



HAL
open science

Dynamique des structures composites linéaires et non-linéaires en présence d'endommagement

Saber Mahmoudi

► **To cite this version:**

Saber Mahmoudi. Dynamique des structures composites linéaires et non-linéaires en présence d'endommagement. Vibrations [physics.class-ph]. Université Bourgogne Franche-Comté, 2017. Français. NNT : 2017UBFCD052 . tel-02096308

HAL Id: tel-02096308

<https://theses.hal.science/tel-02096308>

Submitted on 11 Apr 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

SPIM

Thèse de Doctorat

UFC

école doctorale sciences pour l'ingénieur et microtechniques
UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ

**Dynamique des structures composites
linéaire et non-linéaire en présence
d'endommagement**

■ SABER MAHMOUDI

SPIM

Thèse de Doctorat



école doctorale **sciences pour l'ingénieur et microtechniques**
UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ

Projet de thèse présenté par

Saber MAHMOUDI

pour obtenir le

GRADE DE DOCTEUR

DE L'UNIVERSITÉ DE BOURGOGNE FRANCHE-COMTÉ

spécialité : Sciences pour l'Ingénieur

Dynamique des structures composites linéaire et non-linéaire en présence d'endommagement

Soutenance prévue le 28 Mars 2017 devant le jury :

Damien SOULAT	Professeur, ENSAIT, Roubaix	Rapporteur
El Mostafa DAYA	Professeur, Université de Lorraine, Metz	Rapporteur
Michel MASSENZIO	Professeur, Université Lyon 1	Examineur
Jean-Marc CADOU	Maître de conférences HDR, UBS, Lorient	Examineur
Noureddine BOUHADDI	Professeur, UBFC, Besançon	Directeur
Mohamed Lamine BOUBAKAR	Professeur, UBFC, Besançon	Co-directeur
Frédérique TRIVAUDEY	Maître de conférences, ENSMM , Besançon	Co-encadrante

TABLE DES MATIÈRES

Résumé	7
Abstract	9
Introduction	11
1 Etat de l'art	13
1.1 Matériaux composites	14
1.1.1 Matrices	15
1.1.2 Fibres	19
1.2 Dégradation des structures composites stratifiées	21
1.2.1 Endommagement dans les composites	21
1.2.2 Détection et localisation de l'endommagement	34
1.3 Approches de méta-modélisation	40
1.3.1 Réseaux de neurones artificiels	40
1.3.2 Réduction de modèle	44
1.4 Conclusion	51
2 Méthodes de résolution des problèmes de dynamique des structures	53
2.1 Méthodes de résolution	54
2.1.1 Schéma de Newmark pour les systèmes linéaires	55
2.1.2 Schéma de Newmark pour les systèmes non-linéaires	57
2.1.3 Méthodes itératives de Newton	60
2.2 Théories utilisées dans la formulation numérique de structures composites	64
2.2.1 Théorie classique des stratifiés CLT	64
2.2.2 Théorie de la déformation de cisaillement de premier ordre FSDT	65
2.2.3 Théorie de la déformation de cisaillement d'ordre supérieur HSDT	67
2.3 Vibrations linéaires des structures composites	67

TABLE DES MATIÈRES

2.3.1	Relation déplacement-déformation	68
2.3.2	Formulation variationnelle	71
2.3.3	Discrétisation par éléments finis	72
2.3.4	Modes propres de vibration	75
2.4	Méthodes de réduction de modèles éléments finis	80
2.4.1	Projection dans une base de Ritz	80
2.4.2	Méthode de Craig-Bampton	81
2.5	Conclusion	84
3	Dynamique des structures composites avec endommagement bilatéral	87
3.1	Description physique de l'endommagement	88
3.1.1	Définition de la variable d'endommagement	89
3.1.2	Concept de contrainte effective - Équivalence en déformation	90
3.2	Modèle d'endommagement bilatéral	92
3.2.1	Matrice d'endommagement	93
3.2.2	Aspect thermodynamique	95
3.3	Méthodes de résolution	97
3.3.1	Calcul de l'endommagement	97
3.3.2	Approche de réduction de modèle	99
3.4	Résultats numériques	104
3.4.1	Endommagement : détection et effets	104
3.4.2	Validation de la méthode des réseaux de neurones	109
3.4.3	Application du méta-modèle pour l'analyse dynamique d'assemblage de structures composites	113
3.5	Conclusion	121
4	Structures composites en grands déplacements avec endommagement unilatéral	123
4.1	Modèle d'endommagement unilatéral	124
4.1.1	Cinétique de l'endommagement	124
4.1.2	Validité du modèle d'endommagement unilatéral	126
4.2	Structures composites en grands déplacements	135
4.2.1	Formulations variationnelles	135
4.2.2	Formulation lagrangienne actualisée : ULFI	137
4.3	Applications numériques	140
4.3.1	Plaques saine en grands déplacements	140

4.3.2 Structures stratifiées endommagées en grands déplacements . . .	143
4.4 Application du RNA	150
4.5 Conclusion	157
Conclusion générale et perspectives	159
Liste des publications	163
Bibliographie	179
Listes des figures	187
Listes des tables	189

RÉSUMÉ

Les structures composites sont souvent exposées à des ambiances dynamiques plus ou moins sévères. Ces vibrations peuvent développer différentes formes d'endommagement (fracture des fibres, délamination, fissuration de la matrice...). Les défauts locaux se propagent et affectent les propriétés mécaniques de la structure modifiant ainsi son comportement dynamique global. Ces changements peuvent induire une dégradation rapide de la structure et une réduction de sa durée de vie. La thèse a pour objectif la mise en œuvre de modèles de comportement pour le dimensionnement de structures complexes intégrant des sous-structures composites susceptibles d'être endommagées. La méthode des éléments finis est utilisée pour modéliser le comportement vibratoire linéaire et non-linéaire de ces structures et l'endommagement est introduit via un modèle bilatéral, dans un premier temps. Durant le processus de résolution, une des difficultés rencontrées est le coût de calcul très élevé. Ainsi, un méta-modèle a été développé basé sur les réseaux de neurones artificiels couplé avec la méthode de condensation par sous-structuration de Craig-Bampton. Les réseaux de neurones artificiels permettent d'estimer, à moindre coût numérique, le niveau d'endommagement sans avoir recours au calcul exact. Le modèle d'endommagement bilatéral n'est pas adapté au cas de chargements alternés ou périodiques. Par conséquent, la deuxième partie de la thèse est orientée vers le développement d'un modèle d'endommagement unilatéral qui donne une meilleure description du comportement mécanique lorsque les micro-fissures sont fermées. De plus, dans plusieurs applications industrielles, les structures composites utilisées sont de faible épaisseur. Par conséquent, elles peuvent avoir naturellement un comportement vibratoire non-linéaire de type grands déplacements. Le modèle de comportement dynamique en grands déplacements et en présence de la non-linéarité matérielle d'endommagement est développé et validé. A l'issue de ces travaux de thèse, un outil numérique implémenté sur MATLAB® a été développé intégrant deux modèles d'endommagement, bilatéral et unilatéral et une méta-modélisation permettant la localisation et l'estimation de l'endommagement ainsi que la prédiction de la réponse dynamique des structures

composites, totalement ou localement, endommagées. Le méta-modèle proposé permet de réduire significativement le coût de calcul tout en assurant une bonne précision en termes de localisation et d'estimation du niveau d'endommagement. Cet outil peut s'avérer utile pour diverses applications dans le domaine de surveillance de l'état de santé des structures composites.

Mots clés : Structure composite - Vibrations non-linéaires - Détection d'endommagement - Réduction de modèle - Réseaux de neurones artificiels - Intégration temporelle.

ABSTRACT

Composite structures are often exposed to more or less severe dynamic perturbations. These vibrations can develop different forms of damage (fiber fracture, delamination, cracking of the matrix, etc.). Local defects propagate and affect the mechanical properties of the structure resulting to modify its global dynamic behavior. These changes can lead to the degradation of the structure and the reduction in its lifetime. This thesis focuses on the implementation of behavior models for the dimensioning of complex structures integrating damaged composite sub-structures. The finite element method is used to model the linear and nonlinear vibration behavior of these structures where the damage is introduced, initially, via a bilateral model. Since the high computational costs during the solving process, a meta-model was developed based on artificial neural networks coupled with the condensation method of Craig-Bampton. Artificial neural networks permit to estimate the damage severity at a lower numerical cost without resorting to exact calculation. The bilateral damage model is not adapted to the case of periodic loads. Consequently, the second part of the thesis is oriented towards the development of a unilateral damage model which gives a better description of the mechanical behavior when the micro-cracks are closed. Moreover, in several industrial applications, the used composite structures have small thickness. Therefore, they can naturally have a geometric non-linear dynamic behavior. The model of dynamic behavior in large displacements and in the presence of material non-linearity of damage is developed and validated. At the end of this thesis, a numerical tool implemented on MATLAB® software was developed integrating two models of damage, bilateral and unilateral, and a meta-modeling allowing the localization and the estimation of the damage as well as the prediction of the linear and non-linear dynamic responses of composite structures, totally or locally, damaged. The proposed meta-model reduces significantly the computational cost and ensuring a good accuracy in terms of localization and estimation of the damage severity. Thereby, this tool can be useful in life-time estimation and monitoring strategies of composite structures.

Keywords : Composite structure - Nonlinear dynamics - Damage detection - Model reduction - Artificial neural networks – Time integration.

INTRODUCTION GÉNÉRALE

L'utilisation des matériaux composites dans divers domaines industriels et plus particulièrement le secteur aéronautique s'est significativement accrue grâce à leur bon rapport rigidité sur masse. Ils ont progressivement remplacé les matériaux métalliques dans les parties structurales des avions comme en témoigne aujourd'hui la composition de l'AIRBUS A350 XWB et du Boeing 787 Dreamliner avec respectivement 53% et 50% en masse de matériaux composites. Cependant, du fait de leur nature hétérogène, ces matériaux présentent des inconvénients liés principalement à leur sensibilité à l'apparition des défauts. Ainsi, vis-à-vis d'exigences de sécurité, l'utilisation des matériaux composites nécessite la connaissance des mécanismes d'endommagement qui peuvent se produire dans ces matériaux hétérogènes.

Dans leurs applications, les structures composites sont souvent exposées à des ambiances dynamiques plus ou moins sévères. Ces vibrations peuvent développer différentes formes d'endommagement (rupture des fibres, délaminage, fissuration de la matrice,...). Les défauts locaux se propagent et affectent les propriétés mécaniques de la structure modifiant ainsi sa réponse dynamique globale. Ces changements peuvent induire une dégradation rapide de la structure et une réduction de sa durée de vie. Dans ce contexte, les communautés scientifiques et industrielles s'interrogent encore sur bon nombre de problèmes : comment les structures composites vont-elles supporter l'endommagement ? Comment intégrer l'endommagement dans la phase de dimensionnement ? Comment détecter et quantifier l'endommagement ?

L'objectif de ce travail de thèse est d'étudier mutuellement l'influence du comportement non-linéaire d'un matériau composite sur la réponse dynamique globale de la structure et les modifications de comportement induites par cette réponse sur le matériau, notamment en termes d'évolution local de l'endommagement. La nécessité d'une modélisation fine de la structure composite pour une bonne représentation du phénomène non-linéaire de l'endommagement conduit à des coûts de calcul très élevés. Ainsi, le présent travail est orienté vers le développement de stratégies de méta-

modélisation afin de réduire le temps de calcul. Ce travail s'inscrit dans une démarche de développement d'un outil d'aide à la décision pour le dimensionnement en présence de sous-structures composites endommageables.

Dans le premier chapitre, on présente une revue bibliographique des formes d'endommagement rencontrées dans les matériaux composites et quelques travaux liés à la modélisation du phénomène d'endommagement. On présentera, par la suite, un état de l'art sur les méthodes de surveillance de l'état de santé des structures. Cette partie présente notamment les méthodes numériques de détection, de localisation et de quantification de l'endommagement. Enfin, on donnera un aperçu des approches de méta-modélisation effectuées dans la littérature, particulièrement l'application des réseaux de neurones artificiels dans la détection de l'endommagement et l'utilisation des méthodes de synthèse modale pour la réduction de modèles éléments finis.

Le deuxième chapitre est consacré aux méthodes itératives de résolution des problèmes de dynamiques des structures dans le domaine temporel. Ensuite, la modélisation par éléments finis des structures composites est présentée à travers plusieurs théories. Enfin, des approches de réduction de modèles sont détaillées notamment la méthode de sous-structuration de Craig-Bampton.

Le troisième chapitre porte sur la simulation numérique du comportement dynamique des structures composites endommagées et particulièrement soumises à des excitations de type choc. On commence par présenter le modèle d'endommagement utilisé dans le présent travail où seule la micro-fissuration matricielle est prise en compte pour décrire l'endommagement. Puis, à travers les résultats de simulations numériques, l'effet mutuel entre l'endommagement et le comportement global de la structure est discuté. Par la suite, dans le but de réduire les coûts de calcul, on propose un méta-modèle qui combine les réseaux de neurones et la méthode de sous-structuration dynamique de Craig-Bampton pour étudier le comportement des structures localement endommagées.

Dans le dernier chapitre, on propose un modèle d'endommagement unilatéral pour prendre en compte l'état des fissures (ouvertes/fermées) quand la structure est soumise à des sollicitations harmoniques. De plus, la non-linéarité géométrique est introduite pour décrire le comportement endommagé des structures composites minces en grands déplacements. Enfin le méta-modèle basé sur les réseaux de neurones est appliqué en présence de deux types de non-linéarité, matérielle et géométrique.

Ce rapport de thèse s'achève par une conclusion générale sur l'ensemble du travail réalisé et ouvre des perspectives sur les méthodes et les outils qui restent à étudier à court terme.

Sommaire

1.1 Matériaux composites	14
1.1.1 Matrices	15
1.1.2 Fibres	19
1.2 Dégradation des structures composites stratifiées	21
1.2.1 Endommagement dans les composites	21
1.2.2 Détection et localisation de l'endommagement	34
1.3 Approches de méta-modélisation	40
1.3.1 Réseaux de neurones artificiels	40
1.3.2 Réduction de modèle	44
1.4 Conclusion	51

PRÉAMBULE

Les composites sont de plus en plus employés dans de nombreux domaines de production et de fabrication tels que l'aérospatial, l'aéronautique et le transport terrestre. Ceci est dû aux nombreuses propriétés bénéfiques des composites par rapport aux matériaux traditionnels ; réduction de poids avec haute résistance et rigidité, résistance à la corrosion, propriétés thermiques, résistance à la fatigue et à l'usure. La réduction du poids entraîne à son tour une réduction du coût du carburant et des émissions de dioxyde de carbone. Pendant les cinquante dernières années, et particulièrement dans le secteur de l'aéronautique, les matériaux composites sont de plus en plus utilisés. A titre d'exemple,

le ratio des composites par rapport à la masse structurale totale de l'avion Airbus A380 (2005) est d'environ 25% et devient 53% dans l'avion A350 (2013), Fig.1.1. La répartition

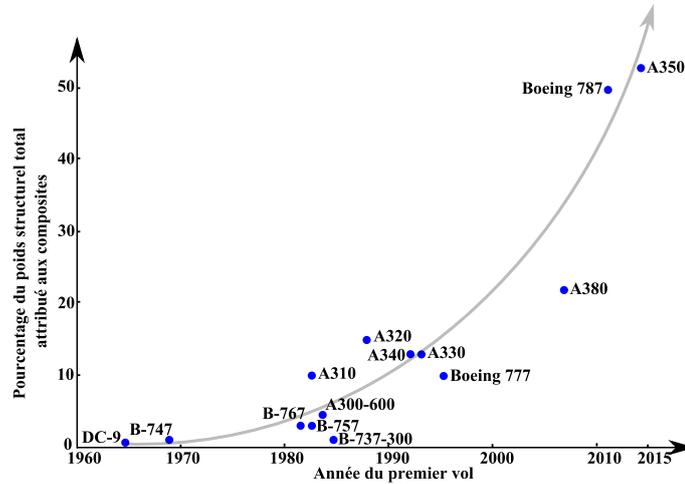


FIGURE 1.1 – Évolution de l'utilisation des composites dans le secteur de l'aviation. Sources : GAO analysis of information from FAA, NASA, Boeing Company, Jene's AJJ the world's Aircraft, and Jene's Aircraft Upgrades

des matériaux constitutifs de l'avion Boeing-787 est illustrée dans la figure 1.2

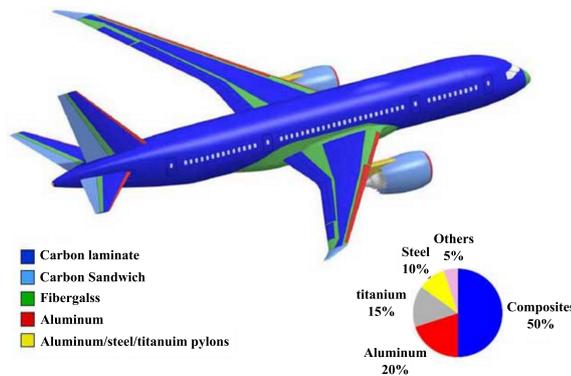


FIGURE 1.2 – Composition de la structure de l'avion Boeing-787, source : <http://aviation-futur.e-monsite.com>

1.1 MATÉRIAUX COMPOSITES

Un composite est un matériau hétérogène constitué au moins de deux composants différents. Ces composants sont disposés dans une organisation géométrique qui confère

au matériau résultant de meilleures propriétés mécaniques et physiques que celles de ses constituants pris séparément. Le plus souvent, le matériau composite est constitué de renforts qui sont noyés dans une matrice dont la résistance mécanique est beaucoup plus faible. Les renforts sont généralement conçus de manière à avoir des propriétés mécaniques optimales assurant un excellent comportement mécanique à la structure dans laquelle ils sont incorporés. Alors que la matrice maintient les renforts dans leur position et distribue les forces entre eux, elle peut aussi assurer la protection contre diverses attaques (thermique, chimique, ...).

Cette association de renforts et d'une matrice permet au matériau composite d'hériter des propriétés de ces derniers et ainsi, les propriétés d'un composite varient donc en fonction de celles de ses matériaux constitutifs (renforts et matrice) : d'une part la grande rigidité et la haute résistance des renforts et d'autre part l'isotropie de la matrice jouant le rôle de la répartition des contraintes, on obtient au final un matériau qui allie légèreté et hautes performances mécaniques.

1.1.1 MATRICES

Dans un matériau composite, la matrice a trois rôles principaux :

- la mise en place des renforts
- la répartition des contraintes entre les renforts
- la protection des renforts contre les attaques de l'environnement

Les matériaux les plus utilisés pour la matrice peuvent être classés suivant leur nature comme indiqué dans la figure 1.3

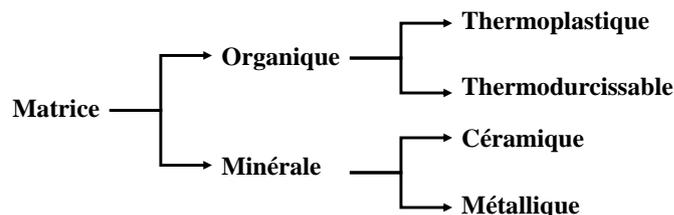


FIGURE 1.3 – Types de matrices utilisées dans les composites [Gornet 08]

1.1.1.1 MATRICES POLYMÈRES

Il existe principalement deux types de matrices organiques, les matrices de polymères thermoplastiques et les matrices de polymères thermodurcissables.

Matrices à polymères thermoplastiques

Sous l'effet de la chaleur, les matrices polymères thermoplastiques deviennent malléables à chaud et durcissent à froid permettant aux renforts de se mettre en place et de conserver leur forme. Cette transformation d'état malléable à l'état solide est réversible et les thermoplastiques sont recyclables. Les matrices thermoplastiques se caractérisent par leur densité relativement faible et ont des propriétés mécaniques faibles.

Ces matrices sont renforcées par différents types de fibres telles que les fibres de verre, les fibres de carbone ou encore les fibres végétales comme le lin. Parmi les matrices polymères thermoplastiques usuelles, on peut citer les résines polyamide et polypropylène dont les propriétés sont données dans le tableau 1.1.

TABLE 1.1 – Caractéristiques des résines thermoplastiques [Gornet 08, Chawla 12]

	$\rho (Kg/m^3)$	$E (GPa)$	ν	$\sigma_t^R (MPa)$
polyamide	1140	1.2 – 2.5	0.34 – 0.36	60 – 85
polypropylène	1200	1.1 – 1.4	0.40d – 0.42	20 – 85

Matrices à polymères thermodurcissables

Les polymères thermodurcissables, sous l'effet de la chaleur, ne se ramollissent pas et durcissent. Ces polymères ne peuvent être mis en œuvre qu'une seule fois et deviennent infusibles et insolubles après polymérisation [Gornet 08]. Ils ne sont pas recyclables, mais il peuvent être utilisés comme renforts dans d'autres matériaux. Les polymères thermodurcissables sont généralement plus résistants que les matériaux thermoplastiques. Ils ont des propriétés physico-chimiques et mécaniques intéressantes [Gornet 08], telles que leur résistance électrique, mécanique, aux produits chimiques (matériaux non réactifs), et à la chaleur.

Parmi les résines thermodurcissables usuelles, on peut citer :

- les polyesters instaurés : occupent une large part du marché et sont de faible coût. Mais elles sont difficiles à stocker et émettent des vapeurs de styrène au cours de leur polymérisation.
- les vinylesters : ont une bonne tenue à la fatigue et un bon comportement à la corrosion mais sont combustibles.
- les résines époxy (ou époxydes) : sont des résines de hautes performances.

- les résines phénoliques : présentent une très bonne tenue au feu, sans fumée. Elles sont très utilisées dans le secteur ferroviaire. Mais elles sont difficiles à mettre en œuvre et sensibles à l'humidité.
- les polyuréthanes : sont faciles à mettre en œuvre puisqu'elles ont une faible viscosité.

Il existe d'autres résines dédiées à des applications spécifiques comme le silicone qui a de bonnes qualités électrique, thermique et chimique. En Europe, 70% des composites transformés sont des composites à matrice thermodurcissable.

Parmi les matrices polymères thermodurcissables usuelles utilisées avec les fibres continues, on peut citer les résines polyester et époxy dont les propriétés sont données dans le tableau 1.2.

TABLE 1.2 – Caractéristiques des résines thermodurcissables [Gornet 08, Chawla 12]

	ρ (Kg/m^3)	E (GPa)	ν	σ_t^R (MPa)
Epoxy	1100 – 1500	3 – 5	0.2 – 0.33	60 – 80
Polyester	1100 – 1400	2 – 4	0.2 – 0.33	30 – 100

Le tableau 1.3 présente les différences fondamentales entre les deux types de matrices, thermodurcissable (TD) et thermoplastique (TP). Les propriétés mécaniques et physiques de ces matrices dépendent du procédé de mise en œuvre du polymère constitutif [Aucher 09].

TABLE 1.3 – Différences entre les thermodurcissables (TD) et les thermoplastiques (TP)
[Berreur 02]

	Matrice TD	Matrice TP
État de base	Liquide visqueux à polymériser	Solide prêt à l'emploi
Stockage	Réduit	Illimité
Mouillabilité des renforts	Aisée	Difficile
Moulage	Chauffage continu	Chauffage + refroidissement
Cycle	Long (polymérisation)	Court
Tenue au choc	Limitée	Assez bonne
Tenue thermique	Bonne	Réduite (sauf nouveau TP)
Chutes et déchets	Perdus ou utilisés en charges	Recyclables
Conditions de travail	Émanations de solvants	Propreté

Quelques pièces d'automobile fabriquées en composites à matrice thermoplastique et thermodurcissable sont présentées par la figure 1.4.



FIGURE 1.4 – Pièces pour l'automobile en matériaux composites : (a) thermoplastiques et (b) thermodurcissables [Celle 15]

1.1.1.2 MATRICES MINÉRALES

Matrices céramiques

Les matériaux céramiques ont une faible contrainte à la rupture. En plus d'être cassants, ils manquent d'uniformité dans les propriétés, ont une faible résistance aux chocs thermiques mécaniques et ont une faible résistance à la traction. D'autre part, les matériaux

céramiques ont des modules élastiques très élevés, de faibles densités et peuvent résister à des températures très élevées. Pour rendre la matrice en céramique moins cassantes, elle est renforcée par des fibres pour augmenter sa contrainte à la rupture [Evans 89, Curtin 91]. Pour retarder le plus possible la rupture du composite, les matrices céramiques sont faites généralement par empilement de plusieurs couches. La présence de plusieurs interfaces induit la déviations des fissures ce qui rend la matrice moins fragile.

Les composites à matrice céramique peuvent apporter des améliorations dans l'industrie aérospatiale, y compris les avions, les hélicoptères et les systèmes militaires (missiles) [Lise 86].

Matrices métalliques

Les matrices métalliques sont utilisées pour tirer profit des qualités des métaux (ductilité, bonne tenue au feu ...). Les métaux utilisés sont légers tels l'aluminium et ses alliages, le magnésium et le titane. Les métaux sont principalement renforcés pour ajuster leurs propriétés aux des besoins de la conception. Par exemple, on peut augmenter la rigidité élastique et la résistance des métaux, et on peut réduire les grands coefficients de dilatation thermique et les conductivités thermique et électrique des métaux en ajoutant des fibres telles que le carbure de silicium [Autar 05]. L'utilisation des matrices métalliques offre aux structures composites des propriétés mécaniques intéressantes, mais elle est pénalisée par un coût de revient élevé et elle est réservée à des applications relativement exigeantes.

1.1.2 FIBRES

Fibres de verre

Dans les années 20, Griffith [Griffith 21] a publié ses travaux sur les propriétés mécaniques de fibres de verre. Les fibres de verre sont parmi les fibres les plus courantes dans l'industrie des composites. La principale raison de leur utilisation est leur faible coût. Cela rend les fibres de verre attrayantes pour la production de structures composites.

Les fibres de verre se caractérisent par leur bonne résistance chimique aux acides et aux solvants. En outre, les fibres de verre sont électriquement isolantes, présentent un allongement à la rupture plus élevé que les fibres de carbone et présentent une résistance élevée à la température. La combinaison des propriétés des fibres de verre, c'est-à-dire une faible absorption d'humidité, une résistance élevée, une résistance à la

chaleur et une constante diélectrique faible rend ce type de renfort idéal pour différentes applications [Warner 95, Rana 16]. Cependant, les fibres de verre présentent également quelques inconvénients mineurs : elles ne sont pas aussi résistantes que d'autres fibres ou aussi rigide que d'autres fibres telles que les fibres de carbone.

Fibres de carbone

Les fibres de carbone sont très légères (5 à 10 μ m de diamètre). Les propriétés d'impact exceptionnelles rendent les fibres de carbone avantageuses dans divers secteurs de l'industrie. Bien que les fibres de carbone soient assez coûteuses par rapport à d'autres fibres plus communes comme les fibres de verre, le prix est en constante diminution en raison de l'avancement des technologies de production. Un autre avantage majeur est que la dilatation thermique des fibres de carbone est pratiquement nulle (résistance à des températures très élevées (1000 °C)) [Morgan 05, Rana 16]. Cependant, les fibres de carbone présentent également des inconvénients, par exemple, la conductivité électrique.

Fibres naturelles

L'utilisation de matériaux composites a commencé avec des fibres naturelles. Dans l'Égypte ancienne, il y a environ 3 000 ans, l'argile était renforcée par de la paille pour construire des murs. Plus tard, la fibre naturelle a perdu beaucoup de son intérêt puisque d'autres matériaux de construction plus durables comme les métaux ont été introduits. Au cours de la dernière décennie, il y a eu un intérêt important pour les fibres naturelles en remplacement de celles de verre, motivée par les avantages potentiels de l'économie de poids, de la baisse du prix des matières premières et des avantages écologiques de l'utilisation des ressources renouvelables [Saheb 99, Wambua 03]. Mais, les fibres naturelles ont leurs défauts : en particulier, une durabilité inférieure et une résistance inférieure aux fibres de verre et une grande variabilité de leurs propriétés [Pickering 16]. Toutefois, les traitements récemment développés ont considérablement amélioré ces propriétés [Hodzic 14]. Ils existent d'autres types de fibres telles que les fibres aramides et les fibres céramiques.

Les matériaux composites peuvent être classés selon la nature de leurs constituants (type de matrice et des fibres). Une classification plus traditionnelle des composites est basée sur la forme des constituants où plusieurs types peuvent être distingués :

- Les composites particulaires qui sont généralement issus de l'insertion de particules de taille macro d'une façon aléatoire à l'intérieur d'une matrice plus

souple. Un composite particulière largement utilisé est le béton dans lequel le gravier est mélangé au ciment.

- Les composites fibreux qui se composent de fibres courtes ou longues noyées dans une matrice. Les renforts à fibres courtes permettent d'améliorer le comportement de la matrice. Les renforts à fibres continues permettent d'améliorer le comportement du composite dans une direction souhaitée.
- Les composites à renforts tissés sont très utilisés en raison notamment des risques moindres de fissure et d'une manipulation aisée.
- Les composites stratifiées sont une classe hybride de matériaux composites impliquant à la fois les composites fibreux et les techniques de stratification. Les couches, dans un stratifié, peuvent être orientées différemment pour lui donner une résistance et une rigidité différentes dans les différentes directions. Ainsi, la résistance et la rigidité de la structure composite stratifiée peuvent être adaptées facilement aux exigences spécifiques de conception.

On peut se référer aux ouvrages de Warner [Warner 95] et Chawla [Chawla 12] pour une présentation détaillée sur les renforts et les matériaux composites en général.

1.2 DÉGRADATION DES STRUCTURES COMPOSITES STRATIFIÉES

La durabilité d'un système est, en général, sa capacité à conserver la fonctionnalité pendant la durée de vie, même si quelques dégradations se développent. Dans les éléments de structures composites, la durabilité est d'importance primordiale et, par conséquent, la compréhension des mécanismes de dégradation est extrêmement importante.

1.2.1 ENDOMMAGEMENT DANS LES COMPOSITES

Du fait de leur aspect hétérogène et anisotrope, les composites stratifiés présentent typiquement de nombreux défauts locaux antérieurs au chargement différents de ceux des matériaux métalliques. Les défauts locaux sont considérés comme des formes d'endommagement, et le développement de ces défauts ou l'apparition d'autres défauts supplémentaires au cours de l'augmentation du chargement et/ou du temps est appelé accumulation d'endommagement. En effet, le terme mécanique d'endommagement a été inventé pour décrire l'étude de l'initiation et de l'accumulation de ces défaut jusqu'à et y compris la rupture.

Il n'existe pas de mécanisme unique mais plusieurs types de dégradations différentes. Ces dégradations apparaissent à différentes échelles, Fig.1.5. Ainsi, on distingue [Duplessis 05, Mercier 06] :

- À l'échelle microscopique : apparition de décohésion (rupture d'adhérence) entre les fibres et la matrice
- À l'échelle mésoscopique : c'est l'échelle du pli où de nombreuses fissures intra-laminaires transverses (perpendiculaires à la direction de sollicitation) ou longitudinales (dans la direction de l'application de l'effort) apparaissent. La rupture des fibres est aussi observable à cette échelle et intervient au stade ultime de la ruine du matériau.
- À l'échelle macroscopique : c'est l'échelle du stratifié où le phénomène de délaminage apparaît. Le délaminage correspond à la séparation locale entre deux couches liée à une concentration importante des contraintes en cisaillement et il s'amorce généralement aux bords libres de la structure.

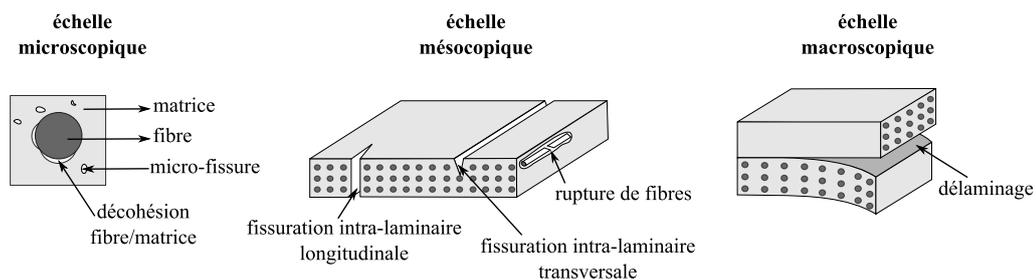


FIGURE 1.5 – Principales formes d'endommagement dans un composite stratifié [Duplessis 05, Pinho 09]

La rupture finale de la structure composite est le résultat de la combinaison potentielle de ces formes de défauts. Le mécanisme de l'endommagement peut être initié par la présence de micro-fissures présentes initialement dans le matériau composite qui peuvent apparaître lors de la mise en œuvre du composite. La concentration de contraintes peut aussi générer des fissures intra-laminaires, la décohésion fibre/matrice et la rupture des fibres à l'échelle du pli ou le délaminage entre les plis du stratifié. La propagation et la coalescence de ces défauts sont induites par différentes sollicitations, de diverses origines (mécanique, thermique, thermomécanique...). En outre, l'endommagement est un processus irréversible qui peut être défini par l'apparition de défauts locaux qui se développent graduellement et provoquent des changements de propriétés de la structure et induisent sa ruine [Krajcinovic 00].

1.2.1.1 MICRO-FISSURATION MATRICIELLE

La micro-fissuration matricielle est le mécanisme prépondérant de dégradation de la matrice des stratifiés [Baste 01, Berthelot 03]. Ces micro-fissurations représentent la première forme d'endommagement dans les stratifiés [Nairn 94]. Ces fissures intralaminaires traversent l'épaisseur du pli et s'étendent parallèlement aux fibres dans ce pli. L'observation la plus courante de la micro-fissuration est la fissuration dans les couches orientées à 90° pendant un chargement axial dans la direction 0° [Nairn 00]. Ces micro-fissures sont transversales à la direction de chargement et donc parfois appelées fissures transversales. Les termes micro-fissures matricielles, micro-fissures, fissures intralaminaires et fissures de pli se retrouvent souvent dans la littérature et désignent généralement le même phénomène de fissuration.

Les études du phénomène de micro-fissuration matricielle ont commencé dans les années 1970 avec des observations de l'initiation des micro-fissurations [Garrett 77b]. Ensuite, de nombreuses études ont été menées sous diverses conditions de chargement et d'environnement. Un intérêt majeur dans l'étude de ce type d'endommagement est de pouvoir prédire l'évolution de la micro-fissuration et être capable de concevoir des stratifiés qui sont résistants aux micro-fissures. Les micro-fissures dans la matrice sont habituellement initiées dans des zones de concentration de contraintes où il existe par exemple une hétérogénéité matérielle telle que l'existence de porosités et d'inclusions comme illustré dans la figure 1.6, [Park 03].

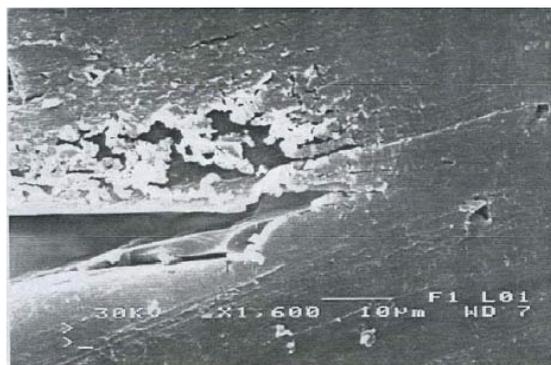


FIGURE 1.6 – Micro-fissures dans la matrice d'un composite verre/epoxy [Gong 94]

Plusieurs auteurs [Garrett 77a, Garrett 77b, Parvizi 78, Bailey 79, Bader 80, Bailey 81, Jones 81, Nairn 94] ont effectué des séries d'expériences de micro-fissuration, incluant des observations d'initiation de la micro-fissure dans des stratifiés $[0^\circ/90^\circ]_s$ à matrice de polyester renforcée par des fibres de verre et à matrice d'époxy renforcée par des fibres

de verre. Ces expériences sont réalisées en variant l'épaisseur des couches orientées à 90° de moins de 0.1 mm à 4 mm tout en maintenant l'épaisseur des couches orientées à 0° constante à 0.5 mm [Garrett 77a]. Leurs résultats, représentés par la figure 1.7, montrent qu'il y a un effet significatif de l'épaisseur des couches 90° sur la déformation d'initiation de la fissure. Si l'épaisseur des couches 90° est inférieure ou égale à l'épaisseur des couches 0° , la déformation d'initiation des fissures est importante. Pour des épaisseurs supérieures ou égales à l'épaisseur des couches 0° , les fissures se déclenchent et se propagent instantanément sur toute la surface de la section transversale des couches 90° et conduisant à la rupture instantanée du stratifié. Pour des épaisseurs comprises entre 0.1 mm à 0.4 mm , des micro-fissures individuelles peuvent parfois être observées en s'amorçant sur les bords libres et se propager sur toute la largeur du stratifié. Pour des épaisseurs inférieures à 0.1 mm , les micro-fissures sont totalement supprimées et le stratifié atteint la rupture avant l'amorçage des micro-fissures.

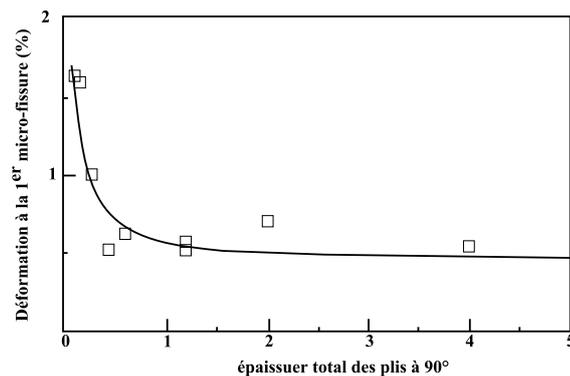


FIGURE 1.7 – La déformation pour initier la micro-fissuration matricielle dans des stratifiés verre/epoxy $[0^\circ/90^\circ]_s$ en fonction de l'épaisseur totale des plis à 90° . Les plis à 0° ont chacune une épaisseur constante de 0.5 mm [Nairn 00]

Cédric Thomas et al [Cédric 11] ont étudié l'évolution de l'endommagement par fissuration matricielle d'un stratifié $[0^\circ_2/90^\circ_2]_s$ en matrice polyamide renforcée par des fibres de carbone sollicité en traction pure. Ils ont constaté l'apparition d'un réseau de fissures dans les plis orientés à 90° parallèles aux fibres et perpendiculaires à la direction de sollicitation. Alors qu'aucune fissure n'est observée dans les plis orientés à 0° . Les fissures sont majoritairement traversantes sur toute la largeur des plis orientés à 90° . Ils ont observé aussi, d'après la figure 1.8, que la direction des fissures peut être déviée par des porosités ou des zones pauvres en matrice initialement présentes dans les plis.

La densité des micro-fissures dépend de la géométrie (orientation des couches par rapport à la direction de sollicitation, à l'empilement des couches, à l'épaisseur des

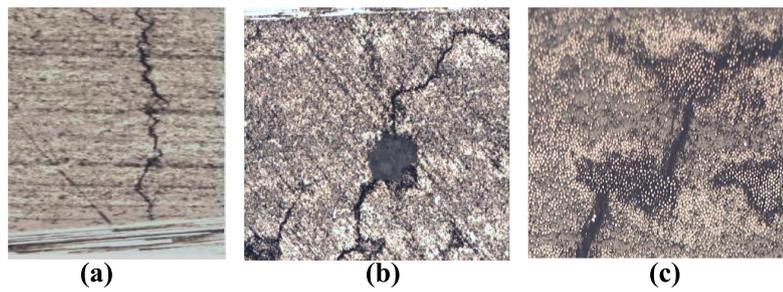


FIGURE 1.8 – Orientation d’une fissure dans les plis 90° [Cédric 11], (a) sans obstacle, (b) en présence d’une porosité et (c) en présence d’une zone pauvre en matrice

couches), aux paramètres du matériau (propriétés mécaniques et résistance à la rupture en particulier) et au chargement (niveau de chargement [Cédric 11], changement de température, nombre de cycles en fatigue). L’ouverture et le glissement des surfaces de la fissure induisent la réduction des propriétés élastiques et thermiques du stratifié [Nairn 00].

L’augmentation des contraintes conduit à la coalescence de ces micro-fissures comme illustré dans les figures 1.9 et 1.10. Les micro-fissures se propagent suivant l’orientation du chargement, notamment perpendiculairement à la direction de contrainte de traction [Baste 01, Gong 94].

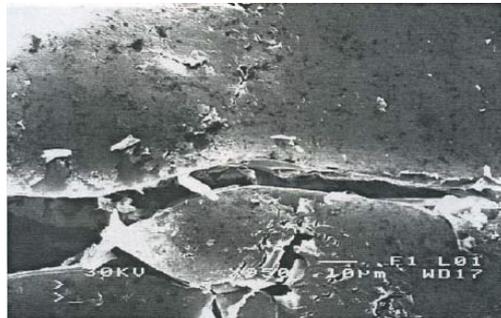


FIGURE 1.9 – Coalescence des micro-fissures dans la matrice d’un composite verre/epoxy [Gong 94]

Thollon Y. et Hochard C. [Thollon 09] ont étudié le processus de propagation des micro-fissures dans des échantillons composites mono-couches. Les couches ont une matrice d’époxy renforcée de fibres de verre. Ces constituants sont suffisamment transparents pour que les fissures soient visibles lors de l’opération de photographie où une forte source de lumière est placée derrière la structure. Leur résultat est illustré dans la figure 1.11.

Il est constaté à partir de ces images que les micro-fissures sont orientées dans la

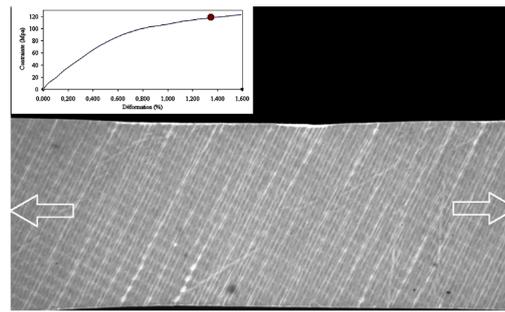


FIGURE 1.10 – Photographie des micro-fissures dans une couche 60° de tissu asymétrique 83/17 verre/époxy [Thollon 09]

direction des fibres. Ces petites fissures se développent uniformément à travers la couche et sont stoppées par la texture tissée. Elles n'évoluent pas pendant le déchargement et continuent à se développer pendant le chargement. L'endommagement représenté dans la figure 1.12 est mesuré sur les diagrammes de traction après le déchargement, et exprimé en terme de perte de rigidité dans le matériau $d = 1 - E/E_0$, E est la rigidité du matériau et E_0 la rigidité initiale. La perte de rigidité dans la direction de la chaîne, qui est très faible, est déterminée numériquement.

Il est évident que la première micro-fissure provoque de faible changement dans les propriétés mécaniques du stratifié. Le chargement continu conduit à la création de micro-fissures supplémentaires qui se propagent suivant l'orientation du chargement, notamment perpendiculairement à la direction des fibres [Gong 94, Baste 01] et provoquent une dégradation continue des propriétés mécaniques, notamment le module d'Young transverse dans les stratifiés unidirectionnelles comme le montre la figure 1.12.

1.2 DÉGRADATION DES STRUCTURES COMPOSITES STRATIFIÉES

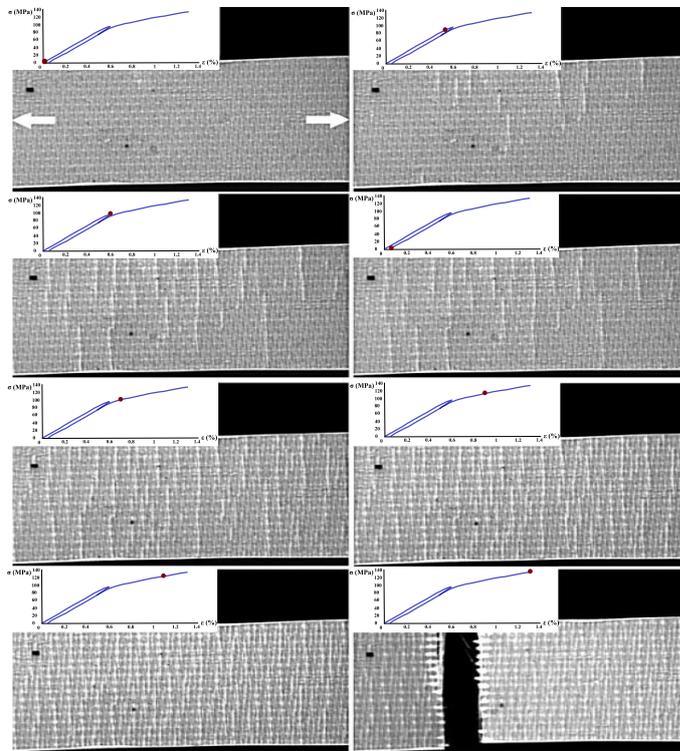


FIGURE 1.11 – Photographies de l'évolution des micro-fissures dans une couche 90° de tissu asymétrique 83/17 verre/époxy [Thollon 09]

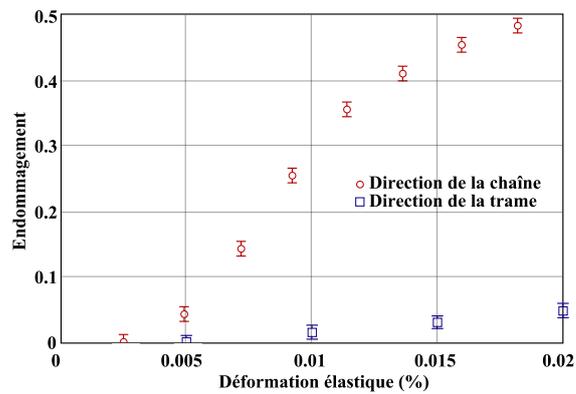


FIGURE 1.12 – Évolution non-linéaire de l'endommagement, [Thollon 09]

1.2.1.2 DÉCOHÉSION FIBRE/MATRICE

Jouant le rôle de liaison entre la fibre de renforcement et la matrice, l'interface peut être considérée comme une micro-structure importante de composites fibreux. L'interface est un pont reliant à la fois la fibre et la matrice. Il existe de nombreux problèmes mécaniques sur l'interface, comme le transfert du chargement, la résistance au cisaillement, la décollement d'interface [Kang 99]. La qualité de liaison interfaciale affecte directement l'ensemble des propriétés mécaniques du composite. Par conséquent, il est nécessaire d'étudier la mécanique des interfaces fibreuses [Zhandarov 05, Nishikawa 08, Garcia 14].

La décohésion fibre/matrice est l'un des principaux mécanismes de l'évolution d'endommagement dans les composites polymères unidirectionnels. Elle est initiée suite à l'affaiblissement de la zone d'interface [Joffe 99]. Sous un chargement monotone, des petites fissures se forment dans la matrice du stratifié. L'effort est transféré aux fibres qui sont encore intactes. Ces forces deviennent éventuellement si grandes que la liaison entre la fibre et la matrice et ainsi, une fissure cylindrique à l'interface se propage à partir de la surface de fissure dans la matrice le long de la fibre lorsque le chargement appliqué augmente [Kim 02]. Ce processus est appelé décollement ou décohésion fibre/matrice et il est illustré dans la figure 1.13.

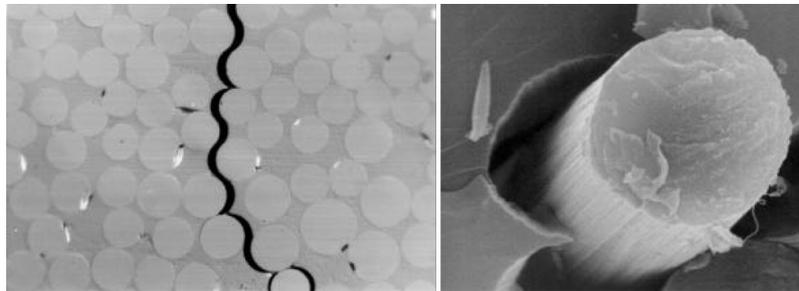


FIGURE 1.13 – Initiation des fissures transversales et décohésion fibre/matrice [Joffe 99]

Aussedat-Yahia et al [Aussedat Yahia 97] ont constaté que la propagation des décohésions fibre/matrice engendre des fissures transversales dans l'intégralité d'un pli dans un stratifié unidirectionnel, Fig.1.14, et des fissures longitudinales dans le plan des plis pour un composite tissé, Fig. 1.15.

1.2.1.3 RUPTURE DES FIBRES

Bien que les fibres supportent approximativement la totalité de la charge appliquée et leur rupture arrive dans un stade avancé dans le processus de l'endommagement, c'est leur

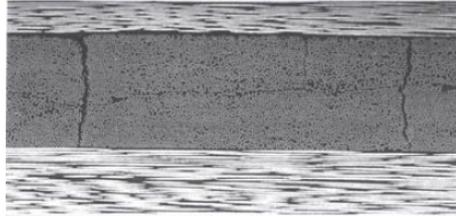


FIGURE 1.14 – Fissures transverses induites par décohésion fibre/matrice dans un stratifié carbone/epoxy [Aussedat Yahia 97]

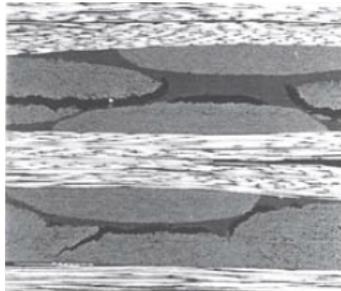


FIGURE 1.15 – Fissures longitudinales induites par décohésion fibre/matrice dans un stratifié tissé carbone/epoxy [Aussedat Yahia 97]

défaillance qui est la plus critique dans les composites unidirectionnels. La décohésion fibre/matrice peut engendrer la rupture des fibres [Arif 14].

La figure 1.16 présente un schéma bidimensionnel d'une fibre incorporée horizontalement au centre d'une matrice. Entre la fibre et la matrice, il y a la zone d'interface fibre/matrice représentée par de nombreuses lignes de liaison qui sont en état d'équilibre tant que le chargement externe n'est pas encore appliquée 1.16-(a). Lorsque le chargement commence, les lignes de liaison moléculaire deviennent tendues. Si le chargement augmente, quelques lignes se déconnectent quasi-simultanément et la fibre se rompt comme illustré dans la figure 1.16-(b). La fibre se brise en deux fragments laissant un espace vide au point de rupture. Même si la plupart des lignes de liaison juste à proximité de la rupture de la fibre sont déconnectées, les lignes un peu loin de la zone de rupture de la fibre ne sont pas déconnectées, mais montrent un état tendu. Cependant, les liaisons plus éloignées de la rupture de la fibre ne sont pratiquement pas affectées par la contrainte appliquée et gardent leur état d'équilibre [Kim 02]. La zone de décohésion est définie comme la région où les lignes de liaison moléculaire sont déconnectées, y compris l'intervalle de rupture de fibre.

Kim B. W. et Nairn J. A. [Kim 02] ont réalisé des études expérimentales sur la rupture de fibre en utilisant une éprouvette composite renforcée d'une seule fibre. Ils ont montré

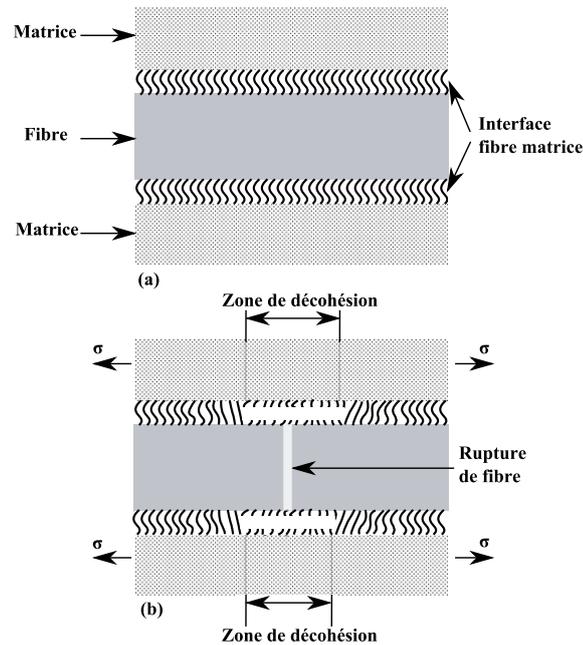


FIGURE 1.16 – Fissures longitudinales induites par décohésion fibre/matrice dans un stratifié tissé carbone/epoxy [Kim 02]

que la zone de décohésion est habituellement symétrique des deux côtés de la zone de rupture de la fibre. Elle est petite pour une liaison interfaciale forte (Fig.1.17-(a)) mais peut être importante pour les liaisons interfaciales faibles (Fig.1.17-(b)). La rupture des fibres se produit souvent dans les plis les moins désorientés par rapport à la direction de sollicitation. L'augmentation monotone du chargement entraîne la rupture des fibres au voisinage des fibres déjà rompues [Zweben 68, Desrumaux 00].

