



HAL
open science

Contrôle acoustique actif du bruit dans une cavité fermée

Chaouki Nacer Boultifat

► **To cite this version:**

Chaouki Nacer Boultifat. Contrôle acoustique actif du bruit dans une cavité fermée. Automatique. Ecole nationale supérieure Mines-Télécom Atlantique, 2019. Français. NNT : 2019IMTA0134 . tel-02096011

HAL Id: tel-02096011

<https://theses.hal.science/tel-02096011>

Submitted on 11 Apr 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE DE DOCTORAT DE

L'ÉCOLE NATIONALE SUPERIEURE MINES-TELECOM ATLANTIQUE
BRETAGNE PAYS DE LA LOIRE - IMT ATLANTIQUE
COMUE UNIVERSITE BRETAGNE LOIRE

ECOLE DOCTORALE N° 601
*Mathématiques et Sciences et Technologies
de l'Information et de la Communication*
Spécialité : *Automatique, Productique et Robotique*

Par

Chaouki Nacer Eddine BOULTIFAT

Contrôle acoustique actif du bruit dans une cavité fermée

Thèse présentée et soutenue à l'IMT Atlantique le 27 mars 2019
Unité de recherche : LS2N
Thèse N° : 2019IMTA0134

Rapporteurs avant soutenance :

Daniel ALAZARD Professeur, Institut supérieur de l'aéronautique et de l'espace
Xavier MOREAU Professeur, Université de Bordeaux

Composition du Jury :

Président :	Bruno GAZENGEL	Professeur, Le Mans Université
Rapporteurs :	Daniel ALAZARD	Professeur, Institut supérieur de l'aéronautique et de l'espace
	Xavier MOREAU	Professeur, Université de Bordeaux
Examineurs :	Delphine BRESCH-PIETRI	Maître-Assistante, Mines ParisTech
	Michel MALABRE	Directeur de Recherche, CNRS
Dir. de thèse :	Philippe CHEVREL	Professeur, IMT Atlantique
Co-encadrants :	Jérôme LOHEAC	Chargé de Recherche, CNRS
	Mohamed YAGOUBI	Maître-Assistant, IMT Atlantique

Remerciements

Les travaux présentés dans ce mémoire de thèse ont été effectués au laboratoire LS2N de l'IMT Atlantique de Nantes sous la direction de M. Philippe CHEVREL, M. Jérôme LOHÉAC et M. Mohamed YAGOUBI. Ces activités de recherche ont été accompagnées par des activités d'enseignement dans l'équipe Automatique du département DAPI de l'IMT Atlantique de Nantes.

Je souhaiterais exprimer ma gratitude à M. Daniel ALAZARD Professeur à l'Institut supérieur de l'aéronautique et de l'espace et M. Xavier MOREAU Professeur à l'université de Bordeaux, d'avoir accepté d'être rapporteurs de ce mémoire, ainsi que pour les remarques constructives émises dans leurs rapports. Je remercie M. Bruno GAZENGEL Professeur à Le Mans Université, Mme. Delphine BRESCH-PIETRI Maître-Assistante à Mines ParisTech et M. Michel MALABRE Directeur de Recherche au CNRS. d'avoir accepté d'examiner mes travaux de thèse.

Je voudrais exprimer mon immense gratitude à mes encadrants, M. Philippe CHEVREL, M. Jérôme LOHÉAC et M. Mohamed YAGOUBI et à mon collègue du bureau M. Paul LOISEAU. Qu'ils trouvent ici l'expression de ma reconnaissance pour leur précieux temps consacré à l'encadrement de cette thèse. Je les remercie pour l'apport autant scientifique qu'humain qu'ils ont su me transmettre. Plus particulièrement, je voudrais remercier Jérôme LOHÉAC et Mohamed YAGOUBI, qui ont toujours été disponibles pour moi, pour leurs conseils, leurs encouragements et pour toutes les discussions stimulantes. Je suis reconnaissant à Philippe CHEVREL pour la qualité et l'originalité de ses explications et ses remarques constructives. Je remercie mes collègues thésards et tous les membres de l'équipe Automatique de l'IMT Atlantique de Nantes que j'ai côtoyés quotidiennement et qui ont contribué à rendre ce travail convivial. Je remercie également toutes les personnes qui m'ont soutenu et/ou aidé durant cette thèse.

Enfin, je termine ces remerciements en remerciant ma mère et mon père pour leur temps, pour leurs sacrifices, leurs encouragements, leur amour et pour l'éducation qu'ils m'ont offerte.

Résumé

Cette thèse porte sur le contrôle acoustique actif (ANC) dans une cavité. L'objectif est d'atténuer l'effet d'une onde sonore perturbatrice en des points ou dans un volume. Ceci est réalisé à l'aide d'un contre-bruit généré, par exemple, par un haut-parleur. Cette étude requiert l'utilisation de modèles dynamiques rendant compte de l'évolution des pressions aux points d'intérêt en fonction des bruits exogènes. Ce modèle peut être obtenu par une identification fréquentielle des réponses point-à-point ou en utilisant le modèle physique sous-jacent (équation des ondes). Dans ce dernier cas, la recherche d'un modèle de dimension finie est souvent un préalable à l'étude conceptuelle d'un système d'ANC.

Les contributions de cette thèse portent donc sur l'élaboration de différents modèles simplifiés paramétrés par la position pour les systèmes acoustiques et sur la conception de lois de commande pour l'ANC.

Le premier volet de la thèse est dédié à l'élaboration de différents modèles simplifiés de système de propagation acoustique au sein d'une cavité. Pour cela, les simplifications envisagées peuvent être de nature spatiale autant que fréquentielle. Nous montrons notamment qu'il est possible, sous certaines conditions, d'approximer le système 3D par un système 1D. Ceci a été mis en évidence expérimentalement sur le banc d'essai LS2N Box. Le second volet porte sur la conception de lois de commande. En premier lieu, les stratégies de commandes couramment utilisées pour l'ANC sont comparées. L'effet de la commande multi-objectif H_∞ en différents points voisins des points d'atténuation est analysé. La possibilité d'une annulation parfaite du bruit en un point est aussi discutée.

Abstract

This thesis deals with active noise control (ANC) in a cavity. The aim is to mitigate the effect of a disturbing sound wave at some points or in a volume. This is achieved using an anti-noise generated, for example, by a loudspeaker. This study requires the use of dynamic models that report changes in pressure at points of interest in response to exogenous noises. Such models can be obtained by frequency identification of point-to-point responses or by using the underlying physical model (wave equation). In the latter case, the search for a low-complexity model (finite-dimensional model) is often a prerequisite for the conceptual study of an active control system.

The contributions of this thesis concern the development of different simplified models parameterized by the spatial position for acoustic systems, and the design of control laws for noise attenuation.

The first part of the thesis is dedicated to the development of various simplified models of acoustic propagation system within a cavity. For that, the simplifications envisaged can be of spatial nature as much as frequential. We show in particular that it is possible, under certain conditions, to approximate the 3D system by a 1D system. This has been demonstrated experimentally on the prototype system, LS2N Box.

The second part of the thesis deals with the design of control laws. First, the control strategies commonly used for ANC are compared. The effect of multi-objective H_∞ control at different spatial positions close to the attenuation points is analyzed. The possibility of perfect noise cancellation at one point is also discussed.



Table des matières

Introduction générale	1
I Systèmes acoustiques considérés	9
1 Cavités acoustiques soumises à des perturbations	11
1.1 Introduction	12
1.2 Cadre général : cavités perturbées et pilotées	12
1.2.1 Cavité cylindrique	12
1.2.2 Cavité parallélépipédique	13
1.3 Problèmes applicatifs	14
1.3.1 Habitacle d'engin	14
1.3.2 Casque antibruit	15
1.4 Cas particulier d'un habitacle automobile	16
1.4.1 Bruit "moteur"	16
1.4.2 Bruit de roulement	17
1.4.3 Bruit aéroacoustique	17
1.5 Conclusion	17
2 Équation des ondes	19
2.1 Introduction	20
2.2 Équation des ondes en 3D avec conditions aux bords	20
2.2.1 Grandeurs et Notations utilisées	20
2.2.2 Équations de base de l'acoustique	22
2.2.3 Équation des ondes	22
2.3 Solutions analytiques	23
2.3.1 Résolution par la transformation de Fourier	24
2.3.2 Résolution par changement de variable	24
2.3.3 Formule de D'Alembert	25
2.4 Approximation numérique	26
2.4.1 Méthode des différences finies	26
2.4.2 Méthode des éléments finis	30
2.5 Conclusion	33
II Modèles acoustiques simplifiés	35
3 Identification de transferts point à point	37

3.1	Introduction	38
3.2	Réponse fréquentielle (FRF)	38
3.3	Identification fréquentielle	39
3.3.1	Identification par l’algorithme des sous-espaces : Position du problème	40
3.3.2	Notations liées au problème d’identification	41
3.3.3	Méthode des sous-espaces	42
3.4	Conclusion	43
4	Modélisation de la propagation du son dans un domaine tridimensionnel par un modèle unidimensionnel	45
4.1	Introduction	46
4.2	Liens sous conditions entre systèmes en 3D et en 1D	46
4.3	Simulation comparée de systèmes en 3D et en 1D	48
4.3.1	Validation par simulation du passage 3D-1D	48
4.3.2	Effet de l’inclinaison (cas de la “LS2N box”) sur l’approximation 1D	50
4.4	Conclusion	51
5	Modèle de propagation acoustique en 1D	53
5.1	Introduction	54
5.2	Modèle de dimension infinie	54
5.2.1	Fonction de transfert entre le signal de commande et la pression en tout point	54
5.2.2	Modèle entre deux points quelconques	57
5.3	Modèle de dimension réduite	58
5.3.1	Identification de type “boîte noire”	59
5.3.2	Méthode des résidus de Cauchy	59
5.3.3	Méthode d’Hadamard	61
5.4	Illustrations numériques	62
5.4.1	Résultats numériques de l’identification fréquentielle de type “boîte noire”	62
5.4.2	Résultats numériques de la méthode des résidus de Cauchy	64
5.4.3	Résultats numériques de la méthode d’Hadamard	64
5.5	Conclusion	70
6	Un cas d’étude : la “LS2N box”	71
6.1	Introduction	72
6.2	Modèle des haut-parleurs	72
6.3	Modèle des microphones	73
6.4	Identification fréquentielle boîte noire	75
6.5	Identification paramétrée basée sur un modèle physique en 1D	76
6.6	Conclusion	79
III	Contrôle actif de bruits mono ou multi-point	81
7	Algorithmes classiques pour l’ANC : FxLMS et ses variations	83
7.1	Introduction	84

7.2	Quelques considérations sur le contrôle actif du bruit	84
7.2.1	Types de Contrôle antibruit	84
7.2.2	Différentes architectures de commande	85
7.2.3	Stratégies de commande	87
7.3	Description de l'algorithme FxLMS	88
7.4	Similarité avec la commande à modèle interne au sens de Morari	90
7.5	Extensions de l'algorithme FxLMS	92
7.6	Convergence de l'algorithme FxLMS	94
7.7	Conclusion	95
8	Comparaison entre FxLMS et H_∞	97
8.1	Introduction	98
8.2	Commande multi-objectif H_∞	98
8.3	Algorithme FxLMS avec filtre de pondération	100
8.4	Analyse comparée	101
8.4.1	Scénario de comparaison et résultats	101
8.4.2	Analyse de robustesse	104
8.4.3	Discussion des résultats	105
8.5	Conclusion	107
IV	Contrôle actif de bruits sur un segment/ un volume	109
9	Annulation du bruit pour un système acoustique en 1D	111
9.1	Introduction	112
9.2	Hypothèses et résultats théoriques	112
9.2.1	Modèle de propagation acoustique en 1D	113
9.2.2	Formulation du problème et résultat principal	114
9.2.3	Preuve de théorème 9.1	116
9.3	Illustration numérique et discussions	121
9.3.1	Simulation numérique	121
9.3.2	Discussions	123
9.3.3	Extensions du théorème 9.1	124
9.4	Conclusion	125
10	Atténuation fréquentielle par une méthode robuste	127
10.1	Introduction	128
10.2	Approximation de la fonction de transfert $\Delta G_{\Delta\xi}$	128
10.3	Synthèse d'une commande dans le cas mono-point	129
10.4	Synthèse d'une commande dans le cas multi-point	131
10.4.1	Notations et hypothèses	132
10.4.2	Problème 1 : Synthèse d'une commande dans le cas multi-point avec corrélation	132
10.4.3	Problème 2 : Synthèse d'une commande dans le cas multi-point sans corrélation	134
10.4.4	Résultats de simulation et discussions	135
10.5	Observation aux voisinages des points d'atténuation	139

10.6 Conclusion	140
Conclusion générale et perspectives	141
Bibliographie	150
Annexes	158
A Densité spectrale	161
A.1 Fonction d'autocorrélation	161
A.2 Densité spectrale de puissance	161
A.3 Indicateur de performance	162
B Optimisation non-linéaire PSO	163

Liste des figures

1	Diagramme des différentes voies possibles.	7
1.1	Le contrôle actif du bruit dans un système de ventilation.	12
1.2	Banc d'essai LS2N box.	13
1.3	Vue de dessus de la cavité (LS2N box).	13
1.4	Schéma de bloc du système.	14
1.5	Le principe du contrôle actif du bruit.	15
1.6	Schéma d'un casque antibruit.	15
1.7	Les sources du bruit dans un véhicule [76].	16
2.1	La représentation du vecteur unitaire normal.	21
2.2	Les fonctions de base ϕ_i pour un domaine 1D.	32
2.3	Maillage d'un domaine Ω	32
2.4	Élément fini ϕ_i en dimension 2.	33
4.1	Maillage du système en 3D avec un pas de 3 cm.	49
4.2	Comparaison des réponses fréquentielles des modèles en 3D et en 1D au point $\xi = 99.66$ cm ($Z_0 = 400$ et $\rho_c = 1$).	49
4.3	Comparaison des réponses fréquentielles des modèles en 3D avec et sans inclinaison au point $\xi = (100, 12.5, 17.5)$ cm.	50
5.1	Vue de dessus d'une cavité de forme cylindrique.	54
5.2	Système de propagation acoustique unidimensionnel.	55
5.3	Système de propagation acoustique unidimensionnel entre deux points.	57
5.4	Résultat d'identification fréquentielle (l'ordre $N_{\widehat{G}_s} = 21$, $fit = 98,8\%$, $\xi_m = 0.81$ m).	63
5.5	Comparaison des cartes pôles-zéros des transferts $\widehat{G}_s(s)$ et $G_s(s)$ au point $\xi_m = 0.81$ m (méthode d'identification fréquentielle). \circ et \times représentent respectivement les zéros et les pôles.	65
5.6	Valeur de l'indicateur fit en fonction de la position $\xi \in [0, 0.9]m$, dans la plage de fréquences $[20, 1000]$ Hz, avec $N_c = 30$ (méthode des résidus de Cauchy).	66
5.7	Comparaison des transferts $\widehat{G}_\xi^C(s)$ et $G_\xi(s)$ au point $\xi = 0.7$ dans la plage de fréquences $[1, 5000]$ Hz (méthode des résidus de Cauchy).	66
5.8	Comparaison des cartes pôles-zéros des transferts $\widehat{G}_\xi^C(s)$ et $G_\xi(s)$ au point $\xi = 0.7$ (méthode des résidus de Cauchy). (\circ et \times représentent respectivement les zéros et les pôles).	67

5.9	Valeur de l'indicateur <i>fit</i> en fonction de la position $\xi \in [0.1, 1]m$ dans la plage de fréquences $[20, 1000]$ Hz, avec $N_h = 30$ (méthode d'Hadamard).	68
5.10	Comparaison des cartes pôles-zéros des transferts $\widehat{G}_\xi^H(s)$ et $G_\xi(s)$ au point $\xi = 0.7$, avec $N_h = 30$ (méthode d'Hadamard). \circ et \times représentent respectivement les zéros et les pôles.	69
6.1	Haut-parleur électrodynamique.	72
6.2	Le principe d'un microphone électrostatique.	73
6.3	Circuit de polarisation d'un microphone électrostatique.	74
6.4	Résultat d'identification fréquentielle du transfert entre HP_1 et M_1 , dans la plage de fréquences $[20, 1000]$ Hz (modèle identifié d'ordre 50).	75
6.5	Résultat d'identification fréquentielle du transfert entre HP_1 et M_2 , dans la plage de fréquences $[20, 1000]$ Hz (modèle identifié d'ordre 50).	76
6.6	Comparaison des tracés de Bode des deux transferts G_{3D} et $G_{globale}$ à la position du microphone M_1 , dans la plage de fréquences $[100, 1000]$ Hz.	78
6.7	Comparaison des tracés de Bode des deux transferts G_{3D} et $G_{globale}$ à la position du microphone M_2 , dans la plage de fréquences $[100, 1000]$ Hz.	79
7.1	Schéma bloc pour le problème d'ANC par feedforward.	86
7.2	Schéma bloc pour le problème d'ANC par feedback.	86
7.3	Schéma bloc pour le problème de contrôle actif hybride (feedback et feedforward).	87
7.4	Schéma fonctionnel de la configuration feedback de l'algorithme adaptatif FxLMS.	88
7.5	Poursuite par inversion de modèle.	90
7.6	Structure de Base de la CMI au sens de Morari.	91
7.7	Commande à modèle interne robuste.	92
8.1	Stratégie de contrôle H_∞ multi-objectif et multi-modèle (MOH_∞).	98
8.2	Schéma fonctionnel de FxLMSW d'ANC (configuration par feedback).	100
8.3	Schéma bloc d'expérimentation.	101
8.4	Résultats expérimentaux des deux stratégies de contrôle (FxLMSW et MOH_∞) sur la plage de fréquences $[190, 220]$ Hz.	103
8.5	Résultats expérimentaux des deux stratégies de contrôle (FxLMSW et MOH_∞) sur la plage de fréquences $[190, 300]$ Hz.	103
8.6	Les trois différents modèles de la fonction de transfert $G_s(s)$	104
8.7	Résultats de robustesse de l'algorithme FxLMSW pour l'atténuation sur $[190, 220]$ Hz en utilisant les trois modèles différents.	105
9.1	Positionnement des points d'observation, de contrôle, de perturbation et d'atténuation dans le système acoustique.	114
9.2	Schéma bloc du problème de contrôle donné par le système d'équation (9.3)–(9.6).	115
9.3	Résultat d'annulation de bruit du théorème 9.1.	122
9.4	Effet du bruit u_p au point du contrôle ξ_c (sans contrôle).	123
10.1	La valeur de l'indicateur <i>fit</i> par rapport à la position $\Delta\xi$, dans la plage de fréquences $[20, 1200]$ Hz ($N_c = 30$).	129

10.2	Stratégie de commande MOH_∞ pour une atténuation mono-point.	130
10.3	Résultat d'atténuation de l'effet d'une perturbation en un point de mesure.	131
10.4	Stratégie de commande MOH_∞ pour une atténuation multi-point dans un cas général.	133
10.5	Stratégie de commande MOH_∞ pour une atténuation multi-point dans la cas SIMO2.	135
10.6	Résultat d'atténuation de la perturbation en deux points dans le cas SISO.	136
10.7	Résultat d'atténuation de la perturbation en deux points dans le cas SIMO1.	137
10.8	Résultat d'atténuation de la perturbation en deux points dans le cas SIMO2.	137
10.9	Résultat d'atténuation de la perturbation en deux points, en utilisant le contrôleur de cas SIMO2 dans la configuration SIMO1.	138
10.10	Observation aux voisinages des points d'atténuation dans le cas SISO mono-point.	139
10.11	Observation aux voisinages des points d'atténuation dans le cas SISO multi-point.	140
10.12	Passage d'un segment à un volume dans une cavité ayant une forme cylindrique.	148
B.1	Représentation graphique de la construction de déplacement.	164

Liste des tableaux

5.1	Paramètres et signaux des modèles de propagation acoustique en 1D.	56
5.2	Paramètres utilisés pour l'identification	62
5.3	Tableau comparative entre différentes méthodes d'approximation	70
6.1	Valeurs des paramètres du modèle en 1D obtenues par optimisation PSO. . .	78
7.1	Quelques variantes existantes de l'algorithme FxLMS	93
8.1	Les valeurs du paramètre de réglage β dans deux cas.	102
8.2	Tableau comparatif entre l'algorithme FxLMSW et la commande MOH_∞ .	107
10.1	Paramètres de simulation dans le cas d'une atténuation mono-point	131
10.2	Paramètres de simulation	135

Liste des symboles

Acronymes

ANC	Active Noise Control
CAN	Controller Area Network
DSP	Digital Signal Processor
PDE	Partial Differential Equation
FIR	Finite Impulse Response
FxLMS	Filtered-x Least Mean Square
FxLMSW	Filtered-x Least Mean Square with Weighting filter
IIR	Infinite Impulse Response
ILTI	Infinite dimension Linear Time-Invariant
IVM	Instrumental Variable Methods
LQG	Linear Quadratic Gaussian
LTI	Linear Time-Invariant
MOESP	Multivariable output Error State sPace
N4SID	Numerical algorithms for Subspace State Space System Identification
PEM	Prediction Error Methods
PSO	Particle Swarm Optimization
SIMO	Single Input Multiple Output
SISO	Single Input Single Output

Notations

\mathbb{R}	Corps des réels
\mathbb{C}	Corps des complexes
\mathbb{Z}	Ensemble des nombres entiers relatifs
\mathbb{N}	Ensemble des nombres entiers naturels
\mathcal{K}	Ensemble des contrôleurs stables ayant une structure basée sur un observateur
\mathcal{RH}_∞	Sous-espace rationnel réel de \mathcal{H}_∞ qui est constitué de toutes les matrices de transfert propres, stables rationnelles et réelles
$T_{u \rightarrow y}$	Transfert ayant pour entrée u et pour sortie y
$(.)^+$	Pseudo-inverse de Moore-Penrose d'une matrice
$(.)^\top$	Transposée d'une matrice ou d'un vecteur
$[\cdot, \cdot]$	Intervalle fermé
(\cdot, \cdot)	Intervalle ouvert

$\lfloor \cdot \rfloor$	Partie entière d'un nombre réel
$\ \cdot\ _\infty$	Norme H_∞
$Re(\cdot), Im(\cdot)$	Partie réelle et partie imaginaire
$rang(\cdot)$	Rang d'une matrice
Δ	L'opérateur Laplacien
div	La divergence d'un champ de vecteurs
∇	L'opérateur gradient
fit	Indicateur de correspondance
J	Fonction coût
W_1, W_2, W_3	Filtres de pondération
W_{L1}, W_{R1}	
$W(z)$	Filtre adaptatif de l'algorithme FxLMS
\mathbf{W}	Vecteur contient les coefficients du filtre $W(z)$
$F(z)$	Filtre de pondération de l'algorithme FxLMSW
ξ_m	Point de mesure
ξ	Position
Δ	Retard
β	Paramètre d'incrément
u_n	Vecteur unitaire normal à une surface
p_K	Pôles d'un contrôleur
p	Pression
\bar{p}	Transformée de Laplace de la pression
\tilde{p}	Transformée de Fourier de la pression
f_e	Fréquence d'échantillonnage
t	Temps
Z	Impédance acoustique
ω	Pulsation fréquentielle
s	Variable de Laplace
λ	Longueur d'onde
D_m	Débit massique
c	Vitesse du son
ΔG	Fonction de transfert point à point
G_s	Fonction de transfert secondaire
G_p	Fonction de transfert primaire
G_ξ	Fonction de transfert en fonction de ξ
\hat{G}	Fonction de transfert d'ordre réduit
$HP(s)$	Fonction de transfert d'un hautparleur
$MP(s)$	Fonction de transfert d'un microphone

Introduction générale

Introduction générale

Le son est une variation de pression se propageant sous forme d'ondes. Contrairement aux sons "musicaux" (sons périodiques contenant plusieurs fréquences), les bruits (sons complexes non périodiques) sont des sons gênants dont on cherche en général à atténuer l'effet. Des dispositifs passifs, tels que les matériaux absorbants poreux, sont souvent utilisés pour atténuer le bruit indésirable, mais ne sont pas efficaces pour des basses fréquences. Le contrôle actif du bruit (ANC) possède l'avantage de pouvoir opérer à ces fréquences, et d'être léger de surcroît. L'ANC fonctionne sur le principe de superposition acoustique au bruit indésirable généré par une source appelée primaire d'un contre bruit généré par une source appelée secondaire.

Un système électroacoustique ou électromécanique est habituellement utilisé comme source secondaire pour atténuer le bruit primaire. Dans le brevet [87], l'auteur a proposé l'idée de base du contrôle acoustique actif du bruit, qui utilise un microphone et un haut-parleur pour atténuer le bruit indésirable [63].

Il y a de nombreux domaines pour l'ANC, citons en quelques uns sans prétendre à l'exhaustivité : l'industrie automobile, les transports en général, les conduites de ventilation et de climatisation. Un domaine plus particulier concerne les soins de santé. Dans ce cadre, un contrôle de bruit à basse fréquence est utilisé à titre d'exemple dans les couveuses pour nourrissons [105].

Les architectures de commande les plus utilisées dans l'ANC sont : l'architecture par anticipation (feedforward) et par rétroaction (feedback). La différence entre ces deux architectures, consiste en l'utilisation ou non d'un signal de référence [39] pour piloter la source secondaire par l'intermédiaire du contrôleur. Dans cette thèse, nous allons nous concentrer sur le contrôle par feedback, où un signal de référence est estimé contrairement au cas d'un contrôle par feedforward où le signal de référence est fortement corrélé avec le bruit primaire et détecté avant qu'il n'arrive au point d'atténuation.

Les stratégies de contrôle, les plus utilisées dans l'ANC, sont :

- La stratégie adaptative est basée essentiellement sur l'algorithme des moindres carrés récurrents (LMS), qui a été publié par Widrow et Hoff en 1960 [110]. Cependant, l'algorithme LMS, est utilisé juste dans des applications où le chemin secondaire est considéré égale à 1 (e.g. le haut-parleur qui génère l'antibruit, est situé au point d'atténuation). Dans le cas où le chemin secondaire est différent de 1, Morgan a proposé une solution à ce problème en 1980 [81]; un an plus tard Widrow et al, et Burgess ont indépendamment présenté une proposition similaire [111], [19]. Le principe de cette solution est de prendre en compte l'effet du chemin secondaire, en introduisant un transfert identique, juste avant le contrôleur adaptatif basé sur l'algorithme LMS. Cette solution appelée FxLMS (Filtered-x Least Mean Square) est présentée dans la Section 7.3;
- La deuxième stratégie est la commande optimale robuste empruntée à la théorie de la commande en Automatique (LQG, H_2 , H_∞ , filtre de Kalman pour estimer le vecteur d'état à partir du vecteur des mesures). Voir par exemple [6, 10, 94, 84, 88, 41, 78].

Les deux stratégies de commandes présentées ci-dessus sont basées sur des modèles de dimension finie. En fait, les modèles acoustiques considérés font partie de la classe des systèmes linéaires à temps invariant de dimension infinie. Ceci implique de procéder par

réduction de modèle pour pouvoir appliquer les deux stratégies de commande (adaptative et robuste). Les modèles obtenus par la méthode des éléments finis ou différences finies (méthodes d'approximation numérique) sont souvent d'ordre trop élevé. Cependant, elles pourraient malgré tout être utilisées pour la conception d'une loi de commande, en utilisant des méthodes profitant du caractère creux de la matrice d'état [3, 93]. Cette voie n'a pas été investiguée et est l'une des perspectives de ce travail de thèse.

Dans cette thèse, nous avons opté pour des méthodes de réduction de modèle telles que la méthode d'identification par l'algorithme des sous-espaces [108, 15, 16], la méthode des résidus de Cauchy [26, 14] et la méthode d'Hadamard [69]. Nous verrons que ces deux dernières méthodes permettent d'obtenir un modèle paramétré en position, ce qui est un atout en vue de mieux comprendre le comportement du système spatialement.

Le mémoire est composé de quatre parties :

— La Partie I comporte deux chapitres. Le Chapitre 1 présente un état de l'art sur l'étude de cavités acoustiques particulières soumises à des perturbations. Les cavités qui nous intéressent le plus ont des formes cylindrique ou parallélépipédique.

Ces cavités permettent d'approcher certains systèmes physiques, tels que les systèmes de ventilation, l'habitacle des véhicules (e.g. voiture, avion, engin agricole, engin de chantier, etc), les casques antibruit. . .

Le chapitre 1 se focalise aussi sur la problématique acoustique d'un habitacle automobile et présente les différents types de bruit rencontrés dans ce cadre (bruit de moteur, de roulement et aérodynamique).

Le Chapitre 2 concerne les étapes de la modélisation de l'équation des ondes. Il s'agit d'une équation aux dérivées partielles linéaire de type hyperbolique. Des méthodes de résolution analytique et d'approximations numériques sont également présentées dans ce chapitre.

— La Partie II traite de la modélisation et de la réduction du modèle du système acoustique, à l'articulation entre systèmes acoustiques 3D et 1D. Le Chapitre 3 présente la méthode d'identification fréquentielle basée sur l'algorithme des sous-espaces. Cette méthode permet d'obtenir une approximation de dimension finie des systèmes de propagation acoustique, dans le cas de transferts point à point. Cette méthode d'identification a été choisie car elle a déjà conduit à des résultats concluants (cf. [77, 78]).

Le Chapitre 4 traite de la possibilité de représenter un système acoustique en 3D par un système acoustique en 1D. Une telle représentation ne sera valable que sous certaines conditions. Une des conditions requises pour avoir une représentation adaptée est d'avoir un système de forme cylindrique. Cependant la géométrie du banc d'essai "LS2N box" n'a pas exactement une forme cylindrique (à cause de sa paroi inclinée), cf. figure 1.3. À l'aide des méthodes d'approximation numérique, nous allons étudier l'influence de cette paroi inclinée sur la démarche de réduction spatiale proposée.

Ensuite, dans le Chapitre 5, différentes fonctions de transfert qui nous intéressent pour la synthèse de la commande sont calculées, dans le cas d'un système de propagation acoustique en 1D. Le signal de contrôle est appliqué en une extrémité de la cavité considérée et la perturbation, représentée sous forme d'une source, est appliquée sur un segment.

Une réduction de modèle est réalisée sur ces différentes fonctions de transfert permettant ainsi d'obtenir un modèle paramétré par la position spatiale. Notons qu'un tel résultat

semble difficile à obtenir à l'aide de la méthode d'identification fréquentielle.

Enfin, le Chapitre 6 consiste à modéliser le banc d'essai "LS2N box". Dans ce chapitre, deux méthodes, permettant d'obtenir un modèle représentant le transfert entre un haut-parleur et un point situé à l'intérieur de la cavité "LS2N box", sont présentées.

La première méthode est l'identification fréquentielle basée sur l'algorithme des sous-espaces. Cette méthode nous permet d'obtenir le transfert entre un haut-parleur et un microphone situé à l'intérieur de la cavité "LS2N box". Avec cette méthode, si l'on souhaite obtenir la fonction de transfert en un autre point, il est nécessaire de placer un microphone au point désiré.

La deuxième méthode utilise un modèle acoustique en 1D paramétré (en fonction de la position longitudinale). Nous avons désigné cette méthode par "identification paramétrée basée sur un modèle en 1D". Le modèle d'ordre réduit obtenu via cette démarche originale sera valable sur une plage de fréquences et sur un domaine spatial.

— La Partie III a pour objectif de présenter un état de l'art sur les stratégies de commande existantes dans le cadre de l'ANC. Cette partie est composée de deux chapitres. Le Chapitre 7 se focalise sur l'algorithme le plus couramment utilisé pour l'ANC, qui est l'algorithme FxLMS et ses multiples extensions. Cette classe d'algorithmes est issue de la communauté du traitement du signal. Les similarités entre l'algorithme FxLMS et la commande par modèle interne de Morari seront aussi présentées dans ce chapitre.

Enfin, le Chapitre 8 a pour objectif de comparer les deux stratégies de commande les plus utilisées dans le contrôle actif du bruit : la commande multi-objectif et multi-modèle H_∞ (MOH_∞) proposées dans [77, 78] (commande robuste) et l'algorithme FxLMS (algorithme adaptatif). Comme l'algorithme FxLMS ne permet pas l'atténuation sur une plage de fréquences particulière, une nouvelle variante appelée FxLMS avec un filtre de pondération (FxLMSW) est proposée dans ce chapitre, afin de comparer équitablement ses performances avec la commande MOH_∞ .

— La Partie IV traite d'une nouvelle démarche permettant de mieux comprendre le comportement d'un système acoustique dans le cas d'une annulation et d'une atténuation mono-point ou multi-point. Cette partie est composée de deux chapitres.

Le Chapitre 9 traite du contrôle actif du bruit appliqué à un système de propagation acoustique 1D. Le but ici est d'annuler le bruit en un point donné. Sur la base d'un observateur reconstituant la perturbation appliquée à une extrémité du système, nous construisons une rétroaction appliquée à l'autre extrémité permettant d'annuler l'effet de la perturbation en un point prédéfini. Même si l'accent est mis sur un système particulier avec des conditions aux bords toutes aussi particulières, cette approche est généralisable pour différents types de conditions aux bords.

Nous constaterons dans ce chapitre que l'annulation parfaite du bruit de type bruit blanc ne sera réalisable que sur un seul point (il sera donc impossible d'avoir plusieurs points d'annulation). Cette conclusion justifie le choix de viser l'atténuation au lieu de l'annulation parfaite d'un bruit. En effet, comme il est impossible d'annuler l'effet du bruit sur toute une partie du domaine spatial, nous chercherons simplement à l'atténuer.

Enfin, le Chapitre 10 a pour objectif d'étudier le comportement de la pression acoustique dans le voisinage d'un point d'atténuation. Pour ce faire, nous allons dans un premier temps synthétiser une commande dans le cas mono-point (i.e. un seul point d'atténua-

tion) et observer ce qui se passe aux alentours de ce point. Dans un second temps, nous ferons ce même travail avec deux points d'atténuation, les résultats de simulation des deux cas seront comparés pour tirer au clair l'utilité d'une synthèse à plusieurs points d'atténuation. Cette démarche ouvre la voie vers une atténuation sur un segment voire un volume.

Cette étude est rendue possible grâce à l'utilisation d'un modèle de dimension finie paramétré par la position du point d'atténuation. Pour observer l'effet d'une atténuation en un autre point, sans introduire un point de mesure supplémentaire (sans rajout de microphone de mesure), nous introduisons une fonction de transfert appelée fonction de transfert point à point.

La figure 1 représente d'une façon structurée les différentes voies possibles que nous envisageons ainsi que les chapitres couvrant les différents aspects de ce diagramme.

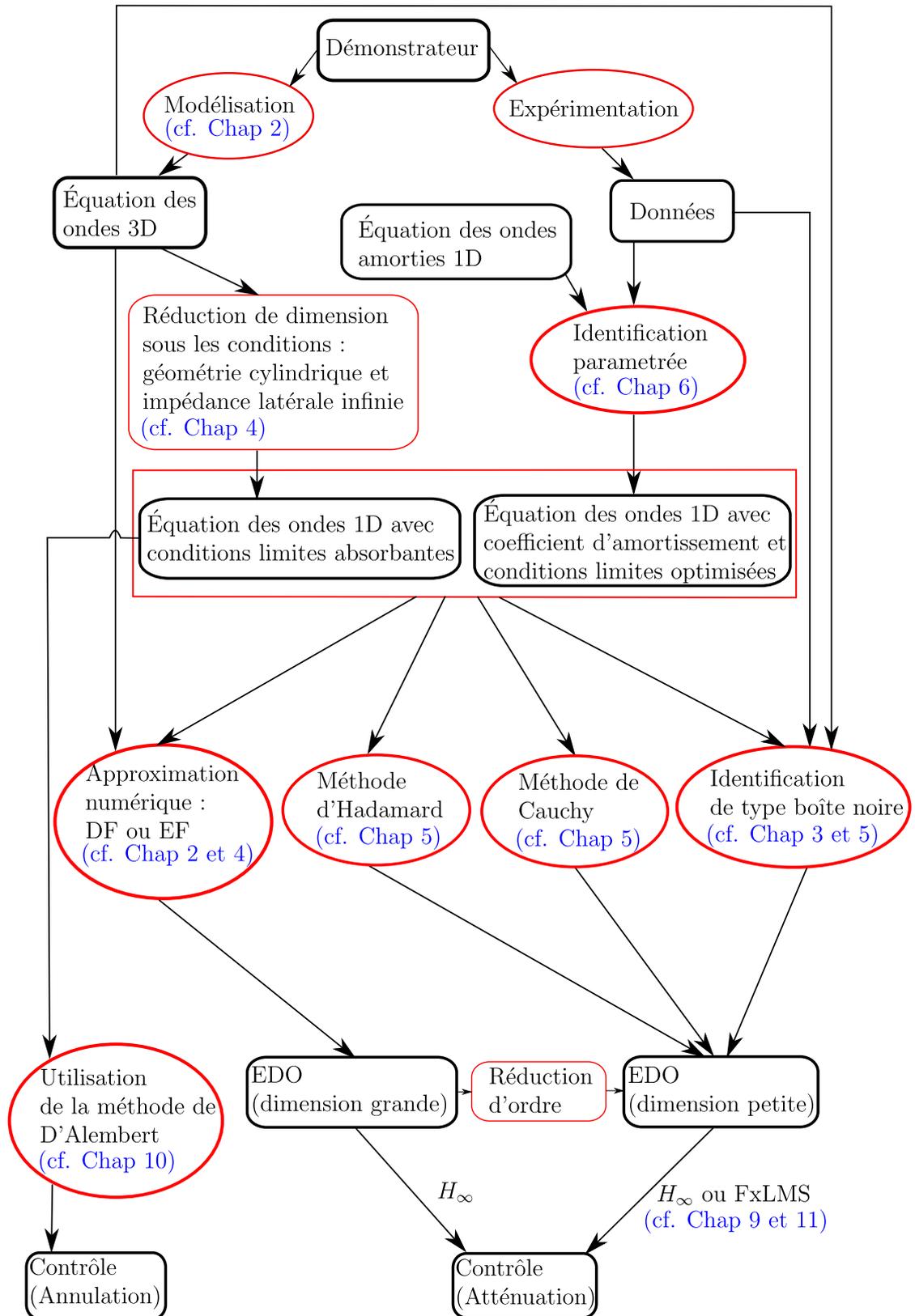


FIGURE 1 – Diagramme des différentes voies possibles.

Première partie
Systemes acoustiques considérés

Chapitre 1

Cavités acoustiques soumises à des perturbations

Sommaire

1.1	Introduction	12
1.2	Cadre général : cavités perturbées et pilotées	12
1.2.1	Cavité cylindrique	12
1.2.2	Cavité parallélépipédique	13
1.3	Problèmes applicatifs	14
1.3.1	Habitacle d'engin	14
1.3.2	Casque antibruit	15
1.4	Cas particulier d'un habitacle automobile	16
1.4.1	Bruit "moteur"	16
1.4.2	Bruit de roulement	17
1.4.3	Bruit aéroacoustique	17
1.5	Conclusion	17

1.1 Introduction

Le but de ce chapitre est de présenter des cavités acoustiques particulières soumises à des perturbations. On s'intéressera précisément aux cavités cylindriques et parallélépipédiques. Celle-ci permettent en effet d'approcher certains systèmes physiques, comme par exemple les systèmes de ventilation, l'habitacle des véhicules (e.g. voiture, avion, engin agricole, engin de chantier, etc)... Un casque antibruit peut également être représenté par deux petites cavités, l'une pour l'oreille gauche et l'autre pour l'oreille droite. Le chapitre aborde ensuite différents problèmes applicatifs visés en filigrane par ce mémoire, celui concernant l'acoustique du prototype du laboratoire (la "LS2N Box") et celle d'un habitacle automobile.

1.2 Cadre général : cavités perturbées et pilotées

Le contrôle actif du bruit est appliqué à divers degrés, e.g. au sein d'habitacle des engins roulants, volants, etc. Nous nommerons cavités, ces habitacles. Il y a plusieurs types de cavité utilisés dans la littérature, e.g. [28, 79, 116, 67], celles-ci pouvant être fermées ou ouvertes. Dans cette section, nous allons considérer deux types de formes de cavité.

1.2.1 Cavité cylindrique

Les systèmes de ventilation sont présentés par une cavité qui a une forme cylindrique¹. Ces systèmes sont souvent très bruyants et il est nécessaire de réduire leur niveau sonore. Le contrôle passif du bruit donne un résultat insatisfaisant pour les basses fréquences, il est trop coûteux et peu efficace (réduction du bruit faible en regard de l'épaisseur de l'isolant acoustique). Le contrôle actif du bruit utilise le principe de l'interférence destructive des ondes sonores. L'atténuation du bruit indésirable est réalisée par application d'une source antibruit qui doit générer un signal acoustique de pression déphasée (la somme des pressions des bruit et contre bruit est nulle), cf. [90, 117]. Le système antibruit appliqué sur ce type de système est illustré par la figure suivante.

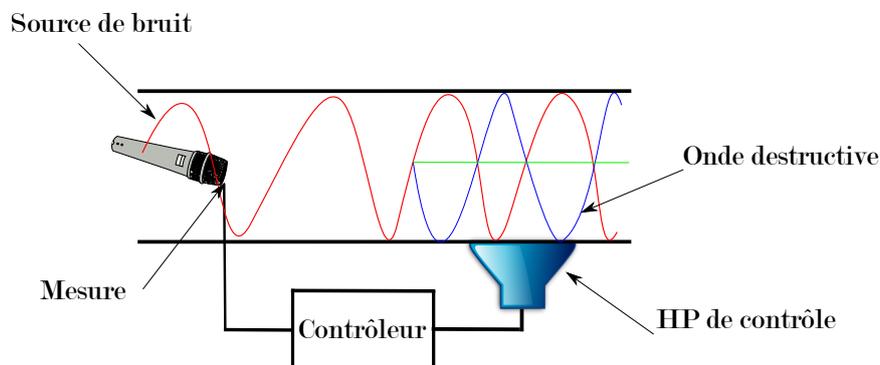


FIGURE 1.1 – Le contrôle actif du bruit dans un système de ventilation.

1. Un cylindre est une surface réglée dont les génératrices sont parallèles, c'est-à-dire une surface dans l'espace constituée de droites parallèles.

1.2.2 Cavité parallélépipédique

Une cavité parallélépipédique, permet d'approcher la représentation d'un habitacle (e.g. automobile). Les techniques du contrôle actif du bruit sont également appliquées dans l'industrie des soins de santé parce que de plus en plus de fournisseurs de soins de santé ont besoin de contrôler le bruit en basses fréquences, en particulier dans des applications médicales sensibles telles que les incubateurs pour nourrissons, représentés par des cavités parallélépipédiques [105].

Au LS2N (Laboratoire des Sciences du Numérique de Nantes), un banc d'essai, cavité parallélépipédique fermée (cf. les figures 1.2 et 1.3), a été conçu pour reproduire les modes acoustiques d'un habitacle de véhicule [76]. Cette cavité, réalisée en contreplaqué est

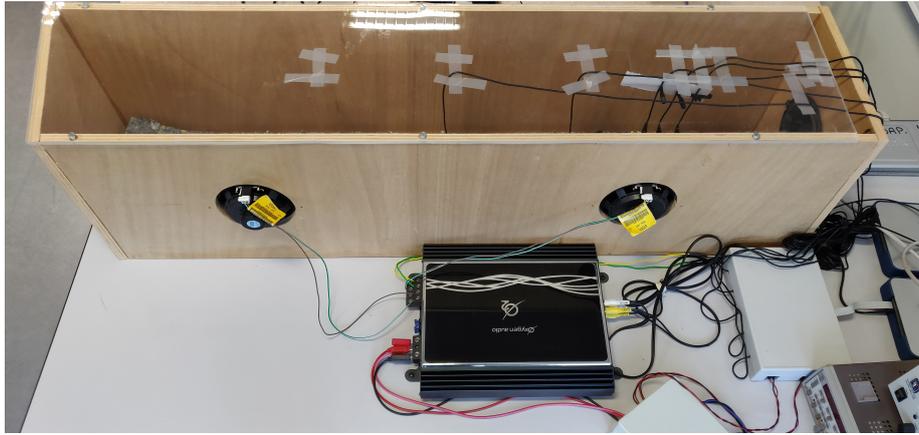


FIGURE 1.2 – Banc d'essai LS2N box.

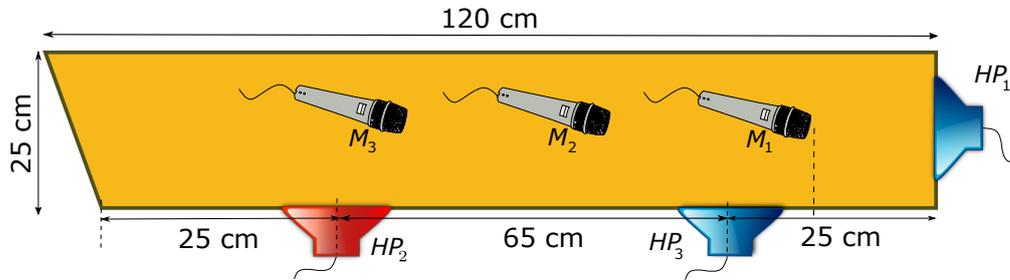


FIGURE 1.3 – Vue de dessus de la cavité (LS2N box).

recouverte d'une plaque de plexiglas. Elle mesure 30 cm de haut et est instrumentée avec trois haut-parleurs HP_1 , HP_2 , HP_3 et trois microphones M_1 , M_2 et M_3 . Les deux haut-parleurs HP_1 et HP_3 sont des haut-parleurs de contrôle (HP_1 et HP_3 génèrent séparément un signal de commande u_s) et HP_2 est utilisé pour générer la perturbation u_p . Le schéma bloc correspondant est donné dans la figure 1.4. Dans cette figure, le transfert de HP_1 et HP_3 vers M_1 , M_2 et M_3 est noté G_s , tandis que le transfert entre HP_2 et M_1 ou M_2 est nommé G_p . Dans le cadre du contrôle actif de bruit, ils sont respectivement appelés chemin secondaire et primaire. Ces transferts sont de dimension infinie (il y a une infinité de modes acoustiques dans la cavité). Pour la synthèse d'un contrôle, ces deux transferts G_s et G_p sont généralement approchés par des modèles de dimension finie.

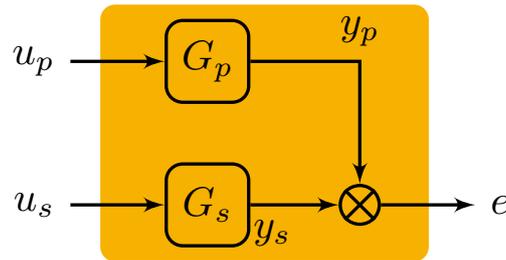


FIGURE 1.4 – Schéma de bloc du système.

1.3 Problèmes applicatifs

Le contrôle actif du bruit est utilisé pour la réduction de bruits; cette méthode est appliquée dans divers domaines industriels. Dans cette section, on s'intéresse aux applications du contrôle actif du bruit (ANC : "Active Noise Control") dans des domaines où l'environnement dans lequel l'atténuation du bruit est recherchée, peut être considéré sous forme d'une cavité ouverte ou fermée.

1.3.1 Habitacle d'engin

Dans ce paragraphe, l'application qui nous intéresse le plus est le contrôle actif du bruit dans les voitures. Le "confort acoustique" de l'habitacle d'un véhicule fait actuellement partie des prestations incontournables.

Depuis 1980, le contrôle actif du bruit a été appliqué aux voitures et certains systèmes ont atteint le niveau de production de masse. Différents problèmes ont empêché une utilisation plus large des dispositifs de contrôle actif de bruit dans les voitures. Ces problèmes étaient d'ordre technique (l'absence d'expérience à long terme, le manque de compréhension de la robustesse et de la fiabilité) et commercial (coût des composants). Parallèlement, les méthodes de contrôle du bruit passif ont été appliquées avec succès, même si elles ont augmenté le poids de véhicules et la consommation de carburant [101, 34, 38].

Durant ces deux dernières décennies, la situation a changé. Le coût des systèmes actifs a chuté de façon spectaculaire, avec celui des DSP ("Digital Signal Processor") et la possibilité d'intégrer le système actif aux systèmes déjà existants (système audio, bus CAN "Controller Area Network"). Les microphones et le câblage associé restent un coût supplémentaire pour les systèmes du contrôle actif sur certains véhicules, mais il existe des véhicules déjà équipés de microphones, pour le fonctionnement du téléphone en mains libres, par exemple.

Par ailleurs, la technologie du contrôle actif est plus mature et les brevets de la fin des années 1980 et du début des années 1990 ont également expiré. Une tendance générale importante dans l'industrie automobile est l'amélioration de l'efficacité énergétique des véhicules en réduisant leur poids. La réduction du poids des panneaux de carrosserie dégrade inévitablement leur capacité à atténuer les bruits de basses fréquences. Tout ceci offre une réelle opportunité pour le développement des systèmes de contrôle de bruits de basses fréquences [101, 34, 38].

1.3.2 Casque antibruit

Un dispositif atténuant le bruit par le principe de superposition d'un second bruit de phase opposée (signal antibruit), a été breveté aux États unis par Lueg en 1936 [87]. La technologie d'alors n'en permettait pas la mise en œuvre. Les premiers dispositifs expérimentaux ne sont apparus que dans les années 1960 [103], mais étaient trop encombrants pour être utilisés. Lorsque la technologie s'est développée avec les circuits intégrés et les microphones de petite taille, les premiers casques antibruit utilisables ont été conçus à des fins militaires [20]. Pourtant, au début, le casque antibruit (protecteur auditif) était considéré comme un équipement de luxe, sans utilité pour les équipages de véhicules blindés ou d'hélicoptères.

Le principe sur lequel repose le casque antibruit est la possibilité de superposer des ondes acoustiques. La figure 1.5 illustre le fait que si deux signaux acoustiques sont générés, l'un étant en opposition de phase de l'autre, la pression mesurée sur la ligne de symétrie sera quasi nulle. Ce principe est appliqué pour ce que l'on appelle le contrôle actif du bruit (Active Noise Control). Dans ce cas (voir figure 1.6), le bruit résiduel dans la cavité sous l'oreillette est annulé par un contre-bruit généré par un haut-parleur de contrôle (dans le cas du contrôle actif du bruit, l'atténuation est efficace aux basses fréquences), tandis que les composantes de plus hautes fréquences, du bruit sont atténuées par l'isolation passive de la coque. Soulignons aussi que dans le cas du casque antibruit, le haut-parleur et le microphone sont colocalisés. Ceci rend l'atténuation du bruit plus facile.

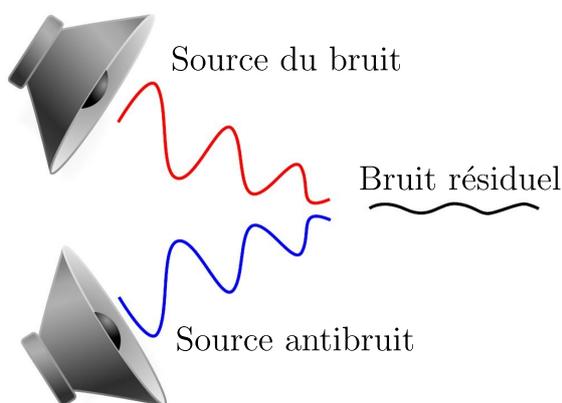


FIGURE 1.5 – Le principe du contrôle actif du bruit.

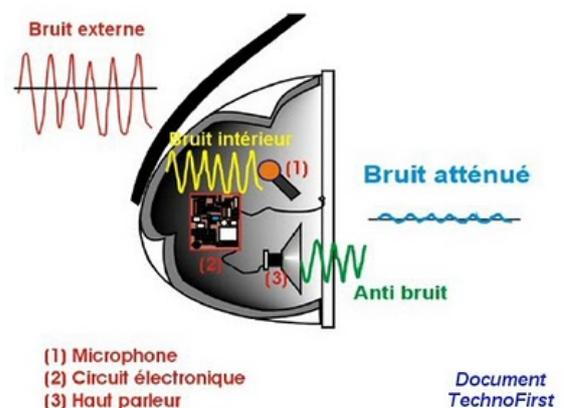


FIGURE 1.6 – Schéma d'un casque anti-bruit.

1.4 Cas particulier d'un habitacle automobile : type du bruit rencontré

Le domaine “Automobile” représente une cible de choix pour les solutions théoriques et méthodologiques investiguées dans ce travail de thèse. Dans ce domaine, l'application du contrôle actif du bruit est plus difficile par rapport au casque antibruit, car en pratique, pour diminuer les coûts d'installation des dispositifs du contrôle actif du bruit, les microphones et les haut-parleurs utilisés ne peuvent pas être colocalisés dans l'habitacle du véhicule (les haut-parleurs et microphones utilisés sont ceux installés par défaut dans l'habitacle du véhicule).

Il existe de nombreuses sources de bruit associées au véhicule automobile, comme illustré par la figure 1.7. Elles peuvent être divisées en bruits à bande étroite et bruits à large bande de fréquences. Les sources de bruit à bande étroite comprennent le moteur, le train d'entraînement, la prise d'air, l'échappement et des systèmes auxiliaires tel le ventilateur du radiateur. Le bruit large bande est causé par l'interaction pneu-route (bruit de roulement) et le bruit du vent aérodynamique (bruit aéroacoustique) [97].

