



**HAL**  
open science

# **Théorèmes d'existence en temps court du flot de Ricci pour des variétés non-complètes, non-éffondrées, à courbure minorée.**

Raphaël Hochard

► **To cite this version:**

Raphaël Hochard. Théorèmes d'existence en temps court du flot de Ricci pour des variétés non-complètes, non-éffondrées, à courbure minorée.. Géométrie différentielle [math.DG]. Université de Bordeaux, 2019. Français. NNT : 2019BORD0006 . tel-02092609

**HAL Id: tel-02092609**

**<https://theses.hal.science/tel-02092609>**

Submitted on 8 Apr 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE PRÉSENTÉE  
POUR OBTENIR LE GRADE DE  
DOCTEUR DE  
L'UNIVERSITÉ DE BORDEAUX  
ÉCOLE DOCTORALE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE  
SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES PURES  
Par Raphaël Hochard.

---

Théorèmes d'existence en temps court du flot de Ricci  
pour des variétés non-complètes, non-éffondrées, à  
courbure minorée.

Sous la direction de : Laurent BESSIÈRES

---

Soutenue le 22 janvier 2019.

Rapporteurs :

M. CARRON, Gilles, Professeur à l'Université de Nantes  
M. SIMON, Miles, Professeur à l'Université de Magdebourg

Membres du jury :

M. BESSIERES, Laurent, Professeur à l'Université de Bordeaux (Directeur)  
M. BESSON, Gérard, Directeur de Recherche à l'Université de Grenoble (**Président**)  
M. CARRON, Gilles, Professeur à l'Université de Nantes (Rapporteur)  
M. KOZIARZ, Vincent, Professeur à l'Université de Bordeaux (Examinateur)

# Théorèmes d'existence en temps court du flot de Ricci pour des variétés non-complètes, non-effondrées, à courbure minorée.

**Résumé :** Le flot de Ricci est une équation aux dérivées partielles qui régit l'évolution d'une métrique riemannienne dépendant d'un paramètre de temps sur une variété différentielle. D'abord introduit et étudié par R. Hamilton, il est à l'origine de la solution de la conjecture de géométrisation des variétés compactes de dimension 3 par G. Perelman en 2001. La théorie classique concernant l'existence en temps court des solutions, due à Hamilton et à Shi, garantit (en dimension quelconque) l'existence d'un flot soit sur une variété compacte, soit lorsque la métrique initiale est complète avec une borne sur la norme du tenseur de courbure. En l'absence de cette borne, on conjecture qu'on peut trouver, à partir de la dimension 3, des données initiales pour lesquelles il n'existe pas de solution. Dans cette thèse, on démontre des théorèmes d'existence en temps court du flot sous des hypothèses plus faibles qu'une borne sur la norme du tenseur de courbure. Pour cela, on introduit une construction générale qui, pour une métrique riemannienne  $g$  quelconque sur une variété  $M$ , pas nécessairement complète, permet de produire une solution de l'équation du flot sur un domaine ouvert  $\mathcal{D}$  de l'espace-temps  $M \times [0, T]$  qui contient la tranche de temps initiale, avec  $g$  pour donnée initiale. On montre ensuite que sous des hypothèses adaptées sur la métrique  $g$ , on contrôle la forme du domaine  $\mathcal{D}$ . En particulier, lorsque la métrique  $g$  est complète,  $\mathcal{D}$  contient un ensemble de la forme  $M \times [0, t]$ , avec  $t > 0$ , ce qui revient à dire qu'il existe un flot au sens classique dont la donnée initiale est  $g$ .

Les "hypothèses adaptées" qui conduisent à des théorèmes d'existence sont de trois types. Dans tout les cas, on suppose une minoration uniforme du volume des boules de rayon au plus 1, à quoi on ajoute

a) en dimension 3, une minoration du tenseur de Ricci,

b) en dimension  $n$ , une minoration d'une notion de courbure dite "courbure isotrope  $\Gamma$ "

ou bien

c) en dimension  $n$ , une borne sur la norme du tenseur de Ricci et une hypothèse qui de proximité métrique des boules de rayon au plus 1 avec une boule de même rayon dans un produit métrique entre un espace de dimension 3 et un facteur euclidien de dimension  $n - 3$ .

De plus, avec ces résultats d'existence viennent des estimations sur le temps d'existence et les propriétés de régularisation du flot quantifiées en fonction des hypothèses sur la donnée initiale. La possibilité de régulariser, globalement ou localement, les métriques riemanniennes avec de telles estimations a des conséquences sur les espaces métriques singuliers obtenus comme limites, pour la distance de Gromov-Hausdorff, de suites de variétés satisfaisant uniformément aux conditions a), b) ou c). En effet, des théorèmes de compacité classiques pour le flot de Ricci permettent d'extraire un flot limite, étant donnée une suite de métriques initiales satisfaisant uniformément à ces hypothèses, et possédant donc toutes un flot pour un temps contrôlé. Lorsque les métriques en question approchent, pour la topologie de Gromov-Hausdorff, un espace singulier, cette solution limite s'interprète comme un flot régularisant l'espace singulier en question, et son existence contraint la topologie de cet espace singulier.

**Mots clef :** Flot de Ricci, Géométrie riemannienne, Courbure de Ricci minorée, Espaces métriques singuliers, Analyse géométrique.

# Short-time existence theorems for the Ricci flow of non-complete, non-collapsed manifold with curvature bounded from below.

**Abstract :** The Ricci flow is a partial differential equation governing the evolution of a Riemannian metric depending on a time parameter  $t$  on a differential manifold. It was first introduced and studied by R. Hamilton, and eventually led to the solution of the Geometrization conjecture for closed three-dimensional manifolds by G. Perelman in 2001. The classical short-time existence theory for the Ricci Flow, due to Hamilton and Shi, asserts, in any dimension, the existence of a flow starting from any initial metric when the underlying manifold is compact, or for any complete initial metric with a bound on the norm of the curvature tensor otherwise. In the absence of such a bound, though, the conjecture is that starting from dimension 3 one can find such initial data for which there is no solution. In this thesis, we prove short-time existence theorems under hypotheses weaker than a bound on the norm of the curvature tensor. To do this, we introduce a general construction which, for any Riemannian metric  $g$  (not necessarily complete) on a manifold  $M$ , allows us to produce a solution to the equation of the flow on an open domain  $\mathcal{D}$  of the space-time  $M \times [0, T]$  which contains the initial time slice, with  $g$  as an initial datum. We proceed to show that under suitable hypotheses on  $g$ , one can control the shape of the domain  $\mathcal{D}$ , so that in particular,  $\mathcal{D}$  contains a subset of the form  $M \times [0, t]$  with  $t > 0$  if  $g$  is complete.

By “suitable hypothesis”, we mean one of the following. In any case, we assume a lower bound on the volume of balls of radius at most 1, plus

*a)* in dimension 3, a lower bound on the Ricci tensor,

*b)* in dimension  $n$ , a lower bound on the so-called “isotropic curvature  $\mathbf{I}$ ”

or

*c)* in dimension  $n$ , a bound on the norm of the Ricci tensor, as well as a hypothesis which guarantees the metric proximity of every ball of radius at most 1 with a ball of the same radius in a metric product between a three-dimensional metric space and a  $n - 3$  dimensional Euclidian factor.

Moreover, with these existence results come estimates on the existence time and regularization properties of the flow, quantified in terms of the hypotheses on the initial data. The possibility to regularize metrics, locally or globally, with such estimates has consequences in terms of the metric spaces obtained as limits, in the Gromov-Hausdorff topology, of sequences of manifolds uniformly satisfying *a)*, *b)* or *c)*. Indeed, the classical compactness theorems for the Ricci flow allow for the extraction of a limit flow for any sequence of initial metrics uniformly satisfying the hypotheses and thus possessing a flow for a controlled amount of time. In the case when these metrics approach a singular space in the Gromov-Hausdorff topology, such a limit solution can be interpreted as a flow regularizing the singular limit space, the existence of which puts constraints on the topology of this space.

**Keywords :** Ricci flow, Riemannian geometry, Ricci curvature bounded from below, Ricci limit spaces, Geometric analysis.

Institut Mathématique de Bordeaux,  
351 cours de la Libération,  
33405 Talence

# Remerciements

Mes premiers remerciements vont bien sûr à mon directeur de thèse Laurent Bessières. Difficile de rendre justice à ses qualités d'encadrant, aussi bien humaines que du point de vue des mathématiques, sans embarras. Je me contente donc de le remercier pour sa grande patience et son attitude toujours encourageante dans les moments où rien ne semblait avancer, pour le temps qu'il m'a consacré toutes ces dernières années, et en particulier pour les relectures, corrections, conseils sans nombre qu'il m'a prodigués au moment de l'écriture du manuscrit.

Je remercie Peter Topping pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail, pour son invitation et son accueil chaleureux à Warwick, et pour le temps qu'il m'a consacré. Je remercie aussi Miles Simon, Thomas Richard, Gilles Carron, Samuel Tapie et Gérard Besson pour leurs invitations en séminaire et les conversations qui ont suivi, ainsi que tous les membres de l'ANR GTO (devenue CCEM) dont les réunions ont été des sources de motivation, d'apprentissage mathématique et aussi de détente.

Je remercie Gilles Carron et Miles Simon pour avoir accepté de rapporter cette thèse et pour le temps qu'ils ont consacré à sa lecture, ainsi que Gérard Besson et Vincent Koziarz pour avoir accepté de faire partie de mon Jury.

Je remercie enfin tout mes camarades de Bordeaux, par ordre d'apparition Nikolà, Duong, Olga, Zoé, Louis, Jean-Baptiste, Bruno, Iuliana, Jonathan et Nicolas, Elsa, Sami.

# Conventions et notation

Toutes les variétés que l'on considère sont supposées lisses, sans bord. Les métriques riemanniennes que l'on considère sont aussi supposées lisses, mais pas nécessairement complètes. Etant donné une métrique riemannienne  $g$  sur une variété  $M$  de dimension  $n$ ,

$\text{Rm } g : \Lambda_x^2 M \rightarrow \Lambda_x^2$  désigne l'opérateur de Riemann.

$\text{Rc } g : T_x M \times T_x M \rightarrow \mathbb{R}$  désigne le tenseur de Ricci. On fera l'abus de notation  $\text{Rc } g \geq -k$  pour  $\text{Rc } g \geq -kg$ .

$R_g$  désigne la courbure scalaire.

$d\mu_g$  désigne l'élément de volume Riemannien. On note  $\text{vol}_g U$  le volume d'une partie  $U \subset M$  (parfois abrégé  $|U|_g$ ), et si  $k < n$ , et  $N$  est une sous-variété de  $M$  de dimension  $k$ , on note  $\text{vol}_g^k N$  le volume de  $N$  pour la métrique induite par  $g$ .

# Table des matières

<b>Conventions et notations</b>	<b>5</b>
<b>Introduction</b>	<b>8</b>
<b>I Évolution de certaines quantités géométriques sous des hypothèses de décroissance de la courbure</b>	<b>25</b>
I.1 Évolution de la fonction distance et de l'élément de volume . . . . .	25
I.1.1 Bornes élémentaires . . . . .	25
I.1.2 Continuité au voisinage du temps initial . . . . .	27
I.1.3 Dilatation des distances en moyenne . . . . .	35
I.1.4 Quelques propriétés de la "distance parabolique" . . . . .	44
I.2 Bornes supérieures sur le noyau de la chaleur modifié (d'après R. Bamler, E. Cabezas-Rivas et B. Wilking) . . . . .	54
I.2.1 Problème de Dirichlet à bord pour l'opérateur $\partial_t - \Delta - R_{g(t)}$ . . . . .	55
I.2.2 Bornes supérieures sur $\mathcal{K}^*$ et $ \nabla \mathcal{K}^* $ . . . . .	59
I.3 Préservation d'une structure de produit à toutes les échelles . . . . .	63
I.3.1 Structure produit à toutes les échelles : définitions . . . . .	63
I.3.2 Préservation d'une structure de produit par le flot . . . . .	67
<b>II Minorations de courbure préservées par le flot</b>	<b>76</b>
II.1 Principes du minimum . . . . .	76
II.2 Minorations obtenues par l'analyse du noyau de la chaleur modifié (d'après R. Bamler, E. Cabezas-Rivas, B. Wilking) . . . . .	79
II.3 Minorations de courbure préservées en présence d'une structure produit à toutes les échelles . . . . .	82
II.3.1 Décomposition du tenseur de Riemann et équations d'évolutions . . . . .	82
II.3.2 Coordonnées locales et leur régularisation . . . . .	87
II.3.3 Analyse des équations d'évolution de la courbure en présence d'une structure produit . . . . .	102
<b>III Régularisation locale d'une métrique par le flot de Ricci</b>	<b>105</b>
III.1 Décroissance de la courbure pour un flot non-effondré à courbure minorée . . . . .	105
III.2 Régularisation locale d'une donnée initiale par le flot . . . . .	109
III.2.1 Régularisation locale sous des hypothèses de décroissance a priori . . . . .	109
III.2.2 Preuve des théorèmes $E$ et $F$ : énoncés de type "pseudo-localité" . . . . .	115



<b>IV Flot de donnée initiale non-compacte ou non-complète</b>	<b>117</b>
IV.1 Le flot partiel : définition et construction . . . . .	117
IV.1.1 Modifier une métrique pour la rendre complète . . . . .	117
IV.1.2 Construction du flot partiel (preuve du théorème <i>A</i> ) . . . . .	120
IV.2 Preuve des théorèmes <i>B</i> , <i>C</i> et <i>D</i> . . . . .	127
<b>A Flot d'une donnée initiale singulière et convergence</b>	<b>129</b>
<b>B Flots complets à courbure bornée</b>	<b>131</b>

# Introduction

## Contexte, principaux résultats et questions

Dans son article fondateur [19] publié en 1982, R. Hamilton a introduit l'équation du flot de Ricci

$$\partial_t g(t) = -2\text{Rc } g(t), \quad (1)$$

décrivant l'évolution d'une famille lisse à un paramètre de métriques riemanniennes  $\{g(t)\}_{0 \leq t \leq T}$  sur une variété différentielle  $M$ . Hamilton établit d'abord l'existence en temps court et l'unicité de la solution du problème de Cauchy associé pour une condition initiale  $g(0) = g$ , où  $g$  est une métrique riemannienne sur  $M$ , dans le cas où la variété  $M$  est compacte sans bord. Sous certaines conditions géométriques sur la donnée initiale du flot, une étude qualitative de la solution jusqu'à son temps d'existence maximal est possible

**Théorème 0.1** (R. Hamilton, 1982, [19]). *Si  $(M^3, g)$  est une variété riemannienne compacte de dimension 3 à courbure de Ricci strictement positive, alors il existe un intervalle maximal borné  $[0, T[$  d'existence du flot, au bout duquel  $\text{diam}_{g(t)} M$  tend vers 0. De plus, la métrique "éclatée" au voisinage de  $T$   $\tilde{g}(t) = \frac{1}{4(T-t)}g(t)$  converge vers une métrique à courbure sectionnelle constante égale à 1.*

Puisque toute forme d'espace à courbure strictement positive est un quotient de la sphère ronde, le théorème 0.1 a une application immédiate à la topologie des variétés différentielles.

**Corollaire 0.2** (R. Hamilton, 1982, [19]). *Toute variété riemannienne compacte de dimension 3 à courbure de Ricci strictement positive est difféomorphe à un quotient de la sphère  $\mathbb{S}^3$ .*

Il y a au moins deux directions dans lesquelles on peut tenter d'obtenir d'autres résultats dans l'esprit du beau corollaire 0.2. La première consiste à chercher, en dimension  $n \geq 4$ , des conditions optimales sur la métrique initiale qui garantissent un contrôle du flot de Ricci jusqu'à son premier temps singulier et une conclusion analogue à celle du théorème 0.1. On peut estimer cette question résolue par le théorème suivant.

**Théorème 0.3** (S. Brendle - R. Schoen, 2009 [2]). *Si  $(M^n, g)$  est une variété riemannienne compacte de dimension  $n$  qui satisfait à la condition de courbure strictement positive dite  $\text{PIC}_1$ , alors il existe un intervalle maximal borné  $[0, T[$  d'existence du flot tel que la métrique "éclatée"  $\tilde{g}(t) = \frac{1}{2n(T-t)}g(t)$  converge vers une métrique à courbure sectionnelle constante égale à 1.*

La condition de courbure  $\text{PIC}_1$  coïncide avec "courbure de Ricci positive" en dimension 3, et est strictement plus restrictive pour  $n \geq 4$ . Un des points essentiels de la preuve de cet énoncé, comme de celle de la théorème 0.1, est que la condition de courbure imposée sur la métrique initiale est préservée par le flot de Ricci. Au paragraphe II.2 sont rappelées les définitions et

les faits essentiels concernant ces conditions préservées. On peut aussi consulter [29] pour une exposition détaillée.

L'autre direction, en dimension 3 ou plus, consiste à imposer des conditions géométriques moins restrictives sur la donnée initiale (typiquement une condition de courbure minorée assortie éventuellement d'une hypothèse de non-effondrement) qui incluent éventuellement des variétés non-compactes. Les conclusions sont alors généralement beaucoup plus faibles aussi. En restant dans le monde des variétés compactes, on a par exemple la proposition suivante, conséquence directe du théorème de pseudo-localité de Perelman ([27], 10.1 ou [22], 30.1)

**Proposition 0.4** (G. Perelman). *Il existe  $\delta(n)$  avec la propriété suivante. Soit  $(M^n, g)$  une variété riemannienne compacte de dimension  $n$  telle que*

$$\begin{aligned} R_g &\geq -1, \\ (\text{vol}_g^n \Omega)^{n-1} &\leq (1 + \delta) \omega_n (\text{vol}_g^{n-1} \partial\Omega)^n \end{aligned}$$

pour tout  $\Omega \subset M$  domaine à bord lisse avec  $\text{diam}_g \Omega \leq r_0$ ,

$$\text{diam}_g M \leq D_0.$$

où  $0 < r_0 \leq 1$ ,  $D_0 > 0$  et  $\omega_n$  désigne la constante isopérimétrique euclidienne. Alors le flot de Ricci sur  $M$  de condition initiale  $g$  peut être prolongé jusqu'au temps  $\delta^2 r_0^2$ , avec les estimations

$$\begin{aligned} \sup_M |\text{Rm } g_t| &\leq \frac{1}{t}, & \inf_M \text{inj } g_t &\geq \sqrt{t}, \\ \text{diam}_{g_t} M &\leq 2D_0. \end{aligned}$$

On le voit, la description précise de la solution au voisinage de son temps d'existence maximal donnée par le théorème 0.1 cède la place à un contrôle des propriétés du flot beaucoup plus faible, en fait :

- 1) Une minoration  $\epsilon_{\mathcal{M}}^2$  du temps d'existence maximal du flot, uniforme sur la famille  $\mathcal{M}$  des variétés riemanniennes vérifiant un certain ensemble de conditions géométriques.
- 2) Un contrôle, uniforme sur cette famille, des propriétés de régularisation du flot, c'est à dire de la taille au temps  $t > 0$  des boules comparables (au moins au sens Lipschitz, en fait en un sens beaucoup plus fort) à la boule euclidienne  $\mathbb{B}^n(1)$ .

L'existence d'un flot avec de telles propriétés a néanmoins déjà des conséquences en termes de topologie des variétés différentielles.

**Théorème 0.5** (G. Perelman - [27], 10.5, ou [22], 37). *Il existe  $\delta(n) > 0$  tel que la famille  $\mathcal{M}(n, r_0, D_0)$  des variétés riemanniennes de dimension  $n$  satisfaisant les hypothèses de la proposition 0.4 contient un nombre fini d'éléments à difféomorphisme près.*

En effet, chaque élément de la famille  $\mathcal{M}(n, r_0, D_0)$  considérée porte aussi une métrique (obtenue après avoir laissé évoluer la métrique initiale pendant un temps  $\epsilon^2 r_0^2$ ) dont les courbures sectionnelles, le rayon d'injectivité et le diamètre sont bornés uniformément sur la famille. Or, le théorème de compacité de Cheeger-Gromov affirme qu'étant donné  $r_1 > 0$  et  $D_1 > 0$ , la famille des variétés riemanniennes avec  $\text{inj } g \geq r_1$ ,  $|\text{Rm } g| \leq r_1^{-2}$  et  $\text{diam}_g M \leq D_1$  contient, à difféomorphisme près, un nombre fini d'éléments.

Être en mesure d'établir 1) et 2) pour les flots d'une famille  $\mathcal{M}$  de variétés riemanniennes de dimension fixée  $n$  a aussi des implications dans l'étude des espaces métriques singuliers obtenus

comme limites de suites d'éléments de  $\mathcal{M}$ . Restons pour le moment dans le cas de variétés compactes. On introduit l'ensemble  $\mathcal{X}$  des classes d'isométries d'espaces métriques compacts, que l'on munit classiquement de la distance de Gromov-Hausdorff (voir par exemple [3], Ch. 7). La famille  $\mathcal{M}$  se plonge naturellement dans  $\mathcal{X}$ , et ce sont les espaces métriques qui constituent son adhérence que l'on souhaite étudier grâce au flot.

Supposons que les éléments de la famille  $\mathcal{M}$  vérifient les propriétés 1) et 2). Un théorème de compacité, analogue pour le flot de Ricci du théorème de compacité de Cheeger-Gromov, s'applique alors à l'ensemble des flots des éléments de  $\mathcal{M}$ . Par conséquent, si  $(M_i^n, g_i)$  est une suite de variétés différentielles compactes dont les flots vérifient 1) et 2), et tels que  $\text{diam}(M_i, g_i, t)$  est borné uniformément, il existe une variété différentielle compacte  $M_\infty$  sur laquelle est défini pour  $t \in ]0, \epsilon_{\mathcal{M}}^2]$  un flot de Ricci limite  $g_\infty(t)$ , ainsi que, à partir d'un certain rang  $i$ , une suite de difféomorphismes  $\phi_i : M_\infty \rightarrow M_i$  tels que les flots  $\phi_i^* g_i(t)$  convergent vers  $g_\infty(t)$  uniformément sur tout intervalle  $[\eta, \epsilon_{\mathcal{M}}^2]$ . Si la suite des données initiales  $(M_i, g_i)$  converge au sens de Gromov-Hausdorff vers un espace métrique  $(X, d)$ , on peut montrer sous des hypothèses raisonnables que la fonction distance  $d_\infty(t)$  sur  $M_\infty$  associée à la métrique  $g_\infty(t)$  converge simplement vers une "donnée initiale"  $d_0$  éventuellement singulière (au sens où elle n'est en général pas induite par une métrique riemannienne). Sous les mêmes hypothèses raisonnables, l'espace métrique  $(X, d)$  est alors isométrique à  $(M_\infty, d_0)$  (voir l'appendice A pour l'énoncé précis).

$$\begin{array}{ccccc}
t = 0 & & t > 0 \text{ fixé} & & t = \epsilon_{\mathcal{M}}^2 \\
\cdots & & \cdots & & \cdots \\
(M_i, g_i) & \rightsquigarrow & (M_i, g_i(t)) & \rightsquigarrow & (M_i, g_i(\epsilon_{\mathcal{M}}^2)) \\
\text{G-H} \downarrow & & \mathcal{C}^\infty \downarrow & \left. \begin{array}{c} \nearrow \phi_i \\ \text{difféo.} \end{array} \right. & \mathcal{C}^\infty \downarrow \\
(X, d) \simeq (M_\infty, d_0) & \xleftarrow[\text{isométrie}]{\mathcal{C}^0} & (M_\infty, g_\infty(t)) & \rightsquigarrow & (M_\infty, g_\infty(\epsilon_{\mathcal{M}}^2)) \\
& & t \rightarrow 0 & & 
\end{array}$$

La construction de ce flot limite  $(M_\infty, g_\infty)$  auquel on peut penser comme un flot de donnée initiale singulière  $(X, d)$ , nous fournit ainsi deux informations sur l'espace  $(X, d)$  limite des  $(M_i, g_i)$  :

- $a_n$ ) Tout espace limite  $(X, d_X)$  d'une suite d'éléments de  $\mathcal{M}$  possède une structure de variété topologique de dimension  $n$ <sup>1</sup>
  - $b_n$ ) Les éléments  $M_i$  de toute suite de variétés de  $\mathcal{M}$  convergent vers un espace métrique  $X$  sont tous homéomorphes à  $X$  à partir d'un certain rang (on parle de stabilité différentielle).
- La proposition 0.4 a pour conséquence, à titre d'exemple, que  $a_n$ ) et  $b_n$ ) s'appliquent à la famille  $\mathcal{M}(n, r_0, D_0)$ .

Un ensemble d'espaces singuliers particulièrement étudiés est constitués des espaces métriques obtenus comme limites de suite de variétés riemanniennes complètes de dimension fixée à courbure de Ricci minorée par  $-1$ . L'intérêt pour ces espaces remonte au théorème de relative compacité de Gromov.

1. On veut dire par là que l'ensemble  $X$  est une variété topologique dont les ouverts sont ceux que la distance  $d_X$  engendre.

**Théorème 0.6** (Gromov, [23] Ch. 5 ou [5] Ch. 1). *Pour  $n \geq 2$  fixé, l'ensemble des variétés riemanniennes pointées complètes de dimension  $n$  telles que  $\text{Rc } g \geq -1$  est relativement compacte dans l'ensemble des espaces métriques pointés localement compacts pour la topologie définie par la convergence de Gromov-Hausdorff pointée.*

D'une description des éléments dans l'adhérence de ces familles on tire ainsi parfois de nouveaux résultats sur les variétés elles-mêmes, selon un schéma de preuve par contradiction classique, où typiquement, d'une suite de variétés violant les conclusions désirées, on extrait une sous-suite convergeant vers un espace singulier. J. Cheeger et T. H. Colding ont initié et développé l'étude de ces espaces dans la série d'articles [7], [8] et [9] (voir aussi [5]), suivis par de nombreux autres auteurs, en particulier (mais pas uniquement) dans le cas où la limite est non-effondrée, c'est à dire lorsque la dimension de Hausdorff de l'espace limite est encore  $n$ .

On introduit donc la famille  $\mathcal{M}(n, v_0)$  des variétés riemanniennes complètes satisfaisant aux hypothèses

$$\begin{cases} \text{Rc } g \geq -1, \\ \text{vol}_g B(x, r) \geq v_0 r^n \text{ pour tout } x \in M \text{ et } 0 < r \leq 1, \end{cases} \quad (2)$$

pour une certaine constante  $v_0 > 0$ . Le premier résultat obtenu au cours de cette thèse concerne uniquement la dimension 3 et consiste à établir en toute généralité 1) et 2) pour la famille  $\mathcal{M}(3, v_0)$ . L'énoncé analogue lorsque les variétés de la famille sont supposées compactes où complètes à courbure bornée sont dus à M Simon ([32],[33]). Dans ces cas, l'existence en temps court du flot sur chaque variété est acquise, soit par le résultat de R. Hamilton mentionné plus haut (cas compact), soit par sa généralisation aux données initiales complètes à courbure bornée du à W.X Shi ([30]). Dans le cas général, il convient premièrement d'établir

- 0) Le flot de Ricci de donnée initiale  $(M, g)$  existe en temps court pour tout élément de la famille  $\mathcal{M}(3, v_0)$ .

On énonce pour le moment une version condensée de ce résultat, sous la forme du théorème 0.7 ci-dessous. Il apparaîtra comme un cas particulier du théorème  $B$  énoncé au paragraphe suivant.

**Théorème 0.7.** *(H., 2016, [21]) Il existe  $\epsilon(v_0), K(v_0)$  avec les propriétés suivantes. Soit  $(M^3, g)$  une variété riemannienne complète de dimension 3 satisfaisant aux hypothèses (2). Alors il existe sur  $M$  un flot de Ricci complet de donnée initiale  $g$  qui peut être prolongé jusqu'au temps  $\epsilon^2$ , avec les estimations*

$$|\text{Rm } g_t(x)| \leq \frac{K}{t}, \quad \text{inj}_x g_t \geq \sqrt{\frac{t}{K}}$$

pour tout  $x \in M, 0 < t \leq \epsilon^2$ .

Cet énoncé a pour conséquence d'établir  $a_3)$  et  $b_3)$  pour les espaces obtenus comme limites de variétés de dimension 3 satisfaisant aux hypothèses (2).

**Corollaire 0.8.** *Soit  $(X, x_0)$  un espace métrique pointé complet limite d'une suite de variétés riemanniennes pointées  $(M_i^3, x_i)$  de dimension 3, complètes, satisfaisant (2). Alors*

- $a_3)$   $X$  possède une structure de variété différentielle de dimension 3.
- $b_3)$  Pour tout  $R > 0$ , il existe à partir d'un certain rang  $i$  une suite de difféomorphismes  $\phi_i : \mathcal{U}_i \rightarrow \mathcal{V}_i$  avec  $B(x_0, R) \subset \mathcal{U}_i \subset X$  et  $B(x_i, R) \subset \mathcal{V}_i \subset M_i$  (stabilité différentielle locale).

Cet énoncé répond partiellement, en dimension 3, à une question posée par J. Cheeger et T. H. Colding, dont on rappellera plus bas la formulation complète. En réalité, le théorème  $B$  permet de résoudre complètement la question en dimension 3, voir le corollaire 0.13.

Il n'existe pas d'équivalent du théorème 0.7 en dimension  $n \geq 4$ . En effet, en découlerait alors l'équivalent du corollaire 0.8 en dimension  $n$ . Or Perelman construit dans [26] pour chaque  $n \geq 4$ , une suite de variétés riemanniennes complètes  $(M_i, g_i)$  dans  $\mathcal{M}(n, v_0)$  (pour un certain  $v_0 > 0$  fixé) de diamètre uniformément borné, telle que le deuxième nombre de Betti  $b_2(M_i)$  des éléments de la suite n'est pas borné. Après extraction, on peut supposer que la suite des  $M_i$  converge vers un espace limite compact  $(X, d_X)$ . La divergence de  $b_2(M_i)$  exclut la possibilité que les  $M_i$  soient toutes homéomorphes à  $X$  à partir d'un certain rang : la propriété  $b_n$  n'est pas satisfaite par la suite des  $M_i$ .

Une première direction, pour généraliser l'énoncé du théorème 0.7 en dimension  $n \geq 4$ , consiste à remplacer la condition  $\text{Rc } g \geq -1$  par une condition de courbure plus restrictive. Pour pouvoir étendre les méthodes de la preuve du théorème 0.7, la notion de courbure à laquelle on fait appel doit typiquement *i*) correspondre à une notion de courbure positive ou nulle préservée par le flot, *ii*) permettre une analyse des singularités se formant à courbure minorée, et enfin *iii*) garantir une inégalité de Bishop-Gromov entre les volumes des boules concentriques de rayon inférieure à 1. Parmi les notions classiques de courbure positives préservées, les plus faibles,  $\text{R}_{g(t)} \geq 0$  et  $\text{IC} \geq 0$  (courbure isotrope positive ou nulle) impliquent  $\text{R}_g \geq 0$  mais pas  $\text{Rc } g \geq 0$ , et ne garantissent pas *iii*). La notion de minoration la moins restrictive satisfaisant *i*), *ii*) et *iii*) semble être la minoration de la courbure dite  $\text{IC}_1$ , qui est équivalente, en dimension 3, à la minoration de la courbure de Ricci, et plus restrictive en dimension supérieure ou égale à 4. Des résultats dans cette direction ont été obtenus par R. Bamler, E. Cabezas-Rivas et B. Wilking dans [18]. L'énoncé qui suit en présente une version partielle et condensée<sup>2</sup>. En tout point  $(x, t)$  de l'espace-temps d'un flot, on désigne par  $\lambda_{\text{IC}_1}^-(x, t)$  et  $\lambda_{\text{IC}_2}^-(x, t)$  le minimum ponctuel des courbures  $\text{IC}_1$  et  $\text{IC}_2$  pour la métrique  $g(t)$ . On se reportera à la définition II.2.1 et à la définition II.2.3 pour une description détaillée.

**Théorème 0.9** (R. Bamler, E. Cabezas-Rivas, B. Wilking). *Soit  $(M^n, g)$  une variété riemannienne complète de dimension  $n$  satisfaisant*

$$(i) \text{ vol}_g B_g(x, r) \geq v_0 r^n,$$

*ainsi que l'une des deux conditions suivantes*

$$(ii) \lambda_{\text{IC}_2}^- \geq -1,$$

$$(ii') \lambda_{\text{IC}_1}^- \geq -1 \text{ et } \sup |\text{Rm } g| < +\infty.$$

*Alors il existe sur  $M$  un flot de Ricci complet de donnée initiale  $g$  qui peut être prolongé jusqu'au temps  $\epsilon^2$ , avec les estimations*

$$|\text{Rm } g_t(x)| \leq \frac{K}{t}, \quad \text{inj}_x g_t \geq \sqrt{\frac{t}{K}}$$

*pour tout  $x \in M$ ,  $0 < t \leq \epsilon^2$ .*

L'hypothèse de minoration de la courbure  $\text{IC}_2$  est plus restrictive que l'hypothèse de minoration de la courbure  $\text{IC}_1$ . Elle entraîne (et en dimension 3 est équivalente à) une minoration de toutes les courbures sectionnelles. Les méthodes exposées dans cette thèse permettent de lever la restriction sur la norme du tenseur de courbure dans le cas (*ii'*) et d'obtenir l'existence d'une

---

<sup>2</sup>. Dans [18] les auteurs traitent en particulier le cas de plusieurs autres notions de courbure minorées. Ils obtiennent pour certaines d'entre elles (en particulier pour  $\text{IC}_2$ , mais pas pour  $\text{IC}_1$ ) l'existence en temps court d'un flot de donnée initiale non-complète, par une méthode différente de la notre.

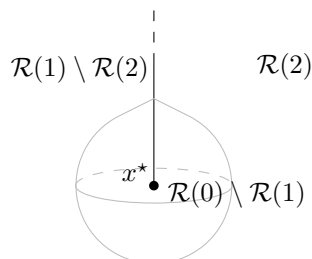
solution en temps court pour une donnée initiale éventuellement non-complète. Ce résultat fait l'objet du théorème *C* énoncé plus bas. Il a été obtenu indépendamment par Y. Lai dans [24]. En conséquence, la borne sur la norme du tenseur de courbure peut être retirée dans l'hypothèse (*ii'*) du théorème 0.9.

Une autre direction qui nous a paru intéressante est suggérée par une conjecture formulée par J. Cheeger et T. H. Colding dans l'introduction de [7] (conjecture 0.7). L'énoncé de cette conjecture repose sur la décomposition, introduite et étudiée par les auteurs dans le même article, d'un espace métrique obtenu comme limite non-effondrée de variétés complètes de dimension  $n$  avec  $\text{Rc } g \geq -1$ , en ensembles dits (faiblement) réguliers de rang  $k$  pour  $0 \leq k \leq n$ . Soit  $(X, x)$  un tel espace, limite d'une suite de variétés riemanniennes  $(M_i, p_i)$ . Pour  $y \in X$ , on appelle cône tangent à  $X$  en  $y$  (c'est un résultat non trivial de la théorie qu'on obtient en effet d'un cône métrique) toute valeur d'adhérence de toute suite pointée  $(\lambda_i X, y)$  où  $\lambda_i \rightarrow +\infty$ . On dit que le point  $y \in X$  appartient à l'ensemble  $k$  régulier  $\mathcal{R}(k)$  si il existe au moins un cône tangent en  $y$  isométrique à un espace métrique produit  $Y \times \mathbb{R}^k$  pour un certain espace métrique  $Y$ . On a donc

$$\mathcal{R}(n) \subset \mathcal{R}(n-1) \subset \dots \subset \mathcal{R}(0) = X$$

**Exemple:** Soit  $d_0$  une distance sur  $\mathbb{S}^2$  induite par une métrique riemannienne lisse à courbure positive définie sur  $\mathcal{S}^2 \setminus x$  pour un point  $x \in \mathbb{S}^2$ , avec un point conique en  $x$  d'angle strictement inférieur à  $2\pi$ , et telle qu'enfin  $\text{diam}(\mathbb{S}^2, d_0) < \pi$ . Le cône métrique  $(X, d)$  sur  $(\mathbb{S}^2, d_0)$  est défini comme l'espace  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}_+ / \simeq$  où  $(x_0, r_0) \simeq (x_1, r_1)$  si  $r_0 = r_1 = 0$ , muni de la distance définie par  $d((x_0, r_0), (x_1, r_1)) = \sqrt{r_0^2 + r_1^2 - 2r_0r_1 \cos d_0(x_0, x_1)}$ . On note  $x^* = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{S}^2\}$  le sommet. Il n'est pas difficile de voir que  $X$  peut être approché par des variétés de dimension 3 à courbure sectionnelle positive, et on a

$$\mathcal{R}(0) = X, \quad \mathcal{R}(1) = X \setminus x^*, \quad \mathcal{R}(2) = \mathcal{R}(3) = (\mathbb{S}^2 \setminus x) \times \mathbb{R}_+^*.$$



En général, on peut montrer que  $\mathcal{R}(n) = \mathcal{R}(n-1)$ , que son complémentaire est de dimension de Hausdorff au plus  $n-2$ , puis que la dimension de Hausdorff du complémentaire de  $\mathcal{R}(k)$  est au plus  $k-1$  pour  $1 \leq k \leq n-2$ . Les auteurs proposent alors

**Conjecture 0.10.** Pour  $n \geq 3$  l'ensemble  $\mathcal{R}(n-3)$  possède une structure de variété différentielle de dimension  $n$ .

Supposons pour simplifier  $X$  compact et  $X = \mathcal{R}(n-3)$ . La caractérisation de la structure des cônes tangent à  $X$  se traduit de la manière suivante en terme des éléments de la suite  $(M_i, g_i)$ .

“pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $0 < r_0 < \epsilon$  et un rang  $i_0$  tel que pour tout  $i \geq i_0$ , toute boule de rayon  $r_0$  dans  $M_i$  est à distance au plus  $\epsilon r_0$  d'une boule de rayon  $r_0$  dans un espace métrique produit  $Y \times \mathbb{R}^{n-3}$ , où  $Y$  est un espace métrique.”

On voit en particulier que  $\epsilon, r_0$  et donc  $i_0(\epsilon, r_0)$  étant fixés, on a aucune information particulière sur la structure des boules de rayon  $r \ll r_0$  dans les  $M_i$  pour  $i \geq i_0$ . A défaut d'une telle information valable à toutes les échelles, il semble peu raisonnable d'espérer établir 1) et 2) pour la famille des  $(M_i, g_i)$ . On introduit donc une contrainte beaucoup plus forte sur la suite des  $M_i$ , en "intervertissant les quantificateurs". Pour un  $r_0$  et  $\epsilon > 0$  suffisamment petit fixés on imposera donc

*"il existe un rang  $i_0$  tel que pour tout  $i \geq i_0$ , pour tout  $0 < r < r_0$ , toute boule de rayon  $r$  dans  $M_i$  est à distance au plus  $\epsilon r$  d'une boule de rayon  $r$  dans un espace métrique produit  $Y \times \mathbb{R}^{n-3}$ , où  $Y$  est un espace métrique."*

En réalité cette notion devra encore être affinée (voir la définition 0.15) et on dira alors que les  $(M_i, g_i)$  possèdent en tout point une  $(n-3, \epsilon)$ -éclatement à toutes les échelles inférieures à  $r_0$ . L'énoncé à démontrer concernant le flot de Ricci se formule alors

**Conjecture 0.11.** *Il existe  $\epsilon(n, v_0), K(n, v_0)$  avec les propriétés suivantes. Soit  $(M^n, g)$  une variété riemannienne complète de dimension  $n$  satisfaisant les hypothèses (2) pour une constante  $v_0 > 0$ , et tel que tout point possède une  $(n-3, \epsilon)$ -éclatement à toutes les échelles inférieures à  $r_0$  pour un certain  $r_0 \leq 1$ . Alors il existe sur  $M$  un flot de Ricci de donnée initiale  $g$  dont le temps d'existence maximal est minoré par  $\epsilon^2 r_0^2$  avec en plus*

$$|\text{Rm } g_t(x)| \leq \frac{K}{t}, \quad \text{inj}_x g_t \geq \sqrt{\frac{t}{K}},$$

pour tout  $x \in M, 0 < t \leq \epsilon^2$ .

(voir la conjecture 0.16 pour l'énoncé complet). Nous n'avons pu prouver qu'un résultat partiel dans cette direction, en remplaçant l'hypothèse de courbure  $\text{Rc } g \geq -1$  par  $|\text{Rc } g| \leq 1$  (théorème D).

## Énoncé détaillé des résultats de la thèse

### Flot d'une donnée initiale éventuellement non complète

Les résultats d'existence en temps court du paragraphe suivant reposent sur une construction que l'on appelle "flot partiel" et que l'on décrit maintenant. Il s'agit d'un outil qui, étant donnée une variété riemannienne de dimension  $n$   $(M^n, g)$  éventuellement non-complète, fournit une solution  $g(x, t)$  de l'équation (1) définie sur un ouvert  $\mathcal{D}$  de l'espace-temps  $M \times \mathbb{R}_+$  qui contient la tranche temporelle initiale  $M \times \{0\}$ . Le flot ainsi défini dépend d'un paramètre arbitraire  $K_0$ , et possède par construction une propriété de décroissance de la courbure contrôlée par la dimension et le paramètre de construction  $K_0$ , i.e. il satisfait à

$$|\text{Rm } g(t)| \leq \frac{C^2 K_0}{t}$$

pour tout  $(x, t) \in \mathcal{D}$ , où la constante  $C$  ne dépend que de  $n$ . En contrepartie, on ne contrôle pas la forme de l'ouvert  $\mathcal{D}$  (en particulier, il ne contient pas en général un ouvert de la forme  $M \times [0, t]$ ). On verra que la construction consiste essentiellement, à intervalles de temps réguliers, à "oublier" les régions qui violent cette borne de régularité *a priori* et à continuer le flot sur le complémentaire.

**Théorème A** (Flot de Ricci partiel). *Il existe une constante  $C(n)$  avec les propriétés suivantes. Soit  $(M^n, g_0)$  une variété riemannienne. Pour tout choix d'un paramètre  $K_0 \geq 1$ , il existe une solution lisse  $g(x, t)$  de l'équation du flot de Ricci sur un domaine ouvert  $\mathcal{D} \subset M \times [0, 1]$  satisfaisant les propriétés suivantes*

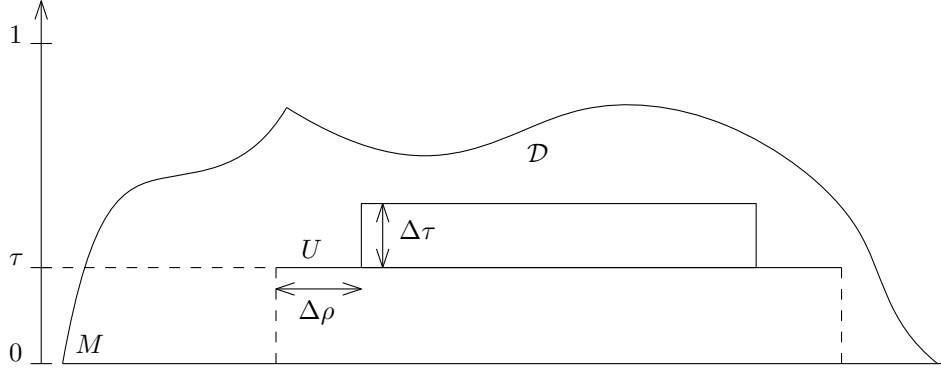


- (i) si  $\mathcal{D}_t = \{ x \in M \mid (x, t) \in \mathcal{D} \}$ , on a  $\mathcal{D}_0 = M$  et  $\mathcal{D}_s \supset \mathcal{D}_t$  pour tout  $0 \leq s \leq t \leq 1$ ,  
(ii)  $|\text{Rm } g(x, t)| \leq \frac{C^2 K_0}{t}$  pour tout  $(x, t) \in \mathcal{D}$  avec  $t > 0$ ,  
(iii) pour tout  $0 < t \leq 1$ , si  $U \subset \mathcal{D}_t$  est un domaine ouvert tel que

$$|\text{Rm } g(x, s)| \leq \frac{K_0}{s}$$

pour tout  $(x, s) \in U \times [0, t]$ , alors la partie de l'espace-temps  $(U)_{\Delta\rho} \times [t, \min(t + \Delta t, 1)]$  est contenue dans  $\mathcal{D}$ , où  $\Delta\rho = C\sqrt{K_0 t}$  et  $\Delta t = \frac{t}{C^2 K_0}$ .

On peut penser à (iii) comme à une propriété de maximalité dans un sens faible de la solution. Elle affirme que lorsqu'une région satisfait au temps  $t$  une majoration de la norme du tenseur de courbure sensiblement meilleure que celle que l'on a par (ii), alors le flot continue pour un temps contrôlé en fonction de la dimension et du paramètre de construction  $K_0$ , sur un domaine plus petit, la marge spatiale perdue étant elle aussi contrôlée.



On explique maintenant comment de cette construction découlent des résultats d'existence en temps court comme le théorème 0.7. Pour cela, on a besoin d'un résultat qui, étant donné un flot  $g(t)$  (complet ou non) sur  $U$  dont la donnée initiale satisfait certaines conditions, et étant donné un contrôle *a priori* de la norme du tenseur de courbure de  $g(t)$ , permet une majoration améliorée de cette norme, c'est à dire ne dépendant que des hypothèses sur la donnée initiale. Par exemple, on a en dimension 3 l'énoncé suivant.

**Proposition 0.12.** *Il existe  $K(v_0)$ ,  $a(v_0, K_1)$  et  $\epsilon(v_0, K_1)$  avec la propriété suivante. Si  $g(t)$  est un flot de Ricci défini sur  $U^3$  variété lisse de dimension 3 pour  $0 \leq t \leq T$  tel que  $g(0)$  satisfait aux hypothèses (2), et tel que*

$$|\text{Rm } g(t)| \leq \frac{K_1}{t}$$

pour  $0 < t \leq T$ , alors on a en fait

$$|\text{Rm } g(t)| \leq \frac{K}{t}$$

sur

$$(U)_{a\sqrt{t}} = \{x \in U \mid B_{g(0)}(x, a\sqrt{t}) \text{ est relativement compacte dans } U\}$$

pour  $0 < t \leq \epsilon^2$ .

Considérons alors une variété riemannienne  $(M^3, g)$  de dimension 3, pas nécessairement complète, satisfaisant aux hypothèses (2) pour un certain  $v_0 > 0$ . La proposition 0.12 fournit un

certain  $K_0 = K(v_0)$  que l'on prend comme paramètre dans la construction du flot partiel. Le (ii) du théorème A garantit une borne sur la norme du tenseur de courbure  $|\text{Rm } g(t)| \leq \frac{C^2 K_0}{t}$ , on prend donc  $K_1 = C^2 K_0$  dans l'énoncé de la proposition 0.12 qui fournit enfin un  $\epsilon(v_0) = \epsilon(v_0, K)$  et un  $a(v_0) = a(v_0, K_1)$ . On considère alors un flot partiel de  $(M, g)$  de paramètre  $K_0$ , défini sur un certain domaine  $\mathcal{D} \subset M \times \mathbb{R}_+$  et on procède comme suit. Pour tout domaine  $U$  relativement compact dans  $M$ , il existe  $0 < t_0 < \epsilon^2$  tel que  $U \times [0, t_0] \subset \mathcal{D}$ . La proposition 0.12 permet alors d'affirmer que la métrique  $g(t_0)$  satisfait la borne de courbure améliorée  $|\text{Rm } g(t)| \leq \frac{K_0}{t}$  sur l'ouvert  $(U)_{a\sqrt{t_0}} \times [0, t_0]$ . La propriété (iii) de l'énoncé du théorème A garantit donc que  $\mathcal{D}$  contient le domaine  $(U)_{a'\sqrt{t_0}} \times [0, t_1]$ , où  $a' = a + C\sqrt{K_0}$ , et  $t_1 = (1 + \frac{1}{C^2 K_0})t_0$ . On construit par induction deux suites  $\{\rho_i\}_{0 \leq i \leq i_0}$ ,  $\{t_i\}_{0 \leq i \leq i_0}$  telles que pour tout  $0 \leq i \leq i_0$ , le domaine  $\mathcal{D}$  contient  $(U)_{\rho_i} \times [0, t_i]$ , et définies par les relations de récurrence

$$t_{i+1} = \left(1 + \frac{1}{C^2 K_0}\right) t_i, \quad \rho_{i+1} = \rho_i + a'\sqrt{t_i}, \quad (3)$$

la construction s'arrêtant pour le premier rang  $i_0$  tel que  $t_{i_0} \geq \epsilon^2$ . En intégrant les relations (3), on trouve que  $\rho_{i_0} \leq 4C^2 K_0 \epsilon$ , et en particulier que  $\mathcal{D}$  contient le domaine  $(U)_{4C^2 K_0 \epsilon} \times [0, \epsilon^2]$ . Lorsque  $M$  est complète, puisque le raisonnement précédent vaut pour n'importe quel  $U \subset M$ , on a  $M \times [0, \epsilon^2] \subset \mathcal{D}$  c'est à dire existence, pour un temps contrôlé, d'un flot de Ricci de donnée initiale  $(M^3, g)$  (c'est le théorème 0.7). Mais on constate que, plus généralement, le "flot partiel" du théorème A, permet de démontrer l'existence en temps court, sur un domaine contrôlé, d'un flot de Ricci (non-complet) pour une donnée initiale non-complète satisfaisant aux hypothèses (2), résultat qui contient comme cas particulier le théorème 0.7, et dont le théorème B fournit l'énoncé détaillé.

## Résultats d'existence en temps court pour des variétés non-effondrées à courbure minorée

On énonce maintenant les résultats d'existence en temps court annoncés plus haut, pour des données initiales éventuellement non-complètes. Pour  $A, \epsilon > 0$  et  $g(t)$  un flot de Ricci défini pour  $0 \leq t \leq T$  sur une variété lisse  $M$ , on définit

$$\mathcal{M}_{A, \epsilon^2} = \{ (x, t) \in M \times [0, \epsilon^2] \mid B_0(x, A\sqrt{t}) \text{ est relativement compacte dans } M \}$$

puis on définit sur  $M$  la fonction

$$\rho_0(x) = \sup \{ 0 < r \leq 1 \mid B_0(x, r) \text{ est relativement compacte dans } M \},$$

et enfin sur  $\mathcal{M}_{\epsilon^2, A}$  la fonction

$$\rho_{A,0}(x, t) = \sup \{ 0 < r \leq 1 \mid B_0(x, r + A\sqrt{t}) \text{ est relativement compacte dans } M \}.$$

En particulier, si  $g(t)$  est un flot complet,  $\mathcal{M}_{A, \epsilon^2} = M \times [0, \epsilon^2]$ ,  $\rho_0 \equiv 1$  et  $\rho_{A,0} \equiv 1$ .

Le premier théorème d'existence en temps court que l'on présente correspond à l'énoncé détaillé, pour une donnée initiale éventuellement non-complète, du théorème 0.7, et concerne donc la dimension 3.

**Théorème B** ([21]). *Il existe des constantes  $K(v)$ ,  $\epsilon(v, \delta) > 0$ , et  $A(v, \delta)$  telles que si  $(M^3, g)$  est une variété riemannienne de dimension 3 avec*

$$\begin{aligned} a) \operatorname{Rc} g(x) &\geq -\frac{1}{\rho_0(x)}, \\ b) \operatorname{vol}_g B_g(x, r) &\geq vr^3, \end{aligned}$$

*pour tout  $x \in M$ ,  $0 < r \leq 1$  tel que  $B(x, r)$  est relativement compacte dans  $M$ , alors il existe une solution lisse de l'équation de Ricci  $g(x, t)$  définie sur le domaine spatio-temporel  $\mathcal{M}_{A, \epsilon^2}$ , avec  $g(x, 0) = g(x)$  pour tout  $x \in M$ , et telle que*

$$\begin{aligned} (i) \operatorname{Rc} g(x, t) &\geq -\frac{\delta^2}{t}, \\ (ii) \operatorname{vol}_{g(t)} B_t(x, r) &\geq (1 - \delta)vr^3 \end{aligned}$$

*pour tout  $0 < r \leq \frac{1}{8}\rho_{A,0}(x, t)$ , ainsi que*

$$|\operatorname{Rm} g(x, t)| \leq \frac{K}{t}, \quad \operatorname{inj}_x g_t \geq \sqrt{\frac{t}{K}},$$

*pour tout  $(x, t) \in \mathcal{M}_{A, \epsilon^2}$  et  $t > 0$ . De plus, on a pour tous  $(x, t), (y, t) \in \mathcal{M}_{A, \epsilon^2}$  le contrôle de la distance au temps  $t$*

$$(1 - \delta)d_0(x, y) - \delta \leq d_t(x, y) \leq (1 + \delta)d_0(x, y) + \delta.$$

Ce résultat, en particulier grâce à son caractère local, lorsqu'il est combiné au principe de convergence décrit dans l'appendice A, permet de donner une solution à la conjecture 0.10 en dimension 3.

**Corollaire 0.13.** *Soit  $(M_i^3, g_{i,i})$  une suite de variétés riemanniennes pointées complètes de dimension 3 avec  $\operatorname{Rc} g_i \geq -1$  qui converge au sens de Gromov-Hausdorff vers un espace métrique pointé  $(X, d, x)$ , tel que  $\dim_{\mathcal{H}} X = 3$ .*

*a)  $(X, d_X)$  possède une structure de variété topologique de dimension 3.*

*b) Pour tout  $R > 0$ , il existe à partir d'un certain rang  $i$  une suite d'homéomorphismes  $\phi_i : \mathcal{U}_i \rightarrow \mathcal{V}_i$  avec  $B(x_0, R) \subset \mathcal{U}_i \subset X$  et  $B(x_i, R) \subset \mathcal{V}_i \subset M_i$ .*

Notons que cet énoncé est plus général que celui du corollaire 0.8 puisque on ne suppose pas de minoration uniforme du volume des boules de rayon inférieur à 1 dans la suite des variétés  $M_i$ . L'hypothèse de non-effondrement de la limite implique simplement, par l'inégalité de Bishop-Gromov, une minoration  $\operatorname{vol}_{g_i} B(x, r) \geq \frac{v_0}{d_{g_i}(p_i, x)}$ . M. Simon et P. Topping, obtiennent dans [31] une description de l'espace limite plus exhaustive (voir le théorème 1.4 dans [31], voir aussi [25]).

**Théorème 0.14** (M. Simon, P. Topping, [31]). *Soit  $(M_i^3, g_{i,i})$  une suite de variétés riemanniennes pointées complètes de dimension 3 avec  $\operatorname{Rc} g_i \geq -1$  qui converge au sens de Gromov-Hausdorff vers un espace métrique pointé  $(X, d, x)$ , tel que  $\dim_{\mathcal{H}} X = 3$ .*

*a)  $(X, d_X)$  possède une structure de variété topologique de dimension 3 dont les cartes  $\theta : (U, d_{\mathbb{R}^n}) \rightarrow (X, d_X)$  sont des applications bi-hölderiennes.*

*b) Pour tout  $R > 0$ , il existe à partir d'un certain rang  $i$  une suite d'applications bi-hölderiennes  $\phi_i : \mathcal{U}_i \rightarrow \mathcal{V}_i$  avec  $B(x_0, R) \subset \mathcal{U}_i \subset X$  et  $B(x_i, R) \subset \mathcal{V}_i \subset M_i$ .*

Notons finalement que ce résultat peut être complété par ceux de A. McLeod et P. Topping dans [25] qui donnent une description globale de l'espace limite.

L'énoncé suivant généralise à toute dimension le théorème *B*. Il étend aussi le théorème 0.9 à une donnée initiale non-complète dans tous les cas. Le point clef permettant cette généralisation consiste à remplacer une borne globale sur un noyau de la chaleur établie dans [18] par un résultat local. La manière dont on traite ce problème diffère de celle employée par Y. Lai dans sa preuve obtenue indépendamment (voir [24]), et conduit par surcroît à un énoncé de type "pseudo-localité" (théorème *E*) pour un flot complet dont la donnée initiale satisfait aux mêmes conditions que celles du théorème *C*.

**Théorème C.** *Il existe  $k(n, v)$ ,  $K(n, v)$ ,  $\epsilon(n, v, \delta)$  et  $A(n, v, \delta)$  avec les propriétés suivantes. Soit  $\mathcal{C}$  l'un des cônes de courbure  $IC_1$ ,  $IC_2$  ou  $CO$  de la définition II.2.1, et soit  $(M^n, g)$  une variété riemannienne lisse de dimension  $n$ , telle que*

$$\begin{aligned} a) \lambda_{\mathcal{C}}^- g(x) &\geq -\frac{1}{\rho_0(x)^2}, \\ b) \text{vol}_g B_g(x, r) &\geq vr^n, \text{ pour } 0 < r \leq \rho_0(x). \end{aligned}$$

Alors il existe une solution lisse de l'équation de Ricci  $g(x, t)$  définie sur le domaine spatio-temporel  $\mathcal{M}_{A, \epsilon^2}$ , avec  $g(x, 0) = g(x)$  pour tout  $x \in M$ , et telle que

$$\begin{aligned} (i) \lambda_{\mathcal{C}}^- g(x, t) &\geq -\frac{k}{\rho_{A,0}(x, t)^2}, \\ (ii) \text{vol}_{g(t)} B_t(x, r) &\geq (1 - \delta)vr^n \text{ pour } 0 < r \leq \frac{1}{32}\rho_{A,0}(x, t), \end{aligned}$$

pour tout  $(x, t) \in \mathcal{M}_{A, \epsilon^2}$ , ainsi que

$$|\text{Rm } g(x, t)| \leq \frac{K}{t}, \quad \text{inj}_x g_t \geq \sqrt{\frac{K}{t}},$$

pour tout  $(x, t) \in \mathcal{M}_{A, \epsilon^2}$  et  $t > 0$ .

Notons que pour  $n = 3$ , cet énoncé fournit une minoration de la courbure de Ricci pour  $0 < t \leq \epsilon^2$  qui améliore celle du théorème *B*.

### Régularisation d'une métrique proche d'un produit $Y \times \mathbb{R}^{n-3}$ en dessous d'une échelle $r_0$

Pour les énoncés qui suivent, on a besoin de définir précisément la notion de proximité métrique avec un espace produit que l'on utilise. La notion d' $\epsilon$ -isométrie est classique (voir par exemple Def. 7.3.27 dans [3]).

**Définition .0.1.** Soient  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  deux espaces métriques. On dit qu'une application  $\psi : X \rightarrow Y$  est une  $\epsilon$ -isométrie de  $X$  sur  $Y$  si

$$\begin{aligned} a) |d_Y(\psi(x), \psi(x')) - d_X(x, x')| &\leq \epsilon \text{ pour tous } x, x' \in X, \\ b) \text{pour tout } y \in Y, \text{ il existe } x \in X \text{ tel que } d_Y(\psi(x), y) &\leq \epsilon. \end{aligned}$$

Soit  $(X, d_X)$  un espace métrique.

**Définition 0.15.** On dit que  $(p_1, \dots, p_m)$  est un  $(m, \epsilon)$ -éclatement en  $x_0$  à toutes les échelles inférieures à  $r > 0$  si pour tout  $x \in B_X(x_0, r)$  et pour tout  $0 < s \leq r$ , il existe un espace métrique pointé  $(Y, y_0)$  et une  $\epsilon s$ -isométrie

$$\psi : \begin{array}{ccc} B_X(x, s) & \rightarrow & \mathbb{B}(s) \subset Y \times \mathbb{R}^m \\ z & \mapsto & (\psi_0(z), \psi_1(z), \dots, \psi_m(z)) \end{array}$$

telle que, pour  $1 \leq k \leq m$  et  $z \in B_X(x, s)$ ,

$$|\psi_k(z) - d_X(p_k, z) + d_X(p_k, x)| \leq \epsilon s.$$

On peut maintenant donner une formulation précise de la conjecture 0.11.

**Conjecture 0.16.** *Il existe  $k(n, v)$ ,  $K(n, v)$ ,  $\epsilon(n, v, \delta)$  et  $A(n, v, \delta)$  avec les propriétés suivantes. Si  $(M^n, g)$  est une variété riemannienne lisse de dimension  $n$ , tel que*

- a)  $\text{Rc } g(x) \geq -\frac{1}{\rho_0(x)^2}$  ( resp.  $\text{K}_{g(0)}(\sigma) \geq -\frac{1}{\rho_0(x)^2}$  ),
- b)  $\text{vol}_g B_g(x, r) \geq vr^n$ , pour  $0 < r \leq \rho_0(x)$ ,
- c) *il existe un  $(n-3, \epsilon)$ -éclatement en  $x$  à toutes les échelles plus petites que  $\rho_0(x)$  pour la métrique  $g$ ,*

pour tout  $x \in M$ . Alors il existe une solution lisse de l'équation de Ricci  $g(x, t)$  définie sur le domaine spatio-temporel  $\mathcal{M}_{A, \epsilon^2}$ , avec  $g(x, 0) = g(x)$  pour tout  $x \in M$ , et telle que

- (i)  $\text{Rc } g(x, t) \geq -\delta \text{R}_{g(t)}(x) - \frac{k}{\rho_{A,0}(x, t)^2}$  ( resp.  $\text{K}_{g(t)}(\sigma) \geq -\delta \text{R}_{g(t)}(x) - \frac{k}{\rho_{A,0}(x, t)^2}$  ),
- (ii)  $\text{vol}_{g(t)} B_t(x, r) \geq (1 - \delta)vr^n$  pour  $0 < r \leq \frac{1}{32}\rho_{A,0}(x, t)$ ,
- (iii) *il existe un  $(n-3, \delta)$ -éclatement en  $x$  à toutes les échelles plus petites que  $\epsilon\rho_{A,0}(x, t)$  pour la métrique  $g(t)$ .*

pour tout  $(x, t) \in \mathcal{M}_{A, \epsilon^2}$ , ainsi que

$$|\text{Rm } g(x, t)| \leq \frac{K}{t}, \quad \text{inj}_x g_t \geq \sqrt{\frac{K}{t}},$$

pour tout  $(x, t) \in \mathcal{M}_{A, \epsilon^2}$  avec  $t > 0$ .

Dans cet énoncé, il ne semble pas raisonnable de remplacer la conclusion (i) par une minoration uniforme  $\text{Rc } g(x, t) \geq -\frac{k}{\rho_{A,0}(x, t)^2}$  (ou  $\text{K}_{g(t)}(x) \geq \frac{k}{\rho_{A,0}(x, t)^2}$ ). En effet, pour une donnée initiale complète qui vérifierait

- a')  $\text{Rc } g(x) \geq 0$  ( resp.  $\text{K}_{g(0)}(\sigma) \geq 0$  ),
- b')  $\text{vol}_g B_g(x, r) \geq vr^n$ , pour  $r > 0$ ,
- c') il existe un  $(n-3, \epsilon)$ -éclatement en  $x$  à toutes les échelles (arbitrairement grandes).

on obtiendrait (par un jeu de mises à l'échelle paraboliques) un flot de Ricci défini sur un intervalle de temps  $[0, T]$  arbitraire avec en particulier  $\text{Rc } g(x, s) \geq 0$  (resp.  $\text{K}_{g(s)} \geq 0$ ), autrement dit, le caractère positif ou nul du tenseur de Ricci serait, dans ce cas, préservé par le flot. Or on sait qu'en général, ce n'est pas le cas en dimension  $n \geq 4$ . Autrement dit, (l'évolution du tenseur de Ricci étant donnée par  $\partial_t \text{Rc } g(t) = \Delta_L \text{Rc } g(t)$  où  $\Delta_L$  désigne le Laplacien de Lichnerowicz), pour tout  $n \geq 4$ , on peut construire une variété riemannienne complète  $(M^n, g)$  telle que  $\Delta_L \text{Rc } g(x) < 0$  en un point  $x \in M$ . Il serait donc intéressant de répondre à la question qui suit.

**Question:** *Existe-t-il, pour tout  $n \geq 4$  et  $\epsilon > 0$ , une variété riemannienne  $(M^n, g)$  de dimension  $n$  satisfaisant  $a'$ ,  $b'$  et  $c'$  telle que pour un point  $x \in M$  on ait  $\Delta_L \text{Rc } g(x) < 0$  ?*

Si la réponse à cette question est positive, il est nécessaire, en vue de la conjecture 0.16, d'étudier l'évolution des quantités géométriques (en particulier de la fonction distance) associées à un flot dont le tenseur de Ricci obéit seulement à la minoration  $a$ ). C'est l'objet des paragraphes I.1.3 et I.1.4. Les résultats que l'on y obtient n'aboutissent pas, pour le moment, à une preuve de la conjecture 0.16, et ne sont pas utilisés ailleurs.

On présente finalement un résultat allant dans la direction de la conjecture 0.16, où la minoration  $a$ ) dans l'énoncé de la conjecture 0.16 est remplacée par une borne sur la norme du tenseur de Ricci.

**Théorème D.** *Il existe  $k(n, v)$ ,  $K(n, v)$ ,  $\epsilon(n, v, \delta)$  et  $A(n, v, \delta)$  avec les propriétés suivantes. Si  $(M^n, g)$  est une variété riemannienne lisse de dimension  $n$ , telle que*

- a)  $|\text{Rc } g(x)| \leq \frac{1}{\rho_0(x)^2}$ ,
- b)  $\text{vol}_g B_g(x, r) \geq vr^n$ , pour  $0 < r \leq \rho_0(x)$ ,
- c) *il existe un  $(n - 3, \epsilon)$ -éclatement en  $x$  à toutes les échelles plus petites que  $\rho_0(x)$  pour la métrique  $g$ ,*

*pour tout  $x \in M$ . Alors il existe une solution lisse de l'équation de Ricci  $g(x, t)$  définie sur le domaine spatio-temporel  $\mathcal{M}_{A, \epsilon^2}$ , avec  $g(x, 0) = g(x)$  pour tout  $x \in M$ , et telle que*

- (i)  $|\text{Rc } g(x, t)| \leq \frac{k}{\rho_{A,0}(x, t)^2}$ ,
- (ii)  $\text{vol}_{g(t)} B_t(x, r) \geq (1 - \delta)vr^n$  pour  $0 < r \leq \frac{1}{32}\rho_{A,0}(x, t)$ ,
- (iii) *il existe un  $(n - 3, \delta)$ -éclatement en  $x$  à toutes les échelles plus petites que  $\epsilon\rho_{A,0}(x, t)$  pour la métrique  $g(t)$ .*

*pour tout  $(x, t) \in \mathcal{M}_{A, \epsilon^2}$ , ainsi que*

$$|\text{Rm } g(x, t)| \leq \frac{K}{t}, \quad \text{inj}_x g_t \geq \sqrt{\frac{K}{t}},$$

*pour tout  $(x, t) \in \mathcal{M}_{A, \epsilon^2}$  et  $t > 0$ .*

## Des théorèmes de pseudo-localité

Aux théorèmes d'existence en temps court du flot énoncés ci-dessus correspondent des résultats de type "pseudo-localité", qui lorsque est donné un flot complet à courbure bornée, quantifient ses propriétés de régularisation en fonction des hypothèses sur la métrique initiale. Ces résultats reposent essentiellement sur le théorème de pseudo-localité de Perelman dont on rappelle l'énoncé, et peuvent être vus comme en étant des généralisations.

**Théorème 0.17** (G. Perelman, 2002, A. Chau, L.F. Tam, C. Yu, 2011). *Il existe  $\delta(n, \epsilon)$  avec la propriété suivante. Soit  $g(t)$  un flot de Ricci complet sur une variété  $M^n$  de dimension  $n$  défini pour  $0 \leq t \leq T$  tel que*

$$a) \sup_{M \times [0, T]} |\text{Rm } g(x, t)| < +\infty,$$

avec, pour  $x_0 \in M$ ,

$$\begin{aligned} b) \quad & R_g(x, 0) \geq -1, \\ c) \quad & (\text{vol}_{g(0)}^n \Omega)^{n-1} \leq (1 + \delta) \omega_n (\text{vol}_{g(0)}^{n-1} \partial\Omega)^n, \end{aligned}$$

pour tout  $x \in B_0(x_0, 1)$  et tout domaine à bord lisse  $\Omega \subset B_0(x_0, 1)$ , où  $\omega_n$  désigne la constante isopérimétrique euclidienne. Alors

$$|\text{Rm } g(x, t)| \leq \frac{\epsilon^2}{t}$$

pour tout  $x \in B_t(x_0, \delta)$  et  $0 < t \leq \max(\delta^2, T)$ .

Perelman donne les grandes lignes d'une preuve dans [27] (10.1) (voir aussi [22]), au moins dans le cas compact, tandis que l'on trouve une preuve détaillée du cas complet dans [4]. Notons le caractère quelque peu paradoxal de cet énoncé. Les hypothèses quantitatives *b*) et *c*) sur la métrique initiale, ainsi que la conclusion, sont purement locales, tandis que l'hypothèse *a*) est globale, mais la valeur de la borne n'intervient pas dans les conclusions.

**Question:** *Peut-on retirer l'hypothèse a) dans l'énoncé du théorème 0.17 ?*

On sait par contre que le théorème peut être mis en défaut lorsque le flot  $g(t)$  n'est pas complet (Un contre-exemple est donné par P. Topping dans [34]). Une première généralisation possible du théorème 0.17 correspond aux hypothèses du théorème C.

**Théorème E.** *Il existe des constantes  $k(n, v)$ ,  $K(n, v)$ ,  $\epsilon(n, v, \delta) > 0$  et  $A(n, v, \delta)$  avec les propriétés suivantes. Soit  $\mathcal{C}$  l'un des trois cônes de courbure  $\text{IC}_1$ ,  $\text{IC}_2$  ou  $\text{CO}$  introduits dans la définition II.2.1 et soit  $g(t)$  un flot de Ricci complet défini pour  $0 \leq t \leq T$  sur une variété lisse  $M^n$  de dimension  $n$ , tel que*

$$\sup_{M \times [\tau, T]} |\text{Rm } g(x, t)| < +\infty,$$

pour tout  $0 < \tau \leq T$ , et  $U \subset M$  un ouvert tel que

$$\begin{aligned} a) \quad & \lambda_{\mathcal{C}}^- g(x, 0) \geq -\frac{1}{\rho_0^U(x)^2}, \\ b) \quad & \text{vol}_{g(0)} B_0(x, r) \geq vr^n \text{ pour tout } 0 < r \leq \rho_0^U(x), \end{aligned}$$

pour  $x \in U$ . Alors

$$\begin{aligned} (i) \quad & \lambda_{\mathcal{C}}^- g(x, t) \geq -\frac{k}{\rho_{A,0}^U(x, t)^2}, \\ (ii) \quad & \text{vol}_{g(t)} B_t(x, r) \geq (1 - \delta)vr^n, \end{aligned}$$

pour tout  $(x, t) \in \mathcal{U}_{A, \epsilon^2}$  et  $0 < r \leq \rho_{A,0}^U(x, t)$ , ainsi que

$$|\text{Rm } g(x, t)| \leq \frac{K}{t}, \quad \text{inj}_x g_t \geq \sqrt{\frac{t}{K}},$$

pour tout  $(x, t) \in \mathcal{U}_{A, \epsilon^2}$  et  $t > 0$ .

L'énoncé suivant correspond aux hypothèses du théorème D.

**Théorème F.** *Il existe des constantes  $k(n, v)$ ,  $K(n, v)$ ,  $\epsilon(n, v, \delta) > 0$  et  $A(n, v, \delta)$  avec les propriétés suivantes. Soit  $g(t)$  un flot de Ricci complet défini pour  $0 \leq t \leq T$  sur une variété lisse  $M^n$  de dimension  $n$ , tel que*

$$\sup_{M \times [\tau, T]} |\text{Rm } g(x, t)| < +\infty,$$

pour tout  $0 < \tau \leq T$ , et  $U \subset M$  un ouvert tel que

- a)  $|\text{Rc } g(x, 0)| \leq \frac{1}{\rho_0^U(x)^2}$ ,
- b)  $\text{vol}_{g(0)} B_0(x, r) \geq vr^n$  pour tout  $0 < r \leq \rho_0^U(x)$ ,
- c) il existe un  $(n-3, \epsilon)$ -éclatement en  $x$  à toutes les échelles inférieures à  $\rho_0^U(x)$  pour la métrique  $g(0)$ ,

pour  $x \in U$ . Alors

- (i)  $|\text{Rc } g(x, t)| \leq \frac{k}{\rho_{A,0}^U(x, t)^2}$ ,
- (ii)  $\text{vol}_{g(t)} B_t(x, r) \geq (1-\delta)vr^n$  pour tout  $0 < r \leq \rho_{A,0}^U(x, t)$ ,
- (iii) il existe un  $(n-3, \delta)$ -éclatement en  $x$  à toutes les échelles inférieures à  $\epsilon\rho_{A,0}^U(x, t)$  pour la métrique  $g(t)$ ,

pour tout  $(x, t) \in \mathcal{U}_{A, \epsilon^2}$ , ainsi que

$$|\text{Rm } g(x, t)| \leq \frac{K}{t}, \quad \text{inj}_x g_t \geq \sqrt{\frac{t}{K}},$$

pour tout  $(x, t) \in \mathcal{U}_{A, \epsilon^2}$  et  $t > 0$ .

Enfin, aux hypothèses de la conjecture 0.16 correspond l'énoncé qui suit.

