



HAL
open science

Optimisation énergétique Convexe pour véhicule Hybride électrique : vers une solution analytique

Souad Hadj-Saïd

► **To cite this version:**

Souad Hadj-Saïd. Optimisation énergétique Convexe pour véhicule Hybride électrique : vers une solution analytique. Autre. Université d'Orléans, 2018. Français. NNT : 2018ORLE2028 . tel-02099775

HAL Id: tel-02099775

<https://theses.hal.science/tel-02099775v1>

Submitted on 15 Apr 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ÉCOLE DOCTORALE
ENERGIE, MATERIAUX, SCIENCES DE LA TERRE ET DE L'UNIVERS

LABORATOIRE PRISME

THÈSE présentée par :
Souad HADJ-SAID

Soutenu le : **07 novembre 2018**

Pour obtenir le grade de : **Docteur de l'université d'Orléans**

Discipline/ Spécialité : **Énergétique**

**Optimisation Énergétique Convexe pour
véhicule Hybride Électrique : vers une
Solution Analytique**

THÈSE dirigée par :

Guillaume COLIN

Maître de conférences, HDR, Université d'Orléans

Yann CHAMAILLARD

Professeur, Université d'Orléans

RAPPORTEURS :

Sébastien DELPRAT

Professeur, Université de Valenciennes

Antonio SCIARRETTA

HDR, IFP Énergies nouvelles

JURY :

Éric BIDEAUX

Professeur, Examineur, INSA Lyon

Ahmed KETFI-CHERIF

Docteur, Renault, co-encadrant

Remerciements

Je tiens à remercier tout d'abord mon directeur de thèse M. Guillaume Colin de l'Université d'Orléans pour son soutien, sa bienveillance, sa disponibilité et son implication. Les nombreuses réunions de travail qu'on a eu ensemble m'ont permis d'avancer sur mon travail et m'ont été d'une grande aide.

Je tiens aussi à remercier mon co-directeur M. Yann Chamaillard de l'Université d'Orléans, avec M. Abdelmalek Maloum de Renault, pour m'avoir permis de réaliser cette thèse. Je remercie encore M. Yann Chamaillard pour les échanges intéressants et constructifs que nous avons eu durant ma thèse.

Je remercie également M. Sébastien Delprat et M. Antonio Sciarretta d'avoir accepté d'être rapporteurs sur ma thèse.

Je remercie tout particulièrement M. Ahmed Ketfi-Cherif, mon encadrant industriel, pour m'avoir fait confiance, pour ses encouragements, pour sa disponibilité ainsi que pour son suivi rigoureux et régulier de mes travaux. Notre collaboration m'a beaucoup apportée sur le plan professionnel.

Je remercie mon responsable hiérarchique de Renault M. Pierre De-Baudus d'avoir été à l'écoute, pour sa compréhension, sa disponibilité et sa confiance.

Je remercie également tous mes collègues de Renault et du Laboratoire PRISME pour leur bonne humeur, leurs conseils, leur aide et leur soutien.

Finalement, je remercie ma mère, ma famille et mes amis qui m'ont été d'un grand soutien durant ces 3 années.

Table des matières

1	Le Véhicule Hybride Électrique : sa modélisation et sa problématique de gestion d'énergie	13
1.1	Définition	13
1.1.1	Types	14
1.1.2	Architectures	15
1.1.3	Présentation du GMP Étudié	17
1.2	Modélisation et Hypothèses	18
1.2.1	Modélisation Énergétique	18
1.2.2	Modélisation Dynamique	40
1.3	Supervision Énergétique	41
1.3.1	Formulation d'un Problème d'Optimisation sous Contraintes	42
1.3.2	Principe du Maximum de Pontryagin (PMP)	43
1.3.3	Méthodologie Analytique	45
1.3.4	Méthodologie Numérique	46
1.4	Conclusion	48
2	Application à l'architecture Parallèle	51
2.1	Optimisation de la répartition de puissance	51
2.1.1	Utilisation du modèle linéaire de la machine électrique	53
2.1.2	Utilisation du modèle quadratique de la machine électrique	60
2.1.3	Résultats de Simulations	70
2.1.4	Conclusion	86
2.2	Optimisation de l'état du moteur thermique	87
2.3	Optimisation du régime du moteur thermique	91
2.3.1	Rapports discrets	92
2.3.2	Rapports continus	106
2.3.3	Conclusion	125
3	Application à l'architecture Bi-Parallèle	127
3.1	Optimisation de la puissance	127
3.1.1	Calcul des Limitations	129
3.1.2	Calcul de la répartition optimale entre le moteur thermique et les machines électriques	136
3.2	Résultats de Simulations	142
3.3	Conclusion	148
4	Application à l'architecture Série	149
4.1	Optimisation du régime de la génératrice	151
4.2	Optimisation de la puissance électrique de la génératrice	152

4.3	Résultats de Simulations	161
4.4	Conclusion	167
5	Application au véhicule hybride équipé d'un Élévateur de Tension	169
5.1	Optimisation Analytique de la Tension	169
5.1.1	Véhicule Hybride Mono-Machine	169
5.1.2	Véhicule Hybride Bi-Machines	180
5.2	Étude de la sensibilité des solutions analytiques	192
5.3	Etude Comparative avec/sans Step-Up	196
5.4	Conclusion	197
6	Annexes	209
6.1	Optimisation de l'état du moteur thermique	209
6.2	Optimisation du régime du moteur thermique	210
6.2.1	Rapports Discrets	210
6.2.2	Rapports Continus	213
6.3	Optimisation de la répartition de puissance pour l'architecture bi-parallèle	219

Nomenclature

Organe	Symbole de la variable	Définition	Unité
Roues	v^r et v^d	vitesse réelle du véhicule et vitesse désirée	m.s^{-1}
	ω_r	vitesse à la roue	rpm
	T_r	couple à la roue	N.m
	P_r	puissance demandée à la roue	W
Moteur Thermique	ω_{th}	régime du moteur thermique	rpm
	T_{th}	couple du moteur thermique	N.m
	P_{th}	puissance mécanique du moteur thermique	W
	R_{th}	ratio entre ω_{th} et ω_r	—
Machine Électrique	Q	débit carburant	g.s^{-1}
	ω_e	régime de la machine électrique	rpm
	T_e	couple de la machine électrique	N.m
	P_m	puissance mécanique de la machine électrique	W
Génératrice	R_e	ratio entre ω_e et ω_r	—
	ω_{gen}	régime de la génératrice	rpm
	T_{gen}	couple de la génératrice	N.m
	P_{gen}	puissance électrique de la génératrice	W
Batterie	R_{gen}	ratio entre ω_{th} et ω_{gen}	—
	U_{bat}	tension à l'entrée du Step-Up	V
	P_{bat}	puissance électrique de la batterie	W
	i_{bat}	courant de la batterie	A
Step-Up	R_{bat}	résistance interne de la batterie	Ω
	U_e	tension à la sortie du Step-Up	V
	P_{elec}	puissance électrique à l'entrée du Step-Up	W
	P_e	puissance électrique à la sortie du Step-Up	W
	P_S	pertes dans le Step-Up	W

Introduction Générale

Contexte

L'augmentation continue de la consommation énergétique mondiale dédiée à la mobilité pose des enjeux environnementaux majeurs. Selon le rapport de 2015 de l'AIE (Agence Internationale de l'Énergie) [11], le secteur du transport représente 30% de la consommation énergétique mondiale. La source d'énergie utilisée par ce secteur est majoritairement du pétrole occupant une part de 75%. Ceci montre à quel point le transport est fortement dépendant d'une énergie non-renouvelable et sujette à l'épuisement. En plus de cette dépendance énergétique, la conversion de l'énergie chimique du carburant en énergie mécanique par les moteurs thermiques produit des émissions polluantes dans l'air (NO_x , CO , HC et les particules). Cette conséquence est un danger considérable pour l'équilibre environnemental mais aussi un danger de l'ordre de santé publique. Selon les estimations de l'OMS (Organisation Mondiale de la Santé)[10], la pollution de l'air aurait provoqué des maladies non transmissibles chez presque 30% de la population mondiale. C'est pourquoi, les gouvernements ont pris des mesures anti-pollution afin de réduire ces effets néfastes. En Europe, les normes Euro anti-pollution ont été mises en place afin de réglementer la production des polluants par les véhicules [42]. Les émissions de CO_2 sont également concernées par la réglementation imposée par l'Europe qui a comme objectif de réduire de -40% ces émissions entre 2007 et 2021 [75]. A Bruxelles, les voitures de plus de 20 ans qui ne respectent pas les normes Euro sont interdites à la circulation. Dernier exemple, la mobilité propre (électrique) est encouragée par les gouvernements sous la forme de prime à l'achat d'une voiture électrique. Par ailleurs, l'évolution vers la baisse du coût de la production des énergies renouvelables encourage fortement la transition énergétique de l'énergie fossile vers l'électricité propre. A titre d'exemple, depuis 2010, le coût des nouvelles centrales solaires photovoltaïques a baissé de 70%, celui de l'éolien de 25% et le coût des batteries de 40% (source : rapport 2017 de l'AIE [12]).

Du côté des constructeurs automobile, on considère que l'hybridation électrique des véhicules est une solution efficace pour respecter les normes anti-pollution de plus en plus strictes ainsi que pour réduire la forte dépendance à l'énergie fossile. Ce type de véhicule a été introduit sur le marché de l'automobile par Toyota en 1997 avec la première Prius. L'utilisation de l'électricité permet aux véhicules hybrides électriques de réduire leur consommation d'hydrocarbures ainsi que leurs émissions polluantes grâce à :

- la possibilité d'arrêter le moteur thermique et de se déplacer en tout électrique.
- la possibilité de récupérer de l'énergie cinétique pendant les phases de freinage.
- la possibilité d'optimiser l'utilisation de l'énergie entre le carburant et l'électricité.
- la possibilité de déplacer les points de fonctionnement du moteur thermique vers des zones à meilleur rendement.

Le premier point évoqué dans les avantages qu'offre l'hybridation électrique, à savoir, réduire la consommation énergétique du véhicule, constitue l'objectif général de cette thèse. Autrement

dit, on veut élaborer une optimisation énergétique permettant de réduire la consommation totale du véhicule. Cette optimisation est aussi appelée "*la gestion d'énergie*". Elle consiste à calculer les commandes optimales minimisant la consommation énergétique.

La résolution du problème d'optimisation énergétique du véhicule hybride électrique a été largement traitée dans la littérature par les différentes méthodes d'optimisation. Les approches de gestion d'énergie du véhicule hybride sont généralement classées en deux types : en-ligne ou hors-ligne. Les stratégies en-ligne sont conçues pour être embarquées dans le véhicule où le problème d'optimisation est résolu instantanément (en temps réel). Parmi les méthodes en-ligne les plus connues, on cite :

- les méthodes heuristiques [25, 58, 9]. Elles sont définies par des règles basées sur des connaissances énergétiques empiriques du véhicule. Exemple : en considérant que le moteur thermique est la principale source de pertes d'énergie, on choisit de maximiser son rendement dans n'importe quelle situation.
- l'ECMS (Equivalent Consumption Minimization Strategy) [50, 48, 15, 59, 60, 61, 64, 65]. Comme son nom l'indique, elle se base sur la minimisation de la consommation équivalente qui prend en compte les deux sources d'énergie en introduisant un facteur de pondération ajustable entre l'énergie thermique et l'énergie électrique. Ce facteur de pondération a un lien direct avec le facteur de Lagrange défini dans le Principe du Maximum de Pontryagin.
- la programmation dynamique stochastique [34, 30, 24, 45]. Elle consiste à calculer hors-ligne la commande optimale par programmation dynamique basée sur des probabilités, généralement embarquée sur véhicule sous forme de cartographies.
- le MPC (Model Predictive Control) [6, 31, 67, 69, 68, 77]. Son principe est de calculer la commande optimale sur un horizon futur glissant en se basant sur les informations fournies par le système de navigation.

Concernant les méthodes hors-ligne, elles sont appliquées sur un trajet bien défini, ainsi, elles ont toutes les informations nécessaires pour déterminer l'optimum global. En effet, elles se basent sur une parfaite connaissance du trajet ainsi que de l'ensemble des événements agissant sur le véhicule. Le rôle de ces stratégies est de déterminer l'optimum global qui servira de référence afin d'évaluer les performances de la solution embarquée. Les stratégies hors-ligne les plus connues sont la programmation dynamique et le Principe de Maximum de Pontryagin (PMP) qui sera présenté dans la section 1.3.2 puis utilisé pour résoudre notre problème d'optimisation. La programmation dynamique est basée sur le principe de Bellman [4] qui est le suivant : " Une suite de décisions est optimale si, quels que soit l'état et la décision initiale considérée sur la trajectoire qui lui est associée, la suite de décisions ultérieures est optimale vis-à-vis de l'état résultant de la première décision." Les principales étapes de la programmation dynamique sont : discrétiser les variables d'optimisation (états, commandes), diviser le problème d'optimisation en sous-problèmes et les résoudre itérativement de manière rétrograde en partant de l'instant final vers l'instant initial. Pour chaque sous-problème, le coût de transition ainsi que le coût restant sont minimisés. Le coût de transition est le coût de l'application de la commande sur un état à un instant donné. Le coût restant est celui de la trajectoire optimale afin d'atteindre l'état final à partir de l'état courant. Parmi les travaux réalisés dans la programmation dynamique pour la gestion d'énergie du véhicule hybride, on cite : [51, 13, 14, 46], et dans le PMP, on cite : [62, 32, 23, 76].

Dans cette thèse, nous nous intéressons tout particulièrement à l'aspect numérique des méthodes d'optimisation qu'elles soient en-ligne ou hors-ligne. La programmation dynamique est par construction une méthode purement numérique. En effet, elle se base sur la discrétisation des commandes et des états continus pour le calcul du critère d'optimisation. De même pour le PMP, il a également été utilisé numériquement [39]. L'optimisation numérique présente deux

principaux inconvénients : le coût en temps de calcul et en mémoire. En effet, si le nombre ou/et la taille des variables d'optimisation augmentent, le temps de calcul et la mémoire augmentent d'une manière exponentielle. Afin de remédier à ces deux problèmes, la communauté scientifique s'est intéressée récemment à l'optimisation convexe [8]. Cette méthode se base sur le calcul analytique et explicite de l'optimum en utilisant la modélisation convexe. Dans une approche convexe, le critère d'optimisation, en l'occurrence la consommation énergétique, est approximé par des modèles convexes. De nombreux travaux ont été réalisés dans cette voie pour la gestion d'énergie [1, 28, 20, 44, 33, 52, 27, 79, 78] et pour l'optimisation du dimensionnement [40, 79] du véhicule hybride électrique. L'optimisation analytique a été le plus souvent utilisée pour le calcul de la répartition optimale de couple (ou de puissance) qui est une variable continue, pour l'hybride parallèle [40, 44, 33, 52, 27, 79, 78] ainsi que pour l'hybride série [1, 20, 78]. En revanche, pour calculer les commandes optimales discrètes (état du moteur thermique, rapport de boîte, état de la machine électrique,...), elle est moins utilisée. A titre d'exemple, dans [40], l'état du moteur thermique a été décidé a priori en utilisant une méthode heuristique. L'optimisation de l'état du moteur thermique ainsi que le rapport de boîte a été effectuée numériquement en utilisant la programmation dynamique dans [44]. Néanmoins, dans [20, 52], l'état optimal du moteur thermique et celui de la machine électrique ont été déterminés analytiquement en utilisant le PMP.

Dans [1, 79, 78], les auteurs proposent une approche de comparaison exhaustive qui combine l'analytique et le numérique, cette méthode est appelée "SHM : Selective Hamiltonian Minimization". Dans cette thèse, nous proposons un calcul **analytique et direct** de la puissance optimale du moteur thermique pour les architectures parallèle, bi-parallèle et série ainsi que le régime optimal du moteur thermique pour la configuration parallèle.

Motivations

Les travaux de cette thèse s'inscrivent dans le cadre de la synthèse des lois de gestion d'énergie embarquées d'un véhicule hybride électrique. Étant une thèse CIFRE avec Renault, ces travaux ont été menés en concordance avec un projet interne Renault sur un véhicule hybride. Les verrous industriels de ce projet ont été l'objet et la source des problématiques de cette thèse. Les principales problématiques traitées durant les 3 années de thèse sont :

1. réduire le temps de calcul.
2. réduire l'espace mémoire occupé par la gestion d'énergie.
3. garantir la régularité des commandes.
4. exploiter le maximum du potentiel du système.
5. faciliter la compréhension et la mise au point des commandes pour l'implémentation sur véhicule.
6. introduire dans la gestion d'énergie un nouvel organe d'électronique de puissance : l'élevateur de tension.

Les objectifs 1 à 5 ont été posés après avoir rencontré les problèmes suivants :

- la méthode numérique basée sur la discrétisation des variables d'optimisation est très coûteuse en termes de temps de calcul et de mémoire [38].
- l'optimalité de la solution numérique dépend fortement de la finesse de la discrétisation [70, 74].
- l'interprétation et la compréhension de la solution numérique sont parfois très difficiles. Par exemple, si cette solution présente un comportement de pompage (changement de

valeur brusque et fréquent), l'identification des causes de ce phénomène n'est pas chose facile. C'est pourquoi, rendre la solution explicite permettra d'identifier en amont ce type de problème afin de l'éviter lors de l'implémentation. Ce phénomène peut être lié à la singularité de la solution. En effet, comme démontré dans [16, 17, 26], le contrôle optimal du véhicule hybride peut être singulier sous certaines conditions. De plus, rendre le contrôle explicite permettra de simplifier et de faciliter sa réalisation. En effet, dans la chaîne de production d'une loi de gestion d'énergie, de la conception à l'industrialisation, les ingénieurs qui s'occupent de son développement ne sont pas forcément chargés de sa mise au point. Pour cela, faciliter le transfert et la compréhension des informations entre les différents intervenants est un gain important.

Pour toutes ces raisons, cette thèse a été dirigée avec l'objectif de concevoir des stratégies analytiques (explicites) pour la gestion d'énergie du véhicule hybride. Pour cela, nous avons choisi d'utiliser l'optimisation convexe. Cette méthode est composée par deux étapes : la modélisation convexe puis le calcul analytique des commandes. La modélisation convexe est une étape fondamentale car, d'une part, un problème d'optimisation est dit convexe si et seulement si le critère à minimiser est une fonction convexe, les contraintes inégalités sont des fonctions convexes et les contraintes égalités sont des fonctions affines [8]. D'autre part, le calcul des commandes se repose entièrement sur les modèles convexes. Par ailleurs, cette modélisation permet de lisser les mesures expérimentales. C'est pourquoi, nous avons dédié une grande partie du chapitre 1 à la modélisation convexe et à sa validité.

L'objectif 6 a abouti à la principale contribution applicative de cette thèse. D'un point de vue industriel, l'élévateur de tension a été ajouté dans le but d'augmenter les performances du véhicule. En effet, le rôle de cet organe est d'élever la tension de la batterie ce qui augmentera la puissance mécanique maximale que peut produire la machine électrique en mode moteur ou absorber en mode générateur. De notre point de vue, nous nous sommes intéressés à étudier l'impact de cet organe sur la consommation énergétique. Pour cela, la tension d'alimentation a été ajoutée comme variable d'optimisation dans la gestion d'énergie. Cette démarche a été explorée par Toyota et publiée dans le brevet [71] pour un véhicule hybride contenant deux machines électriques. Dans ce brevet, les auteurs montrent que les pertes des machines électriques dépendent de la tension d'alimentation. En suite, ils proposent de calculer hors-ligne la tension optimale minimisant ces pertes, puis l'embarquer sous la forme d'une cartographie en fonction des couples et régimes des machines électriques. Le calcul de cette solution est basé sur une méthode heuristique. Les auteurs ont défini dans la cartographie deux zones, une zone où la tension n'est pas élevée et donc elle est égale à la tension de la batterie ; et une deuxième zone où la tension est élevée à un certain niveau qui correspond probablement à une tension maximale. La solution proposée par [71] peut ne pas être optimale dans certains cas car la discrétisation de la tension n'est pas assez fine. Ainsi, la minimisation de la consommation énergétique peut ne pas être réalisée. C'est pourquoi, nous proposons une méthode plus précise et en-ligne afin d'exploiter le maximum de chance de gain énergétique. Le chapitre 5 est dédié à l'optimisation de la tension pour minimiser la consommation énergétique.

Ce mémoire est composé de 5 chapitres :

1. Le chapitre 1 est consacré à la définition du véhicule hybride électrique, d'une manière générale, et en particulier, celle du véhicule étudié dans le cadre du projet Renault. Il contient aussi la modélisation énergétique convexe et non-convexe. A la fin de ce chapitre, le problème d'optimisation énergétique est posé, suivi par la présentation de la méthodologie analytique qui consiste en : une modélisation convexe des consommations énergétiques, le calcul des commandes optimales analytiquement et la validation des commandes analytiques sur un simulateur de véhicule.
2. Le chapitre 2 traite l'application de la méthodologie analytique sur l'architecture parallèle.

Les variables d'optimisation traitées dans ce chapitre sont : la répartition de puissance calculée en utilisant deux modèles différents de la machine électrique (affine et quadratique voir chapitre 1), la gestion de l'état du moteur thermique et l'optimisation du régime du moteur thermique pour une boîte de vitesses à rapports discrets puis continus. Les résultats de simulation permettant de valider les commandes analytiques seront également présentés.

3. Le chapitre 3 est dédié à l'architecture bi-parallèle. La variable d'optimisation de ce chapitre est la répartition de puissance entre le moteur thermique et les machines électriques. Dans un premier temps, nous allons montrer comment appliquer la méthodologie analytique sur cette configuration. A la fin de ce chapitre, les résultats de validation des commandes analytiques seront présentés.
4. Le chapitre 4 montre comment appliquer la méthodologie analytique sur l'architecture série ainsi que les résultats de simulation. Les variables d'optimisation de ce chapitre sont la puissance électrique produite par la génératrice ainsi que son régime.
5. Le chapitre 5 est dédié à l'optimisation énergétique d'un véhicule hybride équipé par un élévateur de tension. La variable d'optimisation dans ce chapitre est la tension. Nous étudierons en particulier dans le dernier chapitre, l'impact sur la consommation énergétique (gain ou perte) causé par l'élevateur de tension. Cette étude est réalisée en comparant le véhicule équipé d'un élévateur de tension à des véhicules similaires ne contenant pas d'élevateur de tension.

Liste des Publications

Les travaux de cette thèse ont abouti aux publications suivantes :

Articles

1. Souad Hadj-Said, Guillaume Colin, Ahmed Ketfi-Cherif and Yann Chamaillard. Convex Optimization for Energy Management of Parallel Hybrid Vehicles. *The 8th IFAC International Symposium on Advances in Automotive Control, 19-23 June, 2016. Norrköping, Suède.*
2. Souad Hadj-Said, Guillaume Colin, Ahmed Ketfi-Cherif and Yann Chamaillard. Analytical Solution for Energy Management of Parallel Hybrid Vehicles. *The 20th World Congress of the International Federation of Automatic Control, 9-14 July 2017. Toulouse, France.*
3. Souad Hadj-Said, Guillaume Colin, Ahmed Ketfi-Cherif and Yann Chamaillard. Energy Management of a Parallel Hybrid Electric Vehicle Equipped with a Voltage Booster. *The 5th E-COSM, Engine and Powertrain Control, Simulation and Modeling. 20-22 September, 2018. Changchun, Chine.*

Brevets

1. Souad Hadj-Said, Ahmed Ketfi-Cherif et Guillaume Colin. Procédé de calcul d'une consigne de pilotage d'un groupe motopropulseur hybride de véhicule automobile. Demande de brevet n°16 – 0708. Dépôt en mars 2017, publication et extension à l'international en septembre 2018.
2. Souad Hadj-Said, Ahmed Ketfi-Cherif et Guillaume Colin. Procédé d'optimisation de la consommation d'un véhicule hybride Parallèle équipé d'un élévateur de tension». Demande de brevet n°17 – 5369. Dépôt en décembre 2017.

3. Souad Hadj-Said, Ahmed Ketfi-Cherif et Guillaume Colin. Procédé d'optimisation de la consommation d'un véhicule hybride Série-Parallèle équipé d'un élévateur de tension. Demande de brevet n°17 – 5686. Dépôt en cours.
4. Souad Hadj-Said, Ahmed Ketfi-Cherif et Guillaume Colin. Procédé d'optimisation de la consommation d'un véhicule Hybride Série équipé d'un élévateur de tension. Demande de brevet n°18 – 5135. Dépôt en cours.

Chapitre 1

Le Véhicule Hybride Électrique : sa modélisation et sa problématique de gestion d'énergie

Ce chapitre est dédié au véhicule hybride électrique (Hybrid Electric Vehicle : HEV) : de sa définition à sa supervision énergétique. Dans la première section, nous citerons d'abord les différents types et architectures des véhicules hybrides électriques, puis, l'architecture du véhicule étudié dans cette thèse sera présentée. La section 1.2 traite la modélisation énergétique et dynamique du véhicule ainsi que celles de ses composants. Concernant la modélisation énergétique, chaque organe sera représenté par un modèle de référence ainsi que par un modèle convexe. Les modèles de référence sont utilisés, d'une part, pour l'identification des modèles convexes. D'autre part, ils sont utilisés pour la validation des commandes analytiques. Quant aux modèles convexes, ils serviront pour la synthèse des commandes analytiques. Finalement, la section 1.3 présente le problème d'optimisation et la méthode choisie pour le résoudre.

1.1 Définition

Le véhicule hybride, au sens large, est un véhicule qui utilise au moins deux sources d'énergies pour se mouvoir dont une est réversible. En général, l'une des sources d'énergie est l'énergie fossile. Cette dernière est combinée avec une source d'énergie réversible : électrique, pneumatique, hydraulique ou mécanique. Les travaux de cette thèse ont été menés sur le véhicule thermique - électrique qui utilise deux sources d'énergie : l'énergie thermique provenant du carburant (essence, diesel ou gaz naturel), et l'énergie électrique provenant d'un (ou des) élément(s) de stockage (batterie, super-condensateur). Il est composé par : un moteur thermique ainsi qu'une (ou des) machine(s) électrique(s) alimentée(s) par une batterie. Le principal avantage du véhicule hybride électrique par rapport au véhicule conventionnel est son potentiel à réduire sa consommation en énergie ainsi que ses émissions polluantes. En effet, l'énergie électrique offre au véhicule :

- la possibilité de se déplacer en tout électrique sans aucune émission polluante,
- la récupération d'une partie de l'énergie cinétique au freinage,
- la réduction de la cylindrée du moteur thermique tout en conservant le même niveau de performances que celui d'un véhicule conventionnel de puissance équivalente.
- placement des points de fonctionnement des organes dans les zones de meilleur rendement.

1.1.1 Types

Les véhicules hybrides électriques sont classés suivant le nombre, le positionnement et/ou la taille de leurs organes. Il existe deux grandes familles de véhicules hybrides électriques : les rechargeables et les non-rechargeables. Les deux types de véhicules sont composés par les mêmes organes cités ci-dessus. Par ailleurs, comme le montre la figure 1.1, l'hybride rechargeable comporte de plus une prise électrique. Cette prise permet de recharger la batterie à partir d'une source d'électricité extérieure au véhicule.

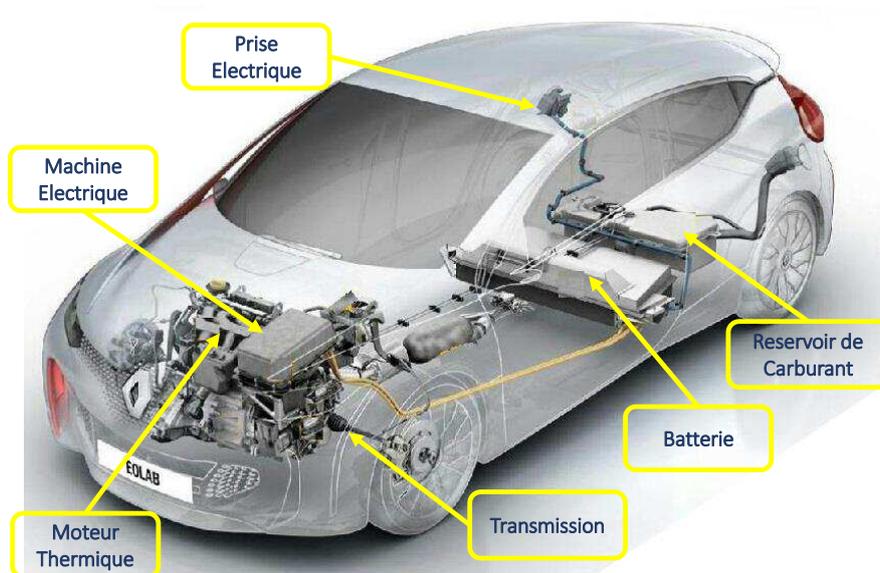


FIGURE 1.1 – Véhicule Hybride Électrique Rechargeable

Les véhicules hybrides peuvent être également classés selon le niveau d'hybridation. Cet indicateur est défini par la taille de la motorisation électrique ainsi que par la capacité de la batterie. En effet, selon le dimensionnement de ces dernières, la capacité du véhicule à assurer la traction purement électrique varie. Les différents types de véhicules hybrides en fonction de leur niveau d'hybridation sont :

- les Micro-Hybrides : ils sont équipés d'un alterno-démarrreur (Stop&Start) qui coupe le moteur lors d'un arrêt et le réactive au démarrage. Ce système est intéressant en ville et présente un gain de 1 à 2% en consommation de carburant par rapport à un véhicule thermique conventionnel.
- Les Mild-Hybrides : ils sont également équipés d'un système Stop&Start mais aussi de systèmes d'assistance électrique et de récupération d'énergie au freinage. L'économie en consommation de carburant, comparé au véhicule conventionnel, peut atteindre les 10%.
- Les Full-Hybrides : ils disposent d'une motorisation électrique plus importante et plus puissante. Ceci permet au véhicule de rouler en tout électrique. Le gain en consommation de carburant est généralement supérieur à 10% (dépend du cycle de roulage).

Dans cette thèse, le véhicule étudié est un Full-Hybride non-rechargeable. Néanmoins, les travaux réalisés sont également applicables sur les Full-Hybrides rechargeables.

1.1.2 Architectures

L'architecture du véhicule hybride est généralement définie par le positionnement de ses composants. Nous étudierons, dans cette thèse, les architectures suivantes :

- L'architecture Série : dans cette configuration (figure 1.2), le véhicule est composé par un moteur thermique et deux machines électriques : une qui fonctionne en tant que génératrice et une autre qui assure entièrement la traction du véhicule en phase d'accélération ou le freinage récupératif en phase de décélération. Le moteur thermique entraîne la génératrice qui recharge la batterie et/ou alimente en électricité la machine de traction. Le moteur thermique n'est pas lié mécaniquement aux roues dans ce cas. D'un point de vue gestion d'énergie, cette architecture permet la mise en place d'une stratégie simple : placement du moteur thermique sur son meilleur rendement, et ce quelque soit le type de roulage. En revanche, l'énergie provenant du moteur thermique traverse une cascade de rendement en passant par : la génératrice puis la batterie pour arriver en finalité à la machine de traction. Ceci engendre la dégradation du rendement énergétique global du Groupe Moto-Propulseur (GMP).

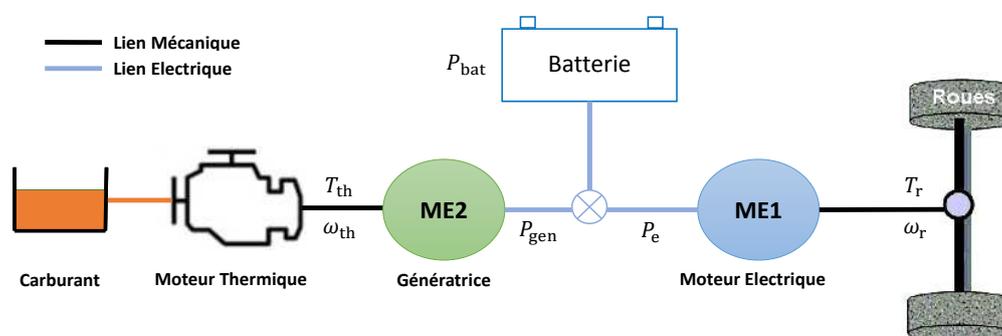


FIGURE 1.2 – Architecture Série

- L'architecture Parallèle : dans cette configuration (figure 1.3), le véhicule est composé par un moteur thermique et une seule machine électrique. Le moteur thermique ainsi que la machine électrique sont liés mécaniquement aux roues. La puissance mécanique aux roues est égale à la somme des puissances mécaniques fournies par le moteur thermique et la machine électrique. Cette architecture offre un degré de liberté en plus pour la gestion de son énergie comparée à l'architecture série. En effet, il existe plusieurs combinaisons d'utilisation du moteur thermique et de la machine électrique afin de réaliser la volonté conducteur. L'exploitation de ce degré de liberté augmente la complexité des algorithmes de gestion d'énergie.
- L'architecture Série-Parallèle : cette configuration est la combinaison des deux architectures présentées ci-dessus. Le véhicule est composé dans ce cas par un moteur thermique et deux machines électriques. Cette architecture permet de fonctionner en mode série (embrayage ouvert) ou en mode parallèle (embrayage fermé) selon le type de roulage (figure 1.4). En général, le mode le plus utilisé de cette configuration est le mode parallèle. Dans ce mode, la puissance mécanique aux roues est égale à la somme des puissances mécaniques fournies par le moteur thermique et les machines électriques. Dans cette thèse, le mode série-parallèle correspond à un mode parallèle bi-machines ; appelé aussi bi-parallèle. Avec cette architecture, les possibilités de maximiser le rendement énergétique du GMP selon le type de roulage sont multiples. Cependant, sa gestion d'énergie peut s'avérer complexe.

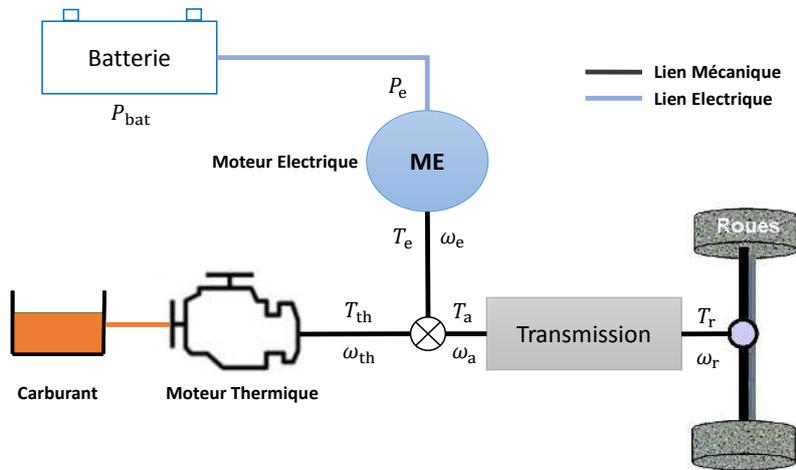


FIGURE 1.3 – Architecture Parallèle

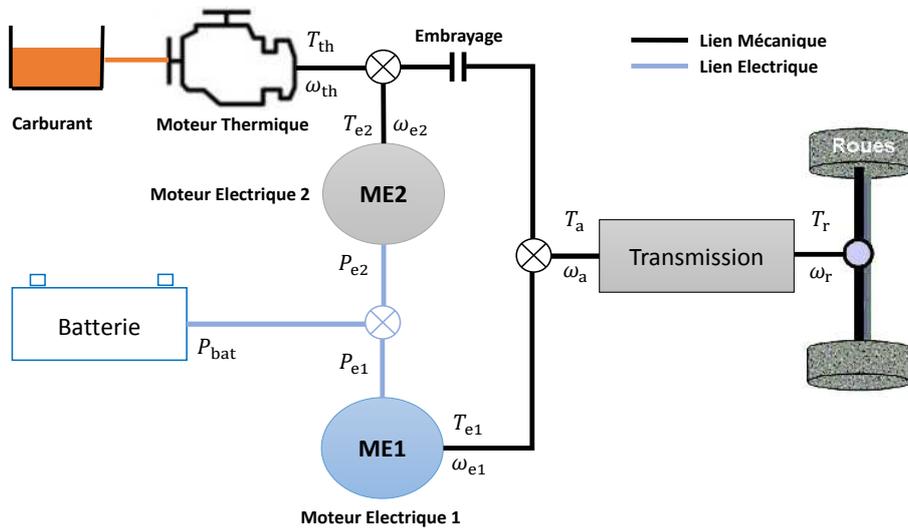


FIGURE 1.4 – Architecture Série-Parallèle

1.1.3 Présentation du GMP Étudié

Le GMP hybride étudié (figure 1.5) dans le cadre du projet interne Renault comporte une particularité qui réside dans ses différents modes de fonctionnement. En effet, il comporte un mode parallèle (embrayage 1 ouvert et embrayage 2 fermé), un mode série (embrayage 1 fermé et embrayage 2 ouvert), et un mode bi-parallèle (embrayage 1 fermé et embrayage 2 fermé). Le lecteur peut trouver plus de détails sur cette architecture dans [72, 39, 22].

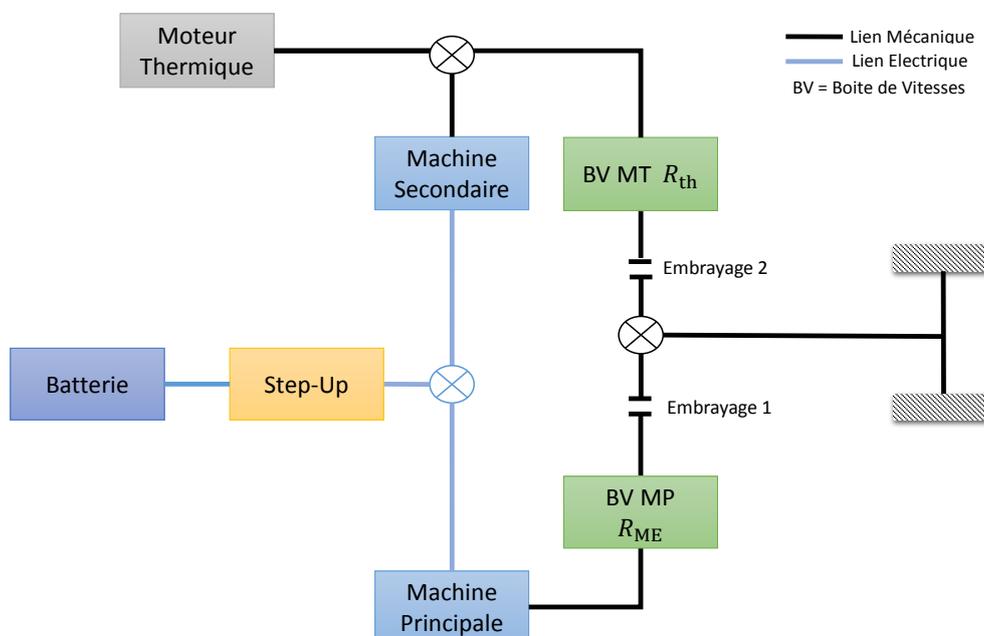


FIGURE 1.5 – Véhicule Étudié

Le véhicule de la figure 1.5 est composé par :

- un moteur thermique essence (MT) lié mécaniquement aux roues via sa boîte de vitesses à 3 rapports discrets ($R_{th1}, R_{th2}, R_{th3}$).
- la machine principale (MP) liée mécaniquement aux roues via sa boîte de vitesses à 2 rapports discrets (R_{e1}, R_{e2}).
- la machine secondaire (MS) connectée mécaniquement au moteur thermique via un réducteur fixe (R_{gen}).
- deux embrayages qui permettent la sélection du mode désiré.
- un convertisseur DC/DC élévateur de tension (Step-Up) qui a pour rôle d'élever la tension de la batterie afin d'augmenter les performances des machines.
- la batterie qui est connectée à la MP et à la MS via des convertisseurs d'électronique de puissance dont le Step-Up.

Les modes cinématiques possibles sont (figure 1.6) :

- (1) Les modes électriques purs (EV1 et EV2) et hybrides série (E-Drive1 et E-Drive2) : la machine principale assure seule la traction du véhicule. Quant au moteur thermique : il est soit éteint en mode EV ; soit il alimente la machine secondaire (génératrice) en mode série.

		Embrayage 2 Ouvert	Embrayage 2 Fermé		
		0	R_{th1}	R_{th2}	R_{th3}
Embrayage 1 Ouvert	0	Neutre	HYB1	HYB2	HYB3
	Embrayage 1 Fermé	R_{e1}	EV1/E-drive1	HYB11	HYB21
R_{e2}		EV2/E-drive2	HYB12	HYB22	HYB32

FIGURE 1.6 – Modes Cinématiques Possibles

- (2) Les modes hybrides parallèle (HYB1, HYB2 et HYB3) : la machine principale est déconnectée. Le moteur thermique et la machine secondaire sont liés mécaniquement aux roues et assurent la traction du véhicule.
- (3) Les modes hybrides bi-parallèle (HYB11, HYB21, HYB31, HYB12, HYB22 et HYB32) : le moteur thermique ainsi que les machines électriques sont tous liés mécaniquement aux roues.

1.2 Modélisation et Hypothèses

1.2.1 Modélisation Énergétique

La modélisation énergétique (appelée aussi quasi-statique) se base sur les modèles énergétiques des organes. Ces modèles sont le plus souvent sous la forme de cartographies de mesures expérimentales de la consommation énergétique (appelés ici modèles de référence). Dans cette thèse, afin de synthétiser des commandes optimales analytiques, ces mesures ont été représentées par des modèles analytiques et convexes. Dans ce type de modélisation, les dynamiques transitoires des organes sont négligées, il est supposé alors que les commandes sont réalisées instantanément. De plus, le conducteur n'est pas modélisé, il est représenté par un profil de vitesse de référence.

On définit alors l'optimisation quasi-statistique, illustrée par la figure 1.7, qui se base uniquement sur les modèles énergétiques. Cette approche sera utilisée dans le chapitre 2 sections 2.2 et 2.3.

Profil de Vitesse

Le profil de vitesse ou le cycle de vitesse est une référence de roulage qui fournit une vitesse consigne et une pente en fonction du temps. Ce roulage doit être reproduit par le véhicule lors des essais afin de mesurer sa consommation énergétique ainsi que ses émissions polluantes. En Europe, les cycles de vitesse les plus connus sont : NEDC, WLTC et les ARTEMIS urbain, routier et autoroutier représentés par la figure 1.8. Le cycle NEDC (New European Driving Cycle) comporte un roulage urbain (de 0 à 800 s); et un roulage extra-urbain où la vitesse atteint les 120 km/h durant les 400 dernières secondes. Cependant, il est souvent considéré pas suffisamment représentatif de la conduite réelle. Les ARTEMIS (Assessment and Reliability

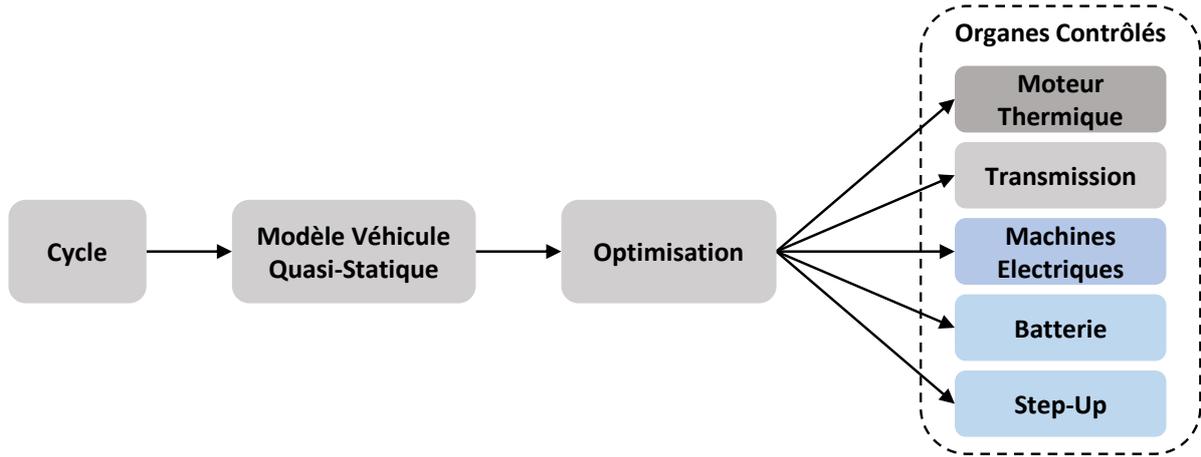


FIGURE 1.7 – Modélisation et Optimisation Énergétiques Quasi-Statiques

of Transport Emission Models and Inventory Systems) ont été conçus à partir d’une base de données de roulages réels en Europe [2] ; et sont classés par type de roulage. Finalement, le cycle le plus récent est le WLTC (Worldwide harmonized Light vehicles Test Cycles) qui contient tous les types de roulage. Dans cette thèse, les simulations seront réalisées sur les cycles ARTEMIS et WLTC.

Véhicule

Le modèle longitudinal du véhicule permet de relier la vitesse instantanée du véhicule $v(t)[m.s^{-1}]$ aux forces qu’il subit au même instant. Le véhicule est soumis au principe fondamental de la dynamique, on a alors :

$$F_{\text{trac}}(t) - F_{\text{aero}}(t) - F_f(t) - F_g(t) = m_{\text{vec}}^{\text{tot}} \dot{v}(t) [N] \quad (1.1)$$

- F_{trac} est la force motrice,
- F_{aero} est la traînée aérodynamique donnée par :

$$F_{\text{aero}}(t) = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S \cdot C_x \cdot v^2(t) \quad (1.2)$$

où, $\rho[kg.m^{-3}]$ est la masse volumique de l’air, $S[m^2]$ est la surface frontale du véhicule et C_x est le coefficient de traînée aérodynamique du véhicule,

- F_f sont les frottements des trains roulants ainsi que des pneumatiques sur la route.
- $F_g(t) = m_{\text{vec}} g \sin(\theta_{\text{pente}})$ où g est l’accélération de la pesanteur, θ_{pente} est l’angle de la pente.
- $m_{\text{vec}}[kg]$ est la masse du véhicule et $m_{\text{vec}}^{\text{tot}}[kg]$ est la masse totale qui comprend la masse du véhicule ainsi que les inerties des organes en rotation (θ_{th} et θ_{ME}). Alors, elle est donnée par :

$$m_{\text{vec}}^{\text{tot}} = m_{\text{vec}} + \frac{\theta_{\text{th}} R_{\text{th}}^2 + \theta_{\text{ME}} R_e^2}{R_r^2}$$

Où, $R_r[m]$ est le rayon des roues. R_{th} et R_e sont les ratios entre la vitesse des roues et la vitesse des organes en rotation.

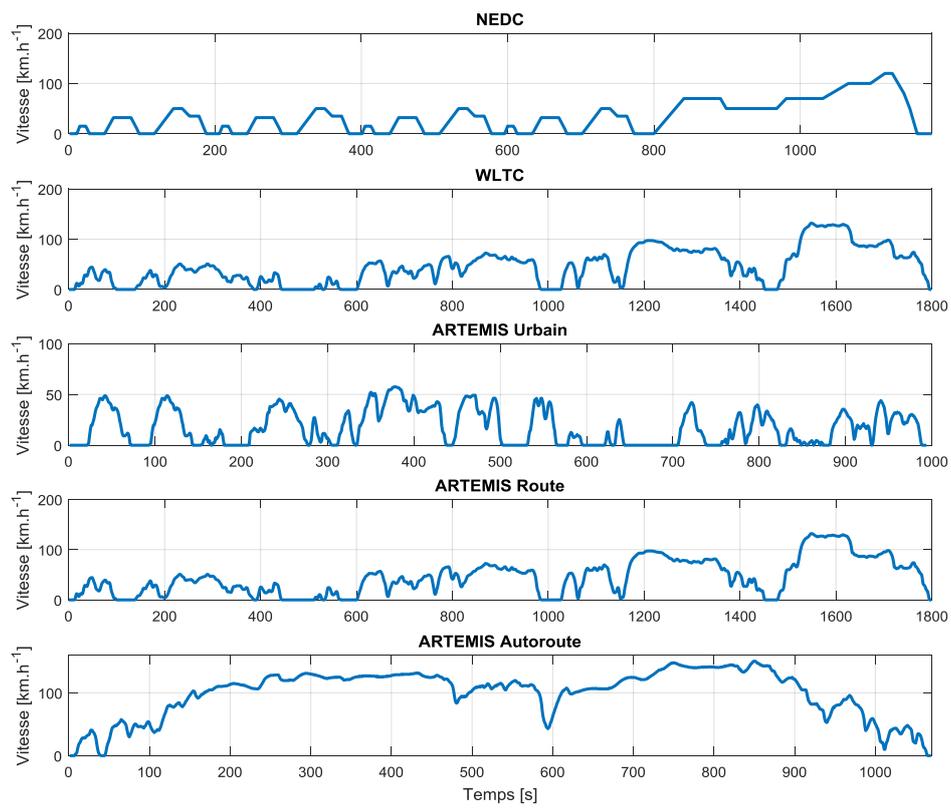


FIGURE 1.8 – Profil de vitesse des cycles NEDC, WLTC, ARTEMIS urbain, routier et autoroutier

Finalement, le couple aux roues, la vitesse de rotation des roues ainsi que la puissance aux roues sont donnés par :

$$T_r(t) = F_{\text{trac}}(t) \cdot R_r [Nm] \quad (1.3)$$

$$\omega_r(t) = \frac{v(t)}{R_r} [rad.s^{-1}] \quad (1.4)$$

$$P_r(t) = T_r(t) \omega_r(t) [W] \quad (1.5)$$

Transmission

La transmission entre les roues et l'arbre est donnée par :

$$\omega_a(t) = \omega_r(t) R_{\text{boite}} \quad (1.6)$$

$$T_a(t) = \begin{cases} \frac{T_r(t)}{\eta_{\text{Boite}} R_{\text{boite}}} & \text{si } T_r(t) \geq 0 \\ \frac{T_r(t) \eta_{\text{Boite}}}{R_{\text{boite}}} & \text{si } T_r(t) \leq 0 \end{cases} \quad (1.7)$$

Où, T_a , ω_a sont le couple et la vitesse l'arbre. η_{Boite} est le rendement de la transmission.

En considérant les ratios R_{th} et R_e entre la vitesse des roues et les vitesses du MT et de la MP, alors on a :

$$\omega_{\text{th}}(t) = \omega_r(t) R_{\text{th}} \quad (1.8)$$

$$\omega_e(t) = \omega_r(t) R_e \quad (1.9)$$

Moteur Thermique

Modèle de Référence Le moteur thermique est modélisé par sa consommation de carburant nécessaire pour produire la puissance mécanique P_{th} . Cette consommation est exprimée par le débit carburant Q . Son modèle de référence est sous la forme d'une cartographie (figure 1.9) de mesures expérimentales du débit carburant correspondant à un certain nombre de points de fonctionnement (régime ω_{th} , couple T_{th}). Le modèle de référence (figure 1.9) est donné par :

$$Q(t) = \dot{m}_{\text{fuel}}(T_{\text{th}}(t), \omega_{\text{th}}(t)) \quad (1.10)$$

Où, m_{fuel} est la masse du carburant. La puissance mécanique produite par le moteur thermique est donnée par : $P_{\text{th}} = T_{\text{th}} \omega_{\text{th}}$. Elle est bornée en fonction du régime ω_{th} (figure 1.10), comme suit :

$$\underline{P}_{\text{th}}(\omega_{\text{th}}(t)) \leq P_{\text{th}}(t) \leq \overline{P}_{\text{th}}(\omega_{\text{th}}(t)) \quad (1.11)$$

Modèle Convexe Dans la littérature, il existe deux modèles analytiques pour définir la consommation des moteurs thermiques en fonction de leur couple :

- Le modèle quadratique, utilisé aussi bien pour les moteurs Diesel que pour les moteurs essence [28, 20, 79, 67, 68, 78],
- Le modèle affine, souvent utilisé pour les moteurs Essence [33, 78].

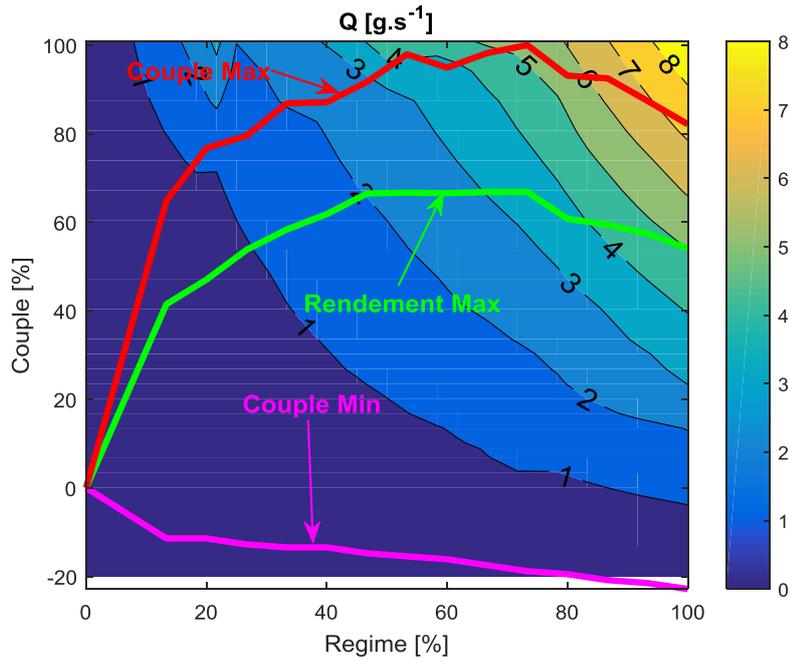


FIGURE 1.9 – Cartographie de consommation en débit carburant \dot{m}_{fuel} en fonction du régime ω_{th} et du couple T_{th} du moteur thermique (les données ont été normalisées pour des raisons de confidentialité). La courbe verte correspond à la zone où le rendement du moteur est maximum. Les courbes rouge et rose correspondent aux couples maximal et minimal du MT respectivement.

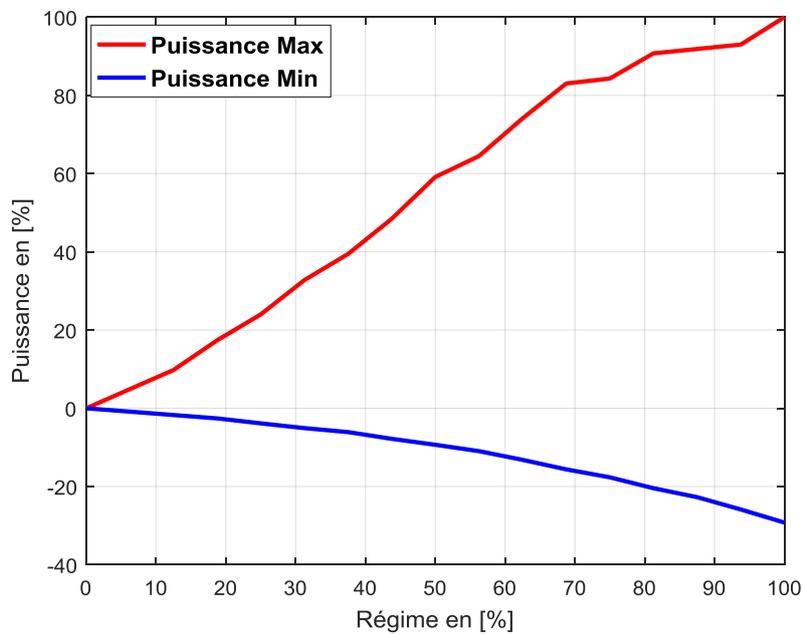


FIGURE 1.10 – Limitations de la puissance P_{th} en fonction du régime. Les courbes rouge et bleue correspondent aux puissances maximale et minimale respectivement.

Le modèle convexe du débit carburant Q utilisé dans cette étude est une fonction de P_{th} affine par morceaux. Cette fonction est composée par deux morceaux identifiés à partir des données expérimentales. Le premier morceau est inspiré des droites de Willans qui modélisent la puissance mécanique en fonction du débit carburant [56].

Le modèle convexe du débit carburant représenté graphiquement dans la figure 1.11, est donné par :

$$Q(P_{th}, \omega_{th}) = \begin{cases} a_1 P_{th} + Q_0(\omega_{th}) & \text{si } \underline{P}_{th}(\omega_{th}) \leq P_{th} \leq P_{lim}(\omega_{th}) \\ a_2 (P_{th} - P_{lim}(\omega_{th})) + Q_{lim}(\omega_{th}) & \text{si } P_{lim}(\omega_{th}) \leq P_{th} \leq \overline{P}_{th}(\omega_{th}) \end{cases} \quad (1.12)$$

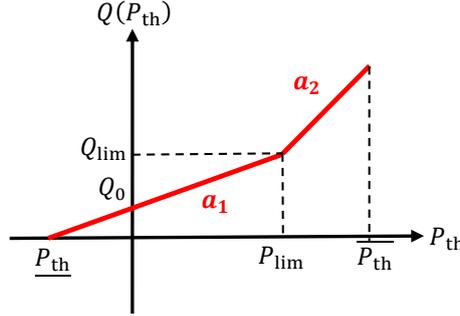


FIGURE 1.11 – Représentation graphique du modèle convexe du débit carburant Q en fonction de la puissance P_{th}

Où, Q_{lim} est égal à :

$$Q_{lim} = a_1 P_{lim} + Q_0 \quad (1.13)$$

Q_0 correspond à la consommation au ralenti qui dépend du régime ω_{th} . Il est modélisé comme suit :

$$Q_0(\omega_{th}) = q_2 \omega_{th}^2 + q_1 \omega_{th} + q_0 \quad (1.14)$$

P_{lim} correspond à la puissance où le rendement du moteur thermique est maximum (produit de la courbe verte dans la figure 1.9 et le régime ω_{th}). Elle est modélisée en fonction du régime ω_{th} comme suit :

$$P_{lim}(\omega_{th}) = p_1 \omega_{th} + p_0 \quad (1.15)$$

La figure 1.12 montre que le modèle analytique de Q reproduit correctement les mesures expérimentales. En effet, l'erreur absolue de la figure 1.13 est faible par rapport aux mesures expérimentales de la figure 1.9. De plus, nous avons calculé la RMSE (Root Mean Square Error) sur toute la plage de régime du moteur thermique. Cette dernière est inférieure à 5%. Les modèles (1.14) et (1.15) de $Q_0(\omega_{th})$ et $P_{lim}(\omega_{th})$ ont également été validés comme le montre la figure 1.14.

A partir de ces résultats d'identification, on peut émettre les hypothèses suivantes :

Hypothèse 1 $0 < a_1 < a_2$ comme le montre la figure 1.15,

Hypothèse 2 a_1 et a_2 sont quasiment constants en fonction du régime ω_{th} . En effet, d'après la figure 1.15, la variance de a_1 est inférieure à 5% et celle de a_2 est inférieure à 10%. Dans la suite, le calcul est réalisé avec les moyennes de a_1 et a_2 .

Hypothèse 3 D'après la figure 1.14, Q_0 et P_{lim} sont strictement croissants en fonction du régime ω_{th} . On en déduit que $q_2 > 0$, $q_1 > 0$ et $p_1 > 0$.

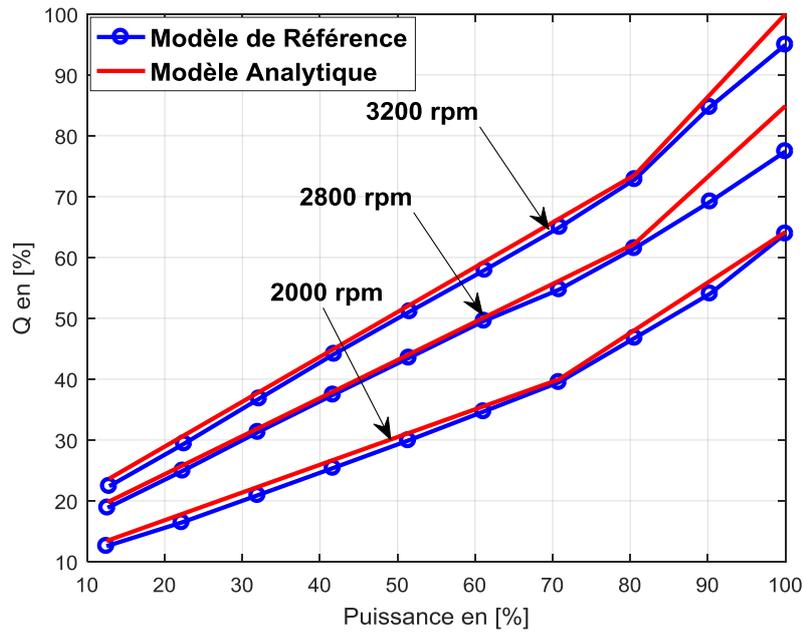


FIGURE 1.12 – Validation du modèle analytique de Q

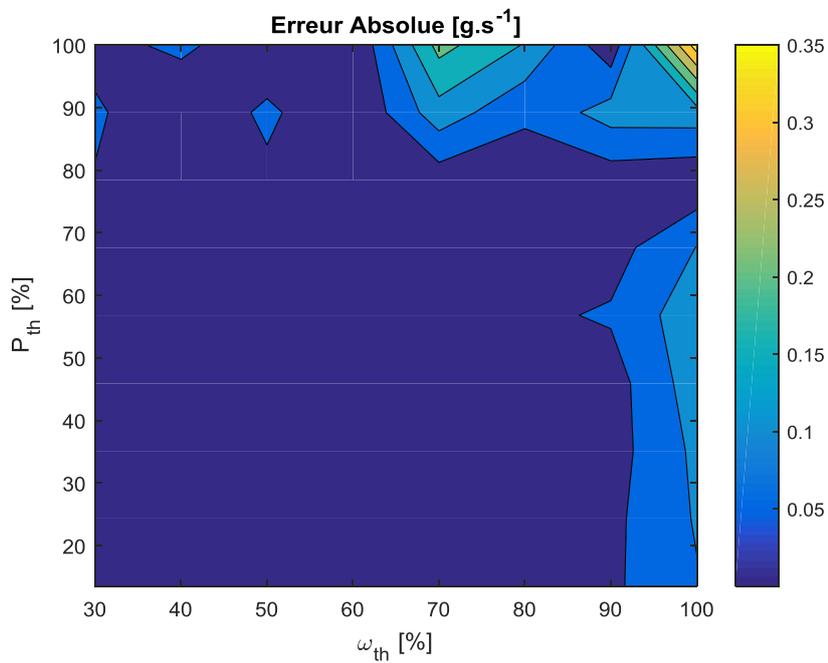


FIGURE 1.13 – Erreur Absolue de la modélisation du débit carburant $Q[g \cdot s^{-1}]$ sur tout le domaine (régime, couple) du moteur thermique

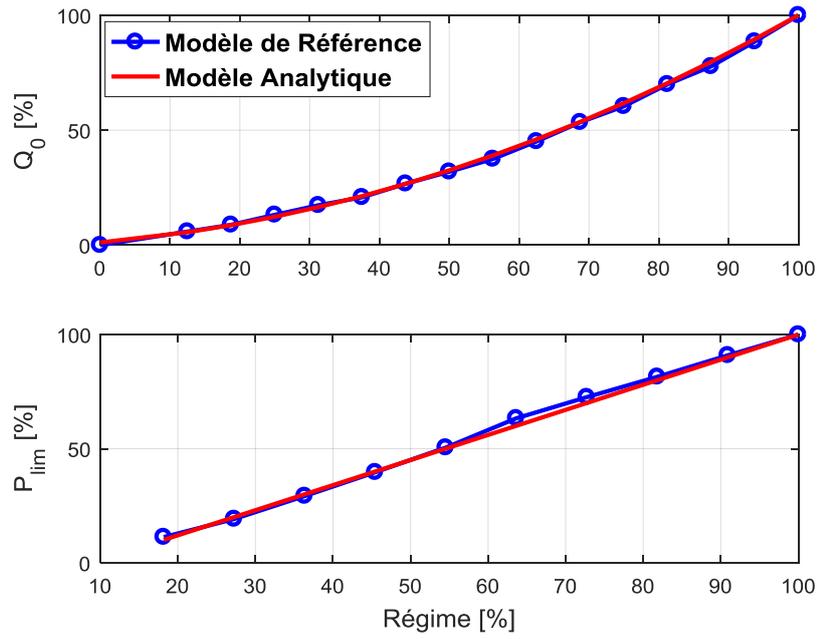


FIGURE 1.14 – Validation du modèle analytique de Q_0 1.14 (haut) et celui de P_{lim} 1.15 (bas) en fonction du régime ω_{th}

Hypothèse 4 L'intersection du deuxième morceau de Q avec l'axe des ordonnées est négative pour toute la plage de régime ω_{th} , comme le montre la figure 1.15 ($Q_{\text{lim}}(\omega_{\text{th}}) - a_2 P_{\text{lim}}(\omega_{\text{th}}) < 0$ ou $a_2 P_{\text{lim}}(\omega_{\text{th}}) - Q_{\text{lim}}(\omega_{\text{th}}) < 0$). On en déduit que : $a_2 > \frac{\frac{\partial Q_{\text{lim}}}{\partial \omega_{\text{th}}}}{\frac{\partial P_{\text{lim}}}{\partial \omega_{\text{th}}}}$.

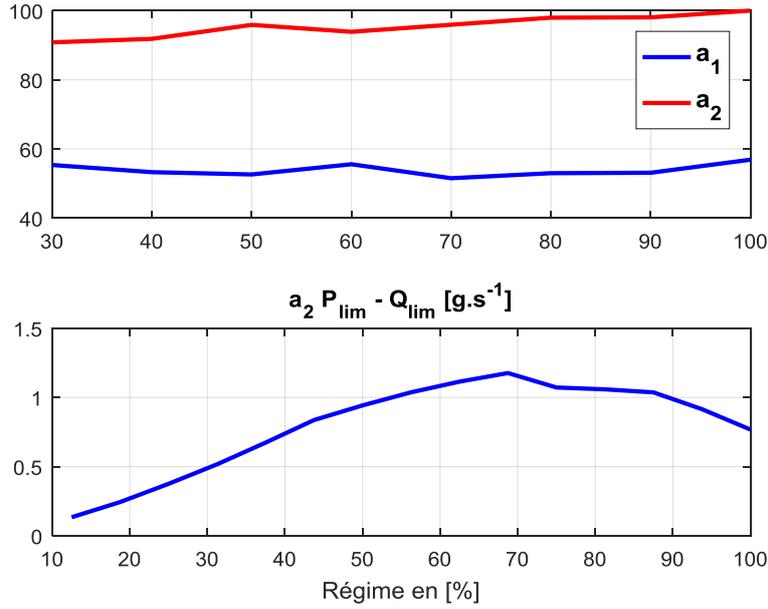


FIGURE 1.15 – Variation des coefficients a_1 [%] et a_2 [%] (haut) et de $\{a_2 P_{lim} - Q_{lim}\}$ (bas) en fonction du régime (ω_{th})

Machines Électriques

Modèle de Référence Le modèle de la machine électrique est représenté par sa puissance électrique P_e qui inclut sa puissance mécanique P_m ainsi que ses pertes. Les pertes de la machine électrique sont des mesures expérimentales sous la forme de cartographies en fonction d'un certain nombre de points de fonctionnements (régime ω_e , couple T_e , tension U_e) (figure 1.16). Le modèle de référence de la puissance électrique P_e est donné par :

$$P_e(t) = P_m(t) + Pertes(T_e(t), \omega_e(t), U_e(t)) \quad (1.16)$$

Où, T_e , ω_e et U_e sont respectivement le couple, le régime et la tension d'alimentation de la machine électrique. Quant à la puissance mécanique P_m , elle est donnée par : $P_m = T_e \omega_e$ et est limitée en fonction du régime ω_e et de la tension U_e comme suit (figures 1.17) :

$$\underline{P}_e(\omega_e(t), U_e(t)) \leq P_m(t) \leq \overline{P}_e(\omega_e(t), U_e(t)) \quad (1.17)$$

Modèle Convexe Les pertes de les machines électriques sont généralement modélisés par un polynôme quadratique en fonction du couple et du régime [28, 20, 33, 79]. Concernant la dépendance des pertes par rapport à la tension, en se basant sur les mesures expérimentales, on peut constater qu'elles évoluent en fonction la tension en quadratique. La puissance électrique P_e (1.16) peut être modélisée comme un polynôme du second degré en fonction de T_e , ω_e et U_e :

$$P_e(T_e, \omega_e, U_e) = \begin{cases} b_2^-(\omega_e, U_e)T_e^2 + b_1^-(\omega_e, U_e)T_e + b_0(\omega_e, U_e) & \text{si } \underline{T}_e(\omega_e, U_e) \leq T_e \leq 0 \\ b_2^+(\omega_e, U_e)T_e^2 + b_1^+(\omega_e, U_e)T_e + b_0(\omega_e, U_e) & \text{si } 0 \leq T_e \leq \overline{T}_e(\omega_e, U_e) \end{cases} \quad (1.18)$$

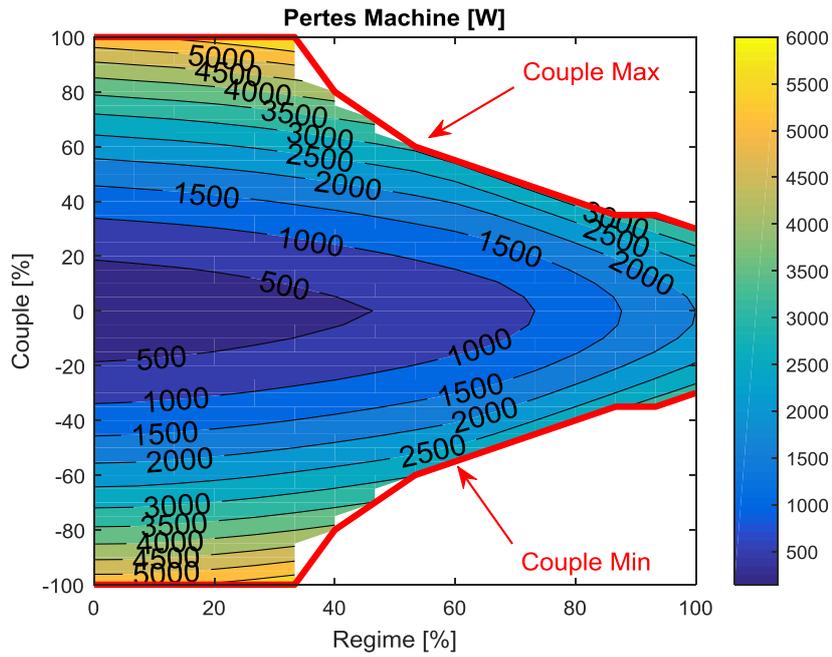


FIGURE 1.16 – Exemple de cartographie des pertes à tension constante en fonction du couple et du régime de la machine électrique (les données ont été normalisées pour des raisons de confidentialité)

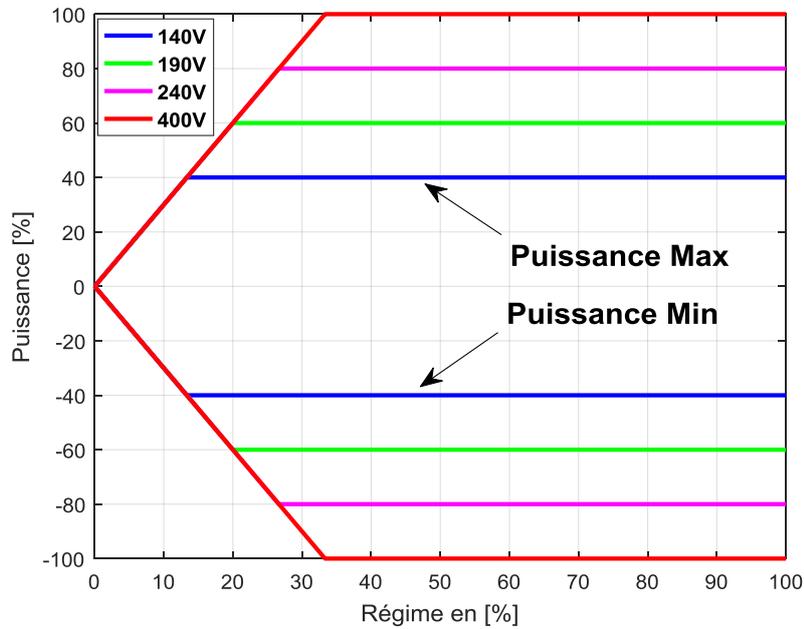


FIGURE 1.17 – Limitations de la puissance P_m en fonction du régime et de la tension

Où, les paramètres $b_2^\pm(\omega_e, U_e)$, $b_1^\pm(\omega_e, U_e)$ et $b_0(\omega_e, U_e)$ sont modélisés comme des polynômes du second degré :

$$b_2^\pm(\omega_e, U_e) = \sum_{n=0}^2 \sum_{m=0}^2 \alpha_{nm}^\pm U_e^n \omega_e^m \quad (1.19)$$

$$b_1^\pm(\omega_e, U_e) = \sum_{n=0}^2 \sum_{m=0}^2 \beta_{nm}^\pm U_e^n \omega_e^m \quad (1.20)$$

$$b_0(\omega_e, U_e) = \sum_{n=0}^2 \sum_{m=0}^2 \gamma_{nm} U_e^n \omega_e^m \quad (1.21)$$

Afin de valider le modèle (1.18), la moyenne par rapport à la tension de l'erreur absolue entre les mesures (1.16) et le modèle analytique (1.18) a été calculée pour les deux machines. Les figures 1.18 et 1.19 représentent l'écart de modélisation de la machine principale et celui de la machine secondaire respectivement. Ces écarts sont faibles par rapport aux mesures expérimentales avec une RMSE inférieure à 10%. Ces résultats permettent de valider le modèle convexe (1.18).

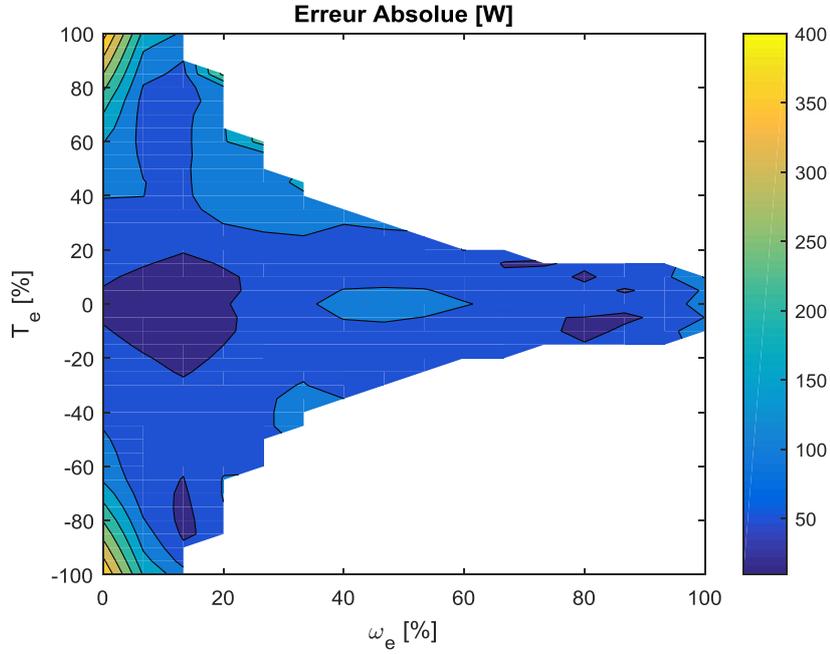


FIGURE 1.18 – Écart de modélisation entre le modèle quadratique (1.18) et le modèle de référence (1.16) de la puissance P_e pour tout le domaine (régime ω_e , couple T_e , tension U_e) de la machine principale

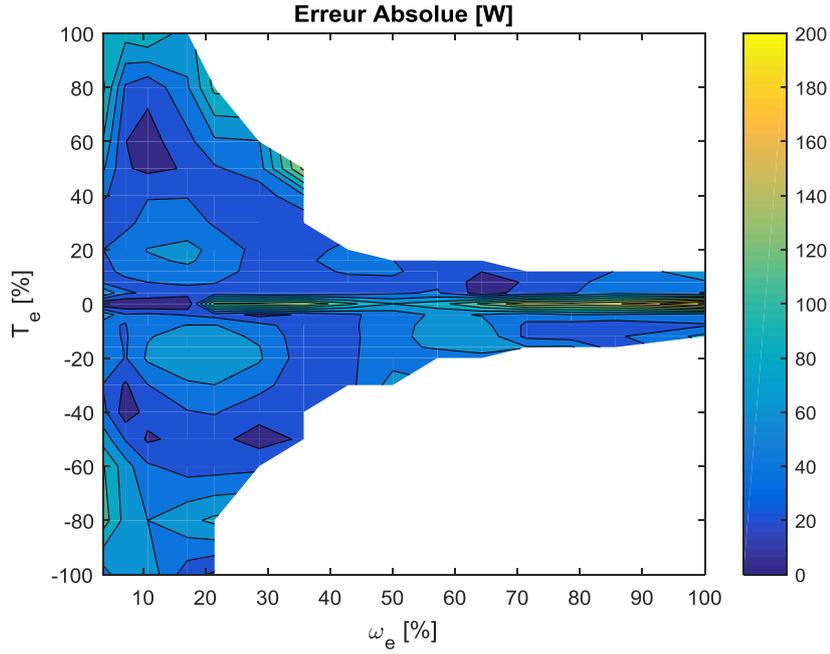


FIGURE 1.19 – Écart de modélisation entre le modèle quadratique (1.18) et le modèle de référence (1.16) de la puissance P_e pour tout le domaine (régime,couple,tension) de la machine secondaire

Les modèles (1.19), (1.20) et (1.21) des coefficients $b_2^\pm(\omega_e, U_e)$, $b_1^\pm(\omega_e, U_e)$ et $b_0(\omega_e, U_e)$ de la machine principale ont également été validés comme le montre les figures 1.20, 1.21, 1.22, 1.23 et 1.24. Les mêmes résultats ont été retrouvés pour la machine secondaire.

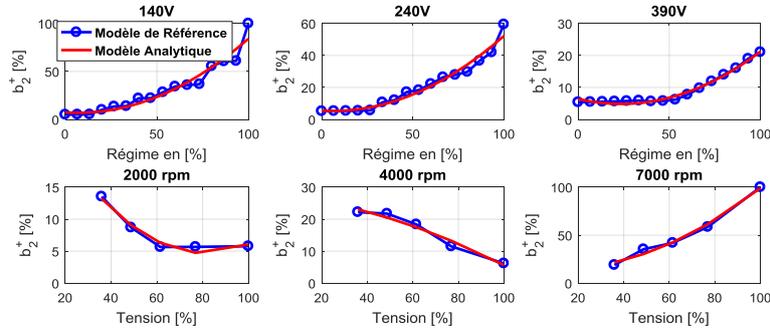


FIGURE 1.20 – Validation du modèle analytique de $b_2^+(\omega_e, U_e)$ en fonction du régime ω_e (haut) et de la tension U_e (bas)

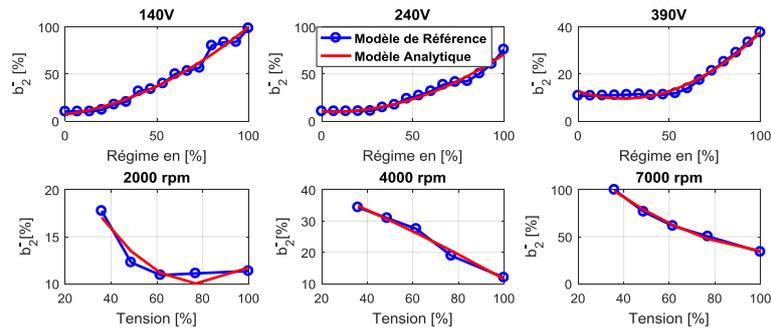


FIGURE 1.21 – Validation du modèle analytique de $b_2^-(\omega_e, U_e)$ en fonction du régime ω_e (haut) et de la tension U_e (bas)

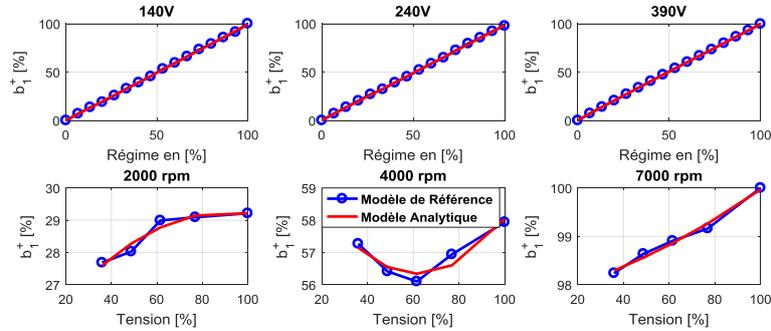


FIGURE 1.22 – Validation du modèle analytique de $b_1^+(\omega_e, U_e)$ en fonction du régime ω_e (haut) et de la tension U_e (bas)

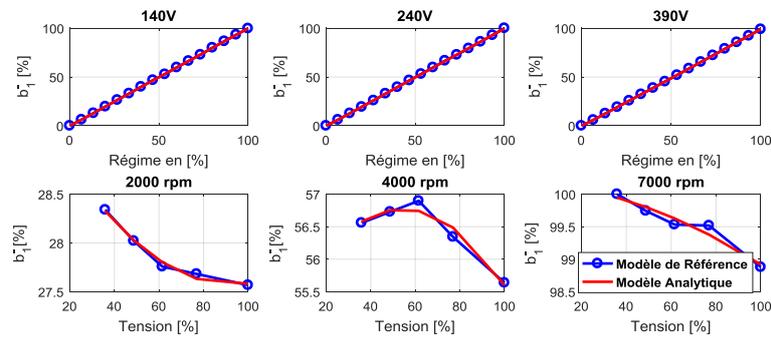


FIGURE 1.23 – Validation du modèle analytique de $b_1^-(\omega_e, U_e)$ en fonction du régime ω_e (haut) et de la tension U_e (bas)

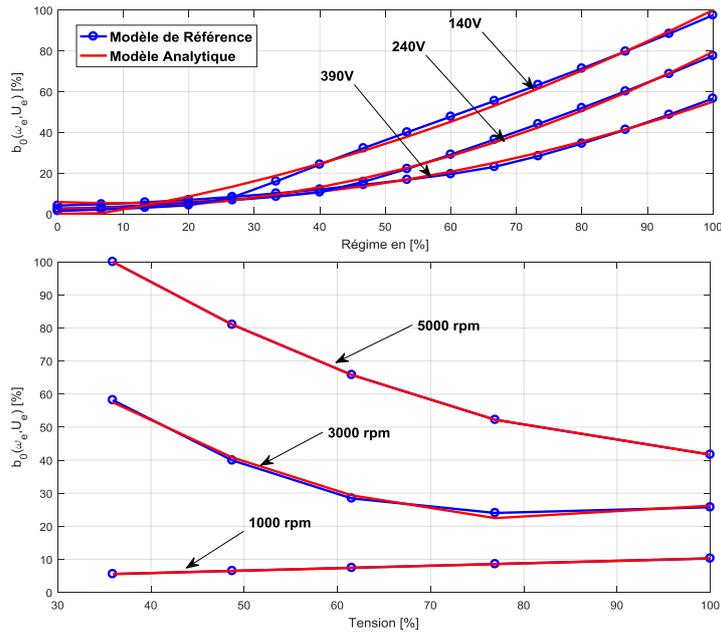


FIGURE 1.24 – Validation du modèle analytique de $b_0(\omega_e, U_e)$ en fonction du régime ω_e (haut) et de la tension U_e (bas)

Dans les chapitres 2 et 3, nous allons utiliser le modèle quadratique de P_e en fonction de la puissance P_m , illustré graphiquement par la figure 1.25, qui peut être déduit à partir de (1.18) en remplaçant T_e par $\frac{P_m}{\omega_e}$:

$$P_e(P_m, \omega_e, U_e) = \begin{cases} \frac{b_2^- (\omega_e, U_e)}{\omega_e^2} P_m^2 + \frac{b_1^- (\omega_e, U_e)}{\omega_e} P_m + b_0(\omega_e, U_e) & \text{si } \underline{P}_e(\omega_e, U_e) \leq P_m \leq 0 \\ \frac{b_2^+ (\omega_e, U_e)}{\omega_e^2} P_m^2 + \frac{b_1^+ (\omega_e, U_e)}{\omega_e} P_m + b_0(\omega_e, U_e) & \text{si } 0 \leq P_m \leq \overline{P}_e(\omega_e, U_e) \end{cases} \quad (1.22)$$

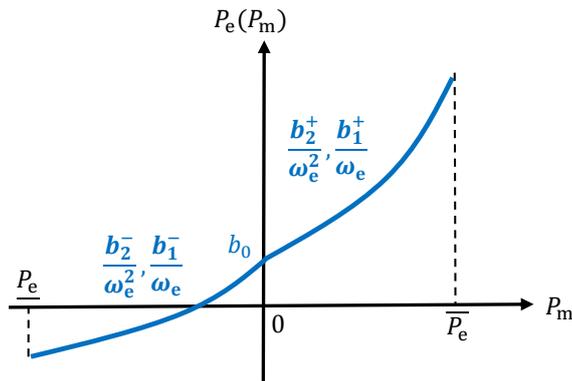


FIGURE 1.25 – Représentation graphique du modèle quadratique de la puissance électrique P_e en fonction de P_m

Les figures 1.26, 1.27 et 1.28 montrent que P_e évolue bien en quadratique en fonction de la

puissance P_m , du régime ainsi que de la tension. On en déduit que le modèle analytique de P_e (1.22) reproduit correctement les valeurs des mesures expérimentales.

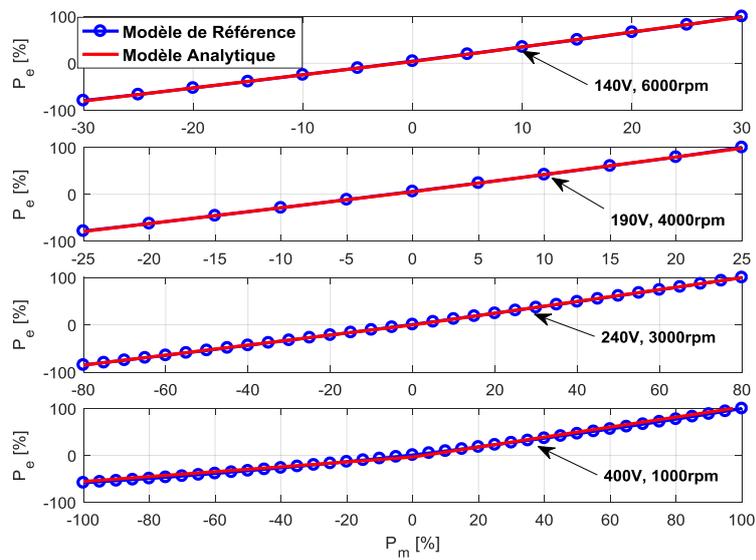


FIGURE 1.26 – Validation du modèle analytique de P_e par rapport à P_m

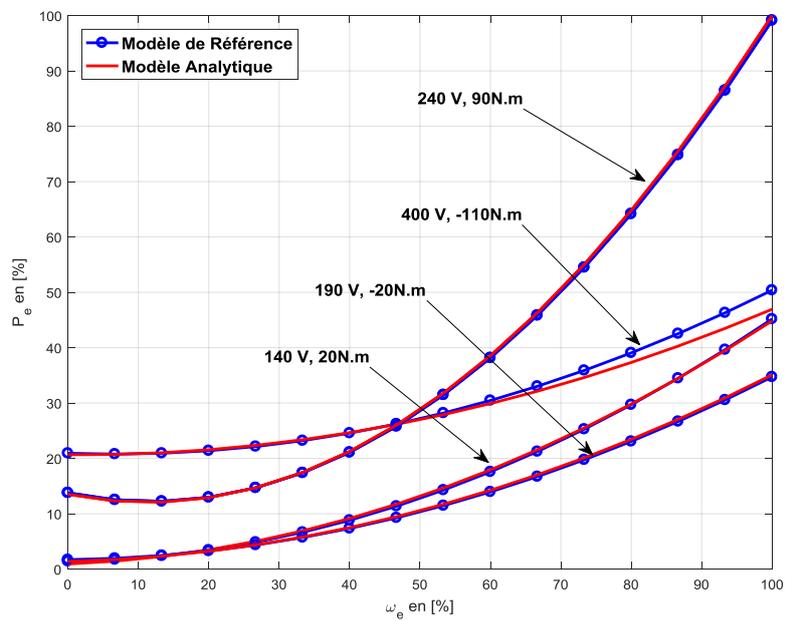


FIGURE 1.27 – Validation du modèle analytique de P_e par rapport à ω_e

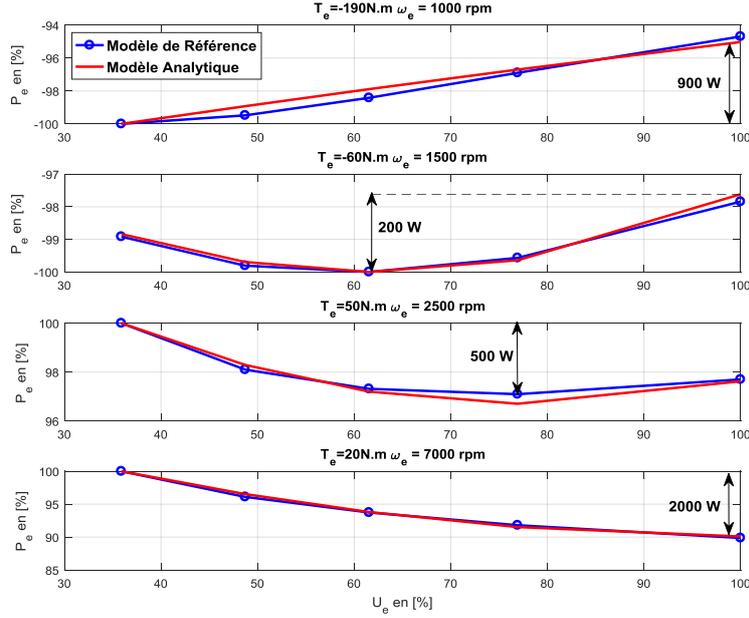


FIGURE 1.28 – Validation du modèle analytique de P_e par rapport à U_e

Le modèle quadratique (1.22) peut être simplifié en un modèle affine en fonction de P_m . En effet, plus le régime de la machine augmente, plus le terme quadratique devient négligeable (figure 1.29). Ce modèle sera utilisé notamment pour l'hybride série (chapitre 4) où le régime de la génératrice est supérieur à 2000 rpm. Le modèle affine illustré par la figure 1.30 est donné par :

$$P_e(P_m, \omega_e, U_e) = \begin{cases} a_-(\omega_e, U_e)P_m + b(\omega_e, U_e) & \text{si } \underline{P}_e(\omega_e, U_e) \leq P_m \leq 0 \\ a_+(\omega_e, U_e)P_m + b(\omega_e, U_e) & \text{si } 0 \leq P_m \leq \overline{P}_e(\omega_e, U_e) \end{cases} \quad (1.23)$$

Où, $a_{\pm}(\omega_e, U_e) = \frac{b_1^{\pm}(\omega_e, U_e)}{\omega_e}$ et $b(\omega_e, U_e) = b_0(\omega_e, U_e)$. L'écart de modélisation du modèle (1.23) a été également calculé de la même manière que celui du modèle quadratique (1.22) pour des régimes supérieurs à 2000 rpm. Il est représenté par les figures 1.31 et 1.32. Les écarts d'estimation sont relativement faibles en fonction du couple et régime de la machine électrique. On peut constater que plus le couple (en valeur absolue) est faible, plus l'erreur de modélisation est élevée. En effet, le modèle linéaire n'est pas représentatif autour du couple nul car le terme quadratique négligé b_2^{\pm} est prépondérant dans ces zones là.

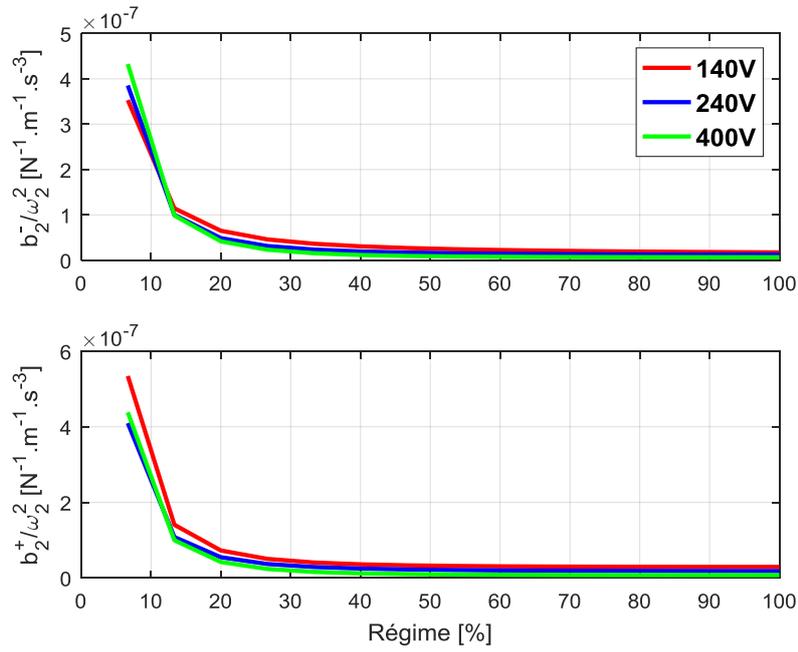


FIGURE 1.29 – L'évolution du coefficient du terme quadratique $\frac{b_2^-(\omega_e, U_e)}{\omega_e^2}$ en fonction du régime ω_e

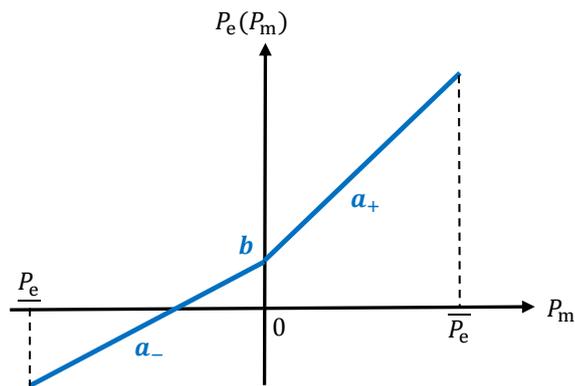


FIGURE 1.30 – Représentation graphique du modèle affine de la puissance électrique P_e en fonction de P_m

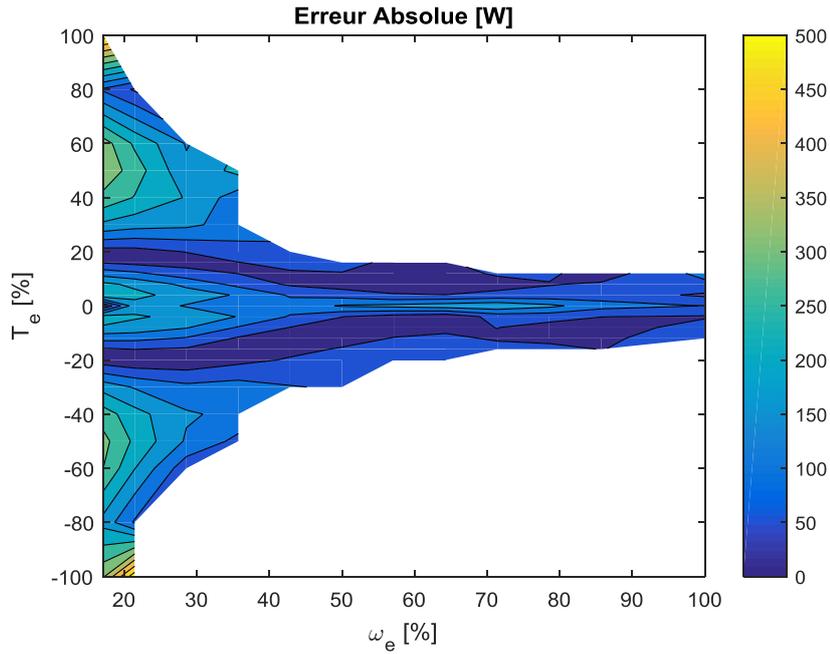


FIGURE 1.31 – Écart de modélisation entre le modèle affine (1.23) et le modèle de référence (1.16) de la puissance P_e de la machine principale

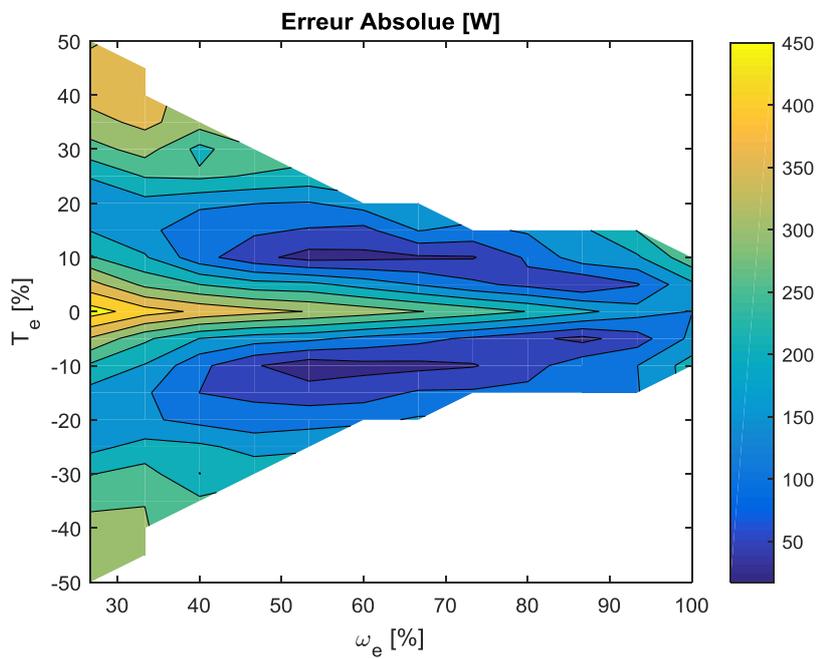


FIGURE 1.32 – Écart de modélisation entre le modèle affine (1.23) et le modèle de référence (1.16) de la puissance P_e de la machine secondaire

Les paramètres a_- et a_+ ne sont rien d'autre que le rendement et l'inverse du rendement de la machine électrique (figure 1.33). Quant à b , il représente les pertes à vide de la machine

(figure 1.24). D'après ces résultats, on peut émettre les hypothèses suivantes :

Hypothèse 5 $b_2^\pm > 0$, $\forall \omega_e$ comme le montre les figures 1.20 et 1.21.

Hypothèse 6 D'après les figures 1.33 et 1.24, a_- et b sont croissants en fonction du régime ω_e et a_+ est décroissant en fonction du régime ω_e .

Hypothèse 7 $0 < a_- < 1$ et $a_+ > 1$, $\forall \omega_e$ comme le montre la figure 1.33.

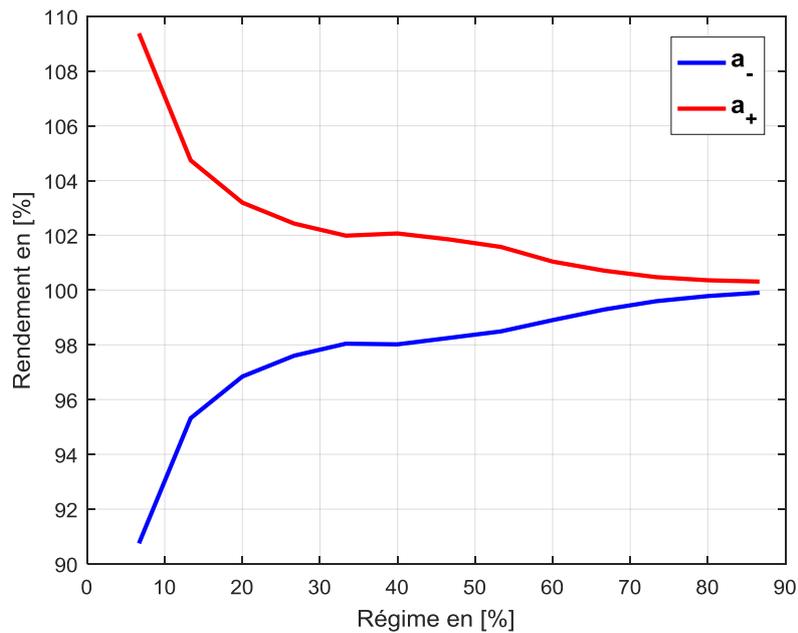


FIGURE 1.33 – Le rendement (a_-) et l'inverse du rendement (a_+) de la machine électrique en fonction du régime

Le tableau récapitulatif 1.1 présente les performances ainsi que l'utilisation des deux modèles électriques : linéaire et quadratique.

Modèle	Précision	Simplification	Utilisation
Linéaire	+	++	<ol style="list-style-type: none"> 1. optimisation de la répartition de puissance en hybride parallèle (chapitre 2) 2. optimisation de la puissance de la génératrice en hybride série (chapitre 4)
Quadratique	++	+	<ol style="list-style-type: none"> 1. optimisation de la répartition de puissance en hybride parallèle (chapitre 2) 2. optimisation de la répartition de puissance en hybride bi-parallèle (chapitre 3)

TABLE 1.1 – Performances et utilisation des modèles énergétiques de la machine électrique

Batterie

La batterie est modélisée, comme le montre la figure 1.34, par un circuit comportant une source de tension OCV à vide et une résistance R_{bat} (représentant les pertes dans la batterie) [3]. Le modèle énergétique de la batterie est donné par :

$$P_{bat}(t) = OCV(SoC)i_{bat}(t)[W] \quad (1.24)$$

$$P_{bat}(t) = P_{elec}(t) + R_{bat}(SoC)i_{bat}^2(t) \quad (1.25)$$

L'état de charge de la batterie (SoC) est défini par :

$$\dot{SoC}(t) = -\frac{i_{bat}(t)}{Q_{max}} \quad (1.26)$$

Où, $Q_{max}[C]$ est la charge maximale de la batterie. La tension OCV et la résistance R_{bat} dépendent de l'état de charge de la batterie comme le montre la figure 1.35. On définit également l'état d'énergie de la batterie (SoE) par :

$$\dot{SoE}(t) = -\frac{OCV(SoC)i_{bat}(t)}{E_{max}} \quad (1.27)$$

Où, $E_{max} = OCVQ_{max}[J]$ est l'énergie maximale de la batterie. $SoE[\%]$ est limité comme suit :

$$SoE_{min} \leq SoE(t) \leq SoE_{max} \quad (1.28)$$

Élévateur de Tension (Step-Up)

Le Step-Up utilisé dans cette étude est un élévateur de tension de type deux quadrants [57, 29]. Il peut être représenté par le circuit électrique de la figure 1.36. Il est composé par deux IGBT (Insulated Gate Bipolar Transistor) T_1 et T_2 , deux diodes D_1 et D_2 et une self R_{Self} .

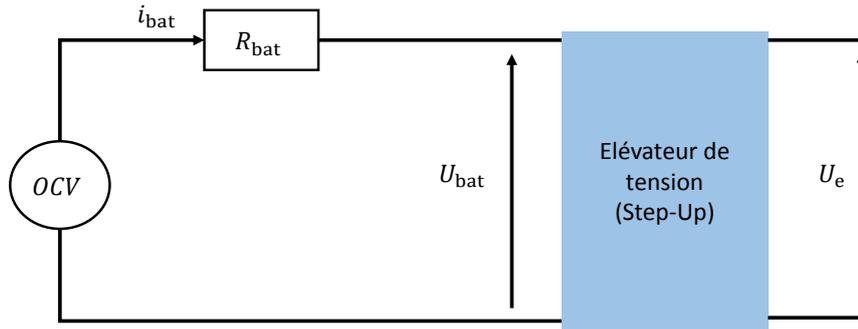


FIGURE 1.34 – Circuit électrique représentant la batterie

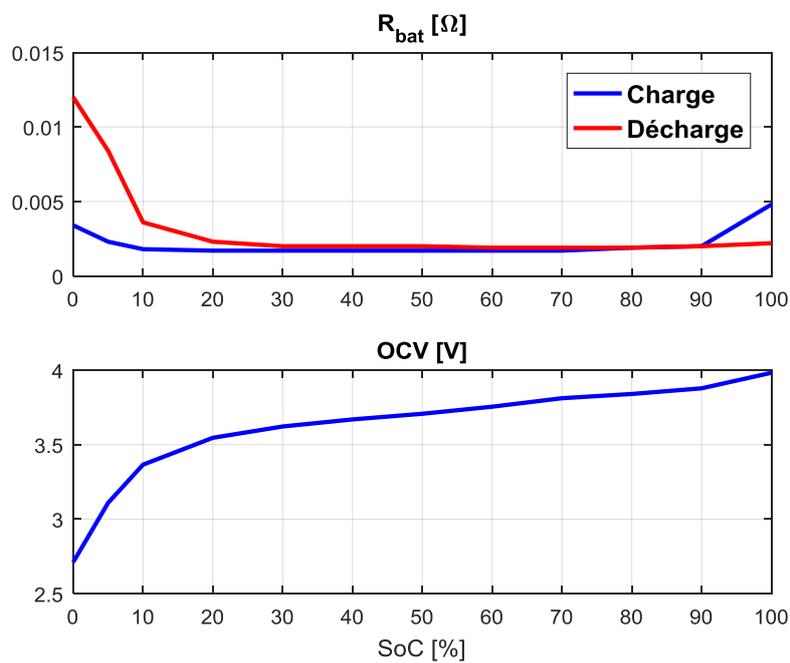


FIGURE 1.35 – Évolution de la tension à vide OCV d'une cellule (bas) ainsi que de la résistante R_{bat} (haut) de la batterie en fonction de son état de charge SoC

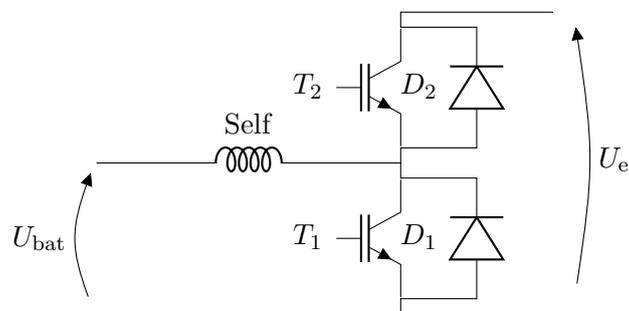


FIGURE 1.36 – Circuit Électrique modélisant le Step-Up

Le modèle énergétique du Step-Up est donné par :

$$P_{\text{elec}} = P_e + P_S \quad (1.29)$$

Où, P_S sont les pertes dans le Step-Up, P_{elec} est la puissance à l'entrée du Step-Up et P_e est la puissance à la sortie du Step-Up. Les pertes dans le Step-Up comprennent les pertes par conduction et les pertes par commutation :

$$P_S = P_{\text{Conduction}} + P_{\text{Commutation}}[W] \quad (1.30)$$

Les pertes par commutation $P_{\text{Commutation}}$ et par conduction $P_{\text{Conduction}}$ sont données par :

- Quand $U_e = U_{\text{bat}}$, l'IGBT T_1 est ouvert. Si le courant est positif (fonctionnement moteur), seule la diode D_2 conduit. Pour le fonctionnement générateur, seul l'IGBT T_2 conduit. Alors, dans ce cas, $P_{\text{Commutation}} = 0$ et $P_{\text{Conduction}}$ est donnée par :

$$P_{\text{Conduction}} = \begin{cases} (R_{\text{Self}} + R_{D_2})i_{\text{bat}}^2 & \text{si } P_e \geq 0 \\ (R_{\text{Self}} + R_{T_2})i_{\text{bat}}^2 & \text{si } P_e < 0 \end{cases} \quad (1.31)$$

- Quand $U_e > U_{\text{bat}}$: L'IGBT T_1 est ouvert pendant la fraction r de la période T du convertisseur. Le reste du temps de la période T , c'est la diode D_1 qui est ouverte. Alors, les pertes par commutation sont données par :

$$P_{\text{Commutation}} = (rV_{T_1} + (1-r)V_{D_1})i_{\text{bat}} \quad (1.32)$$

De même, L'IGBT T_2 conduit pendant la fraction rT . Le reste du temps de la période T , c'est la diode D_2 qui conduit. Alors, les pertes par conduction sont données par :

$$P_{\text{Conduction}} = (R_{\text{Self}} + rR_{T_2} + (1-r)R_{D_2})i_{\text{bat}}^2 \quad (1.33)$$

où, V_{T_1} est la chute de tension aux bornes de l'IGBT T_1 , V_{D_1} est la chute de tension aux bornes de la diode D_1 , $R_{\text{Self}}[\Omega]$ est la résistance de la self, $R_{T_2}[\Omega]$ est la résistance de l'IGBT T_2 , $R_{D_2}[\Omega]$ est la résistance de la diode D_2 et r est le rapport cyclique défini par : $r = \frac{U_e - U_{\text{bat}}}{U_e}$.

Finalement, le courant i_{bat} peut être calculé à partir des équations (1.24), (1.25), (1.29), (1.32) et (1.33) comme suit :

$$P_{\text{bat}} = OCV i_{\text{bat}} = P_{\text{elec}} + R_{\text{bat}} i_{\text{bat}}^2$$

Ce qui équivaut à :

$$\begin{aligned} OCV i_{\text{bat}} &= P_{\text{elec}} + R_{\text{bat}} i_{\text{bat}}^2 \\ &= P_e + P_S + R_{\text{bat}} i_{\text{bat}}^2 \\ &= P_e + P_{\text{Conduction}} + P_{\text{Commutation}} + R_{\text{bat}} i_{\text{bat}}^2 \\ &= P_e + (R_{\text{bat}} + R_{\text{Self}} + rR_{\text{IGBT}} + (1-r)R_{\text{Diode}})i_{\text{bat}}^2 + (rV_{\text{IGBT}} + (1-r)V_{\text{Diode}})i_{\text{bat}} \end{aligned}$$

Alors, i_{bat} est solution de l'équation du second degré :

$$(R_{\text{bat}} + R_{\text{Self}} + rR_{\text{IGBT}} + (1-r)R_{\text{Diode}})i_{\text{bat}}^2 + (rV_{\text{IGBT}} + (1-r)V_{\text{Diode}} - OCV)i_{\text{bat}} + P_e = 0$$

Pour simplifier l'écriture de l'équation ci-dessus, on pose :

$$R_{\text{totale}} = R_{\text{bat}} + R_{\text{Self}} + rR_{\text{IGBT}} + (1-r)R_{\text{Diode}}$$

$$U_{\text{totale}} = OCV - (rV_{\text{IGBT}} + (1-r)V_{\text{Diode}})$$

L'équation du second degré admet deux solutions. En appliquant les lois de Kirchhoff, la solution retenue est :

$$i_{\text{bat}} = \frac{U_{\text{totale}} - \sqrt{U_{\text{totale}}^2 - 4R_{\text{totale}}P_e}}{2R_{\text{totale}}} \quad (1.34)$$

Pour le chapitre 5, en considérant la résistance équivalente R_{totale} qui inclue les résistances du Step-Up ainsi que la résistante interne de la batterie, on écrira :

$$P_{\text{bat}} = P_e + P_S \quad (1.35)$$

Dans les chapitres 2, 3 et 4, afin de simplifier la résolution analytique, nous supposerons que les pertes de la batterie ainsi que celles du step-up sont négligeables devant les puissances électriques des machines. Autrement dit :

Hypothèse 8 $P_{\text{bat}} \approx P_e$. *Cette hypothèse sera validée par les résultats de simulation.*

A la suite de la modélisation quasi-statique, nous allons présenter un autre type de modélisation : la modélisation dynamique. Elle consiste à représenter les dynamiques transitoires des différents organes.

1.2.2 Modélisation Dynamique

La modélisation dynamique prend en compte les transitoires des organes. En effet, chaque organe possède un temps de réponse pour réaliser une certaine consigne. Pour cela, tous les organes sont représentés par des modèles dynamiques qui prennent en compte leur temps de réponse [38]. Dans cette démarche, le conducteur est également modélisé par un régulateur de vitesse qui a pour objectif de minimiser l'écart entre la vitesse réelle du véhicule (v^r) et la vitesse consigne (v^d). Cette régulation prend en compte les dynamiques ainsi que les inerties du véhicule. L'approche dynamique, appelée aussi MIL (Model In the Loop), est représentée par la figure 1.37. Dans cette configuration, la supervision énergétique est en communication continue avec l'ensemble des organes du véhicule. Le schéma de la figure 1.37 présente les différents interlocuteurs de la supervision énergétique. Parmi ces interlocuteurs, il y a le véhicule (modèle véhicule), qui est chargé de transmettre en temps réel la valeur de la puissance à la roue (P_r) demandée par le conducteur. De même, les différents organes (moteur thermique, machines électriques, batterie,...) communiquent leur point de fonctionnement à la supervision énergétique. En retour, la supervision énergétique calcule les points de fonctionnement optimaux ($T_{\text{th}}^{\text{opt}}$, $\omega_{\text{th}}^{\text{opt}}$, U_e^{opt} ,...) et les renvoie aux organes sous la forme de consigne. Ainsi, à titre d'exemple, pour le calcul du couple optimal du moteur thermique ($T_{\text{th}}^{\text{opt}}$), qui dépend du régime de ce dernier, l'optimisation énergétique reçoit la valeur réelle du régime du moteur thermique (ω_{th}^c) de la part de la transmission.

La présentation de la modélisation s'achève à ce niveau. La suite du chapitre est consacrée à l'optimisation énergétique : formulation du problème d'optimisation, présentation de la méthode d'optimisation utilisée (le PMP) et définition de la méthodologie analytique.

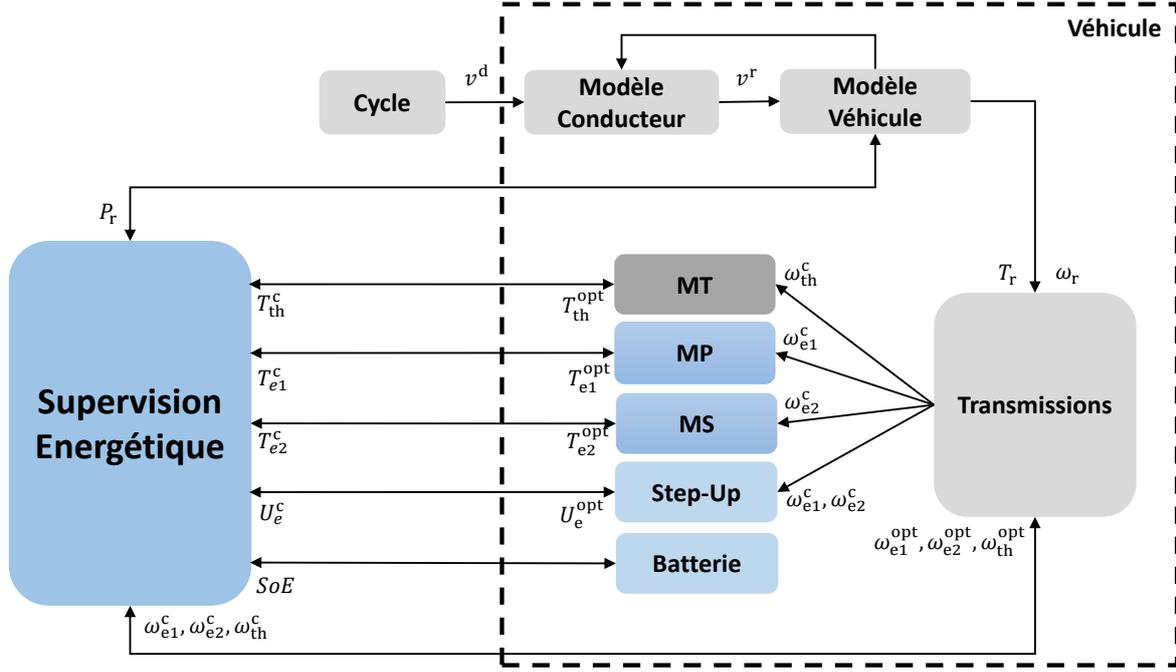


FIGURE 1.37 – Position de l’Optimisation Énergétique dans un simulateur de véhicule (environnement MIL)

1.3 Supervision Énergétique

Dans le cadre de la synthèse des lois de gestion d’énergie du véhicule hybride électrique bi-machines avec Step-Up défini dans la figure 1.5, l’objectif généralisé consiste à calculer la ou les commandes optimales réalisant une économie d’énergie sous un nombre fini de contraintes. Les commandes optimales ou les variables d’optimisation sont choisies selon leur impact sur l’énergie du véhicule. En effet, comme déjà présenté dans la section modélisation énergétique 1.2.1, les principaux acteurs de l’énergie sont : les couples et régimes du moteur thermique et des machines électriques ainsi que la tension d’alimentation des machines électriques. C’est pourquoi, l’objectif de cette thèse est de déterminer les couples optimaux du moteur thermique et des machines électriques, le régime du moteur thermique, ainsi que la tension optimale minimisant les consommations thermique et électrique du véhicule.

Dans le simulateur véhicule de la figure 1.37, les contributions de cette thèse résident dans la partie "Supervision Énergétique". Cette partie, dédiée au contrôle, est divisée en quatre sous-parties comme le montre la figure 1.38 :

- Optimisation de la répartition de puissance (ou de couple) qui détermine les couples optimaux des machines et du moteur thermique ($T_{e1}^{opt}(t), T_{e2}^{opt}(t), T_{th}^{opt}(t)$) aux régimes courants et à la tension courante ($\omega_{th}^c(t), \omega_{e1}^c(t), \omega_{e2}^c(t), U_e^c(t)$).
- Gestion du mode cinématique qui détermine le mode cinématique optimal parmi les modes présentés dans la figure 1.6 aux couples courants et à la tension courante ($T_{th}^c(t), T_{e1}^c(t), T_{e2}^c(t), U_e^c(t)$). Par conséquent, dans cette partie, les régimes optimaux du moteur thermique et des machines électriques sont déterminés ($\omega_{th}^{opt}(t), \omega_{e1}^{opt}(t), \omega_{e2}^{opt}(t)$). Le lecteur peut trouver cette partie détaillée dans [38].
- Optimisation de la tension : la tension optimale ($U_e^{opt}(t)$) est déterminée en fonction des

couples et régimes courants ($T_{e_1}^c(t), T_{e_2}^c(t), \omega_{e_1}^c(t), \omega_{e_2}^c(t)$).

- Régulation du SoE : l'état d'énergie de la batterie est régulé par un PID sur la base d'une cible et d'un certain nombre de contraintes imposées sur la batterie. Cette cible est le maintien de l'état d'énergie autour de sa valeur initiale afin d'établir un bilan énergétique nul pour la batterie ($SoE^{\text{final}} = SoE^{\text{initial}}$). De plus, l'état d'énergie de la batterie est limité par une borne min et une borne max. Ces bornes n'ont pas été prises en compte dans le calcul analytique des commandes optimales. Les travaux de régulation du SoE réalisés dans [38] sont utilisés dans cette thèse.

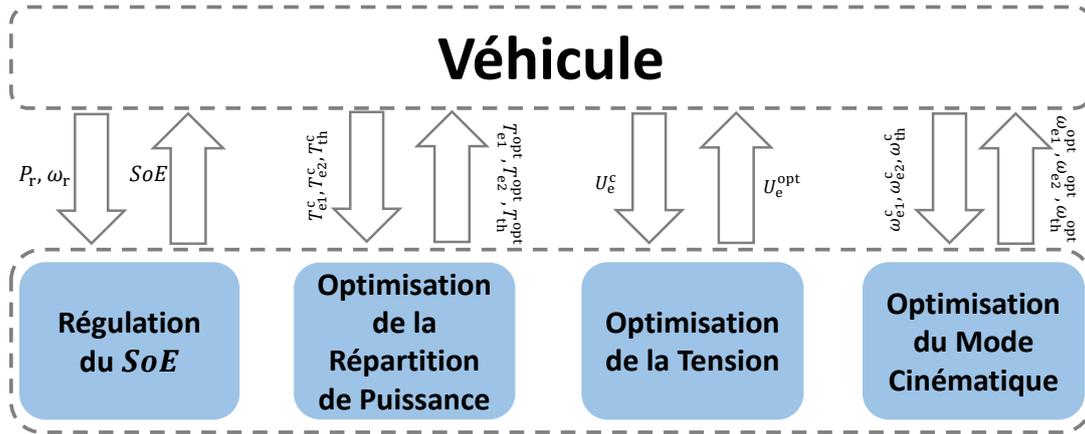


FIGURE 1.38 – Lois de Gestion d'Énergie

Les travaux de cette thèse ont été orientés principalement vers le développement d'une stratégie en-ligne sur la répartition de puissance et sur la tension. Néanmoins, au début de ces travaux, nous avons développé une stratégie hors-ligne pour un véhicule hybride parallèle qui détermine la répartition optimale de puissance ainsi que l'état et le régime optimaux du moteur thermique.

Afin de résoudre le problème d'optimisation énergétique, les méthodes du contrôle optimal sont utilisées. Il existe dans le domaine de la commande optimale plusieurs approches d'optimisation, on cite parmi elles :

- Le Principe du Maximum de Pontryagin (PMP) [53].
- La programmation dynamique [4].
- L'optimisation convexe [8].
- La programmation linéaire [5].
- Le calcul des variations [73].