1.2.1.4 DÉLAMINAGE

Le délaminage, ou fissuration interfaciale, est une fissure qui s'amorce et se développe entre les différentes couches d'une structure composite dans la zone riche en résine. Le délaminage est l'un des modes de défaillance les plus graves dans les stratifiés composites qui peut se produire en raison de nombreux facteurs dont les plus dominants sont les défauts de fabrication [Huimin 11]. En général, les imperfections de diverses natures et le rétrécissement thermique et chimique des composants peuvent être la source de délaminages initiaux. Le problème de délaminage des stratifiés est l'un des problèmes les plus importants dans la conception des structures composites. Si ce type de défaut n'est pas correctement pris en compte, il peut conduire à une défaillance prématurée de la structure [Bolotin 96].

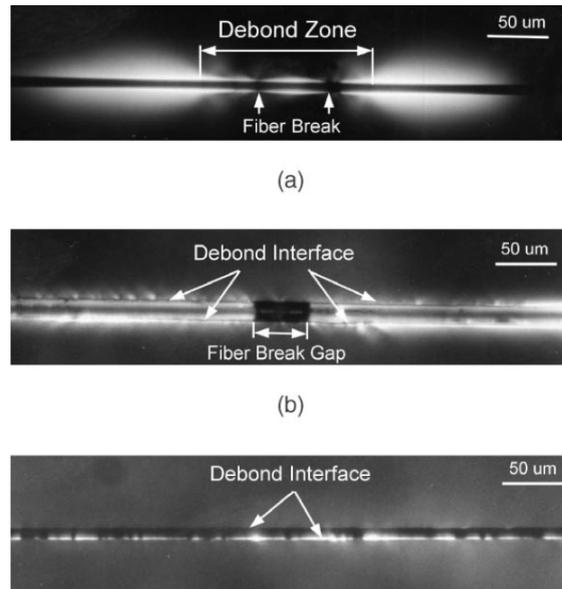


FIGURE 1.17 – Exemples de zones de décohésion de composites à une seule fibre. a) Zone de décohésion très petite (fibre de carbone AS4); (b) Zone de décohésion très longue (fibre de verre E); (c) Zone de décohésion sans rupture de fibre (fibre de carbone AS4) [Kim 02]

Wu et Springer [Wu 88], Abrate [Abrate 91] et Cui et Wisnom [Cui 93] définissent le délaminage comme une fissure entre les plis ayant des orientations différentes des fibres. Liu et Malvem [Liu 87] ont conclu que le délaminage résulte de l'incompatibilité de rigidité à la flexion entre les couches adjacentes, c'est-à-dire les différentes orientations des fibres entre les couches. Cependant, certains auteurs [Hosur 98, Preuss 88, Kaczmarek 95] ne sont pas d'accord avec cette affirmation et ont constaté un endommagement significatif entre les couches avec même orientation des fibres.

Le délaminage intervient souvent dans les zones de concentration de contraintes comme les bords libres [Garg 88] ou autour des trous dans le stratifié [Jain 93, Hosseini 09]. De plus, la fissuration matricielle peut être à l'origine du délaminage [Collombet 98].

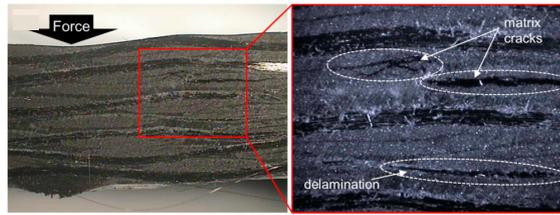


FIGURE 1.18 – Photographies de sections transversales de délamination de tissus de fibres de carbone/composites thermoplastiques de polypropylène [Kim 16]

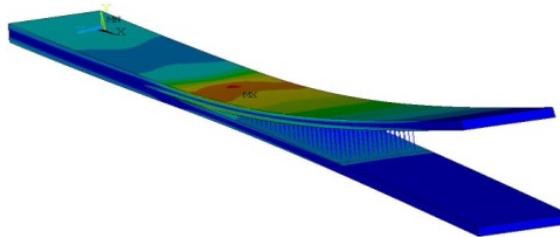


FIGURE 1.19 – Simulation du délaminage [Benzerga 14]

1.2.1.5 MODÉLISATION DE L'ENDOMMAGEMENT

Description de l'endommagement

Dans le cadre de la mécanique de l'endommagement, et à une échelle microscopique liée aux constituants du composite, l'endommagement et son développement peuvent être décrits par des variables adimensionnelles scalaires en se basant sur la forme, la taille et la surface des fissures ou la densité des fissures. Ce type de description, construit sur la base des modèles dits micro-mécaniques, relie le comportement macroscopique de la structure à l'état actuel et à l'évolution de la microstructure, [Gambrotta 93, Krajcinovic 95, Krajcinovic 96, Dragon 98]. Cette approche microscopique de modélisation de l'endommagement se caractérise par sa capacité à reproduire physiquement les observations expérimentales plus proches de la dégradation en lui donnant une représentation géométrique. Cependant, cette modélisation est limitée à l'échelle microscopique et ne permet pas la simulation du délaminage puisqu'il intervient à une échelle macroscopique.

Une autre définition de l'endommagement est établie à l'échelle mésoscopique. Cette approche mésoscopique est reliée à l'échelle du pli. Elle ne donne pas une représentation géométrique de l'endommagement mais elle fournit par une évolution locale des paramètres matériels dans les régions endommagées. Par conséquent, l'endommagement

est décrit par son effet de dégradation des paramètres mécaniques [Kachanov 58, Aubard 94, Chaboche 95, Chaboche 98].

L'endommagement est généralement représenté mathématiquement par un tenseur qui peut être de rang 0, rang 2 ou rang 4. Du point de vue physique, le choix de l'ordre du tenseur d'endommagement correspond aux différents mécanismes d'endommagement considérés dans le modèle.

Dans le cas où les variables de l'endommagement ne contiennent pas d'aspect directionnel, l'endommagement peut se représenter par un scalaire, comme par exemple le cas des composites unidirectionnels. Plusieurs modèles avec des variables scalaires d'endommagement sont utilisés pour décrire les propriétés élastiques endommagées des composites organiques, comme dans [Allix 90, Renard 91, Perreux 93].

Les tenseurs de rang 2 et de rang 4 sont utilisés si l'endommagement n'a pas de direction fixe. Les modèles tensoriels ont été développés essentiellement pour des matériaux isotropes comme les métaux, soit avec des tenseurs de rang 2 [Murakami 81] ou de rang 4 [Chaboche 82] et plus récemment [Hansen 95] et [Krajcinovic 96].

Modèles d'endommagement

Dans ce paragraphe, on rappelle quelques modèles d'endommagements existant dans la littérature. Une première méso-modélisation est proposée dans les travaux de Kachanov [Kachanov 58] et de Rabotnov [Rabotnov 69], où l'endommagement est introduit comme le niveau de dégradation de la résistance de la structure et la perte de sa rigidité. L'intérêt de cette approche est l'introduction du concept de contrainte effective permettant de donner une mesure indirecte de l'endommagement. La contrainte effective est la contrainte qui doit être appliquée à l'élément de volume non endommagé pour obtenir la même déformation que celle causée par la contrainte appliquée à l'élément de volume endommagé [Lemaitre 78]. Dans le cas unidimensionnel, l'endommagement peut être défini comme la différence relative entre ces deux contraintes et il peut aussi être exprimé par la diminution du module de Young [Chaboche 82]. Plus tard, Chaboche J.L. [Chaboche 88a, Chaboche 88b] a étendu le concept de Kachanov [Kachanov 58] et a présenté les caractéristiques fondamentales de la mécanique d'endommagement en terme de définition et mesure de l'endommagement en se basant sur les lois de la thermodynamique. Ladèveze et LeDantec [Ladeveze 92] ont proposé un modèle dans le plan pour prédire la micro-fissuration matricielle et la décohésion fibre/matrice dans des structures composites laminées unidirectionnelles. Ce modèle est utilisé par Johnson

[Johnson 01] pour prédire les dommages dans le plan des structures composites renforcées par des fibres soumises à un chargement d'impact. Matzenmiller et al. [Matzenmiller 95] ont proposé un modèle constitutif, communément appelé MLT (Matzenmiller, Lubliner, Taylor), pour les dommages anisotropes pour décrire le comportement fragile élastique des composites unidirectionnels en tenant compte des modes de rupture en traction et en compression de la fibre et de la matrice. Williams et Vaziri [Williams 01] ont implémenté le modèle MLT dans LS-DYNA3D pour la simulation de l'endommagement dû aux chocs. Williams et al. [Williams 03] ont étendu ce travail et ont donné une description de la cinétique de l'endommagement en se basant sur des résultats expérimentaux.

Kattan et Voyiadjis [Kattan 90, Voyiadjis 90] ont proposé un modèle constitutif d'endommagement anisotrope où ils ont défini un tenseur de rigidité élasto-plastique modifié intégrant l'effet de l'endommagement. Ces auteurs ont proposé un modèle micromécanique en considérant les relations constitutif de l'endommagement à l'échelle local de la matrice et de la fibre [Kattan 93, Voyiadjis 93]. Ils ont étendu ce modèle en proposant un modèle d'endommagement anisotrope pour l'analyse des matériaux composites à matrice métallique renforcée par des fibres [Voyiadjis 95]. Une analyse par éléments finis est présentée par Park et Voyiadjis [Park 97] permettant de quantifier l'endommagement et prédire la rupture des composites à matrice métallique.

Barbero et DeVivo [Barbero 01] ont développé un modèle de contrainte plane où l'endommagement est défini à travers un tenseur de rang 2 dont les valeurs propres représentent la densité des microfissures. Le modèle a été modifié par Barbero et Lonetti [Barbero 02] et Lonetti et al. [Lonetti 03] pour inclure la déformation inélastique des composites unidirectionnels à matrice polymère.

L'approche de la mécanique d'endommagement a été mise en œuvre par Robbins et al. [Robbins 05b, Robbins 05a] dans le modèle d'éléments finis basé sur la théorie FSDT (First order shear deformation) [Robbins 05b] et la théorie layerwise [Robbins 05a]. Ghosh et Sinha [Ghosh 04] et Ghosh [Ghosh 08] ont étudié la réponse endommagée des plaques composites stratifiées et des panneaux sphériques soumis aux chocs. Tian et Fu [Tian 08] ont étudié le flambement des plaques orthotropes endommagées en utilisant la théorie classique des plaques.

1.2.2 DÉTECTION ET LOCALISATION DE L'ENDOMMAGEMENT

Les différents types d'endommagement peuvent ne pas être visibles à la surface, mais ils peuvent avoir un effet significatif sur la rigidité de la structure, sa résistance et sa durée de vie. Par conséquent, la mécanique de l'endommagement fait l'objet de plusieurs

études dans la littérature, notamment en ce qui concerne les techniques de détection, de quantification et de localisation de ces défauts. Il existe plusieurs méthodes de détection d'endommagement dans les matériaux composites.

La surveillance de l'état de santé d'une structure (*SHM* : Structural Health Monitoring) a été défini dans la littérature comme "l'acquisition, la validation et l'analyse des données techniques pour faciliter les décisions de gestion du cycle de vie" [Chang 99]. Plus généralement, la *SHM* consiste à détecter et interpréter les "changements" défavorables dans une structure en raison de développement des défauts indésirables qui modifient son fonctionnement normal.

Au cours des dernières décennies, de nombreuses techniques d'évaluation non destructives ont été développées, notamment le balayage par ultrasons, l'émission acoustique [Valentin 82, Read 02], la radiographie, la thermographie infrarouge stimulée (SIT). Ces techniques sont appliquées d'une manière systématique pour suivre l'état de santé de la structure [Ball 98, Mian 04]. Elles sont coûteuses car la structure doit être mise hors service au cours de chaque inspection. C'est pourquoi beaucoup d'efforts de recherche sont orientés vers des techniques de surveillance en fonctionnement permettant de recueillir des informations en temps réel concernant un large éventail de paramètres liés à la structure et à ses conditions environnementales. En évaluant ces paramètres, on peut identifier les problèmes potentiels à un stade précoce et prendre des mesures correctives rentables.

D'autres méthodes de détection à base de vibrations (*vibration-based methods*) sont largement utilisées comme moyens d'évaluation de l'endommagement permettant de le quantifier et le localiser. Ces méthodes vibratoires utilisent les paramètres modaux (fréquences, modes propres, amortissements modaux) pour détecter l'endommagement puisque ses paramètres sont liées aux caractéristiques mécaniques de la structure et évoluent quand l'endommagement se manifeste. La plupart des travaux basés sur les vibrations rapportés à ce jour sont basés sur des modèles numériques. Une approche commune est d'avoir un modèle numérique de la structure saine. Puis, pour détecter l'endommagement, le modèle est manipulé en introduisant des dommages simulés à divers endroits jusqu'à ce que la vibration mesurée sur la structure endommagée soit reproduite par le modèle. Selon Doebling et al. [Doebling 96], Lifshitz [Lifshitz 69] et Rotem [Cawley 79] sont les premiers à proposer l'idée de détecter l'endommagement en utilisant la mesure des vibrations. Ils ont utilisé les changements des fréquences propres pour détecter les défauts dans les élastomères.

Les méthodes d'identification d'endommagement basées sur les vibrations peuvent

être classées en trois catégories : (i) les méthodes basées sur les fréquences propres ; (ii) les méthodes basés sur la forme des modes propres ; (iii) les méthodes basées sur la matrice de flexibilité :

- Les méthodes basées sur les variations des fréquences propres utilisent la réponse fréquentielle comme indicateur d'existence d'endommagement. Quand l'endommagement s'amorce et se développe, la réponse fréquentielle de la structure présente un décalage des pics des résonances vers la gauche puisque la rigidité de la structure chute, Fig.1.20.

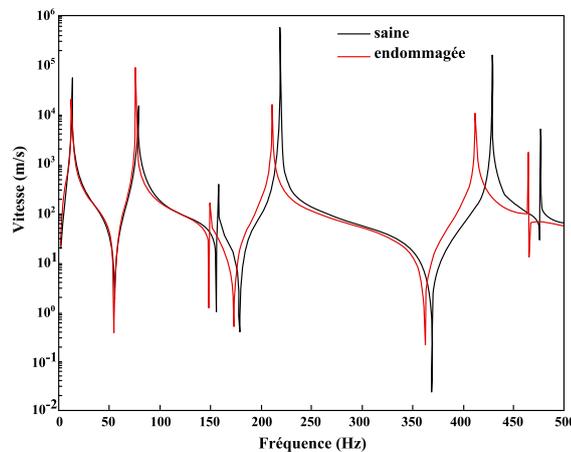


FIGURE 1.20 – Réponses fréquentielles d'une poutre graphite/epoxy saine et endommagée [Kessler 02]

Thyagarajan et al [Thyagarajan 98] ont exploité la réponse fréquentielle pour détecter l'endommagement dans un treillis. La structure est discrétisée en 18 éléments finis comme illustré dans la figure 1.21 et une réduction de la raideur et l'amortissement est affectée à l'élément fini n°6.

Ces méthodes permettent la détection de la présence d'endommagement et semblent ne pas localiser et quantifier les dommages, notamment en présence de bruit comme indiqué dans la figure 1.21, puisque les fréquences propres font partie des propriétés globales de la structure [Salawu 97].

- Les méthodes basés sur la forme des modes propres : ont pour critère la comparaison de la forme des modes propres de la structure saine et endommagée. Ces méthodes sont plus sensibles à l'endommagement que les méthodes basées sur les fréquences propres. Une alternative à l'utilisation des modes propres pour obtenir des informations spatiales sur l'endommagement est l'utilisation des dérivées des modes propres.

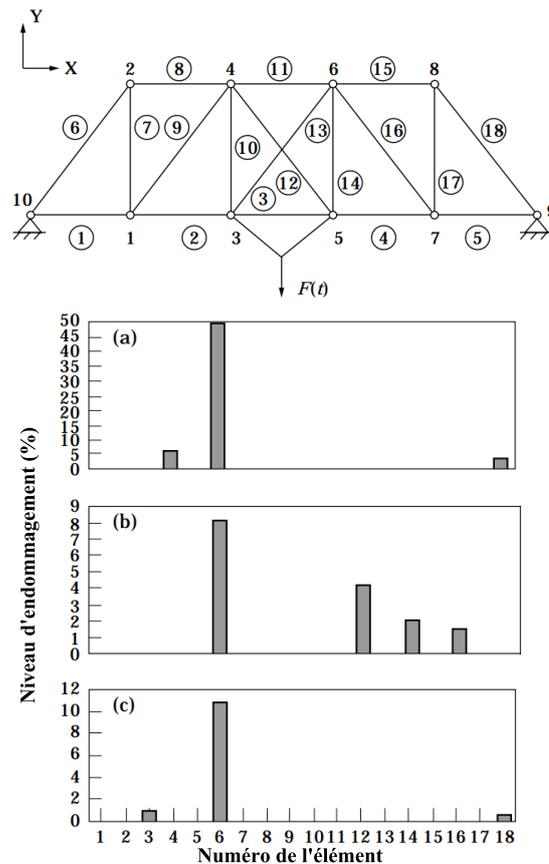


FIGURE 1.21 – Prédiction de l’endommagement dans un treillis en présence du bruit et à différent niveaux d’endommagement imposés à l’élément n°6 : (a) 50% , (b) 10% et (c) 5% [Thyagarajan 98]

Araujo dos Santos et al [Dos Santos 00] ont utilisé le changement des modes propres pour détecter l’endommagement dans une plaque rectangulaire composite carbone/epoxy $[0^\circ / - 25^\circ / 25^\circ / 90^\circ]_s$. La plaque a $270.750mm$ de longueur, $170.750mm$ de largeur et $3.517mm$ d’épaisseur et est libre sur les bords. Elle est discrétisée en 12×12 éléments de plaque avec déformation de cisaillement de premier ordre. L’endommagement est simulé par une réduction de la rigidité élémentaire des éléments 100, 120 et 144, avec un paramètre d’endommagement de 20%, 50% et 5%, respectivement. Leurs résultats sont présentés par la figure 1.22 montrant une bonne cohérence de prédiction des niveau d’endommagement imposés. Mais, cette méthode est sensible au nombre de modes à prendre en compte et au bruit comme illustré dans la figure 1.23.

— Les méthodes basés sur la matrice de flexibilité : utilisent la différence entre les matrices de flexibilité de la structure saine et endommagée.

Un exemple est illustré dans la figure 1.24 où Pandey et Biswas [Pandey 94] ont utilisé

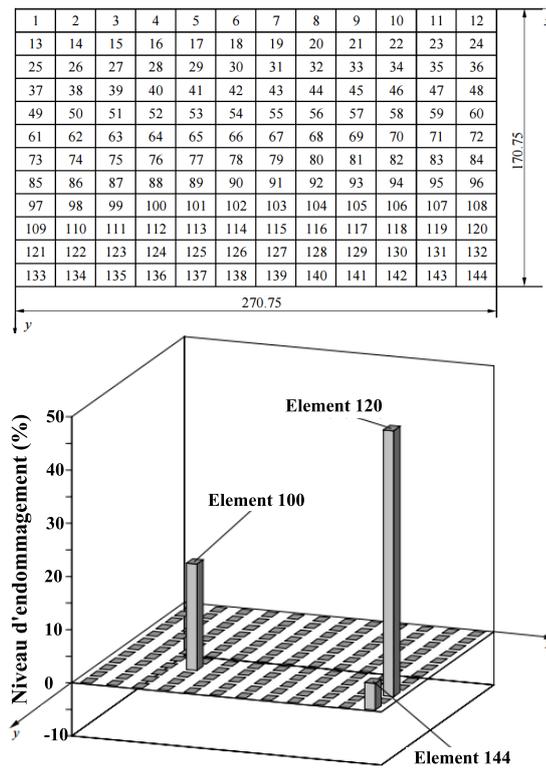


FIGURE 1.22 – Détection de l'endommagement en utilisant 5 modes propres [Dos Santos 00]

une poutre simplement appuyée sur ses deux extrémités ayant les propriétés suivantes $E = 199.95GPA$, $\nu = 0.3$, $\rho = 7837.1 Kg/m^3$. La poutre est discrétisée en 32 éléments finis et l'intensité de l'endommagement est introduite en réduisant le module d'élasticité E à 50% pour les éléments finis 4, 8, 12, et 16. Ils ont conclu que la matrice de flexibilité atteint un maximum dans chaque zone endommagée permettant ainsi de localiser l'endommagement.

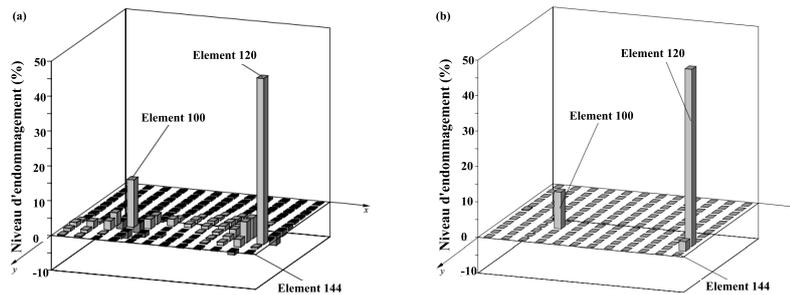


FIGURE 1.23 – Détection de l'endommagement : (a) avec 2 modes propres et (b) en présence d'un bruit blanc [Dos Santos 00]

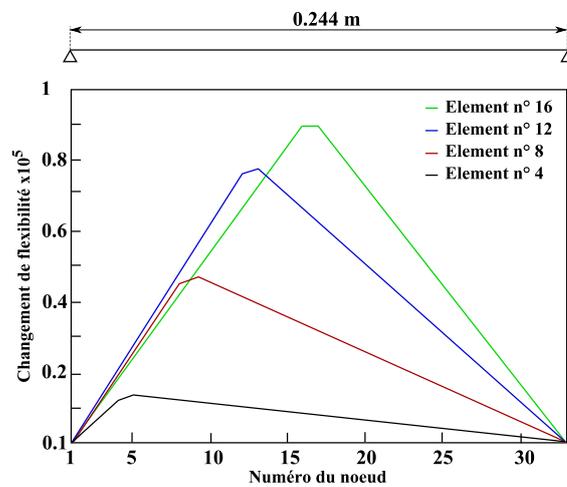


FIGURE 1.24 – Tracé du changement de flexibilité pour quatre emplacements typiques d'endommagement (réduction de 50% du module élastique E) pour une poutre en appui simple [Pandey 94]

Bien que la plupart de ces méthodes utilisent les changements du comportement vibratoire pour détecter que certains dommages sont présents, l'intensité et la localisation de l'endommagement s'avèrent très difficile à chiffrer. Ce fait n'est pas surprenant car l'évaluation des vibrations est une méthode globale alors que l'endommagement est un événement local. Ainsi, les changements locaux induits par l'endommagement peuvent n'avoir qu'une influence limitée à l'échelle du comportement vibratoire global. En d'autres termes, la dégradation des propriétés mécaniques à l'échelle locale de la structure peut provoquer une défaillance mais peut ne pas être détectée à l'échelle globale. Une difficulté supplémentaire réside dans le fait que, dans des applications pratiques, les variations de vibrations dues à l'endommagement peuvent être confondues avec celles qui sont dues à des variations des conditions environnementales telle que la température qui peut induire

des changements des caractéristiques vibratoires de la structure alors qu'elle ne représente pas un endommagement [Giurgiutiu 15]. De plus, une connaissance suffisante de plusieurs modes propres ainsi que des modes expérimentaux exacts sont nécessaires pour avoir une localisation rigoureuse de l'endommagement [Dutta 04], ce qui rend les méthodes vibratoires coûteuses dans le cas de structures complexes.

L'identification de l'endommagement peut être considérée comme un problème inverse car elle est déterminée par rapport au changement de la rigidité. Ce problème inverse est non-linéaire et une solution analytique n'est pas toujours évidente à obtenir. Ainsi, pour des raisons de simplicité, des techniques d'identification avancées basées sur des méthodes d'intelligence artificielle ont été largement étudiées, telles que l'algorithme génétique [Chou 01, Rao 04] et les réseaux de neurones artificiels [Sahin 03, Zhang 13].

1.3 APPROCHES DE MÉTA-MODÉLISATION

1.3.1 RÉSEAUX DE NEURONES ARTIFICIELS

La technique des réseaux de neurones artificiels (RNA) appliquée aux problèmes de surveillance de l'état de santé des structures a attiré beaucoup d'attention ces dernières années. La littérature abonde sur son application dans ce domaine et des études ont montré que les réseaux de neurones artificiels sont de bons outils de surveillance, notamment vis à vis de la détection, la localisation et la quantification de l'endommagement dans les structures métalliques et composites.

Réseaux de neurones biologiques

Un RNA est un paradigme du traitement de l'information qui s'inspire de la façon dont le cerveau traite l'information. Il est défini comme un modèle de calcul dont la conception est très schématiquement similaire au concept de fonctionnement de base des neurones biologiques [Alpaydin 10]. La figure 1.25 donne une illustration schématique d'un neurone biologique.

Il se compose d'un corps cellulaire, ou soma, et de deux types de branches : l'axone et les dendrites. Un neurone reçoit des signaux (impulsions) provenant d'autres neurones à travers ses dendrites (récepteurs) et transmet des signaux générés par son corps cellulaire le long de l'axone (émetteur), qui se ramifie éventuellement en brins. Aux bornes de ces brins se trouvent les synapses. Une synapse est une structure élémentaire et une

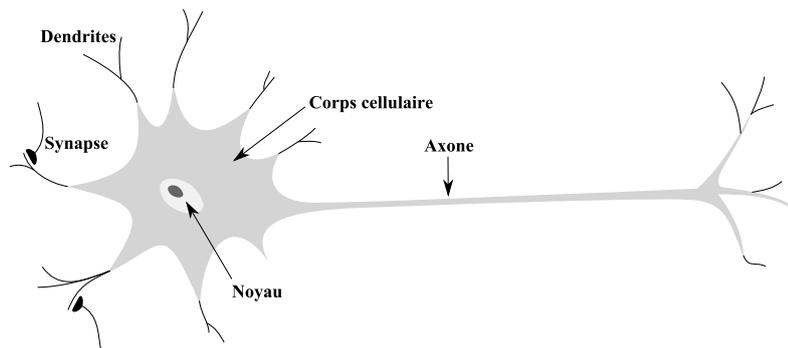


FIGURE 1.25 – Neurone biologique [Graupe 13]

unité fonctionnelle entre deux neurones (un brin d'axone d'un neurone et un dendrite d'un autre). Lorsque l'impulsion atteint le terminal de la synapse, certains produits chimiques appelés neurotransmetteurs sont libérés. Les neurotransmetteurs diffusent à travers l'intervalle synaptique, pour amplifier ou inhiber, selon le type de synapse, la tendance propre du récepteur neuronal à émettre des impulsions électriques. L'efficacité de la synapse peut être ajustée par les signaux qui la traversent afin que les synapses puissent apprendre des activités auxquelles ils participent. Cette dépendance aux activités antérieures agit comme une mémoire, qui est peut-être responsable de la mémoire humaine. Les neurones sont inter-connectés entre eux et un neurone peut recevoir l'information d'autres neurones. Cette caractéristique d'inter-connectivité permet au réseau neuronal de traiter l'information d'une façon parallèle conduisant à une rapidité extrême dans le processus de traitement. Un exemple courant est la reconnaissance faciale qui est traitée en quelques fraction de seconde. Ce type de décision est pris par un réseau de neurones dont la vitesse opérationnelle est très élevée (chez l'homme $\simeq 49m/s$).

Réseaux de neurones artificiels

Les investigations et les développements des RNA ont connu trois périodes d'activité étendue. Le premier pic dans les années 1940 est dû au travail de McCulloch et Pitts [McCulloch 43]. La seconde s'est produite dans les années 60 avec le théorème de perception de la convergence perceptive de Rosenblatt [Rosenblatt 62] et les travaux de Minsky et Papert [Minsky 69] montrant les limites d'un perceptron simple. Les résultats de Minsky et Papert ont atténué l'enthousiasme de la plupart des chercheurs, en particulier ceux de la communauté informatique. Après une période de silence qui a duré près de 20 ans, au début des années 1980, les RNA ont gagné un intérêt considérable et renouvelé.

Les développements majeurs de cette résurgence incluent l'approche énergétique de Hopfield [Hopfield 82] et l'algorithme d'apprentissage de rétro-propagation pour les perceptrons multicouches (Feed-forward neural networks), initialement proposé par Werbos [Werbos 74] et amélioré par Rumelhart et al [Rumelhart 86]. Une revue détaillée des développements et la mise en œuvre des RNA est donnée dans les travaux de Graupe [Graupe 13] et Hassoun M.H [Hassoun 95].

Le réseaux de neurones artificiels obéit aux relations entrée/sortie et est un système composé de plusieurs neurone connectés entre eux où un poids est affecté à chaque connexion exprimant la contribution de chaque entrée dans la sortie. Il est utilisé généralement comme une boîte noire où une ensemble de données d'entrée doit produire une ou plusieurs sorties souhaitées. La figure 1.26 présente une modélisation mathématique d'un neurone où la sortie est exprimée en fonction des entrées par la relation suivante :

$$y = f \left(\sum_{i=1}^2 w_i x_i + b \right)$$

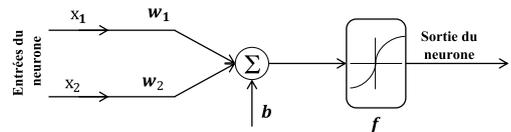


FIGURE 1.26 – Modèle mathématique d'un neurone à deux entrées \$(x_1, x_2)\$, \$f\$ est une fonction d'activation et \$b\$ est un biais

Les RNA représentent un outil efficace pour résoudre le problème inverse non-linéaire. Ils sont largement utilisés dans différents domaines d'application qui peuvent être résumés dans la reconnaissance de formes, la classification des données, la modélisation et la prédiction. Une étape primordiale dans l'utilisation des RNA est l'apprentissage qui leur permet d'apprendre la relation entre les entrées et les sorties en utilisant une sélection de données d'entrée. Par l'auto-détermination de leur relation entre l'entrée et la sortie, les RNA présentent une capacité d'auto-ajustement intéressante qui permet de traiter des problèmes complexes. Une fois l'apprentissage est établi et les paramètres du RNA sont déterminés (les poids ajustés pendant l'apprentissage), il peut être capable de traiter avec précision des entrées qui n'étaient pas présentes dans les données d'apprentissage. Par conséquent, les RNA représentent une technique de méta-modélisation prometteuse, en particulier pour les ensembles de données ayant des relations non-linéaires comme le cas du problème de détection et de quantification de l'endommagement.

Sahin et Shenoï [Sahin 03] ont proposé un algorithme de détection d'endommagement en utilisant une combinaison de changements de fréquences et de modes propres comme entrées aux RNA pour prédire le niveau et la localisation de l'endommagement dans une poutre composite encasté-libre. La poutre est discrétisée par éléments finis et l'endommagement est introduit comme une réduction locale de rigidité sur quelques éléments. Plusieurs scénarios de simulation d'endommagement ont été effectués où neuf entrées sont utilisées pour effectuer l'apprentissage du RNA : la réduction des fréquences propres, les différences absolues maximales dans la courbure des modes propres et leur position le long de la poutre pour les trois premiers modes propres. On présente dans la figure 1.27 un de leurs résultats où l'endommagement est introduit comme montré dans le tableau 1.4.

TABLE 1.4 – Niveau et position d'endommagement introduit dans le modèle, [Sahin 03]

Réduction de rigidité (%)	8	14	21	37	42	53	62	73
Position (% L)	0.55	0.2	0.8	0.45	0.35	0.65	0.2	0.65

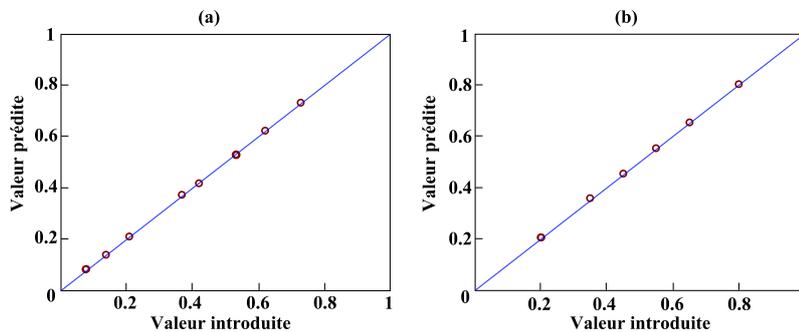


FIGURE 1.27 – Résultats du RNA : (a) prédiction du niveau de l'endommagement et (b) prédiction de la localisation de l'endommagement [Sahin 03]

Les valeurs prédites sont en bonne cohérence avec les valeurs imposées, ainsi, d'après Sahin et Shenoï [Sahin 03], le RNA est considéré comme un outil intéressant pour l'identification de l'endommagement.

Zhang et al. [Zhang 13] ont utilisé une base de données composée des changements des fréquences propres obtenues à partir du modèle élément finis d'une poutre délaminée fabriqué en carbone/epoxy $[0^\circ / -45^\circ / 45^\circ / 90^\circ]_s$ et de dimensions planes $a \times L$ à fin d'effectuer l'apprentissage du RNA. Ils ont étudié sept cas de poutre en variant les paramètres de délaminage (interface, position et taille). Le délaminage est introduit

artificiellement dans différentes interfaces (1 à 4), à différentes positions (x/L) et avec différentes tailles (a/L). Le RNA se compose de 7 entrées (correspondant aux sept premiers changements de fréquence) et de trois sorties (correspondant aux trois paramètres de délaminage). Leur résultats, présentés par la figure 1.28, montrent la capacité du RNA à prédire avec une bonne précision les paramètres de délaminage.

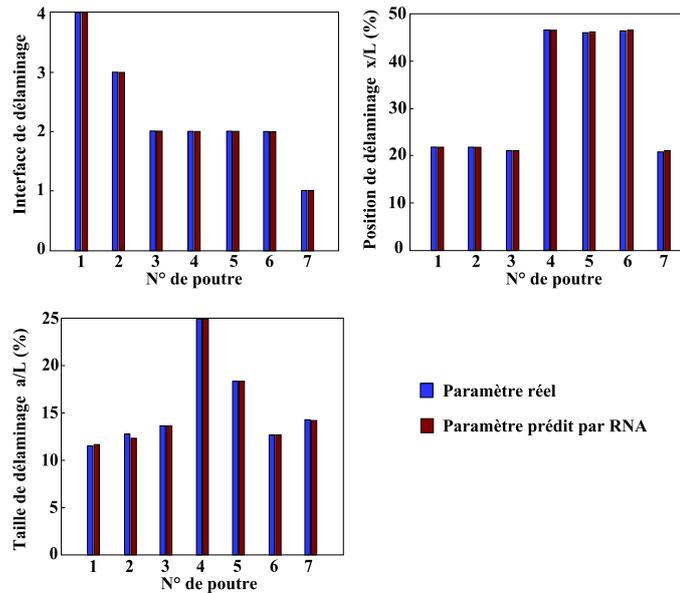


FIGURE 1.28 – Prédiction des paramètres de délaminage par RNA [Zhang 13]

Une revue dans laquelle les RNA sont appliqués dans les problèmes d'identification de l'endommagement et la surveillance de l'état de santé des structures est fournie dans [Sohn 04, Zou 00].

1.3.2 RÉDUCTION DE MODÈLE

La modélisation des structures industrielles complexes mène à des modèles éléments finis de très grande taille (par exemple, des structures aérospatiales ou automobiles peuvent être composées de plus de 10^6 degrés de libertés). Néanmoins, de nombreux détails de ces grands modèles n'ont pas d'effets significatifs sur le comportement de telles structures. Ainsi, plusieurs études sont orientées vers le développement de modèles réduits ayant un nombre limité de degrés de liberté appelés ROM (Reduced Order Models) dans le but de réduire les coûts numériques liés au temps de calcul et au stockage des données. Deux familles de méthodes de réduction de modèle peuvent être distinguées :

- Méthodes de condensation ou réduction directe : elles sont généralement appliquées quand il s'agit d'extraire les solutions propres basses fréquences.

— Méthodes de sous-structuration dynamique : elles sont très pratiques quand il s'agit d'analyser des structures complexes constituées d'assemblage de sous-structures.

1.3.2.1 CONDENSATION

Le principe de la condensation consiste à représenter les comportements statique et dynamique du modèle initial à partir d'un modèle réduit exprimé sur un nombre limité de degrés de liberté. Le modèle initial peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\mathbf{M}\ddot{u} + \mathbf{B}\dot{u} + \mathbf{K}u = F \quad (1.1)$$

où \mathbf{M} , \mathbf{B} et \mathbf{K} les matrices de masse, d'amortissement et de raideur, F est le vecteur des forces extérieures et u est le vecteur inconnu des déplacements. Ce système est caractérisé par sa taille n qui dépend de la discrétisation en éléments finis du modèle physique. La réduction s'effectue par une matrice de transformation \mathbf{T} :

$$u = \mathbf{T}q \quad ; \quad \mathbf{T} \in \mathbb{R}^{n,m} \quad m \ll n \quad (1.2)$$

où q est le vecteur des ddl réduits.

Le modèle réduit (1.3) est obtenu en substituant la relation (1.2) dans (1.1) et en prémultipliant par la transposé de la matrice de transformation \mathbf{T} :

$$\tilde{\mathbf{M}}\ddot{q} + \tilde{\mathbf{B}}\dot{q} + \tilde{\mathbf{K}}q = \tilde{F} \quad (1.3)$$

où :

$\tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{T}^T \mathbf{M} \mathbf{T}$: la matrice de masse réduite

$\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{T}^T \mathbf{B} \mathbf{T}$: la matrice d'amortissement réduite

$\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{T}^T \mathbf{K} \mathbf{T}$: la matrice de raideur réduite

$\tilde{F} = \mathbf{T}^T F$: le vecteur réduit des forces extérieures

Les méthodes de condensation se diffèrent par le contenu de la matrice de transformation \mathbf{T} . Parmi les méthodes couramment utilisées, on peut citer la condensation dynamique exacte [Paz 84]. Aussi, la méthode de condensation de Guyan [Guyan 65] est largement utilisée. Elle repose sur l'idée de diviser les degrés de libertés de la structure en deux ensembles : les ddl "maître" (" m ") à conserver et les ddl "esclave" (" e ") à éliminer où $m \ll e$. La matrice de transformation est uniquement constituée par des modes "statiques".

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} I_{mm} \\ \mathbf{K}_{ee}^{-1} \mathbf{K}_{em} \end{bmatrix} \quad I_{mm} : \text{matrice identité} \quad (1.4)$$

La qualité du modèle réduit par cette méthode dépend du choix des degrés de liberté "maître". [Bouhaddi 92]. D'autres méthodes de réduction sont appliquées l'étude de problèmes non-linéaires dont on peut citer les méthodes basées sur les modes normaux non-linéaires NLNM (Non Linear Normal Modes) [Touzé 08] et la méthode des approximations combinées CA (Combined Approximations) [Kirsch 06, Gerges 13] appliquées pour la réduction de modèles à non-linéarité géométrique. De Lima et al [De Lima 10] et Guedri et al [Guedri 10] ont enrichi la base de Ritz pour l'étude de structures viscoélastiques. Masson et al [Masson 06] ont utilisé une base de Ritz enrichie dans le contexte de la synthèse modale pour l'étude de robustesse et l'optimisation des structures. Boumedienne [Boumediene 10] a appliqué la méthode de réduction POD (Proper Orthogonal Mode) aux vibrations des plaques minces viscoélastiques. Une comparaison intéressante des méthodes de réduction de modèles basées sur la projection modale est présenté par Rouleau et al [Rouleau 17].

1.3.2.2 SOUS-STRUCTURATION DYNAMIQUE

Quand il s'agit d'étudier le comportement dynamique d'une structure assemblée avec une bonne précision, il est nécessaire de discrétiser finement la structure ce qui amène à des modèles de taille importante. La résolution numérique de tels modèles peut conduire à de fortes limitations informatiques. La synthèse modale CMS (Component Mode Synthesis) est l'une des méthodes de réduction de modèle la plus utilisée car elle est bien adaptée aux structures complexes. Elle est basée sur le concept de la décomposition de la structure entière en plusieurs sous-structures, qui sont étudiées ou réduites séparément avant d'être assemblées pour construire le modèle réduit. Le modèle final obtenu, après réduction des sous-structures, est de taille très réduite par rapport au modèle initial. La sous-structuration présente également d'autres avantages :

- Elle répond efficacement aux problèmes liées à la conception et à l'analyse de structures industrielles complexes, notamment dans l'organisation de grands projets où plusieurs partenaires sont responsables de la réalisation d'un sous-ensemble constituant (par exemple, la construction de l'avion A380 est partagée sur 4 pays : France, Allemagne, Espagne et Grande Bretagne). Encore, de fait que chaque sous-structure est étudiée séparément, la sous-structuration offre la possibilité de parallélisation du calcul numérique.
- En analysant chaque sous-structure, le comportement dynamique local peut être déterminé plus facilement que lorsque le modèle complet est analysé. Par conséquent, la sous-structuration permet d'identifier les problèmes locaux ainsi

qu'une optimisation locale peut être appliquée d'une manière efficace. De même, elle permet de connaître les sous-structures qui ont un impact significatif sur le comportement global de la structure complète. Il en résulte une représentation simple de la dynamique de chaque composant et, par conséquent, une réduction supplémentaire des coûts de calcul.

- Elle permet de réduire le nombre de sous-structures à étudier en profitant des symétries de certaines sous-structures ou de la présence de plusieurs sous-structures identiques.

La sous-structuration dynamique se résume dans deux étapes : Dans un premier temps, la structure complète est décomposée en sous-structures. Pour chaque sous-structure, les degrés de liberté sont divisés en deux sous-ensembles : les ddls internes "i" et les ddls de jonction "j" (figure 1.29).

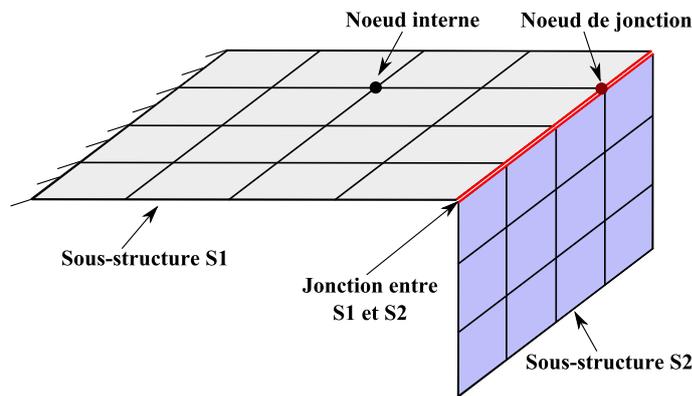


FIGURE 1.29 – Principe de sous-structuration et définition des ddls internes et de jonctions

Le vecteur de déplacement $u^{(s)}$ et les matrices de masse $\mathbf{M}^{(s)}$ et de raideur $\mathbf{K}^{(s)}$ pour chaque sous-structure (s) sont réorganisés en respectant la définition des ddls "i" et "j" :

$$\{u^{(s)}\} = \begin{Bmatrix} u_j \\ u_i \end{Bmatrix} \quad (1.5)$$

$$\mathbf{M}^{(s)} = \begin{bmatrix} M_{jj}^{(s)} & M_{ji}^{(s)} \\ M_{ij}^{(s)} & M_{ii}^{(s)} \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{K}^{(s)} = \begin{bmatrix} K_{jj}^{(s)} & K_{ji}^{(s)} \\ K_{ij}^{(s)} & K_{ii}^{(s)} \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

La deuxième étape consiste à la condensation de la sous-structure (s) par l'intermédiaire de la matrice de transformation $\mathbf{T}^{(s)}$ composée des modes statiques et des modes normaux. Sa topologie est représentée par la figure 1.30, où :

- p le nombre des modes statiques.

- r le nombre de modes normaux retenus
- n la taille du modèle élément finis complet de la sous-structure.

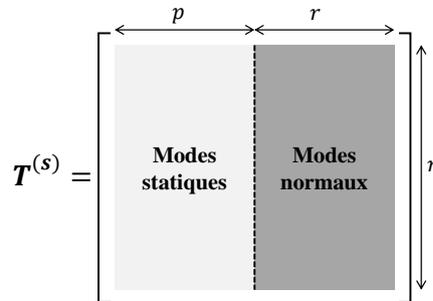


FIGURE 1.30 – Forme générale de la matrice de transformation d’une sous-structure (s)

1.3.2.3 MODES DES SOUS-STRUCTURES

Les modes de vibration de chaque sous-structure peuvent se calculer à partir de différents types de conditions limites appliquées aux interfaces (libre, fixe, chargée, ... etc). Les différentes méthodes de réduction se distinguent par ce choix des conditions limites. On rappelle ici les différents modes statiques et normaux qui sont considérés par ces méthodes.

Parmi les modes statiques de déformation, deux types sont distingués :

- **Modes contraints** : sont définis par les déformées statiques de la sous-structure obtenues en imposant un déplacement unité sur un ddl de jonction, les autres ddls de jonction étant bloqués.

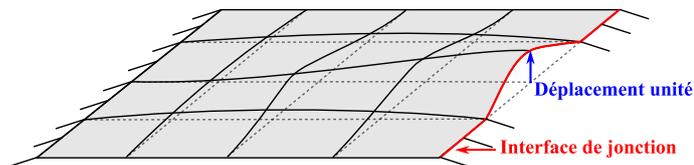


FIGURE 1.31 – Exemple d’un mode contraint

- **Modes d’attache** : ils correspondent à la réponse statique de la sous-structure soumise à une force unitaire suivant un seul ddl de jonction, les autres degrés de liberté étant libres. Ces modes peuvent inclure les contributions de tous les modes propres de la sous-structure. L’élimination de ces contributions donne les modes d’attache résiduels.

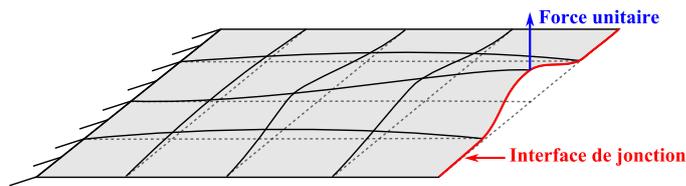


FIGURE 1.32 – Exemple d'un mode d'attache

Les modes normaux qui peuvent être utilisés dépendent des conditions aux limites attribuées aux ddls d'interfaces. Ils représentent les solutions propres d'une sous-structure. Trois types de modes normaux peuvent être distingués :

- **Modes à interface bloquée** : en encastrant tous les ddls de jonction "j", le modèle de la sous-structure n'est exprimé qu'avec les ddls internes "i". Les modes à interface bloquée constituent une base tronquée des modes propres obtenus par la résolution du problème aux valeurs propres associé au système exprimé sur l'ensemble des ddls internes "i" de la sous-structure.
- **Modes à interface libre** : ces modes sont obtenus par résolution du problème aux valeurs propres associé à la sous-structure sans aucune condition d'encastrement appliquée aux ddls de de jonction "j".
- **Modes à interface chargée** : Les ddls de jonction "j" sont affectés par des modifications de masse au d'inertie représentatives des conditions imposées par la présence d'autres sous-structures adjacentes.

La figure 1.33 récapitule schématiquement les différents modes normaux.

1.3.2.4 QUELQUES MÉTHODES DE SOUS-STRUCTURATION

Il existe plusieurs techniques de réduction de modèle et c'est principalement le choix des vecteurs qui constituent la transformation $\mathbf{T}^{(s)}$ qui différencie ces méthodes de réduction. Il est fréquent de classer les méthodes de synthèse modale en quatre catégories : les méthodes à interfaces fixes [Bampton 68a], à interfaces mixtes [MacNeal 71], à interfaces libres [Craig 94] et à interfaces chargées [Gladwell 64].

Méthodes à interface bloquée : Craig-Bampton

De fait de sa simplicité d'implémentation numérique et ses performances, la méthode de Craig-Bampton [Bampton 68a] est la méthode la plus couramment utilisée pour la réduction de modèle. Sa matrice de transformation $\mathbf{T}^{(s)}$ est constituée par les modes statiques contraints et les modes normaux à interface bloquée. Cette méthode

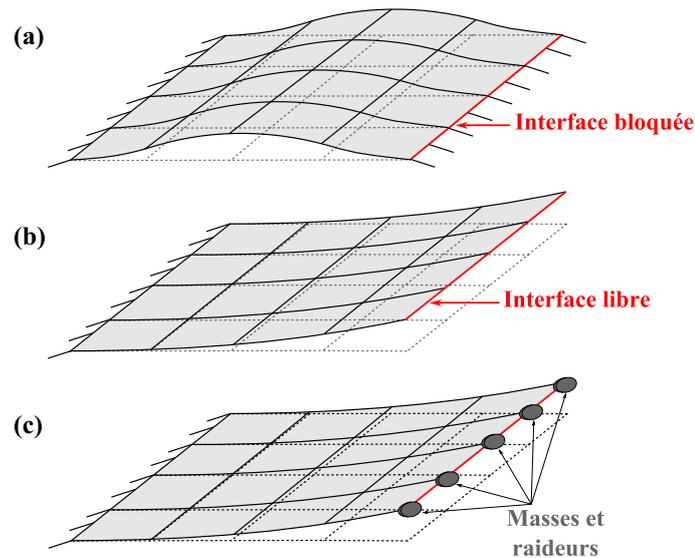


FIGURE 1.33 – Modes normaux : (a) modes à interface bloquée, (b) mode à interface libre et (c) mode à interface chargée

permet d'étudier chaque sous-structure de façon indépendante et de travailler avec des superéléments. Ces derniers présentent aussi l'avantage de la confidentialité lors de travail partagé en fournissant que le comportement dynamique de la sous-structure sans communiquer aucune information sur sa géométrie.

Cependant, puisque tous les degrés de liberté de jonction sont conservés, le modèle réduit obtenu par cette méthode peut avoir une taille importante dans les cas où l'interface représente une part importante des degrés de liberté de la structure (cas des interfaces finement discrétisés afin d'obtenir une bonne précision).

Cette méthode est retenue pour la réduction de modèles de sous-structures linéaires dans le chapitre 3 afin de construire les méta-modèle.

Méthode à interface libre

La transformation $\mathbf{T}^{(s)}$, utilisée pour cette méthode, regroupe les modes d'attache résiduels et les modes normaux à interface libre. Les premières méthodes avec interfaces libres ont été développées par Goldman [Goldman 69] et [Hou 69]. Puis plusieurs variantes ont été proposées dont on peut citer MacNeal [MacNeal 71], Rubin [Rubin 75] et Martinez et al [Martinez 84].

Méthode à interface mixte

Les vecteurs de la matrice $\mathbf{T}^{(s)}$ sont issus de la combinaison des modes contraints et

les modes d'attache d'attache ainsi que la combinaison des modes normaux. Parmi les méthode à interface mixte, on peut citer la méthode de Hintz [Hintz 75].

Enfin , La démarche de sous-structuration à suivre pour toutes les méthodes est présentée par la figure 1.34 où les étapes 1, 4 et 5 sont effectuées sur la structure entière et les étapes 2, 3 et 6 sont effectuées sur les sous-structures à réduire. Une description détaillée sur les formulations des différentes méthodes de synthèse modale est fournie dans les travaux de Lombard et al [Lombard 99], Masson et al [Masson 03] et Chentouf et al. [Chentouf 11].

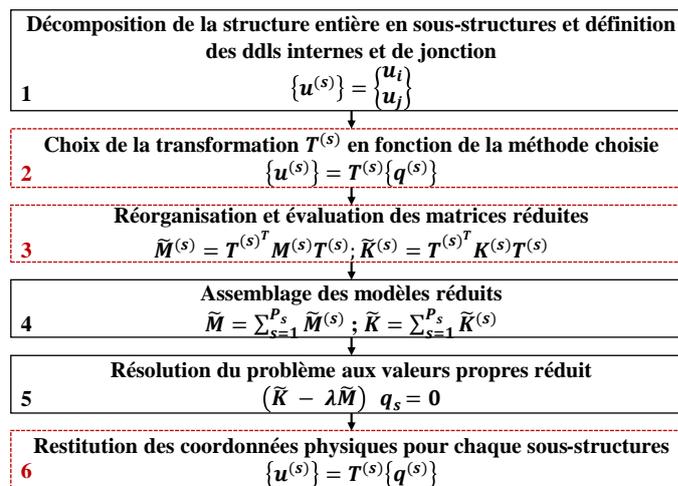


FIGURE 1.34 – Procédure de réduction de modèle par sous-structuration [Chentouf 11]

1.4 CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons présenté, en premier lieu, un état de l'art synthétique des matériaux composites ainsi que les formes d'endommagement qui peuvent se développer dans les structures composites. Après avoir évoqué l'effet des dégradations dues à l'endommagement, on a donné un aperçu bibliographique à propos de quelques modèles d'endommagement existants dans la littérature. Il est conclu qu'il est important de surveiller l'état de santé des structures composites. Ainsi, quelques techniques de surveillance ont été rappelées, notamment les techniques liées à la détection, la quantification et la localisation de l'endommagement. Enfin, on a terminé par les approches de méta-modélisation, et particulièrement l'application des RNA dans la détection de l'endommagement et les méthodes de réduction de modèle. Ces approches de méta-modélisation permettent de réduire les coûts de calcul des simulations numériques.