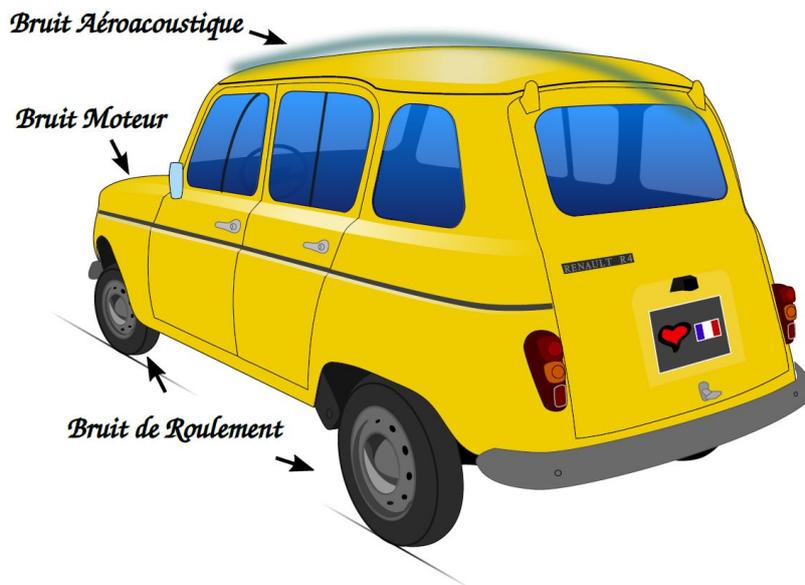


FIGURE 1.7 – Les sources du bruit dans un véhicule [76].

1.4.1 Bruit “moteur”

Le contrôle actif du bruit du moteur a été proposé pour la première fois à la fin des années 1980 [37] et a été utilisé dans diverses configurations pour contrôler l'augmentation du niveau de bruit acoustique dû à la conception du moteur du véhicule (cf. [35, 36]). Un système de contrôle du bruit moteur efficace peut être implémenté en utilisant un capteur de vitesse du moteur, des microphones. Les haut-parleurs et leurs amplificateurs sont utilisés pour générer le contre-bruit. De tels systèmes de contrôle actif du bruit moteur ont été mis en œuvre par un certain nombre de fabricants.

1.4.2 Bruit de roulement

Bien que le contrôle du bruit des moteurs ait connu un certain nombre de mises en œuvre commerciales, le contrôle du bruit de roulement a connu moins de succès commercial. Cela est dû aux coûts plus élevés et aux défis de la mise en œuvre. Cependant, le contrôle actif du bruit de roulement est une technologie importante pour permettre la conception de véhicules légers.

Le bruit de roulement est dû aux vibrations des roues. Celles-ci sont générées par l'interaction des pneus et de la chaussée et se propagent à travers un système de suspension complexe. Elles finissent par générer des bruits de basses fréquences à l'intérieur de l'habitacle du véhicule.

Il existe plusieurs caractéristiques du bruit de roulement. Premièrement, la vibration d'une roue est indépendante de celle des autres roues. Deuxièmement, les propriétés du bruit de roulement changent continuellement lorsque la vitesse du véhicule ou le profil de la route varie. Le système modélisant la relation entre la vibration de la roue et le bruit de roulement n'est pas linéaire en raison de la complexité du système de suspension. Il faut mentionner aussi que les caractéristiques du bruit de roulement sont propres à chaque véhicule.

Les systèmes de contrôle actif du bruit Feedforward (contrôle par anticipation) ont déjà été développés pour réduire les niveaux de bruit dans l'habitacle de la voiture en utilisant des signaux de référence obtenus par la mesure directe de la vibration due à l'excitation de la route [104, 9, 85]. Cependant, il est nécessaire d'utiliser au moins six accéléromètres pour obtenir des signaux de référence suffisamment cohérents avec les signaux d'erreur pour obtenir des niveaux de contrôle raisonnables [104, 85]. Une autre possibilité est d'utiliser un contrôle feedback (contrôle par contre réaction). Cette architecture de commande sera considérée dans cette thèse.

1.4.3 Bruit aéroacoustique

Le bruit aéroacoustique est un bruit à hautes fréquences, ce bruit devient plus remarquable à des vitesses élevées. Le bruit aéroacoustique est dû aux turbulences de l'air entourant le véhicule. La relation entre le flux d'air et le bruit aéroacoustique n'est pas explicite, ceci rend sa mesure difficile. En effet, même avec un microphone de mesure performant, on n'obtient pas de bonnes mesures de bruit car le microphone génère lui aussi un bruit aéroacoustique. L'utilisation de la configuration feedforward ne sera pas envisageable pour prendre en compte ce type de bruit, car elle nécessite une mesure de la source du bruit.

Par ailleurs, les fluctuations de la pression de l'air génèrent des vibrations mécaniques des parois de l'habitacle. Ces deux phénomènes (vibration d'un fluide et d'un solide) sont couplés [60].

1.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté des cavités acoustiques particulières (cavités cylindriques et parallélépipédiques) soumises à des perturbations.

La problématique acoustique d'un habitacle automobile a été considérée, au travers de

ses sources de perturbation, mais aussi au travers de la présentation du banc d'essai du LS2N dénommé "LS2N box", conçu à l'origine pour reproduire les modes acoustiques d'un habitacle du véhicule.

Chapitre 2

Équation des ondes : solution analytique et numérique

Sommaire

2.1	Introduction	20
2.2	Équation des ondes en 3D avec conditions aux bords	20
2.2.1	Grandeurs et Notations utilisées	20
2.2.2	Équations de base de l'acoustique	22
2.2.3	Équation des ondes	22
2.3	Solutions analytiques	23
2.3.1	Résolution par la transformation de Fourier	24
2.3.2	Résolution par changement de variable	24
2.3.3	Formule de D'Alembert	25
2.4	Approximation numérique	26
2.4.1	Méthode des différences finies	26
2.4.2	Méthode des éléments finis	30
2.5	Conclusion	33

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons les grandes lignes de la résolution analytique et numérique de l'équation des ondes. Il s'agit d'une équation aux dérivées partielles linéaire de type hyperbolique. Lorsque le domaine spatial est infini, une solution explicite est donnée par la formule de D'Alembert, cf. [75, 91]. Cette formule peut-être déduite à l'aide de la transformation de Fourier ou à l'aide d'un changement de variables.

Dans le cas d'un domaine spatial borné, il est nécessaire de prendre en compte des conditions aux bords représentant l'interaction de l'onde avec la frontière du domaine, surface ouverte, absorbante, rigide, etc.

La géométrie potentiellement complexe du domaine et la présence de conditions aux bords, font qu'il est laborieux voire généralement impossible d'exhiber une solution analytique explicite. Pour cette raison, ce chapitre, présente également deux méthodes numériques (méthode des éléments finis et méthode des différences finies) pour la résolution de l'équation des ondes.

2.2 Équation des ondes en 3D avec conditions aux bords

Dans cette section, on va modéliser la propagation des ondes acoustiques dans un domaine borné en trois dimensions, en se focalisant tout particulièrement sur les cavités cylindriques ou parallélépipédiques (cf. Sections 1.2 et 1.3.2). Nous nous référons aux développements autour de l'équation des ondes avec conditions aux bords [8].

2.2.1 Grandeurs et Notations utilisées

Les grandeurs essentielles dans les systèmes acoustiques sont :

- La pulsation, notée ω reliée à la fréquence f par $\omega = 2\pi f$, dont l'unité est le $rad.s^{-1}$;
- La longueur d'onde, notée $\lambda = \frac{c}{f}$, fonction de la fréquence f et de la célérité du son dans l'air c ;
- Le nombre d'ondes, noté k_o , défini par :

$$k_o = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c}; \quad (2.1)$$

- La pression $p(t, \xi)$ fonction du temps $t \in \mathbb{R}_+$ et de la position spatiale $\xi \in \mathbb{R}^3$;
- u_n est un vecteur unitaire normal à la frontière du domaine et est dirigé vers l'extérieur d'un domaine spatial Ω (comme indiqué sur la figure 2.1).

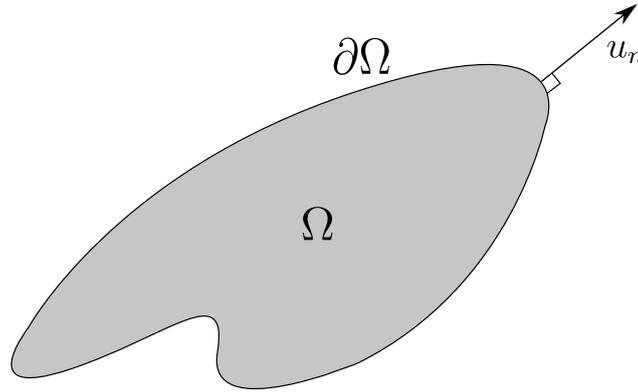


FIGURE 2.1 – La représentation du vecteur unitaire normal.

On trouve dans les équations de base de l'acoustique, les opérateurs différentiels :

- L'opérateur gradient, noté ∇ , est défini pour toute fonction suffisamment régulière $f : (x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$ par :

$$\nabla f(x, y, z) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} \\ \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} \\ \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} \end{bmatrix};$$

- La divergence d'un champ de vecteurs $\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_x \\ \mathbf{f}_y \\ \mathbf{f}_z \end{bmatrix}$, noté $\text{div } \mathbf{f}$, est un scalaire défini par :

$$\text{div } \mathbf{f} = \frac{\partial \mathbf{f}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{f}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{f}_z}{\partial z};$$

- L'opérateur Laplacien est défini par :

$$\Delta = \text{div } \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2};$$

- les dérivées première et seconde par rapport au temps t de la fonction $f : (t, x, y, z) \mapsto f(t, x, y, z)$, seront notées \dot{f} et \ddot{f} .

Avant de présenter les équations de base de l'acoustique, introduisons les variables suivantes :

- La pression totale $p_T(t, \xi) = p_c + p(t, \xi)$ dont l'unité est le pascal (Pa);
- La masse volumique du fluide $\rho_T(t, \xi) = \rho_c + \rho(t, \xi)$ en $Kg.m^{-3}$;
- La vitesse du fluide $v_a(t, \xi)$ dont l'unité est le $m.s^{-1}$;

avec p_c et ρ_c des constantes déterminées à l'équilibre statique.

2.2.2 Équations de base de l'acoustique

Supposons que le système soit proche de l'équilibre statique,

$$\begin{aligned} p(t, \xi) &\ll p_c, \\ \rho(t, \xi) &\ll \rho_c, \\ v_a(t, \xi) &\ll 1. \end{aligned}$$

On peut dès lors écrire les trois équations fondamentales de l'acoustique :

— La conservation de la masse :

$$\dot{\rho}(t, \xi) + \rho_c \operatorname{div} v_a(t, \xi) = 0; \quad (2.2)$$

— L'équation d'Euler :

Dans le cas d'un fluide non-visqueux, on peut appliquer l'équation d'Euler suivante :

$$\rho_T [\dot{v}_a + (v_a \cdot \nabla)v_a] = -\nabla p_T(t, \xi). \quad (2.3)$$

À partir de l'équation précédente, on obtient au premier ordre :

$$\rho_c \dot{v}_a(t, \xi) + \nabla p(t, \xi) = 0; \quad (2.4)$$

— L'équation d'état :

L'équation suivante nous permet de faire le lien entre l'équation d'Euler et l'équation de conservation de la masse :

$$p(t, \xi) = \rho(t, \xi)c^2. \quad (2.5)$$

2.2.3 Équation des ondes

Rappelons ici brièvement la démarche pour obtenir l'équation des ondes partant des équations (2.2), (2.4) et (2.5).

À partir de (2.2) et (2.5) on obtient :

$$-\frac{1}{c^2 \rho_c} \ddot{p}(t, \xi) = \operatorname{div}(\dot{v}_a(t, \xi)). \quad (2.6)$$

On applique ensuite l'opérateur divergence à l'équation (2.4), pour obtenir :

$$\rho_c \operatorname{div}(\dot{v}_a(t, \xi)) + \Delta p(t, \xi) = 0. \quad (2.7)$$

Enfin, de (2.6) et (2.7), on obtient l'équation des ondes :

$$\ddot{p}(t, \xi) = c^2 \Delta p(t, \xi). \quad (2.8)$$

L'équation de conservation de la masse peut aussi contenir un débit massique forcé $D_m(t, \xi)$:

$$\dot{\rho}(t, \xi) + \rho_0 \operatorname{div}(v_a(t, \xi)) = D_m(t, \xi). \quad (2.9)$$

Ce qui conduit à l'équation des ondes forcée (non-homogène) :

$$\frac{1}{c^2} \ddot{p}(t, \xi) - \Delta p(t, \xi) = \dot{D}_m(t, \xi), \quad (2.10)$$

L'équation des ondes étant d'ordre 2 en temps, il conviendra d'imposer des conditions initiales sur p et \dot{p} :

$$\begin{aligned} p(0, \xi) &= p_0(\xi) \\ \dot{p}(0, \xi) &= p_1(\xi). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Conditions aux bords.

Dans le cas d'un domaine borné spatialement, il faut déterminer les conditions aux bords. Ces conditions aux bords traduisent la réflexion, l'absorption ou l'émission des ondes sonores à la frontière $\partial\Omega$ du domaine Ω .

Parmi les différents types de surface (différents types de conditions aux bords), on distingue [113, 114, 57, 83] :

— **Cas des surfaces rigides :**

$$u_n \cdot \nabla p = 0, \quad (2.12)$$

cette condition est appelée condition de Neumann homogène ;

— **Cas des surfaces flexibles ou absorbantes :**

$$u_n \cdot \nabla p = -\frac{\rho_c}{Z}\dot{p}, \quad (2.13)$$

Z représente l'impédance d'une surface flexible ou absorbante et ρ_c est la masse volumique du fluide au repos ;

— **Cas des surfaces ouvertes :**

$$p = 0, \quad (2.14)$$

cette condition est appelée condition de Dirichlet homogène.

Remarque 2.1. *Pour représenter le système acoustique décrit dans la Section 1.2.2 (voir figure 1.3), nous allons utiliser l'équation des ondes :*

$$\ddot{p}(t, \xi) - c^2 \Delta p(t, \xi) = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (2.15)$$

avec les conditions aux bords :

$$\begin{aligned} u_n \cdot \nabla p(t, \xi) &= 0 & \text{sur } \partial\Omega \setminus HP, \\ u_n \cdot \nabla p(t, \xi) &= y_{HP} & \text{sur } HP, \end{aligned} \quad (2.16)$$

où $\partial\Omega \setminus HP$ et HP définissent les frontières du domaine Ω de la cavité et représentent respectivement les faces de la cavité sans les haut-parleurs et la section des haut-parleurs. y_{HP} représente la sortie des haut-parleurs.

Sans prétendre l'exhaustivité, nous présentons dans ce qui suit plusieurs méthodes analytiques et numériques permettant la résolution de ce type d'équation.

2.3 Solutions analytiques

Dans cette section, nous allons présenter deux méthodes d'obtention d'une expression analytique de la solution de l'équation des ondes. Cette expression peut-être obtenue soit à l'aide de la transformation de Fourier, soit à l'aide d'un changement de variables. Dans les deux cas, l'expression obtenue est connue sous le nom de formule de D'Alembert. Toutefois, ces deux approches nécessitent un domaine spatial infini. Dans le cas d'un domaine rectangulaire borné, il est aussi possible d'obtenir des solutions explicites à l'aide des séries de Fourier.

2.3.1 Résolution par la transformation de Fourier

Dans cette partie, on va utiliser la transformée de Fourier pour résoudre l'équation des ondes :

$$\ddot{p}(t, \xi) = c^2 \Delta p(t, \xi), \quad (\xi \in \mathbb{R}^d, t > 0). \quad (2.17)$$

En appliquant la transformée de Fourier par rapport à $\xi \in \mathbb{R}^d$, sur le système (2.17), on obtient le système suivant [98] :

$$\ddot{\hat{p}}(t, \nu) = -c^2 \nu^2 \hat{p}(t, \nu), \quad (2.18)$$

où

$$\hat{p}(t, \nu) = \int_{\mathbb{R}^d} p(t, \xi) e^{i\xi \cdot \nu} d\xi,$$

est la transformée de Fourier de $p(t, \xi)$ et ν la variable de Fourier (on rappelle que la transformée de Fourier de Δf est $-\nu^2 \hat{f}(\nu)$).

L'équation (2.18) est une équation différentielle ordinaire d'ordre 2 en $\hat{p}(\cdot, \nu)$, qui admet pour solution générale :

$$\hat{p}(t, \nu) = \hat{f}(\nu) e^{-i\nu c t} + \hat{g}(\nu) e^{i\nu c t} \quad (2.19)$$

Les fonctions \hat{f} et \hat{g} de la variable ν seront obtenues à l'aide des conditions initiales. Nous inversons maintenant la transformation de Fourier pour obtenir :

$$\begin{aligned} p(t, \xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} [\hat{f}(\nu) e^{-i\nu c t} + \hat{g}(\nu) e^{i\nu c t}] \frac{e^{i\nu \xi}}{2\pi} d\nu \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\nu) e^{-i\nu c t} \frac{e^{i\nu \xi}}{2\pi} d\nu + \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\nu) e^{i\nu c t} \frac{e^{i\nu \xi}}{2\pi} d\nu \\ &= f(\xi - ct) + g(\xi + ct), \end{aligned} \quad (2.20)$$

avec f et g des fonctions déterminées à partir des conditions en $t = 0$.

2.3.2 Résolution par changement de variable

On peut aussi résoudre l'équation des ondes (2.17) sur \mathbb{R}^d à l'aide d'un changement de variables, cf. [75, 91]. Bien que cette méthode puisse être utilisée sur \mathbb{R}^d , avec $d \in \mathbb{N}^*$, pour des raisons de lisibilité et de simplicité de la présentation, nous ne considérerons ici que le cas $d = 1$.

Le changement de variables utilisé est :

$$\begin{cases} \zeta = \xi - ct, \\ \eta = \xi + ct. \end{cases}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{\partial}{\partial \eta} \right), \\ \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{1}{2} \left(-c^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} + c^2 \frac{\partial}{\partial \eta} \right), \end{aligned} \quad (2.21)$$

puis :

$$\Delta p(t, \xi) = \frac{\partial^2 p(t, \xi)}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 p(t, \xi)}{4\partial \zeta^2} + \frac{\partial^2 p(t, \xi)}{2\partial \zeta \partial \eta} + \frac{\partial^2 p(t, \xi)}{4\partial \eta^2}, \quad (2.22)$$

$$\ddot{p}(t, \xi) = \frac{\partial^2 p(t, \xi)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 p(t, \xi)}{4\partial \zeta^2} - c^2 \frac{\partial^2 p(t, \xi)}{2\partial \zeta \partial \eta} + c^2 \frac{\partial^2 p(t, \xi)}{4\partial \eta^2},$$

et par conséquent, étant donné que p est solution de (2.17), on obtient :

$$c^2 \Delta p(t, \xi) - \ddot{p}(t, \xi) = c^2 \frac{\partial^2 p(t, \xi)}{\partial \zeta \partial \eta} = 0. \quad (2.23)$$

L'équation des ondes (2.17) se réduit à l'équation $\frac{\partial^2 p(t, \xi)}{\partial \zeta \partial \eta} = 0$, dont la solution générale peut être aisément exprimée comme suit :

$$p(t, \xi) = f(\zeta) + g(\eta) = f(\xi - ct) + g(\xi + ct). \quad (2.24)$$

avec f et g deux fonctions de classe C^1 .

2.3.3 Formule de D'Alembert

Dans les deux paragraphes précédents, nous avons vu que la solution générale p de (2.17) est donnée par (2.24), avec f et g à déterminer à l'aide des conditions initiales. Considérons les conditions initiales suivantes :

$$\begin{cases} p(0, \xi) = p^0(\xi), \\ \dot{p}(0, \xi) = p^1(\xi). \end{cases} \quad (2.25)$$

À l'aide des condition initiales (2.25) et de la formule (2.24), on obtient :

$$\begin{cases} f(\xi) + g(\xi) = p^0(\xi), \\ -cf'(\xi) + cg'(\xi) = p^1(\xi). \end{cases}$$

La solution générale de ce système est :

$$\begin{aligned} f(\xi) &= \frac{1}{2}p^0(\xi) - \frac{1}{2c} \int_0^\xi p^1(\sigma) d\sigma + C_0, \\ g(\xi) &= \frac{1}{2}p^0(\xi) + \frac{1}{2c} \int_0^\xi p^1(\sigma) d\sigma + C_0, \end{aligned} \quad (2.26)$$

où C_0 est une constante.

La solution de (2.17)-(2.25) s'écrit donc :

$$p(t, \xi) = \frac{p^0(\xi - ct) + p^0(\xi + ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{\xi - ct}^{\xi + ct} p^1(\sigma) d\sigma + 2C_0.$$

Finalement, la condition initiale (2.25), permet d'obtenir $C_0 = 0$ et ainsi,

$$p(t, \xi) = \frac{p^0(\xi - ct) + p^0(\xi + ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{\xi - ct}^{\xi + ct} p^1(\sigma) d\sigma. \quad (2.27)$$

Remarque 2.2. D'après (2.27), on remarque que la solution $p(t, \xi)$ dépend uniquement des conditions initiales entre $\xi - ct$ et $\xi + ct$.

2.4 Approximation numérique

Dans le cas d'une géométrie complexe, il ne sera pas envisageable de tenter d'obtenir une formule explicite pour la solution des ondes. C'est pour cela que nous rappelons ici deux méthodes classiques d'analyse numérique (méthode des éléments finis et méthode des différences finies).

2.4.1 Méthode des différences finies

Dans cette section, nous introduisons la méthode des différences finies qui est utilisée pour l'approximation d'équations différentielles. Cette méthode est basée sur le développement de Taylor pour déduire des approximations des premières dérivées d'une fonction [2]. Nous utilisons ensuite ces approximations de dérivées pour approcher la solution de l'équation des ondes.

2.4.1.1 Approximation des dérivées d'une fonction par la méthode des différences finies

Soit f une fonction définie sur un ouvert de \mathbb{R} . Rappelons que la dérivée de f est définie par :

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad (2.28)$$

pour x dans le domaine de définition de f .

Le développement de Taylor permet d'écrire, pour h petit :

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f^{(3)}(x) + \dots \quad (2.29)$$

À partir de (2.28) et (2.29), on obtient :

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) + \frac{h}{2!}f''(x) + \frac{h^2}{3!}f^{(3)}(x) + \dots \quad (2.30)$$

que l'on peut approximer par :

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) + O(h) \quad (2.31)$$

Le terme d'erreur de l'approximation est de l'ordre de h , noté $O(h)$. Cette erreur dépend de la norme de f'' dans l'intervalle $[x, x+h]$.

Il y a un autre moyen pour obtenir une approximation de la dérivée première $f'(x)$. À partir de (2.29), on obtient aussi :

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) - \frac{h^3}{3!}f^{(3)}(x) + \dots \quad (2.32)$$

Ce qui nous intéresse le plus dans l'équation des ondes est l'approximation de la dérivée seconde $f''(x)$. En sommant les deux équations (2.32) et (2.29), on obtient l'approximation de la dérivée seconde $f''(x)$:

$$\frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} = f''(x) + O(h^2). \quad (2.33)$$

L'approximation de la différence (2.31) est connue sous le nom d'approximation par différence en avant. Nous notons que la différence finie centrée (2.33) est précise à l'ordre 2 alors que la différence finie en avant (2.31) n'est précise qu'à l'ordre 1 [2].

2.4.1.2 Schéma obtenu par différence finie pour l'équation des ondes en 1D

Dans ce paragraphe, nous considérons l'exemple académique d'un système de propagation acoustique unidimensionnelle, avec un signal de commande à une extrémité :

$$\ddot{p}(t, \xi) = c^2 \Delta p(t, \xi), \quad (\xi \in (0, 1), t > 0), \quad (2.34)$$

avec

$$\begin{cases} \frac{\partial p(t, 0)}{\partial \xi} = 0, \\ \frac{\partial p(t, 1)}{\partial \xi} = u(t), \\ p(0, \xi) = \dot{p}(0, \xi) = 0 \end{cases} \quad (2.35)$$

$u(t)$ représente un signal de commande appliqué à l'extrémité $\xi = 1$ du domaine $(0, 1)$.

Discrétisation spatiale

La discrétisation spatiale va nous permettre d'obtenir une représentation d'état linéaire continue de dimension finie, du système décrit par (2.34) et (2.35), dont la solution peut être calculée.

La discrétisation spatiale est faite sur n_ξ nœuds en posant :

$$\xi_i = ih \quad \text{avec} \quad i \in \{0, \dots, n_\xi\}, \quad (2.36)$$

où h est le pas de discrétisation spatiale.

On note ensuite respectivement $p_i(t) = p(t, \xi_i)$ et $\dot{p}_i(t) = \dot{p}(t, \xi_i)$ la pression et sa dérivée au point ξ_i ($\xi_0 = 0$ et $\xi_{n_\xi} = 1$).

À partir de (2.31), (2.33), (2.34) et (2.35), on obtient :

$$\ddot{p}(t, \xi) \simeq c^2 \frac{p(t, \xi + h) - 2p(t, \xi) + p(t, \xi - h)}{h^2}, \quad (\xi \in (0, 1), t > 0), \quad (2.37)$$

avec

$$\begin{cases} \frac{p(t, h) - p(t, 0)}{h} \simeq 0, \\ \frac{p(t, 1) - p(t, 1 - h)}{h} \simeq u(t), \end{cases} \quad (2.38)$$

Après avoir utilisé les équations (2.37) et (2.38) en temps continu, on obtient la représentation d'état continue de dimension finie suivante :

$$\dot{x}_{disc} \simeq A_{disc} x_{disc} + B_{disc} u \quad (2.39)$$

avec

$$x_{disc} = \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_{n_\xi} \\ \dot{p}_0 \\ \dot{p}_1 \\ \vdots \\ \dot{p}_{n_\xi} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n_\xi+2}, \quad A_{disc} = \begin{pmatrix} 0_{n_\xi+1} & I_{n_\xi+1} \\ A & 0_{n_\xi+1} \end{pmatrix} \in M_{2n_\xi+2}(\mathbb{R}),$$

$$A = \frac{c^2}{h^2} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \in M_{n_\xi+1}(\mathbb{R}), \quad B_{disc} = \frac{2c^2}{h} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n_\xi+2}$$
(2.40)

Le vecteur d'état x_{disc} est constitué des pressions et dérivées associées. $I_{n_\xi+1}$ et $0_{n_\xi+1}$ représentent respectivement la matrice d'identité et la matrice nulle de taille $n_\xi + 1$. $p_{n_{obs}}(t)$ au point $\xi_{n_{obs}}$ est supposée mesurée, avec $n_{obs} < n_\xi$, d'où l'équation de sortie suivante :

$$p_{n_{obs}} = C_{disc} x_{disc}, \quad (2.41)$$

avec

$$C_{disc} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & c_{n_{obs}} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n_\xi+2},$$

où $c_{n_{obs}} = 1$ est la valeur de la colonne n_{obs} de la matrice C_{disc} .

Discrétisation spatio-temporelle

Dans cette partie, nous approximations les dérivées premières et secondes de la pression par rapport à la position et au temps par discrétisation spatio-temporelle. Cette discrétisation spatio-temporelle permet de résoudre l'équation des ondes numériquement.

La discrétisation spatio-temporelle est réalisée en $n_\xi + 1$ points de position ξ et sur $n_t + 1$ points au niveau temporel sur l'intervalle $[0, T]$:

$$\xi_i = ih \quad \text{avec} \quad i \in \{0, \dots, n_\xi\},$$

$$t^k = k\tau \quad \text{avec} \quad k \in \{0, \dots, n_t\},$$

où τ est le pas de discrétisation temporelle.

On note ensuite $p_i^k \simeq p(t^k, \xi_i)$ l'approximation de la pression au point ξ_i à l'instant t^k ($\xi_0 = 0$, $\xi_{n_\xi} = 1$, $t^0 = 0$ et $t^{n_t} = T$).

À partir de (2.31), (2.33), (2.34) et (2.35), on obtient :

$$\frac{p(t + \tau, \xi) - 2p(t, \xi) + p(t - \tau, \xi)}{\tau^2} \simeq c^2 \frac{p(t, \xi + h) - 2p(t, \xi) + p(t, \xi - h)}{h^2},$$
($\xi \in (0, 1), t > 0$), (2.42)

avec

$$\begin{cases} \frac{p(t, h) - p(t, 0)}{h} \simeq 0, \\ \frac{p(t, 1) - p(t, 1-h)}{h} \simeq u(t), \\ \frac{p(\tau, \xi) - p(0, \xi)}{\tau} \simeq 0, \\ p(0, \xi) = 0. \end{cases} \quad (2.43)$$

En utilisant les notations décrites avant, les équations (2.42) et (2.43) se réécrivent :

$$\frac{p_i^{k+1} - 2p_i^k + p_i^{k-1}}{\tau^2} \simeq c^2 \frac{p_{i+1}^k - 2p_i^k + p_{i-1}^k}{h^2}. \quad (2.44)$$

avec

$$\begin{cases} \frac{p_1^k - p_0^k}{h} \simeq 0, \\ \frac{p_{i_\xi}^k - p_{i_\xi-1}^k}{h} \simeq u(t^k), \\ \frac{p_i^1 - p_i^0}{\tau} \simeq 0 = p_i^0, \end{cases} \quad (2.45)$$

De l'équation (2.44), il en résulte l'équation récurrente suivante :

$$p_i^{k+1} \simeq \left(\frac{c\tau}{h}\right)^2 p_{i+1}^k + 2\left(1 - \left(\frac{c\tau}{h}\right)^2\right) p_i^k + \left(\frac{c\tau}{h}\right)^2 p_{i-1}^k - p_i^{k-1}, \quad (2.46)$$

initialisée avec (2.45).

Après avoir utilisé les équations (2.45) et (2.46), on obtient la représentation d'état en temps discret de dimension finie :

$$x_{disc}(k+1) \simeq \bar{A}_{disc} x_{disc}(k) + \bar{B}_{disc} u(k) \quad (2.47)$$

avec

$$x_{disc}(k) = \begin{pmatrix} p_0^k \\ p_1^k \\ \vdots \\ p_{n_\xi}^k \\ p_0^{k+1} \\ p_1^{k+1} \\ \vdots \\ p_{n_\xi}^{k+1} \end{pmatrix}, \quad \bar{A}_{disc} = \begin{pmatrix} 0_{n_\xi+1} & I_{n_\xi+1} \\ -I_{n_\xi+1} & \bar{A} \end{pmatrix}, \quad \bar{B}_{disc} = 2\frac{c^2\tau^2}{h} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.48)$$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 2(1-\varsigma) & 2\varsigma & 0 & \dots & 0 \\ \varsigma & 2(1-\varsigma) & \varsigma & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \varsigma & \ddots & \varsigma \\ 0 & \dots & 0 & 2\varsigma & 2(1-\varsigma) \end{pmatrix},$$

où $\varsigma = \left(\frac{c\tau}{h}\right)^2$.

Condition de stabilité pour la discrétisation spatio-temporelle

La stabilité de (2.46) dépend du choix du pas de discrétisation spatiale h et temporelle τ , pour trouver la condition de stabilité, on remplace p_i^k par $p_k e^{ji h \theta}$ dans (2.46) [1] :

$$p_{k+1} e^{ji h \theta} = \left(\left(\frac{c\tau}{h} \right)^2 e^{j h \theta} + 2 \left(1 - \left(\frac{c\tau}{h} \right)^2 \right) + \left(\frac{c\tau}{h} \right)^2 e^{-j h \theta} \right) p_k e^{ji h \theta} - p_{k-1} e^{ji h \theta}. \quad (2.49)$$

Un calcul simple nous amène à l'équation suivante :

$$p_{k+1} = 2 \left(1 - 2 \left(\frac{c\tau}{h} \right)^2 \sin^2 \left(\frac{h\theta}{2} \right) \right) p_k - p_{k-1} \quad (2.50)$$

En posant $p_k = \Phi^k$ ($\Phi^k = \prod_{i=1}^k \Phi$), l'équation (2.50) peut être simplifiée comme suit :

$$\Phi^2 - 2 \left(1 - 2 \left(\frac{c\tau}{h} \right)^2 \sin^2 \left(\frac{h\theta}{2} \right) \right) \Phi + 1 = 0 \quad (2.51)$$

Cependant, pour avoir la stabilité des solutions de la forme $p_k = \Phi^k$, Φ doit être dans le disque unitaire, ce qui implique l'inégalité suivante :

$$\left| \left(1 - 2 \left(\frac{c\tau}{h} \right)^2 \sin^2 \left(\frac{h\theta}{2} \right) \right) \right| \leq 1, \quad (2.52)$$

ou encore

$$\left(\frac{c\tau}{h} \right)^2 \sin^2 \left(\frac{h\theta}{2} \right) \leq 1. \quad (2.53)$$

Puisque $\sin^2 \left(\frac{h\theta}{2} \right) \leq 1$, la condition (2.53) est satisfaite si :

$$\frac{c\tau}{h} \leq 1, \quad (2.54)$$

La condition (2.54), permet de fixer une limite supérieure au pas de temps à utiliser. Elle est connue sous le nom de condition de Courant-Friedrichs-Lewy ou condition CFL [31].

2.4.2 Méthode des éléments finis

Dans cette partie, nous présentons les étapes de la méthode des éléments finis pour la résolution numérique de l'équation des ondes définie sur un domaine borné Ω [74, 96].

2.4.2.1 Description du problème

Le problème qu'on veut résoudre est décrit ci-dessous, à l'aide de la formulation faible de l'équation aux dérivées partielles.

L'objectif est de trouver $p(t, \xi)$, solution du système acoustique en 3D représenté par les équations (2.15) et (2.16). La formulation du problème en terme des relations (2.15)

et (2.16), est appelée formulation forte.

Pour obtenir une formulation faible du problème, on introduit v définie sur Ω , où Ω est le domaine spatial du système acoustique. De (2.15), on obtient par intégration sur le domaine spatial :

$$\int_{\Omega} v(\xi) \ddot{p}(t, \xi) d\xi = c^2 \int_{\Omega} v(\xi) \Delta p(t, \xi) d\xi \quad (2.55)$$

En intégrant par partie, on obtient, à l'aide de (2.16), la formulation faible du problème :

$$\frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega} p(t, \xi) v(\xi) d\xi = c^2 \int_{HP} y_{HP}(t, \xi) v(\xi) d\Gamma_{\xi} - c^2 \int_{\Omega} \nabla p(t, \xi)^{\top} \nabla v(\xi) d\xi \quad (2.56)$$

Pour calculer $p(t, \xi)$, on fait appel à une approximation de l'équation des ondes par la méthode de Galerkin [95]. Pour ce faire, on va considérer une base $\{\phi_i\}_{i \in \mathbb{N}^*}$ de $H^1(\Omega)$ (cf. [71, Chapter 1] ou [17], pour la définition de l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$) et l'approximation p_h de p :

$$p_h(t, \xi) = \sum_{i=1}^{N_h} \mu_i(t) \phi_i(\xi), \quad (2.57)$$

avec N_h un entier et $\mu_i(t)$ des coefficients à déterminer.

Pour déterminer les coefficients $\mu_i(t)$, on va utiliser la formulation faible (2.56), en prenant $v = \phi_j$ et en remplaçant p par p_h . On obtient donc pour tout $j \in \{1, \dots, N_h\}$:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{N_h} \mu_i(t) \phi_i(\xi) \phi_j(\xi) d\xi \\ = c^2 \int_{HP} y_{HP}(t, \xi) \phi_j(\xi) d\Gamma_{\xi} - c^2 \int_{\Omega} \nabla \left(\sum_{i=1}^{N_h} \mu_i(t) \phi_i(\xi) \right)^{\top} \nabla \phi_j(\xi) d\xi, \end{aligned}$$

c'est à dire

$$\sum_{i=1}^{N_h} \ddot{\mu}_i(t) \int_{\Omega} \phi_i(\xi) \phi_j(\xi) d\xi = c^2 \int_{HP} y_{HP}(t, \xi) \phi_j(\xi) d\Gamma_{\xi} - c^2 \sum_{i=1}^{N_h} \mu_i(t) \int_{\Omega} \nabla \phi_i(\xi)^{\top} \nabla \phi_j(\xi) d\xi.$$

On définit les matrices et vecteurs :

$$U(t) = \left(c^2 \int_{HP} y_{HP}(t, \xi) \phi_i d\Gamma_{\xi} \right)_{i=1, \dots, N_h} \in \mathbb{R}^{N_h}$$

$$R = \left(c^2 \int_{\Omega} \nabla \phi_i^{\top} \nabla \phi_j d\xi \right)_{\substack{i=1, \dots, N_h \\ j=1, \dots, N_h}} \in \mathbb{R}^{N_h \times N_h},$$

$$M = \left(\int_{\Omega} \phi_i \phi_j d\xi \right)_{\substack{i=1, \dots, N_h \\ j=1, \dots, N_h}} \in \mathbb{R}^{N_h \times N_h},$$

et on obtient que $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_{N_h})^{\top}$ est solution de l'équation différentielle ordinaire :

$$M \ddot{\mu}(t) = -R \mu(t) + U(t) \quad (2.58)$$

2.4.2.2 Éléments finis d'ordre 1

Dans ce paragraphe, on va discuter un choix particulier de ϕ_i . Plus précisément ϕ_i sera choisie continue et affine par morceaux. La fonction ϕ_i change en fonction de la dimension du domaine Ω (1D, 2D ou 3D).

Pour la convergence de cette méthode, lorsque le pas de discrétisation tend vers 0, le lecteur intéressé peut se reporter à la référence [95].

Dimension 1 : Considérons le domaine d'étude $\Omega = (0, 1)$. Soit $0 = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_{N_h-1} < \xi_{N_h} = 1$ une subdivision de $(0, 1)$. On définit le pas de discrétisation $h = \max_{i \in \{0, \dots, N_h-1\}} (\xi_{i+1} - \xi_i)$. Pour chaque $i \in \{0, \dots, N_h\}$, la fonction de base ϕ_i donnée par la figure 2.2, a les caractéristiques suivantes :

- ϕ_i est continue;
- ϕ_i est affine sur chaque sous intervalle $[\xi_i, \xi_{i+1}]$;
- $\phi_i(\xi_i) = 1$ et $\phi_i(\xi_j) = 0$ pour $j \neq i$.

Cette famille $\{\phi_0, \dots, \phi_{N_h}\}$ est linéairement indépendante.

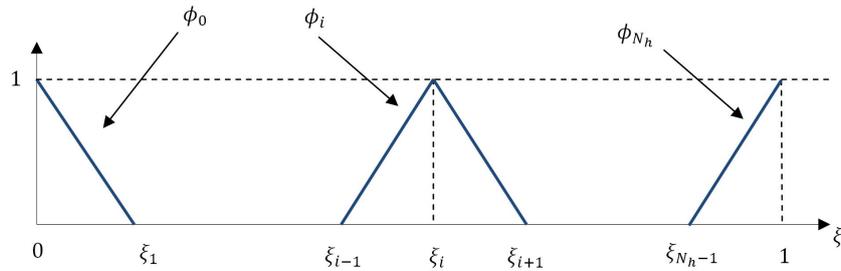


FIGURE 2.2 – Les fonctions de base ϕ_i pour un domaine 1D.

Dimension 2 : Considérons Ω un ouvert borné polyédrique (Ω est l'intersection finie de demi-espaces de \mathbb{R}^2), et $\mathcal{T}_h = \{T_1, \dots, T_{K_h}\}$ une famille de triangles ouverts telle que $T_i \cap T_j = \emptyset$ et $\bigcup_{k=1}^{K_h} T_k = \bar{\Omega}$ (cf. figure 2.3).

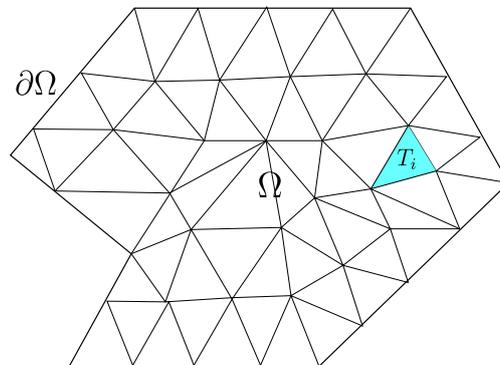


FIGURE 2.3 – Maillage d'un domaine Ω .

On définit le pas de discrétisation $h = \max_{k \in \{1, \dots, K_h\}} h_k$, avec h_k le diamètre du cercle circonscrit au triangle T_k . Notons $\{\xi_1, \dots, \xi_{N_h}\}$ l'ensemble des sommets des triangles de \mathcal{T}_h . Pour chaque $i \in \{1, \dots, N_h\}$, la fonction de base ϕ_i donnée par la figure 2.4, a les caractéristiques suivantes :

- ϕ_i est continue ;
- ϕ_i est affine sur chaque triangle T_i de \mathcal{T}_h ;
- $\phi_i(\xi_i) = 1$ et $\phi_i(\xi_j) = 0$ pour $j \neq i$.

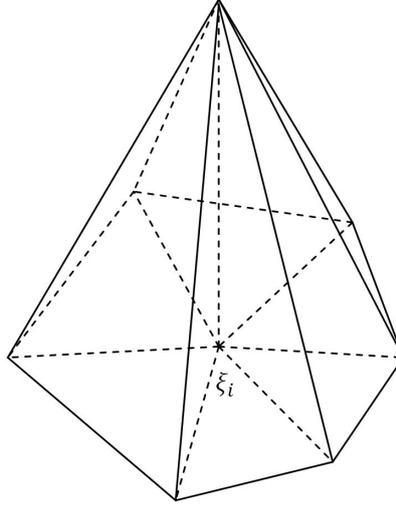


FIGURE 2.4 – Élément fini ϕ_i en dimension 2.

Remarque 2.3. Dans le cas d'un système en 3D, les tétraèdres remplacent les triangles.

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons d'abord montré comment exploiter l'équation des ondes pour étudier un système de propagation acoustique en 3D.

Ensuite, nous avons cité quelques méthodes de résolution analytique et d'approximation numérique dans le cadre de l'équation des ondes. Dans le cas d'un domaine spatial borné, il est nécessaire de prendre en compte des conditions aux bords représentant l'interaction de l'onde avec la frontière du domaine (surface ouverte, absorbante, rigide, etc). Ainsi, dans le cas d'un domaine borné, la géométrie potentiellement complexe du domaine et la présence de conditions aux bords, font qu'il peut être impossible d'exhiber une solution analytique explicite obtenue par la formule de D'Alembert (cette formule peut aussi être utilisée pour calculer explicitement la solution d'un système 1D avec des conditions aux bords non-triviales, cf. Chapitre 9).

Pour cette raison nous avons également présenté deux méthodes numériques (méthode des éléments finis et méthode des différences finies) de résolution de l'équation des ondes. Dans ce mémoire, ces méthodes seront utilisées principalement pour la simulation directe de l'équation des ondes, permettant l'analyse de l'évolution des pressions en tous points du maillage.

Ces méthodes d'approximation conduisent potentiellement à des systèmes de dimension

finie directement utilisables à des fins de conception de commande. Pour autant, nous n'utiliserons pas cette voie par la suite. En effet, les modèles qui en résultent restent d'ordre élevé (cet ordre dépend du pas de discrétisation) et nous préférons procéder à partir de systèmes d'ordre plus faible et/ou admettant une formulation analytique paramétrée continument par la position.

Deuxième partie

Modèles acoustiques simplifiés

Chapitre 3

Identification de transferts point à point

Sommaire

3.1	Introduction	38
3.2	Réponse fréquentielle (FRF)	38
3.3	Identification fréquentielle	39
3.3.1	Identification par l'algorithme des sous-espaces : Position du problème	40
3.3.2	Notations liées au problème d'identification	41
3.3.3	Méthode des sous-espaces	42
3.4	Conclusion	43

3.1 Introduction

Les systèmes de propagation acoustique sont linéaires de dimension infinie (voir la Section 2.2). Dans l'optique de profiter des outils avancés de la commande linéaire en dimension finie, nous optons pour une approximation (un modèle d'action dynamique) de dimension finie de ces systèmes. Il est possible d'obtenir théoriquement cette approximation par la méthode des éléments finis ou des différences finies présentées dans la Section 2.4. Cependant, ces démarches ne sont pas applicables quand il s'agit d'un modèle expérimental (les paramètres intervenant dans le modèle expérimental, e.g. vitesse de propagation du son, coefficients d'amortissement, etc, sont mal connus ou inconnus). Par ailleurs, nous avons souvent besoin du transfert point à point (par exemple la fonction de transfert entre la sortie du haut-parleur de contrôle et la pression mesurée par un microphone). Il n'est donc pas nécessaire de construire une approximation de la pression en tous les points de la cavité considérée.

Dans ce chapitre, nous allons présenter une méthode d'identification fréquentielle. La méthode d'identification présentée est basée sur l'algorithme des sous-espaces. Cette approche a été choisie pour son efficacité avérée dans ce domaine comme en témoignent les travaux antérieurs sur le sujet (cf. [77, 78]).

3.2 Réponse fréquentielle (FRF)

Avant de présenter la méthode d'identification fréquentielle, il convient de décrire la démarche d'obtention de la réponse fréquentielle entre deux points, à partir des données expérimentales (signaux d'entrée et de sortie temporels).

À l'aide de données temporelles obtenues à partir d'essais expérimentaux, on estime la densité spectrale de puissance d'un signal d'entrée ou de sortie, cette estimation nous permet de calculer la réponse fréquentielle entre deux points, que nous noterons désormais $G(\omega)$:

$$S_{yy}(\omega) = G(-\omega)S_{uu}(\omega)G(\omega), \quad (3.1)$$

où S_{yy} et S_{uu} représentent respectivement la densité spectrale de puissance du signal de sortie y et du signal d'entrée u (pour plus de détails sur la densité spectrale, on se reportera à l'Annexe A).

Pour estimer S_{yy} et S_{uu} à partir des signaux temporels d'entrée et de sortie, on utilise la méthode de Welch (cf. [55, 118]) déjà implémentée dans l'environnement Matlab (MathWorks Matlab).

La méthode de Welch est aussi appelée méthode de la moyenne pondérée par chevauchement de segments et méthode de moyennage par périodogramme. Les étapes sont données comme suit :

- Partitionner la séquence de données :

$$u(0), u(1), \dots, u(N-1),$$

en K segments ou lots :

$$\text{Segment 1 : } u(0), u(1), \dots, u(M-1),$$

Segment 2 : $u(S), u(S + 1), \dots, u(M + S - 1)$,
 Segment 3 : $u(2S), u(2S + 1), \dots, u(M + 2S - 1)$,
 \vdots
 Segment K : $u(N - M), u(N - M + 1), \dots, u(N - 1)$,

où M et S représentent respectivement le nombre de points dans chaque segment et le nombre de points à déplacer entre les segments, le lien entre ces paramètres est $N - M = (K - 1)S$ avec $S < M$;

- Pour chaque segment ($k = 1, 2, \dots, K$), calculer la transformée de Fourier discrète pondérée (TFD) $U_k(\omega)$ du signal u à une certaine fréquence $\omega = \psi/M$ avec $-\left(\frac{M}{2} - 1\right) \leq \psi \leq \frac{M}{2}$:

$$U_k(\omega) = \sum_{m=(k-1)S}^{M+(k-1)S-1} u(m)w(m)e^{-j2\pi\omega m}, \quad (3.2)$$

où $w(m)$ est une fonction de pondération.

Idéalement, S devrait être la plus petite valeur telle que $U_k(\omega)$ et $U_{k+1}(\omega)$ soient presque non corrélés. La valeur de ψ n'est pas limitée aux entiers. Cependant, en pratique, ψ est un nombre entier. En effet, ceci apporte l'avantage de pouvoir utiliser un algorithme de transformée de Fourier discrète rapide ;

- Pour chaque segment ($k = 1, 2, \dots, K$), former la valeur du périodogramme modifié, $P_k(\omega)$, à partir de la transformée de Fourier discrète :

$$P_k(\omega) = \frac{1}{W} |U_k(\omega)|^2, \quad (3.3)$$

où $W = \sum_{m=0}^M w^2(m)$;

- Moyenner les valeurs du périodogramme pour obtenir l'estimation de Welch de la densité spectrale de puissance :

$$\hat{S}_{uu}(\omega) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K P_k(\omega). \quad (3.4)$$

3.3 Identification fréquentielle

Il existe une littérature prolifique sur l'identification des modèles polynomiaux, cf. [73] ainsi que les références contenues dans ce papier. Dans ce cadre, les méthodes PEM (Prediction Error Methods) et IVM (Instrumental Variable Methods) sont parmi les plus connues. Dans le cas de systèmes "complexes", le modèle d'état apparaît comme une bonne alternative, cf. [108]. Pour les systèmes multivariables, ces méthodes fournissent des modèles d'état fiables directement à partir des données d'entrées et de sorties.

Pour des systèmes de grandes dimensions l'application d'algorithmes des sous-espaces a montré son efficacité, cf. [56, 66, 65]. Chaque méthode d'identification de sous-espace est

différente des autres dans le concept, l'interprétation et la mise en œuvre informatique. Un tutoriel d'identification est présentée dans [106].

Dans [42], une étude comparative entre les trois algorithmes (des sous espaces) les plus couramment utilisés à savoir : l'algorithme d'analyse canonique des variations (Canonical Variate Analysis), l'algorithme MOESP (Multivariable output Error State sPace) et l'algorithme N4SID (Numerical algorithms for Subspace State Space System IDentification) est présentée.

Nous avons opté pour la méthode (N4SID) pour l'identification en boîte noire. Ce choix est basé sur les résultats d'une thèse effectuée sur le même système d'étude (cavité "LS2N box") donné par la figure 1.3 (cf. [76]). Il y a deux types d'identification pour la méthode numérique N4SID : (i) une identification fréquentielle basées sur la connaissance de la réponse fréquentielle du système entre deux points, (ii) une identification temporelle basée sur la connaissance des données temporelles (des signaux d'entrées et de sorties). Nous présentons dans ce qui suit cette approche (identification fréquentielle) en nous référant essentiellement à l'article [107].

3.3.1 Identification par l'algorithme des sous-espaces : Position du problème

Considérons le système linéaire à temps continu donné par la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t), \end{cases} \quad (3.5)$$

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$ et $D \in \mathbb{R}^{l \times m}$ sont des matrices constantes. Ce système a m entrées, l sorties et n états, avec $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $y(t) \in \mathbb{R}^l$ et $u(t) \in \mathbb{R}^m$ représentent respectivement le vecteur d'état, le vecteur de sortie et le vecteur de commande.

En exprimant le système (3.5) dans le domaine de Laplace, nous obtenons :

$$\begin{cases} sX(s) = AX(s) + BU(s) \\ Y(s) = CX(s) + DU(s), \end{cases} \quad (3.6)$$

lorsque $x(0) = 0$.

La fonction de transfert du système (3.6) est :

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = D + C(sI_n - A)^{-1}B, \quad (3.7)$$

Nous considérons simultanément m vecteurs d'entrée u_i dont le $i^{\text{ème}}$ élément est une impulsion de Dirac ($U(s) \equiv I_m$). Le système d'équation suivant décrit la réponse fréquentielle du système aux m entrées simultanément :

$$\begin{cases} sX^H(s) = AX^H(s) + BI_m \\ H(s) = CX^H(s) + DI_m, \end{cases} \quad (3.8)$$

avec $X^H(s)$ une matrice de dimension $n \times m$. La $i^{\text{ème}}$ colonne de $X^H(s)$ contient l'état du système par application d'une impulsion de Dirac sur la $i^{\text{ème}}$ entrée.

Le problème d'identification se ramène donc à la recherche des matrices A , B , C et D étant donnés N échantillons de réponse fréquentielle $H(j\omega_k)$, mesurés à des fréquences (pas nécessairement équidistantes) ω_k , k variant de 1 à N .

3.3.2 Notations liées au problème d'identification

Avant de résoudre le problème d'identification, on doit d'abord introduire quelques notations préliminaires. La matrice dite d'observabilité étendue² et notée \mathcal{O} est donnée pour $i > n$ par :

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{i-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{li \times n} \quad (3.9)$$

et la matrice de Toeplitz Γ (une matrice triangulaire inférieure par blocs)

$$\Gamma = \begin{bmatrix} D & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ CB & D & 0 & \cdots & 0 \\ CAB & CB & D & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{i-2}B & CA^{i-3}B & CA^{i-4}B & \cdots & D \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{li \times mi} \quad (3.10)$$

où $D, CB, CAB, \dots, CA^{i-2}B$ sont appelés les paramètres de Markov.

Nous considérons également les matrices complexes $\mathbf{H}^c, \mathbf{l}^c$ et \mathbf{X}^c suivantes :

$$\mathbf{H}^c = \begin{bmatrix} H(j\omega_1) & H(j\omega_2) & \cdots & H(j\omega_N) \\ (j\omega_1)H(j\omega_1) & (j\omega_2)H(j\omega_2) & \cdots & (j\omega_N)H(j\omega_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (j\omega_1)^{i-1}H(j\omega_1) & (j\omega_2)^{i-1}H(j\omega_2) & \cdots & (j\omega_N)^{i-1}H(j\omega_N) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{li \times mN} \quad (3.11)$$

$$\mathbf{l}^c = \begin{bmatrix} I_m & I_m & \cdots & I_m \\ (j\omega_1)I_m & (j\omega_2)I_m & \cdots & (j\omega_N)I_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (j\omega_1)^{i-1}I_m & (j\omega_2)^{i-1}I_m & \cdots & (j\omega_N)^{i-1}I_m \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{mi \times mN} \quad (3.12)$$

$$\mathbf{X}^c = \begin{bmatrix} X_H(j\omega_1) & X_H(j\omega_2) & \cdots & X_H(j\omega_N) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times mN} \quad (3.13)$$

Les matrices suivantes joueront aussi un rôle crucial dans l'algorithme des sous-espaces dans le domaine fréquentielle :

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \text{Re}(\mathbf{H}^c) & \text{Im}(\mathbf{H}^c) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{li \times 2mN} \quad (3.14)$$

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} \text{Re}(\mathbf{l}^c) & \text{Im}(\mathbf{l}^c) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{mi \times 2mN} \quad (3.15)$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \text{Re}(\mathbf{X}^c) & \text{Im}(\mathbf{X}^c) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times 2mN} \quad (3.16)$$

où $\text{Re}(\cdot)$ et $\text{Im}(\cdot)$ signifient respectivement la partie réelle et la partie imaginaire.