Dans ce qui suit, le problème d'optimisation sous contraintes est défini. En suite, seulement la méthode du PMP est détaillée car elle a été choisie pour résoudre le problème d'optimisation énergétique du véhicule hybride présenté dans la figure 1.5. Finalement, nous allons montrer comment appliquer le PMP sur notre cas d'étude.

1.3.1 Formulation d'un Problème d'Optimisation sous Contraintes

Un problème d'optimisation sous contraintes est défini par : la fonction coût ou le critère qui est la fonction à optimiser et par les contraintes qui peuvent être des contraintes égalités et/ou des contraintes inégalités.

Le critère J est sous la forme d'une intégrale dans le temps. Il est donné par :

$$J = \int_{t_0}^{t_f} L(x(t), u(t), t) dt \quad (1.36)$$

où, $x \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$ est l'état du système et $u \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$ est la commande du système.

L'optimisation est soumise aux contraintes, sur l'état et sur la commande, suivantes :

$$\dot{x}(t) = f(u(t), x(t), t) \quad (1.37)$$

$$\underline{x}(t) \leq x(t) \leq \bar{x}(t) \quad (1.38)$$

$$\underline{u}(t) \leq u(t) \leq \bar{u}(t) \quad (1.39)$$

1.3.2 Principe du Maximum de Pontryagin (PMP)

Le Principe du Maximum de Pontryagin définit la condition nécessaire d'optimalité comme suit :

Théorème : $u^* \in [\underline{u}(t), \bar{u}(t)]$ et $x^* \in [\underline{x}(t), \bar{x}(t)]$ sont respectivement la commande optimale et la trajectoire associée pour le problème (1.37) et (1.36), si et seulement si :

$$H(\lambda^*, x^*, u^*, t) \leq H(\lambda^*, x^*, u, t), \quad \forall u \in \mathbb{U} \quad (1.40)$$

Autrement dit, la commande optimale u^* qui minimise le critère J sous les contraintes (1.37) et (1.38) est celle qui minimise l'Hamiltonien H , où H est défini par :

$$H(\lambda, x, u, t) = L(x, u, t) + \lambda(t)f(x, u, t) \quad (1.41)$$

Avec, λ le facteur de Lagrange.

Les équations d'Hamilton associées sont :

$$\dot{x}^* = \frac{\partial H}{\partial \lambda} \quad (1.42)$$

$$\dot{\lambda}^* = -\frac{\partial H}{\partial x} \quad (1.43)$$

Si le problème d'optimisation comporte une commande discrète ou un état discret, alors, le système devient hybride au sens mathématique du terme ; appelés les Systèmes Dynamiques Hybrides (SDH). Dans [54], l'auteur propose une classification pour les SDH selon la nature de leur hybridation. Parmi ces classes, il y a les SDH de type "saut commandé". Cette appellation signifie que l'hybridation du système est commandée. Autrement dit, le système n'est pas naturellement hybride (au quel cas il contiendrait un état discret) mais le devient après lui avoir imposé une commande discrète. Ce type de système correspond à notre cas d'étude, pour cela, sa modélisation est présenté ci-dessous. On suppose que :

- $k \in \mathbb{K}$ est la commande discrète, où $\mathbb{K} = \{1, 2, \dots, N\}$ et $N \in \mathbb{N}^*$,
- $u_k \in U_k$ est la commande continue.

[54] a proposé une modélisation pour les SDH de type "saut commandé" où la fonction coût ainsi que la dynamique de l'état du système sont données par :

$$J = \int_{t_0}^{t_f} L(x, u_k, k, t) = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{k=1}^N m_k(t) L_k(x, u_k, t) \quad (1.44)$$

$$\dot{x} = f(x, u_k, k, t) = \sum_{k=1}^N m_k(t) f_k(x, u_k, t) \quad (1.45)$$

Avec, $m_k = 1$ quand k est le mode courant, sinon $m_k = 0$.

Par ailleurs, dans [54] l'auteur démontre comment appliquer le PMP sur les SDH selon leur classe. Pour le type "saut commandé", le PMP est appliqué comme suit :

— le PMP est appliqué au SDH global, H est donné par :

$$H(x, u_k, k, \lambda, t) = L(x, u_k, k, t) + \lambda f(x, u_k, k, t) \quad (1.46)$$

— puis, le PMP est appliqué à chaque mode k , l'Hamiltonien correspondant est H_k et il est donné par :

$$H_k(x, u_k, \lambda, t) = L_k(x, u_k, t) + \lambda f_k(x, u_k, t) \quad (1.47)$$

Finalement, il a été démontré par [54, 55] que les commandes optimales (k^*, u_k^*) , qui minimisent le H global (1.46), vérifient :

$$H(x^*, u_k^*, k^*, \lambda^*, t) = \min_{k \in \mathbb{N}} (\min_{u_k \in \mathbb{U}} H_k(x, u_k, \lambda, t)) \quad (1.48)$$

Application du PMP au problème d'optimisation énergétique du véhicule hybride Dans la littérature, le choix de la fonction critère est diversifié. Dans [49, 18, 66], la minimisation de la consommation de carburant a été l'objectif du problème d'optimisation. Par ailleurs, la réduction des émissions polluantes a été introduite dans le critère d'optimisation dans [37, 43, 65, 36]. L'état de santé de la batterie a également été pris en compte dans le problème d'optimisation par [63, 19, 47, 52]. Dans notre cas d'étude, l'objectif étant de minimiser la consommation de carburant sur un parcours donné, alors, le critère J est défini par l'intégrale du débit carburant Q entre l'instant initial (t_0) et l'instant final (t_f) du parcours. Il s'écrit comme suit :

$$J = \int_{t_0}^{t_f} Q(u(t)) dt \quad (1.49)$$

Où, u est la commande qui est définie dans les chapitres suivants selon le problème traité. Elle peut être de nature continue ou discrète. Les commandes les plus utilisées dans la littérature pour l'optimisation énergétique d'un véhicule hybride sont : les couples et régimes du moteur thermique ainsi que des machines électriques, l'état du moteur thermique, le rapport de boîte de vitesses, la vitesse du véhicule (éco-conduite), etc... [40, 41, 44, 7, 21, 35]. Par ailleurs, le choix de l'état du système est également diversifié. Dans la littérature, l'état du système est défini par l'état de charge de la batterie, l'état de l'énergie de la batterie, l'énergie de la batterie, la température de la batterie, etc... [40, 41, 44, 47]. Dans notre

cas d'étude, l'état d'énergie de la batterie SoE est considéré comme l'état du système. Finalement, le Problème d'Optimisation Énergétique (POE) s'écrit sous la forme :

$$POE : \begin{cases} \min_u \int_{t_0}^{t_f} Q(u(t))dt \\ \dot{SoE}(t) = -\frac{P_{bat}(u(t))}{E_{max}} \\ 0 \leq SoE(t) \leq 100 \\ SoE(t_0) \leq SoE(t_f) \\ \underline{u}(t) \leq u(t) \leq \bar{u}(t) \end{cases} \quad (1.50)$$

Par analogie avec l'équation (1.41), $L = Q$, $f = -\frac{P_{bat}}{E_{max}}$ et $x = SoE$. En posant, $\lambda^{eq}(t) = \frac{-\lambda(t)}{E_{max}}$, l'expression de l'Hamiltonien utilisée dans cette thèse est donnée par :

$$H(\lambda^{eq}, SoE, u) = Q(u(t)) + \lambda^{eq}(t)P_{bat}(u(t)) \quad (1.51)$$

Afin de simplifier l'écriture des équations, dans la suite de ce mémoire, λ^{eq} est confondue avec λ .

1.3.3 Méthodologie Analytique

Le principal objectif de cette thèse est de résoudre le problème POE analytiquement afin de réduire le temps de calcul et de synthétiser des commandes régulières et robustes comme discuté dans l'introduction. Pour cela, nous avons mis en place la méthodologie analytique, basée sur le PMP, qui est composée par 5 étapes :

- Étape 1 : C'est l'étape de la modélisation et de formulation des hypothèses. Cette étape consiste, d'une part, à identifier des modèles énergétiques sous la forme de fonctions convexes usuelles. D'autre part, à analyser les mesures expérimentales et leur comportement afin de comprendre et d'exploiter le maximum de phénomènes permettant d'émettre des hypothèses, et ainsi, de simplifier la résolution de POE . Exemple : variation faible de la tension OCV dans le domaine admissible du $SoE \Rightarrow OCV$ est supposée constante.
- Étape 2 : Calcul de l'expression de l'Hamiltonien H où la commande u apparaît d'une manière explicite. Le calcul de H n'est pas simple car il contient des fonctions par morceaux. Pour cela, nous distinguerons dans les chapitres 2, 3 et 4 plusieurs cas dans le calcul de H . Ces cas sont tirés à partir de la comparaison des points de changement d'équations de H entre eux.
- Étape 3 : Après avoir calculé l'expression de H , sa convexité par rapport à la commande est étudiée. Cette étude consiste à vérifier la condition du premier ordre de convexité de H par rapport à la commande u qui est donnée par [8] :

$$\text{La dérivée de } H \text{ par rapport à } u \left(\frac{\partial H}{\partial u} \right) \text{ est croissante} \Leftrightarrow H(u) \text{ est convexe}$$

Souvent, la convexité de H est assurée sous certaines conditions sur les paramètres des modèles analytiques. Alors, cette étape nécessite un bouclage avec l'étape 1. Autrement dit, certaines hypothèses nécessaires pour la convexité de H sont posées à cette étape puis validées sur les mesures. Exemple : hypothèse 4, où on suppose que $a_2 P_{lim}(\omega_{th}) > Q_{lim}(\omega_{th})$ sur tout le domaine du régime du moteur thermique (ω_{th}), a été posée à cette étape puis validée sur les mesures (figure 1.15).

- Étape 4 : Une fois que la convexité de H est assurée alors la commande optimale u^{opt} est calculée par la résolution de l'équation $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$ (sauf le cas linéaire où l'optimum est déterminé selon le signe de la pente de H). Comme H est une fonction par morceaux, alors, nous allons également différencier dans les chapitres suivants plusieurs cas dans le calcul des commandes optimales analytiques. Ces cas sont tirés à partir de la comparaison des optimums de H avec les points de changement d'équations ainsi qu'à partir de l'étude du sens de variation de H .
- Étape 5 : Les commandes analytiques trouvées dans l'étape précédente sont implémentées hors-ligne ou/et sur le MIL afin de les valider.

Les étapes de réalisation de la méthodologie analytique sont résumées dans la figure 1.39.

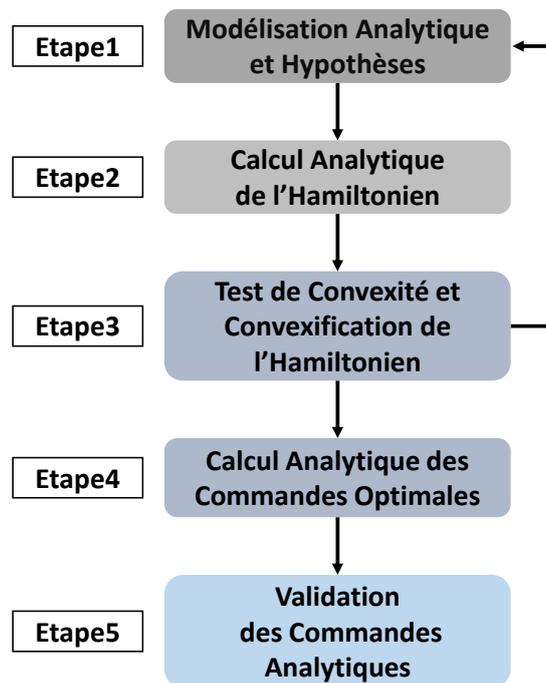


FIGURE 1.39 – Étapes de la Méthodologie Analytique

1.3.4 Méthodologie Numérique

Cette approche est également basée sur le PMP. La différence avec la méthodologie analytique réside dans le calcul numérique de l'Hamiltonien ainsi que des commandes optimales [39]. Le schéma de la figure 1.40 explique la méthode numérique qui résout le problème d'optimisation en utilisant les modèles énergétiques convexes ou de référence. Les étapes de la méthodologie numérique sont :

1. A chaque instant t , si la commande u est continue, elle sera maillée entre sa valeur min et sa valeur max avec une résolution choisie Δu .
2. La valeur de l'Hamiltonien H est calculée pour chaque valeur du vecteur commande u en utilisant les modèles énergétiques de chaque organe.
3. u^{opt} est la commande qui minimise le vecteur $H(u)$.

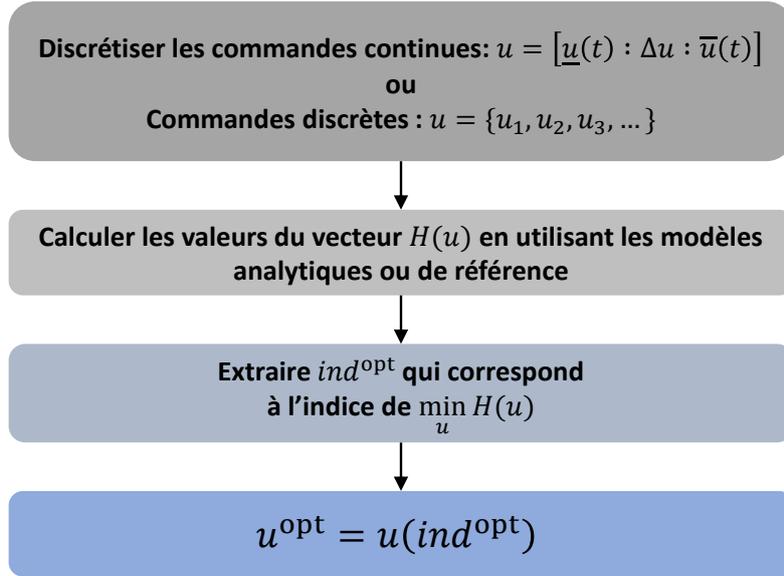


FIGURE 1.40 – Approche Numérique

Cette approche est mise en place afin de valider l’approche analytique en comparant les résultats des deux méthodes. Le processus de validation (figure 1.41) est composé par deux étapes :

- Étape 1 : Validation Hors-Ligne. Elle consiste à comparer les sorties des deux stratégies (les commandes) en fixant les entrées. Cette étape consiste à isoler le contrôle optimal de l’environnement MIL afin de valider les commandes analytiques mais aussi d’évaluer leurs performances en termes de temps de calcul et de mémoire. Le temps de calcul consommé par chaque stratégie sera calculé comme suit :

$$\text{Temps de calcul} = \frac{T_{\text{Urbain}} + T_{\text{Routier}} + T_{\text{Autoroutier}} + T_{\text{WLTC}}}{\text{Nombre de cycles étudiés}} \quad (1.52)$$

Où, T la durée moyenne d’un cycle est égale au temps nécessaire pour réaliser le calcul des commandes optimales pour un pas de temps.

Quant à la mémoire occupée par chaque stratégie, elle est définie par le nombre de variables scalaires (variable de taille (1×1)). On considère qu’une variable scalaire occupe 8 *Bytes*, soit 1 *Double*, 8 *octets*, ou encore 64 *bits*. Exemple : un vecteur de 10 valeurs occupe 10 *Doubles*.

- Étape 2 : Validation En-Ligne. Après simulation des deux stratégies sur MIL, leurs bilans énergétiques (consommation de carburant et trajectoire du *SoE*) sont comparés. La consommation de carburant et l’état d’énergie de la batterie sont fortement liés. En effet, la consommation de carburant baisse quand la valeur finale du *SoE* à la fin du cycle est faible (énergie électrique plus utilisée que l’énergie thermique) et vice versa. Pour que les consommations des différentes stratégies soient comparables, il faut qu’elles aient le même *SoE* final. C’est pourquoi, quand les *SoE* finaux des stratégies sont différents, nous corrigeons la consommation de carburant comme il a été fait dans [38].

Il a été montré dans [70, 74] que l’optimalité de la solution issue de l’approche numérique dépend de la finesse du maillage de la commande. Pour cela, nous avons testé dans cette

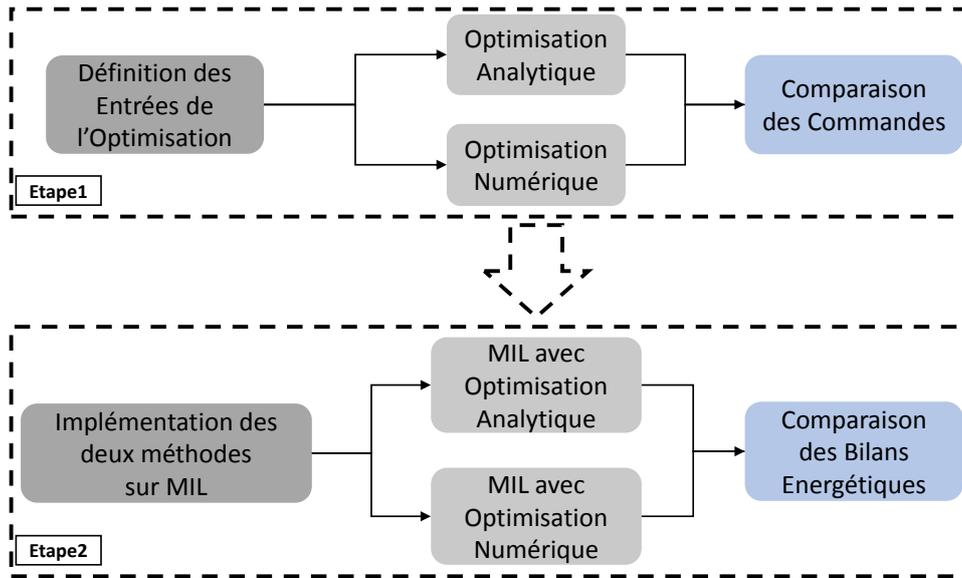


FIGURE 1.41 – Processus de Validation de l’Approche Analytique par sa comparaison avec l’Approche Numérique

étude trois maillages (plus ou moins fin) : 10 points, 100 points et 1000 points. Le maillage consiste à discrétiser la commande entre sa valeur min et sa valeur max avec une résolution donnée. De plus, afin d’évaluer l’impact de la modélisation convexe sur l’optimalité des solutions, nous avons mis en place deux stratégies numériques : une qui utilise les modèles convexes (indice 1) et une autre basée sur les modèles de référence (indice 2). Finalement, toutes les stratégies mises en place pour la validation sont présentées dans la figure 1.42.

		Notation		
		10 points	100 points	1000 points
Méthode	Maillage			
	Numérique basée sur les modèles convexes	\mathbf{Num}_1^{10}	\mathbf{Num}_1^{100}	\mathbf{Num}_1^{1000}
	Numérique basée sur les modèles de référence	\mathbf{Num}_2^{10}	\mathbf{Num}_2^{100}	\mathbf{Num}_2^{1000}
Analytique		Analytique		

FIGURE 1.42 – Stratégies Pour Validation

1.4 Conclusion

En conclusion, ce chapitre a permis de définir le véhicule hybride électrique ainsi que ses organes. Nous avons défini le Principe du Maximum de Pontryagin qui est la méthode du contrôle optimal choisie dans cette thèse pour résoudre le problème d’optimisation. Cette

méthode a été choisie car elle permet la résolution analytique du problème d'optimisation. Nous avons également abordé dans ce chapitre une étude importante qui est la modélisation convexe qui permet d'appliquer la méthodologie analytique. Le chapitre finit par la définition des étapes d'optimisation par la méthode analytique ainsi que par l'approche numérique. Dans la suite de ce mémoire, l'application des approches analytique et numérique pour le calcul des commandes optimales ainsi que les résultats en simulation seront présentés.

Le tableau récapitulatif 1.2 présente, pour chaque architecture, les différentes commandes qui seront calculées dans ce mémoire.

Architecture	Variables d'optimisation
Parallèle	<ol style="list-style-type: none"> 1. optimisation de la répartition de puissance 2. optimisation de l'état du moteur thermique 3. optimisation du régime du moteur thermique 4. optimisation de la tension
Bi-Parallèle	<ol style="list-style-type: none"> 1. optimisation de la répartition de puissance 2. optimisation de la tension
Série	<ol style="list-style-type: none"> 1. optimisation de la puissance de la génératrice 2. optimisation du régime de la génératrice 3. optimisation de la tension

TABLE 1.2 – Problèmes d'optimisation à traiter

Chapitre 2

Application à l'architecture Parallèle

Dans ce chapitre, l'objectif est d'optimiser la consommation de carburant d'un véhicule hybride parallèle sans step-up composé par : un moteur thermique (MT) lié aux roues via une boîte de vitesses, une machine électrique (ME) qui délivre de la puissance aux roues via une transmission à rapport fixe et une batterie (figure 2.1). Les variables d'optimisation considérées dans cette étude sont : la répartition de puissance mécanique entre le MT et la ME, l'état du MT (éteint ou allumé), ainsi que le régime du moteur thermique. Concernant la boîte de vitesses du MT, nous allons étudier dans ce chapitre deux types de boîtes : la transmission à rapport discrets et la transmission à variation continue. Pour la synthèse des commandes optimales citées ci-dessus, la méthodologie analytique est appliquée (figure 1.39).

Ce chapitre est composé par 3 sections : la première section traite l'optimisation de la répartition de puissance, la deuxième section est dédiée à l'optimisation de l'état du MT et la troisième à l'optimisation du régime du MT. Pour l'optimisation de l'état et le rapport de boîte discret du MT, le résultat de la commande optimale continue de la première section sera utilisé.

2.1 Optimisation de la répartition de puissance

Le Problème d'Optimisation en mode Parallèle (*POP*) où la répartition de puissance est optimisée, c'est-à-dire, les puissances P_{th} , P_m sont les variables d'optimisation, s'écrit comme suit :

$$POP_1 : \begin{cases} \min_{P_{th}} \int_{t_0}^{t_f} Q(P_{th}(t), \omega_{th}(t)) dt \\ \dot{SoE}(t) = -\frac{P_{bat}(t)}{E_{max}} \\ 0 \leq SoE(t) \leq 100 \\ \underline{P}_{th}(\omega_{th}) \leq P_{th} \leq \bar{P}_{th}(\omega_{th}) \\ P_r = P_{th} + P_m \\ \underline{P}_e(\omega_e) \leq P_m \leq \bar{P}_e(\omega_e) \end{cases} \quad (2.1)$$

Comme présenté dans la section 1.3.2, en appliquant le PMP sur POP_1 , on a :

$$P_{th}^{opt} = \arg \min_{P_{th} \in [\underline{P}_{th}, \bar{P}_{th}]} (H(P_{th}, P_r, \lambda)) \quad (2.2)$$

ou encore, en remplaçant P_{th} par $P_r - P_m$, on a :

$$P_m^{opt} = \arg \min_{P_m \in [\underline{P}_e, \bar{P}_e]} (H(P_m, P_r, \lambda)) \quad (2.3)$$

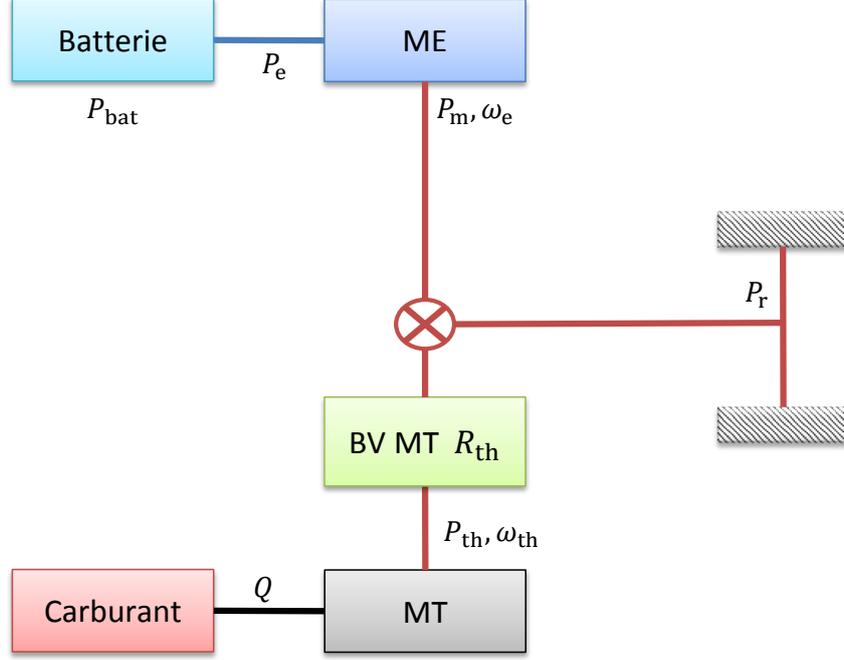


FIGURE 2.1 – Configuration Parallèle

Où, l'Hamiltonien est donné par l'équation (1.51) :

$$H(P_{\text{th}}, P_r, \lambda) = Q(P_{\text{th}}) + \lambda(t)P_{\text{bat}}(P_m) \quad (2.4)$$

On rappelle que pour l'optimisation de la puissance :

1. les régimes ω_{th} et ω_e sont connus en amont de l'optimisation. En effet, dans une implémentation en-ligne, l'optimisation de la répartition de puissance se base sur les régimes réels mesurés au niveau des organes. Cette hypothèse de découplage entre l'optimisation du régime et l'optimisation de la puissance est née à partir du principe que la convexité de H par rapport à la puissance (ou par rapport au régime) est toujours préservée quelque soit la valeur du régime (ou de la puissance). Cette hypothèse a été vérifiée hors-ligne sur tout le domaine de couple et régime du moteur thermique ainsi que de la machine électrique.
2. $P_{\text{bat}} = P_e$ car les pertes dans la batterie sont négligées devant la puissance électrique de la machine (hypothèse 8).

D'une part, les variables d'optimisation P_{th} et P_m sont bornées par les limitations propres aux organes comme présenté dans les équations (1.11) et (1.17). D'autre part, elles sont liées via l'équation (2.5) qui représente la volonté conducteur en puissance à la roue P_r . En effet, dans une configuration parallèle, le bilan des puissances mécaniques à la roue est donné par :

$$P_r = P_{\text{th}} + P_m \quad (2.5)$$

D'après (2.5), P_{th} et P_m sont limitées comme suit :

$$\underline{P}_e(\omega_e) \leq P_r - P_{\text{th}} \leq \overline{P}_e(\omega_e) \Leftrightarrow P_r - \overline{P}_e(\omega_e) \leq P_{\text{th}} \leq P_r - \underline{P}_e(\omega_e) \quad (2.6)$$

$$\underline{P}_{\text{th}}(\omega_{\text{th}}) \leq P_r - P_m \leq \overline{P}_{\text{th}}(\omega_{\text{th}}) \Leftrightarrow P_r - \overline{P}_{\text{th}}(\omega_{\text{th}}) \leq P_m \leq P_r - \underline{P}_{\text{th}}(\omega_{\text{th}}) \quad (2.7)$$

Finalement, le domaine admissible des commandes (P_{th}, P_m) , après consolidation des limitations organes (1.11) et (1.17) avec la volonté conducteur (2.6) et (2.7), est donné par :

$$\underline{P}_{th}(P_r, \omega_{th}, \omega_e) \leq P_{th} \leq \overline{P}_{th}(P_r, \omega_{th}, \omega_e) \quad (2.8)$$

$$\underline{P}_e(P_r, \omega_{th}, \omega_e) \leq P_m \leq \overline{P}_e(P_r, \omega_{th}, \omega_e) \quad (2.9)$$

Où, la borne inférieure $\underline{P}_{th}(P_r, \omega_{th}, \omega_e)$ est égale au max entre la borne imposée par les limitations organe (1.11) et celle imposée par la volonté conducteur (2.6). On a alors :

$$\underline{P}_{th}(P_r, \omega_{th}, \omega_e) = \max(\underline{P}_{th}(\omega_{th}), P_r - \overline{P}_e(\omega_e)) = \begin{cases} \underline{P}_{th}(\omega_{th}) & \text{si } \underline{P}_r \leq P_r \leq \underline{P}_{th}(\omega_{th}) + \overline{P}_e(\omega_e) \\ P_r - \overline{P}_e(\omega_e) & \text{si } \underline{P}_{th}(\omega_{th}) + \overline{P}_e(\omega_e) \leq P_r \leq \overline{P}_r \end{cases} \quad (2.10)$$

$$\overline{P}_{th}(P_r, \omega_{th}, \omega_e) = \min(\overline{P}_{th}(\omega_{th}), P_r - \underline{P}_e(\omega_e)) = \begin{cases} \overline{P}_{th}(\omega_{th}) & \text{si } \underline{P}_r \leq P_r \leq \overline{P}_{th}(\omega_{th}) + \underline{P}_e(\omega_e) \\ P_r - \underline{P}_e(\omega_e) & \text{si } \overline{P}_{th}(\omega_{th}) + \underline{P}_e(\omega_e) \leq P_r \leq \overline{P}_r \end{cases} \quad (2.11)$$

De même pour P_m , on a :

$$\underline{P}_e(P_r, \omega_{th}, \omega_e) = \max(\underline{P}_e(\omega_e), P_r - \overline{P}_{th}(\omega_{th})) = \begin{cases} \underline{P}_e(\omega_e) & \text{si } \underline{P}_r \leq P_r \leq \overline{P}_{th}(\omega_{th}) + \underline{P}_e(\omega_e) \\ P_r - \overline{P}_{th}(\omega_{th}) & \text{si } \overline{P}_{th}(\omega_{th}) + \underline{P}_e(\omega_e) \leq P_r \leq \overline{P}_r \end{cases} \quad (2.12)$$

$$\overline{P}_e(P_r, \omega_{th}, \omega_e) = \min(\overline{P}_e(\omega_e), P_r - \underline{P}_{th}(\omega_{th})) = \begin{cases} \overline{P}_e(\omega_e) & \text{si } \underline{P}_r \leq P_r \leq \underline{P}_{th}(\omega_{th}) + \overline{P}_e(\omega_e) \\ P_r - \underline{P}_{th}(\omega_{th}) & \text{si } \underline{P}_{th}(\omega_{th}) + \overline{P}_e(\omega_e) \leq P_r \leq \overline{P}_r \end{cases} \quad (2.13)$$

\underline{P}_r et \overline{P}_r représentent tout le domaine faisable de puissance à la roue, tel que :

$$\underline{P}_r(\omega_{th}, \omega_e) = \underline{P}_{th}(\omega_{th}) + \underline{P}_e(\omega_e) \leq P_r \leq \overline{P}_{th}(\omega_{th}) + \overline{P}_e(\omega_e) = \overline{P}_r(\omega_{th}, \omega_e) \quad (2.14)$$

Dans la suite de cette section, la méthodologie analytique est appliquée sur le problème (2.1). On commencera par le calcul de l'Hamiltonien (étape 2 dans la figure 1.39), puis sa convexité sera étudiée (étape 3 dans la figure 1.39). Par la suite, la commande optimale est calculée en minimisant l'Hamiltonien (étape 4 dans la figure 1.39). Finalement, afin de valider l'approche analytique, les résultats de simulation issus de la méthode analytique seront comparés à ceux de la méthode numérique (étape 5 dans la figure 1.39).

2.1.1 Utilisation du modèle linéaire de la machine électrique

Calcul détaillé de l'Hamiltonien

Dans ce cas, l'expression de l'Hamiltonien est calculée à partir du modèle carburant donné par l'équation (1.12) et du modèle affine de la puissance batterie donné par l'équation (1.23). Ici, P_{th} est choisie comme variable d'optimisation et P_m est déduite de l'équation (2.5). Alors, l'Hamiltonien (2.4) peut s'écrire en fonction de P_{th} sous la forme générale suivante :

$$H(P_{th}, P_r, \lambda) = A_1 P_{th} + A_0 + \lambda(B_1(P_r - P_{th}) + b) \quad (2.15)$$

Afin de déterminer la commande optimale $P_{\text{th}}^{\text{opt}}$, il faut d'abord calculer l'expression de H en fonction de P_{th} . Ceci revient à déterminer A_1 et B_1 en fonction de P_{th} et de P_r comme suit :

$$A_1 = \begin{cases} a_1 & \text{si } P_{\text{th}} \leq P_{\text{lim}} \\ a_2 & \text{si } P_{\text{th}} > P_{\text{lim}} \end{cases}$$

$$A_0 = \begin{cases} Q_0 & \text{si } P_{\text{th}} \leq P_{\text{lim}} \\ Q_{\text{lim}} - a_2 P_{\text{lim}} & \text{si } P_{\text{th}} > P_{\text{lim}} \end{cases}$$

$$B_1 = \begin{cases} a_+ & \text{si } P_{\text{th}} \leq P_r \\ a_- & \text{si } P_{\text{th}} > P_r \end{cases}$$

De plus, comme $\underline{P}_{\text{th}}(P_r)$ et $\overline{P}_{\text{th}}(P_r)$ dépendent de P_r et que l'Hamiltonien dépend de P_{lim} , alors on distinguera les cas suivants :

- $\underline{P}_{\text{th}}(P_r) < P_{\text{lim}}$ ou $\underline{P}_{\text{th}}(P_r) > P_{\text{lim}}$
- $\overline{P}_{\text{th}}(P_r) < P_{\text{lim}}$ ou $\overline{P}_{\text{th}}(P_r) > P_{\text{lim}}$

En prenant en compte les formules de $\underline{P}_{\text{th}}(P_r)$ (2.10) et celle de $\overline{P}_{\text{th}}(P_r)$ (2.11), on en déduit que :

- quand $P_r < \underline{P}_{\text{th}} + \overline{P}_e \rightarrow \underline{P}_{\text{th}}(P_r) = \underline{P}_{\text{th}}$, alors, dans ce cas, $P_{\text{lim}} > \underline{P}_{\text{th}}(P_r) \quad \forall P_r$.
- quand $P_r > \underline{P}_{\text{th}} + \overline{P}_e \rightarrow \underline{P}_{\text{th}}(P_r) = P_r - \overline{P}_e$, alors, dans ce cas :

$$\begin{cases} P_{\text{lim}} < \underline{P}_{\text{th}}(P_r) & \text{quand } P_r > P_{\text{lim}} + \overline{P}_e \\ P_{\text{lim}} > \underline{P}_{\text{th}}(P_r) & \text{quand } P_r < P_{\text{lim}} + \overline{P}_e \end{cases}$$

De même pour comparer P_{lim} à $\overline{P}_{\text{th}}(P_r)$. Ces comparaisons sont résumées par la figure 2.2.

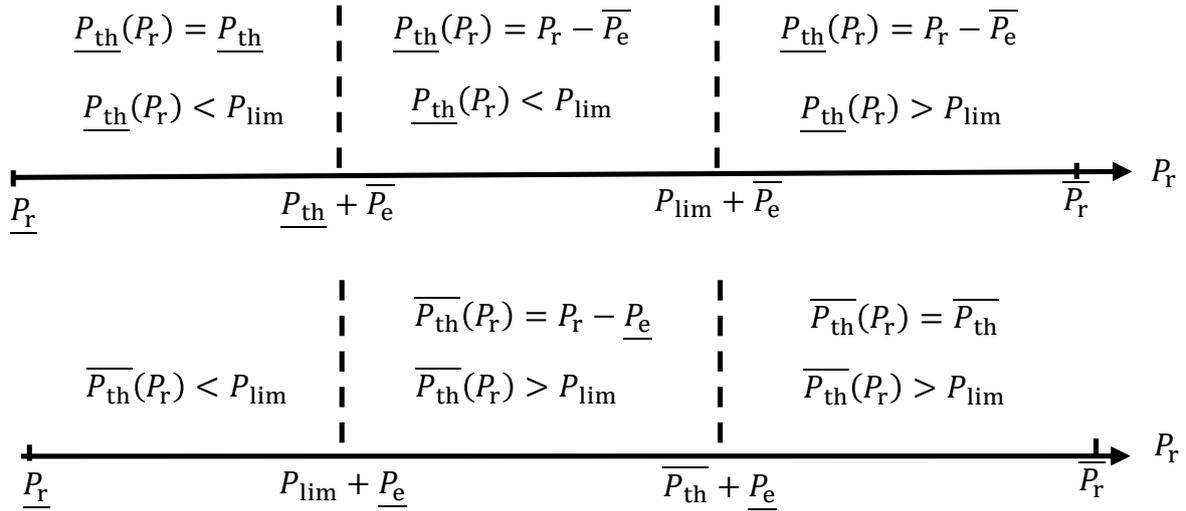


FIGURE 2.2 – Comparaison de P_{lim} par rapport à $\underline{P}_{\text{th}}(P_r)$ (haut) et par rapport à $\overline{P}_{\text{th}}(P_r)$ (bas)

Les tableaux suivants résument tous les cas possibles sur P_r .

$$- \underline{P}_{th} < P_{lim} + \underline{P}_e$$

P_r	\underline{P}_r	\underline{P}_{th}	$P_{lim} + \underline{P}_e$	P_{lim}	$P_{lim} + \overline{P}_e$	\overline{P}_r
Cas	1	2	3	4	5	

$$- \underline{P}_{th} > P_{lim} + \underline{P}_e$$

P_r	\underline{P}_r	$P_{lim} + \underline{P}_e$	\underline{P}_{th}	P_{lim}	$P_{lim} + \overline{P}_e$	\overline{P}_r
Cas	1'	2'	3'	4	5	

Dans la suite du calcul, les intervalles de P_r sont appelés "Cas" et de λ "UC". Pour chaque "UC", tous les "Cas" sont balayés et étudiés. Finalement, l'expression de l'Hamiltonien H selon P_r est donnée par :

Cas 1 (ou 1') : $\underline{P}_r \leq P_r \leq \underline{P}_{th}$ (ou $\underline{P}_r \leq P_r \leq P_{lim} + \underline{P}_e$) Dans ce cas, d'après la figure 2.2, on a : $\underline{P}_{th}(P_r)$ et $\overline{P}_{th}(P_r)$ sont inférieures à P_{lim} . On en déduit que $A_1 = a_1$ et $A_0 = Q_0$. De plus, $P_r < \underline{P}_{th}$, ceci implique que $P_r < P_{th}$. Alors, $P_r - P_{th} = P_m < 0$. On en déduit que $B_1 = a_-$. $H(P_{th})$ est donné par :

$$\frac{P_{th} \mid \underline{P}_{th}}{H} \mid \frac{\overline{P}_{th}(P_r)}{(\mathbf{a}_1 - \lambda \mathbf{a}_-)P_{th} + Q_0 + \lambda(a_-P_r + b)}$$

H est convexe car il est affine.

Cas 2 : $\underline{P}_{th} \leq P_r \leq P_{lim} + \underline{P}_e$ Dans ce cas, d'après la figure 2.2, on a : $\underline{P}_{th}(P_r)$ et $\overline{P}_{th}(P_r)$ sont inférieures à P_{lim} . On en déduit que $A_1 = a_1$ et $A_0 = Q_0$. Concernant B_1 , $P_r > \underline{P}_{th}(P_r)$, on en déduit que : quand $P_r < P_{th}$, alors, $B_1 = a_-$; et quand $P_r > P_{th}$, $B_1 = a_+$. $H(P_{th})$ est donné par :

$$\frac{P_{th} \mid \underline{P}_{th}}{H} \mid \frac{P_r}{(\mathbf{a}_1 - \lambda \mathbf{a}_+)P_{th} + Q_0 + \lambda(a_+P_r + b)} \parallel \frac{\overline{P}_{th}}{(\mathbf{a}_1 - \lambda \mathbf{a}_-)P_{th} + Q_0 + \lambda(a_-P_r + b)}$$

H est convexe car, d'une part, il est affine par morceaux. D'autre part, au point de changement d'équation P_r , la dérivée à gauche de H ($\frac{\partial H^G}{\partial P_{th}} \mid_{P_{th}=P_r} = a_1 - \lambda a_+$) est inférieure à la dérivée à droite de H ($\frac{\partial H^D}{\partial P_{th}} \mid_{P_{th}=P_r} = a_1 - \lambda a_-$). En effet, $a_+ > a_- \Leftrightarrow -a_+ < -a_-$ (hypothèse 7). La même démarche est appliquée sur les cas suivants. Les deux conditions tirées pour que H soit globalement convexe par rapport à P_{th} sont : $a_+ > a_-$ et $a_1 < a_2$ (hypothèse 1).

Cas 2' : $P_{lim} + \underline{P}_e \leq P_r \leq \underline{P}_{th}$ Dans ce cas, d'après la figure 2.2, on a : $\underline{P}_{th}(P_r) < P_{lim}$ et $\overline{P}_{th}(P_r) > P_{lim}$. On en déduit que : $A_1 = a_1$ et $A_0 = Q_0$, quand $\underline{P}_{th} < P_{th} < P_{lim}$; et $A_1 = a_2$ et $A_0 = Q_{lim} - a_2P_{lim}$, quand $P_{lim} < P_{th} < \overline{P}_{th}$. Concernant B_1 , comme $P_r < \underline{P}_{th}(P_r)$, alors, $B_1 = a_-$. $H(P_{th})$ est donné par :

$$\frac{P_{th} \mid \underline{P}_{th}}{H} \mid \frac{P_{lim}}{(\mathbf{a}_1 - \lambda \mathbf{a}_-)P_{th} + Q_0 + \lambda(a_-P_r + b)} \parallel \frac{\overline{P}_{th}}{(\mathbf{a}_2 - \lambda \mathbf{a}_-)P_{th} + Q_{lim} - a_2P_{lim} + \lambda(a_-P_r + b)}$$

Cas 3 (ou 3') : $\mathbf{P}_{\text{lim}} + \underline{\mathbf{P}}_e \leq \mathbf{P}_r \leq \mathbf{P}_{\text{lim}}$ (ou $\underline{\mathbf{P}}_{\text{th}} \leq \mathbf{P}_r \leq \mathbf{P}_{\text{lim}}$) Dans ce cas, d'après la figure 2.2, on a : $\underline{P}_{\text{th}}(P_r) < P_{\text{lim}}$ et $\overline{P}_{\text{th}}(P_r) > P_{\text{lim}}$. On en déduit que : $A_1 = a_1$ et $A_0 = Q_0$, quand $\underline{P}_{\text{th}} < P_{\text{th}} < P_{\text{lim}}$; et $A_1 = a_2$ et $A_0 = Q_{\text{lim}} - a_2 P_{\text{lim}}$, quand $P_{\text{lim}} < P_{\text{th}} < \overline{P}_{\text{th}}$. Concernant B_1 , $P_r > \underline{P}_{\text{th}}(P_r)$, on en déduit que : quand $P_r < P_{\text{th}}$, alors, $B_1 = a_-$; et quand $P_r > P_{\text{th}}$, $B_1 = a_+$. $H(P_{\text{th}})$ est donné par :

$$\begin{array}{c|ccc}
 P_{\text{th}} & \underline{P}_{\text{th}} & P_r & P_{\text{lim}} & \overline{P}_{\text{th}} \\
 \hline
 H & \begin{array}{c} (\mathbf{a}_1 - \lambda \mathbf{a}_+) P_{\text{th}} + Q_0 \\ + \lambda(a_+ P_r + b) \end{array} & \begin{array}{c} (\mathbf{a}_1 - \lambda \mathbf{a}_-) P_{\text{th}} + Q_0 \\ + \lambda(a_- P_r + b) \end{array} & \begin{array}{c} (\mathbf{a}_2 - \lambda \mathbf{a}_-) P_{\text{th}} - a_2 P_{\text{lim}} \\ + Q_{\text{lim}} + \lambda(a_- P_r + b) \end{array} &
 \end{array}$$

Cas 4 : $\mathbf{P}_{\text{lim}} \leq \mathbf{P}_r \leq \mathbf{P}_{\text{lim}} + \overline{\mathbf{P}}_e$ La même démarche que le cas précédent est appliquée pour ce cas. Sauf que, dans ce cas, $P_r > P_{\text{lim}}$, alors, $H(P_{\text{th}})$ est donné par :

$$\begin{array}{c|ccc}
 P_{\text{th}} & \underline{P}_{\text{th}} & P_{\text{lim}} & P_r & \overline{P}_{\text{th}} \\
 \hline
 H & \begin{array}{c} (\mathbf{a}_1 - \lambda \mathbf{a}_+) P_{\text{th}} + Q_0 \\ + \lambda(a_+ P_r + b) \end{array} & \begin{array}{c} (\mathbf{a}_2 - \lambda \mathbf{a}_+) P_{\text{th}} - a_2 P_{\text{lim}} \\ + Q_{\text{lim}} + \lambda(a_+ P_r + b) \end{array} & \begin{array}{c} (\mathbf{a}_2 - \lambda \mathbf{a}_-) P_{\text{th}} - a_2 P_{\text{lim}} \\ + Q_{\text{lim}} + \lambda(a_- P_r + b) \end{array} &
 \end{array}$$

Cas 5 : $\mathbf{P}_{\text{lim}} + \overline{\mathbf{P}}_e \leq \mathbf{P}_r \leq \overline{\mathbf{P}}_r$ Dans ce cas, d'après la figure 2.2, on a : P_{lim} est inférieure à $\underline{P}_{\text{th}}(P_r)$ et à $\overline{P}_{\text{th}}(P_r)$. On en déduit que : $A_1 = a_2$ et $A_0 = Q_{\text{lim}} - a_2 P_{\text{lim}}$. Concernant B_1 , quand $P_r < P_{\text{th}}$, $B_1 = a_-$ et quand $P_r > P_{\text{th}}$, $B_1 = a_+$. $H(P_{\text{th}})$ est donné par :

$$\begin{array}{c|cc}
 P_{\text{th}} & \underline{P}_{\text{th}} & P_r & \overline{P}_{\text{th}} \\
 \hline
 H & \begin{array}{c} (\mathbf{a}_2 - \lambda \mathbf{a}_+) P_{\text{th}} + Q_{\text{lim}} - a_2 P_{\text{lim}} \\ + \lambda(a_+ P_r + b) \end{array} & \begin{array}{c} (\mathbf{a}_2 - \lambda \mathbf{a}_-) P_{\text{th}} + Q_{\text{lim}} - a_2 P_{\text{lim}} \\ + \lambda(a_- P_r + b) \end{array} &
 \end{array}$$

Calcul de la commande optimale $P_{\text{th}}^{\text{opt}}$

Le paragraphe précédent montre que H est une fonction continue et affine par morceaux en fonction de P_{th} . Afin de trouver le minimum de H , il faut donc analyser son sens de variation par rapport à P_{th} en étudiant le signe de ses pentes qui dépendent de λ . En prenant en compte les hypothèses 1 et 7, où on suppose que $a_1 < a_2$ et $a_- < a_+$, nous avons les conditions suivantes : $\frac{a_1}{a_+} < \frac{a_1}{a_-}$, $\frac{a_2}{a_+} < \frac{a_2}{a_-}$, $\frac{a_1}{a_+} < \frac{a_2}{a_+}$ et $\frac{a_1}{a_-} < \frac{a_1}{a_-}$.

Alors, tous les cas possibles du signe des pentes de H (en couleur rouge dans les tableaux précédents) peuvent être résumés dans les tableaux suivants :

— Si $\frac{a_1}{a_-} < \frac{a_2}{a_+}$

λ	0	$\frac{a_1}{a_+}$	$\frac{a_1}{a_-}$	$\frac{a_2}{a_+}$	$\frac{a_2}{a_-}$	$+\infty$
Pente de H	UC1	UC2	UC3	UC4	UC5	
$\mathbf{a}_1 - \lambda \mathbf{a}_-$	+	+	0	-	-	-
$\mathbf{a}_1 - \lambda \mathbf{a}_+$	+	0	-	-	-	-
$\mathbf{a}_2 - \lambda \mathbf{a}_-$	+	+	+	+	0	-
$\mathbf{a}_2 - \lambda \mathbf{a}_+$	+	+	+	0	-	-

(2.16)

— Si $\frac{a_1}{a_-} > \frac{a_2}{a_+}$

λ	0	$\frac{a_1}{a_+}$	$\frac{a_2}{a_+}$	$\frac{a_1}{a_-}$	$\frac{a_2}{a_-}$	$+\infty$
Pente de H	UC1	UC2'	UC3'	UC4'	UC5	
$a_1 - \lambda a_-$	+	+	+	0	-	-
$a_1 - \lambda a_+$	+	0	-	-	-	-
$a_2 - \lambda a_-$	+	+	+	+	0	-
$a_2 - \lambda a_+$	+	+	0	-	-	-

(2.17)

Dans ce qui suit, la puissance optimale P_{th}^{opt} est calculée pour tous les cas cités ci-dessus.

UC1 (ou UC1') : Dans ce cas, toutes les pentes de H sont positives. H est donc croissant en fonction de P_{th} quelque soit P_r , ce qui implique :

$$P_{th}^{opt} = \underline{P}_{th}(P_r) \quad (2.18)$$

En prenant en compte l'expression de $\underline{P}_{th}(P_r)$ donnée par (2.10), on obtient :

Cas sur P_r			P_{th}^{opt}
$\frac{\underline{P}_r}{\underline{P}_{th} + \overline{P}_e} \leq P_r \leq \frac{\underline{P}_{th} + \overline{P}_e}{\underline{P}_r}$			$\frac{\underline{P}_{th}}{P_r - \overline{P}_e}$

UC2 (ou UC2') : Dans ce cas, la pente $a_1 - \lambda a_+$ est négative et les pentes $a_1 - \lambda a_-$, $a_2 - \lambda a_+$, $a_2 - \lambda a_-$ sont positives. Alors, P_{th}^{opt} est déterminée comme le montre la figure 2.3.

Pour UC2 et UC2', P_{th}^{opt} est donnée en fonction de P_r par :

Cas sur P_r			P_{th}^{opt}	figure
$\frac{\underline{P}_r}{\underline{P}_{th}} \leq P_r \leq \frac{\underline{P}_{th}}{P_r}$			\underline{P}_{th}	2.3.(a)
$\frac{\underline{P}_{th}}{P_r} \leq P_r \leq \frac{P_{lim}}{P_r}$			P_r	2.3.(b) et (c)
$\frac{P_{lim}}{P_r} \leq P_r \leq \frac{P_{lim} + \overline{P}_e}{P_r}$			P_{lim}	2.3.(d)
$\frac{P_{lim} + \overline{P}_e}{P_r} \leq P_r \leq \frac{\overline{P}_r}{P_r}$			$P_r - \overline{P}_e$	2.3.(e)

UC3 : Dans ce cas, les pentes $a_1 - \lambda a_+$, $a_1 - \lambda a_-$ sont négatives et les pentes $a_2 - \lambda a_+$, $a_2 - \lambda a_-$ sont positives. Alors, P_{th}^{opt} est déterminée comme le montre la figure 2.4.

Pour UC3, P_{th}^{opt} est donnée en fonction de P_r par :

Cas sur P_r			P_{th}^{opt}	figure
$\frac{\underline{P}_r}{P_{lim} + \overline{P}_e} \leq P_r \leq \frac{P_{lim} + \overline{P}_e}{P_r}$			$P_r - \overline{P}_e$	2.4.(a) et (b)
$\frac{P_{lim} + \overline{P}_e}{P_r} \leq P_r \leq \frac{P_{lim} + \overline{P}_e}{P_r}$			P_{lim}	2.4.(c) et (d)
$\frac{P_{lim} + \overline{P}_e}{P_r} \leq P_r \leq \frac{\overline{P}_r}{P_r}$			$P_r - \overline{P}_e$	2.4.(e)

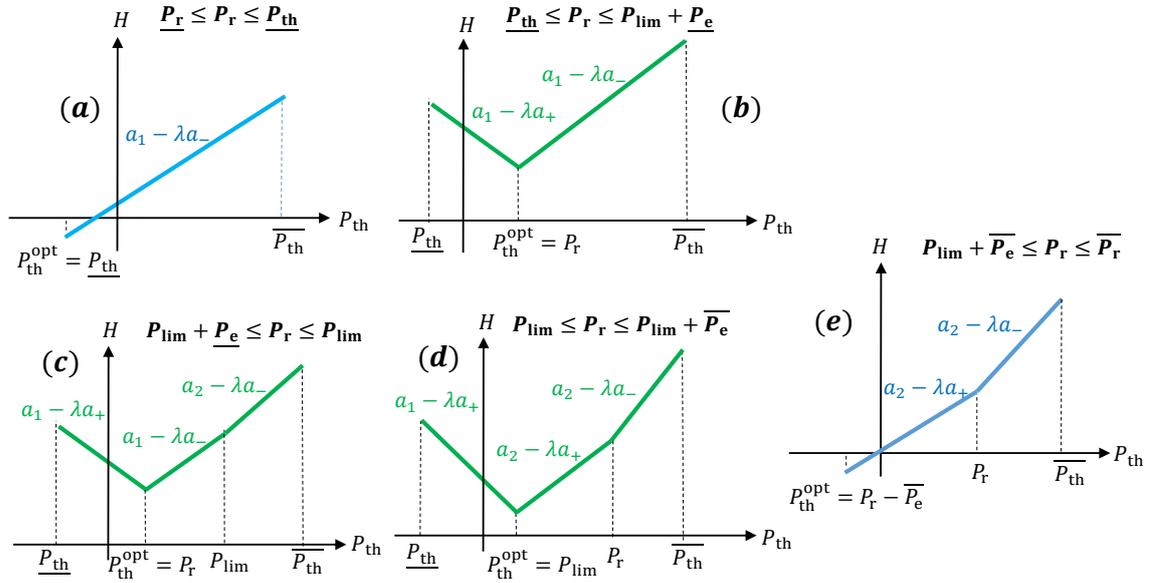


FIGURE 2.3 – Détermination de P_{th}^{opt} selon le sens de variation de H pour UC2 et UC2'

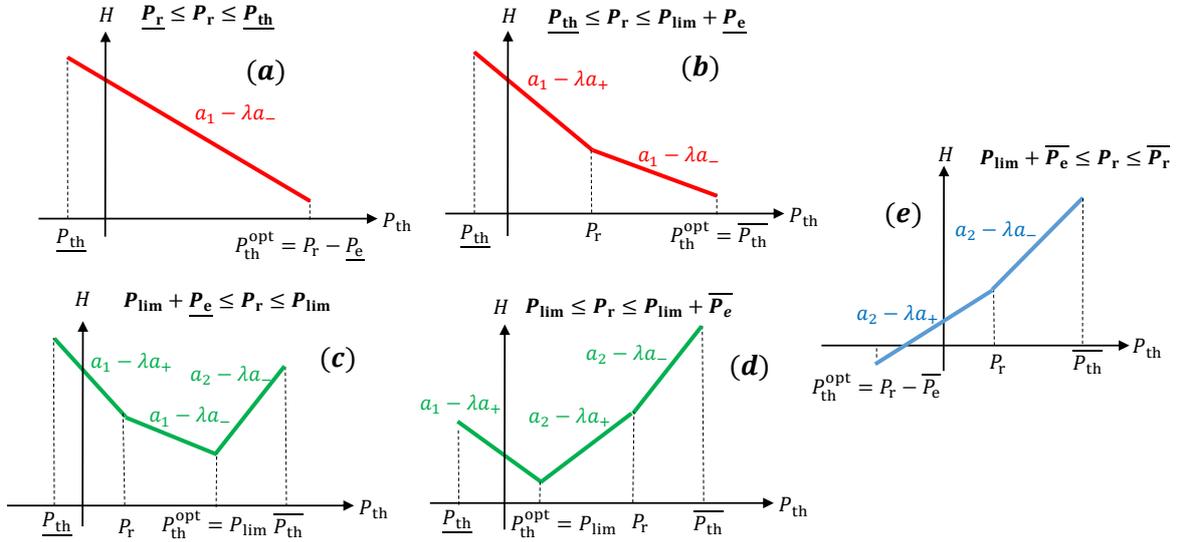


FIGURE 2.4 – Détermination de P_{th}^{opt} selon le sens de variation de H pour UC3

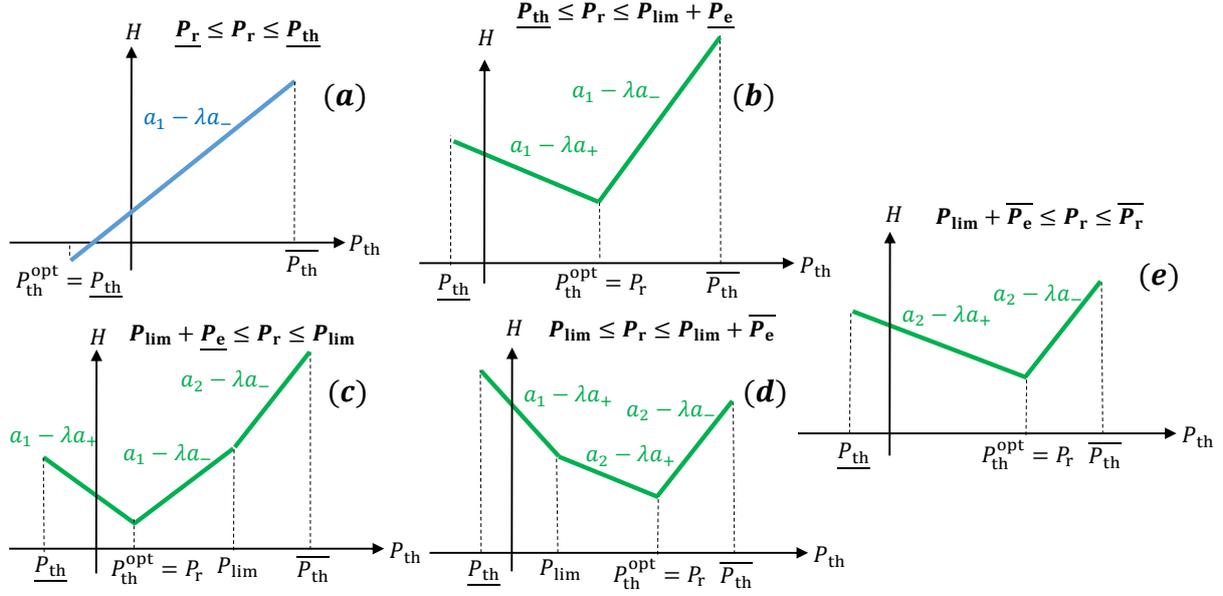


FIGURE 2.5 – Détermination de P_{th}^{opt} selon le sens de variation de H pour UC3'

UC3' : Dans ce cas, les pentes $a_1 - \lambda a_+$, $a_2 - \lambda a_+$ sont négatives et les pentes $a_1 - \lambda a_-$, $a_2 - \lambda a_-$ sont positives. Alors, P_{th}^{opt} est déterminée comme le montre la figure 2.5. Pour UC3', P_{th}^{opt} est donnée en fonction de P_r par :

Cas sur P_r		P_{th}^{opt}	figure
\underline{P}_r	$\leq P_r \leq \underline{P}_{th}$	\underline{P}_{th}	2.5.(a)
\underline{P}_{th}	$\leq P_r \leq \overline{P}_{th}$	P_r	2.5.(b), (c), (d) et (e)
\overline{P}_{th}	$\leq P_r \leq \overline{P}_r$	\overline{P}_{th}	

UC4 (ou UC4') : Dans ce cas, les pentes $a_1 - \lambda a_+$, $a_2 - \lambda a_+$, $a_1 - \lambda a_-$ sont négatives et la pente $a_2 - \lambda a_-$ est positive. Alors, P_{th}^{opt} est déterminée comme le montre la figure 2.6.

Pour UC4 et UC4', P_{th}^{opt} est donnée en fonction de P_r par :

Cas sur P_r		P_{th}^{opt}	figure
\underline{P}_r	$\leq P_r \leq P_{lim} + \underline{P}_e$	$P_r - \underline{P}_e$	2.6.(a) et (b)
$P_{lim} + \underline{P}_e$	$\leq P_r \leq P_{lim}$	P_{lim}	2.6.(c)
P_{lim}	$\leq P_r \leq \overline{P}_{th}$	P_r	2.6.(d) et (e)
\overline{P}_{th}	$\leq P_r \leq \overline{P}_r$	\overline{P}_{th}	

UC5 : Dans ce cas, toutes les pentes de H sont négatives. H est donc décroissant en fonction de P_{th} quelque soit P_r , ce qui signifie que :

$$P_{th}^{opt} = \overline{P}_{th}(P_r) \quad (2.19)$$

En prenant en compte l'expression de $\overline{P}_{th}(P_r)$ (2.11), on obtient :

Cas sur P_r		P_{th}^{opt}
\underline{P}_r	$\leq P_r \leq \overline{P}_{th} + \underline{P}_e$	$P_r - \underline{P}_e$
$\overline{P}_{th} + \underline{P}_e$	$\leq P_r \leq \overline{P}_r$	\overline{P}_{th}

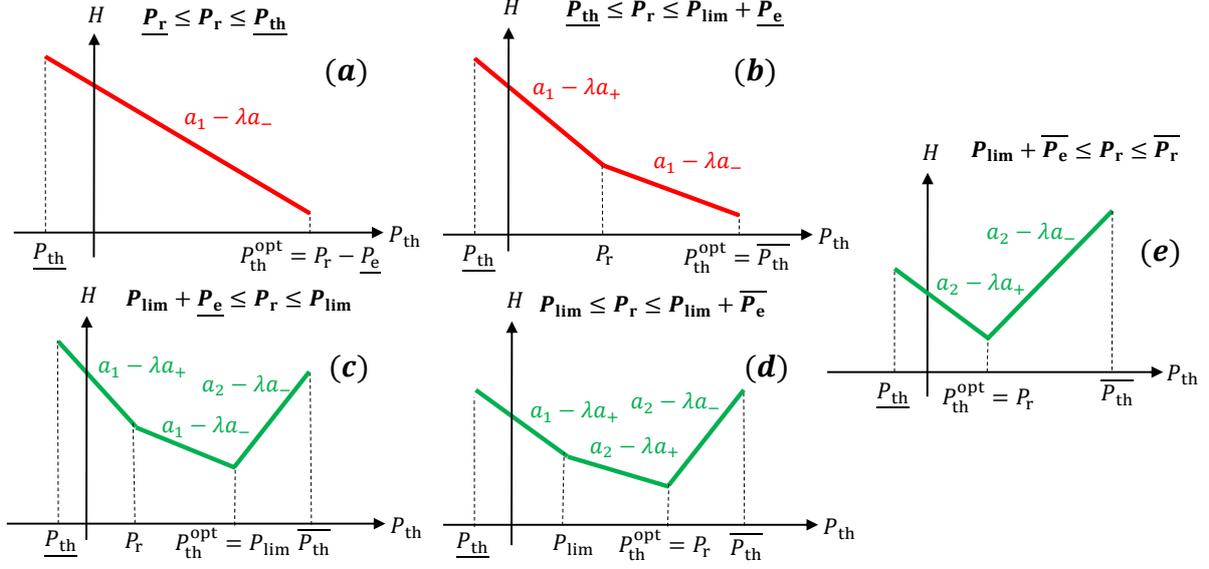


FIGURE 2.6 – Détermination de P_{th}^{opt} selon le sens de variation de H pour UC4 et UC4'

2.1.2 Utilisation du modèle quadratique de la machine électrique

La même démarche présentée dans la section précédente est appliquée pour l'optimisation de la répartition de puissance en utilisant le modèle quadratique (1.22) de la machine électrique.

Calcul détaillé de l'Hamiltonien

Dans ce paragraphe, l'expression de l'Hamiltonien est calculée à partir du modèle carburant donné par l'équation (1.12) et le modèle quadratique de la puissance batterie donné par l'équation (1.22). Ici, P_m est choisie comme variable d'optimisation et P_{th} est déduite de l'équation (2.5). Alors, l'Hamiltonien peut s'écrire en fonction de P_m sous la forme générale suivante :

$$H(P_m, P_r, \lambda) = A_1(P_r - P_m) + A_0 + \lambda(B_2 P_m^2 + B_1 P_m + b_0) \quad (2.20)$$

Afin de déterminer la commande optimale P_m^{opt} , il faudrait calculer l'expression de H en fonction de P_m . Ceci revient à déterminer A_1 , B_1 et B_2 en fonction de P_m et de P_r , tels quel :

$$A_1 = \begin{cases} a_1 & \text{si } P_m > P_r - P_{lim} \\ a_2 & \text{si } P_m \leq P_r - P_{lim} \end{cases}$$

$$A_0 = \begin{cases} Q_0 & \text{si } P_m > P_r - P_{lim} \\ Q_{lim} - a_2 P_{lim} & \text{si } P_m \leq P_r - P_{lim} \end{cases}$$

$$B_1 = \begin{cases} b_1^- & \text{si } P_m \leq 0 \\ b_1^+ & \text{si } P_m > 0 \end{cases}$$

$$B_2 = \begin{cases} b_2^- & \text{si } P_m \leq 0 \\ b_2^+ & \text{si } P_m > 0 \end{cases}$$

En suivant la même démarche expliquée pour le cas linéaire, les expressions de l'Hamiltonien en fonction de P_m et P_r sont données dans le cas quadratique par :

Cas 1 : $\underline{P}_r \leq P_r \leq \underline{P}_{th}$

Dans ce cas, $P_r - \underline{P}_{th} \leq 0$ et $P_r - P_{lim} \leq 0$. On a alors :

P_m	\underline{P}_e	$P_r - P_{lim}$	$P_r - \underline{P}_{th}$	0	\overline{P}_e
H	$\lambda b_2^- P_m^2$	$\lambda b_2^- P_m^2$	$\lambda b_2^- P_m^2$	$\lambda b_2^+ P_m^2$	$\lambda b_2^+ P_m^2$
	$+(\lambda b_1^- - a_2)P_m$	$+(\lambda b_1^- - a_1)P_m$	$+\lambda b_1^- P_m$	$+\lambda b_1^+ P_m$	$+\lambda b_1^+ P_m$
	$+a_2(P_r - P_{lim})$	$+Q_0 + \lambda b_0$	$+\lambda b_0$	$+\lambda b_0$	$+\lambda b_0$
	$+Q_{lim} + \lambda b_0$				

H est convexe car d'une part il est composé par des morceaux quadratiques au coefficient du second degré positif ($b_2^\pm > 0$ hypothèse 5). D'autre part, la condition du premier ordre de convexité est vérifiée aux points de changement d'équation. En effet, à :

- (1) $P_m = P_r - P_{lim}$, $\frac{\partial H^G}{\partial P_m} |_{P_m=P_r-P_{lim}} < \frac{\partial H^D}{\partial P_m} |_{P_m=P_r-P_{lim}}$ car $a_1 < a_2$ (hypothèse 1).
- (2) $P_m = P_r - \underline{P}_{th}$, $\frac{\partial H^G}{\partial P_m} |_{P_m=P_r-\underline{P}_{th}} < \frac{\partial H^D}{\partial P_m} |_{P_m=P_r-\underline{P}_{th}}$ car $a_1 > 0$ (hypothèse 1).
- (3) $P_m = 0$, $\frac{\partial H^G}{\partial P_m} |_{P_m=0} = \frac{\partial H^D}{\partial P_m} |_{P_m=0}$.

La même étude de convexité de H est appliquée sur les cas suivants.

Cas 2 : $\underline{P}_{th} \leq P_r \leq P_{lim}$

Dans ce cas, $P_r - \underline{P}_{th} \geq 0$ et $P_r - P_{lim} \leq 0$. On a alors :

P_m	\underline{P}_e	$P_r - P_{lim}$	0	$P_r - \underline{P}_{th}$	\overline{P}_e
H	$\lambda b_2^- P_m^2$	$\lambda b_2^- P_m^2$	$\lambda b_2^+ P_m^2$	$\lambda b_2^+ P_m^2$	$\lambda b_2^+ P_m^2$
	$+(\lambda b_1^- - a_2)P_m$	$+(\lambda b_1^- - a_1)P_m$	$+(\lambda b_1^+ - a_1)P_m$	$+(\lambda b_1^+ - a_1)P_m$	$\lambda b_1^+ P_m$
	$+a_2(P_r - P_{lim})$	$+Q_0 + \lambda b_0$	$+Q_0 + \lambda b_0$	$+Q_0 + \lambda b_0$	$+\lambda b_0$
	$+Q_{lim} + \lambda b_0$				

Cas 3 : $P_{lim} \leq P_r \leq \overline{P}_r$

Dans ce cas, $P_r - \underline{P}_{th} \geq 0$ et $P_r - P_{lim} \geq 0$. On a alors :

P_m	\underline{P}_e	0	$P_r - P_{lim}$	$P_r - \underline{P}_{th}$	\overline{P}_e
H	$\lambda b_2^- P_m^2$	$\lambda b_2^+ P_m^2$	$\lambda b_2^+ P_m^2$	$\lambda b_2^+ P_m^2$	$\lambda b_2^+ P_m^2$
	$+(\lambda b_1^- - a_2)P_m$	$+(\lambda b_1^+ - a_2)P_m$	$+(\lambda b_1^+ - a_1)P_m$	$+(\lambda b_1^+ - a_1)P_m$	$+\lambda b_1^+ P_m$
	$+a_2(P_r - P_{lim})$	$+a_2(P_r - P_{lim})$	$+Q_0 + \lambda b_0$	$+Q_0 + \lambda b_0$	$+\lambda b_0$
	$+Q_{lim} + \lambda b_0$	$+Q_{lim} + \lambda b_0$			

Calcul de la commande optimale P_m^{opt}

On constate que l'Hamiltonien est une fonction continue et convexe sous les conditions : $b_1^- < b_1^+$, $0 < a_1 < a_2$. Ces conditions ont été vérifiées dans le chapitre 1. En prenant en compte les contraintes $\underline{P}_e(P_r)$ et $\overline{P}_e(P_r)$, nous déduisons la décomposition selon P_r représentée par les tableaux suivants :

— Si $-\frac{b_1^-}{2b_2} > \underline{P}_e$

— Si $\underline{P}_{\text{th}} - \frac{b_1^-}{2b_2} < P_{\text{lim}} + \underline{P}_e < \underline{P}_{\text{th}}$

P_r	\underline{P}_r	$\underline{P}_{\text{th}} - \frac{b_1^-}{2b_2}$	$P_{\text{lim}} + \underline{P}_e$	$\underline{P}_{\text{th}}$	P_{lim}	$P_{\text{lim}} + \overline{P}_e$	\overline{P}_r	
Cas	1.a		2.a		2.b	3.a	4	5

— Si $\underline{P}_{\text{th}} - \frac{b_1^-}{2b_2} > P_{\text{lim}} + \underline{P}_e$

P_r	\underline{P}_r	$P_{\text{lim}} + \underline{P}_e$	$\underline{P}_{\text{th}}$	P_{lim}	$P_{\text{lim}} + \overline{P}_e$	\overline{P}_r
Cas	1.b		2.b	3.a	4	5

— Si $\underline{P}_{\text{th}} < P_{\text{lim}} + \underline{P}_e$

P_r	\underline{P}_r	$\underline{P}_{\text{th}} - \frac{b_1^-}{2b_2}$	$\underline{P}_{\text{th}}$	$P_{\text{lim}} + \underline{P}_e$	P_{lim}	$P_{\text{lim}} + \overline{P}_e$	\overline{P}_r	
Cas	1.a		2.c	2.d		3.b	4	5

— Si $-\frac{b_1^-}{2b_2} \leq \underline{P}_e$

— Si $P_{\text{lim}} + \underline{P}_e < \underline{P}_{\text{th}}$

P_r	\underline{P}_r	$P_{\text{lim}} + \underline{P}_e$	$\underline{P}_{\text{th}}$	P_{lim}	$P_{\text{lim}} + \overline{P}_e$	\overline{P}_r
Cas	1.b		2.b	3.a	4	5

— Si $P_{\text{lim}} + \underline{P}_e > \underline{P}_{\text{th}}$

P_r	\underline{P}_r	$\underline{P}_{\text{th}}$	$P_{\text{lim}} + \underline{P}_e$	P_{lim}	$P_{\text{lim}} + \overline{P}_e$	\overline{P}_r
Cas	1.c	2.d		3.b	4	5

Dans ce qui suit, la puissance optimale P_m^{opt} est calculée pour tous les cas cités ci-dessus.

UC1.a : Selon la figure 2.7, $\forall \lambda$, P_m^{opt} est égale à :

$$P_m^{\text{opt}} = -\frac{b_1^-}{2b_2} \quad (2.21)$$

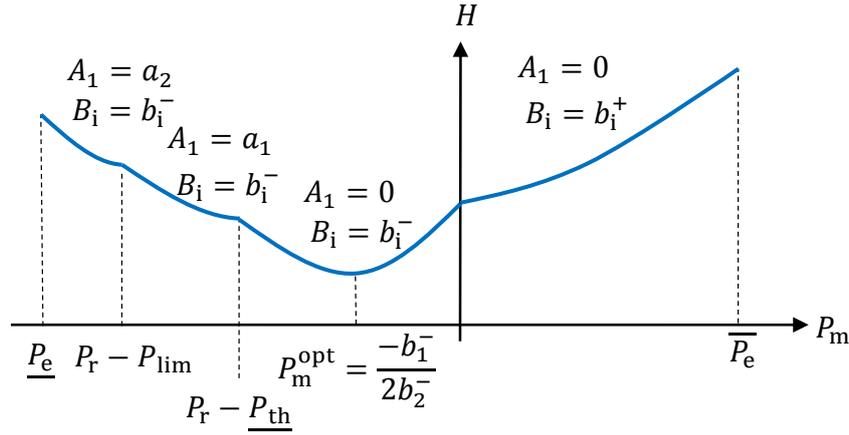


FIGURE 2.7 – Détermination de P_m^{opt} selon le sens de variation de H pour UC1.a

UC1.b, UC1.c et UC2.a : Dans ces cas, $P_r - \underline{P}_{\text{th}} < 0$ et $P_r - P_{\text{lim}} < \underline{P}_e$.

L'extremum $\frac{a_1 - \lambda b_1^-}{2\lambda b_2^-}$ est l'optimum si et seulement s'il vérifie les conditions suivantes :

$\underline{P}_e(P_r) \leq \frac{a_1 - \lambda b_1^-}{2\lambda b_2^-} \leq \bar{P}_e(P_r)$. Ce qui équivaut à : $\lambda_{\min}^{1-} \leq \lambda \leq \lambda_{\max}^{1-}$, où, λ_{\min}^{1-} et λ_{\max}^{1-} sont les solutions des équations suivantes :

- (1) $\frac{a_1 - \lambda b_1^-}{2\lambda b_2^-} = \bar{P}_e(P_r) \Leftrightarrow \lambda = \lambda_{\min}^{1-} = \frac{a_1}{2\bar{P}_e(P_r)b_2^- + b_1^-}$
- (2) $\frac{a_1 - \lambda b_1^-}{2\lambda b_2^-} = \underline{P}_e(P_r) \Leftrightarrow \lambda = \lambda_{\max}^{1-} = \frac{a_1}{2\underline{P}_e(P_r)b_2^- + b_1^-}$

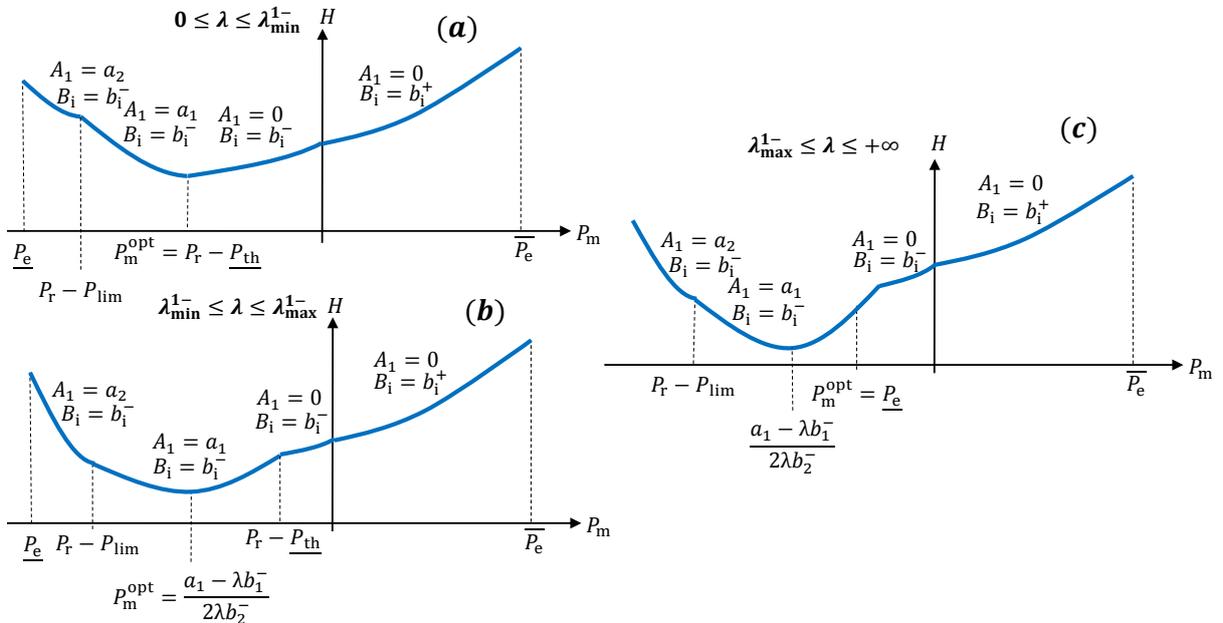


FIGURE 2.8 – Détermination de P_m^{opt} selon le sens de variation de H pour UC1.b, UC1.c et UC2.a

Comme le montre la figure 2.8, P_m^{opt} est donnée en fonction de P_r et λ comme suit :

Cas sur λ			P_m^{opt}	figure
0	$\leq \lambda \leq$	λ_{\min}^{1-}	$\overline{P}_e(P_r)$	2.8.(a)
λ_{\min}^{1-}	$\leq \lambda \leq$	λ_{\max}^{1-}	$\frac{a_1 - \lambda b_1^-}{2\lambda b_2^-}$	2.8.(b)
λ_{\max}^{1-}	$\leq \lambda \leq$	$+\infty$	$\underline{P}_e(P_r)$	2.8.(c)

UC2.b et UC2.c : Dans ces cas, $P_r - \underline{P}_{\text{th}} < 0$ et $\underline{P}_e < P_r - P_{\text{lim}} < 0$.

L'extremum $\frac{a_1 - \lambda b_1^-}{2\lambda b_2^-}$ est l'optimum si et seulement s'il vérifie les conditions suivantes :

$P_r - P_{\text{lim}} \leq \frac{a_1 - \lambda b_1^-}{2\lambda b_2^-} \leq \overline{P}_e(P_r)$. Ce qui équivaut à : $\lambda_{\min}^{1-} \leq \lambda \leq \lambda_{\max}^{1-}$, où, λ_{\min}^{1-} et λ_{\max}^{1-} sont les solutions des équations suivantes :

$$(1) \frac{a_1 - \lambda b_1^-}{2\lambda b_2^-} = \overline{P}_e(P_r) \Leftrightarrow \lambda = \lambda_{\min}^{1-} = \frac{a_1}{2\overline{P}_e(P_r)b_2^- + b_1^-}$$

$$(2) \frac{a_1 - \lambda b_1^-}{2\lambda b_2^-} = \underline{P}_e(P_r) \Leftrightarrow \lambda = \lambda_{\max}^{1-} = \frac{a_1}{2\underline{P}_e(P_r)b_2^- + b_1^-}$$

L'extremum $\frac{a_2 - \lambda b_1^-}{2\lambda b_2^-}$ est l'optimum si et seulement s'il vérifie les conditions suivantes :

$\underline{P}_e(P_r) \leq \frac{a_2 - \lambda b_1^-}{2\lambda b_2^-} \leq P_r - P_{\text{lim}}$. Ce qui équivaut à : $\lambda_{\text{lim}}^{2-} \leq \lambda \leq \lambda_{\max}^{2-}$, où, $\lambda_{\text{lim}}^{2-}$ et λ_{\max}^{2-} sont les solutions des équations suivantes :

$$(1) \frac{a_2 - \lambda b_1^-}{2\lambda b_2^-} = (P_r - P_{\text{lim}}) \Leftrightarrow \lambda = \lambda_{\text{lim}}^{2-} = \frac{a_2}{2(P_r - P_{\text{lim}})b_2^- + b_1^-}$$

$$(2) \frac{a_2 - \lambda b_1^-}{2\lambda b_2^-} = \underline{P}_e(P_r) \Leftrightarrow \lambda = \lambda_{\max}^{2-} = \frac{a_2}{2\underline{P}_e(P_r)b_2^- + b_1^-}$$

Comme le montre la figure 2.9, P_m^{opt} est donnée en fonction de P_r et λ comme suit :

Cas sur λ			P_m^{opt}	figure
0	$\leq \lambda \leq$	λ_{\min}^{1-}	$\overline{P}_e(P_r)$	2.9.(a)
λ_{\min}^{1-}	$\leq \lambda \leq$	$\lambda_{\text{lim}}^{1-}$	$\frac{a_1 - \lambda b_1^-}{2\lambda b_2^-}$	2.9.(b)
$\lambda_{\text{lim}}^{1-}$	$\leq \lambda \leq$	$\lambda_{\text{lim}}^{2-}$	$P_r - P_{\text{lim}}$	2.9.(c)
$\lambda_{\text{lim}}^{2-}$	$\leq \lambda \leq$	λ_{\max}^{2-}	$\frac{a_2 - \lambda b_1^-}{2\lambda b_2^-}$	2.9.(d)
λ_{\max}^{2-}	$\leq \lambda \leq$	$+\infty$	$\underline{P}_e(P_r)$	2.9.(e)

UC2.d : Dans ces cas, $P_r - \underline{P}_{\text{th}} > 0$ et $P_r - P_{\text{lim}} < \underline{P}_e$.

L'extremum $\frac{a_1 - \lambda b_1^-}{2\lambda b_2^-}$ est l'optimum si et seulement s'il vérifie les conditions suivantes :

$\underline{P}_e(P_r) \leq \frac{a_1 - \lambda b_1^-}{2\lambda b_2^-} \leq 0$. Ce qui équivaut à : $\frac{a_1}{b_1} \leq \lambda \leq \lambda_{\max}^{1-}$, où, $\frac{a_1}{b_1}$ et λ_{\max}^{1-} sont les solutions des équations suivantes :

$$(1) \frac{a_1 - \lambda b_1^-}{2\lambda b_2^-} = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{a_1}{b_1}$$

$$(2) \frac{a_1 - \lambda b_1^-}{2\lambda b_2^-} = \underline{P}_e(P_r) \Leftrightarrow \lambda = \lambda_{\max}^{1-} = \frac{a_1}{2\underline{P}_e(P_r)b_2^- + b_1^-}$$

L'extremum $\frac{a_1 - \lambda b_1^+}{2\lambda b_2^+}$ est l'optimum si et seulement s'il vérifie les conditions suivantes :

$0 \leq \frac{a_1 - \lambda b_1^+}{2\lambda b_2^+} \leq \overline{P}_e(P_r)$. Ce qui équivaut à : $\lambda_{\min}^{1+} \leq \lambda \leq \frac{a_1}{b_1^+}$, où, λ_{\min}^{1+} et $\frac{a_1}{b_1^+}$ sont les solutions des équations suivantes :

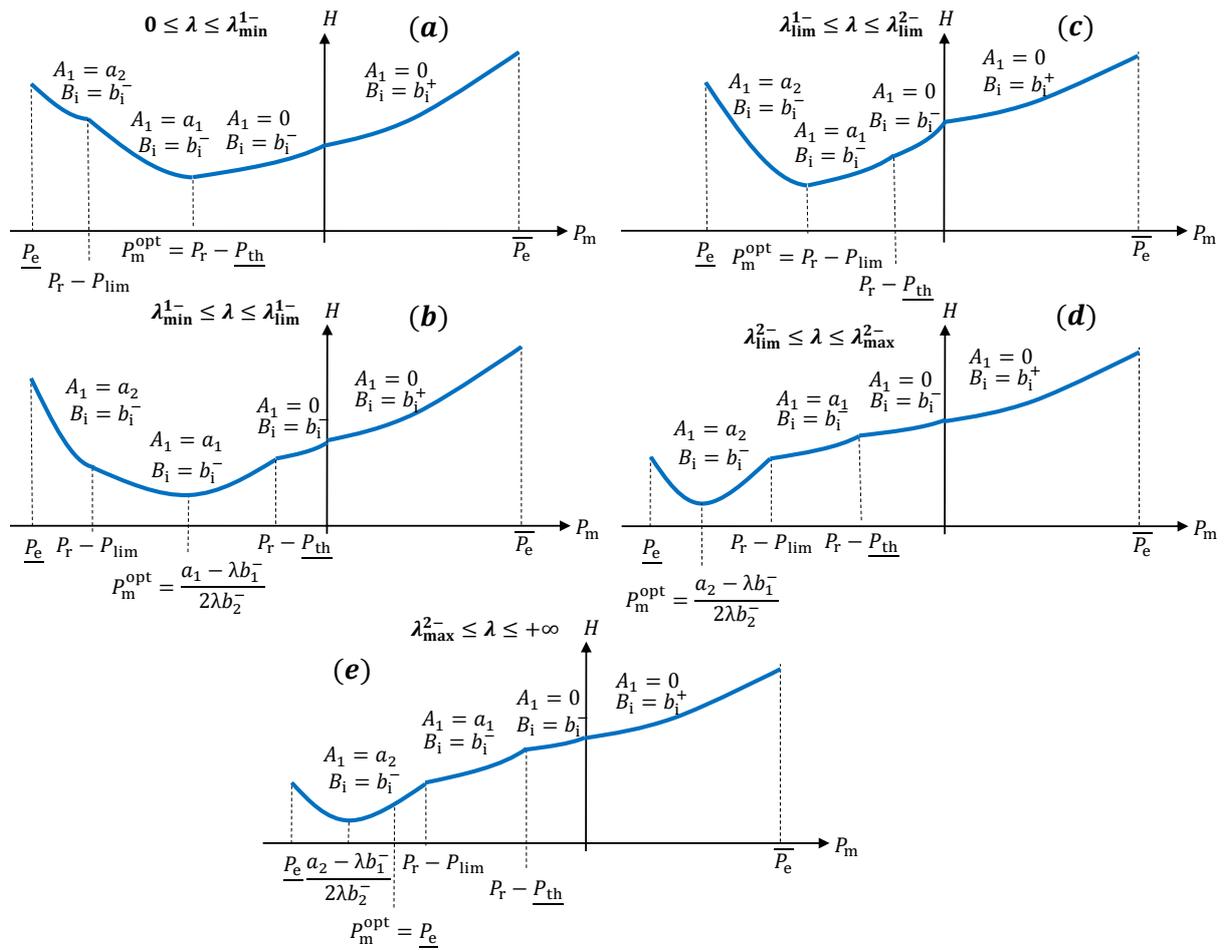


FIGURE 2.9 – Détermination de P_m^{opt} selon le sens de variation de H pour UC2.b et UC2.c

$$(1) \frac{a_1 - \lambda b_1^+}{2\lambda b_2^+} = \bar{P}_e(P_r) \Leftrightarrow \lambda = \lambda_{\min}^{1+} = \frac{a_1}{2\bar{P}_e(P_r)b_2^+ + b_1^+}$$

$$(2) \frac{a_1 - \lambda b_1^+}{2\lambda b_2^+} = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{a_1}{b_1^+}$$

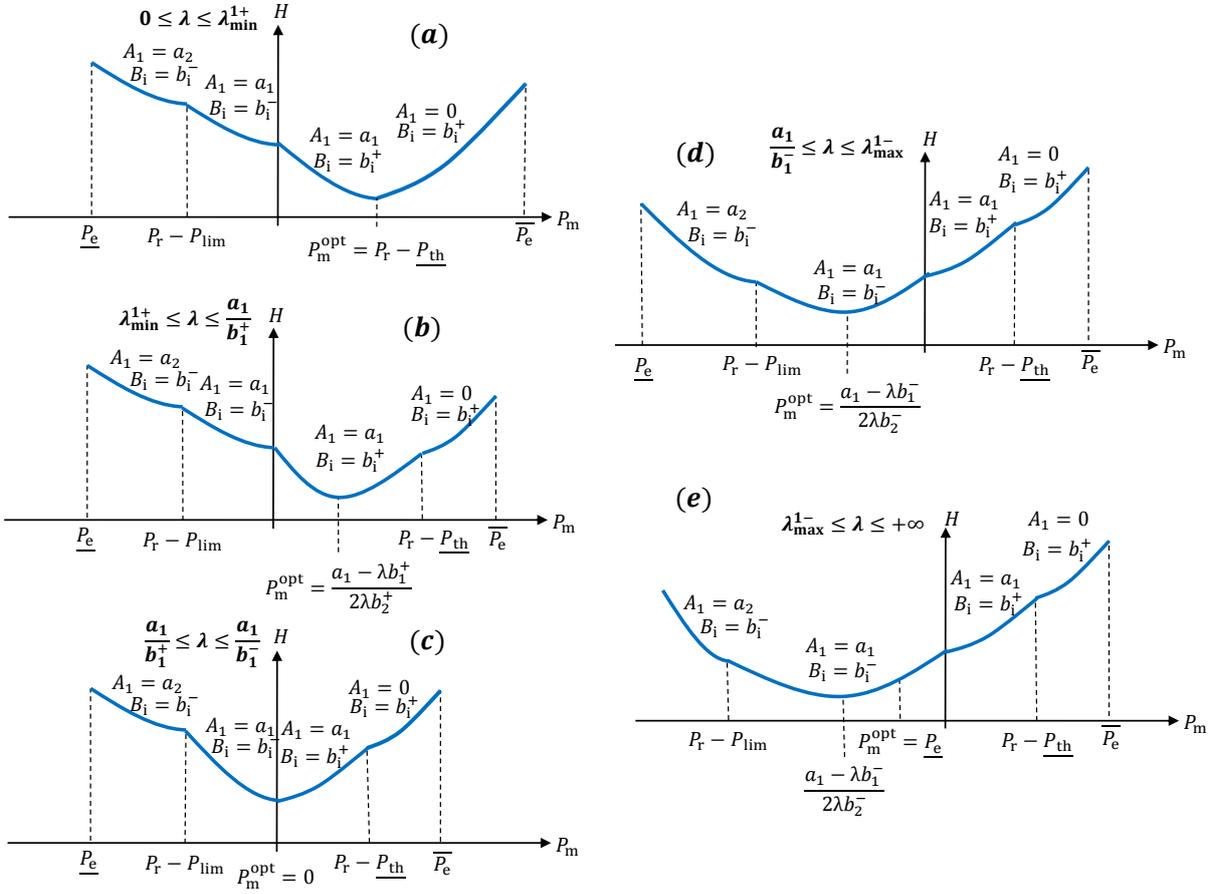


FIGURE 2.10 – Détermination de P_m^{opt} selon le sens de variation de H pour UC2.d

Selon la figure 2.10, P_m^{opt} est donnée en fonction de P_r et λ comme suit :

Cas sur λ		P_m^{opt}	figure
0	$\leq \lambda \leq \lambda_{\min}^{1+}$	$\bar{P}_e(P_r)$	2.10.(a)
λ_{\min}^{1+}	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{b_1^+}$	$\frac{a_1 - \lambda b_1^+}{2\lambda b_2^+}$	2.10.(b)
$\frac{a_1}{b_1^+}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{b_1^-}$	0	2.10.(c)
$\frac{a_1}{b_1^-}$	$\leq \lambda \leq \lambda_{\max}^{1-}$	$\frac{a_1 - \lambda b_1^-}{2\lambda b_2^-}$	2.10.(d)
λ_{\max}^{1-}	$\leq \lambda \leq +\infty$	$\bar{P}_e(P_r)$	2.10.(e)

UC3.a et UC3.b : Dans ces cas, $P_r - \underline{P}_{\text{th}} > 0$ et $\underline{P}_e < P_r - P_{\text{lim}} < 0$.

L'extremum $\frac{a_2 - \lambda b_1^-}{2\lambda b_2^-}$ est l'optimum si et seulement s'il vérifie les conditions suivantes :

$\underline{P}_e(P_r) \leq \frac{a_2 - \lambda b_1^-}{2\lambda b_2^-} \leq P_r - P_{\text{lim}}$. Ce qui équivaut à : $\lambda_{\text{lim}}^{2-} \leq \lambda \leq \lambda_{\text{max}}^{2-}$, où, $\lambda_{\text{lim}}^{2-}$ et $\lambda_{\text{max}}^{2-}$ sont

les solutions des équations suivantes :

$$(1) \frac{a_2 - \lambda b_1^-}{2\lambda b_2^-} = (P_r - P_{\text{lim}}) \Leftrightarrow \lambda = \lambda_{\text{lim}}^{2-} = \frac{a_2}{2(P_r - P_{\text{lim}})b_2^- + b_1^-}$$

$$(2) \frac{a_2 - \lambda b_1^-}{2\lambda b_2^-} = \underline{P}_e(P_r) \Leftrightarrow \lambda = \lambda_{\text{max}}^{2-} = \frac{a_2}{2\underline{P}_e(P_r)b_2^- + b_1^-}$$

L'extremum $\frac{a_1 - \lambda b_1^-}{2\lambda b_2^-}$ est l'optimum si et seulement s'il vérifie les conditions suivantes : $P_r - P_{\text{lim}} \leq \frac{a_1 - \lambda b_1^-}{2\lambda b_2^-} \leq 0$. Ce qui équivaut à : $\frac{a_1}{b_1^-} \leq \lambda \leq \lambda_{\text{lim}}^{1-}$, où, $\frac{a_1}{b_1^-}$ et $\lambda_{\text{lim}}^{1-}$ sont les solutions des équations suivantes :

$$(1) \frac{a_1 - \lambda b_1^-}{2\lambda b_2^-} = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{a_1}{b_1^-}$$

$$(2) \frac{a_1 - \lambda b_1^-}{2\lambda b_2^-} = (P_r - P_{\text{lim}}) \Leftrightarrow \lambda = \lambda_{\text{lim}}^{1-} = \frac{a_1}{2(P_r - P_{\text{lim}})b_2^- + b_1^-}$$

L'extremum $\frac{a_1 - \lambda b_1^+}{2\lambda b_2^+}$ est l'optimum si et seulement s'il vérifie les conditions suivantes : $0 \leq \frac{a_1 - \lambda b_1^+}{2\lambda b_2^+} \leq \overline{P}_e(P_r)$. Ce qui équivaut à : $\lambda_{\text{min}}^{1+} \leq \lambda \leq \frac{a_1}{b_1^+}$, où, $\lambda_{\text{min}}^{1+}$ et $\frac{a_1}{b_1^+}$ sont les solutions des équations suivantes :

$$(1) \frac{a_1 - \lambda b_1^+}{2\lambda b_2^+} = \overline{P}_e(P_r) \Leftrightarrow \lambda = \lambda_{\text{min}}^{1+} = \frac{a_1}{2\overline{P}_e(P_r)b_2^+ + b_1^+}$$

$$(2) \frac{a_1 - \lambda b_1^+}{2\lambda b_2^+} = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{a_1}{b_1^+}$$

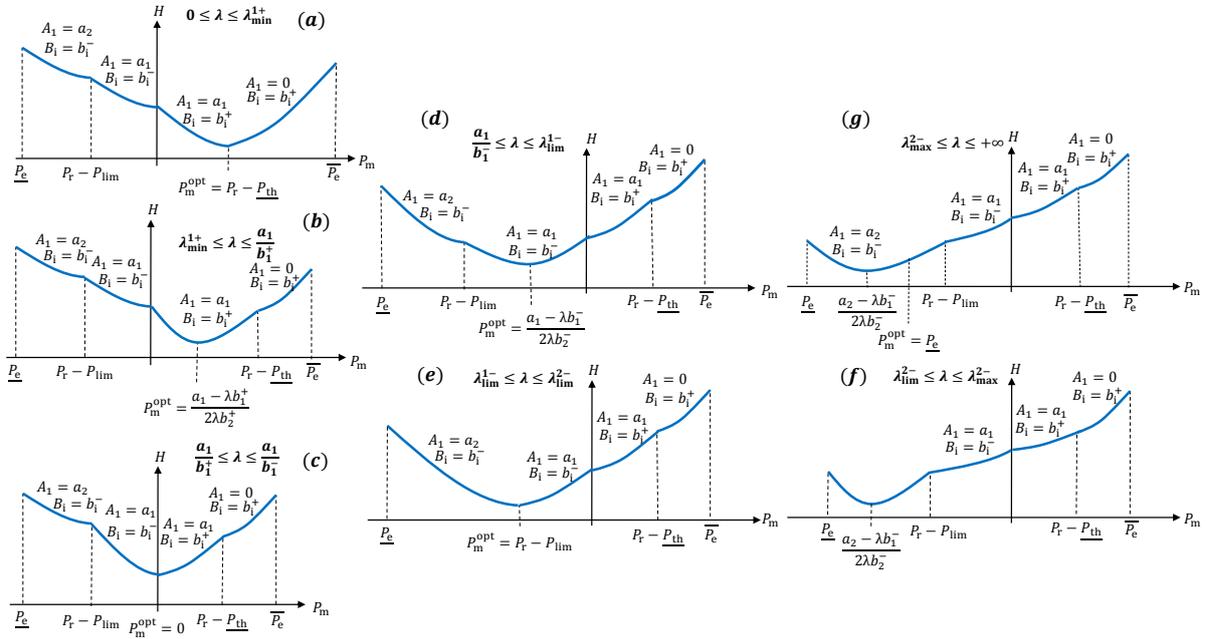


FIGURE 2.11 – Détermination de P_m^{opt} selon le sens de variation de H pour UC3.a et UC3.b

Selon la figure 2.11, P_m^{opt} est donnée en fonction de P_r et λ comme suit :

Cas sur λ		P_m^{opt}	figure
0	$\leq \lambda \leq \lambda_{\min}^{1+}$	$\overline{P_e}(P_r)$	2.11.(a)
λ_{\min}^{1+}	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{b_1^+}$	$\frac{a_1 - \lambda b_1^+}{2\lambda b_2^+}$	2.11.(b)
$\frac{a_1}{b_1^+}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{b_1^-}$	0	2.11.(c)
$\frac{a_1}{b_1^-}$	$\leq \lambda \leq \lambda_{\lim}^{1-}$	$\frac{a_1 - \lambda b_1^-}{2\lambda b_2^-}$	2.11.(d)
λ_{\lim}^{1-}	$\leq \lambda \leq \lambda_{\lim}^{2-}$	$P_r - P_{\lim}$	2.11.(e)
λ_{\lim}^{2-}	$\leq \lambda \leq \lambda_{\max}^{2-}$	$\frac{a_2 - \lambda b_1^-}{2\lambda b_2^-}$	2.11.(f)
λ_{\max}^{2-}	$\leq \lambda \leq +\infty$	$\underline{P_e}(P_r)$	2.11.(g)

UC4 : Dans ces cas, $P_r - \underline{P}_{\text{th}} > 0$ et $0 < P_r - P_{\lim} < \overline{P_e}$.

L'extremum $\frac{a_2 - \lambda b_1^-}{2\lambda b_2^-}$ est l'optimum si et seulement s'il vérifie les conditions suivantes : $\underline{P_e}(P_r) \leq \frac{a_2 - \lambda b_1^-}{2\lambda b_2^-} \leq 0$. Ce qui équivaut à : $\frac{a_2}{b_1^-} \leq \lambda \leq \lambda_{\max}^{2-}$, où, $\frac{a_2}{b_1^-}$ et λ_{\max}^{2-} sont les solutions des équations suivantes :

$$(1) \frac{a_2 - \lambda b_1^-}{2\lambda b_2^-} = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{a_2}{b_1^-}$$

$$(2) \frac{a_2 - \lambda b_1^-}{2\lambda b_2^-} = \underline{P_e}(P_r) \Leftrightarrow \lambda = \lambda_{\max}^{2-} = \frac{a_2}{2\underline{P_e}(P_r)b_2^- + b_1^-}$$

L'extremum $\frac{a_2 - \lambda b_1^+}{2\lambda b_2^+}$ est l'optimum si et seulement s'il vérifie les conditions suivantes : $0 \leq \frac{a_2 - \lambda b_1^+}{2\lambda b_2^+} \leq P_r - P_{\lim}$. Ce qui équivaut à : $\lambda_{\lim}^{2+} \leq \lambda \leq \frac{a_2}{b_1^+}$, où, λ_{\lim}^{2+} et $\frac{a_2}{b_1^+}$ sont les solutions des équations suivantes :

$$(1) \frac{a_2 - \lambda b_1^+}{2\lambda b_2^+} = (P_r - P_{\lim}) \Leftrightarrow \lambda = \lambda_{\lim}^{2+} = \frac{a_2}{2(P_r - P_{\lim})b_2^+ + b_1^+}$$

$$(2) \frac{a_2 - \lambda b_1^+}{2\lambda b_2^+} = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{a_2}{b_1^+}$$

L'extremum $\frac{a_1 - \lambda b_1^+}{2\lambda b_2^+}$ est l'optimum si et seulement s'il vérifie les conditions suivantes : $P_r - P_{\lim} \leq \frac{a_1 - \lambda b_1^+}{2\lambda b_2^+} \leq \overline{P_e}(P_r)$. Ce qui équivaut à : $\lambda_{\min}^{1+} \leq \lambda \leq \lambda_{\lim}^{1+}$, où, λ_{\min}^{1+} et λ_{\lim}^{1+} sont les solutions des équations suivantes :

$$(1) \frac{a_1 - \lambda b_1^+}{2\lambda b_2^+} = \overline{P_e}(P_r) \Leftrightarrow \lambda = \lambda_{\min}^{1+} = \frac{a_1}{2\overline{P_e}(P_r)b_2^+ + b_1^+}$$

$$(2) \frac{a_1 - \lambda b_1^+}{2\lambda b_2^+} = (P_r - P_{\lim}) \Leftrightarrow \lambda = \lambda_{\lim}^{1+} = \frac{a_1}{2(P_r - P_{\lim})b_2^+ + b_1^+}$$

Selon la figure 2.12, P_m^{opt} est donnée en fonction de P_r et λ comme suit :

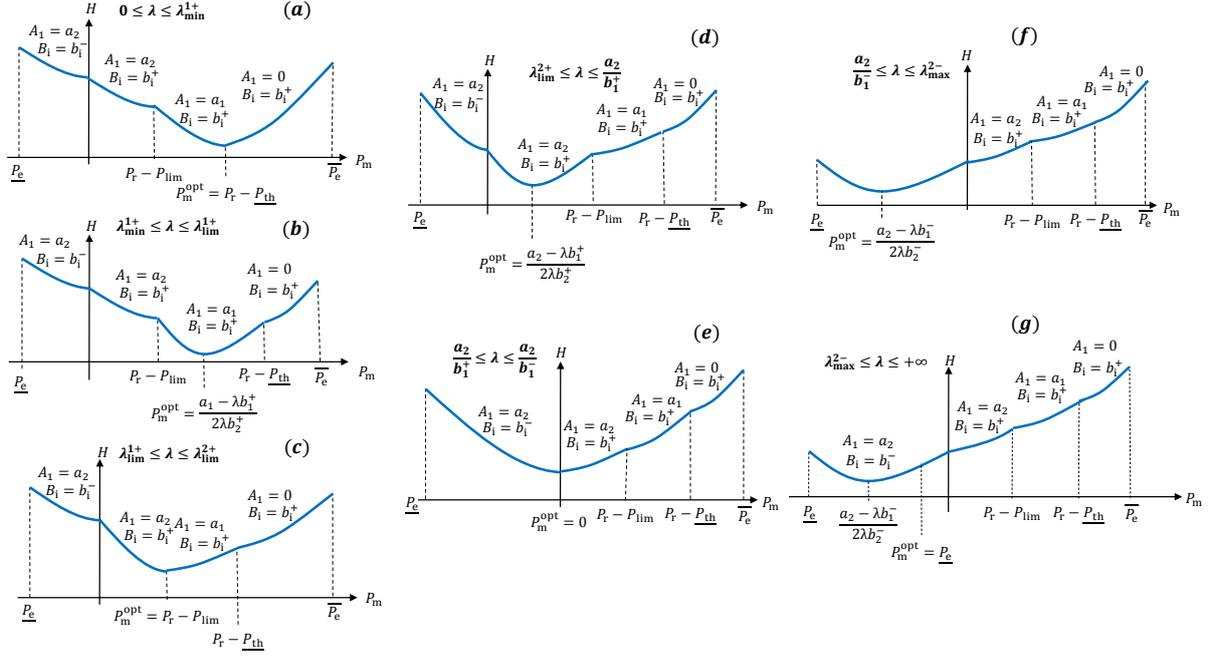


FIGURE 2.12 – Détermination de P_m^{opt} selon le sens de variation de H pour UC4

Cas sur λ		P_m^{opt}	figure
0	$\leq \lambda \leq \lambda_{\min}^{1+}$	$\underline{P}_e(P_r)$	2.12.(a)
λ_{\min}^{1+}	$\leq \lambda \leq \lambda_{\lim}^{1+}$	$\frac{a_1 - \lambda b_1^+}{2\lambda b_2^+}$	2.12.(b)
λ_{\lim}^{1+}	$\leq \lambda \leq \lambda_{\lim}^{2+}$	$P_r - P_{\lim}$	2.12.(c)
λ_{\lim}^{2+}	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{b_1^+}$	$\frac{a_2 - \lambda b_1^+}{2\lambda b_2^+}$	2.12.(d)
$\frac{a_2}{b_1^+}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{b_1^-}$	0	2.12.(e)
$\frac{a_2}{b_1^-}$	$\leq \lambda \leq \lambda_{\max}^{2-}$	$\frac{a_2 - \lambda b_1^-}{2\lambda b_2^-}$	2.12.(f)
λ_{\max}^{2-}	$\leq \lambda \leq +\infty$	$\underline{P}_e(P_r)$	2.12.(g)

UC5 : Dans ces cas, $P_r - \underline{P}_{\text{th}} > 0$ et $P_r - P_{\lim} > \bar{P}_e$.

L'extremum $\frac{a_2 - \lambda b_1^-}{2\lambda b_2^-}$ est l'optimum si et seulement s'il vérifie les conditions suivantes : $\underline{P}_e(P_r) \leq \frac{a_2 - \lambda b_1^-}{2\lambda b_2^-} \leq 0$. Ce qui équivaut à : $\frac{a_2}{b_1^-} \leq \lambda \leq \lambda_{\max}^{2-}$, où, $\frac{a_2}{b_1^-}$ et λ_{\max}^{2-} sont les solutions des équations suivantes :

- (1) $\frac{a_2 - \lambda b_1^-}{2\lambda b_2^-} = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{a_2}{b_1^-}$
- (2) $\frac{a_2 - \lambda b_1^-}{2\lambda b_2^-} = \underline{P}_e(P_r) \Leftrightarrow \lambda = \lambda_{\max}^{2-} = \frac{a_2}{2\underline{P}_e(P_r)b_2^- + b_1^-}$

L'extremum $\frac{a_2 - \lambda b_1^+}{2\lambda b_2^+}$ est l'optimum si et seulement s'il vérifie les conditions suivantes : $0 \leq \frac{a_2 - \lambda b_1^+}{2\lambda b_2^+} \leq \bar{P}_e(P_r)$. Ce qui équivaut à : $\lambda_{\min}^{2+} \leq \lambda \leq \frac{a_2}{b_1^+}$, où, λ_{\min}^{2+} et $\frac{a_2}{b_1^+}$ sont les solutions des équations suivantes :

$$(1) \frac{a_2 - \lambda b_1^+}{2\lambda b_2^+} = \bar{P}_e(P_r) \Leftrightarrow \lambda = \lambda_{\min}^{2+} = \frac{a_2}{2\bar{P}_e(P_r)b_2^+ + b_1^+}$$

$$(2) \frac{a_2 - \lambda b_1^+}{2\lambda b_2^+} = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{a_2}{b_1^+}$$

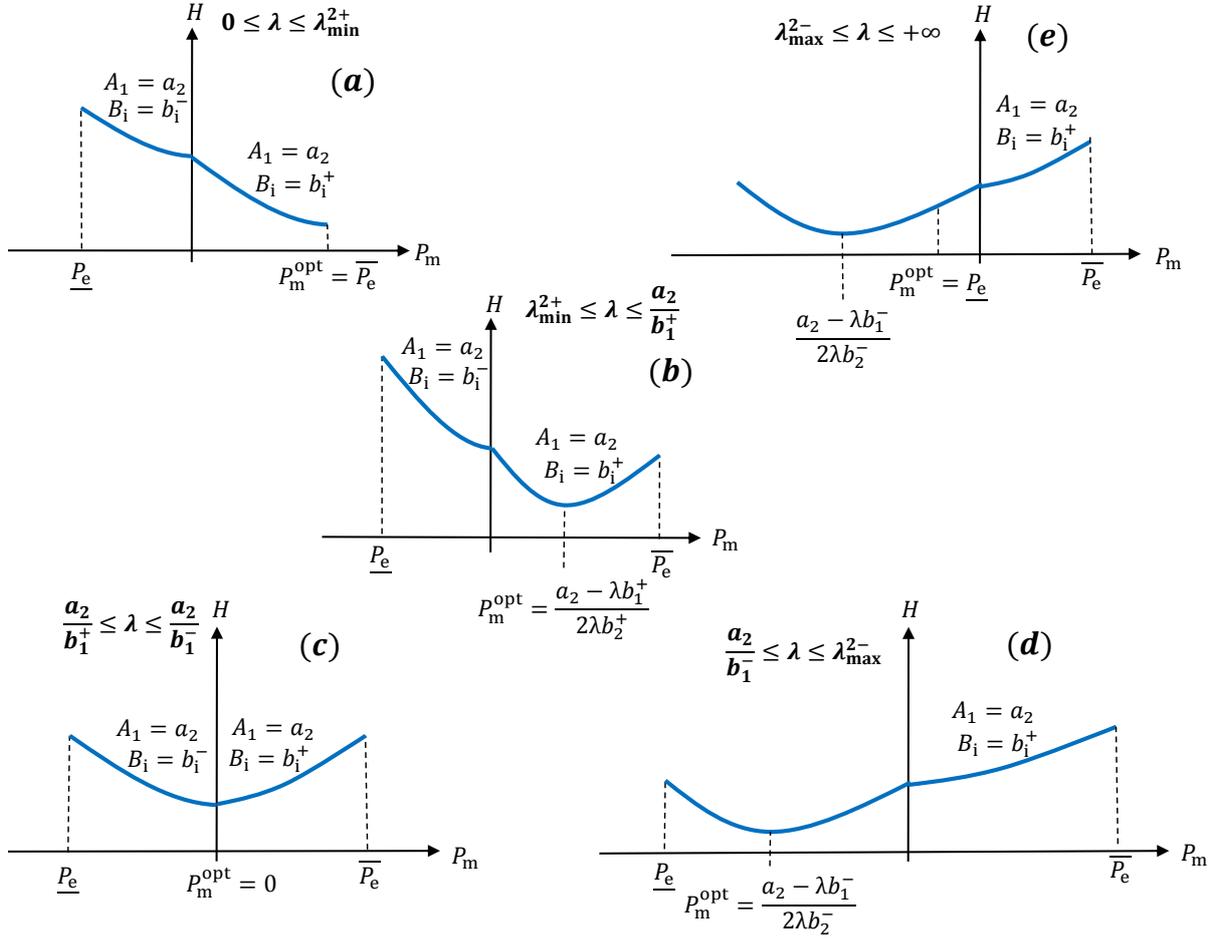


FIGURE 2.13 – Détermination de P_m^{opt} selon le sens de variation de H pour UC5

Selon la figure 2.13, P_m^{opt} est donnée en fonction de P_r et λ comme suit :

Cas sur λ			P_m^{opt}	figure
0	$\leq \lambda \leq$	λ_{\min}^{2+}	$\bar{P}_e(P_r)$	2.13.(a)
λ_{\min}^{2+}	$\leq \lambda \leq$	$\frac{a_2}{b_1^+}$	$\frac{a_2 - \lambda b_1^+}{2\lambda b_2^+}$	2.13.(b)
$\frac{a_2}{b_1^+}$	$\leq \lambda \leq$	$\frac{a_2}{b_1^-}$	0	2.13.(c)
$\frac{a_2}{b_1^-}$	$\leq \lambda \leq$	λ_{\max}^{2-}	$\frac{a_2 - \lambda b_1^-}{2\lambda b_2^-}$	2.13.(d)
λ_{\max}^{2-}	$\leq \lambda \leq$	$+\infty$	$\bar{P}_e(P_r)$	2.13.(e)

2.1.3 Résultats de Simulations

Dans cette section, nous réalisons l'étape 5 de la méthodologie analytique (figure 1.39). Elle consiste à comparer les résultats issus de la méthode analytique avec ceux de la méthode

numérique. Comme présenté dans la figure 1.41, le processus de validation comporte deux phases :

- la validation hors-ligne où les commandes analytiques sont comparées avec les commandes numériques. En effet, pour que les commandes soient comparables, les stratégies sont isolées du MIL (Model In the Loop de la figure 1.37) et sont soumises aux mêmes entrées (limitations des commandes, puissance à la roue, facteur d'équivalence, régimes et tension). De plus, cette étape permet de quantifier le temps de calcul ainsi que la mémoire consommés par chaque stratégie.
- la validation en-ligne où les stratégies sont implémentées dans le simulateur de véhicule (MIL) afin d'établir leurs bilans énergétiques.

Pour rappel, comme présenté dans le tableau 1.42, les indices 1 et 2 dans les méthodes numériques correspondent à l'utilisation des modèles convexes (modèle électrique quadratique) et des modèles de référence respectivement. Il faut noter que, dans le calcul de l'Hamiltonien pour les méthodes numériques, les pertes de la batterie sont prises en compte. Ceci permet de valider l'hypothèse 8 où on suppose que les pertes de la batterie sont négligeables devant la puissance électrique de la machine électrique.

Validation Hors-Ligne

Évaluation de l'impact du maillage

Ici, nous souhaitons identifier l'impact du maillage sur la solution numérique. La figure 2.14 présente la comparaison entre les commandes obtenues par : Num_1^{10} , Num_1^{100} et Num_1^{1000} ; et la figure 2.15 présente celles obtenues par : Num_2^{10} , Num_2^{100} et Num_2^{1000} .

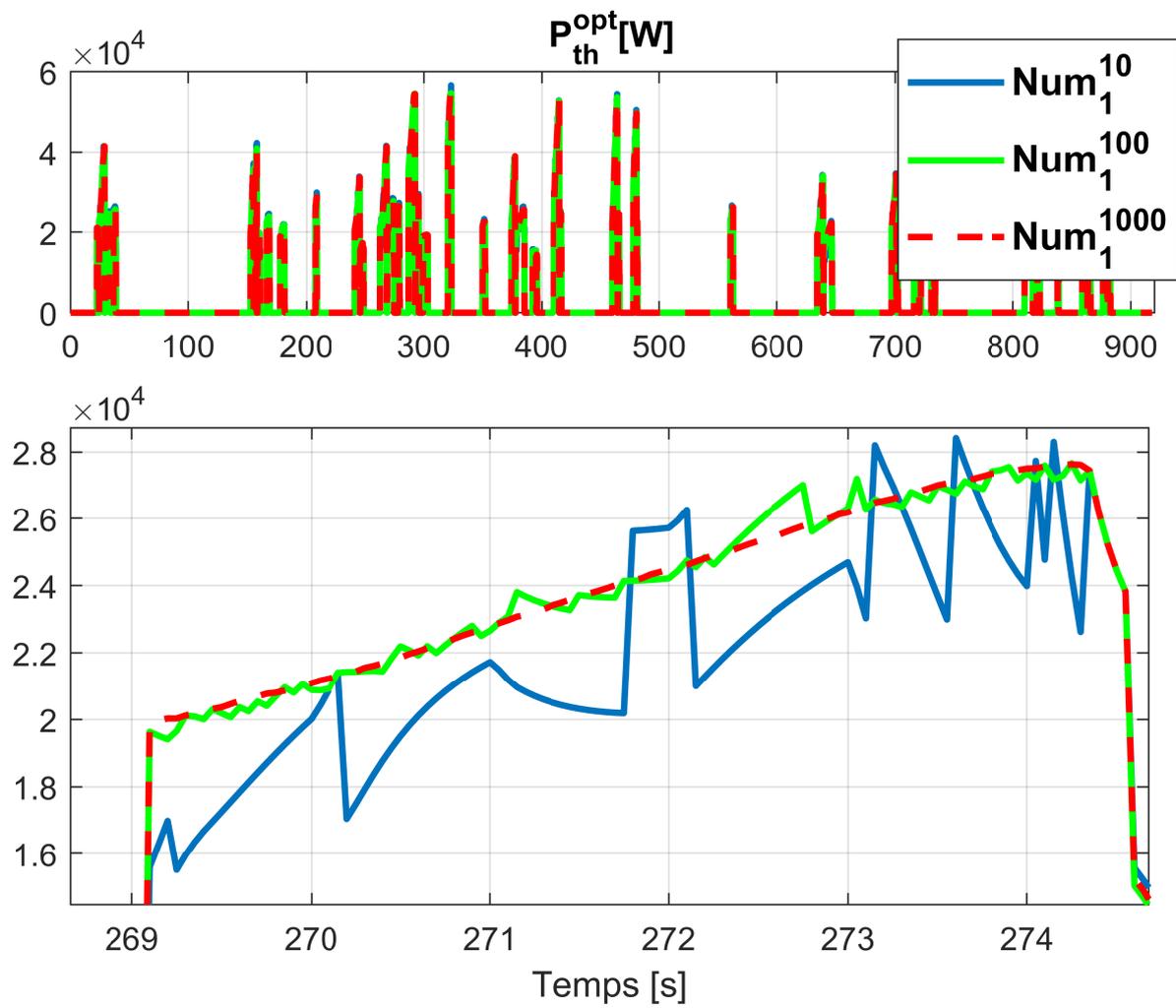


FIGURE 2.14 – Les commandes obtenues par les méthodes numériques basées sur les modèles convexes Num_1^{10} , Num_1^{100} et Num_1^{1000} (haut) et zoom sur ces commandes entre 269s et 275s (bas) pour le cycle ARTEMIS Urbain

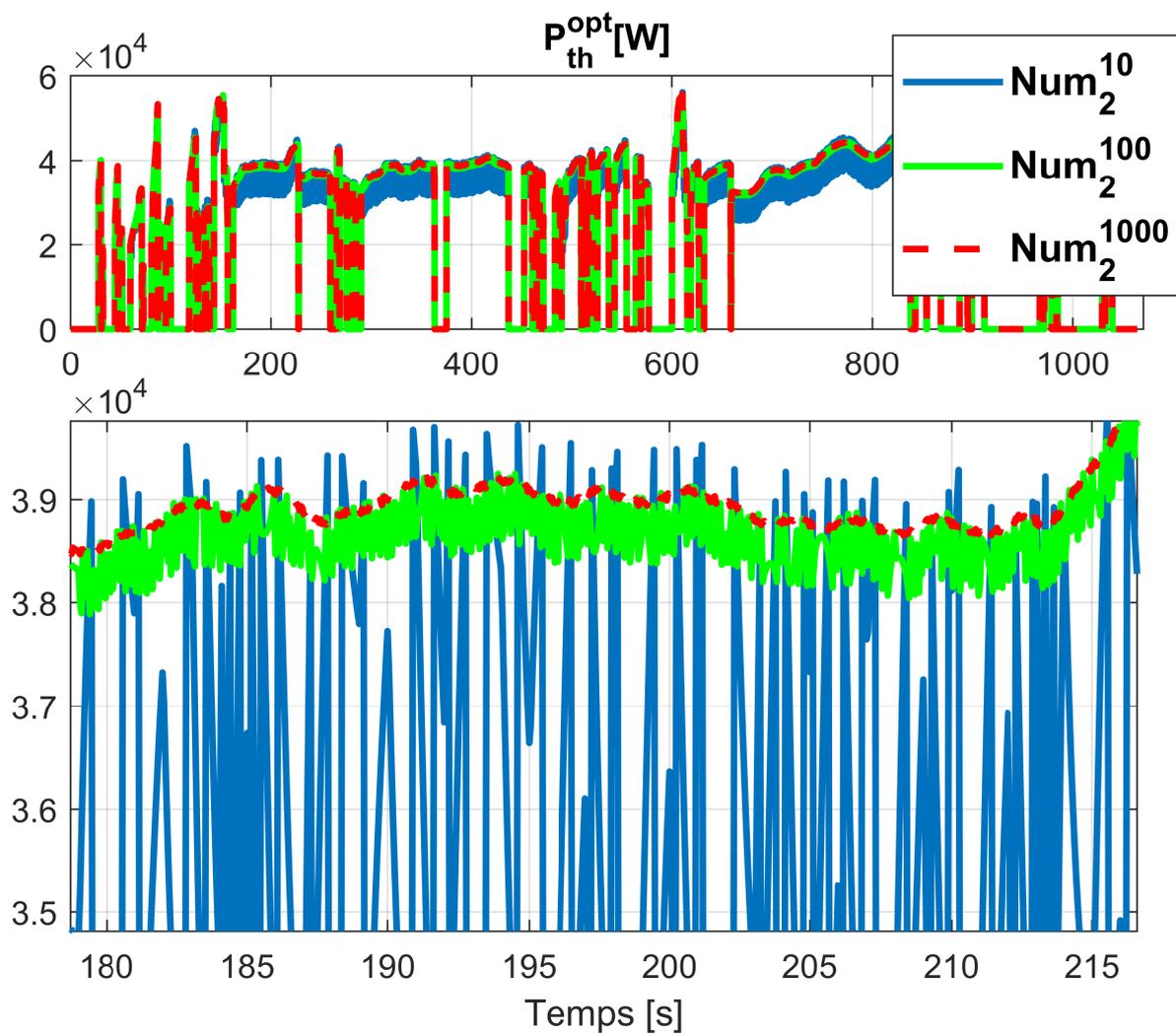


FIGURE 2.15 – Les commandes obtenues par les méthodes Num_2^{10} , Num_2^{100} et Num_2^{1000} (haut) et zoom sur ces commandes entre 180s et 215s (bas) pour le cycle ARTEMIS Autoroute

Discussion Les figures 2.14 et 2.15 montrent que la solution numérique est très sensible au maillage. En effet, on voit que plus le maillage est grossier, plus la commande s'éloigne de la meilleure solution donnée par la méthode Num_2^{1000} . De plus, on voit apparaître le phénomène de pompage. On peut constater également que plus le maillage est grossier, plus ce phénomène s'accroît : les sauts brusques de la commande sont plus grands ainsi que plus fréquents. On constate également que le pompage dans la méthode Num_1 est moins important que celui dans la méthode Num_2 . En effet, l'un des principaux objectifs de la modélisation convexe est le lissage des modèles de référence (voir chapitre 1) qui réduit ce type de comportement fortement indésirable. Compte tenu de ces résultats, dans la suite de ce rapport, les commandes analytiques seront comparées uniquement à celles des approches Num_1^{1000} et Num_2^{1000} .