MÉTHODES DE RÉOLUTION DES PROBLÈMES DE DYNAMIQUE DES STRUCTURES

Sommaire

2.1 Méthodes de résolution	54
2.1.1 Schéma de Newmark pour les systèmes linéaires	55
2.1.2 Schéma de Newmark pour les systèmes non-linéaires	57
2.1.3 Méthodes itératives de Newton	60
2.2 Théories utilisées dans la formulation numérique de structures composites	64
2.2.1 Théorie classique des stratifiés CLT	64
2.2.2 Théorie de la déformation de cisaillement de premier ordre FSDT	65
2.2.3 Théorie de la déformation de cisaillement d'ordre supérieur HSDT	67
2.3 Vibrations linéaires des structures composites	67
2.3.1 Relation déplacement-déformation	68
2.3.2 Formulation variationnelle	71
2.3.3 Discrétisation par éléments finis	72
2.3.4 Modes propres de vibration	75
2.4 Méthodes de réduction de modèles éléments finis	80
2.4.1 Projection dans une base de Ritz	80
2.4.2 Méthode de Craig-Bampton	81
2.5 Conclusion	84

PRÉAMBULE

Ce chapitre décrit l'analyse dynamique des structures composites en détaillant les aspects numériques en termes d'intégration temporelle et discrétisation spatiale. La discrétisation spatiale est basée sur la modélisation par éléments finis en utilisant la théorie de déformation de cisaillement de premier ordre FSDT (First-order Shear Deformation Theory) et le principe variationnel pour établir les équations du mouvement. Enfin, pour de réduire le temps de calcul, des méthodes de réduction de modèles sont rappelées à la fin de chapitre.

2.1 MÉTHODES DE RÉOLUTION

L'analyse de problèmes dynamiques, dans le domaine temporel, nécessite l'utilisation de méthodes d'intégration pas à pas pour résoudre les équations du mouvement. Ces méthodes permettent de déterminer une approximation de la solution exacte à intervalles de temps discrets. Le principe de ces méthodes peut se résumer en deux points :

- Pendant un pas de temps Δt , les variations temporelles du déplacement, de la vitesse et de l'accélération sont approchées par des fonctions issues de leur développement en série de Taylor.
- Pendant un pas de temps Δt , il faut assurer la convergence de l'équation du mouvement qui décrit l'équilibre dynamique du système. Cela signifie que l'équilibre entre la force interne et le chargement appliqué doit être assuré à chaque pas de temps.

Durant le processus de calcul, la précision, la stabilité de la solution et la durée du calcul dépendent de la longueur du pas de temps et de la méthode d'intégration choisie. Deux classes de méthodes d'intégration peuvent être distinguées : ce sont les méthodes d'intégration explicite et implicite.

Les schémas explicites se caractérisent par leur facilité d'implémentation dans un code de calcul car la recherche de l'équilibre au temps $t + \Delta t$ est établi en fonction des quantités connues à l'instant précédent t . Leur inconvénient majeur tient dans leur convergence conditionnelle, d'où la nécessité de prendre des pas de temps très petits ; ce qui conduit à des coûts de calcul élevés. Par contre, les schémas implicites sont généralement inconditionnellement stables. Ils sont cependant plus lourds à mettre en œuvre, en particulier, dans l'étude des problèmes non-linéaires. Pour que l'équilibre au

temps $t + \Delta t$ soit établi, la solution doit converger sur l'incrément Δt , ce qui rend cette convergence difficile à atteindre quand les non-linéarités sont importantes. Dans ce travail, la méthode d'intégration implicite de Newmark [Newmark 59] est utilisé pour résoudre les équations d'équilibre dynamique.

2.1.1 SCHEMA DE NEWMARK POUR LES SYSTEMES LINEAIRES

Pour plus de détails, le lecteur est invité à consulter les travaux de [Newmark 59, Bathe 96, Geradin 15]. En 1959, N.M. Newmark [Newmark 59] a proposé une méthode d'intégration permettant de résoudre les équations différentielles de second ordre de la dynamique des structures. Soit l'équation, représentative du comportement dynamique d'un système linéaire à l'instant $t + \Delta t$:

$$M\ddot{u}_{t+\Delta t} + B\dot{u}_{t+\Delta t} + Ku_{t+\Delta t} = F_{t+\Delta t} \quad (2.1)$$

avec M , B et K respectivement les matrices de masse, d'amortissement et de raideur. u et F les vecteurs de déplacement et force exercé sur le système.

Le schéma de Newmark est basé sur le développement en série de Taylor, tronqué à l'ordre 3, du déplacement et de la vitesse :

$$\begin{cases} u_{t+\Delta t} = u_t + \Delta t \dot{u}_t + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{u}_t + \frac{\Delta t^3}{6} \dot{\ddot{u}}_t \\ \dot{u}_{t+\Delta t} = \dot{u}_t + \Delta t \ddot{u}_t + \frac{\Delta t^2}{2} \dot{\ddot{u}}_t \end{cases} \quad (2.2)$$

Une nouvelle formulation est donnée par Newmark en introduisant deux paramètres β et γ tels que :

$$\begin{cases} u_{t+\Delta t} = u_t + \Delta t \dot{u}_t + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{u}_t + \beta \Delta t^3 \dot{\ddot{u}}_t \\ \dot{u}_{t+\Delta t} = \dot{u}_t + \Delta t \ddot{u}_t + \gamma \Delta t^2 \dot{\ddot{u}}_t \end{cases} \quad (2.3)$$

L'accélération est supposée linéaire entre les instants t et $t + \Delta t$:

$$\dot{\ddot{u}}_t = \frac{\ddot{u}_{t+\Delta t} - \ddot{u}_t}{\Delta t} \quad (2.4)$$

La substitution de la relation (2.4) dans l'équation (2.3) donne :

$$\begin{cases} u_{t+\Delta t} = u_t + \Delta t \dot{u}_t + \frac{\Delta t^2}{2} \left((1 - 2\beta) \ddot{u}_t + 2\beta \ddot{u}_{t+\Delta t} \right) \\ \dot{u}_{t+\Delta t} = \dot{u}_t + \Delta t \left((1 - \gamma) \ddot{u}_t + \gamma \ddot{u}_{t+\Delta t} \right) \end{cases} \quad (2.5)$$

La première relation de l'équation (2.5) permet d'exprimer l'accélération $\ddot{u}_{t+\Delta t}$ en fonction des termes connus et du déplacement à $t + \Delta t$:

$$\ddot{u}_{t+\Delta t} = \frac{u_{t+\Delta t} - u_t}{\beta \Delta t^2} - \frac{\dot{u}_t}{\beta \Delta t} - \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{u}_t \quad (2.6)$$

Et en substituant l'équation (2.6) dans l'équation (2.5), la vitesse $\dot{u}_{t+\Delta t}$ s'exprime uniquement en fonction des termes connus et du déplacement à $t + \Delta t$:

$$\dot{u}_{t+\Delta t} = \frac{\gamma}{\beta\Delta t}(u_{t+\Delta t} - u_t) - \left(\frac{\gamma}{\beta} - 1\right)\dot{u}_t - \Delta t\left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1\right)\ddot{u}_t \quad (2.7)$$

L'introduction des relations (2.6) et (2.7) dans l'équation de mouvement (2.1) conduit à une nouvelle écriture équivalente à celle d'un problème statique de la forme :

$$\widehat{K}u_{t+\Delta t} = \widehat{F}_{t+\Delta t} \quad (2.8)$$

— \widehat{K} est la matrice jacobienne définie par :

$$\widehat{K} = K + \frac{\gamma}{\beta\Delta t}B + \frac{1}{\beta\Delta t^2}M \quad (2.9)$$

— \widehat{F} est une terme assimilé à une force dynamique instantanée :

$$\begin{aligned} \widehat{F} &= F_{t+\Delta t} \\ &+ C \left[\frac{\gamma}{\beta\Delta t}u_t + \left(\frac{\gamma}{\beta} - 1\right)\dot{u}_t + \Delta t\left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1\right)\ddot{u}_t \right] \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$+ M \left[\frac{1}{\beta\Delta t^2}u_t + \frac{1}{\beta\Delta t}\dot{u}_t + \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right)\ddot{u}_t \right] \quad (2.11)$$

La stabilité du schéma est relative au choix des constantes d'intégration β et γ :

- $(\beta, \gamma) = (1/4, 1/2)$: méthode d'accélération moyenne et le schéma est inconditionnellement stable
- $(\beta, \gamma) = (1/6, 1/2)$: méthode d'accélération linéaire et le schéma est conditionnellement stable. Dans ce cas il faut que le pas de temps soit inférieur à un seuil exprimé en fonction de la plus petite période du système T_{min} :

$$\Delta t \leq 0.551T_{min} \quad (2.12)$$

Les structures mécaniques sont souvent représentées par modèles élément finis à plusieurs degrés de libertés. Ainsi, la période T_{min} peut être, quand il s'agit de chercher la réponse dans le domaine des hautes fréquences, très petite ce qui rend la résolution du problème très lente. Par conséquent, le choix de la méthode d'accélération moyenne est plus fiable car elle est inconditionnellement stable. L'algorithme décrivant la méthode d'intégration de Newmark avec accélération moyenne est présenté dans le tableau 2.1.

TABLE 2.1 – Algorithme de la méthode d'intégration de Newmark avec accélération moyenne : cas linéaire

I. Initialisation des variables1. Conditions initiales à $t = 0$: u_0, \dot{u}_0 , calcul de \ddot{u}_0

$$M\ddot{u}_0 + B\dot{u}_0 + Ku_0 = F_0$$

2. Méthode d'intégration moyenne

$$\beta = 1/4, \gamma = 1/2$$

II. Calcul préliminaire

1. Détermination des constantes d'intégration

$$a_0 = \frac{1}{\beta\Delta t^2} \quad ; \quad a_1 = \frac{\gamma}{\beta\Delta t} \quad ; \quad a_2 = \frac{1}{\beta\Delta t} \quad ; \quad a_3 = \frac{1}{2\beta} - 1$$

$$a_4 = \frac{\gamma}{\beta} - 1 \quad ; \quad a_5 = (\frac{\gamma}{\beta} - 2)\frac{\Delta t}{2} \quad ; \quad a_6 = (1 - \gamma)\Delta t \quad ; \quad a_7 = \gamma\Delta t$$

2. Détermination de la matrice tangente

$$\widehat{K} = K + a_0M + a_1B$$

III. Intégration pas à pas sur tous les pas Δt 1. Incrément de temps $t = t + \Delta t$ 2. Détermination de la force dynamique $\widehat{F}_{t+\Delta t}$

$$\widehat{F}_{t+\Delta t} = F_{t+\Delta t} + B(a_1u_t + a_4\dot{u}_t + a_5\ddot{u}_t) + M(a_0u_t + a_2\dot{u}_t + a_3\ddot{u}_t)$$

3. Détermination du déplacement $u_{t+\Delta t}$

$$u_{t+\Delta t} = -\widehat{K}^{-1}\widehat{F}_{t+\Delta t}$$

4. Détermination de l'accélération et de la vitesse à $t + \Delta t$

$$\ddot{u}_{t+\Delta t} = a_0(u_{t+\Delta t} - u_t) - a_2\dot{u}_t - a_3\ddot{u}_t$$

$$\dot{u}_{t+\Delta t} = \dot{u}_t + a_6\ddot{u}_t + a_7\ddot{u}_{t+\Delta t}$$

5. Retour à l'étape **III****2.1.2 SCHÉMA DE NEWMARK POUR LES SYSTÈMES NON-LINÉAIRES**

Généralement, les méthodes d'intégration implicites et inconditionnellement stable sont recommandées pour l'analyse des systèmes non linéaires. Ceci est dû au fait que la période de la réponse non-linéaire varie au cours de la résolution et qu'il est alors difficile de satisfaire toujours les conditions de stabilité associées aux méthodes conditionnellement stables (par exemple la condition donnée par l'équation (2.12) pour le cas de l'accélération linéaire). Ce paragraphe présente la méthode de Newmark dans sa forme incrémentale applicable aux systèmes linéaires et non-linéaires.

L'équation du comportement dynamique d'un système ayant des non-linéarités liées à sa raideur et un amortissement supposé constant est de la forme :

$$M\ddot{u}_t + B\dot{u}_t + \underbrace{K(u_t)u_t}_{f_{nl}} = F_t \quad (2.13)$$

f_{nl} représente la force non linéaire. À l'instant $t + \Delta t$ l'équation (2.13) devient :

$$M\ddot{u}_{t+\Delta t} + B\dot{u}_{t+\Delta t} + K(u_{t+\Delta t})u_{t+\Delta t} = F_{t+\Delta t} \quad (2.14)$$

La soustraction de l'équation (2.13) à l'équation (2.14) donne :

$$M\Delta\ddot{u} + B\Delta\dot{u} + \bar{K}_{t+\Delta t}\Delta u_t = \Delta F \quad (2.15)$$

avec \bar{K} est la matrice sécante de raideur calculée entre les instants t et $t + \Delta t$. Cette matrice est inconnue car le déplacement à $t + \Delta t$ n'est pas encore déterminé. Ainsi, c'est la matrice de raideur tangente \bar{K}_t calculée à l'instant t qui est généralement utilisée telle que :

$$\bar{K}_t = \left. \frac{\partial f_{nl}}{\partial u} \right|_t \quad (2.16)$$

À partir de l'équation (2.5), les incréments du déplacement et de la vitesse s'expriment comme :

$$\begin{cases} \Delta u = \Delta t\dot{u}_t + \frac{\Delta t^2}{2}\ddot{u}_t + \Delta t^2\beta\Delta\ddot{u} \\ \Delta\dot{u} = \Delta t\ddot{u}_t + \gamma\Delta t\Delta\ddot{u} \end{cases} \quad (2.17)$$

L'équation (2.17) permet de déduire l'incrément d'accélération en fonction de celui de déplacement :

$$\Delta\ddot{u} = \frac{1}{\beta\Delta t^2}\Delta u - \frac{1}{\beta\Delta t}\dot{u}_t - \frac{1}{2\beta}\ddot{u}_t \quad (2.18)$$

La substitution de l'équation (2.18) dans l'équation (2.17) donne l'expression de l'incrément de vitesse en fonction de celui de déplacement :

$$\Delta\dot{u} = \frac{\gamma}{\beta\Delta t}\Delta u - \frac{\gamma}{\beta}\dot{u}_t - \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1\right)\Delta t\ddot{u}_t \quad (2.19)$$

En remplaçant les termes $\Delta\ddot{u}$ et $\Delta\dot{u}$ dans l'équation (2.15), l'équation incrémentale de mouvement devient :

$$\hat{K}\Delta u = \Delta\hat{F} \quad (2.20)$$

où \widehat{F} est une terme assimilé à une force dynamique instantanée :

$$\begin{aligned} \Delta \widehat{F} &= \Delta F \\ &+ C \left[\frac{\gamma}{\beta} \dot{u}_t + \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) \Delta t \ddot{u}_t \right] \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$+ M \left[\frac{1}{\beta \Delta t} \dot{u}_t + \frac{1}{2\beta} \ddot{u}_t \right] \quad (2.22)$$

$$\widehat{K} = \bar{K}_t + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} B + \frac{1}{\beta \Delta t^2} M \quad (2.23)$$

Durant le processus incrémental de résolution, après avoir calculer Δu en utilisant l'équation (2.20), les incréments de l'accélération et de la vitesse sont obtenus par les relations (2.18) et (2.19). Le déplacement $u_{t+\Delta t}$, la vitesse $\dot{u}_{t+\Delta t}$ et l'accélération $\ddot{u}_{t+\Delta t}$ sont obtenus en additionnant leurs incréments à leurs valeurs à l'instant t . Les valeurs obtenues $u_{t+\Delta t}$, $\dot{u}_{t+\Delta t}$ et $\ddot{u}_{t+\Delta t}$ ne vont pas satisfaire l'équilibre dynamique à $t + \Delta t$ en raison de l'utilisation de la matrice tangente \bar{K}_t au début du pas de temps au lieu de la matrice sécante de raideur. S'en suit une suite de corrections (itérations k) nécessaires pour assurer l'équilibre dynamique. Généralement, ce sont les méthodes itératives de Newton qui sont les plus utilisées afin de minimiser la fonction résiduelle exprimée par le vecteur $r(u_{t+\Delta t}^{(k)})$ telle que :

$$r(u_{t+\Delta t}^{(k)}) = M \ddot{u}_{t+\Delta t}^{(k)} + B \dot{u}_{t+\Delta t}^{(k)} + f_{nl}(u_{t+\Delta t}^{(k)}) - F_{t+\Delta t} \quad (2.24)$$

La correction itérative des incréments de la vitesse et d'accélération est donnée par :

$$\begin{cases} \Delta \dot{u}_{t+\Delta t}^{(k)} = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \Delta u^{(k)} \\ \Delta \ddot{u}_{t+\Delta t}^{(k)} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} \Delta u^{(k)} \end{cases} \quad (2.25)$$

Ce processus itératif conduit à la détermination de l'incrément du déplacement à travers la résolution de l'équation suivante suivante :

$$\Delta u^{(k)} = -\widehat{K}^{-1} r(u_{t+\Delta t}^{(k)}) \quad (2.26)$$

À chaque itération de correction, l'obtention d'un vecteur $r(u_{t+\Delta t}^{(k)})$ non nul atteste un déséquilibre entre les forces internes et le chargement exercé. Ainsi, le processus itératif a pour but de réduire la norme de ce vecteur à un niveau raisonnable assurant au déplacement une valeur représentant la solution de l'équation d'équilibre. Cette convergence peut être testée par rapport à trois critères qui portent respectivement sur la force résiduelle,

le déplacement ou le travail instantané au cours de l'itération courante. Le critère de convergence le plus utilisé est celui qui impose à la norme de $r(u_{t+\Delta t}^{(k)})$ d'être inférieure à un seuil de précision et stable vis-à-vis de sa variation :

$$\left\{ \begin{array}{l} \| r(u_{t+\Delta t}^{(k)}) \| \leq \epsilon_1 \| F_{t+\Delta t} \| \\ \frac{\| r(u_{t+\Delta t}^{(k)}) \| - \| r(u_{t+\Delta t}^{(k-1)}) \|}{\| r(u_{t+\Delta t}^{(k)}) \|} \leq \epsilon_2 \end{array} \right. \quad (2.27)$$

avec $\epsilon_1 \ll 1$ et $\epsilon_2 \ll 1$.

2.1.3 MÉTHODES ITÉRATIVES DE NEWTON

Les méthodes de Newton sont utilisées pour réduire les erreurs de déséquilibre entre le chargement exercé au système et sa force interne. Dans le but d'éviter l'accumulation de ces erreurs dans chaque pas de temps, un processus itératif peut être utilisé pour établir l'équilibre à un seuil de convergence souhaité à chaque pas de temps. Cette procédure est l'idée fondamentale de la méthode de Newton-Raphson. En effet, le principe de fonctionnement de ce genre de méthode se résume en deux points :

- La vérification de l'état d'équilibre par rapport à un seuil de convergence donné
- Si l'équilibre n'est pas satisfait, les variables de l'équation d'équilibre doivent être ajustées

La procédure d'itération de Newton-Raphson est illustrée dans la figure 2.1 qui montre l'équilibre à l'instant $t + \Delta t$ en partant d'un état d'équilibre au temps précédent t . La variation du chargement de F_t à $F_{t+\Delta t}$ induit la variation du déplacement de u_t à $u_{t+\Delta t}$ par une façon incrémentale en annulant le résidu r . L'algorithme de cette méthode est présenté dans le tableau 2.2.

Dans l'algorithme de la méthode de Newton-Raphson donné dans le tableau 2.2, \hat{K} apparaît dans la boucle interne et est évaluée à chaque itération k , ce qui augmente considérablement le temps de calcul dans le cas d'un système à plusieurs degrés de libertés, car il faut évaluer les matrices élémentaires et réaliser l'assemblage de \hat{K} . Une modification simple de la méthode de Newton-Raphson consiste à déplacer la matrice tangente \hat{K} à l'extérieur de la boucle d'itération k . Alors $\hat{K} = \hat{K}_t$ est calculée seulement une fois pour chaque pas de temps et elle est évaluée sur la base de l'état précédent de déplacement u_t comme illustré dans le tableau 2.3 et la figure 2.2.

L'algorithme de la méthode d'intégration de Newmark à accélération moyenne muni de la méthode de Newton-Raphson modifiée est présenté dans le tableau 2.4.

TABLE 2.2 – Algorithme de la méthode de Newton-Raphson

I. Pas de temps $t + \Delta t$

1. Chargement : $F_{t+\Delta t}$
2. Déplacement : $u_{t+\Delta t}^{(0)}$
3. Matrice tangente : $\widehat{K}_{t+\Delta t}^{(0)} = \widehat{K}_t$

II. Itérations de correction, $k = 1, 2, 3, \dots$

1. $\Delta u^{(k)} = -\widehat{K}_{t+\Delta t}^{(k-1)} r(u_{t+\Delta t}^{(k-1)})$
2. Actualisation de déplacement
 $u_{t+\Delta t}^{(k)} = u_{t+\Delta t}^{(k-1)} + \Delta u^{(k)}$
3. Actualisation de résidu : $r(u_{t+\Delta t}^{(k)})$
4. évaluation de la matrice tangente $\widehat{K}_{t+\Delta t}^{(k)}$
5. Si la convergence n'est pas satisfaite, retour à l'étape II
6. Si non, passer au pas de temps suivant

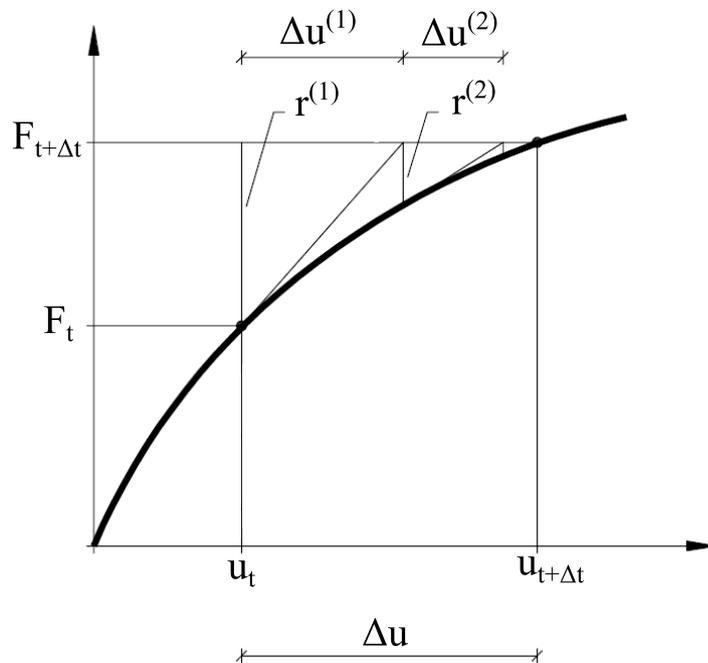


FIGURE 2.1 – Méthode de Newton-Raphson

TABLE 2.3 – Algorithme de la méthode de Newton-Raphson modifiée

I. Pas de temps $t + \Delta t$

1. Chargement : $F_{t+\Delta t}$
2. Évaluation de la matrice tangente : $\widehat{K} = \widehat{K}_t$

II. Itérations de correction, $k = 1, 2, 3, \dots$

1. $\Delta u^{(k)} = -\widehat{K}^{-1} r(u_{t+\Delta t}^{(k-1)})$
2. Actualisation de déplacement
 $u_{t+\Delta t}^{(k)} = u_{t+\Delta t}^{(k-1)} + \Delta u^{(k)}$
3. Actualisation de résidu : $r(u_{t+\Delta t}^{(k)})$
4. Si la convergence n'est pas satisfaite, retour à l'étape **II**
5. Si non, passer au pas de temps suivant

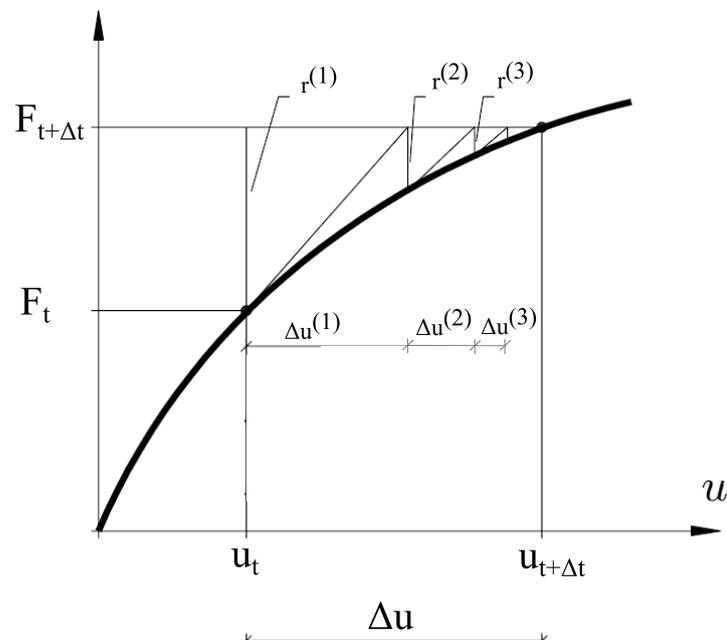


FIGURE 2.2 – Méthode de Newton-Raphson modifiée

TABLE 2.4 – Algorithme de la méthode d'intégration de Newmark avec accélération moyenne : cas non linéaire

<p>I. Initialisation des variables</p> <p>1. Conditions initiales à $t = 0$: u_0, \dot{u}_0, calcul de \ddot{u}_0</p> $M\ddot{u}_0 + B\dot{u}_0 + Ku_0 = F_0$ <p>2. Méthode d'intégration moyenne</p> $\beta = 1/4, \gamma = 1/2$
<p>II. Intégration pas à pas sur tous les pas incréments n de temps</p> <p>1. Incrément de temps $t_{n+1} = t_n + \Delta t$</p> <p>2. Détermination de la matrice tangente</p> $\widehat{K} = \left(\bar{K} + \frac{1}{\beta\Delta t^2}M + \frac{\gamma}{\beta\Delta t}B \right) \Big _{t_n}$ <p>3. Prédiction du déplacement, de la vitesse et l'accélération</p> $u_{n+1}^{(0)} = u_n + \dot{u}_n\Delta t + (0.5 - \beta)\Delta t^2\ddot{u}_n$ $\dot{u}_{n+1}^{(0)} = \dot{u}_n + (1 - \gamma)\Delta t\ddot{u}_n$ $\ddot{u}_{n+1}^{(0)} = \ddot{u}_n$ <p>4. Calcul de résidu</p> $r^{(0)} = M\ddot{u}_{n+1}^{(0)} + B\dot{u}_{n+1}^{(0)} + f_{nl}(u_{n+1}^{(0)}) - F_{n+1}$
<p>III. Boucle itérative de correction $k = 1, 2, 3, \dots$</p> <p>1. Calcul de l'incrément de déplacement Δu</p> $\Delta u^{(k)} = -\widehat{K}^{-1}r^{(k-1)}$ <p>2. Actualisation du déplacement, de la vitesse et l'accélération</p> $u_{n+1}^{(k)} = u_{n+1}^{(k-1)} + \Delta u^{(k)}$ $\dot{u}_{n+1}^{(k)} = \dot{u}_{n+1}^{(k-1)} + \frac{\gamma}{\Delta t}\Delta u^{(k)}$ $\ddot{u}_{n+1}^{(k)} = \ddot{u}_{n+1}^{(k-1)} + \frac{1}{\beta\Delta t^2}\Delta u^{(k)}$ <p>3. Calcul de nouveau résidu</p> $r^{(k)} = M\ddot{u}_{n+1}^{(k)} + B\dot{u}_{n+1}^{(k)} + f_{nl}(u_{n+1}^{(k)}) - F_{n+1}$ <p>4. si $\ r^{(k)}\ > \epsilon_1 \ F_{n+1}\$ retour à III. pour une nouvelle itération</p> <p>5. Retour à II. pour un nouveau incrément de temps</p>

2.2 THÉORIES UTILISÉES DANS LA FORMULATION NUMÉRIQUE DE STRUCTURES COMPOSITES

Initialement développées pour étudier les structures isotropes, différentes théories sont étendues pour la formulation numérique des structures composites. Ces théories sont essentiellement divisées en deux catégories. La première catégorie est la théorie de la couche unique équivalente, y compris la théorie du stratifié classique (CLT : Classical Laminate Theory), la théorie de déformation du cisaillement de premier ordre (FSDT : First-order Shear Deformation Theory) et la théorie de déformation du cisaillement d'ordre supérieur (HSDT : Higher-order Shear Deformation Theory). La seconde est basée sur la théorie de Layer-Wise et contient les théories des couches indépendantes et dépendantes. Ces théories sont détaillées dans les travaux de Berthelot [Berthelot 99] et Reddy [Reddy 04].

Le choix d'une parmi ces diverses formulations est principalement conditionné par la dimension de l'épaisseur de la structure. Pour les structures composites minces lorsque le but de l'étude est la détermination de la réponse globale telles que la réponse temporelle et les fréquences propres, l'utilisation d'une formulation de la première catégorie est recommandée [Reddy 04]. Une brève description des formulations en couches unique équivalente est donnée dans les paragraphes qui suivent.

2.2.1 THÉORIE CLASSIQUE DES STRATIFIÉS CLT

La théorie classique des stratifiés est une extension de la théorie classique des plaques (CPT : Classical Plate Theory). Elle est basée sur les hypothèses cinématiques de Kirchhoff, employées pour l'étude de structures du type plaque, et sur les hypothèses cinématiques de Kirchhoff-Love, utilisées pour l'étude de structures du type coques. Les hypothèses adoptées pour la formulation de la théorie CLT, sont :

- Une ligne droite perpendiculaire à la surface moyenne de la structure non déformée reste droite et perpendiculaire à cette surface après déformation.
- La structure est considérée mince, c'est-à-dire, son épaisseur est petite par rapport aux dimensions planes (largeur et longueur).
- Les couches constitutives de la structure composite sont parfaitement liées les unes aux autres, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de glissement, ou décollement entre les couches.
- Chaque couche a une épaisseur uniforme .

— Les déplacements, les rotations et les déformations sont petits.

Le champ de déplacement s'écrit comme :

$$\begin{cases} u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) \end{cases} \quad (2.28)$$

où $u(x, y, z, t)$ et $v(x, y, z, t)$ sont, respectivement, les déplacements dans le plan médian (\vec{x}, \vec{y}) d'un point quelconque de la structure, $w(x, y, z, t)$ est le déplacement transversal selon la direction de l'épaisseur \vec{z} , (u_0, v_0, w_0) sont les déplacements dans le plan (\vec{x}, \vec{y}) et $(\frac{\partial w_0}{\partial x}, \frac{\partial w_0}{\partial y})$ sont les rotations autour des axes (\vec{x}, \vec{y}) . Une illustration de la cinématique de déformation pour la CLT est présentée la figure 2.3 : Une fois les déplacements (u_0, v_0, w_0)

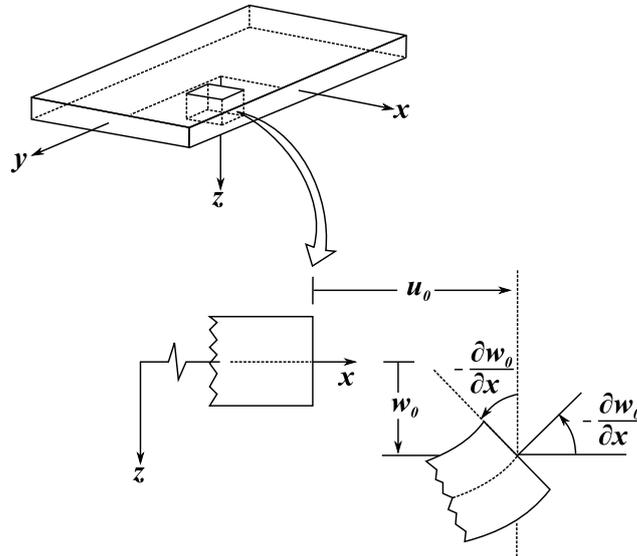


FIGURE 2.3 – Cinématique de déformation pour la théorie CLT [Reddy 04]

du plan médian sont déterminés, les déplacements de tout point dans l'épaisseur de la structure peuvent être déterminés par l'équation (2.28). Dans la formulation de la CLT, les déformations de cisaillement transverse sont négligées ce qui restreint son utilisation aux structures de faible épaisseur.

2.2.2 THÉORIE DE LA DÉFORMATION DE CISAILLEMENT DE PREMIER ORDRE FSDT

Dans la théorie FSDT, les hypothèses de la CLT sont conservées, sauf qu'une ligne droite perpendiculaire à la surface moyenne non déformée reste droite mais elle ne reste

pas perpendiculaire à cette surface après déformation, Fig 2.4 . Le champ de déplacement

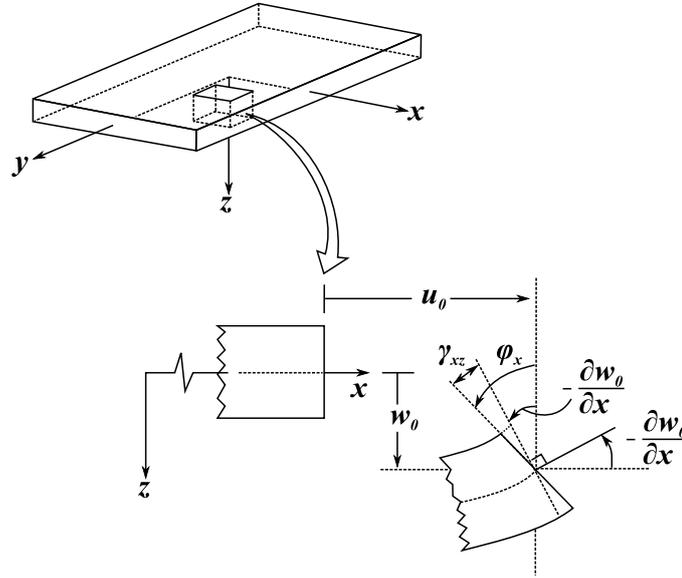


FIGURE 2.4 – Géométries non déformées et déformées d'une plaque sous les hypothèses de la FSDT [Reddy 04]

pour la FSDT est :

$$\begin{cases} u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) + z\varphi_x \\ v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) + z\varphi_y \\ w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) \end{cases} \quad (2.29)$$

où (u_0, v_0, w_0) sont les déplacements d'un point du plan médian et φ_x et φ_y sont respectivement les rotations de la normal au plan médian par rapport aux axes \vec{y} et \vec{x} .

Les déformations et les contraintes de cisaillement dans la FSDT sont constantes dans la direction de l'épaisseur. Les auteurs [Cen 02, Reddy 04] ont proposé d'introduire un facteur k de correction de cisaillement pour qu'il y ait accord entre l'état de contrainte réel et l'état de contrainte constant prédit par la FSDT. Le facteur de correction k est obtenu par égalisation de l'énergie de déformation due au cisaillement transverse obtenue par la FSDT et l'énergie obtenue par un modèle 3D. Il dépend des propriétés de la structure composite et de la formulation adoptée dans la modélisation.

$$[Q_x, Q_y] = k \int_{h_k}^{h_{k+1}} (\sigma_{xz}, \sigma_{yz}) dz \quad (2.30)$$

Pour plusieurs applications industrielles, la théorie FSDT fourni un bon compromis entre les couts de calcul et sa capacité de précision en termes de résultats obtenus [Cen 02].

Elle permet l'estimation de diverses réponses dans les domaines statique et dynamique à l'échelle macromécanique. Toutefois, à une échelle plus petite, elle perd de la précision dans la prédiction numérique des fréquences et modes propres d'ordre élevée.

2.2.3 THÉORIE DE LA DÉFORMATION DE CISAILLEMENT D'ORDRE SUPÉRIEUR HSDT

Pour la HSDT, les hypothèses de la FSDT sont conservées, sauf qu'une ligne droite perpendiculaire à la surface moyenne non déformée ne reste pas droite ni perpendiculaire à cette surface après déformation. Le champ des déplacements s'écrit :

$$\begin{cases} u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) + z\varphi_x + z^2\zeta_x + z^2\varsigma_x \\ v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) + z\varphi_y + z^2\zeta_y + z^2\varsigma_y \\ w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) + z\varphi_z + z^2\zeta_z \end{cases} \quad (2.31)$$

Les fonctions $\zeta_x, \varsigma_x, \zeta_y, \varsigma_y, \zeta_z$ n'ont pas de sens physique et sont considérées comme des rotations d'ordre supérieur qui représentent la déformation d'une ligne normale à la surface moyenne. En annulant les fonctions φ_z et ζ_z , Reddy [Reddy 04] a proposé une formulation d'ordre 3 (Third-order Shear Deformation Theory) où les déplacements sont représentés par des fonctions polynomiales d'ordre 3 dans la direction de l'épaisseur. Les autres fonctions sont déterminées de manière à avoir les contraintes de cisaillement transverse nulles sur les faces inférieure et supérieure de la plaque.

L'introduction des fonctions supplémentaires par rapport à la FSDT augmente le coût de calcul et rend l'implémentation de cette théorie difficile dans un code éléments finis. L'avantage majeur de la HSDT résulte dans sa capacité de prédire les contraintes de cisaillement transverse sans faire intervenir un facteur de correction de cisaillement d'une manière semblable à la théorie d'élasticité tridimensionnelle.

2.3 VIBRATIONS LINÉAIRES DES STRUCTURES COMPOSITES

La théorie des déformations de cisaillement de premier ordre (FSDT : First-order Shear Deformation Theory) est adoptée, dans ce mémoire, pour la modélisation des structures composites. Elle est caractérisée par sa simplicité d'implémentation dans un code éléments finis et son faible coût de calcul.

2.3.1 RELATION DÉPLACEMENT-DÉFORMATION

Soit une plaque multicouches délimitée par le volume Ω , d'épaisseur constant h et composée d'un nombre n de couches ayant différentes orientations des fibres (*i.e* : θ). Le système de coordonnées global $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est choisi tel que le plan $\Gamma(\vec{x}, \vec{y})$ représente le plan médian de la plaque et l'axe \vec{z} oriente la direction de l'épaisseur. La k^{ime} couche a une épaisseur $h_k = z_{k+1} - z_k$, où z_{k+1} et z_k sont les coordonnées des surfaces supérieure et inférieure de la couche comme le montre la figure 2.5. On suppose que la contrainte

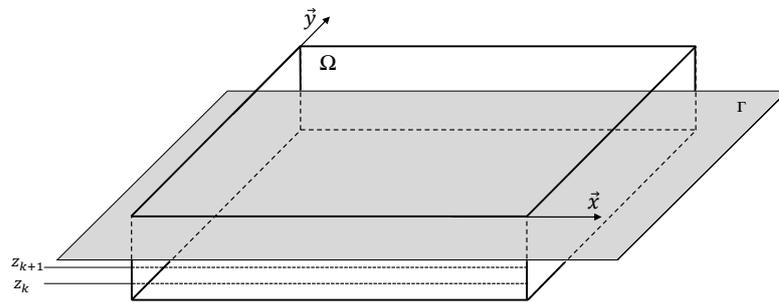


FIGURE 2.5 – Plaque stratifiée et son plan moyen

normale dans la direction \vec{z} est nulle, le champ de déplacement $\{\mathbf{u}\}$ dans le plan $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ peut être exprimé comme :

$$\{\mathbf{u}(x, y, z, t)\} = \begin{Bmatrix} u(x, y, z, t) \\ v(x, y, z, t) \\ w(x, y, z, t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_0(x, y, t) \\ v_0(x, y, t) \\ w_0(x, y, t) \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \varphi_x(x, y, t) \\ \varphi_y(x, y, t) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.32)$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & z & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A_m} \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \varphi_x \\ \varphi_y \end{Bmatrix} \quad (2.33)$$

Où u , v et w représentent respectivement les déplacements le long des axes \vec{x} , \vec{y} et \vec{z} ; $u_0(x, y, t)$, $v_0(x, y, t)$ et $w_0(x, y, t)$ désignent les déplacements du plan médian correspondants dans les directions $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, z est la coordonnée d'un point quelconque le long de la normale \vec{z} et (φ_x, φ_y) sont les rotations de la normale au plan médian autour des axes \vec{y} et \vec{x} .

Dans le cas de petits déplacements, le tenseur des déformation s'écrit :

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) \quad (2.34)$$

$$= \begin{Bmatrix} \mathbf{E}_m + \mathbf{E}_f \\ \mathbf{E}_s \end{Bmatrix} \quad (2.35)$$

Avec \mathbf{E}_m , \mathbf{E}_f et \mathbf{E}_s sont les vecteurs de déformations linéaires dues respectivement aux effets de membrane, de flexion et de cisaillement, respectivement :

$$\mathbf{E}_m = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} ; \quad \mathbf{E}_f = z \begin{Bmatrix} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \end{Bmatrix} ; \quad \mathbf{E}_s = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \varphi_x \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} + \varphi_y \end{Bmatrix} \quad (2.36)$$

Ces déformations peuvent aussi s'écrire sous une forme matricielle en fonction du champ de déplacement $\{u_0, v_0, w_0, \varphi_x, \varphi_y\}^T$:

— Déformations linéaires :

$$\mathbf{E}_m = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \varphi_x \\ \varphi_y \end{Bmatrix} \quad (2.37)$$

$$\mathbf{E}_f = z \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \varphi_x \\ \varphi_y \end{Bmatrix} \quad (2.38)$$

$$\mathbf{E}_s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \varphi_x \\ \varphi_y \end{Bmatrix} \quad (2.39)$$

La plaque est constituée de n couches, la figure 2.6 présente une couche k et son système de coordonnées. Les contraintes sont calculées dans le repère local orienté par la direction

des fibres ($\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$), alors que l'équation du mouvement est établie dans le repère global de la plaque ($\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$). Ainsi, il est nécessaire d'exprimer la loi de comportement élastique dans le repère global. la loi de Hooke peut s'écrire ,en fonction de la matrice d'élasticité

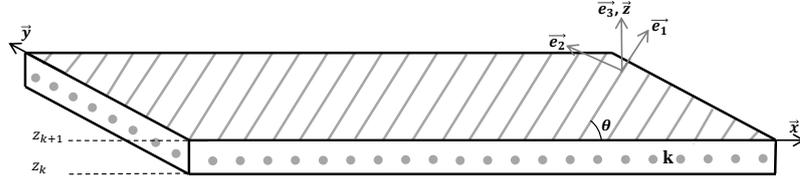


FIGURE 2.6 – Une couche unidirectionnelle et ses systèmes de coordonnées

exprimée dans le repère local C_{loc} par :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & kC_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & kC_{55} \end{bmatrix}}_{C_{loc}} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{23} \end{Bmatrix} \quad (2.40)$$

k est le facteur de correction de cisaillement. Le vecteur des contraintes locales $\{\sigma\}_l = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}\}^T$ peut s'exprimer dans le repère global par l'introduction de la matrice de passage T :

$$\{\sigma\}_g = [T] \{\sigma\}_l \quad (2.41)$$

avec $\{\sigma\}_g = \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}\}^T$ est le vecteur des contraintes globales et $[T]$ s'écrit :

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos^2(\theta) & \sin^2(\theta) & 0 & -\sin(2\theta) & 0 & 0 \\ \sin^2(\theta) & \cos^2(\theta) & 0 & \sin(2\theta) & 0 & 0 \\ \sin(\theta)\cos(\theta) & -\sin(\theta)\cos(\theta) & 0 & \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

De même, le vecteur des déformations locales $\{\varepsilon\}_l = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}\}^T$ se transforme dans le repère global en utilisant la matrice de passage T :

$$\{\varepsilon\}_g = [T]^T \{\varepsilon\}_l \quad (2.43)$$

avec $\{\varepsilon\}_g = \{\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{xz}, \varepsilon_{yz}\}^T$ est le vecteur des déformations dans le repère global. Ainsi la loi de comportement s'exprime dans dans le repère global par :

$$\{\sigma\}_g = [T] \{\sigma\}_l \quad (2.44)$$

$$= [T][C]_{loc} \{\varepsilon\}_l \quad (2.45)$$

$$= [T][C]_{loc}[T]^T \{\varepsilon\}_g \quad (2.46)$$

Finalement la matrice d'élasticité $[C]$, exprimée dans le repère global, est donnée par la relation suivante :

$$[C] = [T][C]_{loc}[T]^T \quad (2.47)$$

2.3.2 FORMULATION VARIATIONNELLE

Désignant par E_c l'énergie cinétique de la plaque et E_p son énergie potentielle, l'écriture du principe des travaux virtuels entre deux instants t_1 et t_2 est :

$$\delta\Pi = \int_{t_1}^{t_2} (\delta E_c + \delta E_p) dt = \delta\Pi_{ext} \quad (2.48)$$

$\delta\Pi_{ext}$ est le travail virtuel des forces extérieures.

$$E_c = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{u}}^T \cdot \dot{\mathbf{u}} d\Omega \quad (2.49)$$

$$E_p = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varepsilon^T \sigma d\Omega \quad (2.50)$$

Avec ρ est la masse volumique, Ω est le volume totale de la plaque, ε est le vecteur des déformations linéaires et σ est le vecteur des contraintes de Cauchy. La variation de l'énergie potentielle s'écrit alors :

$$\delta E_p = \int_{\Omega} \delta \varepsilon^T \sigma d\Omega \quad (2.51)$$

Les intégrales dans le volume Ω sont transformées en intégrales surfaciques dans le plan moyen Γ de la plaque à travers la modélisation $2D$. Dans ce qui suit, pour simplifier les écritures, toutes les quantités sont exprimées au niveau élémentaire Γ^e . Ainsi, la variation de l'énergie potentielle est :

$$\delta E_p = \int_{\Gamma^e} \delta \varepsilon^T \sigma dA \quad (2.52)$$

$$\delta E_c = \int_{\Gamma^e} \rho \delta \{u_n\}^T \{\ddot{u}_n\} dA \quad (2.53)$$

Le vecteur des contraintes peut se décomposer comme suit :

$$\sigma = \left\{ \begin{array}{c} \sigma_m + \sigma_f \\ \sigma_s \end{array} \right\} \quad (2.54)$$

avec

- Effet membrane

$$\sigma_m = [N_x, N_y, N_{xy}]^T = \left[\int_{h_k}^{h_{k+1}} (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}) dz \right]^T \quad (2.55a)$$

- Effet de flexion

$$\sigma_f = [M_x, M_y, M_{xy}]^T = \left[\int_{h_k}^{h_{k+1}} (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}) z dz \right]^T \quad (2.55b)$$

- Effet de cisaillement

$$\sigma_s = [Q_x, Q_y]^T = \left[\int_{h_k}^{h_{k+1}} (\sigma_{xz}, \sigma_{yz}) dz \right]^T \quad (2.55c)$$

2.3.3 DISCRÉTISATION PAR ÉLÉMENTS FINIS

Dans la résolution des problèmes de calcul de structures, la méthode des éléments finis est un outil incontournable. Elle représente un outil d'analyse puissant pour étudier les comportements dynamique et statique des structures minces et hétérogènes. Elle est également capable de prédire correctement leurs comportements mécaniques en incluant des effets non-linéaires qui peuvent se manifester tel que l'endommagement.

la méthode des éléments finis se base sur la représentation de l'intégralité de la structure comme un assemblage d'éléments de forme simple. En d'autres termes, la structure complète est discrétisée en plusieurs éléments finis. Sur chaque élément, les champs inconnus sont approchés par des fonctions de forme construites souvent à partir d'approximation polynomiale. L'approche la plus simple consiste à prendre les déplacements comme inconnue principale.

Ce paragraphe est consacré à la définition d'un élément fini isoparamétrique, classiquement utilisé pour la représentation de la configuration géométrique et du champ de déplacement pour les milieux continus bidimensionnels.

D'après l'équation (2.32), la théorie FSDT permet d'obtenir les déplacements de tous les points de la structure à l'aide de seulement trois translations (u_0, v_0, w_0) et les deux rotations (φ_x, φ_y) exprimés dans le plan médian Γ , ce qui permet de passer d'une

configuration $3D$ à une configuration $2D$. Ensuite, il est possible de créer l'approximation du domaine Γ par un assemblage de domaines élémentaires Γ_e composés d'éléments *Serendip* isoparamétriques à huit nœuds $Q8$ dont les sommets des rectangles et les points situés au milieu de chaque arête ainsi créés sont appelés nœuds.

La famille *Serendip* est composée d'éléments finis qui n'ont pas de nœuds intérieurs [Reddy 04]. L'élément fini utilisé dans ce mémoire est l'élément isoparamétrique rectangulaire $Q8$, figure 2.7. Ce choix est justifié par sa haute performance dans la modélisation des structures composites minces et épaisses [Chee 00, Zghal 15].

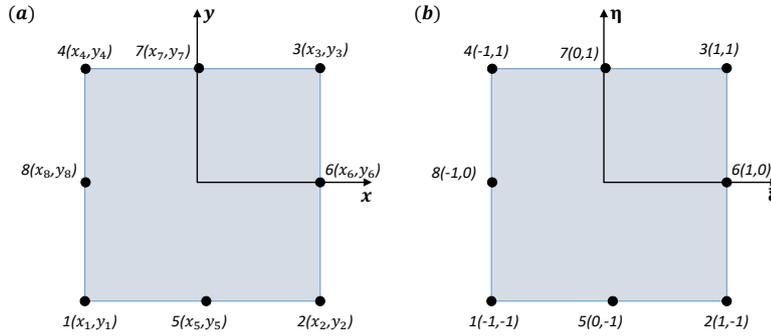


FIGURE 2.7 – Élément fini isoparamétrique rectangulaire $Q8$ en coordonnées élémentaire (a) et locales (b)

Les fonctions notées N_i sont définies, en fonction des coordonnées locales (ξ, η) , sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} N_1 = \frac{1}{4}(1 - \eta)(-1 + \xi)(1 + \eta + \xi) \\ N_2 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(-1 + \eta)(1 + \eta - \xi) \\ N_3 = \frac{1}{4}(1 + \eta)(1 + \xi)(-1 + \eta + \xi) \\ N_4 = \frac{1}{4}(-1 + \xi)(1 - \eta^2 + \xi + \eta\xi) \\ N_5 = \frac{1}{2}(-1 + \eta)(-1 + \xi^2) \\ N_6 = -\frac{1}{2}(-1 + \eta^2)(1 + \xi) \\ N_7 = -\frac{1}{2}(1 + \eta)(-1 + \xi^2) \\ N_8 = \frac{1}{2}(-1 + \eta^2)(-1 + \xi) \end{array} \right. \quad (2.56)$$

La matrice Jacobienne $[J]$ permettant le changement de variables physiques (x, y) aux variables intrinsèques (ξ, η) est exprimée par :

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

Dans l'équation (2.32), le déplacement élémentaire est écrit en fonction de cinq inconnues. Ainsi, chaque nœud admet cinq ddls représentant le vecteur du déplacement nodal

$\{u_n\} = \{u_i \ v_i \ w_i \ \varphi_{xi} \ \varphi_{yi}\}^T$ avec $i = 1, 2, \dots, 8$. Utilisant les fonctions de forme N_i , le champ de déplacement élémentaire peut alors se réécrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{aligned} \{u_e\} &= \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \varphi_x \\ \varphi_y \end{Bmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & \dots & N_8 \end{bmatrix}}_{[N]} \{u_n\} \end{aligned} \quad (2.58)$$

La substitution de (2.58) dans les équations (2.37-2.39) permet de réécrire le tenseur de déformations linéaires :

$$\varepsilon = [B_l] \{u_n\} \quad (2.59)$$

Et la variation de ε est :

$$\delta\varepsilon = [B_l] \delta \{u_n\} \quad (2.60)$$

où $[B_l]$ est une matrice d'interpolation linéaire des déformations, son expression matricielle est :

$$B_l = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{B_m} + z \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{B_f} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{B_s} \quad (2.61)$$

Utilisant l'écriture discrétisée des déplacement et des déformations, le tenseur des contraintes devient :

$$\sigma = [C][B_m + zB_f + B_s] \{u_n\} \quad (2.62)$$

D'où la forme discrète de l'équation (2.48) des travaux virtuel :

$$\begin{aligned}
 \delta\Pi &= \int_A \int_{h_k}^{h_{k+1}} \delta \{u_n\}^T \left[B_m + zB_f + B_s \right]^T [C] \left[B_m + zB_f + B_s \right] \{u_n\} dz dA \\
 &+ \int_A \int_{h_k}^{h_{k+1}} \delta \{u_n\}^T \rho \left[N^T A_m^T A_m N \right] \{\ddot{u}_n\} dz dA \\
 &= \delta \{u_n\}^T F(t)
 \end{aligned}$$

Ainsi, les matrices élémentaires de masse et de raideurs linéaire s'écrivent :

$$[M_e] = \sum_{k=1}^n \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{z_k}^{z_{k+1}} \rho \left[N^T A_m^T A_m N \right] J dz d\eta d\xi \quad (2.63a)$$

$$[K_e] = \sum_{k=1}^n \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{z_k}^{z_{k+1}} \left[B_m + zB_f + B_s \right]^T [C] \left[B_m + zB_f + B_s \right] \det(J) dz d\eta d\xi \quad (2.63b)$$

Ces intégrales sont évaluées en utilisant quatre points d'intégration de Gauss tels que $(\xi, \eta) = (\pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}})$ et un seul point d'intégration dans la direction de l'épaisseur $z_G = \frac{z_k + z_{k+1}}{2}$. Les matrice globales sont obtenues par assemblage des matrices élémentaires. L'amortissement est supposé proportionnel tel que $[B] = \alpha_1[M] + \alpha_2[K]$. Après assemblage, le comportement dynamique de la structure est décrit par l'équation :

$$[M] \ddot{u} + [B] \dot{u} + [K] u = F \quad (2.64)$$

La présence de l'endommagement dans la structure modifie ses propriétés élastiques ce qui implique l'introduction de la variable d'endommagement D dans la raideur $[K(D)]$ dans l'équation du mouvement (2.64).