**Conjecture 0.18.** *Il existe des constantes  $k(n, v)$ ,  $K(n, v)$ ,  $\epsilon(n, v, \delta) > 0$  et  $A(n, v, \delta)$  avec les propriétés suivantes. Soit  $g(t)$  un flot de Ricci complet défini pour  $0 \leq t \leq T$  sur une variété lisse  $M^n$  de dimension  $n$ , tel que*

$$\sup_{M \times [\tau, T]} |\text{Rm } g(x, t)| < +\infty,$$

pour tout  $0 < \tau \leq T$ , et  $U \subset M$  un ouvert tel que

- a)  $\text{Rc } g(x, 0) \geq -\frac{1}{\rho_0^U(x)^2}$  ( resp.  $\text{K}_{g(0)}(\sigma) \geq -\frac{1}{\rho_0^U(x)^2}$  ),
- b)  $\text{vol}_{g(0)} B_0(x, r) \geq vr^n$  pour tout  $0 < r \leq \rho_0^U(x)$ ,
- c) il existe un  $(n-3, \epsilon)$ -éclatement en  $x$  à toutes les échelles inférieures à  $\rho_0^U(x)$  pour la métrique  $g(0)$ ,



pour  $x \in U$ . Alors

- (i)  $\text{Rc } g(x, t) \geq -\delta \text{R}_{g(t)}(x) - 1$  ( resp.  $\text{K}_{g(t)}(\sigma) \geq -\delta \text{R}_{g(t)}(x) - 1$  ),
- (ii)  $\text{vol}_{g(t)} B_t(x, r) \geq (1 - \delta) v r^n$  pour tout  $0 < r \leq \rho_{A,0}^U(x, t)$ ,
- (iii) il existe un  $(n - 3, \delta)$ -éclatement en  $x$  à toutes les échelles inférieures à  $\epsilon \rho_{A,0}^U(x, t)$  pour la métrique  $g(t)$ ,

pour tout  $(x, t) \in \mathcal{U}_{A,\epsilon^2}$ , ainsi que

$$|\text{Rm } g(x, t)| \leq \frac{K}{t}, \quad \text{inj}_x g_t \geq \sqrt{\frac{t}{K}},$$

pour tout  $(x, t) \in \mathcal{U}_{A,\epsilon^2}$  et  $t > 0$ .

## Organisation

La preuve du théorème *A* (construction du flot partiel) est tout entière contenue dans le paragraphe *IV.1.2* et ne fait appel qu'à des résultats classiques sur le flot de Ricci. Les preuves des théorèmes *B, C, D, E, F* reposent sur un point crucial : les propositions de régularisation locale obtenues au paragraphe *III.2.1* (propositions *III.2.1, III.2.2* et *III.2.3*). Les théorèmes *E, F* sont démontrés au paragraphe *III.2.2* en combinant ces énoncés avec le théorème de pseudo-localité (théorème 0.17). Les théorèmes *B, C* et *D* sont obtenus au paragraphe *IV.2* en combinant les propositions de régularisation avec le théorème *A* d'existence du flot partiel.

La preuve des propositions de régularisation *III.2.1, III.2.2* et *III.2.3*, qui occupe le paragraphe *III.2.1*, repose sur deux ingrédients principaux. Le premier, qui fait l'objet du paragraphe *III.1*, consiste en l'analyse, due à Perelman et complétée par la suite par d'autres auteurs, de la formation des singularités sous une hypothèse de minoration *a priori* de la courbure, qui permet d'estimer la décroissance de la norme du tenseur de courbure. Par exemple, si  $g(t)$  est un flot défini pour  $0 \leq t \leq T$  sur une variété lisse  $M^3$  de dimension 3, on a la proposition qui suit (c'est une conséquence du lemme *III.1.1*).

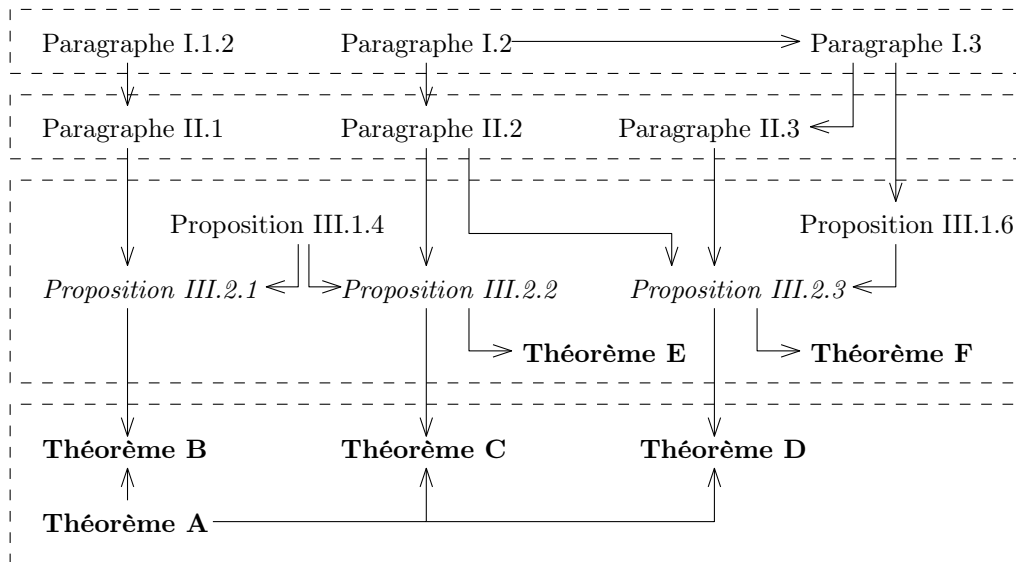
**Proposition 0.19.** *Il existe une fonction  $v_1(A)$  avec  $v_1 \rightarrow 0$  lorsque  $A \rightarrow +\infty$  telle que si  $|\text{Rm } g(x, t)|$  atteint en un point  $(x, t) \in M \times [\frac{A^2}{k}, T]$  son maximum  $k$  sur le domaine  $B_t(x, \frac{A}{\sqrt{k}}) \times [t - \frac{A^2}{k}, t]$  relativement compact dans  $M \times [0, t]$ , et si  $\text{Rc } g(t) \geq -\frac{k}{A^2}$  sur le même domaine, alors  $\text{vol}_{g(t)} B_t(x, \frac{A}{\sqrt{k}}) \leq v_1 \left( \frac{A}{\sqrt{k}} \right)^3$ .*

Par contraposition, si pour le flot  $g(t)$  on a la minoration *a priori* du tenseur de Ricci  $\text{Rc } g(t) \geq -\frac{1}{t}$  et celle du volume des boules  $\text{vol}_{g(t)} B_t(x, \sqrt{t}) \geq v_0(\sqrt{t})^3$ , alors si  $K = K(v_0)$  est tel que  $v_1(A) \leq v_0$  pour tout  $A \geq \sqrt{K}$ , on obtient (en appliquant la proposition 0.19 avec  $k = \frac{A^2}{t}$ )

$$|\text{Rm } g(t)| \leq \frac{K}{t}.$$

Ce principe se généralise en dimension  $n \geq 4$ , à condition ou bien de supposer une minoration *a priori* de la courbure  $\text{IC}_1$  pour tout temps (c'est l'objet de la proposition *III.1.4*), ou bien de supposer que la métrique au temps  $t$  est proche d'un produit entre une métrique de dimension 3 et un facteur euclidien de dimension  $n - 3$  (c'est l'objet de la proposition *III.1.6*).

Le second ingrédient des preuves des propositions de régularisation consiste à obtenir, à partir des conditions sur la donnée initiale et sous des hypothèses *a priori* de décroissance de la norme du tenseur de courbure, la minoration au temps  $t$  du volume des boules de rayon  $\sqrt{t}$  (paragraphe *I.1.2*), le cas échéant de la courbure  $IC_1$  ou d'une autre notion de courbure plus forte (paragraphe *I.2* et *II.2*), ou bien la permanence de la proximité avec un produit entre un flot de dimension 3 et un facteur euclidien (paragraphe *I.3.2* et *II.3.2*). C'est l'objet des chapitres *I* et *II*. Le texte s'organise donc selon le schéma suivant.



Dans le chapitre *I*, les rappels du paragraphe *I.1.1* sont invoqués fréquemment au fil du texte, tandis que les paragraphes *I.1.3* et *I.1.4* ne sont pas utilisés par la suite.

# Chapitre I

## Évolution de certaines quantités géométriques sous des hypothèses de décroissance de la courbure

L'objectif de ce chapitre est d'estimer l'évolution en temps court de certaines quantités géométriques (à commencer par la fonction distance et le volume riemannien) associées à une métrique riemannienne lorsque celle-ci évolue par le flot de Ricci. On considère un flot  $g(t)$  défini pour  $0 \leq t \leq T$  sur une variété  $M^n$  de dimension  $n$ , et on se placera souvent sous l'hypothèse

$$|\text{Rm } g(t)| \leq \frac{K}{t}, \quad \text{inj}_x g(t) \geq \sqrt{\frac{t}{K}}, \quad \text{R}_{g(t)} \geq -1. \quad (\text{I.1})$$

tandis que l'on supposera, pour la donnée initiale,

$$\text{Rc } g(0) \geq -1, \quad \text{vol}_{g(0)} B_0(x, r) \geq vr^n, \quad (\text{I.2})$$

pour  $x \in M$  et  $0 < r \leq 1$  tel que  $B_0(x, r)$  est relativement compacte dans  $M$ . Lorsqu'on intègre l'équation  $\partial_t g = -2\text{Rc } g(t)$  définissant le flot entre des temps  $0 < s < t \leq T$  en tenant compte de la borne sur la norme du tenseur de courbure qui apparaît dans (I.1), on trouve

$$\left(\frac{s}{t}\right)^{2(n-1)K} g(s) \leq g(t) \leq \left(\frac{t}{s}\right)^{2(n-1)K} g(s).$$

Puisque,  $0 < t \leq T$  étant fixé, ces bornes explosent lorsque  $s$  tend vers 0, elles ne permettent pas de comparer le tenseur métrique au temps  $t$  et au temps 0 (au sens où il existerait une constante  $C$  dépendant de  $n$ ,  $K$  et  $T$  pour laquelle on aurait  $C^{-1}g(0) \leq g(t) \leq Cg(0)$ ). La question de l'évolution de la fonction distance et des volumes associés à la métrique  $g(t)$  entre le temps initial et un temps  $t$  n'est donc pas triviale.

### I.1 Évolution de la fonction distance et de l'élément de volume

#### I.1.1 Bornes élémentaires

Sous les hypothèses (I.1) une observation classique, dû initialement à R. Hamilton, permet de contrôler la contraction des distances par le flot tandis qu'un calcul élémentaire permet de

majorer la dilatation du volumes des régions.

**Distances :** Pour une fonction  $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  et  $t_0 \in [\alpha, \beta]$ , on définit

$$\frac{d^-}{dt^-} \Big|_{t=t_0} f = \liminf_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}.$$

**Lemme I.1.1** (G. Perelman, [27] 8.3). *Soit  $g(t)$  un flot de Ricci sur  $M^n \times [0, T]$ . Soient  $x_0, x_1 \in M$  deux points tels que, au temps  $t_0$ ,  $d_{t_0}(x_0, x_1)$  est réalisée par une géodésique minimisante  $\gamma \subset M$ . Si on a la borne de courbure*

$$\text{Rc } g(x, t_0) \leq (n-1)C$$

au temps  $t_0$  pour  $x \in B_{t_0}(x_0, r_0) \cap \gamma$  alors

$$(\partial_t - \Delta)d_t(x_0, \cdot)|_{(x_1, t_0)} \geq -(n-1) \left( \frac{2}{3}Cr_0 + \frac{1}{r_0} \right).$$

Si additionnellement  $\text{Rc } g(x, t_0) \leq (n-1)C$  sur  $B_{t_0}(x_1, r_0) \cap \gamma$ , alors

$$\frac{d^-}{dt^-} \Big|_{t=t_0} d_t(x_0, x_1) \geq -2(n-1) \left( \frac{2}{3}Cr_0 + \frac{1}{r_0} \right).$$

(pour la preuve, voir aussi [22], I.8.3)

Notons que si  $U \subset M$  est un ouvert relativement compact, alors pour  $x \in U$ , la distance  $d_t(x, M \setminus U)$  est réalisée par une géodésique minimisante de  $M$ , entièrement contenue dans  $U$ , excepté pour une de ses extrémités. Le lemme ci-dessus entraîne donc le contrôle suivant sur la contraction des distances.

**Corollaire I.1.2.** *Soit  $(M, g(t))$  un flot de Ricci sur  $[0, T]$  et  $U \subset M$  un ouvert relativement compact tel que*

$$\text{Rc } g(x, t) \leq \frac{(n-1)K}{t}$$

pour tout  $(x, t) \in U \times ]0, T]$ . Alors pour  $x \in U$ ,  $0 \leq t \leq t' \leq T$  on a

$$d_{t'}(x, M \setminus U) \geq d_t(x, M \setminus U) - \frac{20}{3}(n-1)\sqrt{K} \left( \sqrt{t'} - \sqrt{t} \right).$$

Finalement, on retrouve le résultat de R. Hamilton sous sa forme originelle.

**Corollaire I.1.3** (R. Hamilton, [20], Thm 17.2). *Soit  $g(t)$  un flot de Ricci sur  $M^n \times [0, T]$ . Étant donné  $0 \leq t_0 \leq T$ ,  $x_0 \in M$  et  $a > 0$  tel que  $B_{t_0}(x_0, 3a)$  est relativement compact dans  $M$ , si on a*

$$\text{Rc } g(x, t) \leq \frac{(n-1)K}{t}$$

pour tout  $(x, t) \in B_{t_0}(x_0, 3a) \times [t_0, T]$ , alors pour tous  $x, x' \in B_{t_0}(x_0, a)$  et  $t_0 \leq t \leq T$ , on a

$$d_t(x, x') \geq d_{t_0}(x, x') - \frac{20}{3}(n-1)\sqrt{K} \left( \sqrt{t} - \sqrt{t_0} \right).$$

*Démonstration.* On fixe  $0 \leq t_0 \leq T$  puis on applique le corollaire I.1.2 à  $U = B_{t_0}(x, d_{t_0}(x, x')) \subset B_{t_0}(x_0, 3a)$ .  $\square$

**Volumes :** L'élément de volume associé à un flot de Ricci  $g(t)$  évolue selon l'équation

$$\frac{d}{dt} d\mu_{g(t)} = -R_g(x, t) d\mu_{g(t)}$$

En particulier, si  $R_g(x, t)$  est uniformément minorée sur une région  $U \in M$ , i.e.

$$R_g(x, t) \geq -\epsilon^2$$

pour tout  $x \in U$ ,  $0 \leq t' \leq t$ , alors

$$\text{vol}_{g(t)} U \leq e^{\epsilon^2 t} \text{vol}_{g(0)} U. \quad (\text{I.3})$$

### I.1.2 Continuité au voisinage du temps initial

Dans ce paragraphe, on complète le contrôle de la *contraction* de la fonction distance du corollaire I.1.3 par un contrôle de la *dilatation* de cette même fonction sous des hypothèses appropriées, de même que l'on complète la propriété (I.3) majorant la dilatation du volume des régions par une minoration du volume des boules pour les temps strictement positifs. Concernant la dilatation des distances, la borne inférieure

$$\text{Rc } g(t) \geq -\frac{(n-1)K}{t},$$

issue des hypothèses (I.1), pendant de la borne supérieure du corollaire I.1.3, n'entraîne aucune majoration de la fonction distance entre deux point au temps  $t$  en fonction de sa valeur au temps 0 : pour le voir il suffit de considérer le flot  $g(t) = 2(n-1)tg_{\mathbb{H}^n}$  (où  $g_{\mathbb{H}^n}$  désigne la métrique de l'espace hyperbolique en dimension  $n$ ), pour lequel la fonction distance satisfait  $d_{t'}(x, x') = \sqrt{\frac{t'}{t}} d_t(x, x')$  (le facteur  $\sqrt{\frac{t'}{t}}$  explose lorsque  $t$  tend vers 0). Pour obtenir un contrôle de la dilatation des distances de manière élémentaire il faut imposer une minoration uniforme en temps du tenseur de Ricci.

**Lemme I.1.4.** *Soit  $(M, g(t))$  un flot de Ricci défini pour  $0 \leq t \leq T$  avec  $\text{Rc } g(x, t) \geq -k$  sur  $M \times [0, T]$ . Si  $x_0 \in M$  est tel que  $B_0(x_0, 2)$  est relativement compacte dans  $M$ , on a*

$$d_t(x, x') \leq e^{kt} d_0(x, x')$$

pour  $x, x' \in B_0(x_0, 1)$  et  $0 \leq t \leq T$ .

La minoration du volume des boules aux temps strictement positifs est alors conséquence d'un théorème de J. Cheeger et T. H. Colding ([5], Thm 10.15) sur la continuité de la mesure de Hausdorff  $n$ -dimensionnelle lors du passage à la limite dans une suite de variétés non-effondrées à courbure de Ricci minorée, dont l'énoncé qui suit est une conséquence directe.

**Lemme I.1.5** (J. Cheeger, T.H. Colding). *Il existe  $\epsilon(n, v, k, \delta) > 0$  avec la propriété suivante. Soient  $(M_0^n, g_0, x_0)$  et  $(M_1^n, g_1, x_1)$  deux variétés riemanniennes lisses pointées de dimension  $n$  telles que, pour  $i = 0, 1$ ,  $B_{g_i}(x_i, \epsilon^{-1})$  est relativement compacte dans  $M_i$  et*

$$\text{Rc } g_i \geq -k, \quad \text{vol}_{g_i} B_{g_i}(x_i, 1) \geq v.$$

Si

$$d_{\text{GH}}(B_{g_0}(x_0, 2), B_{g_1}(x_1, 2)) \leq \epsilon$$

alors  $|\text{vol}_{g_0} B_{g_0}(x_0, 1) - \text{vol}_{g_1} B_{g_1}(x_1, 1)| \leq \delta$ .

L'idée d'employer ce résultat pour comparer les boules au temps 0 et au temps  $t$  d'un flot de Ricci provient de M. Simon dans [33].

**Lemme I.1.6** (M. Simon, [33]). *Il existe  $\epsilon(n, v_0, k, \delta)$  avec la propriété suivante. Soit  $g(t)$  un flot de Ricci défini pour  $0 \leq t \leq T$  sur une variété lisse  $M^n$  de dimension  $n$ , satisfaisant aux hypothèses (I.1), avec  $\text{Rc } g(t) \geq -\frac{k}{r_0^2}$ , et  $x_0 \in M$ ,  $r_0 > 0$  tel que  $B_0(x_0, 4r_0)$  est relativement compacte dans  $M$ , et  $\text{vol}_0 B_0(x_0, r_0) \geq v_0 r_0^n$ . Alors pour tout  $0 \leq t \leq \frac{\epsilon^2 r_0^2}{\max(K, k)}$ ,*

$$(1 - \delta) \text{vol}_0 B_0(x_0, r_0) \leq \text{vol}_t B_t(x_0, r_0) \leq (1 + \delta) \text{vol}_0 B_0(x_0, r_0).$$

Comme mentionné en introduction, il existe des situations où il ne semble pas possible d'établir une minoration uniforme en temps du tenseur de Ricci. On souhaite donc affaiblir cette hypothèse, tout en conservant des contrôles sur les distances et volumes analogues à ceux des lemmes I.1.4 et I.1.6. C'est l'objet du reste de ce paragraphe.

Les hypothèses sous lesquelles on se place sont celles d'un flot  $g(t)$  défini pour  $0 \leq t \leq T$  sur une variété lisse  $M^n$  de dimension  $n$ , satisfaisant aux hypothèses (I.1), dont la donnée initiale vérifie (I.2). Plutôt que d'exiger une minoration uniforme en temps du tenseur de Ricci, on suppose qu'il existe une fonction  $\bar{t}(n, K, v, \epsilon) > 0$  telle que, pour tout  $\epsilon > 0$ ,

$$\text{Rc } g(t) \geq -\frac{\epsilon^2}{t} \text{ pour } 0 < t \leq \bar{t}(\epsilon). \quad (\text{I.4})$$

Encore une fois, intégrer ponctuellement l'équation  $\partial_t g(t) = -2\text{Rc } g(t)$  en tenant compte de la borne (I.4) donne seulement  $g(t) \leq \left(\frac{t}{s}\right)^{2(n-1)\epsilon^2}$  pour  $0 < s \leq t \leq \bar{t}(\epsilon)$  et donc ne fournit pas de majoration du tenseur  $g(t)$  en fonction de  $g(0)$ . On obtient néanmoins, dans ce cadre, le résultat suivant.

**Proposition I.1.7.** *Il existe  $\epsilon(n, K, v_0, \delta) > 0$  avec la propriété suivante. Soit  $g(t)$  un flot de Ricci sur  $M^n$  défini pour  $0 \leq t \leq T$ , satisfaisant aux hypothèses (I.1), dont la donnée initiale vérifie (I.2), et tel que*

$$\text{Rc } g(t) \geq -\frac{\epsilon^2}{t}$$

*pour  $0 < t \leq T$ . Alors, si  $x, x' \in M$  sont deux points tels que  $B_0(x, 2d_0(x, x') + 1)$  est relativement compacte dans  $M$  et  $0 \leq t \leq \epsilon^2$ , on a*

$$d_0(x, x') - \frac{20}{3}(n-1)\sqrt{Kt} \leq d_t(x, x') \leq (1 + \delta)d_0(x, x') + \frac{\delta\sqrt{t}}{\epsilon},$$

*et, si  $r > \frac{\delta\sqrt{t}}{\epsilon}$  est tel que  $B_0(x, 2r)$  est relativement compacte dans  $M$ ,*

$$\text{vol}_{g(t)} B_t(x, r) \geq (1 - \delta) \text{vol}_{g(0)} B_0(x, r).$$

Cet énoncé repose sur un argument par contradiction, que l'on esquisse maintenant, avant d'énoncer et de démontrer les lemmes techniques I.1.8 et I.1.9 dont la proposition I.1.7 découle. Pour  $\delta > 0$  fixé, on considère une suite de flots de Ricci  $g_i(t)$  sur  $M_i^n$  satisfaisant aux hypothèses (I.1), (I.2) et (I.4), ainsi qu'à une minoration  $\text{Rc } g_i(t) \geq -\frac{\epsilon_i^2}{t}$  pour une suite  $\epsilon_i > 0$  avec  $\epsilon_i \rightarrow 0$ . Supposons alors qu'il existe deux suites de points  $x_{0,i}, x_{1,i} \in M$  et une suite de temps

$0 < t_i \leq \epsilon_i^2$  tels que  $d_{t_i}(x_{0,i}, x_{1,i}) \geq (1 + \delta)d_0(x_{0,i}, x_{1,i}) + \frac{\delta\sqrt{t_i}}{\epsilon_i}$ . Pour chaque  $i$  on peut alors choisir le long d'une  $g_i(t_i)$ -géodésique minimisante connectant  $x_{0,i}$  à  $x_{1,i}$  deux points  $x'_{0,i}$  et  $x'_{1,i}$  avec  $\frac{\delta\sqrt{t_i}}{\epsilon_i} \leq d_{t_i}(x'_{0,i}, x'_{1,i}) \leq \frac{\sqrt{t_i}}{\epsilon_i}$  et  $d_{t_i}(x'_{0,i}, x'_{1,i}) \geq (1 + \delta)d_0(x'_{0,i}, x'_{1,i})$ . Après mise à l'échelle par un facteur  $\frac{\epsilon_i}{\sqrt{t_i}}$  des métriques  $g_i(0)$  et  $g_i(t_i)$  on obtient des métriques  $g_{0,i}$  et  $g_{1,i}$  sur  $B_{g_{0,i}}(x'_{0,i}, 2)$  et  $B_{g_{1,i}}(x'_{1,i}, 2)$  avec

- i)  $\text{Rc } g_{0,i} \geq -1, \text{Rc } g_{1,i} \geq -1,$
- ii)  $\text{vol}_{g_{0,i}} B_{g_{0,i}}(x_{0,i}, 2) \geq v_0$

telle que (en vertu du corollaire I.1.3 et de (I.3)) l'application  $\text{Id} : (B_{g_{1,i}}(x_{0,i}, 2), g_{1,i}) \rightarrow (M, g_{0,i})$  satisfait

- iii)  $d_{g_{0,i}}(x, x') \leq d_{g_{1,i}}(x, x') + \frac{20}{3}(n-1)\sqrt{K}\epsilon_i,$
- iv)  $\text{vol}_{g_{0,i}} U \geq e^{-n(n-1)t_i} \text{vol}_{g_{1,i}} U.$

Les minoration de la courbure de Ricci *i*) et l'hypothèse de non-effondrement *ii*) permettent d'invoquer le théorème de relative compacité de Gromov afin d'extraire des métriques limites  $d_0$  et  $d_1$  sur des boules  $B_{d_0}(x_0, 1)$  et  $B_{d_1}(y_0, 1)$ , les hypothèses *iii*) et *iv*) permettant quant à elles d'extraire une application limite  $f : B_{d_1}(y_0, 1) \rightarrow B_{d_0}(x_0, 1)$  avec  $f(y_0) = x_0$  telle que

$$d_0(f(x), f(x')) \leq d_1(x, x'),$$

$$\mathcal{H}_{d_0}^n f(U) \geq \mathcal{H}_{d_1}^n U.$$

( $\mathcal{H}_d^n$  désigne la mesure de Hausdorff de dimension  $n$  associée à  $d$ ). On en conclut que  $f$  est une isométrie, en contradiction avec l'existence de la suite des points  $x'_{1,i}$ , qui satisfont  $\delta \leq d_{1,i}(x'_{0,i}, x'_{1,i}) \leq 1$ , ce qui implique à la limite l'existence de  $y_1 \in B_{d_1}(y_0, 1)$  tel que  $d_1(y_0, y_1) \geq (1 + \delta)d_0(f(y_0), f(y_1))$ . Le lemme qui suit formalise essentiellement ce raisonnement.

**Lemme I.1.8.** *Il existe  $A(n, \eta) > 0$  et  $\epsilon(n, v_0, \eta, \delta) > 0$  avec la propriété suivante. Soit  $\eta \geq 0$  et  $(M^n, g, x_0)$  une variété riemannienne de dimension  $n$  telle que*

- (a)  $B_g(x_0, 4)$  est relativement compacte dans  $M$ ,
- (b)  $\text{Rc } g \geq -\frac{1}{\eta^2}$  sur  $B_g(x_0, 4)$
- (c)  $\text{vol}_g B_g(x, r) \geq v_0 r^n$

pour tout  $0 < r \leq 1$  tel que  $B_g(x, r)$  est relativement compacte dans  $B_g(x_0, 4)$ . Soit  $(N^n, h, y_0)$  une variété riemannienne de dimension  $n$  telle que

- (d)  $B_h(y_0, A)$  est relativement compacte dans  $N$ ,
- (e)  $\text{Rc } h \geq -\frac{1}{\eta^2}$  sur  $B_h(y_0, A)$ ,
- (f)  $\text{vol}_h B(y, r) \geq \eta \omega_n r^n$  pour tout  $y \in B_h(y_0, A)$ ,  $0 < r < \eta\epsilon$ .

Soit enfin  $\psi : (B_g(x_0, 4), x_0) \rightarrow (N, y_0)$  un plongement tel que

- (g)  $d_h(\psi(x), \psi(x')) \geq d_g(x, x') - \epsilon$  pour tous  $x, x' \in B(x_0, 4)$ ,
- (h)  $\text{vol}_h \psi(U) \leq (1 + \epsilon)\text{vol}_g U$  pour tout  $U \subset M$ .

Alors  $\psi$  est une  $\delta$ -isométrie de  $B_g(x_0, 1)$  dans  $B_h(y_0, 1 + \delta)$ , en particulier

$$d_{\text{GH}}(B_g(x_0, 1), B_h(y_0, 1)) \leq \delta, \quad \text{vol}_h B(y_0, r) \geq (1 - \delta) \text{vol}_g B(x_0, r)$$

pour tout  $\delta \leq r \leq 1$ .

*Démonstration.* On commence par une série de remarques valables sous les hypothèses (a) à (h) de l'énoncé, pour tout  $v_0 > 0$ ,  $0 < \epsilon, \eta \leq 1$  et  $A$  suffisamment grand choisi en fonction de  $\eta$  au cours de l'argument.

- (i) On a une première estimation de la dilatation de l'application  $\psi$ , selon laquelle, pour tous  $x, x' \in B_g(x_0, 1)$ ,

$$d_h(\psi(x), \psi(x')) \leq \frac{A}{2} (d_g(x, x') + \epsilon). \quad (\text{I.5})$$

On commence par traiter le cas de deux points  $x, x' \in B_g(x_0, 2)$  avec  $d_g(x, x') < \epsilon$ , connectés par une géodésique minimisante  $\overline{xx'}$  dont l'image  $\gamma$  par  $\psi$  est contenue dans  $B_h(y_0, \frac{A}{2})$ . Pour cela on considère une partie  $\eta\epsilon$ -séparée<sup>1</sup> (pour la distance  $d_h$ ) maximale  $\{y_i\}_{i \in I}$  de  $\gamma$ . On considère l'union de boules disjointes  $V = \bigcup_{i \in I} B_h(y_i, \frac{\eta\epsilon}{2})$ , puis on invoque l'observation suivante.

**Fait:** Soit  $\gamma$  un chemin (i.e. une application continue  $\gamma : [0, 1] \rightarrow N$ ) entre des points  $y$  et  $y'$  d'un espace métrique  $N$ . Alors toute partie  $r$ -séparée (pour la distance  $d_N$ ) maximale de  $\gamma$  possède au moins  $\frac{d_N(y, y')}{2r}$  éléments.

*Démonstration.* Soit  $\{y_i\}_{i \in I}$  une partie  $r$ -séparée maximale de  $\gamma$ , puis considérons le graphe dont les sommets sont les  $y_i$  et où  $y_i$  et  $y_j$  sont rattachés par une arête lorsque  $d_N(y_i, y_j) \leq 2r$ . Ce graphe est connexe : en effet, si  $I = I_0 \sqcup I_1$ , où  $I_0$  est l'ensemble des indices des sommets d'une composante connexe (non-vide) du graphe, on a  $d_N(y_i, y_{i'}) > 2r$  pour tous  $i \in I_0, i' \in I_1$ . Les ouverts  $V_0 = \bigcup_{i \in I_0} B(y_i, r)$  et  $V_1 = \bigcup_{i \in I_1} B(y_i, r)$  de  $\mathcal{X}$  sont disjoints. Or  $\{y_i\}_{i \in I}$  est un  $r$ -recouvrement de  $\gamma$ , donc  $\gamma \subset V_0 \cup V_1$ .  $\gamma$  étant un chemin continu, il est entièrement contenu soit dans  $V_0$  soit dans  $V_1$ , et puisque  $y_i \in \gamma$  pour tout  $i \in I$ , la seule possibilité est d'avoir  $I_0 = I$  et  $I_1 = \emptyset$  (puisque on a supposé  $I_0$  non-vide). Deux points d'un graphe connexe sont toujours reliés par un chemin dans le graphe de longueur au plus le cardinal du graphe : ici il en découle immédiatement  $d_N(y, y') \leq 2r|I|$ .  $\square$

Puisque  $\text{vol}_h V = \sum_{i \in I} \text{vol}_h B_h(y_i, \frac{\eta\epsilon}{2})$ , le fait ci-dessus combiné à l'hypothèse (f) de l'énoncé implique

$$\text{vol}_h V \geq \frac{\eta\omega_n}{2^{n+2}} (\eta\epsilon)^{n-1} d_h(\psi(x), \psi(x')). \quad (\text{I.6})$$

D'autre part  $\overline{xx'} \subset B_g(x, \epsilon)$ , ainsi l'hypothèse (g) fait que  $\psi^{-1}(V) \subset B_g(x, 3\epsilon)$ . L'hypothèse (h) a quant à elle pour conséquence  $\text{vol}_h V \leq (1 + \epsilon) \text{vol}_g B(x, 2\epsilon) \leq c(n)\epsilon^n$ . De ceci et de (I.6), on tire

$$d_h(\psi(x), \psi(x')) \leq \frac{c(n)(1 + \epsilon)}{\eta^n} \epsilon. \quad (\text{I.7})$$

Avant de traiter le cas général, on vérifie l'inclusion  $\psi(B_g(x_0, 2)) \subset B_h(y_0, \frac{A}{2})$ . Pour cela, on considère  $x \in B_g(x_0, 2)$  et  $\overline{x_0x}$  une géodésique minimisante. Si  $\psi(x) \notin B_h(y_0, \frac{A}{2})$ , il

1. Une partie  $X$  d'un espace métrique  $\mathcal{X}$  est dite  $r$ -séparée si pour tous  $x, x' \in X$ ,  $d(x, x') \geq r$ , ou de manière équivalente, si les boules ouvertes  $B(x, \frac{r}{2})$  avec  $x \in X$  sont deux à deux disjointes. Si  $X$  est une partie  $r$ -séparée de  $\mathcal{X}$  maximale avec cette propriété, alors pour tout  $y \in \mathcal{X}$ , il existe  $x \in X$  tel que  $d(x, y) < r$  - autrement dit  $X$  est un  $r$ -recouvrement de  $\mathcal{X}$ .



existe  $x' \in \overline{x_0 x}$  tel que  $\overline{x_0 x'} \subset B_g(x_0, 2)$  et  $\psi(x') \in S_h(y_0, \frac{A}{2})$ . En divisant  $\overline{x_0 x'}$  en au plus  $\frac{d_g(x_0, x')}{\epsilon} + 1$  segments de longueur inférieure à  $\epsilon$ , à chacun desquels on applique (I.7), on trouve  $d_h(y_0, \psi(x')) \leq \frac{c(n)(1+\epsilon)}{\eta^n} (d_g(x_0, x') + \epsilon)$ . On fixe à ce stade la constante  $A$  de l'énoncé en posant  $A = \frac{32c(n)}{\eta^n}$ . On conclut alors que  $d_h(y_0, \psi(x')) < \frac{A}{2}$ , en contradiction avec le choix de  $x'$ , donc  $\psi(x) \in B(y_0, \frac{A}{2})$ . On peut finalement traiter le cas de tout couple de points  $x, x' \in B_g(x_0, 1)$ , qui sont alors reliés par une géodésique  $\overline{xx'} \in B_g(x_0, 2)$  que l'on divise comme précédemment en segments de longueur au plus  $\epsilon$ .

- (ii) L'image de  $\psi$  contient une boule de taille fixée,  $B_h(y_0, 1 - \epsilon) \subset \psi(B_g(x_0, 1))$ . En effet, puisque  $\psi$  est un plongement,

$$\psi(\partial B_g(x_0, 1)) = \partial(\psi(B_g(x_0, 1))).$$

Ainsi, si  $y \in \partial(\psi(B_g(x_0, 1)))$ ,  $y = \psi(x)$  avec  $x \in S_g(x_0, 1)$ , aussi l'hypothèse (g) permet-elle d'affirmer que  $d_h(y_0, y) \geq 1 - \epsilon$ . Or, si un point  $z \in N \setminus \psi(B_g(x_0, 1))$  est tel que  $d_h(y_0, z) < 1 - \epsilon$ , il existe aussi un point  $y \in \overline{y_0 z} \cap \partial(\psi(B_g(x_0, 1 - \epsilon)))$  avec  $d_h(y_0, y) < 1 - \epsilon$  d'où une contradiction.

- (iii) On a une minoration préliminaire  $\text{vol } B_h(y_0, \frac{A}{2}) \geq v_1(n, v_0, \eta)$  sur le volume d'une boule dans  $N$ . En effet, l'estimation (I.5) entraîne  $\psi(B_g(x_0, \frac{1}{2})) \subset B(y_0, \frac{A}{4})$ . Si  $\{x_i\}_{i \in I}$  est une partie  $2\epsilon$ -séparée maximale de  $B_g(x_0, \frac{1}{2})$ ,  $\{x_i\}_{i \in I}$  est aussi  $2\epsilon$ -couvrante, on a donc d'une part  $\text{vol } B_g(x_0, \frac{1}{2}) \leq \sum_{i \in I} \text{vol } B_g(x_i, 2\epsilon)$ , et donc, grâce à l'hypothèse (c),

$$v_0 \leq C(n)\epsilon^n |I|.$$

D'autre part, l'hypothèse (g) nous assure que la famille des  $y_i = \psi(x_i)$  pour  $i \in I$  est  $\epsilon$ -séparée dans  $B(y_0, \frac{A}{4})$ . Aussi l'hypothèse (f) permet elle d'écrire

$$\text{vol } B_h(y_0, \frac{A}{2}) \geq c(n)|I|(\eta\epsilon)^n,$$

d'où finalement  $\text{vol } B_h(y_0, \frac{A}{2}) \geq c(n)v_0\eta^n$ .

Le reste de la preuve est un argument par contradiction. On fixe  $v_0, \delta, \eta > 0$  et on considère une suite  $\epsilon_k \rightarrow 0$ , ainsi que des suites  $(M_k, x_{0,k}), (N_k, y_{0,k})$ , et  $\psi_k$  satisfaisant aux hypothèses (a) à (h), et on suppose que quel que soit  $k$ ,  $\psi_k$  n'est pas une  $\delta$ -isométrie de  $B_g(x_0, 1)$  dans  $B_h(y_0, 1 + \delta)$ .

- (iv) Pour commencer, on extrait des suites  $(M_k, x_{0,k}), (N_k, y_{0,k})$  et  $\psi_k : M_k \rightarrow N_k$  des espaces limites  $(X, \bar{x}_0), (Y, \bar{y}_0)$ , et une application  $\bar{\psi} : X_0 \subset X \rightarrow Y$ . En effet, le théorème de compacité (relative) de Gromov sur la famille des variétés riemanniennes pointées à courbure de Ricci minorée garantit l'existence d'espaces de longueurs compacts  $(X, \bar{x}_0)$  et  $(Y, \bar{y}_0)$  tels qu'après extraction,

$$\begin{aligned} \left( \overline{B(x_{0,k}, 2)}, x_{0,k} \right) &\xrightarrow{G-H} (X, \bar{x}_0), \\ \left( B\left(y_{0,k}, \frac{A}{2}\right), y_{0,k} \right) &\xrightarrow{G-H} (Y, \bar{y}_0). \end{aligned}$$

Puisque  $X$  et  $Y$  sont des limites de suites de variétés non-effondrées (par l'hypothèse (c) dans un cas et d'après (iii) dans l'autre) un résultat de la théorie de Cheeger-Colding (Thm

10.15 dans [5], voir aussi [7]) garantit que la suite des mesures  $d\mu_{g_k(x)}$  sur  $B_{g_k}(x_{0,k}, 1)$  et  $d\mu_{h_k(x)}$  sur  $B_{h_k}(y_{0,k}, \frac{A}{4})$  convergent vers la mesure de Hausdorff  $n$ -dimensionnelle  $\mathcal{H}_X^n$  et  $\mathcal{H}_Y^n$  sur  $B_X(\bar{x}_0, 1)$  et  $B_Y(\bar{y}_0, \frac{A}{4})$  respectivement.

On construit ensuite une application  $\bar{\Psi} : Y \rightarrow X$  comme limite des  $\psi_k^{-1}$ . Pour cela on choisit une partie dense  $\mathcal{Y} = \{\bar{y}_i\}_{i \in I}$  de  $B_Y(\bar{y}_0, 1)$  puis, pour chaque  $i \in I$  des relevés  $y_{i,k} \in B_{h_k}(y_{0,k}, 1 - 2\epsilon_k)$  avec  $y_{i,k} \rightarrow \bar{y}_i$ , et enfin, tirant parti du fait que  $B_{h_k}(y_{0,k}, 1 - 2\epsilon_k)$  est contenue dans l'image de  $B_{g_k}(x_{0,k}, 1)$  par l'application  $\psi_k$  (voir (iii)), on définit la famille  $x_{i,k} = \psi_k^{-1}(y_{i,k})$  de leurs pré-images dans  $B_{g_k}(x_{0,k}, 1)$ . On peut supposer, après extraction, que la suite  $\{x_{i,k}\}_{k \geq 0}$  converge vers une limite  $\bar{x}_i \in B_X(\bar{x}_0, 1)$  pour chaque  $i \in I$ . On définit alors  $\bar{\Psi} : \mathcal{Y} \rightarrow X$  en posant  $\bar{\Psi}(\bar{y}_i) = \bar{x}_i$ . La propriété

$$d_X(\bar{\Psi}(\bar{y}_i), \bar{\Psi}(\bar{y}_{i'})) \leq d_Y(\bar{y}_i, \bar{y}_{i'})$$

pour tous  $i, i' \in I$  découle immédiatement de l'hypothèse (g) après passage à la limite. L'application  $\bar{\Psi}$  est donc uniformément continue, et se prolonge en une application définie sur  $B_Y(\bar{y}_0, 1)$  que l'on note encore  $\bar{\Psi}$ , et qui vérifie

$$\frac{2}{A}d_Y(y, y') \leq d_X(\bar{\Psi}(y), \bar{\Psi}(y')) \leq d_Y(y, y')$$

pour tous  $y, y' \in \overline{B_Y(\bar{y}_0, 1)}$ , la minoration provenant de (I.5) après passage à la limite. En particulier,  $\bar{\Psi}$  est une bijection sur son image  $X_0 := \overline{\bar{\Psi}(B_Y(\bar{y}_0, 1))}$ , et son inverse  $\bar{\psi} := \bar{\Psi}^{-1} : X_0 \rightarrow \overline{B_Y(\bar{y}_0, 1)}$  possède les propriétés suivantes

$$\begin{aligned} d_Y(\bar{\psi}(x), \bar{\psi}(x')) &\geq d_X(x, x') \text{ pour tous } x, x' \in X_0, \\ \mathcal{H}_Y^n \bar{\psi}(U) &\leq \mathcal{H}_X^n U \text{ pour tout } U \subset X_0. \end{aligned}$$

Rappelons que l'on définit  $\text{Lip}_x(\bar{\psi}) = \limsup_{r \rightarrow 0} \sup_{x' \in B_Y(x,r)} \frac{d_Y(\bar{\psi}(x), \bar{\psi}(x'))}{d_X(x, x')}$ .

**Fait:** En  $\mathcal{H}^n$ -presque tout point  $x \in X_0$ ,

$$\text{Lip}_x(\bar{\psi}) = 1. \tag{I.8}$$

*Démonstration.* Soit  $x \in X$  un point tel que tout espace tangent à  $X$  en  $x$ , ainsi que tout espace tangent à  $Y$  en  $y = \bar{\psi}(x)$ , est isométrique à  $\mathbb{R}^n$ . Par des mises à l'échelle appropriées, on peut extraire une application tangente  $\bar{\psi}_x : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  avec  $\bar{\psi}_x(0_n) = 0_n$ , et telle qu'il existe  $u \in \mathbb{R}^n$  avec  $|u| = 1$  et  $|\bar{\psi}_x(u)| = \text{Lip}_x(\bar{\psi})$ . D'autre part  $\bar{\psi}_x$  est une application  $A$ -Lipschitzienne telle que  $|\bar{\psi}_x(u) - \bar{\psi}_x(v)| \geq |u - v|$  pour tout  $u, v \in \mathbb{R}^n$  et  $\lambda_n \bar{\psi}(U) \leq \lambda_n U$  (où  $\lambda_n$  désigne la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^n$ ) pour tout  $U \subset \mathbb{R}^n$  ouvert. Le théorème de Rademacher garantit que  $\bar{\psi}_x$  est différentiable presque partout, avec  $\inf_{v \in \mathbb{R}^n} \frac{|d_u \bar{\psi}_x(v)|}{|v|} \geq 1$ , et en particulier  $J_u \bar{\psi}_x \geq 1$ . Si  $U \subset \mathbb{R}^n$  est un ouvert, la formule du Jacobien donne alors

$$\int_U (J_u \bar{\psi}_x - 1) du = \lambda_n \bar{\psi}_x(U) - \lambda_n U \leq 0$$

et donc  $J_x \bar{\psi} \leq 1$  presque partout. On en déduit que l'application  $d_u \bar{\psi}_x$  est une isométrie (linéaire) pour  $u$  en dehors d'une partie  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$  de mesure nulle. On choisit finalement des suites  $u_i \rightarrow u$  et  $v_i \rightarrow 0_n$  telles que  $\lambda_0[u_i v_i] \cap \mathcal{S} = \emptyset$ . Alors  $\ell(\bar{\psi}_x[u_i v_i]) \leq \ell([u_i v_i])$

et en passant à la limite  $|\bar{\psi}_x(u)| \leq |u|$  i.e.  $\text{Lip}_x(\bar{\psi}) = 1$ . Enfin, si  $\mathcal{S}(X)$  est l'ensemble des points de  $X$  qui possèdent au moins un espace tangent qui n'est pas isométrique à  $\mathbb{R}^n$ , le théorème 10.20 dans [5] permet d'affirmer que  $\dim_{\mathcal{H}} \mathcal{S}(X) \leq n - 2$ . De même  $\dim_{\mathcal{H}} \mathcal{S}(Y) \leq n - 2$ . Ainsi  $\mathcal{S}(X) \cup \bar{\psi}^{-1}(\mathcal{S}(Y))$  est de mesure nulle.  $\square$

**Fait:** En tout point  $x \in X_0$ , on a  $\text{Lip}_x(\bar{\psi}) = 1$ .

*Démonstration.* Soit  $x \in X_0$ ,  $y = \bar{\psi}(x)$ . On extrait une application tangente  $\bar{\psi}_x : X_x \rightarrow Y_y$  où  $X_x$  est le cône tangent à  $X$  en  $x$ ,  $Y_y$  le cône tangent à  $Y$  en  $y$ , telle qu'il existe  $x' \in X_x$  avec  $d_{X_x}(x, x') = 1$  et  $d_{Y_y}(y, \bar{\psi}_x(x')) = \text{Lip}_x(\bar{\psi})$ . Soit  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X_x$  le segment reliant  $x$  à  $x'$  dans  $X_x$ . Alors il existe  $0 < r_1 \leq 1$  tel que  $\limsup_{r \rightarrow r_1} \frac{d_{Y_y}(\bar{\psi} \circ \gamma(r), \bar{\psi} \circ \gamma(r_1))}{|r - r_1|} \geq \text{Lip}_x(\bar{\psi})$ . L'espace tangent à  $X_x$  en  $x_1 = \gamma(r_1)$  est de la forme  $(Z \times \mathbb{R}, (z_1, 0))$ , et l'espace tangent à  $Y_y$  en  $y_1 = \bar{\psi}_x(x_1)$  de la forme  $(W \times \mathbb{R}, (w_1, 0))$ . On extrait alors une application tangente  $\bar{\psi}_{x, x_1} : Z \times \mathbb{R} \rightarrow W \times \mathbb{R}$  avec  $d_{W \times \mathbb{R}}(\bar{\psi}_{x, x_1}(z_1, 0), \bar{\psi}_{x, x_1}(z_1, 1)) \geq \text{Lip}_x(\bar{\psi})$ . D'autre part, (I.8) a pour conséquence que  $\text{Lip}_{(z, r)}(\bar{\psi}_{x, x_1}) = 1$  pour presque tout  $(z, r) \in Z \times \mathbb{R}$ . En particulier, il existe une suite  $z_{1, i} \rightarrow 0$  telle que pour tout  $i$ ,  $\text{Lip}_{(z_{1, i}, r)}(\bar{\psi}_{x, x_1}) = 1$  pour presque tout  $0 \leq r \leq 1$ . Ainsi,  $d_{W \times \mathbb{R}}(\bar{\psi}_{x, x_1}(z_{1, i}, 0), \bar{\psi}_{x, x_1}(z_{1, i}, 1)) \leq 1$  et en passant à la limite  $d_{W \times \mathbb{R}}(\bar{\psi}_{x, x_1}(z_1, 0), \bar{\psi}_{x, x_1}(z_1, 1)) \leq 1$ . D'où  $\text{Lip}_x(\bar{\psi}) = 1$ .  $\square$

$\bar{\psi} : X_0 \rightarrow \overline{B_Y(\bar{y}_0, 1)}$  étant par ailleurs bijective, on conclut que c'est une isométrie et il est facile de vérifier que  $X_0 = \overline{B_X(\bar{x}_0, 1)}$ .

- (v) Le fait que  $\psi_k$  réalise une  $\delta$ -isométrie entre  $B_{g_k}(x_{0, k}, 1)$  et  $B_{h_k}(y_{0, k}, 1)$  pour  $k$  suffisamment grand découle de vérifications élémentaires. On choisit pour cela un sous-ensemble fini d'indices  $I_\delta \subset I$  tel que  $B_Y(x_0, 1)$  soit contenue dans le  $\frac{\delta}{4A}$  voisinage de  $\{\bar{y}_i\}_{i \in I_\delta}$ ,  $B_X(x_0, 1)$  étant alors contenue dans le  $\frac{\delta}{4A}$  voisinage de  $\{\bar{x}_i\}_{i \in I_\delta}$ . Alors, pour  $k$  suffisamment grand,  $B_{g_k}(x_{0, k}, 1)$  (resp.  $B_{h_k}(y_{0, k}, 1)$ ) est contenue dans le  $\frac{\delta}{2A}$ -voisinage de la famille  $\{x_{i, k}\}_{i \in I_\delta}$  (resp.  $\{y_{i, k}\}_{i \in I_\delta}$ ), et on a

$$|d_{g_k}(x_{i, k}, x_{j, k}) - d_X(\bar{x}_i, \bar{x}_j)| < \frac{\delta}{10}, \quad |d_{h_k}(y_{i, k}, y_{j, k}) - d_Y(\bar{y}_i, \bar{y}_j)| < \frac{\delta}{10}$$

pour tous  $i, j \in I_\delta$ . Donc, si  $x, x' \in B_{g_k}(x_{0, k}, 1)$ , il existe  $i, j \in I_\delta$  tels que  $x_{i, k} \in B_{g_k}(x, \frac{\delta}{2A})$  et  $x_{j, k} \in B_{g_k}(x', \frac{\delta}{2A})$ . On a alors

$$\begin{aligned} |d_{h_k}(\psi_k(x), \psi_k(x')) - d_{g_k}(x, x')| &\leq |d_{h_k}(\psi_k(x), \psi_k(x')) - d_{h_k}(\psi_k(x_{i, k}), \psi_k(x_{j, k}))| \\ &\quad + |d_{h_k}(y_{i, k}, y_{j, k}) - d_Y(\bar{y}_i, \bar{y}_j)| \\ &\quad + |d_Y(\bar{y}_i, \bar{y}_j) - d_X(\bar{x}_i, \bar{x}_j)| (= 0) \\ &\quad + |d_X(\bar{x}_i, \bar{x}_j) - d_{g_k}(x_{i, k}, x_{j, k})| \\ &\quad + |d_{g_k}(x_{i, k}, x_{j, k}) - d_{g_k}(x, x')|, \\ &< d_{h_k}(\psi_k(x), \psi_k(x_{i, k})) + d_{h_k}(\psi_k(x'), \psi_k(x_{j, k})) + \frac{4\delta}{10} \\ &< \frac{A}{2} d_{g_k}(x, x_{i, k}) + \frac{A}{2} d_{g_k}(x', x_{j, k}) + \frac{5\delta}{10}, \\ &< \delta. \end{aligned}$$

La  $\delta$ -surjectivité de  $\psi_k$  se vérifie de la même façon, ce qui permet de conclure l'argument par contradiction.  $\square$

L'étape suivante consiste à appliquer le lemme I.1.8 afin de comparer les métriques au temps 0 et en un temps  $t \ll 1$  d'un flot de Ricci satisfaisant aux hypothèses (I.1), (I.2). En effet, dans ce contexte le corollaire I.1.3 fournit le contrôle de la contraction des distances

$$d_t(x, x') \geq d_0(x, x') - C(n)\sqrt{K}t$$

tandis que l'on a la majoration des volumes

$$\text{vol}_t U \leq e^t \text{vol}_0 U$$

et le contrôle de l'échelle de régularité

$$\text{vol}_t B_t(x, r) \geq \frac{\omega_n}{2^n} r^n \text{ pour } 0 < r \leq \sqrt{\frac{t}{K}}.$$

Le paramètre  $\eta$  dans l'énoncé du lemme I.1.8, qui contrôle le rapport l'échelle à laquelle le volume des boules est minoré, et celle de la contraction contrôlée des distances, peut donc être choisi égal à  $\min(\frac{1}{2^n}, \frac{1}{K})$ .

**Lemme I.1.9.** *Il existe  $A(n, K)$  et  $\epsilon(n, K, v_0, \delta) > 0$  avec la propriété suivante. Soit  $g(t)$  un flot de Ricci sur  $M^n$  défini pour  $0 \leq t \leq T$ , satisfaisant aux hypothèses (I.1) dont la donnée initiale vérifie (I.2). Si de plus on suppose*

$$\text{Rc } g(t) \geq -\frac{\epsilon^2}{t},$$

alors pour tout  $0 \leq t \leq \epsilon^2$  et  $x_0 \in (M)_{\frac{A}{\epsilon}\sqrt{t}}$  on a

$$|d_t(x, x') - d_0(x, x')| \leq \frac{\delta\sqrt{t}}{\epsilon}$$

pour tous  $x, x' \in B_0(x_0, \frac{\sqrt{t}}{\epsilon})$  ainsi que, pour tout  $\frac{\delta\sqrt{t}}{\epsilon} \leq r \leq \frac{\sqrt{t}}{\epsilon}$ ,

$$\text{vol}_t B_t(x_0, r) \geq (1 - \delta)\text{vol}_0 B_0(x_0, r).$$

*Preuve du lemme I.1.9.* On pose  $\eta = \min(\frac{1}{2^n}, \frac{1}{K})$  puis  $A_0 = \max(4, A(n, \frac{1}{K}))$  tel que fourni par le lemme I.1.8. Pour  $0 < \epsilon \leq \frac{1}{\frac{20}{3}(n-1)\sqrt{K}}$ , si  $(x, t) \in M \times [0, T]$  est un point tel que  $B_0(x, 4A_0\epsilon^{-1}\sqrt{t})$  est relativement compact dans  $M$ , alors les hypothèses (I.1) et le corollaire I.1.2 garantissent que  $B_s(x, 2A_0\epsilon^{-1}\sqrt{t})$  reste relativement compacte dans  $M$  pour  $0 \leq s \leq t$ . De plus, par le corollaire I.1.3, on a  $d_s(y, y') \geq d_0(y, y') - \frac{20}{3}(n-1)\sqrt{K}s$  pour  $y, y' \in B_0(x, A_0\epsilon^{-1}\sqrt{t})$  et  $0 \leq s \leq t$ . Ensuite, la minoration de la courbure scalaire dans (I.1) fait que  $d\mu_s \leq e^s d\mu_0$ , donc si  $U \subset B_0(x, A_0\epsilon^{-1}\sqrt{t})$ , on a  $\text{vol}_{g(t)} U \leq e^t \text{vol}_{g(0)} U$ . Enfin, les hypothèses (I.1) impliquent aussi  $\text{vol}_{g(t)} B_t(y, r) \geq \frac{\omega_n}{2^n} r^n$  pour  $0 < r \leq \sqrt{\frac{t}{K}}$ .

Pour se ramener à l'énoncé du lemme I.1.8, on définit  $g = \frac{\epsilon^2}{t}g(0)$  et  $h = \frac{\epsilon^2}{t}g(t)$ . Ainsi  $B_g(x, A_0)$  et  $B_h(x, A_0)$  sont relativement compactes dans  $M$ , on a  $\text{Rc } g \geq -1$  et  $\text{Rc } h \geq -1$ , ce qui correspond à a), b), d) et e). c) est immédiat. Correspondant à f), g) et h) on a

$$\text{vol}_h B_t(y, r) \geq \frac{\omega_n}{2} r^n, \text{ pour } 0 < r \leq \frac{\epsilon}{\sqrt{K}} = \eta\sqrt{K}\epsilon,$$

$$d_h(y, y') \geq d_g(y, y') - \frac{20}{3}(n-1)\sqrt{K}\epsilon, \text{ pour tous } y, y' \in B_g(x, 4),$$

$$\text{vol}_{g(t)} U \leq e^{\epsilon^2} \text{vol}_{g(0)} U.$$

Ainsi, si  $\epsilon_0 = \epsilon(n, v_0, \eta, \delta)$  est fourni par l'énoncé du lemme I.1.8, alors pour  $\epsilon \leq \min(\ln(1 + \epsilon_0^2), \frac{\epsilon_0}{\frac{2}{3}(n-1)\sqrt{K}})$  le lemme s'applique et on trouve que l'application  $\text{Id} : B_g(x, 1) \rightarrow M$  est une  $\delta$ -isométrie de  $B_g(x, 1)$  dans  $B_h(x, 1 + \delta)$ , ainsi que la minoration des boules de rayon compris entre  $\delta$  et 1 pour la métrique  $h$ .  $\square$

On conclut ce paragraphe en démontrant la proposition I.1.7.

*Preuve de la proposition I.1.7.* Soit  $\epsilon = \epsilon(n, v_0, K, \delta)$  et  $A(n, K)$  donnés par le lemme I.1.9. On fixe  $0 < t \leq \frac{\epsilon^2}{A^2}$ . Soit  $\gamma$  une géodésique minimisante pour la métrique  $g(0)$  entre  $x$  et  $x'$ , et  $\{x_i\}_{0 \leq i \leq N}$  une suite de points de  $\gamma$  avec  $x_0 = x$ ,  $x_N = x'$ ,  $d_0(x_i, x_{i+1}) \leq \frac{\sqrt{t}}{\epsilon}$  pour tout  $0 \leq i \leq N - 1$  et  $N \leq \frac{d_0(x, x')\epsilon}{\sqrt{t}} + 1$ . On applique le lemme I.1.9 en chaque  $x_i$ , ce qui garantit en particulier  $d_t(x_i, x_{i+1}) \leq d_0(x_i, x_{i+1}) + \frac{\delta\sqrt{t}}{\epsilon}$  pour tout  $0 \leq i \leq N - 1$  et, après sommation,  $d_t(x, x') \leq (1 + \delta)d_0(x, x') + \frac{\delta\sqrt{t}}{\epsilon}$ .

Afin de minorer le volume des boules au temps  $t$  on a besoin du résultat de remplissage qui suit.

**Fait:** *Il existe  $\gamma(n, \delta) > 0$  avec la propriété suivante. Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne avec  $\text{Rc } g \geq -(n-1)$ ,  $B(x_0, 2)$  une boule relativement compacte dans  $M$  et  $0 < r_0 \leq 1$ . Alors il existe une famille finie de boules disjointes  $B(x_i, r_i) \subset B(x_0, 1)$  ( $i \in I$ ) avec  $\gamma r_0 \leq r_i \leq r_0$ , telle que  $\text{vol}_g(B(x_0, 1) \setminus \bigcup_{i \in I} B(x_i, r_i)) \leq \delta$ .*

Il existe ainsi  $\gamma = \gamma(n, \delta)$  et une famille finie de boules disjointes  $B_0(x_i, r_i) \subset B_0(x_0, 1 - \delta)$ ,  $i \in I$ , avec  $\frac{\gamma\sqrt{t}}{\epsilon} \leq r_i \leq \frac{\sqrt{t}}{\epsilon}$  telle que

$$\sum_{i \in I} \text{vol}_{g(0)} B_0(x_i, r_i) \geq (1 - \delta) \text{vol}_{g(0)} B_0(x_0, 1 - \delta). \quad (\text{I.9})$$

Alors, grâce au corollaire I.1.3, les boules  $B_t(x_i, (1 - \delta)r_i)$  sont encore disjointes et contenues dans  $B_t(x_0, 1)$ , quitte à réduire  $\epsilon > 0$  de façon à avoir  $\frac{2\delta}{3}(n-1)\sqrt{K} \leq \frac{2\delta\gamma}{\epsilon}$ . De plus, grâce au lemme I.1.8, on a  $\text{vol}_{g(t)} B_t(x_i, (1 - \delta)r_i) \geq (1 - \delta) \text{vol}_{g(0)} B_0(x_i, (1 - \delta)r_i)$ , d'où finalement

$$\begin{aligned} \text{vol}_{g(t)} B_t(x_0, 1) &\geq \sum_{i \in I} \text{vol}_{g(t)} B_t(x_i, (1 - \delta)r_i), \\ &\geq (1 - \delta) \sum_{i \in I} \text{vol}_{g(0)} B_0(x_i, (1 - \delta)r_i), \\ &\geq (1 - \delta)^2 e^{C\delta} \text{vol}_{g(0)} B_0(x_0, 1) \end{aligned}$$

en appliquant d'abord Bishop-Gromov à la métrique  $g(0)$ , puis grâce à (I.9).  $\square$

### I.1.3 Dilatation des distances en moyenne

Dans ce paragraphe, on complète le contrôle ponctuel de la dilatation des distances obtenu au lemme I.1.7 par un contrôle quantitatif et explicite de la valeur *moyenne* de cette quantité (pour les couples de points dans une boule de taille fixée). Ces résultats servent de préparation à des énoncés analogues pour la  $\mathcal{L}$ -distance du paragraphe I.1.4. L'idée était d'utiliser ces résultats pour construire des fonctions coordonnées et contrôler leur régularisations comme au paragraphe II.3.2 sous l'hypothèse  $\lambda_{\text{Rc}}^- \geq -\delta^2 \text{R}_{g(t)} - 1$  correspondant à la conjecture 0.16. Cela n'aboutit pas et les résultats de ce paragraphe et du paragraphe I.1.4 ne sont pas utilisés dans la suite.

Les estimations en moyenne que l'on établit ici reposent sur l'inégalité du segment de Cheeger-Colding (voir [7]) dont on rappelle l'énoncé.

**Lemme I.1.10** (Inégalité du segment, [7]). *Soit  $(M^n, g)$  une variété riemannienne et  $p \in M$ ,  $r > 0$  tels que  $B(p, r)$  est relativement compacte dans  $M$ . On suppose*

$$\text{Rc } g \geq -1.$$

*Soit  $f : M \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction mesurable. Alors on a*

$$\iint_{B(p, \frac{r}{2})^2} \left( \int_0^{d(x,y)} f \circ \gamma_{x,y}(u) du \right) d\mu_g(x) d\mu_g(y) \leq C r \text{vol}_g B(p, \frac{r}{2}) \int_{B(p,r)} f d\mu_g,$$

où  $\gamma_{x,y}$  désigne, pour tous  $x, y \in B(p, \frac{r}{2})$ , une géodésique minimisante joignant  $x$  à  $y$ .

On utilisera en réalité une formulation légèrement différente du principe du lemme I.1.10, conséquence directe de la preuve telle qu'elle apparaît dans [7]. Soit  $(M^n, g)$  une variété riemannienne de dimension  $n$  et  $x_0 \in M$  tel que  $B_0(x_0, 2)$  est relativement compacte dans  $M$ . Si pour  $0 \leq \xi \leq 1$  et  $x, y \in B(x_0, 1)$  non-conjugués donnés on note  $m_\xi(x, y) = \gamma_{x,y}(\xi d)$  où  $\gamma_{x,y} : [0, d] \rightarrow B(x_0, 2)$  est la géodésique minimale connectant  $x$  à  $y$  et  $d = d(x, y)$ , on définit pour tout  $x \in B(x_0, 1)$  une application injective  $m_\xi(x, \cdot) : B(x_0, 1) \rightarrow M$  sur une partie de mesure pleine de son ensemble de départ. Si on suppose  $\text{Rc } g \geq -k$ , le principe de comparaison des champs de Jacobi montre que

$$\det (dm_\xi(x, \cdot))_y \geq \left( \frac{\sinh \xi \sqrt{k} d}{\sinh \sqrt{k} d} \right)^n.$$

En particulier, si  $x_1 \in B(x_0, 1)$ ,  $r_1 > 0$  sont tels que  $B(x_1, r_1) \subset B(x_0, 1)$ , si  $\text{Rc } g \geq -1$ , et si  $f : M \rightarrow \mathbb{R}_+$  est une fonction intégrable, on a, pour tous  $0 < \xi_0 \leq \xi_1 \leq 1$ ,

$$\int_{B(x_1, r_1)} \int_{\xi_0 d(x,y)}^{\xi_1 d(x,y)} f \circ \gamma_{x,y}(u) du d\mu_g(y) \leq C \left( \frac{1}{\xi_0^{n-1}} - \frac{1}{\xi_1^{n-1}} \right) \int_A f d\mu_g, \quad (\text{I.10})$$

où  $A = B(x, (d_1 + r_1)\xi_1) \setminus B(x, (d_1 - r_1)\xi_0)$  et  $d_1 = d(x, x_1)$ . En considérant la limite lorsque  $\xi_1$  tend vers  $\xi_0$ , on obtient l'inégalité supplémentaire

$$\int_{B(x_1, r_1)} f \circ m_\xi(x, y) du d\mu_g(y) \leq \frac{C}{\xi^n} \int_A f d\mu_g, \quad (\text{I.11})$$

( $A = B(x, (d + r_1)\xi) \setminus B(x, (d - r_1)\xi)$  et  $d_1 = d(x, x_1)$ ) à laquelle sera aussi fait appel plus tard. Notons enfin que le lemme I.1.10 se déduit de (I.10) en intégrant sur la variable  $x$  sur  $B(x_0, r_0)$ , en spécialisant d'abord pour  $\xi_0 = \frac{1}{2}$ ,  $\xi_1 = 1$ , puis en inversant les rôles de  $x_0$  et  $x_1$  et en sommant les deux inégalités obtenues.

**Lemme I.1.11.** *Il existe  $C(n, K, v_0)$ ,  $A(n, K)$  et  $\epsilon(n, K, v_0) > 0$  avec la propriété suivante. Soit  $g(t)$  un flot de Ricci défini sur  $M^n \times [0, T]$  satisfaisant aux hypothèses (I.1) et (I.2). Pour  $\delta < \epsilon$ ,  $0 < \Lambda \leq 1$ , on suppose le pincement du tenseur de Ricci*

$$\lambda_{\text{Rc}}^-(x, t) \geq -\delta^2 \text{R}_{g(t)} - \Lambda \quad (\text{I.12})$$

ainsi que  $R_{g(t)} \geq -\Lambda$  pour  $(x, t) \in M \times [0, T]$ . Alors si  $(x_0, t_0) \in M \times [0, \epsilon^2]$  est tel que  $B_{t_0}(x_0, 8)$  est relativement compacte dans  $M$ , pour tout  $x_1 \in B_0(x_0, 1)$ ,  $r_1 > 0$  tel que  $B_0(x_1, r_1) \subset B_0(x_0, 1)$  et  $0 < \xi_0 < 1$ ,  $\xi_0 + A\sqrt{t_0} \leq \xi_1 \leq 1$ , on a

$$\begin{aligned} & \int_{B_0(x_1, r_1)} (d_{t_0} - d_0)_+ \circ m_{\xi_0, \xi_1}(x_0, y) \, d\mu_0(y) \\ & \leq C \left( \frac{\delta^2}{\xi_0^n} \int_0^{t_0} \int_{A(\xi_0, \xi_1)} (R_{g(t)} + \Lambda) \, d\mu_t dt + \Lambda r_1^n t_0 \right) (\xi_1 - \xi_0). \end{aligned}$$

où l'application  $m_{\xi_0, \xi_1} : B_0(x_0, 1) \rightarrow B_0(x_0, 2)$  associe à un couple de points non-conjugués  $(x, y) \in B_0(x_0, 1)^2$  connectés par une géodésique  $\gamma_{x, y} : [0, d] \rightarrow B_0(x_0, 2)$  ( $d = d_0(x, y)$ ) le couple  $(\gamma_{x, y}(\xi_0 d), \gamma_{x, y}(\xi_1 d))$  et  $A(\xi_0, \xi_1) = B_0(x_0, \xi_1(d + r_1) + A\sqrt{t_0}) \setminus B_0(x_0, \xi_0(d - r_1) - A\sqrt{t_0})$  ( $d = d_0(x_0, x_1)$ ).

Quelques manipulations supplémentaires conduisent au corollaire suivant.

**Corollaire I.1.12.** *Il existe  $C(n, K, v_0, \alpha)$  et  $\epsilon(n, K, v_0) > 0$  avec la propriété suivante. Soit  $g(t)$  un flot de Ricci défini pour  $0 \leq t \leq T$  sur  $M^n$ , satisfaisant aux mêmes hypothèses que dans le lemme I.1.11 (pour  $0 < \delta \leq \epsilon$ ). On suppose en plus qu'il existe  $\beta > 0$  tels que pour tout  $x \in B_0(x_0, 2)$ ,  $0 < r \leq 1$  et  $0 < t \leq \alpha^2 r^2$ , on a*

$$\int_0^t \int_{B_0(x, r)} (R_{g(s)} + \Lambda) \, d\mu_s ds \leq \beta r^{n-2} t. \quad (\text{I.13})$$

Alors, pour  $x_1 \in B_0(x_0, 1)$ ,  $r_1 > 0$  tel que  $B_0(x_1, r_1) \subset B_0(x_0, 1)$ ,  $0 \leq \xi \leq 1$  et  $0 \leq t_0 \leq \min(\alpha^2, \epsilon^2)$  on a

$$\int_{B_0(x_1, r_1)} (d_{t_0} - d_0)_+ \circ m_{0, \xi}(x_0, x) \, d\mu_0(x) \leq C (\delta^2 \beta \sqrt{t_0} + \Lambda r_1^n t_0 \max(\sqrt{t_0}, \xi)).$$

Le lemme I.1.11 et le corollaire I.1.12 aboutissent en particulier aux estimations du corollaire I.1.13 ci-dessous sur la dilatation en moyenne de la fonction distance. Cet énoncé ne sera pas utilisé tel quel dans la suite, on l'inclut sans preuve à titre de comparaison avec le lemme I.1.17 qui fournit les estimations analogues pour la fonction  $L$ -distance (dont la preuve repose aussi sur le lemme I.1.11 et son corollaire I.1.13).

**Corollaire I.1.13.** *Il existe  $C(n, K, v_0, \alpha)$  et  $\epsilon(n, K, v_0) > 0$  avec la propriété suivante. Soit  $g(t)$  un flot de Ricci défini pour  $0 \leq t \leq T$  sur  $M^n$ , satisfaisant aux mêmes hypothèses que dans le corollaire I.1.12 (pour  $0 < \delta \leq \epsilon$ ). Pour  $x_1 \in B_0(x_0, 1)$ ,  $r_1 > 0$  tel que  $B_0(x_1, r_1) \subset B_0(x_0, 1)$ , et  $0 \leq t \leq \min(\alpha^2, \epsilon^2)$  on a d'une part*

$$(i) \quad \int_{B_0(x_1, r_1)} (d_t - d_0)_+(x_0, x) \, d\mu_0(x) \leq C(\delta^2 \beta + \Lambda r_1^n) \sqrt{t}.$$

D'autre part, pour  $0 < r_0 \leq 1$ , on a

$$(ii) \quad \iint_{B_0(x_0, r_0) \times B_0(x_1, r_1)} (d_t - d_0)_+(x, y) \, d\mu_0(x) \, d\mu_0(y) \leq C(\delta^2 \beta (r_0 + r_1) r_0^{n-1} + \Lambda r_0^n r_1^n) t.$$

L'idée de la preuve du lemme I.1.11 est la suivante. Si, au temps  $t$ , deux points  $x$  et  $x'$  sont connectés par une géodésique  $\gamma_{x,x'}$  le pincement du tenseur de Ricci permet de majorer l'évolution de la distance entre  $x$  et  $x'$

$$\begin{aligned}\partial_t d_t(x, x') &\leq \int_0^{d_t(x, x')} (-\lambda_{\text{Rc}}^-(\gamma_{x, x'}(r), t)) dr, \\ &\leq \delta \int_0^{d_t(x, x')} \text{R}_{g(t)}(\gamma_{x, x'}(r), t) dr + \Lambda.\end{aligned}$$

En intégrant pour tous les couples  $(x, x') \in B_0(x_0, 1)^2$  on obtient

$$\begin{aligned}\partial_t \int_{B_0(x_0, 1)^2} (d_t - d_0)_+ d\mu_t \otimes d\mu_t &\leq \delta \int_{B_0(x_0, 1)^2} \int_0^{d_t(x, x')} \text{R}_{g(t)}(\gamma_{x, x'}(r), t) dr d\mu_t \otimes d\mu_t \\ &\quad - 2 \int_{B_0(x_0, 1)^2} (d_t - d_0)_+ \text{R}_{g(t)} d\mu_t \otimes d\mu_t + C\Lambda.\end{aligned}$$

Ainsi, si on peut appliquer l'inégalité du segment du lemme I.1.10 à la métrique  $g(t)$ , on trouve

$$\partial_t \int_{B_0(x_0, 1)^2} (d_t - d_0)_+ d\mu_t \otimes d\mu_t \leq C\delta \int_{B_0(x_0, 2)} \text{R}_{g(t)} d\mu_t + C\Lambda,$$

et le résultat suit en intégrant. La difficulté provient du fait que l'on ne suppose pas la minoration uniforme de la courbure de Ricci qui permettrait d'appliquer le lemme I.1.10. On aura besoin au cours de la preuve du lemme I.1.11 d'un résultat technique permettant de comparer la valeur ponctuelle et la moyenne locale de la courbure scalaire à une échelle de l'ordre de  $\sqrt{t}$ .