Validation des solutions analytiques

Afin de valider le calcul analytique des commandes optimales indépendamment de l'effet de la modélisation convexe, les commandes analytiques sont comparées avec celles de la méthode Num_1^{1000} .

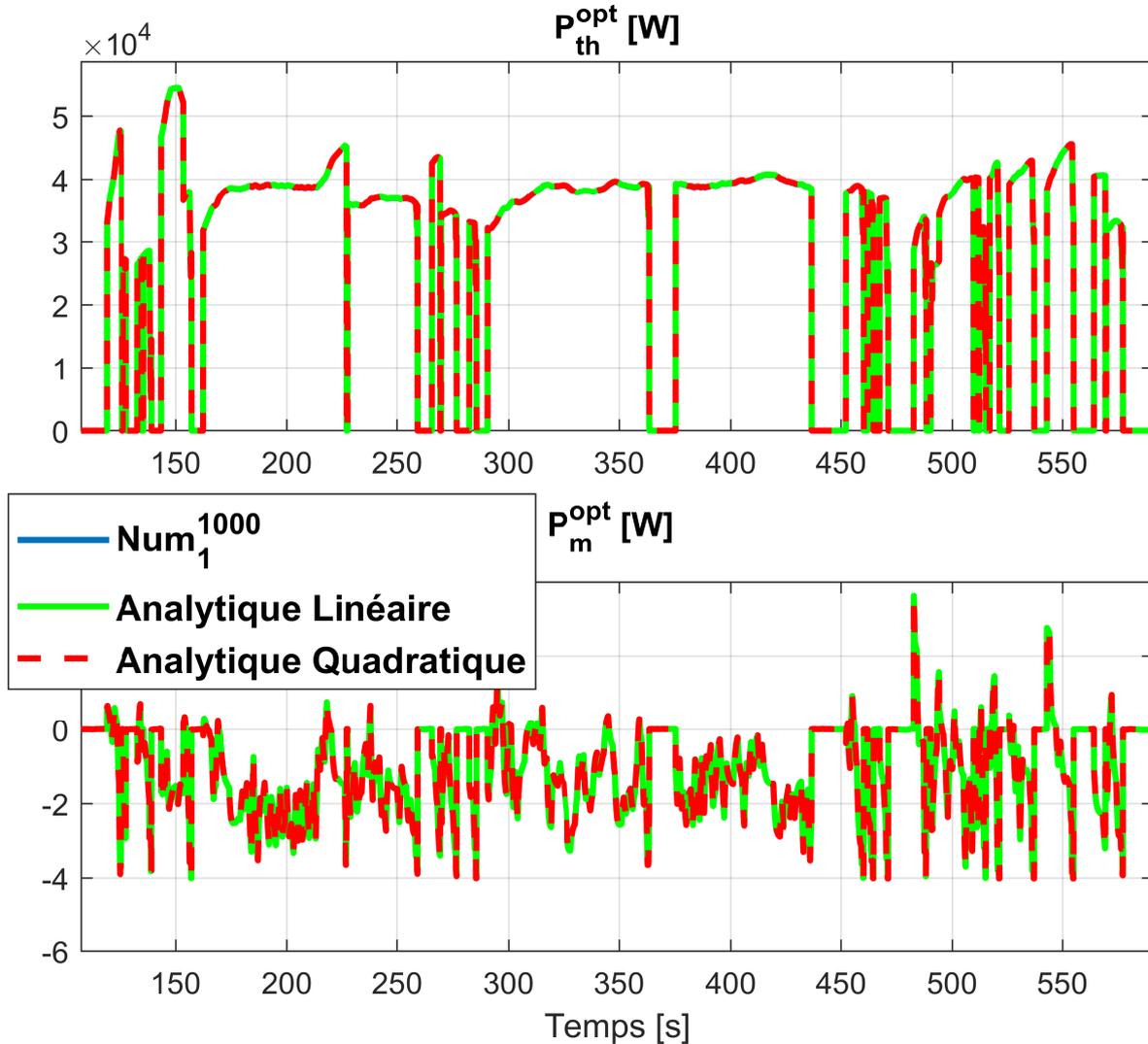


FIGURE 2.16 – Commandes optimales issues de la méthodologie analytique et de la méthode Num_1^{1000} pour le cycle ARTEMIS Autoroute

Discussion Les figures 2.16 et 2.17 représentent les commandes P_{th}^{opt} et P_m^{opt} obtenues par la méthode analytique utilisant le modèle affine (1.23) et le modèle quadratique (1.22) de la machine électrique ; et celles obtenues par la méthode Num_1^{1000} utilisant le modèle quadratique (1.22). On voit que les courbes des solutions des trois stratégies sont très similaires. Par conséquent, on peut tirer deux principales conclusions :

- l'impact des pertes de la batterie sur la répartition de puissance est négligeable (hypothèse 8 validée).

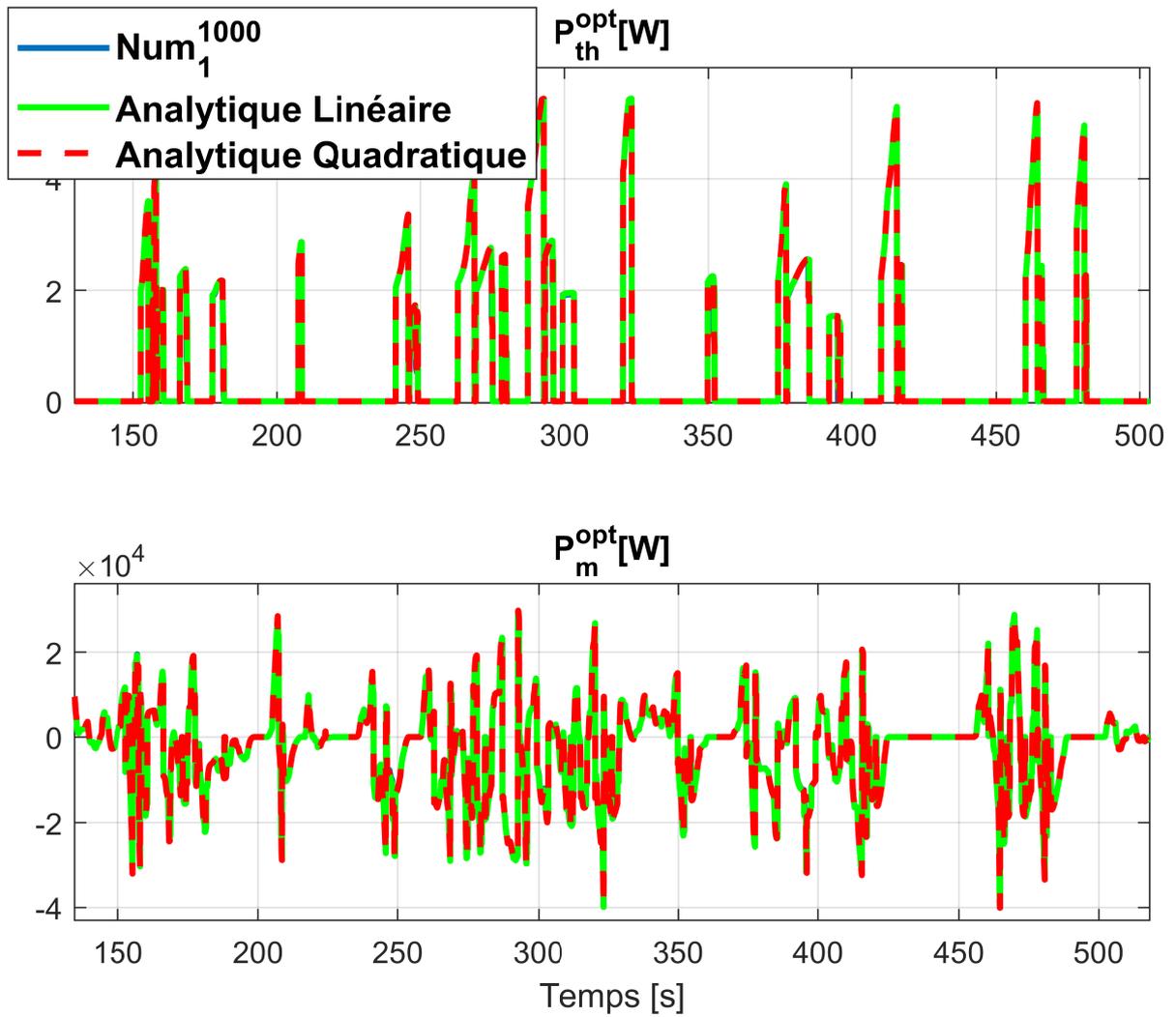


FIGURE 2.17 – Commandes optimales issues de la méthodologie analytique et de la méthode Num_1^{1000} pour le cycle ARTEMIS Urbain

— le modèle linéaire de la machine électrique (1.23) est aussi efficace que le modèle quadratique (1.22).

Le tableau 2.1 présente les résultats en temps de calcul des méthodes analytiques, Num¹⁰ et Num¹⁰⁰⁰. Pour rappel, le temps de calcul est la moyenne des temps de calcul des 4 cycles étudiés pour effectuer le calcul des commandes d'un pas de temps (1.52).

Stratégie	Temps de Calcul [ms]
Analytique Linéaire	0.052
Analytique Quadratique	0.084
Num ₁ ¹⁰⁰⁰	0.294
Num ₂ ¹⁰⁰⁰	0.42
Num ₁ ¹⁰	0.084
Num ₂ ¹⁰	0.105

TABLE 2.1 – Temps de calcul moyen consommé par les stratégies analytique linéaire, analytique quadratique, Num₁¹⁰⁰⁰, Num₂¹⁰⁰⁰, Num₁¹⁰ et Num₂¹⁰ pour le calcul des commandes sur un pas de temps

Discussion D'après le tableau 2.1, la méthode analytique linéaire est la moins coûteuse en temps de calcul. La méthode analytique quadratique consomme le même temps de calcul que la méthode Num₁¹⁰. Mais cette dernière présente un inconvénient important qui est le pompage de la solution. Finalement, la méthode analytique quadratique consomme jusqu'à 5 fois moins de temps de calcul par rapport au maillage 1000 à quasi-optimalité.

La mémoire occupée par chaque stratégie est définie par le nombre de paramètres mémorisés ainsi que le nombre et la taille des variables intermédiaires calculées pour obtenir la commande optimale. Le nombre de paramètres est fixe. En effet, ces paramètres sont : soit les coefficients des modèles convexes pour les méthodes analytiques et la méthode Num₁ ; soit les cartographies de consommation énergétique pour la méthode Num₂. Pour l'optimisation de la répartition de puissance d'un véhicule hybride parallèle, les paramètres utilisés par chaque stratégie sont présentés dans le tableau 2.2.

Stratégie	Paramètres	Nombre total
Analytique Linéaire	MT : $a_1, a_2, P_{\text{lim}}, p_0$ et p_1	5
	ME : a_- et a_+	18
Analytique Quadratique	MT : $a_1, a_2, P_{\text{lim}}, p_0$ et p_1	5
	ME : b_2^-, b_1^-, b_2^+ et b_1^+	36
Num ₁	MT : $a_1, a_2, P_{\text{lim}}, p_0, p_1, Q_0, q_2, q_1, q_0$ et Q_{lim}	10
	ME : $b_2^-, b_1^-, b_2^+, b_1^+$ et b_0	45
Num ₂	MT : cartographie du débit carburant (25×17)	425
	ME : cartographie des pertes électriques ($41 \times 15 \times 5$)	3075

TABLE 2.2 – Nombre de paramètres fixes utilisés par les stratégies analytique linéaire, analytique quadratique, Num₁ et Num₂ pour le calcul de la répartition optimale de puissance

Remarque : les paramètres du modèle convexe de la machine électrique apparaissent dans les équations de b_2^\pm (1.19) (9 paramètres), b_1^\pm (1.20) (9 paramètres) et b_0 (1.21) (9 paramètres).

Concernant les variables intermédiaires, leur nombre dépend également de la stratégie. Pour les stratégies numériques, le nombre des variables intermédiaires est fixe. Il est égal à la somme des tailles du vecteur H et du vecteur commande P_{th} (ou P_{m}). Par conséquent, le maillage 1000 génère 2000 variables intermédiaires et le maillage 10 génère 20 variables

intermédiaires. Pour les stratégies analytiques, les variables intermédiaires sont les seuils de P_r et les seuils de λ . On peut remarquer que le nombre de ces seuils dépend du cas sélectionné. Pour cela, on considèrera les cas qui comportent le nombre maximum de seuils. Ces cas sont : UC2 et UC3 pour la méthode linéaire avec 2 seuils de P_r à calculer ; et UC3.a, UC3.b et UC4 pour la méthode quadratique avec 6 seuils de λ à calculer. Pour la méthode linéaire, nous avons un nombre fixe de seuils de λ à calculer qui est de 4 ($\frac{a_1}{a_+}$, $\frac{a_1}{a_-}$, $\frac{a_2}{a_+}$ et $\frac{a_2}{a_-}$) comme le montrent les tableaux (2.16) et (2.17). Pour la méthode quadratique, nous avons un nombre fixe de seuils de P_r à calculer qui est de 5. Par ailleurs, la méthode quadratique possède en plus de la méthode linéaire 4 autres optimums qui correspondent aux extremums des morceaux quadratiques de l'Hamiltonien. Le nombre total des variables intermédiaires pour chaque stratégie est résumé dans le tableau 2.3.

Stratégie	Nombre total
Analytique Linéaire	6
Analytique Quadratique	15
Num ₁ ¹⁰⁰⁰	2000
Num ₂ ¹⁰⁰⁰	2000
Num ₁ ¹⁰	20
Num ₂ ¹⁰	20

TABLE 2.3 – Nombre de variables intermédiaires calculées par les stratégies analytique linéaire, analytique quadratique, Num₁¹⁰⁰⁰, Num₂¹⁰⁰⁰, Num₁¹⁰ et Num₂¹⁰ pour le calcul de la répartition optimale de puissance

Remarque : les entrées de l'optimisation (puissance à la roue, régimes, facteur d'équivalence,...) ne sont pas comptées dans le calcul de la mémoire car toutes stratégies consomment les mêmes entrées.

Finalement, la mémoire totale occupée par chaque stratégie est égale au nombre des paramètres fixes + le nombre des variables intermédiaires, en considérant 1 scalaire = 1 Double (tableau 2.4).

Stratégie	Espace mémoire occupé [Doubles]
Analytique Linéaire	29
Analytique Quadratique	56
Num ₁ ¹⁰⁰⁰	2055
Num ₂ ¹⁰⁰⁰	5500
Num ₁ ¹⁰	85
Num ₂ ¹⁰	3520

TABLE 2.4 – Espace mémoire occupé par les stratégies analytique linéaire, analytique quadratique, Num₁¹⁰⁰⁰, Num₂¹⁰⁰⁰, Num₁¹⁰ et Num₂¹⁰ pour le calcul de la répartition optimale de puissance

Discussion Le tableau 2.4 montre que les méthodes analytiques occupent largement moins d'espace mémoire comparées aux méthodes numériques. Grâce à la méthode analytique, nous avons réduit de 98% la mémoire comparé à la méthode Num₁¹⁰⁰⁰ et de 99.5% comparé à la méthode Num₂¹⁰⁰⁰.

Validation des modèles convexes

Pour évaluer l'impact de la modélisation convexe sur la solution optimale, les commandes de Num_1^{1000} sont comparées avec celles de Num_2^{1000} . Cette comparaison est illustrée par la figure 2.18.

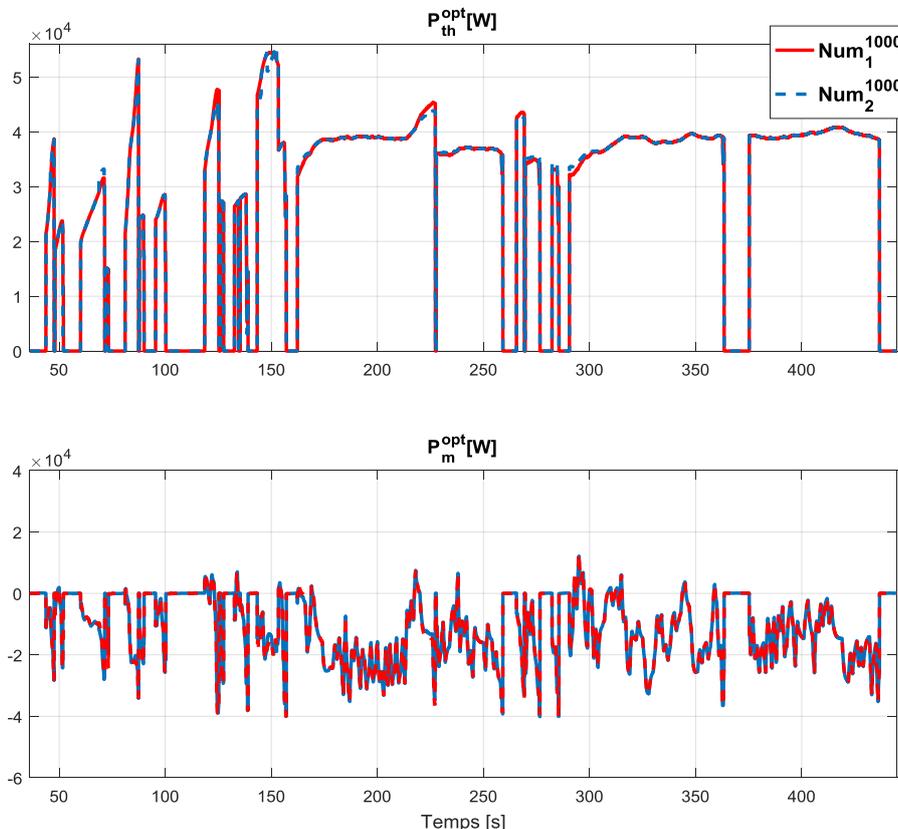


FIGURE 2.18 – Comparaison des commandes obtenues par les méthodes Num_1^{1000} et Num_2^{1000} sur le cycle ARTEMIS Autoroute

Discussion Les courbes des solutions des méthodes Num_1^{1000} et Num_2^{1000} sont très proches. Ceci permet de valider des modèles convexes.

Validation En-Ligne

Dans cette étape de validation, les stratégies analytiques et numériques sont testées en-ligne sur le simulateur du véhicule (MIL) afin d'établir leurs bilans énergétiques (consommation de carburant et trajectoire SoE). On rappelle que, dans ce chapitre, le véhicule étudié est sans step-up. Sa batterie a une tension d'environ 400V. Il faut noter que le calcul des consommations thermique et électrique de toutes les stratégies est réalisé à partir des modèles de référence (1.10) et (1.16).

Remarque : la surconsommation ($\Delta\text{Conso} [\%]$) est calculée par rapport à la consommation de la méthode Num_2^{1000} . Elle est donnée par : $\Delta\text{Conso} = 100 \times \frac{\text{Conso} - \text{Conso}_{ref}}{\text{Conso}_{ref}}$.

Cycle	Stratégie	Conso [L/100km]	Δ Conso [%]
WLTC	Analytique Linéaire	4.40	0.45
	Analytique Quadratique	4.39	0.22
	Num ₁ ¹⁰⁰⁰	4.40	0.22
	Num ₂ ¹⁰⁰⁰	4.38	-
	Num ₁ ¹⁰	4.91	12.1
	Num ₂ ¹⁰	4.54	3.65
ARTEMIS Urbain	Analytique Linéaire	5.48	0.73
	Analytique Quadratique	5.45	0.18
	Num ₁ ¹⁰⁰⁰	5.47	0.55
	Num ₂ ¹⁰⁰⁰	5.44	-
	Num ₁ ¹⁰	5.96	9.55
	Num ₂ ¹⁰	5.72	5.14
ARTEMIS Routier	Analytique Linéaire	4.20	0.47
	Analytique Quadratique	4.19	0.23
	Num ₁ ¹⁰⁰⁰	4.18	0
	Num ₂ ¹⁰⁰⁰	4.18	-
	Num ₁ ¹⁰	4.73	13.15
	Num ₂ ¹⁰	4.22	0.95
ARTEMIS Autoroutier	Analytique Linéaire	6.22	0.97
	Analytique Quadratique	6.17	0.16
	Num ₁ ¹⁰⁰⁰	6.17	0.16
	Num ₂ ¹⁰⁰⁰	6.16	-
	Num ₁ ¹⁰	6.58	6.81
	Num ₂ ¹⁰	6.36	3.24

TABLE 2.5 – Résultats de consommation de carburant

Où, $\text{Conso}_{\text{ref}}[\text{L}/100\text{km}]$ est la consommation de carburant issue de la méthode Num_2^{1000} et $\text{Conso}[\text{L}/100\text{km}]$ est la consommation de carburant issue des autres méthodes.

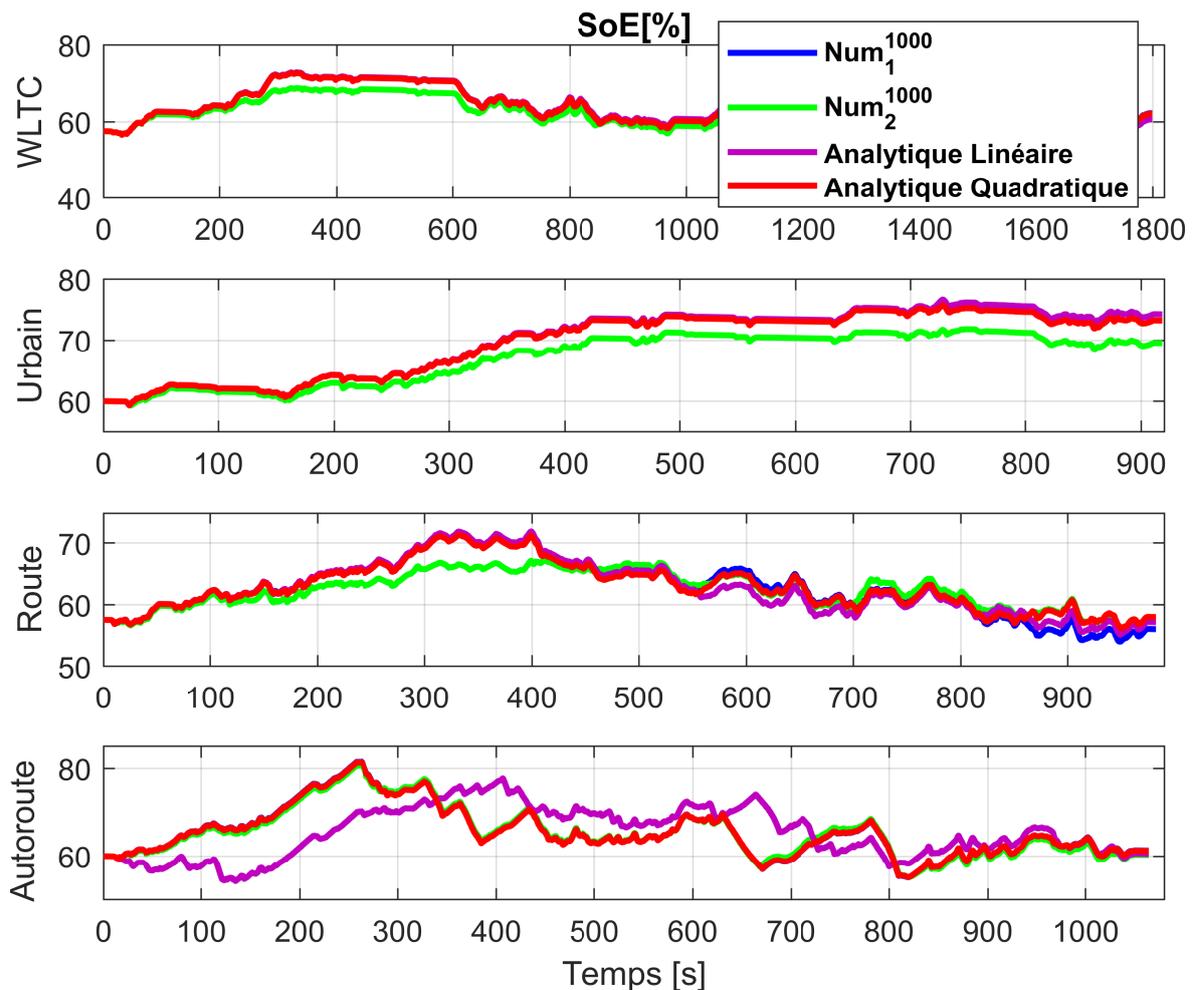


FIGURE 2.19 – Trajectoires SoE des stratégies analytique linéaire, analytique quadratique, Num_1^{1000} et Num_2^{1000} sur tous les cycles étudiés

Discussion D’après le tableau 2.5, on peut constater que :

- L’impact de la modélisation convexe sur la consommation de carburant de la méthode Num_1^{1000} se traduit par une surconsommation inférieure à 0.55% par rapport à la meilleure solution donnée par la méthode Num_2^{1000} .
- La méthode Num_1^{1000} et la méthode quadratique ont exactement la même consommation.
- L’écart de consommation entre le modèle linéaire et le modèle quadratique de la machine électrique est inférieur à 0.8%.
- La méthode Num_1^{10} présente une surconsommation qui peut atteindre les 13%.
- La méthode Num_2^{10} présente une surconsommation qui peut atteindre les 5%.

La figure 2.19 montre que les stratégies analytique linéaire, analytique quadratique, Num_1^{1000} et Num_2^{1000} ont des trajectoires SoE similaires sur tous les cycles étudiés.

Étude de sensibilité des solutions analytiques

L'objectif de cette étude est de quantifier l'impact de la variation des paramètres des modèles convexes sur la consommation de carburant. Pour cela, on introduit un facteur de perturbation dans les paramètres utilisés par le calcul des commandes analytiques. La consommation de carburant correspondant au paramètre perturbé est notée $co\hat{n}so$. Pour un paramètre donné, noté α , la perturbation p sera introduite comme suit :

$$\hat{\alpha} = \alpha + p\alpha \quad (2.22)$$

Où, $\hat{\alpha}$ est le paramètre perturbé. La perturbation p correspond à l'erreur d'estimation du paramètre α . Elle est introduite par un pourcentage multiplié par α afin qu'elle soit représentative à l'échelle du paramètre α . On suppose que cette erreur varie au maximum entre -30% et $+30\%$ (choix réalisé lors de l'identification des paramètres et de l'analyse des mesures expérimentales).

Les paramètres des modèles convexes utilisés par l'optimisation de la répartition de puissance sont : a_1 , a_2 , P_{lim} , a_- (noté b_1^- en quadratique) et a_+ (noté b_1^+ en quadratique).

La sensibilité de la solution analytique par rapport au paramètre α est représentée par l'écart s_α comme suit :

$$s_\alpha[L/100km] = co\hat{n}so - conso \quad (2.23)$$

Il faut noter que le calcul des consommations du moteur thermique ($conso$ et $co\hat{n}so$) est réalisé à partir du modèle de référence (1.10). L'écart s_α est multiplié par 100 pour faciliter sa lecture quand ce dernier a une valeur très faible.

La figure 2.20 représente la sensibilité des solutions analytiques linéaire et quadratique par rapport aux paramètres a_1 , a_2 , P_{lim} , a_- et a_+ . Ces résultats ont été obtenus sur le cycle WLTC.

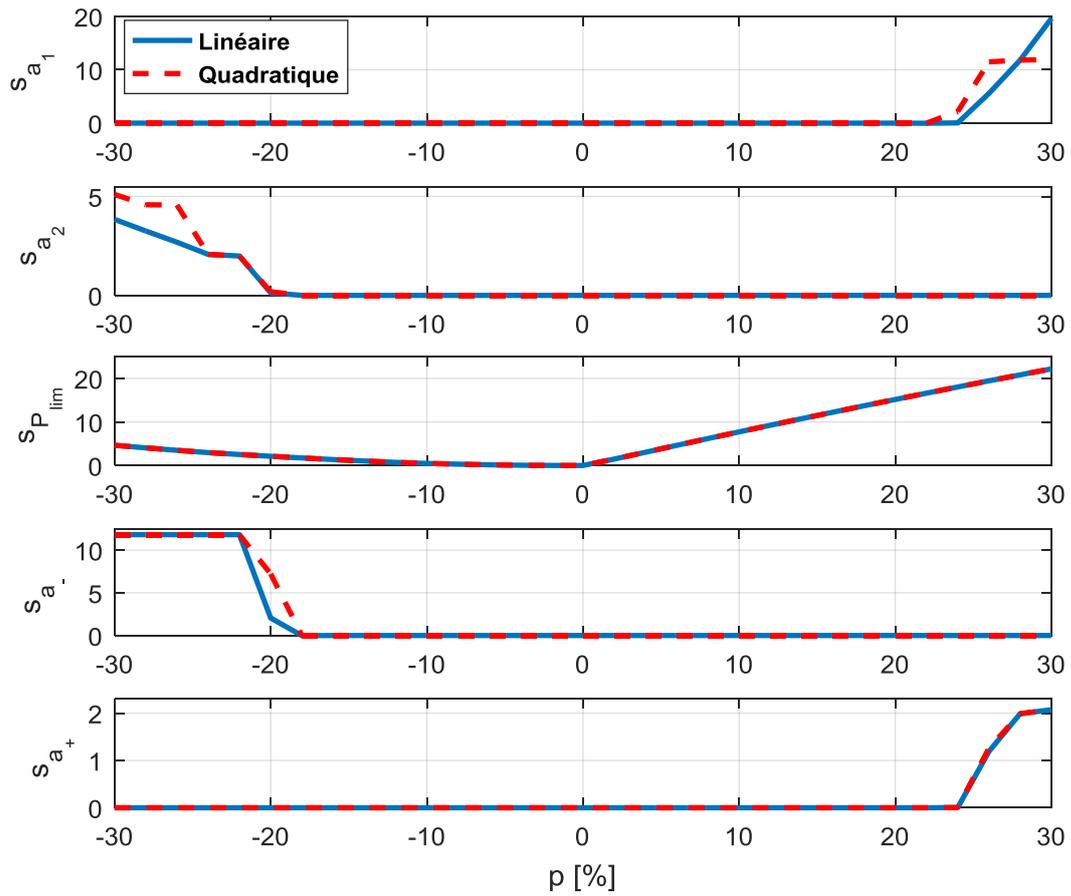


FIGURE 2.20 – Sensibilité de la consommation de carburant par rapport à la variation des paramètres a_1 , a_2 , P_{lim} , a_- et a_+ pour l’optimisation de la répartition de puissance sur le cycle WLTC

Discussion

D'après la figure 2.20, on peut constater que :

- les solutions analytiques linéaire et quadratique sont plus sensibles à la sur-estimation des paramètres a_1 et a_+ et à la sous-estimation des paramètres a_2 et a_- . En effet, nous rappelons que les seuils du facteur d'équivalence (λ) permettant de déterminer la répartition optimale de puissance, dépendent de ces paramètres. D'ailleurs, le facteur d'équivalence optimal correspondant au bilan de batterie nul, pour tous les cycles étudiés, varie entre les seuils $\frac{a_1}{a_-}$ et $\frac{a_2}{a_+}$. On rappelle également que la solution analytique est définie de la manière suivante. En dessous du seuil $\frac{a_1}{a_-}$, l'électrique est favorisé, on appellera cet intervalle "*zone électrique*"; et au dessus du seuil $\frac{a_2}{a_+}$, le thermique est plus favorable ("*zone thermique*"). C'est pourquoi, sur-estimer a_1 ou sous-estimer a_- augmentera le seuil $\frac{a_1}{a_-}$ et élargira la "*zone électrique*". Ceci entraînera une augmentation considérable du facteur d'équivalence afin de respecter la contrainte sur l'état de charge de la batterie. Au quel cas, la solution pourrait basculer dans la "*zone thermique*", d'où la surconsommation de carburant. Symétriquement, sous-estimer a_2 ou sur-estimer a_+ élargira la "*zone thermique*", ainsi, la solution se trouverait dans la "*zone thermique*", d'où la surconsommation de carburant.
- les solutions analytiques linéaire et quadratique présentent une sensibilité plus importante à la sur-estimation de P_{lim} par rapport à sa sous-estimation. En effet, P_{lim} étant, dans la majorité des cas, la solution optimale, sa sur-estimation positionnera le point de fonctionnement du moteur thermique, choisi par l'optimisation analytique, dans sa zone à richesse supérieure à 1 (zone correspondant à la pente a_2 dans le modèle convexe (1.12)).

2.1.4 Conclusion

En conclusion, la stratégie analytique permet de lisser les commandes, de réduire le temps de calcul ainsi que l'espace mémoire tout en ayant une consommation assez proche de la meilleure solution. La méthode analytique linéaire présente le meilleur compromis consommation/performances. En effet, elle est la moins coûteuse en termes de temps de calcul et de mémoire pour une surconsommation inférieure à 1%. La méthode numérique présente des risques importants lorsque le maillage de la commande n'est pas assez fin. Comme le montrent les résultats, les méthodes Num₁¹⁰ et Num₂¹⁰ engendrent un pompage de la commande et une surconsommation beaucoup trop élevés.

L'étude de sensibilité de la solution analytique nous a permis d'identifier les paramètres qui ont le plus d'impact sur la consommation de carburant. D'après les résultats obtenus, la solution analytique présente plus de sensibilité aux paramètres du moteur thermique a_1 et P_{lim} . Toutefois, une sur-estimation considérable de +30% de ces paramètres n'engendre que 4% de surconsommation, ce qui est tout à fait tolérable. Cette étude pour l'architecture parallèle a également été réalisée pour les autres configurations étudiées dans cette thèse (parallèle avec boîte de vitesses à variation continue, bi-parallèle et série). Les résultats obtenus pour ces architectures sont identiques aux résultats de la section précédente. C'est pourquoi, nous ne référons pas l'étude de sensibilité de la solution analytique par rapport aux paramètres traités dans cette section dans la suite de ce mémoire.

2.2 Optimisation de l'état du moteur thermique

Dans cette section, l'état, noté e , du moteur thermique est déterminé. Le moteur thermique a deux états : "allumé" ($e = 1$) ou "éteint" ($e = 0$). Afin de déterminer e^{opt} , on applique le PMP pour les systèmes hybrides, comme présenté dans la section 1.3.2, sur le problème suivant :

$$POP_2 : \begin{cases} \min_{P_{\text{th}}, e} \int_{t_0}^{t_f} e \times Q(P_{\text{th}}(t), \omega_{\text{th}}(t)) dt \\ \dot{SoE}(t) = -\frac{P_{\text{bat}}(t)}{E_{\text{max}}} \\ 0 \leq SoE(t) \leq 100 \\ \underline{P}_{\text{th}}(\omega_{\text{th}}) \leq P_{\text{th}} \leq \bar{P}_{\text{th}}(\omega_{\text{th}}) \\ P_{\text{r}} = P_{\text{th}} + P_{\text{m}} \\ \underline{P}_{\text{e}}(\omega_{\text{e}}) \leq P_{\text{m}} \leq \bar{P}_{\text{e}}(\omega_{\text{e}}) \\ e \in \{0, 1\} \end{cases} \quad (2.24)$$

Les commandes optimales sont données par :

$$[P_{\text{th}}^{\text{opt}}, e^{\text{opt}}] = \arg \min_{P_{\text{th}}, e} (H(P_{\text{th}}, e, P_{\text{r}}, \lambda)) \quad (2.25)$$

Les résultats de la section précédente ont permis de valider le modèle affine de P_{bat} . Pour cela, dans cette partie, H est calculé à partir des modèles affines de Q et de P_{bat} définis dans les équations (1.12) et (1.23). H est donné par :

$$H(P_{\text{th}}, e, P_{\text{r}}, \lambda) = e \cdot Q(P_{\text{th}}) + \lambda P_{\text{bat}}(P_{\text{r}} - P_{\text{th}}) \quad (2.26)$$

Comme démontré par [54], le PMP pour les systèmes hybrides est composé par deux étapes :

1. Le PMP est appliqué dans chaque mode discret :
 - Quand $e = 1$:

$$H = H_1(P_{\text{th}}, P_{\text{r}}, \lambda) = Q(P_{\text{th}}) + \lambda P_{\text{bat}}(P_{\text{th}}) \quad (2.27)$$

- Quand $e = 0$, on a : $Q = 0$, $P_{\text{th}} = 0$ alors $P_{\text{m}} = P_{\text{r}}$. L'Hamiltonien dans ce cas est donné par (figure 2.21) :

$$H = H_0(P_{\text{r}}, \lambda) = \begin{cases} \lambda \cdot (a_- P_{\text{r}} + b) & \text{si } \underline{P}_{\text{e}} \leq P_{\text{r}} \leq 0 \\ \lambda \cdot (a_+ P_{\text{r}} + b) & \text{si } 0 \leq P_{\text{r}} \leq \bar{P}_{\text{e}} \end{cases} \quad (2.28)$$

2. L'état discret du MT optimal est trouvé comme suit :

$$e^{\text{opt}} = \arg \min_{e \in \{0, 1\}} \{H_1(P_{\text{th}}^{\text{opt}}, P_{\text{r}}, \lambda), H_0(P_{\text{r}}, \lambda)\} \quad (2.29)$$

L'objectif étant de comparer H_1 à H_0 , on définit alors la fonction F_0 telle que :

$$F_0(P_{\text{r}}, \lambda) = H_1(P_{\text{th}}^{\text{opt}}, P_{\text{r}}, \lambda) - H_0(P_{\text{r}}, \lambda) \quad (2.30)$$

Avec, $H_1(P_{\text{th}}^{\text{opt}}, P_{\text{r}}, \lambda) = Q(P_{\text{th}}^{\text{opt}}) + \lambda P_{\text{bat}}(P_{\text{r}} - P_{\text{th}}^{\text{opt}})$.

Le choix du mode optimal se fera donc suivant le signe de la fonction F_0 :

- Si $F_0 > 0 \Rightarrow$ le mode électrique est optimal ($e^{\text{opt}} = 0$).
- Si $F_0 < 0 \Rightarrow$ le mode hybride est optimal ($e^{\text{opt}} = 1$).

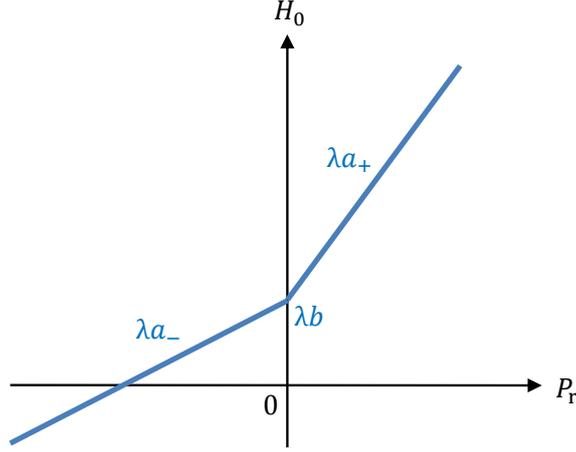


FIGURE 2.21 – Allure de l’Hamiltonien en mode électrique H_0 , avec : $P_m = P_r$ et $P_{th} = 0$

— Si $F_0 = 0 \Rightarrow$ les deux modes sont optimaux.

L’expression de $H_1(P_{th}^{opt}, P_r, \lambda)$ est calculée à partir de la forme générale donnée par (2.15) comme suit :

$$H_1(P_{th}^{opt}, P_r, \lambda) = A_1 P_{th}^{opt} + A_0 + \lambda(B_1(P_r - P_{th}^{opt}) + b) \quad (2.31)$$

Nous avons trouvé dans la section 2.1.1 que P_{th}^{opt} est en fonction de P_r et peut s’écrire sous la forme : $P_{th}^{opt}(P_r) = \alpha P_r + \beta$. En remplaçant $P_{th}^{opt}(P_r)$ dans H_1 , on obtient :

$$H_1(P_r, \lambda) = (A_1\alpha + \lambda(1 - \alpha)B_1)P_r + A_1\beta + A_0 + \lambda(b - \beta B_1) \quad (2.32)$$

Alors, F_0 est une fonction affine par morceaux. Elle est donnée par :

$$F_0(P_r, \lambda) = \begin{cases} (A_1\alpha + \lambda(1 - \alpha)B_1 - \lambda a_-)P_r + A_1\beta + A_0 - \lambda\beta B_1 & \text{si } \underline{P}_e \leq P_r \leq 0 \\ (A_1\alpha + \lambda(1 - \alpha)B_1 - \lambda a_+)P_r + A_1\beta + A_0 - \lambda\beta B_1 & \text{si } 0 \leq P_r \leq \bar{P}_e \end{cases} \quad (2.33)$$

Dans ce qui suit, l’expression de F_0 est déterminée pour les cas UC1 et UC2 de P_{th}^{opt} présentés dans la section 2.1.1 (page 57). Les autres cas de P_{th}^{opt} sont étudiés en annexe section 6.1. Pour analyser le signe de $F_0(P_r, \lambda)$, comme elle est affine par morceaux, alors, il suffit d’étudier son signe à chaque point de changement de coefficients. Puisque en mode électrique la ME assure seule la traction du véhicule, alors, le domaine de puissance à la roue où l’état optimal doit être déterminé est :

$$\underline{P}_e(\omega_e) \leq P_r \leq \bar{P}_e(\omega_e) \quad (2.34)$$

UC1 : $\lambda \leq \frac{a_1}{a_+}$

Dans ce cas, $P_{th}^{opt} = \underline{P}_{th}(P_r)$ et $\underline{P}_{th}(P_r) < P_{lim}$ (car $P_r < P_{lim} + \bar{P}_e$), alors $A_1 = a_1$ et $A_0 = Q_0 \forall P_r$ (voir section 2.1.1). Quant à α , β et B_1 , ils sont donnés suivant P_r comme suit :

$$\alpha = \begin{cases} 0 & \text{si } \underline{P}_e \leq P_r \leq \bar{P}_e + \underline{P}_{th} \\ 1 & \text{si } \bar{P}_e + \underline{P}_{th} \leq P_r \leq \bar{P}_e \end{cases}$$

$$\beta = \begin{cases} \frac{P_{th}}{-\bar{P}_e} & \text{si } \underline{P}_e \leq P_r \leq \bar{P}_e + \underline{P}_{th} \\ -\bar{P}_e & \text{si } \bar{P}_e + \underline{P}_{th} \leq P_r \leq \bar{P}_e \end{cases}$$

$$B_1 = \begin{cases} a_- & \text{si } \underline{P}_e \leq P_r \leq \underline{P}_{th} \\ a_+ & \text{si } \underline{P}_{th} \leq P_r \leq \bar{P}_e \end{cases}$$

Alors, $F_0(P_r, \lambda)$ est donnée par :

$$F_0(P_r, \lambda) = \begin{cases} \lambda a_- P_r + a_1 \underline{P}_{th} + Q_0 + \lambda(b - a_- \underline{P}_{th}) - \lambda(a_- P_r + b) & \text{si } \underline{P}_e \leq P_r \leq \underline{P}_{th} \\ \lambda a_+ P_r + a_1 \underline{P}_{th} + Q_0 + \lambda(b - a_+ \underline{P}_{th}) - \lambda(a_- P_r + b) & \text{si } \underline{P}_{th} \leq P_r \leq 0 \\ \lambda a_+ P_r + a_1 \underline{P}_{th} + Q_0 + \lambda(b - a_+ \underline{P}_{th}) - \lambda(a_+ P_r + b) & \text{si } 0 \leq P_r \leq \bar{P}_e + \underline{P}_{th} \\ a_1 P_r - a_1 \bar{P}_e + Q_0 + \lambda(b + a_+ \bar{P}_e) - \lambda(a_+ P_r + b) & \text{si } \bar{P}_e + \underline{P}_{th} \leq P_r \leq \bar{P}_e \end{cases} \quad (2.35)$$

Sachant que $a_1 \underline{P}_{th} + Q_0 = 0$, alors $F_0(P_r)$ devient :

$$F_0(P_r, \lambda) = \begin{cases} -\lambda a_- \underline{P}_{th} & \text{si } \underline{P}_e \leq P_r \leq \underline{P}_{th} \\ \lambda(a_+ - a_-)P_r - \lambda a_+ \underline{P}_{th} & \text{si } \underline{P}_{th} \leq P_r \leq 0 \\ -\lambda a_+ \underline{P}_{th} & \text{si } 0 \leq P_r \leq \bar{P}_e + \underline{P}_{th} \\ (a_1 - \lambda a_+)P_r - a_1 \bar{P}_e + Q_0 + \lambda a_+ \bar{P}_e & \text{si } \bar{P}_e + \underline{P}_{th} \leq P_r \leq \bar{P}_e \end{cases} \quad (2.36)$$

Comme le montre la figure 2.22, $F_0(P_r, \lambda)$ est positive quelque soit P_r et λ . Alors, $e^{\text{opt}} = 0 \quad \forall (P_r, \lambda)$.

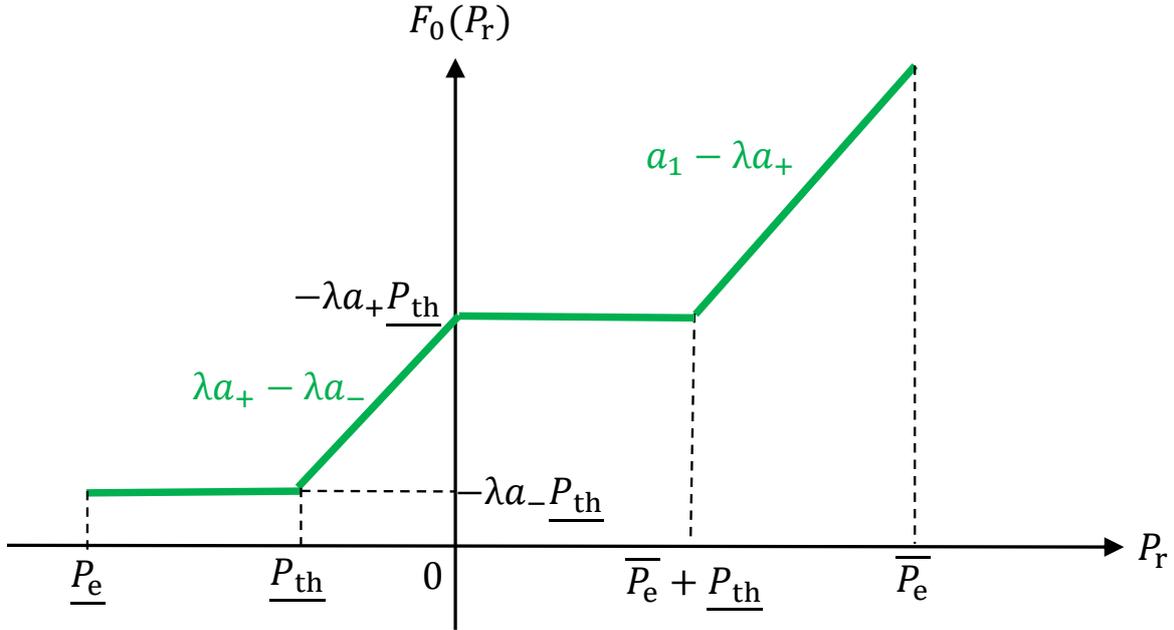


FIGURE 2.22 – Allure de la fonction F_0 déterminant l'état du moteur thermique en fonction de P_r pour UC1

UC2 : $\frac{a_1}{a_+} < \lambda \leq \frac{a_1}{a_-}$

Dans ce cas, $P_{th}^{\text{opt}}(P_r) < P_{lim}$ (car $P_r < P_{lim} + \bar{P}_e$), alors $A_1 = a_1$ et $A_0 = Q_0 \quad \forall P_r$. En supposant que $P_{lim} < \bar{P}_e$ (le cas $P_{lim} > \bar{P}_e$ est traité en annexe section 6.1), α , β et B_1 sont donnés suivant P_r comme suit :

$$\alpha = \begin{cases} 0 & \text{si } \underline{P}_e \leq P_r \leq \underline{P}_{th} \\ 1 & \text{si } \underline{P}_{th} \leq P_r \leq P_{lim} \\ 0 & \text{si } P_{lim} \leq P_r \leq \overline{P}_e \end{cases}$$

$$\beta = \begin{cases} \underline{P}_{th} & \text{si } \underline{P}_e \leq P_r \leq \underline{P}_{th} \\ 0 & \text{si } \underline{P}_{th} \leq P_r \leq P_{lim} \\ P_{lim} & \text{si } P_{lim} \leq P_r \leq \overline{P}_e \end{cases}$$

$$B_1 = \begin{cases} a_- & \text{si } \underline{P}_e \leq P_r \leq \underline{P}_{th} \\ 0 & \text{si } \underline{P}_{th} \leq P_r \leq P_{lim} \\ a_+ & \text{si } P_{lim} \leq P_r \leq \overline{P}_e \end{cases}$$

Alors, $F_0(P_r, \lambda)$ est donnée par :

$$F_0(P_r, \lambda) = \begin{cases} \lambda a_- P_r + a_1 \underline{P}_{th} + Q_0 + \lambda(b - a_- \underline{P}_{th}) - \lambda(a_- P_r + b) & \text{si } \underline{P}_e \leq P_r \leq \underline{P}_{th} \\ a_1 P_r + Q_0 + \lambda b - \lambda(a_- P_r + b) & \text{si } \underline{P}_{th} \leq P_r \leq 0 \\ a_1 P_r + Q_0 + \lambda b - \lambda(a_+ P_r + b) & \text{si } 0 \leq P_r \leq P_{lim} \\ \lambda a_+ P_r + Q_{lim} - \lambda a_+ P_{lim} + \lambda b - \lambda(a_+ P_r + b) & \text{si } P_{lim} \leq P_r \leq \overline{P}_e \end{cases} \quad (2.37)$$

En simplifiant, $F_0(P_r)$ devient :

$$F_0(P_r, \lambda) = \begin{cases} -\lambda a_- \underline{P}_{th} & \text{si } \underline{P}_e \leq P_r \leq \underline{P}_{th} \\ (a_1 - \lambda a_-) P_r + Q_0 & \text{si } \underline{P}_{th} \leq P_r \leq 0 \\ (a_1 - \lambda a_+) P_r + Q_0 & \text{si } 0 \leq P_r \leq P_{lim} \\ Q_{lim} - \lambda a_+ P_{lim} & \text{si } P_{lim} \leq P_r \leq \overline{P}_e \end{cases} \quad (2.38)$$

D'après la figure 2.23, on a :

- Si $\lambda < \frac{Q_{lim}}{a_+ P_{lim}}$, alors $e^{opt} = 0 \quad \forall P_r$,
- Si $\lambda > \frac{Q_{lim}}{a_+ P_{lim}}$, alors e^{opt} est donné par :

$$e^{opt}(P_r) = \begin{cases} 0 & \text{si } \underline{P}_e \leq P_r \leq P_0(\lambda) \\ 1 & \text{si } P_0(\lambda) \leq P_r \leq \overline{P}_e \end{cases} \quad (2.39)$$

La même démarche est appliquée sur les autres cas de P_{th}^{opt} (voir annexe section 6.1), ainsi, le tableau du signe de F_0 , dans le cas où $P_{lim} < \overline{P}_e$, est donné par :

λ	0	$\frac{a_1}{a_+}$	$\frac{Q_{lim}}{a_+ P_{lim}}$	$\frac{Q_{lim}}{a_- P_{lim}}$	$+\infty$
UC	1	2 ou 3	2 ou 3	3, 4 ou 5	
$F_0(\overline{P}_e, \lambda)$	+	+	0	-	-
$F_0(P_{lim}, \lambda)$	+	+	0	-	-
$F_0(0, \lambda)$	+	+		+	0
$F_0(P_{lim} + \underline{P}_e, \lambda)$	+	+		+	0
$F_0(\underline{P}_e, \lambda)$	+	+		+	+

D'après le tableau du signe de F_0 , on peut constater que, pour λ donné, $F_0(P_r)$ ne change de signe qu'une seule fois de négative à positive. Autrement dit, l'équation $F_0(P_r) = 0$ a une solution unique. Cette solution est notée $P_0(\lambda)$ et servira de seuil pour déterminer e^{opt} comme suit :

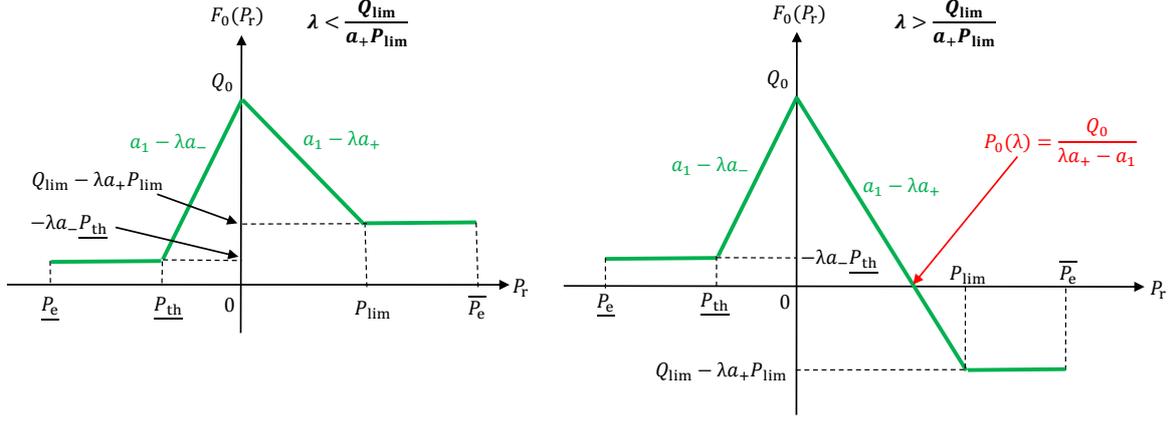


FIGURE 2.23 – F_0 en fonction de P_r pour UC2. Quand $\lambda < \frac{Q_{\text{lim}}}{a_+ P_{\text{lim}}}$ (à gauche), F_0 ne change pas de signe. Quand $\lambda > \frac{Q_{\text{lim}}}{a_+ P_{\text{lim}}}$ (à droite), F_0 change une seule fois de signe de positive à négative

- Si $P_r < P_0(\lambda) \Rightarrow$ le mode électrique est optimal ($e^{\text{opt}} = 0$).
- Si $P_r > P_0(\lambda) \Rightarrow$ le mode hybride est optimal ($e^{\text{opt}} = 1$).
- Si $P_r = P_0(\lambda) \Rightarrow$ les deux modes sont optimaux. Dans ce cas, la commande est singulière. Grâce à l’optimisation analytique, ce cas sera identifié en amont de l’implémentation et sera traité à part en utilisant, par exemple, une hystérésis.

La figure 2.24 représente P_0 en fonction de λ .

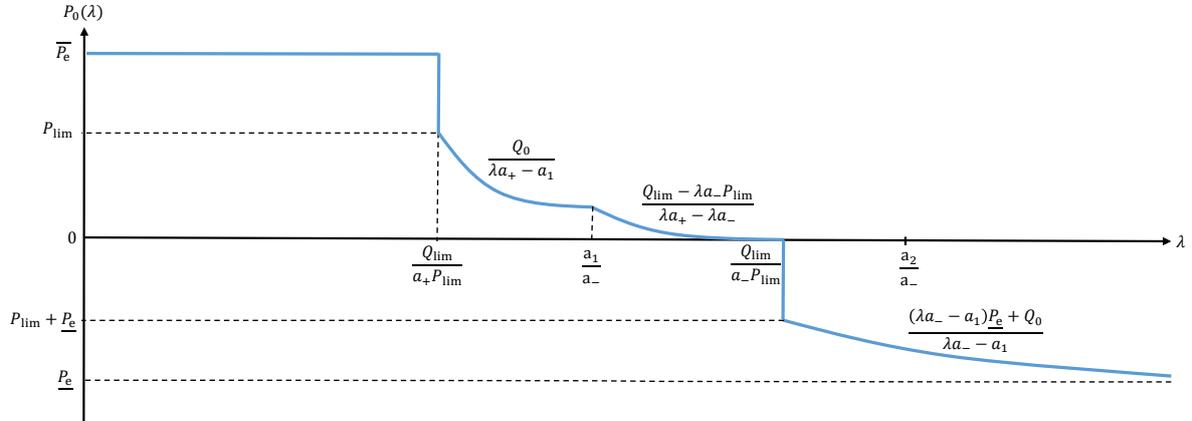


FIGURE 2.24 – Allure de $P_0(\lambda)$ dans le cas où $P_{\text{lim}} < \bar{P}_e$

Les résultats de simulation de l’optimisation analytique de l’état du MT sera présentée avec les résultats de la section 2.3.1.

2.3 Optimisation du régime du moteur thermique

Dans cette section, le calcul analytique du régime optimal du moteur thermique ($\omega_{\text{th}}^{\text{opt}}$) est présenté. On rappelle que le régime du moteur thermique est lié à celui de la roue via la

transmission par le ratio R_{th} . Alors, le régime du moteur thermique est donné par :

$$\omega_{th} = \omega_r R_{th} \quad (2.40)$$

Comme ω_r est une donnée du cycle de conduite 1.8, alors, il suffit de trouver le rapport R_{th} optimal pour déterminer le régime thermique optimal.

Dans ce qui suit, le rapport de transmission optimal est déterminé dans le cas d'une transmission à rapports discrets (section 2.3.1) et continus (section 2.3.2).

2.3.1 Rapports discrets

Dans le cas d'une transmission à rapports discrets, la variable d'optimisation R_{th} est discrète. On suppose que R_{th} est dans l'ensemble $\{R_1, R_2\}$ (figure 2.1). Afin de trouver R_{th}^{opt} , on utilise le PMP pour les systèmes hybrides, comme présenté dans la section 1.3.2, pour résoudre le problème suivant :

$$POP_3 : \begin{cases} \min_{P_{th}, R_{th}} \int_{t_0}^{t_f} Q(P_{th}(t), R_{th}(t)) dt \\ \dot{SoE}(t) = -\frac{P_{bat}(t)}{E_{max}} \\ 0 \leq SoE(t) \leq 100 \\ \underline{P}_{th}(R_{th}) \leq P_{th} \leq \overline{P}_{th}(R_{th}) \\ P_r = P_{th} + P_m \\ \underline{P}_e(\omega_e) \leq P_m \leq \overline{P}_e(\omega_e) \\ R_{th} \in \{R_1, R_2\} \\ \omega_{th}(R_1) < \omega_{th}(R_2) \end{cases} \quad (2.41)$$

Les commandes optimales sont données par :

$$[P_{th}^{opt}, R_{th}^{opt}] = \arg \min_{P_{th}, R_{th}} (H(P_{th}, R_{th}, P_r, \lambda)) \quad (2.42)$$

Avec, $H(P_{th}, R_{th}, P_r, \lambda) = Q(P_{th}, R_{th}) + \lambda P_{bat}(P_r - P_{th})$. Dans cette étude, H est également calculé à partir des modèles affines de Q et de P_{bat} définis dans les équations (1.12) et (1.23).

Comme vu précédemment, le PMP pour les systèmes hybrides consiste à :

1. Appliquer le PMP dans chaque mode $\{R_1, R_2\}$ afin de calculer $P_{th}^{opt}(R_{th})$. L'Hamiltonien dans chaque mode est donné par :

— Quand $R_{th} = R_1$:

$$H = H_{R_1}(P_{th}, P_r, \lambda) = Q_{R_1}(P_{th}) + \lambda P_{bat}(P_r - P_{th}) \quad (2.43)$$

Alors, dans ce mode : $P_{th}^{opt}(R_1) = \arg \min_{P_{th}} (H_{R_1}(P_{th}, P_r, \lambda))$

— Quand $R_{th} = R_2$:

$$H = H_{R_2}(P_{th}, P_r, \lambda) = Q_{R_2}(P_{th}) + \lambda P_{bat}(P_r - P_{th}) \quad (2.44)$$

Alors, dans ce mode : $P_{th}^{opt}(R_2) = \arg \min_{P_{th}} (H_{R_2}(P_{th}, P_r, \lambda))$

2. Le rapport thermique optimal est trouvé comme suit :

$$R_{th}^{opt} = \arg \min_{R_{th} \in \{R_1, R_2\}} \{H_{R_1}(P_{th}^{opt}(R_1), P_r, \lambda), H_{R_2}(P_{th}^{opt}(R_2), P_r, \lambda)\} \quad (2.45)$$

Comme précédemment présenté pour l'état du MT, l'objectif étant de comparer H_{R_1} à H_{R_2} , on définit alors la fonction F_{RT} telle que :

$$F_{RT} = H_{R_1}(P_{th}^{opt}(R_1), P_r, \lambda) - H_{R_2}(P_{th}^{opt}(R_2), P_r, \lambda) \quad (2.46)$$

Le choix du rapport optimal se fera donc suivant le signe de la fonction F_{RT} comme suit :

- Si $F_{RT} < 0 \Rightarrow$ le rapport R_1 est optimal
- Si $F_{RT} > 0 \Rightarrow$ le rapport R_2 est optimal
- Si $F_{RT} = 0 \Rightarrow$ les deux rapports sont optimaux

Les expressions de $H_{R_1}(P_{th}^{opt}(R_1), P_r, \lambda)$ et de $H_{R_2}(P_{th}^{opt}(R_2), P_r, \lambda)$ sont calculés à partir de la forme générale donnée par (2.15) comme suit :

$$H_{R_1}(P_{th}^{opt}(R_1), P_r, \lambda) = A_{11}P_{th}^{opt}(R_1) + A_{10} + \lambda(B_{11}(P_r - P_{th}^{opt}(R_1)) + b) \quad (2.47)$$

$$H_{R_2}(P_{th}^{opt}(R_2), P_r, \lambda) = A_{21}P_{th}^{opt}(R_2) + A_{20} + \lambda(B_{21}(P_r - P_{th}^{opt}(R_2)) + b) \quad (2.48)$$

D'après la section 2.1.1, on peut constater la solution $P_{th}^{opt}(P_r)$ est une fonction linéaire de P_r . Alors, $P_{th}^{opt}(R_1)$ et $P_{th}^{opt}(R_2)$ peuvent s'écrire en fonction de P_r sous la forme générale suivante : $P_{th}^{opt}(R_1) = \alpha_1 P_r + \beta_1$ et $P_{th}^{opt}(R_2) = \alpha_2 P_r + \beta_2$. En remplaçant $P_{th}^{opt}(R_1)$ dans H_{R_1} et $P_{th}^{opt}(R_2)$ dans H_{R_2} , on obtient :

$$H_{R_1}(P_r, \lambda) = (A_{11}\alpha_1 + \lambda(1 - \alpha_1)B_{11})P_r + A_{11}\beta_1 + A_{10} + \lambda(b - \beta B_{11}) \quad (2.49)$$

$$H_{R_2}(P_r, \lambda) = (A_{21}\alpha_2 + \lambda(1 - \alpha_2)B_{21})P_r + A_{21}\beta_2 + A_{20} + \lambda(b - \beta B_{21}) \quad (2.50)$$

Dans ce qui suit, l'expression de F_{RT} est déterminée pour les cas UC1 et UC2 de P_{th}^{opt} présentés dans la section 2.1.1 (page 57). Les autres cas de P_{th}^{opt} sont étudiés en annexe section 6.2.1. Pour analyser le signe de $F_{RT}(P_r, \lambda)$, comme elle est affine par morceaux, alors, il suffit d'étudier son signe à chaque point de changement de coefficients.

Comme $\omega_{th}(R_1) < \omega_{th}(R_2)$, alors, $\underline{P}_{th}(R_1) > \underline{P}_{th}(R_2)$ et $\overline{P}_{th}(R_1) < \overline{P}_{th}(R_2)$ (selon la figure 1.10). On en déduit que le domaine de puissance à la roue où le rapport optimal doit être déterminé est :

$$\underline{P}_r^1 = \underline{P}_{th}(R_1) + \underline{P}_e(\omega_e) \leq P_r \leq \overline{P}_{th}(R_1) + \overline{P}_e(\omega_e) = \overline{P}_r^1 \quad (2.51)$$

Afin de faciliter la lecture des équations, nous simplifions l'écriture. L'exposant 1 (respectivement 2) correspondra au premier rapport (respectivement deuxième rapport).

UC1 : $\lambda \leq \frac{a_1}{a_+}$

Dans ce cas, les coefficients de H_{R_1} et de H_{R_2} sont donnés par :

$$\alpha_1 = \begin{cases} 0 & \text{si } \underline{P}_r^1 \leq P_r \leq \overline{P}_e + \underline{P}_{th}^1 \\ 1 & \text{si } \overline{P}_e + \underline{P}_{th}^1 \leq P_r \leq \overline{P}_r^1 \end{cases}$$

$$\beta_1 = \begin{cases} \underline{P}_{th}^1 & \text{si } \underline{P}_r^1 \leq P_r \leq \overline{P}_e + \underline{P}_{th}^1 \\ -\overline{P}_e & \text{si } \overline{P}_e + \underline{P}_{th}^1 \leq P_r \leq \overline{P}_r^1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
A_{11} &= \begin{cases} a_1 & \text{si } \underline{P}_r^1 \leq P_r \leq P_{\text{lim}}^1 + \overline{P}_e \\ a_2 & \text{si } P_{\text{lim}}^1 + \overline{P}_e \leq P_r \leq \overline{P}_r^1 \end{cases} \\
A_{10} &= \begin{cases} Q_0^1 & \text{si } \underline{P}_r^1 \leq P_r \leq P_{\text{lim}}^1 + \overline{P}_e \\ Q_{\text{lim}}^1 - a_2 P_{\text{lim}}^1 & \text{si } P_{\text{lim}}^1 + \overline{P}_e \leq P_r \leq \overline{P}_r^1 \end{cases} \\
B_{11} &= \begin{cases} a_- & \text{si } \underline{P}_r^1 \leq P_r \leq \underline{P}_{\text{th}}^1 \\ a_+ & \text{si } \underline{P}_{\text{th}}^1 \leq P_r \leq \overline{P}_r^1 \end{cases} \\
\alpha_2 &= \begin{cases} 0 & \text{si } \underline{P}_r^2 \leq P_r \leq \overline{P}_e + \underline{P}_{\text{th}}^2 \\ 1 & \text{si } \overline{P}_e + \underline{P}_{\text{th}}^2 \leq P_r \leq \overline{P}_r^2 \end{cases} \\
\beta_2 &= \begin{cases} \underline{P}_{\text{th}}^2 & \text{si } \underline{P}_r^1 \leq P_r \leq \overline{P}_e + \underline{P}_{\text{th}}^2 \\ -\overline{P}_e & \text{si } \overline{P}_e + \underline{P}_{\text{th}}^2 \leq P_r \leq \overline{P}_r^1 \end{cases} \\
A_{21} &= \begin{cases} a_1 & \text{si } \underline{P}_r^1 \leq P_r \leq P_{\text{lim}}^2 + \overline{P}_e \\ a_2 & \text{si } P_{\text{lim}}^2 + \overline{P}_e \leq P_r \leq \overline{P}_r^1 \end{cases} \\
A_{20} &= \begin{cases} Q_0^2 & \text{si } \underline{P}_r^1 \leq P_r \leq P_{\text{lim}}^2 + \overline{P}_e \\ Q_{\text{lim}}^2 - a_2 P_{\text{lim}}^2 & \text{si } P_{\text{lim}}^2 + \overline{P}_e \leq P_r \leq \overline{P}_r^1 \end{cases} \\
B_{21} &= \begin{cases} a_- & \text{si } \underline{P}_r^1 \leq P_r \leq \underline{P}_{\text{th}}^2 \\ a_+ & \text{si } \underline{P}_{\text{th}}^2 \leq P_r \leq \overline{P}_r^1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Alors, en supposant que $\overline{P}_e + \underline{P}_{\text{th}}^2 > \underline{P}_{\text{th}}^1$ (le cas où $\overline{P}_e + \underline{P}_{\text{th}}^2 < \underline{P}_{\text{th}}^1$ est traité en annexe section 6.2.1), la fonction $F_{\text{RT}}(P_r, \lambda)$ permettant le passage du rapport 1 à 2, est donnée par :

$$F_{\text{RT}}(P_r, \lambda) = \begin{cases} \lambda a_- (\underline{P}_{\text{th}}^2 - \underline{P}_{\text{th}}^1) & \text{si } \underline{P}_r^1 \leq P_r \leq \underline{P}_{\text{th}}^2 \\ \lambda (a_- - a_+) P_r + \lambda a_+ \underline{P}_{\text{th}}^2 - \lambda a_- \underline{P}_{\text{th}}^1 & \text{si } \underline{P}_{\text{th}}^2 \leq P_r \leq \underline{P}_{\text{th}}^1 \\ \lambda a_+ (\underline{P}_{\text{th}}^2 - \underline{P}_{\text{th}}^1) & \text{si } \underline{P}_{\text{th}}^1 \leq P_r \leq \overline{P}_e + \underline{P}_{\text{th}}^2 \\ (\lambda a_+ - a_1) P_r - \lambda a_+ \underline{P}_{\text{th}}^1 + (a_1 - \lambda a_+) \overline{P}_e - Q_0^2 & \text{si } \overline{P}_e + \underline{P}_{\text{th}}^2 \leq P_r \leq \overline{P}_e + \underline{P}_{\text{th}}^1 \\ Q_0^1 - Q_0^2 & \text{si } \overline{P}_e + \underline{P}_{\text{th}}^1 \leq P_r \leq \overline{P}_e + \underline{P}_{\text{lim}}^1 \\ (a_2 - a_1) P_r + (a_1 - a_2) \overline{P}_e + Q_{\text{lim}}^1 - a_2 P_{\text{lim}}^1 - Q_0^2 & \text{si } \overline{P}_e + \underline{P}_{\text{lim}}^1 \leq P_r \leq \overline{P}_e + \underline{P}_{\text{lim}}^2 \\ a_2 (P_{\text{lim}}^2 - P_{\text{lim}}^1) + Q_{\text{lim}}^1 - Q_{\text{lim}}^2 & \text{si } \overline{P}_e + \underline{P}_{\text{lim}}^2 \leq P_r \leq \overline{P}_r^1 \end{cases} \quad (2.52)$$

Le tracé de la fonction $F_{\text{RT}}(P_r, \lambda)$ pour le UC1, définie ci-dessus, apparait à la figure 2.25. Le signe de cette fonction permet alors de déterminer que :

$$R_{\text{th}}^{\text{opt}}(P_r) = \begin{cases} R_1 & \text{si } \underline{P}_r^1 \leq P_r \leq P_{\text{RT}} \\ R_2 & \text{si } P_{\text{RT}} \leq P_r \leq \overline{P}_r^1 \end{cases} \quad (2.53)$$

Remarque : $a_2(P_{\text{lim}}^2 - P_{\text{lim}}^1) + Q_{\text{lim}}^1 - Q_{\text{lim}}^2 > 0$ est un résultat de l'hypothèse 4 où on suppose que $a_2 > \frac{\frac{\partial Q_{\text{lim}}}{\partial \omega_{\text{th}}}}{\frac{\partial P_{\text{lim}}}{\partial \omega_{\text{th}}}}$.

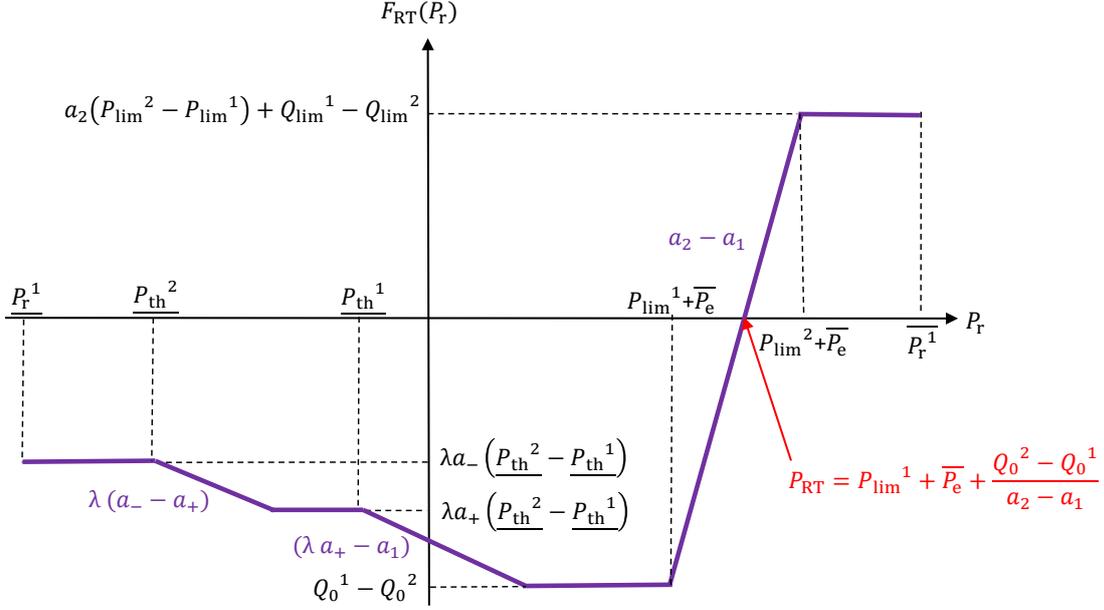


FIGURE 2.25 – F_{RT} en fonction de P_r pour UC1

UC2 : $\frac{a_1}{a_+} < \lambda \leq \frac{a_1}{a_-}$

Dans ce cas, les coefficients de H_{R_1} et de H_{R_2} sont donnés par :

$$\alpha_1 = \begin{cases} 0 & \text{si } \underline{P}_r^1 \leq P_r \leq \underline{P}_{th}^1 \\ 1 & \text{si } \underline{P}_{th}^1 \leq P_r \leq P_{lim}^1 \\ 0 & \text{si } P_{lim}^1 \leq P_r \leq \bar{P}_e + P_{lim}^1 \\ 1 & \text{si } \bar{P}_e + P_{lim}^1 \leq P_r \leq \bar{P}_r^1 \end{cases}$$

$$\beta_1 = \begin{cases} \underline{P}_{th}^1 & \text{si } \underline{P}_r^1 \leq P_r \leq \underline{P}_{th}^1 \\ 0 & \text{si } \underline{P}_{th}^1 \leq P_r \leq P_{lim}^1 \\ P_{lim}^1 & \text{si } P_{lim}^1 \leq P_r \leq \bar{P}_e + P_{lim}^1 \\ -\bar{P}_e & \text{si } \bar{P}_e + P_{lim}^1 \leq P_r \leq \bar{P}_r^1 \end{cases}$$

$$A_{11} = \begin{cases} a_1 & \text{si } \underline{P}_r^1 \leq P_r \leq P_{lim}^1 + \bar{P}_e \\ a_2 & \text{si } P_{lim}^1 + \bar{P}_e \leq P_r \leq \bar{P}_r^1 \end{cases}$$

$$A_{10} = \begin{cases} Q_0^1 & \text{si } \underline{P}_r^1 \leq P_r \leq P_{lim}^1 + \bar{P}_e \\ Q_{lim}^1 - a_2 P_{lim}^1 & \text{si } P_{lim}^1 + \bar{P}_e \leq P_r \leq \bar{P}_r^1 \end{cases}$$

$$B_{11} = \begin{cases} a_- & \text{si } \underline{P}_r^1 \leq P_r \leq \underline{P}_{th}^1 \\ 0 & \text{si } \underline{P}_{th}^1 \leq P_r \leq P_{lim}^1 \\ a_+ & \text{si } P_{lim}^1 \leq P_r \leq \bar{P}_r^1 \end{cases}$$

$$\alpha_2 = \begin{cases} 0 & \text{si } \underline{P}_r^1 \leq P_r \leq \underline{P}_{th}^2 \\ 1 & \text{si } \underline{P}_{th}^2 \leq P_r \leq P_{lim}^2 \\ 0 & \text{si } P_{lim}^2 \leq P_r \leq \bar{P}_e + P_{lim}^2 \\ 1 & \text{si } \bar{P}_e + P_{lim}^2 \leq P_r \leq \bar{P}_r^1 \end{cases}$$

$$\beta_2 = \begin{cases} \underline{P}_{\text{th}}^2 & \text{si } \underline{P}_r^1 \leq P_r \leq \underline{P}_{\text{th}}^2 \\ 0 & \text{si } \underline{P}_{\text{th}}^2 \leq P_r \leq P_{\text{lim}}^2 \\ P_{\text{lim}}^2 & \text{si } P_{\text{lim}}^2 \leq P_r \leq \bar{P}_e + P_{\text{lim}}^2 \\ -\bar{P}_e & \text{si } \bar{P}_e + P_{\text{lim}}^2 \leq P_r \leq \bar{P}_r^1 \end{cases}$$

$$A_{21} = \begin{cases} a_1 & \text{si } \underline{P}_r^1 \leq P_r \leq P_{\text{lim}}^2 + \bar{P}_e \\ a_2 & \text{si } P_{\text{lim}}^2 + \bar{P}_e \leq P_r \leq \bar{P}_r^1 \end{cases}$$

$$A_{20} = \begin{cases} Q_0^2 & \text{si } \underline{P}_r^1 \leq P_r \leq P_{\text{lim}}^2 + \bar{P}_e \\ Q_{\text{lim}}^2 - a_2 P_{\text{lim}}^2 & \text{si } P_{\text{lim}}^2 + \bar{P}_e \leq P_r \leq \bar{P}_r^1 \end{cases}$$

$$B_{21} = \begin{cases} a_- & \text{si } \underline{P}_r^1 \leq P_r \leq \underline{P}_{\text{th}}^2 \\ 0 & \text{si } \underline{P}_{\text{th}}^2 \leq P_r \leq P_{\text{lim}}^2 \\ a_+ & \text{si } P_{\text{lim}}^2 \leq P_r \leq \bar{P}_r^1 \end{cases}$$

Alors, en supposant que $P_{\text{lim}}^2 < \bar{P}_e + P_{\text{lim}}^1$ (le cas où $P_{\text{lim}}^2 > \bar{P}_e + P_{\text{lim}}^1$ est traité en annexe section 6.2.1), $F_{\text{RT}}(P_r, \lambda)$ est donnée par :

$$F_{\text{RT}}(P_r, \lambda) = \begin{cases} \lambda a_- (\underline{P}_{\text{th}}^2 - \underline{P}_{\text{th}}^1) & \text{si } \underline{P}_r^1 \leq P_r \leq \underline{P}_{\text{th}}^2 \\ (\lambda a_- - a_1) P_r - \lambda a_- \underline{P}_{\text{th}}^1 - Q_0^2 & \text{si } \underline{P}_{\text{th}}^2 \leq P_r \leq \underline{P}_{\text{th}}^1 \\ Q_0^1 - Q_0^2 & \text{si } \underline{P}_{\text{th}}^1 \leq P_r \leq P_{\text{lim}}^1 \\ (\lambda a_+ - a_1) P_r - \lambda a_+ P_{\text{lim}}^1 + Q_{\text{lim}}^1 - Q_0^2 & \text{si } P_{\text{lim}}^1 \leq P_r \leq P_{\text{lim}}^2 \\ \lambda a_+ (P_{\text{lim}}^2 - P_{\text{lim}}^1) + Q_{\text{lim}}^1 - Q_{\text{lim}}^2 & \text{si } P_{\text{lim}}^2 \leq P_r \leq \bar{P}_e + P_{\text{lim}}^1 \\ (a_2 - \lambda a_+) P_r + (\lambda a_+ - a_2) \bar{P}_e & \text{si } \bar{P}_e + P_{\text{lim}}^1 \leq P_r \leq \bar{P}_e + P_{\text{lim}}^2 \\ + Q_{\text{lim}}^1 - Q_{\text{lim}}^2 - a_2 P_{\text{lim}}^1 + \lambda a_+ P_{\text{lim}}^2 & \\ a_2 (P_{\text{lim}}^2 - P_{\text{lim}}^1) + Q_{\text{lim}}^1 - Q_{\text{lim}}^2 & \text{si } \bar{P}_e + P_{\text{lim}}^2 \leq P_r \leq \bar{P}_r^1 \end{cases} \quad (2.54)$$

Comme tracé dans la figure 2.26, la fonction $F_{\text{RT}}(P_r, \lambda)$ dans le UC2 change de signe une seule fois. En effet, elle négative pour $P_r < P_{\text{lim}}^1$ car comme $\omega_{\text{th}}^1 < \omega_{\text{th}}^2$, on en déduit que $Q_0^1 < Q_0^2$ et $\underline{P}_{\text{th}}^2 < \underline{P}_{\text{th}}^1$ (figures 1.14 et 1.10); et elle est positive pour $P_r > P_{\text{lim}}^2 + \bar{P}_e$ (hypothèse 4). L'intersection de $F_{\text{RT}}(P_r)$ avec l'axe des abscisses est donc soit pour $P_r \in [P_{\text{lim}}^1, P_{\text{lim}}^2]$; soit pour $P_r \in [P_{\text{lim}}^2, P_{\text{lim}}^1 + \bar{P}_e]$. Ceci est déterminé selon λ . Ainsi, si $\lambda < \frac{Q_{\text{lim}}^2 - Q_{\text{lim}}^1}{a_+ (P_{\text{lim}}^2 - P_{\text{lim}}^1)} \Leftrightarrow \lambda a_+ (P_{\text{lim}}^2 - P_{\text{lim}}^1) + Q_{\text{lim}}^1 - Q_{\text{lim}}^2 < 0$, alors la solution de l'équation $F_{\text{RT}}(P_r) = 0$ appartient à l'intervalle $[P_{\text{lim}}^2, P_{\text{lim}}^1 + \bar{P}_e]$. Dans le cas contraire, $\lambda > \frac{Q_{\text{lim}}^2 - Q_{\text{lim}}^1}{a_+ (P_{\text{lim}}^2 - P_{\text{lim}}^1)} \Leftrightarrow \lambda a_+ (P_{\text{lim}}^2 - P_{\text{lim}}^1) + Q_{\text{lim}}^1 - Q_{\text{lim}}^2 > 0$, alors la solution de l'équation $F_{\text{RT}}(P_r) = 0$ se trouve dans $[P_{\text{lim}}^1, P_{\text{lim}}^2]$. Une fois l'intersection, notée $P_{\text{RT}}(\lambda)$, déterminée, on en déduit alors que :

$$R_{\text{th}}^{\text{opt}}(P_r) = \begin{cases} R_1 & \text{si } \underline{P}_r^1 \leq P_r \leq P_{\text{RT}}(\lambda) \\ R_2 & \text{si } P_{\text{RT}}(\lambda) \leq P_r \leq \bar{P}_r^1 \end{cases} \quad (2.55)$$

La même démarche est appliquée sur les autres cas de $P_{\text{th}}^{\text{opt}}$ (voir annexe section 6.2.1),

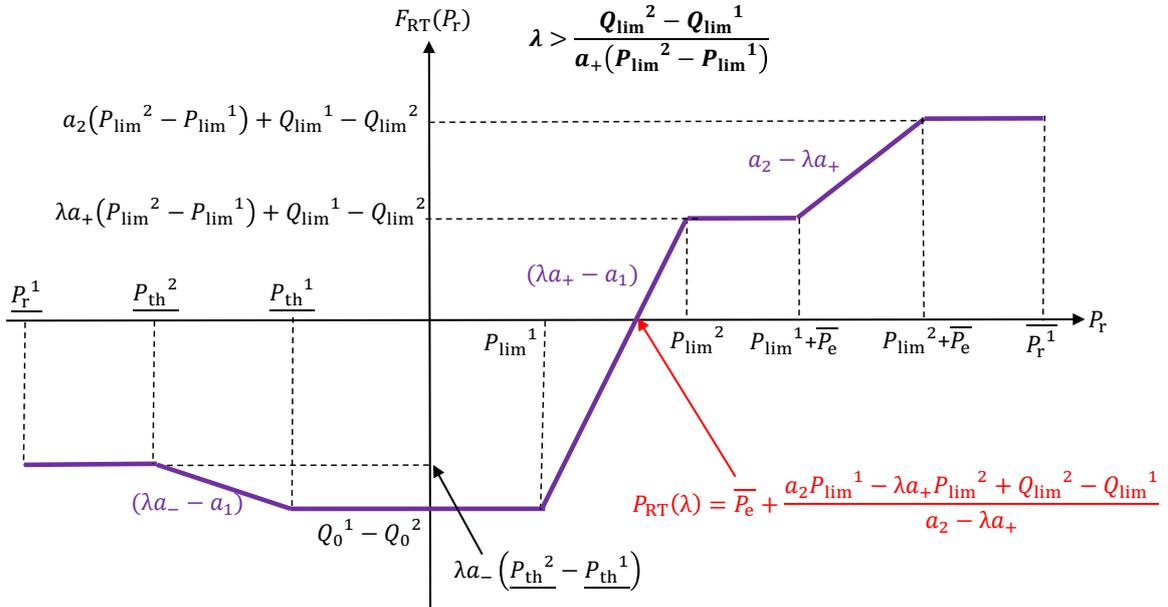
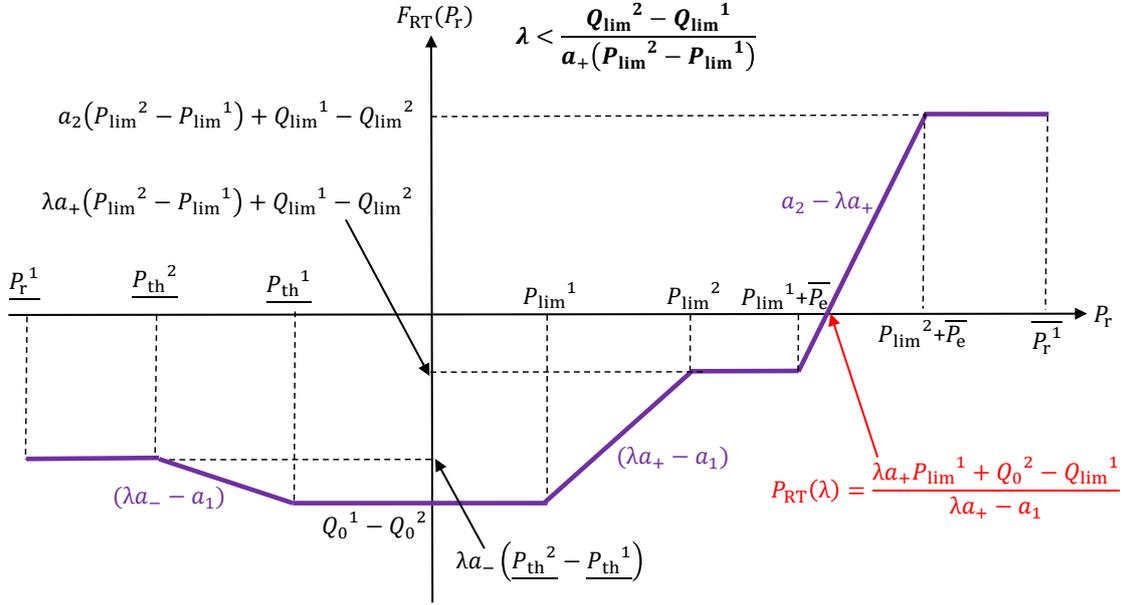


FIGURE 2.26 – F_{RT} en fonction de P_r pour UC2

ainsi, le tableau du signe de F_{RT} est donné par :

λ	0	$\frac{a_1}{a_+}$	$\frac{Q_{lim}^2 - Q_{lim}^1}{a_+(P_{lim}^2 - P_{lim}^1)}$	$\frac{Q_{lim}^2 - Q_{lim}^1}{a_-(P_{lim}^2 - P_{lim}^1)}$	$\frac{a_2}{a_-}$	$+\infty$
UC	1	2, 3 ou 4		2, 3 ou 4	2, 3 ou 4	5
$F_{RT}(\overline{P}_r, \lambda)$	+	+		+	+	+
$F_{RT}(P_{lim}^2 + \overline{P}_e, \lambda)$	+	+		+	+	+
$F_{RT}(P_{lim}^1 + \overline{P}_e, \lambda)$	-	-	0	+	+	+
$F_{RT}(P_{lim}^2, \lambda)$	-	-	0	+	+	+
$F_{RT}(P_{lim}^1, \lambda)$	-	-	-	0	+	+
$F_{RT}(P_{lim}^2 + \underline{P}_e, \lambda)$	-	-	-	0	+	+
$F_{RT}(P_{lim}^1 + \underline{P}_e, \lambda)$	-	-	-	-	-	-
$F_{RT}(\underline{P}_r, \lambda)$	-	-	-	-	-	-

D'après le tableau du signe de F_{RT} , on peut constater que, pour λ donné, $F_{RT}(P_r)$ ne change de signe qu'une seule fois de négative à positive. Autrement dit, l'équation $F_{RT}(P_r) = 0$ a une solution unique. Cette solution servira de seuil pour déterminer R_{th}^{opt} comme suit :

- Si $P_r < P_{RT}(\lambda) \Rightarrow R_{th}^{opt} = R_1$,
- Si $P_r > P_{RT}(\lambda) \Rightarrow R_{th}^{opt} = R_2$,
- Si $P_r = P_{RT}(\lambda) \Rightarrow$ les rapports R_1 et R_2 sont tous les deux optimaux. Ce cas sera isolé comme un cas particulier et sera traité par l'utilisation d'une hystérésis.

La figure 2.27 représente les expressions de P_{RT} en fonction de λ dans le cas où $\frac{a_2}{a_+} > \frac{a_1}{a_-}$ (le cas où $\frac{a_2}{a_+} < \frac{a_1}{a_-}$ est traité en annexe 6.2.1).

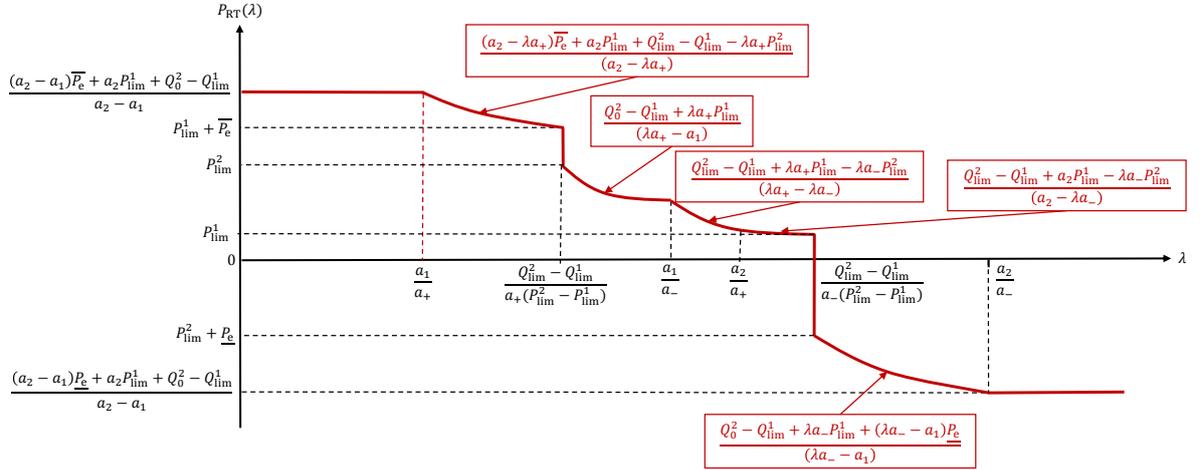


FIGURE 2.27 – Expressions du seuil P_{RT} en fonction de λ

Résultats de Simulation

Dans cette section, les résultats de simulation de l'optimisation du régime du moteur thermique pour une boîte de vitesses à 3 rapports discrets (comme dans le véhicule de la

figure 1.5) ainsi que la gestion de l'état du MT sont présentés. L'état "éteint" du MT est considéré comme un rapport discret nul. Les résultats présentés sont issus d'une simulation hors-ligne (figure 1.7). Les figures 2.28 et 2.29 représentent les commandes P_{th}^{opt} et ω_{th}^{opt} obtenues par la méthode analytique ; et celles obtenues par la méthode Num_1^{1000} utilisant le modèle affine (1.23) de la machine électrique.

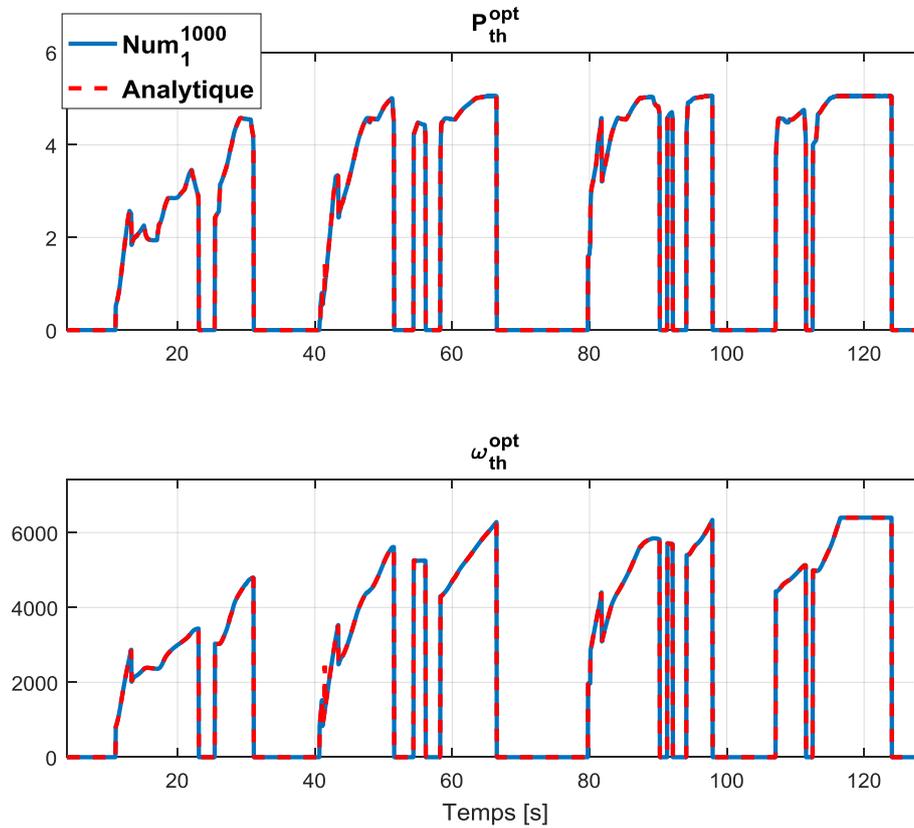


FIGURE 2.28 – Commandes optimales P_{th}^{opt} et ω_{th}^{opt} issues de la méthodologie analytique et de la méthode Num_1^{1000} pour le cycle ARTEMIS Autoroute

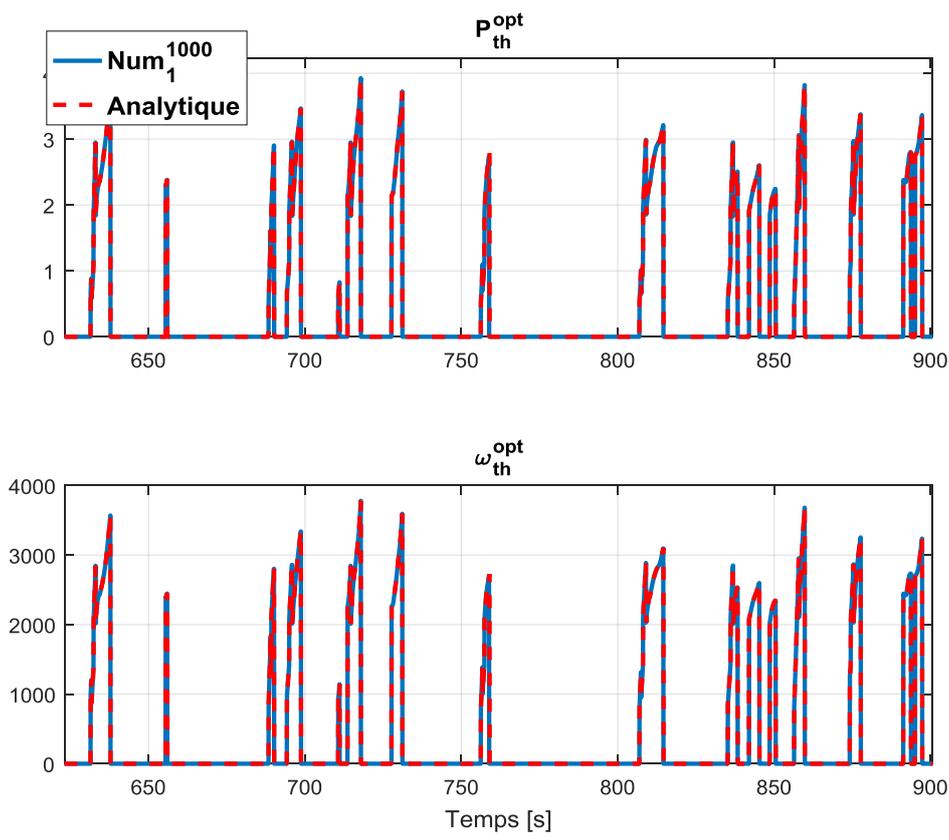


FIGURE 2.29 – Commandes optimales P_{th}^{opt} et ω_{th}^{opt} issues de la méthodologie analytique et de la méthode Num_1^{1000} pour le cycle ARTEMIS Urbain

Discussion La méthode analytique trouve exactement la même solution que la méthode Num_1^{1000} (figures 2.28 et 2.29). Nous avons également comparé la méthode Num_1^{1000} avec la méthode Num_2^{1000} (figure 2.30). D'après la figure 2.30, les commandes issues des approches Num_1^{1000} et Num_2^{1000} sont presque similaires. Ceci permet de valider la modélisation convexe.

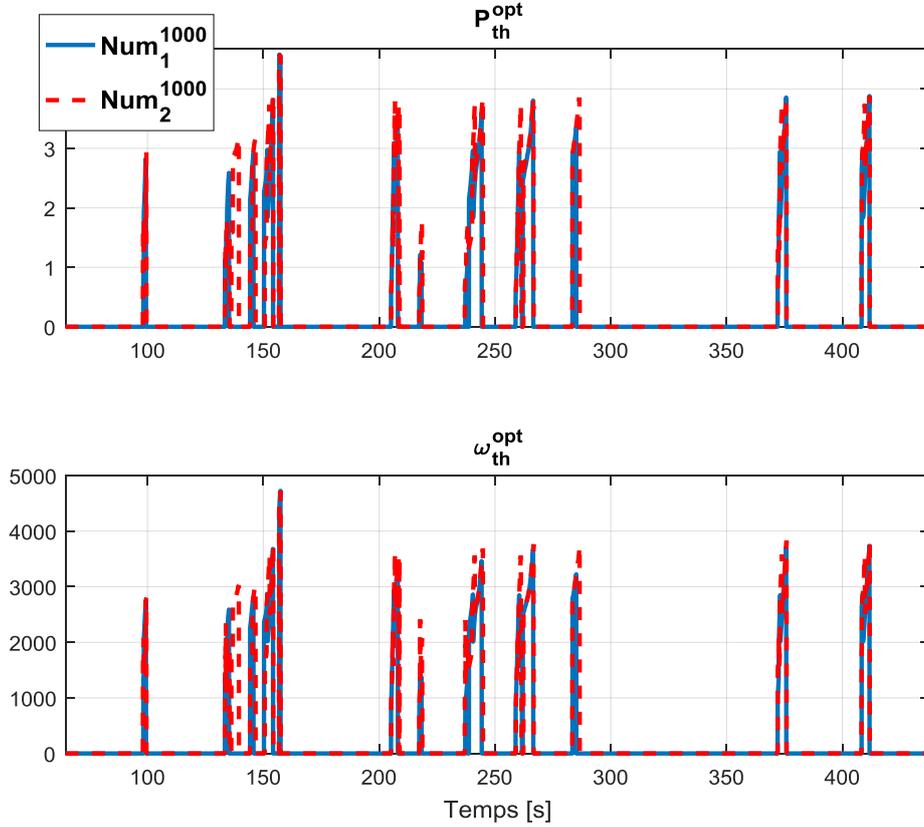


FIGURE 2.30 – Commandes optimales P_{th}^{opt} et ω_{th}^{opt} issues des méthodes Num_1^{1000} et Num_2^{1000} pour le cycle ARTEMIS Urbain

Le temps de calcul est déterminé à partir de l'équation (1.52). Concernant la mémoire, on applique la même démarche expliquée dans les résultats de la section précédente. Nous avons, en plus des variables de l'optimisation de la puissance (tableau 2.4) :

- pour la gestion de l'état du moteur thermique : d'après la figure 2.24, il faut calculer 2 seuils de λ , les paramètres Q_0 et Q_{lim} ainsi que la fonction $P_0(\lambda)$ qui permet de déterminer l'état optimal du MT. Au total, la méthode analytique aura besoin de 5 *Doubles* en plus pour le calcul de l'état optimal du MT.
- pour la gestion du rapport de boîte : quand les trois rapports sont admissibles, afin de décider entre eux, nous devons calculer alors (figure 2.27) :
 - les paramètres $Q_0^1, Q_0^2, P_{lim}^1, P_{lim}^2, Q_{lim}^1, Q_{lim}^2$, 2 seuils de λ et le seuil $P_{RT}^{12}(\lambda)$ pour décider entre les rapports 1 et 2,
 - les paramètres $Q_0^2, Q_0^3, P_{lim}^2, P_{lim}^3, Q_{lim}^2, Q_{lim}^3$, 2 seuils de λ et le seuil $P_{RT}^{23}(\lambda)$ pour décider entre les rapports 2 et 3,

- les paramètres $Q_0^1, Q_0^3, P_{\text{lim}}^1, P_{\text{lim}}^3, Q_{\text{lim}}^1, Q_{\text{lim}}^3$, 2 seuils de λ et le seuil $P_{\text{RT}}^{13}(\lambda)$ pour décider entre les rapports 1 et 3.

Au total, la méthode analytique aura besoin de 18 *Doubles* en plus pour le calcul du rapport optimal du MT.

- pour les méthodes numériques, les vecteurs H et P_{th} de taille $(N \times 1)$ calculés pour l'optimisation de la puissance deviennent des matrices de taille $(N \times 3)$. En effet, pour chaque rapport, on doit calculer les vecteurs H et P_{th} . De plus, pour le rapport 0, la valeur de l'Hamiltonien en mode électrique (H_0) est calculée. Finalement, la valeur minimale de H de chaque rapport est sauvegardée puis comparée avec H_0 et celle des autres rapports. Au total, pour le calcul du rapport optimal du MT, la méthode numérique occupera presque 4 fois la mémoire utilisée pour l'optimisation de la puissance.

Les résultats en termes de consommation de carburant, de temps de calcul et d'espace mémoire occupé sont présentés dans les tableaux suivants.

Cycle	Stratégie	Conso [L/100km]	Δ Conso [%]
WLTC	Analytique	3.40	0.89
	Num ₁ ¹⁰⁰⁰	3.40	0.89
	Num ₂ ¹⁰⁰⁰	3.37	-
	Num ₁ ¹⁰	3.46	2.67
	Num ₂ ¹⁰	3.43	1.78
ARTEMIS Urbain	Analytique	3.63	0.55
	Num ₁ ¹⁰⁰⁰	3.63	0.55
	Num ₂ ¹⁰⁰⁰	3.61	-
	Num ₁ ¹⁰	3.67	1.66
	Num ₂ ¹⁰	3.64	0.83
ARTEMIS Routier	Analytique	3.48	0.86
	Num ₁ ¹⁰⁰⁰	3.50	1.12
	Num ₂ ¹⁰⁰⁰	3.45	-
	Num ₁ ¹⁰	3.53	2.31
	Num ₂ ¹⁰	3.49	1.15
ARTEMIS Autoroutier	Analytique	5.18	0.19
	Num ₁ ¹⁰⁰⁰	5.18	0.19
	Num ₂ ¹⁰⁰⁰	5.17	-
	Num ₁ ¹⁰	5.25	1.54
	Num ₂ ¹⁰	5.22	0.96

TABLE 2.6 – Résultats de consommation de carburant des méthodes analytique, Num₁¹⁰⁰⁰, Num₂¹⁰⁰⁰, Num₁¹⁰ et Num₂¹⁰

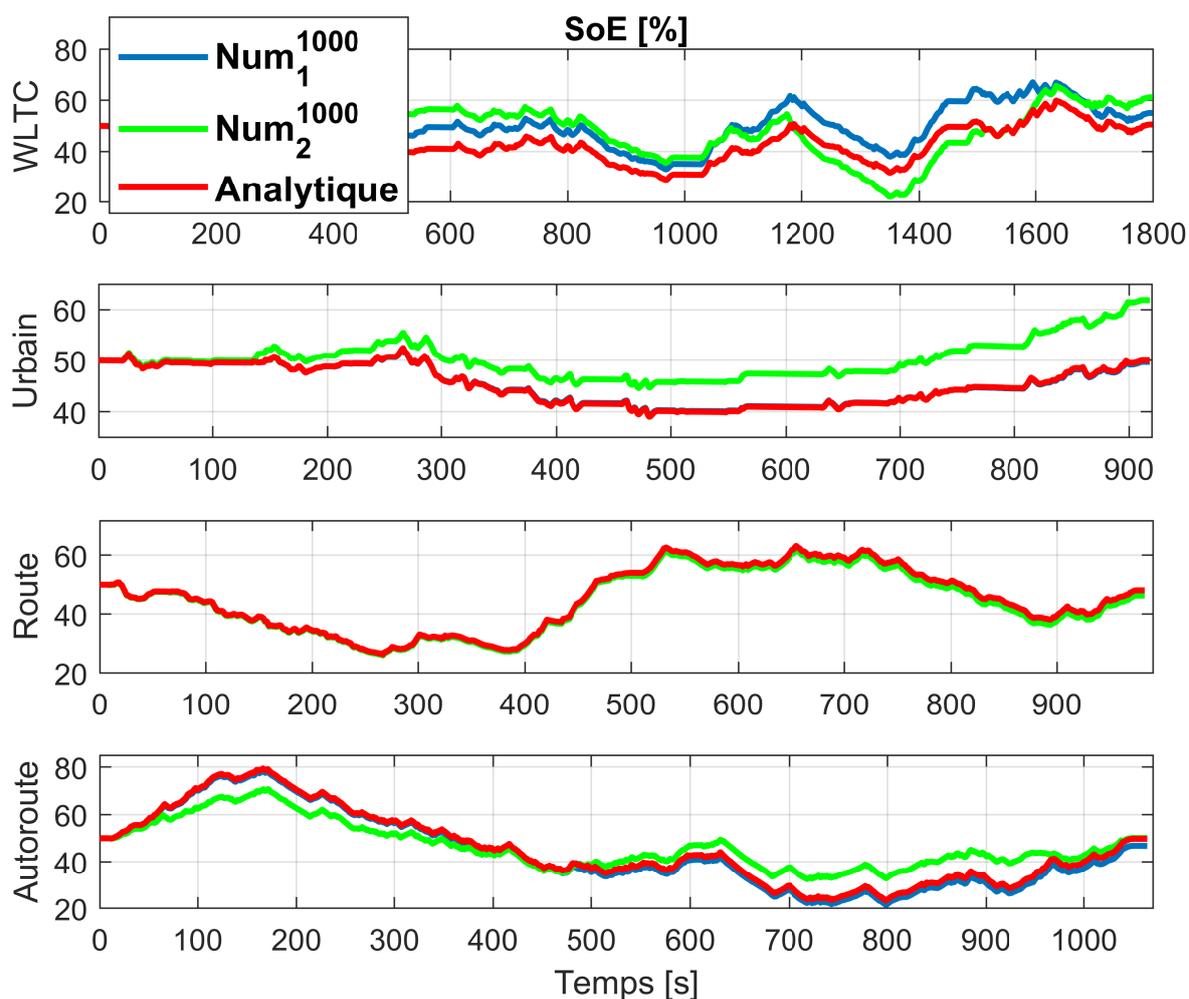


FIGURE 2.31 – Trajectoires *SoE* des stratégies analytique, Num₁¹⁰⁰⁰ et Num₂¹⁰⁰⁰ sur tous les cycles étudiés

Stratégie	Temps de Calcul [ms]
Analytique	0.29
Num ₁ ¹⁰⁰⁰	4.87
Num ₂ ¹⁰⁰⁰	6.8
Num ₁ ¹⁰	2.68
Num ₂ ¹⁰	3.5

TABLE 2.7 – Temps de calcul moyen consommé par les stratégies analytique, Num₁¹⁰⁰⁰, Num₂¹⁰⁰⁰, Num₁¹⁰ et Num₂¹⁰ pour le calcul des commandes sur un pas de temps

Stratégie	Espace mémoire occupé [Doubles]
Analytique	51
Num ₁ ¹⁰⁰⁰	$52 + 2000 \times 3 + 4 = 6056$
Num ₂ ¹⁰⁰⁰	$3500 + 2000 \times 3 + 4 = 9504$
Num ₁ ¹⁰	$52 + 20 \times 3 + 4 = 116$
Num ₂ ¹⁰	$3500 + 20 \times 3 + 4 = 3564$

TABLE 2.8 – Espace mémoire total occupé par les stratégies analytique, Num₁¹⁰⁰⁰, Num₂¹⁰⁰⁰, Num₁¹⁰ et Num₂¹⁰

Discussion On peut constater que l’ajout d’une variable d’optimisation dans la méthode numérique peut faire exploser le temps de calcul ainsi que la mémoire. En effet, en comparant avec les résultats de la section précédente, la méthode numérique consomme jusqu’à 4 fois plus de mémoire et jusqu’à 16 fois plus de temps de calcul. Pour la méthode analytique, l’ajout d’une commande engendre également une surconsommation en temps de calcul et en mémoire mais beaucoup moins importante que celle de la méthode numérique. En effet, le temps de calcul n’a augmenté que de 4 fois celui de l’optimisation de puissance et la mémoire a été multipliée par seulement 1,6. Ce résultat est obtenu grâce à la forme explicite de la solution analytique, qui est facile à implémenter, ce qui permet de réduire considérablement le temps de calcul. Concernant la consommation de carburant, la méthode analytique présente une surconsommation inférieure à 0.9% par rapport à la méthode Num₂¹⁰⁰⁰. De plus, la figure 2.31 montre que les stratégies analytique, Num₁¹⁰⁰⁰ et Num₂¹⁰⁰⁰ ont des trajectoires *SoE* similaires sur tous les cycles étudiés.

Étude de sensibilité des solutions analytiques

Comme présenté dans la section précédente, nous allons introduire une perturbation dans les paramètres de la solution analytique afin de quantifier l’impact des erreurs de modélisation sur la consommation de carburant.

Les paramètres utilisés par l’optimisation de l’état ainsi que du rapport du moteur thermique sont : a_1 , a_2 , P_{lim} , Q_0 et a_{\pm} . Concernant les paramètres a_1 , a_2 et a_{\pm} , nous avons trouvé les mêmes résultats que la section précédente, c’est-à-dire, la solution analytique est sensible à la sur-estimation des paramètres a_1 et a_+ et à la sous-estimation des paramètres a_2 et a_- (voir page 86). C’est pourquoi, nous allons présenter uniquement la sensibilité par rapport aux paramètres P_{lim} et Q_0 .

On rappelle que la sensibilité de la solution analytique par rapport à ces paramètres est calculée à partir de l’équation (2.23) en les faisant varier de $\pm 30\%$.

Il faut noter que le calcul des consommations thermiques (*conso* et *coûso*) et électrique est réalisé à partir des modèles de référence (1.10) et (1.16).

La figure 2.32 représente les sensibilités de la solution analytique par rapport aux paramètres P_{lim} et Q_0 .

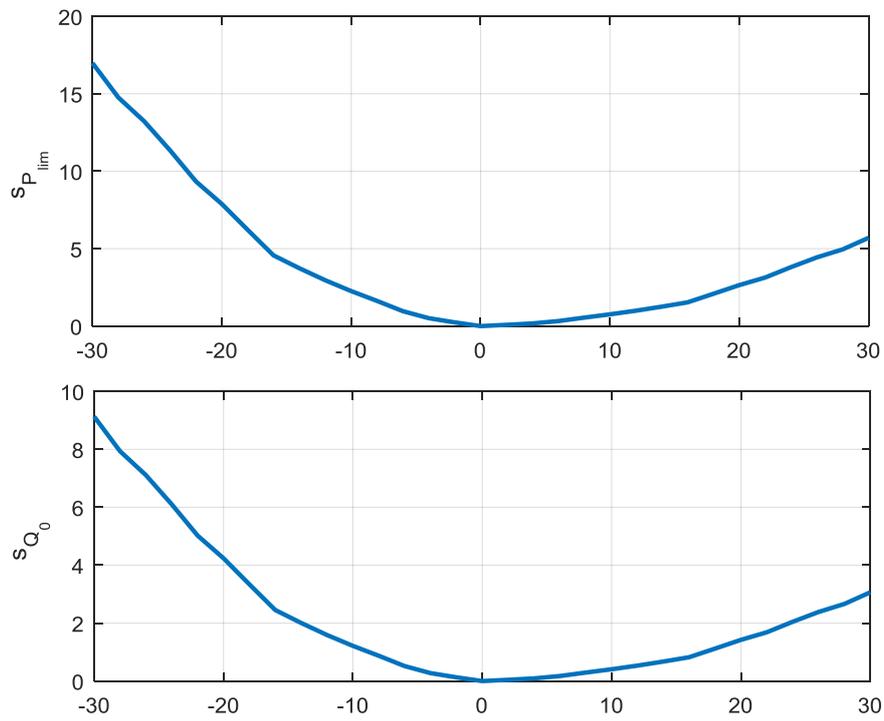


FIGURE 2.32 – Sensibilité de la consommation de carburant par rapport à la variation des paramètres P_{lim} et Q_0 pour l'optimisation de l'état ainsi que du rapport du moteur thermique

Discussion

D'après la figure 2.32, on peut constater que la solution analytique présente une sensibilité plus importante à la sur-estimation des paramètres P_{lim} et Q_0 par rapport à leur sous-estimation. En effet, on rappelle que les seuils $P_0(\lambda)$ et $P_{RT}(\lambda)$, permettant de déterminer l'état et le régime du moteur thermique respectivement, dépendent de ces paramètres, comme le montrent les figures 2.24 et 2.27. Par exemple, si Q_0 est sous-estimé, $P_0(\lambda)$ diminue, alors, l'intervalle de puissance à la roue où le moteur thermique est démarré s'élargit, d'où la surconsommation de carburant. De même, $P_{RT}(\lambda)$ diminue quand P_{lim} (ou Q_0) diminue. Ceci élargira le domaine de puissance à la roue où le rapport court est choisi (le rapport court est celui où le régime du moteur thermique est plus élevé), d'où la surconsommation de carburant.

2.3.2 Rapports continus

Dans ce cas d'étude, le régime du moteur thermique ω_{th} est une variable continue. Afin de trouver ω_{th}^{opt} , on applique le PMP sur le problème suivant :

$$POP_4 : \begin{cases} \min_{P_{th}, \omega_{th}} \int_{t_0}^{t_f} Q(P_{th}(t), \omega_{th}(t)) dt \\ \dot{SoE}(t) = -\frac{P_{bat}(t)}{E_{max}} \\ 0 \leq SoE(t) \leq 100 \\ \underline{P}_{th}(\omega_{th}) \leq P_{th} \leq \overline{P}_{th}(\omega_{th}) \\ P_r = P_{th} + P_m \\ \underline{P}_e(\omega_e) \leq P_m \leq \overline{P}_e(\omega_e) \\ \omega_{th} \in [\underline{\omega}_{th}, \overline{\omega}_{th}] \end{cases} \quad (2.56)$$

Les commandes optimales sont données par :

$$[P_{th}^{opt}, \omega_{th}^{opt}] = \arg \min_{P_{th}, \omega_{th}} (H(P_{th}, \omega_{th}, P_r, \lambda)) \quad (2.57)$$

Tel que :

$$H(P_{th}, \omega_{th}, P_r, \lambda) = Q(P_{th}, \omega_{th}) + \lambda P_{bat}(P_r - P_{th}) \quad (2.58)$$

où, les modèles affines par morceaux de Q (1.12) et de P_{bat} (1.23) sont utilisés.

On définit les indices "min" et "max" correspondant aux régimes $\underline{\omega}_{th}$ et $\overline{\omega}_{th}$ respectivement. Dans la suite de cette section, H est calculé selon les cas de changement de pente des fonctions affines par morceaux Q et P_{bat} (étape 2 dans la figure 1.39). Ensuite, les commandes optimales sont déterminées après avoir étudié la convexité de H (étapes 3 et 4 dans la figure 1.39). Finalement, les résultats de simulation validant les solutions analytiques seront présentés (étape 5 dans la figure 1.39).

Calcul de la commande optimale ω_{th}^{opt}

Dans un premier temps, le régime optimal ω_{th}^{opt} est déterminé en fonction de la puissance. Ceci revient à résoudre l'équation suivante :

$$\omega_{th}^{opt}(P_{th}) = \arg \min_{\omega_{th}} (H(P_{th}, \omega_{th}, P_r, \lambda)) \quad (2.59)$$

P_{bat} ne dépend pas explicitement de ω_{th} car on considère, dans cette étude, que le régime du moteur thermique et celui de la machine électrique sont indépendants. Alors, l'équation

(2.59) équivaut à :

$$\omega_{\text{th}}^{\text{opt}}(P_{\text{th}}) = \arg \min_{\omega_{\text{th}}} (Q(P_{\text{th}}, \omega_{\text{th}})) \quad (2.60)$$

Ou encore :

$$\frac{\partial H}{\partial \omega_{\text{th}}} = \frac{\partial Q}{\partial \omega_{\text{th}}} \quad (2.61)$$

Afin de trouver $\omega_{\text{th}}^{\text{opt}}$, nous allons résoudre l'équation :

$$\frac{\partial Q}{\partial \omega_{\text{th}}} = 0 \quad (2.62)$$

L'expression de $Q(P_{\text{th}}, \omega_{\text{th}})$ s'écrit, à régime donné, comme suit :

$$Q(P_{\text{th}}, \omega_{\text{th}}) = \begin{cases} a_1 P_{\text{th}} + Q_0(\omega_{\text{th}}) & \text{si } \underline{P}_{\text{th}}(\omega_{\text{th}}) \leq P_{\text{th}} \leq P_{\text{lim}}(\omega_{\text{th}}) \\ a_2 (P_{\text{th}} - P_{\text{lim}}(\omega_{\text{th}})) + Q_{\text{lim}}(\omega_{\text{th}}) & \text{si } P_{\text{lim}}(\omega_{\text{th}}) \leq P_{\text{th}} \leq \overline{P}_{\text{th}}(\omega_{\text{th}}) \end{cases} \quad (2.63)$$

Comme $P_{\text{lim}}(\omega_{\text{th}}) = p_1 \omega_{\text{th}} + p_0$ (1.15), alors, $P_{\text{th}} \leq p_1 \omega_{\text{th}} + p_0$ équivaut à $\omega_{\text{th}} \geq \frac{P_{\text{th}} - p_0}{p_1}$. De même, $P_{\text{th}} \geq P_{\text{lim}}(\omega_{\text{th}}) \Leftrightarrow \omega_{\text{th}} \leq \frac{P_{\text{th}} - p_0}{p_1}$. On en déduit que, à puissance donnée, $Q(P_{\text{th}}, \omega_{\text{th}})$ s'écrit comme suit :

$$Q(P_{\text{th}}, \omega_{\text{th}}) = \begin{cases} a_2 (P_{\text{th}} - P_{\text{lim}}(\omega_{\text{th}})) + Q_{\text{lim}}(\omega_{\text{th}}) & \text{si } \underline{\omega}_{\text{th}} \leq \omega_{\text{th}} \leq \omega_c(P_{\text{th}}) \\ a_1 P_{\text{th}} + Q_0(\omega_{\text{th}}) & \text{si } \overline{\omega}_c(P_{\text{th}}) \leq \omega_{\text{th}} \leq \overline{\omega}_{\text{th}} \end{cases} \quad (2.64)$$

Où, $\omega_c(P_{\text{th}}) = \frac{P_{\text{th}} - p_0}{p_1}$, $Q_0(\omega_{\text{th}}) = q_2 \omega_{\text{th}}^2 + q_1 \omega_{\text{th}} + q_0$ et $Q_{\text{lim}}(\omega_{\text{th}}) = a_1 P_{\text{lim}}(\omega_{\text{th}}) + Q_0(\omega_{\text{th}})$. En injectant $P_{\text{lim}}(\omega_{\text{th}})$ et $Q_0(\omega_{\text{th}})$ dans l'équation précédente de Q , on obtient :

$$Q(P_{\text{th}}, \omega_{\text{th}}) = \begin{cases} q_2 \omega_{\text{th}}^2 + (q_1 + (a_1 - a_2)p_1)\omega_{\text{th}} + q_0 + a_2 P_{\text{th}} & \text{si } \underline{\omega}_{\text{th}} \leq \omega_{\text{th}} \leq \omega_c(P_{\text{th}}) \\ q_2 \omega_{\text{th}}^2 + q_1 \omega_{\text{th}} + q_0 + a_1 P_{\text{th}} & \text{si } \overline{\omega}_c(P_{\text{th}}) \leq \omega_{\text{th}} \leq \overline{\omega}_{\text{th}} \end{cases} \quad (2.65)$$

D'après (2.65), le minimum de Q par rapport à ω_{th} est atteint aux régimes : $\omega_{\text{th}}^{*1} = \frac{(a_2 - a_1)p_1 - q_1}{2q_2}$ et $\omega_{\text{th}}^{*2} = \frac{-q_1}{2q_2}$.

