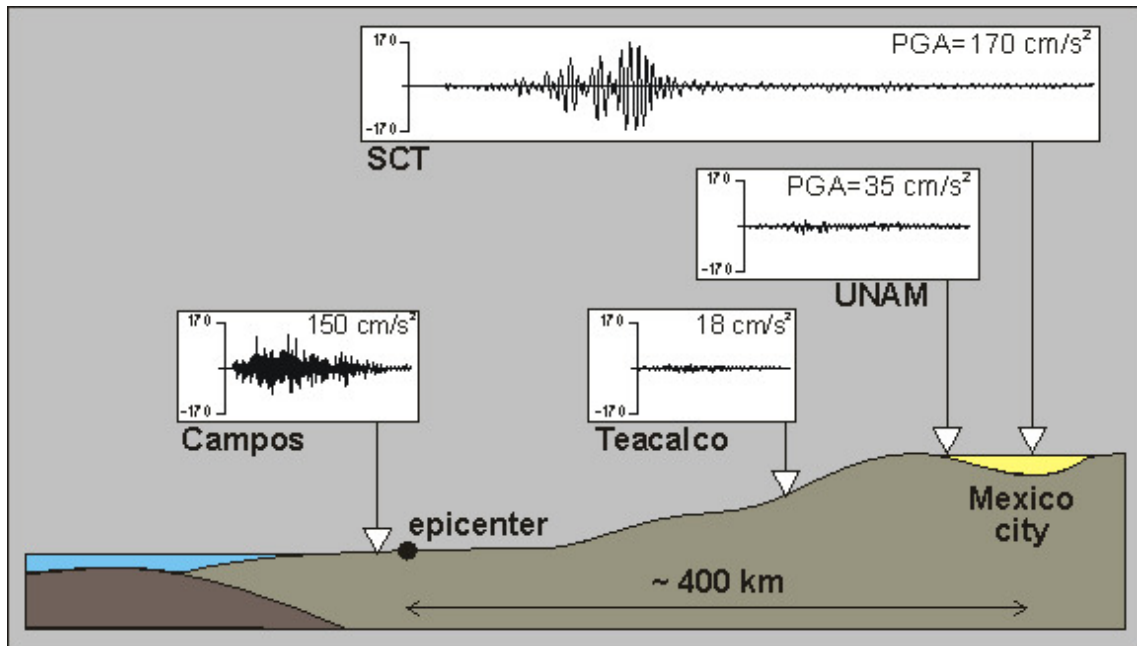


Figure 1.1.: Vue schématique du bassin de Mexico. Accélérogrammes enregistrés lors du séisme de 1985. Source : Jean-François Semblat, CC-BY-SA 3.0.

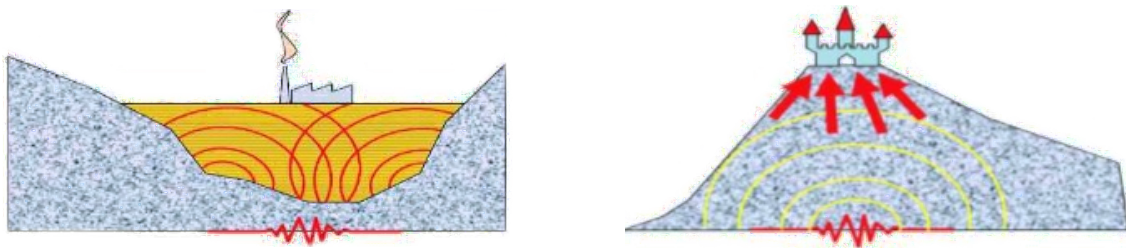


Figure 1.2.: Exemple de configurations géométriques sujettes à des effets de site.

Les effets de site sont dus à la géométrie du milieu et à sa composition. La géométrie du milieu peut concentrer les ondes en des points particuliers — comme les monts — ou encore peut les contenir localement — comme dans le cas d'un bassin sédimentaire. La Figure 1.2 illustre ces deux cas. Le mouvement est alors localement amplifié ; les structures artificielles présentes dans ces zones sont fortement impactées. S'intéresser à ce type de problématique nécessite donc de prendre en compte la totalité de la géométrie du milieu.

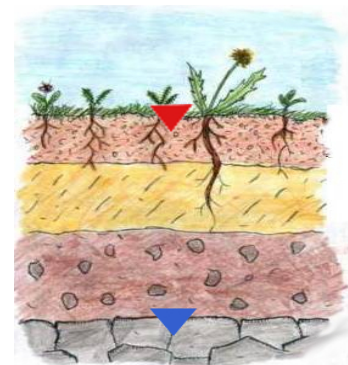
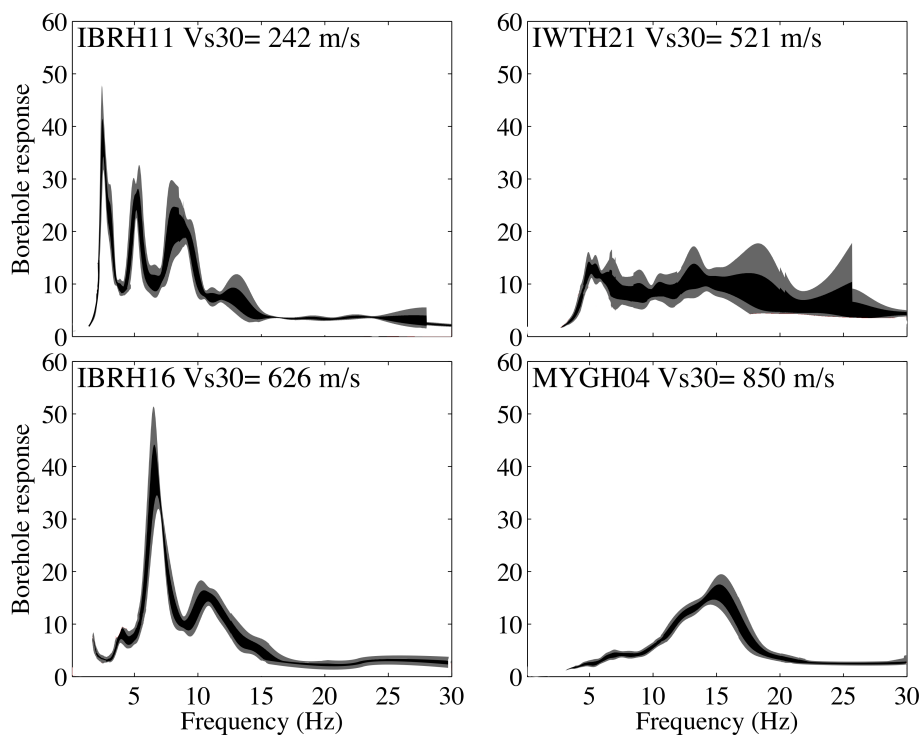


Figure 1.3.: Colonne de sol schématisée avec la position des stations.

La composition de celui-ci importe tout autant. L'accumulation de différentes couches sédimentaires va modifier l'onde sismique. En fonction de ces différentes couches, certaines fréquences de l'onde sismique

vont être plus ou moins amplifiées. Afin de savoir lesquelles et de combien, les sismologues s'intéressent, pour un milieu donné à sa *fonction d'amplification*. La Figure 1.3 représente une colonne de sol, composée de multiple couches sédimentaires. Pour connaître sa fonction d'amplification, deux stations sismologiques sont disposées; une à la surface de la colonne — ici en rouge — et une autre à l'interface entre la colonne et le rocher — ici en bleu. La vitesse — ou l'accélération — d'une onde se propageant dans ce milieu est enregistrée par les capteurs. En supposant qu'elle se propage verticalement et que le milieu est tabulaire, il est possible d'obtenir la fonction d'amplification en calculant les rapports spectraux des enregistrements aux deux stations. La Figure 1.4 représente les fonctions d'amplification pour différentes stations sismologiques de la région de Tohoku (Japon) du réseau KIK-NET. Ainsi, à la station IBRH16, on observe une forte amplification autour de 7.5 Hz ou encore autour de 15 Hz pour la station MYGH04.



**Figure 1.4.:** Fonctions d'amplification pour différentes stations de la région de Tohoku (Japon), calculées à l'aide des enregistrements entre 1998 et 2008, dont l'accélération maximale n'excède pas  $0.1 \text{ m/s}^2$ . Intervalles de confiance à 68% et 95% pour les zones noires et grises respectivement. Figure adaptée de [Bon+11].

Ces fonctions sont notamment utilisées par les ingénieurs afin de connaître, à une position, donnée les fréquences qui seront amplifiées en fonction de la composition du milieu et ainsi d'adapter la construction des structures et ouvrages d'arts en conséquence. La fonction d'amplification d'une colonne de sol est totalement déterminée par sa composition et les propriétés mécaniques des éléments la constituant, *sous réserve que le séisme qui la traverse*

soit modéré. En effet, si le séisme est *fort*, alors les propriétés mécaniques de la colonne de sol vont être altérées. Les couches sédimentaires vont notamment perdre en raideur, devenir plus *molles*, ce qui va affecter la fonction de transfert. La Figure 1.5 illustre, en rouge, l'effet d'un séisme fort sur les fonctions d'amplification. Sur cet exemple, il s'agit du séisme de Tohoku de 2011 et de magnitude 9 sur l'échelle de Richter.

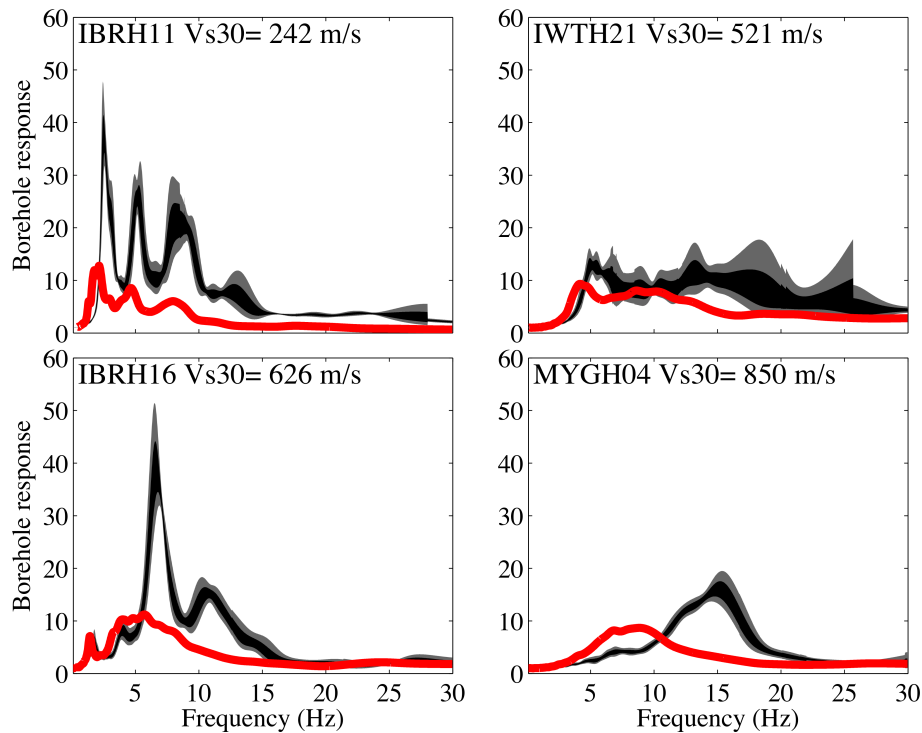


Figure 1.5.: Impact d'un fort séisme sur les fonctions d'amplifications. Figure de [Bon+11].

On observe sur cet exemple que les fréquences qui ont été amplifiées, par les mêmes colonnes de sol, sont différentes. Le séisme, extrêmement puissant, a tellement impacté le milieu que celui-ci est devenu moins résistant ; ce qui comme nous le verrons implique une diminution de la vitesse de propagation des ondes sismiques et les fréquences sont différemment impactées. Certaines sont amplifiées, par exemple entre 5 – 10 Hz à la station MYGH04 et d'autre moins, comme 15 Hz à la même station.

On peut classiquement distinguer deux cas d'études. Un premier qui s'intéresse aux cas où pour une zone d'intérêt donnée les fonctions d'amplifications sont indépendantes de la sollicitation exercée (cf Figure 1.4) et un autre cas où elles en sont dépendantes (cf Figure 1.5). Ces deux cas sont généralement appelés *linéaire* et *nonlinéaire*, respectivement.

Cette thèse propose de s'intéresser à la propagation des ondes sismiques dans un milieu tridimensionnel, afin de permettre la prise en compte des effets de site, tout en considérant les effets nonlinéaires illustrés ci-avant.

## 1.2 Introduction scientifique

Dans le contexte de la prédiction du mouvement du sol après un séisme, il a été observé, entre autre, que les conditions locales du milieu (géométrie, propriétés mécaniques des couches superficielles) peuvent influencer fortement l'amplitude, le contenu fréquentiel et la durée du mouvement sismique en surface. Il est extrêmement important, pour une prédiction fiable, de prendre ces conditions locales en compte afin d'estimer l'impact sur les structures et ouvrages d'arts environnants ainsi que pour leur construction.

Le progrès constant des architectures de calculs parallèles permet aujourd'hui de réaliser des simulations de la propagation des ondes sismiques dans des milieux géologiques complexes. Prendre en compte ces milieux réalistes a longtemps été une difficulté, puisque la vitesse de propagation des couches superficielles décroît rapidement à l'approche de la surface libre, ce qui implique que les maillages soient raffinés à ces endroits afin de fournir la précision attendue. Pour cela, beaucoup de techniques ont été proposées, par exemple modifier les matrices de masse pour prendre en compte les hétérogénéités dans les maillages [CKB10; MG15] ou encore la *hp*-adaptivité et l'utilisation de maillages non-conformes pour prendre en compte les variations drastiques de propriétés des milieux étudiés [Eti+10; Tag+12; Maz+13]. En plus de cela, la prise en compte de loi de comportement nonlinéaire est aujourd'hui une nécessité. La plupart des travaux s'étant intéressés à ces comportements sont établis pour des milieux 1D, voire 2D. Les méthodes volumes finis ont été proposées pour des lois de comportement de type polynomial par LEVEQUE [LeV02b] et MEURER et al. [MQJ02] qui a inclus un modèle d'hystérésis d'HODGDON [Hod88]. On retrouvera dans [Rég+16] une compilation des nombreux modèles numériques existants et utilisés dans le cadre de la propagation des ondes sismiques à travers des milieux complexes unidimensionnels et aux rhéologies nonlinéaires. On notera également des études, pionnières, considérant les cas 2D [GB14; GB12; Che+15] et 3D [Xu+03; TBR12]. Ces études sont pour la plupart basées sur la méthode classique des différences finies ou des éléments finis à bas ordre.

Les réponses dynamiques nonlinéaires des sols et roches ont largement été étudiées en laboratoire à partir des années soixante (voir [GJ09] pour une compilation). Ces expériences mettent également en exergue les comportements hystérétiques des sols et rochers soumis à des contraintes quasi-statiques et cycliques. C'est-à-dire qu'il y a une dépendance entre la loi de comportement et l'histoire subie par le matériaux [MS74; MG96]. Ces comportements, étant intrinsèques aux matériaux géomécaniques, nécessitent de les inclure dans les modèles numériques pour fournir des résultats précis et aussi exacts que possible. On distingue généralement trois indicateurs de comportements nonlinéaires. Premièrement, un décalage de la fréquence de résonance vers les basses fréquences, ce qui a été clairement observé

dans de nombreux échantillons de sol à travers des expériences unidimensionnelles [JR96 ; Naz+03] et sur des mesures *in-situ* [BW95 ; BW96 ; Pav02 ; Law+08 ; Cha+15] par exemple. Deuxièmement, une génération d'harmoniques induisant une amplification des hautes fréquences [Dou+93 ; MG96 ; Del+09 ; Rem+17]. Et troisièmement, l'amortissement hystérétique qui entraîne une diminution de l'amplitude de l'onde. Cette diminution est généralement attribuée à la présence de dislocations dans les métaux, de petites fissures ou aux contacts entre les grains des géomatériaux [MS74 ; WNG79 ; MG96 ; Naz+03].

Les simulations numériques peuvent permettre d'étudier ces phénomènes. Reproduire au mieux les effets de site et améliorer leur caractérisation nécessite des simulations numériques tridimensionnelles, puisque ceux-ci dépendent de la géométrie du milieu. Enfin, la réponse des sols variant en fonction de la sollicitation, il est également important d'inclure des lois de comportement nonlinéaires. On propose dans la section suivante, une vue d'ensemble sur les différents travaux concernant les méthodes numériques utilisées pour la propagations des ondes sismiques.

## 1.3 État de l'art des méthodes numériques pour la propagations des ondes sismiques

Une des premières méthodes à avoir été employée pour la simulation de la propagation des ondes sismiques dans le domaine temporel est sans doute la méthode des différences finies [AK68 ; Kel+76]. Cette méthode ainsi que les améliorations proposées — ordre élevé [Bay+86 ; Lev88] pour augmenter la précision ou encore des grilles en quinconce [Mad76 ; Vir86] pour réduire la dispersion, par exemple — amènent à des algorithmes relativement simples et efficaces. Cependant, leur inconvénient majeur est d'être limité à des grilles cartésiennes. La taille de la grille est donc contrainte par la vitesse minimale de tout le domaine ; ainsi des schémas basés sur des grilles irrégulières [Pit99] ou sur l'assemblage de grille discontinue [AF99 ; HBT01 ; KB04] ont vu le jour. Mais la prise en compte de la topographie du milieu reste toujours difficile. En effet, une des difficulté des méthodes par différences finies est d'implémenter la condition de surface libre avec la même précision numérique que l'intérieur du domaine [BS06]. C'est ainsi que, par exemple, MOCZO et al. [Moc+07] proposent une approche hybride où une méthode aux différences finies est utilisée dans tout le domaine, sauf au niveau de la topographie ou des discontinuités géologiques — failles ou fractures — où une approche éléments finis est employée.

Les méthodes basées sur une formulation variationnelle des équations prennent plus facilement la topographie en compte, mais aussi les hétérogénéités — puisque les grilles

cartésiennes impliquent une discrétisation en escalier. Parmi ces méthodes, on distingue deux classes : (1) celles qui imposent la continuité du champs solution entre les éléments voisins (méthodes des éléments finis (FE), méthodes des éléments finis spectraux (SE) par exemple) et (2) celles qui ne l'imposent pas (méthode des volumes finis (FV) et méthode des éléments finis Galerkin discontinue (DG), par exemple).

La méthode classique FE permet d'avoir des maillages adaptés à des géométries complexes [LD72; Bao+98]. Pour calculer la solution, une matrice de masse *globale* doit être inversée. Pour assurer la continuité de la solution entre les éléments, le support des fonctions de base est plus large que les éléments du maillage. Utiliser des fonctions de base d'ordre élevé implique un support de plus en plus large et par conséquent une matrice de masse plus difficile à inverser, puisque la matrice devient large bande. En pratique, la méthode classique FE est confinée à des ordres bas (un, voire deux) à cause de cette difficulté. Il est néanmoins possible de regrouper les termes de la matrice de masse pour en faire une matrice diagonale, suivant la méthode *mass lumping* et donc d'avoir une interpolation à ordre plus élevé, mais cette méthode introduit généralement de la dispersion numérique [HRZ76; Coh+01; DS07].

La méthode SE, utilisant les points d'interpolation de Legendre–Gauss–Lobato ainsi que les règles de quadrature associées permet d'avoir une convergence spectrale, au sens discret, de l'erreur. De plus, les fonctions de base utilisées (polynômes de Lagrange) sont orthogonales lorsque des quadrangles (2D) ou des hexaèdres (3D) sont utilisés, ce qui produit une matrice de masse diagonale et donc plus facilement inversible [Pat84]. Ainsi, la difficulté évoquée dans le cadre de la méthode FE est surmontée. Cependant, l'utilisation de quadrangles ou hexaèdres rend la construction du maillage plus complexe — d'un point de vue informatique et humain — lorsque, par exemple, des milieux hétérogènes sont considérés. Cette méthode a été appliquée au cas de la propagation d'ondes sismiques en milieu 2D et 3D [SP94; KV98]. En particulier, le code SPECFEM3D<sup>2</sup> permet la propagation d'ondes en milieu solide ou fluide pour des maillages conformes hexaédriques. On pourra également se référer, par exemple, à [Cha+07] pour obtenir une vue d'ensemble de l'application de la méthode SE à la propagation des ondes sismiques, ou plus récemment aux travaux 1D/2D d'ORAL et al. [Ora+17] pour une application à la propagation en milieux nonlinéaires avec prise en compte de la pression de pore.

Comme alternative à ces méthodes, il y a donc celles qui n'imposent pas la continuité de la solution aux interfaces entre les éléments, citons les volumes finis (FV) et la méthode éléments finis Galerkin discontinue (DG). Cela ouvre de nouvelles portes ; par exemple la possibilité d'utiliser des maillages non-conformes [HW08; BG12; Ant+12], des pas de

---

2. <https://geodynamics.org/cig/software/specfem3d/>

temps locaux [DKT07 ; HW08 ; Min+13] ou encore dans le cadre DG, des ordres d'interpolations locaux [DKT07 ; HW08 ; Eti+10 ; Viq15]. La méthode DG offre une grande liberté dans le choix des ordres d'interpolation ou du maillage (sur des quadrangles [Ant+15], des hexaèdres [You01 ; BG12] ou des tétraèdres [DK06 ; DFG09] par exemple. Ou même mixer les types d'éléments). Introduite, dans le domaine de la sismologie, par DORMY et TARANTOLA [DT95], la méthode des FV a ensuite été étendue à l'étude de la rupture par BENJEMAA et al. [Ben+09] dans un milieu tridimensionnel. Les FV classiques sont une approximation d'ordre zéro de la solution, c'est-à-dire qu'elle est constante par éléments. DUMBSER et al. [DKdlP07] proposent une extension à ordre élevé. La méthode DG peut également être vue comme une extension des FV à ordre élevé. Tout comme les éléments finis classiques, elle implique l'inversion d'une matrice de masse, à la différence près que celle-ci est maintenant *locale* à chaque élément et donc de petite taille, ce qui rend son inversion plus aisée. Sa taille ne dépend que de l'ordre d'interpolation local — et de la dimension du problème. De plus, comme nous le verrons dans la suite, la matrice de masse locale peut être calculée — et inversée — sur un élément de référence dans une étape préliminaire puis obtenue par une transformation adaptée à chaque élément du maillage. La continuité de la solution n'est plus imposée entre les éléments et par conséquent un *flux numérique* doit être défini, puisque la formulation variationnelle *locale* fait apparaître une intégrale du flux sur les bords des éléments. C'est ce flux qui va permettre l'échange d'informations entre les éléments voisins et donc la propagation de la solution. Que ce soit dans le cadre des FV ou DG, de nombreuses approches ont été proposées pour calculer le flux numérique en fonction des équations à résoudre [LeV02a ; Coc+00 ; HW08 ; KD06 ; Wil+10]. On notera également que la discontinuité implique une multiplication de valeurs possibles aux nœuds et faces du maillage et donc nécessite plus de mémoire que dans le cas des méthodes imposant la continuité de la solution. Enfin, la formulation locale de DG permet une parallélisation naturelle du code, en effet la seule information à faire communiquer entre des voisins qui seraient sur deux unités de calcul différentes est le flux numérique. Tout le reste se fait localement.

De nombreuses références sont disponibles sur la méthode DG appliquée à la propagation d'ondes sismiques. On citera, sans exhaustivité, de la PUENTE et al. [dlPue+07] et DELCOURTE et al. [DFG09]. On mentionnera également que la méthode DG a été couplée à la méthode ADER<sup>3</sup> pour le schéma temporel, de sorte à obtenir une précision élevée en temps et en espace [KD06 ; DK06]. Ces références ont en commun de s'être intéressées à des cas où la rhéologie est linéaire. Plus récemment, BOU MATAR et al. [Bou+12] ont appliqué la méthode DG au cas de la propagation dans un milieu nonlinéaire hétérogène avec des lois de comportement nonlinéaire élastique suivant un modèle polynomial.

---

3. *Arbitrary high-order DERivative.*



Enfin, la méthode considérant les discontinuités seulement à certaines interfaces et en utilisant une approche non conforme a été proposée par ANTONIETTI et al. [Ant+12]. Cette méthode, combinant DG et SE et que l'on appelle « Éléments Finis Spectraux Galerkin Discontinue » (DGSE) offre ainsi la flexibilité de la méthode DG, tout en ayant l'efficacité de la méthode SE. On trouvera une approche détaillée de la méthode dans [Ant+17]. Cette méthode a été appliquée à la propagation des ondes sismiques et en particulier on pourra se référer au code numérique SPEED [Maz+13].

## 1.4 Objectif et contribution

L'objectif général de cette thèse est de proposer l'utilisation de la méthode éléments finis Galerkin Discontinue pour l'étude de la propagation des ondes sismiques dans un milieu tridimensionnel et en prenant en compte une rhéologie nonlinéaire de type élastoplastique. Ce manuscrit est divisé en deux parties. Le premier chapitre de cette partie est consacré à la description des équations de propagation des ondes sismiques et des lois de comportement utilisées. En particulier, nous introduisons trois lois de comportement différentes : linéaire élastique, nonlinéaire élastique et élastoplastique. Le comportement élastoplastique est reproduit grâce au modèle de Masing-Prandtl-Ishlinskii-Iwan (MPII) [Iwa66 ; Iwa67 ; Joy75]. Nous nous intéressons également à la modélisation des sources sismiques. Dans un second chapitre, nous introduisons la méthode numérique éléments finis Galerkin Discontinue adaptée au contexte qui nous concerne. Nous présentons également les différentes méthodes d'approximation temporelles qui ont été implémentées. Les critères de taille de mailles et de conditions de type CFL sont discutés compte tenu des lois de comportement utilisées et de leur impact. La seconde partie est quant à elle dédiée aux applications numériques ; trois chapitres y sont dédiés. Dans le premier, nous nous intéressons à la propagation dans un milieu unidimensionnel d'une onde de cisaillement. Cela nous permet de vérifier certaines propriétés du schéma numérique et dans un cas particulier, d'obtenir une solution exacte avec une loi de comportement nonlinéaire. Nous effectuons ainsi une étude de convergence. Un second chapitre étudie la propagation d'une onde sismique dans un milieu unidimensionnel où trois composantes du mouvement sont prises en compte. Il y a donc ici la propagation verticale d'une onde ayant deux composantes en cisaillement et une en compression. Nous montrons que le principe de superposition n'est plus vérifié lorsqu'une loi de comportement nonlinéaire est utilisée. Pour cela, un signal synthétique et un signal réel sont propagés dans une colonne de sol aux propriétés réalistes. Ce chapitre est un premier pas vers un milieu tridimensionnel au sens où il impose la prise en compte d'ondes couplées et influence certains choix sur la méthode numérique utilisée. Enfin, le dernier chapitre est dédié aux applications dans un milieu tridimensionnel. Différentes applications



de vérification en milieux linéaires sont d'abord étudiées. Puis les effets nonlinéaires dans un mode propre d'un cube sont exhibés. Pour finir, la propagation d'une onde sismique dans un milieu réaliste composé d'un bassin hémisphérique à couches sédimentaires ayant un comportement élastoplastique est proposée. Une analyse de l'amplification des fréquences en fonction de la rhéologie utilisée est proposée. À travers ces différents chapitres, le coût algorithmique et temps de calcul nécessaire pour le modèle élastoplastique sont également étudiés. Une méthode permettant un gain significatif du temps de calcul est proposée.

Les travaux exposés dans ce manuscrit ont fait l'objet de deux articles scientifiques :

- S. CHABOT, N. GLINSKY, E. D. MERCERAT et L. F. BONILLA. « A high-order discontinuous Galerkin method for 1D wave propagation in a nonlinear heterogeneous medium ». In : *Journal of Computational Physics* 355.Supplement C (2018), p. 191-213 ;
- S. CHABOT, N. GLINSKY, E. D. MERCERAT et L. F. BONILLA. « A High-Order Discontinuous Galerkin Method for Coupled Wave Propagation in 1D Elastoplastic Heterogeneous Media ». en. In : *Journal of Theoretical and Computational Acoustics* 26.03 (août 2018), p. 1850043 ;

de deux communications orales en conférences internationales :

- *6th International Conference on Computational Methods in Structural Dynamics and Earthquake Engineering*, COMPDYN 2017 à Rhodes (Grèce) ;
- *13th International Conference on Theoretical and Computational Acoustics*, ICTCA 2017 à Vienne (Autriche) ;

et de deux présentations de poster :

- 8<sup>e</sup> Biennale du RAP<sup>4</sup>, 2016, Pointe-à-Pitre (Guadeloupe, France) ;
- « Assemblée Générale du GDR ONDES », Interférences d'ondes, 2017, Sophia-Antipolis (France).

---

4. Réseau Accélérométrique Permanent.

## **Première partie**

# Modélisation numérique de la propagation des ondes



# Équations du mouvement et modèles nonlinéaires

” ceiiinossttuv

— Robert H.

Scientifique pluridisciplinaire anglais, 1675

À un certain niveau de déformation, le comportement nonlinéaire des sols doit être pris en compte, puisque la réponse à une forte sollicitation peut radicalement changer par rapport à une sollicitation faible. La dépendance de la réponse du site étudié à l'intensité du mouvement est, dans la communauté « sismologique », conventionnellement appelée « *effets nonlinéaires* ». La mécanique sous-jacente est complexe mais peut généralement se découper en deux classes : (1) la prise en compte de la dégradation des propriétés du matériau, comme la réduction du module de cisaillement et (2) la prise en compte de l'évolution de la pression de pore — ou pression interstitielle — dans les sols saturés d'eau et qui peut générer de la liquéfaction dans les sols sableux. Nous nous plaçons dans le contexte (1) où seuls des sols secs sont considérés<sup>1</sup>. Dans ce cadre là, il existe également pléthore de modèles de loi de comportement différents. Généralement, ce qui distingue ces modèles est le nombre de paramètres nécessaires ; allant de un seul paramètre pour les plus simples, à plusieurs dizaines pour les plus complexes d'entre eux. On trouvera dans [Rég+16 ; Rég+18], une compilation de treize modèles élastoplastiques utilisés dans le domaine de la sismologie. Comme nous le verrons, dans ce manuscrit, nous nous sommes restreints aux modèles nonlinéaires à un seul paramètre. Avoir plus de paramètres permet de reproduire un plus grand nombre de chemins de chargement/déchargement, mais augmente également la difficulté de les calibrer correctement et donc l'incertitude sur le résultat final.

Ce chapitre a pour objectif d'introduire les équations qui seront utilisées pour modéliser la propagation des ondes dans un milieu continu. Il vise également à définir les termes et les modèles qui seront utilisés tout au long de ce manuscrit. En particulier, partant d'un milieu quelconque  $\Omega$ , nous définissons le tenseur des déformations et des contraintes. Puis, nous passons en revue les trois lois de comportement étudiées dans cette thèse : (1) la loi de

1. Pour une méthode numérique éléments finis spectraux, avec prise en compte de la pression de pore, on pourra, se référer — sans exhaustivité — aux travaux de PHAM [Pha13] ou encore d'ORAL et al. [Ora+17].

Hooke, (2) le modèle nonlinéaire élastique et (3) le modèle élastoplastique Masing-Prandtl-Ishlinskii-Iwan (MPII). Enfin, cela nous permet d'aboutir au système d'équations d'écrivant la propagation des ondes en 3D. Ce modèle est ensuite réduit au cas 1D, pour les premières applications.

## 2.1 Dérivations et hypothèses générales

### 2.1.1 Déformations

Nous considérons un point  $M_0$  de coordonnées  $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$  appartenant à l'instant initial  $t_0$  à un milieu continu  $\Omega_0$ . Après déformation de ce milieu devenu  $\Omega$ , le point  $M_0$  devient  $M$  de coordonnées  $\mathbf{x} = (x, y, z)$ . L'application  $f : \Omega_0 \mapsto \Omega$ , qui transforme  $\Omega_0$  en  $\Omega$ , qui est supposée suffisamment régulière<sup>2</sup> nous permet de définir la matrice Jacobienne de la transformation  $\mathbf{x}_0 \mapsto \mathbf{x}$  :

$$\underline{\mathbf{F}} = \nabla_{\mathbf{x}_0} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial x_0} & \frac{\partial x}{\partial y_0} & \frac{\partial x}{\partial z_0} \\ \frac{\partial y}{\partial x_0} & \frac{\partial y}{\partial y_0} & \frac{\partial y}{\partial z_0} \\ \frac{\partial z}{\partial x_0} & \frac{\partial z}{\partial y_0} & \frac{\partial z}{\partial z_0} \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

c'est-à-dire que nous avons  $\mathbf{dx} = \underline{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{dx}_0$ . En définissant le vecteur de déplacement  $\mathbf{u}$  comme  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{u}$ , le tenseur de déformation  $\underline{\mathbf{F}}$  peut alors s'écrire ainsi :

$$\underline{\mathbf{F}} = \mathbb{I} + \nabla_{\mathbf{x}_0} \mathbf{u}. \quad (2.2)$$

Considérons qu'un vecteur élémentaire  $\mathbf{dx}_0$  soit transformé en  $\mathbf{dx} = \underline{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{dx}_0$ , alors un élément de longueur  $dl_0 = \|\mathbf{dx}_0\|$  devient un élément de longueur  $dl$  tel que :

$$\begin{aligned} dl^2 &= \mathbf{dx} \cdot \mathbf{dx}, \\ &= \mathbf{dx}_0 \cdot \left( \underline{\mathbf{F}}^T \cdot \underline{\mathbf{F}} \right) \cdot \mathbf{dx}_0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

L'écart entre les deux longueurs, avant et après déformation est ainsi défini :

$$dl^2 - dl_0^2 = \mathbf{dx}_0 \cdot \underbrace{\left( \underline{\mathbf{F}}^T \cdot \underline{\mathbf{F}} - \mathbb{I} \right)}_{2\underline{\mathbf{E}}} \cdot \mathbf{dx}_0. \quad (2.4)$$

2. Un point ne se téléporte pas, la transformation est donc continue et dérivable.

Cette formulation fait apparaître un nouveau tenseur  $\underline{\mathbf{E}}$ , appelé tenseur des déformations de Green–Lagrange :

$$\underline{\mathbf{E}} = \frac{1}{2} \left( \underline{\mathbf{F}}^T \cdot \underline{\mathbf{F}} - \mathbb{I} \right). \quad (2.5)$$

En fonction du déplacement  $\mathbf{u}$ , ce tenseur s'écrit comme :

$$\underline{\mathbf{E}} = \frac{1}{2} \left( \nabla_{x_0} \mathbf{u} + \nabla_{x_0} \mathbf{u}^T \right) + \frac{1}{2} \nabla_{x_0} \mathbf{u}^T \cdot \nabla_{x_0} \mathbf{u}. \quad (2.6)$$

Dans le cadre de la propagation des ondes sismiques, même lors de séismes très forts, les déformations des sols vont rarement au delà de quelques pourcents [Ish96]. Ainsi, dans la suite de ce manuscrit nous nous placerons dans le cas dit des « *petites déformations* » où les termes d'ordre 2 du tenseur des déformations sont négligés, de telle sorte que nous avons :

$$\underline{\mathbf{E}} \approx \underline{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \left( \nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T \right). \quad (2.7)$$

On observera que, par construction, le tenseur des déformations est symétrique.

## 2.1.2 Contraintes

L'hypothèse est faite que le milieu  $\Omega$  est continu ; dans le sens où nous supposons qu'il n'existe pas d'échelle en deçà de laquelle il peut être discret. Autrement dit, les efforts  $\mathbf{f}$  appliqués sur surface élémentaire  $\Delta S$  appartenant à  $\Omega$  s'y répartissent uniformément. Ainsi, on a :

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{f}}{\Delta S} = \mathbf{T}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}). \quad (2.8)$$

On appellera  $\mathbf{T}$  le vecteur contrainte, défini au point  $\mathbf{x}$ , à l'instant  $t$ , lié à la normale  $\mathbf{n}$ . L'existence de ce vecteur contrainte est le principe d'Euler-Cauchy. Ce vecteur est relatif au point  $\mathbf{x}$  considéré et à l'orientation de la normale en ce point. Le théorème de Cauchy affirme que les composantes du vecteur contrainte en un point  $\mathbf{x}$  sur une facette de normale  $\mathbf{n}$  dépendent *linéairement* des composantes de cette normale. Ce qui permet d'écrire la relation suivante<sup>3</sup> :

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) &= \sum_{i=1}^3 \mathbf{T}(\mathbf{x}, t, \mathbf{e}_i) n_i \\ &= \underline{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} \end{aligned} \quad (2.9)$$

où  $\underline{\boldsymbol{\sigma}}$  est un tenseur d'ordre 2, appelé *tenseur des contraintes*. Ce tenseur est indépendant de la normale  $\mathbf{n}$ . La contribution  $\sigma_{ij}$  s'exerce dans la direction  $\mathbf{e}_i$  sur la face de normale  $\mathbf{e}_j$ .

3. La  $j$ -ième composante du vecteur  $\mathbf{e}_i$ , notée  $e_{ij}$  est égale à  $\delta_{ij}$ .

L'équilibre des forces et des moments permet de montrer que le tenseur des contraintes est symétrique :  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ , quel que soit le repère considéré, ainsi seules six composantes sont indépendantes. Elles sont, de plus, réelles. On en déduit que  $\underline{\sigma}$  est diagonalisable, que ces valeurs propres  $\sigma_I$ ,  $\sigma_{II}$  et  $\sigma_{III}$  sont réelles et que les vecteurs propres sont orthogonaux. Le repère formé par ces vecteurs propres est appelé *repère de l'espace des contraintes principales* ou *repère principal*. Les quantités  $\sigma_I$ ,  $\sigma_{II}$  et  $\sigma_{III}$  sont appelées *contraintes principales*. Le repère principal et les contraintes principales sont indépendantes du repère utilisé pour décrire  $\underline{\sigma}$ , mais dépendent du point  $x$  considéré.

## 2.2 Différentes lois de comportement

Un milieu continu est défini par les six contraintes  $\sigma_{ij}$  et les trois déplacements  $u_i$  qu'il y a en chacun de ses points. Trois des neuf inconnues sont obtenues par la relation fondamentale de la dynamique ; six autres doivent être données pour fermer le problème. Ces six relations dépendent du matériau étudié, de ses propriétés intrinsèques et des effets qui lui sont appliqués. Ces relations sont appelées *lois de comportement*. Trois principes doivent être respectés :

**Causalité** la contrainte à l'instant  $t$  est déterminée par l'histoire du matériau.

**Objectivité** la loi de comportement est une propriété intrinsèque du matériau et ne dépend pas d'un observateur.

**Localisation spatiale** la contrainte ne dépend que de fonctions définies dans un voisinage arbitraire du point matériel considéré et de sa trajectoire.

### 2.2.1 Modèle linéaire élastique

Un milieu est élastique, ou a un comportement élastique, s'il existe un état naturel — dans lequel la contrainte et la déformation sont nulles — auquel il revient si les forces appliquées sont supprimées.

La loi de HOOKE [Hoo78] est utilisée pour définir la relation entre la contrainte et la déformation dans le cas linéaire élastique. C'est une relation *linéaire* telle que  $\underline{\varepsilon} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \underline{\sigma} = \mathbf{0}$ , qui traduit le fait que la contrainte est proportionnelle à la déformation<sup>4</sup>. C'est-à-dire que nous avons :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{ij}, \quad (2.10)$$

4. "That is, the Power of any Spring is in the same proportion of the tension thereof: That is one power stretch or bend it one space, two will bend it two, and three will bend it three, and so forward." — Hooke [Hoo78].

soit 81 paramètres  $C_{ijkl}$ . Compte tenu des symétries des tenseurs des contraintes et de déformations, nous avons  $C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk}$ , soit 36 composantes indépendantes. De fait, en notant  $\underline{\sigma}$  et  $\underline{\varepsilon}$  sous forme vectorielle :

$$\underline{\sigma} = (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}) \quad \underline{\varepsilon} = (\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{xz}, \varepsilon_{yz}) \quad (2.11)$$

on peut alors écrire  $\underline{\sigma} = \underline{C} \cdot \underline{\varepsilon}$  où  $\underline{C}$  est une matrice  $6 \times 6$ . Il peut également être montré en utilisant un argument de thermodynamique que ce tenseur vérifie  $C_{ijkl} = C_{klij}$ , c'est-à-dire que  $\underline{C}$  doit être symétrique. Autrement dit, nous arrivons à *seulement* 21 paramètres. Ces 21 paramètres permettent de décrire les milieux élastiques anisotropes, c'est-à-dire où les propriétés sont différentes selon les directions (matériaux composites par exemple).

Dans le cas des sols, nous supposons généralement que les matériaux sont isotropes, c'est-à-dire ayant les mêmes propriétés dans toutes les directions. De fait, le tenseur  $\underline{C}$  ne dépend plus seulement que de deux constantes indépendantes  $\lambda$  et  $\mu$ , appelées *constantes de Lamé*. Le tenseur est défini comme :

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{il} \delta_{jk}). \quad (2.12)$$

La loi de Hooke isotrope s'écrit donc ainsi :

$$\sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda \delta_{ij} \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{kk}. \quad (2.13)$$

La formulation totale du tenseur  $\underline{C}$  est donnée par :

$$\underline{C} = \frac{E}{1+\nu} \left( \begin{array}{ccc|ccc} \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & & & \\ \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & & & \\ \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & & & \\ \hline & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 1 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad (2.14)$$

où  $E$  et  $\nu$  sont respectivement le module de Young et le coefficient de Poisson. On a :

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}. \quad (2.15)$$



L'inverse de  $\underline{C}$ , appelé *tenseur des souplesses* ou *des complaisances élastique* est donné par :

$$\underline{C}^{-1} = \frac{1}{E} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\nu & -\nu & & & \\ -\nu & 1 & -\nu & & & \\ -\nu & -\nu & 1 & & & \\ \hline & & & 0_{3,3} & & \\ & & & (1+\nu) & 0 & 0 \\ & & & 0 & (1+\nu) & 0 \\ & & & 0 & 0 & (1+\nu) \end{array} \right) \quad (2.16)$$

## 2.2.2 Modèle nonlinéaire élastique

On considère ici un milieu unidimensionnel. On suppose que la relation entre la contrainte et la déformation peut s'écrire ainsi :

$$\sigma(\varepsilon, x) = 2\mu_{\max}(x)g(\varepsilon, x)\varepsilon \quad (2.17)$$

où  $\mu_{\max}(x)$  est le coefficient de Lamé,  $g(\varepsilon, x)$  est une fonction de réduction du module de cisaillement, c'est-à-dire de la forme  $g(\varepsilon, x) = \mu(\varepsilon, x)/\mu_{\max}(x)$ . La dépendance spatio-temporelle de la déformation a été omise pour simplifier la lecture. La fonction  $g$  peut avoir diverses formes en fonction du contexte. Ainsi, dans le cas de propagation d'ondes dans les roches, un polynôme est généralement utilisé [GJ09; Van+01]. Par exemple, HOKSTAD [Hok04] utilise un polynôme d'ordre trois pour la relation entre la contrainte et la déformation dans le cas de la propagation d'une onde acoustique dans un milieu nonlinéaire dispersif. En mécanique des sols, il est courant d'utiliser un modèle hyperbolique avec différents paramètres, comme introduits par HARDIN et DRNEVICH [HD72] et revisités par DARENDELI [Dar01]. Dans ce manuscrit, on utilise principalement le modèle hyperbolique avec un seul paramètre  $\gamma_{\text{ref}}$  qui s'écrit ainsi :

$$g(\varepsilon, x) = \frac{1}{1 + \frac{|2\varepsilon|}{\gamma_{\text{ref}}(x)}} \quad (2.18)$$

où  $\gamma_{\text{ref}}$  est la déformation de cisaillement de référence. Il est défini comme la valeur de la déformation qui correspond à une réduction du coefficient de Lamé par un facteur deux ; c'est-à-dire  $g(\gamma_{\text{ref}}/2, x) = \frac{1}{2}$ . Un milieu dont le comportement est décrit par l'équation (2.17) est dit *nonlinéaire élastique*, dans le sens où  $\varepsilon = \mathbf{0} \Leftrightarrow \sigma = \mathbf{0}$ .

**Remarque.** Dans le cas où  $\gamma_{\text{ref}} = \infty$ , on retrouve le cas linéaire décrit plus haut.

### 2.2.3 Modèle nonlinéaire élastoplastique

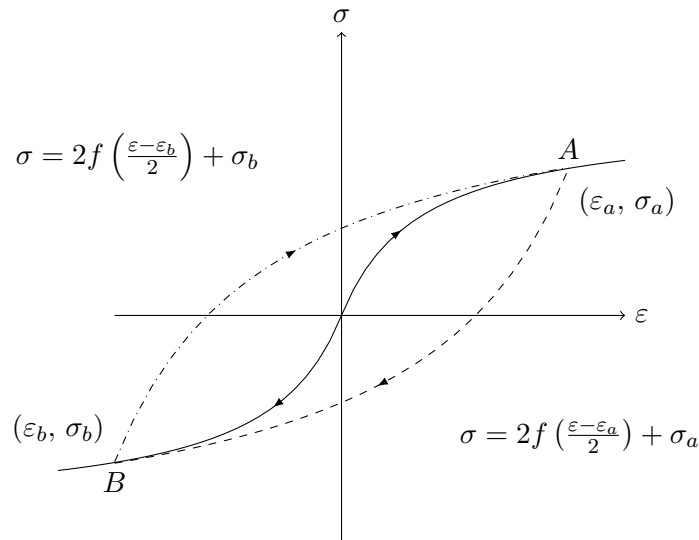
Nous présentons ici deux modèles élastoplastiques. Un premier qui permet à partir de considération géométrique de reproduire les relations contrainte-déformations observées en laboratoire. Et un second, basé sur la théorie de la plasticité incrémentale.

#### Lois de Masing

Les essais en laboratoire montrent que la relation contrainte-déformation pour un échantillon donné, soumis à un cycle de chargements/déchargements, ne suit pas simplement un chemin nonlinéaire élastique tel que décrit ci-dessus, mais forme plutôt des boucles d'hystérésis, qui différencient les chargements des déchargements. Cela peut phénoménologiquement être modélisé par les règles de MASING [Mas26]. Si l'on considère que la courbe de chargement initial s'écrit  $\sigma(\varepsilon) = f(\varepsilon)$ , les règles de Masing stipulent alors que dès qu'un point de renversement  $(\varepsilon_r, \sigma_r)$  apparaît — i.e.  $\partial_t \varepsilon$  est nul — la contrainte s'écrit sous la forme suivante :

$$\sigma(\varepsilon) = 2f\left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_r}{2}\right) + \sigma_r. \quad (2.19)$$

Cette relation est schématisée par la Figure 2.1.



**Figure 2.1.:** Courbe contrainte/déformation avec hystérésis en utilisant les règles de Masing. La courbe en trait plein représente la courbe de chargement initial  $\sigma(\varepsilon) = f(\varepsilon)$ . La courbe en pointillés représente la boucle formée par l'application des règles de Masing. Les points  $A$  et  $B$  sont les points où le renversement de chargement a lieu.

La présence de boucles d'hystérésis implique un amortissement, qui est lui aussi également mesuré en laboratoire. Plus la déformation est grande et plus l'amortissement l'est aussi ;

il est lié à la surface de la boucle d'hystérésis. Lorsque la formule de Masing est utilisée, l'amortissement peut s'exprimer à l'aide de la formule analytique suivante [IYT85] :

$$\zeta(\gamma) = \frac{4}{\pi} \left(1 + \frac{\gamma_{\text{ref}}}{\gamma}\right) \left[1 - \frac{\gamma_{\text{ref}}}{\gamma} \ln \left(1 + \frac{\gamma}{\gamma_{\text{ref}}}\right)\right] - \frac{2}{\pi}, \quad (2.20)$$

qui tends vers  $\frac{2}{\pi}$  lorsque la déformation tends vers l'infini. Cette valeur est élevée par rapport à ce qui est mesuré en laboratoire sur des échantillons de sol [IYT85 ; PH09 ; ALK11 ; GB12] Ainsi, différentes techniques ont été développées pour essayer de contrôler la valeur maximale observée. Cependant, pour des déformations faibles de l'ordre de quelques pourcents, le modèle hyperbolique avec les règles de Masing offre des valeurs d'amortissement satisfaisantes, par conséquent nous l'utiliserons pour sa simplicité.

Ce modèle fonctionne uniquement dans le cas 1D.

### Modèle de Masing-Prandtl-Ishlinskii-Iwan (MPII)

Dans la théorie de la plasticité incrémentale, la déformation totale est classiquement décomposée en deux parties : une partie élastique et une partie plastique. Alors que la partie élastique est entièrement déterminée par la relation linéaire de Hooke, la partie plastique doit être définie par un critère de rupture, une loi de durcissement et une règle d'écoulement. Le critère de rupture est généralement représenté par une surface de rupture  $F(\boldsymbol{\sigma}) = 0$  dans l'espace des contraintes, la loi de durcissement explicite comment ces surfaces changent en taille et en forme lors de la rupture et la règle d'écoulement décrit comment la déformation plastique évolue durant la rupture :  $\dot{\epsilon}_{p_{ij}} \propto \partial g / \partial \sigma_{ij}$ , pour un potentiel plastique  $g$  arbitraire [Lub08]. Lorsque  $F = g$ , la règle d'écoulement est associative.

Dans ce contexte, nous choisissons le modèle de Masing-Prandtl-Ishlinskii-Iwan (MPII), déjà adopté dans différents travaux sur la propagation des ondes en milieu nonlinéaire pour les études des effets de site. Ce modèle est utilisé pour représenter le comportement de n'importe quel matériau dont les boucles d'hystérésis satisfassent les règles de Masing [Joy75 ; Gan11 ; SLS12 ; Pha13 ; Ora+17 ; Cha+18a]. Le modèle élastoplastique MPII est basé sur une série imbriquée de surfaces de ruptures définies par des *éléments d'Iwan* unitaires, chacun d'entre eux consistant en un ressort élastique (linéaire) et un patin glissant (parfaitement plastique). Ces éléments peuvent être arrangés en une configuration parallèle-série ou série-parallèle. La seconde est mieux adaptée à une formulation permettant de séparer les incréments élastiques et les incréments plastiques. Pour plus de détails sur la théorie, on pourra se référer aux articles fondateurs [Iwa66 ; Iwa67 ; SS08]. Les paramètres du modèle, c'est-à-dire la raideur et la contrainte de rupture pour chaque élément, nécessitent

seulement la courbe de réduction du module de cisaillement en fonction de la déformation en cisaillement, ce qui peut être directement obtenu depuis des essais en laboratoire, ou depuis la littérature en fonction des types de sols [VD91 ; IZ93 ; Dar01].

**Remarque.** On notera que ce modèle dépend seulement de l'histoire de la déformation, mais pas du taux de déformation, par conséquent tout l'amortissement provient seulement de l'hystérésis. Nous verrons dans la section 5.3 qu'un terme d'amortissement visqueux simple peut être ajouté au système d'équations pour prendre en compte l'amortissement à faible déformation.

La suite de cette section est dédiée aux explications sur le modèle MPII. Pour simplifier les expressions qui vont suivre, on note :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{xz}, \varepsilon_{yz}) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6), \quad (2.21)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}) = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6). \quad (2.22)$$

L'incrément total de déformation  $d\boldsymbol{\varepsilon}$  est décomposé en sa partie élastique  $d\boldsymbol{\varepsilon}_v$  et sa partie plastique  $d\boldsymbol{\varepsilon}_p$  tel que  $d\boldsymbol{\varepsilon} = d\boldsymbol{\varepsilon}_v + d\boldsymbol{\varepsilon}_p$ . La relation entre l'incrément de la contrainte moyenne —  $\sigma_M = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$  — et la déformation volumique —  $\varepsilon_v = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$  — est linéaire et s'écrit :

$$d\varepsilon_v = d\sigma_M/K, \quad d\boldsymbol{\varepsilon}_v = (d\varepsilon_v, d\varepsilon_v, d\varepsilon_v, 0, 0, 0) \quad (2.23)$$

où  $K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$  est le module d'élasticité du milieu considéré et qui est indépendant de la déformation.

Considérons la partie déviatorique de la contrainte et de la déformation représentées par un vecteur de dimension six par  $s_i$  et  $e_i$ , respectivement. C'est-à-dire :

$$e_i = \begin{cases} \varepsilon_i - \varepsilon_v/3 & \text{si } i \in \{1, 2, 3\}, \\ \varepsilon_i & \text{sinon.} \end{cases} \quad s_i = \begin{cases} \sigma_i - \sigma_M & \text{si } i \in \{1, 2, 3\}, \\ \sigma_i & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.24)$$

Ensuite, on se donne une famille de surfaces de ruptures imbriquées, définie par :

$$F_n(\mathbf{s}, \boldsymbol{\alpha}^n) = k_n^2, \quad (2.25)$$

où  $k_n$  est une constante, associée à la  $n$ -ième surface de rupture, obtenue à partir de données laboratoire, comme cela sera montré peu après. Enfin,  $\boldsymbol{\alpha}^n$  correspond au « centre » de la surface considérée.

Par exemple, en utilisant le critère de rupture de Von Mises, la fonction décrivant la  $n$ -ième surface et sa dérivée partielle en fonction de  $s_i$  sont :

$$F_n(\mathbf{s}, \boldsymbol{\alpha}^n) = \frac{1}{2} \left( (s_1 - \alpha_1^n)^2 + (s_2 - \alpha_2^n)^2 + (s_3 - \alpha_3^n)^2 \right. \\ \left. + 2(s_4 - \alpha_4^n)^2 + 2(s_5 - \alpha_5^n)^2 + 2(s_6 - \alpha_6^n)^2 \right) \quad (2.26)$$

et

$$\frac{\partial F_n(\mathbf{s}, \boldsymbol{\alpha}^n)}{\partial s_i} = \begin{cases} (s_i - \alpha_i^n) & \text{si } i \in \{1, 2, 3\}, \\ 2(s_i - \alpha_i^n) & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.27)$$

où  $\alpha_i^n$  représente les coordonnées du centre de la  $n$ -ième surface. Ensuite, en utilisant la configuration *série/parallèle* du modèle d'Iwan, nous pouvons écrire la partie déviatorique de la contrainte comme la somme des contributions élastiques et plastiques :

$$\mathbf{d}\mathbf{e} = \left( \frac{1}{2G_0} \mathbf{I}_6 + \underline{\mathbf{A}} \right) \mathbf{d}\mathbf{s}, \quad (2.28)$$

où  $G_0$  est le module de cisaillement à faible déformation (i.e. le coefficient  $\mu$  de Lamé),  $\mathbf{I}_6$  est la matrice identité et où les  $(\underline{\mathbf{A}})_{ij}$  sont définis par :

$$(\underline{\mathbf{A}})_{ij} = \sum_{n=1}^N \frac{L_n (\partial F_n(\mathbf{s}) / \partial s_i) (\partial F_n(\mathbf{s}) / \partial s_j)}{C_n \sum_{k=1}^6 (\partial F_n(\mathbf{s}) / \partial s_k)^2}, \quad (2.29)$$

où  $L_n$  est l'indice d'activité de la  $n$ -ième surface, égal à zéro lorsque la surface est inactive et égal à un lorsqu'elle est active.  $C_n$  est une autre constante, associée à la  $n$ -ième surface, que nous définirons un plus plus loin.

La  $n$ -ième surface est active si :

$$F_n(\mathbf{s}, \boldsymbol{\alpha}^n) = k_n^2 \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^6 \frac{\partial F_n(\mathbf{s}, \boldsymbol{\alpha}^n)}{\partial s_k} \mathbf{d}s_k \geq 0, \quad (2.30)$$

et donc  $L_n = 1$  et inactive sinon ( $L_n = 0$ ). Numériquement, il est utile de remarquer que si la  $i$ -ième surface est inactive, alors toutes les surfaces suivantes le seront aussi. Comme la valeur de  $\mathbf{d}s_k$  n'est pas encore connue, l'évaluation (2.30) est faite en utilisant la valeur de  $\mathbf{d}s_k$  calculée au pas de temps précédent ; cela se fait sans impact sur la solution [JC75].

Ensuite, le système (2.28) doit être résolu pour calculer  $\mathbf{d}\mathbf{s}$  en fonction de  $\mathbf{d}\mathbf{e}$ . C'est un système de six équations à six inconnues. Les incréments de contrainte  $\mathbf{d}s_i$  sont obtenus par élimination Gaussienne.

À chaque pas de temps, si la  $n$ -ième surface a été activée (i.e.  $L_n = 1$ ), alors son centre doit être ajusté tel que :

$$\alpha_i^n := s_i - \frac{k_n}{\sqrt{F_n(\mathbf{s})}} (s_i - \alpha_i^n). \quad (2.31)$$

Cette équation permet de mettre à jour les centres des hypersphères actives tout en maintenant la coïncidence du point de contrainte courant avec les surfaces qui sont en train de glisser.

Une fois que les incréments de contraintes déviatoriques ont été déterminés et que les centres ont été mis à jour, les incréments de contraintes sont calculés par :

$$d\sigma_i = ds_i + \begin{cases} ds_M & \text{si } i \in \{1, 2, 3\} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.32)$$

Finalement, la contrainte est mise à jour :

$$\boldsymbol{\sigma} := \boldsymbol{\sigma} + d\boldsymbol{\sigma}. \quad (2.33)$$

Le dernier point concerne la détermination des constantes  $k_n$  et  $C_n$ , pour chaque surface de rupture  $n$ , en considérant le comportement du système dans le cas d'un cisaillement simple (c'est-à-dire que les seules composantes non-nulles, sans perte de généralité, sont  $s_4$  et  $e_4$ ). Le paramètre  $k_n$  représente la limite d'élasticité, en cisaillement simple, pour la  $n$ -ième surface de rupture. Un ensemble de valeurs  $k_n$  est choisi de sorte à couvrir la totalité de la zone d'intérêt de la courbe de chargement initial. Un ensemble  $e_k$ , ( $k = 1, N$ ) est associé à ces valeurs. Dans le cas d'un cisaillement simple, choisissons par exemple la composante  $xz$ , ce qui donne :

$$de_4 = \frac{ds_4}{2G_0} + (\mathbf{A})_{44} ds_4 \quad (2.34)$$

$$= \left( \frac{1}{2G_0} + \sum_{n=1}^j \frac{1}{C_n} \right) ds_4, \quad (2.35)$$

où  $j$  est l'indice de la dernière surface active. En notant  $de_4 = e_{j+1} - e_j$  et  $ds_4 = k_{j+1} - k_j$ , on obtient la relation de récurrence suivante :

$$\frac{1}{C_j} = \frac{e_{j+1} - e_j}{k_{j+1} - k_j} - \frac{1}{2G_0} - \sum_{n=1}^{j-1} \frac{1}{C_n}. \quad (2.36)$$

Plusieurs études ont montré que  $N = 50$  surfaces de rupture était satisfaisant [Mer+16; Ora+17], tant en terme d'efficacité que de précision. Dans ces études, les surfaces de

ruptures sont uniformément distribuées en fonction de  $\log(\gamma)$ . Sauf mention contrainte, nous utiliserons également 50 surfaces uniformément distribuées. Ce choix sera discuté dans la sous-section 2.2.4 p. 26.

**Illustration du modèle MPII 3D** On se propose dans ce paragraphe de donner quelques représentations graphiques pour illustrer le modèle qui vient d'être décrit.

