



**HAL**  
open science

# Rotation à long terme des corps célestes et application à Cérès et Vesta

Timothée Vaillant

► **To cite this version:**

Timothée Vaillant. Rotation à long terme des corps célestes et application à Cérès et Vesta. Astrophysique [astro-ph]. Université Paris sciences et lettres, 2018. Français. NNT : 2018PSLEO005 . tel-02096989

**HAL Id: tel-02096989**

**<https://theses.hal.science/tel-02096989>**

Submitted on 11 Apr 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE DE DOCTORAT

de l'Université de recherche Paris Sciences et Lettres  
PSL Research University

Préparée à l'Observatoire de Paris

Rotation à long terme des corps célestes et application à Cérès et Vesta

**École doctorale n°127**

ASTRONOMIE ET ASTROPHYSIQUE D'ÎLE-DE-FRANCE

**Spécialité** MÉCANIQUE CÉLESTE

Soutenue par **Timothée VAILLANT**  
le 6 juillet 2018

Dirigée par **Jacques LASKAR**

## COMPOSITION DU JURY :

Mme Anne Lemaître  
Université de Namur,  
Rapporteur

M. Gilles Vilmart  
Université de Genève,  
Rapporteur

Mme Françoise Roques  
Observatoire de Paris,  
Présidente du jury

M. Nicolas Rambaux  
Sorbonne Université,  
Examinateur

M. Paolo Tanga  
Observatoire de la Côte d'Azur,  
Examinateur

M. Jacques Laskar  
Observatoire de Paris,  
Directeur de thèse

Mme Antonella Barucci  
Observatoire de Paris,  
Invitée





# Remerciements

Je remercie tout d'abord mon directeur de thèse, Jacques Laskar, de m'avoir permis de réaliser cette thèse au sein de l'Institut de Mécanique Céleste et de Calcul des Éphémérides (IMCCE) et de m'avoir initié à la mécanique céleste. Je le remercie également de la confiance qu'il m'a témoignée en me permettant de travailler dans le cadre de cette thèse sur les intégrateurs symplectiques du corps solide. Je le remercie beaucoup pour ses conseils et son soutien constant tout au long de ce travail, qui en a permis l'achèvement.

Je remercie Nicolas Rambaux pour l'aide qu'il m'a apportée notamment par ses explications sur la rotation et la structure interne des corps. Je le remercie aussi pour sa relecture attentionnée du manuscrit et de m'avoir permis de participer à l'encadrement du projet de nanosatellite METEORIX.

Je remercie Antonella Barucci, Anne Lemaître, Nicolas Rambaux, Françoise Roques, Paolo Tanga et Gilles Vilmart d'avoir accepté de prendre part à ce jury.

J'ai réalisé ma thèse au sein de l'équipe *Astronomie et Systèmes Dynamiques* de l'IMCCE, où règne la bonne humeur et la tranquillité. Je remercie ainsi l'ensemble des personnes de l'équipe pour leur disponibilité et leur sincérité.

Je remercie notamment Mickaël Gastineau pour sa grande disponibilité et son aide précieuse pour résoudre les nombreux problèmes informatiques que j'ai rencontrés. Je le remercie aussi pour les nombreux développements effectués sur TRIP, qui ont grandement facilité ce travail. Je remercie également Hervé Manche pour ses explications sur INPOP et les systèmes de référence et Frédéric Dauvergne pour son aide pour la résolution de nombreux problèmes numériques et ses conseils.

Je remercie pour sa disponibilité et sa gentillesse Agnès Patu, qui m'a aidé pour effectuer de nombreuses formalités administratives. Sa relecture attentive de cette thèse m'a été très utile.

Je tiens à remercier les personnes qui m'ont permis d'enseigner au sein de l'Observatoire de Paris. Je remercie ainsi Noël Robichon de m'avoir permis de participer aux enseignements de la formation des professeurs et de m'avoir initié à l'astronomie instrumentale. Je le remercie également de m'avoir permis d'encadrer des observations à la coupole Arago et à l'Observatoire de Haute-Provence.

Je remercie Laurent Niederman de m'avoir permis d'encadrer les enseignements de son cours de mathématiques du M1 de l'Observatoire, qui m'ont beaucoup apporté. Je remercie Pierre Baudoz pour avoir pu participer à l'encadrement des TP d'optique de la licence de PSL.

Je remercie aussi Mathieu Puech de m'avoir permis de participer à l'encadrement du diplôme universitaire *Explorer et Comprendre l'Univers* et Caroline Barban, qui m'a permis de participer au tutorat du diplôme universitaire *Fenêtres sur l'Univers*.

Je tiens à remercier les doctorants et post-doctorants que j'ai cotoyés à l'IMCCE et à l'Observatoire de Paris pendant ces années de thèse, notamment Farida Baidolda, Nathan Hara, Léo Bernus, Pierre Auclair-Desrotour, Alexandre Pousse, Eduardo Andrade-Ines, Simon Jeanne, César Gattano, Antoine Petit, Julien Dassa-Terrier, Guillaume Voisin, Loïc Chantry.

Enfin, je remercie ma famille pour leur aide et leur soutien lors de ce travail.



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>9</b>
<b>I Étude de la rotation à long terme de Cérès et Vesta</b>	<b>11</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>13</b>
1.1 Cérès et Vesta . . . . .	13
1.2 Méthodes pour le calcul à long terme de la rotation . . . . .	14
1.3 Plan . . . . .	15
<b>2 Intégration de la rotation à long terme</b>	<b>17</b>
2.1 Hamiltonien total . . . . .	17
2.1.1 Équations générales . . . . .	17
2.1.2 Intégration symplectique du hamiltonien total . . . . .	18
2.2 Hamiltonien obtenu par une moyenne de la rotation propre . . . . .	22
2.2.1 Les variables action-angle d'Andoyer . . . . .	22
2.2.2 Moyenne sur les angles rapides . . . . .	24
2.2.3 Intégration du hamiltonien d'interaction . . . . .	25
2.2.4 Intégration du moment cinétique forcé . . . . .	28
2.2.5 Effet de marées sur la Terre . . . . .	28
2.3 Hamiltonien séculaire . . . . .	33
2.3.1 Relation entre le moment cinétique et l'axe de rotation . . . . .	33
2.3.2 Moyenne sur le mouvement orbital . . . . .	34
2.3.3 Constante de précession . . . . .	35
2.3.4 Fréquence de précession et résonances séculaires . . . . .	36
2.3.5 Hamiltonien séculaire en variables d'Andoyer . . . . .	36
<b>3 Mouvements orbitaux de Cérès et Vesta</b>	<b>39</b>
3.1 Solution orbitale La2011 . . . . .	39
3.1.1 Cérès . . . . .	41
3.1.2 Vesta . . . . .	44
3.2 Modèle séculaire hamiltonien . . . . .	47
3.2.1 Construction du modèle séculaire . . . . .	47
3.2.2 Ajustement du modèle séculaire . . . . .	49
3.2.3 Étude des résonances proches . . . . .	51
3.3 Construction d'une solution orbitale séculaire . . . . .	54
<b>4 Caractéristiques physiques et de rotation de Cérès et Vesta</b>	<b>57</b>
4.1 Cérès . . . . .	57
4.1.1 Caractéristiques physiques . . . . .	57
4.1.2 Moment d'inertie polaire . . . . .	58
4.1.3 Angle d'Andoyer $J$ . . . . .	60
4.1.4 Constante de précession . . . . .	61
4.1.5 Cérès primitif . . . . .	61

4.2	Vesta . . . . .	61
4.2.1	Caractéristiques physiques . . . . .	61
4.2.2	Moment d’inertie polaire . . . . .	62
4.2.3	Angle d’Andoyer $J$ . . . . .	63
4.2.4	Constante de précession . . . . .	63
4.2.5	Vesta primitif . . . . .	64
4.3	Conditions initiales de l’axe de rotation . . . . .	64
<b>5</b>	<b>Mouvements de rotation de Cérès et Vesta</b>	<b>67</b>
5.1	Perturbations du mouvement de rotation . . . . .	67
5.1.1	Satellites . . . . .	67
5.1.2	Dissipation de marées . . . . .	68
5.1.3	Rencontres proches . . . . .	69
5.2	Calcul de la solution pour la rotation . . . . .	75
5.2.1	Comparaison avec la solution La2011 . . . . .	76
5.2.2	Estimation des effets du chaos orbital . . . . .	76
5.2.3	Estimation des effets du chaos du mouvement de rotation . . . . .	80
5.2.4	Estimation des autres effets . . . . .	82
5.3	Solution Ceres2017 pour la rotation de Cérès et Vesta . . . . .	89
5.3.1	Cérès . . . . .	89
5.3.2	Vesta . . . . .	94
5.3.3	Intégrations pour différents moments d’inertie . . . . .	98
5.4	Étude de la stabilité de l’axe de rotation . . . . .	102
5.4.1	Solution séculaire pour l’obliquité . . . . .	102
5.4.2	Étude des résonances proches . . . . .	105
5.4.3	Cartes de stabilité de l’axe de rotation . . . . .	109
<b>6</b>	<b>Évolution de l’insolation et contraintes sur la distribution de glace de Cérès</b>	<b>113</b>
6.1	Calcul de l’insolation . . . . .	113
6.1.1	Insolation instantanée à une latitude donnée . . . . .	114
6.1.2	Insolation journalière à une latitude donnée . . . . .	114
6.1.3	Insolation annuelle à une latitude donnée . . . . .	115
6.1.4	Insolation journalière moyenne . . . . .	116
6.1.5	Insolation annuelle moyenne . . . . .	116
6.2	Calcul de la température . . . . .	116
6.2.1	Détermination de la température à la surface . . . . .	116
6.2.2	Modèles simplifiés . . . . .	117
6.3	Stabilité de la glace sous la surface de Cérès . . . . .	118
6.3.1	Conditions de stabilité de la glace à la surface . . . . .	118
6.3.2	Conditions de stabilité de la glace sous la surface . . . . .	119
6.4	Étude de la stabilité de la glace sous la surface de Cérès . . . . .	119
6.5	Comparaison avec les études précédentes . . . . .	122
<b>II</b>	<b>Intégrateurs symplectiques pour le corps solide libre</b>	<b>123</b>
<b>7</b>	<b>Introduction</b>	<b>125</b>
7.1	Intégration du corps solide libre . . . . .	125
7.2	Intégrateurs symplectiques . . . . .	126
7.3	Intégrateurs symplectiques pour le corps solide libre . . . . .	129
7.4	Plan . . . . .	131

<b>8</b>	<b>Étude de l'algèbre de Lie du moment cinétique</b>	<b>133</b>
8.1	Résidus pour les premiers ordres . . . . .	134
8.1.1	Ordre 1 . . . . .	134
8.1.2	Ordre 2 . . . . .	134
8.1.3	Ordre 3 . . . . .	134
8.1.4	Ordre 4 . . . . .	135
8.1.5	Ordre 5 . . . . .	135
8.2	Bilan . . . . .	136
8.3	Résidus à tout ordre . . . . .	137
8.3.1	Théorème 1 . . . . .	137
8.3.2	Démonstration . . . . .	137
8.4	Formule de réduction . . . . .	138
8.4.1	Théorème 2 . . . . .	138
8.4.2	Démonstration . . . . .	139
<b>9</b>	<b>Obtention d'intégrateurs symplectiques spécifiques au corps solide libre</b>	<b>141</b>
9.1	Construction d'intégrateurs symétriques d'ordre 4 . . . . .	141
9.1.1	Décomposition ABC : intégrateurs N . . . . .	141
9.1.2	Décomposition RS . . . . .	144
9.1.3	Estimation des résidus d'ordre 5 . . . . .	145
9.2	Ajout d'une étape supplémentaire . . . . .	146
9.2.1	Décomposition ABC : intégrateurs P . . . . .	146
9.2.2	Décomposition RS : intégrateur R . . . . .	147
9.3	Coût des intégrateurs du type RS . . . . .	147
9.4	Nombre d'étapes des intégrateurs spécifiques . . . . .	148
9.4.1	Nombre de coefficients . . . . .	149
9.4.2	Nombre de relations entre les coefficients . . . . .	151
9.4.3	Nombre d'équations . . . . .	151
9.4.4	Nombre d'étapes . . . . .	152
<b>10</b>	<b>Tests numériques</b>	<b>155</b>
10.1	Méthode . . . . .	155
10.1.1	Principe . . . . .	156
10.1.2	Intégrateurs de référence . . . . .	156
10.1.3	Coût des intégrateurs . . . . .	159
10.2	Toupie sphérique . . . . .	159
10.3	Molécule d'eau . . . . .	163
10.3.1	Intégrateurs N . . . . .	163
10.3.2	Intégrateurs P et R . . . . .	165
10.4	Corps quelconque . . . . .	167
10.4.1	Ensemble des moments d'inertie . . . . .	167
10.4.2	Intégrateurs N . . . . .	169
10.4.3	Intégrateurs P . . . . .	171
10.5	Comparaison avec l'algorithme de Moser-Veselov . . . . .	173
<b>11</b>	<b>Utilisation de correcteurs pour le corps solide libre</b>	<b>177</b>
11.1	Correcteur d'ordre 4 . . . . .	179
11.2	Correcteur d'ordre 6 . . . . .	181
11.3	Correcteurs d'ordre supérieur . . . . .	185
	<b>Conclusion</b>	<b>189</b>



<b>A</b>	<b>Variables canoniques en mécanique céleste</b>	<b>193</b>
A.1	Variables canoniques barycentriques . . . . .	193
A.2	Variables canoniques héliocentriques . . . . .	193
A.3	Éléments elliptiques . . . . .	194
A.4	Variables canoniques rectangulaires de Poincaré . . . . .	195
<b>B</b>	<b>Analyse en fréquence</b>	<b>197</b>
B.1	Principe . . . . .	197
B.2	Précision . . . . .	198
<b>C</b>	<b>Termes supplémentaires utilisés pour la solution séculaire de Cérès et Vesta</b>	<b>199</b>
C.1	Cérès . . . . .	199
C.2	Vesta . . . . .	201
<b>D</b>	<b>Équations des coefficients des intégrateurs spécifiques N</b>	<b>205</b>
<b>E</b>	<b>Solution du corps solide libre</b>	<b>209</b>
E.1	Solution pour le moment cinétique . . . . .	210
E.1.1	$2I_1H < 2I_2H < G^2 < 2I_3H$ ou $2I_1H > 2I_2H > G^2 > 2I_3H$ . . . . .	210
E.1.2	$2I_1H < G^2 < 2I_2H < 2I_3H$ ou $2I_1H > G^2 > 2I_2H > 2I_3H$ . . . . .	212
E.2	Solution pour la matrice de rotation . . . . .	213
E.2.1	$2I_1H < 2I_2H < G^2 < 2I_3H$ ou $2I_1H > 2I_2H > G^2 > 2I_3H$ . . . . .	214
E.2.2	$2I_1H < G^2 < 2I_2H < 2I_3H$ ou $2I_1H > G^2 > 2I_2H > 2I_3H$ . . . . .	214
	<b>Bibliographie</b>	<b>215</b>

# Unités et notations

jr	Un jour solaire, soit 86400 secondes
yr	Une année julienne, soit 365.25 jours solaires
kyr	$10^3$ yr
Myr	$10^6$ yr
Gyr	$10^9$ yr
UA	Unité astronomique
"	Une seconde de degré, soit $1/3600^\circ$
mas	Un millième de seconde de degré, soit $0.001''$
INPOP	Intégrateur Numérique Planétaire de l'Observatoire de Paris
ICRF	<i>International Celestial Reference Frame</i>
J2000	L'époque J2000 correspond au midi du premier janvier 2000 en temps dynamique barycentrique (TDB).



# Introduction

Sous l'effet du couple exercé par le Soleil, l'axe de rotation d'un corps du système solaire décrit un mouvement de précession par rapport à son orbite sur des échelles séculaires. Suite aux perturbations planétaires, les orbites des corps dans le système solaire présentent eux aussi des mouvements de précession séculaires. Ces deux mouvements génèrent des variations séculaires de l'obliquité. L'obliquité est l'inclinaison de l'équateur du corps sur son orbite et est un paramètre important pour l'étude du climat d'un corps, puisqu'elle contrôle les variations climatiques saisonnières. Si la fréquence de précession de l'axe de rotation est proche d'une fréquence séculaire orbitale, une résonance séculaire entre les mouvements orbital et de rotation peut conduire à des variations importantes de l'obliquité. Le recouvrement de résonances séculaires peut engendrer des variations chaotiques de l'obliquité, comme cela a lieu pour la planète Mars (Laskar et Robutel, 1993).

Cette rotation à long terme peut être étudiée à l'aide de modèles séculaires semi-analytiques (e.g. Kinoshita, 1977, Laskar et Robutel, 1993) ou par une intégration directe des équations orbitales et de rotation couplées (e.g. Touma et Wisdom, 1994). Une intégration directe nécessite d'utiliser un pas d'intégration suffisamment faible pour intégrer la rotation propre, qui est généralement rapide pour les corps du système solaire. Pour intégrer un mouvement de rotation présentant une période de l'ordre d'une dizaine d'heures, il est ainsi nécessaire d'utiliser par exemple un pas d'une dizaine de minutes. Les intégrations directes présentent ainsi un temps de calcul important. Les modèles séculaires semi-analytiques sont eux obtenus en réalisant une moyenne sur les mouvements orbitaux et de rotation rapides. Leur intégration nécessite alors l'utilisation d'un pas de temps de l'ordre d'une centaine d'années pour les corps du système solaire et est nettement plus rapide qu'une intégration directe. Ils ont ainsi été utilisés pour étudier la stabilité de l'axe de rotation des planètes du système solaire (Laskar et Robutel, 1993), leur temps d'intégration rapide permettant de réaliser de nombreuses intégrations pour différents paramètres de la rotation. Ils facilitent aussi l'identification des résonances séculaires entre le mouvement orbital et la rotation.

L'objectif de ce travail est ainsi de développer et d'appliquer des outils pour étudier la stabilité du mouvement de rotation à long terme des corps célestes. Ces outils pourraient notamment être utilisés pour étudier la stabilité de la rotation des astéroïdes. On s'intéressera aussi à l'origine d'une éventuelle instabilité ainsi qu'à ses conséquences physiques sur l'astéroïde. Plusieurs astéroïdes présentent une composition riche en glace et l'étude de leur rotation pourrait aussi permettre de donner des contraintes sur la distribution de glace sur et sous la surface. Dans ce travail, on s'intéressera aussi aux phénomènes susceptibles d'affecter la rotation à long terme des astéroïdes. De tels outils pourraient aussi être appliqués aux exoplanètes découvertes afin d'obtenir leurs mouvements orbitaux et de rotation à long terme et d'en déduire l'évolution de leurs insolation. L'insolation est un paramètre nécessaire pour étudier le climat et son évolution, et ces outils permettraient ainsi de donner des contraintes pour l'étude du climat des exoplanètes.

La première partie de ce travail est consacrée à l'étude de la rotation à long terme de Cérès et Vesta, les deux corps les plus massifs de la ceinture principale d'astéroïdes. Ils ont été récemment étudiés par la sonde spatiale *Dawn*, qui a permis de détecter à la surface de Cérès des zones d'ombre permanentes dans lesquelles des dépôts de glace pourraient subsister et dont la superficie diminue lorsque l'obliquité augmente (Platz *et al.*, 2016, Ermakov *et al.*, 2017a). Les rotations de Cérès et Vesta étant rapides, la méthode symplectique de Farago *et al.* (2009) peut être utilisée afin d'intégrer les équations de la rotation obtenues en réalisant une moyenne sur la rotation propre rapide et couplées aux équations orbitales. L'évolution à long terme de l'obliquité de Cérès et Vesta a ainsi pu être obtenue. Cette évolution dépend des conditions initiales de l'axe de rotation et des paramètres physiques de Cérès et

Vesta déterminés par *Dawn*. L'étude de la stabilité de l'axe de rotation de Cérès et Vesta a été réalisée avec un modèle séculaire semi-analytique en fonction des paramètres de la rotation, qui a permis de montrer que leurs axes de rotation ne présentaient pas de caractère chaotique.

La seconde partie de ce travail a consisté à développer des intégrateurs symplectiques dédiés au corps solide. Les intégrations directes des équations de la rotation nécessitent d'intégrer les équations du corps solide libre. Le hamiltonien du corps solide libre est certes intégrable et présente une solution explicite nécessitant l'usage des fonctions elliptiques de Jacobi, cependant le coût numérique de ces fonctions reste élevé. Cela n'est pas un problème lorsque seule la position finale du corps est nécessaire. Cependant lorsque le hamiltonien du corps solide libre est couplé avec une énergie potentielle, l'orientation du corps doit être calculée pour chaque pas d'intégration. Des intégrateurs symplectiques ont ainsi été précédemment proposés pour le corps solide libre ([McLachlan, 1993](#), [Touma et Wisdom, 1994](#), [Reich, 1994](#)). Dans ce travail, de nouveaux intégrateurs spécifiques au corps solide ont été développés en utilisant les propriétés de l'algèbre de Lie du moment cinétique.

Première partie

Étude de la rotation à long terme de  
Cérès et Vesta



# Chapitre 1

## Introduction

La première partie de ce travail est consacrée à l'étude de la rotation à long terme de la planète naine Cérès et de l'astéroïde Vesta. Dans ce chapitre introductif, nous allons d'abord décrire ces deux corps et les avancées permises par la sonde spatiale *Dawn* ainsi que les enjeux de cette étude. Nous décrirons ensuite les méthodes existantes pour le calcul de la rotation à long terme. Enfin nous annoncerons le plan de cette partie.

### 1.1 Cérès et Vesta

(1) Cérès et (4) Vesta sont respectivement les premier et deuxième corps les plus massifs de la ceinture principale d'astéroïdes. Ils sont l'objet d'étude de la sonde spatiale *Dawn* (Russell et Raymond, 2011) développée par la NASA (*National Aeronautics and Space Administration*) et lancée le 27 septembre 2007. Elle est arrivée en juin 2011 à sa première destination, Vesta, qu'elle a observée jusqu'en août 2012. Elle s'est ensuite dirigée vers Cérès, qu'elle a atteint en mars 2015 et étudie depuis.

La sonde spatiale *Dawn* a notamment permis de déterminer les formes, les champs de gravité et les compositions de surface de Cérès et Vesta (Russell *et al.*, 2012, Russell *et al.*, 2016). La forme de Cérès a été observée par *Dawn* et a été approchée par un ellipsoïde de dimensions  $(483.1, 481.0, 445.9) \pm 0.2$  km (Russell *et al.*, 2016). Une densité de  $2162 \pm 3$  kg m<sup>-3</sup> a été déduite des données de *Dawn* (Russell *et al.*, 2016). La densité de Cérès laisse supposer une composition en masse d'environ de 17 à 27% en eau (McCord et Sotin, 2005, Castillo-Rogez et McCord, 2010). La présence d'eau sur Cérès a été confirmée par *Dawn* (Ruesch *et al.*, 2016, Prettyman *et al.*, 2017, Schmidt *et al.*, 2017, Fu *et al.*, 2017). La croûte de Cérès aurait une composition en eau inférieure à 25% du volume Fu *et al.* (2017) et l'existence de cryo-volcanisme sur Cérès a été révélée par la présence d'un dôme cryo-volcanique (Ruesch *et al.*, 2016). Cérès serait partiellement différencié et composé d'une couche externe constituée d'eau, de silicates et de sels et d'un manteau plus dense de composition similaire aux météorites carbonées (Park *et al.*, 2016). La sonde spatiale *Dawn* a permis d'observer localement à la surface de Cérès des zones brillantes dues à des sels identifiés comme des carbonates de sodium (De Sanctis *et al.*, 2016).

L'astéroïde Vesta présente une densité de  $3456 \pm 35$  kg m<sup>-3</sup> déterminée par *Dawn* (Russell *et al.*, 2012). Vesta est un corps différencié et pourrait être le vestige d'une protoplanète. La forme observée par la sonde spatiale *Dawn* peut être approchée par un ellipsoïde de dimensions  $(286.3, 278.6, 223.2) \pm 0.1$  km (Russell *et al.*, 2012). Vesta serait constitué d'un noyau de fer, d'un manteau d'olivine ainsi que d'une croûte de composition similaire à celles des météorites HED (Howardite-Eucrite-Diogenite) retrouvées sur Terre (e.g. Russell *et al.*, 2012, Ermakov *et al.*, 2014). La sonde spatiale *Dawn* a permis de confirmer que Vesta serait la source des météorites HED créées lors d'un impact géant (De Sanctis *et al.*, 2012) et a identifié la dépression observée au niveau de l'hémisphère sud de Vesta (Thomas *et al.*, 1997b) comme la superposition de deux bassins d'impacts géants (Marchi *et al.*, 2012, Schenk *et al.*, 2012).

Pour calculer l'évolution à long terme de la rotation, nous avons besoin de connaître les vitesses de rotation et les orientations initiales des axes de rotation de Cérès et Vesta. La sonde spatiale *Dawn* a permis de préciser ces quantités (Konopliv *et al.*, 2014, Park *et al.*, 2016). Les fréquences de précession des axes de rotation de Cérès et Vesta n'ont pas été déterminées par la mission spatiale *Dawn*. Les fréquences de précession peuvent être alors seulement estimées à partir de leurs structures internes,



cependant des incertitudes demeurent sur ces dernières (e.g. [Park et al., 2014](#), [Park et al., 2016](#)). La structure interne, par le biais du moment d’inertie polaire, présente en effet une influence sur la rotation à long terme, la fréquence de précession étant notamment inversement proportionnelle au moment d’inertie polaire. L’incertitude sur la structure interne se retrouve ainsi sur la fréquence de précession. La présence de satellites peut aussi modifier la fréquence de précession, cependant aucun satellite n’a été détecté autour de Cérès et Vesta par le télescope spatial *Hubble* ([McFadden et al., 2012](#), [DeMario et al., 2016](#)) et cette absence de satellites a été confirmée pour Vesta par *Dawn* ([McFadden et al., 2015](#)).

L’étude de la rotation à long terme de Cérès et donc du mouvement de précession de l’axe de rotation est nécessaire afin de contraindre la distribution de la glace sur et en dessous la surface. Les régions d’un corps planétaire, qui ne sont pas directement éclairées par le Soleil au cours d’une révolution complète, peuvent présenter des températures plus froides que celles des régions éclairées et sont appelées pièges froids. Leur température plus faible peut permettre d’éviter la sublimation de la glace et elles sont ainsi susceptibles d’héberger de la glace à leur surface. De telles régions contenant de la glace ont été détectées précédemment sur la Lune ([Feldman et al., 1998](#), [Colaprete et al., 2010](#)) et Mercure ([Paige et al., 2013](#), [Chabot et al., 2014](#)). La sonde spatiale *Dawn* a observé dans les régions polaires de l’hémisphère nord de Cérès de tels pièges froids à proximité d’un desquels de la glace a été détectée par le spectromètre de *Dawn* ([Platz et al., 2016](#)). [Ermakov et al. \(2017a\)](#) ont déterminé l’évolution de l’obliquité de Cérès, angle de l’inclinaison de l’équateur sur l’orbite, qui varie entre 2 et 20°, et la superficie des terrains non éclairés par le Soleil en fonction de l’obliquité. [Ermakov et al. \(2017a\)](#) observent ainsi que les régions qui restent non éclairées pour une obliquité de 20° concordent à celles où des dépôts brillants susceptibles d’être de la glace ont été détectés. La sonde spatiale *Dawn* a détecté la présence de glace sous la surface de Cérès à partir des données de son spectromètre à rayons gamma et neutrons (GRaND, *Gamma Ray and Neutron Detector*) ([Prettyman et al., 2017](#)). L’étude de la morphologie des terrains de Cérès obtenue par *Dawn* a montré la présence d’eau en profondeur ([Schmidt et al., 2017](#)), qui est plus abondante près des pôles conformément aux données spectroscopiques ([Prettyman et al., 2017](#)). La distribution et la profondeur de la glace dépendent de l’évolution de l’obliquité ([Schorghofer, 2008, 2016](#)), qui est responsable des variations de température saisonnières.

Pour Vesta, l’étude de la rotation à long terme est nécessaire afin de connaître ses variations d’obliquité et sa fréquence de précession. Les deux impacts géants subis par Vesta ont modifié sa forme et sa vitesse de rotation ([Fu et al., 2014](#), [Ermakov et al., 2014](#)). Pour ces deux corps, les impacts avec les astéroïdes et les rencontres proches peuvent ainsi avoir modifié leurs rotations à long terme. En outre, il existe des rencontres proches entre Cérès, Vesta et des astéroïdes de la ceinture principale, responsables du comportement chaotique de leurs orbites ([Laskar et al., 2011b](#)). Ces rencontres proches pourraient avoir une influence sur la rotation à long terme.

## 1.2 Méthodes pour le calcul à long terme de la rotation

La rotation à long terme dans le système solaire peut être calculée à partir d’équations séculaires ([Kinoshita, 1977](#), [Laskar, 1986](#), [Laskar et Robutel, 1993](#)), où le mouvement de rotation est forcé par une solution orbitale séculaire ou à partir d’une intégration symplectique des équations orbitales et de rotation couplées ([Touma et Wisdom, 1994](#)). Les équations séculaires sont obtenues en réalisant une moyenne sur la longitude moyenne et la rotation propre, généralement rapide pour les corps du système solaire avec une période de rotation de l’ordre d’une dizaine d’heures. Leur intégration nécessite alors un pas de temps d’une centaine d’années et est ainsi beaucoup plus rapide que celles des équations complètes, qui, pour une rotation présentant une période d’une dizaine d’heures, doivent être résolues avec un pas d’intégration d’environ une dizaine de minutes.

Les équations séculaires peuvent être intégrées rapidement et ont été utilisées par [Laskar et Robutel \(1993\)](#) pour étudier la stabilité des axes de rotation des planètes du système solaire sur environ les 20 derniers millions d’années en réalisant des intégrations pour des conditions initiales différentes. En utilisant la même méthode que [Laskar et Robutel \(1993\)](#), [Skoglöv et al. \(1996\)](#) ont étudié la stabilité de la rotation et les variations de l’obliquité pour dix corps de la ceinture principale d’astéroïdes dont Cérès

et Vesta. Cependant, les conditions initiales pour les axes de rotation n'étaient alors pas précisément connues et le manque de connaissances sur leurs structures internes ne permettait pas de contraindre leurs fréquences de précession. [Skoglöv et al. \(1996\)](#) ont ainsi estimé les fréquences de précession en considérant des corps homogènes et ont conclu que leurs rotations à long terme étaient relativement stables. En utilisant les équations séculaires et un modèle séculaire pour le mouvement orbital, [Bills et Scott \(2017\)](#) ont déterminé les variations d'obliquité de Cérès. [Ermakov et al. \(2017a\)](#) ont réalisé une intégration symplectique des équations orbitales et de rotation complètes pour obtenir l'évolution de l'obliquité de Cérès.

### 1.3 Plan

Le but de cette partie est d'étudier les variations d'obliquité de Cérès et Vesta. Pour cela, on déterminera les variations possibles d'obliquité en fonction des différentes structures internes obtenues à partir des données de la sonde spatiale *Dawn*. On s'intéressera aux effets susceptibles de jouer un rôle sur la rotation à long terme, dont les rencontres proches au sein de la ceinture principale d'astéroïdes ainsi que les impacts géants. On étudiera enfin la stabilité de leurs axes de rotation.

Le chapitre 2 traite des équations générales permettant de décrire la rotation d'un corps et compare les différentes façons de réaliser l'intégration de la rotation. On appliquera la méthode de [Farago et al. \(2009\)](#) afin de réaliser une intégration symplectique des équations des mouvements orbitaux et de rotation couplées, où une moyenne est réalisée sur la rotation rapide. Cette méthode sera utilisée dans le chapitre 5 pour obtenir la solution de la rotation à long terme de Cérès et Vesta. On décrira aussi les équations séculaires de la rotation, où le mouvement de rotation est forcé par une solution orbitale séculaire et dont l'intégration est plus rapide. Ces équations seront utilisées dans le chapitre 5 pour étudier la stabilité des axes de rotation de Cérès et Vesta.

Les équations de la rotation dépendent du mouvement orbital. Le chapitre 3 est ainsi consacré à l'étude du mouvement orbital de Cérès et Vesta. Les mouvements orbitaux de Cérès et Vesta ont été calculés précédemment pour la solution La2011 et nous les analyserons ici à l'aide de l'analyse en fréquence afin d'identifier les termes susceptibles de jouer un rôle dans le mouvement à long terme de la rotation. Nous réaliserons aussi une étude de la stabilité du mouvement orbital à l'aide d'un modèle séculaire afin d'observer les variations possibles du mouvement orbital. Enfin à partir des analyses en fréquence du mouvement orbital, nous construirons une solution séculaire orbitale que nous utiliserons pour forcer le mouvement de rotation dans les équations séculaires dans le chapitre 5.

Pour calculer la rotation à long terme de Cérès et Vesta, nous avons besoin de connaître les caractéristiques physiques et les conditions initiales des axes de rotation de Cérès et Vesta. Cela est l'objet du chapitre 4. Les données de *Dawn* n'ayant pas permis de mesurer les fréquences de précession des axes de rotation, nous allons les estimer à partir des caractéristiques physiques. Parmi celles-ci, le moment d'inertie polaire dépend de la structure interne, sur laquelle des incertitudes demeurent. À partir des incertitudes sur les structures internes, nous obtiendrons ainsi une incertitude sur les constantes de précession.

Les fréquences et les conditions initiales étant connues pour les axes de rotation, nous pouvons réaliser une intégration pour obtenir une solution à long terme de la rotation de Cérès et Vesta selon la méthode de [Farago et al. \(2009\)](#), que l'on appellera Ceres2017. Le chapitre 5 concerne ainsi l'étude de cette solution, que nous étudierons à l'aide de l'analyse en fréquence. On estimera l'effet des perturbations possibles de l'axe de rotation, dont celles des rencontres proches entre corps de la ceinture principale. On s'intéressera aussi aux variations de l'obliquité sur l'intervalle d'incertitudes des fréquences de précession. Enfin, on étudiera la stabilité des axes de rotation à l'aide des équations séculaires ainsi que les effets possibles des résonances séculaires proches avec les fréquences orbitales.

Dans le chapitre 6, nous utiliserons les solutions obtenues pour les mouvements orbital et de rotation de Cérès pour étudier la stabilité de la glace sous sa surface. [Schorghofer \(2008\)](#) a établi un critère de stabilité de la glace sous la surface : cette dernière serait stable à quelques dizaines de centimètres sous la surface si la température annuelle ne dépasse pas 145 K. À l'aide d'un modèle de température très simplifié, nous donnerons une borne supérieure aux variations séculaires de la température annuelle en fonction de la latitude, ce qui nous permettra de déduire une latitude de stabilité de la glace.

Pour cette étude, nous utiliserons les variables canoniques définies en mécanique céleste, dont la description se trouve dans l'annexe A. Afin d'étudier les solutions obtenues pour les mouvements orbitaux et de rotation, nous utiliserons la méthode d'analyse en fréquence développée par Jacques Laskar (Laskar, 1988, 1990, Laskar *et al.*, 1992, Laskar, 1993, 2003), qui permet d'écrire une fonction discrète sous la forme d'une approximation quasi-périodique. Cette méthode, dont le principe est décrit succinctement dans l'annexe B, nous permettra notamment d'identifier les fréquences intervenant dans les mouvements orbitaux et de rotation ainsi que d'étudier leurs stabilités.

## Chapitre 2

# Intégration de la rotation à long terme

Nous allons décrire ici les différentes équations permettant d'obtenir l'évolution à long terme de la rotation d'un corps céleste, qui peuvent être obtenues à partir de trois hamiltoniens. Le hamiltonien total décrit les mouvements complets de l'orbite et de la rotation des corps en interaction dans un système planétaire. Dans le cas, où les corps sont considérés comme des points matériels à l'exception d'un seul, considéré comme un corps solide, on peut réaliser une moyenne sur sa rotation rapide, pour obtenir un hamiltonien décrivant les mouvements orbitaux au sein du système planétaire et le mouvement du moment cinétique de rotation du corps solide. On peut enfin obtenir un hamiltonien séculaire en réalisant une moyenne sur les mouvements de révolution des corps sur leurs orbites. Cela permet de décrire le mouvement séculaire du moment cinétique de rotation à partir d'un mouvement orbital séculaire. Ces trois hamiltoniens aboutissent à des équations différentielles, qui font intervenir des échelles de temps différentes. Leur intégration nécessitera ainsi des pas d'intégration différents en fonction du hamiltonien considéré pour obtenir les équations de la rotation.

### 2.1 Hamiltonien total

#### 2.1.1 Équations générales

Soit un système planétaire composé d'une étoile centrale de masse  $m_0$  et de  $n$  corps de masse  $(m_1, \dots, m_n)$  en orbite autour de l'étoile. Le corps 1 est un corps solide non sphérique, qui présente un renflement équatorial. Les autres corps sont considérés comme des points matériels.  $(\mathbf{r}_1, \tilde{\mathbf{r}}_1)$  sont les coordonnées héliocentriques canoniques du corps solide et  $(\mathbf{r}_k, \tilde{\mathbf{r}}_k)$  les coordonnées héliocentriques canoniques des autres corps (voir annexe A).

Le hamiltonien total du système peut s'écrire (e.g. [Boué et Laskar, 2006](#))

$$H = H_N + H_I + H_E. \quad (2.1)$$

Le hamiltonien  $H_N$  décrit le mouvement orbital des  $n + 1$  points matériels et le hamiltonien  $H_I = H_{I,0} + \sum_{k=2}^n H_{I,k}$  est le hamiltonien d'interaction, où  $H_{I,0}$  représente l'interaction entre le renflement équatorial du corps 1 et l'étoile centrale, et  $H_{I,k}$  l'interaction entre le renflement équatorial du corps 1 et le corps  $k$ . Le hamiltonien du corps solide rigide libre  $H_E$  s'écrit

$$H_E = \frac{1}{2} \mathbf{G} \cdot \mathcal{I}^{-1} \mathbf{G}, \quad (2.2)$$

où  $\mathbf{G}$  est le moment cinétique du corps solide et  $\mathcal{I}$  sa matrice d'inertie.  $\boldsymbol{\Omega} = \mathcal{I}^{-1} \mathbf{G}$  est le vecteur instantané de rotation du solide. Il existe un repère  $(\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K})$ , où la matrice  $\mathcal{I}$  est diagonale et s'écrit

$$\mathcal{I} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

avec  $A \leq B \leq C$ . Les vecteurs  $\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}$  donnent les directions des axes principaux d'inertie.  $A, B, C$  sont les moments d'inertie du solide associés aux axes principaux d'inertie. Ces derniers peuvent être

calculés à partir de la distribution de masse  $\rho(\mathbf{r}_M)$  avec  $\mathbf{r}_M = (x, y, z)$  un point du volume  $\mathcal{V}$  du corps selon

$$A = \int_{\mathcal{V}} (y^2 + z^2) \rho(\mathbf{r}_M) dx dy dz \quad (2.4)$$

$$B = \int_{\mathcal{V}} (x^2 + z^2) \rho(\mathbf{r}_M) dx dy dz \quad (2.5)$$

$$C = \int_{\mathcal{V}} (x^2 + y^2) \rho(\mathbf{r}_M) dx dy dz. \quad (2.6)$$

Le moment d'inertie moyen est défini par

$$I = \frac{A + B + C}{3}. \quad (2.7)$$

Le hamiltonien du corps solide rigide libre  $H_E$  s'écrit alors simplement

$$H_E = \frac{(\mathbf{G} \cdot \mathbf{I})^2}{2A} + \frac{(\mathbf{G} \cdot \mathbf{J})^2}{2B} + \frac{(\mathbf{G} \cdot \mathbf{K})^2}{2C}. \quad (2.8)$$

Un développement en polynômes de Legendre permet d'exprimer les hamiltoniens  $H_{I,0}$  et  $H_{I,k}$  sous la forme (e.g. [Boué et Laskar, 2006](#))

$$\begin{aligned} H_{I,0} = & -\frac{\mathcal{G}m_0}{4r_1^3} \left[ -(A + B + C) + 3(B + C - A) \left( \frac{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{I}}{r_1} \right)^2 + 3(C + A - B) \left( \frac{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{J}}{r_1} \right)^2 \right. \\ & \left. + 3(A + B - C) \left( \frac{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{K}}{r_1} \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} H_{I,k} = & -\frac{\mathcal{G}m_k}{4r_{1,k}^3} \left[ -(A + B + C) + 3(B + C - A) \left( \frac{\mathbf{r}_{1,k} \cdot \mathbf{I}}{r_{1,k}} \right)^2 + 3(C + A - B) \left( \frac{\mathbf{r}_{1,k} \cdot \mathbf{J}}{r_{1,k}} \right)^2 \right. \\ & \left. + 3(A + B - C) \left( \frac{\mathbf{r}_{1,k} \cdot \mathbf{K}}{r_{1,k}} \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (2.10)$$

avec  $\mathbf{r}_{1,k} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_k$  le vecteur position du corps solide 1 par rapport au corps  $k$ .

Comme  $\mathbf{J} = \mathbf{K} \times \mathbf{I}$ , il suffit de connaître  $\mathbf{I}$  et  $\mathbf{K}$  pour avoir l'orientation du corps. Tout vecteur  $\mathbf{r}$  peut être décomposé dans la base  $(\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K})$  et ainsi  $\mathbf{r}^2 = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{I})^2 + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{J})^2 + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{K})^2$ . En utilisant  $(\mathbf{r} \cdot \mathbf{J})^2 = \mathbf{r}^2 - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{I})^2 - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{K})^2$ , on peut écrire les hamiltoniens  $H_{I,0}$  et  $H_{I,k}$  pour qu'ils ne dépendent plus de  $\mathbf{J}$ . Ils s'écrivent alors (e.g. [Boué et Laskar, 2006](#))

$$H_{I,0} = -\frac{\mathcal{G}m_0}{2r_1^3} \left[ (A + C - 2B) + 3(B - A) \left( \frac{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{I}}{r_1} \right)^2 + 3(B - C) \left( \frac{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{K}}{r_1} \right)^2 \right], \quad (2.11)$$

$$H_{I,k} = -\frac{\mathcal{G}m_k}{2r_{1,k}^3} \left[ (A + C - 2B) + 3(B - A) \left( \frac{\mathbf{r}_{1,k} \cdot \mathbf{I}}{r_{1,k}} \right)^2 + 3(B - C) \left( \frac{\mathbf{r}_{1,k} \cdot \mathbf{K}}{r_{1,k}} \right)^2 \right]. \quad (2.12)$$

Les couples exercés sur le corps solide sont uniquement nuls pour  $A = B = C$ . Un tel corps, où les trois moments d'inertie sont égaux, est appelé toupie sphérique.

### 2.1.2 Intégration symplectique du hamiltonien total

Le hamiltonien total  $H = H_N + H_I + H_E$  peut être intégré de façon à conserver la structure canonique des équations du mouvement à l'aide d'un intégrateur symplectique. Pour cela, on peut décomposer le hamiltonien en parties dont l'intégration conservera la structure canonique des équations du mouvement. L'énergie totale et le moment cinétique total seront alors conservés. [Touma et Wisdom \(1994\)](#) ont développé un intégrateur symplectique où l'intégration a lieu dans le repère lié au corps solide. Nous allons décrire ainsi comment l'intégration du hamiltonien total peut être réalisée avec la

méthode de [Touma et Wisdom \(1994\)](#) dans un repère d'inertie. Le repère d'inertie peut par exemple être lié au plan invariant du système solaire, défini comme le plan perpendiculaire au moment cinétique total du système solaire.

Le hamiltonien total du système peut s'écrire sous la forme

$$H(\mathbf{r}_i, \tilde{\mathbf{r}}_i, \mathbf{G}, \mathbf{I}, \mathbf{K}) = H_N(\mathbf{r}_i, \tilde{\mathbf{r}}_i) + H_I(\mathbf{r}_i, \mathbf{I}, \mathbf{K}) + H_E(\mathbf{G}, \mathbf{I}, \mathbf{K}) \quad (2.13)$$

ce qui donne les équations du mouvement (e.g. [Boué et Laskar, 2006](#))

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}}_i = \nabla_{\tilde{\mathbf{r}}_i} H, \\ \dot{\tilde{\mathbf{r}}}_i = -\nabla_{\mathbf{r}_i} H, \\ \dot{\mathbf{G}} = \nabla_{\mathbf{G}} H \times \mathbf{G} + \nabla_{\mathbf{I}} H \times \mathbf{I} + \nabla_{\mathbf{K}} H \times \mathbf{K}, \\ \dot{\mathbf{I}} = \nabla_{\mathbf{G}} H \times \mathbf{I}, \\ \dot{\mathbf{K}} = \nabla_{\mathbf{G}} H \times \mathbf{K}, \end{cases} \quad (2.14)$$

soit

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}}_i = \nabla_{\tilde{\mathbf{r}}_i} H_N, \\ \dot{\tilde{\mathbf{r}}}_i = -\nabla_{\mathbf{r}_i} H_N - \nabla_{\mathbf{r}_i} H_I, \\ \dot{\mathbf{G}} = \nabla_{\mathbf{G}} H_E \times \mathbf{G} + \nabla_{\mathbf{I}} H_E \times \mathbf{I} + \nabla_{\mathbf{K}} H_E \times \mathbf{K} + \nabla_{\mathbf{I}} H_I \times \mathbf{I} + \nabla_{\mathbf{K}} H_I \times \mathbf{K}, \\ \dot{\mathbf{I}} = \nabla_{\mathbf{G}} H_E \times \mathbf{I}, \\ \dot{\mathbf{K}} = \nabla_{\mathbf{G}} H_E \times \mathbf{K}. \end{cases} \quad (2.15)$$

Or  $\nabla_{\mathbf{G}} H_E \times \mathbf{G} + \nabla_{\mathbf{I}} H_E \times \mathbf{I} + \nabla_{\mathbf{K}} H_E \times \mathbf{K} = \mathbf{0}$  d'où

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}}_i = \nabla_{\tilde{\mathbf{r}}_i} H_N(\mathbf{r}_i, \tilde{\mathbf{r}}_i), \\ \dot{\tilde{\mathbf{r}}}_i = -\nabla_{\mathbf{r}_i} H_N(\mathbf{r}_i, \tilde{\mathbf{r}}_i) - \nabla_{\mathbf{r}_i} H_I(\mathbf{r}_i, \mathbf{I}, \mathbf{K}), \\ \dot{\mathbf{G}} = \nabla_{\mathbf{I}} H_I(\mathbf{r}_i, \mathbf{I}, \mathbf{K}) \times \mathbf{I} + \nabla_{\mathbf{K}} H_I(\mathbf{r}_i, \mathbf{I}, \mathbf{K}) \times \mathbf{K}, \\ \dot{\mathbf{I}} = \nabla_{\mathbf{G}} H_E(\mathbf{G}, \mathbf{I}, \mathbf{K}) \times \mathbf{I}, \\ \dot{\mathbf{K}} = \nabla_{\mathbf{G}} H_E(\mathbf{G}, \mathbf{I}, \mathbf{K}) \times \mathbf{K}. \end{cases} \quad (2.16)$$

Pour réaliser une intégration symplectique, on décompose le hamiltonien en trois parties  $H_N$ ,  $H_I$  et  $H_E$ . Les équations du mouvement pour ces trois hamiltoniens sont respectivement

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}}_i = \nabla_{\tilde{\mathbf{r}}_i} H_N(\mathbf{r}_i, \tilde{\mathbf{r}}_i), \\ \dot{\tilde{\mathbf{r}}}_i = -\nabla_{\mathbf{r}_i} H_N(\mathbf{r}_i, \tilde{\mathbf{r}}_i), \\ \dot{\mathbf{G}} = \mathbf{0}, \\ \dot{\mathbf{I}} = \mathbf{0}, \\ \dot{\mathbf{K}} = \mathbf{0}, \end{cases} \quad (2.17)$$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{0}, \\ \dot{\tilde{\mathbf{r}}}_i = -\nabla_{\mathbf{r}_i} H_I(\mathbf{r}_i, \mathbf{I}, \mathbf{K}), \\ \dot{\mathbf{G}} = \nabla_{\mathbf{I}} H_I(\mathbf{r}_i, \mathbf{I}, \mathbf{K}) \times \mathbf{I} + \nabla_{\mathbf{K}} H_I(\mathbf{r}_i, \mathbf{I}, \mathbf{K}) \times \mathbf{K}, \\ \dot{\mathbf{I}} = \mathbf{0}, \\ \dot{\mathbf{K}} = \mathbf{0}, \end{cases} \quad (2.18)$$

et

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{0}, \\ \dot{\tilde{\mathbf{r}}}_i = \mathbf{0}, \\ \dot{\mathbf{G}} = \mathbf{0}, \\ \dot{\mathbf{I}} = \nabla_{\mathbf{G}} H_E(\mathbf{G}, \mathbf{I}, \mathbf{K}) \times \mathbf{I}, \\ \dot{\mathbf{K}} = \nabla_{\mathbf{G}} H_E(\mathbf{G}, \mathbf{I}, \mathbf{K}) \times \mathbf{K}. \end{cases} \quad (2.19)$$

### 2.1.2.1 Intégration de $H_N$

L'intégration du hamiltonien de  $n$  points matériels  $H_N$  peut être réalisée de façon symplectique avec les méthodes proposées par [Kinoshita \*et al.\* \(1991\)](#) et [Wisdom et Holman \(1991\)](#). Des intégrateurs plus performants ont été développés depuis pour l'intégration d'un système planétaire (e.g. [Laskar et Robutel, 2001](#), [Farrés \*et al.\*, 2013](#)).

### 2.1.2.2 Intégration de $H_I$

Comme  $H_I$  ne dépend pas de  $\tilde{\mathbf{r}}_i$  et  $\mathbf{G}$ , l'intégration de  $H_I$  seul donne ([Touma et Wisdom, 1994](#))

$$\begin{cases} \mathbf{r}_i(t) = \mathbf{r}_i(0) \\ \tilde{\mathbf{r}}_i(t) = \tilde{\mathbf{r}}_i(0) - (\nabla_{\mathbf{r}_i} H_I(\mathbf{r}_i, \mathbf{I}, \mathbf{K})) t \\ \mathbf{G}(t) = \mathbf{G}(0) + (\nabla_{\mathbf{I}} H_I(\mathbf{r}_i, \mathbf{I}, \mathbf{K}) \times \mathbf{I} + \nabla_{\mathbf{K}} H_I(\mathbf{r}_i, \mathbf{I}, \mathbf{K}) \times \mathbf{K}) t \\ \mathbf{I}(t) = \mathbf{I}(0) \\ \mathbf{K}(t) = \mathbf{K}(0), \end{cases} \quad (2.20)$$

soit le schéma d'intégration pour un pas de temps  $\Delta t$

$$\begin{cases} \mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}_1 \\ \tilde{\mathbf{r}}'_1 = \tilde{\mathbf{r}}_1 - \Delta t \frac{3\mathcal{G}m_0}{2r_1^5} \left( (A + C - 2B) + 5(B - A) \left( \frac{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{I}}{r_1} \right)^2 + 5(B - C) \left( \frac{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{K}}{r_1} \right)^2 \right) \mathbf{r}_1 \\ \quad + \Delta t \frac{3\mathcal{G}m_0}{r_1^5} ((B - A) (\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{I}) \mathbf{I} + (B - C) (\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{K}) \mathbf{K}) \\ \quad - \Delta t \sum_{k=2}^N \frac{3\mathcal{G}m_k}{2r_{1,k}^5} \left( (A + C - 2B) + 5(B - A) \left( \frac{\mathbf{r}_{1,k} \cdot \mathbf{I}}{r_{1,k}} \right)^2 + 5(B - C) \left( \frac{\mathbf{r}_{1,k} \cdot \mathbf{K}}{r_{1,k}} \right)^2 \right) \mathbf{r}_{1,k} \\ \quad + \Delta t \sum_{k=2}^N \frac{3\mathcal{G}m_k}{r_{1,k}^5} ((B - A) (\mathbf{r}_{1,k} \cdot \mathbf{I}) \mathbf{I} + (B - C) (\mathbf{r}_{1,k} \cdot \mathbf{K}) \mathbf{K}) \\ \mathbf{r}'_k = \mathbf{r}_k \\ \tilde{\mathbf{r}}'_k = \tilde{\mathbf{r}}_k \\ \quad + \Delta t \frac{3\mathcal{G}m_k}{2r_{1,k}^5} \left( (A + C - 2B) + 5(B - A) \left( \frac{\mathbf{r}_{1,k} \cdot \mathbf{I}}{r_{1,k}} \right)^2 + 5(B - C) \left( \frac{\mathbf{r}_{1,k} \cdot \mathbf{K}}{r_{1,k}} \right)^2 \right) \mathbf{r}_{1,k} \\ \quad - \Delta t \frac{3\mathcal{G}m_k}{r_{1,k}^5} ((B - A) (\mathbf{r}_{1,k} \cdot \mathbf{I}) \mathbf{I} + (B - C) (\mathbf{r}_{1,k} \cdot \mathbf{K}) \mathbf{K}) \\ \mathbf{G}' = \mathbf{G} - \Delta t \frac{3\mathcal{G}m_0}{r_1^5} ((B - A) (\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{I}) \mathbf{r}_1 \times \mathbf{I} + (B - C) (\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{K}) \mathbf{r}_1 \times \mathbf{K}) \\ \quad - \Delta t \sum_{k=2}^N \frac{3\mathcal{G}m_k}{r_{1,k}^5} ((B - A) (\mathbf{r}_{1,k} \cdot \mathbf{I}) \mathbf{r}_{1,k} \times \mathbf{I} + (B - C) (\mathbf{r}_{1,k} \cdot \mathbf{K}) \mathbf{r}_{1,k} \times \mathbf{K}) \\ \mathbf{I}' = \mathbf{I} \\ \mathbf{K}' = \mathbf{K}. \end{cases} \quad (2.21)$$

### 2.1.2.3 Intégration de $H_E$

Le hamiltonien  $H_E$  conserve le moment cinétique du corps solide  $\mathbf{G}$ . L'intégration symplectique du corps solide libre sera évoquée en détail dans la partie II. Pour intégrer le mouvement du corps solide, [Touma et Wisdom \(1994\)](#) proposent de le séparer en deux parties

$$H_E = H_{axi} + H_{tri}, \quad (2.22)$$

avec  $H_{axi}$  le hamiltonien d'une toupie axisymétrique  $H_{axi}$

$$H_{axi} = \left( \frac{1}{C} - \frac{1}{B} \right) \frac{(\mathbf{G} \cdot \mathbf{K})^2}{2} + \frac{\mathbf{G}^2}{2B}, \quad (2.23)$$

et  $H_{tri}$  la partie triaxiale

$$H_{tri} = \left( \frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right) \frac{(\mathbf{G} \cdot \mathbf{I})^2}{2}. \quad (2.24)$$

Les équations du mouvement sont données pour  $H_{axi}$  seul par

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{I}} = \left( \frac{1}{B} \mathbf{G} + \left( \frac{1}{C} - \frac{1}{B} \right) (\mathbf{G} \cdot \mathbf{K}) \mathbf{K} \right) \times \mathbf{I}, & (2.25) \\ \dot{\mathbf{K}} = \frac{1}{B} \mathbf{G} \times \mathbf{K}. & (2.26) \end{cases}$$

La solution de cette équation pour  $\mathbf{K}$  est

$$\mathbf{K}(t) = R_{\mathbf{G}}(\Omega_G t) \mathbf{K}(0) \quad (2.27)$$

avec

$$\Omega_G = \frac{\|\mathbf{G}\|}{B} \quad (2.28)$$

et  $R_{\mathbf{G}}$  la matrice de rotation autour de l'axe défini par  $\mathbf{G}$  dans le repère d'inertie. L'intégration conserve ainsi le produit scalaire  $\mathbf{G} \cdot \mathbf{K}$  et  $H_{axi}$  est conservé. L'équation pour  $\mathbf{I}$  devient

$$\dot{\mathbf{I}} = \left[ \frac{1}{B} \mathbf{G} + \left( \frac{1}{C} - \frac{1}{B} \right) (\mathbf{G} \cdot R_{\mathbf{G}}(\Omega_G t) \mathbf{K}(0)) R_{\mathbf{G}}(\Omega_G t) \mathbf{K}(0) \right] \times \mathbf{I}, \quad (2.29)$$

soit

$$\dot{\mathbf{I}} = \left( \frac{1}{B} \mathbf{G} + \Omega_{GK} R_{\mathbf{G}}(\Omega_G t) \mathbf{K}(0) \right) \times \mathbf{I}, \quad (2.30)$$

avec

$$\Omega_{GK} = \left( \frac{1}{C} - \frac{1}{B} \right) (\mathbf{G} \cdot \mathbf{K}). \quad (2.31)$$

Pour simplifier l'équation, on se place comme dans [Touma et Wisdom \(1994\)](#) dans le repère tournant en posant  $\mathbf{I}_G = R_{\mathbf{G}}(\Omega_G t)^{-1} \mathbf{I}$ . On a  $\dot{\mathbf{I}}_G = \dot{R}_{\mathbf{G}}(\Omega_G t)^{-1} \mathbf{I} + R_{\mathbf{G}}(\Omega_G t)^{-1} \dot{\mathbf{I}}$  soit

$$\dot{\mathbf{I}}_G = \dot{R}_{\mathbf{G}}(\Omega_G t)^{-1} R_{\mathbf{G}}(\Omega_G t) \mathbf{I}_G + \left( \frac{1}{B} \mathbf{G} + \Omega_{GK} \mathbf{K}(0) \right) \times \mathbf{I}_G. \quad (2.32)$$

Or comme  $R_{\mathbf{G}}(\Omega_G t)$  est une matrice de rotation, on peut montrer que pour tout vecteur  $\mathbf{x}$  dans le repère d'inertie, on a  $\dot{R}_{\mathbf{G}}(\Omega_G t)^{-1} R_{\mathbf{G}}(\Omega_G t) \mathbf{x} = -\mathbf{G} \times \mathbf{x}/B$ , d'où

$$\dot{\mathbf{I}}_G = \Omega_{GK} \mathbf{K}(0) \times \mathbf{I}_G. \quad (2.33)$$

Ainsi

$$\mathbf{I}_G(t) = R_{\mathbf{K}(0)}(\Omega_{GK} t) \mathbf{I}_G(0) \quad (2.34)$$

et  $\mathbf{I}$  est donné par

$$\mathbf{I}(t) = R_{\mathbf{G}}(\Omega_G t) R_{\mathbf{K}(0)}(\Omega_{GK} t) \mathbf{I}(0). \quad (2.35)$$

Ainsi le schéma d'intégration pour  $H_{axi}$  pour un pas de temps  $\Delta t$  est

$$\begin{cases} \mathbf{I}' = R_{\mathbf{G}}(\Omega_G \Delta t) R_{\mathbf{K}}(\Omega_{GK} \Delta t) \mathbf{I} & (2.36) \\ \mathbf{K}' = R_{\mathbf{G}}(\Omega_G \Delta t) \mathbf{K}. & (2.37) \end{cases}$$



Les équations du mouvement pour  $H_{tri}$  sont

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{I}} = \mathbf{0}, \\ \dot{\mathbf{K}} = \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right) (\mathbf{G} \cdot \mathbf{I}) \mathbf{I} \times \mathbf{K}, \end{cases} \quad (2.38)$$

d'où le schéma d'intégration pour un pas de temps  $\Delta t$

$$\begin{cases} \mathbf{I}' = \mathbf{I} \\ \mathbf{K}' = R_{\mathbf{I}}(\Omega_{GI}\Delta t) \mathbf{K}, \end{cases} \quad (2.39)$$

avec  $\Omega_{GK} = (1/A - 1/B) (\mathbf{G} \cdot \mathbf{I})$ . L'intégration conserve ainsi le produit scalaire  $\mathbf{G} \cdot \mathbf{I}$  et  $H_{tri}$  est conservé.

#### 2.1.2.4 Schéma d'intégration pour le hamiltonien total

Comme  $H_N$  ne dépend que de  $\mathbf{r}_i, \tilde{\mathbf{r}}_i$  et  $H_E$  que de  $\mathbf{G}, \mathbf{I}, \mathbf{K}$ , les hamiltoniens  $H_N$  et  $H_E$  commutent. On a ainsi  $e^{\tau L_{H_N}} e^{\tau L_{H_E}} = e^{\tau L_{H_E}} e^{\tau L_{H_N}}$ . Le schéma d'intégration symplectique pour le hamiltonien total  $H = H_N + H_I + H_E$  est pour un pas de temps  $\tau$  (Touma et Wisdom, 1994)

$$S(\tau) = e^{\frac{\tau}{2} L_{H_I}} e^{\tau L_{H_N}} e^{\tau L_{H_E}} e^{\frac{\tau}{2} L_{H_I}}. \quad (2.40)$$

## 2.2 Hamiltonien obtenu par une moyenne de la rotation propre

L'intégration du hamiltonien total nécessite d'intégrer le mouvement de rotation propre rapide du corps solide. Considérons le cas de l'intégration de la rotation de Cérès et Vesta dans le système solaire. Les périodes de rotation propre de Cérès et Vesta sont respectivement environ 9.07 h et 5.34 h. Le pas de temps de l'intégration symplectique est imposé par la plus petite période présente dans le mouvement. En choisissant le pas d'intégration comme 1/50 de la plus petite période, on obtient alors pour Cérès et Vesta des pas d'intégration respectifs d'environ 11 et 6 minutes. Dans le cas où la rotation de ces deux corps n'est pas intégrée, la plus petite période intervenant dans l'intégration à long terme du système solaire est alors la période orbitale de Mercure, si on réalise une moyenne sur le mouvement de la Lune, ce qui conduit à un pas d'intégration d'environ  $5 \times 10^{-3}$  yr. Le rapport entre les pas d'intégration est alors respectivement de l'ordre de 240 à 410 pour Cérès et Vesta. L'intégration est alors ainsi environ 400 fois plus lente si on veut ajouter l'intégration de la rotation propre de Cérès et Vesta. Pour des corps en rotation rapide, il semble ainsi plus approprié de décrire la rotation à long terme à partir d'équations, où une moyenne a été réalisée sur le mouvement de rotation rapide. On peut utiliser les équations obtenues par Boué et Laskar (2006) en réalisant une moyenne sur les angles rapides d'Andoyer.

### 2.2.1 Les variables action-angle d'Andoyer

Les variables action-angle d'Andoyer  $(G, H, L, g, h, l)$  (Andoyer, 1923) présentent les variables d'action définies par

$$G = \|\mathbf{G}\| \quad (2.41)$$

$$H = \mathbf{G} \cdot \mathbf{k} \quad (2.42)$$

$$L = \mathbf{G} \cdot \mathbf{K}, \quad (2.43)$$

et les variables d'angle associées définies sur la figure 2.1 avec les notations de la figure 2 de Boué et Laskar (2006). L'angle  $h$  repère le nœud  $N_1$  du plan perpendiculaire au moment cinétique  $\mathbf{G}$  par rapport au vecteur  $\mathbf{i}$  dans le plan  $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$  du repère d'inertie de référence, par l'exemple l'écliptique à l'époque J2000. L'angle  $g$  repère le nœud  $N_2$  de l'équateur à un instant  $t$  par rapport au nœud  $N_1$  dans le plan perpendiculaire au moment cinétique. L'angle  $l$  repère l'axe principal  $\mathbf{I}$  par rapport au nœud  $N_2$  dans l'équateur.  $I$  est l'angle entre la normale au plan de référence et le moment cinétique  $\mathbf{G}$  et

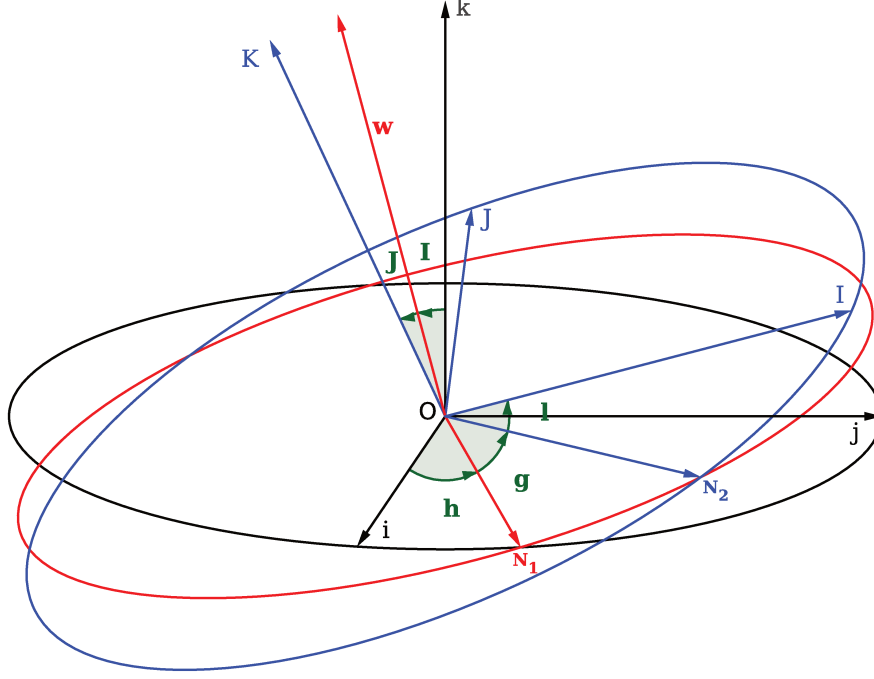


FIGURE 2.1 – Angles d’Andoyer ( $g, h, l, I, J$ ). Le repère de référence  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  est représenté en noir. La base  $(\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K})$  associée aux axes principaux d’inertie et le plan équatorial sont représentés en bleu. Le moment cinétique normalisé  $\mathbf{w}$  et le plan perpendiculaire au moment cinétique sont représentés en rouge.

correspond ainsi à l’inclinaison du plan perpendiculaire au moment cinétique sur le plan de référence.  $J$  correspond à l’angle entre le moment cinétique  $\mathbf{G}$  et l’axe polaire  $\mathbf{K}$ , soit à l’inclinaison de l’équateur sur le plan perpendiculaire au moment cinétique. On peut réécrire les actions  $H$  et  $L$  sous la forme

$$H = G \cos I \quad (2.44)$$

$$L = G \cos J. \quad (2.45)$$

Le hamiltonien du corps solide libre s’écrit alors dans ces variables

$$H_E = \frac{1}{2} \left( \frac{(\mathbf{G} \cdot \mathbf{I})^2}{A} + \frac{(\mathbf{G} \cdot \mathbf{J})^2}{B} + \frac{(\mathbf{G} \cdot \mathbf{K})^2}{C} \right), \quad (2.46)$$

$$H_E = \frac{1}{2} \left( \frac{L^2}{C} + \frac{G^2 - L^2}{2} \left( \frac{1}{A} + \frac{1}{B} \right) + \frac{G^2 - L^2}{2} \left( \frac{1}{B} - \frac{1}{A} \right) \cos 2l \right). \quad (2.47)$$

Andoyer (1923) introduit les variables  $\gamma$  et  $\sigma$

$$\gamma = C \left( \frac{1}{2} \left( \frac{1}{A} + \frac{1}{B} \right) - \frac{1}{C} \right), \quad (2.48)$$

$$\sigma = \frac{\frac{1}{A} - \frac{1}{B}}{\left( \left( \frac{1}{A} + \frac{1}{B} \right) - \frac{2}{C} \right)}. \quad (2.49)$$

Ainsi  $\gamma(1 + \sigma) = (C - A)/A$  et  $\gamma(1 - \sigma) = (C - B)/B$  et on obtient (Andoyer, 1923)

$$H_E = \frac{G^2}{2C} + \frac{\gamma(G^2 - L^2)}{2C} (1 - \sigma \cos 2l). \quad (2.50)$$

Pour les corps planétaires, les différences entre moments d’inertie sont faibles et  $\gamma$  et  $\sigma$  sont petits. À l’ordre 1 en  $\gamma$  et  $\sigma$ , on obtient (Andoyer, 1923)

$$H_E = \frac{G^2}{2C} + \frac{\gamma(G^2 - L^2)}{2C}, \quad (2.51)$$

ce qui donne les évolutions temporelles des angles  $g$  et  $l$  (Andoyer, 1923)

$$g(t) = \frac{G}{C}(1 + \gamma)t + g(0), \quad (2.52)$$

$$l(t) = -\frac{L\gamma}{C}t + l(0). \quad (2.53)$$

Les périodes associées aux angles  $g$  et  $l$  sont ainsi respectivement  $T_g = 2\pi C/(G(1 + \gamma))$  et  $T_l = 2\pi C/(L\gamma)$ . Comme  $\gamma \ll 1$ , on a  $T_g \ll T_l$ .  $g$  est ainsi un angle rapide, qui décrit la rotation propre du solide autour du moment cinétique  $\mathbf{G}$ . Pour la Terre, la période de rotation propre est d'environ 23h56 min.  $l$  décrit la précession de l'axe polaire  $\mathbf{K}$  par rapport au moment cinétique  $\mathbf{G}$ , appelée mouvement polaire.  $\gamma$  étant petit,  $l$  est un angle semi-rapide. Cette précession correspond pour la Terre au terme de Chandler. La précession de l'axe polaire terrestre autour du moment cinétique a lieu avec une période d'environ 434 jours avec une amplitude d'environ  $J \approx 0.15''$  (e.g. Lambeck, 1980), ce qui correspond à une amplitude d'environ 5 m au pôle. À cause des effets de dissipation interne,  $J$  diminue au cours du temps et devrait s'annuler en l'absence d'excitation. Pour la Terre, le temps de relaxation est de l'ordre de 30 ans (e.g. Lambeck, 1980).

Dans le cas d'un corps solide libre,  $h$ , qui décrit la précession du moment cinétique par rapport au plan de référence, reste constant. La précession du moment cinétique est obtenue par le hamiltonien d'interaction  $H_I$  du couple exercé par l'étoile centrale et les autres corps planétaires sur le corps solide.  $h$  est ainsi un angle lent. Ce phénomène de précession est appelé précession des équinoxes dans le cas de la Terre, suite aux couples exercés sur la Terre par le Soleil et la Lune, et présente une période d'environ 25680 ans (e.g. Laskar *et al.*, 2004b).

## 2.2.2 Moyenne sur les angles rapides

Boué et Laskar (2006) réalisent une moyenne sur les angles d'Andoyer rapides  $g$  et  $l$  et obtiennent le hamiltonien

$$\mathcal{H} = \langle H \rangle_{g,l} = H_N + \mathcal{H}_{I,0} + \sum_{k=2}^n \mathcal{H}_{I,k} + \mathcal{H}_E \quad (2.54)$$

avec

$$\mathcal{H}_{I,0} = \langle H_{I,0} \rangle_{g,l} = -\frac{C_1 m_0}{r_1^3} \left( 1 - 3 \left( \frac{\mathbf{r}_{1,0} \cdot \mathbf{w}}{r_1} \right)^2 \right), \quad (2.55)$$

$$\mathcal{H}_{I,k} = \langle H_{I,k} \rangle_{g,l} = -\frac{C_1 m_k}{r_{1,k}^3} \left( 1 - 3 \left( \frac{\mathbf{r}_{1,k} \cdot \mathbf{w}}{r_{1,k}} \right)^2 \right), \quad (2.56)$$

$$\mathcal{H}_E = \langle H_E \rangle_{g,l} = \frac{G^2}{2C} + \frac{G^2 - L^2}{2} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{1}{A} + \frac{1}{B} \right) - \frac{1}{C} \right), \quad (2.57)$$

en posant

$$\mathbf{w} = \frac{\langle \mathbf{G} \rangle_{g,l}}{\langle G \rangle_{g,l}} \quad (2.58)$$

et

$$C_1 = \frac{G}{2} \left( C - \frac{A+B}{2} \right) \left( 1 - \frac{3}{2} \sin^2 J \right). \quad (2.59)$$

Dans la suite, on notera par abus de langage  $\langle \mathbf{G} \rangle_{g,l}$  par  $\mathbf{G}$  et  $\langle G \rangle_{g,l}$  par  $G$ .

Ainsi si  $C = (A + B)/2$  ou si  $\sin J = \pm \sqrt{2/3}$  alors les couples exercés sur le moment cinétique sont nuls et ce dernier reste immobile dans le repère d'inertie. Cependant si les couples sont nuls en moyenne, les couples instantanés calculés à partir des hamiltoniens (2.11) et (2.12) ne le sont que pour une toupie sphérique où  $A = B = C$ .

Le hamiltonien  $\mathcal{H}$  ne dépend alors plus des angles d'Andoyer  $g$  et  $l$  et ainsi  $G$  et  $L$  sont des constantes. Le hamiltonien du corps solide libre  $\mathcal{H}_E$  est alors une constante, qu'on pourra ainsi omettre

dans la suite au sein du hamiltonien  $\mathcal{H}$ . Les équations du mouvement pour le corps solide 1 s'écrivent (Boué et Laskar, 2006)

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}}_1 = \nabla_{\tilde{\mathbf{r}}_1} \mathcal{H} = \nabla_{\tilde{\mathbf{r}}_1} H_N, & (2.60) \\ \dot{\tilde{\mathbf{r}}}_1 = -\nabla_{\mathbf{r}_1} \mathcal{H} = -\nabla_{\mathbf{r}_1} H_N - \nabla_{\mathbf{r}_1} \mathcal{H}_{I,0} - \sum_{k=2}^n \nabla_{\mathbf{r}_1} \mathcal{H}_{I,k}, & (2.61) \\ \dot{\mathbf{w}} = \frac{1}{G} \nabla_{\mathbf{w}} \mathcal{H} \times \mathbf{w} = \frac{1}{G} \nabla_{\mathbf{w}} \mathcal{H}_{I,0} \times \mathbf{w} + \sum_{k=2}^n \frac{1}{G} \nabla_{\mathbf{w}} \mathcal{H}_{I,k} \times \mathbf{w}, & (2.62) \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}}_1 = \nabla_{\tilde{\mathbf{r}}_1} H_N, & (2.63) \\ \dot{\tilde{\mathbf{r}}}_1 = -\nabla_{\mathbf{r}_1} H_N - \frac{3\mathcal{C}_1 m_0}{r_1^5} \left( \left( 1 - 5 \left( \frac{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{w}}{r_1} \right)^2 \right) \mathbf{r}_1 + 2 (\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{w}) \mathbf{w} \right) & (2.64) \\ \quad - \sum_{k=2}^n \frac{3\mathcal{C}_1 m_k}{r_{1,k}^5} \left( \left( 1 - 5 \left( \frac{\mathbf{r}_{1,k} \cdot \mathbf{w}}{r_{1,k}} \right)^2 \right) \mathbf{r}_{1,k} + 2 (\mathbf{r}_{1,k} \cdot \mathbf{w}) \mathbf{w} \right), & \\ \dot{\mathbf{w}} = \frac{6\mathcal{C}_1 m_0}{Gr_1^5} (\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{w}) \mathbf{r}_1 \times \mathbf{w} + \sum_{k=2}^n \frac{6\mathcal{C}_1 m_k}{Gr_{1,k}^5} (\mathbf{r}_{1,k} \cdot \mathbf{w}) \mathbf{r}_{1,k} \times \mathbf{w}. & (2.65) \end{cases}$$

Les équations du mouvement pour les planètes  $2 \leq k \leq n$  deviennent

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}}_k = \nabla_{\tilde{\mathbf{r}}_k} H_N, & (2.66) \\ \dot{\tilde{\mathbf{r}}}_k = -\nabla_{\mathbf{r}_k} H_N - \nabla_{\mathbf{r}_k} \mathcal{H}_{I,k}, & (2.67) \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}}_k = \nabla_{\tilde{\mathbf{r}}_k} H_N, & (2.68) \\ \dot{\tilde{\mathbf{r}}}_k = -\nabla_{\mathbf{r}_k} H_N + \frac{3\mathcal{C}_1 m_k}{r_{1,k}^5} \left( \left( 1 - 5 \left( \frac{\mathbf{r}_{1,k} \cdot \mathbf{w}}{r_{1,k}} \right)^2 \right) \mathbf{r}_{1,k} + 2 (\mathbf{r}_{1,k} \cdot \mathbf{w}) \mathbf{w} \right). & (2.69) \end{cases}$$

### 2.2.3 Intégration du hamiltonien d'interaction

Farago *et al.* (2009) étudie la stabilité d'un système planétaire pour lequel l'orbite d'une des planètes est très proche de l'étoile centrale par rapport aux orbites des autres planètes. Cette planète présente alors une période de révolution beaucoup plus faible que les autres planètes, qui impose de choisir pour l'intégration numérique un pas de temps nettement plus faible que dans le cas où le système planétaire serait intégré sans considérer la planète située proche de l'étoile. Pour intégrer la stabilité à long terme, Farago *et al.* (2009) réalisent ainsi une moyenne sur la révolution rapide de cette planète et sur la précession de son périhélie. L'orbite est alors décrite uniquement par la direction du moment cinétique orbital, dont la norme est constante. Le hamiltonien décrivant le mouvement du moment cinétique et des planètes restantes est intégré de façon symplectique par Farago *et al.* (2009).

On peut séparer le hamiltonien  $\mathcal{H} = H_N + \mathcal{H}_{I,0} + \sum_{k=2}^n \mathcal{H}_{I,k}$  en plusieurs parties.  $H_N$  correspond au hamiltonien d'un système planétaire avec  $n$  corps planétaires ponctuels et peut être intégré de façon symplectique (e.g. Wisdom et Holman, 1991, Laskar et Robutel, 2001, Farrés *et al.*, 2013). Les équations obtenues par Farago *et al.* (2009) pour décrire l'évolution du moment cinétique orbital d'une planète avec une révolution rapide sont analogues à celles obtenues pour les variables  $(\mathbf{r}_1, \tilde{\mathbf{r}}_1, \mathbf{r}_k, \tilde{\mathbf{r}}_k, \mathbf{w})$  à la section 2.2.2 dans le cas d'un corps planétaire en rotation rapide. Les hamiltoniens  $\mathcal{H}_{I,0}$  et  $\mathcal{H}_{I,k}$  peuvent ainsi être intégrés de façon symplectique avec le schéma d'intégration proposé par Farago *et al.* (2009). On va d'abord s'intéresser à l'intégration symplectique de  $\mathcal{H}_{I,0}$ .

Les équations du mouvement pour  $\mathcal{H}_{I,0}$  seul sont d'après la section 2.2.2

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{0}, \end{cases} \quad (2.70)$$

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\mathbf{r}}}_1 = -\frac{3\mathcal{C}_1 m_0}{r_1^5} \left( \left( 1 - 5 \left( \frac{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{w}}{r_1} \right)^2 \right) \mathbf{r}_1 + 2 (\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{w}) \mathbf{w} \right), \end{cases} \quad (2.71)$$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{w}} = \frac{6\mathcal{C}_1 m_0}{Gr_1^5} (\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{w}) \mathbf{r}_1 \times \mathbf{w}. \end{cases} \quad (2.72)$$

Ainsi  $\mathbf{r}_1$  est conservé et seules les variables de la planète 1 sont modifiées par  $\mathcal{H}_{I,0}$ . On vérifie ainsi

$$\frac{d(\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{w})}{dt} = \mathbf{r}_1 \cdot \dot{\mathbf{w}} = 0. \quad (2.73)$$

Par conséquent, le produit scalaire  $\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{w}$  se conserve et le hamiltonien d'interaction  $\mathcal{H}_{I,0}$  est conservé. On peut récrire l'équation (2.72) sous une forme similaire à celle de [Farago et al. \(2009\)](#)

$$\dot{\mathbf{w}} = \Omega_0 \mathbf{u} \times \mathbf{w} \quad (2.74)$$

avec

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{r}_1}{r_1}, \quad (2.75)$$

$$\mathbf{p} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}, \quad (2.76)$$

et une fréquence angulaire similaire à celle introduite par [Farago et al. \(2009\)](#)

$$\Omega_0 = \frac{6\mathcal{C}_1 m_0 (\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{w})}{Gr_1^4}. \quad (2.77)$$

Détaillons maintenant le schéma d'intégration utilisé par [Farago et al. \(2009\)](#). Pendant une durée  $t$ ,  $\mathbf{w}$  effectue une rotation d'angle  $\Omega_0 t$  autour du vecteur  $\mathbf{u}$ . On part de l'instant initial  $t_0 = 0$ . A l'instant  $t$ , on a ainsi

$$\mathbf{w}(t) = R_{\mathbf{r}_1}(\Omega_0 t) \mathbf{w}(0) \quad (2.78)$$

avec  $R_{\mathbf{r}_1}$  la rotation autour de l'axe dirigé par le vecteur  $\mathbf{r}_1$ . Dans l'équation différentielle (2.71) de  $\tilde{\mathbf{r}}_1$ , le seul terme qui n'est pas constant est  $\mathbf{w}$ . Ainsi la solution de cette équation différentielle est

$$\tilde{\mathbf{r}}_1(t) = \tilde{\mathbf{r}}_1(0) - \frac{3\mathcal{C}_1 m_0}{r_1^4} \left( (1 - 5\mathbf{p}^2) t \mathbf{u} + 2\mathbf{p} \int_0^t \mathbf{w}(\tau) d\tau \right). \quad (2.79)$$

Il reste à calculer l'intégrale  $\int_0^t \mathbf{w}(\tau) d\tau$ . En décomposant  $\mathbf{w}(t)$  sur la base constituée des vecteurs  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{u} \times \mathbf{w}(0)$ ,  $(\mathbf{u} \times \mathbf{w}(0)) \times \mathbf{u}$ , on obtient

$$\mathbf{w}(t) = \mathbf{p} \mathbf{u} + \sin(\Omega_0 t) \mathbf{u} \times \mathbf{w}(0) + \cos(\Omega_0 t) (\mathbf{u} \times \mathbf{w}(0)) \times \mathbf{u}. \quad (2.80)$$

Ainsi

$$\int_0^t \mathbf{w}(\tau) d\tau = \mathbf{p} t \mathbf{u} - \frac{1}{\Omega_0} (\cos(\Omega_0 t) - 1) \mathbf{u} \times \mathbf{w}(0) + \frac{1}{\Omega_0} \sin(\Omega_0 t) (\mathbf{u} \times \mathbf{w}(0)) \times \mathbf{u}. \quad (2.81)$$

Or d'après l'équation (2.80)

$$\sin(\Omega_0 t) \mathbf{u} \times \mathbf{w}(0) = \mathbf{w}(t) - \mathbf{p} \mathbf{u} - \cos(\Omega_0 t) (\mathbf{w}(0) - \mathbf{p} \mathbf{u}), \quad (2.82)$$

d'où

$$\sin(\Omega_0 t) (\mathbf{u} \times \mathbf{w}(0)) \times \mathbf{u} = \mathbf{w}(t) \times \mathbf{u} - \cos(\Omega_0 t) \mathbf{w}(0) \times \mathbf{u}. \quad (2.83)$$

Ainsi

$$\int_0^t \mathbf{w}(\tau) d\tau = \mathbf{p} t \mathbf{u} - \frac{1}{\Omega_0} \mathbf{u} \times (\mathbf{w}(t) - \mathbf{w}(0)), \quad (2.84)$$

d'où

$$\tilde{\mathbf{r}}_1(t) = \tilde{\mathbf{r}}_1(0) - \frac{3\mathcal{C}_1 m_0}{r_1^4} \left( (1 - 3p^2) t \mathbf{u} + \frac{2p}{\Omega_0} (\mathbf{w}(t) - \mathbf{w}(0)) \times \mathbf{u} \right). \quad (2.85)$$

Ainsi le schéma d'intégration de  $\mathcal{H}_{I,0}$  est de façon analogue à [Farago et al. \(2009\)](#) pour un pas de temps  $\Delta t$

$$\begin{cases} \mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}_1 \\ \tilde{\mathbf{r}}'_1 = \tilde{\mathbf{r}}_1 - \frac{3\mathcal{C}_1 m_0}{r_1^5} \left( \left( 1 - 3 \left( \frac{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{w}}{r_1} \right)^2 \right) \Delta t \mathbf{r}_1 + \frac{2\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{w}}{\Omega_0 r_1} (\mathbf{w}' - \mathbf{w}) \times \mathbf{r}_1 \right) \\ \mathbf{w}' = R_{\mathbf{r}_1}(\Omega_0 \Delta t) \mathbf{w}. \end{cases} \quad (2.86)$$

Le hamiltonien  $\mathcal{H}_{I,k}$  induit d'après la section 2.2.2 les équations du mouvement suivantes

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{0}, \end{cases} \quad (2.87)$$

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\mathbf{r}}}_1 = -\frac{3\mathcal{C}_1 m_k}{r_{1,k}^5} \left( \left( 1 - 5 \left( \frac{\mathbf{r}_{1,k} \cdot \mathbf{w}}{r_{1,k}} \right)^2 \right) \mathbf{r}_{1,k} + 2(\mathbf{r}_{1,k} \cdot \mathbf{w}) \mathbf{w} \right), \end{cases} \quad (2.88)$$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}}_k = \mathbf{0}, \end{cases} \quad (2.89)$$

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\mathbf{r}}}_k = \frac{3\mathcal{C}_1 m_k}{r_{1,k}^5} \left( \left( 1 - 5 \left( \frac{\mathbf{r}_{1,k} \cdot \mathbf{w}}{r_{1,k}} \right)^2 \right) \mathbf{r}_{1,k} + 2(\mathbf{r}_{1,k} \cdot \mathbf{w}) \mathbf{w} \right), \end{cases} \quad (2.90)$$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{w}} = \frac{6\mathcal{C}_1 m_k}{Gr_{1,k}^5} (\mathbf{r}_{1,k} \cdot \mathbf{w}) \mathbf{r}_{1,k} \times \mathbf{w}. \end{cases} \quad (2.91)$$

Les équations sont similaires à celles obtenues avec le hamiltonien  $\mathcal{H}_{I,0}$ , cependant les moments  $\dot{\tilde{\mathbf{r}}}_k$  du corps  $k$  sont modifiés. En introduisant la fréquence angulaire

$$\Omega_k = \frac{6\mathcal{C}_1 m_k (\mathbf{r}_{1,k} \cdot \mathbf{w})}{Gr_{1,k}^4}, \quad (2.92)$$

cela conduit à un schéma d'intégration similaire

$$\begin{cases} \mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}'_k = \mathbf{r}_k \\ \tilde{\mathbf{r}}'_1 = \tilde{\mathbf{r}}_1 - \frac{3\mathcal{C}_1 m_k}{r_{1,k}^5} \left( \left( 1 - 3 \left( \frac{\mathbf{r}_{1,k} \cdot \mathbf{w}}{r_{1,k}} \right)^2 \right) \Delta t \mathbf{r}_{1,k} + \frac{2\mathbf{r}_{1,k} \cdot \mathbf{w}}{\Omega_k r_{1,k}} (\mathbf{w}' - \mathbf{w}) \times \mathbf{r}_{1,k} \right) \\ \tilde{\mathbf{r}}'_k = \tilde{\mathbf{r}}_k + \frac{3\mathcal{C}_1 m_k}{r_{1,k}^5} \left( \left( 1 - 3 \left( \frac{\mathbf{r}_{1,k} \cdot \mathbf{w}}{r_{1,k}} \right)^2 \right) \Delta t \mathbf{r}_{1,k} + \frac{2\mathbf{r}_{1,k} \cdot \mathbf{w}}{\Omega_k r_{1,k}} (\mathbf{w}' - \mathbf{w}) \times \mathbf{r}_{1,k} \right) \\ \mathbf{w}' = R_{\mathbf{r}_{1,k}}(\Omega_k \Delta t) \mathbf{w}. \end{cases} \quad (2.93)$$

Le schéma d'intégration symplectique pour le hamiltonien total est pour un pas de temps  $\tau$

$$S(\tau) = e^{\frac{\tau}{2} L_{\mathcal{H}_{I,0}}} e^{\frac{\tau}{2} L_{\mathcal{H}_{I,2}}} \dots e^{\frac{\tau}{2} L_{\mathcal{H}_{I,n}}} e^{\tau L_{H_N}} e^{\frac{\tau}{2} L_{\mathcal{H}_{I,n}}} \dots e^{\frac{\tau}{2} L_{\mathcal{H}_{I,2}}} e^{\frac{\tau}{2} L_{\mathcal{H}_{I,0}}}. \quad (2.94)$$

Ce schéma d'intégration a été implémenté par Mickaël Gastineau au sein de l'intégrateur numérique à long terme du système solaire LaX. Cet intégrateur a été utilisé précédemment afin d'obtenir des solutions à long terme du système solaire, qui ont permis d'obtenir les mouvements orbitaux à long terme de la Terre avec les solutions La2004 ([Laskar et al., 2004b](#)) et La2010 ([Laskar et al., 2011a](#)) et de Mars ([Laskar et al., 2004a](#)). Au sein de LaX, l'intégration du hamiltonien  $H_N$  décrivant les mouvements orbitaux peut être réalisée à l'aide des intégrateurs symplectiques développés par [Laskar et Robutel \(2001\)](#) et [Farrés et al. \(2013\)](#).

## 2.2.4 Intégration du moment cinétique forcé

L'action du mouvement de rotation du corps 1 sur son mouvement orbital et ceux des autres corps est marginale. Si l'influence du mouvement de rotation sur le mouvement orbital est négligée, les équations du mouvement pour  $\tilde{\mathbf{r}}_1$  (équation 2.61) et  $\tilde{\mathbf{r}}_k$  (équation 2.69) sont modifiées et deviennent

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\mathbf{r}}}_1 = \nabla_{\tilde{\mathbf{r}}_1} H_N, & (2.95) \\ \dot{\tilde{\mathbf{r}}}_1 = -\nabla_{\mathbf{r}_1} H_N, & (2.96) \\ \dot{\tilde{\mathbf{r}}}_k = \nabla_{\tilde{\mathbf{r}}_k} H_N, & (2.97) \\ \dot{\tilde{\mathbf{r}}}_k = -\nabla_{\mathbf{r}_k} H_N, & (2.98) \\ \dot{\mathbf{w}} = \frac{6\mathcal{C}_1 m_0}{Gr_1^5} (\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{w}) \mathbf{r}_1 \times \mathbf{w} + \sum_{k=2}^n \frac{6\mathcal{C}_1 m_k}{Gr_{1,k}^5} (\mathbf{r}_{1,k} \cdot \mathbf{w}) \mathbf{r}_{1,k} \times \mathbf{w}. & (2.99) \end{cases}$$

Le mouvement orbital des corps est alors entièrement régi par  $H_N$  et le moment cinétique de rotation est forcé par le mouvement orbital. Pour un mouvement orbital donné, ces équations peuvent être intégrées numériquement à l'aide d'un intégrateur Adams à chaque pas de temps au sein de l'intégrateur LaX. À partir d'une seule solution orbitale, il est ainsi possible de calculer de nombreuses solutions pour la rotation de conditions initiales du moment cinétique différentes. Négliger les perturbations orbitales dues à la rotation permet ainsi d'obtenir pour une seule solution orbitale simultanément plusieurs solutions de rotation.

## 2.2.5 Effet de marées sur la Terre

Dans la solution à long terme du système solaire La2010, la rotation de la Terre est obtenue selon la méthode de la section 2.2.4 et est intégrée au sein de l'intégrateur LaX à l'aide d'un intégrateur Adams. Les effets de marées dus au Soleil et à la Lune sont responsables d'une déformation de la Terre, qui entraîne une variation de son potentiel gravitationnel et ainsi des forces et des couples agissant sur le système Soleil-Terre-Lune. Il s'en suit par exemple un allongement de la durée du jour terrestre et une augmentation du demi-grand axe de l'orbite de la Lune d'environ 3 centimètres par an (e.g. Mignard, 1979).

Ces effets de marées étaient calculés au sein de l'intégrateur LaX de la même façon que dans l'intégrateur INPOP (Intégrateur Numérique Planétaire de l'Observatoire de Paris) (Fienga *et al.*, 2008, 2009). Comme décrit dans Fienga *et al.* (2008) et Manche (2011), le calcul consiste à déterminer la variation  $\Delta\mathcal{I}(t)$  de la matrice d'inertie de la Terre à partir de la variation de son potentiel. Les effets de marées sont ensuite pris en compte en calculant les couples exercés par le Soleil et la Lune sur la Terre présentant une matrice d'inertie modifiée  $\mathcal{I}(t) = \mathcal{I} + \Delta\mathcal{I}(t)$ .

Au sein de l'intégrateur LaX, l'intégration de la rotation doit être réalisée de la même façon pour tous les corps. Ainsi si l'on souhaite intégrer la rotation d'un corps autre que la Terre de façon symplectique selon la méthode de la section 2.2.3, la rotation de la Terre doit être intégrée de la même façon. Le calcul des effets de marées réalisé sur INPOP a été écrit pour la méthode de la section 2.2.4 et ne peut être utilisé directement pour une intégration symplectique. Ce calcul doit ainsi être réécrit dans le cas de l'intégration symplectique de la rotation de la Terre. Nous avons pour cela utilisé le calcul simplifié réalisé par Mignard (1979). Nous allons ainsi détailler les équations, que nous avons utilisées pour ce calcul et que Mickaël Gastineau a ajoutées à l'intégrateur LaX.

On considère un corps solide  $\mathcal{S}_0$  de rayon  $R_0$  et un corps générateur ponctuel  $\mathcal{S}_*$  de masse  $m_*$ .  $\mathcal{S}_*$  génère au niveau du corps solide  $\mathcal{S}_0$  non ponctuel un potentiel responsable d'une déformation du corps  $\mathcal{S}_0$ . Dans la théorie des nombres de Love, il est supposé que la différence de potentiel créée par la déformation du corps solide  $\mathcal{S}_0$  est proportionnelle au potentiel généré par  $\mathcal{S}_*$  et le coefficient de proportionnalité  $k_2$  est le nombre de Love de second degré (e.g. Mignard, 1979). Cette déformation ajoute au potentiel créé par  $\mathcal{S}_0$  un potentiel supplémentaire, appelé potentiel de marée, qui peut s'écrire en un point repéré par  $\mathbf{r}$  par rapport à  $\mathcal{S}_0$  (Mignard, 1979, Néron de Surgy et Laskar, 1997)

$$V(\mathbf{r}, \mathbf{r}_*) = 3 \frac{k_2 \mathcal{G} m_* R_0^5}{r_*^5 r_*^5} \Delta t \left( (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_*) (\mathbf{r}_* \cdot (\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{r}) + \mathbf{r} \cdot \mathbf{v}_*) - \frac{\mathbf{r}_* \cdot \mathbf{v}_*}{2r_*^2} \left( 5(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_*)^2 - r^2 r_*^2 \right) \right) \quad (2.100)$$

avec  $k_2$  le nombre de Love de degré 2,  $\mathbf{r}_*$  la position de  $\mathcal{S}_*$  par rapport à  $\mathcal{S}_0$  et  $\boldsymbol{\omega}_0$  le vecteur rotation instantané de  $\mathcal{S}_0$ .  $\Delta t$  représente le délai entre la force exercée par  $\mathcal{S}_*$  et la réponse de  $\mathcal{S}_0$ .

On considère un corps ponctuel  $\mathcal{S}$  de masse  $m$  situé en  $\mathbf{r}$ , qui interagit avec  $\mathcal{S}_0$ . Le potentiel de marée engendre une force et un couple s'exerçant sur  $\mathcal{S}$  et qui s'écrivent respectivement  $\mathbf{F} = -m\nabla_{\mathbf{r}}V$  et  $\boldsymbol{\Gamma} = -m\mathbf{r} \times \nabla_{\mathbf{r}}V$ . La force et le couple réciproques s'exerçant sur  $\mathcal{S}_0$  sont ainsi  $\mathbf{F}_0 = m\nabla_{\mathbf{r}}V$  et  $\boldsymbol{\Gamma}_0 = m\mathbf{r} \times \nabla_{\mathbf{r}}V$ . On obtient ainsi (Mignard, 1979)

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_0 = & -3\frac{k_2\mathcal{G}mm_*R_0^5}{r^5r_*^5}\Delta t \left[ \frac{5}{r^2} \left( (\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_*) (\mathbf{r}_*\cdot(\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{r}) + \mathbf{r}\cdot\mathbf{v}_*) - \frac{\mathbf{r}_*\cdot\mathbf{v}_*}{2r_*^2} \left( 5(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_*)^2 - r^2r_*^2 \right) \right) \mathbf{r} \right. \\ & \left. - (\mathbf{r}_*\cdot(\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{r}) + \mathbf{r}\cdot\mathbf{v}_*) \mathbf{r}_* - (\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_*) (\mathbf{r}_* \times \boldsymbol{\omega}_0 + \mathbf{v}_*) + \frac{\mathbf{r}_*\cdot\mathbf{v}_*}{r_*^2} (5(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_*) \mathbf{r}_* - r_*^2\mathbf{r}) \right], \end{aligned} \quad (2.101)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Gamma}_0 = & 3\frac{k_2\mathcal{G}mm_*R_0^5}{r^5r_*^5}\Delta t \left[ \left( \mathbf{r}_*\cdot(\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{r}) + \mathbf{r}\cdot\mathbf{v}_* - 5\frac{\mathbf{r}_*\cdot\mathbf{v}_*}{r_*^2} (\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_*) \right) (\mathbf{r} \times \mathbf{r}_*) \right. \\ & \left. + (\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_*) ((\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\omega}_0) \mathbf{r}_* - (\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_*) \boldsymbol{\omega}_0 + \mathbf{r} \times \mathbf{v}_*) \right]. \end{aligned} \quad (2.102)$$

Dans le cas particulier où le corps qui interagit est le corps qui a déformé la planète,  $\mathcal{S}_* = \mathcal{S}$  et avec  $\mathbf{r}_* = \mathbf{r}$ ,  $\mathbf{v}_* = \mathbf{v}$ , on obtient (Mignard, 1979)

$$\mathbf{F}_0 = 3\frac{k_2\mathcal{G}m^2R_0^5}{r^{10}}\Delta t [2(\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}) \mathbf{r} + r^2(\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}_0 + \mathbf{v})], \quad (2.103)$$

$$\boldsymbol{\Gamma}_0 = 3\frac{k_2\mathcal{G}m^2R_0^5}{r^8}\Delta t [(\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\omega}_0) \mathbf{r} - r^2\boldsymbol{\omega}_0 + \mathbf{r} \times \mathbf{v}]. \quad (2.104)$$

### 2.2.5.1 Force et couple de marée dus à la déformation de la Terre

Ici le corps solide  $\mathcal{S}_0$  est la Terre. Le Soleil et la Lune la déforment et interagissent avec elle.  $k_2$  est le nombre de Love de degré 2 de la Terre,  $\boldsymbol{\omega}$  le vecteur rotation instantané de la Terre et  $R_T$  le rayon de la Terre. On doit considérer trois termes de marées : les termes dus aux marées solaires, les termes dus aux marées lunaires et les termes croisés.

**Marées solaires** On a alors  $\mathbf{r}_* = \mathbf{r} = -\mathbf{r}_T$  où  $\mathbf{r}_T$  repère la position de la Terre par rapport au Soleil et  $\mathbf{v}_T = \frac{d\mathbf{r}_T}{dt}$ . La force et le couple exercés sur la Terre sont

$$\mathbf{F}_T = -3\frac{k_2\mathcal{G}m_S^2R_T^5}{r_T^{10}}\Delta t [2(\mathbf{r}_T\cdot\mathbf{v}_T) \mathbf{r}_T + r_T^2(\mathbf{r}_T \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{v}_T)], \quad (2.105)$$

$$\boldsymbol{\Gamma}_T = 3\frac{k_2\mathcal{G}m_S^2R_T^5}{r_T^8}\Delta t [(\mathbf{r}_T\cdot\boldsymbol{\omega}) \mathbf{r}_T - r_T^2\boldsymbol{\omega} + \mathbf{r}_T \times \mathbf{v}_T]. \quad (2.106)$$

**Marées lunaires** On a alors  $\mathbf{r}_* = \mathbf{r} = \mathbf{r}_L$  où  $\mathbf{r}_L$  repère la position de la Lune par rapport à la Terre et  $\mathbf{v}_L = \frac{d\mathbf{r}_L}{dt}$ . La force et le couple exercés sur la Terre sont

$$\mathbf{F}_T = 3\frac{k_2\mathcal{G}m_L^2R_T^5}{r_L^{10}}\Delta t [2(\mathbf{r}_L\cdot\mathbf{v}_L) \mathbf{r}_L + r_L^2(\mathbf{r}_L \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{v}_L)], \quad (2.107)$$

$$\boldsymbol{\Gamma}_T = 3\frac{k_2\mathcal{G}m_L^2R_T^5}{r_L^8}\Delta t [(\mathbf{r}_L\cdot\boldsymbol{\omega}) \mathbf{r}_L - r_L^2\boldsymbol{\omega} + \mathbf{r}_L \times \mathbf{v}_L]. \quad (2.108)$$

La force exercée sur la Lune est

$$\mathbf{F}_L = -\mathbf{F}_T. \quad (2.109)$$



**Termes croisés** On considère le cas où la Terre est déformée par la Lune et interagit avec le Soleil. On a alors  $\mathbf{r}_* = \mathbf{r}_L$  et  $\mathbf{r} = -\mathbf{r}_T$ . La force et le couple exercés sur la Terre sont

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_T &= 3 \frac{k_2 \mathcal{G} m_L m_S R_T^5}{r_L^5 r_T^5} \Delta t \left[ \frac{5}{r_T^2} \left( (\mathbf{r}_T \cdot \mathbf{r}_L) (\mathbf{r}_L \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_T) + \mathbf{r}_T \cdot \mathbf{v}_L) - \frac{\mathbf{r}_L \cdot \mathbf{v}_L}{2r_L^2} \left( 5 (\mathbf{r}_T \cdot \mathbf{r}_L)^2 - r_T^2 r_L^2 \right) \right) \mathbf{r}_T \right. \\ &\quad \left. - (\mathbf{r}_L \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_T) + \mathbf{r}_T \cdot \mathbf{v}_L) \mathbf{r}_L - (\mathbf{r}_T \cdot \mathbf{r}_L) (\mathbf{r}_L \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{v}_L) + \frac{\mathbf{r}_L \cdot \mathbf{v}_L}{r_L^2} (5 (\mathbf{r}_T \cdot \mathbf{r}_L) \mathbf{r}_L - r_L^2 \mathbf{r}_T) \right], \quad (2.110) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Gamma}_T &= 3 \frac{k_2 \mathcal{G} m_L m_S R_T^5}{r_L^5 r_T^5} \Delta t \left[ \left( \mathbf{r}_L \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_T) + \mathbf{r}_T \cdot \mathbf{v}_L - 5 \frac{\mathbf{r}_L \cdot \mathbf{v}_L}{r_L^2} (\mathbf{r}_T \cdot \mathbf{r}_L) \right) (\mathbf{r}_T \times \mathbf{r}_L) \right. \\ &\quad \left. + (\mathbf{r}_T \cdot \mathbf{r}_L) ((\mathbf{r}_T \cdot \boldsymbol{\omega}) \mathbf{r}_L - (\mathbf{r}_T \cdot \mathbf{r}_L) \boldsymbol{\omega} + \mathbf{r}_T \times \mathbf{v}_L) \right]. \quad (2.111) \end{aligned}$$

On considère le cas où la Terre est déformée par le Soleil et interagit avec la Lune. On a alors  $\mathbf{r}_* = -\mathbf{r}_T$  et  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_L$ . La force et le couple exercés sur la Terre sont

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_T &= -3 \frac{k_2 \mathcal{G} m_L m_S R_T^5}{r_L^5 r_T^5} \Delta t \left[ \frac{5}{r_L^2} \left( (\mathbf{r}_L \cdot \mathbf{r}_T) (\mathbf{r}_T \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_L) + \mathbf{r}_L \cdot \mathbf{v}_T) - \frac{\mathbf{r}_T \cdot \mathbf{v}_T}{2r_T^2} \left( 5 (\mathbf{r}_L \cdot \mathbf{r}_T)^2 - r_L^2 r_T^2 \right) \right) \mathbf{r}_L \right. \\ &\quad \left. - (\mathbf{r}_T \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_L) + \mathbf{r}_L \cdot \mathbf{v}_T) \mathbf{r}_T - (\mathbf{r}_L \cdot \mathbf{r}_T) (\mathbf{r}_T \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{v}_T) + \frac{\mathbf{r}_T \cdot \mathbf{v}_T}{r_T^2} (5 (\mathbf{r}_L \cdot \mathbf{r}_T) \mathbf{r}_T - r_T^2 \mathbf{r}_L) \right], \quad (2.112) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Gamma}_T &= 3 \frac{k_2 \mathcal{G} m_L m_S R_T^5}{r_L^5 r_T^5} \Delta t \left[ \left( \mathbf{r}_T \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_L) + \mathbf{r}_L \cdot \mathbf{v}_T - 5 \frac{\mathbf{r}_T \cdot \mathbf{v}_T}{r_T^2} (\mathbf{r}_L \cdot \mathbf{r}_T) \right) (\mathbf{r}_L \times \mathbf{r}_T) \right. \\ &\quad \left. + (\mathbf{r}_L \cdot \mathbf{r}_T) ((\mathbf{r}_L \cdot \boldsymbol{\omega}) \mathbf{r}_T - (\mathbf{r}_L \cdot \mathbf{r}_T) \boldsymbol{\omega} + \mathbf{r}_L \times \mathbf{v}_T) \right]. \quad (2.113) \end{aligned}$$

La force exercée sur la Lune est

$$\mathbf{F}_L = -\mathbf{F}_T. \quad (2.114)$$

### 2.2.5.2 Intégration des équations du mouvement

Nous allons préciser maintenant le schéma d'intégration pour les variables utilisées dans l'intégrateur LaX. On note  $(\mathbf{u}_i, \tilde{\mathbf{u}}_i)$  les variables canoniques barycentriques et  $(\mathbf{r}_i, \tilde{\mathbf{r}}_i)$  les variables canoniques héliocentriques (annexe A), où pour les planètes  $\mathbf{r}_i = \mathbf{u}_i - \mathbf{u}_0$  et  $\tilde{\mathbf{r}}_i = \tilde{\mathbf{u}}_i = m_i \dot{\mathbf{u}}_i$  et pour le Soleil  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{u}_0$ ,  $\tilde{\mathbf{u}}_0 = m_0 \dot{\mathbf{u}}_0$  et  $\tilde{\mathbf{r}}_0 = \mathbf{0} = \tilde{\mathbf{u}}_0 + \sum_{i=1}^n \tilde{\mathbf{u}}_i = \tilde{\mathbf{u}}_0 + \sum_{i=1}^n \tilde{\mathbf{r}}_i$ . Ainsi on a pour la Terre,

$$\mathbf{v}_T = \dot{\mathbf{r}}_T = \dot{\mathbf{u}}_T - \dot{\mathbf{u}}_0 = \frac{\tilde{\mathbf{r}}_T}{m_T} - \frac{\tilde{\mathbf{u}}_0}{m_0} \quad (2.115)$$

soit

$$\mathbf{v}_T = \frac{\tilde{\mathbf{r}}_T}{m_T} + \frac{\tilde{\mathbf{r}}_{tot}}{m_0} \quad (2.116)$$

avec  $\tilde{\mathbf{r}}_{tot} = \sum_{i=1}^n \tilde{\mathbf{r}}_i$ .

Dans l'intégrateur LaX, les variables du système Terre-Lune, qui sont intégrées, sont la position du barycentre Terre-Lune  $(m_T + m_L) \mathbf{u}_B = m_T \mathbf{u}_T + m_L \mathbf{u}_L$  et la position de la Lune par rapport à la Terre  $\mathbf{r}_L$ , qui présentent respectivement les moments associés  $\mathbf{p}_B = (m_T + m_L) \dot{\mathbf{u}}_B = \tilde{\mathbf{u}}_T + \tilde{\mathbf{u}}_L$  et  $\mathbf{p}_L = m_L \mathbf{v}_L = m_L \dot{\mathbf{r}}_L = \tilde{\mathbf{u}}_L - \frac{m_L}{m_T} \tilde{\mathbf{u}}_T$ .

Dans l'intégrateur LaX, la rotation de la Terre est décrite par le biais du moment cinétique de rotation de la Terre  $\mathbf{G}$ . Dans le repère  $(\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K})$  lié aux axes principaux de la Terre, il s'exprime en fonction des angles d'Andoyer sous la forme

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \sin l \sin J \\ \cos l \sin J \\ \cos J \end{pmatrix} G. \quad (2.117)$$

Ainsi le vecteur rotation instantané de la Terre est donné par

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{(\mathbf{G} \cdot \mathbf{I})}{A} \mathbf{I} + \frac{(\mathbf{G} \cdot \mathbf{J})}{B} \mathbf{J} + \frac{(\mathbf{G} \cdot \mathbf{K})}{C} \mathbf{K} = G \left( \frac{\sin l \sin J}{A} \mathbf{I} + \frac{\cos l \sin J}{B} \mathbf{J} + \frac{\cos J}{C} \mathbf{K} \right). \quad (2.118)$$

En réalisant une moyenne sur l'angle rapide d'Andoyer  $l$ , on obtient  $\langle \mathbf{G} \rangle_l = C\boldsymbol{\omega}$ . Dans ce qui suit, on tient compte de la moyenne réalisée et par abus de langage on notera  $\mathbf{G}$  au lieu de  $\langle \mathbf{G} \rangle_l$ .

Les équations du mouvement sont

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{p}}_B = \mathbf{F}_L + \mathbf{F}_T \\ \dot{\mathbf{p}}_L = \mathbf{F}_L - \frac{m_L}{m_T} \mathbf{F}_T \\ \dot{\mathbf{G}} = \boldsymbol{\Gamma}_T. \end{cases} \quad (2.119)$$

Les schémas d'intégration pour un pas de temps  $h$  pour les différents termes sont les suivants.