On peut remarquer que :

- comme $\omega_{\text{th}}^{*2} < 0$ (car $q_1 > 0$ et $q_2 > 0$), alors, le morceau 2 de $Q(\omega_{\text{th}})$ est strictement croissant $\forall \omega_{\text{th}} > 0$ (voir figure 2.33),
- le positionnement de ω_{th}^{*1} par rapport à ω_c n'est pas connu. Alors, nous étudierons les trois cas suivants :

1. Cas A : si $\underline{\omega}_{\text{th}} \leq \omega_{\text{th}}^{*1} < \omega_c$, $\forall P_{\text{th}} \in [\underline{P}_{\text{th}}, \overline{P}_{\text{th}}]$ alors $\omega_{\text{th}}^{\text{opt}} = \frac{(a_2 - a_1)p_1 - q_1}{2q_2}$ (voir figure 2.33.(a)).
2. Cas B : si $\omega_{\text{th}}^{*1} < \overline{\omega}_{\text{th}}$ et s'il existe $P_{\text{th}} = P_{\text{lim}}^c = P_{\text{lim}}(\omega_{\text{th}}^{*1})$ pour laquelle $\omega_c(P_{\text{lim}}^c) = \omega_{\text{th}}^{*1}$ (voir figure 2.33.(a)&(b)), alors, l'optimum est ω_c tant que $\underline{\omega}_{\text{th}} \leq \omega_c \leq \omega_{\text{th}}^{*1}$ ce qui équivaut à $P_{\text{lim}}^{\text{min}} \leq P_{\text{th}} \leq P_{\text{lim}}^c$. Où, $P_{\text{lim}}^{\text{min}}$ et P_{lim}^c sont les solutions des équations ($\omega_c = \underline{\omega}_{\text{th}}$) et ($\omega_c = \omega_{\text{th}}^{*1}$) respectivement. Dans ce cas, le régime optimal $\omega_{\text{th}}^{\text{opt}}(P_{\text{th}})$ est donné par :

$$\omega_{\text{th}}^{\text{opt}}(P_{\text{th}}) = \begin{cases} \underline{\omega}_{\text{th}} & \text{si } \underline{P}_{\text{th}} \leq P_{\text{th}} \leq P_{\text{lim}}^{\text{min}} \\ \omega_c & \text{si } P_{\text{lim}}^{\text{min}} \leq P_{\text{th}} \leq P_{\text{lim}}^c \\ \omega_{\text{th}}^{*1} & \text{si } P_{\text{lim}}^c \leq P_{\text{th}} \leq \overline{P}_{\text{th}} \end{cases} \quad (2.66)$$

3. Cas C : si $\omega_{th}^{*1} > \omega_c$, $\forall P_{th} \in [P_{th}, \bar{P}_{th}]$ alors $\omega_{th}^{opt} = \omega_c$ (voir figure 2.33.(b)), alors, l'optimum est ω_c tant que $\underline{\omega}_{th} \leq \omega_c \leq \bar{\omega}_{th}$. Sachant que P_{lim}^{max} est la solution de l'équation ($\omega_c = \bar{\omega}_{th}$), le régime optimal $\omega_{th}^{opt}(P_{th})$ est donné dans ce cas par :

$$\omega_{th}^{opt}(P_{th}) = \begin{cases} \underline{\omega}_{th} & \text{si } P_{th} \leq P_{th} \leq P_{lim}^{min} \\ \omega_c & \text{si } P_{lim}^{min} \leq P_{th} \leq P_{lim}^{max} \\ \bar{\omega}_{th} & \text{si } P_{lim}^{max} \leq P_{th} \leq \bar{P}_{th} \end{cases} \quad (2.67)$$

En tenant compte de l'hypothèse 4, où on suppose que $a_2 > \frac{\partial Q_{lim}}{\partial \omega_{th}}$, on se positionne dans

le cas C. En effet, $\omega_{th}^{*1} > \bar{\omega}_{th}$, car :

$$\omega_{th}^{*1} = \frac{(a_2 - a_1)p_1 - q_1}{2q_2} > \bar{\omega}_{th} \Leftrightarrow a_2 p_1 > 2q_2 \bar{\omega}_{th} + q_1 + a_1 p_1 \text{ Or, } a_2 p_1 = \frac{\partial P_{lim}}{\partial \omega_{th}} \text{ et } 2q_2 \bar{\omega}_{th} + q_1 + a_1 p_1 = \frac{\partial Q_{lim}}{\partial \omega_{th}} |_{\omega_{th} = \bar{\omega}_{th}}. \text{ Comme } a_2 \frac{\partial P_{lim}}{\partial \omega_{th}} > \frac{\partial Q_{lim}}{\partial \omega_{th}} \forall \omega_{th}, \text{ on en déduit que } \omega_{th}^{*1} > \bar{\omega}_{th} \text{ donc } \omega_{th}^{*1} > \omega_c, \forall P_{th} \in [P_{th}, \bar{P}_{th}].$$

Le régime optimal obtenu est le régime maximisant le rendement du moteur thermique.

En injectant le régime optimal (2.67) dans l'équation (2.65), on trouve :

$$Q(P_{th}, \omega_{th}^{opt}) = \begin{cases} a_1 P_{th} + Q_0^{min} & \text{si } P_{th} \leq P_{th} \leq P_{lim}^{min} \\ a_1 P_{th} + q_0 + q_1 \left(\frac{P_{th} - p_0}{p_1} \right) + q_2 \left(\frac{P_{th} - p_0}{p_1} \right)^2 & \text{si } P_{lim}^{min} \leq P_{th} \leq P_{lim}^{max} \\ a_2 (P_{th} - P_{lim}^{max}) + Q_{lim}^{max} & \text{si } P_{lim}^{max} \leq P_{th} \leq \bar{P}_{th} \end{cases} \quad (2.68)$$

En posant : $q_0^c = q_0 - \frac{q_1 p_0}{p_1} + \left(\frac{q_2 p_0}{p_1} \right)^2$, $q_1^c = a_1 + \frac{q_1}{p_1} - 2 \frac{q_2 p_0}{p_1^2}$ et $q_2^c = \frac{q_2}{p_1^2}$, Q devient :

$$Q(P_{th}, \omega_{th}^{opt}) = \begin{cases} a_1 P_{th} + Q_0^{min} & \text{si } P_{th} \leq P_{th} \leq P_{lim}^{min} \\ q_2^c P_{th}^2 + q_1^c P_{th} + q_0^c & \text{si } P_{lim}^{min} \leq P_{th} \leq P_{lim}^{max} \\ a_2 (P_{th} - P_{lim}^{max}) + Q_{lim}^{max} & \text{si } P_{lim}^{max} \leq P_{th} \leq \bar{P}_{th} \end{cases} \quad (2.69)$$

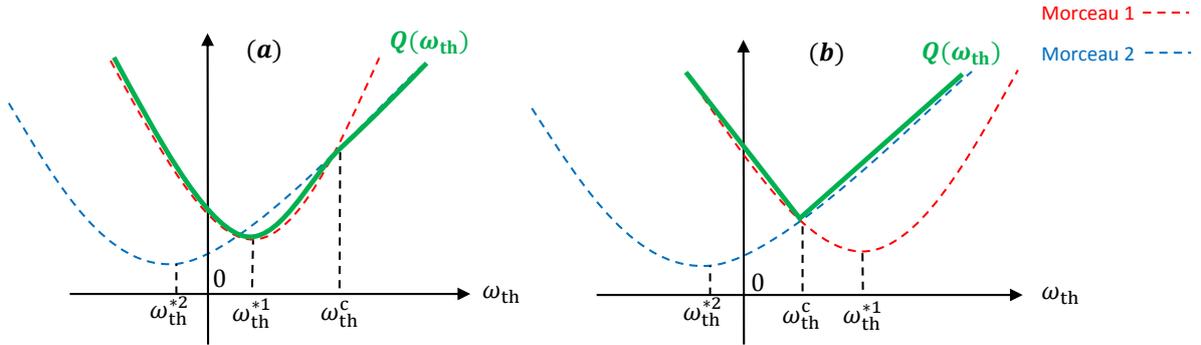


FIGURE 2.33 – Allure de $Q(\omega_{th})$ dans le cas où $\omega_{th}^{*1} < \omega_c$ (à gauche) ou $\omega_{th}^{*1} > \omega_c$ (à droite)

Calcul de la commande optimale P_{th}^{opt}

Afin de déterminer P_{th}^{opt} , les expressions de H (2.58) en fonction de P_{th} et de P_r sont calculées en utilisant le modèle de Q défini par l'équation (2.69) et le modèle affine de P_{bat} donné par l'équation (1.23) (étape 2 dans la figure 1.39). H est la somme de deux fonctions par morceaux : la fonction $Q(P_{th})$ qui comporte 3 morceaux donc 2 points de changement

d'équations P_{\lim}^{\min} et P_{\lim}^{\max} ; et la fonction $P_{\text{bat}}(P_{\text{th}})$ composée par deux morceaux donc 1 point de changement de pente P_r . Pour cela, on doit étudier le positionnement de P_r par rapport à P_{\lim}^{\min} et à P_{\lim}^{\max} . Tous les cas possibles sont présentés ci-dessous.

On rappelle que dans chaque cas, la convexité de H doit être vérifiée (étape 3 dans la figure 1.39).

Calcul détaillé de L'Hamiltonien

Cas 1 : $\underline{P}_r < \underline{P}_{\text{th}}$

P_{th}	$\underline{P}_{\text{th}}$	P_{\lim}^{\min}	P_{\lim}^{\max}	\overline{P}_{th}
H	$(a_1 - \lambda a_-)P_{\text{th}}$ $+ Q_0^{\min}$ $+\lambda(a_-P_r + b)$	$q_2^c P_{\text{th}}^2$ $+(q_1^c - \lambda a_-)P_{\text{th}}$ $+q_0^c + \lambda(a_-P_r + b)$	$(a_2 - \lambda a_-)P_{\text{th}}$ $+ Q_{\lim}^{\max} - a_2 P_{\lim}^{\max}$ $+\lambda(a_-P_r + b)$	

H est convexe car d'une part il est composé par deux morceaux affine et un morceaux quadratique au coefficient du second degré positif ($q_2^c > 0$ hypothèse 3). D'autre part, la condition du premier ordre de convexité est vérifiée aux points de changement d'équation. En effet, à :

$$(1) P_{\text{th}} = P_{\lim}^{\min}, \frac{\partial H^G}{\partial P_{\text{th}}} \Big|_{P_{\text{th}}=P_{\lim}^{\min}} < \frac{\partial H^D}{\partial P_{\text{th}}} \Big|_{P_{\text{th}}=P_{\lim}^{\min}} \text{ car } a_1 < 2q_2^c P_{\lim}^{\min} + q_1^c.$$

Démonstration :

Sachant que : $q_1^c = a_1 + \frac{q_1}{p_1} - 2\frac{q_2 p_0}{p_1^2}$ et $q_2^c = \frac{q_2}{p_1^2}$. On a : $2q_2^c P_{\lim}^{\min} + q_1^c = 2\frac{q_2}{p_1^2}(p_1 \underline{\omega}_{\text{th}} + p_0) + a_1 + \frac{q_1}{p_1} - 2\frac{q_2 p_0}{p_1^2} = 2\frac{q_2}{p_1} \underline{\omega}_{\text{th}} + a_1 + \frac{q_1}{p_1}$
Comme, $2\frac{q_2}{p_1} \underline{\omega}_{\text{th}} + \frac{q_1}{p_1} > 0$ ($\omega_{\text{th}} > 0$ et hypothèse 3), alors, $a_1 < 2\frac{q_2}{p_1} \underline{\omega}_{\text{th}} + a_1 + \frac{q_1}{p_1}$.
CQFD.

$$(2) P_{\text{th}} = P_{\lim}^{\max}, \frac{\partial H^G}{\partial P_{\text{th}}} \Big|_{P_{\text{th}}=P_{\lim}^{\max}} < \frac{\partial H^D}{\partial P_{\text{th}}} \Big|_{P_{\text{th}}=P_{\lim}^{\max}} \text{ car } a_2 > 2q_2^c P_{\lim}^{\max} + q_1^c.$$

Démonstration :

On a : $2q_2^c P_{\lim}^{\max} + q_1^c = 2\frac{q_2}{p_1^2}(p_1 \overline{\omega}_{\text{th}} + p_0) + a_1 + \frac{q_1}{p_1} - \frac{2q_2 p_0}{p_1^2} = 2\frac{q_2}{p_1} \overline{\omega}_{\text{th}} + a_1 + \frac{q_1}{p_1}$
La condition de convexité à P_{\lim}^{\max} devient : $a_2 > 2\frac{q_2}{p_1} \overline{\omega}_{\text{th}} + a_1 + \frac{q_1}{p_1}$. En multipliant par p_1 , on obtient : $a_2 p_1 > 2q_2 \overline{\omega}_{\text{th}} + a_1 p_1 + q_1$. Ce qui équivaut à : $a_2 \frac{\partial P_{\lim}}{\partial \omega_{\text{th}}} > \frac{\partial Q_{\lim}}{\partial \omega_{\text{th}}}$ (hypothèse 4). CQFD.

La même étude de convexité de H est appliquée sur les cas suivants.

Cas 2 : $\underline{P}_{\text{th}} \leq P_r \leq P_{\lim}^{\min}$

P_{th}	$\underline{P}_{\text{th}}$	P_r	P_{\lim}^{\min}	P_{\lim}^{\max}	\overline{P}_{th}
H	$(a_1 - \lambda a_+)P_{\text{th}}$ $+ Q_0^{\min}$ $+\lambda(a_+P_r + b)$	$(a_1 - \lambda a_-)P_{\text{th}}$ $+ Q_0^{\min}$ $+\lambda(a_-P_r + b)$	$q_2^c P_{\text{th}}^2$ $+(q_1^c - \lambda a_-)P_{\text{th}}$ $+q_0^c + \lambda(a_-P_r + b)$	$(a_2 - \lambda a_-)P_{\text{th}}$ $+ Q_{\lim}^{\max} - a_2 P_{\lim}^{\max}$ $+\lambda(a_-P_r + b)$	

Cas 3 : $\mathbf{P}_{\text{lim}}^{\min} \leq \mathbf{P}_r \leq \mathbf{P}_{\text{lim}}^{\max}$

P_{th}	$\underline{P}_{\text{th}}$	P_{lim}^{\min}	P_r	P_{lim}^{\max}	\overline{P}_{th}
H	$(a_1 - \lambda a_+)P_{\text{th}}$ $+Q_0^{\min}$ $+\lambda(a_+P_r + b)$	$q_2^c P_{\text{th}}^2$ $+(q_1^c - \lambda a_+)P_{\text{th}}$ $+q_0^c + \lambda(a_+P_r + b)$	$q_2^c P_{\text{th}}^2$ $+(q_1^c - \lambda a_-)P_{\text{th}}$ $+q_0^c + \lambda(a_-P_r + b)$	$(a_2 - \lambda a_-)P_{\text{th}}$ $+Q_{\text{lim}}^{\max} - a_2 P_{\text{lim}}^{\max}$ $+\lambda(a_-P_r + b)$	

Cas 4 : $\mathbf{P}_r \geq \mathbf{P}_{\text{lim}}^{\max}$

P_{th}	$\underline{P}_{\text{th}}$	P_{lim}^{\min}	P_{lim}^{\max}	P_r	\overline{P}_{th}
H	$(a_1 - \lambda a_+)P_{\text{th}}$ $+Q_0^{\min}$ $+\lambda(a_+P_r + b)$	$q_2^c P_{\text{th}}^2$ $+(q_1^c - \lambda a_+)P_{\text{th}}$ $+q_0^c + \lambda(a_+P_r + b)$	$(a_2 - \lambda a_+)P_{\text{th}}$ $+Q_{\text{lim}}^{\max} - a_2 P_{\text{lim}}^{\max}$ $+\lambda(a_+P_r + b)$	$(a_2 - \lambda a_-)P_{\text{th}}$ $+Q_{\text{lim}}^{\max} - a_2 P_{\text{lim}}^{\max}$ $+\lambda(a_-P_r + b)$	

On peut constater que $H(P_{\text{th}})$ est une fonction continue et convexe sous les hypothèses 3, 4 et 7. Cette fonction comporte des morceaux affines ainsi que des morceaux quadratiques. Afin de trouver le minimum de H par rapport à P_{th} , il faut donc analyser son sens de variation qui dépend :

- du signe des pentes des morceaux affines,
- du positionnement des extremums des morceaux quadratiques P_{th}^{*1} et P_{th}^{*2} par rapport aux point de changement de pente P_{lim}^{\min} et P_{lim}^{\max} . Où :

$$P_{\text{th}}^{*1} = p_0 - \frac{q_1 p_1}{2q_2} + \frac{(\lambda a_- - a_1)p_1^2}{2q_2} \quad (2.70)$$

$$P_{\text{th}}^{*2} = p_0 - \frac{q_1 p_1}{2q_2} + \frac{(\lambda a_+ - a_1)p_1^2}{2q_2} \quad (2.71)$$

Les comparaisons de P_{th}^{*1} et P_{th}^{*2} par rapport à P_{lim}^{\min} et P_{lim}^{\max} suivant λ sont montrées dans la figure 2.34. $\lambda_{\text{min}}^{\pm}$ et $\lambda_{\text{max}}^{\pm}$ sont les solutions des équations suivantes :

- (1) $P_{\text{th}}^{*1} = P_{\text{lim}}^{\min} \Leftrightarrow \lambda = \lambda_{\text{min}}^- = \frac{2q_2\omega_{\text{th}}+q_1}{a-p_1} + \frac{a_1}{a-}$
- (2) $P_{\text{th}}^{*2} = P_{\text{lim}}^{\min} \Leftrightarrow \lambda = \lambda_{\text{min}}^+ = \frac{2q_2\omega_{\text{th}}+q_1}{a+p_1} + \frac{a_1}{a+}$
- (3) $P_{\text{th}}^{*1} = P_{\text{lim}}^{\max} \Leftrightarrow \lambda = \lambda_{\text{max}}^- = \frac{2q_2\overline{\omega}_{\text{th}}+q_1}{a-p_1} + \frac{a_1}{a-}$
- (4) $P_{\text{th}}^{*2} = P_{\text{lim}}^{\max} \Leftrightarrow \lambda = \lambda_{\text{max}}^+ = \frac{2q_2\overline{\omega}_{\text{th}}+q_1}{a+p_1} + \frac{a_1}{a+}$

Concernant le signe des pentes de H , nous avons les mêmes cas cités dans les tableaux (2.16) et (2.17). Dans chaque cas, nous traiterons les intervalles de comparaison présentés dans la figure 2.34. Finalement, en prenant en compte que :

- $\lambda_{\text{min}}^+ > \frac{a_1}{a_+}$ (car $\frac{2q_2\omega_{\text{th}}+q_1}{a+p_1} > 0$)
- $\lambda_{\text{max}}^+ > \frac{a_1}{a_+}$ (car $\frac{2q_2\overline{\omega}_{\text{th}}+q_1}{a+p_1} > 0$)

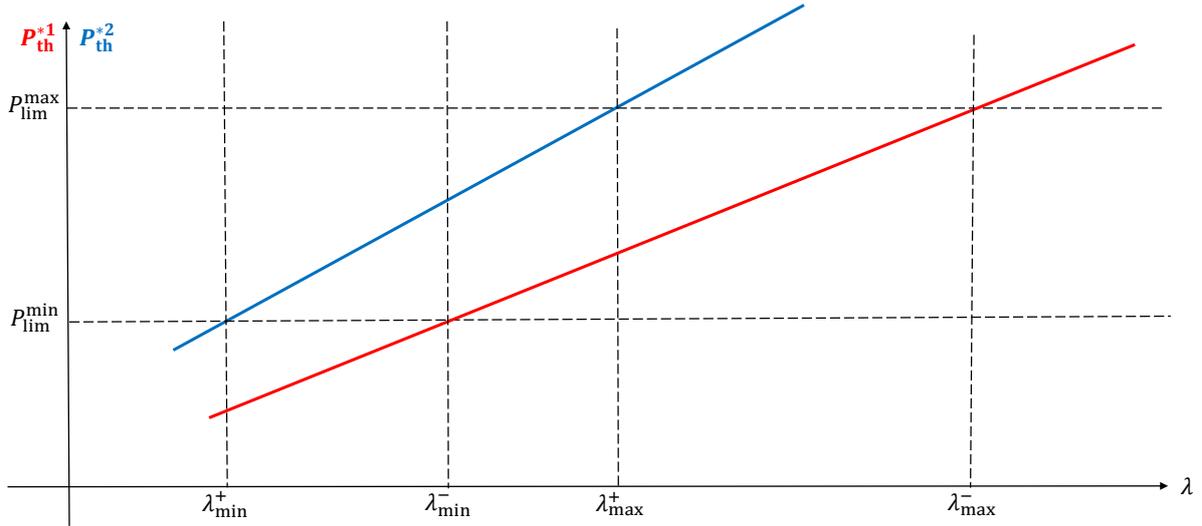


FIGURE 2.34 – Intersection de P_{th}^{*1} et P_{th}^{*2} avec P_{lim}^{min} et P_{lim}^{max}

- $\lambda_{min}^- > \frac{a_1}{a_-}$ (car $\frac{2q_2\omega_{th}+q_1}{a-p_1} > 0$)
- $\lambda_{max}^- > \frac{a_1}{a_-}$ (car $\frac{2q_2\omega_{th}+q_1}{a-p_1} > 0$)
- $\lambda_{max}^- < \frac{a_2}{a_-}$ (selon l'hypothèse 4)
- $\lambda_{max}^+ < \frac{a_2}{a_+}$ (selon l'hypothèse 4)
- $\lambda_{min}^+ < \lambda_{min}^-$ (car $a_+ > a_-$)
- $\lambda_{max}^+ < \lambda_{max}^-$ (car $a_+ > a_-$)
- $\lambda_{min}^\pm < \lambda_{max}^\pm$ (car $\bar{\omega}_{th} > \omega_{th}$). Tous les cas possibles du sens de variation de H sont résumés dans les tableaux suivants :
- Cas A : $\frac{a_1}{a_-} < \frac{a_2}{a_+}$
 - Cas A.1 : $\lambda_{min}^+ < \frac{a_1}{a_-}$, $\lambda_{max}^+ < \frac{a_1}{a_-}$, $\lambda_{min}^- < \frac{a_2}{a_+}$ et $\lambda_{max}^- < \frac{a_2}{a_+}$

λ	0	$\frac{a_1}{a_+}$	λ_{min}^+	λ_{max}^+	$\frac{a_1}{a_-}$	λ_{min}^-	λ_{max}^-	$\frac{a_2}{a_+}$	$\frac{a_2}{a_-}$	$+\infty$
UC	1	2.1	2.2	2.3	3.1	3.2	3.3	4	5	

- Cas A.2 : $\lambda_{min}^+ > \frac{a_1}{a_-}$, $\lambda_{max}^+ > \frac{a_1}{a_-}$, $\lambda_{min}^- < \frac{a_2}{a_+}$ et $\lambda_{max}^- < \frac{a_2}{a_+}$

λ	0	$\frac{a_1}{a_+}$	$\frac{a_1}{a_-}$	λ_{min}^+	λ_{max}^+	λ_{min}^-	λ_{max}^-	$\frac{a_2}{a_+}$	$\frac{a_2}{a_-}$	$+\infty$
UC	1	2	3.4	3.5	3.6	3.2	3.3	4	5	

- Cas A.3 : $\lambda_{min}^+ > \frac{a_1}{a_-}$, $\lambda_{max}^+ > \frac{a_1}{a_-}$, $\lambda_{min}^- > \frac{a_2}{a_+}$ et $\lambda_{max}^- > \frac{a_2}{a_+}$

λ	0	$\frac{a_1}{a_+}$	$\frac{a_1}{a_-}$	λ_{min}^+	λ_{max}^+	$\frac{a_2}{a_+}$	λ_{min}^-	λ_{max}^-	$\frac{a_2}{a_-}$	$+\infty$
UC	1	2	3.4	3.5	3.7	4.1	4.2	4.3	5	

— Cas A.4 : $\lambda_{\min}^+ > \frac{a_1}{a_-}$, $\lambda_{\max}^+ > \frac{a_1}{a_-}$, $\lambda_{\min}^- < \frac{a_2}{a_+}$, $\lambda_{\max}^- < \frac{a_2}{a_+}$ et $\lambda_{\min}^- < \lambda_{\max}^+$

λ	0	$\frac{a_1}{a_+}$	$\frac{a_1}{a_-}$	λ_{\min}^+	λ_{\min}^-	λ_{\max}^+	λ_{\max}^-	$\frac{a_2}{a_+}$	$\frac{a_2}{a_-}$	$+\infty$
UC	1	2	3.4	3.8	3.9	3.10	3.3	4	5	

— Cas A.5 : $\lambda_{\min}^+ < \frac{a_1}{a_-}$, $\lambda_{\max}^+ < \frac{a_1}{a_-}$, $\lambda_{\min}^- > \frac{a_2}{a_+}$ et $\lambda_{\max}^- > \frac{a_2}{a_+}$

λ	0	$\frac{a_1}{a_+}$	λ_{\min}^+	λ_{\max}^+	$\frac{a_1}{a_-}$	$\frac{a_2}{a_+}$	λ_{\min}^-	λ_{\max}^-	$\frac{a_2}{a_-}$	$+\infty$
UC	1	2.1	2.2	2.3	3	4.1	4.2	4.3	5	

— Cas A.6 : $\lambda_{\min}^+ < \frac{a_1}{a_-}$, $\lambda_{\max}^+ > \frac{a_1}{a_-}$, $\lambda_{\min}^- < \frac{a_2}{a_+}$, $\lambda_{\max}^- < \frac{a_2}{a_+}$ et $\lambda_{\max}^+ < \lambda_{\min}^-$

λ	0	$\frac{a_1}{a_+}$	λ_{\min}^+	$\frac{a_1}{a_-}$	λ_{\max}^+	λ_{\min}^-	λ_{\max}^-	$\frac{a_2}{a_+}$	$\frac{a_2}{a_-}$	$+\infty$
UC	1	2.1	2.4	3.11	3.6	3.2	3.3	4	5	

— Cas A.7 : $\lambda_{\min}^+ < \frac{a_1}{a_-}$, $\lambda_{\max}^+ > \frac{a_1}{a_-}$, $\lambda_{\min}^- < \frac{a_2}{a_+}$ et $\lambda_{\max}^- > \frac{a_2}{a_+}$

λ	0	$\frac{a_1}{a_+}$	λ_{\min}^+	$\frac{a_1}{a_-}$	λ_{\max}^+	λ_{\min}^-	$\frac{a_2}{a_+}$	λ_{\max}^-	$\frac{a_2}{a_-}$	$+\infty$
UC	1	2.1	2.4	3.11	3.6	3.12	4.4	4.3	5	

— Cas A.8 : $\lambda_{\min}^+ < \frac{a_1}{a_-}$, $\lambda_{\max}^+ > \frac{a_1}{a_-}$, $\lambda_{\min}^- > \frac{a_2}{a_+}$ et $\lambda_{\max}^- > \frac{a_2}{a_+}$

λ	0	$\frac{a_1}{a_+}$	λ_{\min}^+	$\frac{a_1}{a_-}$	λ_{\max}^+	$\frac{a_2}{a_+}$	λ_{\min}^-	λ_{\max}^-	$\frac{a_2}{a_-}$	$+\infty$
UC	1	2.1	2.4	3.11	3.7	4.1	4.2	4.3	5	

— Cas A.9 : $\lambda_{\min}^+ < \frac{a_1}{a_-}$, $\lambda_{\max}^+ > \frac{a_1}{a_-}$, $\lambda_{\min}^- < \frac{a_2}{a_+}$, $\lambda_{\max}^- < \frac{a_2}{a_+}$ et $\lambda_{\max}^+ > \lambda_{\min}^-$

λ	0	$\frac{a_1}{a_+}$	λ_{\min}^+	$\frac{a_1}{a_-}$	λ_{\min}^-	λ_{\max}^+	λ_{\max}^-	$\frac{a_2}{a_+}$	$\frac{a_2}{a_-}$	$+\infty$
UC	1	2.1	2.4	3.13	3.9	3.10	3.3	4	5	

— Cas A.10 : $\lambda_{\min}^+ < \frac{a_1}{a_-}$, $\lambda_{\max}^+ < \frac{a_1}{a_-}$, $\lambda_{\min}^- < \frac{a_2}{a_+}$ et $\lambda_{\max}^- > \frac{a_2}{a_+}$

λ	0	$\frac{a_1}{a_+}$	λ_{\min}^+	λ_{\max}^+	$\frac{a_1}{a_-}$	λ_{\min}^-	$\frac{a_2}{a_+}$	λ_{\max}^-	$\frac{a_2}{a_-}$	$+\infty$
UC	1	2.1	2.2	2.3	3.1	3.12	4.4	4.3	5	

— Cas A.11 : $\lambda_{\min}^+ > \frac{a_1}{a_-}$, $\lambda_{\max}^+ > \frac{a_1}{a_-}$, $\lambda_{\min}^- < \frac{a_2}{a_+}$, $\lambda_{\max}^- > \frac{a_2}{a_+}$ et $\lambda_{\max}^+ < \lambda_{\min}^-$

λ	0	$\frac{a_1}{a_+}$	$\frac{a_1}{a_-}$	λ_{\min}^+	λ_{\max}^+	λ_{\min}^-	$\frac{a_2}{a_+}$	λ_{\max}^-	$\frac{a_2}{a_-}$	$+\infty$
UC	1	2	3.4	3.5	3.6	3.12	4.4	4.3	5	

— Cas A.12 : $\lambda_{\min}^+ > \frac{a_1}{a_-}$, $\lambda_{\max}^+ > \frac{a_1}{a_-}$, $\lambda_{\min}^- < \frac{a_2}{a_+}$, $\lambda_{\max}^- > \frac{a_2}{a_+}$ et $\lambda_{\max}^+ > \lambda_{\min}^-$

λ	0	$\frac{a_1}{a_+}$	$\frac{a_1}{a_-}$	λ_{\min}^+	λ_{\min}^-	λ_{\max}^+	$\frac{a_2}{a_+}$	λ_{\max}^-	$\frac{a_2}{a_-}$	$+\infty$
UC	1	2	3.4	3.8	3.9	3.14	4.4	4.3	5	

— Cas B : $\frac{a_1}{a_-} > \frac{a_2}{a_+}$

λ	0	$\frac{a_1}{a_+}$	λ_{\min}^+	λ_{\max}^+	$\frac{a_2}{a_+}$	$\frac{a_1}{a_-}$	λ_{\min}^-	λ_{\max}^-	$\frac{a_2}{a_-}$	$+\infty$
UC	1	2.1	2.2	2'.3	3'	4'.1	4.2	4.3	5	

Détermination de $P_{\text{th}}^{\text{opt}}$

Pour le cas A.1 (les autres cas sont traités en annexe section 6.2.2), $P_{\text{th}}^{\text{opt}}$ est donnée par (étape 4 dans la figure 1.39) :

UC1 :

Dans ce cas, toutes les pentes de H sont positives. De plus, $\lambda \leq \lambda_{\min}^{\pm}$. H est donc croissant en fonction de P_{th} quelque soit P_r , ce qui implique :

$$P_{\text{th}}^{\text{opt}} = \underline{P}_{\text{th}}(P_r) \quad (2.72)$$

En prenant en compte l'expression de $\underline{P}_{\text{th}}(P_r)$ (2.10), on obtient :

Cas sur P_r			$P_{\text{th}}^{\text{opt}}$
\underline{P}_r	$\leq P_r \leq$	$\overline{P}_e + \underline{P}_{\text{th}}$	$\underline{P}_{\text{th}}$
$\overline{P}_e + \underline{P}_{\text{th}}$	$\leq P_r \leq$	\overline{P}_r	$P_r - \overline{P}_e$

UC2.1 :

Dans ce cas, les extremums P_{th}^{*1} et P_{th}^{*2} sont tous les deux inférieurs à $P_{\text{lim}}^{\text{min}}$. La pente $a_1 - \lambda a_+$ est négative et les toutes les autres pentes des parties affines de H sont positives, comme le montre la figure 2.35.

$P_{\text{th}}^{\text{opt}}$ est donnée par :

Cas sur P_r			$P_{\text{th}}^{\text{opt}}$	figure
\underline{P}_r	$\leq P_r \leq$	$\underline{P}_{\text{th}}$	$\underline{P}_{\text{th}}$	2.35.(a)
$\underline{P}_{\text{th}}$	$\leq P_r \leq$	$P_{\text{lim}}^{\text{min}}$	P_r	2.35.(b)
$P_{\text{lim}}^{\text{min}}$	$\leq P_r \leq$	$P_{\text{lim}}^{\text{min}} + \overline{P}_e$	$P_{\text{lim}}^{\text{min}}$	2.35.(c)
$P_{\text{lim}}^{\text{min}} + \overline{P}_e$	$\leq P_r \leq$	\overline{P}_r	$P_r - \overline{P}_e$	

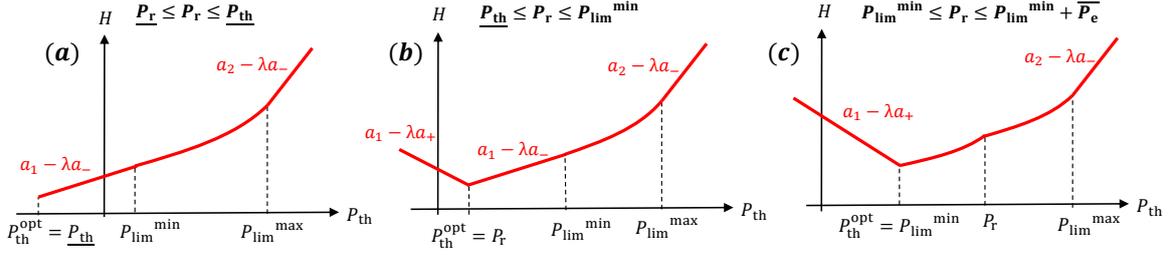


FIGURE 2.35 – Détermination de P_{th}^{opt} selon le sens de variation de H pour UC2.1

UC2.2 :

Dans ce cas, $P_{th}^{*1} < P_{lim}^{min}$ et $P_{lim}^{min} \leq P_{th}^{*2} \leq P_{lim}^{max}$. La pente $a_1 - \lambda a_+$ est négative et toutes les autres pentes des parties affines de H sont positives, comme le montre la figure 2.36.

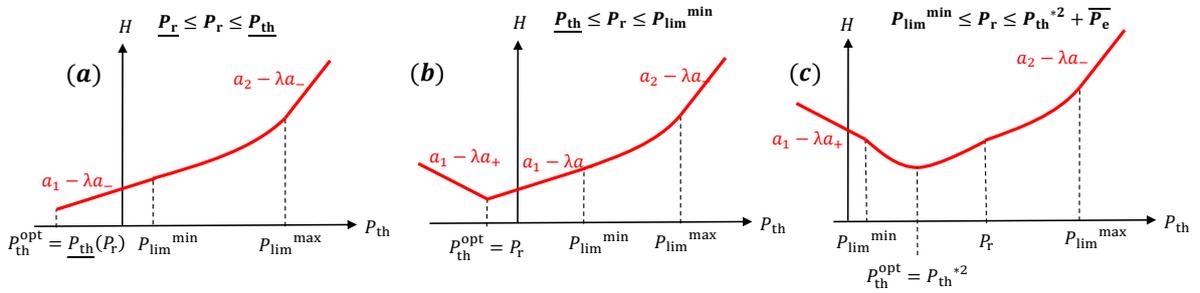


FIGURE 2.36 – Détermination de P_{th}^{opt} selon le sens de variation de H pour UC2.2

P_{th}^{opt} est donnée par :

Cas sur P_r		P_{th}^{opt}	figure
\underline{P}_r	$\leq P_r \leq \underline{P}_{th}$	\underline{P}_{th}	2.36.(a)
\underline{P}_{th}	$\leq P_r \leq P_{lim}^{min}$	P_r	2.36.(b)
P_{lim}^{min}	$\leq P_r \leq P_{th}^{*2} + \overline{P}_e$	P_{th}^{*2}	2.36.(c)
$P_{th}^{*2} + \overline{P}_e$	$\leq P_r \leq \overline{P}_r$	$P_r - \overline{P}_e$	

UC2.3 :

Dans ce cas, $P_{th}^{*1} < P_{lim}^{min}$ et $P_{th}^{*2} \geq P_{lim}^{max}$. La pente $a_1 - \lambda a_+$ est négative et toutes les autres pentes des parties affines de H sont positives, comme le montre la figure 2.37.

P_{th}^{opt} est donnée par :

Cas sur P_r		P_{th}^{opt}	figure
\underline{P}_r	$\leq P_r \leq \underline{P}_{th}$	\underline{P}_{th}	2.37.(a)
\underline{P}_{th}	$\leq P_r \leq P_{lim}^{max}$	P_r	2.37.(b) et (c)
P_{lim}^{max}	$\leq P_r \leq P_{lim}^{max} + \overline{P}_e$	P_{lim}^{max}	2.37.(d)
$P_{lim}^{max} + \overline{P}_e$	$\leq P_r \leq \overline{P}_r$	$P_r - \overline{P}_e$	

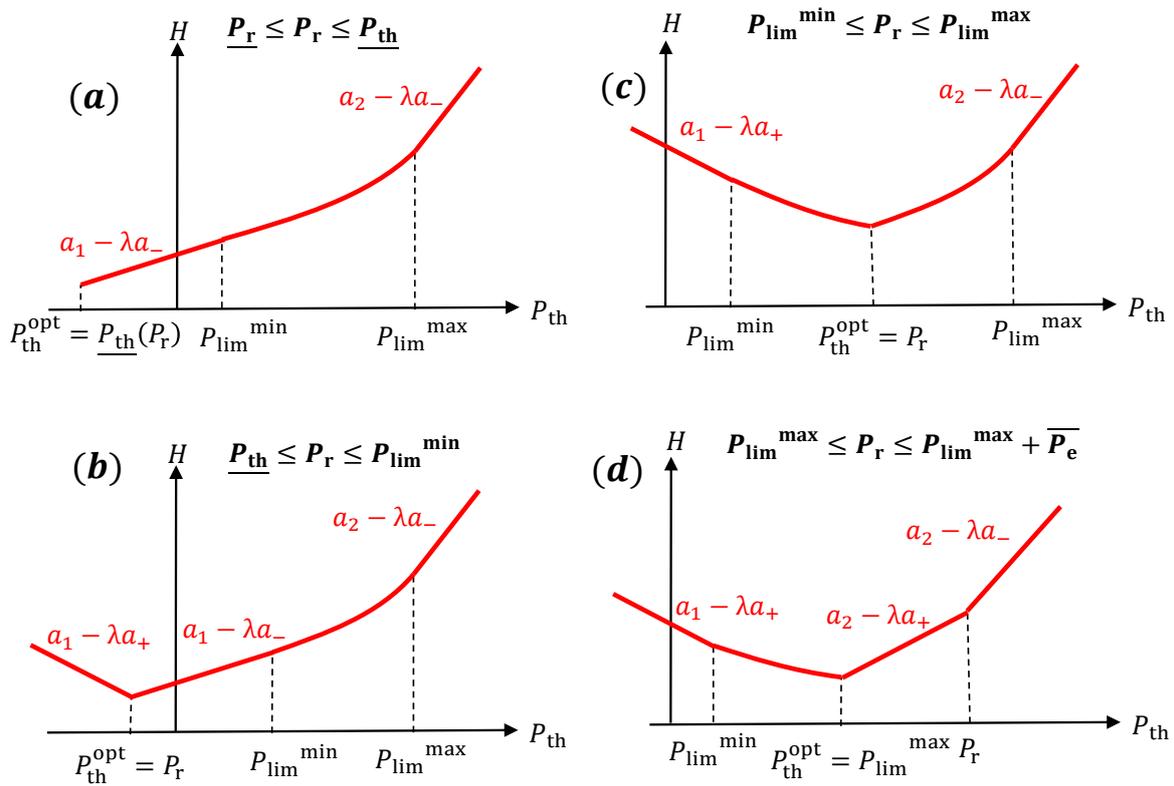


FIGURE 2.37 – Détermination de P_{th}^{opt} selon le sens de variation de H pour UC2.3

UC3.1 :

Dans ce cas, $P_{th}^{*1} < P_{lim}^{min}$ et $P_{th}^{*2} > P_{lim}^{max}$. Les pentes $a_1 - \lambda a_+$ et $a_1 - \lambda a_-$ sont négatives et les pentes $a_2 - \lambda a_+$ et $a_2 - \lambda a_-$ sont positives, comme le montre la figure 2.38.

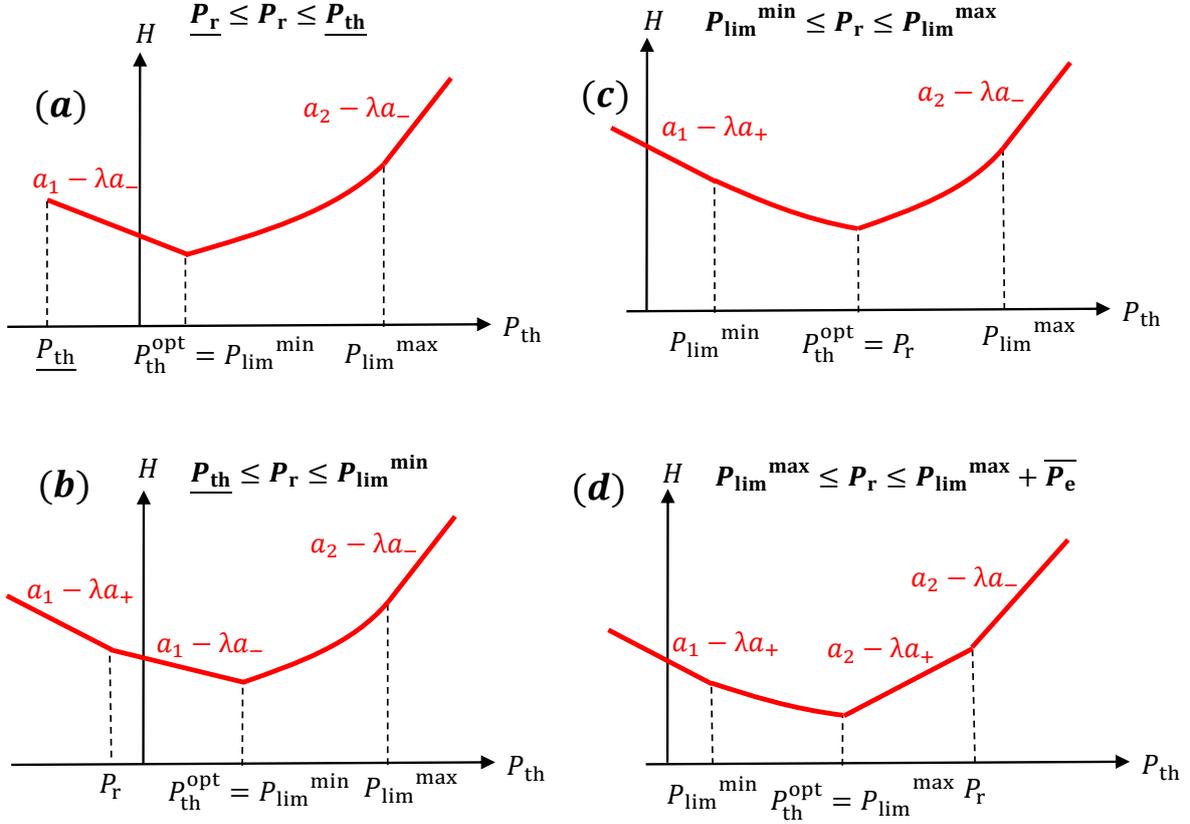


FIGURE 2.38 – Détermination de P_{th}^{opt} selon le sens de variation de H pour UC3.1

P_{th}^{opt} est donnée par :

Cas sur P_r			P_{th}^{opt}	figure
\underline{P}_r	$\leq P_r \leq$	$P_{lim}^{min} + \underline{P}_e$	$P_r - \underline{P}_e$	2.38.(a) et (b)
$P_{lim}^{min} + \underline{P}_e$	$\leq P_r \leq$	P_{lim}^{min}	P_{lim}^{min}	
P_{lim}^{min}	$\leq P_r \leq$	P_{lim}^{max}	P_r	2.38.(c)
P_{lim}^{max}	$\leq P_r \leq$	$P_{lim}^{max} + \overline{P}_e$	P_{lim}^{max}	2.38.(d)
$P_{lim}^{max} + \overline{P}_e$	$\leq P_r \leq$	\overline{P}_r	$P_r - \overline{P}_e$	

UC3.2 :

Dans ce cas, $P_{lim}^{min} \leq P_{th}^{*1} \leq P_{lim}^{max}$ et $P_{th}^{*2} > P_{lim}^{max}$. Les pentes $a_1 - \lambda a_+$ et $a_1 - \lambda a_-$ sont négatives et les pentes $a_2 - \lambda a_+$ et $a_2 - \lambda a_-$ sont positives, comme le montre la figure 2.39.

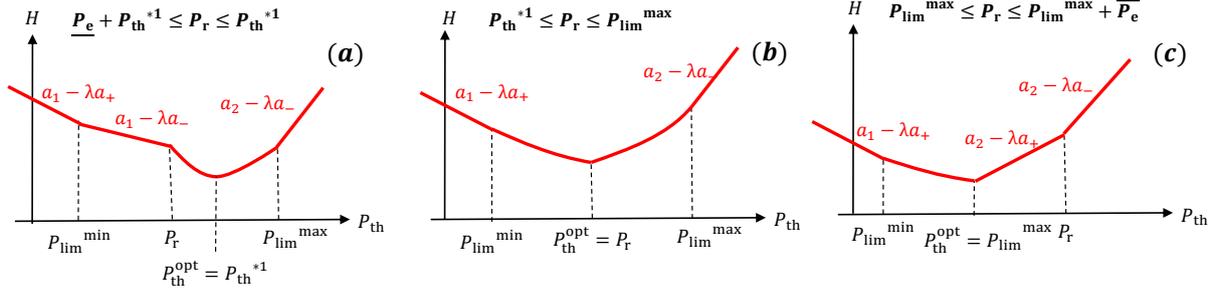


FIGURE 2.39 – Détermination de P_{th}^{opt} selon le sens de variation de H pour UC3.2

Cas sur P_r			P_{th}^{opt}	figure
\underline{P}_r	$\leq P_r \leq$	$P_{th}^{*1} + \underline{P}_e$	$P_r - \underline{P}_e$	
$P_{th}^{*1} + \underline{P}_e$	$\leq P_r \leq$	P_{th}^{*1}	P_{th}^{*1}	2.39.(a)
P_{th}^{*1}	$\leq P_r \leq$	P_{lim}^{max}	P_r	2.39.(b)
P_{lim}^{max}	$\leq P_r \leq$	$P_{lim}^{max} + \overline{P}_e$	P_{lim}^{max}	2.39.(c)
$P_{lim}^{max} + \overline{P}_e$	$\leq P_r \leq$	\overline{P}_r	$P_r - \overline{P}_e$	

UC3.3 :

Dans ce cas, $P_{th}^{*1} > P_{lim}^{max}$ et $P_{th}^{*2} > P_{lim}^{max}$. Les pentes $a_1 - \lambda a_+$ et $a_1 - \lambda a_-$ sont négatives et les pentes $a_2 - \lambda a_+$ et $a_2 - \lambda a_-$ sont positives, comme le montre la figure 2.40.

Cas sur P_r			P_{th}^{opt}	figure
\underline{P}_r	$\leq P_r \leq$	$P_{lim}^{max} + \underline{P}_e$	$P_r - \underline{P}_e$	
$P_{lim}^{max} + \underline{P}_e$	$\leq P_r \leq$	$P_{lim}^{max} + \overline{P}_e$	P_{lim}^{max}	2.40
$P_{lim}^{max} + \overline{P}_e$	$\leq P_r \leq$	\overline{P}_r	$P_r - \overline{P}_e$	

UC4 :

Dans ce cas, $P_{th}^{*1} > P_{lim}^{max}$ et $P_{th}^{*2} > P_{lim}^{max}$. Les pentes $a_1 - \lambda a_+$, $a_1 - \lambda a_-$ et $a_2 - \lambda a_+$ sont négatives et la pente $a_2 - \lambda a_-$ est positive, comme le montre la figure 2.41.

Cas sur P_r			P_{th}^{opt}	figure
\underline{P}_r	$\leq P_r \leq$	$P_{lim}^{max} + \underline{P}_e$	$P_r - \underline{P}_e$	
$P_{lim}^{max} + \underline{P}_e$	$\leq P_r \leq$	P_{lim}^{max}	P_{lim}^{max}	2.41.(a), (b), et (c)
P_{lim}^{max}	$\leq P_r \leq$	\overline{P}_{th}	P_r	2.41.(d)
\overline{P}_{th}	$\leq P_r \leq$	\overline{P}_r	\overline{P}_{th}	

UC5 :

Dans ce cas, $P_{th}^{*1} > P_{lim}^{max}$ et $P_{th}^{*2} > P_{lim}^{max}$. Toutes les pentes des parties affines de H sont négatives. Alors, P_{th}^{opt} est donnée par :

Cas sur P_r			P_{th}^{opt}
\underline{P}_r	$\leq P_r \leq$	$\overline{P}_{th} + \underline{P}_e$	$P_r - \underline{P}_e$
$\overline{P}_{th} + \underline{P}_e$	$\leq P_r \leq$	\overline{P}_r	\overline{P}_{th}

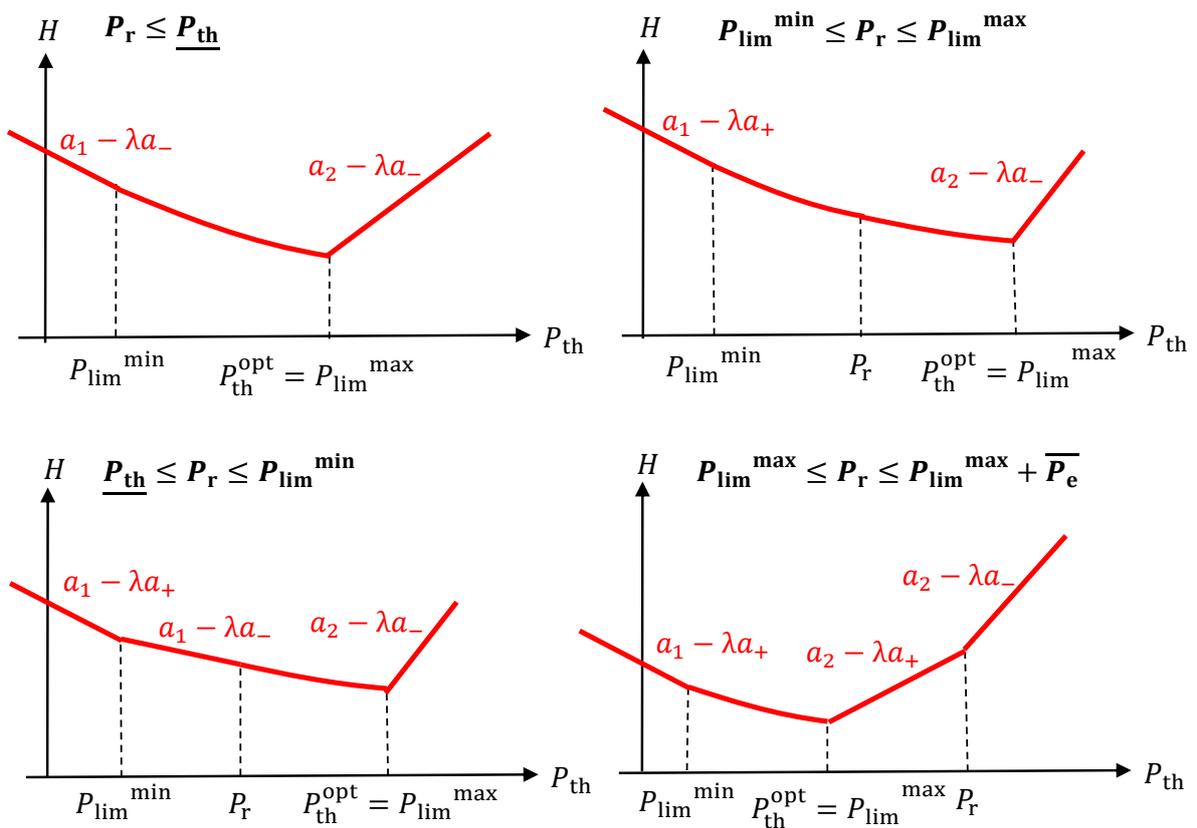


FIGURE 2.40 – Détermination de P_{th}^{opt} selon le sens de variation de H pour UC3.3

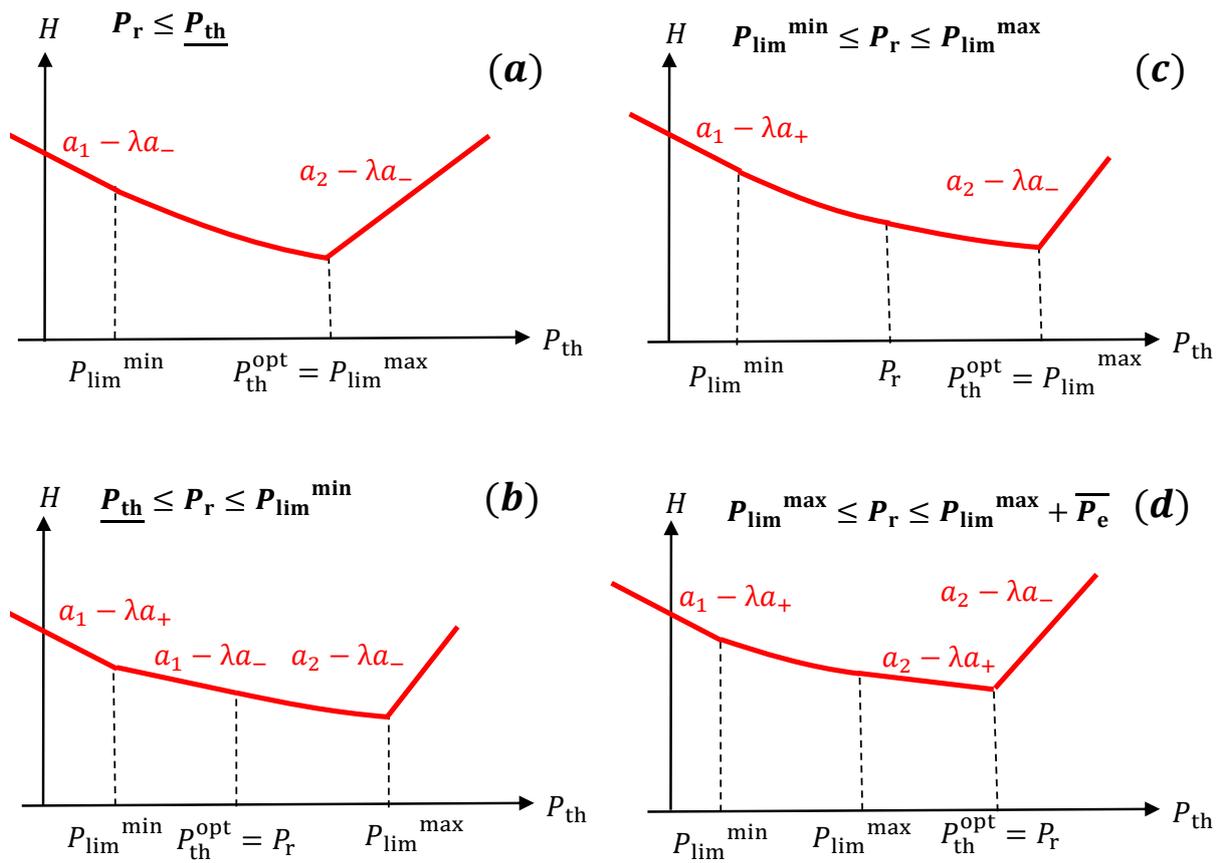


FIGURE 2.41 – Détermination de P_{th}^{opt} selon le sens de variation de H pour UC4

Résultats de Simulations

Dans cette section, les résultats de simulation de l'optimisation du régime du moteur thermique pour une boîte de vitesses à variation continue sont présentés. Ces résultats sont issus d'une simulation hors-ligne (figure 1.7).

Les figures 2.42 et 2.43 représentent les commandes P_{th}^{opt} et ω_{th}^{opt} obtenues par la méthode analytique; et celles obtenues par la méthode Num_1^{1000} utilisant le modèle affine (1.23) de la machine électrique.

Nous avons également comparé la méthode Num_1^{1000} avec la méthode Num_2^{1000} (figure 2.44).

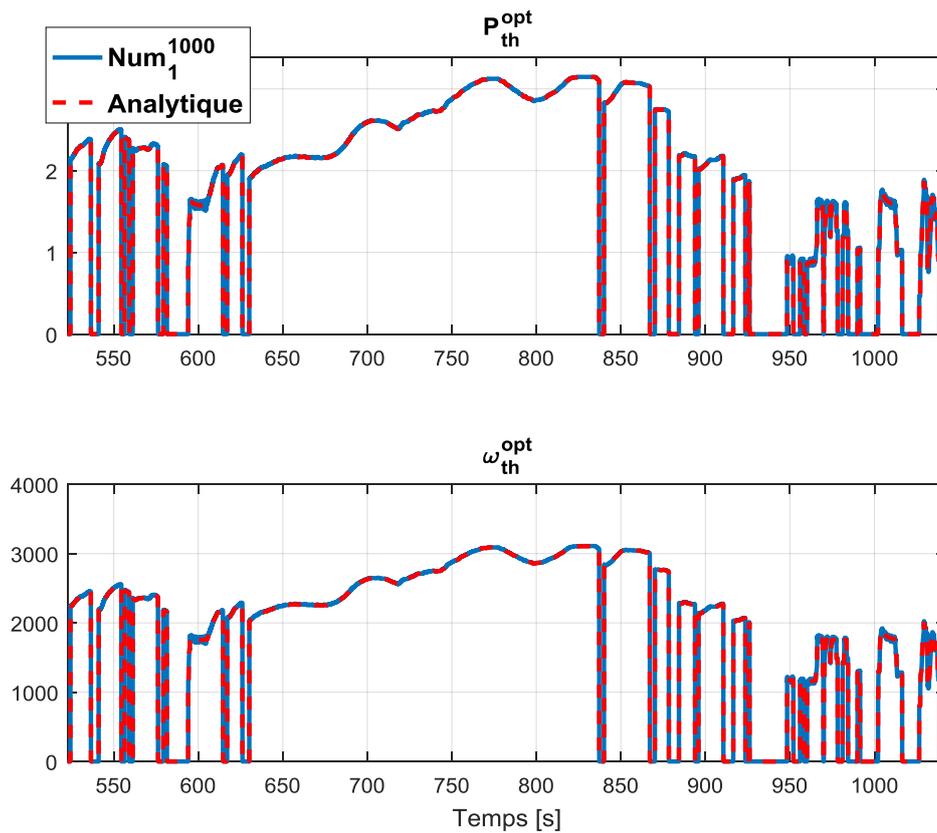


FIGURE 2.42 – Commandes optimales issues de la méthode analytique et de la méthode Num_1^{1000} pour le cycle ARTEMIS Autoroute

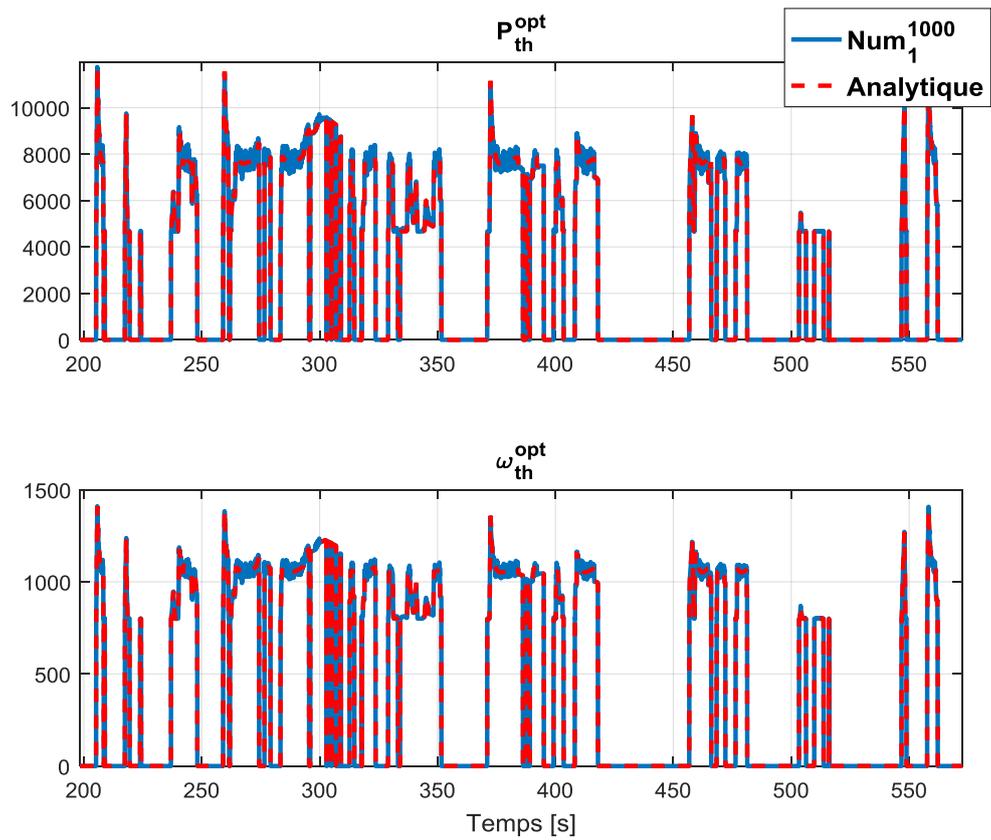


FIGURE 2.43 – Commandes optimales issues de la méthode analytique et de la méthode Num₁¹⁰⁰⁰ pour le cycle ARTEMIS Urbain

Discussion La méthode analytique trouve exactement le même solution que la méthode Num_1^{1000} .

Les commandes issues des approches Num_1^{1000} et Num_2^{1000} sont souvent similaires. Par moment, la solution de la méthode Num_2^{1000} oscille contrairement à celle de la méthode Num_1^{1000} qui est beaucoup plus lisse et régulière. Ce résultat montre encore une fois l'intérêt de la modélisation convexe qui est de lisser les commandes.

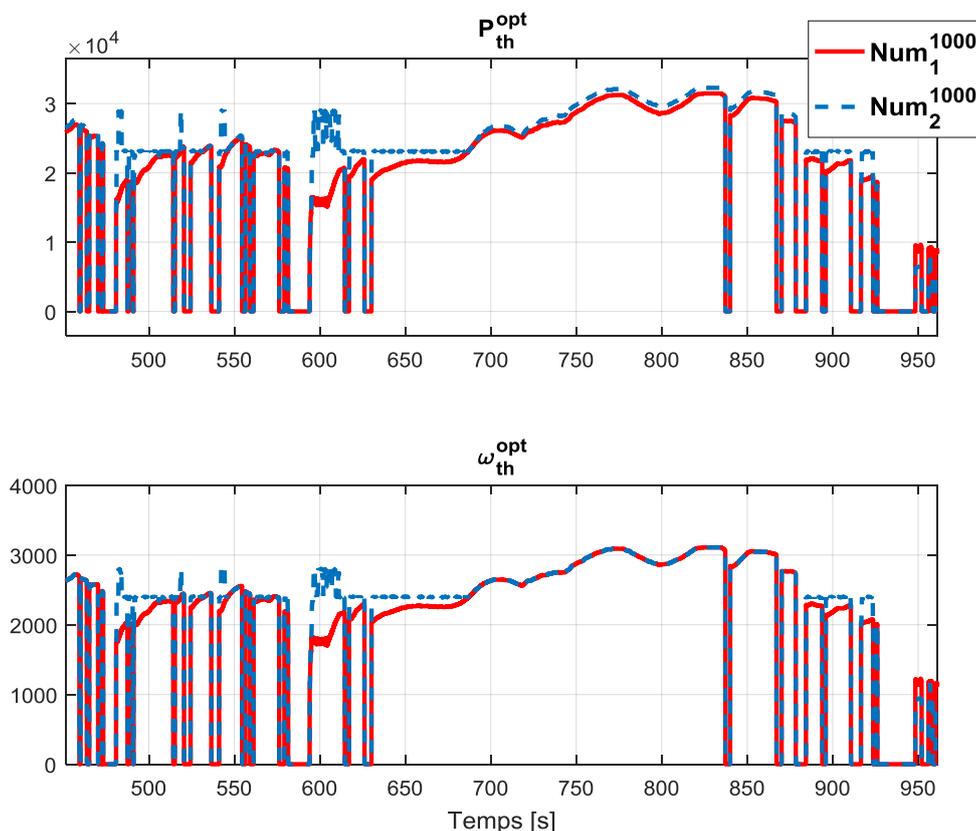


FIGURE 2.44 – Commandes optimales issues des méthodes Num_1^{1000} et Num_2^{1000} pour le cycle ARTEMIS Autoroute

Le temps de calcul est déterminé à partir de l'équation (1.52). Concernant la mémoire, on applique la même démarche expliquée dans les résultats de la section 2.1. Pour la méthode analytique, nous avons, en plus des paramètres cités dans le tableau 2.2, les paramètres (q_1, q_2) et les variables intermédiaires suivantes :

- pour l'optimisation de la puissance : on calcule 8 seuils de λ , 4 seuils de P_r au maximum (UC3.1 et UC3.2) et les optimums P_{th}^{*1} , P_{th}^{*2} , P_{lim}^{min} et P_{lim}^{max} . Au total, la méthode analytique a 16 variables intermédiaires.
- pour l'optimisation du régime : d'après l'équation (2.67), nous avons à calculer une seule variable intermédiaire qui est ω_c .
- pour les méthodes numériques : le vecteur H calculé pour l'optimisation de la puissance devient une matrice $(N \times M)$. Où, N et M sont les tailles du maillage des commandes P_{th} et ω_{th} respectivement.

Les résultats en termes de consommation de carburant, de temps de calcul et d'espace mémoire occupé sont présentés dans les tableaux suivants.

Cycle	Stratégie	Conso [L/100km]	Δ Conso [%]
WLTC	Analytique	3.47	0.57
	Num ₁ ¹⁰⁰⁰	3.46	0.28
	Num ₂ ¹⁰⁰⁰	3.45	-
	Num ₁ ¹⁰	4.25	23.18
	Num ₂ ¹⁰	4.12	19.42
ARTEMIS Urbain	Analytique	3.55	0.56
	Num ₁ ¹⁰⁰⁰	3.55	0.56
	Num ₂ ¹⁰⁰⁰	3.53	-
	Num ₁ ¹⁰	3.61	2.26
	Num ₂ ¹⁰	3.56	0.85
ARTEMIS Routier	Analytique	3.27	0.92
	Num ₁ ¹⁰⁰⁰	3.27	0.92
	Num ₂ ¹⁰⁰⁰	3.24	-
	Num ₁ ¹⁰	3.30	1.85
	Num ₂ ¹⁰	3.53	8.95
ARTEMIS Autoroutier	Analytique	4.27	0.23
	Num ₁ ¹⁰⁰⁰	4.27	0.23
	Num ₂ ¹⁰⁰⁰	4.26	-
	Num ₁ ¹⁰	4.30	0.93
	Num ₂ ¹⁰	4.28	0.47

TABLE 2.9 – Résultats de consommation de carburant des méthodes analytique, Num₁¹⁰⁰⁰, Num₂¹⁰⁰⁰, Num₁¹⁰ et Num₂¹⁰

Stratégie	Temps de Calcul [s]
Analytique	0.92
Num ₁ ¹⁰⁰⁰	10.25
Num ₂ ¹⁰⁰⁰	30
Num ₁ ¹⁰	1.64
Num ₂ ¹⁰	17.34

TABLE 2.10 – Temps de calcul moyen consommé par les méthodes analytique, Num₁¹⁰⁰⁰, Num₂¹⁰⁰⁰, Num₁¹⁰ et Num₂¹⁰ pour le calcul des commandes sur un pas de temps

Stratégie	Espace mémoire occupé [Doubles]
Analytique	40
Num ₁ ¹⁰⁰⁰	53 + 1000 × 1000 + 2000
Num ₂ ¹⁰⁰⁰	3500 + 1000 × 1000 + 2000
Num ₁ ¹⁰	53 + 10 × 10 + 20
Num ₂ ¹⁰	3500 + 10 × 10 + 20

TABLE 2.11 – Espace mémoire total occupé par les stratégies analytique, Num₁¹⁰⁰⁰, Num₂¹⁰⁰⁰, Num₁¹⁰ et Num₂¹⁰

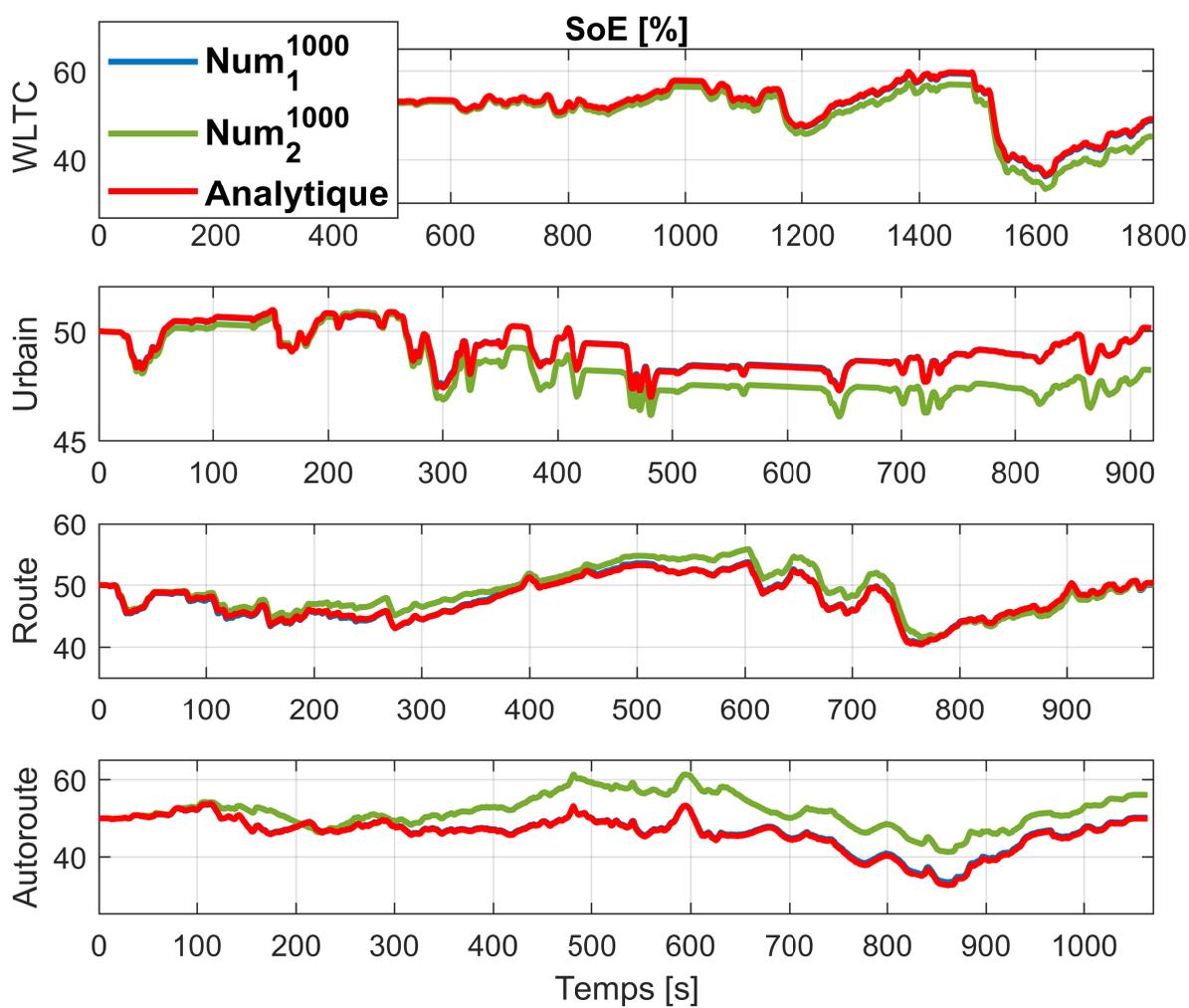


FIGURE 2.45 – Trajectoires SoE des stratégies analytique, Num_1^{1000} et Num_2^{1000} sur tous les cycles étudiés

Discussion Comme précédemment, on peut constater que l'ajout d'une variable d'optimisation continue dans la méthode numérique expose le temps de calcul ainsi que la mémoire. En effet, en comparant avec les résultats de la section 2.1, la méthode numérique occupe jusqu'à 800 fois plus de mémoire et consomme jusqu'à 70 fois plus de temps de calcul. Pour la méthode analytique, l'ajout d'une commande continue a multiplié le temps de calcul que par 18 et la mémoire par 1,4. Ce qui est largement raisonnable relativement à la méthode numérique. Concernant la consommation de carburant, la méthode analytique présente une surconsommation inférieure à 1% par rapport à la méthode Num₂¹⁰⁰⁰. La figure 2.45 montre que les stratégies analytique, Num₁¹⁰⁰⁰ et Num₂¹⁰⁰⁰ ont des trajectoires *SoE* similaires sur tous les cycles étudiés.

2.3.3 Conclusion

En conclusion, la méthode analytique permet d'augmenter le nombre de variables d'optimisation (continues ou discrètes) tout en assurant un très bon compromis consommation/performances. En effet, elle réduit considérablement le temps de calcul ainsi que la mémoire pour une surconsommation inférieure à 1%.

Chapitre 3

Application à l'architecture Bi-Parallèle

L'objectif de ce chapitre est d'optimiser la consommation de carburant d'un véhicule hybride série-parallèle sans step-up composé par : un moteur thermique (MT), deux machines électriques (ME1, ME2) et une batterie (figure 3.1). La variable d'optimisation considérée dans cette étude est : la répartition de puissance mécanique entre le MT et les MEs. Afin de calculer la répartition de puissance optimale, la méthodologie analytique est appliquée (figure 1.39).

3.1 Optimisation de la puissance

Le Problème d'Optimisation en mode Bi-Parallèle (*POBP*) où la puissance P_m est la variable d'optimisation s'écrit comme suit :

$$POBP : \begin{cases} \min_{P_m} \int_{t_0}^{t_f} Q(P_{th}(t), \omega_{th}(t)) dt \\ \dot{SoE}(t) = -\frac{P_{bat}(t)}{E_{max}} \\ 0 \leq SoE(t) \leq 100 \\ \underline{P}_{th}(\omega_{th}) \leq P_{th} \leq \overline{P}_{th}(\omega_{th}) \\ P_r = P_{th} + P_m \\ P_m = P_{m1} + P_{m2} \\ \underline{P}_e(\omega_{e1}, \omega_{e2}) \leq P_m \leq \overline{P}_e(\omega_{e1}, \omega_{e2}) \\ \underline{P}_{e1}(\omega_{e1}) \leq P_{m1} \leq \overline{P}_{e1}(\omega_{e1}) \\ \underline{P}_{e2}(\omega_{e2}) \leq P_{m2} \leq \overline{P}_{e2}(\omega_{e2}) \end{cases} \quad (3.1)$$

En appliquant le PMP sur *POBP*, on a :

$$P_m^{opt} = \arg \min_{P_m \in [\underline{P}_e, \overline{P}_e]} (H(P_m, P_r, \lambda)) \quad (3.2)$$

Avec, $H(P_m, P_r, \lambda) = Q(P_{th}) + \lambda(t)P_{bat}(P_m)$. $Q(P_{th})$ est remplacé par son modèle affine défini dans l'équation (1.12). Quant à P_{bat} , comme les pertes dans la batterie sont négligées (hypothèse 8), alors P_{bat} est donnée par :

$$P_{bat}(P_m) = P_e(P_{m1}, P_{m2}) = P_{e1}(P_{m1}) + P_{e2}(P_{m2}) \quad (3.3)$$

Le modèle quadratique en puissance défini par l'équation (1.22) est utilisé pour P_{e1} ainsi que pour P_{e2} . On suppose également que les régimes $(\omega_{th}, \omega_{e1}, \omega_{e2})$ sont connus en amont de l'optimisation.

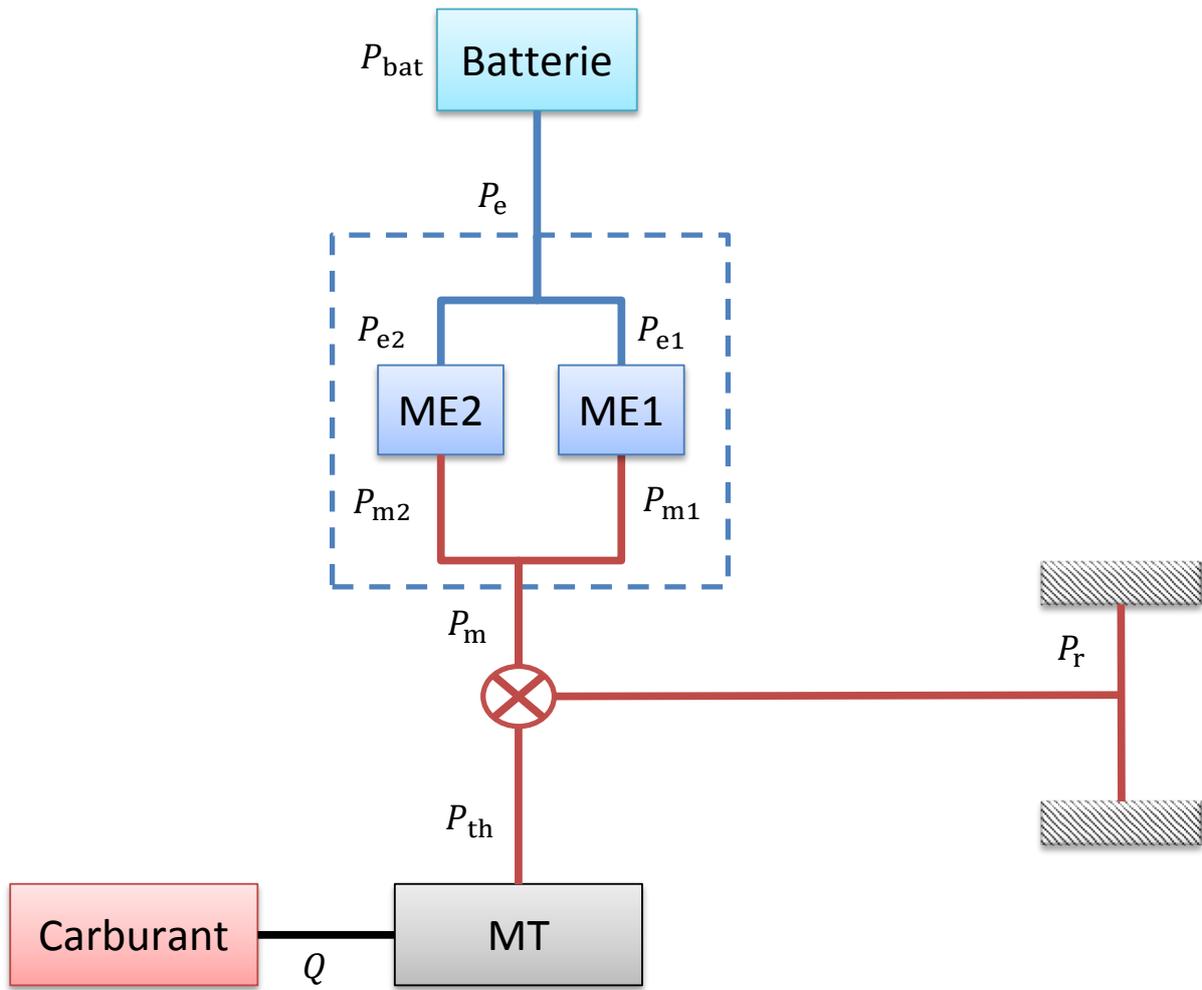


FIGURE 3.1 – Configuration Bi-Parallèle

3.1.1 Calcul des Limitations

D'une part, les commandes P_{th} , P_m , P_{m_1} et P_{m_2} sont bornées par les limitations propres aux organes comme présenté dans les équations (1.11) et (1.17). On a :

$$\underline{P}_{th}(\omega_{th}) \leq P_{th} \leq \overline{P}_{th}(\omega_{th}) \quad (3.4)$$

$$\underline{P}_{e_1}(\omega_{e_1}) \leq P_{m_1} \leq \overline{P}_{e_1}(\omega_{e_1}) \quad (3.5)$$

$$\underline{P}_{e_2}(\omega_{e_2}) \leq P_{m_2} \leq \overline{P}_{e_2}(\omega_{e_2}) \quad (3.6)$$

$$\underline{P}_e(\omega_{e_1}, \omega_{e_2}) \leq P_m \leq \overline{P}_e(\omega_{e_1}, \omega_{e_2}) \quad (3.7)$$

$$\overline{P}_e = \overline{P}_{e_1} + \overline{P}_{e_2} \quad (3.8)$$

$$\underline{P}_e = \underline{P}_{e_1} + \underline{P}_{e_2} \quad (3.9)$$

D'autre part, elles sont liées via l'équation (3.10) qui représente la volonté conducteur. En effet, dans une configuration bi-parallèle, le bilan des puissances mécaniques à la roue est donné par :

$$P_r = P_{th} + P_m = P_{th} + P_{m_1} + P_{m_2} \quad (3.10)$$

D'après l'équation (3.10), chaque organe, en plus de ses limitations, il a les limitations suivantes :

$$P_r - \overline{P}_e(\omega_{e_1}, \omega_{e_2}) \leq P_{th} \leq P_r - \underline{P}_e(\omega_{e_1}, \omega_{e_2}) \quad (3.11)$$

$$P_r - \overline{P}_{th}(\omega_{th}) \leq P_m \leq P_r - \underline{P}_{th}(\omega_{th}) \quad (3.12)$$

$$P_m - \overline{P}_{e_2}(\omega_{e_2}) \leq P_{m_1} \leq P_m - \underline{P}_{e_2}(\omega_{e_2}) \quad (3.13)$$

$$P_m - \overline{P}_{e_1}(\omega_{e_1}) \leq P_{m_2} \leq P_m - \underline{P}_{e_1}(\omega_{e_1}) \quad (3.14)$$

Finalement, en consolidant (c'est-à-dire en comparant les minimums (maximums) entre eux) les limitations organes (3.4), (3.7), (3.5) et (3.6) avec les limitations imposées par la volonté conducteur (3.11), (3.12), (3.13) et (3.14), on obtient :

— Limitations de P_{th} :

$$\underline{P}_{th}(P_r, \omega_{th}, \omega_{e_1}, \omega_{e_2}) = \max(\underline{P}_{th}(\omega_{th}), P_r - \overline{P}_e(\omega_{e_1}, \omega_{e_2}))$$

$$\underline{P}_{th}(P_r, \omega_{th}, \omega_{e_1}, \omega_{e_2}) = \begin{cases} \underline{P}_{th}(\omega_{th}) & \text{si } \underline{P}_r(\omega_{th}, \omega_{e_1}, \omega_{e_2}) \leq P_r \leq \underline{P}_{th}(\omega_{th}) + \overline{P}_e(\omega_{e_1}, \omega_{e_2}) \\ P_r - \overline{P}_e(\omega_{e_1}, \omega_{e_2}) & \text{si } \underline{P}_{th}(\omega_{th}) + \overline{P}_e(\omega_{e_1}, \omega_{e_2}) \leq P_r \leq \overline{P}_r(\omega_{th}, \omega_{e_1}, \omega_{e_2}) \end{cases}$$

$$\overline{P}_{th}(P_r, \omega_{th}, \omega_{e_1}, \omega_{e_2}) = \min(\overline{P}_{th}(\omega_{th}), P_r - \underline{P}_e(\omega_{e_1}, \omega_{e_2}))$$

$$\overline{P}_{th}(P_r, \omega_{th}, \omega_{e_1}, \omega_{e_2}) = \begin{cases} P_r - \underline{P}_e(\omega_{e_1}, \omega_{e_2}) & \text{si } \underline{P}_r(\omega_{th}, \omega_{e_1}, \omega_{e_2}) \leq P_r \leq \overline{P}_{th}(\omega_{th}) + \underline{P}_e(\omega_{e_1}, \omega_{e_2}) \\ \overline{P}_{th}(\omega_{th}) & \text{si } \overline{P}_{th}(\omega_{th}) + \underline{P}_e(\omega_{e_1}, \omega_{e_2}) \leq P_r \leq \overline{P}_r(\omega_{th}, \omega_{e_1}, \omega_{e_2}) \end{cases}$$

— Limitations de P_m :

$$\underline{P}_e(P_r, \omega_{th}, \omega_{e_1}, \omega_{e_2}) = \max(\underline{P}_e(\omega_{e_1}, \omega_{e_2}), P_r - \overline{P}_{th}(\omega_{th}))$$

$$\underline{P}_e(P_r, \omega_{th}, \omega_{e_1}, \omega_{e_2}) = \begin{cases} \underline{P}_e(\omega_{e_1}, \omega_{e_2}) & \text{si } \underline{P}_r \leq P_r \leq \overline{P}_{th}(\omega_{th}) + \underline{P}_e(\omega_{e_1}, \omega_{e_2}) \\ P_r - \overline{P}_{th}(\omega_{th}) & \text{si } \overline{P}_{th}(\omega_{th}) + \underline{P}_e(\omega_{e_1}, \omega_{e_2}) \leq P_r \leq \overline{P}_r \end{cases}$$

$$\overline{P}_e(P_r, \omega_{th}, \omega_{e_1}, \omega_{e_2}) = \min(\overline{P}_e(\omega_{e_1}, \omega_{e_2}), P_r - \underline{P}_{th}(\omega_{th}))$$

$$\overline{P}_e(P_r, \omega_{th}, \omega_{e_1}, \omega_{e_2}) = \begin{cases} P_r - \underline{P}_{th}(\omega_{th}) & \text{si } \underline{P}_r \leq P_r \leq \underline{P}_{th}(\omega_{th}) + \overline{P}_e(\omega_{e_1}, \omega_{e_2}) \\ \overline{P}_e(\omega_{e_1}, \omega_{e_2}) & \text{si } \underline{P}_{th}(\omega_{th}) + \overline{P}_e(\omega_{e_1}, \omega_{e_2}) \leq P_r \leq \overline{P}_r \end{cases}$$

— Limitations de P_{m_1} :

$$\underline{P}_{e_1}(P_m, \omega_{e_1}, \omega_{e_2}) = \max(\underline{P}_{e_1}(\omega_{e_1}), P_m - \overline{P}_{e_2}(\omega_{e_2}))$$

$$\underline{P}_{e_1}(P_m, \omega_{e_1}, \omega_{e_2}) = \begin{cases} \underline{P}_{e_1}(\omega_{e_1}) & \text{si } \underline{P}_e(\omega_{e_1}, \omega_{e_2}) \leq P_m \leq \overline{P}_{e_2}(\omega_{e_2}) + \underline{P}_{e_1}(\omega_{e_1}) \\ P_m - \overline{P}_{e_2}(\omega_{e_2}) & \text{si } \overline{P}_{e_2}(\omega_{e_2}) + \underline{P}_{e_1}(\omega_{e_1}) \leq P_m \leq \overline{P}_e(\omega_{e_1}, \omega_{e_2}) \end{cases}$$

$$\overline{P}_{e_1}(P_m, \omega_{e_1}, \omega_{e_2}) = \min(\overline{P}_{e_1}(\omega_{e_1}), P_m - \underline{P}_{e_2}(\omega_{e_2}))$$

$$\overline{P}_{e_1}(P_m, \omega_{e_1}, \omega_{e_2}) = \begin{cases} P_m - \underline{P}_{e_2}(\omega_{e_2}) & \text{si } \underline{P}_e(\omega_{e_1}, \omega_{e_2}) \leq P_m \leq \overline{P}_{e_1}(\omega_{e_1}) + \underline{P}_{e_2}(\omega_{e_2}) \\ \overline{P}_{e_1}(\omega_{e_1}) & \text{si } \overline{P}_{e_1}(\omega_{e_1}) + \underline{P}_{e_2}(\omega_{e_2}) \leq P_m \leq \overline{P}_e(\omega_{e_1}, \omega_{e_2}) \end{cases}$$

\underline{P}_r et \overline{P}_r représentent tout le domaine faisable de puissance à la roue, où :

$$\underline{P}_r(\omega_{th}, \omega_{e_1}, \omega_{e_2}) = \underline{P}_{th}(\omega_{th}) + \underline{P}_e(\omega_{e_1}, \omega_{e_2}) \leq P_r \leq \overline{P}_{th}(\omega_{th}) + \overline{P}_e(\omega_{e_1}, \omega_{e_2}) = \overline{P}_r(\omega_{th}, \omega_{e_1}, \omega_{e_2})$$

Dans la suite de ce chapitre, la méthodologie analytique, décrite dans la figure 1.39, est appliquée sur le problème (3.1). On commencera par le calcul de l'Hamiltonien (étape 2), puis sa convexité sera étudiée (étape 3). Par la suite, la commande optimale est calculée en minimisant l'Hamiltonien (étape 4). Finalement, afin de valider l'approche analytique, les résultats de simulation issus de la méthode analytique seront comparés à ceux de la méthode numérique (étape 5).

Calcul détaillé de l'Hamiltonien : Étape 2

Afin de calculer P_m^{opt} , l'expression de H en fonction de la commande P_m est déterminée. Pour cela, on distinguera plusieurs cas selon le positionnement des points de changement de coefficients de Q ainsi que ceux de P_{bat} . En remplaçant, P_{bat} par son expression (3.3) dans H , on obtient l'expression condensée de H :

$$H(P_{th}, P_{m_1}, P_{m_2}, \lambda) = Q(P_{th}) + \lambda(P_{e_1}(P_{m_1}) + P_{e_2}(P_{m_2})) \quad (3.15)$$

Où, à partir de (1.22), on a :

$$P_{e_1}(P_{m_1}) = \begin{cases} a_1^-(\omega_{e_1})P_{m_1}^2 + b_1^-(\omega_{e_1})P_{m_1} + c_1(\omega_{e_1}) & \text{si } \underline{P}_{e_1}(\omega_{e_1}) \leq P_{m_1} \leq 0 \\ a_1^+(\omega_{e_1})P_{m_1}^2 + b_1^+(\omega_{e_1})P_{m_1} + c_1(\omega_{e_1}) & \text{si } 0 \leq P_{m_1} \leq \overline{P}_{e_1}(\omega_{e_1}) \end{cases} \quad (3.16)$$

$$P_{e_2}(P_{m_2}) = \begin{cases} a_2^-(\omega_{e_2})P_{m_2}^2 + b_2^-(\omega_{e_2})P_{m_2} + c_2(\omega_{e_2}) & \text{si } \underline{P}_{e_2}(\omega_{e_2}) \leq P_{m_2} \leq 0 \\ a_2^+(\omega_{e_2})P_{m_2}^2 + b_2^+(\omega_{e_2})P_{m_2} + c_2(\omega_{e_2}) & \text{si } 0 \leq P_{m_2} \leq \overline{P}_{e_2}(\omega_{e_2}) \end{cases} \quad (3.17)$$

En remplaçant, P_{e_1} , P_{e_2} par leurs modèles (3.16) et (3.17), P_{m_2} par $P_m - P_{m_1}$ et P_{th} par $P_r - P_m$ (3.10) dans H , on obtient :

$$H(P_m, P_r, \lambda) = Q(P_r - P_m) + \lambda(a_1^\pm P_{m_1}^2 + b_1^\pm P_{m_1} + c_1 + a_2^\pm (P_m - P_{m_1})^2 + b_2^\pm (P_m - P_{m_1}) + c_2) \quad (3.18)$$

L'Hamiltonien $H = Q + \lambda P_{\text{bat}}$ est une fonction polynomiale à deux variables P_m et P_{m_1} . P_{m_1} n'apparaît que dans P_{bat} , minimiser H revient à minimiser P_{bat} et donc :

$$P_{m_1}^{\text{opt}}(P_m) = \arg \min_{P_{m_1}} (P_{\text{bat}}(P_m, P_{m_1})) \quad (3.19)$$

Ce qui équivaut à :

$$\min_{P_m, P_{m_1}} (H(P_m, P_{m_1}, P_r, \lambda)) = \min_{P_m} (Q(P_r - P_m) + \lambda \min_{P_{m_1}} (P_{\text{bat}}(P_m, P_{m_1}))) \quad (3.20)$$

Pour cela, la résolution de (3.20) se fera en deux étapes :

1. calcul de $P_{m_1}^{\text{opt}}(P_m)$ avec (3.19).
2. calcul de P_m^{opt} avec (3.20).

Calcul de la puissance optimale de la machine principale

Dans ce paragraphe, nous allons résoudre l'équation (3.19). Pour cela, l'expression de $P_{\text{bat}}(P_{m_1})$ est déterminée. $P_{\text{bat}}(P_{m_1})$ peut s'écrire sous la forme générale suivante :

$$P_{\text{bat}}(P_{m_1}) = A_2 P_{m_1}^2 + A_1 P_{m_1} + c_1 + B_2 (P_m - P_{m_1})^2 + B_1 (P_m - P_{m_1}) + c_2 \quad (3.21)$$

Alors, trouver l'expression de P_{bat} revient à déterminer les coefficients A_2 , A_1 , B_2 et B_1 . D'après (3.16) et (3.17), on sait que :

$$A_2 = \begin{cases} a_1^- & \text{si } P_{m_1} \leq 0 \\ a_1^+ & \text{si } P_{m_1} > 0 \end{cases}$$

$$A_1 = \begin{cases} b_1^- & \text{si } P_{m_1} \leq 0 \\ b_1^+ & \text{si } P_{m_1} > 0 \end{cases}$$

$$B_2 = \begin{cases} a_2^- & \text{si } P_{m_2} \leq 0 \\ a_2^+ & \text{si } P_{m_2} > 0 \end{cases}$$

$$B_1 = \begin{cases} b_2^- & \text{si } P_{m_2} \leq 0 \\ b_2^+ & \text{si } P_{m_2} > 0 \end{cases}$$

Comme $P_{m_2} = P_m - P_{m_1}$, $P_{m_2} \leq 0 \Leftrightarrow P_{m_1} \geq P_m$ et $P_{m_2} > 0 \Leftrightarrow P_{m_1} < P_m$. Alors, B_2 et B_1 sont donnés en fonction de P_{m_1} comme suit :

$$B_2 = \begin{cases} a_2^+ & \text{si } P_{m_1} \leq P_m \\ a_2^- & \text{si } P_{m_1} > P_m \end{cases}$$

$$B_1 = \begin{cases} b_2^+ & \text{si } P_{m_1} \leq P_m \\ b_2^- & \text{si } P_{m_1} > P_m \end{cases}$$

Finalement, les coefficients A_2 , A_1 , B_2 et B_1 sont déterminés en fonction de P_{m_1} et P_m comme le montre les tableaux suivants :

— **Cas A** : si $P_m \leq 0$, alors :

P_{m_1}	\underline{P}_{e1}	P_m	0	\bar{P}_{e1}
A_2	a_1^-	a_1^-	a_1^+	
A_1	b_1^-	b_1^-	b_1^+	
B_2	a_2^+	a_2^-	a_2^-	
B_1	b_2^+	b_2^-	b_2^-	

Dans ce cas, $P_{\text{bat}}(P_{m_1})$ est donnée par :

$$P_{\text{bat}}(P_{m_1}) = \begin{cases} a_1^- P_{m_1}^2 + b_1^- P_{m_1} + c_1 + a_2^+ (P_m - P_{m_1})^2 + b_2^+ (P_m - P_{m_1}) + c_2 & \text{si } \underline{P}_{e_1} \leq P_{m_1} \leq P_m \\ a_1^- P_{m_1}^2 + b_1^- P_{m_1} + c_1 + a_2^- (P_m - P_{m_1})^2 + b_2^- (P_m - P_{m_1}) + c_2 & \text{si } P_m \leq P_{m_1} \leq 0 \\ a_1^+ P_{m_1}^2 + b_1^+ P_{m_1} + c_1 + a_2^- (P_m - P_{m_1})^2 + b_2^- (P_m - P_{m_1}) + c_2 & \text{si } 0 \leq P_{m_1} \leq \overline{P}_{e_1} \end{cases} \quad (3.22)$$

— **Cas B** : si $P_m \geq 0$, alors :

P_{m_1}	\underline{P}_{e_1}	0	P_m	\overline{P}_{e_1}
A_2	a_1^-	a_1^+		a_1^+
A_1	b_1^-	b_1^+		b_1^+
B_2	a_2^+	a_2^+		a_2^-
B_1	b_2^+	b_2^+		b_2^-

Dans ce cas, $P_{\text{bat}}(P_{m_1})$ est donnée par :

$$P_{\text{bat}}(P_{m_1}) = \begin{cases} a_1^- P_{m_1}^2 + b_1^- P_{m_1} + c_1 + a_2^+ (P_m - P_{m_1})^2 + b_2^+ (P_m - P_{m_1}) + c_2 & \text{si } \underline{P}_{e_1} \leq P_{m_1} \leq 0 \\ a_1^+ P_{m_1}^2 + b_1^+ P_{m_1} + c_1 + a_2^+ (P_m - P_{m_1})^2 + b_2^+ (P_m - P_{m_1}) + c_2 & \text{si } 0 \leq P_{m_1} \leq P_m \\ a_1^+ P_{m_1}^2 + b_1^+ P_{m_1} + c_1 + a_2^- (P_m - P_{m_1})^2 + b_2^- (P_m - P_{m_1}) + c_2 & \text{si } P_m \leq P_{m_1} \leq \overline{P}_{e_1} \end{cases} \quad (3.23)$$

La puissance optimale de la machine principale $P_{m_1}^{\text{opt}}(P_m)$ est donnée en fonction de P_m par :

— Si $b_1^+ - b_2^+ \geq 0$:

$$P_{m_1}^{\text{opt}}(P_m) = \begin{cases} \underline{P}_{e_1} & \text{si } \underline{P}_e \leq P_m \leq \underline{P}_m^- \\ P_{m_1}^{*-} & \text{si } \underline{P}_m^- \leq P_m \leq \overline{P}_m^- \\ 0 & \text{si } \overline{P}_m^- \leq P_m \leq \underline{P}_m^+ \\ P_{m_1}^{*+} & \text{si } \underline{P}_m^+ \leq P_m \leq \overline{P}_m^+ \\ \overline{P}_{e_1} & \text{si } \overline{P}_m^+ \leq P_m \leq \overline{P}_e \end{cases} \quad (3.24)$$

— Si $b_1^+ - b_2^+ \leq 0$:

$$P_{m_1}^{\text{opt}}(P_m) = \begin{cases} P_m - \underline{P}_{e_2} & \text{si } \underline{P}_e \leq P_m \leq \underline{P}_m^- \\ P_{m_1}^{*-} & \text{si } \underline{P}_m^- \leq P_m \leq \overline{P}_m^- \\ P_m & \text{si } \overline{P}_m^- \leq P_m \leq \underline{P}_m^+ \\ P_{m_1}^{*+} & \text{si } \underline{P}_m^+ \leq P_m \leq \overline{P}_m^+ \\ P_m - \overline{P}_{e_2} & \text{si } \overline{P}_m^+ \leq P_m \leq \overline{P}_e \end{cases} \quad (3.25)$$

$$\text{où : } P_{m_1}^{*\pm} = \frac{2a_2^\pm P_m + b_2^\pm - b_1^\pm}{2(a_1^\pm + a_2^\pm)}$$

Démonstration

Afin de déterminer $P_{m_1}^{\text{opt}}$, il faut étudier la convexité de P_{bat} par rapport à P_{m_1} . Ceci revient à calculer sa dérivée par rapport à P_{m_1} et à étudier son signe ainsi que son sens de variation. La dérivée de P_{bat} par rapport à P_{m_1} est donnée par :

— **Cas A** :

$$\frac{\partial P_{\text{bat}}}{\partial P_{m_1}} = \begin{cases} 2(a_1^- + a_2^+)P_{m_1} + b_1^- - b_2^+ - 2a_2^+ P_m & \text{si } \underline{P}_{e_1} \leq P_{m_1} \leq P_m \\ 2(a_1^- + a_2^-)P_{m_1} + b_1^- - b_2^- - 2a_2^- P_m & \text{si } P_m \leq P_{m_1} \leq 0 \\ 2(a_1^+ + a_2^-)P_{m_1} + b_1^+ - b_2^- - 2a_2^- P_m & \text{si } 0 \leq P_{m_1} \leq \overline{P}_{e_1} \end{cases} \quad (3.26)$$

La dérivée de P_{bat} est affine par morceaux. Ses pentes : $(a_1^- + a_2^+)$, $(a_1^+ + a_2^+)$ et $(a_1^+ + a_2^-)$ sont positives en se basant sur l'hypothèse 5 qui montre que les coefficients du terme quadratique de P_e sont positifs. Par conséquent, $\frac{\partial P_{\text{bat}}}{\partial P_{m_1}}$ est croissante par morceaux. De plus, pour montrer que $\frac{\partial P_{\text{bat}}}{\partial P_{m_1}}$ est toujours croissante quelque soit P_{m_1} , il faut calculer ses valeurs à droite et à gauche des points de changement d'expression, à savoir, à 0 et à P_m . On a :

$$\frac{\partial P_{\text{bat}}^G}{\partial P_{m_1}} \Big|_{P_{m_1}=P_m} = b_1^- - b_2^+ + 2a_1^- P_m \quad (3.27)$$

$$\frac{\partial P_{\text{bat}}^D}{\partial P_{m_1}} \Big|_{P_{m_1}=P_m} = b_1^- - b_2^- + 2a_1^- P_m \quad (3.28)$$

$$\frac{\partial P_{\text{bat}}^G}{\partial P_{m_1}} \Big|_{P_{m_1}=0} = b_1^- - b_2^- - 2a_2^+ P_m \quad (3.29)$$

$$\frac{\partial P_{\text{bat}}^D}{\partial P_{m_1}} \Big|_{P_{m_1}=0} = b_1^+ - b_2^- - 2a_2^+ P_m \quad (3.30)$$

Alors, $\frac{\partial P_{\text{bat}}^G}{\partial P_{m_1}} \Big|_{P_{m_1}=P_m} - \frac{\partial P_{\text{bat}}^D}{\partial P_{m_1}} \Big|_{P_{m_1}=P_m} = b_2^- - b_2^+$. En prenant en compte l'hypothèse 7, où on montre que $0 < b_2^- < 1$ et $b_2^+ > 1$, on a : $b_2^- - b_2^+ < 0$. De même, $\frac{\partial P_{\text{bat}}^G}{\partial P_{m_1}} \Big|_{P_{m_1}=0} - \frac{\partial P_{\text{bat}}^D}{\partial P_{m_1}} \Big|_{P_{m_1}=0} = b_1^- - b_1^+ < 0$. On en déduit que, pour $P_m \leq 0$, $\frac{\partial P_{\text{bat}}}{\partial P_{m_1}}$ est croissante $\forall P_{m_1}$. Maintenant, il faut étudier le signe de $\frac{\partial P_{\text{bat}}}{\partial P_{m_1}}$. Comme le montre la figure 3.2, on a :

- pour $P_{m_1} \in [\underline{P}_{e_1}, P_m]$: $\frac{\partial P_{\text{bat}}}{\partial P_{m_1}} < 0$ car $2a_1^- P_{m_1} < 0$ (hypothèse 5), $2a_2^+(P_{m_1} - P_m) < 0$ (hypothèse 5 et $P_{m_1} < P_m$), et $b_1^- - b_2^+ < 0$ (hypothèse 7).
- pour $P_{m_1} \in [P_m, 0]$: $\frac{\partial P_{\text{bat}}}{\partial P_{m_1}}$ s'annule à $P_{m_1}^* = \frac{2a_2^- P_m + b_2^- - b_1^-}{2(a_1^- + a_2^-)}$.
- pour $P_{m_1} \in [0, \overline{P}_{e_1}]$: $\frac{\partial P_{\text{bat}}}{\partial P_{m_1}} > 0$ car $2a_1^+ P_{m_1} > 0$ (hypothèse 5), $2a_2^-(P_{m_1} - P_m) > 0$ (hypothèse 5 et $P_{m_1} > P_m$), et $b_1^+ - b_2^- > 0$ (hypothèse 7).

Dans ce cas et hors contraintes, $P_{m_1}^{\text{opt}} = P_{m_1}^*$. En revanche, pour que $P_{m_1}^*$ soit l'optimum, il faut qu'elle vérifie les conditions suivantes :

- (a) $P_{m_1}^* \leq 0$, alors, $P_m \leq \frac{b_1^- - b_2^-}{2a_2^-} = \overline{P}_m^{1-}$,
- (b) $P_{m_1}^* \geq P_m$, alors, $P_m \leq \frac{b_2^- - b_1^-}{2a_1^-} = \overline{P}_m^{2-}$.
- (c) $P_{m_1}^* \geq \underline{P}_{e_1}(P_m)$. Selon les limitations sur P_{m_1} données par (3.5) et (3.13) :

$$\underline{P}_{e_1}(P_m) = \begin{cases} \underline{P}_{e_1} & \text{si } \underline{P}_{e_1} + \underline{P}_{e_2} \leq P_m \leq \overline{P}_{e_2} + \underline{P}_{e_1} \\ P_m - \overline{P}_{e_2} & \text{si } \overline{P}_{e_2} + \underline{P}_{e_1} \leq P_m \leq \overline{P}_{e_1} + \overline{P}_{e_2} \end{cases} \quad (3.31)$$

Alors,

$$\begin{cases} P_{m_1}^* \geq \underline{P}_{e_1} & \text{si } \underline{P}_{e_1} + \underline{P}_{e_2} \leq P_m \leq \overline{P}_{e_2} + \underline{P}_{e_1} \\ P_{m_1}^* \geq P_m - \overline{P}_{e_2} & \text{si } \overline{P}_{e_2} + \underline{P}_{e_1} \leq P_m \leq \overline{P}_{e_1} + \overline{P}_{e_2} \end{cases}$$

Comme $P_{m_1}^* \geq P_m$ et $\overline{P}_{e_2} > 0$, alors, la deuxième condition $P_{m_1}^* \geq P_m - \overline{P}_{e_2}$ est toujours vérifiée. Finalement, on a :

$$P_{m_1}^* \geq \underline{P}_{e_1} \Leftrightarrow P_m \geq \frac{2(a_1^- + a_2^-)\underline{P}_{e_1} + b_1^- - b_2^-}{2a_2^-} = \underline{P}_m^{1-},$$

(d) $P_{m_1}^{*-} \leq \bar{P}_{e_1}(P_m)$. Selon les limitations sur P_{m_1} données par (3.5) et (3.13) :

$$\bar{P}_{e_1}(P_m) = \begin{cases} P_m - \underline{P}_{e_2} & \text{si } \underline{P}_{e_1} + \underline{P}_{e_2} \leq P_m \leq \underline{P}_{e_2} + \bar{P}_{e_1} \\ \bar{P}_{e_1} & \text{si } \underline{P}_{e_2} + \bar{P}_{e_1} \leq P_m \leq \bar{P}_{e_1} + \bar{P}_{e_2} \end{cases} \quad (3.32)$$

Alors,

$$\begin{cases} P_{m_1}^{*-} \leq P_m - \underline{P}_{e_2} & \text{si } \underline{P}_{e_1} + \underline{P}_{e_2} \leq P_m \leq \underline{P}_{e_2} + \bar{P}_{e_1} \\ P_{m_1}^{*-} \leq \bar{P}_{e_1} & \text{si } \underline{P}_{e_2} + \bar{P}_{e_1} \leq P_m \leq \bar{P}_{e_1} + \bar{P}_{e_2} \end{cases}$$

Comme $P_{m_1}^{*-} \leq 0$ et $\bar{P}_{e_1} > 0$, alors, la deuxième condition $P_{m_1}^{*-} \leq \bar{P}_{e_1}$ est toujours vérifiée. Finalement, on a :

$$P_{m_1}^{*-} \leq P_m - \underline{P}_{e_2} \Leftrightarrow P_m \geq \frac{2(a_1^- + a_2^-)\underline{P}_{e_2} + b_2^- - b_1^-}{2a_1^-} = \underline{P}_m^{2-}$$

Ces conditions peuvent être résumées comme suit :

$$P_{m_1}^{\text{opt}} = P_{m_1}^{*-} \Leftrightarrow \max\{\underline{P}_m^{1-}, \underline{P}_m^{2-}\} \leq P_m \leq \min\{\bar{P}_m^{1-}, \bar{P}_m^{2-}\} \quad (3.33)$$

On peut constater que :

(a) Si $b_1^+ - b_2^+ \geq 0$, ceci implique $b_1^- - b_2^- \leq 0$ car les coefficients $b_{i=\{1,2\}}^-$ représentent le rendement et les $b_{i=\{1,2\}}^+$ représentent l'inverse du rendement. On en déduit :

$$(1) \underline{P}_m^- = \max\{\underline{P}_m^{1-}, \underline{P}_m^{2-}\} = \underline{P}_m^{1-} \text{ car dans ce cas } \underline{P}_m^{1-} > \underline{P}_m^{2-},$$

$$(2) \bar{P}_m^- = \bar{P}_m^{1-} \text{ car } \bar{P}_m^{2-} > 0,$$

(b) De même, si $b_1^+ - b_2^+ \leq 0 \Leftrightarrow b_1^- - b_2^- \geq 0$, on en déduit :

$$(1) \underline{P}_m^- = \max\{\underline{P}_m^{1-}, \underline{P}_m^{2-}\} = \underline{P}_m^{2-} \text{ car dans ce cas } \underline{P}_m^{2-} > \underline{P}_m^{1-},$$

$$(2) \bar{P}_m^- = \bar{P}_m^{2-} \text{ car } \bar{P}_m^{1-} > 0,$$

— **Cas B** : en suivant la même démarche que le cas précédent, on obtient pour $P_m \geq 0$:

$$\frac{\partial P_{\text{bat}}}{\partial P_{m_1}} = \begin{cases} 2(a_1^- + a_2^+)P_{m_1} + b_1^- - b_2^+ - 2a_2^+P_m & \text{si } \underline{P}_{e_1} \leq P_{m_1} \leq 0 \\ 2(a_1^+ + a_2^+)P_{m_1} + b_1^+ - b_2^+ - 2a_2^+P_m & \text{si } 0 \leq P_{m_1} \leq P_m \\ 2(a_1^+ + a_2^-)P_{m_1} + b_1^+ - b_2^- - 2a_2^-P_m & \text{si } P_m \leq P_{m_1} \leq \bar{P}_{e_1} \end{cases} \quad (3.34)$$

Comme le montre la figure 3.3, dans ce cas et hors contraintes, $P_{m_1}^{\text{opt}} = P_{m_1}^{*-}$. Pour que $P_{m_1}^{*+}$ soit l'optimum, il faut qu'elle vérifie les conditions suivantes :

$$(a) P_{m_1}^{*+} \geq 0 \Rightarrow P_m \geq \frac{b_1^+ - b_2^+}{2a_2^+} = \underline{P}_m^{1+},$$

$$(b) P_{m_1}^{*+} \leq P_m \Rightarrow P_m \geq \frac{b_2^+ - b_1^+}{2a_1^+} = \underline{P}_m^{2+},$$

(c) $P_{m_1}^{*+} \leq \bar{P}_{e_1}(P_m)$. Où, $\bar{P}_{e_1}(P_m) = \min(P_m - \underline{P}_{e_2}, \bar{P}_{e_1})$. Comme $P_{m_1}^{*+} \leq P_m$ et $\underline{P}_{e_2} < 0$, alors, $P_{m_1}^{*+} \leq P_m - \underline{P}_{e_2}$ est toujours vérifiée. Finalement, on a :

$$P_{m_1}^{*+} \leq \bar{P}_{e_1} \Leftrightarrow P_m \leq \frac{2(a_1^+ + a_2^+)\bar{P}_{e_1} + b_1^+ - b_2^+}{2a_2^+} = \bar{P}_m^{1+}$$

(d) $P_{m_1}^{*+} \geq \underline{P}_{e_1}(P_m)$. Où, $\underline{P}_{e_1}(P_m) = \max(P_m - \bar{P}_{e_2}, \underline{P}_{e_1})$. Comme $P_{m_1}^{*+} \geq 0$ et $\underline{P}_{e_1} < 0$ alors $P_{m_1}^{*+} \geq \underline{P}_{e_1}$ est toujours vérifiée. Finalement, on a :

$$P_{m_1}^{*+} \geq P_m - \bar{P}_{e_2} \Leftrightarrow P_m \leq \frac{2(a_1^+ + a_2^+)\bar{P}_{e_2} + b_2^+ - b_1^+}{2a_1^+} = \bar{P}_m^{2+}$$

Ces conditions peuvent être résumées comme suit :

$$P_{m_1}^{\text{opt}} = P_{m_1}^{*+} \Leftrightarrow \max\{\underline{P}_m^{1+}, \underline{P}_m^{2+}\} \leq P_m \leq \min\{\bar{P}_m^{1+}, \bar{P}_m^{2+}\} \quad (3.35)$$

On peut constater que :

- (a) Si $b_1^+ - b_2^+ \geq 0$, on a :
- (1) $\underline{P}_m^+ = \underline{P}_m^{1+}$ car $\underline{P}_m^{2+} < 0$,
 - (2) $\overline{P}_m^+ = \min\{\overline{P}_m^{1+}, \underline{P}_m^{2+}\} = \overline{P}_m^{1+}$ car dans ce cas $\overline{P}_m^{1+} < \overline{P}_m^{2+}$.
- (b) Si $b_1^+ - b_2^+ \leq 0$, on a :
- (1) $\underline{P}_m^+ = \underline{P}_m^{2+}$ car $\underline{P}_m^{1+} < 0$,
 - (2) $\overline{P}_m^+ = \min\{\overline{P}_m^{1+}, \underline{P}_m^{2+}\} = \overline{P}_m^{2+}$ car dans ce cas $\overline{P}_m^{2+} < \overline{P}_m^{1+}$.

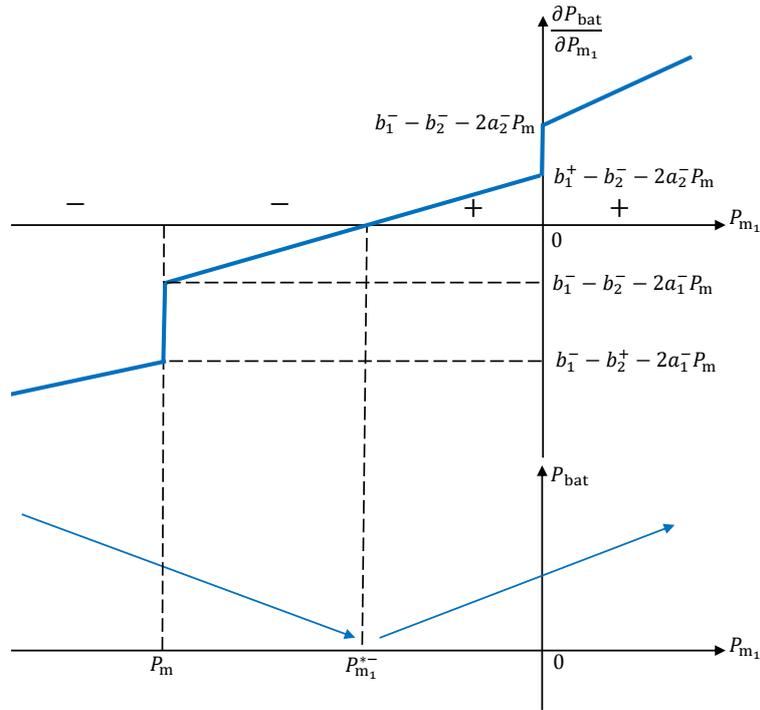


FIGURE 3.2 – Dérivée de P_{bat} par rapport à P_{m_1} quand $P_m \leq 0$ (haut) et allure de P_{bat} (bas) pour le cas A.

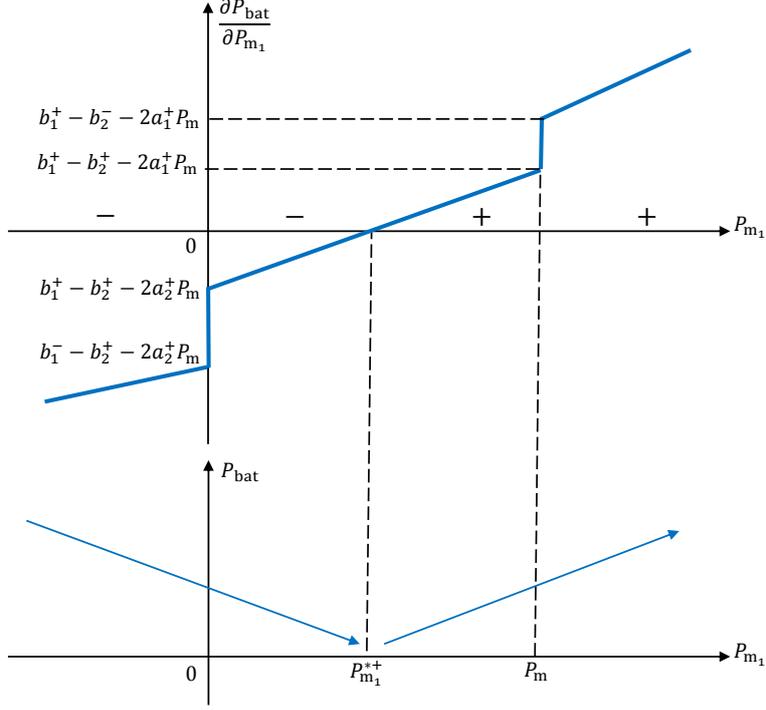


FIGURE 3.3 – Dérivée de P_{bat} par rapport à P_{m_1} quand $P_m \geq 0$ (haut) et allure de P_{bat} (bas) pour le cas B.

Fin de la démonstration

3.1.2 Calcul de la répartition optimale entre le moteur thermique et les machines électriques

Dans ce paragraphe, nous allons déterminer P_m^{opt} . En considérant l'équation (3.20), P_m^{opt} est donnée par :

$$P_m^{\text{opt}}(P_r, \lambda) = \arg \min_{P_m} (H(P_m, P_m^{\text{opt}}(P_m), P_r, \lambda)) \quad (3.36)$$

Où, $H(P_m, P_m^{\text{opt}}(P_m), P_r, \lambda) = Q(P_r - P_m) + \lambda(t)P_{\text{bat}}(P_m, P_m^{\text{opt}}(P_m))$ et $P_{\text{bat}}(P_m, P_m^{\text{opt}}(P_m))$ est obtenue en remplaçant P_{m_1} par $P_m^{\text{opt}}(P_m)$ de l'équation (3.24) (ou (3.25) selon le signe de $b_1^+ - b_2^+$) et P_{m_2} par $P_m - P_m^{\text{opt}}(P_m)$ dans P_{bat} (3.3), comme suit :

$$P_{\text{bat}}(P_m, P_m^{\text{opt}}(P_m)) = P_{\text{bat}}^{\text{opt}}(P_m) = \begin{cases} P_{e_1}^-(\underline{P}_{e_1}) + P_{e_2}^-(P_m - \underline{P}_{e_1}) & \text{si } \underline{P}_e \leq P_m \leq \underline{P}_m^- \\ P_{e_1}^-(P_{m_1}^{*-}) + P_{e_2}^-(P_m - P_{m_1}^{*-}) & \text{si } \underline{P}_m^- \leq P_m \leq \overline{P}_m^- \\ P_{e_1}^-(0) + P_{e_2}^-(P_m) & \text{si } \overline{P}_m^- \leq P_m \leq 0 \\ P_{e_1}^+(0) + P_{e_2}^+(P_m) & \text{si } 0 \leq P_m \leq \underline{P}_m^+ \\ P_{e_1}^+(P_{m_1}^{*+}) + P_{e_2}^+(P_m - P_{m_1}^{*+}) & \text{si } \underline{P}_m^+ \leq P_m \leq \overline{P}_m^+ \\ P_{e_1}^+(\overline{P}_{e_1}) + P_{e_2}^+(P_m - \overline{P}_{e_1}) & \text{si } \overline{P}_m^+ \leq P_m \leq \overline{P}_e \end{cases} \quad (3.37)$$

Où :

$$\begin{cases} P_{e1}^-(P_{m1}) = a_1^- P_{m1}^2 + b_1^- P_{m1} + c_1 \\ P_{e1}^+(P_{m1}) = a_1^+ P_{m1}^2 + b_1^+ P_{m1} + c_1 \\ P_{e2}^-(P_{m2}) = P_{e2}^-(P_m - P_{m1}) = a_2^-(P_m - P_{m1})^2 + b_2^-(P_m - P_{m1}) + c_2 \\ P_{e2}^+(P_{m2}) = P_{e2}^+(P_m - P_{m1}) = a_2^+(P_m - P_{m1})^2 + b_2^+(P_m - P_{m1}) + c_2 \end{cases}$$

Ci-dessous, le calcul de P_m^{opt} dans le cas où $b_1^+ - b_2^+ \geq 0$ est présenté. Le cas contraire ($b_1^+ - b_2^+ \leq 0$) est présenté en annexe section 6.3. La fonction $P_{\text{bat}}^{\text{opt}}(P_m)$ est convexe par morceaux car les coefficients de ses termes quadratiques sont positifs ($a_1^-, a_1^+, a_2^-, a_2^+ > 0$). De plus, $P_{\text{bat}}^{\text{opt}}(P_m)$ est globalement convexe car sa dérivée est croissante comme le montre la figure 3.4.