Pour $P \in \mathbb{R}^{n_l \times n_c}$, avec $n_l \leq n_c$ et $\text{rang}(P) = n_l$, on définit aussi l'opérateur de projection orthogonal Π_P qui projette l'espace ligne d'une matrice de $\mathbb{R}^{\tilde{n} \times n_l}$ (i.e. l'espace vectoriel

2. appelée étendue car $i > n$.

engendré par les \tilde{n} lignes de la matrice) sur l'espace ligne de la matrice P . Cette opérateur est donné par :

$$\Pi_P = P^\top (PP^\top)^{-1}P. \quad (3.17)$$

La projection Q/P de l'espace ligne de Q sur l'espace ligne de P est alors obtenue comme suit :

$$Q/P = Q\Pi_P = QP^\top (PP^\top)^{-1}P. \quad (3.18)$$

Le complément orthogonal de l'espace ligne de P est noté P^\perp et la projection sur le complément orthogonal de P par Π_{P^\perp} est exprimée par :

$$\Pi_{P^\perp} = (I - \Pi_P). \quad (3.19)$$

3.3.3 Méthode des sous-espaces

Nous donnons ici l'essentiel de la méthode des sous-espaces pour l'identification fréquentielle des systèmes. Notons que cette démarche est similaire à celle appliquée dans le domaine temporel [30].

a. Relation entrée-sortie : On remarque que les équations de (3.8) sont évaluées en $s = j\omega_1, \dots, j\omega_N$, ce qui nous donne (avec les notations introduites dans le paragraphe précédent) la relation entrée-sortie matricielle suivante :

$$H^c = \mathcal{O}X^c + \Gamma I^c. \quad (3.20)$$

Étant donné que les matrices \mathcal{O} et Γ sont réelles, cette relation se réécrit :

$$H = \mathcal{O}X + \Gamma I, \quad (3.21)$$

b. Projection orthogonale : La projection orthogonale nous permet de déterminer l'ordre et l'espace colonne $\mathcal{O}X$ de la matrice d'observabilité étendue \mathcal{O} ($\text{rang}(\mathcal{O})$). À partir des matrices H , I et X définies par (3.14), (3.15) et (3.16), on obtient :

$$\text{rang}(H/I^\perp) = n, \quad (3.22)$$

$$\text{rang}(X/I^\perp) = \text{rang}(\mathcal{O}) = n, \quad (3.23)$$

Pour montrer ce fait, il suffit de projeter orthogonalement l'équation (3.21) sur la matrice I^\perp :

$$H/I^\perp = \mathcal{O}X/I^\perp + \Gamma I/I^\perp = \mathcal{O}X/I^\perp, \quad (3.24)$$

sachant que $\Gamma I/I^\perp = 0$.

Cette projection nous permettra de calculer une décomposition en valeurs singulières :

$$H/I^\perp = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^\top \\ V_2^\top \end{bmatrix}. \quad (3.25)$$

Cela permet de calculer l'ordre de la matrice d'observabilité étendue \mathcal{O} , qui est donné par le nombre des valeurs singulières non nulles de S_1 . Une estimation de la matrice d'observabilité étendue est définie comme suit :

$$\hat{\mathcal{O}} = U_1 \sqrt{S_1}. \quad (3.26)$$

c. Estimation des matrices A et C : D'après (3.9), les l premières lignes de la matrice d'observabilité étendue, coïncident avec C . Une estimation \hat{C} de C est alors construite en considérant les l premières lignes de \hat{O} .

On définit les deux matrices \hat{O} et $\overline{\hat{O}}$ pour estimer la matrice A . La matrice \hat{O} (respectivement $\overline{\hat{O}}$) est la matrice \hat{O} sans ses l dernières lignes (respectivement premières lignes). On introduit donc l'estimation \hat{A} de A :

$$\hat{A} = \hat{O}^+ \overline{\hat{O}}, \quad (3.27)$$

où \hat{O}^+ est la pseudo-inverse de Moore-Penrose de \hat{O} .

d. Estimation des matrices B et D : On estime les matrices B et D , une fois que les matrices A et C ont été estimées. Pour cela, à partir de (3.7), il suffit de résoudre l'équation linéaire (le nombre d'équation est égale au nombre d'inconnus) :

$$\begin{bmatrix} Re(\mathbf{L}) \\ Im(\mathbf{L}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Re(\widehat{\mathbf{M}}) \\ Im(\widehat{\mathbf{M}}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{B} \\ \widehat{D} \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

où

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} H(j\omega_1) \\ \vdots \\ H(j\omega_N) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{lN \times m},$$

et

$$\widehat{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \hat{C}(j\omega_1 I_n - \hat{A})^{-1} & I_l \\ \vdots & \vdots \\ \hat{C}(j\omega_N I_n - \hat{A})^{-1} & I_l \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{lN \times (n+l)}.$$

3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une méthode d'identification fréquentielle. La méthode d'identification présentée est basée sur l'algorithme des sous-espaces. Cette approche a été choisie pour son efficacité avérée dans ce domaine comme en témoignent les travaux antérieurs sur le sujet (cf. [77, 78]).

Cette méthode est considérée aussi comme une possible voie d'obtention d'un modèle d'ordre réduit (le modèle obtenu est d'ordre faible par rapport à celui obtenu par les méthodes d'approximation numériques présentées dans le Chapitre 2). Le modèle résultant peut facilement être utilisé pour calculer un transfert point à point à partir de données de simulation ou de données expérimentales (par exemple la fonction de transfert entre la sortie du haut-parleur de contrôle et la pression mesurée par un microphone).

Chapitre 4

Modélisation de la propagation du son en 3D par un modèle unidimensionnel

Sommaire

4.1	Introduction	46
4.2	Liens sous conditions entre systèmes en 3D et en 1D	46
4.3	Simulation comparée de systèmes en 3D et en 1D	48
4.3.1	Validation par simulation du passage 3D-1D	48
4.3.2	Effet de l'inclinaison (cas de la "LS2N box") sur l'approximation 1D	50
4.4	Conclusion	51

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la question de la modélisation simplifiée d'un système de propagation acoustique 3D. Plus précisément, nous allons chercher à approcher l'étude de systèmes acoustiques 3D par celle de l'étude d'un système acoustique unidimensionnel. Une telle approximation ne sera valable que sous certaines conditions. L'une d'entre elle porte sur le caractère cylindrique de la forme du système considéré. Pour autant, nous considérerons le cas du banc d'essai "LS2N box" dont la géométrie (cf. figure 1.3) n'est pas strictement cylindrique à cause d'un pan coupé asymétriquement du parallélépipède formée par sa paroi.

Nous utiliserons les outils numériques de résolution des équations aux dérivées partielles (implémentés dans l'environnement PDE Toolbox de Matlab) pour questionner et analyser l'influence du pan coupé sur l'approximation du modèle de propagation en 3D par un modèle unidimensionnel.

4.2 Liens sous conditions entre systèmes en 3D et en 1D

Considérons un domaine cylindrique Ω , donné par $\Omega = (0, L) \times \Sigma$, avec Σ un ouvert borné de \mathbb{R}^2 . On notera pour tout $\xi \in [0, L]$, $S(\xi) = \{\xi\} \times \Sigma$ ($S(\xi)$ est une surface). Sur ce domaine Ω , on considère l'équation des ondes (2.15) munie des conditions aux bords :

$$\begin{aligned} u_n \cdot \nabla p &= 0 && \text{sur } ((0, L) \times \partial\Sigma) \setminus HP_2, \\ u_n \cdot \nabla p &= y_{HP_2} && \text{sur } HP_2, \\ u_n \cdot \nabla p &= \frac{\rho_c}{Z_0} \dot{p} && \text{sur } \{0\} \times \Sigma, \\ u_n \cdot \nabla p &= y_{HP_1} && \text{sur } \{L\} \times \Sigma, \end{aligned}$$

avec $Z_0 \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ une impédance acoustique, HP_2 une surface de $(0, L) \times \partial\Sigma$ (surface où un haut-parleur est présent). De même la surface $\{L\} \times \Sigma$ contient le haut-parleur HP_1 . Les sorties de haut-parleurs HP_1 et HP_2 sont notées respectivement y_{HP_1} et y_{HP_2} . La géométrie de ce domaine Ω est inspirée de la "LS2N box" (cf. figure 1.3).

Afin de réduire ce modèle à un modèle en 1D, nous introduisons la variable $\pi_{1D}(t, \xi)$ définie par :

$$\pi_{1D}(t, \xi) = \int_{S(\xi)} p(t, \xi, y, z) dydz \quad (t > 0, \xi \in (0, L)). \quad (4.1)$$

Étant donné la forme particulière de $S(\xi)$, on obtient,

$$\pi_{1D}(t, \xi) = \int_{\Sigma} p(t, \xi, y, z) dydz \quad (t > 0, \xi \in (0, L)).$$

Montrons dès à présent que $\pi_{1D}(t, \xi)$ satisfait une équation des ondes. Plus précisément, on a :

$$\ddot{\pi}_{1D}(t, \xi) = \int_{\Sigma} \ddot{p}(t, \xi, y, z) dydz. \quad (4.2)$$

Étant donné que p satisfait l'équation (2.15), on obtient :

$$\begin{aligned}
 \ddot{\pi}_{1D}(t, \xi) &= \int_{\Sigma} c^2 \Delta p(t, \xi, y, z) dydz \\
 &= c^2 \int_{\Sigma} \frac{\partial^2 p}{\partial \xi^2}(t, \xi, y, z) dydz + c^2 \int_{\Sigma} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}(t, \xi, y, z) + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}(t, \xi, y, z) \right) dydz \\
 &= c^2 \frac{\partial^2 \pi_{1D}}{\partial \xi^2}(t, \xi) + c^2 \int_{\Sigma} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}(t, \xi, y, z) + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}(t, \xi, y, z) \right) dydz \\
 &= c^2 \frac{\partial^2 \pi_{1D}}{\partial \xi^2}(t, \xi) + c^2 \int_{\Sigma} \Delta_{(y,z)} p(t, \xi, y, z) dydz.
 \end{aligned}$$

par intégration par parties, on a :

$$\begin{aligned}
 \ddot{\pi}_{1D}(t, \xi) - c^2 \Delta \pi_{1D}(t, \xi) &= -c^2 \int_{\Sigma} \left(\nabla_{(y,z)} p(t, \xi, y, z) \cdot \nabla_{(y,z)} 1 \right) dydz + c^2 \int_{\partial \Sigma} \nabla_{(y,z)} p(t, \xi, y, z) \cdot u_n(y, z) d\sigma_{(y,z)} \\
 &= c^2 \int_{\partial \Sigma} \nabla_{(y,z)} p(t, \xi, y, z) \cdot u_n(y, z) d\sigma_{(y,z)},
 \end{aligned}$$

ici, $u_n(y, z)$ représente la normale sortante à $\partial \Sigma$. En utilisant la forme cylindrique du domaine Ω , on observe que la normale sortante à $\partial \Omega$ en $(\xi, y, z) \in (0, L) \times \partial \Sigma$ est indépendante de ξ et est égale à $u_n(y, z)$. En utilisant les conditions aux bords imposées sur p , on en déduit :

$$\ddot{\pi}_{1D}(t, \xi) - c^2 \Delta \pi_{1D}(t, \xi) = \int_{HP_2 \cap S(\xi)} y_{HP_2}(\xi, y, z) d\sigma_{(y,z)}. \quad (4.3)$$

Pour déterminer les conditions aux bords de π_{1D} en $\xi = 0$ et $\xi = L$, nous calculons $\frac{\partial \pi_{1D}}{\partial \xi}$ par le biais des conditions aux bords sur p et du fait que la normale sortante à $\partial \Omega$ en $\xi = 0$ est $(-1, 0, 0)^\top$ et en $\xi = L$ est $(1, 0, 0)^\top$:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \pi_{1D}}{\partial \xi}(t, 0) &= \int_{\Sigma} (1, 0, 0)^\top \cdot \nabla p(t, 0, y, z) dydz \\
 &= \frac{-\rho_c}{Z_0} \int_{\Sigma} \dot{p}(t, 0, y, z) dydz \\
 &= \frac{-\rho_c}{Z_0} \dot{\pi}_{1D}(t, 0).
 \end{aligned}$$

De même, on obtient :

$$\frac{\partial \pi_{1D}}{\partial \xi}(t, L) = \int_{\Sigma} y_{HP_1} dydz.$$

Remarque 4.1. *Inversement, il est possible de montrer qu'un modèle unidimensionnel peut représenter un système de propagation acoustique en 3D sous conditions.*

Supposons que la pression $\pi_{1D}(t, \xi)$ soit solution de l'équation des ondes avec conditions aux bords (en $\xi = 0$ et $\xi = L$) :

$$\ddot{\pi}_{1D}(t, \xi) = c^2 \frac{\partial^2 \pi_{1D}}{\partial \xi^2}(t, \xi), \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial \pi_{1D}}{\partial \xi}(t, 0) = -\frac{\rho_c}{Z_0} \dot{\pi}_{1D}(t, 0), \quad (4.5a)$$

$$\frac{\partial \pi_{1D}}{\partial \xi}(t, L) = u(t), \quad (4.5b)$$

où $u(t)$ est un signal appliqué à une extrémité.
Introduisons la variable p définie par :

$$p(t, \xi, y, z) = \pi_{1D}(t, \xi), \quad (4.6)$$

avec $(\xi, y, z) \in (0, L) \times \Sigma$, pour Σ un domaine borné de \mathbb{R}^2 . Nous noterons $\Omega = (0, L) \times \Sigma$.
Il est aisé de vérifier que p est solutions de l'équation des ondes :

$$\ddot{p}(t, \xi, y, z) = c^2 \Delta p(t, \xi, y, z), \quad \text{avec } (\xi, y, z) \in \Omega \quad (4.7)$$

munie des conditions aux bords :

$$u_n \cdot \nabla \hat{p}(t, 0, y, z) = -\frac{\rho_c}{Z_0} \dot{\hat{p}}(t, 0, y, z), \quad \text{avec } (y, z) \in \Sigma, \quad (4.8a)$$

$$u_n \cdot \nabla \hat{p}(t, L, y, z) = u(t), \quad \text{avec } (y, z) \in \Sigma, \quad (4.8b)$$

$$u_n \cdot \nabla \hat{p}(t, \xi, y, z) = 0, \quad \text{sur } (0, L) \times \partial\Sigma. \quad (4.8c)$$

On peut par conséquent mentionner, qu'un système de propagation acoustique en 3D peut être représenté par un système acoustique de propagation en 1D à condition que le système en 3D possède une forme cylindrique (comme par exemple la forme de la cavité représentée par la figure 5.1).

4.3 Simulation comparée de systèmes en 3D et en 1D

Nous avons montré dans la section précédente qu'un modèle de propagation acoustique en 1D peut représenter un système de propagation acoustique en 3D sous condition que la géométrie de l'espace de propagation soit *parfaitement* cylindrique. Par simulation, utilisant la méthode des éléments finis, nous tentons dans cette section à la fois de valider le constat analytique de la section précédente et de mesurer fréquemment le biais introduit par l'inclinaison présente dans la cavité "LS2N box" (cf. figure 1.3).

4.3.1 Validation par simulation du passage 3D-1D

Dans ce cas, nous allons comparer le système en 1D décrit par les deux équations (4.4) et (4.5), avec le système en 3D décrit par le système (4.7)–(4.8) avec $L = 120 \text{ cm}$ et Σ un rectangle de taille $25 \times 30 \text{ cm}$.

L'approximation du système en 3D est obtenue par la méthode des éléments finis (cf. Section 2.4.2). Pour cette méthode, un maillage de l'espace de propagation en 3D est construit. La figure 4.1 représente ce maillage dont le pas est de 3 cm .

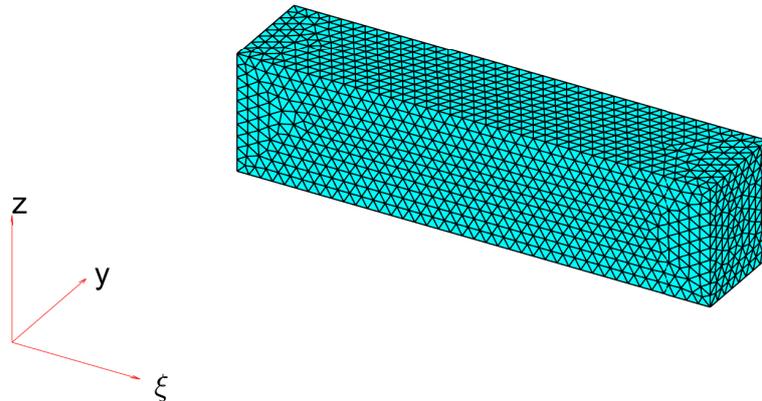
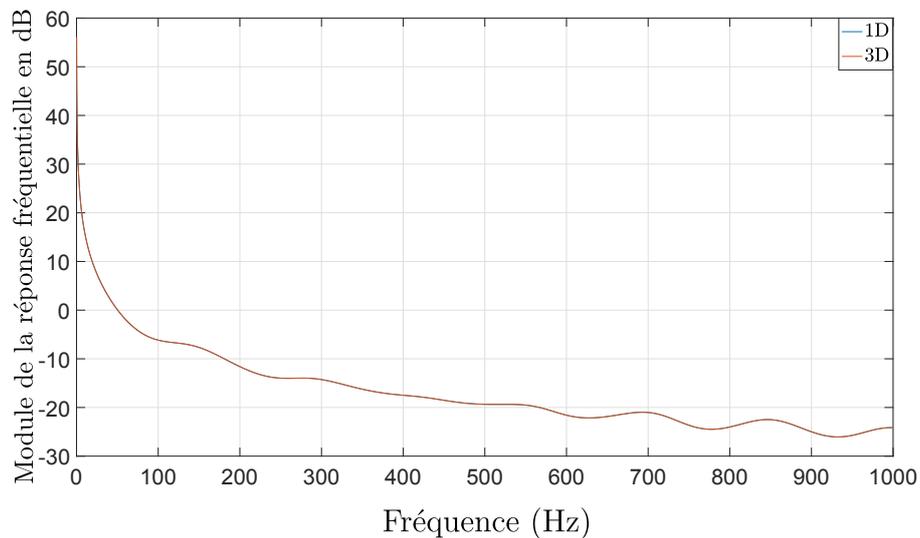


FIGURE 4.1 – Maillage du système en 3D avec un pas de 3 cm.

La figure 4.2 montre la comparaison entre les réponses fréquentielles des modèles en 3D et en 1D au point $\xi = 99.66 \text{ cm}$ avec une impédance $Z_0 = 400$ et une masse volumique d'air $\rho_c = 1$. Pour le modèle en 3D, la réponse fréquentielle entre la sortie du haut-parleur HP_1 et un point quelconque sur la surface perpendiculaire à l'axe principal de propagation ξ , est la même.

FIGURE 4.2 – Comparaison des réponses fréquentielles des modèles en 3D et en 1D au point $\xi = 99.66 \text{ cm}$ ($Z_0 = 400$ et $\rho_c = 1$).

Comme prévu les réponses sont parfaitement superposées validant ainsi le résultat analytique de la section précédente.

4.3.2 Effet de l'inclinaison (cas de la “LS2N box”) sur l'approximation 1D

Nous nous intéressons à présent au cas du banc d'essai “LS2N box” représenté par la figure 1.3, sans les haut-parleurs HP_2 et HP_3 . Cette cavité n'est pas tout à fait cylindrique. En effet, elle présente une inclinaison à une extrémité. L'objectif ici est de montrer l'influence de cette déformation sur la réduction 1D présentée précédemment. Notons que les simulations par la méthodes des éléments finis présentées dans cette section sont sans impédances (l'ajout des impédances pouvant masquer l'effet de l'inclinaison).

Dans ce cas, la cavité “LS2N box”, sera basée sur le système d'équations suivant :

$$\ddot{p}(t, \xi, y, z) = c^2 \Delta p(t, \xi, y, z), \quad \text{avec } (\xi, y, z) \in \Omega \quad (4.9)$$

munie des conditions aux bords :

$$u_n \cdot \nabla \hat{p}(t, 0, y, z) = 0, \quad \text{avec } (y, z) \in \Sigma, \quad (4.10a)$$

$$u_n \cdot \nabla \hat{p}(t, L, y, z) = u(t), \quad \text{avec } (y, z) \in \Sigma, \quad (4.10b)$$

$$u_n \cdot \nabla \hat{p}(t, \xi, y, z) = 0, \quad \text{sur } (0, L) \times \partial\Sigma. \quad (4.10c)$$

La figure 4.3 montre la comparaison des réponses fréquentielles des modèles en 3D avec et sans inclinaisons, au point $\xi = (100, 12.5, 17.5) \text{ cm}$.

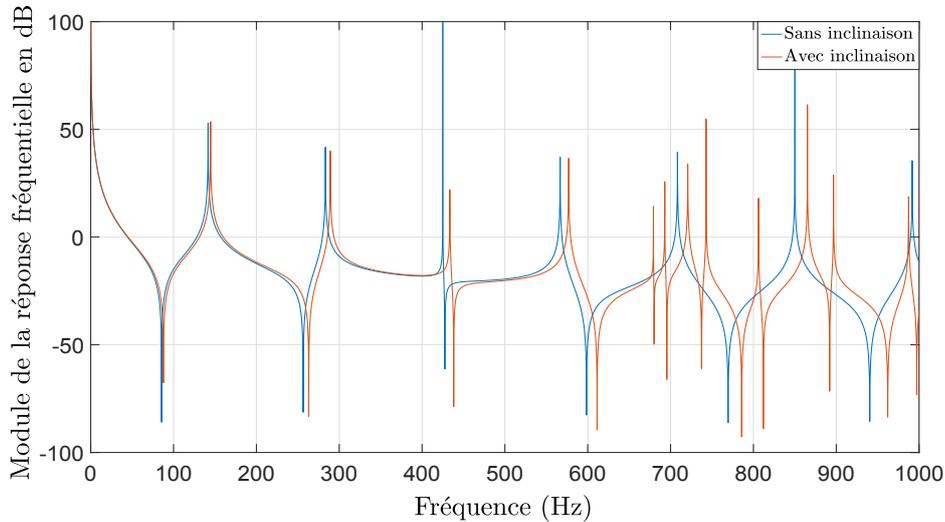


FIGURE 4.3 – Comparaison des réponses fréquentielles des modèles en 3D avec et sans inclinaison au point $\xi = (100, 12.5, 17.5) \text{ cm}$.

Les modes du système d'étude ne changent pas en fonction de la position par contre ces modes changent en fonction de la longueur du système considéré (les pôles du transfert changent, entre autres, en fonction de la longueur L). Ainsi, dans le cas de la cavité “LS2N box” sans et avec pan coupé, la distance entre le point d'observation et l'extrémité de la cavité (concernée par le pan coupé), change. Ceci explique le décalage des modes observé dans la figure 4.3. Cela se traduit également par un changement de la valeur de ξ , entre

les cas avec et sans pan coupé, ce qui explique le décalage entre les creux de la réponse fréquentielle (changement des zéros du transfert) de la cavité avec et sans pan coupé.

D’après la figure 4.3, nous remarquons également que l’effet de l’inclinaison devient plus important en hautes fréquences (au-delà de 650 Hz). Ainsi, d’autres modes acoustiques apparaissent dans cette plage de fréquence.

Cette analyse nous permet de mieux appréhender la représentation de la propagation acoustique dans la cavité “LS2N box” par un modèle de propagation en 1D (l’objectif du Chapitre 6).

4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons montré qu’un système de propagation acoustique 3D, pouvait, sous certaines conditions être représenté par un système acoustique unidimensionnel.

Une des conditions requises pour avoir une représentation adaptée est d’avoir un système de forme cylindrique. Cependant, nous avons montré que la géométrie du banc d’essai “LS2N box” (cf. figure 1.3), quoique de forme non strictement cylindrique, pouvait être étudiée sur la base d’hypothèses 1D simplificatrices.

Les outils numériques de résolution des équations aux dérivées partielles (implémentés dans la PDE Toolbox de Matlab), nous ont aidé à comprendre l’effet du pan coupé de la paroi de la cavité “LS2N box”. La simulation fréquentielle en un point fixe de la cavité avec et sans pan coupé, montre un décalage des modes fréquents entre les deux cas (avec et sans pan coupé). Le décalage fréquentiel entre les deux cas (cavité avec et sans pan coupé) devient plus important au-delà de 650 Hz . Nous observons également l’apparition, en hautes fréquences, de nouveaux modes acoustiques dans le cas d’une cavité avec pan coupé, par rapport au cas d’une cavité sans pan coupé.

Ce chapitre, se limite à la simulation d’une cavité parallélépipédique avec ou sans pan coupé. Même si nous avons fait le choix, dans ce chapitre, de considérer les mêmes dimensions que celles du banc d’essai “LS2N box”, nous ne traitons pas à ce niveau en détail la modélisation 1D du support expérimental “LS2N Box”. Par contre, la représentation de la propagation acoustique dans la cavité “LS2N box” par un modèle de propagation en 1D avec les bonnes hypothèses, notamment sur les impédances aux bords, est faite dans le Chapitre 6.

Les résultats de ce chapitre sont autant d’arguments justifiant l’étude d’un modèle unidimensionnel objet du chapitre suivant.

Chapitre 5

Modèle de propagation acoustique en 1D

Sommaire

5.1	Introduction	54
5.2	Modèle de dimension infinie	54
5.2.1	Fonction de transfert entre le signal de commande et la pression en tout point	54
5.2.2	Modèle entre deux points quelconques	57
5.3	Modèle de dimension réduite	58
5.3.1	Identification de type “boîte noire”	59
5.3.2	Méthode des résidus de Cauchy	59
5.3.3	Méthode d’Hadamard	61
5.4	Illustrations numériques	62
5.4.1	Résultats numériques de l’identification fréquentielle de type “boîte noire”	62
5.4.2	Résultats numériques de la méthode des résidus de Cauchy	64
5.4.3	Résultats numériques de la méthode d’Hadamard	64
5.5	Conclusion	70

5.1 Introduction

Le chapitre précédent a mis en évidence la possibilité voire l'intérêt d'approcher le comportement d'un système acoustique 3D par un modèle 1D. Nous nous intéressons ici au cas d'un système de propagation acoustique en 1D avec un signal de commande u_s appliqué en une extrémité et une perturbation représentée sous la forme d'un terme source appliquée sur un segment (dans ce cas nous avons une équation des ondes non-homogène). Nous cherchons dans ce cadre à représenter la causalité entrée-sortie de ce système par un transfert de dimension infinie.

Différentes méthodes de réduction de modèle (méthode d'identification de type "boîte noire", méthode "des résidus de Cauchy" et méthode "d'Hadamard") sont ensuite proposées et étudiées dans le but d'obtenir un transfert de dimension finie d'ordre faible comparativement aux modèles produits via les méthodes d'approximation numérique, cf. Section 2.4. Les modèles paramétrés ainsi obtenus auront vocation à être utilisés pour la synthèse de lois de contrôle actif de bruit.

5.2 Modèle de dimension infinie

L'objectif de cette section est de calculer les différentes fonctions de transfert qui nous intéressent (fonctions de transfert utilisées pour la synthèse de la commande) dans le cas d'un système de propagation acoustique en 1D avec un signal de contrôle u_s appliqué en une extrémité, et avec une perturbation représentée sous forme d'un terme source appliqué sur un segment.

5.2.1 Fonction de transfert entre le signal de commande et la pression en tout point

Nous considérons le cas d'une cavité de forme cylindrique (cf. Section 1.2.1) présentée par la figure 5.1. Cette cavité mesure 30 cm de hauteur et 25 cm de largeur et est munie de deux haut-parleurs HP_1 et HP_2 , ainsi que deux microphones M_1 et M_2 . Dans ce qui suit, HP_1 désignera le haut-parleur utilisé pour générer le signal de commande tandis que HP_2 désignera le haut-parleur qui génère le bruit.

Remarque 5.1. *Les développements et hypothèses de cette section peuvent être appliqués, à titre d'exemple, aux cas des systèmes de ventilation [90, 113] (cf. figure 1.1).*

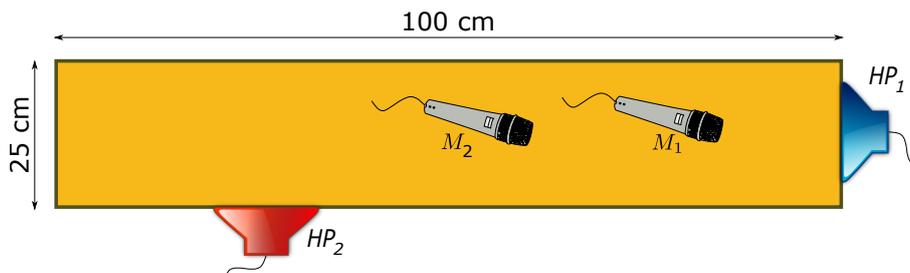


FIGURE 5.1 – Vue de dessus d'une cavité de forme cylindrique.

Sur la base de la configuration décrite dans la figure 5.1, un modèle de propagation acoustique unidimensionnel est obtenu en moyennant la pression sur les surfaces orthogonales à l'axe longitudinal de la cavité fermée. Ce processus est possible puisque la cavité tridimensionnelle est supposée de forme cylindrique (cf. Section 4.2).

Cette réduction unidimensionnelle prend en compte les conditions aux bords de la cavité 3D et conduit à une fonction de transfert de dimension infinie (et irrationnelle). Ce modèle dynamique met en évidence les modes acoustiques impliqués et présente tous les transferts entre l'entrée de commande et chaque point de l'axe principal du cylindre.

Le système de propagation acoustique en 1D (qui reproduit le comportement de la cavité 3D présenté par la figure 5.1) montré en figure 5.2 est donné par

$$\ddot{p}(t, \xi) = c^2 \Delta p(t, \xi) + \chi_{HP_2}(\xi) u_p(t, \xi) \quad \text{avec } \xi \in (0, L), \quad (5.1)$$

et

$$\chi_{HP_2}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \xi \in [\xi_{min}, \xi_{max}], \\ 0 & \text{si } \xi \in [0, \xi_{min}) \cup (\xi_{max}, L], \end{cases}$$

où ξ_{min} et ξ_{max} représentent les frontières du haut-parleur HP_2 .

Ses conditions aux bords (en $\xi = 0$ et $\xi = L$), sont issues des références suivantes : [113, 114, 57, 83],

$$\frac{\partial p}{\partial \xi}(t, 0) = \frac{\rho_c}{Z_0} \dot{p}(t, 0), \quad (5.2a)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \xi}(t, L) = -\frac{\rho_c}{Z_1} \dot{p}(t, L) + \dot{u}_s(t). \quad (5.2b)$$

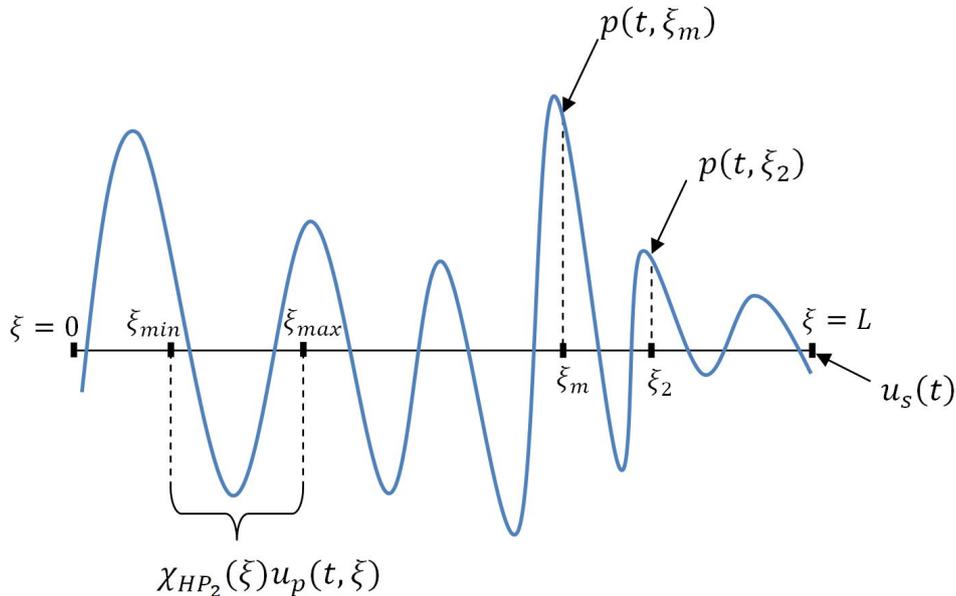


FIGURE 5.2 – Système de propagation acoustique unidimensionnel.

Les paramètres physiques³ impliqués dans le système (5.1) et (5.2) sont donnés dans Tableau 5.1.

3. Dans le reste de la thèse, nous considérons que la masse volumique d'air $\rho_c = 1 \text{ kg/m}^3$.

À partir des équations (5.1) et (5.2), on peut calculer la fonction de transfert analytique $G_\xi(s)$ entre le signal d'entrée $u_s(t)$ et la pression $p(t, \xi)$, pour $\xi \in [0, L]$ donné.

Tableau 5.1 – Paramètres et signaux des modèles de propagation acoustique en 1D.

Paramètres	Notation	Valeurs dans	Unité
Longueur du système	L	\mathbb{R}_+^* , par défaut : 1	m
Vitesse du son	c	{343}	m/s
Impédances	Z_0	$(0, c)$, par défaut : 150	kg/m^2s
	Z_1	$(0, c)$, par défaut : 20	kg/m^2s
Masse volumique d'air	ρ_c	1	kg/m^3
Localisation spatiale	ξ	$[0, L]$	m
Pression	$p(t, \xi)$	\mathbb{R}	N/m^2
Entrée du HP_1	$u_s(t)$	\mathbb{R}	m/s
Perturbation	$u_p(t, \xi)$	\mathbb{R}	N/m^2
Temps	t	\mathbb{R}_+	s

Pour obtenir la fonction de transfert $G_\xi(s)$, on fixe $u_p(t, \xi) = 0$ et on applique la transformation de Laplace par rapport au temps dans (5.1) et (5.2) (cf. [49]) :

$$s^2 \bar{p}(s, \xi) = c^2 \Delta \bar{p}(s, \xi) \quad (\xi \in (0, L)), \quad (5.3a)$$

$$\frac{\partial \bar{p}(s, 0)}{\partial \xi} = \frac{s}{Z_0} \bar{p}(s, 0), \quad (5.3b)$$

$$\frac{\partial \bar{p}(s, L)}{\partial \xi} = -\frac{s}{Z_1} \bar{p}(s, L) + s \bar{u}_s(s), \quad (5.3c)$$

où $\bar{p}(\cdot, \xi)$ (resp. \bar{u}_s) est la transformée de Laplace de $p(\cdot, \xi)$ (resp. u_s). La solution générale de (5.3a) est de la forme :

$$\bar{p}(s, \xi) = A(s) \sinh \frac{s\xi}{c} + B(s) \cosh \frac{s\xi}{c}, \quad (5.4)$$

où les coefficients $A(s)$ et $B(s)$ sont obtenus à partir de (5.3b) et (5.3c) :

$$A(s) = \frac{\bar{u}_s(s) c Z_1}{(Z_0 + Z_1) \left(\frac{c^2 + Z_0 Z_1}{c(Z_0 + Z_1)} \sinh \frac{sL}{c} + \cosh \frac{sL}{c} \right)}, \quad (5.5)$$

$$B(s) = \frac{\bar{u}_s(s) Z_0 Z_1}{(Z_0 + Z_1) \left(\frac{c^2 + Z_0 Z_1}{c(Z_0 + Z_1)} \sinh \frac{sL}{c} + \cosh \frac{sL}{c} \right)}.$$

Les deux équations (5.4) et (5.5) conduisent à la fonction de transfert suivante $G_\xi(s)$:

$$G_\xi(s) = \frac{\bar{p}(s, \xi)}{\bar{u}_s(s)} = \frac{Z_0 Z_1 \left(\frac{c}{Z_0} \sinh \frac{s\xi}{c} + \cosh \frac{s\xi}{c} \right)}{(Z_0 + Z_1) \left(\frac{c^2 + Z_0 Z_1}{c(Z_0 + Z_1)} \sinh \frac{sL}{c} + \cosh \frac{sL}{c} \right)}. \quad (5.6)$$

Notons ξ_m la position d'un microphone. $G_{\xi_m}(s)$ est souvent appelée fonction de transfert secondaire dans la littérature du contrôle actif du bruit.

On peut calculer les zéros $z_{k,\xi}$ et les pôles p_k de la fonction $G_{\xi}(s)$:

$$\begin{aligned} z_{k,\xi} &= \frac{1}{\xi} (z_0 + jc\pi k) \quad (\xi \neq 0) \\ p_k &= p_0 + j\frac{c\pi k}{L} \end{aligned} \quad (k \in \mathbb{Z}). \quad (5.7)$$

Notons que pour $\xi = 0$, G_{ξ} n'a pas de zéros.

Les coefficients z_0 et p_0 de l'équation (5.7) sont donnés par :

$$\begin{aligned} z_0 &= \frac{c}{2} \ln \frac{c - Z_0}{c + Z_0} \quad \text{et} \\ p_0 &= \frac{c}{2L} \ln \left(\frac{c^2 + Z_0 Z_1 - c(Z_0 + Z_1)}{c^2 + Z_0 Z_1 + c(Z_0 + Z_1)} \right). \end{aligned}$$

Les expressions ci-dessus sont valides si $Z_0 < c$ et $Z_1 < c$. Ces conditions sont vérifiées si on considère les valeurs des paramètres introduites par le Tableau 5.1.

On note aussi que p_k et $z_{k,\xi}$ sont respectivement le complexe conjugué de p_{-k} et $z_{-k,\xi}$, et en particulier, p_0 et z_0 sont réels.

5.2.2 Modèle entre deux points quelconques

Dans cette section, nous présentons le système décrivant la relation entre les points intérieurs au domaine spatial du système acoustique. Ce type de transfert nous permet de calculer l'effet du bruit d'un point à un autre.

Plus précisément, si la pression est mesurée en un point ξ_m , nous cherchons à extraire de cette information la pression en d'autres points $\xi > \xi_m$ (voir figure 5.3).

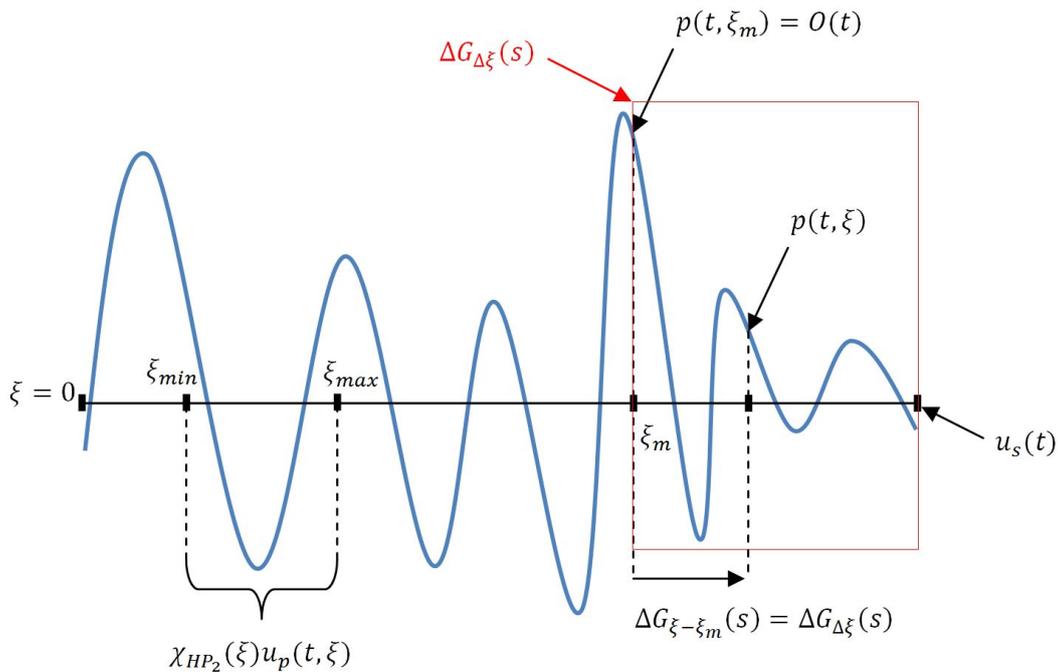


FIGURE 5.3 – Système de propagation acoustique unidimensionnel entre deux points.

Ce transfert sera utilisé dans la synthèse du contrôleur, pour décrire la corrélation entre les différents effets du bruit en différents points du système. Par souci de simplicité, nous supposons également que $\xi_m \geq \xi_{max}$.

Les seuls changements effectués par rapport au système présenté par (5.1) et (5.2) apparaissent dans les conditions aux bords et dans la taille du système. De plus, en considérant que $\xi_m \geq \xi_{max}$, le terme source dans (5.1) n'apparaît plus. Le modèle acoustique en 1D valide sur le segment (ξ_m, L) est alors exprimé par :

$$\ddot{p}(t, \xi) = c^2 \Delta p(t, \xi) \quad \text{avec } \xi \in (\xi_m, L), \quad (5.8)$$

et avec les conditions aux bords (à $\xi = \xi_m$ et $\xi = L$),

$$p(t, \xi_m) = o(t), \quad (5.9a)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \xi}(t, L) = -\frac{1}{Z_1} \dot{p}(t, L) + \dot{u}_s(t). \quad (5.9b)$$

Le point d'observation est ξ_m (la position du capteur) et $o(t)$ représente la pression mesurée au point ξ_m .

Comme dans la section précédente, dans le cas où $u_s(t) = 0$, nous calculons à partir de (5.8) et (5.9) la fonction de transfert $\Delta G_{\Delta\xi}(s) := \frac{\bar{p}(s, \xi)}{\bar{o}(s)}$:

$$\Delta G_{\Delta\xi}(s) = \cosh \frac{s\Delta\xi}{c} - \frac{\sinh \frac{s\ell}{c} + \frac{c}{Z_1} \cosh \frac{s\ell}{c}}{\cosh \frac{s\ell}{c} + \frac{c}{Z_1} \sinh \frac{s\ell}{c}} \sinh \frac{s\Delta\xi}{c}, \quad (5.10)$$

où $\Delta\xi = \xi - \xi_m \geq 0$ et $\ell = L - \xi_m$.

Après simplification, on obtient :

$$\Delta G_{\Delta\xi}(s) = \frac{\cosh \frac{s(\ell-\Delta\xi)}{c} + \frac{c}{Z_1} \sinh \frac{s(\ell-\Delta\xi)}{c}}{\cosh \frac{s\ell}{c} + \frac{c}{Z_1} \sinh \frac{s\ell}{c}}. \quad (5.11)$$

L'expression analytique des zéros $z_{k,\Delta\xi}^\delta$ et des pôles p_k^δ de $G_{\Delta\xi}(s)$ est donnée par :

$$z_{k,\Delta\xi}^\delta = \frac{c}{\ell - \Delta\xi} \left(\frac{1}{2} \ln \frac{c-Z_1}{c+Z_1} + jk\pi \right) \quad (\Delta\xi \notin \{0, \ell\})$$

$$p_k^\delta = \frac{c}{\ell} \left(\frac{1}{2} \ln \frac{c-Z_1}{c+Z_1} + jk\pi \right), \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

p_k^δ et $z_{k,\Delta\xi}^\delta$ sont respectivement le complexe conjugué de p_{-k}^δ et $z_{-k,\Delta\xi}^\delta$, et en particulier, p_0^δ et $z_{0,\Delta\xi}^\delta$ sont réels.

Pour $\Delta\xi = 0$, le transfert $\Delta G_{\Delta\xi}(s) = 1$ et pour $\Delta\xi = \ell$, le transfert $\Delta G_{\Delta\xi}(s) = \frac{1}{\cosh \frac{s\ell}{c} + \frac{c}{Z_1} \sinh \frac{s\ell}{c}}$.

5.3 Modèle de dimension réduite

Nous avons fait le choix de concevoir la loi de commande permettant le contrôle actif du bruit dans le cadre des systèmes LTI de dimension finie.

La raison de ce choix réside dans la puissance des outils algébriques, fréquentiels et numériques disponibles dans ce cadre. Nous souhaitons également profiter de l'apport certain de la théorie de la robustesse. Le défi a été d'obtenir une fonction de transfert d'ordre fini, pour la synthèse du contrôleur. En effet, il est souhaitable d'avoir une fonction de transfert d'ordre réduit (et même faible) approximant le transfert de dimension infinie et irrationnel, obtenu dans la section précédente.

Les méthodes d'approximation numérique n'ont pas été utilisées dans la réduction du modèle, car les modèles issus de ces derniers, sont de grande dimension (d'ordre qui dépasse 200).

5.3.1 Identification de type “boîte noire”

Un modèle réduit de dimension finie est obtenu par identification fréquentielle basée sur le modèle analytique de dimension infinie $G_{\xi_m}(s) = G_s(s)$ pour un ξ_m donné. La cible à atteindre ici est que le modèle de dimension finie obtenu \widehat{G}_s ait le même comportement que le modèle analytique de dimension infinie, sur une bande de fréquences d'intérêt (voir aussi [77, 78, 89]).

Pour ce faire, nous utilisons l'approche d'identification fréquentielle des sous-espaces dont l'essentiel de la démarche a été rappelé dans Section 3.3 (voir aussi [86]). Cette méthode permet d'identifier un modèle à temps continu à partir de données fréquentielles.

La réponse fréquentielle $G_s(j\omega)$ utilisée pour ce type d'identification est calculée facilement, grâce à la présentation analytique du modèle de dimension infinie $G_s(s)$.

L'indicateur d'ajustement (i.e. le critère à maximiser) entre la fonction de transfert analytique $G_s(s)$ et le modèle identifié $\widehat{G}_s(s)$ est défini dans le cas SISO par :

$$fit = 100 \left(1 - \frac{\| G_s(j \cdot) - \widehat{G}_s(j \cdot) \|_2}{\| G_s(j \cdot) - E(G_s(j \cdot)) \|_2} \right), \quad (5.12)$$

où $E(G_s(j \cdot))$ est la moyenne de $G_s(j\omega)$ (moyenne de la partie réelle et de la partie imaginaire) par rapport à ω , où ω est dans l'intervalle d'identification désiré.

On fait la même chose pour la fonction de transfert entre deux points quelconques $\Delta G_{\Delta\xi}(s)$.

Remarque 5.2. *L'identification de type “boîte noire” ne permet pas d'avoir un système paramétré (un système qui dépend explicitement de la position longitudinale), il faut refaire l'identification pour chaque point. Le recours à d'autres méthodes de réduction de modèle sera nécessaire, si on veut obtenir un système paramétré en position (e.g. méthode des résidus de Cauchy ou méthode d'Hadamard décrites respectivement dans les paragraphes 5.3.2 et 5.3.3).*

5.3.2 Méthode des résidus de Cauchy

Dans cette section, nous utilisons l'expansion infinie des fractions partielles de la fonction de transfert, voir [25]. Cette somme infinie sera tronquée, conduisant à un modèle de dimension finie. L'ordre de troncature est choisi pour respecter un certain niveau de *fit* entre le modèle analytique de dimension infinie et le modèle d'ordre réduit, sur une plage de fréquences prédéfinie.

Le modèle ainsi obtenu est paramétré par la localisation spatiale ξ et sert à représenter non seulement le transfert entre le signal d'entrée et n'importe quel point du système mais également la propagation de l'effet de la perturbation entre différents points. Ce modèle peut être obtenu par la méthode des résidus de Cauchy que nous décrivons sommairement dans la suite.

On cherche d'abord l'expansion infinie de fraction partielle de G_ξ . En utilisant les relations trigonométriques, $G_\xi(s)$ peut être exprimé comme suit :

$$G_\xi(s) = C_\xi \left(A_\xi \frac{\sinh(\xi(s - p_0)/c)}{\sinh(L(s - p_0)/c)} + B_\xi \frac{\cosh(\xi(s - p_0)/c)}{\sinh(L(s - p_0)/c)} \right), \quad (5.13)$$

avec

$$\begin{aligned} C_\xi &= \frac{Z_0 Z_1}{(Z_0 + Z_1) \left(\frac{c^2 + Z_0 Z_1}{c(Z_0 + Z_1)} \cosh(p_0 L/c) + \sinh(p_0 L/c) \right)}, \\ A_\xi &= \frac{c}{Z_0} \cosh(\xi p_0/c) + \sinh(\xi p_0/c) \quad \text{et} \\ B_\xi &= \frac{c}{Z_0} \sinh(\xi p_0/c) + \cosh(\xi p_0/c). \end{aligned}$$

En utilisant l'expression ci-dessus avec l'expansion de fraction partielle infinie des deux fonctions $\frac{\sinh(\xi(s - p_0)/c)}{\sinh(L(s - p_0)/c)}$ et $\frac{\cosh(\xi(s - p_0)/c)}{\sinh(L(s - p_0)/c)}$ données respectivement dans [26, Exemple 4.3.12] et [25], on peut vérifier que la fonction de transfert G_ξ donnée par (5.6) admet, pour tout $\xi \in [0, L)$, l'expansion de fraction partielle infinie suivante :

$$G_\xi(s) = \frac{a_0(\xi)}{s - p_0} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{a_k(\xi)}{s - p_k} + \frac{a_{-k}(\xi)}{s - p_{-k}} \right), \quad (5.14)$$

où les coefficients $a_k(\xi)$ sont les résidus de G_ξ en p_k . Les pôles p_k étant simples, on a :

$$a_k(\xi) = \text{res}(G_\xi, p_k) = \lim_{s \rightarrow p_k} (s - p_k) G_\xi(s) = \frac{f_\xi(p_k)}{g'(p_k)}, \quad (5.15)$$

où f_ξ, g sont respectivement le numérateur et le dénominateur de G_ξ .

Remarque 5.3. Pour $\xi = L$, on a

$$G_1(s) = C_L \left(A_L + B_L \frac{\cosh(L(s - p_0)/c)}{\sinh(L(s - p_0)/c)} \right).$$

Le fait que $A_L \neq 0$ ($A_L = 0$ si et seulement si $Z_0 = c$), explique pourquoi la relation (5.16) n'est pas valide pour $\xi = L$.

Il est facile de vérifier que $a_{-k}(\xi)$ est le complexe conjugué de $a_k(\xi)$, et en particulier $a_0(\xi)$ est un nombre réel. Par conséquent, G_ξ , donné par (5.14), peut être exprimé comme :

$$G_\xi(s) = \frac{a_0(\xi)}{s - p_0} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s \text{Re}(a_k(\xi)) - \text{Re}(p_k a_{-k}(\xi))}{s^2 - 2 \text{Re}(p_k) s + |p_k|^2}, \quad (5.16)$$

Fonction de transfert d'ordre réduit \widehat{G}_ξ^C La fonction de transfert $\widehat{G}_\xi^C(s)$ d'ordre réduit a pour but d'approximer le comportement du système (5.6) sur une plage de fréquences prédéfinie. Pour construire cette fonction de transfert, nous tronquons l'expression (5.16) jusqu'à un ordre assez grand $N_c \geq 1$, c'est-à-dire que nous considérons la fonction de transfert d'ordre réduit :

$$\widehat{G}_\xi^C(s) = \frac{a_0(\xi)}{s - p_0} + 2 \sum_{k=1}^{N_c} \frac{s \operatorname{Re}(a_k(\xi)) - \operatorname{Re}(p_k a_{-k}(\xi))}{s^2 - 2 \operatorname{Re}(p_k) s + |p_k|^2}. \quad (5.17)$$

L'entier N_c est assez grand pour que la fonction de transfert de l'ordre réduit corresponde au système (5.6), sur une plage de fréquences prédéfinie et pour tout $\xi \in [0, \xi^*]$, pour un $\xi^* \in (0, L)$ donné *a priori* ($\xi^* < L$ tenant compte de la Remarque 5.3). Cette méthode de réduction sera illustrée numériquement dans le paragraphe 5.4.2.

5.3.3 Méthode d'Hadamard

Dans cette partie, nous utilisons la méthode d'Hadamard pour obtenir la fonction de transfert de dimension finie approximant le modèle acoustique en 1D sur une plage de fréquence prédéfinie.

Cette méthode consiste à remplacer chaque fonction entière par son développement d'Hadamard. Le développement d'Hadamard [69, 115] est rappelé dans le théorème suivant.

Théorème 5.1. *Soit $h(s)$ une fonction méromorphe d'ordre fini ρ_h . Il existe deux entiers $m_1 < \rho_h$ et $m_2 < \rho_h$ et un polynôme $q(s)$ de degré inférieur à ρ_h tels que :*

$$h(s) = e^{q(s)} \frac{f(s)}{g(s)}, \quad (5.18)$$

où f et g sont des produits de fonctions canoniques :

$$\begin{aligned} f &= \prod_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{s}{z_n}, m_1\right), \\ g &= \prod_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{s}{p_n}, m_2\right), \end{aligned} \quad (5.19)$$

avec m_1 et m_2 dépendant des zéros z_i et les pôles p_i de la fonction $h(s)$, $E(\sigma, m) = (1 - \sigma)e^{\sigma + \sigma^2/2 + \dots + \sigma^m/m}$.