**Lemme I.1.14.** *Il existe  $\eta_0(n) > 0$  et  $C(n, K, \eta, A)$  avec les propriétés suivantes. Soit  $0 < \eta \leq \eta_0$ , et  $g(t)$  un flot de Ricci sur  $M^n \times [(1 - \frac{\eta^2}{K})^2 \bar{t}, \bar{t}]$  satisfaisant aux hypothèses (I.1). On suppose, pour  $a, b > 0$  fixés, la condition de pincement du tenseur de Ricci*

$$\text{Rc } g(t)(u, u) \geq -a\text{R}_{g(t)} - b \tag{I.14}$$

pour tout  $u \in T_x M$  avec  $|u|_t = 1$ , ainsi que  $\text{R}_{g(t)} \geq -b$  pour tout  $(x, t) \in M \times [(1 - \frac{\eta^2}{K})^2 \bar{t}, \bar{t}]$ . Soit  $x_0 \in M$  tel que  $B_{\bar{t}}(x_0, 4A\sqrt{\bar{t}})$  est relativement compacte dans  $M$ . Alors, si on définit  $P = B_{\bar{t}}(x_0, A\sqrt{\bar{t}}) \times [(1 - \frac{\eta^2}{K})\bar{t}, \bar{t}]$  et  $Q = B_{\bar{t}}(x_0, 2A\sqrt{\bar{t}}) \times [(1 - \frac{\eta^2}{K})^2 \bar{t}, \bar{t}]$  on a

$$\sup_P \text{R}_{g(t)} \leq \frac{e^{C(1+a)}}{t^{\frac{a}{2}+1}} \int_Q (\text{R}_{g(t)} + b) d\mu_t dt + e^{C(1+a)} b.$$

*Démonstration.* On met le flot à l'échelle en posant  $\tilde{g}(s) = \frac{K}{\bar{t}} g((1 + \frac{s}{K})\bar{t})$  pour  $-\frac{3}{2}\eta^2 \leq s \leq 0$ , et on suppose  $\eta \leq \frac{1}{2}$  choisi de manière à ce que  $\frac{1}{4}\tilde{g}(0) \leq \tilde{g}(s) \leq 4\tilde{g}(0)$  pour  $-\frac{3}{2}\eta^2 \leq s \leq 0$ . On a alors  $P = B_0(x_0, A\sqrt{K}) \times [-\eta^2, 0]$  et  $B_0(x_0, 2A\sqrt{K}) \times [-\frac{3\eta^2}{2}, 0] \subset Q$ . On commence par définir une fonction  $u(x, s) = \text{R}_{\tilde{g}(s)} + \frac{b\bar{t}}{K}$  sur  $M \times [-\frac{3\eta^2}{2}, 0]$  dont on vérifie qu'elle satisfait à  $u \geq 0$  ainsi qu'à l'équation

$$\begin{aligned}(\partial_s - \Delta - \text{R}_{\tilde{g}(s)})u &= 2|\text{Rc } \tilde{g}(s)|^2 - \text{R}_{\tilde{g}(s)}^2, \\ &\leq 4(n-1)|\text{Rc } \tilde{g}(s)|,\end{aligned}$$



grâce à la borne *a priori* sur la norme du tenseur de courbure. D'autre part, on a (pour  $|u|_s = 1$ )

$$\begin{aligned} -aR_{\tilde{g}(s)} - \frac{b\bar{t}}{K} &\leq \operatorname{Rc} \tilde{g}(s)(u, u) \leq R_{\tilde{g}(s)} - (n-1) \inf_{|u|=1} \operatorname{Rc} \tilde{g}(s)(u, u), \\ &\leq (1 + (n-1)a)R_{\tilde{g}(s)} + (n-1) \frac{b\bar{t}}{K}. \end{aligned}$$

d'où, pour  $C(n, K)$  ne dépendant que de  $n$  et  $K$ ,

$$(\partial_s - \Delta - R_{\tilde{g}(s)})u \leq C((1+a)u + b\bar{t}).$$

On définit alors une seconde fonction,  $v(x, s) = (u - Cb\bar{t}s)e^{-C(1+a)s}$ , qui satisfait à

$$(\partial_s - \Delta - R_{\tilde{g}(s)})v \leq 0. \quad (\text{I.15})$$

On pose  $m = \int_{-\frac{3}{2}\eta^2}^0 \int_{\tilde{B}_0(x_0, 2\sqrt{KA})} v(x, s) d\tilde{\mu}_s(x) ds$ . Par continuité, on peut sélectionner  $-\frac{3}{2}\eta^2 \leq s_0 \leq -\frac{5}{4}\eta^2$  tel que

$$\int_{\tilde{B}_0(x_0, 2\sqrt{KA})} v(s_0, x) d\tilde{\mu}_{s_0}(x) \leq \frac{4m}{\eta^2} \quad (\text{I.16})$$

Par un argument analogue, si on pose  $\Omega = \tilde{B}_0(x_0, 2\sqrt{KA})$ , on peut trouver  $0 < r_0 \leq \frac{\sqrt{K}}{2}A$  tel que si  $\Omega(r) = \{x \in \Omega \mid \tilde{B}_0(x, r) \text{ est relativement compacte dans } \Omega\}$ ,

$$\int_{-\frac{3}{2}\eta^2}^0 \int_{\partial\Omega(r_0)} v(x, s) d\tilde{\sigma}_s(x) ds \leq C \frac{m}{\sqrt{KA}}. \quad (\text{I.17})$$

où la constante  $C$  ne dépend que de  $n$ . De plus, les arguments de la preuve du lemme I.2.9 du paragraphe I.2 (pour  $N = 1$ ) permettent en plus d'établir les bornes suivantes

$$K_{(x,s)}^*(y, s_0) \leq \frac{C}{\eta^n}, \quad \left| \nabla K_{(x,s)}^*(z, u) \right| \leq C \quad (\text{I.18})$$

pour tout  $(x, s) \in \tilde{B}(x_0, A\sqrt{K}) \times [-\eta^2, 0]$ ,  $y \in \Omega(r_0)$  et  $(z, u) \in \partial\Omega(r_0) \times [s_0, 0]$ , où  $K_{(x,s)}^*$  désigne la solution fondamentale du problème de Dirichlet  $(\partial_s + \Delta)w = 0$  sur  $\Omega(r_0) \times [s_0, 0]$  avec  $w \equiv 0$  sur  $\Omega(r_0) \times \{s_0\} \cup \partial\Omega(r_0) \times [s_0, 0]$ . L'équation (I.15) satisfaite par  $v$  permet de faire appel à la formule de représentation

$$v(x, s) \leq \int_{\Omega(r_0)} v(y, s_0) K_{(x,s)}^*(y, s_0) d\tilde{\mu}_{s_0} + \int_{s_0}^0 \int_{\partial\Omega(r_0)} v(z, u) \nabla K_{(x,s)}^*(z, u) \cdot \eta d\tilde{\sigma}_{s_0}(z) ds,$$

les estimations (I.16), (I.17) et (I.18) se combinant alors pour aboutir à la majoration

$$\sup_{\tilde{B}_0(x_0, A\sqrt{K}) \times [-\eta^2, 0]} v \leq C(n, K, \eta, A)m,$$

d'où, en revenant à l'expression de  $v$ , la majoration de l'énoncé. □

*Preuve du lemme I.1.11.* (i) Pour  $0 < t \leq \epsilon_0^2$  et  $0 < \delta^2 \leq \epsilon_0^2$ , la condition de pincement (I.12) entraîne en particulier (puisque  $\Lambda \leq 1$ ) la minoration  $\text{Re } g(t) \geq -\frac{(n(n-1)K+1)\epsilon_0^2}{t}$ . On peut donc poser  $\epsilon_0 = \frac{1}{\sqrt{n(n-1)K+1}} \epsilon(n, K, v_0, \frac{1}{10})$ , où  $\epsilon(n, K, v_0, \frac{1}{10})$  provient de la proposition I.1.7, de façon à garantir à le contrôle de la distorsion des distances

$$d_0(x, y) - \frac{20}{3}(n-1)\sqrt{Kt} \leq d_t(x, y) \leq \frac{11}{10}d_0(x, y) + \frac{\sqrt{t}}{10\epsilon_0} \quad (\text{I.19})$$

et la minoration du volume des boules

$$\text{vol}_{g(t)} B_t(x, r) \geq \frac{9}{10} \text{vol}_{g(0)} B_0(x, r) \quad (\text{I.20})$$

pour tous  $x, y \in B_0(x_0, 4)$ ,  $\frac{\sqrt{t}}{10\epsilon_0} \leq r \leq 1$  et  $0 \leq t \leq \epsilon_0^2$ .

On fixe ensuite  $x_1, r_1, \xi_0, \xi_1$  et  $0 < t_0 \leq \epsilon_0^2$  comme dans l'énoncé, et on définit

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_0 &= \{x \in M \mid \xi_0(d_1 - r_1) - A\sqrt{t_0} \leq d_0(x_0, x) \leq \xi_1(d_1 + r_1) + A\sqrt{t_0}\}, \\ \mathcal{A}_1 &= \{x \in M \mid \xi_0(d_1 - r_1) - 2A\sqrt{t_0} \leq d_0(x_0, x) \leq \xi_1(d_1 + r_1) + 2A\sqrt{t_0}\}, \end{aligned}$$

où  $d_1 = d_0(x_0, x_1)$  et la constante  $A$  sera choisie plus bas. La première étape consiste à recouvrir  $\mathcal{A}_0 \times [0, t_0]$  par des domaines paraboliques sur lesquels le flot évolue à courbure bornée. Après avoir fixé  $\eta > 0$  (en fonction de  $n$  et  $K$ ) de manière à avoir, pour tous  $(1 - \frac{\eta^2}{K})^2 t \leq s \leq t \leq T$ ,  $\frac{1}{4}g(t) \leq g(s) \leq 4g(t)$ , on définit une suite de temps décroissants  $\{t_i\}_{i \leq 0}$  en posant  $t_i = (1 - \frac{\eta^2}{K})^{-i} t_0$ . Pour tout  $i \leq 0$ , on sélectionne alors  $\{x_{i,j}\}_{j \in J_i}$  une partie  $\frac{\epsilon_0^{-1}\sqrt{t_i}}{2}$ -séparée maximale (et donc  $\epsilon_0^{-1}\sqrt{t_i}$ -couvrante) de  $\mathcal{A}_0$  pour la métrique  $d_{t_i}$ . On définit ensuite les domaines paraboliques  $P_{i,j} = B_{t_i}(x_{i,j}, 4\epsilon_0^{-1}\sqrt{t_i}) \times [t_{i-1}, t_i]$  et  $Q_{i,j} = B_{t_i}(x_{i,j}, 8\epsilon_0^{-1}\sqrt{t_i}) \times [t_{i-2}, t_i]$ . Si  $A \geq 8\epsilon_0^{-1} + \frac{20}{3}\sqrt{K}$  et  $i_0 \leq 0$ ,

$$\mathcal{A}_0 \times [t_{i_0}, t_0] \subset \bigcup_{i_0 \leq i \leq 0, j \in J_i} P_{i,j} \subset \bigcup_{i_0 \leq i \leq 0, j \in J_i} Q_{i,j} \subset \mathcal{A}_1 \times [t_{i_0}, t_0].$$

On pose enfin  $m_{i,j} = \frac{1}{|B_{t_i}(x_{i,j}, 8\epsilon_0^{-1}\sqrt{t_i})|} \int_{Q_{i,j}} (\text{R}_g(t) + \Lambda) d\mu_t$  et  $M_{i,j} = \sup_{P_{i,j}} (\text{R}_g(t) + \Lambda)$ .

(ii) On fixe  $i_0 \leq 0$ . On a

$$\sum_{i=i_0}^0 \sum_{j \in J_i} |B_{t_i}(x_{i,j}, 8\epsilon_0^{-1}\sqrt{t_i})|_{t_i} M_{i,j} \leq C \int_0^{t_0} \int_{\mathcal{A}_1} (\text{R}_g(t) + \Lambda) d\mu_t dt. \quad (\text{I.21})$$

En effet, fixons  $i \leq 0$ . Puisque la famille  $\{x_{i,j}\}_{j \in J_i}$  est  $\frac{\sqrt{t_i}}{2\epsilon_0}$ -séparée pour la métrique  $d_0$ , il existe une constante  $C(n)$  telle que l'on peut partitionner  $J_i$  en  $N$  sous-ensembles, i.e.  $J_i = J_{i,1} \cup \dots \cup J_{i,N}$ , avec  $N \leq C$ , tels que pour tout  $1 \leq k \leq N$ , la famille  $\{x_{i,j}\}_{j \in J_{i,k}}$  est  $16\epsilon_0^{-1}\sqrt{t_i}$ -séparée pour la métrique  $d_0$ , et donc  $8\epsilon_0^{-1}\sqrt{t_i}$ -séparée pour la métrique  $d_{t_i}$ . D'autre part  $\bigcup_{j \in J_{i,k}} B_{t_i}(x_{i,j}, 8\epsilon_0^{-1}\sqrt{t_i}) \subset \mathcal{A}_1$  pour tout  $1 \leq k \leq N$ , donc  $\sum_{i \leq 0} \sum_{j \in J_i} \int_{t_{i-2}}^{t_i} \int_{B_{t_i}(x_{i,j}, 8\epsilon_0^{-1}\sqrt{t_i})} (\text{R}_g(t) + \Lambda) d\mu_s ds \leq \int_0^{t_0} \int_{\mathcal{A}_1} (\text{R}_g(t) + \Lambda) d\mu_s ds$  soit, en sommant sur  $k$  puis sur  $i$ ,

$$\sum_{i \leq 0} \sum_{j \in J_i} |B_{t_i}(x_0, 8\epsilon_0^{-1}\sqrt{t_i})|_{t_i} m_{i,j} \leq C \int_0^{t_0} \int_{\mathcal{A}_1} (\text{R}_g(t) + \Lambda) d\mu_t dt.$$

On conclut en remarquant que sur chaque  $Q_{i,j}$ , le lemme I.1.14 s'applique (si on s'assure que dans (i),  $\eta$  est choisi inférieur au  $\eta_0(n)$  provenant de cet énoncé), d'où

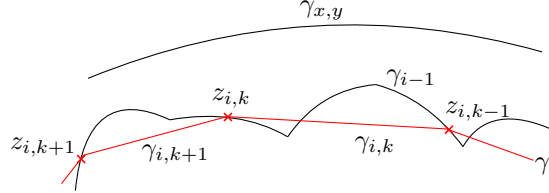
$$M_{i,j} \leq C \left( \frac{m_{i,j}}{t_i} + \Lambda \right)$$

pour une constante  $C(n, K, v_0)$ , d'où (I.21).

(iii) Soit  $x \in B_0(x_1, r_1)$ ,  $\gamma_{x_0,x} : [0, d] \rightarrow B_0(x_0, 2)$  (où  $d = d_0(x_0, x)$ ) une géodésique minimisante entre  $x_0$  et  $x$  pour la métrique  $g(0)$ ,  $\bar{x} = \gamma_{x_0,x}(\xi_0 d)$  et  $\bar{y} = \gamma_{x_0,x}(\xi_1 d)$ , et enfin  $\bar{\gamma} = \gamma_{x_0,x}|_{[\xi_0 d, \xi_1 d]}$ . On a en particulier  $\bar{\gamma} \subset \{x \in M \mid \xi_0(d_1 - r_1) < d_0(x_0, x) < \xi_1(d_1 + r_1)\}$ . On fixe  $i_0 < 0$  et on construit une suite de chemins  $\gamma_i$  ( $i_0 \leq i \leq 0$ ) entre  $\bar{x}$  et  $\bar{y}$  avec, pour  $i_0 + 1 \leq i \leq 0$ ,

- a)  $\ell_{t_{i-1}}(\gamma_i) \leq \ell_{t_{i-1}}(\gamma_{i-1})$ ,
- b)  $\gamma_i \subset \{x \in M \mid d_{t_{i-1}}(x, \gamma_{i-1}) < \epsilon_0^{-1} \sqrt{t_{i-1}}\}$ .

Pour cela on pose  $\gamma_{i_0} = \bar{\gamma}$  puis on suppose que  $\gamma_{i-1}$  est construit, et on considère une suite de points  $z_{i,1}, \dots, z_{i,k_i}$  le long de  $\gamma_{i-1}$  avec  $\frac{1}{2} \epsilon_0^{-1} \sqrt{t_{i-1}} \leq d_{t_{i-1}}(z_{i,k}, z_{i,k+1}) \leq \epsilon_0^{-1} \sqrt{t_{i-1}}$  pour tout  $1 \leq k \leq k_i - 1$ . Pour tout  $1 \leq k \leq k_i - 1$ , on choisit  $\gamma_{i,k}$  une géodésique minimisante pour la métrique  $g(t_{i-1})$  entre  $z_{i,k}$  et  $z_{i,k+1}$ .  $\gamma_i$  est le chemin entre  $\bar{x}$  et  $\bar{y}$  obtenu en concaténant les  $\gamma_{i,k}$ ,  $1 \leq k \leq k_i - 1$ , les propriétés a) et b) étant alors immédiates.



Compte tenu de l'estimation (I.19) la propriété b) implique  $\gamma_i \subset \{x \in M \mid d_0(x, \gamma_{i-1}) \leq \frac{2\sqrt{t_i}}{\epsilon_0}\}$  et par induction

$$\gamma_i \subset \{x \in M \mid d_0(\bar{\gamma}, x) < \frac{K}{\epsilon_0 \eta^2} \sqrt{t_i}\}. \quad (I.22)$$

En particulier, si on fixe  $A = \frac{K}{\epsilon_0 \eta^2}$  dans la définition de  $\mathcal{A}_0$  et  $\mathcal{A}_1$ ,  $\gamma_i \subset \mathcal{A}_0$ . Pour tout  $0 \leq k \leq k_i - 1$ , il existe ainsi  $j \in J_i$  tel que  $d_{t_i}(z_{i,k}, x_{i,j}) < \epsilon_0^{-1} \sqrt{t_i}$ , et, puisque  $\gamma_{i,k} \subset B_{t_{i-1}}(z_{i,k}, \epsilon_0^{-1} \sqrt{t_{i-1}})$  et  $g(t_i) \leq 4g(t_{i-1})$ ,  $\gamma_{i,k} \subset B_{t_i}(x_{i,j}, 4\epsilon_0^{-1} \sqrt{t_i})$ . On a donc pour  $t_{i-1} \leq t \leq t_i$ ,

$$\begin{aligned} \partial_t \ell_t(\gamma_{i,k}) &\leq \sup_{P_{i,j}} (-\lambda_{\text{Rc}}^-) \ell_t(\gamma_{i,k}), \\ &\leq \frac{2\delta^2 \sqrt{t_i}}{K \epsilon_0} M_{i,j} + \Lambda \ell_t(\gamma_{i,k}) \end{aligned}$$

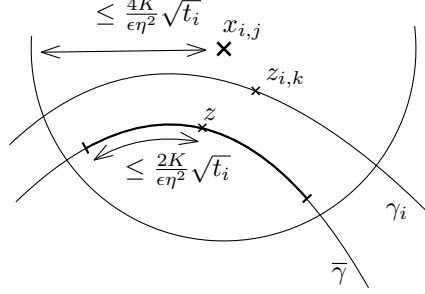
grâce à l'hypothèse (I.12). En intégrant l'équation différentielle entre  $t_{i-1}$  et  $t_i$  puis en sommant sur  $1 \leq k \leq k_i - 1$ , on trouve

$$e^{-\Lambda t_i} \ell_{t_i}(\gamma_i) \leq C \delta^2 \sum_{j \in J_i} |K_{i,j}| t_i^{\frac{3}{2}} M_{i,j} + e^{-\Lambda t_{i-1}} \ell_{t_{i-1}}(\gamma_i)$$

où  $K_{i,j} = \{1 \leq k \leq k_i \mid z_{i,k} \in B_{t_i}(x_{i,j}, \epsilon_0^{-1} \sqrt{t_i})\}$  et où la constante  $C$  dépend de  $n$ ,  $K$  et  $v_0$ . En sommant cette fois sur  $i_0 \leq i \leq 0$  et en utilisant a), on trouve

$$\ell_{t_0}(\gamma_0) \leq C \delta^2 e^{\Lambda t_0} \sum_{i=i_0}^0 \sum_{j \in J_i} |K_{i,j}| t_i^{\frac{3}{2}} M_{i,j} + e^{\Lambda(t_0 - t_{i_0})} \ell_{t_{i_0}}(\gamma_{i_0}). \quad (I.23)$$

Afin d'établir une majoration de  $|K_{i,j}|$ , on note que si  $k \in K_{i,j}$ , alors par définition  $d_0(x_{i,j}, z_{i,k}) \leq \frac{2\sqrt{t_i}}{\epsilon_0}$  tandis qu'en vertu de (I.22), il existe un point  $z \in \bar{\gamma}$  avec  $d_0(z_{i,k}, z) \leq \frac{K}{\epsilon_0 \eta^2} \sqrt{t_i}$ , ce qui implique en particulier  $\ell_0 \left( \bar{\gamma} \cap B_0(x_{i,j}, \frac{4K}{\epsilon_0 \eta^2} \sqrt{t_i}) \right) \geq \frac{2K}{\epsilon_0 \eta^2} \sqrt{t_i}$ .



En ayant recours à une partition  $K_{i,j} = K_{i,j}^1 \cup \dots \cup K_{i,j}^m$  telle que chacune des familles  $\{z_{i,k}\}_{k \in K_{i,j}^l}$  ( $1 \leq l \leq m$ ) est  $\frac{4K}{\epsilon_0 \eta^2} \sqrt{t_i}$ -séparée, le nombre  $m$  d'éléments de la partition étant borné par une constante  $C = C(n, K)$ , on arrive à la conclusion qui suit : si on pose

$$\chi_{i,j}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } d_0(x_{i,j}, x) < \frac{4K}{\epsilon_0 \eta^2} \sqrt{t_i} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

on a

$$\sqrt{t_i} |K_{i,j}| \leq C \int_{\xi_0 d}^{\xi_1 d} \chi_{i,j} \circ \gamma_{x_0, x}(u) du,$$

et la formule (I.23) peut-être réécrite sous la forme

$$\ell_{t_0}(\gamma_0) \leq C \delta^2 \sum_{i=i_0}^0 \sum_{j \in J_i} \left( \int_{\xi_0 d}^{\xi_1 d} \chi_{i,j} \circ \gamma_{x_0, x}(u) du \right) t_i M_{i,j} + e^{\Lambda(t_0 - t_{i_0})} \ell_{t_{i_0}}(\gamma_{i_0})$$

puis en passant à la limite pour  $i_0 \rightarrow -\infty$ ,

$$d_{t_0}(\bar{x}, \bar{y}) - d_0(\bar{x}, \bar{y}) \leq C \delta^2 \sum_{i \leq 0} \sum_{j \in J_i} \left( \int_{\xi_0 d}^{\xi_1 d} \chi_{i,j} \circ \gamma_{x_0, x}(u) du \right) t_i M_{i,j} + 2\Lambda t_0 d_0(\bar{x}, \bar{y}),$$

où  $C$  dépend de  $n$ ,  $K$  et  $\eta$ .

D'autre part l'inégalité du segment (I.10) appliquée à la fonction  $\chi_{i,j}$  et à la métrique  $g(0)$  permet d'écrire

$$\begin{aligned} \int_{B_0(x_1, r_1)} \int_{\xi_0 d}^{\xi_1 d} \chi_{i,j} \circ \gamma_{x_0, x}(u) du \, d\mu_0(x) &\leq C \left( \frac{1}{\xi_0^{n-1}} - \frac{1}{\xi_1^{n-1}} \right) \int_{B_0(x_0, 2)} \chi_{i,j} \, d\mu_0, \\ &\leq C \left( \frac{1}{\xi_0^{n-1}} - \frac{1}{\xi_1^{n-1}} \right) \left| B_0(x_{i,j}, \frac{4K}{\epsilon_0 \eta^2} \sqrt{t_i}) \right|_0 \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} \int_{B_0(x_1, r_1)} (d_{t_0} - d_0)_+ \circ m_{\xi_0, \xi_1}(x_0, x) \, d\mu_0(x) \\ \leq C \delta^2 \left( \frac{1}{\xi_0^{n-1}} - \frac{1}{\xi_1^{n-1}} \right) \sum_{i=i_0}^0 \sum_{j \in J_i} \left| B_0(x_{i,j}, \frac{4K \sqrt{t_i}}{\epsilon_0 \eta^2}) \right|_0 t_i M_{i,j} \quad (\text{I.24}) \\ + C \Lambda (\xi_1 - \xi_0) r_1^n t_0. \end{aligned}$$

Enfin, puisque grâce à (I.20) et à la minoration du tenseur de Ricci de  $g(0)$ ,

$$\left| B_0(x_{i,j}, \frac{4K\sqrt{t_i}}{\epsilon_0\eta^2}) \right|_0 \leq C |B_{t_i}(x_{i,j}, 8\epsilon_0^{-1}\sqrt{t_i})|_{t_i},$$

on fait usage de (I.21) dans (I.24) pour trouver finalement

$$\begin{aligned} \int_{B_0(x_1, r_1)} (d_{t_0} - d_0)_+ \circ m_{\xi_0, \xi_1}(x_0, x) \, d\mu_0(x) \\ \leq C\delta^2 \left( \frac{1}{\xi_0^{n-1}} - \frac{1}{\xi_1^{n-1}} \right) \int_0^{t_0} \int_{S^1} (\mathbb{R}_{g(t)} + \Lambda) \, d\mu_t dt + C\Lambda(\xi_1 - \xi_0)r_1^n t_0. \end{aligned}$$

L'énoncé du lemme en découle puisque  $\frac{1}{\xi_0^{n-1}} - \frac{1}{\xi_1^{n-1}} \leq \frac{\xi_1 - \xi_0}{\xi_0^n}$ .  $\square$

*Preuve du corollaire I.1.12.* Le lemme I.1.11 fournit  $\delta_0 = \delta_0(n, K, v_0)$  et  $A_0 = C(n, K)$ . On fixe  $0 < t_0 \leq \min(\delta_0^2, \alpha^2)$  puis on pose  $\xi_0 = \max(\frac{\sqrt{t_0}}{\alpha}, \frac{4A_0\sqrt{t_0}}{3}, \xi)$ , puis on définit les suites  $\{\xi_i\}_{i \leq 0}$  et  $\{t_i\}_{i \leq 0}$  en posant  $\xi_i = 2^i \xi_0$ ,  $t_i = 4^i t_0$ . On a alors  $\xi_i - \xi_{i-1} \geq A_0\sqrt{t_i}$  pour tout  $i_0 + 1 \leq i \leq 0$ , et le lemme I.1.11 combiné avec l'hypothèse (I.13) de majoration de l'intégrale de la courbure scalaire, permet d'écrire

$$\begin{aligned} \int_{B_0(x_1, r_1)} (d_{t_i} - d_0)_+ \circ m_{\xi_{i-1}, \xi_i}(x_0, x) \, d\mu_0(x) \\ \leq C \left( \frac{\delta^2}{\xi_i^n} \iint_{B_0(x_0, 2\xi_i) \times [0, t_i]} (\mathbb{R}_{g(t)} + \Lambda) \, d\mu_t dt + \Lambda r_1^n t_i \right) (\xi_i - \xi_{i-1}), \\ \leq C \left( \delta^2 \beta \frac{t_i}{\xi_i^2} + \Lambda r_1^n t_i \right) (\xi_i - \xi_{i-1}), \\ \leq C \left( \delta^2 \beta \frac{t_0}{\xi_0^2} + \Lambda r_1^n t_0 \right) (\xi_i - \xi_{i-1}). \end{aligned}$$

D'autre part, l'hypothèse (I.13) implique aussi  $\iint_{B_{t_i}(x, \frac{\sqrt{t_i}}{\alpha}) \times [0, t_i]} (\mathbb{R}_{g(t)} + \Lambda) \, d\mu_t dt \leq \frac{\beta t_i^{\frac{n}{2}}}{\alpha^{n-2}}$  pour tout  $x \in B_0(x_0, 1)$ . Le lemme I.1.14, appliqué pour  $A = \frac{1}{\alpha}$  combiné à l'hypothèse sur le pincement du tenseur de Ricci conduit donc à la minoration  $\text{Rc } g(t) \geq -C(\frac{\delta^2 \beta}{t} + \Lambda)$  ( $C$  dépend de  $n, K, \alpha$ ). On a donc

$$(d_{t_0} - d_{t_i})_+ \circ m_{\xi_{i-1}, \xi_i}(x_0, x) \leq 4 \left( \left( \frac{t_0}{t_i} \right)^{C\delta^2 \beta} e^{C\Lambda(t_0 - t_i)} - 1 \right) (\xi_i - \xi_{i-1}),$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \int_{B_0(x_1, r_1)} (d_t - d_0)_+ \circ m_{\xi_{i-1}, \xi_i}(x_0, x) \, d\mu_0 \leq C(\delta^2 \beta \frac{t_i}{\xi_i^2} + \Lambda r_1^n t_0)(\xi_i - \xi_{i-1}) \\ + Cr_1^n (4^{-C\delta^2 \beta i} e^{C\Lambda t_0} - 1)(\xi_i - \xi_{i-1}), \end{aligned}$$

Puisque  $\sum_{i \leq 0} (4^{-C\delta^2 \beta i} e^{C\Lambda t_0} - 1)(\xi_i - \xi_{i-1}) = (e^{C\Lambda t_0} - 1)\xi_0 + (1 - 4^{-C\delta^2 \beta}) \sum_{i \leq -1} 2^{(1-2C\delta^2 \beta)i} \xi_0 \leq C(\Lambda t_0 + \beta \delta^2)\xi_0$ , on obtient le (i) en sommant pour  $i \leq 0$ .  $\square$

### I.1.4 Quelques propriétés de la “distance parabolique”

Perelman a introduit dans [27] la notion de  $L$ -distance entre points de l'espace-temps d'un flot de Ricci complet. Dans ce paragraphe, on considère une variante de la notion de Perelman introduite et étudiée par M. Feldman, T. Ilmanen et L. Ni dans [17] (la variante consiste essentiellement à substituer la variable de temps  $t$  à la variable  $\tau = t_0 - t$  dans la définition de Perelman). On considère un flot de Ricci défini pour  $0 \leq t \leq T$  sur une variété lisse  $M^n$  de dimension  $n$ . On pose<sup>2</sup>, pour tout chemin  $\gamma : [s, t] \rightarrow M$  lisse par morceaux,

$$\mathcal{L}(\gamma) = \int_s^t \sqrt{u} (|\dot{\gamma}|_{g(u)}^2 + R_{g(u)}) du,$$

puis pour  $x, y \in M$ ,  $s < t \in [0, T]$ ,

$$L_{(x,s)}(y, t) = \inf_{\gamma} \mathcal{L}(\gamma), \tag{I.25}$$

où l'infimum est pris sur tous les chemins lisses par morceaux  $\gamma : [s, t] \rightarrow M$  avec  $\gamma(s) = x$  et  $\gamma(t) = y$ . On définit enfin la fonction  $L$ -distance en posant

$$\bar{L}_{(x,s)}(y, t) = 2\sqrt{t} L_{(x,s)}(y, t).$$

Si en général,  $\bar{L}$  ne définit pas une véritable fonction distance entre les points de  $M \times [0, T]$ , on fait par contre l'observation suivante

*Remarque I.1.15.* Si  $g(t)$  est un flot de Ricci complet à courbure uniformément bornée, alors la fonction  $\bar{L}_t : M^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y) \mapsto \bar{L}_{(x,0)}(y, t)$  converge uniformément sur tout compact vers le carré de la fonction distance au temps 0,  $d_0^2 : M^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ . Autrement dit, pour tout  $x \in M$ , la fonction  $\bar{L}_{(x,0)}$  définie sur  $M \times ]0, T]$  peut être prolongée par continuité à  $M \times [0, t]$  en posant  $\bar{L}_{(x,0)}(y, 0) = d_0(x, y)^2$ .

Le rôle de la fonction  $L$ -distance dans le présent travail est de fournir, au paragraphe II.3.2, des barrières pour les solutions de l'équation de la chaleur couplée au flot de Ricci. En effet, si  $x \in M$ ,  $t \in [0, T]$  et  $U$  est un ouvert tel qu'en tout point  $y \in U$ ,  $L_{(x,0)}(y, t)$  est réalisé par une  $\mathcal{L}$ -géodésique minimale lisse, on a ([17], (2.19))

$$(\partial_t - \Delta)\sqrt{\bar{L}_{(x,0)}} \geq -\frac{n-1}{\sqrt{\bar{L}_{(x,0)}}}. \tag{I.26}$$

L'inégalité (I.26) est optimale dans le sens où le cas d'égalité est réalisé pour (et caractérise) les solitons expansifs. Il est utile de comparer (I.26) à la propriété de barrière de la fonction distance elle-même rappelée au lemme I.1.1, qui implique en particulier

$$(\partial_t - \Delta)d_t(x, \cdot) \geq -\frac{5(n-1)}{3 r_{x,t}} \tag{I.27}$$

---

2. Dans [17], les auteurs notent  $\mathcal{L}^+$ ,  $L^+$ , et  $\bar{L}^+$  les quantités que l'on considère dans ce paragraphe afin de les distinguer de celles originellement posées par Perelman. Comme ici il n'y a pas d'ambiguïté possible, on omettra les “+”.

où  $r_{x,t} = \sup \{r > 0 \mid \text{Rc } g(t, y) \leq \frac{n-1}{r^2} \text{ pour } y \in B_t(x, r)\}$ . La propriété (I.27) justifie l'usage de la fonction distance dans la construction de barrières aux solutions de l'équation de la chaleur pour les flots à courbure de Ricci uniformément majorée. En l'absence d'une telle borne, (I.26) justifie que l'on préfère la fonction  $L$ -distance. Ce que l'on gagne avec (I.26), on le perd néanmoins en information sur la norme du gradient de  $\bar{L}_{(x,0)}(\cdot, t)$ , et la formule

$$\left| \nabla \sqrt{\bar{L}_{(x,0)}} \right|^2 = 1 - \frac{4t}{\sqrt{\bar{L}_{(x,0)}}} \partial_t \sqrt{\bar{L}_{(x,0)}} + \frac{4t^2 \text{R}_{g(t)}}{\bar{L}_{(x,0)}} \quad (\text{I.28})$$

(voir [17], (2.8) et (2.9)) valable dans les mêmes conditions que (I.26), remplace le trivial  $|\nabla d_t(x, \cdot)| \equiv 1$ .

Le reste du paragraphe est consacré à établir deux énoncés, le premier donnant, lorsque le flot n'est pas supposé complet, des conditions sous lesquelles l'infimum  $L_{(x,0)}(y, t)$  est réalisé par une  $\mathcal{L}$ -géodésique lisse et par conséquent (I.26) et (I.28) sont valides, le second consistant en l'analogie pour la  $L$ -distance du corollaire I.1.13 sur la dilatation moyenne de la fonction distance.

**Lemme I.1.16.** *Il existe  $\epsilon(n, K, v_0, \delta)$  avec la propriété suivante. Soit  $g(t)$  un flot de Ricci défini pour  $0 \leq t \leq T$  sur une variété lisse  $M^n$  de dimension  $n$  satisfaisant aux hypothèses (I.1) et dont la donnée initiale vérifie (I.2). Si pour  $(x, t) \in M \times [0, T]$*

$$\text{Rc } g(x, t) \geq -\frac{\epsilon^2}{t},$$

alors si  $B_0(x_0, 8)$  est relativement compacte dans  $M$ , pour tout couple de points  $x, y \in B_0(x_0, 1)$  et  $0 < t \leq \epsilon^2$  il existe un chemin lisse  $\gamma : [0, t] \rightarrow B_0(x_0, 4)$  tel que

$$L_{(x,0)}(y, t) = \mathcal{L}(\gamma),$$

et on a l'encadrement

$$(1 - \delta)d_0(x, y)^2 - \delta \leq \bar{L}_{(x,0)}(y, t) \leq (1 + \delta)d_0(x, y)^2 + \delta.$$

En particulier, si  $x \in B_0(x_0, 1)$ , on a (I.26) et (I.28) sur  $B_0(x_0, 1)$ .

**Lemme I.1.17.** *Il existe  $\epsilon(n, K, v_0) > 0$  et  $C(n, K, v_0, \alpha)$  avec les propriétés suivantes. Soit  $g(t)$  un flot de Ricci défini pour  $0 \leq t \leq T$  sur une variété lisse  $M^n$  de dimension  $n$  satisfaisant aux hypothèses de décroissance (I.1) et dont la donnée initiale vérifie (I.2). On suppose en plus, d'une part, qu'il existe  $\delta < \epsilon$  et  $0 < \Lambda \leq 1$  tels qu'on ait le pincement du tenseur de Ricci*

$$\text{Rc } g(t) \geq -\delta^2 \text{R}_{g(t)} - \Lambda,$$

ainsi que  $\text{R}_{g(t)} \geq -\Lambda$ , d'autre part qu'il existe  $\beta > 0$  tels que pour tout  $x \in B_0(x_0, 2)$ ,  $0 < r \leq 1$  et  $0 < t \leq \alpha^2 r^2$ , on a

$$\int_0^t \int_{B_0(x,r)} (\text{R}_{g(s)} + \Lambda) \, d\mu_s \, ds \leq \beta r^{n-2} t.$$

Alors si  $x_0 \in M$  est tel que  $B_0(x_0, 8)$  est relativement compacte dans  $M$ , si  $x_1 \in M$ ,  $0 < r_0 \leq 1$  et  $r_1 > 0$  sont tels que  $B(x_1, r_1) \subset B_0(x_0, 1)$  on a pour  $0 < t \leq \min(\alpha^2, \delta^2)$

$$(i) \int_{B_0(x_1, r_1)} (\bar{L}_{(x,0)}(x_0, t) - d_0(x, x_0)^2)_+ \, d\mu_0(x) \leq C(\delta^2 \beta + \Lambda r_1^n) \sqrt{t}$$

ainsi que

$$(ii) \quad \iint_{B_0(x_0, r_0) \times B_0(x_1, r_1)} (\bar{L}_{(x,0)}(y, t) - d_0(x, y)^2)_+ \, d\mu_0(x) \, d\mu_0(y) \\ \leq C (\delta^2 \beta (r_0 + r_1)^2 r_0^{n-2} + \Lambda r_0^n r_1^n) t.$$

Soit  $g(t)$  un flot de Ricci satisfaisant aux hypothèses de l'un ou de l'autre des énoncés des lemmes I.1.16 ou I.1.17.  $\delta > 0$  étant fixé, la proposition I.1.7 sur la continuité de la fonction distance fournit  $\epsilon_0(n, K, v_0, \delta)$  tel que pour tout  $0 < t \leq \epsilon_0^2$  et tous points  $x, y \in B_0(x_0, 2)$  on a

$$d_0(x, y) - \frac{20}{3} (n-1) \sqrt{Kt} \leq d_t(x, y) \leq (1 + \delta) d_0(x, y) + \frac{\delta \sqrt{t}}{\epsilon_0}. \quad (I.29)$$

Dans la preuve de chacun des deux lemmes intervient une quantité  $\mathcal{L}^d(\gamma)$ , approximation discrète de  $\mathcal{L}(\gamma)$ . Pour  $0 < t \leq T$  et  $\gamma : [0, t] \rightarrow B_0(x_0, 2)$  chemin lisse par morceaux, on définit une suite de temps  $\{s_i\}_{i \leq 0}$  par  $s_i = (1 + \frac{\sqrt{t}}{\epsilon_0})^i t$  puis une suite de points  $\{z_i\}_{i \leq 0}$  en posant  $z_i = \gamma(s_i)$ . On définit alors, pour tout  $i \leq 0$

$$L^{d,i}(\gamma) = \frac{d_{s_i}(z_i, z_{i+1})^2}{2(\sqrt{s_{i+1}} - \sqrt{s_i})},$$

puis

$$\mathcal{L}^d(\gamma) = \sum_{i \leq -1} L^{d,i}(\gamma),$$

et enfin, si  $x, y$  ne sont pas conjugués et si  $\gamma_{x,y} : [0, t] \rightarrow M$  désigne la  $g(0)$ -géodésique connectant  $x$  à  $y$  paramétrée de manière à avoir  $|\dot{\gamma}_{x,y}|_{g(0)}(u) = \frac{d_0(x,y)}{2\sqrt{t}\sqrt{u}}$  on pose

$$L_{(x,0)}^d(y, t) = \mathcal{L}^d(\gamma_{x,y})$$

ainsi que

$$\bar{L}_{(x,0)}^d(y, t) = 2\sqrt{t} L_{(x,0)}^d(y, t).$$

L'expression choisie pour  $\mathcal{L}^d$  est justifiée par la remarque qui suit.

*Remarque I.1.18.* Soit  $g$  une métrique riemannienne fixée sur  $M^n$ ,  $x, y \in M$  deux points tels que  $B_g(x, 2)$  est relativement compacte dans  $M$ . L'infimum de la fonctionnelle

$$\mathcal{L}_g(\eta) = \int_s^t \sqrt{u} |\dot{\eta}(u)|^2 \, du$$

parmi les chemins lisses par morceaux  $\eta : [s, t] \rightarrow M$  avec  $\eta(s) = x$  et  $\eta(t) = y$  est donné par

$$\inf_{\eta} \mathcal{L}_g(\eta) = \frac{d_g(x, y)^2}{2(\sqrt{t} - \sqrt{s})}$$

et est réalisé par toute  $g$ -géodésique minimisante  $\gamma : [s, t] \rightarrow M$  paramétrée de manière à avoir  $|\dot{\gamma}|(u) = \frac{d_g(x,y)}{2(\sqrt{t}-\sqrt{s})\sqrt{u}}$ .



*Démonstration.* On pose  $d = d_g(x, y)$  et on procède au changement de variable  $r = \frac{\sqrt{u}-\sqrt{s}}{\sqrt{t}-\sqrt{s}}d$  dans l'expression définissant  $\mathcal{L}_g(\eta)$ , qui devient  $\mathcal{L}(\eta) = \frac{d}{2(\sqrt{t}-\sqrt{s})} \int_0^d \left| \frac{d\tilde{\eta}}{dr} \right|^2 dr$ , où  $\tilde{\eta}(r) = \eta(u)$ . Classiquement, l'infimum de cette expression est réalisé pour la géodésique  $\tilde{\gamma}$  paramétrée à vitesse constante ( $\left| \frac{d\tilde{\gamma}}{dr} \right| = 1$ ) d'où l'énoncé après changement de variable inverse.  $\square$

Substituer  $\mathcal{L}^d$  à  $\mathcal{L}$  revient donc à considérer que la métrique  $g(t)$  est statique sur chaque intervalle  $[s_i, s_{i+1}]$  (et à négliger le terme  $\int_0^t \text{R}_{g(s)} ds$ ). Les formules qui suivent permettent de comparer  $\mathcal{L}^d$  et  $\mathcal{L}$ .

$$\mathcal{L}(\gamma) - \mathcal{L}^d(\gamma) \geq - \sum_{i \leq 0} M_i \sqrt{s_i} d_i^2 - \Lambda t^{\frac{3}{2}}, \quad (\text{I.30})$$

où  $d_i = d_{s_i}(z_i, z_{i+1})$ ,  $M_i = \sup_{B_{s_i}(z_i, 4d_i) \times [s_i, s_{i+1}]} \sup_{|u|=1} \text{Rc } g(s)(u, u)$ , et d'autre part il existe un chemin  $\tilde{\gamma} : [0, t] \rightarrow B_0(x_0, 4)$  avec  $\tilde{\gamma}(0) = \gamma(0)$ ,  $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(t)$  et

$$\mathcal{L}(\tilde{\gamma}) - \mathcal{L}^d(\gamma) \leq \sum_{i \leq 0} \left( 8M'_i \sqrt{s_i} d_i^2 + nM_i (s_{i+1}^{\frac{3}{2}} - s_i^{\frac{3}{2}}) \right) \quad (\text{I.31})$$

où  $M'_i = \sup_{B_{s_i}(z_i, 4d_i) \times [s_i, s_{i+1}]} (-\lambda_{\text{Rc}}^-)$  pour tout  $i < 0$ .

*Preuve de (I.31) et (I.30).* Pour tout  $i < 0$ , on choisit  $\gamma_i : [s_i, s_{i+1}] \rightarrow B_0(x_0, 8)$  géodésique minimale pour la métrique  $g(s_i)$  connectant  $z_i$  à  $z_{i+1}$ , paramétrée de façon à avoir  $|\dot{\gamma}_i|_{g(s_i)} = \frac{d_i}{2(\sqrt{s_{i+1}}-\sqrt{s_i})\sqrt{s}}$  et donc  $\int_{s_i}^{s_{i+1}} \sqrt{s} |\dot{\gamma}_i|_{s_i}^2 ds = \mathcal{L}^{d,i}(\gamma)$ . Pour  $(x, s) \in B_{s_i}(z_i, 4d_i) \times [s_i, s_{i+1}]$ , on a  $e^{-2M_i(s_{i+1}-s_i)}g(x, s_i) \leq g(x, s) \leq e^{2M'_i(s_{i+1}-s_i)}g(x, s_i)$ . Puisque  $\gamma_i([s_i, s_{i+1}]) \subset B_{s_i}(z_i, 4d_i)$  on a ainsi

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\gamma_i) - \mathcal{L}^{d,i}(\gamma) &\leq \int_{s_i}^{s_{i+1}} \sqrt{s} (|\dot{\gamma}_i|_s^2 - |\dot{\gamma}_i|_{s_i}^2) ds + \int_{s_i}^{s_{i+1}} \sqrt{s} \text{R}_{g(s)} ds, \\ &\leq 4M'_i(s_{i+1} - s_i) \mathcal{L}^{d,i}(\gamma) + \frac{2n}{3} M_i (s_{i+1}^{\frac{3}{2}} - s_i^{\frac{3}{2}}), \\ &\leq 8M'_i \sqrt{s_i} d_i^2 + \frac{2n}{3} M_i (s_{i+1}^{\frac{3}{2}} - s_i^{\frac{3}{2}}), \end{aligned}$$

où  $C$  dépend de  $n, K$ , et  $v_0$ . En notant  $\tilde{\gamma}$  le chemin obtenu en concaténant les  $\gamma_i$ ,  $i \leq 0$  (et en posant  $\tilde{\gamma}(0) = \gamma(0)$ ) puis en sommant pour  $i < 0$  on obtient (I.31).

Afin d'établir (I.30), pour tout  $i < 0$  on choisit  $s_i \leq s'_i \leq s_{i+1}$  maximal tel que  $\gamma([s_i, s'_i]) \subset B_{s_i}(z_i, d_i)$ . Si on pose  $\gamma_i = \gamma|_{[s_i, s'_i]}$  on a

$$\mathcal{L}(\gamma_i) \geq e^{-2M_i(s_{i+1}-s_i)} \int_{s_i}^{s'_i} \sqrt{s} |\dot{\gamma}_i|_{s_i}^2 ds - \frac{2\Lambda}{3} \left( (s'_i)^{\frac{3}{2}} - s_i^{\frac{3}{2}} \right),$$

puis comme d'après la remarque I.1.18 l'infimum de la fonctionnelle  $\int_{s_i}^{s'_i} \sqrt{s} |\dot{\eta}|_{s_i}^2 ds$  pour les chemins  $\eta : [s_i, s'_i] \rightarrow M$  connectant  $z_i$  à  $\gamma(s'_i)$  vaut  $\frac{d_{s_i}(z_i, \gamma(s'_i))^2}{2(\sqrt{s'_i}-\sqrt{s_i})}$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\gamma_i) &\geq e^{-2M_i(s_{i+1}-s_i)} \frac{d_{s_i}(z_i, \gamma(s'_i))^2}{2(\sqrt{s'_i}-\sqrt{s_i})} - \frac{2\Lambda}{3} \left( (s'_i)^{\frac{3}{2}} - s_i^{\frac{3}{2}} \right), \\ &\geq (1 - 2M_i(s_{i+1} - s_i)) \frac{d_i^2}{2(\sqrt{s_{i+1}} - \sqrt{s_i})} - \frac{2\Lambda}{3} \left( (s'_i)^{\frac{3}{2}} - s_i^{\frac{3}{2}} \right). \end{aligned}$$

Enfin comme  $\mathcal{L}(\gamma|_{[s_i, s_{i+1}]}) \geq \mathcal{L}(\gamma_i) + \int_{s'_i}^{s_{i+1}} \sqrt{s} R_{g(s)} ds$ ,

$$\mathcal{L}(\gamma|_{[s_i, s_{i+1}]}) - \mathcal{L}^{d,i}(\gamma) \geq -\frac{1}{2} M_i \sqrt{s_i} d_i^2 - \frac{2\Lambda}{3} \left( s_{i+1}^{\frac{3}{2}} - s_i^{\frac{3}{2}} \right).$$

On trouve (I.30) en sommant pour  $i \leq -1$ . □

*Preuve du lemme I.1.16.* Soit  $\gamma : [0, t] \rightarrow M$  un chemin lisse par morceaux connectant deux points  $x, x' \in B_0(x_0, 1)$ ,  $\{s_i\}_{i \leq 0}$ ,  $\{z_i\}_{i \leq 0}$  et  $\{d_i\}_{i \leq 0}$  les suites introduites plus haut. On a en particulier, grâce à (I.29),  $\sum_{i \leq -1} d_i \geq \sum_{i \leq 0} (d_0(z_{i-1}, z_i) - \frac{20}{3}(n-1)\sqrt{Ks_i}) \geq \sum_{i \leq 0} d_0(z_{i-1}, z_i) - 40n\sqrt{K}\epsilon_0$ . En utilisant la majoration  $M_i \leq \frac{(n-1)K}{s_i}$  et la minoration  $R_{g(t)} \geq -1$  issues des hypothèses (I.1), la minoration (I.30) (avec  $\Lambda = 1$ ) devient

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\gamma) &\geq \sum_{i \leq 0} \frac{d_i^2}{2(\sqrt{s_{i+1}} - \sqrt{s_i})} - (n-1)K \sum_{i \leq 0} \frac{d_i^2}{\sqrt{s_i}} - t^{\frac{3}{2}}, \\ &\geq \left(1 - \frac{(n-1)K\sqrt{t}}{\epsilon_0}\right) \sum_{i \leq 0} \frac{d_i^2}{2(\sqrt{s_{i+1}} - \sqrt{s_i})} - t^{\frac{3}{2}}, \end{aligned}$$

puisque  $\frac{1}{\sqrt{s_i}} \leq \frac{\sqrt{t}}{2\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{s_{i+1}} - \sqrt{s_i}}$ , soit, si on suppose  $t \leq \frac{\epsilon_0^2 \delta^2}{(n-1)K}$ ,

$$\mathcal{L}(\gamma) \geq (1 - \delta) \sum_{i \leq 0} \frac{d_i^2}{2(\sqrt{s_{i+1}} - \sqrt{s_i})} - t^{\frac{3}{2}},$$

puis grâce à l'inégalité de Jensen qui veut que pour  $\{\alpha_i\}_{i \leq 0}$  fixée avec  $\alpha_i > 0$ ,

$$\sum_{i \leq 0} \frac{x_i^2}{\alpha_i} \geq \frac{(\sum_{i \leq 0} x_i)^2}{\sum_{i \leq 0} \alpha_i}$$

on trouve finalement

$$\mathcal{L}(\gamma) \geq \frac{(1 - \delta)(\sum_{i \leq 0} d_0(z_{i-1}, z_i) - \delta)^2}{2\sqrt{t}} - t^{\frac{3}{2}}. \quad (\text{I.32})$$

En particulier, si le chemin  $\gamma$  n'est pas entièrement contenu dans  $B_0(x, D)$  ( $D \geq 1$ ), on considère  $0 < t' < t$  minimal tel que  $\gamma(t') \notin B_0(x, D)$  et on trouve, en appliquant (I.32) à  $\tilde{\gamma} = \gamma|_{[0, t']}$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\gamma) &\geq \mathcal{L}(\tilde{\gamma}) + \int_{t'}^t \sqrt{s} R_{g(s)} ds, \\ &\geq \frac{(1 - \delta)(D - \delta)^2}{2\sqrt{t'}} - 2t'^{\frac{3}{2}}, \\ &\geq \frac{D^2}{4\sqrt{t'}. \end{aligned} \quad (\text{I.33})$$

D'autre part, on considère  $\gamma_{x, x'} : [0, t] \rightarrow B_0(x_0, 2)$  une géodésique minimale connectant  $x$  à  $x'$ , paramétrée tel que  $|\dot{\gamma}_{x, x'}| = \frac{d_0(x, x')}{2\sqrt{t}\sqrt{s}}$ . (I.31) garantit l'existence d'un chemin  $\bar{\gamma} \subset B_0(x_0, 4)$

reliant  $x$  à  $x'$  avec, en se référant à (I.29) pour majorer les  $d_i$ ,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\bar{\gamma}) &\leq \mathcal{L}^d(\bar{\gamma}) + C\left(\frac{\epsilon d_0(x, x')^2}{\sqrt{t}} + \delta^2\right), \\ &\leq (1 + \delta)\frac{d_0(x, x')^2}{2\sqrt{t}} + C\delta^2.\end{aligned}\tag{I.34}$$

Ainsi, si  $x, x' \in B_0(x_0, 1)$  et  $0 < t \leq \epsilon_1^2$ , l'infimum  $L_{(x,0)}(x', t)$  est obtenu comme la limite d'une suite  $\{\mathcal{L}(\gamma_i)\}$  où, d'après (I.32),  $\mathcal{L}(\gamma_i) < \frac{1}{\sqrt{t}}$  à partir d'un certain rang, ce qui, grâce à (I.33), implique que  $\gamma_i$  est alors entièrement contenue dans  $B_0(x_0, 2)$ . Puisque pour un flot fixé,  $|\text{Rm } g(s)|$  est uniformément borné sur  $B_0(x_0, 2) \times [0, t]$  par compacité, les arguments classiques tels qu'ils apparaissent dans [22] permettent d'extraire de la suite  $\gamma_i$  une limite lisse (une  $\mathcal{L}$ -géodésique minimale). (I.32) et (I.34) fournissent alors l'encadrement de l'énoncé.  $\square$

*Preuve du lemme I.1.17.* Soit  $\epsilon_0 = \epsilon(n, K, v_0, \frac{1}{10})$  issu de la proposition I.1.7. Pour  $t \leq \frac{\epsilon_0^2}{n(n-1)K}$ , les hypothèses de l'énoncé impliquent  $\text{Rc } g(t) \geq -\frac{\epsilon_0^2}{t}$  et donc

$$d_0(x, y) - \frac{20}{3}(n-1)\sqrt{Kt} \leq d_t(x, y) \leq \frac{11}{10}d_0(x, y) + \frac{\sqrt{t}}{10\epsilon_0}$$

pour tous  $x, y \in B_0(x_0, 2)$ . Le lemme I.1.11 fournit  $\epsilon_1 = \epsilon(n, K, v_0)$ , le corollaire I.1.12  $\epsilon_2 = \epsilon(n, K, v_0)$ . On définit  $\epsilon = \min(\frac{\epsilon_0}{n(n-1)K}, \epsilon_1, \epsilon_2, \alpha)$ . Pour tout couple de points  $x, x' \in B_0(x_0, 1)$  non conjugués pour la métrique  $g(0)$  et  $0 < t \leq \epsilon^2$ , on considère la  $g(0)$ -géodésique minimisante  $\gamma_{x, x'} : [0, t] \rightarrow M$  connectant  $x$  à  $x'$ , paramétrée de façon à avoir  $|\dot{\gamma}_{x, x'}|_{g(0)} = \frac{d_0(x, x')}{2\sqrt{ts}}$  et on définit les suites  $\{s_i\}_{i \leq 0}$ ,  $\{z_i\}_{i \leq 0}$  et  $\{d_i\}_{i \leq 0}$  comme plus haut. La preuve consiste à estimer l'écart moyen entre  $\bar{L}_{(x,0)}^d(x', t)$  et  $\bar{L}_{(x,0)}^d(x', 0)$  en appliquant les résultats analogues sur la fonction distance obtenus au lemme I.1.11 et au corollaire I.1.12, puis à faire appel à (I.30) et (I.31) pour contrôler l'écart moyen entre  $\bar{L}_{(x,0)}^d(x', t)$  et  $\bar{L}_{(x,0)}(x', t)$ .

On établit pour commencer l'équivalent de (i) pour la fonction  $\bar{L}^d$ . Pour cela on suppose  $0 < \delta \leq \epsilon$  et on fixe  $0 < t \leq \delta^2$ , puis on considère la construction ci-dessus pour  $x \in B(x_1, r_1)$  et  $x' = x_0$ . Pour tout  $i \leq 0$ , on a

$$\mathcal{L}^{d,i}(\gamma_{x, x_0}) - \frac{d_0(z_i, z_{i+1})^2}{2(\sqrt{s_{i+1}} - \sqrt{s_i})} \leq \frac{\frac{21}{11}d_0(z_i, z_{i+1}) + \frac{\sqrt{s_i}}{10\epsilon}}{\sqrt{s_{i+1}} - \sqrt{s_i}} (d_{s_i}(z_i, z_{i+1}) - d_0(z_i, z_{i+1})),$$

puis comme  $d_0(z_i, z_{i+1}) = \ell_{g(0)}(\gamma_{x, x_0}|_{[s_i, s_{i+1}]}) = \sqrt{\frac{s_{i+1}}{t}}d_0(x_0, x) - \sqrt{\frac{s_i}{t}}d_0(x_0, x)$ ,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{d,i}(\gamma_{x, x_0}) - \frac{d_0(z_i, z_{i+1})^2}{2(\sqrt{s_{i+1}} - \sqrt{s_i})} &\leq 2\frac{d_0(x_0, x) + \frac{1}{10}}{\sqrt{t}} (d_{s_i}(z_i, z_{i+1}) - d_0(z_i, z_{i+1})), \\ &\leq \frac{4}{\sqrt{t}} (d_{s_i}(z_i, z_{i+1}) - d_0(z_i, z_{i+1})).\end{aligned}\tag{I.35}$$

On traite séparément le cas  $i = -1$  et  $i < -1$ . Pour  $i = -1$ , on a  $(z_0, z_{-1}) = m_{0, \xi_{-1}}(x_0, x)$  pour

$\xi_{-1} = 1 - \sqrt{\frac{s_{-1}}{t}}$ , donc

$$\begin{aligned} \int_{B_0(x_1, r_1)} \left( \mathcal{L}^{d, -1}(\gamma_{x, x_0}) - \frac{d_0(x_0, z_{-1})^2}{2(\sqrt{t} - \sqrt{s_{-1}})} \right)_+ d\mu_0(x) \\ \leq \frac{4}{\sqrt{t}} \int_{B_0(x_1, r_1)} (d_{s_{-1}} - d_0)_+ \circ m_{0, \xi_{-1}}(x_0, x) d\mu_0(x), \end{aligned}$$

soit, grâce au corollaire I.1.12,

$$\int_{B_0(x_1, r_1)} \left( \mathcal{L}^{d, -1}(\gamma_{x, x_0}) - \frac{d_0(x_0, z_{-1})^2}{2(\sqrt{t} - \sqrt{s_{-1}})} \right)_+ d\mu_0(x) \leq C(\delta^2 \beta + \Lambda r_1^n).$$

Pour  $i < -1$ , on a

$$\begin{aligned} \int_{B_0(x_1, r_1)} \left( \mathcal{L}^{d, -1}(\gamma_{x, x_0}) - \frac{d_0(z_i, z_{i+1})^2}{2(\sqrt{s_{i+1}} - \sqrt{s_i})} \right)_+ d\mu_0(x) \\ \leq \frac{4}{\sqrt{t}} \int_{B_0(x_1, r_1)} (d_{s_i} - d_0)_+ \circ m_{\xi_{i+1}, \xi_i}(x_0, x) d\mu_0(x), \end{aligned}$$

où  $\xi_i = 1 - \sqrt{\frac{s_i}{t}}$ . On applique cette fois le lemme I.1.11, qui, combiné au fait que

$$\int_0^{s_i} \int_{B_0(x_0, \xi_i)} R_{g(s)} d\mu_s ds \leq \beta \xi_i^{n-2} s_i$$

(puisque  $\xi_i \geq \xi_{-1} \geq \frac{\sqrt{t}}{\epsilon} \geq \frac{\sqrt{s_i}}{\alpha}$ ) permet d'écrire

$$\int_{B_0(x_1, r_1)} \left( \mathcal{L}^{d, i}(\gamma_{x, x_0}) - \frac{d_0(z_i, z_{i+1})^2}{2(\sqrt{s_{i+1}} - \sqrt{s_i})} \right)_+ d\mu_0(x) \leq \frac{C}{\sqrt{t}} (\delta^2 \beta \frac{s_i}{\xi_i^2} + \Lambda r_1^n) (\xi_{i+1} - \xi_i).$$

Enfin, grâce à la remarque I.1.18 (pour la métrique  $g(0)$ ), on a

$$\begin{aligned} \sum_{i \leq -1} \frac{d_0(z_i, z_{i+1})^2}{2(\sqrt{s_{i+1}} - \sqrt{s_i})} &= \sum_{i \leq -1} \int_{s_i}^{s_{i+1}} \sqrt{s} |\dot{\gamma}_{x, x_0}|_{g(0)}^2 ds, \\ &= \int_0^t \sqrt{s} |\dot{\gamma}_{x, x_0}|_{g(0)}^2 ds, \\ &= \frac{d_0(x, x_0)^2}{2\sqrt{t}}. \end{aligned}$$

Aussi, en sommant pour  $i \leq -1$  l'inégalité précédente, puis en multipliant par  $2\sqrt{t}$ , on obtient

$$\int_{B_0(x_1, r_1)} \left( \bar{L}_{(x, 0)}^d(x, t) - d_0(x_0, x)^2 \right)_+ d\mu_0(x) \leq C(\delta^2 \beta + \Lambda r_1^n) \sqrt{t}. \quad (\text{I.36})$$

On établit maintenant l'équivalent de (ii) pour la fonction  $\bar{L}^d$ . Pour cela, on commence par poser  $\bar{\xi} = \frac{r_1}{r_0 + r_1}$ , puis  $i_0 = \max \{ i \leq 0 \mid \sqrt{\frac{s_i}{t}} \leq \bar{\xi} \}$ . Dans un premier temps, on fixe

$y \in B_0(x_1, r_1)$ , et pour tout  $i_0 \leq i \leq 0$  on peut écrire grâce au lemme I.1.11 et au fait que  $\gamma_{y,x}([\xi d, d]) \subset B_0(x_0, \frac{2r_0}{r_0+r_1})$ ,

$$\begin{aligned} \int_{B_0(x_0, r_0)} (d_{s_i} - d_0)_+ \circ m_{\xi_i, \xi_{i+1}}(y, x) \, d\mu_0(x) \\ \leq C \left( \frac{\delta^2}{\xi_i^n} \beta \left( \frac{2r_0}{r_0+r_1} \right)^{n-2} s_i + \Lambda r_0^n s_i \right) (\xi_{i+1} - \xi_i), \end{aligned}$$

où  $\xi_i = \sqrt{\frac{s_i}{t}}$  et donc, en combinant avec (I.35),

$$\begin{aligned} \int_{B_0(x_0, r_0)} \left( \mathcal{L}^{d,i}(\gamma_{y,x}) - \frac{d_0(z_i, z_{i+1})^2}{2(\sqrt{s_{i+1}} - \sqrt{s_i})} \right) d\mu_0(x) \\ \leq \frac{C}{\sqrt{t}} \left( \delta^2 \beta \left( \frac{r_0+r_1}{r_0} \right)^2 \left( \frac{r_0}{r_1} \right)^n + \Lambda r_0^n \right) (\xi_{i+1} - \xi_i), \end{aligned}$$

puis en intégrant pour  $y \in B_0(x_1, r_1)$ , en sommant pour  $i_0 \leq i \leq -1$ , et en multipliant par  $2\sqrt{t}$ ,

$$\begin{aligned} \iint_{B_0(x_0, r_0) \times B_1(x_1, r_1)} \left( \bar{L}_{(z_{i_0}, s_{i_0})}^d(x, t) - d_0(z_{i_0}, y)^2 \right)_+ d\mu_0(x) d\mu_0(y) \\ \leq C(\delta^2 \beta (r_0+r_1)^2 r_0^{n-2} t + \Lambda r_0^n r_1^n t)(1 - \xi_{i_0}), \\ \leq C(\delta^2 \beta (r_0+r_1) r_0^{n-1} + \Lambda \frac{r_0^{n+1} r_1^n}{r_0+r_1}) t. \end{aligned}$$

Dans un second temps, on fixe  $x \in B_0(x_0, r_0)$  puis pour  $i \leq i_0$ ,  $\xi'_i = 1 - \sqrt{\frac{s_i}{t}}$ . Le lemme I.1.11 permet alors d'écrire

$$\begin{aligned} \int_{B_0(x_1, r_1)} (d_{s_i} - d_0)_+ \circ m_{\xi'_{i+1}, \xi'_i}(x, y) \, d\mu_0(y) \\ \leq C \left( \frac{\delta^2}{(\xi'_i)^n} b_i + \Lambda r_1^n s_i \right) (\xi'_i - \xi'_{i+1}). \end{aligned} \tag{I.37}$$

où, si  $A(n, K)$  est la constante fournie par l'énoncé du lemme I.1.11,

$$b_i = \int_0^{s_i} \int_{B_0(x, (d_0(x, x_1) + r_1)\xi'_i + A\sqrt{s_i})} R_{g(s)} \, d\mu_s ds.$$

Or on a

$$\begin{aligned} b_i &\leq \beta(\xi'_i + \max(\frac{1}{\alpha}, A)\sqrt{s_i})^{n-2} s_i, \\ &\leq C\beta(\xi'_i)^{n-2} t, \end{aligned} \tag{I.38}$$

pour  $C$  dépendant de  $n, K, v_0$  et  $\alpha$ . En combinant (I.35), (I.37) et (I.38), en multipliant par

$2\sqrt{t}$  puis en intégrant pour  $x \in B_0(x_0, r_0)$  on trouve

$$\iint_{B_0(x_0, r_0) \times B_1(x_1, r_1)} \left( \bar{L}_{(y,0)}^d(z_{i_0}, s_{i_0}) - d_0(x, z_{i_0})^2 \right)_+ d\mu_0(x) d\mu_0(y) \quad (\text{I.39})$$

$$\begin{aligned} &\leq C(\delta^2\beta \sum_{i \leq i_0-1} \frac{\xi'_{i+1} - \xi'_i}{(\xi'_i)^2} r_0^n + \Lambda r_0^n r_1^n) t, \\ &\leq C(\delta^2\beta (\frac{1}{\xi'_{i_0+1}} - 1) r_0^n + \Lambda r_0^n r_1^n (1 - \xi'_{i_0})) t, \\ &\leq C(\delta^2\beta r_1 r_0^{n-1} + \Lambda \frac{r_0^n r_1^{n+1}}{r_1 + r_0}) t. \end{aligned} \quad (\text{I.40})$$

En additionnant (I.36) et (I.40) on trouve finalement

$$\begin{aligned} &\iint_{B_0(x_0, r_0) \times B_1(x_1, r_1)} \left( \bar{L}_{(y,0)}^d(x, t) - d_0(x, y)^2 \right)_+ d\mu_0(x) d\mu_0(y) \\ &\leq C(\delta^2\beta(r_0 + r_1)r_0^{n-1} + \Lambda r_0^n r_1^n) t. \end{aligned} \quad (\text{I.41})$$

On estime maintenant l'intégrale de  $\bar{L}_{(y,0)}^d(x, t) - \bar{L}_{(y,0)}^d(x, t)$ . On considère donc encore une fois deux points,  $x \in B_0(x_0, r_0)$  et  $y \in B_0(x_1, r_1)$ ,  $\gamma_{y,x} : [0, t] \rightarrow B_0(x_0, 2)$  une  $g(0)$ -géodésique minimisante connectant  $y$  à  $x$ , paramétrée de façon à avoir  $|\dot{\gamma}(u)|_0 = \frac{d_0(x,y)}{2\sqrt{tu}}$ , ainsi que les suites  $\{s_i\}_{i \leq 0}$ ,  $\{z_i\}_{i \leq 0}$  et  $\{d_i\}_{i \leq 0}$  correspondantes. On a en particulier  $d_i \leq \frac{11}{10} d_0(z_i, z_{i+1}) + \frac{\sqrt{s_i}}{10\epsilon} \leq \frac{\sqrt{s_i}}{\epsilon}$ . La majoration (I.31) fournit un chemin  $\tilde{\gamma} : [0, t] \rightarrow B_0(x_0, 4)$  connectant  $y$  à  $x$  tel que

$$\mathcal{L}(\tilde{\gamma}_{y,x}) - \mathcal{L}^d(\gamma_{y,x}) \leq C \sum_{i \leq 0} \left( (\delta^2 M_i + \Lambda) \sqrt{s_i} d_i^2 + M_i (s_{i+1}^{\frac{3}{2}} - s_i^{\frac{3}{2}}) \right)$$

où  $M_i = \sup_{B_{s_i}(z_i, \frac{4\sqrt{s_i}}{\epsilon}) \times [s_i, s_{i+1}]} \mathbf{R}_g(s)$ . On en déduit

$$\bar{L}_{(y,0)}^d(x, t) - \bar{L}_{(y,0)}^d(x, t) \leq C(\delta^2\sqrt{t} + t) \left( \sum_{i \leq 0} s_i^{\frac{3}{2}} M_i \right). \quad (\text{I.42})$$

On définit  $\xi'_i = 1 - \sqrt{\frac{s_i}{t}}$  puis pour chaque  $i \leq 0$ , on considère une partie  $\frac{2\sqrt{s_i}}{\epsilon}$ -séparée maximale (donc  $\frac{4\sqrt{s_i}}{\epsilon}$ -couvrante)  $\{x_{i,k}\}_{k \in K_i}$  de  $B_0(x_0, \xi'_i)$ , et enfin on pose  $M_{i,k} = \sup_{B_0(x_{i,k}, \frac{8\sqrt{s_i}}{\epsilon})} (\mathbf{R}_g(s) + \Lambda)$ . On a alors

$$\int_{B_0(x_1, r_1)} M_i d\mu_t(y) \leq \sum_{k \in K_i} M_{i,k} \int_{B_0(x_1, r_1)} \chi_{i,k} \circ m_{\xi'_i}(x_0, y) d\mu_t(y),$$

où

$$\chi_{i,k}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } z \in B_0(x_{i,k}, \frac{4\sqrt{s_i}}{\epsilon}), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'inégalité I.11) permet d'écrire

$$\int_{B_0(x_1, r_1)} \chi_{i,k} \circ m_{\xi'_i}(x_0, y) d\mu_t(y) \leq \frac{C}{(\xi'_i)^n} \left| B_0(x_{i,k}, \frac{4\sqrt{s_i}}{\epsilon}) \right|$$

soit

$$\int_{B_0(x_1, r_1)} M_i \, d\mu_t(y) \leq \frac{C}{(\xi'_i)^n} \sum_{k \in K_i} \left| B_0(x_{i,k}, \frac{4\sqrt{s_i}}{\epsilon}) \right| M_{i,k}$$

Enfin, par le même raisonnement que dans la preuve de I.1.11, on a

$$\begin{aligned} \sum_{k \in K_i} \left| B_0(x_{i,k}, \frac{4\sqrt{s_i}}{\epsilon}) \right| s_i M_{i,k} &\leq C \int_0^{s_i} \int_{B_0(x_0, \xi'_i + C\sqrt{s_i})} (\mathbf{R}_{g(s)} + \Lambda) \, d\mu_s ds, \\ &\leq C\beta (\xi'_i)^{n-2} s_i. \end{aligned}$$

puis

$$\int_{B_0(x_1, r_1)} \left( \sum_{i \leq -1} s_i^{\frac{3}{2}} M_i \right) \, d\mu_t(y) \leq C\beta \sum_{i \leq -1} \frac{s_i^{\frac{3}{2}}}{(\xi'_i)^2}$$

et enfin, comme  $\xi'_i \geq \frac{1}{\sqrt{t}}$  pour  $i \leq -1$ ,

$$\int_{B_0(x_1, r_1)} \left( \sum_{i \leq -1} s_i^{\frac{3}{2}} M_i \right) \, d\mu_t(y) \leq C\beta\sqrt{t}.$$

Ainsi, en intégrant (I.42) on obtient (puisque  $t \leq \delta^2$ )

$$\int_{B_0(x_1, r_1)} \left( \bar{L}_{(y,0)}(x, t) - \bar{L}_{(y,0)}^d(x, t) \right)_+ \, d\mu_t(y) \leq C\beta\delta^2\sqrt{t}. \quad (\text{I.43})$$

Le (i) de l'énoncé s'obtient en additionnant (I.36) et (I.43).