Le critère de plasticité de Von Mises décrit une hypersphère de centre  $\alpha^n$ . Dans le repère des contraintes principales, il correspond à l'équation d'un cylindre de rayon  $\sqrt{2}k_n$  et dont les coordonnées des points de l'axe de révolution vérifient :

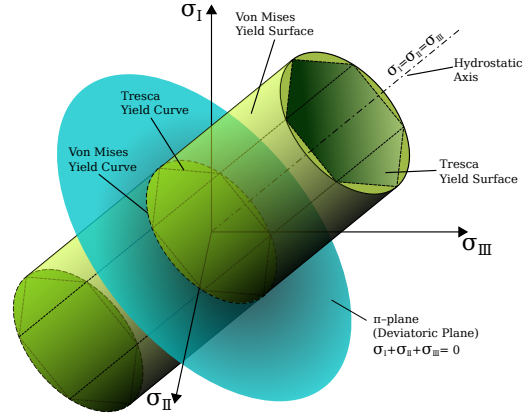
$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ c \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall c \in \mathbb{R}, \quad (2.37)$$

tel que l'illustre la Figure 2.2, où  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ . Ainsi, dans le modèle MPII, chaque surface  $F_n$  correspond à un cylindre dont le rayon est déterminé par  $k_n$ ; tous ces cylindres sont, à l'état initial, concentriques. Lorsqu'une déformation est appliquée, on vérifie pour chaque surface lesquelles sont actives. Cela nous permet de calculer l'incrément de contrainte en fonction de l'incrément de déformation (cf. équation (2.28)). Puis, en fonction de l'histoire subie par le matériau, les centres des hypersphères actives sont mis à jour.

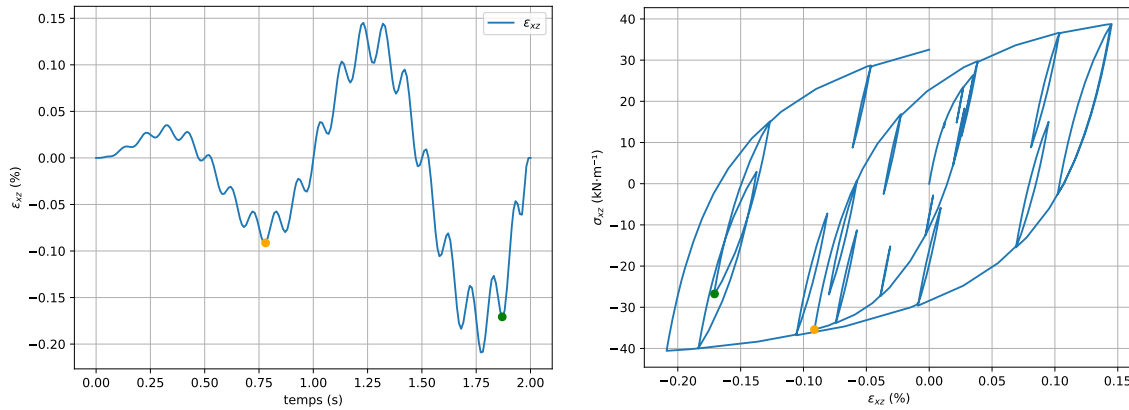
Le fait que les surfaces de rupture, dans l'espace des contraintes principales, soient des cylindres dont l'axe de révolution vérifie (2.37), implique que ces surfaces forment des cercles de rayon  $\sqrt{2}k_n$  et de centre  $(\alpha_x^n, \alpha_y^n)$  en projection isométrique, avec :

$$\begin{pmatrix} \alpha_x^n \\ \alpha_y^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} (\alpha_1 - \alpha_2) \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \alpha_2 - \frac{1}{\sqrt{6}} (\alpha_1 + \alpha_2) \end{pmatrix}. \quad (2.38)$$

Nous illustrons cela à travers la Figure 2.4. Nous considérons une déformation à appliquer (Figure 2.3a) et nous observons l'effet sur les surfaces de rupture du modèle. La courbe de réduction de module de cisaillement suit une loi hyperbolique avec  $\gamma_{\text{ref}} = 3 \times 10^{-4}$ . Nous utilisons ici un modèle à  $N = 50$  surfaces de rupture, ce qui correspond donc à l'instant



**Figure 2.2.:** Une surface de rupture vérifiant le critère de Von Mises correspond à un cylindre dans l'espace des contraintes principales. Schéma réalisté par Rswarbrick, publié sous licence CC-BY-SA-3.0 via Wikimedia Commons.



(a) Trace de la déformation sur la composante  $\varepsilon_{xz}$ . Les autres composantes sont nulles. (b) Contrainte en fonction de la déformation.

**Figure 2.3.:** Calcul de la contrainte par le modèle MPII.

initial, dans l'espace des contraintes principales, avec une projection isométrique — cf Figure 2.4a et Équation (2.38) — à cinquante cercles concentriques. La déformation est incrémentalement appliquée en suivant la méthode décrite précédemment. Les Figures 2.4b et 2.4c rendent compte de l'état des surfaces aux instants  $t = 0.78$  s et  $t = 1.87$  s, matérialisés par un point orange et un point vert, respectivement, sur la Figure 2.3a. À l'instant où les surfaces de rupture sont observées, seules celles dont le contour est rouge sont actives ( $L_n = 1$ ). On constate sur la dernière figure que certaines surfaces qui ont bougé sont maintenant fixes ; elles ne se déplaceront que si le point de contrainte vient « toucher » leur contour.

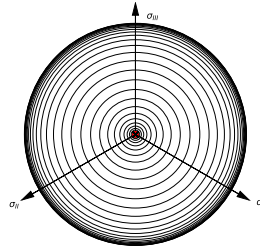
**Remarque (Vocabulaire).** Dans ce manuscrit, nous utiliserons le vocabulaire suivant :

**Modèle linéaire élastique** lorsque la loi de Hooke est utilisée (cf sous-section 2.2.1) ;

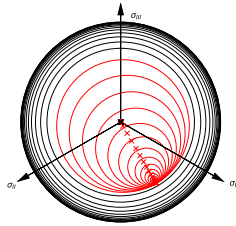
**Modèle nonlinéaire élastique** lorsque le modèle hyperbolique est utilisé (cf sous-section 2.2.2) ;

**Modèle nonlinéaire élastoplastique** lorsque le modèle hyperbolique avec les lois de Masing ou le modèle MPII sont utilisés (cf sous-section 2.2.3). Dans toutes les simulations 1D élastoplastique, les règles de Masing sont utilisées. Dans toutes les simulations 1D-3C ou 3D élastoplastiques le modèle MPII est utilisé.

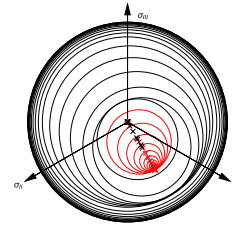




(a) Surfaces de rupture à l'état initial. Tous les cercles sont concentriques.



(b) Surfaces de ruptures à  $t = 0.78$  s. (Point vert sur la Figure 2.3a.)



(c) Surfaces de ruptures à  $t = 1.87$  s. (Point rouge sur la Figure 2.3a.)

**Figure 2.4.:** Évolution de la position des surfaces de ruptures en fonction du chargement. Les surfaces actives sont représentées en rouge. Les surfaces de ruptures sont représentées dans l'espace des contraintes principales, avec une projection isométrique.

## 2.2.4 Complexité algorithmique des modèles nonlinéaires étudiés

Le temps de calcul a longtemps été — et est toujours — un frein aux simulations nonlinéaires. Nous proposons dans ce paragraphe une analyse du temps de calcul d'une *appel* à la fonction de la loi de comportement utilisée. On s'intéresse plus particulièrement au cas du modèle MPII. En effet, que ce soit avec le modèle linéaire élastique, nonlinéaire élastique ou encore avec le modèle nonlinéaire élastoplastique 1D en utilisant les règles de Masing, le temps de calcul d'une simulation est proportionnel au temps simulé du phénomène — si une simulation de 10 s nécessite 12 min, le même cas test calculé jusqu'à 20 s nécessitera 24 min. Le temps de calcul de la contrainte par rapport à la déformation ne dépend pas de la valeur de la déformation mais uniquement des opérations mathématiques à effectuer ; la complexité algorithmique de ce modèle est de l'ordre de  $\mathcal{O}(1)$  par rapport à la déformation.

En revanche, le modèle MPII est une procédure itérative dans laquelle une série d'hypersurfaces sont imbriquées. Pour chacune de ces hypersurfaces on vérifie une à une lesquelles sont actives, ce qui nous permet ensuite de calculer la contrainte par rapport à la déformation. Le coût global de cet algorithme est directement proportionnel au nombre d'hypersurfaces actives ; on pourra observer la construction de la matrice  $\underline{A}$  dans l'expres-

sion (2.29) pour s'en convaincre. La complexité algorithmique de ce modèle est de l'ordre de  $\mathcal{O}(AS(\varepsilon))$  où  $AS(\varepsilon)$  représente le nombre de surfaces actives nécessaires pour parvenir à une déformation  $\varepsilon$ . Il convient donc de disposer ces surfaces convenablement de sorte à bien échantillonner la courbe de  $G/G_{\max}$  (ou de manière équivalente à la courbe de premier chargement).

Il est d'usage dans la littérature d'utiliser, pour le modèle MPII,  $N = 50$  hypersurfaces, logarithmiquement espacées [Joy75 ; Pha13 ; Mer+16 ; Ora+17]. La Figure 2.5a illustre l'échantillonnage d'une courbe de réduction du module de cisaillement suivant un modèle hyperbolique avec  $\gamma_{\text{ref}} = 10^{-3}$ , selon cette procédure<sup>5</sup>. On constate tout d'abord que jusqu'à  $\gamma = 3 \times 10^{-6}$ , la réduction est quasiment nulle, alors que déjà sept surfaces ont été parcourues. Étant donnée la faible pente, quelques éléments auraient pu suffire. Inversement, lorsque la courbure augmente, plus de points auraient pu être utilisés afin de mieux suivre la pente. La Figure 2.5b représente un échantillonnage réalisé avec le même nombre d'éléments, mais cette fois-ci en suivant la pente de la courbe. Cet échantillonnage suit une procédure proposée par NISHIKAWA [Nis98] pour l'approximation linéaire des courbes 1D ; nous l'appellerons « *échantillonnage automatique* », par opposition à la méthode d'« *échantillonnage logarithmique* ».

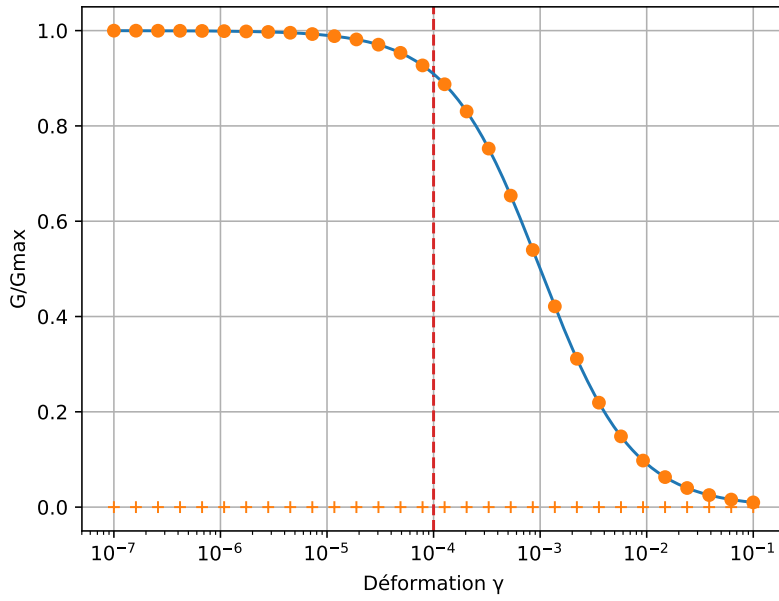
La procédure d'échantillonnage automatique vise à placer, suivant la courbure de la fonction à échantillonner, autant de points que nécessaire pour parvenir à approximer par morceaux linéaires la fonction tout en ayant une erreur inférieure à un critère donné. Cette erreur, notée  $\mathcal{E}$ , est égale, pour une fonction quadratique, à l'erreur  $L_2$  de l'approximation réalisée. On peut ainsi choisir entre deux options :

1. se fixer une erreur  $\mathcal{E}$  d'approximation, ce qui impliquera un nombre de points  $N$  donné.
2. se fixer un nombre de points  $N$  et appeler successivement la fonction d'approximation linéaire en faisant une recherche par dichotomie sur  $\mathcal{E}$  jusqu'à l'obtention du nombre de points souhaité.

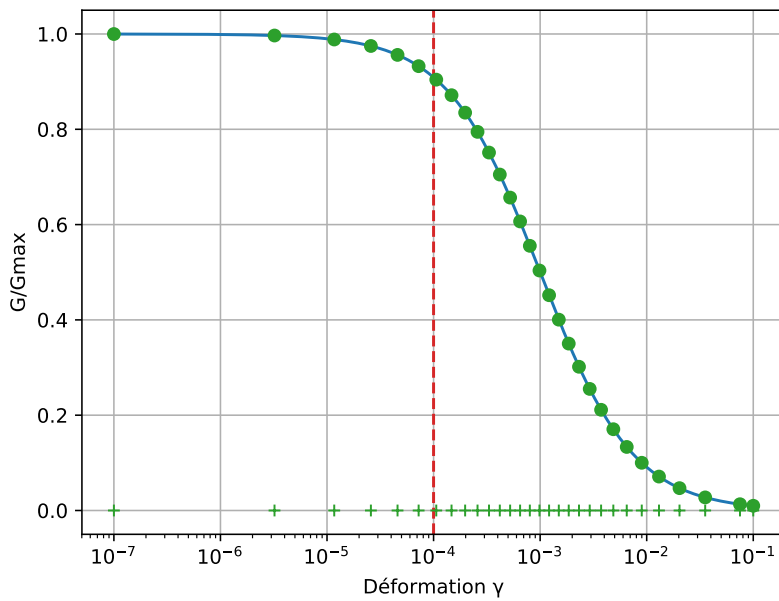
Sachant que le coût d'un appel à l'algorithme MPII est proportionnel au nombre de surfaces actives, on se demande, pour une déformation  $\gamma_{xz}$  donnée, combien de surfaces sont actives. Par exemple, nous pouvons observer sur la Figure 2.5a que pour  $\gamma_{xz} = 10^{-4}$ , nous avons quinze surfaces actives avec l'échantillonnage logarithmique et seulement six surfaces actives avec l'échantillonnage automatique — Figure 2.5b — où  $N = 30$  dans les deux cas. Les éléments actifs sont situés avant la ligne verticale en pointillés. Ainsi, sur cet exemple, pour une telle déformation, le temps de calcul de la contrainte<sup>6</sup> est théoriquement réduit de 60% en utilisant cette procédure.

5. Pour permettre une meilleure visualisation, seulement 30 points sont considérés, mais l'esprit de la démarche proposée reste identique peu importe le nombre de surfaces/points utilisés.

6. Mais pas nécessairement de la simulation.



(a) Échantillonnage logarithmique.

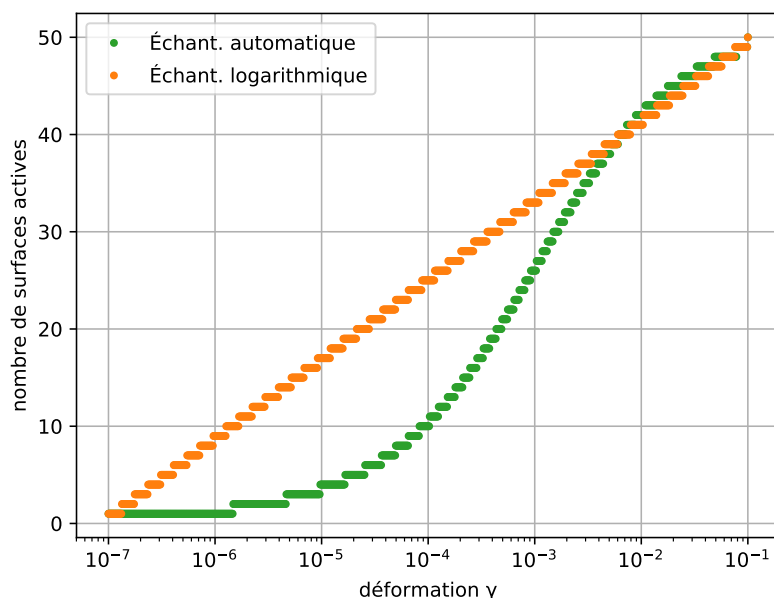


(b) Échantillonnage automatique.

**Figure 2.5.** Échantillonnage d'une courbe  $G/G_{\max}$  en  $N = 30$  éléments. Les croix horizontales représentent les points d'échantillonnage retenus.

La Figure 2.6 permet de savoir combien de surfaces sont actives pour une déformation donnée lorsque  $N = 50$  surfaces sont utilisées, étant donnée la même courbe de réduction

de module de cisaillement que précédemment. On observe que pour une grande plage de déformation, l'échantillonnage automatique permet d'avoir moins de surfaces actives que l'échantillonnage logarithmique. En revanche, pour des déformations plus grandes ( $> 10^{-2}$  sur cet exemple) quelques surfaces en plus sont nécessaires, le temps de calcul sera plus long pour les grandes déformations, mais également plus précis.

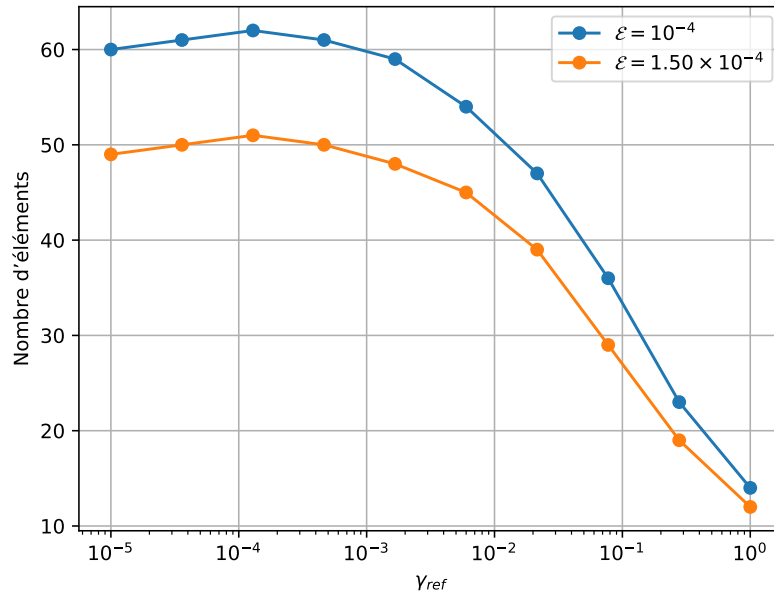


**Figure 2.6.:** Nombre de surfaces actives en fonction de la déformation selon les deux méthodes d'échantillonnage considérées.

Enfin, étant donné que la méthode d'échantillonnage proposée par NISHIKAWA [Nis98] utilise comme paramètre d'entrée une erreur  $\mathcal{E}$ , le nombre de points est une conséquence de cette erreur. Autrement dit, pour une erreur donnée, en fonction de la courbe de  $G/G_{\max}$  à échantillonner, plus ou moins de points peuvent être nécessaires (option 1). La Figure 2.7 illustre cela, dans le cas où la courbe  $G/G_{\max}$  suit un modèle hyperbolique. On rappelle que ce modèle est basé sur un paramètre  $\gamma_{\text{ref}}$ , qui en fonction de sa valeur, va produire plus ou moins de *nonlinéarité*<sup>7</sup>. On observe que pour une erreur  $\mathcal{E} = 1.5 \times 10^{-4}$ , on obtient pour des valeurs de  $\gamma_{\text{ref}}$  assez usuelles, comprises entre  $10^{-5}$  et  $10^{-3}$ , environ 50 éléments comme cela est l'usage dans la littérature. En revanche, au delà  $10^{-3}$ , le nombre d'éléments nécessaires pour atteindre cette même erreur diminue. De fait, le temps de calcul diminuera également, puisque pour une déformation donnée, moins de surfaces seront activées, *pour la même erreur d'interpolation*. Si on conserve  $N = 50$  éléments, alors l'erreur  $\mathcal{E}$  diminuera,

7. Plus la valeur de  $\gamma_{\text{ref}}$  est petite, plus rapide sera la réduction du module de cisaillement et donc la nonlinéarité.

comme l'illustre la courbe bleue, où pour  $\gamma_{\text{ref}} = 2 \times 10^{-2}$  l'erreur est de  $\mathcal{E} = 10^{-4}$  avec  $N = 50$  éléments.



**Figure 2.7.:** Nombre d'éléments nécessaires pour échantillonner automatiquement une courbe  $G/G_{\text{max}}$  suivant un modèle hyperbolique, à une erreur  $\mathcal{E}$  donnée, en fonction du paramètre  $\gamma_{\text{ref}}$ .

Dans cette section, nous avons présenté une méthode qui permet de réduire globalement le nombre de surfaces activées pour une déformation donnée. Cette méthode sera étudiée numériquement dans la suite du manuscrit et comparée à l'échantillonnage logarithmique usuel. Enfin, il est important de noter que cette technique d'échantillonnage est totalement indépendante de la méthode numérique employée pour résoudre le problème de la propagation des ondes dans un milieu nonlinéaire. Comme nous le verrons dans la Partie II de ce manuscrit, cette technique, simple à mettre en place se révèle être très efficace.

## 2.3 Équation du mouvement

Si l'on considère un point  $M$ , de coordonnées  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  appartenant à un milieu  $\Omega$ , alors d'après la seconde loi de Newton, nous avons :

$$\underbrace{\rho(\mathbf{x})\partial_t \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}_{\text{masse} \times \text{accélération}} - \underbrace{\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t))}_{\text{forces internes}} = \underbrace{\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)}_{\text{forces externes}}, \quad \mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^3. \quad (2.39)$$

Ainsi, en dérivant l'équation (2.7), p. 15, par rapport au temps, nous obtenons le système suivant :

$$\begin{cases} \rho(\mathbf{x})\partial_t \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) - \nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\sigma}}(\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}, t), \mathbf{x}, t) & = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \\ \partial_t \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + \nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)^T) & = 0. \end{cases} \quad (2.40)$$

Dans la suite, dans un souci de lisibilité, nous omettrons les dépendances spatiales et temporelles.

Les tenseurs des contraintes et des déformations étant symétriques, le système (2.40) peut être écrit sous la forme matricielle suivante :

$$\partial_t \mathbf{u} + \nabla \cdot \underline{\mathbf{F}}(\mathbf{u}) = \mathbf{G} \quad (2.41)$$

avec les définitions suivantes :

$$\mathbf{u} = \left( \rho v_x \quad \rho v_y \quad \rho v_z \quad \varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon_{zz} \quad \varepsilon_{xy} \quad \varepsilon_{xz} \quad \varepsilon_{yz} \right)^T, \quad (2.42)$$

$$\underline{\mathbf{F}} = - \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} & v_x & & & \frac{v_y}{2} & \frac{v_x}{2} & \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} & & v_y & & \frac{v_z}{2} & & \frac{v_x}{2} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} & & & v_z & \frac{v_z}{2} & \frac{v_y}{2} & \end{pmatrix}^T, \quad (2.43)$$

$$\mathbf{G} = \left( F_x \quad F_y \quad F_z \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right)^T. \quad (2.44)$$

On rappelle qu'étant donné que nous souhaitons étudier des lois de comportement nonlinéaires, chaque composante du tenseur des contraintes dépend — potentiellement — de toutes les composantes du tenseur des déformations. Par exemple

$$\sigma_{xx}(\varepsilon_{ij}(\mathbf{x}, t), \mathbf{x}, t)_{i=\{x,y,z\}, j=\{i,\dots,z\}}$$

serait l'écriture complète.

## 2.4 Source ponctuelle

Généralement, les sources sismiques sont dues à une déformation rapide dans la Terre, comme le glissement sur une faille ou des changements de phases rapides. Une source sismique d'origine interne à une force nette nulle et un moment net nul, ce qui se traduit par les conditions suivantes [Mad15] :

$$\sum \mathbf{F} = 0, \quad \sum \mathbf{F} \times \mathbf{r} = 0. \quad (2.45)$$

Une force qui vérifie ces deux conditions dérive nécessairement d'un tenseur symétrique  $\underline{\mathbf{M}}$ , de dimension  $3 \times 3$ , que l'on appelle *moment sismique* tel que :

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = \nabla \cdot \underline{\mathbf{M}}(\mathbf{x}, t). \quad (2.46)$$

La structure de ce tenseur est identique au tenseur des contraintes. On a :

$$\underline{\mathbf{M}}(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} M_{xx}(\mathbf{x}, t) & M_{xy}(\mathbf{x}, t) & M_{xz}(\mathbf{x}, t) \\ M_{xy}(\mathbf{x}, t) & M_{yy}(\mathbf{x}, t) & M_{yz}(\mathbf{x}, t) \\ M_{xz}(\mathbf{x}, t) & M_{yz}(\mathbf{x}, t) & M_{zz}(\mathbf{x}, t) \end{pmatrix}. \quad (2.47)$$

Dans ce manuscrit, nous considérons uniquement le cas d'une source définie par un moment sismique *ponctuel* et dont l'histoire temporelle du moment  $s(t)$  et la partie géométrique  $\underline{\mathbf{M}}_0$ , sont indépendantes, c'est-à-dire un moment de la forme suivante :

$$\underline{\mathbf{M}}(\mathbf{x}, t) = \underline{\mathbf{M}}_0 s(t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \quad (2.48)$$

où  $\mathbf{x}_0$  est la position de la source.

Comme nous le verrons dans la partie numérique, il est intéressant d'écrire le moment sismique non pas sur la vitesse — puisqu'il faut en calculer la divergence — mais simplement sur la déformation. Pour cela, nous faisons l'hypothèse que la localisation de la source, c'est-à-dire  $\mathbf{x}_0$ , est toujours dans un milieu dont le comportement est linéaire élastique — ce qui est le cas en pratique — et régi par la loi de Hooke, ce qui nous permet d'écrire le système (2.40) sous la forme équivalente suivante :

$$\begin{cases} \rho(\mathbf{x}) \partial_t \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) - \nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\sigma}}(\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}, t), \mathbf{x}, t) & = \mathbf{0}, \\ \partial_t \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + \nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)^T) & = \underline{\mathbf{C}}^{-1} \underline{\mathbf{M}}_0 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \dot{s}(t), \end{cases} \quad (2.49)$$

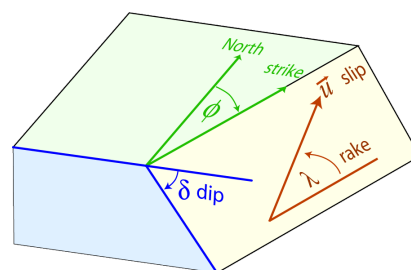
où  $\underline{\mathbf{C}}^{-1}$  est le tenseur inverse de Hooke défini par l'équation (2.16),  $\dot{s}(t)$  est la dérivée temporelle du signal  $s(t)$  et où le vecteur  $\underline{\mathbf{M}}_0$  est défini par :

$$\underline{\mathbf{M}}_0 = \begin{pmatrix} M_{xx} & M_{yy} & M_{zz} & M_{xy} & M_{xz} & M_{yz} \end{pmatrix}^T. \quad (2.50)$$

Le tenseur  $\underline{\mathbf{M}}_0$  modélise le mécanisme de la source et la fonction  $s(t)$  contient son histoire temporelle. En fonction de la définition des composantes de  $\underline{\mathbf{M}}_0$ , différents mécanismes peuvent être décrits. On s'intéresse au cas d'une explosion et au cas du double couple, qui vise à représenter ponctuellement la rupture d'une faille.

**Source explosive** Lorsque le tenseur  $\underline{M}_0$  est diagonal, cela modélise une source isotrope, dont l'énergie est répartie équitablement dans toutes les directions ; il s'agit donc d'une explosion [AR02]. Seules des ondes de compression sont générées, jusqu'à la rencontre d'une première interface avec un autre milieu ou d'une surface libre où une partie des ondes de compression (P) seront converties en ondes de cisaillement (S) ainsi qu'en ondes de surface.

**Source double couple** Un double couple peut être utilisé pour décrire ponctuellement la rupture d'une faille. Le tenseur  $\underline{M}_0$  est déterminé par trois angles :



**Figure 2.8.:** Schéma d'un plan de faille. Définition des angles. Source : gps.alaska.edu

**l'azimut** (strike), noté  $\phi$  est l'angle entre le Nord et le plan de faille ;

**le pendage** (dip), noté  $\delta$  est l'angle entre l'horizontale et la ligne de plus grande pente ;

**l'angle de glissement** (rake), noté  $\lambda$  est l'angle entre l'horizontale et le sens du glissement.

En supposant que l'axe  $Ox$  est dans la direction du Nord, on a [AR02] :

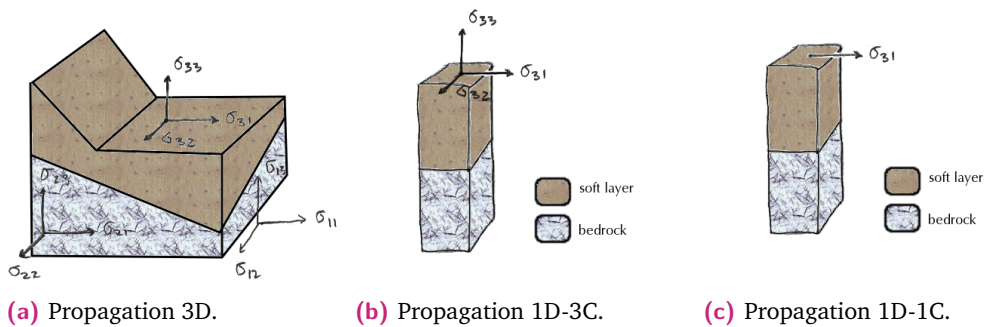
$$\begin{aligned}
 M_{xx} &= -M_0 \left( \sin \delta \cos \lambda \sin 2\phi + \sin 2\delta \sin \lambda \sin^2 \phi \right), \\
 M_{yy} &= M_0 \left( \sin \delta \cos \lambda \sin 2\phi - \sin 2\delta \sin \lambda \cos^2 \phi \right), \\
 M_{zz} &= M_0 \sin 2\delta \sin \lambda, \\
 M_{xy} &= M_0 \left( \sin \delta \cos \lambda \cos 2\phi + \frac{1}{2} \sin 2\delta \sin \lambda \sin 2\phi \right), \\
 M_{xz} &= -M_0 \left( \cos \delta \cos \lambda \cos \phi + \cos 2\delta \sin \lambda \sin 2\phi \right), \\
 M_{yz} &= -M_0 \left( \cos \delta \cos \lambda \sin \phi - \cos 2\delta \sin \lambda \cos \phi \right),
 \end{aligned} \tag{2.51}$$

avec  $M_0 = \mu A \|\mathbf{u}\|$ , où  $\mu$  est le module de cisaillement de la zone d'intérêt,  $A$  est la surface moyenne sur laquelle le glissement a lieu et  $\|\mathbf{u}\|$  est la longueur du glissement moyen. La complexité de la faille, avec ses angles et ses dimensions, est donc modélisée par un *simple* tenseur.



## 2.5 Réduction des équations du mouvement au cas 1D

Jusqu'à présent, nous avons considéré les équations décrivant la propagation d'ondes dans un milieu tridimensionnel, en considérant plusieurs lois de comportement. Notre objectif est d'approcher numériquement les solutions de ces différentes équations — linéaire élastique, nonlinéaire élastique, nonlinéaire élastoplastique — en utilisant une méthode éléments finis Galerkin Discontinue. Dans les premières applications, nous nous intéressons à des cas simplifiés, où la direction de propagation est unidirectionnelle.



**Figure 2.9.:** Les trois configurations considérées : 3D, 1D-3C et 1D-1C.

On distinguera donc trois cas :

- Le cas 3D (Figure 2.9a) ; dont les équations viennent d'être présentées ;
- Le cas 1D-3C (Figure 2.9b) ; où la propagation se fait verticalement uniquement. Ce qui revient à supposer que tous les termes sont indépendants de  $x$  et  $y$ . On aboutit à un système où la vitesse particulière  $v$  a toujours trois composantes et où la déformation n'en a plus que trois :  $\varepsilon_{xz}$ ,  $\varepsilon_{yz}$  et  $\varepsilon_{zz}$ . Le 3C signifiant « *trois composantes* ».
- Le cas 1D (Figure 2.9c) ; où la propagation se fait verticalement uniquement *et* où seulement une composante de cisaillement demeure. On obtient ainsi un système où la vitesse particulière n'a plus qu'une composante  $v_z$  et où la déformation se fait uniquement sur la composante  $\varepsilon_{xz}$ .

**Une dimension, trois composantes (1D-3C)** Le cas 1D-3C correspond à l'étude d'une colonne de sol, sans source sismique. Le mouvement est imposé uniquement par les conditions aux limites. Les équations sont obtenues en négligeant les variations dans les directions  $x$  et  $y$ . Dans ce cas, le système d'équations (2.41) se réduit à la forme suivante :

$$\begin{cases} \rho \partial_t v_x - \partial_z \sigma_{xz} = 0, \\ \rho \partial_t v_y - \partial_z \sigma_{yz} = 0, \\ \rho \partial_t v_z - \partial_z \sigma_{zz} = 0, \\ \partial_t \varepsilon_{zz} - \partial_z v_z = 0, \\ \partial_t \varepsilon_{xz} - \frac{1}{2} \partial_z v_x = 0, \\ \partial_t \varepsilon_{yz} - \frac{1}{2} \partial_z v_y = 0. \end{cases} \quad (2.52)$$

Pour simplifier les notations, nous pouvons introduire les notations de Cauchy  $\gamma_{xz} = 2\varepsilon_{xz}$  et  $\gamma_{yz} = 2\varepsilon_{yz}$  et ainsi nous avons :

$$\begin{cases} \rho(z) \partial_t \mathbf{v}(z, t) = \partial_z \boldsymbol{\sigma}[\boldsymbol{\varepsilon}(z, t)] \\ \partial_t \boldsymbol{\varepsilon}(z, t) = \partial_z \mathbf{v}(z, t), \end{cases} \quad (2.53)$$

avec  $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$  et  $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_{zz}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz})$ .

Ce système d'équations décrit la propagation d'ondes dans un milieu unidimensionnel. On appellera le système (2.53) « 1D-3C » pour « 1 Dimension, 3 Composantes », puisque deux composantes en cisaillements et une composante en compression sont décrites. Dans le cas linéaire élastique — lorsque la loi de Hooke est utilisée — ces composantes sont totalement découplées puisque  $\sigma_{iz}$  ne dépend que de  $\varepsilon_{iz}$ . Il est ainsi possible de résoudre le problème composante par composante et de tout rassembler ensuite pour composer la solution finale du problème. Comme nous le verrons dans la Partie II, ceci n'est pas le cas lorsqu'un milieu nonlinéaire est considéré car ces composantes sont couplées entre elles. Ce système a notamment été étudié par SANTISI D'AVILA et al. [SLS12; SLS14], PHAM [Pha13] et ORAL [Ora16].

**Une dimension, une composante (1D-1C ou 1D)** Les déformations en cisaillement font généralement plus de dégâts que les déformations en compression, c'est pourquoi lors des études unidimensionnelle, seule une composante en cisaillement est généralement considérée. Le système à résoudre devient alors :

$$\begin{cases} \rho \partial_t v_x - \partial_z \sigma_{xz} = 0, \\ \partial_t \gamma_{xz} - \partial_z v_x = 0. \end{cases} \quad (2.54)$$



# Méthodes numériques

” *Le tout n’est pas de réinventer la roue ; mais de comprendre comment elle tourne.*

— **Stéphane M.**

Maître de conférences, UTC, 2011

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à expliciter la méthode numérique DG qui est utilisée dans le cadre de la propagation des ondes sismique, dont l’équation est sous la forme vitesse/déformation, dans un milieu avec une loi de comportement potentiellement nonlinéaire en trois dimensions. En particulier, nous détaillons la méthode spatiale, les schémas temporels utilisés, l’implémentation des conditions aux bords ainsi que des conditions initiales. Pour simplifier les calculs et les explications nous faisons plusieurs hypothèses, bien que celles-ci ne soient pas nécessaires à la méthode : nous supposons que le maillage est conforme, que les propriétés du milieu sont constantes par élément et que les ordres d’interpolations ainsi que les fonctions de base sont identiques pour tous les éléments constituant le maillage.

## 3.1 Approximation spatiale

On considère les équations du mouvement en formulation vitesse/déformation sous forme conservative, telles que définies par l’équation (2.41) dans le chapitre 2. On suppose que des conditions aux limites sont précisées sur les bords du domaine  $\partial\Omega$  et qu’une condition initiale est donnée. Ces deux points seront explicités dans les Sections 3.2 et 3.3.

On suppose que le domaine  $\Omega$  peut être approché par une discrétisation en  $K \in \mathbb{N}^*$  éléments telle que :

$$\Omega \approx \hat{\Omega} = \bigcup_{k=1}^K T^k, \quad (3.1)$$

où  $T^k$  est un tétraèdre en 3D, un triangle en 2D ou encore un segment en 1D.

La formulation faible de l'équation (2.41) est considérée sur l'élément  $T^k$ , le terme source  $G(\mathbf{x}, t)$  est pour le moment négligé<sup>1</sup>. C'est-à-dire que l'équation (2.41) est multipliée par une fonction test  $\varphi(\mathbf{x})$  réelle et régulière, puis intégrée sur cet élément. Nous avons donc :

$$\int_{T^k} [\partial_t \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \nabla \cdot \underline{\mathbf{F}}(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \mathbf{x}, t)] \varphi dv = 0. \quad (3.2)$$

En omettant les dépendances spatio-temporelles et en appliquant le théorème de Green-Ostrogradski, on obtient la formulation faible suivante :

$$\int_{T^k} [\partial_t \mathbf{u} \varphi - \nabla \varphi \cdot \underline{\mathbf{F}}(\mathbf{u})] dv = - \oint_{\partial T^k} \underline{\mathbf{F}}(\mathbf{u}) \varphi \cdot \mathbf{n} ds \quad (3.3)$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\int_{T^k} \partial_t \mathbf{u} \varphi dv}_{(a)} - \underbrace{\int_{T^k} \sum_{\alpha \in \{x,y,z\}} \mathbf{F}_\alpha \partial_\alpha \varphi dv}_{(b)} = - \underbrace{\oint_{\partial T^k} (\underline{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{n}) \varphi ds}_{(c)} \quad (3.4)$$

où  $\mathbf{n}$  est la normale unitaire extérieure à la surface  $\partial T^k$  et où le flux  $\underline{\mathbf{F}}$  a été décomposé ainsi :  $\underline{\mathbf{F}} = (\mathbf{F}_x \quad \mathbf{F}_y \quad \mathbf{F}_z)$ .

La solution approchée globale  $\hat{\mathbf{u}}$  du problème sur  $\Omega_h$  est cherchée comme l'union des solutions exprimées sur chacun des éléments  $T_k$  :

$$\hat{\mathbf{u}} = \bigcup_{k=1}^K \hat{\mathbf{u}}^k. \quad (3.5)$$

On suppose que les propriétés des matériaux, en particulier,  $\rho$ ,  $\lambda$  et  $\mu$  sont *constantes* par élément de maillage. Cela n'est pas une nécessité de la méthode (voir par exemple [CKB10; MG15]), mais simplifie le développement et l'implémentation. Chaque solution locale  $\hat{\mathbf{u}}^k$  est décomposée sur une base polynômiale définie sur l'élément  $T_k$ . Nous considérons la base des polynômes de Lagrange  $l_i^k(\mathbf{x})$  de  $P_N(T_k)$ , l'ensemble des polynômes de degré  $N$  sur l'élément  $T_k$ . Ainsi on a :

$$\hat{\mathbf{u}}^k(\mathbf{x}, t) = \sum_{j=1}^{N_p} \hat{\mathbf{u}}^k(\mathbf{x}_j, t) l_j^k(\mathbf{x}) \quad (3.6)$$

où  $N_p$  est le nombre de points d'interpolation. Dans le cas tridimensionnel nous avons  $N_p = \frac{(N+1)(N+2)(N+3)}{6}$  (et  $N_p = N + 1$  dans le cas unidimensionnel).

**Remarque.** Le fait d'avoir supposé la densité  $\rho$  constante par élément, implique que chaque composante de la vitesse  $v$  est approchée par un polynôme de degré  $N$ . Ce qui, avec la notation

1. Voir section 3.3, p. 45 pour la prise en compte.

utilisée, n'est pas le cas si la densité varie, puisque c'est le moment  $\rho v$  qui est approché par un polynôme de degré  $N$  (voir Équation (2.42)).

Nous faisons l'hypothèse que les colonnes  $\mathbf{F}_\alpha$ , du flux  $\underline{\mathbf{F}}$  peuvent se décomposer sur cette même base et donc  $\hat{\underline{\mathbf{F}}}$  est calculé par l'interpolation de  $\underline{\mathbf{F}}$  aux points d'interpolations  $x_i$ .

**Remarque.** Cette hypothèse est valide dans le cas où le flux dépend linéairement des variables  $u$ . Dans le cas nonlinéaire, cette hypothèse n'est plus exacte. On s'attend à ce que le schéma présente éventuellement des instabilités, qui pourront être traitées par du filtrage par exemple. Cela sera détaillé dans la Partie II.

La méthode Galerkin consiste à prendre pour fonctions tests de la formulation faible les fonctions de base utilisées pour la projection ; ainsi injectant les projections dans la formulation faible (3.4), nous pouvons écrire :

— le terme (a) comme :

$$\int_{T^k} \partial_t \hat{u}_i^k l_i^k dv = \sum_{j=1}^{N_p} (\underline{\mathbf{M}}^k)_{ij} \frac{d\hat{u}_j^k}{dt} \quad \forall i \in \llbracket 1, N_p \rrbracket, \quad (3.7)$$

où  $\underline{\mathbf{M}}^k$  est la matrice de masse de l'élément  $T^k$ , définie par

$$(\underline{\mathbf{M}}^k)_{ij} = \int_{T^k} l_j^k l_i^k dv \quad (i, j) \in \llbracket 1, N_p \rrbracket^2. \quad (3.8)$$

— le terme (b) comme :

$$\sum_{\alpha \in \{x, y, z\}} \int_{T^k} \hat{\mathbf{F}}_\alpha \partial_\alpha l_i^k dv = \sum_{\alpha \in \{x, y, z\}} \sum_{j=1}^{N_p} (\underline{\mathbf{K}}_\alpha^k)_{ij} \hat{\mathbf{F}}_{\alpha, j} \quad \forall i \in \llbracket 1, N_p \rrbracket, \quad (3.9)$$

où  $\underline{\mathbf{K}}_\alpha^k$  est la matrice de raideur dans la direction  $\alpha$  de l'élément  $T^k$  définie par

$$(\underline{\mathbf{K}}_\alpha^k)_{ij} = \int_{T^k} l_j^k \partial_\alpha l_i^k dv \quad (i, j) \in \llbracket 1, N_p \rrbracket^2. \quad (3.10)$$

— enfin, le terme (c) contient le flux devant être calculé sur les faces de l'élément  $T^k$ . Le terme (c) peut être écrit ainsi :

$$\oint_{\partial T^k} (\underline{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{n}) l_i^k ds = \sum_{m \in \mathcal{V}(k)} \int_{S_m^k} (\underline{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{n}^{km}) l_i^k ds \quad (3.11)$$

où  $S_m^k$  est la  $m$ -ème face de  $T^k$  de normale unitaire sortante  $\mathbf{n}^{km}$  et  $\mathcal{V}(k)$  l'ensemble des indices des faces  $S_m^k$  de l'élément  $T^k$ . On distingue deux cas :

- soit  $S_m^k$  est une face frontière (donc appartenant à  $\partial\hat{\Omega}$ ) et dans ce cas, le flux  $\underline{F}$  est remplacé par une valeur imposée  $\underline{F}^*$ , qui permettra de prendre en compte les conditions aux bords du domaine (voir section 3.2, p. 41) ;
- soit  $S_m^k$  est une face interne (donc partagée avec un autre élément) et dans ce cas, puisque les fonctions de base sont discontinues sur les interfaces des éléments, le flux est défini deux fois ; une fois sur chaque face, selon l'élément considéré. Ainsi, pour calculer l'intégrale, il faut définir lequel, ou quelle combinaison, choisir. Le choix de cette valeur, appelée *flux numérique* et notée  $\underline{F}^*$  nous permet de calculer cette intégrale. La définition du flux numérique n'est pas unique et les différents choix peuvent conduire à des schémas numériques plus ou moins robustes. Le choix de  $\underline{F}^*$  sera discuté dans chacun des chapitres de la Partie II en fonction des équations et des dimensions considérées.

Pour le moment, on considère que le flux numérique  $\underline{F}^* = \begin{pmatrix} F_x^* & F_y^* & F_z^* \end{pmatrix}$  est donné. De fait, nous écrivons le terme (c) comme ceci :

$$\begin{aligned} \sum_{m \in \mathcal{V}(k)} \int_{S_m^k} (\underline{F}^* \cdot \mathbf{n}^{km}) l_i^k ds &= \sum_{m \in \mathcal{V}(k)} \sum_{\alpha \in \{x,y,z\}} \int_{S_m^k} F_\alpha^* n_\alpha^{km} l_i^k ds \\ &= \sum_{m \in \mathcal{V}(k)} \sum_{\alpha \in \{x,y,z\}} \sum_{j=1}^{N_p} (\underline{\mathbf{R}}^{km})_{ij} F_\alpha^* n_\alpha^{km} \end{aligned} \quad (3.12)$$

où  $\underline{\mathbf{R}}^{km}$  est définie par :

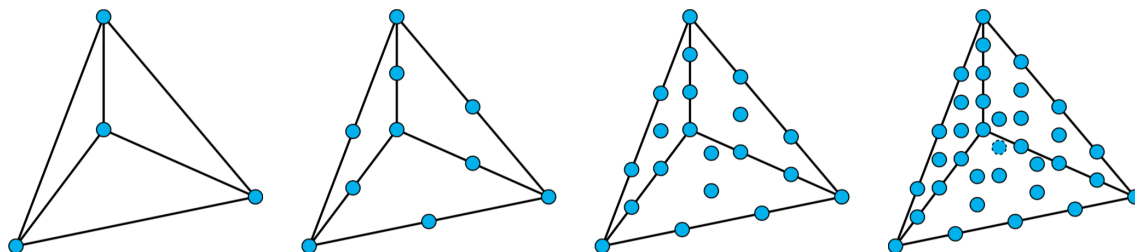
$$(\underline{\mathbf{R}}^{km})_{ij} = \int_{S_m^k} l_j^k l_i^k ds \quad (i, j) \in \llbracket 1, N_p \rrbracket^2. \quad (3.13)$$

In fine, les inconnues du système  $\hat{\mathbf{u}}^k$  sont obtenues en résolvant numériquement l'équation différentielle suivante, sur chaque élément  $T^k$  :

$$\frac{d\hat{\mathbf{u}}^k}{dt} = \left( \sum_{\alpha \in \{x,y,z\}} \underline{\mathbf{M}}^{k-1} \underline{\mathbf{K}}_\alpha^k \hat{\mathbf{F}}_\alpha \right) - \left( \sum_{m \in \mathcal{V}(k)} \sum_{\alpha \in \{x,y,z\}} \underline{\mathbf{M}}^{k-1} \underline{\mathbf{R}}^{km} \hat{\mathbf{F}}_\alpha^* n_\alpha^{km} \right) \quad (3.14)$$

En pratique, les matrices de masse, de raideur et surfacique ne sont pas stockées en mémoire pour chaque élément. Elles sont calculées analytiquement sur un élément de référence  $\mathcal{T}$ , puis transformées pour chaque élément  $T^k$ . La procédure est détaillée, par exemple, par DUMBSER et KÄSER [DK06] pour le cas 3D. Ainsi, seules quelques matrices sont à calculer et une seule, de taille raisonnable est à inverser pour résoudre le système. Les points d'interpolation  $x_i$  utilisés sont des points équidistants dans l'élément  $T^k$ . Nous savons que pour des ordres d'interpolation élevés, ce choix n'est pas le plus intéressant puisque cela peut mener à une interpolation mal conditionnée due au phénomène de Runge [HW08]. Dans ce cas là, on préférera les points de Legendre-Gauss-Lobatto par

exemple. En pratique, surtout en 3D, les calculs sont rarement faits au delà de l'ordre quatre et dans ce cas là, les deux approches donnent des résultats très similaires [PR10]. La Figure 3.1 illustre le placement des points d'interpolation équidistants dans le cas où les éléments sont des tétraèdre et que des polynômes de l'ordre de un à quatre sont utilisés.



**Figure 3.1.:** Points d'interpolation équidistants sur un tétraèdre pour des ordres de un à quatre. Le points dont le contour est tracé en pointillés est situé dans le volume. Illustration de VIQUERAT [Viq15].

**Remarque** (Réduction du schéma numérique discret au cas 1D). *Dans le cas 1D, où l'équation que l'on cherche à résoudre est du type :*

$$\partial_t \mathbf{u}(z, t) + \partial_z \mathbf{F}(\mathbf{u}, z, t) = \mathbf{0}, \quad (3.15)$$

la méthodologie est la même et permet d'aboutir au schéma discret suivant :

$$\frac{d\hat{\mathbf{u}}^k}{dt} = \left( \underline{\mathbf{M}}^{k-1} \underline{\mathbf{K}}_z^k \hat{\mathbf{F}} \right) + \left( \sum_{m \in \mathcal{V}(k)} \underline{\mathbf{M}}^{k-1} \underline{\mathbf{R}}_z^{km} \mathbf{F}^* \eta_z^{km} \right) \quad (3.16)$$

On notera que dans ce cas, l'ensemble  $\mathcal{V}(k)$  est réduit à deux éléments maximum.

## 3.2 Conditions aux limites

La formulation DG de l'équation de propagation des ondes fait apparaître une intégrale surfacique sur les frontières des éléments du domaine. Nous avons vu, qu'étant donné que les fonctions de base sont discontinues entre les éléments, que ces intégrales ne sont pas univoquement définies, puisque l'intégrande peut appartenir à un élément ou son voisin. Dans ce cas, le flux à intégrer est remplacé par un flux numérique, qui doit être spécifié.

Cette intégrale va nous permettre pour les faces frontières du domaine de prendre en compte les conditions aux limites. Les conditions aux limites seront appliquées grâce au flux numérique ; on dit alors qu'elles sont introduites *faiblement*.



Nous présentons dans cette section les trois conditions aux limites que nous avons implémentées.

### 3.2.1 Surface libre

Soit  $S_i^k$  la  $i$ -ième surface de l'élément  $T^k$ , laquelle est soumise à une condition de surface libre. C'est-à-dire que  $\underline{\sigma} \cdot \mathbf{n} = 0$  sur  $S_i^k$ . On peut alors choisir  $\underline{\mathbf{F}}^*$  ainsi :

$$\underline{\mathbf{F}}^* = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & v_x & & \frac{v_y}{2} & \frac{v_x}{2} \\ 0 & 0 & 0 & & v_y & \frac{v_z}{2} & \frac{v_x}{2} \\ 0 & 0 & 0 & & & v_z & \frac{v_y}{2} & \frac{v_x}{2} \end{pmatrix}^T \quad (3.17)$$

où  $v_x$ ,  $v_y$  et  $v_z$  sont les composantes de la vitesse sur la face  $S_i^k$ .

**Remarque** (Dans le cas 1D). *Le flux à imposer s'écrit :*

— Dans le cas 3C :

$$\mathbf{F}^* = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & v_x & v_y & v_z \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

— Dans le cas 1C :

$$\mathbf{F}^* = - \begin{pmatrix} 0 & v_z \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

### 3.2.2 Base rigide (Dirichlet)

Dans le cas 1D, c'est-à-dire la propagation d'une onde dans une colonne de sol, nous pouvons distinguer la surface et la base. Une condition de surface libre est appliquée à la surface. Concernant la base où nous pouvons appliquer une condition rigide ; c'est-à-dire imposer un mouvement.

L'équation du mouvement considérée est la suivante :

$$\begin{cases} \rho \partial_t v_x - \partial_z \sigma_{xz} = 0, \\ \partial_t \gamma_{xz} - \partial_z v_x = 0, \end{cases} \quad (3.20)$$

avec comme conditions aux limites, pour la base de la colonne :

$$v = f(t) \quad \partial_z \sigma_{xz} = 0 \quad | \quad z = -d \quad (3.21)$$

où  $f(t)$  est la vitesse à imposer à la base de la colonne,  $z = -d$ ,  $d$  étant la profondeur de la colonne. De fait, le flux numérique à la base de la colonne sera :

$$\mathbf{F}^* = \left( \sigma_{xz} \quad f(t) \right)^T. \quad (3.22)$$

La condition rigide est également appliquée faiblement.

### 3.2.3 Bords absorbants et onde incidente au rocher

À une interface entre deux éléments  $L$  et  $R$ , nous considérons le flux numérique décentré de Steger-Warming qui s'écrit ainsi :

$$\mathbf{F}_\alpha^* = \underline{\mathbf{A}}_\alpha^+ \mathbf{u}_L + \underline{\mathbf{A}}_\alpha^- \mathbf{u}_R. \quad (3.23)$$

où  $\underline{\mathbf{A}}_\alpha$  est la matrice Jacobienne du flux  $\mathbf{F}_\alpha$  que nous avons décomposée ainsi  $\underline{\mathbf{A}}_\alpha = \underline{\mathbf{A}}_\alpha^+ + \underline{\mathbf{A}}_\alpha^-$  avec  $\underline{\mathbf{A}}_\alpha^\pm = \underline{\mathbf{P}} \underline{\mathbf{\Lambda}}^\pm \underline{\mathbf{P}}^{-1}$ . La matrice  $\underline{\mathbf{A}}^\pm$  est construite en considérant seulement les valeurs propres positives ou négatives de  $\underline{\mathbf{A}}$ . Le terme  $\underline{\mathbf{A}}^+$  contient l'information qui voyage de l'élément  $L$  à  $R$ , le terme  $\underline{\mathbf{A}}^-$  l'information qui voyage de  $R$  à  $L$ . Ce flux peut être utilisé pour deux applications, que nous détaillons ci-dessous.

#### Bords absorbants

Pour simuler des domaines infinis, nous utilisons des bords absorbants. La matrice  $\underline{\mathbf{A}}_\alpha$  étant difficilement calculable analytiquement dans le cas nonlinéaire élastoplastique, nous utiliserons donc des bords absorbants seulement là où la relation constitutive entre la contrainte et la déformation est linéaire. Nous suivons la méthode présentée par DELCOURTE et al. [DFG09]. La méthode standard, dite de premier ordre, donne des meilleurs résultats pour des ondes dont l'incidence est normale à la surface absorbante. Les auteurs ont ensuite améliorée la méthode, en se basant sur deux niveaux temporels différents [DG15]. La méthode standard consiste à considérer le flux de Steger-Warming présenté ci-dessus et à négliger  $\underline{\mathbf{A}}_\alpha^-$  de sorte que rien ne rentre dans le domaine par l'interface considérée.

On peut alors montrer que pour une surface  $S_i^k$  le terme du flux numérique correspondant peut se mettre sous la forme :

$$\sum_{\alpha \in \{x,y,z\}} \underline{\mathbf{M}}^{k-1} \underline{\mathbf{R}}^{ki} \mathbf{F}_\alpha^* n_\alpha^{ki} = \underline{\mathbf{M}}^{k-1} \underline{\mathbf{A}}_{n^{ki}}^k \underline{\mathbf{R}}^{ki} \hat{\mathbf{u}}^k \quad (3.24)$$

où l'on a :

$$\underline{\mathbf{A}}_n = \sum_{\alpha \in \{x,y,z\}} \underline{\mathbf{A}}_\alpha n_\alpha. \quad (3.25)$$

Ensuite, pour une surface  $S_i^k$ , sur laquelle une condition absorbante est appliquée, l'évaluation (3.24) est réalisée en négligeant les ondes entrantes dans la surface ; ainsi on a :

$$\sum_{\alpha \in \{x,y,z\}} \underline{\mathbf{M}}^{k-1} \underline{\mathbf{R}}^{ki} \underline{\mathbf{F}}_\alpha^* n_\alpha^{ki} = \underline{\mathbf{M}}^{k-1} \underline{\mathbf{A}}_{n^{ki}}^{k,+} \underline{\mathbf{R}}^{ki} \hat{\mathbf{u}}^k. \quad (3.26)$$

La méthode est identique dans le cas d'une propagation unidimensionnelle.

### Onde incidente au rocher

Il est possible d'utiliser l'expression (3.23) pour injecter une onde incidente depuis un bord du domaine. Ici les ondes incidentes, supposées venir du milieu en profondeur, sont imposées. Nous utilisons cette condition seulement dans le cas 1D. Ainsi, si la vitesse particulière de l'onde incidente est  $v^{\text{inc}}$ , alors on peut montrer que la déformation correspondante est donnée par  $\gamma^{\text{inc}} = -\frac{v^{\text{inc}}}{v_s}$  où  $v_s$  est la vitesse de propagation du rocher.

La condition aux limites d'onde incidente se définit avec le flux numérique suivant :

$$\underline{\mathbf{F}}_z^* = \underline{\mathbf{A}}_z^+ \mathbf{u} + \underline{\mathbf{A}}_z^- \mathbf{u}^{\text{inc}}. \quad (3.27)$$

Lorsque le mouvement incident devient nul, alors nous retrouvons une condition de type bord absorbant.

**Remarque.** Dans le cas 1D, l'onde incidente  $v^{\text{inc}}$  à injecter, peut être définie comme égale à la moitié de la vitesse enregistrée à surface sur le rocher, dans la configuration illustrée par la Figure 3.2. Les hypothèses sont : 1) que l'enregistrement sur le rocher n'est pas perturbé par l'onde qui est piégée dans le bassin et 2) que l'onde se propage verticalement. Le facteur deux vient du fait qu'en se réfléchissant à la surface libre, l'amplitude de l'onde est multipliée par deux.

Lorsque la condition rigide est considérée, elle est imposée à l'interface entre le rocher et la colonne de sol, en (1). Le rocher n'appartient pas au domaine de calcul. En revanche, avec le bord absorbant ou l'onde incidente au rocher, le rocher appartient au domaine de calcul et doit être maillé. La condition est appliquée en (2).

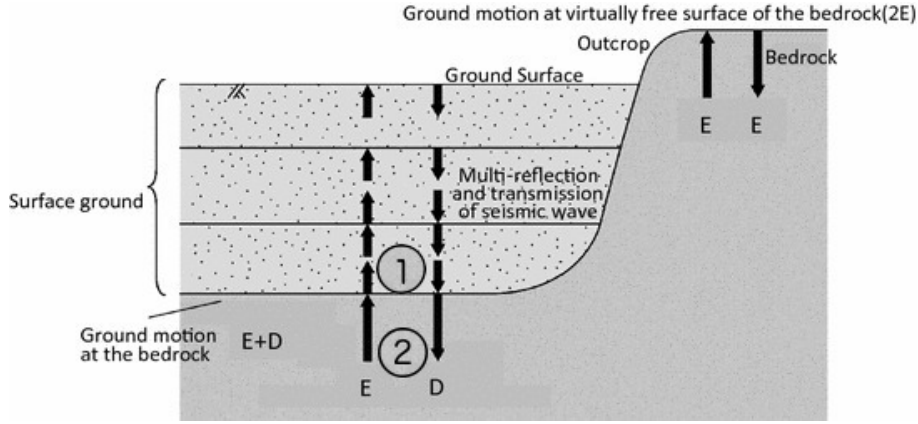


Figure 3.2.: Onde incidente au rocher. Illustration adaptée de [HK17].