Nous utiliserons le développement d'Hadamard des fonctions entières (e.g. sinus et cosinus hyperboliques) existant dans la littérature [7] pour proposer une forme rationnelle approximant le transfert $G_\xi(s)$.

Les développements d'Hadamard des sinus et cosinus hyperboliques, sont rappelés ci-dessous :

$$\begin{aligned} \cosh(s) &= \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{4s^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right), \\ \sinh(s) &= s \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{s^2}{n^2\pi^2}\right). \end{aligned} \quad (5.20)$$

En utilisant (5.20), la fonction de transfert $G_\xi(s)$ s'écrira sous la forme suivante :

$$G_\xi(s) = \frac{Z_0 Z_1 \left(\frac{c}{Z_0} s \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{s^2 \xi^2}{c^2 n^2 \pi^2} \right) + \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{4s^2 \xi^2}{c^2 (2n-1)^2 \pi^2} \right) \right)}{(Z_0 + Z_1) \left(\frac{c^2 + Z_0 Z_1}{c(Z_0 + Z_1)} s \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{s^2}{c^2 n^2 \pi^2} \right) + \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{4s^2}{c^2 (2n-1)^2 \pi^2} \right) \right)} \quad (5.21)$$

Fonction de transfert d'ordre réduit \widehat{G}_ξ^H La fonction de transfert $\widehat{G}_\xi^H(s)$ d'ordre $2N_h + 1$, est obtenue dans le cas où on veut se rapprocher du comportement du système (5.6) sur une plage de fréquences prédéfinie. Cette fonction est :

$$\widehat{G}_\xi^H(s) = \frac{Z_0 Z_1 \left(\frac{c}{Z_0} s \prod_{n=1}^{N_h} \left(1 + \frac{s^2 \xi^2}{c^2 n^2 \pi^2} \right) + \prod_{n=1}^{N_h} \left(1 + \frac{4s^2 \xi^2}{c^2 (2n-1)^2 \pi^2} \right) \right)}{(Z_0 + Z_1) \left(\frac{c^2 + Z_0 Z_1}{c(Z_0 + Z_1)} s \prod_{n=1}^{N_h} \left(1 + \frac{s^2}{c^2 n^2 \pi^2} \right) + \prod_{n=1}^{N_h} \left(1 + \frac{4s^2}{c^2 (2n-1)^2 \pi^2} \right) \right)} \quad (5.22)$$

Remarque 5.4. Nous notons ici que le transfert \widehat{G}_ξ^H ne partage pas les pôles et zéros de la fonction de transfert de dimension infinie G_ξ .

Cette méthode de réduction sera illustrée numériquement dans le paragraphe 5.4.3.

5.4 Illustrations numériques

Les résultats de chaque méthode de réduction de modèle décrite dans les sections précédentes sont présentés dans la suite.

5.4.1 Résultats numériques de l'identification fréquentielle de type "boîte noire"

Le Tableau 5.2 présente les données utilisées pour l'identification fréquentielle menée dans cette section, selon le système physique donné par la figure 5.2. Les impédances Z_0 et Z_1 ne sont pas égales puisque, contrairement à l'extrémité gauche, la droite comprend l'actionneur (le haut-parleur).

Tableau 5.2 – Paramètres utilisés pour l'identification

Paramètres	Notation	Value
Impédance	Z_0	150
Impédance	Z_1	20
Plage d'identification	-	[20, 1000]Hz

La figure 5.4 représente une comparaison entre la réponse fréquentielle du modèle de dimension infinie (en bleu) et la réponse fréquentielle du modèle identifié sur la plage

de fréquences $[20 - 1000]$ Hz (cette plage de fréquences est déterminée, sur le fait que l'oreille humaine entend des fréquences à partir de 20 Hz et que l'ANC est efficace en basses fréquences, ce qui nous a ramené à choisir une borne supérieure égale 1000 Hz), par la méthode des sous-espaces (précédemment rappelée dans la Section 3.3), ce modèle est d'ordre 21 (en rouge). L'indicateur d'ajustement entre les deux réponses déjà introduit par l'équation (5.12), est d'une valeur de 98,8% dans ce cas et toujours sur la même plage de fréquences $[20 - 1000]$ Hz.

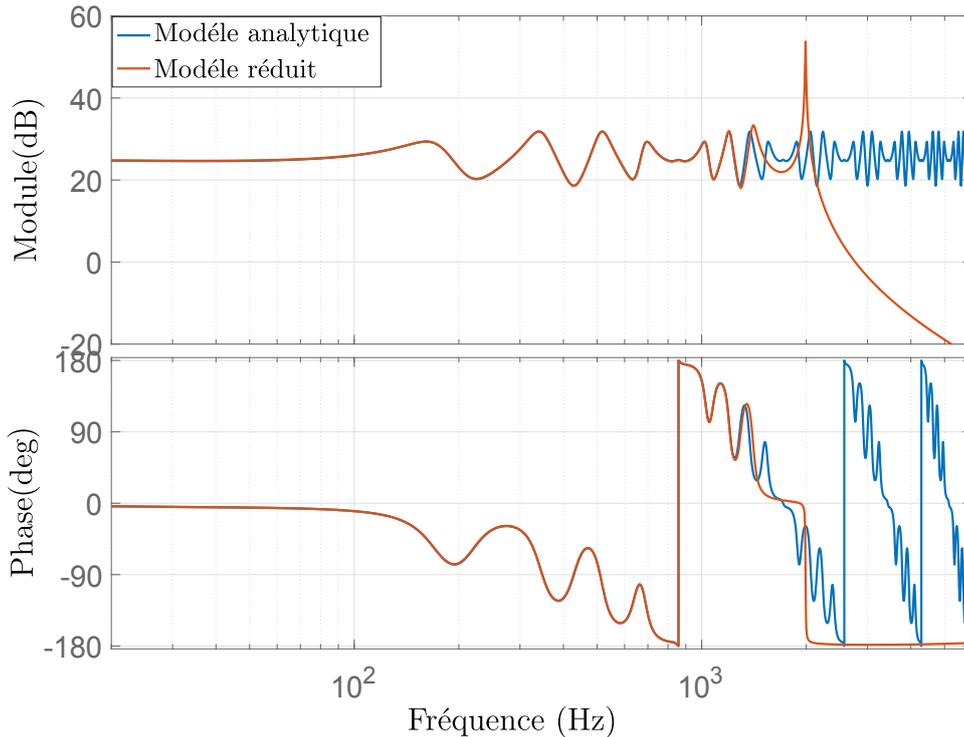


FIGURE 5.4 – Résultat d'identification fréquentielle (l'ordre $N_{\hat{G}_s} = 21$, $fit = 98,8\%$, $\xi_m = 0.81 m$).

La figure 5.5 représente la comparaison entre les zéros et les pôles de $\hat{G}_s(s)$ et ceux de $G_s(s)$ quand $N_{\hat{G}_s} = 21$ (21 zéros et 21 pôles).

La figure 5.5 montre que la fonction de transfert d'ordre infini $G_s(s)$ obtenue analytiquement et la fonction identifiée, partagent la plupart des pôles et des zéros à l'intérieur de la plage de fréquences utilisée pour l'identification fréquentielle.

Le modèle identifié introduit également des pôles et des zéros supplémentaires (certains zéros dans le demi-plan droit, donc à non-minimum de phase) pour obtenir la meilleure valeur de l'indicateur fit .

Ces résultats, nous permettent de distinguer la différence entre le modèle analytique et le modèle identifié concernant la position des pôles et des zéros. Ils nous montrent aussi que l'identification rajoute des pôles et des zéros différents de ceux de la fonction de transfert analytique de dimension infinie. Ce rajout permet de compenser la grande différence entre

l'ordre du modèle analytique et celui du modèle identifié.

5.4.2 Résultats numériques de la méthode des résidus de Cauchy

Nous choisissons $N_c = 30$ et utilisons les valeurs par défaut données dans le Tableau 5.2. La fonction de transfert de dimension finie $\widehat{G}_\xi^C(s)$ est donc d'ordre 61. Cet ordre est suffisamment grand pour avoir un comportement similaire à celui du modèle de dimension infinie donné par le système décrit par (5.6), dans la plage de fréquences $[20, 1000]$ Hz et pour $\xi \in [0, 0.9]m$.

La figure 5.6 montre la valeur de l'indicateur *fit* par rapport à la position $\xi \in [0, 0.9]m$.

D'après la figure 5.6, on obtient de très bons résultats (la réponse fréquentielle de $\widehat{G}_\xi^C(s)$ est très proche de celle de $G_\xi(s)$ sur la plage de fréquences $[20, 1000]$ Hz).

La légère dégradation observée pour ξ proche de $L = 1$ est due à la non validité de l'expression donnée par (5.17) pour $\xi = L$ (voir la Remarque 5.3).

Dans la figure 5.7, on compare les réponses fréquentielles de $\widehat{G}_\xi^C(s)$ et $G_\xi(s)$ pour $\xi = 0.7$, en se focalisant sur le comportement en hautes fréquences de $\widehat{G}_\xi^C(s)$. La plage de fréquences utilisée pour la comparaison est, cette fois-ci, $[1, 5000]$ Hz.

D'après la figure 5.7, on remarque que la méthode des résidus de Cauchy a de très bonnes performances même en hautes fréquences.

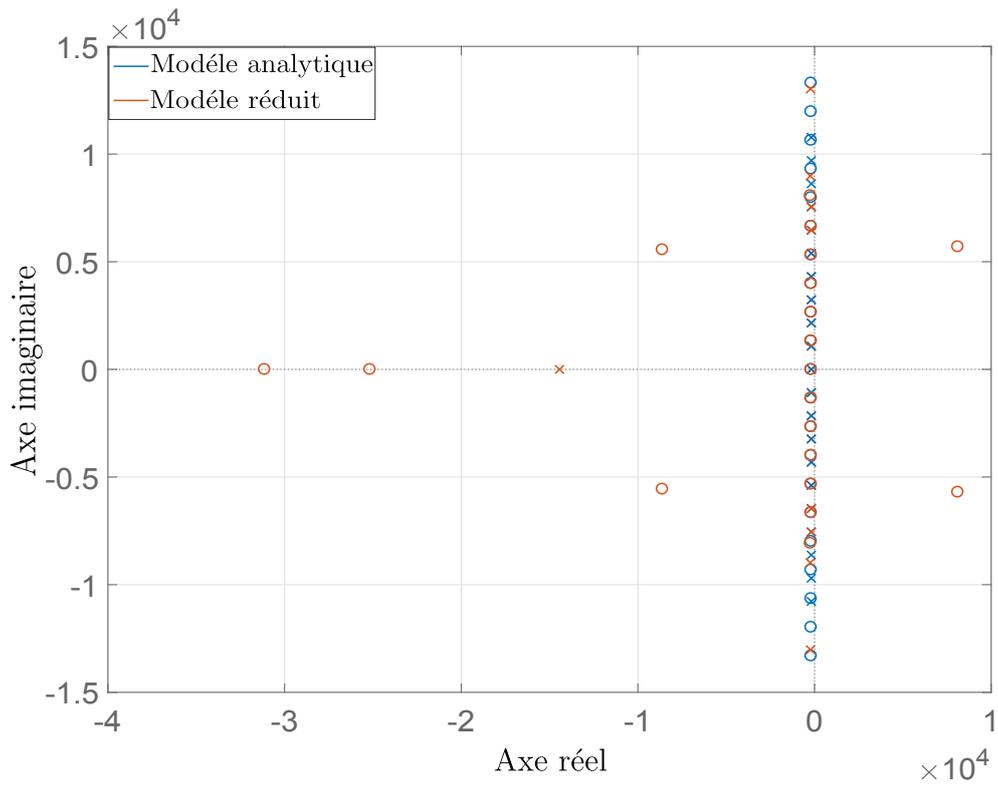
La figure 5.8 donne une carte des pôles-zéros des fonctions de transfert $\widehat{G}_\xi^C(s)$ et $G_\xi(s)$. Elle montre que, comme attendu de la méthode des résidus de Cauchy, $\widehat{G}_\xi^C(s)$ et $G_\xi(s)$ partagent les mêmes pôles. De plus, ces transferts partagent de nombreux zéros. Les zéros non partagés sont des zéros d'un produit fini d'une fonction quartique [90].

Rappelons que les fonctions quartiques sont des fonctions polynomiales de degré quatre qui ont deux racines complexes conjuguées avec une partie réelle positive et deux racines conjuguées complexes avec une partie réelle négative, conduisant à une phase nulle.

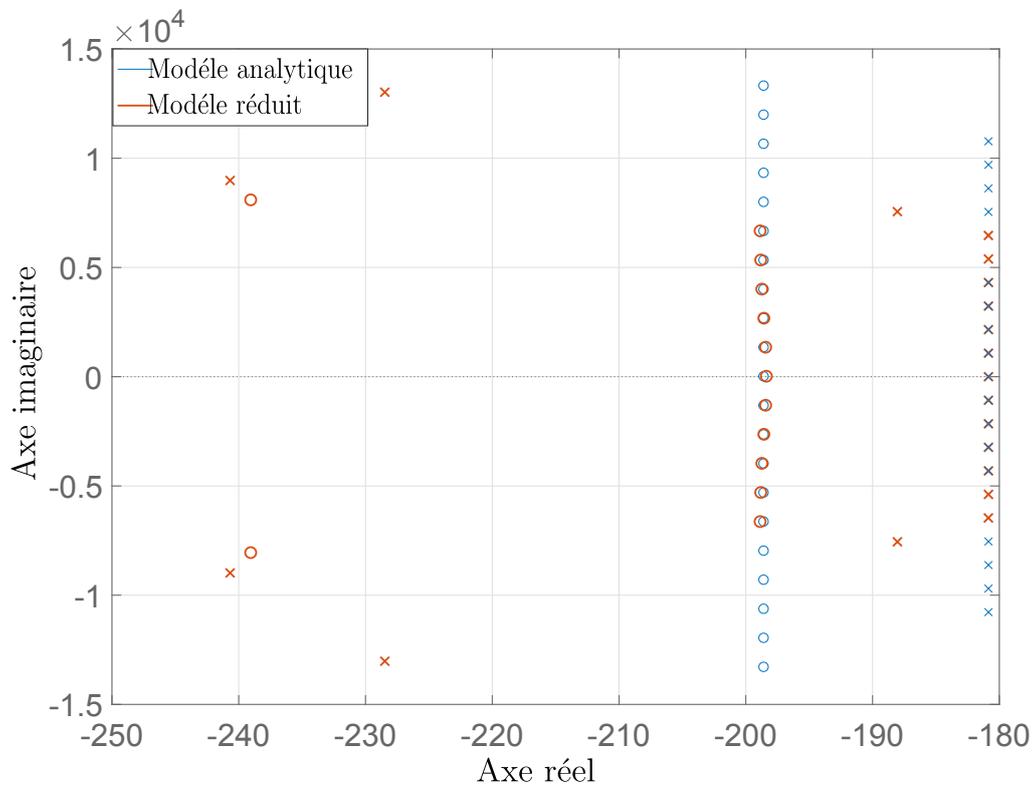
5.4.3 Résultats numériques de la méthode d'Hadamard

La fonction de transfert de dimension finie $\widehat{G}_\xi^H(s)$ est d'ordre 61 (i.e. $N_h = 30$), cet ordre nous permet d'approximer au mieux le comportement dynamique du système (5.6) dans la plage de fréquences $[20, 1000]$ Hz. La figure 5.9 montre la valeur de l'indicateur *fit* en fonction de la position ξ en utilisant $\widehat{G}_\xi^H(s)$.

Remarque 5.5. *À partir de la figure 5.10, nous remarquons que les zéros et pôles de la fonction de transfert $\widehat{G}_\xi^H(s)$, sont tous différents de ceux de la fonction de transfert analytique $G_\xi(s)$, sauf rares exceptions. Les deux fonctions $\widehat{G}_\xi^H(s)$ et $G_\xi(s)$ sont stables et à minimum de phase (zéros à partie réel négative).*



(a) Vue globale.



(b) Vue zoomée.

FIGURE 5.5 – Comparaison des cartes pôles-zéros des transferts $\hat{G}_s(s)$ et $G_s(s)$ au point $\xi_m = 0.81 m$ (méthode d'identification fréquentielle). \circ et \times représentent respectivement les zéros et les pôles.

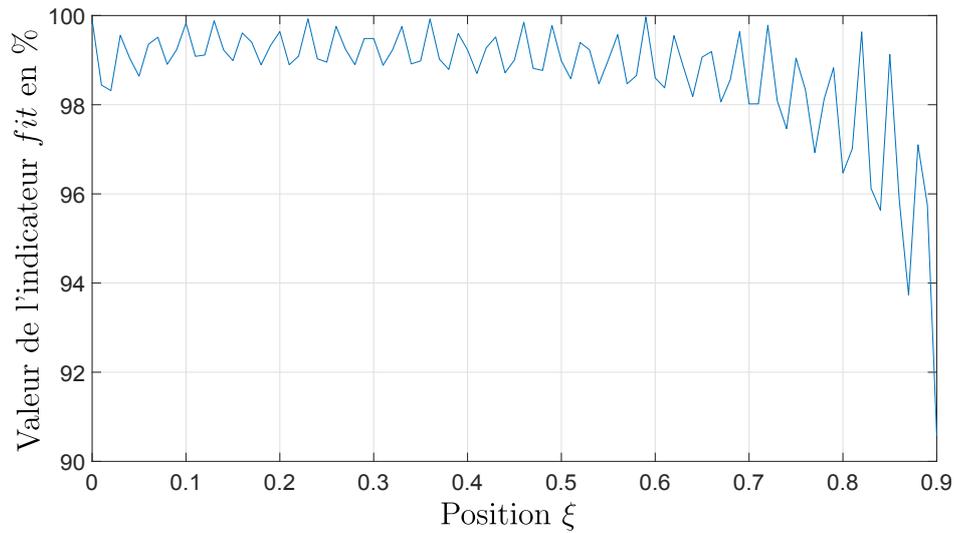


FIGURE 5.6 – Valeur de l'indicateur fit en fonction de la position $\xi \in [0, 0.9]m$, dans la plage de fréquences $[20, 1000]Hz$, avec $N_c = 30$ (méthode des résidus de Cauchy).

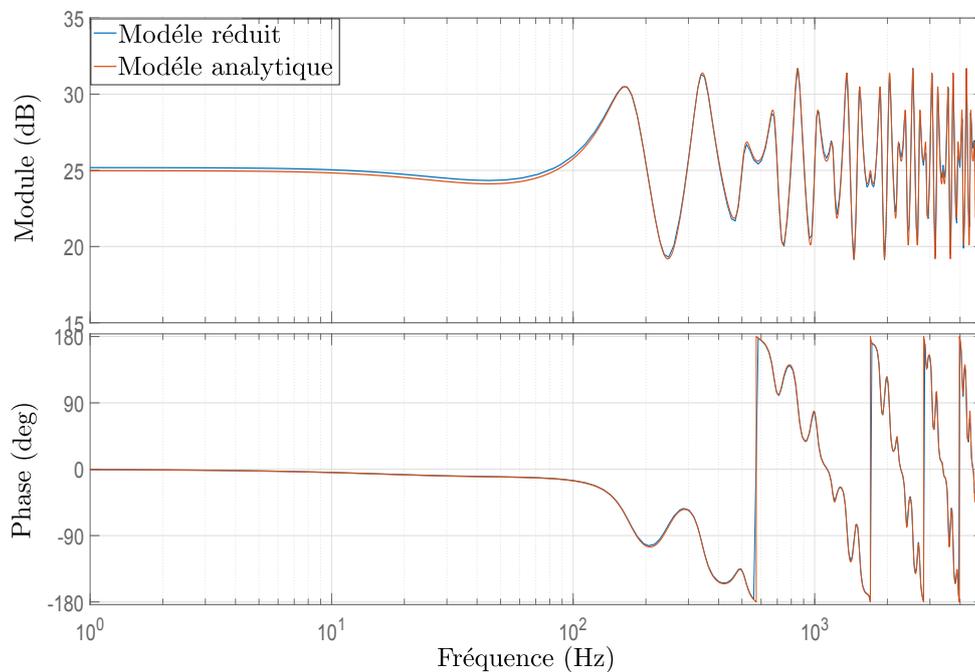
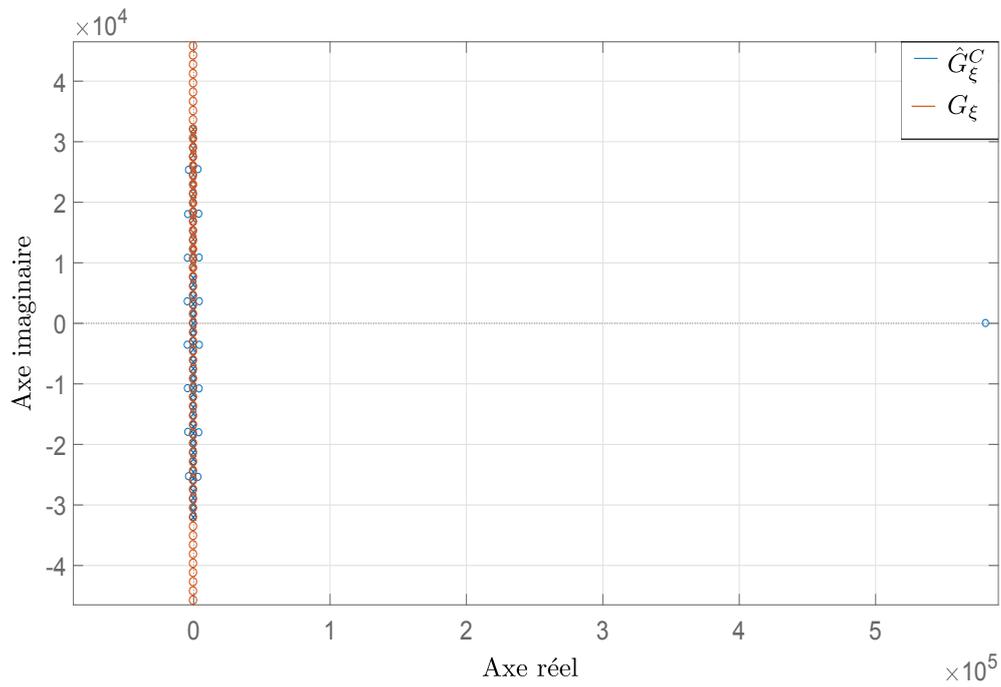
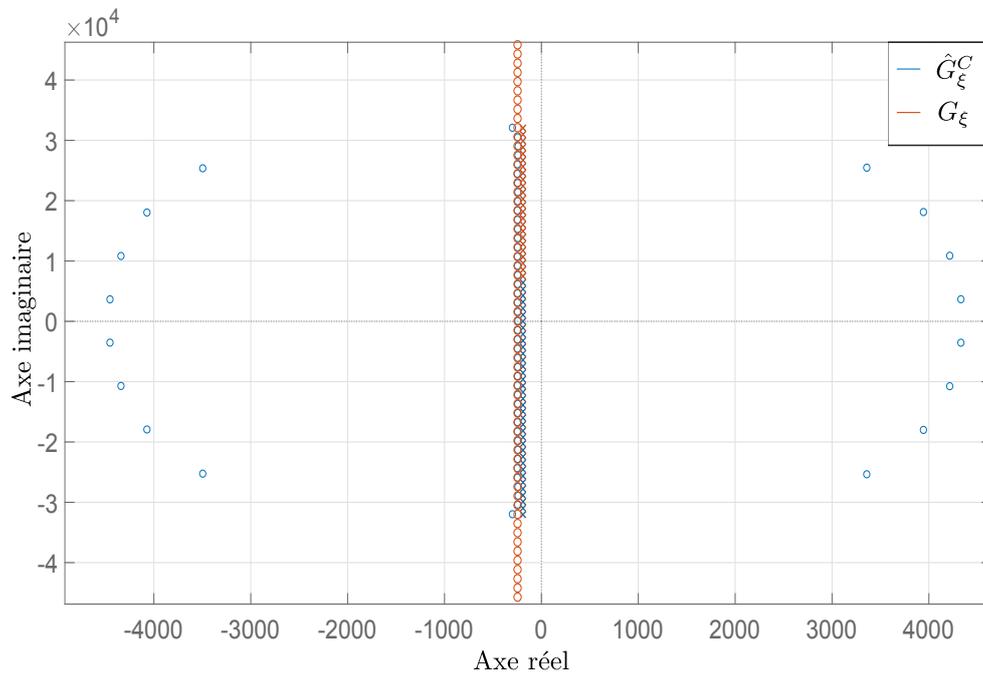


FIGURE 5.7 – Comparaison des transferts $\widehat{G}_\xi^C(s)$ et $G_\xi(s)$ au point $\xi = 0.7$ dans la plage de fréquences $[1, 5000]Hz$ (méthode des résidus de Cauchy).



(a) vue globale.



(b) vue zoomée.

FIGURE 5.8 – Comparaison des cartes pôles-zéros des transferts $\widehat{G}_\xi^C(s)$ et $G_\xi(s)$ au point $\xi = 0.7$ (méthode des résidus de Cauchy). (\circ et \times représentent respectivement les zéros et les pôles).

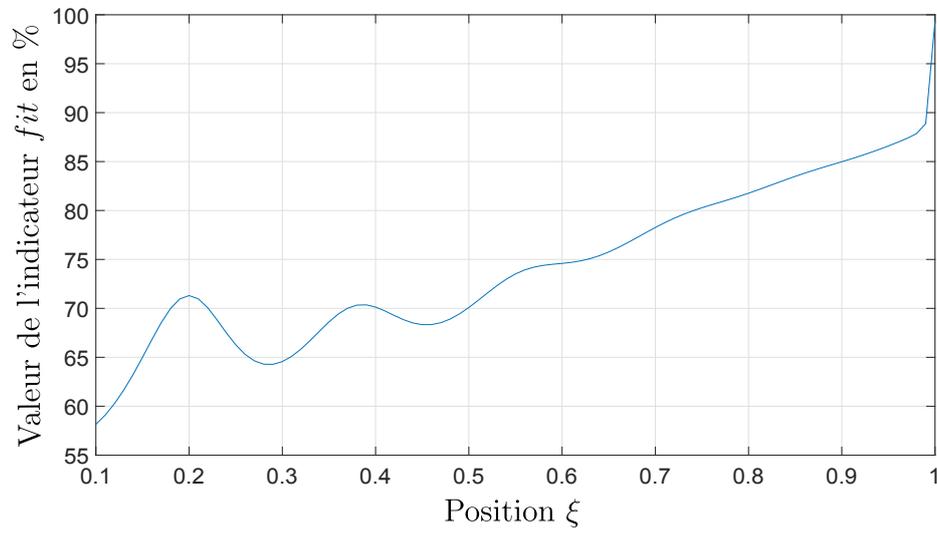
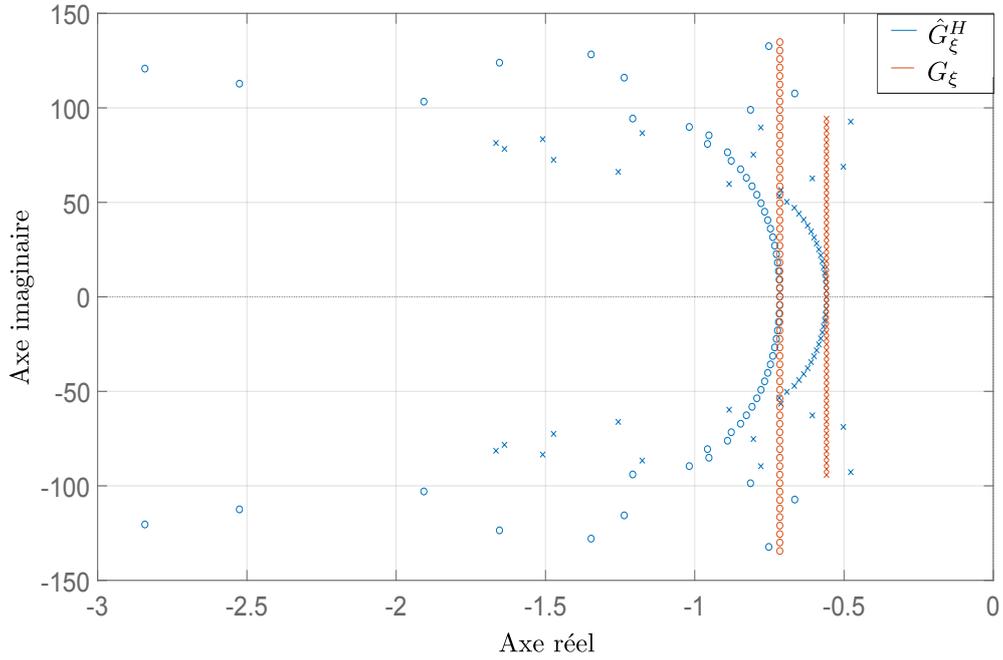
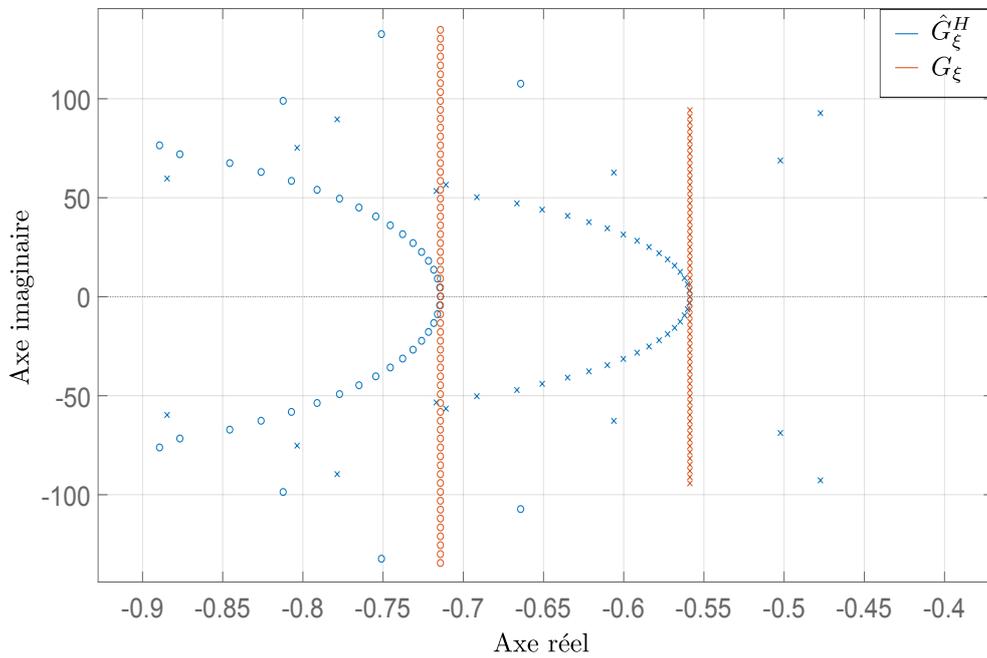


FIGURE 5.9 – Valeur de l'indicateur fit en fonction de la position $\xi \in [0.1, 1]m$ dans la plage de fréquences $[20, 1000]Hz$, avec $N_h = 30$ (méthode d'Hadamard).



(a) Vue globale.



(b) Vue zoomée.

FIGURE 5.10 – Comparaison des cartes pôles-zéros des transferts $\hat{G}_\xi^H(s)$ et $G_\xi(s)$ au point $\xi = 0.7$, avec $N_h = 30$ (méthode d'Hadamard). \circ et \times représentent respectivement les zéros et les pôles.

5.5 Conclusion

Trois voies ont été proposées, qui conduisent à l'obtention d'un modèle réduit sous forme de transfert de dimension finie. Ainsi, la méthode d'identification de type boîte noire par la méthode des sous-espaces, permet d'obtenir un modèle approximé d'ordre relativement faible (d'ordre 21, dans le cas du système de propagation acoustique unidimensionnelle présenté dans ce chapitre). Cependant, le modèle approximé ainsi obtenu n'est pas paramétré par la position ξ . Ceci nous oblige à refaire une identification du système chaque fois que la position du microphone change.

En pratique il est compliqué, si l'on veut pouvoir prédire la pression en un point nouveau de l'enceinte considérée, de modifier chaque fois la position du microphone avant de relancer le processus d'identification. Il est alors plus pratique de pouvoir disposer d'un système de dimension finie modélisant d'emblée le comportement étudié sur des plages fréquentielles et spatiales prédéfinies.

Parmi les méthodes permettant de réaliser cet objectif, nous avons considéré la méthode d'Hadamard et la méthode des résidus de Cauchy. A l'issue d'une étude en simulation nous avons pu conclure à l'efficacité de la méthode des résidus de Cauchy. Celle-ci produit, de meilleurs résultats, en terme de *fit* aux différentes positions, que ceux obtenus avec la méthode d'Hadamard. Par ailleurs, la méthode des résidus de Cauchy reproduit d'une façon parfaite les pôles basse fréquence du système de dimension infinie et, contrairement à la méthode d'Hadamard, une grande partie de ses zéros.

Le Tableau 5.3 résume la comparaison des différentes méthodes d'approximation du système $G_\xi(s)$.

Tableau 5.3 – Tableau comparative entre différentes méthodes d'approximation

Critères de comparaison	Identification	Résidus de Cauchy	Hadamard
Ordre du système d'approximation	+	-	-
Performances	+	+	+
Dépendance à la position	-	+	+
Reproduction des zéros du $G_\xi(s)$	oui, en proportion importante	oui, en proportion importante	non, en faible proportion
Reproduction des pôles du $G_\xi(s)$	oui, en proportion importante	totalité	non, en faible proportion

Chapitre 6

Un cas d'étude : la "LS2N box"

Sommaire

6.1	Introduction	72
6.2	Modèle des haut-parleurs	72
6.3	Modèle des microphones	73
6.4	Identification fréquentielle boîte noire	75
6.5	Identification paramétrée basée sur un modèle physique en 1D	76
6.6	Conclusion	79

6.1 Introduction

Ce chapitre aborde la question de la modélisation de la propagation acoustique dans la cavité "LS2N box" représentée par la figure 1.3. Contrairement au Chapitre 5, la modélisation prend cette fois en compte les modèles des haut-parleurs et microphones, et suppose une impédance finie sur les bords longitudinaux de la cavité. Afin de construire un modèle représentant le transfert entre un haut-parleur et un point situé à l'intérieur de la cavité, nous avons procédé par :

- Identification fréquentielle de type boîte noire (présentée en détail dans la Section 3.3) ;
- Approximation 1D générique de la propagation acoustique par un modèle unidimensionnel paramétré (en fonction de la position longitudinale) ; puis identification du modèle paramétré qui en résulte.

6.2 Modèle des haut-parleurs

Le fonctionnement d'un haut-parleur consiste en l'application d'une tension sur une bobine positionnée autour d'un aimant. Cette tension va ainsi créer un mouvement de la bobine et ce mouvement va déplacer une membrane, créant ainsi une onde sonore, cf. figure 6.1.

Le haut-parleur utilisé dans la cavité LS2N, est un haut-parleur électrodynamique représenté par la figure 6.1.

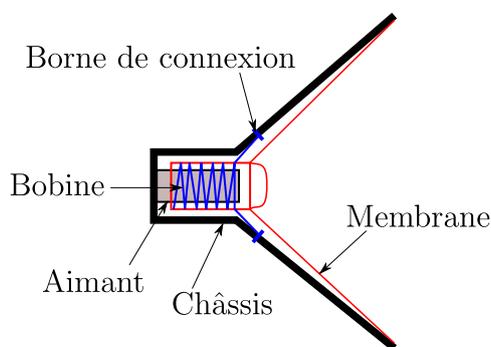


FIGURE 6.1 – Haut-parleur électrodynamique.

Le haut-parleur électrodynamique est décrit par le système d'équation suivant [112] :

- Équation mécanique :

$$m_b \dot{v}_b = -f_a x_b - f_v v_b - B_{HP} l_b i_{HP}(t), \quad (6.1)$$

avec

m_b : La masse de la membrane et de la bobine (en kg) ;

f_a : Coefficient du frottement fluide dû à l'air (en $\frac{N}{m}$) ;

- f_v : Coefficient du frottement visqueux (en $\frac{N.s}{m}$);
 B_{HP} : Valeur du champ magnétique (en $kg.s^{-2}.A^{-1}$);
 l_b : La longueur de la bobine (en m);
 i_{HP} : Courant qui traverse le circuit électrique (en A);
 $v_b(t)$: La vitesse de la bobine (en $\frac{m}{s}$);
 $x_b(t)$: La position de la bobine (en m).

— Équation électrique :

Le circuit électrique est un RL alimenté par une tension $E(t)$ et représenté par l'équation suivante :

$$L_b \frac{di_{HP}(t)}{dt} + R_{HP}i_{HP}(t) = E(t) + B_{HP}l_b v_b(t), \quad (6.2)$$

avec

L_b : L'inductance de la bobine (en H);

R_{HP} : La résistance dans le circuit électrique du haut-parleur (en Ohm).

Après application de la transformée de Laplace aux équations (6.1) et (6.2), on peut écrire la fonction de transfert du haut-parleur comme suit :

$$HP(s) = \frac{\bar{p}(s)}{E(s)} = \frac{-m_b B_{HP} l_b s^2}{S_m ((L_b s + R_{HP})(m_b s^2 + f_v s + f_a) + (B_{HP} l_b)^2 s)} \quad (6.3)$$

avec $\bar{p}(s) = \frac{m_b s v_b(s)}{S_m}$, où S_m représente l'aire de la membrane. Dans cette modélisation, on a négligé les forces externes au haut-parleur.

6.3 Modèle des microphones

Le microphone utilisé est un microphone électrostatique, son fonctionnement et son circuit de polarisation sont représentés par les figures 6.2 et 6.3 (cf. [59]).

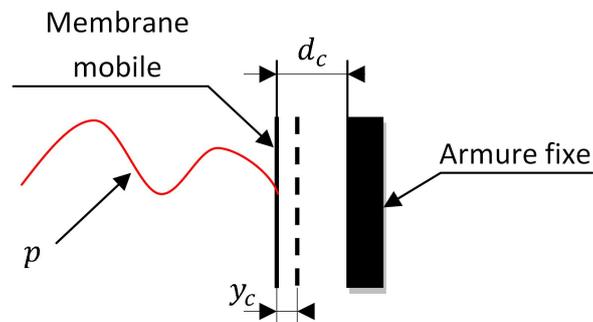


FIGURE 6.2 – Le principe d'un microphone électrostatique.

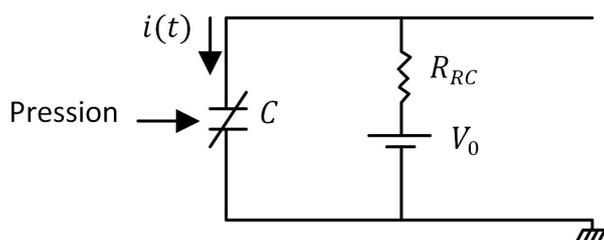


FIGURE 6.3 – Circuit de polarisation d'un microphone électrostatique.

Sous l'effet d'une pression acoustique p , la capacité du condensateur constituant le transducteur passe d'une valeur $C_0 = \frac{\epsilon_0 S_a}{d_c}$ à une valeur $C(t) = \frac{\epsilon_0 S_a}{d_c - y_c(t)}$. ϵ_0 est la permittivité électrique du vide ou de l'air et elle est de l'ordre de :

$$\epsilon_0 = \frac{1}{36 \cdot \pi \cdot 10^9} \text{ (F.m}^{-1}\text{)} \quad (6.4)$$

S_a est la surface de l'armature du condensateur, d_c est la distance initiale entre les deux armatures du condensateur et $y_c(t)$ est la différence entre la distance initiale et la distance à un instant t , entre les deux armatures du condensateur.

Ce microphone est décrit par le système d'équation suivant :

— Équation électrique :

Q désigne la charge totale des armatures du condensateur, on a :

$$Q(t) = Q_0 + q(t) \quad (6.5)$$

Q_0 représente la charge initiale statique du condensateur et $q(t)$ la variation de la charge due au déplacement $y_c(t)$.

L'équation électrique suivante s'obtient aisément :

$$E_0 y_c(t) = R_{RC} i(t) + \frac{1}{C_0} \int_0^t i(\tau) d\tau \quad (6.6)$$

avec $E_0 = \frac{V_0}{d_c}$. Où $i(t)$ représente le courant qui traverse le circuit électrique du microphone à chaque instant t , R_{RC} est la valeur de la résistance du circuit RC , V_0 est la tension d'alimentation.

— Équation mécanique :

L'équation mécanique s'écrit sous la forme suivante :

$$S_a p(t) + E_0 \int_0^t i(\tau) d\tau = m_a \frac{d^2 y_c(t)}{dt^2} + r_f \frac{dy_c(t)}{dt} + r_a y_c(t), \quad (6.7)$$

avec r_f , r_a , m_a et S_a représentent respectivement le coefficient du frottement, le coefficient d'amortissement, la masse et la surface de l'armature.

À partir de (6.6) et (6.7), la fonction de transfert du microphone, est obtenue comme suit :

$$MP(s) = \frac{R_{MP} I(s)}{\bar{p}(s)} = \frac{R_{MP} S_a E_0 s}{(R_{RC} s + 1/C_0)(m_a s^2 + r_f s + r_a) - E_0^2}, \quad (6.8)$$

où $I(s)$, $\bar{p}(s)$ et R_{MP} représentent respectivement la transformée de Laplace du courant $i(t)$, la transformée de Laplace de pression $p(t)$ et la résistance globale de microphone.

6.4 Identification fréquentielle boîte noire

Cette section a pour objectif d'identifier (par une méthode type boîte noire, détaillée dans Section 3.3), les transferts entre le haut-parleur HP_1 et les différents microphones M_1 et M_2 (la distance entre le microphone M_2 et M_1 est de 20 cm et celle entre M_2 et HP_1 est de 40 cm, voir la figure 1.3).

Nous choisissons l'indicateur d'ajustement fit (donné par (5.12)) entre une estimation de la réponse fréquentielle du système (obtenue par la méthode de Welch, cf. Section 3.2) et le modèle identifié. L'ordre du modèle identifié est de 50. Cet ordre correspond à une valeur de l'indicateur fit , proche de 100%. Les résultats obtenus dans ce cas sont représentés par les figures 6.4 et 6.5. La plage d'identification considérée est toujours $[20, 1000]$ Hz.

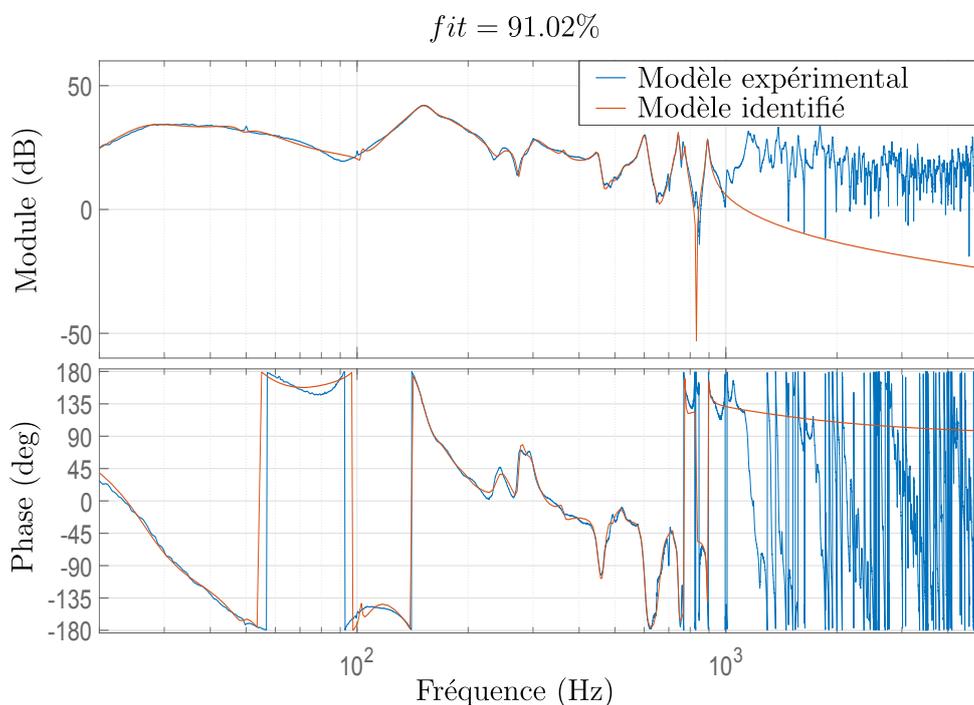


FIGURE 6.4 – Résultat d'identification fréquentielle du transfert entre HP_1 et M_1 , dans la plage de fréquences $[20, 1000]$ Hz (modèle identifié d'ordre 50).

D'après les figures 6.4 et 6.5, le modèle identifié reproduit de manière satisfaisante le comportement du transfert entre le haut-parleur HP_1 et les microphones M_1 ou M_2 . Pour avoir une atténuation du bruit, mono-point ou multi-points (des points qui ne sont pas très proches et pas nombreux), cette méthode d'identification sera utilisée. Cependant, dans le cas d'une atténuation du bruit sur un segment ou dans un volume, cette méthode n'est pas adaptée du fait que le modèle obtenu ne décrit pas spatialement le système à étudier (i.e. le modèle ne dépend pas de la position spatiale). C'est l'objectif de la section suivante, où un modèle paramétré est obtenu pour décrire la cavité "LS2N box" spatialement (dans un volume et sur une plage de fréquences prédéfinie).

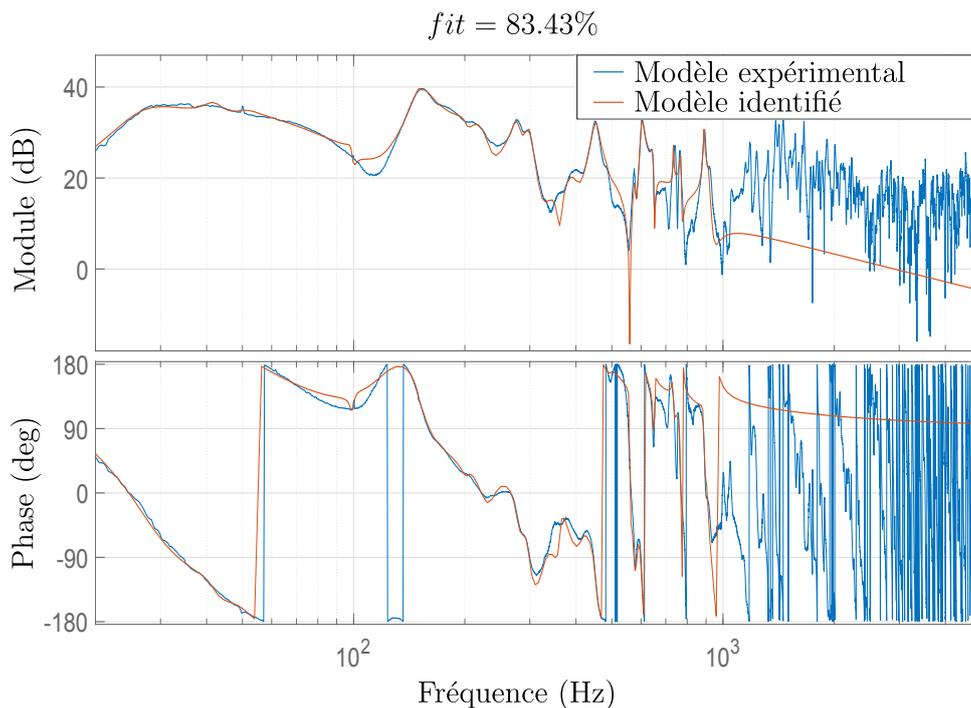


FIGURE 6.5 – Résultat d’identification fréquentielle du transfert entre HP_1 et M_2 , dans la plage de fréquences $[20, 1000]$ Hz (modèle identifié d’ordre 50).

6.5 Identification paramétrée basée sur un modèle physique en 1D

L’objectif de cette section est de proposer un modèle unidimensionnel et optimiser ses paramètres pour que sa réponse fréquentielle soit la plus proche possible de celle du système étudié (c.-à-d. la cavité “LS2N box”).

Nous avons choisi une méta-heuristique connue pour son efficacité dans le cas des problèmes d’optimisation continus et non-différentiable. La méthode d’optimisation par essaims particulaires OEP (en anglais Particle Swarm Optimization PSO) inspirée de l’intelligence sociale des essaims d’oiseaux [33] a permis d’obtenir des résultats satisfaisants lorsque les méthodes basées sur le calcul de gradients se sont limitées à des optimums locaux ne permettant pas d’approcher le comportement fréquentiel escompté.

Nous avons choisi le système en 1D décrit par (6.9) et (6.10), caractérisé par deux impédances aux extrémités (Z_0 et Z_1) et une impédance latérale Z_l , constante sur tout le long de l’axe principal du système en 1D.

$$\ddot{p}(t, \xi) = c^2 \Delta p(t, \xi) - \frac{1}{Z_l} \dot{p}(t, \xi) \quad \text{avec } \xi \in (0, L), \quad (6.9)$$

et les conditions aux bords (en $\xi = 0$ et $\xi = L$) suivantes :

$$\frac{\partial p}{\partial \xi}(t, 0) = \frac{1}{Z_0} \dot{p}(t, 0), \quad (6.10a)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \xi}(t, L) = -\frac{1}{Z_1} \dot{p}(t, L) + u(t). \quad (6.10b)$$

Le signal $u(t)$ est appliqué en $\xi = L$ car dans la cavité “LS2N box”, le haut-parleur HP_1 est situé sur cette extrémité.

Comme cité ci-dessus, il faut d’abord introduire la fonction de transfert paramétrée en 1D. Dans cette partie, on s’intéresse au transfert entre le signal $u(t)$ issu du haut-parleur HP_1 et la pression en un point donné :

$$G_{1D}(s, \xi) = \frac{p(s, \xi)}{u(s)} = \frac{\sinh(\kappa(s)\xi) + \frac{Z_0\kappa(s)}{s} \cosh(\kappa(s)\xi)}{\left(\kappa(s) + \frac{Z_0\kappa(s)}{Z_1}\right) \cosh(\kappa(s)L) + \left(\frac{s}{Z_1} + \frac{Z_0\kappa^2(s)}{s}\right) \sinh(\kappa(s)L)}, \quad (6.11)$$

avec

$$\kappa(s) = \frac{\sqrt{s^2 + \frac{s}{Z_l}}}{c}.$$

Pour que le comportement du système en 1D représenté par (6.9) et (6.10) soit le plus proche de celui de la cavité “LS2N box”, nous avons rajouté une fonction de transfert G_{HP-MP} qui représente les transferts d’un haut-parleur, d’un microphone et des erreurs de mesures. Nous avons choisi un ordre égal à 6, pour cette fonction de transfert additionnelle (ce qui est en conformité avec les fonctions de transferts introduites pour le haut-parleur et le microphone en début de ce chapitre).

Dans la partie optimisation, nous optimiserons aussi les coefficients de cette fonction de transfert notée G_{HP-MP} (cette fonction ne dépend pas de la position).

Ainsi, les paramètres de la fonction de transfert globale notée $G_{globale}(s, \xi)$ donnée par (6.12), seront obtenus grâce à l’algorithme d’optimisation PSO minimisant pour le critère d’ajustement J donné par (6.13).

$$G_{globale}(s, \xi) = G_{1D}(s, \xi)G_{HP-MP}(s). \quad (6.12)$$

$$J = \max_{\xi \in [\underline{\xi}, \bar{\xi}]} \left(\frac{\|G_{3D}(j \cdot, \xi) - G_{globale}(j \cdot, \xi)\|_2}{\|G_{3D}(j \cdot, \xi) - E(G_{3D}(j \cdot, \xi))\|_2} \right), \quad (6.13)$$

où la réponse fréquentielle G_{3D} représente le transfert entre le haut-parleur HP_1 et un microphone situé à une position donnée dans la cavité “LS2N box”. Cette réponse est bien calculée (cf. Chapitre 3) à partir des DSP des signaux d’entrée et de sortie issues des données expérimentales (i.e. tensions aux niveaux du haut-parleur et du microphone).

$E(G_{3D}(j \cdot, \xi))$ est la moyenne de G_{3D} (moyenne de la partie réelle et de la partie imaginaire) par rapport à ω , où ω est dans l’intervalle d’optimisation désirée, $\bar{\xi}$ et $\underline{\xi}$ représentent respectivement la borne supérieure et inférieure de l’intervalle d’optimisation.

Pour analyser les résultats obtenus nous proposons de calculer l'indicateur fit donné par l'équation suivante :

$$fit = 100 (1 - J). \quad (6.14)$$

Résultats d'optimisation Dans ce paragraphe, nous allons appliquer l'optimisation PSO sur un seul point $\xi = 0.8$ ($\xi = \bar{\xi} = 0.8$). Les résultats d'optimisation sont représentés par la figure 6.6. La plage d'optimisation est $[100, 1000]$ Hz. Les valeurs des trois impédances Z_l , Z_0 et Z_1 , après optimisation, sont données dans le Tableau 6.1.

Tableau 6.1 – Valeurs des paramètres du modèle en 1D obtenues par optimisation PSO.