**Marées solaires** Les forces et le couple s'exerçant sur le système Terre-Lune sont

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_T &= -3 \frac{k_2 \mathcal{G} m_S^2 R_T^5}{r_T^{10}} \Delta t \left[ 2 \left( \mathbf{r}_T \cdot \left( \frac{\tilde{\mathbf{r}}_T}{m_T} + \frac{\tilde{\mathbf{r}}_{tot}}{m_0} \right) \right) \mathbf{r}_T + r_T^2 \left( \frac{\mathbf{r}_T \times \mathbf{G}}{C} + \left( \frac{\tilde{\mathbf{r}}_T}{m_T} + \frac{\tilde{\mathbf{r}}_{tot}}{m_0} \right) \right) \right] \\ \mathbf{F}_L &= \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\Gamma}_T &= -\mathbf{r}_T \times \mathbf{F}_T = 3 \frac{k_2 \mathcal{G} m_S^2 R_T^5}{r_T^8} \Delta t \left[ \frac{\mathbf{r}_T \cdot \mathbf{G}}{C} \mathbf{r}_T - \frac{r_T^2}{C} \mathbf{G} + \mathbf{r}_T \times \left( \frac{\tilde{\mathbf{r}}_T}{m_T} + \frac{\tilde{\mathbf{r}}_{tot}}{m_0} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.120)$$

Le schéma d'intégration est ainsi

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{p}}'_B = \tilde{\mathbf{p}}_B + h \mathbf{F}_T \\ \tilde{\mathbf{p}}'_L = \tilde{\mathbf{p}}_L - h \frac{m_L}{m_T} \mathbf{F}_T \\ \mathbf{G}' = \mathbf{G} + h \boldsymbol{\Gamma}_T. \end{cases} \quad (2.121)$$

**Marées lunaires** Les forces et le couple s'exerçant sur le système Terre-Lune sont

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_T &= 3 \frac{k_2 \mathcal{G} m_L^2 R_T^5}{r_L^{10}} \Delta t \left[ 2 \frac{\mathbf{r}_L \cdot \mathbf{p}_L}{m_L} \mathbf{r}_L + r_L^2 \left( \frac{\mathbf{r}_L \times \mathbf{G}}{C} + \frac{\mathbf{p}_L}{m_L} \right) \right] \\ \mathbf{F}_L &= -\mathbf{F}_T \\ \boldsymbol{\Gamma}_T &= \mathbf{r}_L \times \mathbf{F}_T = 3 \frac{k_2 \mathcal{G} m_L^2 R_T^5}{r_L^8} \Delta t \left[ \frac{\mathbf{r}_L \cdot \mathbf{G}}{C} \mathbf{r}_L - \frac{r_L^2}{C} \mathbf{G} + \frac{\mathbf{r}_L \times \mathbf{p}_L}{m_L} \right]. \end{aligned} \quad (2.122)$$

Le schéma d'intégration est ainsi

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{p}}'_B = \tilde{\mathbf{p}}_B \\ \tilde{\mathbf{p}}'_L = \tilde{\mathbf{p}}_L - h \left( 1 + \frac{m_L}{m_T} \right) \mathbf{F}_T \\ \mathbf{G}' = \mathbf{G} + h \boldsymbol{\Gamma}_T. \end{cases} \quad (2.123)$$

**Termes croisés** Pour l'interaction Terre-Soleil suite à la déformation de la Terre par la Lune, les forces et le couple s'exerçant sur le système Terre-Lune sont

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_T &= 3 \frac{k_2 \mathcal{G} m_L m_S R_T^5}{r_L^5 r_T^5} \Delta t \left[ \frac{5}{r_T^2} \left( (\mathbf{r}_T \cdot \mathbf{r}_L) \left( \mathbf{r}_L \cdot \left( \frac{\mathbf{G} \times \mathbf{r}_T}{C} \right) + \frac{\mathbf{r}_T \cdot \mathbf{p}_L}{m_L} \right) - \frac{\mathbf{r}_L \cdot \mathbf{p}_L}{2 m_L r_L^2} \left( 5 (\mathbf{r}_T \cdot \mathbf{r}_L)^2 - r_T^2 r_L^2 \right) \right) \mathbf{r}_T \right. \\ &\quad \left. - \left( \mathbf{r}_L \cdot \left( \frac{\mathbf{G} \times \mathbf{r}_T}{C} \right) + \frac{\mathbf{r}_T \cdot \mathbf{p}_L}{m_L} \right) \mathbf{r}_L - (\mathbf{r}_T \cdot \mathbf{r}_L) \left( \frac{\mathbf{r}_L \times \mathbf{G}}{C} + \frac{\mathbf{p}_L}{m_L} \right) + \frac{\mathbf{r}_L \cdot \mathbf{p}_L}{m_L r_L^2} \left( 5 (\mathbf{r}_T \cdot \mathbf{r}_L) \mathbf{r}_L - r_L^2 \mathbf{r}_T \right) \right] \\ \mathbf{F}_L &= \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\Gamma}_T &= -\mathbf{r}_T \times \mathbf{F}_T = 3 \frac{k_2 \mathcal{G} m_L m_S R_T^5}{r_L^5 r_T^5} \Delta t \left[ \left( \mathbf{r}_L \cdot \left( \frac{\mathbf{G} \times \mathbf{r}_T}{C} \right) + \frac{\mathbf{r}_T \cdot \mathbf{p}_L}{m_L} - 5 \frac{\mathbf{r}_L \cdot \mathbf{p}_L}{m_L r_L^2} (\mathbf{r}_T \cdot \mathbf{r}_L) \right) (\mathbf{r}_T \times \mathbf{r}_L) \right. \\ &\quad \left. + (\mathbf{r}_T \cdot \mathbf{r}_L) \left( \frac{\mathbf{r}_T \cdot \mathbf{G}}{C} \mathbf{r}_L - \frac{\mathbf{r}_T \cdot \mathbf{r}_L}{C} \mathbf{G} + \frac{\mathbf{r}_T \times \mathbf{p}_L}{m_L} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.124)$$

Le schéma d'intégration est ainsi

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{p}}'_B = \tilde{\mathbf{p}}_B + h\mathbf{F}_T \\ \tilde{\mathbf{p}}'_L = \tilde{\mathbf{p}}_L - h\frac{m_L}{m_T}\mathbf{F}_T \\ \mathbf{G}' = \mathbf{G} + h\mathbf{\Gamma}_T. \end{cases} \quad (2.125)$$

Pour l'interaction Terre-Lune suite à la déformation de la Terre par le Soleil, les forces et le couple s'exerçant sur le système Terre-Lune sont

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_T &= -3\frac{k_2\mathcal{G}m_Lm_S R_T^5}{r_L^5 r_T^5} \Delta t \times \\ &\quad \left[ \frac{5}{r_L^2} \left( (\mathbf{r}_L \cdot \mathbf{r}_T) \left( \mathbf{r}_T \cdot \left( \frac{\mathbf{G} \times \mathbf{r}_L}{C} \right) + \mathbf{r}_L \cdot \left( \frac{\tilde{\mathbf{r}}_T}{m_T} + \frac{\tilde{\mathbf{r}}_{tot}}{m_0} \right) \right) - \frac{\mathbf{r}_T \cdot \left( \frac{\tilde{\mathbf{r}}_T}{m_T} + \frac{\tilde{\mathbf{r}}_{tot}}{m_0} \right)}{2r_T^2} \left( 5(\mathbf{r}_L \cdot \mathbf{r}_T)^2 - r_L^2 r_T^2 \right) \right) \mathbf{r}_L \right. \\ &\quad - \left( \mathbf{r}_T \cdot \left( \frac{\mathbf{G} \times \mathbf{r}_L}{C} \right) + \mathbf{r}_L \cdot \left( \frac{\tilde{\mathbf{r}}_T}{m_T} + \frac{\tilde{\mathbf{r}}_{tot}}{m_0} \right) \right) \mathbf{r}_T - (\mathbf{r}_L \cdot \mathbf{r}_T) \left( \frac{\mathbf{r}_T \times \mathbf{G}}{C} + \left( \frac{\tilde{\mathbf{r}}_T}{m_T} + \frac{\tilde{\mathbf{r}}_{tot}}{m_0} \right) \right) \\ &\quad \left. + \frac{\mathbf{r}_T \cdot \left( \frac{\tilde{\mathbf{r}}_T}{m_T} + \frac{\tilde{\mathbf{r}}_{tot}}{m_0} \right)}{r_T^2} \left( 5(\mathbf{r}_L \cdot \mathbf{r}_T) \mathbf{r}_T - r_T^2 \mathbf{r}_L \right) \right] \\ \mathbf{F}_L &= -\mathbf{F}_T \\ \mathbf{\Gamma}_T &= \mathbf{r}_L \times \mathbf{F}_T \\ &= 3\frac{k_2\mathcal{G}m_Lm_S R_T^5}{r_L^5 r_T^5} \Delta t \left[ \left( \mathbf{r}_T \cdot \left( \frac{\mathbf{G} \times \mathbf{r}_L}{C} \right) + \mathbf{r}_L \cdot \left( \frac{\tilde{\mathbf{r}}_T}{m_T} + \frac{\tilde{\mathbf{r}}_{tot}}{m_0} \right) - 5\frac{\mathbf{r}_L \cdot \mathbf{r}_T}{r_T^2} \left( \mathbf{r}_T \cdot \left( \frac{\tilde{\mathbf{r}}_T}{m_T} + \frac{\tilde{\mathbf{r}}_{tot}}{m_0} \right) \right) \right) (\mathbf{r}_L \times \mathbf{r}_T) \right. \\ &\quad \left. + (\mathbf{r}_L \cdot \mathbf{r}_T) \left( \frac{\mathbf{r}_L \cdot \mathbf{G}}{C} \mathbf{r}_T - \frac{\mathbf{r}_L \cdot \mathbf{r}_T}{C} \mathbf{G} + \mathbf{r}_L \times \left( \frac{\tilde{\mathbf{r}}_T}{m_T} + \frac{\tilde{\mathbf{r}}_{tot}}{m_0} \right) \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.126)$$

Le schéma d'intégration est ainsi

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{p}}'_B = \tilde{\mathbf{p}}_B \\ \tilde{\mathbf{p}}'_L = \tilde{\mathbf{p}}_L - h \left( 1 + \frac{m_L}{m_T} \right) \mathbf{F}_T \\ \mathbf{G}' = \mathbf{G} + h\mathbf{\Gamma}_T. \end{cases} \quad (2.127)$$

### 2.2.5.3 Variation de l'énergie

**Énergie totale** Suite à ces effets de marées dissipatifs, l'énergie totale  $E$  n'est alors plus conservée. Pour une interaction Terre-Soleil, sa variation est donnée par

$$\frac{dE}{dt} = \dot{\mathbf{u}}_T \cdot \mathbf{F}_T - \dot{\mathbf{u}}_0 \cdot \mathbf{F}_T = \left( \frac{\tilde{\mathbf{r}}_T}{m_T} + \frac{\tilde{\mathbf{r}}_{tot}}{m_0} \right) \cdot \mathbf{F}_T. \quad (2.128)$$

Ainsi

$$E(0) = E(t) - \int_0^t \left( \frac{\tilde{\mathbf{r}}_T}{m_T} + \frac{\tilde{\mathbf{r}}_{tot}}{m_0} \right) \cdot \mathbf{F}_T dt'. \quad (2.129)$$

Pour une interaction Terre-Lune, sa variation est donnée par

$$\frac{dE}{dt} = \dot{\mathbf{u}}_T \cdot \mathbf{F}_T + \dot{\mathbf{u}}_L \cdot \mathbf{F}_L = (\dot{\mathbf{u}}_T - \dot{\mathbf{u}}_L) \cdot \mathbf{F}_T = -\frac{\mathbf{p}_L \cdot \mathbf{F}_T}{m_L}. \quad (2.130)$$

Ainsi

$$E(0) = E(t) + \int_0^t \frac{\mathbf{p}_L \cdot \mathbf{F}_T}{m_L} dt'. \quad (2.131)$$

**Énergie cinétique de rotation** L'énergie cinétique de rotation de la Terre varie également. Elle s'exprime pour la Terre selon

$$E_{Rot} = \frac{(\mathbf{G} \cdot \mathbf{I})^2}{2A} + \frac{(\mathbf{G} \cdot \mathbf{J})^2}{2B} + \frac{(\mathbf{G} \cdot \mathbf{K})^2}{2C} = \frac{G^2}{2} \left( \frac{\sin^2 l \sin^2 J}{A} + \frac{\cos^2 l \sin^2 J}{B} + \frac{\cos^2 J}{C} \right). \quad (2.132)$$

La Terre est considérée axisymétrique et ainsi  $A = B$ . L'aplatissement gravitationnel est défini par  $J_2 m_T R_T^2 = C - A$ . On obtient ainsi

$$E_{Rot} = \frac{G^2}{2C} \left( 1 + \frac{J_2}{\frac{C}{m_T R_T^2} - J_2} \sin^2 J \right). \quad (2.133)$$

Pour une interaction Terre-Soleil, sa variation est donnée par

$$\frac{dE_{Rot}}{dt} = \frac{\mathbf{\Gamma}_T \cdot \mathbf{G}}{C} = -\frac{(\mathbf{r}_T \times \mathbf{F}_T) \cdot \mathbf{G}}{C} = \frac{(\mathbf{r}_T \times \mathbf{G}) \cdot \mathbf{F}_T}{C}. \quad (2.134)$$

Ainsi

$$E_{Rot}(0) = E_{Rot}(t) - \int_0^t \frac{(\mathbf{r}_T \times \mathbf{G}) \cdot \mathbf{F}_T}{C} dt'. \quad (2.135)$$

Pour une interaction Terre-Lune, sa variation est donnée par

$$\frac{dE_{Rot}}{dt} = \frac{\mathbf{\Gamma}_T \cdot \mathbf{G}}{C} = \frac{(\mathbf{r}_L \times \mathbf{F}_T) \cdot \mathbf{G}}{C} = -\frac{(\mathbf{r}_L \times \mathbf{G}) \cdot \mathbf{F}_T}{C}. \quad (2.136)$$

Ainsi

$$E_{Rot}(0) = E_{Rot}(t) + \int_0^t \frac{(\mathbf{r}_L \times \mathbf{G}) \cdot \mathbf{F}_T}{C} dt'. \quad (2.137)$$

## 2.3 Hamiltonien séculaire

Dans le cas où l'on souhaite étudier la stabilité globale de l'axe de rotation d'un corps planétaire comme cela a été réalisé pour les planètes du système solaire (Laskar *et al.*, 1993a) et la Terre (Laskar et Robutel, 1993), il est nécessaire d'intégrer les équations de la rotation pour un grand nombre de conditions initiales et de paramètres de rotation. Le pas de temps nécessaire à l'intégration du hamiltonien (2.54) de façon symplectique dans le cas du système solaire est de l'ordre de  $5 \times 10^{-3}$  yr comme évoqué dans la section 2.2. Comme réalisé par Laskar *et al.* (1993a) et Laskar et Robutel (1993), l'utilisation d'équations séculaires, où une moyenne a été réalisée sur le mouvement de révolution du corps solide sur son orbite, nécessite un pas d'intégration de l'ordre de 100 yr et l'intégration du mouvement de rotation à long terme est alors nettement plus rapide.

### 2.3.1 Relation entre le moment cinétique et l'axe de rotation

Comme indiqué dans la section 2.2.1, l'angle d'Andoyer  $J$  entre l'axe polaire  $\mathbf{K}$  et le moment cinétique  $\mathbf{G}$  tend à s'annuler en l'absence d'excitation à cause des effets dissipatifs internes aux corps planétaires. Pour la Terre,  $J$  est d'environ  $0.15''$  soit  $7 \times 10^{-7}$  rad ou  $4 \times 10^{-5}^\circ$ . On peut alors confondre l'axe polaire et le moment cinétique.

Il s'agit de l'approximation gyroscopique qui consiste à négliger les composantes non polaires du moment cinétique par rapport à la composante polaire. Cependant comme noté par Boué et Laskar (2006), l'approximation gyroscopique peut conduire à des ambiguïtés et n'est pas nécessaire pour obtenir l'équation d'évolution (2.65) du moment cinétique. Réaliser une moyenne sur la variable d'Andoyer  $l$  est une approximation beaucoup mieux définie et permet de déterminer l'erreur réalisée : si on néglige les termes dépendant de  $J$ , on a alors une erreur relative de  $3/2 \sin^2 J$  sur le coefficient  $\mathcal{C}_1$  d'après l'équation (2.59).

Dans le repère  $(\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K})$  associé aux axes principaux d'inertie, le vecteur instantané de rotation s'écrit

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ 1 + m_3 \end{pmatrix} \omega \quad (2.138)$$

avec  $\omega$  la vitesse angulaire de rotation. Les composantes  $m_1$  et  $m_2$  décrivent le mouvement du vecteur rotation autour de l'axe polaire  $\mathbf{K}$ . La composante  $m_3$  décrit les variations de la longueur du jour. Le moment cinétique est alors donné par

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Am_1 \\ Bm_2 \\ C(1 + m_3) \end{pmatrix} \omega. \quad (2.139)$$

Dans le repère  $(\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K})$ , le moment cinétique  $\mathbf{G}$  s'exprime en fonction des angles d'Andoyer sous la forme

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \sin l \sin J \\ \cos l \sin J \\ \cos J \end{pmatrix} G. \quad (2.140)$$

$J$  est ainsi donné par

$$|\sin J| = \sqrt{\frac{(Am_1)^2 + (Bm_2)^2}{(Am_1)^2 + (Bm_2)^2 + (C(1 + m_3))^2}}. \quad (2.141)$$

Si le mouvement polaire et la longueur du jour sont négligeables par rapport à la rotation propre, c'est-à-dire lorsque  $|m_1|, |m_2|, |m_3| \ll 1$ , l'angle  $J$  est faible et peut être estimé par

$$J \approx \frac{\sqrt{(Am_1)^2 + (Bm_2)^2}}{C}. \quad (2.142)$$

Dans le cas où  $J$  peut être négligé, le mouvement polaire est omis et les composantes non polaires sont alors négligeables devant la composante polaire. Ainsi  $\boldsymbol{\Omega} \approx \omega \mathbf{K}$  et la relation entre le vecteur rotation  $\boldsymbol{\Omega}$  et le moment cinétique  $\mathbf{G}$  devient

$$\mathbf{G} = C\omega \mathbf{K} \quad (2.143)$$

d'où

$$G = C\omega. \quad (2.144)$$

Dans la suite lorsque l'angle  $J$  est suffisamment faible pour pouvoir être négligé, le moment cinétique  $\mathbf{G}$  et le vecteur rotation  $\boldsymbol{\Omega}$  sont alors confondus et on pourra parler alors indistinctement de moment cinétique ou d'axe de rotation.

### 2.3.2 Moyenne sur le mouvement orbital

Boué et Laskar (2006) réalisent une moyenne du hamiltonien (2.54) sur la longitude moyenne et obtiennent ainsi le hamiltonien séculaire décrivant la rotation d'un corps solide. Dans le cas où l'on considère que seule l'étoile centrale exerce un couple sur le corps solide, le hamiltonien séculaire est

$$H = -\frac{G\alpha}{2(1 - e^2)^{3/2}} (\mathbf{w} \cdot \mathbf{n})^2, \quad (2.145)$$

avec  $\mathbf{n}$  la normale à l'orbite et  $e$  l'excentricité.  $\alpha$  est appelée constante de précession et s'écrit

$$\alpha = \frac{3}{2} \frac{\mathcal{G}M_\odot}{C\omega a^3} \left( C - \frac{A+B}{2} \right) \left( 1 - \frac{3}{2} \sin^2 J \right) \quad (2.146)$$

avec  $a$  le demi-grand axe.

L'équation du moment cinétique peut être obtenue avec

$$\dot{\mathbf{w}} = \frac{1}{G} \nabla_{\mathbf{w}} H \times \mathbf{w} \quad (2.147)$$

ce qui aboutit à (e.g. Colombo, 1966, Boué et Laskar, 2006)

$$\dot{\mathbf{w}} = \frac{\alpha}{(1 - e^2)^{3/2}} (\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{w} \wedge \mathbf{n}. \quad (2.148)$$

L'angle entre la normale à l'orbite  $\mathbf{n}$  et le moment cinétique  $\mathbf{w}$  est appelé l'obliquité  $\epsilon$ . L'angle entre la normale au plan invariant, c'est-à-dire le moment cinétique total, et le moment cinétique  $\mathbf{w}$  est appelé inclinaison de l'équateur sur le plan invariant  $i_\epsilon$ .

Le calcul séculaire de l'évolution de la rotation d'un corps planétaire nécessite ainsi de connaître l'évolution séculaire des paramètres orbitaux.

### 2.3.3 Constante de précession

La constante de précession peut s'exprimer en fonction des coefficients du potentiel gravitationnel. Le potentiel gravitationnel d'un corps de masse  $m$  peut être décomposé en harmoniques sphériques dans son repère associé sous la forme (e.g. Kaula, 1966)

$$U(r) = \frac{\mathcal{G}m}{r} + \frac{\mathcal{G}m}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R}{r}\right)^n P_{nm}(\sin \phi) (\bar{C}_{nm} \cos(m\lambda) + \bar{S}_{nm} \sin(m\lambda)), \quad (2.149)$$

où  $n$  est le degré,  $m$  l'ordre,  $\bar{C}_{nm}$  et  $\bar{S}_{nm}$  les coefficients sphériques normalisés,  $R$  un rayon de référence,  $P_{nm}$  les polynômes de Legendre associés normalisés,  $\phi$  est la latitude par rapport à l'équateur du corps et  $\lambda$  la longitude. On peut obtenir les coefficients sphériques non normalisés avec (e.g. Kaula, 1966)

$$C_{nm} = \left( \frac{(n-m)!(2n+1)(2-\delta_{0m})}{(n+m)!} \right)^{1/2} \bar{C}_{nm}, \quad (2.150)$$

$$S_{nm} = \left( \frac{(n-m)!(2n+1)(2-\delta_{0m})}{(n+m)!} \right)^{1/2} \bar{S}_{nm}. \quad (2.151)$$

Les coefficients  $C_{20}$  et  $C_{22}$  sont reliés aux moments d'inertie par les relations

$$C_{20} = \frac{1}{mR^2} \left( \frac{A+B}{2} - C \right), \quad (2.152)$$

$$C_{22} = \frac{1}{mR^2} \frac{B-A}{4}. \quad (2.153)$$

On peut noter

$$\bar{A} = \frac{A}{mR^2}, \quad \bar{B} = \frac{B}{mR^2}, \quad \bar{C} = \frac{C}{mR^2}, \quad \bar{I} = \frac{I}{mR^2}, \quad (2.154)$$

avec  $R$  le rayon de référence utilisé précédemment pour la détermination du champ de gravité. L'aplatissement gravitationnel  $J_2$  est défini par

$$J_2 = -C_{20} = \bar{C} - \frac{\bar{A} + \bar{B}}{2}. \quad (2.155)$$

La constante de précession peut alors s'écrire

$$\alpha = \frac{3}{2} \frac{\mathcal{G}M_\odot J_2}{\bar{C} \omega a^3} \left( 1 - \frac{3}{2} \sin^2 J \right). \quad (2.156)$$

Lorsque l'angle d'Andoyer  $J$  est suffisamment faible pour pouvoir être négligé, la constante de précession s'écrit

$$\alpha = \frac{3}{2} \frac{\mathcal{G}M_\odot J_2}{\bar{C} \omega a^3}. \quad (2.157)$$

### 2.3.4 Fréquence de précession et résonances séculaires

Lorsqu'il n'existe pas de perturbations planétaires, l'orientation et la forme de l'orbite ne varie pas dans le repère d'inertie. La normale à l'orbite  $\mathbf{n}$  est alors fixe. Le hamiltonien (2.145) est intégrable et présente une solution analytique. Le moment cinétique  $\mathbf{w}$  décrit un mouvement de précession autour du vecteur fixe  $\mathbf{n}$  et s'écrit

$$\mathbf{w}(t) = R_{\mathbf{n}}(ft) \mathbf{w}(0) \quad (2.158)$$

avec  $R_{\mathbf{n}}$  la rotation autour du vecteur  $\mathbf{n}$ . Dans ce cas,  $\mathbf{w} \cdot \mathbf{n} = \cos \epsilon$  est constant et l'obliquité ne varie pas. La constante de précession  $f$  s'écrit

$$f = -\frac{\alpha}{(1-e^2)^{3/2}} (\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}) \quad (2.159)$$

$$f = -\frac{3}{2} \frac{\mathcal{G} M_{\odot} J_2 \cos \epsilon}{\bar{C} \omega a^3 (1-e^2)^{3/2}} \left( 1 - \frac{3}{2} \sin^2 J \right). \quad (2.160)$$

En réalité, à cause des perturbations planétaires, l'orbite varie. Le mouvement de précession de l'axe de rotation est alors perturbé et l'obliquité n'est plus constante ainsi que l'excentricité. L'expression (2.160) donne alors seulement la valeur instantanée de la fréquence de précession.

On peut alors considérer le cas où la normale à l'orbite décrit un mouvement de précession uniforme autour d'un axe fixe. L'inclinaison de l'orbite  $i$  est alors constante et la normale  $\mathbf{n}$  peut s'écrire

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} \sin i \cos(st + \phi_0) \\ \sin i \sin(st + \phi_0) \\ \cos i \end{pmatrix}. \quad (2.161)$$

Le hamiltonien (2.145) possède alors un degré et demi de liberté et a été étudié par Colombo (1966), Peale (1969), Henrard et Murigande (1987). Le système présente plusieurs états d'équilibre, appelés états de Cassini. En fonction des paramètres du système, il peut compter quatre états d'équilibre, trois stables et un instable, ou deux états d'équilibre, tous deux stables (e.g. Henrard et Murigande, 1987). Si le système se trouve à un état d'équilibre, l'axe de rotation et les normales à l'orbite et au plan invariant sont coplanaires, l'obliquité reste constante et alors l'axe de rotation et l'orbite précessent à la même vitesse. C'est le cas pour la Lune, qui se trouve dans un état de Cassini, comme décrit par les deuxième et troisième lois de Cassini.

Dans le cas général, la normale à l'orbite ne présente pas un mouvement de précession uniforme. Cependant son évolution et celle de l'excentricité dues aux perturbations des différents corps planétaires peuvent être approchées sur un certain intervalle de temps par une approximation quasi-périodique, où les fréquences correspondent à des combinaisons des fréquences propres des corps planétaires perturbateurs et des fréquences propres du corps perturbé. Pour les planètes du système solaire, les approximations quasi-périodiques sont valables pour environ une dizaine de millions d'années (Laskar, 1990). Pour déterminer la fréquence de précession sur un intervalle de temps, on peut par exemple intégrer numériquement le moment cinétique  $\mathbf{w} = (w_x, w_y, w_z)$  donné par l'équation (2.148) sur cet intervalle puis réaliser une analyse en fréquence de la quantité  $w_x + iw_y$  pour la solution obtenue. Lorsque la fréquence de précession est égale à une des fréquences orbitales séculaires présentes, une résonance séculaire apparaît.

Les variations de l'obliquité peuvent alors augmenter et un chevauchement de résonances séculaires peut donner un caractère chaotique aux variations de l'obliquité comme c'est le cas pour Mars. Mars présente une fréquence de précession de  $-7.6083 \pm 0.0021''/\text{yr}$  (Konopliv *et al.*, 2016) et il y a ainsi un chevauchement des résonances avec les fréquences propres de précession du nœud des planètes terrestres (Laskar et Robutel, 1993), qui sont pour la solution La2010 (Laskar *et al.*, 2011a) : Mercure  $s_1 = -5.61''/\text{yr}$ , Vénus  $s_2 = -7.06''/\text{yr}$ , Terre  $s_3 = -18.848''/\text{yr}$ , Mars  $s_4 = -17.751''/\text{yr}$ . L'obliquité de Mars peut alors varier entre 0 et  $60^\circ$  et ses variations ne peuvent alors plus être prédites au-delà d'une dizaine de millions d'années (Laskar *et al.*, 2004a).

### 2.3.5 Hamiltonien séculaire en variables d'Andoyer

Il est possible de récrire le hamiltonien (2.145) en variables action-angle d'Andoyer. C'est la démarche suivie par Kinoshita (1977) et Laskar (1986). Breiter *et al.* (2005) proposent une méthode pour

retrouver le hamiltonien en variables d'Andoyer en partant du hamiltonien (2.145), que nous allons décrire ici.

Soient  $\mathbf{n}'$  et  $\mathbf{w}'$  les vecteurs  $\mathbf{n}$  et  $\mathbf{w}$  écrits dans un repère fixe par rapport à l'orbite, tels que  $\mathbf{n} = P^{-1}\mathbf{n}'$  et  $\mathbf{w} = P^{-1}\mathbf{w}'$  avec  $P$  une matrice orthogonale vérifiant

$$P = R_3(\Omega) R_1(-i) R_3(-\Omega) \quad (2.162)$$

avec  $R_1$  et  $R_3$  les matrices de rotation autour des axes  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{z}$ . La rotation  $R_3(-\Omega)$  permet de repérer le nœud de l'équateur sur l'orbite par rapport à la même direction qui repère le nœud de l'orbite sur le plan de référence. L'équation différentielle pour  $\mathbf{w}$  est (Boué et Laskar, 2006)

$$\dot{\mathbf{w}} = \{H, \mathbf{w}\} \quad (2.163)$$

avec  $H$  le hamiltonien donné par l'équation (2.145). Soit

$$\dot{\mathbf{w}} = \frac{d(P^{-1}\mathbf{w}')}{dt} = P^{-1}\dot{\mathbf{w}}' + \dot{P}^{-1}\mathbf{w}' = \{H, P^{-1}\mathbf{w}'\}. \quad (2.164)$$

Ainsi

$$\dot{\mathbf{w}}' = \{H, \mathbf{w}'\} - P\dot{P}^{-1}\mathbf{w}'. \quad (2.165)$$

Or  $P$  est une matrice orthogonale d'où pour tout vecteur  $\mathbf{x}$

$$P\dot{P}^{-1}\mathbf{x} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x} \quad (2.166)$$

avec

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \dot{i} \cos \Omega - \dot{\Omega} \sin i \sin \Omega \\ \dot{i} \sin \Omega + \dot{\Omega} \sin i \cos \Omega \\ -(1 - \cos i) \dot{\Omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{A} \\ \mathcal{B} \\ -2\mathcal{C} \end{pmatrix}, \quad (2.167)$$

avec  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{C}$  définis par Laskar (1986) pour  $q = \sin(i/2) \cos(\Omega)$  et  $p = \sin(i/2) \sin(\Omega)$  comme

$$\mathcal{A} = \frac{2(\dot{q} + p(q\dot{p} - p\dot{q}))}{\sqrt{1 - p^2 - q^2}}, \quad (2.168)$$

$$\mathcal{B} = \frac{2(\dot{p} - q(q\dot{p} - p\dot{q}))}{\sqrt{1 - p^2 - q^2}}, \quad (2.169)$$

$$\mathcal{C} = (q\dot{p} - p\dot{q}). \quad (2.170)$$

Ainsi l'équation différentielle pour  $\mathbf{w}'$  est

$$\dot{\mathbf{w}}' = \{H, \mathbf{w}'\} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{w}' = (\nabla_{\mathbf{G}} H - \boldsymbol{\omega}) \times \mathbf{w}' = \{H', \mathbf{w}'\} \quad (2.171)$$

avec

$$H' = H - G\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{w}' = -\frac{G\alpha}{2(1 - e^2)^{3/2}} (\mathbf{w}' \cdot \mathbf{n}')^2 - G\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{w}'. \quad (2.172)$$

Dans le repère lié à l'orbite,  $\mathbf{n}' = (0, 0, 1)$  et les coordonnées de  $\mathbf{w}'$  dépendent des variables d'Andoyer

$$\mathbf{w}' = R_3(\Omega) \begin{pmatrix} \sin I \sin h \\ -\sin I \cos h \\ \cos I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin I \sin(h + \Omega) \\ -\sin I \cos(h + \Omega) \\ \cos I \end{pmatrix}. \quad (2.173)$$

Ainsi

$$H' = -\frac{G\alpha}{2(1 - e^2)^{3/2}} \cos^2 I - \mathcal{A}G \sin I \sin(h + \Omega) + \mathcal{B}G \sin I \cos(h + \Omega) + 2\mathcal{C}G \cos I. \quad (2.174)$$



Avec le choix des variables  $\epsilon = -I$ ,  $\psi = -(\mathfrak{h} + \Omega)$  et  $X = G \cos \epsilon$ , on retrouve le hamiltonien pour les variables action-angle d'Andoyer utilisé par [Laskar et Robutel \(1993\)](#) et [Néron de Surgy et Laskar \(1997\)](#)

$$H' = -\frac{\alpha}{2(1-e^2)^{3/2}} \frac{X^2}{G} - G \sqrt{1 - \frac{X^2}{G^2}} (\mathcal{A} \sin \psi + \mathcal{B} \cos \psi) + 2\mathcal{C}X. \quad (2.175)$$

Les équations pour les variables conjugués  $(X, -\psi)$  sont alors ([Néron de Surgy et Laskar, 1997](#))

$$\dot{X} = \{H', X\} = \frac{\partial H'}{\partial \psi}, \quad (2.176)$$

$$\dot{\psi} = \{H', \psi\} = -\frac{\partial H'}{\partial X}, \quad (2.177)$$

soit ([Néron de Surgy et Laskar, 1997](#))

$$\dot{X} = -G \sqrt{1 - \frac{X^2}{G^2}} (\mathcal{A} \cos \psi - \mathcal{B} \sin \psi), \quad (2.178)$$

$$\dot{\psi} = \frac{\alpha}{(1-e^2)^{3/2}} \frac{X}{G} - 2\mathcal{C} - \frac{X}{G \sqrt{1 - \frac{X^2}{G^2}}} (\mathcal{A} \sin \psi + \mathcal{B} \cos \psi). \quad (2.179)$$

Ainsi le hamiltonien en variables d'Andoyer et le hamiltonien écrit en fonction du moment cinétique sont équivalents.

## Chapitre 3

# Mouvements orbitaux de Cérès et Vesta

Nous avons vu dans le chapitre 2 que les équations orbitales et de rotation étaient couplées. Le mouvement orbital d'un corps agit ainsi sur son mouvement de rotation. Pour pouvoir analyser ultérieurement les mouvements de rotation de Cérès et Vesta, il est ainsi nécessaire d'étudier leurs mouvements orbitaux. Une analyse en fréquence des mouvements orbitaux permet notamment de déterminer quels termes orbitaux peuvent agir de façon significative sur la rotation et ainsi quelles résonances séculaires sont susceptibles d'exister entre les mouvements orbitaux et de rotation.

Si l'on souhaite intégrer la rotation à l'aide d'un modèle séculaire, une solution orbitale séculaire se révèle nécessaire. Nous verrons dans ce chapitre qu'il est possible de construire une solution séculaire orbitale à partir des termes obtenus lors d'une analyse en fréquence.

L'intégration couplée des mouvements orbitaux et de rotation va engendrer des solutions orbitales différentes qui dépendront des paramètres et des options d'intégration utilisés pour la rotation. Afin de disposer d'une solution orbitale de référence, qui ne dépend pas des paramètres de la rotation, nous avons considéré une solution orbitale, où le couplage entre la rotation de Cérès et Vesta et leurs orbites n'a pas été introduit et où les mouvements de rotation de Cérès et Vesta n'ont pas été calculés.

### 3.1 Solution orbitale La2011

La solution orbitale La2011 a été calculée de façon similaire à la solution La2010 (Laskar *et al.*, 2011a) en 2011 par Jacques Laskar. L'intégration a été réalisée avec l'intégrateur LaX sur l'intervalle de temps  $[-250 : 250]$  Myr. L'origine des temps de la solution correspond à l'époque J2000. L'intégration a eu lieu en précision étendue avec un pas d'intégration de  $5 \times 10^{-3}$  yr. Le pas d'écriture en sortie est de 500 yr. Dans cette solution, les huit planètes du système solaire et Pluton sont intégrés. Comme pour Laskar *et al.* (2011a), les cinq corps de la ceinture principale Cérès, Vesta, Pallas, Iris et Bamberga sont considérés comme des planètes et interagissent ainsi gravitationnellement avec les planètes mais aussi entre eux. Laskar *et al.* (2011a) ont considéré ces cinq corps car Cérès, Vesta et Pallas sont les trois corps les plus massifs de la ceinture principale et car Iris et Bamberga perturbent de façon significative le mouvement orbital de Mars.

L'intégrateur symplectique utilisé pour intégrer le mouvement orbital est obtenu par une composition symétrique selon la méthode de Suzuki (1990) de l'intégrateur  $\mathcal{SABA}_{C_3}$ , qui a été développé par Laskar et Robutel (2001) pour les hamiltoniens perturbés pouvant s'écrire sous la forme  $H = A + \epsilon B$ . Dans le cas du système solaire, le hamiltonien  $A$  correspond aux mouvements képlériens des planètes et  $\epsilon B$  aux interactions gravitationnelles entre planètes. Les hamiltoniens  $A$  et  $\epsilon B$  étant respectivement d'ordre 1 et 2 en masses planétaires,  $\epsilon B$  correspond à une perturbation du mouvement képlérien. L'intégrateur  $\mathcal{SABA}_{C_3}$  est d'ordre 6 en  $\tau$  et d'ordre 2 en  $\epsilon$  et correspond pour un pas d'intégration  $\tau$  au schéma d'intégration (Laskar et Robutel, 2001)

$$\mathcal{S}(\tau) = e^{-\tau^3 \epsilon^2 \frac{\epsilon}{2} L_{\{A,B\},B}} e^{c_1 \tau L_A} e^{d_1 \tau L_{\epsilon B}} e^{c_2 \tau L_A} e^{d_2 \tau L_{\epsilon B}} e^{c_2 \tau L_A} e^{d_1 \tau L_{\epsilon B}} e^{c_1 \tau L_A} e^{-\tau^3 \epsilon^2 \frac{\epsilon}{2} L_{\{A,B\},B}} \quad (3.1)$$

avec les coefficients

$$c_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{15}}{10}, \quad (3.2)$$

$$d_1 = \frac{5}{18}, \quad (3.3)$$

$$c_2 = \frac{\sqrt{15}}{10}, \quad (3.4)$$

$$d_2 = \frac{4}{9}, \quad (3.5)$$

$$c = \frac{54 - 13\sqrt{15}}{648}, \quad (3.6)$$

et où  $c$  est le coefficient devant le terme  $\{\{A, B\}, B\}$  dans le résidu de l'intégrateur  $\mathcal{SABA}_3$  donné par  $e^{c_1\tau L_A} e^{d_1\tau L_{\epsilon B}} e^{c_2\tau L_A} e^{d_2\tau L_{\epsilon B}} e^{c_2\tau L_A} e^{d_1\tau L_{\epsilon B}} e^{c_1\tau L_A}$ . L'ajout du correcteur  $e^{-\tau^3 \epsilon^2 \frac{\epsilon}{2} L_{\{\{A, B\}, B\}}}$  permet ainsi de passer de résidus d'ordre  $O(\tau^6 \epsilon + \tau^2 \epsilon^2)$  à des résidus d'ordre  $O(\tau^6 \epsilon + \tau^4 \epsilon^2)$ . Une composition symétrique selon la méthode de [Suzuki \(1990\)](#) permet d'augmenter l'ordre de l'intégration et aboutit à l'intégrateur

$$\mathcal{S}(x_1\tau) \mathcal{S}(x_1\tau) \mathcal{S}(x_0\tau) \mathcal{S}(x_1\tau) \mathcal{S}(x_1\tau) \quad (3.7)$$

avec  $x_1 = 1/(4 - 4^{1/3})$  et  $x_0 = -4^{1/3}/(4 - 4^{1/3})$ .

L'intégrateur LaX effectue l'intégration dans un repère d'inertie associé au plan invariant du système solaire, c'est-à-dire le plan perpendiculaire au moment cinétique total du système solaire. Généralement, les coordonnées des astres obtenues lors d'observations sont données dans un repère d'inertie appelé ICRF (*International Celestial Reference Frame*) dont le plan de référence est proche de l'équateur à l'époque J2000. Il est possible de passer de ce repère appelé invariant au repère de l'ICRF par deux rotations successives. Soit un vecteur  $\mathbf{x}$  dans le repère invariant. Les coordonnées dans l'ICRF deviennent

$$\mathbf{x}' = R_z(\theta_3) R_x(\theta_1) \mathbf{x}, \quad (3.8)$$

où  $R_x$  est la rotation d'axe  $(1, 0, 0)$  et  $R_z$  la rotation d'axe  $(0, 0, 1)$  et les angles  $\theta_1$  et  $\theta_3$  ont pour valeurs

$$\theta_1 = 0.4015807829125271 \text{ rad} \quad (3.9)$$

soit  $\theta_1 \approx 23.01^\circ$  et

$$\theta_3 = 0.06724103544220839 \text{ rad} \quad (3.10)$$

soit  $\theta_3 \approx 3.85^\circ$ .

Pour cette solution, les éléments elliptiques non canoniques  $(a, \lambda, e, \varpi, i, \Omega)$  sont calculés à partir des vitesses et positions héliocentriques, où  $a$  est le demi-grand axe,  $\lambda$  la longitude moyenne,  $e$  l'excentricité,  $\varpi$  la longitude du périhélie,  $i$  l'inclinaison par rapport au plan invariant et  $\Omega$  la longitude du nœud ascendant. Les paramètres équinoxiaux sont définis par

$$z = k + ih = e \exp(i\varpi), \quad (3.11)$$

$$\zeta = q + ip = \sin(i/2) \exp(i\Omega). \quad (3.12)$$

Nous cherchons à déterminer les fréquences séculaires caractéristiques du système solaire associées aux mouvements de précession du périhélie et de précession du nœud ascendant dus aux perturbations planétaires. Elles correspondent aux fréquences propres de chaque planète  $k$ , que sont les fréquences de précession du périhélie  $g_k$  et de précession du nœud ascendant  $s_k$ . De la même façon que [Laskar et al. \(2004b\)](#) et [Laskar et al. \(2011a\)](#), on réalise une analyse en fréquence des variables  $z_k$  et  $\zeta_k$  sur l'intervalle de temps  $[-20 : 0]$  Myr pour les quatre planètes internes et sur l'intervalle  $[-50 : 0]$  Myr pour les quatre planètes géantes et Pluton. Les fréquences obtenues sont dans le tableau 3.1. On obtient ainsi 18 fréquences caractéristiques. À cause des perturbations planétaires, Cérès et Vesta présentent eux aussi des mouvements de précession du périhélie et de précession du nœud dans lesquels nous allons retrouver ces fréquences caractéristiques dans des combinaisons de fréquences.

$g_k$	(" / yr)	$s_k$	(" / yr)
$g_1$	5.59	$s_1$	-5.61
$g_2$	7.453	$s_2$	-7.06
$g_3$	17.368	$s_3$	-18.848
$g_4$	17.9157	$s_4$	-17.751
$g_5$	4.257491667		
$g_6$	28.2452	$s_6$	-26.347856
$g_7$	3.08792703	$s_7$	-2.9925254
$g_8$	0.6730216	$s_8$	-0.6917416
$g_9$	-0.35019	$s_9$	-0.35012

TABLEAU 3.1 – Fréquences propres de précession du périhélie  $g_k$  et de précession du nœud ascendant  $s_k$  déterminées par analyse en fréquence sur l'intervalle de temps  $[-20 : 0]$  Myr pour les quatre planètes internes et sur  $[-50 : 0]$  Myr pour les quatre planètes géantes et Pluton.

Nous avons d'abord réalisé une analyse en fréquence des mouvements orbitaux de Cérès et Vesta sur l'intervalle de temps  $[-20 : 0]$  Myr. À partir des décompositions en fréquence ainsi obtenues, on peut reconstruire une solution séculaire comme indiqué dans la section 3.3. Cependant, les décompositions en fréquence obtenues sur l'intervalle de temps  $[-20 : 0]$  Myr ne permettent pas de reproduire les évolutions séculaires de l'excentricité et de l'inclinaison aux extrémités de l'intervalle de temps  $[-20 : 0]$  Myr. Nous avons ainsi réalisé une analyse en fréquence sur l'intervalle de temps  $[-25 : 5]$  Myr. Les décompositions en fréquence obtenues permettent alors de reproduire les évolutions de l'excentricité et de l'inclinaison sur  $[-20 : 0]$  Myr comme indiqué dans la section 3.3. On garde uniquement les cinquante premiers termes par ordre décroissant d'amplitude présents dans l'intervalle de fréquence  $[-300 : +300]$  "/yr : il s'agit ainsi uniquement de termes séculaires. L'analyse en fréquence des variables  $z = e \exp(i\varpi)$  et  $\zeta = \sin(i/2) \exp(i\Omega)$  permet ainsi de les écrire sous l'approximation quasi-périodique suivante

$$\sum_{k=1}^{50} A_k e^{i(\nu_k t + \phi_k)}. \quad (3.13)$$

### 3.1.1 Cérès

L'évolution temporelle du demi-grand axe  $a$ , de l'excentricité  $e$  et de l'inclinaison  $i$  de Cérès pour la solution La2011 a été représentée sur la figure 3.1. Le demi-grand axe varie sur  $[-20 : 0]$  Myr environ entre 2.7647 et 2.7719 UA, l'excentricité entre 0.0629 et 0.169 et l'inclinaison entre 8.77 et 10.6°. On observe que l'évolution de ces quantités sur  $[-100 : 0]$  kyr est représentative de celle sur  $[-20 : 0]$  Myr. L'amplitude des variations est du même ordre de grandeur sur  $[-250 : 250]$  Myr.

Les amplitudes  $A_k$ , les fréquences  $\nu_k$  et les phases  $\phi_k$  obtenues par analyse en fréquence pour les variables  $z$  et  $\zeta$  sont disponibles dans le tableau 3.2 pour Cérès. La fréquence de précession propre du périhélie de Cérès correspond à la fréquence de plus grande amplitude dans l'approximation quasi-périodique de  $z$  et est ainsi  $g_C = 54.2525$  "/yr déterminée avec une précision de 0.0006 "/yr. De même, la fréquence de précession propre du nœud ascendant de Cérès correspond à la fréquence de plus grande amplitude dans l'approximation quasi-périodique de  $\zeta$  et a pour valeur  $s_C = -59.254$  "/yr avec une précision de 0.002 "/yr. Les périodes de précession du périhélie et de précession du nœud ascendant sont ainsi respectivement 23.888 kyr et 21.872 kyr.

Certains termes peuvent être identifiés comme une combinaison de fréquences de référence, ce qui correspond pour Cérès aux fréquences  $g_k$  et  $s_k$  des huit planètes et de Pluton et aux fréquences propres de Cérès  $g_C$  et  $s_C$ . On peut ainsi noter que la fréquence  $g_C = 54.2525$  "/yr est proche de deux termes identifiés  $2g_6 - g_5 \approx 52.23$  "/yr et  $2g_6 - g_7 \approx 53.40$  "/yr. Il serait ainsi nécessaire d'étudier ces deux résonances séculaires situées à proximité afin d'observer si elles peuvent influencer le mouvement orbital à long terme de Cérès. On observe enfin qu'aucun des termes ayant pu être identifié dans les décompositions de  $z$  et  $\zeta$  ne fait intervenir les fréquences propres des planètes internes.

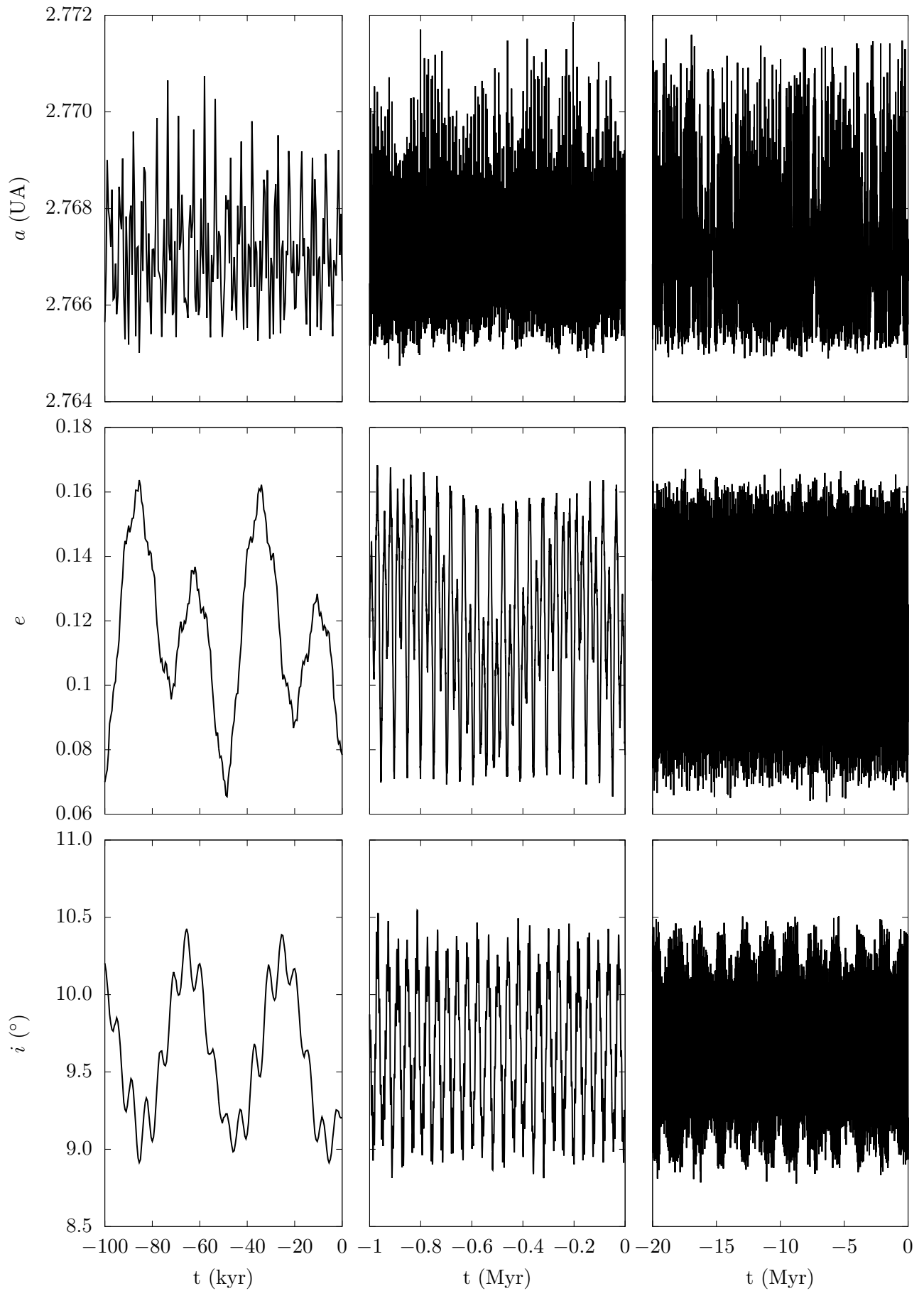


FIGURE 3.1 – Demi-grand axe, excentricité et inclinaison de Cérès sur les intervalles de temps  $[-100 : 0]$  kyr,  $[-1 : 0]$  Myr et  $[-20 : 0]$  Myr.

(a)	$\nu_k$ ("/yr) $10^6 \times A_k$	$\phi_k$ (°)	(b)	$\nu_k$ ("/yr) $10^6 \times A_k$	$\phi_k$ (°)
$g_C$	54.25253	114938	158.975	$s_C$	-59.25351 81688 78.182
$g_5$	4.25750	30684	27.077	$s_C - (g_C - (2g_6 - g_5))$	-61.27328 12344 -39.650
$g_6$	28.24513	19564	-55.734	$s_C + (g_C - (2g_6 - g_5))$	-57.23374 12196 15.144
$2g_6 - g_5$	52.23276	8023	41.516	$s_C + (g_C - (2g_6 - g_7))$	-58.40327 5834 105.370
$2s_C - g_C$	-172.75959	3548	176.528	$s_C - (g_C - (2g_6 - g_7))$	-60.10380 5635-130.022
	54.17786	1655	-83.503	$s_6$	-26.34785 5229 -56.215
	54.32863	1623-134.203			-59.31728 2065-158.140
$2g_6 - g_7$	53.40275	1283	-46.914		-59.18992 2006 137.687
$g_7$	3.08802	1241	117.284	$s_C + (g_5 - g_7)$	-58.08408 1633 167.789
$2s_C - (2g_C - (2g_6 - g_5))$	-174.77941	1127	58.984	$2g_C - s_C$	167.75857 1349-120.054
$2g_C - (2g_6 - g_5)$	56.27217	905	-84.214		-59.46608 1244 -36.536
$2s_C - (2g_6 - g_5)$	-170.73981	840	113.990		-59.04171 1188 10.471
$g_C - (s_C - s_6)$	87.15851	764-154.007			-59.11983 1018 136.500
$g_C + (s_C - s_6)$	21.34721	742	-66.583	$s_C - 2(g_C - (2g_6 - g_5))$	-63.29327 962-157.935
$2g_C - g_5$	104.24751	634	110.562		-59.38279 958-151.270
$g_C - (g_5 - g_7)$	53.08393	630	70.370	$s_C - (2g_C + g_5 - 4g_6 + g_7)$	-62.12350 895 112.305
	54.21717	616	-84.317	$s_C - (g_C - g_6)$	-85.26094 861-136.937
$g_C + (g_5 - g_7)$	55.42147	614	67.809	$s_C + 2(g_C - (2g_6 - g_5))$	-55.21408 861 -47.864
	54.28472	558-129.243			-59.21440 839 178.291
	54.08927	501	-65.955	$s_C + (g_C - g_5 - 2g_6 + 2g_7)$	-59.57496 833-175.559
$2g_C - (2g_6 - g_7)$	55.10340	497	9.247	$s_C + (2g_C + g_5 - 4g_6 + g_7)$	-56.38355 827 42.285
	54.41912	489-152.236			-59.15776 815 145.609
$2s_C - (2g_C - (2g_6 - g_7))$	-173.60964	486	-30.478	$s_C + (g_C - g_6)$	-33.24610 811 112.398
$2s_C - (2g_6 - g_7)$	-171.90928	480-155.596			-59.27631 754-158.149
$2s_C - g_5$	-122.76450	446	-51.407	$s_C - (g_C - g_5 - 2g_6 + 2g_7)$	-58.93431 748 145.231
	54.15524	399	-49.259		-59.34031 658-136.208
$2s_C - g_6$	-146.75209	360	31.354	$s_8$	-0.69175 578 20.281
	54.36418	355-158.902			-59.13924 537 69.232
$2g_C - g_6$	80.26030	353-165.663			-59.09718 502 110.955
	54.31987	328-159.069		$s_7$	-2.99254 498 136.651
	54.24404	319-112.835			-59.18243 494 169.976
	54.18020	313	-79.241		-57.30115 464 140.185
	54.28220	270-132.179			-59.40588 432-117.262
$s_C + s_6 - g_C$	-139.85387	268	42.730		-57.16365 430 81.300
$g_6 + (g_5 - g_7)$	29.41435	259-146.243		$s_C + (s_6 - s_7 - g_C - 2g_5 + 3g_6)$	-60.64119 421 42.144
$g_5 + 2(g_6 - g_7)$	54.57100	256	48.097	$s_C - (s_6 - s_7 - g_C - 2g_5 + 3g_6)$	-57.86597 410 -68.694
	54.12303	246	-42.931	$g_C + g_5 - s_C$	117.76361 352 108.466
$g_6 - (g_5 - g_7)$	27.07620	238-143.927		$s_C - 2(g_C - (2g_6 - g_7))$	-60.95377 347 25.982
	54.38335	235	135.976		-59.08710 335 44.985
	54.42899	226	142.071	$g_C + g_6 - s_C$	141.75125 332 25.633
	54.35117	224-167.422			-59.18321 317 61.105
$2s_C - (g_C - (g_5 - g_7))$	-171.59009	219	-93.331		-59.29432 306-156.136
$2g_C - g_6 + s_C - s_6$	47.35451	205	-32.146	$s_C + 2(g_C - (2g_6 - g_7))$	-57.55339 297 130.966
	54.08255	184	10.421	$s_C + (g_C - g_5)$	-9.25848 291-150.471
	53.93389	172	91.974	$s_C + (g_C + 2g_5 - 2g_6 - g_7)$	-56.06436 273 105.958
	54.13501	157	-16.590		-59.22602 268 176.849
	54.51732	145	49.156	$s_C + (g_5 - g_6)$	-83.24112 267 160.665
	54.80607	130-157.283			-59.16970 238 106.185
	53.98072	121	85.795		-59.24087 234 154.444
	54.02290	103	63.359		-57.08095 199 104.126

TABLEAU 3.2 – 50 premiers termes de l’analyse en fréquence des variables  $z = e \exp(i\varpi)$  (a) et  $\zeta = \sin(i/2) \exp(i\Omega)$  (b) pour Cérés sur l’intervalle de temps  $[-25 : 5]$  Myr.

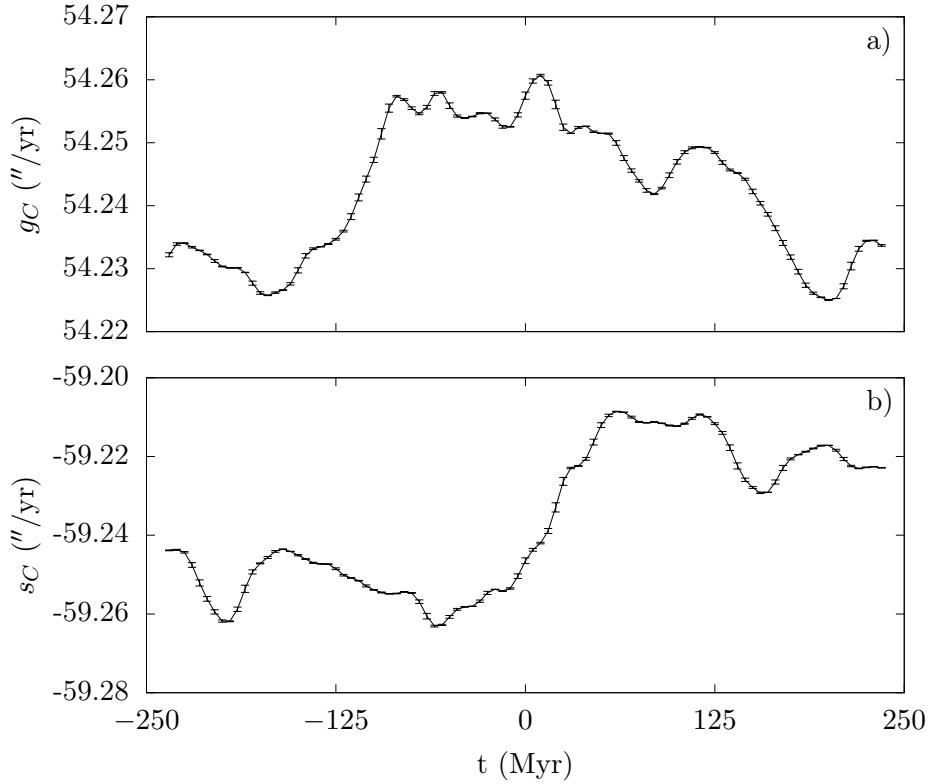


FIGURE 3.2 – Fréquences séculaires  $g_C$  (a) et  $s_C$  (b) de Cérès sur  $[-250 : 250]$  Myr calculées par analyse en fréquence avec un pas de 5 Myr sur chaque intervalle de 30 Myr. Les barres d’erreur sont données par la précision de l’analyse en fréquence.

On observe l’évolution des fréquences séculaires sur  $[-250 : 250]$  Myr avec la même procédure que Laskar (1990) pour estimer la largeur des régions chaotiques. On divise l’intervalle de temps  $[-250 : 250]$  Myr en intervalles de 30 Myr et sur chaque intervalle on réalise une analyse en fréquence pour déterminer les fréquences séculaires  $g_C$  et  $s_C$ . Les centres de deux intervalles consécutifs sont séparés de 5 Myr et il existe ainsi un recouvrement des intervalles. L’évolution des fréquences propres  $g$  et  $s$  est représentée sur la figure 3.2. À cause de la diffusion chaotique, les fréquences  $g_C$  et  $s_C$  varient respectivement sur environ  $[54.225 : 54.261]''/\text{yr}$  et  $[-59.263 : -59.209]''/\text{yr}$ .

### 3.1.2 Vesta

Les variations temporelles du demi-grand axe  $a$ , de l’excentricité  $e$  et de l’inclinaison  $i$  de Vesta pour la solution La2011 sont représentées sur la figure 3.3. Le demi-grand axe, l’excentricité et l’inclinaison oscillent sur  $[-20 : 0]$  Myr respectivement environ entre 2.3603 et 2.3634 UA, entre 0.0392 et 0.160 et entre 5.21 et 7.56°. Comme pour Cérès, les variations sur  $[-100 : 0]$  kyr sont représentatives de celles sur  $[-20 : 0]$  Myr. L’amplitude des variations est du même ordre de grandeur sur  $[-250 : 250]$  Myr.

Les amplitudes  $A_k$ , les fréquences  $\nu_k$  et les phases  $\phi_k$  obtenues par analyse en fréquence pour les variables  $z$  et  $\zeta$  sont présentées dans le tableau 3.3 pour Vesta. Les fréquences propres orbitales de Vesta sont  $g_V = 36.895''/\text{yr}$  et  $s_V = -39.609''/\text{yr}$  obtenues par l’analyse en fréquence avec une précision de  $0.003''/\text{yr}$ . Les périodes de précession du périhélie et de précession du nœud ascendant sont ainsi respectivement 35.13 kyr et 32.72 kyr.

Bien que l’écart entre la fréquence  $-17.737''/\text{yr}$  et la fréquence propre  $s_4 = -17.751''/\text{yr}$  associée à Mars soit de  $0.014''/\text{yr}$ , ce qui est supérieur à la précision de l’analyse en fréquence, la fréquence  $-17.737''/\text{yr}$  pourrait provenir du mouvement orbital séculaire de Mars. Comme Vesta présente un plus petit demi-grand axe que Cérès, les perturbations planétaires de Mars sont plus importantes que pour Cérès, ce qui pourrait expliquer la présence de ce terme.

L’évolution des fréquences propres sur  $[-250 : 250]$  Myr est représentée sur la figure 3.4. À cause de la diffusion chaotique, les fréquences  $g_V$  et  $s_V$  varient respectivement sur environ  $[36.809 : 36.939]''/\text{yr}$

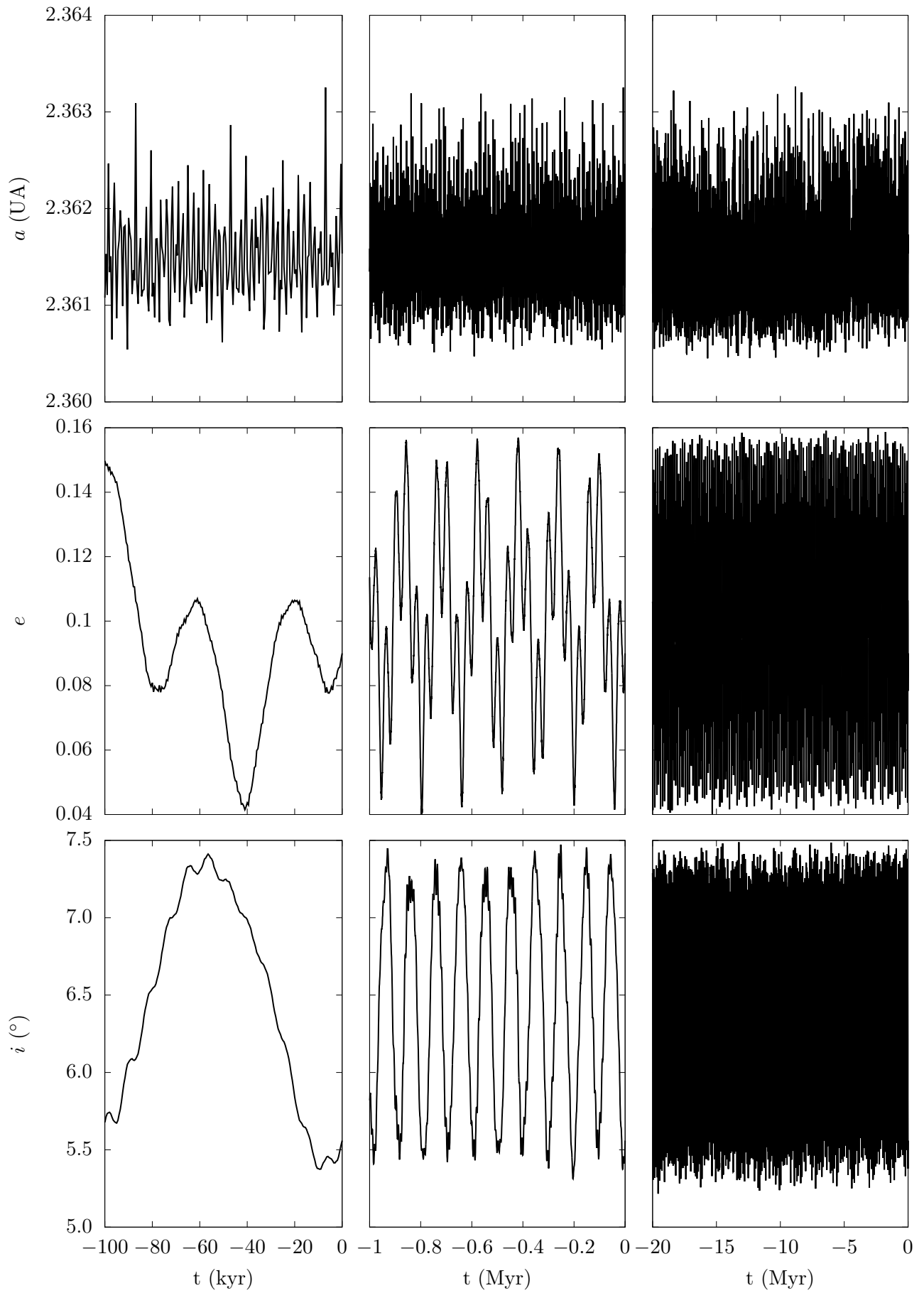


FIGURE 3.3 – Demi-grand axe, excentricité et inclinaison de Vesta sur les intervalles de temps  $[-100 : 0]$  kyr,  $[-1 : 0]$  Myr et  $[-20 : 0]$  Myr.



(a)	$\nu_k$ ("/yr)	$10^6 \times A_k$	$\phi_k$ (°)	(b)	$\nu_k$ ("/yr)	$10^6 \times A_k$	$\phi_k$ (°)
$g_V$	36.89490	98564	-122.569	$s_V$	-39.60884	53659	107.187
$g_6$	28.24512	31697	-55.781	$s_6$	-26.34784	8415	-56.192
$g_5$	4.25749	26156	27.041		-39.67443	7943	-20.319
	36.97140	4721	115.878		-39.53472	7659	76.357
	36.81313	4554	163.495		-39.49150	2826	-33.655
	36.84862	2759	166.234		-39.57146	2652	-140.255
	36.78643	2558	179.195		-39.62997	2198	-137.520
	36.99679	2525	85.970		-39.52960	2098	112.525
	36.93803	1731	122.690	$s_V - (g_V - g_6)$	-48.25866	2079	174.744
	36.89072	1663	127.326	$s_V + (g_V - g_6)$	-30.95913	1985	-138.459
	36.72857	1647	-140.285		-39.58772	1560	105.743
	37.05697	1550	34.707		-39.47439	1467	103.816
	36.89173	1376	154.679		-39.69832	1399	162.185
$g_V - (s_V - s_6)$	50.15557	1349	-107.631		-39.65518	1248	58.214
$g_V + (s_V - s_6)$	23.63377	1300	41.845		-39.61420	945	-56.211
	36.93341	1190	74.762		-39.73436	860	-67.914
$2s_V - g_V$	-116.11448	1102	154.886		-39.50462	851	-93.953
	36.84000	1064	-179.914		-39.69100	816	-167.379
	36.84716	1047	162.744		-39.39015	772	-106.169
$g_7$	3.08795	1045	117.063		-39.43391	770	-42.332
	36.78526	926	-157.751		-39.46848	707	124.045
	36.88950	802	69.901		-39.55488	697	-45.834
$2g_6 - g_5$	52.23282	676	-138.360		-39.77783	682	29.955
	36.94612	652	120.228		-39.65303	651	66.999
$g_V + (g_5 - g_7)$	38.06152	640	140.591	$s_8$	-0.69175	584	20.276
$g_V - (g_5 - g_7)$	35.72795	626	156.535		-39.43395	574	-2.148
$2g_V - g_5$	69.53245	611	-91.314		-39.73011	563	-49.221
	36.98925	581	79.842	$2g_V - s_V$	113.39865	533	7.177
$g_6 - (s_V - s_6)$	41.50591	494	-40.729	$s_7$	-2.99254	514	136.656
	36.74614	477	-116.184		-39.42303	488	46.722
	36.69132	471	-78.481		-39.69201	466	-179.610
$g_6 + (g_5 - g_7)$	29.41516	430	-143.914		-39.76367	464	94.984
$2g_V - g_6$	45.54421	422	-9.384		-39.35408	379	139.039
	36.93934	416	67.015	$s_6 - (g_V - g_6)$	-34.99780	363	-169.922
$2g_V - g_6 + s_V - s_6$	32.28376	406	155.536		-39.81461	357	121.250
	36.80741	403	-139.857		-39.79370	336	-103.462
	36.94137	381	100.853		-48.33380	327	-0.018
	36.99255	377	27.377		-48.17492	326	-164.608
	37.04189	373	33.547		-31.01869	309	126.019
	36.88943	372	119.603		-30.89244	301	144.122
$g_6 - (g_5 - g_7)$	27.07591	370	-144.919		-40.15440	284	86.579
	37.44533	358	-86.385	$g_V + g_6 - s_V$	104.74876	277	73.310
	36.34301	352	16.697		-39.39361	274	-103.823
	36.72254	349	-62.084		-39.05991	271	-42.700
	36.79011	347	-135.492	$s_V - (g_5 - g_7)$	-40.77220	263	-145.014
	37.10060	344	-39.502	$2s_V - s_6$	-52.87189	259	88.498
	36.65369	310	-37.489	$s_V + (g_5 - g_7)$	-38.44674	249	-177.002
	36.84687	268	177.786		-17.73694	212	-34.193
	37.14608	266	-64.218	$s_V + (g_V - g_5)$	-6.97330	136	-50.263
	36.84949	237	-174.862	$g_V + g_5 - s_V$	80.76118	133	156.327

TABLEAU 3.3 – 50 premiers termes de l’analyse en fréquence des variables  $z = e \exp(i\varpi)$  (a) et  $\zeta = \sin(i/2) \exp(i\Omega)$  (b) pour Vesta sur l’intervalle de temps  $[-25 : 5]$  Myr.

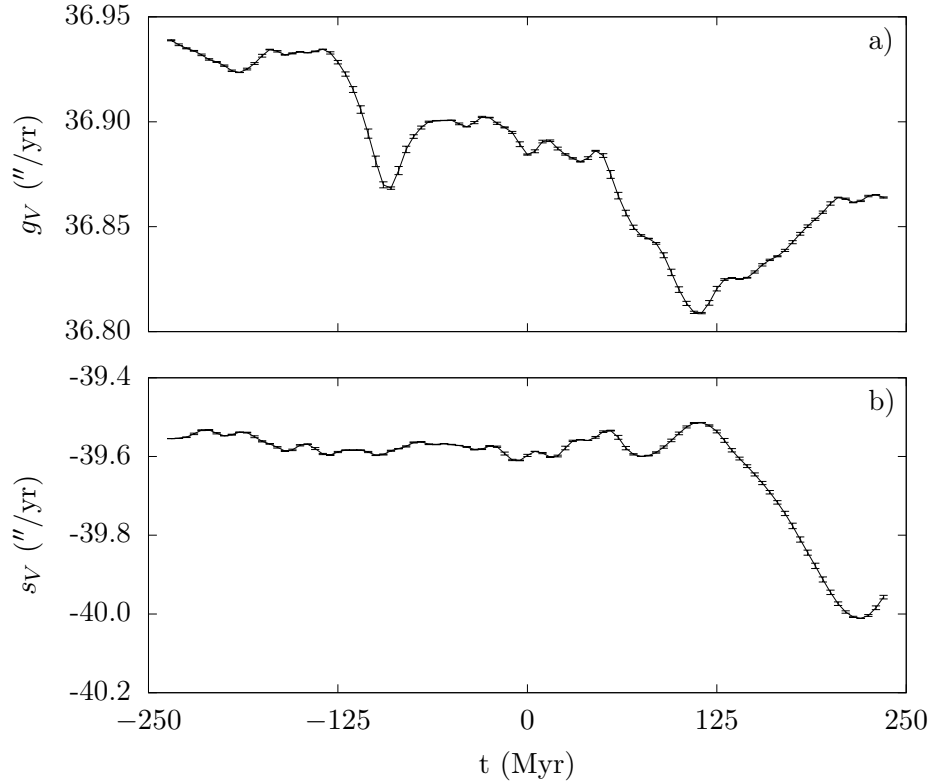


FIGURE 3.4 – Fréquences séculaires  $g_V$  (a) et  $s_V$  (b) de Vesta sur  $[-250 : 250]$  Myr calculées par analyse en fréquence avec un pas de 5 Myr sur chaque intervalle de 30 Myr. Les barres d’erreur sont données par la précision de l’analyse en fréquence.

et  $[-40.011 : -39.514]$  "/yr. La diffusion est plus importante pour Vesta que pour Cérès notamment pour la fréquence  $s_V$  qui varie d’environ  $0.50$  "/yr sur  $[115 : 220]$  Myr.

## 3.2 Modèle séculaire hamiltonien

Dans la section 3.1.1, nous avons vu que Cérès était proche des résonances avec les fréquences séculaires  $2g_6 - g_5$  et  $2g_6 - g_7$ . La présence d’une résonance séculaire orbitale peut induire des variations importantes des paramètres orbitaux, qui peuvent se répercuter sur le mouvement de rotation. De plus comme noté par [Laskar et Robutel \(1993\)](#), le caractère chaotique de l’orbite peut élargir les régions chaotiques de la rotation. Pour étudier la stabilité des mouvements orbitaux de Cérès et Vesta et les effets des résonances proches, nous allons ainsi réaliser un modèle séculaire reproduisant la solution La2011.

### 3.2.1 Construction du modèle séculaire

[Laskar et Robutel \(1995\)](#) ont considéré un problème à trois corps où deux planètes sont en orbite autour d’une étoile et ont développé le hamiltonien d’interaction entre les deux planètes en fonction du rapport de leurs demi-grands axes. Le hamiltonien peut alors s’exprimer comme une série polynomiale des variables canoniques rectangulaires de Poincaré. Pour un hamiltonien développé à un certain ordre en rapport des demi-grands axes, tronquer la série à un certain degré en excentricité et inclinaison permet d’obtenir une expression explicite du hamiltonien d’interaction.

Pour calculer le hamiltonien résultant des perturbations planétaires, nous nous limitons ici aux effets gravitationnels de Jupiter et Saturne sur Cérès et Vesta. Par exemple dans le cas de Cérès, on considère d’abord le système à trois corps Soleil-Jupiter-Cérès pour obtenir le hamiltonien décrivant les perturbations de Jupiter puis le système Soleil-Saturne-Cérès afin d’avoir celui des perturbations de Saturne. La somme des deux hamiltoniens donne le hamiltonien total qui s’écrit ([Laskar et Robutel,](#)

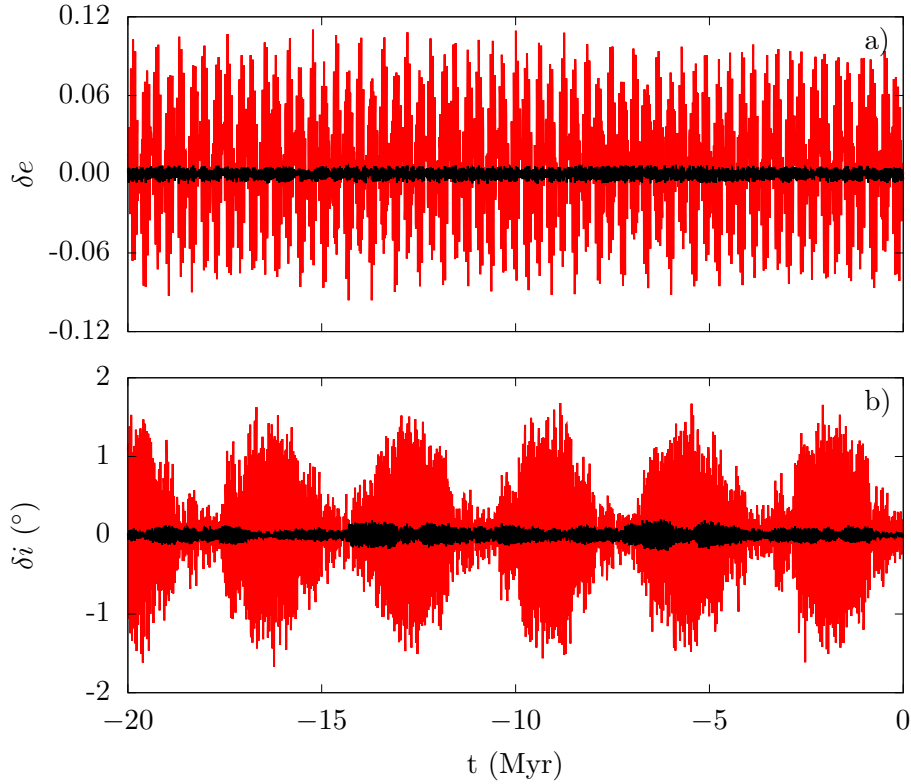


FIGURE 3.5 – Différence pour Cérès entre l'excentricité (a) et l'inclinaison (b) du modèle séculaire et de la solution La2011 avec ajustement de fréquences en noir et sans en rouge.

1995)

$$H = \sum_{l=5}^6 \sum_{k,k'} \sum_{\mathcal{N}} \Gamma_{\mathcal{N}}(\Lambda, \Lambda_l) X^n X_l^{n'} \bar{X}^{\bar{n}} \bar{X}_l^{\bar{n}'} Y^m Y_l^{m'} \bar{Y}^{\bar{m}} \bar{Y}_l^{\bar{m}'} e^{i(k\lambda + k'\lambda_l)} \quad (3.14)$$

avec  $\mathcal{N} = (n, n', \bar{n}, \bar{n}', m, m', \bar{m}, \bar{m}')$  et où  $\Gamma_{\mathcal{N}}(\Lambda, \Lambda_l)$  sont des coefficients dépendant seulement du rapport des demi-grand axes (Laskar et Robutel, 1995). Les variables rectangulaires canoniques de Poincaré  $(\Lambda, \lambda, x, -i\bar{x}, y, -i\bar{y})$  sont définies par

$$\Lambda = \beta \sqrt{\mu a}, \quad (3.15)$$

$$x = \sqrt{\Lambda (1 - \sqrt{1 - e^2})} e^{i\varpi}, \quad (3.16)$$

$$y = \sqrt{\Lambda \sqrt{1 - e^2} (1 - \cos i)} e^{i\Omega}, \quad (3.17)$$

où  $\beta = mM_{\odot}/(m + M_{\odot})$ ,  $\mu = \mathcal{G}(m + M_{\odot})$ ,  $m$  la masse du corps perturbé et  $M_{\odot}$  la masse du Soleil. On utilise les variables normalisées  $X = x\sqrt{2/\Lambda}$ ,  $Y = y/\sqrt{2\Lambda}$  de la même façon que Laskar et Robutel (1995).

Le hamiltonien peut être développé à différents ordres en masse et à différents degrés en excentricité et inclinaison. Le hamiltonien de l'équation (3.14) est un hamiltonien total qui dépend des longitudes moyennes. Le hamiltonien séculaire peut être obtenu à partir de l'expression (3.14) en sélectionnant les termes vérifiant  $(k, k') = (0, 0)$  (Laskar et Robutel, 1995).

On suppose que Cérès et Vesta ne perturbent pas les planètes et présentent des masses nulles. Cérès et Vesta sont ainsi forcés par le mouvement des planètes et les variables  $X_i, \bar{X}_i, Y_i, \bar{Y}_i$  sont calculées à partir d'une solution orbitale séculaire de Jupiter et Saturne. On réalise ainsi une analyse en fréquence des variables  $X_i$  et  $Y_i$  de Jupiter et Saturne pour la solution La2011 sur  $[-20 : 0]$  Myr et on extrait parmi les cent premiers termes de l'analyse en fréquence les termes séculaires de fréquence inférieure en valeur absolue à  $300''/\text{yr}$  pour obtenir des décompositions en fréquences séculaires. En injectant ces décompositions dans les variables de Jupiter et Saturne dans le hamiltonien séculaire, on obtient un

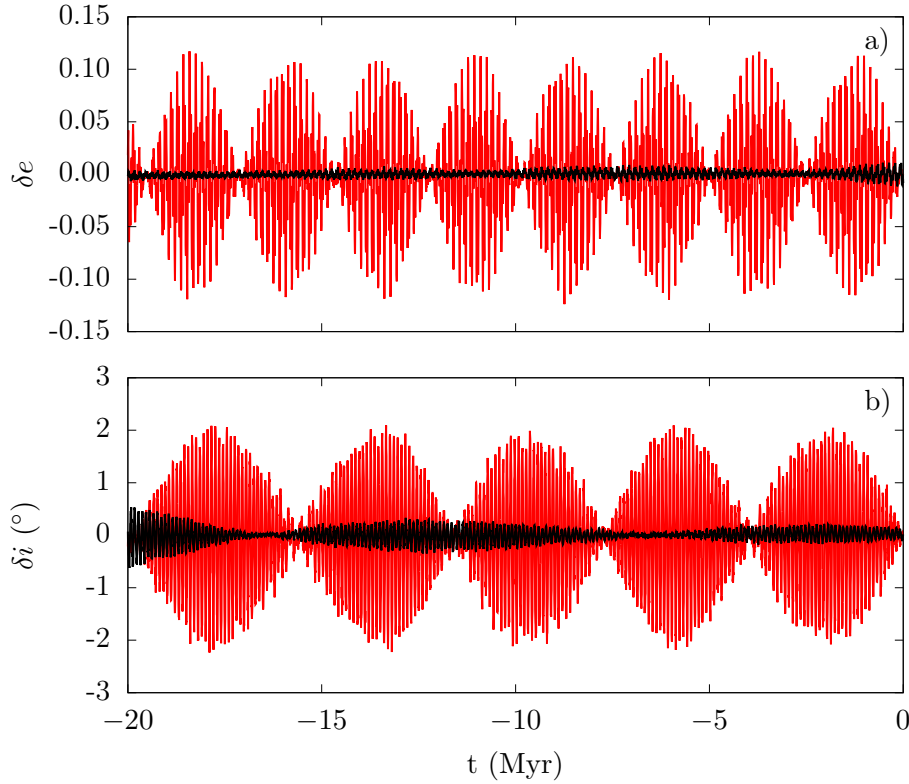


FIGURE 3.6 – Différence pour Vesta entre l’excentricité (a) et l’inclinaison (b) du modèle séculaire et de la solution La2011 avec ajustement de fréquences en noir et sans en rouge.

hamiltonien dépendant uniquement des variables de l’astéroïde  $X, \bar{X}, Y, \bar{Y}$  et du temps. Les équations du mouvement sont données alors par

$$\frac{dX}{dt} = -\frac{2i}{\Lambda} \frac{\partial H}{\partial \bar{X}} \quad (3.18)$$

$$\frac{dY}{dt} = -\frac{i}{2\Lambda} \frac{\partial H}{\partial \bar{Y}}. \quad (3.19)$$

### 3.2.2 Ajustement du modèle séculaire

Les équations (3.18) et (3.19) sont intégrées avec un pas de 100 yr avec un intégrateur Runge-Kutta 8(7) (Dormand et Prince, 1980) avec les mêmes conditions initiales que celles de la solution La2011.

Le hamiltonien séculaire est d’abord calculé à l’ordre 1 en masse et degré 4 en excentricité et inclinaison. Un tel développement ne permet pas de retrouver la solution orbitale de Cérès et Vesta de La2011 comme on peut le voir sur les figures 3.5 et 3.6 pour respectivement Cérès et Vesta. Les amplitudes des oscillations de l’excentricité et de l’inclinaison correspondent mais on observe un déphasage progressif entre la solution donnée par le modèle séculaire et la solution La2011. L’analyse en fréquence permet de constater que les deux solutions présentent des fréquences séculaires  $g$  et  $s$  différentes pour Cérès et Vesta, d’où le déphasage observé. Pour augmenter la précision du modèle séculaire, on pourrait augmenter l’ordre du hamiltonien séculaire.

On peut aussi augmenter la précision du modèle séculaire en ajustant ses fréquences propres de la même façon que cela a été réalisé par Laskar (1990). Les déphasages pour la longitude du périhélie et la longitude du nœud entre la solution La2011 et le modèle séculaire peuvent être modélisés respectivement par les fonctions affines du temps  $At + \delta\varpi_0$  et  $Bt + \delta\Omega_0$ . Les paramètres  $A$  et  $B$  représentent les différences entre les fréquences propres entre les deux solutions. On peut ainsi ajuster les fréquences du modèle séculaire en ajoutant les termes suivants au hamiltonien

$$H' = H - \frac{A\Lambda}{2} X\bar{X} - 2B\Lambda Y\bar{Y}. \quad (3.20)$$

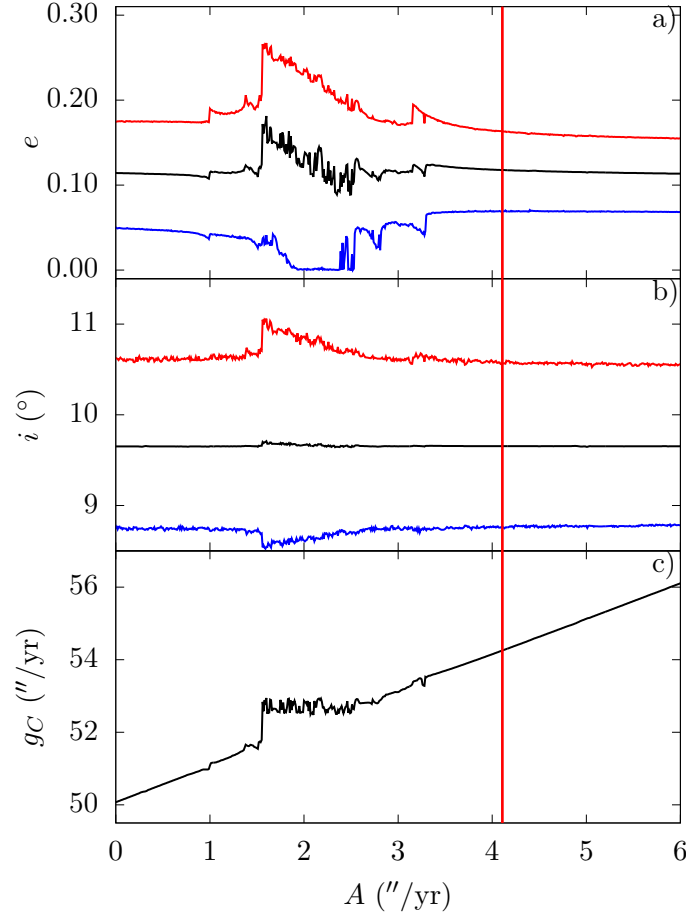


FIGURE 3.7 – Excentricité (a), inclinaison (b), fréquence  $g_C$  (c) en fonction de  $A$  pour Cérès. Pour l'excentricité (a) et l'inclinaison (b), les courbes rouges, noires et bleues correspondent respectivement aux valeurs maximales, moyennes et minimales. La ligne rouge verticale représente la valeur de  $A$  pour le modèle séculaire.

Les conditions initiales de la longitude du périhélie et de la longitude du nœud sont aussi corrigées respectivement de  $\delta\varpi_0$  et  $\delta\Omega_0$ . Les conditions initiales pour l'excentricité et l'inclinaison doivent aussi être corrigées. Les excentricités et les inclinaisons présentent en effet des termes à courtes périodes. Pour l'intégration des équations séculaires, il faut ainsi prendre des conditions initiales de l'excentricité et de l'inclinaison, où une moyenne a été réalisée sur les courtes périodes. On réalise cela en corrigeant les conditions initiales pour que les différences en excentricité et inclinaison présentent une moyenne nulle sur  $[-20 : 0]$  Myr.

La procédure de correction des fréquences séculaires et des conditions initiales est itérée plusieurs fois jusqu'à ce que les moyennes des différences pour les variables  $e$ ,  $i$ ,  $\varpi$  et  $\Omega$  soient nulles sur  $[-20 : 0]$  Myr, comme représentées sur les figures 3.5 et 3.6 pour respectivement Cérès et Vesta. L'ajustement des fréquences est alors de  $A \approx 4.1''/\text{yr}$  et  $B \approx 0.20''/\text{yr}$  pour Cérès et de  $A \approx 0.51''/\text{yr}$  et  $B \approx -0.41''/\text{yr}$  pour Vesta.

L'ajustement des fréquences a ainsi permis de reproduire la solution La2011 en considérant uniquement les perturbations de Jupiter et Saturne. Ainsi la dynamique de Cérès et Vesta est dominée par les perturbations de Jupiter et Saturne et les perturbations des autres planètes sont beaucoup plus faibles, comme noté pour Cérès et Vesta par Skoglöv *et al.* (1996) et pour Cérès par Ermakov *et al.* (2017a). Pour Cérès, la correction sur la fréquence  $g_C$  est particulièrement élevée. On peut construire pour Cérès un modèle d'ordre 2 et de degré 6. Pour ce modèle les corrections sur les fréquences  $g_C$  et  $s_C$  sont plus faibles avec  $A \approx 1.8''/\text{yr}$  et  $B \approx -0.045''/\text{yr}$ . Les contributions d'ordre supérieur sont ainsi plus importantes pour Cérès que pour Vesta mais nous conservons pour les deux le modèle d'ordre 1 et de degré 4.

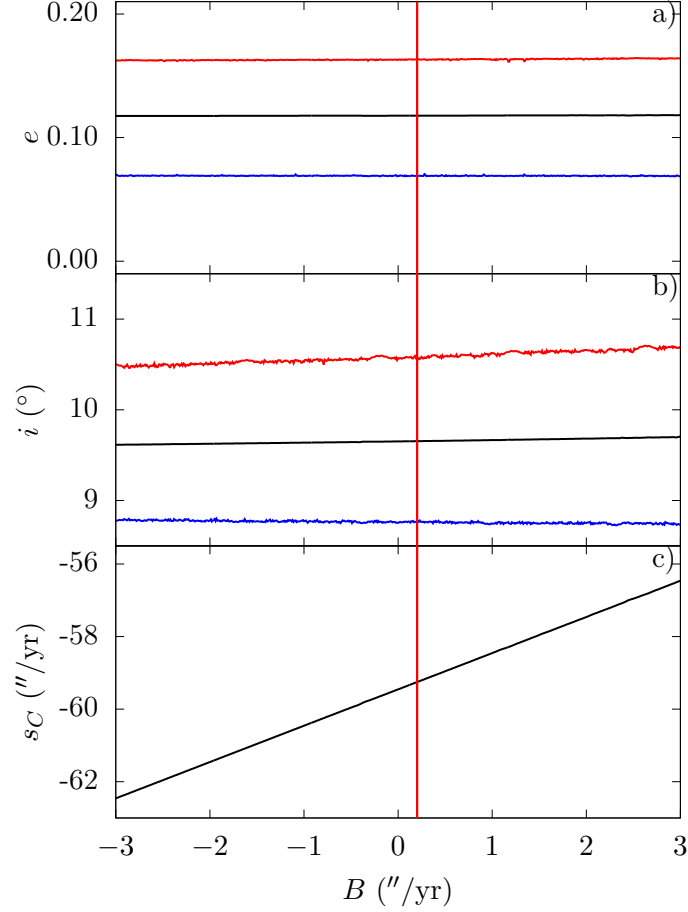


FIGURE 3.8 – Excentricité (a), inclinaison (b), fréquence  $s_C$  (c) en fonction de  $B$  pour Cérès. Pour l'excentricité (a) et l'inclinaison (b), les courbes rouges, noires et bleues correspondent respectivement aux valeurs maximales, moyennes et minimales. La ligne rouge verticale représente la valeur de  $B$  pour le modèle séculaire.

### 3.2.3 Étude des résonances proches

L'intégration des équations issues du hamiltonien séculaire est environ  $10^4$  fois plus rapide qu'en utilisant l'intégrateur LaX. Ce modèle peut ainsi être utilisé pour étudier la dynamique à proximité de Cérès et Vesta en réalisant des intégrations pour de nombreuses valeurs différentes des paramètres  $A$  et  $B$ . Les effets des résonances avec les fréquences présentes dans le mouvement séculaire de Jupiter et Saturne peuvent alors être observés. Les équations (3.18) et (3.19) sont intégrées pour chaque valeur des paramètres  $A$  et  $B$  sur  $[-20 : 0]$  Myr. On détermine ensuite par analyse en fréquence les fréquences  $g$  et  $s$ .

Pour Cérès, on fait varier  $A$  sur l'intervalle  $[0 : 6]''/\text{yr}$ . Les évolutions de l'excentricité, de l'inclinaison, de la fréquence  $g_C$  sont sur la figure 3.7. Cérès entre en résonance avec la fréquence séculaire  $2g_6 - g_5 \approx 52.23''/\text{yr}$  pour  $g_C \in [51.32 : 53.16]''/\text{yr}$ . L'excentricité varie alors entre 0.0002 et 0.27 contre des variations entre 0.04 et 0.18 en dehors de la résonance. L'inclinaison maximale augmente alors de 10.6 à 11.1°. Cérès entre dans la résonance avec la fréquence  $2g_6 - g_7 \approx 53.40''/\text{yr}$  pour  $g_C \in [53.21 : 53.60]''/\text{yr}$  et l'excentricité maximale augmente alors de 0.17 à 0.19. Dans la section 3.1.1, on a estimé que la diffusion chaotique peut permettre à la fréquence séculaire  $g_C$  de varier sur l'intervalle  $[54.225 : 54.261]''/\text{yr}$  sur  $[-250 : 250]$  Myr. Ainsi la diffusion chaotique de la fréquence  $g_C$  est trop faible pour que Cérès puisse entrer en résonance avec les fréquences  $2g_6 - g_5$  et  $2g_6 - g_7$  sur  $[-250 : 250]$  Myr. La fréquence  $g_7 + 2g_6 - 2g_5 \approx 51.06''/\text{yr}$  présente dans le mouvement de Jupiter et Saturne provoque une résonance pour  $g_C \in [50.97 : 51.20]''/\text{yr}$  avec une augmentation de l'excentricité maximale inférieure aux deux résonances précédentes. Le mouvement de Jupiter et Saturne pourrait aussi créer une résonance avec la fréquence  $3g_6 - 2g_5 + s_6 - s_7 \approx 52.87''/\text{yr}$ . Cependant on ne peut pas distinguer ici ses effets de ceux de la résonance  $2g_6 - g_5$ .

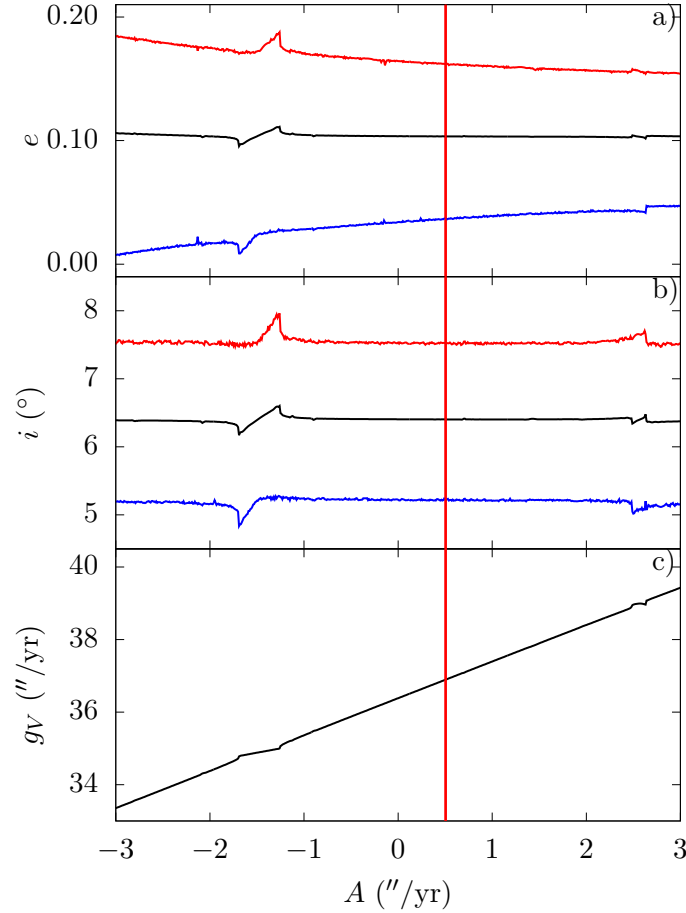


FIGURE 3.9 – Excentricité (a), inclinaison (b), fréquence  $g_V$  (c) en fonction de  $A$  pour Vesta. Pour l'excentricité (a) et l'inclinaison (b), les courbes rouges, noires et bleues correspondent respectivement aux valeurs maximales, moyennes et minimales. La ligne rouge verticale représente la valeur de  $A$  pour le modèle séculaire.

Les évolutions de l'excentricité, de l'inclinaison, de la fréquence  $s_C$  sont sur la figure 3.8 pour  $B \in [-3, 3]''/\text{yr}$ . L'évolution de  $s_C$  présente quelques irrégularités pour  $s_C \in [-59.95 : -59.73]''/\text{yr}$ . Cependant cet intervalle de fréquence ne correspond à aucun terme présent dans le mouvement séculaire de Jupiter et Saturne utilisé pour ce modèle.

Pour Vesta, le paramètre  $A$  varie sur l'intervalle  $[-3, 3]''/\text{yr}$  et les évolutions de l'excentricité, de l'inclinaison, de la fréquence  $g_V$  sont sur la figure 3.9. Lorsque  $g_V \in [34.56 : 35.25]''/\text{yr}$ , Vesta entre en résonance avec la fréquence  $2g_5 - s_6 \approx 34.86''/\text{yr}$ . L'excentricité maximale augmente alors de 0.17 à 0.19 et l'inclinaison maximale de  $7.5$  à  $8.0^\circ$ . Dans la section 3.1.2, nous avons vu que la fréquence séculaire  $g_V$  peut varier sur l'intervalle  $[36.809 : 36.939]''/\text{yr}$  sur  $[-250 : 250]$  Myr à cause de la diffusion chaotique. Ainsi comme pour Cérés la diffusion chaotique est trop faible pour que Vesta entre en résonance avec la fréquence  $2g_5 - s_6$  sur  $[-250 : 250]$  Myr. On observe aussi que pour  $g_V \in [38.86 : 39.12]''/\text{yr}$ , l'inclinaison maximale augmente de  $7.6$  à  $7.7^\circ$ . Cet intervalle de fréquence ne correspond pas à une fréquence présente dans le mouvement séculaire de Jupiter et Saturne.

Les évolutions de l'excentricité, de l'inclinaison et de la fréquence  $s_V$  sont représentées sur la figure 3.10 pour  $B \in [-3, 3]''/\text{yr}$ . Pour  $s_V \in [-41.71 : -41.49]''/\text{yr}$ , l'inclinaison maximale augmente de  $7.3$  à  $7.4^\circ$ . Aucun terme présent dans le mouvement séculaire de Jupiter et Saturne ne correspond à cet intervalle de fréquences.

Pour Cérés et Vesta, on observe ainsi que les résonances séculaires orbitales à proximité présentent de faibles effets sur l'excentricité et l'inclinaison à l'exception des résonances avec les fréquences  $2g_6 - g_5$  et  $2g_6 - g_7$  pour Cérés et  $2g_5 - s_6$  pour Vesta. Cependant la diffusion chaotique n'est pas suffisante pour que Cérés et Vesta entrent en résonance avec ces fréquences sur  $[-250 : 250]$  Myr.

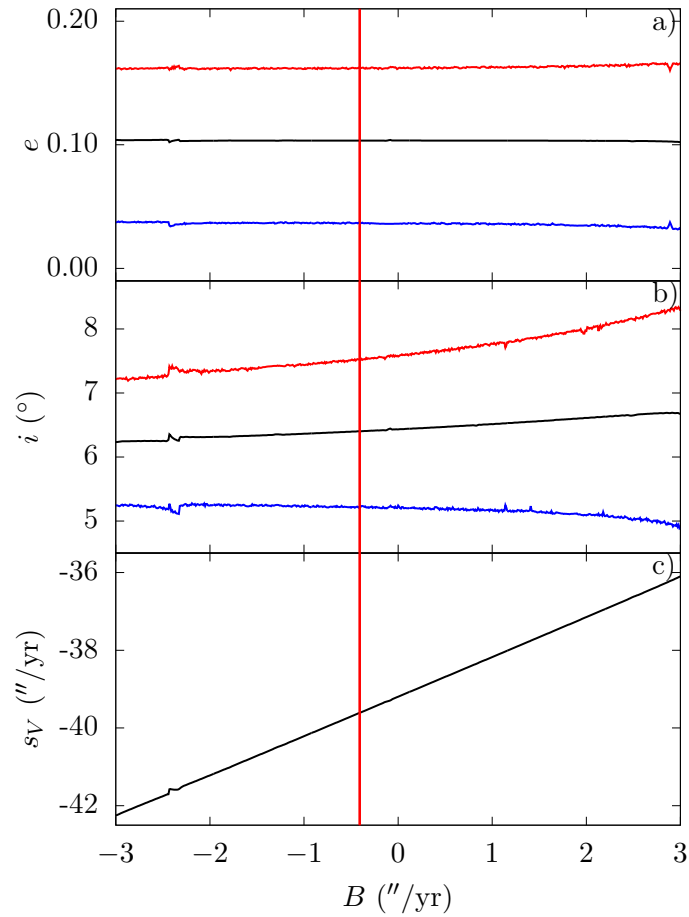


FIGURE 3.10 – Excentricité (a), inclinaison (b), fréquence  $s_V$  (c) en fonction de  $B$  pour Vesta. Pour l'excentricité (a) et l'inclinaison (b), les courbes rouges, noires et bleues correspondent respectivement aux valeurs maximales, moyennes et minimales. La ligne rouge verticale représente la valeur de  $B$  pour le modèle séculaire.

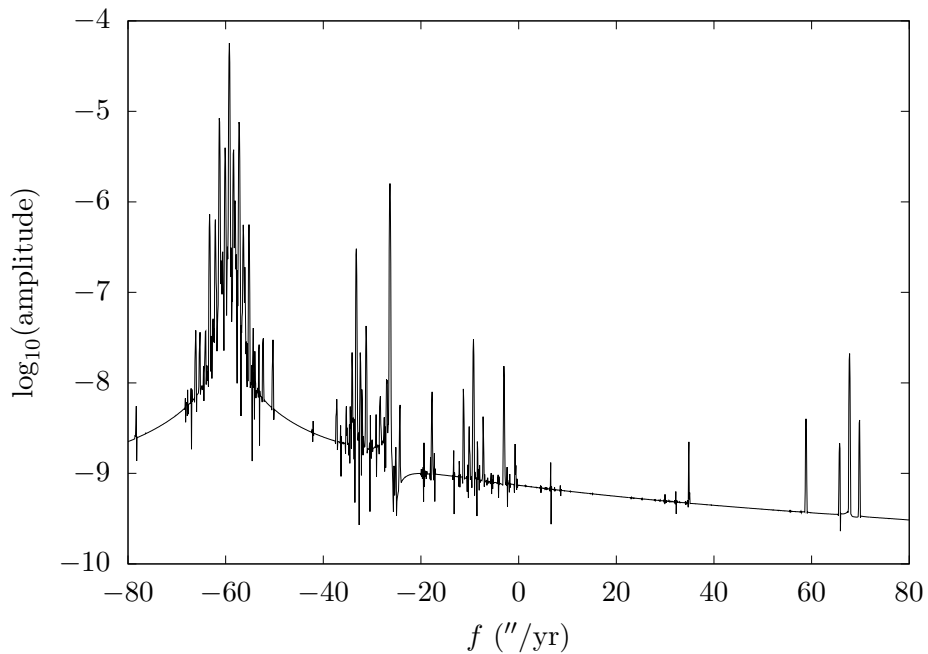


FIGURE 3.11 – Spectre de Fourier de  $\mathcal{A} + i\mathcal{B}$  pour Cérés.



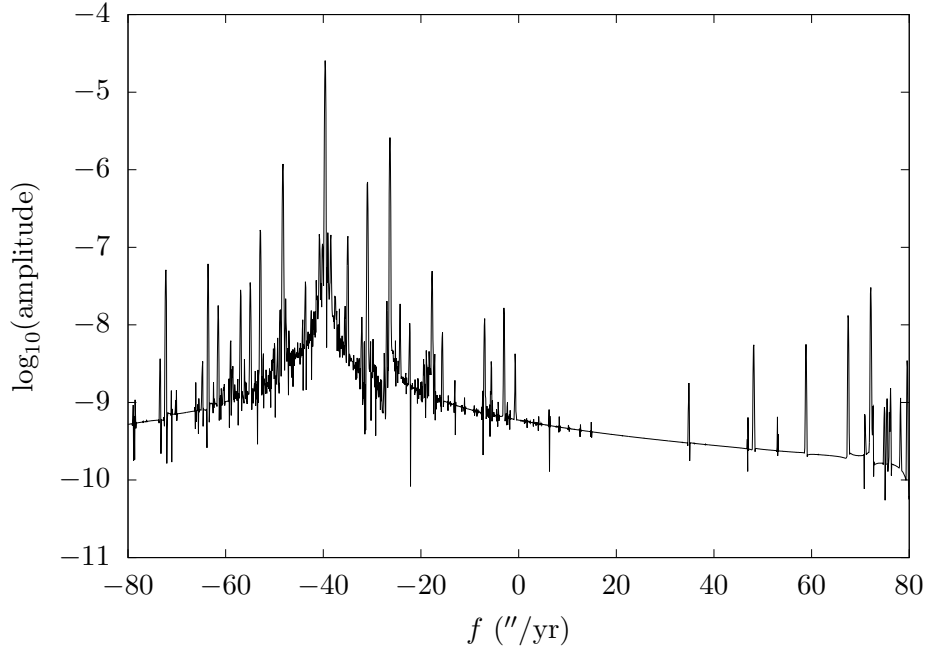


FIGURE 3.12 – Spectre de Fourier de  $\mathcal{A} + i\mathcal{B}$  pour Vesta.

### 3.3 Construction d’une solution orbitale séculaire

Pour calculer la normale à l’orbite  $\mathbf{n}$  et l’excentricité dans les équations (2.148), nous avons besoin d’une solution orbitale. Nous avons d’abord utilisé la solution orbitale de Cérès et Vesta donnée par La2011. Cependant cette solution n’est pas séculaire. L’intégration séculaire de la précession à partir d’une telle solution orbitale conduit à une solution pour la précession où la norme du moment cinétique n’est pas conservée. On observe en effet une dérive linéaire de la norme d’où une erreur relative d’environ  $1 \times 10^{-5}$  au bout de 20 millions d’années. En réalisant une moyenne des éléments orbitaux de la solution La2011, on améliore la conservation de la norme. Cependant, l’erreur relative ne peut descendre en dessous d’environ  $1 \times 10^{-8}$  au bout de 20 millions d’années. Ainsi si on souhaite calculer la précession à partir des équations séculaires (2.148), il est nécessaire d’avoir une solution orbitale séculaire.

On peut extraire une solution séculaire de la solution La2011 à l’aide de l’analyse en fréquence. En effet, l’analyse en fréquence réalisée dans la section 3.1 a permis d’obtenir une décomposition fréquentielle des mouvements orbitaux de Cérès et Vesta. À partir des cinquante premiers termes séculaires, c’est-à-dire de fréquence comprise dans l’intervalle  $[-300 : 300]''/\text{yr}$ , des analyses en fréquence des variables  $z = ee^{i\varpi}$  et  $\zeta = \sin(i/2)e^{i\Omega}$  indiqués dans les tableaux 3.2 et 3.3 pour respectivement Cérès et Vesta, on obtient des séries temporelles pour  $z$  et  $\zeta$ . En les évaluant tous les 100 yr, on peut construire une solution orbitale séculaire.

Cependant on conserve alors seulement les cinquante termes les plus importants pour la variable  $\zeta$ . Or les termes suivants bien que présentant des amplitudes plus faibles peuvent jouer un rôle important en cas de résonance séculaire. C’est le cas par exemple pour la Terre, où la résonance avec la fréquence  $s_6 - g_6 + g_5$  conduit à une variation de l’obliquité moyenne d’environ  $0.4^\circ$  (Laskar *et al.*, 1993b, 2004b), bien que ce terme ait une amplitude environ 5000 fois plus faible que le terme de plus grande amplitude dans la décomposition en fréquence de  $\zeta$  pour la Terre.

Si on se contente d’ajouter les termes suivants en sélectionnant les termes de plus grande amplitude, on ajoutera principalement des termes avec une fréquence proche de la fréquence propre de précession du nœud ascendant  $s$  présentant une amplitude modérée comme on l’observe dans les tableaux 3.2 et 3.3 présentant les décompositions en fréquence de  $\zeta$  pour Cérès et Vesta. Ces termes contribuent de manière faible à l’évolution de  $\zeta$  et leurs effets lors d’une résonance seront masqués par ceux de la résonance avec  $s$  et il n’est ainsi pas nécessaire de les ajouter dans la décomposition en fréquence de  $\zeta$ . De plus, des termes d’amplitude plus faible, mais avec des fréquences éloignées de la fréquence propre  $s$  seront alors omis.

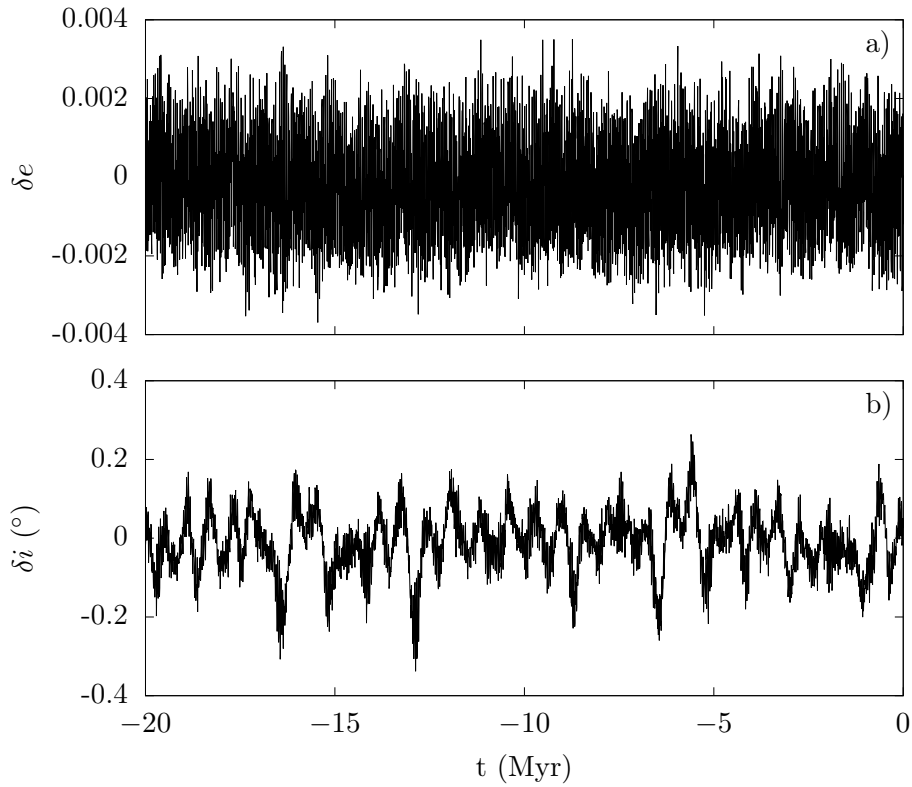


FIGURE 3.13 – Différence pour l'excentricité (a) et l'inclinaison (b) entre la solution séculaire et la solution La2011 pour Cérès.

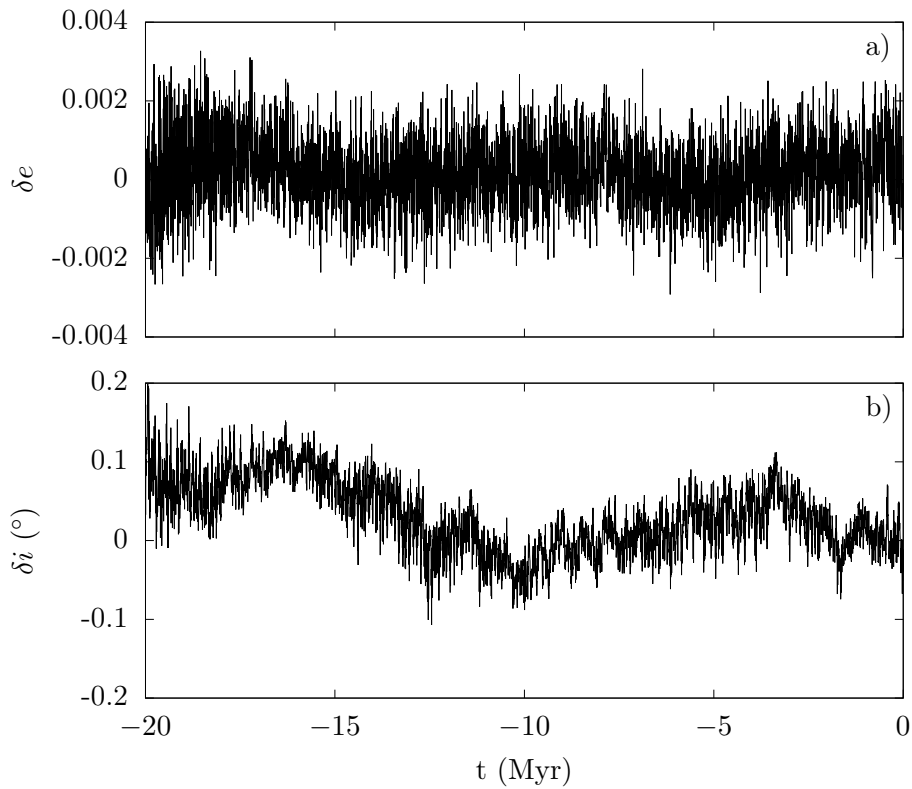


FIGURE 3.14 – Différence pour l'excentricité (a) et l'inclinaison (b) entre la solution séculaire et la solution La2011 pour Vesta.

On va ainsi ajouter à la décomposition en fréquence de  $\zeta$  tous les termes présents dans une fenêtre de fréquences choisie. Pour choisir ces fréquences, on réalise de la même façon que Laskar *et al.* (1993a) le spectre de Fourier de  $\mathcal{A} + i\mathcal{B}$ , où  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  sont définis par les équations (2.168) et (2.169). Les spectres de Fourier de  $\mathcal{A} + i\mathcal{B}$  ont été obtenus avec la fenêtre  $C_N(1 + \cos(\pi t))^N$  avec  $C_N = 2^N(N!)^2/(2N)!$  pour  $N = 3$  et sont représentés sur les figures 3.11 et 3.12 pour respectivement Cérès et Vesta. Pour Cérès, on choisit ainsi comme borne inférieure  $-45''/\text{yr}$  et  $-34''/\text{yr}$  pour Vesta afin de ne pas sélectionner des termes de fréquence proche de la fréquence  $s$ . Souhaitant faire varier la constante de précession dans l'intervalle  $[0 : 60]''/\text{yr}$ , on choisit ainsi comme fenêtre  $[-45 : 60]''/\text{yr}$  pour Cérès et  $[-34 : 60]''/\text{yr}$  pour Vesta.