### 3.3 Implémentation de la source ponctuelle

Nous présentons dans cette section la méthode utilisée en 3D pour implémenter la source sismique ponctuelle décrite dans la section 2.4, p. 31. La source ponctuelle n'est pas implémentée en 1D.

Nous considérons l'équation de propagation des ondes avec le terme de source ponctuelle suivant :

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_v(\mathbf{x}, t) \\ \mathbf{G}_\varepsilon(\mathbf{x}, t) \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

avec  $\mathbf{G}_v(\mathbf{x}, t) = (0 \ 0 \ 0)^T$  et  $\mathbf{G}_\varepsilon(\mathbf{x}, t) = \underline{\mathbf{C}}^{-1} \mathbf{M}_0 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \dot{s}(t)$  (voir Équation (2.49)).

La formulation faible sur un élément  $T^k$ , contenant  $\mathbf{x}_0$ , donne alors :

$$\int_{T^k} \left[ \partial_t \mathbf{u}_j^k - \sum_{\alpha \in \{x, y, z\}} \mathbf{F}_\alpha \partial_\alpha l_j^k - \underbrace{\mathbf{G}_j^k}_{(d)} \right] dv = - \oint_{\partial T^k} (\underline{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{n}) \varphi ds. \quad (3.29)$$

On s'intéresse ici seulement au terme (d). Nous avons alors :

$$\begin{aligned} (d) &\Leftrightarrow \int_{T^k} \mathbf{G}(\mathbf{x}, t) l_j^k(\mathbf{x}) dv \\ &\Leftrightarrow \int_{T^k} \begin{pmatrix} \mathbf{0}_3 \\ \underline{\mathbf{C}}^{-1} \mathbf{M}_0 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \dot{s}(t) \end{pmatrix} l_j^k(\mathbf{x}) dv \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{0}_3 \\ \underline{\mathbf{C}}^{-1} \mathbf{M}_0 s(t) \end{pmatrix} l_j^k(\mathbf{x}_0). \end{aligned} \quad (3.30)$$

De fait, le schéma numérique DG (3.14) devient alors :

$$\frac{d\hat{\mathbf{u}}^k}{dt} = \underline{\mathbf{M}}^{k-1} \left[ \left( \sum_{\alpha \in \{x,y,z\}} \underline{\mathbf{K}}_\alpha^k \mathbf{F}_\alpha \right) - \left( \sum_{j \in \mathcal{V}(k)} \sum_{\alpha \in \{x,y,z\}} \underline{\mathbf{R}}^{kj} \mathbf{F}_\alpha^* n_\alpha^{kj} \right) + \left( \underline{\mathbf{C}}^{-1} \mathbf{M}_0 s(t) \right) \mathbf{l}^k(\mathbf{x}_0) \right] \quad (3.31)$$

avec  $\mathbf{l}^k(\mathbf{x}) = (l_1^k(\mathbf{x}) \quad l_2^k(\mathbf{x}) \quad \dots \quad l_{N_p}^k(\mathbf{x}))$ .

## 3.4 Approximations temporelles

Nous présentons dans cette section les différents schémas d'intégration temporelle qui ont été implémentés. Nous en avons considéré trois différents, chacun ayant ses propres avantages et inconvénients. On considère, pour chaque schéma temporel, que le problème à résoudre s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{d\mathbf{u}(t)}{dt} = \mathcal{D}(\mathbf{u}(t)) \quad (3.32)$$

où  $\mathcal{D}(\cdot)$  est l'opérateur qui contient le schéma spatial présenté dans la section précédente.

Un des schémas utilisé dans la littérature est le « Saute-Mouton » (ou *Leap-Frog* en anglais). On citera, sans exhaustivité, [Yee66 ; PRF02 ; CFP03] pour les équations de Maxwell ou encore [Vir86 ; DFG09] pour la propagation des ondes sismiques. Il a le principal avantage d'être peu coûteux en temps de calcul. En effet, par une construction astucieuse, un appel seulement à l'opérateur  $\mathcal{D}$  est nécessaire pour obtenir un ordre de convergence de deux. Cela dit, pour des temps longs de la dispersion numérique peut apparaître. C'est pourquoi, quand cela est possible nous utiliserons des schémas temporels d'ordre plus élevé, mais qui nécessitent plus d'appels à l'opérateur  $\mathcal{D}$ .

Nous nous sommes donc intéressés à des schémas de type Runge-Kutta, en particulier un schéma d'ordre trois qui présente une propriété de conservation de stabilité et un second d'ordre quatre à faible stockage.

### 3.4.1 Schéma Saute-Mouton

Nous considérons le système (3.32) qui peut se décomposer ainsi :

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\varepsilon}) \\ \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}}{dt} = \mathbf{g}(\mathbf{v}) \end{cases} \quad (3.33)$$

On note  $\mathbf{v}_n = \mathbf{v}(n\Delta t)$  et  $\mathbf{v}^{(i)} = \frac{d^i \mathbf{v}}{dt^i}$ , où  $\Delta t$  est le pas de temps de la méthode. La même notation est adoptée pour  $\varepsilon$ . En utilisant la formule de Taylor, il vient que :

$$\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + \Delta t \mathbf{v}_n^{(1)} + \frac{\Delta t^2}{2} \mathbf{v}_n^{(2)} + \mathcal{O}(\Delta t^2). \quad (3.34)$$

De même, nous avons :

$$\mathbf{v}_{n+\frac{1}{2}}^{(1)} = \mathbf{v}_n^{(1)} + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{v}_n^{(2)} + \mathcal{O}(\Delta t), \quad (3.35)$$

soit :

$$\Delta t \mathbf{v}_n^{(1)} = \Delta t \mathbf{v}_{n+\frac{1}{2}}^{(1)} - \frac{\Delta t^2}{2} \mathbf{v}_n^{(2)} + \mathcal{O}(\Delta t^2). \quad (3.36)$$

Injectant l'Équation (3.36) dans (3.34), il vient alors :

$$\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + \Delta t \mathbf{f}(\varepsilon_{n+\frac{1}{2}}) + \mathcal{O}(\Delta t^2). \quad (3.37)$$

La même procédure peut être appliquée pour évaluer  $\varepsilon_{n+\frac{3}{2}}$  en fonction de  $\varepsilon_{n+\frac{1}{2}}$ . Ainsi, le système (3.33) peut être approché de la manière suivante :

$$\begin{cases} \mathbf{v}_{n+1} &= \mathbf{v}_n + \Delta t \mathbf{f}(\varepsilon_{n+\frac{1}{2}}) + \mathcal{O}(\Delta t^2) \\ \varepsilon_{n+\frac{3}{2}} &= \varepsilon_{n+\frac{1}{2}} + \Delta t \mathbf{g}(\mathbf{v}_{n+1}) + \mathcal{O}(\Delta t^2), \end{cases} \quad (3.38)$$

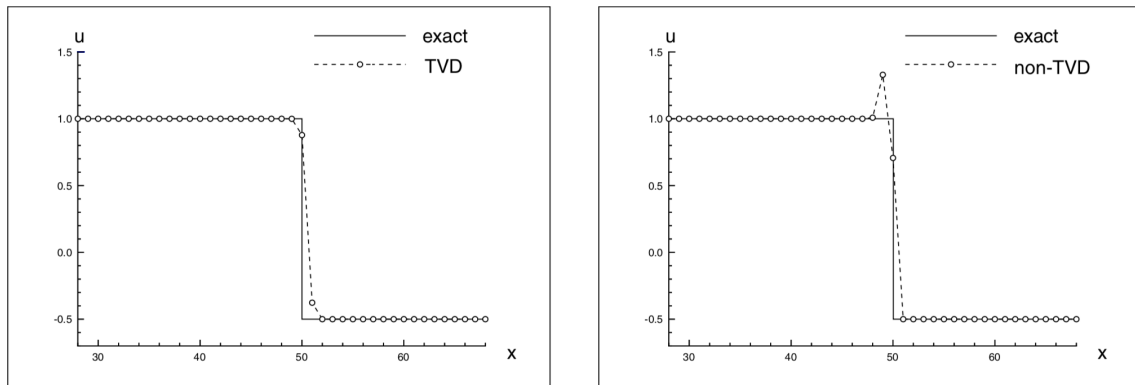
en considérant les conditions initiales  $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}(t=0)$  et  $\varepsilon_{\frac{1}{2}} = \varepsilon(t = \frac{\Delta t}{2})$  connues.

L'erreur de troncature est donc d'ordre deux, mais un seul appel à l'opérateur spatial est nécessaire. Les deux variables  $\mathbf{v}$  et  $\varepsilon$  sont calculées à un demi pas de temps d'intervalle ; ce qui nécessite de faire attention lors de l'initialisation ou lors de l'évaluation des solutions en vue de faire une comparaison avec une autre solution.

### 3.4.2 Schéma Runge-Kutta d'ordre 3 conservant la stabilité

Les solutions exactes de lois de conservation scalaires ont la propriété que leur variation totale, notée  $TV(u)$ , ne croit dans le temps, avec  $TV(u) = \sum_j |u(x_{j+1}, t) - u(x_j, t)|$ . Les méthodes temporelles dites *Strong Stability Preserving* — notées  $SSP^2$  — ont pour objectif de transposer cette propriété aux solutions discrètes calculées numériquement. La Figure 3.3 illustre cette propriété.

2. ou bien *TVD* pour *Total Variation Diminishing*.



**Figure 3.3.:** Propagation d'un choc sur 50 unités de maillage. À gauche, un schéma Runge-Kutta avec la propriété SSP, à droite un schéma Runge-Kutta sans la propriété SSP. Source : [GST01].

La méthode que nous décrivons ci-dessous, *Strong Stability Preserving Runge-Kutta* d'ordre 3 est l'adaptation d'un schéma de Runge-Kutta d'ordre 3 qui vérifie cette propriété. Ce schéma présenté par GOTTLIEB et al. [GST01] s'écrit ainsi :

$$\mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{u} + \Delta t \mathcal{D}(t, \mathbf{u}^n) \quad (3.39)$$

$$\mathbf{u}^{(2)} = \frac{3}{4}\mathbf{u} + \frac{1}{4}\left(\mathbf{u}^{(1)} + \Delta t \mathcal{D}\left(t + \Delta t, \mathbf{u}^{(1)}\right)\right) \quad (3.40)$$

$$\mathbf{u}^{n+1} = \frac{1}{3}\mathbf{u} + \frac{2}{3}\left(\mathbf{u}^{(2)} + \Delta t \mathcal{D}\left(t + \frac{\Delta t}{2}, \mathbf{u}^{(2)}\right)\right) \quad (3.41)$$

où  $\mathbf{u}^n$  est la solution  $\mathbf{u}$  calculée à l'instant  $t = t_n$  et  $\mathbf{u}^{(i)}$  sont les variables temporaires de la méthode de Runge-Kutta.

Ce schéma est d'ordre trois et nécessite trois appels à l'opérateur  $\mathcal{D}$  et une seule variable de stockage. Nous utilisons ce schéma temporel pour sa précision, son efficacité et sa propriété SSP. Ce schéma est utilisable pour tous les modèles élastiques (linéaire ou non), puisque la loi de comportement est bijective par rapport à la déformation. Dans le cas d'un modèle élastoplastique, utiliser ce schéma temporel est plus délicat. En effet, chaque appel à l'opérateur  $\mathcal{D}$  va modifier l'état de la loi de comportement. Il est donc important qu'ils se fassent toujours avec des instants  $t_n$  croissants. En particulier, on ne pourra pas passer de (3.40) à (3.41) en utilisant le modèle MPlI ; un autre schéma temporel doit être envisagé. Si les règles de Masing sont utilisées, alors il est nécessaire de mettre à jour les lois à la fin d'un pas de temps complet<sup>3</sup>, c'est-à-dire à la fin de (3.41). C'est la stratégie que nous avons employée lorsque ce schéma est utilisé avec les règles de Masing.

3. Par exemple, dans l'Équation (2.19),  $\sigma_r$  et  $\varepsilon_r$  sont mis à jour à la fin du pas de temps seulement, et non à chaque sous-étape.

### 3.4.3 Runge-Kutta à faible stockage

La méthode de Runge-Kutta à faible stockage est une variante de la méthode classique où les variables temporaires n'ont pas besoin d'être conservées entre les différentes étapes. Cet avantage est notamment précieux en 3D où les tableaux manipulés peuvent devenir importants. Les méthodes à faible stockage requièrent généralement une étape de plus que leur équivalent classique pour le même ordre de précision, mais cela peut être compensé par un pas de temps plus grand [HW08]. Dans nos applications, nous avons considéré une méthode d'ordre quatre, qui peut s'écrire ainsi [Car94] :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{p}^{(0)} &= \mathbf{u}^n & (3.42) \\
 i \in [1, \dots, 5] : & \begin{cases} \mathbf{k}^{(i)} &= a_i \mathbf{k}^{(i-1)} + \Delta t \mathcal{D} \left( t_n + c_i \Delta, \mathbf{p}^{(i-1)} \right), \\ \mathbf{p}^{(i)} &= \mathbf{p}^{(i-1)} + b_i \mathbf{k}^{(i)}, \end{cases} \\
 \mathbf{u}^{n+1} &= \mathbf{p}^{(5)}.
 \end{aligned}$$

où les coefficients  $a_i$ ,  $b_i$  et  $c_i$  sont donnés dans le Tableau 3.1. Cette méthode, d'ordre quatre, nécessite seulement deux tableau intermédiaires —  $\mathbf{p}$  et  $\mathbf{k}$  — quand la méthode classique en nécessite quatre. L'empreinte mémoire est deux fois moindre. On remarquera que  $\mathbf{k}^{(0)}$  n'est pas défini car  $a_1 = 0$ .

Un autre des avantages de ce schéma est que les  $c_i$  sont tous positifs et croissants, ainsi l'opérateur  $\mathcal{D}$  est toujours évalué à des instants strictement croissants, ce qui est important dans le cas élastoplastique pour prendre en compte correctement le phénomène d'hystérésis.

$i$	$a_i$	$b_i$	$c_i$
1	0	$\frac{1432997174477}{9575080441755}$	0
2	$-\frac{567301805773}{1357537059087}$	$\frac{5161836677717}{13612068292357}$	$\frac{1432997174477}{9575080441755}$
3	$-\frac{2404267990393}{2016746695238}$	$\frac{1720146321549}{2090206949498}$	$\frac{2526269341429}{6820363962896}$
4	$-\frac{3550918686646}{2091501179385}$	$\frac{3134564353537}{4481467310338}$	$\frac{2006345519317}{3224310063776}$
5	$-\frac{1275806237668}{842570457699}$	$\frac{2277821191437}{14882151754819}$	$\frac{2802321613138}{2924317926251}$

**Tableau 3.1.:** Coefficients pour la méthode Runge-Kutta à faible stockage d'ordre 4 [Car94].



## 3.5 Précision et stabilité

Jusqu'à présent, nous avons présenté la méthode numérique sans poser de conditions particulières sur les éléments  $T^k$  permettant d'approcher le domaine  $\Omega$  ou encore sur le pas de temps  $\Delta t$  à utiliser.

La taille des éléments va influencer la précision de la méthode : plus la taille des éléments sera petite, plus la solution sera précise mais plus le temps de calcul sera long.

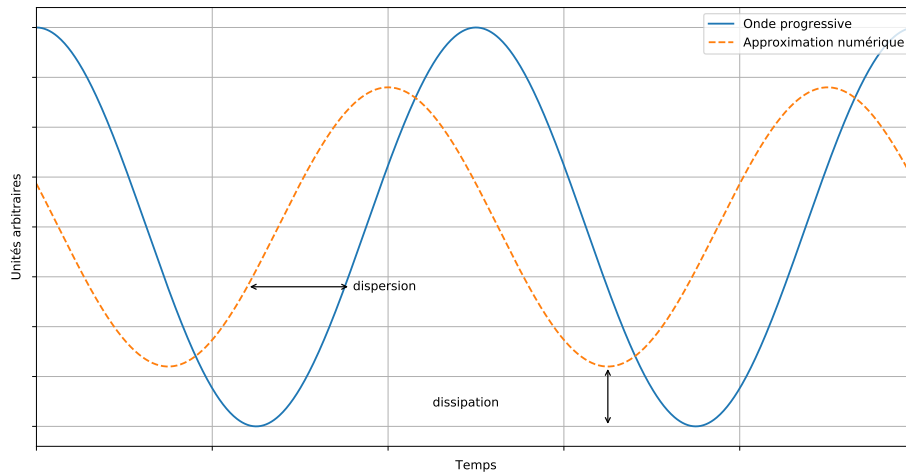
Les schémas temporels peuvent être classés en deux catégories : (1) les schémas explicites, où la solution au temps  $\phi(t + \Delta t)$  est calculée directement depuis la solution au temps  $\phi(t)$  et (2) les schémas implicites où une équation du type  $g(\phi(t), \phi(t + \Delta t)) = 0$  doit être résolue. Numériquement, les schémas implicites se révèlent généralement très coûteux puisqu'un système doit être résolu ou un point fixe utilisé. En revanche, ces schémas sont dits *inconditionnellement stables* ; c'est-à-dire qu'il n'y a pas de condition sur le pas de temps  $\Delta t$  pour que la solution calculée reste bornée et que, sans apport extérieur, la variation de l'énergie globale du domaine soit négative ou nulle. Dans le cas des schémas explicites, il existe un critère de stabilité qui restreint les pas de temps  $\Delta t$  admissibles en fonction des équations considérées ; ce critère est une condition de type Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) détaillée ci-après.

### 3.5.1 Taille des éléments de maillage

Le domaine  $\Omega$  est approché par un ensemble d'éléments discrets  $T_k$ . La taille des éléments va influencer la précision avec laquelle une solution est propagée. En particulier, elle va permettre de contrôler la dissipation et la dispersion numérique (voir Figure 3.4.).

Pour définir la taille des éléments dans les problèmes de propagations d'onde, on considère le nombre de points d'interpolation par longueur d'onde minimale. Selon la méthode utilisée, plus ou moins de points sont nécessaires pour obtenir une précision voulue. Par exemple, avec une méthode de différences finies classique [BS06], le domaine est discrétisé de sorte à avoir entre 15 et 30 points par longueur d'onde minimale, voire 60 lorsqu'une topographie non plane est prise en compte. De nouvelles méthodes, plus précises et moins contraignantes, en terme de discrétisation spatiale ont récemment été proposées et appliquées dans le projet E2VP [Mau+15].

Les méthodes spectrales sont bien plus précises — ou dit de manière équivalente, elles nécessitent moins de points pour une précision donnée que les éléments finis classique ou que les différences finies. SERIANI et PRIOLO [SP94] ont montré numériquement que  $ppw = 4.5$  points par longueur d'onde minimale étaient nécessaires pour une propagation



**Figure 3.4.:** Exemple d’une onde progressive (trait plein) et de son approximation numérique (trait pointillé).

correcte avec une interpolation d’ordre huit. Lorsque l’ordre d’interpolation augmente, le nombre de points par longueur d’onde nécessaires tend vers l’asymptote  $ppw = \pi$ . Plus récemment FERRONI et al. [Fer+17] ont montré que les méthodes d’éléments finis spectraux continus et discontinus nécessitent autant de points. Ils ont également montré que pour avoir une dispersion spatiale faible, environ cinq points étaient suffisants avec un maillage hexaédrique et dix avec un maillage tétraédrique lorsque le degré d’interpolation des polynômes était supérieur ou égal à quatre.

Dans la suite du manuscrit, sauf mention contrainte, on propose d’utiliser également dix points par longueur d’onde minimale. C’est-à-dire de considérer environ deux éléments et demi avec une interpolation d’ordre quatre, en 1D et 3D, par longueur d’onde minimale.

**Estimation de la longueur d’onde minimale** La longueur d’onde minimale est donnée par la formule suivante :

$$\lambda_{\min} = \min_{\varepsilon} \frac{v_s(\varepsilon)}{f_{\max}}, \quad (3.43)$$

elle dépend de la déformation, de la loi de comportement considérée et de la fréquence maximale propagée. La vitesse de propagation minimale est égale à la plus petite valeur propre de la matrice Jacobienne du système étudié.

Dans le cas 3D non linéaire, cette valeur ne peut pas être écrite analytiquement en fonction de la déformation, compte tenu de la loi de comportement élastoplastique utilisée. C’est

pourquoi nous choisissons d'estimer la longueur d'onde minimale en utilisant le système 1D. Nous avons :

$$v_s(\gamma) = \sqrt{\frac{1}{\rho} \left. \frac{\partial \sigma(\alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=\gamma}}, \quad (3.44)$$

ce qui donne les expressions suivantes :

— dans le cas linéaire :

$$v_s(\gamma) = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \quad (3.45)$$

— dans le cas nonlinéaire élastique, où la courbe de réduction de module de cisaillement est donnée par  $g(\gamma)$  :

$$v_s(\gamma) = \sqrt{\frac{\mu (\dot{g}(\gamma)\gamma + g(\gamma))}{\rho}}. \quad (3.46)$$

En particulier, lorsque nous utilisons le modèle hyperbolique (2.18) nous avons :

$$v_s(\gamma) = \sqrt{\frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\gamma_{\text{ref}}}{\gamma_{\text{ref}} + |\gamma|} \right)}. \quad (3.47)$$

— dans le cas nonlinéaire élastoplastique, nous supposons que la déformation maximale est atteinte lors du premier chargement, ce qui permet d'utiliser la formule (3.46). Si tel n'est pas le cas, la valeur étant sous-estimée, elle peut tout de même être retenue ; le maillage sera plus fin qu'attendu.

On constate alors que la vitesse minimale dépend de la déformation maximale. Celle-ci n'est pas connue *a priori*. Pour cela, plusieurs possibilités existent. On pourra notamment utiliser un proxy<sup>4</sup>, comme détaillé par RATHJE et al. [Rat+01], CHANDRA et al. [Cha+15] et GUÉGUEN [Gué16], ou bien procéder par itérations successives en vérifiant à la fin d'une simulation la déformation maximale calculée et la compatibilité avec le nombre de points par longueur d'onde requis [GB12 ; Ora+17].

Quant à la fréquence maximale propagée  $f_{\text{max}}$ , elle est égale à la fréquence maximale de la source ou de l'onde injectée dans le cas linéaire. Dans le cas nonlinéaire élastique/élastoplastique, on s'attend à ce que la fréquence maximale augmente par rapport au cas linéaire. En pratique, nous nous donnons une fréquence  $f_{\text{max}}$  jusqu'à laquelle nous souhaitons une propagation précise et elle est utilisée pour calculer la longueur d'onde minimale, en utilisant les formules ci-dessus.

Les maillages utilisés dans ce manuscrit sont construits pour avoir dix points par longueur d'onde, avec un calcul itératif de la déformation maximale.

---

4. Un proxy est un moyen d'estimer une quantité qui n'est pas directement mesurable depuis une autre qui peut l'être. Dans notre cas, la déformation maximale en cisaillement peut être estimée à l'aide de la vitesse maximale mesurée en surface.

### 3.5.2 Condition de type Courant–Friedrichs–Lewy

La *condition de Courant-Friedrichs-Lewy* ou CFL relie le pas temporel  $\Delta t$  au pas d'espace  $h$ , afin que le schéma numérique soit stable. Une des observations de COURANT et al. [CFL28], est que pour qu'une solution d'une équation différentielle puisse converger vers une solution d'une équation aux dérivées partielles, le schéma temporel doit prendre en compte toutes les données initiales qui influencent la solution. Pour satisfaire cette condition, le rapport entre le pas d'espace  $h$  et le pas de temps  $\Delta t$  doit être au moins aussi grand que la plus grande vitesse à laquelle le système aux dérivées partielles peut propager les solutions. Cette inégalité est appelée *condition de Courant-Friedrichs-Lewy*. Historiquement, cette condition a été établie pour le phénomène d'advection, approché par la méthode des différences finies et s'écrit ainsi :

$$\Delta t \leq \text{CFL} \frac{h}{c} \quad (3.48)$$

où  $c$  est la vitesse de propagation maximale,  $h$  le pas d'espace utilisé et CFL la constante qui permet d'assurer la stabilité. Cette constante dépend du schéma temporel utilisé, de l'ordre d'interpolation et de l'équation résolue. On pourra se référer à [MK12] pour une sélection d'articles traitant de cette condition et de son impact sur l'analyse et la simulation numérique.

**Dans le cas 1D.** Ayant considéré seulement la propagation des ondes de cisaillement, la vitesse maximale de propagation est donnée par  $v_s$ . Dans le cas où une relation constitutive nonlinéaire est utilisée, cette vitesse est amenée à varier en fonction de la déformation ; mais sa borne supérieure est toujours  $v_s(z) = \sqrt{\frac{\mu(z)}{\rho(z)}}$ , la vitesse du matériau à l'état initial. Étant donné que l'on a supposé les propriétés des matériaux constantes par élément, nous noterons  $\tilde{v}_s^k$  la vitesse à l'état initial dans l'élément  $T^k$ .

La condition CFL, doit être vérifiée pour tous les éléments  $T^k$ , c'est-à-dire :

$$\Delta t \leq \text{CFL} \frac{h^k}{\tilde{v}_s^k} \quad \forall k \quad (3.49)$$

où  $h^k$  est le pas d'espace de l'élément  $T^k$ . Ainsi, pour une valeur CFL fixée, le pas de temps est donné par :

$$\Delta t = \text{CFL} \times \min_k \left( \frac{h^k}{\tilde{v}_s^k} \right) \quad (3.50)$$

**Dans le cas 1D-3C.** La relation est la même que dans le cas 1D, excepté que la vitesse de propagation est maintenant dominée par  $\tilde{v}_p$  et non plus  $\tilde{v}_s$ .

**Dans le cas 3D.** La relation est la même que dans le cas 1D-3C, excepté que la notion de *pas d'espace* doit être définie. Dans le cas d'un maillage tridimensionnel, nous utiliserons le diamètre de la sphère inscrite comme longueur caractéristique d'un élément  $T^k$ . Nous avons alors :

$$h^k = \frac{6 \text{Vol}(T^k)}{\sum_{i \in \mathcal{V}(k)} S_i^k} \quad (3.51)$$

où  $\text{Vol}(T^k)$  est le volume de tétraèdre  $T^k$  et  $S_i^k$  l'aire du triangle  $i$  du tétraèdre  $k$ .

**Remarque.** La diamètre de la sphère inscrite d'un élément est généralement un critère plus restrictif que la longueur d'une arête. C'est pourquoi en 3D, nous pouvons utiliser des maillages tels que nous avons  $2h^k$  par longueur d'onde minimale, et non pas deux éléments et demi.

**Quelle(s) valeur(s) pour la constante CFL ?** La constante dépendant du schéma temporel, de la méthode spatiale et de l'équation considérée. COCKBURN et SHU [CS01] ont étudié, dans le cadre de méthodes *Runge-Kutta Discontinuous Galerkin* — RKDG — pour l'équation d'advection, les constantes CFL qui permettent d'avoir la stabilité numérique.

Soit  $N$  le degré des polynômes d'interpolation, alors dans ce cas la constante CFL est définie par :

$$\text{CFL} = \frac{1}{2N + 1}. \quad (3.52)$$

Il s'agit de la constante optimale, ce qui peut être prouvé dans les cas  $N = 0$  et  $N = 1$  [Shu91 ; CS01]. Dans les autres cas, la valeur donnée par (3.52) est « moins de 5% plus petite que la valeur optimale obtenue numériquement ». Le Tableau 3.2 donne les valeurs optimales calculées pour différents ordres spatio-temporels avec un schéma RKDG.

$N$	1	2	3	4
$\nu = 2$	0.333	*	*	*
$\nu = 3$	0.409	0.209	0.130	0.089
$\nu = 4$	0.464	0.235	0.145	0.100
$\nu = 5$	0.534	0.271	0.167	0.115

**Tableau 3.2.:** Extrait du tableau des constantes CFL données par COCKBURN et SHU [CS01] pour des polynômes de degrés  $N$  et des méthodes spatiales Runge-Kutta classique d'ordre  $\nu$ . Le symbol \* indique que la méthode est instable quand le rapport  $\Delta t/h$  est maintenu constant et que  $\Delta t$  est typiquement de l'ordre  $\mathcal{O}(h^{1+\epsilon})$ , pour un  $\epsilon > 0$ .

Concernant le schéma temporel Saute-Mouton d'ordre 2, GLINSKY et al. [GMD10] ont montré numériquement que la valeur  $CFL = \frac{1}{2N+1}$  pouvait également être utilisée, en 2D.

Enfin, dans le cas du schéma Runge-Kutta à faible stockage, HESTHAVEN et WARBURTON [HW08] écrivent que la constante CFL peut être supérieure à celle obtenue dans le cas d'un schéma Runge-Kutta classique. Numériquement, nous verrons que, dans le cas particulier où le polynôme d'interpolation est d'ordre  $N = 4$ ,  $CFL = 0.17$  peut être choisie ; ce qui est 70% plus grand que la CFL pour une méthode Runge-Kutta d'ordre 4 classique, d'après COCKBURN et SHU [CS01].

**Remarque** (Vocabulaire). *Dans la suite du manuscrit, nous utiliserons l'expression « pas de temps optimal » lorsque la CFL utilisée est la valeur maximale permettant la stabilité, donnée par la relation (3.52).*

**Remarque** (Notations). *Dans la suite du manuscrit, nous utiliserons les notations suivantes :*

<i>Notation</i>	<i>Schéma spatial</i>	<i>Schéma Temporel</i>
LF-DG	DG	Saute-Mouton
LSRK4-DG	DG	Runge-Kutta d'ordre 4 à faible stockage
RK3-DG	DG	« Strong Stability Preserving » Runge-Kutta d'ordre 3

*On pourra également ajouter PN à la fin de l'identifiant, lorsque l'on souhaite préciser que l'ordre d'interpolation de la méthode DG est N. Par exemple LSRK4-DG-P4, pour préciser qu'une interpolation d'ordre quatre est utilisée.*



## **Deuxième partie**

### Applications





# Propagation dans un milieu unidimensionnel nonlinéaire

” *Filter as little as possible. . .  
But as much as is needed*

— HESTHAVEN et Warburton [HW08]

Comme nous l’avons vu dans le chapitre précédent, la méthode DG nécessite de spécifier le flux numérique  $f^*$ , dont l’intégrale est à calculer sur le bord des éléments du maillage — un point dans le cas 1D. La définition n’est pas unique et va dépendre du type de problème à résoudre, elle fait intervenir les valeurs des variables considérées de part et d’autre de l’élément.

Dans ce chapitre, nous proposons d’utiliser un flux décentré en considérant le problème de Riemann à l’interface de deux éléments. Les équations du mouvement sont considérées avec une rhéologie pouvant suivre une loi nonlinéaire. Nous comparons dans un premier temps les résultats obtenus dans le cas linéaire avec des cas tests issus de travaux précédents, afin de vérifier l’implémentation dans ce cas particulier. Dans un second temps, nous montrerons qu’en considérant un milieu infini et homogène, nous sommes capables d’exhiber une solution analytique lorsque le comportement du milieu est nonlinéaire élastique. Cette solution analytique nous servira à réaliser une étude de convergence et en particulier à montrer la robustesse du schéma dans le cas d’une rhéologie nonlinéaire. Enfin, l’influence d’une loi de comportement nonlinéaire est observée sur une colonne de sol aux propriétés réalistes.

On utilisera la même notation que HESTHAVEN et Warburton [HW08], c’est-à-dire que  $\cdot^-$  fera référence aux valeurs à l’intérieur d’un élément et  $\cdot^+$  à l’extérieur d’un élément. Formellement, on considère deux éléments,  $T^+$  et  $T^-$ , adjacents,  $x \in T^+ \cap T^-$  et  $\mathbf{n}_{T^\pm}$  la normale sortante l’élément  $T^\pm$ . Alors nous avons :

$$\mathbf{w}^\pm(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^\pm} \mathbf{w}(x - \epsilon \mathbf{n}_{T^\pm}). \quad (4.1)$$

De plus, il est utile de définir la moyenne et le saut, respectivement, par :

$$\{\{w\}\}(x) = \frac{w^+(x) + w^-(x)}{2}, \quad \llbracket w \rrbracket(x) = n^- \cdot u^-(x) + n^+ \cdot u^+(x). \quad (4.2)$$

Dans tout ce chapitre, nous considérons le cas 1D uniquement, ainsi le schéma DG à résoudre est le suivante (cf section 3.1) :

$$\frac{d\hat{u}^k}{dt} = \left( \underline{M}^{k-1} \underline{K}_z^k \hat{f} \right) + \left( \sum_{i \in \mathcal{V}(k)} \underline{M}^{k-1} \underline{R}_z^{ki} f^* n_z^{ki} \right) \quad (4.3)$$

Dans un premier temps, nous spécifions le flux numérique  $f^*$ . Puis nous étudions diverses applications du schéma numérique.

## 4.1 Dérivation du flux décentré

Dans le cas de la propagation d'ondes dans un milieu linéaire élastique, avec des équations écrites sous la forme vitesse/contraintes, DELCOURTE et al. [DFG09] ont montré qu'un flux centré, combiné avec un schéma saute-mouton (cf sous-section 3.4.1, p. 46) pour l'intégration temporelle était non dissipatif et stable sous condition CFL. Adapté au système écrit en vitesse/déformation, le flux centré pour le système (4.3) s'écrit ainsi :

$$f^* = \begin{pmatrix} -\sigma^* \\ -v^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\{\{\sigma(\gamma)\}\} \\ -\{\{v\}\} \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

Dans un autre contexte, celui des équations de Maxwell nonlinéaire, dans le cas homogène, FEZOUÏ et LANTERI [FL15] ont utilisé un flux Lax-Friedrichs local, défini par :

$$f^* = \{\{f_h(u_h)\}\} + \frac{C}{2} \llbracket u_h \rrbracket, \quad (4.5)$$

où  $C$  est le maximum, en valeur absolue, des valeurs propres de la matrice Jacobienne du problème de Riemann, de part et d'autre de l'interface considérée. Nous choisissons un schéma décentré, adapté au cas nonlinéaire et hétérogène, en suivant une approche proposée par LEVEQUE [LeV02b] dans le cas de la méthode des volumes finis.

À partir de ce point et dans tout le manuscrit, nous faisons l'hypothèse que dans chaque élément  $T_k$  du maillage, les propriétés et les paramètres mécaniques sont constants. Cette hypothèse est faite dans un souci de simplification, mais n'est pas nécessaire pour la

méthode, qui peut être étendue à des variations continues des propriétés mécaniques (cf [CKB10; MG15] par exemple).

À chaque interface des éléments du maillage, un problème de Riemann doit être résolu. Ce problème est schématisé par la Figure 4.1. Dans le cas hétérogène unidimensionnel, nous avons deux ondes, une se propageant de l'extérieur vers l'intérieur à la vitesse  $-\tilde{s}^-$  et l'autre se propageant de l'intérieur vers l'extérieur à la vitesse  $\tilde{s}^+$ . Sur la trajectoire de chaque onde  $i$ , les conditions de Rankine-Hugoniot doivent être vérifiées [Tor09], c'est-à-dire :

$$-\tilde{s}_i (\mathbf{u}_l - \mathbf{u}_r) + (\mathbf{f}(\mathbf{u})_l - \mathbf{f}(\mathbf{u})_r) = 0 \quad \forall i \quad (4.6)$$

où les indices  $\cdot_l$  et  $\cdot_r$  font référence aux valeurs à gauche et à droite, par rapport au sens de propagation de l'onde  $i$  considérée. Dans notre cas, il en résulte un système de quatre équations :

$$\begin{cases} \tilde{s}^- (\rho^- v^- - \rho^- v^*) &= \sigma^- (\gamma^-) - \sigma^- (\gamma^*), \\ \tilde{s}^- (\gamma^- - \gamma^*) &= v^- - v^*, \\ \tilde{s}^+ (\rho^+ v^+ - \rho^+ v^{**}) &= \sigma^+ (\gamma^{**}) - \sigma^+ (\gamma^+), \\ \tilde{s}^+ (\gamma^+ - \gamma^{**}) &= v^{**} - v^+. \end{cases} \quad (4.7)$$

Les inconnues sont  $v^*$ ,  $v^{**}$ ,  $\gamma^*$ ,  $\gamma^{**}$ , mais également les vitesses de propagation  $\tilde{s}^+$  et  $\tilde{s}^-$  à cause de la nonlinéarité. Dans une méthode discontinue, le flux normal est continu à l'interface. De fait, en 1D, nous avons donc deux équations supplémentaires qui sont :

$$\begin{cases} v^* &= v^{**}, \\ \sigma^* &= \sigma^- (\gamma^*) = \sigma^+ (\gamma^{**}). \end{cases} \quad (4.8)$$

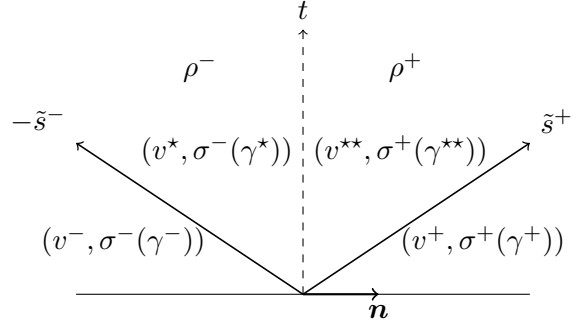


Figure 4.1.: Description du problème de Riemann et des vitesses caractéristiques à l'interface d'un élément.

Ainsi, en utilisant la première et la troisième équations de (4.7), nous obtenons les expressions suivantes :

$$\begin{cases} v^* &= \frac{\rho^+ \tilde{s}^+ v^+ + \rho^- \tilde{s}^- v^- + \sigma^+ - \sigma^-}{\rho^+ \tilde{s}^+ + \rho^- \tilde{s}^-}, \\ \sigma^* &= \frac{\rho^+ \rho^- \tilde{s}^+ \tilde{s}^- (v^+ - v^-) + \rho^+ \tilde{s}^+ \sigma^- + \rho^- \tilde{s}^- \sigma^+}{\rho^+ \tilde{s}^+ + \rho^- \tilde{s}^-}. \end{cases} \quad (4.9)$$

On peut introduire l'impédance  $z$  et son inverse  $y$  :

$$z^\pm = (\rho \tilde{s})^\pm \quad y^\pm = \frac{1}{z^\pm}, \quad (4.10)$$

de telle sorte que les expressions (4.9) puissent se réduire à :

$$\begin{cases} v^* &= \{\{z\}\}^{-1} \left( \{\{zv\}\} + \frac{1}{2} \llbracket \sigma \rrbracket \right), \\ \sigma^* &= \{\{y\}\}^{-1} \left( \{\{y\sigma\}\} + \frac{1}{2} \llbracket v \rrbracket \right). \end{cases} \quad (4.11)$$

Pour fermer le système, nous avons besoin des vitesses de propagation  $\tilde{s}^\pm$ . Nous avons un total de six équations pour six inconnues, de fait une méthode itérative peut permettre d'approcher ces vitesses. À l'itération initiale, elle sont approximées par la vitesse de propagation linéaire  $v_s^\pm$ , puis une première estimation de  $\sigma^*$  peut être faite en utilisant (4.11). Ensuite, une méthode de point fixe peut être utilisée pour obtenir  $\gamma^*$  et  $\gamma^{**}$  avec  $\sigma^-(\gamma^*) = \sigma^*$  et  $\sigma^+(\gamma^{**}) = \sigma^*$ . On peut alors calculer une nouvelle approximation de  $\tilde{s}^+$  par :

$$\tilde{s}^+ = \sqrt{\frac{1}{\rho^+} \left( \frac{\sigma^+(\gamma^*) - \sigma^+(\gamma^+)}{\gamma^* - \gamma^+} \right)}, \quad (4.12)$$

il peut être fait de même pour  $\sigma^-$  (en utilisant la troisième et quatrième équations de (4.7)). Puis le processus peut être recommencé jusqu'à convergence.

**Remarque.** À l'interface, en 1D, seules les vitesses et les contraintes sont continues, et donc égales. Les déformations  $\gamma^*$  et  $\gamma^{**}$ , elles, ne le sont que si les propriétés mécaniques du milieu sont continues à l'interface.

Cela dit, comme mentionné par LEVEQUE [LeV02b] et confirmé par des tests que nous avons faits, cette approche est déjà extrêmement coûteuse en 1D. Une méthode bien plus efficace<sup>1</sup> consiste à approximer la différence finie sous la racine carré de (4.12) par la dérivée partielle de  $\sigma^\pm$  par rapport à  $\gamma^\pm$ , qui peut être calculée analytiquement. C'est-à-dire :

$$\tilde{s}^\pm \approx v_s^\pm = \sqrt{\frac{1}{\rho^\pm} \left. \frac{\partial \sigma^\pm(\epsilon, x, t)}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=\gamma^\pm}}. \quad (4.13)$$

1. Près de six fois plus rapide selon nos tests et les critères de convergence utilisés.

Cette approximation est exacte dans le cas linéaire et les tests numériques que nous avons faits nous permettent d'avancer qu'utiliser l'expression (4.12) ou (4.13) donne des résultats numériques quasiment identiques. Dès lors, comme [LeV02a], nous utiliserons pour toute la suite le flux numérique calculé avec (4.13).

## 4.2 Vérification dans le cas linéaire, en milieu hétérogène

On propose une première vérification du schéma numérique et du flux proposé dans le cas linéaire et hétérogène. Nous reproduisons un cas proposé par PEYRUSSE et al. [Pey+14], considérant une onde plane en cisaillement se propageant dans un milieu hétérogène contenant sept couches de sédiments sur un rocher. Les propriétés physiques des couches sont données dans le Tableau 4.1.

	$H$ (m)	$v_s$ (m/s)	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )
1	7	130	2050
2	13	200	2150
3	34	300	2075
4	23.5	450	2100
5	50	600	2155
6	59	700	2200
7	10	1250	2500
Rocher	103.5	2600	2600

**Tableau 4.1.:** Propriétés physiques des couches composant le milieu étudié.  $H$  correspond à l'épaisseur des couches.

Dans leur étude, PEYRUSSE et al. [Pey+14] ont comparé les rapports spectraux de la vitesse horizontale obtenus par trois méthodes différentes :

- un code DG 2D, combinant des flux centrés et un schéma temporel *saute-mouton* [DFG09] ;
- un code aux différences finis 2D [Gel+05] ;
- la méthode de Haskell-Thomson [Has53 ; Tho50] qui permet d'obtenir une solution analytique des rapports spectraux dans le cas 1D élastique.

Dans ce manuscrit, nous proposons de comparer la solution obtenue par la méthode DG dans l'étude citée (DG, flux centré, schéma temporel *saute-mouton*) — que l'on appellera *RÉFÉRENCE* — et la solution obtenue avec le flux décentré, une interpolation avec un polynôme de degré quatre et le schéma temporel *RK3* — notée *RK3-DG-P4*

On considère un domaine ayant une taille totale de 300 m. L'onde incidente est injectée directement dans le rocher à  $z = -300$  m, en suivant la méthode d'injection de l'onde

incidente, décrite dans la section 3.2.3. Cette onde est un signal de Gabor, défini par l'équation (4.14) :

$$G(t) = A \exp\left(-\frac{2\pi(t-t_0)f_0}{\gamma}\right)^2 \cos(2\pi f_0(t-t_0)) \quad (4.14)$$

avec les paramètres suivants :  $A = 0.0125$  m/s,  $t_0 = 0.4$  s,  $f_0 = 6$  Hz et  $\gamma = 4$ . La Figure 4.2a illustre le signal normalisé<sup>2</sup> de Gabor utilisé. Son spectre de Fourier est donné par la Figure 4.2b, ce qui permet de voir que la fréquence maximale de l'onde incidente est de 12 Hz et que l'énergie est maximale à 6 Hz.



(a) Signal de Gabor en fonction du temps.

(b) Transformée de Fourier du signal de Gabor.

Figure 4.2.: Signal de Gabor.

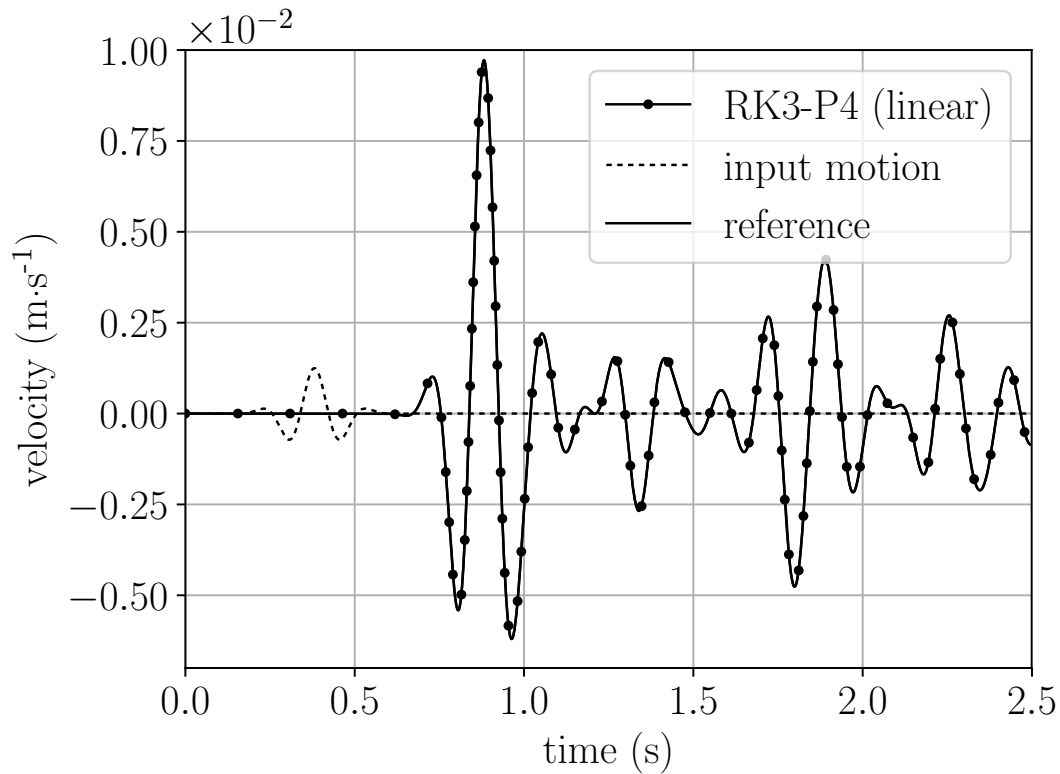
Une condition de surface libre est appliquée au sommet de la colonne, en  $z = 0$  m. On utilise un total de dix points par longueur d'onde minimale locale. C'est-à-dire, en utilisant comme approximation un polynôme d'ordre quatre ( $P4$ ), nous avons environ 2.5 éléments par longueur d'onde minimale. Autrement dit, considérant que la fréquence maximale de la source est de 12 Hz et étant donné que dans le cas linéaire, la bande de fréquences ne change pas, alors la taille du maillage varie de 51.75 m dans le rocher à 3.5 m dans la couche la plus superficielle.

La Figure 4.3 montre les traces de la vitesse horizontale au sommet de la colonne pour les deux méthodes DG. L'onde incidente injectée dans le rocher est présentée en pointillés sur la figure. Comparant l'onde incidente et la vitesse obtenue en surface, on constate une forte amplification, une durée importante du signal et une complexité de la trace résultant des aller-retours successifs de l'onde dans les différentes couches du milieu. Les deux solutions DG obtenues, par deux codes, deux flux et deux schémas temporels différents sont similaires. On calcule une différence relative<sup>3</sup> de 0.39%.

On s'intéresse maintenant aux rapports spectraux obtenus, illustrés par la Figure 4.4. On observe de très fortes amplifications (entre 8 et 16). Dans ce cas également, on constate que les deux approches fournissent des résultats comparables, la différence relative étant de 0.20%.

2. c'est-à-dire avec  $A = 1$ .

3. Définie par  $\text{diff}(a, b) = \frac{\|a-b\|_2}{\|a\|_2}$ .



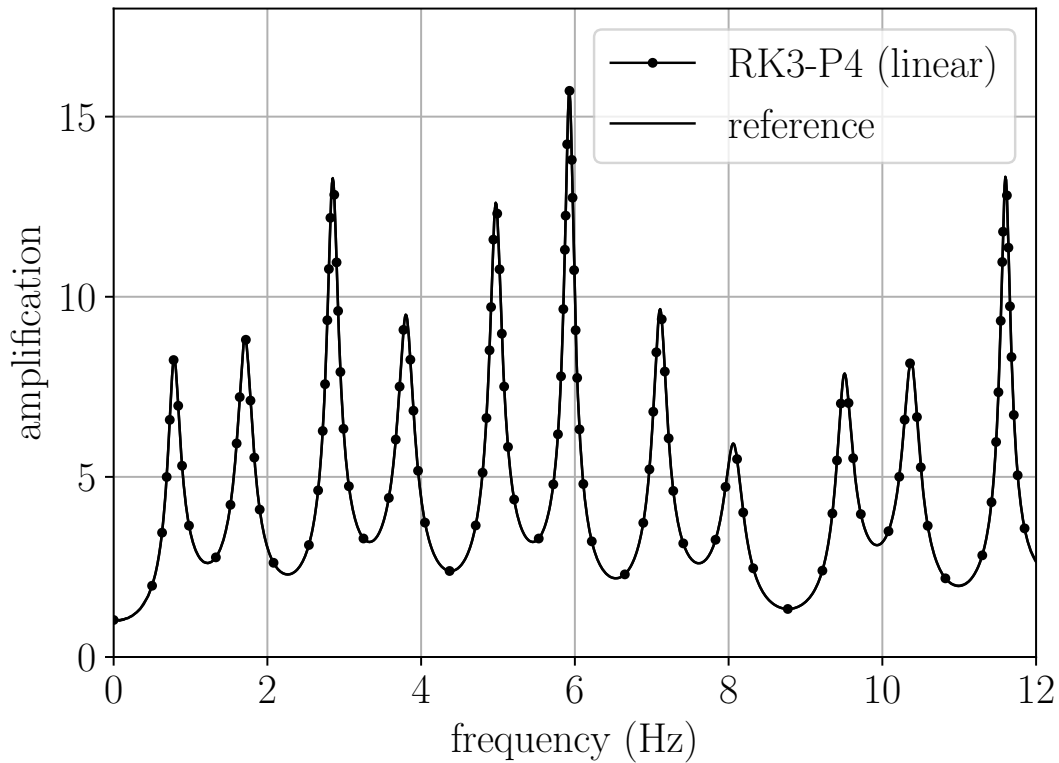
**Figure 4.3.:** Évolution temporelle de la vitesse calculée en surface pour les deux méthodes DG (*RÉFÉRENCE* et RK3-DG-P4). La courbe en pointillés correspond à l'onde incidente injectée dans le rocher.

Cette première étude constitue donc une première vérification du flux numérique proposé dans le cas d'un milieu linéaire et hétérogène.

### 4.3 Comparaison dans le cas nonlinéaire élastique, en milieu homogène

Dans ce second cas, nous nous intéressons à la propagation d'une onde dans un milieu homogène, infini et nonlinéaire élastique (cf sous-section 2.2.2). Dans ce cas particulier, nous sommes capable d'établir une solution analytique du système (2.54). Nous allons établir cette solution analytique, puis nous l'utiliserons pour étudier numériquement la précision de la méthode DG et du flux que nous proposons.





**Figure 4.4.:** Rapports spectraux (fonction de transfert) de la vitesse horizontale. Comparaisons entre deux méthodes DG (*RÉFÉRENCE* et RK3-DG-P4). Pour chacune des courbes, nous avons  $\Delta f \approx 10^{-2}$  Hz.

### 4.3.1 Établissement d'une solution analytique

La solution analytique du problème considéré est établie ci-dessous à partir d'une méthode proposée par POTOTSCHNIG et al. [Pot+09]. La méthode initiale est utilisée pour les équations nonlinéaires de Maxwell en considérant un milieu présentant un effet Kerr.

Nous supposons un milieu  $\Omega$ , unidimensionnel, homogène, infini et nonlinéaire élastique. On cherche donc à résoudre le système (2.54) avec la loi de comportement nonlinéaire élastique suivante :

$$\sigma = \frac{\gamma\mu}{(1 + |\gamma|/\gamma_r)}. \quad (4.15)$$

Le milieu étant homogène, on peut écrire le système sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \partial_t v(x, t) - v_s^2(\gamma(x, t)) \partial_x \gamma(x, t) & = 0 \\ \partial_t \gamma(x, t) - \partial_x v(x, t) & = 0 \end{cases} \quad (4.16)$$

où la vitesse de propagation  $v_s$  est telle que :

$$v_s^2(\gamma) = \frac{\mu}{\rho} \frac{\gamma_r^2}{(\gamma_r + |\gamma|)^2} = \frac{\mu}{\rho} \frac{1}{(1 + |\gamma|/\gamma_r)^2}. \quad (4.17)$$

On introduit la variable  $\zeta = \frac{|\gamma|}{\gamma_r}$ , ce qui permet d'écrire la vitesse de propagation comme suit :

$$v_s^2(\zeta) = \frac{\mu}{\rho} \frac{1}{(1 + \zeta)^2}. \quad (4.18)$$

**Remarque.** Dans le cas linéaire, nous avons  $\gamma_r = \infty$  et donc  $\zeta = 0$ . On retrouve ainsi la formulation classique de la vitesse de propagation des ondes de cisaillement.

La solution du système (4.16) est cherchée à l'aide de l'Ansatz suivant :

$$v = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} f(\zeta) \gamma(x, t) \quad (4.19)$$

où  $f(\zeta)$  est une fonction que nous allons spécifier peu après.

Injectant (4.19) dans le système (4.16), nous obtenons le système suivant :

$$\begin{cases} [f(\zeta) + f'(\zeta)\zeta] \partial_t \gamma(x, t) &= \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \frac{1}{(1+\zeta)^2} \partial_x \gamma(x, t), \\ \partial_t \gamma(x, t) &= \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} [f(\zeta) + f'(\zeta)\zeta] \partial_x \gamma. \end{cases} \quad (4.20)$$

Une condition d'existence d'une solution non triviale est que les deux équations du système soient identiques. On a donc :

$$[f(\zeta) + f'(\zeta)\zeta]^2 = \frac{1}{(1 + \zeta)^2} \quad (4.21)$$

c'est-à-dire :

$$f(\zeta) + f'(\zeta)\zeta = \frac{\pm 1}{1 + \zeta}. \quad (4.22)$$

**Remarque.** Dans un milieu linéaire, nous avons  $\zeta = 0$ . On remarque ainsi que  $f(0) = -1$  correspond à une solution où l'onde se propage dans le sens positif sur l'axe  $Ox$ , alors que  $f(0) = 1$  correspond au cas où l'onde se propage dans le sens opposé.

Cette équation peut s'écrire comme :

$$(\zeta f(\zeta))' = \frac{\pm 1}{1 + \zeta}, \quad (4.23)$$

dont les solutions sont :

$$f(\zeta) = \frac{C_0}{\zeta} \pm \frac{\ln(1 + \zeta)}{\zeta} \quad \zeta > 0. \quad (4.24)$$

Considérant que le cas linéaire correspond au cas  $f(0) = \pm 1$ , alors la constante d'intégration  $C_0$  doit être égale à zéro. De plus, par continuité, nous avons :

$$f(\zeta) = \pm \begin{cases} \frac{\ln(1+\zeta)}{\zeta} & \text{si } \zeta > 0, \\ 1 & \text{si } \zeta = 0. \end{cases} \quad (4.25)$$

**Remarque.** Pour établir une solution analytique avec une loi de comportement nonlinéaire élastique différente, la méthode est identique, mais avec une équation différentielle différente à résoudre. Dans ce cas là, la solution  $f(\zeta)$  peut être cherchée sous la forme d'une série  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n$  où les coefficients  $a_n$  sont déterminés de telle sorte à vérifier l'équation différentielle.

Finalement, nous obtenons une unique équation aux dérivées partielles pour  $\gamma(x, t)$  :

$$\partial_t \gamma(x, t) = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \left( \frac{\pm 1}{1 + |\gamma|/\gamma_{\text{ref}}} \right) \partial_x \gamma(x, t), \quad (4.26)$$

dont la solution implicite est :

$$\gamma(x, t) = \gamma_0 \left( x \pm \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \frac{t}{(1 + |\gamma|/\gamma_{\text{ref}})} \right), \quad (4.27)$$

où  $\gamma_0(\cdot)$  est la condition initiale de  $\gamma(x, 0)$ , qui peut être n'importe quelle fonction positive appartenant à  $\mathcal{C}^1$ . Cette équation est résolue numériquement avec un point fixe. Une fois  $\gamma(x, t)$  connue,  $v(x, t)$  est calculée en utilisant l'équation (4.19) et (4.25).

Le théorème du point-fixe de Banach garantit l'existence d'une solution à l'équation  $F(E) = E$  (et donc de l'équation (4.27)) s'il existe une constante  $C \in \mathbb{R}$  telle que :

$$\left| \frac{\partial F(E)}{\partial E} \right| \leq C < 1. \quad (4.28)$$

C'est-à-dire que l'équation (4.27) a une solution, seulement s'il existe  $C$  telle que :

$$\left| \frac{\partial \gamma_0 \left( x \pm \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \frac{t}{(1 + |\gamma|/\gamma_{\text{ref}})} \right)}{\partial \gamma} \right| \leq C < 1. \quad (4.29)$$

À ce stade, nous pouvons préciser une condition initiale  $\gamma_0(\cdot)$ . Par exemple, considérons une fonction Gaussienne, définie par :

$$\gamma_0(x) = A \exp \left( -(x - x_0)^2 / \beta^2 \right), \quad (4.30)$$

où  $A$  et  $\beta$  sont deux paramètres pour ajuster l'amplitude et la fréquence de la condition initiale. On note :

$$X = x - x_0 - \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \frac{t}{(1 + |\gamma|/\gamma_r)}.$$

En notant que :

$$\max |\gamma'_0(x)| = \frac{\sqrt{2}A}{\beta} \exp(-1/2) \quad \text{et} \quad |\partial_\gamma X| = \frac{\sqrt{\mu}t}{\sqrt{\rho}\gamma_r (1 + |\gamma|/\gamma_r)^2}, \quad (4.31)$$

nous obtenons :

$$\left| \frac{\partial \gamma_0 \left( x \pm \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \frac{t}{(1 + |\gamma|/\gamma_r)} \right)}{\partial \gamma} \right| < 1 \Leftrightarrow t < T_{\max} = \frac{\beta \gamma_r}{\sqrt{2}A \exp(-1/2)} \sqrt{\frac{\rho}{\mu}}. \quad (4.32)$$

Ainsi, la solution du problème (4.27) ne peut être définie que jusqu'à un certain temps  $t = T_{\max}$ . Plus la nonlinéarité est élevée ( $\gamma_r \rightarrow 0$  ou bien  $\gamma_r < \infty$  et  $A \rightarrow \infty$ ), plus la durée d'existence de la solution sera courte. En revanche, dans le cas linéaire ( $\gamma_r = \infty$ ), la solution se propage indéfiniment dans le milieu.