Pour achever d'établir (ii), on pose, comme plus haut  $\bar{\xi} = \frac{r_1}{r_0 + r_1}$  et  $i_0 = \max \{ i \leq 0 \mid \sqrt{\frac{s_i}{t}} \leq \bar{\xi} \}$ , puis on estime l'intégrale de  $\sum_{i \leq 0} s_i^{\frac{3}{2}} M_i$  en traitant séparément la somme sur les indices  $i_0 \leq i \leq -1$  et celle sur  $i \leq i_0$ . Pour  $i \leq i_0$ , le calcul est analogue à celui par lequel (I.43) a été obtenu, et on trouve cette fois

$$\begin{aligned} \int_{B_0(x_1, r_1)} \left( \sum_{i \leq i_0} s_i^{\frac{3}{2}} M_i \right) \, d\mu_t(y) &\leq C\beta \sum_{i \leq i_0} \frac{s_i^{\frac{3}{2}}}{(\xi'_i)^2} \\ &\leq C\beta \sum_{i \leq i_0} \frac{\xi'_i - \xi'_{i+1}}{\xi'_i \xi'_{i+1}} t, \\ &\leq C\beta \frac{r_1 t}{r_0}, \end{aligned}$$

et donc

$$\iint_{B_0(x_0, r_0) \times B_0(x_1, r_1)} \left( \sum_{i \leq i_0} s_i^{\frac{3}{2}} M_i \right) \, d\mu_t(y) \, d\mu_t(x) \leq C\beta r_1 r_0^{n-1} t. \quad (\text{I.44})$$

D'autre part, en appliquant cette fois l'inégalité I.11 pour  $y \in B_0(x_1, r_1)$  fixé et  $x \in B_0(x_0, r_0)$ , on a pour  $i_0 \leq i \leq -1$ ,

$$\int_{B_0(x_0, r_0)} M_i \, d\mu_t(x) \leq \frac{C}{\xi^n} \sum_{k \in K_i} \left| B_0(x_{i,k}, \frac{4\sqrt{s_i}}{\epsilon}) \right| M_{i,k},$$

et donc

$$\begin{aligned} \int_{B_0(x_0, r_0)} \left( \sum_{i_0 \leq i \leq -1} s_i^{\text{vol}} M_i \right) d\mu_t(x) &\leq C\beta \frac{(1-\bar{\xi})^{n-2}}{(\bar{\xi})^n} \left( \sum_{i_0}^{-1} s_i^{\text{vol}} \right), \\ &\leq C\beta(r_0 + r_1) \frac{r_0^{n-1}}{r_1^n} t, \end{aligned}$$

puisque  $\sum_{i_0}^{-1} s_i^{\text{vol}} \leq 4\epsilon_0(1 - \sqrt{\frac{s_{i_0}}{t}})t$ . Finalement,

$$\iint_{B_0(x_1, r_1) \times B_0(x_0, r_0)} \left( \sum_{i_0}^{-1} s_i^{\text{vol}} M_i \right) d\mu_t(x) d\mu_t(y) \leq C\beta(r_0 + r_1)r_0^{n-1}t. \quad (\text{I.45})$$

En combinant (I.42), (I.44) et (I.45), on trouve

$$\iint_{B_0(x_1, r_1) \times B_0(x_0, r_0)} \left( \bar{L}_{(y,0)}(x, t) - \bar{L}_{(y,0)}^d(x, t) \right)_+ d\mu_t(x) d\mu_t(y) \leq C\delta^2\beta(r_0 + r_1)r_0^{n-1}t. \quad (\text{I.46})$$

En combinant (I.41) et (I.46), on obtient (ii).  $\square$

## I.2 Bornes supérieures sur le noyau de la chaleur modifié (d'après R. Bamler, E. Cabezas-Rivas et B. Wilking)

Dans ce paragraphe,  $g(t)$  est un flot de Ricci défini pour  $0 \leq t \leq T$  sur une variété  $M^n$  de dimension  $n$ , satisfaisant aux hypothèses (I.1). On considère deux équations aux dérivées partielles, couplées avec le flot  $g(t)$ , qui sont d'une part l'équation de la chaleur avec un terme source

$$(\partial_t - \Delta)u = f \quad (\text{I.47})$$

et d'autre part l'équation de la chaleur *modifiée* avec un terme source

$$(\partial_t - \Delta - R_g)u = f. \quad (\text{I.48})$$

On souhaite établir des bornes locales explicites sur les solutions de (I.47) et (I.48) étant donné une borne sur  $u$  au temps initial sur un domaine  $\Omega$ , une borne sur  $f$  uniforme pour tous temps, ainsi qu'une borne a priori sur  $u$  pour tous temps, nécessaire en raison du caractère local de l'énoncé, et dont l'influence traduit en quelque sorte la proximité du bord du domaine  $\Omega$ . La réponse à ce problème est résumée dans la proposition qui suit.

**Proposition I.2.1.** *Il existe une constante  $C_{I.2.1}(n, K)$  avec la propriété suivante. Soit  $g(t)$  un flot de Ricci défini pour  $0 \leq t \leq T$  sur une variété lisse  $M^n$  de dimension  $n$  satisfaisant aux hypothèses (I.1) et dont la donnée initiale vérifie (I.2). Soit  $u : M \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  une solution de l'équation  $(\partial_t - \Delta - R)u = f$  ou bien de l'équation  $(\partial_t - \Delta)u = f$ , pour une certaine fonction lisse  $f : M \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ . Alors si pour un domaine  $\Omega \subset B_0(x_0, R)$ , où  $x_0 \in M$  et  $R > 0$  sont tels que  $B_0(x_0, R)$  est relativement compacte dans  $M$ , les hypothèses suivantes sont vérifiées*

$$\begin{aligned} u(x, 0) &\leq m_0, & u(x, t) &\leq M_0, \\ t^{-\frac{n}{2}} \int_0^t \int_{B_0(x, \sqrt{t}) \cap \Omega} f(x, s) d\mu_s ds &\leq M_1, & t \sup_{\Omega \times [\frac{t}{2}, t]} f &\leq M_1, \end{aligned}$$



pour tout  $x \in \Omega$ ,  $0 \leq t \leq T$ , on a l'estimation

$$u(x, t) \leq C_{I.2.1} \left( m_0 + d^{-n} e^{-\frac{d^2}{C_{I.2.1}t}} \left| \omega(C_{I.2.1}\sqrt{t}) \right|_{g(0)} M_0 + M_1 \right),$$

pour tout  $(x, t) \in \Omega \setminus \omega(C_{I.2.1}\sqrt{t}) \times [0, T]$ , où  $d = d_0(x, M \setminus \Omega)$  et  $\omega(r) = \{z \in \Omega \mid d_0(z, M \setminus \Omega) \leq r\}$ .

La clef de la preuve réside dans les majorations du lemme I.2.9 plus bas. Le résultat est dû R. Bamler, E. Cabezas-Rivas et B. Wilking dans [18] pour un flot complet et notre tâche consiste à l'adapter au contexte de l'équation (I.48) sur un domaine à bord. La proposition I.2.1 sera appliquée dans la section II.2 aux équations d'évolution de certaines notions de courbure. La proposition I.2.2 suivante, démontrée en même temps que la précédente, sera utilisée dans le paragraphe II.3.2.

**Proposition I.2.2.** *Il existe une constante  $C_{I.2.2}(n, K, A)$  avec la propriété suivante. Soit  $g(t)$  un flot satisfaisant aux mêmes hypothèses I.1 avec additionnellement  $\text{vol}_{g(0)}^{n-1} S_0(x, r) \leq Ar^{n-1}e^{Ar}$  pour tout  $x \in M$ ,  $r > 0$  pour la donnée initiale, et soit  $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  une solution de l'équation  $(\partial_t - \Delta)u = f$  telle que*

$$|u(x, t)| \leq M_0, \quad |f(x, t)| \leq M_1$$

pour  $(x, t) \in \Omega \times [0, T]$  dont la donnée initiale  $u(x, 0)$  est 1-lipschitzienne sur  $\Omega$ . On a alors

$$|u(x, t) - u(x, 0)| \leq C_{I.2.2} \left( \sqrt{t} + d^{-n} e^{-\frac{d^2}{C_{I.2.1}t}} \left| \omega(C_{I.2.1}\sqrt{t}) \right|_{g(0)} M_0 + tM_1 \right)$$

pour tout  $(x, t) \in \Omega \setminus \omega(C_{I.2.1}\sqrt{t}) \times [0, T]$ , où  $d = d_0(x, M \setminus \Omega)$  et  $\omega(r) = \{z \in \Omega \mid d_0(z, M \setminus \Omega) \leq r\}$ .

Les propositions I.2.1 et I.2.2 découlent directement d'une formule de représentation des solutions des équations (I.47) et (I.48) et de bornes gaussiennes à établir sur les noyaux correspondant à l'opérateur de la chaleur et à l'opérateur de la chaleur modifié dans un domaine à bord. Le point technique réside dans le choix domaine et de son bord.

### I.2.1 Problème de Dirichlet à bord pour l'opérateur $\partial_t - \Delta - R_{g(t)}$ .

Soient  $0 < t_{-N-1} < t_{-N} < \dots < t_0 \leq T$  et  $\Omega = \Omega_{-N-1} \supset \Omega_{-N} \supset \dots \supset \Omega_0$  une suite décroissante d'ouverts, à bord lisse à partir du rang  $-N$ . On définit l'ouvert de  $M \times [t_{-N-1}, t_0]$

$$\mathcal{D} = \Omega_{-N} \times ]t_{-N-1}, t_{-N}[ \cup \bigcup_{i=-N+1}^0 \Omega_i \times [t_{i-1}, t_i[, \quad \mathcal{B} = \bigcup_{i=-N}^0 \partial\Omega_i \times ]t_{i-1}, t_i[,$$

puis  $\overline{\mathcal{D}} = \Omega_{-N} \times \{t_{-N-1}\} \cup \mathcal{D} \cup \mathcal{B} \cup \Omega_0 \times \{t_0\}$ , enfin si  $t_{-N-1} < \underline{t} \leq t_0$ , on définit  $\mathcal{D}_{\geq \underline{t}} = \mathcal{D} \cap M \times [\underline{t}, t_0]$  et similairement  $\mathcal{B}_{\geq \underline{t}}$ ,  $\overline{\mathcal{D}}_{\geq \underline{t}}$ ,  $\mathcal{D}_{> \underline{t}}$  etc. Soit  $-N \leq i_0 \leq 0$  tel que  $t_{i_0-1} \leq \underline{t} < t_{i_0}$ . Alors si  $u_0 : \Omega_{i_0} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : \mathcal{B}_{\geq \underline{t}} \rightarrow \mathbb{R}$  sont des fonctions continues, il existe une unique fonction  $u : \overline{\mathcal{D}}_{\geq \underline{t}} \rightarrow \mathbb{R}$  continue sur  $\overline{\mathcal{D}}_{\geq \underline{t}}$  et lisse sur  $\mathcal{D}_{> \underline{t}}$  telle que

$$\begin{cases} u(x, \underline{t}) = u_0(x) & \text{pour } x \in \Omega_{i_0}, \\ u(x, t) = g(x, t) & \text{pour } (x, t) \in \mathcal{B}_{> \underline{t}}, \\ (\partial_t - \Delta - R_{g(t)})u = f & \text{pour } (x, t) \in \mathcal{D}_{> \underline{t}}. \end{cases} \quad (\text{I.49})$$

On définit le noyau correspondant à ce problème.

**Définition I.2.3.** Pour  $(y, s) \in \mathcal{D}$ , on note  $\mathcal{K}_{(y,s)} : \Omega \times ]s, t_0] \rightarrow \mathbb{R}_+$  la solution fondamentale de (I.49) obtenue pour  $\underline{t} = s$ ,  $g, f \equiv 0$  et lorsque  $u_0$  tend vers la masse de Dirac  $\delta_y$  en  $y$ , que l'on convient d'étendre en posant  $\mathcal{K}_{(y,s)} \equiv 0$  sur le complémentaire de  $\overline{\mathcal{D}}_{>s}$ .

*Remarque I.2.4.* Si  $K_{(x,t)}$  désigne une solution fondamentale du problème  $(\partial_t - \Delta - R_{g(t)})u = 0$  couplé à un flot de Ricci complet à courbure bornée, l'équation d'évolution de l'élément de volume riemannien  $\frac{d}{dt} d\mu_{g(t)} = -R_{g(t)} d\mu_{g(t)}$  fait que l'on a  $\int_M K_{(x,t)}(y, s) d\mu_s(y) = 1$  pour tout  $s > t$ . Pour le problème de Dirichlet que l'on considère, on a encore

$$\int_M \mathcal{K}_{(x,t)}(y, s) d\mu_s(y) \leq 1 \quad (\text{I.50})$$

pour tout  $t < s \leq t_0$ .

On considère également le problème adjoint. Pour  $i_0 \leq i_1 \leq 0$  tel que  $t_{i_1-1} < \bar{t} \leq t_{i_1}$ , et pour  $v_0 : \Omega_{i_1} \rightarrow \mathbb{R}$ , il existe une unique fonction  $v : \overline{\mathcal{D}}_{\leq \bar{t}} \rightarrow \mathbb{R}$  continue sur  $\overline{\mathcal{D}}_{\leq \bar{t}}$  et lisse sur  $\mathcal{D}_{< \bar{t}}$  telle que

$$\begin{cases} v(x, \bar{t}) = v_0(x) & \text{pour } x \in \Omega_{i_1}, \\ v(x, t) = 0 & \text{pour } (x, t) \in \mathcal{B}_{< \bar{t}}, \\ v(x, t_i) = 0 & \text{pour } x \in \Omega_i \setminus \Omega_{i+1}, \quad -N \leq i \leq i_1 - 1 \\ (\partial_t + \Delta)v = 0 & \text{pour } (x, t) \in \mathcal{D}_{< \bar{t}}. \end{cases} \quad (\text{I.51})$$

A nouveau, on définit le noyau associé.

**Définition I.2.5.** Pour tout  $(x, t) \in \mathcal{D}$  on note  $\mathcal{K}_{(x,t)}^* : \Omega \times [t_{-N-1}, t[ \rightarrow \mathbb{R}_+$  la solution fondamentale de (I.51) obtenue pour  $\bar{t} = t$  lorsque  $v_0$  tend vers la masse de Dirac  $\delta_x$  en  $x$  pour  $d\mu_t$ , que l'on convient d'étendre en posant  $\mathcal{K}_{(x,t)}^* \equiv 0$  sur le complémentaire de  $\overline{\mathcal{D}}_{<t}$ .

Si  $u$  est une solution de de (I.49) sur  $\overline{\mathcal{D}}_{\geq \underline{t}}$  et  $v$  une solution de (I.51) sur  $\overline{\mathcal{D}}_{\leq \bar{t}}$  on constate que  $\frac{d}{dt} \int_M uv d\mu_t = 0$  pour  $\underline{t} \leq t \leq \bar{t}$  d'où on déduit en particulier  $\mathcal{K}_{(y,s)}(x, t) = \mathcal{K}_{(x,t)}^*(y, s)$  pour tous  $x, y \in \mathcal{D}$  et  $t_{-N-1} \leq s < t \leq t_0$ . On peut désormais écrire une formule de représentation pour les solutions de (I.49),

$$\begin{aligned} u(x, t) = \int_{\Omega} u(y, \underline{t}) \mathcal{K}_{(x,t)}^*(y, \underline{t}) d\mu_{\underline{t}}(y) - \int_{\mathcal{B}_{\underline{t} \leq s \leq t}} g(y, s) \nabla \mathcal{K}_{(x,t)}^*(y, s) \cdot \eta(y, s) d\sigma_s(y) ds \\ + \int_{\mathcal{D}_{\underline{t} \leq s \leq t}} f(y, s) \mathcal{K}_{(x,t)}^*(y, s) d\mu_s(y) ds \end{aligned} \quad (\text{I.52})$$

où  $\eta(x, t)$  dénote, pour  $(x, t) \in \mathcal{B}$ , la normale pointant vers l'extérieur de  $\Omega_i$  (où  $t_{i-1} \leq t \leq t_i$ ) pour la métrique  $g(t)$ . Il s'agit donc d'établir, sous les hypothèses (I.1), en plus d'une majoration gaussienne sur  $\mathcal{K}_{(x,t)}^*$ , une majoration de la norme du gradient  $\nabla \mathcal{K}_{(x,t)}^*$  sur le bord du domaine. Cela nécessite de choisir la suite des  $\Omega_i$  de manière adaptée, choix que l'on résume dans la proposition ci-dessous.

**Proposition I.2.6.** *Il existe  $\eta_0(n)$  avec la propriété suivante. Soit  $g(t)$  un flot de Ricci sur  $M$  satisfaisant aux hypothèses (I.1), et  $\Omega$  un ouvert relativement compact dans  $M$ , à bord lisse. Pour tous  $0 < \bar{t} \leq T$ ,  $N \geq 0$  entier et  $0 < \eta \leq \eta_0$ , il existe une suite décroissante d'ouverts à bord lisse*

$$\Omega = \Omega_{-N-1} \supset \Omega_{-N} \supset \dots \supset \Omega_i \supset \dots \supset \Omega_0$$

tels que si  $t_i = \left(1 + \frac{\eta^2}{K}\right)^i \bar{t}$  pour tout  $-N-1 \leq i \leq 0$ ,

$$a) \left\{ x \in \Omega_i, d_{t_i}(x, M \setminus \Omega_i) > \sqrt{\frac{t_i}{K}} \right\} \subset \Omega_{i+1} \subset \left\{ x \in \Omega_i, d_{t_i}(x, M \setminus \Omega_i) > \frac{1}{2} \sqrt{\frac{t_i}{K}} \right\}.$$

b) pour  $-N - 1 \leq i < 0$ ,  $x \in \partial\Omega_{i+1}$  et  $0 < r \leq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{t_i}{K}}$ , il existe une fonction  $h_{x,r} : \overline{B_{t_i}(x,r)} \cap \Omega_{i+1} \rightarrow \mathbb{R}$  avec

- (i)  $h_{x,r}(x) = 0$  et  $0 < h_{x,r}(y) \leq r$  pour  $y \in \overline{B_{t_i}(x,r)} \cap \Omega_{i+1}$ ,
- (ii)  $h_{x,r}(y) \geq \frac{r}{2}$  pour  $y \in S_{t_i}(x,r) \cap \Omega_{i+1}$ ,
- (iii)  $\frac{1}{2} \leq |{}^t\nabla h_{x,r}| \leq 2$ , et  $|{}^t\nabla^2 h_{x,r}| \leq \frac{12}{r}$  pour  $t_i \leq t \leq t_{i+1}$ .

c) pour  $-N - 1 \leq i \leq -1$ ,  $\text{vol}_{g(t)}(\Omega_i \setminus \Omega_{i+1}) \geq e^{-24} \sqrt{\frac{t_{i-1}}{K}} \text{vol}_{g(t)}^{n-1}(\partial\Omega_{i+1})$ .  
(si  $N^m \subset M^n$  est une sous-variété de dimension  $m$  de  $(M, g)$ ,  $\text{vol}_g^m(N)$  désigne le volume de  $N$  pour la métrique riemannienne induite par l'inclusion de  $N$  dans  $M$ )

La suite des  $\{t_i\}_{-N-1 \leq i \leq 0}$  est choisie de manière à ce que le flot évolue de manière bornée sur chaque intervalle  $[t_i, t_{i+1}]$ , comme la détaille la remarque qui suit.

*Remarque I.2.7.* Pour un flot  $g(t)$  satisfaisant aux hypothèses (I.1) et pour une suite de temps  $\{t_i\}_i$  définie comme dans l'énoncé de la proposition I.2.6, si on considère le flot mis à l'échelle  $\tilde{g}(s) = \frac{t_i}{K}g(t_i + \frac{s}{K}t_i)$  pour  $s \in [-\frac{1}{2}, \eta^2]$ , on a  $\sup_{M \times [0, \eta^2]} |\text{Rm } \tilde{g}(s)| \leq 2$ . En particulier, si  $0 < \eta \leq \eta_0$  pour  $\eta_0(n) > 0$  suffisamment petit on a

$$\frac{\tilde{g}(0)}{4} \leq \tilde{g}(s) \leq 4\tilde{g}(0) \quad \text{et donc} \quad \frac{1}{2}d_{\tilde{g}(0)} \leq d_{\tilde{g}(s)} \leq 2d_{\tilde{g}(0)}$$

pour  $-\eta^2 \leq s \leq \eta^2$ . De plus, d'après les estimations de Shi, quitte à ajuster le choix de  $\eta_0$ , il existe des constantes  $\mathcal{C}(n, k)$  avec la propriété suivante : si  $B_{\tilde{g}(0)}(x, 1)$  est relativement compacte dans  $M$ , alors  $B_{\tilde{g}(s)}(x, \frac{1}{2})$  l'est encore pour  $-\eta^2 \leq s \leq \eta^2$ , et  $|\nabla^k \text{Rm } \tilde{g}(s)| \leq \mathcal{C}(n, k)$  pour  $0 \leq s \leq \eta^2$  et  $B_{\tilde{g}(s)}(x, \frac{1}{4})$ . Ainsi, quitte à réduire encore  $\eta_0$ , on peut supposer la propriété suivante : si  $f : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction lisse avec

$$|\tilde{g}^{(0)}\nabla f(x)|_{\tilde{g}(0)} \leq 1, \quad |\tilde{g}^{(0)}\nabla^2 f(x)|_{\tilde{g}(0)} \leq C,$$

pour  $x$  tel que  $B_{\tilde{g}(0)}(x, 1)$  est relativement compacte dans  $M$ , alors

$$|\tilde{g}^{(s)}\nabla f(x)|_{\tilde{g}(s)} \leq 2, \quad |\tilde{g}^{(s)}\nabla^2 f(x)|_{\tilde{g}(s)} \leq 2C + 2,$$

pour tout  $0 \leq s \leq \eta^2$ .

Avant de prouver la proposition I.2.6, on rappelle le principe de comparaison du Hessien de la fonction distance en géométrie riemannienne.

**Lemme I.2.8.** Si  $(M, g)$  est une variété riemannienne et si  $B(x_0, r_0)$  est relativement compacte dans  $M$ , avec  $|\text{Rm } g| \leq \frac{1}{r_0^2}$ ,  $\text{inj}_{x_0} g \geq r_0$ , alors la fonction définie par  $d(x) = d(x_0, x)$  est lisse sur  $B(x_0, r_0) \setminus \{x_0\}$ , et

$$-\frac{d}{r_0^2} g \leq \nabla^2 d \leq \frac{g}{r_0 \tanh \frac{d}{r_0}}$$

sur  $B(x_0, r_0)$ .

*Démonstration.* Après mise à l'échelle, on peut supposer  $r_0 = 1$  dans l'énoncé du lemme. La borne supérieure est obtenue par comparaison puisque  $K_g(\sigma) \geq -1$ , tandis que pour la borne

inférieure, on considère  $\gamma : [0, l] \rightarrow B(x_0, 1)$  ( $l = d(x)$ ) géodésique minimisante entre  $x_0$  et  $x$ , et  $v \in T_x M$  un vecteur. On a

$$\nabla^2 d(v, v) = \int_0^l \left( |\nabla_{\dot{\gamma}} V|^2 - K_{\tilde{g}}(\dot{\gamma} \wedge V) |V|^2 \right) dt$$

où  $V$  est le champs de Jacobi le long de  $\gamma$  défini par  $V(0) = 0$ ,  $V(l) = v$ , qui peut s'exprimer sous la forme  $V(t) = f(t)E(t)$ , où  $E(t)$  est un vecteur unitaire parallèle le long de  $\gamma$  et  $f$  est solution de l'équation différentielle

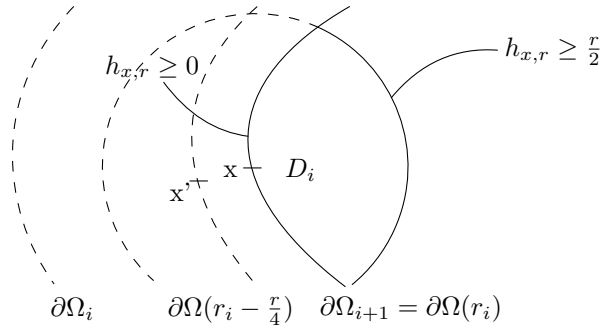
$$\frac{d^2}{dt^2} f = -K_g(\dot{\gamma} \wedge E)f,$$

telle que  $f(0) = 0$ ,  $f(l) = |v|_{g(x)}$ . On considère, pour  $\epsilon > 0$  quelconque, la solution de comparaison définie par  $\frac{d^2}{dt^2} h_\epsilon = -h_\epsilon$ ,  $h_\epsilon(0) = \epsilon$  et  $h_\epsilon(l) = f(l)^3$ . Alors on vérifie que  $u = \frac{f}{h_\epsilon}$  est solution de  $\frac{d^2}{dt^2} u = (1 - K_g)u - 2 \left( \frac{d}{dt} \ln h_\epsilon \right) \left( \frac{d}{dt} u \right)$ . Puisque  $K_g(\sigma) \leq 1$ , un principe du maximum s'applique et on a  $u(t) \leq \max(u(0), u(l))$  donc  $f(t) \leq h_\epsilon(t)$  pour  $0 \leq t \leq l$ . En considérant la limite quand  $\epsilon$  tend vers 0, on trouve finalement  $f(t) \leq \frac{|v|_{g(x)}}{\sin t} \sin t$  soit  $f \leq |v|_{g(x)}$  (puisque  $l \leq 1$ ). Ainsi  $\nabla^2 d(v, v) \geq -\int_0^l f^2 \geq -l|v|^2$  d'où on déduit la borne inférieure de l'énoncé.  $\square$

*Preuve de la proposition I.2.6.* Supposons la suite des  $\Omega_i$  construite jusqu'au rang  $i$  ( $-N - 1 \leq i \leq -1$ ). Pour  $r > 0$  on note

$$\Omega(r) = \left\{ x \in \Omega_i \mid d_{t_i}(x, M \setminus \Omega_i) > r \right\}.$$

Le théorème de Sard permet de choisir  $\frac{3}{4}\sqrt{\frac{t_i}{K}} \leq r_i \leq \sqrt{\frac{t_i}{K}}$  tel que  $\partial\Omega(r_i)$  soit lisse : on pose alors  $\Omega_{i+1} = \Omega(r_i)$ . D'où a). Si  $x \in \partial\Omega_{i+1}$  et  $0 < r \leq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{t_i}{K}}$ , on vérifie aisément que  $d_{t_i}(x, M \setminus \Omega(r_i - \frac{r}{4})) = d_{t_i}(\Omega_{i+1}, M \setminus \Omega(r_i - \frac{r}{4})) = \frac{r}{4}$ , en particulier il existe  $\tilde{x} \in \partial\Omega(r_i - \frac{r}{4})$  tel que  $d_{t_i}(x, \tilde{x}) = d_{t_i}(x, M \setminus \Omega(r_i - \frac{r}{4})) = \frac{r}{4}$ .



On définit alors la fonction  $h_{x,r} : \overline{B_{t_i}(x, r)} \cap \Omega_{i+1} \rightarrow \mathbb{R}$  en posant  $h_{x,r}(y) = d_{t_i}(\tilde{x}, y) - \frac{r}{4}$ . On a donc  $h_{x,r}(x) = 0$ , tandis que si  $y \in B_{t_i}(x, r) \cap \Omega_{i+1}$ ,  $d_{t_i}(y, M \setminus \Omega(r_i - \frac{r}{4})) > \frac{r}{4}$ , en particulier  $d_{t_i}(\tilde{x}, y) > \frac{r}{4}$  donc  $h_{x,r}(y) > 0$ . Si  $y \in S_{t_i}(x, r) \cap \Omega_{i+1}$ ,  $d_{t_i}(\tilde{x}, y) \geq d_{t_i}(x, y) - d_{t_i}(\tilde{x}, x)$  donc  $h_{x,r}(y) \geq d_{t_i}(x, y) - \frac{r}{2} \geq \frac{r}{2}$ . Les hypothèses (I.1), permettent d'appliquer le lemme I.2.8 (pour  $r_i = r$ ) à la métrique  $g(t_i)$ , d'où  $|{}^{t_i}\nabla^2 h_x|_{g(t_i)} \leq \frac{5}{r}$  sur  $B_{t_i}(x, r) \cap \Omega_{i+1}$ . Enfin, d'après la remarque I.2.7,  $|{}^t\nabla h_x| \leq 2$  et  $|{}^t\nabla^2 h_x| \leq \frac{12}{r}$  pour  $t_i \leq t \leq t_{i+1}$ . D'où b)

3. dont une expression est donnée par  $h_\epsilon(t) = \frac{|v|_{g(x)} - \epsilon \cos t}{\sin t} \sin t + \epsilon \cos t$ . En particulier  $h > 0$  sur  $[0, l]$  si  $\epsilon$  est suffisamment petit.

Pour tout  $t_{i-1} \leq t \leq t_i$ ,  $x \in \partial\Omega_{i+1}$ ,  $r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{t_{i-1}}{K}}$ , l'hypersurface  $H_x = \{h_{x,r} = 0\}$  forme une barrière locale de l'hypersurface  $\partial\Omega_{i+1}$ . On a donc  $\Pi_{\partial\Omega_{i+1},g(t)} \leq \Pi_{H_x,g(t)} \leq \frac{|\nabla^2 h_{x,r}|}{|\nabla h_{x,r}|} \leq 48\sqrt{\frac{K}{t_i}}$  et il est clair par l'argument précédent que cela resterait vrai de tous les  $\partial\Omega(r)$  pour  $0 \leq r \leq r_i$ . On en déduit

$$\frac{d}{dr} \text{vol}_{g(t)}^{n-1}(\partial\Omega(r)) = \int_{\partial\Omega(r)} \text{tr} \Pi_{\partial\Omega(r)} \leq 48\sqrt{\frac{K}{t_i}} \text{vol}_{g(t)}^{n-1}(\partial\Omega(r)),$$

puis en intégrant sur  $[r, r_i]$ ,  $\text{vol}_{g(t)}^{n-1}(\partial\Omega(r)) \geq e^{-24} \text{vol}_{g(t)}^{n-1}(\partial\Omega_{i+1})$ , d'où finalement  $c$ ) en intégrant sur  $[0, r_i]$ .  $\square$

## I.2.2 Bornes supérieures sur $\mathcal{K}^*$ et $|\nabla\mathcal{K}^*|$

On en vient au résultat clef de cette section, d'où découle la preuve des propositions I.2.1 et I.2.2 : une borne supérieure gaussienne sur le noyau  $\mathcal{K}^*$  et sur son gradient sur le bord  $\mathcal{B}$  du domaine.

**Lemme I.2.9.** *Il existe une constante  $C_1(n)$  avec la propriété suivante. Soit  $g(t)$  est un flot de Ricci sur  $M^n$  défini pour  $t \in [0, T]$  satisfaisant aux hypothèses (I.1),  $\Omega$  un ouvert à bord lisse relativement compact dans  $M$ . Si, pour des suites  $\{t_i\}_{-N \leq i \leq 0}$  et  $\{\Omega_i\}_{-N \leq i \leq 0}$  fournies par la proposition I.2.6,  $\mathcal{K}_{(x,t)}^*$  ( $(x,t) \in \mathcal{D}$ ) est la fonction introduite par la définition I.2.5, alors on a*

$$(i) \quad \mathcal{K}_{(x,t)}^*(y, s) \leq C_1 \frac{e^{-\frac{d_s(x,y)^2}{C_1(t-s)}}}{(t-s)^{\frac{n}{2}}},$$

pour tout  $(y, s) \in \overline{\mathcal{D}}_{<t}$ , ainsi que

$$(ii) \quad \left| \nabla \mathcal{K}_{(x,t)}^*(y, s) \right| \leq C_1 \frac{e^{-\frac{d_s(x,y)^2}{C_1(t-s)}}}{(t-s)^{\frac{n}{2}} \min(d_s(x,y), \sqrt{s})},$$

pour tout  $(y, s) \in \mathcal{B}_{<t}$ .

Avant de prouver le lemme I.2.9, notons qu'en raison de l'hypothèse  $R_{g(t)} \geq -1$ , le lemme I.2.9 a un corollaire immédiat concernant les problèmes de Dirichlet analogues à (I.49) et (I.51) pour l'opérateur de la chaleur  $\partial_t - \Delta$  et son adjoint  $\partial_t + \Delta + R_{g(t)}$ .

**Corollaire I.2.10.** *Si  $\tilde{\mathcal{K}}_{(x,t)}^* : \mathcal{D}_{>t} \rightarrow \mathbb{R}_+$  désigne la fonction obtenue comme limite des solutions du problème*

$$\begin{cases} v(x, t) = v_0(x) & \text{pour } x \in \Omega_{i_1}, \\ v(x, s) = 0 & \text{pour } (x, s) \in \mathcal{B}_{<t}, \\ v(x, t_i) = 0 & \text{pour } x \in \overline{\Omega_i} \setminus \Omega_{i+1}, -N \leq i \leq -1, \\ (\partial_s + \Delta + R_{g(s)})v = 0 & \text{pour } (x, s) \in \mathcal{D}_{<t}, \end{cases} \quad (I.53)$$

lorsque  $v_0$  tend vers la masse de Dirac  $\delta_x$  en  $x$  pour  $d\mu_t$ , alors on a les majorations

$$(i) \quad \tilde{\mathcal{K}}_{(x,t)}^*(y, s) \leq C_1 e^{t-s} (t-s)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{d_s(x,y)^2}{C_1(t-s)}},$$

pour tout  $(y, s) \in \overline{\mathcal{D}}_{<t}$ , ainsi que

$$(ii) \quad \left| \nabla \tilde{\mathcal{K}}_{(x,t)}^*(y, s) \right| \leq C_1 e^{t-s} \frac{e^{-\frac{d_s(x,y)^2}{C_1(t-s)}}}{(t-s)^{\frac{n}{2}} \min(d_s(x,y), \sqrt{s})},$$

pour tout  $(y, s) \in \mathcal{B}_{<t}$ .

*Démonstration.* Si  $v = e^{s-t} \tilde{\mathcal{K}}_{(x,t)}^*$ , alors  $(\partial_s + \Delta + R_{g(s)})v = (1 - R_{g(s)})v \geq 0$ , donc  $v$  est une sous-solution du problème de Dirichlet (I.51), et comme la limite de  $v(\cdot, s)$  quand  $s$  tend vers  $t$  est encore  $\delta_x$ , on a  $v \leq \mathcal{K}_{(x,t)}^*$ , et on applique le lemme I.2.9.  $\square$

Le noyau  $\mathcal{K}_{(x,t)}^*$  obéit à un principe de reproduction, conséquence immédiate de la formule de représentation (I.52). Avec les notations de la section I.2.1, on a, pour tous  $t_{-N-1} \leq \underline{t} < t < \bar{t} \leq t_0$ ,

$$\mathcal{K}_{(x,\bar{t})}^*(y, \underline{t}) = \int_{\Omega} \mathcal{K}_{(x,\bar{t})}^*(z, t) \mathcal{K}_{(z,t)}^*(y, \underline{t}) d\mu_t. \quad (\text{I.54})$$

La preuve du lemme I.2.9 repose sur ce principe de reproduction combinée aux bornes classiques sur le noyau d'un problème de Dirichlet à bord fixé couplé à un flot qui évolue à courbure borné.

**Lemme I.2.11.** *Il existe une constante  $C_0(n)$  avec la propriété suivante. Soit  $g(t)$  un flot de Ricci sur  $M^n$  défini pour  $t \in [0, \frac{1}{k}]$ , avec  $|\text{Rm } g(t)| \leq k$  et  $\text{inj}_x g(t) \geq \frac{1}{\sqrt{k}}$ , et  $\Omega$  un ouvert à bord lisse relativement compact dans  $M$ . Alors si  $(x, t) \in \Omega \times ]0, \frac{1}{k}]$  et si  $K_{(x,t)}^*$  désigne la limite des solutions  $v : \bar{\Omega} \times [0, t] \rightarrow \mathbb{R}$  continues du problème de Dirichlet*

$$\begin{cases} v(y, t) = v_0(y) & \text{pour } y \in \Omega, \\ v(y, s) = 0 & \text{pour } (y, s) \in \partial\Omega \times [0, t], \\ (\partial_t + \Delta)v = 0 & \text{pour tout } (y, s) \in \Omega \times [0, t]. \end{cases}$$

lorsque  $v_0$  tend vers la masse de Dirac en  $x$   $\delta_x$  pour  $d\mu_t$ , on a

$$K_{(x,t)}^*(y, s) \leq C_0 t^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{d_s(x,y)^2}{C_0(t-s)}}$$

pour tout  $(y, s) \in \Omega \times [0, t]$ .

*Preuve du lemme I.2.9.* (i) L'argument est *verbatim* celui de la preuve de la proposition 3.1 dans [18].

(ii) Soit  $(y, s) \in \mathcal{B}_{<t}$ ,  $-N-1 \leq i < 0$  tel que  $t_i \leq s < t_{i+1}$ ,  $\bar{s} = \min(t_{i+1}, t)$ . On note  $r_0 = \min(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{t_i}{K}}, \frac{1}{2}d_{t_i}(x, y))$ ,  $D_y = \Omega_i \cap B_{t_i}(y, r_0)$  puis on considère  $h_{y,r_0} : B_{t_i}(y, r_0) \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction fournie par la proposition I.2.6, b). On définit ensuite  $H_y : \bar{D}_y \rightarrow \mathbb{R}_+$  en posant  $H_y = f \circ h_{y,r_0}$ , où  $f : [0, r_0] \rightarrow \mathbb{R}_+$  sera choisie croissante, concave, et de façon à avoir

$$\begin{aligned} a) & (\partial_t + \Delta)H = \Delta H \leq 0 \text{ sur } D_y \times [s, \bar{s}], \\ b) & H(z) \geq \mathcal{K}_{(x,t)}^*(z, u) \text{ pour } (z, u) \in \partial D_y \times [s, \bar{s}]. \end{aligned}$$

Pour cela, on note que, d'après la proposition I.2.6, b),

$$\begin{aligned} \Delta H &= f'' |\nabla h_y|^2 + f' \Delta h_y, \\ &\leq \frac{1}{2} f'' + \frac{12}{r_0} f', \end{aligned}$$

aussi choisit on  $f$  solution de

$$\frac{f''}{f'} = -\frac{24}{r_0}, \quad f(0) = 0, \quad f'(0) = \alpha,$$

soit  $f(r) = \frac{\alpha r_0}{24} (1 - e^{-\frac{24r}{r_0}})$ . Finalement, puisque d'après (i) (et la remarque I.2.7) on a  $\mathcal{K}_{(x,t)}^*(z, u) \leq C_1 (t-s)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{d_{t_i}(x,y)^2}{16C_1(t-s)}}$  sur  $D_y \times [s, \bar{s}]$ , le choix de  $\alpha = 32 C_1 (t -$

$s)^{-\frac{n}{2}} r_0^{-1} e^{-\frac{d_{t_i}(x,y)^2}{16C_1(t-s)}}$  garantit  $b$ ) ci-dessus.  $a$ ) et  $b$ ) permettent d'appliquer un principe du maximum et de conclure que  $0 \leq \mathcal{K}_{(x,t)}^* \leq H_y$  sur  $D_y \times [s, \bar{s}]$ , et donc, puisque à la fois  $\mathcal{K}_{(x,t)}^*(\cdot, s)$  et  $H_y$  s'annulent en  $y$ ,  $|\nabla \mathcal{K}_{(x,t)}^*(y, s)| \leq |\nabla H_y(y)| \leq 2\alpha$ . D'où **(ii)**, quitte à ajuster  $C_1$ . □

Grâce à la formule de représentation (I.52) et aux bornes du lemme I.2.9, on peut donner une estimation sur les solutions du problème (I.49) en fonction des données.

**Lemme I.2.12.** *Il existe une constante  $C(n, K, A, T)$  avec la propriété suivante. Soit  $g(t)$  un flot de Ricci sur  $M^n$  pour  $0 \leq t \leq T$  satisfaisant aux hypothèses (I.1) et  $\Omega$  un ouvert relativement compact dans  $M$ . On suppose qu'il existe  $A > 0$  tel qu'au temps initial on ait*

$$\text{vol}_{g(0)}^{n-1} (S(x, r) \cap \Omega) \leq Ar^{n-1} e^{Ar}$$

pour tout  $0 < r \leq \text{diam}_{g(0)} \Omega$ . Alors si  $\{t_i\}_{-N-1 \leq i \leq 0}$  et  $\{\Omega_i\}_{-N-1 \leq i \leq 0}$  sont les suites fournies par la proposition I.2.6, et si  $u$  est une solution du problème (I.49), pour une donnée initiale  $u_0$  sur  $\Omega$ , une condition au bord  $g$  sur  $\mathcal{B}$  et un terme source  $f$  défini sur  $\mathcal{D}$ , alors on a l'estimation

$$u(x, t) \leq C \sup_{\Omega_{-N}} u_0 + Cd^{-n} e^{-\frac{d^2}{C_1 t}} |\Omega \setminus \Omega_0|_{g(t_{-N-1})} \sup_{\mathcal{B}_{< t}} g + Ct \sup_{\mathcal{D}_{< t}} f$$

pour  $(x, t) \in \tilde{\Omega}_0 \times [t_{-N-1}, t_0]$ , où  $\tilde{\Omega}_0 = \{x \in \Omega_0 \mid d_{t_0}(x, M \setminus \Omega_0) > \sqrt{\frac{t_0}{K}}\}$ , et  $d = d_{t_{-N-1}}(M \setminus \Omega_0, x)$ .

*Démonstration.* Pour  $(x, t) \in \tilde{\Omega}_0 \times [t_{-N-1}, t_0]$ , la valeur de  $u(x, t)$  est donnée par la formule (I.52), dont il s'agit d'estimer chacun des trois termes. Pour le premier terme on a, grâce au lemme I.2.9, (i)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{-N}} u_0(y, t_{-N}) \mathcal{K}_{(x,t)}^*(y, t_{-N}) \, d\mu_{t_{-N}}(y) &\leq \sup_{\Omega_{-N}} u_0 \int_{\Omega_{-N}} \mathcal{K}_{(x,t)}^*(y, t_{-N}) \, d\mu_{t_{-N}}(y), \\ &\leq \sup_{\Omega_{-N}} u_0 \int_0^{+\infty} C_1 t^{-\frac{n}{2}} e^{Ar - \frac{r^2}{C_1 t}} Ar^{n-1} \, dr, \\ &\leq \sqrt{2}^n C_1^{\frac{n}{2}+1} A \left( \sup_{0 < r < +\infty} e^{Ar - \frac{r^2}{2C_1 t}} \right) \\ &\quad \times \left( \int_0^{+\infty} u^{n-1} e^{-u^2} \, du \right) \sup_{\Omega_{-N}} u_0, \\ &\leq C(n, K, A, T) \sup_{\Omega_{-N}} u_0. \end{aligned}$$

Concernant le second terme, on a, pour tout  $-N-1 \leq i \leq 0$  et  $(y, s) \in \partial\Omega_{i+1} \times [t_i, t_{i+1}]$ , d'une part  $d_s(x, y) \geq d_s(x, M \setminus \Omega_0)$  et donc  $d_s(x, y) \geq d_{t_{-N-1}}(x, M \setminus \Omega_0) - \frac{20}{3} \sqrt{K} s$  d'après le corollaire I.1.2, et d'autre part  $d_s(x, y) \geq d_s(x, M \setminus \Omega_{i+1})$  donc  $d_s(x, y) \geq \frac{1}{2} d_{t_{i+1}}(x, M \setminus \Omega_{i+1}) \geq \frac{1}{4} \sqrt{\frac{t_{i+1}}{K}}$ . On pose  $d = d_{t_{-N-1}}(x, M \setminus \Omega_0)$ . Ainsi, grâce au lemme I.2.9, (ii)

$$\int_{\partial\Omega_i \times [t_{i-1}, t_i]} \nabla \mathcal{K}_{(x,t)}^* \cdot \eta \, d\mu_s \, ds \leq C \frac{e^{-\frac{d^2}{C_1(t-t_{i-1})}}}{(t-t_i)^{\frac{n}{2}}} \sqrt{\frac{K}{t_{i+1}}} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \text{vol}_{g(s)}^{n-1} (\partial\Omega_i) \, ds,$$

or d'après la proposition I.2.6, c), et puisque la minoration de la courbure scalaire implique  $d\mu_{g(t)} \leq e^t d\mu_{g(t_{-N-1})}$ , on a  $|\partial\Omega_i|_{g(t)}^{n-1} \leq e^{24+T} \sqrt{\frac{K}{t_i-2}} |\Omega_{i-1} \setminus \Omega_i|_{g(t_{-N-1})}^n$ , d'où

$$\int_{\partial\Omega_i \times [t_{i-1}, t_i]} \nabla \mathcal{K}_{(x,t)}^* \cdot \eta d\mu_s ds \leq C \frac{e^{-\frac{d^2}{C_1(t-t_{i-1})}}}{(t-t_i)^{\frac{n}{2}}} |\Omega_{i-1} \setminus \Omega_i|_{g(t_{-N-1})}^n.$$

On note que  $\frac{e^{-\frac{d^2}{C_1(t-t_{i-1})}}}{(t-t_i)^{\frac{n}{2}}} \leq d^{-n} e^{-\frac{d^2}{2C_1 t}} \left( \sup_{x>0} x^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{x^2}{C_1}} \right)$ , d'où finalement, en sommant,

$$\int_{\mathcal{B}_{<t}} g \nabla \mathcal{K}_{(x,t)}^* \cdot \eta d\mu_s ds \leq C \sup_{\mathcal{B}_{<t}} g d^{-n} e^{-\frac{d^2}{2C_1 t}} |\Omega_{-N-1} \setminus \Omega_0|_{g(t_{-N-1})}^n.$$

Enfin, concernant le dernier terme,

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{D}_{<t}} f(y,s) \mathcal{K}_{(x,t)}^*(y,s) d\mu_s(y) ds &\leq \sup_{\mathcal{D}_{<t}} f \int_{\mathcal{D}_{<t}} \mathcal{K}_{(x,t)}^*(y,s) d\mu_s(y) ds, \\ &\leq \sup_{\mathcal{D}_{<t}} f e^T t \int_{\Omega_{t_{-N-1}}} \mathcal{K}_{(x,t)}^*(y,s) d\mu_s(y) ds, \\ &\leq Ct \sup_{\mathcal{D}_{<t}} f. \end{aligned}$$

□

La preuve des propositions I.2.1 et I.2.2 découle directement du lemme I.2.12 et de vérifications élémentaires.

*Preuve de la proposition I.2.1.* L'hypothèse de minoration du tenseur de Ricci de  $g(0)$  garantissant l'estimation adéquate du volume des sphères (pour une constante  $A = A(n)$ ) on applique, pour tout  $N \leq 0$ , le lemme I.2.12 à  $u$  pour les suites  $\{t_i\}_{-N-1 \leq i \leq 0}$  et  $\{\Omega_i\}_{-N-1 \leq i \leq 0}$  construites grâce à la proposition I.2.6 et pour  $g = u$ , puis on fait tendre  $N$  vers  $+\infty$ . □

*Preuve de la proposition I.2.2.* Quitte à ajouter une constante à  $u$ , on peut supposer qu'on a  $0 \leq u(x,t) \leq 2M_0$ . La formule de représentation des solutions permet d'écrire

$$\begin{aligned} u(x,t) - u(x,t_{-N-1}) &= \int_{\Omega_{-N-1}} K_{(x,t)}^*(y,t_{-N-1})(u(y,t_{-N-1}) - u(x,t_{-N-1})) d\mu_{g(t_{-N-1})} \\ &+ \left( \int_{\Omega_{-N-1}} K_{(x,t)}^*(y,t_{-N-1}) d\mu_{g(t_{-N-1})} - 1 \right) u(x,t_{-N-1}) \\ &+ \int_{\mathcal{B}_{\leq t}} u(y,s) \nabla K_{(x,t)}^*(y,s) \cdot \eta(y,s) d\sigma_{g(s)} ds \\ &+ \int_{\mathcal{D}_{\leq t}} K_{(x,t)}^*(y,s) f(y,s) d\mu_{g(s)} ds, \\ &= I + II + III + IV. \end{aligned}$$

Le domaine  $\Omega$  étant relativement compact, les hypothèses de l'énoncé implique que pour  $N$  suffisamment grand, on a

$$\text{vol}_{g(t_{-N-1})}^{n-1} S_{t_{-N-1}}(x,r) \cap \Omega \leq 2Ar^{n-1}e^{Ar}, \quad |u(y,t_{-N-1}) - u(x,t_{-N-1})| \leq 2d_{t_{-N-1}}(x,y).$$



De ceci et de la majoration du noyau de la chaleur adjoint  $K^*$  (corollaire I.2.10) on déduit le calcul de (I).

$$\begin{aligned} I &\leq \int_{r=0}^{+\infty} 2ACt^{-\frac{n}{2}} e^{-C\frac{r^2}{t} + Ar} r^n dr, \\ &\leq 2AC \left( \int_0^{+\infty} u^n e^{-Cu^2 + A\sqrt{T}u} du \right) \sqrt{t}. \end{aligned}$$

D'autre part, on vérifie que  $\int_{\Omega} K_{(x,t)}^* d\mu_s \leq 1$  (de manière analogue à la remarque (I.2.4)), donc (II)  $\leq 0$ . Quant à (III) et (IV), ils sont traités comme dans la preuve de la proposition I.2.1. On conclut en remarquant que la même majoration est valable pour  $-u$ , et en faisant tendre  $N$  vers l'infini.  $\square$

### I.3 Préservation d'une structure de produit à toutes les échelles

Le contenu des deux paragraphes qui suivent s'inscrit dans le cadre de la preuve du théorème  $F$ , et plus largement du problème suivant, déjà évoqué en introduction. On considère un espace métrique  $X$  localement compact, obtenu comme limite d'une suite de variétés riemanniennes  $(M_i^n, g_i)$  de dimension  $n \geq 4$  vérifiant les conditions (I.2), et pour tout  $i \geq 0$ , une  $\epsilon_i$ -isométrie  $\psi_i : X \rightarrow M_i$ , (où  $\epsilon_i \rightarrow 0$ ).

**Question I.3.1.** *Étant donnée une partie compacte  $K \subset X$ , quelles conditions garantissent l'existence d'un  $\epsilon_K > 0$  tel qu'à partir d'un certain rang, il existe un flot  $g_i(t)$  défini pour  $0 \leq t \leq \epsilon_K^2$  sur un voisinage  $U_i \subset M_i$  de  $\psi_i(K)$ , de donnée initiale  $g_i$ , et satisfaisant à des estimations de type (I.1) uniformes ?*

Le paragraphe I.3.1 discute cette question et tente de motiver la définition 0.15 de l'introduction, qui introduit la notion de  $(m, \epsilon)$ -éclatement à toutes les échelles inférieures à  $r$ . Le paragraphe I.3.2 établit la préservation par le flot, sous des hypothèses adéquates, d'une structure produit lorsque celle-ci existe pour la donnée initiale.

#### I.3.1 Structure produit à toutes les échelles : définitions

Au vu de la conjecture 0.10, on voudrait idéalement répondre à la question I.3.1 lorsque  $K$  est inclus dans l'ensemble faiblement  $(n-3)$ -régulier de  $X$ . On rappelle les notions, classiques dans le cadre des espaces obtenus comme limites de variétés riemanniennes à courbure de Ricci minorée, de points et d'ensembles faiblement ou fortement  $m$ -régulier, avec leurs versions quantitatives introduites dans [6].

**Définition I.3.2.** On dit qu'un point  $x \in X$  est  $(m, \epsilon)$ -régulier à l'échelle  $r > 0$  si il existe un espace métrique pointé  $(Y, y_0)$  et une  $\epsilon r$ -isométrie

$$\psi : \begin{array}{ccc} B(x, r) & \rightarrow & \mathbb{B}((y_0, \mathbf{0}_m), r) \subset Y \times \mathbb{R}^m \\ z & \mapsto & (\psi_0(z), \psi_1(z), \dots, \psi_m(z)) \end{array} .$$

On définit alors, en suivant [6],

$$\mathcal{R}_{\epsilon, r}^m(X) = \left\{ x \in X \quad \text{t.q. il existe } s \in [r, 1] \text{ t.q. } x \text{ est } (m, \epsilon)\text{-régulier à l'échelle } s \right\},$$

ainsi que

$$\mathcal{R}_\epsilon^m(X) = \bigcup_{r>0} \mathcal{R}_{\epsilon,r}^m, \quad \mathcal{R}^m(X) = \bigcap_{\epsilon>0} \mathcal{R}_\epsilon^m,$$

respectivement l'ensemble faiblement  $(m, \epsilon)$ -régulier et l'ensemble faiblement  $m$ -régulier de  $X$ .

La notion d'ensemble fortement régulier est plus restrictive.

**Définition I.3.3.** On définit

$$\mathcal{FR}_{\epsilon,r}^m = \left\{ x \in X \quad \text{t.q. } x \text{ est } (m, \epsilon)\text{-régulier à toutes les échelles } 0 < s \leq r \right\},$$

ainsi que

$$\mathcal{FR}_\epsilon^m(X) = \bigcup_{r>0} \mathcal{FR}_{\epsilon,r}^m(X), \quad \mathcal{FR}^m(X) = \bigcap_{\epsilon>0} \mathcal{FR}_\epsilon^m(X)$$

respectivement l'ensemble fortement  $(m, \epsilon)$ -régulier et l'ensemble fortement  $m$ -régulier de  $X$ .

*Remarque I.3.4.*  $\mathcal{FR}_{\epsilon,r}^m(X) \subset \mathcal{R}_{\epsilon,r}^m(X)$  donc  $\mathcal{FR}_\epsilon^m(X) \subset \mathcal{R}_\epsilon^m(X)$  et  $\mathcal{FR}^m(X) \subset \mathcal{R}^m(X)$ .

La notion d'ensemble régulier n'a pas d'intérêt dans le cas où  $X$  est une variété riemannienne (on a alors  $\mathcal{FR}^m(X) = \mathcal{R}^m(X) = X$  pour tout  $0 \leq m \leq n$ ), elle concerne typiquement les espaces obtenus comme limites de suites de variété riemanniennes. *A contrario*, l'ensemble des points  $(m, \epsilon)$ -réguliers à l'échelle  $r > 0$  d'une variété riemannienne est en général non trivial.

Pour répondre à la question I.3.1, on doit comprendre ce que l'hypothèse de l'inclusion de  $K$  dans un ensemble régulier de  $X$  implique sur les éléments de la suite des variétés  $M_i$  approchant  $X$ . Dans cette optique, on fait l'observation suivante.

**Propriété I.3.5.** Soit  $X$  un espace métrique localement compact,  $K \subset X$  une partie compacte, et  $\epsilon > 0$ .

a) Si  $K \subset \mathcal{R}_\epsilon^m(X)$ , il existe  $r_0 > 0$  telle que si  $\psi : X \rightarrow Z$  est une  $r_0$ -isométrie, alors

$$\mathcal{V}_{r_0}(\psi(K)) \subset \mathcal{R}_{2\epsilon, r_0}^m(Z).$$

b) Si  $K \subset \mathcal{FR}_\epsilon^m(X)$ , il existe  $r_1 > 0$  tel que pour tout  $0 < r < r_1$ , si  $\psi : X \rightarrow Z$  est une  $\epsilon r$ -isométrie, alors tout point  $z \in \mathcal{V}_r(\psi(K))$  est  $(m, 2\epsilon)$ -régulier à toutes les échelles  $r \leq s \leq r_1$ .

*Démonstration.* a) La compacité de  $K$  permet de choisir une famille finie  $\{x_i\}_{i \in I}$  de points de  $K$  ainsi qu'une famille  $\{r_i\}_{i \in I}$  ( $0 < r_i \leq 1$ ) telles que chaque  $x_i, i \in I$  est  $(m, \epsilon)$ -régulier à l'échelle  $r_i$ , et que  $\mathcal{R}_\epsilon^m(X) \subset \bigcup_{i \in I} B(x_i, \frac{r_i}{8})$ . On pose  $r_0 = \min_{i \in I} r_i$ . Si  $\psi : X \rightarrow \tilde{X}$  est une  $\epsilon r_0$ -isométrie, et que l'on pose  $z_i = \psi(x_i)$  pour  $i \in I$ , on vérifie facilement d'une part que chaque  $z_i$  est  $(m, 2\epsilon)$ -régulier à l'échelle  $r_i$ , d'autre part que  $\mathcal{V}_{\frac{r_0}{4}}(\psi(K)) \subset \bigcup_{i \in I} B_Z(z_i, \frac{r_i}{2})$ . Ainsi, si  $z \in \mathcal{V}_{\frac{r_0}{4}}(\psi(K))$ , il existe  $i \in I$  tel que  $d_Z(z, z_i) \leq \frac{r_i}{2}$  pour un certain  $i \in I$ ,  $z$  est  $(m, 2\epsilon)$ -régulier à l'échelle  $\frac{r_i}{2}$ . b) se démontre de manière analogue.  $\square$

Ainsi, dans le cadre décrit plus haut, si on suppose par exemple  $K \subset \mathcal{FR}^{n-3}(X)$ , il existe une suite  $r_i \rightarrow 0$  telle que pour chaque  $i$ , les points du  $r_i$ -voisinage de  $\psi_i(K)$  dans  $M_i$  sont tous  $(n-3, \epsilon)$ -réguliers à toutes les échelles comprises entre  $r_i$  et  $r_1$ . Cependant, pour  $i$  fixé, cela n'implique pas, *a priori*, de contraintes sur les boules de rayon inférieur à  $\epsilon r_i$ <sup>4</sup>. Cette observation amène à la question suivante.

4. Pour tout espace métrique localement compact  $(X, d_X)$ , on remarque que si  $\{x_i\}_{i \in I}$  est une partie  $\frac{\epsilon}{2}r$ -séparée maximale d'une boule  $B_X(x, r) \subset X$ , alors la distance de Gromov-Hausdorff entre  $Z = \{x_i\}_{i \in I}$  (muni de la distance induite par  $d_X$ ) et  $B_X(x, r)$  est majorée par  $\epsilon r$ , tandis que pour tout  $i \in I$ , la distance entre  $B_X(x_i, \epsilon r)$  et  $\{x_i\} = B_Z(x_i, \epsilon r)$  est d'au moins  $\epsilon r$ .

**Question I.3.6.** *Peut-on construire, pour  $n \geq 4$ , une suite de variétés riemanniennes pointées  $(M_i, g_i, p_i)$  satisfaisant aux conditions (I.1) qui converge vers un espace métrique  $(X, d_X, p_\infty)$  avec les propriétés suivantes ?*

- a)  $X = \mathbb{R}^{n-3} \times Z$  où  $(Z, d_Z)$  est un espace métrique homéomorphe à  $\mathbb{R}^3$  (donc  $X$  est homéomorphe à  $\mathbb{R}^n$ ),
- b) il existe une suite  $r_i \rightarrow 0$  telle que pour tout  $i \geq 0$ ,  $B_{M_i}(p_i, r_i)$  ne possède pas de voisinage homéomorphe à  $B_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{0}_n, 1)$ .

Une réponse positive à la question I.3.6 entraînerait une réponse négative à la question I.3.1, en vertu de l'observation qui suit. Il serait intéressant de comprendre si les constructions de T. H. Colding et A. Naber [15] peuvent être adaptées pour produire le contre-exemple évoqué par la question I.3.6.

**Lemme I.3.7.** *Il existe  $\epsilon(n, K, v_0)$  et  $\gamma(n, K)$  avec la propriété suivante. Si  $(M^n, g)$  est une variété riemannienne lisse de dimension  $n$  satisfaisant aux hypothèses (I.2), et si il existe un flot de Ricci  $g(t)$  défini sur  $M$  pour  $0 \leq t \leq T$ , de donnée initiale  $g$ , et satisfaisant aux estimations (I.1) ainsi qu'à la minoration du tenseur de Ricci*

$$\text{Rc } g(x, t) \geq -\frac{\epsilon^2}{t},$$

alors pour tout  $x \in (M)_{\epsilon^{-1}\sqrt{T}}$  il existe  $U \supset B_g(x, \gamma\sqrt{T})$  et un homéomorphisme  $h : U \rightarrow B_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{0}_n, 1)$ .

Afin de contourner cet écueil, on se voit forcé d'imposer une condition de  $(n-3, \epsilon)$ -régularité à toutes les échelles inférieures à un certain  $r$  uniformément sur les ouverts  $U_i \subset M_i$  qui approchent  $K$ , l'inconvénient d'une telle hypothèse étant qu'en général, cette propriété des éléments de la suite ne se déduit pas d'une propriété analogue de l'espace limite. En réalité, la notion de  $(m, \epsilon)$ -régularité à toutes les échelles que l'on retient est plus contraignante que l'appartenance d'un point à  $\mathcal{SR}_{\epsilon, r}^m$ . Elle consiste à supposer l'existence en un point donné d'un  $(m, \epsilon)$ -éclatement à toutes les échelles inférieures à  $r$  (voir la définition 0.15 de l'introduction). Elle inclut une condition de compatibilité des  $\epsilon$ -isométries avec une boule dans un produit  $Z \times \mathbb{R}^m$  aux différentes échelles.

Le lemme qui suit montre en particulier que l'existence d'un  $(m, \epsilon)$ -éclatement à toutes les échelles inférieures à  $r$  en un point  $x$  est une hypothèse strictement plus forte que l'appartenance à de  $x$  à  $\mathcal{SR}_{\epsilon, r}^m$ , même lorsque  $n = m$ . Rappelons que si  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction semi-concave (voir 1.3 dans [28]) définie sur une variété riemannienne  $M$ , on peut définir, pour  $x \in M$  et  $v \in T_x M$ ,

$$d_x f(v) = \lim_{r \rightarrow 0, r > 0} \frac{f \circ \gamma_v(r) - f(x)}{r},$$

Il existe alors un unique vecteur  $\nabla f(x)$  tel que

$$\begin{aligned} d_x f(v) &\leq \nabla f(x) \cdot v \text{ pour tout } v \in T_x M, \\ d_x f(\nabla f(x)) &= |\nabla f|^2. \end{aligned}$$

**Lemme I.3.8.** *Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne,  $x_0 \in M$  un point tel que  $B(x_0, 2)$  est relativement compacte dans  $M$ , et  $(p_1, \dots, p_m)$  ( $p_i \in B(x_0, 1)$  pour  $1 \leq i \leq m$ ) un  $(m, \epsilon)$  éclatement à toutes les échelles inférieures à  $r > 0$  en  $x_0$ . Alors si on définit les fonctions semi-concaves*

$$u_k(x) = d(p_k, x) - d(p_k, x_0),$$

on a, en tout point  $x \in B_0(x_0, r)$ ,

$$|\nabla u_k \cdot \nabla u_l - \delta_{k,l}| \leq 4\epsilon. \quad (\text{I.55})$$

En particulier,  $B(x_0, r)$  possède un voisinage homéomorphe à  $N^{n-m} \times \mathbb{R}^m$ , pour une variété lisse  $M^{n-m}$  de dimension  $n - m$ .

*Démonstration.* Soit  $x \in B_0(x_0, r)$ ,  $v \in T_x M$  avec  $|v|_{g(0)} = 1$ ,  $0 < s < r$ . Par définition il existe  $(Z, z_0)$  espace métrique et

$$\Phi : \begin{array}{ccc} B_0(x, s) & \rightarrow & \mathbb{B}(s) \subset Z \times \mathbb{R}^m \\ y & \mapsto & (\phi_0(x), \phi_1(x), \dots, \phi_m(x)) \end{array} ,$$

une  $\epsilon s$ -isométrie, avec en plus  $|\phi_k(y) - u_k(y) - u_k(x)| \leq \epsilon s$  pour  $y \in B_0(x, r)$ . On a

$$\begin{aligned} u_k \circ \gamma_v(s) - u_k(x) &\leq \phi_k(\gamma_v(s)) + \epsilon s, \\ &\leq |\phi(\gamma_v(s))| + \epsilon s, \\ &\leq d_0(x, \gamma_v(s)) + 2\epsilon s, \\ &\leq s + 2\epsilon s \end{aligned}$$

d'où  $d_x u_k(v) \leq 1 + 2\epsilon$ . D'autre part, si on choisit  $v_0$  ( $|v_0|_{g(0)} = 1$ ) le vecteur initial d'une géodésique telle que  $d_{Z \times \mathbb{R}^m}(\phi(\gamma_{v_0}(s)), (z_0, e_k)) \leq \epsilon s$  ( $e_k$   $k$ -ième vecteur de la base canonique de  $\mathbb{R}^m$ ), on a

$$\begin{aligned} u_k \circ \gamma_{v_0}(s) - u_k(x) &\geq \phi_k(\gamma_{v_0}(s)) - \epsilon s, \\ &\geq s - 2\epsilon s, \end{aligned}$$

d'où  $d_x u_k(v) \leq 1 - 2\epsilon$ , et donc  $1 - 2\epsilon \leq |\nabla u_k| \leq 1 + 2\epsilon$ . Un raisonnement quasiment identique permet aussi de montrer  $1 - 2\epsilon \leq \left| \nabla \left( \frac{u_k + u_l}{\sqrt{2}} \right) \right| \leq 1 + 2\epsilon$  et l'énoncé du lemme découle de la formule de polarisation.  $\square$

Il existe néanmoins un cas où la  $(m, \epsilon)$ -régularité à une échelle donnée garantit l'existence d'un  $(m, \delta)$ -éclatement à toutes les échelles suffisamment petites, celui d'un espace d'Alexandrov à courbure minorée.

**Proposition I.3.9.** *Il existe  $C(n)$  avec la propriété suivante. Soit  $(X, d)$  est un espace d'Alexandrov de dimension finie  $n$  à courbure minorée par  $-\epsilon^2$ , tel que  $B(x_0, 4)$  est relativement compact dans  $X$ , et  $p_1, \dots, p_m, q_1, \dots, q_m$  sont  $2m$  points tels que*

$$\begin{aligned} (i) \quad &1 - \epsilon \leq d(x_0, p_i), d(x_0, q_i) \leq 1 + \epsilon, \\ (ii) \quad &d(p_i, q_i) \geq 2 - 2\epsilon, \end{aligned}$$

pour  $1 \leq i \leq m$ , ainsi que

$$(iii) \quad d(p_i, q_j), d(p_i, p_j), d(q_i, q_j) \geq \sqrt{2} - \epsilon$$

pour tous  $1 \leq i \neq j \leq m$ . Alors  $(p_1, \dots, p_m)$  est un  $(m, C\epsilon)$ -éclatement en  $x_0$  à toutes les échelles inférieures à  $\epsilon$ .

**Corollaire I.3.10.** *Il existe  $C(n)$  avec la propriété suivante. Soit  $(X, d)$  est un espace d'Alexandrov de dimension finie  $n$  à courbure minorée par  $-\epsilon^2$ , et soit  $x_0 \in M$  tel que  $B(x_0, 2)$  est relativement compact dans  $X$ . Alors si  $x_0 \in \mathcal{R}_{\epsilon, r}^m(X)$ , il existe un  $(m, C\epsilon)$ -éclatement en  $x_0$  à toutes les échelles inférieures à  $\epsilon r$ .*

En combinant le corollaire I.3.10 avec la propriété I.3.5 on obtient l'énoncé qui suit.

**Corollaire I.3.11.** *Il existe  $C(n)$  avec la propriété suivante. Soit  $X$  un espace métrique localement compact obtenu comme limite d'une suite de variétés riemanniennes  $(M_i^n, g_i, x_i)$  de dimension  $n$  avec*

$$K_{g_i}(\sigma) \geq -1, \quad \text{vol}_{g_i} B_{g_i}(x_i, r) \geq v_0 r^n,$$

*Soit  $K$  une partie compacte de  $X$  contenue dans  $\mathcal{R}_\epsilon^m(X)$  pour un certain  $\epsilon > 0$ . Alors il existe  $r_K > 0$  et  $i_K > 0$  tel que pour tout  $i \geq i_K$ , tout point de  $\mathcal{V}_{r_K}(\psi_i(X))$  possède un  $(m, C\epsilon)$ -éclatement à toutes les échelles inférieures à  $\epsilon r_K$ .*

### I.3.2 Préservation d'une structure de produit par le flot

Ce paragraphe est consacré à la preuve de l'énoncé qui suit, qui affirme qu'un point possède un  $(m, \epsilon)$ -éclatement à toutes les échelles inférieures à une échelle donnée au temps 0, alors ce point demeure  $(m, \delta)$ -régulier à toutes les échelles suffisamment petites pour un intervalle de temps contrôlé.

**Proposition I.3.12.** *Il existe  $\epsilon(n, v_0, K, \delta) > 0$  avec la propriété suivante. Soit  $g(t)$  un flot de Ricci défini pour  $0 \leq t \leq T$  sur une variété lisse  $M^n$  de dimension  $n$ , satisfaisant aux hypothèses (I.1), dont la donnée initiale vérifie les conditions (I.2). On suppose en plus*

$$\text{Rc } g(x, t) \geq -\frac{\epsilon^2}{t}$$

*pour tout  $0 < t \leq T$ ,  $x \in M$ . Alors si  $x \in M$ ,  $r > 0$  sont tels que  $B_t(x, r)$  est relativement compacte dans  $M$  pour tout  $0 \leq t \leq T$ , et si  $(p_1, \dots, p_m)$  est un  $(m, \epsilon)$ -éclatement en  $x$  à toutes les échelles inférieures à  $r$  pour la métrique  $g(0)$ , alors pour tout  $0 \leq t \leq \epsilon^2 r^2$  et  $0 < s \leq \epsilon r$  on a*

$$d_{\text{GH}}(B_t(x, s), B_{X \times \mathbb{R}^m}((x_0, \mathbf{0}_m), s)) \leq \delta s$$

*où  $(X, d_X, x_0)$  est un espace métrique (qui dépend de  $x$ ,  $t$  et  $s$ ).*

La proposition est une conséquence directe, par extraction d'une limite d'une suite contredisant son énoncé, du lemme suivant. C'est en réalité sous cette forme que nous l'utiliseront plus loin.

**Lemme I.3.13.** *Soit  $g(t)$  un flot de Ricci complet défini pour  $0 \leq t \leq T$  sur une variété lisse  $M^n$  de dimension  $n$ , satisfaisant aux hypothèses (I.1), avec*

$$\text{Rc } g(t) \geq 0. \tag{I.56}$$

*Soit  $d_0$  une distance sur  $M$  telle que la fonction  $d_{g(t)} : M \times M \rightarrow \mathbb{R}_+$  converge vers  $d_0 : M \times M \rightarrow \mathbb{R}_+$  uniformément sur tout compact de  $M \times M$ . On suppose d'une part que pour tout  $x \in M$  tel que  $B_{d_0}(x, r)$  est relativement compacte dans  $M$ , on a*

$$\mathcal{H}^n B_{d_0}(x, r) \geq v_0 r^n,$$

*( $\mathcal{H}^n$  désigne la mesure de Hausdorff de dimension  $n$  associée à  $d_0$ ) et d'autre part qu'il existe un espace métrique  $(X, d_X)$  et une isométrie*

$$\phi : (X \times \mathbb{R}^m, d_{X \times \mathbb{R}^m}) \rightarrow (M, d_0)$$

*où  $1 \leq m \leq n$  et  $d_{X \times \mathbb{R}^m}((x, u), (x', u'))^2 = d_X(x, x')^2 + |u' - u|^2$  pour tous  $(x, u), (x', u') \in X \times \mathbb{R}^m$ . Alors  $X$  est une variété différentielle de dimension  $n - m$  et il existe un flot de Ricci  $h(t)$  sur  $X$ , défini pour  $0 < t \leq T$ , satisfaisant encore aux hypothèses (I.56), tel que*

$$\phi^* g(t) = h(t) \oplus g_{\mathbb{R}^m}.$$

Le lemme I.3.13 repose lui même sur un théorème classique sur la structure des variétés riemanniennes à courbure de ricci positive ou nulle.

**Théorème I.3.14** (Cheeger-Gromoll, 1971, [10] ou [16]). *Soit  $(M^n, g)$  une variété riemannienne complète avec  $\text{Rc } g \geq 0$ ,  $x_0 \in M$ , et supposons qu'il existe une ligne<sup>5</sup>  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$  avec  $\gamma(0) = x_0$ . Alors il existe une variété riemannienne complète  $(N^{n-1}, h)$  avec  $\text{Rc } h \geq 0$  telle que, si*

$$b_+(x) = \lim_{s \rightarrow +\infty} d_g(x_0, \gamma(s)) - d_g(x, \gamma(s)),$$

désigne la fonction de Buseman associée à  $\gamma$ , et si  $\{\phi_r\}_{r \in \mathbb{R}}$  désigne le flot du gradient de  $b_+$  alors l'application

$$\Phi : \begin{array}{ccc} (N \times \mathbb{R}, h + \text{dr}^2) & \rightarrow & (M, g), \\ (x, r) & \mapsto & \phi_r(x) \end{array}$$

est une isométrie.

Avant de prouver le lemme I.3.13, on décrit un principe qui permet, pour un flot qui satisfait entre autres aux hypothèses (I.1), de sélectionner des points dont un voisinage de taille contrôlé est soumis à une borne de courbure plus forte que la borne  $|\text{Rm } g(t)| \leq \frac{K}{t}$ .

**Définition I.3.15.** On dit qu'un point  $x \in M$  est  $\delta$ -statique sur  $[0, \bar{t}]$  pour le flot  $g(t)$  si pour tout  $0 < t \leq \bar{t}$ , la boule  $B_t(x, \frac{8n}{\delta}\sqrt{t})$  est relativement compacte dans  $M$  et  $|\text{Rc } g(y, t)| \leq \frac{\delta^2}{64n^2t}$  pour  $y \in B_t(x, \frac{8n}{\delta}\sqrt{t})$ .