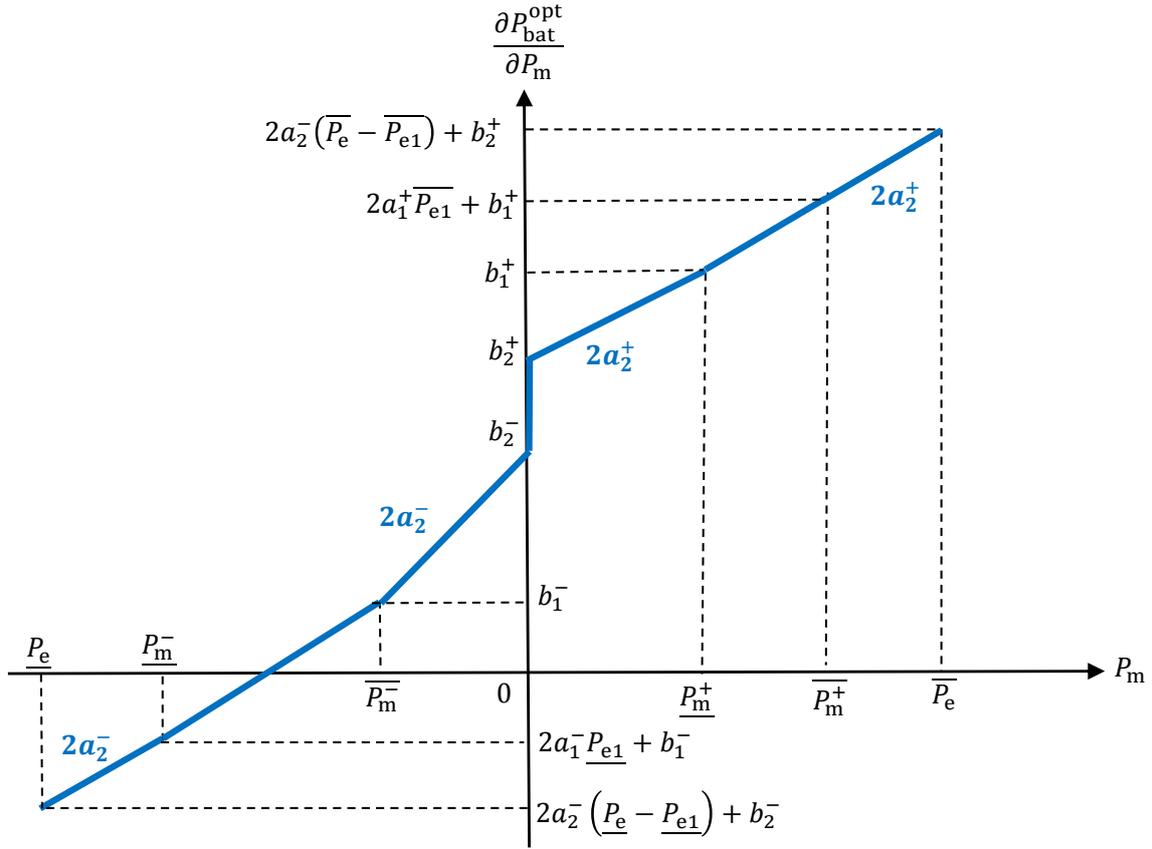


FIGURE 3.4 – Détermination de $\frac{\partial P_{\text{bat}}^{\text{opt}}}{\partial P_m}$ afin d'étudier la convexité de P_{bat} par rapport à P_m

Alors, $H(P_m)$ est une fonction quadratique par morceaux et convexe. $H(P_m)$ peut s'écrire sous la forme générale suivante :

$$H(P_m, P_r, \lambda) = A_1(P_r - P_m) + A_0 + \lambda(t)(B_2 P_m^2 + B_1 P_m + b_0) \quad (3.38)$$

On note les points particuliers de changement d'équation de H par : $P_{m1}^p = \underline{P}_m^-$, $P_{m2}^p = \overline{P}_m^-$, $P_{m3}^p = P_r - P_{\text{lim}}$, $P_{m4}^p = P_r - \underline{P}_{\text{th}}$, $P_{m5}^p = \underline{P}_m^+$ et $P_{m6}^p = \overline{P}_m^+$. En comparant P_{m3}^p et P_{m4}^p à $\{P_{m1}^p, P_{m2}^p, P_{m5}^p, P_{m6}^p\}$, on obtient, selon P_r , les cas suivants :

— Cas1 : $P_r \leq \underline{P}_{\text{th}}$

	$P_r - \underline{P}_{th} < \underline{P}_m^-$	$\underline{P}_m^- < P_r - \underline{P}_{th} < \overline{P}_m^-$	$P_r - \underline{P}_{th} > \overline{P}_m^-$
$P_r - P_{lim} < \underline{P}_m^-$	Cas1.1	Cas1.2	Cas1.3
$\underline{P}_m^- < P_r - P_{lim} < \overline{P}_m^-$	–	Cas1.4	Cas1.5
$P_r - P_{lim} > \overline{P}_m^-$	–	–	Cas1.6

— Cas2 : $P_{lim} \leq P_r \leq \underline{P}_{th}$

	$P_r - \underline{P}_{th} < \underline{P}_m^+$	$\underline{P}_m^+ < P_r - \underline{P}_{th} < \overline{P}_m^+$	$P_r - \underline{P}_{th} > \overline{P}_m^+$
$P_r - P_{lim} < \underline{P}_m^-$	Cas2.1	Cas2.2	Cas2.3
$\underline{P}_m^- < P_r - P_{lim} < \overline{P}_m^-$	Cas2.4	Cas2.5	Cas2.6
$P_r - P_{lim} > \overline{P}_m^-$	Cas2.7	Cas2.8	Cas2.9

— Cas3 : $P_r \geq P_{lim}$

	$P_r - \underline{P}_{th} < \underline{P}_m^+$	$\underline{P}_m^+ < P_r - \underline{P}_{th} < \overline{P}_m^+$	$P_r - \underline{P}_{th} > \overline{P}_m^+$
$P_r - P_{lim} < \underline{P}_m^+$	Cas3.1	Cas3.2	Cas3.3
$\underline{P}_m^+ < P_r - P_{lim} < \overline{P}_m^+$	–	Cas3.4	Cas3.5
$P_r - P_{lim} > \overline{P}_m^+$	–	–	Cas3.6

Pour le Cas2.5 (les autres cas sont traités en annexe section 6.3), l'Hamiltonien a comme expressions :

P_m	$-\infty$	P_{m1}^p	P_{m3}^p	P_{m2}^p	0
	Morceau1	Morceau2	Morceau3	Morceau4	
$H(P_m)$	$a_2(P_r - P_m)$ $+Q_{lim} - a_2P_{lim}$ $+\lambda P_{e_1}^-(\underline{P}_{e_1})$ $+\lambda P_{e_2}^-(P_m - \underline{P}_{e_1})$	$a_2(P_r - P_m)$ $+Q_{lim} - a_2P_{lim}$ $+\lambda P_{e_1}^-(P_{m1}^{*-})$ $+\lambda P_{e_2}^-(P_m - P_{m1}^{*-})$	$a_1(P_r - P_m)$ $+Q_0$ $+\lambda P_{e_1}^-(P_{m1}^{*-})$ $+\lambda P_{e_2}^-(P_m - P_{m1}^{*-})$	$a_1(P_r - P_m)$ $+Q_0$ $+\lambda P_{e_2}^-(P_m)$ $+\lambda c_1$	

P_m	0	P_{m5}^p	P_{m4}^p	P_{m6}^p	$+\infty$
	Morceau5	Morceau6	Morceau7	Morceau8	
$H(P_m)$	$a_1(P_r - P_m)$ $+Q_0$ $+\lambda P_{e_2}^+(P_m)$ $+\lambda c_1$	$a_1(P_r - P_m)$ $+Q_0$ $+\lambda P_{e_1}^+(P_{m1}^{*+})$ $+\lambda P_{e_2}^+(P_m - P_{m1}^{*+})$	$\lambda P_{e_1}^+(P_{m1}^{*+})$ $+\lambda P_{e_2}^+(P_m - P_{m1}^{*+})$	$\lambda P_{e_1}^+(\overline{P}_{e_1})$ $+\lambda P_{e_2}^+(P_m - \overline{P}_{e_1})$	

H est convexe car, d'une part, il est composé par des morceaux affines et quadratiques au coefficient du second degré positif ($a_1^\pm > 0$ et $a_2^\pm > 0$ hypothèse 5). D'autre part, la condition du premier ordre de convexité est vérifiée aux points de changement d'équation. En effet, à :

- (1) $P_m = P_{m1}^p, \frac{\partial H^G}{\partial P_m} |_{P_m=P_{m1}^p} = \frac{\partial H^D}{\partial P_m} |_{P_m=P_{m1}^p}$.
- (2) $P_m = P_{m3}^p, \frac{\partial H^G}{\partial P_m} |_{P_m=P_{m3}^p} < \frac{\partial H^D}{\partial P_m} |_{P_m=P_{m3}^p}$ car $a_1 < a_2$ (hypothèse 1).
- (3) $P_m = P_{m2}^p, \frac{\partial H^G}{\partial P_m} |_{P_m=P_{m2}^p} = \frac{\partial H^D}{\partial P_m} |_{P_m=P_{m2}^p}$.
- (4) $P_m = 0, \frac{\partial H^G}{\partial P_m} |_{P_m=0} < \frac{\partial H^D}{\partial P_m} |_{P_m=0}$ car $b_2^- < b_2^+$ (hypothèse 7).
- (5) $P_m = P_{m5}^p, \frac{\partial H^G}{\partial P_m} |_{P_m=P_{m5}^p} = \frac{\partial H^D}{\partial P_m} |_{P_m=P_{m5}^p}$.
- (6) $P_m = P_{m4}^p, \frac{\partial H^G}{\partial P_m} |_{P_m=P_{m4}^p} < \frac{\partial H^D}{\partial P_m} |_{P_m=P_{m4}^p}$ car $a_1 > 0$ (hypothèse 1).
- (7) $P_m = P_{m6}^p, \frac{\partial H^G}{\partial P_m} |_{P_m=P_{m6}^p} = \frac{\partial H^D}{\partial P_m} |_{P_m=P_{m6}^p}$.

On peut constater que l'extremum du morceau 7, $-\frac{(b_1^- a_2^- + b_2^- a_1^-)(a_1^- + a_2^-)}{2(a_1^- a_2^-^2 + a_2^- a_1^-^2)}$, est indépendant de λ (de même pour celui du morceau 8 : $\frac{2a_2^+ \bar{P}_{e1} - b_2^+}{2a_2^+}$). Ces derniers vérifient les conditions suivantes (car les coefficients a_i^\pm et b_i^\pm ($i = \{1, 2\}$) sont positifs) :

- (1) $\frac{2a_2^+ \bar{P}_{e1} - b_2^+}{2a_2^+} < \bar{P}_m^+$
- (2) $-\frac{(b_1^- a_2^- + b_2^- a_1^-)(a_1^- + a_2^-)}{2(a_1^- a_2^-^2 + a_2^- a_1^-^2)} < 0$.

On en déduit que les morceaux 7 et 8 de H sont strictement croissants $\forall P_m > \bar{P}_m^+$ et $\forall \lambda$.

Par conséquent, dans ce cas d'étude, H est globalement convexe et est composé par huit morceaux quadratiques, alors, il possède huit extremums. Nous étudierons que les extremums des morceaux 1 à 6, représentés par la figure 3.5, qui dépendent de λ . Ils sont donnés par :

$$\left\{ \begin{array}{l} P_m^{*1} = \frac{a_2 - \lambda b_2^- + 2\lambda a_2^- P_{e1}}{2\lambda a_2^-} \\ P_m^{*2} = \frac{a_2 - \lambda b_2^*}{2\lambda a_2^*} \\ P_m^{*3} = \frac{a_1 - \lambda b_2^*}{2\lambda a_2^*} \\ P_m^{*4} = \frac{a_1 - \lambda b_2^-}{2\lambda a_2^-} \\ P_m^{*5} = \frac{a_1 - \lambda b_2^+}{2\lambda a_2^+} \\ P_m^{*6} = \frac{a_1 - \lambda b_2^*}{2\lambda a_2^*} \end{array} \right.$$

Où, $a_\pm^* = \frac{a_1^\pm (a_2^\pm)^2 + a_2^\pm (a_1^\pm)^2}{(a_1^\pm + a_2^\pm)^2}$, $b_\pm^* = \frac{b_1^\pm a_2^\pm + b_2^\pm a_1^\pm}{a_1^\pm + a_2^\pm}$, $\alpha_\pm = \frac{a_2^\pm}{(a_1^\pm + a_2^\pm)}$ et $\beta_\pm = \frac{b_2^\pm - b_1^\pm}{2(a_1^\pm + a_2^\pm)}$.

L'extremum P_m^{*1} est l'optimum si et seulement s'il vérifie les conditions suivantes : $\underline{P}_e(P_r) \leq P_m^{*1} \leq P_{m1}^p$. Ce qui équivaut à : $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2$, où, λ_1 et λ_2 sont les solutions des équations suivantes :

- (1) $\frac{a_2 - \lambda b_2^- + 2\lambda a_2^- P_{e1}}{2\lambda a_2^-} = P_{m1}^p \Leftrightarrow \lambda = \lambda_1 = \frac{a_2}{b_2^- + 2a_2^- (P_{m1}^p - P_{e1})}$
- (2) $\frac{a_2 - \lambda b_2^- + 2\lambda a_2^- P_{e1}}{2\lambda a_2^-} = \underline{P}_e(P_r) \Leftrightarrow \lambda = \lambda_2 = \frac{a_2}{b_2^- + 2a_2^- (P_e(P_r) - P_{e1})}$

L'extremum P_m^{*2} est l'optimum si et seulement s'il vérifie les conditions suivantes : $P_{m1}^p \leq P_m^{*2} \leq P_{m3}^p$. Ce qui équivaut à : $\lambda_3 \leq \lambda \leq \lambda_4$, où, λ_3 et λ_4 sont les solutions des équations suivantes :

- (1) $\frac{a_2 - \lambda b_2^*}{2\lambda a_2^*} = P_{m3}^p \Leftrightarrow \lambda = \lambda_3 = \frac{a_2}{2a_2^* P_{m3}^p + b_2^*}$
- (2) $\frac{a_2 - \lambda b_2^*}{2\lambda a_2^*} = P_{m1}^p \Leftrightarrow \lambda = \lambda_4 = \frac{a_2}{2a_2^* P_{m1}^p + b_2^*}$

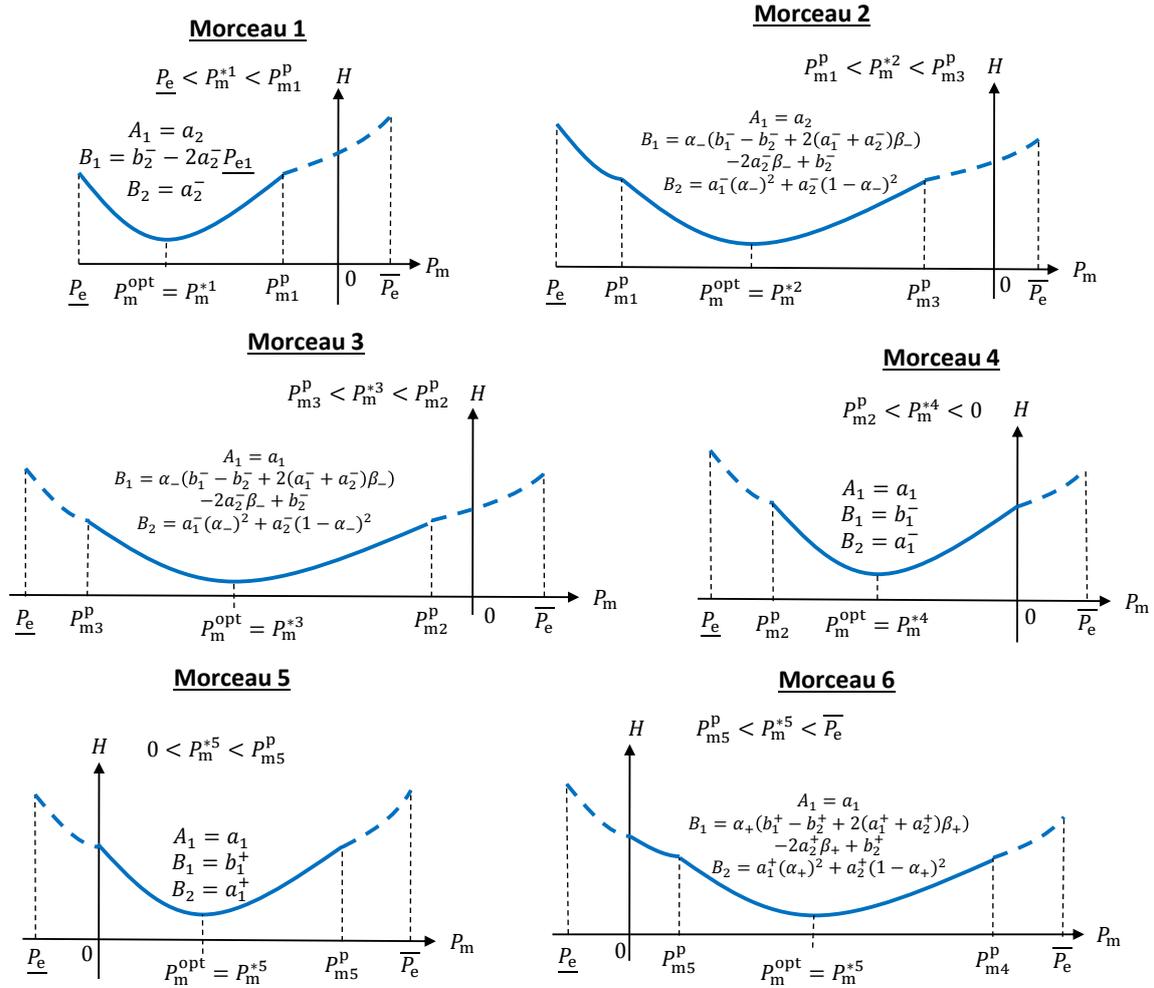


FIGURE 3.5 – Représentation des extremums P_m^* selon leur positionnement par rapport aux points de changement d'équation de H afin de déterminer P_m^{opt}

L'extremum P_m^{*3} est l'optimum si et seulement s'il vérifie les conditions suivantes : $P_{m3}^p \leq P_m^{*3} \leq P_{m2}^p$. Ce qui équivaut à : $\lambda_5 \leq \lambda \leq \lambda_6$, où, λ_5 et λ_6 sont les solutions des équations suivantes :

$$(1) \frac{a_1 - \lambda b_-^*}{2\lambda a_-^*} = P_{m2}^p \Leftrightarrow \lambda = \lambda_5 = \frac{a_2}{2a_-^* P_{m2}^p + b_-^*}$$

$$(2) \frac{a_1 - \lambda b_-^*}{2\lambda a_-^*} = P_{m3}^p \Leftrightarrow \lambda = \lambda_6 = \frac{a_2}{2a_-^* P_{m3}^p + b_-^*}$$

L'extremum P_m^{*4} est l'optimum si et seulement s'il vérifie les conditions suivantes : $P_{m2}^p \leq P_m^{*4} \leq 0$. Ce qui équivaut à : $\lambda_7 \leq \lambda \leq \lambda_8$, où, λ_7 et λ_8 sont les solutions des équations suivantes :

$$(1) \frac{a_1 - \lambda b_2^-}{2\lambda a_2^-} = 0 \Leftrightarrow \lambda = \lambda_7 = \frac{a_1}{b_2^-}$$

$$(2) \frac{a_1 - \lambda b_2^-}{2\lambda a_2^-} = P_{m2}^p \Leftrightarrow \lambda = \lambda_8 = \frac{a_1}{2a_2^- P_{m2}^p + b_2^-}$$

L'extremum P_m^{*5} est l'optimum si et seulement s'il vérifie les conditions suivantes : $0 \leq P_m^{*5} \leq P_{m5}^p$. Ce qui équivaut à : $\lambda_9 \leq \lambda \leq \lambda_{10}$, où, λ_9 et λ_{10} sont les solutions des équations suivantes :

$$(1) \frac{a_1 - \lambda b_2^+}{2\lambda a_2^+} = P_{m5}^p \Leftrightarrow \lambda = \lambda_9 = \frac{a_1}{2a_2^+ P_{m5}^p + b_2^+}$$

$$(2) \frac{a_1 - \lambda b_2^+}{2\lambda a_2^+} = 0 \Leftrightarrow \lambda = \lambda_{10} = \frac{a_1}{b_2^+}$$

L'extremum P_m^{*6} est l'optimum si et seulement s'il vérifie les conditions suivantes : $P_{m5}^p \leq P_m^{*6} \leq P_{m4}^p$. Ce qui équivaut à : $\lambda_{11} \leq \lambda \leq \lambda_{12}$, où, λ_{11} et λ_{12} sont les solutions des équations suivantes :

$$(1) \frac{a_1 - \lambda b_+^*}{2\lambda a_+^*} = P_{m4}^p \Leftrightarrow \lambda = \lambda_{11} = \frac{a_1}{2a_+^* P_{m4}^p + b_+^*}$$

$$(2) \frac{a_1 - \lambda b_+^*}{2\lambda a_+^*} = P_{m5}^p \Leftrightarrow \lambda = \lambda_{12} = \frac{a_2}{2a_-^* P_{m5}^p + b_-^*}$$

Finalement, la commande optimale P_m^{opt} en fonction de P_r et λ est donnée par :

Cas sur λ			P_m^{opt}
0	$\leq \lambda \leq$	$\frac{a_1}{2a_+^* P_{m4}^p + b_+^*}$	$\overline{P_e}(P_r)$
$\frac{a_1}{2a_+^* P_{m4}^p + b_+^*}$	$\leq \lambda \leq$	$\frac{a_1}{2a_+^* P_{m5}^p + b_+^*}$	$\frac{a_1 - \lambda b_+^*}{2\lambda a_+^*}$
$\frac{a_1}{2a_+^* P_{m5}^p + b_+^*}$	$\leq \lambda \leq$	$\frac{a_1}{2a_2^+ P_{m5}^p + b_2^+}$	\underline{P}_m^+
$\frac{a_1}{2a_2^+ P_{m5}^p + b_2^+}$	$\leq \lambda \leq$	$\frac{a_1}{b_2^+}$	$\frac{a_1 - \lambda b_2^+}{2\lambda a_2^+}$
$\frac{a_1}{b_2^+}$	$\leq \lambda \leq$	$\frac{a_1}{b_2^-}$	0
$\frac{a_1}{b_2^-}$	$\leq \lambda \leq$	$\frac{a_1}{2a_2^- P_{m2}^p + b_2^-}$	$\frac{a_1 - \lambda b_2^-}{2\lambda a_2^-}$
$\frac{a_1}{2a_2^- P_{m2}^p + b_2^-}$	$\leq \lambda \leq$	$\frac{a_1}{2a_-^* P_{m2}^p + b_-^*}$	\underline{P}_m
$\frac{a_1}{2a_-^* P_{m2}^p + b_-^*}$	$\leq \lambda \leq$	$\frac{a_1}{2a_-^* P_{m3}^p + b_-^*}$	$\frac{a_1 - \lambda b_-^*}{2\lambda a_-^*}$
$\frac{a_1}{2a_-^* P_{m3}^p + b_-^*}$	$\leq \lambda \leq$	$\frac{a_2}{2a_-^* P_{m3}^p + b_-^*}$	$P_r - P_{\text{lim}}$
$\frac{a_2}{2a_-^* P_{m3}^p + b_-^*}$	$\leq \lambda \leq$	$\frac{a_2}{2a_-^* P_{m1}^p + b_-^*}$	$\frac{a_2 - \lambda b_-^*}{2\lambda a_-^*}$
$\frac{a_2}{2a_-^* P_{m1}^p + b_-^*}$	$\leq \lambda \leq$	$\frac{a_2}{2a_2^- P_{m1}^p + b_2^- - 2a_2^- P_{e1}}$	\underline{P}_m
$\frac{a_2}{2a_2^- P_{m1}^p + b_2^- - 2a_2^- P_{e1}}$	$\leq \lambda \leq$	$\frac{a_2}{b_2^- + 2a_2^- (P_e(P_r) - P_{e1})}$	$\frac{a_2 - \lambda b_2^- + 2\lambda a_2^- P_{e1}}{2\lambda a_2^-}$
$\frac{a_2}{b_2^- + 2a_2^- (P_e(P_r) - P_{e1})}$	$\leq \lambda \leq$	$+\infty$	$\underline{P}_e(P_r)$

3.2 Résultats de Simulations

Dans cette section, les résultats de simulation obtenus par la méthode analytique ainsi que par la méthode numérique pour l’optimisation de la répartition de puissance sont présentés. Pour rappel, la validation se déroule en deux étapes. Dans un premier temps, les commandes issues des deux méthodes sont comparées hors-ligne en les soumettant aux mêmes entrées. En suite, elles sont testées en-ligne dans l’environnement MIL. Il faut noter que, pour les méthodes numériques, dans le calcul de l’Hamiltonien les pertes dans la batterie sont prises en compte contrairement à la méthode analytique.

Validation Hors-Ligne

Les figures 3.6 et 3.7 représentent les commandes P_{th}^{opt} et P_m^{opt} obtenues par la méthode analytique et celles obtenues par la méthode Num_1^{1000} utilisant le modèle quadratique (1.22) de la machine électrique. Nous avons également comparé la méthode Num_1^{1000} avec la méthode Num_2^{1000} . Cette comparaison est illustrée par la figure 3.8. On rappelle que cette étape de validation a comme objectif de comparer les solutions issues des stratégies analytique, Num_1^{1000} et Num_2^{1000} afin de visualiser l’impact de la modélisation convexe et de la méthodologie analytique sur l’optimalité des solutions (la solution la plus optimale étant donnée par la méthode Num_2^{1000}).

Discussion

La méthode analytique trouve exactement la même solution que la méthode Num_1^{1000} (figures 3.6 et 3.7). On en déduit que les pertes de la batterie ont un impact négligeable sur la répartition de puissance relativement aux puissances électriques des machines. De plus, les commandes issues des approches Num_1^{1000} et Num_2^{1000} sont très similaires (figure 3.8). Ceci permet la validation des modèles convexes.

Les temps de calcul des stratégies calculés à partir de (1.52) sont présentés dans le tableau (3.1).

Stratégie	Temps de Calcul [ms]
Analytique	0.12
Num_1^{1000}	15.12
Num_2^{1000}	36.53
Num_1^{10}	0.25
Num_2^{10}	0.46

TABLE 3.1 – Temps de calcul moyen consommé par les méthodes analytique, Num_1^{1000} , Num_2^{1000} , Num_1^{10} et Num_2^{10} pour le calcul des commandes sur un pas de temps

Concernant la mémoire, comme présenté dans les résultats de la section 2.1, il y a les paramètres fixes qui sont donnés par le tableau 3.2 et les variables intermédiaires.

Le nombre des variables intermédiaires dépend de la stratégie. En effet, pour les stratégies numériques, le nombre des variables intermédiaires est fixe. Il est égal à la somme des tailles du vecteur H et des vecteurs commandes P_{m_1} et P_m . Par conséquent, le maillage 1000 génère 3000 variables intermédiaires et le maillage 10 génère 30 variables intermédiaires. Pour la stratégie analytique, les variables intermédiaires sont les seuils de P_r et les seuils de λ . On peut remarquer que le nombre de ces seuils dépend du cas sélectionné. Pour cela, on considèrera le cas qui comporte le nombre maximum de seuils : UC2.5 où on calcule 12 seuils de λ . Pour les seuils de P_r , ils sont fixes et il y en a 6 à calculer. Par ailleurs, la méthode analytique possède 6 optimums

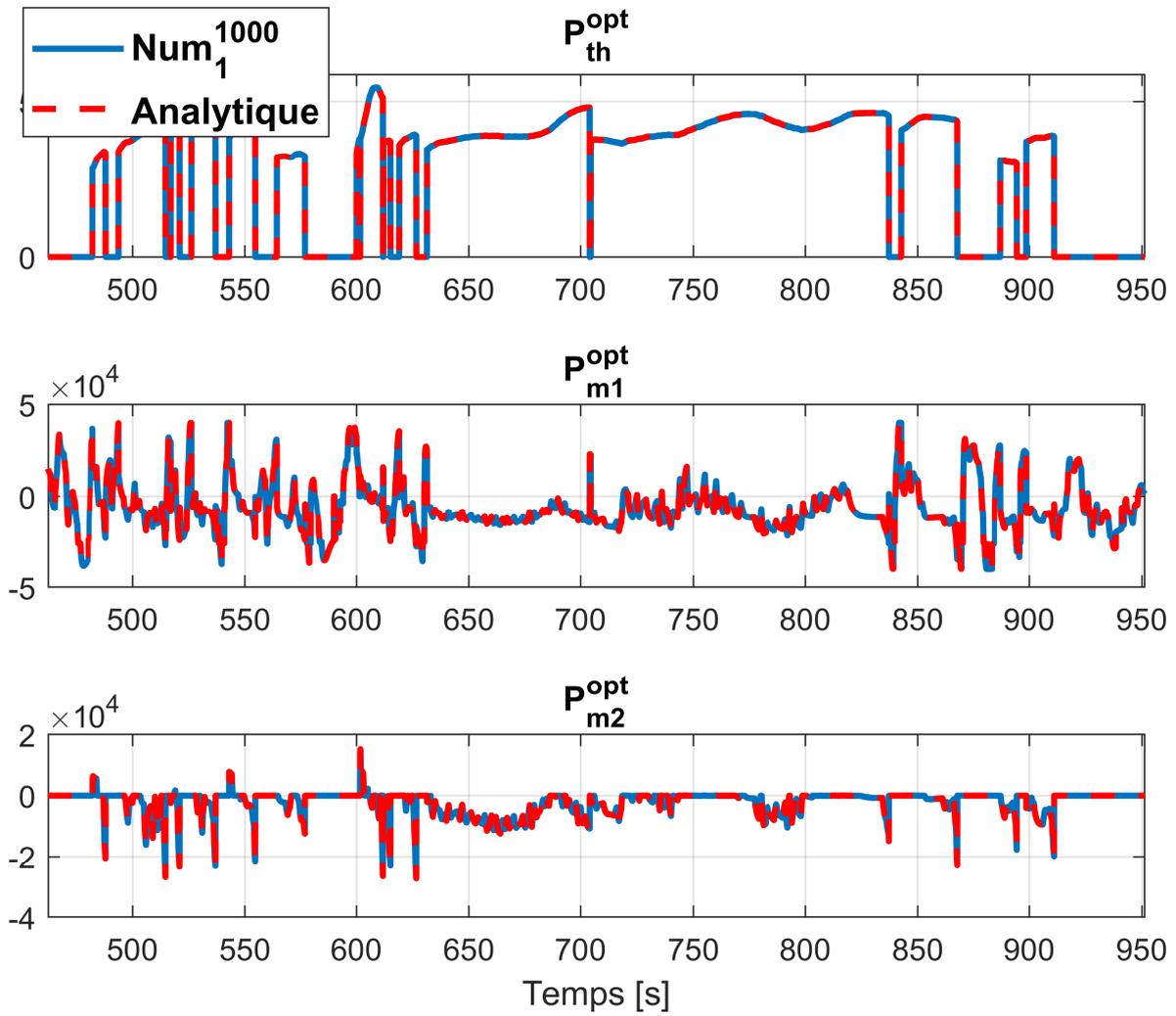


FIGURE 3.6 – Commandes optimales issues de la méthode analytique et de la méthode Num_1^{1000} pour le cycle ARTEMIS Autoroute

Stratégie	Paramètres	Nombre total
Analytique	MT : $a_1, a_2, P_{\text{lim}}, p_0$ et p_1	5
	ME1 : a_1^-, a_1^+, b_1^- et b_1^+	36
	ME2 : a_2^-, a_2^+, b_2^- et b_2^+	36
Num_1	MT : $a_1, a_2, P_{\text{lim}}, p_0, p_1, Q_0, q_2, q_1, q_0$ et Q_{lim}	10
	ME1 : $a_1^-, a_1^+, b_1^-, b_1^+$ et c_1	45
	ME2 : $a_2^-, a_2^+, b_2^-, b_2^+$ et c_2	45
Num_2	MT : cartographie du débit carburant (25×17)	425
	ME1 : cartographie des pertes électriques ($41 \times 15 \times 5$)	3075
	ME2 : cartographie des pertes électriques ($23 \times 15 \times 3$)	1035

TABLE 3.2 – Nombre de paramètres fixes utilisés par les stratégies analytique, Num_1 et Num_2 pour le calcul de la répartition optimale de puissance

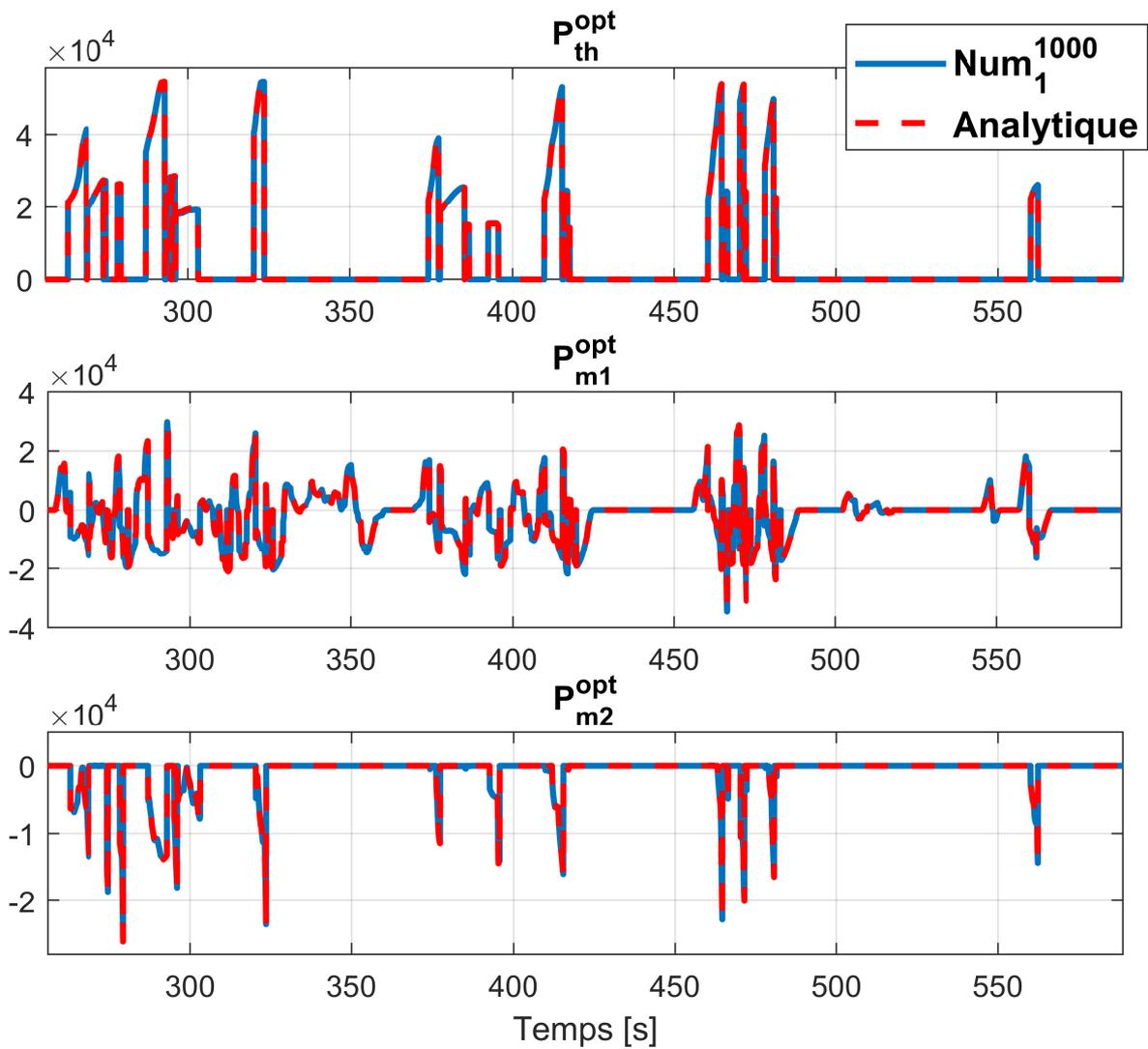


FIGURE 3.7 – Commandes optimales issues de la méthode analytique et de la méthode Num₁¹⁰⁰⁰ pour le cycle ARTEMIS Urbain

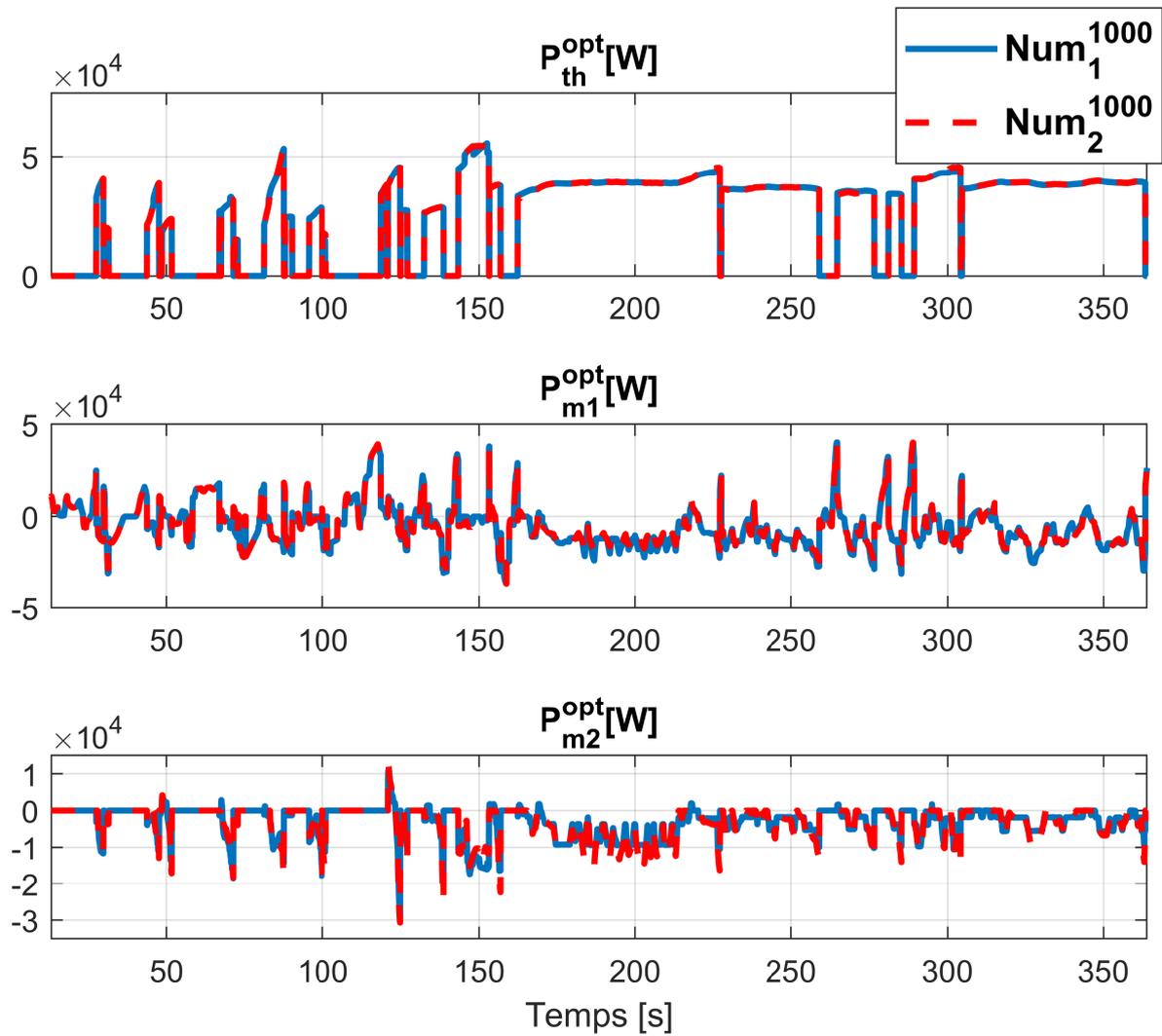


FIGURE 3.8 – Commandes optimales issues des méthodes Num_1^{1000} et Num_2^{1000} pour le cycle ARTEMIS Autoroute

qui correspondent aux extremums des morceaux quadratiques de l'Hamiltonien. Le nombre total des variables intermédiaires pour chaque stratégie est résumé par le tableau 3.3.

Stratégie	Nombre total
Analytique	24
Num ₁ ¹⁰⁰⁰	3000
Num ₂ ¹⁰⁰⁰	3000
Num ₁ ¹⁰	30
Num ₂ ¹⁰	30

TABLE 3.3 – Nombre de variables intermédiaires calculées par les méthodes analytique, Num₁¹⁰⁰⁰, Num₂¹⁰⁰⁰, Num₁¹⁰ et Num₂¹⁰ pour le calcul de la répartition optimale de puissance

Finalement, la mémoire totale occupée par chaque stratégie est égale au nombre des paramètres fixes + le nombre des variables intermédiaires, en considérant 1 scalaire = 1 Double (tableau 3.4).

Stratégie	Espace mémoire occupé [Doubles]
Analytique	101
Num ₁ ¹⁰⁰⁰	3100
Num ₂ ¹⁰⁰⁰	7535
Num ₁ ¹⁰	130
Num ₂ ¹⁰	4565

TABLE 3.4 – Espace mémoire occupé par les stratégies analytique, Num₁¹⁰⁰⁰, Num₂¹⁰⁰⁰, Num₁¹⁰ et Num₂¹⁰ pour le calcul de la répartition optimale de puissance

Validation En-Ligne

Dans cette étape de validation, les stratégies analytique et numériques sont testées en-ligne sur le simulateur du véhicule (MIL) afin d'établir leurs bilans énergétiques (consommation de carburant et trajectoire SoE). On rappelle que, dans ce chapitre, le véhicule étudié est sans step-up. Sa batterie a une tension d'environ 400V. Il faut noter que le calcul des consommations thermique et électrique de toutes les stratégies est réalisé à partir des modèles de référence (1.10) et (1.16).

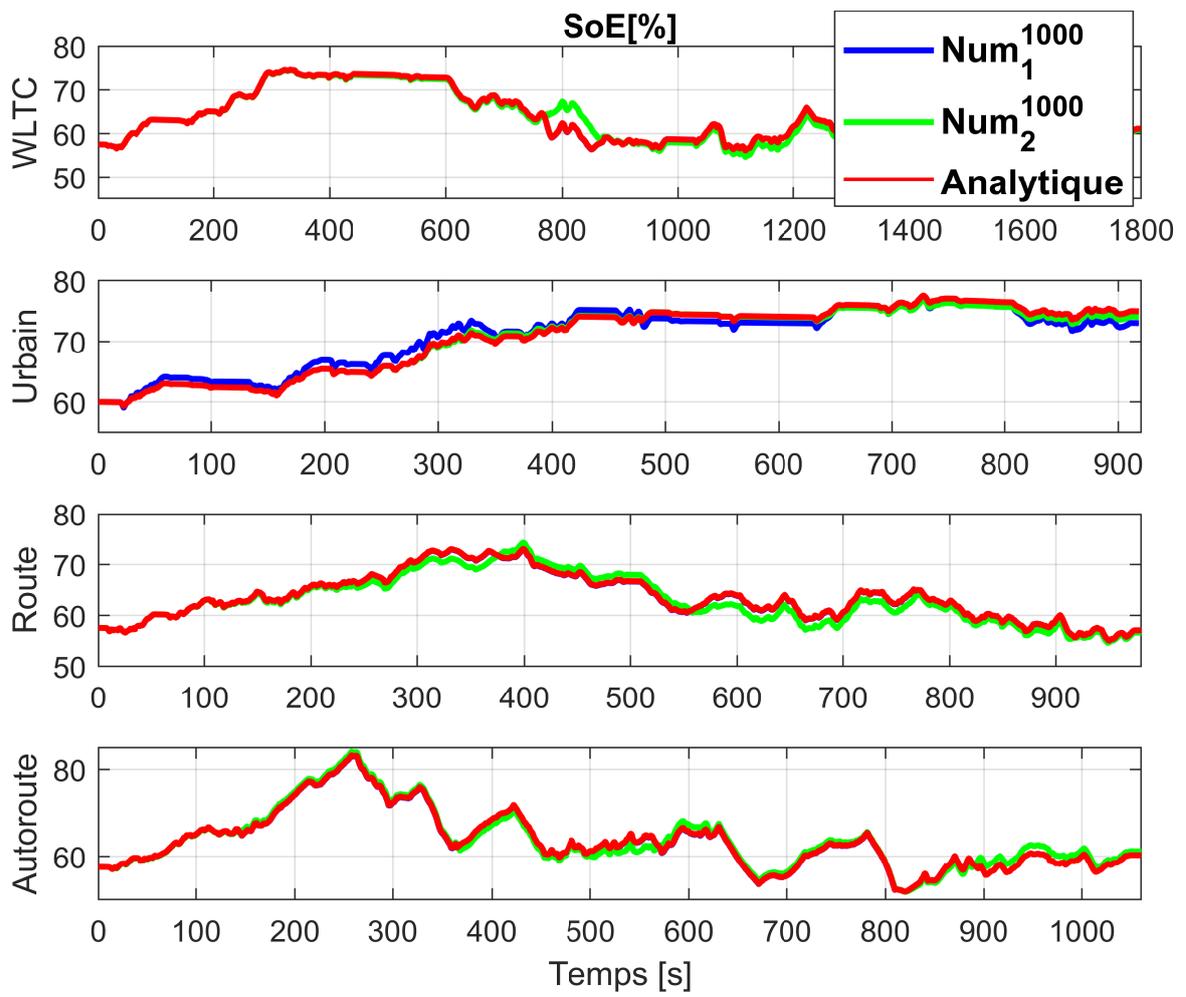


FIGURE 3.9 – Trajectoires *SoE* des méthodes analytique, Num₁¹⁰⁰⁰ et Num₂¹⁰⁰⁰ sur tous les cycles étudiés

Cycle	Stratégie	Conso [L/100km]	Δ Conso [%]
WLTC	Analytique	4.45	0.9
	Num ₁ ¹⁰⁰⁰	4.45	0.9
	Num ₂ ¹⁰⁰⁰	4.41	-
	Num ₁ ¹⁰	4.62	4.76
	Num ₂ ¹⁰	4.64	5.21
ARTEMIS Urbain	Analytique	5.51	0.36
	Num ₁ ¹⁰⁰⁰	5.51	0.36
	Num ₂ ¹⁰⁰⁰	5.49	-
	Num ₁ ¹⁰	5.91	7.65
	Num ₂ ¹⁰	5.92	7.83
ARTEMIS Routier	Analytique	4.20	0.23
	Num ₁ ¹⁰⁰⁰	4.20	0.23
	Num ₂ ¹⁰⁰⁰	4.19	-
	Num ₁ ¹⁰	4.39	4.77
	Num ₂ ¹⁰	4.44	5.96
ARTEMIS Autoroutier	Analytique	6.29	0.96
	Num ₁ ¹⁰⁰⁰	6.28	0.8
	Num ₂ ¹⁰⁰⁰	6.23	-
	Num ₁ ¹⁰	6.45	3.53
	Num ₂ ¹⁰	6.51	4.5

TABLE 3.5 – Résultats de consommation de carburant des méthodes analytique, Num₁¹⁰⁰⁰, Num₂¹⁰⁰⁰, Num₁¹⁰ et Num₂¹⁰

Discussion D’après le tableau 3.5, on peut constater que :

- L’impact de la modélisation convexe sur la consommation de carburant de la méthode Num₁¹⁰⁰⁰ se traduit par une surconsommation inférieure à 1% par rapport à la meilleure solution donnée par la méthode Num₂¹⁰⁰⁰.
- La méthode Num₁¹⁰⁰⁰ et la méthode analytique ont exactement la même consommation.
- Les méthodes Num₁¹⁰ et Num₂¹⁰ présentent une surconsommation qui peut atteindre les 8%.

La figure 3.9 montre que les stratégies analytique, Num₁¹⁰⁰⁰ et Num₂¹⁰⁰⁰ ont des trajectoires *SoE* similaires sur tous les cycles étudiés.

3.3 Conclusion

En conclusion, les résultats de ce chapitre montrent que la méthode analytique est aussi efficace pour l’architecture bi-parallèle. Elle a permis de réduire le temps de calcul ainsi que l’espace mémoire tout en ayant une consommation assez proche de la meilleure solution donnée par la méthode Num₂¹⁰⁰⁰. La méthode analytique présente un très bon compromis consommation/performances. En effet, elle est la moins coûteuse en termes de temps de calcul et de mémoire pour une surconsommation inférieure à 1%. La méthode numérique présente des risques importants lorsque le maillage de la commande n’est pas assez fin car, d’après les résultats, les méthodes Num₁¹⁰ et Num₂¹⁰ génèrent une surconsommation beaucoup trop élevée.

Chapitre 4

Application à l'architecture Série

Dans ce chapitre, l'objectif est d'optimiser la consommation de carburant d'un véhicule hybride série composé par : un moteur thermique (MT), une machine électrique principale qui assure la traction du véhicule (ME), une génératrice (GEN) qui convertit la puissance mécanique délivrée par le MT en électricité et une batterie (figure 4.1). Les variables d'optimisation considérées dans cette étude sont : la puissance électrique produite par la génératrice et le régime de la génératrice. La méthodologie analytique est appliquée (figure 1.39) afin de déterminer les commandes optimales.

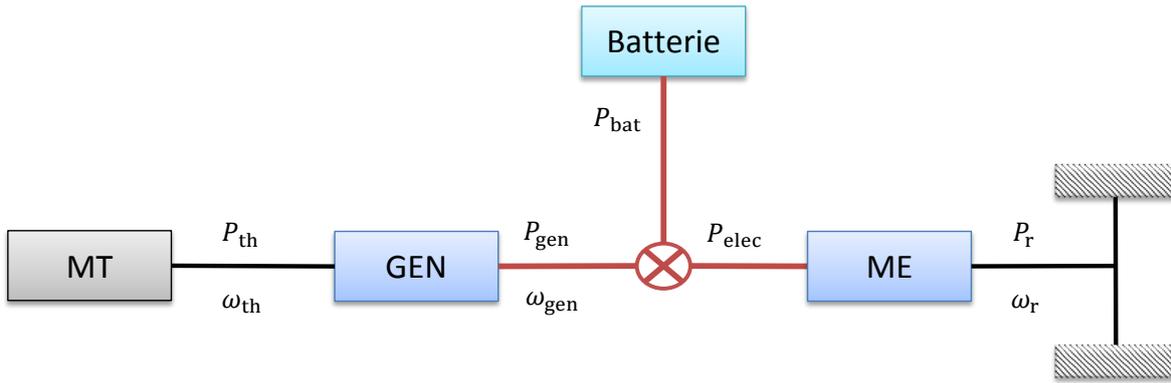


FIGURE 4.1 – Configuration Série

Le Problème d'Optimisation en mode Série (*POS*) s'écrit comme suit :

$$POS : \begin{cases} \min_{P_{gen}, \omega_{gen}} \int_{t_0}^{t_f} Q(P_{th}(t), \omega_{th}(t)) dt \\ SoE(t) = -\frac{P_{bat}(P_{gen}(t))}{E_{max}} \\ 0 \leq SoE(t) \leq 100 \\ \underline{P}_{th}(\omega_{th}) \leq P_{th} \leq \overline{P}_{th}(\omega_{th}) \\ 0 \leq P_{gen} \leq \overline{P}_{gen}(\omega_{th}) \\ \underline{\omega}_{th} \leq \omega_{th} \leq \overline{\omega}_{th} \end{cases} \quad (4.1)$$

En appliquant le PMP sur *POS*, l'Hamiltonien en mode série est donné par :

$$H(P_{th}, P_{gen}, \omega_{th}) = Q(P_{th}, \omega_{th}) + \lambda P_{bat}(P_{gen}) \quad (4.2)$$

Où :

- P_{bat} est la puissance électrique de la batterie : $P_{\text{bat}}(P_{\text{gen}}, P_r, \omega_r) = P_{\text{elec}}(P_r, \omega_r) - P_{\text{gen}}$. On rappelle que les pertes dans la batterie sont négligées (hypothèse 8),
- P_{elec} est la puissance électrique de la machine de traction. Elle est calculée à partir de la puissance à la roue P_r et du régime de la roue ω_r via le modèle quadratique défini par l'équation (1.22).
- P_{gen} est la puissance électrique produite par la génératrice. P_{gen} est représentée par le modèle en puissance affine défini par l'équation (1.23) (où $P_{\text{gen}} \geq 0$) :

$$P_{\text{gen}}(P_{\text{th}}, \omega_{\text{gen}}) = -b_0(\omega_{\text{gen}}) + b_1(\omega_{\text{gen}})P_{\text{th}} \quad (4.3)$$

- A partir de (1.20) et (1.21), et en considérant la tension constante, les coefficients b_1 et b_0 peuvent être approximés par les modèles suivants :

$$b_1(\omega_{\text{gen}}) = \frac{b_{10} + b_{11}\omega_{\text{gen}} + b_{12}\omega_{\text{gen}}^2}{\omega_{\text{gen}}} \quad (4.4)$$

$$b_0(\omega_{\text{gen}}) = b_{00} + b_{01}\omega_{\text{gen}} + b_{02}\omega_{\text{gen}}^2 \quad (4.5)$$

- ω_{gen} est le régime de la machine génératrice. Il est lié au régime du MT ω_{th} via un ratio fixe R_{gen} comme suit :

$$\omega_{\text{gen}} = R_{\text{gen}} \cdot \omega_{\text{th}} \quad (4.6)$$

- $Q(P_{\text{th}}, \omega_{\text{th}})$ est remplacé par son modèle affine défini dans l'équation (1.12). Il est exprimé en fonction des variables d'optimisation (P_{gen} et ω_{gen}), en remplaçant P_{th} par $\frac{P_{\text{gen}} + b_0}{b_1}$ (4.3) et ω_{th} par $\frac{\omega_{\text{gen}}}{R_{\text{gen}}}$ (4.6), on obtient :

$$Q(P_{\text{gen}}, \omega_{\text{gen}}) = \begin{cases} \frac{a_1}{b_1(\omega_{\text{gen}})}(P_{\text{gen}} + b_0(\omega_{\text{gen}})) + Q_0(\omega_{\text{gen}}) & \text{si } P_{\text{gen}} \leq P_{\text{gen}}^{\text{lim}} \\ \frac{a_2}{b_1(\omega_{\text{gen}})}(P_{\text{gen}} + b_0(\omega_{\text{gen}})) + Q_{\text{lim}}(\omega_{\text{gen}}) - a_2 P_{\text{lim}}(\omega_{\text{gen}}) & \text{si } P_{\text{gen}} > P_{\text{gen}}^{\text{lim}} \end{cases} \quad (4.7)$$

Où, $Q_0(\omega_{\text{gen}})$ et $P_{\text{lim}}(\omega_{\text{gen}})$ sont obtenus en remplaçant ω_{th} par $\frac{\omega_{\text{gen}}}{R_{\text{gen}}}$ dans (1.14) et (1.15) comme suit :

$$Q_0(\omega_{\text{gen}}) = q_0 + q_1\left(\frac{\omega_{\text{gen}}}{R_{\text{gen}}}\right) + q_2\left(\frac{\omega_{\text{gen}}}{R_{\text{gen}}}\right)^2 \quad (4.8)$$

$$P_{\text{lim}}(\omega_{\text{gen}}) = p_0 + p_1\left(\frac{\omega_{\text{gen}}}{R_{\text{gen}}}\right) \quad (4.9)$$

On pose : $q'_2 = \frac{q_2}{R_{\text{gen}}^2}$, $q'_1 = \frac{q_1}{R_{\text{gen}}}$ et $p'_1 = \frac{p_1}{R_{\text{gen}}}$.

$P_{\text{gen}}^{\text{lim}}(\omega_{\text{gen}})$ est obtenue en remplaçant P_{th} par (4.9) dans (4.3) :

$$P_{\text{gen}}^{\text{lim}}(\omega_{\text{gen}}) = -b_0(\omega_{\text{gen}}) + b_1(\omega_{\text{gen}})P_{\text{lim}}(\omega_{\text{gen}}) \quad (4.10)$$

Alors, $H(P_{\text{gen}}, \omega_{\text{gen}})$ est donné par :

$$H(P_{\text{gen}}, \omega_{\text{gen}}) = \begin{cases} \frac{a_1}{b_1(\omega_{\text{gen}})}(P_{\text{gen}} + b_0(\omega_{\text{gen}})) + Q_0(\omega_{\text{gen}}) + \lambda(P_{\text{elec}} - P_{\text{gen}}) & \text{si } P_{\text{gen}} \leq P_{\text{gen}}^{\text{lim}} \\ \frac{a_2}{b_1(\omega_{\text{gen}})}(P_{\text{gen}} + b_0(\omega_{\text{gen}})) + Q_{\text{lim}}(\omega_{\text{gen}}) - a_2 P_{\text{lim}}(\omega_{\text{gen}}) + \lambda(P_{\text{elec}} - P_{\text{gen}}) & \text{si } P_{\text{gen}} > P_{\text{gen}}^{\text{lim}} \end{cases} \quad (4.11)$$

D'après (4.11), on peut constater que ω_{gen} n'apparaît que dans Q . Ce qui équivaut à :

$$\min_{P_{\text{gen}}, \omega_{\text{gen}}} (H(P_{\text{gen}}, \omega_{\text{gen}}, \lambda)) = \min_{P_{\text{gen}}} (\min_{\omega_{\text{gen}}} (Q(P_{\text{gen}}, \omega_{\text{gen}})) + \lambda(P_{\text{elec}} - P_{\text{gen}})) \quad (4.12)$$

Pour cela, la résolution de (4.12) se fera en deux étapes :

1. calcul de $\omega_{\text{gen}}^{\text{opt}}(P_{\text{gen}})$ en minimisant $Q(P_{\text{gen}}, \omega_{\text{gen}})$,
2. calcul de $P_{\text{gen}}^{\text{opt}}$ en minimisant $H(P_{\text{gen}}, \omega_{\text{gen}}^{\text{opt}}(P_{\text{gen}}))$.

4.1 Optimisation du régime de la génératrice

Dans cette section, le régime optimal $\omega_{\text{gen}}^{\text{opt}}$ est obtenu en minimisant Q par rapport au régime ω_{gen} , on a :

$$\omega_{\text{gen}}^{\text{opt}}(P_{\text{gen}}) = \arg \min_{\omega_{\text{gen}}} (Q(P_{\text{gen}}, \omega_{\text{gen}})) \quad (4.13)$$

Après avoir remplacé $b_0(\omega_{\text{gen}})$, $b_1(\omega_{\text{gen}})$, $Q_0(\omega_{\text{gen}})$ et $P_{\text{lim}}(\omega_{\text{gen}})$ par leurs modèles en fonction de ω_{gen} dans (4.7), $Q(P_{\text{gen}}, \omega_{\text{gen}})$ peut s'écrire sous la forme générale suivante :

$$Q(P_{\text{gen}}, \omega_{\text{gen}}) = \frac{A_4 \omega_{\text{gen}}^4 + A_3 \omega_{\text{gen}}^3 + A_2 \omega_{\text{gen}}^2 + A_1(P_{\text{gen}}) \omega_{\text{gen}} + A_0}{b_{10} + b_{11} \omega_{\text{gen}} + b_{12} \omega_{\text{gen}}^2} \quad (4.14)$$

Où :

$$\begin{aligned} A_4 &= q_2' b_{12} \quad \forall P_{\text{gen}} \\ A_3 &= \begin{cases} a_1 b_{02} + q_2' b_{11} & \text{si } P_{\text{gen}} \leq P_{\text{gen}}^{\text{lim}}(\omega_{\text{gen}}) \\ a_2 b_{02} + q_2' b_{11} + (a_1 - a_2) p_1' b_{12} & \text{si } P_{\text{gen}} > P_{\text{gen}}^{\text{lim}}(\omega_{\text{gen}}) \end{cases} \\ A_2 &= \begin{cases} q_2' b_{10} + a_1 b_{01} + q_1' b_{11} & \text{si } P_{\text{gen}} \leq P_{\text{gen}}^{\text{lim}}(\omega_{\text{gen}}) \\ q_2' b_{10} + a_2 b_{01} + q_1' b_{11} + (a_1 - a_2)(p_1' b_{11} + p_0 b_{12}) & \text{si } P_{\text{gen}} > P_{\text{gen}}^{\text{lim}}(\omega_{\text{gen}}) \end{cases} \\ A_1 &= \begin{cases} q_1' b_{10} + a_1(P_{\text{gen}} + b_{00}) + q_0 b_{11} & \text{si } P_{\text{gen}} \leq P_{\text{gen}}^{\text{lim}}(\omega_{\text{gen}}) \\ q_1' b_{10} + q_0 b_{11} + a_2(P_{\text{gen}} + b_{00}) + (a_1 - a_2)(p_0 b_{11} + p_1' b_{10}) & \text{si } P_{\text{gen}} > P_{\text{gen}}^{\text{lim}}(\omega_{\text{gen}}) \end{cases} \\ A_0 &= \begin{cases} b_{10} q_0 & \text{si } P_{\text{gen}} \leq P_{\text{gen}}^{\text{lim}}(\omega_{\text{gen}}) \\ q_0 b_{10} + (a_1 - a_2) p_0 b_{10} & \text{si } P_{\text{gen}} > P_{\text{gen}}^{\text{lim}}(\omega_{\text{gen}}) \end{cases} \end{aligned}$$

Comme Q est convexe par rapport au régime ω_{gen} , alors, afin de trouver $\omega_{\text{gen}}^{\text{opt}}$, il faudrait résoudre l'équation :

$$\frac{\partial Q}{\partial \omega_{\text{gen}}} = 0 \quad (4.15)$$

De plus, pour déterminer les coefficients A_4 , A_3 , A_2 , A_1 et A_0 , il faut comparer P_{gen} au point de changement de pente $P_{\text{gen}}^{\text{lim}}$. Ceci revient à résoudre l'équation suivante :

$$P_{\text{gen}} - P_{\text{gen}}^{\text{lim}}(\omega_{\text{gen}}) = 0 \Leftrightarrow \frac{C_3 \omega_{\text{gen}}^3 + C_2 \omega_{\text{gen}}^2 + C_1(P_{\text{gen}}) \omega_{\text{gen}} + C_0}{\omega_{\text{gen}}} = 0 \quad (4.16)$$

Où, $C_3 = b_{02} + b_{12} p_1'$, $C_2 = b_{01} + b_{11} p_1' + b_{12} p_0$, $C_1 = b_{10} p_1' + b_{11} p_0 + b_{00} - P_{\text{gen}}$ et $C_0 = b_{10} p_0$.

Les équations (4.15) et (4.16) sont des polynômes de degré 3 et 4 en fonction de ω_{gen} . Le calcul analytique de leurs racines est complexe. Pour cela, le régime optimal $\omega_{\text{gen}}^{\text{opt}}$ est calculé hors-ligne numériquement suivant le schéma de la figure 4.2. Le régime optimal, en prenant en compte les limitations sur le régime du MT, est donné par :

$$\omega_{\text{gen}}^{\text{opt}}(P_{\text{gen}}) = \begin{cases} \frac{\omega_{\text{gen}}}{\omega_{\text{gen}}} & \text{si } \underline{P}_{\text{gen}} \leq P_{\text{gen}} \leq \overline{P}_{\text{gen}}^{\text{lim1}} \\ \omega_{\text{gen}}^{\text{c}}(P_{\text{gen}}) & \text{si } \underline{P}_{\text{gen}}^{\text{lim1}} \leq P_{\text{gen}} \leq \overline{P}_{\text{gen}}^{\text{lim2}} \\ \overline{\omega}_{\text{gen}} & \text{si } \underline{P}_{\text{gen}}^{\text{lim2}} \leq P_{\text{gen}} \leq \overline{P}_{\text{gen}} \end{cases} \quad (4.17)$$

Où :

$$\begin{cases} \omega_{\text{gen}}^{\text{c}}(P_{\text{gen}}) = \alpha_0 + \alpha_1 P_{\text{gen}} \\ \alpha_0 = \frac{P_{\text{gen}}^{\text{lim1}} \overline{\omega}_{\text{gen}} - P_{\text{gen}}^{\text{lim2}} \omega_{\text{gen}}}{P_{\text{gen}}^{\text{lim1}} - P_{\text{gen}}^{\text{lim2}}} \\ \alpha_1 = \frac{\overline{\omega}_{\text{gen}} - \omega_{\text{gen}}}{P_{\text{gen}}^{\text{lim2}} - P_{\text{gen}}^{\text{lim1}}} \\ P_{\text{gen}}^{\text{lim1}} = b_1(\omega_{\text{gen}}) P_{\text{lim}}(\omega_{\text{gen}}) - b_0(\omega_{\text{gen}}) \\ P_{\text{gen}}^{\text{lim2}} = b_1(\overline{\omega}_{\text{gen}}) P_{\text{lim}}(\overline{\omega}_{\text{gen}}) - b_0(\overline{\omega}_{\text{gen}}) \end{cases}$$

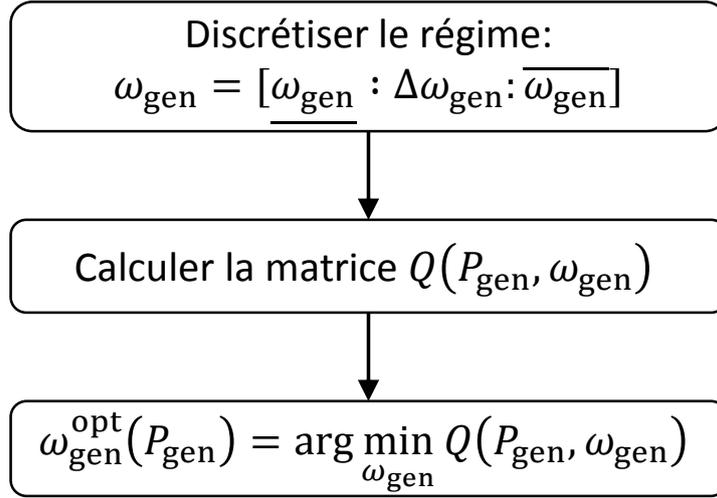


FIGURE 4.2 – Optimisation Numérique Hors-Ligne du régime de la génératrice par la minimisation de l'équation (4.14) par rapport à ω_{gen}

Le résultat du régime optimal (4.17) est très similaire à celui de la section 2.3.2. En effet, on trouve également que le régime optimal (ω_{gen}^c) est celui qui maximise le rendement du moteur thermique.

4.2 Optimisation de la puissance électrique de la génératrice

Dans cette section, l'objectif est de déterminer P_{gen}^{opt} , tel que :

$$P_{gen}^{opt} = \arg \min_{P_{gen}} (H(P_{gen}, \omega_{gen}^{opt})) \quad (4.18)$$

En remplaçant ω_{gen} par ω_{gen}^{opt} (4.17) dans le modèle de Q (4.7), on obtient $Q(P_{gen}, \omega_{gen}^{opt}) = Q^{opt}(P_{gen})$:

$$Q^{opt}(P_{gen}) = \begin{cases} \frac{a_1}{b_1^{min}} P_{gen} + \frac{a_1 b_0^{min}}{b_1^{min}} + Q_0^{min} & \text{si } \underline{P}_{gen} \leq P_{gen} \leq P_{gen}^{lim1} \\ a_1 P_{lim} (\alpha_0 + \alpha_1 P_{gen}) + Q_0 (\alpha_0 + \alpha_1 P_{gen}) & \text{si } P_{gen}^{lim1} \leq P_{gen} \leq P_{gen}^{lim2} \\ \frac{a_2}{b_1^{max}} P_{gen} + \frac{a_2 b_0^{max}}{b_1^{max}} - a_2 P_{lim}^{max} + Q_{lim}^{max} & \text{si } P_{gen}^{lim2} \leq P_{gen} \leq \overline{P}_{gen} \end{cases} \quad (4.19)$$

Alors, $H(P_{gen}, \omega_{gen}^{opt}, \lambda) = H^{opt}(P_{gen}, \lambda)$ est donné par (étape 2 dans la figure 1.39) :

$$H^{opt}(P_{gen}, \lambda) = \begin{cases} \left(\frac{a_1}{b_1^{min}} - \lambda \right) P_{gen} + \frac{a_1 b_0^{min}}{b_1^{min}} + Q_0^{min} + \lambda P_{elec} & \text{si } \underline{P}_{gen} \leq P_{gen} \leq P_{gen}^{lim1} \\ C + (\alpha_1 (a_1 p_1' + q_1' + 2q_2' \alpha_0) - \lambda) P_{gen} + q_2' \alpha_1^2 P_{gen}^2 & \text{si } P_{gen}^{lim1} \leq P_{gen} \leq P_{gen}^{lim2} \\ \left(\frac{a_2}{b_1^{max}} - \lambda \right) P_{gen} + \frac{a_2 b_0^{max}}{b_1^{max}} - a_2 P_{lim}^{max} + Q_{lim}^{max} + \lambda P_{elec} & \text{si } P_{gen}^{lim2} \leq P_{gen} \leq \overline{P}_{gen} \end{cases} \quad (4.20)$$

Où, $C = a_1 p_0 + a_1 p_1' \alpha_0 + q_2' \alpha_0^2 + q_1' \alpha_0 + q_0 + \lambda P_{elec}$, $P_{gen}^* = \frac{\lambda - \alpha_1 (a_1 p_1' + q_1' + 2q_2' \alpha_0)}{2q_2' \alpha_1^2}$, $b_1^{max} = \frac{b_{10} + b_{11} \overline{\omega}_{gen}}{\overline{\omega}_{gen}}$, $b_1^{min} = \frac{b_{10} + b_{11} \underline{\omega}_{gen}}{\underline{\omega}_{gen}}$, $b_0^{max} = b_{00} + b_{01} \overline{\omega}_{gen} + b_{02} \overline{\omega}_{gen}^2$ et $b_0^{min} = b_{00} + b_{01} \underline{\omega}_{gen} + b_{02} \underline{\omega}_{gen}^2$.

Selon la méthodologie appliquée dans cette thèse (figure 1.39), afin de déterminer P_{gen}^{opt} (étape 4), la convexité de $H^{opt}(P_{gen})$ est étudiée (étape 3). Il faut noter que $H^{opt}(P_{gen})$ est convexe par

morceaux car il contient deux morceaux affines et un morceau quadratique dont le coefficient du second degré est positif ($q_2' \alpha_1^2 > 0$). En revanche, la convexité globale de $H^{\text{opt}}(P_{\text{gen}})$ n'est pas toujours assurée. Ceci revient à vérifier la condition de convexité du premier ordre, c'est-à-dire, à calculer et comparer les dérivées à gauche ($\frac{\partial H^{\text{opt}G}}{\partial P_{\text{gen}}}$) et à droite ($\frac{\partial H^{\text{opt}D}}{\partial P_{\text{gen}}}$) de $H^{\text{opt}}(P_{\text{gen}})$ aux points de changement d'équations : $P_{\text{gen}}^{\text{lim}1}$ et $P_{\text{gen}}^{\text{lim}2}$. On distinguera donc les cas suivants :

Cas 1 : H est globalement convexe

Dans ce cas, on a :

$$\frac{\partial H^{\text{opt}G}}{\partial P_{\text{gen}}} \Big|_{P_{\text{gen}}=P_{\text{gen}}^{\text{lim}1}} < \frac{\partial H^{\text{opt}D}}{\partial P_{\text{gen}}} \Big|_{P_{\text{gen}}=P_{\text{gen}}^{\text{lim}1}} \quad (4.21)$$

$$\frac{\partial H^{\text{opt}G}}{\partial P_{\text{gen}}} \Big|_{P_{\text{gen}}=P_{\text{gen}}^{\text{lim}2}} < \frac{\partial H^{\text{opt}D}}{\partial P_{\text{gen}}} \Big|_{P_{\text{gen}}=P_{\text{gen}}^{\text{lim}2}} \quad (4.22)$$

Où :

$$\begin{cases} \frac{\partial H^{\text{opt}G}}{\partial P_{\text{gen}}} \Big|_{P_{\text{gen}}=P_{\text{gen}}^{\text{lim}1}} = \frac{a_1}{b_1^{\text{min}}} \\ \frac{\partial H^{\text{opt}D}}{\partial P_{\text{gen}}} \Big|_{P_{\text{gen}}=P_{\text{gen}}^{\text{lim}1}} = \alpha_1(a_1 p_1' + q_1' + 2q_2' \alpha_0) + 2P_{\text{gen}}^{\text{lim}1} q_2' \alpha_1^2 = \lambda_{\text{lim}1} \\ \frac{\partial H^{\text{opt}G}}{\partial P_{\text{gen}}} \Big|_{P_{\text{gen}}=P_{\text{gen}}^{\text{lim}2}} = \alpha_1(a_1 p_1' + q_1' + 2q_2' \alpha_0) + 2P_{\text{gen}}^{\text{lim}2} q_2' \alpha_1^2 = \lambda_{\text{lim}2} \\ \frac{\partial H^{\text{opt}D}}{\partial P_{\text{gen}}} \Big|_{P_{\text{gen}}=P_{\text{gen}}^{\text{lim}2}} = \frac{a_2}{b_1^{\text{max}}} \end{cases}$$

Comme le montre la figure 4.3, l'extremum P_{gen}^* du morceau quadratique de $H^{\text{opt}}(P_{\text{gen}}, \lambda)$ est l'optimum si et seulement s'il vérifie les conditions suivantes : $P_{\text{gen}}^{\text{lim}1} < P_{\text{gen}}^* < P_{\text{gen}}^{\text{lim}2}$. Ce qui équivaut à :

$$\lambda_{\text{lim}1} < \lambda < \lambda_{\text{lim}2} \quad (4.23)$$

Où, $\lambda_{\text{lim}1}$ et $\lambda_{\text{lim}2}$ sont les solutions des équations suivantes :

$$(1) P_{\text{gen}}^* = P_{\text{gen}}^{\text{lim}1} \Leftrightarrow \lambda = \lambda_{\text{lim}1}$$

$$(2) P_{\text{gen}}^* = P_{\text{gen}}^{\text{lim}2} \Leftrightarrow \lambda = \lambda_{\text{lim}2}$$

Quand $P_{\text{gen}}^* < P_{\text{gen}}^{\text{lim}1}$ et $\frac{a_1}{b_1^{\text{min}}} - \lambda > 0$, alors, H est croissant $\forall P_{\text{gen}}$, d'où l'optimum est égal à $\underline{P}_{\text{gen}}$. Si $P_{\text{gen}}^* < P_{\text{gen}}^{\text{lim}1}$ et $\frac{a_1}{b_1^{\text{min}}} - \lambda < 0$, l'optimum est égal à $P_{\text{gen}}^{\text{lim}1}$. De même, à droite, si $P_{\text{gen}}^* > P_{\text{gen}}^{\text{lim}2}$ et $\frac{a_2}{b_1^{\text{max}}} - \lambda > 0$, alors $P_{\text{gen}}^{\text{lim}2}$ est l'optimum ; et si $P_{\text{gen}}^* > P_{\text{gen}}^{\text{lim}2}$ et $\frac{a_2}{b_1^{\text{max}}} - \lambda < 0$, alors $\overline{P}_{\text{gen}}$ est l'optimum.

Finalement, $P_{\text{gen}}^{\text{opt}}$ est donnée par :

λ	$\frac{a_1}{b_1^{\text{min}}}$	$\lambda_{\text{lim}1}$	$\lambda_{\text{lim}2}$	$\frac{a_2}{b_1^{\text{max}}}$
$P_{\text{gen}}^{\text{opt}}$	$\underline{P}_{\text{gen}}$	$P_{\text{gen}}^{\text{lim}1}$	P_{gen}^*	$P_{\text{gen}}^{\text{lim}2}$

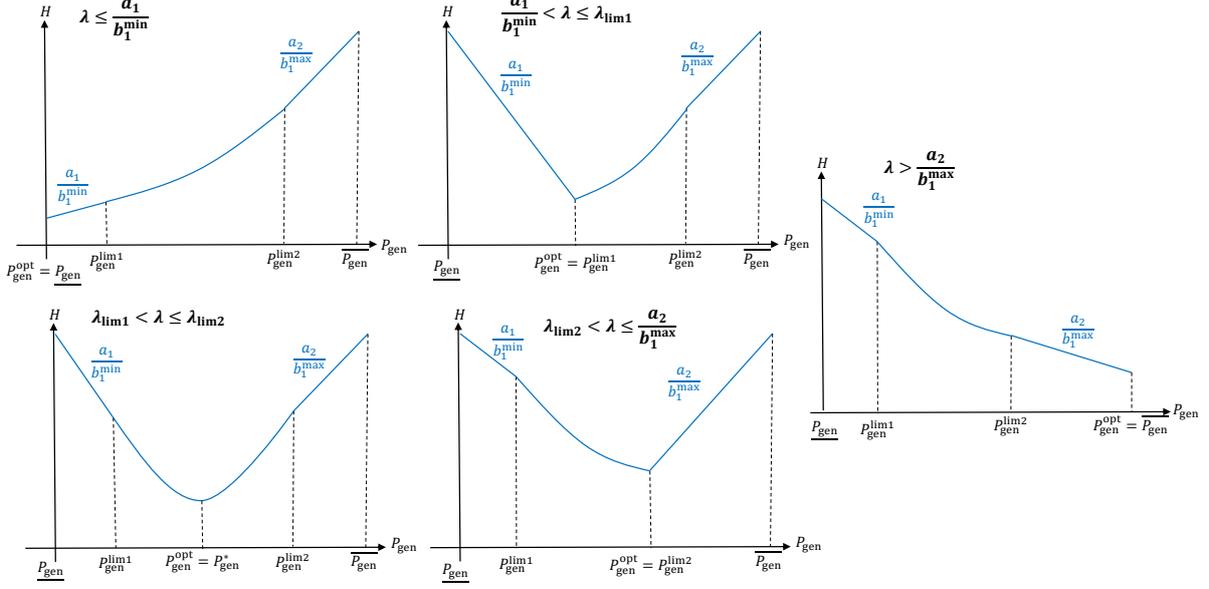


FIGURE 4.3 – Détermination de $P_{\text{gen}}^{\text{opt}}$ quand $H^{\text{opt}}(P_{\text{gen}})$ est globalement convexe

Cas 2 : H est non-convexe à $P_{\text{gen}}^{\text{lim1}}$

Dans ce cas, on a :

$$\frac{\partial H^{\text{opt}G}}{\partial P_{\text{gen}}} \Big|_{P_{\text{gen}}=P_{\text{gen}}^{\text{lim1}}} = \frac{a_1}{b_1^{\text{min}}} > \lambda_{\text{lim1}} = \frac{\partial H^{\text{opt}D}}{\partial P_{\text{gen}}} \Big|_{P_{\text{gen}}=P_{\text{gen}}^{\text{lim1}}} \quad (4.24)$$

$$\frac{\partial H^{\text{opt}G}}{\partial P_{\text{gen}}} \Big|_{P_{\text{gen}}=P_{\text{gen}}^{\text{lim2}}} = \frac{a_2}{b_1^{\text{max}}} > \lambda_{\text{lim2}} = \frac{\partial H^{\text{opt}D}}{\partial P_{\text{gen}}} \Big|_{P_{\text{gen}}=P_{\text{gen}}^{\text{lim2}}} \quad (4.25)$$

Dans ce cas de figure, le minimum de $H^{\text{opt}}(P_{\text{gen}}, \lambda)$ n'est pas global. Comme le montre la figure 4.4, $H^{\text{opt}}(P_{\text{gen}}, \lambda)$ peut posséder deux minimums locaux à $\underline{P}_{\text{gen}}$ et à P_{gen}^* (en bas à gauche de la figure 4.4). Afin de déterminer l'optimum global de $H^{\text{opt}}(P_{\text{gen}})$, le signe de $H^{\text{opt}}(P_{\text{gen}}^*, \lambda) - H^{\text{opt}}(\underline{P}_{\text{gen}}, \lambda)$ est étudié en fonction de λ . $H^{\text{opt}}(\underline{P}_{\text{gen}}, \lambda)$ est obtenu en remplaçant P_{gen} par $\underline{P}_{\text{gen}}$ dans (4.20) et P_{gen} par P_{gen}^* pour $H^{\text{opt}}(P_{\text{gen}}^*, \lambda)$. Après calcul, on obtient :

$$H^{\text{opt}}(P_{\text{gen}}^*, \lambda) - H^{\text{opt}}(\underline{P}_{\text{gen}}, \lambda) = 0 \Leftrightarrow a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \quad (4.26)$$

Où :

$$\begin{cases} a = \frac{-1}{4q_2'\alpha_1^2} \\ b = \underline{P}_{\text{gen}} + \frac{\alpha_1(a_1p_1' + q_1' + 2q_2'\alpha_0)}{2q_2'\alpha_1^2} \\ c = a_1p_0 + a_1p_1'\alpha_0 + q_2'\alpha_0^2 + q_1'\alpha_0 + q_0 - \frac{(\alpha_1(a_1p_1' + q_1' + 2q_2'\alpha_0))^2}{4q_2'\alpha_1^2} - \frac{a_1}{b_1^{\text{min}}}(\underline{P}_{\text{gen}} + b_0^{\text{min}}) - Q_0^{\text{min}} \end{cases}$$

Étude du signe de $\{H^{\text{opt}}(P_{\text{gen}}^*, \lambda) - H^{\text{opt}}(\underline{P}_{\text{gen}}, \lambda)\}$

Pour cela, on calcule le discriminant $\Delta = \sqrt{b^2 - 4ac}$ et on distingue les trois cas suivants :

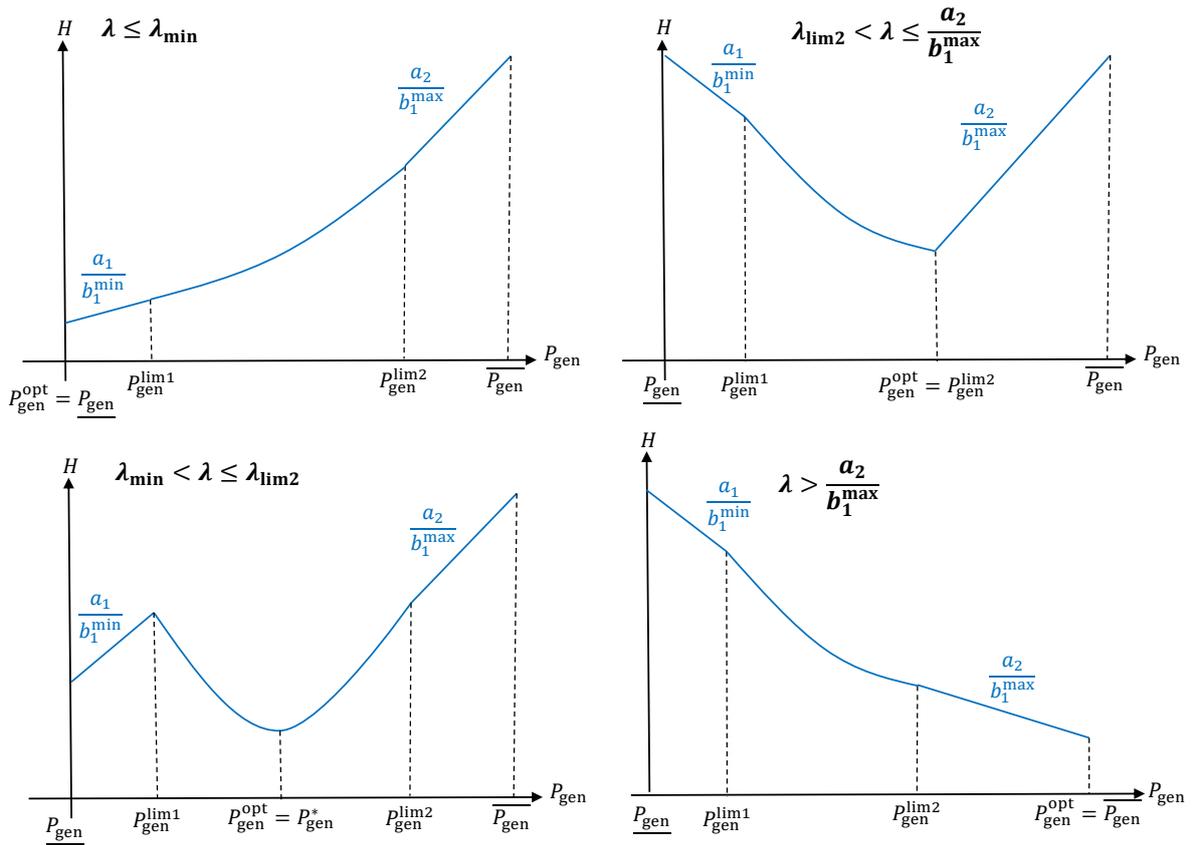


FIGURE 4.4 – Détermination de $P_{\text{gen}}^{\text{opt}}$ quand $H^{\text{opt}}(P_{\text{gen}})$ est non-convexe à $P_{\text{gen}}^{\text{lim1}}$

- Si $\Delta > 0$: Dans ce cas, $a\lambda^2 + b\lambda + c$ change de signe deux fois de négatif à positif à $\lambda_{\min 1} = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$; puis de positif à négatif à $\lambda_{\min 2} = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ ($\lambda_{\min 2} > 0$ car $a < 0$ et $b > 0$), comme le montre la figure 4.5. Par conséquent, on a :

- Si $\lambda \leq \lambda_{\min 1}$ alors, $P_{\text{gen}}^{\text{opt}} = P_{\text{gen}}^*$,
- Si $\lambda_{\min 1} < \lambda < \lambda_{\min 2}$ alors, $P_{\text{gen}}^{\text{opt}} = \underline{P}_{\text{gen}}$,
- Si $\lambda \geq \lambda_{\min 2}$ alors, $P_{\text{gen}}^{\text{opt}} = P_{\text{gen}}^*$,

En revanche, comme présenté dans le cas précédent, pour que P_{gen}^* soit l'optimum, il faut que λ vérifie les conditions (4.23). Pour cela, $\lambda_{\min 1}$ et $\lambda_{\min 2}$ sont comparés à $\lambda_{\text{lim}1}$. Comme le montre la figure 4.5, on a : $\lambda_{\min 1} < \lambda_{\text{lim}1}$ car $\frac{-b}{2a} < \lambda_{\text{lim}1}$. En effet, $\frac{-b}{2a} = \alpha_1(a_1 p_1' + q_1' + 2q_2' \alpha_0) + 2q_2' \alpha_1^2 \underline{P}_{\text{gen}}$ et $\lambda_{\text{lim}1} = \alpha_1(a_1 p_1' + q_1' + 2q_2' \alpha_0) + 2q_2' \alpha_1^2 P_{\text{gen}}^{\text{lim}1}$, comme $q_2' > 0$ et $\underline{P}_{\text{gen}} < P_{\text{gen}}^{\text{lim}1}$, alors, $\frac{-b}{2a} < \lambda_{\text{lim}1}$. On en déduit que :

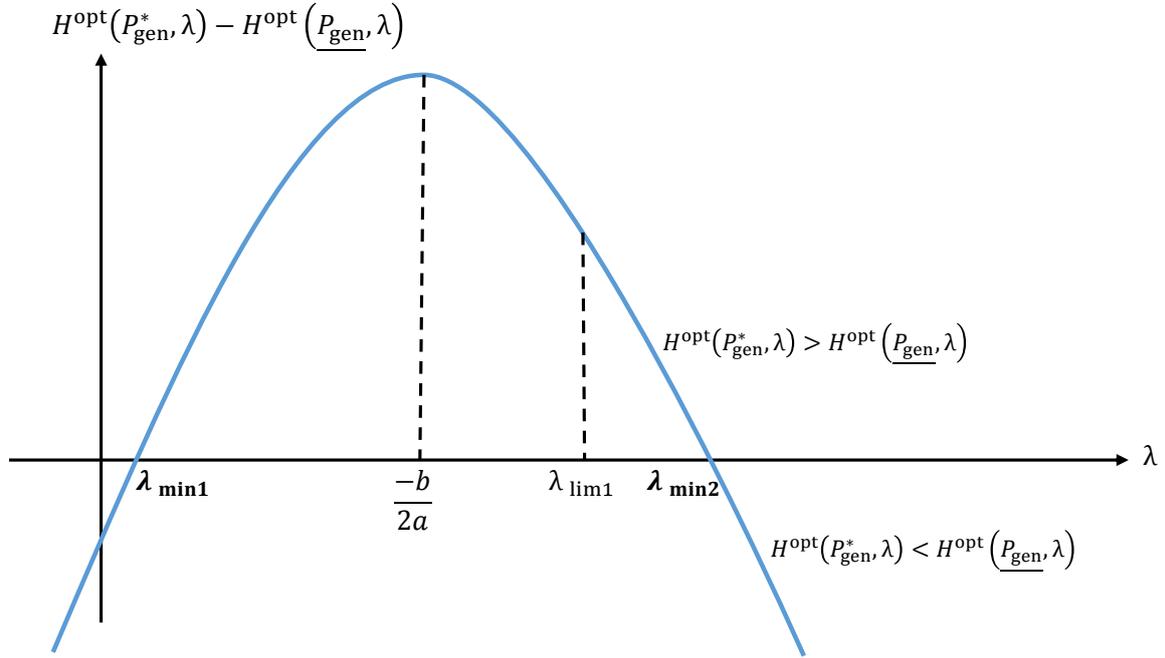


FIGURE 4.5 – Évolution de $\{H^{\text{opt}}(P_{\text{gen}}^*, \lambda) - H^{\text{opt}}(\underline{P}_{\text{gen}}, \lambda)\}$ en fonction de λ

- Si $\lambda < \max\{\lambda_{\text{lim}1}, \lambda_{\min 2}\}$ alors, $P_{\text{gen}}^{\text{opt}} = \underline{P}_{\text{gen}}$,
- Si $\max\{\lambda_{\text{lim}1}, \lambda_{\min 2}\} \leq \lambda \leq \lambda_{\text{lim}2}$ alors, $P_{\text{gen}}^{\text{opt}} = P_{\text{gen}}^*$,

Finalement, $P_{\text{gen}}^{\text{opt}}$ est donnée en fonction de λ par :

λ	0	$\max(\lambda_{\text{lim}1}, \lambda_{\min 2})$	$\lambda_{\text{lim}2}$	$\frac{a_2}{b_1^{\text{max}}}$	$+\infty$
$P_{\text{gen}}^{\text{opt}}(\lambda)$	$\underline{P}_{\text{gen}}$	P_{gen}^*	$P_{\text{gen}}^{\text{lim}2}$	\bar{P}_{gen}	

- Si $\Delta = 0$: Comme $a < 0$, $a\lambda^2 + b\lambda + c$ est partout négatif sauf à $\frac{-b}{2a}$ où il s'annule. Comme $\frac{-b}{2a} < \lambda_{\text{lim}1}$, on en déduit que $H^{\text{opt}}(P_{\text{gen}}^*, \lambda) < H^{\text{opt}}(\underline{P}_{\text{gen}}, \lambda)$ pour $\lambda > \lambda_{\text{lim}1}$. $P_{\text{gen}}^{\text{opt}}$ est donnée par :

λ	0	$\lambda_{\text{lim}1}$	$\lambda_{\text{lim}2}$	$\frac{a_2}{b_1^{\text{max}}}$	$+\infty$
$P_{\text{gen}}^{\text{opt}}$	$\underline{P}_{\text{gen}}$	P_{gen}^*	$P_{\text{gen}}^{\text{lim}2}$	\bar{P}_{gen}	

— **Si** $\Delta < 0$: Comme $a < 0$, alors $a\lambda^2 + b\lambda + c < 0$. On en déduit que $H^{\text{opt}}(P_{\text{gen}}^*, \lambda) < H^{\text{opt}}(\underline{P}_{\text{gen}}, \lambda)$, $\forall \lambda$. Par conséquent, $P_{\text{gen}}^{\text{opt}}$ est donnée par :

$$\begin{array}{c|cccccc} \lambda & 0 & \lambda_{\text{lim1}} & \lambda_{\text{lim2}} & \frac{a_2}{b_1^{\text{max}}} & +\infty \\ \hline P_{\text{gen}}^{\text{opt}} & \underline{P}_{\text{gen}} & \parallel & P_{\text{gen}}^* & \parallel & P_{\text{gen}}^{\text{lim2}} & \parallel & \bar{P}_{\text{gen}} \end{array}$$

Cas 3 : H est non-convexe à $P_{\text{gen}}^{\text{lim}2}$

Dans ce cas (figure 4.6), on a :

$$\left. \frac{\partial H^{\text{opt}G}}{\partial P_{\text{gen}}} \right|_{P_{\text{gen}}=P_{\text{gen}}^{\text{lim}1}} = \frac{a_1}{b_1^{\text{min}}} < \lambda_{\text{lim}1} = \left. \frac{\partial H^{\text{opt}D}}{\partial P_{\text{gen}}} \right|_{P_{\text{gen}}=P_{\text{gen}}^{\text{lim}1}} \quad (4.27)$$

$$\left. \frac{\partial H^{\text{opt}G}}{\partial P_{\text{gen}}} \right|_{P_{\text{gen}}=P_{\text{gen}}^{\text{lim}2}} = \frac{a_2}{b_1^{\text{max}}} < \lambda_{\text{lim}2} = \left. \frac{\partial H^{\text{opt}D}}{\partial P_{\text{gen}}} \right|_{P_{\text{gen}}=P_{\text{gen}}^{\text{lim}2}} \quad (4.28)$$

En appliquant la même démarche que le cas précédent, on étudie le signe de :

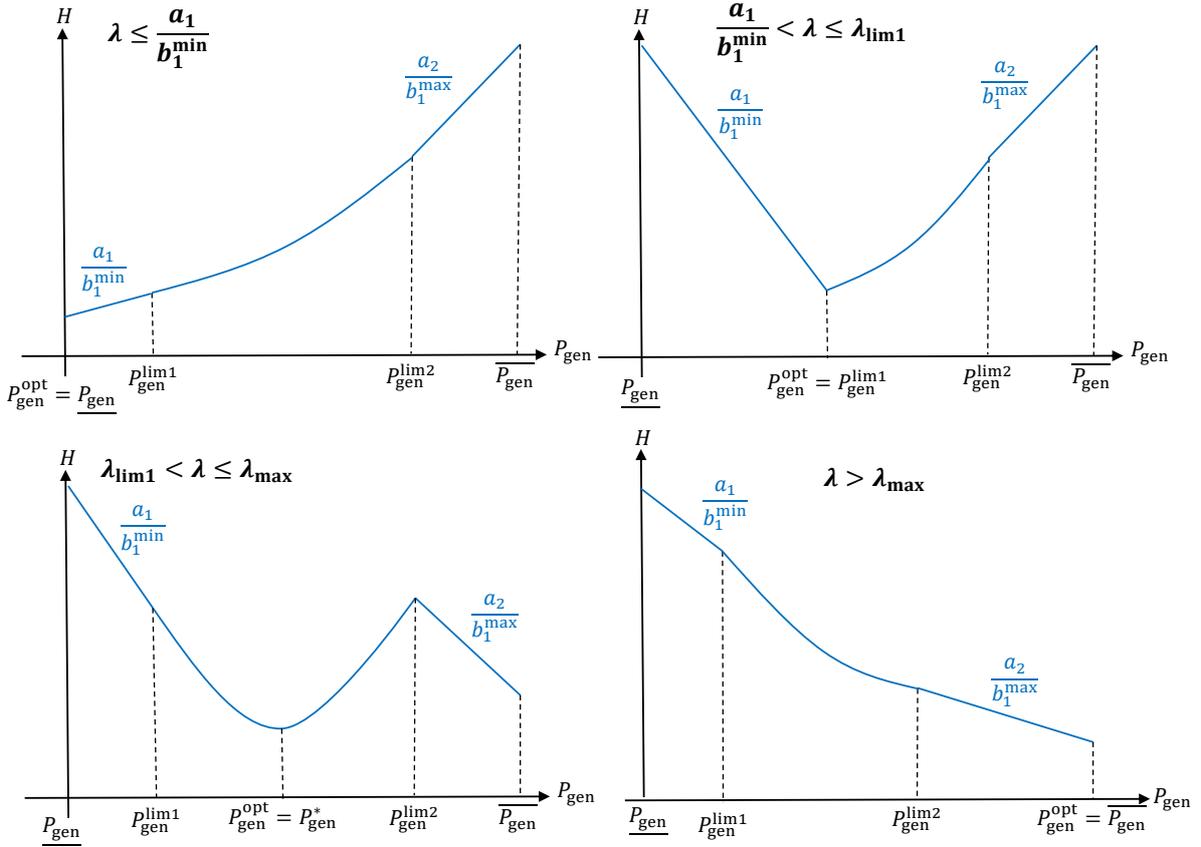


FIGURE 4.6 – Détermination de $P_{\text{gen}}^{\text{opt}}$ quand $H^{\text{opt}}(P_{\text{gen}})$ est non-convexe à $P_{\text{gen}}^{\text{lim}2}$

$$H^{\text{opt}}(P_{\text{gen}}^*, \lambda) - H^{\text{opt}}(\bar{P}_{\text{gen}}, \lambda) = 0 \Leftrightarrow a' \lambda^2 + b' \lambda + c' = 0 \quad (4.29)$$

Où :

$$\begin{cases} a' = \frac{-1}{4q_2^2 \alpha_1^2} \\ b' = \bar{P}_{\text{gen}} + \frac{\alpha_1(a_1 p_1' + q_1' + 2q_2' \alpha_0)}{2q_2^2 \alpha_1^2} \\ c' = a_1 p_0 + a_1 p_1' \alpha_0 + q_2^2 \alpha_0^2 + q_1' \alpha_0 + q_0 - \frac{(\alpha_1(a_1 p_1' + q_1' + 2q_2' \alpha_0))^2}{4q_2^2 \alpha_1^2} - \frac{a_2}{b_1^{\text{max}}} (\bar{P}_{\text{gen}} + b_0^{\text{max}}) - Q_{\text{lim}}^{\text{max}} + a_2 P_{\text{lim}}^{\text{max}} \end{cases}$$

Étude du signe de $H^{\text{opt}}(P_{\text{gen}}^*, \lambda) - H^{\text{opt}}(\bar{P}_{\text{gen}}, \lambda)$

Pour cela, on calcule le discriminant $\Delta' = \sqrt{b'^2 - 4a'c'}$ et on distingue les trois cas suivants :

- **Si $\Delta' > 0$** : Dans ce cas, $a'\lambda^2 + b'\lambda + c'$ change de signe deux fois de négatif à positif à $\lambda_{\text{max}}^1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{2a'}$; puis de positif à négatif à $\lambda_{\text{max}}^2 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{2a'}$. Sauf que, comme le montre la figure 4.7, comme $\frac{-b'}{2a'} > \lambda_{\text{lim}2}$ (car $\bar{P}_{\text{gen}} > P_{\text{gen}}^{\text{lim}2}$), alors, $\lambda_{\text{lim}2} < \lambda_{\text{max}2}$. Par conséquent, $P_{\text{gen}}^{\text{opt}}$ est donnée par :

λ	0	$\frac{a_1}{b_1^{\text{min}}}$	$\lambda_{\text{lim}1}$	$\min\{\lambda_{\text{max}1}, \lambda_{\text{lim}2}\}$	$+\infty$
$P_{\text{gen}}^{\text{opt}}$	$\underline{P}_{\text{gen}}$	$P_{\text{gen}}^{\text{lim}1}$	P_{gen}^*	\bar{P}_{gen}	

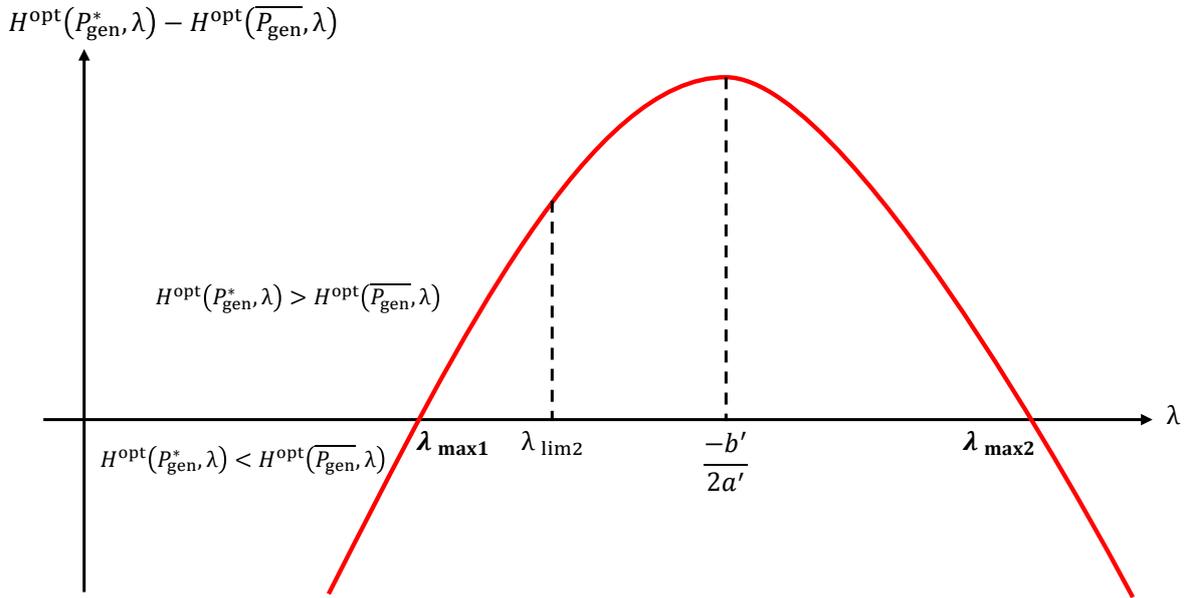


FIGURE 4.7 – Évolution de $\{H^{\text{opt}}(P_{\text{gen}}^*, \lambda) - H^{\text{opt}}(\bar{P}_{\text{gen}}, \lambda)\}$ en fonction de λ

- **Si $\Delta' = 0$** : Comme $a' < 0$, $a'\lambda^2 + b'\lambda + c'$ est partout négatif sauf à $\frac{-b'}{2a'}$ où il s'annule. Mais, comme $\lambda_{\text{lim}2} < \frac{-b'}{2a'}$, alors, $P_{\text{gen}}^{\text{opt}}$ est donnée par :

λ	0	$\frac{a_1}{b_1^{\text{min}}}$	$\lambda_{\text{lim}1}$	$\lambda_{\text{lim}2}$	$+\infty$
$P_{\text{gen}}^{\text{opt}}$	$\underline{P}_{\text{gen}}$	$P_{\text{gen}}^{\text{lim}1}$	P_{gen}^*	\bar{P}_{gen}	

- **Si $\Delta' < 0$** : Comme $a' < 0$, alors $a'\lambda^2 + b'\lambda + c' < 0$. On en déduit que $H^{\text{opt}}(P_{\text{gen}}^*, \lambda) < H^{\text{opt}}(\bar{P}_{\text{gen}}, \lambda), \forall \lambda$. Par conséquent, $P_{\text{gen}}^{\text{opt}}$ est donnée par :

λ	0	$\frac{a_1}{b_1^{\text{min}}}$	$\lambda_{\text{lim}1}$	$\lambda_{\text{lim}2}$	$+\infty$
$P_{\text{gen}}^{\text{opt}}$	$\underline{P}_{\text{gen}}$	$P_{\text{gen}}^{\text{lim}1}$	P_{gen}^*	\bar{P}_{gen}	

Cas 4 : H est non-convexe à $P_{\text{gen}}^{\text{lim}1}$ et à $P_{\text{gen}}^{\text{lim}2}$

Dans ce cas, on a :

$$\frac{\partial H^{\text{opt}G}}{\partial P_{\text{gen}}} \Big|_{P_{\text{gen}}=P_{\text{gen}}^{\text{lim}1}} = \frac{a_1}{b_1^{\text{min}}} > \lambda_{\text{lim}1} = \frac{\partial H^{\text{opt}D}}{\partial P_{\text{gen}}} \Big|_{P_{\text{gen}}=P_{\text{gen}}^{\text{lim}1}} \quad (4.30)$$

$$\frac{\partial H^{\text{opt}G}}{\partial P_{\text{gen}}} \Big|_{P_{\text{gen}}=P_{\text{gen}}^{\text{lim}2}} = \frac{a_2}{b_1^{\text{max}}} < \lambda_{\text{lim}2} = \frac{\partial H^{\text{opt}D}}{\partial P_{\text{gen}}} \Big|_{P_{\text{gen}}=P_{\text{gen}}^{\text{lim}2}} \quad (4.31)$$

En appliquant la même démarche que les deux cas précédents, comme le montre la figure 4.8, $P_{\text{gen}}^{\text{opt}}$ est donnée par :

λ	0	$\max\{\lambda_{\text{min}2}, \lambda_{\text{lim}1}\}$	$\min\{\lambda_{\text{max}1}, \lambda_{\text{lim}2}\}$	$+\infty$
$P_{\text{gen}}^{\text{opt}}$	$\underline{P}_{\text{gen}}$	P_{gen}^*	\bar{P}_{gen}	

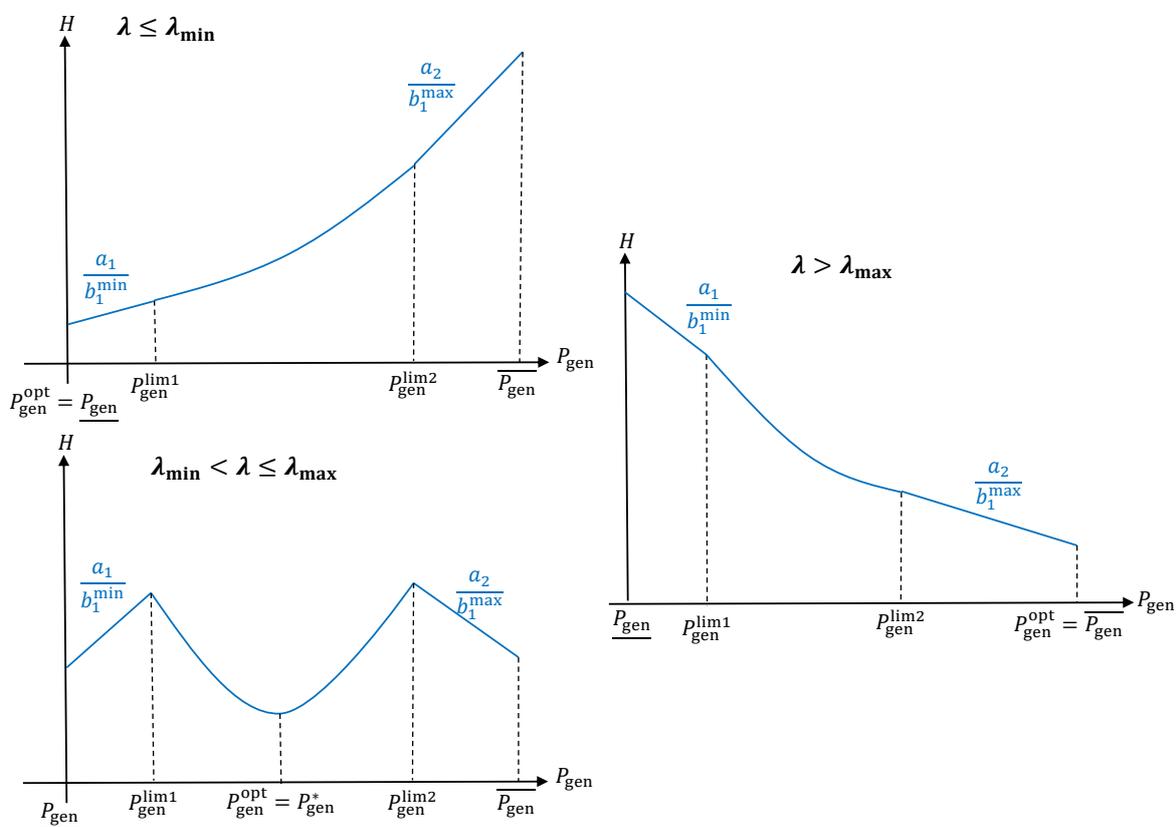


FIGURE 4.8 – Détermination de $P_{\text{gen}}^{\text{opt}}$ quand $H^{\text{opt}}(P_{\text{gen}})$ est non-convexe à $P_{\text{gen}}^{\text{lim}1}$ et à $P_{\text{gen}}^{\text{lim}2}$

4.3 Résultats de Simulations

Validation Hors-Ligne

Comme vu précédemment, les commandes optimales en hybride série ne dépendent que du facteur d'équivalence. Pour cela, nous ferons varier le facteur d'équivalence sur un large intervalle afin de simuler tous les cas possibles cités dans la section précédente. De plus, la convexité de l'Hamiltonien dépend des régimes min et max. C'est pourquoi, nous allons calculer et comparer les seuils : $\frac{a_1}{b_1^{\min}}$, λ_{lim1} , λ_{lim2} et $\frac{a_2}{b_1^{\max}}$ en faisant varier les régimes min et max afin de simuler les 4 cas de convexité de H abordés dans la section précédente. D'après les figures 4.9 et 4.10, dans notre cas d'étude, l'Hamiltonien est toujours globalement convexe quelques soient les régimes min et max ($\frac{a_1}{b_1^{\min}} < \lambda_{\text{lim1}}$ et $\lambda_{\text{lim2}} < \frac{a_2}{b_1^{\max}}$).

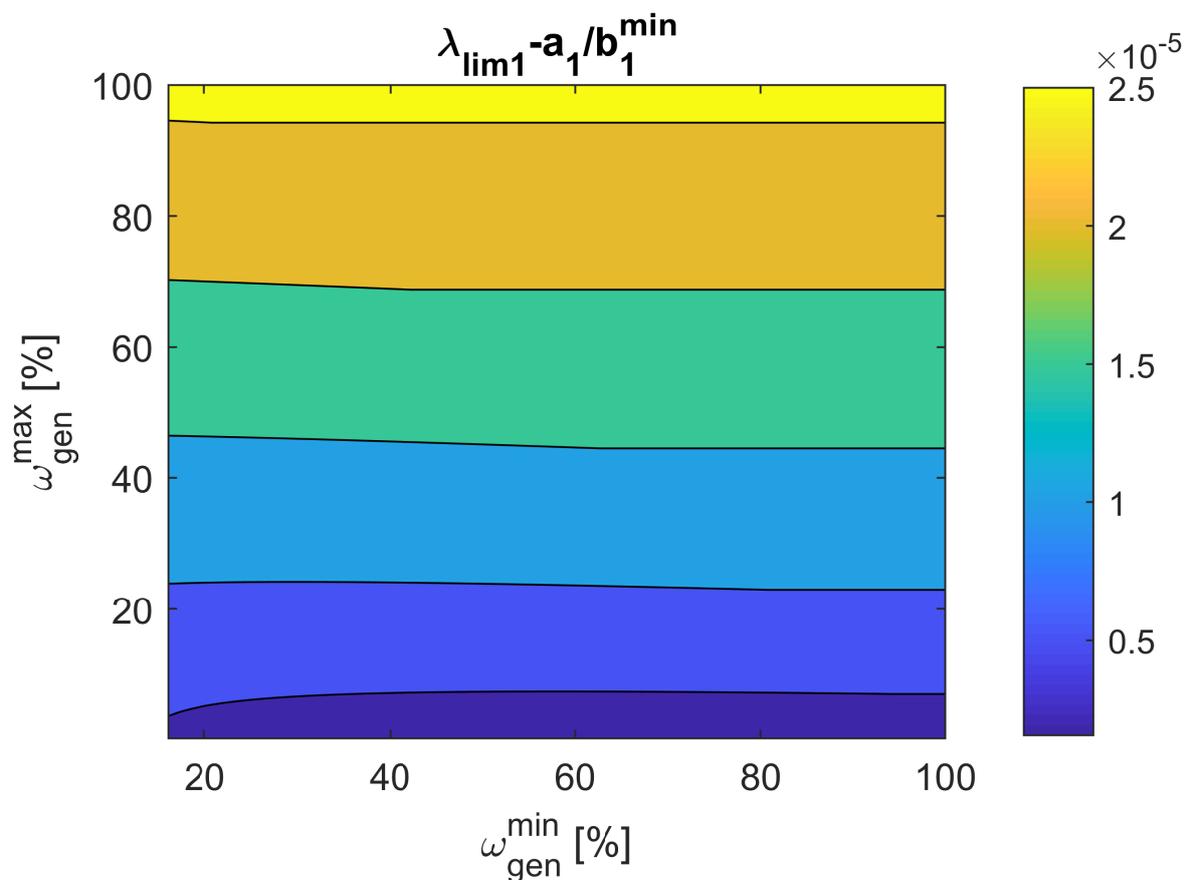


FIGURE 4.9 – Comparaison de λ_{lim1} avec $\frac{a_1}{b_1^{\min}}$ sur toute la plage des régimes min et max (ω_{gen} , $\bar{\omega}_{\text{gen}}$). La différence $\lambda_{\text{lim1}} - \frac{a_1}{b_1^{\min}}$ est toujours positive quelques soient les régimes min et max.

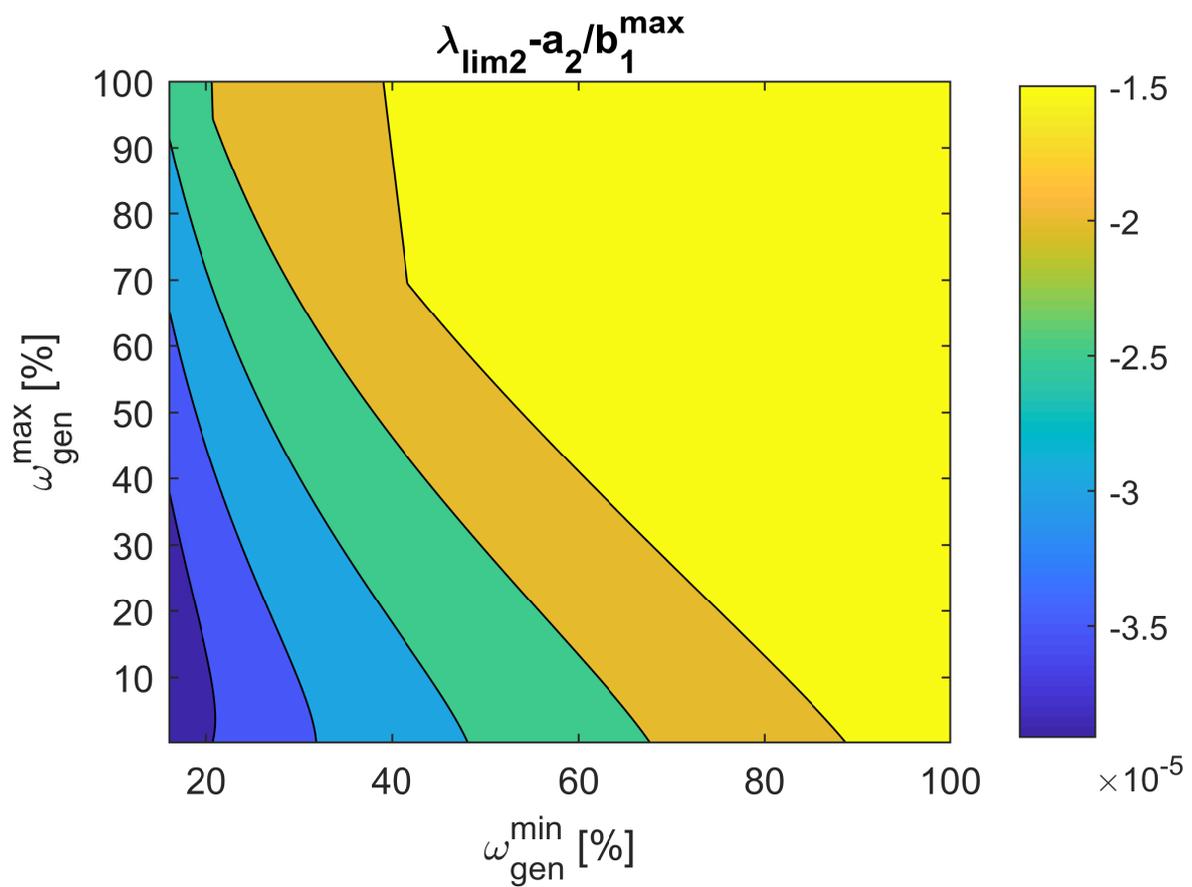


FIGURE 4.10 – Comparaison de $\lambda_{\text{lim}2}$ avec $\frac{a_2}{b_1^{\text{max}}}$ sur toute la plage des régimes min et max (ω_{gen} , $\bar{\omega}_{\text{gen}}$). La différence $\lambda_{\text{lim}2} - \frac{a_2}{b_1^{\text{max}}}$ est toujours positive quelques soient les régimes min et max.

La figure 4.11 illustre la comparaison des commandes issues de la méthode Num_1^{1000} avec celles de la méthode analytique en fonction de λ .

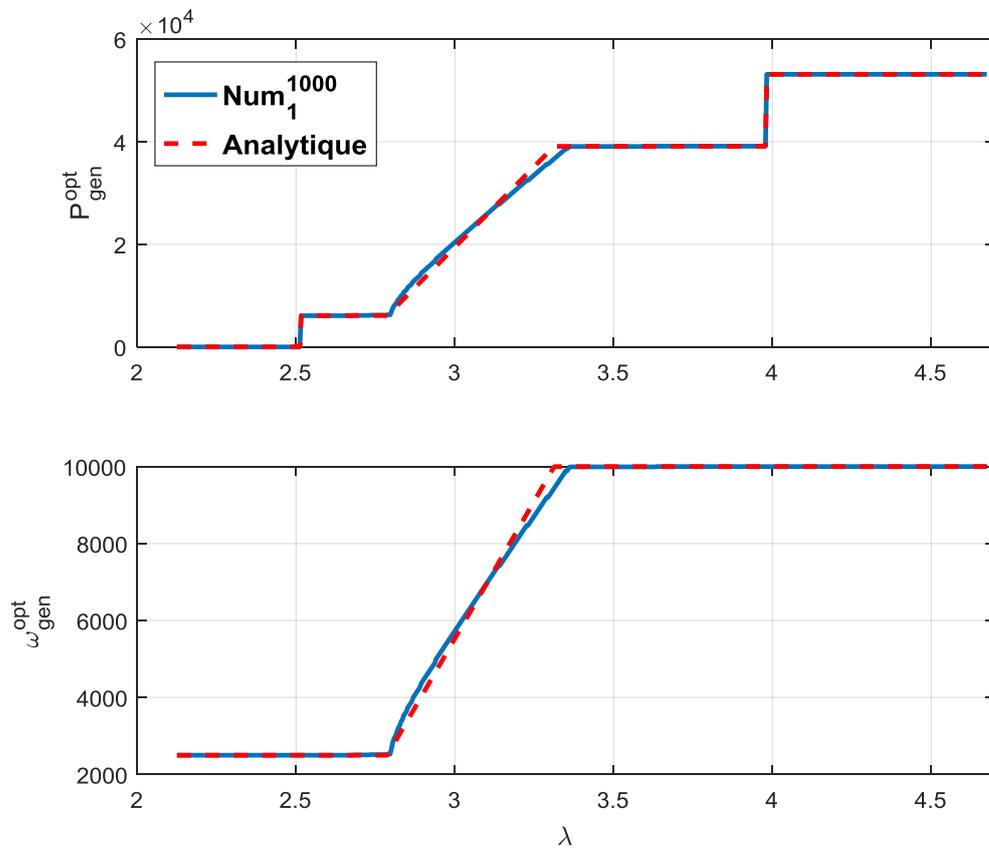


FIGURE 4.11 – Comparaison des commandes obtenues par la méthode analytique et la méthode Num_1^{1000} pour les différentes valeurs de λ

Discussion

La figure 4.11 permet de valider les commandes obtenues par l'application de la méthodologie analytique. En effet, les commandes issues des méthodes analytique et Num_1^{1000} sont très similaires (figure 4.11).

Nous avons également comparé la méthode Num_1^{1000} avec la méthode Num_2^{1000} (figure 4.12).