Paramètres	Valeur
Z_l	$3.37 \cdot 10^9$
Z_0	$2.6 \cdot 10^6$
Z_1	$1.24 \cdot 10^3$
c	336

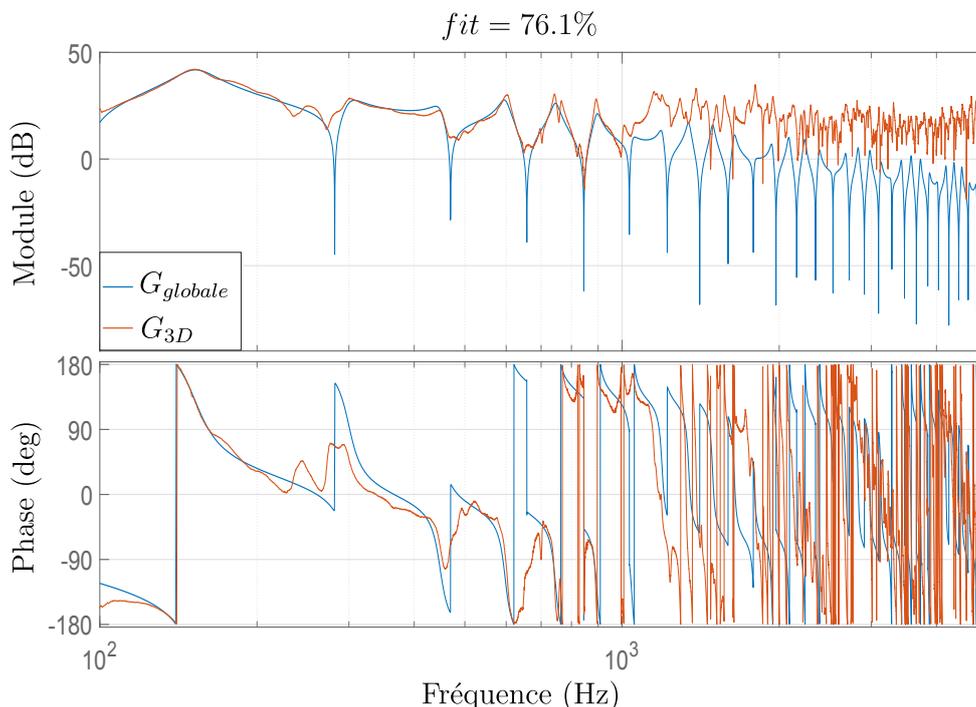


FIGURE 6.6 – Comparaison des tracés de Bode des deux transferts G_{3D} et $G_{globale}$ à la position du microphone M_1 , dans la plage de fréquences $[100, 1000]$ Hz.

La figure 6.6 montre que la fonction de transfert globale $G_{globale}$ peut représenter le transfert de HP_1 vers M_1 de la cavité "LS2N box" sur la plage de fréquences $[100, 1000]$ Hz,

en reproduisant les modes les plus importants de ce dernier.

Pour voir l'utilité d'avoir un système paramétré, nous avons pris la fonction de transfert paramétrée et optimisée $G_{globale}(s, \xi)$ (l'optimisation est basée sur les données issues du microphone M_1) avec $\xi = 0.8$ (la position latérale du microphone M_2).

La réponse fréquentielle de cette fonction sera comparée à celle de la fonction de transfert entre le haut-parleur HP_1 et le microphone M_2 de la cavité "LS2N box", afin de valider la fonction de transfert paramétrée $G_{globale}(s, \xi)$ dans un volume de la cavité et sur une plage de fréquences prédéfinie (ici la plage de fréquences considérée est $[100, 1000]$ Hz).

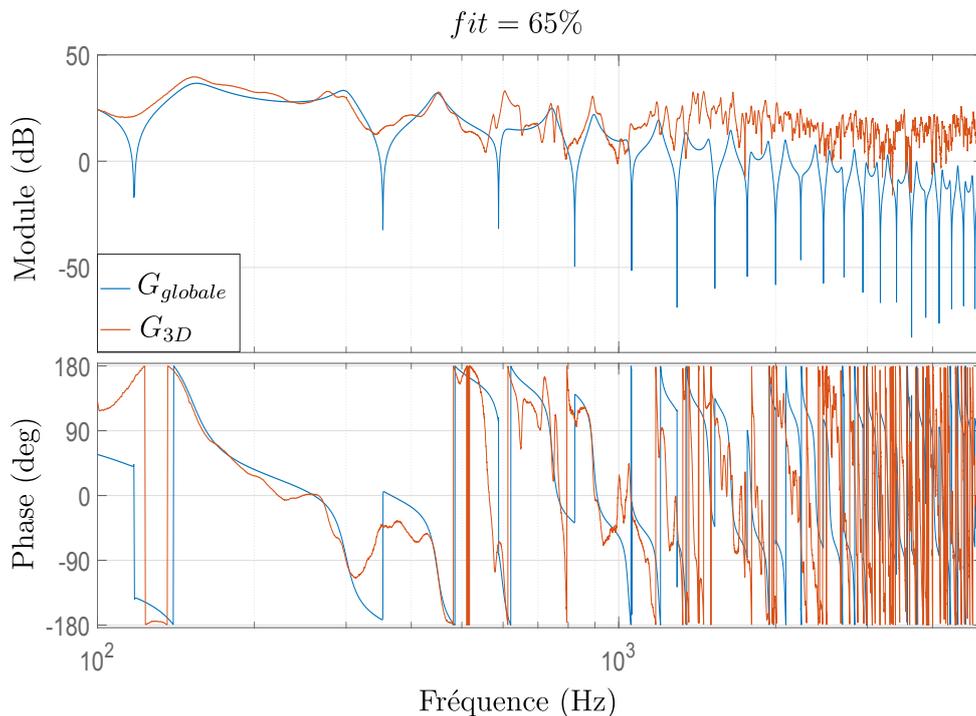


FIGURE 6.7 – Comparaison des tracés de Bode des deux transferts G_{3D} et $G_{globale}$ à la position du microphone M_2 , dans la plage de fréquences $[100, 1000]$ Hz.

D'après la figure 6.7, la fonction de transfert $G_{globale}$ a le même comportement que celui de la fonction de transfert G_{3D} au microphone M_2 . On remarque aussi qu'il y a apparition des modes supplémentaires dans G_{3D} au microphone M_2 . Ces modes peuvent être dus à la plus grande proximité du microphone M_2 avec la paroi inclinée (dans Section 4.3.2, on a vu que l'inclinaison reproduit des modes à partir de la fréquence 600 Hz).

6.6 Conclusion

Dans ce chapitre, deux méthodes ont été utilisées pour construire un modèle acoustique entre un haut-parleur et un point situé à l'intérieur de la cavité "LS2N box" :

- La première procède sur la base de l'identification d'un modèle « boîte noire » à partir des données fréquentielles ; ce modèle linéaire ne permet aucune extrapola-

tion, en ce sens qu'il ne permet pas de prédire la pression aux alentours du point de mesure ;

- La seconde procède sur la base de l'identification d'un modèle 1D paramétré (en fonction de la position longitudinale), censé permettre l'étude de la pression en différents points de la cavité. Le modèle obtenu par cette méthode, est valable sur une plage de fréquences et sur un intervalle spatial.

Troisième partie

Contrôle actif de bruits mono ou multi-point

Chapitre 7

Algorithmes classiques pour l'ANC : FxLMS et ses variations

Sommaire

7.1	Introduction	84
7.2	Quelques considérations sur le contrôle actif du bruit	84
7.2.1	Types de Contrôle antibruit	84
7.2.2	Différentes architectures de commande	85
7.2.3	Stratégies de commande	87
7.3	Description de l'algorithme FxLMS	88
7.4	Similarité avec la commande à modèle interne au sens de Morari	90
7.5	Extensions de l'algorithme FxLMS	92
7.6	Convergence de l'algorithme FxLMS	94
7.7	Conclusion	95

7.1 Introduction

Les algorithmes adaptatifs habituellement utilisés dans les applications du contrôle actif du bruit, sont basés sur l'algorithme des moindres carrés récurrents (least mean squares algorithm (LMS)), introduit pour la première fois dans [110] pour les applications d'atténuation du bruit en théorie du signal. L'application directe de l'algorithme LMS, aux problèmes d'ANC pour lesquels la source antibruit et le point d'atténuation ne sont pas co-localisés, entraîne des problèmes d'instabilité. L'algorithme LMS ne prend en effet pas en compte l'existence du chemin secondaire.

Une première solution à ce problème a été donnée dans [81] et un an plus tard une proposition similaire a été donnée indépendamment dans [111] et [19]. Cette solution est appelée algorithme Filtered-x LMS (FxLMS) (cf. Section 7.3).

Dès lors, plusieurs améliorations de l'algorithme ont vu le jour. Nous ne prétendons pas à l'exhaustivité mais nous rappelons ici les principales alternatives proposées par les chercheurs en théorie du signal pour l'atténuation d'un bruit sonore : (i) L'algorithme adaptatif Filtered-u LMS (FuLMS) qui a été proposé dans [40], (ii) L'algorithme Filtered-x Least mean M-estimate (FxLMM) proposé dans [119], (iii) L'algorithme FxLMS normalisé (NFxLMS) qui a été développé dans [18]. Pour plus d'information sur des possibles extensions de l'algorithme FxLMS, nous renvoyons le lecteur intéressé vers l'article de synthèse [46].

7.2 Quelques considérations sur le contrôle actif du bruit

Cette section a pour l'objectif de présenter brièvement les différents types de contrôle ainsi que les architectures et les stratégies de commande qui peuvent être utilisées dans le cadre du contrôle actif de bruit.

7.2.1 Types de Contrôle antibruit

Dans cette section, nous présentons une introduction sur les différents types de contrôle utilisés dans l'ANC : le contrôle passif, le contrôle actif et le contrôle actif-passif.

Contrôle passif : Des matériaux d'absorption passifs du son sont mis en œuvre pour une large gamme d'applications. La dissipation se produit parce que les molécules d'air dans les interstices oscillent avec la fréquence de l'onde sonore excitante. Cette oscillation entraîne des pertes d'énergie par frottements.

Une couche poreuse peut absorber une grande quantité d'énergie acoustique seulement si son épaisseur est de l'ordre de la longueur d'onde du bruit sonore [8]. Cela implique qu'une telle technique passive n'est pas adaptée aux basses fréquences, car il faut rajouter de l'épaisseur aux matériaux d'absorption, ce qui rend l'endroit où on veut atténuer le bruit sonore très encombré. En outre, cette solution se traduit par un poids additionnel non souhaité par les constructeurs automobiles, par exemple. Toutes ces raisons limitent l'utilisation du contrôle passif pour les bruits de basses fréquences.

Contrôle actif : Le contrôle actif du bruit est une alternative intéressante pour l'atténuation perceptible de bruit en basses fréquences. Le contrôle actif du bruit fonctionne sur le principe de superposition acoustique entre le bruit d'entrée primaire et le bruit généré par la source secondaire. Un système électroacoustique ou électromécanique est habituellement utilisé comme source secondaire pour annuler le bruit primaire. Dans son brevet en 1936, Lueg a proposé l'idée de base du contrôle acoustique actif de bruits, qui utilise un microphone et un haut-parleur pour atténuer le son indésirable [63].

L'ANC utilise un système de traitement de signal numérique (Digital Signal Processor "DSP") comme supprimeur de bruit, qui peut exécuter des opérations mathématiques avec suffisamment de rapidité et de précision en temps réel. Par conséquent, l'amplitude et la phase à la fois du bruit primaire et secondaire sont très proches. Dans les années 1980, le développement de puissants processeurs de signaux numériques a permis une avance considérable des mises en œuvre pour l'ANC [64].

Contrôle actif-passif : Les techniques de contrôle actif-passif, qui utilisent à la fois des éléments actifs et passifs, en série ou bien en parallèle, permettent de surmonter les limitations de chaque approche (contrôle actif ou passif). L'élément passif assure généralement l'atténuation de bruits en hautes fréquences, tandis que le contrôle actif vise à atténuer les bruits en basses fréquences.

L'un des premiers travaux publié sur le contrôle actif-passif, est celui de Guickling et Lorenz [50]. Le composant passif était composé d'une plaque poreuse située dans un conduit, à une petite distance de l'extrémité ouverte du conduit. Un haut-parleur de contrôle était aussi installé à l'extrémité de ce conduit.

Guigou et Fuller ont conçu une paroi "intelligente" en mousse PVDF (film de fluorure de polyvinyle) pour le contrôle du bruit intérieur des avions [51]. Différents signaux de référence ont été implémentés pour le contrôleur d'anticipation.

Dans [82], Wael Nabil a étudié une nouvelle mousse "intelligente" capable de contrôler simultanément les modes acoustiques d'une cavité, sur une large bande de fréquences.

7.2.2 Différentes architectures de commande

On peut distinguer trois architectures pour le contrôle actif du bruit : la commande par action anticipatrice, la commande par contre réaction et la commande mixte anticipatrice et par contre réaction.

Commande par action anticipatrice (feedforward) : L'architecture de commande par feedforward, est présentée par la figure 7.1.

Le principe de cette architecture consiste à utiliser le signal du bruit primaire en général mesuré à coté de la source du bruit, ce bruit primaire est l'entrée du chemin primaire et du compensateur. Ce compensateur est conçu d'une façon à inverser le chemin secondaire en tenant compte du chemin primaire, afin de produire l'antibruit appliqué au point d'atténuation. Il faut noter aussi qu'un contrôle ne sera possible que si le capteur détecte le bruit primaire avant qu'il n'atteigne la source secondaire.

Ça sera l'occasion aussi de mentionner que dans le cas d'une commande adaptative par feedforward, le bruit résiduel est utilisé avec du bruit primaire, pour l'adaptation des coefficients du compensateur, donc dans ce cas, il ne s'agit plus d'un simple feedforward.

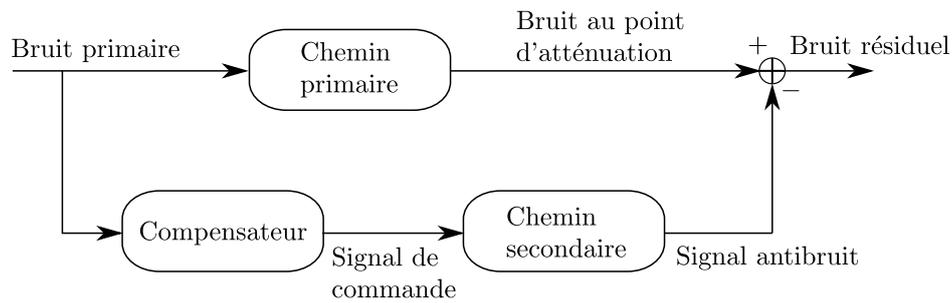


FIGURE 7.1 – Schéma bloc pour le problème d'ANC par feedforward.

L'architecture de commande par feedforward n'est plus valable, dans le cas où on ne possède pas des informations sur le bruit primaire. Dans ce cas, cette architecture sera remplacée par l'architecture de commande par feedback, décrite dans le paragraphe suivant.

Commande par contre réaction (feedback) : L'architecture de commande par feedback, est présentée par la figure 7.2.

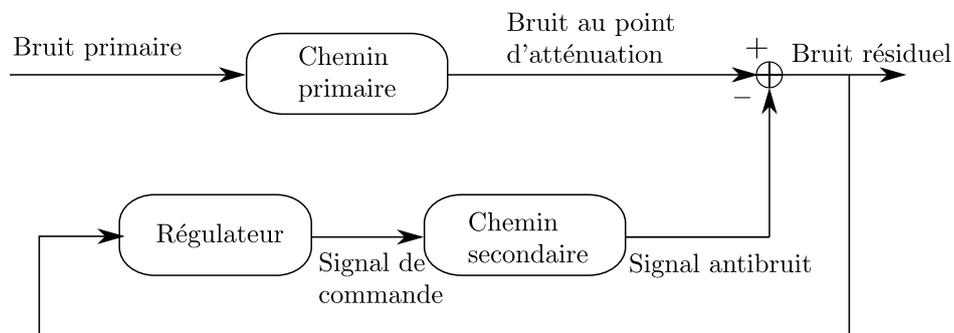


FIGURE 7.2 – Schéma bloc pour le problème d'ANC par feedback.

Le principe de cette architecture consiste à utiliser le signal du bruit résiduel au point d'atténuation, comme l'entrée du régulateur. Pour cette architecture, la connaissance du bruit primaire et du chemin primaire n'est pas requise.

Commande par feedforward et feedback : L'architecture de commande par feedback, est présentée par la figure 7.3.

Dans cette configuration le compensateur par feedforward et le régulateur par feedback, visent à atténuer le bruit résiduel en une plage de fréquences plus large. Cette architecture permet de mélanger deux stratégies de commande dans le cas où le bruit primaire et le chemin primaire sont connus.

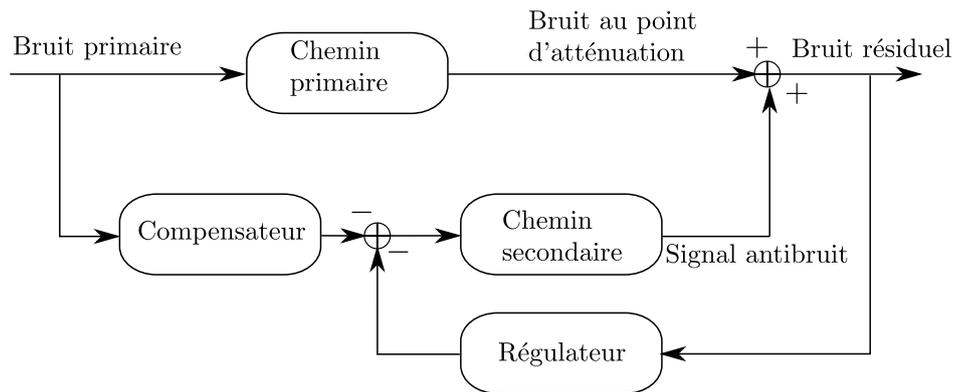


FIGURE 7.3 – Schéma bloc pour le problème de contrôle actif hybride (feedback et feedforward).

À titre d'exemple, un régulateur fixe robuste par feedback peut être synthétisé pour atténuer le bruit résiduel dans une plage de fréquences, et un compensateur adaptatif par feedforward est considéré, afin d'atténuer le bruit résiduel au point d'atténuation dans une autre plage de fréquences (pour avoir une plage d'atténuation globale plus large), en tenant compte du régulateur par feedback.

7.2.3 Stratégies de commande

Dans le contrôle actif du bruit, on peut distinguer deux types de stratégies de commande.

Commande adaptative : La commande adaptative la plus connue utilisée pour le système ANC repose sur l'algorithme des moindres carrés récurrents (LMS), qui a été publié par Widrow et Hoff en 1960 [110]. Cependant, l'algorithme LMS, est utilisé juste dans des applications où la fonction de transfert du chemin secondaire est égale à 1 (e.g le haut-parleur qui génère l'antibruit est situé au point d'atténuation). Dans le cas où la fonction de transfert du chemin secondaire est différente de 1, Morgan a d'abord proposé une solution à ce problème en 1980 [81] et un an plus tard Widrow et al, et Burgess ont indépendamment présenté une proposition similaire [111, 19].

Le concept de cette solution est de prendre en compte l'effet du chemin secondaire, en introduisant un transfert identique à ce chemin secondaire, juste avant le contrôleur adaptatif basé sur l'algorithme LMS. Cette solution est appelée FxLMS (Filtered-x Least Mean Square). Au cours des vingt dernières années, divers extensions de l'algorithme FxLMS ont été explorés pour améliorer ses performances et sa robustesse. Nous discutons en détail ce genre de méthode de commande dans le reste de ce chapitre.

Commande robuste : La recherche d'algorithmes pour des problèmes de contrôle actif du bruit a été l'apanage de la communauté du traitement du signal avec des algorithmes basés sur une commande anticipatrice adaptative. Plus récemment, la communauté de la "commande" aborde également le problème du contrôle actif du bruit à large bande, mais comme un problème optimal ou robuste. e.g. commande LQG, H_2 , H_∞ ,

en interprétant z^{-1} comme le décalage temporel, c'est-à-dire que $u_s(n-i) = z^{-i}u_s(n)$. w_i sont les variables d'adaptation.

D'après la figure 7.4, le contrôleur global de l'algorithme FxLMS $K(z)$ est donné par l'expression suivante :

$$K(z) = (1 + W(z)\widehat{G}_s(z))^{-1}W(z). \quad (7.3)$$

Notons que ce contrôleur a pour entrée le signal d'erreur e au point d'atténuation ($e(n) = y_p(n) + y_s(n)$) et pour sortie le signal de commande u_s .

Les différentes étapes à réaliser à chaque instant d'échantillonnage, pour la mise en œuvre de l'algorithme FxLMS par feedback dans le cas SISO, sont données ci-dessous.

- Étape 1 : Estimation du vecteur de signal de référence $\mathbf{R}(n)$

$$\mathbf{R}(n)^\top = \left[r(n) \quad r(n-1) \quad \cdots \quad r(n-N_s+1) \right], \quad (7.4)$$

avec

$$r(n) = e(n) - \widehat{G}_s(z)u_s(n) = e(n) - \sum_{i=0}^{N_s-1} \hat{s}_i u_s(n-i), \quad (7.5)$$

où $e(n)$ est le signal d'erreur.

- Étape 2 : Estimation du vecteur de signal de référence filtré par \widehat{G}_s , $\mathbf{R}'(n)$

$$\mathbf{R}'(n)^\top = \left[r'(n) \quad r'(n-1) \quad \cdots \quad r'(n-N_w+1) \right], \quad (7.6)$$

avec

$$r'(n) = \widehat{G}_s(z)r(n) = \sum_{i=0}^{N_s-1} \hat{s}_i r(n-i). \quad (7.7)$$

$r'(n)$ est obtenu en filtrant $r(n)$ par $\widehat{G}_s(z)$.

- Étape 3 : Adaptation du filtre $W(z)$

L'adaptation vise théoriquement à choisir $W(z)$ afin de minimiser la fonction de coût :

$$\mathcal{J}(\mathbf{W}) = \mathbb{E}\{e^2(n)\}, \quad (7.8)$$

où $\mathbb{E}\{\cdot\}$ est une espérance mathématique et

$$\mathbf{W}(n) = [w_0(n), \dots, w_{N_w-1}(n)]^\top \in \mathbb{R}^{N_w}$$

est le vecteur qui contient les coefficients du filtre $W(z)$.

Pratiquement, l'algorithme FxLMS considère pour critère, la valeur instantanée $e^2(n)$ plutôt que son espérance (principalement pour des raisons de facilité de calcul et d'implémentation) :

$$J(\mathbf{W}) = e^2(n). \quad (7.9)$$

En réalité, l'expression utilisée pour évaluer le critère J , à chaque itération sur $W(z)$, exploite la relation approximée :

$$e(n) \simeq y_p(n) + \mathbf{W}(n)^\top \mathbf{R}'(n), \quad (7.10)$$

ce qui conduit à la nouvelle expression :

$$J(\mathbf{W}) = \left(y_p(n) + \mathbf{W}(n)^\top \mathbf{R}'(n) \right)^2. \quad (7.11)$$

Finalement, l'étape d'adaptation se résume au calcul itératif de $W(z)$ selon la formule

$$\mathbf{W}(n+1) = \mathbf{W}(n) - \beta \mathbf{R}'(n)e(n), \quad (7.12)$$

où $\beta > 0$ est le paramètre d'incrément, fixé *a priori* (l'augmentation de β conduit à une adaptation plus rapide mais détériore la stabilité).

Cette procédure itérative correspond à une itération de l'algorithme de descente de gradient, pour la recherche du minimum de $J(\mathbf{W})$.

Remarque 7.1. Dans [22], l'ordre du filtre $W(z)$ n'est pas choisi constant, mais optimisé à chaque itération.

- Étape 4 : calcul du signal de contrôle actif

Le signal $u_s(n)$ est calculé selon (cf. la figure 7.4) :

$$u_s(n) = \mathbf{W}(n)^\top \mathbf{R}(n). \quad (7.13)$$

Remarque 7.2. On remarque que si l'on fixe les coefficients de $W(z)$ alors on obtient un contrôleur LTI (linear time-invariant system) à temps discret, cf. (7.3).

On constate aussi une similarité importante entre l'algorithme FxLMS et le principe de la commande à modèle interne de Morari [80], dont il sera question au paragraphe suivant.

7.4 Similarité avec la commande à modèle interne au sens de Morari

Dans cette section, nous faisons le lien entre l'architecture fonctionnelle de l'algorithme FxLMS et celle de la commande à modèle interne de Morari dans le cas SISO. À cette fin, nous rappelons quelques ingrédients de la Commande par Modèle Interne (CMI) au sens de Morari, en commençant par la problématique de l'inversion de modèle.

Inversion de modèle : L'inversion de modèle constitue un préalable à la conception de diverses méthodes de commande, en particulier de la commande à modèle interne. La figure 7.5 pose le problème de l'inversion d'une transmittance $G(s)$ (cf. Chapitre 5 de [29]).

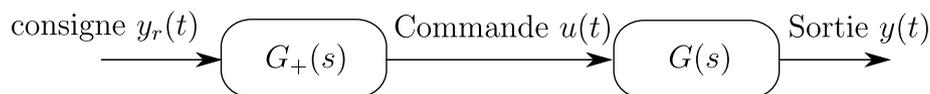


FIGURE 7.5 – Poursuite par inversion de modèle.

Nous mentionnons que pour un système à contrôler carré (dans le cas SISO le système est un scalaire), l'inversion à gauche du modèle constitue le moyen de calculer directement la commande (Feedforward) permettant d'atteindre la sortie de référence souhaitée, c'est à

dire, faire coïncider dans une bande fréquentielle à préciser, la sortie y avec sa consigne y_r . Supposons la fonction de transfert G définie par :

$$G(s) = e^{-sT} \frac{B(s)}{A(s)}, \quad (7.14)$$

où $B_{in}(s)B_{ex}(s) = B(s)$ est une factorisation du numérateur pour laquelle les facteurs $B_{in}(s)$ et $B_{ex}(s)$ contiennent respectivement les zéros de $G(s)$ appartenant à \mathbb{C}^+ et \mathbb{C}^- . On veut par ailleurs que G_+ respecte les conditions suivantes :

- G_+ et le produit GG_+ sont stables ;
- $G_+ = G^{-1}$ dans le cas où le retard T est nul et la fonction G est à minimum de phase.

En général le modèle inverse sera différent de G^{-1} , d'où la notation G_+ .

La section suivante présente la structure de la commande à modèle interne (CMI) au sens de Morari et l'utilisation qu'elle fait du transfert G_+ .

Structure de base de la CMI au sens de Morari : La CMI (commande à modèle interne) au sens de Morari incorpore une simulation du processus par un modèle G interne dans sa structure de commande (cf. Chapitre 5 de [29], [80]). La structure CMI au sens de Morari est présentée par la figure 7.6. G_+ et G sont respectivement le transfert du contrôleur (Modèle inverse) et l'estimation du procédé supposé décrit par le transfert P (cf. la figure 7.6).

Le signal b est une perturbation non mesurée et additive sur la sortie du procédé. y_r est une référence ; dans le cas du contrôle actif du bruit cette référence vaut en principe 0.

Le signal \hat{b} représente l'estimation du signal de perturbation b et s'écrit sous la forme suivante :

$$\hat{b} = b + (P - G)u \quad (7.15)$$

Notons qu'en l'absence d'erreur de modèle, on a $G = P$, $\hat{b} = b$ et par suite $y = y_r$ si $G_+ = G^{-1}$.

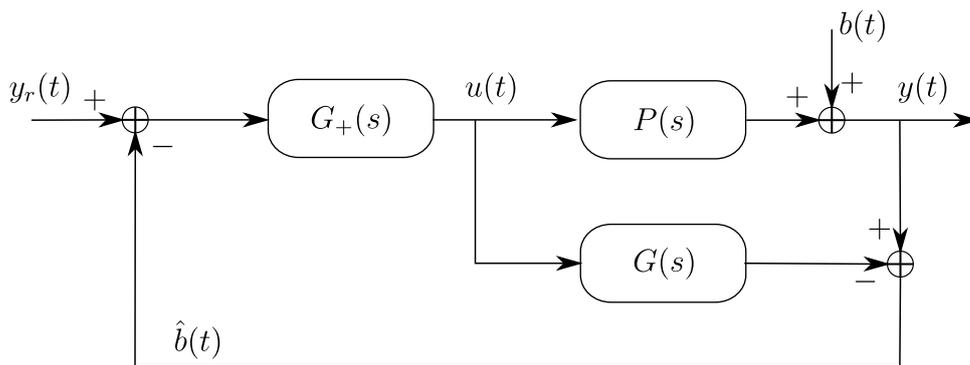


FIGURE 7.6 – Structure de Base de la CMI au sens de Morari.

L'objectif de la commande à modèle interne est de garantir le suivi du signal de consigne y_r , en sortie du procédé P ($y_r = y$), en présence de perturbation b . Par contre,

cette commande n'est pas fondamentalement robuste vis-à-vis d'erreur de modèles. Ce qui nous ramène à une des extensions de la CMI au sens de Morari, appelée la commande à modèle interne robuste présentée dans le paragraphe suivant.

Commande à modèle interne robuste : Une des exigences naturelles pour un contrôleur, est sa robustesse en présence de perturbations externes ou internes du système. Morari a ainsi proposé en son temps d'introduire un filtre dit de robustesse au schéma CMI, cf. figure 7.7, Chapitre 5 de [29], [80].

Le régulateur à modèle interne robuste est ainsi constitué des trois éléments inter-connectés : modèle inverse, modèle interne, et filtre de robustesse (cf. figure 7.7). Il s'adresse à des systèmes stables en boucle ouverte, et il s'appuie sur deux principes : la poursuite de la consigne par inversion de modèle, et la régulation par estimation et compensation des perturbations. Le filtre de robustesse joue lui un rôle majeur dans la gestion des compromis entre performances et robustesse. Pour plus de détails sur ce filtre de robustesse, cf. Chapitre 5 de [29], [80].

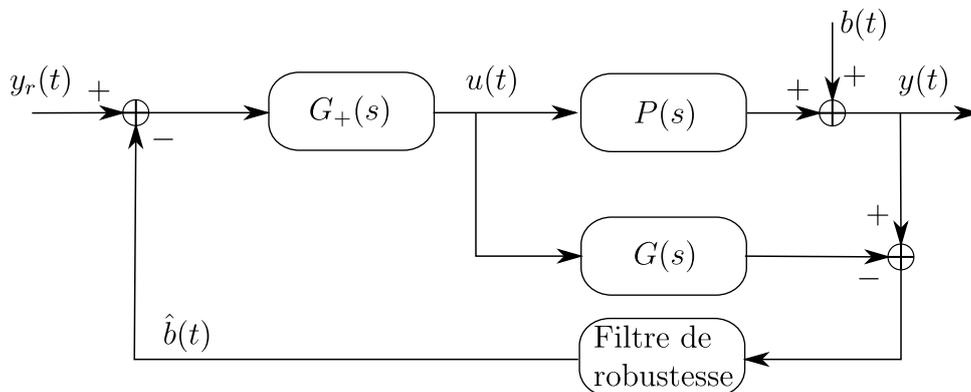


FIGURE 7.7 – Commande à modèle interne robuste.

On peut faire l'analyse entre les fonctions G_s , \hat{G}_s et W de l'algorithme FxLMS en figure 7.4 d'un côté et les fonctions de transfert P , G et G_+ de la CMI au sens de Morari en figure 7.6. On notera cependant que l'algorithme FxLMS ne possède pas de filtre de robustesse.

7.5 Extensions de l'algorithme FxLMS

Différentes variantes de l'algorithme FxLMS ont été proposées pour résoudre les problèmes d'ANC. Nous décrivons et comparons brièvement certaines d'entre elles dans cette section.

Un résumé complet est donné dans le Tableau 7.1. Considérons d'abord l'algorithme FuLMS utilisé par exemple dans [12, 32, 11]. La principale différence avec l'algorithme FxLMS est que le filtre $W(z)$ est un filtre à réponse impulsionnelle infinie (IIR) et non un filtre à réponse impulsionnelle finie (FIR). Ceci introduit des problèmes de stabilité supplémentaires, mais peut conduire à de meilleures performances et à un ordre de contrôleur

plus faible.

Deux autres alternatives à FxLMS sont l'algorithme Filtered-x Least Mean M-estimation (FxLMM) proposé dans [119] et l'algorithme FxLMS normalisé (NFxLMS) introduit dans [18]. Comme pour l'algorithme FxLMS, le filtre $W(z)$ utilisé dans ces algorithmes est un *FIR*, en revanche, le paramètre d'incrément β est adapté à chaque pas de temps pour garantir la convergence de l'algorithme. Les expressions de β sont données dans le Tableau 7.1.

La fonction coût de l'algorithme FxLMM, est différente également de celle des autres algorithmes cités. Elle sera exprimée (cf. Tableau 7.1) à l'aide de la fonction :

$$\vartheta(x) = \begin{cases} x^2/2 & 0 \leq |x| < \epsilon \\ \epsilon|x| - \epsilon^2/2 & \epsilon \leq |x| < \iota_1 \\ (\epsilon/2)(\iota_1 + \iota_2) - \epsilon^2/2 + \\ \quad \epsilon/2((|x| - \iota_2)^2/(\iota_2 - \iota_1)) & \iota_1 \leq |x| < \iota_2 \\ (\epsilon/2)(\iota_1 + \iota_2) - \epsilon^2/2 & |x| \leq \iota_2 \end{cases} \quad (7.16)$$

où ϵ , ι_1 et ι_2 sont à définir par l'utilisateur, $x \in \mathbb{R}$.

L'algorithme FuLMS fera quant à lui appel (Cf. Tableau 7.1) à \mathbf{a} et \mathbf{b} , respectivement les vecteurs de coefficients du numérateur et du dénominateur du filtre *IIR* utilisé.

Tableau 7.1 – Quelques variantes existantes de l'algorithme FxLMS

Variantes	FxLMS	FuLMS
Fonction de coût $J(\mathbf{W})$	$e^2(n)$	$e^2(n)$
Type de filtre $W(z)$	<i>FIR</i>	<i>IIR</i>
Type de filtre $\widehat{G}_s(z)$	<i>IIR</i> ou <i>FIR</i>	<i>IIR</i> ou <i>FIR</i>
Expression de β	Définie par l'utilisateur	Définie par l'utilisateur
Algorithme récursif	$\mathbf{W}(n+1) = \mathbf{W}(n) - \beta \mathbf{R}'(n)e(n)$	$\mathbf{a}(n+1) = \mathbf{a}(n) - \beta \mathbf{R}'(n)e(n),$ $\mathbf{b}(n+1) = \mathbf{b}(n) - \beta \mathbf{U}'_s(n-1)e(n),$ $u_s(n) = \mathbf{a}(n)^\top \mathbf{R}(n) \mathbf{b}(n)^\top \mathbf{U}_s(n-1).$
Variantes	FxLMM	NFxLMS
Fonction de coût $J(\mathbf{W})$	$\vartheta(e(n))$ (ϑ défini en (7.16))	$e^2(n)$
Type de filtre $W(z)$	<i>FIR</i>	<i>FIR</i>
Type de filtre $\widehat{G}_s(z)$	<i>IIR</i> ou <i>FIR</i>	<i>IIR</i> ou <i>FIR</i>
Expression de β	$\beta(n) = \gamma \frac{\frac{\partial \vartheta}{\partial x}(e(n))}{e(n)}, \gamma > 0$	$\beta(n) = \tilde{\beta} / (\mathbf{R}(n)^\top \mathbf{R}(n) + \epsilon)$ avec $0 < \tilde{\beta} < 2$ et $\epsilon > 0$ petit
Algorithme récursif	$\mathbf{W}(n+1) = \mathbf{W}(n) - \beta(n) \mathbf{R}'(n)e(n)$	$\mathbf{W}(n+1) = \mathbf{W}(n) - \beta(n) \mathbf{R}'(n)e(n)$

7.6 Convergence de l'algorithme FxLMS

Le choix du paramètre d'incrément β est crucial car il affecte le taux de convergence des coefficients du filtre $W(z)$ et peut affecter la stabilité en boucle fermée si une valeur trop grande est utilisée. Le choix de β dépend du type de perturbation $y_p(n)$. Dans nos travaux, nous choisissons une valeur pour β qui est suffisamment grande pour obtenir une convergence rapide des coefficients du filtre $W(z)$ (régime transitoire rapide), mais suffisamment petite pour stabiliser le type de perturbation considéré. Dans la littérature, certains auteurs ont réussi à limiter cette valeur pour des cas particuliers de perturbation et de modèles. Rappelons ici deux exemples.

Exemple 1 : Dans [109], les auteurs ont analysé la convergence de l'algorithme FxLMS lorsque le signal de référence est déterministe, dans un cadre d'hypothèses simplificatrices :

(h1) la fonction de transfert secondaire est un système composé d'un facteur de gain A et d'un retard pur Δ : $G_s(z) = Az^{-\Delta}$;

(h2) le modèle estimé $\hat{G}_s(z)$ est identique à la fonction de transfert secondaire, i.e. $\hat{G}_s(z) = G_s(z)$.

Sous les hypothèses (h1) et (h2), et dans le cas d'un signal de référence multi-sinusoïdal $r(n) = \sum_{i=1}^{N_{\text{sin}}} C_i \cos(w_i n + \theta_i)$, une limite supérieure obtenue pour le paramètre β est donnée par :

$$0 < \beta < 2 / \left(N_w (2\Delta + 1) A^2 \sum_{i=1}^{N_{\text{sin}}} C_i^2 / 2 \right), \quad (7.17)$$

où N_w représente l'ordre du filtre W .

Exemple 2 : Dans [5], la fonction de transfert secondaire considérée est plus générale :

$$G_s(z) = s_0 + s_1 z^{-1} + \dots + s_{N_s-1} z^{-N_s+1}. \quad (7.18)$$

s_i sont les coefficients de $G_s(z)$.

Il est montré cependant dans ce cadre, que l'analyse de convergence de l'algorithme FxLMS, peut être réalisée à partir du transfert suivant :

$$\hat{G}_s(z) = A_{eq} z^{-\Delta_{eq}}, \quad (7.19)$$

avec $A_{eq} = \sum_{i=0}^{N_s-1} s_i$ et Δ_{eq} appelé retard pur équivalent :

$$\Delta_{eq} = \tau_s^2 / \sigma_s^2, \quad (7.20)$$

avec $\tau_s^2 = \sum_{i=0}^{N_s-1} i s_i^2$ et $\sigma_s^2 = \sum_{i=0}^{N_s-1} s_i^2$.

On se ramène ainsi aux conditions de l'exemple 1, avec Δ et A remplacés respectivement par Δ_{eq} et A_{eq} , dans (7.17).

Les hypothèses ci-dessus ne sont pas valables pour les problèmes considérés dans la thèse, qui utilise un filtre *IIR*. Par conséquent, les limites supérieures ci-dessus sur β ne pourront être utilisées que qualitativement.

7.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté l'algorithme adaptatif FxLMS et quelques-unes de ses extensions. Ceci, dans l'objectif de mieux en comprendre l'architecture et de la confronter notamment avec l'architecture de la commande par modèle interne de Morari. La présentation d'une partie des extensions de l'algorithme FxLMS, a permis d'analyser l'incidence des différents paramètres et critères, en vue d'une gestion clarifiée des compromis entre performances en atténuation et robustesse.

Le chapitre suivant visera à confronter l'approche FxLMS avec l'approche par commande multi-objectif H_∞ .

Chapitre 8

Comparaison entre l'algorithme FxLMS et la commande multi-objectif H_∞

Sommaire

8.1	Introduction	98
8.2	Commande multi-objectif H_∞	98
8.3	Algorithme FxLMS avec filtre de pondération	100
8.4	Analyse comparée	101
8.4.1	Scénario de comparaison et résultats	101
8.4.2	Analyse de robustesse	104
8.4.3	Discussion des résultats	105
8.5	Conclusion	107

8.1 Introduction

Ce chapitre vise à comparer les deux stratégies de commande probablement les mieux appropriées pour le contrôle actif de bruit : la commande multi-objectif et multi-modèle H_∞ (MOH_∞) proposée dans [77, 78] (commande robuste) et l'algorithme FxLMS (algorithme adaptatif).

Comme l'algorithme FxLMS ne permet pas de cibler l'atténuation sur une plage de fréquences particulière, une nouvelle variante appelée FxLMS avec un filtre de pondération (FxLMSW) est proposée dans ce chapitre, cf. [16]. Cette extension est faite afin de comparer équitablement les performances d'une approche type FxLMS avec celles obtenues avec la commande MOH_∞ . La configuration expérimentale utilisée pour cette comparaison est donnée dans la figure 1.3.

8.2 Commande multi-objectif H_∞

Ce paragraphe présente l'application (au cas d'un feedback SISO avec un chemin primaire inconnu) de la méthodologie de contrôle actif multi-objectif H_∞ développée dans [77, 78]. Il s'agit de gérer au mieux le compromis performances robustesse d'un contrôle actif stationnaire du bruit dans une enceinte. Le contrôleur est conçu en temps continu et ensuite discrétisé pour son implémentation en temps réel, sur la cavité décrite par la figure 1.3.

Le modèle augmenté utilisé est présenté en figure 8.1.

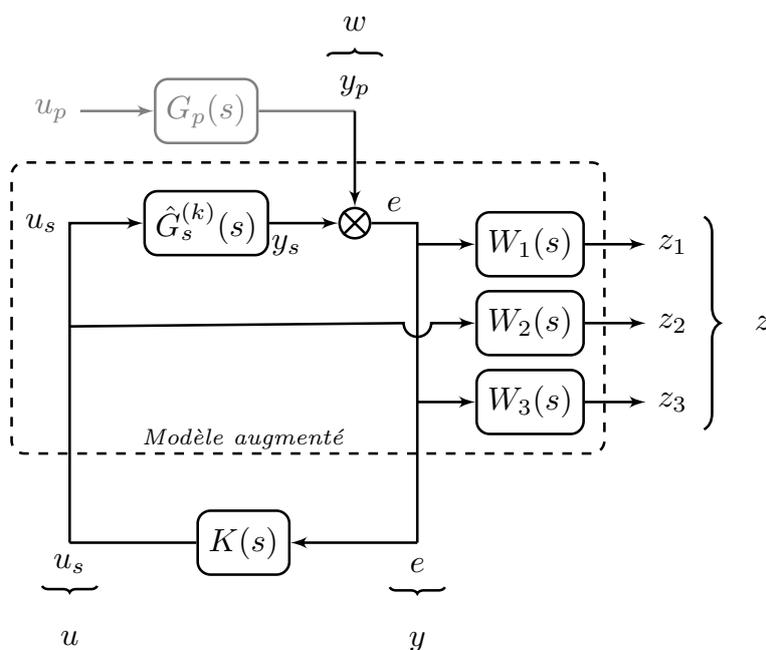


FIGURE 8.1 – Stratégie de contrôle H_∞ multi-objectif et multi-modèle (MOH_∞).

Le problème de synthèse est résumé ci-après :

$$\min_{K(s) \in \mathcal{K}} \max_{k \in \{1, \dots, N\}} \|W_1(s)T_{y_p \rightarrow e}^{(k)}(s)\|_\infty \quad (8.1)$$

sous les contraintes de robustesse et stabilité :

$$\max_{k \in \{1, \dots, N\}} \|W_2(s)T_{y_p \rightarrow u_s}^{(k)}(s)\|_\infty < 1, \quad (8.2a)$$

$$\max_{k \in \{1, \dots, N\}} \|W_3(s)T_{y_p \rightarrow e}^{(k)}(s)\|_\infty < 1, \quad (8.2b)$$

$$|p_K| < \frac{2\pi f_e}{N_f}, \quad \text{pour chaque pôle } p_K \text{ de } K. \quad (8.2c)$$

Dans ces expressions, k fait référence au numéro d'indice du modèle considéré (approche multimodèle). Les modèles sont numérotés de 1 à N (dans la suite trois modèles seront utilisés : $N = 3$). Ainsi, $T_{y_p \rightarrow e}^{(k)}(s)$ désigne le transfert entre y_p et e obtenu avec le $k^{\text{ième}}$ modèle $G_s^{(k)}(s)$. Le numéro d'indice est omis dans les explications suivantes pour simplifier les notations.

Les autres notations concernant :

- $K(s)$, le contrôleur LTI (Linear Time-invariant), $\mathcal{K} \subset \mathcal{RH}_\infty$, l'ensemble de tous les contrôleurs stables ayant une structure basée sur un observateur. \mathcal{RH}_∞ représente le sous-espace de \mathcal{H}_∞ qui est constitué de toutes les matrices de transfert propres, stables et rationnelles ;
- $W_1(s)$, $W_2(s)$ et $W_3(s)$ les filtres de pondération ;
- f_e la fréquence d'échantillonnage ; $N_f \geq 2$ impose au régulateur de vérifier le théorème de Shannon lors de la discrétisation du contrôleur (modules des pôles du contrôleur inférieurs à la demi-fréquence d'échantillonnage).

Critère de performance : Le critère de performance H_∞ , (8.1), s'applique à la fonction de sensibilité $S(s) = T_{y_p \rightarrow e}(s)$. Il caractérise l'effet du bruit de perturbation y_p , le plus défavorable sur l'erreur résiduelle $W_1 e$ (erreur filtrée par le filtre W_1), avec $W_1(s)$ un filtre passe-bande dont la bande passante $[f_{min}, f_{max}]$ permet d'ajuster la plage d'atténuation souhaitée.

Contraintes de robustesse et stabilité :

- La première contrainte, (8.2a), gère la robustesse par rapport aux dynamiques négligées en haute fréquences ; le modèle identifié ne reproduit en effet que les dynamiques basses fréquences du système de dimension infinie.

Le filtre de pondération $W_2(s)$ est conçu pour pénaliser la fonction de sensibilité du contrôle ($K(s)S(s) = T_{y_p \rightarrow u_s}(s)$) en hautes fréquences, afin de réduire la sensibilité de la commande aux bruits et aux dynamiques hautes fréquences incertaines ;

- La seconde contrainte, (8.2b), faisant intervenir un gain constant W_3 ajusté entre 0 et 1, renforce la robustesse aux incertitudes en assurant une marge de module supérieure à W_3 ;
- la dernière contrainte, (8.2c), empêche le contrôleur d'opérer avec des dynamiques supérieures à la demi-fréquence d'échantillonnage. Il assure ainsi que toute la dynamique du contrôleur sera correctement reproduite après discrétisation.

$$y_{p_f}(n) = F(z)y_p(n),$$

où $r_f(n)$ (resp. $e_f(n)$) représente le signal de référence (resp. erreur) filtré par $F(z)$ ($r_f(n) = F(z)r(n)$ et $e_f(n) = F(z)e(n)$). $y_{p_f}(n)$ est le signal du bruit filtré par $F(z)$. $r'_f = F(z)\hat{G}_s(z)r(n)$, est le signal de référence (terminologie utilisée par la communauté utilisatrice du FxLMS) filtré par les filtres $F(z)$ et $\hat{G}_s(z)$.

Les coefficients du filtre $W(z)$ sont obtenus grâce à l'équation suivante :

$$\mathbf{W}(n+1) = \mathbf{W}(n) - \beta \mathbf{R}'_f(n)e_f(n), \quad (8.4)$$

8.4 Analyse comparée

Les deux stratégies de contrôle présentées précédemment (FxLMSW et MOH_∞) sont testées sur la même cavité instrumentée décrite par la figure 1.3. Cette section nous permet d'analyser les résultats expérimentaux des deux stratégies de commande et de discuter des forces et faiblesses de chaque stratégie.

8.4.1 Scénario de comparaison et résultats

La figure 8.3 présente le schéma de bloc d'expérimentation commun utilisé pour les deux stratégies. Sur ce schéma, ADC et DAC sont respectivement des convertisseurs analogique-numérique et numérique-analogique. $T_e = 10^{-4}s$ est la période d'échantillonnage utilisée. Comme mentionné précédemment, aucune mesure et aucun modèle de la perturbation n'est utilisé pour la synthèse du contrôleur. L'architecture de commande adoptée est de type pur feedback.

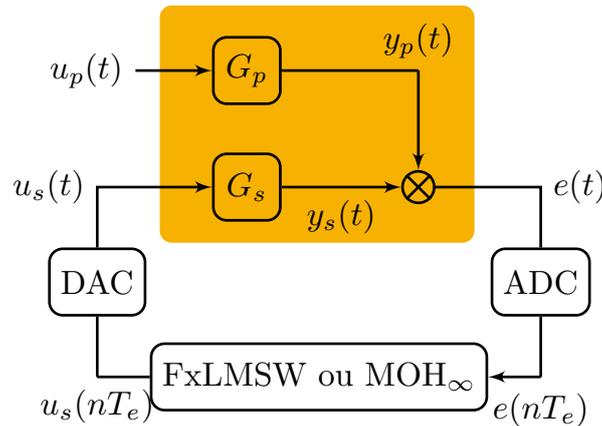


FIGURE 8.3 – Schéma bloc d'expérimentation.

La source de la perturbation $u_p(t)$ (c'est-à-dire l'entrée du haut-parleur HP_3 dans la figure 1.3) est un bruit coloré de bande passante 20 à 500 Hz. Le modèle du chemin secondaire \hat{G}_s utilisé pour la synthèse de chaque contrôleur est d'ordre 80, cet ordre est choisi pour atteindre une valeur acceptable de l'indicateur fit (cf, sa définition en équation

(5.12)). Ce modèle est obtenu par identification de type “boite noire” (cf. Section 6.4). Pour le contrôleur FxLMSW, $W(z)$ est d’ordre 80 (cet ordre doit être suffisamment grand pour obtenir une atténuation appropriée). Ses coefficients sont initialisés à 0. Le filtre $F(z)$ est d’ordre 10. Cela conduit à un contrôleur FxLMSW complet d’ordre 160. Les valeurs du paramètre d’incrément β sont données dans le Tableau 8.1. Pour la comparaison, deux plages d’atténuation ont été considérées : 190-220 Hz et 190-300 Hz.

Tableau 8.1 – Les valeurs du paramètre de réglage β dans deux cas.

Variables	Plage d’atténuation		β
	f_{min}	f_{max}	
cas 1	190 Hz	220 Hz	$1, 2 \cdot 10^{-4}$
cas 2	190 Hz	300 Hz	$0, 8 \cdot 10^{-4}$

Le contrôleur MOH_∞ est d’ordre 80. Comme il est conçu dans le domaine continu, il doit d’abord être discrétisé avant d’être implémenté sur le banc expérimental. Le filtre $W_1(s)$ est d’ordre 10.

L’indicateur utilisé pour comparer les performances des deux stratégies de contrôle est $10 \log_{10}(S_{ee}(j\omega)/S_{y_p y_p}(j\omega))$, où $S_{y_p y_p}(j\omega)$ est la densité spectrale de puissance du signal y_p (pour plus de détail sur la densité spectrale et l’indicateur de performance, cf. Annexe A) obtenue lors de l’exécution de l’expérimentation pendant 2 secondes sans contrôle. Pour l’algorithme FxLMSW, nous réalisons l’expérimentation en boucle fermée pendant 10 secondes et nous ne conservons que les 2 dernières secondes (de 8 à 10 secondes) pour calculer la densité spectrale de puissance $S_{ee}(j\omega)$ du signal e . Ceci est fait pour éviter de prendre en compte les performances transitoires et la durée de 10 secondes a été choisie suffisamment grande pour permettre la convergence du FxLMSW.

Résultats : L’indicateur de performance obtenu expérimentalement est présenté dans les figures 8.4 et 8.5, pour les plages de fréquences d’atténuation 190-220 Hz et 190-300 Hz respectivement.

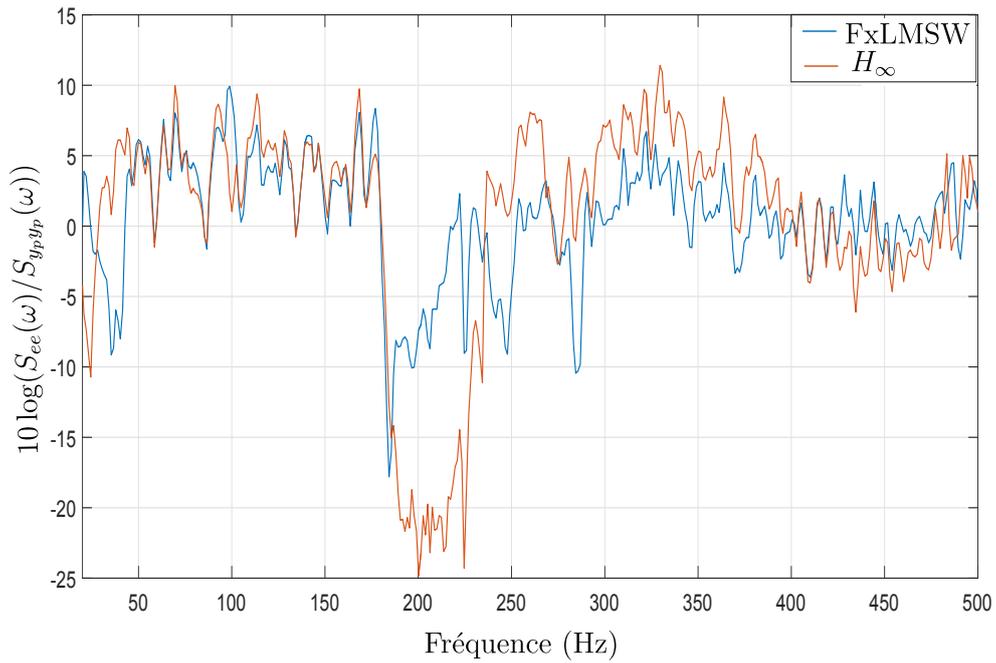


FIGURE 8.4 – Résultats expérimentaux des deux stratégies de contrôle (FxLMSW et MOH_∞) sur la plage de fréquences [190, 220]Hz.