L'intérêt de cette définition apparaît lorsqu'on applique le corollaire I.1.3 sur l'évolution de la fonction distance à des points  $\delta$ -statiques. On obtient alors, par exemple, l'analogie des estimations qui apparaissent dans l'énoncé du corollaire I.1.3, où la constante  $K$  issue des hypothèses (I.1) est remplacée par  $\delta^2$ . Plus précisément, si  $p$  est un point  $\delta$ -statique sur  $[0, \bar{t}]$ , et  $B_t(p, R)$  est relativement compacte dans  $M$ , on a

$$(\partial_t - \Delta)d_t(p, \cdot) \geq -\frac{\delta}{2\sqrt{t}} \quad (\text{I.57})$$

sur  $B_t(p, R)$ , tandis que si  $q$  est un autre point  $\delta$ -statique (t.q.  $q \in B_t(p, R)$  pour  $0 \leq t \leq \bar{t}$ ), on a

$$d_t(p, q) - d_s(p, q) \geq -\delta(\sqrt{t} - \sqrt{s}) \quad (\text{I.58})$$

pour tous  $0 \leq s < t \leq \bar{t}$ . Le lemme qui suit et son corollaire fournissent des hypothèses sous lesquelles, pour  $\delta$  arbitrairement petit, les points  $\delta$ -statiques sur un intervalle de temps contrôlé, sont suffisamment nombreux.

**Lemme I.3.16.** *Il existe  $\epsilon(n, v, K, \delta)$  avec la propriété suivante. Soit  $g(t)$  un flot défini pour  $0 \leq t \leq T$  sur une variété lisse  $M^n$  de dimension  $n$  satisfaisant aux hypothèses (I.1) et  $x_0 \in M$  tel que  $B_t(x_0, 2)$  soit relativement compact dans  $M$  pour  $0 \leq t \leq T$ . On suppose de plus*

- a)  $\text{Rc } g(x, 0) \geq -1$  pour  $x \in B_0(x_0, 2)$ ,
- b)  $\int_0^{\bar{t}} \int_{B_0(x_0, 2)} |\text{R}_{g(t)}| \, d\mu_{g(t)} dt \leq \epsilon$ ,

pour  $0 \leq \bar{t} \leq \min(\frac{\delta^2}{256n^2}, \frac{1}{256K}, T)$  donné. Alors il existe  $\mathcal{S}_\delta \subset M$  tel que

- (i)  $\text{vol}_{g(0)} \mathcal{S}_\delta < \delta$ ,
- (ii) tout point  $x \in B_0(x_0, 1) \setminus \mathcal{S}_\delta$  est  $\delta$ -statique pour  $0 < t \leq \bar{t}$ .

---

5. c'est à dire un chemin  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$  tel que pour tous  $s < t$ ,  $\ell_g(\gamma|_{[s, t]}) = d_g(\gamma(s), \gamma(t))$ .

**Corollaire I.3.17.** *Il existe  $\epsilon(n, K, v_0, \delta) > 0$  avec la propriété suivante. Soit  $g(t)$  un flot défini pour  $0 \leq t \leq T$  sur une variété lisse  $M^n$  de dimension  $n$  satisfaisant aux hypothèses (I.1) et dont la donnée initiale vérifie les conditions (I.2) et  $x_0 \in M$  tel que  $B_0(x_0, 4)$  est relativement compact dans  $M$  pour tout  $0 \leq t \leq T$ . Si, pour tout  $(x, t) \in M \times ]0, T]$*

$$\text{Rc } g(x, t) \geq -\frac{\epsilon^2}{t},$$

*alors pour tout  $x \in B_0(x_0, 1)$  il existe un point  $\bar{x} \in B_0(x, \delta)$  qui est  $\delta$ -statique sur l'intervalle  $[0, \min(\epsilon^2, T)]$ .*

La preuve du lemme I.3.16 repose elle-même sur le lemme suivant qui montre comment, pour un flot satisfaisant aux hypothèses (I.1), une borne intégrale locale sur la courbure scalaire implique une borne ponctuelle sur la norme du tenseur de Ricci. L'idée est d'observer, en intégrant sur un domaine spatio-temporel l'équation d'évolution de la courbure scalaire

$$\partial_t \text{R}_{g(t)} = \Delta \text{R}_{g(t)} + 2 |\text{Rc } g(t)|^2 \quad (\text{I.59})$$

que la norme  $L^2$  du tenseur de Ricci peut être contrôlée par l'intégrale de (la valeur absolue de) la courbure scalaire, puis d'utiliser la régularité du flot à l'échelle  $\sqrt{\frac{t}{K}}$  pour en déduire une borne ponctuelle.

**Lemme I.3.18.** *Il existe  $\eta_0(n) > 0$  et  $C(n)$  avec la propriété suivante. Soit  $g(t)$  un flot défini pour  $0 < t \leq T$  sur une variété lisse  $M^n$  de dimension  $n$ , satisfaisant aux hypothèses (I.1),  $(\bar{x}, \bar{t}) \in M \times ]0, T]$ ,  $0 < \eta \leq \eta_0$  et  $A \geq 1$ . On pose  $\underline{T} = (1 + \frac{\eta}{K})^{-2} \bar{t}$ ,  $\underline{t} = (1 + \frac{\eta}{K})^{-1} \bar{t}$  et  $\bar{T} = (1 + \frac{\eta}{K}) \bar{t}$ . Si le domaine  $B_{\bar{T}}(\bar{x}, 2A\sqrt{\frac{\bar{T}}{K}}) \times [\underline{T}, \bar{T}]$  est relativement compact dans  $M \times [0, T]$ , alors*

$$\sup_{B_{\bar{T}}(\bar{x}, A\sqrt{\frac{\bar{T}}{K}}) \times [\underline{t}, \bar{t}]} |\text{Rc } g(t)|^2 \leq C \left( \frac{K}{\eta \bar{t}} \right)^{\frac{n}{2}+2} \int_{\underline{T}}^{\bar{T}} \int_{B_{\bar{T}}(\bar{x}, 2A\sqrt{\frac{\bar{T}}{K}})} |\text{R}_{g(t)}| \, d\mu_{g(t)} dt.$$

*Démonstration.* (i) On considère le flot mis à l'échelle  $\tilde{g}(s) = \frac{K}{\bar{t}} g(\bar{t} + \frac{\bar{t}}{K} s)$ , défini en particulier sur le domaine relativement compact  $R = \tilde{B}_{\bar{T}}(\bar{x}, 2A) \times ]\underline{S}, \bar{S}]$ , où  $\underline{S} = -\frac{\eta}{1+\frac{\eta}{K}} < -\frac{\eta}{2}$ ,  $\bar{S} = (2 + \frac{\eta}{K})\eta > 2\eta$ . Si  $\eta \leq \frac{1}{2}$ , on a sur ce domaine les estimations  $|\text{Rm } \tilde{g}(x, s)| \leq 2$ ,  $\text{inj}_{\tilde{g}(s)} x \geq \frac{1}{2}$ . Si  $\eta \leq \eta_0$ , où  $\eta_0$  ne dépend que de  $n$ , on peut construire une fonction cut-off  $\phi : R \rightarrow [0, 1]$  à support relativement compact dans  $R$ , avec  $\phi \equiv 1$  sur le domaine intérieur  $Q = \tilde{B}_{\eta}(\bar{x}, 2A - \frac{1}{4}) \times ]-\frac{\eta}{4}, \eta]$ , telle que  $\sup_R |\partial_s \phi| \leq \frac{C}{\eta}$  et  $\sup_R |\nabla^2 \phi| \leq C$ , pour une constante  $C$  ne dépendant que de  $n$ .

L'équation d'évolution (I.59) combinée à une intégration par partie permet d'écrire

$$\begin{aligned} \partial_s \int_{\tilde{B}_{\bar{T}}(\bar{x}, 2A)} \phi \text{R}_{\tilde{g}(s)} \, d\mu_{\tilde{g}(s)} ds &= \int_{\tilde{B}_{\bar{T}}(\bar{x}, 2A)} (\partial_s \phi + \Delta \phi) \text{R}_{\tilde{g}(s)} + \\ &\quad (2 |\text{Rc } \tilde{g}|^2 - (\text{R}_{\tilde{g}(s)})^2) \phi \, d\mu_{\tilde{g}(s)} ds. \end{aligned}$$

En intégrant entre  $\underline{S}$  et  $\bar{S}$  (on note que puisque  $\phi$  est à support compact dans  $R$ ,  $\left[ \int_{\tilde{B}_{\bar{T}}(\bar{x}, 2A)} \phi \text{R}_{\tilde{g}(s)} \, d\mu_{\tilde{g}(s)} \right]_{\underline{S}}^{\bar{S}} = 0$ ) on trouve

$$\iint_R \phi |\text{Rc } \tilde{g}|^2 \, d\mu_{\tilde{g}(s)} ds \leq \frac{1}{2} \iint_R |\partial_s \phi + \Delta \phi| |\text{R}_{\tilde{g}(s)}| + \phi (\text{R}_{\tilde{g}})^2 \, d\mu_{\tilde{g}(s)} ds,$$

d'où on déduit finalement (on rappelle qu'en particulier  $|\mathrm{R}_{\tilde{g}(s)}| \leq 2n(n-1)$ )

$$\iint_Q |\mathrm{Rc} \tilde{g}|^2 d\mu_{\tilde{g}} ds \leq \frac{C}{\eta} \iint_R |\mathrm{R}_{\tilde{g}(s)}| d\mu_{\tilde{g}(s)} ds, \quad (\text{I.60})$$

pour une constante  $C$  ne dépendant que de la dimension.

- (ii) On passe d'une borne intégrale sur  $|\mathrm{Rc} \tilde{g}|^2$  à une borne ponctuelle sur le domaine  $P = \tilde{B}_\eta(\bar{x}, A) \times [0, \eta] \subset Q$  en faisant appel à l'équation d'évolution du tenseur de Ricci, qui est de la forme  $\partial_s \mathrm{Rc} = \Delta \mathrm{Rc} + \mathrm{Rm} \star \mathrm{Rc}$ . Ceci implique en particulier (puisque ici  $|\mathrm{Rm} \tilde{g}| \leq 2$ )

$$\partial_s |\mathrm{Rc} \tilde{g}|^2 \leq \Delta |\mathrm{Rc} \tilde{g}|^2 + C |\mathrm{Rc} \tilde{g}|^2$$

où la constante  $C$  ne dépend que de  $n$ . Pour tout domaine  $\Omega \subset \tilde{B}_\eta(\bar{x}, 2A - \frac{1}{4})$  à bord lisse, et  $-\frac{\eta}{4} < s_0 < \eta$ ,  $|\mathrm{Rc} \tilde{g}|^2$  est donc majoré sur  $\Omega \times ]-s_0, \eta[$  par la solution  $v(x, s)$  du problème de Dirichlet

$$\begin{cases} v(x, s_0) = |\mathrm{Rc} \tilde{g}(x, s_0)|^2 \text{ pour } x \in \Omega, \\ v(x, s) = |\mathrm{Rc} \tilde{g}(x, s)|^2 \text{ pour } x \in \partial\Omega, s_0 < s < \eta, \\ \partial_s v(x, s) = \Delta v(x, s) + C v(x, s) \text{ pour } x \in \Omega, s_0 < s < \eta, \end{cases}$$

dont une expression est donnée par la formule de représentation

$$\begin{aligned} v(x, s) = & \int_\Omega K_{(z, s_0)}(x, s) |\mathrm{Rc} \tilde{g}(z, s_0)|^2 d\mu_{\tilde{g}(s_0)}(z) \\ & - \int_{s_0}^s \int_{\partial\Omega} |\mathrm{Rc} \tilde{g}(z, s)|^2 \frac{\partial}{\partial z} K_{(z, s_0)}(x, s) \cdot \eta(z, s) d\sigma_{\tilde{g}(s)}(z) ds. \end{aligned} \quad (\text{I.61})$$

où  $K$ , le noyau associé au problème, satisfait à des estimations de la forme de celles données par le lemme I.2.11. Enfin il est clair qu'on peut choisir d'une part  $-\frac{\eta}{4} < s_0 < -\frac{\eta}{8}$  tel que

$$\int_{B_\eta(\bar{x}, 2A - \frac{1}{4})} |\mathrm{Rc} \tilde{g}(x, s_0)|^2 d\mu_{\tilde{g}(s_0)}(x) \leq \frac{8}{\eta} \iint_Q |\mathrm{Rc} \tilde{g}(x, s)|^2 d\mu_{\tilde{g}(s)}(x) ds$$

et d'autre part  $\Omega$  de façon à avoir  $\tilde{B}_\eta(\bar{x}, A + \frac{1}{4}) \subset \Omega \subset \tilde{B}_\eta(\bar{x}, 2A - \frac{1}{4})$ ,  $|\mathrm{II}_{\partial\Omega}| \leq C$  et

$$\int_{-\frac{\eta}{4}}^\eta \int_{\partial\Omega} |\mathrm{Rc} \tilde{g}(x, s)|^2 d\sigma_{\tilde{g}(s)}(x) ds \leq \frac{C}{A - \frac{1}{2}} \iint_Q |\mathrm{Rc} \tilde{g}(x, s)|^2 d\mu_{\tilde{g}(s)}(x) ds$$

pour une constante  $C$  ne dépendant que de la dimension. Appliquant (I.61) avec ces choix on trouve

$$|\mathrm{Rc} \tilde{g}(x, s)|^2 \leq \frac{C}{\eta^{\frac{n}{2}+1}} \iint_Q |\mathrm{Rc} \tilde{g}|^2 d\mu_{\tilde{g}(s)} ds$$

pour tout  $(x, s) \in P$ . La conclusion du lemme en découle, ainsi que de (I.60).  $\square$



*Preuve du lemme I.3.16.* La borne sur la norme du tenseur de courbure issue des hypothèses (I.1) permet de fixer  $\eta \leq \eta_0$  ( $\eta_0(n)$  provenant du lemme I.3.18) ne dépendant que de  $n$  tel que pour tous  $(1 + \frac{\eta}{K})^{-1}t \leq s \leq t$ , on ait  $\frac{1}{4}g(t) \leq g(s) \leq 4g(t)$ .  $0 < \bar{t} \leq T$  étant fixé, on définit la suite  $t_i = (1 + \frac{\eta_0}{K})^i \bar{t}$  pour  $i \leq 0$ , puis on sélectionne, pour tout  $i \leq 0$  une partie  $\{x_{i,j}\}_{j \in I_i}$  de  $B_0(x_0, \frac{3}{2})$   $\frac{4n\sqrt{t_i}}{\delta}$ -séparée maximale (donc  $\frac{8n\sqrt{t_i}}{\delta}$ -couvrante) pour  $d_{t_i}$ . Étant donné l'ensemble d'indexation  $\mathcal{J} = \{ (i, j) \mid i \leq 0, j \in I_i \}$ , on définit, pour tout  $(i, j) \in \mathcal{J}$ ,  $P_{i,j} = [t_{i-1}, t_i] \times B_{t_i}(x_{i,j}, \frac{16n\sqrt{t_i}}{\delta})$ , puis  $R_{i,j} = [t_{i-2}, t_{i+1}] \times B_{t_i}(x_{i,j}, \frac{32n\sqrt{t_i}}{\delta})$  et enfin

$$k_{i,j} = t_i \sup_{P_{i,j}} |\text{Rc } g(x, t)| \quad m_{i,j} = \iint_{R_{i,j}} |\text{R}_{g(t)}| \, d\mu_{g(t)} dt.$$

A condition de supposer  $\bar{t} \leq \min(\frac{\delta^2}{1024n^2}, \frac{1}{200n^2K})$ , on a en particulier

$$B_0(x_0, \frac{3}{2}) \times ]0, \bar{t}] \subset \bigcup_{(i,j) \in \mathcal{J}} P_{i,j} \subset \bigcup_{(i,j) \in \mathcal{J}} R_{i,j} \subset B_0(x_0, 2) \times ]0, (1 + \frac{\eta}{K})\bar{t}],$$

alors que le lemme I.3.18 (appliqué avec  $A = \frac{16n\sqrt{K}}{\delta}$ ) se traduit par l'inégalité

$$t_i^{\frac{n}{2}} k_{i,j}^2 \leq C m_{i,j} \tag{I.62}$$

pour tout  $(i, j) \in \mathcal{J}$  et  $C$  ne dépendant que de  $n$  et  $K$ . Puisque les hypothèses sous lesquelles on se place impliquent en particulier  $\text{Rc } g(x, t) \geq -\frac{nK}{t}$ , les inégalités de recouvrement usuelles dans ce contexte garantissent l'existence d'une constante  $N$  dépendant de  $n$ ,  $K$  et  $\delta$  telle que pour tout  $(i, j) \in \mathcal{J}$ ,  $|\{j' \in I_i \mid d_{t_i}(x_i, x_{j'}) \leq \frac{64n\sqrt{t_i}}{\delta}\}| \leq N$  et donc

$$\max_{(i,j) \in \mathcal{J}} |\{(i', j') \in \mathcal{J} \mid R_{i,j} \cap R_{i',j'} \neq \emptyset\}| \leq N'$$

pour une autre constante  $N'$  dépendant de  $n$ ,  $K$  et  $\delta$ . On peut donc, par un argument élémentaire de théorie des graphes, partitionner l'ensemble  $\mathcal{J}$  en au plus  $N' + 1$  sous-parties  $\mathcal{J}_1, \dots, \mathcal{J}_{N'+1}$  telles que pour chaque  $1 \leq k \leq N' + 1$ , les  $R_{i,j}$  sont disjoints pour  $(i, j) \in \mathcal{J}_k$ . On a donc

$$\sum_{(i,j) \in \mathcal{J}} m_{i,j} \leq (N' + 1) \int_0^{\bar{t}} \int_{B_0(x_0, 2)} |\text{R}_{g(t)}| \, d\mu_{g(t)}(x) dt,$$

soit, avec l'hypothèse *b*) et (I.62)

$$\sum_{(i,j) \in \mathcal{J}} t_i^{\frac{n}{2}} k_{i,j}^2 \leq C\epsilon. \tag{I.63}$$

On définit maintenant pour  $i \leq 0$ ,  $J_i = \{j \in I_i \mid k_{i,j} > \frac{\delta^2}{64n^2}\}$  puis

$$\mathcal{J}_\delta = \bigcup_{i=-\infty}^0 \bigcup_{j \in J_i} B_0(x_{i,j}, 32n(\frac{1}{\delta} + \sqrt{K})\sqrt{t_i}).$$

De (I.63) on déduit

$$\sum_{i=-\infty}^0 |J_i| t_i^{\frac{n}{2}} \leq C\epsilon,$$

où  $C$  dépend de  $n$ ,  $K$  et  $\delta$ . Enfin, puisque l'hypothèse  $a$ ) garantit  $\text{vol}_{g(0)} B_0(x_{i,j}, 32n(\frac{1}{\delta} + \sqrt{K})\sqrt{t_i}) \leq Ct_i^{\frac{n}{2}}$  (si  $\bar{t} \leq \min(\frac{\delta^2}{512n^2}, \frac{1}{512n^2K})$ ),

$$\begin{aligned} \text{vol}_{g(0)} \mathcal{S}_\delta &\leq C \sum_{i=-\infty}^0 |J_i| t_i^{\frac{n}{2}} \\ &\leq C\epsilon, \\ &\leq \delta, \end{aligned}$$

pour le choix de  $\epsilon = \frac{1}{C}$ .

Soit alors  $x \in B_0(x_0, 1)$  un point qui n'est pas  $\delta$ -statique sur l'intervalle  $[0, \bar{t}]$ . Il existe alors  $0 < t \leq \bar{t}$  et  $z \in B_t(x, \frac{8n\sqrt{t}}{\delta})$  tel que  $|\text{Rc } g(z, t)| > \frac{\delta^2}{64n^2t}$ . Si  $i \leq 0$  est tel que  $t_{i-1} < t \leq t_i$ , on a d'une part  $|\text{Rc } g(z, t)| > \frac{\delta^2}{64n^2t_i}$ , et d'autre part comme  $z \in B_0(x_0, \frac{3}{2})$ , il existe  $j \in I_i$  tel que  $d_{t_i}(x_{i,j}, z) < \frac{16n\sqrt{t_i}}{\delta}$ . On a donc  $k_{i,j} > \frac{\delta^2}{64n^2}$  soit  $j \in J_i$ . Comme enfin  $d_0(x, x_{i,j}) \leq d_{t_i}(x, x_{i,j}) + \frac{20}{3}(n-1)\sqrt{Kt_i} \leq 2d_t(x, z) + d_{t_i}(z, x_{i,j}) + \frac{20}{3}(n-1)\sqrt{Kt_i} \leq 32n(\frac{1}{\delta} + \sqrt{K})\sqrt{t_i}$ , on trouve que  $x \in \mathcal{S}_\delta$ , autrement dit, les points de  $B_0(x_0, 1) \setminus \mathcal{S}_\delta$  sont  $\delta$ -statiques sur  $[0, \bar{t}]$ .  $\square$

*Preuve du corollaire I.3.17.* Étant donné  $\epsilon_1$  qui sera fixé plus bas, la proposition I.1.7 permet de choisir  $\epsilon_0 = \epsilon(n, v_0, K, \epsilon_1)$  tel que les hypothèses de l'énoncé impliquent

$$\text{vol}_{g(t)} B_t(x_0, r) \geq (1 - \epsilon_1)\text{vol}_{g(0)} B_0(x_0, r)$$

pour  $0 < t \leq \epsilon_0^2$  et  $\frac{\delta\sqrt{t}}{\epsilon_0} \leq r \leq 1$ . En vertu du principe de comparaison des distances du corollaire I.1.3 on a aussi  $B_t(x_0, 1 - \frac{20}{3}(n-1)\sqrt{Kt}) \subset B_0(x_0, 1)$  et donc,

$$\begin{aligned} \text{vol}_{g(t)} B_0(x_0, 1) &\geq \text{vol}_{g(t)} B_t(x_0, 1 - \frac{20}{3}(n-1)\sqrt{Kt}), \\ &\geq (1 - \epsilon_1)\text{vol}_{g(0)} B_0(x_0, 1 - \frac{20}{3}(n-1)\sqrt{Kt}) \\ &\geq (1 - 2\epsilon_1)\text{vol}_{g(0)} B_0(x_0, 1), \end{aligned}$$

si  $t \leq \min(\epsilon_0^2, \frac{\epsilon_1^2}{CK})$  pour une constante  $C$  ne dépendant que de  $n$ , la dernière inégalité faisant appel à la minoration du tenseur de Ricci au temps 0 et au principe de comparaison des volumes de Bishop-Gromov. On a ensuite

$$\begin{aligned} \iint_{B_0(x_0, 1) \times [0, t]} \text{R}_{g(s)} \, d\mu_s \, ds &= \text{vol}_{g(0)} B_0(x_0, 1) - \text{vol}_{g(t)} B_0(x_0, 1), \\ &\leq 2\epsilon_1 \text{vol}_{g(0)} B_0(x_0, 1), \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} \iint_{B_0(x_0, 1) \times [0, t]} |\text{R}_{g(s)}| \, d\mu_s \, ds &\leq 2 \iint_{B_0(x_0, 1) \times [0, t]} (\text{R}_{g(s)})_- \, d\mu_s \, ds + \iint_{B_0(x_0, 1) \times [0, t]} \text{R}_{g(s)} \, d\mu_s \, ds, \\ &\leq (te^t + 2\epsilon_1)\text{vol}_{g(0)} B_0(x_0, 1), \\ &\leq C\epsilon_1, \end{aligned}$$

où  $C$  ne dépend que de  $n$ . Pour  $\delta_1 > 0$  qui sera choisi plus bas, on fixe maintenant  $\epsilon_1 = \min(\frac{1}{C}\epsilon(n, v_0, K, \delta_1), \frac{\delta_1}{256n^2}, \frac{1}{256K})$ , où la fonction  $\epsilon(n, v_0, K, \delta)$  provient de l'énoncé du lemme I.3.16. On trouve ainsi qu'il existe un ensemble  $\mathcal{S}_{\delta_1}$  avec  $\text{vol}_{g(0)} \mathcal{S}_{\delta_1} \leq \delta_1$  tel que tous les points de  $B_0(x_0, 1) \setminus \mathcal{S}_{\delta_1}$  sont  $\delta_1$ -statiques sur l'intervalle  $[0, \min(\epsilon_0^2, \frac{\epsilon_1^2}{CK})]$ . Pour tout  $x \in B_0(x_0, 1)$ ,  $\text{vol}_{g(0)} B_0(x, r) \geq v_0 r^n$ , si bien que  $B_0(x, r)$  ne peut être entièrement incluse dans  $\mathcal{S}_{\delta_1}$  si  $r > (\frac{\delta_1}{v_0})^{\frac{1}{n}}$ . En fixant finalement  $\delta_1 = \frac{v_0}{2} \delta^n$ , on conclut qu'il existe un point de  $B_0(x, \delta)$  qui est  $\delta$ -statique sur l'intervalle  $[0, \min(\epsilon_0^2, \frac{\epsilon_1^2}{CK})]$ .  $\square$

On démontre finalement le résultat clef de ce paragraphe.

*Preuve du lemme I.3.13.* Par mise à l'échelle du flot, on peut supposer  $T = 1$ . Quitte à remplacer  $g(t)$  par  $\psi^* g(t)$ , on peut supposer  $M = X \times \mathbb{R}^m$ ,  $\phi = \text{Id}$  et  $d_0((x, u), (x', u'))^2 = d_X(x, y)^2 + |u' - u|^2$  pour tous  $(x, u), (x', u') \in X \times \mathbb{R}^m$ . On raisonne par induction sur  $m$ . On choisit donc  $1 \leq m \leq n$ , et si  $m \geq 2$  on suppose le lemme I.3.13 démontré pour  $1 \leq m' \leq m - 1$ . Soit  $\delta, R > 0$  et  $\epsilon = \epsilon(n, v_0, K, \delta)$  fourni par le corollaire I.3.17. On fixe  $x'_0 \in X$  et on considère les points  $x_0 = (x'_0, \mathbf{0}_m)$  ainsi que  $p_0 = (x'_0, \mathbf{0}_{m-1}, R)$  et  $q_0 = (x'_0, \mathbf{0}_{m-1}, -R)$ . Le corollaire I.3.17, appliqué au flot mis à l'échelle  $\tilde{g}(s) = \epsilon^2 g(\frac{s}{\epsilon^2})$  sur chacune des boules  $\tilde{B}_0(p_0, 1)$  et  $\tilde{B}_0(q_0, 1)$ , permet de sélectionner  $p \in B_0(p_0, \delta\epsilon^{-1})$  et  $q \in B_0(q_0, \delta\epsilon^{-1})$ , des points  $\delta$ -statiques sur l'intervalle  $[0, 1]$ . On définit

$$\begin{aligned} b_{p/q}(x, t) &= d_t(p/q, x) - d_t(p/q, x_0), \\ \mathcal{E}_{p,q}(x, t) &= d_t(p, x) + d_t(q, x) - d_t(p, q) \geq b_p(x, t) + b_q(x, t). \end{aligned}$$

Notons que l'on a  $d_t(p, q) \geq d_0(p, q) - \delta\sqrt{t}$  (voir (I.58)) tandis que la continuité de la fonction distance au temps initial et l'hypothèse  $\text{Rc } g(t) \geq 0$  font que pour tout  $x, x' \in M$ ,  $d_t(x, x') \leq d_0(x, x')$ . On en déduit d'une part

$$\mathcal{E}_{p,q}(x, t) \leq \mathcal{E}_{p,q}(x, 0) + \delta\sqrt{t}. \quad (\text{I.64})$$

D'autre part pour  $(x, t) \in M \times ]0, 1]$ , on a

$$\begin{aligned} d_t(p, x) &\geq d_t(p, q) - d_t(q, x) \\ &\geq d_0(p, q) - d_0(q, x) - \delta\sqrt{t} \\ &\geq d_0(p, x) - \mathcal{E}_{p,q}(x, 0) - \delta\sqrt{t}, \end{aligned}$$

puis comme  $d_t(p, x_0) \leq d_0(p, x_0)$ ,

$$d_t(p, x) - d_t(p, x_0) \geq d_0(p, x) - d_0(p, x_0) - \mathcal{E}_{p,q}(x, 0) - \delta\sqrt{t},$$

ainsi que, en intervertissant les rôles de  $x$  et  $x_0$

$$d_t(p, x) - d_t(p, x_0) \leq d_0(p, x) - d_0(p, x_0) + \mathcal{E}_{p,q}(x_0, 0) + \delta\sqrt{t},$$

d'où finalement l'encadrement

$$-\mathcal{E}_{p,q}(x, 0) - \delta\sqrt{t} \leq b_p(x, t) - b_p(x, 0) \leq \mathcal{E}_{p,q}(x_0, 0) + \delta\sqrt{t}. \quad (\text{I.65})$$

On peut vérifier par un calcul direct à partir de l'expression de  $d_0$  que l'on a

$$\mathcal{E}_{p,q}(x, 0) \leq \frac{10}{R} \left( \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{\epsilon} \right)^2$$

pour  $x \in B_0(x_0, \delta^{-1})$ .

On fixe maintenant  $0 < t \leq 1$ , on choisit une suite  $\delta_i \rightarrow 0$  à laquelle correspond une suite  $\epsilon_i$ , et on pose  $R_i = \frac{10}{\delta_i} \left( \frac{1}{\delta_i} + \frac{\delta_i}{\epsilon_i} \right)^2$ . Aux points  $p_{0,i} = (x'_0, \mathbf{0}_{m-1}, R_i)$  et  $q_{0,i} = (x'_0, \mathbf{0}_{m-1}, -R_i)$  correspondent comme plus haut des points  $p_i \in B_0(p_{0,i}, \delta_i \epsilon_i^{-1})$  et  $q_i \in B_0(q_{0,i}, \delta_i \epsilon_i^{-1})$ ,  $\delta_i$ -statiques sur  $[0, 1]$ . Si  $\gamma_{p_i}$  (resp.  $\gamma_{q_i}$ ) désigne pour chaque  $i \geq 0$  une géodésique minimisante entre  $x_0$  et  $p_i$  (resp.  $q_i$ ) on peut supposer qu'après extraction la suite  $\{\gamma_{p_i}\}_{i \geq 0}$  (resp.  $\{\gamma_{q_i}\}_{i \geq 0}$ ) converge vers un rayon  $\gamma_+$  (resp.  $\gamma_-$ ) d'origine  $x_0$ . Le fait que d'après (I.64) on a  $\mathcal{E}_{p_i, q_i}(x_0, t) \rightarrow 0$  implique, comme on le vérifie facilement, que le chemin composé de l'union de  $\gamma_+$  et de  $\gamma_-$  est une droite. Enfin, les fonctions  $b_{p_i}$  convergent vers la fonction de Buseman  $b_{+,t}$  associée à  $\gamma_+$ . L'encadrement (I.65), après passage à la limite, montre que  $b_{+,t} = b_{+,0}$  où  $[b_{+,0} : X \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, (x', u_1, \dots, u_m) \mapsto u_m]$  est la limite des  $b_{p_i}(., 0)$ . En particulier, le flot du gradient de  $b_{+,t}$  est l'application

$$\phi_r : M \rightarrow M, (x', u_1, \dots, u_m) \mapsto (x', u_1, \dots, u_m + r),$$

quel que soit  $0 < t \leq 1$ .

Pour tout  $0 < t \leq 1$ , on peut donc appliquer le théorème I.3.14 à la métrique  $g(t)$ , d'où l'existence d'une métrique riemannienne  $h_t$  sur  $N = \{x \in M \mid b_{+,0}(x) = 0\} = X \times \mathbb{R}^{m-1}$  telle que  $g(t) = h_t \oplus dt^2$ . Si  $m = 1$ , l'énoncé est démontré. Sinon, si  $n = 2$ , la forme de la métrique implique que  $\mathcal{K}_{g(t)} \equiv 0$ , donc le flot  $g(t)$  est statique, la métrique  $d_t$  coïncide avec  $d_0$  et l'énoncé est trivial. Si  $n \geq 3$ , il est facile de vérifier que  $h_t$  est un flot de Ricci  $h(t)$  sur  $N \times ]0, T]$  qui vérifie toutes les hypothèses de l'énoncé pour  $m' = m - 1$ . On a donc par induction  $h(t) = \tilde{h}(t) \oplus g_{\mathbb{R}^{m-1}}$  et  $g(t) = \tilde{h}(t) \oplus g_{\mathbb{R}^m}$ .  $\square$

*Preuve de la proposition I.3.12.* Après mise à l'échelle du flot, on peut supposer  $r = 1$ . On fixe  $\delta > 0$  et on suppose qu'il existe une suite  $\epsilon_i \rightarrow 0$ , une suite de flots  $g_i(t)$  sur  $M_i^n$  satisfaisant aux hypothèses de l'énoncé ainsi que des suites  $(x_i, t_i) \in M \times [0, \epsilon_i^2]$ ,  $0 < r_i \leq \epsilon_i$  et  $p_{1,i}, \dots, p_{m,i}$  telles que

- a)  $(p_{1,i}, \dots, p_{m,i})$  est un  $(m, \epsilon_i)$ -éclatement en  $x_i$  à toutes les échelles inférieures à 1 pour la métrique  $g_i(0)$ ,
- b)  $d_{\text{GH}}(B_{t_i}(x_i, r_i), B_{Z \times \mathbb{R}^m}((z_0, \mathbf{0}_m), r_i)) \geq \delta r_i$  pour tout  $(X, d_Z, z_0)$  espace métrique localement compact.

On définit les flots mis à l'échelle  $\tilde{g}_i(s) = \frac{1}{r_i^2} g_i(r_i^2 s)$  défini sur  $]0, \bar{s}_i]$  ( $\bar{s}_i = \frac{t_i}{r_i^2}$ ). Alors  $(p_{1,i}, \dots, p_{m,i})$  est un  $(m, \epsilon_i)$ -éclatement en  $x_i$  à toutes les échelles inférieures à  $\frac{1}{r_i}$  ( $\geq \frac{1}{\epsilon_i}$ ) pour la métrique  $\tilde{g}_i(0)$  ce qui implique en particulier  $d_{\text{GH}}(\tilde{B}_0(x_i, 1), B_{Z_i \times \mathbb{R}^m}((z_{0,i}, \mathbf{0}), 1)) \leq \epsilon_i$  pour un espace métrique  $(Z_i, d_i, z_{0,i})$ , tandis que  $d_{\text{GH}}(\tilde{B}_{\bar{s}_i}(x_i, 1), B_{Z \times \mathbb{R}^m}((z_0, \mathbf{0}_m), 1)) \geq \delta$  pour tout espace métrique  $(Z, d_Z, z_0)$  d'après b). Trois cas se présentent alors

- i)  $\bar{s}_i \rightarrow 0$ . Alors, si  $\epsilon = \epsilon(n, v_0, K, \frac{\delta}{4})$  est fourni par le lemme I.1.7, et que l'on a  $\epsilon_i < \epsilon$ ,  $\bar{s}_i < \min(\epsilon^2, \frac{\delta^2}{16(\frac{40}{3})^2(n-1)^2 K})$ , on trouve, en appliquant le lemme I.1.7,

$$d_0(y, y') - \frac{\delta}{2} \leq d_t(y, y') \leq (1 + \frac{\delta}{4})d_0(y, y') + \frac{\delta}{4}$$

pour tous  $y, y' \in \tilde{B}_{\bar{s}_i}(x_i, 1)$ . En particulier,  $d_{\text{GH}}(\tilde{B}_{\bar{s}_i}(x_i, 1), \tilde{B}_0(x_i, 1)) \leq \frac{\delta}{2}$  et donc

$$d_{\text{GH}}(B_{\bar{s}_i}(x_i, 1), B_{Z_i \times \mathbb{R}^m}((z_{0,i}, \mathbf{0}_m), 1)) \leq \frac{\delta}{2} + \epsilon < \delta$$

en contradiction avec  $b$ ).

- ii)  $\bar{s}_i \rightarrow +\infty$ . Les bornes (I.1) sur le flot  $g(t)$  se traduisent en particulier par les bornes  $|\text{Rm } \tilde{g}(\bar{s}_i)| \leq \frac{K}{\bar{s}_i}$  et  $\text{inj}_{\tilde{g}(\bar{s}_i)} x \geq \sqrt{\frac{\bar{s}_i}{K}}$  sur  $B_{\tilde{g}(\bar{s}_i)}(x, 1)$ . Dans ces conditions, pour  $i$  suffisamment grand, l'application  $\exp_{x_i} : B_{T_{x_i} M_i}(\mathbf{0}_{T_{x_i}}, 2) \rightarrow \tilde{B}_{\bar{s}_i}(x_i, 2)$  réalise une approximation  $(1 + \frac{\delta}{2})$ -bi-Lipschitz entre la métrique euclidienne  $g_{\mathbb{R}^n}$  et  $\tilde{g}_i$ , en particulier

$$d_{\text{GH}}(\tilde{B}_{\bar{s}_i}(x_i, 1), B_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}, 1)) < \delta,$$

en contradiction avec  $b$ ).

- iii)  $\bar{s}_i \rightarrow \bar{s}_\infty$  avec  $0 < \bar{s}_\infty < +\infty$ . Alors le lemme A.0.1 permet d'extraire un flot limite  $g_\infty(s)$  des  $\tilde{g}_i(s)$  pointés en  $x_i$ , défini sur une variété différentielle pointée  $(M_\infty, x_\infty)$  pour  $0 < t \leq \bar{s}_\infty$ . De plus, la fonction distance  $d_{\tilde{g}_i(s)}$  tend uniformément sur tout compact vers une limite  $d_{0,\infty}$  sur  $M_\infty$  lorsque  $s$  tend vers 0. L'espace métrique  $(M_\infty, d_{0,\infty})$  étant aussi limite des  $(M_i, \tilde{g}_i(0), x_i)$  pour la convergence de Gromov-Hausdorff pointée, on vérifie aisément que  $a$  implique que  $(M_\infty, d_{0,\infty})$  est isomorphe à un produit  $X \times \mathbb{R}^m$ . Puisque le flot  $\tilde{g}(s)$  vérifie en particulier  $\text{Rc } \tilde{g}(s) \geq 0$ , le lemme I.3.13 s'applique donc et permet de conclure que le flot  $g_\infty(s)$  est de la forme  $g_\infty(s) = h_\infty(s) \oplus g_{\mathbb{R}^m}$ , en contradiction avec  $b$  encore une fois.

□

## Chapitre II

# Minorations de courbure préservées par le flot

### II.1 Principes du minimum

Dans cette section, on passe en revue certaines minorations de courbure classiques préservées par le flot de Ricci, en discutant en particulier la possibilité d'établir une version purement locale des énoncés, c'est à dire s'appliquant à un flot éventuellement non complet, et qui, à partir d'une hypothèse sur une région  $U \subset M$  au temps initial, fournissent une conclusion sur une région plus petite pour un certain intervalle de temps.

**Minoration de la courbure scalaire.** C'est le cas le plus simple. La courbure scalaire d'une métrique évoluant selon le flot de Ricci obéit à l'équation

$$\begin{aligned}\partial_t R_g &= \Delta R_g + 2 |\text{Rc } g|^2 \\ &\geq \Delta R_g + \frac{2}{n} (R_g)^2.\end{aligned}$$

Si  $g(t)$  est un flot sur une variété compacte, un principe du minimum s'applique et on déduit de l'équation ci-dessus la minoration

$$R_g(x, t) \geq \frac{1}{\inf_x R_g(x, 0) - \frac{2}{n}t}.$$

Il existe une version purement locale de ce résultat, due à B. L. Chen [11]. On donne ici une version légèrement simplifiée de l'énoncé de [11] adaptée à l'usage que l'on veut en faire

**Proposition II.1.1** (B.L. Chen). *Soit  $g(t)$  un flot de Ricci sur  $(M, x_0) \times [0, T]$  avec les propriétés suivantes :*

$B_t(x_0, a_0 + A_0)$  est relativement compacte dans  $M$ ,

$$|\text{Rm } g(t)| \leq \frac{K}{t} \text{ pour } x \in B_t(x_0, \sqrt{\frac{t}{K}}),$$

$$R_{g(0)} \geq -\epsilon^2 \text{ sur } B_0(x_0, a_0 + A_0).$$

Alors

$$R_g(x, t) \geq -\max(\epsilon^2, \frac{100}{A_0^2})$$

pour tout  $(x, t)$  avec  $0 < t \leq T$ ,  $d_t(x_0, x) \leq a_0 - \frac{20}{3}(n-1)\sqrt{Kt}$ .

**Corollaire II.1.2.** Soit  $g(t)$  un flot de Ricci défini pour  $0 \leq t \leq T$  sur une variété lisse  $M^n$  satisfaisant à l'estimation

$$|\text{Rm } g(x, t)| \leq \frac{K}{t},$$

où  $K \geq 1$ , et tel qu'au temps initial on a

$$R_{g(0)} \geq -n \text{ sur } M.$$

Alors on a

$$R_{g(t)} \geq -\frac{2n}{\rho_0(x)^2}$$

**Minoration du tenseur de Ricci en dimension 3.** En dimension 3, le caractère positif ou nul du tenseur de Ricci est préservé par un flot complet. Cependant

- a) une minoration (même globale pour un flot complet) de la courbure de Ricci par une constante strictement négative n'est pas préservée pour un temps contrôlé uniquement en fonction de la l'hypothèse faite au temps initial.
- b) le caractère positif où nul du tenseur de Ricci dans une région de la donnée initiale n'implique pas une minoration contrôlée dans une région et pour un intervalle de temps contrôlé (autrement dit, il n'y a pas d'analogue direct de la proposition II.1.1 pour le tenseur de Ricci).

Le contre-exemple suivant permet d'illustrer à la fois a) et b) ci-dessus. On considère une métrique de la forme

$$g_0 = dr^2 + f(r)^2 g_{\mathbb{S}^2}$$

définie sur  $M = \mathbb{R} \times \mathbb{S}^2$ , avec  $-\epsilon^2 < \frac{f''}{f} < 0$  sur  $] -\infty, \frac{1}{\epsilon}[\cup] \frac{1}{\epsilon}, +\infty[$  et  $f = \epsilon$  sur  $[-\frac{1}{\epsilon}, \frac{1}{\epsilon}]$ . Le flot  $g(t)$  issu de  $g_0$  développe une singularité en un temps  $t_{sing} > 0$ , et pour  $x_0 = (0, y_0)$  ( $y_0$  est un point quelconque de  $\mathbb{S}^2$ ) on a  $\lim_{t \rightarrow t_{sing}} \text{Rc } g(t)(\frac{d}{dr}, \frac{d}{dr}) = -\infty$ , bien que  $\text{Rc } g_0 \geq -\epsilon^2$  sur  $M$  et  $\text{Rc } g_0 \geq 0$  sur  $B_0(x_0, \frac{1}{\epsilon})$ .

Une manière de contourner cette difficulté est d'introduire la quantité de Hamilton-Ivey suivante

$$I(x, t) = \frac{R_{g(t)}}{-\lambda_{\text{Rc}}^-} - \ln(-\lambda_{\text{Rc}}^-)(1+t) + 3,$$

où la plus petite valeur propre du tenseur de Ricci  $\lambda_{\text{Rc}}^- (x, t)$  en un point remplace simplement le minimum ponctuel des courbures sectionnelles dans la l'expression usuelle introduite par Hamilton et Ivey. Z.H. Zhang démontre dans [36] que pour un flot compact dont la donnée initiale satisfait  $\lambda_{\text{Rc}}^- (., 0) \geq -1$ , la quantité  $I$  reste positive ou nulle sur  $M$  pour tout temps. Cependant il est facile de vérifier que la méthode introduite dans [11] et appliquée à l'équation d'évolution de la courbure scalaire s'applique aussi bien à la quantité  $I$ , d'où le résultat purement local qui suit.

**Proposition II.1.3.** Soit  $g(t)$  un flot de Ricci défini pour  $0 \leq t \leq T$  sur une variété lisse  $M^3$  de dimension 3 et  $x_0 \in M$  un point avec les propriétés suivantes

$B_t(x_0, a + A)$  est relativement compacte dans  $M$ ,

$$|\text{Rm } g(t)| \leq \frac{K}{t} \text{ pour } x \in B_t(x_0, \sqrt{\frac{t}{K}}),$$

$\text{Rc } g(0) \geq -1$  sur  $B_0(x, a + A)$ .

Alors

$$\frac{\text{R}_{g(t)}}{-\lambda_{\text{Rc}}^-} - \ln(-\lambda_{\text{Rc}}^-)(1+t) + 3 \geq -\frac{200(1+t)}{A^2}$$

pour tout  $(x, t)$  avec  $0 < t \leq T$ ,  $d_t(x_0, x) \leq a - 20n\sqrt{Kt}$  et  $\lambda_{\text{Rc}}^-(x, t) < 0$ , où  $\lambda_{\text{Rc}}^-(x, t)$  désigne la plus petite valeur propre du tenseur de Ricci au point  $(x, t)$ .

Dans le cas où le flot satisfait localement à des hypothèses de décroissance de la norme du tenseur de courbure de la forme

$$|\text{Rm } g(x, t)| \leq \frac{K}{t}$$

la proposition II.1.3 a la conséquence suivante.

**Corollaire II.1.4.** Il existe  $A(n)$  avec la propriété suivante. Si  $g(t)$  est un flot de Ricci défini pour  $0 \leq t \leq T$  sur une variété lisse  $M^3$  de dimension 3 et  $x_0 \in M$  un point tel que

$$|\text{Rm } g(x, t)| \leq \frac{K}{t} \text{ pour } (x, t) \in M \times [0, T],$$

$\text{Rc } g(x, 0) \geq -k$  pour  $x \in M$ ,

alors

$$\text{Rc } g(x, t) \geq -\frac{2K}{\ln(\frac{K}{e^4kt})} \frac{1}{t}$$

pour  $x \in (U)_{\frac{A}{\sqrt{k}} + 20n\sqrt{Kt}}$  et  $0 < t \leq \min(T, \frac{1}{k})$ . En particulier, pour tout  $\delta > 0$ , on a que

$$\text{Rc } g(x, t) \geq -\frac{\delta^2}{t}$$

pour  $x \in (U)_{\frac{A}{\sqrt{k}} + 20n\sqrt{Kt}}$  et  $0 < t \leq \frac{K}{k} e^{-\frac{2K}{\delta^2} - 4}$ .

*Démonstration.* Après mise à l'échelle parabolique du flot, on peut supposer  $k = 1$ . On choisit  $A$  tel que  $\frac{400}{A^2} \leq 1$ , si bien que pour  $(x, t) \in M \times ]0, 1]$  tel que  $B_0(x, A + 20\sqrt{Kt})$  est relativement compacte dans  $M$ , on a

$$\frac{\text{R}_g}{-\lambda_{\text{Rc}}^-} - \ln(-\lambda_{\text{Rc}}^-)(1+t) \geq -4$$

en  $(x, t)$ , et donc

$$\frac{K}{-t\lambda_{\text{Rc}}^-} - \ln\left(\frac{-t\lambda_{\text{Rc}}^-}{K}\right) \geq \ln\left(e^{-4}K\left(1 + \frac{1}{t}\right)\right),$$

d'où on déduit l'énoncé, en notant que  $\ln\left(\frac{-t\lambda_{\text{Rc}}^-}{K}\right) \geq -\frac{K}{-t\lambda_{\text{Rc}}^-}$ . □



## II.2 Minorations obtenues par l'analyse du noyau de la chaleur modifié (d'après R. Bamler, E. Cabezas-Rivas, B. Wilking)

Le résultat principal de cette section est la proposition II.2.6, version purement locale d'un résultat dû à R. Bamler, E. Cabezas-Rivas et B. Wilking dans [18], qui fournit une véritable minoration uniforme (par contraste avec le corollaire II.1.4) du tenseur de Ricci en dimension 3, et qui s'étend à d'autres notions de courbure en dimension supérieure. Afin de décrire brièvement la méthode dans le cas particulier du tenseur de Ricci en dimension 3, on considère un flot  $g(t)$  sur  $M^3$  variété tri-dimensionnelle compacte. De l'équation d'évolution du tenseur de Ricci en coordonnées locales  $(\partial_t - \Delta)R_{ij} = 2R_{kijl}R_{kl} - 2R_{ik}R_{j,k}$ , on déduit que  $\lambda_{\text{Rc}}^-(x, t)$  définie comme la plus petite valeur propre du tenseur de Ricci au point  $(x, t)$ , satisfait (au sens des barrières) à l'équation d'évolution

$$(\partial_t - \Delta)\lambda_{\text{Rc}}^- \geq -3(\lambda_{\text{Rc}}^-)^2 + (\lambda_3 - \lambda_2)^2 + R_{g(t)}\lambda_{\text{Rc}}^-, \quad (\text{II.1})$$

(où  $\lambda_{\text{Rc}}^- \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$  sont les valeurs propres de  $\text{Rc } g(x, t)$ ). Lorsqu'on cherche à établir la préservation d'une minoration de  $\lambda_{\text{Rc}}^-$  par une constante strictement négative, en l'absence d'une borne uniforme sur la norme du tenseur de courbure, le dernier terme peut prendre des valeurs arbitrairement négatives, si bien qu'aucun principe du minimum ne s'applique. Si on considère plutôt l'équation d'évolution de la quantité  $\lambda_{\text{Rc}}^- d\mu_t$ , on trouve

$$(\partial_t - \Delta)(\lambda_{\text{Rc}}^- d\mu_t) = (\partial_t - \Delta - R_{g(t)})\lambda_{\text{Rc}}^- d\mu_t \geq -3(\lambda_{\text{Rc}}^-)^2 d\mu_t,$$

puisque  $\partial_t d\mu_t = -R_{g(t)} d\mu_t$ . L'intérêt est que l'on a maintenant une équation autonome sur  $\lambda_{\text{Rc}}^-$ , dans le sens où les autres valeurs propres du tenseur de Ricci, dont on ne contrôle pas la valeur absolue, n'apparaissent pas dans le membre de droite. On écrira donc l'équation (II.1) sous la forme

$$(\partial_t - \Delta - R_{g(t)})\lambda_{\text{Rc}}^- = -f(x, t) \quad \text{où} \quad f(x, t) \leq 3(\lambda_{\text{Rc}}^-)^2. \quad (\text{II.2})$$

Notons alors  $\mathcal{K}_{(y,s)}(x, t)$  le noyau associé à l'"opérateur de la chaleur modifié"  $\partial_t - \Delta - R_{g(t)}$ , et supposons que, sous des hypothèses appropriées, on puisse établir une majoration de la forme

$$\mathcal{K}_{(x,0)}(y, t) \leq C_0 t^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{d_0(x,y)^2}{C_0 t}}.$$

Alors, si on suppose  $\text{Rc } g(0) \geq -\epsilon^2$  sur  $M$  au temps initial, et que l'on considère  $t_0 > 0$  minimal tel que  $\inf_{x \in M} \lambda_{\text{Rc}}^-(x, t_0) \leq -1$ , la formule de représentation des solutions de (II.2) permet d'écrire

$$\begin{aligned} \lambda_{\text{Rc}}^-(x, t) &= - \int_M K_{(y,0)}(x, t) \lambda_{\text{Rc}}^-(y, 0) d\mu_0(y) - \int_0^t \int_M K_{(y,s)}(x, t) f(y, s) d\mu_s(y) \\ &\geq -\epsilon^2 C_1 - 3C_1 t_0. \end{aligned}$$

où (grâce au contrôle du volume des sphères que garantit la minoration du tenseur de Ricci, combinée à la borne gaussienne sur  $K$ )  $C_1$  ne dépend que de  $n$  et  $C_0$ . Si  $\epsilon \leq \sqrt{\frac{1}{4C_1}}$  et  $t_0 \leq \frac{1}{12C_1}$ , on trouve donc  $\lambda_{\text{Rc}}^-(x, t) \geq -\frac{1}{2}$  sur  $M \times [0, t_0]$  en contradiction avec la définition de  $t_0$ . On a finalement établi l'existence d'un intervalle de temps, contrôlé en fonction de  $C_0$  (et de  $n$ ), pendant lequel la borne  $\lambda_{\text{Rc}}^- \geq -1$  ne peut pas être violée.

Avant d'énoncer la proposition II.2.6, on rappelle la définition de quelques cônes de courbure classiques, en suivant [29] qui en fournit une exposition détaillée. On rappelle qu'on appelle *cône de courbure invariant* de dimension  $n$  un ouvert  $\mathcal{C}$  de  $\mathcal{S}^2(\Lambda^2\mathbb{R}^n)$  tel que

(i) si  $C \in \mathcal{C}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ , alors  $\lambda C \in \mathcal{C}$ ,

(ii) si  $\phi \in \mathcal{O}(n)$  est une isométrie de  $\mathbb{R}^n$  et  $C \in \mathcal{C}$ , alors l'élément de  $\mathcal{S}^2(\Lambda^2\mathbb{R}^n)$  défini par  $C_\phi(t \wedge u, v \wedge w) = C(\phi(t) \wedge \phi(u), \phi(v) \wedge \phi(w))$  est encore dans  $\mathcal{C}$ .

Pour  $(M^n, g)$  une variété riemannienne de dimension  $n$ ,  $x \in M$  et  $C_x \in \mathcal{S}^2(\Lambda_x^2 M)$ , la propriété (ii) permet de parler sans équivoque de l'appartenance ou non de  $C_x$  à un cône de courbure invariant  $\mathcal{C}$  (on notera donc  $C_x \in \mathcal{C}$  au prix d'un léger abus de langage). Le produit scalaire canonique  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  de  $\mathbb{R}^n$  s'étend de manière unique en une forme  $\mathbb{C}$ -bilinéaire sur  $\mathbb{C}^n$  que l'on notera  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}}$ , qui elle-même s'étend naturellement en une forme  $\mathbb{C}$ -bilinéaire sur le complexifié  $\Lambda^2\mathbb{C}^n$  de  $\Lambda^2\mathbb{R}^n$ . On rappelle qu'un vecteur  $u \in \mathbb{C}^n$  est dit *isotrope* si  $\langle u, u \rangle_{\mathbb{C}} = 0$  (en particulier  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}}$  possède des vecteurs isotropes non-nuls). Un élément de la forme  $u \wedge v \in \Lambda^2(\mathbb{C}^n)$ , où  $u, v \in \mathbb{C}^n$  est dit *totalelement isotrope* si  $\langle u, u \rangle_{\mathbb{C}} = \langle v, v \rangle_{\mathbb{C}} = \langle u, v \rangle_{\mathbb{C}} = 0$ . Enfin, pour tout  $C \in \mathcal{S}^2(\Lambda^2\mathbb{C}^n)$ , on note  $C^{\mathbb{C}}$  l'extension  $\mathbb{C}$ -linéaire de  $C$  à  $\mathcal{S}^2(\Lambda^2\mathbb{C}^n)$ . De même, tout  $C \in \mathcal{S}^2(\Lambda^2\mathbb{C}^n)$  se prolonge de manière unique en un élément  $C' \in \mathcal{S}^2(\Lambda^2\mathbb{C}^{n+1})$  (resp.  $C'' \in \mathcal{S}^2(\Lambda^2\mathbb{C}^{n+1})$ ) qui satisfait  $C'(\sigma, \tau) = C(\sigma, \tau)$  si  $\sigma, \tau \in \Lambda^2\mathbb{C}^n \subset \Lambda^2\mathbb{C}^{n+1}$  et  $C'(\sigma, \tau) = 0$  si  $\tau \in (\Lambda^2\mathbb{C}^n)^\perp \subset \Lambda^2\mathbb{C}^{n+1}$  (resp.  $C''(\sigma, \tau) = C(\sigma, \tau)$  si  $\sigma, \tau \in \Lambda^2\mathbb{C}^n \subset \Lambda^2\mathbb{C}^{n+2}$  et  $C''(\sigma, \tau) = 0$  si  $\tau \in (\Lambda^2\mathbb{C}^n)^\perp \subset \Lambda^2\mathbb{C}^{n+2}$ ).

**Définition II.2.1.** On définit pour tout  $n \geq 2$

$$\mathcal{C}_{\mathbb{C}}^n = \left\{ C \in \mathcal{S}^2(\Lambda^2\mathbb{C}^n) \mid C(u \wedge v, u \wedge v) > 0 \text{ pour tous } u, v \in \mathbb{C}^n \right. \\ \left. \text{t.q. } u \wedge v \text{ est totalelement isotrope} \right\}$$

puis pour  $n \geq 2$  fixé, on définit les cônes de courbure invariants

$$\begin{aligned} - \mathcal{C}_{\text{IC}} &= \left\{ C \in \mathcal{S}^2(\Lambda^2\mathbb{R}^n) \mid C^{\mathbb{C}} \in \mathcal{C}_{\mathbb{C}}^n \right\}, \\ - \mathcal{C}_{\text{IC}_1} &= \left\{ C \in \mathcal{S}^2(\Lambda^2\mathbb{R}^n) \mid (C^{\mathbb{C}})' \in \mathcal{C}_{\mathbb{C}}^{n+1} \right\}, \\ - \mathcal{C}_{\text{IC}_2} &= \left\{ C \in \mathcal{S}^2(\Lambda^2\mathbb{R}^n) \mid (C^{\mathbb{C}})'' \in \mathcal{C}_{\mathbb{C}}^{n+2} \right\}, \\ - \mathcal{C}_{\text{CO}} &= \left\{ C \in \mathcal{S}^2(\Lambda^2\mathbb{R}^n) \mid C(\sigma, \sigma) > 0 \quad \forall \sigma \in \Lambda_x^2\mathbb{R}^n \right\}. \end{aligned}$$

*Remarque II.2.2* (Préservation des cônes de courbures IC, IC<sub>1</sub>, IC<sub>2</sub> et CO). Si  $\mathcal{C}$  désigne l'un des cônes de courbure de la définition II.2.1, et si  $(M, g)$  est une variété riemannienne compacte avec

$$\text{Rm } g \in \overline{\mathcal{C}}$$

alors si  $g(t)$  est le flot de Ricci défini pour  $0 \leq t \leq T$  de donnée initiale  $g$  on a

$$\text{Rm } g(t) \in \overline{\mathcal{C}}$$

pour tout  $0 \leq t \leq T$ .

Ce qui nous intéresse ici est la préservation d'une minoration de la notion de courbure associée à chacun de ces cônes, d'où la définition qui suit.

**Définition II.2.3.** Si  $\mathcal{C}$  est un cône de courbure invariant et  $(M^n, g)$  une variété riemannienne de dimension  $n$ , on définit  $\lambda_{\mathcal{C}}^- : M \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$\lambda_{\mathcal{C}}^-(x) = \sup \left\{ \lambda \in \mathbb{R} \mid \text{Rm } g(x) - \lambda I_{\mathcal{S}^2(\Lambda_x^2 M)} \in \mathcal{C} \right\}.$$

*Remarque II.2.4.* En dimension 3,  $\lambda_{\text{IC}_1}^-$  se confond avec la plus petite valeur propre du tenseur de Ricci, tandis que  $\mathcal{C}_{\text{IC}_2} = \mathcal{C}_{\text{CO}}$ , et  $\lambda_{\text{IC}_2}^- = \lambda_{\text{CO}}^-$  égalent le minimum ponctuel des courbures

sectionnelles. En toute dimension,  $\mathcal{C}_{\text{CO}} \subset \mathcal{C}_{\text{IC}_2} \subset \mathcal{C}_{\text{IC}_1}$ , et une minoration de  $\lambda_{\text{CO}}^-$  ou de  $\lambda_{\text{IC}_2}^-$  implique une minoration des courbures sectionnelles, tandis qu'une minoration de  $\lambda_{\text{IC}_1}^-$  implique une minoration du tenseur de Ricci.

**Proposition II.2.5** (R. Bamler, E. Cabezas-Rivas, B. Wilking [18]). *Soit  $\mathcal{C}$  l'un des cônes de courbure invariants  $\text{IC}_1$ ,  $\text{IC}_2$  ou  $\text{CO}$  de la définition II.2.1, et  $g(t)$  un flot de Ricci défini pour  $0 \leq t \leq T$  sur une variété lisse  $M^n$  de dimension  $n$ . Alors on a, au sens des barrières,*

$$(\partial_t - \Delta - \text{R}_{g(t)})\lambda_{\mathcal{C}}^- \geq -\frac{n(n-1)}{2}(\lambda_{\mathcal{C}}^-)^2. \quad (\text{II.3})$$

L'énoncé qui suit est une version purement locale de (certains) résultats minoration de la courbures établis par R. Bamler, E. Cabezas-Rivas et B. Wilking dans [18].

**Proposition II.2.6.** *Il existe  $k(n, K)$  avec la propriété suivante. Soit  $\mathcal{C}$  l'un des cônes de courbure invariants  $\text{IC}_1$ ,  $\text{IC}_2$  ou  $\text{CO}$  de la définition II.2.1, et soit  $g(t)$  un flot de Ricci défini pour  $0 \leq t \leq T$  sur une variété lisse  $M^n$  de dimension  $n$  satisfaisant aux hypothèses (I.1), et tel que*

$$\lambda_{\mathcal{C}}^-(x, 0) \geq -1$$

pour  $x \in M$ . Alors pour  $(x, t) \in M \times [0, T]$

$$\lambda_{\mathcal{C}}^-(x, t) \geq -\frac{k}{\rho_0(x)^2}$$

où  $\rho_0(x) = \sup\{0 < r \leq 1 \mid B_0(x, r) \text{ est relativement compacte dans } M\}$ .

*Preuve de la proposition II.2.6.* Soit  $U \subset M$  relativement compact, et  $k > 1$  fixé dont on choisira la valeur au cours de la preuve. On définit

$$\rho_0^U(x) = \sup\{0 < r \leq 1 \mid B_0(x, r) \text{ est relativement compacte dans } U\}.$$

Pour  $v(x, t) = \min(\lambda_{\mathcal{C}}^-(x, t), 0)$ , on a d'après (II.3),

$$(\partial_t - \Delta - \text{R}_{g(t)})v \geq -\frac{n(n-1)}{2}v^2.$$

Soit  $0 < t_0 \leq T$  maximal tel que l'on ait  $v(x, t) \geq -\frac{k}{\rho_0^U(x)^2}$  sur  $U \times [0, t_0]$ . Si  $t_0 < T$ , il existe  $x_0 \in U$  tel que  $v(x_0, t_0) = -\frac{k}{\rho_0^U(x_0)^2}$ . On pose  $\rho = \rho_0^U(x_0)$ , si bien que la boule  $B_0(x_0, \rho)$  est relativement compacte dans  $U$ . Notons que puisque par hypothèse,  $v(x_0, t_0) \geq -\frac{CK}{t_0}$  (pour une constante  $C$  qui ne dépend que de  $n$ ), on a  $t_0 \leq \frac{CK}{k}\rho^2$ . En particulier, grâce au contrôle de la contraction des distances du corollaire I.1.3, on trouve que  $B_t(x_0, \frac{\rho}{4})$  reste incluse dans  $\Omega = B_0(x_0, \frac{\rho}{2})$  (et donc relativement compacte dans  $U$ ) si on suppose  $k \geq CK^2$  (pour une nouvelle constante  $C$  ne dépendant que de  $n$ ). Sur  $\Omega \times [0, t_0]$ , on a aussi  $\rho_0^U(x) \geq \frac{\rho}{2}$  et donc  $v(x, t) \geq -\frac{4k}{\rho^2}$ . On définit alors  $w : U \times [0, t_0]$  en posant  $w = e^{-\frac{2n(n-1)kt}{\rho^2}}v$ . On a alors, sur  $\Omega \times [0, t_0]$ ,

$$\begin{aligned} (\partial_t - \Delta - \text{R}_{g(t)})w &\geq \left( -\frac{2n(n-1)k}{\rho^2} - \frac{n(n-1)}{2}v \right) w, \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

On applique alors la proposition I.2.1 majorant les solutions de l'équation de la chaleur avec un terme source à  $w$  afin d'en déduire

$$w(x_0, t_0) \geq -C_{I.2.1} \left( 1 + 4^{n+1} \left( \sqrt{\frac{K}{k}} e^{-\frac{k}{C_{I.2.1} C K}} \right) \frac{k}{\rho^2} \right),$$

soit

$$v(x_0, t_0) \geq -C e^{CK} \left( \frac{1}{k} + \sqrt{\frac{K}{k}} e^{-\frac{k}{CK}} \right) \frac{k}{\rho^2}$$

Finalement, pour un choix approprié de  $k(n, K)$ , on trouve

$$v(x_0, t_0) \geq -\frac{k}{2\rho^2}$$

d'où une contradiction si  $t_0 < T$ . On a donc  $v(x, t) \geq -\frac{k}{\rho_0^U(x)^2}$  sur  $U \times [0, T]$ , d'où la proposition, le choix de  $U$  relativement compact dans  $M$  étant quelconque.  $\square$

## II.3 Minorations de courbure préservées en présence d'une structure produit à toutes les échelles

### II.3.1 Décomposition du tenseur de Riemann et équations d'évolutions

L'existence d'un  $m$ -éclatement en un point  $x$  d'une variété riemannienne  $(M, g)$  à courbure de Ricci minorée se traduit par l'existence de  $m$  fonctions coordonnées définies au voisinage de  $x$ . En général, la proximité avec un espace produit  $X \times \mathbb{R}^m$  étant seulement métrique, on n'obtient pas d'information sur la structure du tenseur de Riemann de  $M$  au point  $x$ . Cependant, comme on le vérifie dans ce paragraphe, sous l'hypothèse d'un contrôle supplémentaire sur la régularité des fonctions coordonnées, le tenseur de Riemann en  $x$  possède approximativement la structure de celui d'une variété de la forme  $N^{n-m} \times \mathbb{R}^m$ . Or, dans le cas où  $m = n - 3$ , la donnée du tenseur de Ricci en un point d'une métrique de la forme  $h \oplus g_{\mathbb{R}^{n-3}}$  sur une variété  $N^3 \times \mathbb{R}^{n-3}$  est équivalente à celle de tout le tenseur de Riemann. En présence de  $n - 3$  fonctions coordonnées sur  $M$ , la norme du tenseur de Riemann est contrôlée dès lors que l'on contrôle celle du tenseur de Ricci ainsi que suffisamment de dérivées (en fait, les dérivées d'ordre 3) de  $n - 3$  fonctions coordonnées.

Avant d'énoncer ce principe sous la forme du lemme II.3.1 on introduit quelques notations d'algèbre (multi)linéaire. Soit  $V \subset T_x M$  un sous-espace de l'espace tangent à  $M$  en un point  $x$ . L'inclusion  $V \subset T_x M$  donne lieu à une injection  $\Lambda^2(V^\perp) \hookrightarrow \Lambda_x^2 M$  qui à son tour permet d'écrire la décomposition orthogonale  $S^2(\Lambda^2 M) = S^2(\Lambda^2(V^\perp)) \oplus S^2(\Lambda^2(V^\perp))^\perp$ . Si  $S$  est une forme bilinéaire symétrique sur  $\Lambda_x^2 M$ , on écrira donc

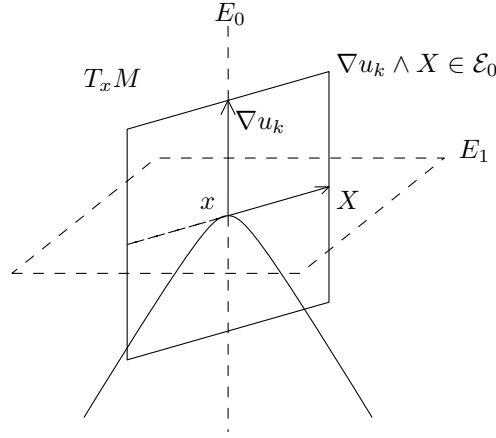
$$S = S^{V^\perp} + S^V$$

où  $S^{V^\perp} \in S^2(\Lambda^2(V^\perp))$  et  $S^V \in S^2(\Lambda^2(V^\perp))^\perp$ . En fait, si  $\mathcal{V} \subset \Lambda^2 M$  est le sous-espace engendré par les éléments de la forme  $X \wedge Y$  avec  $X \in V$ ,  $Y \in T_x M$  (on note qu'alors son supplémentaire orthogonal  $\mathcal{V}^\perp$  est engendré par les éléments de la forme  $X \wedge Y$ ,  $X, Y \in V^\perp$ ), on a pour  $\mathcal{L}, \mathcal{W} \in$

$\Lambda_x^2 M$

$$\begin{aligned} S^V(\mathcal{L}, \mathcal{W}) &= S(\mathcal{L}^\nu, \mathcal{W}^\nu) + S(\mathcal{L}^{\nu^\perp}, \mathcal{W}^\nu) + S(\mathcal{L}^\nu, \mathcal{W}^{\nu^\perp}) \\ S^{V^\perp}(\mathcal{L}, \mathcal{W}) &= S(\mathcal{L}^{\nu^\perp}, \mathcal{W}^{\nu^\perp}) \end{aligned} \quad (\text{II.4})$$

où  $\mathcal{L} = \mathcal{L}^\nu + \mathcal{L}^{\nu^\perp}$  et  $\mathcal{W} = \mathcal{W}^\nu + \mathcal{W}^{\nu^\perp}$  pour la décomposition orthogonale  $\Lambda_x^2 M = \mathcal{V} \oplus \mathcal{V}^\perp$ . D'autre part, rappelons si  $(E, h)$  est un espace euclidien de dimension  $m$ , on a une application "contraction de Ricci"  $c_m : S^2(\Lambda^2 E) \rightarrow S^2(E)$ , où, si  $S$  est une forme bilinéaire sur  $\Lambda^2 E$ ,  $X, Y \in E$ ,  $c_m S$  est définie comme la trace de la forme bilinéaire  $(Z, W) \mapsto S(X \wedge Z, Y \wedge W)$ . Dans le cas particulier où  $m = 3$ , l'application  $c_3$  est inversible et son inverse est donné par la formule  $c_3^{-1} S = (S - \frac{\text{tr} S}{4} h) \otimes h$ , où  $\otimes : S^2(E) \times S^2(E) \rightarrow S^2(\Lambda^2 E)$  désigne le produit de Kulkarni-Nomizu (voir [1]).



**Lemme II.3.1.** *Il existe une constante  $C(n) > 0$  avec la propriété suivante. Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne,  $x \in M$  et  $V \subset T_x M$  un sous-espace de dimension  $n - 3$ . Alors on a la décomposition du tenseur de Riemann*

$$(i) \text{Rm } g = (\text{Rc } g - \frac{\text{R}g}{4} g_{V^\perp}) \otimes g_{V^\perp} + \text{Rm } g^V - (c_n(\text{Rm } g^V) - \frac{\text{tr } c_n(\text{Rm } g^V)}{4} g_{V^\perp}) \otimes g_{V^\perp},$$

qui implique en particulier

$$(ii) |\text{Rm } g| \leq C(|\text{Rc } g| + |\text{Rm } g^V|).$$

Si de plus  $u_1, \dots, u_{n-3} : M \rightarrow \mathbb{R}$  sont  $n - 3$  fonction lisses telles qu'en tout point  $x \in M$  la famille  $\nabla u_1(x), \dots, \nabla u_{n-3}(x)$  engendre  $V$ , on a

$$(iii) (\text{Rm } g)(\nabla u_i \wedge Z, X \wedge Y) = \nabla^3 u_i(Y, X, Z) - \nabla^3 u_i(X, Y, Z),$$

pour tout  $1 \leq i \leq n - 3$  et  $X, Y, Z \in T_x M$ . En particulier, si  $|\langle \nabla u_i(x), \nabla u_j(x) \rangle - \delta_{i,j}| \leq C^{-1}$  pour  $1 \leq i, j \leq n - 3$ , on a

$$(iv) |\text{Rm } g^V| \leq C \max_{1 \leq i \leq n-3} |\nabla^3 u_i|.$$

*Démonstration.*

(iii) Soient  $X, Y, Z \in T_x M$ . On obtient d'abord par un calcul direct  $\langle \nabla_Y \nabla_X \nabla u_i, Z \rangle = \nabla^3 u_i(Y, X, Z) + \nabla^2 u_i(\nabla_Y X, Z)$ , et par suite la formule de Ricci  $(\text{Rm } g)(X, Y, \nabla u_i, Z) = \nabla^3 u_i(Y, X, Z) - \nabla^3 u_i(X, Y, Z)$ , ou bien

$$(\text{Rm } g)(\nabla u_i \wedge Z, X \wedge Y) = \nabla^3 u_i(Y, X, Z) - \nabla^3 u_i(X, Y, Z) \quad (\text{II.5})$$

pour le tenseur de courbure vu comme une forme bilinéaire sur  $\Lambda^2 T_x M$ .

(i) Avec les notations rappelées plus haut, l'inclusion  $V^\perp \subset T_x M$  donne lieu au diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccccc} & & \mathcal{G}^2(\Lambda^2 M) & \xrightarrow{c_n} & \mathcal{G}^2(T_x M) & & \\ & & \uparrow i & & \uparrow \iota & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{G}^2(\Lambda^2 V^\perp) & \xrightarrow{c_3} & \mathcal{G}^2(V^\perp) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Dans la décomposition  $\text{Rm } g = \text{Rm } g^V + \text{Rm } g^{V^\perp}$  telle que décrite plus haut,  $\text{Rm } g^{V^\perp} \in iS^2(\Lambda^2 V^\perp)$ , donc on peut écrire

$$\begin{aligned} \text{Rm } g^{V^\perp} &= i c_3^{-1} \iota^{-1} c_n \text{Rm } g^{V^\perp} \\ &= (c_n \text{Rm } g^{V^\perp} - \frac{\text{tr } c_n \text{Rm } g^{V^\perp}}{4} g_{V^\perp}) \otimes g_{V^\perp} \end{aligned}$$

puis en remplaçant  $\text{Rm } g^{V^\perp}$  par  $\text{Rm } g - \text{Rm } g^V$  on trouve la formule (i).