À partir d'une analyse en fréquence de la solution La2011 sur l'intervalle de temps  $[-25 : 5]$  Myr, la solution séculaire est ainsi obtenue à partir des cinquante premiers termes de fréquence dans l'intervalle  $[-300 : 300]''/\text{yr}$  et des cent termes suivants de fréquence dans l'intervalle  $[-45 : 60]''/\text{yr}$  pour Cérès et dans l'intervalle  $[-34 : 60]''/\text{yr}$  pour Vesta. Ces termes supplémentaires sont indiqués dans l'annexe C dans les tableaux C.1 et C.2 pour respectivement Cérès et Vesta. Les solutions séculaires ainsi obtenues sont comparées à la solution d'origine La2011 pour l'excentricité et l'inclinaison sur les figures 3.13 et 3.14 pour respectivement Cérès et Vesta. Les différences entre la solution séculaire et la solution La2011 présentent de faibles amplitudes et oscillent autour de zéro. Les différences restent inférieures en valeur absolue à 0.004 pour l'excentricité et à  $0.4^\circ$  pour l'inclinaison pour Cérès et à 0.004 pour l'excentricité et à  $0.2^\circ$  pour l'inclinaison pour Vesta. Les solutions séculaires reconstruites par analyse en fréquence permettent ainsi bien de reproduire la solution La2011. Les oscillations de faibles amplitudes correspondent aux termes de plus courtes périodes qui ont été écartés pour construire la solution séculaire.

Cette solution orbitale séculaire sera utilisée dans la section 5.4 pour obtenir une solution séculaire de l'axe de rotation de Cérès et Vesta.

## Chapitre 4

# Caractéristiques physiques et de rotation de Cérès et Vesta

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser aux caractéristiques physiques et de rotation de Cérès et Vesta nécessaires au calcul de la rotation à long terme. Pour réaliser l'intégration à long terme de Cérès et Vesta avec les différentes méthodes indiquées dans le chapitre 2, il est nécessaire de connaître en plus des paramètres orbitaux le moment d'inertie polaire  $\bar{C}$ , l'aplatissement gravitationnel  $J_2$  pour un rayon de référence  $R$ , la vitesse de rotation propre  $\omega$ , l'angle d'Andoyer  $J$  afin notamment de pouvoir calculer les quantités  $\mathcal{C}$  (équation 2.59) et  $\alpha$  (équation 2.156), la constante de précession. Les orientations initiales de Cérès et Vesta doivent aussi être connues.

La vitesse de rotation  $\omega$  peut être déterminée avec une bonne précision à partir des variations de la luminosité observées depuis la Terre, comme réalisé par Chamberlain *et al.* (2007) pour Cérès ou par imagerie comme réalisé par Drummond *et al.* (1988) pour Vesta. L'analyse des courbes de lumière obtenues permet, en plus d'une détermination précise de la période de rotation, d'estimer l'orientation initiale. L'angle  $J$  peut être estimé à partir du calcul du mouvement polaire. La mesure du champ de gravité permet d'obtenir l'aplatissement gravitationnel  $J_2$ . Cette dernière ne peut être effectuée qu'à proximité de Cérès et Vesta, dans une région où leur champ gravitationnel est plus important que celui des autres corps. L'observation de l'axe de rotation au cours du temps peut permettre de déterminer la fréquence de précession instantanée du corps et ainsi de remonter au moment d'inertie polaire d'après l'équation (2.160), si toutes les autres quantités sont connues. Cependant la précession de l'axe de rotation a lieu sur des périodes de temps de l'ordre de dix à cent mille ans. La précession observée sur quelques années est ainsi faible. Les observations doivent ainsi se dérouler de façon précise sur des périodes de temps suffisamment importantes. Si les observations ne permettent pas d'obtenir la fréquence de précession, on peut estimer le moment d'inertie polaire à partir des différents modèles de structure interne qui permettent de reproduire le champ de gravité. Cependant l'incertitude sur la structure interne se retrouve sur le moment d'inertie.

La mission spatiale *Dawn* a permis notamment de déterminer le champ de gravité de Cérès et Vesta ainsi que sa forme. Elle a aussi précisé les vitesses de rotation ainsi que les coordonnées de l'axe de rotation. Nous allons ainsi calculer dans ce chapitre les valeurs des constantes de précession à partir des données de la mission spatiale *Dawn*.

### 4.1 Cérès

#### 4.1.1 Caractéristiques physiques

La sonde spatiale *Dawn* a permis de déterminer le champ de gravité de Cérès jusqu'au 8<sup>e</sup> degré (Park *et al.*, 2016). Park *et al.* (2016) ont ainsi obtenu la valeur de l'aplatissement gravitationnel

$$J_2 = 2.6499 \times 10^{-2} \pm 8.4 \times 10^{-7} \quad (4.1)$$

pour le rayon de référence.

$$R = 470 \text{ km.} \quad (4.2)$$

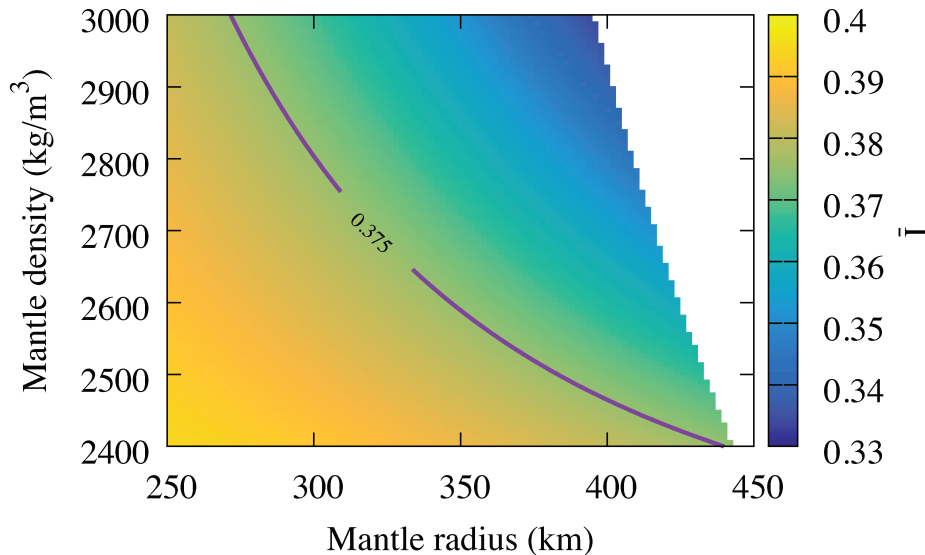


FIGURE 4.1 – Moment d’inertie moyen sphérique  $\bar{I}$  en fonction du rayon et de la densité du manteau pour les solutions numériques de l’équation de Clairaut au 3<sup>e</sup> ordre (Rambaux *et al.*, 2015). La courbe violette représente les solutions qui permettent de reproduire le  $J_2$  observé (Park *et al.*, 2016).

Les observations de *Dawn* ont aussi permis d’améliorer la précision du taux de rotation à (Park *et al.*, 2016)

$$\omega = 952.1532 \pm 0.0001^\circ/\text{jr}, \quad (4.3)$$

ce qui correspond à une période de rotation de  $9.074170 \pm 0.000001$  h, contre précédemment  $\omega = 952.1532 \pm 0.0002^\circ/\text{jr}$  obtenu à partir de la période de rotation de  $9.074170 \pm 0.000002$  h déterminée par Chamberlain *et al.* (2007).

#### 4.1.2 Moment d’inertie polaire

La mission spatiale *Dawn* n’a pas permis de mesurer la fréquence de précession instantanée de l’axe de rotation de Cérès. Le moment d’inertie polaire  $\bar{C}$  doit être donc calculé à partir des modèles de structure interne proposés pour Cérès. Park *et al.* (2016) font l’hypothèse d’un modèle à deux couches avec un manteau de composition similaire à celles des chondrites carbonés, les chondrites étant des météorites issues d’astéroïdes non différenciés, et une couche externe constituée de silicates et de sels, ainsi que de matériaux volatils dont la glace. Pour un tel modèle, Park *et al.* (2016) ont intégré numériquement les équations de Clairaut de l’équilibre hydrostatique au 3<sup>e</sup> ordre (Rambaux *et al.*, 2015) en fonction du rayon et de la densité du manteau et ont conservé les solutions permettant de reproduire l’aplatissement gravitationnel  $J_2$  observé par la mission spatiale *Dawn*.

Park *et al.* (2016) supposent de plus que la densité du manteau ne peut être supérieure à celle des chondrites de type CM, qui présentent une densité de  $2900 \text{ kg m}^{-3}$  et ne peut être inférieure à celle des chondrites de type CI de densité  $2460 \text{ kg m}^{-3}$  (Consolmagno *et al.*, 2008). Pour un manteau de densité variant entre  $2460$  et  $2900 \text{ kg m}^{-3}$ , son rayon doit alors varier respectivement entre  $400$  et  $280$  km pour reproduire le  $J_2$  (Park *et al.*, 2016). L’épaisseur de la couche externe et sa densité varient alors respectivement entre  $70$  et  $190$  km et entre  $1680$  et  $1950 \text{ kg m}^{-3}$ .

Ermakov *et al.* (2017b) ont proposé un modèle à deux couches à partir du champ de gravité et de la forme obtenus par la mission spatiale *Dawn* et en considérant l’effet de l’isostasie. Ce modèle présente une couche externe de densité  $1287_{+70}^{-87} \text{ kg m}^{-3}$  et d’épaisseur  $41.0_{+3.2}^{-4.7} \text{ km}$  et un manteau de densité  $2434_{+5}^{-8} \text{ kg m}^{-3}$  et de rayon  $428.7_{-3.2}^{+4.7} \text{ km}$ .

Nicolas Rambaux a calculé les moments d’inertie moyens sphériques des solutions numériques de l’équation de Clairaut, qui sont représentés sur la figure 4.1 en fonction du rayon et de la densité du manteau. Le moment d’inertie sphérique est calculé en supposant que la forme extérieure est sphérique comme dans l’équation (1) de Rambaux *et al.* (2011). La courbe violette représente les solutions qui

permettent de retrouver le  $J_2$  mesuré par la mission spatiale *Dawn* (Park *et al.*, 2016). On observe que pour un manteau de densité  $2460 - 2900 \text{ kg m}^{-3}$ , la valeur du moment d'inertie sphérique  $\bar{I}$  est 0.375. À partir du moment d'inertie moyen, on peut obtenir la valeur du moment d'inertie polaire  $\bar{C}$  avec la relation (Rambaux *et al.*, 2007)

$$\bar{C} = \frac{2J_2}{3} + \bar{I}. \quad (4.4)$$

Avec  $J_2 = 2.6499 \times 10^{-2}$  et  $\bar{I} = 0.375$ , on obtient de façon exacte

$$\bar{C} = 0.392666. \quad (4.5)$$

En prenant en compte la forme non sphérique de Cérès, le moment d'inertie moyen est 0.377, ce qui aboutit à un moment d'inertie polaire de  $\bar{C} = 0.395$ .

Regardons à présent les incertitudes possibles sur  $\bar{C}$ . Le moment d'inertie polaire  $\bar{C}$  a été calculé pour des solutions numériques de l'équation de Clairaut de l'équilibre hydrostatique reproduisant le  $J_2$  observé. Si Cérès était à l'équilibre hydrostatique, elle devrait uniquement présenter un aplatissement aux pôles dû à la rotation et l'axe polaire serait un axe de symétrie de révolution. Cependant, Cérès présente un écart à l'équilibre hydrostatique qui se traduit par le fait que les coefficients  $C_{22}$  et  $S_{22}$  soient non nuls (Park *et al.*, 2016). Les moments d'inertie  $A$  et  $B$  ne sont ainsi pas identiques et Cérès présente un renflement équatorial. Le  $J_2$  observé présente ainsi une composante non-hydrostatique  $J_2^{nh}$ , qui peut être estimée selon Park *et al.* (2016) et Ermakov *et al.* (2017a) par

$$\frac{J_2^{nh}}{J_2} = \frac{\sqrt{C_{22}^2 + S_{22}^2}}{\bar{J}_2}. \quad (4.6)$$

Il existe ainsi un écart entre la valeur réelle du moment d'inertie polaire et celle calculée à partir de l'équation de Clairaut à l'équilibre hydrostatique. Cet écart peut être estimé à l'aide de la relation de Radau-Darwin pour un corps hydrostatique (e.g., Rambaux *et al.*, 2015, Ermakov *et al.*, 2017b)

$$\bar{I} = \frac{2}{3} \left( 1 - \frac{2}{5} \sqrt{\frac{4-k}{1+k}} \right) \quad (4.7)$$

avec  $k = 3J_2/q$  le nombre de Love,  $q = \omega^2 R_v^3 / (\mathcal{G}m)$ ,  $R_v$  le rayon volumétrique et  $m$  la masse de Cérès. En dérivant cette relation, on obtient l'incertitude relative sur le moment d'inertie moyen

$$\Delta \bar{I} = \frac{2k}{3\sqrt{(4-k)(1+k)^3}} \frac{J_2^{nh}}{J_2}. \quad (4.8)$$

Avec  $R_v = 469.7 \text{ km}$  (Ermakov *et al.*, 2017b), on obtient  $\Delta \bar{I} = 0.0047$ . On en déduit  $\Delta \bar{C} = \Delta \bar{I} + 2J_2^{nh}/3 = 0.0053$  et on conserve pour l'incertitude du moment d'inertie polaire  $\Delta \bar{C} = 0.005$  comme réalisé par Ermakov *et al.* (2017a).

Il existe une source d'incertitude supplémentaire sur le moment d'inertie polaire due à la forme non-hydrostatique de Cérès (Park *et al.*, 2016). Elle pourrait être estimée en calculant à partir de cette forme non-hydrostatique une structure interne à deux couches reproduisant le  $J_2$  observé en supposant un profil de densité et une interface à l'équilibre hydrostatique entre la couche externe et le manteau. Cependant, un tel calcul réalisé par Nicolas Rambaux a révélé une structure interne éloignée de celle déduite par Park *et al.* (2016) avec un manteau plus massif et par conséquent un moment d'inertie plus faible. Un tel modèle néglige les compensations isostatiques, qui compensent en partie la forme non-hydrostatique de la surface et est ainsi éloigné de la réalité. Le caractère non-hydrostatique de la forme n'a ainsi pas été considéré pour le calcul de l'incertitude de  $\bar{C}$ .

Ermakov *et al.* (2017a) obtiennent  $\bar{C} = 0.392$  pour une structure à deux couches avec un rayon de référence de 469.7 km, ce qui correspond à  $\bar{C} \approx 0.3915$  pour un rayon de référence de 470 km. Avec une incertitude de  $\Delta \bar{C} = 0.005$ , la valeur calculée ici  $\bar{C} = 0.393$  est bien dans l'intervalle d'incertitude et les deux valeurs sont ainsi cohérentes.

Pour l'intégration de la rotation à long terme, nous avons pris comme moment d'inertie polaire pour Cérès la valeur obtenue à partir du moment d'inertie moyen sphérique

$$\bar{C} = 0.393 \quad (4.9)$$

avec 0.005 son incertitude, ce qui correspond à un intervalle d'incertitude de [0.388 : 0.398].

### 4.1.3 Angle d'Andoyer $J$

Pour estimer l'angle d'Andoyer  $J$ , nous allons nous intéresser au mouvement du vecteur rotation autour de l'axe polaire vu précédemment dans la section 2.3.1. D'après l'équation (2.138), il peut être décrit par le mouvement polaire  $m_1, m_2$  et la longueur du jour  $m_3$ . [Rambaux et al. \(2011\)](#) ont étudié le mouvement polaire de Cérès et en ont donné une approximation quasi-périodique. Le mouvement polaire a alors une période de 0.37813 jr et une amplitude d'environ 0.4 mas et la longueur du jour calculée pour Cérès supposée axisymétrique une période de 1681.9 jr et une amplitude d'environ  $8 \times 10^{-4}$  mas. Ainsi l'angle entre le vecteur rotation et l'axe polaire est environ  $1.1 \times 10^{-7}^\circ$ . L'angle  $J$  entre le moment cinétique et l'axe polaire est ainsi faible et peut être estimé avec l'équation (2.142). Avec  $\bar{C} = 0.393$ , on obtient  $(\bar{A} + \bar{B})/2 = 0.367$ . En prenant  $\bar{A} = \bar{B} = (\bar{A} + \bar{B})/2$  dans l'équation (2.142) et  $\sqrt{m_1^2 + m_2^2} = |m_1 + im_2| = 0.4$  mas, on obtient

$$J \approx 1 \times 10^{-7}^\circ. \quad (4.10)$$

L'angle d'Andoyer  $J$  peut ainsi être négligé pour Cérès.

La mission spatiale *Dawn* a déterminé les axes principaux d'inertie de Cérès et a constitué à partir de cette détermination un repère lié aux axes principaux, qu'on appellera  $\mathcal{R}_D$ , dans lequel les coefficients du champ de gravité ont été exprimés. Lorsque l'on néglige l'angle d'Andoyer  $J$ , le vecteur rotation est donné par  $\boldsymbol{\Omega} = \omega \mathbf{K}$  et le moment cinétique est alors donné par  $\mathbf{G} = \mathcal{I} \boldsymbol{\Omega} = \omega \mathcal{I} \mathbf{K}$ . La matrice d'inertie s'exprime dans le repère  $\mathcal{R}_D$  selon

$$\mathcal{I} = \begin{pmatrix} A & I_{12} & I_{13} \\ I_{12} & B & I_{23} \\ I_{13} & I_{23} & C \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

et ainsi

$$\mathbf{G} = \omega \begin{pmatrix} I_{13} \\ I_{23} \\ C \end{pmatrix} = \omega m R^2 \begin{pmatrix} -C_{21} \\ -S_{21} \\ \bar{C} \end{pmatrix}, \quad (4.12)$$

car  $I_{13}$  et  $I_{23}$  sont reliés aux coefficients de gravité  $C_{21}$  et  $S_{21}$  par

$$C_{21} = -\frac{I_{13}}{mR^2}, \quad S_{21} = -\frac{I_{23}}{mR^2}. \quad (4.13)$$

On note  $J_D$  l'angle entre le moment cinétique et l'axe polaire du repère  $\mathcal{R}_D$ , qui vérifie ainsi

$$\cos J_D = \frac{\mathbf{G} \cdot \mathbf{K}}{G} = \frac{\bar{C}}{\sqrt{\bar{C}^2 + C_{21}^2 + S_{21}^2}}. \quad (4.14)$$

Pour  $J_D$  petit, la relation devient

$$J_D = \frac{\sqrt{C_{21}^2 + S_{21}^2}}{\bar{C}}. \quad (4.15)$$

[Park et al. \(2016\)](#) indiquent que, comme les coefficients  $C_{21}$  et  $S_{21}$  sont beaucoup plus faibles que les autres coefficients de gravité de degré 2, l'axe de rotation est proche de l'axe polaire. On peut estimer  $J_D$  d'après l'équation (4.15) avec les valeurs de [Park et al. \(2016\)](#)  $C_{21} = -1.0773 \times 10^{-7}$  et  $S_{21} = 9.0669 \times 10^{-8}$ . L'incertitude sur ces coefficients est  $\sigma = 3.6 \times 10^{-7}$  et est supérieure à leurs valeurs. En prenant l'incertitude  $\sigma$  comme valeur pour  $C_{21}$  et  $S_{21}$  et avec  $\bar{C} = 0.393$ , l'équation (4.15) donne

$$J_D \approx 7 \times 10^{-5}^\circ. \quad (4.16)$$

La mission spatiale *Dawn* a ainsi permis de déterminer les axes principaux de Cérès avec une bonne précision.

#### 4.1.4 Constante de précession

Le demi-grand axe de Cérès varie au cours du temps et oscille autour d'une valeur moyenne, comme on peut le voir sur la figure 3.1. Pour calculer la constante de précession, on choisit d'utiliser une valeur constante du demi-grand axe. En effet, dans l'équation (2.148) le mouvement orbital est donné à partir d'une solution séculaire. Or pour une solution séculaire, le demi-grand axe reste constant. Ainsi, nous avons réalisé une moyenne du demi-grand axe de Cérès sur l'intervalle  $[-25 : 5]$  Myr pour la solution La2011. On obtient les valeurs moyenne, maximale et minimale suivantes sur cet intervalle

$$a_{moy} = 2.767087693325191 \text{ UA}, \quad (4.17)$$

$$a_{max} = 2.771910895909442 \text{ UA}, \quad (4.18)$$

$$a_{min} = 2.764744551015287 \text{ UA}. \quad (4.19)$$

Les valeurs maximales et minimales permettent d'estimer les variations maximales du demi-grand axe à sa valeur moyenne, qui sont de l'ordre de  $\Delta a = 0.005 \text{ UA}$ .

À partir de l'équation (2.157), on peut estimer la valeur de la constante de précession  $\alpha$  pour Cérès avec un intervalle de variations possibles. Ce dernier est donné à 71% par l'incertitude sur  $\bar{C}$  et à 29% par les variations du demi-grand axe  $a$ . Pour Cérès, la constante de précession est ainsi

$$\alpha = 6.40 \pm 0.12''/\text{yr}. \quad (4.20)$$

#### 4.1.5 Cérès primitif

La forme de Cérès n'est pas hydrostatique. Mao et McKinnon (2018) ont estimé que Cérès devrait tourner environ  $7 \pm 4\%$  plus rapidement pour pouvoir être en équilibre hydrostatique avec la forme actuelle observée par la mission spatiale *Dawn*. Mao et McKinnon (2018) ont supposé que Cérès était après sa formation en équilibre hydrostatique mais que des impacts avec des astéroïdes ont diminué sa vitesse de rotation jusqu'à la vitesse de rotation observée actuellement. Cette hypothèse suppose qu'il n'y a pas eu de relaxation de la forme extérieure de Cérès, qui constitue ainsi une forme fossile, qui n'a pas évolué depuis la fin de la formation de Cérès. La forme actuelle de Cérès serait alors un témoin de l'ancienne vitesse de rotation de Cérès. Avec une augmentation de 7% de la vitesse de rotation, Mao et McKinnon (2018) ont obtenu pour Cérès une structure interne de moment d'inertie moyen  $\bar{I} = 0.353 \pm 0.009$  pour un rayon de référence de  $R = 470 \text{ km}$ . Avec l'équation (4.4), cela correspond à un moment d'inertie polaire de  $\bar{C} = 0.371 \pm 0.009$  et à une constante de précession de

$$\alpha = 6.34 \pm 0.43''/\text{yr}. \quad (4.21)$$

Avec cette hypothèse, Cérès aurait alors actuellement un moment d'inertie polaire de  $\bar{C} = 0.371 \pm 0.009$  et avec sa vitesse de rotation actuelle, cela correspondrait à une constante de précession de

$$\alpha = 6.78 \pm 0.20''/\text{yr}. \quad (4.22)$$

## 4.2 Vesta

### 4.2.1 Caractéristiques physiques

La mission spatiale *Dawn* a permis de déterminer le champ de gravité de Vesta jusqu'au 20<sup>e</sup> degré (Konopliv *et al.*, 2014). Konopliv *et al.* (2014) donnent pour l'aplatissement gravitationnel la valeur normalisée

$$\bar{J}_2 = 3.1779397 \times 10^{-2} \pm 1.9 \times 10^{-8} \quad (4.23)$$

pour le rayon de référence

$$R = 265 \text{ km}. \quad (4.24)$$

Cela correspond à une valeur non normalisée d'environ

$$J_2 = \sqrt{5} \times \bar{J}_2 = 7.1060892 \times 10^{-2}. \quad (4.25)$$



		$\rho$ (kg m <sup>-3</sup> )	demi-grand axes (km)
(a)	Croûte	2900	$a = b = 280.9$ $c = 226.2$
	Manteau	3200	$a = b = 253.3$ $c = 198.8$
	Noyau	7800	$a = b = 114.1$ $c = 102.3$
(b)	Croûte	2970	$a = 284.50$ $b = 277.25$ $c = 226.43$
	Manteau	3160	$a = b = 257$ $c = 207$
	Noyau	7400	$a = b = 117$ $c = 105$
(c)	Croûte	2970	$a = 284.50$ $b = 277.25$ $c = 226.43$
	Manteau	3970	$a = b = 213$ $c = 192$

TABLEAU 4.1 – Densités et demi-axes pour différents modèles de structure interne de Vesta. (a) correspond aux ellipsoïdes de référence du tableau 3 de [Ermakov et al. \(2014\)](#), (b) au modèle à trois couches de [Park et al. \(2014\)](#) et (c) au modèle à deux couches de [Park et al. \(2014\)](#). Pour les modèles (b) et (c) de [Park et al. \(2014\)](#), les dimensions de la croûte correspondent au meilleur ellipsoïde ajusté par [Konopliv et al. \(2014\)](#).

Le taux de rotation a pu être précisé par [Konopliv et al. \(2014\)](#) à

$$\omega = 1617.3331235 \pm 0.0000005^\circ/\text{jr}. \quad (4.26)$$

d'où une période de  $5.342127651 \pm 0.000000002$  h contre une période de  $0.2225887 \pm 0.0000001$  jr soit  $5.3421288$  h mesurée par [Drummond et al. \(1988\)](#), ce qui correspond à une vitesse de rotation de  $1617.3328 \pm 0.0008^\circ/\text{jr}$ .

#### 4.2.2 Moment d'inertie polaire

La précession et la nutation de l'axe de rotation de Vesta ont pu être détectées par [Konopliv et al. \(2014\)](#) à partir des observations de *Dawn* mais elles n'ont cependant pas permis de contraindre le moment d'inertie polaire  $\bar{C}$ . Comme pour Cérès, il est ainsi nécessaire de le calculer à partir des modèles de structure proposés qui ont permis de reproduire le champ de gravité mesuré par *Dawn*. Le moment d'inertie polaire  $\bar{C}$  peut être calculé facilement en supposant une structure avec des couches de forme ellipsoïdale de demi-axes  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$  et de densité  $\rho_i$  comme réalisé par [Rambaux \(2013\)](#), où  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$  correspondent respectivement aux grand, intermédiaire et petit demi-axes. Pour un modèle en trois couches, croûte (1), manteau (2), noyau (3), le moment d'inertie est donné par

$$C = \frac{4\pi}{15} (a_1 b_1 c_1 (a_1^2 + b_1^2) \rho_1 + a_2 b_2 c_2 (a_2^2 + b_2^2) (\rho_2 - \rho_1) + a_3 b_3 c_3 (a_3^2 + b_3^2) (\rho_3 - \rho_2)). \quad (4.27)$$

Plusieurs modèles de structures internes ont été proposés à partir des données de *Dawn* (e.g. [Russell et al., 2012](#), [Park et al., 2014](#), [Ermakov et al., 2014](#)). À partir de la formule (4.27), nous avons calculé le moment d'inertie polaire  $\bar{C}$  pour les modèles de [Ermakov et al. \(2014\)](#) et [Park et al. \(2014\)](#), qui ont proposé des modèles de structure interne à partir du champ de gravité et du modèle de forme réalisé par [Gaskell \(2012\)](#).

[Ermakov et al. \(2014\)](#) supposent une composition similaire de la croûte à celles des météorites HED, composées des roches de type howardite, eucrite et diogénite, un manteau composé d'olivine et un noyau constitué de fer. Cependant la forme extérieure de [Gaskell \(2012\)](#) et l'interface croûte-manteau déterminée par [Ermakov et al. \(2014\)](#) présentent une forme plus complexe que celles de simples ellipsoïdes. [Ermakov et al. \(2014\)](#) comparent ainsi le modèle obtenu à des ellipsoïdes de référence dont les dimensions sont indiquées dans le tableau 4.1. À partir des paramètres du tableau 4.1, on obtient grâce à la formule (4.27) un moment d'inertie polaire d'environ  $\bar{C} = 0.4061$ . [Ermakov et al. \(2014\)](#) ont ajusté un ellipsoïde triaxial au modèle de forme de [Gaskell \(2012\)](#). Avec cette forme ellipsoïdale de dimensions  $a = 284.895$  km,  $b = 277.431$  km,  $c = 226.838$  km, le moment d'inertie devient environ  $\bar{C} = 0.4086$ .

[Park et al. \(2014\)](#) proposent un modèle à trois couches et un modèle à deux couches. Les densités de la croûte et du manteau sont déterminées en minimisant l'anomalie de Bouguer. Les ellipsoïdes

utilisés pour les différentes couches des modèles ainsi que les densités déterminées sont indiqués dans le tableau 4.1. Pour le calcul du moment d'inertie polaire, on remplacera le modèle de forme de Gaskell (2012) par un ellipsoïde triaxial ajusté sur ce modèle par Konopliv *et al.* (2014). Avec l'équation (4.27), on obtient alors respectivement les valeurs approchées  $\bar{C} = 0.4089$  pour le modèle à trois couches et  $\bar{C} = 0.4218$  pour celui à deux couches.

Pour le calcul de la constante de précession, on choisit de conserver la valeur  $\bar{C} = 0.409$  obtenue avec le modèle à trois couches de Park *et al.* (2014) et 0.013 pour l'incertitude, l'intervalle d'incertitude étant [0.406 : 0.422].

### 4.2.3 Angle d'Andoyer $J$

Comme pour Cérès, on peut déterminer la valeur de l'angle  $J$  à partir du calcul du mouvement polaire de Vesta. Celui-ci a été étudié par Rambaux (2013), qui en a donné une approximation quasi-périodique. En conservant uniquement le terme de plus grande amplitude, le mouvement polaire présente ainsi une période de 0.22266 jr avec une amplitude d'environ 0.8 mas et la longueur du jour une période de 0.11131 jr pour une amplitude d'environ 0.1 mas. L'angle entre l'axe polaire et le vecteur rotation est ainsi de  $2.2 \times 10^{-7} \text{ }^\circ$ . L'angle d'Andoyer  $J$  est ainsi faible. Avec  $\bar{C} = 0.409$ , on obtient  $(\bar{A} + \bar{B})/2 = 0.338$ . En prenant  $\bar{A} = \bar{B} = (\bar{A} + \bar{B})/2$  dans l'équation (2.142) et  $\sqrt{m_1^2 + m_2^2} = |m_1 + im_2| = 0.6221$  mas, on obtient

$$J \approx 2 \times 10^{-7} \text{ }^\circ. \quad (4.28)$$

L'angle d'Andoyer  $J$  peut ainsi être négligé pour Vesta.

Comme pour Cérès, on cherche à déterminer la précision de la détermination par la mission spatiale *Dawn* des axes principaux d'inertie. Konopliv *et al.* (2014) obtiennent les valeurs des coefficients normalisés  $\bar{C}_{21} = 1.23 \times 10^{-9}$  et  $\bar{S}_{21} = -1.13 \times 10^{-9}$  avec une incertitude  $\bar{\sigma} = 4.3 \times 10^{-9}$ . Comme leurs valeurs sont faibles par rapport aux autres coefficients de degré 2 et que l'incertitude est plus grande que leurs valeurs, Konopliv *et al.* (2014) concluent que l'angle entre l'axe polaire et l'axe de rotation est négligeable. Avec l'incertitude pour les coefficients non normalisés  $\sigma = \sqrt{5/3} \times 4.3 \times 10^{-9}$  que l'on utilise comme valeur pour  $C_{21}$  et  $S_{21}$  et avec  $\bar{C} = 0.409$ , l'équation (4.15) donne une estimation de l'angle  $J_D$

$$J_D \approx 1 \times 10^{-6} \text{ }^\circ. \quad (4.29)$$

De même que pour Cérès, les axes principaux d'inertie ont été déterminés précisément par la mission spatiale *Dawn*.

### 4.2.4 Constante de précession

On réalise une moyenne du demi-grand axe sur l'intervalle de temps [-25 : 5] Myr pour la solution La2011 et nous obtenons les valeurs moyenne, maximale et minimale suivantes

$$a_{moy} = 2.361450035569031 \text{ UA}, \quad (4.30)$$

$$a_{max} = 2.363367416291675 \text{ UA}, \quad (4.31)$$

$$a_{min} = 2.360331698274290 \text{ UA}. \quad (4.32)$$

La valeur moyenne peut être utilisée pour calculer la constante de précession. Les valeurs maximale et minimale permettent de donner une borne supérieure aux variations du demi-grand axe  $\Delta a = 0.002 \text{ UA}$ .

Avec les valeurs évoquées précédemment, l'équation (2.157) permet d'obtenir la valeur de la constante de précession et un intervalle de variations possibles

$$\alpha = 15.6 \pm 0.6''/\text{yr}. \quad (4.33)$$

Ce dernier provient à 93% de l'incertitude sur le moment d'inertie polaire  $\bar{C}$  et à 7% des variations du demi-grand axe.

### 4.2.5 Vesta primitif

Thomas *et al.* (1997b) avaient précédemment observé à l'aide d'observations du télescope spatial Hubble un bassin d'impact de 460 km de diamètre et de 13 km de profondeur situé au niveau de l'hémisphère sud de Vesta. La sonde spatiale *Dawn* a observé un deuxième bassin d'impact plus ancien au niveau de l'hémisphère sud chevauché par le premier (Marchi *et al.*, 2012, Schenk *et al.*, 2012). Le comptage des cratères d'impacts se trouvant à l'intérieur de ces deux bassins a permis de les dater (Marchi *et al.*, 2012, Schenk *et al.*, 2012). Le plus ancien appelé Veneneia est âgé de  $2.1 \pm 0.2$  Gyr et présente un diamètre d'environ 400 km pour une profondeur d'environ 12 km. Le plus récent appelé Rheasilvia avec un âge de  $1.0 \pm 0.2$  Gyr présente un diamètre d'environ 500 km pour une profondeur d'environ 19 km. Ce deuxième impact serait à l'origine de la famille de Vesta (Binzel et Xu, 1993) et l'âge déterminé ainsi est cohérent avec celui estimé à partir de la dynamique de famille de Vesta (e.g. Nesvorný *et al.*, 2008).

Si les deux bassins d'impact recouvrent presque entièrement l'hémisphère sud de Vesta, une grande partie de l'hémisphère nord n'a pas été modifiée par les deux impacts. Fu *et al.* (2014) ont ainsi modélisé les régions de l'hémisphère nord laissées intactes par les deux impacts par un ellipsoïde triaxial. Les dimensions des demi-axes de l'ellipsoïde modélisé sont  $a = 280.6$  km,  $b = 274.6$  km et  $c = 236.8$  km. En supposant que les deux hémisphères étaient symétriques par rapport à l'équateur avant les deux collisions, on obtient alors la forme de Vesta primitif, c'est-à-dire avant le double impact.

Vesta s'est formé entre 1.5 – 3 Myr (e.g. Ghosh et McSween, 1998, Lugmair et Shukolyukov, 1998, Bizzarro *et al.*, 2005) après la formation du système solaire, datée par la formation d'inclusions de calcium et d'aluminium il y a 4.567 Gyr (Amelin *et al.*, 2002, Connelly *et al.*, 2008). D'après des simulations numériques effectuées par Ghosh et McSween (1998), la formation du noyau s'est déroulée 5 Myr après la formation du système solaire, le refroidissement du manteau peut durer jusqu'à 100 Myr et la fermeture géochimique apparaît vers 100 Myr. Ainsi la composition interne de Vesta est bien antérieure aux deux impacts et l'on peut considérer qu'elle n'a pas évolué depuis sa formation. La composition interne actuelle est donc identique à celle avant le double impact. On peut ainsi calculer le moment d'inertie polaire de Vesta primitif en remplaçant dans la formule (4.27), les formes ellipsoïdales des précédents modèles par la forme de Vesta primitif déterminée par Fu *et al.* (2014). On obtient alors  $\bar{C} = 0.455$  pour le modèle à trois couches de Ermakov *et al.* (2014),  $\bar{C} = 0.4081$  pour le modèle à trois couches de Park *et al.* (2014) et  $\bar{C} = 0.4210$  pour le modèle à deux couches de Park *et al.* (2014).

Fu *et al.* (2014) et Ermakov *et al.* (2014) ont calculé le taux de rotation de Vesta primitif à partir de la forme primitive déduite par Fu *et al.* (2014) en supposant que sa forme était en équilibre hydrostatique. Fu *et al.* (2014) ont obtenu une période de rotation de 5.02 h et Ermakov *et al.* (2014) une période de rotation entre 4.83 h dans le cas où Vesta est le plus différencié et 4.93 h dans le cas où il est le moins différencié.

On peut ainsi calculer la constante de précession de Vesta primitif en gardant comme période de rotation celle de 5.02 h obtenue par Fu *et al.* (2014). Les périodes obtenues par Ermakov *et al.* (2014) permettent de donner une incertitude. On garde pour le moment d'inertie polaire  $\bar{C} = 0.408$  à partir du modèle à trois couches de Park *et al.* (2014) et la forme extérieure de Fu *et al.* (2014). L'aplatissement gravitationnel correspondant est  $J_2 = 0.0559$ . Les autres modèles de structure permettent d'estimer les incertitudes  $\Delta\bar{C} = 0.013$  et  $\Delta J_2 = 0.0003$ . On utilise le même demi-grand axe  $a$  avec les mêmes variations  $\Delta a$ . La constante de précession de Vesta primitif peut ainsi être estimée à

$$\alpha = 11.6 \pm 0.9''/\text{yr}. \quad (4.34)$$

## 4.3 Conditions initiales de l'axe de rotation

La mission spatiale *Dawn* a permis de préciser l'orientation de l'axe de rotation de Cérès et Vesta. Les coordonnées ainsi déterminées sont indiquées dans le tableau 4.2 pour Cérès (Park *et al.*, 2016) et Vesta (Konopliv *et al.*, 2014) dans le repère de l'ICRF à l'époque J2000. On peut les comparer dans le tableau 4.2 aux résultats obtenus par les observations précédentes, qui n'avaient qu'une précision de l'ordre de  $5^\circ$ . La mission spatiale *Dawn* a ainsi grandement amélioré la connaissance de la position des axes de rotation de Cérès et Vesta.

Cérès		
	$\alpha(^{\circ})$	$\delta(^{\circ})$
Park <i>et al.</i> (2016)	$291.421 \pm 0.007$	$66.758 \pm 0.002$
Drummond <i>et al.</i> (2014)	$287 \pm 3$	$64 \pm 3$
Carry <i>et al.</i> (2008)	$288 \pm 5$	$66 \pm 5$
Drummond et Christou (2008)	$293 \pm 4$	$63 \pm 4$
Thomas <i>et al.</i> (2005)	$291 \pm 5$	$59 \pm 5$
Vesta		
	$\alpha(^{\circ})$	$\delta(^{\circ})$
Konopliv <i>et al.</i> (2014)	$309.03300 \pm 0.00003$	$42.22615 \pm 0.00002$
Li <i>et al.</i> (2011)	$305.8 \pm 3.1$	$41.4 \pm 1.5$
Thomas <i>et al.</i> (1997a)	$301 \pm 5$	$41 \pm 5$

TABLEAU 4.2 – Ascension droite  $\alpha$  et déclinaison  $\delta$  de Cérès et Vesta obtenues par la sonde spatiale *Dawn* (Konopliv *et al.*, 2014, Park *et al.*, 2016) et par des observations précédentes.

À partir de ces coordonnées et de leurs incertitudes ainsi que des coordonnées orbitales à l'époque J2000, on peut obtenir la valeur des obliquités de Cérès et Vesta à l'époque J2000. On obtient pour Cérès

$$\epsilon_C = 3.997 \pm 0.003^{\circ}, \quad (4.35)$$

et pour Vesta

$$\epsilon_V = 27.46784 \pm 0.00003^{\circ}. \quad (4.36)$$



## Chapitre 5

# Mouvements de rotation de Cérès et Vesta

Dans ce chapitre, nous allons calculer et étudier les mouvements de rotation de Cérès et Vesta.

Nous allons d'abord estimer les effets de quelques phénomènes, qui peuvent agir sur la rotation à long terme des corps célestes, notamment les effets des rencontres proches de Cérès et de Vesta avec d'autres corps de la ceinture principale d'astéroïdes.

Ensuite, nous allons estimer l'effet des différentes options d'intégrations possibles sur les mouvements orbitaux et de rotation de Cérès et Vesta. Cependant, les mouvements orbitaux de Cérès et Vesta sont chaotiques (Laskar *et al.*, 2011b) et il faut ainsi préalablement estimer les effets du chaos orbital sur les mouvements orbitaux et de rotation. Les effets des options d'intégration auront ainsi un effet significatif uniquement s'ils présentent un effet supérieur à celui du chaos orbital. À partir de la solution obtenue pour la rotation de Cérès et Vesta, leurs variations d'obliquité ainsi que les fréquences de précession de leurs axes de rotation peuvent être déterminées.

À partir de la solution séculaire orbitale obtenue à la section 3.3, on peut étudier la stabilité de l'axe de rotation de Cérès et Vesta à l'aide d'un modèle séculaire. Nous utilisons pour cela l'analyse en fréquence des mouvements orbitaux réalisée dans la section 3.1, qui a permis de déterminer les fréquences orbitales séculaires et cela afin d'identifier les résonances séculaires possibles entre les mouvements orbitaux et de rotation.

## 5.1 Perturbations du mouvement de rotation

### 5.1.1 Satellites

À l'instar du Soleil, un satellite exerce un couple sur le corps céleste autour duquel il est en orbite. Ce couple peut être important en fonction de la masse du satellite et de la distance au corps céleste et avoir des conséquences sur la rotation. Pour la Terre, le couple exercé par la Lune est environ deux fois plus important que celui exercé par le Soleil. En l'absence de la Lune, Laskar *et al.* (1993b) et Laskar et Robutel (1993) ont montré que la fréquence de précession de l'axe de rotation de la Terre passe en effet de  $-50.4712''/\text{yr}$  à  $-15.6''/\text{yr}$ . La fréquence de précession devient alors proche des fréquences de précession des nœuds de la Terre  $s_3 = -18.848''/\text{yr}$  et Mars  $s_4 = -17.751''/\text{yr}$  (Laskar *et al.*, 2011a). L'axe de rotation de la Terre se trouverait alors dans une région chaotique qui s'étendrait de  $0$  à  $85^\circ$  (Laskar et Robutel, 1993). Lors des périodes de forte obliquité, la Terre présenterait alors de fortes variations climatiques entre les saisons et les changements d'obliquité entraîneraient une irrégularité des variations saisonnières au cours des siècles. La Lune stabilise ainsi l'axe de rotation de la Terre et permet d'obtenir des variations climatiques saisonnières régulières et modérées avec une obliquité actuelle d'environ  $23.4^\circ$ , l'obliquité variant sur  $[-250 : 250]$  Myr entre environ  $21.5$  et  $25^\circ$  (Laskar *et al.*, 2004b).

Aucun satellite n'a été observé autour de Cérès et Vesta. Les observations réalisées par DeMario *et al.* (2016) avec le télescope spatial Hubble n'ont détecté aucun satellite en orbite autour de Cérès. Le diamètre minimal d'un objet détectable était de  $48$  m pour une distance supérieure à  $20$  rayons de Cérès. À  $5$  rayons de Cérès, la limite de détectabilité était alors de  $925$  m. À partir des observations du télescope spatial Hubble, McFadden *et al.* (2012) ont conclu à l'absence de satellites en orbite autour

	$k_2$	$Q$	$\omega$ ( $^\circ/\text{jr}$ )	$R$ (km)	$\overline{C}$	$r$ (UA)	$\Gamma/(C\omega)$ ( $\text{yr}^{-1}$ )
Mars	0.149	92	350.89198521	3396	0.3654	1.5237	$\sim 3 \times 10^{-13}$
Cérès	$10^{-3}$	10	952.1532	470	0.393	2.7665	$\sim 4 \times 10^{-16}$
Vesta	$10^{-3}$	100	1617.3331235	265	0.409	2.3615	$\sim 3 \times 10^{-17}$

TABLEAU 5.1 – Estimation du couple de marées solaires  $\Gamma/(C\omega)$  exercé sur Mars (Laskar *et al.*, 2004a, Konopliv *et al.*, 2006), Cérès (Rambaux *et al.*, 2011, Park *et al.*, 2016) et Vesta (Bills et Nimmo, 2011, Konopliv *et al.*, 2014).

de Vesta présentant un diamètre supérieur à 22 m à une distance située entre 14 et 260 rayons de Vesta. Les observations de la sonde spatiale *Dawn* ont confirmé l'absence de satellites autour de Vesta pour un seuil de détectabilité de 3.1 m (McFadden *et al.*, 2015). La présence de satellites autour de Cérès et Vesta présentant une taille inférieure aux limites de détection aurait un effet négligeable sur la précession de l'axe de rotation.

### 5.1.2 Dissipation de marées

On considère un corps ponctuel de masse  $m$  générant un potentiel gravitationnel. Ce potentiel étant non uniforme, un corps solide et donc non ponctuel se trouvant dans ce potentiel subit des forces de marée dues au gradient du potentiel comme cela a été vu à la section 2.2.5. Le corps solide a ainsi tendance à se déformer. Cette déformation va créer une variation du potentiel créé par le corps solide.

Dans la théorie des nombres de Love, il est supposé que la différence de potentiel créée par la déformation du corps solide est proportionnelle au potentiel de marée et le coefficient de proportionnalité  $k_2$  est le nombre de Love de second degré (e.g. Mignard, 1979). À cause de cette différence de potentiel, le corps solide exerce ainsi une force  $\mathbf{F}$  et un couple  $\mathbf{\Gamma}$  de marée supplémentaires sur les autres corps et notamment sur le corps ponctuel responsable de la déformation du corps solide, qui peuvent s'écrire (Mignard, 1979)

$$\mathbf{F} = -3 \frac{k_2 \mathcal{G} m^2 R^5}{r^{10}} \Delta t (2\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) + r^2(\mathbf{r} \times \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{v})), \quad (5.1)$$

$$\mathbf{\Gamma} = -3 \frac{k_2 \mathcal{G} m^2 R^5}{r^8} \Delta t ((\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \mathbf{r} - r^2 \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{r} \times \mathbf{v}), \quad (5.2)$$

où  $\Delta t$  est le délai entre la force exercée par le Soleil et la réponse du corps,  $k_2$  le nombre de Love,  $R$  le rayon du corps solide,  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{v}$  les positions et vitesses du corps solide par rapport au corps ponctuel et  $\boldsymbol{\Omega}$  le vecteur rotation du corps solide. En supposant que le système est un problème à deux corps isolé, le couple exercé sur le corps solide est alors l'opposé du couple de l'équation (5.2).

Soit un corps solide dans le système solaire, en considérant uniquement les marées solaires, le couple exercé sur le corps solide est alors

$$\mathbf{\Gamma} = 3 \frac{k_2 \mathcal{G} M_\odot^2 R^5}{C r^8} \Delta t [(\mathbf{r} \cdot \mathbf{G}) \mathbf{r} - r^2 \mathbf{G} + C \mathbf{r} \times \mathbf{v}], \quad (5.3)$$

où  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{v}$  sont les positions et vitesses héliocentriques du corps solide,  $\mathbf{G}$  son moment cinétique de rotation confondu avec l'axe d'inertie polaire et  $C$  son moment d'inertie polaire. Dans le cas où l'orbite est circulaire et équatoriale, Mignard (1979) écrit alors

$$\Gamma = 3 \frac{k_2 \mathcal{G} M_\odot^2 R^5}{2r^6} |\sin(2\delta)| \quad (5.4)$$

avec  $\delta = (\omega - n) \Delta t$  le retard de phase et  $n$  le moyen mouvement. Le retard de phase est relié au coefficient de dissipation de marées  $Q$  par la relation (MacDonald, 1964)

$$Q = \frac{1}{\tan(2\delta)}. \quad (5.5)$$

Comme le couple dépend en  $r^{-6}$  de la distance au Soleil  $r$ , il diminue fortement lorsque l'on s'éloigne du Soleil. Son effet sur l'obliquité de Mars a été estimé par Laskar *et al.* (2004a) et est inférieur à  $0.002^\circ$

sur 10 Myr. Afin de donner une estimation des effets sur l'obliquité de Cérès et Vesta de ce couple, on l'estime et le compare à celui exercé sur Mars dans le tableau 5.1. On utilise pour l'estimation du couple les valeurs de  $k_2$  et  $Q$  utilisées par [Rambaux et al. \(2011\)](#) pour Cérès et par [Bills et Nimmo \(2011\)](#) pour Vesta. En l'absence de satellites, on a besoin de considérer pour Cérès et Vesta seulement les effets des marées solaires comme c'est le cas pour Mars.

Le rapport du couple de marée sur le moment cinétique de rotation est pour Cérès et Vesta respectivement environ  $10^3$  et  $10^4$  fois plus faible que pour Mars. L'effet sur Mars étant déjà faible, on ne considère ainsi pas l'effet des marées solaires sur leurs rotations à long terme.

### 5.1.3 Rencontres proches

Il existe des rencontres proches entre Cérès et Vesta et d'autres corps de la ceinture principale. [Laskar et al. \(2011b\)](#) ont étudié l'effet des rencontres proches entre cinq corps de la ceinture principale (1) Cérès, (4) Vesta, (2) Pallas, (7) Iris et (324) Bamberga. Ces rencontres sont responsables du caractère chaotique de leur mouvement et limitent la prédictibilité de leur mouvement à environ 400 kyr.

#### 5.1.3.1 Problématique

On considère la rencontre proche entre Cérès et Vesta située au temps  $-61.9215$  Myr de la solution  $S5_a$  de [Laskar et al. \(2011b\)](#). La distance minimale entre Cérès et Vesta est alors de  $2.34 \times 10^{-4}$  UA. On va calculer le couple exercé lors de cette rencontre. D'après l'équation (2.65), le couple exercé par Vesta sur Cérès est donné par

$$\Gamma_{VC} = \frac{6\mathcal{C}_C m_V}{G_C r^5} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{w}_C) \mathbf{r} \times \mathbf{w}_C \quad (5.6)$$

et celui exercé par Cérès sur Vesta par

$$\Gamma_{CV} = \frac{6\mathcal{C}_V m_C}{G_V r^5} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{w}_V) \mathbf{r} \times \mathbf{w}_V. \quad (5.7)$$

Les couples exercés alors par le Soleil sur Cérès et Vesta sont

$$\Gamma_{SC} = \frac{6\mathcal{C}_C M_\odot}{G_C r_C^5} (\mathbf{r}_C \cdot \mathbf{w}_C) \mathbf{r}_C \times \mathbf{w}_C, \quad (5.8)$$

$$\Gamma_{SV} = \frac{6\mathcal{C}_V M_\odot}{G_V r_V^5} (\mathbf{r}_V \cdot \mathbf{w}_V) \mathbf{r}_V \times \mathbf{w}_V. \quad (5.9)$$

En faisant le rapport des deux quantités, on a pour Cérès et Vesta

$$\frac{\|\Gamma_{VC}\|}{\|\Gamma_{SC}\|} \approx \frac{m_V r_C^3}{M_\odot r^3} \approx 2 \times 10^2, \quad (5.10)$$

$$\frac{\|\Gamma_{CV}\|}{\|\Gamma_{SV}\|} \approx \frac{m_C r_V^3}{M_\odot r^3} \approx 5 \times 10^2, \quad (5.11)$$

en prenant les valeurs des demi-grands axes pour  $r_C$  et  $r_V$ . Lors d'une rencontre proche, le couple exercé par un corps perturbateur peut ainsi être supérieur à celui exercé par le Soleil.

En supposant que Cérès et Vesta ont des orbites circulaires, la vitesse relative de Vesta par rapport à Cérès est

$$v_{V/C} = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_\odot}{a_V}} - \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_\odot}{a_C}}. \quad (5.12)$$

Si on considère que la rencontre proche se termine lorsque les deux astéroïdes sont séparés de plus  $1 \times 10^{-2}$  UA et que l'on néglige la courbure, alors sa durée est

$$\frac{2 \times 10^{-2} \text{ UA}}{v_{V/C}} \approx 23 \text{ jours}, \quad (5.13)$$

ce qui est très inférieur aux périodes de révolution de Cérès et Vesta.

Ainsi les rencontres proches exercent un couple important sur l'axe de rotation des astéroïdes mais pendant une courte durée.



### 5.1.3.2 Déviation maximale de l'axe de rotation

Lee *et al.* (2007) ont calculé l'effet des rencontres proches entre les planètes géantes lors de la migration qui a suivi la formation du système solaire. D'après Lee *et al.* (2007), le couple exercé lors de la rencontre entre un corps 1 perturbé de masse  $M_1$  ayant un moment cinétique de direction  $\mathbf{w}$  et un corps 2 perturbateur de masse  $M_2$  se traduit par une évolution de  $\mathbf{w}$  donnée par

$$\frac{d\mathbf{w}}{dt} = \frac{2\alpha M_2}{M_\odot} \left(\frac{a_1}{r}\right)^3 (\mathbf{r} \cdot \mathbf{w}) \mathbf{r} \times \mathbf{w} \quad (5.14)$$

avec  $\alpha$  la constante de précession,  $a_1$  le demi-grand de l'orbite du corps 1 autour du Soleil et  $\mathbf{r}$  la position du corps 2 par rapport au corps 1. Les vecteurs  $\mathbf{w}$  et  $\mathbf{r}$  sont unitaires. Lee *et al.* (2007) utilisent l'approximation à deux corps lors de la rencontre. Dans le repère du corps perturbé, le perturbateur présente l'anomalie vraie  $v$  et l'excentricité  $e$  et décrit ainsi une hyperbole ( $e > 1$ ) ou une parabole ( $e = 1$ ). Lee *et al.* (2007) intègrent l'équation (5.14) pour avoir la déviation totale

$$\Delta\mathbf{w} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mathbf{w}}{dt} dt = \int_{-\arccos(-1/e)}^{\arccos(-1/e)} \frac{d\mathbf{w}}{dt} \left(\frac{dv}{dt}\right)^{-1} dv. \quad (5.15)$$

Lee *et al.* (2007) calculent ensuite cette intégrale et expriment le résultat final en fonction de l'excentricité et des coordonnées de l'axe de rotation par rapport au plan du mouvement du corps perturbateur.

Nous allons détailler le calcul de cette intégrale. On se place dans le repère  $(O, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ , où  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$  est le plan du mouvement et  $\mathbf{e}_x$  la direction du périastre. La loi des aires donne  $r^2 \dot{v} = \sqrt{\mu a(e^2 - 1)}$  avec  $\mu = \mathcal{G}(M_1 + M_2)$  et

$$r = \frac{a(e^2 - 1)}{1 + e \cos v}. \quad (5.16)$$

La distance au périastre  $r_p = a(e - 1)$  correspond à la distance minimale entre les deux corps lors de la rencontre. La vitesse au périastre est

$$v_p = \sqrt{\frac{\mu(1+e)}{a(e-1)}}, \quad (5.17)$$

d'où

$$\frac{1}{r^3} \left(\frac{dv}{dt}\right)^{-1} = \frac{1 + e \cos v}{\sqrt{a^3(e^2 - 1)^3 \mu}} = \frac{1 + e \cos v}{r_p^2 v_p (1 + e)}. \quad (5.18)$$

Ainsi

$$\Delta\mathbf{w} = \frac{2\alpha M_2 a_1^3}{M_\odot r_p^2 v_p (1 + e)} \int_{-\arccos(-1/e)}^{\arccos(-1/e)} (1 + e \cos v) (\mathbf{r} \cdot \mathbf{w}) \mathbf{r} \times \mathbf{w} dv. \quad (5.19)$$

L'axe de rotation présente la colatitude  $\theta$  et la longitude  $\phi$  et s'écrit

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (5.20)$$

$\mathbf{r}$  appartient au plan du mouvement et peut s'écrire

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.21)$$

On obtient alors

$$(\mathbf{r} \cdot \mathbf{w}) \mathbf{r} \times \mathbf{w} = (\sin \theta \cos \phi \cos v + \sin \theta \sin \phi \sin v) \begin{pmatrix} \sin v \cos \theta \\ -\cos v \cos \theta \\ \cos v \sin \theta \sin \phi - \sin v \sin \theta \cos \phi \end{pmatrix}. \quad (5.22)$$

$i$	(1)	(2)	(4)	(7)	(324)
$R_i$ (km)	476	252	256	112	102

TABLEAU 5.2 – Rayons  $R_i$  des corps  $i$  considérés pour l'étude des rencontres proches dans [Laskar \*et al.\* \(2011b\)](#).

$i$	$j$	$r_p$ ( $10^{-4} \times \text{UA}$ )	$\theta_d(r_p)$ ( $^\circ$ )	$\theta_d(R_i + R_j)$ ( $^\circ$ )
(1)	(4)	2.34	$1.00 \times 10^{-2}$	3.32
	(2)	6.02	$2.07 \times 10^{-3}$	2.85
	(7)	2.22	$7.12 \times 10^{-4}$	0.302
	(324)			0.188
(4)	(1)	2.34	$5.44 \times 10^{-2}$	18.1
	(2)	7.42	$3.56 \times 10^{-3}$	11.5
	(7)			1.72
	(324)			0.584

TABLEAU 5.3 – Déviations angulaires maximales  $\theta_d$  du moment cinétique pour les distances  $r_p$  aux rencontres proches entre les corps  $i$  et  $j$  minimales recensées dans [Laskar \*et al.\* \(2011b\)](#) et pour des rencontres rasantes.

En tenant compte de la parité, on obtient

$$\Delta \mathbf{w} = \frac{2\alpha M_2 a_1^3}{M_\odot r_p^2 v_p (1+e)} \int_0^{\arccos(-1/e)} (1+e \cos v) \begin{pmatrix} \sin^2 v \sin 2\theta \sin \phi \\ -\cos^2 v \sin 2\theta \cos \phi \\ (2 \cos^2 v - 1) \sin^2 \theta \sin 2\phi \end{pmatrix} dv. \quad (5.23)$$

Le calcul des intégrales sur les trois composantes donne

$$\int_0^{\arccos(-1/e)} (1+e \cos v) \sin^2 v dv = \frac{1}{2} \left( \arccos\left(-\frac{1}{e}\right) + \frac{e}{3} \left(2 + \frac{1}{e^2}\right) \sqrt{1 - \frac{1}{e^2}} \right), \quad (5.24)$$

$$\int_0^{\arccos(-1/e)} (1+e \cos v) \cos^2 v dv = \frac{1}{2} \left( \arccos\left(-\frac{1}{e}\right) + \frac{e}{3} \left(4 - \frac{1}{e^2}\right) \sqrt{1 - \frac{1}{e^2}} \right), \quad (5.25)$$

et

$$\int_0^{\arccos(-1/e)} (1+e \cos v) (2 \cos^2 v - 1) dv = \frac{e}{3} \left(1 - \frac{1}{e^2}\right)^{3/2}. \quad (5.26)$$

On obtient alors l'expression de [Lee \*et al.\* \(2007\)](#)

$$\Delta \mathbf{w} = \frac{\alpha M_2 a_1^3}{M_\odot r_p^2 v_p (1+e)} \begin{pmatrix} \left( \arccos\left(-\frac{1}{e}\right) + \frac{e}{3} \left(2 + \frac{1}{e^2}\right) \sqrt{1 - \frac{1}{e^2}} \right) \sin 2\theta \sin \phi \\ - \left( \arccos\left(-\frac{1}{e}\right) + \frac{e}{3} \left(4 - \frac{1}{e^2}\right) \sqrt{1 - \frac{1}{e^2}} \right) \sin 2\theta \cos \phi \\ \frac{2e}{3} \left(1 - \frac{1}{e^2}\right)^{3/2} \sin^2 \theta \sin 2\phi \end{pmatrix}. \quad (5.27)$$

[Lee \*et al.\* \(2007\)](#) déterminent que  $\|\Delta \mathbf{w}\|$  est maximal pour  $e = 1$  et  $\theta = 45^\circ$  ou  $135^\circ$ . Ainsi

$$\|\Delta \mathbf{w}\|_{max} = \frac{\pi}{2} \alpha \frac{M_2}{M_\odot} \frac{a_1^3}{r_p^2 v_p}. \quad (5.28)$$

Pour  $e = 1$ , on a une trajectoire parabolique et on a alors  $v_p = \sqrt{2\mu/r_p}$  ([Lee \*et al.\*, 2007](#)). Ainsi

$$\|\Delta \mathbf{w}\|_{max} = B r_p^{-3/2} \quad (5.29)$$

avec

$$B = \frac{3\pi}{4} M_2 \sqrt{\frac{\mathcal{G}}{2(M_1 + M_2)}} \frac{J_2}{C\omega} \quad (5.30)$$

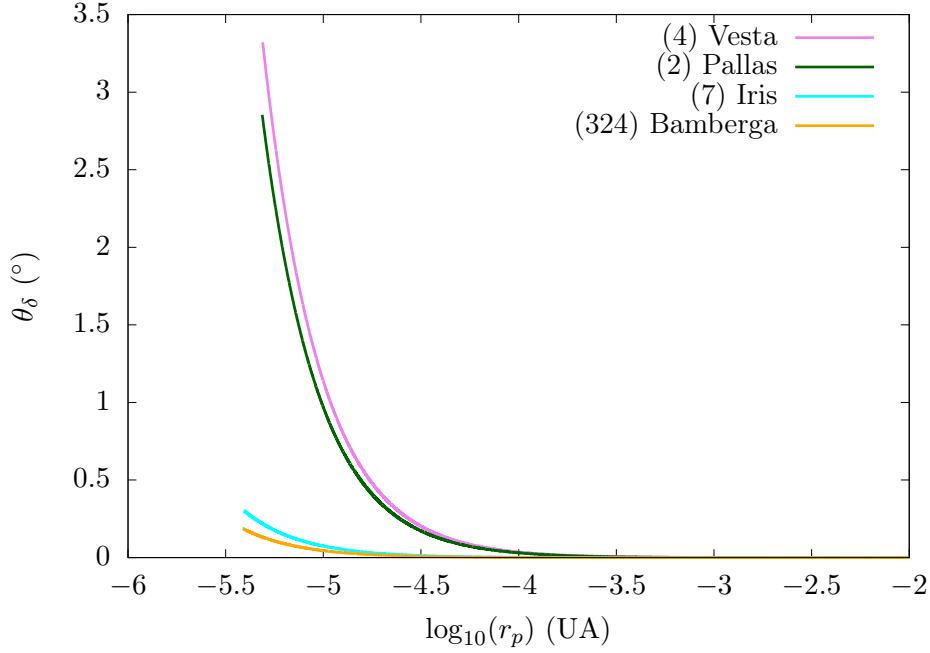


FIGURE 5.1 – Déviation angulaire maximale  $\theta_d$  du moment cinétique de Cérès en fonction de la distance  $r_p$  pour des rencontres proches avec différents corps.

obtenu en remplaçant la constante de précession  $\alpha$  par l'expression (2.157). On peut obtenir alors la déviation angulaire maximale  $\theta_d$ , qui est l'angle entre le moment cinétique avant la rencontre et celui après la rencontre,

$$\theta_d = \arccos \left( 1 - \frac{B^2}{2r_p^3} \right). \quad (5.31)$$

Sur les figures 5.1 et 5.2, on a représenté l'évolution de l'angle  $\theta_d$  en fonction de  $r_p$  pour respectivement Cérès et Vesta pour des rencontres proches avec différents astéroïdes avec  $r_p$  allant de la somme des rayons des deux astéroïdes à  $10^{-2}$  UA. Les valeurs des rayons sont celles utilisées par Laskar *et al.* (2011b) et sont rappelées dans le tableau 5.2. Les valeurs de  $\theta_d$  pour des rencontres proches de Cérès et Vesta sont indiquées dans le tableau 5.3 pour  $r_p$  égal à la somme des rayons des astéroïdes et à la distance minimale recensée dans Laskar *et al.* (2011b). Ainsi si une rencontre proche peut avoir des effets importants sur le moment cinétique dans le cas où les astéroïdes se frôlent lors de la rencontre avec des déviations maximales de l'ordre de  $1^\circ$ , pour les distances minimales entre astéroïdes recensées dans Laskar *et al.* (2011b), les déviations résultantes sont inférieures à  $0.01^\circ$ .

### 5.1.3.3 Statistique des rencontres proches

L'effet d'une seule rencontre proche sur l'évolution des moments cinétiques de rotation de Cérès et Vesta est ainsi limité. Cependant de nombreuses rencontres ont lieu entre astéroïdes au cours du temps. Laskar *et al.* (2011b) ont relevé au total 25779 rencontres entre les cinq corps considérés avec  $r_p < 10^{-2}$  UA sur trois solutions de durées respectives 121, 117 et 52 Myr et ont montré que la densité de probabilité  $\rho(r_p)$  de rencontre à une distance  $r_p$  pouvait être modélisée par une fonction linéaire de  $r_p$  pour  $r_p < 10^{-3}$  UA. On peut ainsi écrire

$$\rho(r_p) = Ar_p \quad (5.32)$$

avec  $A$  dépendant des deux corps participant à la rencontre. Laskar *et al.* (2011b) ont ainsi estimé la probabilité de collision  $N_c$  sur 1 Gyr, qui est la probabilité qu'une rencontre ait lieu avec une distance minimale d'approche  $r_p$  inférieure à la somme des rayons des deux corps. La probabilité de collision  $N_c$  peut ainsi s'écrire

$$N_c = A \frac{(R_1 + R_2)^2}{2}. \quad (5.33)$$

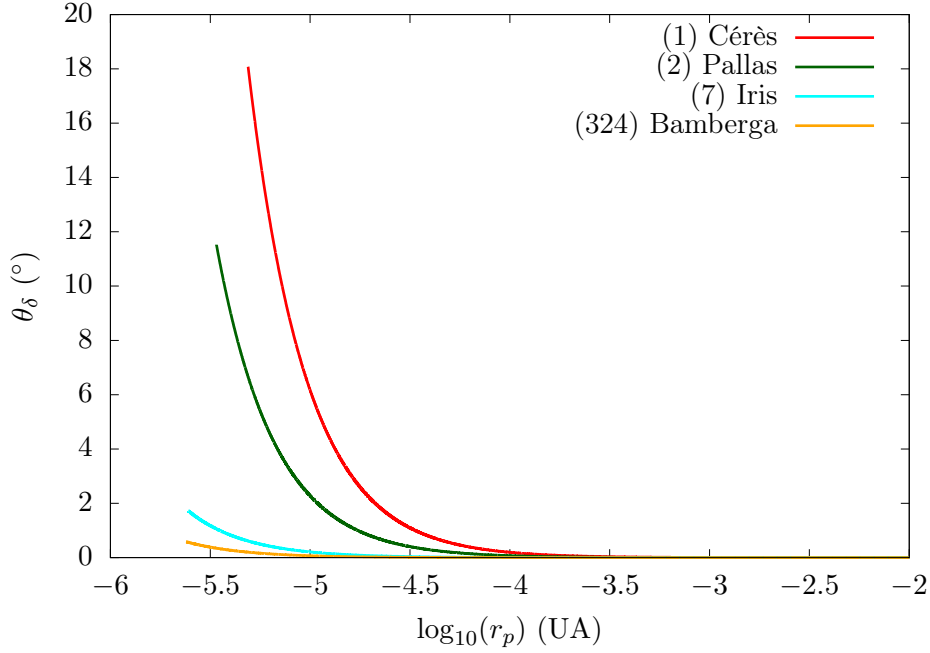


FIGURE 5.2 – Déviation angulaire maximale  $\theta_d$  du moment cinétique de Vesta en fonction de la distance  $r_p$  pour des rencontres proches avec différents corps.

$i$	$j$	$N_c$ ( $10^{-3} \times \text{Gyr}^{-1}$ )	$A$ ( $10^8 \times \text{UA}^{-2} \cdot \text{Gyr}^{-1}$ )	$B$ ( $10^{-10} \times \text{UA}^{3/2}$ )	$V$ ( $\text{Gyr}^{-1}$ )
(1)	(4)	2.0	1.7	6.3	$1.3 \times 10^{-5}$
	(2)	0.9	0.76	5.3	$4.4 \times 10^{-6}$
	(7)	1.3	1.7	0.41	$7.2 \times 10^{-8}$
	(324)	1.0	1.3	0.25	$2.1 \times 10^{-8}$
(4)	(1)	2.0	1.7	34	$3.9 \times 10^{-4}$
	(2)	1.0	1.7	13	$8.0 \times 10^{-5}$
	(7)	1.4	4.6	1.2	$2.5 \times 10^{-6}$
	(324)	0.5	1.7	0.71	$3.6 \times 10^{-7}$

TABLEAU 5.4 – Probabilités de collision  $N_c$  extraites de [Laskar \*et al.\* \(2011b\)](#) entre les corps  $i$  et  $j$ . Les paramètres  $A$  calculés à partir de ces valeurs et  $B$  ainsi que les variances  $V$  de ces rencontres sont aussi indiqués.

À partir des probabilités de collision  $N_c$  données par [Laskar \*et al.\* \(2011b\)](#), on peut obtenir la valeur des coefficients  $A$  avec

$$A = \frac{2N_c}{(R_1 + R_2)^2}. \quad (5.34)$$

Les valeurs des coefficients  $A$  calculés à partir des probabilités de collision et des rayons utilisés par [Laskar \*et al.\* \(2011b\)](#) sont dans le tableau 5.4.

On pourrait calculer l'effet total des rencontres proches sur le moment cinétique avec

$$\theta_d = \int_{R_1+R_2}^{1 \times 10^{-3} \text{UA}} \theta_d(r_p) \rho(r_p) dr_p = \int_{R_1+R_2}^{1 \times 10^{-3} \text{UA}} \arccos \left( 1 - \frac{B^2}{2r_p^3} \right) A r_p dr_p, \quad (5.35)$$

cependant cela serait supposer que toutes les rencontres proches déplacent le moment cinétique dans la même direction et le même sens, ce qui est fort improbable. Une hypothèse plus réaliste serait de supposer que chaque rencontre proche induit un déplacement angulaire du moment cinétique dans une direction aléatoire. Le mouvement du moment cinétique correspondrait alors à la marche aléatoire d'un vecteur sur une sphère. Le mouvement brownien sur une sphère a été étudié par [Perrin \(1928\)](#), qui a exprimé la distribution de probabilité sur la sphère en fonction du temps à l'aide des polynômes

de Legendre. La distribution de probabilité  $\rho_S(\theta)$  peut s'écrire ainsi (Perrin, 1928, Roberts et Ursell, 1960)

$$\rho_S(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{4\pi} e^{-\frac{k(k+1)}{4}V} P_k(\cos\theta) \quad (5.36)$$

avec  $P_k$  le polynôme de Legendre d'ordre  $k$ ,  $\theta$  la colatitute par rapport à la position initiale et  $V$  la variance. La probabilité de distribution  $\rho_S(\theta)$  est normalisée sur la sphère et vérifie ainsi

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \rho_S(\theta) \sin\theta d\theta d\phi = 1. \quad (5.37)$$

D'après Roberts et Ursell (1960), la variance  $V$  peut être calculée par

$$V = \sum_{j=1}^N \int_0^\pi v^2 dp_j(v), \quad (5.38)$$

où  $N$  est le nombre de pas et  $dp_k(v)$  est la probabilité d'avoir un changement d'angle  $v$  de l'orientation pour le pas  $k$ . Si tous les pas changent l'orientation de la même quantité  $v$ , on a alors  $V = Nv^2$  (Roberts et Ursell, 1960). Dans le cas présent, chaque corps perturbateur  $k$  présente une distribution de probabilité de changement d'orientation différente qui ne varie pas en fonction du temps.

On considère le cas de Cérès. Le moment cinétique de Cérès est perturbé par des rencontres proches avec les corps (2) Pallas, (4) Vesta, (7) Iris, (324) Bamberga. On considère uniquement les rencontres proches qui ont lieu à une distance supérieure à la somme des rayons des deux corps  $R_1 + R_k$  et inférieure à  $10^{-3}$  UA. Ces deux distances correspondent respectivement aux changements d'orientation maximal et minimal  $v_{max}$  et  $v_{min}$ . On peut ainsi écrire la variance sous la forme

$$V_1 = \sum_{k \in \{2,4,7,324\}} N_k \int_{v_{kmin}}^{v_{kmax}} v^2 dp_k(v) \quad (5.39)$$

avec  $N_k$  le nombre de rencontres proches considérées pendant 1 Gyr. La probabilité de changement d'orientation  $v = \arccos(1 - B_{1k}^2/(2r_p^3))$  peut s'écrire  $|dp_k(v)| = |A_{1k} r_p dr_p|/N_k$  et on obtient ainsi

$$V_1 = \sum_{k \in \{2,4,7,324\}} A_{1k} \int_{R_1+R_k}^{1 \times 10^{-3} \text{ UA}} \arccos^2\left(1 - \frac{B_{1k}^2}{2r_p^3}\right) r_p dr_p, \quad (5.40)$$

où les coefficients  $A_{ij}$  et  $B_{ij}$  sont donnés par les équations respectives (5.34) et (5.30) pour une rencontre entre les astéroïdes  $i$  et  $j$ . Les variances calculées pour chaque couple d'astéroïdes sont présentées dans le tableau 5.4. On obtient ainsi la variance totale pour Cérès  $V_1 = 1.79 \times 10^{-5} \text{ rad}^2 \cdot \text{Gyr}^{-1}$ . À partir des valeurs du tableau 5.4, on obtient ainsi l'écart-type de la distribution du moment cinétique de Cérès au bout de 1 Gyr par la formule

$$\theta_{1sd} = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{4\pi} e^{-\frac{k(k+1)}{4}V_1} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \theta^2 P_k(\cos\theta) \sin\theta d\theta d\phi}, \quad (5.41)$$

qui permet d'obtenir

$$\theta_{1sd} = 0.24^\circ. \quad (5.42)$$

On procède de la même façon pour Vesta en considérant les rencontres proches avec les astéroïdes (1) Cérès, (2) Pallas, (7) Iris, (324) Bamberga. En calculant comme pour Cérès les quantités du tableau 5.4, on obtient l'écart-type suivant

$$\theta_{4sd} = 1.3^\circ. \quad (5.43)$$

L'effet sur l'obliquité des rencontres proches sur 1 Gyr est ainsi faible et ce d'autant plus qu'il s'agit d'une estimation réalisée en considérant que chaque rencontre a un effet maximal sur l'orientation du moment cinétique. Cependant nous avons considéré dans le calcul de l'évolution de Cérès et Vesta les couples exercés par les cinq corps (1) Cérès, (2) Pallas, (4) Vesta, (7) Iris, (324) Bamberga. En effet, ces corps étant considérés comme des planètes, ils exercent ainsi au même titre que les planètes des couples sur Cérès et Vesta. On peut aussi noter que certaines rencontres proches peuvent avoir des effets significatifs sur le moment cinétique.

	Cérès	Vesta
$J_2$	$2.6499 \times 10^{-2}$	$7.1060892 \times 10^{-2}$
$R$ (km)	470	265
$\omega$ (rad.s <sup>-1</sup> )	$1.923403741 \times 10^{-4}$	$3.26710510494 \times 10^{-4}$
$\bar{C}$	0.393	0.409

TABLEAU 5.5 – Caractéristiques physiques de Cérès et Vesta utilisées pour la solution Ceres2017.

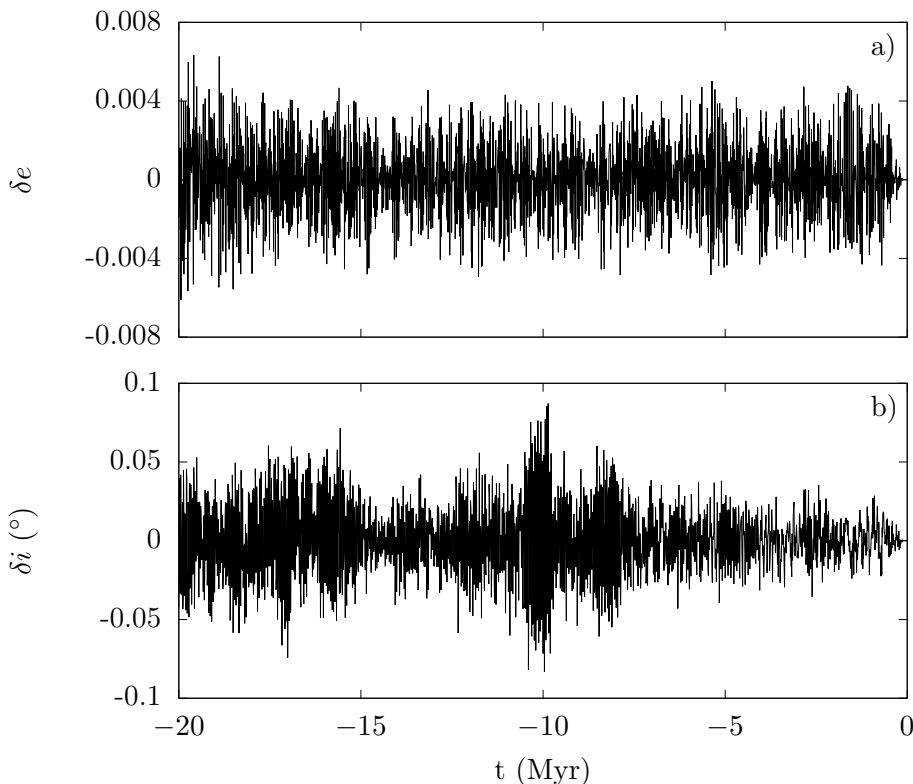


FIGURE 5.3 – Différence sur l’excentricité (a) et l’inclinaison (b) entre la solution La2011 et la solution Ceres2017 pour Cérès sur  $[-20 : 0]$  Myr.

## 5.2 Calcul de la solution pour la rotation

La solution La2011 considérée précédemment pour les mouvements orbitaux n’intègre pas le mouvement de rotation de Cérès et Vesta. Nous avons ainsi calculé une nouvelle solution appelée Ceres2017 pour Cérès et Vesta prenant en compte le mouvement de rotation à long terme. Les axes de rotation de Cérès et Vesta sont intégrés de façon symplectique avec les équations de la section 2.2.3. L’intégration est réalisée sur l’intervalle de temps  $[-100 : 100]$  Myr, l’origine des temps étant l’époque J2000. L’intégration a été réalisée en précision étendue avec un pas d’intégration de  $5 \times 10^{-3}$  yr. Le pas d’écriture en sortie est de 200 yr.

Les paramètres d’intégration et les conditions initiales orbitales sont identiques à ceux de la solution La2011. Cependant, comme évoqué dans la section 2.2.5, les effets de marées sont calculés différemment pour la Terre et il existe une interaction entre les mouvements de rotation de Cérès et Vesta et les mouvements orbitaux des corps du système solaire. On considère les couples exercés par le Soleil et les planètes sur Cérès et Vesta. Comme dans La2011, Cérès, Vesta, Pallas, Iris, Bamberga sont considérés comme des planètes et exercent ainsi des couples sur Cérès et Vesta.

Les paramètres exacts utilisés pour l’intégration de la rotation sont indiqués dans le tableau 5.5 et les conditions initiales de l’axe de rotation de Cérès et Vesta sont celles obtenues respectivement par Park *et al.* (2016) et Konopliv *et al.* (2014) et rappelées dans le tableau 4.2.

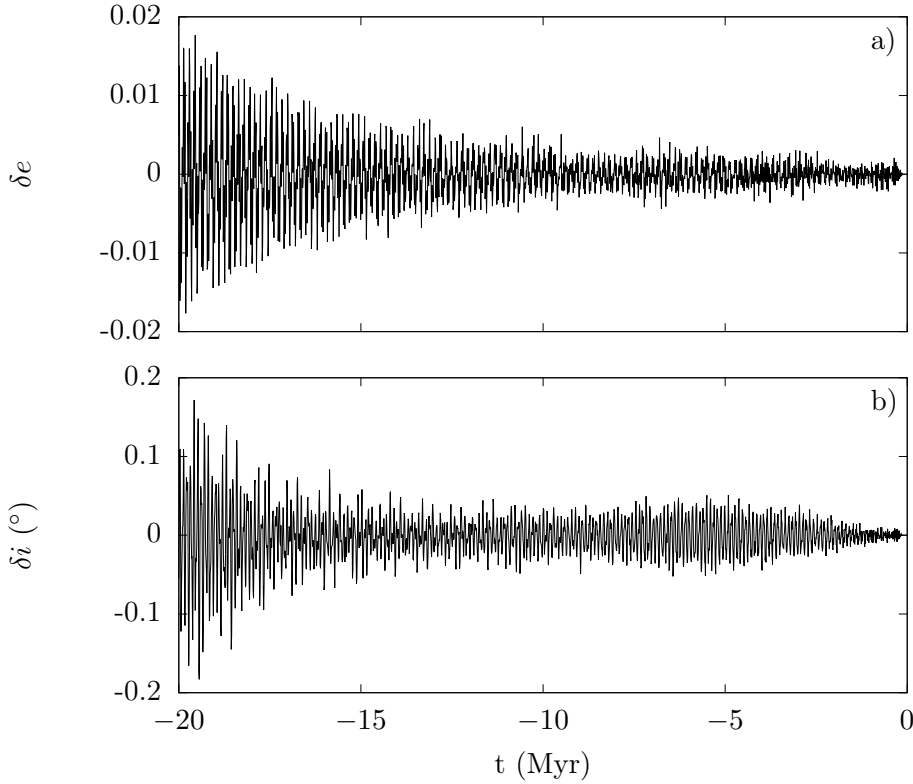


FIGURE 5.4 – Différence sur l’excentricité (a) et l’inclinaison (b) entre la solution La2011 et la solution Ceres2017 pour Vesta sur  $[-20 : 0]$  Myr.

### 5.2.1 Comparaison avec la solution La2011

On compare d’abord la solution obtenue Ceres2017 à la solution La2011. Les différences entre leurs mouvements orbitaux sont représentées pour l’excentricité et l’inclinaison pour Cérés et Vesta respectivement sur les figures 5.3 et 5.4. Elles oscillent autour de zéro et sont de faible amplitude par rapport aux variations d’excentricité et d’inclinaison observées pour Cérés et Vesta respectivement sur les figures 3.1 et 3.3. Les amplitudes des oscillations n’excèdent pas 0.008 et  $0.1^\circ$  sur  $[-20 : 0]$  Myr pour l’excentricité et l’inclinaison de Cérés et 0.02 et  $0.2^\circ$  pour Vesta.

### 5.2.2 Estimation des effets du chaos orbital

Pour déterminer si ces différences entre les solutions Ceres2017 et La2011 sont significatives, il faut vérifier si elles sont supérieures aux différences dues au caractère chaotique des orbites de Cérés et Vesta. Pour cela, comme dans Laskar *et al.* (2011b), on réalise différentes intégrations avec de légères variations de la longitude moyenne initiale de Cérés et Vesta. Dix intégrations sont réalisées avec un pas de sortie de 500 yr, où la longitude moyenne varie de  $\pm k \times 10^{-10}$  rad avec  $k = 1, 2, 3, 4, 5$ . Une différence de  $1 \times 10^{-10}$  rad correspond à un écart d’environ 45 m et 38 m pour les positions respectives initiales de Cérés et Vesta. Pour chaque solution, on calcule en fonction du temps l’écart en valeur absolue à la solution Ceres2017 puis on détermine en fonction du temps la valeur maximale parmi les écarts des différentes solutions. En prenant plusieurs solutions au lieu d’une seule pour estimer les effets chaotiques, on peut ainsi donner une estimation des effets du caractère chaotique de l’orbite sur l’évolution des paramètres orbitaux. En effet, une unique solution pourrait conduire à des différences sur les paramètres orbitaux plus faibles que celles observées en moyenne.

Sur les figures 5.5 et 5.6, on a représenté respectivement pour Cérés et Vesta le maximum sur les solutions des différences observées pour l’excentricité et l’inclinaison sur  $[-500 : 0]$  kyr. Nous retrouvons des évolutions similaires à celles observées par Laskar *et al.* (2011b) avec une divergence exponentielle caractéristique d’un comportement chaotique et associée à un temps de Lyapunov  $T$ . Pour des temps  $t$  supérieurs au temps de Lyapunov  $T$ , Laskar *et al.* (2011b) modélisent l’évolution de l’écart entre les

Cérès	-100 kyr	-500 kyr	-1 Myr	-10 Myr	-20 Myr
$\Delta e$	$2.6 \times 10^{-7}$	0.0046	0.0054	0.012	0.020
$\Delta i$ ( $^\circ$ )	$2.4 \times 10^{-6}$	0.028	0.036	0.47	0.89
$\Delta \epsilon$ ( $^\circ$ )	$2.2 \times 10^{-6}$	0.033	0.10	3.5	6.5
$\Delta i_\epsilon$ ( $^\circ$ )	$3.4 \times 10^{-8}$	0.0011	0.010	0.52	1.1
Vesta	-100 kyr	-500 kyr	-1 Myr	-10 Myr	-20 Myr
$\Delta e$	$5.5 \times 10^{-6}$	0.0027	0.0027	0.010	0.036
$\Delta i$ ( $^\circ$ )	$9.6 \times 10^{-5}$	0.012	0.015	0.18	0.55
$\Delta \epsilon$ ( $^\circ$ )	$1.0 \times 10^{-4}$	0.023	0.074	2.0	6.7
$\Delta i_\epsilon$ ( $^\circ$ )	$1.8 \times 10^{-5}$	0.0056	0.023	0.71	2.3

TABLEAU 5.6 – Différences maximales sur différentes durées pour l'excentricité  $\Delta e$ , l'inclinaison  $\Delta i$ , l'obliquité  $\Delta \epsilon$  et l'inclinaison de l'équateur sur le plan invariant  $\Delta i_\epsilon$  de Cérès et Vesta pour des solutions de différentes conditions initiales orbitales.

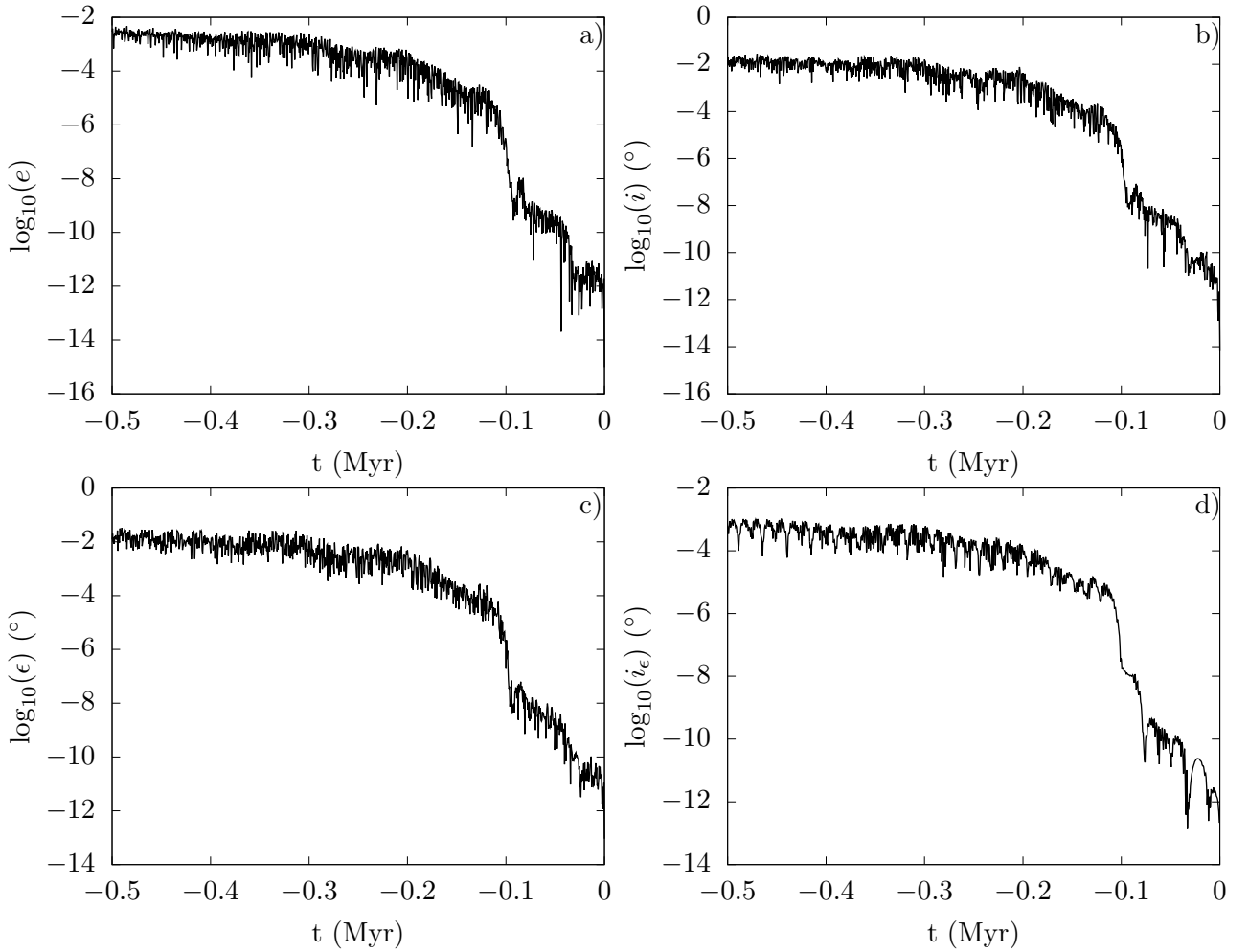


FIGURE 5.5 – Différences maximales sur l'excentricité (a), l'inclinaison (b), l'obliquité (c) et l'inclinaison de l'équateur sur le plan invariant (d) de Cérès sur  $[-500 : 0]$  kyr pour des solutions de différentes conditions initiales orbitales.



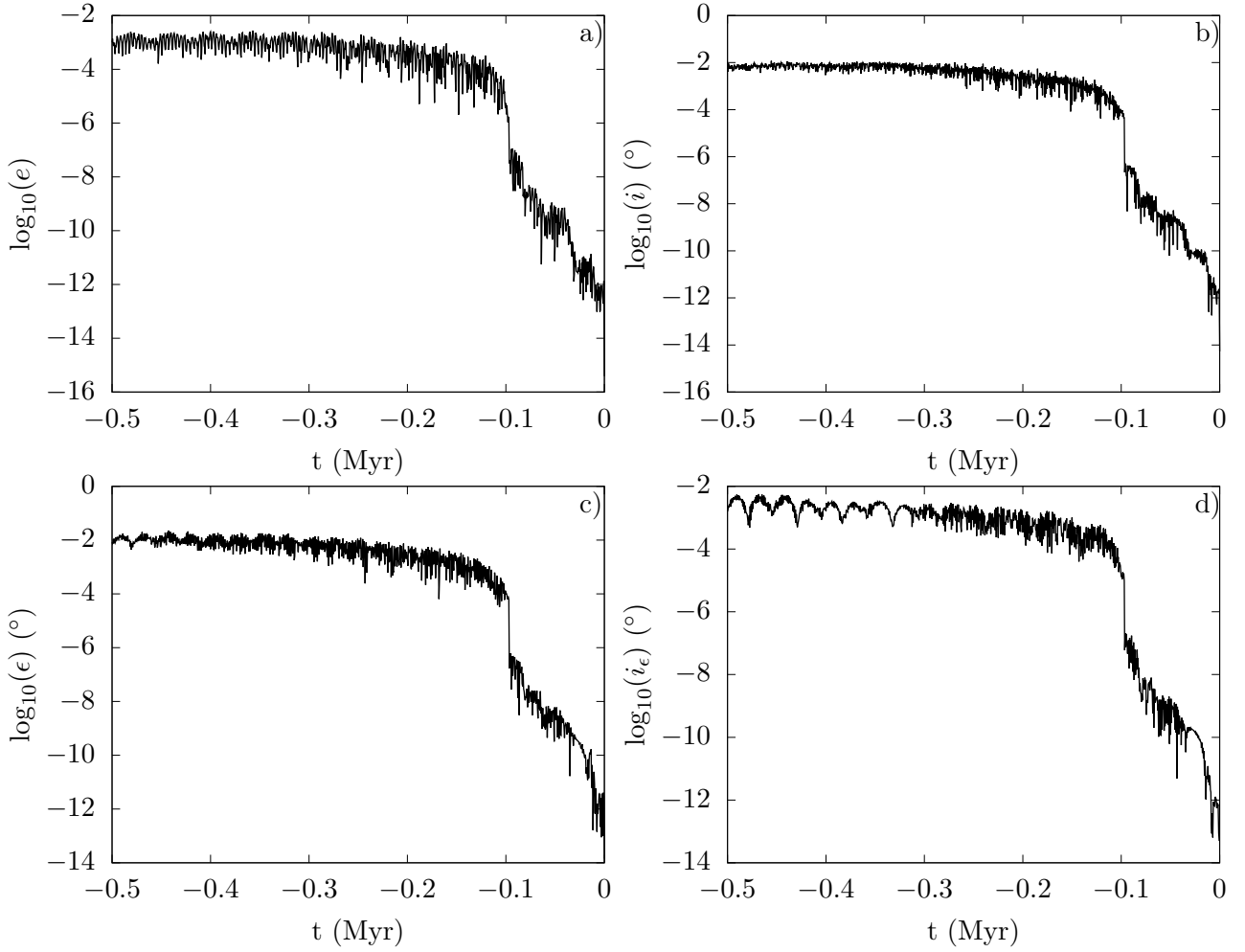


FIGURE 5.6 – Différences maximales sur l’excentricité (a), l’inclinaison (b), l’obliquité (c) et l’inclinaison de l’équateur sur le plan invariant (d) de Vesta sur  $[-500 : 0]$  kyr pour des solutions de différentes conditions initiales orbitales.

solutions en longitude moyenne  $d(t)$  par la formule

$$d(t) = d_0 T e^{\frac{t}{T}-1} \quad (5.44)$$

avec les notations de [Laskar \*et al.\* \(2011b\)](#), où  $d_0$  est la différence initiale en fréquence due aux conditions initiales différentes. [Laskar \*et al.\* \(2011b\)](#) ont déterminé un temps de Lyapunov  $T$  de 28900 kyr pour Cérès et 14282 kyr pour Vesta.

Les écarts maximaux observés sur l’orbite et la rotation sont indiqués en fonction du temps sur le tableau 5.6. Sur  $[-20 : 0]$  Myr, on observe ainsi que le chaos orbital peut être responsable d’une variation maximale de 0.020 sur l’excentricité et de  $0.89^\circ$  sur l’inclinaison de Cérès. Pour Vesta, cette variation due au chaos est de 0.036 sur l’excentricité et de  $0.55^\circ$  sur l’inclinaison. Ainsi les variations observées entre les solutions Ceres2017 et La2011 ne sont pas significatives, puisqu’elles sont de l’ordre de grandeur du comportement chaotique de l’orbite.

Sur les figures 5.5 et 5.6, on observe les effets du chaos orbital sur l’obliquité et sur l’inclinaison de l’équateur sur le plan invariant  $i_\epsilon$  pour estimer dans quelles proportions le chaos orbital se répercute sur la rotation. L’obliquité est calculée directement à partir de l’orientation de l’orbite et des coordonnées de l’axe de rotation. L’inclinaison  $i_\epsilon$  ne dépend que des coordonnées de l’axe de rotation et n’est ainsi initialement pas modifiée. Cependant, comme le mouvement de l’axe de rotation interagit avec le mouvement orbital, elle subit les effets chaotiques dus à la modification des conditions initiales orbitales. Les écarts maximaux observés sur le tableau 5.6 permettent ainsi d’estimer l’intervalle de variations dues au chaos orbital de l’orientation en fonction du temps.

Ce comportement chaotique ne modifie cependant pas les intervalles de variations de ces quantités

Cérès	-100 kyr	-500 kyr	-1 Myr	-10 Myr	-20 Myr
$\Delta e$	$6.4 \times 10^{-13}$	0.0051	0.0051	0.017	0.035
$\Delta i$ ( $^\circ$ )	$4.3 \times 10^{-12}$	0.030	0.040	0.51	1.2
$\Delta \epsilon$ ( $^\circ$ )	$3.1 \times 10^{-8}$	0.047	0.16	3.5	9.3
$\Delta i_\epsilon$ ( $^\circ$ )	$9.4 \times 10^{-9}$	0.0040	0.020	0.53	1.3
Vesta	-100 kyr	-500 kyr	-1 Myr	-10 Myr	-20 Myr
$\Delta e$	$3.5 \times 10^{-11}$	0.0027	0.0029	0.015	0.056
$\Delta i$ ( $^\circ$ )	$2.9 \times 10^{-10}$	0.013	0.018	0.26	0.77
$\Delta \epsilon$ ( $^\circ$ )	$3.1 \times 10^{-8}$	0.034	0.12	3.0	10
$\Delta i_\epsilon$ ( $^\circ$ )	$2.1 \times 10^{-8}$	0.010	0.038	1.1	3.5

TABLEAU 5.7 – Différences maximales sur différentes durées pour l'excentricité  $\Delta e$ , l'inclinaison  $\Delta i$ , l'obliquité  $\Delta \epsilon$  et l'inclinaison de l'équateur sur le plan invariant  $\Delta i_\epsilon$  de Cérès et Vesta pour des solutions de différentes conditions initiales de l'axe de rotation.

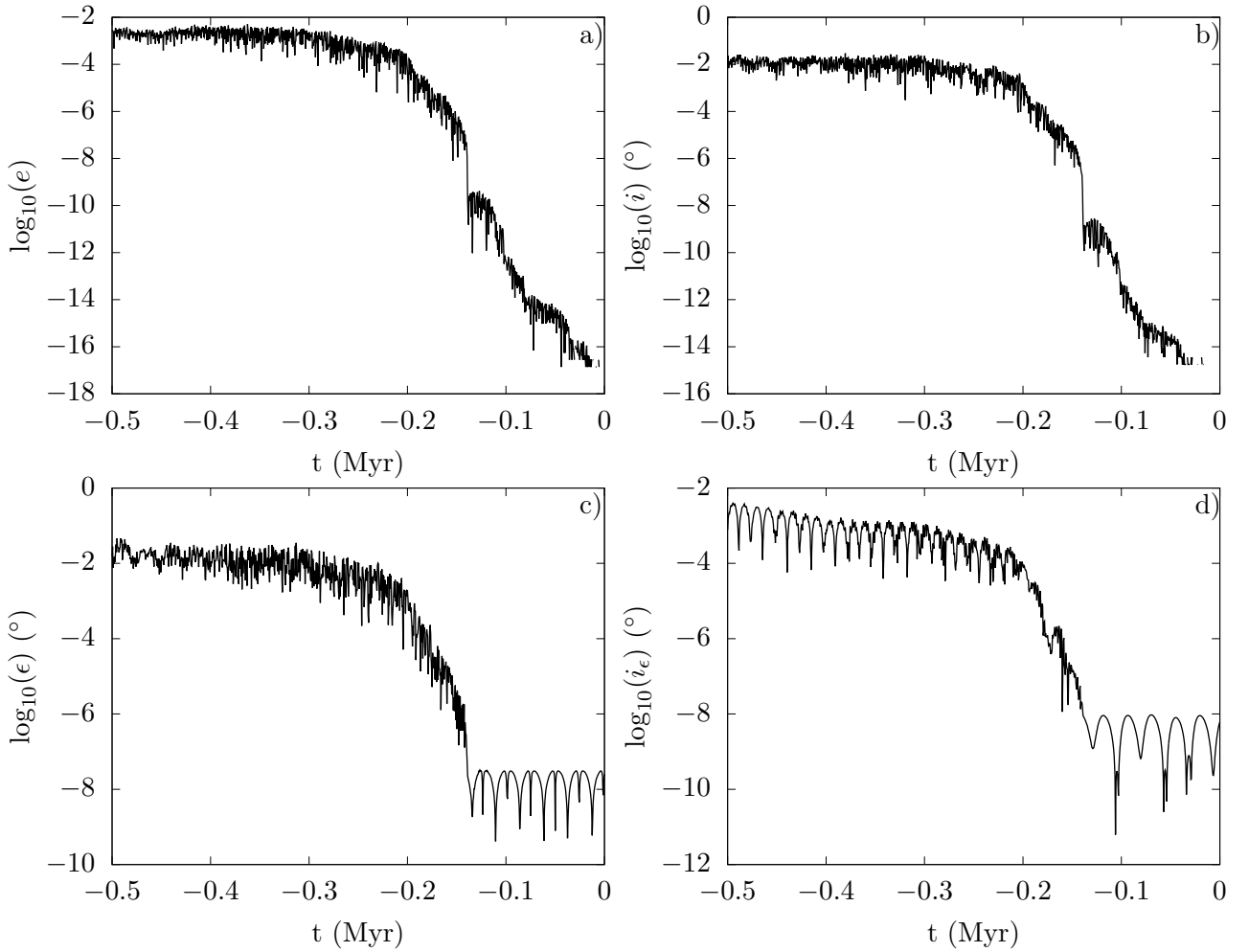


FIGURE 5.7 – Différences maximales sur l'excentricité (a), l'inclinaison (b), l'obliquité (c) et l'inclinaison de l'équateur sur le plan invariant (d) de Cérès sur  $[-500 : 0]$  kyr pour des solutions de différentes conditions initiales d'orientation.

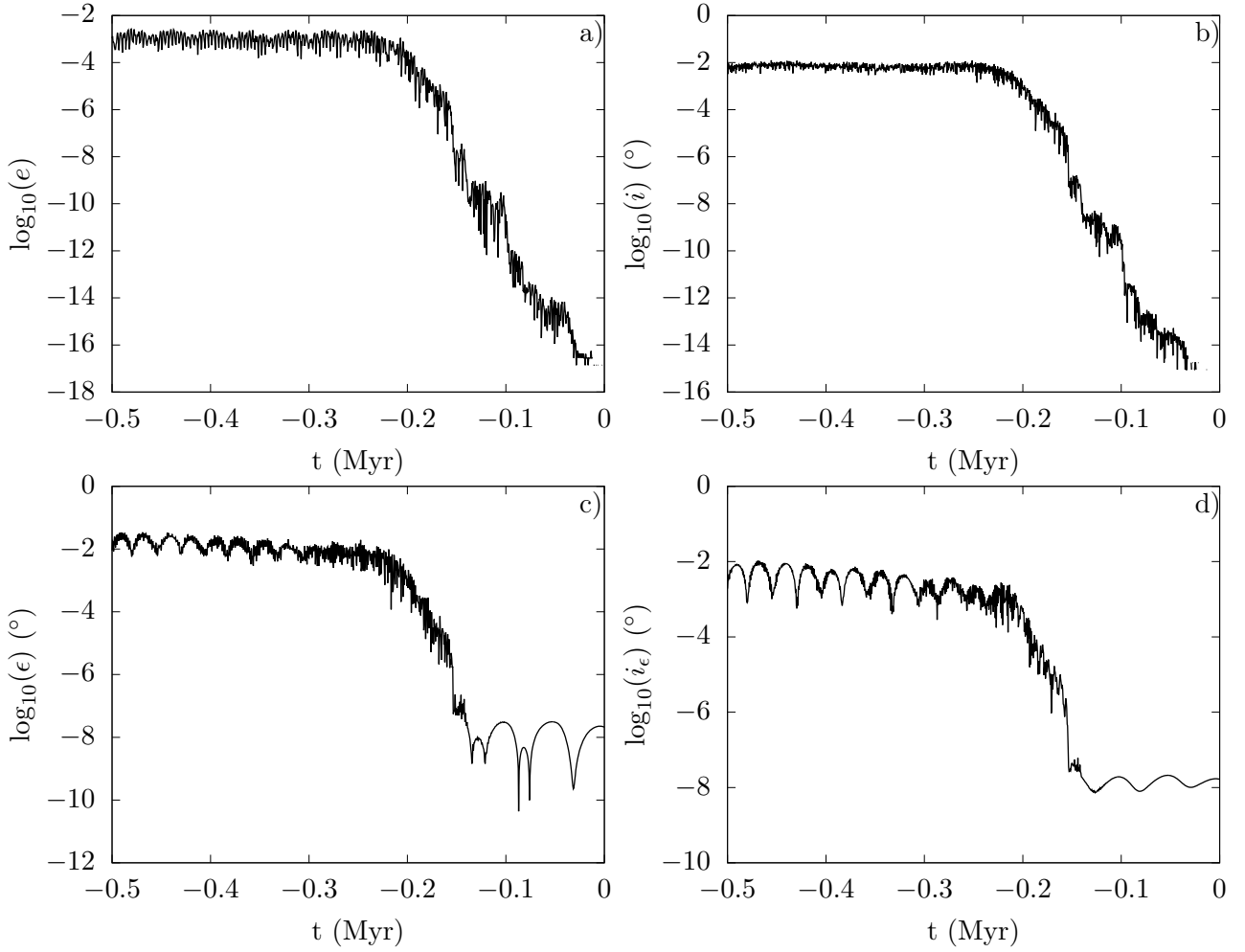


FIGURE 5.8 – Différences maximales sur l’excentricité (a), l’inclinaison (b), l’obliquité (c) et l’inclinaison de l’équateur sur le plan invariant (d) de Vesta sur  $[-500 : 0]$  kyr pour des solutions de différentes conditions initiales d’orientation.

de façon significative, qui varient sur le même intervalle, mais induit seulement de faibles variations des bornes des intervalles. En effet pour Cérès, les bornes de l’excentricité et de l’inclinaison varient au maximum d’environ  $5 \times 10^{-4}$  et  $1 \times 10^{-2^\circ}$  et pour Vesta d’environ  $5 \times 10^{-4}$  et  $7 \times 10^{-3^\circ}$ , ce qui est très inférieur à leurs amplitudes de variation indiquées à la section 3.1. Pour Cérès, les bornes de l’obliquité varient au maximum d’environ  $7 \times 10^{-2^\circ}$  et pour Vesta  $2 \times 10^{-2^\circ}$ . Cela est bien inférieur aux variations d’obliquité, que l’on décrira dans la section 5.3.

### 5.2.3 Estimation des effets du chaos du mouvement de rotation

Nous allons regarder les effets chaotiques dus à la rotation en intégrant différentes solutions avec des conditions d’orientation de l’axe de rotation différentes. Dix intégrations sont réalisées avec un pas de sortie de 500yr, où les ascensions droites et déclinaisons initiales de l’axe de rotation varient toutes deux de  $\pm k \times 10^{-10}$  rad avec  $k = 1, 2, 3, 4, 5$ . Pour chaque solution, on détermine l’écart à la solution Ceres2017 puis on détermine l’écart maximal en valeur absolue sur les intégrations à la solution Ceres2017 indiqué en fonction du temps sur le tableau 5.7. Sur les figures 5.7 et 5.8, on a représenté respectivement pour Cérès et Vesta le maximum sur les solutions des différences observées pour l’excentricité, l’inclinaison, l’obliquité et l’inclinaison de l’équateur sur le plan invariant sur  $[-500 : 0]$  kyr. En comparant aux figures 5.5 et 5.6, on observe que lors d’une variation des conditions initiales d’orientation, la rotation ne présente pas de divergence exponentielle sur environ 100kyr et que sur cette période les différences sur l’excentricité et l’inclinaison sont plus faibles d’environ deux ordres de grandeur. Les différences observées deviennent au bout de 1 Myr du même ordre de grandeur que celles

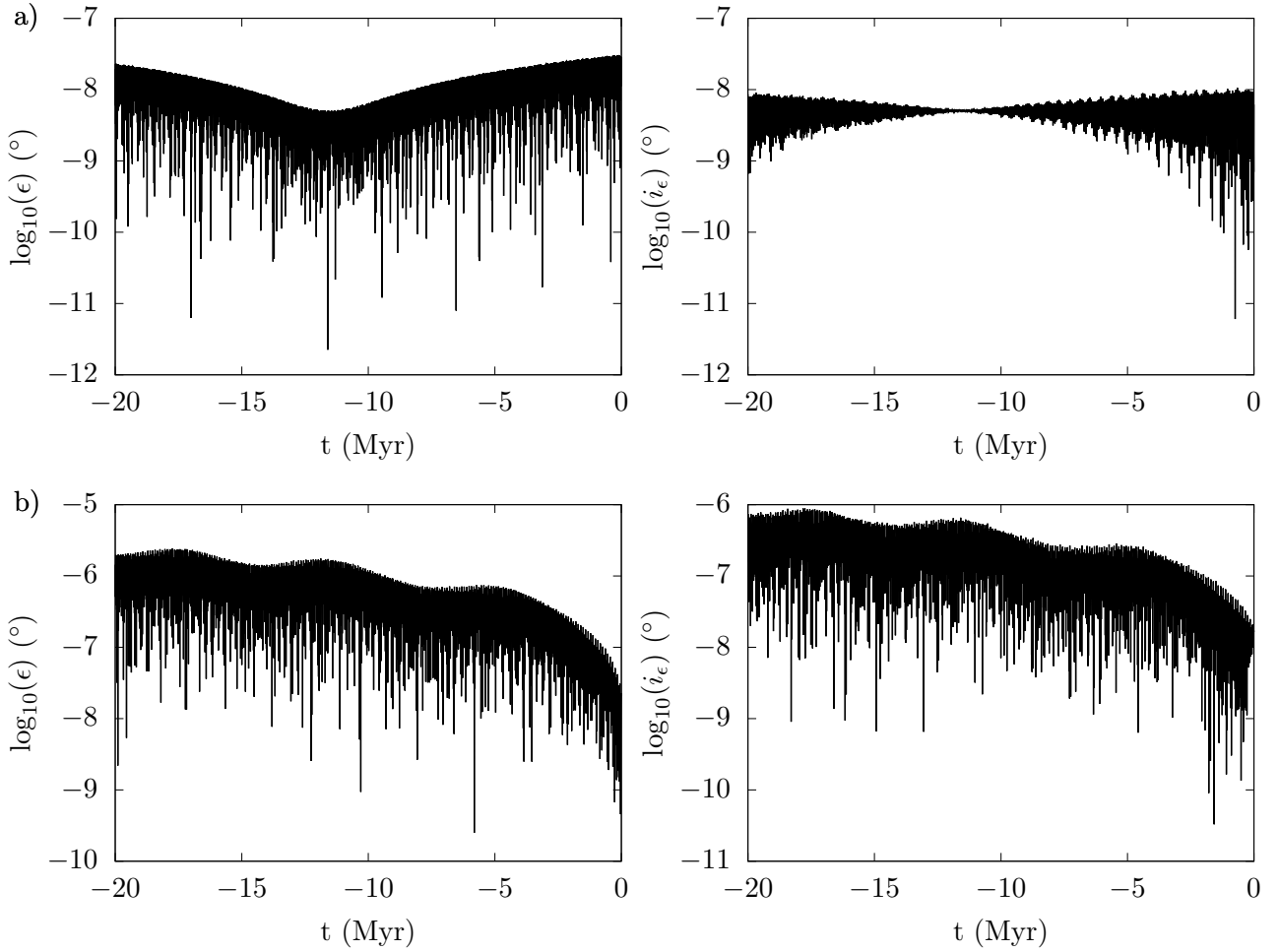


FIGURE 5.9 – Différences maximales sur l’obliquité  $\epsilon$  et l’inclinaison de l’équateur sur le plan invariant  $i_\epsilon$  de Cérès (a) et Vesta (b) sur  $[-20 : 0]$  Myr pour des solutions de différentes conditions initiales d’orientation, où l’effet de la rotation sur l’orbite n’est pas considéré.

dues à une variation des conditions initiales orbitales.

Pour ces intégrations, l’influence de la rotation sur les mouvements orbitaux est prise en compte, ce qui explique les différences observées sur les mouvements orbitaux. Cette influence entraîne initialement des variations orbitales de l’ordre de la précision numérique comme on peut l’observer sur les figures 5.7 et 5.8 sur  $[-100 : 0]$  kyr. Le caractère chaotique du mouvement orbital fait ensuite croître ces différences orbitales. Lorsque ces dernières sont du même ordre de grandeur que les différences sur la rotation engendrées par les orientations initiales différentes, les mouvements de rotation présentent à leur tour une divergence exponentielle.

Afin d’observer uniquement les effets chaotiques dus à la rotation, on peut refaire les intégrations présentant des conditions initiales d’orientation différentes en supprimant les effets de la rotation sur les mouvements orbitaux. Dix intégrations sont réalisées, où les ascensions droites et déclinaisons initiales de l’axe de rotation varient toutes deux de  $\pm k \times 10^{-10}$  rad avec  $k = 1, 2, 3, 4, 5$ . Les solutions sont comparées à une solution calculée de façon identique à Ceres2017 à l’exception du fait qu’elle ne considère pas l’effet de la rotation sur les mouvements orbitaux.