2.3.4 MODES PROPRES DE VIBRATION

Le problème aux valeurs propres s'écrit classiquement sous la forme du problème homogène :

$$\left[K - \omega_i^2 M \right] \phi_i = 0 \quad (2.65)$$

où ω_i^2 sont les pulsations propres et ϕ_i les vecteurs propres. L'ensemble des vecteurs propres représente la base modale.

Dans le but de valider la formulation FSMT, les fréquences propres obtenues numériquement sont comparées aux fréquences mesurées expérimentalement et aussi

obtenues par la théorie 3D de Cugnoni et al 2.5. Soit une plaque rectangulaire en matériau stratifié de densité volumique $\rho = 1463 \text{ Kg/m}^3$, de dimensions $290 \times 234 \times 5 \text{ mm}$, constituée de 8 couches de même épaisseur orientées $(90^\circ/0^\circ)_{2s}$. Les bords de la plaque sont libres. La structure est discrétisée avec un maillage à 10×10 éléments finis, soit 2046 ddls. Les propriétés mécaniques sont données dans le tableau 2.5.

TABLE 2.5 – Propriétés mécaniques de la plaque orthotrope

propriété	E_1 (GPa)	E_2 (GPa)	G_{23} (GPa)	G_{13} (GPa)	G_{12} (GPa)	ν_{12}
Valeur	23.8	9.7	3.5	2.2	2.5	0.08

Le tableau 2.6 regroupe les résultats numériques obtenus par la théorie FSDT (i.e Eq(2.65)) comparés aux résultats expérimentaux et numérique réalisés par Cugnoni et al [Cugnoni 04]. Les six premiers modes sont des modes de corps rigide. L'erreur est calculée entre les fréquences propres obtenues par la présente formulation FSDT et les valeurs expérimentales. Cette erreur est relativement faible et ne dépasse pas 5.5% permettant ainsi de valider le modèle élément fini basé sur la FSDT.

TABLE 2.6 – Fréquences propres (Hz) de la plaque orthotrope $(90^\circ/0^\circ)_{2s}$

Mode	Valeur numérique			Valeur expérimentale	Erreur (%)
	Eq(2.65)	Réf.[Cugnoni 04]			
	(2046) ddls	FSDT	3D (<i>Abaqus</i> [®])		
1	101.7	101.2	101.1	101.3	0.4
2	198.3	190.6	189.4	190.6	4.0
3	285.0	279.7	278.1	270.1	5.5
4	329.7	343.4	341.4	341.3	3.3
5	386.4	397.9	395.6	393.1	1.6
6	546.2	533.0	521.4	524.6	4.1
7	563.2	569.6	564.9	553.8	1.7
8	623.4	613.0	600.9	597.5	4.3
9	884.6	886.7	870.9	867.5	1.9
10	905.1	956.7	935.8	927.5	2.4

Les formes des quatre premiers modes propres de la plaque composite sont présentées

dans la figure 2.8. Les formes de mode obtenues numériquement sont également en plein accord avec les formes de modes obtenues expérimentalement, par Cugnoni et al [Cugnoni 04], illustrées dans la figure 2.9.

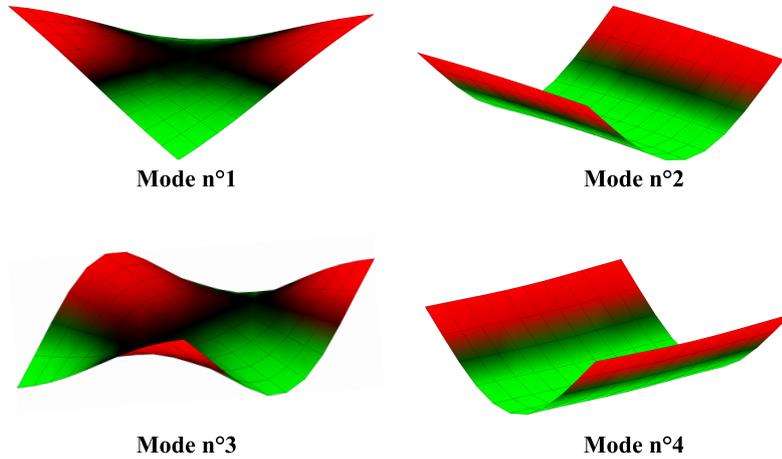


FIGURE 2.8 – Les quatre premiers modes propres numériques de la plaque $(90^\circ/0^\circ)_{2s}$

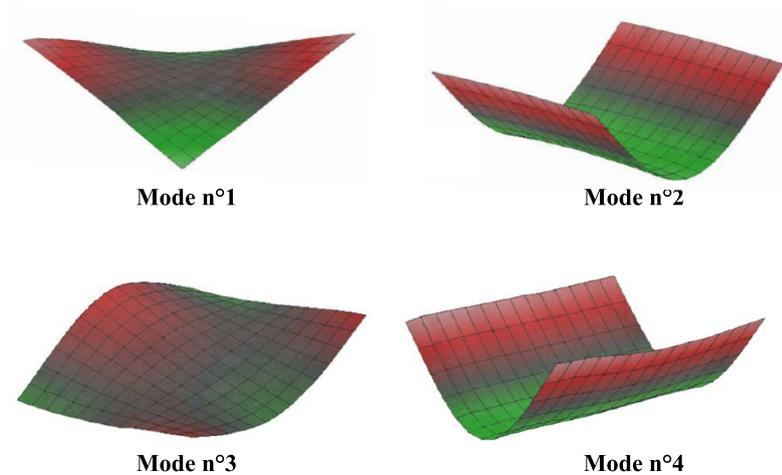


FIGURE 2.9 – Les quatre premiers modes propres expérimentaux de la plaque $(90^\circ/0^\circ)_{2s}$ [Cugnoni 04]

La performance de la théorie FSDT est aussi étudiée en la comparant avec la théorie HSDT et CPT. Soit une plaque composite en graphite-époxy, quadrangulaire de dimensions $(a \times a \times h)$ et constituée de 4 couches ayant les propriétés mécaniques normalisées données le tableau 2.7 : La fréquence fondamentale normalisée $\bar{\omega}_1$ de la structure s'exprime par la relation :

$$\bar{\omega}_1 = \omega_1 \frac{a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho}{E_2}} \quad (2.66)$$

TABLE 2.7 – Propriétés mécaniques normalisées une plaque composite en graphite-époxy

propriété	E_1/E_2	G_{23}	G_{13}	G_{12}	ν_{12}
Valeur	40	0.5 E2	0.6 E2	0.6 E2	0.25

La structure est en appui simple sur ses bords tel que pour :

— plaques "Cross-ply"

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = a \end{cases} ; \quad v_0 = w_0 = \varphi_y = 0$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = a \end{cases} ; \quad u_0 = w_0 = \varphi_x = 0$$
(2.67)

— plaques "Angle-ply"

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = a \end{cases} ; \quad u_0 = w_0 = \varphi_y = 0$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = a \end{cases} ; \quad v_0 = w_0 = \varphi_x = 0$$
(2.68)

Plusieurs configurations à différentes épaisseurs ont été utilisées dans les simulations dont les résultats sont présentés dans les tableaux 2.8 et 2.8 : La théorie classique des plaques (Classical Plate Theory : CLT) surestime les fréquences propres. Par contre La théorie FSDT les sousestime, mais cette sousestimation n'est pas remarquable car la différence en pourcentage α entre les fréquences propres obtenues par la FSDT et la HSDT est faible, ($< 2\%$), comme le montre la figure 2.10.

TABLE 2.8 – Fréquences fondamentale normalisée des plaques "cross-ply"

a/h	$(0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ)$			$(0^\circ/90^\circ)$		
	[Reddy 85]			[Reddy 85]		
	FSDT	HSDT	CLT	FSDT	HSDT	CLT
10	15.14	15.27	18.65	10.54	10.44	11.01
12.5	16.18	16.27	18.70	10.79	10.68	11.06
20	17.65	17.66	18.76	11.10	10.96	11.12
25	18.07	18.05	18.78	11.17	11.03	11.13
50	18.67	18.60	18.79	11.27	11.13	11.15
100	18.83	18.75	18.80	11.30	11.15	11.16

TABLE 2.9 – Fréquences fondamentale normalisée des plaques "angle-ply"

a/h	$(45^\circ/-45^\circ)$			$(45^\circ/-45^\circ/\dots)_8 \text{ couches}$		
	[Reddy 85]			[Reddy 85]		
	FSDT	HSDT	CLT	FSDT	HSDT	CLT
10	13.04	13.26	14.43	19.29	19.26	25.05
12.5	13.55	13.70	14.51	20.92	20.88	25.12
20	14.18	14.24	14.58	23.26	23.23	25.21
25	14.34	14.38	14.60	23.93	23.90	25.23
50	14.56	14.57	14.63	24.92	24.90	25.25
100	14.62	14.61	14.63	25.18	25.17	25.26

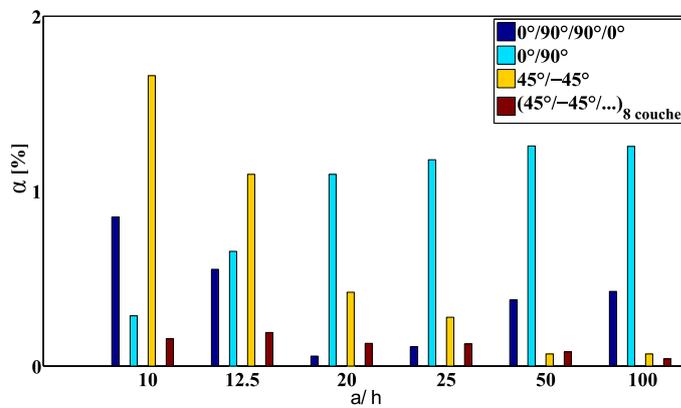


FIGURE 2.10 – Différence entre les fréquences fondamentales obtenues par la FSDT et la HSDT

2.4 MÉTHODES DE RÉDUCTION DE MODÈLES ÉLÉMENTS FINIS

2.4.1 PROJECTION DANS UNE BASE DE RITZ

L'analyse par élément finis des structures industrielles aboutit à des modèles ayant un nombre élevé de ddl ($N \simeq 10^6$) qui rend le calcul de l'intégralité des modes propres de la structure impossible. De plus, en analyse dynamique, on s'intéresse généralement aux modes propres dans une bande de fréquences donnée. Il est alors possible d'extraire un nombre déterminé de modes propres formant une base modale constituée par les modes qui appartiennent à cette bande d'intérêt et aussi les modes voisins en allant jusqu'à 3 fois la fréquence maximale de la bande fréquentielle d'intérêt. Le déplacement peut s'écrire en fonction de ces modes par :

$$u(t) = \sum_1^n \phi_i a_i(t) = \Phi a(t) \quad ; \quad n \ll N \quad (2.69)$$

$a_i(t)$ est le vecteur des coordonnées modales. Φ est la base modale tronquée aux n modes. La projection de l'équation (2.64) dans la base Φ donne :

$$\Phi^T M \Phi \ddot{a} + \Phi^T B \Phi \dot{a} + \Phi^T K \Phi a \cong \Phi^T F \quad (2.70)$$

En effectuant une normalisation des vecteurs propres par rapport à la masse tel que :

$$\Phi^T M \Phi = I \quad (2.71)$$

avec I est la matrice identité, l'équation (2.70) devient :

$$[I]\ddot{a} + [\mathcal{B}]\dot{a} + [\Lambda]a \cong \Phi^T F \quad (2.72)$$

où $[\mathcal{B}]$ est une matrice d'amortissement généralisée. Elle est diagonale car B est supposée proportionnelle : $diag([\mathcal{B}]) = 2\xi_i\omega_i^2$, ξ_i est le facteur d'amortissement modal. $[\Lambda]$ est la matrice spectrale diagonale : $diag([\Lambda]) = \omega_i^2$. L'équation (2.72) représente un système d'équations indépendantes permettant ainsi de réduire considérablement le temps calcul.

Dans le but d'étudier la performance de cette méthode, des simulations ont été effectuées en déterminant la réponse temporelle d'une structure composite constituée de 4 couches de même épaisseur orientées $(90^\circ/0^\circ)_{2s}$ dont les propriétés mécaniques sont données dans le tableau 2.5 et de dimensions $a \times b \times h = 290 \times 234 \times 5 \text{ mm}$ dans le repère $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. Elle excitée à son premier mode de flexion par une force harmonique transverse le long de la ligne de coordonnées $(x = a/2)$:

$$F(t) = 215 \sin(2\pi f_1 t) \text{ N/m } \vec{z} \quad ; \quad f_1 = 170 \text{ Hz} \quad (2.73)$$

Les conditions aux limites sont données par :

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = a \end{cases} ; \quad u_0 = v_0 = w_0 = \varphi_x = \varphi_y = 0 \quad (2.74)$$

La troncature modale réduit significativement le cout de calcul comme le montre le tableau

TABLE 2.10 – Performance de la troncature modale

Modèle complet équation (2.64)		Modèle réduit équation (2.72)		Gain de temps [%]
N	CPU(s)	n	CPU(s)	
798	25.3	5	1.8	92
2046	85.6	5	4.9	94
4998	552	5	15.3	97

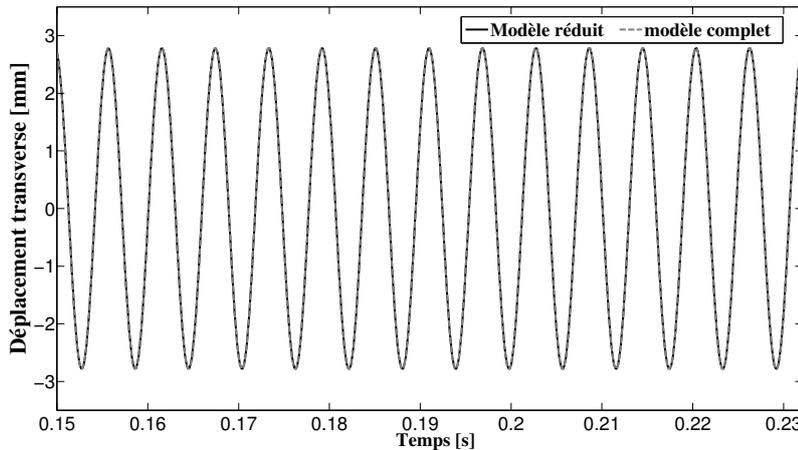


FIGURE 2.11 – Réponse temporelle à $x = a/2$

2.10 sans perdre de la précision dans la réponse temporelle illustrée par la figure 2.11.

2.4.2 MÉTHODE DE CRAIG-BAMPTON

Les coûts numériques liés au temps de calcul et le stockage de données pour des systèmes complexes sont importants. Ainsi, travailler avec des modèles ayant un nombre limité de ddl réduit le temps de calcul et l'espace de stockage. Les approches de synthèse modale sont généralement utilisées dans l'analyse par éléments finis des structures complexes.

L'approche de synthèse modale est couramment utilisée dans divers types d'analyse structurelle et en particulier dans l'analyse dynamique de structures assemblées. Pour ces structures, une approche de sous-structuration peut limiter l'impact sur l'analyse du système global lorsque seules certaines composantes de l'assemblage sont modifiées. Parmi les méthode de réduction de modèle, la méthode de Craig-Bampton [Bampton 68b] est souvent utilisée comme une technique de réduction de modèle où la structure est décomposée en composants individuels. L'idée de base de cette méthode est de représenter la dynamique interne de chaque composante par ses modes statiques et ses modes normaux à interfaces bloquées. La mise en oeuvre de cette méthode s'effectue en divisant le modèle complet en deux ensembles de degrés de liberté. Les degrés de liberté intérieurs et d'interfaces sont désignés respectivement par les indices "i" et "j", i.e : $q^s = \begin{Bmatrix} q_i^s \\ q_j^s \end{Bmatrix}$ Où l'exposant "s" désigne l'indice de sous-structure. Chaque composante est traitée séparément pour établir sa base de réduction constituée de modes statiques et de modes normaux. Les modes contraints sont définis par les modes statiques obtenus en imposant à un ddl d'interface un déplacement unité, tout en maintenant tous les autres ddls d'interfaces fixées. Lorsque tous les ddls "j" sont fixes, les modes qui en résultent sont appelés modes normaux. Les matrices de masse, de raideur et d'amortissement de chaque composante sont obtenues de la manière suivante où l'exposant "s" est supprimé pour simplifier l'écriture :

$$M = \begin{bmatrix} M_{ii} & M_{ij} \\ M_{ji} & M_{jj} \end{bmatrix} \quad ; \quad K = \begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ij} \\ K_{ji} & K_{jj} \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} B_{ii} & B_{ij} \\ B_{ji} & B_{jj} \end{bmatrix} \quad (2.75)$$

Les modes statiques ψ_c sont obtenus par la relation suivante :

$$\psi_c = \begin{bmatrix} \psi \\ I_{jj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -K_{ii}^{-1}K_{ij} \\ I_{jj} \end{bmatrix} \quad (2.76)$$

avec I_{jj} est la matrice identité. Les modes normaux de la sous-structure à interface bloquée φ_j sont obtenus via la résolution le problème aux valeurs propres suivant :

$$[K_{ii} - w_j^2 M_{ii}] [\varphi_j] = 0; \quad j = 1, 2, \dots, r \quad (2.77)$$

La base tronquée Φ contient les r premiers modes φ_j retenus. La base de réduction est ainsi définie et la matrice de transformation de Craig-Bampton T_{CB} peut s'écrire sous la forme :

$$T_{CB} = \begin{bmatrix} \Phi & \psi \\ 0 & I_{jj} \end{bmatrix} \quad (2.78)$$

Ensuite, en effectuant la transformation de Craig-Bampton obtenue, les matrices de rigidité, de masse et d'amortissement réduites sont les suivantes :

$$K_{CB} = T_{CB}^T K T_{CB} \quad ; \quad M_{CB} = T_{CB}^T M T_{CB} \quad ; \quad B_{CB} = T_{CB}^T B T_{CB} \quad (2.79)$$

Le modèle réduit final est établi à partir de l'assemblage des composants qui sont réduits séparément. Dans le cas de l'analyse dynamique de structures complexes où seules certaines composantes ont un comportement non-linéaire, les sous-structures ayant un comportement linéaire sont réduites par la méthode de Craig-Bampton puis assemblées aux modèles des structures restantes avant d'effectuer l'analyse non-linéaire. Ce cas sera étudié dans le chapitre suivant.

On considère dans la figure 2.12, une structure assemblée en forme de T, encadrée à $x = 0$ et $z = \pm L_2/2$ et ses dimensions géométriques sont ($L_1 = L_2 = 0.25; b = 0.025; h_1 = h_2 = 0.002$) m. Chaque sous-structure est composée de quatre couches, de même épaisseur, orientées comme ($90^\circ/0^\circ/0^\circ/90^\circ$).

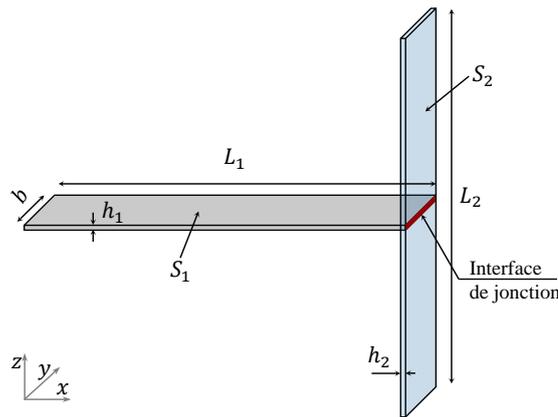


FIGURE 2.12 – Exemple de structure assemblée en forme de T

Elle soumise à une force harmonique le long de l'arrête de jonction entre S_1 et S_2 telle que :

$$F(t) = 1.4 \cdot 10^5 \sin(2\pi f_4 t) \text{ N/m}\vec{x} \quad ; \quad f_4 = 392,6 \text{ Hz} \quad (2.80)$$

f_4 est la quatrième fréquence propre de la structure. La sous-structure S_2 est condensé en utilisant la méthode de Craig-Bampton tandis que la sous-structure S_1 n'est non-condensée. Le modèle éléments finis complet compte 1566 ddls alors que le modèle réduit compte 665 ddls (30 ddls de jonction, $r = 20$ modes propres retenus et 615 ddls pour la sous-structure endommagée). La réponse temporelle du déplacement aux nœuds de

jonction est présentée par la figure 2.13 et la figure 2.14 présente les réponses fréquentielles obtenues par le modèle complet et le modèle réduit. La réduction de temps de calcul de

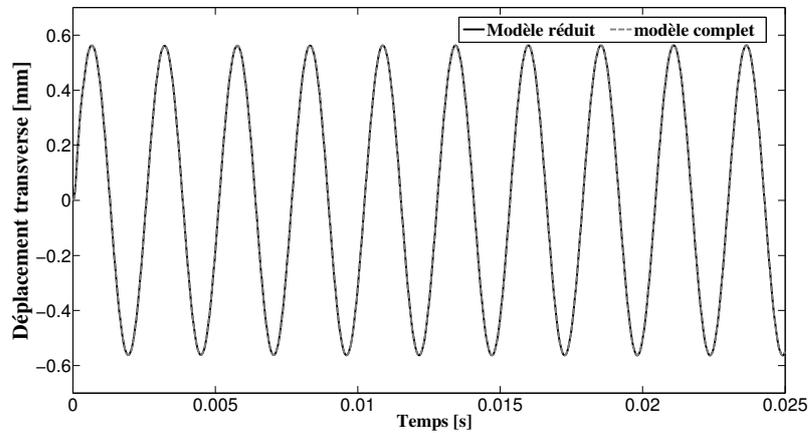


FIGURE 2.13 – Déplacement des nœuds de jonction

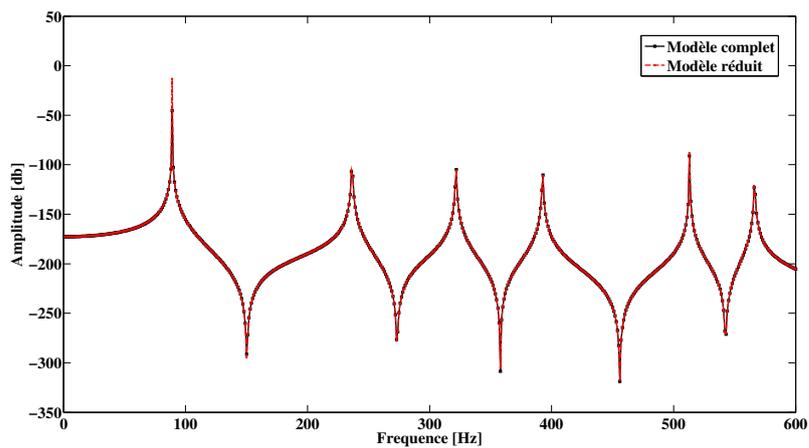


FIGURE 2.14 – Réponses fréquentielles de la structure

la réponse temporelle est de l'ordre de 62% sans perdre de la précision dans les réponses temporelle et fréquentielle.

2.5 CONCLUSION

Ce chapitre est constitué de rappels sur stratégies itératives de résolution des équations de mouvement vibratoire linéaire et non-linéaires dans le domaine temporelle via les schémas de Newmark et les méthodes itératives de Newton.

La modélisation par élément finis des structures composites basée sur la théorie FSDT est validée en la comparant avec les théories HSDT et CPT via la comparaison des fréquences propres et les formes modales. La comparaison des résultats de la FSDT avec des données expérimentales est effectuée montrant une bonne précision du modèle numérique mis en œuvre.

Puisque les modèles numériques issus de la discrétisation spatiale sont généralement coûteux de point de vue temps de calcul et espace de stockage des données, des approches de réduction de modèles sont présentées montrant leurs capacités en termes de réduction de temps de calcul tout en gardant une bonne précision sur les résultats.

DYNAMIQUE DES STRUCTURES COMPOSITES AVEC ENDOMMAGEMENT BILATÉRAL

Sommaire

3.1 Description physique de l'endommagement	88
3.1.1 Définition de la variable d'endommagement	89
3.1.2 Concept de contrainte effective - Équivalence en déformation	90
3.2 Modèle d'endommagement bilatéral	92
3.2.1 Matrice d'endommagement	93
3.2.2 Aspect thermodynamique	95
3.3 Méthodes de résolution	97
3.3.1 Calcul de l'endommagement	97
3.3.2 Approche de réduction de modèle	99
3.4 Résultats numériques	104
3.4.1 Endommagement : détection et effets	104
3.4.2 Validation de la méthode des réseaux de neurones	109
3.4.3 Application du méta-modèle pour l'analyse dynamique d'assemblage de structures composites	113
3.5 Conclusion	121

PRÉAMBULE

L'endommagement de la matrice des matériaux composites a fait l'objet de plusieurs études où différents modèles ont été proposés pour la modélisation numérique et analytique des structures composites endommagées. Ces modèles sont présentés dans le chapitre 6 de l'ouvrage de Reddy J.N et Miravete A [Reddy 95], tels que les : modèles de cisaillement (Shear Lag Models), modèles variationnels (Variational Models), modèles d'élasticité (Elasticity Models), modèle d'auto-consistance (Self-Consistent Model) et les modèles d'endommagement continu (Continuum Damage Models). Dans ce chapitre, une formulation phénoménologique de l'endommagement est développée en se basant sur la mécanique des milieux continus combinée aux principes de la thermodynamique des processus irréversibles. Le comportement dynamique des structures composites est étudié en considérant que le matériau constitutif de ces structures est élastique endommagé. L'effet de l'endommagement sur le comportement vibratoire est analysé et des méthodes de résolution dans le domaine temporel sont proposées.

3.1 DESCRIPTION PHYSIQUE DE L'ENDOMMAGEMENT

Dans les composites, le mécanisme d'endommagement commence à se développer à une échelle microscopique locale. Les efforts locaux qui dépassent une valeur seuil caractéristique du matériau, provoquent la création de défauts locaux dans les constituants du composite. L'accumulation de ces défauts engendre une dégradation des propriétés élastiques de la structure et sa rupture. Plusieurs facteurs interviennent dans le mécanisme d'endommagement tels que l'orientation des fibres, l'épaisseur des couches formant la structure composite et le type de chargement imposé. Dans la figure 3.1, trois formes d'endommagement peuvent être distinguées dans les composites :

- La micro-fissuration de la matrice
- Le délaminage
- La rupture des fibres

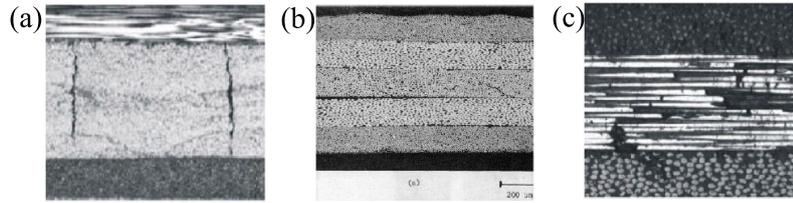


FIGURE 3.1 – Sources d'endommagement dans les composites : (a) micro-fissuration de la matrice, (b) délaminage et (c) rupture des fibres, [RAH 07]

3.1.1 DÉFINITION DE LA VARIABLE D'ENDOMMAGEMENT

Considérant un volume élémentaire représentatif (VER) d'un matériau composite, l'endommagement peut être défini par une variable physique variant avec la densité surfacique des micro-fissures situées sur le plan découpant le VER de section totale δS et de normal \vec{n} où la densité de ces défauts est maximale [Lemaitre 05] :

$$D_{\vec{n}} = \frac{\delta S_D}{\delta S} \quad (3.1)$$

On note $\delta \tilde{S}$ l'aire effective supportant la charge et δS_D la surface totale des défauts :

$$\delta S_D = \delta S - \delta \tilde{S} \quad (3.2)$$

La variable $D_{\vec{n}}$ peut alors décrire l'état du matériau comme :

$$D_{\vec{n}} = 1 - \frac{\delta \tilde{S}}{\delta S} \quad (3.3)$$

- $D_{\vec{n}} = 0$: état vierge
- $0 < D_{\vec{n}} < 1$: état endommagé
- $D_{\vec{n}} = 1$: état rompu

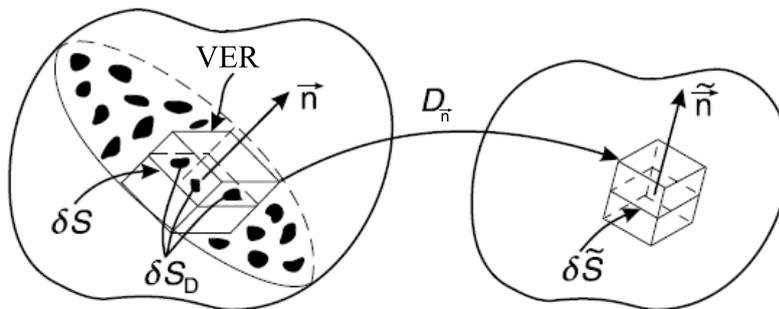


FIGURE 3.2 – Description physique de l'endommagement, [Lemaitre 05]

Dans le cas général de distribution anisotrope des micro-défauts dans le matériau, le paramètre scalaire d'endommagement est une fonction dépendant de la direction du vecteur \vec{n} . Cette variable scalaire va agir de manière anisotrope par l'intermédiaire d'un tenseur d'endommagement.

3.1.2 CONCEPT DE CONTRAINTE EFFECTIVE - ÉQUIVALENCE EN DÉFORMATION

Les équations constitutives de la loi de comportement sont établies en fonction des contraintes et des déformations. Pour passer de l'échelle microscopique des défauts à l'échelle de la modélisation, les grandeurs macroscopiques (contraintes et déformations) sont reliées à la variable de l'endommagement en introduisant le principe d'équivalence en *contrainte* ou en *déformation* qui sont illustrés dans la figure 3.3. Lors du premier

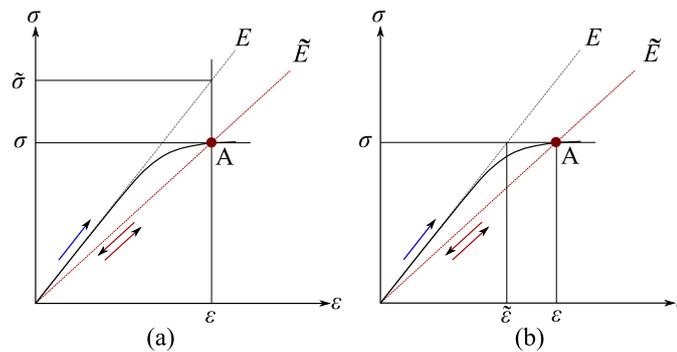


FIGURE 3.3 – Courbe de traction d'un matériau élastique endommagé, (a) équivalence en déformation et (b) équivalence en contrainte

chargement, on constate une pente élastique E puis une non-linéarité dans la courbe pour arriver au point A. En déchargeant, la courbe revient à l'origine en suivant une pente \tilde{E} . Lors du rechargement suivant, la courbe remonte avec le nouveau module \tilde{E} . Le matériau a gardé en mémoire le nouvel état élastique obtenu à la fin de la charge précédente.

Le concept d'équivalence en déformation repose sur l'idée qu'un matériau endommagé supporte moins bien la charge qu'un matériau vierge. Donc pour déformer ce matériau d'une manière équivalente quand il est vierge ou quand il est endommagé, l'effort (donc la contrainte) à exercer sur le matériau endommagé sera plus faible que celui (ou celle) à appliquer sur le matériau vierge. La contrainte de Cauchy σ s'exerce sur le matériau endommagé. On appelle $\tilde{\sigma}$ la contrainte effective associée à celle de Cauchy et s'exerçant sur le matériau vierge.

La contrainte effective $\tilde{\sigma}$ est la contrainte qui doit être appliquée au matériau non

endommagé pour obtenir la même déformation que celle provoquée par la contrainte réelle σ appliquée au même matériau endommagé. La contrainte effective est supérieure à la contrainte de Cauchy. Le rapport entre ces deux contraintes est inversement proportionnel au rapport des surfaces sur lesquelles elles s'exercent :

$$\frac{\tilde{\sigma}}{\sigma} = \frac{\delta S}{\delta \tilde{S}} \quad (3.4)$$

La Figure 3.4 montre que dans le cas uni-axial, la déformation ε d'un matériau

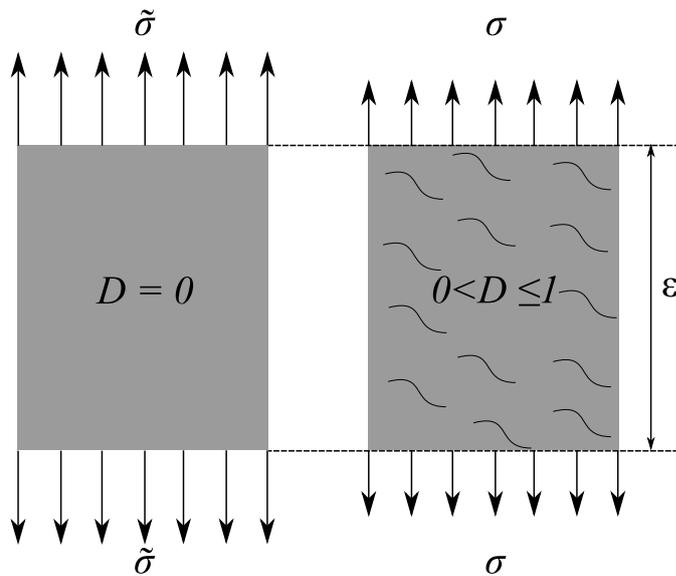


FIGURE 3.4 – Représentation du principe d'équivalence en déformation

endommagé, soumis à la contrainte σ , est équivalente à la déformation qui est obtenue dans le matériau vierge, soumis à la contrainte effective $\tilde{\sigma}$. Ainsi, dans le cas d'un chargement uni-axial, la loi constitutive pour un matériau isotrope endommagé, est donnée par l'expression :

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{\tilde{E}} \quad (3.5)$$

avec ε la déformation élastique uni-axiale et \tilde{E} le module d'Young endommagé. Suite au principe d'équivalence en déformation, cette déformation est la même que celle obtenue par application de la contrainte effective sur le matériau vierge donc :

$$\varepsilon = \frac{\tilde{\sigma}}{E} \quad (3.6)$$

En égalant les déformations définies par les relations (3.5) et (3.6), et en tenant compte des relations (3.3) et (3.4), le rapport entre contrainte effective et contrainte de Cauchy

devient, en chargement uni-axial :

$$\frac{\tilde{\sigma}}{\sigma} = \frac{E}{\tilde{E}} = \frac{\delta S}{\delta \tilde{S}} = \frac{1}{1-D} \quad (3.7)$$

L'endommagement peut s'exprimer, d'après la relation (3.7) comme la variation relative du module d'Young :

$$D = \frac{E - \tilde{E}}{E} \quad (3.8)$$

La relation (3.8) permet l'identification graphique des valeurs d'endommagement par des mesures expérimentales en essais uni-axiaux du module d'élasticité \tilde{E} . La figure 3.5 présente la variation de la contrainte en fonction de la déformation pour le cas d'un chargement uni-axial. Le comportement du matériau n'est pas linéaire en raison

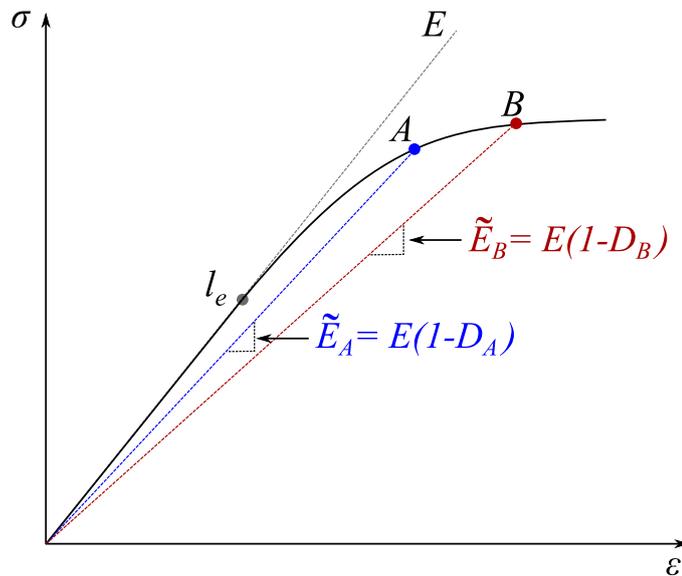


FIGURE 3.5 – Comportement non-linéaire dû à l'endommagement

de l'évolution du paramètre scalaire d'endommagement D . Pour les points A et B de la courbe, les relations (3.7) et (3.8) sont vérifiées et la détermination du module d'élasticité endommagé \tilde{E} permet de déduire la valeur de l'endommagement tels que ($D_A = 1 - \frac{\tilde{E}_A}{E}$) et ($D_B = 1 - \frac{\tilde{E}_B}{E}$).

3.2 MODÈLE D'ENDOMMAGEMENT BILATÉRAL

3.2.1 MATRICE D'ENDOMMAGEMENT

Pour les structures composites, la rupture de la fibre se produit généralement dans la phase finale de la rupture totale de la couche tandis que la micro-fissuration de la matrice est considérée comme le premier mécanisme d'endommagement et représente un défaut commun aux structures composites. Sous une charge statique ou dynamique, les micro-fissures se développent et conduisent principalement à la dégradation de la rigidité de la structure par la diminution du module d'Young transversal. Dans ce mémoire, on considère des structures constituées de minces couches de polymère (epoxy) renforcées de fibres de verre supposées parallèles à une seule direction \vec{e}_1 (figure 3.6(a)). Les micro-fissures sont parallèles à la direction des fibres. Boubakar *et al* [Boubakar 02] ont déduit que l'endommagement dans la matrice dépend des modes d'ouverture, (M1) et (M2), de ces micro-fissures comme le montre la figure 3.6(b).

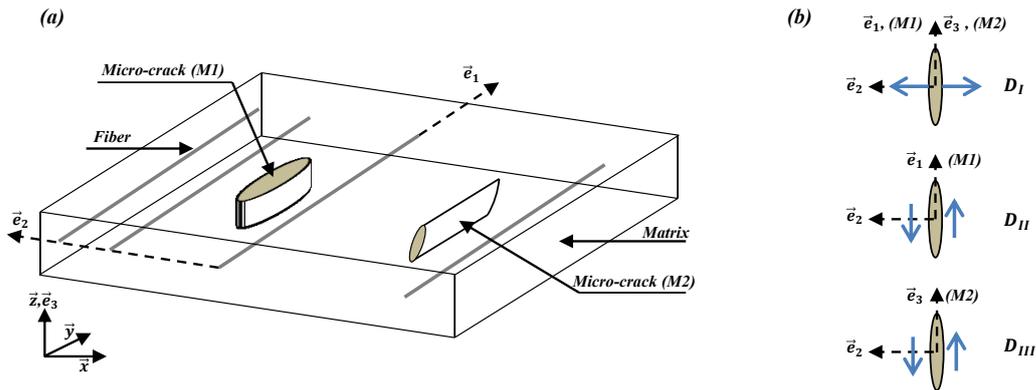


FIGURE 3.6 – Couche mince de polymère renforcée par des fibres de verre : (a) orientation des micro-fissures dans la matrice, (b) modes d'ouverture des micro-fissures [Boubakar 02]

Dans le cas non endommagé, le comportement élastique est exprimé par la loi de Hooke du matériau vierge :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^e = \underline{\underline{S}} \underline{\underline{\sigma}} \quad (3.9)$$

Où $\underline{\underline{\varepsilon}}^e$ est le tenseur des déformations élastiques, $\underline{\underline{S}}$ la matrice de souplesse et $\underline{\underline{\sigma}}$ est le tenseur des contraintes de Cauchy. Lorsque l'endommagement est pris en compte, trois paramètres D_I , D_{II} et D_{III} sont introduits afin de caractériser la dégradation de la rigidité

de la structure tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} D_I = 1 - \frac{\tilde{E}_2}{E_2} = 1 - \frac{S_{22}}{\tilde{S}_{22}} \\ D_{II} = 1 - \frac{\tilde{G}_{12}}{G_{12}} = 1 - \frac{S_{44}}{\tilde{S}_{44}} \\ D_{III} = 1 - \frac{\tilde{G}_{23}}{G_{23}} = 1 - \frac{S_{66}}{\tilde{S}_{66}} \end{array} \right. \quad (3.10)$$

où S_{ii} et \tilde{S}_{ii} les composantes des matrices de souplesse vierge et endommagée respectivement. L'équation (3.10) peut s'écrire sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{S}_{22} = S_{22} + \frac{D_I}{1 - D_I} S_{22} \\ \tilde{S}_{44} = S_{44} + \frac{D_{II}}{1 - D_{II}} S_{44} \\ \tilde{S}_{66} = S_{66} + \frac{D_{III}}{1 - D_{III}} S_{66} \end{array} \right. \quad (3.11)$$

De manière à définir une matrice $\underline{\underline{H}}$ dont les composantes H_{ii} représentent l'augmentation de la souplesse due aux trois modes de fissuration. Ainsi, la loi de comportement élastique du matériau endommagé peut être décrit comme suit :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^e = \underline{\underline{\tilde{S}}} \underline{\underline{\sigma}} = [\underline{\underline{S}} + \underline{\underline{H}}] \underline{\underline{\sigma}} \quad ; \quad \left\{ \begin{array}{l} H_{22} = \frac{D_I}{1 - D_I} S_{22} \\ H_{44} = \frac{D_{II}}{1 - D_{II}} S_{44} \\ H_{66} = \frac{D_{III}}{1 - D_{III}} S_{66} \end{array} \right. \quad ; \quad \text{ailleurs } H_{ij} = 0 \quad (3.12)$$

En utilisant une méthode d'auto-consistance [Perreux 93] qui permet d'exprimer D_{II} et D_{III} en fonction de D_I , la matrice d'endommagement $\underline{\underline{H}}$ peut être exprimée totalement par une unique variable scalaire D :

$$\underline{\underline{H}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{66} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} H_{22} = \frac{D}{1 - D} S_{22} \\ H_{44} = \frac{D}{\sqrt{1 - D}} \sqrt{S_{11} S_{22}} \\ H_{66} = \frac{D}{\sqrt{1 - D}} S_{22} \end{array} \right. \quad (3.14)$$

3.2.2 ASPECT THERMODYNAMIQUE

Les principes de la thermodynamique des processus irréversibles permettent de modéliser le comportement du matériau à travers trois étapes :

1. La définition des variables d'état.
2. La définition d'un potentiel d'état à partir duquel dérivent les lois d'état telles que la thermo-élasticité et la définition des forces thermodynamiques associées aux variables internes.
3. La définition d'un potentiel de dissipation à partir duquel dérivent les lois d'évolution des variables internes associées aux mécanismes dissipatifs.

Ces trois étapes offrent plusieurs choix pour la définition de la loi de comportement en fonction des hypothèses retenues dans la modélisation (comportement élastique, élastique endommagé, isotherme, élasto-plastique, ...). Puis le second principe de la thermodynamique doit être vérifié pour toute évolution des variables. Pour plus de détails, on peut consulter l'ouvrage de Jean Lemaitre et al [Lemaitre 09].

En utilisant les principes de la thermodynamique des processus irréversibles dans le domaine élastique avec la présence d'endommagement et à température constante, l'énergie spécifique libre Ψ dépend de la déformation élastique $\underline{\varepsilon}^e$ et de la variable interne d'endommagement D [Boubakar 02] :

$$\Psi(\underline{\varepsilon}^e, D) = \frac{1}{2\rho} {}^T \underline{\varepsilon}^e \tilde{S}^{-1} \underline{\varepsilon}^e = \frac{1}{2\rho} {}^T \underline{\varepsilon}^e [\underline{S} + \underline{H}(D)]^{-1} \underline{\varepsilon}^e \quad (3.15)$$

Ensuite, combinant les deux premiers principes de la thermodynamique, l'inégalité Clausius-Duhem devient :

$$\sigma : \dot{\varepsilon}^e - \rho \dot{\Psi} \geq 0 \quad (3.16)$$

où $\dot{\Psi}$ est exprimé par :

$$\dot{\Psi}(\underline{\varepsilon}^e, D) = \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon^e} : \dot{\varepsilon}^e + \frac{\partial \Psi}{\partial D} \dot{D} \quad (3.17)$$

Ces équations donnent une description de la loi d'évolution de la contrainte, de la force thermodynamique Y associée à l'endommagement et un potentiel de dissipation In_d :

$$\sigma = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon^e} \quad ; \quad Y = -\rho \frac{\partial \Psi}{\partial D} \quad ; \quad In_d = Y \dot{D} \geq 0 \quad (3.18)$$

Le potentiel de dissipation $In_d = Y \dot{D}$ doit être toujours positif traduisant l'irréversibilité du processus d'endommagement [Boubakar 02]. En dérivant le potentiel Ψ par rapport à

D , on obtient :

$$\begin{aligned}
 -\rho \frac{\partial \Psi}{\partial D} &= \frac{\partial}{\partial D} \left(\frac{1}{2} {}^T \underline{\underline{\varepsilon}}^e [\underline{\underline{S}} + \underline{\underline{H}}(D)]^{-1} \underline{\underline{\varepsilon}}^e \right) \\
 &= -\frac{1}{2} {}^T \underline{\underline{\varepsilon}}^e \frac{\partial}{\partial D} \left(\frac{1}{[\underline{\underline{S}} + \underline{\underline{H}}(D)]} \right) \underline{\underline{\varepsilon}}^e \\
 &= \frac{1}{2} {}^T \underline{\underline{\varepsilon}}^e \left(\frac{\underline{\underline{H}}'(D)}{[\underline{\underline{S}} + \underline{\underline{H}}(D)]^2} \right) \underline{\underline{\varepsilon}}^e
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

Ainsi, la force thermodynamique Y s'exprime en fonction de la contrainte comme :

$$Y = \frac{1}{2} {}^T \underline{\underline{\sigma}} \underline{\underline{H}}' \underline{\underline{\sigma}} \quad ; \quad \underline{\underline{H}}' = \frac{\partial \underline{\underline{H}}}{\partial D} \tag{3.20}$$

avec

$$\underline{\underline{H}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H'_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H'_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H'_{66} \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{cases} H'_{22} = \frac{2}{(1-D)^2} S_{22} \\ H'_{44} = \frac{(2-D)}{(1-D)^{3/2}} \sqrt{S_{11} S_{22}} \\ H'_{66} = \frac{(2-D)}{(1-D)^{3/2}} S_{22} \end{cases} \tag{3.21}$$

En utilisant le principe de dissipation maximum [Boubakar 02, Perreux 93], une fonction de charge f_d est définie par :

$$\begin{aligned}
 f_d = Y - \bar{Y} &= \frac{1}{2} {}^T \underline{\underline{\sigma}} \underline{\underline{H}}' \underline{\underline{\sigma}} - \bar{Y} \\
 &= \frac{1}{2} {}^T \underline{\underline{\sigma}} \underline{\underline{H}}' \underline{\underline{\sigma}} - (Y_c + qD^p) \\
 &= \frac{1}{2} (\sigma_{22}^2 H'_{22} + \sigma_{44}^2 H'_{44} + \sigma_{66}^2 H'_{66}) - (Y_c + qD^p)
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

La fonction de charge f_d fait intervenir une force \bar{Y} qui représente le seuil de déclenchement de l'endommagement. Le choix d'une fonction puissance de D correspond aux formes des résultats expérimentaux obtenus dans les travaux de [Boubakar 02] et [Ikonomopoulos 01], où les constantes Y_c , q et p sont des paramètres liés à l'endommagement du matériau. Lors d'un chargement appliqué, il n'y a pas d'évolution d'endommagement lorsque $f_d \leq 0$, mais quand f_d tend à devenir positive, un accroissement du niveau d'endommagement apparaît pour compenser l'augmentation de la fonction Y et annuler la fonction de charge.

3.3 MÉTHODES DE RÉOLUTION

Le niveau d'endommagement ne peut que croître ou rester constant parce que le phénomène physique est irréversible. L'état endommagé doit donc être conservé en mémoire pendant le chargement. La fonction f_d dans l'équation (3.22) contrôle le déclenchement ou non de l'évolution de l'endommagement en fonction de l'état de contrainte donné par la force thermodynamique et l'état endommagé mémorisé. Dans le processus de résolution, chaque pas de temps correspond à une charge donnée et la résolution se fait d'une manière incrémentale pour déterminer le scalaire D .

3.3.1 CALCUL DE L'ENDOMMAGEMENT

Dans les simulations par éléments finis, pour un niveau de chargement donné, le champ de déplacement obtenu induit des champs de déformation et de contrainte. L'état de contrainte doit vérifier à la fois le comportement élastique endommagé de la structure et la loi d'évolution d'endommagement décrite par l'équation (3.22). Pour cela, un schéma prédicteur-correcteur est utilisé.

En supposant la convergence à l'instant t_i vérifiée, une première phase de prédiction est obtenue en supposant qu'il n'y a pas d'évolution de l'endommagement entre t_i et t_{i+1} . L'incrément de contrainte et du tenseur des contraintes s'écrit sous la forme suivante :

$$\Delta \underline{\sigma} = \underline{\underline{C}}(D_{t_i}) : \Delta \underline{\varepsilon} \quad ; \quad \underline{\sigma}_{t_{i+1}}^* = \underline{\sigma}_{t_i} + \Delta \underline{\sigma} \quad (3.23)$$

La fonction de charge est maintenant évaluée avec le couple $(\underline{\sigma}_{t_{i+1}}^*, D_{t_i})$.

- Si $f_d(\underline{\sigma}_{t_{i+1}}^*, D_{t_i}) \leq 0$, il n'y aura pas d'augmentation du niveau d'endommagement et la dernière valeur D_{t_i} est maintenue comme la nouvelle valeur d'endommagement $D_{t_{i+1}}$.
- Si $f_d(\underline{\sigma}_{t_{i+1}}^*, D_{t_i})$ tend à être positive, il y aura un incrément d'endommagement ΔD pour ramener f_d à 0.

Pour déterminer l'incrément d'endommagement ΔD , il faut corriger l'état de contrainte afin d'annuler la fonction de charge. Le principe d'équivalence en déformation s'écrit comme :

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\underline{S}} \tilde{\underline{\sigma}} = [\underline{\underline{S}} + \underline{\underline{H}}] \underline{\sigma} \quad (3.24)$$

La relation (3.24) permet d'exprimer la contrainte effective en fonction de la contrainte de

Cauchy :

$$\begin{aligned}
 \underline{\tilde{\sigma}} &= \underline{S}^{-1} [\underline{S} + \underline{H}] : \underline{\sigma} \\
 &= [\underline{I} + \underline{S}^{-1} \underline{H}] : \underline{\sigma} \\
 &= [\underline{I} + \underline{C} \underline{H}] : \underline{\sigma}
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

En posant $\underline{L} = [\underline{I} + \underline{C} \underline{H}]^{-1}$, on obtient $\underline{\sigma} = \underline{L} \underline{\tilde{\sigma}}$. Ainsi, l'incrément de contrainte peut s'exprimer par :

$$\Delta \underline{\sigma} = \Delta \underline{L} \underline{\tilde{\sigma}}_{t_i} + \underline{L} \Delta \underline{\tilde{\sigma}} \tag{3.26}$$

La contrainte à l'incrément de temps t_{i+1} peut s'écrire en fonction de l'incrément ΔD de l'endommagement sous la forme suivante :

$$\underline{\sigma}_{t_{i+1}} = \underline{\sigma}_{t_i} + [\underline{L}(D_{t_i} + \Delta D) - \underline{L}(D_{t_i})] : \underline{\tilde{\sigma}}_{t_i} + \underline{L}(D_{t_i} + \Delta D) : \Delta \underline{\tilde{\sigma}} \tag{3.27}$$

La fonction de charge à l'instant t_{i+1} devient :

$$f_{d,t_{i+1}} = \frac{1}{2} [\underline{\sigma}_{t_{i+1}} \underline{H}'(D_{t_i} + \Delta D) \underline{\sigma}_{t_{i+1}}] - [Y_c + q(D_{t_i} + \Delta D)^p] = 0 \tag{3.28}$$

L'incrément d'endommagement ΔD est obtenu à travers la résolution de l'équation (3.28) en utilisant la méthode de Newton-Raphson. La figure 3.7 résume les étapes de détermination de ΔD . L'endommagement est introduit dans la loi de comportement par son effet de modification des paramètres élastiques. A chaque incrément de chargement, la valeur de D peut évoluer, par conséquent, la matrice de raideur doit être actualisée via l'actualisation de la matrice d'élasticité et l'équation de mouvement devient dépendante de D :

$$[M] \ddot{u}(t) + [B] \dot{u}(t) + [K(D)] u(t) = F(t) \tag{3.29}$$

Pour résoudre l'équation non-linéaire (3.29), le schéma d'intégration temporelle implicite de Newmark pour les problèmes de dynamique non linéaire est adapté et amélioré dans cette étude pour tenir compte du modèle d'endommagement. Une fois le champ de déplacement connu, les tenseurs des contraintes effectives et prédites sont calculés dans chaque point d'intégration de Gauss. Le niveau d'endommagement est obtenu à l'aide de l'algorithme représenté sur la figure 3.7 et les contraintes sont corrigées en tenant compte du niveau d'endommagement obtenu. Par conséquent, la matrice de raideur dans l'équation (3.29) est actualisée avec la matrice d'élasticité endommagée $[\underline{S} + \underline{H}]^{-1}$. Ensuite, un résidu est calculé pour assurer l'équilibre dynamique exprimé par un critère de convergence $\epsilon \ll 1$. Le schéma proposé est présenté dans la figure 3.8 [Mahmoudi 16].