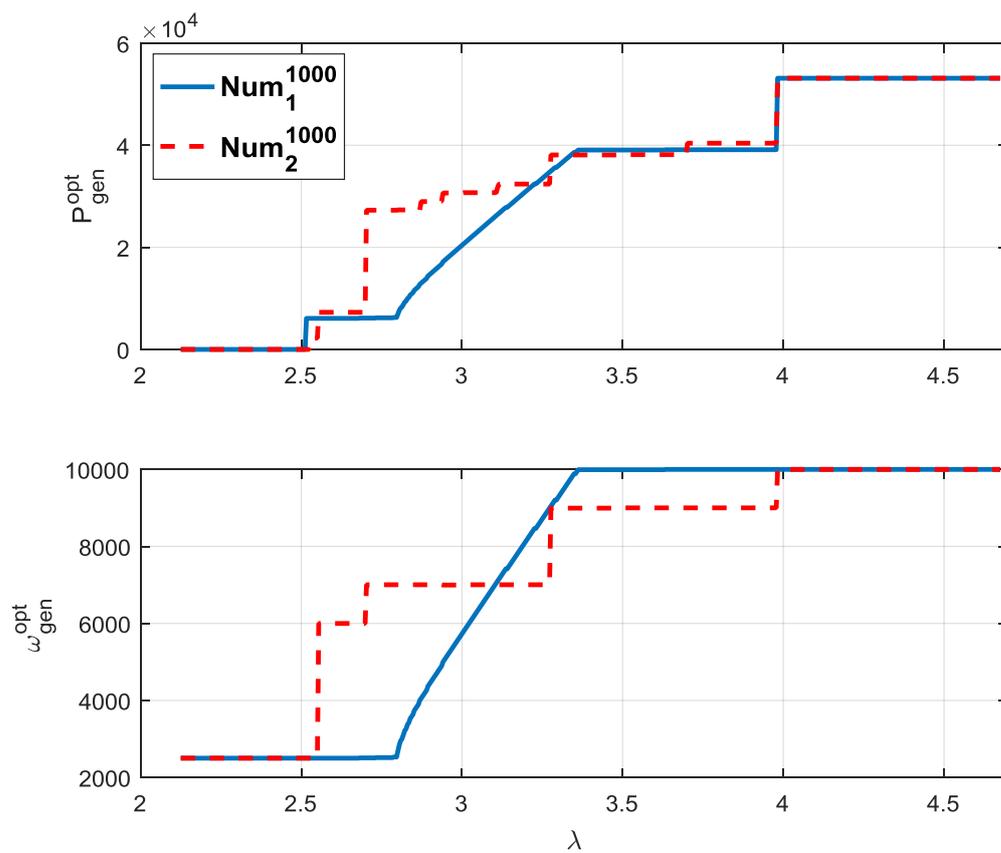


FIGURE 4.12 – Comparaison des commandes obtenues par les méthodes Num_1^{1000} et Num_2^{1000}

Discussion

Les résultats obtenus montrent un intérêt important des modèles convexes et de la méthode analytique qui réside dans la régularité de la solution. En effet, comme le montre la figure 4.12, la solution numérique basée sur les modèles de référence (Num_2^{1000}) présente une forte irrégularité sous la forme de sauts brusques. Ce type de comportement peut parvenir, d'une part, des erreurs numériques dues à la discrétisation des commandes continues. D'autre part, les erreurs de mesures réalisées sur les points de mesures du modèle de référence peuvent être également à l'origine de ce phénomène. Or, le résultat de la méthode analytique représente mieux la physique car il s'explique par le fait que la solution optimale pour l'hybride série est celle qui maximise le rendement du moteur thermique (courbe verte dans la figure 1.9). Autrement dit, l'optimum est de produire l'électricité au meilleur rendement du moteur thermique.

Le temps de calcul des stratégies calculé à partir de (1.52) est donné par le tableau (4.1).

Stratégie	Temps de Calcul [ms]
Analytique	0.12
Num_1^{1000}	15.11
Num_2^{1000}	36.53
Num_1^{10}	0.25
Num_2^{10}	0.46

TABLE 4.1 – Temps de calcul moyen consommé par les méthodes analytique, Num_1^{1000} , Num_2^{1000} , Num_1^{10} et Num_2^{10} pour le calcul des commandes sur un pas de temps

Concernant la mémoire, comme présenté dans les résultats du chapitre 3, il y a les paramètres fixes (tableau 4.2), et les variables intermédiaires.

Stratégie	Paramètres	Nombre total
Analytique	MT : $a_1, a_2, q_2, q_1, q_0, p_1$ et p_0	7
	GEN : b_1	9
Num_1	MT : $a_1, a_2, P_{\text{lim}}, p_0, p_1, Q_0, q_2, q_1, q_0$ et Q_{lim} ,	10
	GEN : b_1 et b_0	18
Num_2	MT : cartographie du débit carburant (25×17)	425
	GEN : cartographie des pertes électriques ($23 \times 15 \times 3$)	1035

TABLE 4.2 – Nombre de paramètres fixes utilisés par les stratégies analytique, Num_1 et Num_2 pour le calcul de la puissance et du régime de la génératrice optimaux

Pour les stratégies numériques, le nombre des variables intermédiaires est égal à la somme des tailles du vecteur H et des vecteurs commandes P_{gen} et ω_{gen} . Par conséquent, le maillage 1000 génère 3000 variables intermédiaires et le maillage 10 génère 30 variables intermédiaires. Pour la stratégie analytique, les variables intermédiaires sont les seuils de λ . On peut remarquer que le nombre de ces seuils dépend du cas sélectionné. Pour cela, on considère le cas qui comporte le nombre maximum de seuils : quand H est globalement convexe où on calcule 4 seuils de λ . Par ailleurs, la méthode analytique possède 4 optimums à calculer : $\omega_{\text{gen}}^c(P_{\text{gen}})$, $P_{\text{gen}}^{\text{lim}1}$, $P_{\text{gen}}^{\text{lim}2}$ et P_{gen}^* . Ces derniers dépendent des paramètres : $\alpha_0, \alpha_1, b_1^{\text{min}}, b_1^{\text{max}}, P_{\text{lim}}^{\text{min}}$ et $P_{\text{lim}}^{\text{max}}$. Le nombre total des variables intermédiaires pour chaque stratégie est résumé dans le tableau 4.3.

Finalement, la mémoire totale occupée par chaque stratégie est égale au nombre des paramètres fixes + le nombre des variables intermédiaires, en considérant 1 scalaire = 1 Double (tableau 4.4).

Stratégie	Nombre total
Analytique	10
Num ₁ ¹⁰⁰⁰	3000
Num ₂ ¹⁰⁰⁰	3000
Num ₁ ¹⁰	30
Num ₂ ¹⁰	30

TABLE 4.3 – Nombre de variables intermédiaires calculées par les stratégies analytique, Num₁¹⁰⁰⁰, Num₂¹⁰⁰⁰, Num₁¹⁰ et Num₂¹⁰ pour le calcul de la puissance et du régime de la génératrice optimaux

Stratégie	Espace mémoire occupé [Doubles]
Analytique	26
Num ₁ ¹⁰⁰⁰	3028
Num ₂ ¹⁰⁰⁰	4460
Num ₁ ¹⁰	58
Num ₂ ¹⁰	1490

TABLE 4.4 – Espace mémoire occupé par les stratégies analytique, Num₁¹⁰⁰⁰, Num₂¹⁰⁰⁰, Num₁¹⁰ et Num₂¹⁰ pour le calcul de la puissance et du régime de la génératrice optimaux

Validation En-Ligne

Dans cette étape de validation, les stratégies analytique et numériques sont testées en-ligne sur le simulateur du véhicule (MIL) afin d'établir leurs bilans énergétiques (consommation de carburant et trajectoire SoE). On rappelle que, dans ce chapitre, le véhicule étudié est sans step-up. Sa batterie a une tension d'environ 400V. Il faut noter que le calcul des consommations thermique et électrique de toutes les stratégies est réalisé à partir des modèles de référence (1.10) et (1.16).

Cycle	Stratégie	Conso [L/100km]	ΔConso [%]
ARTEMIS Urbain	Analytique	4.67	0.43
	Num ₁ ¹⁰⁰⁰	4.67	0.43
	Num ₂ ¹⁰⁰⁰	4.65	-
	Num ₁ ¹⁰	4.83	3.87
	Num ₂ ¹⁰	4.77	2.58

TABLE 4.5 – Résultats de consommation de carburant des méthodes analytique, Num₁¹⁰⁰⁰, Num₂¹⁰⁰⁰, Num₁¹⁰ et Num₂¹⁰

Remarque : compte tenu du dimensionnement des machines électriques, notre véhicule ne peut effectuer les cycles extra-urbain en hybride série.

Discussion D'après le tableau 4.5, on peut constater que :

- L'impact de la modélisation convexe sur la consommation de carburant de la méthode Num₁¹⁰⁰⁰ se traduit par une surconsommation de 0.43% par rapport à la meilleure solution donnée par la méthode Num₂¹⁰⁰⁰.
- La méthode Num₁¹⁰⁰⁰ et la méthode analytique ont exactement la même consommation.
- Les méthodes Num₁¹⁰ et Num₂¹⁰ présentent une surconsommation qui peut atteindre les 4%.

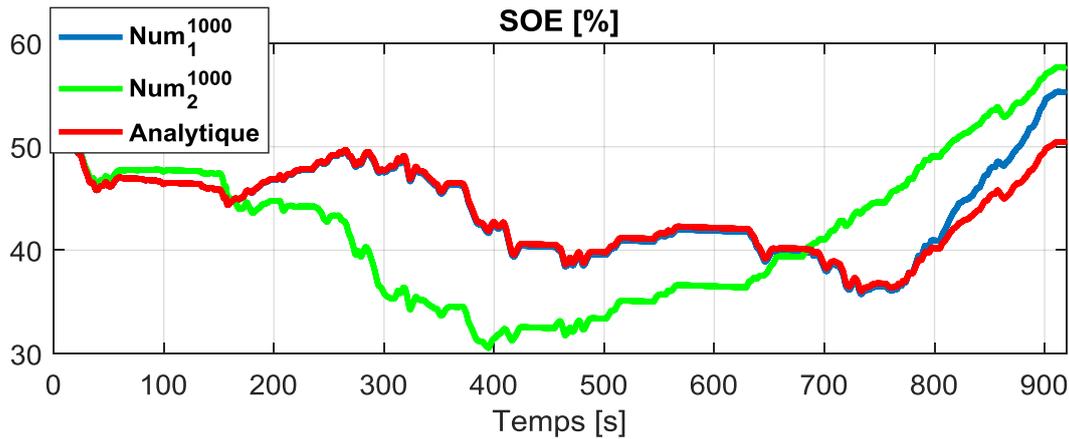


FIGURE 4.13 – Trajectoires *SoE* des stratégies analytique, Num_1^{1000} et Num_2^{1000} pour le cycle ARTEMIS urbain

La figure 4.13 montre que les stratégies analytique et Num_1^{1000} ont des trajectoires *SoE* similaires. La trajectoire *SoE* de l’approche Num_2^{1000} est différente du fait que les commandes sont différentes.

4.4 Conclusion

En conclusion, la modélisation convexe permet de lisser les commandes (figure 4.12), de réduire le temps de calcul ainsi que la mémoire tout en ayant une consommation assez proche de la meilleure solution. La méthode analytique présente également le meilleur compromis consommation/performances pour l’hybride série. En effet, elle est la moins coûteuse en termes de temps de calcul et de mémoire pour une surconsommation de 0.5%.

Chapitre 5

Application au véhicule hybride équipé d'un Élévateur de Tension

L'objectif de ce chapitre est de calculer la tension optimale qui minimise la consommation énergétique d'un véhicule hybride équipé d'un Step-Up. On rappelle qu'à l'origine le Step-Up est utilisé afin d'augmenter les performances de la(ou les) machine(s) électrique(s), et ce en élevant la tension de la batterie comme le montre la figure 1.17. En revanche, la présence du Step-Up génère des pertes qui sont plus ou moins importantes en fonction de la tension. Par ailleurs, les pertes propres à la(aux) machine(s) électrique(s) dépendent elles aussi de la tension d'alimentation (tension à la sortie du Step-Up) comme le montre la figure 1.28. Ceci nous a conduit à développer une stratégie de pilotage de la tension d'une manière à optimiser la consommation totale d'énergie tout en assurant le niveau de performances demandé par le conducteur.

Ce chapitre est divisé en quatre sections. La première section est dédiée à l'optimisation analytique (en se basant sur la méthodologie analytique de la thèse figure 1.39) de la tension pour les architectures : mono-machine (parallèle) et bi-machines (bi-parallèle et série). Les résultats de validation des solutions analytiques sont également présentés dans cette section. Elle est suivie par la section 5.2 où la sensibilité de la solution analytique est quantifiée. Finalement, l'évaluation des performances du Step-Up est présentée dans la section 5.3 en comparant le bilan énergétique du véhicule étudié (figure 1.5) avec celui d'un véhicule similaire sans Step-Up.

On rappelle que, pour l'optimisation de la tension, les couples et régimes des machines électriques sont connus. En effet, l'optimisation de la tension se base sur les couples et régimes électriques réels mesurés au niveau des organes (figure 1.37). Cette hypothèse de découplage entre l'optimisation de la tension, du régime et du couple tient du fait que la puissance électrique P_e préserve sa forme convexe par rapport à chacune de ces variables quand les deux autres sont constantes (figures 1.26, 1.27 et 1.28). Cette hypothèse a été vérifiée hors-ligne sur tout le domaine (couple, régime et tension) des machines électriques.

5.1 Optimisation Analytique de la Tension

5.1.1 Véhicule Hybride Mono-Machine

Dans une configuration parallèle avec Step-Up, représentée par la figure 5.1, le véhicule est composé par : une machine électrique (ME) connectée à la batterie via le Step-Up et un moteur thermique (MT).

Le problème d'optimisation de la tension pour un véhicule hybride mono-machines (*POTMM*)

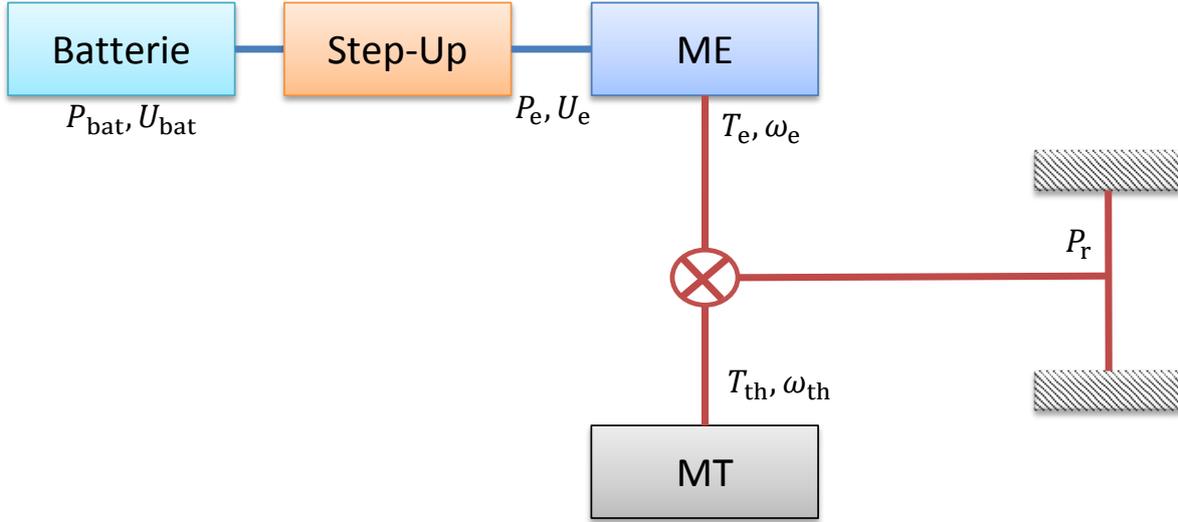


FIGURE 5.1 – HEV Parallèle avec Step-Up

s'écrit comme suit :

$$POTMM : \begin{cases} \min_{U_e} \int_{t_0}^{t_f} Q(T_{th}(t), \omega_{th}(t)) dt \\ \dot{SoE}(t) = -\frac{P_{bat}(T_e(t), \omega_e(t), U_e)}{E_{max}} \\ 0 \leq SoE(t) \leq 100 \\ SoE(t_0) \leq SoE(t_f) \\ U_{bat} \leq U_e \leq \bar{U}_e \end{cases} \quad (5.1)$$

Afin de résoudre *POTMM*, le PMP est utilisé (voir section 1.3.2). L'Hamiltonien est donné par :

$$H(T_{th}(t), \omega_{th}(t), T_e(t), \omega_e(t), U_e, \lambda) = Q(T_{th}(t), \omega_{th}(t)) + \lambda P_{bat}(T_e(t), \omega_e(t), U_e) \quad (5.2)$$

Alors, la tension optimale est calculée à partir de :

$$U_e^{opt}(T_e(t), \omega_e(t)) = \arg \min_{U_e} (H(T_{th}(t), \omega_{th}(t), T_e(t), \omega_e(t), U_e, \lambda)) \quad (5.3)$$

où, $T_{th}(t), \omega_{th}(t), T_e(t), \omega_e(t)$ sont respectivement les couples et les régimes courants du MT ainsi que de la ME.

D'après l'équation (1.35), on a :

$$P_{bat} = P_e + P_S \quad (5.4)$$

où, P_e est la puissance électrique de la ME et P_S représente les pertes dans le Step-Up.

Le modèle quadratique de la puissance P_e en fonction de $T_e(t), \omega_e(t)$ et U_e est donné par (1.18) :

$$P_e(T_e, \omega_e, U_e) = \begin{cases} b_2^-(\omega_e, U_e)T_e^2 + b_1^-(\omega_e, U_e)T_e + b_0(\omega_e, U_e) & \text{si } \underline{T}_e(\omega_e, U_e) \leq T_e \leq 0 \\ b_2^+(\omega_e, U_e)T_e^2 + b_1^+(\omega_e, U_e)T_e + b_0(\omega_e, U_e) & \text{si } 0 \leq T_e \leq \bar{T}_e(\omega_e, U_e) \end{cases} \quad (5.5)$$

Où, les paramètres $b_2^\pm(\omega_e, U_e)$, $b_1^\pm(\omega_e, U_e)$ et $b_0(\omega_e, U_e)$ sont donnés par les équations (1.19), (1.20) et (1.21) comme suit :

$$b_2^\pm(\omega_e, U_e) = \sum_{n=0}^2 \sum_{m=0}^2 \alpha_{nm}^\pm U_e^n \omega_e^m \quad (5.6)$$

$$b_1^\pm(\omega_e, U_e) = \sum_{n=0}^2 \sum_{m=0}^2 \beta_{nm}^\pm U_e^n \omega_e^m \quad (5.7)$$

$$(5.8)$$

Concernant les pertes P_S , elles sont déterminées à partir du modèle analytique présenté dans l'équation (1.30). Ce modèle est non-convexe par rapport à U_e . Pour cela, afin de simplifier la résolution analytique du problème *POTMM*, P_S sont approximées par une fonction affine (donc convexe) par rapport à U_e , comme suit :

$$P_S(T_e(t), \omega_e(t), U_e) = K_1(T_e(t), \omega_e(t))U_e + K_0(T_e(t), \omega_e(t)) \quad (5.9)$$

La figure 5.3 montre que le modèle affine représente correctement les mesures de P_S (3% de RMSE). Les coefficients K_0 et K_1 du modèle (5.9) sont déterminés, en-ligne, en fonction de $T_e(t)$ et $\omega_e(t)$ par la méthode des moindres carrés comme le montre la figure 5.2.

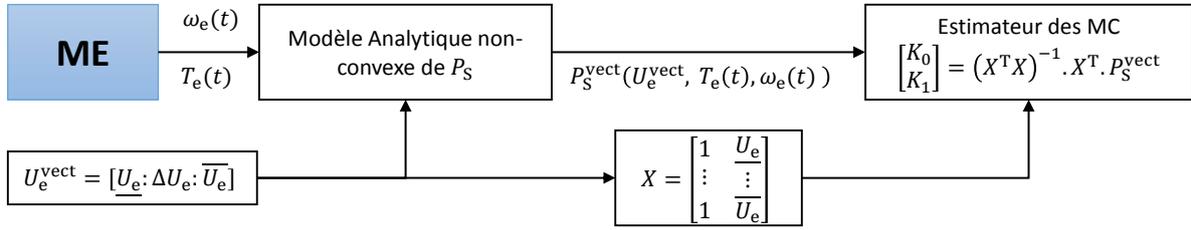


FIGURE 5.2 – Estimation en-ligne des pertes Step-Up dans le cas mono-machine par les moindres carrés

En remplaçant P_e et P_S par leurs modèles (1.18) et (5.9) dans P_{bat} , P_{bat} peut s'écrire sous la forme suivante :

$$P_{\text{bat}}(T_e, \omega_e, U_e) = U_2(T_e, \omega_e)U_e^2 + U_1(T_e, \omega_e)U_e + U_0(T_e, \omega_e) \quad (5.10)$$

Où, $U_2(T_e, \omega_e)$, $U_1(T_e, \omega_e)$ et $U_0(T_e, \omega_e)$ sont données par :

$$U_2 = \begin{cases} \sum_{m=0}^2 (\alpha_{m2}^- T_e^2 + \beta_{m2}^- T_e + \gamma_{m2}) \omega_e^m & \text{si } T_e \leq 0 \\ \sum_{m=0}^2 (\alpha_{m2}^+ T_e^2 + \beta_{m2}^+ T_e + \gamma_{m2}) \omega_e^m & \text{si } T_e \geq 0 \end{cases} \quad (5.11)$$

$$U_1 = \begin{cases} \sum_{m=0}^2 (\alpha_{m1}^- T_e^2 + \beta_{m1}^- T_e + \gamma_{m1}) \omega_e^m + K_1(T_e(t), \omega_e(t)) & \text{si } T_e \leq 0 \\ \sum_{m=0}^2 (\alpha_{m1}^+ T_e^2 + \beta_{m1}^+ T_e + \gamma_{m1}) \omega_e^m + K_1(T_e(t), \omega_e(t)) & \text{si } T_e \geq 0 \end{cases} \quad (5.12)$$

$$U_0 = \begin{cases} \sum_{m=0}^2 (\alpha_{m0}^- T_e^2 + \beta_{m0}^- T_e + \gamma_{m0}) \omega_e^m + K_0(T_e(t), \omega_e(t)) & \text{si } T_e \leq 0 \\ \sum_{m=0}^2 (\alpha_{m0}^+ T_e^2 + \beta_{m0}^+ T_e + \gamma_{m0}) \omega_e^m + K_0(T_e(t), \omega_e(t)) & \text{si } T_e \geq 0 \end{cases} \quad (5.13)$$

En remplaçant P_{bat} par (5.10) dans l'Hamiltonien, on obtient :

$$H(T_{\text{th}}(t), \omega_{\text{th}}(t), T_e(t), \omega_e(t), U_e, \lambda) = Q(T_{\text{th}}(t), \omega_{\text{th}}(t)) + \lambda (U_2(T_e, \omega_e)U_e^2 + U_1(T_e, \omega_e)U_e + U_0(T_e, \omega_e)) \quad (5.14)$$

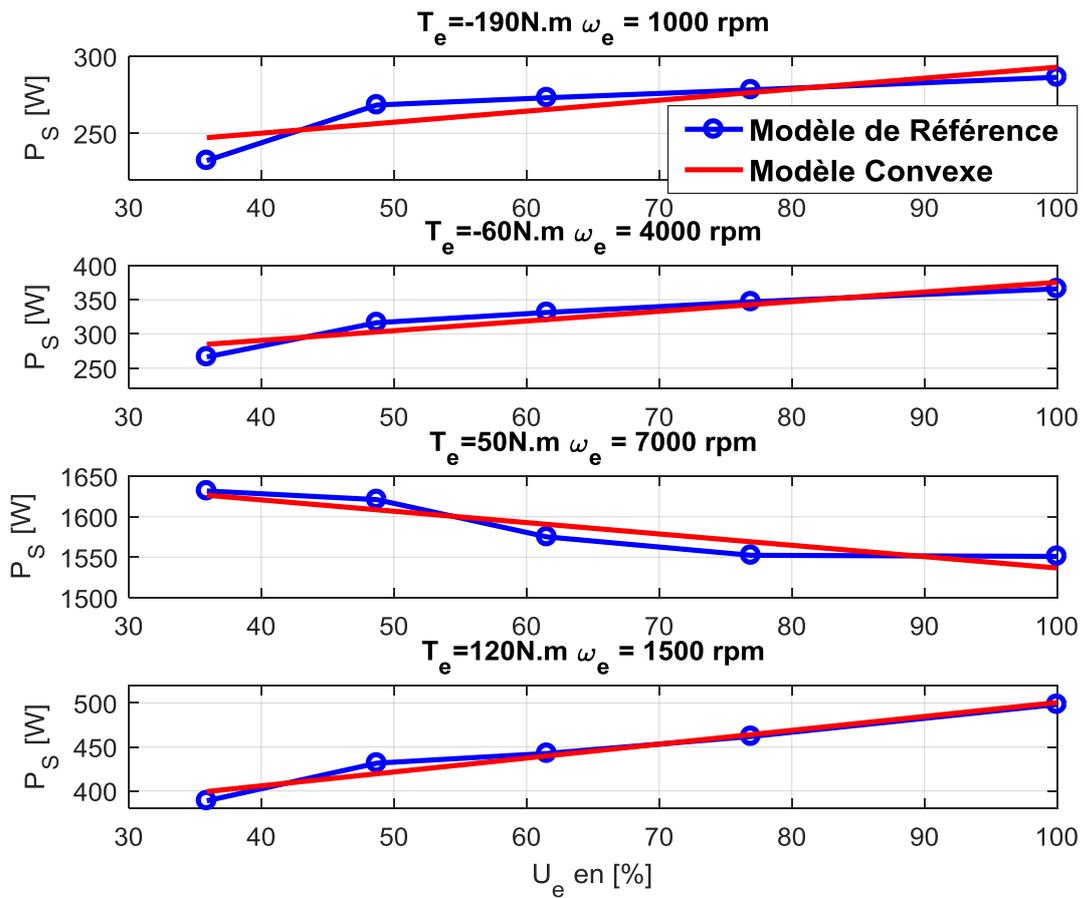


FIGURE 5.3 – Validation du modèle affine de P_S

On peut constater que dans H , Q ne dépend pas explicitement de U_e , ce qui implique :

$$U_e^{\text{opt}}(T_e(t), \omega_e(t)) = \arg \min_{U_e} (P_{\text{bat}}(T_e, \omega_e, U_e)) \quad (5.15)$$

Finalement, afin de déterminer U_e^{opt} , il suffit de résoudre l'équation suivante :

$$\frac{\partial P_{\text{bat}}}{\partial U_e} = 0 \quad (5.16)$$

A ce stade, il reste à étudier la convexité de P_{bat} (étape 3 dans la figure 1.39), donnée par (5.10), par rapport à U_e . Ceci revient à déterminer le signe de $U_2(T_e, \omega_e)$. En effet, si le signe du terme $U_2(T_e, \omega_e)$ est positif alors $P_{\text{bat}}(U_e)$ est convexe et on peut alors garantir l'unicité de la solution de (5.16) donnée par (étape 4 dans la figure 1.39) :

$$U_e^*(T_e, \omega_e) = \frac{-U_1(T_e, \omega_e)}{2U_2(T_e, \omega_e)} \quad (5.17)$$

$U_2(T_e, \omega_e)$ a été calculé, à partir de (5.11), sur tout le domaine (couple, régime) de la machine principale (c'est-à-dire pour tout $T_e \in [\underline{T}_e, \bar{T}_e]$ et $\omega_e \in [\underline{\omega}_e, \bar{\omega}_e]$) comme le montre la figure 5.4. D'après la figure 5.4, $U_2(T_e, \omega_e)$ est positif $\forall T_e, \omega_e$.

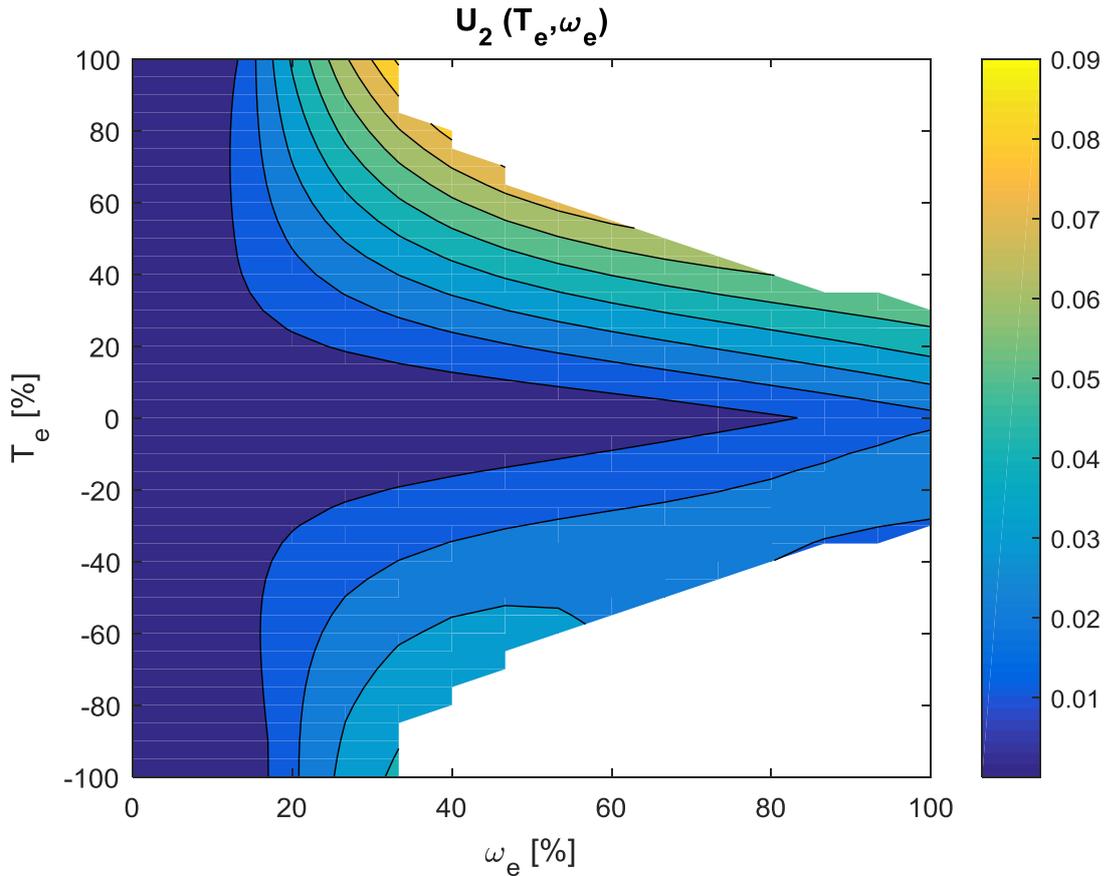


FIGURE 5.4 – Calcul de U_2 pour la machine principale

Finalement, la tension optimale $U_e^{\text{opt}}(T_e(t), \omega_e(t))$, pour un hybride parallèle, est donnée par :

$$U_e^{\text{opt}}(T_e(t), \omega_e(t)) = \begin{cases} \underline{U}_e(T_e(t), \omega_e(t)) & \text{si } U_e^*(T_e(t), \omega_e(t)) \leq \underline{U}_e(T_e(t), \omega_e(t)) \\ U_e^*(T_e(t), \omega_e(t)) & \text{si } \underline{U}_e(T_e(t), \omega_e(t)) \leq U_e^*(T_e(t), \omega_e(t)) \leq \bar{U}_e \\ \bar{U}_e & \text{si } U_e^*(T_e(t), \omega_e(t)) \geq \bar{U}_e \end{cases} \quad (5.18)$$

Où, $\underline{U}_e(T_e(t), \omega_e(t))$ est imposée par la demande conducteur.

Résultats de Simulation

Validation Hors-Ligne Comme le montre le résultat (5.18), la tension optimale ne dépend que du couple et régime de la machine électrique. Pour cela, nous ferons la validation de la solution analytique (5.18), notée $U_{e\text{Analytique}}^{\text{opt}}$, sur tout le domaine (couple, régime) de la machine électrique. Les étapes de validation de la tension $U_{e\text{Analytique}}^{\text{opt}}$ sont :

- Étape 1 : calcul de $U_{e\text{Analytique}}^{\text{opt}}$ sur tout le domaine (couple, régime) de la machine (figure 5.5).
- Étape 2 : calcul des Pertes Électriques Totales (PET) calculées en utilisant la tension $U_{e\text{Analytique}}^{\text{opt}}$ sur tout le domaine (couple, régime) de la machine, notées $PET_{\text{Analytique}}$. Les PET comprennent les pertes de la batterie, les pertes du step-up et celles de la machine. Les PET sont calculées à partir des modèles de référence (1.16) et (1.30).
- Étape 3 : calcul numérique de la tension optimale $U_{e\text{Num}}^{\text{opt}}$ (figure 5.6) qui minimisent les PET en suivant le schéma de la figure 1.40. Soit, U_e est discrétisée entre \underline{U}_e et \bar{U}_e ; puis pour chaque point de fonctionnement (T_e, ω_e) , la tension numérique optimale est trouvée comme suit :

$$U_{e\text{Num}}^{\text{opt}}(T_e, \omega_e) = \arg \min_{U_e \in [\underline{U}_e, \bar{U}_e]} (PET(T_e, \omega_e, U_e)) \quad (5.19)$$

- Étape 4 : calcul des PET_{Num} correspondant à la tension $U_{e\text{Num}}^{\text{opt}}$.
- Étape 5 : calcul de l'écart entre les pertes électriques de la solution numérique et celles de la solution analytique, $\Delta PET = PET_{\text{Num}} - PET_{\text{Analytique}}$ (représenté par la figure 5.7) afin d'évaluer l'impact de la solution analytique sur les pertes électriques totales.

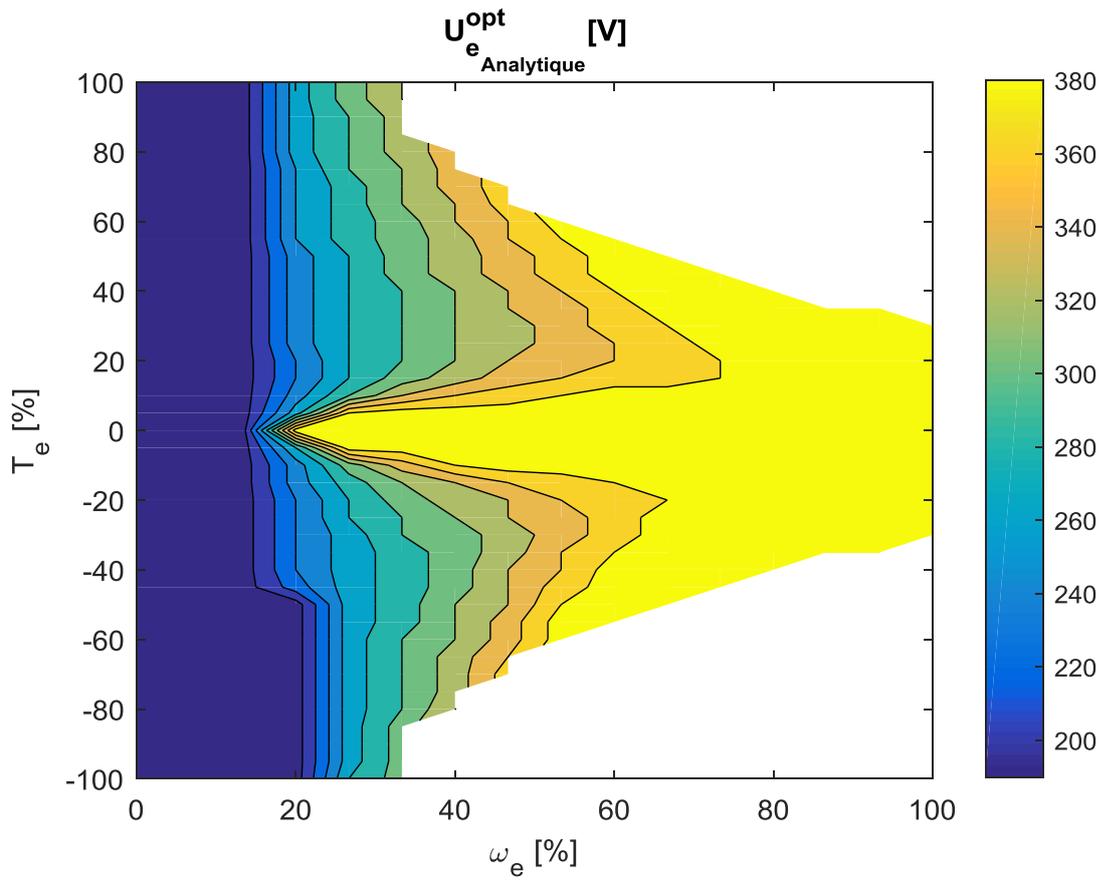


FIGURE 5.5 – Représentation de la tension $U_{e\text{Analytique}}^{\text{opt}}$ sur tout le domaine couple (T_e), régime (ω_e) de la machine électrique

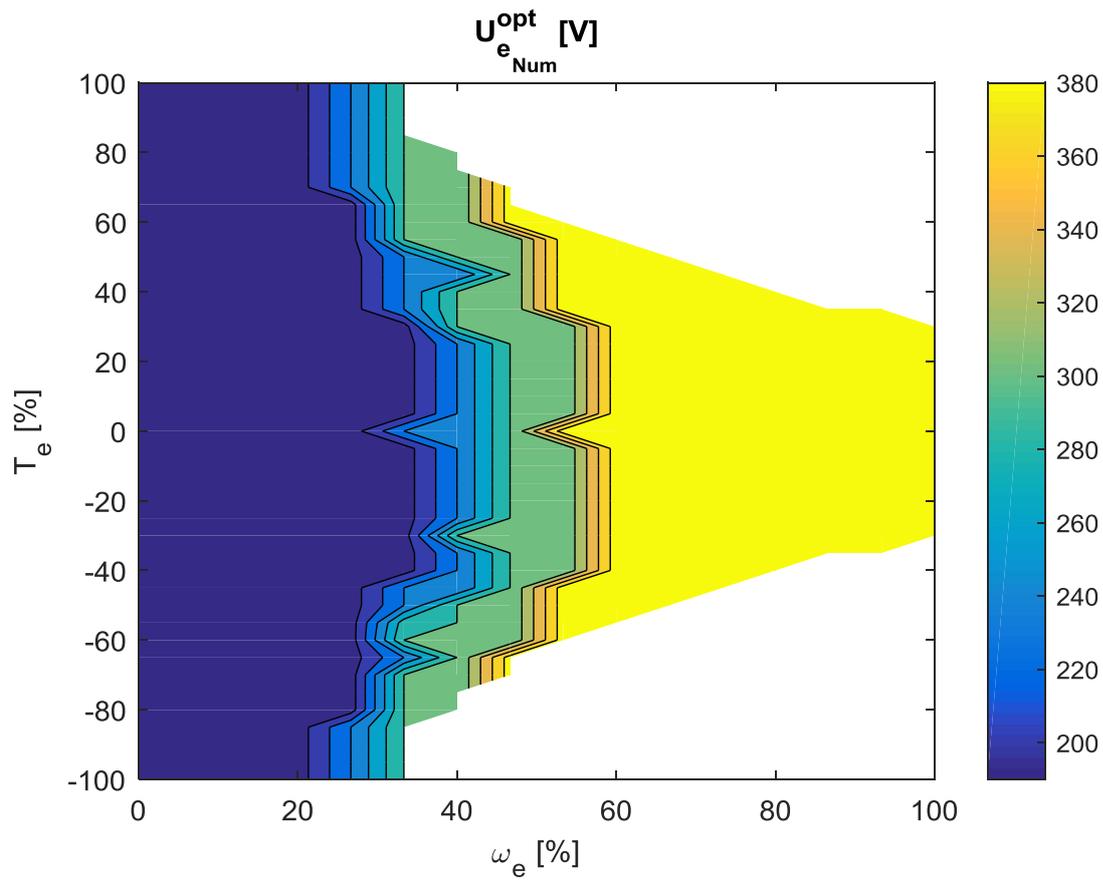


FIGURE 5.6 – Représentation de la tension $U_{e\text{Num}}^{\text{opt}}$ sur tout le domaine couple (T_e), régime (ω_e) de la machine électrique

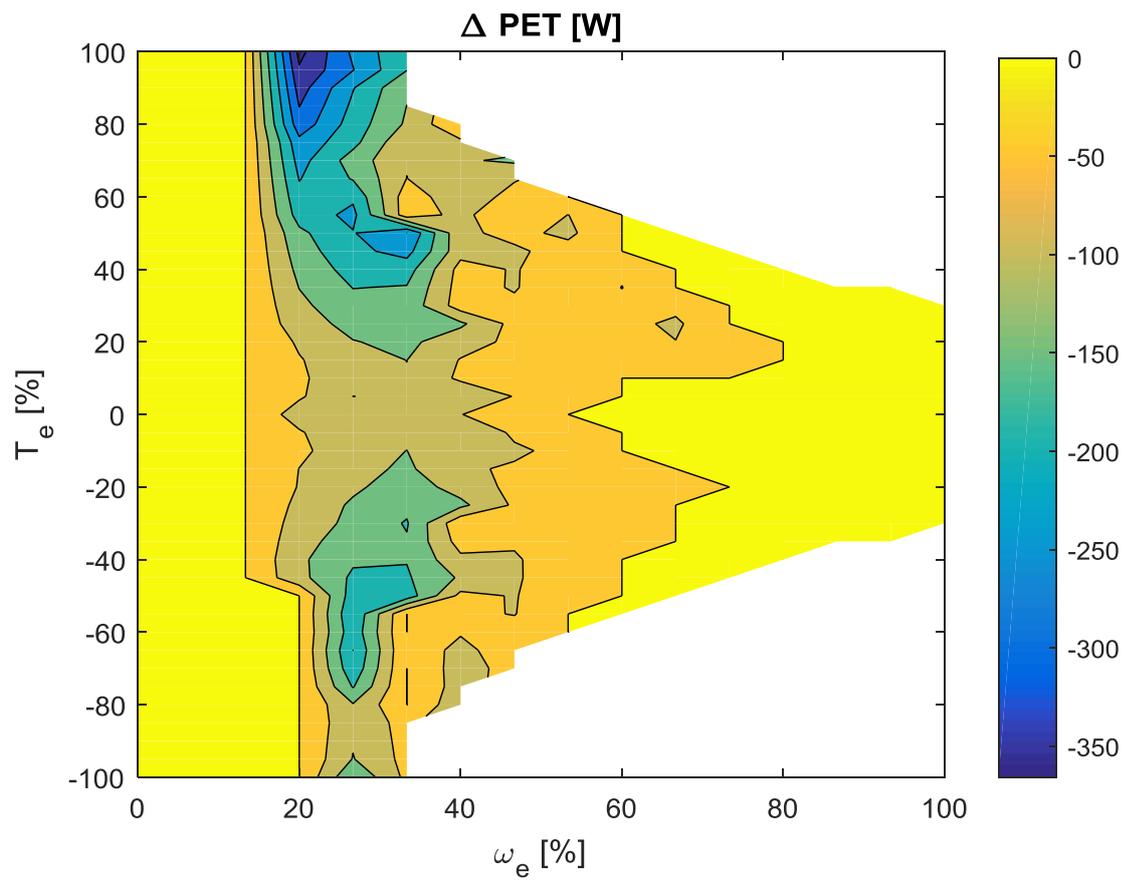


FIGURE 5.7 – Écart absolu des pertes électriques totales ΔPET sur tout le domaine couple (T_e), régime (ω_e) de la machine électrique

Discussion La figure 5.7 montre que l'écart absolu ΔPET est faible relativement aux consommations électriques PET_{Num} et $PET_{Analytique}$. En effet, il correspond à une RMSE inférieure à 5%. Ceci permet de valider la solution analytique ($U_{eAnalytique}^{opt}$) représentée par la figure 5.5. Les figures 5.5 et 5.6, représentant la tension optimale obtenue par la méthode analytique et par la méthode numérique respectivement, montrent que la tension optimale présente une forme de régularité en fonction du régime de la machine électrique. En effet, elle est croissante en fonction de ce dernier. Cette caractéristique a bien été conservée par la modélisation convexe.

Validation En-Ligne Dans cette étape de validation, les stratégies analytique et Num_2^{1000} sont testées en-ligne sur le simulateur du véhicule (MIL) afin d'établir leurs bilans énergétiques (consommation de carburant, Énergie Électrique Totale Perdue ($EETP$) et trajectoire SoE). Il faut noter que :

- l'énergie électrique totale perdue ($EETP$) est l'intégrale des pertes électriques totales sur un cycle donné.
- le calcul de la consommation de carburant et de l' $EETP$ de toutes les stratégies est réalisé à partir des modèles de référence (1.9), (1.16), (1.24) et (1.30).
- pour la stratégie analytique, le couple optimal de la machine électrique est calculé analytiquement en utilisant les résultats de la section 2.1 du chapitre 2.
- pour la stratégie Num_2^{1000} , le couple optimal de la machine électrique est calculé numériquement en utilisant les modèles de référence et en prenant en compte les pertes de la batterie et du step-up dans le calcul de l'Hamiltonien.

Cycle	Stratégie	Conso [L/100km]	$EETP$ [Wh]	Δ Conso [%]	[%]
WLTC	Analytique	4.37	362	0.45	6.47
	Num_2^{1000}	4.35	340	-	-
ARTEMIS Urbain	Analytique	5.36	150	0.18	10.34
	Num_2^{1000}	5.35	145	-	-
ARTEMIS Routier	Analytique	4.17	240	0.24	6.66
	Num_2^{1000}	4.16	225	-	-
ARTEMIS Autoroutier	Analytique	6.26	432	0.8	1.17
	Num_2^{1000}	6.21	427	-	-

TABLE 5.1 – Résultats de consommation de carburant et de l' $EETP$ des stratégies analytique et Num_2^{1000}

Discussion D'après le tableau 5.1, on peut constater que l'impact de la résolution convexe sur la consommation énergétique se traduit par une surconsommation de carburant inférieure à 0.8% et une surconsommation électrique inférieure à 10% par rapport à la meilleure solution donnée par la méthode Num_2^{1000} .

La figure 5.8 montre que les stratégies analytique et Num_2^{1000} ont des trajectoires SoE similaires sur tous les cycles étudiés.

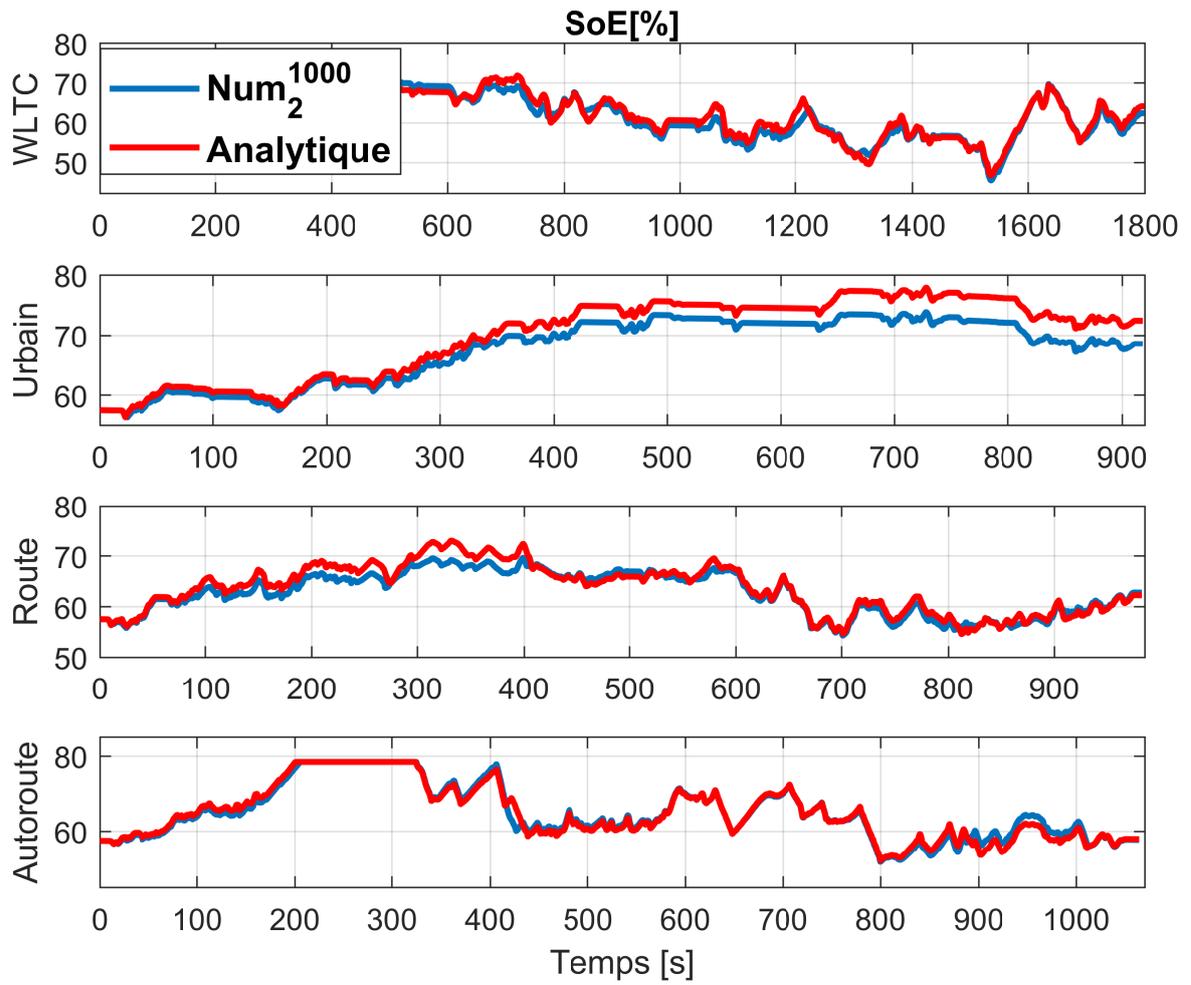


FIGURE 5.8 – Trajectoires *SoE* des stratégies analytique et Num₂¹⁰⁰⁰ pour tous les cycles étudiés

5.1.2 Véhicule Hybride Bi-Machines

Dans une configuration bi-machines avec Step-Up (bi-parallèle représentée par la figure 5.9 ou série représentée par la figure 5.10), le véhicule est composé par : deux machines électriques liées à la batterie via le Step-Up et un moteur thermique.

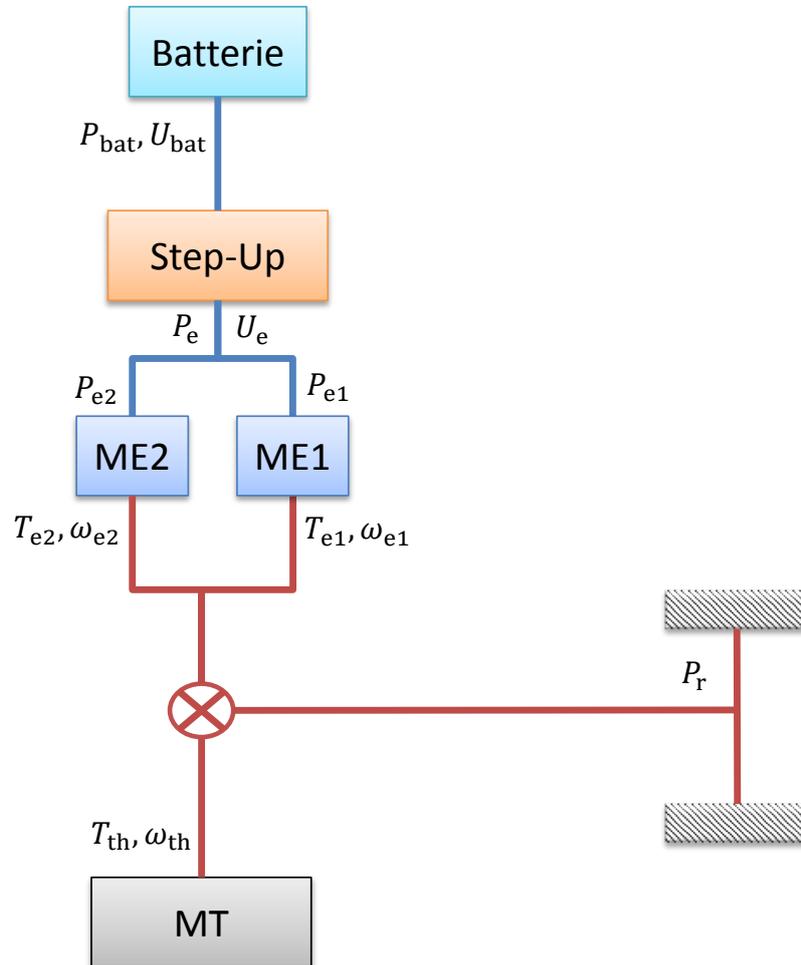


FIGURE 5.9 – HEV Bi-Parallèle avec Step-Up

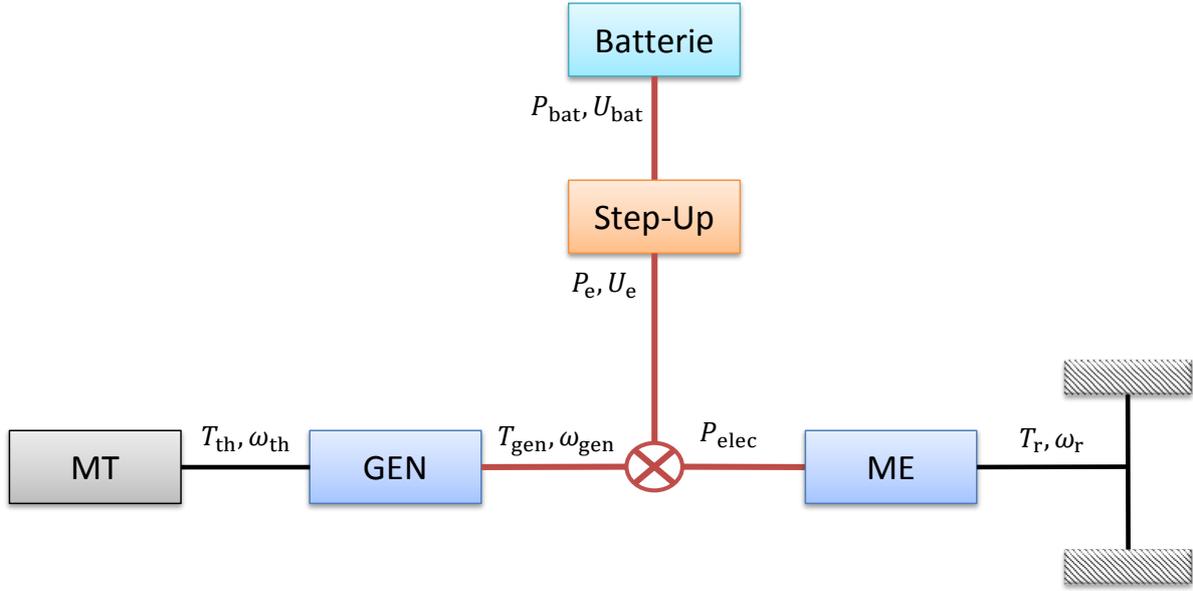


FIGURE 5.10 – HEV Série avec Step-Up

Le problème d'optimisation de la tension pour un véhicule hybride bi-machines (*POTBM*) s'écrit comme suit :

$$POTBM : \begin{cases} \min_{U_e} \int_{t_0}^{t_f} Q(T_{th}(t), \omega_{th}(t)) dt \\ \dot{SoE}(t) = -\frac{P_{bat}(T_{e_1}(t), \omega_{e_1}(t), T_{e_2}(t), \omega_{e_2}(t), U_e)}{E_{max}} \\ 0 \leq SoE(t) \leq 100 \\ SoE(t_0) \leq SoE(t_f) \\ U_{bat} \leq U_e \leq \bar{U}_e \end{cases} \quad (5.20)$$

Remarque : l'optimisation de la tension pour la configuration série avec Step-Up peut être traitée par la même démarche que la configuration bi-parallèle en remplaçant : T_{e_1} par T_{gen} , ω_{e_1} par ω_{gen} , T_{e_2} par T_r et ω_{e_2} par ω_r . En effet, l'optimisation de la tension reçoit en entrée les couples et régimes courants des machines électriques et ce, quelque soit la configuration (bi-parallèle ou série).

Le PMP est utilisé pour résoudre *POTBM* (voir section 1.3.2). L'Hamiltonien est donné par :

$$H(T_{th}(t), \omega_{th}(t), T_{e_1}(t), \omega_{e_1}(t), T_{e_2}(t), \omega_{e_2}(t), U_e, \lambda) = Q(T_{th}(t), \omega_{th}(t)) + \lambda P_{bat}(T_{e_1}(t), \omega_{e_1}(t), T_{e_2}(t), \omega_{e_2}(t), U_e) \quad (5.21)$$

Alors, la tension optimale est donnée par :

$$U_e^{opt}(T_{e_1}(t), \omega_{e_1}(t), T_{e_2}(t), \omega_{e_2}(t)) = \arg \min_{U_e} (H(T_{th}(t), \omega_{th}(t), T_{e_1}(t), \omega_{e_1}(t), T_{e_2}(t), \omega_{e_2}(t), U_e, \lambda)) \quad (5.22)$$

où, $T_{th}(t), \omega_{th}(t), T_{e_1}(t), \omega_{e_1}(t), T_{e_2}(t), \omega_{e_2}(t)$ sont les couples et les régimes courants du MT, de la ME1 et de la ME2 respectivement.

D'après l'équation (1.35), on a :

$$P_{bat} = P_e + P_S \quad (5.23)$$

où, $P_e = P_{e_1} + P_{e_2}$ est la somme des puissances électriques des machines électriques. P_S sont les pertes dans le Step-Up.

Les modèles analytiques des puissances P_{e_1} et P_{e_2} sont donnés par (1.18) :

$$P_{e_1}(T_{e_1}, \omega_{e_1}, U_e) = \begin{cases} b_{21}^-(\omega_{e_1}, U_e)T_{e_1}^2 + b_{11}^-(\omega_{e_1}, U_e)T_{e_1} + b_{01}(\omega_{e_1}, U_e) & \text{si } \underline{T}_{e_1}(\omega_{e_1}, U_e) \leq T_{e_1} \leq 0 \\ b_{21}^+(\omega_{e_1}, U_e)T_{e_1}^2 + b_{11}^+(\omega_{e_1}, U_e)T_{e_1} + b_{01}(\omega_{e_1}, U_e) & \text{si } 0 \leq T_{e_1} \leq \overline{T}_{e_1}(\omega_{e_1}, U_e) \end{cases} \quad (5.24)$$

$$P_{e_2}(T_{e_2}, \omega_{e_2}, U_e) = \begin{cases} b_{22}^-(\omega_{e_2}, U_e)T_{e_2}^2 + b_{12}^-(\omega_{e_2}, U_e)T_{e_2} + b_{02}(\omega_{e_2}, U_e) & \text{si } \underline{T}_{e_2}(\omega_{e_2}, U_e) \leq T_{e_2} \leq 0 \\ b_{22}^+(\omega_{e_2}, U_e)T_{e_2}^2 + b_{12}^+(\omega_{e_2}, U_e)T_{e_2} + b_{02}(\omega_{e_2}, U_e) & \text{si } 0 \leq T_{e_2} \leq \overline{T}_{e_2}(\omega_{e_2}, U_e) \end{cases} \quad (5.25)$$

Où, les paramètres $b_{21}^\pm(\omega_{e_1}, U_e)$, $b_{11}^\pm(\omega_{e_1}, U_e)$, $b_{01}(\omega_{e_1}, U_e)$, $b_{22}^\pm(\omega_{e_2}, U_e)$, $b_{12}^\pm(\omega_{e_2}, U_e)$ et $b_{02}(\omega_{e_2}, U_e)$ sont donnés par (1.19), (1.20) et (1.21) comme suit :

$$b_{21}^\pm(\omega_{e_1}, U_e) = \sum_{n=0}^2 \sum_{m=0}^2 \alpha_{nm}^{1\pm} U_e^n \omega_{e_1}^m \quad (5.26)$$

$$b_{11}^\pm(\omega_{e_1}, U_e) = \sum_{n=0}^2 \sum_{m=0}^2 \beta_{nm}^{1\pm} U_e^n \omega_{e_1}^m \quad (5.27)$$

$$b_{01}(\omega_{e_1}, U_e) = \sum_{n=0}^2 \sum_{m=0}^2 \gamma_{nm}^1 U_e^n \omega_{e_1}^m \quad (5.28)$$

$$b_{22}^\pm(\omega_{e_2}, U_e) = \sum_{n=0}^2 \sum_{m=0}^2 \alpha_{nm}^{2\pm} U_e^n \omega_{e_2}^m \quad (5.29)$$

$$b_{12}^\pm(\omega_{e_2}, U_e) = \sum_{n=0}^2 \sum_{m=0}^2 \beta_{nm}^{2\pm} U_e^n \omega_{e_2}^m \quad (5.30)$$

$$b_{02}(\omega_{e_2}, U_e) = \sum_{n=0}^2 \sum_{m=0}^2 \gamma_{nm}^2 U_e^n \omega_{e_2}^m \quad (5.31)$$

Concernant P_S , elles sont déterminées à partir du modèle analytique présenté dans l'équation (1.30). Ce modèle étant non-convexe par rapport à U_e , afin de simplifier la résolution analytique du problème *POTBM*, P_S sont approximées par un modèle affine (donc convexe) en fonction de U_e comme suit :

$$P_S(T_{e_1}, \omega_{e_1}, T_{e_2}, \omega_{e_2}, U_e) = K_0(T_{e_1}, \omega_{e_1}, T_{e_2}, \omega_{e_2}) + K_1(T_{e_1}, \omega_{e_1}, T_{e_2}, \omega_{e_2})U_e \quad (5.32)$$

Les coefficients K_0 et K_1 du modèle (5.32) sont déterminés, en-ligne, en fonction de $(T_{e_1}, \omega_{e_1}, T_{e_2}, \omega_{e_2})$ par la méthode des moindres carrés comme le montre la figure 5.11. La figure 5.12 permet de valider le modèle convexe (5.32) de P_S (4% de RMSE).

En remplaçant P_{e_1} , P_{e_2} et P_S par leurs modèles (1.18) et (5.32) dans P_{bat} , P_{bat} peut s'écrire sous la forme suivante :

$$P_{bat}(T_{e_1}, \omega_{e_1}, T_{e_2}, \omega_{e_2}, U_e) = U_2(T_{e_1}, \omega_{e_1}, T_{e_2}, \omega_{e_2})U_e^2 + U_1(T_{e_1}, \omega_{e_1}, T_{e_2}, \omega_{e_2})U_e + U_0(T_{e_1}, \omega_{e_1}, T_{e_2}, \omega_{e_2}) \quad (5.33)$$

Avec :

$$U_2(T_{e_1}, \omega_{e_1}, T_{e_2}, \omega_{e_2}) = \begin{cases} U_{21}^-(T_{e_1}, \omega_{e_1}) + U_{22}^-(T_{e_2}, \omega_{e_2}) & \text{si } T_{e_2}, T_{e_1} \leq 0 \\ U_{21}^+(T_{e_1}, \omega_{e_1}) + U_{22}^+(T_{e_2}, \omega_{e_2}) & \text{si } T_{e_2}, T_{e_1} \geq 0 \end{cases} \quad (5.34)$$

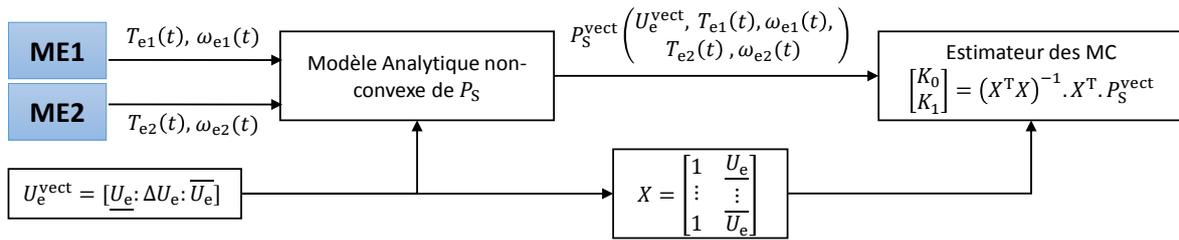


FIGURE 5.11 – Estimation en-ligne des pertes Step-Up dans le cas bi-machines par la méthode des moindres carrés

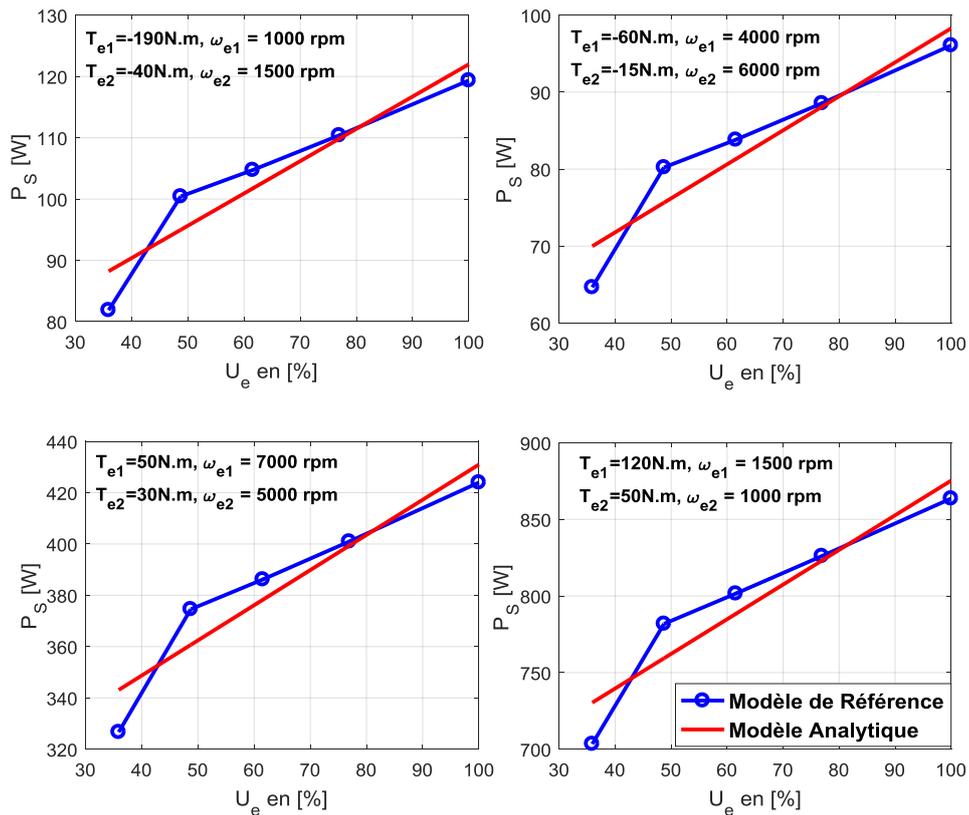


FIGURE 5.12 – Validation du modèle convexe des pertes Step-Up dans le cas bi-machines

$$U_{21}^{\pm}(T_{e_1}, \omega_{e_1}) = \sum_{m=0}^2 (\alpha_{m2}^{2\pm} T_{e_1}^2 + \beta_{m2}^{2\pm} T_{e_1} + \gamma_{m2}^2) \omega_{e_1}^m \quad (5.35)$$

$$U_{22}^{\pm}(T_{e_2}, \omega_{e_2}) = \sum_{m=0}^2 (\alpha_{m2}^{1\pm} T_{e_2}^2 + \beta_{m2}^{1\pm} T_{e_2} + \gamma_{m2}^1) \omega_{e_2}^m \quad (5.36)$$

$$U_1(T_{e_1}, \omega_{e_1}, T_{e_2}, \omega_{e_2}) = \begin{cases} U_{11}^-(T_{e_1}, \omega_{e_1}) + U_{12}^-(T_{e_2}, \omega_{e_2}) + K_1(T_{e_1}, \omega_{e_1}, T_{e_2}, \omega_{e_2}) & \text{si } T_{e_2}, T_{e_1} \leq 0 \\ U_{12}^+(T_{e_1}, \omega_{e_1}) + U_{12}^+(T_{e_2}, \omega_{e_2}) + K_1(T_{e_1}, \omega_{e_1}, T_{e_2}, \omega_{e_2}) & \text{si } T_{e_2}, T_{e_1} \geq 0 \end{cases} \quad (5.37)$$

$$U_{11}^{\pm}(T_{e_1}, \omega_{e_1}) = \sum_{m=0}^2 (\alpha_{m1}^{2\pm} T_{e_1}^2 + \beta_{m1}^{2\pm} T_{e_1} + \gamma_{m1}^2) \omega_{e_1}^m \quad (5.38)$$

$$U_{12}^{\pm}(T_{e_2}, \omega_{e_2}) = \sum_{m=0}^2 (\alpha_{m1}^{1\pm} T_{e_2}^2 + \beta_{m1}^{1\pm} T_{e_2} + \gamma_{m1}^1) \omega_{e_2}^m \quad (5.39)$$

$$U_0(T_{e_1}, \omega_{e_1}, T_{e_2}, \omega_{e_2}) = U_{01}(T_{e_1}, \omega_{e_1}) + U_{02}(T_{e_2}, \omega_{e_2}) + K_0(T_{e_1}, \omega_{e_1}, T_{e_2}, \omega_{e_2}) \quad (5.40)$$

$$U_{01}(T_{e_1}, \omega_{e_1}) = \sum_{m=0}^2 (\alpha_{m0}^{2\pm} T_{e_1}^2 + \beta_{m0}^{2\pm} T_{e_1} + \gamma_{m0}^2) \omega_{e_1}^m \quad (5.41)$$

$$U_{02}(T_{e_2}, \omega_{e_2}) = \sum_{m=0}^2 (\alpha_{m0}^{1\pm} T_{e_2}^2 + \beta_{m0}^{1\pm} T_{e_2} + \gamma_{m0}^1) \omega_{e_2}^m \quad (5.42)$$

En remplaçant P_{bat} par (5.33) dans l'Hamiltonien, on peut constater que dans H , Q ne dépend pas explicitement de U_e , ce qui implique :

$$U_e^{\text{opt}}(T_{e_1}, \omega_{e_1}, T_{e_2}, \omega_{e_2}) = \arg \min_{U_e} (P_{\text{bat}}(T_{e_1}, \omega_{e_1}, T_{e_2}, \omega_{e_2}, U_e)) \quad (5.43)$$

Finalement, afin de déterminer U_e^{opt} , il suffit de résoudre l'équation suivante :

$$\frac{\partial P_{\text{bat}}}{\partial U_e} = 0 \quad (5.44)$$

A ce stade, il reste à étudier la convexité de P_{bat} donnée par (5.33) par rapport à U_e . Ceci revient à déterminer le signe de $U_2(T_{e_1}, \omega_{e_1}, T_{e_2}, \omega_{e_2})$. En effet, si le signe de $U_2(T_{e_1}, \omega_{e_1}, T_{e_2}, \omega_{e_2})$ est positif alors $P_{\text{bat}}(U_e)$ est convexe et on peut garantir l'unicité de la solution de (5.44) donnée par :

$$U_e^*(T_{e_1}, \omega_{e_1}, T_{e_2}, \omega_{e_2}) = \frac{-U_1(T_{e_1}, \omega_{e_1}, T_{e_2}, \omega_{e_2})}{2U_2(T_{e_1}, \omega_{e_1}, T_{e_2}, \omega_{e_2})} \quad (5.45)$$

$U_2(T_{e_1}, \omega_{e_1}, T_{e_2}, \omega_{e_2})$ a été calculé à partir de (5.34) sur tout le domaine (couple, régime) de la machine principale et de la machine secondaire. Les figures 5.4 et 5.13 représentent $U_{21}(T_{e_1}, \omega_{e_1})$ de la machine principale et $U_{22}(T_{e_1}, \omega_{e_1})$ de la machine secondaire respectivement. D'après les figures 5.4 et 5.13, $U_{21}(T_{e_1}, \omega_{e_1})$ et $U_{22}(T_{e_1}, \omega_{e_1})$ sont positifs, comme $U_2(T_{e_1}, \omega_{e_1}, T_{e_2}, \omega_{e_2}) = U_{21}(T_{e_1}, \omega_{e_1}) + U_{22}(T_{e_1}, \omega_{e_1})$, alors U_2 est positif $\forall (T_{e_1}, \omega_{e_1}, T_{e_2}, \omega_{e_2})$.

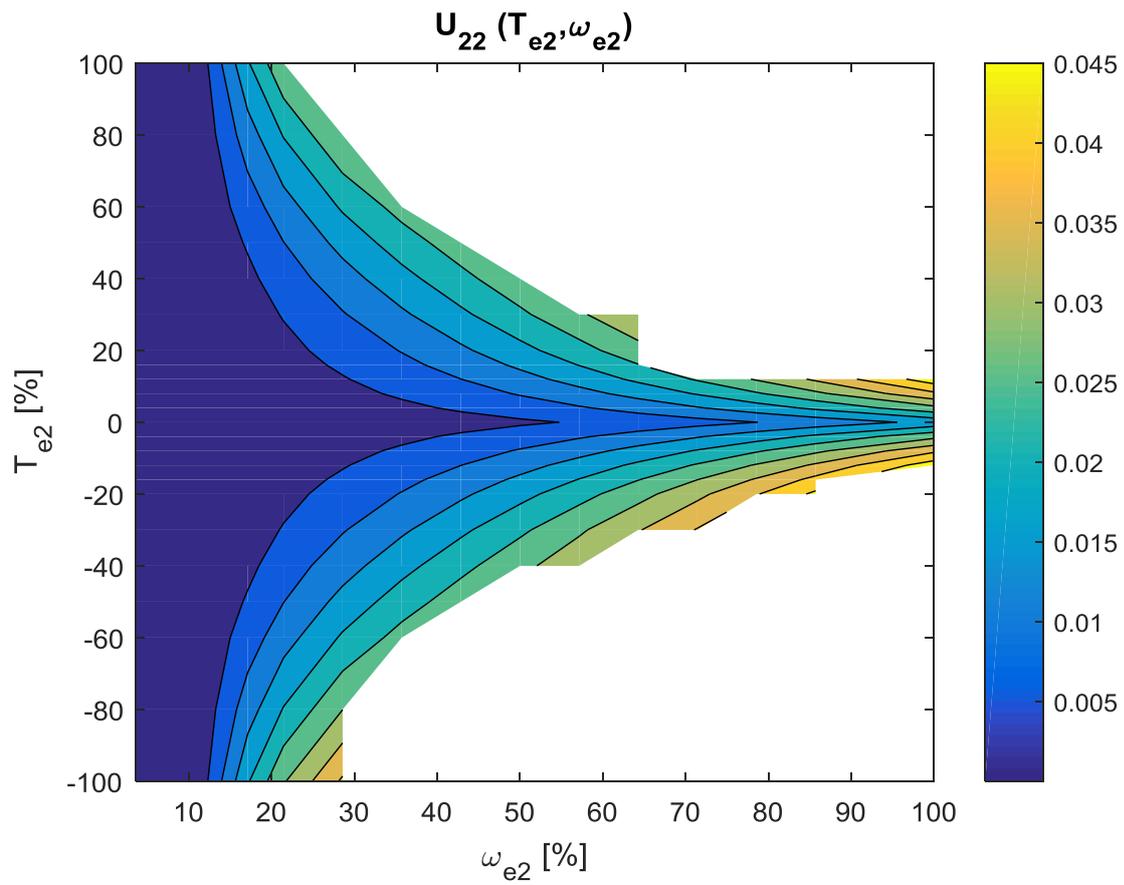


FIGURE 5.13 – Calcul de U_2 pour la machine secondaire

Finalement, la tension optimale $U_e^{\text{opt}}(T_{e_1}, \omega_{e_1}, T_{e_2}, \omega_{e_2})$ en mode série-parallèle est donnée par :

$$U_e^{\text{opt}}(T_{e_1}, \omega_{e_1}, T_{e_2}, \omega_{e_2}) = \begin{cases} \underline{U}_e(T_{e_1}, \omega_{e_1}, T_{e_2}, \omega_{e_2}) & \text{si } U_e^*(T_{e_1}, \omega_{e_1}, T_{e_2}, \omega_{e_2}) \leq \underline{U}_e(T_{e_1}, \omega_{e_1}, T_{e_2}, \omega_{e_2}) \\ U_e^*(T_{e_1}, \omega_{e_1}, T_{e_2}, \omega_{e_2}) & \text{si } \underline{U}_e(T_{e_1}, \omega_{e_1}, T_{e_2}, \omega_{e_2}) \leq U_e^*(T_{e_1}, \omega_{e_1}, T_{e_2}, \omega_{e_2}) \leq \overline{U}_e \\ \overline{U}_e & \text{si } U_e^*(T_{e_1}, \omega_{e_1}, T_{e_2}, \omega_{e_2}) \geq \overline{U}_e \end{cases} \quad (5.46)$$

Où, $\underline{U}_e(T_{e_1}(t), \omega_{e_1}(t), T_{e_2}(t), \omega_{e_2}(t))$ est imposée par la demande conducteur.

Résultats de Simulations

Les résultats de simulation présentés ci-dessous ont été obtenus à partir du véhicule de la figure 1.5. On rappelle que ce véhicule comporte les trois configurations étudiées : parallèle, bi-parallèle et série. Nous pourrions alors valider l'optimisation convexe de la tension sur les différentes architectures.

Validation Hors-Ligne On rappelle que cette étape de validation consiste à comparer hors-ligne les commandes issues des stratégies analytique et numérique en les soumettant aux mêmes entrées. Ces commandes ainsi que le mode cinématique apparaissent dans les figures 5.14 et 5.15.

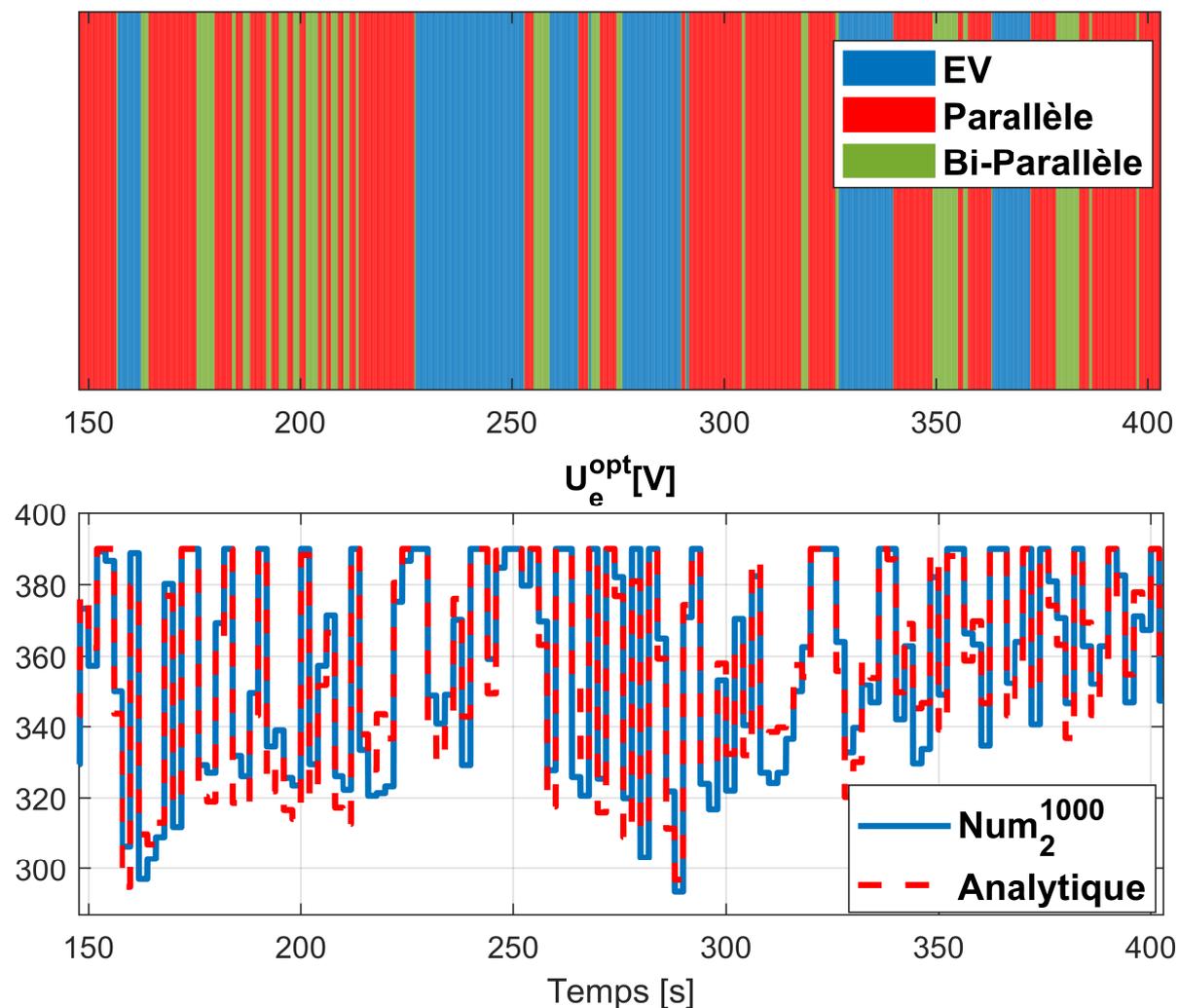


FIGURE 5.14 – Mode cinématique (haut) et tensions optimales issues de la méthodologie analytique et de la méthode Num₂¹⁰⁰⁰ (bas) pour le cycle ARTEMIS Autoroute

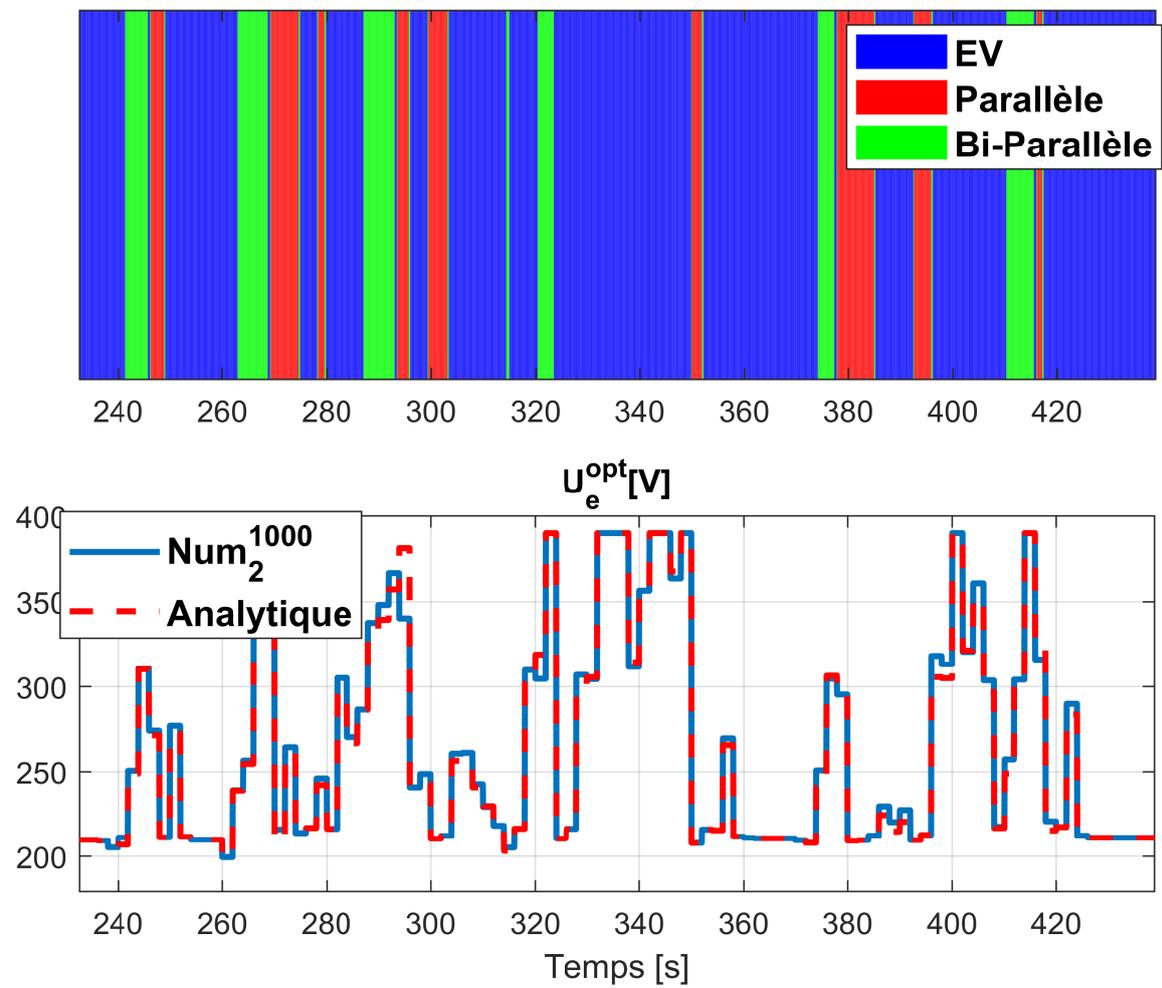


FIGURE 5.15 – Mode cinématique (haut) et tensions optimales issues de la méthodologie analytique et de la méthode Num_2^{1000} (bas) pour le cycle ARTEMIS Urbain

Temps de calcul Le temps de calcul de chaque stratégie a été déterminé à partir de l'équation (1.52) (tableau 5.2).

Stratégie	Temps de Calcul [ms]
Analytique	0.04
Num ₂ ¹⁰⁰⁰	0.54

TABLE 5.2 – Temps de calcul moyen consommé par les méthodes analytique et Num₂¹⁰⁰⁰ pour le calcul de la tension optimale sur un pas de temps

Espace mémoire occupé Pour l'optimisation analytique et numérique de la tension, les paramètres fixes sauvegardés sont donnés par le tableau 5.3.

Stratégie	Paramètres	Nombre total
Analytique	ME1 : $b_{21}^-, b_{21}^+, b_{11}^-, b_{11}^+$ et b_{01}	45
	ME2 : $b_{22}^-, b_{22}^+, b_{12}^-, b_{12}^+$ et b_{02}	45
Num ₂	ME1 : cartographie des pertes électriques ($41 \times 15 \times 5$)	3075
	ME2 : cartographie des pertes électriques ($23 \times 15 \times 3$)	1035

TABLE 5.3 – Nombre de paramètres fixes utilisés par les stratégies analytique et Num₂ pour le calcul de la tension optimale

Remarque : les paramètres du modèle non-convexe des pertes step-up (1.30) ne sont pas comptés parmi les paramètres fixes car ils sont consommés par les deux stratégies.

Concernant les variables intermédiaires, pour la méthode numérique, leur nombre est égal à la somme des tailles du vecteur P_{bat} et du vecteur commande U_e . Par conséquent, la méthode Num₂¹⁰⁰⁰ génère 2000 variables intermédiaires. Pour la stratégie analytique, les variables intermédiaires sont :

- d'après la figure 5.11, l'estimation en-ligne des pertes du step-up occupe de l'espace mémoire pour les vecteurs U_e^{vect} , P_S^{vect} et la matrice X . Leur taille est déterminée selon le nombre de paramètres à estimer. Comme nous avons deux paramètres à estimer (K_0 et K_1), alors la taille minimale est de 2. Nous avons choisi la taille 5 pour une meilleure précision. Au total, pour l'estimation du modèle affine de P_S , la stratégie analytique génère 21 variables intermédiaires.
- d'après l'équation (5.45), la tension optimale est calculée à partir des paramètres U_2 et U_1 . Ces derniers sont calculés à partir des équations (5.34) et (5.37). Au total, pour le calcul de U_e^* , la stratégie analytique génère 11 variables intermédiaires.

Le nombre total des variables intermédiaires pour chaque stratégie est résumé par le tableau 5.4.

Stratégie	Nombre total
Analytique	32
Num ₂ ¹⁰⁰⁰	2000

TABLE 5.4 – Nombre de variables intermédiaires calculées par les méthodes analytique et Num₂¹⁰⁰⁰ pour le calcul de la tension optimale

Finalement, la mémoire totale occupée par chaque stratégie est égale au nombre des paramètres fixes + le nombre des variables intermédiaires, en considérant 1 scalaire = 1 Double (tableau 5.5).

Stratégie	Espace mémoire occupé [Doubles]
Analytique	122
Num ₂ ¹⁰⁰⁰	6110

TABLE 5.5 – Espace mémoire total occupé par les stratégies analytique et Num₂¹⁰⁰⁰ pour le calcul de la tension optimale

Discussion Les tensions optimales obtenues par les méthodes analytique et Num₂¹⁰⁰⁰ sont très similaires. Ce résultat permet la validation des modèles convexes en fonction de la tension. La méthode analytique consomme beaucoup moins de temps de calcul et de mémoire comparée à la méthode Num₂¹⁰⁰⁰.

Validation En-Ligne Dans cette étape de validation, les stratégies analytique et numérique sont testées en-ligne sur le simulateur du véhicule (MIL) afin d’établir leurs bilans énergétiques (consommation de carburant, *EETP* et trajectoire SoE). On rappelle que :

- l’énergie électrique totale perdue (*EETP*) est l’intégrale des pertes électriques totales sur un cycle donné.
- le calcul de la consommation du carburant et de l’énergie électrique totale perdue de toutes les stratégies est réalisé à partir des modèles de référence (1.9), (1.16), (1.24) et (1.30).
- pour la stratégie analytique, les couples optimaux des machines électriques sont calculés analytiquement en utilisant les résultats des chapitres 2, 3 et 4.
- pour la stratégie Num₂¹⁰⁰⁰, les couples optimaux des machines électriques sont calculés numériquement en utilisant les modèles de référence et en prenant en compte les pertes de la batterie et du step-up dans le calcul de l’Hamiltonien.

Cycle	Stratégie	Conso [L/100km]	<i>EETP</i> [Wh]	Δ Conso [%]	[%]
WLTC	Analytique	4.35	520	0.23	5
	Num ₂ ¹⁰⁰⁰	4.34	495	-	-
ARTEMIS Urbain	Analytique	5.34	194	0.37	5.43
	Num ₂ ¹⁰⁰⁰	5.32	184	-	-
ARTEMIS Routier	Analytique	4.12	349	0.73	4.5
	Num ₂ ¹⁰⁰⁰	4.09	334	-	-
ARTEMIS Autoroutier	Analytique	6.20	590	0.16	6.3
	Num ₂ ¹⁰⁰⁰	6.19	555	-	-

TABLE 5.6 – Résultats de consommation de carburant et de l’*EETP* des stratégies analytique et Num₂¹⁰⁰⁰

Discussion D’après le tableau 5.6, on peut constater que :

- L’impact de l’optimisation convexe sur la consommation énergétique se traduit se traduit par une surconsommation de carburant inférieure à 0.8% et une surconsommation électrique inférieure à 6.5% par rapport à la meilleure solution donnée par la méthode Num₂¹⁰⁰⁰.
- Les pertes de la batterie et du step-up ont un effet négligeable sur la détermination de la répartition optimale de puissance.

La figure 5.16 montre que les stratégies analytique et Num₂¹⁰⁰⁰ ont des trajectoires *SoE* similaires sur tous les cycles.

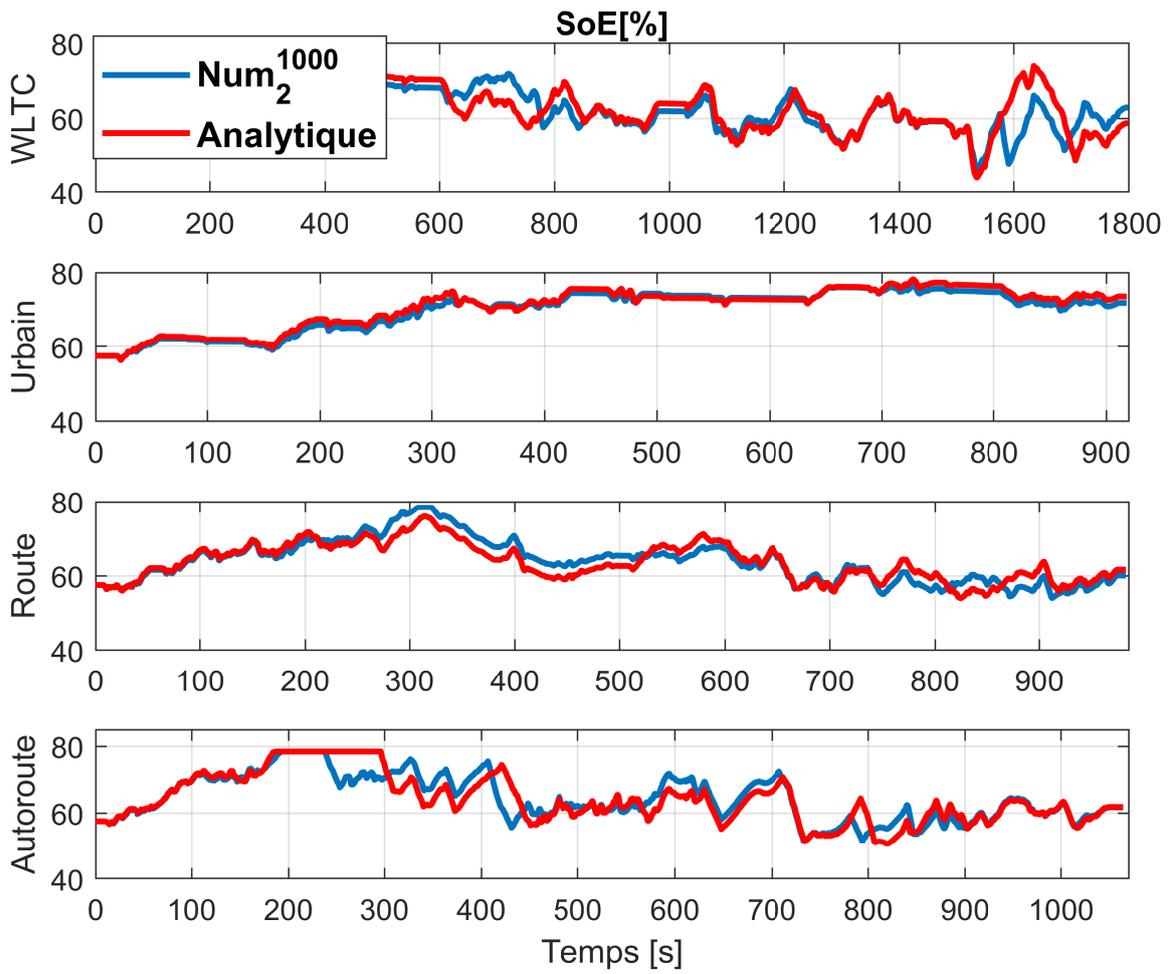


FIGURE 5.16 – Trajectoires *SoE* des stratégies analytique et Num_2^{1000} pour tous les cycles étudiés

5.2 Étude de la sensibilité des solutions analytiques

Comme présenté dans l'étude de sensibilité de la section 2.1, nous allons introduire une perturbation dans les paramètres de la tension analytique afin de quantifier l'impact des erreurs de modélisation sur les pertes électriques totales (PET). Nous ferons l'étude sur la machine principale pour tout son domaine (couple, régime). Les résultats de cette étude présentés ci-dessous sont aussi valables pour la machine secondaire ainsi que pour le cas bi-machines.

Les paramètres utilisés par l'optimisation de la tension sont : U_2 , U_1 et K_1 . La sensibilité de la tension analytique par rapport à ces paramètres est calculée à partir de l'équation (2.23). Sauf que, comme vu précédemment, la tension a un impact direct seulement sur les pertes électriques totales (PET). Pour cela, la sensibilité, dans ce cas, est représentée par l'écart :

$$\Delta PET = P\hat{E}T - PET \quad (5.47)$$

Où, $P\hat{E}T$ est les pertes électriques totales obtenues par la tension analytique perturbée.

Il faut noter que le calcul des pertes électriques totales est réalisé à partir des modèles de référence (1.16), (1.24) et (1.30).

Afin de visualiser l'écart de PET (ΔPET) engendré par la variation des paramètres sur tout le domaine (couple, régime) de la machine principale, nous avons choisi de présenter les sensibilités correspondant à la perturbation maximale, à savoir $\pm 30\%$. Les figures 5.17 à 5.19 représentent les sensibilités de la tension analytique par rapport aux paramètres U_2 , U_1 et K_1 dans le pire des cas (d'abord $+30\%$ puis -30%). Nous avons tracé sur les figures 5.17 et 5.18 les points de fonctionnement du cycle WLTC afin de les situer par rapport à la sensibilité de la solution analytique.

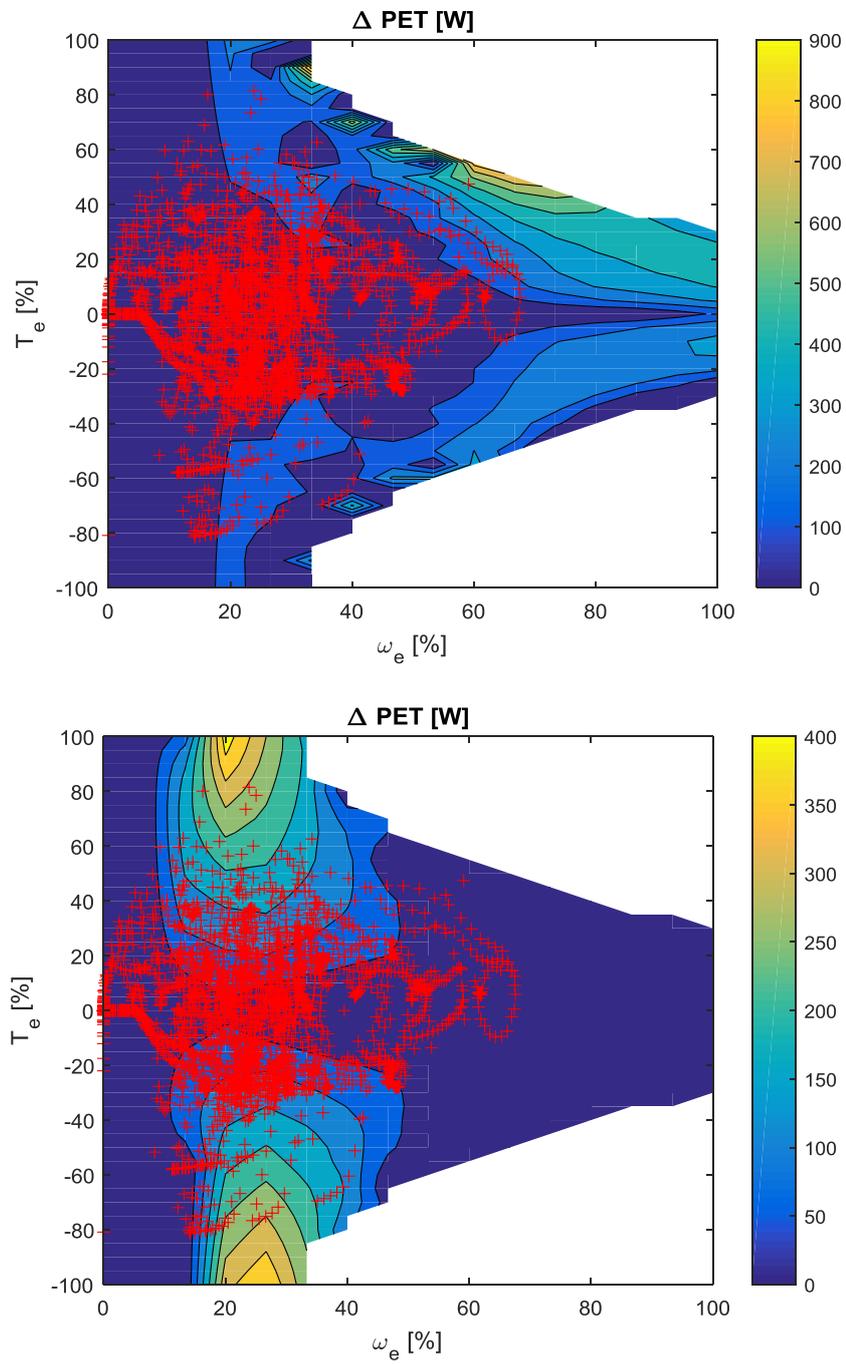


FIGURE 5.17 – Écart de PET par rapport à la variation du paramètre U_2 de +30% (haut) et de -30% (bas) pour l'optimisation de la tension

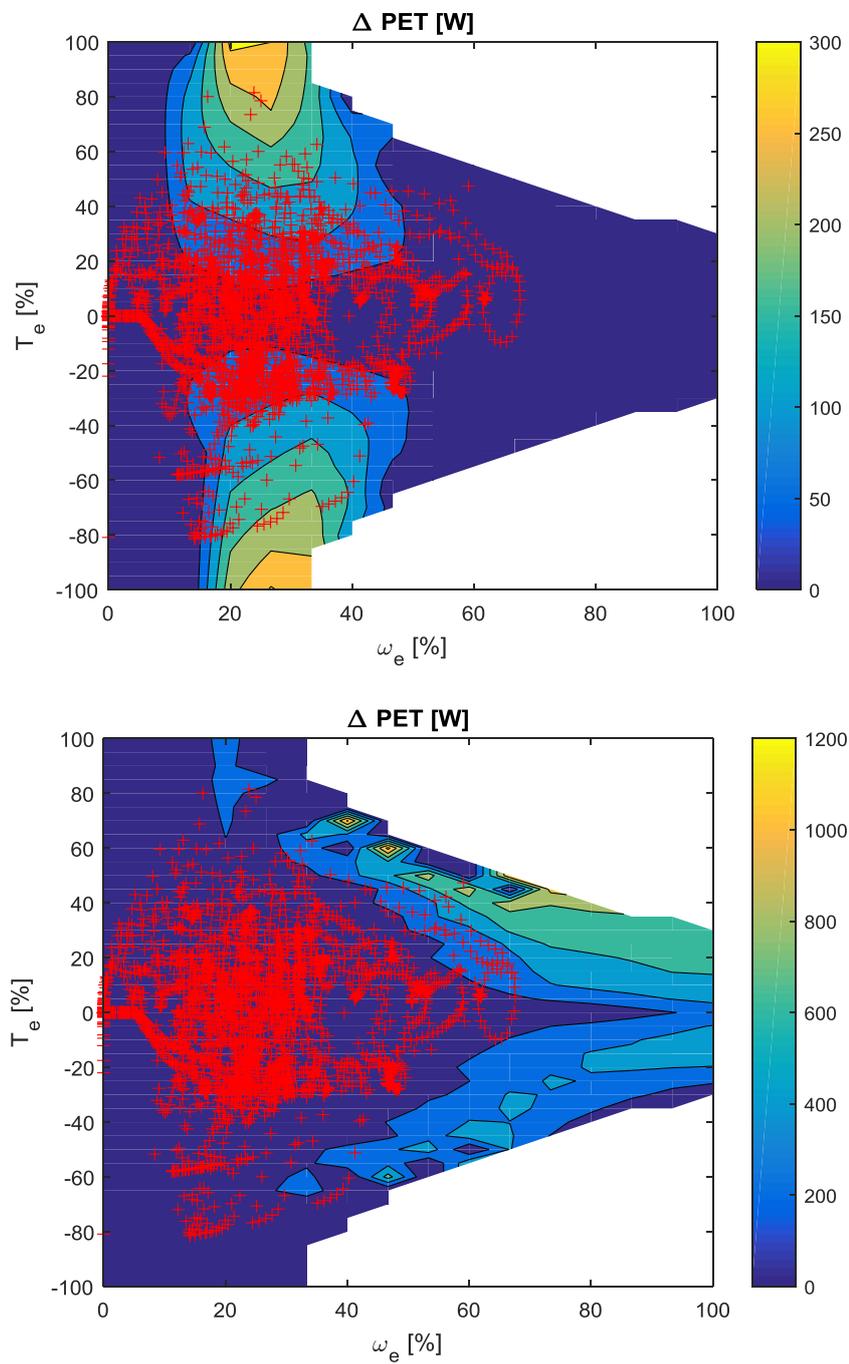


FIGURE 5.18 – Écart de PET par rapport à la variation du paramètre U_1 de +30% (haut) et de -30% (bas) pour l'optimisation de la tension

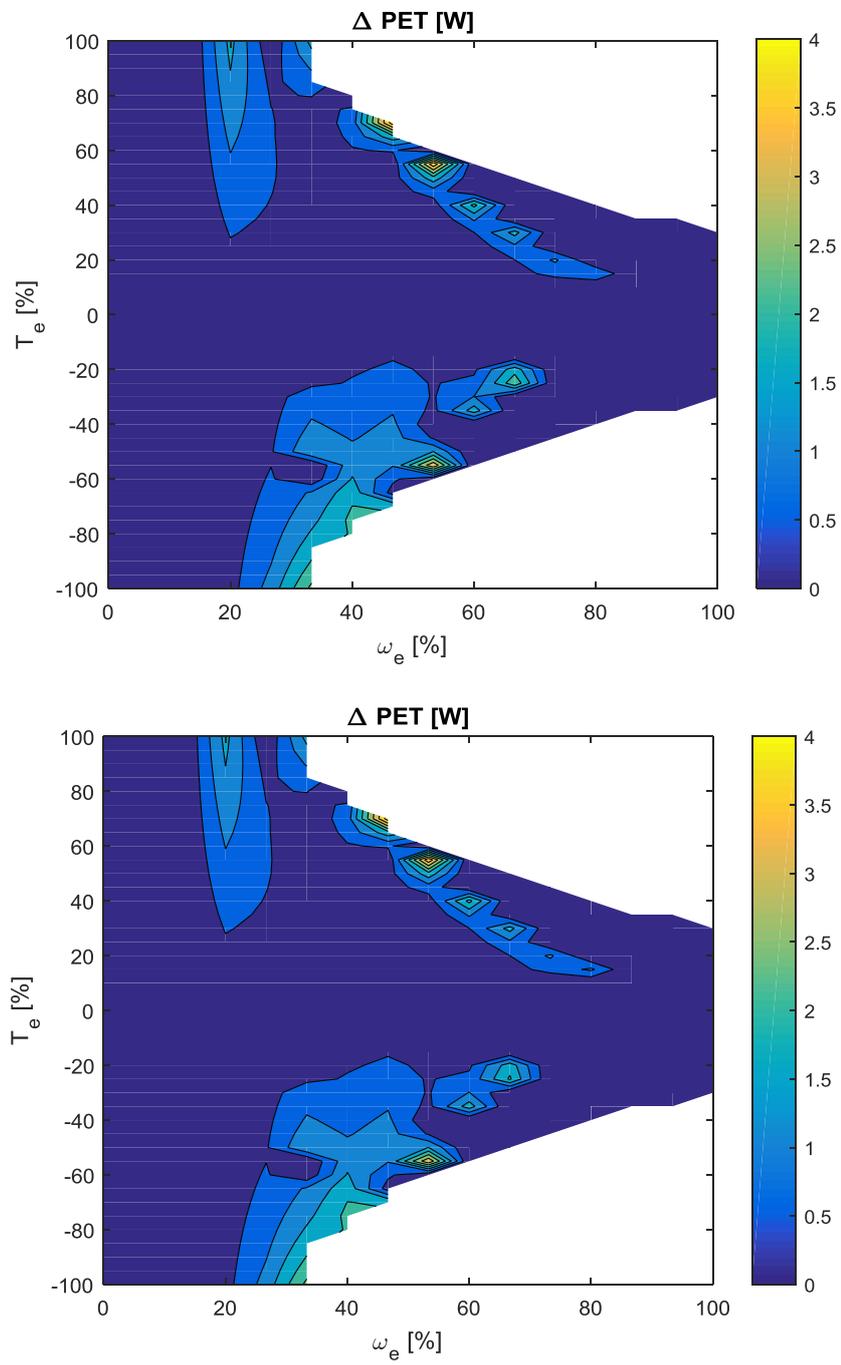


FIGURE 5.19 – Écart de PET par rapport à la variation du paramètre K_1 de +30% (haut) et de -30% (bas) pour l'optimisation de la tension

Discussion

D'après les figures 5.17, 5.18 et 5.19, on peut constater que

- l'écart de PET engendré par la variation des paramètres de la machine (U_1 et U_2) est plus important que celui du paramètre du step-up (K_1). En effet, le paramètre K_1 a une valeur beaucoup plus faible comparé à U_1 du fait que les pertes de la machine sont beaucoup plus importantes que les pertes du step-up.
- la sensibilité de la solution analytique est relativement faible comparée aux pertes électriques totales. On en déduit que la solution analytique est robuste vis à vis de la variation des paramètres.
- les points de fonctionnements où la sensibilité est le plus élevée ne sont pas utilisés pour le cycle WLTC. Les points de fonctionnements de ce cycle se trouvent dans les zones où la sensibilité est très faible.

5.3 Etude Comparative avec/sans Step-Up

L'objectif de cette étude est d'établir l'impact du step-up sur la consommation énergétique du véhicule de la figure 1.5 (qu'on appellera "*Véhicule A*"). Pour cela, nous allons comparer la consommation énergétique du "*Véhicule A*" à :

- (1) la consommation énergétique du "*Véhicule B1*" qui est composé par les mêmes organes que le "*Véhicule A*" mais ne contient pas de step-up. La tension de la batterie du "*Véhicule A*" et du "*Véhicule B1*" est d'environ 200V.
- (2) la consommation énergétique du "*Véhicule B2*" qui est composé par les mêmes organes que le "*Véhicule A*" mais ne contient pas de step-up et sa batterie contient plus de cellules que celle du "*Véhicule A*". Autrement dit, la tension de la batterie du "*Véhicule B2*" est supérieure à la tension de la batterie du "*Véhicule A*". Le "*Véhicule B2*" correspond au véhicule étudié dans les chapitres 2, 3 et 4. La tension de sa batterie est d'environ 400V.

Les machines électriques des "*Véhicules B1 et B2*" sont alimentées par la tension de la batterie.

On rappelle que l'énergie électrique totale perdue ($EETP$) est l'intégrale des pertes électriques totales sur un cycle donné.

Cycle	Stratégie	Conso [L/100km]	$EETP$ [Wh]
WLTC	<i>Véhicule A</i>	4.35	520
	<i>Véhicule B1</i>	4.52	470
	<i>Véhicule B2</i>	4.44	614
ARTEMIS Urbain	<i>Véhicule A</i>	5.34	194
	<i>Véhicule B1</i>	5.37	181
	<i>Véhicule B2</i>	5.49	292
ARTEMIS Routier	<i>Véhicule A</i>	4.12	349
	<i>Véhicule B1</i>	4.27	310
	<i>Véhicule B2</i>	4.18	400
ARTEMIS Autoroutier	<i>Véhicule A</i>	6.20	590
	<i>Véhicule B1</i>	6.32	530
	<i>Véhicule B2</i>	6.27	680

TABLE 5.7 – Résultats de consommation de carburant et l' $EETP$ des *Véhicules A, B1 et B2*

Remarque : on précise que les résultats de cette étude ont été obtenus en utilisant les stratégies analytiques.

Discussion

D'après le tableau 5.7, on peut constater que :

- le "*Véhicule A*" a une *EETP* supérieure à celle du "*Véhicule B1*" car, d'une part, le "*Véhicule A*" compte les pertes du step-up en plus. D'autre part, comme les performances de ses machines sont plus importantes alors la voie électrique est plus utilisée. Autrement dit, les puissances max des machines électriques du "*Véhicule A*" sont supérieures à celles du "*Véhicule B1*". Ceci permet au "*Véhicule A*" de : rouler plus souvent en tout électrique, et d'avoir plus d'assistance électrique quand le moteur thermique est allumé. Exemple : en roulage autoroutier, le "*Véhicule A*" roule en tout électrique 20 secondes de plus que le "*Véhicule B1*". Aussi, en roulage autoroutier, les machines électriques du "*Véhicule A*" produisent 200Wh et récupèrent 100Wh d'énergie électrique de plus que celles du "*Véhicule B1*". C'est pourquoi, la consommation de carburant du "*Véhicule A*" est inférieure à celle du "*Véhicule B1*".
- le "*Véhicule A*" a une consommation de carburant inférieure à celle du "*Véhicule B2*" car le "*Véhicule A*" a une *EETP* plus faible grâce au pilotage de la tension. En effet, à iso-performances, les deux véhicules ont le même potentiel électrique (roulage pur électrique, récupération au freinage et assistance électrique). En revanche, le pilotage de la tension permet au "*Véhicule A*" de minimiser sa *EETP* et donc réduire sa consommation énergétique globale.

5.4 Conclusion

En conclusion, l'optimisation convexe de la tension s'adapte parfaitement dans la gestion d'énergie globale du véhicule de la figure 1.5. En effet, elle est générique ce qui permet son utilisation pour toutes les configurations. De plus, elle consomme peu de temps de calcul et de mémoire tout en ayant une consommation énergétique proche de la meilleure solution.

Les résultats de l'étude de sensibilité ont montré que, dans la zone des points de fonctionnements du cycle WLTC, la tension analytique est robuste par rapport à la variation des paramètres des modèles convexes des machines électriques ainsi que du step-up.

La comparaison du véhicule de la figure 1.5 aux véhicules similaires sans step-up a permis de montrer le gain qu'apportent le step-up en termes de performances ainsi que le pilotage de la tension en termes d'économie d'énergie au véhicule.

Conclusion Générale

La gestion d'énergie (ou l'optimisation énergétique) joue un rôle fondamental pour la réduction de la consommation énergétique du véhicule hybride électrique. Comme il a été présenté dans ce mémoire, elle offre la possibilité d'exploiter au maximum le potentiel du véhicule hybride. Cependant, elle cause parfois un certain nombre de problèmes, notamment, quand elle est basée sur une méthode d'optimisation numérique. Chez Renault, la nature numérique des méthodes d'optimisation existantes a suscité un ensemble de problématiques liées, d'une part, à leur gourmandise en temps de calcul. Cette conséquence est directement engendrée par le maillage des commandes ou/et leur nombre. En effet, quand la taille ou/et le nombre des variables augmentent, le temps de calcul augmente sur une échelle exponentielle. D'autre part, la commande numérique a présenté des phénomènes d'irrégularité fortement indésirables comme le pompage ou le changement brusque de la valeur avec un gradient important. Par ailleurs, l'optimalité de la solution numérique dépend fortement du maillage de la commande. Dans les résultats du troisième chapitre, nous nous sommes intéressés, en premier lieu, à cette problématique en testant trois maillages plus ou moins fins. Les résultats attendus n'ont fait que confirmer que l'optimalité de la solution numérique est fortement sensible au maillage. Plus le maillage est grossier plus la solution s'éloigne de la meilleure solution et l'effet de pompage s'accroît. C'est pourquoi, nous avons développé et testé en simulation MIL (Model In The Loop) une méthodologie analytique permettant de remédier à ces problèmes.

Le chapitre 1 a été dédié à la modélisation et à la définition de la problématique de supervision énergétique du véhicule hybride électrique. Nous avons consacré une grande partie de ce chapitre à la modélisation convexe et à sa validation. Cette modélisation constitue une étape fondamentale de la méthodologie analytique. En effet, elle permet de calculer les commandes optimales analytiquement. Les modèles convexes ont été identifiés et validés à partir des mesures expérimentales. Nous avons également défini dans ce chapitre le problème d'optimisation ainsi que le Principe du Maximum de Pontryagin qui a été choisi dans cette thèse comme méthode de résolution. Le chapitre 1 finit par la définition des étapes de la méthode analytique qui sont : la modélisation convexe, le calcul analytique des commandes optimales et la validation en simulation des commandes analytiques.

Dans le chapitre 2, nous avons appliqué la méthodologie analytique sur l'architecture parallèle. Les résultats de simulation ont montré que la solution analytique réduit considérablement le temps de calcul (jusqu'à -94%) ainsi que l'espace mémoire occupé par l'optimisation énergétique (jusqu'à -98%). Elle présente également une sous-optimalité très faible (surconsommation de carburant inférieure à $+1\%$). De plus, on montre, dans ce chapitre, que l'approche analytique est efficace pour calculer aussi bien les commandes de nature continue que discrète. Les résultats des deux dernières sections de ce chapitre ont montré que l'ajout d'une variable d'optimisation, discrète ou continue (qui est le régime du moteur thermique), a légèrement augmenté le temps de calcul et la mémoire contrairement à la méthode numérique où le temps de calcul et la mémoire ont explosé. Cet avantage qu'offre la méthode analytique a été également prouvé par les résultats des chapitres 3 et 4 qui comptent aussi deux variables d'optimisation continues. Finalement, les

résultats d'étude de sensibilité montrent que la solution analytique est robuste par rapport à la variation des paramètres des modèles convexes.

La configuration bi-parallèle a été traitée par le chapitre 3. La méthode analytique a encore une fois fait ses preuves car, d'une part, elle s'est parfaitement adaptée à la complexité de cette architecture (comportant deux machines électriques). D'autre part, comme dit précédemment, l'ajout d'une variable d'optimisation a légèrement augmenté le temps de calcul et la mémoire (relativement à la configuration parallèle mono-machine). Les résultats de simulation MIL, à la fin de ce chapitre, ont permis de valider les solutions analytiques (surconsommation de carburant inférieure à +1%).

Dans le chapitre 4, les résultats de commandes optimales obtenues par l'approche analytique, basée sur les modèles convexes, et celles obtenues par la méthode numérique, basée sur les mesures expérimentales, ont mis en avant l'un des principaux intérêts de la modélisation convexe : le lissage des commandes. Par ailleurs, la méthode analytique a également permis de réduire le temps de calcul ainsi que la mémoire (jusqu'à -99%) tout en ayant une sous-optimalité très faible (+0.5% de surconsommation de carburant).

Le chapitre 5 présente l'optimisation de la tension ainsi que les résultats de simulation de la gestion d'énergie globale du véhicule de la figure 1.5, comprenant : l'optimisation convexe de la répartition de puissance (pour les configurations parallèle et bi-parallèle), l'optimisation convexe de la puissance électrique produite par la génératrice (pour la configuration série) et l'optimisation convexe de la tension. Étant générique, l'optimisation analytique de la tension s'est parfaitement adaptée à toutes les configurations. Cette caractéristique a facilité son implémentation. De plus, elle consomme très peu de temps de calcul et de mémoire tout en ayant une consommation énergétique proche de la meilleure solution. Enfin, les résultats de l'étude de sensibilité ont montré que la tension analytique est robuste par rapport à la variation des paramètres des modèles convexes des machines électriques ainsi que du step-up (+5% de surconsommation électrique).

Dans les chapitres 4 et 5, nous retrouvons la principale limitation de la résolution analytique qui réside dans sa complexité quand la fonction à minimiser est une fonction complexe. En effet, dans le chapitre 4, la détermination du régime optimal de la génératrice revient à résoudre un polynôme d'ordre 4, ce qui n'a pas été possible de le réaliser analytiquement car la solution devient complexe et difficile à implémenter. De même, dans le chapitre 5, le calcul analytique de la tension à partir du modèle de référence des pertes du step-up mène à résoudre un polynôme d'ordre 3. Afin de contourner cette complexité, nous avons réalisé le calcul du régime optimal de la génératrice dans le chapitre 4 numériquement et en amont de l'implémentation. Quant à l'optimisation de la tension, nous avons proposé de modéliser les pertes du step-up par une fonction affine de la tension. En conclusion, la résolution analytique risque d'être complexe quand les modèles analytiques de la consommation énergétique sont des fonctions complexes (ex : polynômes d'ordre supérieur à 3).

Un point important à soulever est le rôle de la convexité des modèles dans la résolution analytique. En effet, pour garantir l'unicité de la solution, nous avons démontré avant chaque calcul de commande la convexité de la fonction à minimiser, en l'occurrence l'Hamiltonien. Cette propriété est indispensable car non seulement elle garantit l'unicité de la solution mais aussi sa régularité. La convexité de l'Hamiltonien a fait l'objet d'une étude à part entière dans cette thèse. En réalité, cette caractéristique n'a pas toujours été naturellement vérifiée malgré la nature convexe des modèles énergétiques. Il a fallu imposer des hypothèses pour garantir la convexité. Ces hypothèses ont toutes été validées sur les modèles de référence. Sauf pour le chapitre 4, nous n'avons pas pu démontrer et garantir la convexité de l'Hamiltonien via des hypothèses. En revanche, grâce à la nature explicite de ce dernier, nous avons pu étudier et distinguer tous les cas possibles de convexité qui ont abouti à une solution unique. Cette démarche montre un

intérêt particulier et fondamental de la méthode analytique qui est la connaissance et la maîtrise totales des solutions.

Un autre point à soulever qui concerne la forme de la solution analytique. Excepté la tension, toutes les autres solutions analytiques se présentent sous la forme de plusieurs cas selon des intervalles. Ces intervalles sont définis par des seuils sur la puissance à la roue (P_r) ou sur le facteur d'équivalence (λ). En pratique, nous avons mis en place des hystérésis autour de ces seuils afin d'éviter l'oscillation des commandes. Par ailleurs, cette forme est facile à implémenter et permet de prendre en compte les limitations des organes.