In fine, nous avons la solution analytique suivante :

$$\begin{cases} \gamma(x, t) = \gamma_0 \left( x \pm \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \frac{t}{(1 + |\gamma|/\gamma_r)} \right), \\ v(x, t) = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} f \left( \frac{|\gamma|}{\gamma_r} \right) \gamma. \end{cases} \quad (4.33)$$

## 4.3.2 Description du cas test et analyses

On considère un milieu homogène infini et ayant un comportement nonlinéaire élastique. Les propriétés physiques du milieu considéré sont données dans le Tableau 4.2. Le milieu est supposé infini, mais le domaine de calcul est, lui, fini. On appliquera donc des conditions périodiques aux bords du domaine, de sorte que les erreurs numériques produites par la méthode soient conservées dans le domaine et ainsi quantifiables. Le domaine de calcul est l'intervalle  $[-1500 \text{ m}, 4500 \text{ m}]$ .

$v_s$ (m/s)	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	$\gamma_{\text{ref}}$
300	2000	$2.3 \times 10^{-3}$

**Tableau 4.2.:** Propriétés physiques du milieu utilisé avec la solution analytique.

La condition initiale pour la déformation est un pulse Gaussien, centré en  $x_0 = 0$  m :

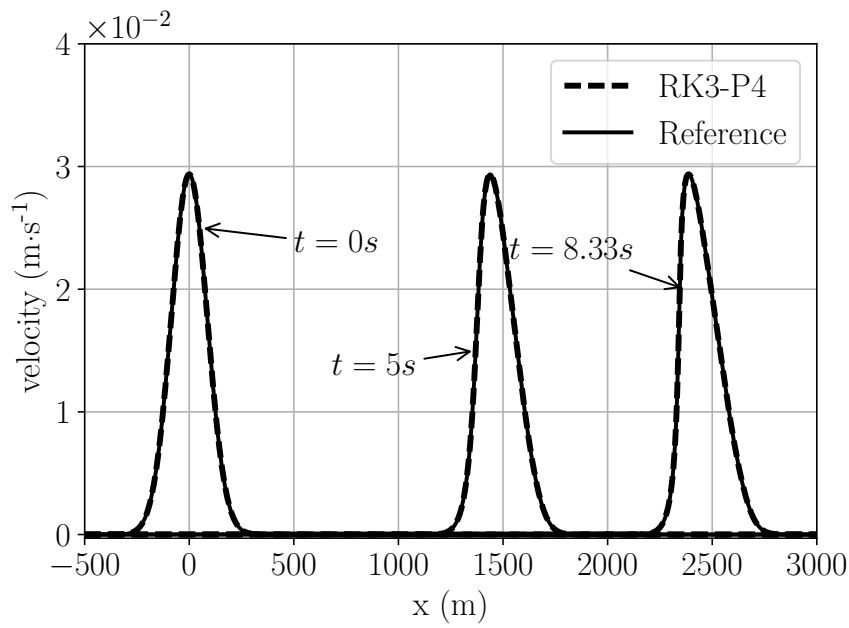
$$\gamma_0(x) = -A \exp\left(-\left(\frac{x - x_0}{\beta}\right)^2\right), \quad (4.34)$$

avec  $A = 10^{-4}$  et  $\beta = 120$  m. Le paramètre  $\beta$  est lié au support spatial de la condition initiale, ou de manière équivalente, à la fréquence maximale de l'onde initiale. La condition initiale pour  $v(x, t)$  est calculée comme expliqué ci-avant. D'après les paramètres définissant la condition initiale et la condition (4.32), une borne inférieure de la durée d'existence de la solution est  $T \approx 10.7$  s.

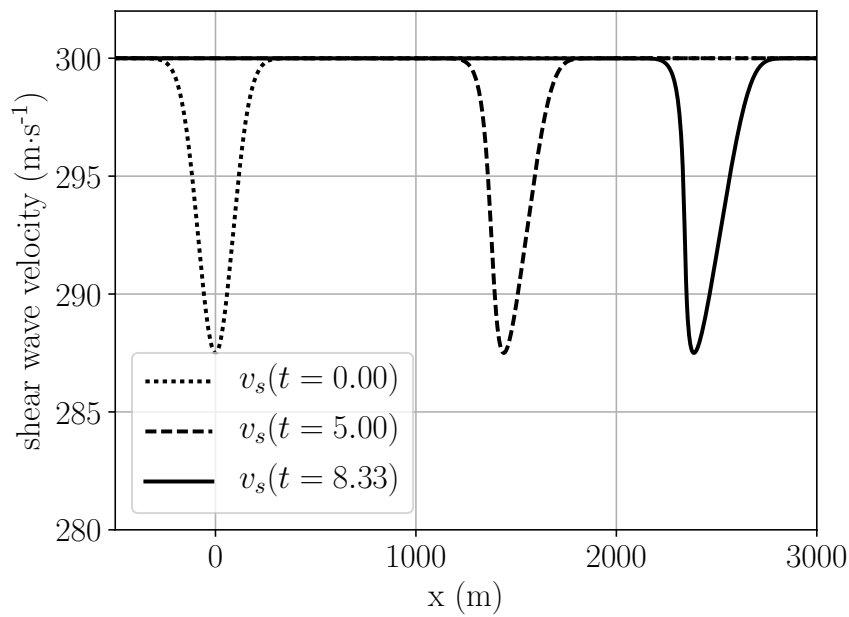
On choisit un maillage uniforme de  $K = 320$  éléments. C'est-à-dire que chaque élément a une taille de  $\Delta x = 18.75$  m.

La Figure 4.5 montre le profil de vitesse calculé numériquement et analytiquement à trois instants différents ; respectivement à  $t = 0$  s,  $t = 5$  s et  $t = 8.33$  s. Les deux derniers instants correspondent à une propagation de plus de trois et cinq longueurs d'onde moyennes, qui est d'environ 500 m à  $t = 0$  s. Sous l'effet de la nonlinéarité, le profil de vitesse devient de plus en plus raide. En effet, comme l'illustre la Figure 4.6, la vitesse de propagation dépendant de la déformation — plus la déformation est grande, plus la vitesse de propagation est réduite —, le sommet de la courbe se propage moins rapidement que le  *pied* . Le profil de la vitesse est donc modifié, comme on le constate clairement sur la Figure 4.7 où l'on compare les solutions obtenues dans le cas nonlinéaire et linéaire, à  $t = 5$  s. À la limite  $t \rightarrow T_{\max} = 10.7$  s, nous obtiendrions une solution discontinue, avec une onde de choc suivie d'une onde de raréfaction. L'accord entre la solution calculée et la solution analytique est très bon, puis que nous avons à  $t = 9$  s une erreur en vitesse d'environ  $1.5 \times 10^{-5}$ , ce qui est très petit par rapport à l'amplitude de la vitesse. Sur la Figure 4.7, on peut observer l'erreur obtenue (multipliée par  $10^3$ ) ; elle est clairement limitée à la partie raide de la solution.

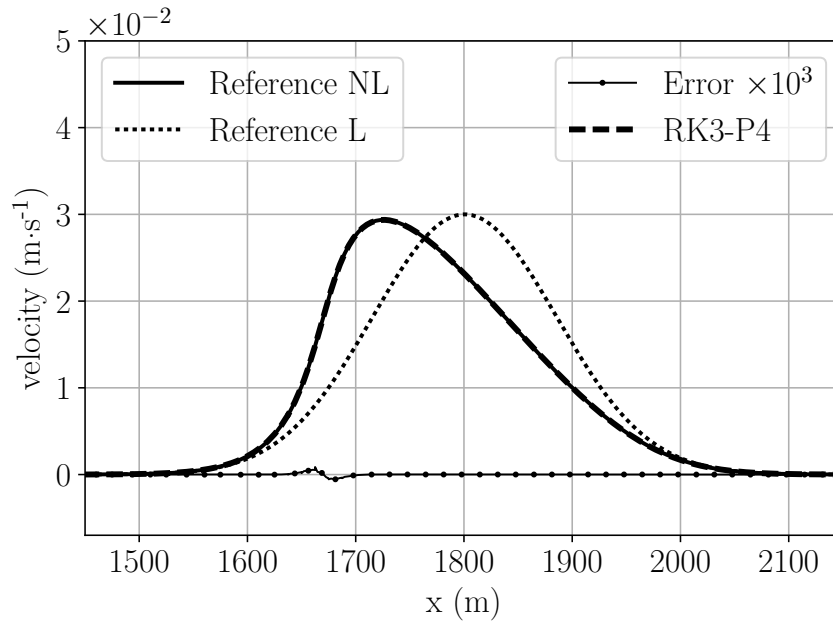
Finalement, sur la Figure 4.8, on observe la transformée de Fourier de la solution enregistrée en trois points :  $x = 300$  m, proche de la condition initiale, à  $x = 1200$  m et enfin à  $x = 2100$  m, proche de l'état final  $t = T_{\max}$ . À chacun de ces trois points correspond un profil de vitesse différent. On observe que lorsque l'onde se propage, il y a un transfert d'énergie des basses fréquences vers les hautes fréquences. La fréquence maximale pour la vitesse mesurée en  $x = 2100$  m est approximativement  $f_{\max} \approx 4$  Hz, soit le double de la fréquence maximale à l'état initial ( $f_{\max} \approx 2$  Hz à  $x = 300$  m). Connaissant la déformation maximale (donnée par la condition initiale), on peut calculer le minimum de la vitesse de propagation  $v_s$ , qui est  $\min_{\gamma} v_s = 287.5$  m/s. Ainsi, la longueur d'onde minimale,  $\lambda_{\min} = \frac{\min_{\gamma} v_s}{f_{\max}}$ , décroît de 150 m à moins de 68 m. De fait, pour propager une telle onde avec la même précision, le maillage doit être adapté. Dans ce cas particulier, en



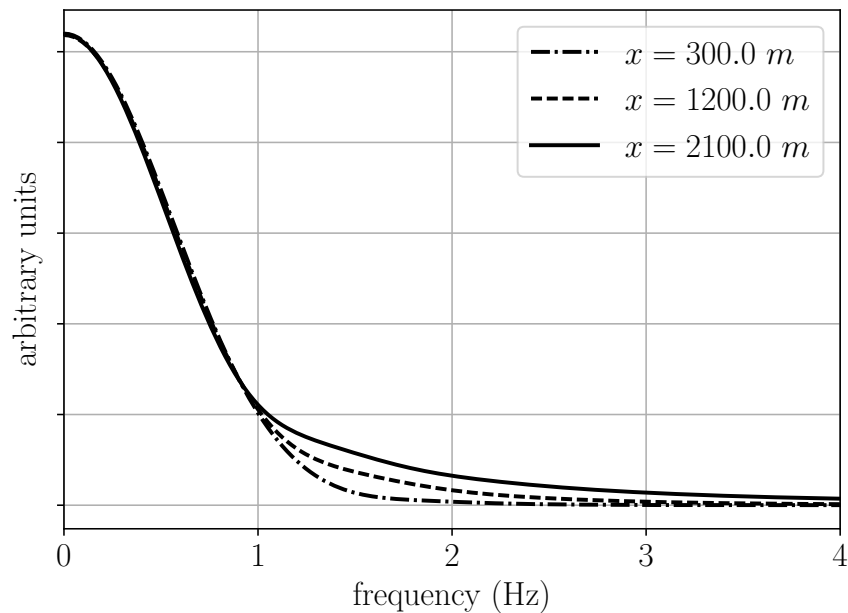
**Figure 4.5.:** Comparaison des solutions numérique et analytique de la vitesse particulaire, calculées à différents instants.



**Figure 4.6.:** Vitesse de propagation des ondes de cisaillement  $v_s$ , calculée à partir de la solution analytique de la déformation  $\gamma$ , à différents instants.



**Figure 4.7.:** Zoom sur le profil de la vitesse particulière  $v$  à l'instant  $t = 6$  s. Comparaison entre la solution analytique linéaire élastique et les solutions analytique et numérique non linéaire élastique. L'erreur est affichée entre les solutions analytique et numérique non linéaires élastiques.



**Figure 4.8.:** Spectres de Fourier des vitesses particulières enregistrées à différentes positions. Dans le cas d'un milieu linéaire, les trois spectres auraient été identiques.

supposant que  $\min_{\gamma} v_s(\gamma) = 287.5 \text{ m/s}, \forall(x, t)$ , ayant une maille de 18.75 m, nous pouvons propager avec dix points par longueur d'onde minimale, en  $P4$ , une onde dont le domaine fréquentiel irait jusqu'à 6 Hz, tout en conservant la même précision.

### 4.3.3 Étude de convergence

Afin de tester les propriétés du schéma et du flux numérique proposé, nous réalisons une étude de convergence en utilisant la solution analytique comme référence. Pour ce faire, nous considérons le même cas que celui décrit ci-avant. Nous utilisons plusieurs ordres d'interpolation  $N \in \{1, 2, 3, 4\}$  et différents maillages. Les simulations sont faites jusqu'à  $t_{\text{fin}} = 6 \text{ s}$ , ce qui permet de s'assurer que l'onde s'est propagée d'au moins trois longueurs d'onde moyennes et que la solution nonlinéaire est toujours assez régulière. La norme  $L^2$  de l'erreur globale à l'instant  $t = t_{\text{fin}}$  est alors calculée et définie par :

$$err_{L^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^K \int_{T_k} (v_{dg}(x, t_{\text{fin}}) - v_{ref}(x, t_{\text{fin}}))^2 + (\gamma_{dg}(x, t_{\text{fin}}) - \gamma_{ref}(x, t_{\text{fin}}))^2 dx}, \quad (4.35)$$

où  $K$  correspond au nombre total d'éléments et  $T_k$  est le  $k^{\text{ième}}$  élément du maillage. La vitesse et la déformation calculées par la méthode DG sont notées  $v_{dg}$  et  $\gamma_{dg}$  alors que la vitesse et la déformation issues de la solution analytique sont notées  $v_{ref}$  et  $\gamma_{ref}$ .

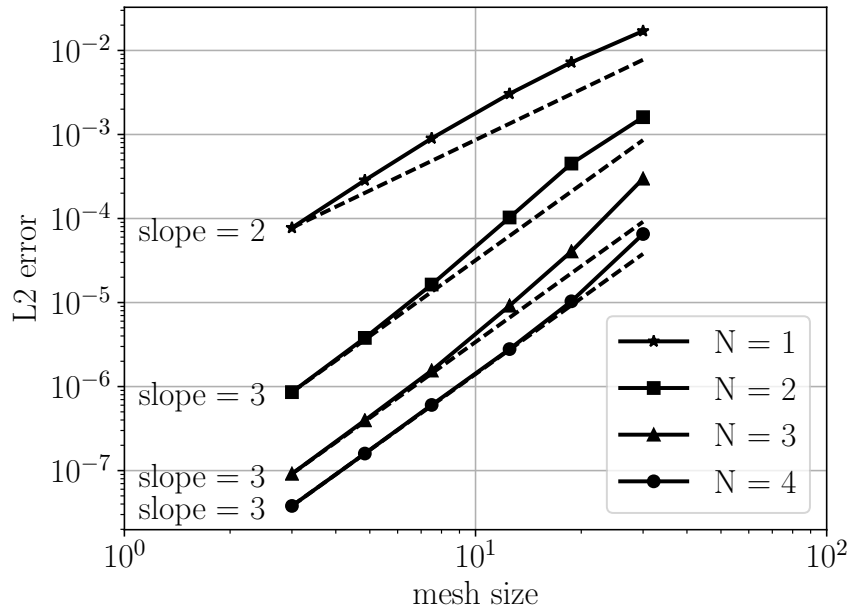
La Figure 4.9 présente la norme  $L^2$  de l'erreur en fonction de la taille du maillage pour la méthode DG utilisant un schéma temporel de type Runge-Kutta d'ordre trois pour différents polynômes de degré  $N = 1, 2, 3, 4$ . Le Tableau 4.4 contient les résultats détaillés de l'étude, c'est-à-dire l'erreur globale pour chaque maillage considéré et l'ordre de convergence qui est défini par :

$$\mathcal{O}_{L^2}(\Delta x_i) = \frac{\log [err_{L^2}(\Delta x_{i+1}) / err_{L^2}(\Delta x_i)]}{\log [\Delta x_{i+1} / \Delta x_i]}. \quad (4.36)$$

On utilise cinq tailles de maille différentes, qui varient entre  $\Delta x = 3 \text{ m}$  et  $\Delta x = 18.75 \text{ m}$ , comme mentionné dans le Tableau 4.4. Ainsi, pour chaque ordre d'interpolation, nous avons au moins un cas avec plus de dix points par longueur d'onde minimale, considérant  $\min_{\gamma} v_s = 287.5 \text{ m/s}$  et  $f_{\text{max}} \approx 5 \text{ Hz}$ . Le Tableau 4.3 donne pour chaque pas de maillage, le nombre de points par longueur d'onde minimale en fonction du degré des polynômes d'interpolation.

L'erreur décroît lorsque le maillage est raffiné et l'ordre de convergence est approximativement de  $N + 1$  pour  $N = 1$  et  $N = 2$  et de trois pour les cas  $N = 3$  et  $N = 4$ . En effet, pour un flux numérique décentré, il est attendu que l'ordre de convergence soit de l'ordre  $N + 1$ , sauf que celui-ci est limité par le schéma temporel dans les cas  $N = 3$  et  $N = 4$ . L'ordre de





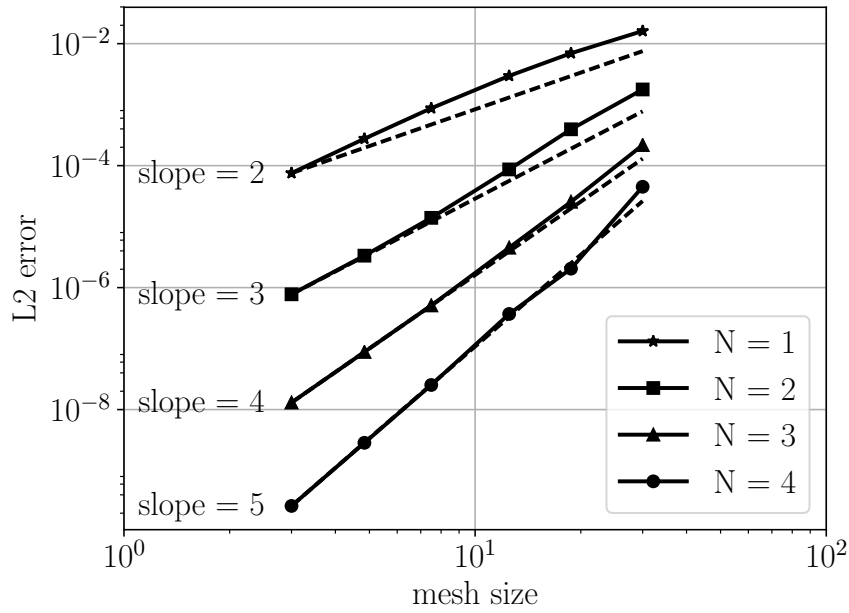
**Figure 4.9.:** Étude de convergence vers la solution analytique. L'erreur est tracée en fonction de la taille du maillage ( $\Delta x$ ) pour différents polynômes d'interpolation  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  et  $P_3$ . Le schéma utilisé est RK3-DG.

$\Delta x \backslash N$	1	2	3	4
3.00	20	39	59	78
4.84	13	25	37	49
7.50	9	16	24	31
12.50	6	10	15	19
18.75	4	7	10	13

**Tableau 4.3.:** Nombre de points d'interpolation par longueur d'onde minimale.

convergence théorique est :  $\mathcal{O}(\Delta x^{N+1} + \Delta t) = \mathcal{O}(\Delta x^{\min(3, N+1)})$  puisque  $\Delta x$  et  $\Delta t$  sont liés par la condition CFL (3.52). On constate que les résultats numériques sont concordants avec la théorie.

Une manière de lever cette limitation est de remplacer le schéma temporel  $RK3$  par un schéma d'ordre supérieur. Nous avons choisi un schéma de Runge-Kutta d'ordre cinq — le schéma Runge-Kutta-Fehlberg [Feh69]. On le notera  $RK5$ . Le pas de temps obtenu avec cette méthode est environ 1.3 fois plus grand que celui obtenu avec la méthode RK3-DG-PN. Utilisant les mêmes maillages et les mêmes ordres d'interpolation que précédemment, on s'attend à trouver un ordre de convergence d'ordre  $N + 1$ . Les résultats sont présentés



**Figure 4.10.:** Étude de convergence vers la solution analytique. L'erreur est tracée en fonction de la taille du maillage ( $\Delta x$ ) pour différents polynômes d'interpolation  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  et  $P_3$ . Le schéma temporel utilisé est  $RK5$ .

$\Delta x$	$N = 1$		$N = 2$		$N = 3$		$N = 4$	
	$err_{L^2}$	$\mathcal{O}_{L^2}$	$err_{L^2}$	$\mathcal{O}_{L^2}$	$err_{L^2}$	$\mathcal{O}_{L^2}$	$err_{L^2}$	$\mathcal{O}_{L^2}$
3.00	$7.54 \times 10^{-5}$	2.71	$7.81 \times 10^{-7}$	3.06	$1.99 \times 10^{-8}$	3.56	$7.04 \times 10^{-9}$	3.01
4.84	$2.76 \times 10^{-4}$	2.63	$3.38 \times 10^{-6}$	3.27	$1.09 \times 10^{-7}$	3.78	$2.96 \times 10^{-8}$	3.05
7.50	$8.73 \times 10^{-4}$	2.39	$1.41 \times 10^{-5}$	3.59	$5.75 \times 10^{-7}$	4.21	$1.13 \times 10^{-7}$	3.39
12.50	$2.96 \times 10^{-3}$	2.10	$8.84 \times 10^{-5}$	3.80	$4.93 \times 10^{-6}$	4.23	$6.37 \times 10^{-7}$	3.80
18.75	$6.92 \times 10^{-3}$	—	$4.13 \times 10^{-4}$	—	$2.74 \times 10^{-5}$	—	$2.97 \times 10^{-6}$	—

**Tableau 4.4.:** Résultats de l'étude numérique de convergence- $hp$ . La norme  $L^2$  de l'erreur globale et l'ordre de convergence en fonction de la taille de maille  $\Delta x$  sont donnés pour les méthodes  $RK3$ - $DG$ - $PN$ ,  $N \in \{1, 2, 3, 4\}$ .

dans la Figure 4.10 et le Tableau 4.5 et confirment ce que nous attendions. Ainsi, l'utilisation du schéma  $RK5$  nous permet de prouver numériquement la validité du flux numérique et de la méthode dans le cas nonlinéaire élastique homogène.

**Remarque.** Une autre manière de tester le schéma spatial, au lieu d'utiliser un schéma temporel d'ordre cinq, aurait pu être d'utiliser un pas de temps très petit et identique pour tous les maillages, par exemple le pas de temps optimal pour le maillage le plus fin et l'ordre d'interpolation le plus élevé de la liste considéré. De fait, la proportionnalité entre le pas

d'espace et le pas de temps n'est plus respectée et donc l'ordre de convergence est dominé par le schéma en espace. Cela se révèle bien plus coûteux en terme de temps de calcul.

$\Delta x$	$N = 1$		$N = 2$		$N = 3$		$N = 4$	
	$err_{L^2}$	$\mathcal{O}_{L^2}$	$err_{L^2}$	$\mathcal{O}_{L^2}$	$err_{L^2}$	$\mathcal{O}_{L^2}$	$err_{L^2}$	$\mathcal{O}_{L^2}$
3.00	$7.53 \times 10^{-5}$	2.72	$7.77 \times 10^{-7}$	3.05	$1.30 \times 10^{-8}$	4.00	$2.63 \times 10^{-10}$	4.99
4.84	$2.76 \times 10^{-4}$	2.62	$3.34 \times 10^{-6}$	3.25	$8.79 \times 10^{-8}$	4.01	$2.85 \times 10^{-9}$	4.98
7.50	$8.71 \times 10^{-4}$	2.39	$1.39 \times 10^{-5}$	3.60	$5.09 \times 10^{-7}$	4.29	$2.53 \times 10^{-8}$	5.26
12.50	$2.95 \times 10^{-3}$	2.09	$8.74 \times 10^{-5}$	3.78	$4.56 \times 10^{-6}$	4.25	$3.71 \times 10^{-7}$	4.14
18.75	$6.89 \times 10^{-3}$	—	$4.05 \times 10^{-4}$	—	$2.55 \times 10^{-5}$	—	$1.99 \times 10^{-6}$	—

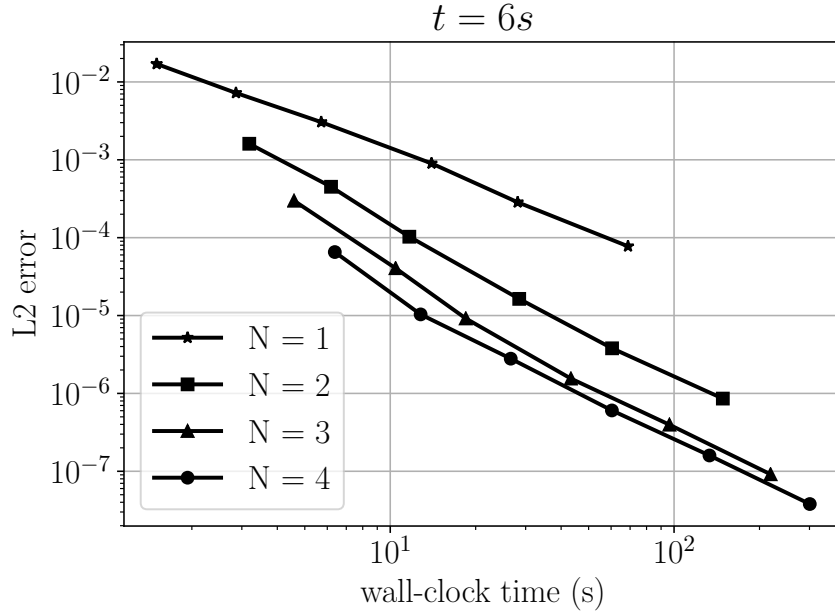
**Tableau 4.5.:** Résultats de l'étude numérique de convergence-*hp*. La norme  $L^2$  de l'erreur globale et l'ordre de convergence en fonction de la taille de maille en fonction de  $\Delta x$  sont donnés pour les méthodes  $RK5 - PN$ ,  $N \in \{1, 2, 3, 4\}$ .

Dans la suite de cette section, nous préférons tout de même utiliser un schéma  $RK3$  et un polynôme d'interpolation d'ordre quatre. Cette combinaison apparaît numériquement efficace et même si l'ordre de convergence est limité par le schéma  $RK3$ , on constate que la norme  $L_2$  de l'erreur est toujours réduite lorsqu'un polynôme d'interpolation d'ordre élevé est utilisé, même si la convergence est seulement d'ordre 3. La Figure 4.11 illustre également que quelque soit le niveau d'erreur désiré, le temps de calcul est toujours minimisé par le couple  $RK3$ - $DG$ - $P4$ .

## 4.4 Étude numérique dans le cas nonlinéaire élastoplastique, en milieu hétérogène

Les lois de conservation nonlinéaires peuvent développer des discontinuités en temps fini, même lorsque la condition initiale est régulière. À partir d'un instant critique — lorsque la première discontinuité apparaît — les solutions classiques n'existent plus ; nous devons étudier les solutions faibles de l'équation. Cependant, ces solutions faibles ne sont pas garanties d'être uniques à partir d'une même condition initiale. Il convient alors d'ajouter au système initial une condition d'entropie qui dépend de la paire  $(\eta, F)$ , où  $\eta$  est l'entropie et  $F$  le flux d'entropie. Cette condition permet de choisir la solution physique parmi les différentes solutions faibles possibles et d'étudier certaines propriétés du schéma numérique, en particulier sa stabilité.

Ces questions ont été largement étudiées, pour différents systèmes conservatifs hyperboliques issus de la physique, notamment dans [Ser99 ; LeV92 ; LeV02b] ou encore [LeF02] pour ne citer qu'eux.



**Figure 4.11.:** Efficacité du schéma RK3-DG-PN. Norme  $L^2$  en fonction du temps de calcul pour différentes méthodes. Toutes les simulations ont été effectuées sur un ordinateur de bureau, avec un processeur Intel Core i5, 3.30 GHz. Le code est séquentiel et écrit entièrement en Python.

En suivant LEFLOCH [LeF02], une paire entropique  $(\eta, F)$  pour le système d'équations nonlinéaire élastique de l'élasto-dynamique est donnée par l'énergie totale :

$$\eta(\mathbf{u}) = E(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\rho v^2 + \int_0^\gamma \sigma(\epsilon) d\epsilon, \quad F(\mathbf{u}) = -\sigma(\gamma) v, \quad (4.37)$$

qui est strictement convexe puisque  $\sigma'(\gamma) > 0, \forall \gamma$ .

Dans le cas de solutions sans discontinuité, la conditions d'entropie s'écrit :

$$\partial_t E(\mathbf{u}) + \partial_x F(\mathbf{u}) = 0, \quad (4.38)$$

mais, lorsque des discontinuités apparaissent, la solution  $\mathbf{u}$  doit alors vérifier l'inégalité entropique suivante :

$$\partial_t E(\mathbf{u}) + \partial_x F(\mathbf{u}) \leq 0. \quad (4.39)$$

Sous des conditions aux limites appropriées, cette inégalité implique une borne *a priori* [Bou05] :

$$\partial_t \int_{\Omega} E(\mathbf{u}) dx \leq 0. \quad (4.40)$$

Cela signifie que dans le cas linéaire, l'énergie totale est conservée si le domaine est fermé, comme l'ont montré DELCOURTE et GLINSKY [DG15] en considérant un schéma LF-DG avec un flux centré. En revanche, dans le cas nonlinéaire l'énergie totale sera décroissante après l'apparition de la première discontinuité.

**Remarque.** Dans le cas nonlinéaire élastique où la loi de comportement hyperbolique (Éq. (2.18)) est utilisée, l'énergie totale peut être calculée explicitement :

$$E(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\rho v^2 + \mu\gamma_r \left( |\gamma| - \gamma_r \ln \left( 1 + \frac{|\gamma|}{\gamma_r} \right) \right). \quad (4.41)$$

En développant  $\ln \left( 1 + \frac{|\gamma|}{\gamma_r} \right)$  lorsque  $\gamma_r \rightarrow \infty$  permet de montrer l'on retrouve l'expression de l'énergie totale dans le cas linéaire, donnée par :

$$E(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\rho v^2 + \frac{1}{2}\mu\gamma^2. \quad (4.42)$$

Afin d'étudier la propagation d'une onde dans un milieu élastoplastique, nous avons besoin, comme dans le cas élastique précédent, d'une condition initiale pour la vitesse et la déformation. La solution analytique proposée ne permet pas cela dans le cas élastoplastique à cause de la dépendance temporelle de la loi de comportement. Nous allons alors considérer un domaine fermé, d'une longueur totale de 2000 m, constitué de quatre couches différentes. Le domaine fermé est modélisé par une colonne 1D ayant deux surfaces libres. La première couche sera linéaire et contiendra tout le support de la condition initiale. Toutes les autres couches seront plus ou moins nonlinéaires, c'est-à-dire avec différents paramètres  $\gamma_r$ . La condition initiale est donnée par :

$$\begin{cases} \gamma_0(x) &= -A \exp(-(x - x_0)^2/\beta^2), \\ v_0(x) &= \gamma_0(x)v_s^1, \end{cases} \quad (4.43)$$

avec  $A = 0.001$ ,  $x_0 = -1750$  m,  $\beta = 56$  m et  $v_s^1 = 150$  m/s, la vitesse de propagation des ondes de cisaillement dans la couche 1. Les paramètres mécaniques des milieux sont donnés dans le Tableau 4.6.

	$H$ (m)	$v_s$ (m/s)	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	$\gamma_{\text{ref}}$	$\Delta x$ (m)
1	500	150	2150	$\infty$	45
2	500	450	2100	$4.97 \times 10^{-4}$	6.41
3	800	300	2075	$1.12 \times 10^{-3}$	9.08
4	200	130	2050	$4.39 \times 10^{-4}$	1.63

**Tableau 4.6.:** Paramètres mécaniques du milieu hétérogène, fermé de bout en bout.

Le maillage est dimensionné pour que dans chaque couche il y ait un minimum de dix points par longueur d'onde minimale, en prenant en compte la réduction de la vitesse de propagation due à la nonlinéarité, tel qu'expliqué dans la sous-section 3.5.1. Alors que l'onde se propage à travers les différents milieux, nous calculons l'énergie totale sur le domaine définie par :

$$\mathcal{E}(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} \rho v(x, t)^2 + \int_0^{\gamma(x, t)} \sigma(\epsilon) d\epsilon \right) dx. \quad (4.44)$$

Enfin, nous devons maintenant apporter une précision sur l'approximation du flux et la nécessité de filtrage, comme nous l'avons évoqué dans la section 3.1. Les variables d'état  $\gamma$  et  $v$  sont approchées numériquement par des polynômes de degré  $N$ . Or, lorsqu'une loi de comportement nonlinéaire est utilisée, le flux est obtenu à partir d'une fraction rationnelle de ces variables, ou d'une composition de polynômes. Ainsi, pour calculer correctement le flux, il faudrait utiliser un polynôme de degré plus élevé. Pour ne pas augmenter le coût de calcul, nous optons pour une autre solution. Nous choisissons d'approcher le flux par un polynôme de degré  $N$ , comme les variables d'état, puis d'appliquer un filtrage à chaque pas de temps, sur chaque élément. Ce filtrage vise à supprimer l'aliasing généré par l'approximation d'une fraction rationnelle par un polynôme.

Nous considérerons quatre configurations distinctes :

1. Nonlinéaire élastique, sans filtrage.
2. Nonlinéaire élastoplastique, sans filtrage.
3. Nonlinéaire élastique, avec filtrage.
4. Nonlinéaire élastoplastique, avec filtrage.

Cela nous permettra de comprendre l'effet de filtrage, mais également son intérêt selon les lois de comportement utilisées.

Les simulations sont faites avec le schéma RK3-DG-P4 et une valeur optimale pour la constante CFL de 0.089<sup>4</sup>.

### Filtrage des modes supérieurs

Le filtrage que nous appliquons ici suit la méthode proposée par [HW08, Chapitre 5.3]. Il s'agit :

1. De passer d'une représentation nodale à une représentation modale, en utilisant l'élément de référence.

---

4. Voir sous-section 3.5.2, p. 53.

2. Appliquer un filtrage passe bas sur cette représentation, de sorte à *gommer* les hautes fréquences (et donc les discontinuités ainsi que leurs apparitions).
3. Revenir à la représentation nodale.

Une fois passés en représentation modale, nous filtrons les modes supérieurs. Ainsi, le  $i$ -ième mode est pondéré par la valeur  $\pi\left(\frac{i-1}{N}\right)$  où la fonction  $\pi$  est définie par :

$$\pi(\eta) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \eta \leq \eta_c = N_c/N, \\ \exp(-\alpha((\eta - \eta_c)/(1 - \eta_c))^s), & \eta_c \leq \eta < 1. \end{cases} \quad (4.45)$$

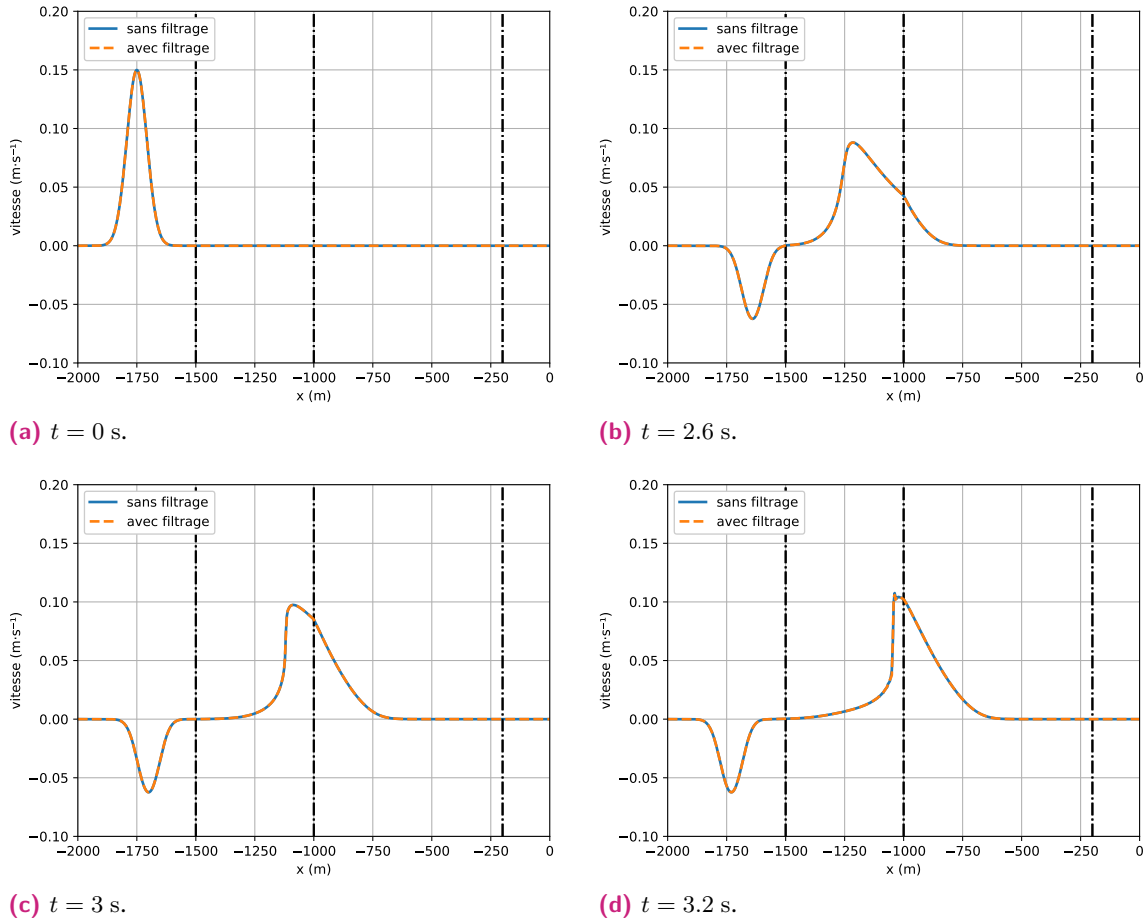
Dans notre cas, nous avons choisi  $N_c = 0$ ,  $s = 10$  et  $\alpha = 36$ . Choisir  $N_c = 0$  signifie que tous les modes, même les plus bas, sont affectés par le filtrage. Comme nous le verrons, dans notre cas, ces valeurs semblent être un bon compromis entre la stabilité et la dissipation de l'énergie à haute fréquence.

### Application de la procédure de filtrage

On présente tout d'abord les profils de vitesses dans le domaine à différents instants dans le cas nonlinéaire élastique. La première figure de 4.12, présente le profil de vitesse à l'état initial ; tout le support de l'onde est contenu dans le premier milieu, dont le comportement est élastique. La seconde nous permet d'observer l'onde qui vient de traverser la première interface et qui, compte tenu du fait que le second milieu est nonlinéaire *élastique* commence à se raidir et à former un choc, une discontinuité. À l'instant  $t = 3$  s, sur la troisième figure, nous pouvons observer ce choc. La dernière figure nous montre le profil de vitesse un court instant après le premier choc où l'on aperçoit une légère oscillation, près de l'interface entre le deuxième et le troisième milieu.

Les Figures 4.13 permettent de voir le profil de l'onde, à des temps bien plus longs, bien après que toutes les interfaces ont été traversées. Notamment, la colonne de droite offre un zoom autour de l'interface entre les deux derniers milieux, ce qui permet de constater l'effet positif du filtrage dans le cas nonlinéaire élastique. Les oscillations sont très nettement lissées par le filtrage.

Les Figures 4.14 et 4.15 correspondent aux mêmes simulations, mais où une loi nonlinéaire élastoplastique a été utilisée. On constate tout d'abord sur les Figures 4.14 qu'il n'y a pas de choc à  $t = 3$  s. Enfin, si on s'intéresse aux Figures 4.15, on remarquera que le filtrage n'est plus aussi nécessaire que précédemment, les solutions étant similaires. En effet, le modèle élastoplastique, de part sa construction, amortit les hautes fréquences, comme nous l'avions évoqué dans la section 2.2.3 p. 19 consacrée aux lois de Masing. Le filtrage apparaît dans ce cas superflu. En comparaison avec les résultats obtenus dans le cas nonlinéaire élastique, on

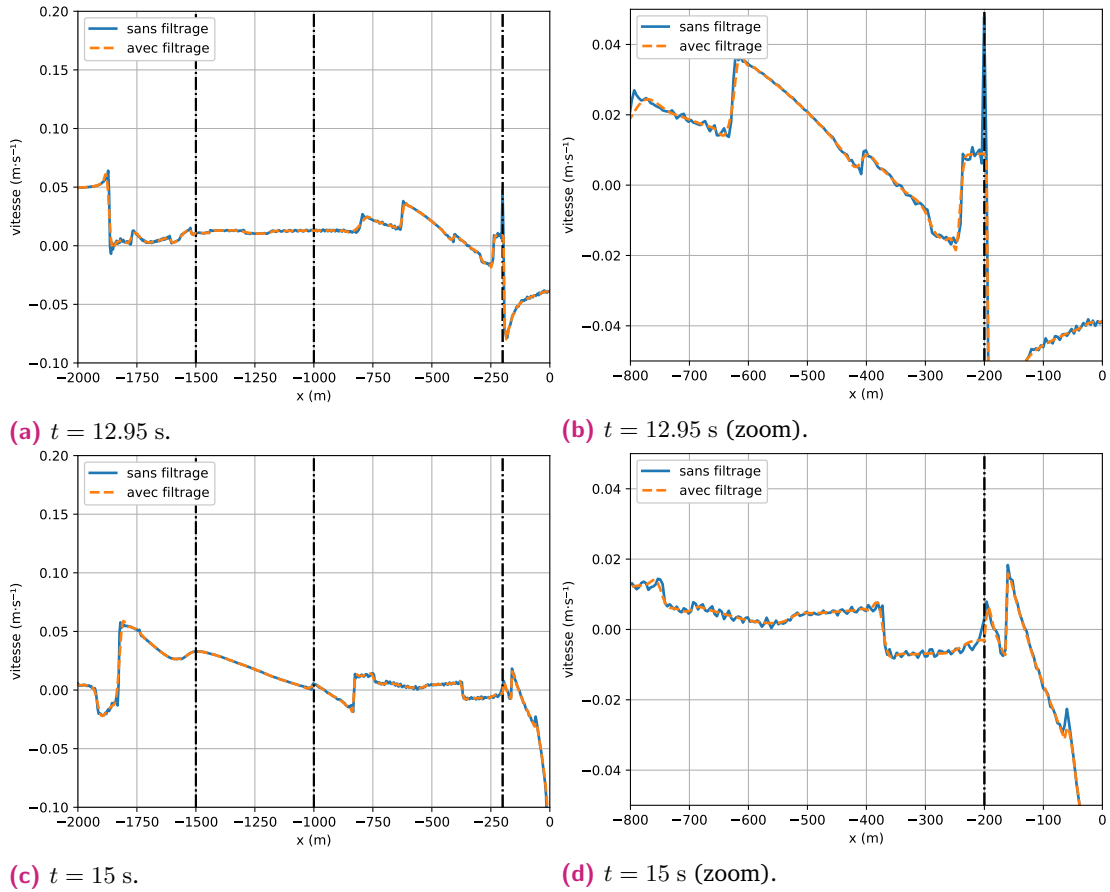


**Figure 4.12.** Évolution du profil de la vitesse particulaire, dans le cas nonlinéaire élastique, dans le domaine fermé  $\Omega$ , jusqu'à la formation du premier choc. Les lignes verticales représentent les interfaces entre les différents milieux, dont les propriétés sont données dans le Tableau 4.6. Le milieu 1 ( $-2000 \leq x \leq -1500$ ) a un comportement linéaire.

observera que les vitesses de propagation sont différentes. Dans le cas élastoplastique, la chute de vitesse de propagation est moins importante que dans le cas nonlinéaire élastique. En revanche, l'amplitude de la vitesse particulaire est, elle, légèrement plus faible. C'est un effet de l'amortissement hystérétique : l'amplitude de la vitesse particulaire diminue, donc la déformation également et donc la nonlinéarité. La chute de vitesse de propagation est ainsi moins importante dans un cas sans hystérésis.

On se propose maintenant de regarder l'énergie totale sur le domaine pour les quatre cas présentés. L'énergie totale est tracée sur la Figure 4.16. Dans les quatre cas, nonlinéaire élastique/élastoplastique avec/sans filtrage, on constate bien que l'énergie n'est jamais croissante, ce qui prouve numériquement la stabilité du schéma et que la condition entropique est bien vérifiée. Les résultats sont différents entre les cas élastique et élastoplastique. En particulier, on remarque que l'énergie totale commence à décroître dans le cas élastique



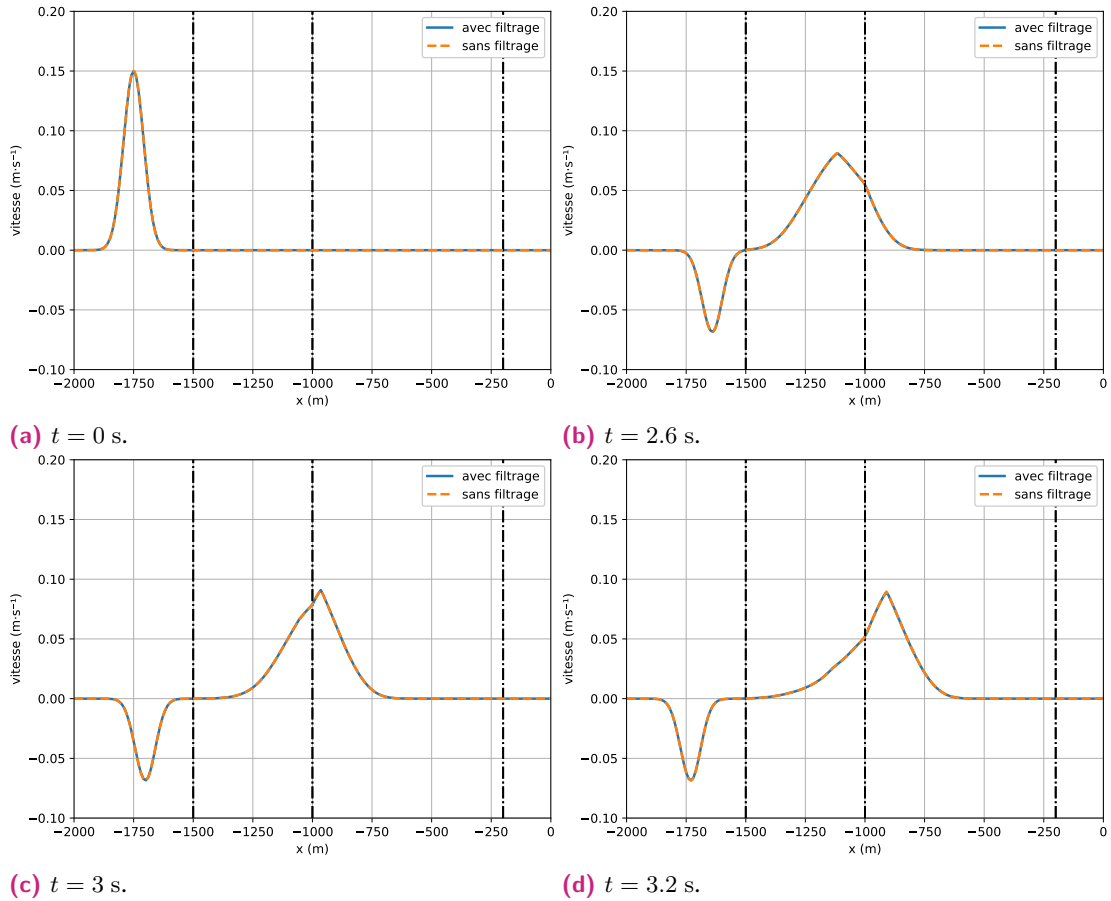


**Figure 4.13.:** Profil de la vitesse particulaire dans le cas nonlinéaire élastique, à deux instants différents, bien après que le premier choc soit apparu. Les deux zooms à droite illustrent le filtrage modal sur le profil calculé.

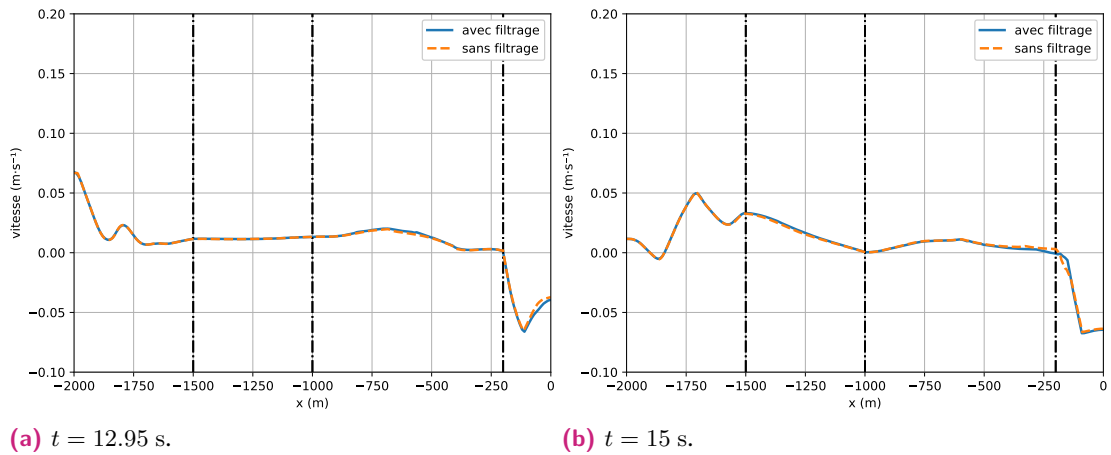
après  $t = 3$  s, lors du premier choc, alors qu'elle est constante dans le cas élastoplastique. Cela traduit donc que, *au moins dans le cas présent*, il n'y a pas de discontinuité qui apparaissent et qui se propagent dans le cas où la loi nonlinéaire élastoplastique est utilisée. De plus, on observe que l'effet du filtrage sur l'énergie totale, dans les deux cas, est relativement faible, ce qui nous permet de dire que les paramètres du filtrage ont été correctement choisis.

Enfin, la Figure 4.17 représente l'énergie totale lorsque la valeur CFL utilisée est supérieure à la valeur optimale — 0.090 à la place de 0.089. Lorsque le filtrage n'est pas utilisé, le schéma est instable et l'énergie explose. Ainsi, la valeur optimale proposée par COCKBURN et SHU [CS01] est ici retrouvée.

Dans le cas où une loi nonlinéaire élastique est utilisée, l'utilisation d'un filtrage apparaît nécessaire. En revanche, lorsqu'une loi de comportement élastoplastique, qui présente un



**Figure 4.14.:** Évolution du profil de la vitesse particulière, dans le cas nonlinéaire élastoplastique, dans le domaine fermé  $\Omega$ , jusqu'à  $t = 3.2$  s.



**Figure 4.15.:** Profil de la vitesse particulière dans le cas nonlinéaire élastoplastique, à deux instants différents, après de nombreux aller-retours dans le milieu.

amortissement hystérétique, ce filtrage semble superflu. Ainsi, dans la suite du manuscrit, où seulement le modèle élastoplastique sera utilisé, nous n'emploierons plus de filtrage.

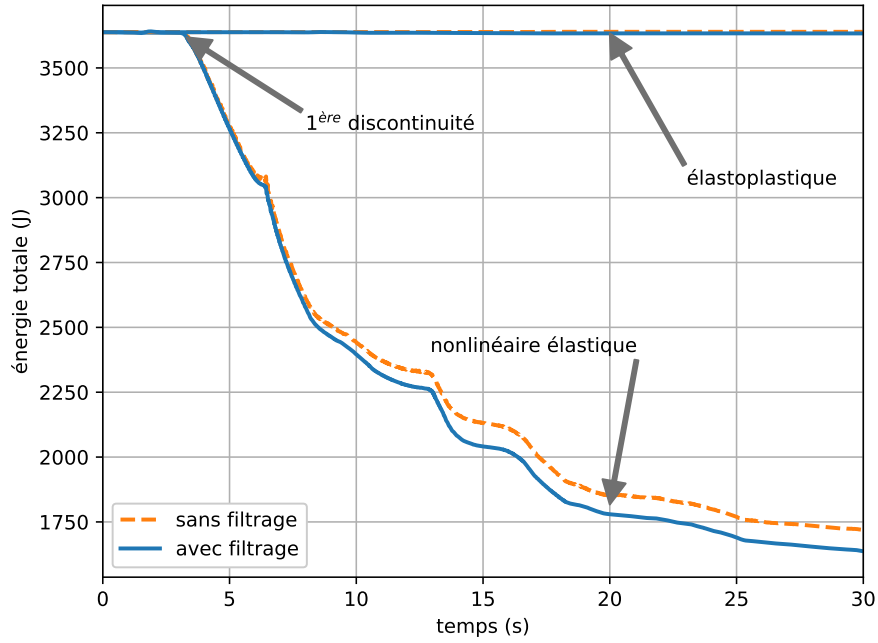


Figure 4.16.: Évolution de l'énergie totale dans le domaine, dans le cas nonlinéaire élastique et élastoplastique, avec et sans filtrage.  $CFL = 0.089$ .

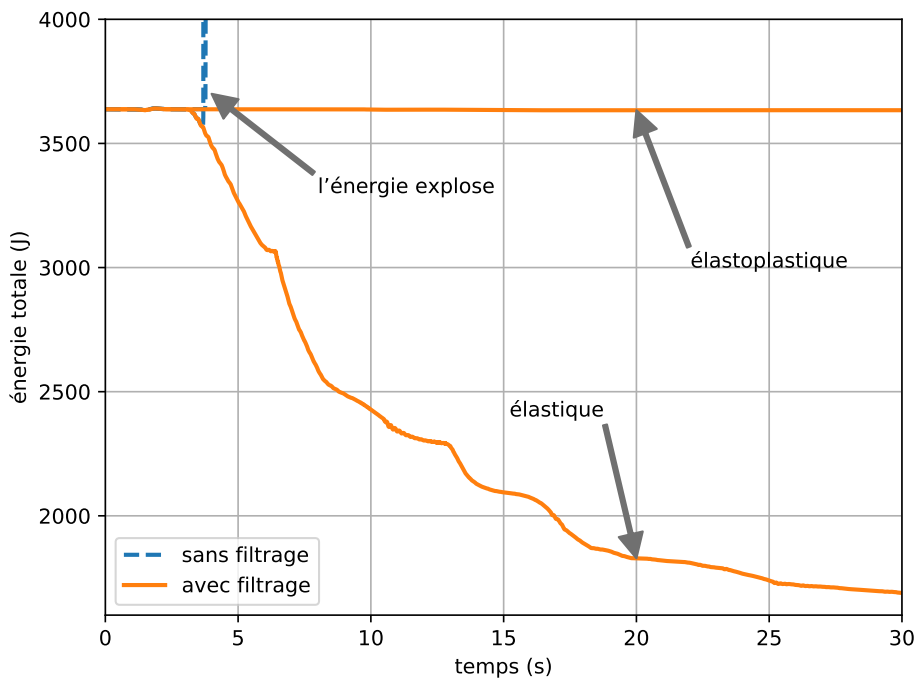


Figure 4.17.: Évolution de l'énergie totale dans le domaine, dans le cas nonlinéaire élastique et élastoplastique, avec et sans filtrage.  $CFL = 0.090$ . La simulation n'est pas stable.

## 4.5 Quelques mots sur le code de calcul

Le code de calcul utilisé dans ce chapitre a été réalisé entièrement durant cette thèse. Il s'inspire des explications et des extraits de codes fournis par HESTHAVEN et WARBURTON [HW08]. Le code est écrit en Python et utilise les bibliothèques standards du langage dédiées au calcul scientifique<sup>5</sup>. Ce langage a été choisi afin de permettre un développement rapide et souple. Il offre également à l'utilisateur une certaine aisance dans son utilisation. Le prix à payer est le temps de calcul, surtout lorsqu'un modèle élastoplastique est utilisé. De fait, ce code est restreint aux cas 1D.

Plusieurs modules sont disponibles, en particulier il y a :

- un module pour la gestion des sources, dans lequel on retrouve différents signaux standards, comme les signaux de type Gabor ou Ricker. L'utilisateur peut également charger directement un fichier texte.
- un module `ggmax` qui regroupe différents modèles de réduction. En particulier il y a le modèle linéaire ( $g(\gamma) = 1, \forall \gamma$ ) et le modèle hyperbolique. L'utilisateur peut également charger directement un fichier, sur lequel une interpolation sera effectuée.
- un module pour la gestion des colonnes de sol. Ce module permet de définir une colonne de sol à partir de couches, chaque couche étant ensuite définie par ses propriétés mécaniques.
- un module `solvers` qui contient différents schémas numériques, dont ceux présentés dans ce chapitre.