(iv) Soit  $\{e_i\}_{1 \leq i \leq n-3}$  la base de  $V$  obtenue par orthonormalisation de Schmidt de la famille  $\{\nabla u_i(x)\}_{1 \leq i \leq n-3}$ . D'après (II.4), il suffit de calculer  $\text{Rm } g^V$  sur les couples de la forme  $(e_i \wedge e_j, e_k \wedge e_l)$  avec  $1 \leq i \leq n-3$ ,  $1 \leq j, k, l \leq n$  avec  $i \neq j$ ,  $k \neq l$ . Or

$$(\text{Rm } g^V)(e_i \wedge e_j, e_k \wedge e_l) = \sum_{\alpha=1}^{n-3} m_{i,\alpha} (\text{Rm } g)(\nabla u_\alpha(x) \wedge e_j, e_k \wedge e_l)$$

où  $\{m_{\alpha,\beta}\}_{\alpha,\beta}$  est la matrice de la base  $\{e_i\}_{1 \leq i \leq n-3}$  dans  $\{\nabla u_i(x)\}_{1 \leq i \leq n-3}$ . Quitte à supposer que  $\langle \nabla u_i(x), \nabla u_j(x) \rangle \leq C^{-1}$  pour une constante  $C$  ne dépendant que de  $n$ , les  $m_{i,j}$  sont bornées, par 1 par exemple, et on a  $|\text{Rm } g^V| \leq C \max_{1 \leq i \leq n-3} |\nabla^3 u_i|(x)$  d'après (iii).

(ii) Conséquence immédiate de (i) et (iv). □

Dans le reste du paragraphe, on décrit la structure de certaines équations d'évolution de courbure particulières pour un flot de Ricci de dimension  $n \geq 4$  pour lequel tout point possède un  $(n-3, \epsilon)$ -éclatement, et donc un système de  $n-3$  fonctions coordonnées  $\{u_i\}_{1 \leq i \leq n-3}$ . L'idée est de montrer que le membre de droite de l'équation se décompose en un terme d'expression analogue à celui de l'équation de dimension 3, auquel s'ajoute un deuxième terme contrôlé par  $\max_{1 \leq i \leq n-3} |\nabla^3 u_i|$ .

**Lemme II.3.2.** *Soit  $g(t)$  un flot de Ricci sur  $M^n \times [0, T]$ . Si  $x \in M$  et  $V \subset T_x M$  est un sous-espace de dimension  $n-3$ , on a*

$$(i) \quad (\partial_t - \Delta) |\text{Rc } g(t)|^2 \leq C \left( |\text{Rc } g(t)|^3 + |\text{Rc } g(t)|^2 \cdot |\text{Rm } g(t)^V| \right)$$

tandis que si  $\lambda_{\text{Rc}}^-$  désigne la plus petite valeur propre du tenseur de Ricci, on a

$$(ii) (\partial_t - \Delta)\lambda_{\text{Rc}}^- \geq -(\lambda_{\text{Rc}^{V^\perp}}^-)^2 + \text{R}_g^{V^\perp} \lambda_{\text{Rc}^{V^\perp}}^- - C |\text{Rc } g(t)| \cdot |\text{Rm } g(t)^V|,$$

$$(iii) (\partial_t - \Delta)\text{R}_{g(t)} \geq 3(\lambda_{\text{Rc}^{V^\perp}}^-)^2 - 2\text{R}_g^{V^\perp} \lambda_{\text{Rc}^{V^\perp}}^- + (\text{R}_g^{V^\perp})^2 - C |\text{Rc } g(t)| \cdot |\text{Rm } g(t)^V|,$$

où  $\lambda_{\text{Rc}^{V^\perp}}^-$  et  $\text{R}_g^{V^\perp}$  désignent respectivement la plus petite valeur propre et la trace de  $\text{Rc } g^{V^\perp}$ .

*Démonstration.* (i) La norme du tenseur de Ricci satisfait à une équation de la forme

$$\begin{aligned} (\partial_t - \Delta) |\text{Rc } g(t)|^2 &= \text{Rm } g \star \text{Rc } g \star \text{Rc } g, \\ &\leq C |\text{Rm } g| |\text{Rc } g|^2, \\ &\leq C |\text{Rc } g|^3 + C |\text{Rm } g^V| |\text{Rc } g|^2 \end{aligned}$$

d'après le lemme II.3.1, (ii).

(ii) L'astuce classique d'Uhlenbeck (voir [14], p. 121-122 par exemple), qui consiste à introduire une famille d'isomorphismes de fibrés vectoriels  $\iota_t : TM \rightarrow TM$  pour laquelle la métrique tirée en arrière  $\mathfrak{g} = \iota_t^* g(t)$  est statique, permet d'écrire, si  $\mathfrak{R}(t) = \iota_t^* \text{Rm } g(t)$ , l'équation d'évolution du tenseur de Ricci sous la forme

$$(\partial_t - \Delta)\mathfrak{R}c_{ij} = 2\mathfrak{R}_{kijl}\mathfrak{R}c_{kl}.$$

On décompose alors le tenseur de Riemann comme dans le lemme II.3.1,(i)

$$\text{Rm } g = \left( \text{Rc } g - \frac{\text{R}_g}{4} g_{V^\perp} \right) \otimes g_{V^\perp} + S,$$

où  $|S| \leq C |\text{Rm } g^V|$ . On décompose alors  $\text{Rc } g = \text{Rc } g^{V^\perp} + \text{Rc } g^V$ , où  $\text{Rc } g^{V^\perp}(u, v) = \text{Rc } g(pu, pv)$  avec  $p : T_x M \rightarrow V^\perp$  la projection orthogonale. On a alors

$$\text{Rm } g = \left( \text{Rc } g^{V^\perp} - \frac{\text{tr } \text{Rc } g^{V^\perp}}{4} g_{V^\perp} \right) \otimes g_{V^\perp} + \tilde{S},$$

où  $|\tilde{S}| \leq C |\text{Rm } g^V|$ . On se place maintenant dans un système de coordonnées tel que  $\frac{d}{dx_i}$  forme une base orthonormée en  $(x, t)$  avec  $V^\perp = \langle \frac{d}{dx_1}, \frac{d}{dx_2}, \frac{d}{dx_3} \rangle$ , et on supposera en plus que  $\text{Rc } g^{V^\perp}$  est diagonal dans cette base. On a alors

$$(\text{Rm } g)_{ijji} = -\frac{1}{2} (R_{ii} + R_{jj} - R_{kk}) + \tilde{S}_{ijji},$$

pour  $i < j \leq 3$ , où  $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ , ainsi que  $(\text{Rm } g)_{ijkl} = \tilde{S}_{ijkl}$  pour tous les autres quadruplets  $i, j, k, l$ . En revenant dans les coordonnées d'Uhlenbeck on peut écrire

$$(\partial_t - \Delta)\mathfrak{R}_{ii} = -\mathfrak{R}_{ii}^2 + (\mathfrak{R}_{ii} + \mathfrak{R}_{jj} + \mathfrak{R}_{kk})\mathfrak{R}_{ii} + (\mathfrak{R}_{kk} - \mathfrak{R}_{jj})^2 + \mathfrak{T}_{ii} \text{ si } i \in \{1, 2, 3\},$$

pour tout  $1 \leq i \leq 3$  tandis que  $(\partial_t - \Delta)\mathfrak{R}_{ij} = \tilde{\mathfrak{R}}_{ij}$  pour tous les autres couples  $i, j$ , où  $|\mathfrak{R}|, |\tilde{\mathfrak{R}}| \leq C |\text{Rc } g| |\text{Rm } g^V|$ . Ainsi si  $\lambda_{\text{Rc } V^\perp}^-$  désigne la plus petite valeur propre de  $\text{Rc } g^{V^\perp}$ , on a pour tout  $u \in U_x M$

$$(\partial_t - \Delta) \left( \frac{\text{Rc } g}{|u|^2} \right) (u, u) \geq -(\lambda_{\text{Rc } V^\perp}^-)^2 + \text{R}_g^{V^\perp} \lambda_{\text{Rc } V^\perp}^- + T(u, u).$$

où  $|T| \leq C |\text{Rc } g| |\text{Rm } g^V|$ . D'où le (ii) de l'énoncé.

(iii) On a

$$\begin{aligned} (\partial_t - \Delta)\text{R}_g &= 2 |\text{Rc } g|^2, \\ &= \left( 2 |\text{Rc } g^{V^\perp}|^2 - (\text{R}_g^{V^\perp})^2 \right) + (\text{R}_g^{V^\perp})^2 + 2 |\text{Rc } g^V|^2, \end{aligned}$$

Or, pour tout triplet  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , on peut écrire  $2(a^2 + b^2 + c^2) - (a + b + c)^2 = 3a^2 - 2a(a + b + c) + (c - b)^2$ , donc en calculant dans une base orthonormée de  $V^\perp$  où  $\text{Rc } g^{V^\perp}$  est diagonal, on trouve en particulier

$$(\partial_t - \Delta)\text{R}_{g(t)} \geq 3(\lambda_{\text{Rc } V^\perp}^-)^2 - 2(\text{R}_g^{V^\perp}) \lambda_{\text{Rc } V^\perp}^- + (\text{R}_g^{V^\perp})^2 - C |\text{Rc } g(t)| \cdot |\text{Rm } g(t)^V|.$$

□

Le lemme II.3.2 permet d'ores et déjà de voir que lorsque  $\max_{1 \leq i \leq n-3}$  est contrôlé, la norme du tenseur de Ricci obéit à une équation autonome que l'on peut intégrer. On doit s'attendre à ce que le flot d'une donnée initiale à courbure de Ricci bornée, en présence d'une structure produit, évolue à courbure de Ricci borné pour un temps contrôlé. *A contrario* il ne semble pas possible de déduire la préservation d'une minoration du tenseur de Ricci aussi simplement à partir de l'équation (ii). En effet, le terme de reste est de la forme  $|\text{Rc } g(t)| \max_{1 \leq i \leq n-3} |\nabla^3 u_i|$ , où  $|\text{Rc } g(t)|$  satisfait en général seulement une borne de la forme  $\frac{K}{t}$ , non intégrable en 0. Il semble par contre qu'il soit possible de contrôler l'évolution de la quantité suivante qui correspond à un pincement.

**Définition II.3.3.** Si  $g(t)$  est un flot de Ricci défini sur  $M \times [0, T]$  avec  $\text{R}_{g(t)} > 0$ , on définit en tout point  $(x, t) \in M \times [0, T]$

$$\mathcal{Q}(x, t) = \min\left(0, \frac{\lambda_{\text{Rc}}^-(x, t)}{\text{R}_g(x, t)}\right).$$

On déduit alors du lemme II.3.2 une équation d'évolution pour  $\mathcal{Q}$ .

**Lemme II.3.4.** Soit  $g(t)$  un flot de Ricci défini pour  $0 \leq t \leq T$  sur une variété lisse  $M^n$  de dimension  $n$ . Alors, si  $(x, t) \in M \times [0, T]$  est un point tel que  $\text{R}_{g(t)}(x) > 0$ , et si  $V \subset T_x M$  est un sous-espace de dimension  $n - 3$ , on a

$$(\partial_t - \Delta)\mathcal{Q} \geq 2\nabla(\ln \text{R}_{g(t)}) \cdot \nabla\mathcal{Q} - C(1 + \mathcal{Q}^2) |\text{Rm } g(t)^V|.$$

L'énoncé qui suit résume le contenu de la section II.3.1. Seul (i) sera utilisé dans les paragraphes qui suivent. (ii) peut être vu comme une motivation des résultats des paragraphes I.1.3 et I.1.4 en justifiant l'hypothèse de pincement de la plus petite valeur propre du tenseur de Ricci faite dans les énoncés de ces paragraphes.



**Corollaire II.3.5.** *Il existe une constante  $C(n)$  avec la propriété suivante. Si  $g(t)$  est un flot de Ricci défini pour  $0 \leq t \leq T$  sur une variété lisse  $M^n$  de dimension  $n$ , et si  $u_1, \dots, u_{n-3} : M \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  est une famille de fonctions lisses telle que en un point  $(x, t) \in M \times [0, T]$  on ait  $|\langle \nabla u_i(x), \nabla u_j(x) \rangle - \delta_{i,j}| \leq C^{-1}$  pour  $1 \leq i, j \leq n-3$ , alors*

$$(i) \quad (\partial_t - \Delta) |\text{Rc}|^2(x, t) \leq C \left( |\text{Rc } g(x, t)|^3 + |\text{Rc } g(x, t)|^2 \max_{1 \leq i \leq n-3} |\nabla^3 u_i(x, t)| \right),$$

au point  $(x, t)$ . Si en  $(x, t) \in M \times [0, T]$   $R_{g(t)}(x) > 0$ , on a

$$(ii) \quad (\partial_t - \Delta) \mathcal{Q}(x, t) \geq 2 \nabla(\ln R_{g(x,t)}) \cdot \nabla \mathcal{Q}(x, t) - C(1 + \mathcal{Q}(x, t)^2) \max_{1 \leq i \leq n-3} |\nabla^3 u_i(x, t)|.$$

## II.3.2 Coordonnées locales et leur régularisation

### Principe

Dans ce paragraphe on construit, en tout point qui, pour la donnée initiale d'un flot de Ricci, possède un  $(m, \epsilon)$ -éclatement à toutes les échelles inférieures à un certain rayon  $r > 0$ , et pour  $t > 0$  suffisamment petit, un système de  $m$  fonctions  $\{u_i : \}_{1 \leq i \leq m}$  définies sur  $B_0(x, \frac{\sqrt{t}}{\delta}) \times [0, t]$  dont les dérivées jusqu'à l'ordre 3 satisfont à des estimations que l'on rassemble dans la définition de  $(m, \delta)$ -système de coordonnées régularisées locales qui suit.

**Définition II.3.6.** Si  $g(t)$  est un flot de Ricci sur  $M^n \times [0, T]$ , on dit qu'un point  $(x, t) \in M \times [0, T]$  possède un  $(m, \delta)$ -système de coordonnées régularisées locales si il existe  $m$  fonctions lisses  $\{u_i : B_0(x, \frac{\sqrt{t}}{\delta}) \times [0, t] \rightarrow \mathbb{R}\}_{1 \leq i \leq m}$ , solution de l'équation de la chaleur couplée avec  $g(t)$ , avec les propriétés suivantes

$$\begin{aligned} (i) \quad & |\nabla u_i \cdot \nabla u_j - \delta_{i,j}| \leq \delta, \\ (ii) \quad & |\nabla^2 u_i|^2 \leq \frac{\delta}{s}, \\ (iii) \quad & |\nabla^3 u_i| \leq \frac{\delta}{s}, \end{aligned}$$

pour tout  $(y, s) \in B_0(x, \frac{\sqrt{t}}{\delta}) \times [0, t]$ ,  $1 \leq i, j \leq m$ , ainsi que

$$(iv) \quad \int_0^{r^2} \int_{B_0(x,r)} |\nabla^3 u_i| \, d\mu_s \, ds \leq \delta r^n$$

pour tout  $0 < r \leq \sqrt{t}$ .

Le contenu de ce paragraphe est résumé dans l'énoncé qui suit.

**Proposition II.3.7.** *Il existe  $\epsilon(n, K, v_0, \delta) > 0$  avec la propriété suivante. Soit  $g(t)$  un flot de Ricci défini pour  $0 \leq t \leq T$  sur une variété lisse  $M^n$  de dimension  $n$ , satisfaisant aux hypothèses de décroissance (I.1) et dont la donnée initiale vérifie les conditions (I.2). Soit  $x_0 \in M$ ,  $r_0 > 0$  tel que  $B_t(x_0, r_0)$  est relativement compact dans  $M$  pour  $0 \leq t \leq T$ . On suppose de plus*

$$|\text{Rc } g(x, t)| \leq \frac{1}{r_0^2}$$

sur  $M \times [0, T]$ . Alors, si  $x_0$  possède un  $(m, \epsilon)$ -éclatement à toutes les échelles inférieures à  $r_0$  pour la métrique  $g(0)$ ,  $(x_0, t)$  possède aussi un  $(m, \delta)$ -système de coordonnées régularisées pour tout  $0 < t \leq \epsilon^2 r_0^2$ .

Comme conséquence évidente de la proposition II.3.7, on fait pour plus tard la remarque qui suit.

*Remarque II.3.8.* Si  $g(t)$  est un flot de Ricci défini pour  $0 \leq t \leq T$  sur  $M$ ,  $U$  une partie relativement compacte de  $M$  et  $\delta > 0$ , alors il existe  $\tau$  tel que tout  $(x, t) \in U \times [0, \tau]$  possède un  $(n, \delta)$  système de coordonnées régularisées.

En effet,  $U \subset M$  étant relativement compacte, il existe  $\tau$  tel que les hypothèses de la proposition II.3.7 soient vérifiées sur  $U \times [0, \tau]$  par continuité.

On décrit maintenant le principe de la construction de ces fonctions coordonnées régularisées, obtenues, comme il se doit, par régularisation de fonctions coordonnées elles mêmes construites à partir de la fonction distance par rapport à des point bien choisis. Soit  $g(t)$  un flot de Ricci sur  $M \times [0, T]$ , et soit  $x_0 \in M$  un point tel que  $B_t(x_0, 2R)$  est relativement compacte dans  $M$  pour tout  $0 \leq t \leq T$ . On appelle *fonction coordonnée* en  $x_0$  toute fonction définie par

$$\bar{u}_p(x, t) = d_t(p, x) - d_t(p, x_0) + \epsilon\sqrt{t},$$

où  $p \in B_t(x_0, R)$  pour tout  $0 \leq t \leq T$ . Si  $p$  est  $\epsilon$ -statique<sup>1</sup> pour  $g(t)$ , on a donc

$$(\partial_t - \Delta)\bar{u}_p \geq 0 \tag{II.6}$$

sur  $B_t(x_0, R) \setminus B_t(p, \epsilon^{-1}\sqrt{t})$ . On appelle *fonction coordonnée régularisée* sur  $B_0(x_0, r)$  correspondant à  $\bar{u}_p$  la solution d'un problème de Dirichlet

$$\begin{cases} u(x, t) = \bar{u}_p(x, t) & \text{pour } (x, t) \in \Omega \times \{0\} \cup \partial\Omega \times [0, T], \\ (\partial_t - \Delta)u(x, t) = 0 & \text{pour } (x, t) \in \Omega \times [0, T], \end{cases}$$

où  $\Omega \subset M$  est un domaine à bord lisse choisi tel que  $B_0(x, r) \subset \Omega \subset B_0(x_0, 2r)$ . Le choix de  $\Omega$  n'aura pas d'importance en pratique. En vertu du principe du maximum, (II.6) implique que l'on a  $u \leq \bar{u}_p$  sur  $B_0(x_0, r) \times [0, T]$ .

Si le flot  $g(t)$  satisfait aux estimations (I.1), et si  $p \in B_0(x_0, 1)$  est tel que  $B_t(x_0, 4)$  est relativement compacte dans  $M$  pour  $0 \leq t \leq T$ , le corollaire I.1.3 sur la distortion de la fonction distance garantit

$$\bar{u}_p(x, t') - \bar{u}_p(x, t) \geq -\frac{20}{3}(n-1)\sqrt{K}(\sqrt{t'} - \sqrt{t}) \tag{II.7}$$

pour tout  $x \in B_t(x_0, 1)$  et  $0 \leq t \leq t' \leq T$ , tandis que si on suppose en plus

$$\text{Rc } g(x, t) \geq -\epsilon^2$$

pour tout  $(x, t) \in M \times [0, T]$  on a

$$\bar{u}_p(x, t') - \bar{u}_p(x, t) \leq \epsilon(\sqrt{t'} - \sqrt{t}) + 2(e^{\epsilon^2(t'-t)} - 1) \tag{II.8}$$

pour tout  $x \in B_t(x_0, 1)$  et  $0 \leq t \leq t' \leq T$ . La difficulté qu'il y a à obtenir une estimation suffisamment précise de la dilatation des fonctions coordonnées sous des hypothèses plus faibles que celles d'une minoration uniforme de la courbure de Ricci (typiquement, sous une hypothèse de pincement  $\text{Rc } g(t) \geq -\delta R_{g(t)} - 1$ ) constitue le principal obstacle lorsque on cherche à prouver la conjecture 0.16. Les paragraphes I.1.3 et I.1.4 représentent une tentative d'obtenir de telles estimations, qui n'aboutit pas. On pense qu'il n'est pas possible, en général (voir l'introduction) d'obtenir une minoration uniforme de la courbure de Ricci en supposant seulement la minoration analogue et la présence d'un  $(n-3, \epsilon)$ -éclatement en tout point au temps initial. Cela justifie que l'on impose, dans la proposition II.3.7 et donc dans les hypothèses du théorème D, une borne au temps initial sur la norme du tenseur de Ricci, qui elle (on le verra au paragraphe II.3.3), est préservée par le flot en présence d'un  $(n-3, \epsilon)$ -éclatement en tout point.

1. voir la définition I.3.15.

## Régularisation

Pour une solution  $u : M \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  de l'équation de la chaleur couplée au flot de Ricci, les normes des dérivées successives obéissent à des équations d'évolution grâce auxquelles on peut quantifier la régularité des solutions à tout ordre. L'équation d'évolution du gradient n'est autre que la formule de Bôchner classique

$$(\partial_t - \Delta)(|\nabla u|^2) = -2|\nabla^2 u|^2, \quad (\text{II.9})$$

tandis que la norme du Hessien satisfait à une équation de la forme

$$(\partial_t - \Delta)(|\nabla^2 u|^2) = \text{Rm } g(t) \star \nabla^2 u \star \nabla^2 u - 2|\nabla^3 u|^2, \quad (\text{II.10})$$

et plus généralement on a

$$(\partial_t - \Delta)(|\nabla^k u|^2) = \sum_{l+m=k} \nabla^l \text{Rm } g(t) \star \nabla^m u \star \nabla^k u - 2|\nabla^{k+1} u|^2. \quad (\text{II.11})$$

*Preuve de (II.10) et (II.11).* La formule (II.9) est classique, voir par exemple [14], paragraphe 1.4.3. D'après [14], corollaire 2.34 on a

$$\begin{aligned} \partial_t(\nabla^2 f) &= \Delta_L(\nabla^2 u) \\ &= \Delta(\nabla^2 u) + 2 \sum_{k,l} R_{g(t)}(e_k, \cdot, \cdot, e_l) \nabla^2 u(e_k, e_l) \\ &\quad - \sum_k (\text{Rc } g(t)(e_k, \cdot) \nabla^2 u(\cdot, k) + \nabla^2 u(\cdot, k) \text{Rc } g(t)(e_k, \cdot)) \end{aligned}$$

si  $\{e_i\}_{1 \leq i \leq n}$  est une base  $g(t)$ -orthogonale de  $T_x M$  ( $\Delta_L$  désigne le Laplacien de Lichnerowicz). D'autre part, on vérifie facilement

$$\square |\nabla^2 u|^2 = 2 \langle \square(\nabla^2 u), \nabla^2 u \rangle - 2 \text{Rc } g(t)(\nabla^2 u, \nabla^2 u) - 2 |\nabla^3 u|^2,$$

donc finalement

$$\square |\nabla^2 u|^2 = 4 \sum_{i,j,k,l} R_{g(t)}(e_k, e_i, e_j, e_l) \nabla^2 u(e_i, e_j) \nabla^2 u(e_k, e_l) - 2 |\nabla^3 u|^2.$$

Pour montrer (II.11), on établit par induction sur  $k$

$$\square(\nabla^k u) = \nabla^k(\square u) + \sum_{l+m=k} \nabla^l \text{Rm } g(t) \star \nabla^m u. \quad (\text{II.12})$$

Pour cela, on suppose établie au rang  $k-1$  une telle formule, à laquelle on applique la connexion pour trouver

$$\nabla \square(\nabla^{k-1} u) = \nabla \nabla^{k-1}(\square u) + \sum_{l+m=k-1} (\nabla^{l+1} \text{Rm } g(t) \star \nabla^m u + \nabla^{l+1} \text{Rm } g(t) \star \nabla^{m+1} u),$$

soit

$$\nabla \partial_t(\nabla^{k-1} u) - \Delta(\nabla^k u) = \nabla^k(\square u) + \sum_{l+m=k} \nabla^l \text{Rm } g(t) \star \nabla^m u,$$

or la connexion évolue selon  $(\partial_t \nabla)_Z X \cdot Y = \nabla_Y \text{Rc}(Z, X) - \nabla_Z \text{Rc}(X, Y) - \nabla_X \text{Rc}(Y, Z)$  donc  $\partial_t(\nabla^k u) = \text{Rc } g(t) \star \nabla^{k-1} u + \nabla \partial_t(\nabla^{k-1} u)$ . On en déduit (II.12). Enfin, (II.11) s'obtient en combinant (II.12) avec

$$\square |\nabla^k u|^2 = 2\langle \square(\nabla^k u), \nabla^k u \rangle - 2\text{Rc } g(t)(\nabla^k u, \nabla^k u) - 2|\nabla^{k+1} u|^2.$$

□

L'analyse de (II.9), (II.10) et (II.11) conduit à une première série d'estimations, classiques, concernant la régularité des solutions bornées de l'équation de la chaleur. Ces estimations sont invariantes par changement d'échelle parabolique au sens où elles sont inchangées lorsque on remplace le flot  $g(t)$  par  $\tilde{g}(s) = \lambda^2 g(\frac{s}{\lambda^2})$  et la solution  $u(t)$  par  $\tilde{u}(s) = \lambda u(\frac{s}{\lambda^2})$  (ce qui est cohérent avec l'interprétation de  $u$  comme homogène à une distance dans le cas des fonctions coordonnées régularisées).

**Lemme II.3.9.** *Il existe  $C(n, k)$  avec la propriété suivante. Soit  $g(t)$  un flot de Ricci sur  $M^n \times [0, T]$  satisfaisant aux estimations de courbure  $|\text{Rm } g(x, t)| \leq \frac{K}{t}$ , et soit  $x_0 \in M$  tel que la boule  $B_0(x_0, 2R)$  est relativement compacte dans  $M$ . Si  $u : B_0(x_0, 2R) \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  est une solution de l'équation de la chaleur qui satisfait*

- a)  $-2R \leq u(x, t) \leq 2R$ , pour  $(x, t) \in B_0(x_0, 2R) \times [0, T]$
- b)  $u(\cdot, 0)$  est 1-Lipschitzienne sur  $B_0(x_0, 2R)$ .

Alors, pour tout  $(x, t) \in B_0(x_0, R) \times ]0, \frac{R^2}{C}]$  on a

- (i)  $|\nabla u|(x, t) \leq C$ ,
- (ii)  $|\nabla^k u|(x, t) \leq C \left(\frac{K}{t}\right)^{\frac{k-1}{2}}$ .

*Démonstration.* La preuve est en tous points identique à celle par laquelle on établit les estimations locales de Shi sur les dérivées du tenseur de courbure, telle qu'elle apparait dans [14], Chapitre 6. Soit  $B_0(x_0, \frac{3R}{2}) \subset \Omega \subset B_0(x_0, 2R)$  un ouvert à bord lisse. Des résultats de régularisation classiques (on peut par exemple faire appel au lemme IV.1.3) permettent d'approcher  $u(\cdot, 0)$  par une fonction  $u_{\epsilon, 0} : B_0(x_0, 2R) \rightarrow \mathbb{R}$  avec  $|u(x, 0) - u_{\epsilon, 0}(x)| \leq \epsilon$ ,  $|\nabla u_{\epsilon, 0}(x)| \leq C$  pour  $x \in \Omega$  et  $u(x, t) = u_{\epsilon, 0}(x)$  pour  $x \in \partial\Omega$ . Soit alors  $u_\epsilon : \bar{\Omega} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  la solution du problème de Dirichlet

$$\begin{cases} \square u_\epsilon = 0 & \text{sur } \Omega \times ]0, T], \\ u_\epsilon(x, t) = u_{\epsilon, 0}(x) & \text{pour } (x, t) \in \Omega \times \{0\} \cup \partial\Omega \times [0, T] \end{cases} \quad (\text{II.13})$$

Soit  $x \in B_0(x_0, R)$ . Par hypothèse d'induction, il existe une constante  $C(n, k_0)$  telle que pour tout  $k \leq k_0$  on a

$$|\nabla^k u_\epsilon(x, t)| \leq C t^{-\frac{k-1}{2}} \quad (\text{II.14})$$

pour  $(x, t) \in B_0(x, \frac{R}{2}) \times ]0, \frac{R^2}{C}]$ . On pose alors, pour  $A \geq 1$  à déterminer,

$$F(x, t) = (A + t^{(k_0-1)_+} |\nabla^{k_0} u_\epsilon|) t^{k_0} |\nabla^{k_0+1} u_\epsilon|.$$

Pour un choix approprié de  $A$  en dépendant que de  $n$  et  $K$ , et  $k_0$ , on a

$$\square F \leq -\frac{1}{t} F^2 + C\left(\frac{1}{t} + 1\right)F + C. \quad (\text{II.15})$$

En effet, si  $k_0 \geq 1$ , on écrit  $F = (A + F_1)F_2$  avec  $F_1 = t^{k_0-1} |\nabla^{k_0} u_\epsilon|$  et  $F_2 = t^{k_0} |\nabla^{k_0+1} u_\epsilon|$ , et on a

$$\begin{aligned} \square F_1 &\leq (k_0 - 1)t^{k_0-2} |\nabla^{k_0} u_\epsilon| + t^{k_0-1} \left( \sum_{l+m=k_0} |\nabla^l \text{Rm}| |\nabla^m u| |\nabla^{k_0} u_\epsilon| \right) - 2t^{k_0-1} |\nabla^{k_0+1} u_\epsilon|^2, \\ &\leq \frac{k_0 - 1}{t} F_1 + CF_1 + C - \frac{2}{t} F_2, \end{aligned}$$

en tenant compte de (II.14) et des estimations de Shi  $|\nabla^l \text{Rm } g(x, t)| \leq \frac{C_l(n, K)}{t^{1+\frac{l}{2}}}$ . De même,

$$\begin{aligned} \square F_2 &\leq k_0 t^{k_0-1} |\nabla^{k_0+1} u_\epsilon| + t^{k_0} \left( \sum_{l+m=k_0+1} |\nabla^l \text{Rm}| |\nabla^m u_\epsilon| |\nabla^{k_0+1} u_\epsilon| \right) - 2t^{k_0} |\nabla^{k_0+2} u_\epsilon|^2, \\ &\leq \frac{k_0}{t} F_2 + CF_2 + C - 2t^{k_0} |\nabla^{k_0+2} u_\epsilon|^2, \end{aligned}$$

Alors

$$\square F = F_2 \square F_1 + (A + F_1) \square F_2 - 2\nabla F_1 \cdot \nabla F_2,$$

or

$$\begin{aligned} 2|\nabla F_1 \cdot \nabla F_2| &\leq 8t^{2k_0-1} |\nabla^{k_0+1} u_\epsilon|^2 |\nabla^{k_0} u_\epsilon| |\nabla^{k_0+2} u_\epsilon|^2, \\ &\leq \frac{F_2^2}{t} + 16F_1 t^{k_0} |\nabla^{k_0+2} u_\epsilon|^2, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \square F &\leq \left( \frac{k-1}{t} + C \right) F_1 F_2 + \left( \frac{k}{t} + C \right) F + C(A + F_1 + F_2) - \frac{1}{t} F_2^2 \\ &\quad + 2(9F_1 - A)t^{k_0} |\nabla^{k_0+2} u_\epsilon|^2 \end{aligned}$$

Comme  $F_1$  est borné par hypothèse, un choix de  $A$  dépendant de  $n, K$  et  $k_0$  permet d'obtenir (II.15). Les calculs sont similaires dans le cas  $k_0 = 0$ .

On choisit maintenant  $\Phi : M \times [0, T] \rightarrow [0, 1]$  une fonction à support compact dans  $B_0(x, \frac{R}{2}) \times [0, T]$ , et on pose  $\tilde{F}(x, t) = \Phi(x, t)F(x, t)$ . Alors, si  $\tilde{F}$  atteint son maximum en un point  $(\bar{x}, \bar{t})$  avec  $\bar{t} > 0$ ,

$$\begin{aligned} 0 &\geq \square \tilde{F} = \Phi \square F + \left( \square \Phi + \frac{|\nabla \Phi|^2}{\Phi} \right) F, \\ &\leq \tilde{F} \left( -\frac{F}{t} + \frac{C}{t} + C \right) + C \end{aligned}$$

d'où en particulier  $\tilde{F}(\bar{x}, \bar{t}) \leq \max(4C + 1, A)$  si  $\bar{t} \leq 1$ . On en déduit  $F(y, t) \leq C$  et donc  $|\nabla^{k_0+1} u_\epsilon(y, t)| \leq Ct^{-\frac{k_0}{2}}$  pour  $(y, t) \in B_0(x, \frac{R}{4}) \times ]0, \frac{R^2}{C}]$ .

Enfin, pour une suite  $\epsilon_i \rightarrow 0$ , on peut extraire une sous-suite telle que la solution  $u_{\epsilon_i}$  converge vers  $u$  (la solution du problème de Dirichlet (II.13) étant unique) uniformément sur tout compact de  $B_0(x, \frac{R}{4}) \times ]0, \frac{R^2}{C}]$  pour la topologie  $\mathcal{C}^{k_0+1}$ . On en déduit  $|\nabla^{k_0+1} u(x, t)| \leq Ct^{-\frac{k_0}{2}}$ .  $\square$

Le lemme qui suit permet d'établir des estimations ponctuelles plus fines pour les fonctions coordonnées régularisées au voisinage d'un point qui possède un  $(m, \epsilon)$ -éclatement à toutes les échelles au temps 0. A nouveau, ces estimations sont invariantes par changement d'échelles parabolique et la preuve repose sur un argument d'éclatement.

**Lemme II.3.10.** *Il existe  $\epsilon(n, v_0, K, \delta)$  avec la propriété suivante. Soit  $g(t)$  un flot de Ricci pour  $0 \leq t \leq T$  sur une variété lisse  $M^n$  de dimension  $n$ , satisfaisant aux estimations (I.1), dont la donnée initiale vérifie les conditions (I.2), et tel qu'on ait en plus*

$$\text{Rc } g(x, t) \geq -\epsilon^2$$

pour  $(x, t) \in M \times [0, T]$ . Soit  $x_0 \in M$  un point tel que  $B_t(x_0, 2)$  est relativement compacte dans  $M$  pour tout  $t \in [0, T]$ , et  $p_1, \dots, p_m \in B_0(x_0, 1)$   $m$  points  $\epsilon$ -statiques pour le flot  $g(t)$ , tels que  $(p_1, \dots, p_m)$  soit un  $(m, \epsilon)$ -éclatement en  $x_0$  à toutes les échelles inférieures à  $r$  (où  $0 < r \leq 1$ ) pour la métrique  $g(0)$ . Alors les fonction coordonnées régularisées  $u_k$  ( $1 \leq k \leq m$ ) sur  $B_0(x_0, r)$  correspondant aux fonctions coordonnées

$$\bar{u}_k(x, t) = d_t(p_k, x) - d_0(p_k, x_0) + \epsilon\sqrt{t}$$

satisfont

$$\begin{aligned} \bar{u}_k - \delta\sqrt{t} &\leq u_k \leq \bar{u}_k, \\ |\langle \nabla u_k, \nabla u_l \rangle - \delta_{k,l}| &\leq \delta, \\ |\nabla^2 u_k|^2, |\nabla^3 u_k| &\leq \frac{\delta}{t}, \end{aligned}$$

pour tout  $x \in B_t(x_0, \frac{r}{2})$ ,  $0 < t \leq \epsilon^2 r^2$ ,  $1 \leq k, l \leq m$ .

*Remarque II.3.11.* La conclusion  $|\langle \nabla u_k(x, t), \nabla u_l(x, t) \rangle - \delta_{k,l}| \leq \delta$  reste vraie en  $t = 0$  pour tout  $x \in B_0(x_0, \frac{r}{2})$  pour le gradient des fonctions semi-concaves, comme on l'a vu au lemme I.3.8. Cette propriété ayant pour conséquence qu'il existe un voisinage de  $B_0(x_0, r)$  difféomorphe à  $N \times \mathbb{R}^m$ , où  $N$  est une variété différentielle de dimension  $n - m$ , les conclusions du lemme II.3.10 ne sont pas vérifiées en général lorsque l'on affaiblit l'hypothèse d'existence d'un  $(m, \epsilon)$ -éclatement à toutes les échelles pour supposer uniquement qu'il existe un espace métrique  $(Z, z_0)$  et une application  $\phi_0 : B_0(x_0, r) \rightarrow B_Z(z_0, r) \subset Z$  telle que  $x \mapsto (\phi_0(x), u_1(x, 0), \dots, u_k(x, 0))$  est une  $\epsilon r$ -isométrie.

*Preuve du lemme II.3.10.*  $n, K, v_0, \delta$  étant fixés, soit  $(M_i, g_i, x_{0,i}, p_i)$  une suite de données vérifiant les hypothèses de l'énoncé pour des suites  $0 < r_i \leq \frac{1}{2}$  et  $\epsilon_i \rightarrow 0$ , et violant la conclusion, c'est à dire tel qu'il existe une suite de points  $(x_i, t_i)$  avec  $x_i \in B_0(x_{0,i}, \frac{r_i}{2})$  et  $0 < t_i \leq r_i^2 \epsilon_i^2$  tels que

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq k, l \leq m} \max \left\{ t_i^{-\frac{1}{2}} (\bar{u}_{k,i} - u_{k,i})(x_i, t_i), |\langle \nabla u_{k,i}(x_i, t_i), \nabla u_{l,i}(x_i, t_i) \rangle - \delta_{k,l}|, \right. \\ \left. t_i |\nabla^2 u_{k,i}(x_i, t_i)|^2, t_i |\nabla^3 u_{k,i}(x_i, t_i)| \right\} > \delta. \end{aligned} \tag{II.16}$$

Les estimations (I.1), la minoration de la courbure de Ricci et l'hypothèse de non-effondrement au temps initial issue de (I.2) permettent d'appliquer le principe de convergence du lemme A.0.1 à la suite des flots mis à l'échelle  $\tilde{g}_i(s) = g_i(st_i)$  définis sur  $(M_i, x_i) \times [0, 1]$ . Il existe donc une variété différentielle  $(M_\infty, x_\infty)$ , un flot de Ricci  $g_\infty(s)$  sur  $M_\infty \times ]0, 1]$  avec une donnée initiale (au sens du lemme A.0.1)  $d_{0,\infty}$  telle qu'après extraction, la suite  $(M_i, \tilde{g}_i(s))$  converge vers  $(M_\infty, g_\infty(s))$ ,

la convergence faisant intervenir une suite de difféomorphismes  $\phi_i : U_i \subset M_\infty \rightarrow V_i \subset M_i$ , où  $\{U_i\}_{i \geq 0}$  est une exhaustion de  $M_\infty$ . Pour la métrique l'échelle  $(M_i, \tilde{g}_i(0))$ ,  $(p_1, \dots, p_m)$  est un  $(m, \epsilon_i)$ -éclatement en  $x_i$  à toutes les échelles inférieures à  $\frac{1}{2\epsilon_i}$ . Pour tout choix d'une suite  $R_i \leq \frac{1}{2\epsilon_i}$  avec  $R_i \rightarrow +\infty$  et  $\epsilon_i R_i \rightarrow 0$ , il existe donc une suite de  $\epsilon_i R_i$ -isométries  $\psi_i = (\psi_{0,i}, \psi_{1,i}, \dots, \psi_{m,i})$  entre la boule  $B_0(x_i, R_i)$  dans  $(M_i, \tilde{g}_i(0))$  et la boule  $\mathbb{B}((y_i, 0_m), R_i)$  dans  $Y_i \times \mathbb{R}^m$  pour un espace métrique  $(Y_i, y_i)$ . La convergence de la suite  $(M_i, \tilde{g}_i(0))$  vers l'espace métrique  $(M_\infty, d_{0,\infty})$  implique l'existence d'une limite  $(Y_\infty, d_{Y_\infty}, y_\infty)$  des  $(Y_i, y_i)$  (au sens de Gromov-Hausdorff) et on peut supposer (remarque A.0.2) après extraction, que les  $\psi_i \circ \phi_i$  convergent vers une application  $\psi_\infty = (\psi_{0,\infty}, \psi_{1,\infty}, \dots, \psi_{m,\infty})$  de  $(M_\infty, d_{0,\infty})$  dans  $Y_\infty \times \mathbb{R}^m$  muni de la métrique  $d_{Y_\infty \times \mathbb{R}^m}$  définie par  $d_{Y_\infty \times \mathbb{R}^m}((y, \mathbf{r}), (y', \mathbf{r}'))^2 = d_{Y_\infty}(y, y')^2 + |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2$ , dont on vérifie immédiatement qu'elle est une isométrie. En particulier,  $Y_\infty$  possède une structure de variété différentielle et  $(\psi_\infty^{-1})^* g_\infty(s)$  définit un flot de Ricci sur  $(Y_\infty \times \mathbb{R}^m) \times ]0, 1]$  dont la donnée initiale singulière est un produit métrique. D'autre part, pour  $0 < s \leq 1$  fixé on a pour tout  $i \geq 0$   $\text{Rc } \tilde{g}_i(s) \geq -\epsilon_i^2 t_i^2$  donc à la limite  $\text{Rc } g_\infty(s) \geq 0$  pour  $0 < s \leq 1$ . On peut donc appliquer le lemme I.3.13 et affirmer que la structure produit de  $Y_\infty \times \mathbb{R}^m$  est préservée par le flot, autrement dit que  $(\psi_\infty^{-1})^* g_\infty(s) = h_\infty(s) \oplus g_{\mathbb{R}^m}$  où  $h_\infty(s)$  est un flot (de dimension  $n - m$ ) défini sur  $Y_\infty \times ]0, 1]$ .

$$\begin{array}{ccc}
(Y_i \times \mathbb{R}^m, (y_i, 0_m)) & \xleftarrow{\psi_i} & (M_i, \tilde{g}_i(0), x_i) & \rightsquigarrow & (M_i, \tilde{g}_i(s), x_i) & \supset & V_i \\
& & \downarrow \text{G-H} & & \downarrow \mathcal{C}^k & & \uparrow \phi_i \\
& & (M_\infty, d_\infty, x_\infty) & \rightsquigarrow & (M_\infty, \tilde{g}_\infty(s), x_\infty) & \supset & U_i \\
& \swarrow \psi_\infty & & & & & \\
& \text{isométrie} & & & & & \\
(Y_\infty \times \mathbb{R}^m, (y_\infty, 0_m)) & \rightsquigarrow & & & (Y_\infty \times \mathbb{R}^m, h_\infty(s) \oplus g_{\mathbb{R}^m}) & & 
\end{array}$$

En résumé, on a un flot de Ricci  $h(s) \oplus g_{\mathbb{R}^m}$  défini pour  $0 < s \leq 1$  sur  $Y_\infty \times \mathbb{R}^m$ , tel que la distance induite  $d_{h(s) \oplus g_{\mathbb{R}^m}}$  converge vers  $d_{Y_\infty \times \mathbb{R}^m}$  uniformément sur tout compact de  $Y_\infty \times \mathbb{R}^m$ . De plus, si on pose pour tout  $i \geq 0$ ,  $W_i = B_0((y_\infty, 0_m), \frac{1}{2\epsilon_i}) \cap \psi_\infty^{-1}(U_i) \subset Y_\infty \times \mathbb{R}^m$ ,  $\Phi_i = \phi_i \circ \psi_\infty^{-1} : W_i \rightarrow M_i$  et pour  $1 \leq k \leq m$ ,  $\Psi_{k,i} = \psi_{k,i} \circ \phi_i \circ \psi_\infty^{-1} : B_{d_{Y_\infty \times \mathbb{R}^m}}((y_\infty, 0_m), R_i) \rightarrow \mathbb{R}$  on a

- (i) Sur tout compact de  $(Y_\infty \times \mathbb{R}^m) \times ]0, 1]$ , et pour tout  $k \geq 0$ , la suite des flots  $\Phi_i^* \tilde{g}(s)$  converge en norme  $\mathcal{C}^k$  vers le flot  $h_\infty(s) \oplus g_{\mathbb{R}^m}$ .
- (ii) Sur tout compact de  $Y_\infty \times \mathbb{R}^m$ , la suite des fonctions distance induites par les métriques  $\Phi_i^* \tilde{g}(0)$  converge uniformément vers la distance  $d_{Y_\infty \times \mathbb{R}^m}$ .
- (iii) Pour tout  $1 \leq k \leq m$ , sur tout compact  $Y \times \mathbb{R}^m$ , la suite des  $\Psi_{k,i}$  converge uniformément vers l'application  $[ Y_\infty \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, (y, r_1, \dots, r_m) \mapsto r_k ]$ .

On considère ensuite les fonctions coordonnées  $\bar{u}_{k,i} = d_t(p_{k,i}, x) - d_0(p_{k,i}, x_{0,i})$  sur  $M_i$  et leur régularisations  $u_{k,i}$  sur des domaines à bord lisse  $\Omega_i$ , où  $B_0(x_{0,i}, r_i) \subset \Omega_i \subset B_0(x_{0,i}, 2r_i)$ , d'abord mises à l'échelle et translatées

$$\begin{aligned}
\bar{v}_{k,i}(x, s) &= t_i^{-\frac{1}{2}} (\bar{u}_{k,i}(x, st_i) - \bar{u}_{k,i}(x_i, 0)) = \tilde{d}_{s,i}(p_{k,i}, x) - \tilde{d}_{0,i}(p_{k,i}, x_i), \\
v_{k,i}(x, s) &= t_i^{-\frac{1}{2}} (u_{k,i}(x, st_i) - u_{k,i}(x_i, 0)),
\end{aligned}$$

puis on définit  $\bar{w}_{k,i}(x, s) = \bar{v}_{k,i}(\Phi_i(x), s)$  et  $w_{k,i}(x, s) = v_{k,i}(\Phi_i(x), s)$  pour  $x \in W_i \subset Y_\infty \times \mathbb{R}^m$ ,  $0 \leq s \leq 1$ . Le fait que  $(p_{1,i}, \dots, p_{m,i})$  est un  $(m, \epsilon_i)$ -éclatement implique en particulier

$|\bar{v}_{k,i}(x,0) - \psi_{k,i}(x)| \leq \epsilon_i R_i$  pour  $x \in \tilde{B}_0(x_{0,i}, R_i)$  soit  $|\bar{w}_{k,i}(x,0) - \Psi_{k,i}(x)| \leq \epsilon_i R_i$  pour  $x \in B_0((y_\infty, 0), R_i)$ . Compte tenu de (iii) plus haut, cela implique pour tout  $(y, r_1, \dots, r_m) \in Y_\infty \times \mathbb{R}^m$ ,

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \bar{w}_{k,i}(y, r_1, \dots, r_m, 0) = r_k. \quad (\text{II.17})$$

D'autre part, les bornes (II.7) et (II.8) sur l'évolution des fonctions coordonnées se traduisent ici par

$$-\frac{20}{3}(n-1)\sqrt{K}(\sqrt{s_1} - \sqrt{s_0}) \leq \bar{v}_{k,i}(x, s_1) - \bar{v}_{k,i}(x, s_0) \leq \epsilon_i(\sqrt{s_1} - \sqrt{s_0}) + 4\epsilon_i^2(s_1 - s_0). \quad (\text{II.18})$$

Combiné au caractère 1-lipschitzien des  $\bar{v}_{k,i}$  par rapport à la première variable, ceci permet d'écrire

$$|\bar{v}_{k,i}(y, s_1) - \bar{v}_{k,i}(x, s_0)| \leq \tilde{d}_{s_0,i}(x, y) + \frac{20}{3}(n-1)\sqrt{\frac{K}{s_0}}(s_1 - s_0).$$

Puisque on a aussi  $\bar{v}_{k,i}(x_{0,i}, 0) = 0$  pour tout  $i$ , on obtient, en vertu de la remarque A.0.2 (appliquée à la suite d'espaces métriques  $M_i \times [0, 1]$ ) l'existence (après extraction) d'une limite  $\bar{w}_{k,\infty} : Y_\infty \times \mathbb{R}^m \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  des  $\bar{w}_{k,i}$ , continue, qui satisfait en particulier  $\square \bar{w}_{k,\infty}(x, s) \geq 0$  (au sens des barrières) pour  $(x, s) \in (Y_\infty \times \mathbb{R}^m) \times ]0, 1]$  ainsi que (par passage à la limite dans (II.18))

$$\bar{w}_{k,\infty}(x, 0) - \frac{20}{3}(n-1)\sqrt{K}s \leq \bar{w}_{k,\infty}(x, s) \leq \bar{w}_{k,\infty}(x, 0), \quad (\text{II.19})$$

pour  $(x, s) \in (Y_\infty \times \mathbb{R}^m) \times [0, 1]$ . De plus, (II.17) signifie que  $\bar{w}_{k,\infty}(y, r_1, \dots, r_m, 0) = r_k$  pour  $(y, r_1, \dots, r_m) \in Y_\infty \times \mathbb{R}^m$ . Compte tenu de la structure produit du flot  $h_\infty(s) \oplus g_{\mathbb{R}^m}$  sur  $Y_\infty \times \mathbb{R}^m$ , la fonction  $(x, s) \mapsto \bar{w}(x, 0)$  satisfait  $\square \bar{w}_{k,\infty}(x, 0) = 0$ , et par un principe du minimum  $\bar{w}_{k,\infty}(x, s) \geq \bar{w}_{k,\infty}(x, 0)$ . Finalement,  $\bar{w}_{k,\infty}(y, r_1, \dots, r_m, s) = \bar{w}_{k,\infty}(y, r_1, \dots, r_m, 0) = r_k$  pour  $(y, r_1, \dots, r_m, s) \in (Y_\infty \times \mathbb{R}^m) \times [0, 1]$ .

Sur le bord  $\Omega_i \times \{0\} \cup \partial\Omega_i \times ]0, 1]$  du domaine de définition de  $v_{k,i}$  on a  $v_{k,i}(x, s) = \bar{v}_{k,i}(x, s)$  donc (d'après les bornes (II.18) et le fait que  $\Omega_i \subset \tilde{B}_0(x_{0,i}, \frac{2r_i}{\sqrt{t_i}})$ ,  $-4\frac{r_i}{\sqrt{t_i}} \leq v_{k,i} \leq 4\frac{r_i}{\sqrt{t_i}}$ . Par le principe du maximum on a donc aussi  $-4\frac{r_i}{\sqrt{t_i}} \leq v_{k,i}(x, s) \leq 4\frac{r_i}{\sqrt{t_i}}$  pour  $(x, s) \in \Omega_i \times [0, 1]$ . On peut alors appliquer la proposition I.2.2 avec  $f \equiv 0$ ,  $\Omega = \tilde{B}_0(x_i, \frac{r_i}{\sqrt{t_i}})$  et  $M_0 = 4\frac{r_i}{\sqrt{t_i}}$  à la solution  $v_{k,i}$  de l'équation de la chaleur. On trouve pour  $(x, s) \in \tilde{B}_0(x_i, \frac{r_i}{\sqrt{t_i}}) \times [0, 1]$ ,  $|v_{k,i}(x, s) - \bar{v}_{k,i}(x, 0)| \leq C\sqrt{s}$ , et donc

$$|w_{k,i}(x, s) - \bar{w}_{k,i}(x, 0)| \leq C\sqrt{s} \quad (\text{II.20})$$

pour  $(x, s) \in B_0((y_\infty, 0_m), R_i) \times [0, 1]$ . D'autre part, le lemme II.3.9 fournit des bornes

$$|\nabla^l v_{k,i}(x, s)| \leq C_l s^{-\frac{l-1}{2}}$$

pour  $(x, s) \in \tilde{B}_0(x_0, \frac{r_i}{2\sqrt{t_i}}) \times ]0, 1]$ , dont on déduit, compte tenu de la convergence des flots  $\Phi_i^* \tilde{g}_i(s)$  vers  $h_\infty(s) \oplus g_{\mathbb{R}^m}$ , l'existence, pour tout compact  $\mathcal{K}$  de  $Y_\infty \times \mathbb{R}^m \times ]0, 1]$ , d'une constante  $\mathcal{C}_{\mathcal{K},l}$  telle que

$$|\nabla^l w_{k,i}| \leq \mathcal{C}_{\mathcal{K},l}$$

pour  $(x, s) \in \mathcal{K}$ . Ces estimations permettent d'appliquer le théorème d'Ascoli à la suite des  $w_{k,i}$  et d'obtenir une limite  $w_{k,\infty} : (Y_\infty \times \mathbb{R}^m) \times ]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  lisse, solution de l'équation de la chaleur, telle que sur tout compact de  $(Y_\infty \times \mathbb{R}^m) \times ]0, 1]$ , la suite des  $w_{k,i}$  converge vers  $w_{k,\infty}$  pour la topologie  $\mathcal{C}^l$ . Après passage à la limite (II.20) donne, pour  $(y, r_1, \dots, r_m, s) \in (Y_\infty \times \mathbb{R}^m) \times [0, 1]$ ,

$$r_k - C\sqrt{s} \leq w_{k,\infty}(y, r_1, \dots, r_m, s) \leq r_k + C\sqrt{s}.$$



Fixons finalement  $0 < s_0 \leq s \leq 1$ . Comme  $(y, r_1, \dots, r_m, s) \mapsto r_k - C\sqrt{s_0}$  et  $(y, r_1, \dots, r_m, s) \mapsto r_k + C\sqrt{s_0}$  sont deux solutions de l'équation de la chaleur sur  $(Y_\infty \times \mathbb{R}^m) \times [s_0, 1]$  on trouve, par comparaison des solutions entre  $s_0$  et  $s$ ,  $r_k - C\sqrt{s_0} \leq w_{k,\infty}(y, r_1, \dots, r_m, s) \leq r_k + C\sqrt{s_0}$ . L'estimation étant valide quel que soit  $s_0 > 0$ , on a finalement

$$w_{k,\infty}(y, r_1, \dots, r_m, s) = r_k \quad (\text{II.21})$$

pour tout  $(y, r_1, \dots, r_m, s) \in (Y_\infty \times \mathbb{R}^m) \times [0, 1]$ .

D'autre part, puisque la suite des  $w_{k,i}(\cdot, 1)$  converge vers  $w_{k,\infty}(\cdot, 1)$  pour la topologie  $\mathcal{C}^l$  sur tout compact de  $Y_\infty \times \mathbb{R}^m$ , (II.16) se traduit par

$$\max_{1 \leq k, l \leq m} \max \left\{ (\bar{w}_{k,\infty} - w_{k,\infty})(y_\infty, 0_m, 1), |\langle \nabla w_{k,\infty}(y_\infty, 0_m, 1), \nabla w_{l,\infty}(y_\infty, 0_m, 1) \rangle - \delta_{k,l}|, \right. \\ \left. |\nabla^2 w_{k,\infty}(y_\infty, 0_m, 1)|^2, |\nabla^3 w_{k,\infty}(y_\infty, 0_m, 1)| \right\} > \delta.$$

en contradiction avec (II.21). □

De telles estimations ne sont pas suffisantes pour contrôler le terme dû au facteur de dimension  $n - 3$  dans l'équation d'évolution du tenseur de Ricci. On établit maintenant des estimations intégrales sur les mêmes quantités. Pour cela, on doit disposer de fonctions "cut-off" adaptées.

**Lemme II.3.12.** *Soit  $g(t)$  est un flot de Ricci défini sur  $M^n$  pour  $0 \leq t \leq T$  avec  $\text{Rc } g(t) \leq \frac{(n-1)K}{t}$  sur  $M$  pour  $0 < t \leq T$ . Pour  $x_0 \in M$ , et  $r_0 > 0$  sont tels que  $B_t(x_0, 8r_0)$  est relativement compacte dans  $M$  pour  $0 \leq t \leq T$ , on peut construire une fonction continue  $\Phi : M \times [0, T] \rightarrow [0, 1]$  avec les propriétés suivantes*

- (i)  $\Phi(x, t) = 0$  pour  $0 \leq t \leq T$  et  $d_t(x_0, x) \geq 4r_0$ , tandis que  $\Phi(x, t) = 1$  si  $0 \leq t \leq \frac{r_0^2}{64n^2K}$  et  $d_t(x_0, x) \leq r_0$ ,
- (ii)  $\partial_t \Phi \leq 0$ ,
- (iii)  $|\nabla \Phi| \leq \frac{2}{r_0}$ , et  $\square \Phi + \frac{|\nabla \Phi|^2}{\Phi} \leq \frac{4}{r_0^2}$ ,
- (iv) Si  $\text{Rc } g(x, t) \geq -\frac{K}{r_0^2}$  sur  $M \times [0, T]$  alors  $\partial_t \Phi \geq -\frac{16n\sqrt{K}}{r_0\sqrt{t}}$ .

On peut construire une seconde fonction  $\Psi : M \times [0, T] \rightarrow [0, 1]$  satisfaisant encore (iii) et (iv) tandis que (i) et (ii) sont remplacés par

- (i')  $\Psi(x, t) = 0$  pour  $0 \leq t \leq T$  et  $d_t(x_0, x) \geq 4r_0$  tandis que  $\frac{1}{2} \leq \Psi(x, t) \leq 1$  si  $0 \leq t \leq \frac{r_0^2}{64n^2K}$  et  $d_t(x_0, x) \leq r_0$ ,
- (ii')  $\partial_t \Psi \leq 0$  et  $\square \Psi \leq 0$ .

*Démonstration.* On commence par choisir  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  une fonction lisse décroissante avec les propriétés suivantes :  $\phi(x) = 1$  si  $x \leq 0$ ,  $\phi(x) = 0$  si  $x \geq 1$  et  $\phi(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ . On s'assure de plus que  $-4 \leq \phi' \leq 0$ ,  $-8 \leq \phi'' \leq 0$  si  $x \leq \frac{1}{2}$ ,  $0 \leq \phi'' \leq 8$  si  $x \geq \frac{1}{2}$ , et enfin  $\frac{\phi'^2}{\phi} \leq 16$ . On note ensuite que la fonction  $\rho_{x_0}(x, t) = d_t(x_0, x) + \frac{20}{3}n\sqrt{Kt}$  satisfait, grâce au lemme I.1.1, à  $\square \rho_{x_0} \geq 0$  et  $\partial_t \rho_{x_0} \geq \frac{10}{3}\sqrt{\frac{K}{t}}$ , ainsi qu'à  $\partial_t \rho_{x_0} \leq \frac{kd_t(x_0, \cdot)}{r_0^2} + \frac{10}{3}n\sqrt{\frac{K}{t}}$  sous l'hypothèse du (iv). On définit alors  $\Phi, \Psi : M \times [0, T] \rightarrow [0, 1]$  en posant  $\Phi(x, t) = \phi\left(\frac{\rho_{x_0}(x, t) - 2r_0}{2r_0}\right)$  et  $\Psi(x, t) = (1 - \frac{2t}{r_0^2})\Phi(x, t)$ . Les propriétés (i) – (iv) et (i'), (ii') découlent alors de calculs directs. □

2. on peut par exemple partir de la fonction définie par  $\phi(x) = \begin{cases} -2x^2 + 1 & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 2x^2 - 4x + 2 & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \text{ ou } x \geq 1 \end{cases}$  puis la

lisser au voisinage de 0 et 1

**Lemme II.3.13.** *Il existe  $\epsilon_0(n, K) > 0$  avec la propriété suivante. Soit  $g(t)$  un flot de Ricci défini pour  $0 \leq t \leq T$  sur une variété lisse  $M^n$  de dimension  $n$  satisfaisant aux estimations (I.1) ainsi qu'à*

$$\text{Rc } g(x, t) \geq -\epsilon_0^2$$

*pour  $(x, t) \in M \times [0, T]$ . Soit  $x_0 \in M$  un point tel que  $B_t(x_0, 2)$  est relativement compacte dans  $M$  pour tout  $t \in [0, T]$ , et  $p \in B_0(x_0, 1)$  un  $(1, \epsilon_0)$ -éclatement en  $x_0$  à toutes les échelles inférieures à  $r_0$  (où  $0 < r_0 \leq 1$ ) pour la métrique  $g(0)$ . Alors, si le point  $p$  est  $\epsilon$ -statique pour  $0 \leq t \leq T$  avec  $\epsilon \leq \epsilon_0$ , la fonction coordonnée régularisée  $u$  sur  $B_0(x_0, r_0)$  correspondant à la fonction coordonnée  $\bar{u}(x) = d_t(p, x) - d_0(p, x_0) + \epsilon\sqrt{t}$  satisfait*

$$\int_{B_t(x_0, r)} (\bar{u} - u)(x, t) \, d\mu_{g(t)} \leq C(n)r^{n-1}(t + \epsilon r\sqrt{t}).$$

*pour  $0 < t \leq \min(r^2, T)$ , et  $0 < r \leq \epsilon_0^2 r_0^2$ .*

**Corollaire II.3.14.** *Sous l'hypothèse additionnelle de majoration de la courbure de Ricci*

$$\text{Rc } g(x, t) \leq \epsilon_0^2$$

*pour tout  $(x, t) \in M \times [0, T]$  on a*

$$\int_{B_t(x_0, r)} (\bar{u} - u)(x, t) \, d\mu_{g(t)} \leq C(n)r^{n-1}t$$

*pour  $0 \leq t \leq \min(r^2, T)$  et  $0 < r \leq \epsilon_0^2 r_0^2$ .*

En effet, sous l'hypothèse mentionnée,  $p$  est un point  $8n\epsilon_0\sqrt{t}$ -régulier sur  $[0, t]$ , pour  $0 < t \leq T$ .

*Preuve du lemme II.3.13.* En se référant au lemme II.3.10, on choisit  $\epsilon_0$  de façon à avoir  $\frac{1}{2} \leq |\nabla u(x, t)| \leq \frac{3}{2}$  pour  $x \in B_t(x_0, \frac{r_0}{2})$  et  $0 \leq t \leq \epsilon_0^2 r_0^2$ . Alors, pour  $r \leq \epsilon_0 r_0$ , le lemme II.3.12 fournit une fonction  $\Psi : M \times [0, T] \rightarrow [0, 1]$  telle que  $\Psi \equiv 0$  pour  $d_t(x_0, x) \geq 32n\sqrt{K}r$  et  $\Psi \geq \frac{1}{2}$  pour  $x \in B_t(x, r)$  et  $t \leq r^2$ . Quitte à réduire  $\epsilon_0$  de façon à avoir  $\epsilon_0 \leq \frac{1}{16n\sqrt{K}}$ , on a  $B_t(x_0, r) \subset B_t(x_0, \frac{r_0}{2})$  pour  $0 \leq t \leq r^2$  et

$$\begin{aligned} \partial_t \int_M \Psi(\bar{u} - u) \, d\mu_{g(t)} &= - \int_M \Psi \text{R}_{g(t)} \, d\mu_{g(t)} + \int_M (\partial_t \Psi)(\bar{u} - u) \, d\mu_{g(t)} \\ &\quad + \int_M \Psi \partial_t \bar{u} \, d\mu_{g(t)} + \int_M \nabla \Psi \cdot \nabla u \, d\mu_{g(t)}. \end{aligned}$$

On traite les différents termes du membre de droite en notant que  $\partial_t \Psi \leq 0$ ,  $\partial_t \bar{u} \leq \frac{\epsilon_0^2 r}{2} + \frac{\epsilon}{2\sqrt{t}}$  d'après (II.8), et  $|\nabla \Psi| \leq \frac{C(n)}{r}$ . Le lemme s'en déduit en intégrant sur  $[0, t]$ .  $\square$

On peut maintenant établir des bornes intégrales sur les fonctions coordonnées régularisées ainsi que leurs dérivées. On peut comparer le lemme ci-dessous aux Lemmes 9.10 et 9.13 dans [5] concernant les fonctions coordonnées harmoniques utilisée par J. Cheeger et T. H. Colding. Les lemmes II.3.10 et II.3.13, en contrôlant l'écart entre les fonctions coordonnées et leurs régularisations, jouent le rôle du Lemme 9.8 dans [5], qui est obtenu grâce à l'inégalité de l'excès. Les bornes intégrales sur les dérivées en découlent de manière analogue dans un cas et dans l'autre.

**Lemme II.3.15.** *Il existe  $\epsilon(n, K, \delta) > 0$  avec la propriété suivante. Sous les hypothèses du lemme II.3.13, on a pour  $0 < r \leq \epsilon^2$  et  $0 \leq t \leq \min(T, r^2)$ ,*

$$(i) \int_0^t \int_{B_s(x_0, r)} \left| |\nabla u|^2 - 1 \right| d\mu_{g(s)} ds \leq \delta r^{n-\frac{1}{2}} t^{\frac{5}{4}},$$

puis

$$(ii) \int_0^t \int_{B_s(x_0, r)} |\nabla^2 u|^2 d\mu_{g(s)} ds \leq \delta r^{n-\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{4}},$$

et enfin

$$(iii) \int_0^t \int_{B_s(x_0, r)} s |\nabla^3 u|^2 d\mu_{g(s)} ds \leq \delta r^{n-\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{4}}.$$

*Preuve du lemme II.3.15.* Soit  $v = \bar{u} - u$ . On a donc  $v \geq 0$  et  $\square v \geq 0$ . L'idée est de passer des majorations sur  $v$  fournies par le lemme II.3.10 et le corollaire II.3.14 à une estimation de la norme  $L^2$  de  $\nabla v$  en intégrant l'identité

$$\frac{1}{2} \square (v^2) = v \square v - |\nabla v|^2. \quad (\text{II.22})$$

Comme  $|\nabla \bar{u}| \equiv 1$ , on a la même estimation sur  $1 - |\nabla u|^2$ . On intègre alors sur  $B_0(x_0, r) \times [0, t]$  la formule de Bôchner (II.9) que l'on réécrit

$$|\nabla^2 u|^2 = \frac{1}{2} \square (1 - |\nabla u|^2). \quad (\text{II.23})$$

pour obtenir l'estimation  $L^2$  sur le Hessien de  $u$  et enfin on multiplie l'égalité (II.10) par la variable de temps  $t$  puis on réécrit cette équation sous la forme

$$s |\nabla^3 u|^2 \leq \frac{1}{2} \square (s |\nabla^2 u|^2) + s |\text{Rm } g(s)| |\nabla^2 u|^2, \quad (\text{II.24})$$

avant de l'intégrer pour obtenir l'estimation sur les dérivées d'ordre 3. La présence de termes de bords complique néanmoins les calculs.

(i) Le lemme II.3.10 fournit d'abord  $\epsilon(n, K, v_0, \delta)$  tel que l'on ait

$$\begin{aligned} 0 \leq v \leq \delta \sqrt{t}, \quad -\delta \leq 1 - |\nabla u|^2 \leq \delta, \\ |\nabla^2 u|^2 \leq \frac{\delta}{t}, \quad |\nabla^3 u| \leq \frac{\delta}{t}, \end{aligned} \quad (\text{II.25})$$

pour  $(x, t) \in B_0(x_0, \frac{r_0}{4}) \times [0, \epsilon^2 r_0^2]$ . Le lemme II.3.13 fournit (quitte à ajuster  $\epsilon$ ) l'estimation

$$\int_{B_0(x_0, r)} v d\mu_{g(t)} \leq C r^{n-1} t \quad (\text{II.26})$$

pour  $0 < r \leq \epsilon^2 r_0^2$  et  $0 \leq t \leq r^2$ . Si  $r_1 \leq \frac{r_0}{128n\sqrt{K}}$ , le lemme II.3.12 fournit une fonction  $\Psi_1 : M \times [0, T] \rightarrow [0, 1]$  telle que  $\Psi_1 \equiv 0$  pour  $d_t(x_0, x) \geq 32n\sqrt{K}r_1$  et  $\Psi_1 \geq \frac{1}{2}$  pour  $x \in B_t(x, r_1)$  et  $t \leq r_1^2$ . En intégrant, comme annoncé, (II.22) on obtient donc

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_M \Psi_1 |\nabla v|^2 d\mu_s ds &= \int_0^t \int_M \Psi_1 v \square v d\mu_s ds - \frac{1}{2} \int_0^t \int_M \Psi_1 \square (v^2) d\mu_s ds, \\ &= I + II. \end{aligned}$$

Or d'une part

$$\begin{aligned} I &\leq \left( \sup_{B_0(x_0, \frac{r_0}{4}) \times [0, t]} v \right) \int_0^t \int_M \Psi_1 \square v \, d\mu_s ds, \\ &\leq \delta \sqrt{t} \int_0^t \int_M \Psi_1 \square v \, d\mu_s ds \end{aligned}$$

grâce à (II.25), puis comme  $\Psi_1 \square v = \square(\Psi_1 v) - v \square \Psi_1 + 2\nabla \Psi_1 \cdot \nabla v$  on obtient avec la formule de Stokes

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_M \Psi_1 \square v \, d\mu_s ds &= \int_0^t \int_M \left( \square(\Psi_1 v) + v \square \Psi_1 - 2v \partial_s \Psi_1 + 2v \square \Psi_1 \right) d\mu_s ds \\ &\leq \int_0^t \left( \partial_s \left( \int_M \Psi_1 v \, d\mu_s \right) + \int_M (\Psi_1 v R_{g(s)} + 2|\partial_s \Psi_1| v) \, d\mu_s \right) ds \end{aligned}$$

(puisque  $\square \Psi_1 \leq 0$ )

$$\begin{aligned} &\leq \int_{B_t(x_0, r_1)} v \, d\mu_t \\ &\quad + \int_0^t \left( \frac{n(n-1)K}{s} + 2 \sup_M |\partial_s \Psi_1| \right) \left( \int_{B_s(x_0, 4r_1)} v \right) d\mu_s ds, \\ &\leq CK r_1^{n-1} t, \end{aligned}$$

grâce à l'estimation (II.26) et au lemme II.3.12, (iv), qui garantit que  $|\partial_s \Psi_1| \leq \frac{C(n)\sqrt{K}}{r\sqrt{s}}$ .  
Finalement, si  $t \leq r_1^2$ ,

$$I \leq CK r_1^{n-1} \delta t^{\frac{3}{2}}.$$

D'autre part

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_M \Psi_1 \square (v^2) \, d\mu_s ds &= \int_0^t \int_M \left( \square(\Psi_1 v^2) + v^2 \square \Psi_1 - 2v^2 \partial_s \Psi_1 \right) d\mu_s ds, \\ &\geq \int_M \Psi_1 v^2 \, d\mu_t + \int_0^t \int_M \Psi_1 R_{g(s)} v^2 - \int_0^t \int_M (-\square \Psi_1) v^2 \, d\mu_s ds, \\ &\geq - \left( \sup_{B_0(x_0, \frac{r_0}{4}) \times [0, t]} v^2 \right) \int_0^t \int_M (-\square \Psi_1 + 1) \, d\mu_s ds \end{aligned}$$

(à nouveau, on utilise  $\partial_s \Psi_1 \leq 0$  et  $\square \Psi_1 \leq 0$ )

$$\geq - \left( \sup_{B_0(x_0, \frac{r_0}{4}) \times [0, t]} v^2 \right) \int_0^t (|\partial_s \Psi_1| + 1) |B_t(x_0, Cr_1)|_{g(s)} \, ds.$$

Puisque  $|B_t(x_0, Cr_1)|_{g(s)} \leq |B_0(x_0, 2Cr_1)|_{g(s)} \leq e^t |B_0(x_0, 2Cr_1)|_{g(0)} \leq Cr_1^n$  pour  $t \leq r_1^2$  (où  $C$  dépend de  $n$  et  $K$ ), on trouve  $II \leq C\sqrt{K} r_1^{n-1} \delta^2 t^{\frac{3}{2}}$  et

$$\int_0^t \int_M \Psi_1 |\nabla v|^2 \, d\mu_s ds \leq Cr_1^{n-1} \delta t^{\frac{3}{2}}.$$

Enfin, en notant que  $1 - |\nabla u|^2 = |\nabla v| \cdot \nabla(\bar{u} + u)$  on trouve par Cauchy-Schwarz  $\int \int \Psi_1 |1 - |\nabla u|^2| \leq \sqrt{\int \int \Psi_1 |\nabla(\bar{u} + u)|^2} \sqrt{\int \int \Psi_1 |\nabla v|^2}$  soit finalement

$$\int_0^t \int_{B_t(x_0, r_1)} |1 - |\nabla u|^2| \, d\mu_s \, ds \leq C r_1^{n-\frac{1}{2}} \sqrt{\delta t^{\frac{5}{4}}}, \quad (\text{II.27})$$

d'où le (i) de l'énoncé (quitte à ajuster le choix de  $\delta$ ).