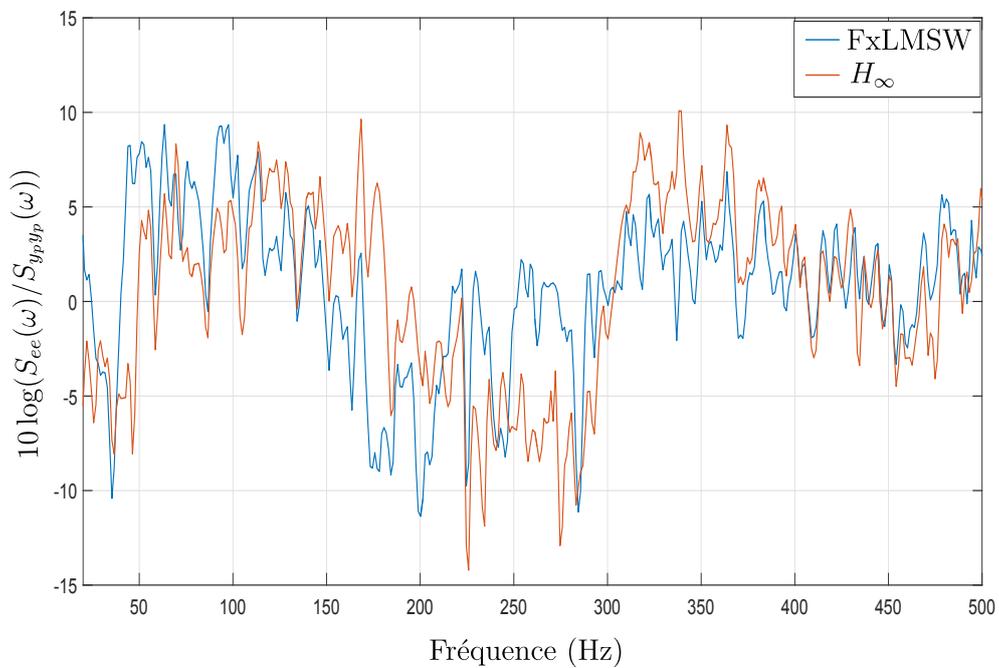


FIGURE 8.5 – Résultats expérimentaux des deux stratégies de contrôle (FxLMSW et MOH_∞) sur la plage de fréquences [190, 300]Hz.

En considérant les figures 8.4 et 8.5, on peut d’abord noter la présence d’amplification en dehors de la plage de fréquences d’atténuation pour les deux stratégies de contrôle. Ce phénomène est inhérent à l’architecture de contrôle par feedback. Il est formalisé par la relation intégrale de sensibilité de Bode et est généralement appelé effet «waterbed».

D’après la figure 8.4, nous voyons que pour la bande de fréquence “étroite”, 190-220 Hz, l’atténuation obtenue par le contrôleur MOH_∞ (-20dB) est deux fois plus importante que celle obtenue par le contrôleur FxLMSW (-10dB).

Sur la plage de fréquences plus large 190-300 Hz, (cf. la figure 8.5) l’atténuation obtenue par le contrôleur MOH_∞ (-5dB) est plus faible mais encore meilleure que celle de l’algorithme FxLMSW, sauf pour certaines fréquences particulières.

8.4.2 Analyse de robustesse

Concernant la robustesse, le contrôleur FxLMSW obtenu pour la plage de fréquences d’atténuation 190-220 Hz en utilisant un modèle nominal de $\hat{G}_s^1(z)$ (modèle 1) a été testé en simulation sur deux modèles perturbés, $\hat{G}_s^2(z)$ et $\hat{G}_s^3(z)$ (modèles 2 et 3), cf. figure 8.6. Ces deux modèles ont été obtenus dans différentes conditions d’environnement, e.g. température et hygrométrie.

Les résultats de la simulation (figure 8.7) montrent que le contrôle est stable avec le modèle nominal et les deux modèles perturbés, ce qui est encourageant, bien que cela ne prouve pas la robustesse intrinsèque de la stratégie FxLMSW. Contrairement au contrôle MOH_∞ (cf. Section 8.2), il n’existe à notre connaissance aucune garantie *a priori* de la robustesse de tels régulateurs FxLMS.

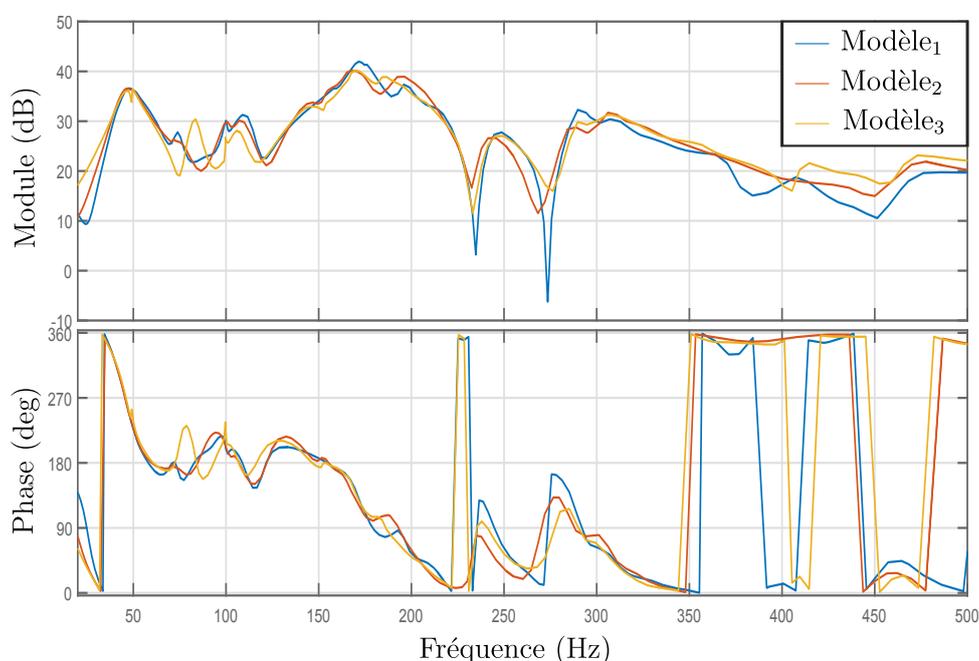


FIGURE 8.6 – Les trois différents modèles de la fonction de transfert $G_s(s)$.

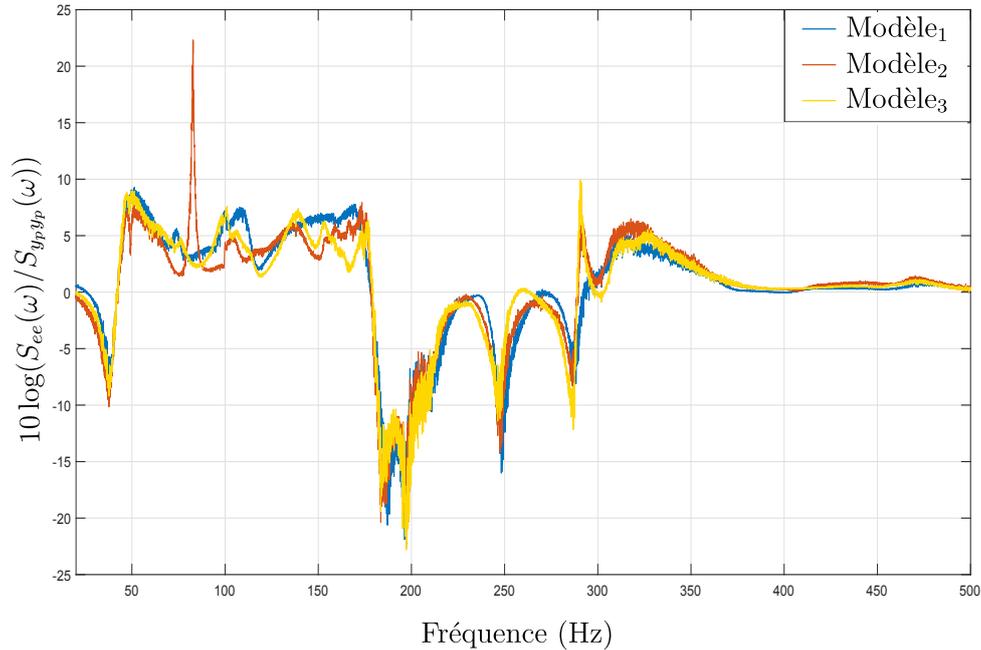


FIGURE 8.7 – Résultats de robustesse de l'algorithme FxLMSW pour l'atténuation sur [190, 220] Hz en utilisant les trois modèles différents.

8.4.3 Discussion des résultats

Dans ce paragraphe, nous résumons les caractéristiques communes et les différences, des stratégies de commande FxLMSW et MOH_∞ dans le contexte du contrôle actif du bruit par feedback. Nous listons ci-dessous les différences et similarités entre ces deux stratégies au regard de la synthèse du contrôleur, le choix des paramètres, les difficultés de conception et l'implémentation du contrôle.

Synthèse du contrôleur (caractéristiques générales) : Notons d'abord que les deux méthodologies de contrôle sont basées sur un modèle. Les deux utilisent un modèle approché du chemin secondaire, le transfert \hat{G}_s reliant le haut-parleur de contrôle et le microphone utilisé pour le feedback. Une identification préalable est donc requise dans les deux cas.

FxLMSW est nécessairement conçu en temps discret, alors que la conception du contrôleur MOH_∞ peut être réalisée au choix dans le domaine discret et dans le domaine continu. Ce n'est cependant pas une différence décisive.

En ce qui concerne les critères de performance, les deux peuvent se concentrer sur une plage de fréquences prédéfinie d'atténuation. Ceci est fait à travers la définition du filtre $W_1(s)$ pour la commande MOH_∞ , et du filtre $F(z)$ pour l'algorithme FxLMSW. Notez que le filtre $F(z)$ a été introduit (voir Section 8.3) pour élargir le cadre de l'algorithme standard FxLMS et permettre une comparaison équitable.

Une stabilité robuste est garantie pour le contrôleur MOH_∞ , en ce qui concerne les incertitudes de modèle sur le chemin secondaire. Ceci est obtenu grâce aux contraintes de

robustesse considérées dans le problème d'optimisation.

Par ailleurs, l'algorithme FxLMSW n'apporte quant à lui aucune garantie de robustesse. En pratique, la stabilité est obtenue en choisissant le paramètre β suffisamment petit. La difficulté principale est que cette valeur dépend des caractéristiques du bruit de perturbation. Pour le banc d'essai considéré, la robustesse pratique a été observée, en simulation, en considérant un modèle différent pour le chemin secondaire correspondant aux différentes conditions de fonctionnement (température et hygrométrie). Par contre, il y a plusieurs extensions de l'algorithme FxLMS, qui ont pour objectif d'améliorer les performances et la robustesse de l'algorithme FxLMS, cf. [99, 45].

Paramètres d'optimisation et choix de conception : Considérons d'abord l'algorithme FxLMSW. À partir de la figure 8.2. Sa conception nécessite de :

- définir $\hat{G}_s(z)$ de façon à représenter correctement le chemin secondaire dans la bande passante de fréquence ;
- définir le filtre de performance $F(z)$;
- choisir l'ordre du filtre FIR $W(z)$;
- choisir le paramètre β pour gérer au mieux le compromis entre les performances transitoires et stationnaires, y compris la sensibilité au bruit et, bien sûr, la stabilité. Notons que plus l'ordre du filtre $W(z)$ est élevé, plus son adaptation est lente.

Le contrôleur MOH_∞ considéré dans ce travail, est un contrôle par retour d'état estimé par un observateur. C'est-à-dire qu'une réalisation d'espace d'états de $\hat{G}_s(s)$ est utilisée dans le contrôleur, dont les seuls paramètres à optimiser par le solveur **syntune**, sont les coefficients de gains vectoriels du retour d'état et d'observateur (la synthèse de ce contrôleur est détaillée dans [78]). Les paramètres de réglage sont les gains $W_2(s)$ et $W_3(s)$, qui spécifient pour partie le niveau de robustesse requis. Différents modèles correspondant à différentes conditions de fonctionnement peuvent être utilisés le cas échéant, pour une robustesse plus ciblée.

Difficultés de conception, flexibilité et adaptabilité : D'un côté, les paramètres conceptuels support de la conception de la commande MOH_∞ sont plus clairement liés aux objectifs de la commande, et donc plus faciles à choisir. D'un autre côté, la résolution du problème d'optimisation associé nécessite l'utilisation d'un solveur spécifique (optimisation non lisse), tandis que la résolution du problème de l'algorithme FxLMSW est plus simple. La méthodologie de commande MOH_∞ est plus difficile à appréhender mais peut facilement être implémenter dans un outil de CAO (Conception assistée par ordinateur). Elle est en outre suffisamment générale pour traiter le cas MIMO (plusieurs haut-parleurs et microphones), ou exploiter des connaissances à priori sur les bruits en présence.

Enfin, la conception du contrôle MOH_∞ permet d'obtenir de bonnes performances en atténuation (cf. [77, 78]). Il n'est pas indispensable d'utiliser le filtre de performance $F(z)$ pour mettre en œuvre l'algorithme FxLMS. En effet, l'algorithme FxLMS s'adapte (quoique au prix d'une sous-optimalité potentiellement importante) à des perturbations spécifiques, voire à des variations temporelles lentes.

Implémentation du Contrôle et résultat : Comme illustré dans la Section 8.4.1, les performances obtenues avec la stratégie MOH_∞ sont meilleures que celle obtenues avec l'algorithme FxLMS, dans le cas d'un bruit de perturbation large bande. Le contrôle MOH_∞ nécessite un peu moins de calculs en ligne.

8.5 Conclusion

Concurrente aux approches centrées FxLMS, la commande MOH_∞ étudiée notamment dans [77, 78], emprunte à la théorie de la commande robuste pour concevoir un régulateur par optimisation H_∞ multi-objectif. Ce chapitre a rappelé la démarche de formalisation dans ce cadre des objectifs de compromis entre atténuation et robustesse.

Dans le but d'une comparaison équitable avec les approches centrées FxLMS, dites souvent « adaptatives », un nouvel algorithme FxLMS pondéré (FxLMSW) a été proposé dans ce chapitre, permettant de focaliser sur une bande fréquentielle d'atténuation restreinte. Les performances et robustesse atteignables ont été comparées en simulation et expérimentation sur la "LS2N box".

Les résultats obtenus confirment que le contrôleur MOH_∞ permet d'obtenir de meilleures performances d'atténuation du bruit par rapport à celles obtenues par l'algorithme FxLMSW.

La robustesse du contrôleur MOH_∞ est assurée *a priori*, ce qui n'est pas le cas pour l'algorithme FxLMSW. Cependant, la robustesse de cette dernière a été observée expérimentalement dans le cas d'étude envisagé. Une discussion détaillée concernant les paramètres de réglage, la difficulté de conception, la flexibilité, l'adaptabilité et la mise en œuvre du contrôle a également été donnée. Un récapitulatif des forces et faiblesses de chaque stratégie de commande, est rappelé dans le Tableau 8.2.

Tableau 8.2 – Tableau comparatif entre l'algorithme FxLMSW et la commande MOH_∞

Algorithmes	Adaptation	Coût de calcul	Difficulté de résolution	Assurer la robustesse	Assurer la stabilité
FxLMSW	+	-	+	-	-
MOH_∞	-	+	-	+	+
Algorithmes	Paramètres de réglage	Performances			
FxLMSW	-	-			
MOH_∞	+	+			

+ = force

- = faiblesse

Quatrième partie

Contrôle actif de bruits sur un segment/ un volume

Chapitre 9

Annulation du bruit pour un système acoustique en 1D

Sommaire

9.1	Introduction	112
9.2	Hypothèses et résultats théoriques	112
9.2.1	Modèle de propagation acoustique en 1D	113
9.2.2	Formulation du problème et résultat principal	114
9.2.3	Preuve de théorème 9.1	116
9.3	Illustration numérique et discussions	121
9.3.1	Simulation numérique	121
9.3.2	Discussions	123
9.3.3	Extensions du théorème 9.1	124
9.4	Conclusion	125

9.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons considérer le problème du contrôle actif du bruit appliqué sur un système de propagation acoustique 1D. Le but ici est d'annuler le bruit en un point donné. Sur la base d'un observateur reconstituant la perturbation appliquée à une extrémité du système, un contrôleur rétroagissant à l'autre extrémité est conçu afin d'annuler l'effet de la perturbation en un point prédéfini le long du système de propagation acoustique en 1D. Même si l'accent est mis sur un système particulier avec des conditions aux bords particulières, cette approche est généralisable pour différents types de conditions aux bords.

On constatera dans ce chapitre que l'annulation parfaite d'un bruit blanc n'est réalisable qu'en un seul point (on ne pourra par exemple pas faire un silence complet sur un domaine ouvert non vide ou même en deux points distincts). Cette conclusion justifie notre choix de viser l'atténuation plutôt que l'annulation d'un bruit.

9.2 Hypothèses et résultats théoriques

Il existe plusieurs références traitant de la stabilisation d'une équation d'onde unidimensionnelle par un contrôleur feedback appliqué aux bords avec ou sans observation colocalisée. À cette fin, mentionnons les travaux pionniers de Lions et Kommornik, [62, 70]. Pour des références, plus en rapport avec les travaux de ce chapitre, mentionnons [53], où la stabilisation d'une équation d'onde unidimensionnelle par feedback avec une observation non colocalisée (contrôle à une extrémité et observateur à l'autre extrémité) et sans perturbation est considérée. Ce résultat de stabilisation est obtenu en construisant un semi-groupe exponentiellement stable. Dans [43], cette approche est étendue au cas d'une équation d'onde unidimensionnelle et anti-stable avec perturbation et un retour d'état tridimensionnel contenant une partie colocalisée. Le même système a été traité auparavant dans [52], en utilisant une fonction de Lyapunov pour montrer la convergence de l'observateur et du contrôleur en mode glissant.

Contrairement aux travaux mentionnés ci-dessus, notre objectif n'est pas de stabiliser le système acoustique, mais d'annuler le bruit en un point prédéfini localisé dans le domaine spatial.

Dans cette situation, le système est excité en une extrémité par un terme inconnu et aucune hypothèse ne sera faite sur cette excitation. Ce bruit perturbateur sera reconstruit analytiquement à partir d'un point d'observation situé à l'intérieur du système acoustique. L'annulation du bruit sera effectuée avec un contrôleur feedback qui sera calculé analytiquement.

Mentionnons aussi [44, 54], où des problèmes similaires à ceux de ce chapitre, sont considérés. Dans [44], un contrôleur par feedback est synthétisé pour rendre le système stable en temps fini par rapport aux conditions initiales et en l'absence de perturbations externes. Ceci est fait en résolvant une équation d'advection. Ceci est similaire à notre approche basée sur la formule de D'Alembert.

Dans [54], les auteurs considèrent exactement les mêmes conditions aux bords que dans ce chapitre et considèrent également les perturbations et les contrôles qui ne sont pas colocalisés. Cependant, contrairement à [54], il ne sera nullement supposé que le terme de perturbation est analytique. En effet, les hypothèses que nous ferons sur la perturbation

sont très générale. En revanche, nous allons également faire les mêmes étapes de synthèse que dans [54] (reconstruction de perturbations puis synthèse d'un contrôleur) mais cela sera fait avec des méthodes différentes. Plus précisément, pour effectuer ces étapes de synthèse, nous allons utiliser la formule de D'Alembert. Cette formule est largement utilisée par les chercheurs pour résoudre les équations aux dérivées partielles hyperboliques, voir par exemple [21, 27, 47, 48].

Dans ce chapitre, les notations suivantes sont utilisées :

- Nous avons défini $[\cdot]$, la partie entière d'un nombre réel ;
- Nous supposons que $\sum_{k=0}^{-N} \star = 0$ pour $N \in \mathbb{N}^*$;
- Les espaces Sobolev H^s et $L^2 = H^0$ sont définis dans [71, Chapter 1]. Sur la base de ces notations, définissons l'espace

$$\mathcal{H}_{L,loc}^1(\mathbb{R}_+) = \left\{ f \in H_{loc}^1(\mathbb{R}_+), f(0) = 0 \right\},$$

où *loc* fait référence à une propriété locale, ie $f \in H_{loc}^s(\mathbb{R}_+)$ si pour tout compact I de \mathbb{R}_+ , nous avons $f|_I \in H^s(I)$.

9.2.1 Modèle de propagation acoustique en 1D

Pour rappel, le système acoustique décrit par la figure 5.1 est une enceinte de forme cylindrique où l'on peut s'attendre à bénéficier des systèmes de propagation acoustique unidimensionnels. Le modèle de propagation acoustique considéré dans cette section, est donné par l'équation suivante avec l'hypothèse que le haut-parleur HP_2 est proche de l'extrémité :

$$\begin{cases} \ddot{p}(t, \xi) = c^2 \Delta p(t, \xi), \\ \partial_\xi p(t, 0) = u_p(t), \\ \partial_\xi p(t, L) = u_s(t), \\ p(0, \xi) = \dot{p}(0, \xi) = 0 \end{cases} \quad (\xi \in (0, L), t > 0), \quad (9.1)$$

où $p(t, \xi)$, c , $u_p(t)$ et $u_s(t)$ représentent respectivement la pression au point ξ et à l'instant t , la vitesse du son, le bruit appliqué à l'extrémité qui correspond à $\xi_{u_p} = 0$ et la commande appliquée à l'autre extrémité $\xi_{u_s} = L$.

Dans le système d'équations ci-dessus, on suppose que le système est au repos à l'instant initial.

Pour faciliter les calculs, nous effectuons le changement de variables suivant :

$$\tilde{\xi} = \xi/L, \quad \tilde{t} = ct/L, \quad \tilde{u}_s(\tilde{t}) = Lu_s(t), \quad \tilde{u}_p(\tilde{t}) = Lu_p(t) \quad \text{et} \quad \tilde{p}(\tilde{t}, \tilde{\xi}) = p(t, \xi).$$

Les variables ξ et t sont désormais sans unité. Avec ce changement de variable, (9.1) devient (avec omission des tildes) :

$$\begin{cases} \ddot{p}(t, \xi) = \Delta p(t, \xi), \\ \partial_\xi p(t, 0) = u_p(t), \\ \partial_\xi p(t, 1) = u_s(t), \\ p(0, \xi) = \dot{p}(0, \xi) = 0 \end{cases} \quad (\xi \in (0, 1), t > 0). \quad (9.2)$$

Le système considéré dans le reste du chapitre est donné par l'ensemble d'équations ci-dessus.

9.2.2 Formulation du problème et résultat principal

Étant donné $\xi_c \in (0, 1)$, le but de ce travail est de trouver un signal de contrôle u_s , tel que la solution p définie par (9.2) satisfasse $p(t, \xi_c) = 0$ pour tout $t \geq 0$ et quel que soit u_p .

De plus, nous cherchons à trouver un contrôleur par feedback, qui ne soit qu'une fonction d'une mesure de la pression à un point donné $\xi_o \in (0, 1)$. La figure 9.1 illustre l'emplacement du contrôleur, du signal de perturbation, du point de mesure et du point contrôlé.

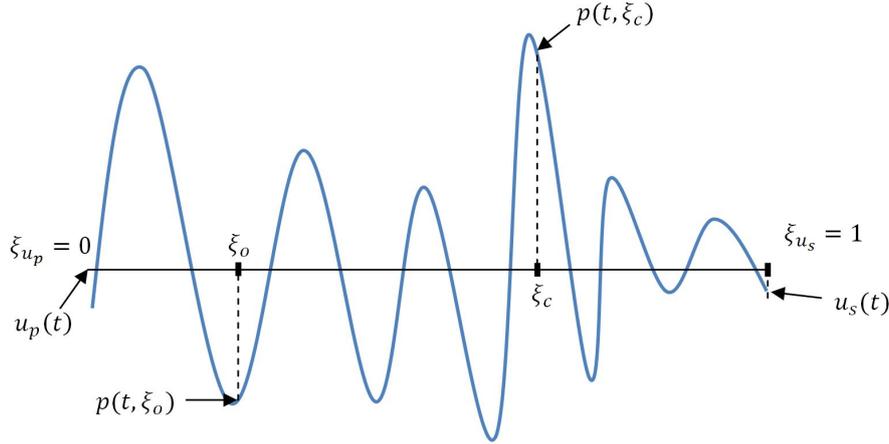


FIGURE 9.1 – Positionnement des points d'observation, de contrôle, de perturbation et d'atténuation dans le système acoustique.

Avant toute chose, précisons que la linéarité de l'équation des ondes permet de décomposer la solution $p(t, \xi)$ de (9.2) comme suit :

$$p(t, \xi) = p_{u_p}(t, \xi) + p_{u_s}(t, \xi), \quad (9.3)$$

où $p_{u_p}(t, \xi)$ et $p_{u_s}(t, \xi)$ sont respectivement les solutions de :

$$\begin{cases} \ddot{p}_{u_p}(t, \xi) = \Delta p_{u_p}(t, \xi), \\ \partial_\xi p_{u_p}(t, 0) = u_p(t), \\ \partial_\xi p_{u_p}(t, 1) = 0, \\ p_{u_p}(0, \xi) = \dot{p}_{u_p}(0, \xi) = 0 \end{cases} \quad (\xi \in (0, 1), t > 0), \quad (9.4)$$

et

$$\begin{cases} \ddot{p}_{u_s}(t, \xi) = \Delta p_{u_s}(t, \xi), \\ \partial_\xi p_{u_s}(t, 0) = 0, \\ \partial_\xi p_{u_s}(t, 1) = u_s(t), \\ p_{u_s}(0, \xi) = \dot{p}_{u_s}(0, \xi) = 0 \end{cases} \quad (\xi \in (0, 1), t > 0). \quad (9.5)$$

La figure 1.4 illustre cette décomposition.

Définissons $G_p(\xi)$ (resp. $G_s(\xi)$) comme la fonction de transfert entre $u_p(t)$ (resp. $u_s(t)$) et $p_{u_p}(\cdot, \xi)$ (resp. $p_{u_s}(\cdot, \xi)$) solution de (9.4) (resp. (9.5)). Lorsque $\xi = \xi_o$, cette fonction est appelée fonction de transfert *primaire* (respectivement *secondaire*) dans la littérature sur l'ANC. Le problème de contrôle annulant un bruit sonore est illustré par la figure 9.2.

Sur la figure 9.2, les deux systèmes K_c (cf. (9.8) et (9.9a)) et Obs (cf. (9.9b)) représentent respectivement le contrôleur et l'observateur. Comme illustré par la figure 9.2, le contrôleur global utilise la mesure $p(\cdot, \xi_o)$ (la pression au point ξ_o), pour déterminer le signal de contrôle $u_s(t)$ appliqué à l'extrémité $\xi_{u_s} = 1$, afin d'annuler l'effet du signal de perturbation $u_p(t)$ (appliqué à l'autre extrémité $\xi_{u_p} = 0$) au point ξ_c :

$$p(t, \xi_c) = 0, \quad t \geq 0. \quad (9.6)$$

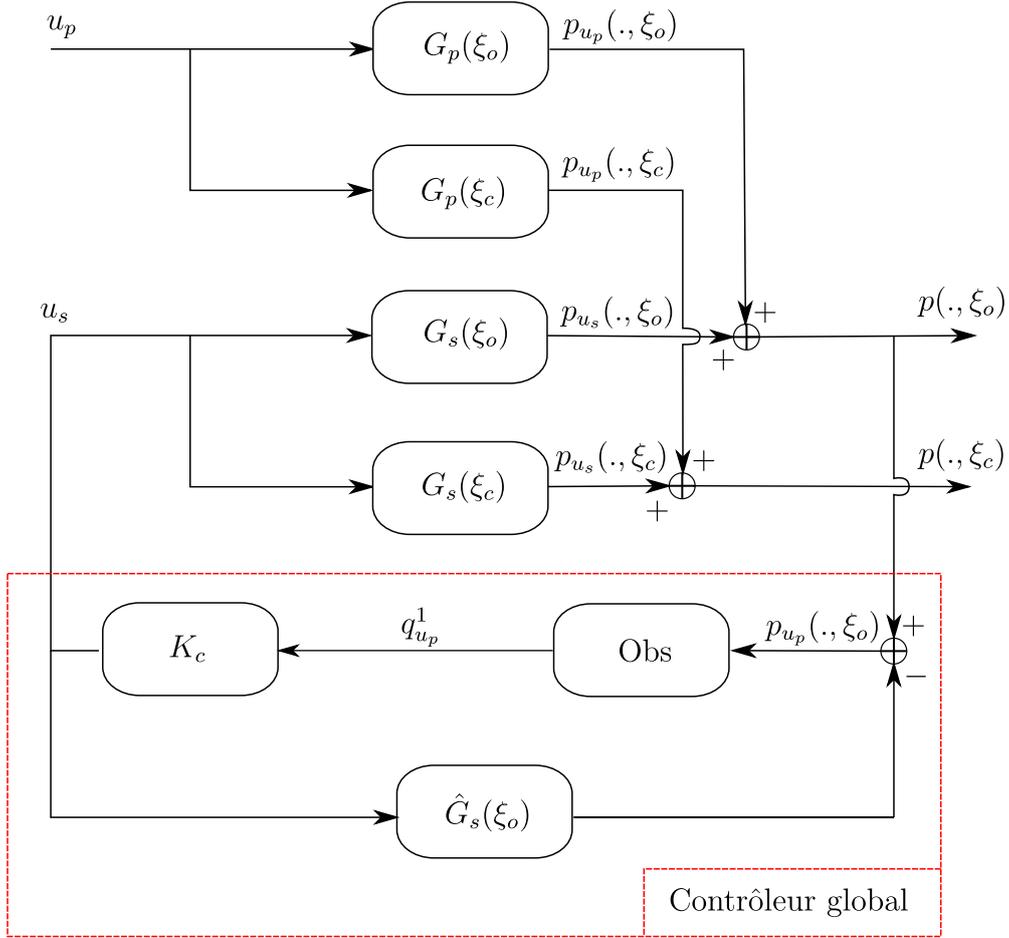


FIGURE 9.2 – Schéma bloc du problème de contrôle donné par le système d'équation (9.3)–(9.6).

Nous sommes maintenant en mesure de donner le résultat principal de ce chapitre.

Théorème 9.1. Soient $\xi_o \in [0, 1]$ et $\xi_c \in [0, 1]$ satisfaisant :

$$\frac{1 + \xi_o}{2} \leq \xi_c \quad (9.7)$$

Pour tout $u_p \in \mathcal{H}_{L,loc}^1(\mathbb{R}_+)$, il existe $u_s \in L_{loc}^2(\mathbb{R}_+)$ tel que la solution p de (9.2) satisfasse $p(t, \xi_c) = 0$ pour tout $t \geq 0$.

De plus, $u_s(t)$ est donné en termes des observations $o_{u_p} = p(\cdot, \xi_o) - p_{u_s}(\cdot, \xi_o) \in H_{loc}^1(\mathbb{R}_+)$ (avec p_{u_s} solution de (9.5)) dans l'intervalle de temps $[0, t]$ par la formule :

$$u_s(t) = \frac{1}{2} \left(q_{u_s}^1(t) - q_{u_s}^1(t+2) \right) \quad (t \geq 0), \quad (9.8)$$

avec $q_{u_s}^1$ donné par le système en cascade suivant :

$$q_{u_s}^1(t) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{t}{2\xi_c} \rfloor - 1} (-1)^j \left(q_{u_p}^1(t+1-2(j+1)\xi_c) + q_{u_p}^1(t-1-2j\xi_c) \right) \quad (t \geq 0), \quad (9.9a)$$

où

$$q_{u_p}^1(t) = -2 \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{t}{2(1-\xi_o)} \rfloor} (-1)^j \dot{o}_{u_p}(t-2j(1-\xi_o)-\xi_o) \quad (t \geq 0). \quad (9.9b)$$

Ce résultat est prouvé dans Section 9.2.3.

Remarque 9.1. La condition de causalité $\xi_c \geq (1 + \xi_o)/2$ est une conséquence de la vitesse de propagation finie du son.

En effet, le bruit mesuré à l'instant t au point ξ_o est seulement visible au point ξ_c à l'instant $t + \xi_c - \xi_o$. De même, le signal de contrôle appliqué à l'instant t au point $\xi = 1$ est vu au point ξ_c à l'instant $t + 1 - \xi_c$. Pour $t = 0$ l'effet du contrôle doit être vu au point ξ_c avant ou au moment de l'arrivée du bruit mesuré jusqu'à ce point. Cela conduit à $1 - \xi_c \leq \xi_c - \xi_o$, c'est-à-dire $\xi_c \geq (1 + \xi_o)/2$.

Remarque 9.2. L'hypothèse $u_p \in \mathcal{H}_{L,loc}^1(\mathbb{R}_+)$ et en particulier, la condition de compatibilité $u_p(0) = 0$ est requise pour définir correctement $\dot{o}_{u_p} \in L_{loc}^2(\mathbb{R}_+)$.

9.2.3 Preuve de théorème 9.1

Dans cette section, les lemmes 9.1 et 9.2 et la proposition 9.1, sont introduits pour démontrer le théorème 9.1.

Plus précisément, les solutions exactes de (9.2) sont calculées dans le lemme 9.1. En utilisant l'expression donnée dans le lemme 9.1, le contrôle u_s est obtenu dans le lemme 9.2, ce contrôle annule l'effet de la perturbation au point ξ_c . Le lemme 9.2 nécessite la connaissance du signal de bruit $u_p(t)$. Ce dernier est obtenu par la proposition 9.1 qui permet de reconstruire le signal de perturbation $u_p(t)$ à partir de la mesure au point ξ_o .

9.2.3.1 Solution explicite d'un système acoustique en 1D

Dans ce paragraphe, nous donnons l'expression de la solution du système de propagation acoustique unidimensionnel (9.4). Pour ce résultat on se réfère aussi à [91, 92, 58].

Lemme 9.1. Pour tout $u_p \in \mathcal{H}_{L,loc}^1(\mathbb{R}_+)$, la solution p_{u_p} de (9.4) appartient à $H_{loc}^1(\mathbb{R}_+; H^{1/2}(0, 1)) \cap H_{loc}^{3/2}(\mathbb{R}_+; L^2(0, 1))$ et est donnée par :

$$p_{u_p}(t, \xi) = \frac{1}{2} \int_0^t \left[q_{u_p}^1(\xi + s) + q_{u_p}^1(\xi - s) \right] ds \quad (t \geq 0, \xi \in (0, 1)), \quad (9.10)$$

avec

$$\begin{cases} q_{u_p}^1(t) = 0 & (t \in [0, 2)), \\ q_{u_p}^1(t) = -2 \sum_{k=1}^{\lfloor t/2 \rfloor} u_p(t-2k) & (t \geq 2), \\ q_{u_p}^1(-t) = q_{u_p}^1(t+2) = -2 \sum_{k=0}^{\lfloor t/2 \rfloor} u_p(t-2k) & (t > 0). \end{cases} \quad (9.11)$$

Remarque 9.3. De même, si $u_p \in L_{loc}^2(\mathbb{R}_+)$, alors la solution de (9.4), $p_{u_p} \in L_{loc}^2(\mathbb{R}_+; H^{1/2}(0, 1)) \cap H_{loc}^{1/2}(\mathbb{R}_+; L^2(0, 1))$, est donnée par la même formule.

Démonstration. Pour l'existence et la régularité de la solution p_{u_p} de (9.4), nous nous référons à [72]. En particulier, comme $u_p \in H_{loc}^1(\mathbb{R}_+)$ et $u_p(0) = 0$, on peut vérifier que \dot{p}_{u_p} est aussi une solution de (9.4) avec la condition aux bords $\partial_\xi \dot{p}_{u_p}(\cdot, 0) = \dot{u}_p \in L_{loc}^2(\mathbb{R}_+)$. Par conséquent, à partir de [72, Chapitre 5, Section 6, Exemple 6.1, p. 119], nous avons $\dot{p}_{u_p} \in L_{loc}^2(\mathbb{R}_+; H^{1/2}(0, 1)) \cap H_{loc}^{1/2}(\mathbb{R}_+; L^2(0, 1))$ et par conséquent, $p_{u_p} \in H_{loc}^1(\mathbb{R}_+; H^{1/2}(0, 1)) \cap H_{loc}^{3/2}(\mathbb{R}_+; L^2(0, 1))$.

Pour obtenir l'expression (9.10), nous utiliserons la formule de D'Alembert (cf. Paragraphe 2.3.3). À cette fin, nous étendons la solution de (9.4) sur \mathbb{R} en une solution du système :

$$\begin{cases} \ddot{q}_{u_p}(t, \xi) = \Delta q_{u_p}(t, \xi), \\ q_{u_p}(0, \xi) = 0, \\ \dot{q}_{u_p}(0, \xi) = q_{u_p}^1(\xi), \end{cases} \quad (\xi \in \mathbb{R}, t > 0). \quad (9.12)$$

Le problème est alors de déterminer $q_{u_p}^1$ tel que $q_{u_p}(t, \xi) = p_{u_p}(t, \xi)$ pour tout $\xi \in [0, 1]$ et tout $t \geq 0$.

D'après la formule d'Alembert [68] (voir aussi [27, § 3.1.1]), la solution de (9.12) est :

$$q_{u_p}(t, \xi) = \frac{1}{2} \int_{\xi-t}^{\xi+t} q_{u_p}^1(s) ds \quad (\xi \in \mathbb{R}, t > 0), \quad (9.13)$$

dont nous déduisons :

$$\partial_\xi q_{u_p}(t, \xi) = \frac{1}{2} [q_{u_p}^1(\xi+t) - q_{u_p}^1(\xi-t)] \quad (\xi \in \mathbb{R}, t > 0). \quad (9.14)$$

Si $q_{u_p}(t, \xi)|_{\xi \in [0, 1]} = p_{u_p}(t, \xi)$, nous avons nécessairement

$$\begin{cases} \partial_\xi q_{u_p}(t, 0) = u_p(t), & (t > 0) \\ \partial_\xi q_{u_p}(t, 1) = 0, & (t > 0) \\ \dot{q}_{u_p}(0, \xi) = 0, & (\xi \in [0, 1]). \end{cases} \quad (9.15)$$

De (9.14) et (9.15), nous obtenons le système

$$\begin{cases} q_{u_p}^1(1-t) = q_{u_p}^1(1+t), & (t > 0) \\ 2u_p(t) = q_{u_p}^1(t) - q_{u_p}^1(-t), & (t > 0) \\ q_{u_p}^1(t) = 0, & (t \in [0, 1]), \end{cases} \quad (9.16)$$

ce qui est équivalent à

$$\begin{cases} q_{u_p}^1(-t) = q_{u_p}^1(2+t), & (t > 0) \\ q_{u_p}^1(2+t) = q_{u_p}^1(t) - 2u_p(t), & (t > 0) \\ q_{u_p}^1(t) = 0, & (t \in [0, 2]), \end{cases} \quad (9.17)$$

dont on déduit

$$q_{u_p}^1(2k + \tau) = -2 \sum_{j=0}^{k-1} u_p(2j + \tau),$$

pour chaque $k \in \mathbb{N}^*$ et $\tau \in [0, 2)$.

Ceci avec la première égalité de (9.17), conduit à (9.11).

De (9.13), nous avons

$$\dot{q}_{u_p}(t, \xi) = \frac{1}{2} \left[q_{u_p}^1(\xi + t) + q_{u_p}^1(\xi - t) \right] \quad (t \geq 0, \xi \in [0, 1]), \quad (9.18)$$

et puisque par hypothèse $p(0, \cdot) = 0$, on obtient la relation (9.10) par intégration de $\dot{q}_{u_p}(t, \xi)$ par rapport à t . \square

9.2.3.2 Synthèse du contrôle

Le but ici est de calculer un signal de contrôle $u_s(t)$ appliqué à l'extrémité $\xi_{u_s} = 1$ qui conduit à l'annulation parfaite de l'effet d'un signal de perturbation $u_p(t)$ (connu et appliqué au point $\xi_{u_p} = 0$) sur p solution de (9.2) au point ξ_c . En d'autres termes, nous concevons le contrôleur K_c de la figure 9.2.

Lemme 9.2. *Soit $\xi_c \in [\frac{1}{2}, 1]$. Pour tout $u_p \in L_{loc}^2(\mathbb{R}_+)$ il existe un unique $u_s \in L_{loc}^2(\mathbb{R}_+)$ tel que la solution p de (9.2) satisfasse $p(t, \xi_c) = 0$ pour tout $t > 0$.*

De plus, $u_s(t)$ est donné en termes d'observations u_p sur l'intervalle de temps $[0, t]$ par la formule :

$$u_s(t) = \frac{1}{2} \left(q_{u_s}^1(t) - q_{u_s}^1(t + 2) \right) \quad (t \geq 0), \quad (9.19)$$

où $q_{u_s}^1$ est donné par

$$q_{u_s}^1(t) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{t}{2\xi_c} \rfloor - 1} (-1)^j \left(q_{u_p}^1(t + 1 - 2(j+1)\xi_c) + q_{u_p}^1(t - 1 - 2j\xi_c) \right) \quad (t \geq 0), \quad (9.20)$$

avec $q_{u_p}^1$ défini par (9.11).

Remarque 9.4. *Dans le lemme ci-dessus, il n'est pas nécessaire que u_p appartienne à $\mathcal{H}_{L,loc}^1(\mathbb{R}_+)$. Cependant, si $u_p \in \mathcal{H}_{L,loc}^1(\mathbb{R}_+)$, on peut aussi vérifier que $u_s \in \mathcal{H}_{L,loc}^1(\mathbb{R}_+)$.*

Remarque 9.5. *Selon la remarque 9.1 avec $\xi_o = 0$, la condition de causalité dans le lemme 9.2 est exprimée par l'inégalité $\xi_c \geq 1/2$.*

Démonstration. Définissons $\pi_{u_s}(t, \xi) = p_{u_s}(t, 1 - \xi)$, π_{u_s} est alors solution de :

$$\begin{cases} \ddot{\pi}_{u_s}(t, \xi) = \Delta \pi_{u_s}(t, \xi), \\ \partial_\xi \pi_{u_s}(t, 0) = -u_s(t), \\ \partial_\xi \pi_{u_s}(t, 1) = 0, \\ \pi_{u_s}(0, \xi) = \dot{\pi}_{u_s}(0, \xi) = 0 \end{cases} \quad (t > 0, \xi \in (0, 1)).$$

Par conséquent, selon le lemme 9.1, nous avons,

$$\dot{\pi}_{u_s}(t, \xi) = -\frac{1}{2} \left(q_{u_s}^1(\xi + t) + q_{u_s}^1(\xi - t) \right) \quad (t > 0, \xi \in (0, 1)),$$

avec

$$q_{u_s}^1(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } t \in [0, 2), \\ -2 \sum_{k=0}^{\lfloor t/2 \rfloor - 1} u_s(t - 2k) & \text{if } t \geq 2, \\ -2 \sum_{k=0}^{\lfloor -t/2 \rfloor} u_s(-t - 2k) & \text{if } t < 0. \end{cases} \quad (9.21)$$

Finalement $\dot{p}_{u_s}(t, \xi)$ peut être obtenu comme suit

$$\begin{aligned} \dot{p}_{u_s}(t, \xi) &= \dot{\pi}_{u_s}(t, 1 - \xi) = -\frac{1}{2} \left(q_{u_s}^1(1 - \xi + t) + q_{u_s}^1(1 - \xi - t) \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left(q_{u_s}^1(1 - \xi + t) + q_{u_s}^1(1 + \xi + t) \right) \quad (t > 0, \xi \in (0, 1)), \end{aligned} \quad (9.22)$$

avec $q_{u_s}^1$ défini par (9.21).

De (9.21) nous obtenons facilement (9.19).

Afin d'annuler le bruit $u_p(t)$ au point ξ_c , il suffit de s'assurer que $\dot{p}(t, \xi_c) = 0$ pour chaque instant $t > 0$. Cela est dû à l'hypothèse $p(0, \xi_c) = 0$.

D'après (9.3), $\dot{p}(t, \xi_c) = 0$ signifie :

$$\dot{p}_{u_p}(t, \xi_c) + \dot{p}_{u_s}(t, \xi_c) = 0. \quad (9.23)$$

De (9.18) et (9.22), l'équation (9.23) peut être réécrite comme :

$$q_{u_p}^1(\xi_c + t) + q_{u_p}^1(2 - \xi_c + t) - q_{u_s}^1(1 - \xi_c + t) - q_{u_s}^1(1 + \xi_c + t) = 0.$$

Après avoir fait le changement de variable suivant $2k\xi_c + w = 1 + \xi_c + t$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $w \in [0, 2\xi_c)$, la condition ci-dessus devient

$$0 = q_{u_p}^1(2(k-1)\xi_c + w + 1) + q_{u_p}^1(2k\xi_c + w - 1) - q_{u_s}^1(2(k-1)\xi_c + w) - q_{u_s}^1(2k\xi_c + w). \quad (9.24)$$

Nous posons

$$\begin{cases} \nu_k = q_{u_s}^1(2k\xi_c + w), \\ \varphi_k = q_{u_p}^1(2(k-1)\xi_c + w + 1) + q_{u_p}^1(2k\xi_c + w - 1). \end{cases}$$

La relation (9.24) (avec (9.21)) conduit à

$$\nu_0 = 0 \quad \text{et} \quad \nu_k = -\nu_{k-1} + \varphi_k \quad (k \in \mathbb{N}^*).$$

Par conséquent, nous obtenons

$$\nu_k = \sum_{j=1}^k (-1)^{k-j} \varphi_j \quad (k \in \mathbb{N}),$$

c'est-à-dire

$$q_{u_s}^1(2k\xi_c + w) = \sum_{j=1}^k (-1)^{k-j} \left(q_{u_p}^1(2(j-1)\xi_c + w + 1) + q_{u_p}^1(2j\xi_c + w - 1) \right)$$

ce qui est équivalent à (9.20).

Afin d'avoir la causalité du contrôle et l'annulation parfaite de l'effet du bruit pour tout $t > 0$ au point ξ_c , nous avons besoin des inégalités suivantes :

$$\frac{1}{2} \leq \xi_c \leq 1. \quad (9.25)$$

Plus précisément,

- en utilisant (9.19), on voit que $u_s(t)$ est exprimé avec les valeurs de $q_{u_s}^1(t)$ et $q_{u_s}^1(t+2)$;
- en utilisant (9.20), on voit que $q_{u_s}^1(t)$ est exprimé avec les valeurs de $q_{u_p}^1$ sur l'intervalle $[-2\xi_c - 1, t + 1 - 2\xi_c]$;
- en utilisant (9.11), on voit que $q_{u_p}^1(t)$ est exprimé avec les valeurs de u_p sur l'intervalle $[0, t - 2]$.

Par conséquent, $u_s(t)$ est exprimé avec les valeurs de u_p sur l'intervalle $[0, t + 1 - 2\xi_c]$ et donc, pour avoir un contrôleur causal, nous avons besoin de $t + 1 - 2\xi_c \leq t$, c'est-à-dire que $\xi_c \in [0, 1]$ doit satisfaire (9.25). \square

9.2.3.3 Reconstruction du signal de bruit

Dans ce paragraphe, nous montrons que le signal $u_p(t)$ appliqué au système (9.4), peut être parfaitement reconstruit à partir du signal mesuré $o_{u_p}(t) = p_{u_p}(t, \xi_o)$, ξ_o étant le point de mesure (point d'observation). Plus précisément, dans la proposition 9.1 ci-dessous, nous allons construire l'observateur Obs de la figure 9.2.

Proposition 9.1. *Soit $\xi_o \in [0, 1]$, $u_p \in \mathcal{H}_{L,loc}^1(\mathbb{R}_+)$ et $o_{u_p} = p_{u_p}(\cdot, \xi_o)$, avec p_{u_p} solution de (9.4).*

Alors $o_{u_p} \in H_{loc}^1(\mathbb{R}_+)$ et pour tout $t \geq 0$, $u_p(t)$ peut être obtenu de $o_{u_p}|_{[0, t + \xi_o]}$ via la relation

$$u_p(t) = \frac{1}{2} (q_{u_p}^1(t) - q_{u_p}^1(t + 2)) \quad (t \geq 0), \quad (9.26)$$

avec $q_{u_p}^1$ donné pour chaque $t \geq 0$ par

$$q_{u_p}^1(t) = -2 \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{t}{2(1-\xi_o)} \rfloor} (-1)^j \dot{o}_{u_p}(t - 2j(1 - \xi_o) - \xi_o). \quad (9.27)$$

Pour prouver ce résultat, nous allons utiliser le lemme 9.1.

Démonstration. Le fait que o_{u_p} appartient à $H_{loc}^1(\mathbb{R}_+)$ est une conséquence directe du résultat de régularité du lemme 9.1 et des résultats de trace classiques.

Voyons maintenant comment récupérer u_p à partir de o_{u_p} . De (9.10), il est possible d'obtenir $\dot{o}_{u_p} \in L_{loc}^2(\mathbb{R}_+)$, la dérivée temporelle du signal $o_{u_p}(t)$ comme

$$\dot{o}_{u_p}(t) = \frac{1}{2} [q_{u_p}^1(\xi_o - t) + q_{u_p}^1(\xi_o + t)] \quad (t \geq 0),$$

avec $q_{u_p}^1$ défini par (9.11).

En utilisant la symétrie par rapport à 1 de la fonction $q_{u_p}^1$ (voir (9.16)), on obtient

$$2\dot{o}_{u_p}(t) = q_{u_p}^1(2 + t - \xi_o) + q_{u_p}^1(t + \xi_o).$$

En définissant $z = t + 2 - \xi_o$, cette relation se récrit :

$$q_{u_p}^1(z) = 2\dot{o}_{u_p}(z + \xi_o - 2) - q_{u_p}^1(z - 2(1 - \xi_o))$$

et en écrivant $z = 2k(1 - \xi_o) + v$ avec $v \in [0, 2(1 - \xi_o))$ et $k \in \mathbb{N}$, on obtient :

$$q_{u_p}^1(2k(1 - \xi_o) + v) = 2\dot{o}_{u_p}(2(k - 1)(1 - \xi_o) - \xi_o + v) - q_{u_p}^1(2(k - 1)(1 - \xi_o) + v).$$

De plus, comme $q_{u_p}^1(v) = 0$ pour $v \in [0, 2(1 - \xi_o))$ ($q_{u_p}^1$ satisfait (9.11) et $\xi_o \in [0, 1]$), on a :

$$q_{u_p}^1(2k(1 - \xi_o) + v) = 2 \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{k-j-1} \dot{o}_{u_p}(2j(1 - \xi_o) - \xi_o + v).$$

À partir duquel nous obtenons (9.27).

Enfin, à partir de (9.11), nous déduisons (9.26). □

9.3 Illustration numérique et discussions

Dans cette section, nous présentons des résultats numériques relatifs au théorème 9.1. Les forces et les faiblesses de la loi de commande donnée par le théorème 9.1, seront discutées. Enfin, des extensions du théorème 9.1 seront proposées.

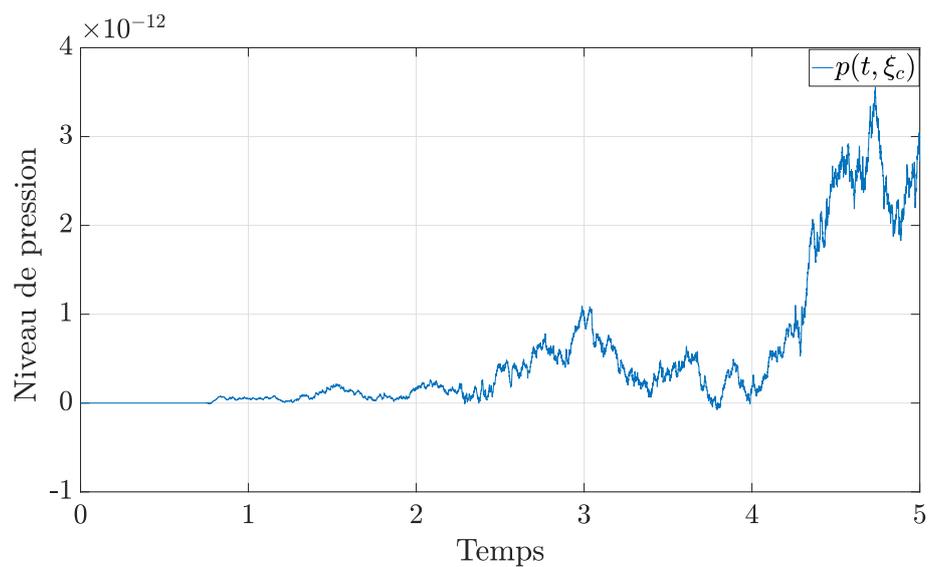
9.3.1 Simulation numérique

Le résultat du théorème 9.1 est maintenant appliqué au système défini par (9.2), dans le cas où $u_p(t)$ est un bruit blanc d'amplitude maximale égale à 30 (l'effet de u_p et l'effet de sa dérivée, au point ξ_c sont représentés par la figure 9.4).