**Exemples d'utilisations** Une colonne de sol est définie par ses couches, de haut en bas et sa profondeur totale. Puis, chaque couche est définie par son épaisseur, sa densité, ses vitesses de propagation linéaires et sa fonction de réduction de module. Il faut également indiquer s'il faut prendre en compte l'élastoplasticité ou non.

```
1 >>> from numpy import array
2 >>> from dg.column import SeismicColumn, Layer
3 >>>
4 >>> soil_column = SeismicColumn([
5 ... Layer(thickness=10, density=2111, vs=200, vp=795,
6 ...       ggmax_function=GGmaxHyperbolic(reference_shear_strain=1e-3),
7 ...       elastoplastic=True),
8 ... Layer(thickness=50, density=2157, vs=496, vp=2015,
9 ...       ggmax_function=GGmaxHyperbolic(reference_shear_strain=1e-2),
```

5. NUMPY pour le calcul algébrique, SCIPY pour les calculs scientifiques et MATPLOTLIB pour la génération de graphiques.

```

10 ...     elastoplastic=True),
11 ... Layer(thickness=float('inf'), density=2250, vs=714, vp=2446,
12 ...         ggmax_function=GGmaxLinear()),
13 ... ], depth=100)
14 >>>
15 >>> #On peut ensuite obtenir les propriétés de la colonne, à différente(s)
16 >>> #position(s) (mu, lambda, ggmax, etc...)
17 >>> soil_column.mu(-15)
18 530656512
19 >>> soil_column.mu(array([-15, -20, -5]))
20 array([530656512, 530656512, 8444000])
21 >>>

```

**Listing 4.1:** Exemple de définition et utilisation d'une colonne.

On peut aussi facilement définir un signal de type Gabor, ou bien lire un fichier et avoir la valeur du signal à n'importe quel(s) instant(s). Ces signaux seront utilisés soit comme onde incidente au rocher, soit comme vitesse imposée à l'interface entre le milieu et le rocher :

```

1 >>> from numpy import array
2 >>> from dg.source import Gabor, SourceFromFile
3 >>>
4 >>> gabor_source = Gabor(amplitude=0.05, phase=0.7, mainfreq=3, gamma=4)
5 >>> file_source = SourceFromFile('a_record.txt', to_taper=True)
6 >>>
7 >>> #On peut obtenir les valeurs à différent(s) instant(s)
8 >>> gabor_source(0.7)
9 0.05
10 >>> gabor_source(array([0, 0.7, 1, 10]))
11 array([7.60791513e-07, 5.00000000e-02, 5.48212478e-03, 0.00000000e+00])
12 >>> gabor_source.freqmax #la fréquence maximale du signal
13 6.22
14 >>> file_source(2) #la valeur à t=2, retournée est obtenue par interpolation.
15 0.1

```

**Listing 4.2:** Exemple de définition et utilisation d'une source.

À titre d'exemple, l'extrait de code complet suivant permet de définir une colonne de sol, à trois couches dont deux ont un comportement nonlinéaire élastoplastique. À la base de celle-ci, une onde incidente de type Gabor est injectée. La solution en vitesse est calculée aux points  $-12$  m,  $-5$  m et en surface à l'instant  $t = 1$  s. Les paramètres, comme la valeur CFL, le nombre d'éléments par longueur d'onde minimale sont choisis par défaut en fonction du schéma numérique, mais peuvent être spécifiés par l'utilisateur si besoin. Enfin, le maillage est automatiquement généré. Il est adapté à chaque couche, en prenant en compte la fréquence maximale de la source et les vitesses de propagation minimales. L'utilisateur peut également donner une estimation de la déformation maximale attendue durant la simulation, de sorte que l'estimation des vitesses de propagation des ondes de cisaillement soit faite en prenant en compte la réduction du module de cisaillement par la nonlinéarité.

```

1  from numpy import array, empty_like
2
3  from dg.solvers import DG_LSRK4_Centered
4  from dg.column import SeismicColumn, Layer
5  from dg.ggmax import GGmaxHyperbolic, GGmaxLinear
6  from dg.sources import Gabor
7
8  soil_column = SeismicColumn([
9      Layer(thickness=10, density=2111, vs=200, vp=795,
10         ggmax_function=GGmaxHyperbolic(reference_shear_strain=1e-3),
11         elastoplastic=True),
12      Layer(thickness=50, density=2157, vs=496, vp=2015,
13         ggmax_function=GGmaxHyperbolic(reference_shear_strain=1e-2),
14         elastoplastic=True),
15      Layer(thickness=float('inf'), density=2250, vs=714, vp=2446,
16         ggmax_function=GGmaxLinear()),
17      ], depth=100)
18
19  #On définit une source de type Gabor
20  gabor_source = Gabor(amplitude=0.05, phase=0.7, mainfreq=3, gamma=4)
21
22  #L'utilisateur définit ensuite le schéma à utiliser.
23  #Ici, un schéma Runge-Kutta à faible stockage, d'ordre 4, avec un flux centré
24  solver = DG_LSRK4_Centered(N=4, #l'ordre des polynômes d'interpolation,
25      column=soil_column, #la colonne de sol sur laquelle travailler,
26      source=gabor_source, #la source définissant le mouvement incident.
27      max_strain=8e-4 #estimation de la déformation maximale attendue
28      #(utilisée pour calculer  $v_s$  et adapter le
29      #maillage).
30      )
31
32  #Puis, il est possible de demander de calculer jusqu'à l'instant voulu
33  #(ici t=1s)
34  velocity, strain = solver.values(1) #retourne la vitesse et la déformation sur
35      #les points d'interpolation du maillage.
36
37  #Pour évaluer la vitesse aux capteurs situés à -12 m, -5m et 0m.
38  v_at_receivers = solver.eval(velocity, [-12, -5, 0])
39
40  #Par exemple, il est possible de sauvegarder la vitesse en surface pour
41  #différents instants à l'aide d'une boucle.
42  time = array([2, 3, 4, 5])
43  v_surface = empty_like(time)
44  for i, t in enumerate(time):
45      v, e = solver.values(t)
46      v_surface[i] = solver.eval(v, 0)

```

**Listing 4.3:** Code complet, qui permet la propagation d'une onde dans une colonne de sol nonlinéaire.

La liste `v_surface` peut ensuite être affichée en fonction du temps `time` à l'aide de la bibliothèque `MATPLOTLIB`.

Enfin, toutes les simulations ont été suivies et gérées dans un premier temps par un code maison SMART — SiMulAtion ReproducibiliTy. Puis dans un second temps, par le projet SUMATRA<sup>6</sup> [Dav12]. L'objectif de SUMATRA est de fournir un outil pour gérer et suivre les projets basés sur des simulations numériques, afin de rendre les résultats reproductibles. Ce code vise à fournir un *cahier de laboratoire* pour les personnes faisant des expériences numériques.

## Bilan

La méthode DG a été appliquée à la propagation des ondes dans un milieu nonlinéaire unidimensionnel. Deux lois de comportement nonlinéaires ont été étudiées numériquement. Nous avons proposé un flux numérique décentré et montré que l'ordre de convergence théorique attendu était bien retrouvé grâce à une étude de convergence. Cette étude de convergence a pu être réalisée avec une loi de comportement nonlinéaire élastique car nous avons exhibé une solution analytique dans le cas de la propagation d'ondes dans un milieu nonlinéaire élastique homogène et infini. Enfin, nous avons pu montrer numériquement que la loi de comportement élastoplastique conservait l'énergie totale et qu'il n'était pas nécessaire d'appliquer un filtrage numérique dans ce cas là.

---

6. <https://pythonhosted.org/Sumatra/index.html>

# Propagation d'une onde couplée dans un milieu unidimensionnel élastoplastique

” Tout comme on ne mélange pas les choux et les carottes ; on ne mélangera pas les  $x$ , les  $y$  et les riens du tout. Nous ne sommes pas les rois du pot-au-feu.

— Laurent D.

Professeur de mathématiques, 3<sup>ème</sup>, 2006

Dans ce chapitre, nous nous proposons d'étudier l'effet de la loi de comportement élastoplastique sur le couplage des composantes en cisaillement, c'est-à-dire que nous nous intéressons au système (2.53).

Précédemment, nous avons établi un flux numérique décentré pour le cas 1D. Dans le cas où plusieurs composantes sont prises en compte, et dans un contexte nonlinéaire, il n'est pas possible de faire de même. Le cas linéaire élastique avec plusieurs composantes a déjà été étudié [Wil+10]. Ainsi, une autre stratégie doit être utilisée. Une fois le flux choisi, nous observons les effets de la loi de comportement élastoplastique sur les différentes composantes du système sur une colonne de sol réaliste. Enfin, un enregistrement réel à la base de la colonne étudiée, à l'interface avec le rocher, est utilisé pour propager une onde dans la colonne de sol. Les résultats obtenus sont comparés avec l'enregistrement réel à la surface.

**Remarque.** Le code de calcul développé pour le chapitre précédent a été modifié afin de prendre en compte les trois composantes du mouvement en 1D. Étant donné que le nombre de calculs à réaliser augmente ainsi que le temps de calcul nécessaire pour utiliser le modèle MPII, le code a entièrement été converti en Cython<sup>1</sup>. Ainsi, avec une souplesse similaire, le code peut être compilé en C, ce qui apporte un gain de performances notable. Le code reste interfaçable avec le langage Python.

---

1. <http://cython.org/>



## 5.1 Vérification du flux pour le système couplé 1D à trois composantes

Avant de commencer l'analyse du couplage, il convient de définir le flux numérique qui sera utilisé pour ce nouveau système à trois composantes du mouvement. Dans la partie précédente, lorsque seulement une composante était étudiée, nous nous sommes attachés à proposer un flux *décentré* permettant d'avoir un schéma stable et convergent dans le cas nonlinéaire élastique. Nous avons également montré que le schéma obtenu était stable dans le cas nonlinéaire élastoplastique. Si nous souhaitons établir un flux numérique décentré en suivant la même méthode (cf. 4.1), nous devons résoudre le problème de Riemann illustré par le schéma 5.1.

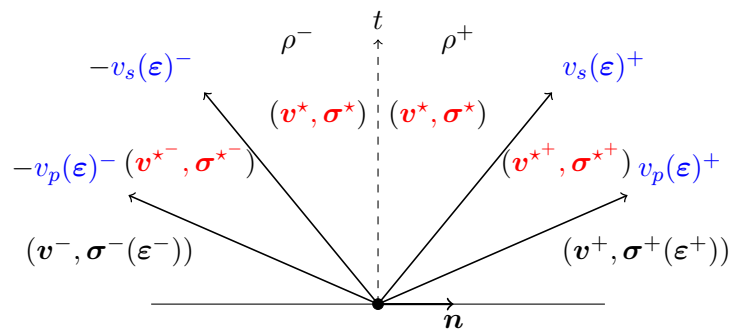


Figure 5.1.: Problème de Riemann 1D-3C.

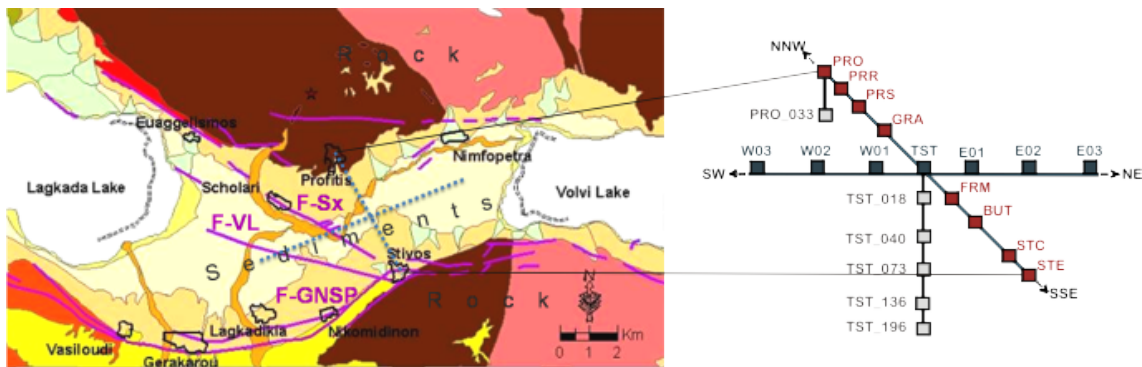
On peut alors constater, en écrivant les conditions de saut de Rankine-Hugoniot, que compte tenu du fait que nous avons une loi de comportement nonlinéaire, nous avons plus d'inconnues que d'équations. De plus, nous pouvons, dans le cas 1D-1C, utiliser une approximation des vitesses de propagations  $v_s$  car nous avons une relation directe entre  $\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial \gamma_{xz}}$  et  $v_s$ , ce qui n'est plus le cas maintenant — il faudrait calculer numériquement les valeurs propres de la matrice Jacobienne à chaque interface, à chaque pas de temps. Aussi cette technique de résolution n'est pas facilement applicable dans le cas actuel.

Nous avons appliqué le flux *centré* au modèle nonlinéaire élastique<sup>2</sup>. L'utilisation de ce flux n'était pas appropriée à des applications ayant une nonlinéarité importante ; le schéma devenait instable. Compte tenu des propriétés intéressantes apportées par le modèle élastoplastique — pas de choc, conservation de l'énergie totale, atténuation des amplitudes au cours du temps — nous avons choisi de revenir au flux centré sur ce modèle.

Pour cela, nous considérons le système de propagation des ondes en milieu 1D (Équation (2.54)) et nous comparons les solutions obtenues avec les deux flux centré et décentré.

2. Voir sous-section 2.2.2, p. 18 pour la description du modèle nonlinéaire élastique.

La colonne de sol que nous considérons, pour tout ce chapitre, est issue de la base de données *Euroseistest*<sup>3</sup>. Il s'agit d'un site d'enregistrements sismologique établi en 1993, dans le graben de Mydgonia (nord de la Grèce). Ce site est situé dans la zone épacentrale du séisme de 1978 de magnitude  $M_s = 6.5$ , séisme qui a frappé la ville de Thessalonique (Grèce). Il est principalement constitué du bassin de Volvi, dont le remplissage sédimentaire présente des vitesses de propagation superficielles très faibles et qui est encastré dans un rocher dont la vitesse de propagation est très élevée. De nombreuses études, géophysiques et géotechniques, ont permis la création de modèles 2D/3D fiables, incluant la caractérisation nonlinéaire des milieux. Un réseau accélérométrique permanent est constitué de 21 accéléromètres à trois composantes haute résolution, dont 15 sont à la surface alignés sud-ouest / nord-est et sud-sud-est / nord-nord-ouest. Enfin six autres sont placés à différentes profondeurs, en particulier à la station TST, au centre du graben. Une carte de la zone étudiée ainsi que la répartition des stations est donnée sur la Figure 5.2.



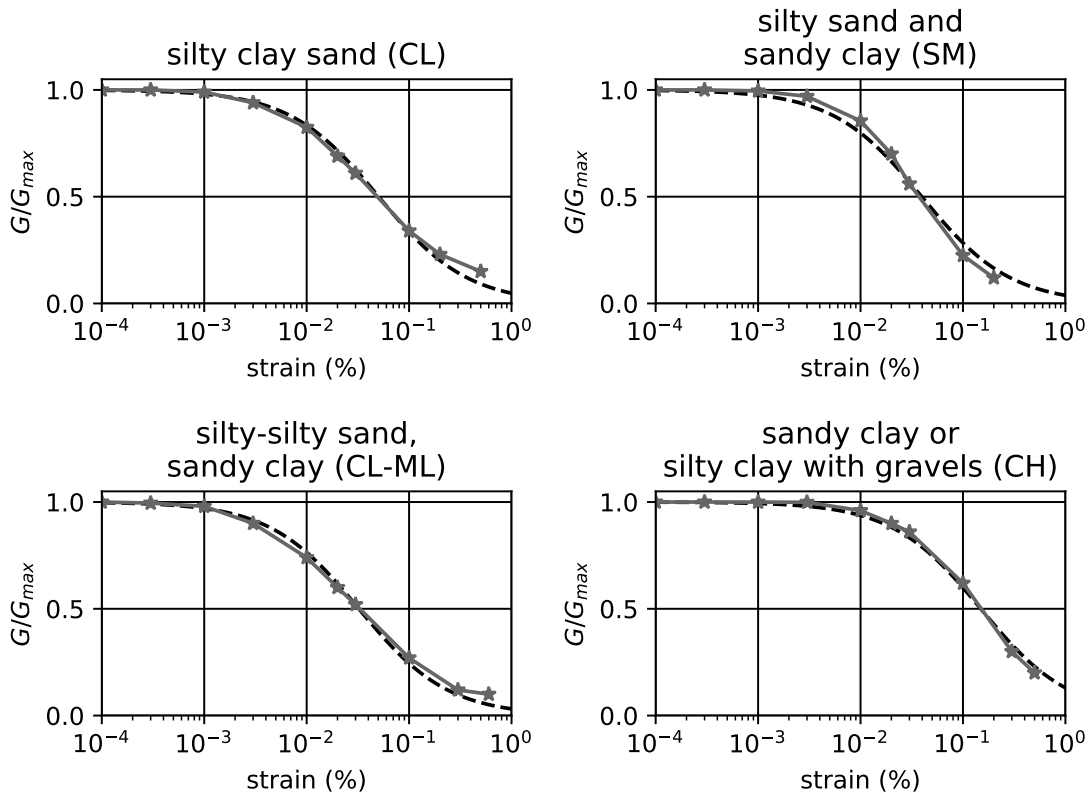
**Figure 5.2.:** Carte géologique du site Euroseistest et la position des 21 stations accélérométriques (source : <http://euroseisdb.civil.auth.gr>).

Le site TST peut être considéré comme un bassin sédimentaire allongé et composé de couches de sol horizontales, aussi ce site se prête bien aux simulations unidimensionnelles. De nombreux modèles géologiques et géotechniques ont été proposés pour la colonne de sol TST. Nous utilisons un modèle contenant cinq couches, toutes nonlinéaires et caractérisées par une courbe de réduction de module de cisaillement hyperbolique<sup>4</sup>. La Figure 5.3 présente des courbes laboratoire de réduction du module de cisaillement  $G/G_{\max}$  en fonction de la déformation pour chacune des couches, ainsi que leur approximation par le modèle hyperbolique. Pour chacune des courbes laboratoires issues des données Euroseistest, nous avons calculé le paramètre  $\gamma_{\text{ref}}$  par la méthode des moindres carrés qui permettait de reproduire au mieux ces courbes. Les vitesses de propagation  $v_s$  et  $v_p$  proviennent quant à elles d'inversions de la base de données de séismes [Gué16]. L'ensemble des paramètres mécaniques de la colonne de sol considérée est donné dans le Tableau 5.1. La taille totale

3. <http://euroseisdb.civil.auth.gr>

4. Voir Équation (2.18), p. 18.

de la colonne est de 196 m. Sous cette colonne, se trouve le rocher, qui n'est pas modélisé numériquement.



**Figure 5.3.:** Courbes laboratoires (lignes continues) et courbes hyperboliques associées (lignes pointillées) de réduction de modules de cisaillement en fonction de la déformation. Chacune des courbes laboratoires est issue des données d'<http://euroseisdb.civil.auth.gr/>.

Une condition de surface libre est imposée au sommet de la colonne et une condition rigide<sup>5</sup> est imposée à la base avec  $v_x^* = G(t, 0)$ , à l'interface entre la dernière couche et le rocher, c'est-à-dire à  $z^b = -196$  m. La fonction  $G(t, \phi)$  est un signal de Gabor où une phase  $\phi$  a été introduite, définie telle que :

$$G(t, \phi) = A \exp\left(-\left(\frac{2\pi(t-t_0)f_0}{\gamma}\right)\right) \cos(2\pi f_0 t + \phi). \quad (5.1)$$

L'amplitude est définie par  $A$ , le déphasage par  $t_0$ , la fréquence fondamentale par  $f_0$  et enfin, la phase par  $\phi$ . Le paramètre  $\gamma$  influence le caractère oscillatoire de l'onde. Dans la suite de ce chapitre nous prendrons les paramètres suivants :  $A = 10^{-2}$  m/s,  $t_0 = 0.7$  s,

5. Voir sous-section 3.2.2, p. 42.

$z$ (m)	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	$v_s$ (m/s)	$v_p$ (m/s)	Description de la couche	$\gamma_{\text{ref}}$	
1	0	2111	200	795	CL	$5.40 \times 10^{-4}$
2	-18	2104	345	1371	SM	$3.96 \times 10^{-4}$
3	-40	2084	358	1530	CL-ML	$3.23 \times 10^{-4}$
4	-73	2157	496	2015	CH	$1.49 \times 10^{-3}$
5	-136	2250	714	2446	CL	$5.40 \times 10^{-4}$

Note :  $z$  se réfère à la coordonnée supérieure de chaque couche. La profondeur totale de la colonne est de 196 m. Concernant la description du sol nous avons :

- CL *Silty clay sand*
- SM *Silty sand and sandy clay*
- CL-ML *Silty-silty sand, sandy clay*
- CH *Sandy clay or silty clay with gravels*

**Tableau 5.1.:** Description des propriétés mécaniques de la colonne de sol étudiée.

$f_0 = 3$  Hz et  $\gamma = 4$ . Avec ces paramètres, la fréquence maximale du signal est d'environ 6.2 Hz. Pour le moment, nous ne considérons pas la phase  $\phi$  qui est donc choisie nulle.

Nous présentons à la Figure 5.4 les solutions de la vitesse particulière  $v_x$  et de la déformation en cisaillement  $\gamma_{xz}$  à différents instants. Pour chaque sous-figure, trois solutions sont montrées correspondant aux instants  $t$  et  $t \pm 0.01$  s pour aider à visualiser la propagation et l'évolution des variables dans la colonne. Les lignes horizontales en pointillées matérialisent les interfaces entre les différentes couches. Les solutions obtenues avec la méthode LSRK4-DG-P4 et le flux centré (marqueurs en étoile) ou avec le flux décentré (marqueurs en disque) sont tracées sur les mêmes figures. La méthode numérique que nous utilisons étant discontinue, à chaque interface entre les éléments du maillage nous avons deux points d'interpolation pour un même point physique et donc deux valeurs. Nous utilisons cela pour mettre ici en exergue la discontinuité du champ de déformation aux interfaces entre les milieux (cf. Figure 5.4c par exemple).

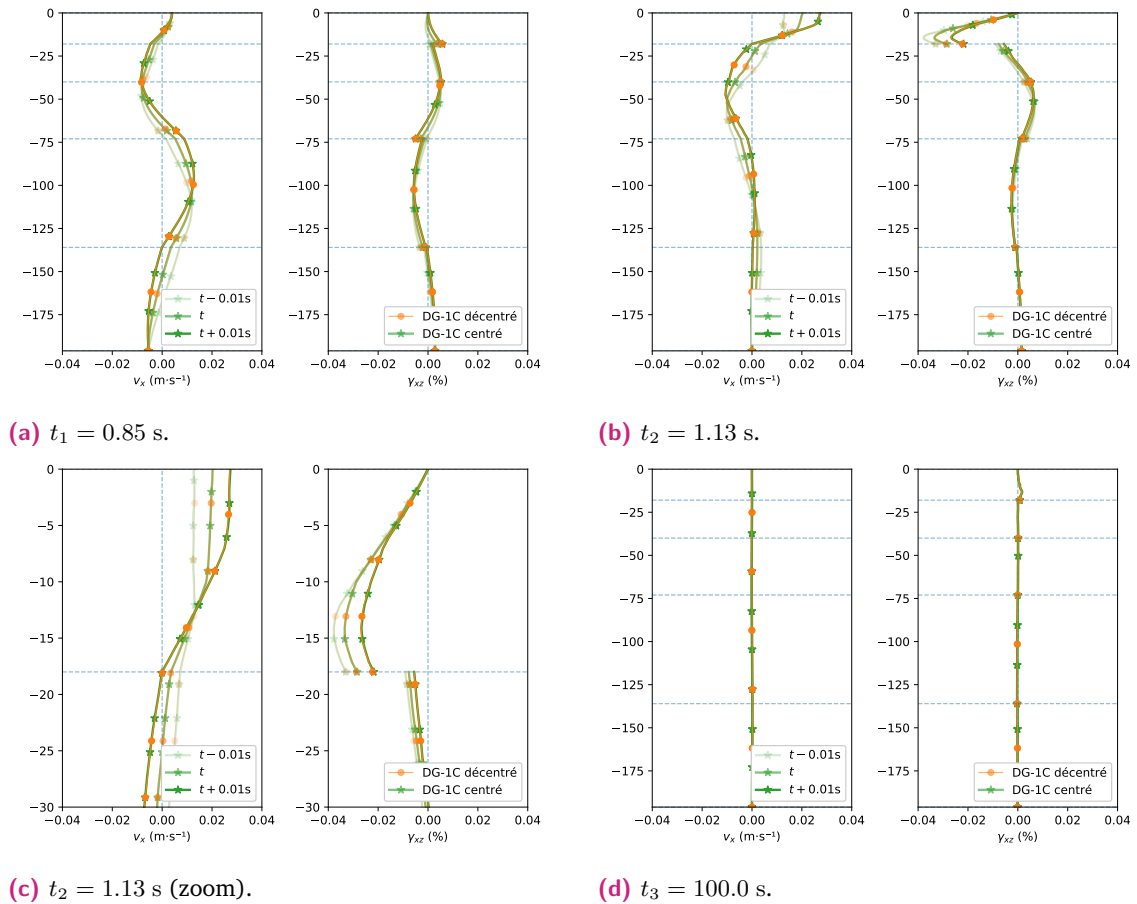
La Figure 5.4a présente les solutions à  $t = 0.85$  s, moment où l'onde commence tout juste à atteindre le sommet de la colonne. On y observe bien les discontinuités dans la déformation, qui sont dues aux hétérogénéités. En effet, le flux normal doit être continu aux interfaces entre les éléments. Nous avons donc  $\sigma_{xz}^+ = \sigma_{xz}^-$ , autrement dit, dans le cas linéaire élastique :

$$\gamma_{xz}^+ = \frac{\mu^-}{\mu^+} \gamma_{xz}^- \quad (5.2)$$

Sur la Figure 5.4b, nous voyons les solutions à l'instant  $t = 1.13$  s, ce qui correspond au moment où la déformation est maximale dans toute la simulation. L'onde montante se superpose avec l'onde qui vient de se réfléchir dans à la surface libre, ce qui provoque

cette forte amplitude ; il s'agit d'une interférence constructive. La Figure 5.4c propose un zoom dans les 30 mètres les plus superficiels de la colonne, permettant ainsi de bien voir la discontinuité autour de l'interface. Nous noterons que dans les deux cas, flux centré et décentré, les solutions sont identiques, qu'il n'y a pas d'oscillation parasite et qu'aucun filtrage ou limiteur de flux n'a été appliqué.

Enfin, la Figure 5.4d présente les solutions à l'instant  $t = 100$  s, c'est-à-dire quand toutes les ondes qui se propagent ont été atténuées — par l'élastoplasticité — et que le champs de vitesse est donc quasiment nul<sup>6</sup>. Une déformation permanente est observable dans la couche superficielle, proche de l'interface.

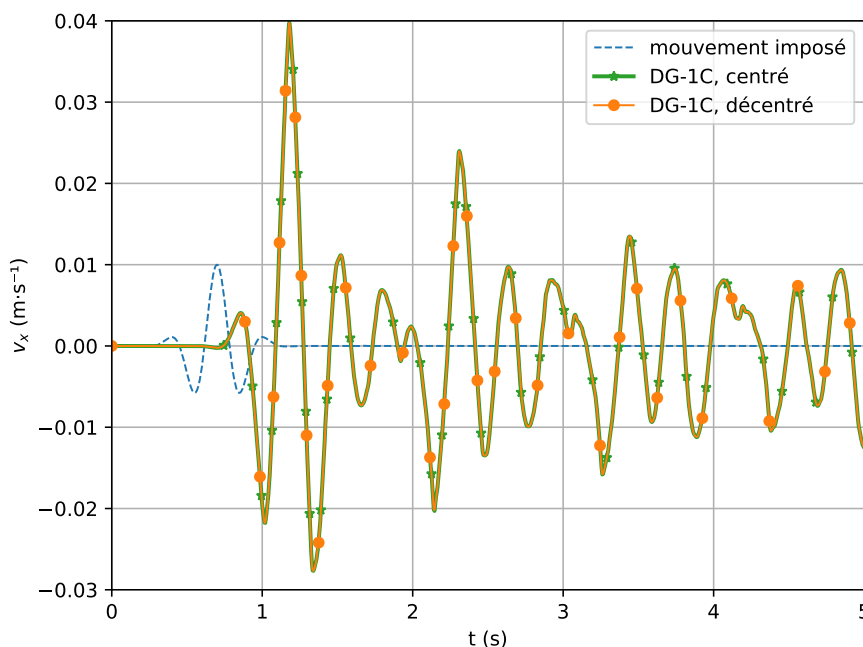


**Figure 5.4.:** Vitesse particulière  $v_x$  et déformation en cisaillement  $\gamma_{xz}$  dans la colonne de sol en fonction de la profondeur, aux instants  $t_1 = 0.85$  s,  $t_2 = 1.13$  s et  $t_3 = 100.0$  s. La Figure 5.4c est un zoom des solutions à l'instant  $t_2$  dans les 30 premiers mètres.

Nous observons les traces de la composante  $v_x$  des vitesses particulières mesurées en surface sur la Figure 5.5. On affiche également en pointillés le mouvement imposé à la base. Cela permet d'illustrer que les propagations successives des ondes dans la colonne,

6. Ici, la vitesse mesurée est inférieure à 5% de la vitesse maximale enregistrée à partir de  $t = 60$  s.

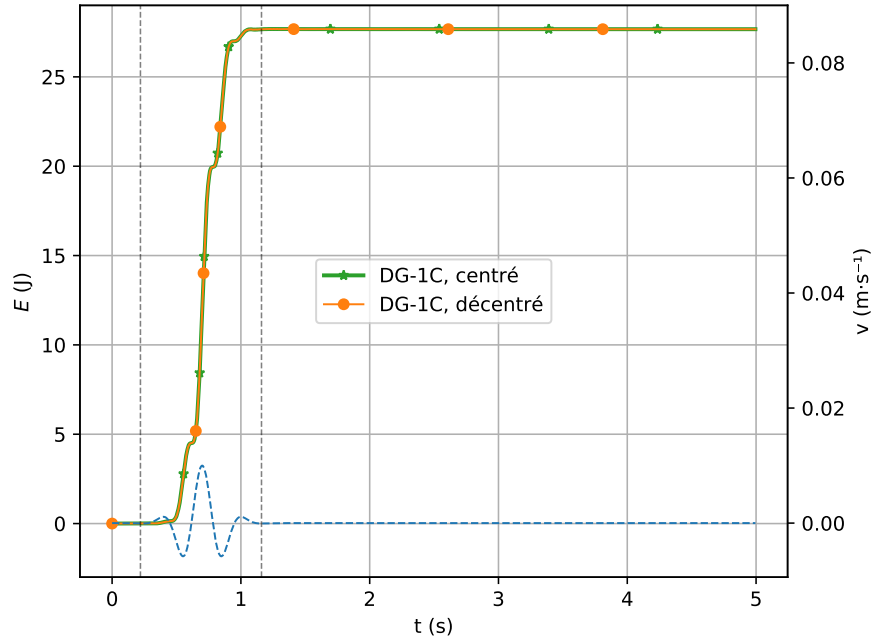
rendent le profil en surface plus complexe, plus amplifié et de durée plus longue que le signal incident. Et ce d'autant plus que le seul amortissement présent dans cette simulation est l'amortissement hystérétique. Les deux solutions sont comparables, on calcule une différence relative — définie par  $\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|_2 / \|\mathbf{a}\|_2$  — de seulement 0.9%.



**Figure 5.5.:** Comparaison des traces de la composante  $v_x$  de la vitesse particulaire dans les cas où les simulations ont été faites avec un flux centré et décentré. Le schéma temporel utilisé est LSRK4-DG-P4.

Enfin, la Figure 5.6 montre l'évolution de l'énergie totale en fonction du temps. L'énergie totale est définie par l'équation (4.44).

Une fois encore, les deux solutions — flux centré ou décentré — sont similaires. Entre les instants 0.3 s et 1.2 s, qui correspondent à la durée de l'onde injectée, matérialisés par une ligne en pointillés verticale, on observe que l'énergie croît. Une fois que le mouvement imposé à la base redevient nul, plus rien n'est injecté dans le domaine et plus rien n'en sort grâce à la condition rigide, l'énergie totale devrait donc être conservée. Constatant numériquement cela, nous pouvons en déduire que les deux schémas, avec flux centré et décentré, dans le cas élastoplastique, permettent d'obtenir des résultats comparables.



**Figure 5.6.:** Comparaison de l'énergie totale dans le domaine dans les cas où les simulations ont été faites avec un flux centré et décentré. Le schéma utilisé est LSRK4-DG-P4.

## 5.2 Comparaison des cas avec et sans couplage pour un mouvement synthétique

Pour étudier le couplage entre les différentes composantes, nous considérons la même colonne de sol complexe où le mouvement imposé à la base s'écrit :

$$\begin{cases} v_x^* &= C_x G(t, 0), \\ v_y^* &= C_y G(t, \frac{\pi}{2}), \\ v_z^* &= 0, \end{cases} \quad (5.3)$$

où  $C_x$  et  $C_y$  sont deux constantes que nous allons préciser et où la fonction  $G(t, \phi)$  est la fonction de l'Équation (5.1).

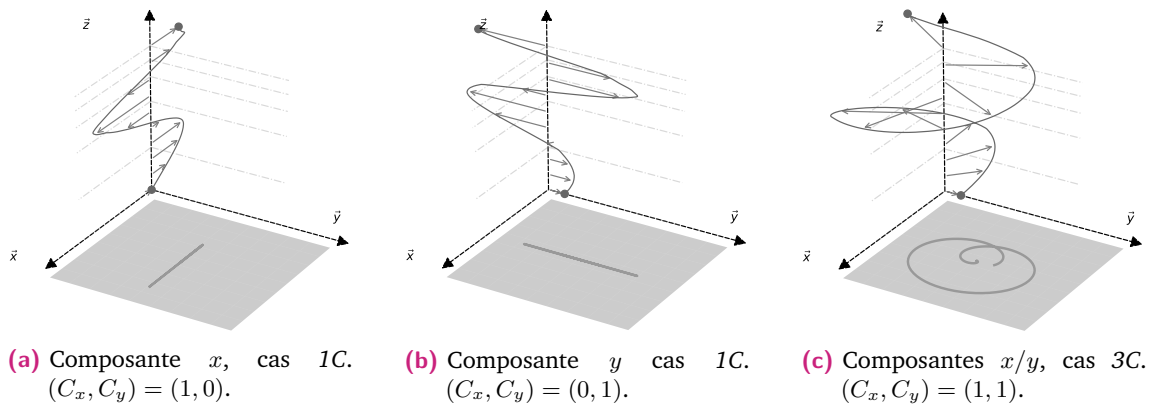
Le déphasage de  $\frac{\pi}{2}$  entre les deux composantes  $v_x$  et  $v_y$  produit un mouvement avec une polarisation circulaire et par conséquent ni la composante  $x$  ni la composante  $y$  n'est privilégiée ; ce qui permet de voir au mieux les effets du couplage. Nous considérons deux cas :

- une simulations dite « *trois composantes* » (3C) avec  $(C_x, C_y) = (1, 1)$ .

- deux simulations dites « *une composante* » (*1C*), c'est-à-dire avec les constantes :  $(C_x, C_y) = (1, 0)$  et  $(C_x, C_y) = (0, 1)$ , qui une fois sommées vectoriellement peuvent être comparées à la simulation *3C* ;

On notera que dans les deux cas, autant d'énergie est injectée et que les mouvements à la base sont vectoriellement identiques.

Les simulations réalisées sont schématisées sur la Figure 5.7. À gauche et au centre, les deux simulations « *une composante* » et à droite, la simulation « *trois composantes* ». Nous nous intéressons à montrer numériquement les différences entre les deux approches.

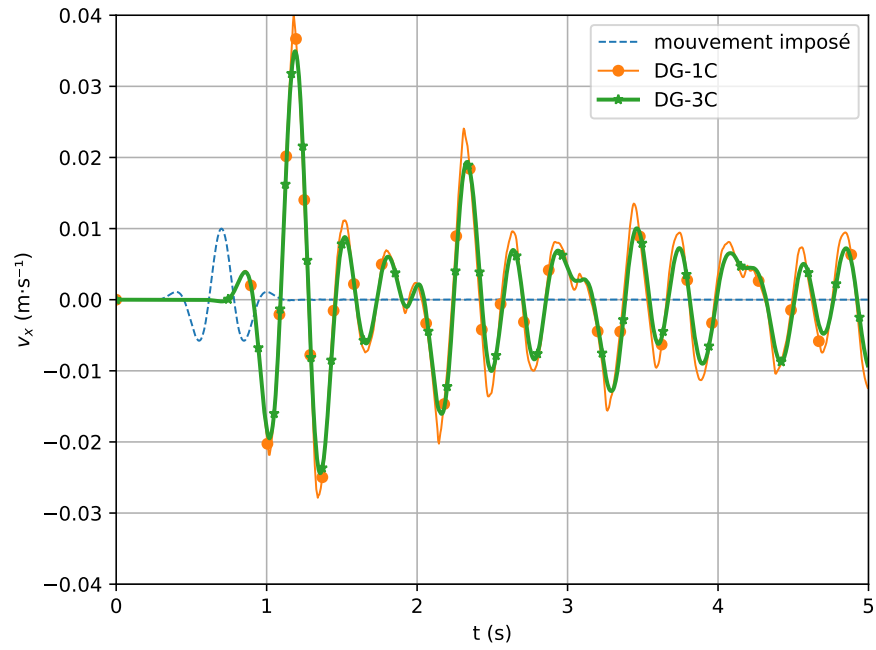


**Figure 5.7.:** Schémas des simulations *1C* et *3C*.

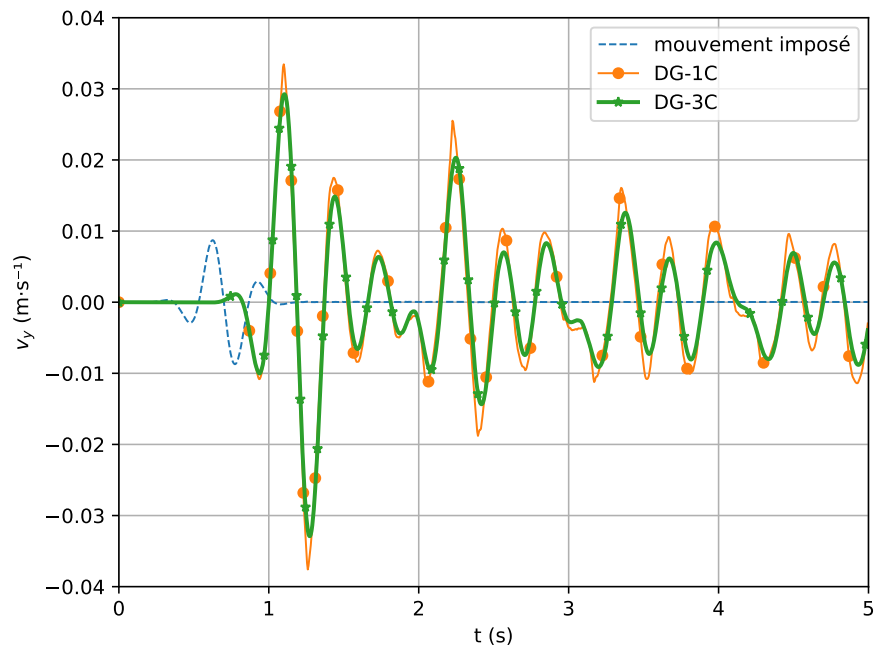
Nous comparons sur la Figure 5.8 l'évolution temporelle des vitesses particulières,  $v_x$  et  $v_y$ , en surface pour les deux modèles *3C* et *1C*. Si le milieu avait été linéaire, les deux solutions obtenues se seraient parfaitement superposées. On note ici que ce n'est pas du tout le cas, puisque les traces sont différentes dans les deux cas. En revanche, on observe qu'il n'y a pas de déphasage entre les deux signaux, ce qui signifie que la diminution de la vitesse de propagation  $v_s$  due à la nonlinéarité est, ici, identique.

La Figure 5.9 est une comparaison des courbes contrainte/déformation, pour les composantes  $xz$  et  $yz$ , obtenues avec les deux modèles. Pour chacune des composantes, les valeurs ont été prises à  $z = -14.07$  m, où les déformations sont les plus grandes dans la colonne de sol. Analysant les figures, nous voyons la forte nonlinéarité du milieu et le fait que les solutions obtenues sont clairement différentes. Cela n'est pas le cas quand le déphasage  $\phi$  entre les deux composantes à la base de la colonne est nul. Quand le mouvement n'est pas couplé (cas *1C*) ou a une direction principale (c'est-à-dire que  $v_x$  et  $v_y$  sont proportionnelles), alors à chaque fois que le chargement est renversé ( $\partial_t \gamma = 0$ ) la courbe contrainte/déformation présente un point singulier. Ce n'est pas le cas lorsque le mouvement incident a une polarisation circulaire ; il n'y a pas de point singulier. Ainsi, dans le cas *3C*, la forme des boucles d'hystérésis est plus régulière.



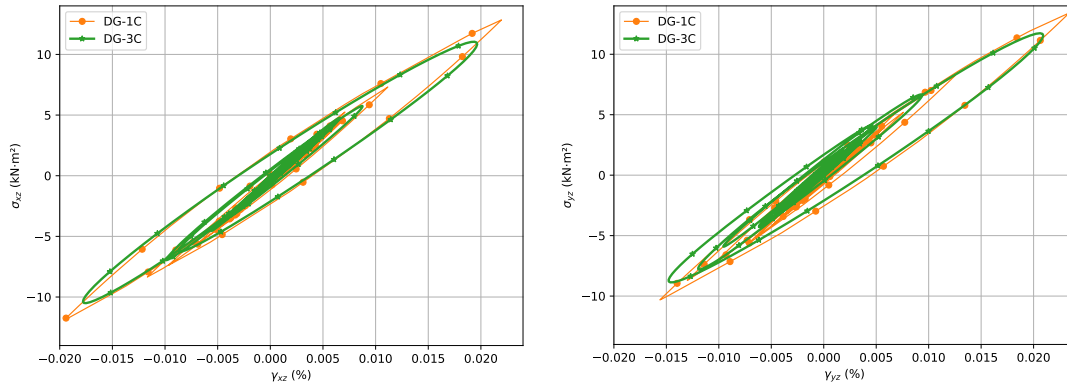


(a) Composante  $v_x$ .



(b) Composante  $v_y$ .

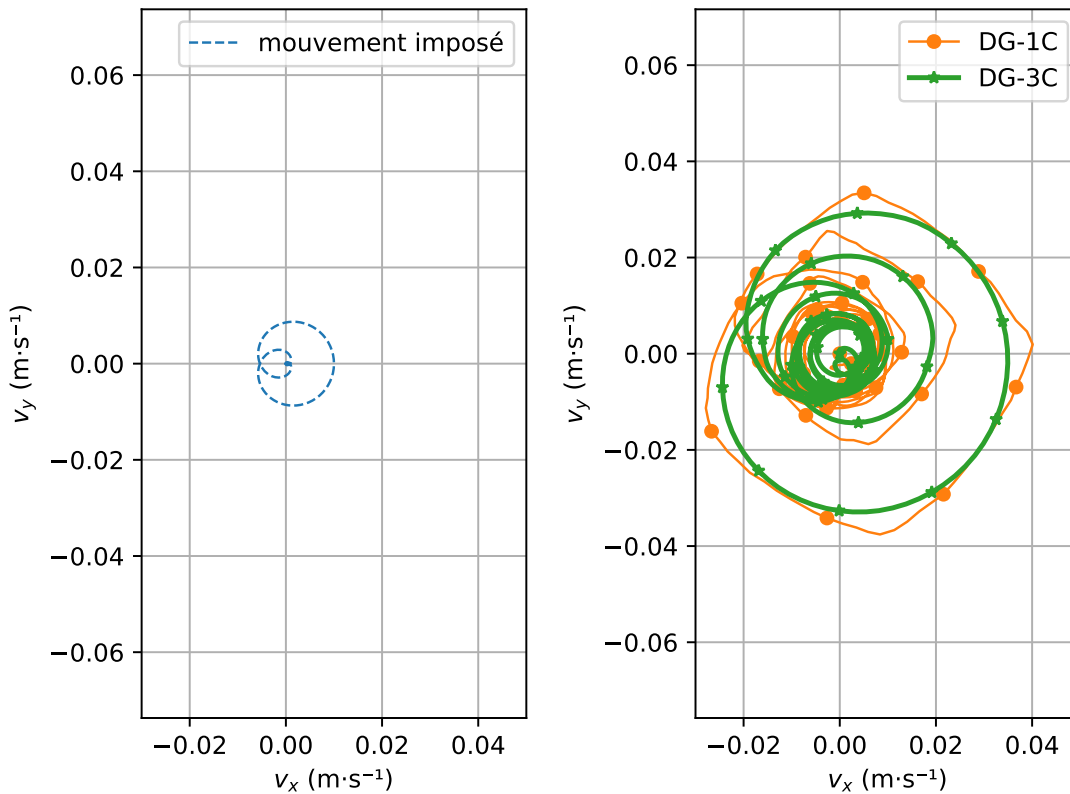
**Figure 5.8.:** Évolution temporelle des composantes horizontales de la vitesse particulaire à la surface de la colonne de sol hétérogène. Comparaison entre les simulations 1D-1C et 1D-3C.



(a) Composante  $\gamma_{xz} = f(\sigma_{xz})$  à -14.07 m.

(b) Composante  $\gamma_{yz} = f(\sigma_{yz})$  à -14.07 m.

**Figure 5.9.:** Évolution temporelle de la contrainte en fonction de la déformation dans la colonne de sol hétérogène. Comparaison entre les simulations 1D-1C et 1D-3C. Les mesures sont faites là où la déformation est la plus grande.



**Figure 5.10.:** Mouvement horizontal en coordonnées polaires. Le mouvement polarisé circulairement imposé à la base de la colonne (Figure gauche) et la mouvement résultant (Figure droite) à la surface de la colonne, obtenu avec une simulation 1D-3C et deux simulations distinctes 1D-1C.

Enfin, sur la Figure 5.10, on présente la vitesse horizontale en coordonnées polaires. Premièrement, sur la figure de gauche, on voit le mouvement imposé à la base de la colonne qui évolue dans un plan horizontal. La figure de droite montre les vitesses obtenues en surface de la colonne. Dans les deux cas, l'amplification par la colonne est claire. Dans le cas 1C, la somme vectorielle des deux composantes reproduit un mouvement assez différent de celui obtenu dans le cas 3C. Cela illustre que dans le cas où le mouvement n'a pas de direction privilégiée et que le milieu est nonlinéaire, alors un modèle couplé doit être utilisé.

**Remarque.** Dans le cas où les deux composantes  $v_x$  et  $v_y$  sont simplement proportionnelles  $v_x = av_y = as(t)$ ,  $a \in \mathbb{R}^*$ ,  $s : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$ , alors la polarisation est linéaire et cela est totalement équivalent au cas 1C où le mouvement imposé est  $v_x = \sqrt{1+a^2}s(t)$  et en considérant que les axes ont subi une rotation d'un angle  $\alpha = \arctan(1/a)$ .

### 5.3 Comparaison du cas avec couplage et d'un mouvement enregistré

Dans cette dernière section, nous nous intéressons à l'application du modèle 1D-3C à un mouvement sismique enregistré par une station. L'événement de la base de données d'Euroseistest qui a été retenu correspond à un enregistrement à la station TST du 9 décembre 2005 à 19 h08 min et 29 s d'un séisme d'une magnitude  $M_w = 4.4$  situé à 7.9 km. L'accélération maximale — PGA<sup>7</sup> — mesurée à la surface est de 100.75 cm/s<sup>2</sup>, ce qui en fait l'événement le plus fort enregistré de toute la campagne de mesures. La colonne de sol considérée est la même que dans les deux cas tests précédents. Comme l'illustre la Figure 5.2, différentes stations sont placées en profondeur sous la station TST. En particulier, il y a la station TST 196 qui est située à 196 m de profondeur à l'interface entre le bassin et le rocher, ce qui correspond à la frontière de notre domaine de calcul. Le mouvement est imposé à ce point par une condition rigide<sup>8</sup>.

Pour être plus réaliste et améliorer la qualité des résultats lorsque l'on compare avec des mesures de terrain, nous avons pris en compte un amortissement visqueux simple. Ainsi, les solutions sont également atténuées à faibles déformations. Le système d'équations (2.53) est ainsi modifié :

$$\begin{cases} \rho(z)\partial_t \mathbf{v}(z, t) = \partial_z \boldsymbol{\sigma}[\boldsymbol{\varepsilon}(z, t), z] - \alpha(z) \mathbf{v}(z, t), \\ \partial_t \boldsymbol{\varepsilon}(z, t) = \partial_z \mathbf{v}(z, t), \end{cases} \quad (5.4)$$

7. Peak Ground Acceleration.

8. Voir sous-section 3.2.2, p. 42.

où  $\alpha(z)$  est une constante, qui dépend de la fréquence principale  $f_0$  à amortir et du facteur de qualité  $Q(z)$  de la couche considérée de telle sorte que [Sem97] :

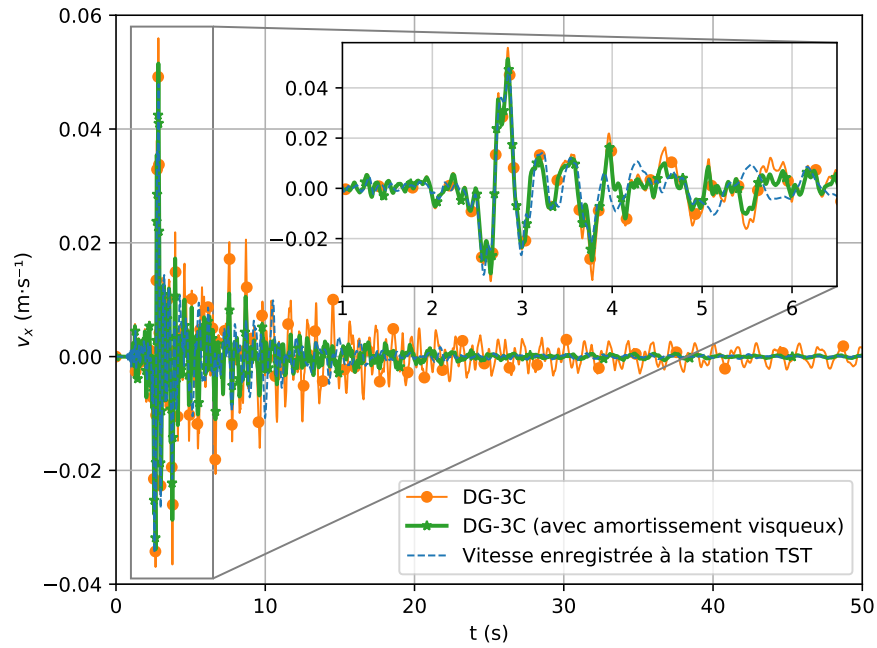
$$\alpha(z) = \frac{\pi f_0}{Q(z)}. \quad (5.5)$$

Dans notre cas, nous avons choisi  $f_0 = 3.0$  Hz, qui est la fréquence fondamentale du site à la station TST.

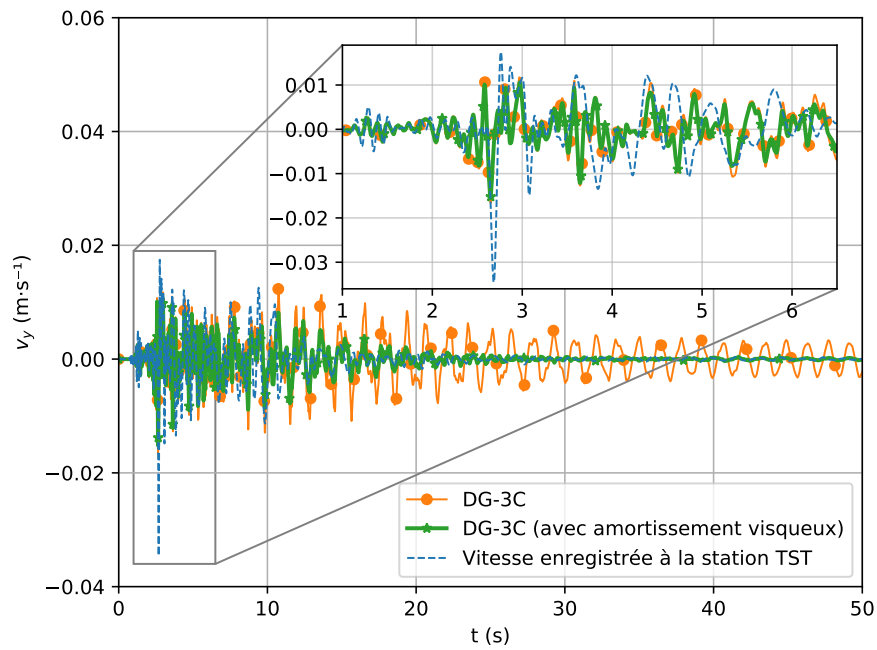
Sur la Figure 5.11, nous montrons l'évolution temporelle des composantes  $v_x$  et  $v_y$  de la vitesse particulière à la surface de la colonne. Nous les comparons également à la vitesse enregistrée par la station TST. Nous pouvons noter que les caractéristiques principales de l'enregistrement sont bien reproduites (temps d'arrivées, vitesse maximale), comme l'illustrent les zooms sur les dix premières secondes. On remarquera également que la composante  $v_x$  est mieux reproduite que la composante  $v_y$ , sans doute est-ce dû à des effets 3D de la source ou encore à l'anisotropie du sol, qui ne sont pas considérés dans cette simulation. La contribution de l'amortissement visqueux, spécifiquement pour les instants après 10 s, est remarquable.

En revanche, la composante  $v_z$  est très mal reproduite comme l'illustre la Figure 5.12. Une des causes possibles est l'utilisation de la condition rigide qui suppose que l'onde injectée est en adéquation parfaite avec le milieu de propagation. Or le modèle est plus ou moins bien contraint, et encore moins en compression, ce qui implique qu'une erreur numérique plus importante peut se propager dans la composante verticale. On observe sur la Figure 5.12b, à  $t \approx 2.1$  s la présence d'une arrivée importante qui ne semble pas très marquée dans l'enregistrement en surface, mais est visible dans la simulation. C'est également à partir de ce moment que les amplitudes obtenues entre la simulation et l'enregistrement commencent à être très différentes. Cela pourrait confirmer l'hypothèse que le modèle n'est pas suffisamment précis et particulièrement en vitesses de compression (géométrie/amortissement/vitesses). Cela pourrait également venir de l'hypothèse 1D qui a été faite et du mouvement imposé qui ne l'est pas exactement. Le *back azimuth* du séisme est orienté  $30^\circ$  Nord et est donc perpendiculaire à la direction longitudinale du bassin. Ainsi, l'onde traverse le bassin et s'enrichit d'effets 3D qui ne peuvent pas être pris en compte dans notre simulation.

Sur la Figure 5.13, on observe que les valeurs maximales des déformations sont approximativement de  $2 \times 10^{-4}$  sur la composante  $\gamma_{xz}$  à  $z = -17.1$  m et de  $4 \times 10^{-5}$  pour la composante  $\gamma_{yz}$  à  $z = -16.1$  m, ce qui est en accord avec les valeurs estimées par GUÉGUEN [Gué16] en utilisant le proxy  $PGA/v_{s30}$  pour la déformation en cisaillement.

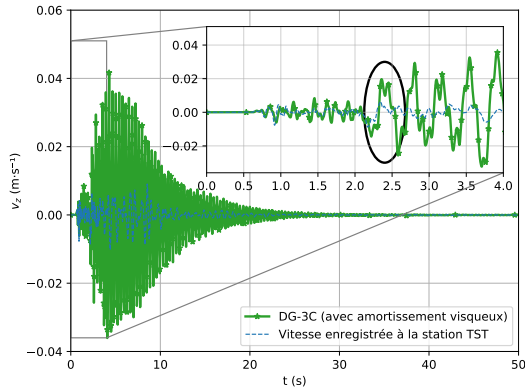


(a) Composante  $v_x$ .

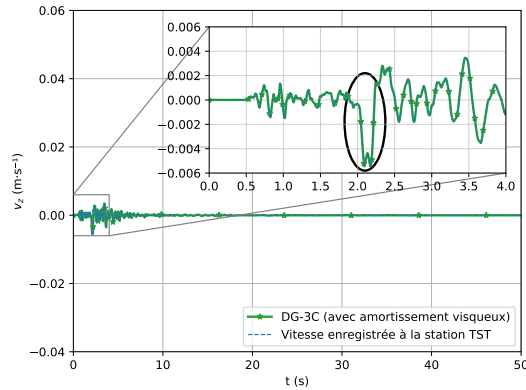


(b) Composante  $v_y$ .

**Figure 5.11.:** Évolution temporelle des composantes horizontales de la vitesse particulaire à la surface de la colonne de sol hétérogène. Comparaison entre les simulations, avec et sans amortissement visqueux et les enregistrements à la station TST.

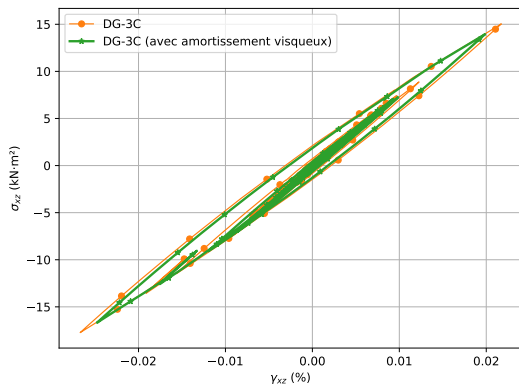


(a) Composante  $v_z$  en surface.

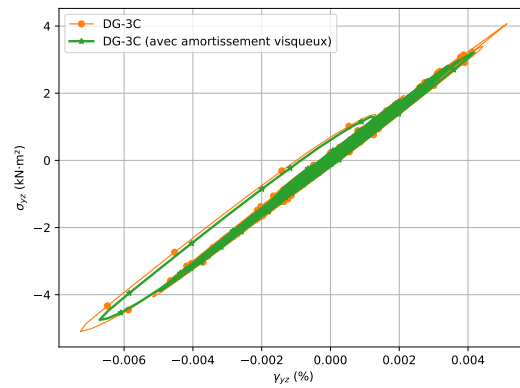


(b) Composante  $v_z$  à l'interface entre le milieu et le rocher, à  $-196$  m.

**Figure 5.12.:** Évolution temporelle de la composante verticale de la vitesse particulaire. Comparaison entre la simulation avec amortissement visqueux et les enregistrements à la station TST. Une surestimation de l'amplitude autour de l'arrivée à  $t = 2.1$  s est clairement observée (voir ellipses noires). À partir de cet instant, une résonance dans la colonne est établie.



(a)  $z = -17.1$  m.



(b)  $z = -16.1$  m.

**Figure 5.13.:** Évolution temporelle de la contrainte en fonction de la déformation dans la colonne de sol hétérogène. Comparaison entre les simulations 1D-3C avec et sans amortissement. Les mesures sont faites là où la déformation est la plus grande pour chaque composante.

## 5.4 Influence de l'échantillonnage de la courbe de réduction de module de cisaillement

Dans cette section, nous proposons de comparer les résultats obtenus lorsque les courbes  $G/G_{\max}$  sont échantillonnées *logarithmiquement* ou *automatiquement* selon la méthode

décrite en sous-section 2.2.4 p. 26. Pour cela, nous considérons le même cas test que dans la section 5.2, seule la méthode d'échantillonnage de la courbe de réduction du module de cisaillement est modifiée ; dans les deux cas  $N = 50$  éléments sont utilisés.

Pour mesurer l'impact de l'échantillonnage, nous comparons les deux méthodes à une solution de référence. Cette solution de référence est calculée jusqu'à  $T = 20$  s avec un échantillonnage logarithmique et  $N = 300$  éléments. On propose de mesurer pour chacune des simulations les temps de calcul relativement au cas linéaire et de mesurer l'erreur par rapport à la solution de référence. Les résultats sont donnés dans le Tableau 5.2.