- (ii) On choisit maintenant  $r_2 \leq \frac{r_1}{32n\sqrt{K}}$  et, toujours grâce au lemme II.3.12,  $\Psi_2 : M \times [0, T] \rightarrow [0, 1]$  telle que  $\Psi_2(x, t) \equiv 0$  si  $d_t(x_0, x) \geq 32n\sqrt{K}r_2$  et  $\Psi_2(x, t) \geq \frac{1}{2}$  si  $d_t(x_0, x) \leq r_2$ . En intégrant (II.9) on trouve

$$\int_0^t \int_M \Psi_2 |\nabla^2 u|^2 \, d\mu_s \, ds = \frac{1}{2} \int_0^t \int_M \Psi_2 \square (1 - |\nabla u|^2) \, d\mu_s \, ds.$$

Si  $w = 1 - |\nabla u|^2$ , on a en particulier  $-\delta \leq w \leq \delta$  sur  $B_t(x_0, r_1)$  et  $t \leq r_1^2$ , ainsi en procédant comme plus haut

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_M \Psi_2 |\nabla^2 u|^2 \, d\mu_s \, ds &\leq \frac{1}{2} \int_M (\square(\Psi_2 w) + w \square \Psi_2 - 2w \partial_s \Psi_2) \, d\mu_s, \\ &\leq \frac{1}{2} (\partial_s \int_M \Psi_2 w \, d\mu_s + \int_M \Psi_2 R_g(s) w \, d\mu_s \\ &\quad + \delta \int_M (-\square \Psi_2 - 2\partial_s \Psi_2) \, d\mu_s), \end{aligned}$$

puisque  $\square \Psi_2 \leq 0$ ,  $\partial_s \Psi_2 \leq 0$ ,

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{2} (\partial_s \int_M \Psi_2 w \, d\mu_s + \frac{n(n-1)K}{s} \int_M \Psi_2 w \, d\mu_s \\ &\quad + C\delta r^n \sup |\partial_s \Psi_2|). \end{aligned}$$

On suppose maintenant que  $2t \leq T$  et on définit  $\phi : [0, 2t] \rightarrow [0, 1]$  en posant  $\phi(s) = 1$  si  $s \leq t$  et  $\phi(s) = \frac{2t-s}{t}$  si  $t \leq s \leq 2t$ . On trouve

$$\begin{aligned} \int_0^{2t} \int_M \phi \Psi_2 \square w \, d\mu_s \, ds &\leq \frac{1}{2} \left( \int_0^{2t} \phi \partial_s \int_M \Psi_2 w \, d\mu_s \, ds + n(n-1)K \int_0^{2t} \frac{1}{s} \int_M \Psi_2 w \, d\mu_s \, ds \right. \\ &\quad \left. + C\delta r_2^{n-1} \sqrt{K} \sqrt{t} \right), \end{aligned}$$

puis, en intégrant par parties les 2 premiers termes

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{t} \int_t^{2t} \int_M \Psi_2 w \, d\mu_s \, ds + \frac{n(n-1)K}{2t} \int_0^{2t} \int_M \Psi_2 w \, d\mu_s \, ds \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t \frac{K}{s^2} \left( \int_0^s \int_M \Psi_2 w \, d\mu_u \, du \right) \, ds + C\delta r_2^{n-1} \sqrt{K} t \right), \end{aligned}$$

l'estimation sur  $\int_0^s \Psi_2 |w|$  obtenue en (i) permettant alors de conclure

$$\int_0^t \int_{B_t(x_0, r_2)} \Psi_2 |\nabla^2 u|^2 \, d\mu_s \, ds \leq C\delta r_2^{n-\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{4}},$$

d'où le (ii) de l'énoncé (quitte à ajuster à nouveau le choix de  $\delta$ ).

(iii) On choisit enfin  $r_3 \leq \frac{r_2}{32n\sqrt{K}}$  et, toujours grâce au lemme II.3.12,  $\Psi_3 : M \times [0, T] \rightarrow [0, 1]$  telle que  $\Psi_3(x, t) \equiv 0$  si  $d_t(x_0, x) \geq 32n\sqrt{K}r_3$  et  $\Psi_3(x, t) \geq \frac{1}{2}$  si  $d_t(x_0, x) \leq r_3$ . On intègre cette fois (II.10), d'où

$$\begin{aligned} \int_M \Psi_3 s |\nabla^3 u|^2 \, d\mu_s &\leq \frac{1}{2} \int_M \Psi_3 s \square |\nabla^2 u|^2 \, d\mu_s + CK \int_M \Psi_3 |\nabla^2 u|^2 \, d\mu_s, \\ &\leq \frac{s}{2} \partial_s \int_M \Psi_3 |\nabla^2 u|^2 \, d\mu_s + \int_M s |\nabla^2 u|^2 (-\partial_s \Psi_3) \, d\mu_s \\ &\quad + CK \int_M \Psi_3 |\nabla^2 u|^2 \, d\mu_s, \\ &\leq \frac{s}{2} \partial_s \int_M \Psi_3 |\nabla^2 u|^2 \, d\mu_s + C\delta r^{n-1} \sqrt{Kt} + CK \int_M \Psi_3 |\nabla^2 u|^2 \, d\mu_s, \end{aligned}$$

puisque  $|\nabla^2 u|^2 \leq \frac{\delta}{s}$  pour  $s \leq \epsilon_0^2 r_0^2$ ,  $d_s(x_0, x) \leq \frac{r_0}{4}$ . Or, en supposant maintenant  $4t \leq T$  et en intégrant par parties comme en (ii) on trouve

$$\int_0^{2t} \phi s \partial_s \int_M \Psi_3 |\nabla^2 u|^2 \, d\mu_s \, ds \leq \int_t^{2t} \int_M \Psi_3 |\nabla^2 u|^2 \, d\mu_s \, ds$$

d'où finalement

$$\int_0^t \int_{B_t(x_0, r_3)} \Psi_3 s |\nabla^3 u|^2 \, d\mu_s \, ds \leq C\delta r_3^{n-\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{4}},$$

d'où le (iii) de l'énoncé (quitte à ajuster le choix de  $\delta$  encore une fois).  $\square$

La preuve de la proposition II.3.7 découle alors des lemmes II.3.10 et II.3.15 par de simples vérifications.

*Preuve de la proposition II.3.7.* Soit  $\epsilon_0 = \epsilon(n, K, v_0, \delta)$  fourni par le lemme II.3.10,  $\epsilon_1 = \epsilon(n, K, v_0, \delta)$  fourni par le lemme II.3.15 puis  $\epsilon = \min(\epsilon_0, \epsilon_1)$ . Le lemme II.3.10 garantit l'existence de solutions  $u_i : B_0(x_0, \epsilon r_0) \times [0, \epsilon^4 r_0^2] \rightarrow \mathbb{R}$  pour  $1 \leq i \leq m$  avec

$$|\nabla u_i \cdot \nabla u_j - \delta_{i,j}| \leq \delta, \quad |\nabla^2 u_i|^2 \leq \frac{\delta}{t}, \quad |\nabla^2 u_i| \leq \frac{\delta}{t} \quad (\text{II.28})$$

pour  $(x, t) \in B_0(x_0, \frac{\epsilon r_0}{4}) \times [0, \epsilon^4 r_0^2]$ . De plus, pour tout  $r \leq \frac{\epsilon^2 r_0}{4}$  on a grâce au lemme II.3.15

$$\int_0^t \int_{B_s(x_0, r)} s |\nabla^3 u_i|^2 \, d\mu_s \, ds \leq \delta r^{n-1} t^{\frac{1}{4}}.$$

Grâce à une intégration par parties, on trouve

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{B_s(x_0, r)} |\nabla^3 u_i| \, d\mu_s \, ds &= \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^t \int_{B_s(x_0, r)} \sqrt{s} |\nabla^3 u_i| \, d\mu_s \, ds \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{1}{s^{\frac{3}{2}}} \int_0^s \int_{B_u(x_0, r)} \sqrt{u} |\nabla^3 u_i| \, d\mu_u \, du, \end{aligned}$$

puis, par Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} \int_0^s \int_{B_u(x_0, r)} \sqrt{u} |\nabla^3 u_i| \, d\mu_u \, du &\leq Cr^{\frac{n}{2}} \sqrt{s} \sqrt{\int_0^s \int_{B_u(x_0, r)} u |\nabla^3 u_i|^2 \, d\mu_u \, du} \\ &\leq C\sqrt{\delta} r^{n-\frac{1}{4}} t^{\frac{5}{8}}. \end{aligned}$$

d'où finalement

$$\int_0^s \int_{B_s(x_0, r)} |\nabla^3 u_i| \, d\mu_s \, ds \leq C\sqrt{\delta} r^n. \quad (\text{II.29})$$

(II.28) et (II.29) signifient en particulier que  $x_0$  possède un  $(m, \sqrt{\delta})$ -système de coordonnées régularisées pour  $t \leq \delta \epsilon^2 r_0^2$ .  $\square$

On conclut ce paragraphe avec le lemme de continuité suivant.

**Lemme II.3.16.** *Il existe  $C(n) > 0$  avec la propriété suivante. Si  $g(t)$  est un flot de Ricci sur  $M^n \times [0, T]$  satisfaisant aux hypothèses de décroissance (I.1), avec en plus  $\text{Rc } g(x, 0) \geq -1$  pour tout  $x \in M$ , et si  $(x, \underline{t})$  possède un  $(m, \delta)$ -système de coordonnées régularisées, alors  $(x, t)$  possède encore un  $(m, C\delta)$ -système de coordonnées régularisées pour  $\underline{t} \leq t \leq (1 + \frac{1}{3200n^2K})\underline{t}$ .*

*Preuve du lemme II.3.16.* Soit  $\{u_i : B_0(x, \frac{\sqrt{\underline{t}}}{\delta}) \times [0, \underline{t}] \rightarrow \mathbb{R}\}_{1 \leq i \leq m}$  un  $(m, \delta, \frac{1}{\delta})$ -système de coordonnées régularisées en un point  $(x, \underline{t}) \in M \times [0, T]$ . On prolonge chaque  $u_i$  en posant  $\tilde{u}_i \equiv u_i$  sur  $B_0(x, \frac{\sqrt{\underline{t}}}{\delta}) \times [0, \underline{t}]$ ,  $\tilde{u}_i(y, t) = u_i(y, \underline{t})$  pour  $(y, t) \in S_0(x, \sqrt{\underline{t}}) \times [\underline{t}, T]$  et  $\square \tilde{u}_i \equiv 0$  sur  $B_0(x, \frac{\sqrt{\underline{t}}}{\delta}) \times ]\underline{t}, T]$ . D'après le lemme II.3.9 on a pour une constante  $C(n)$ ,

$$|\nabla \tilde{u}_i| \leq 2, \quad |\nabla^2 \tilde{u}_i|^2 \leq \frac{CK}{t}, \quad t |\nabla^3 \tilde{u}_i|^2 \leq \frac{C}{s}$$

sur  $B_0(x, \frac{3}{4}) \times [t, (1 + C^{-2})t]$ . De plus

$$\begin{aligned} \square |\nabla^2 \tilde{u}_i|^2 &\leq C(n) |\text{Rm } g| |\nabla^2 \tilde{u}_i|^2 - 2 |\nabla^3 \tilde{u}_i|^2, \\ \square |\nabla^3 \tilde{u}_i|^2 &\leq C(n) (|\text{Rm } g| |\nabla^3 \tilde{u}_i|^2 + |\nabla \text{Rm } g| |\nabla^2 \tilde{u}_i| |\nabla^3 \tilde{u}_i|), \end{aligned}$$

donc on peut écrire

$$\square (|\nabla^2 \tilde{u}_i|^2 + \frac{t}{K} |\nabla^3 \tilde{u}_i|^2) \leq C(n) (|\text{Rm } g| + \sqrt{\frac{t}{K}} |\nabla \text{Rm } g|) (|\nabla^2 \tilde{u}_i|^2 + \frac{t}{K} |\nabla^3 \tilde{u}_i|^2).$$

Si on pose  $v \equiv |\nabla^2 \tilde{u}_i|^2 + \frac{t}{K} |\nabla^3 \tilde{u}_i|^2$ , on a  $\sup_{B_0(x, 1)} v(\cdot, t) \leq \frac{2\delta^2}{t}$ . D'autre part  $|\text{Rm } g| + \sqrt{\frac{t}{K}} |\nabla \text{Rm } g| \leq \frac{K}{s}$  et enfin  $v(y, s) \leq \frac{K}{s}$ . Si  $t \leq \frac{1}{1600n^2K}$  et  $x' \in B_0(x, \frac{\sqrt{\underline{t}}}{2})$ ,  $B_t(x', \frac{3\sqrt{\underline{t}}}{4}) \subset B_0(x, \sqrt{\underline{t}})$ . Moyennant mise à l'échelle, le lemme B.0.1 s'applique sur  $B_t(x', \frac{\sqrt{\underline{t}}}{2})$  et fournit  $\epsilon = \epsilon(n, K, \delta)$  tel que pour  $t \leq s \leq (1 + \epsilon^2)t$ , on ait  $v(x', s) \leq \frac{4\delta^2}{t}$  soit

$$|\nabla^2 \tilde{u}_i|^2 \leq \frac{4\delta^2}{s}, \quad s |\nabla^3 \tilde{u}_i|^2 \leq \frac{4\delta^2}{s} \quad (\text{II.30})$$

pour tout  $(x', s) \in B_0(x, \sqrt{\underline{t}}) \times ]0, (1 + \epsilon^2)t]$ . Enfin

$$\partial_t (\nabla \tilde{u}_i \cdot \nabla \tilde{u}_j) = 2\text{Rc } g(\nabla \tilde{u}_i, \nabla \tilde{u}_j) + \nabla(\Delta \tilde{u}_i) \cdot \nabla \tilde{u}_j + \tilde{u}_i \cdot \nabla(\Delta \tilde{u}_j)$$

et donc

$$|\partial_t (\nabla \tilde{u}_i \cdot \nabla \tilde{u}_j)| \leq 2n |\text{Rm } g| |\nabla \tilde{u}_i| |\nabla \tilde{u}_j| + |\nabla^3 \tilde{u}_i| |\nabla \tilde{u}_j| + |\nabla \tilde{u}_i| |\nabla^3 \tilde{u}_j|.$$

La conclusion est immédiate en prenant (II.30) en compte.  $\square$

### II.3.3 Analyse des équations d'évolution de la courbure en présence d'une structure produit

Dans ce paragraphe, on établit la préservation en temps court d'une borne sur la norme du tenseur de Ricci par un flot de Ricci de dimension  $n$  satisfaisant aux hypothèses de décroissance I.1, et possédant au voisinage de tout point  $(x, t)$  un système de  $n - 3$  fonctions coordonnées régularisées telles que construites au paragraphe II.3.2. Il s'agit essentiellement d'appliquer les résultats du paragraphe I.2 (contrôle des solutions de l'équation de la chaleur, avec un "terme source") aux équations d'évolution de la courbure établies au paragraphe II.3.1.

**Préservation d'une borne sur la norme du tenseur de Ricci** Pour la clarté de l'exposé, on présente le résultat de ce paragraphe (proposition II.3.17 ci-dessous), sous forme d'un résultat général sur les solutions  $v : M \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$  d'une équation aux dérivées partielles de la forme

$$(\partial_t - \Delta)v \leq Av^{1+\frac{1}{\alpha}} + fv$$

où  $\alpha, A > 0$  sont des constantes et  $f : M \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction lisse satisfaisant aux bornes

$$f(x, t) \leq \frac{\delta^2}{t}, \quad \int_0^t \int_{B_t(x, \sqrt{t})} f \, d\mu_s \, ds \leq \delta t^{\frac{n}{2}}. \quad (\text{II.31})$$

pour un certain  $\delta > 0$ . On applique le résultat à l'équation (i) du lemme II.3.5 décrivant l'évolution de la norme du tenseur de Ricci dans le corollaire II.3.18 qui suit.

**Proposition II.3.17.** *Il existe des constantes  $\delta_0(n, K, \alpha, A) > 0$  et  $\Lambda(n, K, \alpha, A)$  avec la propriété suivante. Soit  $g(t)$  un flot de Ricci défini sur  $M^n$  pour  $0 \leq t \leq T$ , satisfaisant aux hypothèses (I.1), et soit  $v : M \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$  une solution lisse de l'équation*

$$(\partial_t - \Delta)v \leq Av^{1+\frac{1}{\alpha}} + fv, \quad (\text{II.32})$$

où  $A > 0$  est une constante et  $f : M \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction lisse qui satisfait aux bornes

$$f(x, t) \leq \frac{\delta^2}{t}, \quad \int_0^t \int_{B_t(x, \sqrt{t})} f \, d\mu_s \, ds \leq \delta t^{\frac{n}{2}},$$

pour tout  $(x, t) \in M \times [0, T]$  tel que  $B_t(x, \sqrt{t})$  soit relativement compacte dans  $M$ , avec  $\delta \leq \delta_0$ . On suppose de plus que  $v$  satisfait à

$$v(x, 0) \leq 1, \quad v(x, t) \leq \left(\frac{K}{t}\right)^\alpha,$$

pour  $x \in M$  et  $0 < t \leq T$ . Alors on a

$$v(x, t) \leq \left(\frac{\Lambda}{\rho_0(x)}\right)^{2\alpha}$$

pour tout  $(x, t) \in M \times [0, T]$ , où

$$\rho_0(x) = \sup\{0 \leq r \leq 1 \mid B_0(x, r) \text{ est relativement compacte dans } M\}.$$



**Corollaire II.3.18.** *Il existe  $k(n, K)$  et  $\delta(n, K)$  avec la propriété suivante. Soit  $g(t)$  un flot de Ricci défini pour  $0 \leq t \leq T$  sur une variété lisse  $M^n$  de dimension  $n$ , satisfaisant aux hypothèses (I.1), avec en plus la condition initiale*

$$|\text{Rc } g(x, 0)| \leq 1.$$

*Si  $U \subset M$  est un ouvert relativement compact tel que tout  $(x, t) \in U \times [0, T]$  possède un  $(\delta, n-3)$ -système de coordonnées régularisées. Alors on a*

$$|\text{Rc } g(x, t)| \leq \frac{k}{\rho_0^U(x)^2}$$

pour  $(x, t) \in M \times [0, T]$ , où

$$\rho_0^U(x) = \sup \{0 \leq r \leq 1 \mid B_0(x, r) \text{ est relativement compacte dans } U\}.$$

*Preuve de la proposition II.3.17.* Soit  $\Lambda > 1$  une constante, dont la valeur sera fixée au cours de la preuve. Soit  $0 < t_0 \leq T$  maximal tel que l'on ait  $v(x, t) \leq \left(\frac{\Lambda}{\rho_0^U(x)}\right)^{2\alpha}$  sur  $U \times [0, t_0]$ . Si  $t_0 < T$ , il existe  $x_0 \in U$  tel que  $v(x_0, t_0) = \left(\frac{\Lambda}{\rho_0^U(x_0)}\right)^{2\alpha}$ . On pose  $\rho = \rho_0^U(x_0)$ , si bien que la boule  $B_0(x_0, \rho)$  est relativement compacte dans  $M$ . Notons que puisque par hypothèse,  $v(x_0, t_0) \leq \left(\frac{K}{t}\right)^\alpha$ , on a  $t_0 \leq \frac{K}{\Lambda^2} \rho^2$ . En particulier, grâce au contrôle de la contraction des distances du corollaire I.1.3, on trouve que  $B_t(x_0, \frac{\rho}{4})$  reste incluse dans  $\Omega = B_0(x_0, \frac{\rho}{2})$  (et donc relativement compacte dans  $U$ ) si on suppose par exemple  $\Lambda \geq 40nK$ . Sur  $\Omega \times [0, t_0]$ , on a aussi  $\rho_0^U(x) \geq \frac{\rho}{2}$  et donc  $v(x, t) \leq \left(\frac{2\Lambda}{\rho}\right)^{2\alpha}$ . On définit alors  $w : U \times [0, t_0]$  en posant  $w = e^{-\frac{4A\Lambda^2 t}{\rho^2}} v$ . On a alors, sur  $\Omega \times [0, t_0]$ ,

$$\begin{aligned} \square w &\leq \left(-\frac{4A\Lambda^2}{\rho^2} + Av^{\frac{1}{\alpha}}\right) w + e^{-\frac{4A\Lambda^2 t}{\rho^2}} f v, \\ &\leq \left(\frac{2\Lambda}{\rho}\right)^{2\alpha} f(x, t). \end{aligned}$$

On applique alors la proposition I.2.1 majorant les solutions de l'équation de la chaleur avec un terme source à  $w$  afin d'en déduire

$$w(x_0, t_0) \leq C_{I.2.1} \left(1 + 4^{2\alpha} \left(\frac{\sqrt{K}}{\Lambda} e^{-\frac{\Lambda^2}{C_{I.2.1}K}} + \delta\right) \left(\frac{\Lambda}{\rho}\right)^{2\alpha}\right),$$

soit

$$v(x_0, t_0) \leq C_{I.2.1} e^{4AK} \left(\frac{1}{\Lambda^{2\alpha}} + 4^{2\alpha} \frac{\sqrt{K}}{\Lambda} e^{-\frac{\Lambda^2}{C_{I.2.1}K}} + 4^{2\alpha} \delta\right) \left(\frac{\Lambda}{\rho}\right)^{2\alpha}$$

Finalement, pour un choix approprié de  $\delta_0(n, K, \alpha, A)$  et  $\Lambda(n, K, \alpha, A)$  et pour  $\delta \leq \delta_0$ , on trouve

$$v(x_0, t_0) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{\Lambda}{\rho}\right)^{2\alpha}$$

d'où une contradiction si  $t_0 < T$ . On a donc  $v(x, t) \leq \left(\frac{\Lambda}{\rho_0^U(x)}\right)^{2\alpha}$  sur  $U \times [0, T]$ , d'où la proposition.  $\square$

*Preuve du corollaire II.3.18.* On définit pour  $(x, t) \in U \times [0, T]$

$$f(x, t) = \inf \sup_{1 \leq i \leq n-3} |\nabla^3 u_i|(x, t)$$

où l'infimum est pris sur tous les systèmes de  $n-3$  germes en  $(x, t)$  de fonctions lisses  $u_1, \dots, u_{n-3}$  avec  $\sup_{1 \leq i, j \leq n-3} |\nabla u_i \cdot \nabla u_j - \delta_{ij}| \leq \frac{1}{10}$ . L'existence, en chaque point  $(x, t) \in U \times [0, T]$ , d'un  $(n-3, \delta)$ -système de coordonnées régularisées fait que  $f$  satisfait les conditions de l'énoncé de la proposition II.3.17. D'autre part, d'après le corollaire II.3.5 l'équation d'évolution de la norme du tenseur de courbure est donnée par

$$\square |\text{Rc } g(t)|^2 \leq C(|\text{Rc } g(t)|^3 + f |\text{Rc } g(t)|^2).$$

La preuve du corollaire découle donc directement de l'application de la proposition II.3.17 pour  $v(x, t) = |\text{Rc } g(t)|^2$  et  $\alpha = 1$ .  $\square$

On conclut ce paragraphe par un lemme élémentaire qui interviendra dans la preuve de la proposition III.2.3, et qui permet, quand est donnée une borne sur la norme du tenseur de Ricci au temps  $t$ , garantit un temps de non-doublement contrôlé pour cette quantité.

**Lemme II.3.19.** *Soit  $g(t)$  un flot de Ricci défini pour  $0 \leq t \leq T$  sur une variété lisse  $M^n$  satisfaisant aux estimations (I.1). Alors, si pour  $0 < \underline{t} \leq T$  fixé on a  $|\text{Rc } g(x, \underline{t})| \leq k$  ( $k \geq 1$ ) pour tout  $x \in M$ , on a encore  $|\text{Rc } g(x, s)| \leq \frac{4k}{\rho_{\underline{t}}(x)^2}$  pour tout  $t \leq s \leq (1 + \frac{1}{2048n^2K})\underline{t}$  et  $x \in M$ , où  $\rho_{\underline{t}}(x) = \inf \{0 < r \leq 1 \mid B_t(x, r) \text{ est relativement compacte dans } M\}$ .*

*Démonstration.* On fixe  $U$  une partie relativement compacte de  $M$ , et  $\rho_{\underline{t}}(x) = \inf \{0 < r \leq 1 \mid B_t(x, r) \text{ est relativement compacte dans } M\}$ . On considère alors  $\underline{t} < t \leq T$  maximal tel que

$$\sup_{M \times [\underline{t}, t]} |\text{Rc } g(x, s)| \rho_{\underline{t}}(x)^2 \leq 4k,$$

puis  $x \in M$  tel que  $|\text{Rc } g(x, t)| = \frac{4k}{\rho^2}$ , où  $\rho = \rho_{\underline{t}}(x)$  (on a donc  $\frac{\rho^2}{\underline{t}} \geq \frac{4k}{nK}$ ). Par définition,  $B_{\underline{t}}(x, \rho)$  est relativement compacte dans  $M$  et  $|\text{Rc } g(y, s)| \leq \frac{16k}{\rho^2}$  sur  $B_{\underline{t}}(x, \rho) \times [\underline{t}, t]$ . Or l'équation d'évolution du tenseur de Ricci qui implique en particulier

$$\begin{aligned} \square |\text{Rc } g|^2 &\leq |\text{Rm } g| |\text{Rc } g|^2, \\ &\leq \frac{K}{\underline{t}} |\text{Rc } g|^2. \end{aligned}$$

Le lemme B.0.1 s'applique donc pour  $u \equiv |\text{Rc } g|^2$  sur  $B_{\underline{t}}(x, \rho) \times [\underline{t}, T]$  et si  $t \leq \left(1 + \frac{\rho}{40n\sqrt{K\underline{t}}}\right)\underline{t}$ , il garantit que

$$|\text{Rc } g(x, t)|^2 \leq e^{\frac{K}{\underline{t}}(t-\underline{t})} (k^2 + 128 \left(\frac{16k}{\rho^2}\right)^2 \frac{t-\underline{t}}{\rho^2}),$$

en particulier, si  $t \leq \left(1 + \frac{1}{2048n^2K}\right)\underline{t}$ ,

$$\begin{aligned} &\leq e^{\frac{1}{2048n^2}} \left(k^2 + \frac{1}{4nk} \left(\frac{4k}{\rho^2}\right)^2\right) \\ &< \left(\frac{16k}{\rho^2}\right)^2, \end{aligned}$$

d'où une contradiction.  $\square$

## Chapitre III

# Régularisation locale d'une métrique par le flot de Ricci

### III.1 Décroissance de la courbure pour un flot non-effondré à courbure minorée

On commence par rappeler un résultat classique de Perelman sur les solutions anciennes du flot à opérateur de courbure positif ou nul, et son extension par R. Bamler, E. Cabezas-Rivas, B. Wilking aux solutions anciennes satisfaisant à la condition  $IC_1 g(t) \geq 0$ . On se souvient que le volume asymptotique d'une variété riemannienne pointée  $(M, g, x_0)$  complète est défini par

$$AVR_g(x_0) = \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{B_g(x_0, r)}{r^n}$$

**Lemme III.1.1** (Perelman 2002, [27], 11.4). *Soit  $g(t)$  un flot de Ricci complet de dimension  $n$  sur  $M^n \times ]-\infty, 0]$  à courbure bornée et à opérateur de courbure positif ou nul. Si  $g(t)$  n'est pas le flot plat, c'est à dire la solution statique donnée par la métrique euclidienne sur  $\mathbb{R}^n$ , on a  $AVR_{g(t)}(x) = 0$  pour tout  $x \in M$  et  $t \leq 0$ .*

*Remarque III.1.2* (Dimension 3). C'est une conséquence du théorème de pincement de Hamilton-Ivey qu'en dimension 3, tout flot de Ricci complet sur  $M^3 \times ]-\infty, 0]$  est à opérateur de courbure positif ou nul (voir [14], 6.50 et [12]). Ainsi si  $g(t)$  n'est pas le flot plat, on a donc  $AVR_{g(t)}(x) = 0$  pour tout  $x \in M$  et  $t \leq 0$ .

**Lemme III.1.3** (R. Bamler, E. Cabezas-Rivas, B. Wilking 2017, [18], lemme 4.2). *Soit  $g(t)$  un flot de Ricci complet de dimension  $n$  sur  $M^n \times ]-\infty, 0]$  à courbure bornée satisfaisant à la condition  $IC_1 g(t) \geq 0$ . Si  $g(t)$  n'est pas le flot plat, on a  $AVR_{g(t)}(x) = 0$  pour tout  $x \in M$  et  $t \leq 0$ .*

Ces résultats permettent de contrôler la décroissance de la norme de l'opérateur de courbure pour un flot non-effondré, avec  $IC_1 g(t)$  minoré si  $n \geq 4$ .

**Proposition III.1.4.** *Il existe une constante  $K(n, v)$  avec la propriété suivante. Si  $g(t)$  est un*

flot de Ricci sur une variété  $(M^n, x_0)$  de dimension  $n$  pour  $0 \leq t \leq 1$  tel que

- a)  $B_t(x_0, 1)$  est relativement compacte dans  $M$ ,
- b)  $\text{vol}_t B_t(x, r) \geq vr^n$  pour tout  $x \in M$  tel que  $B_t(x, r) \subset B_t(x_0, 1)$  et  $0 < r \leq \sqrt{t}$ ,
- c)  $\lambda_{\text{IC}_1}^-(x, t) \geq -\frac{1}{t}$  pour tout  $x \in M$  si  $n \geq 4$ ,

pour tout  $0 \leq t \leq 1$ , alors

$$|\text{Rm } g(x, t)| \leq \frac{K}{t}, \quad \text{inj}_{g(t)} x \geq \sqrt{\frac{t}{K}},$$

pour  $x \in B_t(x_0, \frac{1}{2})$  et  $0 \leq t \leq 1$ .

La preuve fait intervenir une technique de sélection de points (voir [27], 10.1 ou [22], 31.1 et 32.2) que l'on utilise sous la forme suivante

**Lemme III.1.5.** *Soit  $g(t)$  un flot de Ricci défini pour  $0 \leq t \leq 1$  sur une variété lisse  $M$  de dimension  $n$  tel que  $B_t(x_0, 1)$  est relativement compacte dans  $M$  pour  $0 \leq t \leq 1$ . Si le point  $(x, t) \in M \times [0, 1]$  est tel que*

$$\begin{aligned} x &\in B_t(x_0, \frac{1}{2}), \\ |\text{Rm } g(x, t)| &= \frac{Q}{t}, \end{aligned}$$

alors pour tout  $A \leq \frac{\sqrt{Q}}{8}$ , il existe un autre point  $(\bar{x}, \bar{t})$  avec les propriétés suivantes

$$\begin{aligned} \bar{t} &\leq t, \\ d_{\bar{t}}(x_0, \bar{x}) &< d_t(x_0, x) + \frac{2A}{\sqrt{Q}}, \\ \bar{Q} &\geq Q, \end{aligned}$$

où  $\bar{Q}$  est définie par  $|\text{Rm } g(\bar{x}, \bar{t})| = \frac{\bar{Q}}{\bar{t}}$ , et

$$|\text{Rm } g(x', t')| \leq \frac{4\bar{Q}}{t'},$$

pour tout  $(x', t')$  tel que  $0 \leq t' \leq \bar{t}$  et  $d_{t'}(x_0, x') < d_{\bar{t}}(x_0, \bar{x}) + A\sqrt{\frac{\bar{t}}{Q}}$ . Cette borne supérieure est en particulier valable sur le domaine parabolique  $B_{\bar{t}}(\bar{x}, \frac{A}{2}\sqrt{\frac{\bar{t}}{Q}}) \times [\bar{t}(1 - \frac{A^2}{100nQ}), \bar{t}]$ , qui lui même est contenu dans  $\cup_{t=0}^1 B_t(x_0, 1) \times \{t\}$ .

*Preuve de la proposition III.1.4.* On considère une suite de flots  $g_i(t)$  définis pour  $0 \leq t \leq 1$  sur une variété lisse  $(M_i, x_{0,i})$  de dimension  $n$  et contredisant les conclusions de l'énoncé, c'est à dire que l'on a d'une part

$$\text{vol}_{g_i(t)} B_t(x, r) \geq vr^3, \quad \text{IC}_1 g(x, t) \geq -\frac{1}{t} \quad (\text{si } n \geq 4)$$

pour tout  $(x, t) \in M_i \times [0, 1]$  avec  $d_t(x_{0,i}, x) < 1 - r$  et  $r \leq \sqrt{t}$ , et d'autre part  $(x_i, t_i) \in M_i \times [0, 1]$  avec  $d_{t_i}(x_{0,i}, x_i) \leq \frac{1}{2}$  et

$$(i) \quad |\text{Rm } g_i(x_i, t_i)| > \frac{K_i}{t_i} \quad \text{ou bien} \quad (ii) \quad \text{inj}_{g_i(t_i)} x_i < \sqrt{\frac{K_i}{t_i}}.$$

Dans le cas (ii), le résultat classique de Cheeger-Gromov-Taylor<sup>1</sup> implique qu'il existe nécessairement un point  $x'_i \in B_{t_i}(x_i, \frac{1}{\iota(n, v_0)} \sqrt{\frac{t_i}{K_i}})$  tel que  $|\text{Rm } g(x, t)| > \frac{\iota(n, v_0)^2 K_i}{t_i}$ . On est donc ramené au cas (i) quitte à remplacer  $K_i$  par  $\iota(n, v)^2 K_i$  et  $x_i$  par  $x'_i$  (pour  $i$  suffisamment grand on a  $d_{t_i}(x_{0,i}, x_i) \leq \frac{11}{20}$  par exemple). Le lemme III.1.5, appliqué pour  $A_i = \frac{\sqrt{K_i}}{8}$  fournit une seconde suite de points  $(\bar{x}_i, \bar{t}_i) \in M_i \times [0, 1]$  avec  $\bar{t}_i \leq t_i$  et  $\bar{x}_i \in B_{\bar{t}_i}(x_{0,i}, \frac{3}{4})$  tel que, pour  $\bar{K}_i = \bar{t}_i |\text{Rm } g_i(\bar{x}_i, \bar{t}_i)|$ , on a

$$\bar{K}_i \geq K_i, \quad |\text{Rm } g_i(x, t)| \leq \frac{4\bar{K}_i}{t}$$

pour  $(x, t) \in B_{\bar{t}_i}(\bar{x}_i, \frac{\sqrt{K_i}}{16} \sqrt{\frac{\bar{t}_i}{K_i}}) \times [\bar{t}_i - \frac{K_i \bar{t}_i}{800n}, \bar{t}_i]$ . On considère alors la suite des flots mis à l'échelle

$$h_i(x, s) = \frac{\bar{K}_i}{\bar{t}_i} g_i(x, \bar{t}_i + \frac{s\bar{t}_i}{\bar{K}_i})$$

(qui satisfont donc en particulier  $|\text{Rm } h_i(\bar{x}_i, 0)| = 1$ ) sur  $M_i \times [-\frac{K_i}{800n}, 0]$ . Pour tout  $r > 0$  fixé, cette suite satisfait à

$$|\text{Rm } h_i(x, s)| \leq \frac{4}{1 + \frac{s}{\bar{K}_i}} \leq 8 \quad (\text{III.1})$$

$$\text{IC}_1 h_i(x, s) \geq -\frac{1}{2K_i} \quad (\text{si } n \geq 4),$$

sur  $B_{h_i(0)}(\bar{x}_i, r)$  dès que  $\frac{\sqrt{K_i}}{16} > r$ , ainsi qu'à

$$\text{vol } B_{h_i(0)}(\bar{x}_i, r) \geq vr^3 \quad (\text{III.2})$$

dès que  $\sqrt{K_i} > r$ . De plus, le théorème de Cheeger-Gromov-Taylor, (III.1) et (III.2) implique une minoration du rayon d'injectivité au temps 0

$$\text{inj}_{h_i(0)} \bar{x}_i \geq \frac{\iota(n, v)}{2}.$$

Ceci, en conjonction avec la borne de courbure (III.1) et le fait que  $K_i \rightarrow +\infty$ , permet d'appliquer le théorème de compacité de Hamilton à la suite des flots  $h_i(s)$  pointés en  $(\bar{x}_i, 0)$  et d'extraire une limite qui est un flot  $h(s)$  complet, ancien sur une variété lisse  $(M, \bar{x})$ .

(III.2) implique que pour tout  $r > 0$ ,  $\text{vol}_{h(0)} B_0(\bar{x}, r) \geq vr^n$ , c'est à dire que le volume asymptotique de  $h(0)$  est non nul. D'après le lemme III.1.3 et la remarque III.1.2, la seule possibilité est que  $(M, h(s))$  soit le flot plat sur  $\mathbb{R}^n$ . Cependant la suite des flots a été mise à l'échelle de façon à avoir  $|\text{Rm } h_i(\bar{x}_i, 0)| = 1$  ce qui implique  $|\text{Rm } h(\bar{x}, 0)| = 1$  pour le flot limite, d'où la contradiction.  $\square$

En dimension 3, la condition  $\text{IC}_1 g \geq 0$  coïncide avec la condition  $\text{Rc } g \geq 0$ . En dimension plus grande, on le sait, la première condition est strictement plus forte et il n'y a pas d'équivalent de la proposition III.1.4 pour un flot à courbure de Ricci minorée. On retrouve par contre un énoncé du même type en ajoutant aux hypothèses la présence d'une structure produit qui ramène essentiellement le problème à celui de la dimension 3.

1. Le théorème de Cheeger-Gromov-Taylor affirme qu'il existe une fonction  $\iota(n, v) > 0$  telle que si la boule  $B = B_g(x, r)$  est relativement compacte dans une variété riemannienne, et que l'on a  $\text{vol}_g B \geq vr^n$  et  $|\text{Rm } g| \leq \frac{1}{r^2}$  sur  $B$ , alors  $\text{inj}_g x \geq \iota r$ .

**Proposition III.1.6.** *Il existe  $K(n, v)$  et  $\epsilon(n, v, K_1) > 0$  avec les propriétés suivantes. Soit  $g(t)$  un flot de Ricci défini pour  $0 \leq t \leq T$  sur une variété lisse  $M^n$  de dimension  $n$ , satisfaisant aux hypothèses a priori*

$$|\text{Rm } g(x, t)| \leq \frac{K_1}{t}, \quad \text{inj}_{g(t)} x \geq \sqrt{\frac{t}{K_1}}, \quad \text{R}_{g(t)} \geq -1$$

ainsi que, pour tout  $0 \leq t \leq T$ , à

- a)  $B_t(x_0, 2)$  est relativement compacte dans  $M$ ,
- b)  $\text{vol}_t B_t(x, r) \geq vr^n$  pour tout  $x \in M$  tel que  $B_t(x, r) \subset B_t(x_0, 1)$  et  $0 < r \leq \sqrt{t}$ ,
- c) pour tout  $x \in B_t(x_0, 1)$ ,  $(x, t)$  possède un  $(n-3, \epsilon)$ -système de coordonnées régularisées.

$$|\text{Rm } g(x, t)| \leq \frac{K}{t}, \quad \text{inj}_{g(t)} x \geq \sqrt{\frac{t}{K}},$$

pour  $x \in B_t(x_0, \frac{1}{2})$  et  $0 \leq t \leq \epsilon^2$ .

*Démonstration.* On peut choisir pour la constante  $K$  de l'énoncé l'expression  $K = 2K(3, \frac{v}{2^{n-2}})$  provenant de la proposition III.1.4 en dimension 3. On se donne une suite de flots  $g_i(t)$  définis pour  $0 \leq t \leq T_i$  sur une variété lisse pointée  $(M_i^n, x_{0,i})$  de dimension  $n$  satisfaisant aux hypothèses de l'énoncé pour une suite  $\epsilon_i \rightarrow 0$  tel qu'il existe néanmoins une suite de points  $(x_i, t_i) \in M_i \times ]0, \epsilon_i^2]$  avec  $|\text{Rm } g_i(x_i, t_i)| \geq \frac{K}{t_i}$ . On considère la suite des flots mis à l'échelle

$$h_i(s) = \frac{1}{t_i} g(st_i)$$

centrés en  $x_i$ , définis sur  $M_i \times [0, 1]$ , qui sont tels que pour  $0 \leq s \leq 1$ , la boule  $B_{h_i(s)}(x_{0,i}, \frac{1}{\epsilon_i})$  est relativement compacte dans  $M_i$ , et qui satisfont encore aux estimations

$$|\text{Rm } h_i(x, s)| \leq \frac{K_1}{s}, \quad \text{inj}_{h_i(s)} x \geq \sqrt{\frac{s}{K_1}}, \quad \text{Rc } h_i(x, s) \geq -\frac{\epsilon_i^2}{s}, \quad \text{R}_{h_i(s)} \geq -1.$$

Le point  $(x_i, 1)$  possède (pour le flot  $h_i(s)$ ) un  $(n-3, \epsilon_i)$  système de coordonnées régularisées, c'est à dire qu'il existe  $n-3$  fonctions  $u_{k,i} : \tilde{B}_0(x_i, \frac{1}{\epsilon_i}) \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  ( $1 \leq k \leq n-3$ ) solutions de l'équation de la chaleur avec  $u_{k,i}(x_i, 0) = 0$  et

$$|\langle \nabla u_{k,i}, \nabla u_{l,i} \rangle - \delta_{k,l}| \leq \epsilon_i, \quad |\nabla^2 u_{k,i}|^2 \leq \frac{\epsilon_i}{s}, \quad |\nabla^3 u_{k,i}| \leq \frac{\epsilon_i}{s}.$$

Le théorème de compacité de Hamilton s'applique et permet d'extraire un flot limite  $h(s)$  complet défini pour  $0 < s \leq 1$  sur une variété différentielle  $M_\infty^n$  de dimension  $n$ , satisfaisant encore aux estimations  $|\text{Rm } h(s)| \leq \frac{K_1}{s}$  et  $\text{inj}_{h(s)} x \geq \sqrt{\frac{s}{K_1}}$ . De plus, grâce au théorème d'Arzela-Ascoli, on peut supposer que pour tout  $1 \leq k \leq n-3$ , la suite des  $u_{k,i}$  converge uniformément sur tout compact vers une fonction lisse  $u_{k,\infty} : M \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , solution de l'équation de la chaleur (couplée au flot  $h(s)$ ), avec  $u_{k,\infty}(x_i, 0) = 0$  avec

$$\langle \nabla u_{k,\infty}, \nabla u_{l,\infty} \rangle \equiv \delta_{k,l}, \quad \nabla^2 u_{k,\infty} \equiv 0.$$

En particulier, pour  $0 \leq k \leq n-3$ ,  $u_{k,\infty}$  est constante par rapport à la variable de temps, et on vérifie facilement que  $\text{Rc } h(s)(\nabla u_{k,\infty}, \nabla u_{k,\infty}) \equiv 0$ , ce qui implique que  $\nabla u_{k,\infty}$  est un champ de vecteurs constant par rapport à  $s$ . Soit alors  $N_\infty^3 \subset M$  la sous-variété de dimension 3 définie par  $N_\infty = \{x \in M, \mid u_{1,\infty}(x, 0) = \dots = u_{n-3,\infty}(x, 0) = 0\}$  et

$$\Phi : \begin{array}{ccc} N_\infty \times \mathbb{R}^{n-3} & \rightarrow & M \\ (x, r_1, \dots, r_{n-3}) & \mapsto & \phi_{1,r_1} \circ \dots \circ \phi_{n-3,r_{n-3}}(x) \end{array}$$

où  $\phi_{k,\cdot} : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$  désigne le flot champ de vecteurs  $\nabla u_{k,\infty}$ . Pour tout  $0 < s \leq 1$ , si  $\tilde{h}(s)$  désigne la métrique induite par  $h(s)$  sur  $N_\infty$ , l'application  $\Phi$  réalise une isométrie entre la métrique  $\tilde{h}(s) \oplus g_{\mathbb{R}^{n-3}}$  sur  $N_\infty \times \mathbb{R}^{n-3}$  et la métrique  $h(s)$  sur  $M$ . En particulier,  $\tilde{h}(s)$  est un flot de Ricci défini sur  $N_\infty$  pour  $0 < s \leq 1$ . L'hypothèse *b*) se traduit par  $\text{vol}_{\tilde{h}(s)}^3 B_{\tilde{h}(s)}(x, r) \geq \frac{v}{2^{n-2}} r^3$ , ce qui permet d'appliquer la proposition III.1.4 au flot  $\tilde{h}(s)$  et de conclure que  $|\text{Rm } \tilde{h}(s)| \leq \frac{K}{2s}$  sur  $N_\infty \times ]0, 1]$ , et donc  $|\text{Rm } h(s)| \leq \frac{K}{2s}$  sur  $M_\infty \times ]0, 1]$ . Mais d'autre part l'hypothèse selon laquelle  $|\text{Rm } g_i(t_i)| \geq \frac{K}{t_i}$  implique après passage à la limite  $|\text{Rm } h(x_i, 1)| \geq K$ , d'où la contradiction.  $\square$

## III.2 Régularisation locale d'une donnée initiale par le flot

### III.2.1 Régularisation locale sous des hypothèses de décroissance a priori

Les trois propositions de ce paragraphe constituent l'aboutissement du travail effectué dans les chapitres *I*, *II* et *III* et établissent, pour différentes conditions initiales et sous des hypothèses *a priori* de décroissance de la courbure de la forme

$$|\text{Rm } g(x, t)| \leq \frac{K_1}{t}, \quad \text{inj}_{g(t)} x \geq \sqrt{\frac{t}{K_1}},$$

des résultats du type de la proposition 0.12 de l'introduction.

Rappelons que si  $g(t)$  est un flot de Ricci défini pour  $0 \leq t \leq T$  sur une variété lisse  $M^n$  de dimension  $n$ , on définit

$$\begin{aligned} \rho_0(x) &= \sup \{0 < r \leq 1, \mid B_0(x, r) \text{ est relativement compacte dans } M\}, \\ (M)_r &= \{x \in M \mid \rho_0(x) > r\}. \end{aligned}$$

On définit aussi

$$\mathcal{M}_{A, \bar{t}} = \{(x, t) \in M \times [0, T] \mid 0 \leq t \leq \bar{t} \text{ et } \rho_0(x) > A\sqrt{t}\},$$

ainsi que, pour  $(x, t) \in \mathcal{M}_{A, T}$ ,

$$\rho_{A,0}(x, t) = \sup \{0 < r \leq 1, B_0(x, r + A\sqrt{t}) \text{ est relativement compacte dans } M\}.$$

La proposition qui suit intervient dans la preuve du théorème *B*. Elle est un cas particulier de la proposition III.2.2 qui énoncée au dessous.

**Proposition III.2.1.** *Il existe  $K(v)$ ,  $\epsilon(v, \delta)$  et  $A(v, \delta)$  avec les propriétés suivantes. Soit  $g(t)$  un flot de Ricci défini pour  $0 \leq t \leq T$  sur une variété lisse  $M^3$  de dimension 3, satisfaisant aux estimations a priori*

$$|\text{Rm } g(x, t)| \leq \frac{K_1}{t}, \quad \text{inj}_{g(t)} x \leq \sqrt{\frac{t}{K_1}},$$

ainsi qu'aux conditions sur la donnée initiale

- (i)  $\text{Rc } g(x, 0) \geq -\frac{1}{\rho_0(x)^2}$ ,
- (ii)  $\text{vol}_0 B_0(x, r) \geq vr^3$  pour tout  $0 < r \leq \rho_0(x)$ ,

pour tout  $x \in M$ . Alors

$$\begin{aligned} a) \operatorname{Rc} g(x, t) &\geq -\frac{\delta^2}{t}, \\ b) \operatorname{vol}_t B_t(x, r) &\geq (1 - \delta)vr^3, \text{ pour tout } 0 < r \leq \frac{1}{8}\rho_{0,A}(x, t) \end{aligned}$$

et

$$|\operatorname{Rm} g(x, t)| \leq \frac{K}{t}, \quad \operatorname{inj}_{g(t)} x \leq \sqrt{\frac{t}{K}},$$

pour tout  $(x, t) \in \mathcal{M}_{A,\epsilon^2}$ .

La proposition suivante intervient dans la preuve du théorème  $C$  qui généralise le théorème  $B$  aux dimensions  $n \geq 4$ , ainsi que dans celle du théorème  $E$ .

**Proposition III.2.2.** *Il existe  $K(n, v)$ ,  $k(n, v)$ , et  $\epsilon(n, v, \delta)$  et  $A(n, v, \delta, K_1)$  avec les propriétés suivantes. Soit  $\mathcal{C}$  l'un des trois cônes de courbure  $\operatorname{IC}_1$ ,  $\operatorname{IC}_2$ ,  $\operatorname{CO}$ . Soit  $g(t)$  un flot de Ricci défini pour  $0 \leq t \leq T$  sur une variété lisse  $M^n$  de dimension  $n$ , satisfaisant aux estimations a priori*

$$|\operatorname{Rm} g(x, t)| \leq \frac{K_1}{t}, \quad \operatorname{inj}_{g(t)} x \leq \sqrt{\frac{t}{K_1}},$$

ainsi qu'aux conditions sur la donnée initiale

$$\begin{aligned} (i) \lambda_{\mathcal{C}}^-(x, 0) &\geq -\frac{1}{\rho_0(x)^2}, \\ (ii) \operatorname{vol}_0 B_0(x, r) &\geq vr^n \text{ pour tout } 0 < r \leq \rho_0(x), \end{aligned}$$

pour tout  $x \in M$ . Alors

$$\begin{aligned} a) \lambda_{\mathcal{C}}^-(x, t) &\geq -\frac{k}{\rho_{A,0}(x, t)^2}, \\ b) \operatorname{vol}_t B_t(x, r) &\geq (1 - \delta)vr^n, \text{ pour tout } 0 < r \leq \frac{1}{32}\rho_{A,0}(x, t) \end{aligned}$$

et

$$|\operatorname{Rm} g(x, t)| \leq \frac{K}{t}, \quad \operatorname{inj}_{g(t)} x \geq \sqrt{\frac{t}{K}},$$

pour tout  $(x, t) \in \mathcal{M}_{A,\epsilon^2}$ .

La proposition qui suit intervient dans la preuve des théorèmes  $D$  et  $F$ .

**Proposition III.2.3.** *Il existe  $K(n, v)$ ,  $k(n, v)$ ,  $\epsilon(n, v, \delta)$  et  $A(n, v, \delta, K_1)$  avec les propriétés suivantes. Soit  $g(t)$  un flot de Ricci défini pour  $0 \leq t \leq T$  sur une variété lisse  $M^n$  de dimension  $n$ , satisfaisant aux estimations a priori*

$$|\operatorname{Rm} g(x, t)| \leq \frac{K_1}{t}, \quad \operatorname{inj}_{g(t)} x \leq \sqrt{\frac{t}{K_1}},$$



ainsi qu'aux conditions sur la donnée initiale

- (i)  $|\text{Rc } g(x, 0)| \leq \frac{1}{\rho_0(x)^2}$ ,
- (ii)  $\text{vol}_0 B_0(x, r) \geq vr^n$  pour tout  $0 < r \leq \rho_0(x)$ ,
- (iii) il existe un  $(n - 3, \epsilon)$ -éclatement en  $x$  à toutes les échelles inférieures à  $\rho_0(x)$  pour la métrique  $g(0)$ .

pour tout  $x \in M$ . Alors

- a)  $|\text{Rc } g(x, t)| \leq \frac{k}{\rho_{0,A}(x, t)^2}$ ,
- b)  $\text{vol}_t B_t(x, r) \geq (1 - \delta)vr^n$ , pour tout  $0 < r \leq \frac{1}{32}\rho_{0,A}(x, t)$
- c) il existe un  $(n - 3, \delta)$ -éclatement en  $x$  à toutes les échelles inférieures à  $\epsilon \rho_{0,A}(x, t)$  pour la métrique  $g(t)$ ,

et

$$|\text{Rm } g(x, t)| \leq \frac{K}{t}, \quad \text{inj}_{g(t)} x \geq \sqrt{\frac{t}{K}},$$

pour tout  $(x, t) \in \mathcal{M}_{A, \epsilon^2}$ .

Enfin, établir la conjecture 0.16 de l'introduction équivaudrait à démontrer le résultat de régularisation suivant.

**Conjecture III.2.4.** *Il existe  $K(n, v)$ ,  $k(n, v, K_1)$ ,  $\epsilon(n, v, \delta, K_1)$  et  $A(n, v, \delta, K_1)$  avec les propriétés suivantes. Soit  $g(t)$  un flot de Ricci défini pour  $0 \leq t \leq T$  sur une variété lisse  $M^n$  de dimension  $n$ , satisfaisant aux estimations a priori*

$$|\text{Rm } g(x, t)| \leq \frac{K_1}{t}, \quad \text{inj}_{g(t)} x \leq \sqrt{\frac{t}{K_1}},$$

ainsi qu'à

$$\int_0^t \int_{B_0(x_0, r)} \text{R}_{g(s)} \, d\mu_s \, ds \leq cr^{n-2}t, \quad (\text{III.3})$$

et aux conditions sur la donnée initiale

- (i)  $\text{Rc } g(x, 0) \geq -\frac{1}{\rho_0(x)}$ ,
- (ii)  $\text{vol}_0 B_0(x, r) \geq vr^n$  pour tout  $0 < r \leq \rho_0(x)$ ,
- (iii) il existe un  $(n - 3, \epsilon)$ -éclatement en  $x$  à toutes les échelles inférieures à  $\rho_0(x)$  pour la métrique  $g(0)$ .

pour tout  $x \in M$ . Alors

- a)  $\text{Rc } g(x, t) \geq -\delta \text{R}_{g(t)} - \frac{k}{\rho_{0,A}(x, t)^2}$ ,
- b)  $\text{vol}_t B_t(x, r) \geq (1 - \delta)vr^n$ , pour tout  $0 < r \leq \frac{1}{32}\rho_{0,A}$
- c) il existe un  $(n - 3, \delta)$ -éclatement en  $x$  à toutes les échelles inférieures à  $\epsilon \rho_{0,A}(x, t)$  pour la métrique  $g(t)$ ,

et

$$|\text{Rm } g(x, t)| \leq \frac{K}{t}, \quad \text{inj}_{g(t)} x \geq \sqrt{\frac{t}{K}},$$

pour tout  $(x, t) \in \mathcal{M}_{A, \epsilon^2}$ .

*Preuve de la proposition III.2.1.* On considère un point  $x \in M$ , on pose  $\rho = \rho_0(x)$  et on définit pour  $0 \leq s \leq \frac{T}{\rho^2}$  un flot mis à l'échelle en posant  $\tilde{g}(s) = \frac{1}{\rho^2} g(\rho^2 s)$ . La boule  $\tilde{B}_0(x, 1)$  est par définition relativement compacte dans  $M$ , de même que, pour tout  $y \in \tilde{B}_0(x, \frac{1}{2})$ , la boule  $\tilde{B}_0(y, \frac{1}{2})$ . Pour  $0 \leq s \leq \frac{1}{400n^2 K_1}$ , grâce au corollaire I.1.2 on a  $\tilde{B}_s(y, \frac{1}{4}) \subset \tilde{B}_0(y, \frac{1}{2})$ , ce qui permet d'appliquer la proposition II.1.1 au point  $y$  avec  $A_0 = a_0 = \frac{1}{8}$ , d'où on déduit

$$\text{R}_{\tilde{g}(s)} \geq -800 \tag{III.4}$$

sur  $\tilde{B}_0(x, \frac{1}{2}) \times [0, \frac{1}{400n^2 K_1}]$ .

De même, pour tout  $y \in \tilde{B}_0(x, \frac{1}{2})$ , et pour  $\epsilon_0 > 0$  qui sera fixé à l'étape suivante, on applique le corollaire II.1.4 avec  $k = 64A^2$ , d'où on déduit l'existence de  $\epsilon_1$  dépendant de  $K_1$  et  $\epsilon_0$  tel que

$$\text{Rc } \tilde{g}(y, s) \geq -\frac{\epsilon_0^2}{s}. \tag{III.5}$$

pour  $0 \leq s \leq \epsilon_1^2$ .

On fixe alors  $\epsilon_0 = \frac{1}{16} \epsilon(3, K, v_0, \frac{\delta}{2})$  (on supposera  $\delta \leq \frac{1}{2}$ ), où la fonction  $\epsilon(n, K, v_0, \delta)$  provient de l'énoncé de la proposition I.1.7. Pour  $y \in B_0(x, \frac{1}{4})$ , (III.4) et (III.5) combinées aux hypothèses de l'énoncé permettent d'appliquer la proposition I.1.7, qui fournit alors  $\text{vol}_{\tilde{g}(s)} \tilde{B}_s(y, r) \geq (1 - \frac{\delta}{2}) v_0 \tilde{B}_0(y, r)$  pour  $0 \leq s \leq \min(\epsilon_0^2, \epsilon_1^2)$  et  $\frac{\delta \sqrt{s}}{2\epsilon_0} \leq r \leq \frac{1}{8}$ . Cette minoration, (III.5) et l'inégalité de Bishop-Gromov donnent enfin

$$\text{vol}_{\tilde{g}(s)} \tilde{B}_s(x, r) \geq (1 - \delta) v_0 r^3$$

pour  $0 \leq s \leq \min(\epsilon_0^2, \epsilon_1^2)$  et  $0 < r \leq \frac{1}{8}$ .

On peut maintenant appliquer la proposition III.1.4 au flot  $\tilde{g}(s)$ , qui fournit une constante  $K = K(3, \frac{v_0}{2})$  telle que

$$|\text{Rm } \tilde{g}(x, s)| \leq \frac{K}{s}, \quad \text{inj}_{\tilde{g}(s)}(x) \geq \sqrt{\frac{s}{K}}$$

pour  $0 < s \leq \min(\epsilon_0^2, \epsilon_1^2)$ . En revenant au flot  $g(t)$ , pour  $\epsilon = \min(\epsilon_0, \epsilon_1)$  et  $A = \frac{1}{\epsilon}$ , on trouve

$$|\text{Rm } g(x, t)| \leq \frac{K}{t}, \quad \text{inj}_{g(t)}(x) \geq \sqrt{\frac{t}{K}}$$

pour  $(x, t) \in \mathcal{M}_{A, \epsilon^2}$ , ainsi que

$$\text{Rc } g(x, t) \geq -\frac{\delta^2}{t}, \quad \text{vol}_t B_t(x, r) \geq (1 - \delta) v r^3$$

pour  $0 < r \leq \frac{1}{8} \rho_0(x, t)$ . □

*Preuve de la proposition III.2.2.* On considère un point  $x \in M$ , on pose  $\rho = \rho_0(x)$  et on définit pour  $0 \leq s \leq \frac{T}{\rho^2}$  un flot mis à l'échelle en posant  $\tilde{g}(s) = \frac{1}{\rho^2}g(\rho^2s)$ . La boule  $\tilde{B}_0(x, 1)$  est par définition relativement compacte dans  $M$ , de même que, pour tout  $y \in \tilde{B}_0(x, \frac{1}{2})$ , la boule  $\tilde{B}_0(y, \frac{1}{2})$ . Pour  $0 \leq s \leq \frac{1}{400n^2K_1}$ , grâce au corollaire I.1.2 on a  $\tilde{B}_s(y, \frac{1}{4}) \subset \tilde{B}_0(y, \frac{1}{2})$ , ce qui permet d'appliquer la proposition II.1.1 au point  $y$  avec  $A_0 = a_0 = \frac{1}{8}$ , d'où on déduit  $R_{\tilde{g}(s)} \geq -800$  sur  $\tilde{B}_0(x, \frac{1}{2}) \times [0, \frac{1}{400n^2K_1}]$ .

On applique ensuite la proposition II.2.6 au flot  $\tilde{g}(s)$  sur  $\tilde{B}_0(x, \frac{1}{2}) \times [0, \frac{1}{400n^2K_1}]$ , qui fournit une constante  $k_1 = k(n, K_1)$  telle que l'on a  $\lambda_{\tilde{g}}^-(y, s) \geq -k_1\rho_0(y)^{-2}$  pour  $(y, s) \in \tilde{B}_0(x, \frac{1}{2}) \times [0, \frac{1}{400n^2K_1}]$ , et donc

$$\lambda_{\tilde{g}}^-(x, s) \geq -16k_1 \quad (\text{III.6})$$

sur  $\tilde{B}_0(x, \frac{1}{4}) \times [0, \frac{1}{400n^2K_1}]$ . D'autre part, puisqu'elle implique  $Rc g(y, s) \geq -16k_1$  sur le même domaine, cette minoration permet de faire appel au principe de continuité du volume des boules du lemme I.1.6. Pour  $\delta > 0$  l'énoncé fournit  $\epsilon_1 = \epsilon(n, v, K_1, \frac{\delta}{2})$  et permet d'affirmer, pour tout  $y \in \tilde{B}_0(x, \frac{1}{8})$ ,  $\frac{\sqrt{\max(K_1, k_1)}}{\epsilon_1} \leq r \leq \frac{1}{32}$  et  $0 \leq s \leq \frac{\epsilon_1^2}{10^6 n^2 \max(k_1, K_1)}$ ,

$$\text{vol}_s \tilde{B}_s(y, r) \geq (1 - \frac{\delta}{2}) \text{vol}_0 \tilde{B}_0(y, r). \quad (\text{III.7})$$

l'hypothèse (ii) de l'énoncé, (III.6) et Bishop-Gromov permettant alors d'écrire

$$\text{vol}_s \tilde{B}_s(y, r) \geq (1 - \delta) v r^n. \quad (\text{III.8})$$

pour tout  $0 < r \leq \frac{1}{32}$ . D'autre part on a, toujours pour  $s \leq \frac{\epsilon_1^2}{10^6 n^2 \max(k_1, K_1)}$

$$\tilde{\lambda}_{\text{IC}_1}^-(y, s) \geq -\frac{1}{s} \quad (\text{III.9})$$

pour tout  $y \in B_0(x, \frac{1}{8})$ . On pose  $\epsilon^2 = \frac{\epsilon_1^2}{10^6 n^2 \max(k_1, K_1)}$ . Pour tout  $x' \in \tilde{B}_0(x, \frac{1}{16})$ , (III.8) et (III.9) permettent d'appliquer la proposition III.1.4 au flot  $\tilde{g}(s)$  sur  $B_0(x', \frac{1}{16}) \times [0, \epsilon^2]$ , et d'obtenir des estimations sur la décroissance de la courbure indépendantes de  $K_1$ . Pour  $K_0 = K(n, \tilde{v})$  on a

$$|\text{Rm } \tilde{g}(y, s)| \leq \frac{K_0}{s}$$

pour tout  $y \in B_s(x', \frac{1}{32})$  et  $0 < s \leq \epsilon^2$ , et par conséquent, grâce à (III.8) à nouveau et au théorème de Cheeger-Gromov-Taylor,

$$\text{inj}_{\tilde{g}(s)} x' \geq \iota(n, \tilde{v}) \sqrt{\frac{s}{K_0}}.$$

(toujours pour  $0 < s \leq \epsilon^2$ ). Ainsi a-t-on, en posant  $K = \frac{K_0}{\iota(n, v_0)}$  les estimations

$$|\text{Rm } \tilde{g}(y, s)| \leq \frac{K}{s}, \quad \text{inj}_{\tilde{g}(s)} y \geq \sqrt{\frac{s}{K}}$$

sur  $B_0(x, \frac{1}{16}) \times [0, \epsilon^2]$ . Une nouvelle application de la proposition II.2.6 sous ces estimations fournit une constante  $k_0(n, K)$  (cette fois indépendante de  $K_1$ ) telle que l'on a  $\text{IC}_1 \tilde{g}(x, s) \geq -256k_0$  pour  $0 \leq s \leq \epsilon^2$ .

En revenant au flot  $g(t)$ , on trouve donc les estimations sur la décroissance de la courbure

$$|\text{Rm } g(x, t)| \leq \frac{K}{t}, \quad \text{inj}_{g(t)} x \geq \sqrt{\frac{t}{K}}$$

à condition d'avoir  $0 < t \leq \epsilon^2 \rho_0(x)^2$ , ainsi que (pour  $k = 256k_0$ ),

$$\lambda_{\mathcal{G}}^-(x, t) \geq -\frac{k}{\rho_0(x)^2},$$

et, revenant à (III.8),

$$\text{vol}_{g(t)} B_t(x, r) \geq (1 - \delta)vr^n,$$

pour tout  $(x, t) \in M \times [0, T]$  avec  $0 \leq t \leq \epsilon^2 \rho(x)^2$  et  $0 < r \leq \frac{1}{32} \rho_0(x)$ . □

*Preuve de la proposition III.2.3.* On fixe  $k_0, \delta_0, A > 0$  (leur valeur sera déterminée au cours de la preuve), on fixe  $U \subset M$  relativement compact et on considère un temps  $0 \leq \bar{t} \leq T$  maximal tel que pour tout  $(x, t) \in \mathcal{U}_{A, \bar{t}}$  (où  $\mathcal{U}_{A, \bar{t}} = \{(x, t) \in M \times [0, T] \mid 0 \leq t \leq \bar{t} \text{ et } B_0(x, A\sqrt{t}) \text{ est relativement compact dans } U\}$ ) on ait

$$a) |\text{Rc } g(x, t)| \leq \frac{k_0}{\rho_{A,0}(x,t)^2},$$

$$b) \text{vol}_t B_t(x, \sqrt{t}) \geq (1 - \delta_0)v(\sqrt{t})^n,$$

c)  $(x, t)$  possède un  $(n - 3, \delta_0)$ -système de coordonnées régularisées.

Par continuité, et en particulier d'après la remarque II.3.8, on a  $\bar{t} > 0$ . On définit  $\underline{t} = (1 + \frac{1}{3200n^2K_1})^{-1}\bar{t}$ . Le lemme II.3.16 permet d'affirmer que si  $(x, t) \in (U)_{A\sqrt{\underline{t}}} \times [\underline{t}, \bar{t}]$

c')  $(x, t)$  possède un  $(n - 3, C\delta_0)$ -système de coordonnées régularisées,

( $C = C(n)$  provient du lemme II.3.16). Ensuite, comme le choix de  $\underline{t}$  garantit en particulier simplement en intégrant l'équation du flot compte tenu de la borne  $|\text{Rm } g(t)| \leq \frac{K_1}{t}$ , le contrôle de la métrique  $\frac{1}{4}g(\underline{t}) \leq g(t) \leq 4g(\underline{t})$  pour  $\underline{t} \leq t \leq \bar{t}$ , on a de manière immédiate

$$b') \text{vol}_t B_t(x, \sqrt{t}) \geq \frac{(1 - \delta_0)v}{2^n} \left( \frac{\sqrt{t}}{2} \right)^n \geq \frac{v}{2^{n+1}} (\sqrt{t})^n$$

(si  $\delta_0 \leq \frac{1}{2}$ ) pour  $(x, t) \in (U)_{A\sqrt{\underline{t}}} \times [\underline{t}, \bar{t}]$ . Finalement, on a  $|\text{Rc } g(x, \underline{t})| \leq \frac{1}{8\underline{t}}$  pour  $x \in (U)_{(A+a)\sqrt{\underline{t}}}$  si  $a \geq \sqrt{8k_0}$ . Ainsi, si  $x \in U$  est tel que  $B_{\underline{t}}(x, 8\sqrt{\underline{t}}) \subset (U)_{(A+a)\sqrt{\underline{t}}}$ , on peut appliquer le lemme II.3.19 sur  $B_{\underline{t}}(x, a\sqrt{\underline{t}}) \times [\underline{t}, \bar{t}]$  et on trouve

$$a') |\text{Rc } g(x, t)| \leq \frac{1}{2t} \leq \frac{1}{t},$$

pour  $\underline{t} \leq t \leq \bar{t}$ . En particulier, si on suppose  $x \in (U)_{(A+a_1)\sqrt{\underline{t}}}$  et que l'on choisit  $a_1 = \max(\sqrt{8k_0}, 8 + \frac{20}{3}(n-1)\sqrt{K_1})$ , le principe de comparaison des distances du corollaire I.1.2 garantit que l'on a  $B_{\underline{t}}(x, 8\sqrt{\underline{t}}) \subset (U)_{(A+\sqrt{8k_0})\sqrt{\underline{t}}}$ . Ce choix de  $a_1$  garantit donc b') sur  $(U)_{(A+a_1)\sqrt{\underline{t}}} \times [\underline{t}, \bar{t}]$ .

Compte tenu de a'), b') et c'), la proposition III.1.6 fournit  $\epsilon_{III.1.6} = \epsilon_{III.1.6}(n, \frac{v}{C}, K_1)$  et  $K_0 = K_{III.1.6}(n, \frac{v}{C})$  tel que si on choisit  $\delta_0 \leq \frac{\epsilon_{III.1.6}}{C}$ , on trouve

$$|\text{Rm } g(x, t)| \leq \frac{K_0}{t}, \quad \text{inj}_x g(t) \geq \sqrt{\frac{t}{K_0}}, \quad (\text{III.10})$$

pour  $(x, t) \in (U)_{(A+a'_1)\sqrt{\bar{t}}} \times [0, \bar{t}]$  où  $a'_1 = a_1 + 2\delta_0^{-1}$ .

On peut maintenant appliquer le corollaire II.3.18 sur la préservation d'une borne sur la norme du tenseur de Ricci avec les estimations de décroissance améliorées (III.10). Le corollaire II.3.18 fournit ainsi  $k_{II.3.18}$  et  $\delta_{II.3.18}$  dépendant seulement de  $n$  et  $v$  tels que si on suppose  $\delta_0 \leq \delta_{II.3.18}$ , on peut conclure

$$|\text{Rc } g(x, t)| \leq \frac{k_{II.3.18}}{\rho_{0, A+a'_1}(x)^2} \quad (\text{III.11})$$

pour  $(x, t) \in (U)_{(A+a'_1)\sqrt{\bar{t}}} \times [0, \bar{t}]$ .

Ensuite, le lemme I.1.6 fournit  $\epsilon_{I.1.6}(n, v, \delta)$  tel que si  $x \in (U)_{(A+a'_1)\sqrt{\bar{t}}}$  est tel que  $|\text{Rc } g(x', t)| \leq \frac{\epsilon_{I.1.6}^2}{K\bar{t}}$  pour  $(x', t) \in B_0(x, 8\sqrt{\bar{t}}) \times [0, \bar{t}]$ , on a

$$\text{vol}_{g(t)} B_t(x, r) \geq (1 - \delta)vr^n \quad (\text{III.12})$$

pour  $0 \leq t \leq \bar{t}$  et  $0 < r \leq 2\sqrt{\bar{t}}$  (tant que  $\bar{t} \leq \frac{1}{\sqrt{8}}$ ). En particulier, si  $x \in (U)_{(A+a''_1)\sqrt{\bar{t}}}$  avec  $a''_1 = a'_1 + 4 + \frac{\sqrt{K_0k}}{\epsilon_{I.1.6}}$  on a (III.12).

Finalement, on va appliquer la proposition II.3.7 sur l'existence de coordonnées régularisées, qui fournit  $\epsilon_{II.3.7} = \epsilon_{II.3.7}(n, K_0, (1 - \delta)v, \delta)$ . Si  $(x, t) \in (U)_{(A+a''_1)\sqrt{\bar{t}}}$  où  $a''_1 = a'_1 + 2\epsilon_{II.3.7}^{-1}\sqrt{k_{II.3.18}}$ , on a  $|\text{Rc } g(x', t)| \leq \frac{\epsilon^2}{\bar{t}}$  pour  $(x', t) \in B_0(x, \epsilon_{II.3.7}^{-1}) \times [0, \bar{t}]$ . Ainsi, si  $\bar{t} \leq \epsilon_{II.3.7}^2$ , l'hypothèse (iii) de l'énoncé permet de conclure que  $(x, t)$  possède un  $(n - 3, \delta)$ -système de coordonnées régularisées.

Afin de conclure, on fixe  $k_0 = 2k_{II.3.18}$ , qui dépend seulement de  $n$  et  $v$ , et de  $\delta_0 = \min(\frac{1}{2}, 2\delta, \delta_{III.1.6}, \delta_{II.3.18})$  qui lui-même dépend de  $n, v, \delta$  et  $K_1$ . On obtient alors

$$a'') \quad |\text{Rc } g(x, \bar{t})| \leq \frac{k_0}{2\rho_{0, A+a''_1}(x, \bar{t})^2},$$

$$b'') \quad \text{vol}_{\bar{t}} B_{\bar{t}}(x, r) \geq (1 - \frac{\delta_0}{2})vr^n \text{ pour tout } 0 < r \leq \sqrt{\bar{t}},$$

c'')  $(x, \bar{t})$  possède un  $(n - 3, \frac{\delta_0}{2})$ -système de coordonnées régularisées pour tout  $x \in (U)_{(A+a''_1)\sqrt{\bar{t}}}$ , tant que  $0 < \bar{t} \leq \epsilon_0^2$ , où on a posé  $\epsilon_0^2 = \min(\frac{1}{\sqrt{8}}, \epsilon_{II.3.7}^2)$ , dépendant de  $n, v$  et  $\delta$ . Or  $A\sqrt{\bar{t}} = (A + A(\sqrt{\frac{\bar{t}}{\bar{t}}} - 1))\sqrt{\bar{t}}$  et  $A(\sqrt{\frac{\bar{t}}{\bar{t}}} - 1) \geq \frac{\eta^2 A}{4K_1} \geq a''_1$  à condition de poser  $A_1 = CK_1 a''_1$  dépendant de  $n, v, \delta$ , ainsi que de  $K_1$ . Avec ce choix de  $A_1, a''), b''), c'')$  s'appliquent à tout  $x \in (U)_{A_1\sqrt{\bar{t}}}$ , ce qui implique une contradiction avec la définition de  $\bar{t}$  si  $\bar{t} < \epsilon_0^2$ . D'où l'énoncé, puisque la partie relativement compactes  $U \subset M$  est arbitraire.  $\square$

### III.2.2 Preuve des théorèmes E et F : énoncés de type "pseudo-localité"

Une première application des propositions de régularisation III.2.2 et III.2.3 sont les théorèmes E et F énoncés en introduction, qui, rappelons-le, peuvent être considérés comme des généralisations du théorème de pseudo-localité 0.17 de Perelman, et dont la preuve s'appuie de manière essentielle sur ce résultat, ou plutôt sur le lemme suivant qui s'en déduit directement.