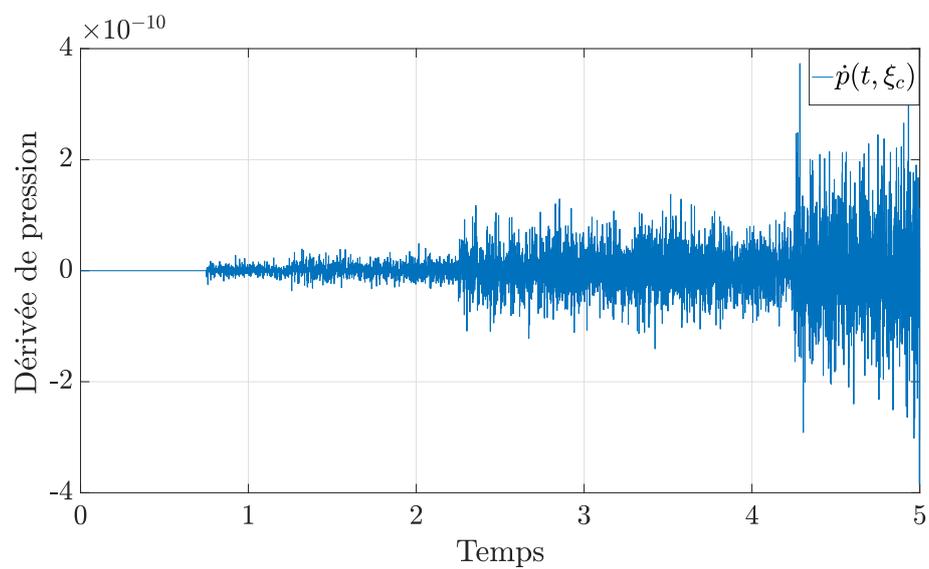
Les points ξ_o et ξ_c sont respectivement pris égal à 0.4 et 0.75 (ces points satisfont la condition de causalité (9.7)). Les pressions $p(t, \xi_c)$, $p_{u_p}(t, \xi_c)$ et leur dérivée sont présentées sur les figures 9.3 et 9.4, avec un temps de simulation $t = 5$ et un pas de temps égal à 10^{-4} . Afin de calculer la loi de commande et la solution, nous avons utilisé **Matlab**.

Les deux figures 9.3(a) et 9.3(b) montrent l'annulation de l'effet du bruit au point ξ_c . Numériquement, la pression $p(t, \xi_c)$ et sa dérivée sont quasi nulles (inférieure à $4 \cdot 10^{-10}$). Il y a, en effet, des erreurs numériques dues à l'interpolation et aux approximations numériques des intégrales. De plus, un bruit blanc ne satisfait pas les hypothèses de théorème 9.1, puisqu'il n'a pas la régularité H^1 . Cela a pour effet d'augmenter les erreurs numériques.

Ces résultats sont comparés au résultats obtenus dans la figure 9.4, où aucun contrôle n'est appliqué.

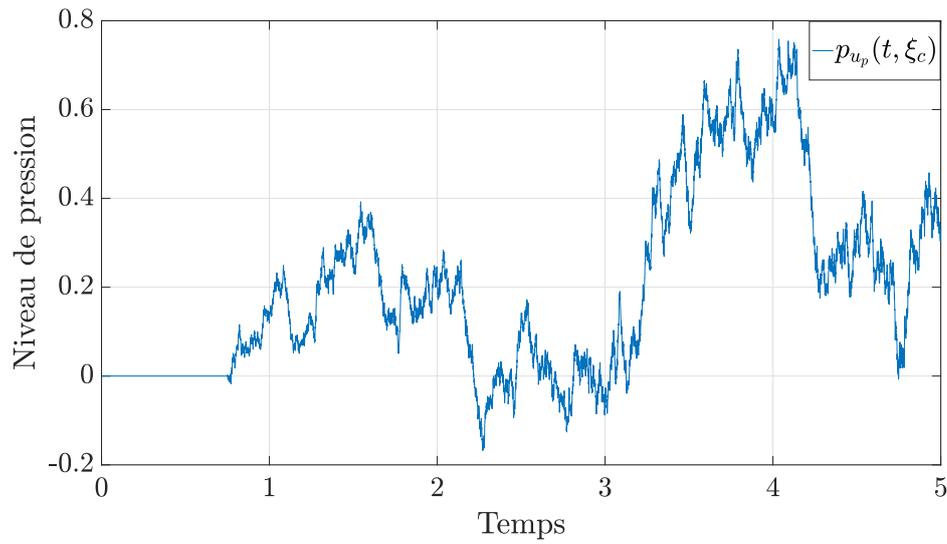


(a) Pression résiduelle.

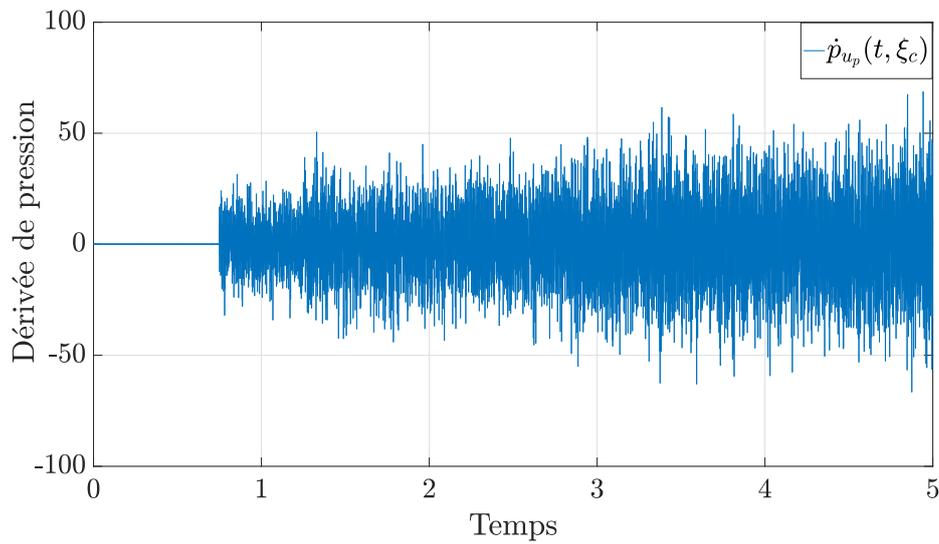


(b) Dérivée de la pression résiduelle.

FIGURE 9.3 – Résultat d'annulation de bruit du théorème 9.1.



(a) Pression résiduelle $p_{u_p}(t, \xi_c)$ (sans contrôle).



(b) Dérivée de la pression résiduelle $\dot{p}_{u_p}(t, \xi_c)$ (sans contrôle).

FIGURE 9.4 – Effet du bruit u_p au point du contrôle ξ_c (sans contrôle).

9.3.2 Discussions

Le contrôle proposé dans le théorème 9.1 a des points forts et des faiblesses. Parmi les avantages, nous pouvons noter :

- Annulation parfaite du bruit indépendamment de sa nature (en un point ξ_c) ;
- Le contrôleur est causal (sous la condition $1 \geq \xi_c \geq (1 + \xi_o)/2$).

Parmi les faiblesses, nous notons :

- La source de contrôle est supposée être positionnée à une extrémité ;
- L'annulation est ponctuelle, alors que l'atténuation est souvent préférée sur un domaine spatial plus large ;
- Il n'est pas facile de gérer certains problèmes tels que la sensibilité et la robustesse du contrôleur proposé qui repose sur un modèle analytique idéal ;
- L'annihilation parfaite du bruit ne peut être obtenue qu'à un point donné. Plus précisément, étant donné deux points distincts, si l'on vise à annuler le bruit en ces points, il existera toujours une perturbation u_p pour laquelle cela ne sera pas possible. En particulier, une suppression complète du bruit dans un intervalle d'intérieur non vide est impossible.

9.3.3 Extensions du théorème 9.1

Le théorème 9.1 est le résultat de synthèse d'un contrôleur pour un système particulier avec des conditions bien déterminées, ce théorème peut être étendu à d'autres situations :

- La même approche peut être utilisée pour différents types de conditions aux bords telles que Neumann avec absorption ou Dirichlet ;
- Nous pouvons directement étendre le résultat proposé au cas d'une équation des ondes avec un terme source distribué (équation des ondes non-homogène), c'est-à-dire.

$$\ddot{p}(t, \xi) = \Delta p(t, \xi) + \chi_{(0, \ell)}(\xi) u_p(t, \xi),$$

avec u_p le terme de perturbation et $\chi_{(0, \ell)}$ la fonction caractéristique de l'intervalle $(0, \ell)$ et $\ell < 1$. Cette extensions est valable dès que $\ell \leq \xi_o$ et dès que ξ_o et ξ_c satisfont la condition de causalité (9.7).

Ceci nous conduit à redéfinir le système de propagation acoustique unidimensionnel considéré avec les conditions aux bords de Dirichlet et de Neumann comme indiqué par (9.28). La taille du domaine spatial est alors restreinte à $1 - \xi_o$.

$$\begin{cases} \ddot{p}(t, \xi) = \Delta p(t, \xi), \\ p(t, \xi_o) = o(t), \\ \partial_\xi p(t, 1) = u_s(t), \\ p(0, \xi) = \dot{p}(0, \xi) = 0 \end{cases} \quad (\xi \in (\xi_o, 1), t > 0), \quad (9.28)$$

où $o(t)$ est la mesure de la pression p au point ξ_o .

Pour synthétiser le contrôleur pour ce type de configuration (perturbations spatialement distribuées), on passe par les mêmes étapes présentées précédemment dans le cas d'une perturbation appliquée à une extrémité du domaine spatial.

Dans ce cas, $o(t)$ est considéré comme une perturbation et il n'est donc pas nécessaire de supposer que la perturbation provient de l'extrémité, puisque la mesure qui se situe après la perturbation est utilisée directement ;

- Dans le théorème 9.1, on suppose que les conditions initiales du système (9.2) sont nulles. Il est tout de même possible d'étendre ce résultat lorsque les conditions initiales ne sont pas nulles. Cependant, les conditions initiales doivent être connues. Pour prouver cette extension, il suffit, par linéarité, de montrer que les conditions initiales peuvent être contrôlées à zéro (sans signal de perturbation). À l'aide du

lemme 9.1, il est facile de voir que pour chaque instant $T \geq 1 - \xi_c$, l'application $u_s \in L^2_{loc}(\mathbb{R}_+) \mapsto p(\cdot, \xi_c)|_{(T, +\infty)} \in L^2_{loc}(T, +\infty)$ est surjective. Par conséquent, pour tout $p^0 \in H^{1/2}(0, 1)$ et tout $p^1 \in L^2(0, 1)$, il est possible de trouver un contrôleur $\check{u}_s \in L^2_{loc}(\mathbb{R}_+)$ tel que la solution de

$$\begin{cases} \check{p}(t, \xi) = \Delta \check{p}(t, \xi), \\ \partial_\xi \check{p}(t, 0) = 0, \\ \partial_\xi \check{p}(t, 1) = \check{u}_s(t), \\ \check{p}(0, \xi) = p^0(\xi), \\ \dot{\check{p}}(0, \xi) = p^1(\xi). \end{cases} \quad (\xi \in [0, 1], t > 0).$$

satisfasse $\check{p}(t, \xi_c) = 0$ pour tout $t > 1 - \xi_c$.

En conclusion, le résultat du théorème 9.1 peut être étendu au résultat suivant

Soit $\xi_o \in [0, 1]$ et $\xi_c \in [0, 1]$ satisfaisant (9.7).

Pour tout $(p^0, p^1) \in H^{1/2}(0, 1) \times L^2(0, 1)$ et chaque $u_p \in \mathcal{H}^1_{L,loc}(\mathbb{R}_+)$, il existe $u_s \in L^2_{loc}(\mathbb{R}_+)$ tel que la solution p de

$$\begin{cases} \check{p}(t, \xi) = \Delta p(t, \xi), \\ \partial_\xi p(t, 0) = u_p(t), \\ \partial_\xi p(t, 1) = u_s(t), \\ p(0, \xi) = p^0(\xi), \\ \dot{p}(0, \xi) = p^1(\xi). \end{cases} \quad (\xi \in (0, 1), t > 0).$$

satisfait $p(t, \xi_c) = 0$ pour tout $t > 1 - \xi_c$.

De plus, $u_s(t)$ est donné en termes des observations de p au point ξ_o et des conditions initiales. Comme précédemment, il est possible d'obtenir une expression explicite pour le signal de contrôle u_s .

9.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons considéré l'annulation de bruit acoustique en un point prédéfini, utilisant pour ce faire un modèle analytique de propagation acoustique 1D avec des conditions aux bords particulières.

Un observateur a été conçu pour reconstruire le bruit à chaque instant. À partir de celui-ci, un contrôleur de dimension infinie a été synthétisé. Ce contrôleur se révèle bien capable d'annuler parfaitement l'effet du bruit sonore au point prédéfini, sous la condition d'avoir l'information sur les conditions initiales du système présenté dans ce chapitre.

Les résultats obtenus par application de la solution analytique (de dimension infinie) proposée dans le théorème 9.1 ont été illustrés par simulation. Les forces et les faiblesses du contrôleur ont été discutées et finalement certaines extensions du théorème 9.1 ont été présentées pour des conditions élargies : conditions aux bords, conditions initiales, perturbation distribuée.

Enfin, il faut mentionner que la solution du problème d'annulation parfaite du bruit, est théorique et n'est pas applicable en pratique en l'état actuel. En effet, elle suppose de connaître exactement les conditions initiales et n'apporte pas *a priori* de garantie quant à la stabilité et à la robustesse.

Chapitre 10

Atténuation fréquentielle par une méthode robuste multi-objectif

Sommaire

10.1 Introduction	128
10.2 Approximation de la fonction de transfert $\Delta G_{\Delta\xi}$	128
10.3 Synthèse d'une commande dans le cas mono-point	129
10.4 Synthèse d'une commande dans le cas multi-point	131
10.4.1 Notations et hypothèses	132
10.4.2 Problème 1 : Synthèse d'une commande dans le cas multi-point avec corrélation	132
10.4.3 Problème 2 : Synthèse d'une commande dans le cas multi-point sans corrélation	134
10.4.4 Résultats de simulation et discussions	135
10.5 Observation aux voisinages des points d'atténuation	139
10.6 Conclusion	140

10.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous cherchons à comprendre le comportement du système acoustique (évolution des pressions) en dehors des points d'atténuation. Pour cela, nous commençons par synthétiser une commande en vue d'une atténuation mono-point, et observons ce qui se passe au voisinage de ce point d'atténuation. Nous répéterons ensuite la démarche dans le cas où deux points d'atténuation sont explicitement visés. Les résultats des deux cas seront comparés pour étudier les conséquences spatiales résultant de cibles d'atténuation multiples. Cette étude est faite dans le but d'aller vers une atténuation sur un segment/volume.

Cette étude est devenue réalisable grâce à l'utilisation d'un modèle paramétré (en fonction de la position) en dimension finie (voir Section 5.3.2). Pour observer l'effet de l'atténuation en d'autres points, sans introduire de nouveaux points de mesure, on fera usage dans la Section 10.2 la fonction de transfert point-à-point, $\Delta G_{\Delta\xi}$, introduite dans la Section 5.2.2.

10.2 Approximation de la fonction de transfert $\Delta G_{\Delta\xi}$

Comme dans Section 5.3.2, l'expansion de la fraction partielle infinie de $\Delta G_{\Delta\xi}$ ($\Delta G_{\Delta\xi}$ est la fonction de transfert entre deux points espacés de $\Delta\xi$, développée dans Section 5.2.2) est donnée par :

$$\Delta G_{\Delta\xi}(s) = \frac{\alpha_0(\Delta\xi)}{s - p_0^\delta} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s \operatorname{Re}(\alpha_k(\Delta\xi)) - \operatorname{Re}(p_k^\delta \alpha_{-k}(\Delta\xi))}{s^2 - 2\operatorname{Re}(p_k^\delta)s + |p_k^\delta|^2}, \quad (10.1)$$

où les coefficients $\alpha_k(\Delta\xi)$ sont les résidus de $\Delta G_{\Delta\xi}$ en les pôles p_k^δ de $\Delta G_{\Delta\xi}$.

Comme pour l'expression de G_ξ donnée par (5.16), la relation ci-dessus n'est valide que pour $\Delta\xi \neq 0$, cf. remarque 5.3. En fait, pour $\Delta\xi = 0$, nous avons $\Delta \hat{G}_{\Delta\xi} = 1$.

Ensuite, comme dans Section 5.3.2, nous approchons la fonction de transfert $\Delta G_{\Delta\xi}$ par une fonction de transfert d'ordre réduit $\Delta \hat{G}_{\Delta\xi}$ obtenue par troncature de (10.1). Cela conduit à :

$$\Delta \hat{G}_{\Delta\xi}(s) = \frac{\alpha_0(\Delta\xi)}{s - p_0^\delta} + 2 \sum_{k=1}^{N_c} \frac{s \operatorname{Re}(\alpha_k(\Delta\xi)) - \operatorname{Re}(p_k^\delta \alpha_{-k}(\Delta\xi))}{s^2 - 2\operatorname{Re}(p_k^\delta)s + |p_k^\delta|^2}, \quad (10.2)$$

Encore une fois, nous prenons $N_c = 30$ et les valeurs par défaut données dans le Tableau 5.1, et nous vérifions numériquement que la fonction de transfert de dimension finie $\Delta \hat{G}_{\Delta\xi}(s)$ (d'ordre 61) nous permet d'avoir un comportement similaire au système (5.11) de dimension infinie, dans la plage de fréquences [20, 1200]Hz. La figure 10.1 montre la valeur de l'indicateur *fit*, défini par (5.12), par rapport à la position $\Delta\xi$ en utilisant $\Delta \hat{G}_{\Delta\xi}(s)$. Dans ce cas, nous avons choisi le point de mesure $\xi_m = 0.5$. Les résultats de réduction du modèle sont assez satisfaisants sur l'ensemble des points (entre $\xi = 0.51$ et $\xi = 1$).

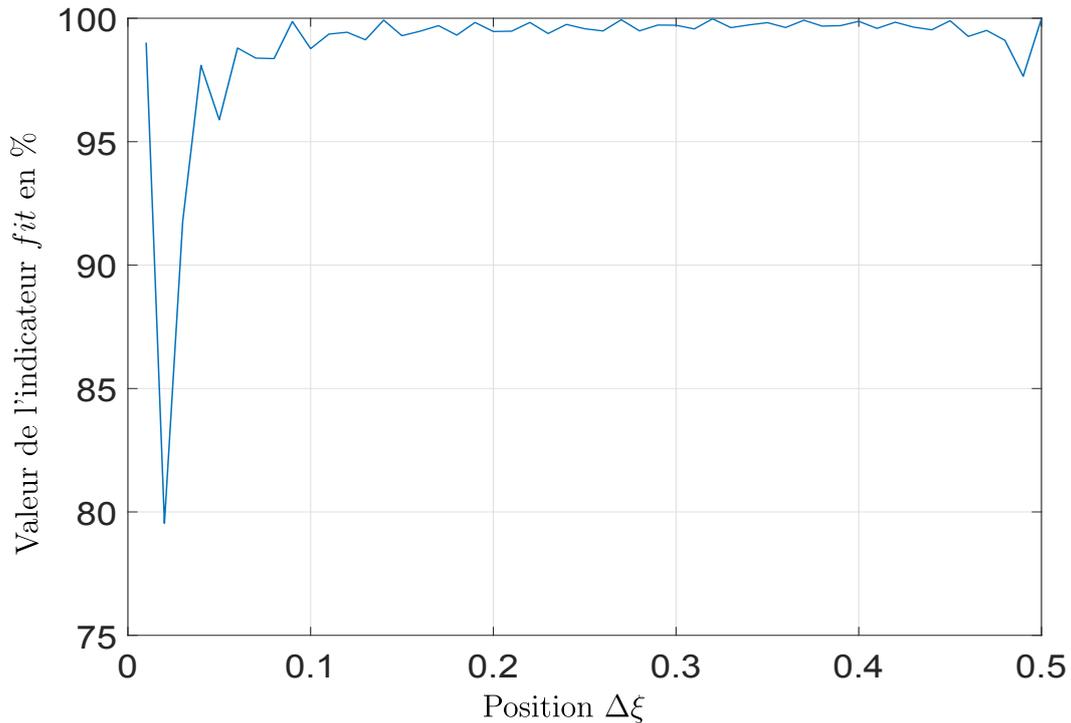


FIGURE 10.1 – La valeur de l'indicateur fit par rapport à la position $\Delta\xi$, dans la plage de fréquences $[20, 1200]$ Hz ($N_c = 30$).

Maintenant que la fonction de transfert d'ordre réduit $\Delta\hat{G}_{\Delta\xi}$ est obtenue, nous sommes en mesure de construire un contrôleur robuste multi-objectif H_∞ en vue de l'atténuation du bruit dans un système acoustique.

10.3 Synthèse d'une commande dans le cas mono-point

Dans cette section, nous nous concentrons sur l'atténuation (et non l'annulation) de l'effet d'une perturbation générée par u_p en un point de mesure (la position du microphone), en utilisant un haut-parleur de contrôle.

Le système d'application, est un système en 1D qui décrit un système en 3D de forme cylindrique (cf. Section 5.2.1), nous rappelons que les notations utilisées dans cette section sont les mêmes que celles dans Section 8.2. Le modèle augmenté sur lequel le contrôleur est synthétisé, est présenté dans la figure 10.2.

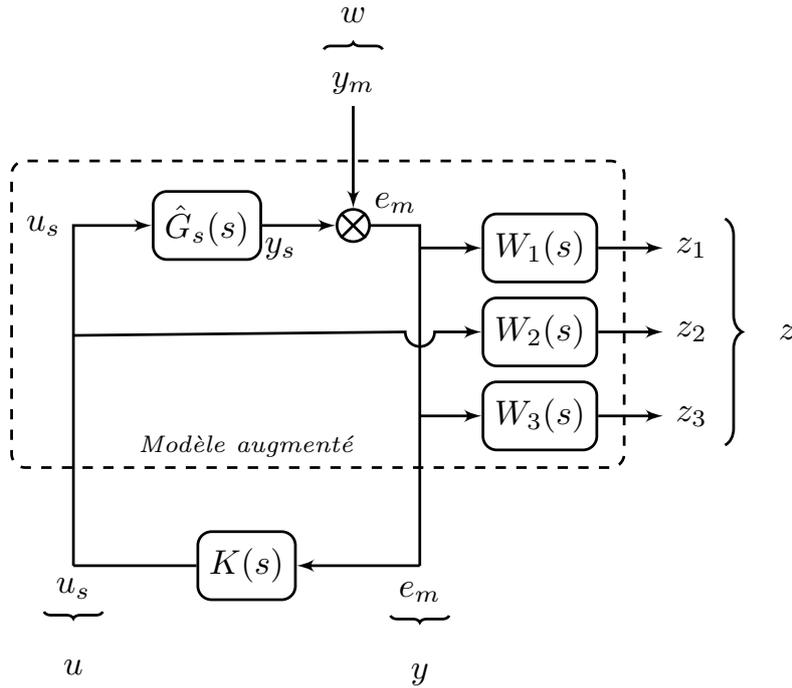


FIGURE 10.2 – Stratégie de commande MOH_∞ pour une atténuation mono-point.

Le problème de synthèse du contrôle correspondant est résumé ci-dessous, le contrôleur synthétisé a pour objectif d’atténuer l’effet du bruit $u_p(t)$ en point de mesure ξ_m :

$$\min_{K(s) \in \mathcal{RH}_\infty} \|W_1(s)T_{y_m \rightarrow e_m}(s)\|_\infty, \quad (10.3a)$$

sous les contraintes suivantes :

$$\begin{cases} \|W_2(s)T_{y_m \rightarrow u_s}(s)\|_\infty < 1 \\ \|W_3(s)T_{y_m \rightarrow e_m}(s)\|_\infty < 1 \\ \text{Re}(p_{K_i}) < 0, \end{cases} \quad (10.3b)$$

où y_m est l’effet du bruit $u_p(t)$ en point de mesure ξ_m . Les autres paramètres sont déjà introduits dans Section 8.2.

Résultats de simulation : Les résultats de simulation sont présentés dans cette section pour le cas, SISO mono-point. Le point de mesure (point d’atténuation) $\xi_m = 0.5m$. Les paramètres de simulation sont donnés dans le Tableau 10.1.

Pour l’observation des résultats, nous avons utilisé le tracé de Bode pour les différents transferts au lieu de tracer le rapport entre le spectre des signaux d’entrée et de sortie. Cette façon de présenter les résultats d’atténuation, est utilisée dans [76].

Tableau 10.1 – Paramètres de simulation dans le cas d'une atténuation mono-point

Marge de module	Ordre de $K(s)$	Plage d'atténuation
0.3	4	[180, 220]Hz

la figure 10.3 présente les résultats d'atténuation au point de mesure ξ_m . Ces résultats sont satisfaisants dans la plage de fréquence désirée (atténuation du bruit de 30dB sur la plage de fréquence [180, 220]).

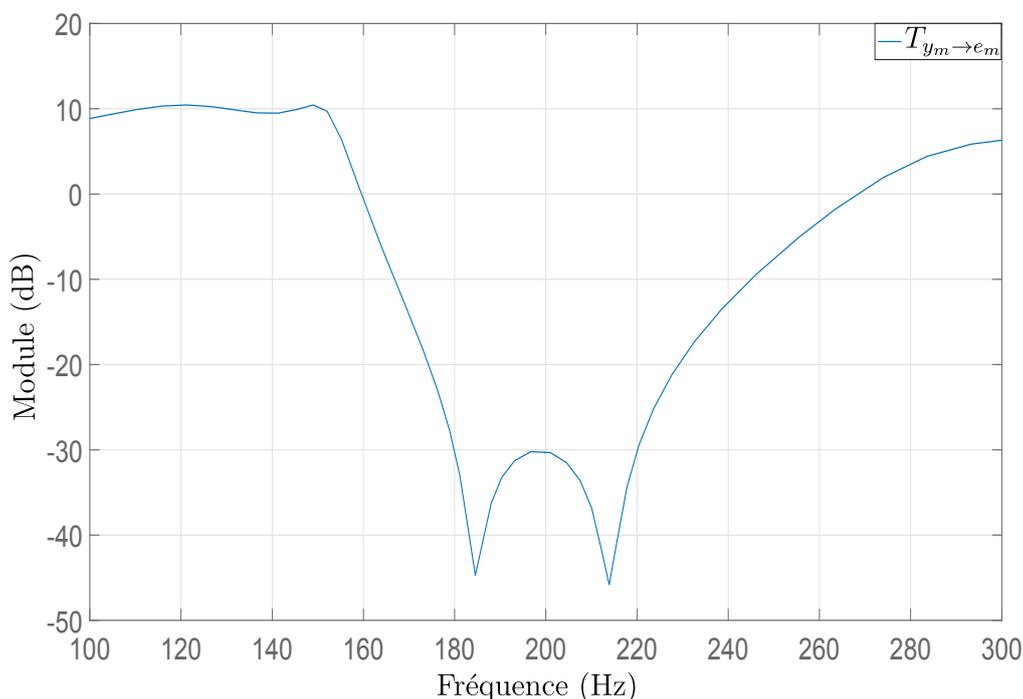


FIGURE 10.3 – Résultat d'atténuation de l'effet d'une perturbation en un point de mesure.

10.4 Synthèse d'une commande dans le cas multi-point

Dans cette section, nous nous concentrons sur l'atténuation de l'effet de la perturbation généré par u_p aux points de mesure et éventuellement en d'autres points (pas nécessairement proches des points de mesure). À cette fin, nous allons synthétiser les commandes robustes multi-objectif H_∞ pour deux types de problèmes.

- **Problème 1** : Nous utiliserons une approximation $\Delta\hat{G}_{\Delta\xi}$ de $\Delta G_{\Delta\xi}$, donné par (10.2). L'approximation $\Delta\hat{G}_{\Delta\xi}$ sera calculée à l'aide de la méthode des résidus de Cauchy présentée dans la Section 5.3.2. Cette fonction de transfert traduit l'effet de la perturbation entre différents points du domaine spatial. C'est-à-dire que nous prendrons en compte le fait que la pression en différents points est corrélée ;

- **Problème 2** : Nous ne supposons pas de corrélation de la pression entre les différents points d'atténuation ($\Delta\hat{G}_{\Delta\xi}$ ne sera pas utilisée). Ainsi, pour ce dernier problème, chaque point d'atténuation devra être un point de mesure.

10.4.1 Notations et hypothèses

Nous présentons le cas général du contrôleur MOH_∞ par feedback pour chaque problème.

Tout d'abord, introduisons quelques notations. Nous considérerons ξ_1, \dots, ξ_{n_a} , n_a points distincts de l'intervalle $[0, L]$. Ces points seront les points d'atténuation. Parmi ces points, nous supposons que ξ_1, \dots, ξ_{n_m} sont les points de mesure (c'est-à-dire la pression est mesurée par un microphone situé à chaque point ξ_i pour chaque $i \in \{1, \dots, n_m\}$).

Nous avons $1 \leq n_m \leq n_a$. Nous supposons aussi que pour tout $i \in \{1, \dots, n_a\}$, nous avons $\xi_1 < \xi_i$. En particulier, le point d'atténuation gauche doit être un point de mesure, et nous supposons également que $\xi_1 \geq \xi_{max}$, c.-à-d. les points d'atténuation et de mesure sont séparés de la source du bruit (le bruit est généré dans l'intervalle $[\xi_{min}, \xi_{max}]$, cf. Section 5.2.2).

On note aussi e_i la pression du système au point ξ_i , $e_i(t) = p(t, \xi_i)$, où p est la solution de (5.1)-(5.2), et par y_i la pression de perturbation au point ξ_i , c'est-à-dire que $y_i(t) = p(t, \xi_i)$, où p est la solution de (5.1)-(5.2) avec $u_s = 0$.

10.4.2 Problème 1 : Synthèse d'une commande dans le cas multi-point avec corrélation

Dans ce problème, nous allons utiliser la fonction de transfert $\Delta\hat{G}_{\Delta\xi}(s)$, et nous visons à atténuer la pression aux points ξ_1, \dots, ξ_{n_a} . Ici, la fonction de transfert $\Delta\hat{G}_{\Delta\xi}(s)$ est celle introduite dans Section 10.2, avec $\xi_m = \xi_1$.

Nous allons distinguer deux cas particuliers du problème 1, à savoir,

- **Cas SISO** : Nous utilisons un seul microphone ($n_m = 1$) et un haut-parleur pour atténuer l'effet de la perturbation u_p au point de mesure (la position du microphone) et à $n_a - 1 \geq 1$ autres points distincts du point de mesure. Dans ce cas, nous devons utiliser la fonction de transfert $\Delta\hat{G}_{\Delta\xi}$ pour avoir une commande par feedback ;
- **Cas SIMO1** : Nous utilisons un seul haut-parleur et $n_m > 1$ microphones, pour atténuer l'effet de la perturbation u_p seulement aux points de mesure ($n_a = n_m$). Dans ce cas, l'utilisation du transfert $\Delta\hat{G}_{\Delta\xi}(s)$ n'est pas nécessaire pour avoir une commande par feedback (cf. Section 10.4.3).

En comparant les résultats des cas SISO et SIMO1, nous verrons s'il est utile ou non d'utiliser plus d'un point de mesure.

Dans les deux cas, l'objectif d'atténuation est formalisé par un critère de performance. Des contraintes supplémentaires sont ajoutées pour renforcer la robustesse vis-à-vis des erreurs de modélisation (en particulier pour les hautes fréquences) et des perturbations à la sortie du système (critère de performance et les contraintes sont détaillés dans Section 8.2). Le schéma général du contrôle MOH_∞ par feedback est présenté dans la figure 10.4, où

l'on a utilisé les notations suivantes :

$$\begin{aligned}\hat{G}_{\xi_1 \dots \xi_{n_a}}(s) &= [\hat{G}_{\xi_1}(s) \cdots \hat{G}_{\xi_{n_a}}(s)]^\top, \\ \Delta \hat{G}_{\Delta \xi_1 \dots \xi_{n_a}}(s) &= [\Delta \hat{G}_{\Delta \xi_1}(s) \cdots \Delta \hat{G}_{\Delta \xi_{n_a}}(s)]^\top, \\ y &= [y_1 \cdots y_{n_a}]^\top \quad \text{et} \quad e = [e_1 \cdots e_{n_a}]^\top,\end{aligned}$$

des vecteurs de n_a éléments,

$$W'_2(s) = [W_2(s) \cdots W_2(s)]^\top \quad \text{et} \quad e^m = [e_1 \cdots e_{n_m}]^\top,$$

des vecteurs de n_m éléments (e^m est composé des premiers n_m composants de e).

$$\begin{aligned}W'_{L1}(s) &= \text{diag}[W_{L1}(s) \cdots W_{L1}(s)], \\ W'_3(s) &= \text{diag}[W_3(s) \cdots W_3(s)],\end{aligned}$$

matrices diagonales de respectivement n_a et n_m blocs et enfin, y^p est l'effet de la perturbation u_p au point ξ_1 (on a $y^p = y_1$).

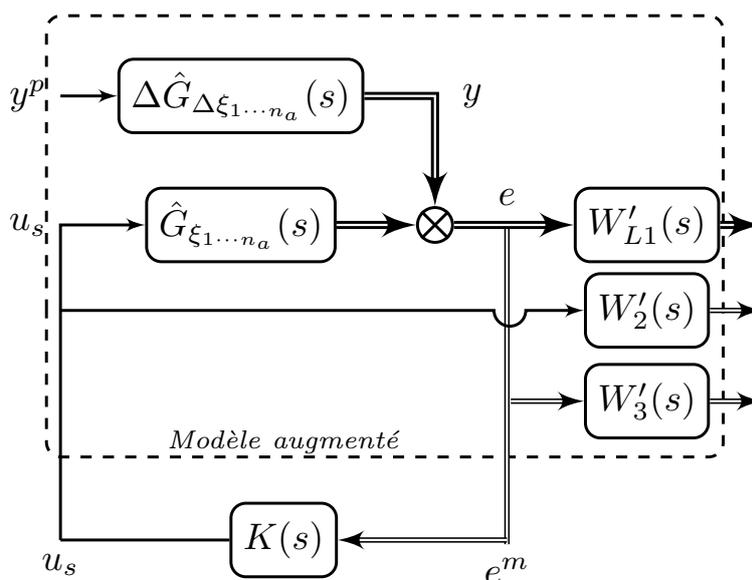


FIGURE 10.4 – Stratégie de commande MOH_∞ pour une atténuation multi-point dans un cas général.

La synthèse du contrôle correspondant est résumée ci-dessous

$$\min_{K(s) \in \mathcal{RH}_\infty} \left(\max_{i \in \{1, \dots, n_a\}} \|W_{L1}(s) T_{y^p \rightarrow e_i}(s) W_{R1}(s, \Delta \xi_i)\|_\infty \right) \quad (10.4a)$$

sous les contraintes :

$$\begin{cases} \|W_2(s) T_{y_j \rightarrow u_s}(s)\|_\infty < 1 & (j \in \{1, \dots, n_m\}), \\ \|W_3(s) T_{y_j \rightarrow e_i}(s)\|_\infty < 1 & (i, j \in \{1, \dots, n_m\}), \\ \text{Re}(p_K) < 0, & \text{pour chaque pôle } p_K \text{ de } K, \end{cases} \quad (10.4b)$$

Le contrôleur $K(s)$ appartient à \mathcal{RH}_∞ ; $W_{L1}(s)$, $W_2(s)$ et $W_3(s)$ sont des filtres de pondération (nous utilisons dans nos travaux, la conception du filtre de Butterworth);
 $W_{R1}(s, \Delta\xi_i) = 1/\Delta\widehat{G}_{\Delta\xi_i}(s)$.

- Le critère de performance de MOH_∞ présenté par (10.4a), s'applique aux différentes fonctions de transfert $T_{y^p \rightarrow e_i}$. Il caractérise l'effet du signal le plus défavorable $y_i = y^p W_{R1}(\cdot, \Delta\xi_i)$ sur l'erreur résiduelle $W_{L1}e_i$ à différents points ($i \in \{1, \dots, n_a\}$). W_{L1} est un filtre passe-bande dont la bande passante $[f_{min}, f_{max}]$ définit la plage d'atténuation désirée. $W_{R1}(\cdot, \Delta\xi_i)$ est utilisé pour se focaliser sur l'atténuation du bruit y_i qui représente l'effet du bruit y^p , au point ξ_i ($T_{y_i \rightarrow e_i} = T_{y^p \rightarrow e_i} W_{R1}(\cdot, \Delta\xi_i)$);
- La première contrainte de (10.4b) porte sur la robustesse par rapport à la dynamique négligée (en hautes fréquences). Le filtre de pondération W_2 est un filtre passe-haut conçu pour pénaliser, pour chaque j , la fonction de sensibilité du contrôleur. Nous ajoutons ce filtre car la dynamique du système n'est pas correctement reproduite par la fonction de transfert d'ordre réduit;
- Le filtre W_3 impliqué dans la deuxième contrainte est un gain scalaire dans $(0, 1)$ (inverse de la marge de module). Cela renforce la robustesse aux incertitudes;
- La dernière condition de (10.4b) assure que le contrôleur $K(s)$ est stable.

Pour conclure, pour le cas de SISO (resp. SIMO1), nous résolvons (10.4) avec $n_m = 1$ (resp. $n_a = n_m$).

10.4.3 Problème 2 : Synthèse d'une commande dans le cas multi-point sans corrélation

Le but ici est d'utiliser un seul haut-parleur et autant de microphones que de points d'atténuation ($n_a = n_m$) en supposant que l'effet de la perturbation u_p aux points de mesure ξ_1, \dots, ξ_{n_a} est non corrélé.

Puisque $n_m = n_a$, nous n'avons qu'un seul cas d'étude, que nous nommerons **cas SIMO2**. Le modèle augmenté qui vérifie le cas général SIMO2 est montré dans la figure 10.5 et le problème correspondant de la synthèse de contrôle est

$$\min_{K(s) \in \mathcal{RH}_\infty} \left(\max_{j, i \in \{1, \dots, n_a\}} \|W_{L1}(s)T_{y_j \rightarrow e_i}(s)\|_\infty \right), \quad (10.5)$$

soumis aux contraintes de robustesse (10.4b), avec $n_m = n_a$. Ce cas sera comparé au cas SIMO1. Cette comparaison nous permettra de comprendre l'importance d'utiliser le transfert $\Delta\widehat{G}_{\Delta\xi}$ pour la synthèse du contrôleur et ses conséquences sur les résultats d'atténuation.

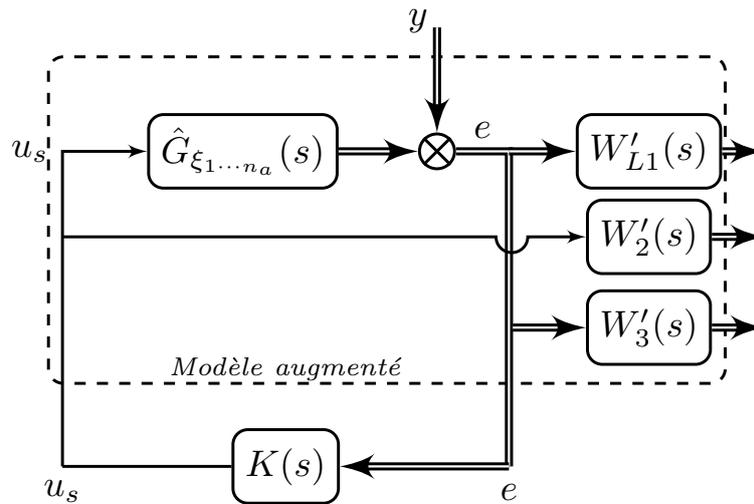


FIGURE 10.5 – Stratégie de commande MOH_∞ pour une atténuation multi-point dans la cas SIMO2.

Comme décrit dans Section 8.2, les problèmes d’optimisation multi-objectif, décrits par (10.4) et (10.5), conduisent à des problèmes non-lisses et non-convexes. La solution de ces problèmes, peut être approchée numériquement avec le solveur `systeme` (cf. [4]).

10.4.4 Résultats de simulation et discussions

Les résultats de simulation sont présentés dans cette section pour les cas, SISO (avec $n_a = 2$ et $n_m = 1$), SIMO1 (avec $n_a = n_m = 2$) et SIMO2 (avec $n_a = n_m = 2$). L’objectif de cette partie est de comparer les différents résultats de performances atteignables des différents cas (le niveau d’atténuation du bruit dans une plage de fréquences prédéfinie). Cette atténuation est faite en deux points $\xi_1 = 0.5m$ et $\xi_2 = 0.55m$. Les paramètres de simulation sont donnés dans la Tableau 10.2.

Afin d’avoir une comparaison équitable, ces paramètres sont les mêmes dans tous les cas (SISO, SIMO1 et SIMO2). Comme dans le paragraphe 10.3, pour l’observation des résultats, nous avons utilisé le tracé de Bode pour les différents transferts au lieu de tracer le rapport entre le spectre des signaux d’entrée et de sortie.

Tableau 10.2 – Paramètres de simulation

Marge de module	Ordre de $K(s)$	Plage d’atténuation
0.3	4	[180, 220]Hz

Les résultats de simulation sont affichés sur les figures 10.6, 10.7, 10.8 et 10.9. Plus précisément, la figure 10.6 correspond au cas SISO, la figure 10.7 au cas SIMO1 et la figure 10.8 au cas SIMO2.

Dans la configuration de SIMO2 (cf. figure 10.5), il n’y a pas de corrélation supposée entre

les différents éléments du vecteur y . C'est pourquoi nous avons tracé sur la figure 10.8 les différentes fonctions de transfert $T_{y_j \rightarrow e_i}$ pour chaque $i, j \in \{1, 2\}$.

Les résultats de performance d'atténuation montrés dans la figure 10.9, sont obtenus lorsque le contrôleur est synthétisé dans le cas SIMO2 puis appliqué à la configuration SIMO1 (donnée par la figure 10.4), où y_1 et y_2 sont corrélés.

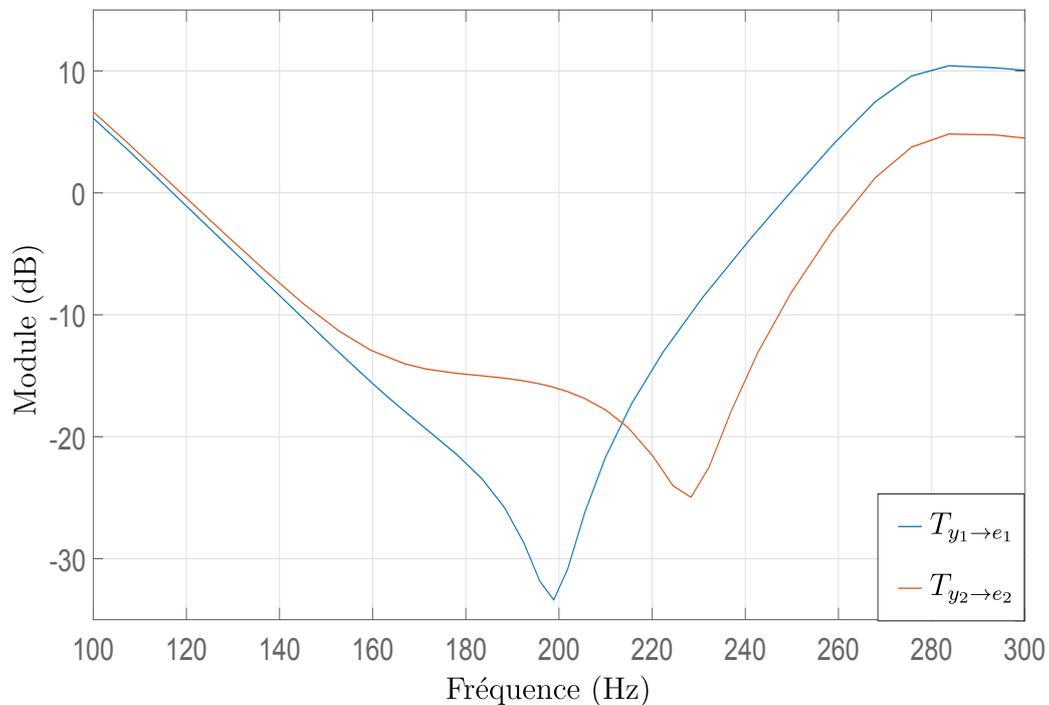


FIGURE 10.6 – Résultat d'atténuation de la perturbation en deux points dans le cas SISO.

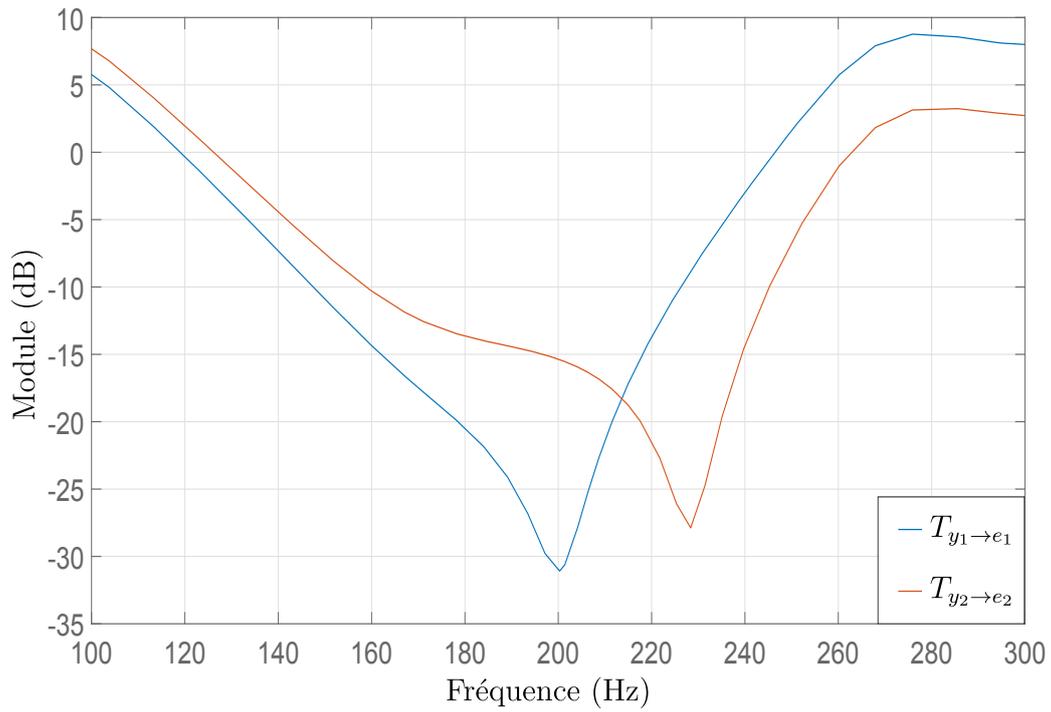


FIGURE 10.7 – Résultat d'atténuation de la perturbation en deux points dans le cas SIMO1.

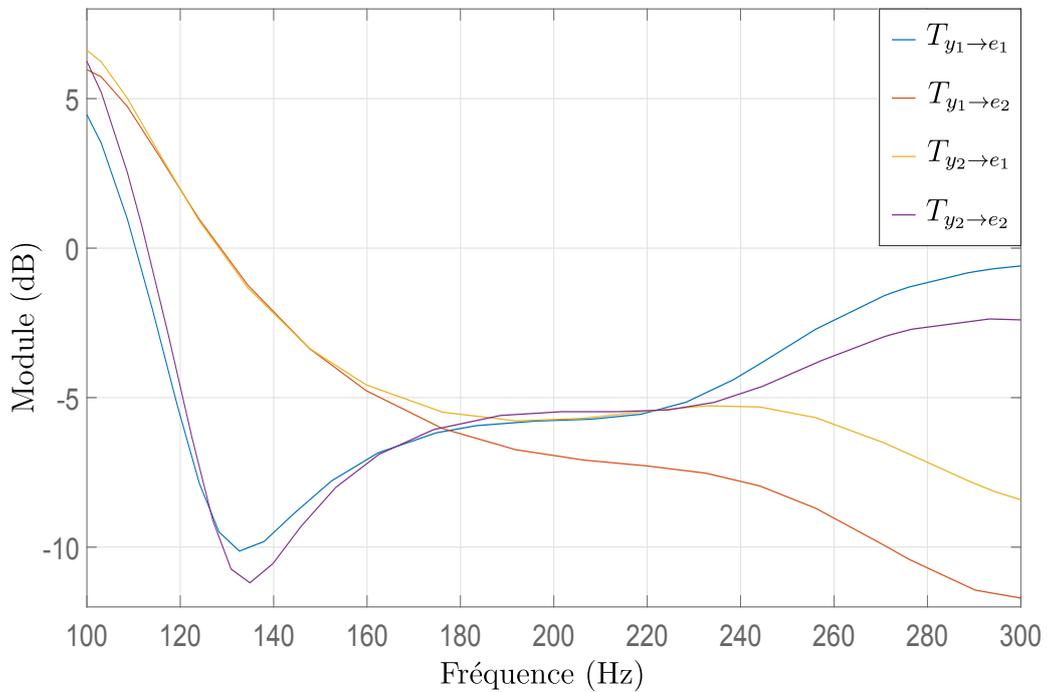


FIGURE 10.8 – Résultat d'atténuation de la perturbation en deux points dans le cas SIMO2.

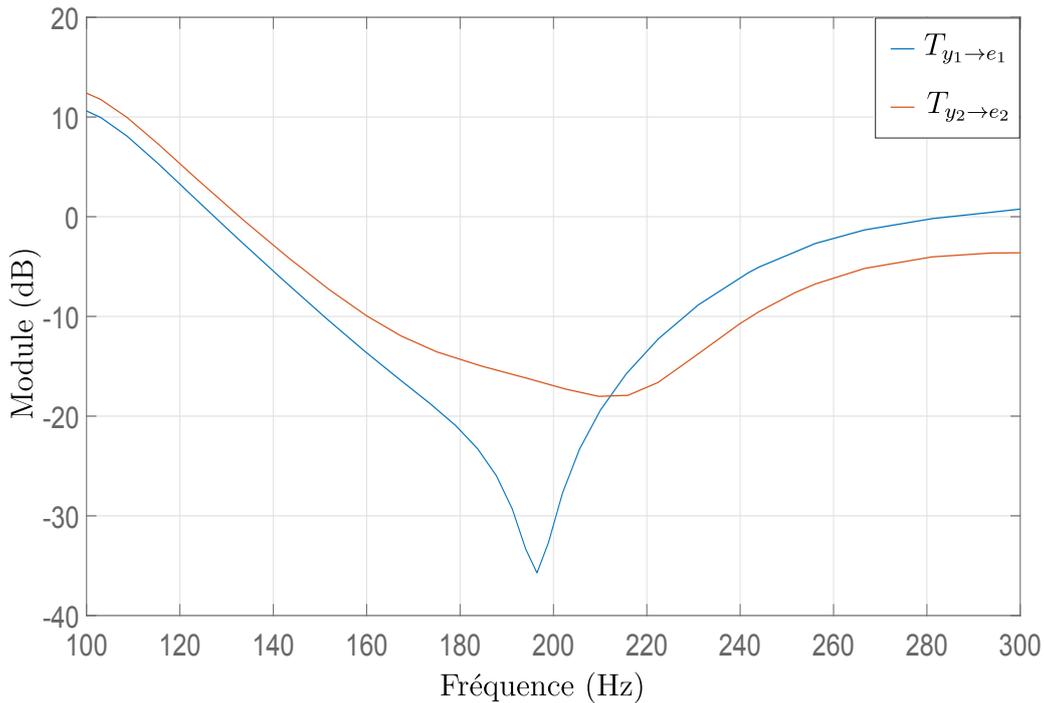


FIGURE 10.9 – Résultat d’atténuation de la perturbation en deux points, en utilisant le contrôleur de cas SIMO2 dans la configuration SIMO1.

D’après les figures 10.6 et 10.7, de bons résultats dans les deux cas SISO et SIMO1 ont été obtenus.

Nous notons tout de même que même si nous avons plus de points de mesure dans le cas de SIMO1 que dans le cas de SISO, l’atténuation garantie sur la plage de fréquences d’intérêt, $[180, 220]$ Hz, est similaire dans les deux cas. Cependant, par construction du cas SIMO1, nous avons plus de contraintes de robustesse et donc le contrôleur obtenu pour le cas SIMO1 est plus robuste que celui obtenu pour le cas SISO.

Sur la figure 10.8, on constate que les performances en atténuation obtenues pour le cas SIMO2 sont faibles par rapport aux cas précédents. Ceci est attendu puisque nous considérons le pire cas possible, pour lequel les signaux y_1 et y_2 sont supposés indépendants. Dans la réalité, ces bruits acoustiques sont intimement liés. Leur relation de dépendance peut être formalisée par la fonction de transfert $\Delta\hat{G}_{\Delta\xi}$. C’est pourquoi il est intéressant de comparer les résultats (cf. figure 10.9) obtenus en appliquant le contrôleur synthétisé dans le cas SIMO2 (sans $\Delta\hat{G}_{\Delta\xi}$) à la configuration SIMO1 où $\Delta\hat{G}_{\Delta\xi}$ est prise en compte dans le calcul des différents transferts (cf. figure 10.4).

Pour conclure, l’utilisation de la fonction de transfert $\Delta\hat{G}_{\Delta\xi}$ n’offre pas de meilleures performances. Cependant, l’utilisation de $\Delta\hat{G}_{\Delta\xi}$ facilite la synthèse du contrôleur. En fait, les contraintes dans les cas SIMO1 et SIMO2 sont exactement les mêmes, mais le minimum recherché dans (10.4), pour le cas SIMO1, est un minimum sur n_a valeurs, tandis que celui recherché dans le cas SIMO2 (10.5) est sur n_a^2 valeurs.