Échantillonnage	Nombre d'éléments	Durée relative	Erreur relative
Logarithmique	50	343	2.33%
Automatique	50	87	2.31%
Automatique	150	150	0.25%

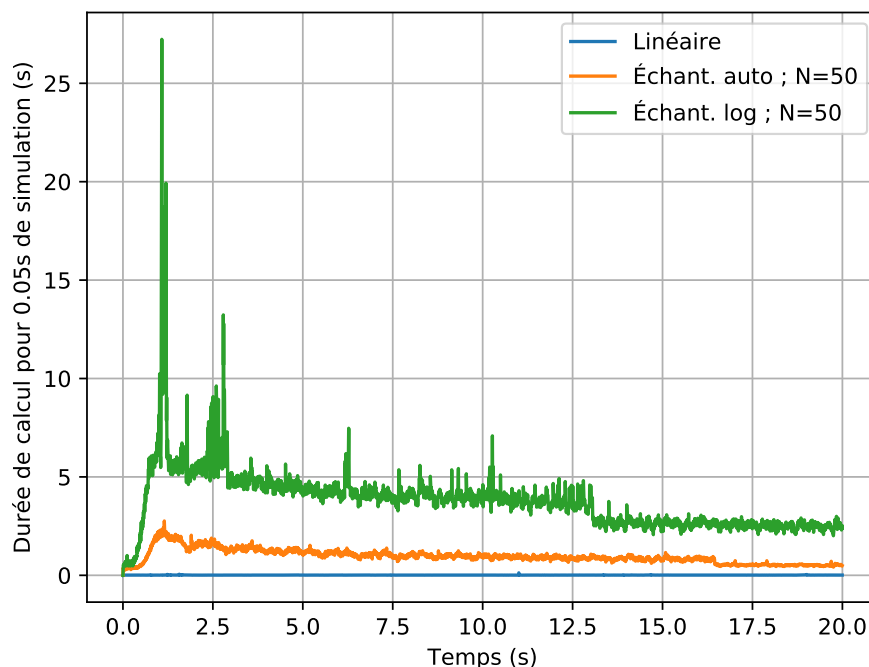
Note : les calculs ont été réalisés sur une même machine, avec un processeur Intel Core i7 cadencé à 3.1 GHz. Pour information, le temps de calcul de la solution linéaire est de 44 s, celui de la solution de référence nonlinéaire élastique est de 14 h.

**Tableau 5.2.:** Durée relative par rapport à la simulation linéaire et erreur relative à la solution élastoplastique de référence, en fonction de la méthode d'échantillonnage et du nombre de points considérés.

On observe sur ce cas particulier, que lorsque 50 éléments sont utilisés, l'erreur relative est quasiment identique à la fin de la simulation, mais que le temps de simulation a été considérablement réduit ; un gain de 75% par rapport à l'échantillonnage logarithmique. Si, dans le cas de l'échantillonnage automatique, le nombre de points est triplé, pour atteindre 150, on constate que l'erreur par rapport à la solution de référence est de 0.25% seulement et que le gain de temps est d'environ 56%. Pour une simulation deux fois plus courte, l'erreur relative a été divisée par dix.

La Figure 5.14 nous permet d'observer l'évolution du temps de calcul nécessaire pour que la simulation globale avance de 0.05 s. On constate tout d'abord que dans le cas linéaire élastique, la durée de calcul est bien constante pour chaque itération. Cela n'est plus du tout le cas lorsque le modèle élastoplastique est utilisé. Comme nous l'avions expliqué dans la sous-section 2.2.4, un appel à la fonction qui calcule la contrainte par rapport à la déformation dépend de la valeur de la déformation (plus précisément du nombre de surfaces activées). C'est pourquoi, comme l'illustre la Figure 5.14, la durée de calcul de chaque itération est différente. On observe que les "premières" itérations ont été plus longues à calculer, puisque les déformations y ont été plus importantes. Des déformations plus importantes impliquent dans le modèle MPlI plus de surfaces actives et donc un temps de calcul plus long. On remarquera que la variation du temps de calcul pour 0.05 s

est plus importante dans le cas de l'échantillonnage logarithmique que dans le cas de l'échantillonnage automatique. Le temps de calcul de la méthode proposée est moins sensible aux variations de la déformations.



**Figure 5.14.:** Évolution de la durée du temps de calcul pour 0.05 s de simulation.

La Figure 5.15 permet de mieux comprendre comment l'erreur évolue et de comparer la qualité des solutions obtenues.

De prime abord, les trois traces se superposent très bien à la solution de référence. On observe dans la première fenêtre, un zoom sur un maximum local, où le mouvement a été puissant. Pour un nombre d'éléments égal, la solution obtenue avec l'échantillonnage automatique est nettement plus proche de la référence que celle obtenue avec l'échantillonnage logarithmique. En revanche, si on regarde la deuxième fenêtre, on constate qu'un déphasage apparaît progressivement. Celui-ci est moins marqué avec l'échantillonnage logarithmique parce que la courbe de dégradation de module de cisaillement, à petites déformations, est mieux approximée dans cette zone ; ce qui *in fine* réduit le déphasage. Néanmoins, les gains en terme de temps de calcul font que ce déphasage reste très acceptable. Pour finir, on notera que la solution obtenue avec l'échantillonnage automatique et 150 éléments — deux fois plus rapide à calculer que la solution avec l'échantillonnage logarithmique et 50 éléments — est quant à elle quasiment égale, tout le temps, à la solution de référence ; tout en étant sept fois plus rapide à calculer. Enfin, la Figure 5.16



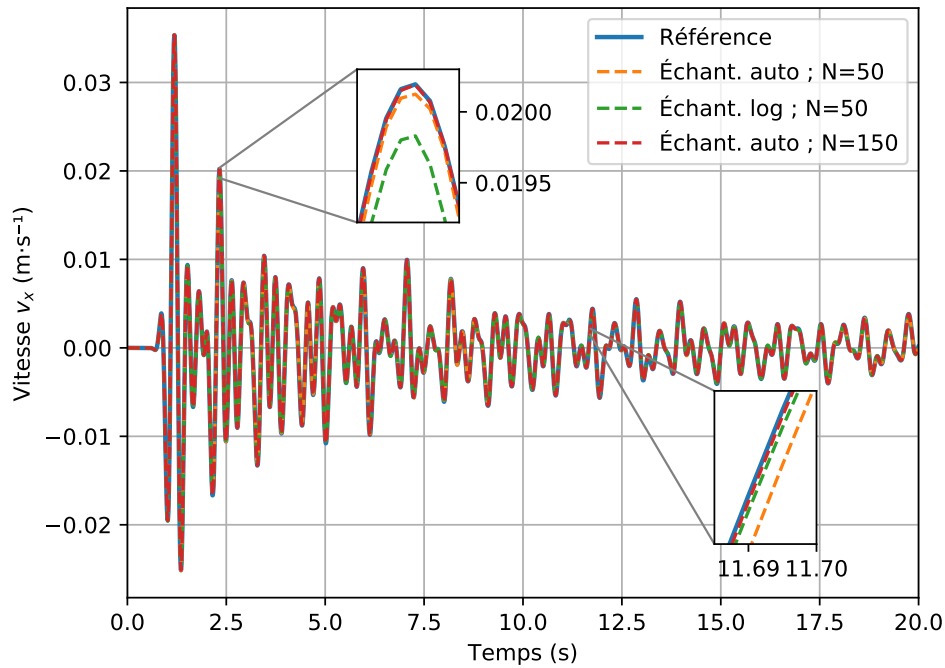


Figure 5.15.: Évolution de la vitesse en surface.

nous permet d’observer l’évolution de la composante  $xz$  de contrainte par rapport à la déformation à  $-15$  m, là où la déformation est la plus importante. Les mêmes remarques que pour la Figure 5.15 peuvent être faites, bien que l’erreur de l’approximation du module de cisaillement à faible déformation — qui introduit le faible déphasage — soit difficile à observer.

Il n’y a donc pas de doute quant à l’intérêt de bien choisir la méthode d’échantillonnage pour approximer la courbe de réduction de module de cisaillement. Avec autant d’éléments, le temps de calcul est nettement réduit, avec plus d’éléments, on parvient à réduire considérablement l’erreur, tout en ayant un temps de calcul plus court.

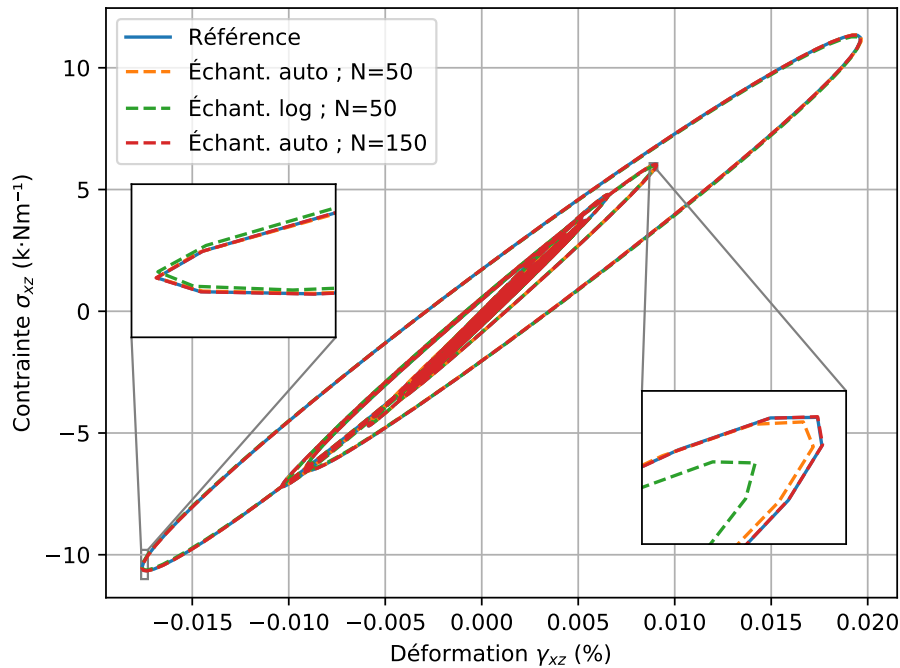


Figure 5.16.: Évolution de la contrainte en fonction de la déformation à  $-15$  m.

## Bilan

La méthode DG a été appliquée à la propagation des ondes dans un milieu non linéaire unidimensionnel en prenant en compte le couplage entre les différentes ondes propagées. Nous avons montré que dans le cas élastoplastique, nous pouvons utiliser le flux numérique centré. En effet, lorsque la non linéarité est grande, alors le modèle élastoplastique introduit, par construction, de l'amortissement et participe à la stabilisation générale. Le couplage entre les différentes composantes a été observé sur un cas synthétique en utilisant un signal circulairement polarisé. Un cas réel a pu être reproduit, où nous avons montré également l'intérêt d'utiliser à amortissement visqueux. Enfin, nous avons illustré à travers un exemple que selon la manière dont est échantillonnée la courbe de premier chargement, le temps de calcul du modèle MPII pouvait être significativement réduit, pour une précision similaire.



# Propagation d'une onde dans un milieu tridimensionnel élastoplastique

” De quoi parlez-vous ? De mètres, de pommes, de poires ? Ou peut-être s'agit-il de scoubidous ?

— Philippe T.

Professeur de physique-chimie, terminale, 2009

Ce dernier chapitre est consacré aux applications 3D. Le code utilisé comme base est celui présenté dans [DFG09 ; DG15]. Initialement, ce code résout les équations de l'élastodynamique formulées en vitesse/contrainte dans un milieu linéaire. Il permet la propagation d'ondes dans un milieu réaliste, c'est-à-dire avec une topographie quelconque et un milieu hétérogène. Les maillages peuvent être non-structurés, mais l'implémentation les restreint à être conformes. Il est développé avec la bibliothèque OPENMPI, qui permet l'utilisation de plateforme de calcul parallèle. Ce code utilise un schéma temporel de type saute-mouton et un flux centré.

Dans le cadre de cette thèse, il a été modifié pour prendre en compte les lois de comportement nonlinéaires. Entre autres, les modifications/ajouts suivants ont été réalisés :

- la résolution des équations sous forme vitesse/déformation, au lieu de la forme vitesse/contrainte.
- la possibilité d'utiliser différentes relations constitutives<sup>1</sup>. La gestion des lois de comportement est maintenant gérée dans un module indépendant, ce qui permet l'ajout de nouvelles lois. La loi de Hooke et le modèle MPIO ont été implémentés dans ce module.
- la gestion des schémas temporels est également faite dans un nouveau module indépendant. Le schéma saute-mouton et le schéma Runge-Kutta à faible stockage d'ordre quatre ont été implémentés ; d'autres sont ajoutables.
- la possibilité d'exporter les champs solutions, à chaque nœud du maillage, afin de réaliser des visualisations/animations, en utilisant le format standard VTK.

---

1. Sous réserve que le flux centré puisse être utilisé.

- l'utilisation de l'allocation dynamique, permettant une meilleure gestion de l'empreinte mémoire et offrant une plus grande souplesse d'utilisation.

Ce chapitre présente premièrement les vérifications que nous avons effectuées. Nous voulons nous assurer que la conversion vitesse/contrainte en vitesse/déformation a été faite correctement. Nous voulons aussi vérifier que les conditions aux frontières ont été bien adaptées et enfin, que l'implémentation de la source ponctuelle est correcte. Pour cela, nous étudions plusieurs cas. Dans un premier temps, le cas de la propagation d'une onde produite par une source explosive dans un demi-espace homogène, proposé par DELCOURTE et GLINSKY [DG15] est reproduit. Puis, l'implémentation de la source ponctuelle pour un double couple est vérifiée à l'aide d'un cas test proposé par le projet E2VP — *Euroseistest Verification and Validation Project*.

À l'issue de ces vérifications, nous nous intéressons à l'étude des effets nonlinéaires en 3D. Pour cela, nous considérons le cas du mode propre dans un cube et nous comparons les résultats dans le cas d'une loi de comportement élastique et élastoplastique. Cette étude est suivie par la comparaison des résultats obtenus dans le cas d'un bassin à plusieurs couches encastré dans un rocher lorsqu'une des couches a un comportement linéaire élastique ou nonlinéaire élastoplastique.

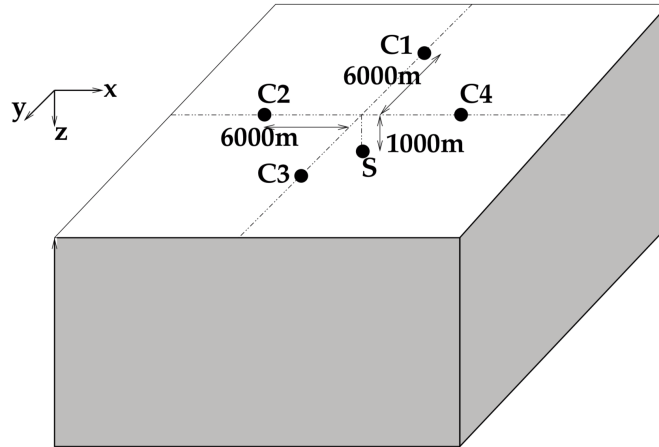
## 6.1 Vérification de la source (cas linéaire élastique)

### 6.1.1 Vérification d'une source explosive

La source ponctuelle, telle que définie dans la section 2.4, permet également de simuler des explosions. Cela se produit lorsque le tenseur du moment sismique est diagonal, de trace non nulle et que toutes ses composantes diagonales sont égales. Afin de vérifier l'implémentation de la source dans un cas d'explosion, nous reproduisons un cas test proposé par DELCOURTE et GLINSKY [DG15]. Nous considérons un demi espace, tel qu'illustré par la figure 6.1. Ce cas test permet de vérifier l'implémentation de la source explosive ainsi que les conditions absorbantes<sup>2</sup>. Le milieu considéré est homogène, avec une densité  $\rho = 2800 \text{ kg/m}^3$ . Les vitesses des ondes de cisaillement et de compression sont respectivement  $v_s = 3700 \text{ m/s}$  et  $v_p = 6400 \text{ m/s}$ . Une condition de surface libre est appliquée en  $z = 0 \text{ m}$  alors que sur les autres bords une condition absorbante est utilisée. La source est située au centre du domaine, à 1000 m de profondeur. Quatre récepteurs sont considérés, placés à en surface à 6000 m de l'épicentre, tels que l'illustre la Figure 6.1.

---

2. Voir section 3.2.3, p 43.



**Figure 6.1.:** Source explosive dans un demi-espace. La source est représentée par  $S$ , les  $C_i$  correspondent à la position des quatre capteurs. Source : [DG15]

Le signal de la source  $s(t)$  est une ondelette de Ricker, définie par :

$$s(t) = \frac{3 \times 10^{16}}{\alpha \sqrt{\pi}} \exp \left[ -\frac{(t-1)^2}{\alpha^2} \right] \quad (6.1)$$

avec  $\alpha = 0.25$ , ce qui donne une fréquence centrale  $f_c = 1.0$  Hz, une fréquence maximale  $f_{\max} = 3.0$  Hz et donc une longueur d'onde minimale  $\lambda_{\min} = v_s / f_{\max} \approx 1233$  m. Le moment sismique considéré est défini par :

$$\underline{M}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.2)$$

À l'instant initial, les champs  $v$  et  $\varepsilon$  sont nuls. Le maillage utilisé est non-structuré, construit pour avoir environ deux éléments par longueur d'onde minimale. Les caractéristiques du maillage sont données dans le Tableau 6.1.

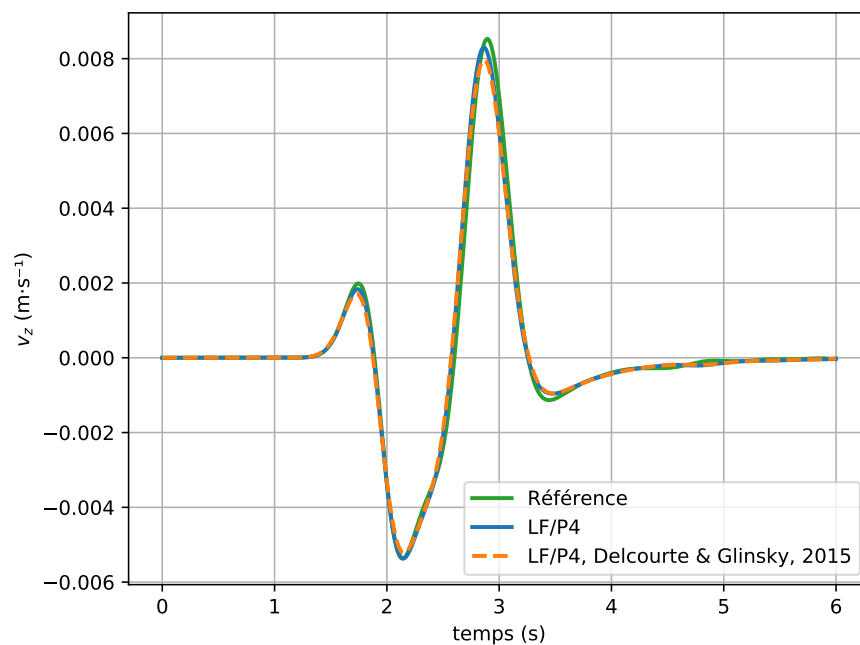
1 <sup>er</sup> quartile	médiane	3 <sup>e</sup> quartile
442 m	501 m	546 m

Note : Le maillage contient 54 842 éléments.

**Tableau 6.1.:** Quartiles du diamètre des sphères inscrites des éléments du maillage.

Le schéma temporel saute-mouton est utilisé, les polynômes d'interpolation sont d'ordre quatre. Les calculs ont été réalisés sur le cluster de l'INRIA, en utilisant 64 processeurs en parallèle. Le temps de calcul pour arriver à  $t = 6$  s est de 23 min.

La solution obtenue est comparée avec celle calculée par DELCOURTE et GLINSKY [DG15], où un schéma temporel saute-mouton, des polynômes d'interpolation d'ordre quatre, un maillage structuré, avec une arête de  $h = 500$  m sont utilisés. L'évolution de la composante  $v_z$  de la vitesse particulaire est montrée la Figure 6.2. On constate dans un premier temps que la source ponctuelle avec un Dirac et les conditions aux limites semblent correctement implémentées. Ensuite, on peut remarquer que la solution obtenue est légèrement plus proche de la solution de référence<sup>3</sup> que celle calculée par DELCOURTE et GLINSKY [DG15]. Dans leur étude, les auteures ont choisi de modéliser la source ponctuelle par une fonction Gaussienne, plutôt qu'un Dirac. Cette fonction a un support spatial non négligeable et c'est sans doute en partie de là que proviennent les différences.

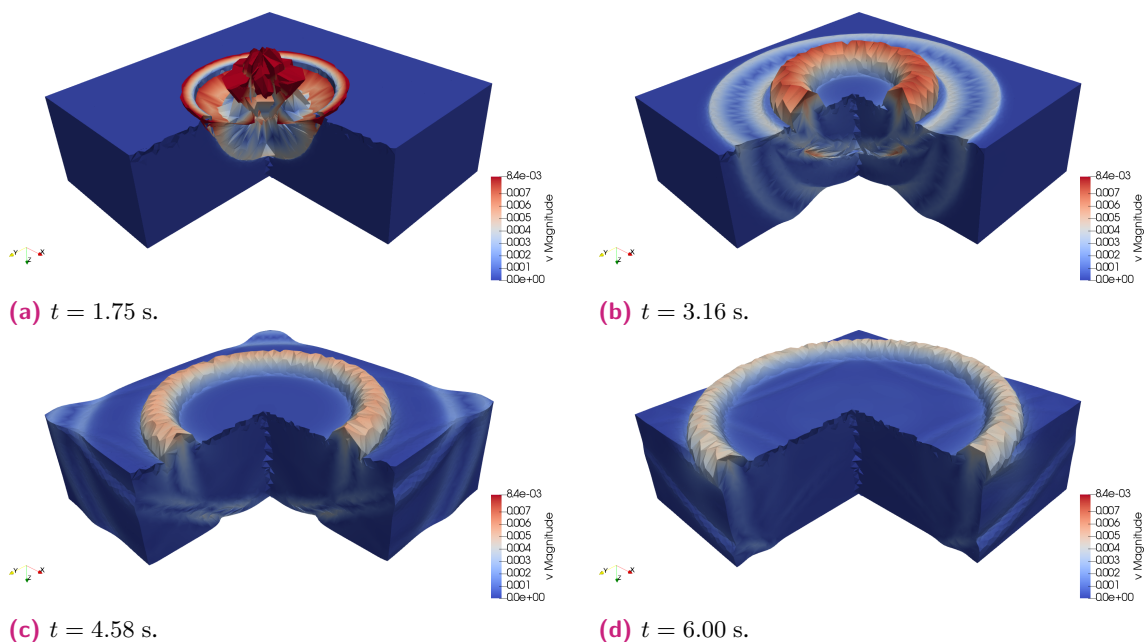


**Figure 6.2.:** Comparaison de la composante  $v_z$  avec la solution obtenue par DELCOURTE et GLINSKY [DG15] et la solution de référence, au capteur  $C_1$ .

La Figure 6.3 illustre le champ de vitesse à quatre instants différents. La visualisation est faite dans une partie du domaine seulement, de sorte que l'on puisse voir ce qu'il s'y passe à l'intérieur. La couleur correspond à la norme du vecteur vitesse  $v$ . L'échelle de couleurs varie linéairement du bleu ( $\|v\| = 0$ ) au rouge ( $\|v\| = 8.4 \times 10^{-4}$  m/s). Enfin, à l'instant  $t$ ,

3. La solution de référence est calculée aux différents capteurs en utilisant la méthode *Discrete Wave Number* [BA77].

chaque point de visualisation est déplacé de sa position initiale  $x_0$  en  $x(t) = x_0 + \alpha v(t)$  où  $\alpha$  est une constante choisie pour une meilleure visibilité.



**Figure 6.3.:** Évolution du champs de vitesse dans le domaine. Chaque point de visualisation est déplacé en  $x(t) = x_0 + \alpha v(t)$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Sur la Figure 6.3a, nous pouvons apprécier le front d'ondes P qui arrive à la surface libre, où des ondes de Rayleigh sont générées et propagées à une vitesse approximative de  $v_r \approx \frac{0.87+1.12\nu}{1+\nu}v_s \approx 0.92v_s = 3403.40$  m/s. Ce front d'onde est visible par les fortes amplitudes rouges en surface. D'autre part, dans le volume, les ondes PP réfléchies et la convertie PS à la surface libre sont également visibles.

## 6.1.2 Comparaison cas test E2VP

Nous proposons dans ce cas test de vérifier l'implémentation de la source ponctuelle dans le cas d'un double couple. Pour cela, nous allons reproduire le cas *CAN1* du projet *E2VP* — *Euroseistest Verification and Validation Project*, dont le site web est accessible à l'adresse <http://www.sismowine.org/>. Il s'agit d'un demi-espace, homogène isotrope avec un rapport  $v_p/v_s$  grand. Numériquement, cela est assez difficile à appréhender puisqu'une petite valeur de  $v_s$  va impliquer un maillage fin, pour vérifier le critère de précision<sup>4</sup> et une grande valeur de  $v_p$  implique un pas de temps petit, pour vérifier le critère de stabilité<sup>5</sup>. Nous considérons les propriétés suivantes :  $v_s = 200$  m/s,  $v_p = 1500$  m/s et une densité

4. Voir sous-section 3.5.1, p. 50.

5. Voir sous-section 3.5.2, p. 50.



$\rho = 2100 \text{ kg/m}^3$ . La source est supposée ponctuelle avec le mécanisme<sup>6</sup> suivant :  $\theta = 22.5^\circ$ ,  $\delta = 90^\circ$  et  $\lambda = 0^\circ$ . Le moment sismique  $M_0$  est de  $M_0 = 10^{18} \text{ Nm}$  et est pondéré dans le temps par la fonction  $s(t)$  suivante :

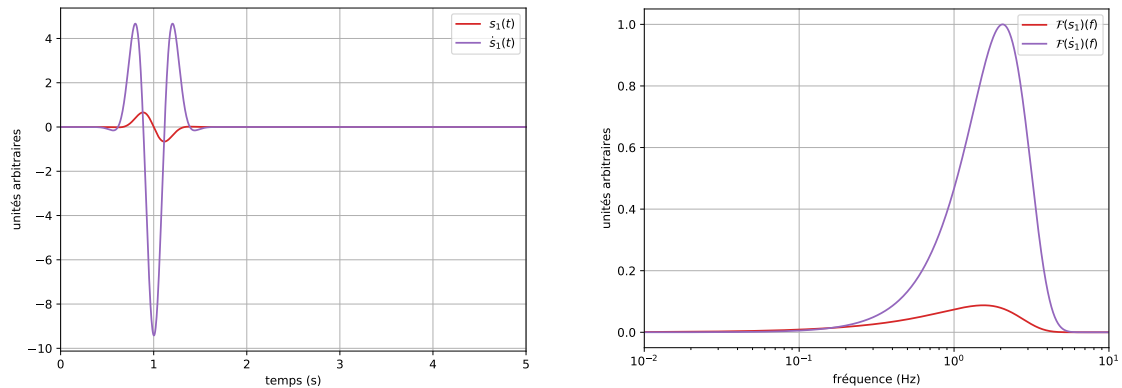
$$s(t) = \exp\left(-\frac{\omega^2}{\gamma^2}(t - t_s)^2\right) \cos(\omega(t - t_s) + \vartheta), \quad (6.3)$$

avec  $\omega = 2\pi f_p$ ,  $f_p = 1.5 \text{ Hz}$ ,  $\gamma = 2$ ,  $\vartheta = \pi/2$  et  $t_s = 1 \text{ s}$ .

Compte tenu de l'implémentation de la source telle que nous l'avons faite, nous devons aussi calculer  $\dot{s}(t)$ , qui est donnée par :

$$\dot{s}(t) = -\omega \sin(\omega(t - t_s) + \vartheta) \exp\left(-\frac{\omega^2}{\gamma^2}(t - t_s)^2\right) - \frac{2\omega^2}{\gamma^2}(t - t_s) \cos(\omega(t - t_s) + \vartheta) \exp\left(-\frac{\omega^2}{\gamma^2}(t - t_s)^2\right). \quad (6.4)$$

La Figure 6.4 illustre l'évolution temporelle de  $s(t)$  et  $\dot{s}(t)$ , ainsi que leur spectres de Fourier respectifs.



- (a) Évolution temporelle de la source  $s(t)$  et de sa dérivée temporelle  $\dot{s}_1(t)$ . (b) Spectre de Fourier de  $s_1$  et  $\dot{s}_1$ , fréquence maximale de 5 Hz.

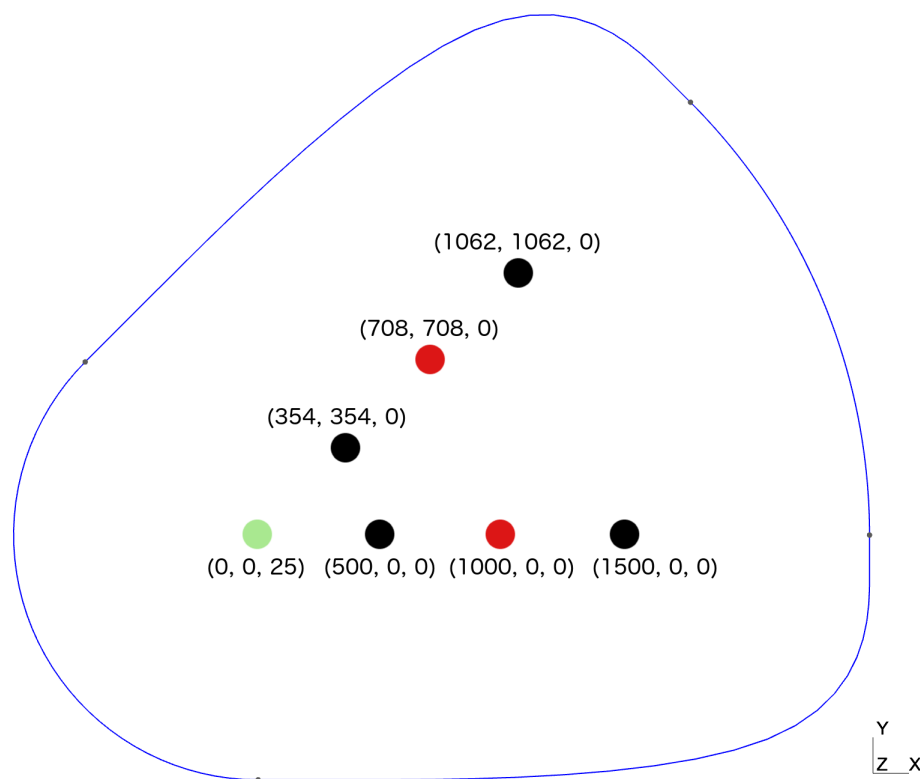
**Figure 6.4.:** Description temps/fréquence de la source  $s(t)$ .

La source est localisée en  $(0, 0, 25 \text{ m})$ . Le cas test proposé n'impose pas de contrainte particulière sur la géométrie du maillage si ce n'est une liste de capteurs où la solution de référence est calculée pour comparaison. Ces capteurs sont positionnés selon l'axe des

6. Voir section 2.4, p. 31.

abscisses, espacés de 500.00 m et sur la diagonale du repère  $(Ox, Oy)$ , espacés de 500.64 m. Une surface libre est considérée à  $z = 0$  et des bords absorbants sont utilisés ailleurs<sup>7</sup>.

La Figure 6.5 illustre la géométrie retenue ainsi que les capteurs considérés. Afin de réduire la taille du maillage et donc le temps de calcul, tous les capteurs du cas test n'ont pas été considérés ; notre but est de vérifier l'implémentation du mécanisme de la source, pour cela seulement quelques capteurs suffisent. La géométrie est choisie afin de réduire le nombre d'éléments, par rapport à l'utilisation d'un pavé par exemple, tout en permettant à chaque récepteur d'être à une distance d'au moins 1000 m du bord du domaine.



**Figure 6.5.:** Géométrie utilisée pour le test *CAN1*. Vue de dessus. Le disque vert représente la localisation de l'hypocentre, les disques rouges la localisation de deux forages (un capteur tous les 50 m) et en noir, la localisation de capteurs surfaciques. Une profondeur de 1000 m est considérée. La distance entre les récepteurs et les bords du domaine est d'au moins 1000 m également.

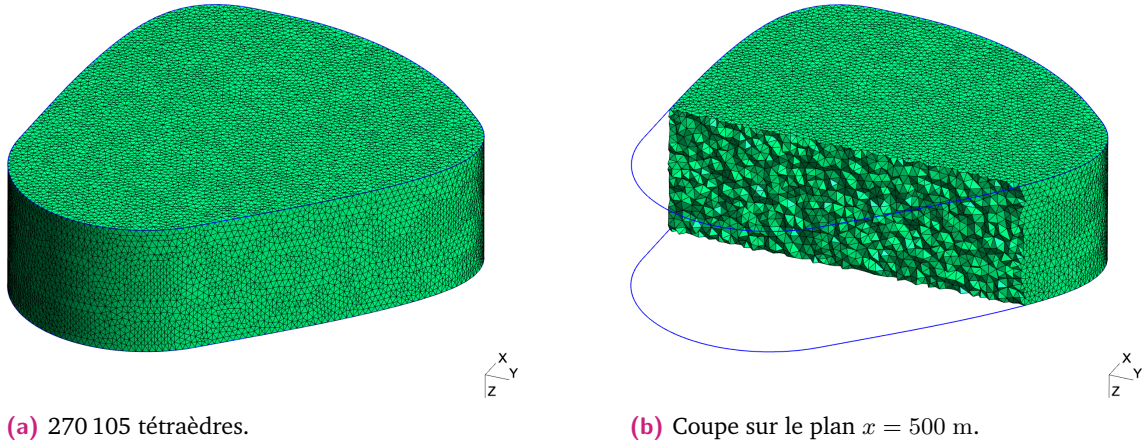
Compte tenu de la fréquence maximale de la source,  $f_{\max} \approx 5$  Hz et de la vitesse minimale du milieu, la longueur d'onde minimale est environ  $\lambda_{\min} = 40$  m. Pour avoir dix points par longueur d'onde minimale, en utilisant une approximation spatiale d'ordre 4, il faut un maillage avec des éléments dont le diamètre de la sphère inscrite est de l'ordre de 20 m (Le site *Sismowine* suggère de faire des arêtes de 10 m). Le maillage obtenu est visible sur la Figure 6.6.

7. Voir section 3.2, p 41.

1 <sup>er</sup> quartile	médiane	3 <sup>e</sup> quartile
22 m	25 m	27 m

Note : Le maillage contient 270 105 éléments.

**Tableau 6.2.:** Quartiles du diamètre des sphères inscrites des éléments du maillage.

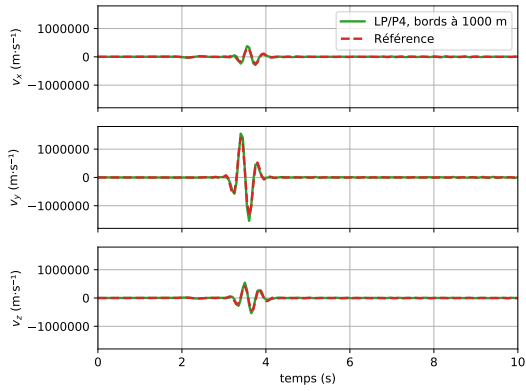


**Figure 6.6.:** Maillage tétraédrique non-structurés utilisés pour le cas test *CAN1*.

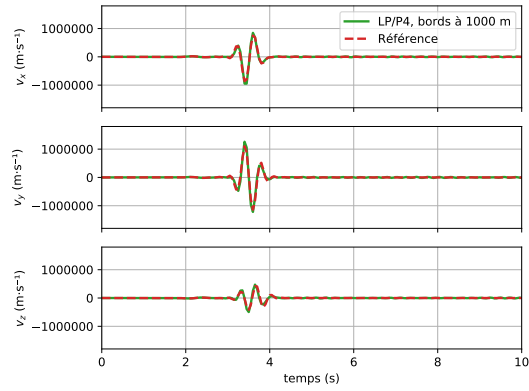
Le pas de temps obtenu grâce à la condition CFL optimale est de  $5.75 \times 10^{-4}$  s, ce qui nous permet de la propager l'onde durant dix secondes en 90 min sur le cluster de l'INRIA en utilisant 128 processeurs.

Sur la Figure 6.7, on observe les traces des vitesses particulières enregistrées en certains capteurs, pour chacune des trois composantes. Dans l'ensemble, on note que le mouvement obtenu est en adéquation avec la solution de référence ; les amplitudes et les temps d'arrivée sont correctement calculés. Ainsi, ce cas test nous permet de vérifier l'implémentation de la source ponctuelle dans le cas d'un double couple, que la géométrie retenue est bonne et que la taille de maille choisie l'est également.

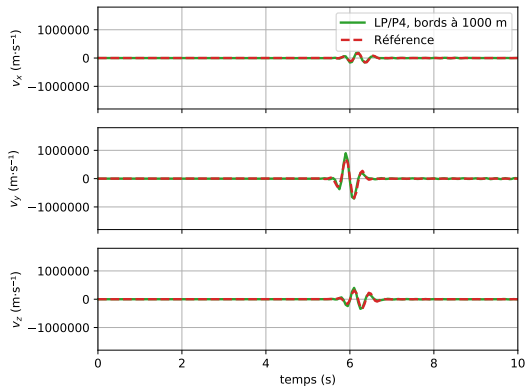
La distance entre les bords absorbants du domaine et les capteurs a été fixée à 1000 m minimum, ce qui représente ici beaucoup d'éléments de maillage. On imagine que du temps de calcul pourrait être économisé en réduisant le domaine. Nous avons construit un second maillage en limitant cette distance à 500 m, ce qui nous permet de n'avoir plus que 123 475 éléments, soit une réduction de 54%. Comme nous pouvons l'observer sur la Figure 6.8, qui compare les solutions obtenues avec les deux maillages, des ondes parasites apparaissent à partir de  $t = 6.5$  s. Il s'agit des réflexions des ondes sur les bords absorbants du domaine, qui ne sont pas parfaits et trop proches des points de visualisation.



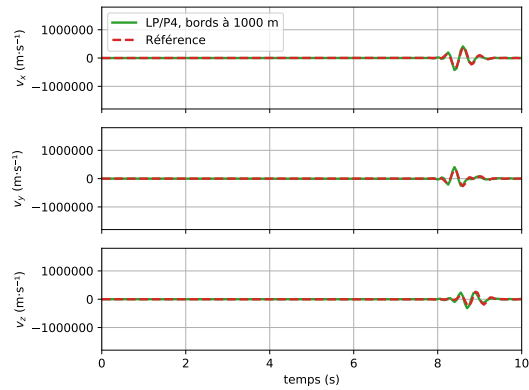
(a) Vitesses en (500, 0, 0).



(b) Vitesses en (354, 354, 0).



(c) Vitesses en (1000, 0, 0).

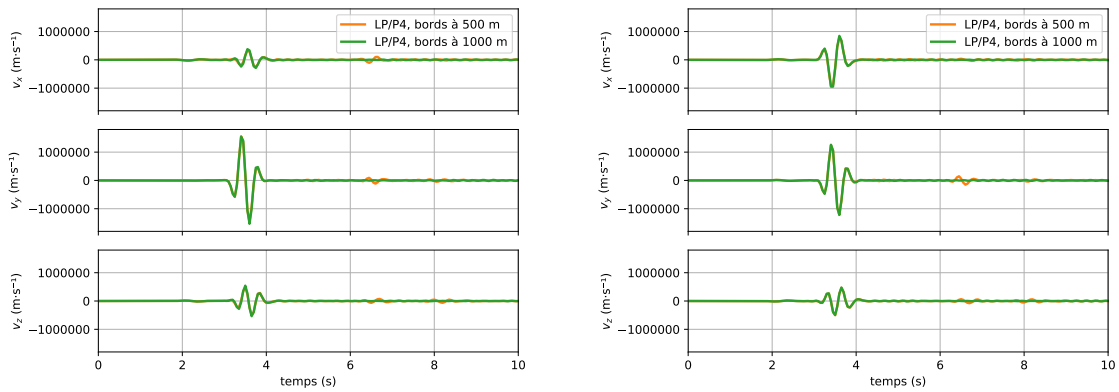


(d) Vitesses en (1062, 1062, 0).

**Figure 6.7.:** Traces enregistrées pour le cas test *CAN1*. En pointillés rouges est représentée la solution de référence, fournie par *E2VP*. En vert la solution que nous obtenons avec des bords absorbants à 1000 m des récepteurs.

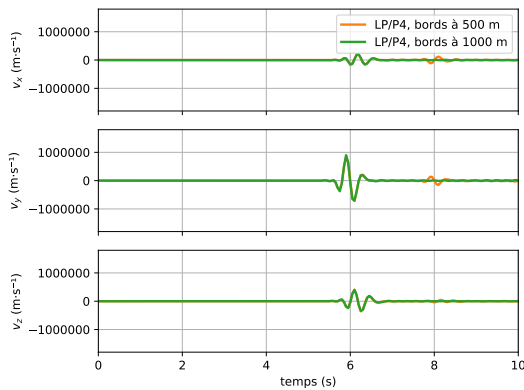
En outre, jusqu'à l'apparition de ces ondes parasites, on constate que les solutions obtenues sont identiques aux points considérés.

**Remarque.** On notera que l'amplitude des vitesses calculée n'est pas très réaliste. Le moment sismique est de l'ordre de  $10^{18}$  Nm et donc la magnitude de moment est de  $M_w = \frac{2}{3} \log_{10}(M_0) - 6.07 = 5.93$ . Fort heureusement pour nous, un tel séisme ne se produit jamais à 25 m de profondeur. . . Il s'agit ici simplement d'un cas test linéaire élastique qui permet de vérifier une méthode numérique. L'amplitude n'a pas vraiment d'importance dans le cas linéaire, puisque les solutions sont identiques à un facteur près. Ce qui n'est plus le cas lorsqu'une loi nonlinéaire est considérée.

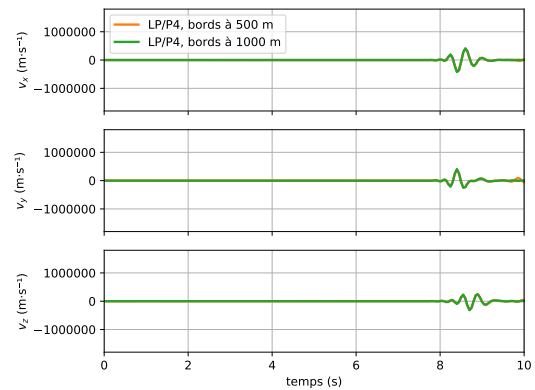


(a) Vitesses en  $(500, 0, 0)$ .

(b) Vitesses en  $(354, 354, 0)$ .



(c) Vitesses en  $(1000, 0, 0)$ .



(d) Vitesses en  $(1062, 1062, 0)$ .

**Figure 6.8.:** Comparisons des traces des vitesses particulaire obtenues dans le cas où le bord du domaine est à 1000 m (vert) et où le bord à est 500 m (orange).

## 6.2 Mode propre d'un cube

### 6.2.1 Comparaison linéaire élastique et élastoplastique

Les cas test 3D précédents nous ont permis de vérifier l'implémentation de la source ainsi que des conditions limites (surfaces libres, absorbantes)<sup>8</sup>. Le cas test présent permettra quant à lui d'observer et commenter les effets nonlinéaires. On considère le cas de la propagation d'un mode propre dans une cube. Le domaine est le cube unitaire  $[0, 1 \text{ m}]^3$ , chacune de ses surfaces est considérée comme une surface libre. DELCOURTE et GLINSKY

8. Voir section 3.2, p 41.

[DG15] ont montré que dans le cas linéaire élastique, une solution exacte en temps et en espace est donnée par le système suivant, en formulation vitesse/contrainte :

$$\begin{cases} v_x(\mathbf{x}, t) &= \cos(\pi x) [\sin(\pi y) - \sin(\pi z)] \cos(\Omega t), \\ v_y(\mathbf{x}, t) &= \cos(\pi y) [\sin(\pi z) - \sin(\pi x)] \cos(\Omega t), \\ v_z(\mathbf{x}, t) &= \cos(\pi z) [\sin(\pi x) - \sin(\pi y)] \cos(\Omega t), \\ \sigma_{xx}(\mathbf{x}, t) &= -A \sin(\pi x) [\sin(\pi y) - \sin(\pi z)] \sin(\Omega t), \\ \sigma_{yy}(\mathbf{x}, t) &= -A \sin(\pi y) [\sin(\pi z) - \sin(\pi x)] \sin(\Omega t), \\ \sigma_{zz}(\mathbf{x}, t) &= -A \sin(\pi z) [\sin(\pi x) - \sin(\pi y)] \sin(\Omega t), \\ \sigma_{xy}(\mathbf{x}, t) &= \sigma_{xz}(\mathbf{x}, t) = \sigma_{yz}(\mathbf{x}, t) = 0, \end{cases} \quad (6.5)$$

avec  $A = \sqrt{2\rho\mu}$  et  $\Omega = \pi\sqrt{\frac{2\mu}{\rho}}$ .

La condition initiale en formulation vitesse/contrainte peut être transformée en formulation vitesse/déformation en utilisant la matrice  $\underline{C}^{-1}$  telle que définie par l'Équation (2.16), p. 18. On notera que la partie isotrope de tenseur des contraintes est nulle pour tout  $(\mathbf{x}, t)$ , donc la partie isotrope des déformations l'est également. De fait, dans ce cas test il y a seulement des ondes de cisaillement qui se propagent, puisque le changement de volume est nul.

Le cas linéaire élastique avec un schéma temporel saute-mouton a été étudié par DELCOURTE et GLINSKY [DG15], notamment à travers une étude de convergence. Nous proposons ici d'observer et d'analyser les effets d'une loi de comportement nonlinéaire en comparant les cas linéaire élastique et nonlinéaire élastoplastique.

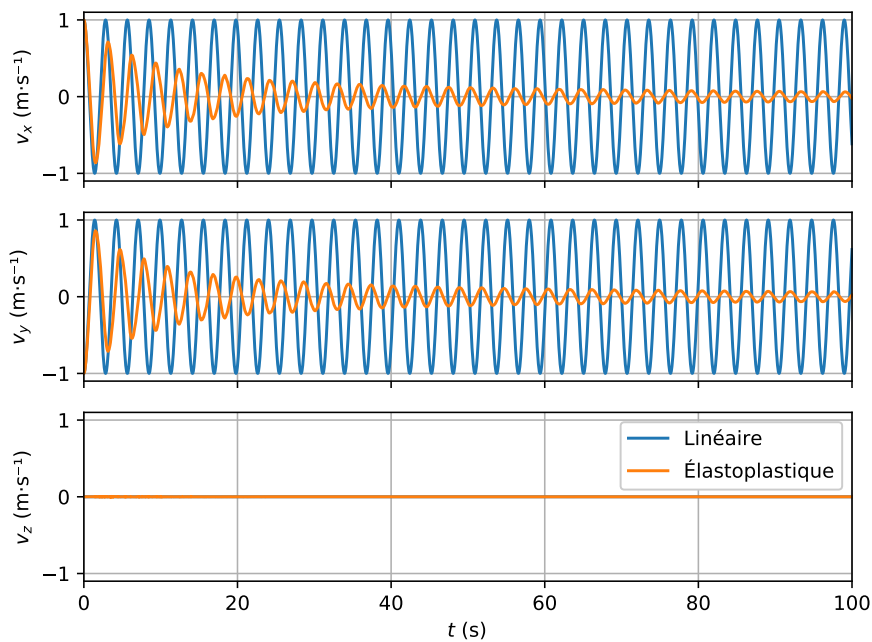
On considère un milieu dont les paramètres mécaniques sont  $\rho = 1 \text{ kg/m}^3$ ,  $\lambda = 0.5 \text{ Pa}$  et  $\mu = 0.25 \text{ Pa}$  et deux cas :

- le cas linéaire élastique, où la loi de Hooke est utilisée ;
- le cas élastoplastique, où le modèle de MPII est utilisé. On considère une courbe  $G/G_{\max}$  hyperbolique, avec  $\gamma_{\text{ref}} = 5$ . La valeur choisie pour ce paramètre n'est pas réaliste, mais adaptée pour être en adéquation avec les valeurs utilisées pour  $\rho$ ,  $\lambda$  et  $\mu$ .

Dans les deux cas, la condition initiale est choisie grâce à l'équation (6.5) évaluée à  $t = 0 \text{ s}$ . Ce système n'est pas une solution pour tout  $(x, t)$  dans le cas élastoplastique ; en particulier il n'est pas possible de connaître la solution exacte à  $t = \frac{\Delta t}{2}$  et donc d'utiliser un schéma temporel de type Saute-Mouton. C'est pourquoi nous avons choisi ici la méthode de Runge-Kutta à faible stockage d'ordre quatre, notée LSRK4-DG-P4. Le maillage utilisé est structuré et fin. Nous utilisons des tétraèdres dont l'arête mesure  $0.1 \text{ m}$  ce qui implique que les diamètres des sphères inscrites sont d'environ  $0.05 \text{ m}$ . En supposant une forte nonlinéarité

et une chute de la vitesse de propagation  $v_s$  de 50%, alors, en utilisant une interpolation d'ordre quatre, la simulation est précise jusqu'à  $f_{\max} = (0.50 \times v_s)/(2 \times 0.05) = 2.5$  Hz. Les calculs sont réalisés sur le cluster de l'INRIA, en utilisant 20 processeurs.

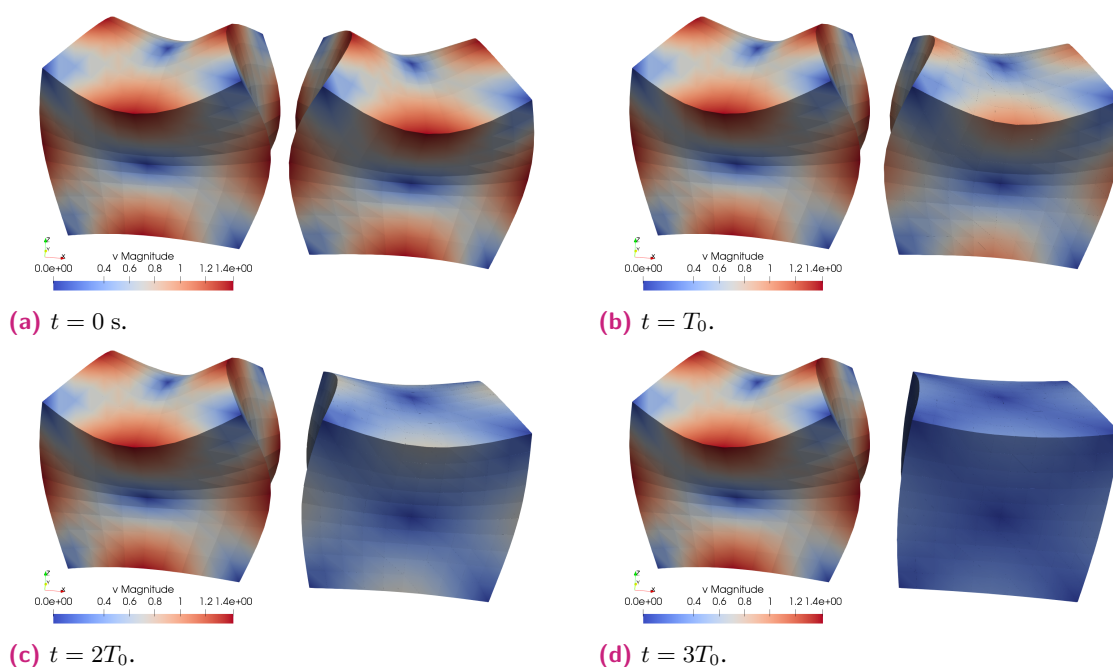
La Figure 6.9 décrit l'évolution temporelle des composantes de la vitesse particulière obtenues au point (1.0, 1.0, 0.5). On observe une diminution de la vitesse de propagation, ainsi qu'une diminution de l'amplitude dans le cas élastoplastique. La vitesse de propagation est diminuée parce que le matériau s'affaiblit, on observe donc un déphasage par rapport à la solution du cas linéaire. L'amplitude de la vitesse est quant à elle diminuée par l'amortissement hystérétique. Dans un premier temps, l'amplitude de vitesse est grande et donc la déformation également, ce qui produit de grandes boucles d'hystérésis et par conséquent un amortissement important. Au fur et à mesure que l'amortissement fait diminuer les amplitudes de vitesse et de déformation, la taille des boucles d'hystérésis diminue également et de fait, l'amortissement aussi. C'est pourquoi, à partir d'un certain temps, on ne distingue plus les « effets nonlinéaires ». Il n'y a plus d'amortissement de la vitesse particulière et la vitesse de propagation ne change plus. Dans ce cas là, c'est aux alentours de 70 s. Il y a un retour dans la zone d'élasticité du matériau.



**Figure 6.9.:** Traces des composantes de la vitesse particulière au point (1.0, 1.0, 0.5) dans les cas linéaire élastique et élastoplastique (avec  $\gamma_{\text{ref}} = 5$ ).

Les Figures 6.10 montrent le champ de vitesse à quatre instants dans les deux cas. Sur chaque sous-figure, est présentée à gauche la solution linéaire et à droite la solution élastoplastique. Le même type de visualisation que précédemment est utilisé, à savoir

que la couleur correspond à la norme du vecteur vitesse  $v$ . L'échelle de couleurs varie linéairement du bleu ( $\|v\| = 0$ ) au rouge ( $\|v\| = \sqrt{2}$  m/s). Et, à l'instant  $t$ , chaque point de visualisation est déplacé de sa position initiale  $\mathbf{x}_0$  en  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \alpha\mathbf{v}(t)$  où  $\alpha$  est une constante choisie pour une meilleure visibilité. Les différents instants de visualisation sont des multiples de la période; ainsi comme on peut le voir dans le cas linéaire, chacune des figures est identique. En revanche, dans le cas élastoplastique, on observe les effets d'amortissement et de déphasage.

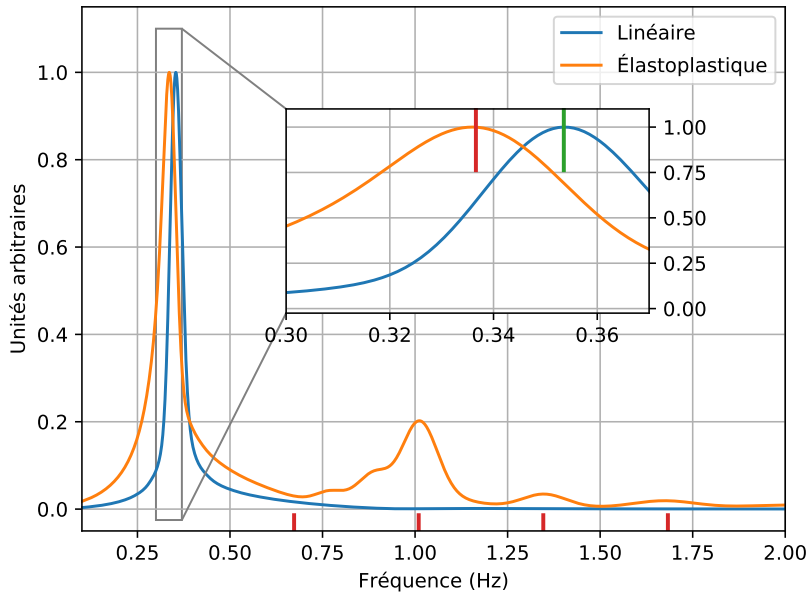


**Figure 6.10.:** Évolution du champs de vitesse dans le cas du mode propre. Sur chaque figure, on compare le cas d'un milieu linéaire élastique (gauche) au cas d'un milieu nonlinéaire élastoplastique (droite). Les champs de vitesse sont montrés sur quatre périodes ( $T_0 = \sqrt{2}$  s), ce qui permet d'avoir, dans le cas linéaire, le même champs. Chaque point de visualisation est déplacé en  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \alpha\mathbf{v}(t)$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Enfin, le spectre de Fourier de la composante  $v_x$  de la vitesse au point  $(1.0, 0.7, 0.5)$  est représenté sur la Figure 6.11 pour les deux cas, linéaire élastique et nonlinéaire élastoplastique. Les deux spectres ont été normalisés et lissés par la méthode proposée par KONNO et OHMACHI [KO98], classique en sismologie.

Comme nous l'attendions, la composante  $x$  de la vitesse dans le milieu linéaire élastique est composée d'une seule fréquence. On retrouve bien la fréquence théorique attendue, à savoir  $f_0^{\text{lin}} = \frac{\Omega}{2\pi} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\mu}{\rho}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$  Hz  $\approx 0.3535$  Hz. Concernant le spectre de la composante  $x$  de la vitesse dans le milieu élastoplastique, nous mesurons une baisse de fréquence de l'ordre de 4.79% pour atteindre  $f_0^{\text{plas}} \approx 0.3366$  Hz. Nous notons l'apparition d'harmoniques. Compte tenu du fait que nous avons utilisé une loi nonlinéaire présentant un phénomène





**Figure 6.11.:** Spectre de Fourier de la composante  $x$  de la vitesse au point  $(1.0, 0.7, 0.5)$ . La ligne verticale verte représente la fréquence propre théorique  $f_0^{\text{lin}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$  Hz du cube dans une configuration élastique. La première ligne verticale rouge représente la fréquence propre  $f_0^{\text{plas}}$  mesurée du cube dans une configuration élastoplastique. Les lignes rouges suivantes sont les harmoniques.

d'hystérésis, nous nous attendons à voir la présence d'harmoniques impaires [VJS00]. Cela a également été mis expérimentalement en évidence par REMILLIEUX et al. [Rem+17] par la propagation d'un pulse dans un milieu unidimensionnel. Dans notre cas, les fréquences  $3f_0^{\text{plas}}$  et  $5f_0^{\text{plas}}$  sont clairement visibles. On observe également la présence d'énergie autour de  $4f_0^{\text{plas}}$  ainsi qu'entre  $2f_0^{\text{plas}}$  et  $3f_0^{\text{plas}}$  qui pourrait être liée à l'excitation d'autres types de modes (comme une torsion). La présence d'énergie à cette fréquence pourrait être due à un effet de la nonlinéarité dans un milieu tridimensionnel.

## 6.2.2 Influence de l'amplitude sur le temps de calcul, en fonction de la méthode d'échantillonnage de la courbe de réduction du module de cisaillement

Dans cette section, nous proposons d'étudier numériquement le temps de calcul d'une simulation élastoplastique en fonction de l'amplitude du mouvement. Il s'agit de vérifier l'hypothèse formulée dans la sous-section 2.2.4, à savoir que le coût de la simulation est

proportionnel au nombre de surfaces activées et donc directement lié à la déformation maximale dans le modèle MPII.

Pour appuyer le propos, l'exemple du mode propre est utilisé, avec les mêmes paramètres de milieu et en particulier la même courbe de dégradation du module de cisaillement que précédemment. Nous utilisons également la même méthode numérique (schéma spatial et temporel) et le même maillage. Nous comparons les temps de calcul obtenus lorsque la méthode d'échantillonnage logarithmique ou automatique est utilisée<sup>9</sup>.

On pourra remarquer que dans le cas linéaire, chaque équation du système (6.5) décrivant le mode propre peut être pondérée par un réel  $\alpha$ ; il est ainsi possible d'obtenir une amplitude de vitesse arbitraire. Dans le cas où la loi de Hooke est utilisée, nous supposons que pour n'importe quel  $\alpha \in \mathbb{R}^*$ , la résolution numérique de ce système, jusqu'à un temps  $T_{\text{fin}}$  fixé, prend toujours le même temps CPU. Nous proposons alors de faire varier  $\alpha$  en considérant le modèle MPII<sup>10</sup> et l'implémentation que nous en avons faite et de comparer au cas linéaire. Tous les autres paramètres restent les mêmes. Selon la valeur de  $\alpha$ , plus ou moins de surfaces de rupture seront activées et donc le temps de calcul sera plus ou moins impacté. Le cas étudié précédemment correspond à  $\alpha = 1$ . Nous faisons varier  $\alpha$  de  $10^{-5}$  à 10. Plus la valeur de  $\alpha$  est grande plus la déformation — et par conséquent la nonlinéarité du milieu — est importante.