Les solutions présentent ainsi des mouvements orbitaux identiques. Sur la figure 5.9, on a représenté pour Cérès et Vesta le maximum sur les solutions des différences observées pour l’obliquité et l’inclinaison de l’équateur sur le plan invariant sur  $[-20 : 0]$  Myr. Sur cette période de temps, on n’observe pas de divergence exponentielle contrairement au cas où l’effet de la rotation sur l’orbite est considéré. Ainsi pour Cérès et Vesta, le chaos des mouvements de rotation provient du chaos des mouvements orbitaux.

Ainsi si l’on souhaite étudier la stabilité de l’axe de rotation d’un corps, considérer l’effet de la

n°	intégration de la rotation	couple des planètes	effet de la rotation sur l'orbite	calcul des marées	lib2011	précision	pas (yr)	CI orient
1	symp	X	X	Mignard	-	étendue	0.005	-
2	symp	X	-	Mignard	-	étendue	0.005	-
3	symp	-	X	Mignard	-	étendue	0.005	-
4	symp	-	-	Mignard	-	étendue	0.005	-
5	adams	X	-	INPOP	-	étendue	0.005	-
6	adams	-	-	INPOP	-	étendue	0.005	-
7	-	-	-	INPOP	-	étendue	0.005	-
8	-	-	-	INPOP	X	étendue	0.005	-
9	symp	X	X	Mignard	-	double	0.005	-
10	symp	X	X	Mignard	-	étendue	0.01	-
11	symp	X	X	Mignard	-	double	0.01	-
12	symp	X	X	Mignard	-	étendue	0.005	X (+)
13	symp	X	X	Mignard	-	étendue	0.005	X (-)

TABLEAU 5.8 – Pour chaque solution, sont indiqués le numéro, le type d'intégration pour la rotation ("symp" : intégrateur symplectique, "adams" : intégrateur Adams), le calcul des couples exercés par les planètes, la perturbation de l'orbite par la rotation, le type de calcul des effets de marées pour la Terre ("Mignard" (Mignard, 1979) ou "INPOP" (Fienga *et al.*, 2008, Manche, 2011)), l'emploi des bibliothèques utilisées pour La2011, la précision, le pas d'intégration et le sens d'un changement de conditions initiales pour les coordonnées  $(\alpha, \delta)$  de l'axe de rotation. Le signe X signifie que le paramètre est pris en compte lors de l'intégration et le signe - qu'il est ignoré.

rotation sur l'orbite permet de prendre en compte les effets du chaos orbital sur la rotation. Sans cela, pour prendre en compte les effets du chaos orbital sur la rotation, il faudrait lors de l'étude de stabilité faire varier à la fois les conditions initiales orbitales et de rotation. Cela illustre le fait que le comportement chaotique de l'orbite peut élargir les zones de résonances séculaires entre les mouvements orbitaux et de rotation comme noté par Laskar et Robutel (1993).

## 5.2.4 Estimation des autres effets

Un certain nombre de modifications ont été réalisées et certains paramètres ont été changés au sein de l'intégrateur LaX par rapport à la solution La2011 pour obtenir la solution Ceres2017. Afin de vérifier la validité de la solution Ceres2017 par rapport à la solution La2011 et pour observer si ces paramètres ont des effets significatifs sur l'orbite ou la rotation, nous avons intégré différentes solutions sur l'intervalle de temps  $[-20 : 0]$  Myr avec un pas de sortie de 500 yr pour observer l'effet de chaque modification. Ces paramètres seront significatifs, s'ils engendrent des effets supérieurs aux effets chaotiques observés aux sections 5.2.2 et 5.2.3.

### 5.2.4.1 Description des solutions

Nous avons considéré 13 solutions avec des paramètres d'intégration différents. Les caractéristiques des différentes solutions sont indiquées dans le tableau 5.8. Nous allons d'abord décrire dans cette section les différences entre les 13 solutions considérées.

La solution 1 utilise les paramètres utilisés pour la solution Ceres2017.

La solution 2 utilise les mêmes paramètres à l'exception du fait que l'effet sur les orbites des couples agissant sur les axes de rotation n'est pas considéré. Cette solution n'est ainsi pas symplectique mais utilise toujours la méthode de la section 2.2.3 pour intégrer la rotation.

La solution 5 reprend les caractéristiques de la solution 1 excepté le type d'intégration de la rotation. Pour la solution 5, la rotation est intégrée avec l'intégrateur Adams et l'effet de la rotation sur les mouvements orbitaux n'est pas considéré.

Les solutions 3, 4, 6 présentent les mêmes paramètres que respectivement les solutions 1, 2, 5 à l'exception du fait que les couples exercés par les planètes sur les axes de rotation ne sont pas considérés.

La solution 7 est identique à la solution 6 mais la rotation des astéroïdes Cérès et Vesta n'est pas intégrée.

La solution 8 utilise les paramètres de la solution La2011 et ne diffère de la solution 7 que par le fait que l'intégration a lieu pour des bibliothèques mathématiques de base calculant les fonctions mathématiques usuelles utilisées par La2011 en 2011 et non celles mises à jour utilisées pour la solution Ceres2017.

On souhaite également regarder l'effet de la précision numérique et du pas d'intégration. En partant des mêmes paramètres que la solution 1, les solutions 9 et 11 sont intégrées en double-précision et les solutions 10 et 11 utilisent un pas d'intégration de 0.01 yr.

Il existe une incertitude  $(\Delta\alpha, \Delta\delta)$  sur les conditions initiales de l'axe de rotation de Cérès et Vesta données par l'ascension droite  $\alpha$  et la déclinaison  $\delta$ . Elles sont pour Cérès de  $(\Delta\alpha, \Delta\delta) = (0.007^\circ, 0.002^\circ)$  (Park *et al.*, 2016) et pour Vesta de  $(\Delta\alpha, \Delta\delta) = (0.00003^\circ, 0.00002^\circ)$  (Konopliv *et al.*, 2014). On peut regarder l'influence de la précision des conditions initiales en ajoutant à partir des paramètres de la solution 1 aux coordonnées  $(\alpha, \delta)$  de l'axe de rotation les quantités  $(\Delta\alpha, \Delta\delta)$  pour la solution 12 et  $(-\Delta\alpha, -\Delta\delta)$  pour la solution 13.

#### 5.2.4.2 Comparaison des mouvements orbitaux

Afin de distinguer les effets que l'on cherche à observer des effets du chaos, on compare sur l'intervalle de temps  $[-100 : 0]$  kyr, où les effets du chaos sont faibles (voir tableau 5.6). Les différences maximales pour l'excentricité et l'inclinaison sur  $[-100 : 0]$  kyr entre les différentes solutions sont respectivement indiquées sur les tableaux 5.9 et 5.10 pour Cérès et sur les tableaux 5.11 et 5.12 pour Vesta.

Sur les tableaux 5.9 à 5.12, les solutions 4 et 6 ne sont pas indiquées. En effet, pour Cérès et Vesta les solutions orbitales 2 et 4 sont strictement identiques. Cela était attendu, car pour les solutions 2 et 4 l'influence sur les mouvements orbitaux des couples exercés sur les axes de rotation a en effet été supprimée. Ainsi bien que le calcul de rotation soit différent dans la solution 2 par rapport à la solution 4, les deux solutions présentent le même mouvement orbital. Les solutions orbitales de Cérès et Vesta sont strictement identiques pour les solutions 5 et 6. En effet, l'intégration de la rotation avec l'intégrateur Adams n'affecte pas les mouvements orbitaux.

**Calcul des effets de marée** On se serait attendu à ce que les mouvements orbitaux des solutions 2, 4, 5, 6 soient strictement identiques. En effet, bien que les solutions intègrent la rotation différemment, la rotation n'a pas d'influence sur les orbites pour ces solutions et les mouvements orbitaux devraient être identiques. Cependant le calcul des effets de marées pour la Terre est réalisé différemment.

En effet, les solutions 2 et 4 intègrent la rotation avec la méthode symplectique de la section 2.2.3 et la dissipation de marées est calculée selon Mignard (1979), comme vu dans la section 2.2.5 alors que les solutions 5 et 6 intègrent la rotation avec un intégrateur Adams où les effets de marées de la Terre sont calculés de la même façon que dans INPOP (Fienga *et al.*, 2008, Manche, 2011). Comme la dissipation de marées pour la Terre est calculée différemment, le mouvement orbital de la Terre présente des différences entre les deux solutions. Ces différences vont se répercuter sur les mouvements orbitaux de Cérès et Vesta qui interagissent gravitationnellement avec la Terre. Cela explique la différence observée entre les solutions 2,4 et 5,6.

**Initialisation de l'intégrateur ADAMS** Entre les solutions 5 et 7, on a uniquement enlevé le calcul de la rotation de Cérès et Vesta. Comme pour la solution 5, la rotation n'a pas d'effet sur les mouvements orbitaux, les mouvements orbitaux des solutions 5 et 7 devraient être identiques. Cependant, on observe des différences sur les mouvements orbitaux entre les solutions 5 et 7. Grâce à Mickaël Gastineau, on a pu observer que cela provenait de l'initialisation réalisée lors d'une intégration avec l'intégrateur Adams.

Pour intégrer à l'aide d'un intégrateur Adams d'ordre  $k$  explicite à pas fixes, la connaissance de la fonction à intégrer pour les  $k - 1$  pas antérieurs est nécessaire (e.g. Hairer *et al.*, 2008). Ainsi comme le mouvement de rotation est intégré avec un intégrateur Adams à pas fixes d'ordre 12 sur LaX, il est nécessaire de connaître la fonction à intégrer pour les 11 pas antérieurs à l'instant initial.

n°	1	2	3	5	7	8	9	10	11	12	13
1		3.3e-07	3.2e-09	2.6e-07	2.6e-07	2.6e-07	4.7e-09	2.9e-05	2.9e-05	9.2e-12	9.6e-12
2			3.3e-07	1.1e-07	1.1e-07	1.1e-07	3.3e-07	2.8e-05	2.8e-05	3.3e-07	3.3e-07
3				2.6e-07	2.6e-07	2.6e-07	7.1e-09	2.9e-05	2.9e-05	3.2e-09	3.2e-09
5					2.6e-13	1.5e-13	2.7e-07	2.8e-05	2.8e-05	2.6e-07	2.6e-07
7						1.1e-13	2.7e-07	2.8e-05	2.8e-05	2.6e-07	2.6e-07
8							2.7e-07	2.8e-05	2.8e-05	2.6e-07	2.6e-07
9								2.9e-05	2.9e-05	4.7e-09	4.7e-09
10									2.0e-09	2.9e-05	2.9e-05
11										2.9e-05	2.9e-05
12											1.9e-11
13											

TABLEAU 5.9 – Différences maximales sur  $[-100 : 0]$  kyr pour l'excentricité de Cérès entre les solutions du tableau 5.8.

n°	1	2	3	5	7	8	9	10	11	12	13
1		3.2e-06	2.6e-08	2.7e-06	2.7e-06	2.7e-06	4.5e-08	2.7e-04	2.7e-04	7.4e-11	7.6e-11
2			3.2e-06	7.0e-07	7.0e-07	7.0e-07	3.3e-06	2.6e-04	2.6e-04	3.2e-06	3.2e-06
3				2.7e-06	2.7e-06	2.7e-06	7.1e-08	2.7e-04	2.7e-04	2.6e-08	2.6e-08
5					1.6e-12	9.7e-13	2.8e-06	2.6e-04	2.6e-04	2.7e-06	2.7e-06
7						1.1e-12	2.8e-06	2.6e-04	2.6e-04	2.7e-06	2.7e-06
8							2.8e-06	2.6e-04	2.6e-04	2.7e-06	2.7e-06
9								2.7e-04	2.7e-04	4.5e-08	4.6e-08
10									1.9e-08	2.7e-04	2.7e-04
11										2.7e-04	2.7e-04
12											1.5e-10
13											

TABLEAU 5.10 – Différences maximales sur  $[-100 : 0]$  kyr pour l'inclinaison ( $^{\circ}$ ) de Cérès entre les solutions du tableau 5.8.

n°	1	2	3	5	7	8	9	10	11	12	13
1		5.8e-06	2.3e-08	1.3e-06	1.3e-06	1.3e-06	1.1e-07	5.1e-05	5.1e-05	6.8e-11	7.7e-11
2			5.8e-06	4.5e-06	4.5e-06	4.5e-06	5.9e-06	5.1e-05	5.1e-05	5.8e-06	5.8e-06
3				1.3e-06	1.3e-06	1.3e-06	8.8e-08	5.1e-05	5.1e-05	2.3e-08	2.3e-08
5					3.1e-12	3.4e-12	1.4e-06	5.1e-05	5.1e-05	1.3e-06	1.3e-06
7						2.8e-13	1.4e-06	5.1e-05	5.1e-05	1.3e-06	1.3e-06
8							1.4e-06	5.1e-05	5.1e-05	1.3e-06	1.3e-06
9								5.1e-05	5.1e-05	1.1e-07	1.1e-07
10									6.8e-10	5.1e-05	5.1e-05
11										5.1e-05	5.1e-05
12											1.5e-10
13											

TABLEAU 5.11 – Différences maximales sur  $[-100 : 0]$  kyr pour l'excentricité de Vesta entre les solutions du tableau 5.8.

Pour les connaître, l'initialisation sur LaX consiste ainsi à intégrer à l'aide d'un intégrateur DOPRI à pas variables dans la direction opposée à la direction d'intégration sur une durée égale à 11 pas d'intégration.

Dans la solution 5, les mouvements de rotation de la Terre, Cérès et Vesta sont intégrés alors que pour la solution 7, seul celui de la Terre est intégré. Bien que la rotation soit intégrée de façon indépendante, le choix des pas pour l'intégrateur DOPRI lors de l'initialisation est identique pour tous les corps dont la rotation est intégrée. Si on ajoute des corps comme Cérès et Vesta, le choix des pas est différent et l'initialisation est légèrement différente. Cela crée une légère différence dans l'intégration de la Terre par l'intégrateur Adams qui se répercute sur son mouvement orbital et ainsi sur les mouvements orbitaux de Cérès et Vesta. Le caractère chaotique des mouvements orbitaux fait ensuite croître cette différence.

**Librairies mathématiques** On observe que les solutions 7 et 8 présentent des différences entre leurs mouvements orbitaux. On a pu voir grâce à l'aide de Mickaël Gastineau que cela était dû à la mise à jour des librairies mathématiques entre le calcul réalisé en 2011 pour la solution La2011 et celui réalisé en 2017 pour la solution Ceres2017. La différence entre les calculs réalisés par ces deux librairies est de l'ordre de la précision numérique et de même le caractère chaotique des mouvements orbitaux fait ensuite croître cette différence.

**Pas d'intégration** D'après le tableau 5.6 de la section 5.2.2, l'effet du chaos sur les mouvements orbitaux a été évalué à  $3 \times 10^{-7}$  sur l'excentricité et  $3 \times 10^{-6^\circ}$  sur l'inclinaison de Cérès et à  $6 \times 10^{-6}$  sur l'excentricité et  $1 \times 10^{-4^\circ}$  sur l'inclinaison de Vesta sur  $[-100 : 0]$  kyr. Or les différences observées dans les tableaux 5.9, 5.10, 5.11, 5.12 sont toutes inférieures aux effets du chaos ou du même ordre de grandeur que ces effets à l'exception des solutions 10 et 11. Les solutions 10 et 11 ont un pas d'intégration de 0.01 yr alors que les autres solutions ont un pas d'intégration de 0.005 yr et présentent ainsi des différences avec les autres solutions supérieures aux effets du chaos, alors que les différences entre les solutions 10 et 11 sont quant à elles inférieures. On observe ainsi la nécessité de prendre un pas d'intégration de 0.005 yr au lieu de 0.01 yr.

**Bilan** Ainsi aucun des paramètres du tableau 5.8 n'a un effet significatif pour le calcul des mouvements orbitaux de Cérès et Vesta, à l'exception du pas d'intégration.

### 5.2.4.3 Comparaison des mouvements de rotation

Les différences maximales pour l'obliquité sur  $[-100 : 0]$  kyr entre les différentes solutions sont indiquées sur les tableaux 5.13 et 5.14 pour respectivement Cérès et Vesta. Les solutions 7 et 8 n'intègrent pas la rotation et ne sont ainsi pas indiquées. D'après le tableau 5.6 de la section 5.2.2, l'effet du chaos sur les mouvements de rotation a été évalué à  $3 \times 10^{-6^\circ}$  sur l'obliquité de Cérès et à  $1 \times 10^{-4^\circ}$  sur l'obliquité de Vesta sur  $[-100 : 0]$  kyr.

**Couple des planètes** Pour Cérès, les solutions 3, 4, 6 présentent des obliquités proches au maximum à  $1.1 \times 10^{-7^\circ}$  près, alors que leurs différences d'obliquité avec les autres solutions varient entre  $5.2 \times 10^{-3}$  et  $9.6 \times 10^{-3^\circ}$ . Ces solutions sont les seules à ne pas considérer les couples exercés par les planètes, qui ont ainsi un effet significatif sur la rotation de Cérès et Vesta.

**Pas d'intégration et conditions initiales** Considérons maintenant les autres solutions à l'exception des solutions 3, 4, 6. Comme précédemment, les différences entre les solutions 10 et 11 ne sont pas significatives alors que les différences avec les autres solutions le sont à cause de l'augmentation du pas d'intégration.

Pour Cérès, les solutions 12 et 13 présentent des différences significatives entre elles et avec toutes les autres solutions. Ainsi la précision des conditions initiales sur l'orientation influe de façon significative sur le calcul de la rotation.



n°	1	2	3	5	7	8	9	10	11	12	13
1		7.6e-05	2.0e-07	1.4e-05	1.4e-05	1.4e-05	1.2e-06	2.5e-04	2.5e-04	5.6e-10	6.4e-10
2			7.6e-05	6.6e-05	6.6e-05	6.6e-05	7.7e-05	2.9e-04	2.9e-04	7.6e-05	7.6e-05
3				1.4e-05	1.4e-05	1.4e-05	1.0e-06	2.5e-04	2.5e-04	2.0e-07	2.0e-07
5					2.0e-11	2.2e-11	1.5e-05	2.6e-04	2.6e-04	1.4e-05	1.4e-05
7						1.9e-12	1.5e-05	2.6e-04	2.6e-04	1.4e-05	1.4e-05
8							1.5e-05	2.6e-04	2.6e-04	1.4e-05	1.4e-05
9								2.5e-04	2.5e-04	1.2e-06	1.2e-06
10									3.4e-09	2.5e-04	2.5e-04
11										2.5e-04	2.5e-04
12											1.2e-09
13											

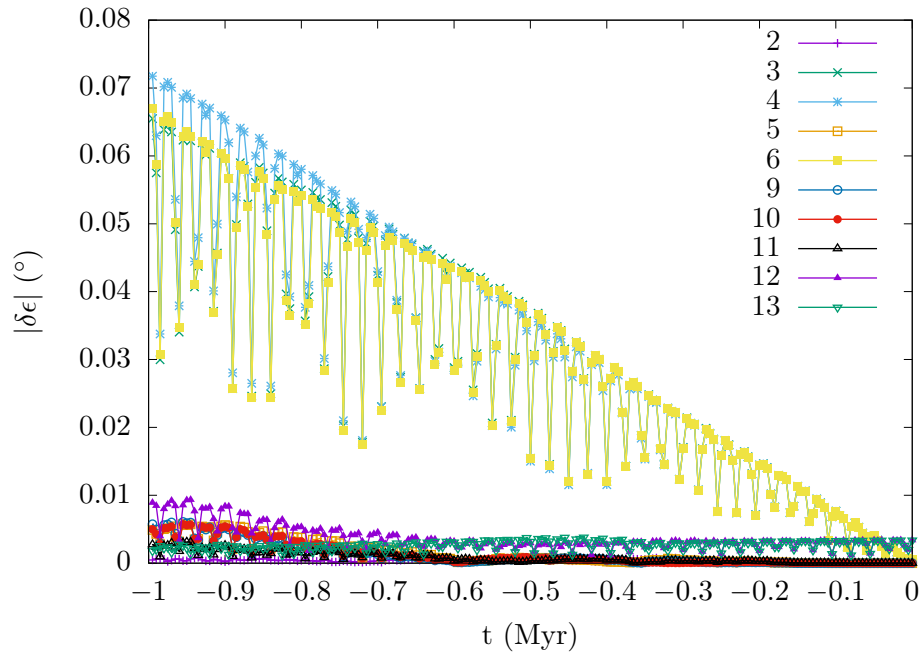
TABLEAU 5.12 – Différences maximales sur  $[-100 : 0]$  kyr pour l'inclinaison ( $^{\circ}$ ) de Vesta entre les solutions du tableau 5.8.

n°	1	2	3	4	5	6	9	10	11	12	13
1		6.3e-08	7.0e-03	7.0e-03	3.0e-07	7.0e-03	1.7e-09	1.2e-05	1.2e-05	3.4e-03	3.4e-03
2			7.0e-03	7.0e-03	3.1e-07	7.0e-03	6.4e-08	1.2e-05	1.2e-05	3.4e-03	3.4e-03
3				6.2e-08	7.0e-03	1.1e-07	7.0e-03	7.0e-03	7.0e-03	9.6e-03	5.2e-03
4					7.0e-03	4.5e-08	7.0e-03	7.0e-03	7.0e-03	9.6e-03	5.2e-03
5						7.0e-03	3.0e-07	1.3e-05	1.3e-05	3.4e-03	3.4e-03
6							7.0e-03	7.0e-03	7.0e-03	9.6e-03	5.2e-03
9								1.2e-05	1.2e-05	3.4e-03	3.4e-03
10									8.1e-10	3.4e-03	3.4e-03
11										3.4e-03	3.4e-03
12											6.8e-03
13											

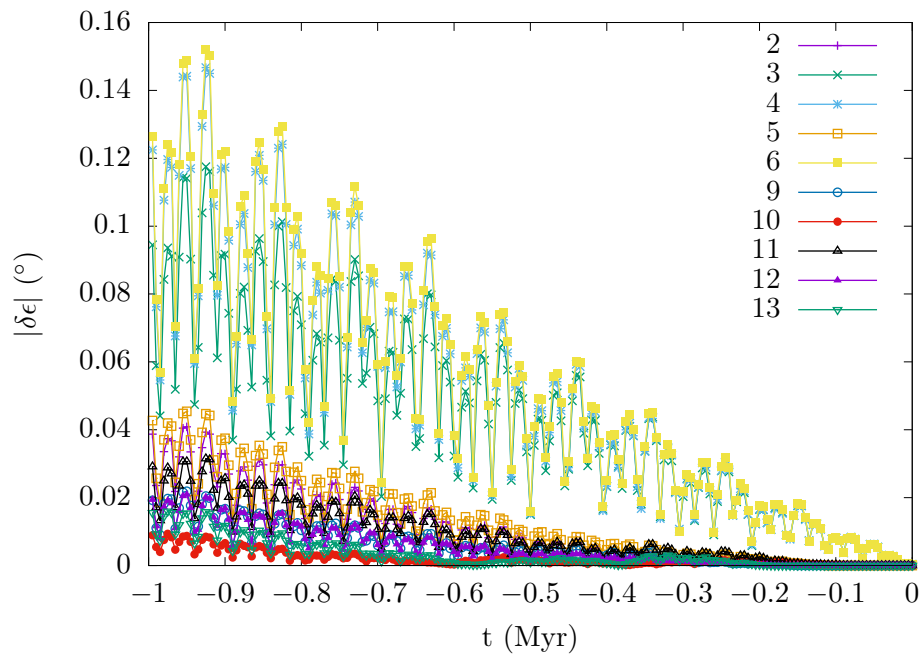
TABLEAU 5.13 – Différences maximales sur  $[-100 : 0]$  kyr pour l'obliquité ( $^{\circ}$ ) de Cérés entre les solutions du tableau 5.8.

n°	1	2	3	4	5	6	9	10	11	12	13
1		2.1e-05	8.3e-03	8.3e-03	2.7e-06	8.3e-03	4.1e-07	1.2e-04	1.2e-04	2.0e-05	2.0e-05
2			8.3e-03	8.3e-03	1.9e-05	8.3e-03	2.2e-05	1.4e-04	1.4e-04	2.0e-05	3.8e-05
3				1.7e-05	8.3e-03	3.9e-06	8.3e-03	8.3e-03	8.3e-03	8.3e-03	8.3e-03
4					8.3e-03	1.3e-05	8.3e-03	8.3e-03	8.3e-03	8.3e-03	8.3e-03
5						8.3e-03	3.1e-06	1.3e-04	1.3e-04	2.0e-05	1.9e-05
6							8.3e-03	8.3e-03	8.3e-03	8.3e-03	8.3e-03
9								1.2e-04	1.2e-04	2.0e-05	2.0e-05
10									1.5e-09	1.4e-04	1.1e-04
11										1.4e-04	1.1e-04
12											3.9e-05
13											

TABLEAU 5.14 – Différences maximales sur  $[-100 : 0]$  kyr pour l'obliquité ( $^{\circ}$ ) de Vesta entre les solutions du tableau 5.8.

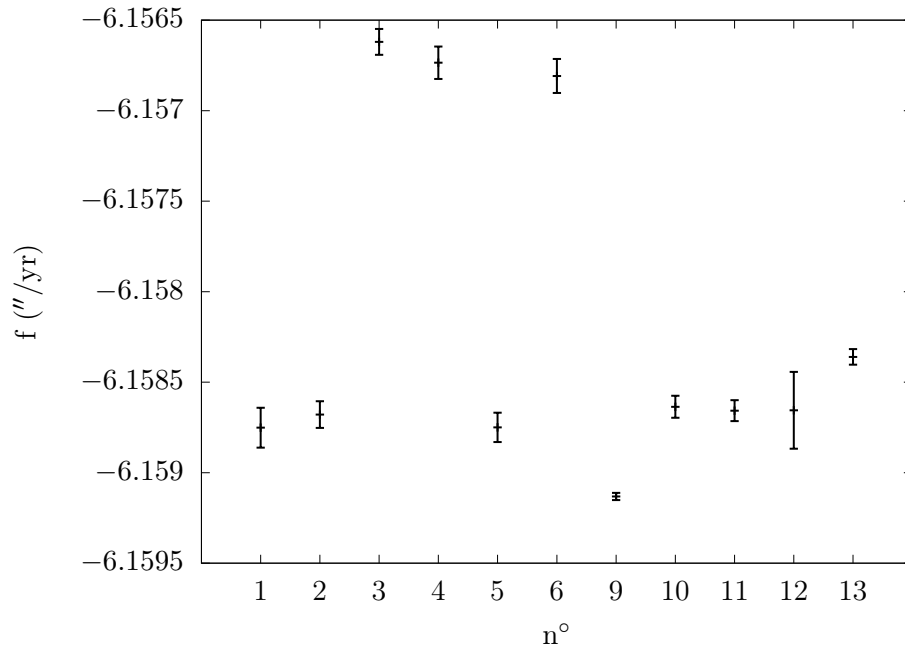


(A)

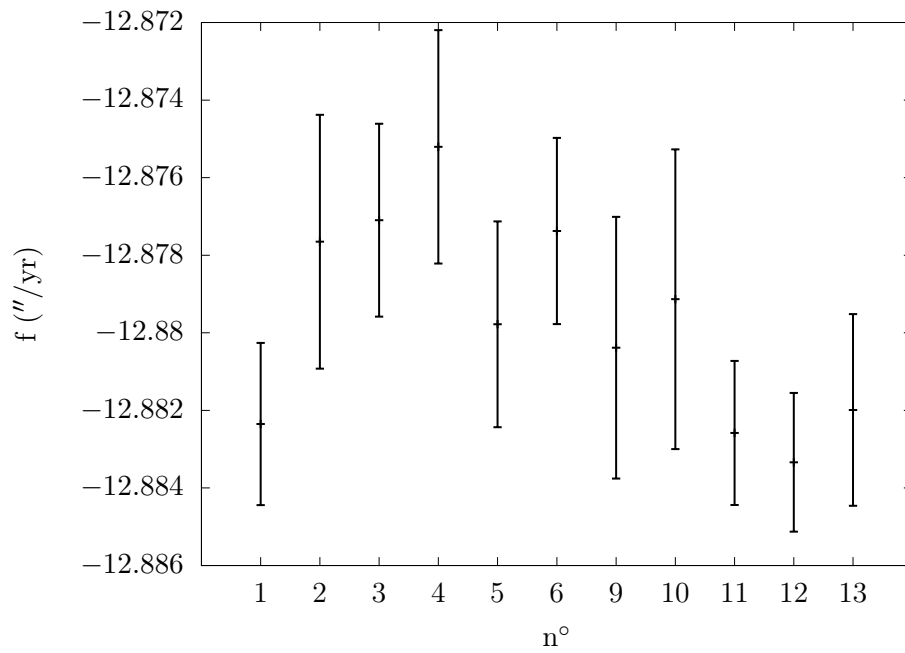


(B)

FIGURE 5.10 – Enveloppes des différences d’obliquité entre les solutions du tableau 5.8 et la solution Ceres2017 sur  $[-1 : 0]$  Myr pour Cérès (a) et Vesta (b).



(A)



(B)

FIGURE 5.11 – Fréquence de précession de l’axe de rotation pour les solutions du tableau 5.8 avec leurs incertitudes pour Cérès (a) et Vesta (b).

n°	1	2	3	4	5	6	9	10	11	12	13
$\epsilon_{max}$	19.547	19.582	19.583	19.585	19.546	19.559	19.61	19.581	19.574	19.571	19.581
$\epsilon_{moy}$	12.178	12.191	12.191	12.192	12.177	12.178	12.191	12.173	12.189	12.191	12.191
$\epsilon_{min}$	2.0456	2.0393	2.0885	2.0885	2.0411	2.0207	2.012	1.9741	2.0494	2.088	2.0793

TABLEAU 5.15 – Obliquités maximales  $\epsilon_{max}$ , moyennes  $\epsilon_{moy}$  et minimales  $\epsilon_{min}$  pour l’obliquité (°) de Cérés pour les solutions du tableau 5.8.

n°	1	2	3	4	5	6	9	10	11	12	13
$\epsilon_{max}$	44.118	44.161	44.179	44.15	44.156	44.185	44.148	44.154	44.112	44.112	44.127
$\epsilon_{moy}$	33.338	33.336	33.338	33.336	33.34	33.34	33.34	33.343	33.338	33.336	33.339
$\epsilon_{min}$	21.422	21.454	21.46	21.474	21.419	21.47	21.438	21.438	21.412	21.429	21.392

TABLEAU 5.16 – Obliquités maximales  $\epsilon_{max}$ , moyennes  $\epsilon_{moy}$  et minimales  $\epsilon_{min}$  pour l’obliquité (°) de Vesta pour les solutions du tableau 5.8.

**Bilan** Les paramètres du tableau 5.8, qui jouent un rôle significatif sur l’intégration de la rotation, sont ainsi les couples exercés par les planètes, la précision des conditions initiales et le pas d’intégration.

**Fréquences de précession** Sur la figure 5.10, les enveloppes des différences sur l’obliquité des solutions du tableau 5.8 avec la solution Ceres2017 sont représentées sur  $[-1 : 0]$  Myr. On constate que les différences les plus importantes apparaissent entre les solutions 3, 4, 6, qui ne considèrent pas les couples exercés par les planètes, et les autres solutions. Ces différences semblent croître linéairement avec le temps. Pour Cérés, initialement les solutions 12 et 13 présentent des différences plus importantes mais ces dernières augmentent moins rapidement. Comme cette différence semble linéaire avec le temps, il pourrait s’agir d’une variation de la fréquence de précession de l’axe de rotation responsable d’un déphasage entre les deux groupes de solution.

Afin de le vérifier, on détermine par analyse en fréquence pour les solutions obtenues les fréquences de précession, qui sont représentées sur la figure 5.11. Pour Cérés, les solutions 3, 4, 6 présentent des fréquences de précession inférieures en valeur absolue à celles des autres solutions. L’écart en fréquence est d’environ  $0.002''/\text{yr}$  pour Cérés, ce qui aboutit à un écart angulaire au bout de 1 Myr d’environ  $1 \times 10^6 \times 0.002/3600 \approx 0.56^\circ$ , en cohérence avec l’écart angulaire au bout de 1 Myr d’environ  $0.65^\circ$  observé sur la figure 5.10. Ainsi pour Cérés, les couples exercés par les planètes jouent un rôle significatif sur l’évolution de l’obliquité en modifiant la fréquence de précession. Pour Vesta, les fréquences de précession des solutions 3, 4, 6 sont inférieures en valeur absolue aux fréquences des autres solutions, cependant elles se trouvent dans les intervalles d’incertitudes des autres fréquences et l’on ne peut ainsi pas conclure.

**Amplitudes de l’obliquité** Les tableaux 5.15 et 5.16 indiquent les obliquités maximales, moyennes et minimales de respectivement Cérés et Vesta sur  $[-20 : 0]$  Myr. Les solutions 3, 4, 6 ne présentent pas de variations significatives de l’obliquité par rapport aux autres solutions. Ainsi les couples exercés par les planètes doivent être pris en compte pour obtenir la bonne fréquence de précession mais n’ont pas d’influence sur les variations de l’obliquité.

## 5.3 Solution Ceres2017 pour la rotation de Cérés et Vesta

### 5.3.1 Cérés

L’évolution de l’obliquité de Cérés est représentée sur la figure 5.12 pour les intervalles de temps  $[-100 : 0]$  kyr,  $[-1 : 0]$  Myr et  $[-20 : 0]$  Myr. L’obliquité varie entre 2.06 et  $19.59^\circ$  sur  $[-20 : 0]$  Myr. Les amplitudes des variations sur  $[-100 : 100]$  Myr sont similaires.

Pour déterminer la fréquence de précession du moment cinétique  $\mathbf{w} = (w_x, w_y, w_z)$ , on réalise l’analyse en fréquence de la quantité  $w_x + iw_y$ , où  $w_x$  et  $w_y$  sont les coordonnées de la composante de

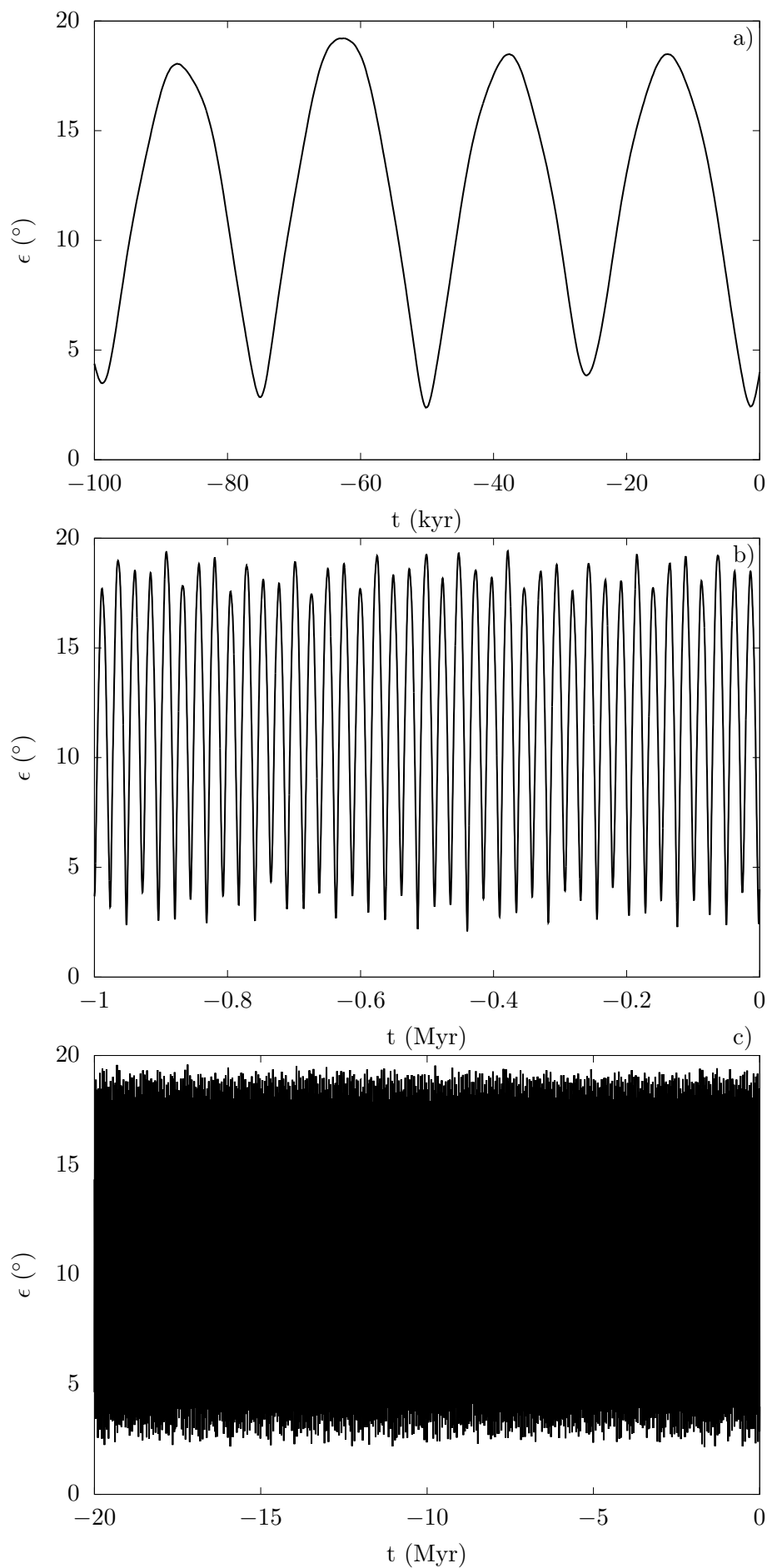


FIGURE 5.12 – Obliquités de Cérés sur  $[-100 : 0]$  kyr (a),  $[-1 : 0]$  Myr (b) et  $[-20 : 0]$  Myr (c).

	$\nu_k$ ("/yr)	$10^6 \times A_k$	$\phi_k$ (°)
$f_C$	-6.15875	132796	4.534
$s_C$	-59.25393	19264	162.921
$s_6$	-26.34785	3150	33.785
$s_C + (g_C - g_5)$	-9.25982	3022	-68.345
$s_C + (g_C - (2g_6 - g_5))$	-57.23494	2952	97.518
$s_C - (g_C - (2g_6 - g_5))$	-61.27289	2832	48.975
$s_7$	-2.99104	1915	50.007
$s_C + (g_C - (2g_6 - g_7))$	-58.40439	1392	-172.293
$s_C - (g_C - (2g_6 - g_7))$	-60.10345	1312	-41.211
$s_8$	-0.69160	1303	-69.308
$s_C + 2(g_C - g_6)$	-7.23883	1170	-127.942
$f_C - (g_C - (2g_6 - g_5))$	-8.17557	668	-100.922
$f_C + (g_C - (2g_6 - g_5))$	-4.14024	658	-57.248
$s_C + 2(g_C - g_6) + (g_5 - g_7)$	-6.06275	573	2.238
$s_C - 2(g_5 - g_6)$	-11.27863	420	177.727
$s_C + (g_5 - g_7)$	-58.08387	391	-105.808
$f_C + (g_C - (2g_6 - g_7))$	-5.30451	313	48.054
	-59.15554	305	-28.298
$f_C - (g_C - (2g_6 - g_7))$	-6.99815	290	-168.326
	-59.34498	280	-166.997
$s_C + (3g_C - 4g_6 + g_7)$	-6.39098	276	-113.654
	-59.45168	267	113.695
$s_C + 2(g_C - g_6) - (g_5 - g_7)$	-8.41092	266	-45.638
	-6.27076	251	121.424
	-59.04637	229	60.256
$s_C + (g_C - g_6)$	-33.24727	227	-165.136
	-6.15880	225	-88.261
$s_C - (g_5 - 2g_6 + g_7)$	-10.10925	219	86.998
$s_C + 2(g_C - (2g_6 - g_5))$	-55.21618	216	30.997
$s_C - 2(g_C - (2g_6 - g_5))$	-63.29223	215	-66.897
$s_C - (2g_C + g_5 - 4g_6 + g_7)$	-62.12250	204	-155.831
$s_C + (2g_C + g_5 - 4g_6 + g_7)$	-56.38576	203	121.140
	-59.25884	202	-106.222
$2f_C - s_C$	46.93652	195	-153.986
$s_C + (g_C - g_5 - 2g_6 + 2g_7)$	-59.57497	183	-77.254
$s_C - (g_C - g_6)$	-85.26054	183	-48.320
$s_C - (g_C - g_5 - 2g_6 + 2g_7)$	-58.93920	173	-154.076
$s_1$	-5.61671	159	-118.819
$2s_C - f_C$	-112.34910	140	141.919
$s_C + (g_C - g_7)$	-8.08029	127	-125.830
$f_C + (g_C - g_6)$	19.84789	105	36.075
$f_C - (g_C - g_6)$	-32.16614	104	150.147
$s_C - (s_6 - s_7 - g_C - 2g_5 + 3g_6)$	-57.86704	96	15.532
$s_C + (s_6 - s_7 - g_C - 2g_5 + 3g_6)$	-60.64206	94	127.961
$2g_C - s_C$	167.75745	90	148.483
$f_C + (s_C - s_6)$	-39.06485	90	-46.170
	-56.11382	85	12.387
	-5.91789	82	112.898
$s_C + (3g_C + g_5 - 4g_6)$	-5.21225	78	10.716
	-59.37412	68	159.704

TABLEAU 5.17 – 50 premiers termes de l'analyse en fréquence de  $w_x + iw_y$  pour Cérès sur  $[-20 : 0]$  Myr.

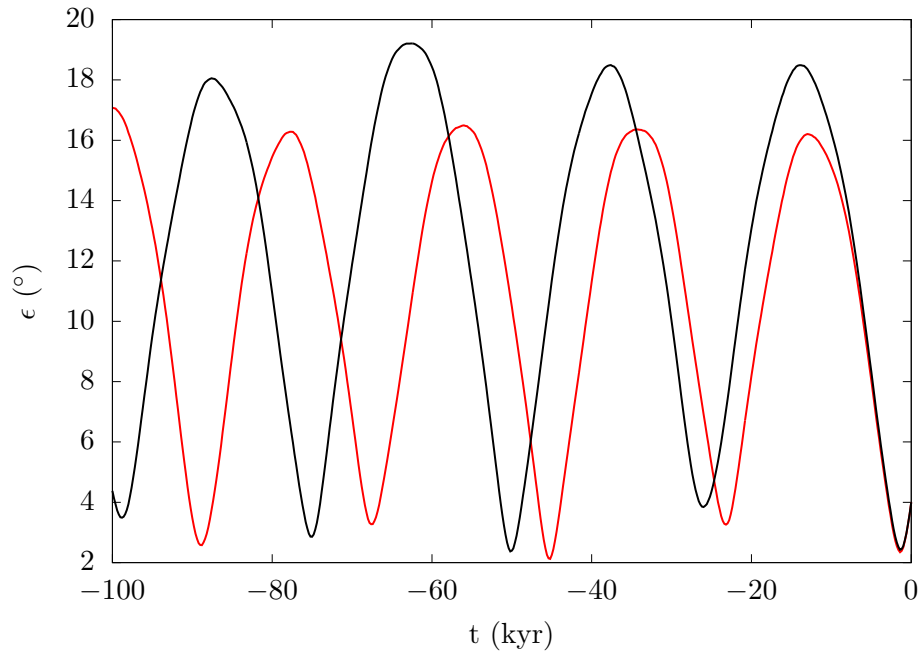


FIGURE 5.13 – Obliquité de Cérés pour la solution Ceres2017 en noir et inclinaison du plan orbital par rapport au plan équatorial initial en rouge sur  $[-100 : 0]$  kyr.

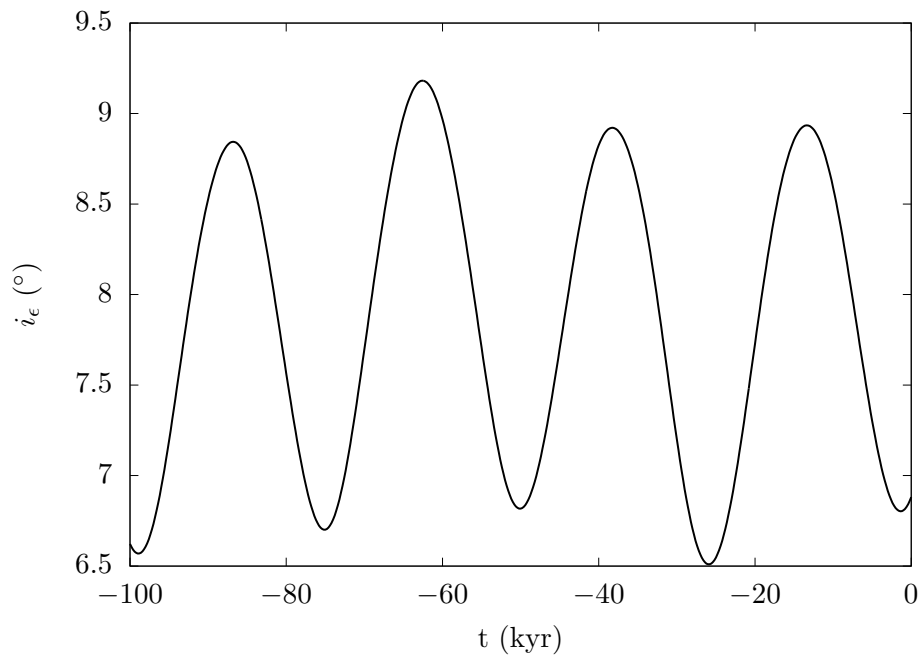


FIGURE 5.14 – Inclinaison de l'équateur de Cérés par rapport au plan invariant sur  $[-100 : 0]$  kyr.

$\mathbf{w}$  parallèle au plan invariant. L'approximation quasi-périodique  $\sum_{k=1}^{50} A_k e^{i(\nu_k t + \phi_k)}$  obtenue est donnée dans le tableau 5.17. La fréquence de précession de l'axe de rotation est ainsi  $f_C = -6.1588''/\text{yr}$  avec une précision de l'analyse en fréquence de  $0.0002''/\text{yr}$ , ce qui correspond à une période de précession de 210.43 kyr.

Skoglöv *et al.* (1996) ont noté que les corps comme Cérès et Vesta, qui ont une inclinaison importante et qui présentent une fréquence de précession de l'axe de rotation inférieure à la fréquence de précession du nœud ascendant, pouvaient présenter de fortes variations de l'obliquité dues à la précession du nœud ascendant. Si on note dans le plan invariant  $(i, \Omega)$  l'inclinaison et la longitude du nœud ascendant du plan orbital et  $(i_\epsilon, L)$  l'inclinaison et la longitude du nœud ascendant de l'équateur, l'obliquité est donnée par l'équation

$$\cos \epsilon = \mathbf{n} \cdot \mathbf{w} = \cos i \cos i_\epsilon + \sin i \sin i_\epsilon \cos(\Omega - L). \quad (5.45)$$

En supposant que les inclinaisons  $i, i_\epsilon$  et la longitude  $L$  restent constantes, à cause du mouvement de précession du nœud du plan orbital  $\Omega$ ,  $\cos \epsilon$  varie entre  $\cos i \cos i_\epsilon + \sin i \sin i_\epsilon$  et  $\cos i \cos i_\epsilon - \sin i \sin i_\epsilon$  et l'obliquité varie ainsi entre  $|i_\epsilon - i|$  et  $|i_\epsilon + i|$ . Dans le cas où  $i \geq i_\epsilon$ , l'obliquité oscille alors avec une amplitude de  $i_\epsilon$  autour de l'inclinaison du plan orbital  $i$ .

Sur la figure 5.13, l'inclinaison du plan orbital de Cérès par rapport au plan équatorial initial est représentée sur  $[-100 : 0]$  kyr par une courbe rouge et oscille entre  $2.12$  et  $17.08^\circ$ . Sur  $[-100 : 0]$  kyr, l'inclinaison  $i$  du plan orbital par rapport au plan invariant varie entre  $8.90$  et  $10.42^\circ$  et présente une valeur moyenne de  $9.60^\circ$ . L'inclinaison  $i_\epsilon$  du plan équatorial par rapport au plan invariant est initialement de  $6.88^\circ$  et son évolution est représentée sur la figure 5.14 sur  $[-100 : 0]$  kyr. Ainsi  $i_\epsilon$  varie peu par rapport aux variations de l'amplitude de l'obliquité. On observe alors bien des oscillations de l'inclinaison du plan orbital par rapport au plan équatorial initial entre  $i - i_\epsilon$  et  $i + i_\epsilon$ . Ainsi une grande partie des variations de l'obliquité de Cérès est due au changement de l'orientation de l'orbite.

**Comparaison avec les études précédentes** On peut comparer la solution Ceres2017 à celle calculée par Ermakov *et al.* (2017a) et disponible à l'adresse <http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/2016GL072250/abstract>. Ermakov *et al.* (2017a) ont calculé à partir du hamiltonien total de façon symplectique le mouvement orbital et de rotation de Cérès. La solution a été calculée avec un intégrateur similaire à celui de Touma et Wisdom (1994) et ainsi le hamiltonien du corps solide libre a été intégré pour Cérès triaxial, c'est-à-dire pour trois moments d'inertie différents, sur l'intervalle de temps  $[-3 : 0]$  Myr. Ermakov *et al.* (2017a) ont aussi intégré Cérès cette fois axisymétrique sur l'intervalle de temps  $[-1 : 0]$  Gyr.

Sur la figure 5.15, on peut comparer les évolutions de l'excentricité et de l'obliquité de la solution Ceres2017 à celle calculée par Ermakov *et al.* (2017a) sur  $[-3 : 0]$  Myr pour Cérès triaxial. Les variations de l'obliquité et de l'excentricité sont similaires. Les différences entre les deux solutions ont été représentées sur la figure 5.16 pour l'obliquité et l'excentricité. Il semble que la solution donnée par Ermakov *et al.* (2017a) n'ait pas été calculée à partir de l'époque J2000 mais de la situation présente de Cérès. Cependant cela a pu être résolu en partant d'un point de la solution de Ermakov *et al.* (2017a) proche de l'époque J2000. Pour l'excentricité, la différence entre les deux solutions présente de faibles oscillations autour d'une valeur proche de zéro. Cependant on observe pour l'obliquité des oscillations autour de la valeur zéro avec une amplitude croissante. Cet écart croissant pourrait provenir du choix différent réalisé pour le moment d'inertie polaire entre les deux solutions. En effet comme indiqué dans la section 4.1, Ermakov *et al.* (2017a) utilisent la valeur  $\overline{C} \approx 0.3915$  alors que nous avons réalisé une intégration pour la valeur  $\overline{C} = 0.393$ . Une différence sur le moment d'inertie polaire provoque une différence sur les fréquences de précession, d'où l'apparition d'un déphasage croissant. Cependant nous avons réalisé une nouvelle intégration pour  $\overline{C} = 0.3915$ , et on observe des différences très similaires pour l'obliquité à celles de la figure 5.16. La persistance des déphasages nous indique ainsi qu'il existe toujours une faible différence entre les fréquences propres des deux solutions.

L'analyse en fréquence nous a permis d'obtenir ici la valeur de la période de précession, qui est de 210.43 kyr. Ceci est en accord avec la période de précession de 210 kyr déterminée par Ermakov *et al.* (2017a) avec une transformée de Fourier rapide.

On peut aussi comparer les résultats à ceux obtenus par Bills et Scott (2017), qui ont calculé l'obliquité de Cérès sur quelques millions d'années à partir du hamiltonien séculaire avec un mouvement



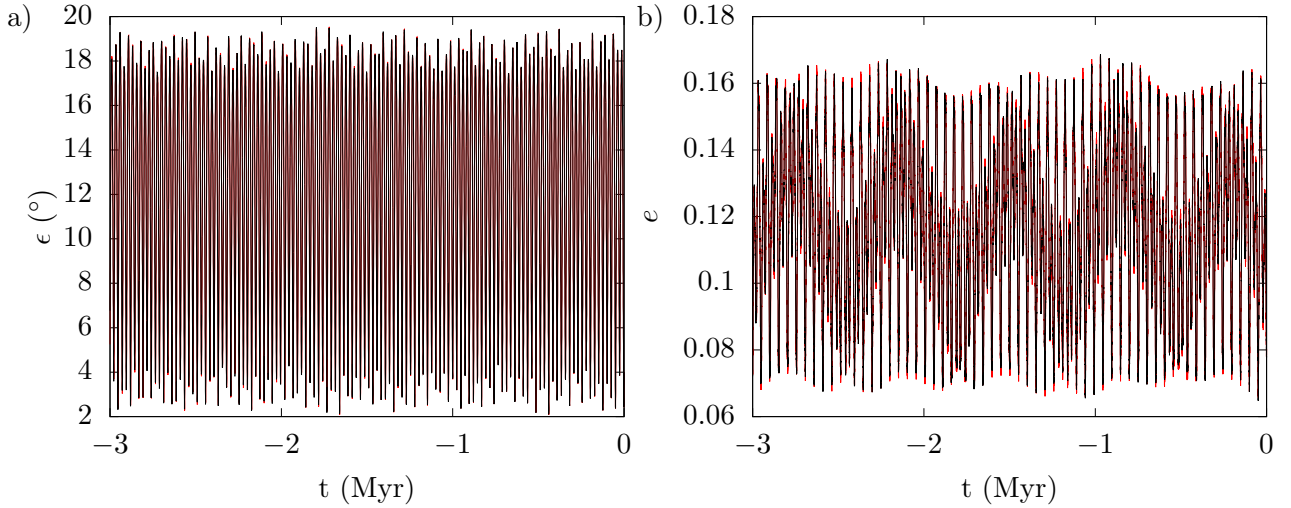


FIGURE 5.15 – Obliquités (a) et excentricités (b) de la solution Ceres2017 en rouge et de [Ermakov et al. \(2017a\)](#) en noir.

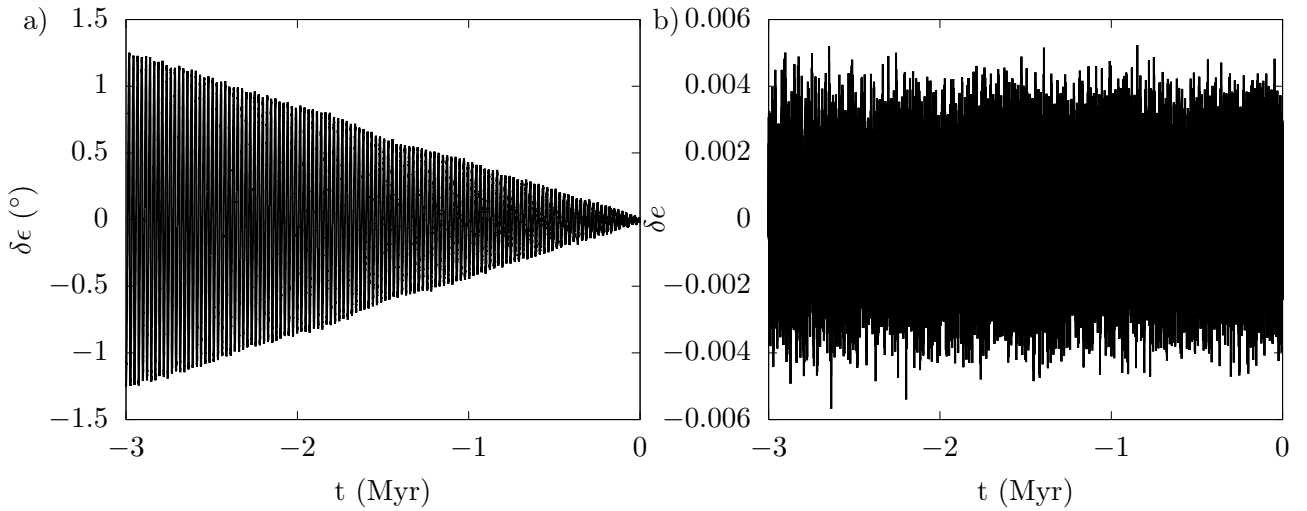


FIGURE 5.16 – Différence pour l’obliquité (a) et l’excentricité (b) entre la solution Ceres2017 et celle de [Ermakov et al. \(2017a\)](#).

orbital obtenu avec un modèle séculaire, où sont considérés les huit planètes du Système solaire et Cérés. Ils obtiennent alors des oscillations d’amplitude similaire pour l’obliquité de Cérés.

### 5.3.2 Vesta

L’évolution de l’obliquité de Vesta est représentée sur la figure 5.17 pour les intervalles de temps  $[-100 : 0]$  kyr,  $[-1 : 0]$  Myr et  $[-20 : 0]$  Myr. L’obliquité varie entre  $21.39$  et  $44.14^\circ$  sur  $[-20 : 0]$  Myr. Les amplitudes des variations sur  $[-100 : 100]$  Myr sont similaires.

L’approximation quasi-périodique  $\sum_{k=1}^{50} A_k e^{i(\nu_k t + \phi_k)}$  de  $w_x + iw_y$  est donnée par l’analyse en fréquence dans le tableau 5.18. La fréquence de précession de l’axe est ainsi de  $f_V = -12.882''/\text{yr}$  avec une précision de l’analyse en fréquence de  $0.002''/\text{yr}$ . Cela correspond à une période de précession de  $100.61$  kyr.

Comme pour Cérés, l’inclinaison de l’équateur  $i_\epsilon$  de Vesta sur le plan invariant est représentée sur  $[-100 : 0]$  kyr sur la figure 5.19. L’inclinaison de l’équateur varie ainsi de façon plus importante que pour Cérés. Comme pour Cérés, on compare sur la figure 5.18 l’obliquité à l’inclinaison du plan orbital par rapport au plan équatorial initial, qui oscille entre  $23.92$  et  $38.33^\circ$  sur  $[-100 : 0]$  kyr. Pour Vesta l’inclinaison  $i_\epsilon$  du plan équatorial initial par rapport au plan invariant est de  $31.22^\circ$  et l’inclinaison

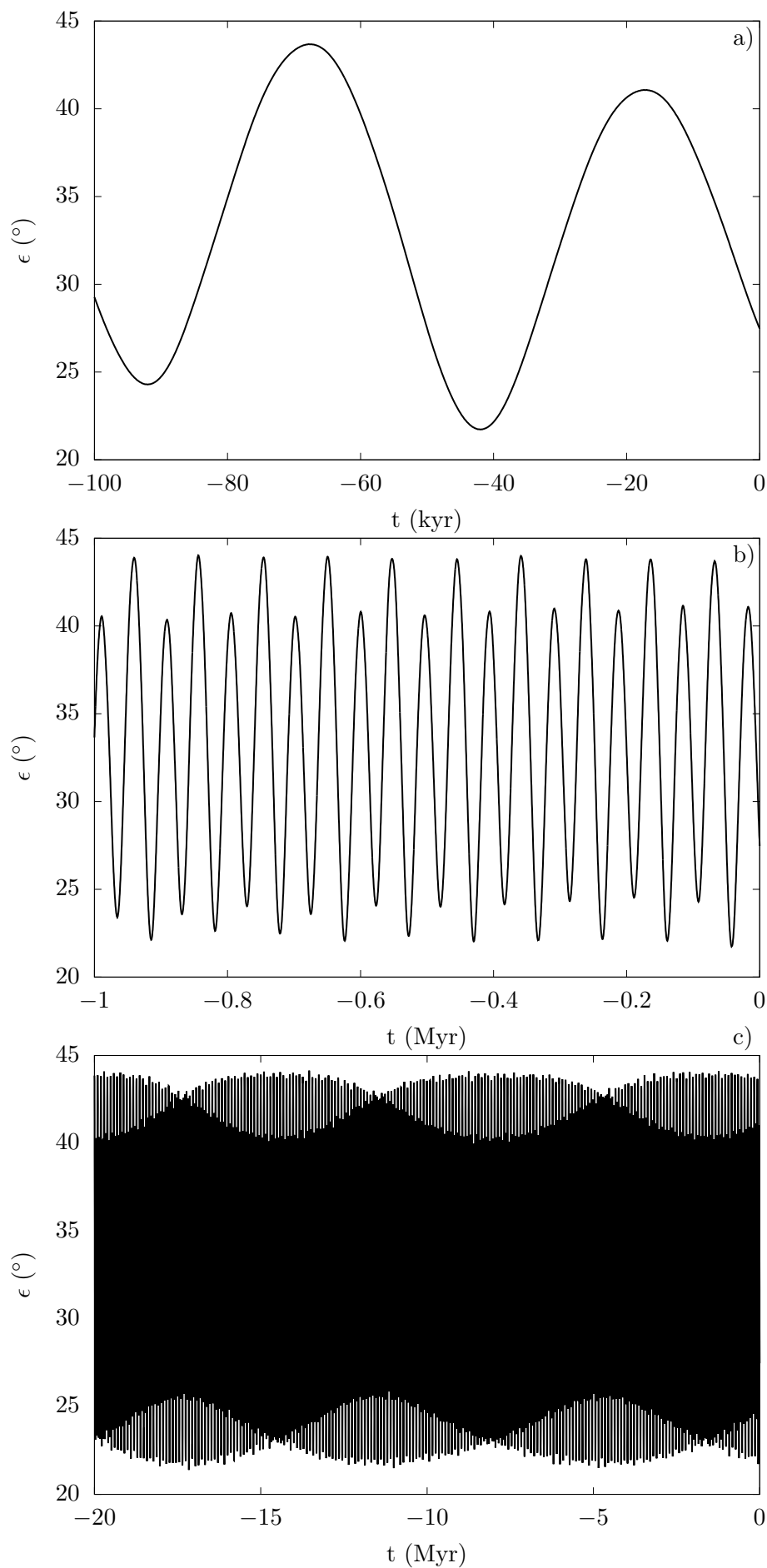


FIGURE 5.17 – Obliquités de Vesta sur  $[-100 : 0]$  kyr (a),  $[-1 : 0]$  Myr (b) et  $[-20 : 0]$  Myr (c).

	$\nu_k$ ("/yr)	$10^6 \times A_k$	$\phi_k$ (°)
$f_V$	-12.88235	536537	-32.774
$2f_V - (2s_6 - s_V)$	-12.68720	53372	-129.004
$2s_6 - s_V$	-13.07751	49031	-114.858
$s_V$	-39.61376	31572	-172.011
	-12.77160	17140	52.745
	-12.99626	14654	48.485
$2f_V - s_V$	13.84895	13649	106.512
	-12.67225	10137	-159.973
$s_6$	-26.34823	7832	32.968
	-13.10016	7321	-115.847
	-12.55303	6177	-19.085
	-12.92955	5260	14.327
$2f_V - s_6$	0.58288	4646	-99.913
	-12.73796	4601	-121.794
$f_V - (s_V - s_6)$	0.38433	4002	174.403
$f_V - (g_V - g_6)$	-21.53224	3891	27.961
	-12.82979	3878	130.392
$f_V + (g_V - g_6)$	-4.23214	3863	87.770
$f_V + (s_V - s_6)$	-26.14817	3364	-58.177
	-12.83327	3345	116.714
	-13.06876	3064	61.903
$3f_V - 2s_6$	14.04715	2933	13.044
$f_V - 2(s_V - s_6)$	13.65255	2838	24.381
	-12.44726	2791	-125.619
	-13.16296	2581	-44.359
	-39.71053	2303	-17.854
	-12.99531	2220	41.091
	-39.51364	2149	-138.939
$2s_V - f_V$	-66.34537	2086	-131.843
$s_V + (g_V - g_5)$	-6.97876	1971	-142.636
	-13.25676	1924	-122.046
	-12.86902	1919	-78.108
	-12.61890	1819	99.975
	-12.53596	1587	159.537
	-13.11606	1508	156.028
$s_V + (g_V - g_6)$	-30.96333	1357	-51.344
	-12.78299	1342	-14.556
	-12.93541	1319	-23.383
$s_7$	-2.99285	1201	45.632
$s_V + s_6 - f_V$	-53.07896	1116	75.117
$s_V - (g_V - g_6)$	-48.26419	1101	-112.768
$s_8$	-0.69187	1056	-69.630
	-12.37138	1049	-141.990
	-13.18382	1020	-117.994
	0.77870	1013	161.465
	-39.43894	953	-156.160
$f_V - (g_V - g_5)$	-45.52000	900	110.360
$f_V + (g_V - g_5)$	19.75530	886	4.257
	-12.46117	863	169.774
$f_V + (g_V - g_6 + s_V - s_6)$	-17.49709	595	62.754

TABLEAU 5.18 – 50 premiers termes de l'analyse en fréquence de  $w_x + iw_y$  pour Vesta sur  $[-20 : 0]$  Myr.

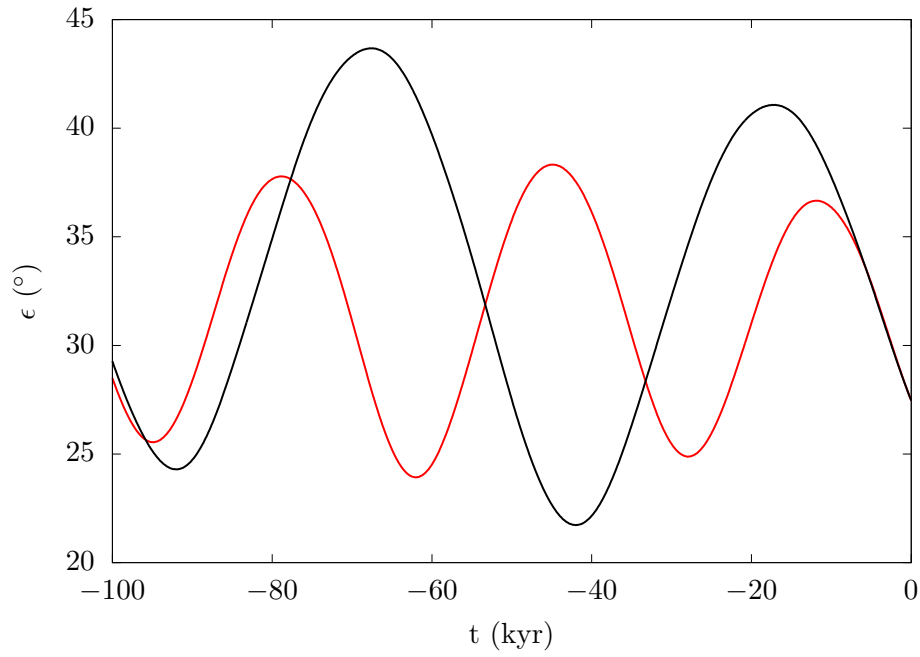


FIGURE 5.18 – Obliquité de Vesta pour la solution Ceres2017 en noir et inclinaison du plan orbital par rapport au plan équatorial initial en rouge sur  $[-100 : 0]$  kyr.

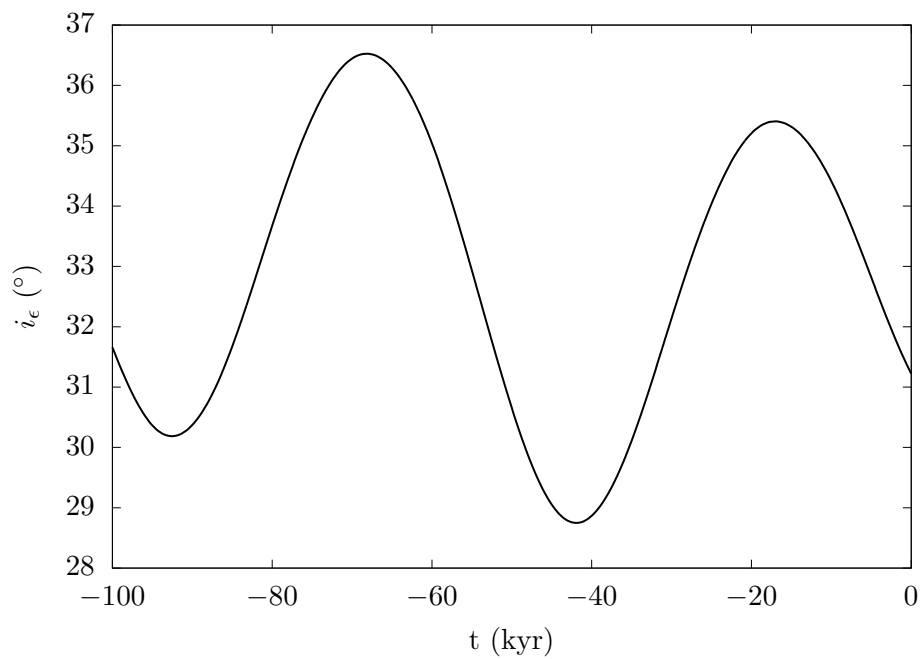


FIGURE 5.19 – Inclinaison de l'équateur de Vesta par rapport au plan invariant sur  $[-100 : 0]$  kyr.

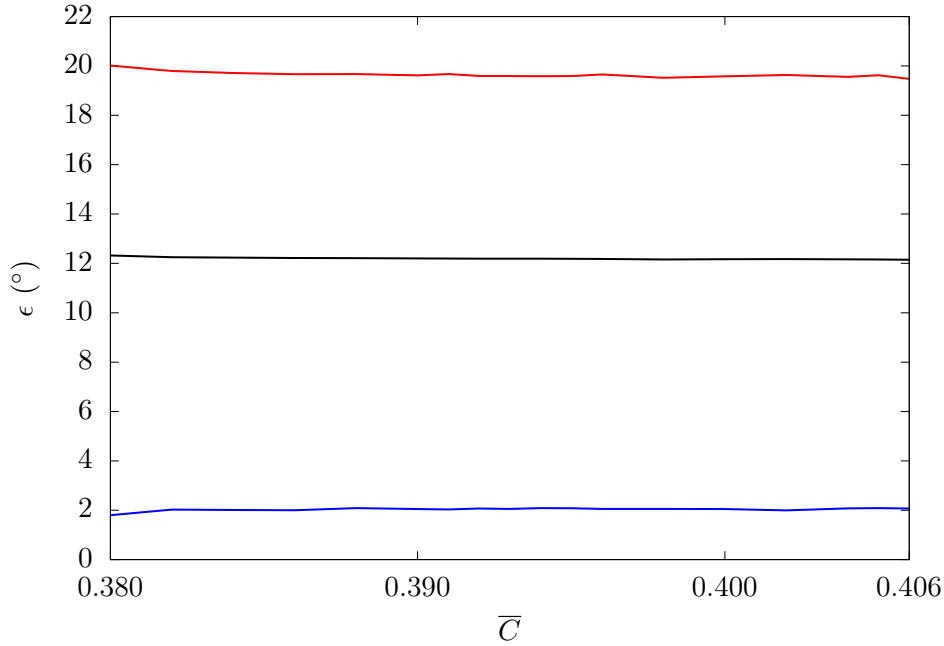


FIGURE 5.20 – Obliquités maximales, moyennes et minimales respectivement en rouge, noir et bleu de Cérés sur  $[-20 : 0]$  Myr en fonction du moment d’inertie polaire  $\bar{C}$ .

$i$  du plan orbital par rapport au plan invariant varie sur  $[-100 : 0]$  kyr entre  $5.37$  et  $7.41^\circ$  avec une valeur moyenne de  $6.45^\circ$ . D’après l’équation (5.45), l’inclinaison du plan orbital par rapport au plan équatorial devrait varier entre  $i_\epsilon - i$  et  $i_\epsilon + i$ . C’est bien ce que l’on observe ici. Cependant les variations de l’obliquité sont plus importantes que ces dernières. L’orientation de l’orbite a ainsi une contribution moins importante sur l’obliquité que pour Cérés.

### 5.3.3 Intégrations pour différents moments d’inertie

Le chapitre 4 évoquait l’évolution des moments d’inertie polaires  $\bar{C}$  de Cérés et Vesta en fonction des différents modèles de structure internes possibles pour Cérés et Vesta. Pour Cérés on avait déduit que le moment d’inertie était compris dans l’intervalle  $[0.388 : 0.398]$ . Pour Vesta le moment d’inertie pouvait être compris en fonction des modèles dans l’intervalle  $[0.406 : 0.422]$ .

Pour Cérés et Vesta, on a réalisé l’intégration pour la solution Ceres2017 respectivement avec les moments d’inertie  $0.393$  et  $0.409$ . On a réalisé des intégrations supplémentaires pour différents moments d’inertie polaire sur l’intervalle de temps  $[-100 : 0]$  Myr sur des intervalles d’incertitude agrandis. On a ainsi pris des moments d’inertie polaires dans l’intervalle  $[0.380 : 0.406]$  pour Cérés et  $[0.390 : 0.430]$  pour Vesta.

Comme on a pu le voir dans la section 5.2.4, une intégration réalisée en double-précision avec un pas de  $0.01$  yr ne modifie pas les variations de l’obliquité de façon significative par rapport à la solution Ceres2017 réalisée avec un pas de  $0.005$  yr en précision étendue, les différences sur les obliquités de Cérés et Vesta étant du même ordre de grandeur que celles obtenues en faisant varier légèrement les conditions initiales orbitales et de rotation. Les variations relatives des moments d’inertie sont ici bien plus grandes que celles des conditions initiales orbitales et de rotation. Ainsi les différences dues aux moments d’inertie devraient être bien plus grandes que celles dues à la précision et au pas d’intégration. Les intégrations ont ainsi été réalisées en double-précision avec un pas de  $0.01$  yr.

Les variations de l’obliquité de Cérés ont été représentées sur la figure 5.20 en fonction du moment d’inertie polaire. Toutes les solutions obtenues avec différents moments d’inertie polaires dans l’intervalle  $[0.380 : 0.406]$  donnent des oscillations de l’obliquité d’amplitudes similaires. Ermakov *et al.* (2017a) ont réalisé plusieurs intégrations pour des moments d’inertie dans l’intervalle  $[0.3865 : 0.3965]$  et ont aussi conclu que les moments d’inertie influençaient faiblement l’amplitude des oscillations. La fréquence de précession dépend du moment d’inertie polaire  $\bar{C}$  d’après la formule (2.160). Sur la figure

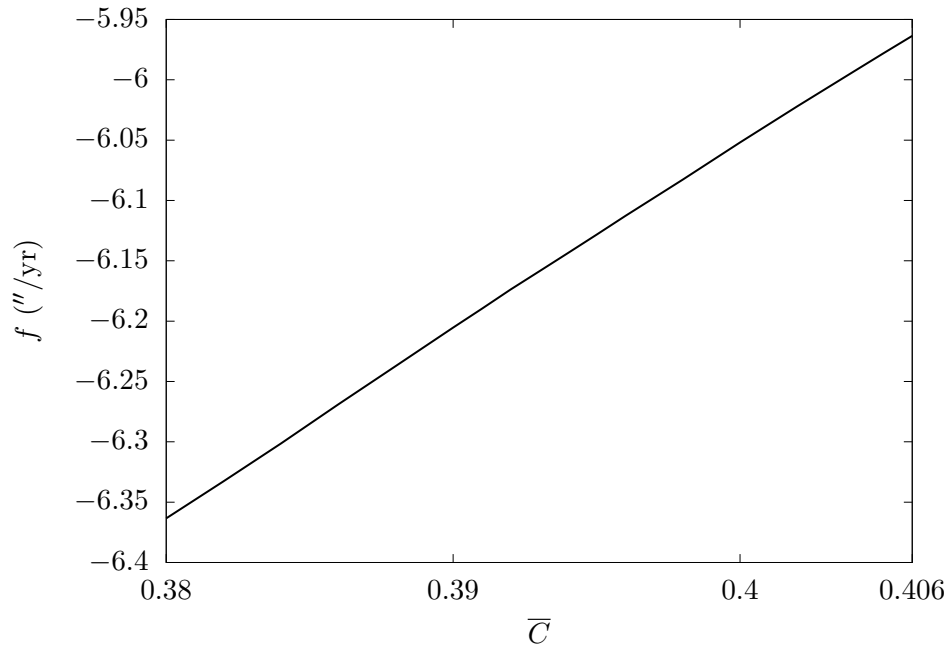


FIGURE 5.21 – Évolution de la fréquence de précession de l’axe de rotation de Cérès déterminée par analyse en fréquence sur  $[-20 : 0]$  Myr en fonction du moment d’inertie polaire  $\bar{C}$ .

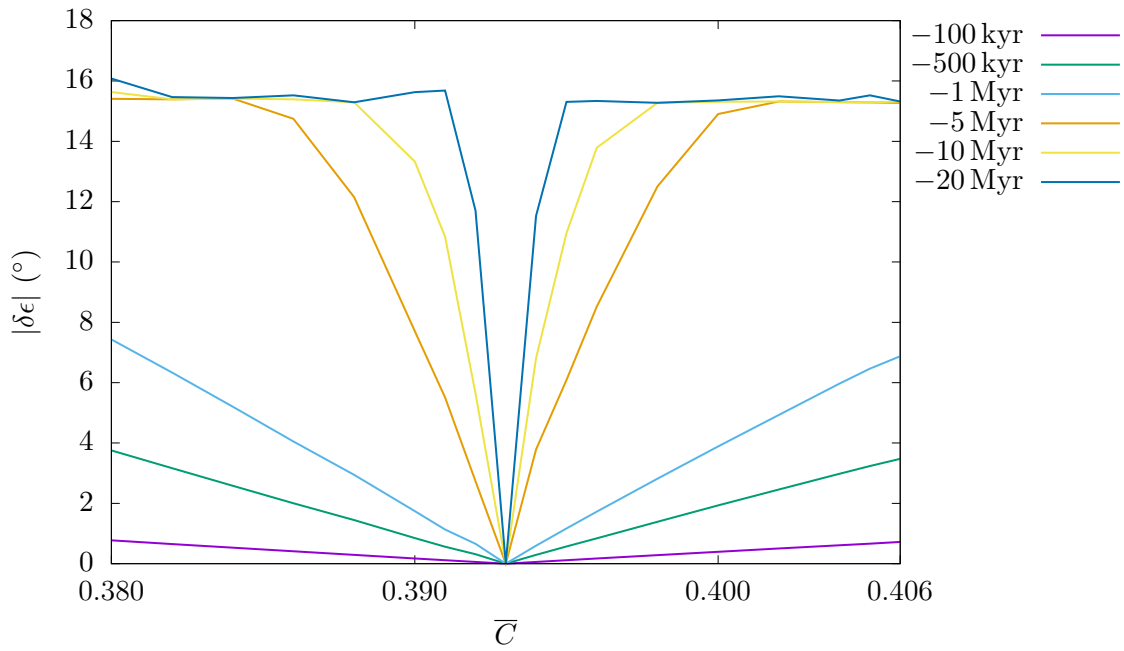


FIGURE 5.22 – Différence maximale sur l’obliquité avec la solution obtenue pour Cérès avec  $\bar{C} = 0.393$  en fonction du moment d’inertie polaire  $\bar{C}$  et du temps.

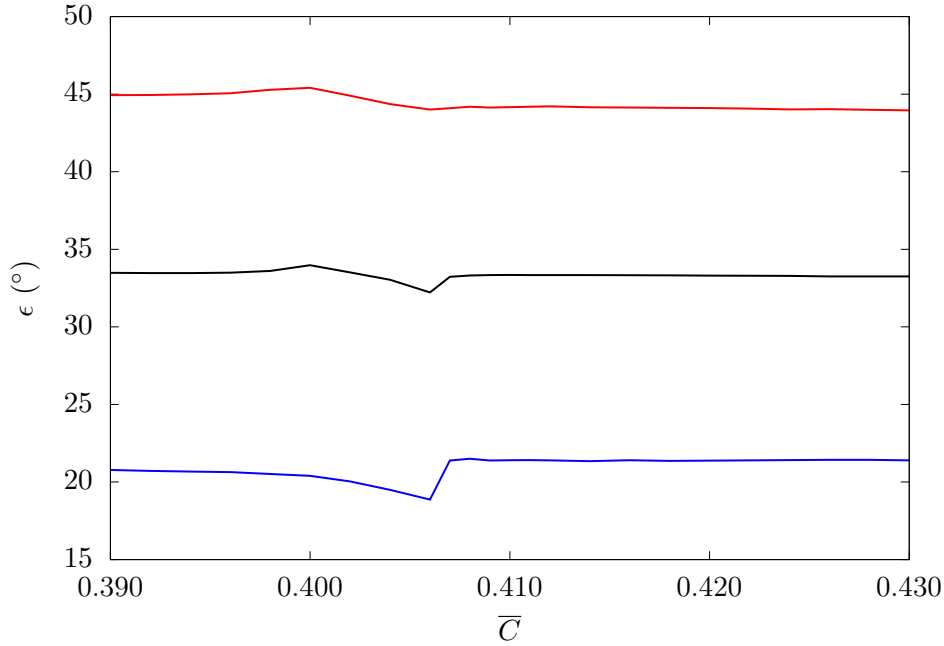


FIGURE 5.23 – Obliquités maximales, moyennes et minimales respectivement en rouge, noir et bleu de Vesta sur  $[-20 : 0]$  Myr en fonction du moment d’inertie polaire  $\bar{C}$ .

5.21, on peut observer l’évolution de la fréquence de précession de Cérès en fonction du moment d’inertie polaire. Conformément à l’équation (2.160), la fréquence de précession diminue en valeur absolue lorsque le moment d’inertie polaire augmente. Sur la figure 5.22, est représentée la différence maximale sur l’obliquité par rapport à la solution obtenue pour  $\bar{C} = 0.393$  en fonction du moment d’inertie polaire  $\bar{C}$  et du temps. Pour un temps donné, la différence maximale augmente plus on s’éloigne de la valeur de  $\bar{C} = 0.393$ , comme la différence sur la fréquence de précession est de plus en plus importante. Cette différence sur la fréquence de précession va créer un déphasage croissant par rapport à la solution calculée avec le moment d’inertie 0.393 et on observe ainsi que la différence maximale croît avec le temps jusqu’à atteindre une valeur maximale. Le déphasage avec la solution obtenue avec  $\bar{C} = 0.393$  est alors supérieur à  $\pi$ , soit une demi-période. En considérant l’intervalle d’incertitude  $[0.380 : 0.406]$  pour le moment d’inertie polaire, l’incertitude sur l’obliquité est alors d’environ  $0.8^\circ$  dès 100 kyr et d’environ  $7^\circ$  dès 1 Myr.

Pour Vesta, les variations de l’obliquité obtenues avec les différents moments d’inertie polaire dans l’intervalle  $[0.390 : 0.430]$  ont été représentées sur la figure 5.23 et présentent toutes des oscillations avec des amplitudes voisines. Cependant, la solution obtenue pour  $\bar{C} = 0.406$  peut présenter des obliquités plus faibles sur l’intervalle  $[-20 : 0]$  Myr comme cela est représenté sur la figure 5.24. L’obliquité peut descendre jusqu’à  $18.87^\circ$  contre  $21.39^\circ$  pour  $\bar{C} = 0.409$ . De plus, l’évolution générale de l’obliquité est différente pour  $\bar{C} = 0.406$  sur la figure 5.24 de celle obtenue pour  $\bar{C} = 0.409$  sur la figure 5.17. Sur la figure 5.25, on peut observer l’évolution de la fréquence de précession de Vesta en fonction du moment d’inertie polaire. Conformément à l’équation (2.160), la fréquence de précession diminue en valeur absolue lorsque le moment d’inertie polaire augmente à l’exception de l’intervalle  $[0.400 : 0.407]$ , où on observe une résonance. Dans la section 5.4.2.3, nous verrons qu’il s’agit de la résonance avec la fréquence  $2s_6 - s_V$ , qui est ainsi responsable de la diminution de l’obliquité minimale observée précédemment. Sur la figure 5.26, est représentée la différence maximale sur l’obliquité par rapport à la solution obtenue pour  $\bar{C} = 0.409$  en fonction du moment d’inertie polaire  $\bar{C}$  et du temps. La différence maximale croît plus vite avec le temps que pour Cérès et ainsi la différence maximale sur l’intervalle d’incertitude  $[0.390 : 0.430]$  est d’environ  $2^\circ$  dès 100 kyr et de  $22^\circ$  dès 1 Myr.

Ainsi s’il est possible de connaître l’amplitude des oscillations de l’obliquité de Cérès et Vesta sur  $[-20 : 0]$  Myr, il n’est pas possible de connaître précisément les évolutions de l’obliquité au-delà de 100 kyr à cause de l’incertitude sur le moment d’inertie polaire due à l’indétermination des structures internes de Cérès et Vesta.

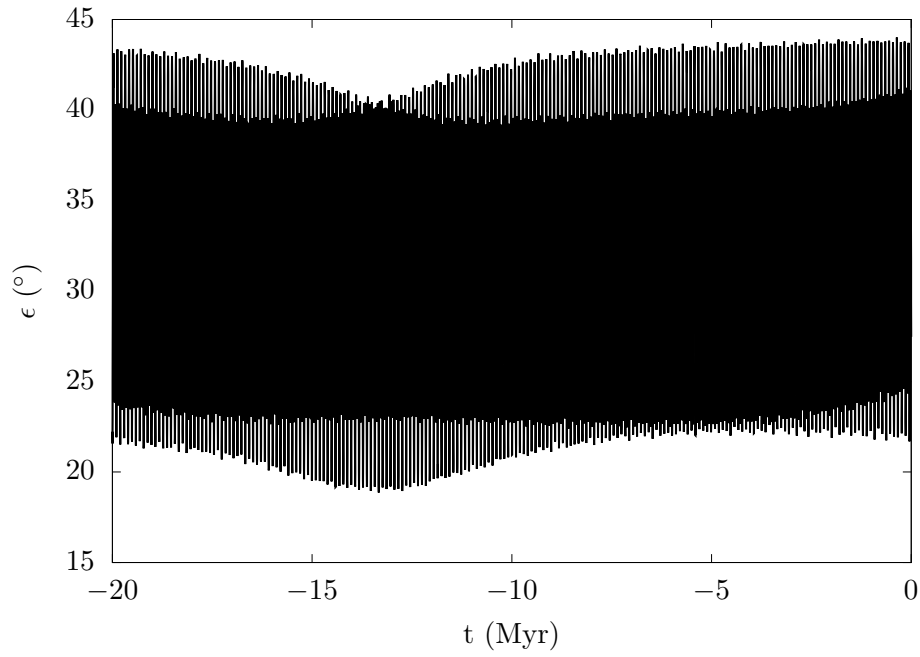


FIGURE 5.24 – Obliquité de Vesta sur  $[-20 : 0]$  Myr pour  $\bar{C} = 0.406$ .

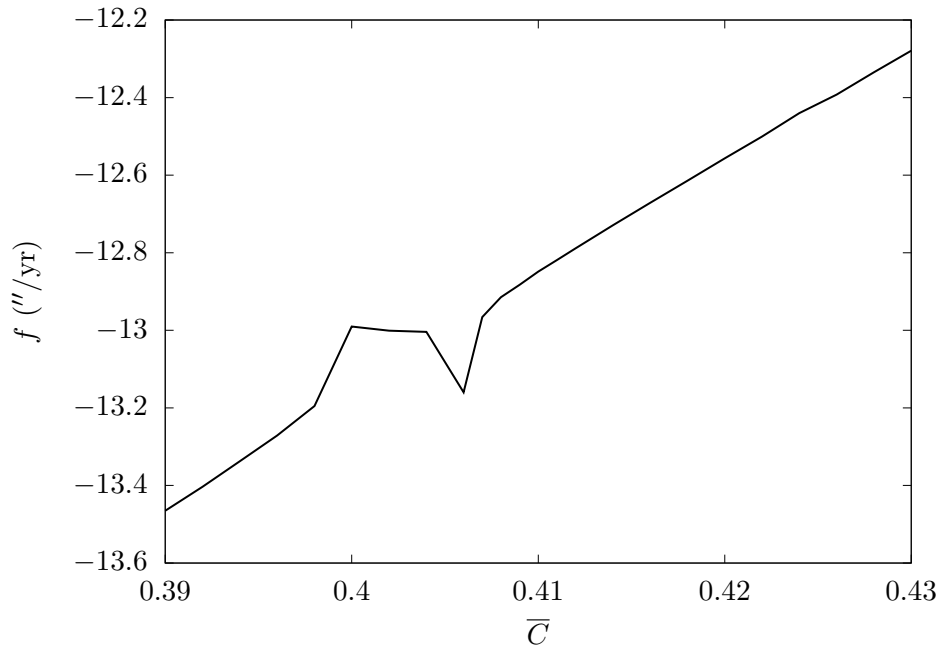


FIGURE 5.25 – Évolution de la fréquence de précession de l'axe de rotation de Vesta déterminée par analyse en fréquence sur  $[-20 : 0]$  Myr en fonction du moment d'inertie polaire  $\bar{C}$ .



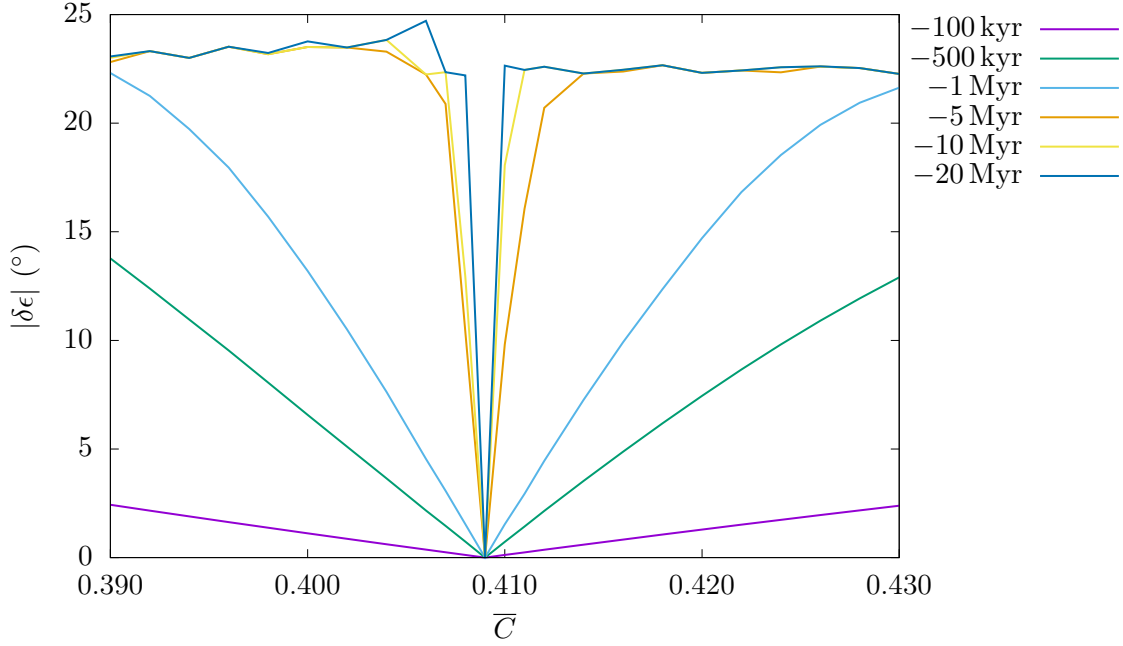


FIGURE 5.26 – Différence maximale sur l’obliquité avec la solution obtenue pour Vesta avec  $\bar{C} = 0.409$  en fonction du moment d’inertie polaire  $\bar{C}$  et du temps.

## 5.4 Étude de la stabilité de l’axe de rotation

Nous allons maintenant étudier la stabilité à long terme de l’axe de rotation avec la méthode utilisée par [Laskar \*et al.\* \(1993a\)](#) et [Laskar et Robutel \(1993\)](#) pour l’étude de la stabilité de l’axe de rotation des planètes du système solaire. Elle consiste à intégrer à partir d’une solution orbitale séculaire donnée les équations séculaires de la précession de l’axe de rotation. La stabilité de la solution peut ensuite être déterminée par l’analyse en fréquence comme expliqué dans [Dumas et Laskar \(1993\)](#) et [Laskar \(1993\)](#).

Pour cela, on a intégré ici les équations de précession sur l’intervalle de temps  $[-40 : 0]$  Myr. On détermine la fréquence de précession  $f_1$  sur l’intervalle de temps  $[-20 : 0]$  Myr et la fréquence  $f_2$  sur l’intervalle  $[-40 : -20]$  Myr. La diffusion de la constante de précession peut être mesurée par la quantité ([Dumas et Laskar, 1993](#), [Laskar, 1993](#))

$$\sigma = \left| \frac{f_1 - f_2}{f_1} \right|. \quad (5.46)$$

Si le système est intégrable, les fréquences ne varient pas et la quantité  $\sigma$  reste nulle. Il n’y a alors pas de diffusion. Si le système est faiblement perturbé, les fréquences vont varier lentement et  $\sigma$  restera modeste. Cependant si le système est chaotique, les fréquences vont varier significativement et  $\sigma$  présentera des valeurs élevées. En mesurant la diffusion de la fréquence de précession par le biais de la quantité  $\sigma$ , on peut estimer la diffusion chaotique et ainsi étudier la stabilité de l’axe de rotation.

### 5.4.1 Solution séculaire pour l’obliquité

Pour l’étude de la stabilité à long terme, nous allons calculer la précession à partir des équations séculaires (2.148). Ainsi le mouvement de précession sera seulement dû au couple exercé par le Soleil et sera forcé par le mouvement orbital séculaire.

#### 5.4.1.1 Comparaison avec la solution Ceres2017

Nous allons comparer la solution Ceres2017 obtenue avec l’intégrateur LaX à celle obtenue en intégrant les équations séculaires de précession (2.148). Dans ces équations, la normale à l’orbite  $\mathbf{n}$  et l’excentricité  $e$  sont calculées à partir de la solution orbitale séculaire de la section 3.3. L’intégration

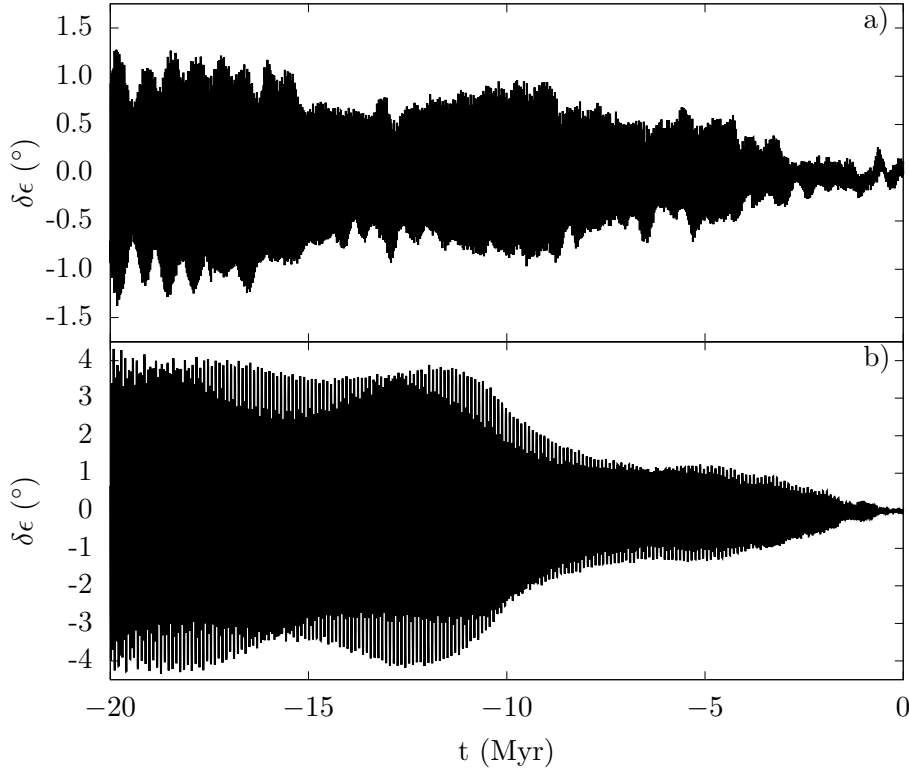


FIGURE 5.27 – Différence entre les solutions Ceres2017 et séculaire pour l’obliquité de Cérés (a) et Vesta (b) sur  $[-20 : 0]$  Myr.

a lieu dans le repère invariant de l’intégrateur LaX. Les équations (2.148) sont intégrées à l’aide d’un intégrateur Adams à pas fixes pour un pas d’intégration de 100 yr. Ce pas a été choisi afin de pouvoir conserver la norme du moment cinétique sur  $[-40 : 0]$  Myr. L’intégration avec l’intégrateur Adams nécessite une initialisation comme indiqué dans la section 5.2.4. Pour une intégration sur l’intervalle  $[-40 : 0]$  Myr, on réalise une initialisation en intégrant sur l’intervalle  $[0 : 10]$  kyr avec un intégrateur DOPRI avec un pas d’intégration de 100 yr. On utilise pour les axes de rotation les mêmes conditions initiales que la solution Ceres2017 données dans le tableau 4.2 et les constantes de précession sont calculées à partir des grandeurs données dans le chapitre 4.

Les différences pour l’obliquité entre les deux solutions sont représentées sur la figure 5.27 pour Cérés et Vesta sur l’intervalle de temps  $[-20 : 0]$  Myr. Les différences oscillent autour de zéro mais présentent des amplitudes modérées par rapport aux amplitudes de variation de l’obliquité. Pour Cérés la différence maximale sur  $[-20 : 0]$  Myr entre les deux intégrations est d’environ  $1.5^\circ$  alors que l’obliquité varie sur  $[-20 : 0]$  Myr entre  $2$  et  $20^\circ$  avec une amplitude de  $18^\circ$ . Pour Vesta, la différence maximale entre les deux intégrations est d’environ  $4.5^\circ$  sur  $[-20 : 0]$  Myr alors que l’obliquité varie sur  $[-20 : 0]$  Myr entre  $22$  et  $44^\circ$  avec une amplitude de  $22^\circ$ . On compare aussi les fréquences de précession des axes de rotation. Pour Cérés, la fréquence de précession sur  $[-20 : 0]$  Myr est  $-6.1581 \pm 0.0003''/\text{yr}$  pour la solution séculaire alors que l’on avait précédemment  $f = -6.1588 \pm 0.0002''/\text{yr}$  pour l’intégration avec LaX (section 5.3.1). Pour Vesta, la fréquence de précession sur  $[-20 : 0]$  Myr est  $-12.8769 \pm 0.0006''/\text{yr}$  pour la solution séculaire contre précédemment  $f = -12.882 \pm 0.002''/\text{yr}$  pour l’intégration avec LaX (section 5.3.2). Ces différences sont supérieures à la précision de l’analyse en fréquence et sont ainsi significatives.

Pour la solution séculaire, les couples exercés par les planètes ne sont pas considérés. Or dans la section 5.2.4, nous avons vu que dans ce cas, la fréquence de précession était comprise pour Cérés entre  $-6.1565''/\text{yr}$  et  $-6.157''/\text{yr}$ . Si la fréquence de précession obtenue avec le modèle séculaire est en effet plus faible en valeur absolue, elle ne l’est cependant pas autant. Pour Vesta, nous avons vu que l’effet sur la fréquence de précession n’était pas significatif.

Les différences entre les deux calculs pourraient aussi provenir d’une différence de conditions initiales pour l’orientation. En effet, la solution orbitale séculaire de la section 3.3 ne présente pas les termes

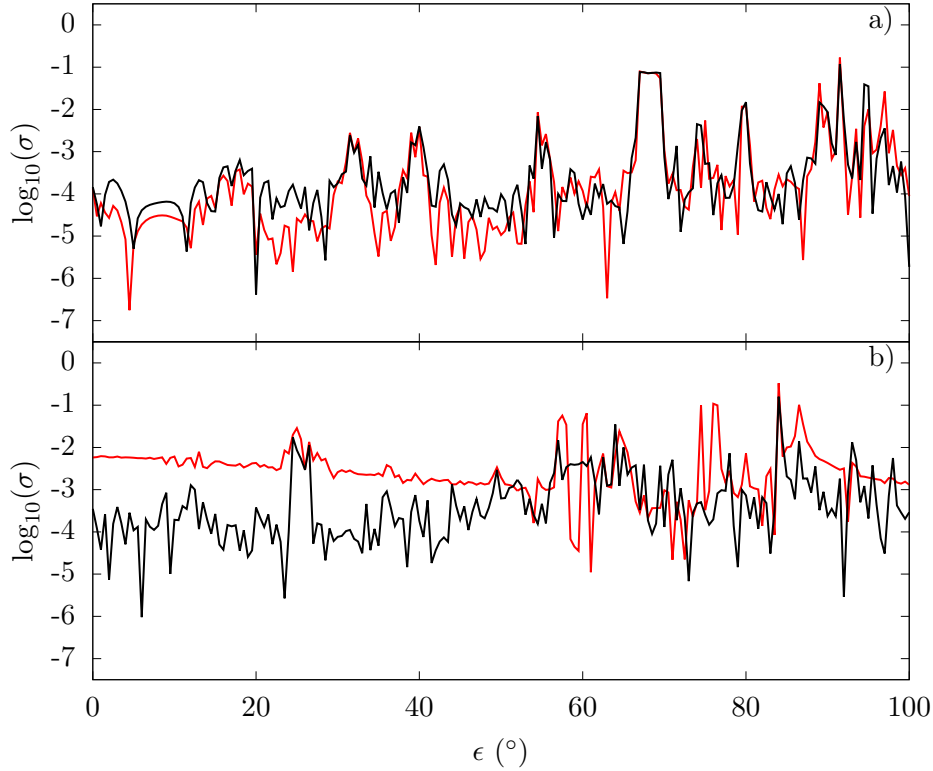


FIGURE 5.28 – Diffusion de la fréquence de précession de Cérès (a) et Vesta (b) en fonction de l'obliquité initiale obtenue pour la solution Ceres2017 en noir et pour la solution séculaire en rouge.

à courte période comme constaté sur les figures 3.13 et 3.14 et possède ainsi des conditions initiales orbitales différentes. Ainsi, même en prenant les mêmes conditions initiales pour l'axe de rotation, on obtient des obliquités initiales différentes avec  $\epsilon_{C_{sec}} = 4.0108^\circ$  et  $\epsilon_{V_{sec}} = 27.4244^\circ$  au lieu de  $\epsilon_C = 3.997^\circ$  et  $\epsilon_V = 27.46784^\circ$  (section 4.3). Les différences sur l'obliquité initiale de respectivement  $0.02^\circ$  pour Cérès et  $-0.05^\circ$  pour Vesta peuvent être responsables des oscillations croissantes observées. La différence initialement petite pourrait s'accroître progressivement avec le temps.

Cependant sur l'intervalle de temps  $[-20 : 0]$  Myr, ces différences restent inférieures à celles observées sur les figures 5.22 et 5.26 pour respectivement Cérès et Vesta, lorsque l'on fait varier les moments d'inertie polaire. En effet, on avait observé dans la section 5.3.3, que sur  $[-20 : 0]$  Myr les différences sur l'obliquité dues aux variations des moments d'inertie polaires étaient de l'ordre des amplitudes de l'obliquité.

L'intégration des équations séculaires permet ainsi de retrouver l'évolution générale de l'obliquité et l'amplitude de ses oscillations. De plus l'intégration séculaire est environ 1 million de fois plus rapide que l'intégration symplectique réalisée avec l'intégrateur LaX. On peut ainsi utiliser les équations séculaires de précession pour étudier la stabilité de l'axe de rotation de Cérès et Vesta, ce qui nécessite de réaliser des intégrations pour un grand nombre de conditions initiales.

#### 5.4.1.2 Propriétés de stabilité

Si les équations séculaires permettent bien d'obtenir l'évolution de l'obliquité, il reste cependant à vérifier que les propriétés de stabilité sont bien identiques entre les solutions Ceres2017 et séculaire. On intègre ainsi sur l'intervalle de temps  $[-40 : 0]$  Myr l'axe de rotation avec l'intégrateur LaX et avec les équations séculaires (2.148) pour des obliquités initiales variant de  $0$  à  $100^\circ$  avec un pas de  $0.5^\circ$ . La diffusion de la fréquence de précession est mesurée par la quantité  $\sigma$  donnée par l'équation (5.46), dont les variations sont représentées pour les deux solutions sur la figure 5.28 pour Cérès et Vesta.

Pour Cérès, les variations de  $\sigma$  sont similaires pour les deux solutions. Les régions de forte augmentation de  $\sigma$  sont les témoins de résonances séculaires avec des fréquences orbitales. Ces régions correspondent pour les deux solutions et peuvent être observées distinctement dans les deux cas. Pour

$\alpha$ ("/yr)	fréquence ("/yr)	identification	valeur approchée	
[0.52 : 1.10]	[-1.07 : -0.51]	$s_8$	-0.69"/yr	*
[1.77 : 2.00]	[-1.94 : -1.72]	$s_7 + (g_5 - g_7)$	-1.83"/yr	*
[2.19 : 2.60]	[-2.52 : -2.12]	$s_6 - (g_5 - g_6)$	-2.36"/yr	*
[2.76 : 3.49]	[-3.38 : -2.67]	$s_7$	-2.99"/yr	*
[4.21 : 4.54]	[-4.38 : -4.07]	$s_7 - (g_5 - g_7)$	-4.16"/yr	*
[5.14 : 5.34]	[-5.15 : -4.96]	$s_7 - (g_C + g_5 - 2g_6)$	-5.01"/yr	
[5.36 : 5.60]	[-5.39 : -5.16]	$s_C + (3g_C + g_5 - 4g_6)$	-5.22"/yr	*
[5.75 : 6.04]	[-5.81 : -5.54]	$s_1$	-5.61"/yr	*
[6.21 : 6.48]	[-6.23 : -5.97]	$s_C + 2(g_C - g_6) + (g_5 - g_7)$	-6.07"/yr	
[6.52 : 6.79]	[-6.52 : -6.27]	$s_C + (3g_C - 4g_6 + g_7)$	-6.39"/yr	*
[7.15 : 7.85]	[-7.53 : -6.86]	$s_C + 2(g_C - g_6)$	-7.24"/yr	*
[8.10 : 8.29]	[-7.94 : -7.76]	$s_C - (s_6 - s_7 - 2g_C - g_5 + 3g_6)$	-7.88"/yr	
[8.34 : 8.51]	[-8.16 : -7.99]	$s_C + (g_C - g_7)$	-8.09"/yr	*
[8.63 : 8.95]	[-8.56 : -8.27]	$s_C + 2(g_C - g_6) - (g_5 - g_7)$	-8.41"/yr	*
[9.48 : 10.19]	[-9.66 : -9.04]	$s_C + (g_C - g_5)$	-9.26"/yr	*
[10.48 : 10.75]	[-10.19 : -9.95]	$s_C - (g_5 - 2g_6 + g_7)$	-10.11"/yr	*
[10.93 : 11.12]	[-10.55 : -10.37]	$s_C + (g_C - 2g_5 + g_7)$	-10.43"/yr	*
[11.15 : 11.37]	[-10.78 : -10.58]	$s_C + (s_6 - s_7 - 3(g_5 - g_6))$	-10.65"/yr	
[11.51 : 11.66]	[-11.03 : -10.90]	$s_C - (g_C + g_5 - 4g_6 + 2g_7)$	-10.96"/yr	
[11.75 : 11.99]	[-11.40 : -11.11]	$s_C - 2(g_5 - g_6)$	-11.28"/yr	*

TABLEAU 5.19 – Régions de fortes variations de la quantité  $\sigma$  mesurant la diffusion de la fréquence de précession pour Cérès. Le signe \* indique les fréquences présentes dans les termes utilisés pour construire la solution séculaire (tableaux 3.2 et C.1).

Vesta, on observe une évolution différente et  $\sigma$  est plus élevé pour la solution séculaire que pour la solution Ceres2017. Les régions où on assiste à une forte augmentation de la diffusion correspondent cependant pour les deux solutions sur la figure 5.28.

La diffusion de la fréquence de précession permet ainsi de bien observer les résonances orbitales pour les deux solutions, qui présentent les mêmes propriétés de stabilité. Les équations séculaires peuvent ainsi bien être utilisées pour étudier les effets des résonances séculaires.

## 5.4.2 Étude des résonances proches

Nous avons vu dans le chapitre 4 qu'il existait une incertitude sur les constantes de précession de Cérès et Vesta à cause de l'indétermination du moment d'inertie polaire et qu'elles pourraient avoir évolué suite à des collisions avec des astéroïdes. Nous allons ainsi regarder la stabilité de l'axe de rotation pour différentes valeurs de la constante de précession  $\alpha$ , séparées de 0.01"/yr sur un intervalle donné. Les équations séculaires de la précession sont intégrées sur l'intervalle de temps [-40 : 0] Myr pour chaque valeur de  $\alpha$ . Pour chaque solution, on détermine la diffusion de la constante de précession par la quantité  $\sigma$ , ainsi que les obliquités maximale, moyenne et minimale.

### 5.4.2.1 Cérès

Nous faisons varier la constante de précession dans l'intervalle [0.01 : 12]"/yr pour Cérès. L'évolution de la quantité  $\sigma$  mesurant la diffusion de la fréquence de précession, et celle de l'obliquité sont sur la figure 5.29. Comme évoqué précédemment dans la section 5.4.1.2, les régions de forte augmentation de  $\sigma$  observées sur la figure 5.29 correspondent à des résonances séculaires de la fréquence de précession de l'axe de rotation avec des fréquences séculaires orbitales. Les principales régions observées sont recensées dans le tableau 5.19 et devraient correspondre aux fréquences présentes dans la décomposition fréquentielle de  $\zeta$  utilisée pour obtenir la solution séculaire dans la section 3.3. Plusieurs fréquences sont déjà présentes dans les tableaux 3.2 et C.1 : on observe en effet la présence des fréquences  $s_8$ ,  $s_7 + (g_5 - g_7)$ ,  $s_6 - (g_5 - g_6)$ ,  $s_7$ ,  $s_7 - (g_5 - g_7)$ ,  $s_C + (3g_C + g_5 - 4g_6)$ ,  $s_1$ ,  $s_C + (3g_C - 4g_6 + g_7)$ ,

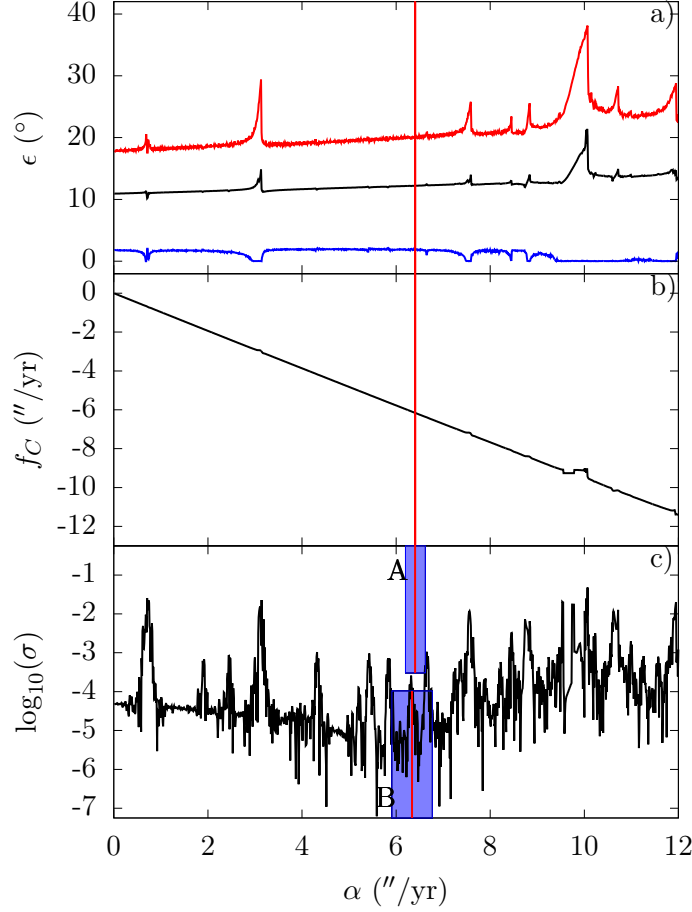


FIGURE 5.29 – Obliquité (a), fréquence de précession (b), diffusion de la fréquence de précession (c) pour Cérès sur  $[-40 : 0]$  Myr par rapport à la constante de précession. Pour (a), les obliquités maximales, moyennes et minimales sont respectivement en rouge, noir et bleu. Pour (c), le rectangle A représente les constantes de précession pour  $\bar{C} \in [0.380 : 0.406]$  avec une ligne rouge verticale pour  $\bar{C} = 0.393$ . Le rectangle B représente les constantes de précession dans l'intervalle  $[5.91 : 6.77]''/\text{yr}$  avec une ligne rouge verticale pour la valeur  $\alpha = 6.34''/\text{yr}$  calculée dans la section 4.1.5 pour une vitesse de rotation 7% plus élevée (Mao et McKinnon, 2018).

$$s_C + 2(g_C - g_6), s_C + (g_C - g_7), s_C + 2(g_C - g_6) - (g_5 - g_7), s_C + (g_C - g_5), s_C - (g_5 - 2g_6 + g_7), s_C + (g_C - 2g_5 + g_7), s_C - 2(g_5 - g_6).$$

Cependant cinq régions ne correspondent pas à des fréquences présentes dans les termes utilisés pour la solution séculaire. Elles peuvent correspondre à des fréquences apparues dans l'équation séculaire (2.148) lors du calcul des quantités orbitales  $\mathbf{n}$ , la normale à l'orbite et  $e$  l'excentricité, calculées à partir de la solution séculaire orbitale de la section 3.3. On réalise ainsi l'analyse en fréquence des quantités calculées à partir de  $\zeta = \sin(i/2) \exp(i\Omega)$ , notamment les quantités  $n_x + in_y$  et  $(n_x + in_y)/(1 - e^2)^{3/2}$ , où  $n_x$  et  $n_y$  correspondent aux coordonnées de la composante de  $\mathbf{n}$  parallèle au plan invariant. Les quatre mille premiers termes de l'analyse en fréquence de  $n_x + in_y$  ne présentent aucun terme dans les cinq intervalles de fréquence non encore identifiés dans le tableau 5.19. Cependant on observe dans les quatre mille premiers termes de l'analyse en fréquence de  $(n_x + in_y)/(1 - e^2)^{3/2}$  des fréquences comprises dans les cinq intervalles, que nous avons indiquées dans le tableau 5.19, à savoir  $s_7 - (g_C + g_5 - 2g_6)$ ,  $s_C + 2(g_C - g_6) + (g_5 - g_7)$ ,  $s_C - (s_6 - s_7 - 2g_C - g_5 + 3g_6)$ ,  $s_C + (s_6 - s_7 - 3(g_5 - g_6))$ ,  $s_C - (g_C + g_5 - 4g_6 + 2g_7)$ . La présence de ces fréquences est ainsi due aux variations de l'excentricité, qui sont responsables de la présence de nouvelles résonances.