Dans le dernier chapitre, dédié au step-up, nous avons réalisé une étude complète sur son utilisation dans les différents types de roulage, son impact sur la consommation énergétique ainsi que ses performances. Nous avons pu montrer que cet élément d'électronique de puissance apporte un gain énergétique. En effet, grâce à l'augmentation des performances des machines électriques, le véhicule équipé du step-up a un potentiel électrique plus important : il peut rouler plus longtemps en tout électrique et récupère plus d'énergie en phases de freinage. Cette caractéristique est l'une des principales sources de réduction de la consommation de carburant, et ce pour les différents types de roulage. Concernant l'énergie électrique totale perdue ($EETP$), nous avons montré que le gain énergétique dépend du type de roulage ainsi que du véhicule auquel le véhicule équipé d'un step-up est comparé. Pour cela, nous avons comparé le véhicule avec step-up étudié dans cette thèse à deux véhicules similaires sans step-up en roulage urbain et extra-urbain. Les résultats de cette étude comparative ont montré que la $EETP$ du véhicule avec step-up est plus importante. Cela est dû, d'une part, aux pertes générées par le step-up. D'autre part, comme dit précédemment, dans ce véhicule, la voie électrique est plus utilisée. En revanche, nous avons montré que le pilotage de la tension permet de réduire la $EETP$.

Les objectifs posés en début de cette thèse ont tous été atteints grâce à l'exploitation de la méthode analytique. Le temps de calcul ainsi que l'espace mémoire occupé par la gestion d'énergie ont été considérablement réduits. Grâce à la maîtrise de la solution analytique, sa régularité et sa robustesse peuvent être assurées. A travers l'utilisation de ces travaux par d'autres collaborateurs dans le cadre de différents projets, la facilité du transfert d'information et de la compréhension du contrôle a été, en effet, très reconnue. Enfin, la méthode analytique a parfaitement su s'adapter pour les différentes configurations du véhicule étudié.

Comme perspectives, les commandes analytiques seront testées et validées sur un prototype de véhicule. D'ailleurs, l'optimisation de l'hybride série a déjà été implémentée sur véhicule. Il est aussi prévu d'étendre la méthodologie analytique sur d'autres types de véhicules (hybride rechargeable, électrique pur,...). La méthodologie analytique, du fait de sa généricité, s'applique sur tout type de véhicules comportant plus ou moins d'organes que ceux du véhicule étudié dans cette thèse. En effet, la consommation énergétique de n'importe quel organe peut être approximée par une fonction convexe et peut s'intégrer facilement dans la gestion d'énergie. Cette démarche a été démontrée lors de l'ajout du step-up dans la supervision énergétique.

Finalement, nous clôturons ce mémoire par un bilan des avantages et des inconvénients, tirés de ces travaux, que présentent les méthodes analytique et numérique (tableau 5.8). Le tableau 5.8 évoque les principales problématiques rencontrées avec les méthodes d'optimisation. A savoir, leurs consommations en temps de calcul et en mémoire, la régularité, l'optimalité, la réalisation, l'implémentation et la robustesse de leurs solutions. Nous avons montré dans ce mémoire que les principaux avantages de la méthode analytique sont : sa faible consommation en temps de calcul et en mémoire, la maîtrise de la solution qui permet de contrôler sa régularité et de garantir sa robustesse ainsi que la facilité de sa mise au point. Par ailleurs, sa sous-optimalité et la difficulté de sa réalisation restent ses principaux inconvénients, contrairement à la méthode numérique qui est facile à réaliser et offre la possibilité d'avoir une meilleure optimalité.

Méthode	Temps de Calcul	Mémoire	Régularité	Optimalité	Difficulté de Réalisation	Robustesse	Mise au point
Analytique	++	++	++	+	-	++	++
Numérique	-	-	-	++	++	-	+

TABLE 5.8 – Bilan des avantages et inconvénients des méthodes analytique et numérique

Bibliographie

- [1] Daniel Ambühl, Olle Sundström, Antonio Sciarretta, and Lino Guzzella. Explicit optimal control policy and its practical application for hybrid electric powertrains. *Control engineering practice*, 18(12) :1429–1439, 2010.
- [2] Michel André, Robert Joumard, Robert Vidon, Patrick Tassel, and Pascal Perret. Real-world european driving cycles, for measuring pollutant emissions from high-and low-powered cars. *Atmospheric Environment*, 40(31) :5944–5953, 2006.
- [3] François Badin. *Hybrid Vehicles*. Technip, 2013.
- [4] Richard Bellman. *Dynamic programming*. Courier Corporation, 2013.
- [5] Dimitris Bertsimas and John N Tsitsiklis. *Introduction to linear optimization*, volume 6. Athena Scientific Belmont, MA, 1997.
- [6] Hoseinali Borhan, Ardalan Vahidi, Anthony M Phillips, Ming L Kuang, Ilya V Kolmanovsky, and Stefano Di Cairano. Mpc-based energy management of a power-split hybrid electric vehicle. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 20(3) :593–603, 2012.
- [7] Hippolyte Bouvier, Guillaume Colin, and Yann Chamaillard. Determination and comparison of optimal eco-driving cycles for hybrid electric vehicles. *14th European Control Conference (ECC 2015)*, pages 142–147, 2015.
- [8] Stephen Boyd and Lieven Vandenberghe. *Convex optimization*. Cambridge university press, 2004.
- [9] Giancarlo Coraggio, Cecilia Pisanti, Gianfranco Rizzo, and Marco Sorrentino. Analysis and experimental implementation of a heuristic strategy for onboard energy management of a hybrid solar vehicle. *Oil & Gas Science and Technology–Revue d’IFP Energies nouvelles*, 68(1) :13–22, 2013.
- [10] Organisation Mondiale de la Santé. Improving air quality, combatting climate change - saving lives. <http://www.who.int/airpollution>, Octobre 2018.
- [11] Agence Internationale de l’Énergie. World outlook energy 2015. https://www.iea.org/publications/freepublications/publication/WE02015ES_FRENCH.pdf, Novembre 2015.
- [12] Agence Internationale de l’Énergie. World outlook energy 2017. https://www.iea.org/publications/freepublications/publication/WE0_2017_Executive_Summary_French_version.pdf, Novembre 2017.
- [13] Maxime Debert, Guillaume Colin, Yann Chamaillard, Michel Mensler, Ahmed Ketfi-cherif, and Lino Guzzella. Energy management of a high efficiency hybrid electric automatic transmission. *SAE Technical Paper*, (2010-01-1311), 2010.
- [14] Maxime Debert, Thomas Miro Padovani, Guillaume Colin, Yann Chamaillard, and Lino Guzzella. Implementation of comfort constraints in dynamic programming for hybrid vehicle energy management. *International journal of vehicle design*, 58(2-4) :367–386, 2012.

- [15] Sébastien Delprat. *Evaluation de stratégies de commande pour véhicules hybride parallèles*. PhD thesis, Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambresis, 2002.
- [16] Sébastien Delprat and Theo Hofman. Hybrid vehicle optimal control : Linear interpolation and singular control. *Vehicle Power and Propulsion Conference (VPPC), 2014 IEEE*, pages 1–6, Oct 2014.
- [17] Sébastien Delprat, Theo Hofman, and Sébastien Paganelli. Hybrid vehicle energy management : singular optimal control. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 66(11) :9654–9666, 2017.
- [18] Sébastien Delprat, Jimmy Lauber, Thierry-Marie Guerra, and Janette Rimaux. Control of a parallel hybrid powertrain : optimal control. *IEEE transactions on Vehicular Technology*, 53(3) :872–881, 2004.
- [19] Soren Ebbesen, Philipp Elbert, and Lino Guzzella. Battery state-of-health perceptive energy management for hybrid electric vehicles. *IEEE Transactions on Vehicular technology*, 61(7) :2893–2900, 2012.
- [20] Philipp Elbert, Tobias Nuesch, Andreas Ritter, Nikolce Murgovski, and Lino Guzzella. Engine on/off control for the energy management of a serial hybrid electric bus via convex optimization. *Vehicular Technology, IEEE Transactions on*, 63(8) :3549–3559, 2014.
- [21] Thomas Franke, Matthias Georg Arend, Rich C McIlroy, and Neville A Stanton. Ecodriving in hybrid electric vehicles—exploring challenges for user-energy interaction. *Applied ergonomics*, 55 :33–45, 2016.
- [22] Nicolas Fremau, Ahmed Ketfi-Cherif, and Antoine Vignon. 2l/100km eolab to global phev-hev project solution. *SIA*, 2017.
- [23] Bo Geng, James K Mills, and Dong Sun. Energy management control of microturbine-powered plug-in hybrid electric vehicles using the telemetry equivalent consumption minimization strategy. *IEEE transactions on Vehicular Technology*, 60(9) :4238–4248, 2011.
- [24] Giovanni Granato. *Optimisation de Lois de Gestion Énergétiques des Véhicules Hybrides*. PhD thesis, Ecole Polytechnique X, 2012.
- [25] Mojtaba Hajimiri and Farzad Rajaei Salmasi. A fuzzy energy management strategy for series hybrid electric vehicle with predictive control and durability extension of the battery. *Electric and Hybrid Vehicles, 2006. ICEHV'06. IEEE Conference on*, pages 1–5, 2006.
- [26] Jihun Han, Antonio Sciarretta, and Nicolas Petit. Handling state constraints in fast-computing optimal control for hybrid powertrains. *IFAC-PapersOnLine*, 50(1) :4781–4786, 2017.
- [27] Xiaosong Hu, Scott J Moura, Nikolce Murgovski, Bo Egardt, and Dongpu Cao. Integrated optimization of battery sizing, charging, and power management in plug-in hybrid electric vehicles. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 24(3) :1036–1043, 2016.
- [28] Xiaosong Hu, Nikolce Murgovski, Lars Johannesson, and Bo Egardt. Energy efficiency analysis of a series plug-in hybrid electric bus with different energy management strategies and battery sizes. *Applied Energy*, 111 :1001–1009, 2013.
- [29] David Jauregui, Bo Wang, and Rengang Chen. Power loss calculation with common source inductance consideration for synchronous buck converters. *Texas Instruments, SLPA009A, June*, 2011.
- [30] Lars Johannesson, Mattias Asbogard, and Bo Egardt. Assessing the potential of predictive control for hybrid vehicle powertrains using stochastic dynamic programming. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 8(1) :71–83, 2007.

- [31] Saida Kermani, Sébastien Delprat, Thierry-Marie Guerra, Rochdi Trigui, and Bruno Jeanerret. Predictive energy management for hybrid vehicle. *Control Engineering Practice*, 20(4) :408–420, 2012.
- [32] Namwook Kim, Sukwon Cha, and Huei Peng. Optimal control of hybrid electric vehicles based on pontryagin’s minimum principle. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 19(5) :1279–1287, 2011.
- [33] Viktor Larsson, Lars Johannesson, and Bo Egardt. Analytic solutions to the dynamic programming subproblem in hybrid vehicle energy management. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 64(4) :1458–1467, 2015.
- [34] Chan-Chiao Lin, Huei Peng, and JW Grizzle. A stochastic control strategy for hybrid electric vehicles. *American Control Conference, 2004. Proceedings of the 2004*, 5 :4710–4715, 2004.
- [35] Djamaledine Maamria, Kristan Gillet, Guillaume Colin, Yann Chamaillard, and Cedric Nouillant. Computation of eco-driving cycles for hybrid electric vehicles : Comparative analysis. *Control Engineering Practice*, 71 :44–52, 2018.
- [36] Djamaledine Maamria, Antonio Sciarretta, François Chaplais, and Nicolas Petit. Online energy management system (ems) including engine and catalyst temperatures for a parallel hev. *IFAC-PapersOnLine*, 50(1) :8913–8920, 2017.
- [37] Pierre Michel, Alain Charlet, Guillaume Colin, Yann Chamaillard, Cédric Nouillant, and Gérard Bloch. Energy management of hev to optimize fuel consumption and pollutant emissions. *11th International Symposium on Advanced Vehicle Control, AVEC’12*, page CDROM, 2012.
- [38] Thomas Miro Padovani. *Loi de gestion d’énergie embarquée pour véhicules hybrides : approche multi-objectif et modulaire*. PhD thesis, Orléans, 2015.
- [39] Thomas Miro-Padovani, Guillaume Colin, Ahmed Ketfi-Chérif, and Yann Chamaillard. Implementation of an energy management strategy for hybrid electric vehicles including drivability constraints. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 65(8) :5918–5929, 2016.
- [40] Nikolce Murgovski, Lars Johannesson, Jonas Sjöberg, and Bo Egardt. Component sizing of a plug-in hybrid electric powertrain via convex optimization. *Mechatronics*, 22(1) :106–120, 2012.
- [41] Nikolce Murgovski, Lars Mardh Johannesson, and Jonas Sjoberg. Engine on/off control for dimensioning hybrid electric powertrains via convex optimization. *Vehicular Technology, IEEE Transactions on*, 62(7) :2949–2962, 2013.
- [42] Martin Nesbit, Malcolm Fergusson, Alejandro Colsa, Jana Ohlendorf, Christina Hayes, Kamila Paquel, and Jean-Pierre Schweitzer. Comparative study on the differences between the eu and us legislation on emissions in the automotive sector. *European Parliament Directorate General for Internal Policies, B-1047, Brussels, Belgium*, pages 1–90, 2016.
- [43] Tobias Nüesch, Alberto Cerofolini, Giorgio Mancini, Nicolò Cavina, Christopher Onder, and Lino Guzzella. Equivalent consumption minimization strategy for the control of real driving nox emissions of a diesel hybrid electric vehicle. *Energies*, 7(5) :3148–3178, 2014.
- [44] Tobias Nüesch, Philipp Elbert, Michael Flankl, Christopher Onder, and Lino Guzzella. Convex optimization for the energy management of hybrid electric vehicles considering engine start and gearshift costs. *Energies*, 7(2) :834–856, 2014.
- [45] Daniel F Opila, Xiaoyong Wang, Ryan McGee, and JW Grizzle. Real-time implementation and hardware testing of a hybrid vehicle energy management controller based on stochastic dynamic programming. *Journal of dynamic systems, measurement, and control*, 135(2) :021002, 2013.

- [46] Thomas Miro Padovani, Guillaume Colin, Ahmed Ketfi-Cherif, and Yann Chamaillard. Optimal energy management strategy for a hybrid vehicle provided with a dual electric storage system. *IFAC Workshop on Engine and Powertrain Control, Simulation and Modeling (E-COSM'15)*, 2015.
- [47] Thomas Miro Padovani, Maxime Debert, Guillaume Colin, and Yann Chamaillard. Optimal energy management strategy including battery health through thermal management for hybrid vehicles. *IFAC Proceedings Volumes*, 46(21) :384–389, 2013.
- [48] Gino Paganelli, Sébastien Delprat, Thierry-Marie Guerra, Janette Rimaux, and Jean-Jacques Santin. Equivalent consumption minimization strategy for parallel hybrid powertrains. *Vehicular Technology Conference, 2002. VTC Spring 2002. IEEE 55th*, 4 :2076–2081, 2002.
- [49] Gino Paganelli, Gabriele Ercole, Avra Brahma, Yann Guezennec, and Giorgio Rizzoni. General supervisory control policy for the energy optimization of charge-sustaining hybrid electric vehicles. *JSAE review*, 22(4) :511–518, 2001.
- [50] Gino Paganelli, Thierry Marie Guerra, Sébastien Delprat, Jean-Jacques Santin, Michel Delhom, and Emmanuel Combes. Simulation and assessment of power control strategies for a parallel hybrid car. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part D : Journal of Automobile Engineering*, 214(7) :705–717, 2000.
- [51] Laura V Pérez, Guillermo R Bossio, Diego Moitre, and Guillermo García. Optimization of power management in an hybrid electric vehicle using dynamic programming. *Mathematics and Computers in Simulation*, 73(1) :244–254, 2006.
- [52] Thinh Hung Pham, John T B A Kessels, Paul P J Van Den Bosch, and Rudolf Huisman. Analytical solution to energy management guaranteeing battery life for hybrid trucks. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 65(10) :7956–7971, Oct 2016.
- [53] Lev Semenovich Pontryagin. *Mathematical theory of optimal processes*. Routledge, 2018.
- [54] Pierre Riedinger. *Contribution à la commande optimale des systèmes dynamiques hybrides*. PhD thesis, Université de Lorraine, 1999.
- [55] Pierre Riedinger and Frédéric Kratz. An optimal control approach for hybrid systems. *European Journal of Control*, 9(5) :449–458, 2003.
- [56] Giorgio Rizzoni, Lino Guzzella, and Bernd M Baumann. Unified modeling of hybrid electric vehicle drivetrains. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 4(3) :246–257, Sep 1999.
- [57] A Rufer and P Barrade. Cours d'électronique de puissance-conversion dc/dc. *Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne (EPFL), Lausanne, Suisse*, 2001.
- [58] Farzad Rajaei Salmasi. Control strategies for hybrid electric vehicles : Evolution, classification, comparison, and future trends. *IEEE Transactions on vehicular technology*, 56(5) :2393–2404, 2007.
- [59] Antonio Sciarretta, Michael Back, and Lino Guzzella. Optimal control of parallel hybrid electric vehicles. *IEEE Transactions on control systems technology*, 12(3) :352–363, 2004.
- [60] Antonio Sciarretta and Lino Guzzella. Control of hybrid electric vehicles. *IEEE Control systems*, 27(2) :60–70, 2007.
- [61] Lorenzo Serrao, Simona Onori, and Giorgio Rizzoni. Ecms as a realization of pontryagin's minimum principle for hev control. *American Control Conference, 2009. ACC'09.*, pages 3964–3969, 2009.
- [62] Lorenzo Serrao, Simona Onori, Antonio Sciarretta, Yann Guezennec, and Giorgio Rizzoni. Optimal energy management of hybrid electric vehicles including battery aging. *American Control Conference (ACC), 2011*, pages 2125–2130, 2011.

- [63] Lorenzo Serrao, Simona Onori, Antonio Sciarretta, Yann Guezennec, and Giorgio Rizzoni. Optimal energy management of hybrid electric vehicles including battery aging. *American Control Conference (ACC), 2011*, pages 2125–2130, 2011.
- [64] Volkan Sezer, Metin Gokasan, and Seta Bogosyan. A novel ecms and combined cost map approach for high-efficiency series hybrid electric vehicles. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 60(8) :3557–3570, 2011.
- [65] Antoine Simon, Pierre Michel, Dominique Nelson-Gruel, Yann Chamaillard, and Cedric Nouillant. Gasoline-hev equivalent consumption and pollutant minimization strategy. *Vehicle Power and Propulsion Conference (VPPC), 2015 IEEE*, pages 1–6, 2015.
- [66] Delphine Sinoquet, Gregory Rousseau, and Yohan Milhau. Design optimization and optimal control for hybrid vehicles. *Optimization and Engineering*, 12(1-2) :199–213, 2011.
- [67] Nicoleta Stroe, Guillaume Colin, Karim Ben-Cherif, Sorin Olaru, and Yann Chamaillard. Towards a generic control-oriented model for hev predictive energy management. *IFAC-PapersOnLine*, 49(11) :259–264, 2016.
- [68] Nicoleta Stroe, Sorin Olaru, Guillaume Colin, Karim Ben-Cherif, and Yann Chamaillard. A two-layer predictive control for hybrid electric vehicles energy management. *IFAC-PapersOnLine*, 50(1) :10058–10064, 2017.
- [69] Nicoleta Stroe, Sorin Olaru, Guillaume Colin, Karim Ben-Cherif, and Yann Chamaillard. Time-varying mpc-based energy management for hev including engine stop & start. *System Theory, Control and Computing (ICSTCC), 2016 20th International Conference on*, pages 790–795, 2016.
- [70] Olle Sundström, Daniel Ambühl, and Lino Guzzella. On implementation of dynamic programming for optimal control problems with final state constraints. *Oil & Gas Science and Technology—Revue de l’Institut Français du Pétrole*, 65(1) :91–102, 2010.
- [71] Kazuhito Hayashi Masayoshi Suhama Masaki Okamura Toshifumi Yamakawa, Hideto Hanada. Motor drive control apparatus, vehicle with motor drive control apparatus, and motor drive control method, 12 2012.
- [72] Active Tourer eDrive and Charles Gray. New dht for alliance renault / nissan - global optimisation and efficiency performance. *CTI*, Décembre 2015.
- [73] Emmanuel Trélat. *Contrôle optimal : théorie & applications*, volume 865. Vuibert Paris, 2008.
- [74] Ximing Wang, Hongwen He, Fengchun Sun, and Jieli Zhang. Application study on the dynamic programming algorithm for energy management of plug-in hybrid electric vehicles. *Energies*, 8(4) :3225–3244, 2015.
- [75] Zifei Yang and Anup Bandivadekar. Light-duty vehicle greenhouse gas and fuel economy standards. 2017.
- [76] Zou Yuan, Liu Teng, Sun Fengchun, and Huei Peng. Comparative study of dynamic programming and pontryagin’s minimum principle on energy management for a parallel hybrid electric vehicle. *Energies*, 6(4) :2305–2318, 2013.
- [77] Shuo Zhang, Rui Xiong, and Fengchun Sun. Model predictive control for power management in a plug-in hybrid electric vehicle with a hybrid energy storage system. *Applied Energy*, 185 :1654–1662, 2017.
- [78] Jianning Zhao. *Co-Optimisation du Dimensionnement et du Contrôle des Groupe Motopulseurs Innovants*. PhD thesis, Université Paris-Saclay, 2017.
- [79] Jianning Zhao and Antonio Sciarretta. Design and control co-optimization for hybrid powertrains : Development of dedicated optimal energy management strategy. *IFAC-PapersOnLine*, 49(11) :277–284, 2016.

Chapitre 6

Annexes

6.1 Optimisation de l'état du moteur thermique

Dans cette section, l'expression de $F_0(P_r, \lambda)$ ainsi que de $P_0(\lambda)$ sont déterminées pour les cas de P_{th}^{opt} présentés dans la section 2.1.1 (page 57) non traités dans la section 2.2.

UC2 (ou UC2')

Si $P_{lim} + \underline{P}_e > 0$

Cas	$F_0(P_r, \lambda)$
$\underline{P}_e \leq P_r \leq \underline{P}_{th}$	$-\lambda a_- \underline{P}_{th}$
$\underline{P}_{th} \leq P_r \leq 0$	$(a_1 - \lambda a_-)P_r + Q_0$
$0 \leq P_r \leq \overline{P}_e$	$(a_1 - \lambda a_+)P_r + Q_0$

Dans ce cas, $P_0(\lambda)$ est donnée par :

$$P_0(\lambda) = \frac{Q_0}{\lambda a_+ - a_1} \quad (6.1)$$

UC3 (UC3', UC4 ou UC4')

Si $P_{lim} + \underline{P}_e < 0$

Cas	$F_0(P_r, \lambda)$
$\underline{P}_e \leq P_r \leq P_{lim} + \underline{P}_e$	$(a_1 - \lambda a_-)P_r + (\lambda a_- - a_1)\underline{P}_e + Q_0$
$P_{lim} + \underline{P}_e \leq P_r \leq 0$	$Q_{lim} - \lambda a_- P_{lim}$
$0 \leq P_r \leq P_{lim}$	$(\lambda a_- - \lambda a_+)P_r + Q_{lim} - \lambda a_- P_{lim}$
$P_{lim} \leq P_r \leq \overline{P}_e$	$Q_{lim} - \lambda a_+ P_{lim}$

Dans ce cas, $P_0(\lambda)$ est donnée par :

$$P_0(\lambda) = \begin{cases} \overline{P}_e & \text{si } \lambda \leq \frac{Q_{lim}}{a_+ P_{lim}} \\ \frac{Q_{lim} - \lambda a_- P_{lim}}{\lambda(a_+ - a_-)} & \text{si } \frac{Q_{lim}}{a_+ P_{lim}} \leq \lambda \leq \frac{Q_{lim}}{a_- P_{lim}} \\ \frac{Q_0 + (\lambda a_- - a_1)\underline{P}_e}{\lambda a_- - a_1} & \text{si } \lambda \geq \frac{Q_{lim}}{a_- P_{lim}} \end{cases} \quad (6.2)$$

Si $P_{\text{lim}} + \underline{P}_e > 0$

Cas	$F_0(P_r, \lambda)$
$\underline{P}_e \leq P_r \leq 0$	$(a_1 - \lambda a_-)P_r + (\lambda a_- - a_1)\underline{P}_e + Q_0$
$0 \leq P_r \leq P_{\text{lim}} + \underline{P}_e$	$(a_1 - \lambda a_+)P_r + (\lambda a_- - a_1)\underline{P}_e + Q_0$
$P_{\text{lim}} + \underline{P}_e \leq P_r \leq \overline{P}_e$	$(\lambda a_- - \lambda a_+)P_r + Q_{\text{lim}} - \lambda a_- P_{\text{lim}}$

Dans ce cas, $P_0(\lambda)$ est donnée par :

$$P_0(\lambda) = \begin{cases} \overline{P}_e & \text{si} & \lambda \leq \frac{Q_{\text{lim}}}{(a_+ - a_-)\overline{P}_e + a_- P_{\text{lim}}} \\ \frac{Q_{\text{lim}} - \lambda a_- P_{\text{lim}}}{\lambda(a_+ - a_-)} & \text{si} & \frac{Q_{\text{lim}}}{(a_+ - a_-)\overline{P}_e + a_- P_{\text{lim}}} \leq \lambda \leq \frac{Q_{\text{lim}}}{(a_+ - a_-)\underline{P}_e + a_+ P_{\text{lim}}} \\ \frac{Q_0 + (\lambda a_- - a_1)\underline{P}_e}{\lambda a_+ - a_1} & \text{si} & \frac{Q_{\text{lim}}}{(a_+ - a_-)\underline{P}_e + a_+ P_{\text{lim}}} \leq \lambda \leq \frac{a_1}{a_-} + \frac{Q_0}{a_- \underline{P}_e} \\ \frac{Q_0 + (\lambda a_- - a_1)\underline{P}_e}{\lambda a_- - a_1} & \text{si} & \lambda \geq \frac{a_1}{a_-} + \frac{Q_0}{a_- \underline{P}_e} \end{cases} \quad (6.3)$$

UC5

Si $\overline{P}_{\text{th}} + \underline{P}_e < 0$

Cas	$F_0(P_r, \lambda)$
$\underline{P}_e \leq P_r \leq P_{\text{lim}} + \underline{P}_e$	$(a_1 - \lambda a_-)P_r + (\lambda a_- - a_1)\underline{P}_e + Q_0$
$P_{\text{lim}} + \underline{P}_e \leq P_r \leq \overline{P}_{\text{th}} + \underline{P}_e$	$(a_2 - \lambda a_-)P_r + (\lambda a_- - a_2)\underline{P}_e + Q_{\text{lim}} - a_2 P_{\text{lim}}$
$\overline{P}_{\text{th}} + \underline{P}_e \leq P_r \leq 0$	$(a_2 - \lambda a_-)\overline{P}_{\text{th}} + Q_{\text{lim}} - a_2 P_{\text{lim}}$
$0 \leq P_r \leq \overline{P}_e$	$\lambda(a_- - a_+)P_r + (a_2 - \lambda a_-)\overline{P}_{\text{th}} + Q_{\text{lim}} - a_2 P_{\text{lim}}$

Si $\overline{P}_{\text{th}} + \underline{P}_e > 0$

Cas	$F_0(P_r, \lambda)$
$\underline{P}_e \leq P_r \leq P_{\text{lim}} + \underline{P}_e$	$(a_1 - \lambda a_-)P_r + (\lambda a_- - a_1)\underline{P}_e + Q_0$
$P_{\text{lim}} + \underline{P}_e \leq P_r \leq 0$	$(a_2 - \lambda a_-)P_r + (\lambda a_- - a_2)\underline{P}_e + Q_{\text{lim}} - a_2 P_{\text{lim}}$
$0 \leq P_r \leq \overline{P}_{\text{th}} + \underline{P}_e$	$(a_2 - \lambda a_+)P_r + (\lambda a_- - a_2)\underline{P}_e + Q_{\text{lim}} - a_2 P_{\text{lim}}$
$\overline{P}_{\text{th}} + \underline{P}_e \leq P_r \leq \overline{P}_e$	$\lambda(a_- - a_+)P_r + (a_2 - \lambda a_-)\overline{P}_{\text{th}} + Q_{\text{lim}} - a_2 P_{\text{lim}}$

Dans ce cas, $P_0(\lambda)$ est donnée par :

$$P_0(\lambda) = \begin{cases} \overline{P}_e & \text{si} & \lambda \leq \frac{Q_{\text{lim}}}{a_- P_{\text{lim}}} \\ \frac{Q_0 + (\lambda a_- - a_1)\underline{P}_e}{\lambda a_- - a_1} & \text{si} & \lambda \geq \frac{Q_{\text{lim}}}{a_- P_{\text{lim}}} \end{cases} \quad (6.4)$$

La figure 6.1 représente l'expression du seuil $P_0(\lambda)$.

6.2 Optimisation du régime du moteur thermique

6.2.1 Rapports Discrets

Dans cette section, l'expression de $F_{\text{RT}}(P_r, \lambda)$ ainsi que de $P_{\text{RT}}(\lambda)$ sont déterminées pour les cas de $P_{\text{th}}^{\text{opt}}$ présentés dans la section 2.1.1 (page 57) non traités dans la section 2.3.1.

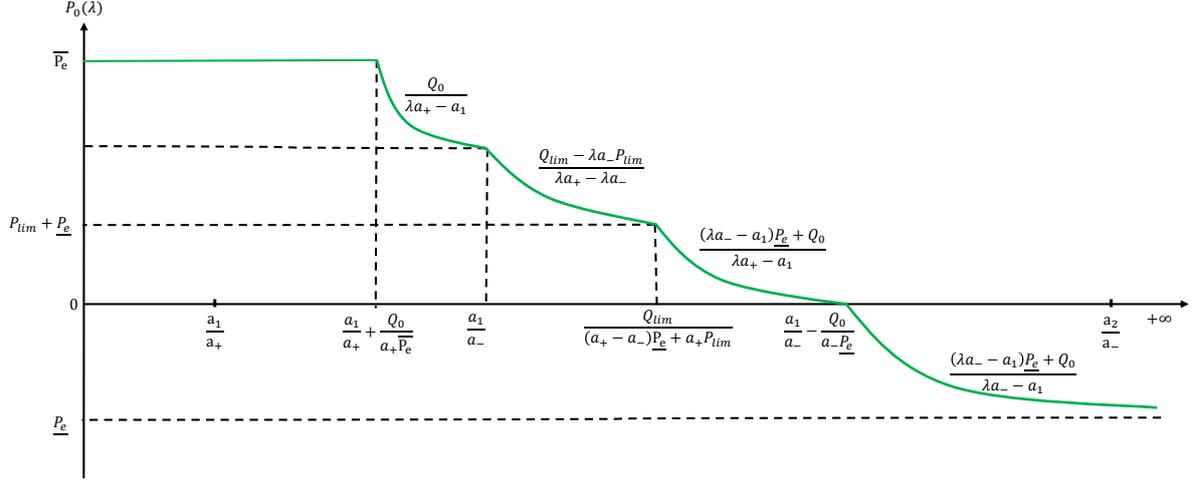


FIGURE 6.1 – Allure de $P_0(\lambda)$ dans le cas où $P_{\text{lim}} > \bar{P}_e$

UC2 (ou UC2')

Si $P_{\text{lim}}^2 < P_{\text{lim}}^1 + \bar{P}_e$

Cas	$F_{RT}(P_r, \lambda)$
$\underline{P}_r^1 \leq P_r \leq \underline{P}_{\text{th}}^2$	$\lambda a_- (\underline{P}_{\text{th}}^2 - \underline{P}_{\text{th}}^1)$
$\underline{P}_{\text{th}}^2 \leq P_r \leq \underline{P}_{\text{th}}^1$	$(\lambda a_- - a_1) P_r - \lambda a_- \underline{P}_{\text{th}}^1 - Q_0^2$
$\underline{P}_{\text{th}}^1 \leq P_r \leq \underline{P}_{\text{lim}}^1$	$Q_0^1 - Q_0^2$
$\underline{P}_{\text{lim}}^1 \leq P_r \leq \underline{P}_{\text{lim}}^2$	$(\lambda a_+ - a_1) P_r - \lambda a_+ \underline{P}_{\text{lim}}^1 + Q_{\text{lim}}^1 - Q_0^2$
$\underline{P}_{\text{lim}}^2 \leq P_r \leq \underline{P}_{\text{lim}}^1 + \bar{P}_e$	$\lambda a_+ (P_{\text{lim}}^2 - \underline{P}_{\text{lim}}^1) + Q_{\text{lim}}^1 - Q_{\text{lim}}^2$
$\underline{P}_{\text{lim}}^1 + \bar{P}_e \leq P_r \leq \underline{P}_{\text{lim}}^2 + \bar{P}_e$	$(a_2 - \lambda a_+) P_r - (a_2 - \lambda a_+) \bar{P}_e + Q_{\text{lim}}^1 - a_2 \underline{P}_{\text{lim}}^1 + \lambda a_+ \underline{P}_{\text{lim}}^2 - Q_{\text{lim}}^2$
$\underline{P}_{\text{lim}}^2 + \bar{P}_e \leq P_r \leq \bar{P}_r^1$	$a_2 (P_{\text{lim}}^2 - \underline{P}_{\text{lim}}^1) + Q_{\text{lim}}^1 - Q_{\text{lim}}^2$

Si $P_{\text{lim}}^2 > P_{\text{lim}}^1 + \bar{P}_e$

Cas	$F_{RT}(P_r, \lambda)$
$\underline{P}_r^1 \leq P_r \leq \underline{P}_{\text{th}}^2$	$\lambda a_- (\underline{P}_{\text{th}}^2 - \underline{P}_{\text{th}}^1)$
$\underline{P}_{\text{th}}^2 \leq P_r \leq \underline{P}_{\text{th}}^1$	$(\lambda a_- - a_1) P_r - \lambda a_- \underline{P}_{\text{th}}^1 - Q_0^2$
$\underline{P}_{\text{th}}^1 \leq P_r \leq \underline{P}_{\text{lim}}^1$	$Q_0^1 - Q_0^2$
$\underline{P}_{\text{lim}}^1 \leq P_r \leq \underline{P}_{\text{lim}}^1 + \bar{P}_e$	$(\lambda a_+ - a_1) P_r - \lambda a_+ \underline{P}_{\text{lim}}^1 + Q_{\text{lim}}^1 - Q_0^2$
$\underline{P}_{\text{lim}}^1 + \bar{P}_e \leq P_r \leq \underline{P}_{\text{lim}}^2$	$(a_2 - a_1) P_r - (a_2 - \lambda a_+) \bar{P}_e + Q_{\text{lim}}^1 - a_2 \underline{P}_{\text{lim}}^1 - Q_0^2$
$\underline{P}_{\text{lim}}^2 \leq P_r \leq \underline{P}_{\text{lim}}^2 + \bar{P}_e$	$(a_2 - \lambda a_+) P_r - (a_2 - \lambda a_+) \bar{P}_e + Q_{\text{lim}}^1 - a_2 \underline{P}_{\text{lim}}^1 + \lambda a_+ \underline{P}_{\text{lim}}^2 - Q_{\text{lim}}^2$
$\underline{P}_{\text{lim}}^2 + \bar{P}_e \leq P_r \leq \bar{P}_r^1$	$a_2 (P_{\text{lim}}^2 - \underline{P}_{\text{lim}}^1) + Q_{\text{lim}}^1 - Q_{\text{lim}}^2$

UC4 (ou UC4')

Si $P_{\text{lim}}^1 > P_{\text{lim}}^2 + \underline{P}_e$

Cas	$F_{RT}(P_r, \lambda)$
$\underline{P}_r^1 \leq P_r \leq \overline{P}_{\text{lim}}^1 + \underline{P}_e$	$Q_0^1 - Q_0^2$
$\overline{P}_{\text{lim}}^1 + \underline{P}_e \leq P_r \leq \overline{P}_{\text{lim}}^2 + \underline{P}_e$	$(\lambda a_- - a_1)P_r - \lambda a_- P_{\text{lim}}^1 + Q_{\text{lim}}^1 + (a_1 - \lambda a_-)\underline{P}_e - Q_0^2$
$\overline{P}_{\text{lim}}^2 + \underline{P}_e \leq P_r \leq \overline{P}_{\text{lim}}^1$	$\lambda a_- (P_{\text{lim}}^2 - P_{\text{lim}}^1) + Q_{\text{lim}}^1 - Q_{\text{lim}}^2$
$\overline{P}_{\text{lim}}^1 \leq P_r \leq \overline{P}_{\text{lim}}^2$	$(a_2 - \lambda a_-)P_r + \lambda a_- P_{\text{lim}}^2 + Q_{\text{lim}}^1 - a_2 P_{\text{lim}}^1 - Q_{\text{lim}}^2$
$\overline{P}_{\text{lim}}^2 \leq P_r \leq \overline{P}_r^1$	$a_2(P_{\text{lim}}^2 - P_{\text{lim}}^1) + Q_{\text{lim}}^1 - Q_{\text{lim}}^2$

Si $P_{\text{lim}}^1 < P_{\text{lim}}^2 + \underline{P}_e$

Cas	$F_{RT}(P_r, \lambda)$
$\underline{P}_r^1 \leq P_r \leq \overline{P}_{\text{lim}}^1 + \underline{P}_e$	$Q_0^1 - Q_0^2$
$\overline{P}_{\text{lim}}^1 + \underline{P}_e \leq P_r \leq \overline{P}_{\text{lim}}^1$	$(\lambda a_- - a_1)P_r - \lambda a_- P_{\text{lim}}^1 + Q_{\text{lim}}^1 + (a_1 - \lambda a_-)\underline{P}_e - Q_0^2$
$\overline{P}_{\text{lim}}^1 \leq P_r \leq \overline{P}_{\text{lim}}^2 + \underline{P}_e$	$(a_2 - a_1)P_r - a_2 P_{\text{lim}}^1 + Q_{\text{lim}}^1 + (a_1 - \lambda a_-)\underline{P}_e - Q_0^2$
$\overline{P}_{\text{lim}}^2 + \underline{P}_e \leq P_r \leq \overline{P}_{\text{lim}}^2$	$(a_2 - \lambda a_-)P_r + Q_{\text{lim}}^1 - a_2 P_{\text{lim}}^1 + \lambda a_- P_{\text{lim}}^2 - Q_{\text{lim}}^2$
$\overline{P}_{\text{lim}}^2 \leq P_r \leq \overline{P}_r^1$	$a_2(P_{\text{lim}}^2 - P_{\text{lim}}^1) + Q_{\text{lim}}^1 - Q_{\text{lim}}^2$

UC5

Si $P_{\text{lim}}^2 + \underline{P}_e > \overline{P}_{\text{th}}^1 + \underline{P}_e$

Cas	$F_{RT}(P_r, \lambda)$
$\underline{P}_r^1 \leq P_r \leq \overline{P}_{\text{lim}}^1 + \underline{P}_e$	$Q_0^1 - Q_0^2$
$\overline{P}_{\text{lim}}^1 + \underline{P}_e \leq P_r \leq \overline{P}_{\text{th}}^1 + \underline{P}_e$	$(a_2 - a_1)P_r + (a_1 - a_2)\underline{P}_e - a_2 P_{\text{lim}}^1 + Q_{\text{lim}}^1 - Q_0^2$
$\overline{P}_{\text{th}}^1 + \underline{P}_e \leq P_r \leq \overline{P}_{\text{lim}}^2 + \underline{P}_e$	$(\lambda a_- - a_1)P_r - a_2 P_{\text{lim}}^1 + Q_{\text{lim}}^1 + (a_2 - \lambda a_-)\overline{P}_{\text{th}}^1 + (a_1 - \lambda a_-)\underline{P}_e - Q_0^2$
$\overline{P}_{\text{lim}}^2 + \underline{P}_e \leq P_r \leq \overline{P}_{\text{th}}^2 + \underline{P}_e$	$(\lambda a_- - a_2)P_r + a_2(P_{\text{lim}}^2 - P_{\text{lim}}^1) + Q_{\text{lim}}^1 - Q_{\text{lim}}^2 + (a_2 - \lambda a_-)(\overline{P}_{\text{th}}^1 + \underline{P}_e)$
$\overline{P}_{\text{th}}^2 + \underline{P}_e \leq P_r \leq \overline{P}_r^1$	$(a_2 - \lambda a_-)(\overline{P}_{\text{th}}^1 + \overline{P}_{\text{th}}^2) + a_2(P_{\text{lim}}^2 - P_{\text{lim}}^1) + Q_{\text{lim}}^1 - Q_{\text{lim}}^2$

Si $P_{\text{lim}}^2 + \underline{P}_e < \overline{P}_{\text{th}}^1 + \underline{P}_e$

Cas	$F_{RT}(P_r, \lambda)$
$\underline{P}_r^1 \leq P_r \leq \overline{P}_{\text{lim}}^1 + \underline{P}_e$	$Q_0^1 - Q_0^2$
$\overline{P}_{\text{lim}}^1 + \underline{P}_e \leq P_r \leq \overline{P}_{\text{lim}}^2 + \underline{P}_e$	$(a_2 - a_1)P_r + (a_1 - a_2)\underline{P}_e - a_2 P_{\text{lim}}^1 + Q_{\text{lim}}^1 - Q_0^2$
$\overline{P}_{\text{lim}}^2 + \underline{P}_e \leq P_r \leq \overline{P}_{\text{th}}^1 + \underline{P}_e$	$a_2(P_{\text{lim}}^2 - P_{\text{lim}}^1) + Q_{\text{lim}}^1 - Q_{\text{lim}}^2$
$\overline{P}_{\text{th}}^1 + \underline{P}_e \leq P_r \leq \overline{P}_{\text{th}}^2 + \underline{P}_e$	$(\lambda a_- - a_2)P_r + a_2(P_{\text{lim}}^2 - P_{\text{lim}}^1) + Q_{\text{lim}}^1 - Q_{\text{lim}}^2 + (a_2 - \lambda a_-)(\overline{P}_{\text{th}}^1 + \underline{P}_e)$
$\overline{P}_{\text{th}}^2 + \underline{P}_e \leq P_r \leq \overline{P}_r^1$	$(a_2 - \lambda a_-)(\overline{P}_{\text{th}}^1 - \overline{P}_{\text{th}}^2) + a_2(P_{\text{lim}}^2 - P_{\text{lim}}^1) + Q_{\text{lim}}^1 - Q_{\text{lim}}^2$

La figure 6.2 représente l'expression du seuil $P_{RT}(\lambda)$.

6.2.2 Rapports Continus

Dans cette section, les cas de détermination de $P_{\text{th}}^{\text{opt}}$ non traités dans la section 2.3.2 sont présentés.

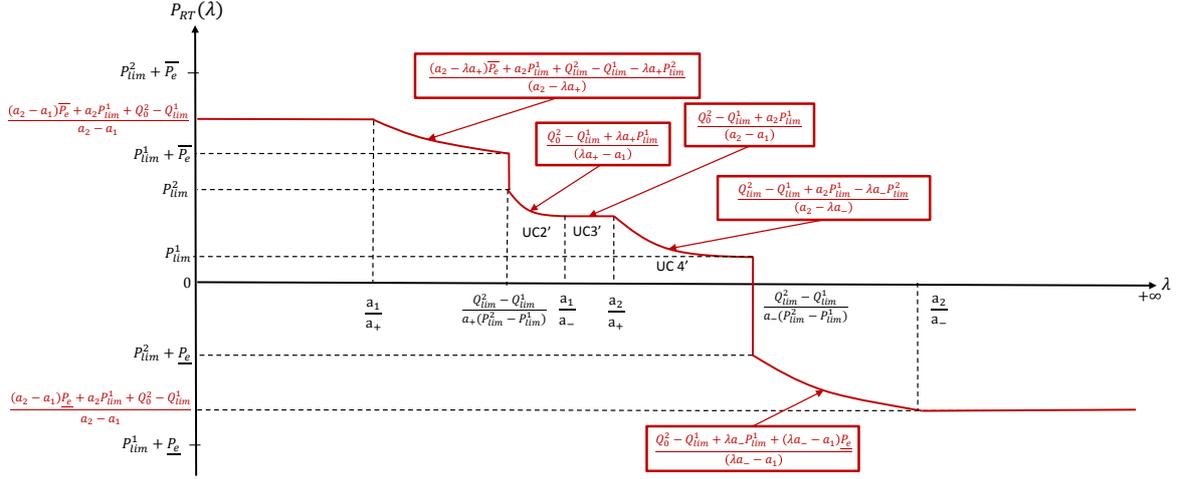


FIGURE 6.2 – Allure de $P_{RT}(\lambda)$ dans le cas où $\frac{a_1}{a_-} > \frac{a_2}{a_+}$

Cas A :

UC2 :

Dans ce cas, les extremums P_{th}^{*1} et P_{th}^{*2} sont tous les deux inférieurs à P_{lim}^{min} . La pente $a_1 - \lambda a_+$ est négative et les toutes les autres pentes des parties affines de H sont positives.

P_{th}^{opt} est donnée par :

Cas sur P_r			P_{th}^{opt}
\underline{P}_r	$\leq P_r \leq$	\underline{P}_{th}	\underline{P}_{th}
\underline{P}_{th}	$\leq P_r \leq$	P_{lim}^{min}	\underline{P}_r
P_{lim}^{min}	$\leq P_r \leq$	$P_{lim}^{min} + \overline{P}_e$	P_{lim}^{min}
$P_{lim}^{min} + \overline{P}_e$	$\leq P_r \leq$	\underline{P}_r	$\underline{P}_r - \overline{P}_e$

UC2.4 :

Dans ce cas, $P_{th}^{*1} < P_{lim}^{min}$ et $P_{lim}^{min} \leq P_{th}^{*2} \leq P_{lim}^{max}$. La pente $a_1 - \lambda a_+$ est négative et les toutes les autres pentes des parties affines de H sont positives.

P_{th}^{opt} est donnée par :

Cas sur P_r			P_{th}^{opt}
\underline{P}_r	$\leq P_r \leq$	\underline{P}_{th}	\underline{P}_{th}
\underline{P}_{th}	$\leq P_r \leq$	P_{lim}^{min}	\underline{P}_r
P_{lim}^{min}	$\leq P_r \leq$	$P_{th}^{*2} + \overline{P}_e$	P_{th}^{*2}
$P_{th}^{*2} + \overline{P}_e$	$\leq P_r \leq$	\underline{P}_r	$\underline{P}_r - \overline{P}_e$

UC3 :

Dans ce cas, $P_{th}^{*1} < P_{lim}^{min}$ et $P_{th}^{*2} > P_{lim}^{max}$. Les pentes $a_1 - \lambda a_+$ et $a_1 - \lambda a_-$ sont négatives et les pentes $a_2 - \lambda a_+$ et $a_2 - \lambda a_-$ sont positives.

P_{th}^{opt} est donnée par :

Cas sur P_r			P_{th}^{opt}
\underline{P}_r	$\leq P_r \leq$	$P_{lim}^{min} + \underline{P}_e$	$P_r - \underline{P}_e$
$P_{lim}^{min} + \underline{P}_e$	$\leq P_r \leq$	P_{lim}^{min}	P_{lim}^{min}
P_{lim}^{min}	$\leq P_r \leq$	P_{lim}^{max}	P_r
P_{lim}^{max}	$\leq P_r \leq$	$P_{lim}^{max} + \overline{P}_e$	P_{lim}^{max}
$P_{lim}^{max} + \overline{P}_e$	$\leq P_r \leq$	\overline{P}_r	$P_r - \overline{P}_e$

UC3.4 :

Dans ce cas, les extremums P_{th}^{*1} et P_{th}^{*2} sont tous les deux inférieurs à P_{lim}^{min} . Les pentes $a_1 - \lambda a_+$ et $a_1 - \lambda a_-$ sont négatives et les pentes $a_2 - \lambda a_+$ et $a_2 - \lambda a_-$ sont positives.

P_{th}^{opt} est donnée par :

Cas sur P_r			P_{th}^{opt}
\underline{P}_r	$\leq P_r \leq$	$P_{lim}^{min} + \underline{P}_e$	$P_r - \underline{P}_e$
$P_{lim}^{min} + \underline{P}_e$	$\leq P_r \leq$	$P_{lim}^{min} + \overline{P}_e$	P_{lim}^{min}
$P_{lim}^{min} + \overline{P}_e$	$\leq P_r \leq$	\overline{P}_r	$P_r - \overline{P}_e$

UC3.5 :

Dans ce cas, $P_{th}^{*1} < P_{lim}^{min}$ et $P_{lim}^{min} \leq P_{th}^{*2} \leq P_{lim}^{max}$. Les pentes $a_1 - \lambda a_+$ et $a_1 - \lambda a_-$ sont négatives et les pentes $a_2 - \lambda a_+$ et $a_2 - \lambda a_-$ sont positives.

Cas sur P_r			P_{th}^{opt}
\underline{P}_r	$\leq P_r \leq$	$P_{lim}^{min} + \underline{P}_e$	$P_r - \underline{P}_e$
$P_{lim}^{min} + \underline{P}_e$	$\leq P_r \leq$	P_{lim}^{min}	P_{lim}^{min}
P_{lim}^{min}	$\leq P_r \leq$	P_{th}^{*2}	P_r
P_{th}^{*2}	$\leq P_r \leq$	$P_{th}^{*2} + \overline{P}_e$	P_{th}^{*2}
$P_{th}^{*2} + \overline{P}_e$	$\leq P_r \leq$	\overline{P}_r	$P_r - \overline{P}_e$

UC3.6 :

Dans ce cas, $P_{th}^{*1} < P_{lim}^{min}$ et $P_{th}^{*2} > P_{lim}^{max}$. Les pentes $a_1 - \lambda a_+$ et $a_1 - \lambda a_-$ sont négatives et les pentes $a_2 - \lambda a_+$ et $a_2 - \lambda a_-$ sont positives.

Cas sur P_r			P_{th}^{opt}
\underline{P}_r	$\leq P_r \leq$	$P_{lim}^{min} + \underline{P}_e$	$P_r - \underline{P}_e$
$P_{lim}^{min} + \underline{P}_e$	$\leq P_r \leq$	P_{lim}^{min}	P_{lim}^{min}
P_{lim}^{min}	$\leq P_r \leq$	P_{lim}^{max}	P_r
P_{lim}^{max}	$\leq P_r \leq$	$P_{lim}^{max} + \overline{P}_e$	P_{lim}^{max}
$P_{lim}^{max} + \overline{P}_e$	$\leq P_r \leq$	\overline{P}_r	$P_r - \overline{P}_e$

UC3.7 :

Dans ce cas, $P_{th}^{*1} < P_{lim}^{min}$ et $P_{th}^{*2} > P_{lim}^{max}$. Les pentes $a_1 - \lambda a_+$ et $a_1 - \lambda a_-$ sont négatives et les pentes $a_2 - \lambda a_+$ et $a_2 - \lambda a_-$ sont positives.

Cas sur P_r			P_{th}^{opt}
\underline{P}_r	$\leq P_r \leq$	$P_{lim}^{min} + \underline{P}_e$	$P_r - \underline{P}_e$
$P_{lim}^{min} + \underline{P}_e$	$\leq P_r \leq$	P_{lim}^{min}	P_{lim}^{min}
P_{lim}^{min}	$\leq P_r \leq$	P_{lim}^{max}	P_r
P_{lim}^{max}	$\leq P_r \leq$	$P_{lim}^{max} + \overline{P}_e$	P_{lim}^{max}
$P_{lim}^{max} + \overline{P}_e$	$\leq P_r \leq$	\overline{P}_r	$P_r - \overline{P}_e$

UC3.8 :

Dans ce cas, $P_{th}^{*1} < P_{lim}^{min}$ et $P_{lim}^{min} \leq P_{th}^{*2} \leq P_{lim}^{max}$. Les pentes $a_1 - \lambda a_+$ et $a_1 - \lambda a_-$ sont négatives et les pentes $a_2 - \lambda a_+$ et $a_2 - \lambda a_-$ sont positives.

Cas sur P_r			P_{th}^{opt}
\underline{P}_r	$\leq P_r \leq$	$P_{lim}^{min} + \underline{P}_e$	$P_r - \underline{P}_e$
$P_{lim}^{min} + \underline{P}_e$	$\leq P_r \leq$	P_{lim}^{min}	P_{lim}^{min}
P_{lim}^{min}	$\leq P_r \leq$	P_{th}^{*2}	P_r
P_{th}^{*2}	$\leq P_r \leq$	$P_{th}^{*2} + \overline{P}_e$	P_{th}^{*2}
$P_{th}^{*2} + \overline{P}_e$	$\leq P_r \leq$	\overline{P}_r	$P_r - \overline{P}_e$

UC3.9 :

Dans ce cas, $P_{lim}^{min} \leq P_{th}^{*1} \leq P_{lim}^{max}$ et $P_{lim}^{min} \leq P_{th}^{*2} \leq P_{lim}^{max}$. Les pentes $a_1 - \lambda a_+$ et $a_1 - \lambda a_-$ sont négatives et les pentes $a_2 - \lambda a_+$ et $a_2 - \lambda a_-$ sont positives.

Cas sur P_r			P_{th}^{opt}
\underline{P}_r	$\leq P_r \leq$	$P_{th}^{*1} + \underline{P}_e$	$P_r - \underline{P}_e$
$P_{th}^{*1} + \underline{P}_e$	$\leq P_r \leq$	P_{th}^{*1}	P_{th}^{*1}
P_{th}^{*1}	$\leq P_r \leq$	P_{th}^{*2}	P_r
P_{th}^{*2}	$\leq P_r \leq$	$P_{th}^{*2} + \overline{P}_e$	P_{th}^{*2}
$P_{th}^{*2} + \overline{P}_e$	$\leq P_r \leq$	\overline{P}_r	$P_r - \overline{P}_e$

UC3.10 :

Dans ce cas, $P_{lim}^{min} \leq P_{th}^{*1} \leq P_{lim}^{max}$ et $P_{th}^{*2} > P_{lim}^{max}$. Les pentes $a_1 - \lambda a_+$ et $a_1 - \lambda a_-$ sont négatives et les pentes $a_2 - \lambda a_+$ et $a_2 - \lambda a_-$ sont positives.

Cas sur P_r			P_{th}^{opt}
\underline{P}_r	$\leq P_r \leq$	$P_{th}^{*1} + \underline{P}_e$	$P_r - \underline{P}_e$
$P_{th}^{*1} + \underline{P}_e$	$\leq P_r \leq$	P_{th}^{*1}	P_{th}^{*1}
P_{th}^{*1}	$\leq P_r \leq$	P_{lim}^{max}	P_r
P_{lim}^{max}	$\leq P_r \leq$	$P_{lim}^{max} + \overline{P}_e$	P_{lim}^{max}
$P_{lim}^{max} + \overline{P}_e$	$\leq P_r \leq$	\overline{P}_r	$P_r - \overline{P}_e$

UC3.11 :

Dans ce cas, $P_{th}^{*1} < P_{lim}^{min}$ et $P_{lim}^{min} \leq P_{th}^{*2} \leq P_{lim}^{max}$. Les pentes $a_1 - \lambda a_+$ et $a_1 - \lambda a_-$ sont négatives et les pentes $a_2 - \lambda a_+$ et $a_2 - \lambda a_-$ sont positives.

Cas sur P_r			P_{th}^{opt}
\underline{P}_r	$\leq P_r \leq$	$P_{lim}^{min} + \underline{P}_e$	$P_r - \underline{P}_e$
$P_{lim}^{min} + \underline{P}_e$	$\leq P_r \leq$	P_{lim}^{min}	P_{lim}^{min}
P_{lim}^{min}	$\leq P_r \leq$	P_{th}^{*2}	P_r
P_{th}^{*2}	$\leq P_r \leq$	$P_{th}^{*2} + \overline{P}_e$	P_{th}^{*2}
$P_{th}^{*2} + \overline{P}_e$	$\leq P_r \leq$	\overline{P}_r	$P_r - \overline{P}_e$

UC3.12 :

Dans ce cas, $P_{lim}^{min} \leq P_{th}^{*1} \leq P_{lim}^{max}$ et $P_{th}^{*2} > P_{lim}^{max}$. Les pentes $a_1 - \lambda a_+$ et $a_1 - \lambda a_-$ sont négatives et les pentes $a_2 - \lambda a_+$ et $a_2 - \lambda a_-$ sont positives.

Cas sur P_r			P_{th}^{opt}
\underline{P}_r	$\leq P_r \leq$	$P_{th}^{*1} + \underline{P}_e$	$P_r - \underline{P}_e$
$P_{th}^{*1} + \underline{P}_e$	$\leq P_r \leq$	P_{th}^{*1}	P_{th}^{*1}
P_{th}^{*1}	$\leq P_r \leq$	P_{lim}^{max}	P_r
P_{lim}^{max}	$\leq P_r \leq$	$P_{lim}^{max} + \overline{P}_e$	P_{lim}^{max}
$P_{lim}^{max} + \overline{P}_e$	$\leq P_r \leq$	\overline{P}_r	$P_r - \overline{P}_e$

UC3.13 :

Dans ce cas, $P_{th}^{*1} < P_{lim}^{min}$ et $P_{lim}^{min} \leq P_{th}^{*2} \leq P_{lim}^{max}$. Les pentes $a_1 - \lambda a_+$ et $a_1 - \lambda a_-$ sont négatives et les pentes $a_2 - \lambda a_+$ et $a_2 - \lambda a_-$ sont positives.

Cas sur P_r			P_{th}^{opt}
\underline{P}_r	$\leq P_r \leq$	$P_{lim}^{min} + \underline{P}_e$	$P_r - \underline{P}_e$
$P_{lim}^{min} + \underline{P}_e$	$\leq P_r \leq$	P_{lim}^{min}	P_{lim}^{min}
P_{lim}^{min}	$\leq P_r \leq$	P_{th}^{*2}	P_r
P_{th}^{*2}	$\leq P_r \leq$	$P_{th}^{*2} + \overline{P}_e$	P_{th}^{*2}
$P_{th}^{*2} + \overline{P}_e$	$\leq P_r \leq$	\overline{P}_r	$P_r - \overline{P}_e$

UC3.14 :

Dans ce cas, $P_{lim}^{min} \leq P_{th}^{*1} \leq P_{lim}^{max}$ et $P_{th}^{*2} > P_{lim}^{max}$. Les pentes $a_1 - \lambda a_+$ et $a_1 - \lambda a_-$ sont négatives et les pentes $a_2 - \lambda a_+$ et $a_2 - \lambda a_-$ sont positives.

Cas sur P_r			P_{th}^{opt}
\underline{P}_r	$\leq P_r \leq$	$P_{th}^{*1} + \underline{P}_e$	$P_r - \underline{P}_e$
$P_{th}^{*1} + \underline{P}_e$	$\leq P_r \leq$	P_{th}^{*1}	P_{th}^{*1}
P_{th}^{*1}	$\leq P_r \leq$	P_{lim}^{max}	P_r
P_{lim}^{max}	$\leq P_r \leq$	$P_{lim}^{max} + \overline{P}_e$	P_{lim}^{max}
$P_{lim}^{max} + \overline{P}_e$	$\leq P_r \leq$	\overline{P}_r	$P_r - \overline{P}_e$

UC4.1 :

Dans ce cas, $P_{th}^{*1} < P_{lim}^{min}$ et $P_{th}^{*2} > P_{lim}^{max}$. Les pentes $a_1 - \lambda a_+$, $a_1 - \lambda a_-$ et $a_2 - \lambda a_+$ sont négatives et la pente $a_2 - \lambda a_-$ est positive.

Cas sur P_r			P_{th}^{opt}
\underline{P}_r	$\leq P_r \leq$	$P_{lim}^{min} + \underline{P}_e$	$P_r - \underline{P}_e$
$P_{lim}^{min} + \underline{P}_e$	$\leq P_r \leq$	P_{lim}^{min}	P_{lim}^{min}
P_{lim}^{min}	$\leq P_r \leq$	\overline{P}_{th}	P_r
\overline{P}_{th}	$\leq P_r \leq$	\overline{P}_r	\overline{P}_{th}

UC4.2 :

Dans ce cas, $P_{lim}^{min} \leq P_{th}^{*1} \leq P_{lim}^{max}$ et $P_{th}^{*2} > P_{lim}^{max}$. Les pentes $a_1 - \lambda a_+$, $a_1 - \lambda a_-$ et $a_2 - \lambda a_+$ sont négatives et la pente $a_2 - \lambda a_-$ est positive.

Cas sur P_r			P_{th}^{opt}
\underline{P}_r	$\leq P_r \leq$	$P_{th}^{*1} + \underline{P}_e$	$P_r - \underline{P}_e$
$P_{th}^{*1} + \underline{P}_e$	$\leq P_r \leq$	P_{th}^{*1}	P_{th}^{*1}
P_{th}^{*1}	$\leq P_r \leq$	\overline{P}_{th}	P_r
\overline{P}_{th}	$\leq P_r \leq$	\overline{P}_r	\overline{P}_{th}

UC4.3 :

Dans ce cas, $P_{th}^{*1} > P_{lim}^{max}$ et $P_{th}^{*2} > P_{lim}^{max}$. Les pentes $a_1 - \lambda a_+$, $a_1 - \lambda a_-$ et $a_2 - \lambda a_+$ sont négatives et la pente $a_2 - \lambda a_-$ est positive.

Cas sur P_r			P_{th}^{opt}
\underline{P}_r	$\leq P_r \leq$	$P_{lim}^{max} + \underline{P}_e$	$P_r - \underline{P}_e$
$P_{lim}^{max} + \underline{P}_e$	$\leq P_r \leq$	P_{lim}^{max}	P_{lim}^{max}
P_{lim}^{max}	$\leq P_r \leq$	\overline{P}_{th}	P_r
\overline{P}_{th}	$\leq P_r \leq$	\overline{P}_r	\overline{P}_{th}

UC4.4 :

Dans ce cas, $P_{lim}^{min} \leq P_{th}^{*1} \leq P_{lim}^{max}$ et $P_{th}^{*2} > P_{lim}^{max}$. Les pentes $a_1 - \lambda a_+$, $a_1 - \lambda a_-$ et $a_2 - \lambda a_+$ sont négatives et la pente $a_2 - \lambda a_-$ est positive.

Cas sur P_r			P_{th}^{opt}
\underline{P}_r	$\leq P_r \leq$	$P_{th}^{*1} + \underline{P}_e$	$P_r - \underline{P}_e$
$P_{th}^{*1} + \underline{P}_e$	$\leq P_r \leq$	P_{th}^{*1}	P_{th}^{*1}
P_{th}^{*1}	$\leq P_r \leq$	\overline{P}_{th}	P_r
\overline{P}_{th}	$\leq P_r \leq$	\overline{P}_r	\overline{P}_{th}

Cas B :

UC2'.3 :

Dans ce cas, $P_{th}^{*1} < P_{lim}^{min}$ et $P_{th}^{*2} \geq P_{lim}^{max}$. La pente $a_1 - \lambda a_+$ est négative et les toutes les autres pentes des parties affines de H sont positives.

P_{th}^{opt} est donnée par :

Cas sur P_r			P_{th}^{opt}
\underline{P}_r	$\leq P_r \leq$	\underline{P}_{th}	\underline{P}_{th}
\underline{P}_{th}	$\leq P_r \leq$	\overline{P}_{lim}^{max}	\underline{P}_r
\overline{P}_{lim}^{max}	$\leq P_r \leq$	$\overline{P}_{lim}^{max} + \overline{P}_e$	\overline{P}_{lim}^{max}
$\overline{P}_{lim}^{max} + \overline{P}_e$	$\leq P_r \leq$	\overline{P}_r	$\overline{P}_r - \overline{P}_e$

UC3' :

Dans ce cas, $P_{th}^{*1} < P_{lim}^{min}$ et $P_{th}^{*2} > P_{lim}^{max}$. Les pentes $a_1 - \lambda a_+$ et $a_2 - \lambda a_+$ sont négatives et les pentes $a_1 - \lambda a_-$ et $a_2 - \lambda a_-$ sont positives.

Cas sur P_r			P_{th}^{opt}
\underline{P}_r	$\leq P_r \leq$	\underline{P}_{th}	\underline{P}_{th}
\underline{P}_{th}	$\leq P_r \leq$	\overline{P}_{th}	\underline{P}_r
\overline{P}_{th}	$\leq P_r \leq$	\overline{P}_r	\overline{P}_{th}

UC4'.1 :

Dans ce cas, $P_{th}^{*1} < P_{lim}^{min}$ et $P_{th}^{*2} > P_{lim}^{max}$. Les pentes $a_1 - \lambda a_+$, $a_1 - \lambda a_-$ et $a_2 - \lambda a_+$ sont négatives et la pente $a_2 - \lambda a_-$ est positive.

Cas sur P_r			P_{th}^{opt}
\underline{P}_r	$\leq P_r \leq$	$\overline{P}_{lim}^{min} + \overline{P}_e$	$\overline{P}_r - \overline{P}_e$
$\overline{P}_{lim}^{min} + \overline{P}_e$	$\leq P_r \leq$	\overline{P}_{lim}^{min}	\overline{P}_{lim}^{min}
\overline{P}_{lim}^{min}	$\leq P_r \leq$	\overline{P}_{th}	\underline{P}_r
\overline{P}_{th}	$\leq P_r \leq$	\overline{P}_r	\overline{P}_{th}

6.3 Optimisation de la répartition de puissance pour l'architecture bi-parallèle

Dans cette section, les cas de détermination de P_m^{opt} non traités dans la section 3.1 sont présentés.

$$b_1^+ - b_2^+ \geq 0$$

Cas 1.1 :

P_m	$-\infty$	P_{m3}^p	P_{m4}^p	P_{m1}^p	P_{m2}^p
$H(P_m)$	$a_2(P_r - P_m)$ $+ Q_{lim} - a_2 P_{lim}$ $+ \lambda P_{e1}^-(\underline{P}_{e1})$ $+ \lambda P_{e2}^-(P_m - \underline{P}_{e1})$	$a_1(P_r - P_m)$ $+ Q_0$ $+ \lambda P_{e1}^-(\underline{P}_{e1})$ $+ \lambda P_{e2}^-(P_m - \underline{P}_{e1})$	$\lambda P_{e1}^-(\underline{P}_{e1})$ $+ \lambda P_{e2}^-(P_m - \underline{P}_{e1})$	$\lambda P_{e1}^-(P_{m1}^{*-})$ $+ \lambda P_{e2}^-(P_m - P_{m1}^{*-})$	

P_m	P_{m2}^p	0	P_{m5}^p	P_{m6}^p	$+\infty$
$H(P_m)$	$\lambda P_{e2}^-(P_m)$ $+\lambda c_1$	$\lambda P_{e2}^+(P_m)$ $+\lambda c_1$	$\lambda P_{e1}^+(P_{m1}^{*+})$ $+\lambda P_{e2}^+(P_m - P_{m1}^{*+})$	$\lambda P_{e1}^+(\bar{P}_{e1})$ $+\lambda P_{e2}^+(P_m - \bar{P}_{e1})$	

La commande optimale P_m^{opt} en fonction de P_r et λ est donnée par :

Cas sur λ			P_m^{opt}
0	$\leq \lambda \leq$	$\frac{a_1}{b_2^- + 2a_2^-(P_e(P_r) - P_{e1})}$	$\bar{P}_e(P_r)$
$\frac{a_1}{b_2^- + 2a_2^-(P_e(P_r) - P_{e1})}$	$\leq \lambda \leq$	$\frac{a_1}{2a_2^- P_{m3}^p + b_2^- - 2a_2^- P_{e1}}$	$\frac{a_1 - \lambda b_2^- + 2\lambda a_2^- P_{e1}}{2\lambda a_2^-}$
$\frac{a_1}{2a_2^- P_{m3}^p + b_2^- - 2a_2^- P_{e1}}$	$\leq \lambda \leq$	$\frac{a_2}{2a_2^- P_{m3}^p + b_2^- - 2a_2^- P_{e1}}$	$P_r - P_{\text{lim}}$
$\frac{a_2}{2a_2^- P_{m3}^p + b_2^- - 2a_2^- P_{e1}}$	$\leq \lambda \leq$	$\frac{a_2}{b_2^- + 2a_2^-(P_e(P_r) - P_{e1})}$	$\frac{a_2 - \lambda b_2^- + 2\lambda a_2^- P_{e1}}{2\lambda a_2^-}$
$\frac{a_2}{b_2^- + 2a_2^-(P_e(P_r) - P_{e1})}$	$\leq \lambda \leq$	$+\infty$	$\underline{P}_e(P_r)$

Cas 1.2 :

P_m	$-\infty$	P_{m3}^p	P_{m1}^p	P_{m4}^p	P_{m2}^p
$H(P_m)$	$a_2(P_r - P_m)$ $+Q_{\text{lim}} - a_2 P_{\text{lim}}$ $+\lambda P_{e1}^-(\underline{P}_{e1})$ $+\lambda P_{e2}^-(P_m - \underline{P}_{e1})$	$a_1(P_r - P_m)$ $+Q_0$ $+\lambda P_{e1}^-(\underline{P}_{e1})$ $+\lambda P_{e2}^-(P_m - \underline{P}_{e1})$	$a_1(P_r - P_m)$ $+Q_0$ $+\lambda P_{e1}^-(P_{m1}^{*-})$ $+\lambda P_{e2}^-(P_m - P_{m1}^{*-})$	$\lambda P_{e1}^-(P_{m1}^{*-})$ $+\lambda P_{e2}^-(P_m - P_{m1}^{*-})$	

P_m	P_{m2}^p	0	P_{m5}^p	P_{m6}^p	$+\infty$
$H(P_m)$	$\lambda P_{e2}^-(P_m)$ $+\lambda c_1$	$\lambda P_{e2}^+(P_m)$ $+\lambda c_1$	$\lambda P_{e1}^+(P_{m1}^{*+})$ $+\lambda P_{e2}^+(P_m - P_{m1}^{*+})$	$\lambda P_{e1}^+(\bar{P}_{e1})$ $+\lambda P_{e2}^+(P_m - \bar{P}_{e1})$	

La commande optimale P_m^{opt} en fonction de P_r et λ est donnée par :

Cas sur λ			P_m^{opt}
0	$\leq \lambda \leq$	$\frac{a_1}{2a_-^* \bar{P}_e(P_r) + b_-^*}$	$\bar{P}_e(P_r)$
$\frac{a_1}{2a_-^* \bar{P}_e(P_r) + b_-^*}$	$\leq \lambda \leq$	$\frac{a_1}{2a_-^* P_{m1}^p + b_-^*}$	$\frac{a_1 - \lambda b_-^*}{2\lambda a_-^*}$
$\frac{a_1}{2a_-^* P_{m1}^p + b_-^*}$	$\leq \lambda \leq$	$\frac{a_1}{b_2^- + 2a_2^-(P_{m1}^p - P_{e1})}$	\underline{P}_m
$\frac{a_1}{b_2^- + 2a_2^-(P_{m1}^p - P_{e1})}$	$\leq \lambda \leq$	$\frac{a_1}{b_2^- + 2a_2^-(P_{m3}^p - P_{e1})}$	$\frac{a_1 - \lambda b_2^- + 2\lambda a_2^- P_{e1}}{2\lambda a_2^-}$
$\frac{a_1}{b_2^- + 2a_2^-(P_{m3}^p - P_{e1})}$	$\leq \lambda \leq$	$\frac{a_2}{b_2^- + 2a_2^-(P_{m3}^p - P_{e1})}$	$P_r - P_{\text{lim}}$
$\frac{a_2}{b_2^- + 2a_2^-(P_{m3}^p - P_{e1})}$	$\leq \lambda \leq$	$\frac{a_2}{b_2^- + 2a_2^-(P_e(P_r) - P_{e1})}$	$\frac{a_2 - \lambda b_2^- + 2\lambda a_2^- P_{e1}}{2\lambda a_2^-}$
$\frac{a_2}{b_2^- + 2a_2^-(P_e(P_r) - P_{e1})}$	$\leq \lambda \leq$	$+\infty$	$\underline{P}_e(P_r)$

Cas 1.3 :

P_m	$-\infty$	P_{m3}^p	P_{m1}^p	P_{m2}^p	P_{m4}^p
$H(P_m)$	$a_2(P_r - P_m)$ $+Q_{\text{lim}} - a_2P_{\text{lim}}$ $+\lambda P_{e_1}^-(\underline{P}_{e_1})$ $+\lambda P_{e_2}^-(P_m - \underline{P}_{e_1})$	$a_1(P_r - P_m)$ $+Q_0$ $+\lambda P_{e_1}^-(\underline{P}_{e_1})$ $+\lambda P_{e_2}^-(P_m - \underline{P}_{e_1})$	$a_1(P_r - P_m)$ $+Q_0$ $+\lambda P_{e_1}^-(P_{m1}^{*-})$ $+\lambda P_{e_2}^-(P_m - P_{m1}^{*-})$	$a_1(P_r - P_m)$ $+Q_0$ $+\lambda P_{e_2}^-(P_m)$ $+\lambda c_1$	
P_m	P_{m4}^p	0	P_{m5}^p	P_{m6}^p	$+\infty$
$H(P_m)$	$\lambda P_{e_2}^-(P_m)$ $+\lambda c_1$	$\lambda P_{e_2}^+(P_m)$ $+\lambda c_1$	$\lambda P_{e_1}^+(P_{m1}^{*+})$ $+\lambda P_{e_2}^+(P_m - P_{m1}^{*+})$	$\lambda P_{e_1}^+(\bar{P}_{e_1})$ $+\lambda P_{e_2}^+(P_m - \bar{P}_{e_1})$	

La commande optimale P_m^{opt} en fonction de P_r et λ est donnée par :

Cas sur λ		P_m^{opt}
0	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{2a_2^- \bar{P}_e(P_r) + b_2^-}$	$\bar{P}_e(P_r)$
$\frac{a_1}{2a_2^- \bar{P}_e(P_r) + b_2^-}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{2a_2^- P_{m2}^p + b_2^-}$	$\frac{a_1 - \lambda b_2^-}{2\lambda a_2^-}$
$\frac{a_1}{2a_2^- P_{m2}^p + b_2^-}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{2a_2^* P_{m2}^p + b_2^*}$	\bar{P}_m
$\frac{a_1}{2a_2^* P_{m2}^p + b_2^*}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{2a_2^* P_{m1}^p + b_2^*}$	$\frac{a_1 - \lambda b_2^*}{2\lambda a_2^*}$
$\frac{a_1}{2a_2^* P_{m1}^p + b_2^*}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{b_2^- + 2a_2^- (P_{m1}^p - \underline{P}_{e_1})}$	\underline{P}_m
$\frac{a_1}{b_2^- + 2a_2^- (P_{m1}^p - \underline{P}_{e_1})}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{b_2^- + 2a_2^- (P_{m3}^p - \underline{P}_{e_1})}$	$\frac{a_1 - \lambda b_2^- + 2\lambda a_2^- \underline{P}_{e_1}}{2\lambda a_2^-}$
$\frac{a_1}{b_2^- + 2a_2^- (P_{m3}^p - \underline{P}_{e_1})}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{b_2^- + 2a_2^- (P_{m3}^p - \underline{P}_{e_1})}$	$P_r - P_{\text{lim}}$
$\frac{a_2}{b_2^- + 2a_2^- (P_{m3}^p - \underline{P}_{e_1})}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{b_2^- + 2a_2^- (\underline{P}_e(P_r) - \underline{P}_{e_1})}$	$\frac{a_2 - \lambda b_2^- + 2\lambda a_2^- \underline{P}_{e_1}}{2\lambda a_2^-}$
$\frac{a_2}{b_2^- + 2a_2^- (\underline{P}_e(P_r) - \underline{P}_{e_1})}$	$\leq \lambda \leq +\infty$	$\underline{P}_e(P_r)$

Cas 1.4 :

P_m	$-\infty$	P_{m1}^p	P_{m3}^p	P_{m4}^p	P_{m2}^p
$H(P_m)$	$a_2(P_r - P_m)$ $+Q_{\text{lim}} - a_2P_{\text{lim}}$ $+\lambda P_{e_1}^-(\underline{P}_{e_1})$ $+\lambda P_{e_2}^-(P_m - \underline{P}_{e_1})$	$a_2(P_r - P_m)$ $+Q_{\text{lim}} - a_2P_{\text{lim}}$ $+\lambda P_{e_1}^-(P_{m1}^{*-})$ $+\lambda P_{e_2}^-(P_m - P_{m1}^{*-})$	$a_1(P_r - P_m)$ $+Q_0$ $+\lambda P_{e_1}^-(P_{m1}^{*-})$ $+\lambda P_{e_2}^-(P_m - P_{m1}^{*-})$	$\lambda P_{e_1}^-(P_{m1}^{*-})$ $+\lambda P_{e_2}^-(P_m - P_{m1}^{*-})$	
P_m	P_{m2}^p	0	P_{m5}^p	P_{m6}^p	$+\infty$
$H(P_m)$	$\lambda P_{e_2}^-(P_m)$ $+\lambda c_1$	$\lambda P_{e_2}^+(P_m)$ $+\lambda c_1$	$\lambda P_{e_1}^+(P_{m1}^{*+})$ $+\lambda P_{e_2}^+(P_m - P_{m1}^{*+})$	$\lambda P_{e_1}^+(\bar{P}_{e_1})$ $+\lambda P_{e_2}^+(P_m - \bar{P}_{e_1})$	

La commande optimale P_m^{opt} en fonction de P_r et λ est donnée par :

Cas sur λ		P_m^{opt}
0	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{2a_-^* \overline{P_e}(P_r) + b_-^*}$	$\overline{P_e}(P_r)$
$\frac{a_1}{2a_-^* \overline{P_e}(P_r) + b_-^*}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{2a_-^* P_{m3}^p + b_-^*}$	$\frac{a_1 - \lambda b_-^*}{2\lambda a_-^*}$
$\frac{a_1}{2a_-^* P_{m3}^p + b_-^*}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{2a_-^* P_{m3}^p + b_-^*}$	$P_r - P_{\text{lim}}$
$\frac{a_2}{2a_-^* P_{m3}^p + b_-^*}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{2a_-^* P_{m1}^p + b_-^*}$	$\frac{a_2 - \lambda b_-^*}{2\lambda a_-^*}$
$\frac{a_2}{2a_-^* P_{m1}^p + b_-^*}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{b_2^- + 2a_2^- (P_{m1}^p - \underline{P}_{e1})}$	\underline{P}_m
$\frac{a_2}{b_2^- + 2a_2^- (P_{m1}^p - \underline{P}_{e1})}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{b_2^- + 2a_2^- (\underline{P}_e(P_r) - \underline{P}_{e1})}$	$\frac{a_2 - \lambda b_2^- + 2\lambda a_2^- \underline{P}_{e1}}{2\lambda a_2^-}$
$\frac{a_2}{b_2^- + 2a_2^- (\underline{P}_e(P_r) - \underline{P}_{e1})}$	$\leq \lambda \leq +\infty$	$\underline{P}_e(P_r)$

Cas 1.5 :

P_m	$-\infty$	P_{m1}^p	P_{m3}^p	P_{m2}^p	P_{m4}^p
$H(P_m)$	$a_2(P_r - P_m)$ $+ Q_{\text{lim}} - a_2 P_{\text{lim}}$ $+ \lambda P_{e1}^-(\underline{P}_{e1})$ $+ \lambda P_{e2}^-(P_m - \underline{P}_{e1})$	$a_2(P_r - P_m)$ $+ Q_{\text{lim}} - a_2 P_{\text{lim}}$ $+ \lambda P_{e1}^-(P_{m1}^*)$ $+ \lambda P_{e2}^-(P_m - P_{m1}^*)$	$a_1(P_r - P_m)$ $+ Q_0$ $+ \lambda P_{e1}^-(P_{m1}^*)$ $+ \lambda P_{e2}^-(P_m - P_{m1}^*)$	$a_1(P_r - P_m)$ $+ Q_0$ $+ \lambda P_{e2}^-(P_m)$ $+ \lambda c_1$	
P_m	P_{m4}^p	0	P_{m5}^p	P_{m6}^p	$+\infty$
$H(P_m)$	$\lambda P_{e2}^-(P_m)$ $+ \lambda c_1$	$\lambda P_{e2}^+(P_m)$ $+ \lambda c_1$	$\lambda P_{e1}^+(P_{m1}^{*+})$ $+ \lambda P_{e2}^+(P_m - P_{m1}^{*+})$	$\lambda P_{e1}^+(\overline{P}_{e1})$ $+ \lambda P_{e2}^+(P_m - \overline{P}_{e1})$	

La commande optimale P_m^{opt} en fonction de P_r et λ est donnée par :

Cas sur λ		P_m^{opt}
0	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{2a_2^- \overline{P_e}(P_r) + b_2^-}$	$\overline{P_e}(P_r)$
$\frac{a_1}{2a_2^- \overline{P_e}(P_r) + b_2^-}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{2a_2^- P_{m2}^p + b_2^-}$	$\frac{a_1 - \lambda b_2^-}{2\lambda a_2^-}$
$\frac{a_1}{2a_2^- P_{m2}^p + b_2^-}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{2a_-^* P_{m2}^p + b_-^*}$	\underline{P}_m
$\frac{a_1}{2a_-^* P_{m2}^p + b_-^*}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{2a_-^* P_{m3}^p + b_-^*}$	$\frac{a_1 - \lambda b_-^*}{2\lambda a_-^*}$
$\frac{a_1}{2a_-^* P_{m3}^p + b_-^*}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{2a_-^* P_{m3}^p + b_-^*}$	$P_r - P_{\text{lim}}$
$\frac{a_2}{2a_-^* P_{m3}^p + b_-^*}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{2a_-^* P_{m1}^p + b_-^*}$	$\frac{a_2 - \lambda b_-^*}{2\lambda a_-^*}$
$\frac{a_2}{2a_-^* P_{m1}^p + b_-^*}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{b_2^- + 2a_2^- (P_{m1}^p - \underline{P}_{e1})}$	\underline{P}_m
$\frac{a_2}{b_2^- + 2a_2^- (P_{m1}^p - \underline{P}_{e1})}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{b_2^- + 2a_2^- (\underline{P}_e(P_r) - \underline{P}_{e1})}$	$\frac{a_2 - \lambda b_2^- + 2\lambda a_2^- \underline{P}_{e1}}{2\lambda a_2^-}$
$\frac{a_2}{b_2^- + 2a_2^- (\underline{P}_e(P_r) - \underline{P}_{e1})}$	$\leq \lambda \leq +\infty$	$\underline{P}_e(P_r)$

Cas 1.6 :

P_m	$-\infty$	P_{m1}^p	P_{m2}^p	P_{m3}^p	P_{m4}^p
$H(P_m)$	$a_2(P_r - P_m)$ $+Q_{\text{lim}} - a_2P_{\text{lim}}$ $+\lambda P_{e_1}^-(\underline{P}_{e_1})$ $+\lambda P_{e_2}^-(P_m - \underline{P}_{e_1})$	$a_2(P_r - P_m)$ $+Q_{\text{lim}} - a_2P_{\text{lim}}$ $+\lambda P_{e_1}^-(P_{m1}^{*-})$ $+\lambda P_{e_2}^-(P_m - P_{m1}^{*-})$	$a_2(P_r - P_m)$ $+Q_{\text{lim}} - a_2P_{\text{lim}}$ $+\lambda P_{e_2}^-(P_m)$ $+\lambda c_1$	$a_1(P_r - P_m)$ $+Q_0$ $+\lambda P_{e_2}^-(P_m)$ $+\lambda c_1$	

P_m	P_{m4}^p	0	P_{m5}^p	P_{m6}^p	$+\infty$
$H(P_m)$	$\lambda P_{e_2}^-(P_m)$ $+\lambda c_1$	$\lambda P_{e_2}^+(P_m)$ $+\lambda c_1$	$\lambda P_{e_1}^+(P_{m1}^{*+})$ $+\lambda P_{e_2}^+(P_m - P_{m1}^{*+})$	$\lambda P_{e_1}^+(\bar{P}_{e_1})$ $+\lambda P_{e_2}^+(P_m - \bar{P}_{e_1})$	

La commande optimale P_m^{opt} en fonction de P_r et λ est donnée par :

Cas sur λ		P_m^{opt}
0	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{2a_2^-\bar{P}_e(P_r)+b_2^-}$	$\bar{P}_e(P_r)$
$\frac{a_1}{2a_2^-\bar{P}_e(P_r)+b_2^-}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{2a_2^-P_{m3}^p+b_2^-}$	$\frac{a_1-\lambda b_2^-}{2\lambda a_2^-}$
$\frac{a_1}{2a_2^-P_{m3}^p+b_2^-}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{2a_2^-P_{m3}^p+b_2^-}$	$P_r - P_{\text{lim}}$
$\frac{a_2}{2a_2^-P_{m3}^p+b_2^-}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{2a_2^-P_{m2}^p+b_2^-}$	$\frac{a_2-\lambda b_2^-}{2\lambda a_2^-}$
$\frac{a_2}{2a_2^-P_{m2}^p+b_2^-}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{2a_2^*P_{m2}^p+b_2^*}$	\bar{P}_m
$\frac{a_2}{2a_2^*P_{m2}^p+b_2^*}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{2a_2^*P_{m1}^p+b_2^*}$	$\frac{a_2-\lambda b_2^*}{2\lambda a_2^*}$
$\frac{a_2}{2a_2^*P_{m1}^p+b_2^*}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{b_2^-+2a_2^-(P_{m1}^p-\underline{P}_{e_1})}$	\underline{P}_m
$\frac{a_2}{b_2^-+2a_2^-(P_{m1}^p-\underline{P}_{e_1})}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{b_2^-+2a_2^-(P_e(P_r)-\underline{P}_{e_1})}$	$\frac{a_2-\lambda b_2^-+2\lambda a_2^-\underline{P}_{e_1}}{2\lambda a_2^-}$
$\frac{a_2}{b_2^-+2a_2^-(P_e(P_r)-\underline{P}_{e_1})}$	$\leq \lambda \leq +\infty$	$\underline{P}_e(P_r)$

Cas 2.1 :

P_m	$-\infty$	P_{m3}^p	P_{m1}^p	P_{m2}^p	0
$H(P_m)$	$a_2(P_r - P_m)$ $+Q_{\text{lim}} - a_2P_{\text{lim}}$ $+\lambda P_{e_1}^-(\underline{P}_{e_1})$ $+\lambda P_{e_2}^-(P_m - \underline{P}_{e_1})$	$a_1(P_r - P_m)$ $+Q_0$ $+\lambda P_{e_1}^-(\underline{P}_{e_1})$ $+\lambda P_{e_2}^-(P_m - \underline{P}_{e_1})$	$a_1(P_r - P_m)$ $+Q_0$ $+\lambda P_{e_1}^-(P_{m1}^{*-})$ $+\lambda P_{e_2}^-(P_m - P_{m1}^{*-})$	$a_1(P_r - P_m)$ $+Q_0$ $+\lambda P_{e_2}^-(P_m)$ $+\lambda c_1$	

P_m	0	P_{m4}^P	P_{m5}^P	P_{m6}^P	$+\infty$
$H(P_m)$	$a_1(P_r - P_m)$ $+Q_0$ $+\lambda P_{e_2}^+(P_m)$ $+\lambda c_1$	$\lambda P_{e_2}^+(P_m)$ $+\lambda c_1$	$\lambda P_{e_1}^+(P_{m_1}^{*+})$ $+\lambda P_{e_2}^+(P_m - P_{m_1}^{*+})$	$\lambda P_{e_1}^+(\bar{P}_{e_1})$ $+\lambda P_{e_2}^+(P_m - \bar{P}_{e_1})$	

La commande optimale P_m^{opt} en fonction de P_r et λ est donnée par :

Cas sur λ		P_m^{opt}
$0 \leq \lambda \leq \frac{a_1}{2a_2^+ \bar{P}_e(P_r) + b_2^+}$		$\bar{P}_e(P_r)$
$\frac{a_1}{2a_2^+ \bar{P}_e(P_r) + b_2^+} \leq \lambda \leq \frac{a_1}{b_2^+}$		$\frac{a_1 - \lambda b_2^+}{2\lambda a_2^+}$
$\frac{a_1}{b_2^+} \leq \lambda \leq \frac{a_1}{b_2^-}$		0
$\frac{a_1}{b_2^-} \leq \lambda \leq \frac{a_1}{2a_2^- P_{m2}^P + b_2^-}$		$\frac{a_1 - \lambda b_2^-}{2\lambda a_2^-}$
$\frac{a_1}{2a_2^- P_{m2}^P + b_2^-} \leq \lambda \leq \frac{a_1}{2a_2^* P_{m2}^P + b_2^*}$		\bar{P}_m
$\frac{a_1}{2a_2^* P_{m2}^P + b_2^*} \leq \lambda \leq \frac{a_1}{2a_2^* P_{m1}^P + b_2^*}$		$\frac{a_1 - \lambda b_2^*}{2\lambda a_2^*}$
$\frac{a_1}{2a_2^* P_{m1}^P + b_2^*} \leq \lambda \leq \frac{a_1}{b_2^- + 2a_2^- (P_{m1}^P - \underline{P}_{e_1})}$		\underline{P}_m
$\frac{a_1}{b_2^- + 2a_2^- (P_{m1}^P - \underline{P}_{e_1})} \leq \lambda \leq \frac{a_1}{b_2^- + 2a_2^- (P_{m3}^P - \underline{P}_{e_1})}$		$\frac{a_1 - \lambda b_2^- + 2\lambda a_2^- \underline{P}_{e_1}}{2\lambda a_2^-}$
$\frac{a_1}{b_2^- + 2a_2^- (P_{m3}^P - \underline{P}_{e_1})} \leq \lambda \leq \frac{a_2}{b_2^- + 2a_2^- (P_{m3}^P - \underline{P}_{e_1})}$		$P_r - P_{\text{lim}}$
$\frac{a_2}{b_2^- + 2a_2^- (P_{m3}^P - \underline{P}_{e_1})} \leq \lambda \leq \frac{a_2}{b_2^- + 2a_2^- (P_e(P_r) - \underline{P}_{e_1})}$		$\frac{a_2 - \lambda b_2^- + 2\lambda a_2^- \underline{P}_{e_1}}{2\lambda a_2^-}$
$\frac{a_2}{b_2^- + 2a_2^- (P_e(P_r) - \underline{P}_{e_1})} \leq \lambda \leq +\infty$		$\underline{P}_e(P_r)$

Cas 2.2 :

P_m	$-\infty$	P_{m3}^P	P_{m1}^P	P_{m2}^P	0
$H(P_m)$	$a_2(P_r - P_m)$ $+Q_{\text{lim}} - a_2 P_{\text{lim}}$ $+\lambda P_{e_1}^-(\underline{P}_{e_1})$ $+\lambda P_{e_2}^-(P_m - \underline{P}_{e_1})$	$a_1(P_r - P_m)$ $+Q_0$ $+\lambda P_{e_1}^-(\underline{P}_{e_1})$ $+\lambda P_{e_2}^-(P_m - \underline{P}_{e_1})$	$a_1(P_r - P_m)$ $+Q_0$ $+\lambda P_{e_1}^-(P_{m_1}^{*-})$ $+\lambda P_{e_2}^-(P_m - P_{m_1}^{*-})$	$a_1(P_r - P_m)$ $+Q_0$ $+\lambda P_{e_2}^-(P_m)$ $+\lambda c_1$	

P_m	0	P_{m5}^P	P_{m4}^P	P_{m6}^P	$+\infty$
$H(P_m)$	$a_1(P_r - P_m)$ $+Q_0$ $+\lambda P_{e_2}^+(P_m)$ $+\lambda c_1$	$a_1(P_r - P_m)$ $+Q_0$ $+\lambda P_{e_1}^+(P_{m_1}^{*+})$ $+\lambda P_{e_2}^+(P_m - P_{m_1}^{*+})$	$\lambda P_{e_1}^+(P_{m_1}^{*+})$ $+\lambda P_{e_2}^+(P_m - P_{m_1}^{*+})$	$\lambda P_{e_1}^+(\bar{P}_{e_1})$ $+\lambda P_{e_2}^+(P_m - \bar{P}_{e_1})$	

La commande optimale P_m^{opt} en fonction de P_r et λ est donnée par :

Cas sur λ		P_m^{opt}
0	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{2a_+^* P_{m4}^p + b_+^*}$	$\bar{P}_e(P_r)$
$\frac{a_1}{2a_+^* P_{m4}^p + b_+^*}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{2a_+^* P_{m5}^p + b_+^*}$	$\frac{a_1 - \lambda b_+^*}{2\lambda a_+^*}$
$\frac{a_1}{2a_+^* P_{m5}^p + b_+^*}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{2a_2^+ P_{m5}^p + b_2^+}$	\underline{P}_m^+
$\frac{a_1}{2a_2^+ P_{m5}^p + b_2^+}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{b_2^+}$	$\frac{a_1 - \lambda b_2^+}{2\lambda a_2^+}$
$\frac{a_1}{b_2^+}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{b_2^-}$	0
$\frac{a_1}{b_2^-}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{2a_2^- P_{m2}^p + b_2^-}$	$\frac{a_1 - \lambda b_2^-}{2\lambda a_2^-}$
$\frac{a_1}{2a_2^- P_{m2}^p + b_2^-}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{2a_-^* P_{m2}^p + b_-^*}$	\bar{P}_m
$\frac{a_1}{2a_-^* P_{m2}^p + b_-^*}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{2a_-^* P_{m1}^p + b_-^*}$	$\frac{a_1 - \lambda b_-^*}{2\lambda a_-^*}$
$\frac{a_1}{2a_-^* P_{m1}^p + b_-^*}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{b_2^- + 2a_2^- (P_{m1}^p - \underline{P}_{e1})}$	\underline{P}_m^-
$\frac{a_1}{b_2^- + 2a_2^- (P_{m1}^p - \underline{P}_{e1})}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{b_2^- + 2a_2^- (P_{m3}^p - \underline{P}_{e1})}$	$\frac{a_1 - \lambda b_2^- + 2\lambda a_2^- \underline{P}_{e1}}{2\lambda a_2^-}$
$\frac{a_1}{b_2^- + 2a_2^- (P_{m3}^p - \underline{P}_{e1})}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{b_2^- + 2a_2^- (P_{m3}^p - \underline{P}_{e1})}$	$P_r - P_{\text{lim}}$
$\frac{a_2}{b_2^- + 2a_2^- (P_{m3}^p - \underline{P}_{e1})}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{b_2^- + 2a_2^- (P_e(P_r) - \underline{P}_{e1})}$	$\frac{a_2 - \lambda b_2^- + 2\lambda a_2^- \underline{P}_{e1}}{2\lambda a_2^-}$
$\frac{a_2}{b_2^- + 2a_2^- (P_e(P_r) - \underline{P}_{e1})}$	$\leq \lambda \leq +\infty$	$\underline{P}_e(P_r)$

Cas 2.3 :

P_m	$-\infty$	P_{m3}^p	P_{m1}^p	P_{m2}^p	0
$H(P_m)$	$a_2(P_r - P_m)$ $+Q_{\text{lim}} - a_2 P_{\text{lim}}$ $+ \lambda P_{e1}^-(\underline{P}_{e1})$ $+ \lambda P_{e2}^-(P_m - \underline{P}_{e1})$	$a_1(P_r - P_m)$ $+Q_0$ $+ \lambda P_{e1}^-(\underline{P}_{e1})$ $+ \lambda P_{e2}^-(P_m - \underline{P}_{e1})$	$a_1(P_r - P_m)$ $+Q_0$ $+ \lambda P_{e1}^-(P_{m1}^*)$ $+ \lambda P_{e2}^-(P_m - P_{m1}^*)$	$a_1(P_r - P_m)$ $+Q_0$ $+ \lambda P_{e2}^-(P_m)$ $+ \lambda c_1$	

P_m	0	P_{m5}^p	P_{m6}^p	P_{m4}^p	$+\infty$
$H(P_m)$	$a_1(P_r - P_m)$ $+Q_0$ $+ \lambda P_{e2}^+(P_m)$ $+ \lambda c_1$	$a_1(P_r - P_m)$ $+Q_0$ $+ \lambda P_{e1}^+(P_{m1}^*)$ $+ \lambda P_{e2}^+(P_m - P_{m1}^*)$	$a_1(P_r - P_m)$ $+Q_0$ $+ P_{e1}^+(\bar{P}_{e1})$ $+ \lambda P_{e2}^+(P_m - \bar{P}_{e1})$	$\lambda P_{e1}^+(\bar{P}_{e1})$ $+ \lambda P_{e2}^+(P_m - \bar{P}_{e1})$	

La commande optimale P_m^{opt} en fonction de P_r et λ est donnée par :

Cas sur λ		P_m^{opt}
0	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{b_2^+ + 2a_2^+(\bar{P}_e(P_r) - \bar{P}_{e_1})}$	$\bar{P}_e(P_r)$
$\frac{a_1}{b_2^+ + 2a_2^+(\bar{P}_e(P_r) - \bar{P}_{e_1})}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{b_2^+ + 2a_2^+(P_{m6}^{\text{P}} - \bar{P}_{e_1})}$	$\frac{a_1 - \lambda b_2^+ + 2\lambda a_2^+ \bar{P}_{e_1}}{2\lambda a_2^+}$
$\frac{a_1}{b_2^+ + 2a_2^+(P_{m6}^{\text{P}} - \bar{P}_{e_1})}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{2a_+^* P_{m6}^{\text{P}} + b_+^*}$	\bar{P}_m^+
$\frac{a_1}{2a_+^* P_{m6}^{\text{P}} + b_+^*}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{2a_+^* P_{m5}^{\text{P}} + b_+^*}$	$\frac{a_1 - \lambda b_+^*}{2\lambda a_+^*}$
$\frac{a_1}{2a_+^* P_{m5}^{\text{P}} + b_+^*}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{2a_2^+ P_{m5}^{\text{P}} + b_2^+}$	\bar{P}_m^+
$\frac{a_1}{2a_2^+ P_{m5}^{\text{P}} + b_2^+}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{b_2^+}$	$\frac{a_1 - \lambda b_2^+}{2\lambda a_2^+}$
$\frac{a_1}{b_2^+}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{b_2^-}$	0
$\frac{a_1}{b_2^-}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{2a_2^- P_{m2}^{\text{P}} + b_2^-}$	$\frac{a_1 - \lambda b_2^-}{2\lambda a_2^-}$
$\frac{a_1}{2a_2^- P_{m2}^{\text{P}} + b_2^-}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{2a_-^* P_{m2}^{\text{P}} + b_-^*}$	\bar{P}_m^-
$\frac{a_1}{2a_-^* P_{m2}^{\text{P}} + b_-^*}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{2a_-^* P_{m1}^{\text{P}} + b_-^*}$	$\frac{a_1 - \lambda b_-^*}{2\lambda a_-^*}$
$\frac{a_1}{2a_-^* P_{m1}^{\text{P}} + b_-^*}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{b_2^- + 2a_2^-(P_{m1}^{\text{P}} - \underline{P}_{e_1})}$	\bar{P}_m^-
$\frac{a_1}{b_2^- + 2a_2^-(P_{m1}^{\text{P}} - \underline{P}_{e_1})}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{b_2^- + 2a_2^-(P_{m3}^{\text{P}} - \underline{P}_{e_1})}$	$\frac{a_1 - \lambda b_2^- + 2\lambda a_2^- \underline{P}_{e_1}}{2\lambda a_2^-}$
$\frac{a_1}{b_2^- + 2a_2^-(P_{m3}^{\text{P}} - \underline{P}_{e_1})}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{b_2^- + 2a_2^-(P_{m3}^{\text{P}} - \underline{P}_{e_1})}$	$P_r - P_{\text{lim}}$
$\frac{a_2}{b_2^- + 2a_2^-(P_{m3}^{\text{P}} - \underline{P}_{e_1})}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{b_2^- + 2a_2^-(\underline{P}_e(P_r) - \underline{P}_{e_1})}$	$\frac{a_2 - \lambda b_2^- + 2\lambda a_2^- \underline{P}_{e_1}}{2\lambda a_2^-}$
$\frac{a_2}{b_2^- + 2a_2^-(\underline{P}_e(P_r) - \underline{P}_{e_1})}$	$\leq \lambda \leq +\infty$	$\underline{P}_e(P_r)$

Cas 2.4 :

P_m	$-\infty$	P_{m1}^{P}	P_{m3}^{P}	P_{m2}^{P}	0
$H(P_m)$	$a_2(P_r - P_m)$ $+Q_{\text{lim}} - a_2 P_{\text{lim}}$ $+\lambda P_{e_1}^-(\underline{P}_{e_1})$ $+\lambda P_{e_2}^-(P_m - \underline{P}_{e_1})$	$a_2(P_r - P_m)$ $+Q_{\text{lim}} - a_2 P_{\text{lim}}$ $+\lambda P_{e_1}^-(P_{m1}^{*-})$ $+\lambda P_{e_2}^-(P_m - P_{m1}^{*-})$	$a_1(P_r - P_m)$ $+Q_0$ $+\lambda P_{e_1}^-(P_{m1}^{*-})$ $+\lambda P_{e_2}^-(P_m - P_{m1}^{*-})$	$a_1(P_r - P_m)$ $+Q_0$ $+\lambda P_{e_2}^-(P_m)$ $+\lambda c_1$	

P_m	0	P_{m4}^{P}	P_{m5}^{P}	P_{m6}^{P}	$+\infty$
$H(P_m)$	$a_1(P_r - P_m)$ $+Q_0$ $+\lambda P_{e_2}^+(P_m)$ $+\lambda c_1$	$\lambda P_{e_2}^+(P_m)$ $+\lambda c_1$	$\lambda P_{e_1}^+(P_{m1}^{*+})$ $+\lambda P_{e_2}^+(P_m - P_{m1}^{*+})$	$\lambda P_{e_1}^+(\bar{P}_{e_1})$ $+\lambda P_{e_2}^+(P_m - \bar{P}_{e_1})$	

La commande optimale P_m^{opt} en fonction de P_r et λ est donnée par :

Cas sur λ		P_m^{opt}
0	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{2a_2^+ \bar{P}_e(P_r) + b_2^+}$	$\bar{P}_e(P_r)$
$\frac{a_1}{2a_2^+ \bar{P}_e(P_r) + b_2^+}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{b_2^+}$	$\frac{a_1 - \lambda b_2^+}{2\lambda a_2^+}$
$\frac{a_1}{b_2^+}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{b_2^-}$	0
$\frac{a_1}{b_2^-}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{2a_2^- P_{m2}^p + b_2^-}$	$\frac{a_1 - \lambda b_2^-}{2\lambda a_2^-}$
$\frac{a_1}{2a_2^- P_{m2}^p + b_2^-}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{2a_2^* P_{m2}^p + b_2^*}$	\bar{P}_m
$\frac{a_1}{2a_2^* P_{m2}^p + b_2^*}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{2a_2^* P_{m3}^p + b_2^*}$	$\frac{a_1 - \lambda b_2^*}{2\lambda a_2^*}$
$\frac{a_1}{2a_2^* P_{m3}^p + b_2^*}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{2a_2^* P_{m3}^p + b_2^*}$	$P_r - \bar{P}_{\text{lim}}$
$\frac{a_2}{2a_2^* P_{m3}^p + b_2^*}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{2a_2^* P_{m1}^p + b_2^*}$	$\frac{a_2 - \lambda b_2^*}{2\lambda a_2^*}$
$\frac{a_2}{2a_2^* P_{m1}^p + b_2^*}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{2a_2^- P_{m1}^p + b_2^- - 2a_2^- \underline{P}_{e1}}$	\underline{P}_m
$\frac{a_2}{2a_2^- P_{m1}^p + b_2^- - 2a_2^- \underline{P}_{e1}}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{b_2^- + 2a_2^- (\underline{P}_e(P_r) - \underline{P}_{e1})}$	$\frac{a_2 - \lambda b_2^- + 2\lambda a_2^- \underline{P}_{e1}}{2\lambda a_2^-}$
$\frac{a_2}{b_2^- + 2a_2^- (\underline{P}_e(P_r) - \underline{P}_{e1})}$	$\leq \lambda \leq +\infty$	$\underline{P}_e(P_r)$

Cas 2.6 :

P_m	$-\infty$	P_{m1}^p	P_{m3}^p	P_{m2}^p	0
$H(P_m)$	$a_2(P_r - P_m)$ $+Q_{\text{lim}} - a_2 P_{\text{lim}}$ $+\lambda P_{e1}^-(\underline{P}_{e1})$ $+\lambda P_{e2}^-(P_m - \underline{P}_{e1})$	$a_2(P_r - P_m)$ $+Q_{\text{lim}} - a_2 P_{\text{lim}}$ $+\lambda P_{e1}^-(P_{m1}^{*-})$ $+\lambda P_{e2}^-(P_m - P_{m1}^{*-})$	$a_1(P_r - P_m)$ $+Q_0$ $+\lambda P_{e1}^-(P_{m1}^{*-})$ $+\lambda P_{e2}^-(P_m - P_{m1}^{*-})$	$a_1(P_r - P_m)$ $+Q_0$ $+\lambda P_{e2}^-(P_m)$ $+\lambda c_1$	

P_m	0	P_{m5}^p	P_{m6}^p	P_{m4}^p	$+\infty$
$H(P_m)$	$a_1(P_r - P_m)$ $+Q_0$ $+\lambda P_{e2}^+(P_m)$ $+\lambda c_1$	$a_1(P_r - P_m)$ $+Q_0$ $+\lambda P_{e1}^+(P_{m1}^{*+})$ $+\lambda P_{e2}^+(P_m - P_{m1}^{*+})$	$a_1(P_r - P_m)$ $+Q_0$ $+P_{e1}^+(\bar{P}_{e1})$ $+\lambda P_{e2}^+(P_m - \bar{P}_{e1})$	$\lambda P_{e1}^+(\bar{P}_{e1})$ $+\lambda P_{e2}^+(P_m - \bar{P}_{e1})$	

La commande optimale P_m^{opt} en fonction de P_r et λ est donnée par :

Cas sur λ		P_m^{opt}
0	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{b_2^+ + 2a_2^+(\bar{P}_e(P_r) - \bar{P}_{e1})}$	$\bar{P}_e(P_r)$
$\frac{a_1}{b_2^+ + 2a_2^+(\bar{P}_e(P_r) - \bar{P}_{e1})}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{b_2^+ + 2a_2^+(P_{m6}^p - \bar{P}_{e1})}$	$\frac{a_1 - \lambda b_2^+ + 2\lambda a_2^+ \bar{P}_{e1}}{2\lambda a_2^+}$
$\frac{a_1}{b_2^+ + 2a_2^+(P_{m6}^p - \bar{P}_{e1})}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{2a_+^* P_{m6}^p + b_+^*}$	\bar{P}_m^+
$\frac{a_1}{2a_+^* P_{m6}^p + b_+^*}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{2a_+^* P_{m5}^p + b_+^*}$	$\frac{a_1 - \lambda b_+^*}{2\lambda a_+^*}$
$\frac{a_1}{2a_+^* P_{m5}^p + b_+^*}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{2a_2^+ P_{m5}^p + b_2^+}$	\bar{P}_m^+
$\frac{a_1}{2a_2^+ P_{m5}^p + b_2^+}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{b_2^+}$	$\frac{a_1 - \lambda b_2^+}{2\lambda a_2^+}$
$\frac{a_1}{b_2^+}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{b_2^-}$	0
$\frac{a_1}{b_2^-}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{2a_2^- P_{m2}^p + b_2^-}$	$\frac{a_1 - \lambda b_2^-}{2\lambda a_2^-}$
$\frac{a_1}{2a_2^- P_{m2}^p + b_2^-}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{2a_-^* P_{m2}^p + b_-^*}$	\bar{P}_m^-
$\frac{a_1}{2a_-^* P_{m2}^p + b_-^*}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{2a_-^* P_{m3}^p + b_-^*}$	$\frac{a_1 - \lambda b_-^*}{2\lambda a_-^*}$
$\frac{a_1}{2a_-^* P_{m3}^p + b_-^*}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{2a_-^* P_{m3}^p + b_-^*}$	$P_r - P_{\text{lim}}$
$\frac{a_2}{2a_-^* P_{m3}^p + b_-^*}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{2a_-^* P_{m1}^p + b_-^*}$	$\frac{a_2 - \lambda b_-^*}{2\lambda a_-^*}$
$\frac{a_2}{2a_-^* P_{m1}^p + b_-^*}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{2a_2^- P_{m1}^p + b_2^- - 2a_2^- \bar{P}_{e1}}$	\bar{P}_m^-
$\frac{a_2}{2a_2^- P_{m1}^p + b_2^- - 2a_2^- \bar{P}_{e1}}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{b_2^- + 2a_2^- (\underline{P}_e(P_r) - \underline{P}_{e1})}$	$\frac{a_2 - \lambda b_2^- + 2\lambda a_2^- \underline{P}_{e1}}{2\lambda a_2^-}$
$\frac{a_2}{b_2^- + 2a_2^- (\underline{P}_e(P_r) - \underline{P}_{e1})}$	$\leq \lambda \leq +\infty$	$\underline{P}_e(P_r)$

Cas 2.7 :

P_m	$-\infty$	P_{m1}^p	P_{m2}^p	P_{m3}^p	0
$H(P_m)$	$a_2(P_r - P_m)$ $+Q_{\text{lim}} - a_2 P_{\text{lim}}$ $+\lambda P_{e1}^-(\underline{P}_{e1})$ $+\lambda P_{e2}^-(P_m - \underline{P}_{e1})$	$a_2(P_r - P_m)$ $+Q_{\text{lim}} - a_2 P_{\text{lim}}$ $+\lambda P_{e1}^-(P_{m1}^{*-})$ $+\lambda P_{e2}^-(P_m - P_{m1}^{*-})$	$a_2(P_r - P_m)$ $+Q_{\text{lim}} - a_2 P_{\text{lim}}$ $+\lambda P_{e2}^-(P_m)$ $+\lambda c_1$	$a_1(P_r - P_m)$ $+Q_0$ $+\lambda P_{e2}^-(P_m)$ $+\lambda c_1$	

P_m	0	P_{m4}^p	P_{m5}^p	P_{m6}^p	$+\infty$
$H(P_m)$	$a_1(P_r - P_m)$ $+Q_0$ $+\lambda P_{e2}^+(P_m)$ $+\lambda c_1$	$\lambda P_{e2}^+(P_m)$ $+\lambda c_1$	$\lambda P_{e1}^+(P_{m1}^{*+})$ $+\lambda P_{e2}^+(P_m - P_{m1}^{*+})$	$\lambda P_{e1}^+(\bar{P}_{e1})$ $+\lambda P_{e2}^+(P_m - \bar{P}_{e1})$	

La commande optimale P_m^{opt} en fonction de P_r et λ est donnée par :

Cas sur λ		P_m^{opt}
0	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{2a_2^+ \bar{P}_e(P_r) + b_2^+}$	$\bar{P}_e(P_r)$
$\frac{a_1}{2a_2^+ \bar{P}_e(P_r) + b_2^+}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{b_2^+}$	$\frac{a_1 - \lambda b_2^+}{2\lambda a_2^+}$
$\frac{a_1}{b_2^+}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{b_2^-}$	0
$\frac{a_1}{b_2^-}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{2a_2^- P_{m3}^p + b_2^-}$	$\frac{a_1 - \lambda b_2^-}{2\lambda a_2^-}$
$\frac{a_1}{2a_2^- P_{m3}^p + b_2^-}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{2a_2^- P_{m3}^p + b_2^-}$	$P_r - P_{\text{lim}}$
$\frac{a_2}{2a_2^- P_{m3}^p + b_2^-}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{2a_2^- P_{m2}^p + b_2^-}$	$\frac{a_2 - \lambda b_2^-}{2\lambda a_2^-}$
$\frac{a_2}{2a_2^- P_{m2}^p + b_2^-}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{2a_2^* P_{m2}^p + b_2^*}$	\bar{P}_m
$\frac{a_2}{2a_2^* P_{m2}^p + b_2^*}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{2a_2^* P_{m1}^p + b_2^*}$	$\frac{a_2 - \lambda b_2^*}{2\lambda a_2^*}$
$\frac{a_2}{2a_2^* P_{m1}^p + b_2^*}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{2a_2^- P_{m1}^p + b_2^- - 2a_2^- \underline{P}_{e1}}$	\underline{P}_m
$\frac{a_2}{2a_2^- P_{m1}^p + b_2^- - 2a_2^- \underline{P}_{e1}}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{b_2^- + 2a_2^- (\underline{P}_e(P_r) - \underline{P}_{e1})}$	$\frac{a_2 - \lambda b_2^- + 2\lambda a_2^- \underline{P}_{e1}}{2\lambda a_2^-}$
$\frac{a_2}{b_2^- + 2a_2^- (\underline{P}_e(P_r) - \underline{P}_{e1})}$	$\leq \lambda \leq +\infty$	$\underline{P}_e(P_r)$

Cas 2.8 :

P_m	$-\infty$	P_{m1}^p	P_{m2}^p	P_{m3}^p	0
$H(P_m)$	$a_2(P_r - P_m)$ $+Q_{\text{lim}} - a_2 P_{\text{lim}}$ $+\lambda P_{e1}^-(\underline{P}_{e1})$ $+\lambda P_{e2}^-(P_m - \underline{P}_{e1})$	$a_2(P_r - P_m)$ $+Q_{\text{lim}} - a_2 P_{\text{lim}}$ $+\lambda P_{e1}^-(P_{m1}^{*-})$ $+\lambda P_{e2}^-(P_m - P_{m1}^{*-})$	$a_2(P_r - P_m)$ $+Q_{\text{lim}} - a_2 P_{\text{lim}}$ $+\lambda P_{e2}^-(P_m)$ $+\lambda c_1$	$a_1(P_r - P_m)$ $+Q_0$ $+\lambda P_{e2}^-(P_m)$ $+\lambda c_1$	

P_m	0	P_{m5}^p	P_{m4}^p	P_{m6}^p	$+\infty$
$H(P_m)$	$a_1(P_r - P_m)$ $+Q_0$ $+\lambda P_{e2}^+(P_m)$ $+\lambda c_1$	$a_1(P_r - P_m)$ $+Q_0$ $+\lambda P_{e1}^+(P_{m1}^{*+})$ $+\lambda P_{e2}^+(P_m - P_{m1}^{*+})$	$\lambda P_{e1}^+(P_{m1}^{*+})$ $+\lambda P_{e2}^+(P_m - P_{m1}^{*+})$	$\lambda P_{e1}^+(\bar{P}_{e1})$ $+\lambda P_{e2}^+(P_m - \bar{P}_{e1})$	

La commande optimale P_m^{opt} en fonction de P_r et λ est donnée par :

Cas sur λ		P_m^{opt}
0	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{2a_+^* P_{m4}^p + b_+^*}$	$\bar{P}_e(P_r)$
$\frac{a_1}{2a_+^* P_{m4}^p + b_+^*}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{2a_+^* P_{m5}^p + b_+^*}$	$\frac{a_1 - \lambda b_+^*}{2\lambda a_+^*}$
$\frac{a_1}{2a_+^* P_{m5}^p + b_+^*}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{2a_2^+ P_{m5}^p + b_2^+}$	\underline{P}_m
$\frac{a_1}{2a_2^+ P_{m5}^p + b_2^+}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{b_2^+}$	$\frac{a_1 - \lambda b_2^+}{2\lambda a_2^+}$
$\frac{a_1}{b_2^+}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{b_2^-}$	0
$\frac{a_1}{b_2^-}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{2a_2^- P_{m3}^p + b_2^-}$	$\frac{a_1 - \lambda b_2^-}{2\lambda a_2^-}$
$\frac{a_1}{2a_2^- P_{m3}^p + b_2^-}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{2a_2^- P_{m3}^p + b_2^-}$	$P_r - P_{\text{lim}}$
$\frac{a_2}{2a_2^- P_{m3}^p + b_2^-}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{2a_2^- P_{m2}^p + b_2^-}$	$\frac{a_2 - \lambda b_2^-}{2\lambda a_2^-}$
$\frac{a_2}{2a_2^- P_{m2}^p + b_2^-}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{2a_-^* P_{m2}^p + b_-^*}$	\bar{P}_m
$\frac{a_2}{2a_-^* P_{m2}^p + b_-^*}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{2a_-^* P_{m1}^p + b_-^*}$	$\frac{a_2 - \lambda b_-^*}{2\lambda a_-^*}$
$\frac{a_2}{2a_-^* P_{m1}^p + b_-^*}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{2a_2^- P_{m1}^p + b_2^- - 2a_2^- P_{e1}}$	\underline{P}_m
$\frac{a_2}{2a_2^- P_{m1}^p + b_2^- - 2a_2^- P_{e1}}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{b_2^- + 2a_2^- (P_e(P_r) - P_{e1})}$	$\frac{a_2 - \lambda b_2^- + 2\lambda a_2^- P_{e1}}{2\lambda a_2^-}$
$\frac{a_2}{b_2^- + 2a_2^- (P_e(P_r) - P_{e1})}$	$\leq \lambda \leq +\infty$	$\underline{P}_e(P_r)$

Cas 2.9 :

P_m	$-\infty$	P_{m1}^p	P_{m2}^p	P_{m3}^p	0
$H(P_m)$	$a_2(P_r - P_m)$ $+Q_{\text{lim}} - a_2 P_{\text{lim}}$ $+\lambda P_{e1}^-(P_{e1})$ $+\lambda P_{e2}^-(P_m - P_{e1})$	$a_2(P_r - P_m)$ $+Q_{\text{lim}} - a_2 P_{\text{lim}}$ $+\lambda P_{e1}^-(P_{m1}^{*-})$ $+\lambda P_{e2}^-(P_m - P_{m1}^{*-})$	$a_2(P_r - P_m)$ $+Q_{\text{lim}} - a_2 P_{\text{lim}}$ $+\lambda P_{e2}^-(P_m)$ $+\lambda c_1$	$a_1(P_r - P_m)$ $+Q_0$ $+\lambda P_{e2}^-(P_m)$ $+\lambda c_1$	

P_m	0	P_{m5}^p	P_{m6}^p	P_{m4}^p	$+\infty$
$H(P_m)$	$a_1(P_r - P_m)$ $+Q_0$ $+\lambda P_{e2}^+(P_m)$ $+\lambda c_1$	$a_1(P_r - P_m)$ $+Q_0$ $+\lambda P_{e1}^+(P_{m1}^{*+})$ $+\lambda P_{e2}^+(P_m - P_{m1}^{*+})$	$a_1(P_r - P_m)$ $+Q_0$ $+P_{e1}^+(\bar{P}_{e1})$ $+\lambda P_{e2}^+(P_m - \bar{P}_{e1})$	$\lambda P_{e1}^+(\bar{P}_{e1})$ $+\lambda P_{e2}^+(P_m - \bar{P}_{e1})$	

La commande optimale P_m^{opt} en fonction de P_r et λ est donnée par :

Cas sur λ			P_m^{opt}
0	$\leq \lambda \leq$	$\frac{a_1}{b_2^+ + 2a_2^+(\bar{P}_e(P_r) - \bar{P}_{e_1})}$	$\bar{P}_e(P_r)$
$\frac{a_1}{b_2^+ + 2a_2^+(\bar{P}_e(P_r) - \bar{P}_{e_1})}$	$\leq \lambda \leq$	$\frac{a_1}{b_2^+ + 2a_2^+(P_{m6}^p - \bar{P}_{e_1})}$	$\frac{a_1 - \lambda b_2^+ + 2\lambda a_2^+ \bar{P}_{e_1}}{2\lambda a_2^+}$
$\frac{a_1}{b_2^+ + 2a_2^+(P_{m6}^p - \bar{P}_{e_1})}$	$\leq \lambda \leq$	$\frac{a_1}{2a_+^* P_{m6}^p + b_+^*}$	\bar{P}_m^+
$\frac{a_1}{2a_+^* P_{m6}^p + b_+^*}$	$\leq \lambda \leq$	$\frac{a_1}{2a_+^* P_{m5}^p + b_+^*}$	$\frac{a_1 - \lambda b_+^*}{2\lambda a_+^*}$
$\frac{a_1}{2a_+^* P_{m5}^p + b_+^*}$	$\leq \lambda \leq$	$\frac{a_1}{2a_2^+ P_{m5}^p + b_2^+}$	\bar{P}_m^+
$\frac{a_1}{2a_2^+ P_{m5}^p + b_2^+}$	$\leq \lambda \leq$	$\frac{a_1}{b_2^+}$	$\frac{a_1 - \lambda b_2^+}{2\lambda a_2^+}$
$\frac{a_1}{b_2^+}$	$\leq \lambda \leq$	$\frac{a_1}{b_2^-}$	0
$\frac{a_1}{b_2^-}$	$\leq \lambda \leq$	$\frac{a_1}{2a_2^- P_{m3}^p + b_2^-}$	$\frac{a_1 - \lambda b_2^-}{2\lambda a_2^-}$
$\frac{a_1}{2a_2^- P_{m3}^p + b_2^-}$	$\leq \lambda \leq$	$\frac{a_2}{2a_2^- P_{m3}^p + b_2^-}$	$P_r - P_{\text{lim}}$
$\frac{a_2}{2a_2^- P_{m3}^p + b_2^-}$	$\leq \lambda \leq$	$\frac{a_2}{2a_2^- P_{m2}^p + b_2^-}$	$\frac{a_2 - \lambda b_2^-}{2\lambda a_2^-}$
$\frac{a_2}{2a_2^- P_{m2}^p + b_2^-}$	$\leq \lambda \leq$	$\frac{a_2}{2a_+^* P_{m2}^p + b_+^*}$	\bar{P}_m^-
$\frac{a_2}{2a_+^* P_{m2}^p + b_+^*}$	$\leq \lambda \leq$	$\frac{a_2}{2a_+^* P_{m1}^p + b_+^*}$	$\frac{a_2 - \lambda b_+^*}{2\lambda a_+^*}$
$\frac{a_2}{2a_+^* P_{m1}^p + b_+^*}$	$\leq \lambda \leq$	$\frac{a_2}{2a_2^- P_{m1}^p + b_2^- - 2a_2^- \bar{P}_{e_1}}$	\bar{P}_m^-
$\frac{a_2}{2a_2^- P_{m1}^p + b_2^- - 2a_2^- \bar{P}_{e_1}}$	$\leq \lambda \leq$	$\frac{a_2}{b_2^- + 2a_2^-(\underline{P}_e(P_r) - \underline{P}_{e_1})}$	$\frac{a_2 - \lambda b_2^- + 2\lambda a_2^- \underline{P}_{e_1}}{2\lambda a_2^-}$
$\frac{a_2}{b_2^- + 2a_2^-(\underline{P}_e(P_r) - \underline{P}_{e_1})}$	$\leq \lambda \leq$	$+\infty$	$\underline{P}_e(P_r)$