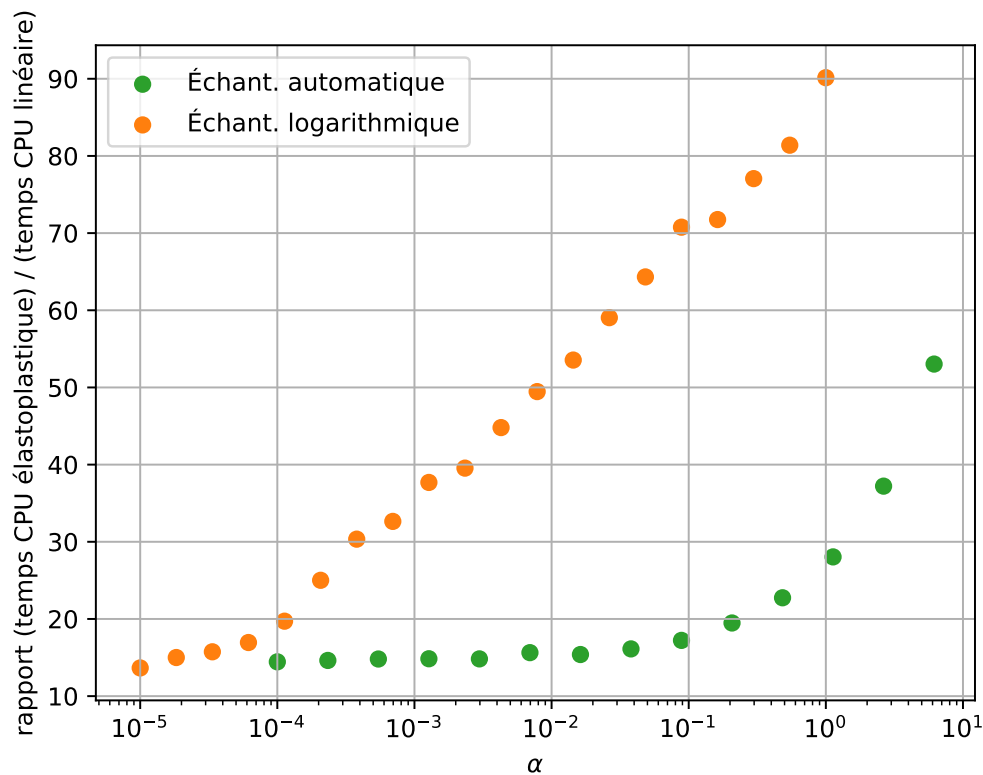
Pour différentes valeurs de  $\alpha$ , nous calculons le rapport entre le temps de calcul pour une simulation élastoplastique et une simulation linéaire. La Figure 6.12 représente ce rapport en fonction de  $\alpha$ . On constate que l'augmentation du temps de calcul dépend de la valeur  $\alpha$ . On remarquera que la tendance décrite est la même que sur la Figure 2.6 p. 29. C'est-à-dire que nous retrouvons ici numériquement que le coût du modèle MPII est linéairement dépendant du nombre de surfaces actives. Lorsque l'échantillonnage logarithmique est utilisé, les surfaces du modèle MPII sont équi-spacées en échelle logarithmique. En faisant varier  $\alpha$  linéairement sur une échelle logarithmique, il est donc logique que nous retrouvions un coût de calcul proportionnel à  $\alpha$ . Lorsque l'échantillonnage automatique est utilisé, ces surfaces ne sont plus équi-spacées en échelle logarithmique, mais *placées au mieux*. Ainsi, pour une déformation donnée (ici un  $\alpha$ ), moins de surfaces sont actives, le temps de calcul est donc réduit.

**Remarque** (Temps de calcul). *Nous venons de voir que le temps de calcul dépend du nombre de surfaces actives dans le modèle MPII. Dans le cas du mode propre, le nombre de surfaces actives est maximal à l'instant initial puis, à cause de l'amortissement hystérique, diminue. De fait, chaque pas de temps de calcul n'est pas proportionnel et les résultats obtenus —*

---

9. Voir sous-section 2.2.4, p. 26.

10. Voir section 2.2.3, p. 20.



**Figure 6.12.:** Multiplication du temps de calcul par rapport au modèle linéaire en fonction de l'amplitude de la vitesse  $\alpha$ .  $N = 50$  surfaces sont considérées. Les calculs ont été réalisés sur une même machine, avec une machine équipée de quatre processeurs Intel Core I5, cadencé à 3.3 GHz. Les simulations ont été calculées jusqu'à  $t = 2$  s.

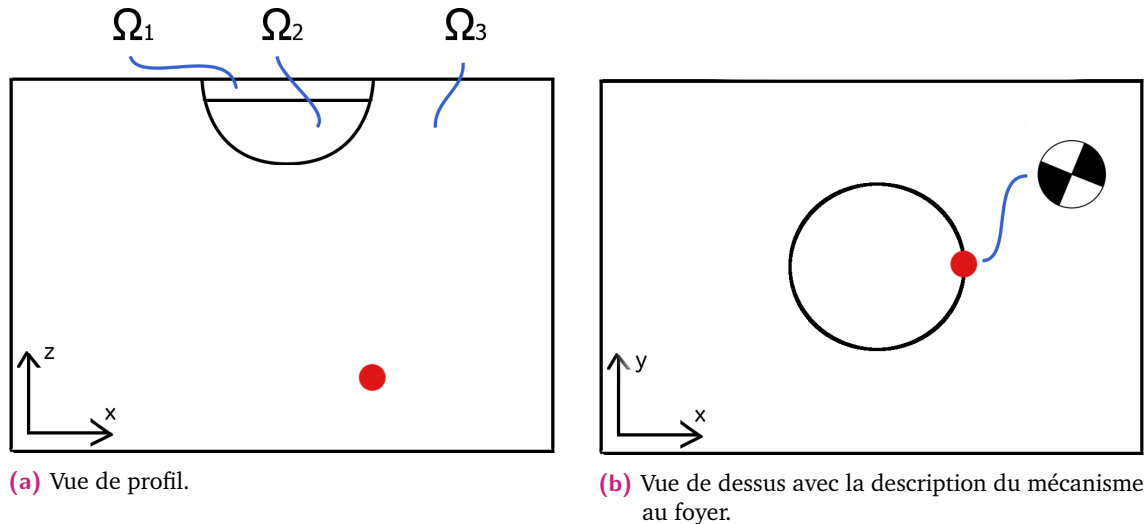
*notamment pour les multiplication de temps de calcul par rapport au cas linéaire — sont donc dépendants de l'instant final choisi. Les calculs ont été réalisés jusqu'à  $t = 2$  s.*

## 6.3 Analyse des effets nonlinéaires couplés aux effets 3D d'un bassin hémisphérique hétérogène

### 6.3.1 Description du cas test

L'objectif de cette section est d'analyser les effets nonlinéaires obtenus dans un bassin tridimensionnel aux propriétés réalistes. Nous considérons le domaine  $\Omega_0 = [-2500 \text{ m}, 2500 \text{ m}]^2 \times [0 \text{ m}, 3000 \text{ m}]$ . Dans ce domaine, une demi sphère de centre  $(0, 0, 0)$  et de rayon 500 m est

incluse, matérialisant ainsi le bassin. Les cents premiers mètres de cette demi sphère définissent le milieu  $\Omega_1$ , le reste de celle-ci le milieu  $\Omega_2$ . Enfin, le rocher est défini comme étant  $\Omega_3 = \Omega_0 \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)$ . Les propriétés des milieux sont données dans le Tableau 6.3. Un schéma de la géométrie est visible sur la Figure 6.13.



**Figure 6.13.:** Schéma de la géométrie du bassin sédimentaire 3D considéré. Le point rouge correspond à la localisation de la source. Le schéma n'est pas à l'échelle.

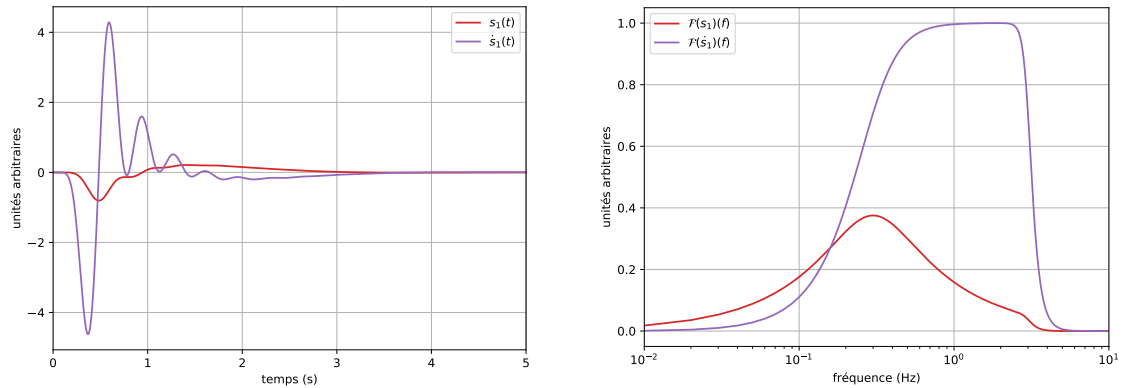
Milieu	Densité (kg/m <sup>3</sup> )	$v_s$ (m/s)	$v_p$ (m/s)	Épaisseur maximale (m)
$\Omega_1$	2000	200	600	100
$\Omega_2$	2100	400	800	400
$\Omega_3$	2600	2600	4500	3000

**Tableau 6.3.:** Propriétés des milieux considérés.

Nous considérons deux cas possibles :

1. Les milieux  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  et  $\Omega_3$  ont tous un comportement linéaire élastique modélisé par la loi de Hooke. Ce cas est nommé « *cas linéaire élastique* ».
2. Le milieu  $\Omega_1$  a un comportement nonlinéaire élastoplastique, modélisé par le modèle MPII et construit suivant une courbe de dégradation hyperbolique avec une déformation de référence  $\gamma_r = 10^{-4}$ . Les milieux  $\Omega_2$  et  $\Omega_3$  conservent un comportement linéaire élastique modélisé par la loi de Hooke. Ce cas est nommé « *cas nonlinéaire élastoplastique* ».

Nous supposons une source ponctuelle<sup>11</sup>, de type double couple, de coordonnées (500, 0, 2000) et ayant le mécanisme suivant :  $M_0 = 3 \times 10^{14}$  Nm,  $\phi = 22.5^\circ$ ,  $\delta = 90^\circ$  et  $\lambda = 0^\circ$  (le même que pour le cas test de la sous-section 6.1.2). Le mécanisme au foyer est représenté graphiquement sur la Figure 6.13. Le moment sismique  $M_0$  est pondéré en fonction du temps par la fonction  $s_1(t)$  dont la trace et le spectre de Fourier sont présentés sur la Figure 6.14a et sur la Figure 6.14b. Sont également présentés la trace et le spectre de Fourier de la dérivée temporelle de  $s_1(t)$ , puisque c'est ce qui est numériquement utilisé pour initier le mouvement.



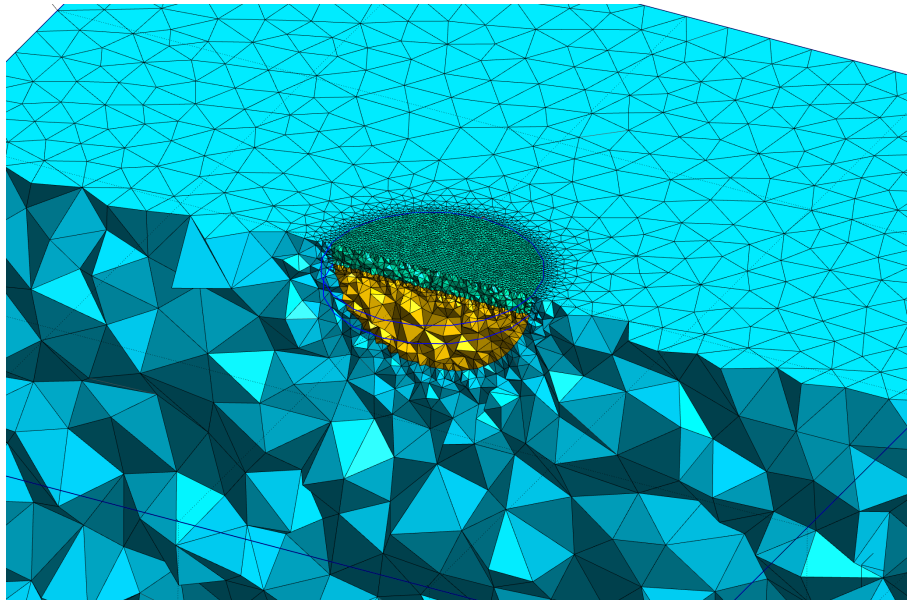
(a) Évolution temporelle de la source  $s_1(t)$  et de sa dérivée temporelle  $\dot{s}_1(t)$ . (b) Spectre de Fourier de  $s_1$  et  $\dot{s}_1$ , fréquence maximale 4.39 Hz.

**Figure 6.14.:** Description temps/fréquence de la source  $s_1(t)$ .

La Figure 6.15 offre une coupe verticale du maillage utilisé. Le maillage est généré avec l'outil GMSH<sup>12</sup> et contient 87 196 tétraèdres, soit 3 051 860 degrés de liberté par variable puisqu'une interpolation de degré quatre est utilisée. La taille des éléments a été choisie de sorte à propager une onde avec la même précision jusqu'à une fréquence maximale de 6 Hz, selon la procédure détaillée dans la sous-section 3.5.1. Nous savons que la fréquence maximale du signal peut augmenter à cause de la nonlinéarité, elle est donc choisie supérieure à la fréquence maximale de la source. De même, compte tenu de la nonlinéarité, la vitesse de propagation de la couche superficielle va être réduite au cours de la simulation. Nous supposons que la déformation maximale engendrera une chute de 50% de la vitesse au maximum. La taille de maille dans la couche superficielle doit donc être de l'ordre de  $h = (v_s \times 0.5) / (2f_{\max}) = 100/12 \approx 9.33$  m. La description des tailles caractéristiques du maillage est résumée dans le Tableau 6.4. La Figure 6.16 présente les histogrammes des tailles caractéristiques des éléments du maillage, groupés par milieu. La solution est calculée jusqu'à  $t = 60$  s avec le modèle LF-DG-P4. Le pas de temps est égal à  $dt = 8.475 \times 10^{-5}$  s.

11. Voir section 2.4, p. 31.

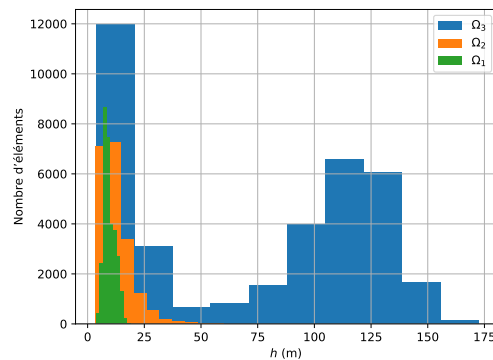
12. <http://gmsh.info/>



**Figure 6.15.:** Coupe selon l'axe  $O_x$  du maillage en  $(0, 0, 0)$ . En bleu, le milieu  $\Omega_3$ , en jaune le milieu  $\Omega_2$  et en vert le milieu  $\Omega_1$ .

	1 <sup>er</sup> quartile	médiane	3 <sup>e</sup> quartile
$\Omega_1$	7 m	9 m	11 m
$\Omega_2$	8 m	10 m	15 m
$\Omega_3$	15 m	90 m	120 m

Note : Le maillage contient 87 196 éléments.



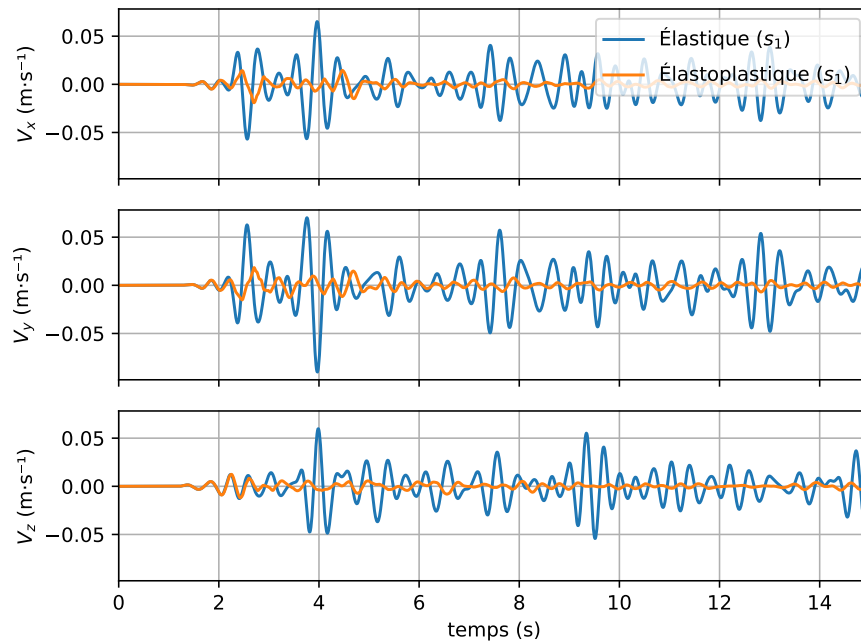
**Figure 6.16.:** Histogrammes du diamètre des sphères inscrites des éléments du maillage, par milieu.

**Tableau 6.4.:** Quartiles du diamètre des sphères inscrites des éléments du maillage.

### 6.3.2 Analyse des résultats

La Figure 6.17 présente les traces temporelles des trois composantes de la vitesse au centre de bassin en  $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ , selon que le comportement du milieu  $\Omega_1$  soit considéré linéaire élastique ou nonlinéaire élastoplastique. On observe dans ce dernier cas que l'atténuation hystérétique est très importante sur les trois composantes. On notera également un déphasage entre les deux solutions sur les premières arrivées, ce qui traduit une diminution momentanée de vitesse de propagation du milieu. Sur la Figure 6.18 on

observe la vitesse mesurée à la base de la demi-sphère en  $(x, y, z) = (0, 0, -500 \text{ m})$ . On observe que la loi de comportement de la couche superficielle n'a que peu d'impact sur les enregistrements au fond du bassin.



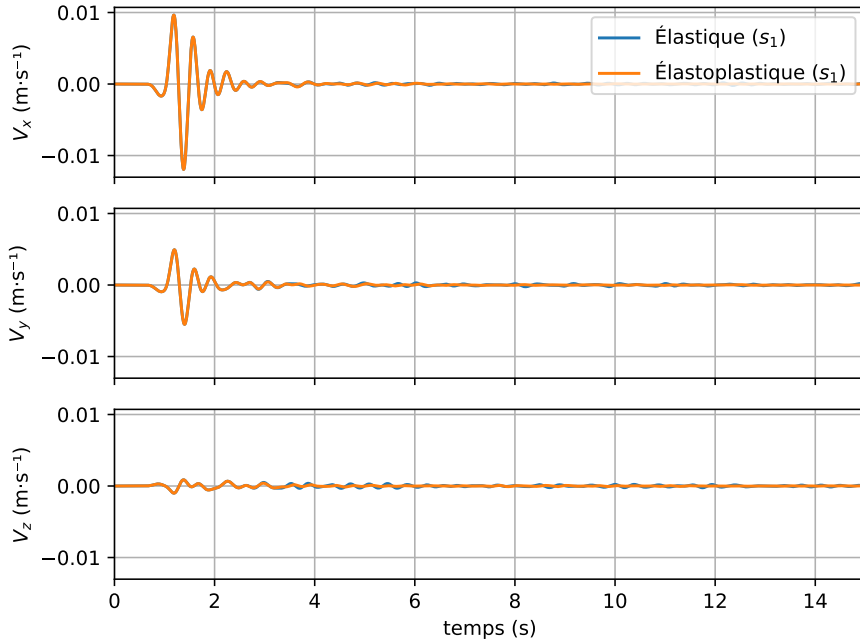
**Figure 6.17.:** Vitesses particulières au centre du domaine  $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ . Zoom sur les quinze premières secondes.

Étant donné la forte impédance entre le bassin  $\Omega_1 \cup \Omega_2$  et le rocher  $\Omega_3$ , les ondes sismiques y restent piégées et la durée du signal en surface est largement supérieure à la durée de la source. On peut le constater clairement sur la Figure 6.19a et la Figure 6.19b, qui représentent les traces temporelles de la composante  $v_x$  de la vitesse enregistrée sur l'axe horizontal  $Ox$  dans le cas linéaire élastique et élastoplastique. Les ondes sismiques restent dans le bassin, c'est-à-dire  $X = [-500 \text{ m}, 500 \text{ m}]$ . On retrouvera en Appendice A, les traces des autres composantes de la vitesse sur lesquelles les mêmes observations peuvent être faites.

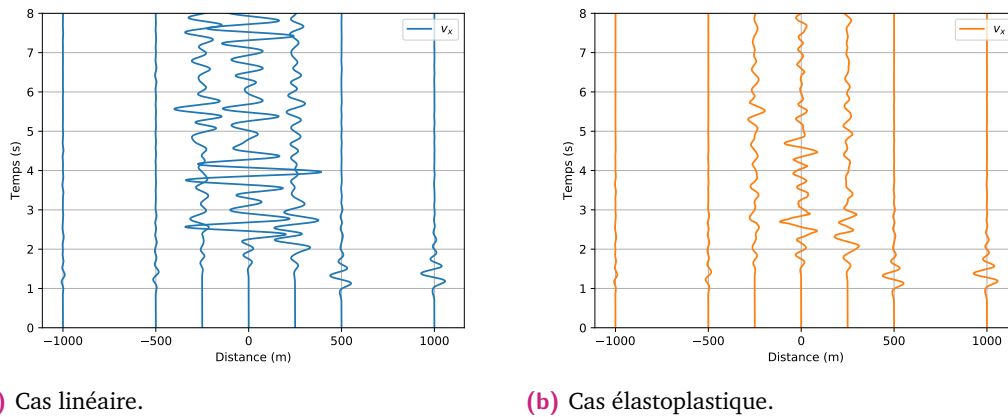
Le  $PGV$ <sup>13</sup> est de  $0.090 \text{ m/s}$  dans le cas élastique et  $0.020 \text{ m/s}$  dans le cas élastoplastique. La vitesse de propagation des ondes de cisaillement dans les trente premiers mètres du modèle est égale à  $v_{s30} = 200 \text{ m/s}$ . De fait, en utilisant le proxy de déformation maximale  $PGV/v_{s30}$  [Rat+01 ; Cha+15 ; Gué16], nous nous attendons à avoir une déformation maximale de  $0.045\%$  et  $0.010\%$  de le cas élastique et élastoplastique, respectivement.

Nous pouvons observer sur la Figure 6.20 la déformation maximale au cours du temps le long de la colonne verticale de coordonnées  $(0, 0, z)$ . Les lignes en pointillés horizontales

13. *Peak Ground Velocity*, la vitesse maximale en surface.



**Figure 6.18.:** Vitesses particulières au fond du bassin en  $(0, 0, -500 \text{ m})$ . Zoom sur les quinze premières secondes.



**(a)** Cas linéaire.

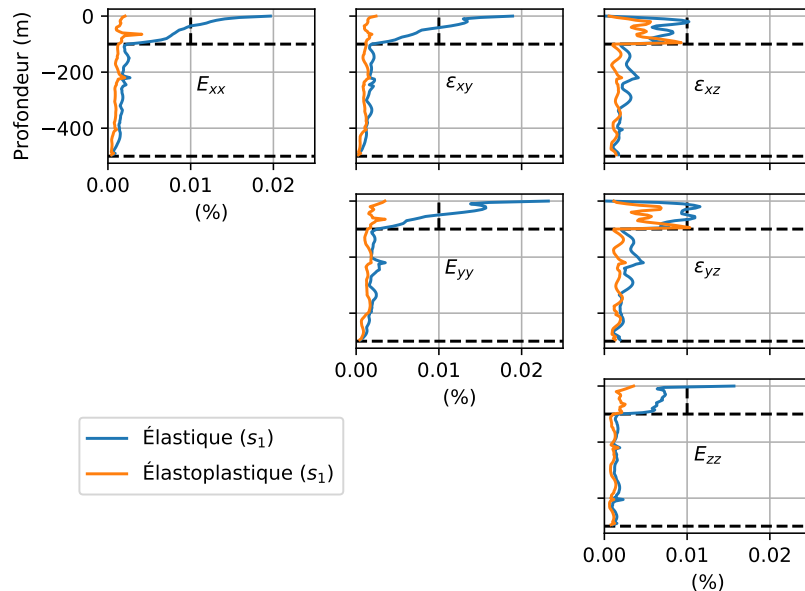
**(b)** Cas élastoplastique.

**Figure 6.19.:** Composante  $x$  de la vitesse particulière en surface sur l'axe  $Ox$  du domaine. Zoom sur les quinze premières secondes.

représentent les interfaces des milieux, les lignes en pointillés verticales représentent le paramètre  $\gamma_{\text{ref}}$  du milieu. Dans le cas élastoplastique, lorsque la déformation atteint  $\gamma_{\text{ref}}$ , la vitesse de propagation des ondes de cisaillement est divisée par deux par rapport au cas linéaire élastique. On constate que la déformation maximale dans le cas élastoplastique a atteint cette valeur. On note également que la déformation maximale est localisée au niveau de l'interface entre les deux premières couches les plus superficielles, comme l'ont également observé GELIS et BONILLA [GB14]. Dans le cas élastique la déformation maximale



ne semble pas être concentrée autour des interfaces. On constate que le proxy  $PGV/v_{s30}$ , sur notre cas particulier, mène à une surestimation de la déformation maximale dans le cas linéaire élastique puisque la déformation maximale enregistrée est de 0.023%. En revanche, dans le cas élastoplastique, nous retrouvons exactement la même valeur que celle donnée par le proxy, à savoir 0.010%.

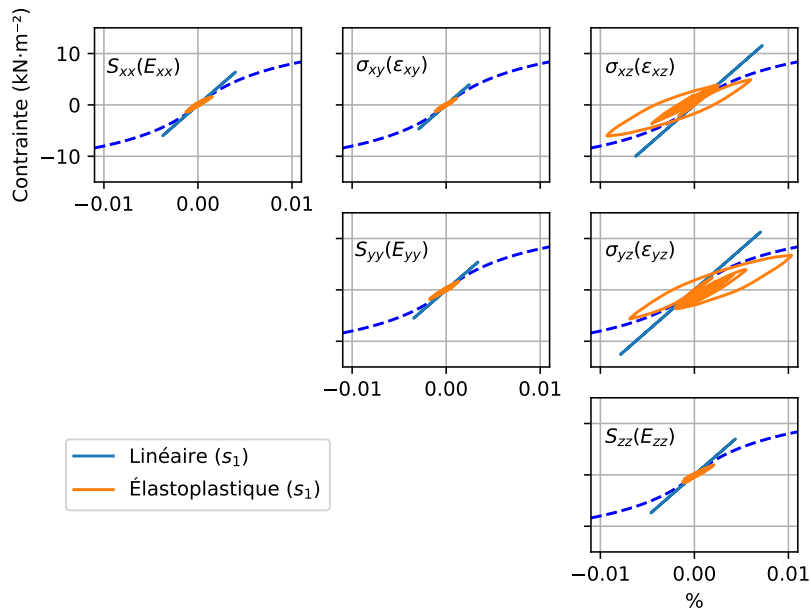


**Figure 6.20.:** Déformation déviatorique maximale, en fonction de la profondeur  $(0, 0, z)$ . Les lignes horizontales représentent les interfaces entre les milieux. La ligne verticale représente l'axe  $\gamma = \gamma_{ref}$ .

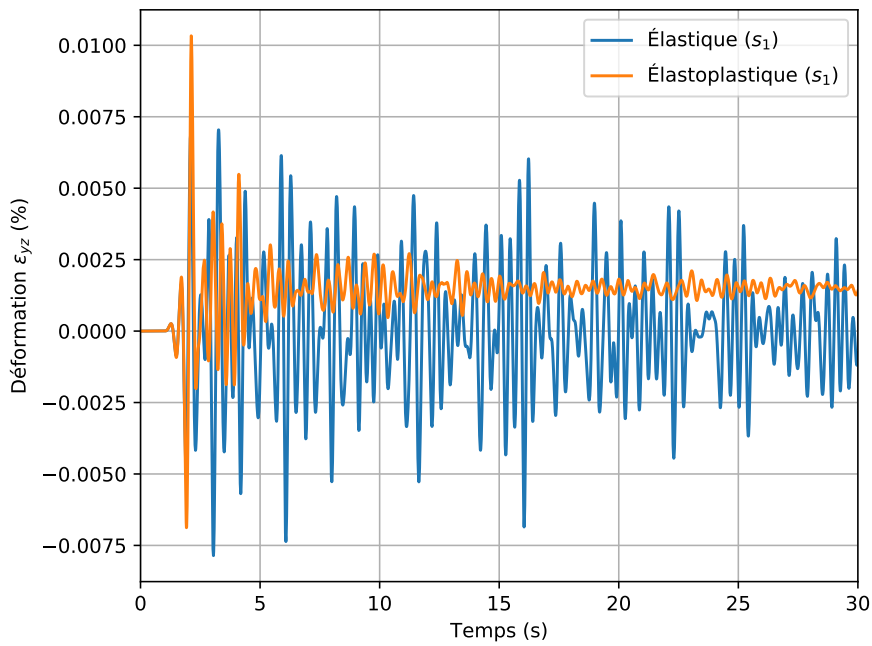
Les courbes contraintes/déformations sont présentées sur la Figure 6.21. Les contraintes et déformations sont mesurées à la position  $(0, 0, -95 \text{ m})$ . Il s'agit de la position correspondant à la plus grande déformation élastoplastique de la colonne. On observe que le mouvement imposé, ayant une forte amplitude mais de courte durée ( $\approx 1 \text{ s}$ ), a généré une boucle d'hystérésis importante puis que très vite le système est revenu à une dynamique quasi-linéaire.

On peut également observer sur la Figure 6.22 l'histoire temporelle de la composante  $yz$  de la déformation enregistrée au point  $(0, 0, -95 \text{ m})$ . On observe dans le cas élastoplastique une grande valeur de déformation entre 2.5 s et 5 s. Cela confirme que le milieu a subi une forte déformation qui a entraîné une déformation permanente du milieu, qui oscille ensuite faiblement autour de 0.001%, puis qu'il y a eu retour à un régime quasi-linéaire.

Nous proposons maintenant d'examiner l'impact du comportement élastoplastique sur les rapports spectraux (ou fonction de transfert, dans le cas linéaire) concernant ce cas test



**Figure 6.21.:** Contrainte déviatorique en fonction de la déformation déviatorique au point  $(0, 0, -95 \text{ m})$ . La courbe en pointillés bleus représente la courbe de premier chargement, utilisée pour calibrer de le modèle élastoplastique.



**Figure 6.22.:** Évolution temporelle de la composante  $yz$  de la déformation enregistrée au point  $(0, 0, -95 \text{ m})$ . Zoom sur les trente premières secondes.

particulier. Pour cela, nous calculons le rapport entre les spectres de l'évolution temporelle de la vitesse particulière enregistrée aux points  $(0, 0, 0)$  et  $(0, 0, -500 \text{ m})$  — à la surface et à l'interface bassin/rocher — dans les cas linéaire élastique et élastoplastique. Les spectres sont lissés suivant la méthode de KONNO et OHMACHI [KO98] avant d'en calculer le rapport. C'est ce que l'on appelle BSR pour *Borehole Spectral Ratio* et est considéré comme une estimation précise de l'amplification d'un site [SO87]. Ces rapports spectraux sont visibles sur la Figure 6.23a pour la composante  $x$  et sur la Figure 6.23b pour la composante  $y$ . La composante  $z$  est donnée en annexes. Ces rapports spectraux permettent de voir quelles sont les fréquences amplifiées par le milieu et de quelle valeur.

Intéressons nous, dans un premier temps au rapport spectral de la solution linéaire élastique. Le premier et le second pics d'amplification correspondent à la fréquence de résonance du bassin total —  $\Omega_1 \cup \Omega_2$  — et de la couche superficielle —  $\Omega_1$  — respectivement. Dans le cas d'un modèle tabulaire à une seule couche, la fréquence de résonance fondamentale de celle-ci est obtenue par la formule suivante, classique en sismologie :

$$f = \frac{v_s}{4H}, \quad (6.6)$$

où  $v_s$  est la vitesse de propagation des ondes de cisaillement et  $H$  l'épaisseur de la couche superficielle. Cette formule, appliquée dans notre cas donne  $f = \frac{200}{4 \times 100} = 0.50 \text{ Hz}$ . Cette fréquence est marquée sur cette Figure 6.23 par une ligne verticale rouge, en trait plein. On constate une sous-estimation sans doute due au fait que la couche  $\Omega_1$  n'est pas exactement tabulaire et que le mouvement injecté n'est pas une onde plane se propageant verticalement.

Cette formule a ensuite été adaptée par MEZA-FAJARDO et al. [Mez+16] aux bassins semi-elliptiques tridimensionnels homogènes. Elle devient alors :

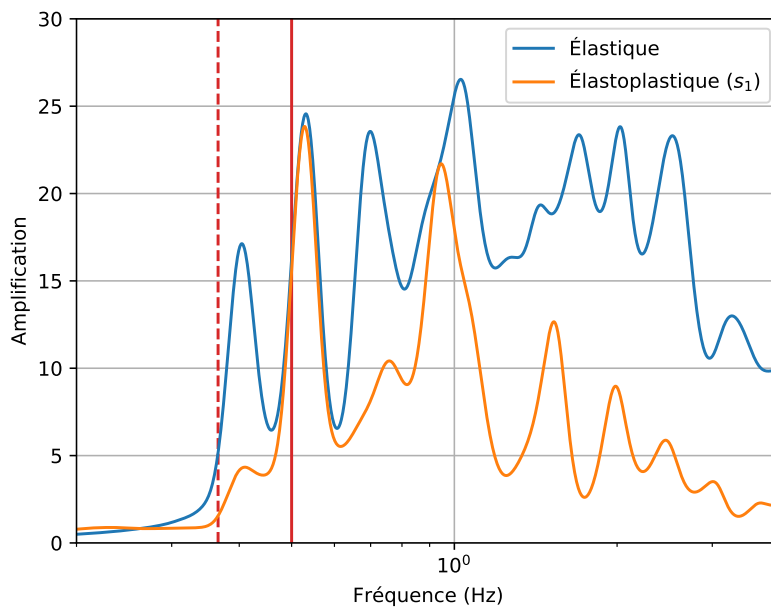
$$f = \frac{v_s}{4H} \times \left(1 + \tilde{\kappa}_h^{-1.24}\right), \quad (6.7)$$

où  $\tilde{\kappa}_h$  est le *rapport de forme équivalente*<sup>14</sup>, égale à  $\tilde{\kappa}_h = 0.866$  dans le cas d'une demi-sphère. Dans notre cas, compte tenu de l'hétérogénéité du milieu, nous pouvons calculer une vitesse de propagation *équivalente* de la demi-sphère qui est égale à :

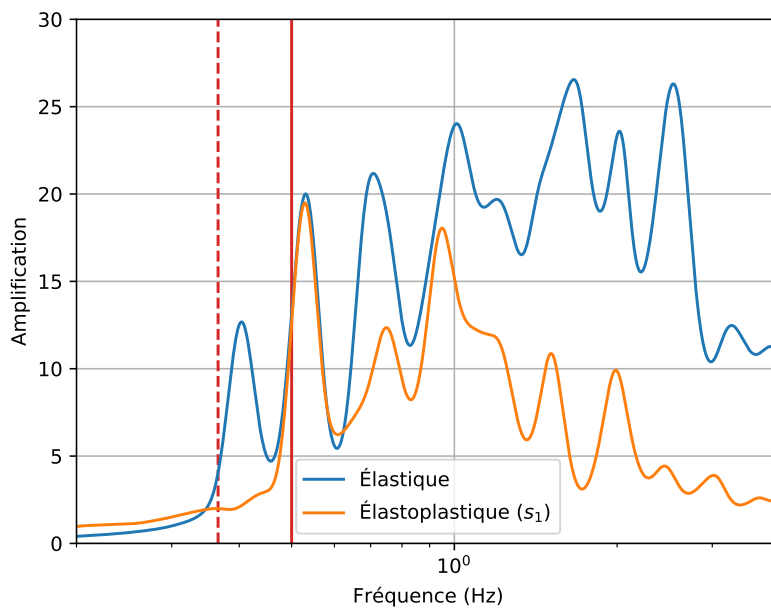
$$v_s^{eq} = \frac{\sum_i h_i}{\sum_i h_i / v_{s_i}} = 500 / \left(\frac{100}{200} + \frac{400}{400}\right) \approx 333 \text{ m/s}. \quad (6.8)$$

L'application de la formule (6.7) nous donne alors une fréquence de résonance de  $f \approx 0.36 \text{ Hz}$ , valeur représentée par la ligne verticale rouge en pointillés. On observe toutefois

14. « *equivalent shape ratio* », défini par [JK88].



(a) Composante  $x$  de la vitesse particulière.



(b) Composante  $y$  de la vitesse particulière.

**Figure 6.23.:** Rapports spectraux de l'évolution de la vitesse particulière enregistrée en  $(0, 0, 0)$  et  $(0, 0, -500 \text{ m})$ . La ligne en pointillés rouges correspond à la fréquence de résonance théorique d'un bassin hémisphérique. La ligne en trait plein rouge correspond à la fréquence de résonance linéaire théorique de la couche superficielle.

une légère sous-estimation, qui peut être due au fait que le milieu est hétérogène et que le mouvement injecté ne provient pas d'une onde plane verticale.

Comparons maintenant les rapports spectraux obtenus dans le cas linéaire élastique et élastoplastique. Dans le Tableau 6.5 sont reportées les fréquences de résonance mesurées pour le bassin total —  $f_0$  — et la première couche —  $f_1$ , choisies comme étant les maxima locaux les plus proches des fréquences théoriques.

	$f_0^x$ (Hz)	$f_1^x$ (Hz)	$f_0^y$ (Hz)	$f_1^y$ (Hz)
Élastique	0.405	0.531	0.404	0.531
Élastoplastique ( $s_1$ )	0.405	0.528	X	0.529

Note : la fréquence  $f_0^y$  n'est pas assez clairement identifiable dans le cas élastoplastique pour être reportée.

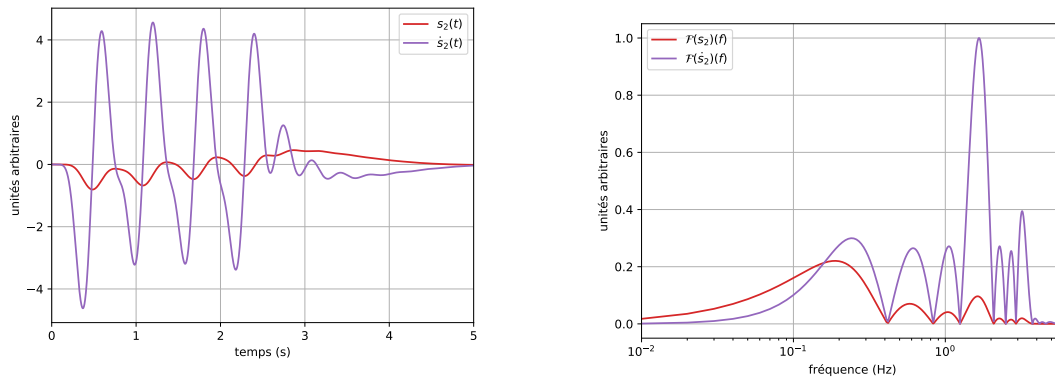
**Tableau 6.5.:** Fréquences de résonance du bassin dans le cas élastique et élastoplastique.

On constate que dans les deux cas, les fréquences de résonance restent quasiment identiques. Il y a un léger décalage vers les basses fréquences dans le cas élastoplastique sur la fréquence liée à la couche supérieure, mais celui-ci n'est pas très significatif (-0.56% seulement sur la composante  $x$  et -0.38% sur la composante  $y$ ). Ce résultat semble à première vue surprenant, puisque nous nous attendions à voir un décalage des fréquences de résonance vers les basses fréquences. On observe en revanche une nette diminution de l'amplification à basse fréquence ; l'amplification de la fréquence de résonance selon la composante  $x$  du bassin globale est 74% plus faible dans le cas élastoplastique que dans le cas élastique.

Il semblerait que la cause de ces effets soit liée, entre autre, à la source sismique choisie. En effet, la source choisie est de forte amplitude, mais de très courte durée. Cela provoque une forte nonlinéarité instantanée, mais comme celle-ci n'est pas entretenue, il y a très rapidement un retour à un régime quasi-linéaire. Globalement, la dynamique est donc quasi-linéaire. La forte nonlinéarité instantanée a provoqué une boucle d'hystérésis importante, entraînant un fort amortissement hystérétique, qui s'observe par la diminution de l'amplification à la fréquence globale  $f_0$  du bassin. La dynamique étant principalement linéaire, il n'y a pas eu de diminution entretenue de la vitesse de propagation, ce qui pourrait expliquer que nous n'observons pas de décalage vers les basses fréquences.

Pour vérifier cette hypothèse, nous considérons le même cas élastoplastique, mais avec une source  $s_2(t)$  ayant un support temporel plus long, dont la trace et le spectre de Fourier sont donnés sur les Figures 6.24a et 6.24b. L'amplitude de la source est identique à la source  $s_1(t)$ .

La Figure 6.25 compare les vitesses en surface obtenues avec la source  $s_2(t)$  et avec la source précédente  $s_1(t)$ . On note que la vitesse maximale en surface ( $PGV$ ) est très similaire.



(a) Évolution temporelle de la source  $s_2(t)$  et de sa dérivée temporelle  $\dot{s}_2(t)$ .

(b) Spectre de Fourier de  $s_2$  et  $\dot{s}_2$ .

Figure 6.24.: Description temps/fréquence de la source  $s_2(t)$ .

Dans le cas de la source  $s_2(t)$ , de fortes valeurs de vitesse sont constatées jusqu'à environ  $t = 7$  s.

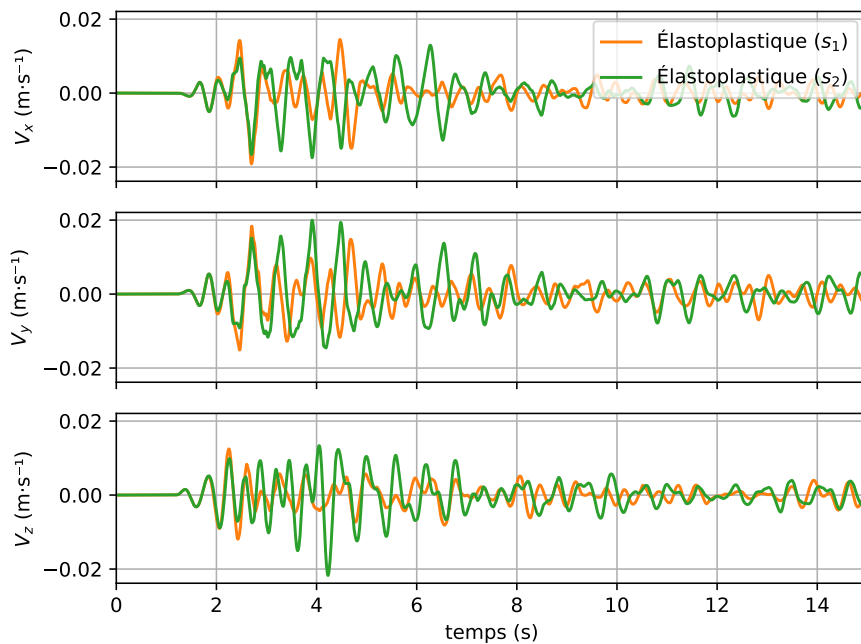
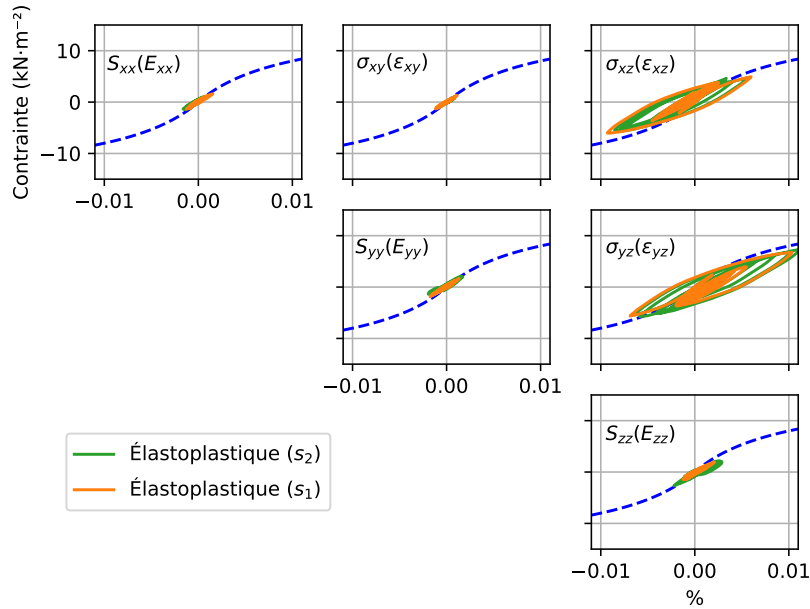


Figure 6.25.: Vitesses particulières au centre du domaine  $(0, 0, 0)$ . Zoom sur les quinze premières secondes. Comparaison des vitesses en surface obtenues en fonction de la source.

La Figure 6.26 permet de comparer, toujours au point  $(0, 0, -95 \text{ m})$  la relation contrainte/déformation. La source  $s_2(t)$  génère un mouvement entretenu durant quelques secondes ( $\approx 3$  s), cela implique que *plusieurs* boucles d'hystérésis importantes sont générées. En comparaison, la relation obtenue avec la source  $s_1(t)$  ne faisait qu'une seule boucle

importante. Autrement dit, la *nonlinéarité* a été plus longue avec la source  $s_2$  qu'avec la source  $s_1$ . Ainsi le module de cisaillement moyen est plus faible, ce qui implique une plus grande diminution de la vitesse de propagation.



**Figure 6.26.:** Contrainte déviatorique en fonction de la déformation déviatorique au point  $(0, 0, -95 \text{ m})$ . La courbe en pointillés bleus représente la courbe de premier chargement, utilisée pour calibrer le modèle élastoplastique. Comparaison des  $s_1(t)$  et  $s_2(t)$ .

Enfin, sur les Figures 6.27a et 6.27b nous pouvons comparer les rapports spectraux obtenus selon les différents cas. Le Tableau 6.6 rapporte les fréquences de résonance mesurées dans le cas linéaire élastique et dans les cas élastoplastiques en fonction de la source utilisée.

	$f_0^x$ (Hz)	$f_1^x$ (Hz)	$f_0^y$ (Hz)	$f_1^y$ (Hz)
Élastique	0.405	0.531	0.404	0.531
Élastoplastique ( $s_1$ )	0.405	0.528	X	0.529
Élastoplastique ( $s_2$ )	0.384	0.523	0.384	0.523

Note : la fréquence  $f_0^y$  n'est pas assez clairement identifiable dans le cas élastoplastique avec la source  $s_1(t)$  pour être reportée.

**Tableau 6.6.:** Fréquences de résonance du bassin dans le cas élastique et élastoplastique avec les sources  $s_1(t)$  et  $s_2(t)$ .

On observe un décalage vers les basses fréquences plus important, ce qui traduirait le fait que la diminution de vitesse de propagation a également été plus importante que dans le cas où la source  $s_1(t)$  a été utilisée. On note un décalage significatif du premier pic de

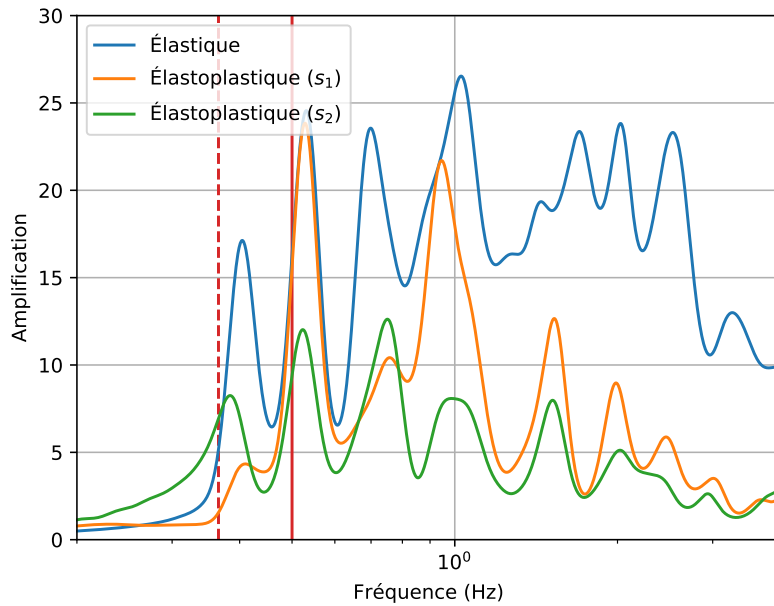
résonance (-5.19% sur la composante  $x$ ) associé à la fréquence de résonance du bassin complet. La nonlinéarité a donc affecté la réponse de tout le bassin, bien que seule la première couche ait un comportement élastoplastique. Enfin, nous notons que dans le cas de la source  $s_2(t)$ , l'amplification à basse fréquence (notamment au premier pic) est significativement supérieure à celle mesurée dans le cas de la source  $s_1(t)$ .

Les effets nonlinéaires observés sont différents, bien que les deux sources génèrent des ondes dont le  $PGV$  est similaire, comme cela a également pu être mis en évidence par GELIS et BONILLA [GB14] sur un bassin bidimensionnel.

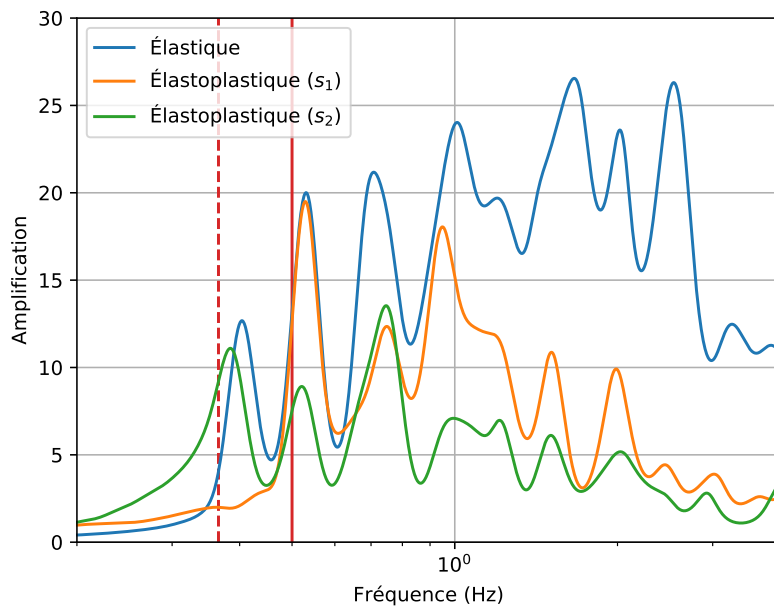
## Bilan

Dans ce dernier chapitre, la méthode DG a été appliquée à la propagation des ondes dans un milieu tridimensionnel avec prise en compte d'une loi de comportement élastoplastique. Nous avons vérifié sur des cas linéaires élastiques l'implémentation de la source et des conditions aux limites. L'influence de la loi de comportement a été étudiée sur le cas d'un mode propre dans cube. Nous avons pu observer la génération d'harmoniques. Enfin, la propagation d'ondes générées par une source ponctuelle dans un bassin hémisphérique a été analysée selon que la couche superficielle de ce bassin ait un comportement linéaire élastique ou nonlinéaire élastoplastique. Nous avons également mis en évidence que le support temporel de la source influence les effets de la nonlinéarité.





(a) Composante  $x$  de la vitesse particulaire.



(b) Composante  $y$  de la vitesse particulaire.

**Figure 6.27.:** Rapports spectraux de l'évolution de la vitesse particulaire enregistrée en  $(0, 0, 0)$  et  $(0, 0, -500 \text{ m})$ . La ligne en pointillés rouges correspond à la fréquence de résonance théorique d'un bassin hémisphérique. La ligne en trait plein rouge correspond à la fréquence de résonance linéaire théorique de la couche superficielle.

## Conclusion générale et perspectives

” *Il y a un temps pour tout. Un temps pour pêcher et un temps pour remanier les filets.*

— Gilles L.

Professeur d'histoire-géographie, 2<sup>nd</sup>, 2007

L'objectif général de cette thèse était la prise en compte de rhéologies nonlinéaires des sols dans un contexte de modélisation de la propagation des ondes par une méthode éléments finis Galerkin Discontinue (DG).

Nous nous sommes dans un premier temps intéressés à la propagation d'ondes dans un milieu unidimensionnel en prenant en compte une seule onde de cisaillement. Différentes lois de comportement ont été étudiées : 1) la loi de Hooke linéaire élastique, 2) une loi nonlinéaire élastique et 3) une loi nonlinéaire élastoplastique avec hystérésis construite à l'aide du modèle nonlinéaire élastique et des règles de MASING [Mas26]. Dans ce contexte particulier, nous avons été capables d'introduire un flux numérique décentré, calculé à partir des conditions de sauts de Rankine-Hugoniot à l'interface entre deux éléments de maillage. Cela a été possible puisque dans ce cas unidimensionnel simple, les vitesses de propagation peuvent être analytiquement calculées lorsque la déformation est connue. La robustesse de ce flux numérique a d'abord été vérifiée dans le cas linéaire élastique en comparant les résultats de simulations avec ceux obtenus via différentes méthodes déjà éprouvées dans la littérature sur des solutions en temps et en fréquence. Nous avons pu dans le cas d'une loi de comportement nonlinéaire élastique exhiber une solution analytique d'une onde se propageant dans un milieu homogène infini. Cette solution analytique nous a permis de réaliser une étude de convergence de notre schéma numérique sur un cas nonlinéaire. Nous avons ainsi pu montrer que l'ordre de convergence théorique attendu était bien retrouvé (à savoir  $\mathcal{O}(h^{N+1})$  pour une interpolation d'ordre  $N$  avec un flux décentré). À la suite de cela, sachant que les solutions d'équations aux dérivées partielles nonlinéaires peuvent développer en temps finis des discontinuités — même si la solution initiale est lisse — nous avons étudié les solutions faibles du système d'équations. Celles-ci n'étant pas nécessairement uniques à partir d'une même condition initiale, nous nous sommes intéressés à vérifier que la variation de l'énergie totale du système était bien décroissante

ou nulle, ce qui dans le cas de l'élastodynamique nous assure que la solution *physique* est bien obtenue. Nous avons pu montrer numériquement que dans le cas nonlinéaire élastique, l'énergie totale était conservée jusqu'à ce que la première discontinuité apparaisse puis que l'énergie était décroissante. Enfin, dans le cas élastoplastique nous avons pu montrer numériquement que l'énergie était conservée. Le code numérique utilisé dans cette partie a été entièrement développé durant cette thèse en utilisant le langage PYTHON.

Dans un second temps, dans le but d'aller progressivement vers une modélisation tridimensionnelle, nous avons considéré l'ensemble des composantes d'une onde se propageant verticalement dans un milieu unidimensionnel. C'est-à-dire deux composantes de cisaillement et une de compression, il s'agit du système appelé *1D-3C* dans la communauté d'ingénierie para-sismique [SLS12; SLS14; Pha13; Ora+17]. L'intérêt d'un tel modèle est de pouvoir, avec une rhéologie nonlinéaire, prendre en compte l'interaction entre les différentes ondes propagées<sup>1</sup>. La loi de comportement élastoplastique est modélisée par le modèle Masing-Prandtl-Ishlinskii-Iwan (MPII). Dans ce cadre là, nous n'avons pas pu établir le flux numérique décentré étudié précédemment puisque la vitesse de propagation des ondes n'est pas explicitement calculable. Nous avons alors proposé d'utiliser un flux numérique centré. Ce flux numérique est généralement inadapté pour la résolution d'équations nonlinéaires. Dans notre cas, grâce à des propriétés intéressantes de la loi de comportement élastoplastique — conservation de l'énergie, pas de discontinuités qui apparaissent, amortissement de l'amplitude — nous avons pu vérifier que le flux centré donnait de bons résultats. Pour cela, nous nous sommes assurés que dans le cas où le flux décentré pouvait être utilisé — c'est-à-dire une seule composante —, alors nous retrouvions les mêmes résultats, quelque soit le flux choisi et que l'énergie totale était également conservée. Passé cette étape, nous illustrons le couplage existant entre les différentes ondes propagées en utilisant un signal synthétique circulairement polarisé dans une colonne de sol de propriétés mécaniques et géométriques réalistes. Enfin, ce système a été comparé à un cas réel. Un enregistrement d'un séisme de magnitude  $M_w = 4.4$  dans le bassin de Volvi (Grèce) a été utilisé. Nous montrons qu'en introduisant un amortissement, nous sommes capables de reproduire avec précision les composantes horizontales du mouvement enregistré en surface. Nous expliquons également pourquoi la composante verticale n'a pas bien été reproduite. Le code numérique utilisé dans cette partie de la thèse est l'évolution du code PYTHON précédemment utilisé, ré-écrit en CYTHON.

Dans un troisième temps, nous avons présenté des résultats de propagation d'ondes dans un milieu tridimensionnel avec prise en compte de loi de comportement élastoplastique. Le code numérique utilisé dans cette partie est basé sur les développements réalisés par DELCOURTE et al. [DFG09] dans le cas linéaire élastique. Il a été adaptés aux rhéologies

---

1. Une telle interaction n'existe pas dans un milieu linéaire.

nonlinéaires. La première partie du chapitre fût consacrée à la vérification de l'implémentation d'une source sismique ponctuelle — explosion et double couple — ainsi que celle des bords absorbants. Dans un second temps, nous avons étudié l'influence d'une loi de comportement élastique sur le mode propre d'un cube homogène. Ce cas est commode puisque dans le cas linéaire élastique une solution exacte en temps et en espace est connue et mono-fréquentielle. Nous observons donc l'effet du comportement élastoplastique à la fois en temps et en fréquence. Concernant l'aspect fréquentiel, nous notons un décalage de la fréquence de résonance vers les basses fréquences et la génération d'harmoniques. Enfin, nous nous sommes intéressés à la propagation d'ondes sismiques dans un milieu tridimensionnel hétérogène. Il s'agit d'un bassin hémisphérique, composé de deux couches distinctes, encastré dans un rocher. Nous avons étudié les différences obtenues lorsque la couche superficielle du bassin a un comportement linéaire élastique et nonlinéaire élastoplastique. Dans les deux cas, l'onde sismique générée par une source de type double couple, se trouve piégée dans le bassin. Nous avons constaté sur les enregistrements en des points extérieurs au bassin l'influence du comportement de la couche superficielle. Nous avons également remarqué et mis en évidence l'influence de la source sur la réponse élastoplastique. En effet, la première source utilisée était de courte durée, ce qui a provoqué une forte nonlinéarité instantanée, mais très vite atténuée par l'hystérésis. De fait, la nonlinéarité a seulement produit une réduction de l'amplification, mais n'a pas induit de décalage significatif vers les basses fréquences des pics de résonance. À l'aide d'une seconde source de même amplitude mais ayant un support temporel plus important et présentant plusieurs cycles, nous avons pu constater cette fois-ci un décalage des pics de résonance vers les basses fréquences comme cela peut être observé dans des enregistrements réels.