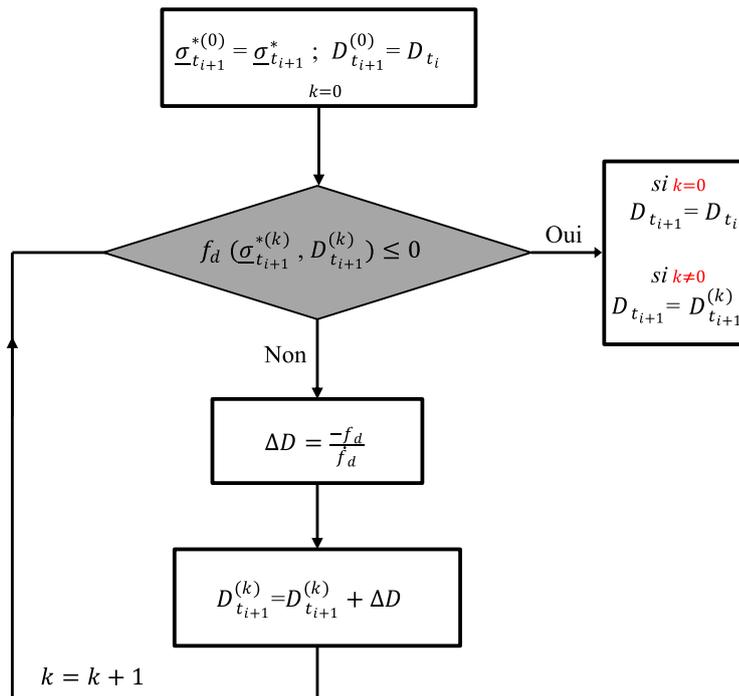


FIGURE 3.7 – Calcul incrémental de l'endommagement par la méthode de Newton-Raphson

Pour résumer, le schéma numérique pour le calcul de l'endommagement est illustré par les deux figures précédentes 3.7 et 3.8. La modification des propriétés mécaniques induites par l'endommagement est prise en compte, pendant le chargement, par l'étape d'actualisation. Puisqu'il est évalué dans chaque point de Gauss, l'endommagement peut être localisé dans la structure et sa propagation peut être suivie.

3.3.2 APPROCHE DE RÉDUCTION DE MODÈLE

Une description du méta-modèle est fournie dans cette section. Deux méthodes sont combinées suivant deux niveaux pour constituer un modèle réduit. La réduction de premier niveau est la méthode des réseaux de neurones artificiels qui est utilisée pour estimer le niveau d'endommagement. La réduction de second niveau est la méthode de sous-structuration dynamique de Craig-Bampton. Pour réduire les coûts des simulations numériques, ces deux méthodes sont combinées pour construire le méta-modèle employé dans cette étude.

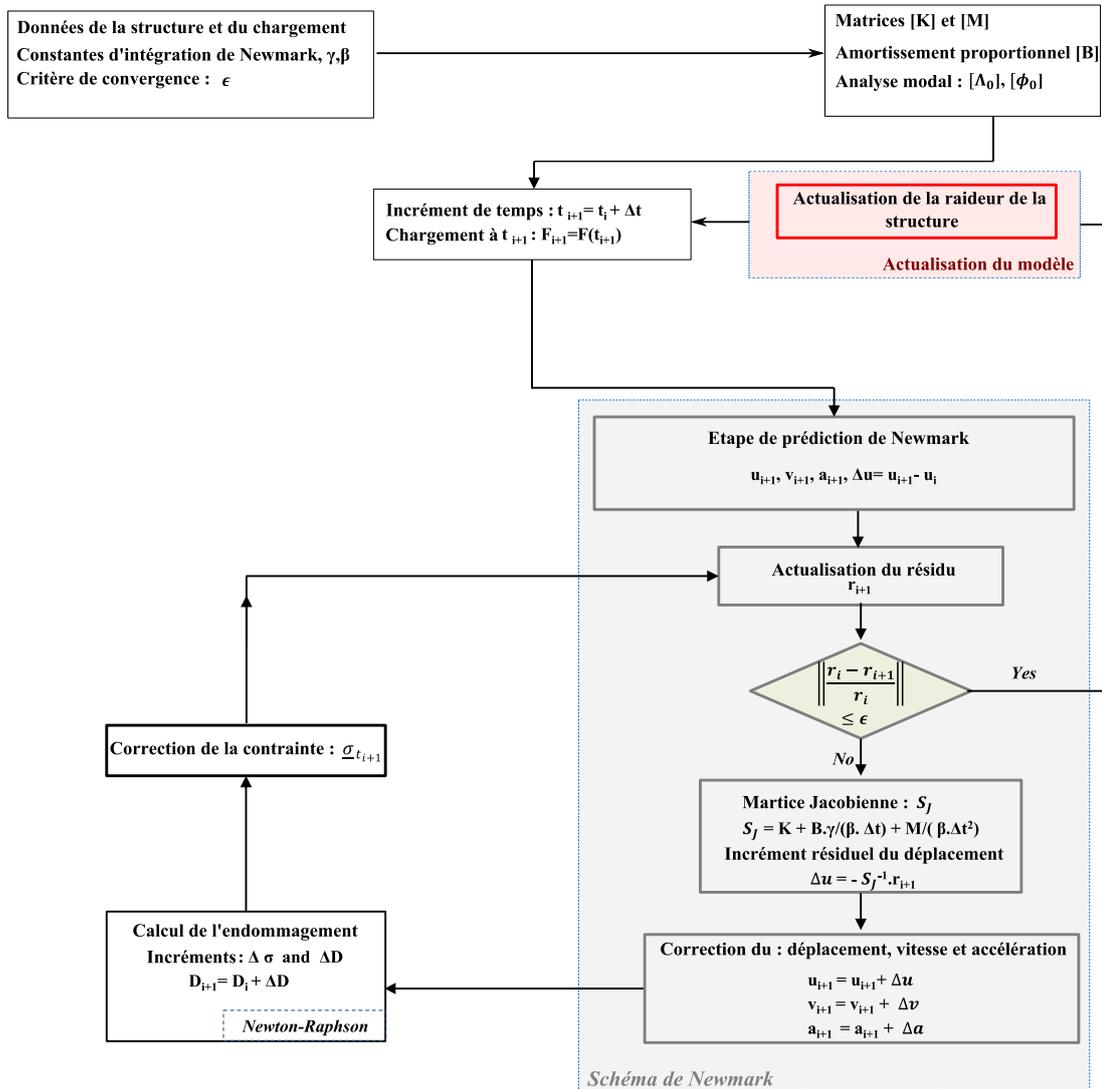


FIGURE 3.8 – Schéma de Newmark d’intégration temporelle implicite pour les problèmes de dynamique à non-linéarité matérielle de type endommagement [Mahmoudi 16]

3.3.2.1 RÉSEAUX DE NEURONES ARTIFICIELS

La méthode adoptée pour l’estimation et la détection d’endommagement est une approche entièrement numérique et est divisée en deux parties principales : l’analyse numérique basée sur le modèle éléments finis (FEM) et l’application des réseaux de neurones artificiels (RNA) pour localiser et estimer le niveau d’endommagement.

Les réseaux de neurones artificiels sont composés d’un nombre de cellules appelées neurones reliées entre elles par des coefficients de pondération appelés poids qui sont

analogues aux synapses. Ces neurones fonctionnent en parallèle et communiquent entre eux via les synapses pour traiter des informations déterministes ou probabilistes. Les neurones du réseau sont généralement disposés en couches (layers) et les informations sont transmises de la couche d'entrée (input layer) à la couche de sortie (output layer) à travers une ou plusieurs couches cachées (hidden layers). Les données à traiter par le RNA sont divisées en trois ensembles indépendants : Apprentissage, Validation et Test. L'ensemble d'Apprentissage est un ensemble d'échantillons utilisés pour adapter le RNA en ajustant les poids du réseau neuronal afin d'avoir les résultats souhaités (les cibles). L'ensemble de Validation est utilisé pour trouver la meilleure configuration du RNA avec les meilleurs paramètres d'apprentissage tandis que l'ensemble de Test donne l'erreur généralisée entre les cibles et les sorties estimées par le RNA [Priddy 05].

Un diagramme schématique d'un réseau de neurone de type feedforward est représenté dans la figure 3.9. Les entrées et sorties du RNA sont introduites par les neurones d'entrée et de sortie. Une couche intermédiaire est appelée couche cachée, puisque les neurones de cette couche ne sont ni d'entrées ni de sorties. Dans le cas présent, il n'y a qu'un seul neurone de sortie et trois neurones d'entrée comme représenté dans la figure 3.9.

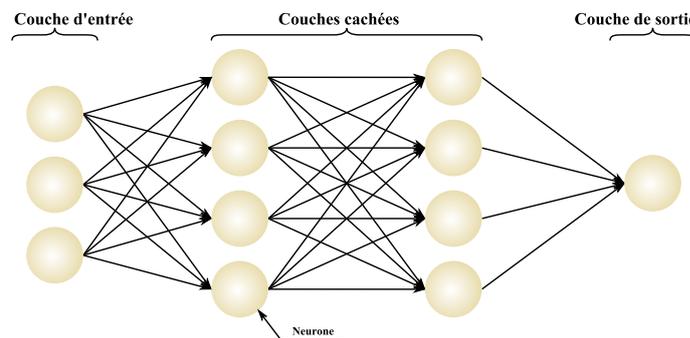


FIGURE 3.9 – Architecture simple d'un RNA feedforward avec une seule couche de sortie

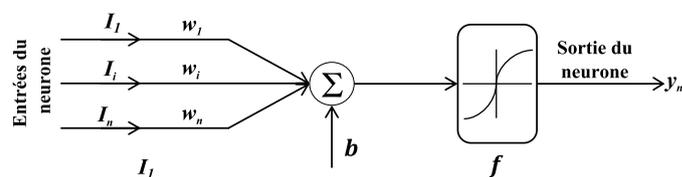


FIGURE 3.10 – Modèle de calcul pour un neurone artificiel

Le RNA est lu de gauche à droite et les données entrent par les neurones d'entrées et traversent le RNA, couche par couche, jusqu'à ce qu'elles arrivent au neurone de sortie.

Comme le montre la figure 3.10, chaque flèche représente une connexion entre deux neurones. Pour chaque connexion, un poids est assigné qui est un nombre réel exprimant la contribution de chaque entrée dans l'obtention des cibles. Les entrées I_i sont envoyées dans les neurones de la couche d'entrée. Chaque entrée est ensuite pondérée par le poids w_i qui est souvent entre -1 et 1 . Les entrées pondérées sont additionnées et ajoutées à un biais b . La sortie y_n du RNA est générée en faisant passer la somme obtenue par une fonction d'activation f [Hassoun 95]. L'écriture mathématique de y_n peut être écrite sous la forme suivante :

$$y_n = f\left(\sum_{i=1}^n w_i I_i + b\right) \quad (3.30)$$

L'architecture sélectionnée du RNA dans cette étude est constituée d'une couche d'entrée avec trois neurones correspondant aux contraintes $(\sigma_{22}, \sigma_{12}, \sigma_{23})$, dix couches cachées ayant des fonctions sigmoïdes comme fonctions d'activation permettant au réseau d'apprendre la relation non-linéaire entre les entrées et les cibles qui sont les niveaux d'endommagement D dans la structure. Puis une fonction d'activation linéaire est affectée à la couche de sortie. Cette combinaison de fonctions sigmoïdes et d'une fonction d'activation linéaire peut approximer toute fonction continue de variables réelles multiples [Cybenko 89], ce qui est le cas dans le présent travail où l'endommagement est une fonction continue dépendante des contraintes $(\sigma_{22}, \sigma_{12}, \sigma_{23})$.

3.3.2.2 ESTIMATION D'ENDOMMAGEMENT PAR LE RNA

Le niveau et la localisation d'endommagement peuvent être estimés à l'aide de l'architecture du RNA feedforward sélectionnée dans le paragraphe 3.3.2.1 en utilisant le Neural Network Toolbox disponible dans MATLAB[®]. Plusieurs simulations utilisant le modèle complet (les algorithmes dans les figures :3.7 et 3.8) sont réalisées afin d'obtenir des données suffisantes pour obtenir une précision élevée en termes de niveau et de localisation d'endommagement. Comme le mécanisme d'endommagement dépend de l'état de contrainte et en particulier des contraintes $(\sigma_{22}, \sigma_{12}, \sigma_{23})$, ces contraintes sont choisies comme entrées du RNA et leur niveau d'endommagement correspondant D représente la cible pour chaque point de Gauss.

Afin de trouver l'ensemble de données (base de données) optimal qui peut inclure toutes les possibilités en termes d'orientation des fibres et de chargement appliqué permettant un bon apprentissage du RNA, différents scénarios d'endommagement sont simulés en utilisant une poutre composite unidirectionnelle encastree-libre constituée de 3 couches. Pour obtenir une base de données consistantes, trois poutres sont utilisées où

les fibres sont orientés comme $(90^\circ/0^\circ/90^\circ)$, $(67^\circ/0^\circ/-67^\circ)$ et $(45^\circ/0^\circ/-45^\circ)$. Chaque poutre est soumise à une force suffisante pour générer des zones totalement endommagées.

Ensuite, quelques points de Gauss dans la structure sont sélectionnés où les trois contraintes et leur correspondant niveau d'endommagement sont extraites. Les échantillons de données obtenus sont normalisés dans l'intervalle $[-1, 1]$ afin de rendre l'étape d'apprentissage plus rapide et s'assurer que tous les échantillons sont répartis à peu près uniformément dans une plage comparable. Une fois la base de données organisée, le RNA est prêt pour effectuer l'étape d'apprentissage.

La base de données est divisée d'une manière aléatoire en trois ensembles : d'Apprentissage, de Validation et de Test. Les poids w_i sont initialisés avec des valeurs aléatoires et l'apprentissage se fait en utilisant un algorithme d'apprentissage supervisé [Riedmiller 94]. Durant le processus d'apprentissage, les poids w_i sont progressivement adaptés jusqu'à l'obtention d'un ensemble optimal de poids ajustés qui minimise l'erreur quadratique moyenne entre les sorties du RNA et les cibles pour les échantillons d'apprentissage. Ensuite, l'ensemble de validation est utilisé pour identifier le moment où le sur-apprentissage (overfitting) commence à se produire et continue de croître pour un nombre, appelé "époques", spécifié d'itérations successives. Alors, le processus d'apprentissage doit être arrêté et l'ensemble des poids conduisant à la meilleure performance de validation est retenu. Les données de l'ensemble de test servent à tester la performance du RNA obtenu.

Après ces trois étapes, le RNA est maintenant capable d'estimer le niveau d'endommagement et il est introduit dans la figure 3.8 au lieu d'utiliser la méthode de Newton-Raphson. La Figure 3.11 remplace ainsi la figure 3.7 pour avoir un méta-modèle basé sur les réseaux de neurones dédié à la prédiction et la localisation de l'endommagement dans les composites.

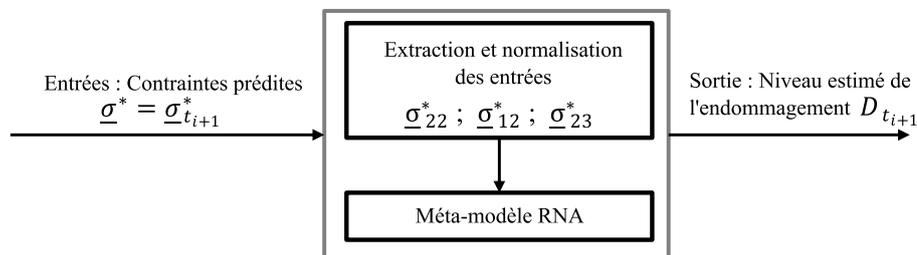


FIGURE 3.11 – Estimation du niveau de l'endommagement par le méta-modèle RNA

3.4 RÉSULTATS NUMÉRIQUES

Selon l'approche phénoménologique, l'endommagement est caractérisé par une diminution de la rigidité de la structure. Dans ce paragraphe, des simulations sont effectuées pour mettre en évidence l'effet de l'endommagement sur l'évolution des propriétés élastiques et l'effet de l'orientation des fibres sur l'évolution d'endommagement ainsi que l'influence mutuelle entre la réponse dynamique de la structure et l'évolution de l'endommagement. Les propriétés mécaniques des structures stratifiées utilisées dans les simulations numériques sont données dans le tableau 3.1.

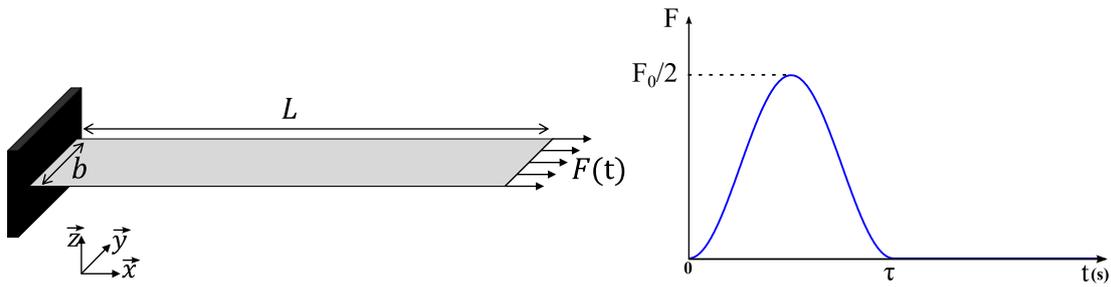
TABLE 3.1 – Propriétés mécaniques et paramètres d'endommagement du verre/epoxy

Module élastique E_1 (\vec{e}_1) (MPa)	45680
Module élastique E_2 (\vec{e}_2) (MPa)	16470
Module de cisaillement G_{12} (MPa)	6760
Coefficient de Poisson ν_{12}	0.34
Coefficient de Poisson ν_{23}	0.34
Y_c (MPa)	0.0027
q (MPa)	1.246
p	0.816

3.4.1 ENDOMMAGEMENT : DÉTECTION ET EFFETS

Ce paragraphe traite l'analyse dynamique dans le domaine temporel de structures composites. Les dimensions géométriques des structures étudiées sont $(0.3; 0.03; 0.001) m$ suivant les directions $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ et elles sont encastées à $x = 0$ et libre à $x = L$. Elles sont soumises à une impulsion distribuée le long de son côté libre dans la direction \vec{x} d'amplitude F_0 et une durée $\tau = 1 ms$:

$$F(t) = \begin{cases} \frac{F_0}{2} \left(1 - \frac{\cos(2\pi t)}{\tau}\right) & 0 \leq t \leq \tau \\ 0 & \tau < t \end{cases} \quad (3.31)$$

FIGURE 3.12 – Géométrie de la structure composite et l'impulsion $F(t)$

En utilisant la méthode des éléments finis, le comportement dynamique des structures étudiées est représenté par l'équation 3.29. La résolution de ce problème dans le domaine temporel est faite d'une manière incrémentale et le niveau de l'endommagement est calculé aux points de Gauss. La modification des propriétés du matériau induite par l'endommagement est prise en compte par l'actualisation de la matrice de rigidité élémentaire calculée aux points de Gauss comme le montre l'algorithme 3.8. Plusieurs simulations avec différents cas d'orientation des fibres et différentes amplitudes de l'impulsion sont effectuées.

Deux poutres composées de trois couches orientées en $(90^\circ/0^\circ/90^\circ)$ et $(45^\circ/0^\circ/-45^\circ)$ soumises à deux impulsions d'amplitudes $F_0 = 1.2 \cdot 10^5 N/m$ et $F_0 = 2.28 \cdot 10^5 N/m$ sont étudiées. Les distributions de l'endommagement à la fin des simulations numériques sont représentées par couches dans les figures 3.13 et 3.14.

FIGURE 3.13 – État de l'endommagement par couche de la poutre $(90^\circ/0^\circ/90^\circ)$ avec $F_0 = 1.2 \cdot 10^5 N/m$, (a), (b) and (c) sont respectivement les couches supérieure, centrale et inférieure



FIGURE 3.14 – État de l'endommagement par couche de la poutre ($45^\circ/0^\circ/ - 45^\circ$) avec $F_0 = 2.28 \cdot 10^5 \text{ N/m}$, (a), (b) and (c) sont respectivement les couches supérieure, centrale et inférieure

Le pourcentage $D[\%]$ représente la réduction relative du module d'Young transversal. Les couches centrales ont la plus faible valeur d'endommagement puisque les fibres dans ces couches sont orientées dans la direction de la force appliquée. En comparant les deux figures 3.13 et 3.14, on voit que l'état de l'endommagement dépend de l'orientation des fibres.

Comme mentionné précédemment, l'endommagement induit une dégradation de la rigidité de la structure. Ainsi, les fréquences propres de la structure endommagée ont changé en les comparant aux valeurs initiales de la structure saine. Un ratio de décroissance R_d est défini exprimant le pourcentage du décalage entre f_D et f_0 qui désignent respectivement les fréquences propres de la structure dans ses états endommagé et non endommagé :

$$R_d = 100 \left\| \frac{f_0 - f_D}{f_0} \right\| \quad (3.32)$$

Le ratio de décroissance est donné dans les tableaux 3.2 et 3.3 où B_i , M_i et T_i désignent respectivement les modes de flexion, de membrane et de torsion.

TABLE 3.2 – Ratio de décroissance des fréquences propres de la poutre ($90^\circ/0^\circ/90^\circ$)

mode	type	$f_0[Hz]$	$f_D[Hz]$	$R_d[\%]$
1	B_1	4,99	4,62	7,45
2	B_2	31,29	29,06	7,15
3	B_3	87,64	81,48	7,03
4	T_1	97,34	95,03	2,36
5	B_4	171,78	159,76	7,00
6	M_1	181,48	175,56	3,25
7	B_5	284,19	264,30	6,99
8	T_2	293,54	286,67	2,34
9	B_6	425,03	395,28	6,99
10	T_3	494,26	482,24	2,43
11	B_7	594,75	553,05	7,01
12	B_8	702,42	684,32	2,57
13	T_4	794,02	738,22	7,02

TABLE 3.3 – Ratio de décroissance des fréquences propres de la poutre ($45^\circ/0^\circ/-45^\circ$)

mode	type	$f_0[Hz]$	$f_D[Hz]$	$R_d[\%]$
1	B_1	5,38	5,19	3,41
2	B_2	33,72	32,55	3,45
3	B_3	94,58	91,11	3,66
4	T_1	124,35	120,17	3,35
5	B_4	185,97	178,34	4,10
6	M_1	189,43	186,90	1,33
7	B_5	308,81	294,73	4,55
8	T_2	374,49	360,32	3,78
9	B_6	463,68	440,88	4,91
10	T_3	628,95	601,46	4,37
11	B_7	651,31	618,32	5,06
12	B_8	872,56	828,29	5,07
13	T_4	890,567	847,11	4,87

Le ratio R_d pour les deux structures n'est pas le même pour tous les modes. Il dépend

des orientations des fibres dans la structure. Même si la charge appliquée à la poutre ($45^\circ/0^\circ/-45^\circ$) est supérieure à celle appliquée à la poutre ($90^\circ/0^\circ/90^\circ$), les chutes des fréquences propres relatives à la poutre ($45^\circ/0^\circ/-45^\circ$) sont plus faibles, pour la plupart des modes, que celles de la poutre ($90^\circ/0^\circ/90^\circ$). Ainsi, si l'angle θ d'orientation des fibres est faible, les micro-fissures ne sont pas perpendiculaires à la direction de la force appliquée. Et par conséquent, les modes d'ouverture des micro-fissures dans la matrice de la couche ne sont que légèrement mis à contribution ce qui provoque un faible niveau d'endommagement et par la suite un faible changement des fréquences propres.

Le comportement dynamique de la structure est modifié pendant l'application de la force. Dans la figure 3.15, lorsque l'endommagement est pris en compte, l'amplitude de la réponse temporelle du déplacement est supérieure à celle non endommagée. Par conséquent, l'endommagement a un impact important sur la réponse dynamique car il rend la structure plus souple en diminuant sa rigidité, de façon non-linéaire.

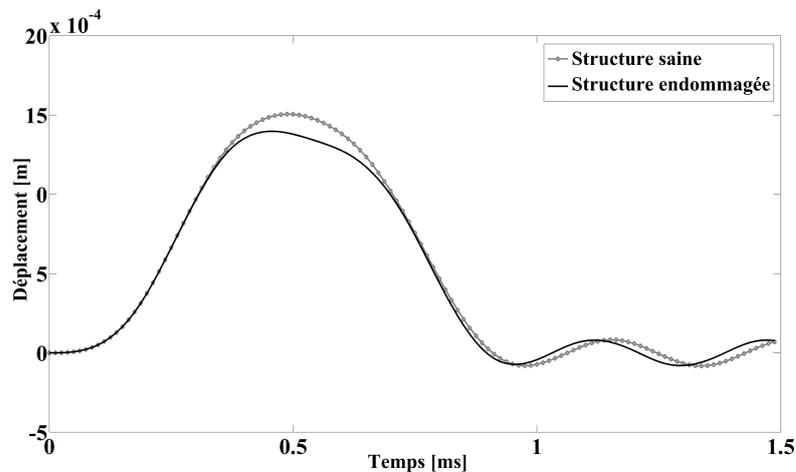


FIGURE 3.15 – Réponse dynamique impulsionnelle dans la direction \vec{x} des nœuds de coordonnées $x = L$ de la poutre ($90^\circ/0^\circ/90^\circ$)

Comme le montre la figure 3.16, le niveau d'endommagement augmente avec le chargement et atteint une valeur maximale quand la force appliquée atteint son maximum puis reste constant.

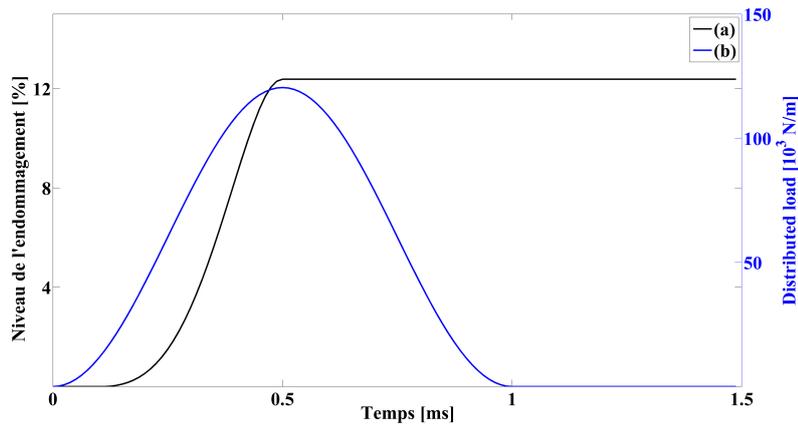


FIGURE 3.16 – (a) l'évolution d'endommagement en fonction du temps dans un point de Gauss près de l'arrête libre de la poutre ($90^\circ/0^\circ/90^\circ$) et (b) la force d'impulsion

3.4.2 VALIDATION DE LA MÉTHODE DES RÉSEAUX DE NEURONES

Simulations hors ligne (off-line)

Les simulations hors ligne sont utilisées pour établir la relation entre l'état de contrainte et le niveau d'endommagement. Elle permettent la préparation d'une base de données qui sera utilisée pour effectuer l'apprentissage du RNA. Une fois l'apprentissage effectué et la relation appropriée entre ses entrées et sa sortie établie, le méta-modèle RNA est maintenant utilisé pour estimer le niveau d'endommagement au lieu de l'utilisation de la méthode de Newton-Raphson. Le modèle complet, résumé par les algorithmes 3.7 et 3.8, et utilisé dans les simulations précédentes (paragraphe 3.4.1) est exploité pour obtenir la base de données du RNA. On utilise trois poutres à 3 couches orientées comme ($90^\circ/0^\circ/90^\circ$), ($67^\circ/0^\circ/-67^\circ$) et ($45^\circ/0^\circ/-45^\circ$) et de dimensions ($0.3\text{ m}; 0.03\text{ m}; 0.001\text{ m}$) dans les directions ($\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$). Les échantillons extraits ($\sigma_{22}, \sigma_{12}, \sigma_{23}$ et D) sont normalisés et stockés constituant une base de données de 105052 échantillons (26236 pour chaque contrainte et 26236 pour D). Ces échantillons sont fournis au méta-modèle RNA pour établir la relation entre les contraintes et la valeur de D . La procédure de l'estimation de l'endommagement est détaillée dans la section 3.3.2.

Simulations en ligne

Pour valider le méta-modèle RNA proposé, les résultats fournis par le modèle complet d'endommagement sont comparés à ceux donnés par le méta-modèle RNA. Dans un premier temps, le méta-modèle est appliqué aux structures utilisées précédemment dans les simulations hors ligne. Le rapport de chute des fréquences propres est utilisé pour valider

la performance des RNA en termes de niveau d'endommagement. Le ratio de décroissance R_d obtenu à l'aide du modèle complet et du méta-modèle est comparé comme présenté dans la figure 3.17 où les RNA montrent un bon accord avec les résultats obtenus par le modèle complet.

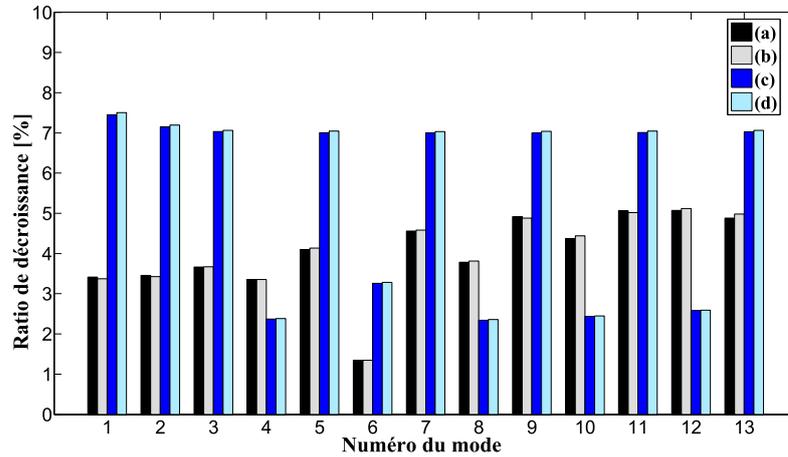


FIGURE 3.17 – Ratios de décroissance des fréquences propres : (a) and (b) désignent les ratios R_d obtenus par le modèle complet et le méta-modèle RNA, pour la structure $(45^\circ/0^\circ/-45^\circ)$, (c) et (d) sont les mêmes ratios correspondants pour la structure $(90^\circ/0^\circ/90^\circ)$

Pour le critère de localisation, en comparant les figures 3.13 et 3.14 aux figures 3.18 et 3.19, les états d'endommagement obtenus par le méta-modèle sont en bon accord avec ceux obtenus par le modèle complet. Ainsi, le méta-modèle RNA permet d'estimer et localiser correctement les niveaux de l'endommagement.



FIGURE 3.18 – États de l'endommagement obtenus par le méta-modèle appliqué à la poutre $(90^\circ/0^\circ/90^\circ)$ avec $F = 1.2 \cdot 10^5 N/m$, (a), (b) and (c) sont respectivement les couches supérieure, centrale et inférieure



FIGURE 3.19 – États de l'endommagement obtenus par le méta-modèle appliqué à la poutre ($45^\circ/0^\circ/ - 45^\circ$) avec $F = 2.28 \cdot 10^5 N/m$, (a), (b) and (c) sont respectivement les couches supérieure, centrale et inférieure

L'étape suivante est l'application du méta-modèle RNA validé précédemment sur une nouvelle configuration de poutre stratifiée afin de tester sa fiabilité et ses performances. Cette poutre a les mêmes dimensions données dans la section 3.4.1. Mais les couches sont orientées à ($60^\circ/0^\circ/ - 60^\circ$). Ces orientations de plis ne sont pas utilisées dans l'apprentissage du RNA. Un chargement d'impact distribué est appliqué le long de l'arrête libre ($x = L$) avec $F_0 = 1.52 \cdot 10^5 N/m$. Comme le montre la figure 3.20, le méta-modèle utilisé permet d'obtenir les ratios de décroissance des fréquences propres avec un bon accord par rapport à ceux donnés par le modèle complet.

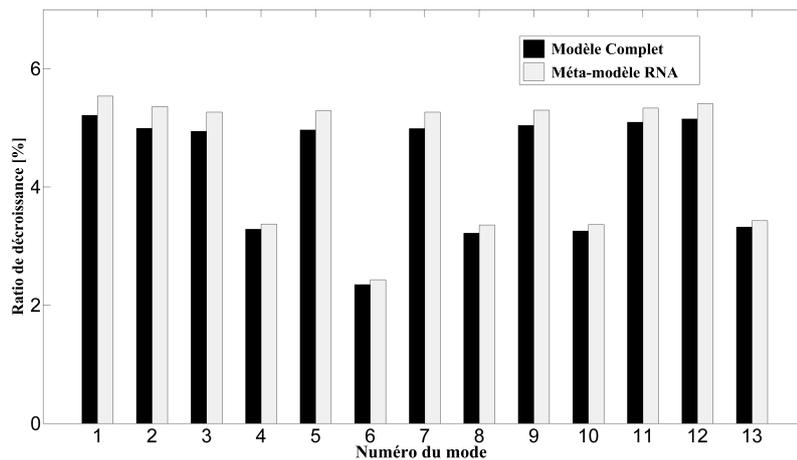


FIGURE 3.20 – Ratios de décroissance des fréquences propres obtenus par le modèle complet et le méta-modèle pour la poutre ($60^\circ/0^\circ/ - 60^\circ$)

Les états d'endommagement à la fin des simulations obtenus via le modèle complet et

le méta-modèle sont utilisés pour vérifier la dispersion de l'endommagement dans chaque couche. D'après les figures 3.21 et 3.22, le méta-modèle démontre sa capacité à localiser l'endommagement et à estimer son niveau dans chaque couche avec une bonne précision.



FIGURE 3.21 – États de l'endommagement obtenus par le modèle complet appliqué à la poutre ($60^\circ/0^\circ/-60^\circ$)



FIGURE 3.22 – États de l'endommagement obtenus par le méta-modèle appliqué à la poutre ($60^\circ/0^\circ/-60^\circ$)

De plus, le méta-modèle permet de réduire drastiquement le coût de calcul dans les simulations en ligne. Les simulations hors ligne ont permis d'établir la relation entre l'état de contrainte et le niveau d'endommagement. Cette relation est introduite dans les simulations en ligne remplaçant le calcul d'endommagement par la méthode de Newton-Raphson. Ainsi, l'estimation du niveau d'endommagement devient plus rapide, ce qui permet d'atteindre une réduction du temps dans les simulations supérieur à 66% comme indiqué dans la figure 3.23.

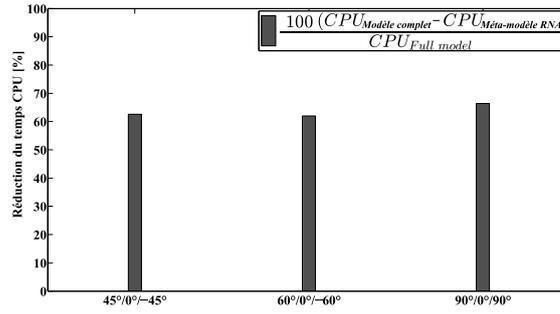


FIGURE 3.23 – Réduction du temps CPU pour les trois poutres (45°/0°/ – 45°), (60°/0°/ – 60°) et (90°/0°/90°)

3.4.3 APPLICATION DU MÉTA-MODÈLE POUR L'ANALYSE DYNAMIQUE D'ASSEMBLAGE DE STRUCTURES COMPOSITES

Pour les structures assemblées, le RNA est couplé avec la méthode de sous-structuration dynamique de Craig-Bampton formant un méta-modèle de taille réduite. Le principe de la sous-structuration est présenté par la figure 3.24 où la sous-structure $S1$ est endommagée alors que $S2$ est supposée non-endommagée.

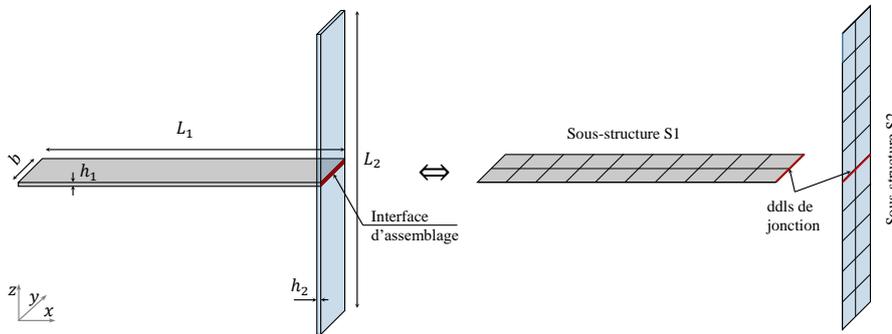


FIGURE 3.24 – Principe de sous-structuration dynamique : (a) structure entière et (b) décomposition en deux sous-structures

La structure est encastree à $x = 0$ et $z = \pm L_2/2$ et ses dimensions géométriques sont ($L_1 = L_2 = 0.5$; $b = 0.05$; $h_2 = 2 \times h_1 = 0.003$) m . Chaque sous-structure est composée de quatre couches, de même épaisseur, orientées comme (60°/ – 60°/ – 60°/60°). Une impulsion distribuée est appliquée suivant la direction \vec{x} le long de l'arrête de jonction entre $S1$ et $S2$ telle que :

$$F(t) = \begin{cases} \frac{1.4 \cdot 10^5}{2} \left(1 - \frac{\cos(2\pi t)}{\tau}\right) N/m & 0 \leq t \leq \tau = 1 \text{ ms} \\ 0 & \tau < t < t_f = 1.5 \text{ ms} \end{cases} \quad (3.33)$$

Le principe adopté est le suivant : le modèle de la sous-structure $S2$ est condensé une fois pour toute au début de la procédure, tandis que la sous-structure $S1$ non-linéaire endommagée est non-condensée et elle est introduite dans le RNA. Le modèle éléments finis complet compte 1566 ddls alors que le modèle réduit compte 695 ddls (30 ddls de jonction, $r = 50$ modes propres retenus et 615 ddls pour la sous-structure endommagée). Le nombre de modes normaux retenus de la sous-structure linéaire non-endommagée $S2$ est choisi de sorte que la bande de fréquence soit supérieure à trois fois la bande de fréquence d'intérêt ($[0, 1000] Hz$) de la structure entière. Ensuite, seule la raideur de la sous-structure endommagée $S1$ est actualisée lorsqu'une augmentation du niveau de l'endommagement se produit. La figure 3.25 présente l'algorithme de résolution en intégrant les deux méthodes, RNA et méthode de sous-structuration de Craig-Bampton.

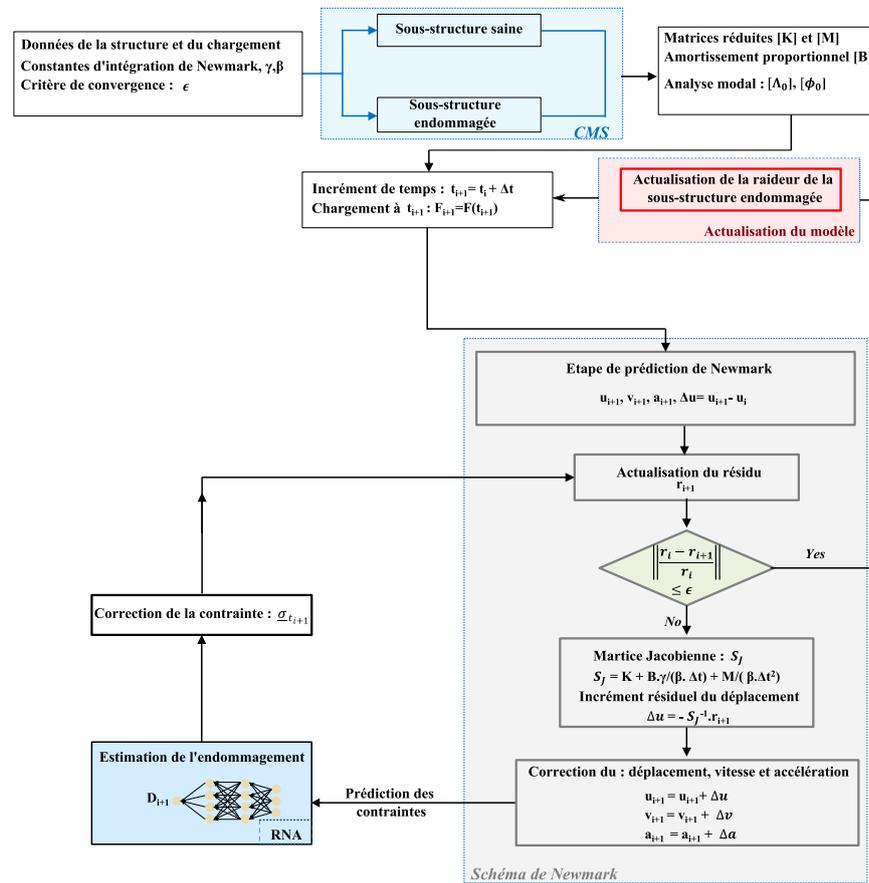


FIGURE 3.25 – Schéma de Newmark implicite pour le méta-modèle (RNA avec méthode de Craig-Bampton)

Dans un premier temps, la validation de la méthode de sous-structuration de Craig-Bampton (CMS) est nécessaire. Le tableau 3.4 présente les fréquences propres de la

structure entière saine obtenues par le modèle réduit et celles obtenues par le modèle éléments finis complet.

TABLE 3.4 – Fréquences propres de la structure ($60^\circ / -60^\circ / -60^\circ / 60^\circ$)

mode	$f_{complet}[Hz]$	$f_{CMS}[Hz]$	mode	$f_{complet}[Hz]$	$f_{CMS}[Hz]$
1	22,2	22,2	13	491,5	491,5
2	61,2	61,2	14	520,4	520,4
3	116,0	116,0	15	535,3	535,4
4	133,0	133,0	16	572,9	572,9
5	175,8	175,8	17	578,0	578,0
6	181,7	181,7	18	607,8	607,8
7	202,5	202,5	19	724,1	724,1
8	302,0	302,0	20	740,0	740,0
9	348,6	348,6	21	856,4	856,4
10	353,7	353,7	22	905,7	905,7
11	401,9	401,9	23	920,6	920,6
12	435,0	435,1	24	945,9	945,9

La différence entre les fréquences propres f_{CMS} et $f_{complet}$ du modèle réduit et du modèle complet, $\varepsilon_{CB} = \frac{f_{complet} - f_{CMS}}{f_{complet}}$, est illustrée dans la figure 3.26. L'erreur moyenne $\bar{\varepsilon}_{CB}$ pour les 24 modes contenus dans la bande de fréquence d'intérêt $[0, 1000] Hz$ est inférieure à 10^{-6} permettant de valider la méthode sous-structuration de Craig-Bampton.

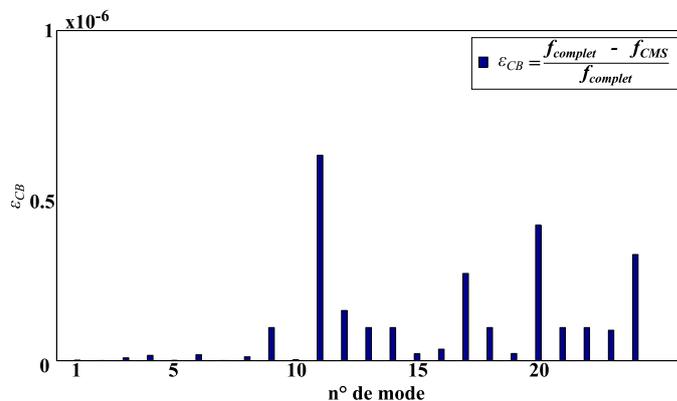


FIGURE 3.26 – Erreurs entre les fréquences propres calculées par le modèle réduit et du modèle complet

Les réponses fréquentielles de la structure saine et endommagée sont présentées par les figures 3.27 et 3.28. Quand l'endommagement est pris en compte dans la modélisation, la réponse fréquentielle de la structure endommagée est modifiée et devient décalée à gauche par rapport à celle de la structure non-endommagée.

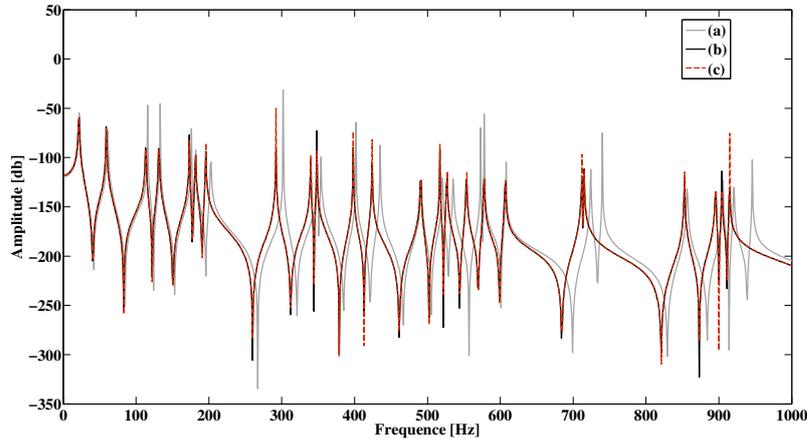


FIGURE 3.27 – Réponses fréquentielles de la structure, (a) : saine, (b) : endommagée obtenue avec le modèle complet et (c) endommagée obtenue avec le méta-modèle

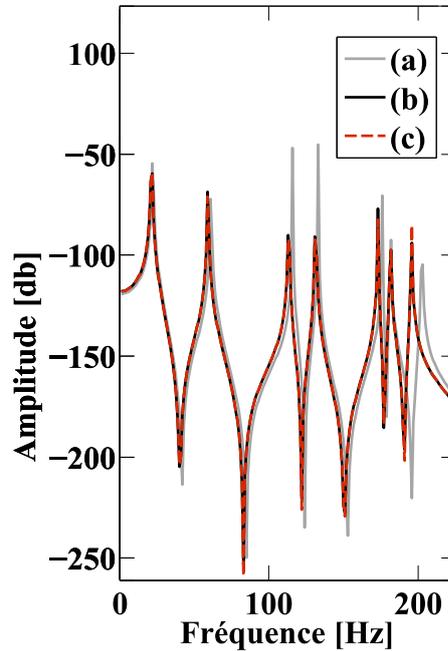


FIGURE 3.28 – Zoom sur les 7 premiers modes, (a) : saine, (b) : endommagée obtenue avec le modèle complet et (c) endommagée obtenue avec le méta-modèle

Ce décalage est expliqué par la décroissance des fréquences propres induite par la

dégradation de la rigidité de la structure. Cette décroissance est quantifiée par les ratios R_d présentés dans la figure 3.29. Les réponses fréquentielles et les ratios R_d obtenus en

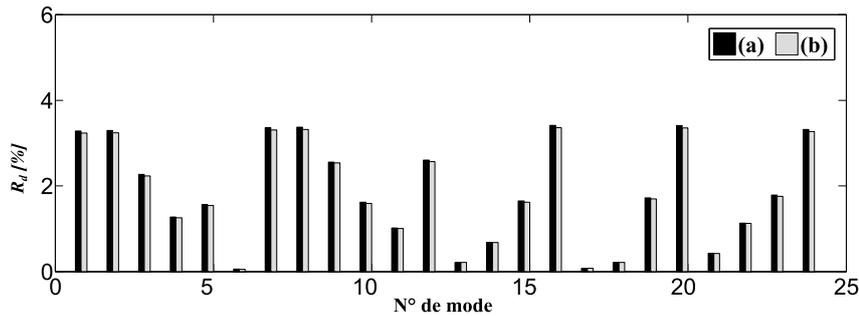


FIGURE 3.29 – Ratios de décroissance des fréquences propres : (a) and (b) désignent les ratios R_d obtenus par le modèle complet et le méta-modèle

utilisant le méta-modèle et le modèle complet sont superposés, ce qui met en évidence la performance de l'approche de réduction de modèle proposée pour prédire le comportement dynamique et le niveau d'endommagement des structures qui ne sont pas présentes dans l'ensemble d'apprentissage du RNA.

Les états d'endommagement, à la fin des simulations, obtenus par le modèle complet et le méta-modèle sont utilisés pour vérifier la dispersion d'endommagement dans chaque couche. D'après la figure 3.30, le méta-modèle démontre aussi sa performance pour localiser l'endommagement et estimer son niveau dans chaque couche avec une bonne précision par rapport aux résultats du modèle complet. La force appliquée à la structure assemblée est dans la direction \vec{x} , alors la contrainte la plus influente sur l'endommagement est σ_{22} puisque les micro-fissures dans la matrice en polymère sont parallèles au direction des fibres. L'évolution de l'endommagement en fonction de σ_{22} est illustrée dans la figure 3.31. L'endommagement augmente avec l'augmentation de σ_{22} et reste constant quand la contrainte σ_{22} diminue. De plus, le méta-modèle permet de suivre l'évolution de D en fonction de σ_{22} d'une manière similaire au modèle complet.

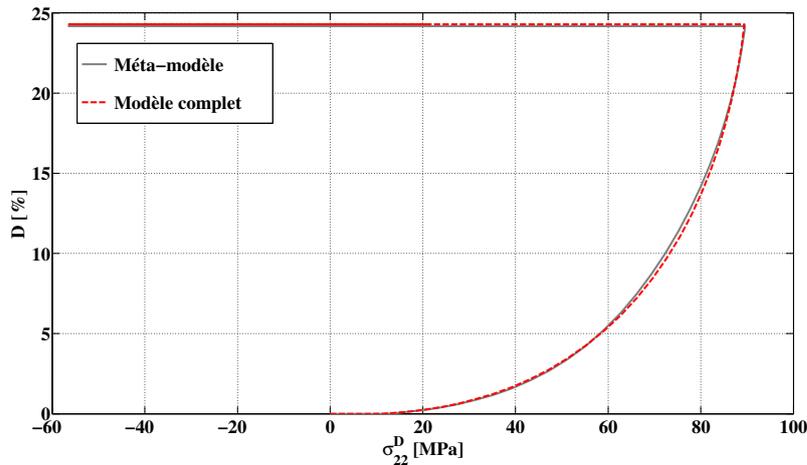


FIGURE 3.31 – Évolution de l'endommagement en fonction de la contrainte σ_{22}^D au point de coordonnées $(x = y = 0, z = 0.25 \text{ mm})$ de la structure assemblée

La courbe de contrainte -déformation au point $A(x = y = 0, z = 0.25 \text{ mm})$ de la couche $n^\circ 2, \theta = -60^\circ$ de la structure assemblée est représentée par la figure 3.32. L'endommagement augmente lorsque la contrainte augmente induisant un comportement non-linéaire et une pente endommagée est observée lorsque la contrainte diminue. Mais quand la contrainte σ_{22} devient négative, le matériau garde en mémoire le niveau d'endommagement et le comportement est élastique endommagé. Ceci est expliqué par le fait que la cinétique de l'endommagement ne tient pas compte de l'état des fissures quand la structure est en compression. Dans l'équation 3.22, la force thermodynamique \bar{Y} associée à l'endommagement est exprimée en fonction du carré des contraintes et particulièrement σ_{22} qui contrôle l'état des micro-fissures (ouvertes ou fermées). Ainsi, le signe de σ_{22} n'a aucun effet dans le modèle d'endommagement employé dans ce chapitre et le comportement est supposé toujours élastique endommagé. Par conséquent, pour mieux représenter le comportement de la structure composite, l'état des miro-fissures doit être pris en compte. Cet effet d'ouverture-fermeture des miro-fissures va être étudié dans le chapitre suivant en proposant un modèle d'endommagement unilatéral.