Dans l'intervalle d'incertitude représenté sur la figure 5.29, on observe ainsi l'apparition de la résonance avec la fréquence  $s_C + 2(g_C - g_6) + (g_5 - g_7) \approx -6.07''/\text{yr}$  due aux variations de l'excentricité. Ainsi Cérès peut être en résonance avec cette fréquence, dont l'effet est cependant très limité. Comme on peut le constater sur la figure 5.29, on n'observe aucune variation significative de l'obliquité pour

$\alpha$ ("/yr)	fréquence ("/yr)	identification	valeur approchée	
[10.71 : 11.07]	[-9.24 : -8.95]		-9.09"/yr	
[13.16 : 13.45]	[-11.16 : -10.93]			
[13.84 : 14.18]	[-11.74 : -11.47]	$s_7 - (g_V - g_6)$	-11.65"/yr	
[14.89 : 16.48]	[-13.54 : -12.30]	$2s_6 - s_V$	-13.09"/yr	*
[17.36 : 18.18]	[-14.82 : -14.22]	$s_V + (g_6 - g_7)$	-14.46"/yr	
[18.77 : 19.67]	[-16.02 : -15.25]	$s_V - (g_5 - g_6)$	-15.62"/yr	*
[20.12 : 21.98]	[-18.12 : -16.34]		-17.74"/yr	*

TABLEAU 5.20 – Régions de fortes variations de la quantité  $\sigma$  mesurant la diffusion de la fréquence de précession pour Vesta. Le signe \* indique les fréquences présentes dans les termes utilisés pour construire la solution séculaire (tableaux 3.3 et C.2).

cette résonance. À proximité de l'intervalle d'incertitude, on observe une petite diminution de l'obliquité minimale jusqu'à  $1^\circ$  due à la résonance avec la fréquence  $s_C + (3g_C - 4g_6 + g_7)$ .

On observe d'autres résonances avec des effets nettement plus importants mais situées cependant en dehors de l'intervalle d'incertitude pour la constante de précession de Cérès. Par exemple, la résonance avec la fréquence  $s_C + (g_C - g_5)$  est responsable de variations importantes de l'obliquité entre  $0$  et  $39^\circ$ . La résonance avec la fréquence de précession du nœud ascendant d'Uranus crée des variations de l'amplitude entre  $0$  et  $30^\circ$ . La résonance avec la fréquence  $s + 2(g_C - g_6)$  est une résonance importante plus proche de Cérès et provoque des variations de l'obliquité entre  $0$  et  $26^\circ$ . Cependant la constante de précession étant actuellement de  $\alpha = 6.40 \pm 0.12$ "/yr, l'intervalle d'incertitude ne permet pas d'envisager une résonance avec cette fréquence, car la constante de précession devrait être entre  $7.15$ "/yr et  $7.85$ "/yr pour que l'axe de rotation de Cérès entre en résonance.

#### 5.4.2.2 Cérès primitif

Sur la figure 5.29, on peut observer la diffusion de la fréquence de précession pour des constantes de précession calculées avec un taux de rotation 7% supérieur à l'actuel (Mao et McKinnon, 2018), comme évoqué dans la section 4.1.5. Ainsi si Cérès primitif était en équilibre hydrostatique comme supposé par Mao et McKinnon (2018), alors il pourrait être en résonance avec les fréquences  $s_1$ ,  $s_C + 2(g_C - g_6) + (g_5 - g_7)$  et  $s_C + (3g_C - 4g_6 + g_7)$ . Ces résonances ont des effets très modestes sur l'obliquité sur la figure 5.29. Le phénomène responsable de la diminution de la vitesse de rotation n'aurait ainsi pas changé significativement l'intervalle de variations de l'obliquité.

Si Cérès était en équilibre hydrostatique dans le passé, elle aurait présenté alors un moment d'inertie polaire de  $\bar{C} = 0.371 \pm 0.009$  pour un vitesse de rotation 7% plus élevée (Mao et McKinnon, 2018). Dans le cas où la vitesse de rotation de Cérès aurait diminué, sans changements de la structure interne et de la forme extérieure comme supposé par Mao et McKinnon (2018), Cérès aurait actuellement un moment d'inertie polaire de  $\bar{C} = 0.371 \pm 0.009$  pour sa vitesse de rotation actuelle. D'après la section 4.1.5, Cérès aurait alors une constante de précession dans l'intervalle  $[6.58 : 6.98]$ "/yr et pourrait être en résonance avec la fréquence  $s_C + (3g_C - 4g_6 + g_7)$  d'après le tableau 5.19. Cependant, cela n'engendrerait pas de changements significatifs de l'intervalle de variations de l'obliquité d'après la figure 5.29.

#### 5.4.2.3 Vesta

Pour Vesta on a fait varier la constante de précession  $\alpha$  sur l'intervalle  $[10 : 22]$ "/yr. Les évolutions de la diffusion de la fréquence de précession et de l'obliquité en fonction de  $\alpha$  sont représentées sur la figure 5.30. Les régions de forte augmentation de la diffusion ont été répertoriées dans le tableau 5.20.

Trois régions correspondent à des résonances avec des fréquences présentes dans les termes utilisés pour obtenir la solution séculaire à la section 3.3 et présents dans les tableaux 3.3 et C.2. Il s'agit des fréquences  $2s_6 - s_V$ ,  $s_V - (g_5 - g_6)$  et  $-17.74$ "/yr. De même que pour Cérès, nous allons essayer d'identifier les autres résonances en réalisant une analyse en fréquence des quantités  $n_x + in_y$  et  $(n_x + in_y)/(1 - e^2)^{3/2}$  présentes dans l'équation séculaire (2.148) et calculées à partir de la solution orbitale séculaire. Les quatre mille premiers termes de l'analyse en fréquence de  $n_x + in_y$  ne comportent pas les

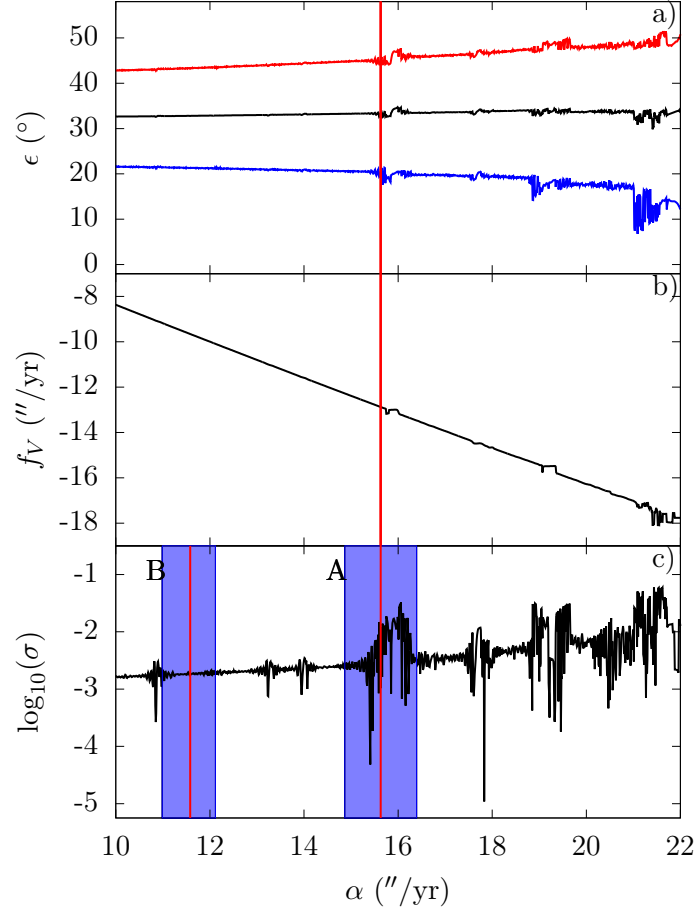


FIGURE 5.30 – Obliquité (a), fréquence de précession (b), diffusion de la fréquence de précession (c) pour Vesta sur  $[-40 : 0]$  Myr par rapport à la constante de précession. Pour (a), les obliquités maximales, moyennes et minimales sont respectivement en rouge, noir et bleu. Pour (c), le rectangle A représente les constantes de précession pour  $\bar{C} \in [0.390 : 0.430]$  avec une ligne rouge verticale pour  $\bar{C} = 0.409$  et le rectangle B la même chose mais avant les deux impacts géants.

fréquences recherchées, cependant dans ceux de l’analyse en fréquence de  $(n_x + in_y)/(1 - e^2)^{3/2}$ , on relève les fréquences  $-9.09''/\text{yr}$ ,  $s_7 - (g_V - g_6)$ ,  $s_V + (g_6 - g_7)$ , qui sont incluses dans les intervalles de fréquence recensés dans le tableau 5.20. Aucune fréquence n’a été observée dans l’intervalle  $[-11.16 : -10.93]$  et la fréquence de cette résonance n’a pu ainsi être identifiée. De même que pour Cérès, les variations de l’excentricité sont responsables de l’apparition de résonances séculaires entre les mouvements orbitaux et de rotation.

Quatre résonances ont des effets significatifs sur l’obliquité. La première d’entre elles est la résonance avec la fréquence  $-17.74''/\text{yr}$ . À l’intérieur de cette dernière, l’obliquité varie entre 6 et  $52^\circ$ . La résonance avec la fréquence  $2s_6 - s_V$  est comprise dans l’intervalle d’incertitude de la constante de précession. On observe alors des variations de l’obliquité entre 17 et  $48^\circ$ . Ainsi la baisse de l’obliquité minimale observée dans la section 5.3.3 lorsque le moment d’inertie polaire vérifiait  $\bar{C} = 0.406$  était due à la présence de la résonance avec la fréquence  $2s_6 - s_V$ . La troisième résonance a lieu avec la fréquence  $s_V - (g_5 - g_6)$  et conduit à des oscillations de l’obliquité entre 14 et  $50^\circ$ . Enfin la quatrième résonance avec la fréquence  $s_V + (g_6 - g_7)$  présente des effets très modestes sur les variations de l’obliquité.

#### 5.4.2.4 Vesta primitif

Sur la figure 5.30, on peut observer la diffusion de la fréquence de précession pour des constantes de rotation calculées à partir de la période de rotation primitive déterminée par Fu *et al.* (2014), c’est-à-dire avant les deux impacts subis par Vesta, et des paramètres physiques discutés dans la section 4.2.5. Les deux impacts auraient rapproché Vesta de la résonance avec la fréquence  $2s_6 - s_V$ . Vesta aurait alors traversé deux petites résonances. De plus, les deux impacts auraient aussi légèrement augmenté

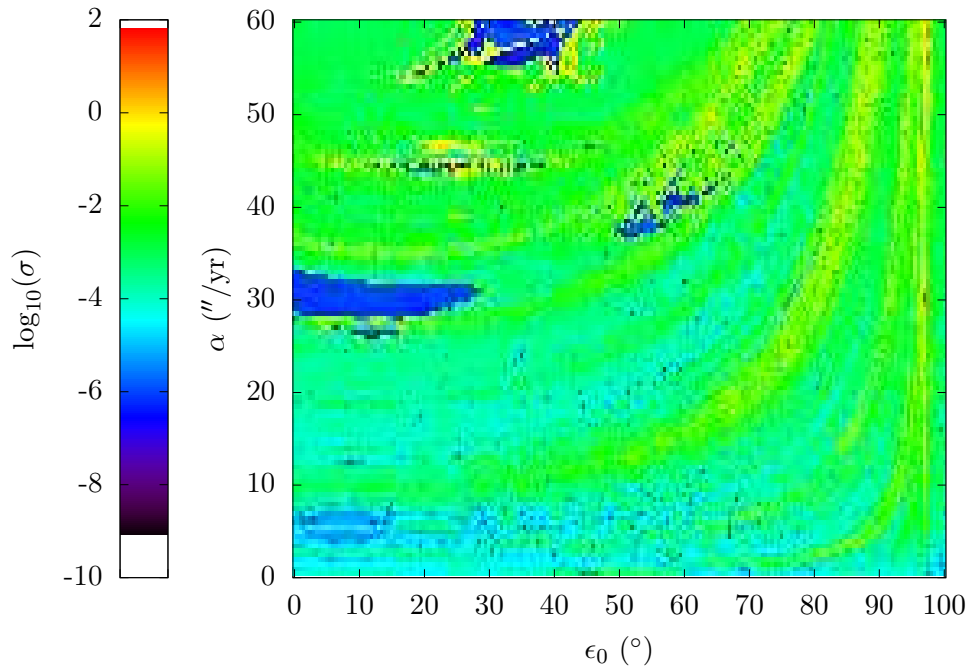


FIGURE 5.31 – Stabilité de l’axe de rotation pour Cérès calculée en prenant directement dans l’analyse en fréquence comme fréquence de précession la fréquence de plus grande amplitude.

l’amplitude des oscillations de l’obliquité.

### 5.4.3 Cartes de stabilité de l’axe de rotation

Dans cette section, nous allons réaliser une carte de stabilité de l’axe de rotation de Cérès et Vesta, comme cela a déjà été réalisé par [Laskar et Robutel \(1993\)](#) pour les planètes du système solaire. Ces cartes consistent à représenter la diffusion de la fréquence de précession  $\sigma$  en fonction de l’obliquité et de la constante de précession. Les régions avec une faible diffusion correspondent à des régions stables alors que celles avec une forte diffusion sont instables.

On intègre l’axe de rotation avec les équations séculaires sur l’intervalle de temps  $[-40 : 0]$  Myr pour une grille de 24120 points pour une obliquité initiale allant de  $0$  à  $100^\circ$  avec un pas de  $0.5^\circ$  et pour une constante de précession variant de  $0$  à  $60''/\text{yr}$  avec un pas de  $0.5''/\text{yr}$ . Un tel domaine de paramètres recouvrent très largement les incertitudes sur les conditions initiales et l’évolution possible des constantes de précession suite aux impacts. Ainsi seule une petite partie de cet ensemble a pu être traversée par Cérès et Vesta au cours de leur évolution. Cependant nous considérons ici un ensemble plus large afin d’observer l’effet de l’ensemble des résonances sur l’évolution de l’obliquité et de connaître la taille des régions stables ou instables, où Cérès et Vesta se trouvent. De plus en considérant pour une orbite donnée l’ensemble des paramètres et conditions initiales de rotation possibles, on peut savoir si les situations actuelles sont représentatives de l’ensemble de la dynamique possible. En outre, il sera alors possible de comparer le cas de Cérès et Vesta à celui des planètes internes traité par [Laskar et Robutel \(1993\)](#).

#### 5.4.3.1 Méthode pour le calcul de la diffusion

La diffusion de la fréquence de précession est estimée par la quantité  $\log_{10}(\sigma)$ . La fréquence de précession correspond généralement dans l’analyse en fréquence à la fréquence présentant la plus grande amplitude. Cependant, pour une résonance importante, la fréquence de plus grande amplitude peut correspondre alors à la fréquence de résonance. Cette dernière étant une fréquence orbitale, elle varie peu et la diffusion calculée est alors bien inférieure à la diffusion réelle de la fréquence de précession. La région analysée paraît alors bien plus stable qu’elle ne l’est en réalité. On peut observer ce phénomène sur la figure 5.31 pour Cérès. Pour déterminer la fréquence de précession, on considérera la fréquence



de plus grande amplitude différente à plus de  $5 \times 10^{-3}''/\text{yr}$  des fréquences  $s$  et  $s_6$ , correspondant aux deux fréquences présentant les plus importantes résonances.

Pour calculer  $\sigma$ , il est nécessaire de déterminer par analyse en fréquence les fréquences de précession  $f_1$  et  $f_2$  sur les intervalles respectifs  $[-20 : 0]$  Myr et  $[-40 : -20]$  Myr. Comme les fréquences orbitales séculaires peuvent évoluer sur de telles périodes de temps (e.g. [Laskar, 1990](#)), on comparera ainsi  $f_1$  aux fréquences orbitales  $s$  et  $s_6$  déterminées par analyse en fréquence sur  $[-20 : 0]$  Myr et  $f_2$  à celles sur  $[-40 : -20]$  Myr. On pourra comparer à titre d'exemple pour Cérès la diffusion obtenue de cette façon sur la figure 5.32 à celle obtenue précédemment sur la figure 5.31, où l'on prend pour fréquence de précession la fréquence de plus grande amplitude.

#### 5.4.3.2 Cérès

Sur la figure 5.32 sont représentées pour Cérès, la diffusion de la fréquence de précession, l'amplitude de l'obliquité et la fréquence de précession déterminée par analyse en fréquence sur  $[-20 : 0]$  Myr en fonction de la constante de précession et de l'obliquité initiale. L'amplitude de l'obliquité correspond à la différence entre le maximum et le minimum de l'obliquité déterminés sur  $[-40 : 0]$  Myr. La fréquence de précession augmente avec  $\cos \epsilon$  conformément à l'équation (2.160). Cérès à l'époque J2000 est indiqué par un cercle blanc. Nous pouvons ainsi observer que Cérès se situe dans une région stable pour l'axe de rotation, éloignée des régions les plus chaotiques, qui correspondent principalement aux résonances avec les fréquences  $s_C$ ,  $s_6$  et  $s + (g - g_6)$ .

Bien que la fréquence de précession de Cérès  $f_C = -6.1588''/\text{yr}$  (tableau 5.17) soit proche des fréquences de précession du nœud ascendant des planètes internes, notamment Mercure  $s_1 = -5.61''/\text{yr}$  et Vénus  $s_2 = -7.06''/\text{yr}$  (tableau 3.1), l'effet de ces résonances est très limité sur la figure 5.32 et Cérès se situe dans une région stable. Le mouvement orbital de Cérès est presque entièrement déterminé par les perturbations planétaires de Jupiter et Saturne, comme on a pu le voir dans la section 3.2, et les perturbations des planètes internes sont beaucoup plus faibles. L'amplitude des termes des fréquences des planètes internes étant faibles dans le mouvement orbital, les résonances avec les fréquences des planètes internes sont étroites et leurs effets restent modestes. Ainsi elles ne se recouvrent pas contrairement au cas des planètes internes ([Laskar et Robutel, 1993](#)).

Les résonances avec les fréquences propres d'Uranus et Neptune  $s_7$  et  $s_8$  présentent des effets bien plus importants comme observé dans la section 5.4.2.1 que celles avec les planètes internes. Ces résonances peuvent augmenter l'amplitude de l'obliquité de plusieurs degrés. Avec la constante de précession actuelle, la résonance avec  $s_7$  peut affecter l'axe de rotation seulement si Cérès présente une obliquité initiale d'environ  $70^\circ$  et la résonance avec  $s_8$  seulement si l'obliquité initiale est d'environ  $90^\circ$ . La résonance avec la fréquence  $s_6$  associée à Saturne présente des variations de l'obliquité importantes mais ne correspond pas à la région la plus instable excepté lors de son recouvrement avec la résonance liée à la fréquence  $s + (g - g_6)$ . Comme noté par [Laskar et Robutel \(1993\)](#) pour le cas des planètes, la résonance avec la fréquence  $s_6$  est isolée.

La résonance importante la plus proche est celle avec  $s + (g - g_5) \approx -9.24''/\text{yr}$ . Pour une obliquité initiale entre  $0$  et  $10^\circ$ , l'amplitude de l'obliquité passe environ de  $20$  à  $40^\circ$  à l'intérieur de la résonance, conformément aux résultats de la section 5.4.2.1. Cependant cette résonance a une largeur limitée et n'a pas d'influence sur Cérès.

#### 5.4.3.3 Vesta

Sur la figure 5.32 sont représentées pour Vesta la diffusion de la fréquence de précession, l'amplitude de l'obliquité et la fréquence de précession déterminée par analyse en fréquence sur  $[-20 : 0]$  Myr en fonction de la constante de précession et de l'obliquité initiale. Vesta à l'époque J2000 est représenté par un cercle blanc. Vesta se trouve ainsi à la frontière d'une région relativement stable, loin de la région chaotique créée par les résonances avec les fréquences  $s_V$  et  $s_6$ , et est proche de la résonance avec la fréquence  $2s_6 - s_V$ .

La résonance la plus importante à proximité est celle avec la fréquence  $-17.74''/\text{yr}$ , qui a un effet significatif sur l'obliquité comme étudié à la section 5.4.2.3. À l'intérieur de cette résonance, l'amplitude

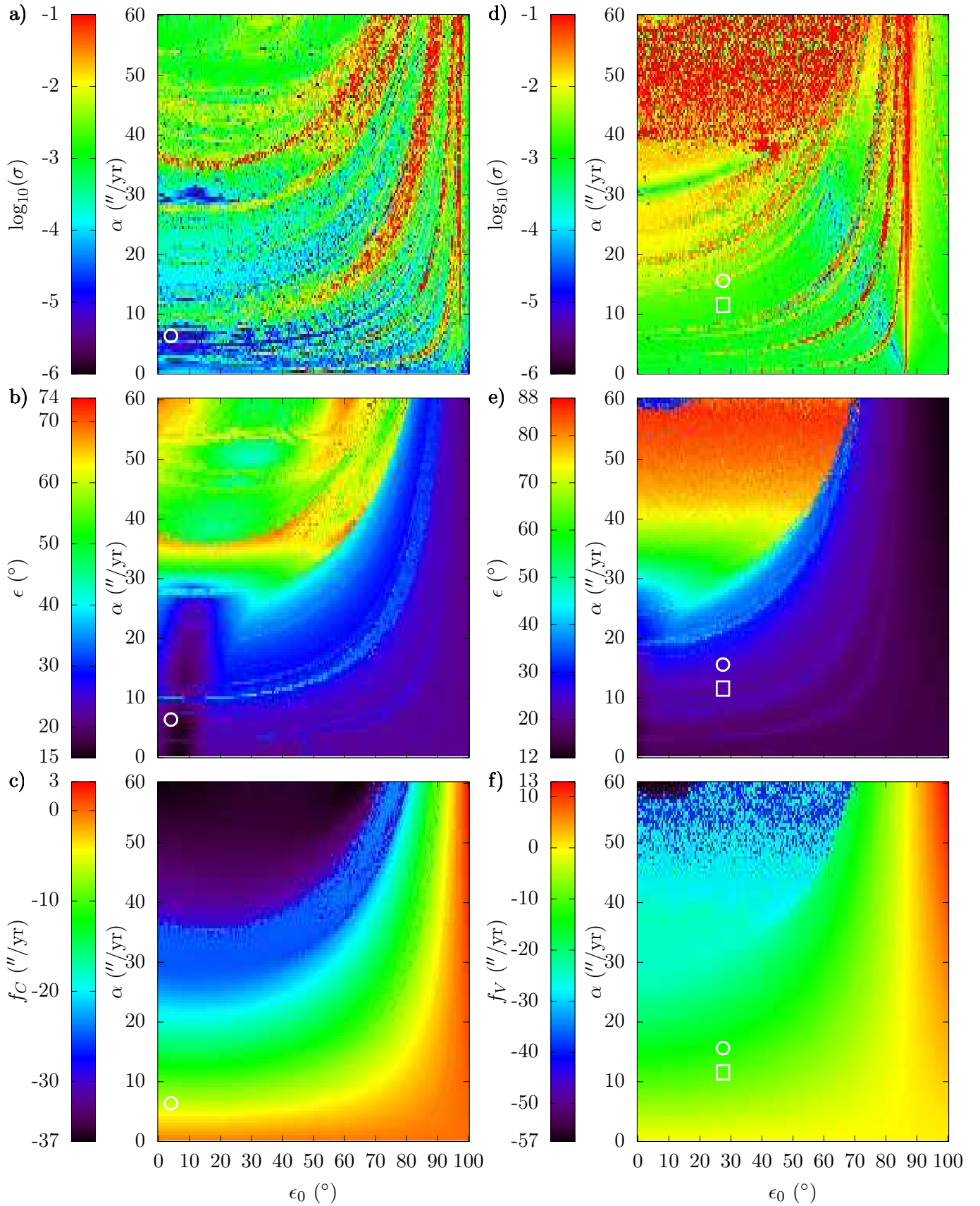


FIGURE 5.32 – Stabilité de l’axe de rotation (a,d), amplitude de l’obliquité (b,e) et fréquence de précession sur  $[-20 : 0]$  Myr (c,f) pour respectivement Cérès et Vesta en fonction de l’obliquité initiale  $\epsilon$  et de la constante de précession  $\alpha$ . Les cercles blancs représentent Cérès et Vesta pour l’époque J2000. L’échelle de couleur pour la diffusion est représentée sur  $[-6 : -1]$ , bien que  $\log_{10}(\sigma)$  puisse prendre des valeurs en dehors de cet intervalle. Pour (d,e,f), les carrés blancs représentent Vesta avant les deux impacts géants.

de l'obliquité augmente environ de 30 à 40°. À cause de sa largeur limitée d'environ 1"/yr, elle ne présente pas d'influence pour Vesta à l'époque J2000.

On observe que les résonances avec les fréquences d'Uranus et de Neptune présentent des effets moins importants que dans le cas de Cérès. La résonance avec la fréquence  $s_7$  augmente seulement l'amplitude de l'obliquité de quelques degrés. Les effets de la résonance avec la fréquence  $s_V + (g_V - g_5) \approx -6.97''/\text{yr}$  sur l'obliquité sont significatifs comme pour Cérès. L'amplitude de l'obliquité dans cette résonance augmente environ de 20 à 30°

Comme Cérès, Vesta présente une fréquence de précession  $f_V = -12.882''/\text{yr}$  (tableau 5.18) proche des fréquences propres des planètes internes, notamment la Terre  $s_3 = -18.848''/\text{yr}$  et Mars  $s_4 = -17.751''/\text{yr}$  (tableau 3.1). Cependant, leurs perturbations sur l'orbite de Vesta sont trop faibles pour avoir un effet significatif sur la stabilité de l'axe de rotation.

Vesta avant les deux impacts géants est représenté sur la figure 5.32 par un carré blanc à partir des paramètres discutés dans la section 4.2.5. Vesta aurait été ainsi dans une région plus stable et les deux impacts auraient alors rapproché Vesta de la résonance avec la fréquence  $2s_6 - s_V$ .

## Chapitre 6

# Évolution de l'insolation et contraintes sur la distribution de glace de Cérès

Le climat et la température à la surface d'un corps céleste sont contrôlés par deux éléments : le forçage astronomique et la réponse atmosphérique. Le forçage astronomique module la puissance reçue par les surfaces éclairées par le Soleil et permet de calculer l'insolation, puissance émise par le Soleil reçue par unité de surface au sommet de l'atmosphère du corps céleste. La température au sommet de l'atmosphère est entièrement déterminée par le forçage astronomique à condition de connaître les propriétés thermiques de la surface éclairée.

La température au sol va dépendre de la réponse atmosphérique. La présence de gaz à effet de serre va modifier la puissance reçue à la surface et les courants atmosphériques vont redistribuer cette énergie à la surface du corps. La température au sol dépendra ainsi en plus du forçage astronomique de la masse, de la composition de l'atmosphère ainsi que de la circulation atmosphérique.

Pour un corps sans atmosphère, comme c'est le cas pour Cérès et Vesta, la température à la surface dépend seulement de l'insolation et des propriétés de la surface. Le forçage astronomique permet ainsi de connaître la température à la surface pour un corps sans atmosphère dont les propriétés thermiques de sa surface sont connues.

Dans ce chapitre, à partir des mouvements orbital et de rotation de Cérès, nous allons calculer l'insolation à la surface et déterminer les températures résultantes à l'aide d'un modèle simplifié. Pour Cérès, cela va permettre de donner des contraintes sur la distribution de glace à sa surface.

### 6.1 Calcul de l'insolation

L'insolation instantanée en un point de la surface dépend de la hauteur du Soleil par rapport à l'horizon. Ainsi pour un lieu donné, il y aura en général de fortes variations de l'insolation entre la journée où l'insolation sera maximale au midi du lieu considéré et la nuit, où en raison de l'absence d'éclairement l'insolation sera nulle. On réalise ainsi la moyenne de l'insolation reçue au cours d'une journée, appelée insolation journalière.

De même, l'insolation journalière varie au cours de l'année, si l'obliquité est non nulle et si l'orbite n'est pas circulaire. Par exemple, pour les régions polaires situées au-delà des cercles polaires définis par une colatitude nord ou sud égale à l'obliquité, l'insolation est nulle pour au moins une journée dans l'année. Il convient ainsi de réaliser une moyenne de l'insolation sur le mois ou l'année pour obtenir les insolutions mensuelle et annuelle.

Pour réaliser le bilan global énergétique du corps céleste, il convient cette fois de réaliser une moyenne de l'insolation sur l'ensemble du corps.

Ainsi plusieurs quantités d'insolation sont définies (journalière, mensuelle, annuelle,...) (e.g. Ward, 1974, Laskar *et al.*, 1993b) et chacune permet de donner des renseignements différents sur le climat du corps considéré. Pour les définir, nous allons considérer un point  $P$  situé à la surface d'un corps  $\mathcal{B}$  du système solaire et repéré par le vecteur unitaire  $\mathbf{u}$  par rapport au centre  $O$  du corps  $\mathcal{B}$ . La direction du Soleil par rapport à  $O$  est repérée par le vecteur unitaire  $\mathbf{u}_S$ . On définit les repères  $(Oxyz)$  et  $(Oxy'z')$ .  $(xy)$  est le plan équatorial de  $\mathcal{B}$  et  $(xy')$  le plan contenant la trajectoire apparente du Soleil vue du

corps. L'axe ( $Ox$ ) correspond ainsi à la ligne des équinoxes pour le corps  $\mathcal{B}$ . ( $Oxyz$ ) est ainsi un repère équatorial dans lequel le corps  $\mathcal{B}$  ne présente qu'un mouvement de rotation propre.

### 6.1.1 Insolation instantanée à une latitude donnée

L'insolation instantanée en ce point  $P$  est définie par (e.g. Ward, 1974)

$$\begin{aligned} I &= S_0 \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_S}{r^2} & \text{si } \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_S > 0 \\ I &= 0 & \text{si } \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_S \leq 0, \end{aligned} \quad (6.1)$$

où  $r$  est la distance entre le corps  $\mathcal{B}$  et le Soleil et  $S_0$  est appelée constante solaire et correspond à la puissance émise par le Soleil reçue par mètre carré perpendiculairement à la direction du Soleil à une unité astronomique. Une évaluation de cette constante a notamment été faite par Kopp et Lean (2011), qui l'ont estimée à l'époque actuelle à

$$S_0 = 1360.8 \pm 0.5 \text{ W m}^{-2}. \quad (6.2)$$

Nous utiliserons cette valeur dans les calculs qui vont suivre.

### 6.1.2 Insolation journalière à une latitude donnée

Pour obtenir l'insolation journalière en fonction de la latitude, il faut intégrer l'insolation instantanée sur une rotation du corps comme cela est décrit dans (e.g. Ward, 1974, Laskar *et al.*, 1993b). Nous allons ici rappeler le calcul réalisé dans Laskar *et al.* (1993b).  $P$  est repéré dans le repère équatorial ( $Oxyz$ ) par sa latitude  $l$  et sa longitude  $L$  et ainsi  $\mathbf{u} = (\cos l \cos L, \cos l \sin L, \sin l)$ . Dans ( $Oxyz$ ), la position du Soleil est repérée par sa latitude  $l_S$  et sa longitude  $L_S$  et ainsi  $\mathbf{u}_S = (\cos l_S \cos L_S, \cos l_S \sin L_S, \sin l_S)$ .  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_S$  vérifie alors

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_S = \sin l \sin l_S + \cos l \cos l_S \cos(L - L_S). \quad (6.3)$$

Ainsi  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_S \geq 0$  est équivalent à

$$\cos(L - L_S) \geq -\tan l \tan l_S. \quad (6.4)$$

Pour obtenir l'insolation à un point de latitude donnée  $l$ , nous devons réaliser une moyenne sur la longitude  $L$ , qui varie ainsi de 0 à  $2\pi$ . Il existe plusieurs situations en fonction de la valeur de  $-\tan l \tan l_S$ . Si  $-\tan l \tan l_S < -1$ , on vérifie tout au long de la journée  $\cos(L - L_S) \geq -\tan l \tan l_S$  et  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_S > 0$  est toujours vérifié. Ainsi au cours d'une journée, le Soleil est toujours visible au point considéré et il ne se couche ainsi pas. Si  $-\tan l \tan l_S > 1$ , alors on ne vérifie jamais au cours de la journée  $\cos(L - L_S) \geq -\tan l \tan l_S$  et  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_S < 0$  est toujours vérifié. Au cours d'une journée, le Soleil n'est alors pas observable au point considéré et ne se lève ainsi pas. Enfin si  $1 \geq -\tan l \tan l_S \geq -1$ ,  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_S$  change de signe au cours de la journée et il existe ainsi au point considéré un lever et un coucher de Soleil. Laskar *et al.* (1993b) utilisent l'angle horaire  $H_0$  de coucher et de lever du Soleil, qui est défini sur  $[0 : \pi]$  par

$$\cos H_0 = -\tan l \tan l_S. \quad (6.5)$$

Lorsque  $\cos H_0 = \cos(L - L_S)$ , on a un lever ou un coucher de Soleil. Ainsi  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_S \geq 0$  est équivalent à

$$-H_0 + L_S \leq L \leq H_0 + L_S. \quad (6.6)$$

Lorsque  $L = -H_0 + L_S$ , le Soleil se lève et lorsque  $L = H_0 + L_S$ , il se couche.

En fonction de la valeur de  $-\tan l \tan l_S$ , il existe ainsi trois cas pour l'expression de l'insolation journalière (Laskar *et al.*, 1993b)

$$\begin{aligned} I_j &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_0 \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_S}{r^2} dL & \text{si } -\tan l \tan l_S < -1, \\ I_j &= \frac{1}{2\pi} \int_{L_S - H_0}^{L_S + H_0} S_0 \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_S}{r^2} dL & \text{si } -1 \leq -\tan l \tan l_S \leq 1, \\ I_j &= 0 & \text{si } -\tan l \tan l_S > 1, \end{aligned} \quad (6.7)$$

ce qui donne avec  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_S = \sin l \sin l_S + \cos l \cos l_S \cos(L - L_S)$  (Laskar *et al.*, 1993b)

$$\begin{aligned} I_j &= \frac{S_0}{r^2} \sin l \sin l_S && \text{si } -\tan l \tan l_S < -1, \\ I_j &= \frac{S_0}{\pi r^2} (H_0 \sin l \sin l_S + \cos l \cos l_S \sin H_0) && \text{si } -1 \leq -\tan l \tan l_S \leq 1, \\ I_j &= 0 && \text{si } -\tan l \tan l_S > 1. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Il faut exprimer la latitude du Soleil  $l_S$  par rapport à l'équateur en fonction de la position du corps sur son orbite. La trigonométrie sphérique donne  $\sin l_S = \sin \epsilon \sin w_d$  avec  $\epsilon$  l'obliquité et  $w_d$  l'anomalie vraie repérée depuis l'équinoxe de printemps pour l'hémisphère nord du corps considéré (Laskar *et al.*, 1993b). Comme  $l_S \in [-\pi/2 : \pi/2]$ ,  $l_S$  est ainsi entièrement déterminé par le calcul de son sinus. À partir de l'obliquité, on peut ainsi calculer la latitude du Soleil  $l_S$  pour une position du corps  $w_d$  sur son orbite. En particulier la position au solstice d'été pour l'hémisphère nord est donnée par  $w_d = \pi/2$  et celle pour le solstice d'hiver par  $w_d = 3\pi/2$ .

Si l'on souhaite déterminer l'insolation journalière en fonction du temps sur l'année, il faut procéder comme décrit dans Laskar *et al.* (1993b) en partant de la longitude moyenne  $\lambda_d$  par rapport à l'équinoxe de printemps, qui est proportionnelle au temps. L'anomalie moyenne  $M$  peut être calculée avec la relation  $\lambda_d = M + \omega^\bullet$ , où  $\omega^\bullet$  repère la position du périhélie par rapport à l'équinoxe de printemps de l'hémisphère nord. L'équation de Kepler  $E - e \sin E = M$  permet de déterminer l'anomalie excentrique  $E$ . À partir des relations  $\cos v = (\cos E - e)/(1 - e \cos E)$  et  $\sin v = \sqrt{1 - e^2} \sin E/(1 - e \cos E)$ , on peut en déduire l'anomalie vraie et ainsi la longitude vraie  $w_d$  par rapport à l'équinoxe de printemps dans l'hémisphère nord par la relation  $w_d = v + \omega^\bullet$ .

### 6.1.3 Insolation annuelle à une latitude donnée

Il est ensuite possible de calculer l'insolation annuelle en fonction de la latitude. Pour cela, il est nécessaire de réaliser une moyenne sur une période de révolution du corps autour du Soleil de l'insolation journalière donnée par l'expression (6.8). Cependant comme décrit dans Ward (1974), il est alors plus simple de repartir d'abord de l'expression de l'insolation instantanée (6.1) pour réaliser d'abord une moyenne sur le mouvement orbital puis une moyenne sur le mouvement de rotation propre. Ainsi l'insolation annuelle est donnée par

$$I_a = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} \int_0^T I dL dt = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} I dL dM \quad (6.9)$$

avec  $T$  la période de révolution du corps autour du Soleil et l'anomalie moyenne  $M = nt$  où  $n = 2\pi/T$  est le moyen mouvement.  $P$  est repéré dans le repère  $(Oxy'z')$  par sa colatitude  $\lambda$  et sa longitude  $\Lambda$  et ainsi  $\mathbf{u} = (\sin \lambda \cos \Lambda, \sin \lambda \sin \Lambda, \cos \lambda)$ . La direction du Soleil dans le repère  $(Oxy'z')$  est donnée par  $\mathbf{u}_S = (\cos(\omega + v), \sin(\omega + v), 0)$  avec  $\omega$  l'argument du périhélie et  $v$  l'anomalie vraie.  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_S$  vérifie alors (Ward, 1974)

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_S = \sin \lambda \cos(\omega + v - \Lambda). \quad (6.10)$$

$\lambda \in [0 : \pi]$  et donc  $\sin \lambda \geq 0$ . Ainsi  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_S \geq 0$  est équivalent à

$$-\frac{\pi}{2} + \Lambda - \omega \leq v \leq \frac{\pi}{2} + \Lambda - \omega. \quad (6.11)$$

Or la loi des aires donne  $r^2 dv = a^2 \sqrt{1 - e^2} dM$ . Ainsi

$$I_a = \frac{S_0}{4\pi^2 a^2 \sqrt{1 - e^2}} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2} + \Lambda - \omega}^{\frac{\pi}{2} + \Lambda - \omega} \sin \lambda \cos(\omega + v - \Lambda) dL dv, \quad (6.12)$$

d'où (Ward, 1974)

$$I_a = \frac{S_0}{2\pi^2 a^2 \sqrt{1 - e^2}} \int_0^{2\pi} \sin \lambda dL. \quad (6.13)$$

Dans le repère équatorial  $(Oxyz)$ , la normale à l'orbite  $\mathbf{n}$  est donnée par  $\mathbf{n} = (0, -\sin \epsilon, \cos \epsilon)$  avec  $\epsilon$  l'obliquité et  $\mathbf{u} = (\cos l \cos L, \cos l \sin L, \sin l)$ . Ainsi  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = -\cos l \sin \epsilon \sin L + \sin l \cos \epsilon$  (Ward, 1974).

Or  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = \cos \lambda$  et alors  $\cos \lambda = -\cos l \sin \epsilon \sin L + \sin l \cos \epsilon$ . Pour un point  $P$  de latitude  $l$ , l'insolation annuelle est ainsi donnée par (Ward, 1974)

$$I_a = \frac{S_0}{2\pi^2 a^2 \sqrt{1-e^2}} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - (\sin l \cos \epsilon - \cos l \sin \epsilon \sin L)^2} dL. \quad (6.14)$$

Cette intégrale doit être calculée numériquement. On peut remarquer qu'il s'agit d'une fonction paire de la latitude et qu'il existe ainsi une symétrie par rapport à l'équateur.

#### 6.1.4 Insolation journalière moyenne

Pour déterminer l'insolation journalière moyenne reçue par le corps  $\mathcal{B}$  de rayon  $R$ , il faut diviser la puissance solaire reçue  $S_0 \pi R^2 / r^2$  par la surface  $4\pi R^2$  du corps considéré sphérique (e.g. Laskar *et al.*, 1993b) et ainsi

$$I_{jm} = \frac{S_0}{4r^2}. \quad (6.15)$$

#### 6.1.5 Insolation annuelle moyenne

L'insolation annuelle moyenne est déterminée en réalisant une moyenne de l'insolation journalière moyenne sur une révolution du corps autour du Soleil (e.g. Laskar *et al.*, 1993b) et ainsi

$$I_{am} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{S_0}{4r^2} dM. \quad (6.16)$$

Or la loi des aires donne  $r^2 dv = a^2 \sqrt{1-e^2} dM$  et ainsi (e.g. Laskar *et al.*, 1993b)

$$I_{am} = \frac{S_0}{4a^2 \sqrt{1-e^2}}. \quad (6.17)$$

Ainsi si la puissance totale reçue par le corps est donnée par le demi-grand axe et l'excentricité, la répartition de cette puissance sur la sphère au cours de l'année est donnée par l'obliquité.

## 6.2 Calcul de la température

### 6.2.1 Détermination de la température à la surface

On considère un point à la surface du corps éclairé par le Soleil et repéré par le vecteur unitaire  $\mathbf{u}_r$ . Etant éclairé par le Soleil, il reçoit la puissance  $I$  correspondant à l'insolation. Une partie de cette puissance  $AI$  est réfléchiée par la surface vers l'espace,  $A$  étant l'albédo de la surface considérée. Une autre partie  $\epsilon_m \sigma T^4$  est réémise par la surface sous la forme de rayonnement de corps noir avec  $\epsilon_m$  l'émissivité et  $\sigma = 5.670367 \times 10^{-8} \text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$  la constante de Stefan-Boltzmann. Enfin une dernière partie  $k \nabla T \cdot \mathbf{u}_r$  est transmise par conduction vers l'intérieur du corps avec  $k$  la conductivité thermique du sol. Ainsi la température à la surface d'un corps sans atmosphère peut être calculée à partir de l'insolation avec l'équation (e.g. Schorghofer, 2008)

$$(1 - A)I = \epsilon_m \sigma T^4 + k \nabla T \cdot \mathbf{u}_r. \quad (6.18)$$

Pour obtenir la valeur de la température de la surface à l'équilibre, il faut connaître la valeur du gradient de température  $\nabla T$  à la surface du corps, ce qui nécessite de résoudre l'équation de la chaleur à l'intérieur du corps donnée par (e.g. Schorghofer, 2008)

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad (6.19)$$

avec  $\rho$  la densité et  $c$  la capacité thermique massique des matériaux. On peut définir l'inertie thermique  $I = \sqrt{k\rho c}$  (e.g. Schorghofer, 2008).

À cause de la rotation du corps sur lui-même et de sa révolution autour du Soleil, la température à la surface subit des fluctuations périodiques. La résolution de l'équation de la chaleur pour la matière située sous la surface, dans le cas d'un forçage périodique à la surface, donne une solution où les variations périodiques de la température décroissent exponentiellement avec la profondeur  $z$  selon le terme  $\exp(-z/\delta)$  avec l'épaisseur de peau  $\delta$  qui s'exprime selon (e.g. [Schorghofer, 2008](#))

$$\delta = \sqrt{\frac{2k}{\omega\rho c}} \quad (6.20)$$

avec  $\omega$  la pulsation des fluctuations. Ainsi pour des profondeurs situées au-delà de  $z = 5\delta$ , on peut considérer que les fluctuations de température à la surface n'influencent pas la température interne (e.g. [Schorghofer, 2008](#)). Ce phénomène s'appelle l'effet de peau thermique et existe notamment sur Terre. À chaque pulsation des fluctuations de la température à la surface, on peut ainsi associer une profondeur de peau, qui augmente ainsi avec la période. Ainsi comme réalisé par [Schorghofer \(2008\)](#), il faut résoudre numériquement l'équation de la chaleur de  $z = 0$  à  $z = 5\delta$  pour déterminer la température à la surface.

## 6.2.2 Modèles simplifiés

Au lieu de résoudre numériquement l'équation de la chaleur, on peut considérer deux modèles simplifiés de température, qui représentent deux cas extrêmes. Ils sont notamment comparés dans [Lebofsky et Spencer \(1989\)](#) et dans [Schorghofer \(2008\)](#).

### 6.2.2.1 Modèle de rotation rapide

Le modèle de rotation rapide ou modèle isotherme de latitude consiste à considérer que le corps présente une inertie thermique infinie ou qu'il est en rotation rapide, la température ne varie ainsi pas au cours de la journée entre le jour et la nuit et ne varie pas non plus au cours de l'année entre les saisons. Ainsi la température à la surface est constante pour une latitude donnée et ne dépend pas de la longitude. La température peut alors être déterminée à partir de l'insolation annuelle  $I_a$  donnée par l'équation (6.14) avec la relation

$$(1 - A)I_a = \epsilon_m \sigma T^4. \quad (6.21)$$

### 6.2.2.2 Modèle de non-rotation

Le modèle de non-rotation ou modèle thermique standard ([Morrison et Lebofsky, 1979](#), [Lebofsky et al., 1986](#)) fait l'hypothèse que le corps présente une inertie thermique nulle ou qu'il ne tourne pas sur lui-même. La surface est ainsi en équilibre thermique avec le rayonnement solaire de façon instantanée et sa température peut être déduite de l'insolation instantanée  $I$  donnée par l'équation (6.1) selon la relation

$$(1 - A)I = \epsilon_m \sigma T^4. \quad (6.22)$$

La température moyenne doit alors être déduite en réalisant une moyenne des températures ainsi obtenues sur le mouvement de révolution du corps.

### 6.2.2.3 Comparaison des deux modèles

[Schorghofer \(2008\)](#) compare les températures données pour les deux modèles pour un corps de la ceinture principale d'astéroïdes. Le modèle de rotation rapide correspond au cas extrême où les températures à la surface sont les plus élevées alors que le modèle de non-rotation correspond au cas extrême opposé où les températures seront les plus basses.

On note  $\langle \rangle_M$  la moyenne réalisée sur la longitude moyenne, c'est-à-dire sur le mouvement de révolution du corps sur son orbite. Le modèle de rotation rapide consiste à calculer la température annuelle selon l'expression  $((1 - A)/(\epsilon_m \sigma))^{1/4} \langle I \rangle_M^{1/4}$  alors que le modèle de non-rotation la calcule à partir de l'expression  $((1 - A)/(\epsilon_m \sigma))^{1/4} \langle I^{1/4} \rangle_M$ .



Comme les opérations  $\langle \rangle_M$  et  $^{1/4}$  ne commutent pas, les modèles donnent des températures différentes. À partir de l'inégalité  $\langle I^2 \rangle_M \geq \langle I \rangle_M^2$ , on obtient  $\langle I \rangle_M \geq \langle I^{1/2} \rangle_M^2 \geq \langle I^{1/4} \rangle_M^4$ . On en déduit  $\langle I \rangle_M^{1/4} \geq \langle I^{1/4} \rangle_M$  et ainsi le modèle de rotation rapide donne une température annuelle moyenne supérieure à celle donnée par le modèle de non-rotation (e.g. [Schorghofer, 2008](#)).

## 6.3 Stabilité de la glace sous la surface de Cérès

### 6.3.1 Conditions de stabilité de la glace à la surface

Le point triple de l'eau présente une pression de  $P_t = 611$  Pa et une température de  $T_t = 273.16$  K. Ainsi pour une pression inférieure à  $P_t$ , l'eau liquide est instable et la glace se sublime en vapeur d'eau et la vapeur d'eau se condense en glace sans passer par l'état liquide. On appelle pression de vapeur saturante  $P_S$  la pression de la vapeur d'eau en équilibre avec la glace. Cette pression d'équilibre  $P_S$  dépend de la température et est donnée par la formule (e.g. [Schorghofer, 2008](#))

$$\ln \left( \frac{P_S}{P_t} \right) = -\frac{\Delta H_S}{R} \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_t} \right) \quad (6.23)$$

avec  $\Delta H_S = 51.058$  MJ kg<sup>-1</sup> l'enthalpie de sublimation de l'eau à la température  $T_t$  et  $R$  la constante des gaz parfaits. Si la pression de la vapeur d'eau est supérieure à la pression d'équilibre  $P_S$ , la vapeur d'eau se condense en glace. À l'inverse, si la pression de la vapeur d'eau est inférieure à la pression d'équilibre  $P_S$ , la glace se sublime en vapeur d'eau. Ainsi, dans le vide, la pression de vapeur d'eau étant nulle, la glace est instable et se sublime jusqu'à se transformer entièrement en vapeur d'eau.

Ainsi la glace située à la surface d'un corps sans atmosphère est instable et se sublime. Cependant, cette sublimation n'est pas instantanée. Le taux de perte de masse de la glace dans le vide en unité de masse surfacique et par unité de temps dépend de la température selon ([Estermann, 1955](#))

$$\dot{\sigma} = P_S \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} \quad (6.24)$$

avec  $k_B$  la constante de Boltzmann et  $m$  la masse d'une molécule d'eau. [Watson et al. \(1961a,b\)](#) étudient la stabilité de la glace à la surface de la Lune et estiment que pour une température de 120 K le taux de perte de la glace est d'environ 8 m Gyr<sup>-1</sup>. La glace peut alors persister localement à la surface de la Lune, si la température n'excède pas 120 K, ce qui a lieu pour les régions, qui restent continuellement dans l'ombre, appelées pièges froids.

Les glaces à la surface d'un corps peuvent ainsi perdurer en l'absence d'atmosphère pendant plusieurs milliards d'années, si la température ne dépasse pas un seuil d'environ 120 K (e.g. [Schorghofer, 2008](#)), comme la sublimation de la glace se déroule alors en des proportions, qui permettent de conserver une partie de la glace appartenant à une couche de plusieurs mètres d'épaisseur. Pour les corps situés à proximité du Soleil, la glace est susceptible de persister à l'intérieur des pièges froids non éclairés par le Soleil, où la température peut descendre en dessous de ce seuil. On considère un point  $P$  de latitude  $l$  à la surface de l'hémisphère nord d'un corps céleste. Si la latitude  $l$  est inférieure ou égale à l'obliquité  $\epsilon$  du corps, la hauteur maximale du Soleil au cours de l'année est 90°. Si la latitude est supérieure à l'obliquité, le moment de l'année où le Soleil est le plus haut dans le ciel correspond au midi du solstice d'été de l'hémisphère où se trouve le point  $P$ . La hauteur maximale du Soleil est alors 90° +  $\epsilon$  -  $l$ . Ainsi pour qu'il puisse y avoir des régions à la surface restant continuellement dans l'ombre il est nécessaire que l'inclinaison des terrains soit supérieure à 90° +  $\epsilon$  -  $l$ . Plus on se rapproche du pôle de l'hémisphère du point  $P$ , plus l'inclinaison nécessaire des terrains diminue. En supposant que les irrégularités de la surface sont homogènes sur la surface du corps, notamment celles créées par les cratères d'impact, le corps sera alors plus susceptible de présenter des régions restant de façon permanente dans l'ombre aux pôles. Ainsi pour la Lune ([Feldman et al., 1998](#), [Colaprete et al., 2010](#)) et Mercure ([Paige et al., 2013](#), [Chabot et al., 2014](#)), des pièges froids contenant de la glace à la surface ont été détectés dans des cratères situés au pôle.

Pour Cérès, la mission spatiale *Dawn* a permis à [Platz et al. \(2016\)](#) de détecter au minimum 634 régions, qui restent continuellement dans l'ombre au cours de l'année. Des dépôts lumineux ont

pu être détectés dans 10 de ces régions, et un de ces dépôts situé à proximité d'un piège froid est constitué de glace (Platz *et al.*, 2016). Ermakov *et al.* (2017a) ont étudié l'évolution de la superficie des zones plongées de façon permanente dans l'ombre contenant des matériaux brillants en fonction de l'évolution de l'obliquité de Cérès. Lorsque l'obliquité augmente, seules les régions présentant des terrains suffisamment inclinés restent de façon permanente dans l'ombre et Ermakov *et al.* (2017a) ont observé que les régions qui restaient toujours dans l'ombre pour une obliquité maximale de Cérès de 20° présentaient des dépôts lumineux. Ces dépôts sont susceptibles d'être des matériaux volatils ou des glaces qui ainsi peuvent perdurer dans les pièges froids les plus persistants.

### 6.3.2 Conditions de stabilité de la glace sous la surface

Étant donné sa densité relativement faible, Cérès est supposé contenir de l'eau en grandes proportions, environ 17 à 27% en masse selon McCord et Sotin (2005). Le spectromètre nucléaire GRaND a permis de détecter la présence de glace sous la surface (Prettyman *et al.*, 2017), notamment plus abondante aux pôles, ce qui est confirmé par l'étude de la morphologie des terrains (Schmidt *et al.*, 2017).

La glace sous la surface d'un corps céleste peut aussi se sublimer en vapeur qui peut diffuser à travers le sol pour atteindre la surface. Ce phénomène a été étudié par Schorghofer (2008) pour un sol composé de poussières formées suite aux impacts météoritiques. La diffusion dépend de plusieurs paramètres dont la taille des grains composant la poussière, la porosité et la profondeur à laquelle se situe la glace. En étudiant le taux de perte en masse de la glace souterraine en fonction des différents paramètres, Schorghofer (2008) a déterminé que la glace pouvait persister sous la surface à quelques mètres sous la surface d'un corps à condition que la température moyenne annuelle ne dépasse pas 145 K. Ce seuil de 145 K peut varier sur l'intervalle [135 : 155] K en fonction des caractéristiques du sol. Au-delà de ce seuil, le taux de perte en masse de la glace dépasse les 10 m Gyr<sup>-1</sup> et la glace ne peut pas perdurer à quelques mètres sous la surface.

## 6.4 Étude de la stabilité de la glace sous la surface de Cérès

Nous avons étudié les variations de la température moyenne annuelle afin de déterminer la latitude à partir de laquelle la température moyenne annuelle ne dépasse pas les 145 K au cours des 20 derniers millions d'années. En utilisant le critère de Schorghofer (2008), cette latitude correspondra ainsi à la limite de stabilité de la glace sous la surface. Nous avons pris comme valeur de l'albédo de Cérès 0.09 (Li *et al.*, 2006) et 0.95 pour l'émissivité, valeur utilisée par Schorghofer (2016). Comme indiqué par Keihm *et al.* (2013), cette valeur de l'émissivité correspond à celle du sol lunaire (Birkebak et Abdulkadir, 1975).

Pour déterminer la température à partir de l'insolation, nous avons utilisé le modèle simplifié de rotation rapide abordé dans la section 6.2.2.1, qui donne une borne supérieure à la température annuelle moyenne. Nous obtiendrons alors une borne supérieure pour la latitude de stabilité de la glace souterraine.

Pour chaque latitude variant de 0 à 90° avec un pas de 1°, nous avons calculé l'insolation annuelle sur [-20 : 0] Myr tous les 200 yr à l'aide de la formule (6.14) puis déterminé la température annuelle moyenne à l'aide de la formule (6.21) sur [-20 : 0] Myr. Il est inutile de considérer les latitudes négatives car l'insolation annuelle donnée par la formule (6.14) est une fonction paire de la latitude. Pour chaque latitude, nous avons déterminé les maxima et minima sur [-20 : 0] Myr de l'insolation annuelle et de la température annuelle représentés respectivement sur les figures 6.1 et 6.2 ainsi que les valeurs à J2000.

Pour des latitudes de 66 et 67°, nous avons représenté l'évolution de la température annuelle respectivement sur les figures 6.3 et 6.4. Ainsi la température annuelle moyenne ne dépasse pas 145 K sur les 20 derniers millions d'années pour des latitudes supérieures ou égales en valeur absolue à 67° mais dépasse les 145 K pour des latitudes inférieures ou égales en valeur absolue à 66°.

Le modèle simplifié utilisé pour la température donne une température maximale. Ainsi on peut en déduire que d'après le critère de Schorghofer (2008), la glace située sous la surface de Cérès est stable à quelques mètres de profondeur au minimum pour les régions de latitudes supérieures ou égales en valeur absolue à 67°.

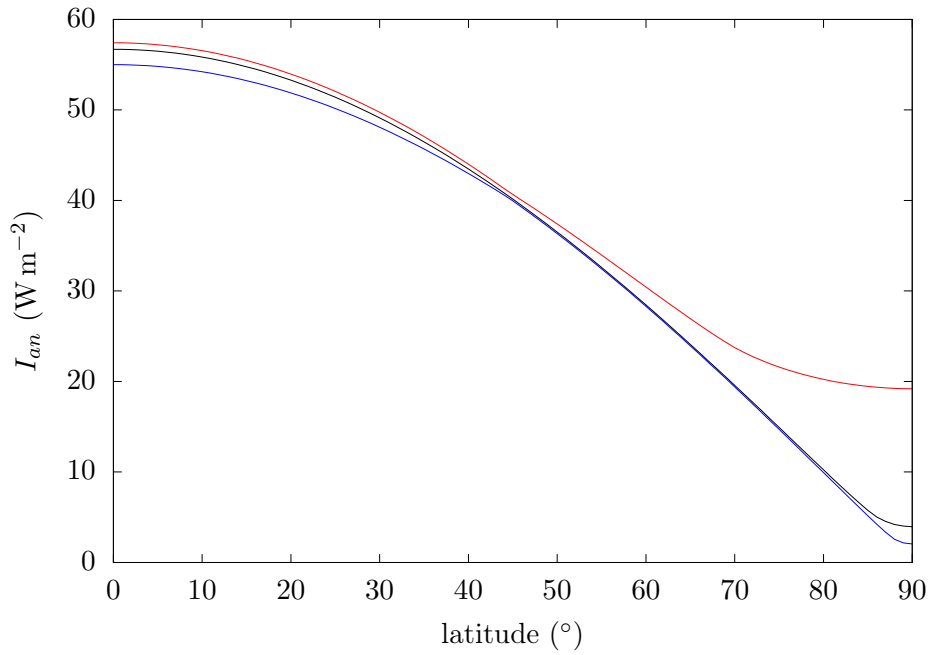


FIGURE 6.1 – Maximum en rouge et minimum en bleu sur  $[-20 : 0]$  Myr de l'insolation annuelle  $I_{an}$  reçue à la surface de Cérès en fonction de la latitude. La courbe noire représente l'insolation annuelle reçue à J2000.

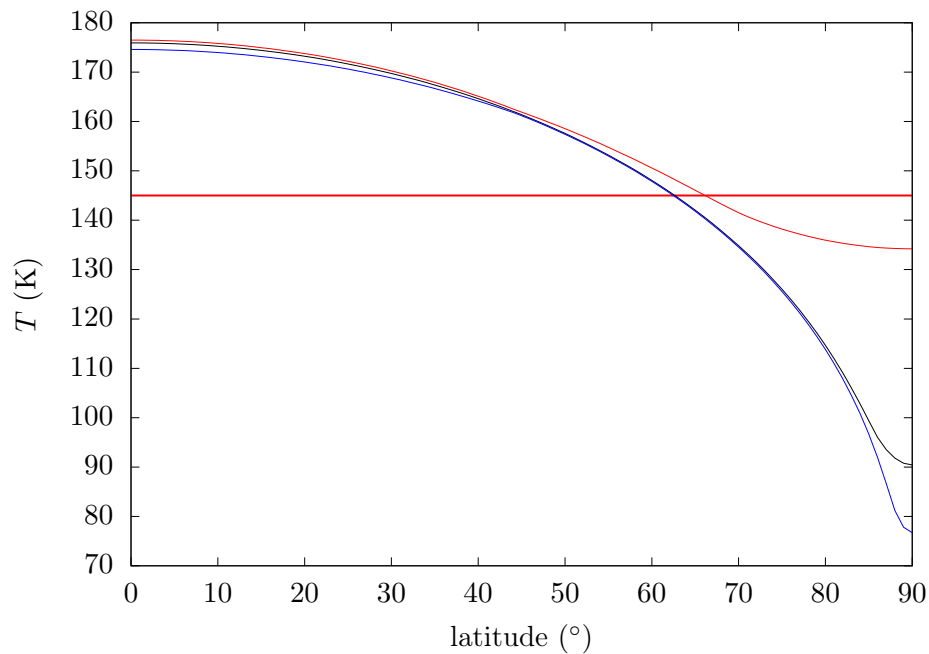


FIGURE 6.2 – Maximum en rouge et minimum en bleu sur  $[-20 : 0]$  Myr de la température annuelle  $T$  en fonction de la latitude pour Cérès. La courbe noire représente la distribution de température annuelle pour J2000. La ligne rouge horizontale représente le seuil de 145 K en dessous duquel la glace est stable sous la surface.

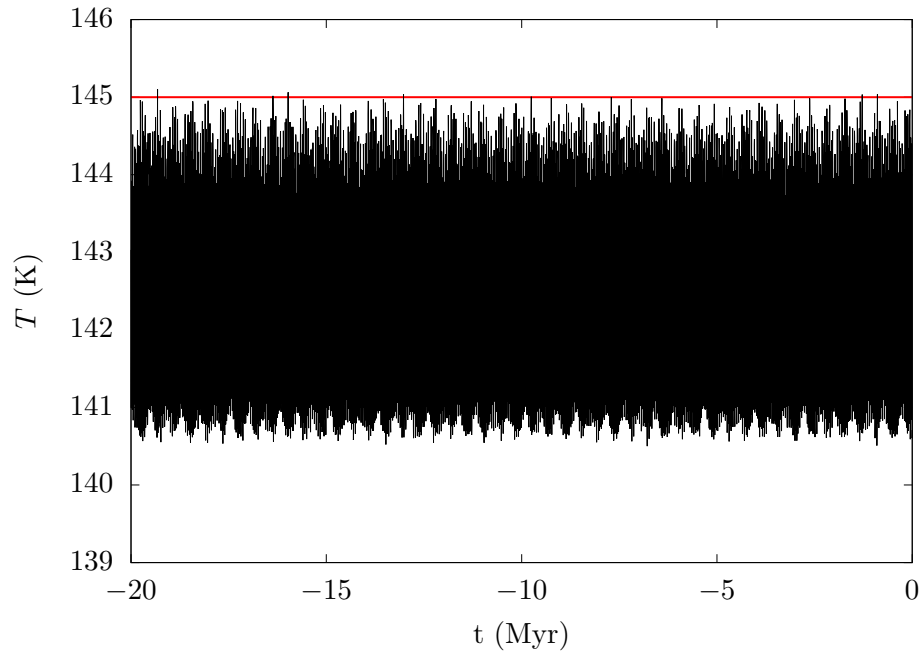


FIGURE 6.3 – Température annuelle  $T$  pour une latitude de  $66^\circ$  sur  $[-20 : 0]$  Myr. La ligne rouge horizontale représente le seuil de 145 K en dessous duquel la glace est stable sous la surface.

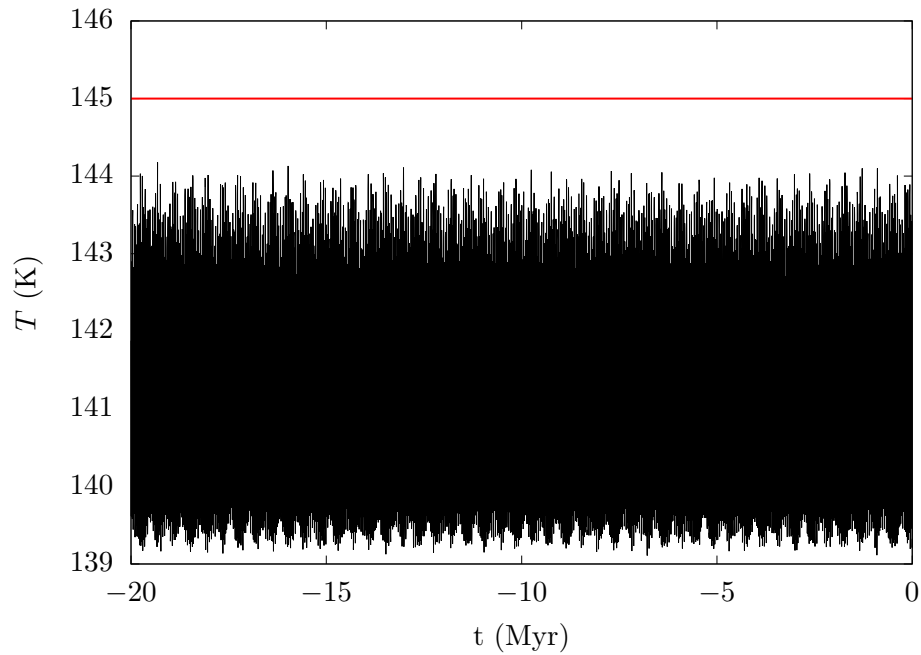


FIGURE 6.4 – Température annuelle  $T$  pour une latitude de  $67^\circ$  sur  $[-20 : 0]$  Myr. La ligne rouge horizontale représente le seuil de 145 K en dessous duquel la glace est stable sous la surface.

Sur la figure 6.2, l'évolution de la température annuelle pour l'époque J2000 en fonction de la latitude est différente de celle de la température annuelle maximale sur  $[-20 : 0]$  Myr notamment pour les régions polaires. Ainsi, il est nécessaire pour effectuer le calcul de la température maximale de considérer les évolutions séculaires de l'orbite et de l'obliquité. Si on considère la distribution de température à J2000, on obtient que la glace sous la surface serait stable à partir d'une latitude de  $63^\circ$  au lieu de  $67^\circ$ .

## 6.5 Comparaison avec les études précédentes

Schorghofer (2016) a étudié la stabilité de la glace souterraine sur Cérès à l'aide d'un modèle thermique et a notamment recensé les différentes études réalisées sur le sujet.

Fanale et Salvail (1989) modélisent analytiquement la température et la distribution de glace sous la surface pour connaître les taux de sublimation de la glace et la profondeur à laquelle la glace pourrait persister. Ils obtiennent qu'en fonction des caractéristiques du sol de Cérès la glace peut persister pendant 4.5 Gyr à environ 10 à 100 m sous la surface pour les régions situées à proximité de l'équateur. Pour des latitudes supérieures à  $40^\circ$ , ils obtiennent une profondeur de 1 à 10 m.

Hayne et Aharonson (2015) utilisent un modèle numérique pour calculer la température sous la surface sans considérer la distribution de la glace souterraine. Ils considèrent une obliquité et une orbite fixes et les variations séculaires de l'orbite et de l'obliquité ne sont pas considérées. Comme Schorghofer (2008), ils considèrent que la glace souterraine est stable lorsque la température moyenne est en dessous de 145 K. Avec ce critère, ils estiment que la glace souterraine est stable à 1 m sous la surface pour des latitudes supérieures à environ  $50^\circ$ .

Titus (2015) a recours à un modèle numérique modélisant la température sous la surface, qui ne décrit pas la distribution de la glace souterraine. À partir du critère de Schorghofer (2008) lié à une température annuelle inférieure à 145 K, il détermine que la glace est stable pour des latitudes supérieures à environ  $40$  à  $60^\circ$ .

Enfin, Schorghofer (2016) utilise un modèle numérique décrivant l'évolution de la température et la distribution de glace sous la surface en fonction de la latitude. Le modèle prend en compte l'effet des impacts qui peuvent modifier la distribution superficielle de la glace. Cérès présentant une faible inertie thermique, Schorghofer (2016) note que d'importantes variations thermiques peuvent apparaître au cours d'une rotation de Cérès et intègre ainsi les variations diurnes de température. Pour intégrer sur 4.5 Gyr, Schorghofer (2016) utilise ainsi deux échelles de temps différentes : une pour intégrer les variations diurnes de température et une pour intégrer les variations séculaires de la distribution de glace. Schorghofer (2016) intègre ce modèle pour plusieurs obliquités fixes entre  $0$  et  $90^\circ$  et considère une orbite d'excentricité fixe mais proche de sa valeur moyenne et une moyenne est réalisée sur les précessions du périhélie et de l'axe de rotation. Schorghofer (2016) conclut que la glace souterraine est stable à une profondeur de 0.5 m pour les latitudes supérieures à  $60^\circ$  et à une profondeur de 1 m pour les latitudes supérieures à  $55^\circ$ . Plus l'obliquité est importante, plus la latitude à laquelle on trouve de la glace stable à 1 m de profondeur diminue. La profondeur de la glace souterraine aux pôles dépend peu de l'obliquité.

En calculant la température avec un modèle simplifié à partir des mouvements orbitaux et de rotation sur  $[-20 : 0]$ , nous obtenons des résultats cohérents avec les études précédentes. Cependant, nous avons utilisé ici un modèle de température très simplifié en considérant que Cérès a une inertie thermique infinie. Cela donne une borne supérieure à la température maximale et donc à la latitude de stabilité de la glace souterraine. Comme noté par Schorghofer (2016), Cérès présente une faible inertie thermique et il faudrait ainsi intégrer les variations diurnes de température.

Deuxième partie

Intégrateurs symplectiques pour le corps  
solide libre



# Chapitre 7

## Introduction

L'intégration d'un système planétaire où les corps sont considérés comme des corps solides et non comme des points matériels nécessite de réaliser l'intégration de leurs rotations propres. Comme nous l'avons vu dans le chapitre 2, l'intégration du hamiltonien du corps solide libre s'avère alors nécessaire. Le hamiltonien du corps solide libre constitue un problème intégrable et présente une solution exacte. Cependant, le coût numérique élevé de cette solution a conduit à l'utilisation d'intégrateurs numériques approchés pour obtenir l'orientation d'un corps solide au cours du temps notamment dans les domaines de la mécanique céleste et de la dynamique moléculaire. Des intégrateurs numériques approchés ont notamment été développés spécifiquement pour ce problème.

L'objectif de cette partie de la thèse est de développer des intégrateurs symplectiques spécifiques au corps solide libre, qui soient plus efficaces que ceux existants.

Dans ce chapitre introductif, nous allons d'abord décrire succinctement les intégrateurs existants pour le corps solide et voir certaines notions sur les intégrateurs symplectiques, que nous utiliserons dans la suite. Nous verrons ensuite les intégrateurs symplectiques utilisés pour le corps solide libre. Enfin, nous indiquerons les propriétés de l'algèbre de Lie du moment cinétique, que nous avons utilisées dans ce travail pour construire des intégrateurs symplectiques spécifiques au corps solide libre et le plan de cette partie.

### 7.1 Intégration du corps solide libre

On considère le corps solide  $\mathcal{C}$  dans le référentiel d'inertie  $\mathcal{R}$ . Il présente les moments d'inertie  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  associés aux axes principaux d'inertie dirigés respectivement par les vecteurs  $\mathbf{I}$ ,  $\mathbf{J}$ ,  $\mathbf{K}$  tels que  $(\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K})$  constitue une base orthonormée directe associée au référentiel  $\mathcal{R}_C$  lié au corps.  $\mathbf{g}$  correspond aux coordonnées du moment cinétique de rotation de  $\mathcal{C}$  dans le référentiel d'inertie  $\mathcal{R}$ .  $\mathbf{G} = (G_1, G_2, G_3)$  représente les coordonnées du moment cinétique dans le référentiel lié au solide  $\mathcal{R}_C$ . Le hamiltonien  $H$  du corps solide libre est égal à l'énergie cinétique de rotation

$$H = \frac{G_1^2}{2I_1} + \frac{G_2^2}{2I_2} + \frac{G_3^2}{2I_3}. \quad (7.1)$$

La norme du moment cinétique s'écrit

$$G^2 = G_1^2 + G_2^2 + G_3^2. \quad (7.2)$$

Dans le référentiel d'inertie  $\mathcal{R}$ , le moment cinétique  $\mathbf{g}$  reste constant. Ainsi la norme du moment cinétique  $G$  est conservée. Cependant, l'orientation du moment cinétique  $\mathbf{G}$  n'est pas conservée dans le référentiel lié au corps  $\mathcal{R}_C$ .

En utilisant les variables d'Andoyer (section 2.2.1), on peut réduire d'après l'équation (2.47) ce problème à un hamiltonien présentant deux degrés de liberté

$$H_E = \frac{1}{2} \left( \frac{G^2 - L^2}{2} \left( \frac{1}{I_1} + \frac{1}{I_2} \right) + \frac{L^2}{I_3} + \frac{G^2 - L^2}{2} \left( \frac{1}{I_2} - \frac{1}{I_1} \right) \cos 2l \right). \quad (7.3)$$



Un problème est intégrable lorsqu'il présente autant de constantes du mouvement, appelées intégrales premières, que de degrés de liberté. Le problème du corps solide libre conserve l'énergie et la norme du moment cinétique, qui constituent deux intégrales premières, et est ainsi intégrable. La solution exacte des équations différentielles régissant le mouvement du corps solide libre a été proposée par Jacobi (Jacobi, 1850) et fait appel aux fonctions elliptiques de Jacobi et aux intégrales elliptiques. On pourra trouver une description de cette solution dans de nombreux ouvrages et articles (e.g. Landau et Lifchitz, 1982, van Zon et Schofield, 2007, Celledoni *et al.*, 2008). Concernant la résolution numérique des équations, on pourra notamment consulter les algorithmes proposés par van Zon et Schofield (2007) et Celledoni *et al.* (2008). La solution analytique proposée par Celledoni *et al.* (2008) est détaillée dans l'annexe E.

Cependant, le coût numérique des fonctions elliptiques de Jacobi et des intégrales elliptiques est plus important que ceux des fonctions usuelles (e.g. Touma et Wisdom, 1994, Fassò, 2003). Si l'on souhaite connaître uniquement la position finale d'un corps au bout d'une certaine durée, cela est sans conséquence. Cependant, si l'énergie cinétique de rotation est couplée à un potentiel dépendant de l'orientation du solide ou si l'on désire connaître toutes les orientations intermédiaires du solide lors de l'intégration, l'orientation du solide doit être connue à chaque pas et le coût de ses fonctions augmente de façon importante le temps de calcul. Ainsi de nombreux intégrateurs numériques donnant une solution approchée de l'orientation ont été utilisés pour intégrer le mouvement du corps solide libre et certains ont été développés spécifiquement pour ce problème.

Ainsi Celledoni et Säfström (2006) ont développé un algorithme, où la solution pour le moment cinétique est obtenue de façon exacte avec les fonctions elliptiques de Jacobi et celle sur l'orientation du solide de façon approchée. Hairer et Vilmart (2006) ont modifié l'algorithme d'ordre 2 DMV (*Discrete Moser-Veselov*, Moser et Veselov (1991)) appliqué au corps solide libre de façon à pouvoir augmenter son ordre. On pourra consulter Hairer *et al.* (2006) pour une description des intégrateurs existants ainsi que Hairer et Vilmart (2006) pour une comparaison de leurs caractéristiques et de leurs performances. Parmi ces intégrateurs, l'intégrateur DMV et les intégrateurs de *splitting* sont symplectiques. Dans la suite de ce travail, nous allons nous intéresser exclusivement aux intégrateurs symplectiques de *splitting* obtenus par une décomposition du hamiltonien.

## 7.2 Intégrateurs symplectiques

Les intégrateurs géométriques permettent d'intégrer numériquement des équations différentielles tout en vérifiant certaines de leurs propriétés géométriques, comme par exemple la conservation du volume (e.g. Hairer *et al.*, 2006). Parmi eux, les intégrateurs symplectiques respectent la structure canonique des équations du mouvement d'un système hamiltonien et peuvent conserver certaines intégrales premières. Ils sont généralement utilisés pour intégrer des problèmes non intégrables sur de longues périodes de temps.

Les intégrateurs de *splitting* décomposent le hamiltonien en parties intégrables, qui sont intégrées successivement, et constituent des intégrateurs symplectiques. Ils peuvent aussi être utilisés pour réaliser l'intégration de problèmes intégrables, dont les solutions analytiques ne s'expriment pas simplement, ce qui est le cas pour le corps solide libre. Ces intégrateurs sont approchés et présentent une erreur dépendante du pas de temps. Ils réalisent l'intégration exacte d'un hamiltonien légèrement différent du hamiltonien à intégrer.

On considère le hamiltonien  $H = X + Y$  décomposé en deux parties intégrables  $X$  et  $Y$ . On peut réaliser l'intégrateur symplectique suivant pour un pas d'intégration  $h$

$$\mathcal{S}(h) = e^{hL_K} = e^{hL_X} e^{hL_Y}. \quad (7.4)$$

$K$  représente le hamiltonien modifié dont l'intégrateur symplectique réalise l'intégration exacte.  $L_X$  représente la dérivée de Lie du hamiltonien  $X$ , qui s'exprime sous la forme

$$L_X = \{X, \cdot\} \quad (7.5)$$

avec  $\{\cdot, \cdot\}$  les crochets de Poisson associés aux variables canoniques. Soit  $x$  la variable que l'on cherche

à intégrer. Connaissant sa valeur à l'instant  $t$ , sa valeur à l'instant  $t + h$  est donnée par

$$x(t+h) = \mathcal{S}(h)x(t) = e^{hL_X} e^{hL_Y} x(t). \quad (7.6)$$

L'image de  $x(t)$  par une application  $e^{hL_X}$  est donnée par la résolution de l'équation différentielle

$$\dot{x} = \{X, x\}. \quad (7.7)$$

$X$  et  $Y$  étant ici intégrables, cette équation différentielle présente une solution analytique.

Pour obtenir l'expression du hamiltonien  $K$ , il est nécessaire d'utiliser la formule de Baker-Campbell-Hausdorff (e.g. [Hairer et al., 2006](#)). La formule de Baker-Campbell-Hausdorff donne l'expression de l'application  $L_K$

$$\begin{aligned} hL_K &= h(L_X + L_Y) + \frac{h^2}{2} [L_X, L_Y] + \frac{h^3}{12} ([L_X, [L_X, L_Y]] + [L_Y, [L_Y, L_X]]) \\ &+ \frac{h^4}{24} [L_X, [L_Y, [L_Y, L_X]]] \\ &+ h^5 \left( -\frac{1}{720} [L_X, [L_X, [L_X, [L_X, L_Y]]]] - \frac{1}{720} [L_Y, [L_Y, [L_Y, [L_Y, L_X]]]] \right. \\ &+ \frac{1}{360} [L_X, [L_Y, [L_Y, [L_Y, L_X]]]] + \frac{1}{360} [L_Y, [L_X, [L_X, [L_X, L_Y]]]] \\ &+ \left. \frac{1}{120} [L_X, [L_X, [L_Y, [L_Y, L_X]]]] + \frac{1}{120} [L_Y, [L_Y, [L_X, [L_X, L_Y]]]] \right) \\ &+ O(h^6) \end{aligned} \quad (7.8)$$

avec le commutateur défini par  $[L_X, L_Y] = L_X L_Y - L_Y L_X$ . La formule de Baker-Campbell-Hausdorff n'étant pas symétrique en  $L_X$  et  $L_Y$ , l'ordre des opérations est ainsi important, si  $L_X$  et  $L_Y$  ne commutent pas. On obtient une approximation approchée de  $L_K$  sous la forme d'un développement en fonction du pas d'intégration  $h$ .

On considère l'algèbre de Lie, qui présente comme crochets de Lie les commutateurs  $[\cdot, \cdot]$  antisymétriques

$$[X, Y] = XY - YX \quad (7.9)$$

et vérifiant l'identité de Jacobi

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0. \quad (7.10)$$

À partir de la relation (e.g. [Koseleff, 1993](#))

$$[L_X, L_Y] = L_{\{X, Y\}}, \quad (7.11)$$

on peut remplacer les dérivées de Lie par leurs hamiltoniens associés et les commutateurs par les crochets de Poisson  $\{\cdot, \cdot\}$  dans l'équation (7.8) pour obtenir l'expression du hamiltonien  $K$

$$\begin{aligned} hK &= h(X + Y) + \frac{h^2}{2} \{X, Y\} + \frac{h^3}{12} (\{X, \{X, Y\}\} + \{Y, \{Y, X\}\}) \\ &+ \frac{h^4}{24} \{X, \{Y, \{Y, X\}\}\} \\ &+ h^5 \left( -\frac{1}{720} \{X, \{X, \{X, \{X, Y\}\}\}\} - \frac{1}{720} \{Y, \{Y, \{Y, \{Y, X\}\}\}\} \right. \\ &+ \frac{1}{360} \{X, \{Y, \{Y, \{Y, X\}\}\}\} + \frac{1}{360} \{Y, \{X, \{X, \{X, Y\}\}\}\} \\ &+ \left. \frac{1}{120} \{X, \{X, \{Y, \{Y, X\}\}\}\} + \frac{1}{120} \{Y, \{Y, \{X, \{X, Y\}\}\}\} \right) \\ &+ O(h^6). \end{aligned} \quad (7.12)$$

Le hamiltonien est ainsi donné par (e.g. [Yoshida, 1990](#))

$$K = H + \sum_{k=2}^n h^{k-1} H_{R_k} + O(h^n), \quad (7.13)$$

où chaque hamiltonien  $H_{R_k}$  est le résidu d'ordre  $k$ . L'expression des résidus  $H_{R_k}$  s'obtient à partir de l'équation (7.12).

L'erreur  $\sum_{k=2}^{\infty} h^{k-1} H_{R_k}$  représente l'écart de la solution donnée par l'intégration numérique à la solution réelle et plus cette erreur sera faible plus la précision de l'intégrateur numérique sera importante. Lorsque le pas d'intégration  $h$  tend vers 0 pour un intégrateur d'ordre  $p$ , l'erreur est équivalente à  $h^p H_{R_{p+1}}$ , où  $H_{R_{p+1}}$  est le résidu non nul d'ordre le plus faible. Si  $H_{R_k} = 0$  pour  $k \geq 2$ , l'intégration numérique est alors exacte. Pour augmenter la précision, on peut diminuer le pas d'intégration  $h$ . Il est aussi possible d'augmenter la précision en augmentant l'ordre de l'intégrateur. Pour obtenir un intégrateur d'ordre  $n$ , les résidus  $H_{R_k}$  doivent vérifier  $H_{R_k} = 0$  pour  $k = 2, \dots, n$  (e.g. [Yoshida, 1990](#), [McLachlan, 1995](#)).

Considérons l'intégrateur symplectique  $\mathcal{S}_n$  pour le hamiltonien  $H = X + Y$

$$\mathcal{S}_n(h) = \prod_{i=1}^n e^{a_i h L_X} e^{b_i h L_Y}. \quad (7.14)$$

Pour intégrer le hamiltonien  $H$ , les coefficients  $a_i$  et  $b_i$  doivent vérifier

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n b_i = 1. \quad (7.15)$$

En utilisant par itération la formule de Baker-Campbell-Hausdorff (équation 7.12), on obtient l'expression des résidus  $H_{R_k}$ . Pour obtenir un intégrateur d'ordre  $n$ , on doit vérifier  $H_{R_k} = 0$  pour  $k = 2, \dots, n$ . Cette condition peut être réalisée en choisissant judicieusement les coefficients  $a_i$  et  $b_i$ , les résidus  $H_{R_k}$  étant des polynômes de degré  $k$  en  $a_i$  et  $b_i$ . C'est ainsi que l'on construit un intégrateur symplectique d'ordre  $n$ . À partir du nombre de crochets de Poisson indépendants à l'ordre  $k$  pour  $k = 2, \dots, n$ , on peut donner le nombre minimal de coefficients  $a_i$  et  $b_i$  nécessaires et donc obtenir un nombre minimal d'étapes, une étape étant l'opération effectuée par une application  $e^{a_i h L_X}$  ou  $e^{b_i h L_Y}$ .

Il est possible de simplifier le calcul des coefficients  $a_i$  et  $b_i$  en construisant des intégrateurs symétriques. La condition  $H_{R_k} = 0$  pour  $k = 2, \dots, n$  est en effet réalisée pour toutes les valeurs paires de  $k$  si l'intégrateur est symétrique (e.g. [Yoshida, 1990](#)), c'est-à-dire si

$$\mathcal{S}(h) = \mathcal{S}^*(h), \quad (7.16)$$

où  $\mathcal{S}^*$  est l'adjoint de l'application  $\mathcal{S}$  et est défini par  $\mathcal{S}^*(h) = \mathcal{S}^{-1}(-h)$  (e.g. [Hairer et al., 2006](#)). Si l'on dispose d'un intégrateur  $\mathcal{S}_1(h)$  d'ordre 1, un intégrateur symétrique d'ordre 2 peut être réalisé simplement par

$$\mathcal{S}_2(h) = \mathcal{S}_1\left(\frac{h}{2}\right) \mathcal{S}_1^{-1}\left(-\frac{h}{2}\right). \quad (7.17)$$

Cet intégrateur symétrique d'ordre 2 est appelé méthode de Störmer-Verlet ou méthode de *leapfrog* (e.g. [Ruth, 1983](#)).

À partir d'un schéma d'ordre 2 symétrique, on peut obtenir des schémas d'ordre supérieur en le combinant de façon symétrique (e.g. [Suzuki, 1990](#), [Yoshida, 1990](#), [McLachlan, 1995](#)). Ces techniques peuvent être appliquées à tout hamiltonien. Soit un intégrateur symétrique d'ordre  $2n$ ,  $\mathcal{S}_{2n}$ . [Yoshida \(1990\)](#) construit l'intégrateur symétrique d'ordre  $2n + 2$  suivant

$$\mathcal{S}_{2n+2}(h) = \mathcal{S}_{2n}(x_1 h) \mathcal{S}_{2n}(x_0 h) \mathcal{S}_{2n}(x_1 h) \quad (7.18)$$

avec

$$x_0 = 1 - 2x_1, \quad x_1 = \frac{1}{2 - 2^{1/(2n+1)}}. \quad (7.19)$$

De même, [Suzuki \(1990\)](#) propose de réaliser la composition suivante pour obtenir un intégrateur d'ordre  $2n + 2$

$$\mathcal{S}_{2n+2}(h) = \mathcal{S}_{2n}(x_1h) \mathcal{S}_{2n}(x_1h) \mathcal{S}_{2n}(x_0h) \mathcal{S}_{2n}(x_1h) \mathcal{S}_{2n}(x_1h) \quad (7.20)$$

en choisissant les coefficients

$$x_0 = 1 - 4x_1, \quad x_1 = \frac{1}{4 - 4^{1/(2n+1)}}. \quad (7.21)$$

### 7.3 Intégrateurs symplectiques pour le corps solide libre

L'intégration symplectique du hamiltonien du corps solide libre par décomposition a été introduite par [McLachlan \(1993\)](#), [Touma et Wisdom \(1994\)](#), [Reich \(1994\)](#). Deux décompositions différentes du hamiltonien du corps solide libre existent. Elles permettent toutes deux de décomposer le hamiltonien en parties dont l'intégration se réduit à la succession de rotations élémentaires. La première décomposition, appelée dans la suite ABC, introduite par [Reich \(1994\)](#) consiste à décomposer le hamiltonien en trois parties

$$H = A + B + C, \quad (7.22)$$

avec

$$A = \frac{G_1^2}{2I_1}, \quad (7.23)$$

$$B = \frac{G_2^2}{2I_2}, \quad (7.24)$$

$$C = \frac{G_3^2}{2I_3}. \quad (7.25)$$

Les hamiltoniens  $A$ ,  $B$ ,  $C$  se traduisent sur un temps  $t$  par des rotations d'angles respectifs  $G_1t/I_1$ ,  $G_2t/I_2$ ,  $G_3t/I_3$  autour des axes principaux dirigés par les vecteurs respectifs  $\mathbf{I}$ ,  $\mathbf{J}$ ,  $\mathbf{K}$ . La seconde décomposition, appelée dans la suite RS, introduite par [McLachlan \(1993\)](#) et [Touma et Wisdom \(1994\)](#) consiste à décomposer le hamiltonien en deux parties

$$H = R + S, \quad (7.26)$$

avec

$$R = \frac{G_1^2}{2} \left( \frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_2} \right), \quad (7.27)$$

$$S = \frac{G_3^2}{2} \left( \frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_2} \right) + \frac{G^2}{2I_2}. \quad (7.28)$$

Le hamiltonien  $R$  correspond à une rotation autour de l'axe principal  $\mathbf{I}$  d'angle  $G_1t(1/I_1 - 1/I_2)$ . Le hamiltonien  $S$  correspond au hamiltonien d'un corps présentant deux moments d'inertie égaux appelé toupie symétrique. Comme décrit dans la section 2.1.2,  $S$  se traduit ainsi par une rotation d'axe dirigé par le vecteur  $\mathbf{K}$  d'angle  $G_3t(1/I_3 - 1/I_2)$  suivie par une rotation autour du moment cinétique d'angle  $Gt/I_2$ .

Ces décompositions donnent lieu à deux types d'intégrateurs symplectiques, ceux obtenus pour la décomposition ABC

$$\mathcal{S}_{ABC}(h) = \prod_{i=1}^n e^{a_i h L_A} e^{b_i h L_B} e^{c_i h L_C}, \quad (7.29)$$

et ceux obtenus pour la décomposition RS

$$\mathcal{S}_{RS}(h) = \prod_{i=1}^n e^{a_i h L_R} e^{b_i h L_S}, \quad (7.30)$$

avec  $h$  le pas d'intégration. Pour intégrer effectivement le hamiltonien du corps solide libre, les coefficients  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$  doivent vérifier

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n b_i = \sum_{i=1}^n c_i = 1. \quad (7.31)$$

Comme nous l'avons vu dans la section 7.2, ces intégrateurs réalisent l'intégration exacte du hamiltonien modifié  $K$  donné par

$$K = H + \sum_{k=2}^n h^{k-1} H_{R_k} + O(h^n), \quad (7.32)$$

où les hamiltoniens  $H_{R_k}$  représentent les résidus d'ordre  $k$  et peuvent être obtenus à partir de la formule de Baker-Campbell-Hausdorff en utilisant les propriétés des algèbres de Lie (e.g. Koseleff, 1993, 1996). Les hamiltoniens  $H_{R_k}$  appartiennent à l'algèbre de Lie  $\mathcal{L}$  associée aux crochets de Poisson, qui sont antisymétriques et vérifient l'identité de Jacobi. L'algèbre de Lie  $\mathcal{L}$  est générée par l'alphabet  $\mathcal{A}$  composé des trois éléments  $G_1^2$ ,  $G_2^2$ ,  $G_3^2$ . Parmi les éléments d'une algèbre de Lie, un monôme de Lie de longueur  $k$  est la composition de  $k-1$  crochets de Poisson contenant  $k$  éléments d'un alphabet (e.g. Koseleff, 1993). Pour l'alphabet  $\mathcal{A}$ ,  $\{G_2^2, \{G_3^2, G_1^2\}\}$  est par exemple un monôme de Lie de longueur 3. L'algèbre de Lie  $\mathcal{L} = \bigoplus_{k \geq 1} \mathcal{L}_k$  constitue la réunion d'algèbres de Lie  $\mathcal{L}_k$  générées par les monômes de Lie de longueur  $k$  (e.g. Koseleff, 1993) et  $\mathcal{L}$  est une algèbre de Lie graduée par la longueur des monômes.

Comme indiqué dans la section 7.2, il est possible d'obtenir des intégrateurs d'ordre 2 à partir de la méthode de Störmer-Verlet. De cette façon, on obtient pour le corps solide libre les intégrateurs d'ordre 2, ABCBA2, RSR2 et SRS2 donnés respectivement par

$$\mathcal{S}_{ABCBA2}(h) = e^{\frac{h}{2}L_A} e^{\frac{h}{2}L_B} e^{hL_C} e^{\frac{h}{2}L_B} e^{\frac{h}{2}L_A}, \quad (7.33)$$

$$\mathcal{S}_{RSR2}(h) = e^{\frac{h}{2}L_R} e^{hL_S} e^{\frac{h}{2}L_R}, \quad (7.34)$$

$$\mathcal{S}_{SRS2}(h) = e^{\frac{h}{2}L_S} e^{hL_R} e^{\frac{h}{2}L_S}. \quad (7.35)$$

Par exemple, pour intégrer la molécule d'eau, qui est un exemple de corps asymétrique utilisé en dynamique moléculaire pour tester les intégrateurs du corps solide, Dullweber *et al.* (1997) ont utilisé l'intégrateur d'ordre 2 ABCBA2.

Pour chacun de ces intégrateurs d'ordre 2, il est possible d'obtenir six intégrateurs différents. Fassò (2003) note en effet qu'il est possible pour les deux décompositions d'invertir la position des hamiltoniens  $A$ ,  $B$ ,  $C$  ou de changer la décomposition RS du hamiltonien en intervertissant les trois termes  $G_1^2/I_1$ ,  $G_2^2/I_2$ ,  $G_3^2/I_3$ . En procédant à un changement de base, on peut se ramener à un hamiltonien, où seuls les moments d'inertie ont été intervertis. Cela est ainsi équivalent à considérer l'ensemble des permutations possibles des moments d'inertie (Fassò, 2003). On notera dans la suite ABC, BCA, CAB, ACB, CBA, BAC les six permutations possibles des moments d'inertie. Par exemple, la permutation BCA donne lieu à la transformation suivante : A devient B, B devient C et C devient A. L'intégrateur ABCBA2 pour la permutation BCA devient ainsi

$$e^{\frac{h}{2}L_B} e^{\frac{h}{2}L_C} e^{hL_A} e^{\frac{h}{2}L_C} e^{\frac{h}{2}L_B}. \quad (7.36)$$

Fassò (2003) a comparé l'efficacité des deux décompositions pour le hamiltonien du corps solide libre pour les intégrateurs d'ordre 2 ABCBA2, RSR2 et SRS2. Pour chaque intégrateur, il a déterminé l'expression analytique du résidu d'ordre trois et l'a estimé pour les six permutations possibles des moments d'inertie ( $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$ ). Pour calculer les crochets de Poisson des composantes du moment cinétique et simplifier l'expression du résidu d'ordre trois, Fassò (2003) a utilisé la relation entre les composantes du moment cinétique

$$\{G_i, G_j\} = \epsilon_{ijk} G_k. \quad (7.37)$$

Il a ainsi déterminé pour l'ensemble des solides le meilleur intégrateur et sa meilleure permutation associée et a conclu que leur efficacité varie en fonction des moments d'inertie du corps solide intégré : pour des corps proches des toupies symétriques, les décompositions SR sont plus précises que les

décompositions ABC efficaces uniquement pour les corps très asymétriques. Fassò (2003) a étudié le cas de la molécule d'eau, pour lequel il a précisé la valeur des résidus de tous les schémas et a conclu que le meilleur est l'intégrateur  $\mathcal{S}_{RSR2}$  avec la permutation ABC.

Pour obtenir des intégrateurs d'ordre supérieur à 2, comme vu dans la section 7.2, on peut réaliser une composition symétrique d'intégrateurs symétriques. De telles méthodes ont été appliquées au corps solide libre. Ainsi Omelyan (2007) intègre la molécule d'eau à l'aide d'un intégrateur d'ordre 4 obtenu par une composition de l'intégrateur d'ordre 2 selon la méthode de Yoshida (1990).

## 7.4 Plan

Nous avons vu dans la section 7.3, que les intégrateurs symplectiques utilisés pour le corps solide libre étaient issus des méthodes générales fonctionnant pour tout type d'hamiltonien. Dans le cas du hamiltonien du corps solide libre, comme noté par Fassò (2003), l'expression des résidus peut être simplifiée à l'aide de la relation  $\{G_i, G_j\} = \epsilon_{ijk}G_k$ . Dans ce cas, cette relation pourrait diminuer le nombre de termes indépendants au sein des résidus. Le nombre d'étapes nécessaires pour réaliser un intégrateur symplectique d'ordre  $n$ , comme nous l'avons vu dans la section 7.2, dépend du nombre de termes indépendants présents dans les résidus des ordres 2 à  $n$ . Si les résidus présentent moins de termes indépendants que dans le cas général, il devient alors possible de diminuer le nombre minimal d'étapes. Le temps de calcul étant proportionnel au nombre d'étapes d'un intégrateur symplectique, il serait alors possible d'obtenir des intégrateurs symplectiques plus efficaces dans le cas du hamiltonien du corps solide libre.

Sur une idée de Jacques Laskar, nous avons ainsi regardé s'il était possible d'utiliser les propriétés de l'algèbre de Lie du moment cinétique pour diminuer le nombre d'étapes des intégrateurs symplectiques du corps solide et nous avons introduit pour cela une dépendance des coefficients des intégrateurs aux moments d'inertie.

Afin de construire des intégrateurs symplectiques pour le corps solide libre, nous avons d'abord besoin de connaître le nombre de termes indépendants au sein des résidus, qui appartiennent à l'algèbre de Lie du moment cinétique. Le chapitre 8 se concentre ainsi sur l'étude de l'algèbre de Lie du moment cinétique générée dans le cas du hamiltonien du corps solide libre. En utilisant les propriétés précédentes, on déterminera les dimensions et des bases possibles pour les premiers ordres de l'algèbre de Lie. Cela nous permettra ainsi d'obtenir le nombre de termes indépendants au sein des résidus. À la fin de ce chapitre, nous généraliserons une partie de ces résultats à tout ordre et nous verrons que les éléments de l'algèbre de Lie peuvent s'écrire comme une combinaison linéaire de monômes, dont nous donnerons la forme.

Une fois l'algèbre de Lie du moment cinétique connue, nous expliquerons dans le chapitre 9 comment la simplification des résidus peut être utilisée pour construire des intégrateurs spécifiques au corps solide libre. Nous commencerons par expliquer la construction d'intégrateurs symétriques d'ordre 4 spécifiques au corps solide libre. En recensant à tout ordre le nombre de termes présents dans les résidus, nous verrons ensuite en comparant au cas d'un hamiltonien ordinaire, que ces intégrateurs peuvent notamment présenter moins d'étapes que les intégrateurs symplectiques généraux.

Cependant, le nombre d'étapes ne suffit pas à conclure sur l'efficacité d'un intégrateur. Il faut en effet vérifier que leur précision à temps de calcul identique est supérieure à celle des intégrateurs symplectiques généraux existants. Pour cela, on peut soit estimer la précision en estimant de façon analytique les résidus d'ordre supérieur soit réaliser une intégration numérique. Le chapitre 10 consiste ainsi en une comparaison numérique des intégrateurs spécifiques obtenus aux intégrateurs symplectiques généraux existants afin de déterminer leur efficacité. On étudiera d'abord le cas d'une toupie sphérique afin de montrer l'équivalence des deux estimations de la précision, puis celui de la molécule d'eau, qui constitue un exemple classique de corps solide asymétrique utilisé dans la littérature pour comparer des intégrateurs du corps solide. On comparera ensuite leur efficacité pour l'ensemble des corps physiques existants à l'aide de l'estimation analytique.

La méthode utilisée dans le chapitre 9 pour construire des intégrateurs symplectiques spécifiques au corps solide ne permet pas de construire facilement des intégrateurs d'ordre supérieur à 4. Dans le chapitre 11, nous introduirons l'utilisation de correcteurs pour les intégrateurs du corps solide, qui

peut permettre d'obtenir des intégrateurs d'ordre supérieur présentant un faible nombre d'étapes. De même que précédemment, on comparera numériquement les intégrateurs symétriques d'ordre 4 et 6 ainsi obtenus aux intégrateurs symplectiques existants.

## Chapitre 8

# Étude de l'algèbre de Lie du moment cinétique

L'intégration symplectique d'un hamiltonien  $H$  consiste à réaliser l'intégration exacte d'un hamiltonien modifié  $K$ . Comme nous l'avons vu dans la section 7.2, le hamiltonien modifié  $K$  est donné par

$$K = H + \sum_{k=2}^n h^{k-1} H_{R_k} + O(h^n), \quad (8.1)$$

où les hamiltoniens  $H_{R_k}$  représentent les résidus d'ordre  $k$ . Dans le cas du hamiltonien du corps solide libre, les résidus  $H_{R_k}$  appartiennent à l'algèbre de Lie  $\mathcal{L}$  générée par l'alphabet  $\mathcal{A} = (G_1^2, G_2^2, G_3^2)$ . Cette algèbre de Lie est dotée des crochets de Poisson vérifiant les propriétés d'antisymétrie et l'identité de Jacobi.  $\mathcal{L}$  est une algèbre de Lie graduée et est la somme des algèbres de Lie  $\mathcal{L}_k$  générées par les monômes de Lie de longueur  $k$  (Koseleff, 1993), soit  $\mathcal{L} = \oplus_{k \geq 1} \mathcal{L}_k$ . Le résidu  $H_{R_k}$  appartient à  $\mathcal{L}_k$  et peut s'écrire ainsi sous la forme d'une combinaison linéaire de monômes de Lie de longueur  $k$ .

Dans le chapitre 9, nous allons chercher à construire un intégrateur d'ordre 4 spécifique au corps solide libre. Pour construire un tel intégrateur, il est nécessaire d'annuler les résidus des ordres 2, 3 et 4. Si l'on impose que l'intégrateur soit symétrique, les résidus d'ordre pair sont nuls. Les résidus d'ordre 2 et 4 s'annulent et il est alors uniquement nécessaire d'annuler le résidu d'ordre 3,  $H_{R_3}$ . Ce dernier peut s'écrire sous la forme d'une combinaison linéaire des monômes de Lie de la forme  $\{G_i^2, \{G_j^2, G_k^2\}\}$ , où  $j \neq k$ . Afin de connaître le nombre de coefficients nécessaires pour annuler ce résidu et les conditions à imposer à ces coefficients, il est nécessaire de connaître l'expression du résidu d'ordre 3,  $H_{R_3}$ . Pour estimer analytiquement la précision d'un intégrateur d'ordre 4, nous avons besoin de connaître l'expression du premier résidu non nul d'ordre le plus faible. Pour un intégrateur d'ordre 4, nous avons ainsi besoin de connaître l'expression du résidu d'ordre 5,  $H_{R_5}$ .

Dans ce chapitre, nous allons ainsi chercher à exprimer les résidus  $H_{R_k}$ , qui sont des éléments des algèbres de Lie  $\mathcal{L}_k$  en utilisant les propriétés de l'algèbre de Lie du moment cinétique. Pour les crochets de Poisson en variables action-angle, les composantes du moment cinétique vérifient en effet la relation (e.g. Touma et Wisdom, 1994, Fassò, 2003)

$$\{G_i, G_j\} = \epsilon_{ijk} G_k, \quad (8.2)$$

que nous allons utiliser pour simplifier l'expression des résidus, comme cela a été fait par Fassò (2003).

Nous allons d'abord commencer par regarder l'expression des résidus pour les cinq premiers ordres afin de déterminer une base et la dimension des algèbres de Lie  $\mathcal{L}_k$  pour  $k = 1, 2, 3, 4, 5$ . Nous verrons aussi que les résidus peuvent s'écrire comme une combinaison linéaire de monômes des composantes du moment cinétique et nous obtiendrons l'expression des résidus  $H_{R_3}$  et  $H_{R_5}$ . Ces résultats sont résumés dans la section 8.2 et seront utilisés dans le chapitre 9 pour construire des intégrateurs symétriques d'ordre 4. À la fin de ce chapitre, nous généraliserons une partie de ces résultats en montrant qu'à tout ordre les résidus peuvent s'écrire comme une combinaison linéaire de monômes des composantes du moment cinétique, dont nous donnerons la forme.



## 8.1 Résidus pour les premiers ordres

Pour déterminer l'expression des résidus, qui appartiennent aux algèbres de Lie  $\mathcal{L}_k$ , nous allons chercher à obtenir une famille génératrice puis une base des algèbres de Lie  $\mathcal{L}_k$  pour les ordres 2, 3, 4 et 5 en considérant les monômes de Lie de ces algèbres. Nous allons commencer par chercher une famille génératrice pour l'ordre 1. On pourra alors obtenir une famille génératrice pour l'ordre 2, puis pour les ordres supérieurs par itération. En effet, si tout élément de  $\mathcal{L}_k$  peut s'écrire comme une combinaison linéaire des éléments de la famille génératrice  $(v_j)$ , alors tout élément de  $\mathcal{L}_{k+1}$  peut s'écrire comme une combinaison linéaire des termes  $\{G_i^2, v_j\}$ .

On peut noter qu'il est nécessaire de considérer seulement deux termes parmi les trois termes  $\{G_1^2, v_j\}$ ,  $\{G_2^2, v_j\}$ ,  $\{G_3^2, v_j\}$  car  $\{G_1^2, v_j\} + \{G_2^2, v_j\} + \{G_3^2, v_j\} = 0$ . Cela provient du fait que toute fonction dérivable  $f$  des composantes du moment cinétique et toute fonction dérivable  $g$  de la norme du moment cinétique vérifie

$$\{g(G), f(G_1, G_2, G_3)\} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial g}{\partial G} \frac{\partial f}{\partial G_i} \{G, G_i\} = 0, \quad (8.3)$$

car  $\{G, G_i\} = 0$ . Ainsi si on connaît une famille génératrice constituée des éléments  $v_j$  de  $\mathcal{L}_k$ , alors la famille constituée des éléments du type  $\{G_1^2, v_j\}$  et  $\{G_2^2, v_j\}$  est une famille génératrice de  $\mathcal{L}_{k+1}$ .

Après avoir déterminé une famille génératrice, nous chercherons à obtenir une base des  $\mathcal{L}_k$ . Cela nous permettra d'obtenir la dimension des  $\mathcal{L}_k$ , dont on déduira dans le chapitre 9 le nombre minimal d'étapes d'un intégrateur symplectique spécifique au corps solide libre.

### 8.1.1 Ordre 1

Les monômes de Lie de longueur 1 sont  $G_1^2, G_2^2, G_3^2$ . Tout élément de  $\mathcal{L}_1$  peut s'écrire comme combinaison linéaire de ces trois termes, qui étant linéairement indépendants constituent une base de  $\mathcal{L}_1$ . Ainsi la dimension de  $\mathcal{L}_1$  est 3.

### 8.1.2 Ordre 2

Les monômes de Lie de longueur 2 sont de la forme  $\{G_i^2, G_j^2\}$ . Avec la relation (8.2), on obtient ainsi

$$\{G_1^2, G_2^2\} = \{G_2^2, G_3^2\} = \{G_3^2, G_1^2\} = 4G_1G_2G_3. \quad (8.4)$$

Ainsi tout élément de  $\mathcal{L}_2$  peut s'écrire comme une combinaison linéaire du terme  $G_1G_2G_3$ . La base de  $\mathcal{L}_2$  est constituée ainsi du seul terme  $G_1G_2G_3$  et sa dimension est 1.

On notera dans la suite pour simplifier  $W = G_1G_2G_3$ .

### 8.1.3 Ordre 3

Les monômes de Lie de longueur 3 sont de la forme  $\{G_i^2, \{G_j^2, G_k^2\}\}$  et sont des combinaisons linéaires des termes  $\{G_i^2, W\}$  d'après les propriétés vues à l'ordre 2. Avec la relation (8.2), nous obtenons

$$\begin{aligned} \{G_1^2, W\} &= 2(G_1^2G_3^2 - G_1^2G_2^2) \\ \{G_2^2, W\} &= 2(G_2^2G_1^2 - G_2^2G_3^2) \\ \{G_3^2, W\} &= 2(G_3^2G_2^2 - G_3^2G_1^2). \end{aligned} \quad (8.5)$$

Ainsi tout élément de  $\mathcal{L}_3$  est une combinaison linéaire des termes  $(G_1^2G_3^2 - G_1^2G_2^2)$ ,  $(G_2^2G_1^2 - G_2^2G_3^2)$ ,  $(G_3^2G_2^2 - G_3^2G_1^2)$ . Ces trois termes appartiennent à  $\mathcal{L}_3$  et constituent une famille génératrice de  $\mathcal{L}_3$  mais ne forment pas une base de  $\mathcal{L}_3$ . Ces trois termes ne constituent en effet pas une famille libre, à cause de la relation  $(G_1^2G_3^2 - G_1^2G_2^2) + (G_2^2G_1^2 - G_2^2G_3^2) + (G_3^2G_2^2 - G_3^2G_1^2) = 0$ . Pour obtenir une base de  $\mathcal{L}_3$ , il est nécessaire d'enlever un des trois éléments de cette famille.  $(G_1^2G_3^2 - G_1^2G_2^2, G_1^2G_2^2 - G_2^2G_3^2)$  forme par exemple une base de  $\mathcal{L}_3$ , dont la dimension est ainsi 2.

Tout élément de  $\mathcal{L}_3$  peut s'écrire comme une combinaison linéaire des trois monômes  $G_1^2 G_2^2$ ,  $G_2^2 G_3^2$ ,  $G_3^2 G_1^2$ . Cependant il faut noter qu'aucun de ces termes n'appartient à  $\mathcal{L}_3$ . Le résidu  $H_{R_3}$  d'ordre 3 peut ainsi s'écrire simplement sous la forme

$$H_{R_3}(G_1, G_2, G_3) = P_1 G_1^2 G_2^2 + P_2 G_1^2 G_3^2 + P_3 G_2^2 G_3^2 \quad (8.6)$$

avec les coefficients  $P_i$ . Si  $G_1 = G_2 = G_3 = 1$ ,  $G_1^2 G_3^2 - G_1^2 G_2^2$ ,  $G_2^2 G_1^2 - G_2^2 G_3^2$ ,  $G_3^2 G_2^2 - G_3^2 G_1^2$  s'annulent et  $H_{R_3}(1, 1, 1) = 0$ . Les coefficients  $P_i$  vérifient ainsi

$$P_1 + P_2 + P_3 = 0. \quad (8.7)$$

L'expression du résidu  $H_{R_3}$  (équation 8.6) et la relation (8.7) seront utilisées dans le chapitre 9 pour construire des intégrateurs d'ordre 4 spécifiques au corps solide libre.

La relation (8.7) peut également être obtenue de la façon suivante. Le résidu  $H_{R_3}$  d'ordre 3 est une combinaison linéaire des trois termes  $\{G_1^2, W\}$ ,  $\{G_2^2, W\}$ ,  $\{G_3^2, W\}$  et peut ainsi s'écrire avec les coefficients réels  $\alpha, \beta, \gamma$  selon

$$H_{R_3} = \alpha \{G_1^2, W\} + \beta \{G_2^2, W\} + \gamma \{G_3^2, W\}. \quad (8.8)$$

Avec la relation (8.3), on obtient  $\{G_1^2, W\} + \{G_2^2, W\} + \{G_3^2, W\} = 0$  et ainsi

$$H_{R_3} = (\alpha - \gamma) \{G_1^2, W\} + (\beta - \gamma) \{G_2^2, W\}. \quad (8.9)$$

Avec la relation (8.5), on obtient

$$H_{R_3} = 2(\alpha - \gamma) (G_1^2 G_3^2 - G_1^2 G_2^2) + 2(\beta - \gamma) (G_2^2 G_1^2 - G_2^2 G_3^2) \quad (8.10)$$

$$= P_1 G_1^2 G_2^2 + P_2 G_1^2 G_3^2 + P_3 G_2^2 G_3^2, \quad (8.11)$$

avec  $P_1 = 2(\beta - \alpha)$ ,  $P_2 = 2(\alpha - \gamma)$  et  $P_3 = 2(\gamma - \beta)$ . Ainsi, la relation  $P_1 + P_2 + P_3 = 0$  est bien vérifiée.