À travers ces différents chapitres, nous nous sommes également attachés à montrer comment par une procédure simple, indépendant du schéma numérique, le temps de calcul inhérent au modèle élastoplastique MPII pouvait être réduit. Ce modèle est basé sur la discrétisation linéaire de la courbe de premier chargement. Il s'agit de vérifier itérativement, pour une déformation donnée, quels sont les éléments actifs. Observant que la complexité algorithmique de cette procédure est proportionnelle au nombre d'éléments actifs, nous avons pu montrer comment réduire significativement ce temps de calcul en discrétisant astucieusement la courbe de premier chargement. Nous avons montré à travers différents exemples que pour une même erreur globale, par rapport à une solution de référence, les temps de calculs étaient nettement améliorés. La durée d'un appel à fonction qui calcule la contrainte peut être réduite de 75% ; nous avons montré également sur une simulation numérique complète un gain de 74% du temps de calcul en modifiant seulement la manière dont était discrétisée la courbe de premier chargement.

Ainsi, nous avons modélisé et observé, en utilisant la méthode éléments finis Galerkin Discontinue, la propagation d'ondes sismiques dans des milieux unidimensionnels et tri-

dimensionnels ayant des comportements nonlinéaires. Pour aller vers plus de réalisme, diverses améliorations peuvent être apportées. Par exemple, il nous a été difficile de modéliser un bassin tridimensionnel à la géométrie réelle, compte tenu du fait que l'implémentation de la méthode DG dans le code numérique 3D utilisé nécessite que les interfaces du milieu soient explicitement maillées. Cela implique des éléments de très petites tailles aux niveaux des raccords entre les différentes couches et donc des pas de temps de simulation très faibles. Lever cette difficulté, comme cela a été fait en 2D par MERCERAT et GLINSKY [MG15] dans le cas linéaire par exemple, pourrait permettre de mieux prendre en compte les interfaces entre les milieux en pénalisant moins le temps de calcul. Nous nous sommes intéressés à des lois de comportement élastiques, qui sont valides à très petites déformations ( $\gamma < 10^{-5}$ ) et à une loi de comportement élastoplastique pour laquelle la déformation peut être plus grande. Celle-ci induit un amortissement hystérique lorsque la déformation est grande, mais très peu lorsque la déformation est faible. Or, les enregistrements sismiques font état de la présence d'un amortissement, même à faibles déformations. Pour cela, un comportement visco-élastique, plus réaliste que l'amortissement visqueux que nous avons utilisé, pourrait être implémenté. Enfin, nous avons considéré uniquement des sols secs. Or la réponse de ceux-ci est très différente selon qu'ils soient secs ou humides. La prise en compte de la pression de pore pourrait permettre d'aller jusqu'à la modélisation des effets de liquéfaction en 3D, comme cela a été récemment étudié par ORAL et al. [Ora+17] en 1D et 2D.

Tout cela nécessite beaucoup de développements et de nombreux éléments peuvent déjà être étudiés avec la base existante. Le cas du bassin hémisphérique mérite d'être approfondi plus finement encore. Il serait par exemple intéressant de regarder l'évolution de la fonction d'amplification dans les cas linéaire élastique et nonlinéaire élastoplastique sur toute une coupe du bassin. Cela permettrait de mieux comprendre encore l'influence de la loi de comportement sur l'amplification. Nous avons également noté l'influence de la source sur la réponse du bassin. Nous avons vu que tout le bassin, bien que seule la couche superficielle ait un comportement élastoplastique, a été affecté par la nonlinéarité. Il serait intéressant d'étudier les effets d'un signal réel sur un tel bassin afin de noter comment évolue la réponse du milieu tridimensionnel, puisqu'il a été observé, dans des simulations numériques 2D, que la nonlinéarité est d'avantage activée avec un signal réel qu'avec un signal synthétique [GB14; Ora+17].

# Bibliographie

- [AR02] K. AKI et P. G. RICHARDS. *Quantitative Seismology, 2nd Ed.* 2002 (cf. p. 33).
- [AK68] Z. ALTERMAN et F. C. KARAL. « Propagation of elastic waves in layered media by finite difference methods ». en. In : *Bulletin of the Seismological Society of America* 58.1 (fév. 1968), p. 367-398 (cf. p. 6).
- [Ant+12] P. ANTONIETTI, I. MAZZIERI, A. QUARTERONI et F. RAPETTI. « Non-conforming high order approximations of the elastodynamics equation ». en. In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 209-212 (fév. 2012), p. 212-238 (cf. p. 7, 9).
- [Ant+15] P. F. ANTONIETTI, C. MARCATI, I. MAZZIERI et A. QUARTERONI. « High order discontinuous Galerkin methods on simplicial elements for the elastodynamics equation ». en. In : *Numerical Algorithms* (juil. 2015) (cf. p. 8).
- [Ant+17] P. F. ANTONIETTI, A. FERRONI, I. MAZZIERI et al. *Numerical modeling of seismic waves by Discontinuous Spectral Element methods*. en. MOX-Report 09/2017. Dipartimento di Matematica : Politecnico di Milano, sept. 2017, p. 52 (cf. p. 9).
- [AF99] S. AOI et H. FUJIWARA. « 3D finite-difference method using discontinuous grids ». en. In : *Bulletin of the Seismological Society of America* 89.4 (août 1999), p. 918-930 (cf. p. 6).
- [ALK11] D. ASSIMAKI, W. LI et A. KALOS. « A Wavelet-based Seismogram Inversion Algorithm for the In Situ Characterization of Nonlinear Soil Behavior ». en. In : *Pure and Applied Geophysics* 168.10 (oct. 2011), p. 1669-1691 (cf. p. 20).
- [Bao+98] H. BAO, J. BIELAK, O. GHATTAS et al. « Large-scale simulation of elastic wave propagation in heterogeneous media on parallel computers ». en. In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 152.1-2 (jan. 1998), p. 85-102 (cf. p. 7).
- [Bay+86] A. BAYLISS, K. E. JORDAN, B. J. LEMESURIER et E. TURKEL. « A fourth-order accurate finite-difference scheme for the computation of elastic waves ». English (US). In : *Bulletin of the Seismological Society of America* 76.4 (août 1986), p. 1115-1132 (cf. p. 6).
- [Ben+09] M. BENJEMAA, N. GLINSKY-OLIVIER, V. M. CRUZ-ATIENZA et J. VIRIEUX. « 3-D dynamic rupture simulations by a finite volume method ». en. In : *Geophysical Journal International* 178 (juil. 2009), p. 541-560 (cf. p. 8).
- [BW96] I. A. BERESNEV et K.-L. WEN. « Nonlinear soil response—a reality? » In : *Bulletin of the Seismological Society of America* 86.6 (1996), p. 1964-1978 (cf. p. 6).
- [BW95] I. A. BERESNEV et K.-L. WEN. « P-wave amplification by near-surface deposits at different excitation levels ». In : *Bulletin of the Seismological Society of America* 85.5 (1995), p. 1490-1494 (cf. p. 6).

- [BS06] T. BOHLEN et E. H. SAENGER. « Accuracy of heterogeneous staggered-grid finite-difference modeling of Rayleigh waves ». en. In : *GEOPHYSICS* 71 (juil. 2006), T109-T115 (cf. p. 6, 50).
- [Bon+11] L. F. BONILLA, K. TSUDA, N. PULIDO, J. RÉGNIER et A. LAURENDEAU. « Nonlinear site response evidence of K-NET and KiK-net records from the 2011 off the Pacific coast of Tohoku Earthquake ». en. In : *Earth, Planets and Space* 63.7 (juil. 2011), p. 785-789 (cf. p. 3, 4).
- [Bou+12] O. BOU MATAR, P.-Y. GUERDER, Y. LI, B. VANDEWOESTYNE et K. VAN DEN ABEELE. « A nodal discontinuous Galerkin finite element method for nonlinear elastic wave propagation ». In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 131.5 (2012), p. 3650-3663 (cf. p. 8).
- [BA77] M. BOUCHON et K. AKI. « Discrete wave-number representation of seismic-source wave fields ». en. In : *Bulletin of the Seismological Society of America* 67.2 (avr. 1977), p. 259-277 (cf. p. 112).
- [Bou05] F. BOUCHUT. « An introduction to finite volume methods for hyperbolic conservation laws ». en. In : *ESAIM : Proceedings* 15 (2005), p. 1-17 (cf. p. 77).
- [BG12] T. BUI-THANH et O. GHATTAS. « Analysis of an  $\mathcal{H}^p$ -Nonconforming Discontinuous Galerkin Spectral Element Method for Wave Propagation ». en. In : *SIAM Journal on Numerical Analysis* 50.3 (jan. 2012), p. 1801-1826 (cf. p. 7, 8).
- [CFP03] N. CANOUE, L. FÉZOU et S. PIPERNO. « A New Discontinuous Galerkin Method for 3D Maxwell's Equation on Non-conforming Grids ». en. In : *Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation WAVES 2003*. Sous la dir. de G. C. COHEN, P. JOLY, E. HEIKKOLA et P. NEITTAANMÄKI. Springer Berlin Heidelberg, 2003, p. 389-394 (cf. p. 46).
- [Car94] M. H. K. CARPENTER. *Fourth-order 2N-storage Runge-Kutta schemes*. Rapp. tech. Juin 1994 (cf. p. 49).
- [CKB10] C. E. CASTRO, M. KÄSER et G. B. BRIETZKE. « Seismic waves in heterogeneous materials subcell resolution of the discontinuous Galerkin method ». In : *Geophysical Journal International* 182(1) (2010), p. 250-264 (cf. p. 5, 38, 61).
- [Cha+18a] S. CHABOT, N. GLINSKY, E. D. MERCERAT et L. F. BONILLA. « A high-order discontinuous Galerkin method for 1D wave propagation in a nonlinear heterogeneous medium ». In : *Journal of Computational Physics* 355. Supplement C (2018), p. 191-213 (cf. p. 10, 20).
- [Cha+18b] S. CHABOT, N. GLINSKY, E. D. MERCERAT et L. F. BONILLA. « A High-Order Discontinuous Galerkin Method for Coupled Wave Propagation in 1D Elastoplastic Heterogeneous Media ». en. In : *Journal of Theoretical and Computational Acoustics* 26.03 (août 2018), p. 1850043 (cf. p. 10).
- [Cha+07] E. CHALJUB, D. KOMATITSCH, J.-P. VILOTTE et al. « Spectral-element analysis in seismology ». en. In : *Advances in Geophysics*. T. 48. Elsevier, 2007, p. 365-419 (cf. p. 7).

- [Cha+15] J. CHANDRA, P. GUÉGUEN, J. H. STEIDL et L. F. BONILLA. « In Situ Assessment of the  $G - \gamma$  Curve for Characterizing the Nonlinear Response of Soil : Application to the Garner Valley Downhole Array and the Wildlife Liquefaction Array ». en. In : *Bulletin of the Seismological Society of America* 105.2A (avr. 2015), p. 993-1010 (cf. p. 6, 52, 128).
- [Che+15] G. CHEN, D. JIN, J. ZHU, J. SHI et X. LI. « Nonlinear Analysis on Seismic Site Response of Fuzhou Basin, China ». en. In : *Bulletin of the Seismological Society of America* 105.2A (jan. 2015), p. 928-949 (cf. p. 5).
- [Coc+00] B. COCKBURN, G. E. KARNIADAKIS, C.-W. SHU et al., éd. *Discontinuous Galerkin Methods*. T. 11. Lecture Notes in Computational Science and Engineering. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2000 (cf. p. 8).
- [CS01] B. COCKBURN et C.-W. SHU. « Runge–Kutta Discontinuous Galerkin Methods for Convection-Dominated Problems ». In : *Journal of Scientific Computing* 16.3 (2001), p. 173-261 (cf. p. 54, 55, 82).
- [Coh+01] G. COHEN, P. JOLY, J. ROBERTS et N. TORDJMAN. « Higher Order Triangular Finite Elements with Mass Lumping for the Wave Equation ». In : *SIAM Journal on Numerical Analysis* 38.6 (jan. 2001), p. 2047-2078 (cf. p. 7).
- [CFL28] R. COURANT, K. FRIEDRICHS et H. LEWY. « Über die partiellen Differenzgleichungen der mathematischen Physik ». de. In : *Mathematische Annalen* 100.1 (déc. 1928), p. 32-74 (cf. p. 53).
- [Dar01] M. B. DARENDELI. « Development of a new family of normalized modulus reduction and material damping curves ». English. Thèse de doct. Austin : University of Texas, août 2001 (cf. p. 18, 21).
- [Dav12] A. DAVISON. « Automated capture of experiment context for easier reproducibility in computational research ». In : *Computing in Science & Engineering* 14.4 (2012), p. 48-56 (cf. p. 88).
- [DS07] J. D. DE BASABE et M. K. SEN. « Grid dispersion and stability criteria of some common finite-element methods for acoustic and elastic wave equations ». en. In : *GEOPHYSICS* 72.6 (nov. 2007), T81-T95 (cf. p. 7).
- [dlPue+07] J. de la PUENTE, M. KÄSER, M. DUMBSER et H. IGEL. « An Arbitrary High Order Discontinuous Galerkin Method for Elastic Waves on Unstructured Meshes – IV : Anisotropy ». In : *Geophysical Journal International* 169(3) (2007), p. 1210-1228 (cf. p. 8).
- [DFG09] S. DELCOURTE, L. FEZOUÏ et N. GLINSKY-OLIVIER. « A high-order Discontinuous Galerkin method for the seismic wave propagation ». In : *ESAIM : Proceedings* 27 (2009), p. 70-89 (cf. p. 8, 43, 46, 60, 63, 109, 140).
- [DG15] S. DELCOURTE et N. GLINSKY. « Analysis of a high-order space and time discontinuous Galerkin method for elastodynamic equations. Application to 3D wave propagation ». In : *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis* 49.4 (juil. 2015), p. 1085-1126 (cf. p. 43, 78, 109-112, 118, 119).



- [Del+09] N. DELÉPINE, L. LENTI, G. BONNET et J.-F. SEMBLAT. « Nonlinear viscoelastic wave propagation : an extension of Nearly Constant Attenuation (NCQ) models ». In : *Journal of Engineering Mechanics* 135.11 (nov. 2009), p. 1305-1314 (cf. p. 6).
- [DT95] E. DORMY et A. TARANTOLA. « Numerical simulation of elastic wave propagation using a finite volume method ». en. In : *Journal of Geophysical Research : Solid Earth* 100 (fév. 1995), p. 2123-2133 (cf. p. 8).
- [Dou+93] G. DOUGLAS MEEGAN JR, P. A. JOHNSON, R. A. GUYER et K. R. MCCALL. « Observations of nonlinear elastic wave behavior in sandstone ». In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 94.6 (déc. 1993), p. 3387-3391 (cf. p. 6).
- [DK06] M. DUMBSER et M. KÄSER. « An arbitrary high-order discontinuous Galerkin method for elastic waves on unstructured meshes – II. The three-dimensional isotropic case ». en. In : *Geophysical Journal International* 167.1 (oct. 2006), p. 319-336 (cf. p. 8, 40).
- [DKdlP07] M. DUMBSER, M. KÄSER et J. de la PUENTE. « Arbitrary high-order finite volume schemes for seismic wave propagation on unstructured meshes in 2D and 3D ». en. In : *Geophysical Journal International* 171 (nov. 2007), p. 665-694 (cf. p. 8).
- [DKT07] M. DUMBSER, M. KÄSER et E. F. TORO. « An arbitrary high-order Discontinuous Galerkin method for elastic waves on unstructured meshes – V. Local time stepping and p-adaptivity ». en. In : *Geophysical Journal International* 171.2 (nov. 2007), p. 695-717 (cf. p. 8).
- [Eti+10] V. ETIENNE, E. CHALJUB, J. VIRIEUX et N. GLINSKY. « An hp-adaptive discontinuous Galerkin finite-element method for 3-D elastic wave modelling : An hp-adaptive DG-FEM for 3-D seismic modelling ». en. In : *Geophysical Journal International* 183.2 (nov. 2010), p. 941-962 (cf. p. 5, 8).
- [Feh69] E. FEHLBERG. « Low-order classical Runge-Kutta formulas with stepsize control and their application to some heat transfer problems ». In : (1969) (cf. p. 74).
- [Fer+17] A. FERRONI, P. F. ANTONIETTI, I. MAZZIERI et A. QUARTERONI. « Dispersion-dissipation analysis of 3-D continuous and discontinuous spectral element methods for the elastodynamics equation ». en. In : *Geophysical Journal International* 211 (déc. 2017), p. 1554-1574 (cf. p. 51).
- [FL15] L. FEZOUZI et S. LANTERI. *Discontinuous Galerkin methods for the numerical solution of the nonlinear Maxwell equations in 1D*. Rapp. tech. Inria, 2015 (cf. p. 60).
- [Gan11] A. GANDOMZADEH. « Dynamic soil-structure interaction : effect of nonlinear soil behavior ». en. Thèse de doct. Université Paris-Est, fév. 2011 (cf. p. 20).
- [Gel+05] C. GELIS, D. LEPAROUX, J. VIRIEUX et al. « Numerical Modeling of Surface Waves Over Shallow Cavities ». en. In : *Journal of Environmental & Engineering Geophysics* 10.2 (juin 2005), p. 111-121 (cf. p. 63).
- [GB14] C. GELIS et L. F. BONILLA. « Influence of a sedimentary basin infilling description on the 2-D P-SV wave propagation using linear and non-linear constitutive models ». en. In : *Geophysical Journal International* 198.3 (jan. 2014), pp 1684-1700 (cf. p. 5, 129, 137, 142).

- [GB12] C. GÉLIS et L. F. BONILLA. « 2-DP–SV numerical study of soil–source interaction in a non-linear basin ». In : *Geophysical Journal International* 191.3 (2012), p. 1374-1390 (cf. p. 5, 20, 52).
- [GMD10] N. GLINSKY, S. M. MPONG et S. DELCOURTE. *A High-order Discontinuous Galerkin Scheme for Elastic Wave Propagation*. en. report 7476. INRIA, déc. 2010, p. 21 (cf. p. 55).
- [GST01] S. GOTTLIEB, C.-W. SHU et E. TADMOR. « Strong Stability-Preserving High-Order Time Discretization Methods ». In : (2001) (cf. p. 48).
- [Gué16] P. GUÉGUEN. « Predicting Nonlinear Site Response Using Spectral Acceleration Vs PGV/Vs30 : A Case History Using the Volvi-Test Site ». en. In : *Pure and Applied Geophysics* 173.6 (juin 2016), p. 2047-2063 (cf. p. 52, 91, 101, 128).
- [GJ09] R. A. GUYER et P. A. JOHNSON. *Nonlinear mesoscopic elasticity : the complex behaviour of granular media including rocks and soil*. Weinheim : Wiley-VCH, 2009 (cf. p. 5, 18).
- [HK17] M. HAMADA et M. KUNO. « Earthquake, Ground Motion, and Tsunamis ». en. In : *Earthquake Engineering for Nuclear Facilities*. Sous la dir. de M. HAMADA et M. KUNO. Singapore : Springer Singapore, 2017, p. 249-268 (cf. p. 45).
- [HD72] B. O. HARDIN et V. P. DRNEVICH. « Shear modulus and damping in soils : measurement and parameter effects ». In : *Journal of Soil Mechanics & Foundations Div* 98.6 (juin 1972), p. 603-624 (cf. p. 18).
- [Has53] N. A. HASKELL. « The dispersion of surface waves on multilayered media ». In : *Bulletin of the seismological Society of America* 43.1 (1953), p. 17-34 (cf. p. 63).
- [HBT01] K. HAYASHI, D. R. BURNS et M. N. TOKSÖZ. « Discontinuous-Grid Finite-Difference Seismic Modeling Including Surface Topography ». en. In : *Bulletin of the Seismological Society of America* 91.6 (déc. 2001), p. 1750-1764 (cf. p. 6).
- [HW08] J. S. HESTHAVEN et T. WARBURTON. *Nodal Discontinuous Galerkin Methods*. Sous la dir. de J. E. MARS DEN, L. SIROVICH et S. S. ANTMAN. T. 54. Texts in Applied Mathematics. New York, NY : Springer New York, 2008 (cf. p. 7, 8, 40, 49, 55, 59, 79, 85).
- [HRZ76] E. HINTON, T. ROCK et O. C. ZIENKIEWICZ. « A note on mass lumping and related processes in the finite element method ». en. In : *Earthquake Engineering & Structural Dynamics* 4.3 (jan. 1976), p. 245-249 (cf. p. 7).
- [Hod88] M. L. HODGDON. « Applications of a theory of ferromagnetic hysteresis ». In : *IEEE Transactions on Magnetics* 24 (jan. 1988), p. 218-221 (cf. p. 5).
- [Hok04] K. HOKSTAD. « Nonlinear and dispersive acoustic wave propagation ». en. In : *Geophysics* 69.3 (mai 2004), p. 840-848 (cf. p. 18).
- [Hoo78] R. HOOKE. *Lectures de Potentia Restitutiva, Or of Spring Explaining the Power of Springing Bodies*. en. John Martyn, 1678 (cf. p. 16).
- [IZ93] I. ISHIBASHI et X. ZHANG. « Unified dynamic shear moduli and damping ratios of sand and clay ». en. In : *SOILS AND FOUNDATIONS* 33.1 (mar. 1993), p. 182-191 (cf. p. 21).

- [IYT85] K. ISHIHARA, N. YOSHIDA et S. TSUJINO. « Modelling of stress-strain relations of soils in cycli loading ». In : Nagoya, avr. 1985 (cf. p. 20).
- [Ish96] K. ISHIHARA. *Soil behaviour in earthquake geotechnics*. English. Oxford ; New York : Clarendon Press ; Oxford University Press, 1996 (cf. p. 15).
- [Iwa66] W. D. IWAN. « A Distributed-Element Model for Hysteresis and Its Steady-State Dynamic Response ». In : *Journal of Applied Mechanics* 33.4 (déc. 1966), p. 893-900 (cf. p. 9, 20).
- [Iwa67] W. D. IWAN. « On a Class of Models for the Yielding Behavior of Continuous and Composite Systems ». In : *Journal of Applied Mechanics* 34.3 (sept. 1967), p. 612-617 (cf. p. 9, 20).
- [JK88] T. JIANG et E. KURIBAYASHI. « The three-dimensional resonance of axisymmetric sediment-filled valleys ». en. In : *SOILS AND FOUNDATIONS* 28.4 (déc. 1988), p. 130-146 (cf. p. 132).
- [JR96] P. A. JOHNSON et P. N. J. RASOLOFOSAON. « Manifestation of nonlinear elasticity in rock : convincing evidence over large frequency and strain intervals from laboratory studies ». In : *Nonlinear Processes in Geophysics* 3.2 (1996), p. 77-88 (cf. p. 6).
- [Joy75] W. B. JOYNER. « A method for calculating nonlinear seismic response in two dimensions ». In : *Bulletin of the Seismological Society of America* 65.5 (1975), p. 1337-1357 (cf. p. 9, 20, 27).
- [JC75] W. B. JOYNER et A. T. CHEN. « Calculation of nonlinear ground response in earthquakes ». In : *Bulletin of the Seismological Society of America* 65.5 (1975), p. 1315-1336 (cf. p. 22).
- [KB04] T.-S. KANG et C.-E. BAAG. « Finite-Difference Seismic Simulation Combining Discontinuous Grids with Locally Variable Timesteps ». en. In : *Bulletin of the Seismological Society of America* 94.1 (fév. 2004), p. 207-219 (cf. p. 6).
- [KD06] M. KÄSER et M. DUMBSER. « An arbitrary high-order discontinuous Galerkin method for elastic waves on unstructured meshes—I. The two-dimensional isotropic case with external source terms ». In : *Geophysical Journal International* 166.2 (2006), p. 855-877 (cf. p. 8).
- [Kel+76] K. R. KELLY, R. W. WARD, S. TREITEL et R. M. ALFORD. « Synthetic seismograms ; a finite-difference approach ». en. In : *Geophysics* 41.1 (fév. 1976), p. 2-27 (cf. p. 6).
- [KV98] D. KOMATITSCH et J.-P. VILOTTE. « The Spectral Element method : an efficient tool to simulate the seismic response of 2D and 3D geological structures ». In : *Bulletin of the Seismological Society of America* 88 (avr. 1998), p. 368-392 (cf. p. 7).
- [KO98] K. KONNO et T. OHMACHI. « Ground-Motion Characteristics Estimated from Spectral Ratio between Horizontal and Vertical Components of Microtremor ». In : *Bulletin of the Seismological Society of America* 88.1 (1998), p. 228-241 (cf. p. 121, 132).
- [Law+08] Z. LAWRENCE, P. BODIN, C. A. LANGSTON et al. « Induced Dynamic Nonlinear Ground Response at Garner Valley, California ». en. In : *Bulletin of the Seismological Society of America* 98.3 (juin 2008), p. 1412-1428 (cf. p. 6).

- [LeF02] P. G. LEFLOCH. *Hyperbolic systems of conservation laws : the theory of classical and non-classical shock waves*. Lectures in mathematics ETH Zürich. Basel ; Boston : Birkhäuser Verlag, 2002 (cf. p. 76, 77).
- [Lev88] A. R. LEVANDER. « Fourth-order finite-difference P-SV seismograms ». en. In : *GEOPHYSICALS* 53.11 (nov. 1988), p. 1425-1436 (cf. p. 6).
- [LeV02a] R. J. LEVEQUE. *Finite volume methods for hyperbolic problems*. English. Cambridge ; New York : Cambridge University Press, 2002 (cf. p. 8, 63).
- [LeV02b] R. J. LEVEQUE. « Finite-volume methods for non-linear elasticity in heterogeneous media ». en. In : *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 40.1-2 (sept. 2002), p. 93-104 (cf. p. 5, 60, 62, 76).
- [LeV92] R. J. LEVEQUE. *Numerical methods for conservation laws*. 2nd ed. Lectures in mathematics ETH Zürich. Basel ; Boston : Birkhäuser Verlag, 1992 (cf. p. 76).
- [Lub08] J. LUBLINER. *Plasticity Theory*. en. Courier Corporation, 2008 (cf. p. 20).
- [LD72] J. LYSMER et L. A. DRAKE. « A Finite Element Method for Seismology ». en. In : *Methods in Computational Physics : Advances in Research and Applications* 11 (jan. 1972), p. 181-216 (cf. p. 7).
- [Mad15] R. MADARIAGA. « 4.02 - Seismic Source Theory ». In : *Treatise on Geophysics (Second Edition)*. Sous la dir. de G. SCHUBERT. Second Edition. Oxford : Elsevier, 2015, p. 51-71 (cf. p. 31).
- [Mad76] R. MADARIAGA. « Dynamics of an expanding circular fault ». en. In : *Bulletin of the Seismological Society of America* 66.3 (juin 1976), p. 639-666 (cf. p. 6).
- [Mas26] G. MASING. « Eigenspannungen und verfestigung beim messing (Self stretching and hardening for brass) ». German. In : Zurich, Switzerland, 1926, p. 332-335 (cf. p. 19, 139).
- [Mau+15] E. MAUFROY, E. CHALJUB, F. HOLLENDER et al. « Earthquake Ground Motion in the Mygdonian Basin, Greece : The E2VP Verification and Validation of 3D Numerical Simulation up to 4 Hz ». en. In : *Bulletin of the Seismological Society of America* 105.3 (juin 2015), p. 1398-1418 (cf. p. 50).
- [Maz+13] I. MAZZIERI, M. STUPAZZINI, R. GUIDOTTI et C. SMERZINI. « SPEED : SPectral Elements in Elastodynamics with Discontinuous Galerkin : a non-conforming approach for 3D multi-scale problems ». In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 95 (sept. 2013), p. 991-1010 (cf. p. 5, 9).
- [MG96] K. R. MCCALL et R. A. GUYER. « A new theoretical paradigm to describe hysteresis, discrete memory and nonlinear elastic wave propagation in rock ». In : *Nonlinear Processes in Geophysics* 3.2 (1996), p. 89-101 (cf. p. 5, 6).
- [MS74] B. MCKAVANAGH et F. D. STACEY. « Mechanical hysteresis in rocks at low strain amplitudes and seismic frequencies ». In : *Physics of the Earth and Planetary Interiors* 8.3 (mai 1974), p. 246-250 (cf. p. 5, 6).

- [MG15] E. D. MERCERAT et N. GLINSKY. « A nodal high-order discontinuous Galerkin method for elastic wave propagation in arbitrary heterogeneous media ». en. In : *Geophysical Journal International* 201.2 (2015), p. 1101-1118 (cf. p. 5, 38, 61, 142).
- [Mer+16] E. D. MERCERAT, L. F. BONILLA, F. D. MARTIN et al. « Modeling of 1D wave propagation in nonlinear soils using the elasto-plastic Iwan model by four numerical schemes ». en. In : *5th IASPEI / IAEE International Symposium : Effects of Surface Geology on Seismic Motion*, Taipei, Taiwan, août 2016 (cf. p. 23, 27).
- [MQJ02] T. MEURER, J. QU et L. J. JACOBS. « Wave propagation in nonlinear and hysteretic media — a numerical study ». In : *International Journal of Solids and Structures* 39.21 (oct. 2002), p. 5585-5614 (cf. p. 5).
- [Mez+16] K. C. MEZA-FAJARDO, J.-F. SEMBLAT, S. CHAILLAT et L. LENTI. « Seismic-Wave Amplification in 3D Alluvial Basins : 3D/1D Amplification Ratios from Fast Multipole BEM Simulations ». en. In : *Bulletin of the Seismological Society of America* 106.3 (juin 2016), p. 1267-1281 (cf. p. 132).
- [Min+13] S. MINISINI, E. ZHEBEL, A. KONONOV et W. A. MULDER. « Local time stepping with the discontinuous Galerkin method for wave propagation in 3D heterogeneous media ». en. In : *Geophysics* 78.3 (avr. 2013), T67-T77 (cf. p. 8).
- [Moc+07] P. MOCZO, J. KRISTEK, P. PAZAK, M. GALIS et M. BALAZOVJECH. « The finite-difference and finite-element modeling of seismic wave propagation and earthquake motion ». English. In : *Acta Physica Slovaca* 57.2 (2007), p. 177-406 (cf. p. 6).
- [MK12] C. A. d. MOURA et C. S. KUBRUSLY. *The Courant–Friedrichs–Lewy (CFL) Condition : 80 Years After Its Discovery*. en. Springer Science & Business Media, oct. 2012 (cf. p. 53).
- [Naz+03] V. E. NAZAROV, A. V. RADOSTIN, L. A. OSTROVSKY et I. A. SOUSTOVA. « Wave processes in media with hysteretic nonlinearity. Part I ». en. In : *Acoustical Physics* 49.3 (2003), p. 344-353 (cf. p. 6).
- [Nis98] H. NISHIKAWA. « Accurate Piecewise Linear Continuous Approximations to One-Dimensional Curves : Error Estimates and Algorithms ». In : (1998) (cf. p. 27, 29).
- [Ora16] E. ORAL. « Multi-dimensional modeling of seismic wave propagation in linear and nonlinear media ». Thèse de doct. Paris Est, 2016 (cf. p. 35).
- [Ora+17] E. ORAL, C. GÉLIS, L. F. BONILLA et E. DELAUD. « Spectral element modelling of seismic wave propagation in visco-elastoplastic media including excess-pore pressure development ». In : *Geophysical Journal International* 211.3 (2017), p. 1494-1508 (cf. p. 7, 13, 20, 23, 27, 52, 140, 142).
- [PR10] R. PASQUETTI et F. RAPETTI. « Spectral element methods on unstructured meshes : which interpolation points ? ». en. In : *Numerical Algorithms* 55.2-3 (nov. 2010), p. 349-366 (cf. p. 41).
- [Pat84] A. T. PATERA. « A spectral element method for fluid dynamics : Laminar flow in a channel expansion ». In : *Journal of Computational Physics* 54.3 (juin 1984), p. 468-488 (cf. p. 7).

- [Pav02] O. PAVLENKO. « Changes in Shear Moduli of Liquefied and Nonliquefied Soils during the 1995 Kobe Earthquake and Its Aftershocks at Three Vertical-Array Sites ». en. In : *Bulletin of the Seismological Society of America* 92.5 (juin 2002), p. 1952-1969 (cf. p. 6).
- [Pey+14] F. PEYRUSSE, N. GLINSKY, C. GELIS et S. LANTERI. « A nodal discontinuous Galerkin method for site effects assessment in viscoelastic media — verification and validation in the Nice basin ». en. In : *Geophysical Journal International* 199.1 (août 2014), p. 315-334 (cf. p. 63).
- [Pha13] V. A. PHAM. « Effets de la pression interstitielle sur la réponse sismique des sols : modélisation numérique 1D/3 composantes ». Thèse de doct. Université Paris-Est, 2013 (cf. p. 13, 20, 27, 35, 140).
- [PH09] C. PHILLIPS et Y. M. HASHASH. « Damping formulation for nonlinear 1D site response analyses ». en. In : *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* 29.7 (juil. 2009), p. 1143-1158 (cf. p. 20).
- [PRF02] S. PIPERNO, M. REMAKI et L. FEZOUÏ. « A Nondiffusive Finite Volume Scheme for the Three-Dimensional Maxwell's Equations on Unstructured Meshes ». en. In : *SIAM Journal on Numerical Analysis* 39.6 (jan. 2002), p. 2089-2108 (cf. p. 46).
- [Pit99] A. PITARKA. « 3D Elastic finite-difference modeling of seismic motion using staggered grids with nonuniform spacing ». en. In : *Bulletin of the Seismological Society of America* 89.1 (fév. 1999), p. 54-68 (cf. p. 6).
- [Pot+09] M. POTOTSCHNIG, J. NIEGEMANN, L. TKESHELASHVILI et K. BUSCH. « Time-Domain Simulations of the Nonlinear Maxwell Equations Using Operator-Exponential Methods ». In : *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* 57.2 (fév. 2009), p. 475-483 (cf. p. 66).
- [Rat+01] E. M. RATHJE, R. D. PHILLIPS, W.-J. CHANG et K. H. S. II. « Evaluation Nonlinear Soil Response In Situ ». en. In : *University of Missouri–Rolla* 1 (2001), p. 7 (cf. p. 52, 128).
- [Rég+16] J. RÉGNIER, L.-F. BONILLA, P.-Y. BARD et al. « International Benchmark on Numerical Simulations for 1D, Nonlinear Site Response (PRENOLIN) : Verification Phase Based on Canonical Cases ». en. In : *Bulletin of the Seismological Society of America* 106.5 (oct. 2016), p. 2112-2135 (cf. p. 5, 13).
- [Rég+18] J. RÉGNIER, L.-F. BONILLA, P.-Y. BARD et al. « PRENOLIN : International Benchmark on 1D Nonlinear Site-Response Analysis—Validation Phase Exercise ». en. In : *Bulletin of the Seismological Society of America* (jan. 2018) (cf. p. 13).
- [Rem+17] M. C. REMILIEUX, T. J. ULRICH, H. E. GOODMAN et J. A. TEN CATE. « Propagation of a Finite-Amplitude Elastic Pulse in a Bar of Berea Sandstone : A Detailed Look at the Mechanisms of Classical Nonlinearity, Hysteresis, and Nonequilibrium Dynamics : Nonlinear Propagation of Elastic Pulse ». en. In : *Journal of Geophysical Research : Solid Earth* 122.11 (nov. 2017), p. 8892-8909 (cf. p. 6, 122).
- [SLS14] M. P. SANTISI D'AVILA, L. LENTI et J.-F. SEMBLAT. « Modélisation 1D-3Composantes de la réponse sismique d'une colonne de sol multicouche à comportement non linéaire ». In : *arXiv :1402.2887 [physics]* (fév. 2014) (cf. p. 35, 140).



- [SLS12] M. P. SANTISI D'AVILA, L. LENTI et J.-F. SEMBLAT. « Modelling strong seismic ground motion : three-dimensional loading path versus wavefield polarization ». In : *Geophysical Journal International* 190.3 (2012), p. 1607-1624 (cf. p. 20, 35, 140).
- [SS08] D. J. SEGALMAN et M. J. STARR. « Inversion of Masing models via continuous Iwan systems ». en. In : *International Journal of Non-Linear Mechanics* 43.1 (jan. 2008), p. 74-80 (cf. p. 20).
- [Sem97] J. F. SEMBLAT. « Rheological interpretation of Rayleigh damping ». In : *Journal of Sound and Vibration* 206.5 (1997), p. 741-744 (cf. p. 101).
- [SP94] G. SERIANI et E. PRIOLO. « Spectral element method for acoustic wave simulation in heterogeneous media ». en. In : *Finite Elements in Analysis and Design* 16 (juin 1994), p. 337-348 (cf. p. 7, 50).
- [Ser99] D. SERRE. *Systems of Conservation Laws 1 : Hyperbolicity, Entropies, Shock Waves*. en. Cambridge University Press, mai 1999 (cf. p. 76).
- [SO87] P. M. SHEARER et J. A. ORCUTT. « Surface and near-surface effects on seismic waves—theory and borehole seismometer results ». en. In : *Bulletin of the Seismological Society of America* 77.4 (août 1987), p. 1168-1196 (cf. p. 132).
- [Shu91] B. C. C.-W. SHU. « The Runge-Kutta local projection P1-discontinuous-Galerkin finite element method for scalar conservation laws ». en. In : *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis* 25.3 (1991), p. 337-361 (cf. p. 54).
- [TBR12] R. TABORDA, J. BIELAK et D. RESTREPO. « Earthquake Ground-Motion Simulation including Nonlinear Soil Effects under Idealized Conditions with Application to Two Case Studies ». en. In : *Seismological Research Letters* 83.6 (nov. 2012), p. 1047-1060 (cf. p. 5).
- [Tag+12] J. TAGO, V. M. CRUZ-ATIENZA, J. VIRIEUX, V. ETIENNE et F. J. SÁNCHEZ-SESMA. « A 3D hp-adaptive discontinuous Galerkin method for modeling earthquake dynamics : DG-FEM for rupture dynamics ». en. In : *Journal of Geophysical Research : Solid Earth* 117.B9 (sept. 2012), n/a-n/a (cf. p. 5).
- [Tho50] W. T. THOMSON. « Transmission of Elastic Waves through a Stratified Solid Medium ». In : *Journal of Applied Physics* 21.2 (fév. 1950), p. 89-93 (cf. p. 63).
- [Tor09] E. F. TORO. « Notions on Hyperbolic Partial Differential Equations ». In : *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*. Springer, 2009, p. 41-86 (cf. p. 61).
- [VJS00] K. E. VAN DEN ABEELE, P. A. JOHNSON et A. SUTIN. « Nonlinear Elastic Wave Spectroscopy (NEWS) Techniques to Discern Material Damage, Part I : Nonlinear Wave Modulation Spectroscopy (NWMS) ». en. In : *Research in Nondestructive Evaluation* 12.1 (mar. 2000), p. 17-30 (cf. p. 122).
- [Van+01] K. E. VAN DEN ABEELE, A. SUTIN, J. CARMELIET et P. A. JOHNSON. « Micro-damage diagnostics using nonlinear elastic wave spectroscopy (NEWS) ». In : *Ndt & E International* 34.4 (2001), p. 239-248 (cf. p. 18).
- [Viq15] J. VIQUERAT. « Simulation of electromagnetic waves propagation in nano-optics with a high-order discontinuous Galerkin time-domain method ». English. Thèse de doct. Nice : Université de Nice, déc. 2015 (cf. p. 8, 41).

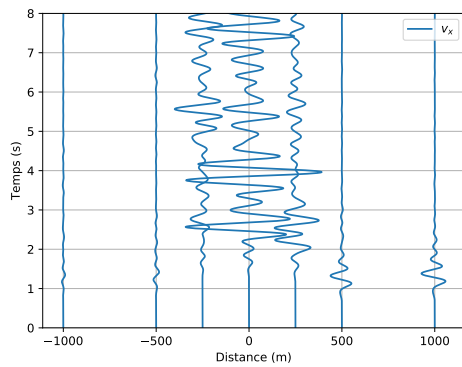
- [Vir86] J. VIRIEUX. « P-SV wave propagation in heterogeneous media : Velocity-stress finite-difference method ». In : *GEOPHYSICS* 51.4 (avr. 1986), p. 889-901 (cf. p. 6, 46).
- [VD91] M. VUCETIC et R. DOBRY. « Effect of Soil Plasticity on Cyclic Response ». en. In : *Journal of Geotechnical Engineering* 117.1 (jan. 1991), p. 89-107 (cf. p. 21).
- [Wil+10] L. C. WILCOX, G. STADLER, C. BURSTEDDE et O. GHATTAS. « A high-order discontinuous Galerkin method for wave propagation through coupled elastic–acoustic media ». en. In : *Journal of Computational Physics* 229.24 (déc. 2010), p. 9373-9396 (cf. p. 8, 89).
- [WNG79] K. WINKLER, A. NUR et M. GLADWIN. « Friction and seismic attenuation in rocks ». en. In : *Nature* 277.5697 (fév. 1979), p. 528-531 (cf. p. 6).
- [Xu+03] J. XU, J. BIELAK, O. GHATTAS et J. WANG. « Three-dimensional nonlinear seismic ground motion modeling in basins ». In : *Physics of the Earth and Planetary Interiors. The quantitative prediction of strong-motion and the physics of earthquake sources* 137.1–4 (mai 2003), p. 81-95 (cf. p. 5).
- [Yee66] K. YEE. « Numerical solution of initial boundary value problems involving maxwell's equations in isotropic media ». en. In : *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* 14 (mai 1966), p. 302-307 (cf. p. 46).
- [You01] J. L. YOUNG. « High-order, leapfrog methodology for the temporally dependent Maxwell's equations ». In : *Radio Science* 36.1 (jan. 2001), p. 9-17 (cf. p. 8).



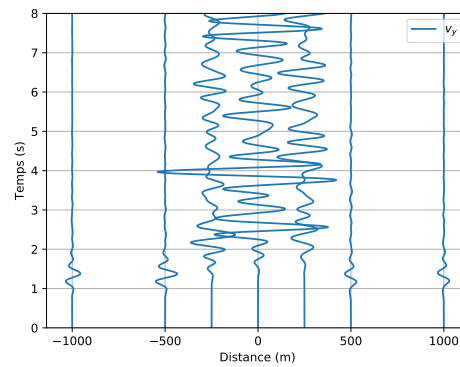


# Vitesses calculées dans le cas test 6.3

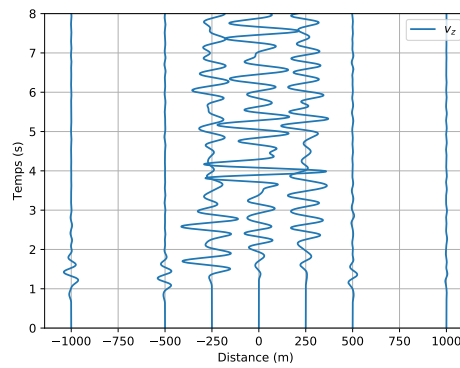
## A.1 Cas linéaire, source $s_1(t)$



(a)

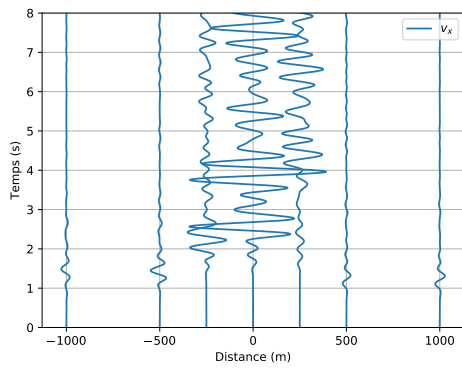


(b)

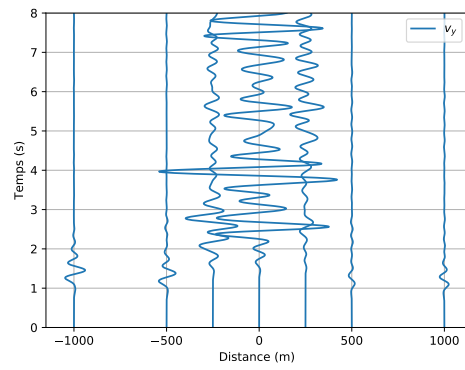


(c)

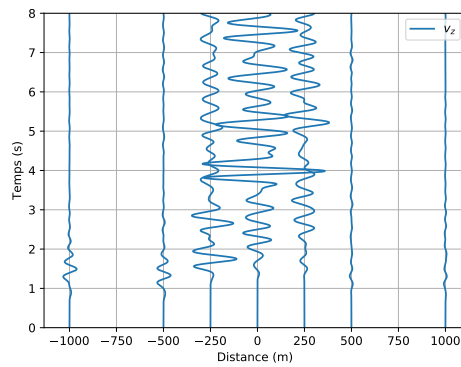
**Figure A.1.:** Composantes de la vitesse enregistrées en surface dans le cas linéaire, coupe selon  $Ox$ .



(a)



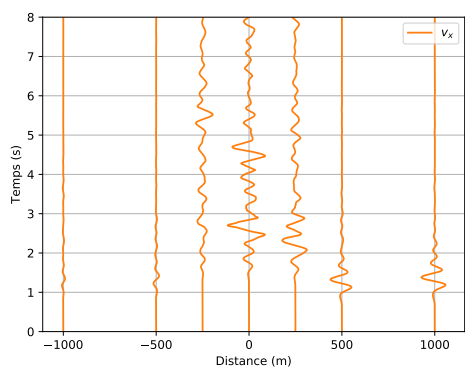
(b)



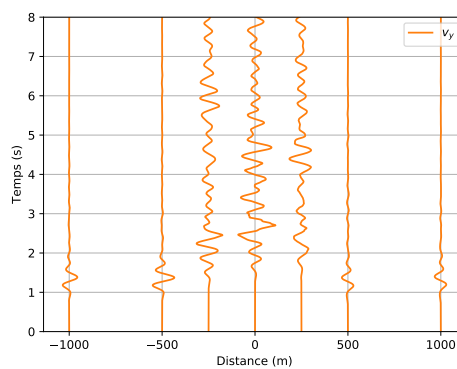
(c)

Figure A.2.: Composantes de la vitesse enregistrées en surface dans le cas linéaire, coupe selon  $Oy$ .

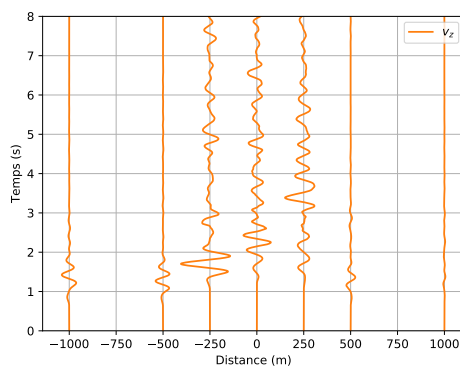
## A.2 Cas élastoplastique, source $s_1(t)$



(a)

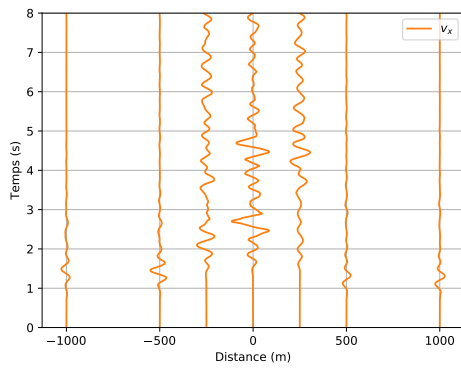


(b)

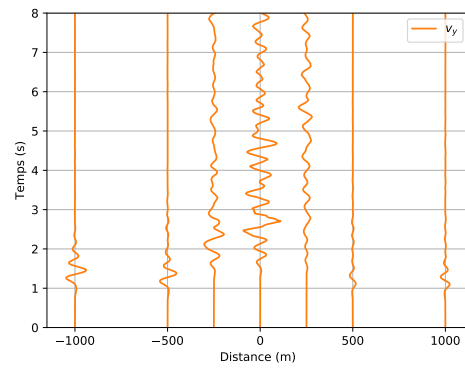


(c)

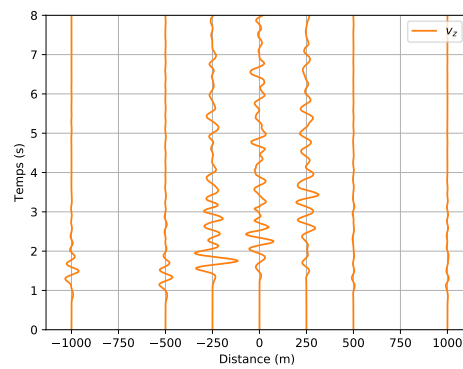
**Figure A.3.:** Composantes de la vitesse enregistrées en surface dans le cas élastoplastique, coupe selon  $Ox$ .



(a)



(b)



(c)

**Figure A.4.:** Composantes de la vitesse enregistrées en surface dans le cas élastoplastique, coupe selon  $Oy$ .

### A.3 Cas linéaire, source $s_2(t)$

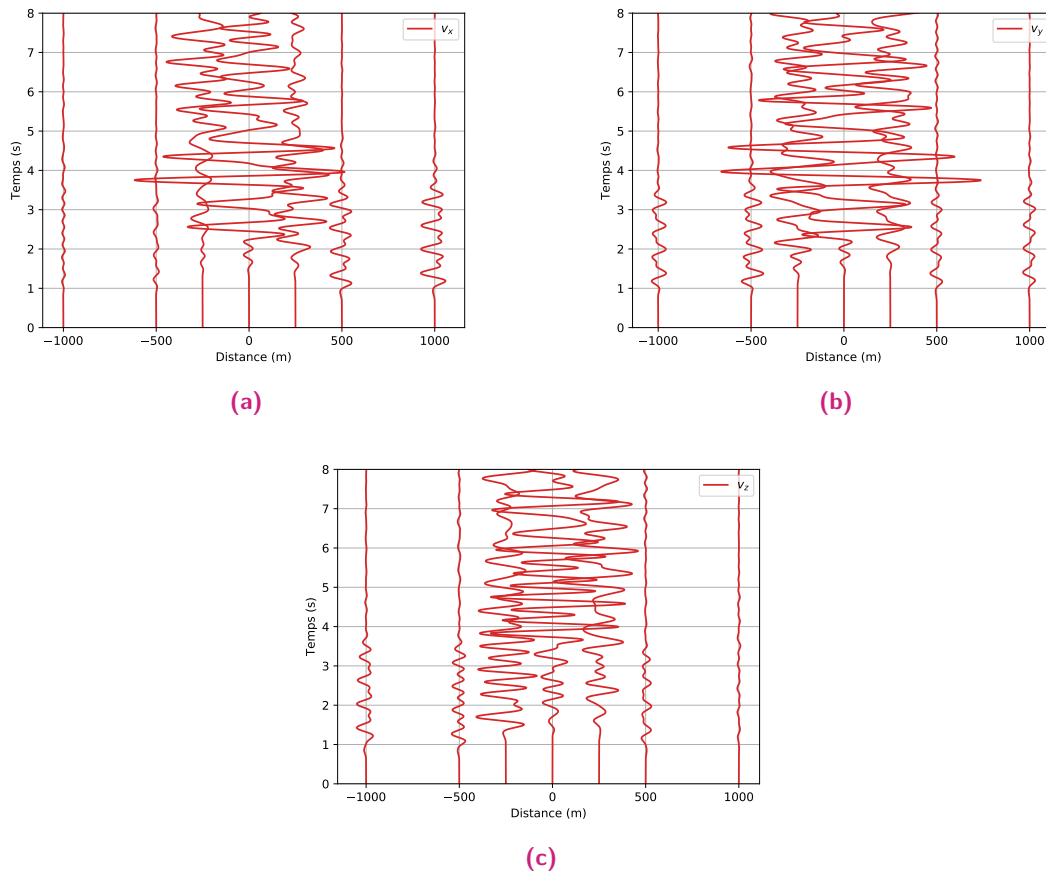


Figure A.5.: Composantes de la vitesse enregistrées en surface dans le cas linéaire, coupe selon  $Ox$ .

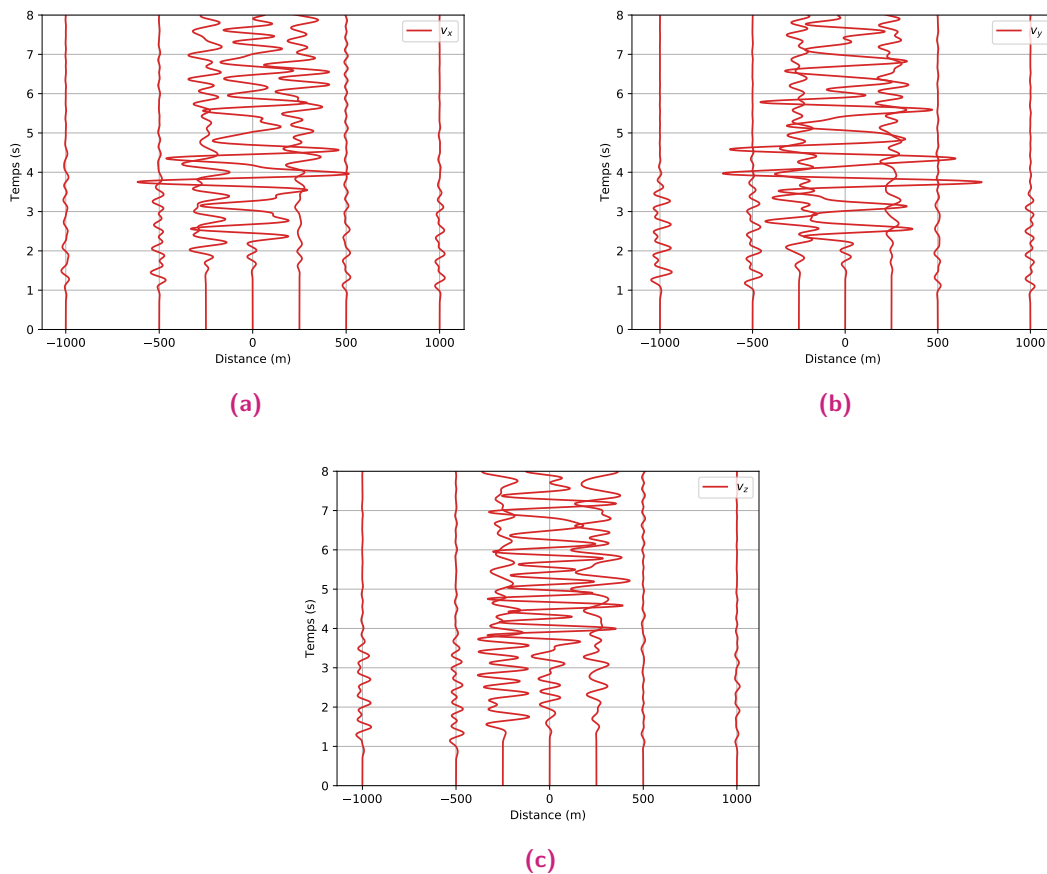
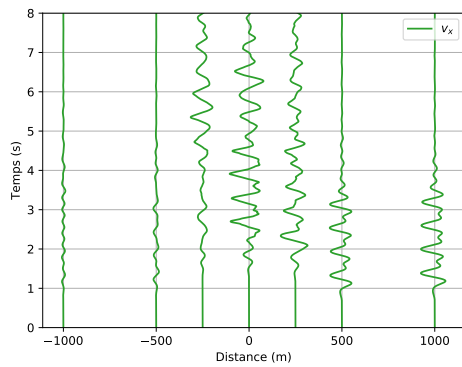
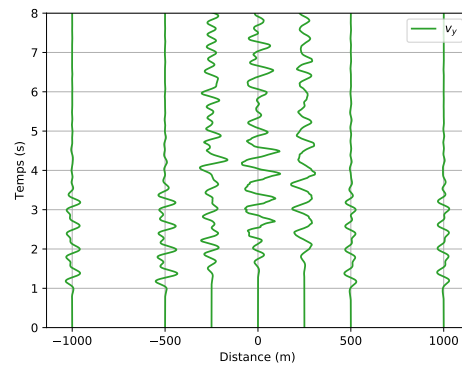


Figure A.6.: Composantes de la vitesse enregistrées en surface dans le cas linéaire, coupe selon  $Oy$ .

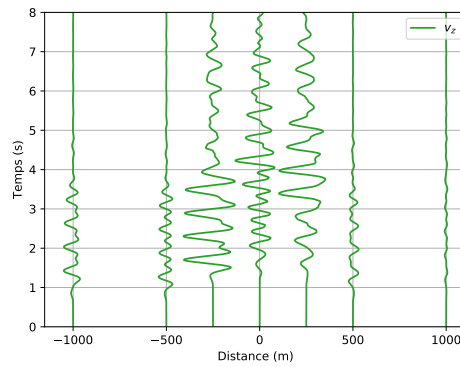
## A.4 Cas élastoplastique, source $s_2(t)$



(a)



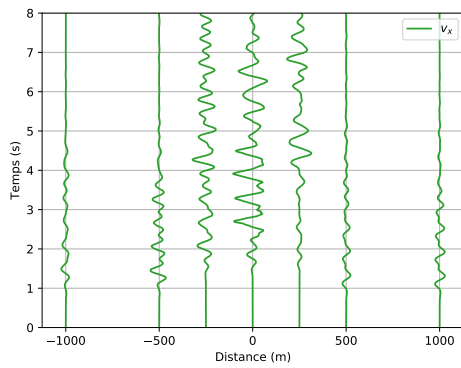
(b)



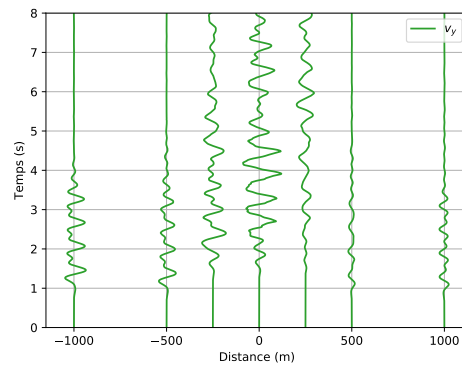
(c)

**Figure A.7.:** Composantes de la vitesse enregistrées en surface dans le cas élastoplastique, coupe selon  $Ox$ .

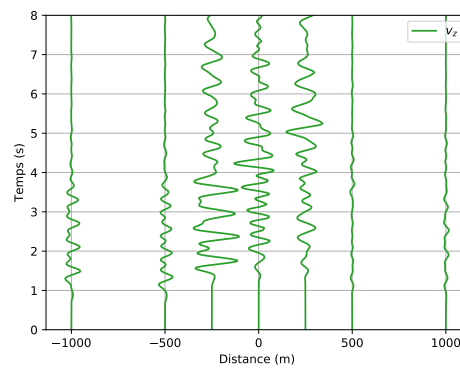




(a)



(b)



(c)

**Figure A.8.:** Composantes de la vitesse enregistrées en surface dans le cas élastoplastique, coupe selon  $Oy$ .

## Colophon

Cette thèse a été rédigée avec  $\text{\LaTeX}$ 2 $\epsilon$ , en utilisant le style *Clean Thesis*, développé par Ricardo Langner<sup>1</sup>.

---

1. <http://cleanthesis.der-ric.de/>