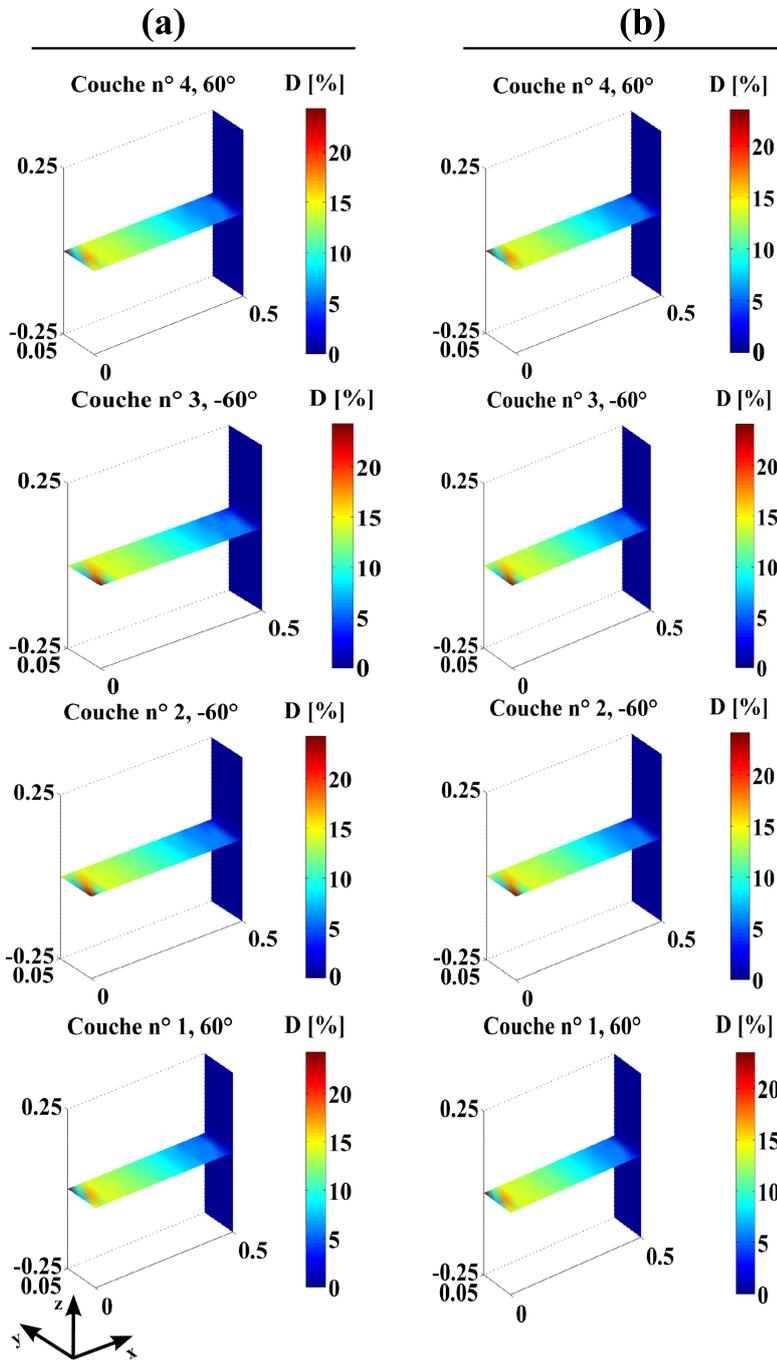


FIGURE 3.30 – États de l'endommagement obtenus par : (a) le modèle complet et (b) le méta-modèle

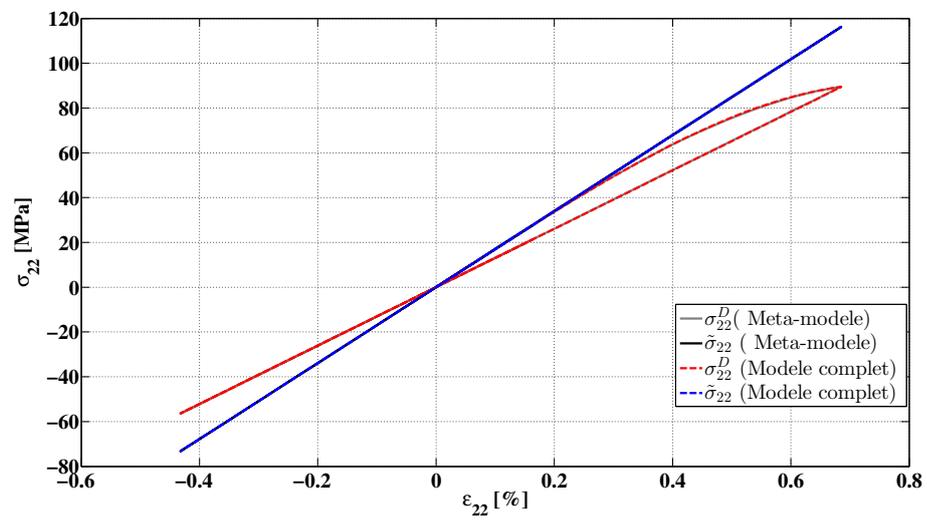


FIGURE 3.32 – Courbes contrainte-déformation au point $A(x = y = 0, z = 0.25 \text{ mm})$ de la couche $n2, \theta = -60^\circ$, $\tilde{\sigma}_{22}$ est la contrainte effective et σ_{22}^D est la contrainte de Cauchy

3.5 CONCLUSION

Dans ce chapitre, un nouveau concept appelé "*stress-based method*" est proposé qui décrit la réponse dynamique et l'évolution de l'endommagement dans les structures composites unidirectionnelles constituées d'une matrice en polymère renforcée avec de longues fibres de verre. Basé sur un modèle phénoménologique, le comportement dynamique de structures composites endommagées s'exprime par l'élasticité couplée à l'endommagement. La seule forme d'endommagement considérée est la micro-fissuration de la matrice et est entièrement décrite par une variable scalaire unique D . Plusieurs simulations numériques sont effectuées et montrent que l'endommagement modifie significativement les propriétés dynamiques de la structure s'exprimant dans la réduction des fréquences propres et l'augmentation de l'amplitude du déplacement.

En effet, l'endommagement dépend de l'état de contrainte qui est lié à l'orientation des fibres. À partir des simulations numériques avec le modèle complet, les trois contraintes orthotropes endommagées ($\sigma_{22}, \sigma_{12}, \sigma_{23}$) et leur niveau d'endommagement correspondant D sont extraites formant une base de données dédiée à l'apprentissage du RNA et aboutissant un méta-modèle permettant d'estimer et de localiser l'endommagement. Ce méta-modèle basé sur les RNA est couplé à la méthode de sous-structuration de Craig-Bampton pour développer un méta-modèle de taille réduite afin d'analyser les structures composites assemblées endommagées localement. Cette technique permet de limiter l'impact d'une modification restreinte à une sous-structure endommagée sur l'analyse du modèle éléments finis complet.

En utilisant des structures qui ne sont pas présentes dans l'apprentissage du RNA, les simulations numériques montrent de bonnes performances du méta-modèle proposé en termes d'estimation du niveau de l'endommagement et sa localisation. En outre, le méta-modèle fournit une estimation rapide du niveau d'endommagement dans les simulations en ligne ce qui permet de réduire significativement les coûts de calcul. Dans cette méthode, seul l'état de contrainte est nécessaire pour prédire, avec une grande précision, le niveau d'endommagement. Ainsi, ce méta-modèle d'ordre réduit peut être utilisé dans les estimations de durée de vie et les stratégies de surveillance des structures complexes.

STRUCTURES COMPOSITES EN GRANDS DÉPLACEMENTS AVEC ENDOMMAGEMENT UNILATÉRAL

Sommaire

4.1	Modèle d'endommagement unilatéral	124
4.1.1	Cinétique de l'endommagement	124
4.1.2	Validité du modèle d'endommagement unilatéral	126
4.2	Structures composites en grands déplacements	135
4.2.1	Formulations variationnelles	135
4.2.2	Formulation lagrangienne actualisée : ULFI	137
4.3	Applications numériques	140
4.3.1	Plaques saine en grands déplacements	140
4.3.2	Structures stratifiées endommagées en grands déplacements	143
4.4	Application du RNA	150
4.5	Conclusion	157

PRÉAMBULE

Ce chapitre décrit l'analyse dynamique des structures composites en grands déplacements où le comportement de leur matériau constitutif est décrit par un modèle d'endommagement unilatéral.

4.1 MODÈLE D'ENDOMMAGEMENT UNILATÉRAL

Dans le chapitre précédent, le modèle d'endommagement utilisé est sans unilatéralité, c'est à dire, le comportement est élastique endommagé même quand la structure était sollicitée en compression et les fissures refermées. Dans le but de suivre le comportement mécanique d'un VER sous différentes sollicitations, un modèle d'endommagement unilatéral a été développé par Trivaudey F. et al [Trivaudey 09]. Ce modèle est étendu dans ce mémoire pour étudier le comportement dynamique de structures composites en petits et grands déplacements en présence d'endommagement et sous chargement périodique.

4.1.1 CINÉTIQUE DE L'ENDOMMAGEMENT

Pour tenir compte de l'état des fissures (fermées/ouvertes), la contrainte locale de traction σ_{22} , qui est normale à la direction des fibres, est choisie comme le paramètre qui contrôle l'état des fissures :

- Si $\sigma_{22} \geq 0$:
 - ⇒ Les fissures sont supposées être ouvertes et le comportement est élastique endommagé.
- Si $\sigma_{22} < 0$:
 - ⇒ Les fissures sont supposées fermées et le comportement est élastique vierge.

4.1.1.1 FISSURES OUVERTES

Lorsque les fissures sont ouvertes, (*ie* : $\sigma_{22} \geq 0$), l'endommagement est pris en compte et le comportement élastique de la structure est modifié en ajoutant la matrice $\underline{\underline{H}}$ à la matrice de souplesse vierge $\underline{\underline{S}}$. L'évolution de l'endommagement est donnée par la fonction de charge f_d . Si $f_d < 0$, cela signifie qu'il n'y a pas d'évolution d'endommagement et que le niveau d'endommagement précédent est conservé en mémoire. Mais si f_d tend à devenir positif, un accroissement d'endommagement se produit afin d'annuler la fonction de charge f_d . Le niveau de l'endommagement est calculé comme expliqué dans le chapitre 3.

4.1.1.2 FERMETURE DES FISSURES

Quand les fissures sont ouvertes, la déformation s'écrit :

$$\underline{\underline{\tilde{\epsilon}}}^e = \underline{\underline{\tilde{S}}} \underline{\underline{\sigma}} \quad (4.1)$$

À la fermeture des fissures, ($ie : \sigma_{22} = 0$), le comportement est modifié par la présence des fissures fermées. Une nouvelle matrice de souplesse endommagée $\underline{\tilde{S}}^*$ est définie à partir de la matrice de souplesse vierge modifiant seulement les termes éventuellement affectés par l'endommagement et la loi de comportement devient :

$$\underline{\tilde{\varepsilon}}^* = \underline{\tilde{S}}^* \underline{\sigma} \quad (4.2)$$

avec :

$$\underline{\tilde{S}}^* = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & \tilde{S}_{22}^* & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{23} & S_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{S}_{44}^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{S}_{66}^* \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

La continuité de la déformation doit être assurée à la fermeture des fissures :

$$\underline{\tilde{\varepsilon}}^e = \underline{\tilde{\varepsilon}}^* \quad (4.4)$$

L'équation (4.4) peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{pmatrix} S_{11}\sigma_{11} + S_{12}\sigma_{22} + S_{12}\sigma_{33} \\ S_{12}\sigma_{11} + \tilde{S}_{22}^*\sigma_{22} + S_{23}\sigma_{33} \\ S_{12}\sigma_{11} + S_{23}\sigma_{22} + S_{33}\sigma_{33} \\ \tilde{S}_{44}^*\sigma_{12} \\ S_{55}\sigma_{13} \\ \tilde{S}_{66}^*\sigma_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11}\sigma_{11} + S_{12}\sigma_{22} + S_{12}\sigma_{33} \\ S_{12}\sigma_{11} + \tilde{S}_{22}^*\sigma_{22} + S_{23}\sigma_{33} \\ S_{12}\sigma_{11} + S_{23}\sigma_{22} + S_{33}\sigma_{33} \\ \tilde{S}_{44}^*\sigma_{12} \\ S_{55}\sigma_{13} \\ \tilde{S}_{66}^*\sigma_{23} \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

Comme $\sigma_{22} = 0$ à la fermeture des fissures, l'égalité dans l'équation (4.5) est vérifiée quelque soit la valeur de \tilde{S}_{22}^* . Ainsi, on peut supposer que le comportement vierge est récupéré que dans la direction normale à la direction des fibres, mais il est resté élastique endommagé dans les deux autres directions :

$$\tilde{S}_{22}^* = \tilde{S}_{22} = S_{22} \quad ; \quad \tilde{S}_{44}^* = \tilde{S}_{44} = S_{44} + H_{44}(D_f) \quad ; \quad \tilde{S}_{66}^* = \tilde{S}_{66} = S_{66} + H_{66}(D_f) \quad (4.6)$$

où D_f est la valeur de l'endommagement à la fermeture des fissures.

4.1.1.3 FISSURES FERMÉES

Lorsque la contrainte σ_{22} devient négative ($\sigma_{22} < 0$), les fissures sont maintenant fermées. Le comportement est vierge dans la direction transversale en maintenant

$\tilde{S}_{22}^* = S_{22}$, à partir de la fermeture des fissures. Dans les directions de cisaillement, le comportement dépend du contact entre les lèvres des fissures qui peuvent avoir un comportement de collage ou de glissement. Pour simplifier, on suppose que les lèvres de fissure sont collées quand les fissures sont fermées. Ainsi, le comportement vierge est récupéré dans toutes les directions.

4.1.1.4 OUVERTURE DES FISSURES

Dès que les fissures s'ouvrent (*ie* : $\sigma_{22} > 0$), le comportement est de nouveau endommagé dans toutes les directions. La matrice de souplesse est maintenant égale à $[\underline{S} + \underline{H}(D_f)]$ où D_f est le niveau d'endommagement, conservé en mémoire, à la fermeture des fissures. La loi de comportement devient :

$$\begin{aligned} \underline{\varepsilon}^e &= \underline{\tilde{S}} \underline{\sigma} \\ &= [\underline{S} + \underline{H}(D_f)] \underline{\sigma} \end{aligned} \quad (4.7)$$

4.1.2 VALIDITÉ DU MODÈLE D'ENDOMMAGEMENT UNILATÉRAL

Différentes simulations sont présentées dans ce paragraphe afin de montrer la capacité du modèle d'endommagement unilatéral à décrire les différents comportements du composite selon les états de fissures durant les différentes phases de chargement. Les propriétés mécaniques du composite étudié sont données dans le tableau 4.1.

TABLE 4.1 – Propriétés mécaniques et paramètres d'endommagement du verre/epoxy

Module élastique E_1 (\vec{e}_1)	(MPa)	45680
Module élastique E_2 (\vec{e}_2)	(MPa)	16470
Module de cisaillement G_{12}	(MPa)	6760
Coefficient de Poisson ν_{12}	–	0.34
Coefficient de Poisson ν_{23}	–	0.34
Y_c	(MPa)	0.0027
q	(MPa)	1.246
p	–	0.816

4.1.2.1 COMPORTEMENT SOUS CHARGEMENT STATIQUE ALTERNÉ

On considère la poutre stratifiée présentée par la figure constituée de trois couches ($90^\circ/0^\circ/90^\circ$) de même épaisseur $h = 0.0003 \times 3 \text{ m}$ et de dimensions planes $L = 0.1 \text{ m } \vec{x}$

et $b = 0.01 \text{ m } \vec{y}$).

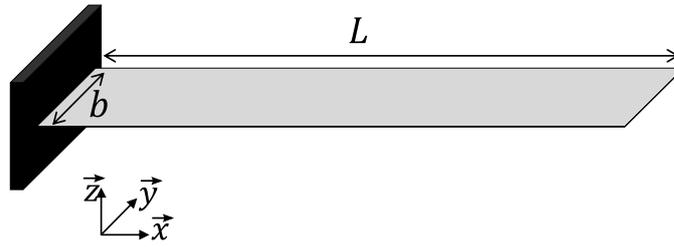


FIGURE 4.1 – Poutre stratifiée encastrée-libre

Elle est encastrée à $x = 0$ et libre à $x = L$ où un chargement distribué de traction-compression est appliqué le long de l'arrête libre dans la direction \vec{x} . Le chargement est appliqué dans l'ordre suivant :

1. Chargement n°1 : $F_{\text{chargement } 1} = 1.75 \cdot 10^5 \text{ N/m}$
2. Déchargement n°1 : $F_{\text{déchargement } 1} = -1.75 \cdot 10^5 \text{ N/m}$
3. Chargement n°2 : $F_{\text{chargement } 2} = 1.75 \cdot 10^5 \text{ N/m}$
4. Déchargement n°2 : $F_{\text{déchargement } 2} = -1.75 \cdot 10^5 \text{ N/m}$

En utilisant le principe des travaux virtuels et la méthode des éléments finis, la variation de l'énergie interne s'exprime par :

$$\delta W_{\text{int}} = \delta \int_V \sigma : \delta \varepsilon dv \quad (4.8)$$

$$= \int_V \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \delta \varepsilon : \varepsilon dv \quad (4.9)$$

$$= \int_V \delta \varepsilon^T \underline{\underline{C}}^t : \delta \varepsilon dv \quad (4.10)$$

$$= \delta u^T \widehat{K} u \quad (4.11)$$

où $\underline{\underline{C}}^t$ et \widehat{K} sont respectivement la matrice d'élasticité tangente et la matrice de raideur tangente et u est le vecteur des déplacements. La variation de l'effort extérieur F_{ext} ($F_{\text{chargement } 1}$, $F_{\text{déchargement } 1}$, $F_{\text{chargement } 2}$ ou $F_{\text{déchargement } 2}$ selon la phase de chargement) est

$$\delta W_{\text{ext}} = \delta u^T F_{\text{ext}} \quad (4.12)$$

Ainsi, le problème du comportement élastique statique de la poutre est décrit par l'équation suivante :

$$\widehat{K} u = F_{\text{ext}} \quad (4.13)$$

L'écriture incrémentale de l'équation (4.13) devient :

$$\Delta u = -\widehat{K}^{-1} r \quad (4.14)$$

où r est le vecteur résidu entre l'effort interne et le chargement exercé. La résolution de l'équation (4.14) est faite en utilisant la méthode itérative de Newton-Raphson modifiée mentionnée dans le chapitre 2.

Un point au milieu de la couche n°1 (90°) et de coordonnées ($x = 7.9, y = 2.1, z = -0.3$) mm est choisi pour suivre l'évolution de l'endommagement et la loi de comportement. L'évolution de la contrainte, normale aux directions des fibres, σ_{22} en fonction de la déformation ε_{22} est présentée dans la figure 4.2 pour le modèle d'endommagement bilatéral et dans la figure 4.3 pour le modèle d'endommagement unilatéral.

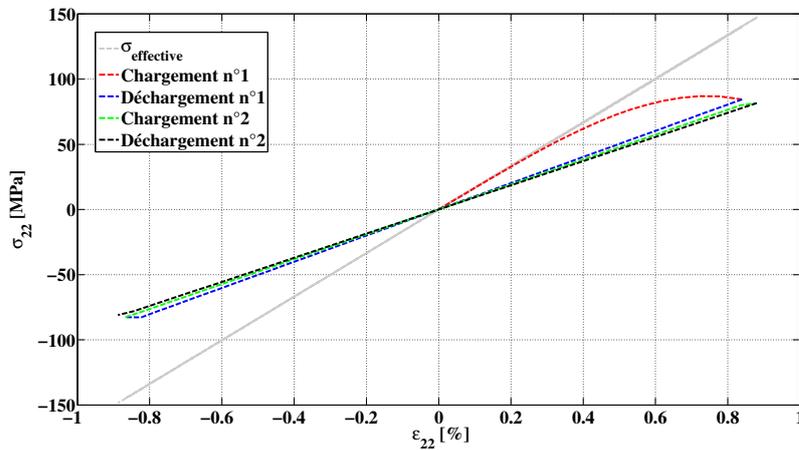


FIGURE 4.2 – Courbe contrainte-déformation : modèle bilatéral

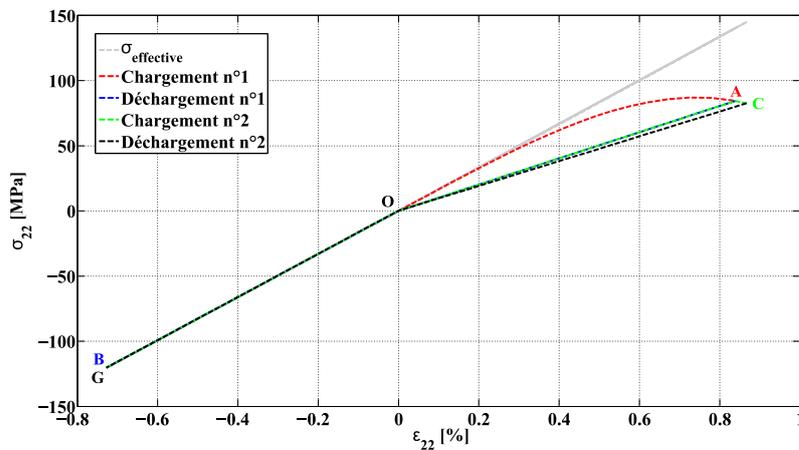


FIGURE 4.3 – Courbe contrainte-déformation : modèle unilatéral

Sous les mêmes conditions de chargement, le comportement de la poutre stratifiée n'est plus le même pour les deux modèles d'endommagement et plus particulièrement en compression, ($\sigma_{22} < 0$), quand les fissures sont supposées être fermées. Le comportement statique de la poutre avec le modèle unilatéral est décrit ci-dessous :

— **Trajet** $O \rightarrow A$

La poutre est sollicitée en traction et son comportement est non-linéaire. Le niveau de l'endommagement augmente avec l'augmentation de la contrainte σ_{22} jusqu'à atteindre D_A , Fig. 4.5

— **Trajet** $A \rightarrow O$

La force appliquée à la structure diminue pendant ce trajet et $\sigma_{22} \geq 0$. Il n'y a pas d'évolution d'endommagement et le comportement de la structure est élastique endommagé s'exprimant par la relation :

$$\underline{\sigma} = [\underline{S} + \underline{H}(D_f)]^{-1} \underline{\varepsilon}^e \quad (4.15)$$

La pente de la portion $A \rightarrow O$ de la courbe bleue représente le module d'Young endommagé : $\tilde{E}_2 = (1 - D_A)E_2$.

— **Trajet** $O \rightarrow B$

La contrainte σ_{22} devient négative. L'effet non-linéaire d'endommagement est désactivé et le comportement vierge est récupéré puisque le matériau retrouve son état initial via l'effet de fermeture des fissures.

— **Trajet** $B \rightarrow O$

Il s'agit de la deuxième phase de chargement. Pendant le trajet $B \rightarrow O$, la contrainte σ_{22} croît en partant du point B mais elle est toujours négative. Par conséquent, les fissures sont fermées au cours de ce trajet et le comportement est élastique vierge.

— **Trajet** $O \rightarrow C$

La contrainte σ_{22} continue à croître elle devient positive. Par conséquent, les fissures s'ouvrent et la structure récupère son comportement endommagé sur le trajet $O \rightarrow A$ où sa pente est $\tilde{E}_2 = (1 - D_A)E_2$ puisque l'endommagement a été mémorisé et s'active dès l'ouverture des fissures. À la fin du chargement n°2, le niveau d'endommagement augmente jusqu'à atteindre D_C , Fig. 4.5.

— **Trajet** $C \rightarrow O$

La contrainte σ_{22} est positive, le comportement est élastique endommagé et une nouvelle pente est observée $\tilde{E}_2 = (1 - D_C)E_2$.

— **Trajet** $O \rightarrow G$

La contrainte σ_{22} devient négative et le comportement vierge est retrouvé à nouveau.

Dans la figure 4.3, pendant la phase de compression la contrainte σ_{22} est identique à la contrainte effective permettant à la poutre de récupérer le comportement vierge. Ce retour au comportement vierge est obtenu en tenant compte la fermeture des fissures dans la matrice des couches constitutives de la structure. Dans le modèle d'endommagement bilatéral, figure 4.2, les fissures sont supposées toujours ouvertes et le comportement est élastique endommagé même quand la structure est sollicitée en compression. Ainsi, le modèle bilatéral n'est pas capable de décrire correctement le comportement mécanique en présence de chargement cyclique. D'après les figures figure 4.4 et 4.5, à la fin du chargement n°2 la contrainte σ_{22} est négative, mais il y a eu une évolution de l'endommagement pour le modèle bilatéral contrairement au modèle unilatéral. Ceci représente un inconvénient majeur du modèle bilatéral puisque quand la structure est sollicitée en compression, les fissures doivent être fermées et le matériau récupère ses propriétés initiales.

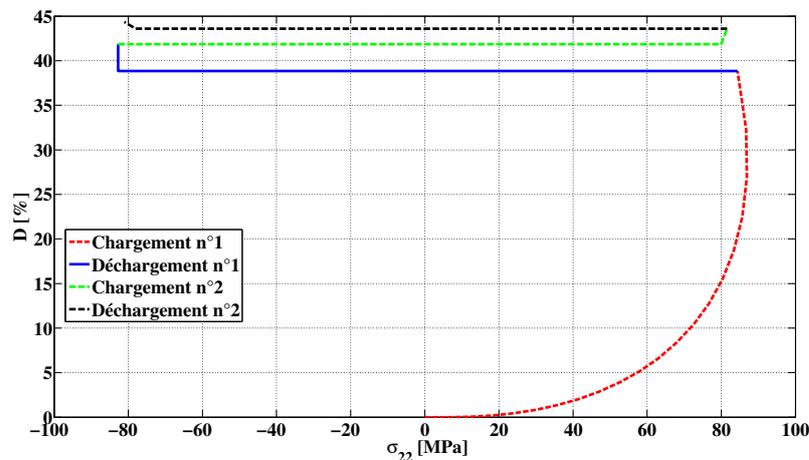


FIGURE 4.4 – Évolution de l'endommagement en fonction de la contrainte σ_{22} : modèle bilatéral

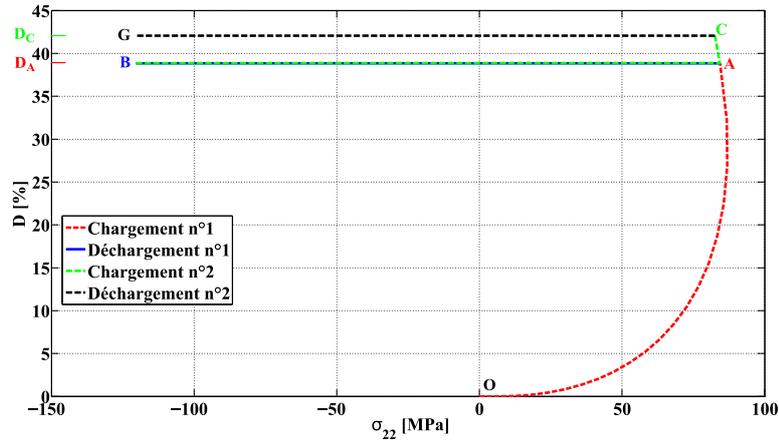


FIGURE 4.5 – Évolution de l’endommagement en fonction de la contrainte σ_{22} : modèle unilatéral

dans la figure 4.4, il y a eu une évolution de l’endommagement, à la fin du chargement n°2, alors que la contrainte σ_{22} est négative, alors que .

4.1.2.2 COMPORTEMENT DYNAMIQUE SOUS SOLLICITATION HARMONIQUE

Dans les simulations statiques précédentes, il est montré que le modèle unilatéral peut décrire d’une façon plus phénoménologique le comportement de la poutre endommagée sous n’importe quelle sollicitation. En ce qui suit, le modèle d’endommagement unilatéral est retenu pour étudier la réponse dynamique de structures stratifiées.

Poutre encastree-libre

On considère la poutre de la section précédente avec les même conditions aux limites, mais est soumise maintenant à une force harmonique distribuée le long de l’arrête $x = L$ avec :

$$F(t) = 1.75 \cdot 10^5 \sin(2 \times \pi \times f \times t) \text{ N/m } \vec{x} \quad ; \quad f = 200 \text{ Hz} \quad (4.16)$$

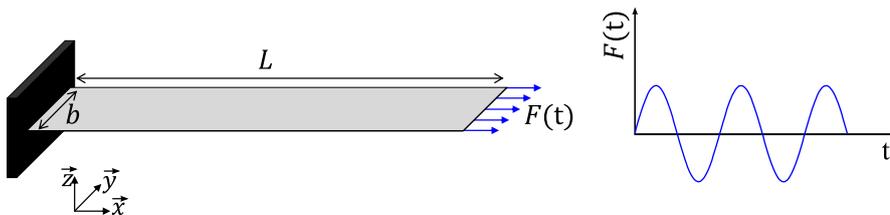


FIGURE 4.6 – Poutre stratifiée encastree-libre soumise à une excitation harmonique

L'équation de mouvement de la poutre s'écrit sous la forme :

$$[M] \ddot{u} + [B] \dot{u} + [K(D)] u = F(t) \quad (4.17)$$

La résolution dans le domaine temporel de cette équation est faite par la méthode de Newmark qui a été adaptée pour tenir compte de l'effet d'endommagement (algorithme dans le chapitre 2).

Les réponses temporelles de la poutre saine de la poutre endommagée sont présentées dans la figure 4.7. Quand l'endommagement est introduit dans la loi de comportement, l'amplitude de la réponse temporelle de la poutre endommagée, en $x = L$, est plus importante que celle de la poutre saine. Cette différence d'amplitude apparait lorsque la poutre est sollicitée en traction ($F(t) \geq 0$). Par contre, quand $F(t) < 0$, les deux réponses se superposent. Cette caractéristique de non symétrie de la réponse temporelle endommagée est induite par l'effet de fermeture des fissures. En effet, pendant l'application de la force, quand la contrainte normale au fibres σ_{22}^D est positive, la matrice de raideur de la structure est modifiée et devient dépendante de l'état d'endommagement. Ce changement de la rigidité de la structure est visible dans la figure 4.8 où la contrainte de Cauchy est inférieure à la contrainte effective. Mais, dès que σ_{22}^D devient négative, la structure retrouve son comportement vierge initial et les deux contraintes sont identiques.

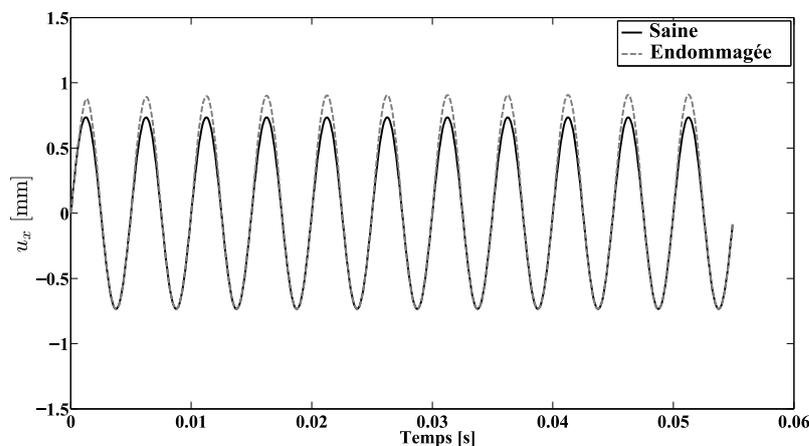


FIGURE 4.7 – Réponses temporelles de la poutre saine et la poutre endommagée en $x = L$

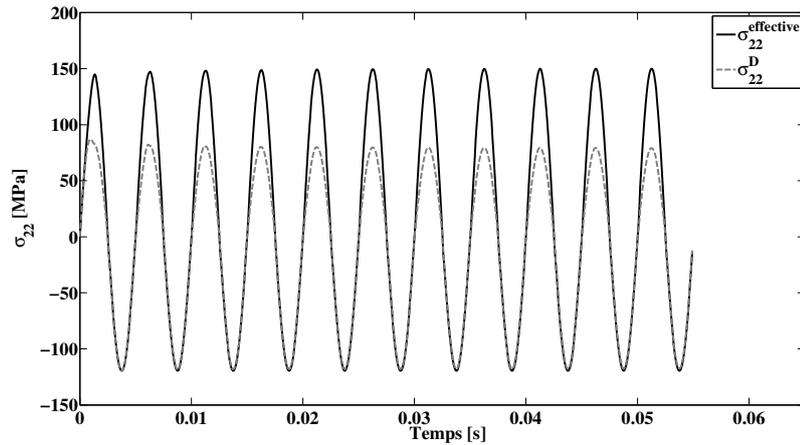


FIGURE 4.8 – Évolution de la contrainte effective ($\sigma_{22}^{effective}$) et endommagée σ_{22}^D en $x = L$

L'évolution de la contrainte σ_{22} en fonction de la déformation ε_{22} en $x = L$ est illustrée dans la figure 4.9, où le comportement est élastique endommagé pour $\sigma_{22} \geq 0$ et élastique vierge quand $\sigma_{22} < 0$. Ainsi, le modèle unilatéral, soumis à des sollicitations harmoniques, assure une description physique du comportement dynamique des stratifiés.

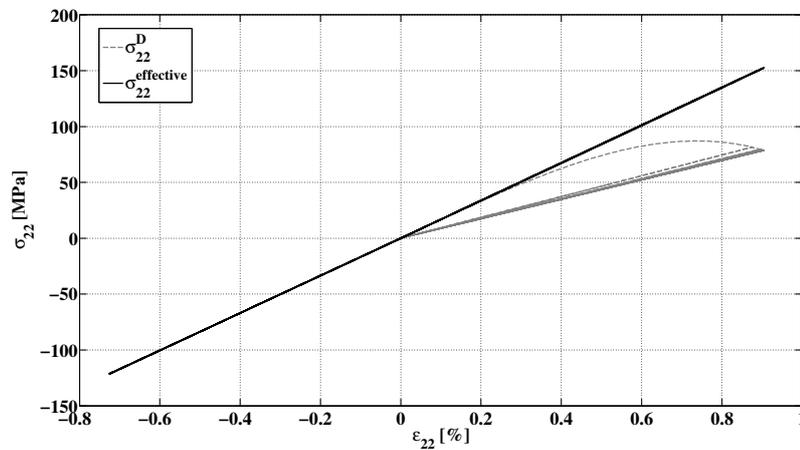


FIGURE 4.9 – Contraintes effective ($\sigma_{22}^{effective}$) et endommagée (σ_{22}^D) en fonction de la déformation

Dans la figure 4.10, on remarque que chaque augmentation du niveau d'endommagement D engendre une diminution de la pente $\frac{\Delta\sigma_{22}^D}{\Delta\varepsilon_{22}}$ dans la figure 4.9. Cette pente peut s'exprimer par $\tilde{E}_2 = (1 - D)E_2$, elle traduit la dégradation de la rigidité de la structure induite par l'endommagement.

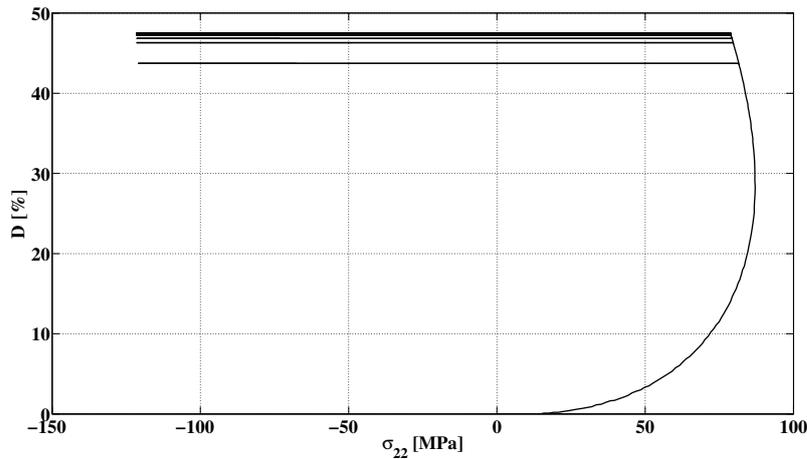


FIGURE 4.10 – Évolution du niveau de l’endommagement en fonction de la contrainte (σ_{22})

L’évolution temporelle de l’endommagement aux nœuds d’encastrement est présentée par la figure 4.11. Au cours des itérations, l’endommagement est calculé et sa valeur est stockée en mémoire, pour assurer le comportement endommagé quand les fissures s’ouvrent.

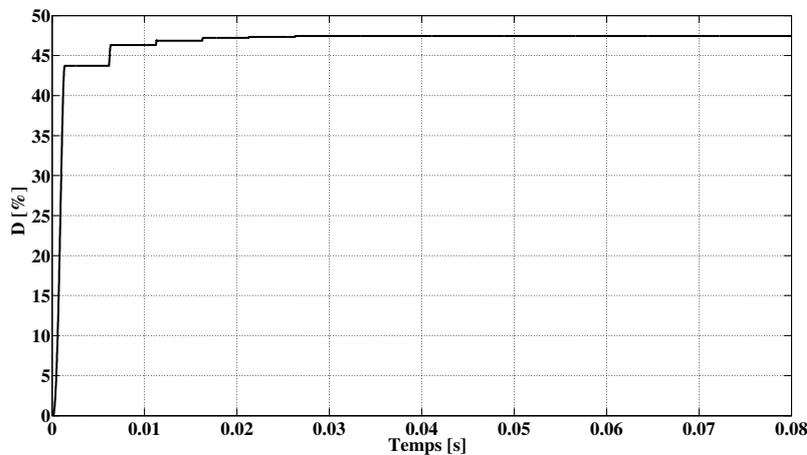


FIGURE 4.11 – Évolution du niveau d’endommagement en $x = 0$

La dégradation temporelle de la rigidité a un impact sur les caractéristiques dynamiques de la structure, notamment sur les fréquences propres. Considérant l’effet unilatéral de l’endommagement, la structure se comporte de deux manières au cours du temps ; endommagée et vierge. Ainsi, les fréquences propres changent en fonction de la nature du comportement comme illustré dans la figure 4.12, où elles chutent par rapport à leur valeurs initiales quand le comportement de la structure est endommagé. Cette variation des fréquences propres peut être utilisée comme un indicateur de surveillance

de structures composites endommagées par sollicitation dynamique.

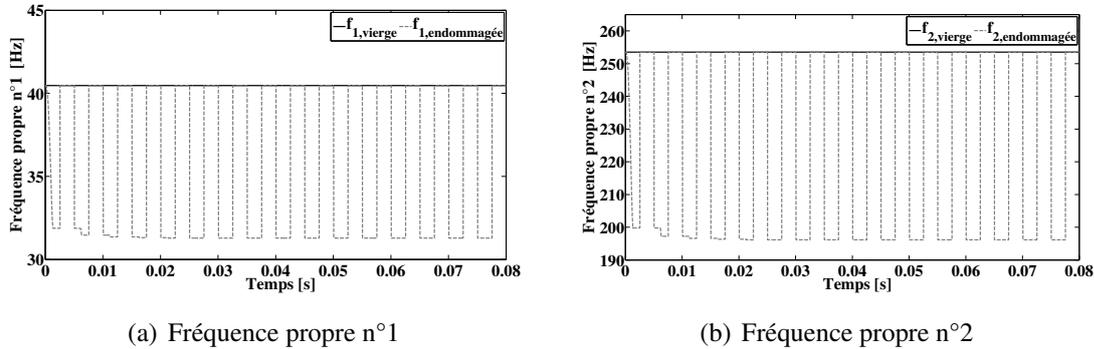


FIGURE 4.12 – Évolution des deux premières fréquences propres en fonction du temps

4.2 STRUCTURES COMPOSITES EN GRANDS DÉPLACEMENTS

Du fait de leurs grand ratio rigidité/masse, les structures composites constituent aujourd'hui une alternative intéressante dans le domaine de l'allègement des structures. De ce fait, les structures composites peuvent être de plus en plus minces et en raison des grands niveaux d'excitation qui constituent l'ambiance dynamique de ces structures ; leurs amplitudes de vibration deviennent très larges et induisent des non-linéarités de type géométrique (grands déplacements).

Faire un calcul en non-linéaire géométrique signifie que l'on abandonne l'hypothèse que la configuration courante peut être confondue avec la configuration initiale. Cela a pour conséquence que la configuration sur laquelle doivent être calculés les termes des travaux virtuels (configuration actuelle), devient une inconnue, ce qui introduit une non-linéarité dans le problème. On présente en ce qui suit, les formulations utilisées pour résoudre ce problème.

4.2.1 FORMULATIONS VARIATIONNELLES

Considérant à nouveau la structure composite de la figure 2.5, l'équation non-linéaire d'équilibre est obtenue de la même manière que dans la section précédente en appliquant le principe des travaux virtuels :

$$\delta\Pi = \int_{\Omega} \delta\mathbf{E} : \mathbf{S}dV - \delta\Pi_{ext} = 0 \quad (4.18)$$

avec \mathbf{S} est le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff.

La résolution de cette équation s'effectue, généralement, d'une manière incrémentale. Plus particulièrement durant le processus de résolution, dans un problème non-linéaire et sous l'effet des efforts internes et externes, le domaine d'intégration peut se déformer par rapport à sa configuration initiale (i.e à t_0). Alors, il est nécessaire d'indiquer dans quelle configuration, les quantités énergétiques dans l'équation (4.18) sont mesurées.

Pour simplifier les écritures, toutes les quantités sont exprimées au niveau élémentaire. Soit un élément, Γ_e , du plan moyen de la plaque dans plusieurs configurations Fig.4.13 :

- ${}^0\Gamma_e$ désigne la configuration initiale (non déformée à t_0).
- ${}^1\Gamma_e$ désigne une configuration intermédiaire déformée (à t_1).
- Γ_e est la configuration inconnue à déterminer (à $t_2 = t_1 + \Delta t$).

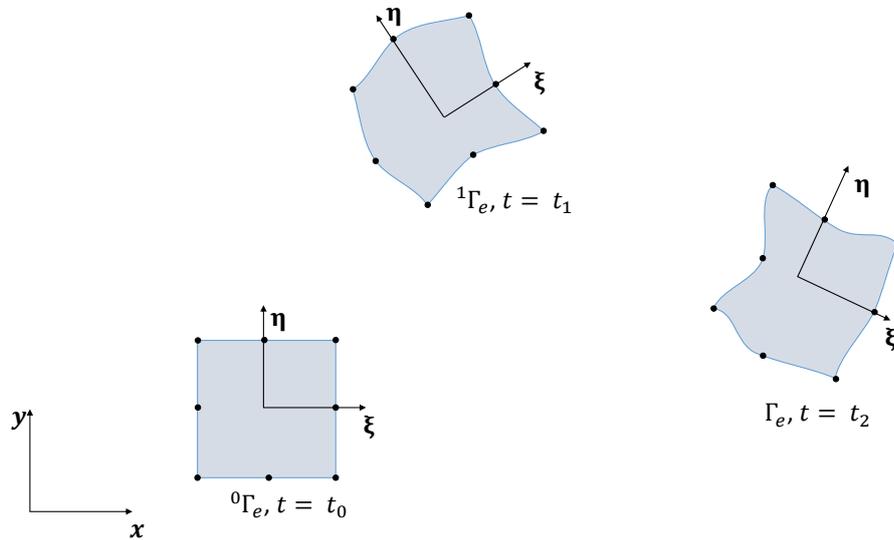


FIGURE 4.13 – Les configurations ${}^0\Gamma_e$, ${}^1\Gamma_e$ et Γ_e pour un élément du plan moyen

Deux formulations sont souvent utilisées pour décrire le comportement de la structure en indiquant dans quelle configuration les quantités énergétiques sont exprimées et mesurées.

La première est la formulation lagrangienne total, (Total Lagrangian Formulation : TLF), où toutes les quantités (déplacements, déformations et contraintes) dans le processus de calcul sont liées à la configuration initiale non déformée où elles sont mesurées. Dans le cas des structures minces, pour obtenir la solution exacte, c'est-à-dire déterminer Γ_e , le tenseur de Green-Lagrange liant le champ de déplacements aux déformations doit inclure les termes non linéaires (pas de termes négligés dans l'équation (4.23)).

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T) + \frac{1}{2}\nabla\mathbf{u}\nabla\mathbf{u}^T \quad (4.19)$$

Cette écriture complète de la déformation est très complexe et implique des dérivées secondes des composantes du vecteur de déplacements. Par conséquent, cette approche n'est pas souvent utilisée dans l'analyse des problèmes de grandes transformations notamment dans le cas de dépendance entre la charge appliquée et les déplacements induits.

La deuxième est la formulation lagrangienne actualisée (Updated Lagrangien Formulation : ULF). Dans ce cas, une configuration intermédiaire ${}^1\Gamma_e$ est utilisée comme configuration de référence pour obtenir la configuration Γ_e pour un ensemble donné de paramètres (charges, ...). La configuration ${}^1\Gamma_e$ est censée être connue (${}^1\Gamma_e$ est en fait une configuration convergente à l'incrément précédent). C'est-à-dire que ${}^1\Gamma_e$ est entièrement décrite à la fois du point de vue géométrique et mécanique (champ de déformation et champ de contrainte interne).

En effet, il n'y a théoriquement aucune différence entre TLF et ULF car elles mènent toutes les deux à résoudre le même problème d'équilibre dans le domaine Γ_e . Mais pratiquement, il est recommandé de tirer profit du fait que ${}^1\Gamma_e$ est connu et que l'objectif est d'obtenir l'équilibre dans une configuration Γ_e pas trop éloignée de ${}^1\Gamma_e$. Dans ULF, Γ_e est une configuration voisine de ${}^1\Gamma_e$. Cette approche a été envisagée par de nombreux auteurs pour l'analyse non-linéaire des structures minces [Wunderlich W. 81, Bathe 83, Fafard 89].

4.2.2 FORMULATION LAGRANGIENNE ACTUALISÉE : ULF1

La formulation lagrangienne actualisée "ULF1" développée dans les travaux de Mohan et Kapania [Mohan 98] est utilisée dans cette étude pour résoudre l'équation d'équilibre.

On suppose que la configuration à l'instant t_1 est connue, l'équation (4.18) peut se réécrire dans la configuration ${}^1\Gamma_e$ sous la forme :

$$\delta\Pi^e = \underbrace{\int_{{}^1\Gamma_e} \delta\mathbf{E}^{\Delta t T} \mathbf{S} dV}_{\delta W_{int}^e} - \int_{{}^1\Gamma_e} \delta u^{\Delta t} F dV = 0 \quad (4.20)$$

où $\mathbf{E}^{\Delta t}$ et $u^{\Delta t}$ représentent les incréments des déformations et des déplacements entre les instants t_1 et $t_2 = t_1 + \Delta t$ et δW_{int}^e la variation des efforts internes élémentaires.

Admettant l'hypothèse des petites déformations, l'équation (4.20) peut s'exprimer sous la forme suivante [Batoz 85] :

$$\delta\Pi^e = \int_{{}^1\Gamma_e} \delta\mathbf{E}^{\Delta t T} \boldsymbol{\sigma} dV - \int_{{}^1\Gamma_e} \delta u^{\Delta t} F dV = 0 \quad (4.21)$$

De la même manière, les contraintes et la force sont décomposées en leur valeur à t_1 (${}^{t_1}\sigma$, ${}^{t_1}F$) et leur incréments entre t_1 et $t_1 + \Delta t$ exprimés par ($\sigma^{\Delta t}$, $F^{\Delta t}$)

$$\sigma = {}^{t_1}\sigma + \sigma^{\Delta t} \quad ; \quad F = {}^{t_1}F + F^{\Delta t} \quad (4.22)$$

$$\mathbf{E}^{\Delta t} = \left\{ \mathbf{E}_m + z\mathbf{E}_f + \mathbf{E}_s \right\} + \left\{ \mathbf{E}_{nl} \right\} \quad (4.23)$$

où \mathbf{E}_m , \mathbf{E}_f et \mathbf{E}_s sont les vecteurs de déformations linéaires dues aux effets de membrane, de flexion et de cisaillement, respectivement :

$$\mathbf{E}_m = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} ; \quad \mathbf{E}_f = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} ; \quad \mathbf{E}_s = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \varphi_x \\ \frac{\partial w}{\partial y} + \varphi_y \end{Bmatrix} \quad (4.24)$$

La déformation non-linéaires est donnée par le vecteur \mathbf{E}^{NL} :

$$\mathbf{E}_{nl} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.25)$$

En utilisant l'écriture discrète où les expressions des matrices d'interpolation \mathbf{B}_m , \mathbf{B}_f , et \mathbf{B}_s sont données dans le chapitre 2. L'expression de \mathbf{B}_{nl} est la suivante :

$$\delta \mathbf{E}_{nl} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial w}{\partial y} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_{NL}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \delta \{u_n\} \quad (4.26)$$

Le tenseur de Green-Lagrange et sa variation s'écrivent sous la forme :

$$\mathbf{E}^{\Delta t} = [\mathbf{B}_l + \frac{1}{2}\mathbf{B}_{nl}] \{u\} \quad ; \quad \delta\mathbf{E}^{\Delta t} = [\mathbf{B}_l + \mathbf{B}_{nl}] \{\delta u\} \quad (4.27)$$

L'incrément des contraintes peut s'exprimer en fonction de la matrice ${}^{t_1}\underline{\underline{C}}$ d'élasticité de l'instant t_1 par [Batoz 85] :

$$\sigma^{\Delta t} = {}^{t_1}\underline{\underline{C}}[\mathbf{B}_l + \frac{1}{2}\mathbf{B}_{nl}] \quad (4.28)$$

En substituant les relations (4.27) et (4.28) dans l'équation (4.21), l'équation d'équilibre s'exprime par :

$$\{r\} = \{q\} - \{f\} \quad (4.29)$$

où $\{r\}$ est le résidu entre le vecteur des efforts internes $\{q\}$ et le vecteur des efforts externes $\{f\}$. En admettant que l'équilibre est établi à l'instant t_1 et que la configuration ${}^1\Gamma_e$ à cet instant est connue, l'équation 4.29 est linéarisée en utilisant le développement en séries de Taylor, il vient :

$$\begin{aligned} \{r_{t_1+\Delta t}\} &= \{q_{t_1}\} + \left(\frac{\partial q}{\partial \{\delta u\}} \right)_{t_1} \{\delta u\} - \{f_{t_1+\Delta t}\} \\ &= \{q_{t_1}\} + [K_{tg}^e] \{\delta u\} - \{f_{t_1+\Delta t}\} \end{aligned} \quad (4.30)$$

où : $[K_{tg}^e]$ est la matrice de raideur tangente qui peut se décomposer en une matrice de raideur de raideur linéaire $[K_l^e]$, une matrice de raideur non-linéaire $[K_{nl}^e]$ et une matrice de raideur géométrique $[K_\sigma^e]$:

$$[K_{tg}^e] = [K_l^e] + [K_{nl}^e] + [K_\sigma^e] \quad (4.31)$$

Ainsi, les matrices élémentaires de masse et de raideurs linéaire et non-linéaires s'écrivent :

$$\begin{aligned} [K_l^e] &= \sum_{k=1}^n \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{z_k}^{z_{k+1}} \left([B]_m + z[B]_f + [B]_s \right)^T [{}^{t_1}C] \left([B]_m + z[B]_f + [B]_s \right) J dz d\eta d\xi \\ [K_{nl}^e] &= \sum_{k=1}^n \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{z_k}^{z_{k+1}} \frac{1}{2} \left([B]_m + z[B]_f + [B]_{NL} \right)^T [{}^{t_1}C] [B]_{NL} J dz d\eta d\xi \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{z_k}^{z_{k+1}} [B]_{NL}^T [{}^{t_1}C] \left([B]_m + z[B]_f \right) J dz d\eta d\xi \end{aligned} \quad (4.32a)$$

La méthode itérative de Newton-Raphson est utilisée pour résoudre cette équation non-linéaire. Le déplacement incrémental $\{\Delta u\}$ est :

$$\left([M] \frac{1}{\beta \Delta t^2} + [B] \frac{\gamma}{\beta \Delta t} + [K_{tg}] \right) \{\Delta u\} = \{r_{t_1+\Delta t}\} \quad (4.33)$$

où γ et β sont les constante de Newmark.

4.3 APPLICATIONS NUMÉRIQUES

La formulation non linéaire décrite par l'équation (4.33), est implémentée dans le logiciel MATLAB[®]. La résolution du problème est faite dans le domaine temporel utilisant l'algorithme de Newmark.

4.3.1 PLAQUES SAINES EN GRANDS DÉPLACEMENTS

Plusieurs structures ayant des propriétés mécaniques, géométriques et des conditions aux limites différentes sont analysées. Tout d'abord, afin d'assurer la validité de la formulation adoptée dans cette étude, les résultats obtenus, pour des plaques isotropes et orthotropes, sont comparés à d'autres résultats disponibles dans la littérature.

4.3.1.1 PLAQUE ISOTROPE

Une première validation est effectuée à l'aide d'une plaque isotrope étudiée par Bayles et al [Bayles 73]. La plaque carrée, Fig.4.14, est soumise à une pression uniforme $q_0 = 478.4 \text{ N/m}^2$ suivant la direction transversale \vec{z} et ses propriétés géométriques et mécaniques sont données dans le tableau 4.2.