### 8.1.4 Ordre 4

Les monômes de Lie de longueur 4 sont de la forme  $\{G_i^2, \{G_j^2, \{G_k^2, G_l^2\}\}\}$  et sont d'après les relations précédentes des combinaisons linéaires des termes  $\{G_i^2, G_j^2 G_k^2\}$ . Pour obtenir l'expression des résidus à l'ordre 4, nous calculons ces termes

$$\begin{aligned} \{G_1^2, G_1^2 G_2^2\} &= 4G_1^2 W & \{G_1^2, G_1^2 G_3^2\} &= -4G_1^2 W & \{G_1^2, G_2^2 G_3^2\} &= 4(G_3^2 - G_2^2) W \\ \{G_2^2, G_1^2 G_2^2\} &= -4G_2^2 W & \{G_2^2, G_1^2 G_3^2\} &= 4(G_1^2 - G_3^2) W & \{G_2^2, G_2^2 G_3^2\} &= 4G_2^2 W \\ \{G_3^2, G_1^2 G_2^2\} &= 4(G_2^2 - G_1^2) W & \{G_3^2, G_1^2 G_3^2\} &= 4G_3^2 W & \{G_3^2, G_2^2 G_3^2\} &= -4G_3^2 W. \end{aligned} \quad (8.12)$$

Ainsi tout élément de  $\mathcal{L}_4$  est une combinaison linéaire des trois termes  $G_1^2 W$ ,  $G_2^2 W$ ,  $G_3^2 W$ . Ces trois termes appartiennent à  $\mathcal{L}_4$  comme

$$\{G_1^2, (G_1^2 G_2^2 - G_1^2 G_3^2)\} = 8G_1^2 W \quad (8.13)$$

$$\{G_2^2, (G_2^2 G_3^2 - G_1^2 G_2^2)\} = 8G_2^2 W \quad (8.14)$$

$$\{G_3^2, (G_1^2 G_3^2 - G_2^2 G_3^2)\} = 8G_3^2 W, \quad (8.15)$$

et constituent une base de  $\mathcal{L}_4$ , qui est ainsi de dimension 3.

### 8.1.5 Ordre 5

En utilisant les relations précédentes, les monômes de Lie de longueur 5 sont des combinaisons linéaires des termes  $\{G_i^2, G_j^2 W\}$ . Avec la relation (8.2), ces termes peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} \{G_1^2, G_1^2 W\} &= 2G_1^4 (G_3^2 - G_2^2) & \{G_1^2, G_2^2 W\} &= 6W^2 - 2G_1^2 G_2^4 & \{G_1^2, G_3^2 W\} &= -6W^2 + 2G_3^4 G_1^2 \\ \{G_2^2, G_1^2 W\} &= -6W^2 + 2G_1^4 G_2^2 & \{G_2^2, G_2^2 W\} &= 2G_2^4 (G_1^2 - G_3^2) & \{G_2^2, G_3^2 W\} &= 6W^2 - 2G_2^2 G_3^4 \\ \{G_3^2, G_1^2 W\} &= 6W^2 - 2G_3^4 G_1^2 & \{G_3^2, G_2^2 W\} &= -6W^2 + 2G_2^4 G_3^2 & \{G_3^2, G_3^2 W\} &= 2G_3^4 (G_2^2 - G_1^2). \end{aligned} \quad (8.16)$$

Comme vu précédemment, il n'est pas nécessaire de considérer les termes de la forme  $\{G_3^2, G_i^2 W\}$  pour obtenir une famille génératrice de  $\mathcal{L}_5$ . En conservant les six termes appartenant à  $\mathcal{L}_5$  obtenus en calculant les expressions du type  $\{G_1^2, G_i^2 W\}$  et  $\{G_2^2, G_i^2 W\}$ , on obtient la famille génératrice

$$(3W^2 - G_1^4 G_2^2, 3W^2 - G_2^4 G_1^2, 3W^2 - G_3^4 G_1^2, 3W^2 - G_3^4 G_2^2, G_1^4 (G_2^2 - G_3^2), G_2^4 (G_3^2 - G_1^2)), \quad (8.17)$$

que l'on peut réécrire sous la forme

$$(3W^2 - G_1^4 G_2^2, 3W^2 - G_2^4 G_3^2, 3W^2 - G_3^4 G_1^2, G_1^4 (G_2^2 - G_3^2), G_2^4 (G_3^2 - G_1^2), G_3^4 (G_1^2 - G_2^2)). \quad (8.18)$$

Vérifions maintenant si cette famille est libre. On considère la combinaison linéaire suivante

$$\begin{aligned} \alpha_1 (3W^2 - G_1^4 G_2^2) + \alpha_2 (3W^2 - G_2^4 G_3^2) + \alpha_3 (3W^2 - G_3^4 G_1^2) \\ + \alpha_4 G_1^4 (G_2^2 - G_3^2) + \alpha_5 G_2^4 (G_3^2 - G_1^2) + \alpha_6 G_3^4 (G_1^2 - G_2^2) = 0, \end{aligned} \quad (8.19)$$

équivalente à

$$\begin{aligned} 3(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) W^2 + (\alpha_4 - \alpha_1) G_1^4 G_2^2 + (\alpha_5 - \alpha_2) G_2^4 G_3^2 + (\alpha_6 - \alpha_3) G_3^4 G_1^2 \\ - \alpha_4 G_1^4 G_3^2 - \alpha_5 G_2^4 G_1^2 - \alpha_6 G_3^4 G_2^2 = 0, \end{aligned} \quad (8.20)$$

ce qui est équivalent à  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_6 = 0$ . Ainsi cette famille est libre et constitue une base de  $\mathcal{L}_5$ , dont la dimension est ainsi 6.

En utilisant la base de  $\mathcal{L}_5$ , on peut aussi écrire  $H_{R_5}$  sous la forme

$$\begin{aligned} H_{R_5}(G_1, G_2, G_3) = \alpha_1 (3W^2 - G_1^4 G_2^2) + \alpha_2 (3W^2 - G_2^4 G_3^2) + \alpha_3 (3W^2 - G_3^4 G_1^2) \\ + \alpha_4 G_1^4 (G_2^2 - G_3^2) + \alpha_5 G_2^4 (G_3^2 - G_1^2) + \alpha_6 G_3^4 (G_1^2 - G_2^2). \end{aligned} \quad (8.21)$$

Tout élément de  $\mathcal{L}_5$  est combinaison linéaire des sept termes  $G_1^4 G_2^2, G_1^4 G_3^2, G_2^4 G_1^2, G_2^4 G_3^2, G_3^4 G_1^2, G_3^4 G_2^2, G_1^2 G_2^2 G_3^2$ . Cependant aucun de ces termes n'appartient à  $\mathcal{L}_5$ . Le résidu  $H_{R_5}$  d'ordre 5 peut alors s'exprimer sous la forme

$$H_{R_5}(G_1, G_2, G_3) = Q_1 G_1^2 G_2^4 + Q_2 G_2^2 G_3^4 + Q_3 G_3^2 G_1^4 + Q_4 G_1^4 G_2^2 + Q_5 G_2^4 G_3^2 + Q_6 G_3^4 G_1^2 + Q_7 G_1^2 G_2^2 G_3^2, \quad (8.22)$$

avec  $Q_7 = 3(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$ . Pour déterminer la relation entre les coefficients  $Q_i$ , comme précédemment on évalue  $H_{R_5}$  dans le cas  $G_1 = G_2 = G_3 = 1$ . On a alors

$$H_{R_5}(1, 1, 1) = 2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + Q_5 + Q_6 + Q_7, \quad (8.23)$$

et ainsi

$$\frac{2}{3} Q_7 = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + Q_5 + Q_6 + Q_7, \quad (8.24)$$

d'où

$$3(Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + Q_5 + Q_6) + Q_7 = 0. \quad (8.25)$$

L'expression du résidu  $H_{R_5}$  (équation 8.22) sera utilisée dans le chapitre 10 pour estimer analytiquement la précision des intégrateurs d'ordre 4 obtenus au chapitre 9.

## 8.2 Bilan

Le tableau 8.1 fait le récapitulatif des propriétés de l'algèbre de Lie générée pour le hamiltonien du corps solide libre pour les cinq premiers ordres.

Le résidu d'ordre 3,  $H_{R_3}$ , s'écrit sous la forme

$$H_{R_3}(G_1, G_2, G_3) = P_1 G_1^2 G_2^2 + P_2 G_1^2 G_3^2 + P_3 G_2^2 G_3^2, \quad (8.26)$$

avec

$$P_1 + P_2 + P_3 = 0. \quad (8.27)$$

Le résidu d'ordre 5,  $H_{R_5}$ , s'écrit sous la forme

$$H_{R_5}(G_1, G_2, G_3) = Q_1 G_1^2 G_2^4 + Q_2 G_2^2 G_3^4 + Q_3 G_3^2 G_1^4 + Q_4 G_1^4 G_2^2 + Q_5 G_2^4 G_3^2 + Q_6 G_3^4 G_1^2 + Q_7 G_1^2 G_2^2 G_3^2 \quad (8.28)$$

avec

$$3(Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + Q_5 + Q_6) + Q_7 = 0. \quad (8.29)$$

Ordre	Dimension de l'algèbre de Lie	Base	Nombre de termes	Termes	Formule de réduction
1	3	$G_1^2$ $G_2^2$ $G_3^2$	3	$G_1^2$ $G_2^2$ $G_3^2$	
2	1	$G_1G_2G_3$	1	$G_1G_2G_3$	
3	2	$G_1^2(G_2^2 - G_3^2)$ $G_2^2(G_3^2 - G_1^2)$	3	$G_1^2G_2^2$ $G_1^2G_3^2$ $G_2^2G_3^2$	$P_1 + P_2 + P_3 = 0$
4	3	$G_1^2W$ $G_2^2W$ $G_3^2W$	3	$G_1^2W$ $G_2^2W$ $G_3^2W$	
5	6	$3W^2 - G_1^4G_2^2$ $3W^2 - G_2^4G_3^2$ $3W^2 - G_3^4G_1^2$ $G_1^4(G_2^2 - G_3^2)$ $G_2^4(G_3^2 - G_1^2)$ $G_3^4(G_1^2 - G_2^2)$	7	$G_1^2G_2^4$ $G_2^2G_3^4$ $G_3^2G_1^4$ $G_1^4G_2^2$ $G_2^4G_3^2$ $G_3^4G_1^2$ $G_1^2G_2^2G_3^2$	$3(Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + Q_5 + Q_6) + Q_7 = 0$

TABLEAU 8.1 – Dimensions des algèbres de Lie  $\mathcal{L}_k$  pour le corps solide libre, bases, termes de la combinaison linéaire et formules de réduction pour les cinq premiers ordres avec  $W = G_1G_2G_3$ .

### 8.3 Résidus à tout ordre

Dans cette section, nous allons généraliser les expressions des résidus obtenus précédemment aux premiers ordres à tout ordre à l'aide du théorème suivant.

#### 8.3.1 Théorème 1

Soit  $\mathcal{L}$  l'algèbre de Lie graduée générée par l'alphabet  $\mathcal{A} = (G_1^2, G_2^2, G_3^2)$  avec  $G_i$  les composantes d'un moment cinétique et  $\mathcal{L}_k$  les algèbres de Lie générées par les monômes de Lie de longueur  $k$  telles que  $\mathcal{L} = \bigoplus_{k \geq 1} \mathcal{L}_k$ .

Tout élément de  $\mathcal{L}_{2k}$  pour  $k \in \mathbb{N}^*$  peut s'écrire comme une combinaison linéaire des monômes de degré  $2k + 1$  en  $G_1, G_2, G_3$

$$G_1^{2p+1}G_2^{2q+1}G_3^{2r+1} \quad (8.30)$$

avec  $p + q + r = k - 1$  et  $p, q, r \in \mathbb{N}$ .

Tout élément de  $\mathcal{L}_{2k+1}$  pour  $k \in \mathbb{N}^*$  peut s'exprimer comme une combinaison linéaire des monômes de degré  $2k + 2$  en  $G_1, G_2, G_3$

$$G_1^{2p}G_2^{2q}G_3^{2r} \quad (8.31)$$

avec  $p + q + r = k + 1$ ,  $p, q, r \in \mathbb{N}$  et  $p, q, r \leq k$ .

#### 8.3.2 Démonstration

Pour démontrer le théorème 1, nous allons procéder par récurrence.

On considère la proposition  $\mathcal{P}_k$  : chaque élément de  $\mathcal{L}_{2k}$  est combinaison linéaire des termes  $G_1^{2p+1}G_2^{2q+1}G_3^{2r+1}$  avec  $p + q + r = k - 1$  et  $p, q, r \in \mathbb{N}$ .

À l'ordre 2, tout élément de  $\mathcal{L}_2$  est proportionnel à  $G_1G_2G_3$  et ainsi  $\mathcal{P}_1$  est vraie.

Supposons que  $\mathcal{P}_k$  est vraie. Tout élément de  $\mathcal{L}_{2k}$  peut s'écrire comme une combinaison linéaire des termes  $G_1^{2p+1}G_2^{2q+1}G_3^{2r+1}$  avec  $p + q + r = k - 1$  et  $p, q, r \in \mathbb{N}$ . Or  $(G_1^2, G_2^2, G_3^2)$  est une famille génératrice de  $\mathcal{L}_1$ . Ainsi chaque élément de  $\mathcal{L}_{2k+1}$  peut s'écrire comme une combinaison linéaire des

termes  $\{G_i^2, G_1^{2p+1} G_2^{2q+1} G_3^{2r+1}\}$  avec  $i = 1, 2, 3$ ,  $p + q + r = k - 1$  et  $p, q, r \in \mathbb{N}$ . Pour  $i = 1$ , on a

$$\begin{aligned} \left\{ G_1^2, G_1^{2p+1} G_2^{2q+1} G_3^{2r+1} \right\} &= G_1^{2p+1} G_3^{2r+1} \left\{ G_1^2, G_2^{2q+1} \right\} + G_1^{2p+1} G_2^{2q+1} \left\{ G_1^2, G_3^{2r+1} \right\} \\ &= 2(2q+1) G_1^{2(p+1)} G_2^{2q} G_3^{2r+1} \{G_1, G_2\} - 2(2r+1) G_1^{2(p+1)} G_2^{2q+1} G_3^{2r} \{G_1, G_3\} \\ &= (4q+2) G_1^{2(p+1)} G_2^{2q} G_3^{2(r+1)} - (4r+2) G_1^{2(p+1)} G_2^{2(q+1)} G_3^{2r}. \end{aligned} \quad (8.32)$$

Pour  $i = 1, 2, 3$ , on a

$$\begin{aligned} \left\{ G_1^2, G_1^{2p+1} G_2^{2q+1} G_3^{2r+1} \right\} &= (4q+2) G_1^{2(p+1)} G_2^{2q} G_3^{2(r+1)} - (4r+2) G_1^{2(p+1)} G_2^{2(q+1)} G_3^{2r} \\ \left\{ G_2^2, G_1^{2p+1} G_2^{2q+1} G_3^{2r+1} \right\} &= (4r+2) G_1^{2(p+1)} G_2^{2(q+1)} G_3^{2r} - (4p+2) G_1^{2p} G_2^{2(q+1)} G_3^{2(r+1)} \\ \left\{ G_3^2, G_1^{2p+1} G_2^{2q+1} G_3^{2r+1} \right\} &= (4p+2) G_1^{2p} G_2^{2(q+1)} G_3^{2(r+1)} - (4q+2) G_1^{2(p+1)} G_2^{2q} G_3^{2(r+1)}. \end{aligned} \quad (8.33)$$

Tout élément de  $\mathcal{L}_{2k+1}$  est une combinaison linéaire des termes  $\{G_i^2, G_1^{2p+1} G_2^{2q+1} G_3^{2r+1}\}$  avec  $p+q+r = k-1$  et  $p, q, r \in \mathbb{N}$  et  $i = 1, 2, 3$ . Ainsi tout élément de  $\mathcal{L}_{2k+1}$  est une combinaison linéaire des termes  $G_1^{2(p+1)} G_2^{2q} G_3^{2(r+1)}$ ,  $G_1^{2(p+1)} G_2^{2(q+1)} G_3^{2r}$ ,  $G_1^{2p} G_2^{2(q+1)} G_3^{2(r+1)}$  avec  $p+q+r = k-1$  et  $p, q, r \in \mathbb{N}$ .

Tout élément de  $\mathcal{L}_{2k+1}$  est une combinaison linéaire des termes  $G_1^{2p} G_2^{2q} G_3^{2r}$  avec  $p+q+r = k+1$ ,  $p, q, r \in \mathbb{N}$  et  $p, q, r \leq k$ . Ainsi si le théorème 1 est vérifié pour l'ordre  $2k$ , il est alors aussi vérifié pour l'ordre  $2k+1$ .

Tout élément de  $\mathcal{L}_{2k+2}$  peut s'écrire comme une combinaison linéaire des termes  $\{G_i^2, G_1^{2p} G_2^{2q} G_3^{2r}\}$  avec  $p+q+r = k+1$ ,  $p, q, r \in \mathbb{N}$  et  $p, q, r \leq k$ . Calculons ces termes

$$\begin{aligned} \left\{ G_1^2, G_1^{2p} G_2^{2q} G_3^{2r} \right\} &= 4q G_1^{2p} G_2^{2(q-1)} G_3^{2r} W - 4r G_1^{2p} G_2^{2q} G_3^{2(r-1)} W \\ \left\{ G_2^2, G_1^{2p} G_2^{2q} G_3^{2r} \right\} &= 4r G_1^{2p} G_2^{2q} G_3^{2(r-1)} W - 4p G_1^{2(p-1)} G_2^{2q} G_3^{2r} W \\ \left\{ G_3^2, G_1^{2p} G_2^{2q} G_3^{2r} \right\} &= 4p G_1^{2(p-1)} G_2^{2q} G_3^{2r} W - 4q G_1^{2p} G_2^{2(q-1)} G_3^{2r} W. \end{aligned} \quad (8.34)$$

Tout élément de  $\mathcal{L}_{2k+2}$  peut donc s'écrire comme une combinaison linéaire des termes  $G_1^{2p+1} G_2^{2q+1} G_3^{2r+1}$  avec  $p+q+r = k$  et  $p, q, r \in \mathbb{N}$ . Si le théorème est vérifié à l'ordre  $2k+1$ , il est vérifié à l'ordre  $2k+2$ .

Si la proposition  $\mathcal{P}_k$  est vraie,  $\mathcal{P}_{k+1}$  est aussi vérifiée. La proposition  $\mathcal{P}_1$  étant vraie,  $\mathcal{P}_k$  est ainsi vraie pour  $k \in \mathbb{N}^*$ . Par conséquent, le théorème 1 est vérifié pour tous les ordres  $2k$  avec  $k \in \mathbb{N}^*$ . Or on a vu que si le théorème 1 était vrai pour l'ordre  $2k$ , il était aussi vérifié pour l'ordre  $2k+1$ . Ainsi le théorème 1 est vérifié à tout ordre supérieur à 1.

## 8.4 Formule de réduction

Aux ordres 3 et 5, nous avons obtenu une relation entre les coefficients des combinaisons linéaires, qui permet de réduire le nombre de coefficients indépendants. Cette formule de réduction est généralisable à tout ordre à l'aide du théorème suivant.

### 8.4.1 Théorème 2

Soit  $\mathcal{L}$  l'algèbre de Lie graduée générée par l'alphabet  $\mathcal{A} = (G_1^2, G_2^2, G_3^2)$  avec  $G_i$  les composantes d'un moment cinétique et  $\mathcal{L}_k$  pour  $k \in \mathbb{N}^*$  les algèbres de Lie générées par les monômes de Lie de longueur  $k$  telles que  $\mathcal{L} = \bigoplus_{k \geq 1} \mathcal{L}_k$ . Soit  $X \in \mathcal{L}_{2k+1}$  avec  $X = \sum_{\substack{0 \leq p, q, r \leq k \\ p+q+r=k+1}} \beta_{2k+1, pqr} G_1^{2p} G_2^{2q} G_3^{2r}$ .

Les coefficients  $\beta_{2k+1, pqr}$  vérifient la formule de réduction

$$\sum_{\substack{0 \leq p, q, r \leq k \\ p+q+r=k+1}} \frac{(2p)! (2q)! (2r)!}{2^p p! 2^q q! 2^r r!} \beta_{2k+1, pqr} = 0. \quad (8.35)$$

## 8.4.2 Démonstration

On recherche les coefficients  $\lambda_{pqr} \neq 0$  satisfaisant la relation

$$\sum_{\substack{0 \leq p, q, r \leq k \\ p+q+r=k+1}} \lambda_{pqr} \beta_{2k+1, pqr} = 0. \quad (8.36)$$

D'après le théorème 1 de la section 8.3, tout élément  $X$  de  $\mathcal{L}_{2k+1}$  peut s'écrire selon la combinaison linéaire

$$X = \sum_{\substack{0 \leq p, q, r \leq k \\ p+q+r=k+1}} \beta_{2k+1, pqr} G_1^{2p} G_2^{2q} G_3^{2r}. \quad (8.37)$$

D'après la démonstration du théorème 1, on peut aussi l'écrire sous la forme

$$X = \sum_{i=1}^3 \sum_{\substack{0 \leq p, q, r \\ p+q+r=k-1}} \alpha_{i, pqr} \left\{ G_i^2, G_1^{2p+1} G_2^{2q+1} G_3^{2r+1} \right\}, \quad (8.38)$$

avec

$$\begin{aligned} \beta_{2k+1, pqr} &= (4p+2)(\alpha_{3, pq-1r-1} - \alpha_{2, pq-1r-1}) \\ &+ (4q+2)(\alpha_{1, p-1qr-1} - \alpha_{3, p-1qr-1}) \\ &+ (4r+2)(\alpha_{2, p-1q-1r} - \alpha_{1, p-1q-1r}), \end{aligned} \quad (8.39)$$

où  $\alpha_{i, pqr} = 0$  si  $p, q, r$  ne vérifient pas  $0 \leq p, q, r$  et  $p+q+r = k-1$ . À partir de l'équation (8.39), on peut réécrire la relation (8.36) sous la forme

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{0 \leq p, q, r \leq k \\ p+q+r=k+1}} \lambda_{pqr} \beta_{2k+1, pqr} &= \sum_{\substack{0 \leq p, q, r \leq k \\ p+q+r=k+1}} \lambda_{pqr} (4p+2)(\alpha_{3, pq-1r-1} - \alpha_{2, pq-1r-1}) \\ &+ \sum_{\substack{0 \leq p, q, r \leq k \\ p+q+r=k+1}} \lambda_{pqr} (4q+2)(\alpha_{1, p-1qr-1} - \alpha_{3, p-1qr-1}) \\ &+ \sum_{\substack{0 \leq p, q, r \leq k \\ p+q+r=k+1}} \lambda_{pqr} (4r+2)(\alpha_{2, p-1q-1r} - \alpha_{1, p-1q-1r}) \end{aligned} \quad (8.40)$$

soit

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{0 \leq p, q, r \leq k \\ p+q+r=k+1}} \lambda_{pqr} \beta_{2k+1, pqr} &= \sum_{\substack{0 \leq p, q, r \leq k-1 \\ p+q+r=k-1}} \lambda_{pq+1r+1} (4p+2)(\alpha_{3, pqr} - \alpha_{2, pqr}) \\ &+ \sum_{\substack{0 \leq p, q, r \leq k-1 \\ p+q+r=k-1}} \lambda_{p+1qr+1} (4q+2)(\alpha_{1, pqr} - \alpha_{3, pqr}) \\ &+ \sum_{\substack{0 \leq p, q, r \leq k-1 \\ p+q+r=k-1}} \lambda_{p+1q+1r} (4r+2)(\alpha_{2, pqr} - \alpha_{1, pqr}) \\ \sum_{\substack{0 \leq p, q, r \leq k \\ p+q+r=k+1}} \lambda_{pqr} \beta_{2k+1, pqr} &= \sum_{\substack{0 \leq p, q, r \leq k-1 \\ p+q+r=k-1}} (\lambda_{p+1qr+1} (4q+2) - \lambda_{p+1q+1r} (4r+2)) \alpha_{1, pqr} \\ &+ \sum_{\substack{0 \leq p, q, r \leq k-1 \\ p+q+r=k-1}} (\lambda_{p+1q+1r} (4r+2) - \lambda_{pq+1r+1} (4p+2)) \alpha_{2, pqr} \\ &+ \sum_{\substack{0 \leq p, q, r \leq k-1 \\ p+q+r=k-1}} (\lambda_{pq+1r+1} (4p+2) - \lambda_{p+1qr+1} (4q+2)) \alpha_{3, pqr}, \end{aligned} \quad (8.41)$$

car  $\alpha_{i,pqr} = 0$  si  $p, q, r$  ne vérifient pas  $0 \leq p, q, r$  et  $p + q + r = k - 1$ . Pour vérifier la relation (8.36), il suffit que les coefficients  $\lambda_{pqr}$  vérifient

$$\lambda_{pq+1r+1}(2p+1) = \lambda_{p+1qr+1}(2q+1) = \lambda_{p+1q+1r}(2r+1). \quad (8.42)$$

Pour vérifier la relation (8.42), il suffit que les coefficients  $\lambda_{pqr}$  vérifient

$$\lambda_{pqr} = \frac{(2p)!}{2^p p!} \frac{(2q)!}{2^q q!} \frac{(2r)!}{2^r r!}. \quad (8.43)$$

La formule de réduction (équation 8.35) permet bien de retrouver les relations (8.7) et (8.25) obtenues pour les résidus d'ordre 3 et 5.

## Chapitre 9

# Obtention d'intégrateurs symplectiques spécifiques au corps solide libre

Dans ce chapitre, nous allons construire des intégrateurs symplectiques spécifiques au corps solide libre.

Nous allons d'abord construire des intégrateurs symplectiques symétriques d'ordre 4 en utilisant l'étude de l'algèbre de Lie du moment cinétique réalisée au chapitre 8. Nous essayerons d'abord de construire des intégrateurs présentant un nombre minimal d'étapes pour les deux décompositions du hamiltonien du corps solide libre possibles, ABC et RS. Pour les intégrateurs du type RS, nous indiquerons une réduction possible du coût.

Nous chercherons ensuite à déterminer le nombre d'étapes des intégrateurs spécifiques au corps solide libre à tout ordre. En comparant au cas d'un hamiltonien général, nous verrons que ces intégrateurs spécifiques peuvent présenter moins d'étapes que les intégrateurs généraux existants.

### 9.1 Construction d'intégrateurs symétriques d'ordre 4

Dans cette section, nous allons nous intéresser à la construction d'intégrateurs symplectiques spécifiques au corps solide libre et nous allons considérer exclusivement le cas d'intégrateurs symétriques d'ordre 4. Pour construire un intégrateur d'ordre 4, nous avons besoin d'annuler les résidus des ordres 2, 3 et 4. Comme l'intégrateur est symétrique, les résidus des ordres 2 et 4 sont nuls et nous avons seulement besoin d'annuler les résidus d'ordre 3. D'après la section 8.1.3, le résidu d'ordre 3 s'écrit

$$H_{R_3}(G_1, G_2, G_3) = P_1 G_1^2 G_2^2 + P_2 G_1^2 G_3^2 + P_3 G_2^2 G_3^2, \quad (9.1)$$

avec  $P_1 + P_2 + P_3 = 0$ . Pour annuler  $H_{R_3}$ , il faut et il suffit de vérifier les deux équations  $P_1 = P_2 = 0$ .

#### 9.1.1 Décomposition ABC : intégrateurs N

Nous allons d'abord considérer le cas des intégrateurs obtenus pour la décomposition ABC de la forme

$$\mathcal{S}_{ABC}(h) = \prod_{i=1}^n e^{a_i h L_A} e^{b_i h L_B} e^{c_i h L_C}, \quad (9.2)$$

où les coefficients  $a_i, b_i, c_i$  vérifient les trois équations  $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n b_i = \sum_{i=1}^n c_i = 1$ .  $P_1$  et  $P_2$  sont des fonctions polynomiales des coefficients  $a_i, b_i, c_i$ . Pour obtenir un intégrateur d'ordre 4, les



coefficients  $a_i, b_i, c_i$  doivent ainsi vérifier les cinq équations

$$\sum_{i=1}^n a_i = 1, \quad (9.3)$$

$$\sum_{i=1}^n b_i = 1, \quad (9.4)$$

$$\sum_{i=1}^n c_i = 1, \quad (9.5)$$

$$P_1 = 0, \quad (9.6)$$

$$P_2 = 0. \quad (9.7)$$

Pour avoir un intégrateur symétrique d'ordre 4, nous avons ainsi besoin au minimum de cinq coefficients indépendants. L'intégrateur doit ainsi compter au minimum dix étapes. Comme les étapes 5 et 6 sont identiques, on peut les fusionner en une seule étape. Ainsi pour la décomposition ABC, le nombre minimal d'étapes pour un intégrateur symétrique d'ordre 4 est neuf.

Sept types d'intégrateurs à neuf étapes commençant par l'étape  $A$  suivie d'une étape  $B$  existent pour un hamiltonien à trois parties. Dans la suite, nous les appelons intégrateurs N et nous les numérotons par ordre alphabétique selon

$$\begin{aligned} ABABC BABA & N1 \\ ABACACABA & N2 \\ ABACBCABA & N3 \\ ABCABACBA & N4 \\ ABCACACBA & N5 \\ ABCBABCBA & N6 \\ ABCBCBCBA & N7. \end{aligned} \quad (9.8)$$

Pour obtenir l'ensemble des intégrateurs possibles, on considérera l'ensemble des permutations possibles des étapes  $A, B, C$ , au nombre de six et désignées par ABC, BCA, CAB, ACB, CBA, BAC. Par exemple, l'intégrateur N4 avec la permutation CAB correspond à la séquence CABACBAC. Il existe ainsi  $7 \times 6 = 42$  séquences d'intégrations possibles. Comme nous avons vu à la section 7.3 et comme indiqué par Fassò (2003), cela est équivalent à considérer l'ensemble des permutations possibles des moments d'inertie.

Nous allons maintenant expliciter le calcul des coefficients  $a_i, b_i, c_i$  en prenant comme exemple la séquence d'intégration N4 pour la permutation ABC donnée par

$$\mathcal{S}_{N4ABC}(h) = e^{a_1 h L_A} e^{b_1 h L_B} e^{c_1 h L_C} e^{a_2 h L_A} e^{b_2 h L_B} e^{a_2 h L_A} e^{c_1 h L_C} e^{b_1 h L_B} e^{a_1 h L_A}. \quad (9.9)$$

Il est possible de factoriser le hamiltonien par  $1/I_1$  pour obtenir

$$H = \frac{G_1^2}{2I_1} + \frac{G_2^2}{2I_2} + \frac{G_3^2}{2I_3} = \frac{1}{2I_1} (G_1^2 + (1+x)G_2^2 + (1+y)G_3^2), \quad (9.10)$$

avec les coefficients  $x$  et  $y$  définis par

$$1+x = \frac{I_1}{I_2}, \quad 1+y = \frac{I_1}{I_3}. \quad (9.11)$$

À l'ordre 1, les coefficients doivent vérifier

$$2a_1 + 2a_2 = 1, \quad 2b_1 + b_2 = 1, \quad 2c_1 = 1. \quad (9.12)$$

Nous avons ainsi deux paramètres libres  $a_1$  et  $b_1$  et les autres coefficients sont donnés par

$$a_2 = \frac{1}{2} - a_1, \quad b_2 = 1 - 2b_1, \quad c_1 = \frac{1}{2}. \quad (9.13)$$

Avec la formule de Baker-Campbell-Hausdorff, on calcule le hamiltonien modifié pour  $\mathcal{S}_{N_4ABC}(h) = e^{hL_K}$  donné par

$$hK = hH + \frac{h^3}{(2I_1)^3} (P'_1(a_1, b_1, x, y) G_1^2 G_2^2 + P'_2(a_1, b_1, x, y) G_1^2 G_3^2 + P'_3(a_1, b_1, x, y) G_2^2 G_3^2) + O(h^5), \quad (9.14)$$

où les coefficients normalisés du résidu d'ordre 3,  $P'_i = P_i(2I_1)^3$ , sont donnés par

$$P'_1 = -\frac{1}{3} + 2b_1 - 8a_1b_1 + 8a_1b_1^2 + 4a_1^2 - 8a_1^2b_1 + 4yb_1^2 - 8ya_1b_1 + 4ya_1^2 - x + 2xb_1 + 4xa_1 - 16xa_1b_1 + 16xa_1b_1^2 - 8xa_1^2b_1 - 4xyb_1 + 8xyb_1^2 + 4xya_1 - 8xya_1b_1 - 8x^2a_1b_1 + 8x^2a_1b_1^2 + \frac{2}{3}x^2y - 4x^2yb_1 + 4x^2yb_1^2 \quad (9.15)$$

$$P'_2 = -\frac{1}{3} + 2a_1 - 4a_1^2 + 8a_1^2b_1 + 8ya_1b_1 - 4ya_1^2 + 2y^2b_1 - 2y^2a_1 + 8xa_1^2b_1 + 8xya_1b_1 - \frac{1}{3}xy^2 + 2xy^2b_1 \quad (9.16)$$

$$P'_3 = \frac{2}{3} - 2b_1 - 2a_1 + 8a_1b_1 - 8a_1b_1^2 - 4yb_1^2 - 2y^2b_1 + 2y^2a_1 + x - 2xb_1 - 4xa_1 + 16xa_1b_1 - 16xa_1b_1^2 + 4xyb_1 - 8xyb_1^2 - 4xya_1 + \frac{1}{3}xy^2 - 2xy^2b_1 + 8x^2a_1b_1 - 8x^2a_1b_1^2 - \frac{2}{3}x^2y + 4x^2yb_1 - 4x^2yb_1^2. \quad (9.17)$$

Comme démontré dans la section 8.1.3, les coefficients vérifient  $P'_1 + P'_2 + P'_3 = 0$ . En utilisant la réduction de base de Gröbner (Buchberger, 1965), on peut réduire le système aux deux équations

$$\alpha a_1^3 + \beta a_1^2 + \gamma a_1 + \delta = 0 \quad (9.18)$$

$$\alpha' a_1 + \beta' b_1 + \gamma' = 0, \quad (9.19)$$

dont les coefficients sont donnés par

$$\begin{aligned} \alpha &= 48x^2y - 24xy^2 + 144xy - 72y^2 + 72x + 24 \\ \beta &= 48x^2y^2 - 12xy^3 + 144xy^2 - 36y^3 + 36xy + 72y^2 - 24x + 60y \\ \gamma &= 12x^2y^3 + 24xy^3 - 24xy^2 + 18y^3 - 24xy - 18y^2 - 30y - 6 \\ \delta &= x^2y^4 - 6xy^3 - 4xy^2 - 3y^3 + 3y + 1 \\ \alpha' &= 4x^2y - 2xy^2 + 12xy - 6y^2 + 6x + 2 \\ \beta' &= 2x^2y^2 + 8xy^2 + 6xy + 6y^2 + 2x + 6y + 2 \\ \gamma' &= -xy^2 - 3xy - 2x - y - 1. \end{aligned} \quad (9.20)$$

Ces deux équations peuvent présenter plusieurs solutions ou n'avoir aucune solution en fonction des moments d'inertie. Les solutions pour les coefficients  $a_1$  et  $b_1$  dépendent alors de  $x$  et  $y$  et ainsi des moments d'inertie du corps solide à intégrer. Les coefficients de l'intégrateur deviennent spécifiques à un triplet de moments d'inertie classé dans un certain ordre. Pour chaque triplet ordonné de moments d'inertie, on doit ainsi calculer les valeurs des coefficients. Cette dépendance des coefficients par rapport aux moments d'inertie permet d'obtenir des intégrateurs d'ordre 4 à neuf étapes pour la décomposition ABC. Nous verrons dans la section 9.4.4, que l'on peut ainsi obtenir pour le hamiltonien du corps solide libre des intégrateurs d'ordre 4 avec moins d'étapes que dans le cas d'un hamiltonien général.

On peut observer qu'il peut exister des valeurs de  $(x, y)$  pour lesquelles  $\delta = 0$  et ainsi pour lesquelles  $a_1 = 0$  peut être une solution de l'équation (9.18). Il existe donc une courbe dans le domaine de définition de  $(x, y)$ , où il est possible d'obtenir des intégrateurs d'ordre 4 avec 7 ou même 5 étapes pour certaines valeurs discrètes de cette courbe où  $\gamma' = 0$ . Fassò (2003) a observé un résultat similaire et trouvé que l'intégrateur d'ordre 2 ABCBA2 est un intégrateur d'ordre 4 pour un corps de moment d'inertie  $(0.25, 0.75, 1)$ .

Les équations à résoudre pour déterminer les valeurs des coefficients  $a_i, b_i, c_i$  pour les sept types d'intégrateur N sont données dans l'annexe D. Ces équations doivent être résolues pour les six valeurs des coefficients  $(x, y)$  données par les six permutations possibles des moments d'inertie.

### 9.1.2 Décomposition RS

Nous considérerons maintenant la décomposition RS, où les intégrateurs sont de la forme

$$\mathcal{S}_{RS}(h) = \prod_{i=1}^n e^{a_i h L_R} e^{b_i h L_S}, \quad (9.21)$$

et où les coefficients  $a_i, b_i, c_i$  vérifient les deux équations  $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n b_i = 1$ . Pour obtenir un intégrateur d'ordre 4, les coefficients  $a_i, b_i$  doivent vérifier  $P_1 = P_2 = 0$ . On compte ainsi au total quatre équations pour les coefficients  $a_i, b_i$ . Le nombre minimal d'étapes est ainsi sept.

Il existe deux types d'intégrateurs à sept étapes pour la décomposition RS

$$\begin{aligned} &RSRSRSR \\ &SRSRSRS. \end{aligned}$$

Nous allons maintenant chercher à exprimer les résidus d'ordre 3 pour le type d'intégrateur RRSRSRSR défini par

$$\mathcal{S}_{RRSRSRSR}(h) = e^{a_1 h L_R} e^{b_1 h L_S} e^{a_2 h L_R} e^{b_2 h L_S} e^{a_2 h L_R} e^{b_1 h L_S} e^{a_1 h L_R}. \quad (9.22)$$

Comme précédemment, on factorise le hamiltonien par  $1/I_1$  pour le récrire sous la forme

$$H = \frac{G_1^2}{2I_1} + \frac{G_2^2}{2I_2} + \frac{G_3^2}{2I_3} = \frac{1}{2I_1} (G_1^2 (1-x) + G_3^2 (y-x) + xG^2), \quad (9.23)$$

en fonction des coefficients

$$x = \frac{I_1}{I_2}, \quad y = \frac{I_1}{I_3}. \quad (9.24)$$

Pour intégrer le corps solide, les coefficients doivent vérifier au premier ordre les relations

$$2a_1 + 2a_2 = 1, \quad 2b_1 + b_2 = 1. \quad (9.25)$$

On obtient ainsi seulement deux paramètres libres  $a_1$  et  $b_1$ . Les autres coefficients peuvent être déduits de leurs valeurs avec

$$a_2 = \frac{1}{2} - a_1, \quad b_2 = 1 - 2b_1. \quad (9.26)$$

À partir de la formule de Baker-Campbell-Hausdorff, on peut exprimer le hamiltonien modifié du schéma d'intégration  $\mathcal{S}_{RRSRSRSR}(h) = e^{L_K}$ . On normalise pour cela les coefficients du résidu d'ordre 3  $P_i$  selon  $P'_i = P_i(2I_1)^3$  et on obtient

$$hK = hH + \frac{h^3}{(2I_1)^3} (P'_1(a_1, b_1, x, y) G_1^2 G_2^2 + P'_2(a_1, b_1, x, y) G_1^2 G_3^2 + P'_3(a_1, b_1, x, y) G_2^2 G_3^2) + O(h^5), \quad (9.27)$$

avec

$$P'_1 = \frac{1}{3}(x-1)^2(x-y)(1-6(1-2a_1)^2b_1) \quad (9.28)$$

$$P'_2 = \frac{1}{3}(x-1)(x-y)((x-1)(6(1-2a_1)^2b_1-1) - 2(x-y)(6(1-2a_1)(1-b_1)b_1-1)) \quad (9.29)$$

$$P'_3 = \frac{2}{3}(x-1)(x-y)^2(6(1-2a_1)(1-b_1)b_1-1). \quad (9.30)$$

Les coefficients vérifient bien la relation  $P'_1 + P'_2 + P'_3 = 0$  démontrée dans la section 8.1.3. Ce système d'équations peut se réduire pour un corps asymétrique ( $x \neq 1, x \neq y, y \neq 1$ ) à

$$b_1^3 - 2b_1^2 + b_1 - \frac{1}{6} = 0, \quad a_1 = \frac{1}{2}b_1. \quad (9.31)$$

L'unique solution réelle correspond à celle du schéma de Yoshida (1990) avec  $b_1 = 1/(2 - 2^{1/3})$ .

Considérons maintenant le type d'intégrateur SRSRSRS donné par

$$\mathcal{S}_{SRSRSRS}(h) = e^{a_1 h L_S} e^{b_1 h L_R} e^{a_2 h L_S} e^{b_2 h L_R} e^{a_2 h L_S} e^{b_1 h L_R} e^{a_1 h L_S}, \quad (9.32)$$

avec

$$P'_1 = \frac{2}{3}(x-1)^2(x-y)(6(1-2a_1)(1-b_1)b_1-1) \quad (9.33)$$

$$P'_2 = \frac{1}{3}(x-1)(x-y)(2(1-6(1-2a_1)(1-b_1)b_1)(x-1) - (x-y)(1-6(1-2a_1)^2b_1)) \quad (9.34)$$

$$P'_3 = \frac{1}{3}(x-1)(x-y)^2(1-6(1-2a_1)^2b_1). \quad (9.35)$$

Comme précédemment, l'unique solution correspond à l'intégrateur de [Yoshida \(1990\)](#). Ainsi les intégrateurs obtenus avec la décomposition RS sont des intégrateurs généraux déjà existants. Ainsi la décomposition RS ne permet ainsi ni d'obtenir des intégrateurs avec moins d'étapes que les intégrateurs généraux, ni d'obtenir des solutions supplémentaires pour un intégrateur de la décomposition RS à sept étapes.

On observe aussi que les intégrateurs RSRSRSR avec la permutation ABC et SRSRSRS avec la permutation CBA ont le même résidu d'ordre 4. [Fassò \(2003\)](#) avait notamment remarqué que l'intégrateur d'ordre 2 RSR2 avec la permutation ABC présentait le même résidu que l'intégrateur d'ordre 2 SRS2 avec la permutation CBA. Nous pouvons montrer que cela peut se généraliser à tout intégrateur. En effet,  $R_G = G^2/(2I_2)$  commute à la fois avec  $R_1 = G_1^2/2(1/I_1 - 1/I_2)$  et  $R_3 = G_3^2/2(1/I_3 - 1/I_2)$ . Ainsi si on ajoute  $R_G$  à  $R_3$  pour former un intégrateur du type  $RS$ , on obtient le même résidu à tout ordre que si on avait ajouté  $R_G$  à  $R_1$  pour obtenir un intégrateur de type  $SR$ . Ainsi les intégrateurs du type  $RS$  avec la permutation  $ABC$  sont identiques aux intégrateurs du type  $SR$  avec la permutation  $CBA$ .

Par conséquent, il n'est pas nécessaire de considérer les intégrateurs de type SR, qui lorsque l'énergie cinétique est couplée à une énergie potentielle, sont plus coûteux que les intégrateurs de type RS, car, comme nous le verrons dans la section 10.1.1, une étape  $e^{LR}$  est moins coûteuse qu'une étape  $e^{LS}$ .

### 9.1.3 Estimation des résidus d'ordre 5

En comptant les six permutations possibles, il existe 42 intégrateurs N pour la décomposition ABC, qui peuvent chacun présenter plusieurs solutions pour les coefficients  $a_i, b_i, c_i$ . Il est possible de déterminer le meilleur intégrateur en réalisant des intégrations numériques et en comparant l'erreur obtenue par rapport à la solution exacte. Cependant, la précision des intégrateurs peut aussi être estimée analytiquement.

Pour un intégrateur d'ordre  $n$ , le hamiltonien effectivement intégré  $K$  est donné par

$$K = H + h^n H_{R_{n+1}} + O(h^{n+1}), \quad (9.36)$$

où  $H$  est le hamiltonien à intégrer. Ainsi pour un intégrateur d'ordre  $n$ , le résidu d'ordre  $n+1$  permet d'estimer la précision de l'intégrateur. Par exemple, [Fassò \(2003\)](#) estime ainsi les meilleurs intégrateurs d'ordre 2 pour le corps solide libre en calculant le maximum des résidus d'ordre 3 sur la sphère unité du moment cinétique.

La précision des intégrateurs N d'ordre 4, que nous avons obtenus, peut ainsi être estimée par les résidus d'ordre 5. D'après la section 8.1.5, ces derniers peuvent s'écrire sous la forme

$$H_{R_5} = Q_1 G_1^2 G_2^4 + Q_2 G_2^2 G_3^4 + Q_3 G_3^2 G_1^4 + Q_4 G_1^4 G_2^2 + Q_5 G_2^4 G_3^2 + Q_6 G_3^4 G_1^2 + Q_7 G_1^2 G_2^2 G_3^2. \quad (9.37)$$

$H_{R_5}$  est ainsi une fonction des composantes du moment cinétique.  $H_{R_5}$  appartient à l'ensemble  $\mathcal{V}$  généré par les éléments  $G_1^2 G_2^4, G_2^2 G_3^4, G_3^2 G_1^4, G_1^4 G_2^2, G_2^4 G_3^2, G_3^4 G_1^2, G_1^2 G_2^2 G_3^2$ , qui étant linéairement indépendants constituent une base de  $\mathcal{V}$ . Nous estimons ainsi les résidus d'ordre 5 en considérant la norme euclidienne  $\|\cdot\|$  associée à cette base dans  $\mathcal{V}$ . Dans la suite, on estime ainsi analytiquement les résidus par la norme  $\|H_{R_5}\|$  donnée par

$$\|H_{R_5}\| = \sqrt{Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2 + Q_4^2 + Q_5^2 + Q_6^2 + Q_7^2}. \quad (9.38)$$

## 9.2 Ajout d'une étape supplémentaire

Les intégrateurs présentant le nombre minimum d'étapes ne sont pas forcément les plus efficaces, bien qu'ils présentent le temps minimal de calcul à un ordre donné. Il est possible d'ajouter une ou plusieurs étapes supplémentaires pour diminuer l'erreur due aux résidus d'ordre supérieur, qui n'ont pu être annulés. À temps de calcul identique, il est alors possible d'obtenir des intégrateurs plus précis. Comme noté par [Hairer \*et al.\* \(2006\)](#), l'intégrateur d'ordre 4 obtenu par [Suzuki \(1990\)](#) est généralement plus efficace que l'intégrateur d'ordre 4 obtenu par [Yoshida \(1990\)](#). L'intégrateur d'ordre 4 de [Yoshida \(1990\)](#) compose trois fois un intégrateur d'ordre 2, ce qui aboutit à 7 étapes pour un hamiltonien décomposé en deux parties alors que l'intégrateur d'ordre 4 de [Suzuki \(1990\)](#) compose cinq fois un intégrateur d'ordre 2, ce qui aboutit à 11 étapes dans ce cas. Cependant l'intégrateur de [Suzuki \(1990\)](#) est généralement plus précis pour un même temps de calcul.

Pour obtenir des intégrateurs plus précis, nous avons ajouté une étape supplémentaire aux schémas précédents afin de minimiser les résidus d'ordre 5. L'ajout d'un paramètre libre augmente le temps de calcul, puisque on ajoute par exemple deux étapes supplémentaires pour un intégrateur symétrique. Cependant, la minimisation des résidus d'ordre 5 peut permettre d'obtenir des intégrateurs plus précis pour un même temps de calcul. Pour cela, nous allons minimiser la norme  $\|H_{R_5}\|$  en déterminant à l'aide de multiplicateurs de Lagrange les extrema de la norme au carré  $\|H_{R_5}\|^2$ .

### 9.2.1 Décomposition ABC : intégrateurs P

L'ajout d'un paramètre conduit à ajouter deux étapes supplémentaires aux intégrateurs symétriques à neuf étapes pour la décomposition ABC. Pour la décomposition ABC, on a recensé 15 types d'intégrateurs symétriques avec 11 étapes, qu'on appelle dans la suite intégrateurs P, triés par ordre alphabétique

$$\begin{aligned}
 ABABACABABA & P1 \\
 ABABCACBABA & P2 \\
 ABABCBCBABA & P3 \\
 ABACABACABA & P4 \\
 ABACACACABA & P5 \\
 ABACBABCABA & P6 \\
 ABACBCBCABA & P7 \\
 ABCABABACBA & P8 \\
 ABCABCBCACBA & P9 \\
 ABCACACACBA & P10 \\
 ABCACBCACBA & P11 \\
 ABCBABABCBA & P12 \\
 ABCBACABCBA & P13 \\
 ABCBCACBCBA & P14 \\
 ABCBCBCBCBA & P15.
 \end{aligned} \tag{9.39}$$

Les intégrateurs du type P1 pour la permutation ABC sont donnés par

$$\mathcal{S}_{P1ABC}(h) = e^{hL_K} = e^{a_1 h L_A} e^{b_1 h L_B} e^{a_2 h L_A} e^{b_2 h L_B} e^{a_3 h L_A} e^{c_1 h L_C} e^{a_3 h L_A} e^{b_2 h L_B} e^{a_2 h L_A} e^{b_1 h L_B} e^{a_1 h L_A} \tag{9.40}$$

où

$$a_3 = \frac{1}{2} - (a_1 + a_2), \quad b_2 = \frac{1}{2} - b_1, \quad c_1 = 1, \tag{9.41}$$

et

$$hK = hH + h^3 H_{R_3} + h^5 H_{R_5} + O(h^7). \tag{9.42}$$

Avec  $1+x = I_1/I_2$  et  $1+y = I_1/I_3$ , on calcule les extrema de  $\|H_{R_5}\|^2(a_1, b_1, a_2, x, y)$  avec les contraintes  $P_1(a_1, b_1, a_2, x, y) = P_2(a_1, b_1, a_2, x, y) = 0$  pour déterminer les coefficients  $a_i, b_i, c_i$ .

### 9.2.2 Décomposition RS : intégrateur R

L'ajout d'une étape supplémentaire conduit pour la décomposition RS à un unique intégrateur, qu'on appellera dans la suite intégrateur R, donné par

$$\mathcal{S}_R(h) = e^{a_1 h L_R} e^{b_1 h L_S} e^{a_2 h L_R} e^{b_2 h L_S} e^{a_3 h L_R} e^{b_2 h L_S} e^{a_2 h L_R} e^{b_1 h L_S} e^{a_1 h L_R} \quad (9.43)$$

où

$$a_3 = 1 - 2(a_1 + a_2), \quad b_2 = \frac{1}{2} - b_1, \quad (9.44)$$

et

$$hK = hH + h^3 H_{R_3} + h^5 H_{R_5} + O(h^7). \quad (9.45)$$

Avec  $x = I_1/I_2$  et  $y = I_1/I_3$ , on doit résoudre  $P_1(a_1, b_1, a_2, x, y) = P_2(a_1, b_1, a_2, x, y) = 0$  pour annuler  $H_{R_3}$  et minimiser la norme au carré  $\|H_{R_5}\|^2(a_1, b_1, a_2, x, y)$  afin de déterminer les coefficients  $a_i, b_i$ .

### 9.3 Coût des intégrateurs du type RS

Considérons un intégrateur symplectique pour le hamiltonien du corps solide libre  $H = R + S$  avec  $R = R_1$  et  $S = R_3 + R_G$ , où

$$R_1 = \frac{G_1^2}{2} \left( \frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_2} \right) \quad (9.46)$$

$$R_3 = \frac{G_3^2}{2} \left( \frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_2} \right) \quad (9.47)$$

$$R_G = \frac{G^2}{2I_2}. \quad (9.48)$$

Le hamiltonien  $R = R_1$  se traduit par une rotation autour de l'axe principal  $\mathbf{I}$  et  $S$  par une rotation d'axe  $\mathbf{K}$  correspondant au hamiltonien  $R_3$  suivie par une rotation autour du moment cinétique donnée par le hamiltonien  $R_G$ . Comme observé par [Fassò \(2003\)](#), les hamiltoniens  $R_1$  et  $R_3$  commutent avec  $R_G$  pour les crochets de Poisson  $\{.,.\}$ . Ainsi l'intégration du hamiltonien  $R_G$  peut être réalisée en dehors d'une étape S et on peut regrouper toutes les rotations autour du moment cinétique en une seule rotation au sein d'un schéma de type RS. Par conséquent, les intégrateurs  $\mathcal{S}_{RS}$  avec la permutation ABC et  $\mathcal{S}_{SR}$  avec la permutation CBA sont identiques, comme évoqué à la section 9.1.2.

On peut ainsi écrire l'intégrateur de type RS

$$\mathcal{S}_{RS}(h) = \prod_{i=1}^n e^{a_i h L_R} e^{b_i h L_S} \quad (9.49)$$

sous la forme

$$\mathcal{S}_{RS}(h) = e^{h L_{R_G}} \prod_{i=1}^n e^{a_i h L_{R_1}} e^{b_i h L_{R_3}}. \quad (9.50)$$

La rotation selon le moment cinétique doit être réalisée uniquement, lorsque l'orientation du corps est nécessaire. Si l'énergie cinétique de rotation est couplée à un potentiel dépendant de l'orientation du solide, la rotation  $e^{h L_{R_G}}$  devra être réalisée à chaque pas. Si l'énergie cinétique n'est couplée à aucun potentiel, on aura uniquement besoin de réaliser l'étape  $R_G$ , lorsque l'écriture de l'orientation du solide sera demandée. Si l'on souhaite réaliser une écriture tous les  $N$  pas d'intégration, il faudra réaliser la rotation  $e^{N h L_{R_G}}$  tous les  $N$  pas.

Cette diminution du coût de calcul des intégrateurs obtenue avec une décomposition RS n'avait à notre connaissance pas été observée.

## 9.4 Nombre d'étapes des intégrateurs spécifiques

Dans cette section, nous allons chercher à déterminer le nombre minimal d'étapes que peuvent présenter les intégrateurs spécifiques au corps solide libre.

Comme nous l'avons vu dans la section 7.2, le nombre minimal d'étapes d'un intégrateur à un ordre donné dépend du nombre de termes indépendants présents dans ses résidus. Pour construire un intégrateur symplectique d'ordre  $n$ , il est nécessaire d'annuler les résidus pour les ordres 2 à  $n$ . Cela implique de vérifier à chaque ordre un certain nombre d'équations donné par le nombre de termes indépendants. Ces équations doivent être vérifiées par les coefficients de l'intégrateur et leur nombre impose ainsi un nombre minimal de coefficients indépendants pour l'intégrateur. Ce nombre minimal de coefficients donnent alors le nombre minimal d'étapes de l'intégrateur.

Nous allons effectuer ce calcul à tout ordre ici selon cette procédure comme nous l'avons réalisé pour les intégrateurs d'ordre 4 dans la section 9.1. On considère ainsi les intégrateurs du corps solide libre

$$\mathcal{S}_{ABC}(h) = \prod_{i=1}^n e^{a_i h L_A} e^{b_i h L_B} e^{c_i h L_C}, \quad (9.51)$$

et

$$\mathcal{S}_{RS}(h) = \prod_{i=1}^n e^{a_i h L_R} e^{b_i h L_S}. \quad (9.52)$$

On appelle étape d'un intégrateur un pas d'intégration du type  $e^{a_i h L_A}$ ,  $e^{b_i h L_B}$ ,  $e^{c_i h L_C}$ ,  $e^{a_i h L_R}$ ,  $e^{b_i h L_S}$ . Ces intégrateurs conduisent à l'intégration exacte d'un hamiltonien modifié  $K$ , dont l'expression dans le cas du hamiltonien du corps solide libre est donné d'après le théorème de la section 8.3 par

$$\begin{aligned} hK &= h \left( \beta_{1,100} \frac{G_1^2}{2I_1} + \beta_{1,010} \frac{G_2^2}{2I_2} + \beta_{1,001} \frac{G_3^2}{2I_3} \right) \\ &+ \sum_{k=1}^{+\infty} h^{2k} \sum_{\substack{0 \leq p, q, r \\ p+q+r=k-1}} \beta_{2k, pqr} G_1^{2p+1} G_2^{2q+1} G_3^{2r+1} \\ &+ \sum_{k=1}^{+\infty} h^{2k+1} \sum_{\substack{0 \leq p, q, r \leq k \\ p+q+r=k+1}} \beta_{2k+1, pqr} G_1^{2p} G_2^{2q} G_3^{2r}, \end{aligned} \quad (9.53)$$

où les coefficients  $\beta_{l, pqr}$  sont des fonctions des coefficients  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$  et des moments d'inertie  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$ . Pour que l'intégrateur soit d'ordre  $n$ , il suffit de vérifier les équations

$$\begin{aligned} \beta_{1,100} &= \beta_{1,010} = \beta_{1,001} = 1 \\ \beta_{l, pqr} &= 0, \quad l \in \mathbb{N}, 2 \leq l \leq n. \end{aligned} \quad (9.54)$$

Dans le cas d'un intégrateur symétrique, les résidus d'ordre pair sont nuls (e.g. [Yoshida, 1990](#)) et l'expression du hamiltonien est

$$\begin{aligned} hK &= h \left( \beta_{1,100} \frac{G_1^2}{2I_1} + \beta_{1,010} \frac{G_2^2}{2I_2} + \beta_{1,001} \frac{G_3^2}{2I_3} \right) \\ &+ \sum_{k=1}^{+\infty} h^{2k+1} \sum_{\substack{0 \leq p, q, r \leq k \\ p+q+r=k+1}} \beta_{2k+1, pqr} G_1^{2p} G_2^{2q} G_3^{2r}. \end{aligned} \quad (9.55)$$

Pour que l'intégrateur soit d'ordre  $n$ ,  $n$  étant pair, il suffit alors de vérifier les équations

$$\begin{aligned} \beta_{1,100} &= \beta_{1,010} = \beta_{1,001} = 1 \\ \beta_{2l+1, pqr} &= 0, \quad l \in \mathbb{N}, 1 \leq l \leq \frac{n}{2} - 1. \end{aligned} \quad (9.56)$$

Pour avoir un intégrateur d'ordre  $n$ , il faut choisir les valeurs des coefficients  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$  telles que les équations (9.54) ou (9.56) pour les coefficients  $\beta_{l, pqr}$  soient vérifiées. Pour déterminer le nombre d'étapes

nécessaires pour obtenir un intégrateur d'ordre  $n$ , nous allons recenser le nombre  $N(n)$  d'équations indépendantes à vérifier pour les coefficients  $\beta_{l,pqr}$  comme cela a été fait dans le cas général des algèbres de Lie. Koseleff (1993), McLachlan (1995), Koseleff (1996) ont en effet déduit le nombre d'équations à vérifier en étudiant la dimension des algèbres de Lie en fonction de l'ordre. Pour résoudre ces  $N(n)$  équations indépendantes, nous avons besoin d'un minimum de  $N(n)$  coefficients  $a_i, b_i, c_i$  indépendants. À partir du nombre de coefficients  $\beta_{l,pqr}$  à considérer, on peut obtenir le nombre minimal d'étapes de l'intégrateur, qui est ainsi donné par le nombre d'équations  $N(n)$  à vérifier (Koseleff, 1993, McLachlan, 1995, Koseleff, 1996).

Dans le chapitre 8, nous avons déterminé une base et la dimension des algèbres  $\mathcal{L}_k$  seulement pour les ordres 1 à 5. Pour les ordres supérieurs, nous avons uniquement écrit les résidus comme une combinaison linéaire de termes mais nous n'avons pas déterminé de bases pour les algèbres de Lie. Ainsi nous n'avons pas démontré que les coefficients de ces combinaisons linéaires étaient indépendants.

Dans cette section, nous pourrons ainsi seulement déterminer le nombre minimal d'étapes pour les ordres 1 à 5 et, pour les ordres supérieurs, nous obtiendrons uniquement une borne supérieure au nombre minimal d'étapes.

### 9.4.1 Nombre de coefficients

Nous allons d'abord compter le nombre de coefficients présents  $\beta_{l,pqr}$  (équation 9.53) à chaque ordre dans les résidus des intégrateurs. Le nombre de coefficients  $\beta_{l,pqr}$  à l'ordre  $l$  est égal au nombre de termes présents dans les combinaisons linéaires à l'ordre  $l$ . Nous allons ainsi compter le nombre de termes des combinaisons linéaires présents aux ordres pairs et impairs.

Nous allons ensuite sommer le nombre de coefficients présents à chaque ordre pour obtenir le nombre total de coefficients pour les ordres pairs et impairs. Pour cela, nous allons utiliser les valeurs des sommes suivantes

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad (9.57)$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \quad (9.58)$$

#### 9.4.1.1 Ordre pair

Le résidu d'ordre pair  $2k$  est une combinaison linéaire des termes  $G_1^{2p+1}G_2^{2q+1}G_3^{2r+1}$  avec  $p+q+r = k-1$  et  $p, q, r \in \mathbb{N}$  d'après la section 8.3 et le nombre de ces termes,  $n_{2k}$ , est ainsi donné par

$$\begin{aligned} n_{2k} &= \sum_{\substack{0 \leq p, q, r \\ p+q+r=k-1}} 1 \\ &= \sum_{p=0}^{k-1} \sum_{\substack{0 \leq q, r \\ q+r=k-1-p}} 1 \\ &= \sum_{p=0}^{k-1} \sum_{q=0}^{k-1-p} 1 \\ &= \sum_{p=0}^{k-1} (k-p) \\ &= k^2 - \frac{k(k-1)}{2} \\ n_{2k} &= \frac{k(k+1)}{2}. \end{aligned} \quad (9.59)$$

Le nombre de coefficients  $\beta_{2k,pqr}$  présents dans le résidu d'ordre pair  $2k$  est ainsi

$$n_{2k} = k(k+1)/2. \quad (9.60)$$



Pour avoir un intégrateur d'ordre  $2n$ , il est nécessaire d'annuler les coefficients  $\beta_{2k,pqr}$  des ordres pairs pour  $1 \leq k \leq n$ . Le nombre des coefficients  $\beta_{2k,pqr}$  à annuler est donné par

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n \frac{k(k+1)}{2} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n k^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n k \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} + \frac{n(n+1)}{4} \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1+3)}{12} \\
&= \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.
\end{aligned} \tag{9.61}$$

Le nombre  $n_p(2n)$  de coefficients d'ordre pair  $\beta_{2k,pqr}$  à considérer pour avoir un intégrateur d'ordre  $2n$  est ainsi

$$n_p(2n) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}. \tag{9.62}$$

#### 9.4.1.2 Ordre impair

D'après la section 8.3, le résidu d'ordre impair est une combinaison linéaire des termes  $G_1^{2p} G_2^{2q} G_3^{2r}$  avec  $p+q+r = k+1$ ,  $p, q, r \in \mathbb{N}$  et  $p, q, r \leq k$ . Le nombre de ces termes,  $n_{2k+1}$ , pour  $k \in \mathbb{N}^*$  est donné par

$$\begin{aligned}
n_{2k+1} &= \sum_{\substack{0 \leq p, q, r \leq k \\ p+q+r=k+1}} 1 \\
&= \sum_{p=0}^k \sum_{\substack{0 \leq q, r \leq k \\ q+r=k+1-p}} 1 \\
&= k + \sum_{p=1}^k \sum_{\substack{0 \leq q, r \leq k \\ q+r=k+1-p}} 1 \\
&= k + \sum_{p=1}^k \sum_{q=0}^{k+1-p} 1 \\
&= k + \sum_{p=1}^k (k+2-p) \\
&= k + k(k+2) - \frac{k(k+1)}{2} \\
n_{2k+1} &= \frac{k(k+5)}{2}.
\end{aligned} \tag{9.63}$$

Le nombre de coefficients  $\beta_{2k+1,pqr}$  présents dans le résidu d'ordre impair  $2k+1$  est ainsi

$$n_{2k+1} = \frac{k(k+5)}{2}. \tag{9.64}$$

Pour avoir un intégrateur d'ordre  $2n+1$ , il est nécessaire d'annuler les coefficients  $\beta_{2k+1,pqr}$  des

ordres impairs pour  $1 \leq k \leq n$ . Le nombre de coefficients  $\beta_{2k+1,pqr}$  à annuler est donné par

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n \frac{k(k+5)}{2} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n k^2 + \frac{5}{2} \sum_{k=1}^n k \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} + \frac{5n(n+1)}{4} \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1+15)}{12} \\
&= \frac{n(n+1)(n+8)}{6}.
\end{aligned} \tag{9.65}$$

On obtient ainsi le nombre de coefficients  $\beta_{2k+1,pqr}$  à considérer. À cela, il faut ajouter les trois coefficients d'ordre 1 pour lesquels nous devons vérifier  $\beta_{1,100} = \beta_{1,010} = \beta_{1,001} = 1$ .

Le nombre  $n_i(2n+1)$  de coefficients d'ordre impair  $\beta_{2k+1,pqr}$  à considérer pour avoir un intégrateur d'ordre  $2n+1$  est ainsi

$$n_i(2n+1) = \frac{n(n+1)(n+8)}{6} + 3. \tag{9.66}$$

### 9.4.2 Nombre de relations entre les coefficients

Nous avons ainsi obtenu le nombre de coefficients que nous devons considérer pour obtenir un intégrateur d'ordre donné. À chacun de ses coefficients est associée une équation à vérifier. Ainsi le nombre d'équations à considérer est égal au nombre de coefficients.

Cependant, il existe des relations supplémentaires entre ces coefficients qui ne sont pas indépendants. Chacune de ses relations supplémentaires permet de diminuer de 1 le nombre de coefficients à considérer et donc le nombre d'équations à vérifier.

Aux ordres impairs différents de 1, il existe une relation supplémentaire entre les coefficients donnés par le théorème de la section 8.4. Si on considère les coefficients d'ordre impair  $\beta_{2k+1,pqr}$  pour  $1 \leq k \leq n$ , on réduit ainsi le nombre de coefficients à considérer de  $n$ .

Dans le cas d'une décomposition RS, le hamiltonien  $H$  est donné par  $H = R + S$  avec

$$R = \frac{G_1^2}{2} \left( \frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_2} \right), \tag{9.67}$$

$$S = \frac{G_3^2}{2} \left( \frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_2} \right) + \frac{G^2}{2I_2}. \tag{9.68}$$

Ainsi on a égalité des coefficients  $\beta_{1,010} = \beta_{1,001}$ , ce qui réduit de 1 le nombre d'équations à vérifier.

Aux ordres impairs, le nombre de coefficients  $N_i(2n+1)$  à considérer devient ainsi

$$N_i(2n+1) = \frac{n(n+1)(n+8)}{6} + 3 - n + (-1)_{RS}. \tag{9.69}$$

Pour les ordres pairs, nous ne recensons pas de relations supplémentaires entre les coefficients et le nombre de coefficients  $N_p(2n)$  à considérer est

$$N_p(2n) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}. \tag{9.70}$$

### 9.4.3 Nombre d'équations

Pour obtenir le nombre total d'équations  $N_{tot}(2n)$  à vérifier pour construire un intégrateur d'ordre pair  $2n$ , on somme le nombre de coefficients pour les ordres impairs  $2k+1$  avec  $1 \leq k \leq n-1$  et pour

les ordres pairs  $2k$  avec  $1 \leq k \leq n$ . Par conséquent,

$$\begin{aligned}
N_{tot}(2n) &= N_p(2n) + N_i(2(n-1) + 1) \\
&= \frac{n(n+1)(n+2)}{6} + \frac{n(n-1)(n+7)}{6} + 4 - n + (-1)_{RS} \\
&= \frac{n(2n^2 + 9n - 5)}{6} + 4 - n + (-1)_{RS} \\
N_{tot}(2n) &= \frac{n(2n^2 + 9n - 11)}{6} + 4 + (-1)_{RS}. \tag{9.71}
\end{aligned}$$

Ainsi pour construire un intégrateur d'ordre pair  $2n$ , le nombre total d'équations  $N_{tot}(2n)$  à considérer est donné par

$$N_{tot}(2n) = \frac{n(2n^2 + 9n - 11)}{6} + 4 + (-1)_{RS}. \tag{9.72}$$

Pour obtenir le nombre total d'équations  $N_{tot}(2n+1)$  à vérifier pour construire un intégrateur d'ordre impair  $2n+1$ , on somme le nombre de coefficients pour les ordres impairs  $2k+1$  avec  $1 \leq k \leq n$  et les ordres pairs  $2k$  avec  $1 \leq k \leq n$ . Ainsi,

$$\begin{aligned}
N_{tot}(2n+1) &= N_p(2n) + N_i(2n+1) \\
&= \frac{n(n+1)(n+2)}{6} + \frac{n(n+1)(n+8)}{6} + 3 - n + (-1)_{RS} \\
&= \frac{n(n+1)(n+5)}{3} + 3 - n + (-1)_{RS} \\
N_{tot}(2n+1) &= \frac{n(n^2 + 6n + 2)}{3} + 3 + (-1)_{RS}. \tag{9.73}
\end{aligned}$$

Ainsi pour construire un intégrateur d'ordre impair  $2n+1$ , le nombre total d'équations  $N_{tot}(2n+1)$  à considérer est donné par

$$N_{tot}(2n+1) = \frac{n(n^2 + 6n + 2)}{3} + 3 + (-1)_{RS}. \tag{9.74}$$

Pour obtenir un intégrateur symétrique d'ordre pair  $2n$ , on considère seulement le nombre d'équations sur les ordres impairs. Le nombre d'équations à considérer  $N_{totalsym}(2n)$  est obtenu par

$$\begin{aligned}
N_{totalsym}(2n) &= N_i(2(n-1) + 1) \\
&= \frac{n(n-1)(n+7)}{6} + 4 - n + (-1)_{RS} \\
N_{totalsym}(2n) &= \frac{n(n^2 + 6n - 13)}{6} + 4 + (-1)_{RS}. \tag{9.75}
\end{aligned}$$

Le nombre d'équations à considérer  $N_{totalsym}(2n)$  pour construire un intégrateur symétrique d'ordre pair  $2n$  est ainsi

$$N_{totalsym}(2n) = \frac{n(n^2 + 6n - 13)}{6} + 4 + (-1)_{RS}. \tag{9.76}$$

#### 9.4.4 Nombre d'étapes

À partir du nombre d'équations, on peut donner une borne supérieure au nombre minimal d'étapes. Pour un intégrateur non symétrique, le nombre d'étapes est directement donné par le nombre d'équations.

Pour un intégrateur symétrique de  $2l$  étapes, les pas  $i$  et  $2l-i$  sont identiques et leurs coefficients associés le sont aussi. Le nombre de coefficients indépendants pour l'intégrateur est ainsi  $l$ . Les pas  $l$  et  $l+1$  sont identiques et se suivent et peuvent être ainsi fusionnés en une seule étape. Par conséquent, le nombre d'étapes d'un intégrateur symétrique d'ordre  $2n$  est  $2N_{totalsym}(2n) - 1$  avec  $N_{totalsym}(2n)$  le nombre d'équations.

Si l'intégrateur commence et finit avec le même type d'étapes, comme c'est le cas par exemple pour un intégrateur symétrique, et s'il n'est pas couplé avec un autre intégrateur réalisant par exemple l'intégration de l'énergie potentielle, on a une succession de deux étapes de même type lorsque l'on passe au pas suivant. Il est alors possible de fusionner ces deux étapes, pour diminuer le nombre d'étapes de 1. Cependant, ici le hamiltonien du corps solide libre sera couplé à un potentiel et ainsi on ne considérera pas cette réduction du coût.

On a obtenu précédemment le nombre d'équations dans le cas de l'algèbre de Lie générée par l'alphabet  $\mathcal{A} = (G_1^2, G_2^2, G_3^2)$ . Pour comparer au cas d'une algèbre de Lie générée par un hamiltonien ordinaire, on peut obtenir le nombre d'équations en calculant les dimensions des algèbres de Lie. Pour cela comme [Koseleff \(1993\)](#), [McLachlan \(1995\)](#), [Koseleff \(1996\)](#), on peut utiliser la formule de Witt ([Bourbaki, 1972](#)), qui donne la dimension des algèbres de Lie  $\mathcal{L}_k$  en fonction du cardinal, nombre d'éléments d'un ensemble, de l'alphabet  $X$  noté  $q = \text{card}(X)$

$$\sum_{d|n} d \dim(\mathcal{L}_d(X)) = q^n, \quad (9.77)$$

où  $d|n$  représente l'ensemble des entiers  $d$  qui divisent  $n$ . Dans le cas où le hamiltonien peut être divisé en deux  $q = 2$  et trois parties  $q = 3$ , la formule de Witt permet ainsi de donner la dimension des algèbres de Lie et ainsi le nombre d'équations. Pour le cas  $q = 2$ , cela a été fait par [Koseleff \(1993\)](#), [McLachlan \(1995\)](#), [Koseleff \(1996\)](#) et par [Munthe-Kaas et Owren \(1999\)](#) pour le cas, où  $q = 3$ .

Le tableau 9.1 compare ainsi la dimension des algèbres de Lie, le nombre d'équations, le nombre d'étapes des intégrateurs non symétriques et symétriques en fonction de l'ordre pour des hamiltoniens divisés en deux et trois parties pour un hamiltonien dans le cas général et pour le cas du hamiltonien du corps solide libre. La partie du tableau 9.1 sur le cas d'un hamiltonien général divisé en deux parties est extraite en majorité de [Koseleff \(1993\)](#). Pour remplir le tableau 9.1, nous avons aussi utilisé le recensement des intégrateurs symplectiques fait par [Blanes \*et al.\* \(2008\)](#) et [Skokos \*et al.\* \(2014\)](#) pour des hamiltoniens décomposés respectivement en deux et trois parties. Le nombre d'équations permet seulement de donner une borne supérieure au nombre minimal d'étapes. Il est possible de réaliser des intégrateurs comptant moins d'étapes que le nombre d'équations. Ainsi pour la décomposition en deux parties, [Yoshida \(1990\)](#) obtient en combinant de façon symétrique des intégrateurs symétriques un intégrateur d'ordre 6, produit de sept intégrateurs d'ordre 2 et comptant au total 15 étapes, alors que le nombre d'étapes prévu par le nombre d'équations est 19 pour un intégrateur symétrique d'ordre 6.

Pour le corps solide libre, la dimension des algèbres de Lie est donnée seulement pour les cinq premiers ordres qui ont été étudiés dans le chapitre 8. Ainsi, le nombre d'équations donné dans le tableau 9.1 correspond au nombre minimal d'équations uniquement pour les cinq premiers ordres.

Nous allons comparer le nombre d'étapes pour les intégrateurs symétriques donnés dans le tableau 9.1. Pour un intégrateur d'ordre 4, dans le cas d'un hamiltonien décomposé en deux parties, [Koseleff \(1996\)](#) montre que le nombre minimal d'étapes est sept et que l'intégrateur d'ordre 4 proposé par [Yoshida \(1990\)](#) est l'unique solution réelle. Pour un intégrateur d'ordre 4, dans le cas d'une décomposition RS du hamiltonien du corps solide libre, le nombre d'étapes déduit du nombre d'équations est sept comme indiqué dans le tableau 9.1. Comme nous l'avons vu dans la section 9.1.2, les propriétés de l'algèbre de Lie du moment cinétique ne permettent pas d'obtenir des intégrateurs d'ordre 4 avec moins d'étapes pour la décomposition RS.

Pour un hamiltonien décomposé en trois parties, [Koseleff \(1996\)](#) démontre que le nombre minimal d'étapes est 13 pour un intégrateur symétrique d'ordre 4 et [Tang \(2002\)](#) démontre que l'intégrateur de [Yoshida \(1990\)](#) est l'unique solution réelle. Pour le corps solide libre, le nombre minimal d'étapes devient neuf (tableau 9.1), comme nous l'avons vu dans la section 9.1.1, et la décomposition en trois parties tire profit de l'algèbre de Lie du corps solide libre pour construire des intégrateurs avec moins d'étapes.

Ordre	Dimension	Nombre d'équations				Nombre d'étapes	
		NS		S		NS	S
			Total		Total		
Cas général (décomposition en deux parties) <sup>a</sup>							
1	2	2	2	2	2	2	
2	1	1	3		2	3	3
3	2	2	5	2		6	
4	3	3	8		4	7	7
5	6	6	14	6			
6	9	9	23		10		15
7	18	18	41	18			
8	30	30	71		28		31
9	56	56	127	56			
10	99	99	226		84		
Cas général (décomposition en trois parties)							
1	3	3	3	3		3	
2	3	3	6		3	5	5
3	8	8	14	8			
4	18	18	32		11		<sup>b</sup> 13
5	48	48	80	48			
6	116	116	196		59		<sup>c</sup> 29
7	312	312	508	312			
8	810	810	1318		371		<sup>d</sup> 61
9	2184	2184	3502	2184			
10	5880	5880	9382		2555		<sup>e</sup> 125
Corps solide libre (RS)							
1	3	2	2	2		2	
2	1	1	3		2	3	3
3	2	2	5	2		5	
4	3	3	8		4	8	7
5	6	6	14	6		14	
6		6	20		10	20	19
7		11	31	11		31	
8		10	41		21	41	41
9		17	58	17		58	
10		15	73		38	73	75
Corps solide libre (ABC)							
1	3	3	3	3		3	
2	1	1	4		3	4	5
3	2	2	6	2		6	
4	3	3	9		5	9	9
5	6	6	15	6		15	
6		6	21		11	21	21
7		11	32	11		32	
8		10	42		22	42	43
9		17	59	17		59	
10		15	74		39	74	77

TABLEAU 9.1 – Dimension des algèbres de Lie  $\mathcal{L}_k$ , nombre d'équations, nombre d'étapes d'un intégrateur non symétrique (NS) et symétrique (S) dans le cas d'un hamiltonien général et de celui du corps solide libre en fonction de l'ordre pour une décomposition en deux et trois parties.

<sup>a</sup>. tableau extrait de Koseleff (1993)  
<sup>b</sup>. (Koseleff, 1993, 1996, Tang, 2002)  
<sup>c</sup>. (Yoshida, 1990)  
<sup>d</sup>. (Yoshida, 1990)  
<sup>e</sup>. (Sofroniou et Spaletta, 2005)

# Chapitre 10

## Tests numériques

Dans le chapitre 9, nous avons construit des intégrateurs spécifiques au corps solide libre d'ordre 4, dont les coefficients dépendent des moments d'inertie du corps solide à intégrer. Pour la décomposition ABC, nous avons obtenu les intégrateurs N (section 9.1.1), qui sont des intégrateurs à neuf étapes au nombre de sept, et les intégrateurs P (section 9.2.1), qui sont des intégrateurs à 11 étapes présentant un paramètre libre et qui sont au nombre de 15. Pour la décomposition RS, nous avons obtenu l'intégrateur R (section 9.2.2), qui est un intégrateur avec un paramètre libre. Dans le chapitre 9, nous avons aussi vu que les intégrateurs N et P présentaient moins d'étapes que les intégrateurs généraux existants. Si la diminution du nombre d'étapes permet de diminuer le temps de calcul, cela ne suffit cependant pas à conclure sur leur efficacité. Pour déterminer leur efficacité, il faut déterminer leur précision pour un temps de calcul identique.

Dans ce chapitre, nous allons ainsi comparer les intégrateurs spécifiques obtenus aux intégrateurs symplectiques de référence existants afin de déterminer si les intégrateurs spécifiques obtenus sont plus efficaces que les intégrateurs symplectiques généraux existants. Pour cela, on peut estimer les résidus analytiques comme nous l'avons vu dans la section 9.1.3 ou réaliser une intégration numérique et déterminer l'écart à la solution exacte. L'estimation des résidus analytiques ne nécessite pas une intégration numérique et permet d'estimer la précision d'un intégrateur plus rapidement. Afin de vérifier l'équivalence entre ces deux approches, nous allons d'abord considérer le cas simplifié d'une toupie sphérique.

Nous procéderons ensuite à des intégrations numériques sur la molécule d'eau pour comparer les intégrateurs obtenus à ceux existants. La molécule d'eau constitue un exemple classique de molécule asymétrique, qui est généralement utilisé pour comparer les intégrateurs du corps solide libre, notamment en dynamique moléculaire (e.g. Dullweber *et al.*, 1997, Fassò, 2003, Omelyan, 2007, Hairer et Vilmart, 2006).

Les caractéristiques physiques d'un corps n'apparaissent qu'au sein des équations de la rotation par le biais des moments d'inertie. On peut associer à tout corps solide physique trois moments d'inertie. En échantillonnant l'ensemble des corps physiques existants, comme cela a été réalisé par Fassò (2003), on peut ainsi déterminer pour tout solide le meilleur intégrateur spécifique et le comparer aux intégrateurs existants. On utilise pour cela l'estimation analytique des résidus, qui est plus rapide qu'une intégration numérique.

On comparera enfin numériquement pour la molécule d'eau les intégrateurs spécifiques construits ici aux intégrateurs développés par Hairer et Vilmart (2006) pour le corps solide libre.

### 10.1 Méthode

Dans cette section, nous allons décrire la méthode utilisée pour comparer numériquement deux intégrateurs différents.

### 10.1.1 Principe

Pour comparer deux intégrateurs différents, il est nécessaire de déterminer leur coût ou temps de calcul. En effet, supposons qu'un intégrateur  $X$  réalise une intégration sur une durée  $T$  avec un pas d'intégration  $h$  pour un temps de calcul  $\mathcal{C}_X$  et qu'un intégrateur  $Y$  réalise la même intégration sur la même durée avec le même pas d'intégration pour un temps de calcul  $\mathcal{C}_Y$ . On ne peut comparer directement leur précision car ces deux intégrateurs ne présentent pas le même temps de calcul. Pour effectuer une comparaison, il faudrait par exemple réaliser une intégration avec l'intégrateur  $Y$  pour le pas d'intégration  $h\mathcal{C}_Y/\mathcal{C}_X$ . En effet, pour une intégration sur une durée fixée, le temps de calcul est inversement proportionnel au pas d'intégration et l'intégrateur  $Y$  présenterait alors le même temps de calcul que  $X$ , à savoir  $\mathcal{C}_X$ . Ainsi deux intégrateurs doivent être comparés pour le même rapport  $h/\mathcal{C}$  avec  $h$  le pas d'intégration et  $\mathcal{C}$  le coût de calcul, comme indiqué dans [Farrés et al. \(2013\)](#). Ainsi dans la suite, nous comparerons la précision de deux intégrateurs différents pour un même rapport  $h/\mathcal{C}$ .

Les étapes  $e^{hL_A}$ ,  $e^{hL_B}$ ,  $e^{hL_C}$ ,  $e^{hL_R}$  correspondent à des rotations autour des axes dirigés respectivement par les vecteurs  $\mathbf{I}$ ,  $\mathbf{J}$ ,  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{I}$ . Par exemple, le pas  $e^{hL_A}$  se traduit par une rotation autour de  $\mathbf{I}$ . Ainsi les étapes  $e^{hL_A}$ ,  $e^{hL_B}$ ,  $e^{hL_C}$ ,  $e^{hL_R}$  présentent toutes le même coût  $\mathcal{C}_0$ . Un schéma contenant  $N$  étapes de ce type présente ainsi un coût de  $N\mathcal{C}_0$ . Cependant l'étape  $e^{hL_S}$  pour la permutation RS se traduit par une rotation autour de  $\mathbf{K}$  et par une rotation  $e^{hL_{R_G}}$  autour du moment cinétique  $\mathbf{G}$ . On considère que le coût d'une rotation est dominé par l'évaluation des fonctions trigonométriques, le coût de la rotation autour de  $\mathbf{G}$  est ainsi  $\mathcal{C}_0$ . Ainsi le coût d'une étape  $e^{hL_S}$  est  $2\mathcal{C}_0$ . Cependant, comme indiqué dans la section 9.3, on aura besoin de compter le coût de  $\mathcal{C}_0$  d'une rotation autour de  $\mathbf{G}$  seulement une fois par pas d'intégration. Ainsi les intégrateurs d'ordre 2 RSR2 et ABCBA2 présentent alors respectivement un coût de  $4\mathcal{C}_0$  et de  $5\mathcal{C}_0$ . L'intégrateur RSR2 présente alors un temps de calcul 20% plus faible que l'intégrateur ABCBA2. Cette considération reste cohérente avec [Fassò \(2003\)](#), qui obtient numériquement que l'intégrateur d'ordre ABCBA2 est environ 10% plus rapide que l'intégrateur RSR2.

Dans la suite les intégrations numériques seront toutes réalisées avec les conditions initiales suivantes. Dans le repère d'inertie  $\mathcal{R}$ , le moment cinétique  $\mathbf{g}$  est donné par  $\mathbf{g} = (1, 1, 1)$  et l'orientation du corps par  $\mathbf{I} = (1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{J} = (0, 1, 0)$ ,  $\mathbf{K} = (0, 0, 1)$ . L'intégration se déroule sur la durée  $T = 1$  pour des pas d'intégration donnés par  $h_i = 1/2^i$  avec  $i = 1, \dots, 10$ . La précision numérique est obtenue en comparant l'orientation du solide  $(\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K})$  à celle donnée par la solution exacte  $(\mathbf{I}_{ref}, \mathbf{J}_{ref}, \mathbf{K}_{ref})$  par le résidu numérique

$$R_n = \sqrt{(\mathbf{I} - \mathbf{I}_{ref})^2 + (\mathbf{J} - \mathbf{J}_{ref})^2 + (\mathbf{K} - \mathbf{K}_{ref})^2}. \quad (10.1)$$

Pour de petits angles, cela correspond à la moyenne quadratique des erreurs angulaires sur l'orientation des trois axes principaux multipliée par le facteur  $\sqrt{3}$ . Cette quantité est calculée tous les pas. On réalise ensuite une moyenne sur les résidus obtenus sur une intégration pour obtenir le résidu numérique. Pour chaque intégrateur à comparer, on détermine ainsi le résidu numérique pour toutes les permutations possibles des moments d'inertie, afin de déterminer la meilleure permutation. On compare ensuite les intégrateurs entre eux pour leur meilleure permutation.

Le calcul de la solution exacte est rappelé en annexe E et a été implémenté à partir de la solution analytique matricielle proposée par [Celledoni et al. \(2008\)](#) et de la solution proposée pour le moment cinétique par [van Zon et Schofield \(2007\)](#).

### 10.1.2 Intégrateurs de référence

Nous allons comparer les intégrateurs spécifiques au corps solide libre à des intégrateurs symplectiques généraux, qui nous serviront de référence. [McLachlan \(1995\)](#) classe les différents intégrateurs symplectiques existants en différentes catégories. Le type NS désigne les intégrateurs non symétriques, le type S réfère aux intégrateurs symétriques et enfin le type SS correspond aux intégrateurs symétriques obtenus en combinant de façon symétrique des intégrateurs symétriques d'ordre moins élevé. Pour obtenir des intégrateurs de type SS, il existe notamment les méthodes génériques de [Yoshida \(1990\)](#) et [Suzuki \(1990\)](#), que nous avons rappelées dans le chapitre 7. Ces méthodes permettent d'obtenir des intégrateurs de type SS à tout ordre.

McLachlan (1995) note SSm un intégrateur obtenu en combinant  $m$  intégrateurs d'ordre 2, Sm les schémas symétriques obtenus en combinant  $2m$  intégrateurs d'ordre 1. McLachlan (1995) propose notamment un schéma d'ordre 4 pour  $m = 4$  et un autre pour  $m = 5$  et note que l'intégrateur S5 est environ 10 fois plus précis que les intégrateurs d'ordre 4 obtenus avec le type SS.

Au cours des intégrations numériques, nous avons ainsi comparé les intégrateurs spécifiques obtenus aux schémas de référence ci-dessous, qui sont écrits dans le cas du hamiltonien du corps solide libre pour les décompositions ABC et RS. Dans la suite, nous les désignerons par les dénominations ci-dessous pour simplifier.

### 10.1.2.1 Décomposition RS

**RSR2** (Ruth, 1983)

$$\mathcal{S}_2(h) = e^{\frac{1}{2}hL_R} e^{hL_S} e^{\frac{1}{2}hL_R} \quad (10.2)$$

**RSR4 SS3 Yoshida** (Yoshida, 1990, Forest et Ruth, 1990)

$$\mathcal{S}_{4Y}(h) = \mathcal{S}_2(x_1h) \mathcal{S}_2(x_0h) \mathcal{S}_2(x_1h) \quad (10.3)$$

avec  $x_1 = 1/(2 - 2^{1/3})$  et  $x_0 = -2^{1/3}/(2 - 2^{1/3})$ .

**RSR4 SS5 Suzuki** (Suzuki, 1990)

$$\mathcal{S}_{4S}(h) = \mathcal{S}_2(x_1h) \mathcal{S}_2(x_1h) \mathcal{S}_2(x_0h) \mathcal{S}_2(x_1h) \mathcal{S}_2(x_1h) \quad (10.4)$$

avec  $x_1 = 1/(4 - 4^{1/3})$  et  $x_0 = -4^{1/3}/(4 - 4^{1/3})$ .

**RSR4 SS5 McLachlan** (McLachlan, 1995)

$$\mathcal{S}_2(x_1h) \mathcal{S}_2(x_2h) \mathcal{S}_2(x_0h) \mathcal{S}_2(x_2h) \mathcal{S}_2(x_1h) \quad (10.5)$$

avec  $x_1 = 0.28$ ,  $x_2 = 0.62546642846767004501$  et  $x_0 = 1 - 2(x_1 + x_2)$ .

**RS4 S4 McLachlan** (McLachlan, 1995)

$$e^{a_1hL_R} e^{b_1hL_S} e^{a_2hL_R} e^{b_2hL_S} e^{a_3hL_R} e^{b_2hL_S} e^{a_2hL_R} e^{b_1hL_S} e^{a_1hL_R} \quad (10.6)$$

avec  $a_1 = (642 + \sqrt{471})/3924$ ,  $a_2 = 121(12 - \sqrt{471})/3924$ ,  $a_3 = 1 - 2(a_1 + a_2)$ ,  $b_1 = 6/11$ ,  $b_2 = 1/2 - b_1$ .

**RS4 S5 McLachlan** (McLachlan, 1995)

$$e^{a_1hL_R} e^{b_1hL_S} e^{a_2hL_R} e^{b_2hL_S} e^{a_3hL_R} e^{b_3hL_S} e^{a_3hL_R} e^{b_2hL_S} e^{a_2hL_R} e^{b_1hL_S} e^{a_1hL_R} \quad (10.7)$$

avec  $a_1 = (14 - \sqrt{19})/108$ ,  $a_2 = (20 - 7\sqrt{19})/108$ ,  $a_3 = 1/2 - (a_1 + a_2)$ ,  $b_1 = 2/5$ ,  $b_2 = -1/10$ ,  $b_3 = 1 - 2(b_1 + b_2)$ .

**RSR6 SS7 Yoshida** (Yoshida, 1990)

$$\mathcal{S}_2(w_1h) \mathcal{S}_2(w_2h) \mathcal{S}_2(w_3h) \mathcal{S}_2(w_0h) \mathcal{S}_2(w_3h) \mathcal{S}_2(w_2h) \mathcal{S}_2(w_1h) \quad (10.8)$$

avec  $w_1 = 0.784513610477560$ ,  $w_2 = 0.235573213359357$ ,  $w_3 = -1.17767998417887$  et  $w_0 = 1 - 2(w_1 + w_2 + w_3)$ .

**RSR6 SS9 Yoshida** (Yoshida, 1990)

$$\mathcal{S}_{4Y}(y_1h) \mathcal{S}_{4Y}(y_0h) \mathcal{S}_{4Y}(y_1h) \quad (10.9)$$

avec  $y_1 = 1/(2 - 2^{1/5})$  et  $y_0 = -2^{1/5}/(2 - 2^{1/5})$ .



**RSR6 SS9 McLachlan** (McLachlan, 1995)

$$\mathcal{S}_2(w_1h) \mathcal{S}_2(w_2h) \mathcal{S}_2(w_3h) \mathcal{S}_2(w_4h) \mathcal{S}_2(w_0h) \mathcal{S}_2(w_4h) \mathcal{S}_2(w_3h) \mathcal{S}_2(w_2h) \mathcal{S}_2(w_1h) \quad (10.10)$$

avec  $w_1 = 0.1867$ ,  $w_2 = 0.55549702371247839916$ ,  $w_3 = 0.12946694891347535806$ ,  
 $w_4 = -0.84326562338773460855$  et  $w_0 = 1 - 2(w_1 + w_2 + w_3 + w_4)$ .

**RSR6 SS25 Suzuki** (Suzuki, 1990)

$$\mathcal{S}_{4S}(y_1h) \mathcal{S}_{4S}(y_1h) \mathcal{S}_{4S}(y_0h) \mathcal{S}_{4S}(y_1h) \mathcal{S}_{4S}(y_1h) \quad (10.11)$$

avec  $y_1 = 1/(4 - 4^{1/5})$  et  $y_0 = -4^{1/5}/(4 - 4^{1/5})$ .

### 10.1.2.2 Décomposition ABC

**ABC1**

$$\mathcal{S}_1(h) = e^{hL_A} e^{hL_B} e^{hL_C} \quad (10.12)$$

**ABC1\***

$$\mathcal{S}_1^*(h) = e^{hL_C} e^{hL_B} e^{hL_A} \quad (10.13)$$

**ABCBA2**

$$\mathcal{S}_2(h) = e^{\frac{1}{2}hL_A} e^{\frac{1}{2}hL_B} e^{hL_C} e^{\frac{1}{2}hL_B} e^{\frac{1}{2}hL_A} \quad (10.14)$$

**ABCBA4 SS3 Yoshida** (Yoshida, 1990, Forest et Ruth, 1990)

$$\mathcal{S}_2(x_1h) \mathcal{S}_2(x_0h) \mathcal{S}_2(x_1h) \quad (10.15)$$

avec  $x_1 = 1/(2 - 2^{1/3})$  et  $x_0 = -2^{1/3}/(2 - 2^{1/3})$ .

**ABCBA4 SS5 Suzuki** (Suzuki, 1990)

$$\mathcal{S}_2(x_1h) \mathcal{S}_2(x_1h) \mathcal{S}_2(x_0h) \mathcal{S}_2(x_1h) \mathcal{S}_2(x_1h) \quad (10.16)$$

avec  $x_1 = 1/(4 - 4^{1/3})$  et  $x_0 = -4^{1/3}/(4 - 4^{1/3})$ .

**ABCBA4 SS5 McLachlan** (McLachlan, 1995)

$$\mathcal{S}_2(x_1h) \mathcal{S}_2(x_2h) \mathcal{S}_2(x_0h) \mathcal{S}_2(x_2h) \mathcal{S}_2(x_1h) \quad (10.17)$$

avec  $x_1 = 0.28$ ,  $x_2 = 0.62546642846767004501$  et  $x_0 = 1 - 2(x_1 + x_2)$ .

**ABC4 S4 McLachlan** (McLachlan, 1995)

$$\mathcal{S}_1(c_4h) \mathcal{S}_1^*(d_4h) \mathcal{S}_1(c_3h) \mathcal{S}_1^*(d_3h) \mathcal{S}_1(c_2h) \mathcal{S}_1^*(d_2h) \mathcal{S}_1(c_1h) \mathcal{S}_1^*(d_1h) \quad (10.18)$$

avec  $d_1 = c_4 = a_1$ ,  $d_2 = c_3 = (a_1 + a_2) - b_1$ ,  $d_3 = c_2 = a_3/2$ ,  $d_4 = c_1 = b_1 - a_1$ ,  $a_1 = (642 + \sqrt{471})/3924$ ,  
 $a_2 = 121(12 - \sqrt{471})/3924$ ,  $a_3 = 1 - 2(a_1 + a_2)$ ,  $b_1 = 6/11$ ,  $b_2 = 1/2 - b_1$ .

**ABC4 S5 McLachlan** (McLachlan, 1995)

$$\mathcal{S}_1(c_5h) \mathcal{S}_1^*(d_5h) \mathcal{S}_1(c_4h) \mathcal{S}_1^*(d_4h) \mathcal{S}_1(c_3h) \mathcal{S}_1^*(d_3h) \mathcal{S}_1(c_2h) \mathcal{S}_1^*(d_2h) \mathcal{S}_1(c_1h) \mathcal{S}_1^*(d_1h) \quad (10.19)$$

avec  $d_1 = c_5 = a_1$ ,  $d_2 = c_4 = (a_1 + a_2) - b_1$ ,  $d_3 = c_3 = b_3/2$ ,  $d_4 = c_2 = (b_1 + b_2) - (a_1 + a_2)$ ,  
 $d_5 = c_1 = b_1 - a_1$ ,  $a_1 = (14 - \sqrt{19})/108$ ,  $a_2 = (20 - 7\sqrt{19})/108$ ,  $a_3 = 1/2 - (a_1 + a_2)$ ,  $b_1 = 2/5$ ,  
 $b_2 = -1/10$ ,  $b_3 = 1 - 2(b_1 + b_2)$ .

**ABCBA6 SS7 Yoshida** (Yoshida, 1990)

$$\mathcal{S}_2(w_1h) \mathcal{S}_2(w_2h) \mathcal{S}_2(w_3h) \mathcal{S}_2(w_0h) \mathcal{S}_2(w_3h) \mathcal{S}_2(w_2h) \mathcal{S}_2(w_1h) \quad (10.20)$$

avec  $w_1 = 0.784513610477560$ ,  $w_2 = 0.235573213359357$ ,  $w_3 = -1.17767998417887$  et  $w_0 = 1 - 2(w_1 + w_2 + w_3)$ .

**ABCBA6 SS9 Yoshida** (Yoshida, 1990)

$$\mathcal{S}_{4Y}(y_1h) \mathcal{S}_{4Y}(y_0h) \mathcal{S}_{4Y}(y_1h) \quad (10.21)$$

avec  $y_1 = 1/(2 - 2^{1/5})$  et  $y_0 = -2^{1/5}/(2 - 2^{1/5})$ .

**ABCBA6 SS9 McLachlan** (McLachlan, 1995)

$$\mathcal{S}_2(w_1h) \mathcal{S}_2(w_2h) \mathcal{S}_2(w_3h) \mathcal{S}_2(w_4h) \mathcal{S}_2(w_0h) \mathcal{S}_2(w_4h) \mathcal{S}_2(w_3h) \mathcal{S}_2(w_2h) \mathcal{S}_2(w_1h) \quad (10.22)$$

avec  $w_1 = 0.1867$ ,  $w_2 = 0.55549702371247839916$ ,  $w_3 = 0.12946694891347535806$ ,  $w_4 = -0.84326562338773460855$  et  $w_0 = 1 - 2(w_1 + w_2 + w_3 + w_4)$ .

**ABCBA6 SS25 Suzuki** (Suzuki, 1990)

$$\mathcal{S}_{4S}(y_1h) \mathcal{S}_{4S}(y_1h) \mathcal{S}_{4S}(y_0h) \mathcal{S}_{4S}(y_1h) \mathcal{S}_{4S}(y_1h) \quad (10.23)$$

avec  $y_1 = 1/(4 - 4^{1/5})$  et  $y_0 = -4^{1/5}/(4 - 4^{1/5})$ .

### 10.1.3 Coût des intégrateurs

Nous avons indiqué le coût des intégrateurs spécifiques au corps solide et ceux de référence considérés sur le tableau 10.1. Comme dans la section 10.1.1, nous avons considéré que le coût des étapes  $e^{hL_A}$ ,  $e^{hL_B}$ ,  $e^{hL_C}$ ,  $e^{hL_R}$ ,  $e^{hL_{RG}}$  était de  $\mathcal{C}_0$ .

Pour un intégrateur de type ABC, le coût est ainsi donné par le nombre d'étapes. Pour un intégrateur de type RS, le coût est donné par la somme du nombre d'étapes et du coût d'une étape  $e^{hL_{RG}}$ , qui est de  $\mathcal{C}_0$ . On peut ainsi remarquer qu'en n'effectuant pas l'étape  $e^{hL_{RG}}$  à chaque étape  $e^{hL_S}$  mais seulement une fois par pas d'intégration comme cela est indiqué dans la section 9.3, cela permet de diminuer de façon importante le coût des intégrateurs de type RS, notamment pour des intégrateurs d'ordre élevé, où le coût est presque divisé par 1.5.

En ce concerne les intégrateurs spécifiques, les intégrateurs N et P sont construits en utilisant la décomposition ABC et comptent respectivement 9 et 11 étapes. Ils présentent ainsi un coût respectif de  $9\mathcal{C}_0$  et  $11\mathcal{C}_0$ . L'intégrateur R construit pour la décomposition RS compte 9 étapes et présente un coût de  $10\mathcal{C}_0$ .

## 10.2 Toupie sphérique

Nous avons d'abord considéré une toupie sphérique, qui correspond à un corps présentant trois moments d'inertie égaux. La solution exacte de ce problème correspond à une rotation du solide autour du moment cinétique et ne nécessite pas de procéder à une intégration numérique. Cependant, cet exemple simple va nous permettre de vérifier la bonne correspondance entre les résidus analytiques et numériques. Pour la toupie sphérique,  $I_1 = I_2 = I_3$  et le hamiltonien s'écrit

$$H = \frac{G^2}{2I_1}. \quad (10.24)$$

Il est ainsi inutile de considérer les permutations des moments d'inertie, ces derniers étant tous égaux. Il est aussi inutile de considérer les intégrateurs utilisant la décomposition RS, car alors pour ces intégrateurs  $e^{hL_R}$  se réduit à l'identité et  $e^{hL_{RG}}$  à une rotation autour du moment cinétique. Les

Intégrateur spécifique	Coût	Coût S
N	9	
P	11	
R	10	13
Intégrateur de référence	Coût	Coût S
RSR2	4	4
RSR4 SS3 Yoshida	8	10
RSR4 SS5 Suzuki	12	16
RSR4 SS5 McLachlan	12	16
RS4 S4 McLachlan	10	13
RS4 S5 McLachlan	12	16
RSR6 SS7 Yoshida	16	22
RSR6 SS9 Yoshida	20	28
RSR6 SS9 McLachlan	20	28
RSR6 SS25 Suzuki	52	76
ABCBA2	5	
ABCBA4 SS3 Yoshida	13	
ABCBA4 SS5 Suzuki	21	
ABCBA4 SS5 McLachlan	21	
ABC4 S4 McLachlan	17	
ABC4 S5 McLachlan	21	
ABCBA6 SS7 Yoshida	29	
ABCBA6 SS9 Yoshida	37	
ABCBA6 SS9 McLachlan	37	
ABCBA6 SS25 Suzuki	101	

TABLEAU 10.1 – Coûts des intégrateurs spécifiques au corps solide et des intégrateurs de référence. Pour les intégrateurs de type RS, on a précisé le coût S, où on fait une rotation autour du moment cinétique pour chaque étape  $e^{hL_S}$ .

intégrateurs de type RS sont alors exacts. Les 7 types d'intégrateurs N de la décomposition ABC vus dans la section 9.1.1 présentent 12 solutions réelles présentées dans le tableau 10.2. Les solutions sont numérotées par ordre croissant du coefficient  $a_1$ . Par exemple, l'intégrateur du type N5 présente trois solutions différentes pour le coefficient  $a_1$ , qui donnent lieu aux trois intégrateurs N5 (1), N5 (2), N5 (3), où N5 (3) présente le coefficient  $a_1$  le plus élevé parmi ces trois intégrateurs. Lorsque les coefficients ne peuvent pas être écrits sous une forme exacte, nous les donnons avec quarante chiffres après la virgule, car ils doivent être connus avec une précision supérieure à la précision numérique, qui peut être celle de la double précision ou de la quadruple précision. Les résidus numériques sont représentés pour ces 12 intégrateurs sur la figure 10.1 ainsi que ceux d'intégrateurs de référence de la section 10.1.2. On en déduit le meilleur intégrateur spécifique pour la toupie sphérique, N5 (2), qui est environ 700 fois plus précis que l'intégrateur ABCBA4 SS3 Yoshida.

Nous estimons les résidus analytiques  $R_a$  à partir de la norme euclidienne des résidus d'ordre 5  $\|H_{R_5}\|$  donnée par l'équation (9.38) dans la section 9.1.3. Nous normalisons les résidus analytiques et numériques des 12 intégrateurs N par ceux du meilleur intégrateur N5 (2). Pour chacun des 12 intégrateurs, nous divisons ainsi son résidu analytique par le résidu analytique de l'intégrateur N5 (2) et son résidu numérique par le résidu numérique de l'intégrateur N5 (2). Pour les résidus numériques, on réalise une moyenne des résidus normalisés sur les huit premiers pas d'intégrations. Les résidus analytiques et numériques ainsi obtenus sont présentés dans le tableau 10.3. Sur la figure 10.2, les résidus analytiques normalisés sont représentés en fonction des résidus numériques normalisés et on observe que les deux résidus sont corrélés. Les résidus analytiques peuvent ainsi permettre de donner une estimation de la précision des intégrateurs spécifiques.

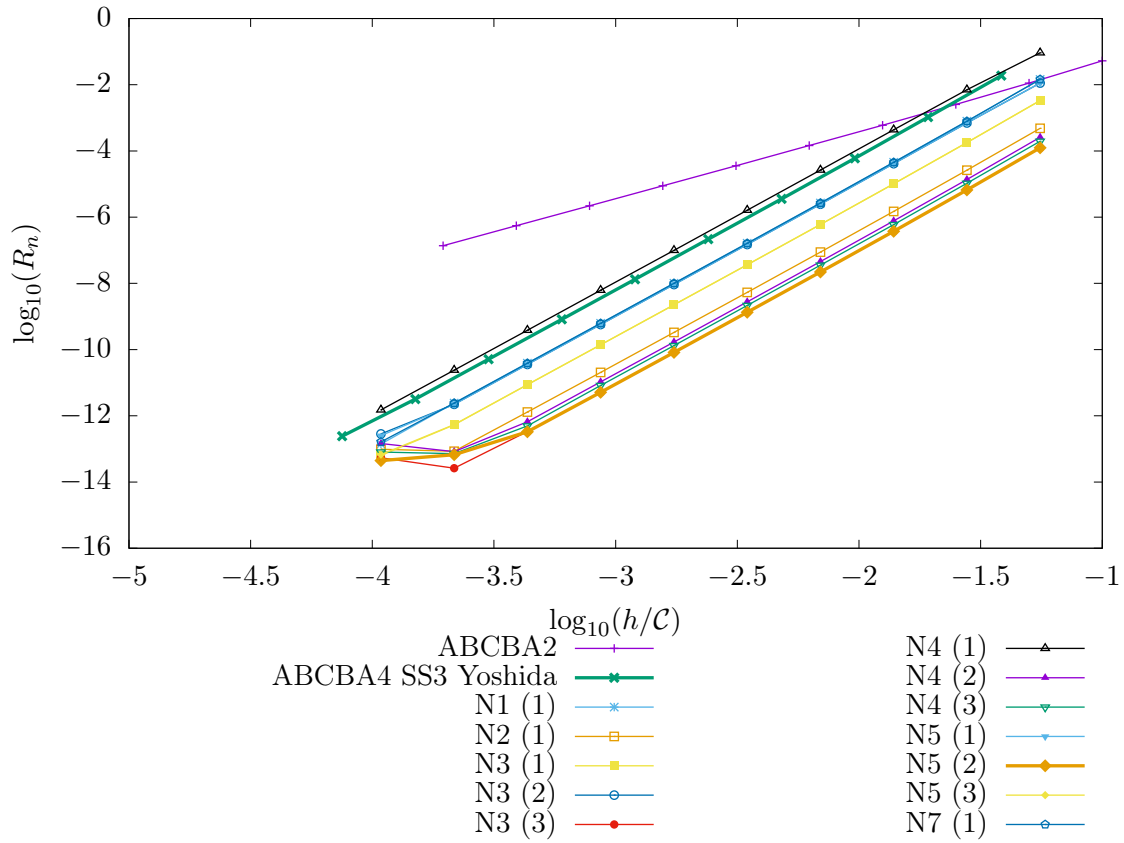


FIGURE 10.1 – Résidus numériques des intégrateurs N spécifiques à la toupie sphérique (tableau 10.2) et d'intégrateurs de référence.

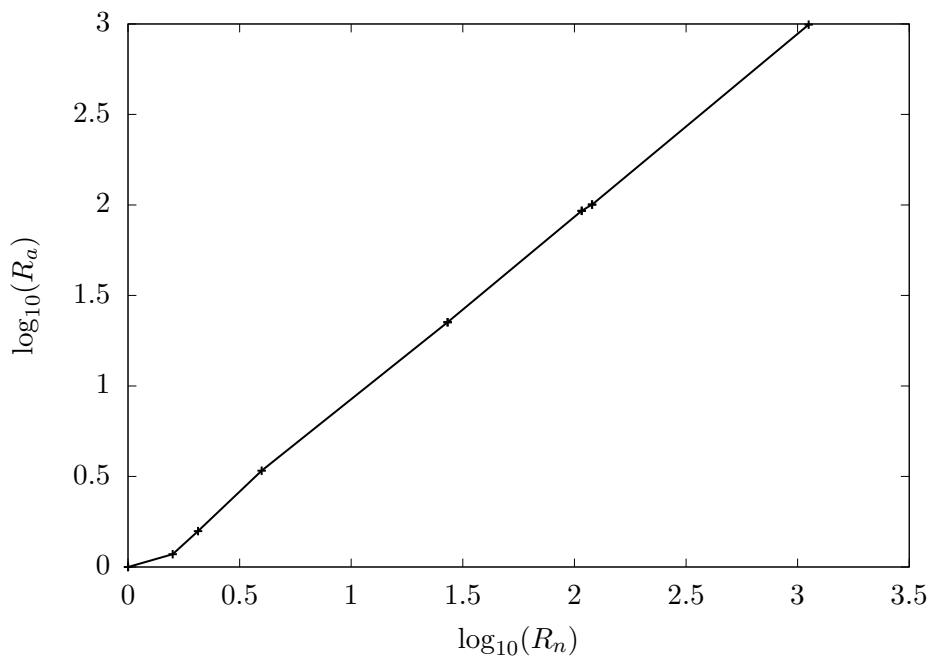


FIGURE 10.2 – Résidus analytiques normalisés  $R_a$  (tableau 10.3) en fonction des résidus numériques normalisés  $R_n$  (tableau 10.3) pour les intégrateurs N spécifiques à la toupie sphérique (tableau 10.2).

Intégrateur	Coefficients
N1 (1)	$a_1 = -8.5120719195965763404768780897146082692210 \times 10^{-1}$ $b_1 = -1.7560359597982881702384390448573041346105 \times 10^{-1}$
N2 (1)	$a_1 = \frac{1}{6}$ $a_2 = \frac{1}{6}$
N3 (1)	$a_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \frac{17\pi}{18}$ $b_1 = \frac{3}{2} - a_1 - 6a_1^2$
N3 (2)	$a_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \frac{7\pi}{18}$ $b_1 = \frac{3}{2} - a_1 - 6a_1^2$
N3 (3)	$a_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \frac{5\pi}{18}$ $b_1 = \frac{3}{2} - a_1 - 6a_1^2$
N4 (1)	$a_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \frac{17\pi}{18}$ $b_1 = \frac{1}{2} - a_1$
N4 (2)	$a_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \frac{7\pi}{18}$ $b_1 = \frac{1}{2} - a_1$
N4 (3)	$a_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \frac{5\pi}{18}$ $b_1 = \frac{1}{2} - a_1$
N5 (1)	$a_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \frac{17\pi}{18}$ $c_1 = -\frac{1}{2} + 2a_1 + 6a_1^2$
N5 (2)	$a_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \frac{7\pi}{18}$ $c_1 = -\frac{1}{2} + 2a_1 + 6a_1^2$
N5 (3)	$a_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \frac{5\pi}{18}$ $c_1 = -\frac{1}{2} + 2a_1 + 6a_1^2$
N7 (1)	$b_1 = 6.7560359597982881702384390448573041346096 \times 10^{-1}$ $c_1 = 1.3512071919596576340476878089714608269219$

TABLEAU 10.2 – Coefficients des intégrateurs N spécifiques à la toupie sphérique.

Intégrateur	Résidu numérique	Résidu analytique
N1 (1)	119.85	100.50
N2 (1)	3.97	3.40
N3 (1)	27.04	22.51
N3 (2)	107.78	92.79
N3 (3)	1.00	1
N4 (1)	1120.50	991.42
N4 (2)	2.06	1.58
N4 (3)	1.59	1.18
N5 (1)	107.82	92.79
N5 (2)	-	-
N5 (3)	27.02	22.51
N7 (1)	120.07	100.50

TABLEAU 10.3 – Résidus numériques et analytiques pour les intégrateurs N spécifiques à la toupie sphérique normalisés par ceux du meilleur intégrateur spécifique à la toupie sphérique N5 (2).