10.5 Observation aux voisinages des points d'atténuation

Dans le cas d'une atténuation mono-point ou multi-point, nous garantissons l'atténuation uniquement aux points d'atténuation et nous ne savons pas ce qui se passe aux alentours de ces points d'atténuation. Un modèle paramétré en position va nous permettre d'observer l'effet de l'atténuation en importe quel point. C'est l'objectif de cette section. Il est très intéressant aussi de savoir l'influence du nombre de points d'atténuation, sur l'atténuation du bruit dans un ensemble de points (des points situent entre les points d'atténuation).

Pour réaliser l'objectif de cette section, nous utilisons les deux contrôleurs déjà synthétisés dans le cas SISO (cf. Section 10.4.2 et 10.3).

On rappelle que dans le cas du contrôleur synthétisé dans la Section 10.3, le point d'atténuation est $\xi_m = \xi_1 = 0.5$ et dans le cas du contrôleur synthétisé dans la Section 10.4.2 (cas SISO), les points d'atténuation sont $\xi_m = \xi_1 = 0.5$ et $\xi_5 = 0.55$. Dans les deux cas, nous observons l'effet de l'atténuation en $\xi_1 = 0.5$, $\xi_2 = 0.52$, $\xi_3 = 0.53$, $\xi_4 = 0.54$ et $\xi_5 = 0.55$. La plage d'atténuation dans les deux cas, est $[180, 220]$ Hz.

La figure 10.10 va nous permettre de mieux comprendre le comportement du système en boucle fermée, au voisinage d'un point d'atténuation. La comparaison entre les figures 10.10 et 10.11 va nous aider à comprendre l'influence du nombre de points d'atténuation sur un ensemble de points.

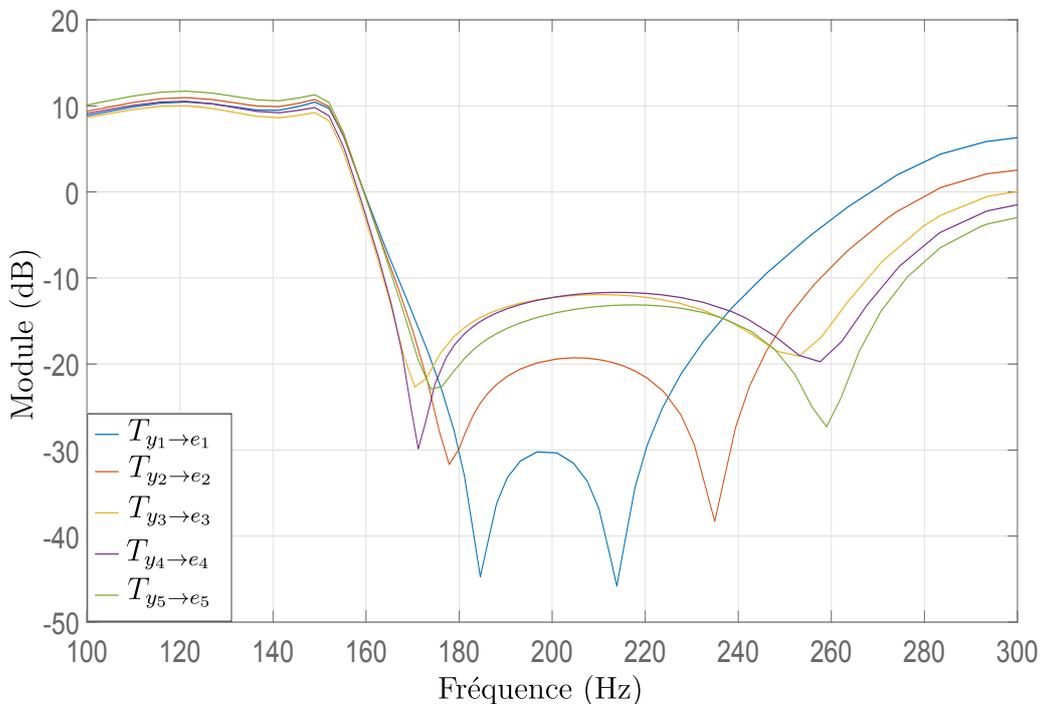


FIGURE 10.10 – Observation aux voisinages des points d'atténuation dans le cas SISO mono-point.

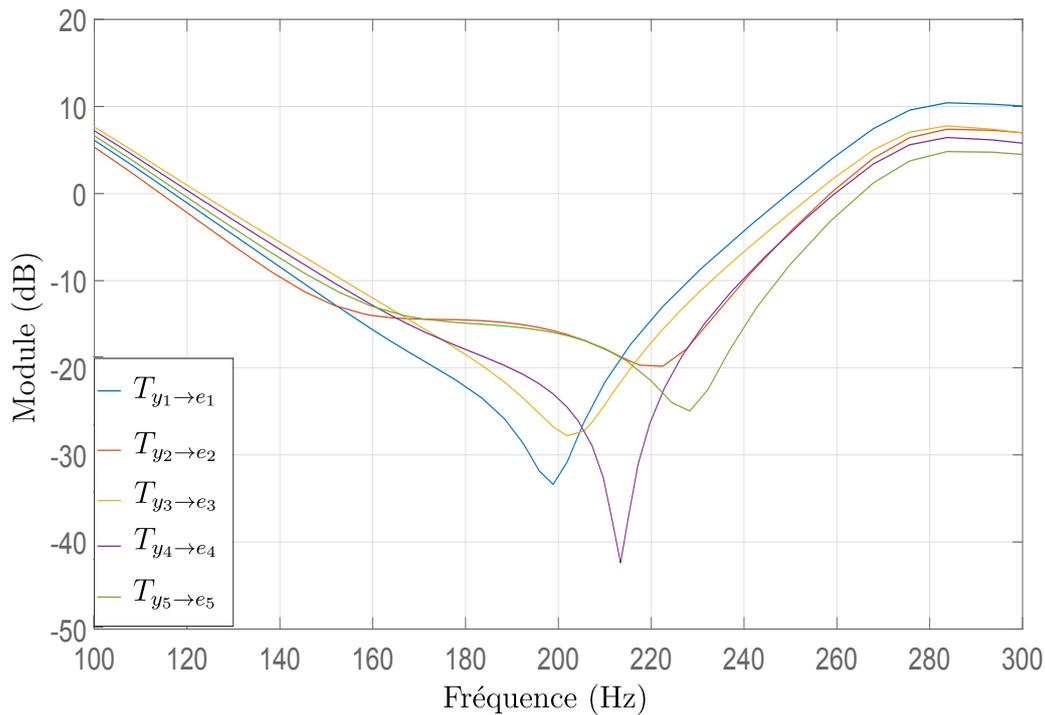


FIGURE 10.11 – Observation aux voisinages des points d’atténuation dans le cas SISO multi-point.

D’après la figure 10.10, l’atténuation touche plusieurs points au voisinage du point d’atténuation. La même remarque est valable dans le cas d’une atténuation en deux points (l’atténuation est appliquée en plusieurs points situés entre les deux points d’atténuation ξ_1 et ξ_5) présenté dans la figure 10.11.

Les figures 10.10 et 10.11, montrent que le nombre de points d’atténuation influence l’atténuation en différents points situés au voisinage de ces derniers. Dans le cas d’une atténuation sur deux points (ξ_1 et ξ_5), le pire cas d’atténuation sur les cinq points (ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 , ξ_4 et ξ_5) est de 14dB, par contre dans le cas d’une atténuation mono-point, le pire cas d’atténuation en les cinq points est de 11dB.

10.6 Conclusion

Ce chapitre a traité du contrôle actif de bruit sur une plage de fréquences prédéfinie, au sein d’une cavité fermée pouvant être modélisé sous la forme d’un système de propagation acoustique 1D.

Une fonction de transfert rationnelle d’ordre fini a été calculée, en utilisant la méthode des résidus de Cauchy. Ce transfert a la particularité d’être paramétré par la position du point d’étude au sein de la cavité. Sur cette base, un transfert d’ordre réduit a été utilisé pour la synthèse d’un contrôleur dynamique MOH_∞ . Ce dernier permet d’avoir l’atténuation de bruits acoustiques en un ou plusieurs points.

En effectuant des simulations dans le cas multi-point pour les deux problèmes évoqués dans Section 10.4.2 et 10.4.3, nous avons conclu que l’utilisation des transferts point à

point ($\Delta G_{\Delta\xi_i}$) introduits en Section 5.2.2 n'améliorait pas sensiblement les performances d'atténuation. Leur utilisation dans le cas d'un grand nombre de points d'atténuation, allège cependant les calculs pour la synthèse du contrôleur.

En comparant aussi les niveaux d'atténuation obtenus en simulation, dans les deux cas mono-point et multi-point, en plusieurs points situés au voisinage des points d'atténuation, nous avons pu constater que le nombre des points d'atténuation influence favorablement l'atténuation aux points voisins des points d'atténuation.

Conclusion générale et perspectives

Conclusion générale

Après avoir introduit les différentes voies possibles pour le contrôle actif du bruit acoustique dans une cavité (cf. figure 1), la Partie I présente les cavités acoustiques particulières au cœur de la thèse : cavités de formes cylindrique et parallélépipédique.

Ces cavités permettent d’approcher nombre de systèmes physiques, comme par exemple les systèmes de ventilation, l’habitacle des véhicules (e.g. voiture, avion, engin agricole, engin de chantier, etc), les casques antibruit. Des méthodes de résolution analytique et d’approximation numérique, ont été proposées, en considérant l’équation des ondes.

L’approximation numérique par la méthode des éléments finis ou des différences finies de l’équation des ondes, conduit à des systèmes d’ordre élevé et nous avons préféré utiliser des systèmes d’ordre réduit, mieux adaptés à la synthèse d’une loi de commande robuste. e.g. MOH_∞ .

Ceci a motivé notre recherche de méthodes de réduction conduisant à un modèle d’ordre faible en regard de la qualité de représentation. Nous avons dans le Chapitre 5, envisagé l’utilisation d’un modèle linéaire « boîte noire » dont les coefficients ont été déterminés par la méthode d’identification dite des sous-espaces. Nous avons étudié ensuite la méthode des résidus de Cauchy, puis celle d’Hadamard. Ces méthodes ont été appliquées à l’étude d’un système acoustique 1D, dont nous avons montré qu’il pouvait correctement modéliser un système acoustique 3D sous les conditions évoquées dans le Chapitre 4.

Les résultats expérimentaux obtenus au Chapitre 6 dédié à la modélisation de la cavité “LS2N box”, ont même permis de montrer l’intérêt du modèle acoustique 1D (paramétré par la position longitudinale) pour rendre compte du comportement du prototype. Cette Partie II a conclu nos travaux sur le sujet de la modélisation acoustique.

Les deux dernières parties III et IV abordent la question de la synthèse de lois de contrôle actif de bruit. Une comparaison a été réalisée entre deux stratégies de commande (dites adaptative et robuste) parmi les plus populaires, dans le but de distinguer les avantages et les inconvénients de chacune, et de donner ainsi à l’utilisateur les clés de son choix en regard du cahier des charges visé (performances, capacité d’adaptation, robustesse, etc). Enfin, les résultats de la Partie IV, permettent une meilleure compréhension du comportement de l’évolution des pressions au sein d’un système acoustique, que l’on considère le cas d’une commande assurant l’annulation de bruit en un point de la cavité, ou le cas d’une commande visant l’atténuation mono-point ou multi-point. Nous avons conclu que l’annulation parfaite du bruit (bruit acoustique blanc) n’était réalisable qu’en un seul point dans le cas d’un bruit général.

Dans le cas de l’atténuation multi-point, nous avons également conclu que l’utilisation de transferts point à point ($\Delta G_{\Delta \xi_i}$) n’améliorait pas sensiblement les performances d’atténuation. Toutefois, nous avons noté que l’utilisation de ces transferts facilitait la synthèse du contrôleur, en particulier dans le cas d’un grand nombre de points de mesure.

Les niveaux d’atténuation en des points situés au voisinage des points d’atténuation visés par la synthèse ont aussi été évalués. Nous avons pu constater l’effet de l’augmentation du nombre de points d’atténuation sur le niveau d’atténuation local autour des points d’atténuation. Sans surprise, plus le nombre des points d’atténuation augmente plus le niveau d’atténuation observé au voisinage des points d’atténuation considérés s’améliore.

Une des contributions de ce travail réside, dans un premier temps, dans la recherche

d'un modèle simplifié, en regard de la qualité de la représentation, d'un système de propagation acoustique 3D. Pour ce faire nous avons investigué deux voies :

— La simplification spatiale, en prouvant de manière analytique et numérique, qu'un système acoustique d'une forme cylindrique (pas forcément juste un cylindre), peut être représenté par un modèle unidimensionnel. La simplification spatiale a, entre autres, permis de justifier l'utilisation d'un système de propagation acoustique 1D.

— La simplification fréquentielle, en obtenant un transfert rationnel de dimension finie décrivant la propagation acoustique 1D. Ainsi, partant d'un transfert irrationnel de dimension infinie, à partir de l'équation des ondes 1D avec des conditions aux bords pour un système ayant une forme cylindrique, différentes méthodes de réduction de modèle ont été tour à tour appliquées. Dans l'objectif de choisir la méthode la plus adaptée à notre problème, nous avons notamment comparé les différentes méthodes introduites vis-à-vis du coût de calcul, de la robustesse, de la stabilité et du nombre de paramètres de réglage.

Une autre contribution majeure toujours dans la partie modélisation, consiste en une voie originale permettant de concevoir un modèle simplifié et paramétré par la position spatiale d'un système de propagation acoustique en 3D. Ce modèle s'est avéré très utile lors de la synthèse d'une loi de commande visant l'atténuation du bruit dans un volume prédéfini (conception d'une bulle de silence). Pour obtenir un tel modèle, nous avons opéré dans un premier temps une simplification spatiale en optimisant directement les paramètres d'un modèle de dimension infinie en 1D. La méthode des résidus de Cauchy (ce choix a été justifié par comparaison avec d'autres méthodes) a ensuite été utilisée dont l'objectif d'une simplification fréquentielle, cette fois-ci, permettant d'obtenir un modèle de dimension finie valide sur une plage de fréquences prédéfinie.

L'apport de cette thèse concernant le contrôle actif de bruit peut être résumé en trois contributions :

— Une comparaison inédite de deux démarches de contrôle actif de bruit, l'une adaptative et l'autre empruntée à la commande robuste, permettant notamment de démystifier quelque peu l'approche adaptative. La version étendue de l'algorithme FxLMS proposée dans ce travail de thèse a permis d'établir une comparaison équitable des niveaux d'atténuation atteignables par les deux stratégies sur une bande de fréquences prédéfinie. Cette comparaison a été étendue à d'autres critères tels la complexité de résolution, la robustesse, la stabilité, etc.

— L'investigation d'une nouvelle approche traitant de l'annulation parfaite d'un bruit blanc en un point par le biais de la formule de D'Alembert. Le contrôleur annulant le bruit en un point, basé sur un observateur, est exprimé explicitement. L'observateur a pour objectif de reconstruire un bruit acoustique situé en une extrémité d'une cavité à une forme cylindrique, à partir de la donnée d'une mesure. Les avantages et les inconvénients de cette démarche de synthèse ont été mis en avant.

— La synthèse de lois de commande permettant l'atténuation d'un bruit sonore en

plusieurs points est proposée. L'approche multi-objectif et multi-point empruntée fait appel à la fonction de transfert point à point paramétrée par la position spatiale proposée dans la thèse. L'analyse des niveaux d'atténuation du bruit au voisinage des points de synthèse a permis de mieux comprendre les possibilités et limites d'un contrôle actif dans un volume.

Ces contributions ont fait l'objet de 3 publications acceptées :

- C. Boultifat, P. Loiseau, P. Chevrel, J. Lohéac, and M. Yagoubi. FxLMS versus H_∞ Control for Broadband Acoustic Noise Attenuation in a Cavity. IFAC World Congress, Toulouse, France, pages 9204–9210, 2017.
- C. Boultifat, P. Chevrel, J. Lohéac, M. Yagoubi, and P. Loiseau. One-dimensional acoustic propagation model and spatial multi-point active noise control. In IEEE 56th Annual Conference on Decision and Control (CDC), Melbourne, Australie, pages 2947–2952, 2017.
- C. Boultifat, P. Chevrel, J. Lohéac, and M. Yagoubi. A parametrized reduced order model of 1D acoustic propagation system for robust spatial multi-point active noise attenuation. In IEEE 57th Annual Conference on Decision and Control (CDC), Miami, USA, 2018.

Et de 3 publications en cours de soumission ou de préparation :

- C. Boultifat, J. Lohéac, P. Chevrel, and M. Yagoubi. Exact Noise Estimation and Cancellation for 1D-Acoustic Propagation Systems. To be submitted in Mathematical Control and Related Fields, 2019.
- C. Boultifat, P. Chevrel, J. Lohéac, and M. Yagoubi. Using of a 1D model parameterized for the active multi-point control within a cavity : application to the LS2N Box, en cours de préparation.
- C. Boultifat, P. Chevrel, J. Lohéac, and M. Yagoubi. Towards a reduced order model of acoustic propagation in a cylindrical cavity, en cours de préparation.

Perspectives

Si nous avons proposé des démarches originales de modélisation et de synthèse de lois de commande liées au contrôle actif de bruit dans une cavité, de nombreux problèmes, sur ces deux registres, restent en suspens.

Nous donnons ci-dessous quelques perspectives intéressantes nous semblant devoir être envisagées pour la poursuite des travaux de cette thèse.

- Perspectives relatives à la démarche de la thèse quant à la modélisation des systèmes acoustiques ;

Du point de vue de la modélisation, le premier point consiste à proposer un modèle en 1D prenant en compte explicitement l'effet du pan coupé en l'extrémité de la cavité "LS2N box". L'effet de l'ajout d'obstacles à l'intérieur de la cavité mérite également d'être étudié, en amont d'applications pratiques. Les cavités principalement visées pourraient concerner

un habitacle automobile ou bien encore une pièce de forme cylindrique (chambre, bureau, etc.). À titre d'exemple, la présence de sièges dans l'habitacle automobile, pourrait être modélisée par l'ajout d'impédances distribuées au sein de la cavité modélisant l'habitacle. Dans ce travail de thèse, nous nous sommes limités au cas d'un signal de commande appliqué à l'une des extrémités spatiales du système acoustique. Un terme de source antibruit (contrôle interne) peut aussi être utilisé, même en pratique par utilisation du haut-parleur HP_3 comme une source antibruit dans la cavité "LS2N box" (cf. figure 1.3). Un modèle paramétré par la position pourra être développé pour cette configuration plus générale. L'obtention de ce modèle (transfert entre le signal de commande et la pression en tout point) nous semble toutefois non triviale. La question de la commandabilité sera à traiter dans ce type de configuration (contrôle interne).

— Perspectives relatives à la synthèse du contrôle actif de bruits.

La prise en compte d'un modèle incertain paramétré par la position du point d'atténuation permet d'envisager la synthèse d'une commande H_∞ robuste formulée via un critère min max comme suit :

$$\min_{K(s) \in \mathcal{RH}_\infty} \max_{\xi \in [\underline{\xi}, \bar{\xi}]} \|W_1(s)T_{y_m \rightarrow e}(s, \xi)\|_\infty, \quad (10.6)$$

Les notations de l'équation ci-dessus, ont été introduites dans la Section 10.3.

La résolution du problème ainsi formalisé permettrait de garantir une atténuation du bruit sur tout un intervalle spatial. Dans le cas où le modèle 1D n'est autre que l'approximation (incertitudes à prendre en compte) d'un modèle de propagation en 3D, c'est bien l'atténuation du bruit dans un volume qui est alors visée (cf. e.g. figure 10.12).

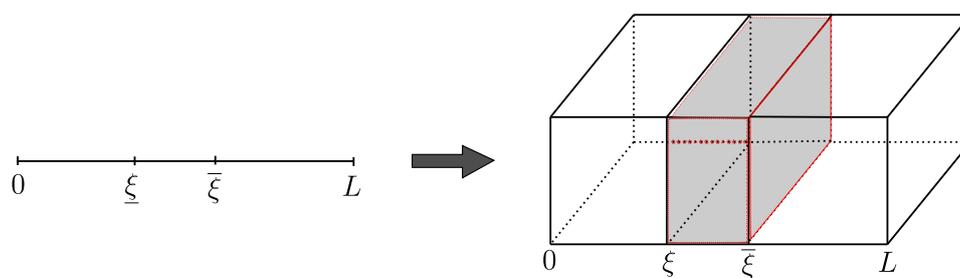


FIGURE 10.12 – Passage d'un segment à un volume dans une cavité ayant une forme cylindrique.

En effet, les résultats de simulation issus d'un système ayant une forme cylindrique montrent que les pressions sont uniformes sur une surface perpendiculaire à l'axe longitudinal du système.

Par ailleurs, certaines voies du diagramme présenté par la figure 1 n'ont pas été investiguées dans cette thèse. Elles représentent autant de perspectives possibles pour ce travail.

À titre d'exemple, les modèles obtenus par la méthode des éléments finis ou des différences finies pourraient être utilisés pour la conception d'une commande, en utilisant des méthodes profitant du caractère creux de la matrice d'état. Une autre voie consisterait à synthétiser une commande de dimension infinie basée sur un système acoustique paramétré par la position, lui-même de dimension infinie, ce qui permettrait d'éviter la phase de réduction du modèle.

Une dernière perspective concerne l'examen de l'intérêt d'un observateur générique utilisant le modèle paramétré par la position (proposé dans cette thèse, cf. Section 6.5) pour estimer la pression en des points arbitraires de la cavité.

Bibliographie

- [1] M. A. Ajaib. Numerical methods and causality in physics. *arXiv preprint arXiv :1302.5601*, 2013.
- [2] W. F. Ames. *Numerical methods for partial differential equations*. Academic press, 2014.
- [3] A. C. Antoulas. *Approximation of large-scale dynamical systems*, volume 6. Siam, 2005.
- [4] P. Apkarian. Tuning Controllers Against Multiple Design Requirements. In *American Control Conference (ACC)*, pages 3888–3893, Washington, 2013.
- [5] I. Ardekani and W. Abdulla. Convergence analysis of active noise control systems using root locus theory. In *Proceedings of second APSIPA Annual Summit and Conference*, pages 141–144, Biopolis, Singapore, 2010.
- [6] M. R. Bai and H. Lin. Plant uncertainty analysis in a duct active noise control problem by using the H_∞ theory. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 104(1) :237–247, 1998.
- [7] M. Belhocine. *Modélisation et analyse structurelle du fonctionnement dynamique des systèmes électriques*. PhD thesis, Université Paris-Saclay, 2016.
- [8] L. L. Beranek and I. L. Ver. Noise and vibration control engineering-principles and applications. *Noise and vibration control engineering-Principles and applications John Wiley & Sons, Inc., 814 p.*, 1992.
- [9] R. J. Bernhard. Road noise inside automobiles. *Proc. Active 95*, 1995.
- [10] S. Bijan, P. Jonathan, H. Babak, and C. Alain. An H_∞ -Optimal Alternative to the FxLMS Algorithm. In *AACC*, 1998.
- [11] G. Billoud. Active control at lord corporation - a reality. *Technical Report LL-6508, Lord Corporation*, 2003.
- [12] I. U. Borchers, U. Emborg, A. Sollo, E. H. Waterman, J. Paillard, P. N. Larsen, G. Venet, P. Goeransson, and V. Martin. Advanced study for active noise control in aircraft (asanca). In *Fourth Aircraft Interior Noise Workshop*, 1992.
- [13] P. Borne and J.-P. Richard. *Modélisation et identification des processus*, volume 1. Editions Technip, 1992.
- [14] C. Boultifat, P. Chevrel, J. Lohéac, and M. Yagoubi. A parametrized reduced order model of 1d acoustic propagation system for robust spatial multi-point active noise attenuation. In *IEEE 57th Annual Conference on Decision and Control (CDC)*, 2018.

-
- [15] C. Boultifat, P. Chevrel, J. Lohéac, M. Yagoubi, and P. Loiseau. One-dimensional acoustic propagation model and spatial multi-point active noise control. In *2017 IEEE 56th Annual Conference on Decision and Control (CDC)*, pages 2947–2952, Dec 2017.
- [16] C. Boultifat, P. Loiseau, P. Chevrel, J. Lohéac, and M. Yagoubi. FxLMS versus H_∞ Control for Broadband Acoustic Noise Attenuation in a Cavity. *IFAC-PapersOnLine*, 50(1) :9204–9210, 2017.
- [17] H. Brezis, P. G. Ciarlet, and J. L. Lions. *Analyse fonctionnelle : théorie et applications*, volume 91. Dunod Paris, 1999.
- [18] A. Budati and B. Rao. Performance analysis of feedforward adaptive noise canceller using nfxlms algorithm. *International Journal Of Innovative Research In Electrical, Electronics, Instrumentation And Control Engineering*, 2(9) :12–35, 2014.
- [19] J. Burgess. adaptive sound control in a duct : A computer simulation. *Journal of Acoustical Society of America*, 70(3) :715–726, 1981.
- [20] J. Carter. Active noise reduction. Technical report, BOSE CORP FRAMINGHAM MASS, 1984.
- [21] C. Cattaneo and L. Fontana. D’Alembert formula on finite one-dimensional networks. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 284(2) :403 – 424, 2003.
- [22] D. Chang and F. Chu. A new variable tap-length and step-size fxlms algorithm. *IEEE Signal Processing Letters*, 20(11) :1122–1125, 2013.
- [23] M. Clerc. Standard particle swarm optimisation, 2012.
- [24] A. Coville. *Approches de la commande robuste par positivite dans le cadre h-infini : application a la stabilisation de structures flexibles*. PhD thesis, Paris 6, 1992.
- [25] R. Curtain and K. Morris. Transfer functions of distributed parameter systems : A tutorial. *Automatica*, 45(5) :1101–1116, 2009.
- [26] R. Curtain and H. Zwart. Introduction to infinite dimensional linear theory systems, 1995.
- [27] R. Dáger and E. Zuazua. *Wave propagation, observation and control in 1-d flexible multi-structures*, volume 50. Springer Science & Business Media, 2006.
- [28] P. De Fonseca, P. Sas, and H. Van Brussel. Experimental study of the active sound transmission reduction through a double panel test section. *Acta Acustica united with Acustica*, 85(4) :538–546, 1999.
- [29] P. de Larminat. *Automatique appliquée*. Hermès Science : Lavoisier, 2007.
- [30] B. De Moor, J. Vandewalle, M. Moonen, L. Vandenberghe, and P. Van Miegheem. A geometrical strategy for the identification of state space models of linear multivariable systems with singular value decomposition. *IFAC Proceedings Volumes*, 21(9) :493–497, 1988.
- [31] C. A. De Moura and C. S. Kubrusly. The courant-friedrichs-lewy (cfl) condition. *AMC*, 10 :12, 2013.
- [32] N. Doelman. Adaptive and robust systems for the active control of noise and vibration. In *Proceedings of Adaptronic Congress*, pages 72–81, 1999.

-
- [33] R. Eberhart and J. Kennedy. A new optimizer using particle swarm theory. In *Micro Machine and Human Science, 1995. MHS'95*, pages 39–43. IEEE, 1995.
- [34] S. Elliot, P. Nelson, I. Stothers, and C. Boucher. In-flight experiments on the active control of propeller-induced cabin noise. *Journal of Sound and Vibration*, 140(2) :219–238, 1990.
- [35] S. Elliott. Active noise and vibration control in vehicles. In *Vehicle Noise and Vibration Refinement*, pages 235–251. Elsevier, 2010.
- [36] S. Elliott and P. Nelson. The active control of sound. *Electronics & communication engineering journal*, 2(4) :127–136, 1990.
- [37] S. Elliott, I. Stothers, P. Nelson, A. McDonald, D. Quinn, and T. Saunders. The active control of engine noise inside cars. In *INTER-NOISE and NOISE-CON Congress and Conference Proceedings*, pages 987–990. Institute of Noise Control Engineering, 1988.
- [38] S. J. Elliott. A review of active noise and vibration control in road vehicles, 2008.
- [39] S. J. Elliott and P. A. Nelson. Active noise control. *IEEE signal processing magazine*, 10(4) :12–35, 1993.
- [40] L. Eriksson, M. Allie, and R. Greiner. The selection and application of an iir adaptive filter for use in active sound control. *IEEE Transactions. Acoustics, Speech, Signal Processing*, 35(4) :433–437, 1987.
- [41] B. Fang, A. Kelkar, S. Joshi, and H.R.Pota. Modelling, system identification, and control of acoustic-structure dynamics in 3-D enclosures. *Control Engineering Practice*, 12(8) :989–1004, 2004.
- [42] W. Favoreel, S. Van Huffel, B. De Moor, V. Sima, and M. Verhaegen. Comparative study between three subspace identification algorithms. In *Control Conference (ECC), 1999 European*, pages 821–826. IEEE, 1999.
- [43] H. Feng and B. Z. Guo. A new active disturbance rejection control to output feedback stabilization for a one-dimensional anti-stable wave equation with disturbance. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 62(8) :3774–3787, Aug 2017.
- [44] H. Feng and B. Z. Guo. Observer design and exponential stabilization for wave equation in energy space by boundary displacement measurement only. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 62(3) :1438–1444, March 2017.
- [45] R. Fraanje, S. J. Elliott, and M. Verhaegen. Robustness of the filtered-x lms algorithm—part ii : robustness enhancement by minimal regularization for norm bounded uncertainty. *IEEE transactions on signal processing*, 55(8) :4038–4047, 2007.
- [46] N. V. George and G. Panda. Advances in active noise control : A survey, with emphasis on recent nonlinear techniques. *Signal Processing*, 93(2) :363–377, 2013.
- [47] M. Gugat. Exponential stabilization of the wave equation by Dirichlet integral feedback. *SIAM J. Control Optim.*, 53(1) :526–546, 2015.
- [48] M. Gugat and G. Leugering. Time delay in optimal control loops for wave equations. *ESAIM, Control Optim. Calc. Var.*, 23(1) :13–37, 2017.
- [49] M. Gugat, M. Sigalotti, and M. Tucsnak. Robustness analysis for the boundary control of the string equation. In *Proceedings of the 9th European Control Conference*, Kos, Greece, 2007.

-
- [50] D. Guicking and E. Lorenz. An active sound absorber with porous plate. *Journal of vibration, acoustics, stress, and reliability in design*, 106(3) :389–392, 1984.
- [51] C. Guigou and C. Fuller. Control of aircraft interior broadband noise with foam-pvdf smart skin. *Journal of Sound and Vibration*, 220(3) :541–557, 1999.
- [52] B. Z. Guo and F. F. Jin. Output feedback stabilization for one-dimensional wave equation subject to boundary disturbance. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 60(3) :824–830, March 2015.
- [53] B. Z. Guo and C. Z. Xu. The stabilization of a one-dimensional wave equation by boundary feedback with noncollocated observation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 52(2) :371–377, Feb 2007.
- [54] W. Guo, Z.-C. Shao, and M. Krstic. Adaptive rejection of harmonic disturbance anticollocated with control in 1d wave equation. *Automatica*, 79 :17 – 26, 2017.
- [55] H. R. Gupta and R. Mehra. Power spectrum estimation using Welch method for various window techniques. *International Journal of Scientific Research Engineering and Technology (IJSRET)*, 2(6) :389–392, 2013.
- [56] B. Haverkamp. Efficient implementation of subspace method identification algorithms, 1999.
- [57] A. Hull and C. Radcliffe. Experimental verification of the nonself-adjoint state space duct model. *Journal of vibration and acoustics*, 114(3) :404–408, 1992.
- [58] D. A. Ivanov and M. M. Potapov. Approximate solution to a time optimal boundary control problem for the wave equation. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 291(1) :102–117, 2015.
- [59] J. Jouhaneau. *Microphones*. Ed. Techniques Ingénieur, 1992.
- [60] M. Kassem, C. Soize, and L. Gagliardini. Low-and medium-frequency vibroacoustic analysis of complex structures using a statistical computational model and an energy density field formulation. In *International Conference on Noise and Vibration Engineering*, volume 1, pages Pages–3849. Katholieke Univ Leuven, Dept Werktuigkunde, Celestijnenlaan 300B, Heverlee, B-3001, Belgium, 2008.
- [61] M. Keller. *Contrôle actif du bruit basses fréquences à l’intérieur d’un hélicoptère*. PhD thesis, Université de Provence-Aix-Marseille I, 2008.
- [62] V. Komornik. *Exact controllability and stabilization. The multiplier method*. Chichester : Wiley ; Paris : Masson, 1994.
- [63] S. M. Kuo and D. Morgan. *Active noise control systems : algorithms and DSP implementations*. John Wiley & Sons, Inc., 1995.
- [64] S. M. Kuo and D. R. Morgan. Active noise control : a tutorial review. *Proceedings of the IEEE*, 87(6) :943–973, Jun 1999.
- [65] P. R. G. Kurka and H. N. Cambraia. Application of a multivariable input–output subspace identification technique in structural analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 312(3) :461–475, 2008.
- [66] W. E. Larimore. Automated multivariable system identification and industrial applications. In *American Control Conference, 1999. Proceedings of the 1999*, volume 2, pages 1148–1162. IEEE, 1999.

-
- [67] M. Larsson. *Active Noise Control in Ventilation Systems : Practical Implementation Aspects*. PhD thesis, Blekinge Institute of Technology, 2008.
- [68] J. le Rond D’Alembert. Recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibrations. *Histoire de l’Académie Royale des Sciences et Belles Lettres (Année 1747)*, 3 :214–249, 1747.
- [69] B. Y. Levin. *Lectures on entire functions*, volume 150. American Mathematical Soc., 1996.
- [70] J. Lions. Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed systems. *SIAM Rev.*, 30(1) :1–68, 1988.
- [71] J. Lions and E. Magenes. Non-homogeneous boundary value problems and applications. Vol. I. Translated from the French by P. Kenneth. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Band 181. Berlin-Heidelberg-New York : Springer-Verlag. XVI,357 p. DM 78.00, 1972.
- [72] J. Lions and E. Magenes. Non-homogeneous boundary value problems and applications. Vol. II. Translated from the French by P. Kenneth. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Band 182. Berlin-Heidelberg-New York : Springer-Verlag. X, 242 p. Cloth DM 58.00, 1972.
- [73] L. Ljung. System identification. In *Signal analysis and prediction*, pages 163–173. Springer, 1998.
- [74] D. Logan. A first course in the finite element method : Cengage. *Learning*, 2011.
- [75] J. D. Logan. *An introduction to nonlinear partial differential equations*, volume 89. John Wiley & Sons, 2008.
- [76] P. Loiseau. *Contrôle actif acoustique du bruit large bande dans un habitacle automobile*. PhD thesis, Nantes, Ecole des Mines, 2016.
- [77] P. Loiseau, P. Chevrel, M. Yagoubi, and J.-M. Duffal. Broadband Active Noise Control Design through Nonsmooth H_∞ Synthesis. In *IFAC Symposium on ROBust CONtrol Design (ROCOND)*, pages 395–400, Bratislava, Slovak Republic, 2015.
- [78] P. Loiseau, P. Chevrel, M. Yagoubi, and J.-M. Duffal. H_∞ Multi-objective and Multi-model MIMO control design for Broadband noise attenuation in an enclosure. In *European Control Conference*, pages 643–648, Aalborg, Denmark, 2016.
- [79] P. Loiseau, P. Chevrel, M. Yagoubi, and J.-M. Duffal. Investigating achievable performances for robust broadband active noise control in an enclosure. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2017.
- [80] M. Morari and E. Zafiriou. *Robust process control*. Morari, 1989.
- [81] D. Morgan. An analysis of multiple correlation cancellation loops with a filter in the auxiliary path. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 28(4) :454–467, 1980.
- [82] W. Nabil. *Smart Foam for Active Vibration and Noise Control*. PhD thesis, dissertation Thesis, Department of Mechanical Engineering, University of Maryland, 2004.
- [83] D. Nefske and S. Sung. *Noise and Vibration Control Engineering : Principles and Applications, 2nd Edition*. Wiley Online Library, 2005.

-
- [84] R. T. O'Brien, J. M. Watkins, G. E. Piper, and D. C. Baumann. Hscr ; infin ; active noise control of fan noise in an acoustic duct. In *Proceedings of the 2000 American Control Conference. ACC (IEEE Cat. No.00CH36334)*, volume 5, pages 3028–3032 vol.5, 2000.
- [85] S.-H. Oh, H.-s. Kim, and Y. Park. Active control of road booming noise in automotive interiors. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 111(1) :180–188, 2002.
- [86] P. Overschee and B. Moor. N4sid : Subspace algorithms for identification of combined deterministic-stochastic systems. *Automatica, special Issue on Statistical Signal Processing and Control*, 30(1) :75–93, 1994.
- [87] L. Paul. Process of silencing sound oscillations, June 9 1936. US Patent 2,043,416.
- [88] I. R. Petersen. Multivariable control of noise in an acoustic duct. In *European Control Conference*, pages 414–419, Porto, Portugal, 2001.
- [89] I. R. Petersen and H. R. Pota. Experiments in feedback control of an acoustic duct. In *International Conference on Control Applications*, pages 261–266, Anchorage, Alaska, USA, 2000.
- [90] H. R. Pota and A. G. Kelkar. Modeling and control of acoustic ducts. *Journal of Vibration and Acoustics*, 123(1) :2–10, 2001.
- [91] M. Potapov. Variational approach to stable numerical approximation of optimal dirichlet boundary controls for the wave equation. *International Journal of Mathematics, Game Theory, and Algebra*, 21(2/3) :273, 2012.
- [92] M. Potapov and D. Ivanov. Problems of two-sided boundary control for the wave equation on subcritical intervals in classes of strong generalized solutions. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 287(1) :145–155, 2014.
- [93] C. Poussot-Vassal and C. Roos. Flexible aircraft reduced-order ltv model generation from a set of large-scale lti models. In *Proceedings of the 2011 American Control Conference*, pages 745–750, June 2011.
- [94] B. Rafaely and S. J. Elliott. H_2/H_∞ ; active control of sound in a headrest : design and implementation. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 7(1) :79–84, Jan 1999.
- [95] P.-A. Raviart, J.-M. Thomas, P. G. Ciarlet, and J. L. Lions. *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*, volume 2. Dunod Paris, 1998.
- [96] J. N. Reddy. *Solutions Manual for an Introduction to the Finite Element Method*. McGraw-Hill, 2017.
- [97] L. E. Rees. *Active sound-profiling for automobiles*. PhD thesis, University of Southampton, 2005.
- [98] W. Rudin. *Real and complex analysis. 3rd ed.* New York, NY : McGraw-Hill, 3rd ed. edition, 1987.
- [99] M. Rupp and A. H. Sayed. Robust fxlms algorithms with improved convergence performance. *IEEE Transactions on Speech and Audio Processing*, 6(1) :78–85, 1998.

-
- [100] G. Sandou and B. Lassami. Optimisation par essaim particulaire pour la synthèse ou la retouche de correcteurs. In *7ième Conférence Internationale de Modélisation et Simulation MOSIM*, pages CD-ROM, 2008.
- [101] H. Sano. Recent application of active noise and vibration control to automobiles. *Active 2002*, pages 29–42, 2002.
- [102] H. Sano, T. Inoue, A. Takahashi, K. Terai, and Y. Nakamura. Active control system for low-frequency road noise combined with an audio system. *IEEE Transactions on Speech and Audio Processing*, 9(7) :755–763, Oct 2001.
- [103] E. D. Simshauser and M. E. Hawley. The noise-cancelling headset—an active ear defender. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 27(1) :207–207, 1955.
- [104] T. J. Sutton. Active control of road noise inside vehicles. *Noise Contr. Eng. J.*, 42(4) :137–147, 1994.
- [105] P. Thanigai, S. M. Kuo, and R. Yenduri. Nonlinear active noise control for infant incubators in neo-natal intensive care units. In *Acoustics, Speech and Signal Processing, 2007. ICASSP 2007. IEEE International Conference on*, volume 1, pages I–109. IEEE, 2007.
- [106] P. Van Overschee and B. De Moor. A unifying theorem for three subspace system identification algorithms. *Automatica*, 31(12) :1853–1864, 1995.
- [107] P. Van Overschee and B. De Moor. Continuous-time frequency domain subspace system identification. *Signal Processing*, 52(2) :179–194, 1996.
- [108] M. Viberg. Subspace methods in system identification. *IFAC Proceedings Volumes*, 27(8) :1–12, 1994.
- [109] L. Vicente and E. Masgrau. Novel fxlms convergence condition with deterministic reference. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 54(10) :3768–3774, 2006.
- [110] B. Widrow and M. Hoff. Adaptive switching circuits. *Proc. Of WESCON Conv*, 1960.
- [111] B. Widrow, D. Schur, and S. Shaffer. On adaptive inverse control. In *Processing. 15th Asilomar Conference. Circuits, Systems and Computers*, pages 185–195, 1981.
- [112] Z. Yang. Active noise control for a one-dimensional acoustic duct using feedback control techniques : Modelling and simulation. *life*, 6 :12, 2004.
- [113] Z. Yang. Design of active noise control using feedback control techniques for an acoustic duct system. In *Robotics, Automation and Mechatronics, 2004 IEEE Conference on*, volume 1, pages 467–472. IEEE, 2004.
- [114] Z. Yang and S. Podlech. Theoretical modeling issue in active noise control for a one-dimensional acoustic duct system. In *Robotics and Biomimetics, 2008. ROBIO 2008. IEEE International Conference on*, pages 1249–1254. IEEE, 2009.
- [115] R. M. Young. *An Introduction to Non-Harmonic Fourier Series, Revised Edition*, 93. Elsevier, 2001.
- [116] S.-H. Yu and J.-S. Hu. Controller design for active noise cancellation headphones using experimental raw data. *IEEE/ASME transactions on mechatronics*, 6(4) :483–490, 2001.
- [117] O. Yuksel and C. Yilmaz. Active noise control in a duct with flow. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 136(3) :031014, 2014.

- [118] F. Zhang, X.-F. SHI, and X.-Z. ZHANG. Study and Simulation of Welch Power Spectrum Estimation Method [J]. *Journal of Xi'an Technological University*, 4 :013, 2009.
- [119] Y. Zou, S. Chan, and T. Ng. Least mean-estimate algorithms for robust adaptive filtering in impulse noise. *IEEE transactions on circuits and systems-II : Analog and digital signal processing*, 47(12) :1564–1569, 2000.

Annexes

Annexe A

Densité spectrale

Dans cette annexe, on va rappeler la définition de la fonction d'autocorrélation et de la densité spectrale de puissance d'un signal x (cf. [13]). Avant de les définir, nous rappelons les définitions des processus stationnaires et des processus ergodiques.

Processus stationnaire : Un processus aléatoire est dite stationnaire si ses caractéristiques statistiques sont indépendantes du temps.

Processus ergodique : Un processus est ergodique si on peut remplacer les moyennes d'ensemble par des moyennes temporelles. C'est à dire, il y a autant d'informations dans une réalisation suffisamment longue que dans un grand nombre de réalisations de durée moindre.

A.1 Fonction d'autocorrélation

Un processus aléatoire stationnaire et ergodique $X(t)$ est caractérisé par sa moyenne $\mathbb{E}(X(t))$ et sa fonction d'autocorrélation $R_{xx}(\tau)$:

$$\mathbb{E}(X(t)) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt, \quad (\text{A.1})$$

où x est une réalisation particulière du processus $X(t)$.

$$R_{xx}(\tau) = \mathbb{E}(\dot{X}(t)\dot{X}(t - \tau)) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \dot{x}(t)\dot{x}(t - \tau) dt, \quad (\text{A.2})$$

avec $\dot{X}(t) = X(t) - \mathbb{E}(X(t))$, $\dot{x}(t) = x(t) - \mathbb{E}(X(t))$, $R_{xx}(0) = Var$ et $R_{xx}(\tau) = R_{xx}(-\tau)$, Var est la variance de $x(t)$.

A.2 Densité spectrale de puissance

La densité spectrale de puissance $S_{xx}(j\omega)$ d'un signal x , est obtenue par le calcul de la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation du signal x :

$$S_{xx}(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad (\text{A.3})$$

Dans le cas d'un système linéaire décrit par sa fonction de transfert $G(j\omega)$, cette fonction peut être exprimée en fonction de la densité spectrale de puissance du signal de sortie y et du signal de entrée u :

$$S_{yy}(j\omega) = G(-j\omega)S_{uu}(j\omega)G(j\omega) \quad (\text{A.4})$$

La fonction $G(j\omega)$ peut être aussi exprimée en fonction de l'interspectre :

$$S_{yu}(j\omega) = G(-j\omega)S_{uu}(j\omega), \quad (\text{A.5})$$

avec $S_{yu}(j\omega) = S_{uy}(-j\omega)$.

A.3 Indicateur de performance

L'indicateur de performance utilisé dans cette thèse, pour évaluer les performances d'un dispositif de contrôle actif, est basé sur la comparaison des spectres S_{ee} et $S_{y_p y_p}$ des signaux e et y_p (cf, [102, 61]), qui sont reliés par la fonction de sensibilité S :

$$e = S y_p. \quad (\text{A.6})$$

Dans le cas monovariante, à l'aide de (A.4) et (A.6), on peut écrire la relation liant les spectres des signaux e et y_p :

$$S_{ee}(j\omega) = |S(j\omega)|^2 S_{y_p y_p}(j\omega). \quad (\text{A.7})$$

En faisant le rapport des spectres des signaux e et y_p , on obtient l'indicateur de performance monovariante en dB :

$$20 \log_{10} (|S(j\omega)|) = 10 \log_{10} \left(\frac{S_{ee}(j\omega)}{S_{y_p y_p}(j\omega)} \right). \quad (\text{A.8})$$

Annexe B

Optimisation non-linéaire PSO

L'optimisation PSO (optimisation par essaim particulaire) est une méthode d'optimisation stochastique, appartenant à la classe de méthode des « métaheuristiques », qui a été introduite dans [33]. Cette méthode est basée sur le comportement social d'organismes vivants tels que les bancs de poissons et les groupes d'oiseaux. Les explications données dans la suite, concernant les étapes d'optimisation PSO, sont issues de [100].

Soit le problème d'optimisation générique :

$$\min_{x \in \mathcal{X}} J(x) \quad (\text{B.1})$$

On considère un ensemble de P particules dans l'espace de recherche \mathcal{X} . Chaque particule est animée d'un certain mouvement dans cet espace, et garde en mémoire la position où elle a obtenu sa meilleure performance au sens du critère à optimiser J . En outre, chaque particule est en communication avec un ensemble de particules « amies », appelé voisinage. Chaque particule connaît donc la meilleure position obtenue par l'une des particules de son voisinage. On note :

- x_p^k position de la particule p lors de l'itération k ;
- v_p^k vitesse de la particule p lors de l'itération k ;
- b_p^k position où la particule p a obtenu sa meilleure valeur, depuis le début de l'algorithme, jusqu'à l'itération k ;
- g_p^k position où les particules du voisinage de la particule p ont obtenu leur meilleure valeur, depuis le début de l'algorithme, jusqu'à l'itération k .

À chaque itération, l'évolution des particules dans l'espace de recherche est selon la règle :

$$\begin{aligned} v_p^{k+1} &= \mathcal{I}v_p^k + c_1 \otimes (b_p^k - x_p^k) + c_2 \otimes (g_p^k - x_p^k) \\ x_p^{k+1} &= x_p^k + v_p^{k+1} \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

où \mathcal{I} est un facteur d'inertie, c_1 (resp. c_2) est un vecteur de longueur égale à la dimension du problème d'optimisation, avec des composantes tirées selon une distribution uniforme dans $[0, \bar{c}_1]$ (resp. $[0, \bar{c}_2]$) et \otimes signifie multiplication terme à terme entre deux vecteurs.

À chaque itération, l'algorithme construit une combinaison aléatoire de trois tendances :

- Continuer sur sa lancée ;
- Revenir sur ses pas ;

— Agir comme les autres particules.

La figure B.1 illustre la construction des déplacements des particules.

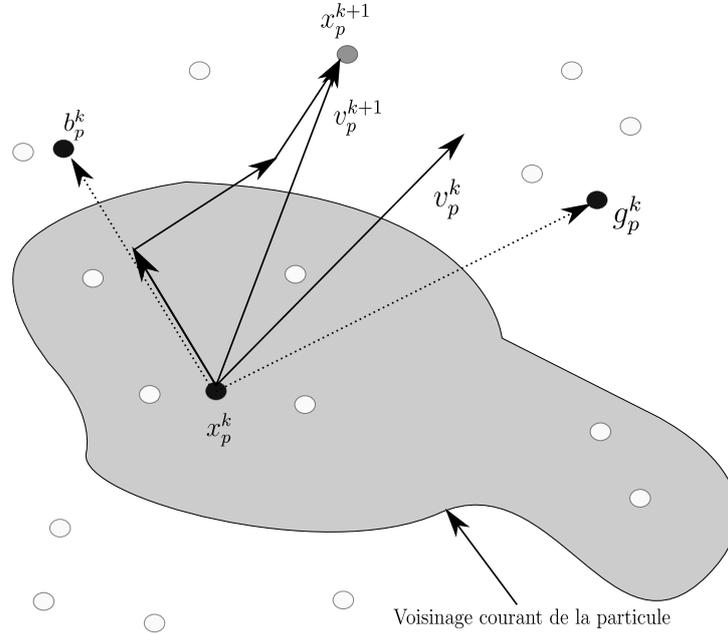


FIGURE B.1 – Représentation graphique de la construction de déplacement.

Le pseudo-code de l'algorithme classique de l'optimisation PSO, est le suivant :

Initialisation des particules aléatoirement $(x_p^0, v_p^0 : p = 1, \dots, P)$,

Pour $k = 0, \dots, K$,

Pour $p = 0, \dots, P$,

 Faire évoluer la particule p selon l'équation (B.2),

 Évaluer la nouvelle position $J(x_p^k)$,

Si $J(x_p^{k+1}) < J(b_p^k)$,

$b_p^{k+1} = x_p^{k+1}$,

Sinon,

$b_p^{k+1} = b_p^k$,

Fin Si,

Fin Pour,

 Remettre à jour les g_p^{k+1} ,

Fin Pour,

Dans le Chapitre 6, nous avons utilisé les réglages dits « standards », validés par James Kennedy et Maurice Clerc [23] :

— Taille de l'essaim : $10 + \sqrt{Dim}$, Dim est la dimension de \mathcal{X} (nombre de paramètres à optimiser) ;

— $\mathcal{I} = \frac{1}{2 \ln(2)}$;

-
- $\bar{c}_1 = \bar{c}_2 = 0.5 + \ln(2)$;
 - Taille du voisinage des particules égale 3 (chaque particule est reliée à 3 particules).

Titre : Contrôle acoustique actif du bruit dans une cavité fermée.

Mots clés : Contrôle actif du bruit, Equation des ondes, Commande robuste, Commande adaptative, Réduction de modèle.

Résumé : Cette thèse porte sur le contrôle acoustique actif (ANC) dans une cavité. L'objectif est d'atténuer l'effet d'une onde sonore perturbatrice en des points ou dans un volume. Ceci est réalisé à l'aide d'un contre-bruit généré, par exemple, par un haut-parleur. Cette étude requiert l'utilisation de modèles dynamiques rendant compte de l'évolution des pressions aux points d'intérêt en fonction des bruits exogènes. Ce modèle peut être obtenu par une identification fréquentielle des réponses point-à-point ou en utilisant le modèle physique sous-jacent (équation des ondes). Dans ce dernier cas, la recherche d'un modèle de dimension finie est souvent un préalable à l'étude conceptuelle d'un système d'ANC.

Les contributions de cette thèse portent donc sur l'élaboration de différents modèles simplifiés paramétrés par la position pour les systèmes acoustiques et sur la conception de lois de com-

mande pour l'ANC.

Le premier volet de la thèse est dédié à l'élaboration de différents modèles simplifiés de système de propagation acoustique au sein d'une cavité. Pour cela, les simplifications envisagées peuvent être de nature spatiale autant que fréquentielle. Nous montrons notamment qu'il est possible, sous certaines conditions, d'approximer le système 3D par un système 1D. Ceci a été mis en évidence expérimentalement sur le banc d'essai LS2N Box. Le second volet porte sur la conception de lois de commande. En premier lieu, les stratégies de commandes couramment utilisées pour l'ANC sont comparées. L'effet de la commande multi-objectif H_∞ en différents points voisins des points d'atténuation est analysé. La possibilité d'une annulation parfaite du bruit en un point est aussi discutée.

Title: Active acoustic noise control in a closed cavity.

Keywords: Active Noise Control, Wave Equation, Robust Control, Adaptive Control, Model Reduction.

Abstract: This thesis deals with active noise control (ANC) in a cavity. The aim is to mitigate the effect of a disturbing sound wave at some points or in a volume. This is achieved using an anti-noise generated, for example, by a loudspeaker. This study requires the use of dynamic models that report changes in pressure at points of interest in response to exogenous noises. Such models can be obtained by frequency identification of point-to-point responses or by using the underlying physical model (wave equation). In the latter case, the search for a low-complexity model (finite-dimensional model) is often a prerequisite for the conceptual study of an active control system. The contributions of this thesis concern the development of different simplified models parameterized by the spatial position for acoustic systems, and the design of control laws

for noise attenuation. The first part of the thesis is dedicated to the development of various simplified models of acoustic propagation system within a cavity. For that, the simplifications envisaged can be of spatial nature as much as frequential. We show in particular that it is possible, under certain conditions, to approximate the 3D system by a 1D system. This has been demonstrated experimentally on the prototype system, LS2N Box. The second part of the thesis deals with the design of control laws. First, the control strategies commonly used for ANC are compared. The effect of multi-objective H_∞ control at different spatial positions close to the attenuation points is analyzed. The possibility of perfect noise cancellation at one point is also discussed.