TABLE 4.2 – Propriétés géométrique et mécanique de la plaque isotrope [Bayles 73]

$a \text{ (m)}$	$h \text{ (m)}$	$E \text{ (GPa)}$	ν	$\rho \text{ (Kg/m}^3\text{)}$
2.438	0.0635	68.9	0.23	2522.9

Deux cas de conditions aux limites *SSSS* (appui simple) et *CCCC* (encastrement) sont étudiés :

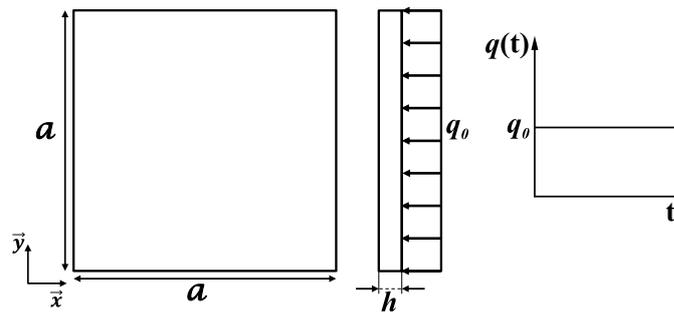


FIGURE 4.14 – Géométrie de la plaque isotrope soumise à une pression uniforme transversale

$$\text{— SSSS : } \begin{cases} u_0 = v_0 = w_0 = \varphi_y = 0 \text{ pour } \begin{cases} x = 0 \\ x = a \end{cases} \\ u_0 = v_0 = w_0 = \varphi_x = 0 \text{ pour } \begin{cases} y = 0 \\ y = a \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{— CCCC : } \begin{cases} u_0 = v_0 = w_0 = \varphi_x = \varphi_y = 0 \text{ pour } \begin{cases} x = 0 \\ x = a \end{cases} \\ u_0 = v_0 = w_0 = \varphi_x = \varphi_y = 0 \text{ pour } \begin{cases} y = 0 \\ y = a \end{cases} \end{cases}$$

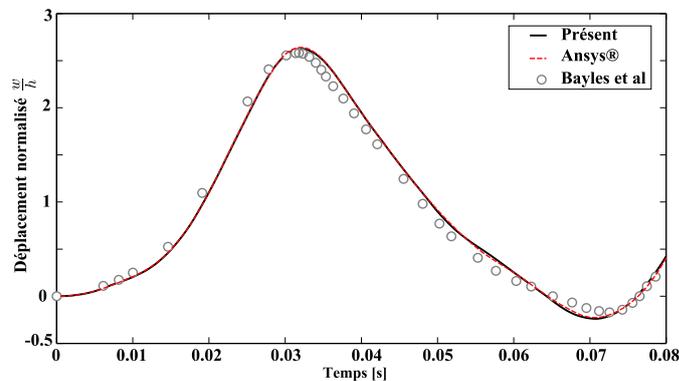


FIGURE 4.15 – Réponse non-linéaire transitoire du centre de la plaque isotrope (SSSS)

Les réponses transitoires de la plaque isotrope avec les conditions aux limites *SSSS* et *CCCC* sont présentées dans les figures 4.15 et 4.16. Elles sont parfaitement cohérentes avec les résultats de la méthode des différences finis de Bayles et al. [Bayles 73] et avec celles qu'on a obtenu par les simulations en utilisant le code de calcul Ansys®.

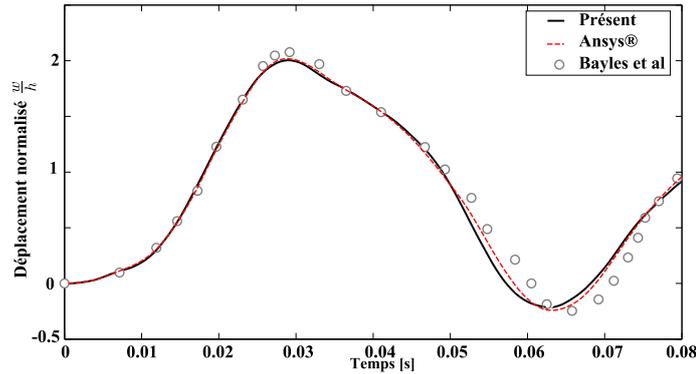


FIGURE 4.16 – Réponse non-linéaire transitoire du centre de la plaque isotrope (CCCC)

4.3.1.2 PLAQUE ORTHOTROPE

La deuxième validation du modèle numérique utilisé dans ce mémoire est effectuée en utilisant l'exemple d'une plaque carrée orthotrope soumise à une pression uniforme $q_0 = 1 \text{ MPa}$ [Chen 00], où les dimensions, les propriétés mécaniques données dans le tableau 4.3.

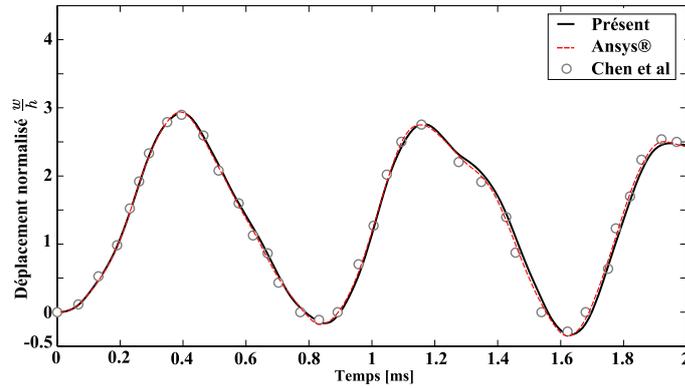
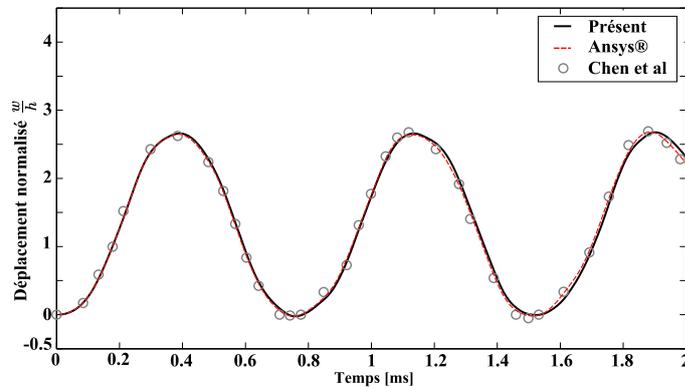
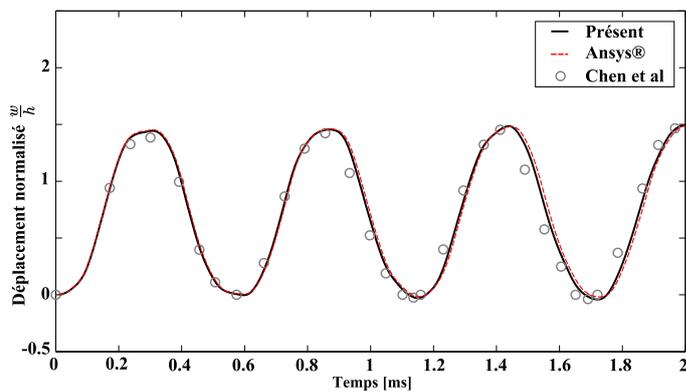
TABLE 4.3 – Propriétés géométrique et mécaniques de la plaque orthotrope [Chen 00]

$a \text{ (m)}$	$h \text{ (m)}$	$E_1 \text{ (GPa)}$	$E_2 \text{ (GPa)}$	$G_{12} = G_{13} = G_{23} \text{ (GPa)}$	ν	$\rho \text{ (Kg/m}^3\text{)}$
0.25	0.005	525	21	10.5	0.25	800

Les conditions aux limites sont les suivants :

$$\text{— SSSS : } \begin{cases} v_0 = w_0 = \varphi_y = 0 \text{ pour } \begin{cases} x = 0 \\ x = a \end{cases} \\ u_0 = w_0 = \varphi_x = 0 \text{ pour } \begin{cases} y = 0 \\ y = a \end{cases} \end{cases}$$

Les simulations numériques sont effectuées pour trois configurations de couches ; une plaque monocouche orientée à 0° , et deux plaques stratifiées à 4 couches ($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$) et ($45^\circ/-45^\circ/45^\circ/-45^\circ$). Les réponses transitoires, obtenues par la méthode FSDT après son implémentation sous MATLAB[®] utilisée dans cette étude, sont présentées dans les figures 4.17 à 4.19. Ces réponses sont parfaitement cohérentes avec les résultats de chen et al. [Chen 00] et avec celles qu'on a obtenu par le code Ansys[®].

FIGURE 4.17 – Réponse non-linéaire transitoire du centre de la plaque monocouche (0°)FIGURE 4.18 – Réponse non-linéaire transitoire du centre de la plaque stratifiées ($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$)FIGURE 4.19 – Réponse non-linéaire transitoire du centre de la plaque stratifiées ($45^\circ/45^\circ/45^\circ/45^\circ$)

4.3.2 STRUCTURES STRATIFIÉES ENDOMMAGÉES EN GRANDS DÉPLACEMENTS

Le comportement dynamique en grands déplacements des structures stratifiées endommagées est étudié dans cette section. L'endommagement est décrit par le modèle

unilatéral. On considère la structure en T illustrée par la figure 4.20 constituée de deux poutres stratifiées assemblées dont les propriétés mécaniques sont données dans le tableau 4.1. Chaque poutre est constituée de 4 couches ($90^\circ/0^\circ/0^\circ/90^\circ$) et de dimensions ($L =$

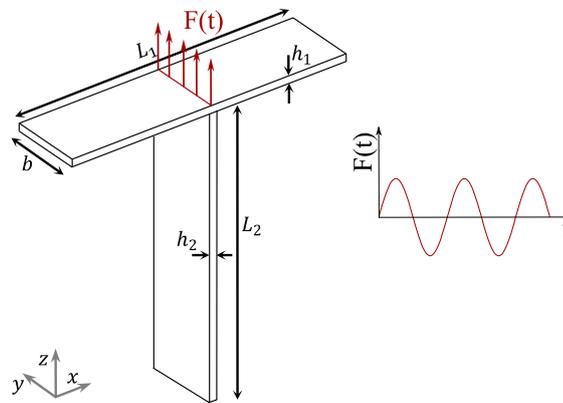


FIGURE 4.20 – Structure stratifiée assemblée en forme de T

0.1 , $b = 0.01$, $h = 0.0003 \times 4$). Les quatre premiers modes avec leur fréquences associées sont illustrés dans la figure 4.21. Dans un premier temps, pour valider la formulation par éléments finis utilisé dans ce mémoire appliquée à cette structure assemblée en forme de T, la réponse temporelle obtenue par l'équation (4.33) est comparée à la réponse obtenue par le code ANSYS® où une force répartie est appliquée dans la direction \vec{z} le long de l'arrête de coordonnées $x = z = 0$, $F(t) = 2.280 \cdot 10^5 \sin(2\pi 1463 t) N/m$. Comme indiqué dans la figure 4.22, les deux réponses sont parfaitement cohérentes.

Ensuite, l'influence de la fréquence d'excitation sur l'état de l'endommagement est étudiée. Deux fréquences d'excitation sont choisies telles que $f_{ex,1} = 10^3 Hz$ et $f_{ex,2} = 1463 Hz$ qui est la fréquence propre associée au quatrième mode propre illustré dans la figure 4.21. Cette fréquence est choisie puisque la structure a tendance à avoir un comportement non-linéaire en flexion pour la poutre horizontale alors que la poutre verticale est sollicitée en traction/compression.

Pour vérifier le comportement en grands déplacements, la transformée de Fourier inverse FFT est appliqués à la réponse en accélération en régime permanent pour plusieurs niveaux d'excitation, Fig.4.23 et Fig.4.24.

Le comportement de la structure saine est purement linéaire si $F = 2.208 \cdot 10^4 N/m$. Mais, si l'amplitude de l'excitation augmente, le comportement non-linéaire (grandes amplitudes) commence à apparaitre puisque l'harmonique d'ordre 3 intervient dans la réponse de la structure. On prend l'amplitude $F = 2.208 \cdot 10^5 N/m$ et effectuant les simulations numériques avec $f_{ex,1} = 1000 Hz$ et $f_{ex,2} = 1463 Hz$. Les états

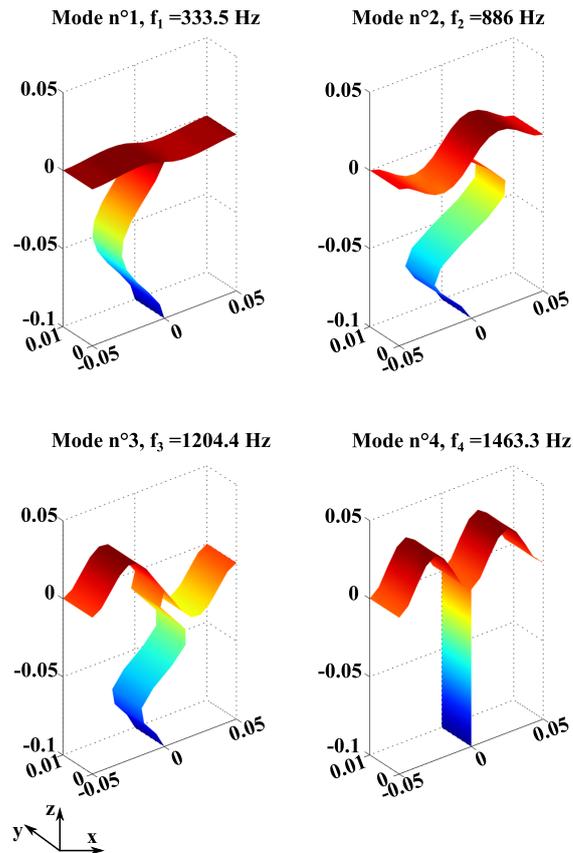
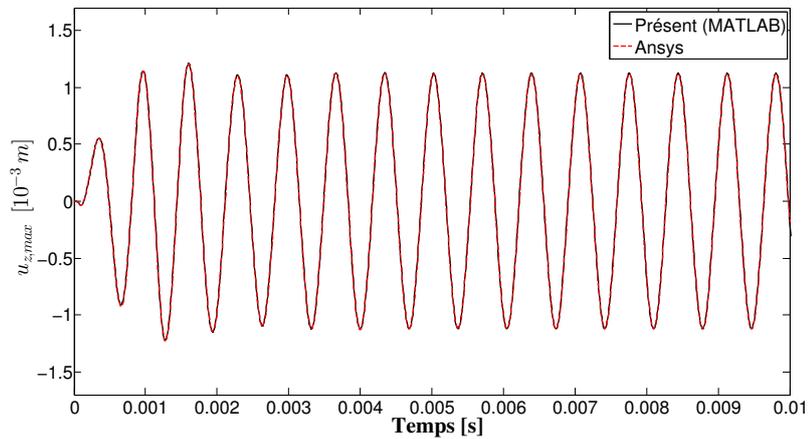


FIGURE 4.21 – Mode propre n°4 de la structure en T (90°/0°/0°/90°)

FIGURE 4.22 – Comparaison des réponses temporelles obtenues par l'équation (4.33) et ANSYS® au point de coordonnées ($x = 0.025$, $y = 0$, $z = 0$)

de l'endommagement quand le niveau d'endommagement est maximal pour ces deux fréquences sont présentés dans les figures 4.25 et 4.26.

La non-linéarité géométrique est plus intense quand la structure est excitée à son mode

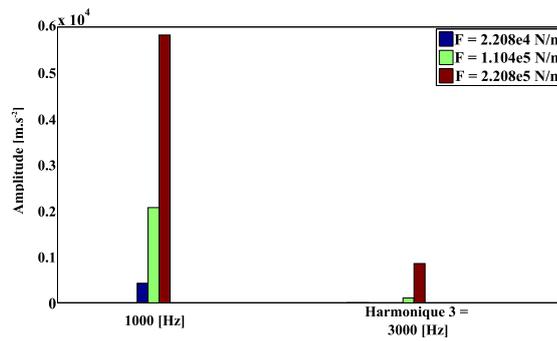


FIGURE 4.23 – FFT de la réponse en accélération avec $f_{ex,1} = 1000 \text{ Hz}$ et pour différents niveaux d'excitation

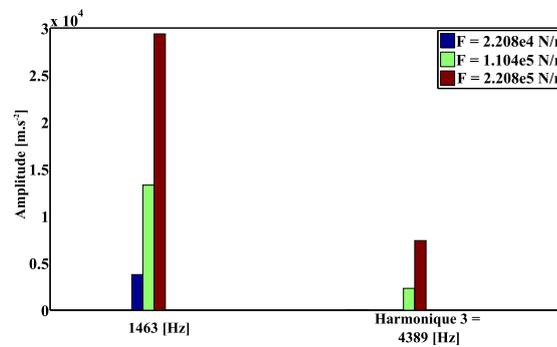


FIGURE 4.24 – FFT de la réponse en accélération avec $f_{ex,2} = 1463 \text{ Hz}$ et pour différents niveaux d'excitation

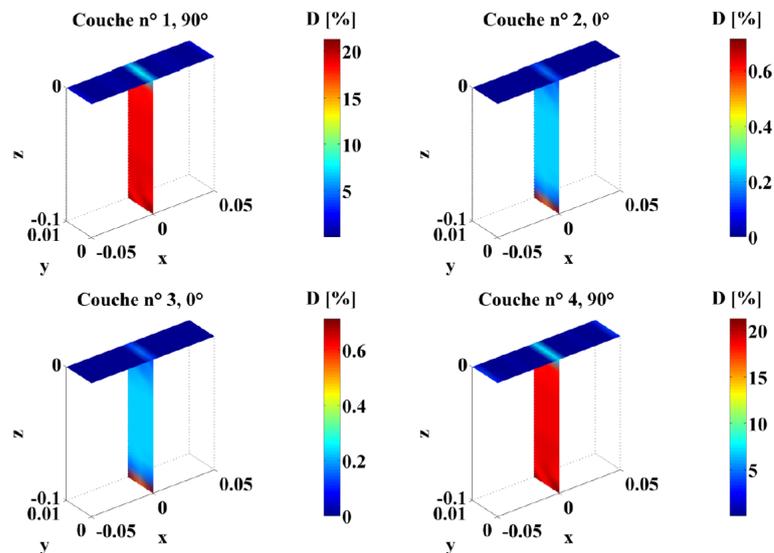


FIGURE 4.25 – État de l'endommagement avec la fréquence d'excitation $f_{ex} = 1000 \text{ Hz}$

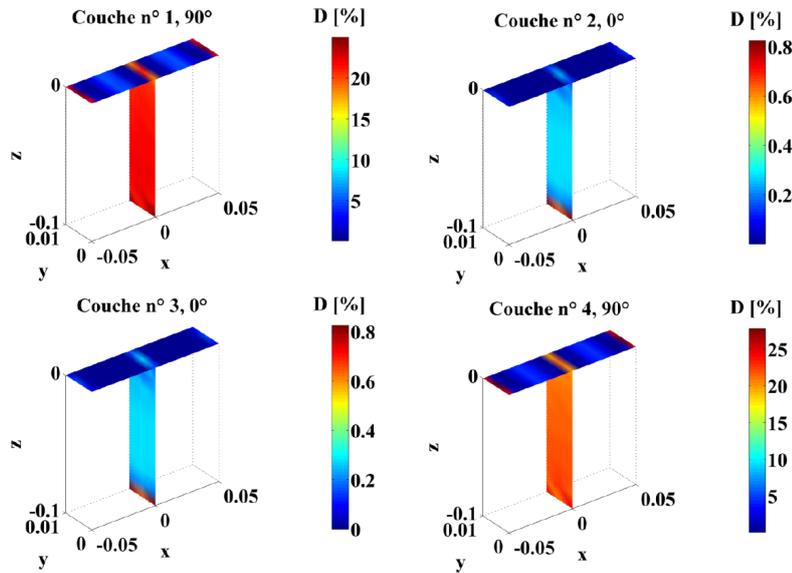


FIGURE 4.26 – État de l'endommagement avec la fréquence d'excitation $f_{ex} = 1463 Hz$

propre n°4, ceci est visible en comparant l'amplitude de l'harmonique n°3 pour les deux fréquences d'excitation $1000Hz$ et $1463Hz$ comme il est montré sur les figures 4.23 et 4.24. Ainsi, plus la non-linéarité géométrique est importante, plus le couplage membrane-flexion est important. Par conséquent, et d'après la figure 4.27, les contraintes sont importantes à la fréquence d'excitation $1463Hz$ ce qui justifie que la poutre horizontale est plus endommagée, Fig.4.26 alors qu'elle est faiblement endommagée à la fréquence d'excitation $1000Hz$, Fig.4.25.

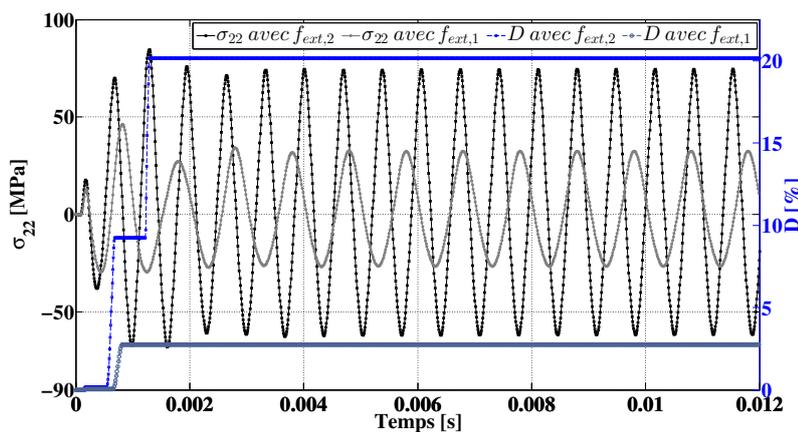


FIGURE 4.27 – Évolution en fonction du temps de la contrainte endommagée σ_{22} et le niveau de l'endommagement au point de Gauss de coordonnées $(x = -0.0451, y = 0.0011, z = 0.00045) m$ pour les fréquences d'excitation $f_{ex,1}$ et $f_{ex,2}$

Dans le cas de la fréquence d'excitation $f_{ex,2} = 1463 \text{ Hz}$, l'évolution de la contrainte σ_{22} en fonction de ε_{22} au point de coordonnées $(x = -0.0451, y = 0.0011, z = 0.00045) \text{ m}$ est représentée par la figure 4.28 où le comportement vierge est retrouvé dès que la contrainte devient négative.

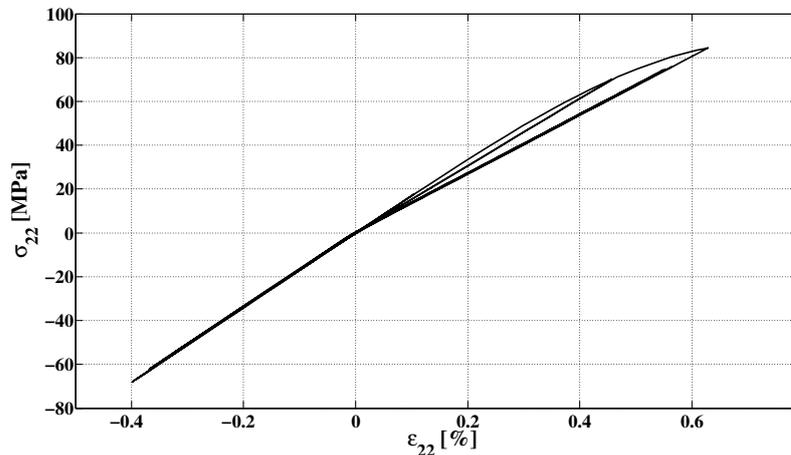
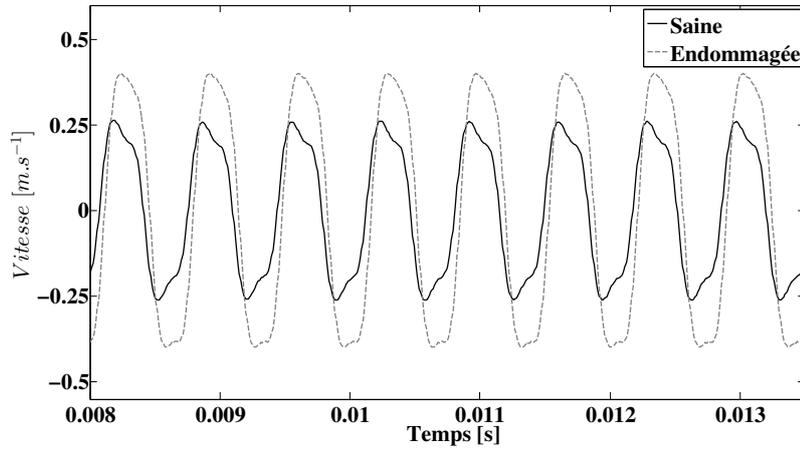
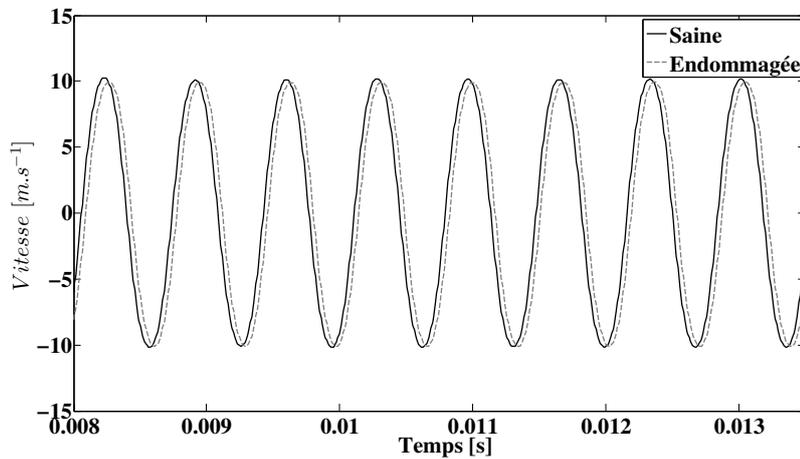
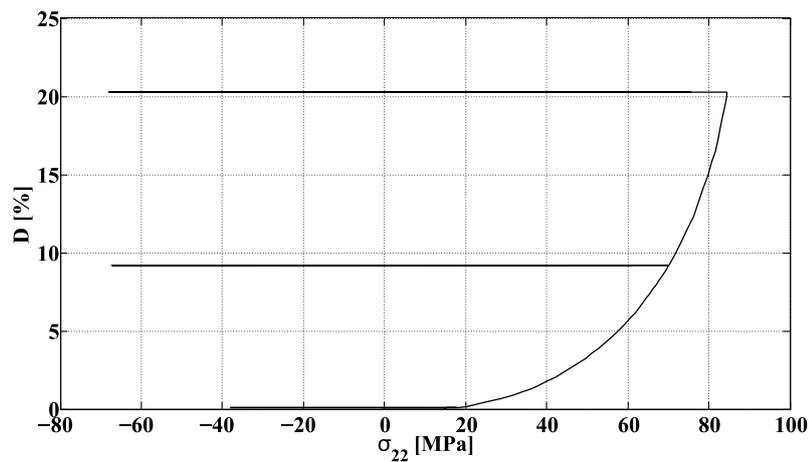


FIGURE 4.28 – Évolution de la contrainte σ_{22} en fonction de ε_{22} au point de Gauss de coordonnées $(x = -0.0451, y = 0.0011, z = 0.00045) \text{ m}$ avec la fréquence d'excitation $f_{ex} = 1463 \text{ Hz}$

Les réponses en vitesse de la structure saine et endommagée excitée à $f_{ex,2} = 1463 \text{ Hz}$ sont présentées par les figures 4.29 et 4.30. Il est observable, dans la figure 4.29, que l'amplitude de la réponse de la structure endommagée est plus importante que celle de la structure saine puisque la structure devient plus souple quand l'endommagement est pris en compte. Tandis que au point de coordonnées $(x = -0.01875, y = 0, z = 0) \text{ m}$, Fig.4.30, l'endommagement est faible et le phénomène prépondérant dans la réponse est le grand déplacement.

L'endommagement augmente pendant le régime transitoire avec l'augmentation de la contrainte σ_{22} , Fig.4.31, puis il atteint son niveau maximum. Au cours du régime permanent où la contrainte est inférieure à son niveau pendant le régime transitoire, Fig.4.27, la fonction de charge reste négative et l'endommagement reste constant.

FIGURE 4.29 – Réponses en vitesse au point de coordonnées $(x = -0.046, y = 0, z = 0) m$ FIGURE 4.30 – Réponses en vitesse au point de coordonnées $(x = -0.01875, y = 0, z = 0) m$ FIGURE 4.31 – Évolution de l'endommagement en fonction de la contrainte σ_{22} au point de Gauss de coordonnées $(x = -0.0451, y = 0.0011, z = 0.00045) m$

4.4 APPLICATION DU RNA

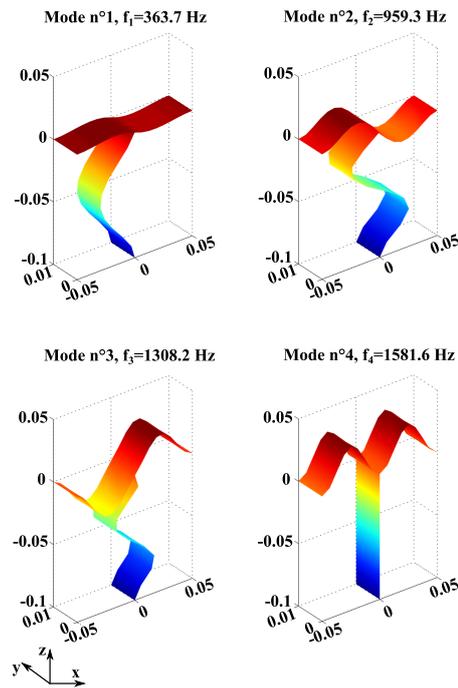
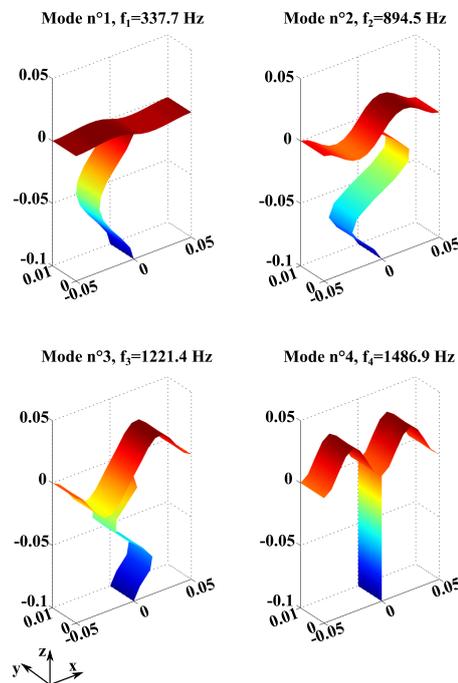
Le méta-modèle à base des RNA développé dans le chapitre précédent est utilisé ici pour estimer et localiser l'endommagement des structures stratifiées en grands déplacements. La même base de données est utilisée pour établir la relation non-linéaire entre l'état de la contrainte et l'état de l'endommagement et la même procédure de résolution utilise le RNA qui remplace la méthode de Newton-Raphson pour le calcul rapide du niveau d'endommagement. Trois structures stratifiées à 4 couches semblables à la structure dans la figure 4.20 sont utilisées dans les simulations numériques. Les propriétés mécaniques sont données dans le tableau 4.1.

- Structure n°1 est orientées à $(90^\circ/0^\circ/0^\circ/90^\circ)$
- Structure n°2 est orientées à $(45^\circ/0^\circ/0^\circ/-45^\circ)$
- Structure n°3 est orientées à $(60^\circ/0^\circ/0^\circ/-60^\circ)$

Leurs dimensions géométriques sont $(L = 0.1, b = 0.01, h = 0.0003 \times 4)$. Elles sont soumises au même chargement harmonique le long de l'arrête de coordonnées $(x = z = 0)$.

$$F(t) = 2.208 \cdot 10^5 \sin(2 \times \pi \times 1463 t) \vec{z} \text{ N/m} \quad (4.34)$$

La fréquence d'excitation $f_{ex,2} = 1463 \text{ Hz}$ est égale à la quatrième fréquence propre de la structure n°1, et elle est aussi au voisinage de la quatrième fréquence propre des structures n°2 et n°3. Les quatre premiers modes propres des structures n°2 et n°3 sont illustrés dans les figures 4.32 et 4.33.

FIGURE 4.32 – Les 4 premiers modes propres de la structure en T ($45^\circ/0^\circ/0^\circ/-45^\circ$)FIGURE 4.33 – Les 4 premiers modes propres de la structure en T ($60^\circ/0^\circ/0^\circ/-60^\circ$)

D'après les figures 4.34, 4.35 et 4.36, il est observable que les couches orientées à 90° sont plus endommagées que celles orientées à 60° où -60° et ces dernières sont aussi plus

endommagées que celles orientées à 45° ou -45° . En effet, plus l'angle d'orientation des fibres est important, plus le niveau de l'endommagement est important puisque les modes d'ouvertures des micro-fissures ont tendance à être perpendiculaires à la direction de la force appliquée en variant θ de 0 à 90.

Les états de l'endommagement quand son niveau est maximum, obtenus par le modèle complet et le méta-modèle RNA sont utilisés pour vérifier la dispersion de l'endommagement dans chaque couches. D'après les figures 4.34, 4.35 et 4.36, le méta-modèle démontre encore sa performance pour localiser l'endommagement et estimer son niveau dans chaque couche avec une bonne précision par rapport au résultats du modèle complet.

Le méta-modèle permet aussi de réduire le coût de calcul. Le RNA remplace la méthode de Newton-Raphson et l'obtention du niveau de l'endommagement devient rapide permettant une réduction du temps de calcul supérieure à 60% dans les simulations en ligne des structures stratifiées en grands déplacements comme le montre la figure 4.37.

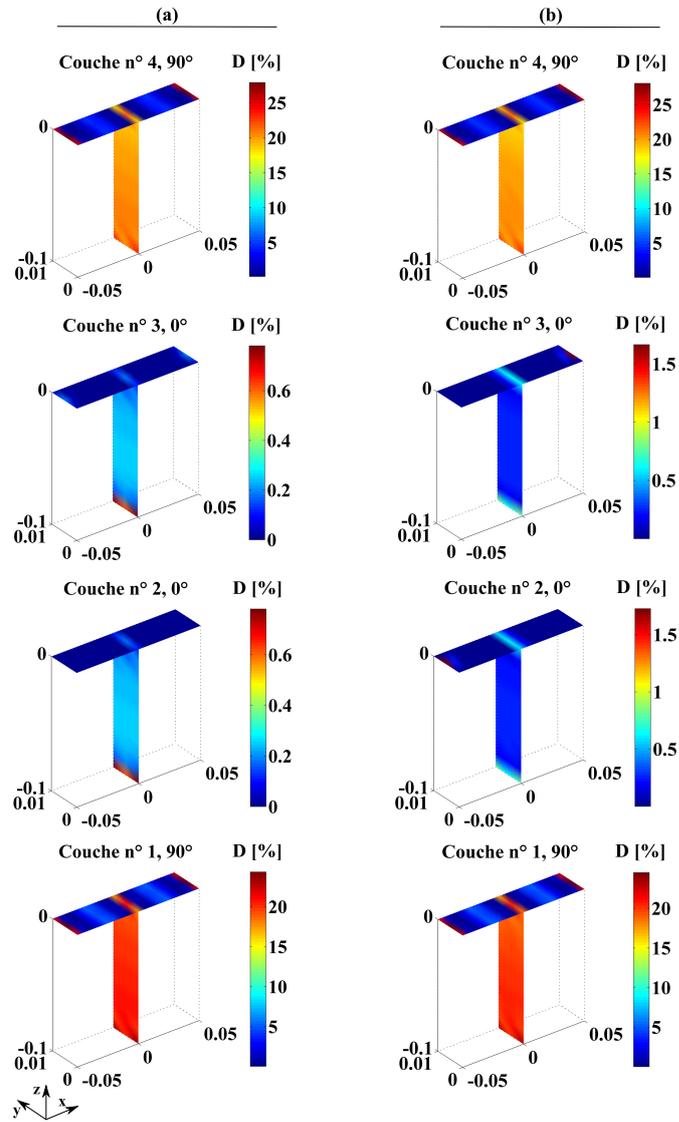


FIGURE 4.34 – État de l'endommagement obtenus par le modèle complet (a) et le méta-modèle (b) de la structure ($90^\circ/0^\circ/0^\circ/90^\circ$)

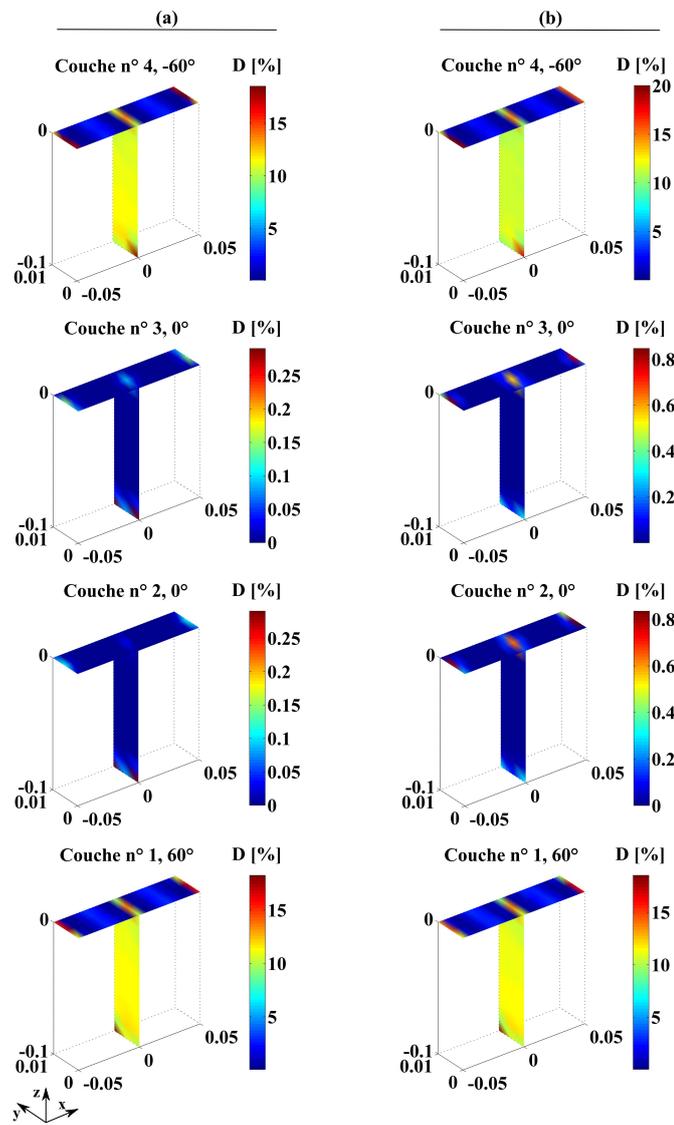


FIGURE 4.35 – État de l'endommagement obtenus par le modèle complet (a) et le méta-modèle (b) de la structure ($60^\circ/0^\circ/0^\circ/-60^\circ$)

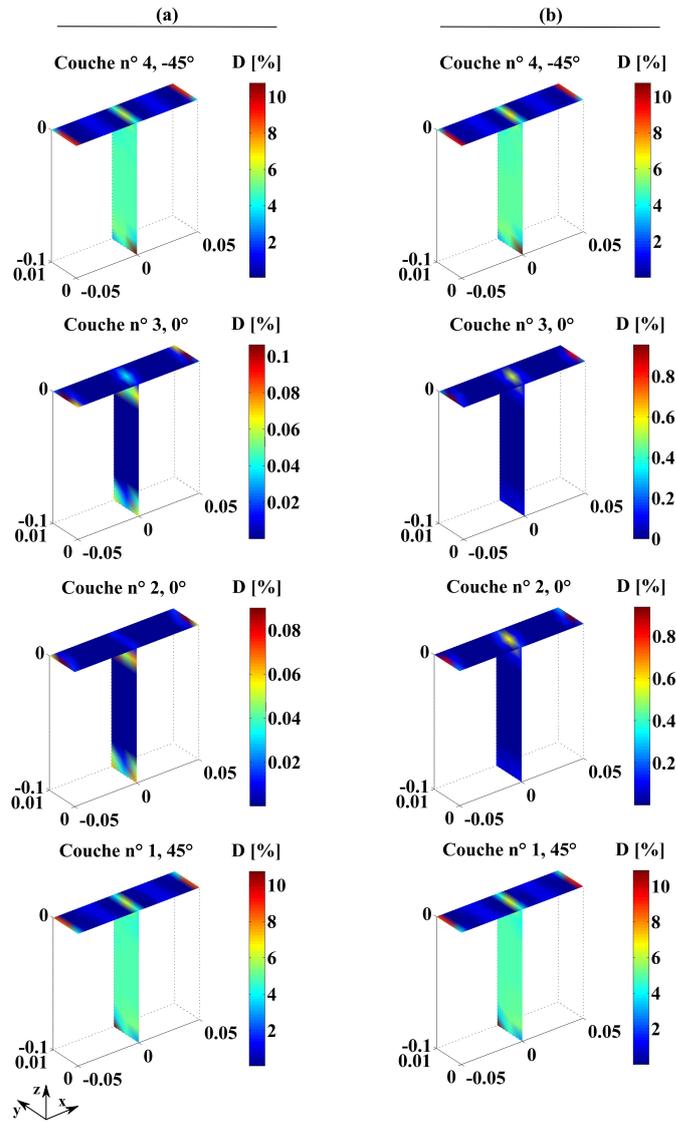


FIGURE 4.36 – État de l'endommagement obtenus par le modèle complet (a) et le méta-modèle (b) de la structure (45°/0°/0°/ - 45°)

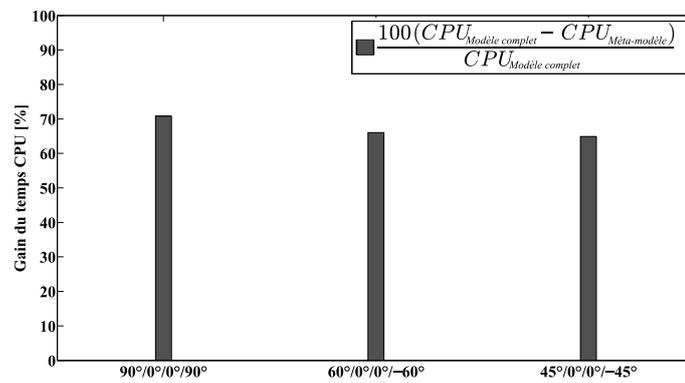


FIGURE 4.37 – Réduction du temps de calcul pour les structures (90°/0°/0°/90°), (60°/0°/0°/ – 60°) et (45°/0°/0°/ – 45°)

4.5 CONCLUSION

Dans ce chapitre, le comportement dynamique des structures stratifiées en grands déplacements et en présence d'endommagement est étudié. Un nouveau modèle d'endommagement unilatéral est proposé et validé numériquement. Le modèle proposé est capable de décrire le comportement mécanique des composites en tenant compte de l'état des micro-fissures. L'état de l'endommagement est mémorisé même si le matériau est en compression, et le niveau de l'endommagement est récupéré dès que la traction se produit. De plus, la non-linéarité due aux grands déplacements est également prise en compte. On a proposé un modèle non-linéaire prenant en compte à la fois la non-linéarité géométrique due aux grands déplacements et la non-linéarité matérielle due à l'endommagement. Le modèle proposé permet la détection et la localisation de l'endommagement dans des structures stratifiées en grands déplacements soumises à une excitation harmonique. Enfin, le méta-modèle RNA permet de réduire le coût de calcul et montre ses performances en termes de l'estimation et localisation de l'endommagement avec une bonne précision.

CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES

L'objectif de cette thèse est d'étudier la dynamique linéaire et non-linéaire de structures composites endommagées où seul l'endommagement dû à la micro-fissuration matricielle est retenu. Pour l'atteindre, un modèle phénoménologique des composites micro-fissurés est utilisé et le comportement dynamique est exprimé à travers l'élasticité couplée avec l'endommagement. L'endommagement est décrit par une seule variable scalaire qui représente la dégradation de la rigidité du matériau. La modélisation par éléments finis des structures composites basée sur la théorie FSDT est utilisée pour exprimer leur comportement dynamique et le modèle est validé par comparaison avec d'autres théories telles que la HSDT et la CPT. La résolution des équations du mouvement issues de la modélisation par éléments finis est effectuée dans le domaine temporel en utilisant les schémas itératifs de Newton-Raphson et de Newmark adaptés pour la prise en compte l'effet non-linéaire de l'endommagement.

Plusieurs simulations numériques sont effectuées et montrent que l'endommagement modifie significativement les propriétés dynamiques de la structure s'exprimant essentiellement dans la diminution des fréquences propres et l'augmentation de l'amplitude du déplacement. La modélisation fine de la structure pour mieux représenter les effets non-linéaires locaux de l'endommagement rend les simulations coûteuses voire inaccessible pour les modèles complexes. Ainsi, une approche de réduction de modèle est proposée.

La première approche de réduction proposée consiste à utiliser des réseaux de neurones qui ont montré leur capacité dans la détection de l'endommagement. En se référant au modèle d'endommagement utilisé dans ce travail, l'évolution de l'endommagement dépend de l'état de contraintes dans le matériau composite, ainsi une nouvelle méthode de détection d'endommagement basée sur l'état de contraintes est proposée. En effet, les simulations *off-line* du modèle complet sont utilisées pour établir une base de données composée des contraintes $(\sigma_{22}, \sigma_{22}, \sigma_{22})$ et leur correspondants niveaux d'endommagement D . Cette base de données est fournie au RNA pour lui permettre d'établir la relation

entre les entrées (les contraintes) et les sorties (les niveaux d'endommagement) à travers l'opération d'apprentissage. Une fois cette étape est effectuée, des simulations *on-line* de plusieurs structures sont effectuées en utilisant le RNA qui a prouvé sa capacité en termes de localisation et de quantification de l'endommagement et de la prédiction du comportement dynamique des composites endommagés avec une bonne précision, notamment pour des cas qui ne sont présents dans l'ensemble de l'apprentissage.

Une deuxième approche de réduction est mise œuvre pour étudier les structures assemblées lorsque l'endommagement n'affecte que pour certaines sous-structures. La méthode de sous-structuration de Craig-Bampton est utilisée pour décomposer la structure complète en sous-structures et un modèle réduit est obtenu en assemblant le modèle non-linéaire des composantes endommagées avec le modèle linéaire des autres composants qui peut être réduit en conservant les propriétés initiales de ces composantes saines. Cette méthode permet de limiter l'impact d'une modification restreinte à une sous-structure endommagée sur l'analyse du modèle complet.

Ces deux approches de réduction sont après combinées pour obtenir une modèle réduit qui est validé numériquement et permet de réduire les coûts de calcul d'une manière drastique. Il peut être utilisé dans les estimations de durée de vie et les stratégies de surveillance des structures complexes en petits et grands déplacements.

Le modèle d'endommagement utilisé dans chapitre 3 est amélioré en tenant compte de l'effet ouverture/fermeture des fissures dans le cas d'une sollicitation périodique. Ainsi, un modèle unilatéral est proposé dans la dernière partie de la thèse et est validé numériquement. L'effet unilatéral permet de tenir compte de l'état des fissures ce qui rend ce modèle plus fiable pour décrire le comportement dynamique des composites sous sollicitation dynamique harmonique. En effet, le comportement est élastique endommagé quand les fissures sont supposées ouvertes et le comportement vierge est retrouvé quand les fissures sont supposées fermées. De plus, la non-linéarité due aux grands déplacements est également prise en compte. Le comportement non-linéaire prenant en compte à la fois la non-linéarité géométrique due aux grands déplacements et la non-linéarité matérielle due à l'endommagement est étudié en suivant l'évolution des propriétés dynamique de la structure en fonction de l'endommagement.

Plusieurs **perspectives** sont envisageables pour la suite de ces travaux de thèse.

Tout d'abord une amélioration du modèle d'endommagement est possible pour la prise en compte d'autres formes d'endommagement. En effet, les micro-fissurations matricielles, dans leur propagation, peuvent induire d'autres formes d'endommagement telles que le délaminage et la rupture des fibres. Par ailleurs, l'étude du vieillissement

du matériau sera également une étape clef pour un dimensionnement plus rigoureux des structures industrielles. De plus, pour le modèle d'endommagement unilatéral, il est indispensable d'approfondir l'étude de la description du comportement quand les fissures sont fermées puisque les lèvres d'une fissures peuvent glisser l'une par rapport à l'autre ce qui induit une évolution d'endommagement lors d'un changement du trajet de chargement. L'étude de l'influence de l'endommagement sur le coefficient de Poisson paraît aussi intéressante pour mieux représenter la dégradation des propriétés mécaniques.

Il est important aussi d'améliorer la méthode de réduction de modèle proposée. Puisque les sous-structures endommagées ne sont pas réduites, l'étude peut être étendue à des méthodes de réduction prenant en compte des effets des non-linéarités matérielles et (ou) géométriques. De plus, pour des non-linéarités géométriques importantes, l'actualisation du repère lié aux fibres paraît nécessaire.

Dans le cadre de la thèse, les modèles éléments finis élaborés permettent de traiter des structures de types plaques. Il serait intéressant d'étendre l'étude au cas de structures complexes ayant des modèles éléments finis de grande taille afin de représenter des structures industrielles.

Une perspective à court terme est la validation expérimentale des résultats simulés sur l'évolution de l'endommagement et le comportement dynamique endommagé. La validation expérimentale des résultats numériques obtenus par le RNA est nécessaire afin de confirmer la capacité de l'approche proposée dédiée aux applications SHM pour la détection, la localisation et la quantification de l'endommagement.

LISTE DES PUBLICATIONS

Article dans une revue internationale à comité de lecture

- S. Mahmoudi, F. Trivaudey and N. Bouhaddi, Benefits of metamodel reduction for nonlinear dynamic response analysis of damaged composite structures, *Finite Elements in Analysis and Design* 119 (2016) : 1-14

Communications dans des conférences internationales à comité de lecture et actes publiés

1. S. Mahmoudi, F. Trivaudey, N. Bouhaddi and M. L. Boubakar, Metamodel for nonlinear dynamic response analysis of damaged laminated composites, 3rd Conference on Structural Nonlinear Dynamics and Diagnostics (SCNDD), March 23-25 2016, Marrakech-Morocco
2. S. Mahmoudi, F. Trivaudey and N. Bouhaddi, Nonlinear dynamic response analysis of localized damaged laminated composite structures in the context of component mode synthesis, 11th International Conference on Damage Assessment of Structures (DAMAS), August 24-26 2015, Ghent-Belgium
3. S. Mahmoudi, F. Trivaudey and N. Bouhaddi, Nonlinear dynamic response analysis of damaged laminated composite structures, 6th Conference on Design and Modeling of Mechanical Systems (CMSM), March 23-25 2015, Hammamet-Tunisia

Participation à des workshops / journées scientifiques

- S. Mahmoudi, F. Trivaudey and N. Bouhaddi, Artificial neural networks for nonlinear dynamic response analysis of damaged laminated composites, 5ème Journées Jeunes Chercheurs en vibrations, Acoustique et Bruit (JJCAB), 7-9 Novembre 2015, Besançon-France

BIBLIOGRAPHIE

- [Abrate 91] S. Abrate. *Impact on laminated composite materials*. Applied mechanics reviews, vol. 44, no. 4, pages 155–190, 1991.
- [Allix 90] O. Allix, P. Ladev ze & E. Ledantec. *Modélisation de l'endommagement du pli élémentaire des composites stratifiés*. JNC, vol. 7, pages 715–724, 1990.
- [Alpaydin 10] E. Alpaydin. *Introduction to machine learning*. The MIT Press, 2nd edition, 2010.
- [Arif 14] M. Arif, F. Meraghni, Y. Chemisky, N. Despringre & G. Robert. *In situ damage mechanisms investigation of PA66/GF30 composite : Effect of relative humidity*. Composites Part B : Engineering, vol. 58, pages 487 – 495, 2014.
- [Aubard 94] X. Aubard, J. Lamon & O. Allix. *Model of the Nonlinear Mechanical Behavior of 2D SiC-SiC Chemical Vapor Infiltration Composites*. Journal of the American Ceramic Society, vol. 77, no. 8, pages 2118–2126, 1994.
- [Aucher 09] J. Aucher. *Comparative study of the behavior of thermoplastic or thermoset matrix composites*. Theses, INSA de Rouen, 2009.
- [Aussedat Yahia 97] E. Aussedat Yahia. *Comportement et endommagement du composite tisse Carbone/PMR15 soumis   des chargements mécaniques et thermiques*. PhD thesis, 1997. Thèse de doctorat dirig e par Renard, Jacques et Thionnet, Alain Sciences appliquées Paris, EMP 1997.
- [Autar 05] K. K. Autar. *Mechanics of composite materials, second edition*. Mechanical and Aerospace Engineering Series. CRC Press, 2005.
- [Bader 80] M. G. Bader, J. E. Bailey, A. Parvizi & P. T. Curtis. *The mechanisms of initiation and development of damage in multi-axial fibre-reinforced plastics laminates*. Mechanical behaviour of materials, pages 227–239, 1980.
- [Bailey 79] J. E. Bailey, P. T. Curtis & A. Parvizi. *On the Transverse Cracking and Longitudinal Splitting Behaviour of Glass and Carbon Fibre Reinforced Epoxy Cross Ply Laminates and the Effect of Poisson and Thermally Generated Strain*.

- Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences, vol. 366, no. 1727, pages 599–623, 1979.
- [Bailey 81] J. E. Bailey & A. Parvizi. *On fibre debonding effects and the mechanism of transverse-ply failure in cross-ply laminates of glass fibre/thermoset composites*. Journal of Materials Science, vol. 16, no. 3, pages 649–659, 1981.
- [Ball 98] R. J. Ball & D. P. Almond. *The detection and measurement of impact damage in thick carbon fibre reinforced laminates by transient thermography*. NDT & E International, vol. 31, no. 3, pages 165–173, 1998.
- [Bampton 68a] M. C. C. Bampton & J. R. R. Craig. *Coupling of substructures for dynamic analyses*. AIAA Journal, vol. 6, no. 7, pages 1313–1319, 1968.
- [Bampton 68b] M. C. Bampton & R. R. Craig JR. *Coupling of substructures for dynamic analyses*. AIAA Journal, vol. 6, no. 7, pages 1313–1319, 1968.
- [Barbero 01] E. J. Barbero & L. DeVivo. *A Constitutive Model for Elastic Damage in Fiber-Reinforced PMC Laminae*. International Journal of Damage Mechanics, vol. 10, no. 1, pages 73–93, 2001.
- [Barbero 02] E. J. Barbero & P. Lonetti. *An Inelastic Damage Model for Fiber Reinforced Laminates*. Journal of Composite Materials, vol. 36, no. 8, pages 941–962, 2002.
- [Baste 01] S. Baste. *Inelastic behaviour of ceramic-matrix composites*. Composites Science and Technology, vol. 61, no. 15, pages 2285 – 2297, 2001.
- [Bathe 83] K. J. Bathe, E. Dvorkin & L. W. Ho. *Our discrete-Kirchhoff and isoparametric shell elements for nonlinear analysis—An assessment*. Computers & Structures, vol. 16, no. 1, pages 89 – 98, 1983.
- [Bathe 96] K.-J. Bathe. Finite element procedures. Englewood Cliffs, N.J. Prentice Hall, 1996. Éd. rev. de : Finite element procedures in engineering analysis. 1982.
- [Batoz 85] J.-L. Batoz & G. Cantin. *Geometrically nonlinear analysis of shell structures using flat DKT shell elements*. Rapport technique, Monterey, California. Naval Postgraduate School, 1985.
- [Bayles 73] D. J. Bayles, R. L. Lowery & D. E. Boyd. *Nonlinear vibrations of rectangular plates*. Journal of the Structural Division, vol. 99, no. 5, pages 853–864, 1973.
- [Benzerga 14] D. Benzerga, A. Haddi & A. Lavie. *Delamination Model Using Damage Mechanics Applied to New Composite for Orthopaedic Use*. International Journal of Materials Engineering, vol. 4, no. 3, pages 103–113, 2014. ACL.

- [Berreur 02] L. Berreur, B. De Maillard & S. Nosperger. *Étude prospective stratégique sur les matériaux composites*. L'industrie française des matériaux composites, 2002.
- [Berthelot 99] J. Berthelot. *Matériaux composites : comportement mécanique et analyse des structures*. Tec & Doc, 1999.
- [Berthelot 03] J.-M. Berthelot. *Transverse cracking and delamination in cross-ply glass-fiber and carbon-fiber reinforced plastic laminates : Static and fatigue loading*. Applied Mechanics Reviews, vol. 56, no. 1, pages 111–147, 2003.
- [Bolotin 96] V. V. Bolotin. *Delaminations in composite structures : Its origin, buckling, growth and stability*. Composites Part B : Engineering, vol. 27, no. 2, pages 129 – 145, 1996.
- [Boubakar 02] M. L. Boubakar, F. Trivaudey, D. Perreux & L. Vang. *A meso–macro finite element modelling of laminate structures : Part I : time-independent behaviour*. Composite structures, vol. 58, no. 2, pages 271–286, 2002.
- [Bouhaddi 92] N. Bouhaddi & R. Fillod. *A method for selecting master DOF in dynamic substructuring using the Guyan condensation method*. Computers & Structures, vol. 45, no. 5, pages 941 – 946, 1992.
- [Boumediene 10] F. Boumediene. *Méthode asymptotique numérique et techniques de réduction de modèles pour les vibrations non linéaires de plaques minces amorties*. PhD thesis, Lorient, 2010.
- [Cawley 79] P. Cawley & R. D. Adams. *The location of defects in structures from measurements of natural frequencies*. The Journal of Strain Analysis for Engineering Design, vol. 14, no. 2, pages 49–57, 1979.
- [Cédric 11] T. Cédric. *Etude des mécanismes d'endommagement des composites fibres de carbone / matrice polyamide : application à la réalisation de réservoirs de stockage de gaz sous haute pression de type IV*. PhD thesis, 2011.
- [Celle 15] P. Celle & M. Marzano. *Les matériaux composites*. ANFA-Edition 2014, www.anfa-auto.fr, 2015.
- [Cen 02] S. Cen, A.-K. Soh, Y.-Q. Long & Z.-H. Yao. *A new 4-node quadrilateral {FE} model with variable electrical degrees of freedom for the analysis of piezoelectric laminated composite plates*. Composite Structures, vol. 58, no. 4, pages 583 – 599, 2002.
- [Chaboche 82] J. Chaboche. *Le concept de contrainte effective appliqué à l'élasticité et à la viscoplasticité en présence d'un endommagement anisotrope*. In

- Mechanical Behavior of Anisotropic Solids/Comportment Mécanique des Solides Anisotropes, pages 737–760. Springer, 1982.
- [Chaboche 88a] J. L. Chaboche. *Continuum Damage Mechanics : Part I—General Concepts*. Journal of applied mechanics, vol. 55, no. 1, pages 59–64, 1988.
- [Chaboche 88b] J.-L. Chaboche. *Continuum damage mechanics : Part II—Damage growth, crack initiation, and crack growth*. Journal of applied mechanics, vol. 55, no. 1, pages 65–72, 1988.
- [Chaboche 95] J. L. Chaboche, P. M. Lesne & J. F. Maire. *Continuum Damage Mechanics, Anisotropy and Damage Deactivation for Brittle Materials Like Concrete and Ceramic Composites*. International Journal of Damage Mechanics, vol. 4, no. 1, pages 5–22, 1995.
- [Chaboche 98] J. L. Chaboche, O. Lesne & T. Pottier. *Continuum damage mechanics of composites : towards a unified approach*. Studies in Applied Mechanics, vol. 46, pages 3–26, 1998.
- [Chang 99] F. Chang. Structural health monitoring 2000. Taylor & Francis, 1999.
- [Chawla 12] K. Chawla. Composite materials : Science and engineering. SpringerLink : Bücher. Springer New York, 2012.
- [Chee 00] C. Y. K. Chee. *Static shape control of laminated composite plate smart structure using piezoelectric actuators*. PhD thesis, 2000.
- [Chen 00] J. Chen, D. J. Dawe & S. Wang. *Nonlinear transient analysis of rectangular composite laminated plates*. Composite Structures, vol. 49, no. 2, pages 129 – 139, 2000.
- [Chentouf 11] S. A. Chentouf. *Simulation et essais dynamiques sur stators de moteurs de traction*. PhD thesis, Université de Franche-Comté, 2011.
- [Chou 01] J.-H. Chou & J. Ghaboussi. *Genetic algorithm in structural damage detection*. Computers & Structures, vol. 79, no. 14, pages 1335–1353, 2001.
- [Collombet 98] F. Collombet, X. Lalbin, J. Bonini, V. Martin & J. L. Lataillade. *Damage criteria for the study of impacted composite laminates*. Composites Science and Technology, vol. 58, no. 5, pages 679 – 686, 1998.
- [Craig 94] R. R. J. Craig & C. J. Chang. *On the use of attachment modes in substructure coupling for dynamic analysis*. In 18th Structural Dynamics and Materials Conference, page 89–99, San Diego, 1994. American Institute of Aeronautics and Astronautics.

-
- [Cugnoni 04] J. Cugnoni, T. G. Gmür & A. Schorderet. *Modal validation of a set of C0-compatible composite shell finite elements*. Composites Science and Technology, vol. 64, no. 13–14, pages 2039 – 2050, 2004.
- [Cui 93] W. Cui & M. Wisnom. *A combined stress-based and fracture-mechanics-based model for predicting delamination in composites*. Composites, vol. 24, no. 6, pages 467 – 474, 1993.
- [Curtin 91] W. A. Curtin. *Theory of Mechanical Properties of Ceramic-Matrix Composites*. Journal of the American Ceramic Society, vol. 74, no. 11, pages 2837–2845, 1991.
- [Cybenko 89] G. Cybenko. *Approximation by superpositions of a sigmoidal function*. Mathematics of control, signals and systems, vol. 2, no. 4, pages 303–314, 1989.
- [De Lima 10] A. M. G. De Lima, A. R. da Silva, D. A. Rade & N. Bouhaddi. *Component mode synthesis combining robust enriched Ritz approach for viscoelastically damped structures*. Engineering Structures, vol. 32, no. 5, pages 1479 – 1488, 2010.
- [Desrumaux 00] F. Desrumaux, F. Meraghni & M. L. Benzeggagh. *Micromechanical Modelling Coupled to a Reliability Approach for Damage Evolution Prediction in Composite Materials*. Applied Composite Materials, vol. 7, no. 4, pages 231–250, 2000.
- [Doebbling 96] S. W. Doebbling, C. R. Farrar, M. B. Prime & D. W. Shevitz. *Damage identification and health monitoring of structural and mechanical systems from changes in their vibration characteristics : A literature review*. 1996.
- [Dos Santos 00] J. A. Dos Santos, C. M. M. Soares, C. A. M. Soares & H. L. G. Pina. *A damage identification numerical model based on the sensitivity of orthogonality conditions and least squares techniques*. Computers and Structures, vol. 78, no. 1–3, pages 283 – 291, 2000.
- [Dragon 98] A. Dragon & D. Halm. *A mesocrack damage and friction coupled model for brittle materials*. In Z. V. George, W. J. Jiann-Wen & C. Jean-Louis, éditeurs, *Damage Mechanics in Engineering Materials*, volume 46 of *Studies in Applied Mechanics*, pages 321 – 336. Elsevier, 1998.
- [Duplessis 05] K. Y. Duplessis, A. Thionnet, J. Renard & H. Mallard. *Dimensionnement Des Structures En Composite Stratifié à Fibres Longues, Matériaux composites*. Comptes rendus des JNC14, Compiègne, 2005.

- [Dutta 04] A. Dutta & S. Talukdar. *Damage detection in bridges using accurate modal parameters*. Finite Elements in Analysis and Design, vol. 40, no. 3, pages 287 – 304, 2004.
- [Evans 89] A. Evans & D. Marshall. *Overview no. 85 The mechanical behavior of ceramic matrix composites*. Acta Metallurgica, vol. 37, no. 10, pages 2567 – 2583, 1989.
- [Fafard 89] M. Fafard, G. Dhatt & J. Batoz. *A new discrete Kirchhoff plate/shell element with updated procedures*. Computers & Structures, vol. 31, no. 4, pages 591 – 606, 1989.
- [Gambarotta 93] L. Gambarotta & S. Lagomarsino. *A microcrack damage model for brittle materials*. International Journal of Solids and Structures, vol. 30, no. 2, pages 177–198, 1993.
- [Garcia 14] I. Garcia, M. Paggi & V. Mantic. *Fiber-size effects on the onset of fiber–matrix debonding under transverse tension : A comparison between cohesive zone and finite fracture mechanics models*. Engineering Fracture Mechanics, vol. 115, pages 96–110, 2014.
- [Garg 88] A. C. Garg. *Delamination—a damage mode in composite structures*. Engineering Fracture Mechanics, vol. 29, no. 5, pages 557 – 584, 1988.
- [Garrett 77a] K. W. Garrett & J. E. Bailey. *The effect of resin failure strain on the tensile properties of glass fibre-reinforced polyester cross-ply laminates*. Journal of Materials Science, vol. 12, no. 11, pages 2189–2194, 1977.
- [Garrett 77b] K. W. Garrett & J. E. Bailey. *Multiple transverse fracture in 90° cross-ply laminates of a glass fibre reinforced polyester*. Journal of Materials Science, vol. 12, no. 1, pages 157–168, 1977.
- [Geradin 15] M. Geradin & D. Rixen. *Mechanical vibrations : Theory and application to structural dynamics*. Wiley, 2015.
- [Gerges 13] Y. Gerges. *Méthodes de réduction de modèles en vibroacoustique non-linéaire*. PhD thesis, Université de Franche-Comté, 2013.
- [Ghosh 04] A. Ghosh & P. Sinha. *Dynamic and impact response of damaged laminated composite plates*. Aircraft Engineering and Aerospace Technology, vol. 76, no. 1, pages 29–37, 2004.
- [Ghosh 08] A. Ghosh. *Hygrothermal effects on the initiation and propagation of damage in composite shells*. Aircraft Engineering and Aerospace Technology, vol. 80, no. 4, pages 386–399, 2008.

-
- [Giurgiutiu 15] V. Giurgiutiu. *Structural health monitoring of aerospace composites*. Elsevier Science, 2015.
- [Gladwell 64] G. M. L. Gladwell. *Branch mode analysis of vibrating systems*. Journal of Sound and Vibration, vol. 1, no. 1, pages 41 – 59, 1964.
- [Goldman 69] R. L. Goldman. *Vibration analysis by dynamic partitioning*. AIAA journal, vol. 7, no. 6, pages 1152–1154, 1969.
- [Gong 94] X. J. Gong. *Rupture interlaminaire en mode mixte I+II de composites stratifiés unidirectionnels et multidirectionnels verre/époxy*. PhD thesis, 1994.
- [Gornet 08] L. Gornet. *Généralités sur les matériaux composites*. 2008.
- [Graupe 13] D. Graupe. *Principles of artificial neural networks*. Advanced Series in Circuits and Systems. World Scientific Publishing Company, 2013.
- [Griffith 21] A. A. Griffith. *The Phenomena of Rupture and Flow in Solids*. Philosophical Transactions of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences, vol. 221, pages 163–198, 1921.
- [Guedri 10] M. Guedri, A. M. G. De Lima, N. Bouhaddi & D. A. Rade. *Robust design of viscoelastic structures based on stochastic finite element models*. Mechanical Systems and Signal Processing, vol. 24, no. 1, pages 59 – 77, 2010.
- [Guyan 65] R. J. Guyan. *Reduction of stiffness and mass matrices*. AIAA journal, vol. 3, no. 2, pages 380–380, 1965.
- [Hansen 95] N. R. Hansen & H. L. Schreyer. *Damage deactivation*. Journal of applied mechanics, vol. 62, no. 2, pages 450–458, 1995.
- [Hassoun 95] M. H. Hassoun. *Fundamentals of artificial neural networks*. MIT press, 1995.
- [Hintz 75] R. M. Hintz. *Analytical methods in component modal synthesis*. AIAA Journal, vol. 13, no. 8, pages 1007–1016, 1975.
- [Hodzic 14] A. Hodzic & R. Shanks. *Natural fibre composites : Materials, processes and properties*. Woodhead Publishing Series in Composites Science and Engineering. Elsevier Science, 2014.
- [Hopfield 82] J. J. Hopfield. *Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities*. Proceedings of the national academy of sciences, vol. 79, no. 8, pages 2554–2558, 1982.
- [Hosseini 09] T. H. Hosseini, M. Jalalvand & B. Mohammadi. *Delamination analysis of holed composite laminates using interface elements*. Procedia Engineering, vol. 1, no. 1, pages 39 – 42, 2009.

- [Hosur 98] M. V. Hosur, C. R. L. Murthy, T. S. Ramamurthy & A. Shet. *Estimation of impact-induced damage in {CFRR} laminates through ultrasonic imaging.* {NDT} and E International, vol. 31, no. 5, pages 359 – 374, 1998.
- [Hou 69] S. N. Hou. *Review of modal synthesis techniques and a new approach.* Shock and vibration bulletin, vol. 40, no. 4, pages 25–39, 1969.
- [Huimin 11] F. Huimin & Z. Yongbo. *On the Distribution of Delamination in Composite Structures and Compressive Strength Prediction for Laminates with Embedded Delaminations.* Applied Composite Materials, vol. 18, no. 3, pages 253–269, 2011.
- [Ikonopoulou 01] G. Ikonopoulou & D. Perreux. *Reliability of Composite Laminates through a Damage Tolerance Approach : Applications into Carbon-Epoxy and Glass-Epoxy Composite Shells.* Journal of Composite Materials, vol. 35, no. 3, pages 202–236, 2001.
- [Jain 93] S. Jain & D. Yang. *Effects of federate and chisel edge on delamination in composite drilling.* Processing and Manufacturing of Composite Materials, ASME PED, vol. 115, pages 398–405, 1993.
- [Joffe 99] R. Joffe. *Damage accumulation and stiffness degradation in composite laminates.* (Doctorial thesis) Department of material and manufacturing engineering, LULEA University of Technology. Sweden, 1999.
- [Johnson 01] A. F. Johnson. *Modelling fabric reinforced composites under impact loads.* Composites Part A : Applied Science and Manufacturing, vol. 32, no. 9, pages 1197 – 1206, 2001.
- [Jones 81] F. R. Jones, A. R. Wheatley & J. E. Bailey. *The effect of thermal strains on the microcracking and stress corrosion behaviour of grp,* pages 415–429. Springer Netherlands, Dordrecht, 1981.
- [Kachanov 58] L. M. Kachanov. *Rupture time under creep conditions.* vol. 8, pages 26–31, 1958.
- [Kaczmarek 95] H. Kaczmarek. *Ultrasonic Detection of Damage in CFRPs.* Journal of Composite Materials, vol. 29, no. 1, pages 59–95, 1995.
- [Kang 99] Y. Kang. *Experimental analysis for some interfacial mechanics problems.* Mechanical Engineering, vol. 21, no. 3, pages 9–15, 1999.
- [Kattan 90] P. I. Kattan & G. Z. Voyiadjis. *A coupled theory of damage mechanics and finite strain elasto-plasticity : part I. Damage and elastic deformations.*

- International Journal of Engineering Science, vol. 28, no. 5, pages 421 – 435, 1990.
- [Kattan 93] P. I. Kattan & G. Z. Voyiadjis. *Overall damage and elastoplastic deformation in fibrous metal matrix composites*. International Journal of Plasticity, vol. 9, no. 8, pages 931 – 949, 1993.
- [Kessler 02] S. S. Kessler, S. M. Spearing, M. J. Atalla, C. E. Cesnik & C. Soutis. *Damage detection in composite materials using frequency response methods*. Composites Part B : Engineering, vol. 33, no. 1, pages 87 – 95, 2002.
- [Kim 02] B. W. Kim & J. A. Nairn. *Observations of fiber fracture and interfacial debonding phenomena using the fragmentation test in single fiber composites*. Journal of Composite Materials, vol. 36, no. 15, pages 1825–1858, 2002.
- [Kim 16] J. W. Kim & J. S. Lee. *Influence of Interleaved Films on the Mechanical Properties of Carbon Fiber Fabric/Polypropylene Thermoplastic Composites*. Materials, vol. 9, no. 5, 2016.
- [Kirsch 06] U. Kirsch, M. Bogomolni & I. Sheinman. *Nonlinear dynamic reanalysis of structures by combined approximations*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 195, no. 33–36, pages 4420 – 4432, 2006.
- [Krajcinovic 95] D. Krajcinovic & S. Mastilovic. *Some fundamental issues of damage mechanics*. Mechanics of Materials, vol. 21, no. 3, pages 217–230, 1995.
- [Krajcinovic 96] D. Krajcinovic. *Damage mechanics*. North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics. Elsevier Science, 1996.
- [Krajcinovic 00] D. Krajcinovic. *Damage mechanics : accomplishments, trends and needs*. International Journal of Solids and Structures, vol. 37, no. 1–2, pages 267 – 277, 2000.
- [Ladeveze 92] P. Ladeveze & E. LeDantec. *Damage modelling of the elementary ply for laminated composites*. Composites Science and Technology, vol. 43, no. 3, pages 257 – 267, 1992.
- [Lemaitre 78] J. Lemaitre & J. L. Chaboche. *Phenomenological approach of damage rupture*. Journal de Mecanique Appliquee, vol. 2, no. 3, pages 317–365, 1978.
- [Lemaitre 05] J. Lemaitre & R. Desmorat. *Engineering damage mechanics : Ductile, creep, fatigue and brittle failures*. Springer Berlin Heidelberg, 2005.
- [Lemaitre 09] J. Lemaitre, J. Chaboche, A. Benallal & R. Desmorat. *Mécanique des matériaux solides - 3ème édition*. Dunod, 2009.

- [Lifshitz 69] J. Lifshitz & A. Rotem. *Determination of Reinforcement Unbonding of Composites by a Vibration Technique*. Journal of Composite Materials, vol. 3, no. 3, pages 412–423, 1969.
- [Lise 86] S. Lise & f. Stiglich. *Ceramic Matrix Composites : A Literature Review*. American Ceramic Society Bulletin, vol. 65, no. 2, pages 289–292, 1986.
- [Liu 87] D. Liu & L. E. Malvern. *Matrix Cracking in Impacted Glass/Epoxy Plates*. Journal of Composite Materials, vol. 21, no. 7, pages 594–609, 1987.
- [Lombard 99] J. P. Lombard. *Contribution à la réduction des modèles éléments finis par synthèse modale*. PhD thesis, Université de Franche-Comté, 1999.
- [Lonetti 03] P. Lonetti, R. Zinno, F. Greco & E. J. Barbero. *Interlaminar Damage Model for Polymer Matrix Composites*. Journal of Composite Materials, vol. 37, no. 16, pages 1485–1504, 2003.
- [MacNeal 71] R. H. MacNeal. *A hybrid method of component mode synthesis*. Computers & Structures, vol. 1, no. 4, pages 581–601, 1971.
- [Mahmoudi 16] S. Mahmoudi, F. Trivaudey & N. Bouhaddi. *Benefits of metamodel-reduction for nonlinear dynamic response analysis of damaged composite structures*. Finite Elements in Analysis and Design, vol. 119, pages 1 – 14, 2016.
- [Martinez 84] D. Martinez, T. Carne, D. Gregory & A. Miller. *Combined experimental/analytical modeling using component mode synthesis*. In 25th Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, page 941, 1984.
- [Masson 03] G. Masson. *Synthèse modale robuste adaptée à l'optimisation de modèles de grande taille*. PhD thesis, Université de Franche-Comté, 2003.
- [Masson 06] G. Masson, B. A. Brik, S. Cogan & N. Bouhaddi. *Component mode synthesis (CMS) based on an enriched Ritz approach for efficient structural optimization*. Journal of sound and vibration, vol. 296, no. 4, pages 845–860, 2006.
- [Matzenmiller 95] A. Matzenmiller, J. Lubliner & R. L. Taylor. *A constitutive model for anisotropic damage in fiber-composites*. Mechanics of Materials, vol. 20, no. 2, pages 125 – 152, 1995.
- [McCulloch 43] W. S. McCulloch & W. Pitts. *A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity*. The bulletin of mathematical biophysics, vol. 5, no. 4, pages 115–133, 1943.
- [Mercier 06] J. Mercier. *Prise en compte du vieillissement et de l'endommagement dans le dimensionnement de structures en matériaux composites*. PhD thesis, 2006.

- [Mian 04] A. Mian, X. Han, S. Islam & G. Newaz. *Fatigue damage detection in graphite/epoxy composites using sonic infrared imaging technique*. Composites Science and Technology, vol. 64, no. 5, pages 657–666, 2004.
- [Minsky 69] M. Minsky & S. P. Perceptrons. *an Introduction to Computational Geometry Cambridge Ma*, 1969.
- [Mohan 98] P. Mohan & R. Kapania. *Updated Lagrangian Formulation of a Flat Triangular Element for Thin Laminated Shells*. AIAA Journal, vol. 36, no. 2, pages 273–281, 1998.
- [Morgan 05] P. Morgan. Carbon fibers and their composites. Materials Engineering. CRC Press, 2005.
- [Murakami 81] S. Murakami & N. Ohno. A continuum theory of creep and creep damage, pages 422–444. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1981.
- [Nairn 94] J. A. Nairn & S. Hu. *Micromechanics of Damage : A Case Study of Matrix Microcracking*. In In Damage Mechanics of Composite Materials, page 187–243, Amsterdam, 1994. ed., Ramesh Talreja, Elsevier.
- [Nairn 00] J. A. Nairn. *Matrix microcracking in composites*. Polymer matrix composites, vol. 2, pages 403–432, 2000.
- [Newmark 59] N. M. Newmark. *A method of computation for structural dynamics*. Journal of the Eng. Mech. Div., vol. 85, no. 3, 1959.
- [Nishikawa 08] M. Nishikawa, T. Okabe & N. Takeda. *Determination of interface properties from experiments on the fragmentation process in single-fiber composites*. Materials Science and Engineering : A, vol. 480, no. 1, pages 549–557, 2008.
- [Pandey 94] A. K. Pandey & M. Biswas. *Damage Detection in Structures Using Changes in Flexibility*. Journal of Sound and Vibration, vol. 169, no. 1, pages 3 – 17, 1994.
- [Park 97] T. Park & G. Z. Voyiadjis. *Damage analysis and elasto-plastic behavior of metal matrix composites using the finite element method*. Engineering Fracture Mechanics, vol. 56, no. 5, pages 623 – 646, 1997.
- [Park 03] J.-M. Park, D.-S. Kim & S.-R. Kim. *Interfacial properties and microfailure degradation mechanisms of bioabsorbable fibers/poly-l-lactide composites using micromechanical test and nondestructive acoustic emission*. Composites Science and Technology, vol. 63, no. 3–4, pages 403 – 419, 2003.

- [Parvizi 78] A. Parvizi, K. W. Garrett & J. E. Bailey. *Constrained cracking in glass fibre-reinforced epoxy cross-ply laminates*. Journal of Materials Science, vol. 13, no. 1, pages 195–201, 1978.
- [Paz 84] M. Paz. *Dynamic condensation*. AIAA journal, vol. 22, no. 5, pages 724–727, 1984.
- [Perreux 93] D. Perreux & C. Oytana. *Continuum damage mechanics for microcracked composites*. Composites Engineering, vol. 3, no. 2, pages 115 – 122, 1993.
- [Pickering 16] K. L. Pickering, M. Aruan Efendy & T. Le. *A review of recent developments in natural fibre composites and their mechanical performance*. Composites Part A : Applied Science and Manufacturing, vol. 83, pages 98 – 112, 2016.
- [Pinho 09] S. Pinho, P. Robinson & L. Iannucci. *Developing a four point bend specimen to measure the mode I intralaminar fracture toughness of unidirectional laminated composites*. Composites Science and Technology, vol. 69, no. 7–8, pages 1303 – 1309, 2009.
- [Preuss 88] T. E. Preuss & G. Clark. *Use of time-of-flight C-scanning for assessment of impact damage in composites*. Composites, vol. 19, no. 2, pages 145 – 148, 1988.
- [Priddy 05] K. L. Priddy & P. E. Keller. *Artificial neural networks : an introduction*, volume 68. SPIE Press, 2005.
- [Rabotnov 69] Y. N. Rabotnov. *Creep rupture*, pages 342–349. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1969.
- [RAH 07] K. RAH. *Damage Modeling in Laminated Composite Structures*. Theses, Universiteit Gent, 2007.
- [Rana 16] S. Rana & R. Figueiro. *Fibrous and textile materials for composite applications*. Textile Science and Clothing Technology. Springer Singapore, 2016.
- [Rao 04] M. A. Rao, J. Srinivas & B. Murthy. *Damage detection in vibrating bodies using genetic algorithms*. Computers & structures, vol. 82, no. 11, pages 963–968, 2004.
- [Read 02] I. Read, P. Foote & S. Murray. *Optical fibre acoustic emission sensor for damage detection in carbon fibre composite structures*. Measurement Science and Technology, vol. 13, no. 1, page N5, 2002.

- [Reddy 85] J. Reddy & N. Phan. *Stability and vibration of isotropic, orthotropic and laminated plates according to a higher-order shear deformation theory*. Journal of Sound and Vibration, vol. 98, no. 2, pages 157 – 170, 1985.
- [Reddy 95] J. Reddy & A. Miravete. Practical analysis of composite laminates. Taylor & Francis, 1995.
- [Reddy 04] J. N. Reddy. *Mechanics of laminated composite plates and shells : theory and analysis*, 2004.
- [Renard 91] J. Renard & A. Thionnet. *Une loi d'évolution de la fissuration transverse dans les composites stratifiés soumis à un chargement quasi-statique*. Revue des Composites et des Nouveaux Matériaux, pages 72–93, 1991.
- [Riedmiller 94] M. Riedmiller. *Advanced supervised learning in multi-layer perceptrons—from backpropagation to adaptive learning algorithms*. Computer Standards & Interfaces, vol. 16, no. 3, pages 265–278, 1994.
- [Robbins 05a] D. H. Robbins, J. N. Reddy & F. Rostam-Abadi. *Layerwise modeling of progressive damage in fiber-reinforced composite laminates*. International Journal of Mechanics and Materials in Design, vol. 2, no. 3, pages 165–182, 2005.
- [Robbins 05b] D. H. J. Robbins, J. N. Reddy & F. Rostam-Abadi. *An Efficient Continuum Damage Model and its Application to Shear Deformable Laminated Plates*. Mechanics of Advanced Materials and Structures, vol. 12, no. 6, pages 391–412, 2005.
- [Rosenblatt 62] F. Rosenblatt. *Principles of neurodynamics*. 1962.
- [Rouleau 17] L. Rouleau, J. F. Deu & A. Legay. *A comparison of model reduction techniques based on modal projection for structures with frequency-dependent damping*. Mechanical Systems and Signal Processing, vol. 90, pages 110 – 125, 2017.
- [Rubin 75] S. Rubin. *Improved component-mode representation for structural dynamic analysis*. AIAA Journal, vol. 13, no. 8, pages 995–1006, 1975.
- [Rumelhart 86] D. E. Rumelhart & J. L. McClelland. *Parallel Distributed Processing : Exploration in the Microstructure of Cognition*, 1986.
- [Saheb 99] D. N. Saheb & J. P. Jog. *Natural fiber polymer composites : a review*. Advances in polymer technology, vol. 18, no. 4, pages 351–363, 1999.
- [Sahin 03] M. Sahin & R. A. Sheno. *Quantification and localisation of damage in beam-like structures by using artificial neural networks with experimental validation*. Engineering Structures, vol. 25, no. 14, pages 1785–1802, 2003.

- [Salawu 97] O. S. Salawu. *Detection of structural damage through changes in frequency : a review*. Engineering Structures, vol. 19, no. 9, pages 718 – 723, 1997.
- [Sohn 04] H. Sohn, C. R. Farrar, F. M. Hemez, D. D. Shunk, D. W. Stinernes, B. R. Nadler & J. J. Czarnecki. A review of structural health monitoring literature : 1996-2001. Los Alamos National Laboratory Los Alamos, NM, 2004.
- [Thollon 09] Y. Thollon & C. Hochard. *A general damage model for woven fabric composite laminates up to first failure*. Mechanics of Materials, vol. 41, no. 7, pages 820 – 827, 2009.
- [Thyagarajan 98] S. K. Thyagarajan, M. J. Schulz, P. F. Pai & J. Chung. *Detecting structural damage using frequency response functions*. Journal of Sound and Vibration, vol. 210, no. 1, pages 162–170, 1998.
- [Tian 08] Y.-p. Tian & Y.-m. Fu. *Elasto-plastic postbuckling of damaged orthotropic plates*. Applied Mathematics and Mechanics, vol. 29, no. 7, pages 841–853, 2008.
- [Touzé 08] C. Touzé, M. Amabili & O. Thomas. *Reduced-order models for large-amplitude vibrations of shells including in-plane inertia*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 197, no. 21–24, pages 2030 – 2045, 2008.
- [Trivaudey 09] F. Trivaudey, V. Guicheret Retel & M. L. Boubakar. *Unilateral damage model for laminate analysis*. In Applied computer and applied computational science, pages 337–343. WSEAS Press, 2009.
- [Valentin 82] D. Valentin & A. Bunsell. *A Study of Damage Accumulation in Carbon Fibre Reinforced Epoxy Resin Structures During Mechanical Loading Monitored By Acoustic Emission*. Journal of Reinforced Plastics and Composites, vol. 1, no. 4, pages 314–334, 1982.
- [Voyiadjis 90] G. Z. Voyiadjis & P. I. Kattan. *A coupled theory of damage mechanics and finite strain elasto-plasticity—II. Damage and finite strain plasticity*. International Journal of Engineering Science, vol. 28, no. 6, pages 505–524, 1990.
- [Voyiadjis 93] G. Z. Voyiadjis & P. I. Kattan. *Local Approach to Damage in Elasto-Plastic Metal Matrix Composites*. International Journal of Damage Mechanics, vol. 2, no. 1, pages 92–114, 1993.

- [Voyiadjis 95] G. Z. Voyiadjis & T. Park. *Anisotropic Damage of Fiber-Reinforced MMC Using Overall Damage Analysis*. Journal of Engineering Mechanics, vol. 121, no. 11, pages 1209–1217, 1995.
- [Wambua 03] P. Wambua, J. Ivens & I. Verpoest. *Natural fibres : can they replace glass in fibre reinforced plastics ?* Composites Science and Technology, vol. 63, no. 9, pages 1259 – 1264, 2003. Eco-Composites.
- [Warner 95] S. Warner. *Fiber science*. Prentice Hall, 1995.
- [Werbos 74] P. Werbos. *Beyond regression : new fools for prediction and analysis in the behavioral sciences*. PhD thesis, Harvard University, 1974.
- [Williams 01] K. V. Williams & R. Vaziri. *Application of a damage mechanics model for predicting the impact response of composite materials*. Computers and Structures, vol. 79, no. 10, pages 997 – 1011, 2001.
- [Williams 03] K. V. Williams, R. Vaziri & A. Poursartip. *A physically based continuum damage mechanics model for thin laminated composite structures*. International Journal of Solids and Structures, vol. 40, no. 9, pages 2267 – 2300, 2003.
- [Wu 88] H. Y. T. Wu & G. S. Springer. *Measurements of Matrix Cracking and Delamination Caused by Impact on Composite Plates*. Journal of Composite Materials, vol. 22, no. 6, pages 518–532, 1988.
- [Wunderlich W. 81] B. K.-J. Wunderlich W. SteinE. *Non-linear finite element analysis in structural mechanics*. Springer Berlin Heidelberg, 1981.
- [Zghal 15] S. Zghal, M. L. Bouazizi, N. Bouhaddi & R. Nasri. *Model reduction methods for viscoelastic sandwich structures in frequency and time domains*. Finite Elements in Analysis and Design, vol. 93, pages 12–29, 2015.
- [Zhandarov 05] S. Zhandarov & E. Mäder. *Characterization of fiber/matrix interface strength : applicability of different tests, approaches and parameters*. Composites Science and Technology, vol. 65, no. 1, pages 149–160, 2005.
- [Zhang 13] Z. Zhang, K. Shankar, T. Ray, E. V. Morozov & M. Tahtali. *Vibration-based inverse algorithms for detection of delamination in composites*. Composite Structures, vol. 102, pages 226–236, 2013.
- [Zou 00] Y. Zou, L. Tong & G. Steven. *Vibration-based model-dependent damage (delamination) identification and health monitoring for composite structures—a review*. Journal of Sound and vibration, vol. 230, no. 2, pages 357–378, 2000.
- [Zweben 68] C. Zweben. *Tensile failure of fiber composites*. AIAA journal, vol. 6, no. 12, pages 2325–2331, 1968.

LISTE DES FIGURES

1.1	Évolution de l'utilisation des composites dans le secteur de l'aviation. <i>Sources : GAO analysis of information from FAA, NASA, Boeing Company, Jene's AJJ the world's Aircraft, and Jene's Aircraft Upgrades</i>	14
1.2	Composition de la structure de l'avion Boeing-787, source : http://aviation-futur.e-monsite.com	14
1.3	Types de matrices utilisées dans les composites [Gornet 08]	15
1.4	Pièces pour l'automobile en matériaux composites : (a) thermoplastiques et (b) thermodurcissables [Celle 15]	18
1.5	Principales formes d'endommagement dans un composite stratifié [Duplessis 05, Pinho 09]	22
1.6	Micro-fissures dans la matrice d'un composite verre/epoxy [Gong 94]	23
1.7	La déformation pour initier la micro-fissuration matricielle dans des stratifiés verre/epoxy $[0^\circ/90^\circ]_s$ en fonction de l'épaisseur totale des plis à 90° . Les plis à 0° ont chacune une épaisseur constante de 0.5 mm [Nairn 00]	24
1.8	Orientation d'une fissure dans les plis 90° [Cédric 11], (a) sans obstacle, (b) en présence d'une porosité et (c) en présence d'une zone pauvre en matrice	25
1.9	Coalescence des micro-fissures dans la matrice d'un composite verre/epoxy [Gong 94]	25
1.10	Photographie des micro-fissures dans une couche 60° de tissu asymétrique 83/17 verre/époxy [Thollon 09]	26
1.11	Photographies de l'évolution des micro-fissures dans une couche 90° de tissu asymétrique 83/17 verre/époxy [Thollon 09]	27
1.12	Évolution non-linéaire de l'endommagement, [Thollon 09]	27
1.13	Initiation des fissures transversales et décohésion fibre/matrice [Joffe 99]	28
1.14	Fissures transverses induites par décohésion fibre/matrice dans un stratifié carbone/epoxy [Aussedat Yahia 97]	29

LISTE DES FIGURES

1.15 Fissures longitudinales induites par décohésion fibre/matrice dans un stratifié tissé carbone/epoxy [Aussedat Yahia 97]	29
1.16 Fissures longitudinales induites par décohésion fibre/matrice dans un stratifié tissé carbone/epoxy [Kim 02]	30
1.17 Exemples de zones de décohésion de composites à une seule fibre. a) Zone de décohésion très petite (fibre de carbone AS4); (b) Zone de décohésion très longue (fibre de verre E); (c) Zone de décohésion sans rupture de fibre (fibre de carbone AS4) [Kim 02]	31
1.18 Photographies de sections transversales de délamination de tissus de fibres de carbone/composites thermoplastiques de polypropylène [Kim 16] . . .	32
1.19 Simulation du délaminage [Benzerga 14]	32
1.20 Réponses fréquentielles d'une poutre graphite/epoxy saine et endommagée [Kessler 02]	36
1.21 Prédiction de l'endommagement dans un treillis en présence du bruit et à différent niveaux d'endommagement imposés à l'élément n°6 : (a) 50% , (b) 10% et (c) 5% [Thyagarajan 98]	37
1.22 Détection de l'endommagement en utilisant 5 modes propres [Dos Santos 00]	38
1.23 Détection de l'endommagement : (a) avec 2 modes propres et (b) en présence d'un bruit blanc [Dos Santos 00]	39
1.24 Tracé du changement de flexibilité pour quatre emplacements typiques d'endommagement (réduction de 50% du module élastique E) pour une poutre en appui simple [Pandey 94]	39
1.25 Neurone biologique [Graupe 13]	41
1.26 Modèle mathématique d'un neurone à deux entrées (x_1, x_2) , f est une fonction d'activation et b est un biais	42
1.27 Résultats du RNA : (a) prédiction du niveau de l'endommagement et (b) prédiction de la localisation de l'endommagement [Sahin 03]	43
1.28 Prédiction des paramètres de délaminage par RNA [Zhang 13]	44
1.29 Principe de sous-structuration et définition des dds internes et de jonctions	47
1.30 Forme générale de la matrice de transformation d'une sous-structure (s) .	48
1.31 Exemple d'un mode contraint	48
1.32 Exemple d'un mode d'attache	49
1.33 Modes normaux : (a) modes à interface bloquée, (b) mode à interface libre et (c) mode à interface chargée	50

1.34	Procédure de réduction de modèle par sous-structuration [Chentouf 11]	51
2.1	Méthode de Newton-Raphson	61
2.2	Méthode de Newton-Raphson modifiée	62
2.3	Cinématique de déformation pour la théorie CLT [Reddy 04]	65
2.4	Géométries non déformées et déformées d'une plaque sous les hypothèses de la FSDT [Reddy 04]	66
2.5	Plaque stratifiée et son plan moyen	68
2.6	Une couche unidirectionnelle et ses systèmes de coordonnées	70
2.7	Élément fini isoparamétrique rectangulaire $Q8$ en coordonnées élémentaire (a) et locales (b)	73
2.8	Les quatre premiers modes propres numériques de la plaque $(90^\circ/0^\circ)_{2s}$	77
2.9	Les quatre premiers modes propres expérimentaux de la plaque $(90^\circ/0^\circ)_{2s}$ [Cugnoni 04]	77
2.10	Différence entre les fréquences fondamentales obtenues par la FSDT et la HSDT	79
2.11	Réponse temporelle à $x = a/2$	81
2.12	Exemple de structure assemblée en forme de T	83
2.13	Déplacement des nœuds de jonction	84
2.14	Réponses fréquentielles de la structure	84
3.1	Sources d'endommagement dans les composites : (a) micro-fissuration de la matrice, (b) délaminage et (c) rupture des fibres, [RAH 07]	89
3.2	Description physique de l'endommagement, [Lemaitre 05]	89
3.3	Courbe de traction d'un matériau élastique endommagé, (a) équivalence en déformation et (b) équivalence en contrainte	90
3.4	Représentation du principe d'équivalence en déformation	91
3.5	Comportement non-linéaire dû à l'endommagement	92
3.6	Couche mince de polymère renforcée par des fibres de verre : (a) orientation des micro-fissures dans la matrice, (b) modes d'ouverture des micro-fissures [Boubakar 02]	93
3.7	Calcul incrémental de l'endommagement par la méthode de Newton-Raphson	99
3.8	Schéma de Newmark d'intégration temporelle implicite pour les problèmes de dynamique à non-linéarité matérielle de type endommagement [Mahmoudi 16]	100

3.9	<i>Architecture simple d'un RNA feedforward avec une seule couche de sortie</i>	101
3.10	<i>Modèle de calcul pour un neurone artificiel</i>	101
3.11	Estimation du niveau de l'endommagement par le méta-modèle RNA	103
3.12	Géométrie de la structure composite et l'impulsion $F(t)$	105
3.13	État de l'endommagement par couche de la poutre ($90^\circ/0^\circ/90^\circ$) avec $F_0 = 1.2 \cdot 10^5 N/m$, (a), (b) and (c) sont respectivement les couches supérieure, centrale et inférieure	105
3.14	État de l'endommagement par couche de la poutre ($45^\circ/0^\circ/ - 45^\circ$) avec $F_0 = 2.28 \cdot 10^5 N/m$, (a), (b) and (c) sont respectivement les couches supérieure, centrale et inférieure	106
3.15	Réponse dynamique impulsionnelle dans la direction \vec{x} des nœuds de coordonnées $x = L$ de la poutre ($90^\circ/0^\circ/90^\circ$)	108
3.16	(a) l'évolution d'endommagement en fonction du temps dans un point de Gauss près de l'arrête libre de la poutre ($90^\circ/0^\circ/90^\circ$) et (b) la force d'impulsion	109
3.17	Ratios de décroissance des fréquences propres : (a) and (b) désignent les ratios R_d obtenus par le modèle complets et le méta-modèle RNA, pour la structure ($45^\circ/0^\circ/ - 45^\circ$), (c) et (d) sont les mêmes ratios correspondants pour la structure ($90^\circ/0^\circ/90^\circ$)	110
3.18	États de l'endommagement obtenus par le méta-modèle appliqué à la poutre ($90^\circ/0^\circ/90^\circ$) avec $F = 1.2 \cdot 10^5 N/m$, (a), (b) and (c) sont respectivement les couches supérieure, centrale et inférieure	110
3.19	États de l'endommagement obtenus par le méta-modèle appliqué à la poutre ($45^\circ/0^\circ/ - 45^\circ$) avec $F = 2.28 \cdot 10^5 N/m$, (a), (b) and (c) sont respectivement les couches supérieure, centrale et inférieure	111
3.20	Ratios de décroissance des fréquences propres obtenus par le modèle complet et le méta-modèle pour la poutre ($60^\circ/0^\circ/ - 60^\circ$)	111
3.21	États de l'endommagement obtenus par le modèle complet appliqué à la poutre ($60^\circ/0^\circ/ - 60^\circ$)	112
3.22	États de l'endommagement obtenus par le méta-modèle appliqué à la poutre ($60^\circ/0^\circ/ - 60^\circ$)	112
3.23	Réduction du temps CPU pour les trois poutres ($45^\circ/0^\circ/ - 45^\circ$), ($60^\circ/0^\circ/ - 60^\circ$) et ($90^\circ/0^\circ/90^\circ$)	113
3.24	Principe de sous-structuration dynamique : (a) structure entière et (b) décomposition en deux sous-structures	113

3.25	Schéma de Newmark implicite pour le méta-modèle (RNA avec méthode de Craig-Bampton	114
3.26	Erreurs entre les fréquences propres calculées par le modèle réduit et du modèle complet	115
3.27	Réponses fréquentielles de la structure, (a) : saine, (b) : endommagée obtenue avec le modèle complet et (c) endommagée obtenue avec le méta-modèle	116
3.28	Zoom sur les 7 premiers modes, (a) : saine, (b) : endommagée obtenue avec le modèle complet et (c) endommagée obtenue avec le méta-modèle	116
3.29	Ratios de décroissance des fréquences propres : (a) and (b) désignent les ratios R_d obtenus par le modèle complet et le méta-modèle	117
3.31	Évolution de l'endommagement en fonction de la contrainte σ_{22}^D au point de coordonnées $(x = y = 0, z = 0.25 \text{ mm})$ de la structure assemblée	118
3.30	États de l'endommagement obtenus par : (a) le modèle complet et (b) le méta-modèle	119
3.32	Courbes contrainte-déformation au point $A(x = y = 0, z = 0.25 \text{ mm})$ de la couche $n2, \theta = -60^\circ$, $\tilde{\sigma}_{22}$ est la contrainte effective et σ_{22}^D est la contrainte de Cauchy	120
4.1	Poutre stratifiée encastree-libre	127
4.2	Courbe contrainte-déformation : modèle bilatéral	128
4.3	Courbe contrainte-déformation : modèle unilatéral	128
4.4	Évolution de l'endommagement en fonction de la contrainte σ_{22} : modèle bilatéral	130
4.5	Évolution de l'endommagement en fonction de la contrainte σ_{22} : modèle unilatéral	131
4.6	Poutre stratifiée encastree-libre soumise à une excitation harmonique	131
4.7	Réponses temporelles de la poutre saine et la poutre endommagée en $x = L$	132
4.8	Évolution de la contrainte effective ($\sigma_{22}^{effective}$) et endommagée σ_{22}^D en $x = L$	133
4.9	Contraintes effective ($\sigma_{22}^{effective}$) et endommagée (σ_{22}^D) en fonction de la déformation	133
4.10	Évolution du niveau de l'endommagement en fonction de la contrainte (σ_{22})	134
4.11	Évolution du niveau d'endommagement en $x = 0$	134
4.12	Évolution des deux premières fréquences propres en fonction du temps	135
4.13	Les configurations ${}^0\Gamma_e, {}^1\Gamma_e$ et Γ_e pour un élément du plan moyen	136

4.14 Géométrie de la plaque isotrope soumise à une pression uniforme transversale	141
4.15 Réponse non-linéaire transitoire du centre de la plaque isotrope (<i>SSSS</i>) .	141
4.16 Réponse non-linéaire transitoire du centre de la plaque isotrope (<i>CCCC</i>)	142
4.17 Réponse non-linéaire transitoire du centre de la plaque monocouche (0°) .	143
4.18 Réponse non-linéaire transitoire du centre de la plaque stratifiées ($0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ$)	143
4.19 Réponse non-linéaire transitoire du centre de la plaque stratifiées ($45^\circ/45^\circ/45^\circ/45^\circ$)	143
4.20 Structure stratifiée assemblée en forme de T	144
4.21 Mode propre n°4 de la structure en T ($90^\circ/0^\circ/0^\circ/90^\circ$)	145
4.22 Comparaison des réponses temporelles obtenues par l'équation (4.33) et ANSYS® au point de coordonnées ($x = 0.025, y = 0, z = 0$)	145
4.23 FFT de la réponse en accélération avec $f_{ex,1} = 1000 Hz$ et pour différents niveaux d'excitation	146
4.24 FFT de la réponse en accélération avec $f_{ex,2} = 1463 Hz$ et pour différents niveaux d'excitation	146
4.25 État de l'endommagement avec la fréquence d'excitation $f_{ex} = 1000 Hz$.	146
4.26 État de l'endommagement avec la fréquence d'excitation $f_{ex} = 1463 Hz$.	147
4.27 Évolution en fonction du temps de la contrainte endommagée σ_{22} et le niveau de l'endommagement au point de Gauss de coordonnées ($x = -0.0451, y = 0.0011, z = 0.00045$) m pour les fréquences d'excitation $f_{ex,1}$ et $f_{ex,2}$	147
4.28 Évolution de la contrainte σ_{22} en fonction de ε_{22} au point de Gauss de coordonnées ($x = -0.0451, y = 0.0011, z = 0.00045$) m avec la fréquence d'excitation $f_{ex} = 1463 Hz$	148
4.29 Réponses en vitesse au point de coordonnées ($x = -0.046, y = 0, z = 0$) m	149
4.30 Réponses en vitesse au point de coordonnées ($x = -0.01875, y = 0, z = 0$) m	149
4.31 Évolution de l'endommagement en fonction de la contrainte σ_{22} au point de Gauss de coordonnées ($x = -0.0451, y = 0.0011, z = 0.00045$) m . .	149
4.32 Les 4 premiers modes propres de la structure en T ($45^\circ/0^\circ/0^\circ/45^\circ$) . .	151
4.33 Les 4 premiers modes propres de la structure en T ($60^\circ/0^\circ/0^\circ/60^\circ$) . .	151
4.34 État de l'endommagement obtenus par le modèle complet (a) et le méta-modèle (b) de la structure ($90^\circ/0^\circ/0^\circ/90^\circ$)	153

4.35 État de l'endommagement obtenus par le modèle complet (a) et le méta-modèle (b) de la structure $(60^\circ/0^\circ/0^\circ/ - 60^\circ)$	154
4.36 État de l'endommagement obtenus par le modèle complet (a) et le méta-modèle (b) de la structure $(45^\circ/0^\circ/0^\circ/ - 45^\circ)$	155
4.37 Réduction du temps de calcul pour les structures $(90^\circ/0^\circ/0^\circ/90^\circ)$, $(60^\circ/0^\circ/0^\circ/ - 60^\circ)$ et $(45^\circ/0^\circ/0^\circ/ - 45^\circ)$	156

LISTE DES TABLEAUX

1.1	Caractéristiques des résines thermoplastiques [Gornet 08, Chawla 12] . . .	16
1.2	Caractéristiques des résines thermodurcissables [Gornet 08, Chawla 12] .	17
1.3	Différences entre les thermodurcissables (TD) et les thermoplastiques (TP) [Berreur 02]	18
1.4	Niveau et position d'endommagement introduit dans le modèle, [Sahin 03]	43
2.1	Algorithme de la méthode d'intégration de Newmark avec accélération moyenne : cas linéaire	57
2.2	Algorithme de la méthode de Newton-Raphson	61
2.3	Algorithme de la méthode de Newton-Raphson modifiée	62
2.4	Algorithme de la méthode d'intégration de Newmark avec accélération moyenne : cas non linéaire	63
2.5	Propriétés mécaniques de la plaque orthotrope	76
2.6	Fréquences propres (Hz) de la plaque orthotrope $(90^\circ/0^\circ)_{2s}$	76
2.7	Propriétés mécaniques normalisées une plaque composite en graphite- époxy	78
2.8	Fréquences fondamentale normalisée des plaques "cross-ply"	79
2.9	Fréquences fondamentale normalisée des plaques "angle-ply"	79
2.10	Performance de la troncature modale	81
3.1	Propriétés mécaniques et paramètres d'endommagement du verre/epoxy .	104
3.2	Ratio de décroissance des fréquences propres de la poutre $(90^\circ/0^\circ/90^\circ)$.	107
3.3	Ratio de décroissance des fréquences propres de la poutre $(45^\circ/0^\circ/-45^\circ)$	107
3.4	Fréquences propres de la structure $(60^\circ/-60^\circ/-60^\circ/60^\circ)$	115
4.1	Propriétés mécaniques et paramètres d'endommagement du verre/epoxy .	126
4.2	Propriétés géométrique et mécaniques de la plaque isotrope [Bayles 73] .	140
4.3	Propriétés géométrique et mécaniques de la plaque orthotrope [Chen 00] .	142