Cas 3.1 :

P_m	$-\infty$	P_{m1}^p	P_{m2}^p	0	P_{m3}^p
$H(P_m)$	$a_2(P_r - P_m)$ $+ Q_{\text{lim}} - a_2 P_{\text{lim}}$ $+ \lambda P_{e_1}^-(\underline{P}_{e_1})$ $+ \lambda P_{e_2}^-(P_m - \underline{P}_{e_1})$	$a_2(P_r - P_m)$ $+ Q_{\text{lim}} - a_2 P_{\text{lim}}$ $+ \lambda P_{e_1}^-(P_{m1}^{*-})$ $+ \lambda P_{e_2}^-(P_m - P_{m1}^{*-})$	$a_2(P_r - P_m)$ $+ Q_{\text{lim}} - a_2 P_{\text{lim}}$ $+ \lambda P_{e_2}^-(P_m)$ $+ \lambda c_1$	$a_2(P_r - P_m)$ $+ Q_{\text{lim}} - a_2 P_{\text{lim}}$ $+ \lambda P_{e_2}^+(P_m)$ $+ \lambda c_1$	

P_m	P_{m3}^p	P_{m4}^p	P_{m5}^p	P_{m6}^p	$+\infty$
$H(P_m)$	$a_1(P_r - P_m)$ $+ Q_0$ $+ \lambda P_{e_2}^+(P_m)$ $+ \lambda c_1$	$\lambda P_{e_2}^+(P_m)$ $+ \lambda c_1$	$\lambda P_{e_1}^+(P_{m1}^{*+})$ $+ \lambda P_{e_2}^+(P_m - P_{m1}^{*+})$	$\lambda P_{e_1}^+(\bar{P}_{e_1})$ $+ \lambda P_{e_2}^+(P_m - \bar{P}_{e_1})$	

La commande optimale P_m^{opt} en fonction de P_r et λ est donnée par :

Cas sur λ		P_m^{opt}
0	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{2a_2^+ \bar{P}_e(P_r) + b_2^+}$	$\bar{P}_e(P_r)$
$\frac{a_1}{2a_2^+ \bar{P}_e(P_r) + b_2^+}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{2a_2^+ P_{m3}^p + b_2^+}$	$\frac{a_1 - \lambda b_2^+}{2\lambda a_2^+}$
$\frac{a_1}{2a_2^+ P_{m3}^p + b_2^+}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{2a_2^+ P_{m3}^p + b_2^+}$	$P_r - \bar{P}_{\text{lim}}$
$\frac{a_2}{2a_2^+ P_{m3}^p + b_2^+}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{b_2^+}$	$\frac{a_2 - \lambda b_2^+}{2\lambda a_2^+}$
$\frac{a_2}{b_2^+}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{b_2^-}$	0
$\frac{a_2}{b_2^-}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{2a_2^- P_{m2}^p + b_2^-}$	$\frac{a_2 - \lambda b_2^-}{2\lambda a_2^-}$
$\frac{a_2}{2a_2^- P_{m2}^p + b_2^-}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{2a_2^* P_{m2}^p + b_2^*}$	\bar{P}_m
$\frac{a_2}{2a_2^* P_{m2}^p + b_2^*}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{2a_2^* P_{m1}^p + b_2^*}$	$\frac{a_2 - \lambda b_2^*}{2\lambda a_2^*}$
$\frac{a_2}{2a_2^* P_{m1}^p + b_2^*}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{2a_2^- P_{m1}^p + b_2^- - 2a_2^- \underline{P}_{e1}}$	\underline{P}_m
$\frac{a_2}{2a_2^- P_{m1}^p + b_2^- - 2a_2^- \underline{P}_{e1}}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{b_2^- + 2a_2^- (\underline{P}_e(P_r) - \underline{P}_{e1})}$	$\frac{a_2 - \lambda b_2^- + 2\lambda a_2^- \underline{P}_{e1}}{2\lambda a_2^-}$
$\frac{a_2}{b_2^- + 2a_2^- (\underline{P}_e(P_r) - \underline{P}_{e1})}$	$\leq \lambda \leq +\infty$	$\underline{P}_e(P_r)$

Cas 3.2 :

P_m	$-\infty$	P_{m1}^p	P_{m2}^p	0	P_{m3}^p
$H(P_m)$	$a_2(P_r - P_m)$ $+Q_{\text{lim}} - a_2 P_{\text{lim}}$ $+\lambda P_{e1}^-(\underline{P}_{e1})$ $+\lambda P_{e2}^-(P_m - \underline{P}_{e1})$	$a_2(P_r - P_m)$ $+Q_{\text{lim}} - a_2 P_{\text{lim}}$ $+\lambda P_{e1}^-(P_{m1}^{*-})$ $+\lambda P_{e2}^-(P_m - P_{m1}^{*-})$	$a_2(P_r - P_m)$ $+Q_{\text{lim}} - a_2 P_{\text{lim}}$ $+\lambda P_{e2}^-(P_m)$ $+\lambda c_1$	$a_2(P_r - P_m)$ $+Q_{\text{lim}} - a_2 P_{\text{lim}}$ $+\lambda P_{e2}^+(P_m)$ $+\lambda c_1$	

P_m	P_{m3}^p	P_{m5}^p	P_{m4}^p	P_{m6}^p	$+\infty$
$H(P_m)$	$a_1(P_r - P_m)$ $+Q_0$ $+\lambda P_{e2}^+(P_m)$ $+\lambda c_1$	$a_1(P_r - P_m)$ $+Q_0$ $+\lambda P_{e1}^+(P_{m1}^{*+})$ $+\lambda P_{e2}^+(P_m - P_{m1}^{*+})$	$\lambda P_{e1}^+(P_{m1}^{*+})$ $+\lambda P_{e2}^+(P_m - P_{m1}^{*+})$	$\lambda P_{e1}^+(\bar{P}_{e1})$ $+\lambda P_{e2}^+(P_m - \bar{P}_{e1})$	

La commande optimale P_m^{opt} en fonction de P_r et λ est donnée par :

Cas sur λ			P_m^{opt}
0	$\leq \lambda \leq$	$\frac{a_1}{2a_+^* P_{m4}^p + b_+^*}$	$\bar{P}_e(P_r)$
$\frac{a_1}{2a_+^* P_{m4}^p + b_+^*}$	$\leq \lambda \leq$	$\frac{a_1}{2a_+^* P_{m5}^p + b_+^*}$	$\frac{a_1 - \lambda b_+^*}{2\lambda a_+^*}$
$\frac{a_1}{2a_+^* P_{m5}^p + b_+^*}$	$\leq \lambda \leq$	$\frac{a_1}{2a_2^+ P_{m5}^p + b_2^+}$	\underline{P}_m^+
$\frac{a_1}{2a_2^+ P_{m5}^p + b_2^+}$	$\leq \lambda \leq$	$\frac{a_1}{2a_2^+ P_{m3}^p + b_2^+}$	$\frac{a_1 - \lambda b_2^+}{2\lambda a_2^+}$
$\frac{a_1}{2a_2^+ P_{m3}^p + b_2^+}$	$\leq \lambda \leq$	$\frac{a_2}{2a_2^+ P_{m3}^p + b_2^+}$	$P_r - P_{\text{lim}}$
$\frac{a_2}{2a_2^+ P_{m3}^p + b_2^+}$	$\leq \lambda \leq$	$\frac{a_2}{b_2^+}$	$\frac{a_2 - \lambda b_2^+}{2\lambda a_2^+}$
$\frac{a_2}{b_2^+}$	$\leq \lambda \leq$	$\frac{a_2}{b_2^-}$	0
$\frac{a_2}{b_2^-}$	$\leq \lambda \leq$	$\frac{a_2}{2a_2^- P_{m2}^p + b_2^-}$	$\frac{a_2 - \lambda b_2^-}{2\lambda a_2^-}$
$\frac{a_2}{2a_2^- P_{m2}^p + b_2^-}$	$\leq \lambda \leq$	$\frac{a_2}{2a_+^* P_{m2}^p + b_+^*}$	\bar{P}_m
$\frac{a_2}{2a_+^* P_{m2}^p + b_+^*}$	$\leq \lambda \leq$	$\frac{a_2}{2a_-^* P_{m1}^p + b_-^*}$	$\frac{a_2 - \lambda b_-^*}{2\lambda a_-^*}$
$\frac{a_2}{2a_-^* P_{m1}^p + b_-^*}$	$\leq \lambda \leq$	$\frac{a_2}{2a_2^- P_{m1}^p + b_2^- - 2a_2^- \underline{P}_{e1}}$	\underline{P}_m^-
$\frac{a_2}{2a_2^- P_{m1}^p + b_2^- - 2a_2^- \underline{P}_{e1}}$	$\leq \lambda \leq$	$\frac{a_2}{b_2^- + 2a_2^- (P_e(P_r) - \underline{P}_{e1})}$	$\frac{a_2 - \lambda b_2^- + 2\lambda a_2^- \underline{P}_{e1}}{2\lambda a_2^-}$
$\frac{a_2}{b_2^- + 2a_2^- (P_e(P_r) - \underline{P}_{e1})}$	$\leq \lambda \leq$	$+\infty$	$\underline{P}_e(P_r)$

Cas 3.3 :

P_m	$-\infty$	P_{m1}^p	P_{m2}^p	0	P_{m3}^p
$H(P_m)$	$a_2(P_r - P_m)$ $+ Q_{\text{lim}} - a_2 P_{\text{lim}}$ $+ \lambda P_{e1}^-(\underline{P}_{e1})$ $+ \lambda P_{e2}^-(P_m - \underline{P}_{e1})$	$a_2(P_r - P_m)$ $+ Q_{\text{lim}} - a_2 P_{\text{lim}}$ $+ \lambda P_{e1}^-(P_{m1}^{*-})$ $+ \lambda P_{e2}^-(P_m - P_{m1}^{*-})$	$a_2(P_r - P_m)$ $+ Q_{\text{lim}} - a_2 P_{\text{lim}}$ $+ \lambda P_{e2}^-(P_m)$ $+ \lambda c_1$	$a_2(P_r - P_m)$ $+ Q_{\text{lim}} - a_2 P_{\text{lim}}$ $+ \lambda P_{e2}^+(P_m)$ $+ \lambda c_1$	

P_m	P_{m3}^p	P_{m5}^p	P_{m6}^p	P_{m4}^p	$+\infty$
$H(P_m)$	$a_1(P_r - P_m)$ $+ Q_0$ $+ \lambda P_{e2}^+(P_m)$ $+ \lambda c_1$	$a_1(P_r - P_m)$ $+ Q_0$ $+ \lambda P_{e1}^+(P_{m1}^{*+})$ $+ \lambda P_{e2}^+(P_m - P_{m1}^{*+})$	$a_1(P_r - P_m)$ $+ Q_0$ $+ P_{e1}^+(\bar{P}_{e1})$ $+ \lambda P_{e2}^+(P_m - \bar{P}_{e1})$	$\lambda P_{e1}^+(\bar{P}_{e1})$ $+ \lambda P_{e2}^+(P_m - \bar{P}_{e1})$	

La commande optimale P_m^{opt} en fonction de P_r et λ est donnée par :

Cas sur λ			P_m^{opt}
0	$\leq \lambda \leq$	$\frac{a_1}{b_2^+ + 2a_2^+ (\overline{P}_e(P_r) - \overline{P}_{e_1})}$	$\overline{P}_e(P_r)$
$\frac{a_1}{b_2^+ + 2a_2^+ (\overline{P}_e(P_r) - \overline{P}_{e_1})}$	$\leq \lambda \leq$	$\frac{a_1}{b_2^+ + 2a_2^+ (P_{m6}^{\text{P}} - \overline{P}_{e_1})}$	$\frac{a_1 - \lambda b_2^+ + 2\lambda a_2^+ \overline{P}_{e_1}}{2\lambda a_2^+}$
$\frac{a_1}{b_2^+ + 2a_2^+ (P_{m6}^{\text{P}} - \overline{P}_{e_1})}$	$\leq \lambda \leq$	$\frac{a_1}{2a_+^* P_{m6}^{\text{P}} + b_+^*}$	\overline{P}_m^+
$\frac{a_1}{2a_+^* P_{m6}^{\text{P}} + b_+^*}$	$\leq \lambda \leq$	$\frac{a_1}{2a_+^* P_{m5}^{\text{P}} + b_+^*}$	$\frac{a_1 - \lambda b_+^*}{2\lambda a_+^*}$
$\frac{a_1}{2a_+^* P_{m5}^{\text{P}} + b_+^*}$	$\leq \lambda \leq$	$\frac{a_1}{2a_2^+ P_{m5}^{\text{P}} + b_2^+}$	\overline{P}_m^+
$\frac{a_1}{2a_2^+ P_{m5}^{\text{P}} + b_2^+}$	$\leq \lambda \leq$	$\frac{a_1}{2a_2^+ P_{m3}^{\text{P}} + b_2^+}$	$\frac{a_1 - \lambda b_2^+}{2\lambda a_2^+}$
$\frac{a_1}{2a_2^+ P_{m3}^{\text{P}} + b_2^+}$	$\leq \lambda \leq$	$\frac{a_2}{2a_2^+ P_{m3}^{\text{P}} + b_2^+}$	$P_r - \overline{P}_{\text{lim}}$
$\frac{a_2}{2a_2^+ P_{m3}^{\text{P}} + b_2^+}$	$\leq \lambda \leq$	$\frac{a_2}{b_2^+}$	$\frac{a_2 - \lambda b_2^+}{2\lambda a_2^+}$
$\frac{a_2}{b_2^+}$	$\leq \lambda \leq$	$\frac{a_2}{b_2^-}$	0
$\frac{a_2}{b_2^-}$	$\leq \lambda \leq$	$\frac{a_2}{2a_2^- P_{m2}^{\text{P}} + b_2^-}$	$\frac{a_2 - \lambda b_2^-}{2\lambda a_2^-}$
$\frac{a_2}{2a_2^- P_{m2}^{\text{P}} + b_2^-}$	$\leq \lambda \leq$	$\frac{a_2}{2a_+^* P_{m2}^{\text{P}} + b_+^*}$	\overline{P}_m^-
$\frac{a_2}{2a_+^* P_{m2}^{\text{P}} + b_+^*}$	$\leq \lambda \leq$	$\frac{a_2}{2a_+^* P_{m1}^{\text{P}} + b_+^*}$	$\frac{a_2 - \lambda b_+^*}{2\lambda a_+^*}$
$\frac{a_2}{2a_+^* P_{m1}^{\text{P}} + b_+^*}$	$\leq \lambda \leq$	$\frac{a_2}{2a_2^- P_{m1}^{\text{P}} + b_2^- - 2a_2^- \underline{P}_{e_1}}$	\overline{P}_m^-
$\frac{a_2}{2a_2^- P_{m1}^{\text{P}} + b_2^- - 2a_2^- \underline{P}_{e_1}}$	$\leq \lambda \leq$	$\frac{a_2}{b_2^- + 2a_2^- (\underline{P}_e(P_r) - \underline{P}_{e_1})}$	$\frac{a_2 - \lambda b_2^- + 2\lambda a_2^- \underline{P}_{e_1}}{2\lambda a_2^-}$
$\frac{a_2}{b_2^- + 2a_2^- (\underline{P}_e(P_r) - \underline{P}_{e_1})}$	$\leq \lambda \leq$	$+\infty$	$\underline{P}_e(P_r)$

Cas 3.4 :

P_m	$-\infty$	P_{m1}^{P}	P_{m2}^{P}	0	P_{m5}^{P}
$H(P_m)$	$a_2(P_r - P_m)$ $+ Q_{\text{lim}} - a_2 P_{\text{lim}}$ $+ \lambda P_{e_1}^-(\underline{P}_{e_1})$ $+ \lambda P_{e_2}^-(P_m - \underline{P}_{e_1})$	$a_2(P_r - P_m)$ $+ Q_{\text{lim}} - a_2 P_{\text{lim}}$ $+ \lambda P_{e_1}^-(P_{m1}^{*-})$ $+ \lambda P_{e_2}^-(P_m - P_{m1}^{*-})$	$a_2(P_r - P_m)$ $+ Q_{\text{lim}} - a_2 P_{\text{lim}}$ $+ \lambda P_{e_2}^-(P_m)$ $+ \lambda c_1$	$a_2(P_r - P_m)$ $+ Q_{\text{lim}} - a_2 P_{\text{lim}}$ $+ \lambda P_{e_2}^+(P_m)$ $+ \lambda c_1$	
P_m	P_{m5}^{P}	P_{m3}^{P}	P_{m4}^{P}	P_{m6}^{P}	$+\infty$
$H(P_m)$	$a_2(P_r - P_m)$ $+ Q_{\text{lim}} - a_2 P_{\text{lim}}$ $+ \lambda P_{e_1}^+(P_{m1}^{*+})$ $+ \lambda P_{e_2}^+(P_m - P_{m1}^{*+})$	$a_1(P_r - P_m)$ $+ Q_0$ $+ \lambda P_{e_1}^+(P_{m1}^{*+})$ $+ \lambda P_{e_2}^+(P_m - P_{m1}^{*+})$	$\lambda P_{e_1}^+(P_{m1}^{*+})$ $+ \lambda P_{e_2}^+(P_m - P_{m1}^{*+})$	$\lambda P_{e_1}^+(\overline{P}_{e_1})$ $+ \lambda P_{e_2}^+(P_m - \overline{P}_{e_1})$	

La commande optimale P_m^{opt} en fonction de P_r et λ est donnée par :

Cas sur λ		P_m^{opt}
0	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{2a_+^* P_{m4}^p + b_+^*}$	$\bar{P}_e(P_r)$
$\frac{a_1}{2a_+^* \bar{P}_e(P_r) + b_+^*}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{2a_+^* P_{m3}^p + b_+^*}$	$\frac{a_1 - \lambda b_+^*}{2\lambda a_+^*}$
$\frac{a_1}{2a_+^* P_{m3}^p + b_+^*}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{2a_+^* P_{m3}^p + b_+^*}$	$P_r - P_{\text{lim}}$
$\frac{a_2}{2a_+^* P_{m3}^p + b_+^*}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{2a_+^* P_{m5}^p + b_+^*}$	$\frac{a_2 - \lambda b_+^*}{2\lambda a_+^*}$
$\frac{a_2}{2a_+^* P_{m5}^p + b_+^*}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{2a_2^+ P_{m5}^p + b_2^+}$	\underline{P}_m^+
$\frac{a_2}{2a_2^+ P_{m5}^p + b_2^+}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{b_2^+}$	$\frac{a_2 - \lambda b_2^+}{2\lambda a_2^+}$
$\frac{a_2}{b_2^+}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{b_2^-}$	0
$\frac{a_2}{b_2^-}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{2a_2^- P_{m2}^p + b_2^-}$	$\frac{a_2 - \lambda b_2^-}{2\lambda a_2^-}$
$\frac{a_2}{2a_2^- P_{m2}^p + b_2^-}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{2a_+^* P_{m2}^p + b_+^*}$	\bar{P}_m
$\frac{a_2}{2a_+^* P_{m2}^p + b_+^*}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{2a_+^* P_{m1}^p + b_+^*}$	$\frac{a_2 - \lambda b_+^*}{2\lambda a_+^*}$
$\frac{a_2}{2a_+^* P_{m1}^p + b_+^*}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{2a_2^- P_{m1}^p + b_2^- - 2a_2^- \underline{P}_{e1}}$	\underline{P}_m^-
$\frac{a_2}{2a_2^- P_{m1}^p + b_2^- - 2a_2^- \underline{P}_{e1}}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{b_2^- + 2a_2^- (\underline{P}_e(P_r) - \underline{P}_{e1})}$	$\frac{a_2 - \lambda b_2^- + 2\lambda a_2^- \underline{P}_{e1}}{2\lambda a_2^-}$
$\frac{a_2}{b_2^- + 2a_2^- (\underline{P}_e(P_r) - \underline{P}_{e1})}$	$\leq \lambda \leq +\infty$	$\underline{P}_e(P_r)$

Cas 3.5 :

P_m	$-\infty$	P_{m1}^p	P_{m2}^p	0	P_{m5}^p
$H(P_m)$	$a_2(P_r - P_m)$ $+Q_{\text{lim}} - a_2 P_{\text{lim}}$ $+ \lambda P_{e1}^-(\underline{P}_{e1})$ $+ \lambda P_{e2}^-(P_m - \underline{P}_{e1})$	$a_2(P_r - P_m)$ $+Q_{\text{lim}} - a_2 P_{\text{lim}}$ $+ \lambda P_{e1}^-(P_{m1}^{*-})$ $+ \lambda P_{e2}^-(P_m - P_{m1}^{*-})$	$a_2(P_r - P_m)$ $+Q_{\text{lim}} - a_2 P_{\text{lim}}$ $+ \lambda P_{e2}^-(P_m)$ $+ \lambda c_1$	$a_2(P_r - P_m)$ $+Q_{\text{lim}} - a_2 P_{\text{lim}}$ $+ \lambda P_{e2}^+(P_m)$ $+ \lambda c_1$	

P_m	P_{m5}^p	P_{m3}^p	P_{m6}^p	P_{m4}^p	$+\infty$
$H(P_m)$	$a_2(P_r - P_m)$ $+Q_{\text{lim}} - a_2 P_{\text{lim}}$ $+ \lambda P_{e1}^+(P_{m1}^{*+})$ $+ \lambda P_{e2}^+(P_m - P_{m1}^{*+})$	$a_1(P_r - P_m)$ $+Q_0$ $+ \lambda P_{e1}^+(P_{m1}^{*+})$ $+ \lambda P_{e2}^+(P_m - P_{m1}^{*+})$	$a_1(P_r - P_m)$ $+Q_0$ $+ \lambda P_{e1}^+(\bar{P}_{e1})$ $+ \lambda P_{e2}^+(P_m - \bar{P}_{e1})$	$\lambda P_{e1}^+(\bar{P}_{e1})$ $+ \lambda P_{e2}^+(P_m - \bar{P}_{e1})$	

La commande optimale P_m^{opt} en fonction de P_r et λ est donnée par :

Cas sur λ		P_m^{opt}
0	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{b_2^+ + 2a_2^+ (\overline{P}_e(P_r) - \overline{P}_{e1})}$	$\overline{P}_e(P_r)$
$\frac{a_1}{b_2^+ + 2a_2^+ (\overline{P}_e(P_r) - \overline{P}_{e1})}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{b_2^+ + 2a_2^+ (P_{m6}^p - \overline{P}_{e1})}$	$\frac{a_1 - \lambda b_2^+ + 2\lambda a_2^+ \overline{P}_{e1}}{2\lambda a_2^+}$
$\frac{a_1}{b_2^+ + 2a_2^+ (P_{m6}^p - \overline{P}_{e1})}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{2a_+^* P_{m6}^p + b_+^*}$	\overline{P}_m^+
$\frac{a_1}{2a_+^* P_{m6}^p + b_+^*}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{2a_+^* P_{m3}^p + b_+^*}$	$\frac{a_1 - \lambda b_+^*}{2\lambda a_+^*}$
$\frac{a_1}{2a_+^* P_{m3}^p + b_+^*}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{2a_+^* P_{m3}^p + b_+^*}$	$P_r - P_{\text{lim}}$
$\frac{a_2}{2a_+^* P_{m3}^p + b_+^*}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{2a_+^* P_{m5}^p + b_+^*}$	$\frac{a_2 - \lambda b_+^*}{2\lambda a_+^*}$
$\frac{a_2}{2a_+^* P_{m5}^p + b_+^*}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{2a_2^+ P_{m5}^p + b_2^+}$	\overline{P}_m^+
$\frac{a_2}{2a_2^+ P_{m5}^p + b_2^+}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{b_2^+}$	$\frac{a_2 - \lambda b_2^+}{2\lambda a_2^+}$
$\frac{a_2}{b_2^+}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{b_2^-}$	0
$\frac{a_2}{b_2^-}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{2a_2^- P_{m2}^p + b_2^-}$	$\frac{a_2 - \lambda b_2^-}{2\lambda a_2^-}$
$\frac{a_2}{2a_2^- P_{m2}^p + b_2^-}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{2a_-^* P_{m2}^p + b_-^*}$	\overline{P}_m^-
$\frac{a_2}{2a_-^* P_{m2}^p + b_-^*}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{2a_-^* P_{m1}^p + b_-^*}$	$\frac{a_2 - \lambda b_-^*}{2\lambda a_-^*}$
$\frac{a_2}{2a_-^* P_{m1}^p + b_-^*}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{2a_2^- P_{m1}^p + b_2^- - 2a_2^- \overline{P}_{e1}}$	\overline{P}_m^-
$\frac{a_2}{2a_2^- P_{m1}^p + b_2^- - 2a_2^- \overline{P}_{e1}}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{b_2^- + 2a_2^- (\underline{P}_e(P_r) - \underline{P}_{e1})}$	$\frac{a_2 - \lambda b_2^- + 2\lambda a_2^- \underline{P}_{e1}}{2\lambda a_2^-}$
$\frac{a_2}{b_2^- + 2a_2^- (\underline{P}_e(P_r) - \underline{P}_{e1})}$	$\leq \lambda \leq +\infty$	$\underline{P}_e(P_r)$

Cas 3.6 :

P_m	$-\infty$	P_{m1}^p	P_{m2}^p	0	P_{m5}^p
$H(P_m)$	$a_2(P_r - P_m)$ $+ Q_{\text{lim}} - a_2 P_{\text{lim}}$ $+ \lambda P_{e1}^-(\underline{P}_{e1})$ $+ \lambda P_{e2}^-(P_m - \underline{P}_{e1})$	$a_2(P_r - P_m)$ $+ Q_{\text{lim}} - a_2 P_{\text{lim}}$ $+ \lambda P_{e1}^-(P_{m1}^{*-})$ $+ \lambda P_{e2}^-(P_m - P_{m1}^{*-})$	$a_2(P_r - P_m)$ $+ Q_{\text{lim}} - a_2 P_{\text{lim}}$ $+ \lambda P_{e2}^-(P_m)$ $+ \lambda c_1$	$a_2(P_r - P_m)$ $+ Q_{\text{lim}} - a_2 P_{\text{lim}}$ $+ \lambda P_{e2}^+(P_m)$ $+ \lambda c_1$	

P_m	P_{m5}^p	P_{m6}^p	P_{m3}^p	P_{m4}^p	$+\infty$
$H(P_m)$	$a_2(P_r - P_m)$ $+ Q_{\text{lim}} - a_2 P_{\text{lim}}$ $+ \lambda P_{e1}^+(P_{m1}^{*+})$ $+ \lambda P_{e2}^+(P_m - P_{m1}^{*+})$	$a_2(P_r - P_m)$ $+ Q_{\text{lim}} - a_2 P_{\text{lim}}$ $+ \lambda P_{e1}^+(\overline{P}_{e1})$ $+ \lambda P_{e2}^+(P_m - \overline{P}_{e1})$	$a_1(P_r - P_m)$ $+ Q_0$ $+ \lambda P_{e1}^+(\overline{P}_{e1})$ $+ \lambda P_{e2}^+(P_m - \overline{P}_{e1})$	$\lambda P_{e1}^+(\overline{P}_{e1})$ $+ \lambda P_{e2}^+(P_m - \overline{P}_{e1})$	

La commande optimale P_m^{opt} en fonction de P_r et λ est donnée par :

Cas sur λ		P_m^{opt}
0	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{b_2^+ + 2a_2^+ (\overline{P}_e(P_r) - \overline{P}_{e_1})}$	$\overline{P}_e(P_r)$
$\frac{a_1}{b_2^+ + 2a_2^+ (\overline{P}_e(P_r) - \overline{P}_{e_1})}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{b_2^+ + 2a_2^+ (P_{m3}^p - \overline{P}_{e_1})}$	$\frac{a_1 - \lambda b_2^+ + 2\lambda a_2^+ \overline{P}_{e_1}}{2\lambda a_2^+}$
$\frac{a_1}{b_2^+ + 2a_2^+ (P_{m3}^p - \overline{P}_{e_1})}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{b_2^+ + 2a_2^+ (P_{m3}^p - \overline{P}_{e_1})}$	$P_r - P_{\text{lim}}$
$\frac{a_2}{b_2^+ + 2a_2^+ (P_{m3}^p - \overline{P}_{e_1})}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{b_2^+ + 2a_2^+ (P_{m6}^p - \overline{P}_{e_1})}$	$\frac{a_2 - \lambda b_2^+ + 2\lambda a_2^+ \overline{P}_{e_1}}{2\lambda a_2^+}$
$\frac{a_2}{b_2^+ + 2a_2^+ (P_{m6}^p - \overline{P}_{e_1})}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{2a_+^* P_{m6}^p + b_+^*}$	\overline{P}_m^+
$\frac{a_2}{2a_+^* P_{m6}^p + b_+^*}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{2a_+^* P_{m5}^p + b_+^*}$	$\frac{a_2 - \lambda b_+^*}{2\lambda a_+^*}$
$\frac{a_2}{2a_+^* P_{m5}^p + b_+^*}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{2a_2^+ P_{m5}^p + b_2^+}$	\overline{P}_m^+
$\frac{a_2}{2a_2^+ P_{m5}^p + b_2^+}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{b_2^+}$	$\frac{a_2 - \lambda b_2^+}{2\lambda a_2^+}$
$\frac{a_2}{b_2^+}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{b_2^-}$	0
$\frac{a_2}{b_2^-}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{2a_2^- P_{m2}^p + b_2^-}$	$\frac{a_2 - \lambda b_2^-}{2\lambda a_2^-}$
$\frac{a_2}{2a_2^- P_{m2}^p + b_2^-}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{2a_-^* P_{m2}^p + b_-^*}$	\overline{P}_m^-
$\frac{a_2}{2a_-^* P_{m2}^p + b_-^*}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{2a_-^* P_{m1}^p + b_-^*}$	$\frac{a_2 - \lambda b_-^*}{2\lambda a_-^*}$
$\frac{a_2}{2a_-^* P_{m1}^p + b_-^*}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{2a_2^- P_{m1}^p + b_2^- - 2a_2^- \underline{P}_{e_1}}$	\underline{P}_m^-
$\frac{a_2}{2a_2^- P_{m1}^p + b_2^- - 2a_2^- \underline{P}_{e_1}}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{b_2^- + 2a_2^- (\underline{P}_e(P_r) - \underline{P}_{e_1})}$	$\frac{a_2 - \lambda b_2^- + 2\lambda a_2^- \underline{P}_{e_1}}{2\lambda a_2^-}$
$\frac{a_2}{b_2^- + 2a_2^- (\underline{P}_e(P_r) - \underline{P}_{e_1})}$	$\leq \lambda \leq +\infty$	$\underline{P}_e(P_r)$

$$b_1^+ - b_2^+ \leq 0$$

Cas 1.1 :

P_m	$-\infty$	P_{m3}^p	P_{m4}^p	P_{m1}^p	P_{m2}^p
$H(P_m)$	$a_2(P_r - P_m)$ $+ Q_{\text{lim}} - a_2 P_{\text{lim}}$ $+ \lambda P_{e_1}^-(P_m - \underline{P}_{e_2})$ $+ \lambda P_{e_2}^-(\underline{P}_{e_2})$	$a_1(P_r - P_m)$ $+ Q_0$ $+ \lambda P_{e_1}^-(P_m - \underline{P}_{e_2})$ $+ \lambda P_{e_2}^-(\underline{P}_{e_2})$	$\lambda P_{e_1}^-(P_m - \underline{P}_{e_2})$ $+ \lambda P_{e_2}^-(\underline{P}_{e_2})$	$\lambda P_{e_1}^-(P_{m1}^{*-})$ $+ \lambda P_{e_2}^-(P_m - P_{m1}^{*-})$	

P_m	P_{m2}^p	0	P_{m5}^p	P_{m6}^p	$+\infty$
$H(P_m)$	$\lambda P_{e_1}^-(P_m)$ $+ \lambda c_2$	$\lambda P_{e_1}^+(P_m)$ $+ \lambda c_2$	$\lambda P_{e_1}^+(P_{m1}^{*+})$ $+ \lambda P_{e_2}^+(P_m - P_{m1}^{*+})$	$\lambda P_{e_1}^+(P_m - \overline{P}_{e_2})$ $+ \lambda P_{e_2}^+(\overline{P}_{e_2})$	

La commande optimale P_m^{opt} en fonction de P_r et λ est donnée par :

Cas sur λ		P_m^{opt}
0	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{b_1^- + 2a_1^-(P_e(P_r) - P_{e2})}$	$\bar{P}_e(P_r)$
$\frac{a_1}{b_1^- + 2a_1^-(P_e(P_r) - P_{e2})}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{2a_1^- P_{m3}^p + b_1^- - 2a_1^- P_{e2}}$	$\frac{a_1 - \lambda b_1^- + 2\lambda a_1^- P_{e2}}{2\lambda a_1^-}$
$\frac{a_1}{2a_1^- P_{m3}^p + b_1^- - 2a_1^-}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{2a_1^- P_{m3}^p + b_1^- - 2a_1^- P_{e2}}$	$P_r - P_{\text{lim}}$
$\frac{a_2}{2a_1^- P_{m3}^p + b_1^- - 2a_1^- P_{e2}}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{b_1^- + 2a_1^-(P_e(P_r) - P_{e2})}$	$\frac{a_2 - \lambda b_1^- + 2\lambda a_1^- P_{e2}}{2\lambda a_1^-}$
$\frac{a_2}{b_1^- + 2a_1^-(P_e(P_r) - P_{e2})}$	$\leq \lambda \leq +\infty$	$\underline{P}_e(P_r)$

Cas 1.2 :

P_m	$-\infty$	P_{m3}^p	P_{m1}^p	P_{m4}^p	P_{m2}^p
$H(P_m)$	$a_2(P_r - P_m)$ $+ Q_{\text{lim}} - a_2 P_{\text{lim}}$ $+ \lambda P_{e1}^-(P_m - \underline{P}_{e2})$ $+ \lambda P_{e2}^-(\underline{P}_{e2})$	$a_1(P_r - P_m)$ $+ Q_0$ $+ \lambda P_{e1}^-(P_m - \underline{P}_{e2})$ $+ \lambda P_{e2}^-(\underline{P}_{e2})$	$a_1(P_r - P_m)$ $+ Q_0$ $+ \lambda P_{e1}^-(P_{m1}^*)$ $+ \lambda P_{e2}^-(P_m - P_{m1}^*)$	$\lambda P_{e1}^-(P_{m1}^*)$ $+ \lambda P_{e2}^-(P_m - P_{m1}^*)$	

P_m	P_{m2}^p	0	P_{m5}^p	P_{m6}^p	$+\infty$
$H(P_m)$	$\lambda P_{e1}^-(P_m)$ $+ \lambda c_2$	$\lambda P_{e1}^+(P_m)$ $+ \lambda c_2$	$\lambda P_{e1}^+(P_{m1}^*)$ $+ \lambda P_{e2}^+(P_m - P_{m1}^*)$	$\lambda P_{e1}^+(P_m - \bar{P}_{e2})$ $+ \lambda P_{e2}^+(\bar{P}_{e2})$	

La commande optimale P_m^{opt} en fonction de P_r et λ est donnée par :

Cas sur λ		P_m^{opt}
0	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{2a_-^* \bar{P}_e(P_r) + b_-^*}$	$\bar{P}_e(P_r)$
$\frac{a_1}{2a_-^* \bar{P}_e(P_r) + b_-^*}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{2a_-^* P_{m1}^p + b_-^*}$	$\frac{a_1 - \lambda b_-^*}{2\lambda a_-^*}$
$\frac{a_1}{2a_-^* P_{m1}^p + b_-^*}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{b_1^- + 2a_1^-(P_{m1}^p - P_{e2})}$	\underline{P}_m
$\frac{a_1}{b_1^- + 2a_1^-(P_{m1}^p - P_{e2})}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{b_1^- + 2a_1^-(P_{m3}^p - P_{e2})}$	$\frac{a_1 - \lambda b_1^- + 2\lambda a_1^- P_{e2}}{2\lambda a_1^-}$
$\frac{a_1}{b_1^- + 2a_1^-(P_{m3}^p - P_{e2})}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{b_1^- + 2a_1^-(P_{m3}^p - P_{e2})}$	$P_r - P_{\text{lim}}$
$\frac{a_2}{b_1^- + 2a_1^-(P_{m3}^p - P_{e2})}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{b_1^- + 2a_1^-(P_e(P_r) - P_{e2})}$	$\frac{a_2 - \lambda b_1^- + 2\lambda a_1^- P_{e2}}{2\lambda a_1^-}$
$\frac{a_2}{b_1^- + 2a_1^-(P_e(P_r) - P_{e2})}$	$\leq \lambda \leq +\infty$	$\underline{P}_e(P_r)$

Cas 1.3 :

P_m	$-\infty$	P_{m3}^p	P_{m1}^p	P_{m2}^p	P_{m4}^p
$H(P_m)$	$a_2(P_r - P_m)$ $+Q_{\text{lim}} - a_2P_{\text{lim}}$ $+\lambda P_{e_1}^-(P_m - \underline{P}_{e_2})$ $+\lambda P_{e_2}^-(\underline{P}_{e_2})$	$a_1(P_r - P_m)$ $+Q_0$ $+\lambda P_{e_1}^-(P_m - \underline{P}_{e_2})$ $+\lambda P_{e_2}^-(\underline{P}_{e_2})$	$a_1(P_r - P_m)$ $+Q_0$ $+\lambda P_{e_1}^-(P_{m1}^{*-})$ $+\lambda P_{e_2}^-(P_m - P_{m1}^{*-})$	$a_1(P_r - P_m)$ $+Q_0$ $+\lambda P_{e_1}^-(P_m)$ $+\lambda c_2$	
P_m	P_{m4}^p	0	P_{m5}^p	P_{m6}^p	$+\infty$
$H(P_m)$	$\lambda P_{e_1}^-(P_m)$ $+\lambda c_2$	$\lambda P_{e_1}^+(P_m)$ $+\lambda c_2$	$\lambda P_{e_1}^+(P_{m1}^{*+})$ $+\lambda P_{e_2}^+(P_m - P_{m1}^{*+})$	$\lambda P_{e_1}^+(P_m - \bar{P}_{e_2})$ $+\lambda P_{e_2}^+(\bar{P}_{e_2})$	

La commande optimale P_m^{opt} en fonction de P_r et λ est donnée par :

Cas sur λ			P_m^{opt}
0	$\leq \lambda \leq$	$\frac{a_1}{2a_1^- \bar{P}_e(P_r) + b_1^-}$	$\bar{P}_e(P_r)$
$\frac{a_1}{2a_1^- \bar{P}_e(P_r) + b_1^-}$	$\leq \lambda \leq$	$\frac{a_1}{2a_1^- P_{m2}^p + b_1^-}$	$\frac{a_1 - \lambda b_1^-}{2\lambda a_1^-}$
$\frac{a_1}{2a_1^- P_{m2}^p + b_1^-}$	$\leq \lambda \leq$	$\frac{a_1}{2a_1^* P_{m2}^p + b_1^*}$	\bar{P}_m
$\frac{a_1}{2a_1^* P_{m2}^p + b_1^*}$	$\leq \lambda \leq$	$\frac{a_1}{2a_1^* P_{m1}^p + b_1^*}$	$\frac{a_1 - \lambda b_1^*}{2\lambda a_1^*}$
$\frac{a_1}{2a_1^* P_{m1}^p + b_1^*}$	$\leq \lambda \leq$	$\frac{a_1}{b_1^- + 2a_1^- (P_{m1}^p - \underline{P}_{e_2})}$	\underline{P}_m
$\frac{a_1}{b_1^- + 2a_1^- (P_{m1}^p - \underline{P}_{e_2})}$	$\leq \lambda \leq$	$\frac{a_1}{b_1^- + 2a_1^- (P_{m3}^p - \underline{P}_{e_2})}$	$\frac{a_1 - \lambda b_1^- + 2\lambda a_1^- \underline{P}_{e_2}}{2\lambda a_1^-}$
$\frac{a_1}{b_1^- + 2a_1^- (P_{m3}^p - \underline{P}_{e_2})}$	$\leq \lambda \leq$	$\frac{a_2}{b_1^- + 2a_1^- (P_{m3}^p - \underline{P}_{e_2})}$	$P_r - P_{\text{lim}}$
$\frac{a_2}{b_1^- + 2a_1^- (P_{m3}^p - \underline{P}_{e_2})}$	$\leq \lambda \leq$	$\frac{a_2}{b_1^- + 2a_1^- (\underline{P}_e(P_r) - \underline{P}_{e_2})}$	$\frac{a_2 - \lambda b_1^- + 2\lambda a_1^- \underline{P}_{e_2}}{2\lambda a_1^-}$
$\frac{a_2}{b_1^- + 2a_1^- (\underline{P}_e(P_r) - \underline{P}_{e_2})}$	$\leq \lambda \leq$	$+\infty$	$\underline{P}_e(P_r)$

Cas 1.4 :

P_m	$-\infty$	P_{m1}^p	P_{m3}^p	P_{m4}^p	P_{m2}^p
$H(P_m)$	$a_2(P_r - P_m)$ $+Q_{\text{lim}} - a_2P_{\text{lim}}$ $+\lambda P_{e_1}^-(P_m - \underline{P}_{e_2})$ $+\lambda P_{e_2}^-(\underline{P}_{e_2})$	$a_2(P_r - P_m)$ $+Q_{\text{lim}} - a_2P_{\text{lim}}$ $+\lambda P_{e_1}^-(P_{m1}^{*-})$ $+\lambda P_{e_2}^-(P_m - P_{m1}^{*-})$	$a_1(P_r - P_m)$ $+Q_0$ $+\lambda P_{e_1}^-(P_{m1}^{*-})$ $+\lambda P_{e_2}^-(P_m - P_{m1}^{*-})$	$\lambda P_{e_1}^-(P_{m1}^{*-})$ $+\lambda P_{e_2}^-(P_m - P_{m1}^{*-})$	
P_m	P_{m2}^p	0	P_{m5}^p	P_{m6}^p	$+\infty$
$H(P_m)$	$\lambda P_{e_1}^-(P_m)$ $+\lambda c_2$	$\lambda P_{e_1}^+(P_m)$ $+\lambda c_2$	$\lambda P_{e_1}^+(P_{m1}^{*+})$ $+\lambda P_{e_2}^+(P_m - P_{m1}^{*+})$	$\lambda P_{e_1}^+(P_m - \bar{P}_{e_2})$ $+\lambda P_{e_2}^+(\bar{P}_{e_2})$	

La commande optimale P_m^{opt} en fonction de P_r et λ est donnée par :

Cas sur λ		P_m^{opt}
0	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{2a_-^* \bar{P}_e(P_r) + b_-^*}$	$\bar{P}_e(P_r)$
$\frac{a_1}{2a_-^* \bar{P}_e(P_r) + b_-^*}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{2a_-^* P_{m3}^p + b_-^*}$	$\frac{a_1 - \lambda b_-^*}{2\lambda a_-^*}$
$\frac{a_1}{2a_-^* P_{m3}^p + b_-^*}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{2a_-^* P_{m3}^p + b_-^*}$	$P_r - P_{\text{lim}}$
$\frac{a_2}{2a_-^* P_{m3}^p + b_-^*}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{2a_-^* P_{m1}^p + b_-^*}$	$\frac{a_2 - \lambda b_-^*}{2\lambda a_-^*}$
$\frac{a_2}{2a_-^* P_{m1}^p + b_-^*}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{b_1^- + 2a_1^- (P_{m1}^p - \underline{P}_{e2})}$	\underline{P}_m^-
$\frac{a_2}{b_1^- + 2a_1^- (P_{m1}^p - \underline{P}_{e2})}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{b_1^- + 2a_1^- (\underline{P}_e(P_r) - \underline{P}_{e2})}$	$\frac{a_2 - \lambda b_1^- + 2\lambda a_1^- \underline{P}_{e2}}{2\lambda a_1^-}$
$\frac{a_2}{b_1^- + 2a_1^- (\underline{P}_e(P_r) - \underline{P}_{e2})}$	$\leq \lambda \leq +\infty$	$\underline{P}_e(P_r)$

Cas 1.5 :

P_m	$-\infty$	P_{m1}^p	P_{m3}^p	P_{m2}^p	P_{m4}^p
$H(P_m)$	$a_2(P_r - P_m)$ $+ Q_{\text{lim}} - a_2 P_{\text{lim}}$ $+ \lambda P_{e1}^-(P_m - \underline{P}_{e2})$ $+ \lambda P_{e2}^-(\underline{P}_{e2})$	$a_2(P_r - P_m)$ $+ Q_{\text{lim}} - a_2 P_{\text{lim}}$ $+ \lambda P_{e1}^-(P_{m1}^*)$ $+ \lambda P_{e2}^-(P_m - P_{m1}^*)$	$a_1(P_r - P_m)$ $+ Q_0$ $+ \lambda P_{e1}^-(P_{m1}^*)$ $+ \lambda P_{e2}^-(P_m - P_{m1}^*)$	$a_1(P_r - P_m)$ $+ Q_0$ $+ \lambda P_{e1}^-(P_m)$ $+ \lambda c_2$	

P_m	P_{m4}^p	0	P_{m5}^p	P_{m6}^p	$+\infty$
$H(P_m)$	$\lambda P_{e1}^-(P_m)$ $+ \lambda c_2$	$\lambda P_{e1}^+(P_m)$ $+ \lambda c_2$	$\lambda P_{e1}^+(P_{m1}^*)$ $+ \lambda P_{e2}^+(P_m - P_{m1}^*)$	$\lambda P_{e1}^+(P_m - \bar{P}_{e2})$ $+ \lambda P_{e2}^+(\bar{P}_{e2})$	

La commande optimale P_m^{opt} en fonction de P_r et λ est donnée par :

Cas sur λ		P_m^{opt}
0	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{2a_1^- \bar{P}_e(P_r) + b_1^-}$	$\bar{P}_e(P_r)$
$\frac{a_1}{2a_1^- \bar{P}_e(P_r) + b_1^-}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{2a_1^- P_{m2}^p + b_1^-}$	$\frac{a_1 - \lambda b_1^-}{2\lambda a_1^-}$
$\frac{a_1}{2a_1^- P_{m2}^p + b_1^-}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{2a_-^* P_{m2}^p + b_-^*}$	\bar{P}_m
$\frac{a_1}{2a_-^* P_{m2}^p + b_-^*}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{2a_-^* P_{m3}^p + b_-^*}$	$\frac{a_1 - \lambda b_-^*}{2\lambda a_-^*}$
$\frac{a_1}{2a_-^* P_{m3}^p + b_-^*}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{2a_-^* P_{m3}^p + b_-^*}$	$P_r - P_{\text{lim}}$
$\frac{a_2}{2a_-^* P_{m3}^p + b_-^*}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{2a_-^* P_{m1}^p + b_-^*}$	$\frac{a_2 - \lambda b_-^*}{2\lambda a_-^*}$
$\frac{a_2}{2a_-^* P_{m1}^p + b_-^*}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{b_1^- + 2a_1^- (P_{m1}^p - \underline{P}_{e2})}$	\underline{P}_m^-
$\frac{a_2}{b_1^- + 2a_1^- (P_{m1}^p - \underline{P}_{e2})}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{b_1^- + 2a_1^- (\underline{P}_e(P_r) - \underline{P}_{e2})}$	$\frac{a_2 - \lambda b_1^- + 2\lambda a_1^- \underline{P}_{e2}}{2\lambda a_1^-}$
$\frac{a_2}{b_1^- + 2a_1^- (\underline{P}_e(P_r) - \underline{P}_{e2})}$	$\leq \lambda \leq +\infty$	$\underline{P}_e(P_r)$

Cas 1.6 :

P_m	$-\infty$	P_{m1}^p	P_{m2}^p	P_{m3}^p	P_{m4}^p
$H(P_m)$	$a_2(P_r - P_m)$ $+Q_{\text{lim}} - a_2P_{\text{lim}}$ $+\lambda P_{e_1}^-(P_m - \underline{P}_{e_2})$ $+\lambda P_{e_2}^-(\underline{P}_{e_2})$	$a_2(P_r - P_m)$ $+Q_{\text{lim}} - a_2P_{\text{lim}}$ $+\lambda P_{e_1}^-(P_{m1}^{*-})$ $+\lambda P_{e_2}^-(P_m - P_{m1}^{*-})$	$a_2(P_r - P_m)$ $+Q_{\text{lim}} - a_2P_{\text{lim}}$ $+\lambda P_{e_1}^-(P_m)$ $+\lambda c_2$	$a_1(P_r - P_m)$ $+Q_0$ $+\lambda P_{e_1}^-(P_m)$ $+\lambda c_2$	

P_m	P_{m4}^p	0	P_{m5}^p	P_{m6}^p	$+\infty$
$H(P_m)$	$\lambda P_{e_1}^-(P_m)$ $+\lambda c_2$	$\lambda P_{e_1}^+(P_m)$ $+\lambda c_2$	$\lambda P_{e_1}^+(P_{m1}^{*+})$ $+\lambda P_{e_2}^+(P_m - P_{m1}^{*+})$	$\lambda P_{e_1}^+(P_m - \bar{P}_{e_2})$ $+\lambda P_{e_2}^+(\bar{P}_{e_2})$	

La commande optimale P_m^{opt} en fonction de P_r et λ est donnée par :

Cas sur λ		P_m^{opt}
0	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{2a_1^- \bar{P}_e(P_r) + b_1^-}$	$\bar{P}_e(P_r)$
$\frac{a_1}{2a_1^- \bar{P}_e(P_r) + b_1^-}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{2a_1^- P_{m3}^p + b_1^-}$	$\frac{a_1 - \lambda b_1^-}{2\lambda a_1^-}$
$\frac{a_1}{2a_1^- P_{m3}^p + b_1^-}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{2a_1^- P_{m3}^p + b_1^-}$	$P_r - P_{\text{lim}}$
$\frac{a_2}{2a_1^- P_{m3}^p + b_1^-}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{2a_1^- P_{m2}^p + b_1^-}$	$\frac{a_2 - \lambda b_1^-}{2\lambda a_1^-}$
$\frac{a_2}{2a_1^- P_{m2}^p + b_1^-}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{2a_1^* P_{m2}^p + b_1^*}$	\bar{P}_m
$\frac{a_2}{2a_1^* P_{m2}^p + b_1^*}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{2a_1^* P_{m1}^p + b_1^*}$	$\frac{a_2 - \lambda b_1^*}{2\lambda a_1^*}$
$\frac{a_2}{2a_1^* P_{m1}^p + b_1^*}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{b_1^- + 2a_1^- (P_{m1}^p - \underline{P}_{e_2})}$	\underline{P}_m
$\frac{a_2}{b_1^- + 2a_1^- (P_{m1}^p - \underline{P}_{e_2})}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{b_1^- + 2a_1^- (\underline{P}_e(P_r) - \underline{P}_{e_2})}$	$\frac{a_2 - \lambda b_1^- + 2\lambda a_1^- \underline{P}_{e_2}}{2\lambda a_1^-}$
$\frac{a_2}{b_1^- + 2a_1^- (\underline{P}_e(P_r) -)}$	$\leq \lambda \leq +\infty$	$\underline{P}_e(P_r)$

Cas 2.1 :

P_m	$-\infty$	P_{m3}^p	P_{m1}^p	P_{m2}^p	0
$H(P_m)$	$a_2(P_r - P_m)$ $+Q_{\text{lim}} - a_2P_{\text{lim}}$ $+\lambda P_{e_1}^-(P_m - \underline{P}_{e_2})$ $+\lambda P_{e_2}^-(\underline{P}_{e_2})$	$a_1(P_r - P_m)$ $+Q_0$ $+\lambda P_{e_1}^-(P_m - \underline{P}_{e_2})$ $+\lambda P_{e_2}^-(\underline{P}_{e_2})$	$a_1(P_r - P_m)$ $+Q_0$ $+\lambda P_{e_1}^-(P_{m1}^{*-})$ $+\lambda P_{e_2}^-(P_m - P_{m1}^{*-})$	$a_1(P_r - P_m)$ $+Q_0$ $+\lambda P_{e_1}^-(P_m)$ $+\lambda c_2$	

P_m	0	P_{m4}^p	P_{m5}^p	P_{m6}^p	$+\infty$
$H(P_m)$	$a_1(P_r - P_m)$ $+Q_0$ $+\lambda P_{e_1}^+(P_m)$ $+\lambda c_2$	$\lambda P_{e_1}^+(P_m)$ $+\lambda c_2$	$\lambda P_{e_1}^+(P_{m_1}^{*+})$ $+\lambda P_{e_2}^+(P_m - P_{m_1}^{*+})$	$\lambda P_{e_1}^+(P_m - \bar{P}_{e_2})$ $+\lambda P_{e_2}^+(\bar{P}_{e_2})$	

La commande optimale P_m^{opt} en fonction de P_r et λ est donnée par :

Cas sur λ		P_m^{opt}
$0 \leq \lambda \leq \frac{a_1}{2a_2^+ \bar{P}_e(P_r) + b_2^+}$		$\bar{P}_e(P_r)$
$\frac{a_1}{2a_2^+ \bar{P}_e(P_r) + b_2^+} \leq \lambda \leq \frac{a_1}{b_2^+}$		$\frac{a_1 - \lambda b_2^+}{2\lambda a_2^+}$
$\frac{a_1}{b_2^+} \leq \lambda \leq \frac{a_1}{b_1^-}$		0
$\frac{a_1}{b_1^-} \leq \lambda \leq \frac{a_1}{2a_1^- P_{m2}^p + b_1^-}$		$\frac{a_1 - \lambda b_1^-}{2\lambda a_1^-}$
$\frac{a_1}{2a_1^- P_{m2}^p + b_1^-} \leq \lambda \leq \frac{a_1}{2a_-^* P_{m2}^p + b_-^*}$		\bar{P}_m
$\frac{a_1}{2a_-^* P_{m2}^p + b_-^*} \leq \lambda \leq \frac{a_1}{2a_-^* P_{m1}^p + b_-^*}$		$\frac{a_1 - \lambda b_-^*}{2\lambda a_-^*}$
$\frac{a_1}{2a_-^* P_{m1}^p + b_-^*} \leq \lambda \leq \frac{a_1}{b_1^- + 2a_1^- (P_{m1}^p - \underline{P}_{e_2})}$		\underline{P}_m
$\frac{a_1}{b_1^- + 2a_1^- (P_{m1}^p - \underline{P}_{e_2})} \leq \lambda \leq \frac{a_1}{b_1^- + 2a_1^- (P_{m3}^p - \underline{P}_{e_2})}$		$\frac{a_1 - \lambda b_1^- + 2\lambda a_1^- \underline{P}_{e_2}}{2\lambda a_1^-}$
$\frac{a_1}{b_1^- + 2a_1^- (P_{m3}^p - \underline{P}_{e_2})} \leq \lambda \leq \frac{a_2}{b_1^- + 2a_1^- (P_{m3}^p - \underline{P}_{e_2})}$		$P_r - P_{\text{lim}}$
$\frac{a_2}{b_1^- + 2a_1^- (P_{m3}^p - \underline{P}_{e_2})} \leq \lambda \leq \frac{a_2}{b_1^- + 2a_1^- (\underline{P}_e(P_r) - \underline{P}_{e_2})}$		$\frac{a_2 - \lambda b_1^- + 2\lambda a_1^- \underline{P}_{e_2}}{2\lambda a_1^-}$
$\frac{a_2}{b_1^- + 2a_1^- (\underline{P}_e(P_r) - \underline{P}_{e_2})} \leq \lambda \leq +\infty$		$\underline{P}_e(P_r)$

Cas 2.2 :

P_m	$-\infty$	P_{m3}^p	P_{m1}^p	P_{m2}^p	0
$H(P_m)$	$a_2(P_r - P_m)$ $+Q_{\text{lim}} - a_2 P_{\text{lim}}$ $+\lambda P_{e_1}^-(P_m - \underline{P}_{e_2})$ $+\lambda P_{e_2}^-(\underline{P}_{e_2})$	$a_1(P_r - P_m)$ $+Q_0$ $+\lambda P_{e_1}^-(P_m - \underline{P}_{e_2})$ $+\lambda P_{e_2}^-(\underline{P}_{e_2})$	$a_1(P_r - P_m)$ $+Q_0$ $+\lambda P_{e_1}^-(P_{m_1}^{*-})$ $+\lambda P_{e_2}^-(P_m - P_{m_1}^{*-})$	$a_1(P_r - P_m)$ $+Q_0$ $+\lambda P_{e_1}^-(P_m)$ $+\lambda c_2$	

P_m	0	P_{m5}^p	P_{m4}^p	P_{m6}^p	$+\infty$
$H(P_m)$	$a_1(P_r - P_m)$ $+Q_0$ $+\lambda P_{e_1}^+(P_m)$ $+\lambda c_2$	$a_1(P_r - P_m)$ $+Q_0$ $+\lambda P_{e_1}^+(P_{m_1}^{*+})$ $+\lambda P_{e_2}^+(P_m - P_{m_1}^{*+})$	$\lambda P_{e_1}^+(P_{m_1}^{*+})$ $+\lambda P_{e_2}^+(P_m - P_{m_1}^{*+})$	$\lambda P_{e_1}^+(P_m - \bar{P}_{e_2})$ $+\lambda P_{e_2}^+(\bar{P}_{e_2})$	

La commande optimale P_m^{opt} en fonction de P_r et λ est donnée par :

Cas sur λ		P_m^{opt}
0	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{2a_+^* P_{m4}^p + b_+^*}$	$\bar{P}_e(P_r)$
$\frac{a_1}{2a_+^* P_{m4}^p + b_+^*}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{2a_+^* P_{m5}^p + b_+^*}$	$\frac{a_1 - \lambda b_+^*}{2\lambda a_+^*}$
$\frac{a_1}{2a_+^* P_{m5}^p + b_+^*}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{2a_2^+ P_{m5}^p + b_2^+}$	\underline{P}_m^+
$\frac{a_1}{2a_2^+ P_{m5}^p + b_2^+}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{b_2^+}$	$\frac{a_1 - \lambda b_2^+}{2\lambda a_2^+}$
$\frac{a_1}{b_2^+}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{b_1^-}$	0
$\frac{a_1}{b_1^-}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{2a_1^- P_{m2}^p + b_1^-}$	$\frac{a_1 - \lambda b_1^-}{2\lambda a_1^-}$
$\frac{a_1}{2a_1^- P_{m2}^p + b_1^-}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{2a_-^* P_{m2}^p + b_-^*}$	\bar{P}_m
$\frac{a_1}{2a_-^* P_{m2}^p + b_-^*}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{2a_-^* P_{m1}^p + b_-^*}$	$\frac{a_1 - \lambda b_-^*}{2\lambda a_-^*}$
$\frac{a_1}{2a_-^* P_{m1}^p + b_-^*}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{b_1^- + 2a_1^- (P_{m1}^p - \underline{P}_{e2})}$	\underline{P}_m^-
$\frac{a_1}{b_1^- + 2a_1^- (P_{m1}^p - \underline{P}_{e2})}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{b_1^- + 2a_1^- (P_{m3}^p - \underline{P}_{e2})}$	$\frac{a_1 - \lambda b_1^- + 2\lambda a_1^- \underline{P}_{e2}}{2\lambda a_1^-}$
$\frac{a_1}{b_1^- + 2a_1^- (P_{m3}^p - \underline{P}_{e2})}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{b_1^- + 2a_1^- (P_{m3}^p - \underline{P}_{e2})}$	$P_r - P_{\text{lim}}$
$\frac{a_2}{b_1^- + 2a_1^- (P_{m3}^p - \underline{P}_{e2})}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{b_1^- + 2a_1^- (P_e(P_r) - \underline{P}_{e2})}$	$\frac{a_2 - \lambda b_1^- + 2\lambda a_1^- \underline{P}_{e2}}{2\lambda a_1^-}$
$\frac{a_2}{b_1^- + 2a_1^- (P_e(P_r) - \underline{P}_{e2})}$	$\leq \lambda \leq +\infty$	$\underline{P}_e(P_r)$

Cas 2.3 :

P_m	$-\infty$	P_{m3}^p	P_{m1}^p	P_{m2}^p	0
$H(P_m)$	$a_2(P_r - P_m)$ $+Q_{\text{lim}} - a_2 P_{\text{lim}}$ $+ \lambda P_{e1}^-(P_m - \underline{P}_{e2})$ $+ \lambda P_{e2}^-(\underline{P}_{e2})$	$a_1(P_r - P_m)$ $+Q_0$ $+ \lambda P_{e1}^-(P_m - \underline{P}_{e2})$ $+ \lambda P_{e2}^-(\underline{P}_{e2})$	$a_1(P_r - P_m)$ $+Q_0$ $+ \lambda P_{e1}^-(P_{m1}^{*-})$ $+ \lambda P_{e2}^-(P_m - P_{m1}^{*-})$	$a_1(P_r - P_m)$ $+Q_0$ $+ \lambda P_{e1}^-(P_m)$ $+ \lambda c_2$	

P_m	0	P_{m5}^p	P_{m6}^p	P_{m4}^p	$+\infty$
$H(P_m)$	$a_1(P_r - P_m)$ $+Q_0$ $+ \lambda P_{e1}^+(P_m)$ $+ \lambda c_2$	$a_1(P_r - P_m)$ $+Q_0$ $+ \lambda P_{e1}^+(P_{m1}^{*+})$ $+ \lambda P_{e2}^+(P_m - P_{m1}^{*+})$	$a_1(P_r - P_m)$ $+Q_0$ $+ P_{e1}^+(P_m - \bar{P}_{e2})$ $+ \lambda P_{e2}^+(\bar{P}_{e2})$	$\lambda P_{e1}^+(P_m - \bar{P}_{e2})$ $+ \lambda P_{e2}^+(\bar{P}_{e2})$	

La commande optimale P_m^{opt} en fonction de P_r et λ est donnée par :

Cas sur λ		P_m^{opt}
0	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{b_2^+ + 2a_2^+(\overline{P}_e(P_r) - \overline{P}_{e_2})}$	$\overline{P}_e(P_r)$
$\frac{a_1}{b_2^+ + 2a_2^+(\overline{P}_e(P_r) - \overline{P}_{e_2})}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{b_2^+ + 2a_2^+(P_{m6}^{\text{P}} - \overline{P}_{e_2})}$	$\frac{a_1 - \lambda b_2^+ + 2\lambda a_2^+ \overline{P}_{e_2}}{2\lambda a_2^+}$
$\frac{a_1}{b_2^+ + 2a_2^+(P_{m6}^{\text{P}} - \overline{P}_{e_2})}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{2a_+^* P_{m6}^{\text{P}} + b_+^*}$	\overline{P}_m^+
$\frac{a_1}{2a_+^* P_{m6}^{\text{P}} + b_+^*}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{2a_+^* P_{m5}^{\text{P}} + b_+^*}$	$\frac{a_1 - \lambda b_+^*}{2\lambda a_+^*}$
$\frac{a_1}{2a_+^* P_{m5}^{\text{P}} + b_+^*}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{2a_2^+ P_{m5}^{\text{P}} + b_2^+}$	\overline{P}_m^+
$\frac{a_1}{2a_2^+ P_{m5}^{\text{P}} + b_2^+}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{b_2^+}$	$\frac{a_1 - \lambda b_2^+}{2\lambda a_2^+}$
$\frac{a_1}{b_2^+}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{b_1^-}$	0
$\frac{a_1}{b_1^-}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{2a_1^- P_{m2}^{\text{P}} + b_1^-}$	$\frac{a_1 - \lambda b_1^-}{2\lambda a_1^-}$
$\frac{a_1}{2a_1^- P_{m2}^{\text{P}} + b_1^-}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{2a_-^* P_{m2}^{\text{P}} + b_-^*}$	\overline{P}_m^-
$\frac{a_1}{2a_-^* P_{m2}^{\text{P}} + b_-^*}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{2a_-^* P_{m1}^{\text{P}} + b_-^*}$	$\frac{a_1 - \lambda b_-^*}{2\lambda a_-^*}$
$\frac{a_1}{2a_-^* P_{m1}^{\text{P}} + b_-^*}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{b_1^- + 2a_1^-(P_{m1}^{\text{P}} - \underline{P}_{e_2})}$	\overline{P}_m^-
$\frac{a_1}{b_1^- + 2a_1^-(P_{m1}^{\text{P}} - \underline{P}_{e_2})}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{b_1^- + 2a_1^-(P_{m3}^{\text{P}} - \underline{P}_{e_2})}$	$\frac{a_1 - \lambda b_1^- + 2\lambda a_1^- \underline{P}_{e_2}}{2\lambda a_1^-}$
$\frac{a_1}{b_1^- + 2a_1^-(P_{m3}^{\text{P}} - \underline{P}_{e_2})}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{b_1^- + 2a_1^-(P_{m3}^{\text{P}} - \underline{P}_{e_2})}$	$P_r - P_{\text{lim}}$
$\frac{a_2}{b_1^- + 2a_1^-(P_{m3}^{\text{P}} - \underline{P}_{e_2})}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{b_1^- + 2a_1^-(\underline{P}_e(P_r) - \underline{P}_{e_2})}$	$\frac{a_2 - \lambda b_1^- + 2\lambda a_1^- \underline{P}_{e_2}}{2\lambda a_1^-}$
$\frac{a_2}{b_1^- + 2a_1^-(\underline{P}_e(P_r) - \underline{P}_{e_2})}$	$\leq \lambda \leq +\infty$	$\underline{P}_e(P_r)$

Cas 2.4 :

P_m	$-\infty$	P_{m1}^{P}	P_{m3}^{P}	P_{m2}^{P}	0
$H(P_m)$	$a_2(P_r - P_m)$ $+ Q_{\text{lim}} - a_2 P_{\text{lim}}$ $+ \lambda P_{e_1}^-(P_m - \underline{P}_{e_2})$ $+ \lambda P_{e_2}^-(\underline{P}_{e_2})$	$a_2(P_r - P_m)$ $+ Q_{\text{lim}} - a_2 P_{\text{lim}}$ $+ \lambda P_{e_1}^-(P_{m1}^{*-})$ $+ \lambda P_{e_2}^-(P_m - P_{m1}^{*-})$	$a_1(P_r - P_m)$ $+ Q_0$ $+ \lambda P_{e_1}^-(P_{m1}^{*-})$ $+ \lambda P_{e_2}^-(P_m - P_{m1}^{*-})$	$a_1(P_r - P_m)$ $+ Q_0$ $+ \lambda P_{e_1}^-(P_m)$ $+ \lambda c_2$	

P_m	0	P_{m4}^{P}	P_{m5}^{P}	P_{m6}^{P}	$+\infty$
$H(P_m)$	$a_1(P_r - P_m)$ $+ Q_0$ $+ \lambda P_{e_1}^+(P_m)$ $+ \lambda c_2$	$\lambda P_{e_1}^+(P_m)$ $+ \lambda c_2$	$\lambda P_{e_1}^+(P_{m1}^{*+})$ $+ \lambda P_{e_2}^+(P_m - P_{m1}^{*+})$	$\lambda P_{e_1}^+(P_m - \overline{P}_{e_2})$ $+ \lambda P_{e_2}^+(\overline{P}_{e_2})$	

La commande optimale P_m^{opt} en fonction de P_r et λ est donnée par :

Cas sur λ		P_m^{opt}
0	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{2a_2^+ \bar{P}_e(P_r) + b_2^+}$	$\bar{P}_e(P_r)$
$\frac{a_1}{2a_2^+ \bar{P}_e(P_r) + b_2^+}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{b_2^+}$	$\frac{a_1 - \lambda b_2^+}{2\lambda a_2^+}$
$\frac{a_1}{b_2^+}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{b_1^-}$	0
$\frac{a_1}{b_1^-}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{2a_1^- P_{m2}^p + b_1^-}$	$\frac{a_1 - \lambda b_1^-}{2\lambda a_1^-}$
$\frac{a_1}{2a_1^- P_{m2}^p + b_1^-}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{2a_-^* P_{m2}^p + b_-^*}$	\bar{P}_m
$\frac{a_1}{2a_-^* P_{m2}^p + b_-^*}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{2a_-^* P_{m3}^p + b_-^*}$	$\frac{a_1 - \lambda b_-^*}{2\lambda a_-^*}$
$\frac{a_1}{2a_-^* P_{m3}^p + b_-^*}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{2a_-^* P_{m3}^p + b_-^*}$	$P_r - \bar{P}_{\text{lim}}$
$\frac{a_2}{2a_-^* P_{m3}^p + b_-^*}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{2a_-^* P_{m1}^p + b_-^*}$	$\frac{a_2 - \lambda b_-^*}{2\lambda a_-^*}$
$\frac{a_2}{2a_-^* P_{m1}^p + b_-^*}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{2a_1^- P_{m1}^p + b_1^- - 2a_1^- \underline{P}_{e2}}$	\bar{P}_m
$\frac{a_2}{2a_1^- P_{m1}^p + b_1^- - 2a_1^- \underline{P}_{e2}}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{b_1^- + 2a_1^- (P_e(P_r) - \underline{P}_{e2})}$	$\frac{a_2 - \lambda b_1^- + 2\lambda a_1^- \underline{P}_{e2}}{2\lambda a_1^-}$
$\frac{a_2}{b_1^- + 2a_1^- (P_e(P_r) - \underline{P}_{e2})}$	$\leq \lambda \leq +\infty$	$\underline{P}_e(P_r)$

Cas 2.6 :

P_m	$-\infty$	P_{m1}^p	P_{m3}^p	P_{m2}^p	0
$H(P_m)$	$a_2(P_r - P_m)$ $+Q_{\text{lim}} - a_2 \bar{P}_{\text{lim}}$ $+\lambda P_{e1}^-(P_m - \underline{P}_{e2})$ $+\lambda P_{e2}^-(\underline{P}_{e2})$	$a_2(P_r - P_m)$ $+Q_{\text{lim}} - a_2 \bar{P}_{\text{lim}}$ $+\lambda P_{e1}^-(P_{m1}^{*-})$ $+\lambda P_{e2}^-(P_m - P_{m1}^{*-})$	$a_1(P_r - P_m)$ $+Q_0$ $+\lambda P_{e1}^-(P_{m1}^{*-})$ $+\lambda P_{e2}^-(P_m - P_{m1}^{*-})$	$a_1(P_r - P_m)$ $+Q_0$ $+\lambda P_{e1}^-(P_m)$ $+\lambda c_2$	

P_m	0	P_{m5}^p	P_{m6}^p	P_{m4}^p	$+\infty$
$H(P_m)$	$a_1(P_r - P_m)$ $+Q_0$ $+\lambda P_{e1}^+(P_m)$ $+\lambda c_2$	$a_1(P_r - P_m)$ $+Q_0$ $+\lambda P_{e1}^+(P_{m1}^{*+})$ $+\lambda P_{e2}^+(P_m - P_{m1}^{*+})$	$a_1(P_r - P_m)$ $+Q_0$ $+P_{e1}^+(P_m - \bar{P}_{e2})$ $+\lambda P_{e2}^+(\bar{P}_{e2})$	$\lambda P_{e1}^+(P_m - \bar{P}_{e2})$ $+\lambda P_{e2}^+(\bar{P}_{e2})$	

La commande optimale P_m^{opt} en fonction de P_r et λ est donnée par :

Cas sur λ		P_m^{opt}
0	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{b_2^+ + 2a_2^+(\bar{P}_e(P_r) - \bar{P}_{e2})}$	$\bar{P}_e(P_r)$
$\frac{a_1}{b_2^+ + 2a_2^+(\bar{P}_e(P_r) - \bar{P}_{e2})}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{b_2^+ + 2a_2^+(P_{m6}^p - \bar{P}_{e2})}$	$\frac{a_1 - \lambda b_2^+ + 2\lambda a_2^+ \bar{P}_{e2}}{2\lambda a_2^+}$
$\frac{a_1}{b_2^+ + 2a_2^+(P_{m6}^p - \bar{P}_{e2})}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{2a_+^* P_{m6}^p + b_+^*}$	\bar{P}_m^+
$\frac{a_1}{2a_+^* P_{m6}^p + b_+^*}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{2a_+^* P_{m5}^p + b_+^*}$	$\frac{a_1 - \lambda b_+^*}{2\lambda a_+^*}$
$\frac{a_1}{2a_+^* P_{m5}^p + b_+^*}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{2a_2^+ P_{m5}^p + b_2^+}$	\bar{P}_m^+
$\frac{a_1}{2a_2^+ P_{m5}^p + b_2^+}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{b_2^+}$	$\frac{a_1 - \lambda b_2^+}{2\lambda a_2^+}$
$\frac{a_1}{b_2^+}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{b_1^-}$	0
$\frac{a_1}{b_1^-}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{2a_1^- P_{m2}^p + b_1^-}$	$\frac{a_1 - \lambda b_1^-}{2\lambda a_1^-}$
$\frac{a_1}{2a_1^- P_{m2}^p + b_1^-}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{2a_-^* P_{m2}^p + b_-^*}$	\bar{P}_m^-
$\frac{a_1}{2a_-^* P_{m2}^p + b_-^*}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{2a_-^* P_{m3}^p + b_-^*}$	$\frac{a_1 - \lambda b_-^*}{2\lambda a_-^*}$
$\frac{a_1}{2a_-^* P_{m3}^p + b_-^*}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{2a_-^* P_{m3}^p + b_-^*}$	$P_r - P_{\text{lim}}$
$\frac{a_2}{2a_-^* P_{m3}^p + b_-^*}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{2a_-^* P_{m1}^p + b_-^*}$	$\frac{a_2 - \lambda b_-^*}{2\lambda a_-^*}$
$\frac{a_2}{2a_-^* P_{m1}^p + b_-^*}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{2a_1^- P_{m1}^p + b_1^- - 2a_1^- \bar{P}_{e2}}$	\bar{P}_m^-
$\frac{a_2}{2a_1^- P_{m1}^p + b_1^- - 2a_1^- \bar{P}_{e2}}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{b_1^- + 2a_1^- (P_e(P_r) - \bar{P}_{e2})}$	$\frac{a_2 - \lambda b_1^- + 2\lambda a_1^- \bar{P}_{e2}}{2\lambda a_1^-}$
$\frac{a_2}{b_1^- + 2a_1^- (P_e(P_r) - \bar{P}_{e2})}$	$\leq \lambda \leq +\infty$	$\bar{P}_e(P_r)$

Cas 2.7 :

P_m	$-\infty$	P_{m1}^p	P_{m2}^p	P_{m3}^p	0
$H(P_m)$	$a_2(P_r - P_m)$ $+Q_{\text{lim}} - a_2 P_{\text{lim}}$ $+ \lambda P_{e1}^-(P_m - \bar{P}_{e2})$ $+ \lambda P_{e2}^-(\bar{P}_{e2})$	$a_2(P_r - P_m)$ $+Q_{\text{lim}} - a_2 P_{\text{lim}}$ $+ \lambda P_{e1}^-(P_{m1}^{*-})$ $+ \lambda P_{e2}^-(P_m - P_{m1}^{*-})$	$a_2(P_r - P_m)$ $+Q_{\text{lim}} - a_2 P_{\text{lim}}$ $+ \lambda P_{e1}^-(P_m)$ $+ \lambda c_2$	$a_1(P_r - P_m)$ $+Q_0$ $+ \lambda P_{e1}^-(P_m)$ $+ \lambda c_2$	

P_m	0	P_{m4}^p	P_{m5}^p	P_{m6}^p	$+\infty$
$H(P_m)$	$a_1(P_r - P_m)$ $+Q_0$ $+ \lambda P_{e1}^+(P_m)$ $+ \lambda c_2$	$\lambda P_{e1}^+(P_m)$ $+ \lambda c_2$	$\lambda P_{e1}^+(P_{m1}^{*+})$ $+ \lambda P_{e2}^+(P_m - P_{m1}^{*+})$	$\lambda P_{e1}^+(P_m - \bar{P}_{e2})$ $+ \lambda P_{e2}^+(\bar{P}_{e2})$	

La commande optimale P_m^{opt} en fonction de P_r et λ est donnée par :

Cas sur λ		P_m^{opt}
0	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{2a_2^+ \bar{P}_e(P_r) + b_2^+}$	$\bar{P}_e(P_r)$
$\frac{a_1}{2a_2^+ \bar{P}_e(P_r) + b_2^+}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{b_2^+}$	$\frac{a_1 - \lambda b_2^+}{2\lambda a_2^+}$
$\frac{a_1}{b_2^+}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{b_1^-}$	0
$\frac{a_1}{b_1^-}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{2a_1^- P_{m3}^p + b_1^-}$	$\frac{a_1 - \lambda b_1^-}{2\lambda a_1^-}$
$\frac{a_1}{2a_1^- P_{m3}^p + b_1^-}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{2a_1^- P_{m3}^p + b_1^-}$	$P_r - P_{\text{lim}}$
$\frac{a_2}{2a_1^- P_{m3}^p + b_1^-}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{2a_1^- P_{m2}^p + b_1^-}$	$\frac{a_2 - \lambda b_1^-}{2\lambda a_1^-}$
$\frac{a_2}{2a_1^- P_{m2}^p + b_1^-}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{2a_-^* P_{m2}^p + b_-^*}$	\bar{P}_m
$\frac{a_2}{2a_-^* P_{m2}^p + b_-^*}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{2a_-^* P_{m1}^p + b_-^*}$	$\frac{a_2 - \lambda b_-^*}{2\lambda a_-^*}$
$\frac{a_2}{2a_-^* P_{m1}^p + b_-^*}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{2a_1^- P_{m1}^p + b_1^- - 2a_1^- \underline{P}_{e2}}$	\underline{P}_m
$\frac{a_2}{2a_1^- P_{m1}^p + b_1^- - 2a_1^- \underline{P}_{e2}}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{b_1^- + 2a_1^- (\underline{P}_e(P_r) - \underline{P}_{e2})}$	$\frac{a_2 - \lambda b_1^- + 2\lambda a_1^- \underline{P}_{e2}}{2\lambda a_1^-}$
$\frac{a_2}{b_1^- + 2a_1^- (\underline{P}_e(P_r) - \underline{P}_{e2})}$	$\leq \lambda \leq +\infty$	$\underline{P}_e(P_r)$

Cas 2.8 :

P_m	$-\infty$	P_{m1}^p	P_{m2}^p	P_{m3}^p	0
$H(P_m)$	$a_2(P_r - P_m)$ $+Q_{\text{lim}} - a_2 P_{\text{lim}}$ $+ \lambda P_{e1}^-(P_m - \underline{P}_{e2})$ $+ \lambda P_{e2}^-(\underline{P}_{e2})$	$a_2(P_r - P_m)$ $+Q_{\text{lim}} - a_2 P_{\text{lim}}$ $+ \lambda P_{e1}^-(P_{m1}^{*-})$ $+ \lambda P_{e2}^-(P_m - P_{m1}^{*-})$	$a_2(P_r - P_m)$ $+Q_{\text{lim}} - a_2 P_{\text{lim}}$ $+ \lambda P_{e1}^-(P_m)$ $+ \lambda c_2$	$a_1(P_r - P_m)$ $+Q_0$ $+ \lambda P_{e1}^-(P_m)$ $+ \lambda c_2$	

P_m	0	P_{m5}^p	P_{m4}^p	P_{m6}^p	$+\infty$
$H(P_m)$	$a_1(P_r - P_m)$ $+Q_0$ $+ \lambda P_{e1}^+(P_m)$ $+ \lambda c_2$	$a_1(P_r - P_m)$ $+Q_0$ $+ \lambda P_{e1}^+(P_{m1}^{*+})$ $+ \lambda P_{e2}^+(P_m - P_{m1}^{*+})$	$\lambda P_{e1}^+(P_{m1}^{*+})$ $+ \lambda P_{e2}^+(P_m - P_{m1}^{*+})$	$\lambda P_{e1}^+(P_m - \bar{P}_{e2})$ $+ \lambda P_{e2}^+(\bar{P}_{e2})$	

La commande optimale P_m^{opt} en fonction de P_r et λ est donnée par :

Cas sur λ		P_m^{opt}
0	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{2a_+^* P_{m4}^p + b_+^*}$	$\bar{P}_e(P_r)$
$\frac{a_1}{2a_+^* P_{m4}^p + b_+^*}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{2a_+^* P_{m5}^p + b_+^*}$	$\frac{a_1 - \lambda b_+^*}{2\lambda a_+^*}$
$\frac{a_1}{2a_+^* P_{m5}^p + b_+^*}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{2a_2^+ P_{m5}^p + b_2^+}$	\underline{P}_m
$\frac{a_1}{2a_2^+ P_{m5}^p + b_2^+}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{b_2^+}$	$\frac{a_1 - \lambda b_2^+}{2\lambda a_2^+}$
$\frac{a_1}{b_2^+}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{b_1^-}$	0
$\frac{a_1}{b_1^-}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{2a_1^- P_{m3}^p + b_1^-}$	$\frac{a_1 - \lambda b_1^-}{2\lambda a_1^-}$
$\frac{a_1}{2a_1^- P_{m3}^p + b_1^-}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{2a_1^- P_{m3}^p + b_1^-}$	$P_r - P_{\text{lim}}$
$\frac{a_2}{2a_1^- P_{m3}^p + b_1^-}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{2a_1^- P_{m2}^p + b_1^-}$	$\frac{a_2 - \lambda b_1^-}{2\lambda a_1^-}$
$\frac{a_2}{2a_1^- P_{m2}^p + b_1^-}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{2a_-^* P_{m2}^p + b_-^*}$	\bar{P}_m
$\frac{a_2}{2a_-^* P_{m2}^p + b_-^*}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{2a_-^* P_{m1}^p + b_-^*}$	$\frac{a_2 - \lambda b_-^*}{2\lambda a_-^*}$
$\frac{a_2}{2a_-^* P_{m1}^p + b_-^*}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{2a_1^- P_{m1}^p + b_1^- - 2a_1^- \underline{P}_{e2}}$	\underline{P}_m
$\frac{a_2}{2a_1^- P_{m1}^p + b_1^- - 2a_1^- \underline{P}_{e2}}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{b_1^- + 2a_1^- (P_e(P_r) - \underline{P}_{e2})}$	$\frac{a_2 - \lambda b_1^- + 2\lambda a_1^- \underline{P}_{e2}}{2\lambda a_1^-}$
$\frac{a_2}{b_1^- + 2a_1^- (P_e(P_r) - \underline{P}_{e2})}$	$\leq \lambda \leq +\infty$	$\underline{P}_e(P_r)$

Cas 2.9 :

P_m	$-\infty$	P_{m1}^p	P_{m2}^p	P_{m3}^p	0
$H(P_m)$	$a_2(P_r - P_m)$ $+Q_{\text{lim}} - a_2 P_{\text{lim}}$ $+ \lambda P_{e1}^-(P_m - \underline{P}_{e2})$ $+ \lambda P_{e2}^-(\underline{P}_{e2})$	$a_2(P_r - P_m)$ $+Q_{\text{lim}} - a_2 P_{\text{lim}}$ $+ \lambda P_{e1}^-(P_{m1}^{*-})$ $+ \lambda P_{e2}^-(P_m - P_{m1}^{*-})$	$a_2(P_r - P_m)$ $+Q_{\text{lim}} - a_2 P_{\text{lim}}$ $+ \lambda P_{e1}^-(P_m)$ $+ \lambda c_2$	$a_1(P_r - P_m)$ $+Q_0$ $+ \lambda P_{e1}^-(P_m)$ $+ \lambda c_2$	

P_m	0	P_{m5}^p	P_{m6}^p	P_{m4}^p	$+\infty$
$H(P_m)$	$a_1(P_r - P_m)$ $+Q_0$ $+ \lambda P_{e1}^+(P_m)$ $+ \lambda c_2$	$a_1(P_r - P_m)$ $+Q_0$ $+ \lambda P_{e1}^+(P_{m1}^{*+})$ $+ \lambda P_{e2}^+(P_m - P_{m1}^{*+})$	$a_1(P_r - P_m)$ $+Q_0$ $+ P_{e1}^+(P_m - \bar{P}_{e2})$ $+ \lambda P_{e2}^+(\bar{P}_{e2})$	$\lambda P_{e1}^+(P_m - \bar{P}_{e2})$ $+ \lambda P_{e2}^+(\bar{P}_{e2})$	

La commande optimale P_m^{opt} en fonction de P_r et λ est donnée par :

Cas sur λ		P_m^{opt}
0	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{b_2^+ + 2a_2^+(\overline{P}_e(P_r) - \overline{P}_{e_2})}$	$\overline{P}_e(P_r)$
$\frac{a_1}{b_2^+ + 2a_2^+(\overline{P}_e(P_r) - \overline{P}_{e_2})}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{b_2^+ + 2a_2^+(P_{m6}^{\text{P}} - \overline{P}_{e_2})}$	$\frac{a_1 - \lambda b_2^+ + 2\lambda a_2^+ \overline{P}_{e_2}}{2\lambda a_2^+}$
$\frac{a_1}{b_2^+ + 2a_2^+(P_{m6}^{\text{P}} - \overline{P}_{e_2})}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{2a_+^* P_{m6}^{\text{P}} + b_+^*}$	\overline{P}_m^+
$\frac{a_1}{2a_+^* P_{m6}^{\text{P}} + b_+^*}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{2a_+^* P_{m5}^{\text{P}} + b_+^*}$	$\frac{a_1 - \lambda b_+^*}{2\lambda a_+^*}$
$\frac{a_1}{2a_+^* P_{m5}^{\text{P}} + b_+^*}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{2a_2^+ P_{m5}^{\text{P}} + b_2^+}$	\overline{P}_m^+
$\frac{a_1}{2a_2^+ P_{m5}^{\text{P}} + b_2^+}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{b_2^+}$	$\frac{a_1 - \lambda b_2^+}{2\lambda a_2^+}$
$\frac{a_1}{b_2^+}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{b_1^-}$	0
$\frac{a_1}{b_1^-}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{2a_1^- P_{m3}^{\text{P}} + b_1^-}$	$\frac{a_1 - \lambda b_1^-}{2\lambda a_1^-}$
$\frac{a_1}{2a_1^- P_{m3}^{\text{P}} + b_1^-}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{2a_1^- P_{m3}^{\text{P}} + b_1^-}$	$P_r - P_{\text{lim}}$
$\frac{a_2}{2a_1^- P_{m3}^{\text{P}} + b_1^-}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{2a_1^- P_{m2}^{\text{P}} + b_1^-}$	$\frac{a_2 - \lambda b_1^-}{2\lambda a_1^-}$
$\frac{a_2}{2a_1^- P_{m2}^{\text{P}} + b_1^-}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{2a_+^* P_{m2}^{\text{P}} + b_+^*}$	\overline{P}_m^-
$\frac{a_2}{2a_+^* P_{m2}^{\text{P}} + b_+^*}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{2a_+^* P_{m1}^{\text{P}} + b_+^*}$	$\frac{a_2 - \lambda b_+^*}{2\lambda a_+^*}$
$\frac{a_2}{2a_+^* P_{m1}^{\text{P}} + b_+^*}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{2a_1^- P_{m1}^{\text{P}} + b_1^- - 2a_1^- \underline{P}_{e_2}}$	\overline{P}_m^-
$\frac{a_2}{2a_1^- P_{m1}^{\text{P}} + b_1^- - 2a_1^- \underline{P}_{e_2}}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{b_1^- + 2a_1^-(\underline{P}_e(P_r) - \underline{P}_{e_2})}$	$\frac{a_2 - \lambda b_1^- + 2\lambda a_1^- \underline{P}_{e_2}}{2\lambda a_1^-}$
$\frac{a_2}{b_1^- + 2a_1^-(\underline{P}_e(P_r) - \underline{P}_{e_2})}$	$\leq \lambda \leq +\infty$	$\underline{P}_e(P_r)$

Cas 3.1 :

P_m	$-\infty$	P_{m1}^{P}	P_{m2}^{P}	0	P_{m3}^{P}
$H(P_m)$	$a_2(P_r - P_m)$ $+ Q_{\text{lim}} - a_2 P_{\text{lim}}$ $+ \lambda P_{e_1}^-(P_m - \underline{P}_{e_2})$ $+ \lambda P_{e_2}^-(\underline{P}_{e_2})$	$a_2(P_r - P_m)$ $+ Q_{\text{lim}} - a_2 P_{\text{lim}}$ $+ \lambda P_{e_1}^-(P_{m1}^{*-})$ $+ \lambda P_{e_2}^-(P_m - P_{m1}^{*-})$	$a_2(P_r - P_m)$ $+ Q_{\text{lim}} - a_2 P_{\text{lim}}$ $+ \lambda P_{e_1}^-(P_m)$ $+ \lambda c_2$	$a_2(P_r - P_m)$ $+ Q_{\text{lim}} - a_2 P_{\text{lim}}$ $+ \lambda P_{e_1}^+(P_m)$ $+ \lambda c_2$	

P_m	P_{m3}^{P}	P_{m4}^{P}	P_{m5}^{P}	P_{m6}^{P}	$+\infty$
$H(P_m)$	$a_1(P_r - P_m)$ $+ Q_0$ $+ \lambda P_{e_1}^+(P_m)$ $+ \lambda c_2$	$\lambda P_{e_1}^+(P_m)$ $+ \lambda c_2$	$\lambda P_{e_1}^+(P_{m1}^{*+})$ $+ \lambda P_{e_2}^+(P_m - P_{m1}^{*+})$	$\lambda P_{e_1}^+(P_m - \overline{P}_{e_2})$ $+ \lambda P_{e_2}^+(\overline{P}_{e_2})$	

La commande optimale P_m^{opt} en fonction de P_r et λ est donnée par :

Cas sur λ		P_m^{opt}
0	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{2a_2^+ \bar{P}_e(P_r) + b_2^+}$	$\bar{P}_e(P_r)$
$\frac{a_1}{2a_2^+ \bar{P}_e(P_r) + b_2^+}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{2a_2^+ P_{m3}^p + b_2^+}$	$\frac{a_1 - \lambda b_2^+}{2\lambda a_2^+}$
$\frac{a_1}{2a_2^+ P_{m3}^p + b_2^+}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{2a_2^+ P_{m3}^p + b_2^+}$	$P_r - \bar{P}_{\text{lim}}$
$\frac{a_2}{2a_2^+ P_{m3}^p + b_2^+}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{b_2^+}$	$\frac{a_2 - \lambda b_2^+}{2\lambda a_2^+}$
$\frac{a_2}{b_2^+}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{b_1^-}$	0
$\frac{a_2}{b_1^-}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{2a_1^- P_{m2}^p + b_1^-}$	$\frac{a_2 - \lambda b_1^-}{2\lambda a_1^-}$
$\frac{a_2}{2a_1^- P_{m2}^p + b_1^-}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{2a_-^* P_{m2}^p + b_-^*}$	\bar{P}_m
$\frac{a_2}{2a_-^* P_{m2}^p + b_-^*}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{2a_-^* P_{m1}^p + b_-^*}$	$\frac{a_2 - \lambda b_-^*}{2\lambda a_-^*}$
$\frac{a_2}{2a_-^* P_{m1}^p + b_-^*}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{2a_1^- P_{m1}^p + b_1^- - 2a_1^- \underline{P}_{e2}}$	\underline{P}_m
$\frac{a_2}{2a_1^- P_{m1}^p + b_1^- - 2a_1^- \underline{P}_{e2}}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{b_1^- + 2a_1^- (\underline{P}_e(P_r) - \underline{P}_{e2})}$	$\frac{a_2 - \lambda b_1^- + 2\lambda a_1^- \underline{P}_{e2}}{2\lambda a_1^-}$
$\frac{a_2}{b_1^- + 2a_1^- (\underline{P}_e(P_r) - \underline{P}_{e2})}$	$\leq \lambda \leq +\infty$	$\underline{P}_e(P_r)$

Cas 3.2 :

P_m	$-\infty$	P_{m1}^p	P_{m2}^p	0	P_{m3}^p
$H(P_m)$	$a_2(P_r - P_m)$ $+Q_{\text{lim}} - a_2 P_{\text{lim}}$ $+\lambda P_{e1}^-(P_m - \underline{P}_{e2})$ $+\lambda P_{e2}^-(\underline{P}_{e2})$	$a_2(P_r - P_m)$ $+Q_{\text{lim}} - a_2 P_{\text{lim}}$ $+\lambda P_{e1}^-(P_{m1}^{*-})$ $+\lambda P_{e2}^-(P_m - P_{m1}^{*-})$	$a_2(P_r - P_m)$ $+Q_{\text{lim}} - a_2 P_{\text{lim}}$ $+\lambda P_{e1}^-(P_m)$ $+\lambda c_2$	$a_2(P_r - P_m)$ $+Q_{\text{lim}} - a_2 P_{\text{lim}}$ $+\lambda P_{e1}^+(P_m)$ $+\lambda c_2$	

P_m	P_{m3}^p	P_{m5}^p	P_{m4}^p	P_{m6}^p	$+\infty$
$H(P_m)$	$a_1(P_r - P_m)$ $+Q_0$ $+\lambda P_{e1}^+(P_m)$ $+\lambda c_2$	$a_1(P_r - P_m)$ $+Q_0$ $+\lambda P_{e1}^+(P_{m1}^{*+})$ $+\lambda P_{e2}^+(P_m - P_{m1}^{*+})$	$\lambda P_{e1}^+(P_{m1}^{*+})$ $+\lambda P_{e2}^+(P_m - P_{m1}^{*+})$	$\lambda P_{e1}^+(P_m - \bar{P}_{e2})$ $+\lambda P_{e2}^+(\bar{P}_{e2})$	

La commande optimale P_m^{opt} en fonction de P_r et λ est donnée par :

Cas sur λ		P_m^{opt}
0	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{2a_+^* P_{m4}^p + b_+^*}$	$\bar{P}_e(P_r)$
$\frac{a_1}{2a_+^* P_{m4}^p + b_+^*}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{2a_+^* P_{m5}^p + b_+^*}$	$\frac{a_1 - \lambda b_+^*}{2\lambda a_+^*}$
$\frac{a_1}{2a_+^* P_{m5}^p + b_+^*}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{2a_2^+ P_{m5}^p + b_2^+}$	\underline{P}_m^+
$\frac{a_1}{2a_2^+ P_{m5}^p + b_2^+}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{2a_2^+ P_{m3}^p + b_2^+}$	$\frac{a_1 - \lambda b_2^+}{2\lambda a_2^+}$
$\frac{a_1}{2a_2^+ P_{m3}^p + b_2^+}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{2a_2^+ P_{m3}^p + b_2^+}$	$P_r - P_{\text{lim}}$
$\frac{a_2}{2a_2^+ P_{m3}^p + b_2^+}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{b_2^+}$	$\frac{a_2 - \lambda b_2^+}{2\lambda a_2^+}$
$\frac{a_2}{b_2^+}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{b_1^-}$	0
$\frac{a_2}{b_1^-}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{2a_1^- P_{m2}^p + b_1^-}$	$\frac{a_2 - \lambda b_1^-}{2\lambda a_1^-}$
$\frac{a_2}{2a_1^- P_{m2}^p + b_1^-}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{2a_+^* P_{m2}^p + b_+^*}$	\bar{P}_m
$\frac{a_2}{2a_+^* P_{m2}^p + b_+^*}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{2a_-^* P_{m1}^p + b_-^*}$	$\frac{a_2 - \lambda b_-^*}{2\lambda a_-^*}$
$\frac{a_2}{2a_-^* P_{m1}^p + b_-^*}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{2a_1^- P_{m1}^p + b_1^- - 2a_1^- P_{e2}}$	\underline{P}_m^-
$\frac{a_2}{2a_1^- P_{m1}^p + b_1^- - 2a_1^- P_{e2}}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{b_1^- + 2a_1^- (P_e(P_r) - P_{e2})}$	$\frac{a_2 - \lambda b_1^- + 2\lambda a_1^- P_{e2}}{2\lambda a_1^-}$
$\frac{a_2}{b_1^- + 2a_1^- (P_e(P_r) - P_{e2})}$	$\leq \lambda \leq +\infty$	$\underline{P}_e(P_r)$

Cas 3.3 :

P_m	$-\infty$	P_{m1}^p	P_{m2}^p	0	P_{m3}^p
$H(P_m)$	$a_2(P_r - P_m)$ $+ Q_{\text{lim}} - a_2 P_{\text{lim}}$ $+ \lambda P_{e1}^-(P_m - \underline{P}_{e2})$ $+ \lambda P_{e2}^-(\underline{P}_{e2})$	$a_2(P_r - P_m)$ $+ Q_{\text{lim}} - a_2 P_{\text{lim}}$ $+ \lambda P_{e1}^-(P_{m1}^{*-})$ $+ \lambda P_{e2}^-(P_m - P_{m1}^{*-})$	$a_2(P_r - P_m)$ $+ Q_{\text{lim}} - a_2 P_{\text{lim}}$ $+ \lambda P_{e1}^-(P_m)$ $+ \lambda c_2$	$a_2(P_r - P_m)$ $+ Q_{\text{lim}} - a_2 P_{\text{lim}}$ $+ \lambda P_{e1}^+(P_m)$ $+ \lambda c_2$	

P_m	P_{m3}^p	P_{m5}^p	P_{m6}^p	P_{m4}^p	$+\infty$
$H(P_m)$	$a_1(P_r - P_m)$ $+ Q_0$ $+ \lambda P_{e1}^+(P_m)$ $+ \lambda c_2$	$a_1(P_r - P_m)$ $+ Q_0$ $+ \lambda P_{e1}^+(P_{m1}^{*+})$ $+ \lambda P_{e2}^+(P_m - P_{m1}^{*+})$	$a_1(P_r - P_m)$ $+ Q_0$ $+ P_{e1}^+(P_m - \bar{P}_{e2})$ $+ \lambda P_{e2}^+(\bar{P}_{e2})$	$\lambda P_{e1}^+(P_m - \bar{P}_{e2})$ $+ \lambda P_{e2}^+(\bar{P}_{e2})$	

La commande optimale P_m^{opt} en fonction de P_r et λ est donnée par :

Cas sur λ			P_m^{opt}
0	$\leq \lambda \leq$	$\frac{a_1}{b_2^+ + 2a_2^+ (\overline{P}_e(P_r) - \overline{P}_{e_2})}$	$\overline{P}_e(P_r)$
$\frac{a_1}{b_2^+ + 2a_2^+ (\overline{P}_e(P_r) - \overline{P}_{e_2})}$	$\leq \lambda \leq$	$\frac{a_1}{b_2^+ + 2a_2^+ (P_{m6}^p - \overline{P}_{e_2})}$	$\frac{a_1 - \lambda b_2^+ + 2\lambda a_2^+ \overline{P}_{e_2}}{2\lambda a_2^+}$
$\frac{a_1}{b_2^+ + 2a_2^+ (P_{m6}^p - \overline{P}_{e_2})}$	$\leq \lambda \leq$	$\frac{a_1}{2a_+^* P_{m6}^p + b_+^*}$	\overline{P}_m^+
$\frac{a_1}{2a_+^* P_{m6}^p + b_+^*}$	$\leq \lambda \leq$	$\frac{a_1}{2a_+^* P_{m5}^p + b_+^*}$	$\frac{a_1 - \lambda b_+^*}{2\lambda a_+^*}$
$\frac{a_1}{2a_+^* P_{m5}^p + b_+^*}$	$\leq \lambda \leq$	$\frac{a_1}{2a_2^+ P_{m5}^p + b_2^+}$	\overline{P}_m^+
$\frac{a_1}{2a_2^+ P_{m5}^p + b_2^+}$	$\leq \lambda \leq$	$\frac{a_1}{2a_2^+ P_{m3}^p + b_2^+}$	$\frac{a_1 - \lambda b_2^+}{2\lambda a_2^+}$
$\frac{a_1}{2a_2^+ P_{m3}^p + b_2^+}$	$\leq \lambda \leq$	$\frac{a_2}{2a_2^+ P_{m3}^p + b_2^+}$	$P_r - \overline{P}_{\text{lim}}$
$\frac{a_2}{2a_2^+ P_{m3}^p + b_2^+}$	$\leq \lambda \leq$	$\frac{a_2}{b_2^+}$	$\frac{a_2 - \lambda b_2^+}{2\lambda a_2^+}$
$\frac{a_2}{b_2^+}$	$\leq \lambda \leq$	$\frac{a_2}{b_1^-}$	0
$\frac{a_2}{b_1^-}$	$\leq \lambda \leq$	$\frac{a_2}{2a_1^- P_{m2}^p + b_1^-}$	$\frac{a_2 - \lambda b_1^-}{2\lambda a_1^-}$
$\frac{a_2}{2a_1^- P_{m2}^p + b_1^-}$	$\leq \lambda \leq$	$\frac{a_2}{2a_+^* P_{m2}^p + b_+^*}$	\overline{P}_m
$\frac{a_2}{2a_+^* P_{m2}^p + b_+^*}$	$\leq \lambda \leq$	$\frac{a_2}{2a_+^* P_{m1}^p + b_+^*}$	$\frac{a_2 - \lambda b_+^*}{2\lambda a_+^*}$
$\frac{a_2}{2a_+^* P_{m1}^p + b_+^*}$	$\leq \lambda \leq$	$\frac{a_2}{2a_1^- P_{m1}^p + b_1^- - 2a_1^- \overline{P}_{e_2}}$	\overline{P}_m
$\frac{a_2}{2a_1^- P_{m1}^p + b_1^- - 2a_1^- \overline{P}_{e_2}}$	$\leq \lambda \leq$	$\frac{a_2}{b_1^- + 2a_1^- (\overline{P}_e(P_r) - \overline{P}_{e_2})}$	$\frac{a_2 - \lambda b_1^- + 2\lambda a_1^- \overline{P}_{e_2}}{2\lambda a_1^-}$
$\frac{a_2}{b_1^- + 2a_1^- (\overline{P}_e(P_r) - \overline{P}_{e_2})}$	$\leq \lambda \leq$	$+\infty$	$\overline{P}_e(P_r)$

Cas 3.4 :

P_m	$-\infty$	P_{m1}^p	P_{m2}^p	0	P_{m5}^p
$H(P_m)$	$a_2(P_r - P_m)$ $+ Q_{\text{lim}} - a_2 P_{\text{lim}}$ $+ \lambda P_{e_1}^-(P_m - \overline{P}_{e_2})$ $+ \lambda P_{e_2}^-(\overline{P}_{e_2})$	$a_2(P_r - P_m)$ $+ Q_{\text{lim}} - a_2 P_{\text{lim}}$ $+ \lambda P_{e_1}^-(P_{m1}^{*-})$ $+ \lambda P_{e_2}^-(P_m - P_{m1}^{*-})$	$a_2(P_r - P_m)$ $+ Q_{\text{lim}} - a_2 P_{\text{lim}}$ $+ \lambda P_{e_1}^-(P_m)$ $+ \lambda c_2$	$a_2(P_r - P_m)$ $+ Q_{\text{lim}} - a_2 P_{\text{lim}}$ $+ \lambda P_{e_1}^+(P_m)$ $+ \lambda c_2$	

P_m	P_{m5}^p	P_{m3}^p	P_{m4}^p	P_{m6}^p	$+\infty$
$H(P_m)$	$a_2(P_r - P_m)$ $+ Q_{\text{lim}} - a_2 P_{\text{lim}}$ $+ \lambda P_{e_1}^+(P_{m1}^{*+})$ $+ \lambda P_{e_2}^+(P_m - P_{m1}^{*+})$	$a_1(P_r - P_m)$ $+ Q_0$ $+ \lambda P_{e_1}^+(P_{m1}^{*+})$ $+ \lambda P_{e_2}^+(P_m - P_{m1}^{*+})$	$\lambda P_{e_1}^+(P_{m1}^{*+})$ $+ \lambda P_{e_2}^+(P_m - P_{m1}^{*+})$	$\lambda P_{e_1}^+(P_m - \overline{P}_{e_2})$ $+ \lambda P_{e_2}^+(\overline{P}_{e_2})$	

La commande optimale P_m^{opt} en fonction de P_r et λ est donnée par :

Cas sur λ		P_m^{opt}
0	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{2a_+^* P_{m4}^p + b_+^*}$	$\bar{P}_e(P_r)$
$\frac{a_1}{2a_+^* \bar{P}_e(P_r) + b_+^*}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{2a_+^* P_{m3}^p + b_+^*}$	$\frac{a_1 - \lambda b_+^*}{2\lambda a_+^*}$
$\frac{a_1}{2a_+^* P_{m3}^p + b_+^*}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{2a_+^* P_{m3}^p + b_+^*}$	$P_r - P_{\text{lim}}$
$\frac{a_2}{2a_+^* P_{m3}^p + b_+^*}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{2a_+^* P_{m5}^p + b_+^*}$	$\frac{a_2 - \lambda b_+^*}{2\lambda a_+^*}$
$\frac{a_2}{2a_+^* P_{m5}^p + b_+^*}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{2a_2^+ P_{m5}^p + b_2^+}$	\underline{P}_m^+
$\frac{a_2}{2a_2^+ P_{m5}^p + b_2^+}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{b_2^+}$	$\frac{a_2 - \lambda b_2^+}{2\lambda a_2^+}$
$\frac{a_2}{b_2^+}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{b_1^-}$	0
$\frac{a_2}{b_1^-}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{2a_1^- P_{m2}^p + b_1^-}$	$\frac{a_2 - \lambda b_1^-}{2\lambda a_1^-}$
$\frac{a_2}{2a_1^- P_{m2}^p + b_1^-}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{2a_+^* P_{m2}^p + b_+^*}$	\bar{P}_m
$\frac{a_2}{2a_+^* P_{m2}^p + b_+^*}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{2a_+^* P_{m1}^p + b_+^*}$	$\frac{a_2 - \lambda b_+^*}{2\lambda a_+^*}$
$\frac{a_2}{2a_+^* P_{m1}^p + b_+^*}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{2a_1^- P_{m1}^p + b_1^- - 2a_1^- \underline{P}_{e2}}$	\underline{P}_m^-
$\frac{a_2}{2a_1^- P_{m1}^p + b_1^- - 2a_1^- \underline{P}_{e2}}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{b_1^- + 2a_1^- (\underline{P}_e(P_r) - \underline{P}_{e2})}$	$\frac{a_2 - \lambda b_1^- + 2\lambda a_1^- \underline{P}_{e2}}{2\lambda a_1^-}$
$\frac{a_2}{b_1^- + 2a_1^- (\underline{P}_e(P_r) - \underline{P}_{e2})}$	$\leq \lambda \leq +\infty$	$\underline{P}_e(P_r)$

Cas 3.5 :

P_m	$-\infty$	P_{m1}^p	P_{m2}^p	0	P_{m5}^p
$H(P_m)$	$a_2(P_r - P_m)$ $+Q_{\text{lim}} - a_2 P_{\text{lim}}$ $+ \lambda P_{e1}^-(P_m - \underline{P}_{e2})$ $+ \lambda P_{e2}^-(\underline{P}_{e2})$	$a_2(P_r - P_m)$ $+Q_{\text{lim}} - a_2 P_{\text{lim}}$ $+ \lambda P_{e1}^-(P_{m1}^{*-})$ $+ \lambda P_{e2}^-(P_m - P_{m1}^{*-})$	$a_2(P_r - P_m)$ $+Q_{\text{lim}} - a_2 P_{\text{lim}}$ $+ \lambda P_{e1}^-(P_m)$ $+ \lambda c_2$	$a_2(P_r - P_m)$ $+Q_{\text{lim}} - a_2 P_{\text{lim}}$ $+ \lambda P_{e1}^+(P_m)$ $+ \lambda c_2$	

P_m	P_{m5}^p	P_{m3}^p	P_{m6}^p	P_{m4}^p	$+\infty$
$H(P_m)$	$a_2(P_r - P_m)$ $+Q_{\text{lim}} - a_2 P_{\text{lim}}$ $+ \lambda P_{e1}^+(P_{m1}^{*+})$ $+ \lambda P_{e2}^+(P_m - P_{m1}^{*+})$	$a_1(P_r - P_m)$ $+Q_0$ $+ \lambda P_{e1}^+(P_{m1}^{*+})$ $+ \lambda P_{e2}^+(P_m - P_{m1}^{*+})$	$a_1(P_r - P_m)$ $+Q_0$ $+ \lambda P_{e1}^+(P_m - \bar{P}_{e2})$ $+ \lambda P_{e2}^+(\bar{P}_{e2})$	$\lambda P_{e1}^+(P_m - \bar{P}_{e2})$ $+ \lambda P_{e2}^+(\bar{P}_{e2})$	

La commande optimale P_m^{opt} en fonction de P_r et λ est donnée par :

Cas sur λ			P_m^{opt}
0	$\leq \lambda \leq$	$\frac{a_1}{b_2^+ + 2a_2^+ (\overline{P}_e(P_r) - \overline{P}_{e2})}$	$\overline{P}_e(P_r)$
$\frac{a_1}{b_2^+ + 2a_2^+ (\overline{P}_e(P_r) - \overline{P}_{e2})}$	$\leq \lambda \leq$	$\frac{a_1}{b_2^+ + 2a_2^+ (P_{m6}^p - \overline{P}_{e2})}$	$\frac{a_1 - \lambda b_2^+ + 2\lambda a_2^+ \overline{P}_{e2}}{2\lambda a_2^+}$
$\frac{a_1}{b_2^+ + 2a_2^+ (P_{m6}^p - \overline{P}_{e2})}$	$\leq \lambda \leq$	$\frac{a_1}{2a_+^* P_{m6}^p + b_+^*}$	\overline{P}_m^+
$\frac{a_1}{2a_+^* P_{m6}^p + b_+^*}$	$\leq \lambda \leq$	$\frac{a_1}{2a_+^* P_{m3}^p + b_+^*}$	$\frac{a_1 - \lambda b_+^*}{2\lambda a_+^*}$
$\frac{a_1}{2a_+^* P_{m3}^p + b_+^*}$	$\leq \lambda \leq$	$\frac{a_2}{2a_+^* P_{m3}^p + b_+^*}$	$P_r - P_{\text{lim}}$
$\frac{a_2}{2a_+^* P_{m3}^p + b_+^*}$	$\leq \lambda \leq$	$\frac{a_2}{2a_+^* P_{m5}^p + b_+^*}$	$\frac{a_2 - \lambda b_+^*}{2\lambda a_+^*}$
$\frac{a_2}{2a_+^* P_{m5}^p + b_+^*}$	$\leq \lambda \leq$	$\frac{a_2}{2a_2^+ P_{m5}^p + b_2^+}$	\overline{P}_m^+
$\frac{a_2}{2a_2^+ P_{m5}^p + b_2^+}$	$\leq \lambda \leq$	$\frac{a_2}{b_2^+}$	$\frac{a_2 - \lambda b_2^+}{2\lambda a_2^+}$
$\frac{a_2}{b_2^+}$	$\leq \lambda \leq$	$\frac{a_2}{b_1^-}$	0
$\frac{a_2}{b_1^-}$	$\leq \lambda \leq$	$\frac{a_2}{2a_1^- P_{m2}^p + b_1^-}$	$\frac{a_2 - \lambda b_1^-}{2\lambda a_1^-}$
$\frac{a_2}{2a_1^- P_{m2}^p + b_1^-}$	$\leq \lambda \leq$	$\frac{a_2}{2a_-^* P_{m2}^p + b_-^*}$	\overline{P}_m^-
$\frac{a_2}{2a_-^* P_{m2}^p + b_-^*}$	$\leq \lambda \leq$	$\frac{a_2}{2a_-^* P_{m1}^p + b_-^*}$	$\frac{a_2 - \lambda b_-^*}{2\lambda a_-^*}$
$\frac{a_2}{2a_-^* P_{m1}^p + b_-^*}$	$\leq \lambda \leq$	$\frac{a_2}{2a_1^- P_{m1}^p + b_1^- - 2a_1^- \underline{P}_{e2}}$	\overline{P}_m^-
$\frac{a_2}{2a_1^- P_{m1}^p + b_1^- - 2a_1^- \underline{P}_{e2}}$	$\leq \lambda \leq$	$\frac{a_2}{b_1^- + 2a_1^- (\underline{P}_e(P_r) - \underline{P}_{e2})}$	$\frac{a_2 - \lambda b_1^- + 2\lambda a_1^- \underline{P}_{e2}}{2\lambda a_1^-}$
$\frac{a_2}{b_1^- + 2a_1^- (\underline{P}_e(P_r) - \underline{P}_{e2})}$	$\leq \lambda \leq$	$+\infty$	$\underline{P}_e(P_r)$

Cas 3.6 :

P_m	$-\infty$	P_{m1}^p	P_{m2}^p	0	P_{m5}^p
$H(P_m)$	$a_2(P_r - P_m)$ $+ Q_{\text{lim}} - a_2 P_{\text{lim}}$ $+ \lambda P_{e1}^- (P_m - \underline{P}_{e2})$ $+ \lambda P_{e2}^- (\underline{P}_{e2})$	$a_2(P_r - P_m)$ $+ Q_{\text{lim}} - a_2 P_{\text{lim}}$ $+ \lambda P_{e1}^- (P_{m1}^{*-})$ $+ \lambda P_{e2}^- (P_m - P_{m1}^{*-})$	$a_2(P_r - P_m)$ $+ Q_{\text{lim}} - a_2 P_{\text{lim}}$ $+ \lambda P_{e1}^- (P_m)$ $+ \lambda c_2$	$a_2(P_r - P_m)$ $+ Q_{\text{lim}} - a_2 P_{\text{lim}}$ $+ \lambda P_{e1}^+ (P_m)$ $+ \lambda c_2$	

P_m	P_{m5}^p	P_{m6}^p	P_{m3}^p	P_{m4}^p	$+\infty$
$H(P_m)$	$a_2(P_r - P_m)$ $+ Q_{\text{lim}} - a_2 P_{\text{lim}}$ $+ \lambda P_{e1}^+ (P_{m1}^{*+})$ $+ \lambda P_{e2}^+ (P_m - P_{m1}^{*+})$	$a_2(P_r - P_m)$ $+ Q_{\text{lim}} - a_2 P_{\text{lim}}$ $+ \lambda P_{e1}^+ (P_m - \overline{P}_{e2})$ $+ \lambda P_{e2}^+ (\overline{P}_{e2})$	$a_1(P_r - P_m)$ $+ Q_0$ $+ \lambda P_{e1}^+ (P_m - \overline{P}_{e2})$ $+ \lambda P_{e2}^+ (\overline{P}_{e2})$	$\lambda P_{e1}^+ (P_m - \overline{P}_{e2})$ $+ \lambda P_{e2}^+ (\overline{P}_{e2})$	

La commande optimale P_m^{opt} en fonction de P_r et λ est donnée par :

Cas sur λ		P_m^{opt}
0	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{b_2^+ + 2a_2^+ (P_e(P_r) - \bar{P}_{e2})}$	$\bar{P}_e(P_r)$
$\frac{a_1}{b_2^+ + 2a_2^+ (P_e(P_r) - \bar{P}_{e2})}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_1}{b_2^+ + 2a_2^+ (P_{m3}^p - \bar{P}_{e2})}$	$\frac{a_1 - \lambda b_2^+ + 2\lambda a_2^+ \bar{P}_{e2}}{2\lambda a_2^+}$
$\frac{a_1}{b_2^+ + 2a_2^+ (P_{m3}^p - \bar{P}_{e2})}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{b_2^+ + 2a_2^+ (P_{m3}^p - \bar{P}_{e2})}$	$P_r - P_{\text{lim}}$
$\frac{a_2}{b_2^+ + 2a_2^+ (P_{m3}^p - \bar{P}_{e2})}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{b_2^+ + 2a_2^+ (P_{m6}^p - \bar{P}_{e2})}$	$\frac{a_2 - \lambda b_2^+ + 2\lambda a_2^+ \bar{P}_{e2}}{2\lambda a_2^+}$
$\frac{a_2}{b_2^+ + 2a_2^+ (P_{m6}^p - \bar{P}_{e2})}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{2a_+^* P_{m6}^p + b_+^*}$	\bar{P}_m^+
$\frac{a_2}{2a_+^* P_{m6}^p + b_+^*}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{2a_+^* P_{m5}^p + b_+^*}$	$\frac{a_2 - \lambda b_+^*}{2\lambda a_+^*}$
$\frac{a_2}{2a_+^* P_{m5}^p + b_+^*}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{2a_2^+ P_{m5}^p + b_2^+}$	\bar{P}_m^+
$\frac{a_2}{2a_2^+ P_{m5}^p + b_2^+}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{b_2^+}$	$\frac{a_2 - \lambda b_2^+}{2\lambda a_2^+}$
$\frac{a_2}{b_2^+}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{b_1^-}$	0
$\frac{a_2}{b_1^-}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{2a_1^- P_{m2}^p + b_1^-}$	$\frac{a_2 - \lambda b_1^-}{2\lambda a_1^-}$
$\frac{a_2}{2a_1^- P_{m2}^p + b_1^-}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{2a_-^* P_{m2}^p + b_-^*}$	\bar{P}_m^-
$\frac{a_2}{2a_-^* P_{m2}^p + b_-^*}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{2a_-^* P_{m1}^p + b_-^*}$	$\frac{a_2 - \lambda b_-^*}{2\lambda a_-^*}$
$\frac{a_2}{2a_-^* P_{m1}^p + b_-^*}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{2a_1^- P_{m1}^p + b_1^- - 2a_1^- \bar{P}_{e2}}$	\bar{P}_m^-
$\frac{a_2}{2a_1^- P_{m1}^p + b_1^- - 2a_1^- \bar{P}_{e2}}$	$\leq \lambda \leq \frac{a_2}{b_1^- + 2a_1^- (P_e(P_r) - \bar{P}_{e2})}$	$\frac{a_2 - \lambda b_1^- + 2\lambda a_1^- \bar{P}_{e2}}{2\lambda a_1^-}$
$\frac{a_2}{b_1^- + 2a_1^- (P_e(P_r) - \bar{P}_{e2})}$	$\leq \lambda \leq +\infty$	$\bar{P}_e(P_r)$

Souad HADJ-SAID

Optimisation Énergétique Convexe pour véhicule Hybride Électrique: vers une Solution Analytique

Résumé :

Cette thèse s'inscrit dans le cadre de la gestion d'énergie d'un Véhicule Hybride Électrique. Pour ce type de véhicule, l'optimisation énergétique est un enjeu majeur. Cela consiste à calculer les commandes optimales minimisant la consommation énergétique du véhicule sous un nombre fini de contraintes. Deux types de méthodes peuvent être utilisées pour résoudre ce problème d'optimisation. La première méthode et la plus utilisée, la méthode numérique, utilisant des modèles cartographiques basés sur des données. Elle présente deux inconvénients majeurs: temps de calcul et mémoire importants. La deuxième méthode, appelée analytique, qui permet de remédier à ces deux problèmes, a été utilisée dans cette thèse. Plus l'architecture du véhicule devient complexe (plusieurs machines électriques, moteur thermique, élévateur de tension), plus l'intérêt de cette approche sera important. La méthodologie analytique, proposée dans cette thèse, est composée principalement de trois étapes : la modélisation convexe, le calcul analytique des commandes et la validation des commandes analytiques sur un simulateur de véhicule. Cette méthodologie a été appliquée sur les trois configurations possibles du véhicule étudié : parallèle, bi-parallèle et série. Finalement, l'ajout de l'élévateur de tension dans la gestion d'énergie ainsi que l'étude de son impact sur la consommation énergétique du véhicule sont présentés dans le dernier chapitre. Les résultats obtenus en simulation montrent que la méthode analytique a permis de réduire considérablement le temps de calcul tout en ayant une sous-optimalité très faible.

Mots clés : Véhicule Hybride Électrique, Gestion d'Énergie, Optimisation convexe, Résolution Analytique.

Convex Energy Management for Hybrid Electric vehicle: towards an Analytical Solution

Abstract :

This thesis focuses on the energy management of Hybrid Electric Vehicle. In this type of vehicle, energy optimization is a major challenge. It consists of calculating optimal commands that minimize the vehicle's energy consumption under a finite number of constraints. The optimization issue could be solved using a digital method or an analytical method. This choice depends on the nature of energy models that monitor the optimization criteria: analytical or maps of experimental measurements. However, this method presents numerous disadvantages. Its calculation is extremely time-consuming for instance. Therefore, the works presented in this thesis were directed in order to develop an analytical solution where the calculation is less time consuming. The architecture of the vehicle is complex. In fact, the vehicle contains two electrical machines, a thermal engine and a step-up. These components have all a straight impact on the vehicle's energy consumption so several optimization variables were defining. Consequently, working on an analytical solution was a natural choice. The proposed analytical methodology consists of three steps: convex modeling, the command analytical calculation as well as the analytical command validation on a vehicle simulator. This methodology was applied to three possible configurations of the studied vehicle: parallel, bi-parallel and in serial. Finally, the step-up addition to the energy management as well as the study of its impact on the vehicle's energy consumption are presented in the last chapter. The simulation results show that the analytical method reduces considerably the computing time and has an extremely low sub-optimality.

Keywords : Hybrid Electric Vehicle, Energy Management, Convex Optimization, Analytical Resolution.



**Laboratoire PRISME, 8 rue Léonard de Vinci
45072 Orléans Cedex 2**