**Lemme III.2.5.** *Il existe  $\eta(n) > 0$  avec la propriété suivante. Soit  $g(t)$  un flot complet défini pour  $0 \leq t \leq T$  sur une variété lisse  $M^n$  de dimension  $n$  avec*

$$\sup_{M \times [0, T]} |\text{Rm } g(x, t)| < +\infty$$

et  $U \subset M$  un ouvert tel que  $|\text{Rm } g(x, 0)| \leq k$  et  $\text{inj}_x g(0) \geq \frac{1}{\sqrt{k}}$  pour  $x \in U$ . Alors

$$|\text{Rm } g(x, t)| \leq 4k, \quad \text{inj}_x g(t) \geq \frac{1}{2\sqrt{k}}$$

pour tout  $(x, t) \in (U)_{\frac{1}{\sqrt{k}}} \times [0, \frac{\eta^2}{k}]$ .

*Preuve du théorème E.* Il suffit de démontrer le théorème lorsque  $U$  est relativement compact dans  $M$ , quitte à passer à la limite ensuite. Ainsi, par continuité, il existe  $0 < \bar{t} \leq T$  maximal tel qu'on ait

$$a) \lambda_{\bar{g}}^-(x, t) \geq -\frac{k_0}{\rho_{0, A_{III.2.2}}^U(x, t)^2},$$

$$b) \text{vol}_t B_t(x, r) \geq (1 - \delta_0)vr^n \text{ pour } 0 < r \leq \sqrt{t},$$

ainsi que

$$|\text{Rm } g(x, t)| \leq \frac{K_0}{t}, \quad \text{inj}_x g(t) \geq \sqrt{\frac{t}{K_0}}$$

pour tout  $(x, t) \in \mathcal{U}_{\bar{t}, A_1}$  ( $A_1$  sera choisi plus bas). On pose  $\underline{t} = \left(1 + \frac{\eta^2}{K_0}\right)^{-1} \bar{t}$ , où  $\eta(n)$  est fourni par le lemme III.2.5. En appliquant le lemme III.2.5 pour  $\tilde{U} = (U)_{A_1\sqrt{\underline{t}}}$  on trouve

$$|\text{Rm } g(x, t)| \leq \frac{8K_0}{t}, \quad \text{inj}_x g(t) \geq \sqrt{\frac{t}{8K_0}} \quad (\text{III.13})$$

pour  $\underline{t} \leq t \leq \bar{t}$  et  $x \in U$  tel que  $B_{\underline{t}}(x, \sqrt{\frac{t}{K_0}}) \subset (U)_{A_1\sqrt{\underline{t}}}$ . En particulier, si  $(x, t) \in (U)_{(A_1+a_1)\sqrt{\underline{t}}} \times [0, \bar{t}]$ , où  $a_1 = \sqrt{\frac{t}{K_0}} + \frac{20}{3}(n-1)\sqrt{K_0 t}$ , le principe de comparaison des distances du corollaire I.1.2 garantit que l'on a (III.13). On peut donc appliquer la proposition III.2.2 avec  $K_1 = 16K_0$  au flot  $g(t)$  sur  $(U)_{(A_1+a_1)\sqrt{\underline{t}}} \times [0, \bar{t}]$ , et si  $\bar{t} \leq \epsilon_{III.2.2}^2$  on trouve en particulier des constantes  $k_{III.2.2}$ ,  $K_{III.2.2}$ ,  $\epsilon_{III.2.2}$  dépendant de  $n, v, \delta$  et  $A_{III.2.2}$  dépendant de  $n, v, \delta$  et  $K_0$  telles que

$$a') \lambda_{\bar{g}}^-(x, \bar{t}) \geq -\frac{k_{III.2.2}}{\rho_{0, A_1+a_1'}^U(x, \bar{t})^2},$$

$$b') \text{vol}_{\bar{t}} B_{\bar{t}}(x, r) \geq (1 - \delta)vr^n \text{ pour } 0 < r \leq \sqrt{\bar{t}},$$

ainsi que

$$|\text{Rm } g(x, \bar{t})| \leq \frac{K_{III.2.2}}{\bar{t}}, \quad \text{inj}_x g(\bar{t}) \geq \sqrt{\frac{\bar{t}}{K_{III.2.2}}} \quad (\text{III.14})$$

pour  $x \in (U)_{(A_1+a_1')\sqrt{\bar{t}}}$ , où  $a_1' = a_1 + A_{III.2.2}$ . En particulier si  $x \in (U)_{A_1\sqrt{\bar{t}}}$ , et si  $A_1 \geq CK_0$  (où  $C$  est une constante dépendant de  $n$ ), on a a), b) et (III.14) sur  $(U)_{A_1\sqrt{\bar{t}}}$ . En posant finalement  $K_0 = 2K_{III.2.2}$ ,  $k_0 = 2k_{III.2.2}$ ,  $\delta_0 = 2\delta$  ceci constitue une contradiction avec la maximalité de  $\bar{t}$  si  $\bar{t} < \epsilon_{III.2.2}^2$ .  $\square$

*Preuve du théorème F.* Elle est ligne par ligne analogue à la preuve du théorème E, la proposition III.2.3 jouant le rôle de la proposition III.2.2.  $\square$

## Chapitre IV

# Flot de donnée initiale non-compacte ou non-complète

### IV.1 Le flot partiel : définition et construction

On démontre dans ce paragraphe le théorème A. La construction s'appuie sur une application répétée du théorème d'existence en temps court de W. X. Shi [30] à des métriques complètes à courbure bornées obtenues par modification des métriques éventuellement non complètes de l'énoncé du théorème.

#### IV.1.1 Modifier une métrique pour la rendre complète

On commence par décrire une construction élémentaire de géométrie riemannienne, qui permet de modifier une métrique éventuellement non-complète en une métrique complète à courbure bornée. On définit, pour une variété riemannienne  $(M, g)$ , les fonctions à valeur dans  $\mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$

$$\rho(x) = \sup \{ r > 0, \mid B(x, r) \text{ est relativement compacte dans } M \},$$

$$\rho_1(x) = \sup \{ r > 0, \mid B(x, r) \text{ est relativement compacte dans } M \text{ et } \sup_{B(x, r)} |\text{Rm } g| \leq \frac{1}{r^2} \}.$$

De plus, on note

$$(M)_r = \{ x \in M \mid B(x, r) \text{ est relativement compacte dans } M \}.$$

**Lemme IV.1.1.** *Il existe une constante  $C(n)$  avec la propriété suivante. Étant donnée une variété riemannienne de dimension  $n$   $(M^n, g)$ , et  $k > 0$ , il existe une métrique riemannienne  $h$  définie sur  $M$  avec les propriétés suivantes*

$(M, h)$  est une variété riemannienne complète,

$$h \equiv g \text{ sur } \left\{ x \in M \mid \rho_1(x) \geq \frac{C}{\sqrt{k}} \right\},$$

$$|\text{Rm } h(x)| \leq k.$$

pour tout  $x \in M$ .

Ce résultat sera utilisé dans le paragraphe IV.1.2 sous la forme suivante.

**Corollaire IV.1.2.** *Il existe une constante  $C(n)$  avec la propriété suivante. Étant donnée une variété riemannienne de dimension  $n$   $(M^n, g)$  telle que  $|\text{Rm } g(x)| \leq k_0$  pour tout  $x \in M$ , et  $k_1 > C^2 k_0$ , il existe une métrique riemannienne  $h$  définie sur  $M$  avec les propriétés suivantes*

$$\begin{aligned} (M, h) &\text{ est une variété riemannienne complète,} \\ h &\equiv g \text{ sur } (M)_{\frac{C}{\sqrt{k_1}}}, \\ |\text{Rm } h(x)| &\leq k_1. \end{aligned}$$

pour tout  $x \in M$ .

La construction de la métrique  $h$  du lemme IV.1.1 repose sur la possibilité de régulariser les fonctions lipschitziennes définies sur une variété riemannienne à l'échelle où la courbure est bornée, avec des estimations sur les dérivées jusqu'à l'ordre 2.

**Lemme IV.1.3.** *Il existe  $C(n)$  avec la propriété suivante. Soit  $(M^n, g)$  une variété riemannienne de dimension  $n$  et  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction 1-lipschitzienne. Alors, pour toute fonction 1-lipschitzienne  $\eta : M \rightarrow \mathbb{R}_+$  avec  $0 < \eta(x) \leq \rho_1(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , il existe une fonction lisse  $\tilde{f} : M \rightarrow \mathbb{R}$  telle que*

$$\begin{cases} |f(x) - \tilde{f}(x)| \leq \eta(x), \\ |\nabla \tilde{f}(x)| \leq C, \\ |\nabla^2 \tilde{f}(x)| \leq \frac{C}{\eta(x)}. \end{cases}$$

pour tout  $x \in M$ . De plus, si  $f \geq 0$  (resp.  $f \leq 0$ ) sur  $M$  alors  $\tilde{f} \geq 0$  (resp.  $\tilde{f} \leq 0$ ) sur  $M$ .

Afin d'établir le lemme IV.1.3 on commence par construire des fonctions à support compact dont le gradient et le Hessien sont contrôlés.

**Lemme IV.1.4.** *Il existe  $C(n)$  avec la propriété suivante. Si  $(M, g)$  est une variété riemannienne,  $x_0 \in M$ ,  $r > 0$  tels que  $B(x_0, r_0)$  est relativement compacte dans  $M$  et  $|\text{Rm } g(x)| \leq r_0^{-2}$  pour tout  $x \in B(x_0, r_0)$ , alors il existe une fonction lisse  $\Phi_{x_0} : M \rightarrow [0, 1]$  à support dans  $B(x_0, r_0)$  avec les propriétés suivantes.*

$$a) \inf_{B(x_0, \frac{r_0}{8})} \Phi_{x_0} \geq C^{-1}, \quad b) |\nabla \Phi_{x_0}| \leq \frac{8}{r_0}, \quad c) |\nabla^2 \Phi_{x_0}| \leq \frac{64}{r_0^2}.$$

*Démonstration.* Après mise à l'échelle, on peut supposer  $r_0 = 1$  dans l'énoncé du lemme. On commence par le cas où  $\text{inj}_{x_0} g \geq 1$ . La borne de courbure garantit alors que la fonction distance à l'origine  $d(x) = d(x_0, x)$  est lisse sur  $B(x_0, 1) \setminus \{x_0\}$ , avec le contrôle du Hessien

$$-d \leq \nabla^2 d \leq \frac{g}{\tanh d}. \tag{IV.1}$$

issu du lemme I.2.8. On considère alors  $\phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction lisse telle que  $\phi \equiv 1$  sur  $]-\infty, \frac{1}{2}]$ ,  $\phi \equiv 0$  sur  $[1, +\infty[$ ,  $|\phi'| \leq 2$ , et  $|\phi''| \leq 8$ .  $\Phi_{x_0}(x) = \phi(2d(x))$  définit une fonction lisse, positive ou nulle, à support compact dans  $B(x_0, \frac{1}{2})$  avec  $\Phi_{x_0} \equiv 1$  sur  $B(x_0, \frac{1}{4})$ , ainsi que  $|\nabla \Phi_{x_0}| \leq 8$ ,  $|\nabla^2 \Phi_{x_0}| \leq 64$ .

Dans le cas où le rayon d'injectivité n'est pas minoré, on applique la construction précédente à  $\mathbb{B}$  la boule de rayon 1 centrée en l'origine  $\mathbf{0}_{x_0}$  de  $T_{x_0}M$ , munie de la métrique  $h = \exp_{x_0}^* g$ ,



pour obtenir une fonction  $\Phi_0 : \mathbb{B} \rightarrow [0, 1]$ . On définit alors  $\Phi_{x_0} : M \rightarrow \mathbb{R}_+$  en posant pour  $x \in B_g(x_0, 1) \subset M$ ,  $I(x) = \{u \in B_h(\mathbf{0}_{x_0}, 1) \mid \exp_{x_0}(u) = x\}$  puis pour  $x \in M$ ,

$$\Phi_{x_0}(x) = \begin{cases} \frac{1}{|I(x_0)|} \sum_{u \in I(x)} \Phi_0(u) & \text{si } x \in B_g(x_0, 1), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En utilisant le fait que  $\exp_{x_0} : \mathbb{B} \rightarrow B_g(x_0, 1)$  est une isométrie locale, on commence par constater que  $\Phi_{x_0}$  est lisse à support dans  $B_g(x_0, 1)$ . De plus, pour  $x \in B_g(x_0, 1)$ , il existe un voisinage  $V \subset B_g(x_0, 1)$  de  $x$ , et pour tout  $u \in I(x)$ , un voisinage  $U_u \subset \mathbb{B}$  de  $u$  tels que  $f_u = \exp_x|_{U_u}$  est une isométrie entre  $U_u$  et  $V$ . On vérifie ensuite que  $|I(x) \cap B_h(\mathbf{0}_{x_0}, \frac{1}{4})| \leq |I(x_0)|$ , donc l'écriture  $\Phi_{x_0} = \frac{1}{|I(x_0)|} \sum_{u \in I(x)} \Phi_0 \circ f_u^{-1}$  (sur  $V$ ) exprime localement  $\Phi_{x_0}$  comme une combinaison convexe des  $\Phi_0 \circ f_u^{-1}$ . Ainsi

$$0 \leq \Phi_{x_0} \leq 1, \quad |\nabla \Phi_{x_0}| \leq 8, \quad |\nabla^2 \Phi_{x_0}| \leq 64. \quad (\text{IV.2})$$

Finalement, on vérifie que  $|I(x_0)| \leq \frac{\text{vol}_h B_h(\mathbf{0}_{x_0}, 1)}{\text{vol}_g B_g(x_0, \frac{1}{2})}$  d'une part, alors que d'autre part, si  $x \in B_g(x_0, \frac{1}{8})$ , on a  $|I(x) \cap B_h(\mathbf{0}_{x_0}, \frac{1}{4})| \geq \frac{\text{vol}_h B_h(\mathbf{0}_{x_0}, \frac{1}{8})}{\text{vol}_g B_g(x_0, \frac{1}{8})}$ , ce qui garantit (en vertu du principe de comparaison des volumes de Bishop-Gromov)

$$\Phi_{x_0}(x) \geq \frac{1}{C} \text{ pour } x \in B_g(x_0, \frac{1}{8}). \quad (\text{IV.3})$$

□

*Preuve du lemme IV.1.3.* On construit d'abord une partition de l'unité sur  $M$ . Soit  $\{x_i\}_{i \in I}$  une famille de points de  $M$  telle que les boules  $B(x_i, \frac{\eta_i}{24})$  ( $\eta_i = \eta(x_i)$ ) soient disjointes, maximale avec cette propriété. La condition de maximalité garantit que les  $B(x_i, \frac{\eta_i}{8})$ ,  $i \in I$ , recouvrent  $M$ . On considère pour tout  $i \in I$ , la fonction  $\Phi_{x_i}$  à support dans  $B(x_i, \frac{\eta_i}{2})$  donnée par le lemme précédent (puisque  $\eta_i \leq \rho_1(x_i)$ ), puis on pose

$$\psi_i(x) = \left( \sum_{j \in I} \Phi_{x_j}(x) \right)^{-1} \Phi_{x_i}(x),$$

(en vertu de (IV.3),  $\sum_{j \in I} \Phi_{x_j}(x) \geq \frac{1}{C}$  pour tout  $x \in M$ ) ce qui définit une partition de l'unité subordonnée aux  $B(x_i, \frac{\eta_i}{2})$ . De plus, puisque  $K_g(\sigma) \geq -1$  le principe de comparaison des volumes (Bishop-Gromov) garantit que pour tout  $x \in U$ , si on pose  $I(x) = \{i \in I \mid x \in B(x_i, \frac{\eta_i}{2})\}$ , alors  $|I(x)| \leq C$ . Ainsi, de l'expression

$$\nabla \psi_i = \frac{\nabla \Phi_{x_i}}{\sum_{j \in I(x)} \Phi_{x_j}} - \frac{\left( \sum_{j \in I(x)} \nabla \Phi_{x_j} \right) \Phi_{x_i}}{\left( \sum_{j \in I(x)} \Phi_{x_j} \right)^2}$$

on déduit  $|\nabla \psi_i| \leq \frac{C}{\eta_i}$ . On établit de manière similaire une majoration  $|\nabla^2 \psi_i| \leq \frac{C}{\eta_i^2}$ .

On définit enfin une approximation de  $f$  sur  $M$  en posant  $\tilde{f}(x) = \sum_{i \in I} \psi_i(x) f(x_i)$ . Ainsi  $\tilde{f}(x) - f(x) = \sum_{i \in I(x)} \psi_i(x) (f(x_i) - f(x))$ , or si  $i \in I(x)$ ,  $d(x_i, x) \leq \frac{\eta_i}{2}$ , et, comme  $\eta$  est 1-lipschitzienne,  $\eta(x) \leq 2\eta_i$  donc  $|f(x_i) - f(x)| \leq \eta(x)$ , d'où  $|\tilde{f}(x) - f(x)| \leq \eta(x)$ . Enfin, en écrivant  $\nabla \tilde{f} = \sum_{i \in I(x)} \nabla \psi_i (f(x_i) - f(x))$  et  $\nabla^2 \tilde{f} = \sum_{i \in I(x)} \nabla^2 \psi_i (f(x_i) - f(x))$ , (puisque en tout point  $x \in M$ ,  $\sum_i \nabla \psi_i(x) = \sum_i \nabla^2 \psi_i(x) = 0$ ), on vérifie que  $|\nabla \tilde{f}(x)| \leq C$ ,  $|\nabla^2 \tilde{f}(x)| \leq \frac{C}{\eta(x)}$ .

□

*Preuve du lemme IV.1.1.* Soit  $\tilde{\rho} : M \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction lisse obtenue en appliquant le lemme de régularisation IV.1.3 à la fonction  $\rho_1$  pour  $\eta(x) = \frac{\rho_1(x)}{2}$ .  $\tilde{\rho}$  satisfait

$$\frac{1}{2}\rho_1(x) \leq \tilde{\rho}(x) \leq \frac{3}{2}\rho_1(x), \quad |\nabla\tilde{\rho}(x)| \leq C, \quad |\nabla^2\tilde{\rho}(x)| \leq \frac{C}{\rho_1(x)},$$

pour tout  $x \in M$ .

On fixe maintenant une marge  $\epsilon > 0$ , et on définit une nouvelle métrique  $h$  sur  $M$  en posant  $h = e^{2\tilde{f} \circ \tilde{\rho}}$ , où la fonction  $\tilde{f} : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+$  est choisie de la manière suivante. On considère la fonction  $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,  $\mathcal{C}^2$  par morceaux, d'expression <sup>1</sup>

$$f(x) = \begin{cases} -\ln(1 - (1 - \frac{x}{\epsilon})^2) & \text{pour } 0 < x < \epsilon, \\ 0 & \text{pour } x \geq \epsilon, \end{cases}$$

que l'on régularise au voisinage de  $x = \epsilon$  de manière à obtenir une fonction lisse  $\tilde{f}$  qui vérifie  $\tilde{f}(x) = -\ln(1 - (1 - \frac{x}{\epsilon})^2)$  pour  $x \leq \frac{9}{10}\epsilon$ ,  $\tilde{f}(x) = 0$  pour  $x \geq \frac{11}{10}\epsilon$ , et  $-\frac{2}{\epsilon} \frac{1-\frac{x}{\epsilon}}{\frac{x}{\epsilon}(2-\frac{x}{\epsilon})} \leq \tilde{f}'(x) \leq 0$  ainsi que  $0 \leq \tilde{f}''(x) \leq \frac{2}{\epsilon^2} \frac{1+(1-\frac{x}{\epsilon})^2}{(1-(1-\frac{x}{\epsilon})^2)^2}$  pour tout  $x > 0$ . Il est alors clair que  $h$  est une métrique riemannienne complète sur  $M$ , qui coïncide avec  $g$  sur  $\{x \in M, \mid \rho_1(x) \geq \frac{22}{10}\epsilon\}$ . Le calcul des courbures sectionnelles d'une métrique après application d'un facteur conforme est classique (on trouve la formule dans [1], page 58 par exemple). On a

$$K_h(\sigma) = \left( K_g(\sigma) - \text{tr} \nabla^2(\tilde{f} \circ \tilde{\rho})|_\sigma + \left| d(\tilde{f} \circ \tilde{\rho})|_\sigma \right|^2 - \left| d(\tilde{f} \circ \tilde{\rho}) \right|^2 \right) e^{-2\tilde{f} \circ \tilde{\rho}}.$$

or un calcul rapide donne  $\left| \nabla(\tilde{f} \circ \tilde{\rho}) \right|^2 e^{-2\tilde{f}} \leq \frac{4}{\epsilon^2} |\nabla\tilde{\rho}|^2$  et  $\left| \nabla^2(\tilde{f} \circ \tilde{\rho}) \right| e^{-2\tilde{f}} \leq \frac{4}{\epsilon^2} |\nabla\tilde{\rho}|^2 + \frac{1}{2\epsilon} |\nabla^2\tilde{\rho}|$  d'où, grâce aux propriétés de la fonction  $\tilde{\rho}$ ,  $K_h(\sigma) \leq \frac{C}{\epsilon^2}$ . Le lemme suit pour le choix  $\epsilon = \sqrt{\frac{C}{k}}$ .  $\square$

## IV.1.2 Construction du flot partiel (preuve du théorème A)

On démontre dans ce paragraphe le théorème A. Il est une conséquence de la construction décrite par l'énoncé de la proposition IV.1.6, qui s'obtient en appliquant plusieurs fois le lemme IV.1.1 et le théorème d'existence en temps court de Shi pour les données initiales complètes à courbure bornée, dont on rappelle l'énoncé.

**Théorème IV.1.5** (Théorème d'existence de Shi [30]). *Il existe une constante  $\epsilon_{Shi}(n) > 0$  avec la propriété suivante. Soit  $(M^n, g_0)$  une variété riemannienne complète avec  $|\text{Rm } g_0| \leq k$  on  $M$ . Alors il existe un flot de Ricci complet  $g(t)$  sur  $M \times [0, \frac{\epsilon_{Shi}^2}{k^2}]$ , avec  $|\text{Rm } g(x, t)| \leq 4k$  pour tout  $(x, t) \in M \times [0, \frac{\epsilon_{Shi}^2}{k^2}]$ .*

**Proposition IV.1.6.** *Il existe  $C(n) > 0$  avec la propriété suivante. Soit  $(M^n, g_0)$  une variété riemannienne,  $T > 0$ ,  $0 < \eta \leq \epsilon_{Shi}$ ,  $K_0 \geq 1$  et  $K_1 \geq C^2 K_0$ . Alors, étant donnée la suite*

$$\dots < t_i < \dots < t_{-1} < t_0 = T$$

définie par  $t_i = \left(1 + \frac{\eta^2}{K_1}\right)^i T$  (en particulier  $t_i \xrightarrow{i \rightarrow -\infty} 0$ ), il existe

1. il s'agit bien sûr du facteur conforme hyperbolique, translaté et mis à l'échelle.

(i) Une exhaustion de  $M$  par des ouverts, autrement dit une suite

$$\cdots \supset U_i \supset \cdots \supset U_{-1} \supset U_0,$$

avec  $\bigcup_{i=-\infty}^0 U_i = M$  (quoique on puisse avoir  $U_i = \emptyset$  à partir d'un certain rang),

(ii) une solution lisse  $g$  de l'équation du flot de Ricci définie sur le domaine ouvert de  $M \times \mathbb{R}_+$

$$\mathcal{D} = M \times \{0\} \cup \bigcup_{i=-\infty}^0 U_i \times [t_{i-1}, t_i],$$

satisfaisant à la condition initiale

$$g(x, 0) = g_0(x), \quad \text{pour tout } x \in M,$$

ainsi qu'à la borne de courbure

$$|\text{Rm } g(x, t)| \leq \frac{K_1}{t}.$$

pour tout  $(x, t) \in \mathcal{D}$ .

De plus, la construction possède la propriété de "maximalité" suivante.

(iii) Pour tout  $i < 0$ , si  $x \in U_i$  est tel que  $B_{g_0}(x, C\sqrt{K_1 t_i})$  est relativement compact dans  $U_i$ , et que pour tout  $y \in B_{g_0}(x, C\sqrt{K_1 t_i})$  on a

$$|\text{Rm } g(y, t_i)| < \frac{K_0}{t_i},$$

alors  $x \in U_{i+1}$ .

*Remarque IV.1.7.* Comme il est mentionné dans l'introduction, la proposition ci-dessus ne donne aucun contrôle sur la forme du domaine ouvert  $\mathcal{D}$ , mis à part le fait qu'il contient la "tranche" initiale  $M \times \{0\}$ . Ensuite,  $U_i$  peut être vide à partir d'un rang arbitrairement négatif, correspondant à un temps  $t_i$  arbitrairement petit.

Le flot de la proposition IV.1.6 est obtenu, à son tour, comme limite de la construction finie suivante

**Lemme IV.1.8.** *Il existe  $C(n) > 0$  avec la propriété suivante. Soit  $(M^n, g_0)$  une variété riemannienne,  $T > 0$ ,  $0 < \eta \leq \epsilon_{Shi}$ ,  $K_0 \geq 1$ ,  $K_1 \geq C^2 K_0$  et  $i_0 \leq 0$ . Alors pour la suite finie*

$$t_{i_0-1} < \cdots < t_i < \cdots < t_{-1} < t_0 = T$$

définie par  $t_i = \left(1 + \frac{\eta^2}{K_1}\right)^i T$  pour  $i_0 - 1 \leq i \leq 0$ , il existe

(i) Deux suites finies d'ouverts de  $M$

$$\begin{aligned} V_{i_0} \supset \cdots \supset V_i \supset \cdots \supset V_{-1} \supset V_0, \\ U_{i_0} \supset \cdots \supset U_i \supset \cdots \supset U_{-1} \supset U_0, \end{aligned}$$

avec  $U_i \subset V_i$  pour  $i_0 \leq i \leq 0$ ,

(ii) Pour tout  $i_0 \leq i \leq 0$ , un flot de Ricci complet  $g_i$  défini sur  $V_i \times [t_{i-1}, t_i]$  satisfaisant à la borne de courbure

$$|\text{Rm } g_i(x, t)| \leq \frac{K_1}{t},$$

pour tout  $(x, t) \in V_i \times [t_{i-1}, t_i]$ , aux conditions de recollement

$$g_{i-1}(x, t_{i-1}) = g_i(x, t_{i-1})$$

pour  $i_0 + 1 \leq i \leq 0$ ,  $x \in U_i$ , et à la condition initiale  $g_{i_0}(x, t_{i_0-1}) = g_0(x)$  on  $U_{i_0}$ .

On retrouve la propriété de “maximalité”

(iii) Pour tout  $i_0 + 1 \leq i \leq 0$ , si  $x \in U_{i-1}$  est tel que  $B_{g_0}(x, \frac{20n}{3}\sqrt{K_1 t_{i-1}})$  est relativement compacte dans  $U_{i-1}$  et si pour tout  $y \in B_{g_0}(x, \frac{20n}{3}\sqrt{K_1 t_{i-1}})$  on a

$$|\text{Rm } g_i(y, t_{i-1})| < \frac{K_0}{t_{i-1}},$$

alors  $x \in U_i$ .

De plus, il existe une fonction  $i(\mathcal{K})$  dépendant de  $(M, g)$  telle que pour toute partie compacte  $\mathcal{K}$  de  $M$ , on a

$$\mathcal{K} \subset U_{i_0}$$

dans la construction ci-dessus si  $i_0 \leq i(\mathcal{K})$ .

*Preuve du lemme IV.1.8.* On définit la suite  $T = t_0 > \dots > t_{i_0}$  comme dans l'énoncé de la proposition, où  $i_0 < 0$  sera choisi plus bas.

Supposons que les ouverts  $U_i, V_i$  et le flot  $g_i(t)$  ont été construits jusqu'au rang  $i - 1$ . On considère l'ouvert de  $M$  défini par

$$V_i = \left\{ x \in U_{i-1} \mid |\text{Rm } g_{i-1}(x, t_{i-1})| < \frac{K_0}{t_{i-1}} \right\}.$$

Dans le cas de base  $i = i_0$  on remplace  $U_{i-1}$  par  $M$  et  $g_{i-1}(t_{i-1})$  par  $g_0$  dans la définition de  $V_{i_0}$ . Clairement, si  $i_0$  est suffisamment négatif, on a  $\mathcal{K} \subset V_{i_0}$  par continuité. D'autre part, pour tout  $i > i_0$ ,  $V_i$  peut être vide (ainsi que la construction elle-même à partir de ce rang).

Puisque  $V_i \subset U_{i-1}$ , la métrique  $g_{i-1}(t_{i-1})$  est définie sur  $V_i$  et satisfait à la borne de courbure

$$|\text{Rm } g_{i-1}(t_{i-1})| < \frac{K_0}{t_{i-1}}, \quad (\text{IV.4})$$

pour tout  $x \in V_i$ . Supposons que  $K_1 \geq 16C^2 K_0$ , où la constante  $C = C(n)$  provient de l'énoncé du corollaire IV.1.2. Le corollaire IV.1.2, appliqué pour  $k_0 = \frac{K_0}{t_{i-1}}$  et  $k_1 = \frac{K_1}{4t_i}$  (notons que  $\frac{t_i}{t_{i-1}} \leq 4$ ) à la métrique  $g_{i-1}(t_{i-1})$ , fournit une métrique modifiée  $g_{i,0}$  sur  $V_i$ , complète, satisfaisant à la borne de courbure

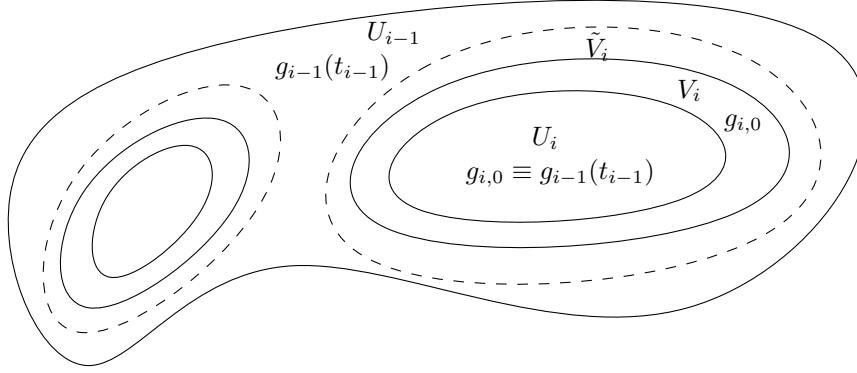
$$|\text{Rm } g_{i,0}(x)| \leq \frac{K_0}{4t_i}, \quad (\text{IV.5})$$

pour tout  $x \in V_i$ , et tel que si l'on définit

$$U_i = \left\{ x \in V_i \mid B_{g_{i-1}(t_{i-1})}(x, C\sqrt{\frac{t_{i-1}}{K_1}}) \text{ est relativement compacte dans } V_i \right\}, \quad (\text{IV.6})$$

alors sur  $U_i$  on a

$$g_{i,0} \equiv g_{i-1}(t_{i-1}). \quad (\text{IV.7})$$



Puisque  $\eta^2 \leq \epsilon_{Shi}^2$ , le théorème IV.1.5 fournit un flot de Ricci complet  $g_i(t)$  on  $V_i \times [t_{i-1}, t_i]$  avec  $g_{i,0}$  comme donnée initiale, et satisfaisant à la borne de courbure

$$|\text{Rm } g_i(x, t)| < \frac{K_1}{t}, \quad (\text{IV.8})$$

pour tout  $(x, t) \in V_i \times [t_{i-1}, t_i]$ .

(IV.7) et (IV.8) correspondent au (ii) de l'énoncé de la proposition. Pour vérifier (iii), remarque d'abord qu'on peut appliquer le principe de comparaison des distances du corollaire I.1.2 entre les temps  $t_{i_0}$  et  $t_{i-1}$  puisque, grâce à la propriété de recollement (IV.7), on peut définir un flot lisse sur  $U_{i-1} \times [t_{i_0-1}, t_{i-1}]$  en posant  $g(x, t) = g_j(x, t)$  pour  $t_{j-1} \leq t \leq t_j$ . Ainsi

$$d_{g_0}(x, y) \leq d_{g_{i-1}(t_{i-1})}(x, y) + \frac{20}{3}(n-1)\sqrt{K_1 t_{i-1}}. \quad (\text{IV.9})$$

On considère maintenant un point  $x \in U_{i-1}$  tel que  $B_{g_0}(x, \frac{20n}{3}\sqrt{K_1 t_{i-1}})$  est relativement compact dans  $U_{i-1}$ , avec  $|\text{Rm } g_{i-1}(t_{i-1})| < \frac{K_0}{t_{i-1}}$  sur cette boule. Alors si  $y \in B_{g_{i-1}(t_{i-1})}(x, C\sqrt{\frac{t_{i-1}}{K_1}})$ , comme  $K_1 \geq C^2 K_0$  et  $K_0 \geq 1$ , on trouve que  $d_{g_0}(x, y) \leq \frac{20n}{3}\sqrt{K_1 t_{i-1}}$ , et donc

$$|\text{Rm } g_{i-1}(y, t_{i-1})| < \frac{K_0}{t_{i-1}}.$$

Par définition de  $V_i$ , on conclut donc que  $y \in V_i$  et donc  $B_{g_{i-1}(t_{i-1})}(x, C\sqrt{\frac{t_{i-1}}{K_1}}) \subset V_i$ . D'après (IV.6), on a finalement  $x \in U_i$ . Enfin, la fonction  $i(\mathcal{K})$  peut être définie de la façon suivante. Pour  $\mathcal{K} \subset M$  un compact, on choisit  $i_1 \leq 0$  maximal tel que le  $C\sqrt{\frac{t_{i-1}}{K_1}}$  voisinage (pour  $g$ ) de  $\mathcal{K}$  est relativement compact dans  $M$ , on définit  $\tilde{\mathcal{K}} = \{x \in M \mid d_g(x, \mathcal{K}) \leq C\sqrt{\frac{t_{i-1}}{K_1}}\}$ , on pose  $k_{\tilde{\mathcal{K}}} = \sup_{\tilde{\mathcal{K}}} |\text{Rm } g|$  puis on définit  $i_2 \leq 0$  maximal tel que  $\frac{K_0}{t_i} > k_{\tilde{\mathcal{K}}}$ . En posant  $i(\mathcal{K}) = \min(i_1, i_2)$ , il est facile de vérifier que dans la première étape de la construction précédente, on a  $\mathcal{K} \supset U_{i_0}$  si  $i_0 \leq i(\mathcal{K})$ . □

*Preuve de la proposition IV.1.6.* Pour chaque entier  $k \leq 0$  on considère la construction finie décrite dans l'énoncé du lemme IV.1.8 avec  $i_0 = k$ . On obtient donc pour chaque  $k \leq 0$ , deux suites décroissantes  $\{U_i^k\}_{k \leq i \leq 0}$  et  $\{V_i^k\}_{k \leq i \leq 0}$  d'ouverts de  $M$  avec  $U_i^k \subset V_i^k$  pour tout  $k \leq i \leq 0$ , ainsi qu'une suite de flots  $\{g_i^k(t)\}_{k \leq i \leq 0}$  où, pour chaque  $k \leq i \leq 0$ ,  $g_i^k(t)$  est défini pour  $t_{i-1} \leq t \leq t_i$  sur  $V_i^k$ .

- (i) On commence par des définitions. Pour chaque  $k \leq 0$  on considère le domaine de l'espace temps  $D^k \subset M \times [0, T]$  défini par

$$D^k = \bigcup_{i=k}^0 U_i^k \times [t_{i-1}, t_i[$$

sur lequel on peut définir une solution lisse  $g^k(x, t)$  de l'équation de Ricci (chaque  $g^k(\cdot, t)$  définissant une métrique non-complète sur  $D_t^k = \{x \in M \mid (x, t) \in D^k\}$ ) en posant

$$g^k(x, t) = g_i^k(x, t)$$

pour  $t \in [t_{i-1}, t_i]$ ,  $x \in U_i^k$ . Par construction, le flot  $g^k(t)$  satisfait en particulier à l'estimation

$$|\text{Rm } g^k(x, t)| \leq \frac{K_1}{t} \quad (\text{IV.10})$$

pour tout  $(x, t) \in D^k$ .

On définit ensuite des domaines "limites" en posant

$$U_i^\infty = \{x \in M \mid \exists k_0 \leq 0 \text{ tel que } \forall k \leq k_0, B_{g_0}(x, C_1 \sqrt{K_1 t_i}) \text{ est relativement compacte dans } U_i^k\}, \quad (\text{IV.11})$$

où la constante  $C_1 = C_1(n)$  sera fixée au cours de l'argument (voir l'étape (iii)), puis

$$D^\infty = \bigcup_{i=-\infty}^0 U_i^\infty \times [t_{i-1}, t_i[,$$

ainsi que

$$\mathcal{D}^\infty = D^\infty \cup M \times \{0\}.$$

On a de manière immédiate  $U_i \subset U_{i-1}$ . Notons néanmoins qu'à ce stade de l'argument, il n'est pas exclu que les domaines limites  $U_i$ , et donc  $D$  lui-même, soient vides.

- (ii) L'étape suivante consiste à vérifier que la suite  $\{U_i\}_{i \leq 0}$  est une exhaustion de  $M$  et par conséquent que  $\mathcal{D}$  est un ouvert non-vide de  $M \times [0, T]$ . Pour  $\mathcal{K} \subset M$  compact, il existe par continuité une borne  $K_{\mathcal{K}}$  telle que

$$|\text{Rm } g_0(x)| \leq K_{\mathcal{K}}$$

pour  $x \in \mathcal{K}$ . On montre maintenant qu'il existe une constante  $A(n, K_1)$  ainsi que  $\epsilon_{\mathcal{K}} = \epsilon(r_{\mathcal{K}}, n, K_1)$  tels que

$$U_i^\infty \supset (\mathcal{K})_{A\sqrt{t_i}} = \{x \in \mathcal{K}, \mid B_{g_0}(x, A\sqrt{t_i}) \subset \mathcal{K}\}, \quad (\text{IV.12})$$

pour tout  $i \leq 0$  tel que  $t_i \leq \epsilon_{\mathcal{K}}^2$ . Ceci implique clairement  $\bigcup_{i=-\infty}^0 U_i^\infty = M$ .

Afin de démontrer (IV.12), on utilise la propriété de maximalité (iii) du lemme IV.1.8, combinée au corollaire (B.0.3). On pose donc  $\epsilon = \min(\epsilon_{B.0.3}(n, K_1), \frac{1}{2})$ , puis on fixe  $k \leq i \leq 0$ . Alors, pour tout  $x \in M$  tel que  $B_i(x, \frac{\sqrt{t_i}}{\epsilon}) \subset U_i^k \cap \mathcal{K}$  pour  $t_{k-1} \leq t \leq t_i$ , et si  $t_i \leq \frac{\epsilon^2}{K_{\mathcal{K}}}$ , les hypothèses de l'énoncé du corollaire B.0.3 sont satisfaites par le flot mis à

l'échelle  $\tilde{g}^k(s) = \frac{\epsilon^2}{t_i} g^k(\frac{t_i}{\epsilon^2} s + t_{k-1})$  pour  $s \in [0, \epsilon^2(1 - \frac{t_{k-1}}{t_i})]$ . D'où en particulier l'estimation au point  $(x, t_i)$

$$|\text{Rm } g^k(x, t_i)| \leq \frac{K_0}{4t_i} \quad (\text{IV.13})$$

(puisque  $\frac{\epsilon^2}{t_i} \leq \frac{K_0}{4t_i}$ ). En appliquant ensuite le corollaire *I.1.2* sur la contraction des distances  $g^k(t)$  sur  $U_i^k \times [t_{k-1}, t_i]$ , on trouve

$$d_t(x, M \setminus U_i) \geq d_0(x, M \setminus U_i) - \frac{20}{3}(n-1)\sqrt{K_1}t.$$

Ainsi, si  $x \in U_i$  est un point tel que  $B_{g_0}(x, (\frac{1}{\epsilon} + \frac{20}{3}(n-1)\sqrt{K_1})\sqrt{t_i}) \subset U_i^k \cap \mathcal{K}$ , on a l'estimation (IV.13) au point  $x$ , et enfin si  $x$  est un point tel que  $B_{g_0}(x, a\sqrt{t_i}) \subset U_i^k \cap \mathcal{K}$ , où  $a = a(n, K_1) = \frac{1}{\epsilon} + \frac{20}{3}(n-1)\sqrt{K_1} + C_0\sqrt{K_1}$ , où  $C_0 = C(n)$  provient du lemme *IV.1.8*, alors on a l'estimation (IV.13) sur  $B_{g_0}(x, C_0\sqrt{K_1}t_i)$ . Aussi la propriété (iii) de l'énoncé du lemme *IV.1.8* garantit-elle

$$U_{i+1}^k \cap \mathcal{K} \supset (U_i^k \cap \mathcal{K})_{a\sqrt{t_i}}$$

sitôt que  $t_i \leq \epsilon_{\mathcal{K}}^2 = \frac{\epsilon^2}{K_{\mathcal{K}}}$ . On aboutit donc, par induction sur  $i$ , à

$$U_i^k \cap \mathcal{K} \supset (U_k^k \cap \mathcal{K})_{A'\sqrt{t_i}} \quad (\text{IV.14})$$

où  $A' = A'(n, K_1)$  est une constante indépendante de  $\mathcal{K}$ . En notant que l'énoncé du lemme *IV.1.8* garantit en particulier  $U_k^k \supset \mathcal{K}$  pour  $k$  suffisamment négatif, on considère la limite  $k \rightarrow -\infty$  dans (IV.14), et on obtient finalement  $U_i^\infty \supset (\mathcal{K})_{(A'+C_1\sqrt{K_1})\sqrt{t_i}}$  pour tout  $i \leq 0$  tel que  $t_i \leq \epsilon_{\mathcal{K}}^2$ , ce qui correspond à (IV.12) pour  $A = A' + C_1\sqrt{K_1}$ .

(iii) Il s'agit maintenant d'extraire de la suite des solutions  $g^k(t)$  une sous-suite qui, pour tout  $m \geq 0$  et pour tout compact  $\mathcal{K} \times [\tau', \tau] \subset \mathcal{D}^\infty$ , converge pour la norme  $\mathcal{C}^m$  vers une solution limite lisse  $g^\infty(t)$  définie sur  $\mathcal{D}^\infty$ . On fixe donc une partie compacte  $\mathcal{K} \times [0, \tau] \subset \mathcal{D}^\infty$ . La définition des  $U_i^\infty$ , jointe à un argument de recouvrement élémentaire, permet d'affirmer que pour  $k$  suffisamment négatif, on a, pour  $i$  tel que  $t_{i-1} \leq \tau < t_i$  et pour tout  $x \in \mathcal{K}$ , l'inclusion  $B_{g_0}(x, C_1\sqrt{K_1}\tau) \subset U_i^k$ . On choisit donc  $x \in \mathcal{K}$  et on note que, grâce au corollaire *I.1.2* sur la comparaison des distances,

$$d_{g^k(t)}(x, M \setminus U_i^k) \geq d_0(x, M \setminus U_i^k) - \frac{20}{3}(n-1)\sqrt{K_1}t$$

pour tout  $t_{k-1} \leq t \leq \tau$ . Aussi, en choisissant  $C_1 = 1 + \frac{20}{3}(n-1)$  dans (IV.11) on garantit en particulier que la boule  $B_{g^k(t)}(x, \sqrt{K_1}\tau)$  est relativement compacte dans  $D^k$  pour  $t_{k-1} \leq t \leq \tau$ . On peut alors appliquer la proposition *B.0.2*, d'où l'existence d'une constante  $\Lambda_{\mathcal{K}, \tau}$ , dépendant de  $g_0, K_1$ , mais indépendante de  $k$ , pour laquelle on a

$$|\text{Rm } g^k(x, t)| \leq \Lambda_{\mathcal{K}, \tau}, \quad (\text{IV.15})$$

dès que  $x \in \mathcal{K}, t_{k-1} \leq t \leq \tau$ . Ceci implique dans un premier temps, par intégration directe de l'équation du flot de Ricci, l'existence d'une autre constante  $\Lambda_{0, \mathcal{K}, \tau}$  telle que

$$(\Lambda_{0, \mathcal{K}, \tau})^{-1} g_0(x) \leq g^k(x, t) \leq \Lambda_{0, \mathcal{K}, \tau} g_0(x) \quad (\text{IV.16})$$

sur le même domaine  $\mathcal{K} \times [t_{k-1}, \tau]$ . Dans un second temps, on peut faire appel à la version locale des estimations de Shi (telles qu'on les trouve dans [13], thm 14.16) pour affirmer l'existence, pour tout  $m \geq 1$ , d'une constante  $\Lambda_{m, \mathcal{K}, \tau}$  telle que

$$|\nabla^m g^k(x, t)|_{g_0} \leq \Lambda_{m, \mathcal{K}, \tau} \quad (\text{IV.17})$$

dès que  $x \in K$ ,  $t_{k-1} \leq t \leq \tau$ . Ces estimations établies, le théorème de compacité d'Arzela-Ascoli permet d'extraire un flot limite  $g^\infty(t)$  défini sur  $D^\infty$  tel que la suite des  $g^k(t)$  converge vers  $g^\infty$  en norme  $\mathcal{C}^m$  sur tout compact de  $D^\infty$ .

Enfin,  $g^\infty(t)$  peut être prolongé à  $\mathcal{D}^\infty$  en posant  $g^\infty(x, 0) = g_0(x)$  pour tout  $x \in M$ . Pour s'assurer que l'on définit bien ainsi une condition initiale du flot au sens classique on doit vérifier que sur tout compact  $\mathcal{K} \subset M$ , et pour tout  $m \geq 0$ ,  $g^\infty(x, t)$  converge vers  $g_0$  en norme  $\mathcal{C}^m$  lorsque  $t$  tend vers 0. En fait, ceci est une conséquence des bornes (IV.15), (IV.16), et (IV.17) établies plus haut. En effet, en combinant (IV.15) et (IV.16) puis en intégrant entre  $t_{k-1}$  et  $t$  on vérifie aisément que

$$|g^k(t) - g_0|_{g_0} = |g^k(t) - g^k(t_{k-1})|_{g_0} \leq \Lambda'_{\mathcal{K}, \tau} t$$

pour une constante  $\Lambda'_{\mathcal{K}, \tau}$  indépendante de  $k$ , tandis que (IV.17) permet d'établir un contrôle analogue sur les dérivées de la métrique

$$|\nabla^m g^k(t) - \nabla^m g_0|_{g_0} \leq \Lambda'_{m, \mathcal{K}, \tau} t.$$

- (iv) La dernière étape consiste à s'assurer que la construction obtenue satisfait à toutes les propriétés requises par l'énoncé. Les estimations (ii) découlent de (IV.10) et de la convergence à tout ordre des flots  $g^k(t)$  vers le flot limite  $g^\infty(t)$ . (iii) se déduit pareillement de la propriété analogue de la construction finie. Pour le voir, on considère un point  $x \in M$  tel que pour un certain rang  $i \leq 0$ ,  $B_{g_0}(x, C_2 \sqrt{K_1 t_i}) \subset U_i^\infty$ , où  $C_2 > 2C_1 + C$ ,  $C = C(n)$  étant la constante issue du lemme IV.1.8, et tel que  $|\text{Rm } g^\infty(x, t)| < \frac{K_0}{t_i}$ . Alors  $B_{g_0}(x, (2C_1 + C) \sqrt{K_1 t_i}) \subset U_i^k$  pour  $k$  suffisamment négatif, et grâce à la convergence à tout ordre de  $g^k$  vers  $g^\infty$ ,  $|\text{Rm } g^k(y, t_i)| < \frac{K_0}{t_i}$ ,  $\text{inj}_{g^k(t_i)} y > \sqrt{\frac{t_i}{K_0}}$  pour tout  $y \in B_{g_0}(x, (2C_1 + C) \sqrt{K_1 t_i})$ . Par la propriété (iii) de la construction finie, ceci implique  $B_{g_0}(x, 2C_1 \sqrt{K_1 t_i}) \subset U_{i+1}^k$ , d'où  $B_{g_0}(x, C_1 \sqrt{K_1 t_{i+1}}) \subset U_{i+1}^k$  (puisque  $\frac{t_{i+1}}{t_i} \leq 2$ ). Finalement, cela signifie par définition que  $x \in U_{i+1}^\infty$  (donc le choix de  $C = \max(C_1, C_2)$  convient pour la constante  $C(n)$  de l'énoncé). □

*Preuve du théorème A.* Soient  $(M, g_0)$  une variété riemannienne et  $K_0 \geq 1$  un réel fixé. On considère le flot  $g(t)$  définie sur le domaine  $\mathcal{D} \subset M \times [0, 1]$  de l'espace-temps, dont l'existence résulte de la proposition IV.1.6 appliquée avec  $4K_0$ ,  $K_1 = 4C_0 K_0$  ( $C_0 = C(n)$  provient de l'énoncé de la proposition) comme valeur des paramètres, et on montre que ce flot vérifie bien les propriétés du flot partiel de paramètre  $K_0$  telles qu'énoncées par le théorème A. La propriété (ii) étant évidente si on choisit  $C = 2C_0$  pour la constante de l'énoncé du théorème, il reste à vérifier (iii).

On considère pour cela un domaine ouvert  $U \subset M$  et  $\tau > 0$  tels que  $U \times [0, \tau] \subset \mathcal{D}$  et tels que pour tout  $(x, t) \in U \times [0, \tau]$ , on ait

$$|\text{Rm } g(x, t)| \leq \frac{K_0}{t}. \quad (\text{IV.18})$$



Soit  $i \leq 0$  tel que  $t_{i-1} < \tau \leq t_i$ . L'estimation (IV.18) au temps  $t_{i-1}$  implique, en vertu de la propriété (iii) de l'énoncé de la proposition IV.1.6,

$$(U)_{C_0\sqrt{K_1 t_{i-1}}} \subset U_i.$$

On applique alors la proposition B.0.3 de l'appendice B afin d'obtenir l'estimation équivalente à (IV.18) au temps  $t_i$ . On considère pour cela le flot mis à l'échelle

$$h(x, s) = \frac{K_0}{\tau} g(x, \frac{\tau}{K_0} s + \tau)$$

pour  $(x, s) \in U_i \times [0, K_0 \frac{t_i - \tau}{\tau}]$ . L'estimation (IV.18) prise au temps  $\tau$  devient alors

$$|\text{Rm } h(x, 0)| \leq 1,$$

pour  $x \in U \cap U_i$ , tandis que l'estimation  $|\text{Rm } g(t)| \leq \frac{K_1}{t}$  satisfaite par construction se traduit par  $|\text{Rm } h(t)| \leq \frac{K_1}{s+K_0}$  sur la métrique  $h(s)$ . En notant que  $s \leq K_0 \frac{t_i - \tau}{t_{i-1}} \leq \frac{cK_0}{K_1}$ , et en se souvenant du choix  $K_1 = 4C_0 K_0$ , ceci implique

$$|\text{Rm } h(x, s)| \leq \frac{4C_0}{s}.$$

De plus, si on suppose que le point  $x \in M$  est tel que  $B_{g_0}(x, C_1\sqrt{K_1\tau}) \subset U \cap U_i$  avec  $C_1 = \frac{20}{3}(n-1) + 1$ , le corollaire I.1.2 sur la comparaison des distances garantit en particulier que pour  $0 \leq s \leq K_0 \frac{t_i - \tau}{\tau}$ ,  $B_{h(s)}(x, \frac{\tau}{K_0})$  est relativement compacte dans  $U \cap U_i$ . Aussi la proposition B.0.3 fournit-elle  $\epsilon(n) = \epsilon(n, C_0)$  tel que

$$|\text{Rm } h(x, s)| \leq 4$$

sur  $(U \cap U_i)_{C_1\sqrt{K_1\tau}}$  tant que  $s \leq \epsilon(n)$ . Puisque  $0 \leq s \leq K_0 \frac{t_i - \tau}{\tau} \leq \frac{\eta^2}{4C_0}$  on peut finalement fixer  $\eta$  de manière à avoir  $\frac{\eta^2}{4C_0} \leq \epsilon(n)$ . On en déduit, en revenant au flot  $g(t)$  la borne au temps  $t_i$

$$|\text{Rm } g(x, t_i)| < \frac{4K_0}{t_i},$$

sur le même domaine. Ceci implique  $(U \cap U_i)_{(C_1+C_0)\sqrt{K_1 t_i}} \subset U_{i+1}$  grâce à la propriété de "maximalité" (iii) de l'énoncé de la proposition IV.1.6. Finalement

$$(U)_{(C_1+2C_0)\sqrt{K_1 t_i}} \subset U_{i+1}$$

Ainsi  $\mathcal{D}$  contient en particulier une région de l'espace-temps de la forme  $(U)_{\Delta\rho} \times [\tau, \tau + \Delta\tau]$  avec  $\Delta\rho = (C_1 + 2C_0)\sqrt{K_1\tau}$  et  $\Delta\tau = \frac{\eta^2}{K_1}\tau$  (avec finalement  $C = C_1 + 2C_0$  comme choix de la constante  $C(n)$  de l'énoncé).  $\square$

## IV.2 Preuve des théorèmes B, C et D

Ce paragraphe est consacré à la preuve des théorèmes B, C et D énoncé dans l'introduction, qui établissent l'existence en temps court d'un flot de Ricci sur un domaine contrôlé de l'espace temps moyennant des hypothèses appropriée sur une variété riemannienne. Les trois preuves suivent le même schéma : le théorème A fournit l'existence d'un flot *a priori* tandis que les proposition de régularisation du paragraphe III.2.1 combinée à la propriété de "maximalité" du flot partiel permettent de contrôler son domaine d'existence.

*Preuve du théorème C.* On considère une variété riemannienne lisse  $(M^n, g)$  de dimension  $n$  qui satisfait aux hypothèses de l'énoncé pour  $v > 0$  donné, et on fixe  $\delta > 0$ . La proposition de régularisation III.2.2 fournit III.2.2 dépendant de  $n$  et  $v$ ,  $\epsilon_{III.2.2}$  dépendant de  $n$   $v$  et  $\delta$ . On pose  $K_0 = 4K_{III.2.2}$  puis  $K_1 = C_A^2 K_0$ , où  $C_A$  est la constante, qui ne dépend que de  $n$ , qui apparaît dans l'énoncé du théorème A d'existence du flot partiel. Le choix de  $K_1$  posé, la proposition III.2.2 fournit finalement  $A_{III.2.2}$ , et on pose  $a_0 = A_{III.2.2}$ .

Le théorème A garantit donc l'existence d'un domaine  $\mathcal{D}$  et d'une solution  $g(x, t)$  de l'équation de Ricci défini sur  $\mathcal{D}$ , de donnée initiale  $g$ , satisfaisant aux estimations de décroissance *a priori*

$$|\text{Rm } g(x, t)| \leq \frac{K_1}{t}, \quad \text{inj}_x g(t) \geq \sqrt{\frac{t}{K_1}}.$$

On considère  $U$  un ouvert relativement compact dans  $M$ ,  $\bar{t} > 0$  maximal tel que  $(U)_{A_0\sqrt{\bar{t}}} \subset \mathcal{D}_t$  ( $A_0$  sera fixé plus bas) pour  $0 \leq t \leq \bar{t}$ , puis on pose  $\underline{t} = (1 + \frac{1}{C^2 K_1})^{-1} \bar{t}$ . Si  $\underline{t} < \epsilon^2$ , on peut appliquer la proposition de régularisation III.2.2 au flot de Ricci  $g(t)$  restreint à  $(U)_{A_0\sqrt{\underline{t}}} \subset \mathcal{D}$ . On en déduit en particulier les estimations améliorées

$$|\text{Rm } g(x, \underline{t})| \leq \frac{K_0}{\underline{t}}, \quad \text{inj}_x g(\underline{t}) \geq \sqrt{\frac{\underline{t}}{K_0}}, \quad (\text{IV.19})$$

pour  $x \in (U)_{(A_0+a_0)\sqrt{\underline{t}}}$ . Par définition du flot partiel (propriété (iii) de l'énoncé du théorème A) on peut alors affirmer

$$(U)_{(A_0+a_0+C\sqrt{K_1})\sqrt{\underline{t}}} \times [\underline{t}, \bar{t}] \subset \mathcal{D}.$$

On choisit finalement  $A_0$  de façon à avoir  $A_0\sqrt{\bar{t}} > (A_0 + a_0 + C\sqrt{K_1})\sqrt{\underline{t}}$ . Alors  $(U)_{A_0\sqrt{\bar{t}}}$  est relativement compact dans  $(U)_{(A_0+a_0+C\sqrt{K_1})\sqrt{\underline{t}}}$  et donc dans  $\mathcal{D}_{\bar{t}}$  ce qui, si  $\bar{t} < \epsilon^2$ , constitue une contradiction avec la maximalité de  $\bar{t}$ .  $\square$

*Preuve des théorèmes B et D.* Les preuves sont identiques à celle du théorème C, à ceci près que les propositions III.2.1 et III.2.3 respectivement remplacent la proposition III.2.2 au moment d'obtenir les estimations améliorées.  $\square$

## Annexe A

# Flot d'une donnée initiale singulière et convergence

**Lemme A.0.1** (Flot de donnée initiale singulière). Soit  $g_i(t)$  une suite de flot de Ricci définis pour  $0 \leq t \leq T$  sur des variétés différentielles  $(M_i^n, x_{0,i})$  satisfaisant aux bornes

$$|\text{Rm } g_i(x, t)| \leq \frac{K}{t}, \quad \text{inj}_{g_i(t)} x \geq \sqrt{\frac{t}{K}},$$

tels que la boule  $B_{g_i(t)}(x_{0,i}, R+1)$  soit relativement compacte dans  $M_i$  pour tout  $0 \leq t \leq T$ , et tels que les données initiales vérifient

$$\text{Rc } g_i(x, 0) \geq -1, \quad \text{vol}_{g_i(0)} B_{g_i(0)}(x, r) \geq v_0 r^n,$$

pour tout  $x \in M$ ,  $0 < r \leq 1$  tel que  $B_{g_i(0)}(x, r)$  est relativement compact dans  $M_i$ . On suppose enfin que la suite des flots  $g_i(t)$  satisfait la propriété suivante : pour tout  $\delta > 0$ , il existe  $\epsilon > 0$  tel que, pour  $i$  suffisamment grand, on ait

$$\text{Rc } g_i(x, t) \geq -\frac{\delta^2}{t}$$

pour  $x \in M$ ,  $0 < t \leq \epsilon^2$ . Alors, il existe une variété différentielle  $(M_\infty^n, x_{0,\infty})$ , une fonction distance  $d_{0,\infty}$  sur  $M_\infty$  et un flot de Ricci  $g_\infty(t)$  sur  $M_\infty$  défini pour  $0 < t \leq T$  tels que, après extraction, on ait

- (i) la boule  $B_t(x_{0,\infty}, R)$  est relativement compacte dans  $M_\infty$  pour tout  $0 \leq t \leq T$ ,
- (ii) il existe une exhaustion de  $M_\infty$  par des ouverts  $U_i$  et des difféomorphismes  $\phi_i : U_i \rightarrow V_i \subset M_i$  avec  $\phi(x_{0,\infty}) = x_{0,i}$  tels que les flots  $\phi_i^* g_i(t)$  convergent au sens  $\mathcal{C}^k$  vers  $g_\infty(t)$  sur tout compact de  $M_\infty \times ]0, T]$ , et tels que les fonctions distances  $\phi_i^* d_{g_i(0)}$  convergent vers  $d_{0,\infty}$  uniformément sur tout compact.
- (iii) la fonction distance  $d_{g_\infty(t)}$  converge uniformément sur tout compact vers  $d_{0,\infty}$  lorsque  $t$  tend vers 0.

En particulier, si la suite des espaces métriques  $(M_i, d_{g_i(0)}, x_{0,i})$  converge au sens de Gromov-Hausdorff vers une limite  $(X, d_X, x_0)$  alors il existe une isométrie  $\iota : B_{g(0)}(x_{0,\infty}, R) \subset M_\infty \rightarrow B(x_0, R) \subset X$ .

**Remarque A.0.2** (Ascoli). Soit  $(X_i, x_{0,i}, d_i)$  une suite d'espaces métriques localement compacts qui converge au sens de Gromov-Hausdorff vers l'espace métrique localement compact  $(X, x_0, d)$ , et  $\psi_i : B(x_0, r_i) \subset X \rightarrow B(x_{0,i}, r_i) \subset X_i$  une suite où  $\psi_i$  est une  $\epsilon_i$ -isométrie (où  $r \rightarrow +\infty$ ,  $\epsilon_i \rightarrow 0$ ). Alors si  $f_i : X_i \rightarrow \mathbb{R}$  est une suite de fonctions avec les propriétés suivantes

(i) pour tout  $x \in X$  et  $\epsilon > 0$ , il existe  $\eta > 0$  tel que pour  $i \geq 0$  suffisamment grand et  $y \in B(\psi_i(x), \eta)$ , on a  $|f_i \circ \psi_i(x) - f_i(y)| < \epsilon$ ,  
(ii) pour tout  $x \in X$  la suite  $f_i \circ \psi_i(x)$  est bornée,  
alors on peut extraire de la suite des  $f_i \circ \psi_i$  une sous-suite qui converge uniformément sur tout compact vers une fonction continue  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ .

*Démonstration.* Pour tout  $i \geq 0$ , le caractère localement compact de  $X$  permet de choisir  $\mathcal{X}_i = \{x_{i,j}\}_{1 \leq j \leq N_i}$  un  $\epsilon_i$ -recouvrement fini de  $B(x_0, r_i) \subset X$ . Après extraction et argument diagonal, on peut supposer que pour tout  $i \geq 0$ , la suite de fonctions  $f_j|_{\mathcal{X}_i}$ ,  $j \geq 0$ , converge uniformément. Soit alors  $x \in X$ , et  $x_{i,j_i} \in \mathcal{X}_i$  avec  $x_{i,j_i} \rightarrow x$ . On vérifie que  $f_i \circ \psi_i(x_{i,j_i})$ ,  $i \geq 0$  est une suite de Cauchy et on définit  $f(x)$  comme sa limite.  $\square$

## Annexe B

# Flots complets à courbure bornée

Pour un flot évoluant à courbure bornée, il existe un principe général, et élémentaire, de non-explosion pour un temps contrôlé des solutions de certaines équations aux dérivées partielles.

**Lemme B.0.1.** *Soit  $g(t)$  un flot de Ricci défini pour  $0 \leq t \leq T$  sur  $M^n$ , avec la borne de courbure  $|\text{Rm } g(x, t)| \leq k$  pour tout  $(x, t) \in M \times [0, T]$ , soit  $x_0 \in M$  tel que  $B_t(x_0, r_0)$  est relativement compacte dans  $M$  pour tout  $0 \leq t \leq T$ , et soit  $u : M \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction lisse avec*

$$\square u \leq Au,$$

et la majoration a priori  $\sup_{M \times [0, T]} u \leq B$ . Alors

$$u(x, t) \leq e^{At} \left( \sup_{B_0(x_0, r_0)} u(\cdot, t) + 128B \frac{t}{r_0^2} \right)$$

pour tout  $(x, t) \in B_0(x_0, \frac{r_0}{2}) \times [0, \frac{r_0}{40n\sqrt{k}}]$ .

*Démonstration.* Soit  $\Phi : M \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$  la fonction “cut-off” centrée en  $x_0$  définie par  $\Phi(x, t) = \phi(\frac{4\rho(x, t) - 3r_0}{r_0})$ , où  $\rho(x, t) = d_t(x_0, x) + \frac{5}{3}(n-1)\sqrt{kt}$ . Pour tout  $0 \leq t \leq \frac{r}{40n\sqrt{k}}$ , on vérifie facilement que  $\Phi(x, t) = 0$  si  $d_t(x_0, x) \geq 1$ , et que  $\Phi(x, t) \leq \frac{1}{2}$  pour  $x \in B_0(x_0, \frac{1}{2})$ . Enfin,  $|\square\Phi + 2\frac{|\nabla\Phi|^2}{\Phi}| \leq \frac{32}{r_0^2}$ . La fonction  $v = \Phi e^{-At} u$  à support compact dans  $M \times [0, T]$  vérifie

$$\square v = \Phi e^{-At} \square u - \Phi A e^{-At} u + \square\Phi e^{-At} u - 2\nabla\Phi \cdot \nabla u,$$

en particulier,

$$\square v(x, t) \leq \left( \square\Phi + 2\frac{|\nabla\Phi|^2}{\Phi} \right) B$$

si  $v(\cdot, t)$  admet un maximum en  $x$ , et  $0 \leq t \leq \frac{1}{40n\sqrt{k}}$ . On trouve donc  $\sup_M v(\cdot, t) \leq \sup_M v(\cdot, 0) + 128tB$ . Comme  $\Phi(x, t) \equiv 1$  pour  $d_t(x_0, x) \leq \frac{1}{2}$ , l'énoncé en découle.  $\square$

Les énoncés qui suivent sont classiques, et sont d'ailleurs des conséquences du lemme B.0.1. La proposition qui suit correspond au théorème 3.1 dans [11].

**Proposition B.0.2** (B.L. Chen). *Il existe  $\Lambda(n, C, K)$  avec la propriété suivante. Soit  $g(t)$  un flot de Ricci défini pour  $0 \leq t \leq T$  sur une variété lisse  $M^n$  de dimension  $n$ , et  $x_0 \in M$ , qui vérifient*

*$B_t(x_0, 1)$  est relativement compacte dans  $M$ ,*

$$|\mathrm{Rm} g(x, t)| \leq \frac{K}{t},$$

*pour  $x \in B_t(x_0, 1)$  et  $0 < t \leq T$ , tels qu'au temps initial on ait*

$$|\mathrm{Rm} g(x, 0)| \leq C$$

*pour  $x \in B_0(x_0, 1)$ . Alors*

$$|\mathrm{Rm} g(x, t)| \leq \frac{\Lambda}{(1 - d_t(x_0, x))^2},$$

*pour  $x \in B_t(x_0, 1)$  et  $0 \leq t \leq T$ .*

Ce résultat peut être affiné pour établir, sous les mêmes hypothèses, un temps contrôlé de “non-doublement” de la borne initiale sur la courbure (voir 2.4 dans [35])

**Corollaire B.0.3** (G. Xu). *Il existe  $\epsilon_{B.0.3}(n, K) > 0$  avec la propriété suivante. Soit  $g(t)$  un flot de Ricci défini pour  $0 \leq t \leq T$  sur une variété lisse  $M^n$  de dimension  $n$ , et  $x_0 \in M$ , qui vérifient*

*$B_t(x_0, 1)$  est relativement compacte dans  $M$ ,*

$$|\mathrm{Rm} g(x, t)| \leq \frac{K}{t},$$

*pour  $x \in B_t(x_0, 1)$  et  $0 < t \leq T$ , tels qu'au temps initial on ait*

$$|\mathrm{Rm} g(x, 0)| \leq 1$$

*pour  $x \in B_0(x_0, 1)$ . Alors*

$$|\mathrm{Rm} g(x, t)| \leq 2,$$

*sur  $B_t(x_0, \epsilon_{B.0.3})$  pour  $0 \leq t \leq \epsilon_{B.0.3}^2$ .*

# Bibliographie

- [1] A.L. Besse. *Einstein Manifolds*. Classics in Mathematics. Springer, 2007.
- [2] Simon Brendle and Richard Schoen. Manifolds with  $1/4$ -pinched curvature are space forms. *Journal of the American Mathematical Society*, 22(1) :287–307, 2009.
- [3] D. Burago, I.U.D. Burago, and S. Ivanov. *A Course in Metric Geometry*. Crm Proceedings & Lecture Notes. American Mathematical Society, 2001.
- [4] Albert Chau, Luen-Fai Tam, and Chengjie Yu. Pseudolocality for the Ricci flow and applications. *Canad. J. Math.*, 63(1) :55–85, 2011.
- [5] J. Cheeger. *Degeneration of Riemannian metrics under Ricci curvature bounds*. Publications of the Scuola Normale Superiore. Scuola Normale Superiore, 2001.
- [6] Jeff Cheeger and Aaron Charles Naber. Lower bounds on ricci curvature and quantitative behavior of singular sets. 191, 03 2011.
- [7] Jeff Cheeger and Tobias H. Colding. On the structure of spaces with Ricci curvature bounded below. I. *J. Differential Geom.*, 46(3) :406–480, 1997.
- [8] Jeff Cheeger and Tobias H. Colding. On the structure of spaces with Ricci curvature bounded below. II. *J. Differential Geom.*, 54(1) :13–35, 2000.
- [9] Jeff Cheeger and Tobias H. Colding. On the structure of spaces with Ricci curvature bounded below. III. *J. Differential Geom.*, 54(1) :37–74, 2000.
- [10] Jeff Cheeger and Detlef Gromoll. The splitting theorem for manifolds of nonnegative ricci curvature. *J. Differential Geom.*, 6(1) :119–128, 09 1971.
- [11] Bing-Long Chen. Strong uniqueness of the Ricci flow. *J. Differential Geom.*, 82(2) :363–382, 2009.
- [12] Bing-Long Chen, Guoyi Xu, and Zhuhong Zhang. Local pinching estimates in 3-dim Ricci flow. *Math. Res. Lett.*, 20(5) :845–855, 2013.
- [13] B. Chow. *The Ricci Flow : Analytic aspects*. Number ptie. 2 in Mathematical surveys and monographs. American Mathematical Society, 2008.
- [14] Bennett Chow, Peng Lu, and Lei Ni. *Hamilton’s Ricci flow*, volume 77 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI ; Science Press, New York, 2006.
- [15] Tobias Colding and Aaron Charles Naber. Characterization of tangent cones of noncollapsed limits with lower ricci bounds and applications. 23, 08 2011.
- [16] Jost Eschenburg and Ernst Heintze. An elementary proof of the cheeger-gromoll splitting theorem. 2 :141–151, 06 1984.
- [17] Mikhail Feldman, Tom Ilmanen, and Lei Ni. Entropy and reduced distance for ricci expanders. 15, 06 2004.

- [18] Richard H. Bamler, Esther Cabezas-Rivas, and B Wilking. The ricci flow under almost non-negative curvature conditions. 07 2017.
- [19] Richard S. Hamilton. Three-manifolds with positive Ricci curvature. *J. Differential Geom.*, 17(2) :255–306, 1982.
- [20] Richard S. Hamilton. The formation of singularities in the ricci flow. *Sur. Diff. Geo*, 2 :7–136, 1993.
- [21] R. Hochard. Short-time existence of the Ricci flow on complete, non-collapsed 3-manifolds with Ricci curvature bounded from below. *ArXiv e-prints*, March 2016.
- [22] B. Kleiner and J. Lott. Notes on Perelman’s papers. *ArXiv Mathematics e-prints*, May 2006.
- [23] J. LaFontaine, M. Katz, M. Gromov, S.M. Bates, P. Pansu, and S. Semmes. *Metric Structures for Riemannian and Non-Riemannian Spaces*. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser Boston, 2007.
- [24] Y. Lai. Ricci flow under local almost non-negative curvature conditions. *ArXiv e-prints*, April 2018.
- [25] A. D. McLeod and P. M. Topping. Global Regularity of Three-Dimensional Ricci Limit Spaces. *ArXiv e-prints*, March 2018.
- [26] G Perelman. Construction of manifolds of positive ricci curvature with big volume and large betti numbers. *Comparison geometry (Berkeley, CA, 1993–94)*, 30 :157–163, 1997.
- [27] G. Perelman. The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications. *ArXiv Mathematics e-prints*, November 2002.
- [28] Anton Petrunin. Semiconcave functions in alexandrov’s geometry. *Surveys in Differential Geometry*, 11, 03 2013.
- [29] Thomas Richard. Curvature cones and the ricci flow. *Séminaire de théorie spectrale et géométrie*, 31 :197–220, 2012-2014.
- [30] Wan-Xiong Shi. Ricci deformation of the metric on complete noncompact Riemannian manifolds. *J. Differential Geom.*, 30(2) :303–394, 1989.
- [31] M. Simon and P. M. Topping. Local mollification of Riemannian metrics using Ricci flow, and Ricci limit spaces. *ArXiv e-prints*, June 2017.
- [32] Miles Simon. Ricci flow of almost non-negatively curved three manifolds. *J. Reine Angew. Math.*, 630 :177–217, 2009.
- [33] Miles Simon. Ricci flow of non-collapsed three manifolds whose Ricci curvature is bounded from below. *J. Reine Angew. Math.*, 662 :59–94, 2012.
- [34] P. M. Topping. Ricci flows with unbounded curvature. *ArXiv e-prints*, August 2014.
- [35] Guoyi Xu. Lower bound of Ricci flow’s existence time. *Bull. Lond. Math. Soc.*, 47(5) :759–770, 2015.
- [36] Zhu-Hong Zhang. Generalization of the Hamilton-Ivey estimate to the higher dimensional Ricci flow with a vanishing Weyl tensor. *J. Math. Anal. Appl.*, 426(2) :774–782, 2015.