Intégrateur	Coefficients	Résidu analytique
N1 ABC (1)	$a_1 = 2.30095314031821200880358358664887913055268749198652E - 01$ $b_1 = 2.70289611165889918023389164442964749899690137568558E - 01$	2.09E-02
N1 ABC (2)	$a_1 = 3.12759298035394129273311108675932407250956736372886E - 01$ $b_1 = 1.89151984378635478186261481392492322039346277367309E - 01$	3.83E-02
N2 ABC (1)	$a_1 = 8.02328213237631189621159110065270820231267295618152E - 02$ $a_2 = 6.60067402234967153893137196943857538272056862439780E - 02$	3.51E-02
N2 CAB (2)	$a_1 = -6.92013017442754147744841711658833432668009569799182E - 02$ $a_2 = 2.40311433475934609972808235262832324340738731212439E - 01$	2.91E-02
N2 ACB (1)	$a_1 = 2.67151525271778528771592584917759257593782363964964E - 01$ $a_2 = 6.60067402234967153893137196943857538272056862439780E - 02$	1.18E-02
N2 BAC (2)	$a_1 = 4.55046247745910504290192762811360413017364598705698E - 02$ $a_2 = 1.52083283613347266213532944301757967671456194581479E - 01$	1.06E-02
N3 ABC (1)	$a_1 = 1.31740082916856905701913183914325069665629117883335E - 01$ $b_1 = 2.50012139251919405178794629558800907946715617443002E - 01$	2.77E-02
N3 BAC (1)	$a_1 = 2.39038485757200933210932718288564143662619882935561E - 02$ $b_1 = 4.22826809333389334337817970723349371403166091645609E - 01$	2.96E-02
N4 BCA (1)	$a_1 = 2.28285071081540957243927199281576503013302504866385E - 01$ $b_1 = 2.28258724614350569243009953772221986698057510867921E - 01$	3.22E-02
N5 CAB (2)	$a_1 = -6.27209240526030085512188205361711434732307820548754E - 02$ $c_1 = 1.76663035797931150349952332231755055930989226654368E - 01$	1.59E-02
N5 ACB (1)	$a_1 = 2.27395846993629313831037192819355926542373929157553E - 01$ $c_1 = 2.45206620644210181406073295522673811943660369318118E - 01$	2.84E-02
N5 BAC (1)	$a_1 = 5.1047890551914167341876030732223999010200107530777E - 02$ $c_1 = 2.28258724614350569243009953772221986698057510867923E - 01$	2.67E-02
N6 ABC (1)	$a_1 = 1.60143450077452941105067607860755509618239951238192E - 01$ $b_1 = 3.39837276484800880112004343148074629975156568426175E - 01$	2.11E-02
N6 ABC (2)	$a_1 = 3.40364662301354206144754404793393200921822271252987E - 01$ $b_1 = 1.60162723515199119887995656851925370024843431573850E - 01$	2.19E-02
N6 BAC (1)	$a_1 = 6.67865203948325460684324014668790496349558414006825E - 02$ $b_1 = 4.33052250858043173785100802259023432325215728755832E - 01$	3.27E-02

TABLEAU 10.4 – Coefficients des meilleurs intégrateurs N spécifiques à la molécule d'eau.

## 10.3 Molécule d'eau

Nous allons maintenant considérer comme corps solide la molécule d'eau, qui est une molécule asymétrique usuellement utilisée pour étudier les intégrateurs numériques du corps solide libre (e.g. [Dullweber et al., 1997](#), [Fassò, 2003](#), [Hairer et Vilmart, 2006](#), [Omelyan, 2007](#)). [Fassò \(2003\)](#) utilise les valeurs des moments d'inertie  $I_1 = 0.345$ ,  $I_2 = 0.653$ ,  $I_3 = 1$ . Cependant, ces valeurs ne correspondent pas à un corps physique réel, car, par définition des moments d'inertie, la somme de deux des moments d'inertie doit être supérieure au troisième, comme nous le verrons dans la section 10.4.1. Ainsi nous utiliserons les valeurs suivantes des moments d'inertie  $I_1 = 10220/29376$ ,  $I_2 = 19187/29376$ ,  $I_3 = 1$ , extraites de [Eisenberg et Kauzmann \(1969\)](#), ce qui donne les valeurs approchées  $I_1 \approx 0.348$ ,  $I_2 \approx 0.653$ ,  $I_3 = 1$ . La molécule d'eau est ainsi un corps fortement axisymétrique et fait partie des corps plats pour lesquels la somme de deux des moments d'inertie est égale au troisième.

### 10.3.1 Intégrateurs N

Pour la molécule d'eau, les intégrateurs N présentent au total 90 solutions réelles pour les coefficients  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$ . Parmi ces solutions, nous sélectionnons d'abord les intégrateurs présentant les plus faibles résidus analytiques indiqués dans le tableau 10.4, en estimant les résidus analytiques d'ordre 5 à l'aide de la norme  $\|H_{R_5}\|$  (équation 9.38) comme indiqué dans la section 9.1.3. Les coefficients ne sont pas

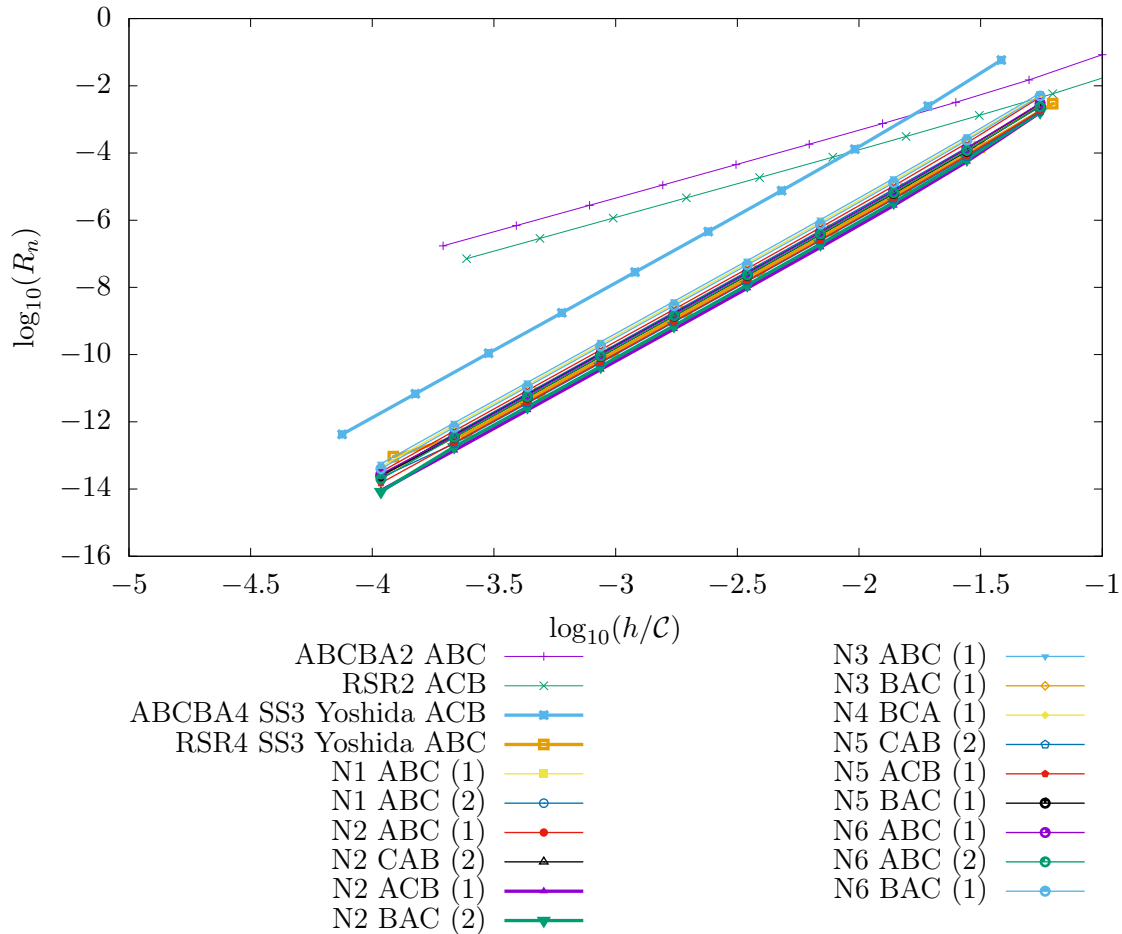


FIGURE 10.3 – Résidus numériques des meilleurs intégrateurs spécifiques à la molécule d'eau et d'intégrateurs de référence.

exacts et nous en donnons une valeur approchée à 50 chiffres après la virgule afin que ces valeurs puissent être utilisées en double et quadruple précisions. Dans le tableau 10.4, les solutions sont numérotées par ordre croissant du coefficient  $a_1$ . L'intégrateur N2 BAC (2) présente le plus faible résidu analytique pour la molécule d'eau suivi de l'intégrateur N2 ACB (1), dont le résidu analytique est très proche. Les résidus analytiques des meilleurs intégrateurs N étant proches, nous allons vérifier en calculant les résidus numériques, que l'intégrateur N2 BAC (2) présente bien la précision la plus élevée.

Sur la figure 10.3, les résidus numériques sont représentés pour les meilleurs intégrateurs spécifiques N du tableau 10.4 ainsi que pour les intégrateurs de référence ABCBA2, RSR2, ABCBA4 SS3 Yoshida, RSR4 SS3 Yoshida présentés dans la section 10.1.2. Pour ces intégrateurs de référence, nous avons préalablement déterminé leurs meilleures permutations indiquées sur la figure 10.3. On observe que les intégrateurs N de la figure 10.3 présentent tous des résidus numériques du même ordre de grandeur. En effet, le rapport entre le plus grand et le plus petit résidu numérique est d'environ 7.

Comme prédit par les résidus analytiques du tableau 10.4, les intégrations numériques permettent de déduire que les meilleurs intégrateurs pour la molécule d'eau sont N2 BAC (2) et N2 ACB (1). Le rapport entre les résidus numériques de ces deux intégrateurs varie en fonction du pas d'intégration. Le rapport du résidu de N2 ACB (1) sur celui de N2 BAC (2) est d'environ 0.8 pour les différents pas d'intégration considérés ici, à l'exception du plus petit pas pour lequel il est d'environ 1.1. Ainsi le meilleur intégrateur donné par les résidus numériques dépend du pas de temps et n'est pas toujours l'intégrateur présentant le plus faible résidu analytique. Cependant, il présente tout de même un résidu analytique très proche de celui de l'intégrateur présentant le plus faible résidu analytique. On prendra ainsi N2 BAC (2) comme meilleur intégrateur N pour la molécule d'eau.

L'intégrateur spécifique N2 BAC (2) pour la molécule d'eau est

$$\mathcal{S}_{N2BAC(2)}(h) = e^{a_1 h L_B} e^{b_1 h L_A} e^{a_2 h L_B} e^{c_1 h L_C} e^{a_3 h L_B} e^{c_1 h L_C} e^{a_2 h L_B} e^{b_1 h L_A} e^{a_1 h L_B}, \quad (10.25)$$

avec les coefficients

$$\begin{aligned} a_1 &= 4.55046247745910504290192762811360413017364598705698 \times 10^{-2} \\ b_1 &= \frac{1}{2} \\ a_2 &= 1.52083283613347266213532944301757967671456194581479 \times 10^{-1} \\ c_1 &= \frac{1}{2} \\ a_3 &= 1 - 2(a_1 + a_2). \end{aligned} \quad (10.26)$$

Cet intégrateur est environ 170 et 1.6 fois plus précis que les intégrateurs ABCBA4 SS3 Yoshida et RSR4 SS3 Yoshida obtenus pour leurs meilleures permutations des moments d'inertie. Tous les coefficients de cet intégrateur d'ordre 4 sont alors positifs, ce qui ne peut être réalisé pour un intégrateur général d'ordre 4 (Sheng, 1989, Suzuki, 1991).

Nous allons comparer le meilleur intégrateur spécifique obtenu N2 BAC (2) aux intégrateurs de référence décrits et référencés dans la section 10.1.2. Pour chacun, nous avons ainsi déterminé numériquement quelle était leur meilleure permutation et nous les avons comparés numériquement sur la figure 10.4 à N2 BAC (2). Le meilleur intégrateur de référence est RS4 S5 McLachlan CBA, qui est environ 4.7 fois plus précis que N2 BAC (2) pour un coût identique. En effet, comme nous avons considéré la réduction du coût de la section 9.3 pour la décomposition RS, nous obtenons que les intégrateurs de type RS présentent une plus grande efficacité. Cependant l'intégrateur N2 BAC (2), qui est de type ABC est environ 42 fois plus précis que le meilleur intégrateur de référence pour la même décomposition ABC qui est ABCBA4 SS5 McLachlan ACB.

On considère deux intégrateurs  $X$  et  $Y$  d'ordre  $p$ , tels qu'à coût constant le rapport des résidus numériques de  $X$  sur ceux de  $Y$  soit  $q$ . Comme l'erreur est proportionnelle à  $h^p$  avec  $h$  le pas d'intégration, le rapport du temps de calcul de  $X$  sur celui de  $Y$  est donné par  $q^{1/p}$  pour une précision identique. Ainsi RS4 S5 McLachlan CBA est environ  $4.7^{1/4} \approx 1.5$  fois plus rapide que N2 BAC (2) pour une précision identique.

### 10.3.2 Intégrateurs P et R

Comme les intégrateurs N ne permettent pas d'obtenir de meilleurs intégrateurs que ceux de référence, nous allons ainsi regarder si l'ajout d'une étape supplémentaire pour minimiser les résidus d'ordre 5, comme décrit dans la section 9.2, permet d'obtenir de meilleurs intégrateurs. On considère d'abord l'intégrateur R de la section 9.2.2, qui compte, avec les six permutations des moments d'inertie, 46 solutions ordonnées par ordre croissant du coefficient  $a_1$ . Nous avons déterminé numériquement que la meilleure solution est R ABC (4) dont le résidu numérique est représenté sur la figure 10.5. Cependant R ABC (4) est seulement 1.5 fois plus précis que N2 BAC (2).

On considère ensuite les intégrateurs P au nombre de 15 et décrits dans la section 9.2.1 pour les six permutations des moments d'inertie. On compte au total 724 solutions. Nous avons déterminé numériquement que la meilleure solution parmi les intégrateurs P, qui présentent les plus petits résidus analytiques, est P1 BAC (5) dont le résidu numérique est représenté sur la figure 10.5. L'intégrateur P1 BAC (5) est donné par

$$\mathcal{S}_{P1BAC(5)}(h) = e^{a_1 h L_B} e^{b_1 h L_A} e^{a_2 h L_B} e^{b_2 h L_A} e^{a_3 h L_B} e^{c_1 h L_C} e^{a_3 h L_B} e^{b_2 h L_A} e^{a_2 h L_B} e^{b_1 h L_A} e^{a_1 h L_B} \quad (10.27)$$

avec les coefficients

$$\begin{aligned} a_1 &= 2.65761371902173917814834651897593444191981026754501 \times 10^{-2} \\ b_1 &= 2.83521803983060752063013286541790057825502312351678 \times 10^{-1} \\ a_2 &= 2.71039660113557544805208331511082309770156235045299 \times 10^{-1} \\ b_2 &= \frac{1}{2} - b_1 \\ a_3 &= \frac{1}{2} - (a_1 + a_2) \\ c_1 &= 1. \end{aligned} \quad (10.28)$$



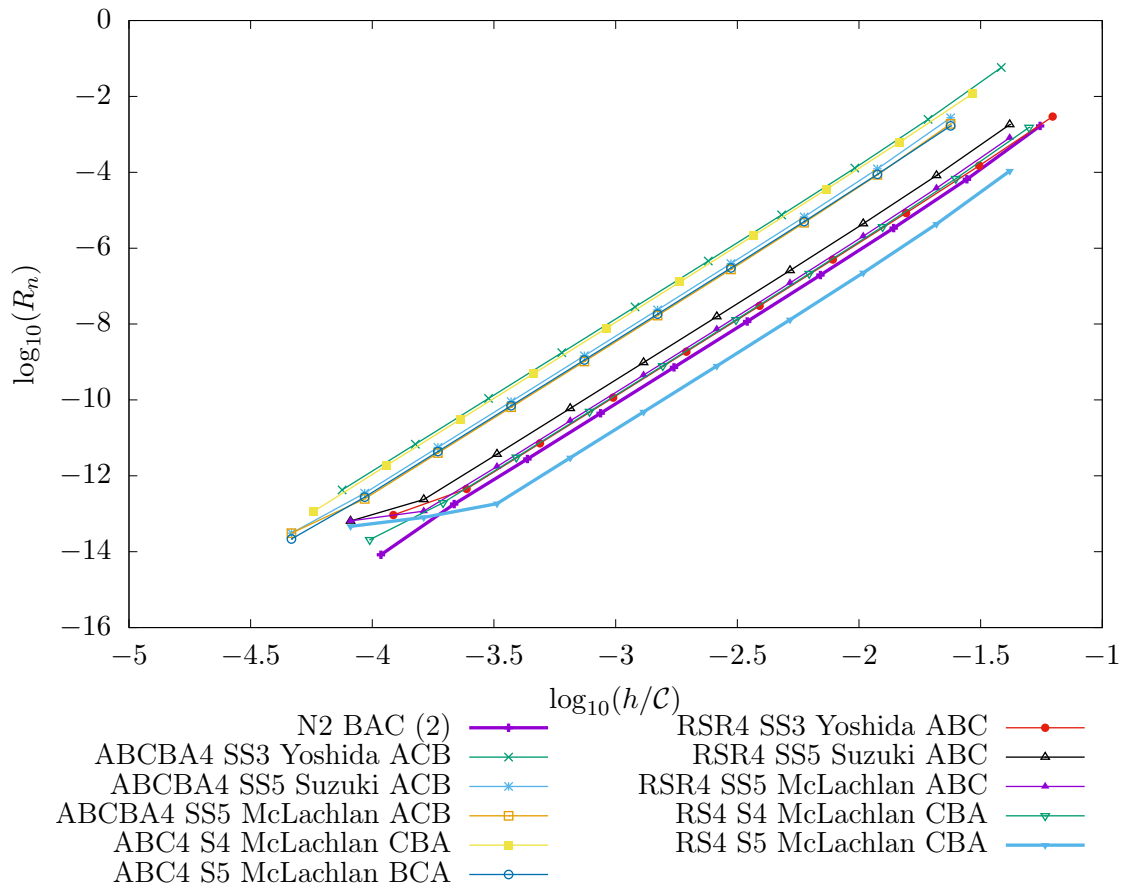


FIGURE 10.4 – Résidus numériques pour le meilleur intégrateur N spécifique à la molécule d'eau, N2 BAC (2), et les intégrateurs de référence de la section 10.1.2.

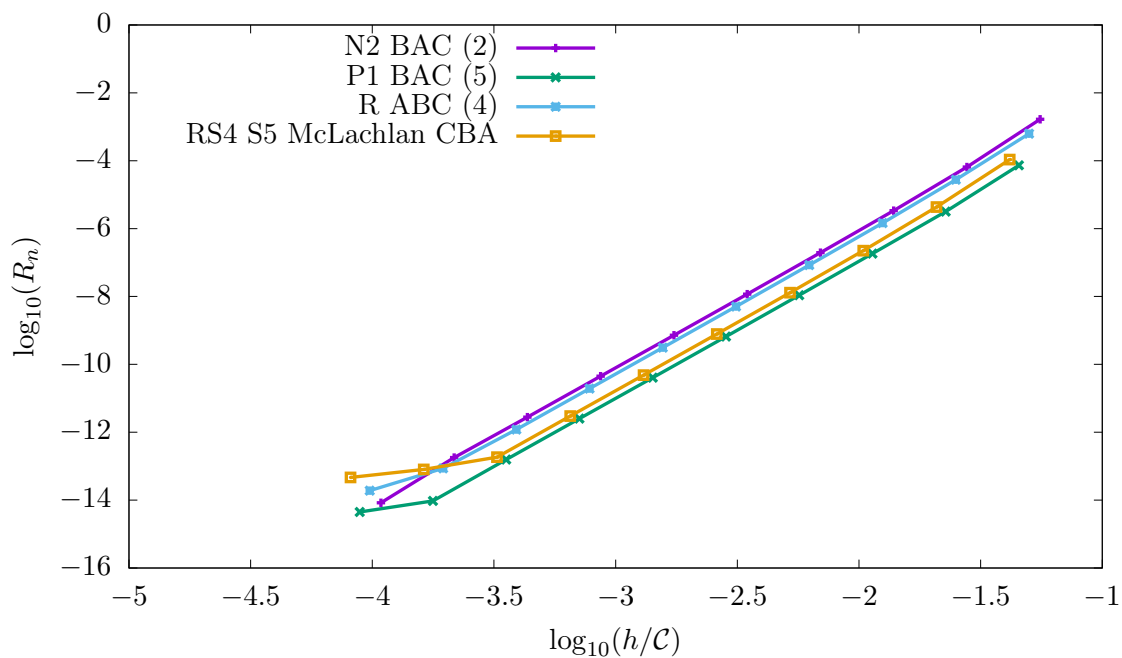


FIGURE 10.5 – Résidus numériques pour la molécule d'eau pour l'intégrateur RS4 S5 McLachlan CBA et les intégrateurs spécifiques N2 BAC (1), R ABC (4) et P1 BAC (5).

P1 BAC (5) est environ 8.0 plus précis que N2 BAC (2) et ainsi environ 1.7 fois plus précis que RS4 S5 McLachlan CBA. Pour la même précision, le rapport des temps de calcul est environ  $1.7^{-1/4} \approx 0.88$ , ce qui correspond à une diminution du temps de calcul d'environ 12%. La diminution du temps de calcul est ainsi très marginale.

Ainsi les intégrateurs N, P, et R spécifiques au corps solide que nous avons construits au chapitre 9 dans le cas de la molécule d'eau ne permettent d'obtenir qu'une très faible diminution du temps de calcul par rapport aux intégrateurs symplectiques généraux. Leur efficacité n'est ainsi que très faiblement supérieure à celle des intégrateurs symplectiques généraux.

## 10.4 Corps quelconque

Nous avons vu que pour la molécule d'eau les intégrateurs symplectiques que nous avons développés ne présentaient une efficacité que très légèrement supérieure par rapport aux intégrateurs symplectiques généraux. Dans cette section, nous allons maintenant étudier leur efficacité pour l'ensemble des corps solides afin de regarder s'il existe des corps pour lesquels ils s'avèrent plus utiles.

Nous avons vu que pour la toupie sphérique et la molécule d'eau l'estimation des résidus analytiques permettait de donner le meilleur intégrateur spécifique, en conformité avec les résidus numériques. Cependant, pour la molécule d'eau, le meilleur intégrateur déterminé numériquement dépend du pas d'intégration et peut présenter parfois seulement le deuxième résidu analytique le plus faible. Cependant, les deux intégrateurs présentant les résidus analytiques les plus petits, ont des résidus analytiques très proches. Ainsi même si parfois l'étude des résidus analytiques ne permet pas toujours de donner le meilleur intégrateur, elle permet toutefois de donner un intégrateur dont les résidus numériques sont proches de ceux du meilleur intégrateur. Ainsi, nous pouvons nous contenter d'estimer les résidus analytiques pour déterminer le meilleur intégrateur spécifique.

Pour comparer pour tout corps solide les intégrateurs, que nous avons obtenus, nous estimerons ainsi les résidus analytiques par la norme  $\|H_{R_5}\|$  (section 9.1.3), ce qui est plus rapide que de déterminer les résidus numériques en procédant à des intégrations numériques.

### 10.4.1 Ensemble des moments d'inertie

Un corps solide est uniquement caractérisé dans les équations de la rotation par ses moments d'inertie. Ainsi, pour tester les intégrateurs spécifiques obtenus pour l'ensemble des corps solides, nous avons uniquement besoin de connaître quelles valeurs peuvent prendre les moments d'inertie d'un corps solide physique et donc de déterminer quel est l'ensemble des moments d'inertie.

Comme indiqué dans la section 2.1.1, les moments d'inertie  $I_1, I_2, I_3$  d'un corps solide de distribution de masse  $\rho(\mathbf{r}_M)$  avec  $\mathbf{r}_M = (x, y, z)$  un point du volume  $\mathcal{V}$  du corps sont donnés par

$$I_1 = \int_{\mathcal{V}} (y^2 + z^2) \rho(\mathbf{r}_M) dx dy dz \quad (10.29)$$

$$I_2 = \int_{\mathcal{V}} (x^2 + z^2) \rho(\mathbf{r}_M) dx dy dz \quad (10.30)$$

$$I_3 = \int_{\mathcal{V}} (x^2 + y^2) \rho(\mathbf{r}_M) dx dy dz. \quad (10.31)$$

Ainsi soient les moments d'inertie ( $I_1, I_2, I_3$ ), il existe une infinité de corps présentant ces mêmes moments d'inertie. On peut obtenir les relations suivantes entre moments d'inertie (e.g. Landau et Lifchitz, 1982)

$$I_1 + I_2 = I_3 + 2 \int_{\mathcal{V}} z^2 \rho(\mathbf{r}_M) dx dy dz \quad (10.32)$$

$$I_2 + I_3 = I_1 + 2 \int_{\mathcal{V}} x^2 \rho(\mathbf{r}_M) dx dy dz \quad (10.33)$$

$$I_3 + I_1 = I_2 + 2 \int_{\mathcal{V}} y^2 \rho(\mathbf{r}_M) dx dy dz, \quad (10.34)$$

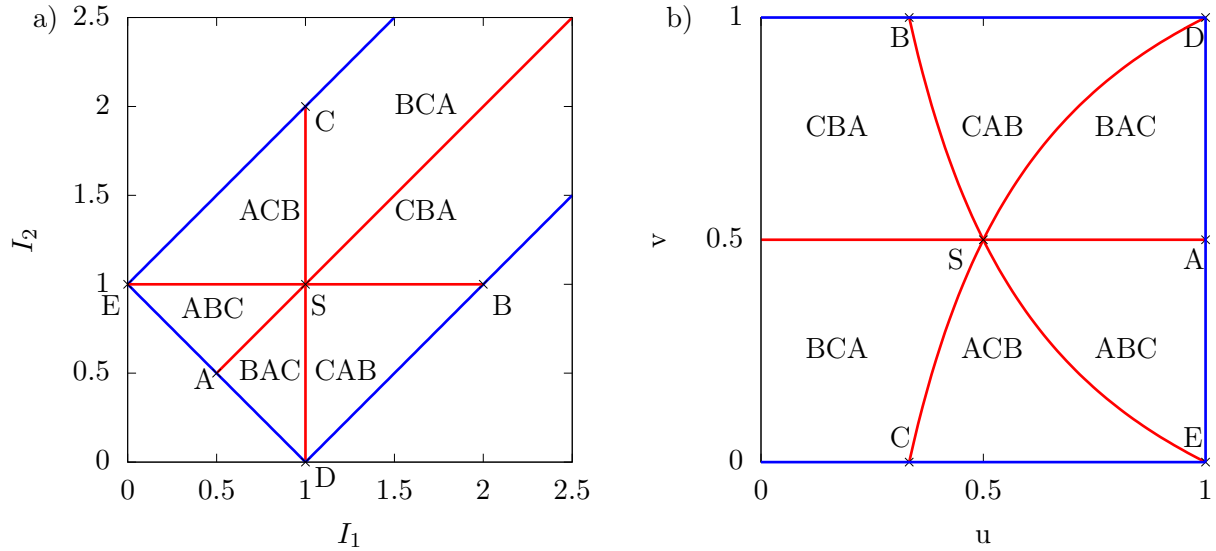


FIGURE 10.6 – Moments d’inertie des corps solides physiques représentés dans deux ensembles différents,  $\mathcal{E}$  (a) et  $\mathcal{F}$  (b). Les courbes rouges représentent les toupies symétriques et délimitent les espaces de chaque permutation. Les courbes bleues représentent les corps plats et délimitent les ensembles  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{F}$ . Pour (a) et (b), S représente la toupie sphérique et A, B, C, D, E les toupies symétriques plates. Les points A, B, C, D, E, S représentent des corps identiques sur les deux figures, (a) et (b).

ce qui conduit aux inégalités suivantes

$$I_1 + I_2 \geq I_3 \quad (10.35)$$

$$I_2 + I_3 \geq I_1 \quad (10.36)$$

$$I_3 + I_1 \geq I_2. \quad (10.37)$$

Ainsi la somme de deux des trois moments d’inertie doit toujours être supérieure ou égale au troisième (e.g. Landau et Lifchitz, 1982).

Comme Fassò (2003), on peut normaliser les moments d’inertie pour avoir  $I_3 = 1$  et les inégalités deviennent

$$I_1 + I_2 \geq 1 \quad (10.38)$$

$$1 + I_2 \geq I_1 \quad (10.39)$$

$$1 + I_1 \geq I_2, \quad (10.40)$$

ce qui permet de définir l’ensemble des moments d’inertie  $\mathcal{E}$  représenté sur la figure 10.6.  $\mathcal{E}$  n’est pas un espace borné et  $I_1$  et  $I_2$  peuvent tendre vers l’infini. Pour obtenir un espace borné, on procède au changement de variables suivant

$$u = \frac{1}{I_1 + I_2} \quad (10.41)$$

$$v = \frac{I_1 - I_2 + 1}{2}. \quad (10.42)$$

Cette bijection permet de passer de  $\mathcal{E}$  au nouvel ensemble  $\mathcal{F}$  défini par  $0 < u \leq 1$  et  $0 \leq v \leq 1$ , qui est représenté sur la figure 10.6. Sur la figure 10.6, les courbes rouges représentent pour les deux ensembles l’ensemble des toupies symétriques, qui sont les corps présentant deux moments d’inertie égaux, et le point S la toupie sphérique, corps présentant trois moments d’inertie égaux. Les courbes rouges délimitent aussi les espaces de chaque permutation. Les courbes bleues représentent les corps plats pour lesquels la somme de deux des moments d’inertie est égale au troisième. Les points A, B,

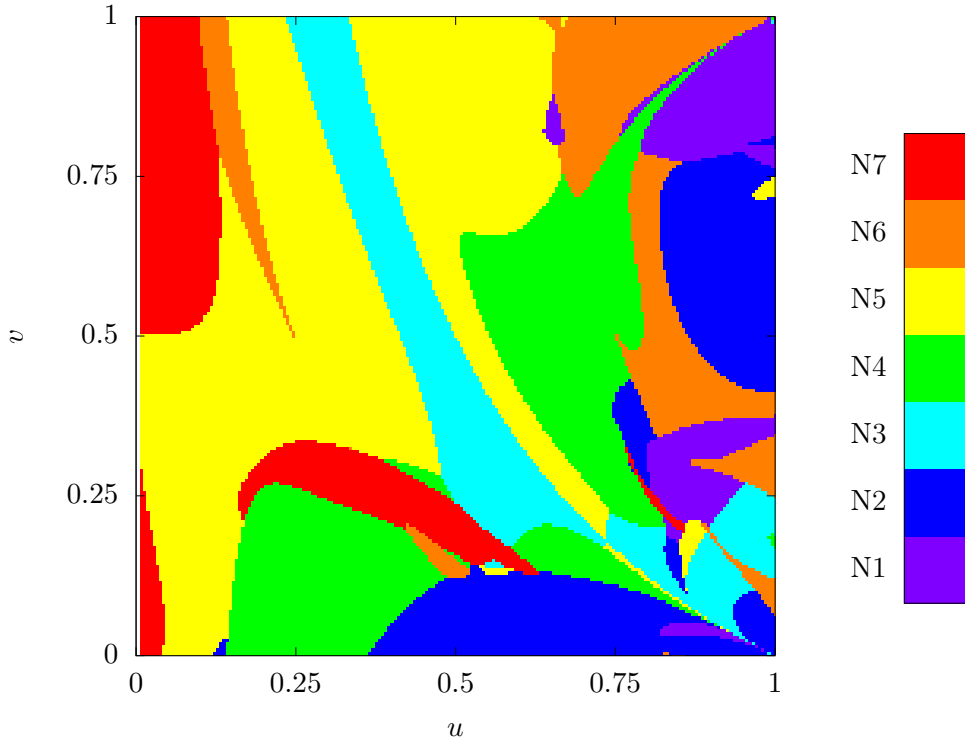


FIGURE 10.7 – Meilleurs intégrateurs  $N$  pour un corps solide de moments d’inertie  $(I_1, I_2, 1)$  dans l’ensemble  $\mathcal{F}$ , où  $u = 1/(I_1 + I_2)$  et  $v = (I_1 - I_2 + 1)/2$ . Les sept intégrateurs  $N$  sont chacun associés à une couleur.

C, D, E à l’intersection des courbes rouges et des courbes bleues représentent les toupies symétriques plates.

Cependant, plusieurs points de  $\mathcal{E}$  représentent un corps solide identique à un facteur près pour les moments d’inertie. Par exemple, on considère le corps de moments d’inertie  $(I_1, I_2, 1)$  avec  $0 < I_1 < I_2 < 1$ . Ce corps peut être représenté dans  $\mathcal{E}$  par les six points  $(I_1, I_2)$ ,  $(I_2/I_1, 1/I_1)$ ,  $(1/I_2, I_1/I_2)$ ,  $(I_1/I_2, 1/I_2)$ ,  $(1/I_1, I_2/I_1)$ ,  $(I_2, I_1)$  associés aux permutations respectives des moments d’inertie ABC, BCA, CAB, ACB, CBA, BAC. Chaque toupie symétrique est représentée par trois points et les toupies sphériques par un unique point. Ainsi comme Fassò (2003), on peut restreindre l’étude au triangle ESA de l’ensemble  $\mathcal{E}$  sur la figure 10.6, noté  $\mathcal{T}$ , à condition de considérer pour chaque point les six permutations des moments d’inertie.

Ainsi pour étudier l’ensemble des corps solides, on peut considérer soit l’ensemble  $\mathcal{T}$  avec les six permutations des moments d’inertie, soit l’ensemble  $\mathcal{F}$ .

### 10.4.2 Intégrateurs $N$

Afin de déterminer quel est le meilleur intégrateur spécifique  $N$  pour chaque corps solide, nous avons échantillonné l’ensemble  $\mathcal{F}$  pour  $0.01 \leq u \leq 1$  et  $0 \leq v \leq 1$  par une grille de  $(200 + 1)^2 = 40401$  points. Pour chaque point de la grille, nous avons déterminé toutes les solutions existantes pour les intégrateurs  $N$  et estimé les résidus d’ordre 5 pour chaque solution. Nous avons représenté sur la figure 10.7 le meilleur intégrateur  $N$  présentant le plus faible résidu analytique pour chaque point de la grille. On constate ainsi qu’en fonction des permutations le meilleur intégrateur  $N$  varie.

Cependant chaque corps solide est représenté dans  $\mathcal{F}$  par plusieurs points. Pour déterminer pour un solide donné, le meilleur intégrateur et sa permutation associée, on considère comme Fassò (2003) l’ensemble  $\mathcal{T}$ , que l’on peut échantillonner avec une grille de 40401 points. Pour chaque point de la grille recouvrant l’ensemble  $\mathcal{T}$ , on détermine en estimant les résidus d’ordre 5 le meilleur intégrateur spécifique et sa permutation associée représentés sur la figure 10.8. Nous avons exclu les toupies symétriques, car elles présentent une solution exacte.

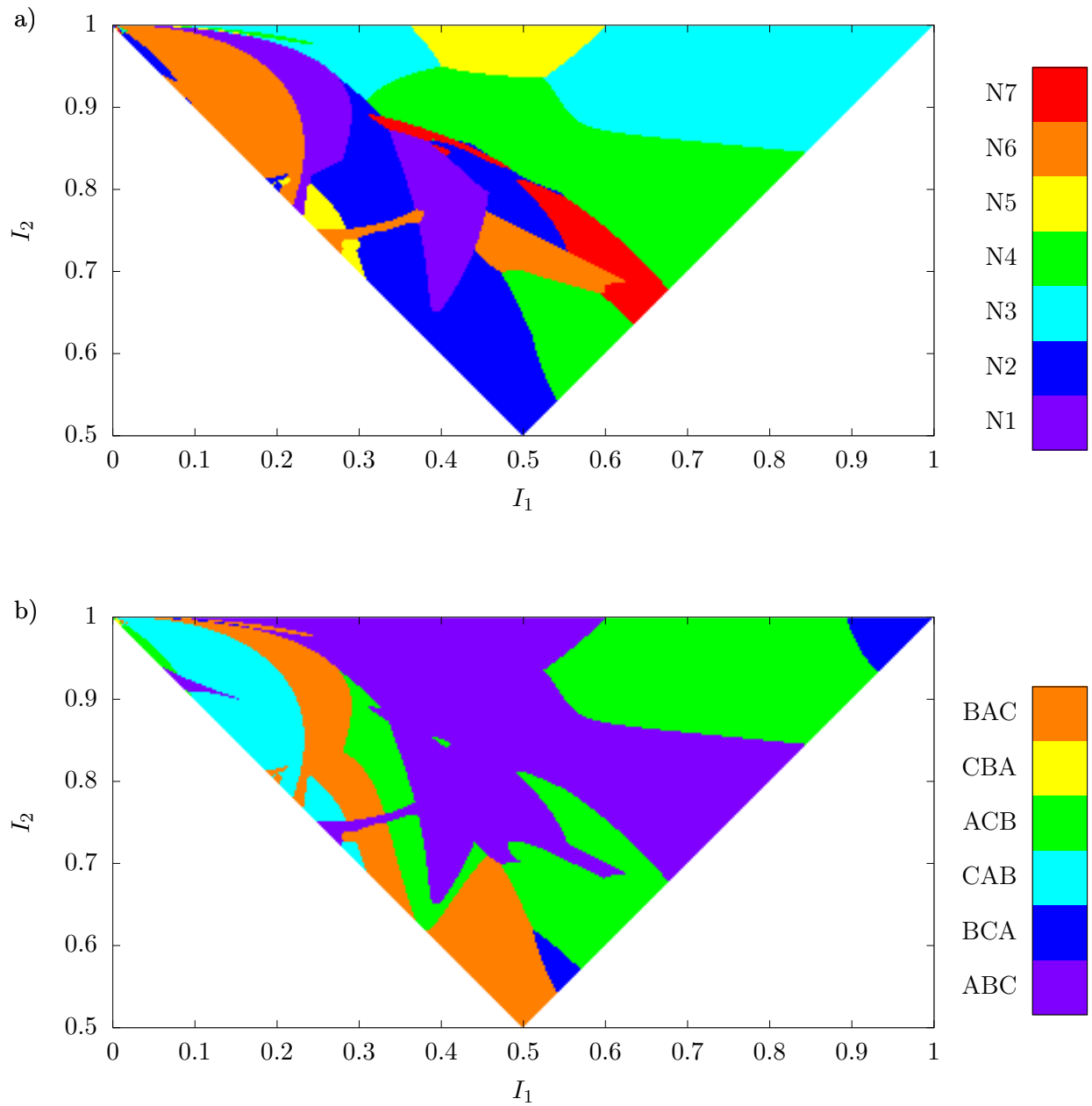


FIGURE 10.8 – Meilleurs intégrateurs  $N$  (a) et permutations associées (b) pour un corps solide de moments d’inertie,  $I_1 < I_2 < 1$ . Les intégrateurs et les permutations sont chacun associés à une couleur.

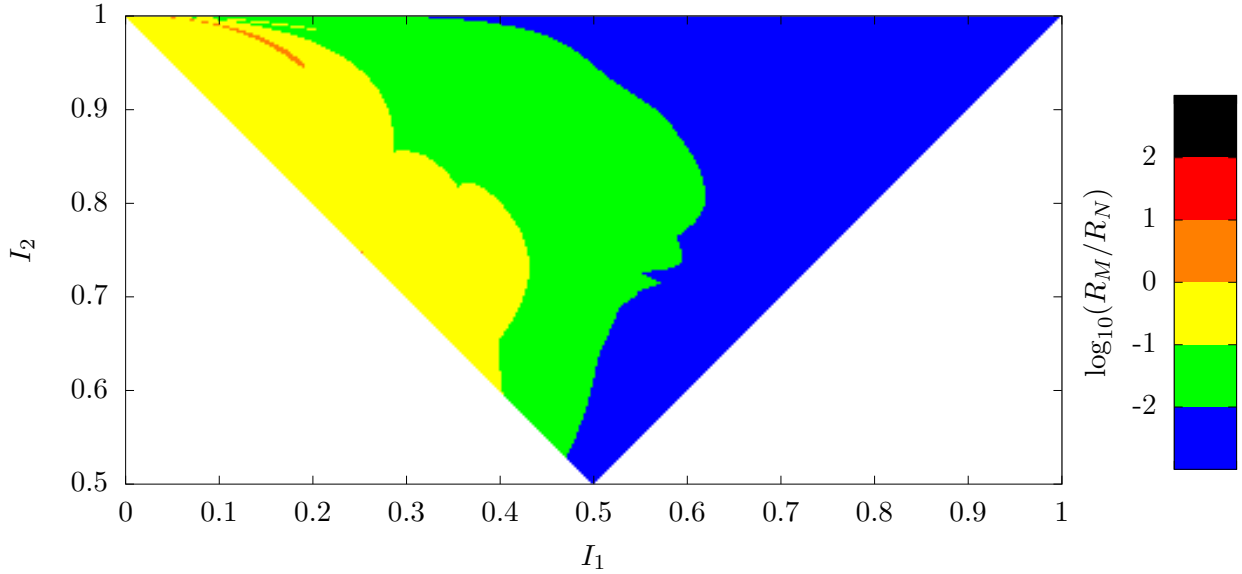


FIGURE 10.9 – Rapport du résidu analytique  $R_M$  de l’intégrateur RS4 S5 McLachlan obtenu avec la meilleure permutation des moments d’inertie sur le résidu analytique  $R_N$  du meilleur intégrateur N pour un corps solide de moments d’inertie,  $I_1 < I_2 < 1$ . L’échelle de couleur indique le logarithme décimal du rapport des résidus.

Ainsi pour la molécule d’eau de moments d’inertie  $I_1 \approx 0.348$ ,  $I_2 \approx 0.653$ ,  $I_3 = 1$ , on retrouve bien à partir de la figure 10.8 que le meilleur intégrateur est N2 BAC, comme vu à partir des résidus numériques dans la section 10.3.1. La meilleure solution pour ce schéma d’intégration n’est pas indiquée. Pour la molécule d’eau, nous avons vu à la section 10.3.1, que la solution (2) est la meilleure et que le meilleur intégrateur est ainsi N2 BAC (2). À partir de la figure 10.8, on peut ainsi déterminer pour un corps solide le meilleur intégrateur spécifique et sa permutation associée.

Nous avons ensuite comparé le meilleur intégrateur spécifique N à l’intégrateur RS4 S5 McLachlan, qui correspond au meilleur intégrateur de référence pour la molécule d’eau. Pour chaque point de la grille triangulaire, nous déterminons ainsi la meilleure permutation pour l’intégrateur RS4 S5 McLachlan et divisons l’estimation de son résidu analytique par celui du meilleur intégrateur N en considérant le coût de chaque intégrateur. Le rapport des résidus en échelle logarithmique décimale est représenté par une échelle de couleur sur la figure 10.9. Les toupies symétriques ont été exclues car alors l’intégrateur RS4 S5 McLachlan devient exact et son résidu est alors nul. Si le rapport est supérieur à 1, les intégrateurs spécifiques N sont meilleurs que l’intégrateur de référence RS4 S5 McLachlan. Sur la figure 10.9, on observe que RS4 S5 McLachlan est plus précis pour un même temps de calcul que le meilleur intégrateur N à l’exception de quelques points. RS4 S5 McLachlan est notamment nettement plus précis pour les corps proches des toupies symétriques.

### 10.4.3 Intégrateurs P

Nous réalisons la même chose pour les intégrateurs spécifiques P, qui présentent un paramètre libre. On a dénombré 15 types d’intégrateurs P à la section 9.2.1. Sur la figure 10.10, les meilleurs intégrateurs pour chaque point de la grille recouvrant l’ensemble  $\mathcal{T}$  sont indiqués avec leurs permutations associées. Cependant cela implique de déterminer pour chaque point les coefficients permettant d’annuler le résidu d’ordre 3,  $H_{R_3}$ , et de minimiser la norme au carré  $\|H_{R_5}\|^2$  du résidu d’ordre 5,  $H_{R_5}$ , ce qui consiste à résoudre numériquement un système de cinq équations à cinq variables de degré 9. Cette résolution a été réalisée avec le logiciel *Maple*. Cependant pour certains solides, il existe des systèmes d’équations que *Maple* ne peut résoudre numériquement. Ceci explique la présence de points isolés présentant une couleur différente au sein d’une zone de couleur unie sur la figure 10.10.

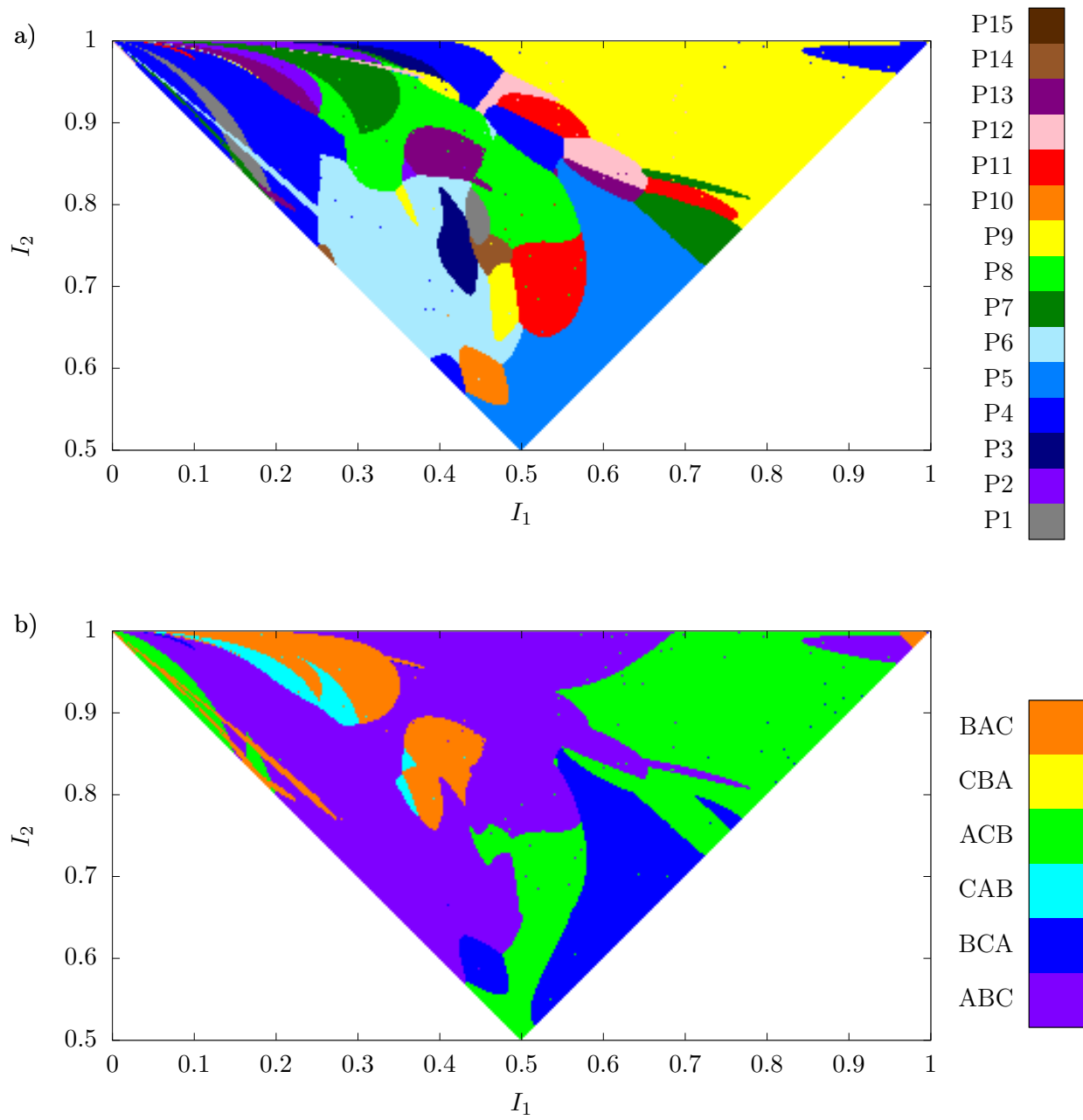


FIGURE 10.10 – Meilleurs intégrateurs  $P$  (a) et permutations associées (b) pour un corps solide de moments d’inertie,  $I_1 < I_2 < 1$ . Les intégrateurs et les permutations sont chacun associés à une couleur.

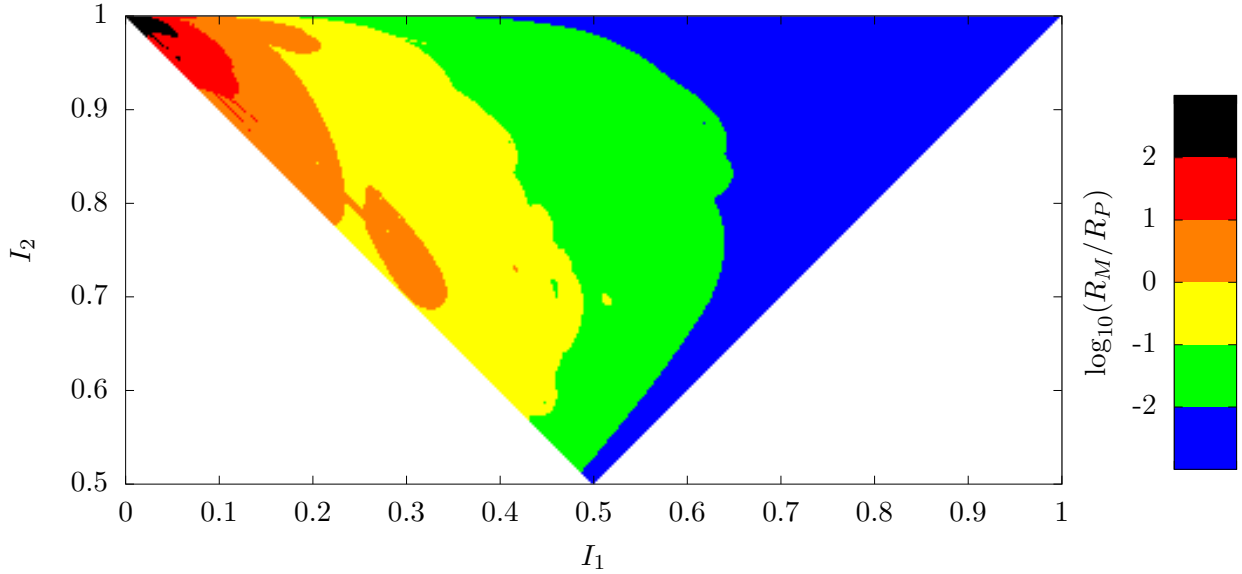


FIGURE 10.11 – Rapport du résidu analytique  $R_M$  de l'intégrateur RS4 S5 McLachlan obtenu avec la meilleure permutation des moments d'inertie sur le résidu analytique  $R_P$  du meilleur intégrateur P pour un corps solide de moments d'inertie,  $I_1 < I_2 < 1$ . L'échelle de couleur indique le logarithme décimal du rapport des résidus.

Cependant, on observe que pour la molécule d'eau les résidus donnent comme meilleur intégrateur avec paramètre libre P6 ABC. Une intégration numérique permet d'évaluer les résidus numériques et montre qu'il s'agit de l'intégrateur P6 ABC (3). Cependant dans la section 10.3.2, nous avons déterminé que l'intégrateur avec paramètre libre présentant le plus faible résidu numérique était P1 BAC (5). Comme on l'a vu pour la sphère à la section 10.2, l'estimation des résidus analytiques ne donnent pas toujours le meilleur intégrateur.

Sur la figure 10.11, nous avons réalisé comme précédemment le rapport des résidus de l'intégrateur RS4 S5 McLachlan pour sa meilleure permutation sur le meilleur intégrateur P. On constate que les intégrateurs P sont plus efficaces que l'intégrateur RS4 S5 McLachlan seulement pour les corps présentant une asymétrie importante.

## 10.5 Comparaison avec l'algorithme de Moser-Veselov

L'algorithme DMV (*Discrete Moser-Veselov*) est un intégrateur symplectique d'ordre 2 (Moser et Veselov, 1991). Hairer et Vilmart (2006) ont modifié cet algorithme afin d'augmenter l'ordre et ont obtenu ainsi un intégrateur, appelé *preprocessed Discrete Moser-Veselov*, pour le corps solide libre d'efficacité supérieure aux autres intégrateurs utilisés pour le corps solide. Dans cette section, nous allons ainsi comparer les intégrateurs symplectiques spécifiques obtenus à l'intégrateur *preprocessed Discrete Moser-Veselov*.

Hairer et Vilmart (2006) réalisent l'intégration d'équations du mouvement du corps solide libre, qui sont modifiées par le biais des moments d'inertie. Les nouveaux moments d'inertie dépendent d'une série en puissance paire du pas d'intégration  $h$  et tronquée à l'ordre  $2(r - 1)$  en  $h$ . Les coefficients de cette série dépendent des deux intégrales premières du mouvement, que sont l'énergie et le moment cinétique. Les nouvelles équations du mouvement sont alors intégrées avec l'algorithme DMV (*Discrete Moser-Veselov*) (Moser et Veselov, 1991). L'intégrateur obtenu, que Hairer et Vilmart (2006) désignent par DMV2r, est un intégrateur symétrique d'ordre  $2r$ , qui conserve l'énergie et le moment cinétique.

Pour l'intégrateur DMV2r, Hairer et Vilmart (2006) montrent qu'il existe un hamiltonien  $H(2r)$  permettant d'obtenir les équations modifiées pour le moment cinétique  $\mathbf{G}$  avec une structure de Poisson,



Intégrateur	Coût
DMV2	0.29
DMV4	0.40
DMV6	0.59
DMV8	0.68
DMV10	0.92

TABLEAU 10.5 – Rapport des coûts des intégrateurs DMV2r sur le coût de l’intégrateur RSR4 SS5 Suzuki.

c’est-à-dire une équation de la forme  $\dot{\mathbf{G}} = \mathbf{G} \times \nabla_{\mathbf{G}} \mathcal{H}$ . Il s’agit ainsi d’un intégrateur de Poisson. Cependant, l’algorithme DMV2r n’est pas symplectique à l’exception du cas  $r = 1$ , où il s’agit de l’algorithme DMV, car le hamiltonien  $H(2r)$  ne permet pas d’obtenir les équations modifiées de la matrice de rotation.

Pour comparer à ces intégrateurs, nous avons utilisé les codes rendus disponibles par Ernst Hairer à l’adresse <http://www.unige.ch/~hairer/software.html>, qui présentent une implémentation en Fortran de l’algorithme DMV2r ainsi que de l’intégrateur symplectique pour le corps solide libre pour la décomposition RS et des routines de composition symétrique. Dans ces codes, l’intégration de l’énergie cinétique du corps libre est couplée à celle d’une énergie potentielle  $V$ . Les méthodes d’ordre supérieur sont obtenues en réalisant une composition du schéma d’ordre 2 suivant

$$e^{\frac{h}{2}L_V} e^{\frac{h}{2}L_R} e^{hL_S} e^{\frac{h}{2}L_R} e^{\frac{h}{2}L_V}. \quad (10.43)$$

Ainsi par exemple, pour le schéma RSR4 SS3 Yoshida, cela donne

$$e^{x_1 \frac{h}{2}L_V} e^{x_1 \frac{h}{2}L_R} e^{x_1 hL_S} e^{x_1 \frac{h}{2}L_R} e^{(x_1+x_0) \frac{h}{2}L_V} e^{x_0 \frac{h}{2}L_R} e^{x_0 hL_S} e^{x_0 \frac{h}{2}L_R} e^{(x_1+x_0) \frac{h}{2}L_V} e^{x_1 \frac{h}{2}L_R} e^{x_1 hL_S} e^{x_1 \frac{h}{2}L_R} e^{x_1 \frac{h}{2}L_V} \quad (10.44)$$

avec  $x_1 = 1/(2 - 2^{1/3})$  et  $x_0 = -2^{1/3}/(2 - 2^{1/3})$ . Dans ce schéma, l’énergie cinétique et l’énergie potentielle sont ainsi intégrées à l’ordre 4. L’intégration est alors plus coûteuse que lorsque seule la partie cinétique est composée à l’aide d’une méthode d’ordre supérieur. Nous avons ainsi adapté ces routines pour que l’énergie cinétique soit composée sans l’énergie potentielle. Ainsi pour le schéma RSR4 SS3 Yoshida, cela donne

$$e^{\frac{h}{2}L_V} e^{x_1 \frac{h}{2}L_R} e^{x_1 hL_S} e^{(x_1+x_0) \frac{h}{2}L_R} e^{x_0 hL_S} e^{(x_1+x_0) \frac{h}{2}L_R} e^{x_1 hL_S} e^{x_1 \frac{h}{2}L_R} e^{\frac{h}{2}L_V}. \quad (10.45)$$

Dans ce schéma, l’énergie cinétique est intégrée pour l’ordre 4 alors que l’énergie potentielle est intégrée à l’ordre 2. La partie cinétique et la partie potentielle sont alors couplées de la même façon que pour l’algorithme DMV2r, où l’énergie cinétique est intégrée à l’ordre  $2r$  et le potentiel à l’ordre 2. Les intégrateurs symplectiques et DMV2r sont alors intégrés tous les deux à l’ordre deux pour l’énergie potentielle.

À l’aide de ces codes, on compare le coût des intégrateurs DMV2, DMV4, DMV6, DMV8, DMV10 et RSR4 SS5 Suzuki en intégrant la molécule d’eau avec les mêmes conditions initiales qu’indiquées dans la section 10.1.1. Pour avoir le temps de calcul de chaque intégrateur, on fait la moyenne du temps de calcul de 1000 intégrations comme réalisé par Hairer et Vilmart (2006), qui ont lieu avec un pas d’intégration de  $h = 0.001$  pour une durée de  $T = 10^6 h$ . Des valeurs approchées des rapports des temps de calcul des intégrateurs DMV2, DMV4, DMV6, DMV8, DMV10 sur le temps de calcul de l’intégrateur RSR4 SS5 Suzuki sont indiquées sur le tableau 10.5. Cependant dans les codes, nous n’avons pas pris en compte la réduction du temps de calcul pour les intégrateurs de type RS, indiquée à la section 9.3. Pour obtenir les valeurs du tableau 10.5, on a ainsi multiplié les rapports de temps par 16/12 pour avoir les rapports de coût réel. À partir du tableau 10.1, on peut déduire ainsi le rapport des temps de calcul avec les intégrateurs N2 BAC (2) et P1 BAC (5).

À l’aide des routines en Fortran, on détermine la précision des intégrateurs DMV2, DMV4, DMV6, DMV8, DMV10 avec les mêmes conditions initiales, la même durée et les mêmes pas d’intégration que la section 10.1.1. Cependant, on a exclu le pas d’intégration  $h = 1/2$ , car alors l’intégrateur DMV2

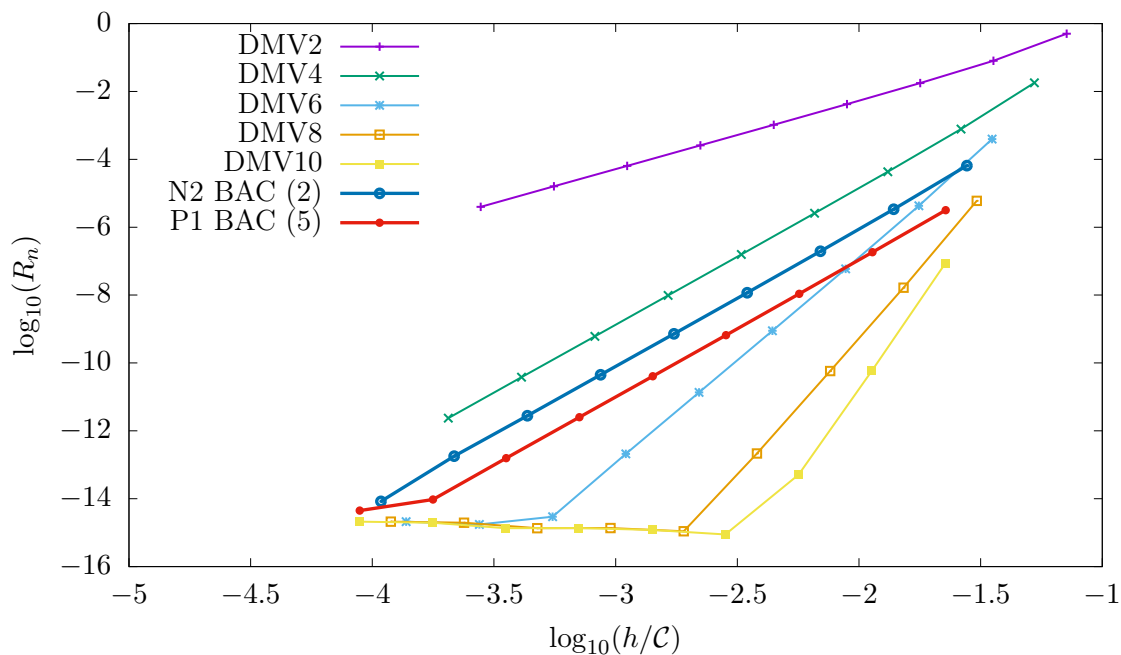


FIGURE 10.12 – Résidus numériques pour la molécule d'eau pour les intégrateurs DMV2r et les intégrateurs spécifiques N2 BAC (1) et P1 BAC (5).

ne converge pas. Sur la figure 10.12, on a comparé ainsi les résidus des intégrateurs DMV2, DMV4, DMV6, DMV8, DMV10 aux meilleurs intégrateurs spécifiques pour l'eau. Les intégrateurs spécifiques présentent des résultats meilleurs que l'intégrateur DMV de même ordre DMV4. Cependant on constate que les intégrateurs d'ordre supérieur DMV6, DMV8, DMV10 présentent des performances supérieures à celles des intégrateurs spécifiques obtenus pour la molécule d'eau. Pour améliorer les performances des intégrateurs spécifiques, il faudrait ainsi augmenter leur ordre.



# Chapitre 11

## Utilisation de correcteurs pour le corps solide libre

Pour obtenir un intégrateur d'ordre 6, il faut annuler les résidus d'ordre 5 et donc résoudre le système d'équations  $P_1 = P_2 = Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q_4 = Q_5 = Q_6 = 0$ , où les  $P_i$  sont les coefficients des résidus d'ordre 3 (équation 8.6) et sont des polynômes de degré 3 des coefficients de l'intégrateur  $a_i, b_i, c_i$  et les  $Q_i$  les coefficients des résidus d'ordre 5 (équation 8.22) et des polynômes de degré 5 des coefficients de l'intégrateur  $a_i, b_i, c_i$ . Pour obtenir les coefficients d'un intégrateur de degré 6, il faudrait ainsi résoudre un système de 8 équations et 8 variables de degré 5. De plus le nombre d'intégrateurs à considérer et donc de systèmes d'équations à résoudre augmente car pour la décomposition ABC le nombre d'étapes nécessaire est alors de 21, ce qui augmente le nombre de types d'intégrateur. Calculer les intégrateurs d'ordre 6 devient alors très complexe.

Cependant, on peut obtenir des intégrateurs d'ordre 6 en faisant une composition symétrique des intégrateurs spécifiques d'ordre 4 selon les méthodes de Yoshida (1990) et de Suzuki (1990), comme évoqué dans le chapitre 7. On réalise ainsi une composition symétrique selon ces méthodes des intégrateurs de la figure 10.5 pour la molécule d'eau, à savoir N2 BAC (2), P1 BAC (5), R ABC (4) et RS4 S5 McLachlan. Sur la figure 11.1, on a comparé leurs résidus numériques pour la molécule d'eau à ceux des meilleurs intégrateurs d'ordre 6 pour les deux décompositions parmi ceux de la section 10.1.2. Pour la molécule d'eau, on a déterminé numériquement que les meilleurs intégrateurs de référence sont ABCBA6 SS9 McLachlan ACB et RSR6 SS9 McLachlan CBA pour respectivement les décompositions ABC et RS. Le meilleur intégrateur d'ordre 6 pour la molécule d'eau est l'intégrateur de référence RSR6 SS9 McLachlan CBA, qui est environ 3.5 fois meilleur que l'intégrateur R ABC (4) SS5 Suzuki, obtenu par composition. Ainsi à l'ordre 6, les compositions des intégrateurs spécifiques d'ordre 4 N, P et R sont moins efficaces que les intégrateurs de référence.

Nous allons ainsi essayer d'obtenir simplement des intégrateurs spécifiques d'ordre 6 aux corps solides meilleurs que ceux de référence. Pour cela, nous allons utiliser des correcteurs. Lorsque les résidus d'un intégrateur symplectique sont intégrables, il est possible de les soustraire au hamiltonien sous forme de correcteurs et de les intégrer afin d'augmenter l'ordre de l'intégrateur (Wisdom *et al.*, 1996, McLachlan, 1996, Laskar et Robutel, 2001). Considérons par exemple le hamiltonien  $H = X + Y$ . D'après la formule de Baker-Campbell-Hausdorff (équation 7.12), pour un intégrateur symétrique  $e^{\frac{h}{2}L_X} e^{hL_Y} e^{\frac{h}{2}L_X} = e^{hL_K}$  d'ordre 2, le hamiltonien  $K$  effectivement intégré est

$$hK = hH + h^3 \left( -\frac{1}{24} \{X, \{X, Y\}\} + \frac{1}{12} \{Y, \{Y, X\}\} \right) + O(h^5). \quad (11.1)$$

Si le hamiltonien  $\mathcal{C} = -\frac{1}{24} \{X, \{X, Y\}\} + \frac{1}{12} \{Y, \{Y, X\}\}$  est intégrable, alors on peut construire l'intégrateur symétrique d'ordre 4 (Laskar et Robutel, 2001)

$$e^{-\frac{h^3}{2}L_{\mathcal{C}}} e^{\frac{h}{2}L_X} e^{hL_Y} e^{\frac{h}{2}L_X} e^{-\frac{h^3}{2}L_{\mathcal{C}}}. \quad (11.2)$$

L'ajout de ces étapes supplémentaires permet d'annuler les résidus d'ordre 3 et d'obtenir un intégrateur d'ordre 4.

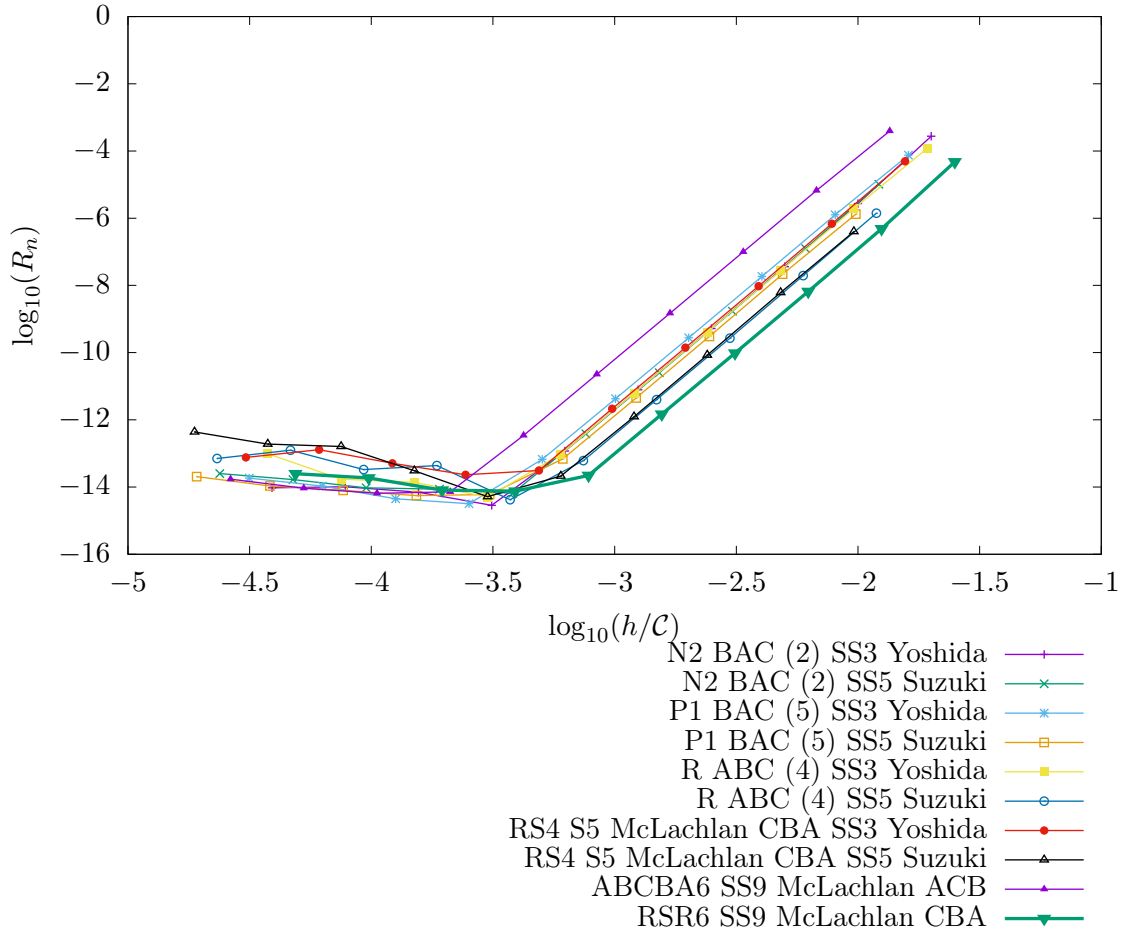


FIGURE 11.1 – Résidus numériques pour la molécule d'eau pour des compositions symétriques des intégrateurs d'ordre 4 de la figure 10.5 et pour les meilleurs intégrateurs de référence d'ordre 6.

Pour intégrer le hamiltonien décrivant la dynamique de molécules solides, [Omelyan \(2007\)](#) utilise des correcteurs pour diminuer les résidus d'un intégrateur basé sur une décomposition en dérivées de Lie. [Omelyan \(2007\)](#) n'utilise pas de correcteurs pour le hamiltonien du corps solide libre, car il considère que les commutateurs à trois parties issus du hamiltonien du corps solide ne présentent pas une structure intégrable.

Cependant ces derniers présentent bien une structure intégrable. En effet, toute fonction dépendant uniquement des coordonnées du moment cinétique conserve la norme du moment cinétique d'après la relation (8.3) et est ainsi intégrable. Ainsi le résidu d'ordre 3 d'un hamiltonien du corps, qui s'exprime d'après l'équation (8.6) sous la forme  $H_{R_3} = P_1 G_1^2 G_2^2 + P_2 G_1^2 G_3^2 + P_3 G_2^2 G_3^2$ , est intégrable mais cependant il ne peut pas être facilement intégré dans le sens où sa résolution nécessite l'usage des fonctions elliptiques de Jacobi.

Dans la suite, on dira qu'un hamiltonien issu des résidus d'un intégrateur symplectique du corps solide est facilement intégrable lorsque son intégration peut s'écrire comme une succession de rotations. Son intégration n'utilise alors pas les fonctions elliptiques de Jacobi.

Nous allons regarder ainsi dans ce chapitre comment il est possible de contruire des correcteurs pour les intégrateurs symplectiques du corps solide libre. Nous commencerons par regarder l'utilisation de correcteurs pour obtenir des intégrateurs d'ordre 4 puis d'ordre 6. Nous généraliserons enfin aux ordres supérieurs.

## 11.1 Correcteur d'ordre 4

Nous allons commencer en construisant des correcteurs pour l'ordre 4. Pour cela, nous avons besoin de considérer les résidus d'ordre 3. D'après la section 8.1.3, les résidus d'ordre 3 peuvent s'écrire comme une combinaison linéaire des trois termes  $G_1^2 G_2^2$ ,  $G_1^2 G_3^2$ ,  $G_2^2 G_3^2$ . Ces termes peuvent être exprimés sous la forme d'une somme de termes facilement intégrables. Par exemple,  $G_1^2 G_2^2$  peut s'exprimer sous la forme suivante

$$\begin{aligned} G_1^2 G_2^2 &= \frac{1}{2} \left( (G_1^2 + G_2^2)^2 - G_1^4 - G_2^4 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( (G^2 - G_3^2)^2 - G_1^4 - G_2^4 \right) \\ &= \frac{1}{2} (G^4 + G_3^4 - 2G_3^2 G^2 - G_1^4 - G_2^4). \end{aligned} \quad (11.3)$$

Les termes  $G_1^4$ ,  $G_2^4$ ,  $G_3^4$  correspondent à une rotation autour respectivement des axes principaux **I**, **J**, **K**, le terme  $G_3^2 G^2$  à une rotation autour de l'axe principal **K** suivie par une rotation autour du moment cinétique **G** et le terme  $G^4$  à une rotation autour du moment cinétique **G**. Chacun de ces termes est donc facilement intégrable. En décomposant  $G_1^2 G_3^2$  et  $G_2^2 G_3^2$  de la même façon, on peut exprimer le résidu d'ordre 3,  $H_{R_3}$ , donné d'après la relation (8.6) par  $H_{R_3} = P_1 G_1^2 G_2^2 + P_2 G_1^2 G_3^2 + P_3 G_2^2 G_3^2$  sous la forme

$$\begin{aligned} H_{R_3} &= -P_3 G_1^2 G^2 - P_2 G_2^2 G^2 - P_1 G_3^2 G^2 \\ &\quad + \frac{-P_1 - P_2 + P_3}{2} G_1^4 + \frac{-P_1 + P_2 - P_3}{2} G_2^4 + \frac{P_1 - P_2 - P_3}{2} G_3^4 + \frac{P_1 + P_2 + P_3}{2} G^4. \end{aligned} \quad (11.4)$$

Or d'après l'équation (8.7), on a  $P_1 + P_2 + P_3 = 0$  et ainsi

$$H_{R_3} = P_3 (G_1^4 - G_1^2 G^2) + P_2 (G_2^4 - G_2^2 G^2) + P_1 (G_3^4 - G_3^2 G^2). \quad (11.5)$$

Pour éliminer le résidu d'ordre 3, il faudrait ainsi intégrer le hamiltonien

$$H = A' + B' + C' \quad (11.6)$$

avec

$$A' = \frac{G_1^2}{2I_1} + h^2 P_3 (G_1^2 G^2 - G_1^4), \quad (11.7)$$

$$B' = \frac{G_2^2}{2I_2} + h^2 P_2 (G_2^2 G^2 - G_2^4), \quad (11.8)$$

$$C' = \frac{G_3^2}{2I_3} + h^2 P_1 (G_3^2 G^2 - G_3^4). \quad (11.9)$$

On a regroupé les parties correspondant à une rotation autour du même axe au sein des hamiltoniens  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ . On obtient ainsi un intégrateur d'ordre 4 pour le corps solide libre, qu'on notera C4, avec

$$e^{\frac{h}{2} L_{A'}} e^{\frac{h}{2} L_{B'}} e^{L_{C'}} e^{\frac{h}{2} L_{B'}} e^{\frac{h}{2} L_{A'}}. \quad (11.10)$$

Par conséquent, on peut construire des correcteurs pour le corps solide libre. On peut noter, que l'intégrateur C4 présente 5 étapes alors que pour la décomposition ABC un intégrateur d'ordre 4 doit présenter 9 étapes au minimum comme nous l'avons vu à la section 9.4.4.

Cependant, son coût est plus élevé. En effet, les étapes  $e^{L_{A'}}$ ,  $e^{L_{B'}}$ ,  $e^{L_{C'}}$  présentent une rotation autour de respectivement **I**, **J**, **K** suivie par une rotation autour du moment cinétique **G** et présentent ainsi le même coût qu'une étape de type  $e^{L_S}$  c'est à dire  $2\mathcal{C}_0$  d'après la section 10.1.1, dans le cas où les étapes  $e^{L_A}$ ,  $e^{L_B}$ ,  $e^{L_C}$  présentent un coût de  $1\mathcal{C}_0$ . L'intégrateur présente ainsi un coût de  $10\mathcal{C}_0$ . Contrairement aux intégrateurs de type RS, on ne peut regrouper les rotations autour de **G** car les hamiltoniens  $G_i^2 G^2$  ne commutent avec  $G_j^2$  ou  $G_j^4$  que si  $i = j$ .

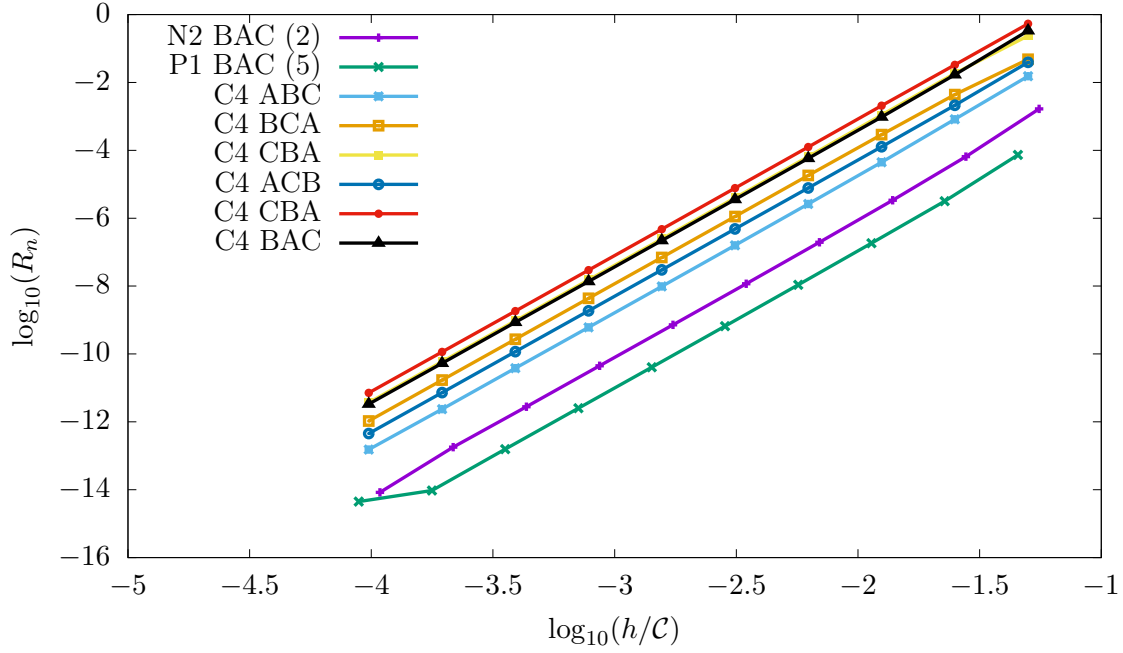


FIGURE 11.2 – Résidus numériques pour les six permutations de l'intégrateur avec correcteur d'ordre 4, C4.

Pour la molécule d'eau, on a ainsi calculé l'expression des coefficients  $P_i$  des résidus d'ordre 3 pour déterminer les hamiltoniens corrigés  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  à intégrer. On a représenté les résidus numériques pour l'intégrateur C4 pour les six permutations possibles des moments d'inertie sur la figure 11.2. Le meilleur intégrateur est celui obtenu pour la permutation ABC. Cependant l'intégrateur P1 BAC (5) est environ 170 fois meilleur que celui-ci.

On pourrait aussi intégrer le hamiltonien avec le correcteur suivant

$$H = A' + B' + C' \quad (11.11)$$

avec

$$A' = \frac{G_1^2}{2I_1} + h^2 (P_1 + P_2) G_1^4, \quad (11.12)$$

$$B' = \frac{G_2^2}{2I_2} + h^2 ((P_1 + 2P_2) G_2^2 G^2 - P_2 G_2^4), \quad (11.13)$$

$$C' = \frac{G_3^2}{2I_3} + h^2 ((2P_1 + P_2) G_3^2 G^2 - P_1 G_3^4 - (P_1 + P_2) G^4). \quad (11.14)$$

Pour simplifier les expressions (11.7), (11.8), (11.9), on a utilisé la relation  $P_1 + P_2 + P_3 = 0$ . On élimine ainsi deux rotations autour de  $\mathbf{G}$  dans l'intégrateur, ce qui diminue le coût de l'intégrateur à  $8\mathcal{C}_0$ . On note C'4 l'intégrateur ainsi obtenu, dont les résidus numériques sont représentés sur la figure 11.3 pour les six permutations. On a amélioré les performances de l'intégrateur, cependant l'intégrateur P1 BAC (5) reste environ 91 fois meilleur que celui-ci pour la meilleure permutation, qui est ici ABC.

On pourrait imaginer d'autres correcteurs pour obtenir des intégrateurs d'ordre 4. Cependant, nous n'avons pas réalisé une étude exhaustive de ces correcteurs. On peut aussi noter que l'ajout d'une étape supplémentaire présentant un coefficient tel que les coefficients des résidus d'ordre 4 vérifient  $P_1 + 2P_2 = 0$ , permettrait obtenir un intégrateur d'ordre 4 avec correcteur à sept étapes présentant un coût de  $8\mathcal{C}_0$ , suite à l'élimination de deux rotations autour de  $\mathbf{G}$ .

Ainsi les intégrateurs d'ordre 4 avec correcteur ainsi obtenus ne permettent pas d'obtenir de meilleurs intégrateurs pour la molécule d'eau.

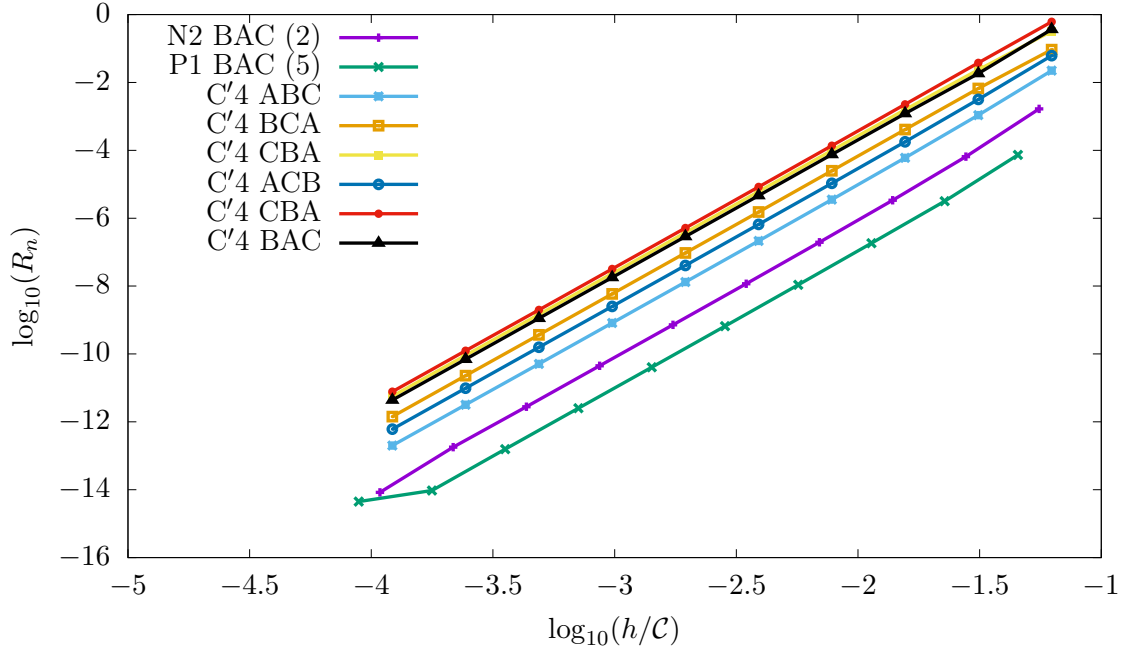


FIGURE 11.3 – Résidus numériques pour les six permutations de l'intégrateur avec correcteur d'ordre 4, C'4.

## 11.2 Correcteur d'ordre 6

On peut aussi regarder s'il est possible de réaliser un intégrateur d'ordre 6 avec un correcteur. Le résidu d'ordre 5 s'écrit d'après l'équation (8.22)

$$H_{R_5} = Q_1 G_1^4 G_2^2 + Q_2 G_2^4 G_3^2 + Q_3 G_3^4 G_1^2 + Q_4 G_1^4 G_3^2 + Q_5 G_2^4 G_1^2 + Q_6 G_3^4 G_2^2 + Q_7 G_1^2 G_2^2 G_3^2. \quad (11.15)$$

Les hamiltoniens  $G_1^4 G_2^2$ ,  $G_2^4 G_3^2$ ,  $G_3^4 G_1^2$ ,  $G_1^4 G_3^2$ ,  $G_2^4 G_1^2$ ,  $G_3^4 G_2^2$  et  $G_1^2 G_2^2 G_3^2$  ne sont pas facilement intégrables, car leurs intégrations nécessitent l'utilisation des fonctions elliptiques de Jacobi. On doit ainsi décomposer chacun de ces hamiltoniens en fonction de termes facilement intégrables. Chacun de ces hamiltoniens appartient à l'ensemble  $\mathcal{E}$  des polynômes de degré 6 et de puissance paire et positive en  $G_1$ ,  $G_2$ ,  $G_3$ .  $\mathcal{E}$  est un espace vectoriel de dimension 10, dont

$$\mathcal{B} = (G_1^6, G_2^6, G_3^6, G_1^4 G_2^2, G_2^4 G_3^2, G_3^4 G_1^2, G_1^4 G_3^2, G_2^4 G_1^2, G_3^4 G_2^2, G_1^2 G_2^2 G_3^2) \quad (11.16)$$

est une base. On cherche une base de  $\mathcal{E}$  seulement constituée de termes facilement intégrables.

Pour que ce hamiltonien soit facilement intégrable, il suffit qu'il se traduise dans le repère du solide par une succession de rotations du moment cinétique  $\mathbf{G}$  autour des axes  $\mathbf{I}$ ,  $\mathbf{J}$ ,  $\mathbf{K}$ .

On peut montrer que tout hamiltonien de degré 6 et de puissance paire et positive en  $G_1$ ,  $G_2$ ,  $G_3$ , induit une rotation du moment cinétique  $\mathbf{G}$  autour des axes  $\mathbf{I}$ ,  $\mathbf{J}$ ,  $\mathbf{K}$  dans le repère du solide, si et seulement si il peut s'écrire comme respectivement une combinaison linéaire des hamiltoniens  $G_1^6$ ,  $G_1^4 G_2^2$ ,  $G_1^2 G_3^4$ ,  $G^6$ , pour l'axe  $\mathbf{I}$ ,  $G_2^6$ ,  $G_2^4 G_1^2$ ,  $G_2^2 G_3^4$ ,  $G^6$ , pour l'axe  $\mathbf{J}$  et  $G_3^6$ ,  $G_3^4 G_2^2$ ,  $G_3^2 G_1^4$ ,  $G^6$ , pour l'axe  $\mathbf{K}$ .

Ainsi pour que  $H$  puisse s'écrire comme une combinaison linéaire de hamiltoniens pouvant être facilement intégrés, il doit être combinaison linéaire de la famille

$$\mathcal{F} = (G_1^6, G_2^6, G_3^6, G_1^4 G_2^2, G_2^4 G_1^2, G_3^4 G_2^2, G_1^2 G_3^4, G_2^2 G_1^4, G_3^2 G_2^4, G^6), \quad (11.17)$$

dont tous les éléments appartiennent à l'ensemble  $\mathcal{E}$ . Cependant  $G^6 = G_1^2 G^4 + G_2^2 G^4 + G_3^2 G^4$  et ainsi la famille  $\mathcal{F}$  n'est pas libre et ne peut constituer une base de  $\mathcal{E}$ . Il n'est ainsi pas possible d'exprimer le résidu d'ordre 5 exclusivement en fonction de hamiltoniens pouvant être facilement intégrés.

En enlevant un des quatre termes  $G^6$ ,  $G_1^2 G^4$ ,  $G_2^2 G^4$ ,  $G_3^2 G^4$ , on peut obtenir une famille libre  $\mathcal{F}'$ .  $(G_1^6, G_2^6, G_3^6, G_1^4 G_2^2, G_2^4 G_1^2, G_3^4 G_2^2, G_1^2 G_3^4, G_2^2 G_1^4, G_3^2 G_2^4)$  constitue par exemple une famille libre de rang 9 de l'ensemble  $\mathcal{E}$ , qu'on peut compléter par un élément de la base  $\mathcal{B}$  pour obtenir une base  $\mathcal{B}'$  de  $\mathcal{E}$ .



On peut la compléter par exemple avec un des six termes  $G_1^2G_2^4, G_2^2G_3^4, G_3^2G_1^4, G_1^4G_2^2, G_2^4G_3^2, G_3^4G_1^2$ , mais pas avec les termes  $G_1^6, G_2^6, G_3^6, G_1^2G_2^2G_3^2$  qui sont des combinaisons linéaires de termes de la famille  $\mathcal{F}'$ . En effet,  $G_1^2G_2^2G_3^2$  peut être écrit comme une combinaison linéaire d'éléments de  $\mathcal{F}'$  comme

$$G_1^2G_2^2G_3^2 = \frac{1}{6}G^6 + \frac{1}{3}(G_1^6 + G_2^6 + G_3^6) - \frac{1}{2}(G_1^4 + G_2^4 + G_3^4)G^2. \quad (11.18)$$

Ainsi le résidu d'ordre 5 peut s'exprimer comme une somme de neuf termes pouvant être facilement intégrables et d'un seul ne pouvant pas l'être. Ici, nous nous limiterons à quatre choix possibles pour la famille  $\mathcal{F}'$ , qui correspondent aux quatre familles libres obtenues en enlevant un des quatre termes suivants  $G^6, G_1^2G^4, G_2^2G^4, G_3^2G^4$ . De même, pour compléter la famille  $\mathcal{F}'$  afin de former une base  $\mathcal{B}'$ , nous considérerons uniquement les six termes suivants  $G_1^2G_2^4, G_2^2G_3^4, G_3^2G_1^4, G_1^4G_2^2, G_2^4G_3^2, G_3^4G_1^2$ . On se limite ainsi seulement à 24 choix possibles pour la base  $\mathcal{B}'$ , bien qu'il existe une infinité de bases  $\mathcal{B}'$ , où neuf de ces éléments sont facilement intégrables.

On note  $X$  le vecteur des coordonnées du résidu  $H_{R_5}$  d'ordre 5 dans la base  $\mathcal{B}$  dont les éléments sont ordonnés suivant l'ordre de l'équation (11.16) et  $X'$  celui de ses coordonnées dans la base  $\mathcal{B}'$ .  $P$  est la matrice de l'application identité de  $\mathcal{E}$  dans la base  $\mathcal{B}'$  à  $\mathcal{E}$  dans la base  $\mathcal{B}$ . Ainsi

$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \\ Q_7 \end{pmatrix}, \quad X' = \begin{pmatrix} Q'_1 \\ Q'_2 \\ Q'_3 \\ Q'_4 \\ Q'_5 \\ Q'_6 \\ Q'_7 \\ Q'_8 \\ Q'_9 \\ Q'_{10} \end{pmatrix} = P^{-1}X. \quad (11.19)$$

Nous allons considérer le cas, où l'on supprime le terme  $G^6$  de la famille  $\mathcal{F}$  pour obtenir la famille libre  $\mathcal{F}' = (G_1^6, G_2^6, G_3^6, G_1^4G^2, G_2^4G^2, G_3^4G^2, G_1^2G^4, G_2^2G^4, G_3^2G^4)$ . Nous allons donner les expressions de la matrice  $P$  pour les six bases possibles  $\mathcal{B}'$  ordonnées selon

$$\mathcal{B}' = (G_1^6, G_2^6, G_3^6, G_1^4G^2, G_2^4G^2, G_3^4G^2, G_1^2G^4, G_2^2G^4, G_3^2G^4, \mathcal{X}). \quad (11.20)$$

Le coefficient  $Q'_{10}$  sera ainsi celui situé devant le terme  $\mathcal{X}$ , qui correspond au terme ajouté pour former la base  $\mathcal{B}'$ . Nous allons donner les expressions de la matrice  $P$  lorsqu'on complète la base  $\mathcal{B}'$  par l'élément  $\mathcal{X}$ , qui correspondra successivement à  $G_1^4G_2^2, G_2^4G_3^2, G_3^4G_1^2, G_1^4G_3^2, G_2^4G_1^2, G_3^4G_2^2$ .

$\mathcal{X} = G_1^4G_2^2$  :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & -6 & -2 & -4 & 2 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & -4 & -2 & 0 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 2 & -2 & 0 & -2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 6 & 0 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 6 & 0 & 0 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & 0 & 6 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -4 & 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & -4 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 6 & 6 & -6 & -6 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$



$\mathcal{X} = G_3^4 G_2^2$  :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad P^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & -4 & -2 & 0 & -2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 0 & 2 & -2 & 0 & -2 & -4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & -4 & -2 & -6 & 4 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 6 & 0 & 0 & -6 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & 0 & 6 & 6 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 6 & -6 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -4 & 0 & 2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & -4 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & 2 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -6 & -6 & 6 & 6 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

À partir de  $P^{-1}$ , on peut ainsi obtenir les coordonnées  $X'$  de  $H_{R_5}$ . On remarque ainsi que le coefficient devant le seul terme non facilement intégrable est nul si et seulement si

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 - Q_4 - Q_5 - Q_6 = 0, \quad (11.21)$$

quel que soit le choix de l'élément  $\mathcal{X}$ . Ainsi  $H_{R_5}$  peut s'écrire comme une combinaison linéaire de termes facilement intégrables si la relation (11.21) est vérifiée. Dans ce cas, il sera alors possible de réaliser un intégrateur d'ordre 6 à l'aide de correcteurs.

Ici, nous avons construit la famille  $\mathcal{F}'$  en retirant le terme  $G^6$  de la famille  $\mathcal{F}$ . Si on enlève un des trois termes  $G_1^2 G^4$ ,  $G_2^2 G^4$ ,  $G_3^2 G^4$  pour obtenir une autre base, seules les expressions des coefficients  $Q'_7$ ,  $Q'_8$ ,  $Q'_9$  seront modifiées. Ces coefficients peuvent être obtenus à partir de la relation  $G^6 = G_1^2 G^4 + G_2^2 G^4 + G_3^2 G^4$ .

Pour vérifier la relation (11.21), il est nécessaire de disposer d'un paramètre libre et donc d'ajouter deux étapes supplémentaires à un intégrateur symétrique. Ainsi en ajoutant deux étapes à l'intégrateur d'ordre 4 obtenu par correction dans la section 11.1, on peut obtenir un intégrateur d'ordre 6. En ajoutant deux étapes au schéma symétrique d'ordre 2, on obtient par ordre alphabétique les trois intégrateurs suivants

$$\begin{aligned} & ABACABA \\ & ABCACBA \\ & ABCBCBA. \end{aligned} \quad (11.22)$$

Nous allons détailler la construction de l'intégrateur d'ordre 6 pour l'intégrateur ABCACBA avec le paramètre libre  $z$ . Cet intégrateur vérifie

$$e^{hzL_A} e^{\frac{h}{2}L_B} e^{\frac{h}{2}L_C} e^{h(1-2z)L_A} e^{\frac{h}{2}L_C} e^{\frac{h}{2}L_B} e^{hzL_A} = e^{hL_H + h^3L_{H_{R_3}} + O(h^5)}, \quad (11.23)$$

avec  $H_{R_3} = P_1 G_1^2 G_2^2 + P_2 G_1^2 G_3^2 + P_3 G_2^2 G_3^2$ . On peut obtenir un intégrateur d'ordre 4 à partir de ce schéma d'ordre 2 comme indiqué dans la section 11.1. On peut par exemple obtenir le schéma d'ordre 4 pour tout  $z$

$$e^{hzL_A} e^{\frac{h}{2}L_{B'}} e^{\frac{h}{2}L_{C'}} e^{h(1-2z)L_{A'}} e^{\frac{h}{2}L_{C'}} e^{\frac{h}{2}L_{B'}} e^{hzL_A} = e^{hL_H + h^5L_{H_{R_5}} + O(h^7)}, \quad (11.24)$$

où les hamiltoniens  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  ont des expressions similaires à celles données dans les équations (11.7), (11.8), (11.9) et où

$$H_{R_5} = Q_1 G_1^4 G_2^2 + Q_2 G_2^4 G_3^2 + Q_3 G_3^4 G_1^2 + Q_4 G_1^4 G_3^2 + Q_5 G_2^4 G_1^2 + Q_6 G_3^4 G_2^2 + Q_7 G_1^2 G_2^2 G_3^2. \quad (11.25)$$

Il est important de noter que les coefficients  $Q_i$  doivent être calculés pour l'intégrateur d'ordre 4 corrigé et non pour l'intégrateur d'ordre 2 de départ. En effet, pour obtenir un intégrateur d'ordre 4, on a modifié le hamiltonien de départ, ce qui résulte en un changement des coefficients  $Q_i$  du résidu d'ordre 5. Les coefficients  $Q_i$  dépendent des moments d'inertie et du coefficient  $z$ . Il faut ainsi résoudre en  $z$  l'équation  $Q_1 + Q_2 + Q_3 - Q_4 - Q_5 - Q_6 = 0$ . On peut alors obtenir par exemple l'intégrateur d'ordre 6 suivant

$$e^{hzL_A} e^{\frac{h}{2}L_{B''}} e^{\frac{h}{2}L_{C''}} e^{h(1-2z)L_{A''}} e^{\frac{h}{2}L_{C''}} e^{\frac{h}{2}L_{B''}} e^{hzL_A} = e^{hL_H + O(h^7)}, \quad (11.26)$$

où les hamiltoniens  $A''$ ,  $B''$ ,  $C''$  s'expriment en fonction des coordonnées  $Q'_i$  dans la nouvelle base  $\mathcal{B}'$  choisie selon

$$A'' = \frac{G_1^2}{2I_1} + \frac{1}{1-2z} (h^2 P_3 (G_1^2 G^2 - G_1^4) - h^4 (Q'_1 G_1^6 + Q'_4 G_1^4 G^2 + Q'_7 G_1^2 G^4)) \quad (11.27)$$

$$B'' = \frac{G_2^2}{2I_2} + h^2 P_2 (G_2^2 G^2 - G_2^4) - h^4 (Q'_2 G_2^6 + Q'_5 G_2^4 G^2 + Q'_8 G_2^2 G^4) \quad (11.28)$$

$$C'' = \frac{G_3^2}{2I_3} + h^2 P_1 (G_3^2 G^2 - G_3^4) - h^4 (Q'_3 G_3^6 + Q'_6 G_3^4 G^2 + Q'_9 G_3^2 G^4) \quad (11.29)$$

pour le cas, où  $G^6$  a été enlevé pour construire la base  $\mathcal{B}'$ . Les expressions des coefficients  $Q'_i$  en fonction des coefficients sont données par la matrice  $P^{-1}$  pour la base  $\mathcal{B}'$  choisie.

À partir des trois intégrateurs symétriques d'ordre 2 de départ à sept étapes, on peut ainsi construire les six schémas d'ordre 4 suivants

$$\begin{array}{ll} A'' B'' A C'' A B'' A'' & \text{C6 1.1} \\ A B'' A'' C'' A'' B'' A & \text{C6 1.2} \\ A'' B'' C'' A C'' B'' A'' & \text{C6 2.1} \\ A B'' C'' A'' C'' B'' A & \text{C6 2.2} \\ A'' B'' C'' B C'' B'' A'' & \text{C6 3.1} \\ A'' B C'' B'' C'' B A'' & \text{C6 3.2.} \end{array} \quad (11.30)$$

Le degré maximum de  $z$  pour les différents intégrateurs dans l'équation (11.21) est quatre. L'équation (11.21) présente ainsi 4 solutions réelles au maximum, qu'on numérottera par  $z$  croissant. En considérant les six permutations possibles pour les moments d'inertie pour chacun des six schémas d'ordre 4, il existe ainsi au maximum  $6 \times 6 \times 4 = 144$  schémas d'ordre 4, où les résidus d'ordre 5 peuvent s'écrire comme une somme de termes pouvant être facilement intégrés. Nous avons considéré ici 24 correcteurs d'ordre 6, ce qui nous donnera au maximum  $144 \times 24 = 3456$  intégrateurs d'ordre 6 possibles.

Les intégrateurs du type C6 1.1, C6 1.2, C6 2.2, C6 3.2 présentent un coût de  $12\mathcal{C}_0$  alors que les intégrateurs du type C6 2.1 et C6 3.1 présentent un coût de  $13\mathcal{C}_0$ . Les intégrateurs du type C6 1.1, C6 1.2, C6 2.2, C6 3.2 contiennent en effet une correction sur le pas central, ce qui supprime une rotation autour du moment cinétique  $\mathbf{G}$  et diminue le coût de  $1\mathcal{C}_0$ .

Pour la molécule d'eau, il existe 104 schémas d'ordre 4 avec une solution réelle et ainsi  $104 \times 24 = 2496$  intégrateurs d'ordre 6 possibles. Nous avons déterminé à l'aide des résidus numériques le meilleur intégrateur d'ordre 6 avec correcteur pour la molécule d'eau. Il s'agit de C6 1.1 ACB (1), qui présente la valeur de  $z$  suivante

$$z = 0.395112847454797733955910054160448285029507608960954. \quad (11.31)$$

Nous avons comparé ces résidus numériques avec ceux du meilleur intégrateur de référence d'ordre 6 RSR6 SS9 McLachlan CBA pour la molécule d'eau sur la figure 11.4. En fonction du choix de la base parmi les 24 considérées, le rapport des résidus de C6 1.1 ACB (1) sur ceux de l'intégrateur RSR6 SS9 McLachlan CBA varie entre 0.9 et 1.2. Pour cet intégrateur, le choix de la base pour celles considérées a ainsi peu d'importance. Cependant, pour d'autres intégrateurs, on obtient un rapport d'environ dix entre les résidus obtenus avec différentes bases. Ainsi, les correcteurs d'ordre 6 considérés ici permettent d'obtenir de meilleurs intégrateurs que les intégrateurs de référence existants. Cependant la diminution du temps de calcul est extrêmement limitée. En effet, le rapport du temps de calcul de C6 1.1 ACB (1) sur celui de RSR6 SS9 McLachlan CBA est alors environ  $0.9^{1/6} \approx 0.98$ , ce qui correspond à une diminution du temps de calcul d'environ 2%.

De même que l'ordre 4, on pourrait aussi imaginer d'autres correcteurs d'ordre 6 obtenus en combinant de façon différente les termes ajoutés pour éliminer les résidus d'ordre 5.

### 11.3 Correcteurs d'ordre supérieur

On peut construire des intégrateurs symétriques avec correcteurs d'ordre supérieur à l'ordre 6. Les résidus d'ordre  $2k+1$  appartiennent à l'ensemble  $\mathcal{E}_{2k+1}$  des polynômes de degré  $2(k+1)$  et de puissance

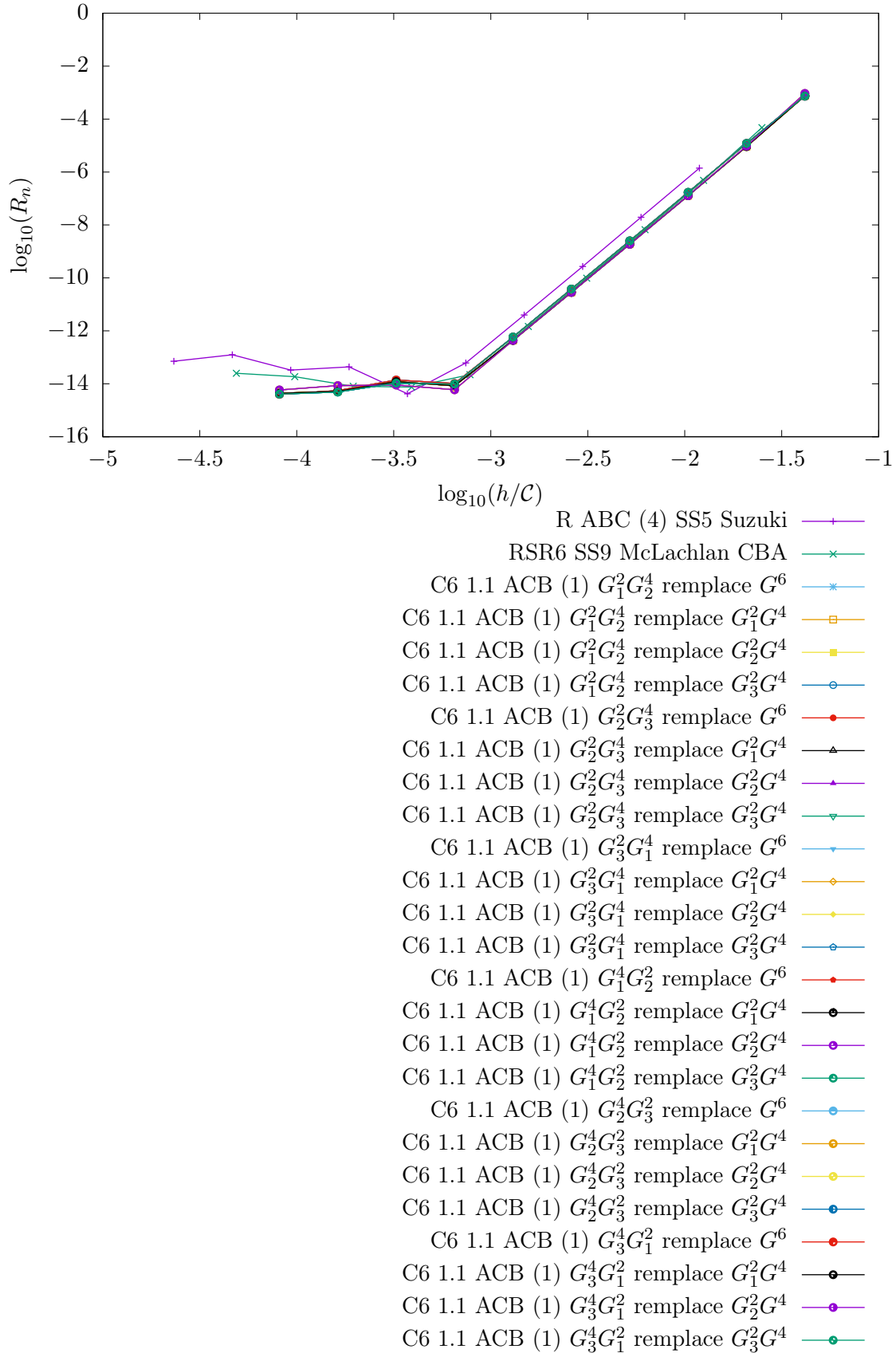


FIGURE 11.4 – Résidus numériques pour les 24 correcteurs de l'intégrateur C6 1.1 ACB (1) comparés à des intégrateurs de référence pour la molécule d'eau.

Ordre	Nombre d'étapes	Coût
4	5	10
6	7	12
8	13	18
10	25	30
12	45	50

TABLEAU 11.1 – Nombre minimal d'étapes et coût d'un intégrateur symétrique d'ordre  $2n$  avec correcteur pour le corps solide libre pour la décomposition ABC.

paire et positive en  $G_1, G_2, G_3$ . Pour connaître le nombre d'étapes nécessaires à chaque ordre, il faut recenser le nombre de termes de la base de l'ensemble  $\mathcal{E}_{2k+1}$ . Il est aussi nécessaire de déterminer la forme des termes facilement intégrables de  $\mathcal{E}_{2k+1}$ .

On obtient une base de  $\mathcal{E}_{2k+1}$  en considérant les monômes en  $G_1, G_2, G_3$  du développement de

$$\begin{aligned}
G^{2(k+1)} &= (G_1^2 + G_2^2 + G_3^2)^{k+1} \\
&= \sum_{p=0}^{k+1} \binom{k+1}{p} (G_1^2 + G_2^2)^p G_3^{2(k+1-p)} \\
&= \sum_{p=0}^{k+1} \binom{k+1}{p} \sum_{q=0}^p \binom{p}{q} G_1^{2q} G_2^{2(p-q)} G_3^{2(k+1-p)}.
\end{aligned} \tag{11.32}$$

Le nombre de ces termes est ainsi

$$\sum_{p=0}^{k+1} \sum_{q=0}^p 1 = \sum_{p=0}^{k+1} (p+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2} + k + 2 = \frac{(k+2)(k+3)}{2}. \tag{11.33}$$

Comme pour le cas de l'intégrateur d'ordre 6 où  $k = 2$ , on peut montrer qu'un élément de  $\mathcal{E}_{2k+1}$  se traduit par une rotation selon les axes  $\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}$ , s'il est respectivement combinaison linéaire des termes  $G_1^{2p} G^{2(k+1-p)}, G_2^{2p} G^{2(k+1-p)}, G_3^{2p} G^{2(k+1-p)}$  avec  $p$  un entier variant entre 0 et  $k+1$ . Le terme  $G^{2(k+1)}$  est une combinaison linéaire des termes  $G_1^2 G^{2k}, G_2^2 G^{2k}, G_3^2 G^{2k}$  et on compte ainsi  $3(k+1)$  termes de  $\mathcal{E}_{2k+1}$  facilement intégrables et linéairement indépendants. On peut ainsi exprimer le résidu  $H_{R_{2k+1}}$  d'ordre  $2k+1$  dans une base de  $\mathcal{E}_{2k+1}$ , où l'on compte  $3(k+1)$  termes facilement intégrables. On doit ainsi ajouter suffisamment d'étapes à l'intégrateur pour annuler les coefficients présents devant les termes non facilement intégrables dans l'expression du résidu  $H_{R_{2k+1}}$ . Le nombre de termes non facilement intégrables dans la base de  $\mathcal{E}_{2k+1}$  est

$$\frac{(k+2)(k+3)}{2} - 3(k+1) = \frac{k(k-1)}{2}. \tag{11.34}$$

Le nombre de paramètres libres à ajouter pour obtenir un intégrateur symétrique d'ordre  $2n$  est donné par

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k(k-1)}{2} = \frac{1}{2} \left( \sum_{k=0}^{n-1} k^2 - \sum_{k=0}^{n-1} k \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} - \frac{n(n-1)}{2} \right) = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}. \tag{11.35}$$

On part d'un intégrateur symétrique d'ordre 2 à 5 étapes. Chaque paramètre libre à ajouter à l'intégrateur induit une augmentation du nombre d'étapes de 2, comme l'intégrateur est symétrique. Ainsi le nombre d'étapes nécessaires pour un intégrateur symétrique d'ordre  $2n$  avec correcteur est

$$5 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3}. \tag{11.36}$$

Le tableau 11.1 recense ainsi le nombre minimal d'étapes d'un intégrateur symétrique d'ordre  $2n$  avec correcteur pour le corps solide libre pour la décomposition ABC ainsi que le coût minimal pour les

correcteurs que nous avons envisagés ici. Ainsi l'utilisation de correcteurs peut permettre de construire des intégrateurs présentant moins d'étapes si on compare aux intégrateurs construits dans le cas général et aux intégrateurs spécifiques que nous avons considérés à la section 9.4.4 (voir tableau 9.1). Ainsi il semble que leur utilisation pourrait s'avérer bénéfique aux ordres supérieurs. Cependant leur construction s'avère alors ardue et le nombre d'intégrateurs à considérer à chaque ordre devient important.

On peut noter une similitude entre l'usage des correcteurs et les intégrateurs DMV2r développés par [Hairer et Vilmart \(2006\)](#). [Hairer et Vilmart \(2006\)](#) ont modifié les équations du mouvement par le biais des moments d'inertie afin d'augmenter l'ordre de l'intégrateur DMV. Cependant, une modification directe des équations du mouvement ne permet pas toujours de conserver la structure symplectique des équations du mouvement contrairement à l'utilisation de correcteurs. Les équations du mouvement obtenues par [Hairer et Vilmart \(2006\)](#) peuvent seulement être déduites d'un hamiltonien modifié pour le moment cinétique mais pas pour les équations décrivant l'orientation du solide. À l'inverse, une modification du hamiltonien permet de conserver la structure symplectique des équations du mouvement. Cependant, l'utilisation faite ici aux ordres 4 et 6 ne permet pas d'obtenir des intégrateurs symplectiques plus efficaces que les intégrateurs symplectiques de référence.

# Conclusion

La première partie de ce travail a concerné l'étude de la rotation à long terme de Cérès et Vesta. Pour intégrer leurs rotations, nous avons réalisé une moyenne sur leurs rotations rapides et appliqué la méthode d'intégration symplectique de [Farago et al. \(2009\)](#). À partir des coordonnées des axes de rotation déterminées par la sonde spatiale *Dawn*, nous avons obtenu pour Cérès des variations d'obliquité entre 2 et 20° pour les 20 derniers millions d'années en accord avec les résultats de [Bills et Scott \(2017\)](#) et [Ermakov et al. \(2017a\)](#). Pour Vesta, nous avons déterminé que l'obliquité variait sur cet intervalle de temps entre 21 et 45°. Comme noté par [Skoglöv et al. \(1996\)](#), ces variations d'obliquité sont principalement dues aux inclinaisons élevées des orbites de Cérès et Vesta par rapport au plan invariant du système solaire. Pour Cérès et Vesta, il existe une incertitude importante sur leurs constantes de précession. En effet, elles n'ont pu être mesurées par la sonde spatiale *Dawn* et les incertitudes sur leurs structures internes ne permettent pas de les contraindre précisément. Nous avons calculé les variations de l'obliquité de Cérès et Vesta pour les intervalles d'incertitude des constantes de précession et avons obtenu des amplitudes de variation très similaires.

Les variations de l'obliquité pour Cérès et Vesta sont principalement dues aux inclinaisons élevées des orbites et le mouvement de rotation dépend des variations du mouvement orbital. Afin de déterminer les variations possibles de l'inclinaison et d'étudier la stabilité des mouvements orbitaux, nous avons construit un modèle séculaire, où Cérès et Vesta sont uniquement perturbés par Jupiter et Saturne. Ce modèle a permis d'observer la proximité relative de Cérès avec les résonances associées aux fréquences séculaires  $2g_6 - g_5$  et  $2g_6 - g_7$ , dont les effets sur l'inclinaison de Cérès peuvent atteindre environ 0.5°. Cependant, la diffusion de la fréquence propre séculaire  $g_C$  de Cérès n'apparaît pas suffisante pour que Cérès entre en résonance avec une de ces fréquences. Ce modèle permet de reproduire entièrement l'évolution séculaire orbitale de Cérès et Vesta. Les perturbations de Jupiter et Saturne sont ainsi prépondérantes par rapport à celles des autres planètes, comme cela a été noté par [Skoglöv et al. \(1996\)](#) pour Cérès et Vesta et par [Ermakov et al. \(2017a\)](#) pour Cérès.

Nous avons ensuite étudié la stabilité des axes de rotation de Cérès et Vesta à partir des équations séculaires. Leurs fréquences de précession sont relativement proches des fréquences propres de précession du nœud des planètes internes. La fréquence de précession de Cérès est proche des fréquences propres de précession du nœud de Mercure et Vénus et celle de Vesta de celles de la Terre et Mars. C'est notamment le cas pour Mars, où le recouvrement des résonances dues aux fréquences propres des planètes internes est responsable du caractère chaotique de la rotation ([Laskar et Robutel, 1993](#)). Cérès et Vesta sont principalement perturbés par Jupiter et Saturne et les perturbations des planètes internes sont relativement faibles. Les résonances séculaires avec les fréquences de précession du nœud des planètes internes ont ainsi des largeurs plus faibles et ne se recouvrent pas. Les rotations à long terme de Cérès et Vesta sont ainsi relativement stables. Cérès et Vesta présentent aussi des zones chaotiques avec des variations importantes de l'obliquité comme pour les planètes internes mais elles sont dues au recouvrement de résonances associées à leurs fréquences propres avec celles associées à des fréquences provenant des perturbations de Jupiter et Saturne. Nous avons aussi noté la présence de résonances dues aux évolutions séculaires de l'excentricité, qui présentent toutefois de faibles effets sur la stabilité de la rotation.

Vesta a subi deux impacts géants au niveau de l'hémisphère sud qui ont modifié sa forme et sa période de rotation. À partir de la forme fossile modélisée de la croûte et de la vitesse de rotation avant les deux collisions ([Fu et al., 2014](#)), nous avons estimé la constante de précession de Vesta primitif. Les deux impacts géants auraient rapproché Vesta de la résonance avec la fréquence orbitale  $2s_6 - s_V$ . Étant donné l'incertitude sur la constante de précession, Vesta pourrait ainsi être dans cette résonance,



où l'obliquité peut varier entre 17 et 48°.

Enfin, à partir des variations d'obliquité nous avons pu déterminer l'évolution de l'insolation à la surface de Cérès. À l'aide du modèle très simplifié de rotation rapide, nous avons déterminé une borne supérieure en fonction de la latitude pour la température maximale à la surface de Cérès. En utilisant le critère de [Schorghofer \(2008\)](#), selon lequel la glace située sous la surface serait stable pour une température annuelle inférieure à 145 K, nous avons donné une borne supérieure de 67° pour la latitude à partir de laquelle la glace sous la surface de Cérès est stable. Cela est en accord avec [Schorghofer \(2016\)](#), qui utilise des modèles thermodynamiques plus complets pour déterminer la distribution de glace.

Les méthodes utilisées pour l'étude de la rotation de Cérès et Vesta peuvent être appliquées à d'autres astéroïdes de la ceinture principale afin d'étudier les variations de leurs obliquités et la stabilité de leurs axes de rotation. Pour des astéroïdes riches en glace, cela pourrait permettre notamment de donner des contraintes sur la distribution de la glace sur et sous la surface. Enfin, de telles méthodes pourraient aussi être appliquées aux exoplanètes découvertes afin d'étudier la stabilité de leurs axes de rotation et de donner des contraintes d'insolation pour l'étude de leurs climats.

Dans la seconde partie de ce travail, nous avons étudié la construction d'intégrateurs symplectiques spécifiques au corps solide libre. Le principe de ce travail est d'utiliser les propriétés de l'algèbre de Lie du moment cinétique afin de construire des intégrateurs spécifiques au corps solide libre. Pour cela, nous avons utilisé les méthodes utilisées généralement pour construire des intégrateurs symplectiques. Elles consistent à choisir les coefficients et le nombre des différentes étapes de l'intégrateur de sorte à annuler les résidus jusqu'à l'ordre souhaité, les résidus correspondant à l'écart de la solution donnée par l'intégrateur à la solution exacte. L'algèbre de Lie du moment cinétique présente des propriétés, qui permettent de simplifier l'expression des résidus des intégrateurs et notamment de diminuer le nombre de termes indépendants dans les résidus dans le cas de la décomposition ABC. Nous avons ensuite construit des intégrateurs symplectiques spécifiques au corps solide libre dont les coefficients permettent d'annuler ces résidus jusqu'à un ordre donné. Pour réaliser cela, les coefficients des intégrateurs doivent dépendre des moments d'inertie. Dans le cas de la décomposition ABC, les résidus présentent moins de termes indépendants que pour un hamiltonien dans le cas général et les intégrateurs symplectiques spécifiques au corps solide libre peuvent ainsi présenter des schémas d'intégration avec moins d'étapes que les intégrateurs symplectiques généraux existants.

Nous avons construit pour la décomposition ABC des intégrateurs symplectiques d'ordre 4 spécifiques au corps solide à neuf étapes ainsi que des intégrateurs d'ordre 4 à onze étapes présentant un paramètre libre. Pour la décomposition RS, nous avons obtenu un intégrateur d'ordre 4 à neuf étapes présentant un paramètre libre. Nous avons comparé l'efficacité des intégrateurs obtenus à celle des intégrateurs symplectiques généraux existants pour la molécule d'eau, qui constitue un exemple classique de molécule asymétrique utilisé pour tester les intégrateurs du corps solide. On a alors constaté que si les intégrateurs spécifiques pouvaient compter moins d'étapes, leur efficacité était similaire aux intégrateurs généraux. Une étude de ces intégrateurs spécifiques pour l'ensemble des moments d'inertie des corps physiques a permis d'observer que leur intérêt était seulement limité aux corps présentant un caractère asymétrique très accentué.

Si l'étude de l'algèbre de Lie a permis d'obtenir des intégrateurs avec moins d'étapes pour la décomposition ABC, cela n'a pas été le cas pour la décomposition RS. Nous avons ainsi construit ici principalement des intégrateurs spécifiques utilisant la décomposition ABC. Ces intégrateurs spécifiques sont meilleurs que les intégrateurs généraux de même type, à savoir ABC, mais d'efficacité comparable aux intégrateurs généraux de type RS. En effet, les intégrateurs obtenus avec la décomposition RS présentent un coût moins important que ceux obtenus pour la décomposition ABC et cela d'autant plus avec la réduction du coût observée dans ce travail pour la décomposition RS.

Nous avons ensuite cherché à construire des intégrateurs d'ordre supérieur. Pour cela, nous avons étudié l'utilisation d'un correcteur pour augmenter l'ordre des intégrateurs symplectiques du corps solide. Nous avons vu que les résidus pouvaient s'écrire comme une combinaison linéaire de monômes. L'intégration de certains de ces monômes fait intervenir les fonctions elliptiques de Jacobi, alors que l'intégration des autres monômes se traduit par une succession de rotations. On ajoute ainsi des étapes supplémentaires à un intégrateur d'ordre 2 symétrique, de sorte à annuler les termes, dont la résolu-

tion fait appel aux fonctions elliptiques. Les termes restants au sein des résidus se traduisent par une succession de rotations et peuvent être soustraits au hamiltonien de départ pour obtenir un intégrateur d'ordre supérieur. Cependant, l'utilisation faite ici aux ordres 4 et 6 ne permet pas d'obtenir des intégrateurs symplectiques plus efficaces que les intégrateurs symplectiques de référence. Les intégrateurs obtenus à l'ordre 4 sont moins bons que les intégrateurs généraux existants et les intégrateurs obtenus à l'ordre 6 ont une précision équivalente aux intégrateurs généraux. Une étude approfondie de l'utilisation de correcteurs pour le corps solide libre pourrait permettre de généraliser l'usage des intégrateurs avec correcteurs aux ordres 8 et 10, où leur faible coût pourrait leur assurer une plus grande efficacité. Nous avons ici restreint l'étude des correcteurs à la décomposition ABC et il pourrait être aussi utile de l'étendre à la décomposition RS.



## Annexe A

# Variables canoniques en mécanique céleste

Considérons les variables impulsion-position ou action-angle  $(p_i, q_i)$  canoniques vérifiant les relations

$$\{p_i, p_j\} = 0 \quad (\text{A.1})$$

$$\{q_i, q_j\} = 0 \quad (\text{A.2})$$

$$\{p_i, q_j\} = \delta_{ij} \quad (\text{A.3})$$

pour les crochets de Poisson

$$\{a, b\} = \sum_i \left( \frac{\partial a}{\partial p_i} \frac{\partial b}{\partial q_i} - \frac{\partial a}{\partial q_i} \frac{\partial b}{\partial p_i} \right). \quad (\text{A.4})$$

Les équations du mouvement peuvent être obtenues à partir du hamiltonien  $H$  pour le système étudié à l'aide des relations

$$\dot{p}_i = \{H, p_i\} \quad (\text{A.5})$$

$$\dot{q}_i = \{H, q_i\}. \quad (\text{A.6})$$

Nous allons décrire ici les variables canoniques de la mécanique céleste utilisées dans ce travail. On considérera le cas d'un système planétaire composé d'une étoile centrale de masse  $m_0$  et de  $n$  corps planétaires de masse  $(m_1, \dots, m_n)$ .

### A.1 Variables canoniques barycentriques

Les variables canoniques barycentriques  $(\tilde{\mathbf{u}}_k, \mathbf{u}_k)$  permettent de repérer les positions des corps par rapport au barycentre du système planétaire. La position du corps  $k$  de masse  $m_k$  par rapport au barycentre est donnée par  $\mathbf{u}_k$  et sa vitesse par  $\dot{\mathbf{u}}_k$ . Son impulsion est donnée par  $\tilde{\mathbf{u}}_k = m_k \dot{\mathbf{u}}_k$ .

### A.2 Variables canoniques héliocentriques

Les variables canoniques héliocentriques  $(\tilde{\mathbf{r}}_k, \mathbf{r}_k)$  ont été introduites par [Poincaré \(1896\)](#). Elles ont notamment été utilisées par [Laskar et Robutel \(1995\)](#) pour calculer le hamiltonien d'interaction entre deux corps planétaires et consistent à repérer les corps planétaires par rapport à l'étoile centrale. Ces variables permettent ainsi de réaliser une réduction du barycentre.

La position de l'étoile reste inchangée  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{u}_0$ . Les corps planétaires  $k$  sont repérés par rapport à l'étoile centrale et ainsi  $\mathbf{r}_k = \mathbf{u}_k - \mathbf{u}_0$ .

Pour que la transformation soit canonique, les impulsions des corps planétaires doivent rester inchangées et ainsi  $\tilde{\mathbf{r}}_k = \tilde{\mathbf{u}}_k$  et l'impulsion de l'étoile centrale doit être égale à la quantité de mouvement totale du système planétaire  $\tilde{\mathbf{r}}_0 = \sum_{k=0}^n \tilde{\mathbf{u}}_k$  et reste ainsi constante.

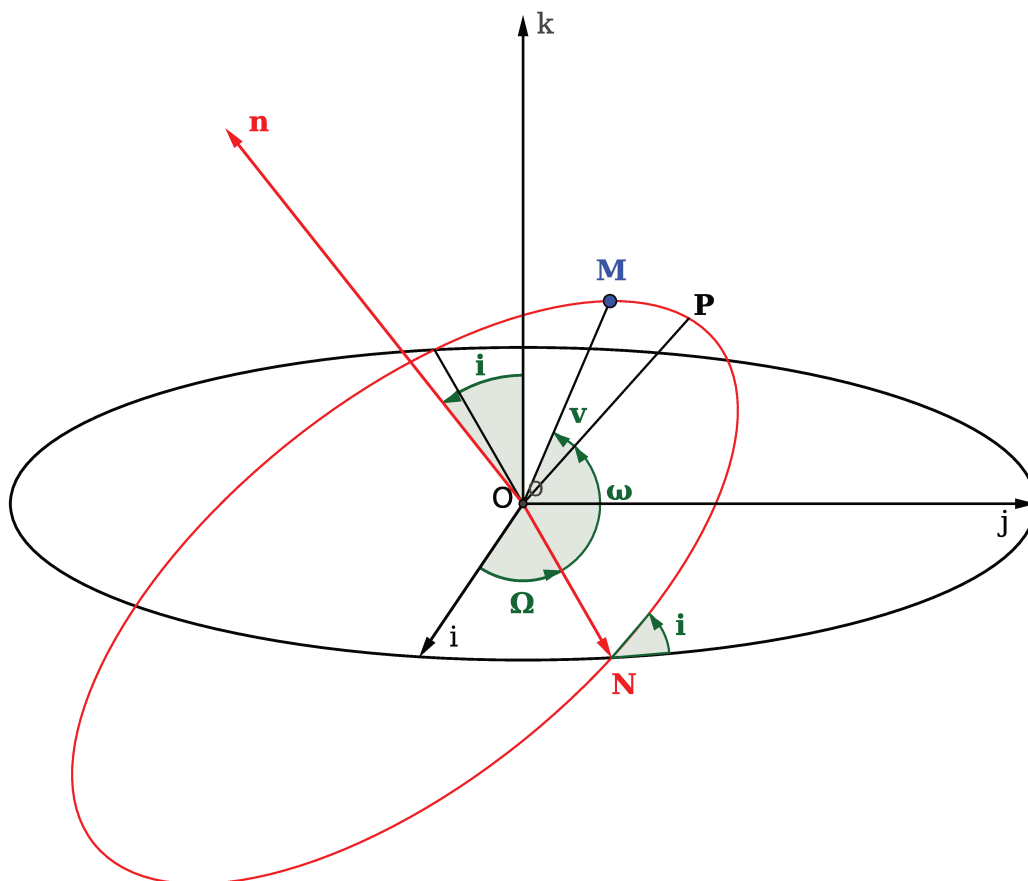


FIGURE A.1 – Anomalie vraie  $v$ , inclinaison  $i$ , longitude du nœud ascendant  $\Omega$ , argument du périhélie  $\omega$  pour une orbite en rouge repérée par rapport au plan de référence  $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$  en noir.

### A.3 Éléments elliptiques

Les éléments elliptiques  $(a, e, i, \lambda, \varpi, \Omega)$  représentés sur la figure A.1 peuvent être utilisés pour décrire le mouvement orbital d'un corps.

Le demi-grand axe  $a$  et l'excentricité  $e$  permettent de donner la forme de l'orbite du corps. Les trois angles  $i, \omega, \Omega$  sur la figure A.1 indiquent l'orientation de l'orbite dans l'espace. L'angle  $i$  donne l'inclinaison de l'orbite par rapport à un plan de référence  $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ . L'orbite coupe le plan de référence  $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$  en deux points appelés nœuds. Le nœud ascendant correspond au nœud, où le corps traverse le plan de référence dans le sens de  $\mathbf{k}$ . La longitude du nœud ascendant repère dans le plan  $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$  la position du nœud ascendant  $N$  de l'orbite par rapport à une direction de référence située dans le plan  $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ . L'argument du périhélie  $\omega$  repère la position du périhélie par rapport au nœud ascendant et la longitude du périhélie est donnée par  $\varpi = \omega + \Omega$ .

L'anomalie vraie  $v$  sur la figure A.1 repère la position du corps  $k$  sur son orbite par rapport au périhélie. On peut définir un autre angle permettant de décrire le mouvement du corps sur son orbite. Il s'agit de l'anomalie moyenne  $M$ , qui est proportionnelle à l'aire balayée depuis le périhélie par le segment rejoignant un des foyers de l'ellipse à la planète et qui est ainsi proportionnelle au temps en vertu de la deuxième loi de Kepler. Pour obtenir l'expression de l'anomalie moyenne à partir de la longitude vraie, il faut introduire l'anomalie excentrique  $E$  vérifiant les équations  $\cos v = (\cos E - e)/(1 - e \cos E)$  et  $\sin v = \sqrt{1 - e^2} \sin E/(1 - e \cos E)$ . L'anomalie excentrique  $E$  permet d'obtenir l'anomalie moyenne  $M$  à partir de l'équation de Kepler  $M = E - e \sin E$ . On obtient alors la longitude moyenne  $\lambda$  définie par  $\lambda = M + \varpi$ .

## A.4 Variables canoniques rectangulaires de Poincaré

À partir des éléments elliptiques, on peut obtenir les variables canoniques rectangulaires de Poincaré  $(\Lambda, \lambda, x, -i\bar{x}, y, -i\bar{y})$ . Elles sont définies par

$$\Lambda = \beta\sqrt{\mu a}, \quad (\text{A.7})$$

$$x = \sqrt{\Lambda(1 - \sqrt{1 - e^2})}e^{i\varpi}, \quad (\text{A.8})$$

$$y = \sqrt{\Lambda\sqrt{1 - e^2}(1 - \cos i)}e^{i\Omega}, \quad (\text{A.9})$$

où  $\beta = mm_0/(m + m_0)$  pour le corps de masse  $m$  et  $\mu = \mathcal{G}(m + m_0)$ .



## Annexe B

# Analyse en fréquence

La méthode d'analyse en fréquence a été développée par Jacques Laskar (Laskar, 1988, 1990, Laskar *et al.*, 1992, Laskar, 1993, 2003) et a été utilisée dans de nombreux domaines, notamment en mécanique céleste, en dynamique galactique et pour l'étude des accélérateurs des particules. Laskar (2003) explique en détail le principe et le fonctionnement de l'analyse en fréquence et recense les différents domaines dans lesquels elle a été utilisée. L'analyse en fréquence permet de décrire une fonction discrète sur un intervalle de temps par une approximation quasi-périodique. Nous allons ici décrire succinctement le fonctionnement de l'analyse en fréquence à partir de Laskar (2003).

### B.1 Principe

Soit la fonction quasi-périodique  $f$  échantillonnée sur l'intervalle  $[-T : T]$ . Cette fonction s'écrit

$$f(t) = \sum_{k=1}^n A_k e^{i\nu_k t}, \quad (\text{B.1})$$

où l'amplitude  $A_k$  est un nombre complexe et la fréquence  $\nu_k$  un nombre réel. L'analyse en fréquence va consister à donner une approximation quasi-périodique de cette fonction sous la forme

$$\sum_{k=1}^{N'} A'_k e^{i\nu'_k t}. \quad (\text{B.2})$$

Une transformée de Fourier rapide est d'abord réalisée afin de déterminer le terme de plus grande amplitude (Laskar, 1988). En cherchant à proximité de ce terme la fréquence  $\nu'_1$  de façon à maximiser (Laskar, 2003)

$$A'_1 = \langle f(t), e^{i\nu'_1 t} \rangle = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) e^{-i\nu'_1 t} \chi(t) dt, \quad (\text{B.3})$$

on obtient la première fréquence  $\nu'_1$  et son amplitude  $A'_1$ . La fonction  $\chi$  est de la forme  $\chi(t) = 2^N (N!)^2 / (2N)! (1 + \cos(\pi t/T))^N$ . Dans ce travail, nous avons travaillé avec la valeur  $N = 1$ . L'utilisation d'une fenêtre donnée par la fonction  $\chi$  permet d'augmenter la précision de la détermination de la fréquence  $\nu'_1$  (Laskar, 1990, 2003).

On renouvelle alors la même procédure pour cette fois-ci la fonction  $f(t) - A'_1 e^{i\nu'_1 t}$  afin de déterminer la fréquence  $\nu'_2$ . Cependant a priori  $\langle e^{i\nu'_1 t}, e^{i\nu'_2 t} \rangle \neq 0$  et les fonctions  $e^{i\nu'_1 t}$  et  $e^{i\nu'_2 t}$  ne sont pas orthogonales. Cependant, on peut obtenir une fonction orthogonale à l'aide du procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt (Laskar, 2003), qui permet d'obtenir une fonction orthogonale à  $e^{i\nu'_1 t}$  donnée par

$$g_2(t) = \frac{e^{i\nu'_2 t} - \langle e^{i\nu'_1 t}, e^{i\nu'_2 t} \rangle e^{i\nu'_1 t}}{\sqrt{1 - \langle e^{i\nu'_1 t}, e^{i\nu'_2 t} \rangle^2}}. \quad (\text{B.4})$$

En renouvelant cette procédure plusieurs fois, on obtient ainsi une approximation quasi-périodique de la fonction  $f(t)$  sous la forme  $\sum_{k=1}^{N'} A'_k e^{i\nu'_k t}$ .



## B.2 Précision

À partir de l'approximation quasi-périodique obtenue, on peut reconstruire une nouvelle solution pour  $f(t)$ , qu'on appellera  $f'(t)$ . La différence  $f(t) - f'(t)$  permet de voir l'écart entre la solution reconstruite et la solution originelle. En augmentant le nombre de termes dans l'analyse en fréquence, la différence  $f(t) - f'(t)$  doit décroître.

La précision sur la détermination des fréquences peut être estimée en réalisant une analyse en fréquence de la solution reconstruite  $f'(t)$  (Laskar, 1990). On obtient alors une nouvelle estimation  $\nu_1''$  de la fréquence de plus grande amplitude. La différence  $\nu_1' - \nu_1''$  permet de donner une estimation de la précision de l'analyse en fréquence. Comme noté par Laskar (1990), il est préférable de déterminer  $\nu_1''$  à partir d'une solution reconstruite présentant un léger écart temporel avec la solution originelle.

## Annexe C

# Termes supplémentaires utilisés pour la solution séculaire de Cérès et Vesta

Dans cette section, nous indiquons les termes supplémentaires utilisés pour construire les solutions orbitales séculaires de Cérès et Vesta dans la section 3.3.

### C.1 Cérès

	$\nu_k$ ("/yr)	$10^9 \times A_k$	$\phi_k$ (°)
$s_C + (2g_C + g_5 - 3g_6)$	-31.22629	114434	49.758
$s_C - 2(g_5 - g_6)$	-11.27829	64504	91.990
$s_C + (g_6 - g_7)$	-34.09622	57001	-94.860
$s_C + (2g_C - 3g_6 + g_7)$	-32.39583	55416	140.196
$s_C + 2(g_C - g_6)$	-7.23731	44583	150.716
$s_7 + (g_5 - g_6)$	-26.98007	40671	-140.572
$s_4$	-17.74976	36456	-66.329
	-33.31304	29507	-121.877
	-33.17635	28965	177.334
$s_C - (g_5 - 2g_6 + g_7)$	-10.10882	26752	1.724
$s_6 - (g_C + g_5 - 2g_6)$	-28.36744	23492	5.919
$s_C + (g_C - g_6) + (g_5 - g_7)$	-32.07659	20237	-156.847
$s_6 + (g_C + g_5 - 2g_6)$	-24.32796	19974	-118.351
$s_6 - (g_5 - g_6)$	-2.36023	18874	40.874
$s_C + 2(g_C - g_6) - (g_5 - g_7)$	-8.40853	18610	-123.399
$s_6 + (g_C - g_6)$	-0.34168	16699	-28.785
$s_C - (g_C + 2g_5 - 3g_6)$	-37.28528	15350	58.453
$s_7 + (g_5 - g_7)$	-1.82840	13236	30.454
$s_C + (g_C - g_6) - (g_5 - g_7)$	-34.41584	13082	-158.082
	-33.09629	12937	-166.959
	-33.26454	12832	-132.905
	-33.21448	12650	-131.101
$s_C - (g_5 - g_6)$	-35.26571	12005	-3.211
	-33.39845	10926	-147.949
	-9.32512	10549	-24.059
$s_C + (s_6 - s_7) - (g_5 - 2g_6 + g_7)$	-33.46926	10369	-27.936
$s_7 - (g_5 - g_7)$	-4.16217	10275	46.830
	-9.18906	10109	-86.993
	-33.02034	9691	81.917
	-33.14471	9452	174.859
	-33.19161	9398	162.614

$s_C + (g_C - g_7)$	-8.08925	8615	118.171
	-33.34630	7795	-109.737
$s_6 - (2g_C + g_5 - 4g_6 + g_7)$	-29.20730	7626	-16.528
$s_6 - 2(g_C + g_5 - 2g_6)$	-30.37714	7499	74.885
$s_V - (s_6 - s_7) + 2(g_5 - g_7)$	-33.56386	7430	-130.502
	-33.29884	7246	-106.019
$s_6 - (g_5 - g_7)$	-27.51784	7225	32.867
$s_V + (s_6 - s_7) + (g_V - g_5)$	-32.61360	6752	21.932
$s_V - (s_6 - s_7) + (g_V + g_5 - 2g_6)$	-33.87916	6515	24.939
$s_6 + (g_5 - g_7)$	-25.17881	6470	31.475
$s_C - (g_C + 3g_5 - 4g_6)$	-13.29847	6415	-26.279
$g_5 + g_6 - s_6$	58.85181	6050	45.888
	-31.29538	5930	175.198
	-33.09116	5867	109.247
$s_1$	-5.61338	5713	-14.640
$s_3 + (g_3 - g_4)$	-19.39340	5698	65.066
	-31.15342	5686	119.740
$s_C - (g_5 + 2g_5 - 4g_6 + g_7)$	-12.12804	5485	-113.813
	-32.93905	5476	144.408
$s_7 + (g_7 - g_8)$	-0.57824	5429	0.790
	-33.23362	5422	-166.744
	-31.85754	4946	-30.676
	-33.18240	4789	172.280
$s_6 - (g_C - 2g_6 + g_7)$	-27.19741	4701	-83.836
$2g_5 - s_6$	34.86332	4655	113.190
	-33.13902	4539	123.490
$s_2$	-7.05941	4529	116.622
	-9.11185	4493	-75.732
	-17.81502	4470	-170.032
$s_C + (s_6 - s_7) - (2g_5 - 3g_6 + g_7)$	-9.47225	4402	100.449
	-17.68260	4309	-137.019
$s_7 - (g_6 - g_7)$	-28.15057	4281	125.038
	-33.35359	4232	-74.293
$s_6 + (g_C - 2g_6 + g_7)$	-25.49739	4162	-27.991
	-9.28312	4015	-44.152
	-17.20056	3933	142.598
$s_C + (g_C - 2g_5 + g_7)$	-10.42787	3728	122.066
	-33.40550	3599	-61.472
	-9.39010	3573	-14.870
	-33.12521	3382	166.117
$s - (s_6 - s_7) + (2g_C - 3g_6 + g_7)$	-9.03313	3378	-179.656
	-9.15788	3374	-89.497
	-33.22390	3357	-159.691
	-9.35392	3344	-18.277
$s_C + (2g_C + 2g_5 - 3g_6 - g_7)$	-30.05579	3296	141.118
	-33.31582	3263	-92.004
$2s_C - s_6 + (g_C - g_5)$	-42.16463	3257	163.132
$s_C + (3g_C + g_5 - 4g_6)$	-5.21857	3224	82.946
	-3.10623	3214	-25.442
	-33.27238	2973	-130.588
	-32.46489	2959	-96.803
	-9.22711	2945	-53.566
	-33.27129	2857	-126.896

	-33.42741	2791	-9.789
$s_C + (3g_C - 4g_6 + g_7)$	-6.38986	2697	174.515
	-7.17667	2434	-122.648
	-9.41337	2414	11.105
	-33.37609	2391	-37.686
	-33.05797	2371	85.741
	-6.94883	2240	-89.513
	-33.38442	1993	-40.367
	-31.07304	1986	127.200
	-9.09518	1832	-127.297
	-31.25711	1728	156.698
	-33.33521	1678	-81.464
	-33.23765	1516	-178.903
	-31.32368	1268	-150.019
	-19.45957	531	144.302
	-19.36684	103	-121.641

TABLEAU C.1 – 100 termes supplémentaires de l’analyse en fréquence de la variable  $\zeta = \sin(i/2) \exp(i\Omega)$  pour Cérès sur l’intervalle de temps  $[-25 : 5]$  Myr.

## C.2 Vesta

	$\nu_k$ ("/yr)	$10^9 \times A_k$	$\phi_k$ (°)
	-30.84475	125929	67.340
	-30.95305	99563	124.599
	-30.90551	99181	65.356
	-30.93524	91099	-125.235
	-30.80582	77983	-40.663
	-31.06993	71255	137.516
$s_7 + (g_5 - g_6)$	-26.98033	66890	-141.978
	-30.87099	62051	-87.169
$s_V - (g_V + g_5 - 2g_6)$	-24.27099	55556	-87.847
	-30.98800	55372	-100.511
	-31.02394	50567	42.878
$s_V - (g_5 - g_6)$	-15.62134	44268	-154.553
	-7.04403	43118	172.503
$s_1$	-5.61164	41403	-8.423
	-31.11113	40998	-104.110
	-30.76450	39754	-162.571
	-30.95707	37876	97.995
	-30.83816	37827	115.758
	-30.89941	37500	106.007
$s_V + 2(g_V - g_6)$	-22.30965	37292	-25.673
	-17.79906	32680	-156.700
	-17.67247	31180	144.388
$s_V + (g_V - g_6) - (g_5 - g_7)$	-32.12540	31026	-36.701
	-31.06378	31026	166.407
	-30.85781	28078	0.423
	-30.94612	26994	178.108
	-30.80058	23542	-5.520
	-30.90488	23133	71.125
$s_6 - (g_5 - g_6)$	-2.36026	22563	40.959
	-30.74186	21838	5.924

	-30.98696	21407	-78.632
	-30.98628	20723	-73.965
	-31.02254	20371	63.059
$s_V + (g_V - g_6) - (s_6 - s_7 - g_5 + g_6)$	-31.59132	19493	131.115
	-30.94597	18152	175.861
	-17.20143	17892	139.100
	-31.10060	17615	-64.793
$s_3$	-18.84648	17290	66.860
	-6.83250	17111	-93.793
	-6.90090	16848	-94.461
$s_V + (g_V - g_6) + (g_5 - g_7)$	-29.78780	15945	-44.732
	-31.05979	15423	-176.652
$s_3 + (g_3 - g_4)$	-19.39649	15257	35.473
	-31.14188	14703	47.757
$s_3 - (g_3 - g_4)$	-18.30115	14588	80.370
	-30.70502	14095	-127.988
$s_7 + (g_5 - g_7)$	-1.82843	13624	30.294
	-7.18365	13498	-78.221
$2s_6 - s_V$	-13.08708	13035	139.218
$s_V + (g_V - g_6) + (s_6 - s_7 - g_5 + g_6)$	-30.33203	12856	108.977
	-18.04812	12439	-17.868
	-31.19511	12300	24.238
$s_6 - (g_5 - g_7)$	-27.51601	11897	44.597
	-5.48824	11810	7.208
	-17.73030	11269	-168.792
$s_6 + (g_5 - g_7)$	-25.18106	11160	27.996
	-31.16373	11154	-141.525
$s_7 - (g_5 - g_7)$	-4.16252	10602	45.428
	-6.94700	10592	-18.168
	-17.50242	10406	-174.431
	-31.13440	10343	72.297
	-31.09728	10243	-54.182
$2g_5 - s_V$	48.12401	9888	-53.039
	-24.34594	8779	98.172
	-18.54783	8638	12.466
	-7.00326	8602	23.517
	-24.18728	8550	-68.165
	-17.62013	8478	121.342
	-31.14477	8316	5.670
$s_V + (g_V - g_7)$	-5.80673	8228	-128.638
$g_5 + g_6 - s_6$	58.84857	8073	23.101
	-31.17100	7881	-159.055
	-31.11280	7539	-139.791
$s_7 - (g_6 - g_7)$	-28.15235	7322	118.428
	-26.41297	7034	-26.202
	-17.67862	7028	141.252
	-22.36841	6774	-110.159
	-22.24609	6749	-128.122
	-17.83606	6692	-140.317
	-15.68645	6547	79.197
	-15.54646	6279	176.551
	-29.28264	6046	76.747
	-17.56905	5978	58.754

$s_7 + (g_V - g_5)$	6.29034	5806	156.666
$s_2$	-7.05948	5716	38.172
$s_6 - (4g_5 - g_6 - 3g_7)$	-5.86441	5664	140.423
$s_7 + (g_7 - g_8)$	-0.57786	5517	2.682
	-31.27870	5460	-124.929
$s_V + (s_6 - s_7 + g_V - 2g_5 + g_6)$	-31.50342	5419	-174.576
	-32.74653	5349	-3.562
	-32.06518	4993	-144.772
	-5.66827	4870	116.673
	-30.60425	4466	159.401
	-20.63195	4402	16.404
$2g_5 - s_6$	34.86287	4199	110.438
	-17.77653	4032	-138.510
	-17.73717	3650	139.686
	-6.63799	3440	-2.681
	-31.31233	2926	28.817
$s_V - (2g_V + g_5 - 3g_6)$	-32.91975	2665	-15.636

TABLEAU C.2 – 100 termes supplémentaires de l’analyse en fréquence de la variable  $\zeta = \sin(i/2) \exp(i\Omega)$  pour Vesta sur l’intervalle de temps  $[-25 : 5]$  Myr.



## Annexe D

# Équations des coefficients des intégrateurs spécifiques N

Pour les sept intégrateurs N d'ordre 4 à neuf étapes spécifiques au corps solide libre obtenus à la section 9.1.1, nous indiquons les équations permettant d'obtenir les valeurs des coefficients  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$  à partir des coefficients  $x$  et  $y$  donnés pour les moments d'inertie  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  par  $1 + x = I_1/I_2$  et  $1 + y = I_1/I_3$ . Pour chaque intégrateur, il est nécessaire de considérer les six permutations possibles des moments d'inertie.

### N1 : ABABCBA

$$\begin{aligned} f_0 + a_1 f_1 + a_1^2 f_2 + a_1^3 f_3 &= 0 \\ g_0 + b_1 g_1 + a_1 g_2 &= 0 \\ a_2 &= \frac{1}{2} - a_1 \\ b_2 &= \frac{1}{2} - b_1 \\ c_1 &= 1 \end{aligned} \tag{D.1}$$

$$\begin{aligned} f_0 &= -1 - 3y - 3y^2 - 2xy^2 - 3x^2y - 12x^2y^2 - 12x^2y^3 - 4x^2y^4 \\ f_1 &= 6 + 18y + 24y^2 - 12xy + 12xy^2 - 18x^2 - 78x^2y - 72x^2y^2 - 24x^2y^3 \\ f_2 &= -12 - 36y - 72y^2 - 48x - 72xy - 168xy^2 - 48xy^3 - 36x^2 + 12x^2y \\ f_3 &= -24 - 72y - 144xy - 48xy^2 + 72x^2 + 24x^2y \\ g_0 &= -1 - y - 4x - 6xy - 2xy^2 - 3x^2 - 5x^2y - 2x^2y^2 \\ g_1 &= 4 + 6y + 10x + 18xy + 4xy^2 + 6x^2 + 12x^2y + 4x^2y^2 \\ g_2 &= -2 - 6y - 12xy - 4xy^2 + 6x^2 + 2x^2y \end{aligned}$$

### N2 : ABACACABA

$$\begin{aligned} f_0 + a_1 f_1 + a_1^2 f_2 &= 0 \\ g_0 + a_2 g_1 + a_1 g_2 &= 0 \\ a_3 &= 1 - 2(a_1 + a_2) \\ b_1 &= \frac{1}{2} \\ c_1 &= \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{D.2}$$



$$\begin{aligned}
f_0 &= 1 + 3y - 3y^3 - 8xy^2 - 12xy^3 + x^2y - 3x^2y^2 - 9x^2y^3 + x^2y^4 - 4x^3y^3 + x^4y^2 \\
f_1 &= -6 - 30y - 18y^2 + 18y^3 - 48xy - 48xy^2 + 48xy^3 + 6x^2 - 30x^2y - 78x^2y^2 \\
&\quad + 30x^2y^3 - 48x^3y^2 + 12x^4y \\
f_2 &= 36y + 36y^2 - 36y^3 - 36x + 36xy + 180xy^2 - 36xy^3 - 72x^2 - 144x^2y \\
&\quad + 144x^2y^2 - 144x^3y + 36x^4 \\
g_0 &= -1 - 3y - 3y^2 - 2xy^2 + x^2y \\
g_1 &= 6 + 12y + 6y^2 \\
g_2 &= 6y^2 - 12xy + 6x^2
\end{aligned}$$

### N3 : ABACBCABA

$$\begin{aligned}
f_0 + a_1f_1 + a_1^2f_2 + a_1^3f_3 &= 0 \\
g_0 + b_1g_1 + a_1g_2 + a_1^2g_3 &= 0 \\
a_2 &= \frac{1}{2} - a_1 \\
b_2 &= 1 - 2b_1 \\
c_1 &= \frac{1}{2}
\end{aligned} \tag{D.3}$$

$$\begin{aligned}
f_0 &= 1 + 3y - 3y^3 - 4xy^2 - 6xy^3 + x^2y^4 \\
f_1 &= -6 - 30y - 18y^2 + 18y^3 - 24xy - 24xy^2 + 24xy^3 + 12x^2y^3 \\
f_2 &= 60y + 72y^2 - 36y^3 - 24x + 36xy + 144xy^2 - 12xy^3 + 48x^2y^2 \\
f_3 &= 24 - 72y^2 + 72x + 144xy - 24xy^2 + 48x^2y \\
g_0 &= -3 - 18y - 39y^2 - 36y^3 - 12y^4 - 2x - 15xy - 39xy^2 - 41xy^3 - 15xy^4 \\
&\quad - 2x^2y^2 - 3x^2y^3 + x^2y^5 \\
g_1 &= 2 + 12y + 30y^2 + 36y^3 + 18y^4 + 2x + 12xy + 34xy^2 + 48xy^3 + 30xy^4 \\
&\quad + 4x^2y^2 + 12x^2y^3 + 14x^2y^4 + 2x^3y^4 \\
g_2 &= 2 + 30y + 84y^2 + 78y^3 + 18y^4 - 6x + 6xy + 78xy^2 + 102xy^3 + 24xy^4 \\
&\quad + 4x^2y + 30x^2y^2 + 48x^2y^3 + 10x^2y^4 + 4x^3y^3 \\
g_3 &= 12 + 24y - 24y^2 - 72y^3 - 36y^4 + 36x + 144xy + 168xy^2 + 48xy^3 - 12xy^4 \\
&\quad + 24x^2y + 48x^2y^2 + 24x^2y^3
\end{aligned}$$

### N4 : ABCABACBA

$$\begin{aligned}
f_0 + a_1f_1 + a_1^2f_2 + a_1^3f_3 &= 0 \\
g_0 + b_1g_1 + a_1g_2 &= 0 \\
a_2 &= \frac{1}{2} - a_1 \\
b_2 &= 1 - 2b_1 \\
c_1 &= \frac{1}{2}
\end{aligned} \tag{D.4}$$

$$\begin{aligned}
f_0 &= 1 + 3y - 3y^3 - 4xy^2 - 6xy^3 + x^2y^4 \\
f_1 &= -6 - 30y - 18y^2 + 18y^3 - 24xy - 24xy^2 + 24xy^3 + 12x^2y^3 \\
f_2 &= 60y + 72y^2 - 36y^3 - 24x + 36xy + 144xy^2 - 12xy^3 + 48x^2y^2 \\
f_3 &= 24 - 72y^2 + 72x + 144xy - 24xy^2 + 48x^2y \\
g_0 &= -1 - y - 2x - 3xy - xy^2 \\
g_1 &= 2 + 6y + 6y^2 + 2x + 6xy + 8xy^2 + 2x^2y^2 \\
g_2 &= 2 - 6y^2 + 6x + 12xy - 2xy^2 + 4x^2y
\end{aligned}$$

## N5 : ABCACACBA

$$\begin{aligned}
f_0 + a_1f_1 + a_1^2f_2 + a_1^3f_3 &= 0 \\
g_0 + c_1g_1 + a_1g_2 + a_1^2g_3 &= 0 \\
a_2 &= \frac{1}{2} - a_1 \\
b_1 &= \frac{1}{2} \\
c_2 &= 1 - 2c_1
\end{aligned} \tag{D.5}$$

$$\begin{aligned}
f_0 &= 1 + 3y - 6xy^2 - x^2y - 6x^2y^2 + x^4y^2 \\
f_1 &= -6 - 30y - 36xy + 36xy^2 - 6x^2 - 42x^2y + 24x^2y^2 + 12x^4y \\
f_2 &= 84y - 48x + 144xy - 72xy^2 - 36x^2 + 180x^2y - 24x^2y^2 + 24x^3y + 36x^4 \\
f_3 &= 24 - 72y + 144x - 144xy + 48xy^2 + 216x^2 - 168x^2y + 144x^3 \\
g_0 &= 1 + 4y + x + 9xy - 8xy^2 - 3x^2 + 4x^2y - 25x^2y^2 - 6x^3 - 7x^3y - 30x^3y^2 - 2x^3y^3 \\
&\quad - 3x^4 - 9x^4y - 12x^4y^2 - 2x^4y^3 - 6x^5y + x^5y^2 - 3x^6y \\
g_1 &= 2 + 2y + 12x + 12xy + 30x^2 + 34x^2y + 4x^2y^2 + 36x^3 + 48x^3y + 12x^3y^2 + 18x^4 \\
&\quad + 30x^4y + 14x^4y^2 + 2x^4y^3 \\
g_2 &= -4 - 30y - 6x - 114xy + 28xy^2 - 6x^2 - 210x^2y + 66x^2y^2 - 18x^3 - 210x^3y + 48x^3y^2 \\
&\quad + 4x^3y^3 - 36x^4 - 96x^4y - 2x^4y^2 - 36x^5 - 18x^6 \\
g_3 &= -12 + 36y - 96x + 144xy - 24xy^2 - 264x^2 + 264x^2y - 48x^2y^2 - 360x^3 + 240x^3y \\
&\quad - 24x^3y^2 - 252x^4 + 84x^4y - 72x^5
\end{aligned}$$

## N6 : ABCBABCBA

$$\begin{aligned}
f_0 + a_1f_1 + a_1^2f_2 + a_1^3f_3 + a_1^4f_4 &= 0 \\
g_0 + b_1g_1 + a_1g_2 + a_1^2g_3 + a_1^3g_4 &= 0 \\
a_2 &= 1 - 2a_1 \\
b_2 &= \frac{1}{2} - b_1 \\
c_1 &= \frac{1}{2}
\end{aligned} \tag{D.6}$$

$$\begin{aligned}
f_0 &= 1 + 3y + 3y^2 - 3y^3 + 8xy^2 - 3x^2y + 3x^2y^2 + 3x^2y^3 + x^2y^4 \\
f_1 &= -6 - 18y - 42y^2 + 18y^3 + 48xy - 48xy^2 - 18x^2 + 42x^2y + 18x^2y^2 + 6x^2y^3 \\
f_2 &= 12 + 36y + 180y^2 - 36y^3 + 12x - 252xy + 132xy^2 + 12xy^3 + 144x^2 - 48x^2y \\
f_3 &= -288y^2 + 576xy - 288x^2 \\
f_4 &= 144y^2 - 288xy + 144x^2 \\
g_0 &= -2y - 6y^2 + 4x + 11xy - xy^2 + xy^3 + xy^4 + 3x^2 + 13x^2y + 7x^2y^2 + x^2y^3 \\
g_1 &= -4 - 10y - 6y^2 - 6y^3 - 6y^4 - 10x - 28xy - 16xy^2 - 4xy^3 - 6xy^4 - 6x^2 \\
&\quad - 18x^2y - 10x^2y^2 + 2x^2y^3 \\
g_2 &= 4 + 14y + 42y^2 + 6y^3 + 6y^4 + 2x - 42xy + 14xy^2 - 6xy^3 + 24x^2 - 4x^2y + 4x^2y^2 \\
g_3 &= -84y^2 - 12y^3 + 168xy + 24xy^2 - 84x^2 - 12x^2y \\
g_4 &= 48y^2 - 96xy + 48x^2
\end{aligned}$$

## N7 : ABCBCBCBA

$$\begin{aligned}
f_0 + b_1f_1 + b_1^2f_2 + b_1^3f_3 &= 0 \\
g_0 + c_1g_1 + b_1g_2 &= 0 \\
a_1 &= \frac{1}{2} \\
b_2 &= \frac{1}{2} - b_1 \\
c_2 &= 1 - 2c_1
\end{aligned} \tag{D.7}$$

$$\begin{aligned}
f_0 &= -1 - 3y - 3x - 15xy - 6xy^2 - 17x^2y - 12x^2y^2 + 3x^3 - 3x^3y - 6x^3y^2 - x^4y^2 \\
f_1 &= 12 + 30y + 42x + 150xy + 36xy^2 + 30x^2 + 222x^2y + 84x^2y^2 - 18x^3 + 114x^3y \\
&\quad + 60x^3y^2 - 18x^4 + 12x^4y + 12x^4y^2 \\
f_2 &= -48 - 84y - 204x - 420xy - 72xy^2 - 300x^2 - 708x^2y - 192x^2y^2 - 180x^3 - 492x^3y \\
&\quad - 168x^3y^2 - 36x^4 - 120x^4y - 48x^4y^2 \\
f_3 &= 48 + 72y + 216x + 360xy + 48xy^2 + 360x^2 + 648x^2y + 144x^2y^2 + 264x^3 + 504x^3y \\
&\quad + 144x^3y^2 + 72x^4 + 144x^4y + 48x^4y^2 \\
g_0 &= y - x + 3xy + 2xy^2 - 3x^2 - 2x^2y \\
g_1 &= 2 + 2y + 6x + 6xy + 6x^2 + 8x^2y + 2x^2y^2 \\
g_2 &= -4 - 6y - 10x - 18xy - 4xy^2 - 6x^2 - 12x^2y - 4x^2y^2
\end{aligned}$$

## Annexe E

# Solution du corps solide libre

La solution exacte du corps solide libre est traitée dans de nombreux ouvrages et publications (e.g. [Jacobi, 1850](#), [Whittaker, 1937](#), [Landau et Lifchitz, 1982](#), [Marsden et Ratiu, 1994](#), [van Zon et Schofield, 2007](#), [Celledoni \*et al.\*, 2008](#)). Cependant la plupart des solutions indiquées ne permettent pas de réaliser directement une implémentation de la solution ou ne traitent pas l'ensemble des cas. Ainsi nous rappelons dans cette annexe comment obtenir la solution du corps solide libre.

Nous considérons le hamiltonien d'un corps solide libre de moments d'inertie  $I_1, I_2, I_3$ ,

$$H = \frac{G_1^2}{2I_1} + \frac{G_2^2}{2I_2} + \frac{G_3^2}{2I_3}. \quad (\text{E.1})$$

$I_2$  est le moment d'inertie intermédiaire et nous devons considérer les deux cas,  $I_1 < I_2 < I_3$  et  $I_1 > I_2 > I_3$ . Le problème peut être réduit aux deux cas considérés en ordonnant de façon appropriée les vecteurs  $(\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K})$  du repère  $\mathcal{R}_C$  associés aux axes principaux d'inertie. La norme du moment d'inertie est donnée par

$$G^2 = G_1^2 + G_2^2 + G_3^2, \quad (\text{E.2})$$

avec  $G_1, G_2, G_3$  les trois composantes du moment d'inertie dans le repère  $\mathcal{R}_C$ . Le hamiltonien et la norme du moment cinétique sont conservés. Grâce à ces deux intégrales premières, le problème est intégrable et comme décrit par [Landau et Lifchitz \(1982\)](#), les solutions sont à l'intersection de la sphère  $G^2 = G_1^2 + G_2^2 + G_3^2$  et de l'ellipsoïde  $H = G_1^2/(2I_1) + G_2^2/(2I_2) + G_3^2/(2I_3)$ . Le problème présente ainsi six points fixes ( $\mathbf{G} = \pm\sqrt{2I_1H}\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{G} = \pm\sqrt{2I_2H}\mathbf{e}_2$ ,  $\mathbf{G} = \pm\sqrt{2I_3H}\mathbf{e}_3$ ) avec  $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$ ,  $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$ . Des solutions physiques peuvent être obtenues uniquement pour  $2I_1H \leq G^2 \leq 2I_3H$ , sans cela l'intersection de la sphère et de l'ellipsoïde est l'ensemble nul. Les équations d'Euler permettent d'obtenir l'évolution du moment cinétique  $\mathbf{G}$  dans le repère  $\mathcal{R}_C$

$$\dot{\mathbf{G}} = \mathbf{G} \times \nabla_{\mathbf{G}} \mathcal{H} \quad (\text{E.3})$$

soit

$$\begin{aligned} \dot{G}_1 &= G_2 G_3 \left( \frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_2} \right) \\ \dot{G}_2 &= G_3 G_1 \left( \frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_3} \right) \\ \dot{G}_3 &= G_1 G_2 \left( \frac{1}{I_2} - \frac{1}{I_1} \right). \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

L'orientation du corps dans un repère d'inertie  $\mathcal{R}$  est donnée par la matrice de rotation  $Q$  dont les vecteurs colonnes correspondent aux coordonnées dans le repère  $\mathcal{R}$  des vecteurs  $\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}$  associés aux axes principaux d'inertie. Ainsi

$$Q\mathbf{e}_1 = \mathbf{I} \quad (\text{E.5})$$

$$Q\mathbf{e}_2 = \mathbf{J} \quad (\text{E.6})$$

$$Q\mathbf{e}_3 = \mathbf{K}. \quad (\text{E.7})$$

L'équation pour la matrice de rotation est

$$\dot{Q} = Q (\mathcal{I}^{-1}\mathbf{G}) \times, \quad (\text{E.8})$$

où

$$\mathcal{I} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}. \quad (\text{E.9})$$

est la matrice d'inertie, qui est diagonale dans un repère associé aux axes principaux, comme c'est le cas ici pour le repère  $\mathcal{R}_C$ . La matrice  $(\mathcal{I}^{-1}\mathbf{G}) \times$  est définie pour tout vecteur  $\mathbf{u}$  par le produit vectoriel  $((\mathcal{I}^{-1}\mathbf{G}) \times) \mathbf{u} = (\mathcal{I}^{-1}\mathbf{G}) \times \mathbf{u}$ .

## E.1 Solution pour le moment cinétique

Nous allons détailler ici la méthode proposée par [Landau et Lifchitz \(1982\)](#) pour résoudre les équations d'Euler. Elle consiste à exprimer  $G_1$  et  $G_3$  en fonction de  $G_2$

$$G_1^2 = \frac{I_1}{I_3 - I_1} \left[ (2I_3H - G^2) - \frac{I_3 - I_2}{I_2} G_2^2 \right] \quad (\text{E.10})$$

$$G_3^2 = \frac{I_3}{I_1 - I_3} \left[ (2I_1H - G^2) - \frac{I_1 - I_2}{I_2} G_2^2 \right]. \quad (\text{E.11})$$

Cela permet de déduire l'équation différentielle vérifiée pour  $G_2$

$$\dot{G}_2^2 = \frac{(2I_3H - G^2)(G^2 - 2I_1H)}{I_1I_3} \left( 1 - \frac{(I_3 - I_2)G_2^2}{I_2(2I_3H - G^2)} \right) \left( 1 - \frac{(I_1 - I_2)G_2^2}{I_2(2I_1H - G^2)} \right). \quad (\text{E.12})$$

Le signe de  $\dot{G}_2$  étant donné par  $\text{sign}(\dot{G}_2) = \text{sign}(G_3G_1(I_3 - I_1))$ , l'équation différentielle vérifiée par  $G_2$  devient

$$\dot{G}_2 = \text{sign}(G_3G_1(I_3 - I_1)) \sqrt{\frac{(2I_3H - G^2)(G^2 - 2I_1H)}{I_1I_3} \left( 1 - \frac{(I_3 - I_2)G_2^2}{I_2(2I_3H - G^2)} \right) \left( 1 - \frac{(I_1 - I_2)G_2^2}{I_2(2I_1H - G^2)} \right)}. \quad (\text{E.13})$$

On peut alors distinguer plusieurs cas en fonction de la valeur de la norme du moment cinétique.

### E.1.1 $2I_1H < 2I_2H < G^2 < 2I_3H$ ou $2I_1H > 2I_2H > G^2 > 2I_3H$

$\mathbf{G}$  oscille autour du point fixe  $\mathbf{G} = \pm\sqrt{2I_3H}\mathbf{e}_3$  et  $G_3$  ne change pas de signe d'après le portrait de phase représenté par [Landau et Lifchitz \(1982\)](#). Ainsi  $\text{sign}(G_3) = \text{sign}(G_3(0))$ . On note

$$x = G_2 \sqrt{\frac{I_3 - I_2}{(2I_3H - G^2)I_2}} \quad (\text{E.14})$$

$$k^2 = \frac{2I_3H - G^2}{2I_1H - G^2} \frac{I_1 - I_2}{I_3 - I_2} \quad (\text{E.15})$$

$$\omega_p = \text{sign}(G_3(0)) \text{sign}(I_2 - I_3) \sqrt{\frac{(2I_1H - G^2)(I_2 - I_3)}{I_1I_2I_3}} \quad (\text{E.16})$$

$$\tau = \omega_p t, \quad (\text{E.17})$$

avec  $k^2 < 1$ .  $x$  vérifie l'équation différentielle

$$-\text{sign}(G_1) \frac{dx}{d\tau} = \sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2x^2)}, \quad (\text{E.18})$$

soit

$$\left( \frac{dx}{d\tau} \right)^2 = (1 - x^2)(1 - k^2x^2). \quad (\text{E.19})$$

Cette dernière équation peut être résolue avec

$$x = \sigma \operatorname{sn}(\tau + \epsilon, k) \quad (\text{E.20})$$

$$\epsilon = \operatorname{arcsn} \left( \sigma G_2(0) \sqrt{\frac{I_3 - I_2}{(2I_3H - G^2) I_2}}, k \right) \quad (\text{E.21})$$

pour  $\sigma = \pm 1$ . L'expression de  $G_2$  est ainsi

$$G_2(t) = \sigma \sqrt{\frac{(2I_3H - G^2) I_2}{I_3 - I_2}} \operatorname{sn}(\omega_p t + \epsilon, k). \quad (\text{E.22})$$

Pour déterminer le signe de  $\sigma$ , nous considérons le signe de

$$\dot{G}_2(0) = \omega_p \sigma \sqrt{\frac{(2I_3H - G^2) I_2}{I_3 - I_2}} \operatorname{cn}(\epsilon, k) \operatorname{dn}(\epsilon, k). \quad (\text{E.23})$$

Or  $\operatorname{sign}(\dot{G}_2(0)) = \operatorname{sign}(G_3(0) G_1(0) (I_3 - I_1))$  et  $-K \leq \epsilon \leq K$  avec  $K = \operatorname{arcsn}(1, k)$  et  $\operatorname{cn}(\epsilon, k) \geq 0$ . De plus  $\operatorname{dn}(\epsilon, k) \geq 0$  et ainsi  $\sigma = -\operatorname{sign}(G_1(0))$ . L'expression de  $G_2$  devient

$$G_2(t) = -\operatorname{sign}(G_1(0)) \sqrt{\frac{(2I_3H - G^2) I_2}{I_3 - I_2}} \operatorname{sn}(\omega_p t + \epsilon, k) \quad (\text{E.24})$$

avec

$$\epsilon = -\operatorname{sign}(G_1(0)) \operatorname{arcsn} \left( G_2(0) \sqrt{\frac{I_3 - I_2}{(2I_3H - G^2) I_2}}, k \right). \quad (\text{E.25})$$

En remplaçant  $G_2$  dans l'équation (E.10), on obtient

$$G_1^2 = \frac{I_1 (2I_3H - G^2)}{I_3 - I_1} (1 - \operatorname{sn}^2(\omega_p t + \epsilon, k)) \quad (\text{E.26})$$

soit

$$G_1(t) = \sigma \sqrt{\frac{(2I_3H - G^2) I_1}{I_3 - I_1}} \operatorname{cn}(\omega_p t + \epsilon, k). \quad (\text{E.27})$$

$G_1(0) = \sigma \sqrt{((2I_3H - G^2) I_1) / (I_3 - I_1)} \operatorname{cn}(\epsilon, k)$  avec  $\operatorname{cn}(\epsilon, k) \geq 0$  et ainsi  $\sigma = \operatorname{sign}(G_1(0))$ . On en déduit l'expression de  $G_1$

$$G_1(t) = \operatorname{sign}(G_1(0)) \sqrt{\frac{(2I_3H - G^2) I_1}{I_3 - I_1}} \operatorname{cn}(\omega_p t + \epsilon, k). \quad (\text{E.28})$$

En remplaçant  $G_2$  dans l'équation (E.11), on obtient

$$G_3^2 = \frac{I_3 (2I_1H - G^2)}{I_1 - I_3} (1 - k^2 \operatorname{sn}^2(\omega_p t + \epsilon, k)) \quad (\text{E.29})$$

soit

$$G_3(t) = \sigma \sqrt{\frac{(2I_1H - G^2) I_3}{I_1 - I_3}} \operatorname{dn}(\omega_p t + \epsilon, k). \quad (\text{E.30})$$

$G_3(0) = \sigma \sqrt{(2I_1H - G^2) I_3} / (I_1 - I_3) \operatorname{dn}(\epsilon, k)$  avec  $\operatorname{dn}(\epsilon, k) \geq 0$  et ainsi  $\sigma = \operatorname{sign}(G_3(0))$ . On en déduit l'expression de  $G_3$

$$G_3(t) = \operatorname{sign}(G_3(0)) \sqrt{\frac{(2I_1H - G^2) I_3}{I_1 - I_3}} \operatorname{dn}(\omega_p t + \epsilon, k). \quad (\text{E.31})$$

**E.1.2**  $2I_1H < G^2 < 2I_2H < 2I_3H$  ou  $2I_1H > G^2 > 2I_2H > 2I_3H$

$\mathbf{G}$  oscille autour du point fixe  $\mathbf{G} = \pm\sqrt{2I_1H}\mathbf{e}_1$  et  $\text{sign}(G_1) = \text{sign}(G_1(0))$ . On note

$$x = G_2 \sqrt{\frac{I_1 - I_2}{(2I_1H - G^2) I_2}} \quad (\text{E.32})$$

$$k^2 = \frac{2I_1H - G^2}{2I_3H - G^2} \frac{I_3 - I_2}{I_1 - I_2} \quad (\text{E.33})$$

$$\omega_p = -\text{sign}(G_1(0)) \text{sign}(I_2 - I_1) \sqrt{\frac{(2I_3H - G^2)(I_2 - I_1)}{I_1 I_2 I_3}} \quad (\text{E.34})$$

$$\tau = \omega_p t \quad (\text{E.35})$$

avec  $k^2 < 1$ .  $x$  vérifie l'équation différentielle

$$-\text{sign}(G_3) \frac{dx}{d\tau} = \sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}, \quad (\text{E.36})$$

soit

$$\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 = (1 - x^2)(1 - k^2 x^2). \quad (\text{E.37})$$

Cette équation différentielle peut être résolue pour

$$x = \sigma \text{sn}(\tau + \epsilon, k) \quad (\text{E.38})$$

$$\epsilon = \text{arcsn}\left(\sigma G_2(0) \sqrt{\frac{I_1 - I_2}{(2I_1H - G^2) I_2}}, k\right) \quad (\text{E.39})$$

pour  $\sigma = \pm 1$ .  $G_2$  peut alors s'exprimer sous la forme

$$G_2(t) = \sigma \sqrt{\frac{(2I_1H - G^2) I_2}{I_1 - I_2}} \text{sn}(\omega_p t + \epsilon, k). \quad (\text{E.40})$$

Pour déterminer  $\sigma$ , nous considérons le signe de

$$\dot{G}_2(0) = \omega_p \sigma \sqrt{\frac{(2I_1H - G^2) I_2}{I_1 - I_2}} \text{cn}(\epsilon, k) \text{dn}(\epsilon, k). \quad (\text{E.41})$$

Or  $\text{sign}(\dot{G}_2(0)) = \text{sign}(G_3(0) G_1(0) (I_3 - I_1))$  et  $-K \leq \epsilon \leq K$  avec  $K = \text{arcsn}(1, k)$  et  $\text{cn}(\epsilon, k) \geq 0$ . De plus  $\text{dn}(\epsilon, k) \geq 0$  et ainsi  $\sigma = -\text{sign}(G_3(0))$ . L'expression de  $G_2$  devient

$$G_2(t) = -\text{sign}(G_3(0)) \sqrt{\frac{(2I_1H - G^2) I_2}{I_1 - I_2}} \text{sn}(\omega_p t + \epsilon, k) \quad (\text{E.42})$$

avec

$$\epsilon = -\text{sign}(G_3(0)) \text{arcsn}\left(G_2(0) \sqrt{\frac{I_1 - I_2}{(2I_1H - G^2) I_2}}, k\right). \quad (\text{E.43})$$

En remplaçant  $G_2$  dans l'équation (E.10), on obtient

$$G_1^2 = \frac{(2I_3H - G^2) I_1}{I_3 - I_1} (1 - k^2 \text{sn}^2(\omega_p t + \epsilon, k)) \quad (\text{E.44})$$

soit

$$G_1(t) = \sigma \sqrt{\frac{(2I_3H - G^2) I_1}{I_3 - I_1}} \text{dn}(\omega_p t + \epsilon, k). \quad (\text{E.45})$$

$G_1(0) = \sigma \sqrt{(2I_3H - G^2)I_1/(I_3 - I_1)} \operatorname{dn}(\epsilon, k)$  avec  $\operatorname{dn}(\epsilon, k) \geq 0$  et ainsi  $\sigma = \operatorname{sign}(G_1(0))$ . On en déduit l'expression de  $G_1$

$$G_1(t) = \operatorname{sign}(G_1(0)) \sqrt{\frac{(2I_3H - G^2)I_1}{I_3 - I_1}} \operatorname{dn}(\omega_p t + \epsilon, k). \quad (\text{E.46})$$

En remplaçant  $G_2$  dans l'équation (E.11), on obtient

$$G_3^2 = \frac{(G^2 - 2I_1H)I_3}{I_3 - I_1} (1 - \operatorname{sn}^2(\omega_p t + \epsilon, k)) \quad (\text{E.47})$$

soit

$$G_3(t) = \sigma \sqrt{\frac{(G^2 - 2I_1H)I_3}{I_3 - I_1}} \operatorname{cn}(\omega_p t + \epsilon, k). \quad (\text{E.48})$$

$G_3(0) = \sigma \sqrt{(G^2 - 2I_1H)I_3/(I_3 - I_1)} \operatorname{cn}(\epsilon, k)$  avec  $\operatorname{cn}(\epsilon, k) \geq 0$  et ainsi  $\sigma = \operatorname{sign}(G_3(0))$ . On en déduit l'expression de  $G_3$

$$G_3(t) = \operatorname{sign}(G_3(0)) \sqrt{\frac{(2I_1H - G^2)I_3}{I_1 - I_3}} \operatorname{cn}(\omega_p t + \epsilon, k). \quad (\text{E.49})$$

## E.2 Solution pour la matrice de rotation

À partir de la solution du moment cinétique, on peut déduire celle de la matrice de rotation à partir de la solution proposée par [Celledoni \*et al.\* \(2008\)](#), que nous allons détailler.

$\mathcal{R}$  est le repère d'inertie et  $\mathcal{R}_C$  le repère du solide.  $\mathcal{R}_0$  est le repère d'inertie qui coïncide pour  $t = 0$  à  $\mathcal{R}_C$  et  $Q'(t)$  la matrice de rotation dans  $\mathcal{R}_0$ .  $Q(0)$  correspond à l'application identité de  $\mathcal{R}_0$  à  $\mathcal{R}$ , d'où  $Q(t) = Q(0)Q'(t)$  avec  $Q'(0) = \mathbb{I}$ , où  $\mathbb{I}$  est la matrice identité.  $R$  est une rotation définie par  $R\mathbf{e}_3 = \mathbf{g}/G$  avec  $\mathbf{g}$  le moment cinétique dans le repère d'inertie  $\mathcal{R}_0$  et ne dépend pas du temps. Elle permet d'obtenir à partir de  $\mathcal{R}_0$  le repère d'inertie  $\mathcal{R}'_0$ .  $P(t)$  est une rotation définie par  $P(t)\mathbf{w} = \mathbf{e}_3$  pour  $\mathbf{w} = \mathbf{G}/G$ . Son inverse permet d'obtenir à partir de  $\mathcal{R}_C$  le repère  $\mathcal{R}'_C$ . Les repères  $\mathcal{R}'_0$  et  $\mathcal{R}'_C$  présentent tous deux comme troisième axe de leurs bases le moment cinétique  $\mathbf{w}$ . Ainsi la rotation  $Y(t)$  autour de  $\mathbf{w}$  permet d'obtenir  $\mathcal{R}'_C$  à partir de  $\mathcal{R}'_0$ . La matrice de rotation  $Q'(t)$  est ainsi donnée par

$$Q'(t) = RY(t)P(t). \quad (\text{E.50})$$

Plusieurs possibilités existent pour  $P(0)$  et  $R$ . Pour avoir  $Q'(0) = \mathbb{I} = RY(0)P(0)$ , [Celledoni \*et al.\* \(2008\)](#) décident de prendre  $Y(0) = \mathbb{I}$  et  $R = P(0)^{-1}$ . Ainsi  $Q'(t) = P(0)^{-1}Y(t)P(t)$ . La matrice de rotation  $Q(t)$  peut s'exprimer alors sous la forme

$$Q(t) = Q(0)P(0)^{-1}Y(t)P(t), \quad (\text{E.51})$$

où  $Y$  est une rotation d'angle  $\psi$  autour de  $\mathbf{e}_3$ . [Celledoni \*et al.\* \(2008\)](#) doivent déterminer l'expression de  $\psi$  pour calculer la matrice de rotation  $Q(t)$ .  $\dot{Q}(t) = Q(0)P(0)^{-1}\dot{Y}(t)P(t) + Q(0)P(0)^{-1}Y(t)\dot{P}(t)$  et  $\dot{Q} = Q(\mathcal{I}^{-1}\mathbf{G}) \times$  permettent d'obtenir  $P(t)(\mathcal{I}^{-1}\mathbf{G}) \times = Y^{-1}(t)\dot{Y}(t)P(t) + \dot{P}(t)$ . En utilisant  $Y^{-1}(t)\dot{Y}(t) = \dot{\psi}\mathbf{e}_3 \times$ , la dérivée de  $\psi$  peut s'exprimer selon

$$\dot{\psi}\mathbf{e}_3 \times = (P(t)\mathcal{I}^{-1}\mathbf{G}) \times - \dot{P}(t)P^{-1}(t). \quad (\text{E.52})$$

Pour isoler  $\dot{\psi}$ , [Celledoni \*et al.\* \(2008\)](#) appliquent cette équation au vecteur  $\mathbf{e}_1$  et prennent le produit scalaire avec  $\mathbf{e}_2$ . Dans la base orthonormée  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{w})$  de  $\mathcal{R}'_C$ ,  $(\dot{P}(t)P^{-1}(t)\mathbf{e}_1) \cdot \mathbf{e}_2 = (\dot{P}(t)\mathbf{a}) \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{a} \cdot \dot{\mathbf{b}} = -\dot{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{b}$  est vérifié comme  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ . L'expression  $((P(t)\mathcal{I}^{-1}\mathbf{G}) \times \mathbf{e}_1) \cdot \mathbf{e}_2 = P^{-1}(t)\mathbf{e}_3 \cdot (\mathcal{I}^{-1}\mathbf{G}) = \mathbf{w} \cdot (\mathcal{I}^{-1}\mathbf{G}) = \frac{2H}{G}$  permet d'aboutir à la proposition 2.2 de [Celledoni \*et al.\* \(2008\)](#)

$$\dot{\psi} = \frac{2H}{G} + \dot{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{b}. \quad (\text{E.53})$$



$\mathbf{w} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{w} \cdot \dot{\mathbf{w}} / \|\dot{\mathbf{w}}\| = 0$  comme  $\|\mathbf{w}\| = 1$  et [Celledoni et al. \(2008\)](#) considèrent afin d'exprimer  $P$  la base orthonormée  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{w})$ , où  $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{w}} / \|\dot{\mathbf{w}}\|$  et  $\mathbf{b} = \mathbf{w} \times \dot{\mathbf{w}} / \|\dot{\mathbf{w}}\|$ . L'inverse de  $P(t)$  présente les coordonnées des vecteurs  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{w})$  de  $\mathcal{R}_C$ . Or

$$\dot{\mathbf{a}} = -\frac{1}{\|\dot{\mathbf{w}}\|} \frac{d\|\dot{\mathbf{w}}\|}{dt} \mathbf{a} + \frac{\ddot{\mathbf{w}}}{\|\dot{\mathbf{w}}\|}, \quad (\text{E.54})$$

$$\ddot{\mathbf{w}} = \frac{d\dot{\mathbf{w}}}{dt} = \|\dot{\mathbf{w}}\| (\mathbf{a} \times (\mathcal{I}^{-1} \mathbf{G}) + G \mathbf{w} \times (\mathcal{I}^{-1} \mathbf{a})), \quad (\text{E.55})$$

d'où

$$\dot{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{b} = -\frac{2H}{G} + G \mathbf{a} \cdot (\mathcal{I}^{-1} \mathbf{a}). \quad (\text{E.56})$$

$\dot{\psi}$  peut s'exprimer alors

$$\dot{\psi} = G \mathbf{a} \cdot (\mathcal{I}^{-1} \mathbf{a}) = G \frac{G_1^2 G_2^2 \left(\frac{1}{I_2} - \frac{1}{I_1}\right)^2 \frac{1}{I_3} + G_2^2 G_3^2 \left(\frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_2}\right)^2 \frac{1}{I_1} + G_3^2 G_1^2 \left(\frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_3}\right)^2 \frac{1}{I_2}}{G_1^2 G_2^2 \left(\frac{1}{I_2} - \frac{1}{I_1}\right)^2 + G_2^2 G_3^2 \left(\frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_2}\right)^2 + G_3^2 G_1^2 \left(\frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_3}\right)^2}. \quad (\text{E.57})$$

Les expressions des équations (E.10) et (E.11) permettent de remplacer  $G_1^2$  et  $G_3^2$  par  $G_2^2$  pour obtenir

$$\dot{\psi} = G \frac{2(I_2 - I_1)(I_3 - I_2)HG_2^2 + I_2(2I_1H - G^2)(2I_3H - G^2)}{G_2^2 G^2 (I_2 - I_1)(I_3 - I_2) + I_2^2 (2I_1H - G^2)(2I_3H - G^2)} \quad (\text{E.58})$$

$$= \frac{2H}{G} - \frac{I_2}{G} \frac{(2I_1H - G^2)(2I_2H - G^2)(2I_3H - G^2)}{G_2^2 G^2 (I_2 - I_1)(I_3 - I_2) + I_2^2 (2I_1H - G^2)(2I_3H - G^2)}. \quad (\text{E.59})$$

### E.2.1 $2I_1H < 2I_2H < G^2 < 2I_3H$ ou $2I_1H > 2I_2H > G^2 > 2I_3H$

En remplaçant  $G_2$  par l'expression de l'équation (E.24),  $\dot{\psi}$  devient

$$\dot{\psi} = \frac{2H}{G} - \frac{2I_2H - G^2}{GI_2} \frac{1}{1 - n \operatorname{sn}^2(\omega_p t + \epsilon, k)}, \quad (\text{E.60})$$

où

$$n = \frac{G^2(I_1 - I_2)}{(2I_1H - G^2)I_2}. \quad (\text{E.61})$$

Avec  $\psi(0) = 0$ , la solution pour l'angle  $\psi$  est alors

$$\psi(t) = \frac{2H}{G}t - \frac{2I_2H - G^2}{GI_2\omega_p} (\Pi(\operatorname{am}(\omega_p t + \epsilon, k), n, k) - \Pi(\operatorname{am}(\epsilon, k), n, k)), \quad (\text{E.62})$$

où  $\Pi(\operatorname{am}(t, k), n, k) = \int_0^t 1/(1 - n \operatorname{sn}^2(t', k)) dt'$  est l'intégrale elliptique incomplète de troisième espèce pour l'amplitude  $\operatorname{am}(t, k) = \arcsin(\operatorname{sn}(t, k))$ .

### E.2.2 $2I_1H < G^2 < 2I_2H < 2I_3H$ ou $2I_1H > G^2 > 2I_2H > 2I_3H$

En remplaçant  $G_2$  par l'expression de l'équation (E.42),  $\dot{\psi}$  devient

$$\dot{\psi} = \frac{2H}{G} - \frac{2I_2H - G^2}{GI_2} \frac{1}{1 - n \operatorname{sn}^2(\omega_p t + \epsilon, k)}, \quad (\text{E.63})$$

où

$$n = \frac{G^2(I_3 - I_2)}{(2I_3H - G^2)I_2} \quad (\text{E.64})$$

et la solution pour l'angle  $\psi$  est alors

$$\psi(t) = \frac{2H}{G}t - \frac{2I_2H - G^2}{GI_2\omega_p} (\Pi(\operatorname{am}(\omega_p t + \epsilon, k), n, k) - \Pi(\operatorname{am}(\epsilon, k), n, k)). \quad (\text{E.65})$$

**Remarque :** Lorsque  $2I_1H < G^2 < 2I_2H < 2I_3H$ , la solution donnée par [Celledoni et al. \(2008\)](#) ne présente pas le bon signe devant l'intégrale elliptique incomplète de troisième espèce.

# Bibliographie

- AMELIN Y., KROT A. N., HUTCHEON I. D. et ULYANOV A. A. : Lead isotopic ages of chondrules and calcium-aluminum-rich inclusions. *Science*, 297(5587):1678–1683, 2002.
- ANDOYER H. : *Cours de mécanique céleste*, volume 1. Gauthier-Villars, 1923.
- BILLS B. G. et NIMMO F. : Forced obliquities and moments of inertia of Ceres and Vesta. *Icarus*, 213(2):496–509, 2011.
- BILLS B. G. et SCOTT B. R. : Secular obliquity variations of Ceres and Pallas. *Icarus*, 284:59–69, 2017.
- BINZEL R. P. et XU S. : Chips off of asteroid 4 Vesta: evidence for the parent body of basaltic achondrite meteorites. *Science*, 260(5105):186–192, 1993.
- BIRKEBAK R. C. et ABDULKADIR A. : Spectral and total emittance of Apollo fines. *In AIAA, 10th Thermophysics Conference*, 1975.
- BIZZARRO M., BAKER J. A., HAACK H. et LUNDGAARD K. L. : Rapid timescales for accretion and melting of differentiated planetesimals inferred from 26Al-26Mg chronometry. *The Astrophysical Journal Letters*, 632(1):L41, 2005.
- BLANES S., CASAS F. et MURUA A. : Splitting and composition methods in the numerical integration of differential equations. *Boletín de la Sociedad Española de Matemática Aplicada. SeMA*, 45:89–145, 2008.
- BOUÉ G. et LASKAR J. : Precession of a planet with a satellite. *Icarus*, 185:312–330, 2006.
- BOURBAKI N. : *Groupes et algèbres de Lie. Éléments de Mathématiques*. Hermann, 1972.
- BREITER S., NESVORNÝ D. et VOKROUHLICKÝ D. : Efficient Lie-Poisson integrator for secular spin dynamics of rigid bodies. *The Astronomical Journal*, 130:1267–1277, 2005.
- BUCHBERGER B. : *Ein Algorithmus zum Auffinden der Basiselemente des Restklassenringes nach einem nulldimensionalen Polynomideal (An algorithm for finding the basis elements of the residue class ring of a zero dimensional polynomial ideal)*. Thèse de doctorat, Institut de Mathématiques, Université de Innsbruck, Autriche, 1965. Traduction anglaise dans *Journal of Symbolic Computation, Special Issue on Logic, Mathematics, and Computer Science : Interactions*. Volume 41, Numéros 3-4, Pages 475–511, 2006.
- CARRY B., DUMAS C., FULCHIGNONI M., MERLINE W. J., BERTHIER J., HESTROFFER D., FUSCO T. et TAMBLYN P. : Near-infrared mapping and physical properties of the dwarf-planet Ceres. *Astronomy & Astrophysics*, 478(1):235–244, 2008.
- CASTILLO-ROGEZ J. C. et MCCORD T. B. : Ceres’ evolution and present state constrained by shape data. *Icarus*, 205:443–459, 2010.
- CELLEDONI E. et SÄFSTRÖM N. : Efficient time-symmetric simulation of torqued rigid bodies using Jacobi elliptic functions. *Journal of Physics A: Mathematical General*, 39:5463–5478, 2006.

- CELLEDONI E., FASSÒ F., SÄFSTRÖM N. et ZANNA A. : The exact computation of the free rigid body motion and its use in splitting methods. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 30(4):2084–2112, 2008.
- CHABOT N. L., ERNST C. M., DENEVI B. W., NAIR H., DEUTSCH A. N., BLEWETT D. T., MURCHIE S. L., NEUMANN G. A., MAZARICO E., PAIGE D. A., HARMON J. K., HEAD J. W. et SOLOMON S. C. : Images of surface volatiles in Mercury’s polar craters acquired by the MESSENGER spacecraft. *Geology*, 42:1051–1054, 2014.
- CHAMBERLAIN M. A., SYKES M. V. et ESQUERDO G. A. : Ceres lightcurve analysis-Period determination. *Icarus*, 188:451–456, 2007.
- COLAPRETE A., SCHULTZ P., HELDMANN J., WOODEN D., SHIRLEY M., ENNICO K., HERMALYN B., MARSHALL W., RICCO A., ELPHIC R. C., GOLDSTEIN D., SUMMY D., BART G. D., ASPHAUG E., KORYCANSKY D., LANDIS D. et SOLLITT L. : Detection of Water in the LCROSS Ejecta Plume. *Science*, 330(6003):463–468, 2010.
- COLOMBO G. : Cassini’s second and third laws. *The Astronomical Journal*, 71:891, 1966.
- CONNELLY J. N., AMELIN Y., KROT A. N. et BIZZARRO M. : Chronology of the solar system’s oldest solids. *The Astrophysical Journal Letters*, 675(2):L121, 2008.
- CONSOLMAGNO G., BRITT D. et MACKE R. : The significance of meteorite density and porosity. *Chemie der Erde-Geochemistry*, 68(1):1–29, 2008.
- DE SANCTIS M. C., AMMANNITO E., CAPRIA M. T., TOSI F., CAPACCIONI F., ZAMBON F., CARRARO F., FONTE S., FRIGERI A., JAUMANN R., MAGNI G., MARCHI S., MCCORD T. B., MCFADDEN L. A., MCSWEEN H. Y., MITTFELDELT D. W., NATHUES A., PALOMBA E., PIETERS C. M., RAYMOND C. A., RUSSELL C. T., TOPLIS M. J. et TURRINI D. : Spectroscopic characterization of mineralogy and its diversity across Vesta. *Science*, 336(6082):697–700, 2012.
- DE SANCTIS M. C., RAPONI A., AMMANNITO E., CIARNIELLO M., TOPLIS M. J., MCSWEEN H. Y., CASTILLO-ROGEZ J. C., EHLMANN B. L., CARROZZO F. G., MARCHI S., TOSI F., ZAMBON F., CAPACCIONI F., CAPRIA M. T., FONTE S., FORMISANO M., FRIGERI A., GIARDINO M., LONGOBARDO A., MAGNI G., PALOMBA E., MCFADDEN L. A., PIETERS C. M., JAUMANN R., SCHENK P., MUGNUOLO R., RAYMOND C. A. et RUSSELL C. T. : Bright carbonate deposits as evidence of aqueous alteration on (1) Ceres. *Nature*, 536:54–57, 2016.
- DEMARIO B. E., SCHMIDT B. E., MUTCHLER M. J., LI J.-Y., MCFADDEN L. A., MCLEAN B. J. et RUSSELL C. T. : Results of a Hubble space telescope search for natural satellites of dwarf planet 1 Ceres. *Icarus*, 280:308–314, 2016.
- DORMAND J. R. et PRINCE P. J. : A family of embedded Runge-Kutta formulae. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 6(1):19–26, 1980.
- DRUMMOND J. et CHRISTOU J. : Triaxial ellipsoid dimensions and rotational poles of seven asteroids from Lick Observatory adaptive optics images, and of Ceres. *Icarus*, 197(2):480–496, 2008.
- DRUMMOND J., ECKART A. et HEGE E. : Speckle interferometry of asteroids IV. Reconstructed images of 4 Vesta. *Icarus*, 73(1):1–14, 1988.
- DRUMMOND J., CARRY B., MERLINE W., DUMAS C., HAMMEL H., ERARD S., CONRAD A., TAMBLYN P. et CHAPMAN C. : Dwarf planet Ceres: Ellipsoid dimensions and rotational pole from Keck and VLT adaptive optics images. *Icarus*, 236:28–37, 2014.
- DULLWEBER A., LEIMKUHNER B. et MCLACHLAN R. I. : Symplectic splitting methods for rigid body molecular dynamics. *The Journal of Chemical Physics*, 107(15):5840–5851, 1997.

- DUMAS H. S. et LASKAR J. : Global dynamics and long-time stability in Hamiltonian systems via numerical frequency analysis. *Physical Review Letters*, 70:2975–2979, 1993.
- EISENBERG D. et KAUZMANN W. : *The structure and properties of water*. Oxford University Press, 1969.
- ERMAKOV A. I., FU R. R., CASTILLO-ROGEZ J. C., RAYMOND C. A., PARK R. S., PREUSKER F., RUSSELL C. T., SMITH D. E. et ZUBER M. T. : Constraints on Ceres' Internal Structure and Evolution From Its Shape and Gravity Measured by the Dawn Spacecraft. *Journal of Geophysical Research: Planets*, 122(11):2267–2293, 2017b.
- ERMAKOV A. I., MAZARICO E., SCHRÖDER S., CARSENTY U., SCHORGHOFER N., PREUSKER F., RAYMOND C., RUSSELL C. et ZUBER M. T. : Ceres's obliquity history and its implications for the permanently shadowed regions. *Geophysical Research Letters*, 44(6):2652–2661, 2017a.
- ERMAKOV A. I., ZUBER M. T., SMITH D. E., RAYMOND C. A., BALMINO G., FU R. R. et IVANOV B. A. : Constraints on Vestas interior structure using gravity and shape models from the Dawn mission. *Icarus*, 240(1):146–160, 2014.
- ESTERMANN I. : *Gases at low densities*, volume 1 de *High Speed Aerodynamics and Jet Propulsion*, pages 742–744. Princeton University Press, 1955.
- FANALE F. P. et SALVAIL J. R. : The water regime of asteroid (1) Ceres. *Icarus*, 82:97–110, 1989.
- FARAGO F., LASKAR J. et COUETDIC J. : Averaging on the motion of a fast revolving body. Application to the stability study of a planetary system. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 104:291–306, 2009.
- FARRÉS A., LASKAR J., BLANES S., CASAS F., MAKAZAGA J. et MURUA A. : High precision symplectic integrators for the Solar System. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 116:141–174, 2013.
- FASSÒ F. : Comparison of splitting algorithms for the rigid body. *Journal of Computational Physics*, 189(2):527–538, 2003.
- FELDMAN W. C., MAURICE S., BINDER A. B., BARRACLOUGH B. L., ELPIC R. C. et LAWRENCE D. J. : Fluxes of fast and epithermal neutrons from Lunar Prospector: Evidence for water ice at the lunar poles. *Science*, 281(5382):1496–1500, 1998.
- FIENGA A., LASKAR J., MORLEY T., MANCHE H., KUCHYNKA P., LE PONCIN-LAFITTE C., BUDNIK F., GASTINEAU M. et SOMENZI L. : INPOP08, a 4-D planetary ephemeris: from asteroid and time-scale computations to ESA Mars Express and Venus Express contributions. *Astronomy & Astrophysics*, 507:1675–1686, 2009.
- FIENGA A., MANCHE H., LASKAR J. et GASTINEAU M. : INPOP06: a new numerical planetary ephemeris. *Astronomy & Astrophysics*, 477:315–327, 2008.
- FOREST E. et RUTH R. D. : Fourth-order symplectic integration. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 43:105–117, 1990.
- FU R. R., ERMAKOV A. I., MARCHI S., CASTILLO-ROGEZ J. C., RAYMOND C. A., HAGER B. H., ZUBER M. T., KING S. D., BLAND M. T., CRISTINA DE SANCTIS M., PREUSKER F., PARK R. S. et RUSSELL C. T. : The interior structure of Ceres as revealed by surface topography. *Earth and Planetary Science Letters*, 476:153–164, 2017.
- FU R. R., HAGER B. H., ERMAKOV A. I. et ZUBER M. T. : Efficient early global relaxation of asteroid Vesta. *Icarus*, 240(1):133–145, 2014.
- GASKELL R. W. : SPC shape and topography of Vesta from DAWN imaging data. In *AAS/Division for Planetary Sciences Meeting Abstracts*, volume 44 de *AAS/Division for Planetary Sciences Meeting Abstracts*, page 209.03, 2012.

- GHOSH A. et MCSWEEN H. Y. : A thermal model for the differentiation of asteroid 4 Vesta, based on radiogenic heating. *Icarus*, 134(2):187–206, 1998.
- HAIRER E., NØRSETT S. et WANNER G. : *Solving ordinary differential equations I: Nonstiff Problems*, volume 8 de *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer, 2008.
- HAIRER E., LUBICH C. et WANNER G. : *Geometric numerical integration: structure-preserving algorithms for ordinary differential equations*, volume 31 de *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer, 2006.
- HAIRER E. et VILMART G. : Preprocessed discrete Moser–Veselov algorithm for the full dynamics of a rigid body. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 39(42):13225–13235, 2006.
- HAYNE P. O. et AHARONSON O. : Thermal stability of ice on Ceres with rough topography. *Journal of Geophysical Research: Planets*, 120:1567–1584, 2015.
- HENRARD J. et MURIGANDE C. : Colombo’s top. *Celestial mechanics*, 40(3-4):345–366, 1987.
- JACOBI C. G. J. : Sur la rotation d’un corps. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 1850 (39):293–350, 1850.
- KAULA W. M. : *Theory of satellite geodesy. Applications of satellites to geodesy*. Blaisdell, Waltham, 1966.
- KEIHM S., KAMP L., GULKIS S., HOFSTADTER M., LEE S., JANSSEN M. et CHOUKROUN M. : Reconciling main belt asteroid spectral flux density measurements with a self-consistent thermophysical model. *Icarus*, 226:1086–1102, 2013.
- KINOSHITA H., YOSHIDA H. et NAKAI H. : Symplectic integrators and their application to dynamical astronomy. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 50:59–71, 1991.
- KINOSHITA H. : Theory of the rotation of the rigid Earth. *Celestial mechanics*, 15(3):277–326, 1977.
- KONOPLIV A. S., ASMAR S. W., PARK R. S., BILLS B. G., CENTINELLO F., CHAMBERLIN A. B., ERMAKOV A. I., GASKELL R. W., RAMBAUX N. et RAYMOND C. A. : The Vesta gravity field, spin pole and rotation period, landmark positions, and ephemeris from the Dawn tracking and optical data. *Icarus*, 240(1):103–117, 2014.
- KONOPLIV A. S., PARK R. S. et FOLKNER W. M. : An improved JPL Mars gravity field and orientation from Mars orbiter and lander tracking data. *Icarus*, 274:253–260, 2016.
- KONOPLIV A. S., YODER C. F., STANDISH E. M., YUAN D.-N. et SJOGREN W. L. : A global solution for the Mars static and seasonal gravity, Mars orientation, Phobos and Deimos masses, and Mars ephemeris. *Icarus*, 182(1):23–50, 2006.
- KOPP G. et LEAN J. L. : A new, lower value of total solar irradiance: Evidence and climate significance. *Geophysical Research Letters*, 38:L01706, 2011.
- KOSELEFF P.-V. : *Calcul formel pour les méthodes de Lie en mécanique hamiltonienne*. Thèse de doctorat, École Polytechnique, 1993.
- KOSELEFF P.-V. : Exhaustive search of symplectic integrators using computer algebra. *Integration Algorithms and Classical Mechanics, Fields Institute Communications*, 10:103–119, 1996.
- LAMBECK K. : *The Earth’s variable rotation: Geophysical causes and consequences*. Cambridge University Press, 1980.
- LANDAU L. et LIFCHITZ E. : *Mécanique*, volume 1 de *Physique théorique*. Éditions Mir, quatrième édition, 1982.

- LASKAR J. : Secular terms of classical planetary theories using the results of general theory. *Astronomy & Astrophysics*, 157:59–70, 1986.
- LASKAR J. : Secular evolution of the solar system over 10 million years. *Astronomy & Astrophysics*, 198:341–362, 1988.
- LASKAR J. : The chaotic motion of the solar system: A numerical estimate of the size of the chaotic zones. *Icarus*, 88:266–291, 1990.
- LASKAR J. : Frequency analysis for multi-dimensional systems. Global dynamics and diffusion. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 67:257–281, 1993.
- LASKAR J. : Frequency map analysis and quasiperiodic decompositions. *ArXiv Mathematics e-prints*, 2003.
- LASKAR J., FROESCHLÉ C. et CELLETTI A. : The measure of chaos by the numerical analysis of the fundamental frequencies. Application to the standard mapping. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 56:253–269, 1992.
- LASKAR J., JOUDEL F. et BOUDIN F. : Orbital, precessional, and insolation quantities for the Earth from -20 Myr to +10 Myr. *Astronomy & Astrophysics*, 270:522–533, 1993b.
- LASKAR J., JOUDEL F. et ROBUTEL P. : Stabilization of the Earth's obliquity by the Moon. *Nature*, 361:615–617, 1993a.
- LASKAR J. et ROBUTEL P. : The chaotic obliquity of the planets. *Nature*, 361:608–612, 1993.
- LASKAR J. et ROBUTEL P. : Stability of the planetary three-body problem. I. Expansion of the Planetary Hamiltonian. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 62:193–217, 1995.
- LASKAR J., CORREIA A., GASTINEAU M., JOUDEL F., LEVRARD B. et ROBUTEL P. : Long term evolution and chaotic diffusion of the insolation quantities of Mars. *Icarus*, 170(2):343–364, 2004a.
- LASKAR J., FIENGA A., GASTINEAU M. et MANCHE H. : La2010: a new orbital solution for the long-term motion of the Earth. *Astronomy & Astrophysics*, 532:A89, 2011a.
- LASKAR J., GASTINEAU M., DELISLE J.-B., FARRÉS A. et FIENGA A. : Strong chaos induced by close encounters with Ceres and Vesta. *Astronomy & Astrophysics*, 532:L4, 2011b.
- LASKAR J. et ROBUTEL P. : High order symplectic integrators for perturbed Hamiltonian systems. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 80(1):39–62, 2001.
- LASKAR J., ROBUTEL P., JOUDEL F., GASTINEAU M., CORREIA A. et LEVRARD B. : A long-term numerical solution for the insolation quantities of the Earth. *Astronomy & Astrophysics*, 428(1):261–285, 2004b.
- LEBOFSKY L. A. et SPENCER J. R. : Radiometry and thermal modeling of asteroids. In BINZEL R. P., GEHRELS T. et MATTHEWS M. S., éditeurs : *Asteroids II*, Space Science Series, pages 128–147. University Arizona Press, 1989.
- LEBOFSKY L. A., SYKES M. V., TEDESCO E. F., VEEDER G. J., MATSON D. L., BROWN R. H., GRADIE J. C., FEIERBERG M. A. et RUDY R. J. : A refined "standard" thermal model for asteroids based on observations of 1 Ceres and 2 Pallas. *Icarus*, 68:239–251, 1986.
- LEE M. H., PEALE S., PFAHL E. et WARD W. R. : Evolution of the obliquities of the giant planets in encounters during migration. *Icarus*, 190(1):103–109, 2007.
- LI J.-Y., MCFADDEN L. A., PARKER J. W., YOUNG E. F., STERN S. A., THOMAS P. C., RUSSELL C. T. et SYKES M. V. : Photometric analysis of 1 Ceres and surface mapping from HST observations. *Icarus*, 182:143–160, 2006.

- LI J.-Y., THOMAS P. C., CARCICH B., MUTCHLER M. J., MCFADDEN L. A., RUSSELL C. T., WEINSTEIN-WEISS S. S., RAYMAN M. D. et RAYMOND C. A. : Improved measurement of Asteroid (4) Vesta's rotational axis orientation. *Icarus*, 211(1):528–534, 2011.
- LUGMAIR G. et SHUKOLYUKOV A. : Early solar system timescales according to 53 Mn-53 Cr systematics. *Geochimica et Cosmochimica Acta*, 62(16):2863–2886, 1998.
- MACDONALD G. J. : Tidal friction. *Reviews of Geophysics*, 2(3):467–541, 1964.
- MANCHE H. : *Élaboration de l'éphéméride INPOP : modèle dynamique et ajustements aux données de télémétrie laser Lune*. Thèse de doctorat, Observatoire de Paris, 2011.
- MAO X. et MCKINNON W. B. : Faster paleospin and deep-seated uncompensated mass as possible explanations for Ceres' present-day shape and gravity. *Icarus*, 299:430–442, 2018.
- MARCHI S., MCSWEEN H. Y., O'BRIEN D. P., SCHENK P., SANCTIS M. C. D., GASKELL R., JAUMANN R., MOTTOLA S., PREUSKER F., RAYMOND C. A., ROATSCH T. et RUSSELL C. T. : The violent collisional history of asteroid 4 Vesta. *Science*, 336(6082):690–694, 2012.
- MARSDEN J. E. et RATIU T. S. : *Introduction to mechanics and symmetry: a basic exposition of classical mechanical systems*. Springer-Verlag, 1994.
- MCCORD T. B. et SOTIN C. : Ceres: Evolution and current state. *Journal of Geophysical Research: Planets*, 110:E05009, 2005.
- MCFADDEN L. A., SKILLMAN D. R., MEMARSADEGHI N., LI J.-Y., JOY S. P., POLANSKEY C. A., RAYMAN M. D., SYKES M. V., TRICARICO P., PALMER E., O'BRIEN D. P., MOTTOLA S., CARSENTY U., MUTCHLER M., MCLEAN B., SCHRÖDER S. E., MASTRODEMOS N., SCHIFF C., KELLER H. U., NATHUES A., GUTIÉRREZ-MARQUES P., RAYMOND C. A. et RUSSELL C. T. : Vesta's missing moons: Comprehensive search for natural satellites of Vesta by the Dawn spacecraft. *Icarus*, 257:207–216, 2015.
- MCFADDEN L. A., BASTIEN F. A., MUTCHLER M., CROW C. A., WEIR H., LI J.-Y. et HAMILTON D. P. : Upper limits on the size of satellites of Asteroid (4) Vesta from 2007 Hubble Space Telescope observations. *Icarus*, 220(2):305–310, 2012.
- MCLACHLAN R. I. : Explicit Lie-Poisson integration and the Euler equations. *Physical Review Letters*, 71(19):3043, 1993.
- MCLACHLAN R. I. : On the numerical integration of ordinary differential equations by symmetric composition methods. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 16(1):151–168, 1995.
- MCLACHLAN R. I. : More on symplectic correctors. *Fields Institute Communications*, 10:141–149, 1996.
- MIGNARD F. : The evolution of the lunar orbit revisited. I. *The Moon and the planets*, 20(3):301–315, 1979.
- MORRISON D. et LEBOFISKY L. : Radiometry of asteroids. In GEHRELS T., éditeur : *Asteroids*, pages 184–205. University Arizona Press, 1979.
- MOSER J. et VESELOV A. P. : Discrete versions of some classical integrable systems and factorization of matrix polynomials. *Communications in Mathematical Physics*, 139(2):217–243, 1991.
- MUNTHE-KAAS H. et OWREN B. : Computations in a free Lie algebra. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A*, 357(1754):957–981, 1999.
- NÉRON DE SURGY O. et LASKAR J. : On the long term evolution of the spin of the Earth. *Astronomy & Astrophysics*, 318:975–989, 1997.

- NESVORNÝ D., ROIG F., GLADMAN B., LAZZARO D., CARRUBA V. et MOTHÉ-DINIZ T. : Fugitives from the Vesta family. *Icarus*, 193(1):85–95, 2008.
- OMELYAN I. P. : Advanced gradientlike methods for rigid-body molecular dynamics. *The Journal of Chemical Physics*, 127(4):044102, 2007.
- PAIGE D. A., SIEGLER M. A., HARMON J. K., NEUMANN G. A., MAZARICO E. M., SMITH D. E., ZUBER M. T., HARJU E., DELITSKY M. L. et SOLOMON S. C. : Thermal stability of volatiles in the north polar region of Mercury. *Science*, 339:300, 2013.
- PARK R. S., KONOPLIV A. S., ASMAR S. W., BILLS B. G., GASKELL R. W., RAYMOND C. A., SMITH D. E., TOPLIS M. J. et ZUBER M. T. : Gravity field expansion in ellipsoidal harmonic and polyhedral internal representations applied to Vesta. *Icarus*, 240(1):118–132, 2014.
- PARK R. S., KONOPLIV A. S., BILLS B. G., RAMBAUX N., CASTILLO-ROGEZ J. C., RAYMOND C. A., VAUGHAN A. T., ERMAKOV A. I., ZUBER M. T., FU R. R., TOPLIS M. J., RUSSELL C. T., NATHUES A. et PREUSKER F. : A partially differentiated interior for (1) Ceres deduced from its gravity field and shape. *Nature*, 537:515–517, 2016.
- PEALE S. J. : Generalized Cassini’s laws. *The Astronomical Journal*, 74:483, 1969.
- PERRIN F. : Étude mathématique du mouvement brownien de rotation. *Annales Scientifiques de l’École Normale Supérieure. Troisième Série*, 45:1–51, 1928.
- PLATZ T., NATHUES A., SCHORGHOFER N., PREUSKER F., MAZARICO E., SCHRÖDER S. E., BYRNE S., KNEISSL T., SCHMEDEMANN N., COMBE J.-P., SCHÄFER M., THANGJAM G. S., HOFFMANN M., GUTIERREZ-MARQUES P., LANDIS M. E., DIETRICH W., RIPKEN J., MATZ K.-D. et RUSSELL C. T. : Surface water-ice deposits in the northern shadowed regions of Ceres. *Nature Astronomy*, 1:0007, 2016.
- POINCARÉ H. : Sur une forme nouvelle des équations du problème des trois corps. *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l’Académie des sciences*, 123:1031–1035, 1896.
- PRETTYMAN T. H., YAMASHITA N., TOPLIS M. J., MCSWEEN H. Y., SCHÖRGHOFER N., MARCHI S., FELDMAN W. C., CASTILLO-ROGEZ J., FORNI O., LAWRENCE D. J., AMMANNITO E., EHLMANN B. L., SIZEMORE H. G., JOY S. P., POLANSKEY C. A., RAYMAN M. D., RAYMOND C. A. et RUSSELL C. T. : Extensive water ice within Ceres’ aqueously altered regolith: Evidence from nuclear spectroscopy. *Science*, 355:55–59, 2017.
- RAMBAUX N., CHAMBAT F. et CASTILLO-ROGEZ J. C. : Third-order development of shape, gravity, and moment of inertia for highly flattened celestial bodies. Application to Ceres. *Astronomy & Astrophysics*, 584:A127, 2015.
- RAMBAUX N., VAN HOOLST T., DEHANT V. et BOIS E. : Inertial core-mantle coupling and libration of Mercury. *Astronomy & Astrophysics*, 468:711–719, 2007.
- RAMBAUX N. : The rotational motion of Vesta. *Astronomy & Astrophysics*, 556:A151, 2013.
- RAMBAUX N., CASTILLO-ROGEZ J. C., DEHANT V. et KUCHYNKA P. : Constraining Ceres’ interior from its rotational motion. *Astronomy & Astrophysics*, 535:A43, 2011.
- REICH S. : Momentum conserving symplectic integrators. *Physica D*, 76(4):375–383, 1994.
- ROBERTS P. H. et URSELL H. D. : Random walk on a sphere and on a Riemannian manifold. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 252(1012):317–356, 1960.



- RUESCH O., PLATZ T., SCHENK P., MCFADDEN L. A., CASTILLO-ROGEZ J. C., QUICK L. C., BYRNE S., PREUSKER F., O'BRIEN D. P., SCHMEDEMANN N., WILLIAMS D. A., LI J.-Y., BLAND M. T., HIESINGER H., KNEISSL T., NEESEMANN A., SCHAEFER M., PASCKERT J. H., SCHMIDT B. E., BUCZKOWSKI D. L., SYKES M. V., NATHUES A., ROATSCH T., HOFFMANN M., RAYMOND C. A. et RUSSELL C. T. : Cryovolcanism on Ceres. *Science*, 353:aaf4286, 2016.
- RUSSELL C. T. et RAYMOND C. A. : The Dawn Mission to Vesta and Ceres. *Space Science Reviews*, 163(1-4):3–23, 2011.
- RUSSELL C. T., RAYMOND C. A., AMMANNITO E., BUCZKOWSKI D. L., DE SANCTIS M. C., HIESINGER H., JAUMANN R., KONOPLIV A. S., MCSWEEN H. Y., NATHUES A., PARK R. S., PIETERS C. M., PRETTYMAN T. H., MCCORD T. B., MCFADDEN L. A., MOTTOLA S., ZUBER M. T., JOY S. P., POLANSKEY C., RAYMAN M. D., CASTILLO-ROGEZ J. C., CHI P. J., COMBE J. P., ERMAKOV A. I., FU R. R., HOFFMANN M., JIA Y. D., KING S. D., LAWRENCE D. J., LI J.-Y., MARCHI S., PREUSKER F., ROATSCH T., RUESCH O., SCHENK P., VILLARREAL M. N. et YAMASHITA N. : Dawn arrives at Ceres: Exploration of a small, volatile-rich world. *Science*, 353:1008–1010, 2016.
- RUSSELL C. T., RAYMOND C. A., CORADINI A., MCSWEEN H. Y., ZUBER M. T., NATHUES A., SANCTIS M. C. D., JAUMANN R., KONOPLIV A. S., PREUSKER F., ASMAR S. W., PARK R. S., GASKELL R., KELLER H. U., MOTTOLA S., ROATSCH T., SCULLY J. E. C., SMITH D. E., TRICARICO P., TOPPLIS M. J., CHRISTENSEN U. R., FELDMAN W. C., LAWRENCE D. J., MCCOY T. J., PRETTYMAN T. H., REEDY R. C., SYKES M. E. et TITUS T. N. : Dawn at Vesta: Testing the protoplanetary paradigm. *Science*, 336(6082):684–686, 2012.
- RUTH R. D. : A Canonical Integration Technique. *IEEE Transactions on Nuclear Science*, 30:2669, 1983.
- SCHENK P., O'BRIEN D. P., MARCHI S., GASKELL R., PREUSKER F., ROATSCH T., JAUMANN R., BUCZKOWSKI D., MCCORD T., MCSWEEN H. Y., WILLIAMS D., YINGST A., RAYMOND C. et RUSSELL C. : The geologically recent giant impact basins at Vesta's south pole. *Science*, 336(6082):694–697, 2012.
- SCHMIDT B. E., HUGHSON K. H. G., CHILTON H. T., SCULLY J. E. C., PLATZ T., NATHUES A., SIZEMORE H., BLAND M. T., BYRNE S., MARCHI S., O'BRIEN D. P., SCHORGHOFER N., HIESINGER H., JAUMANN R., PASCKERT J. H., LAWRENCE J. D., BUCZKOWSKI D., CASTILLO-ROGEZ J. C., SYKES M. V., SCHENK P. M., DE SANCTIS M.-C., MITRI G., FORMISANO M., LI J.-Y., REDDY V., LECORRE L., RUSSELL C. T. et RAYMOND C. A. : Geomorphological evidence for ground ice on dwarf planet Ceres. *Nature Geoscience*, 10:338–343, 2017.
- SCHORGHOFER N. : The lifetime of ice on main belt asteroids. *The Astrophysical Journal*, 682:697–705, 2008.
- SCHORGHOFER N. : Predictions of depth-to-ice on asteroids based on an asynchronous model of temperature, impact stirring, and ice loss. *Icarus*, 276:88–95, 2016.
- SHENG Q. : Solving linear partial differential equations by exponential splitting. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 9(2):199–212, 1989.
- SKOGLÖV E., MAGNUSSON P. et DAHLGREN M. : Evolution of the obliquities for ten asteroids. *Planetary and space science*, 44(10):1177–1183, 1996.
- SKOKOS C., GERLACH E., BODYFELT J. D., PAPAMIKOS G. et EGGL S. : High order three part split symplectic integrators: Efficient techniques for the long time simulation of the disordered discrete nonlinear Schrödinger equation. *Physics Letters A*, 378:1809–1815, 2014.
- SOFRONIOU M. et SPALETTA G. : Derivation of symmetric composition constants for symmetric integrators. *Optimization Methods and Software*, 20(4-5):597–613, 2005.

- SUZUKI M. : General theory of fractal path integrals with applications to many-body theories and statistical physics. *Journal of Mathematical Physics*, 32:400–407, 1991.
- SUZUKI M. : Fractal decomposition of exponential operators with applications to many-body theories and Monte Carlo simulations. *Physics Letters A*, 146:319–323, 1990.
- TANG Y. F. : A note on the construction of symplectic schemes for splittable Hamiltonian. *Journal of Computational Mathematics*, 20(1):89–96, 2002.
- THOMAS P. C., PARKER J. W., MCFADDEN L. A., RUSSELL C. T., STERN S. A., SYKES M. V. et YOUNG E. F. : Differentiation of the asteroid Ceres as revealed by its shape. *Nature*, 437:224–226, 2005.
- THOMAS P. C., BINZEL R. P., GAFFEY M. J., STORRS A. D., WELLS E. N. et ZELLNER B. H. : Impact excavation on asteroid 4 Vesta: Hubble space telescope results. *Science*, 277(5331):1492–1495, 1997b.
- THOMAS P. C., BINZEL R. P., GAFFEY M. J., ZELLNER B. H., STORRS A. D. et WELLS E. : Vesta: Spin pole, size, and shape from HST images. *Icarus*, 128(1):88–94, 1997a.
- TITUS T. N. : Ceres: Predictions for near-surface water ice stability and implications for plume generating processes. *Geophysical Research Letters*, 42:2130–2136, 2015.
- TOUMA J. et WISDOM J. : Lie-Poisson integrators for rigid body dynamics in the solar system. *The Astronomical Journal*, 107:1189–1202, 1994.
- van ZON R. et SCHOFIELD J. : Numerical implementation of the exact dynamics of free rigid bodies. *Journal of Computational Physics*, 225(1):145–164, 2007.
- WARD W. R. : Climatic variations on Mars: 1. Astronomical theory of insolation. *Journal of Geophysical Research*, 79(24):3375–3386, 1974.
- WATSON K., MURRAY B. et BROWN H. : On the possible presence of ice on the Moon. *Journal of Geophysical Research*, 66:1598–1600, 1961b.
- WATSON K., MURRAY B. C. et BROWN H. : The behavior of volatiles on the lunar surface. *Journal of Geophysical Research*, 66:3033–3045, 1961a.
- WHITTAKER E. T. : *A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies: with an introduction to the problem of three bodies*. Cambridge University Press, 1937.
- WISDOM J., HOLMAN M. et TOUMA J. : Symplectic Correctors. *Fields Institute Communications*, 10:217–244, 1996.
- WISDOM J. et HOLMAN M. : Symplectic maps for the n-body problem. *The Astronomical Journal*, 102:1528–1538, 1991.
- YOSHIDA H. : Construction of higher order symplectic integrators. *Physics Letters A*, 150(5-7):262–268, 1990.





## Résumé

Le sujet de cette thèse est l'étude de la rotation à long terme des corps célestes.

La première partie est consacrée à l'étude de la rotation à long terme de Cérès et Vesta, les deux corps les plus massifs de la ceinture principale d'astéroïdes. Ils sont l'objet d'étude de la sonde spatiale *Dawn*, qui a permis de déterminer précisément les caractéristiques physiques et de rotation nécessaires au calcul de leurs rotations. La distribution de glace sous et à la surface de Cérès dépend du mouvement de son axe de rotation par le biais de l'obliquité, inclinaison de l'équateur sur l'orbite. Les rotations de Cérès et Vesta étant rapides, l'évolution à long terme des axes de rotation de Cérès et Vesta a été obtenue à l'aide d'une intégration symplectique des équations de la rotation, où une moyenne a été réalisée sur la rotation propre rapide. La stabilité des axes de rotation de Cérès et Vesta a été étudiée en fonction des paramètres de la rotation avec un modèle séculaire semi-analytique, qui a permis de montrer que les axes de rotation ne présentaient pas de caractère chaotique.

La seconde partie concerne le développement d'intégrateurs symplectiques dédiés au corps solide. L'intégration de la rotation propre d'un corps solide nécessite d'intégrer les équations issues du hamiltonien du corps solide libre. Ce hamiltonien est certes intégrable et présente une solution explicite nécessitant l'usage des fonctions elliptiques de Jacobi, cependant le coût numérique de ces fonctions est élevé. Lorsque le hamiltonien du corps solide libre est couplé avec une énergie potentielle, l'orientation du corps doit être calculée à chaque pas d'intégration, ce qui augmente le temps de calcul. Des intégrateurs symplectiques ont ainsi été précédemment proposés pour le corps solide libre. Dans ce travail, des intégrateurs spécifiques au corps solide ont été développés en utilisant les propriétés de l'algèbre de Lie du moment cinétique.

## Mots Clés

Mécanique céleste, rotation des corps solides, Cérès, Vesta, intégrateurs symplectiques, algèbre de Lie

## Abstract

This thesis concerns the long-term rotation of celestial bodies.

The first part is a study of the long-term rotation of Ceres and Vesta, the two heaviest bodies of the main asteroid belt. The spacecraft *Dawn* studied these two objects and determined the physical and rotational characteristics, which are necessary for the computation of their rotations. The ice distribution under and on the surface of Ceres depends on the evolution of the obliquity, which is the inclination of the equatorial plane on the orbital plane. As the rotations of Ceres and Vesta are fast, the long-term evolution of the spin axes of Ceres and Vesta was obtained by realizing a symplectic integration of the equations of the rotation averaged on the fast proper rotation. The stability of the spin axes of Ceres and Vesta was studied with respect to the parameters of the rotation with a secular and semi-analytical model, which allowed to show that the spin axes are not chaotic.

The second part concerns the development of symplectic integrators dedicated to the rigid body. The integration of the proper rotation of a rigid body needs to integrate the equations given by the Hamiltonian of the free rigid body. This Hamiltonian is integrable and presents an explicit solution using the Jacobi elliptic functions. However, the numerical cost of these functions is high. When the Hamiltonian of the free rigid body is coupled to a potential energy, the orientation of the body is needed at each step, which increases the computation time. Symplectic integrators were then previously proposed for the free rigid body. In this work, symplectic integrators dedicated to the rigid body were developed using the properties of the Lie algebra of the angular momentum.

## Keywords

Celestial mechanics, rotation of rigid bodies, Ceres, Vesta, symplectic integrators, Lie algebra